



**POLITECNICO
DI TORINO**

Corso di Laurea Magistrale in Ingegneria Meccanica

Tesi di Laurea II livello

Indagine sul comportamento dinamico di un disco palettato in presenza di Flutter e contatti per attrito

Relatore: Prof. Ing. FIRRONE Christian Maria

Candidato: Massone Marianna

Dicembre 2018

*"Grazie,
a mio padre, mia roccia e stella polare, che mi ha sempre guidato e sostenuto contro
tutto, che ha sempre nutrito la mia mente di speranza, determinazione, autostima,
resilienza e coraggio, ogni giorno della mia vita. L'unico a sapermi leggere soltanto da
uno sguardo o un sospiro, ad essermi vicino anche se lontano"*

*"Grazie,
a mia madre, che nonostante tutte le difficoltà, mi ha insegnato cosa significa essere una
donna intraprendente, indipendente, lavoratrice, forte ma anche dolce, capace di giocare
e disegnare per vedere da dentro quei colori che in alcuni momenti da fuori non si
riescono a vedere"*

*"Grazie,
a mia sorella, la mia anima gemella al femminile, la persona che sono fiera di poter
avere al mio fianco per tutta la vita e a cui auguro ogni migliore successo. Una ragazza
dal cuore d'oro, con il potere di irradiare in me gioia e serenità, e capace di portarle
ovunque lei vada"*

*" E Grazie...
a Eddy, che crede sempre in me più di quanto io stessa possa fare. Un ragazzo che in
punta di piedi è entrato nella mia vita buttando via il male tra una canzone e una
risata, che con infinita pazienza mi ripete sempre che in fondo la vita è un parco giochi
e che per essere i migliori bisogna osare e anche divertirsi. A te io devo il mio sorriso "*

Abstract

In turbomachinery applications, bladed disks are often subjected to high dynamic loads which can lead to high cycle fatigue failure. One of these is Flutter, an aeroelastic self-excited instability which can cause a progressive increase of the blades vibration amplitude until the breakdown. In order to prevent this situation, dry friction dampers are used to suppress excessive vibrations. However, due to the nonlinear nature of friction contact, analysis of such system becomes complicated.

The purpose of understanding the dynamic of the system from a conceptual point of view, and the problem of the determination of self-excited vibrations are here analyzed. In particular, the main purpose is to saturate these vibrations in so-called Limit-Cycles Oscillations (LCO) thanks to the nonlinear dissipative effects related to dry friction in mechanical joints, and to study this phenomenon under the presence of several unstable nodal diameters.

Two different analytical approaches have been used: Direct Time Integration (DTI) and Harmonic Balance Method (HBM), both with physical approach and modal approach. Indeed, the first method is based on the resolution of the nonlinear differential balance equation and even though at the end of the analysis it makes possible to have the exact solution of the problem, it requires very large calculation time. So an HBM code has been developed in order to obtain the same steady state periodic solution, with less computational time and an acceptable level of approximation.

The model used for the investigation is a simple lumped parameter disk which describes the structure as a collection of rigid bodies connected by springs and dampers. The choice to keep the model as simple as possible has been made because the aim is not to resemble a certain type of turbomachinery rotor but to be able to reproduce and to understand the essential behavior in the response of a tuned bladed disk under flutter excitation and multiple unstable modes. It is also important to see how the choice of some parameters can affect the dynamic of the system and a simple model makes this possible and easier.

Indice

0.1	Il Flutter, perché analizzarlo	1
0.2	Obiettivi della tesi	2
0.3	Struttura dell’elaborato	2
1	Dinamica dei rotori	4
1.1	Le sollecitazioni agenti	4
1.2	Fenomeni Aeroelastici	4
1.2.1	Risposta forzata	5
1.2.2	Flutter	8
2	Cenni di analisi in risposta forzata	11
2.1	Modello lineare con forzante pulsante	11
2.2	Modello lineare con forzante rotante	15
2.3	Introduzione alle non linearità	17
2.4	Modello di contatto per attrito	17
2.5	Modello non lineare con forzante rotante	20
3	Gli elementi dell’analisi a flutter	26
3.1	Strategia di calcolo	26
3.2	Approccio parametrico e disco "tuned"	28
3.3	Componente aerodinamica	29
3.4	Procedure di calcolo per le equazioni non lineari	31
3.4.1	Dominio del tempo	32
3.4.2	Dominio della frequenza	36
4	Analisi flutter per modello ad un grado di libertà	40
4.1	Definizione del modello	40
4.2	Lo studio di Sinha e Griffin	41
4.3	Sviluppo dell’analisi	43
4.4	Discussione dei risultati	44
4.4.1	Variazione dei parametri	46
5	Analisi flutter per modello a più gradi di libertà	50
5.1	Definizione del modello	50
5.2	Sviluppo dell’analisi	54
5.3	Discussione dei risultati	55
5.3.1	Caso di analisi 1	56
5.3.2	Variazione dei parametri	59
5.3.3	Caso di analisi 2	67
6	Conclusioni	79

A	81
A.1 Classificazione dei metodi DTI	81
A.2 Dimensioni dei vettori nel dominio della frequenza	81
A.3 Differenza tra approccio nel tempo e in frequenza nella convergenza alla soluzione di equilibrio	82

Elenco delle figure

1.1	Triangolo di Collar	5
1.2	Esempio qualitativo di diagramma Campbell [18]	6
1.3	Esempi di diametri nodali [8]	7
1.4	Risposta di vibrazione delle pale in presenza di modi stazionari o rotanti	9
1.5	Ciclo limite	9
1.6	Alternativa di risposte oltre il ciclo limite	10
1.7	Grafico di bilancio delle energie	10
2.1	Sistema parametrico a più gradi di libertà, per lo studio di risposta forzata lineare	11
2.2	Risposta forzata lineare nel dominio del tempo fisico - forzante pulsante	12
2.3	Scomposizione della risposta del disco nelle singole componenti palari	13
2.4	Diagramma qualitativo delle ampiezze delle pale	13
2.5	Dettaglio della risposta forzata lineare nel dominio del tempo modale - forzante pulsante	14
2.6	Risposta forzata lineare in frequenza - forzante pulsante	14
2.7	Risposta forzata lineare nel dominio del tempo fisico - forzante rotante	15
2.8	Dettaglio della risposta forzata lineare nel dominio del tempo modale - forzante rotante	16
2.9	Risposta forzata lineare in frequenza - forzante rotante	16
2.10	Esempi di giunti di attrito interpalari	18
2.11	Root joints	18
2.12	Modello di contatto	18
2.13	Ciclo di isteresi	20
2.14	Settore del sistema parametrico a più gradi di libertà, per lo studio di risposta forzata non lineare	20
2.15	Risposta forzata non lineare nel dominio del tempo fisico - forzante rotante e $N_0 = 2 N$	21
2.16	Andamento della forza di attrito tangenziale di contatto - $N_0 = 2 N$	21
2.17	Risposta forzata non lineare nel dominio del tempo fisico - forzante rotante e $N_0 = 4 N$	22
2.18	Andamento della forza di attrito tangenziale di contatto - $N_0 = 4 N$	22
2.19	Variazione delle ampiezze di vibrazione in funzione del precarico	23
2.20	Risposta in frequenza delle pale funzione della variazione di precarico N_0	24
2.21	Vista in dettaglio della risposta in frequenza per il valore di ω_{ecc}	24
2.22	Dettaglio della risposta forzata non lineare nel dominio del tempo modale - forzante rotante	25
3.1	Sistema parametrico ad un grado di libertà per lo studio del flutter	28
3.2	Modello parametrico del disco palettato per lo studio del flutter	29

3.3	Andamento tipico del coefficiente modale di smorzamento aerodinamico [15]	31
3.4	Procedimento di calcolo nel tempo fisico	33
3.5	Procedimento di calcolo nel tempo modale	35
3.6	Schema di applicazione del metodo AFT	38
4.1	Influenza di ζ_{aer} sulla stabilità	42
4.2	Grafico delle energie per modello 1dof	44
4.3	Risultato del calcolo in frequenza, modello 1dof	44
4.4	Risultato del calcolo nel tempo, modello 1dof	45
4.5	Influenza delle condizioni iniziali sulla risposta nel tempo	46
4.6	Influenza di ζ_{aer} sulla risposta del punto stabile	47
4.7	Influenza di μ sulla risposta del punto stabile	47
4.8	Influenza di N_0 sulla risposta del punto stabile	48
4.9	Cicli di isteresi al variare di N_0	48
4.10	Influenza di K_t sulla risposta del punto stabile	49
4.11	Cicli di isteresi al variare di K_t	49
5.1	Grafico delle famiglie modali	53
5.2	Risultati di primo tentativo nel dominio in frequenza, modello multi-dof	55
5.3	Risultato del calcolo in frequenza, modello multi-dof, caso 1°	56
5.4	Risultato del calcolo nel tempo fisico, modello multi-dof, caso 1°	57
5.5	Risultato del calcolo nel tempo modale, modello multi-dof, caso 1°	57
5.6	Evoluzione nel tempo delle onde viaggianti - o modi rotanti	59
5.7	Risposta nel tempo, caso di analisi 1° - variazione ζ_{aer} ai modi (1)	60
5.8	Evoluzione dei modi nel tempo, caso di analisi 1° - variazione ζ_{aer} ai modi (1)	60
5.9	Zoom della risposta nel tempo nel periodo di compresenza di modi diversi	61
5.10	Risposta nel tempo, caso di analisi 1° - variazione ζ_{aer} ai modi (2)	61
5.11	Risposta nel tempo, caso di analisi 1° - variazione ζ_{aer} ai modi (3)	62
5.12	Evoluzione dei modi nel tempo, caso di analisi 1° - variazione ζ_{aer} ai modi (3)	62
5.13	Tipologie di risposte nel tempo, caso di analisi 1° - variazione del valore di ζ_{aer} critico	64
5.14	Caso di analisi 1° - influenza della variazione di ζ_{aer} critico sulle risposte in LCO	64
5.15	Caso di analisi 1° - influenza della variazione di ζ_m sulle risposte in LCO	65
5.16	Risposta in LCO ed evoluzione dei modi nel tempo, caso di analisi 1° - variazione del modo critico	65
5.17	Caso di analisi 1° - variazione di N_0 e μ	66
5.18	Caso di analisi 1° - variazione del valore di K_t	67
5.19	Valori di ζ_{aer} per la 1° famiglia modale - caso di analisi 2.1	68
5.20	Variazione dell'errore dei valori di frequenza e ampiezza ottenuti in MHBM rispetto al valore nel tempo	71
5.21	Bacini di attrazione di ciclo limite per modi instabili con $\Delta f_{STICK,1-2} = 2\%$	75
5.22	Analisi delle risposte dei punti della figura 5.21a	76
5.23	Bacini di attrazione di ciclo limite per modi instabili con $\Delta f_{STICK,4-5} = 0.28\%$ e $\Delta \zeta_{aer} = 0.2\%$	77
5.24	Evoluzione nel tempo dei modi per un punto appartenente al bacino di attrazione del ciclo limite di $ND = +4$ (coordinate sul grafico: 1.2649e-4 nd4 - 2.33e-5 nd5)	78

A.1	Schema riassuntivo dei principali metodi DTI	81
-----	--	----

Elenco delle tabelle

2.1	Metodi per la risoluzione del problema lineare pulsante a confronto	14
2.2	Metodi per la risoluzione del problema lineare rotante a confronto	16
2.3	Metodi per la risoluzione del problema non lineare rotante a confronto, per il caso $N_0 = 2N$	25
4.1	Risultati tempo - frequenza a confronto, modello 1dof	45
4.2	Numero di armoniche considerate nel calcolo MHBm, modello 1dof	45
5.1	Frequenze naturali $[Hz]$ del sistema in condizione stick associate ai DN .	53
5.2	Parametri per il caso di analisi 1	56
5.3	Risultati tempo - frequenza a confronto, modello muti- dof	57
5.4	Errore delle ampiezze delle pale ottenute in frequenza rispetto al valore ottenuto nel tempo	58
5.5	Caso di analisi 1° - variazione del modo critico e della frequenza in LCO	66
5.6	Parametri per il caso di analisi 2	68
5.7	Risultati analisi nel tempo per ζ_{aer} critici uguali (-0.005) associati a $ND = +1$ e $ND = +2$	69
5.8	Risultati analisi nel tempo per ζ_{aer} critici uguali (-0.005) associati a $ND = +1$ e $ND = +4$	69
5.9	Risultati analisi in HBM ($H = 1$) per ζ_{aer} critici uguali (-0.005) associati a $ND = +1$ e $ND = +2$	69
5.10	Risultati analisi in HBM ($H = 1$) per ζ_{aer} critici uguali (-0.005) associati a $ND = +1$ e $ND = +4$	70
5.11	Tempi a confronto - caso di analisi 2.1	70
5.12	Errori di ampiezza e frequenza nel metodo M-HBM (con numero H variabile), rispetto al risultato delle prove nel tempo	71
5.13	Risultati analisi nel tempo per ζ_{aer} critici diversi ($\Delta\zeta_{aer} = 40\%$) associati a $ND = +1$ e $ND = +2$ o $ND = +1$ e $ND = +4$	72
5.14	Risultati analisi nel tempo per ζ_{aer} critici diversi ($\Delta\zeta_{aer} = 20\%$) associati a $ND = +1$ e $ND = +2$ o $ND = +1$ e $ND = +4$	72
5.15	Risultati analisi in HBM ($H=1$), con $\zeta_{aer}(ND = 1) = -0.005$, $\zeta_{aer}(ND = 2) = -0.003 \rightarrow \Delta\zeta_{aer} = 40\%$	73
5.16	Risultati analisi in HBM ($H=1$), con $\zeta_{aer}(ND = 1) = -0.003$, $\zeta_{aer}(ND = 2) = -0.005 \rightarrow \Delta\zeta_{aer} = 40\%$	73
5.17	Risultati analisi in HBM ($H=1$), con $\zeta_{aer}(ND = 1) = -0.005$, $\zeta_{aer}(ND = 2) = -0.004 \rightarrow \Delta\zeta_{aer} = 20\%$	73
5.18	Casi di $\Delta\zeta_{aer}$ considerati per l'indagine dei bacini di attrazione di ciclo limite ($\zeta_{aer,1} > \zeta_{aer,2}$)	74

Introduzione

0.1 Il Flutter, perché analizzarlo

Nella moderna realizzazione delle turbomacchine, i progettisti devono sostenere la sfida di dover far fronte contemporaneamente ad esigenze strutturali ed aerodinamiche contrastanti. Vi è infatti la necessità di ottimizzare i costi agendo tramite la maggior riduzione possibile di componenti meccanici interni, e in fase di realizzazione ciò comporta design non molto complessi e una riduzione di pesi, ingombri e scarti di materiale. Uno dei molti effetti che tali requisiti hanno sul progetto delle palettature è la tendenza a ridurre il numero di pale portando queste ad essere progressivamente più caricate ma anche leggere e snelle, cosa che però va a scontrarsi con l'altra tipologia di esigenza, quella aerodinamica. L'insorgenza dei fenomeni aeroelastici deve infatti essere controllata e quanto più ridotta, poiché tali instabilità possono portare ad una ridotta durata a fatica del componente e alla conseguente rottura dello stesso, in maniera non prevedibile. I problemi di fatica ad alto numero di cicli causano la maggior parte dei costi di manutenzione poiché richiedono un fermo di impianto, causando così costi diretti ed indiretti, ma ciò che più preoccupa è soprattutto una rottura improvvisa che potrebbe portare con se altre conseguenze, soprattutto in ambito aeronautico. Questi sono i motivi per cui i progettisti non possono spingersi oltre certi limiti di progetto, fondamentali da definirsi, ed il perché i fenomeni aeroelastici sono ormai riconosciuti come il fattore chiave che al momento inibisce la realizzazione di motori aeronautici migliori e più competitivi. Per ottimizzare questi elementi c'è quindi bisogno di definire un modello della struttura e vedere come questa risponde a ciò a cui nella realtà è soggetta.

Tra i vari fenomeni aeroelastici vi è il Flutter, qui oggetto di analisi. Esso è definito come una vibrazione instabile ed autoeccitata di natura non lineare, di un corpo immerso in un campo fluido. L'eccitazione avviene tramite il continuo feedback positivo tra le forze aerodinamiche imposte dal fluido e la risposta delle pale quando il lavoro compiuto dal fluido sulla struttura eccede quello dissipato dal sistema. Una volta innescatasi una vibrazione autoeccitata, l'energia cinetica trasportata dalla corrente che viene ad alimentarla è in così larga misura superiore all'energia che può essere assorbita dalla struttura da determinarne la rottura, in altri termini l'energia trasferita dal fluido alla struttura risulta maggiore di quella dissipata e può condurre quindi al collasso della stessa se le tensioni che si raggiungono superano la resistenza del materiale.

Al fine di aumentare la capacità di dissipare energia in ingresso, la struttura palare viene dotata di giunti che operano come sistemi di smorzamento in grado di limitare le vibrazioni presenti e ridurre così lo stato di tensione. Esistono diverse tipologie di questi elementi smorzatori aggiuntivi, ma qualsiasi di questi si utilizzi, ciò che è importante da un punto di vista ingegneristico è la capacità di stimare il livello di vibrazione della struttura palare per determinare la vita del componente.

0.2 Obiettivi della tesi

L'obiettivo del seguente studio è quello di sviluppare un metodo per definire la risposta dinamica, in termini di ampiezza di vibrazione e frequenza, di un disco palettato tuned aerodinamicamente instabile dotato di elementi di contatto non lineare per attrito. Il disco è definito tramite un modello parametrico semplice, costituito da settori composti di elementi masse-molle-smorzatori e l'effetto dell'attrito è modellizzato da un modello di contatto Jenkins. La scelta di tale semplicità deriva dalla necessità di voler studiare e comprendere le principali caratteristiche della risposta e gli aspetti di base del flutter. La schematizzazione utilizzata non ha infatti la pretesa di rappresentare fedelmente la complessità del reale componente rotorico ma ha il pregio di condurre con relativa semplicità ad un modello adatto a fornire una spiegazione accurata del fenomeno di instabilità oggetto di studio.

Le analisi della risposta vengono condotte nel dominio del tempo tramite uno schema Runge-Kutta ma, un altro scopo dell'analisi è quello di ridurre il tempo di calcolo tramite un metodo in frequenza considerando un approccio disaccoppiato strutturale dove l'equazione del moto è risolta insieme ad una equazione di bilancio delle energie. Ciò che è necessario verificare è se le ipotesi di base del metodo in frequenza riescano a garantire una risposta ben approssimata di quella nel tempo.

Le analisi vengono svolte principalmente con il fine di considerare, nella parte terminale del lavoro, la presenza di due modi instabili. Sebbene l'attuale stato dell'arte affermi che nella zona di ciclo limite la risposta venga definita solamente dal modo più critico, altri studi più contemporanei sono stati sviluppati per verificare la compresenza di modi differenti nella zona finale di equilibrio. Considerando quindi il caso più semplice di due soli modi instabili ed ipotizzando trascurabili gli altri, lo studio è volto a valutare le condizioni che portano due modi ad interagire tra di loro, e qualora ciò non si verifichi, a valutare uno schema di risposta del sistema al fine di comprendere le condizioni che portano un modo a rispondere piuttosto che un altro.

0.3 Struttura dell'elaborato

Di seguito è fornita una panoramica dettagliata, ma concisa, del lavoro, per comprendere al meglio tutti gli aspetti che hanno portato alla realizzazione dell'indagine nella sua totalità.

- Nel *capitolo 1* vengono brevemente introdotti i concetti di base relativi alle tipologie di sollecitazioni e alle corrispondenti problematiche che si sviluppano nell'ambito dello studio delle turbomacchine. In particolare viene introdotto il concetto di Aeroelasticità, di instabilità aeroelastiche e tra queste l'attenzione viene posta sulla risposta forzata e sul flutter. Essendo queste due instabilità il fulcro del lavoro di tesi, nel capitolo si esaminano singolarmente i due fenomeni al fine di fornire tutte le conoscenze di base necessarie e sufficienti alla comprensione delle analisi;
- Essendo il lavoro strutturato per gradi di complessità, nel *capitolo 2* viene affrontato il problema di definire la risposta dinamica di un sistema rotante soggetto a forzante esterna. Si analizza dunque il fenomeno di risposta forzata per mezzo di un modello parametrizzato di disco palettato e lo studio è inizialmente condotto considerando la natura lineare del sistema sottoposto ad una forzante pulsante; sempre nel caso

della linearità si considera poi una forzante rotante per introdurre il concetto di fenomeno rotante, quale è il flutter. Viene poi inserito nel modello il primo fattore di non linearità quale la presenza di elementi di contatto per attrito; dopo aver spiegato la loro importanza al fine dell'indagine di stabilità a flutter, il capitolo si conclude con un'analisi di risposta forzata del sistema ora dotato di forzante rotante e non linearità per attrito da contatto;

- Nel *capitolo 3* si esaminano uno ad uno tutti gli elementi e le impostazioni generali su cui si baserà l'analisi a flutter. Viene definito l'approccio di calcolo scelto per lo studio di un fenomeno non lineare, che verificandosi all'interfaccia fluido/struttura, implica la presenza di due diversi ambienti quale quello del flusso e quello strutturale. In funzione di questa scelta, avendo già spiegato di come tener conto della non linearità strutturale (modello di contatto) si affronta il problema della non linearità aeroelastica. Viene successivamente descritto il modello parametrico utilizzato nelle analisi a flutter e giustificato il perché di una tale scelta. A conclusione del capitolo sono descritte dettagliatamente le procedure di calcolo usate per la soluzione dell'equazione del moto non lineare, sia nel dominio del tempo che in quello in frequenza;
- Il *capitolo 4* contiene l'analisi a flutter di un modello parametrizzato ad un solo grado di libertà, che proprio grazie alla sua semplicità permette di evidenziare gli aspetti chiave di una risposta a flutter. A tal proposito vengono riportati brevemente alcuni concetti emersi dalle prime analisi in ambito di flutter condotte da Sinha e Griffin, due ricercatori i cui studi vengono considerati tutt'oggi un punto di riferimento in questo ambito. Nella discussione dei risultati viene fornito un confronto tra le diverse procedure di calcolo utilizzate, tempo e frequenza, e successivamente è realizzata una analisi di sensibilità alla variazione dei parametri per comprendere il loro ruolo e la loro incidenza nel fenomeno;
- Per fornire una spiegazione più fedele del fenomeno di instabilità a flutter su un componente rotorico, nel *capitolo 5* si procede all'analisi di un sistema parametrizzato a più gradi di libertà rappresentante un disco palettato tuned dotato di elementi di contatto non lineari per attrito. Le analisi si concentrano a verificare i vantaggi e gli svantaggi legati ai metodi di calcolo della risposta dinamica del sistema, quali il metodo HBM nel dominio della frequenza e l'integrazione diretta nel tempo. Il calcolo dell'ampiezza e della frequenza a ciclo limite viene eseguito inizialmente per il caso più semplice di un solo modo instabile, e gli effetti dei parametri degli elementi di contatto e del fattore aerodinamico sulla risposta a ciclo limite sono qui esaminati. Successivamente, allo scopo di investigare sulla compresenza di più modi nella risposta finale di ciclo limite, l'indagine viene estesa alla presenza di due modi instabili. Qui viene eseguita una analisi di sensibilità legata ai valori di smorzamento aerodinamici associati ai due modi critici e ad altri fattori. Lo scopo è anche quello di evidenziare un possibile schema di risposta del sistema al fine di predire e comprendere al meglio l'evoluzione della dinamica della struttura;
- Nel *capitolo 6* sono contenute le conclusioni dello studio.

Capitolo 1

Dinamica dei rotori

1.1 Le sollecitazioni agenti

Nella progettazione delle turbomacchine è fondamentale conoscere quale sia il comportamento dinamico degli elementi del sistema ed una particolare attenzione viene posta ai componenti rotorici dello stesso. Gli organi rotanti sono infatti gli elementi che più di tutti sono soggetti ad un numero elevato di carichi variabili nel tempo e dunque il loro corretto dimensionamento e studio assume una notevole rilevanza.

I carichi che agiscono su di un elemento rotante appartengono sostanzialmente a tre categorie:

- Carichi indipendenti dalla rotazione, ad es. spinte assiali, torsione, forzamenti esterni;
- Carichi dipendenti dalla rotazione, ad es. forze di inerzia e forze centrifughe;
- Carichi legati alla presenza di gradienti di temperatura dovuti a fenomeni di riscaldamento e raffreddamento.

Pur essendo tutti ugualmente importanti, nella trattazione che segue si considera la prima categoria essendo il flutter un fenomeno dovuto all'interazione tra il fluido esterno e le pale del rotore. Questa relazione fluido-struttura può però essere influenzata da molteplici parametri come il numero di pale, l'incidenza del flusso su di esse, la velocità di rotazione dell'albero, ma al fine di comprendere il fenomeno oggetto di studio non è stato necessario esaminare la compresenza di queste variabili. Certamente la loro considerazione risulterebbe indispensabile se il fine ultimo fosse un corretto progetto dimensionale dell'elemento rotante.

1.2 Fenomeni Aeroelastici

Come osservato nel paragrafo precedente [1.1](#), il flutter è un fenomeno che coinvolge la relazione fluido-struttura. Quando si ha un sistema che prevede l'influenza reciproca tra la deformazione elastica della struttura e le forze aerodinamiche si parla di "sistema aeroelastico". Il termine "aeroelastico" deriva infatti da Aeroelasticità, una disciplina che combina al suo interno l'interazione tra le forze elastiche derivanti da deformazioni strutturali e le forze aerodinamiche causate dall'azione fluida lungo le superfici portanti della stessa. In particolare essendo l'oggetto di studio un disco palettato di turbina, quindi un elemento in movimento, si parla nello specifico di aeroelasticità dinamica e ciò comporta un'ulteriore interazione ossia quella con le forze di inerzia.

Per chiarire come questi tre campi di forze possono interagire tra di loro viene riportato nella figura 1.1 il triangolo di Collar [4].

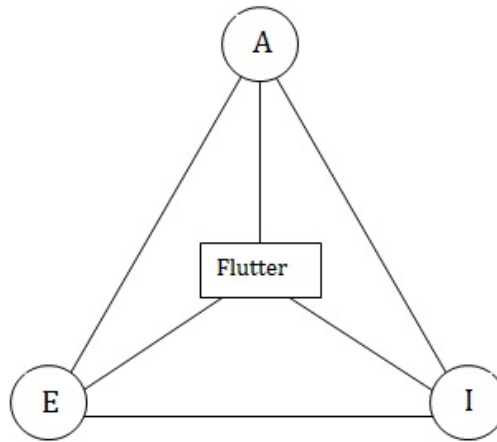


Figura 1.1: Triangolo di Collar

Le lettere A,E,I ai vertici del triangolo, si riferiscono alle forze aerodinamiche, elastiche e di inerzia. A seconda di quale delle tre forze sono coinvolte si possono distinguere numerosi fenomeni; in particolare si distingue tra fenomeni aeroelastici statici che si posizionano all'esterno del triangolo perché relazionati con solo due vertici e *fenomeni aeroelastici dinamici* che si trovano all'interno del triangolo in quanto coinvolgono tutte e tre le forze. Tra i fenomeni di aeroelasticità dinamica si trovano il *Flutter* e lo *studio della risposta dinamica dovuta a forzanti esterne*. Questi sono sicuramente i casi che, nell'ambito delle turbomacchine, si è interessati ad analizzare maggiormente in quanto particolarmente influenti sulle risposte in vibrazione delle strutture rotoriche. L'importanza di considerare tali fenomeni è dovuta alla necessità di ridurre al minimo le vibrazioni. Infatti andando a trattare nello specifico degli organi rotanti, l'eccitazione a cui le corrispettive pale sono soggette portano a sviluppare in questi elementi tensioni variabili e ripetute nel tempo che, se non controllate, generano una intensa sollecitazione a fatica. Molto spesso la conseguenza di ciò è la comparsa di fratture tipicamente in corrispondenza dell'attacco pala al disco, oppure nelle pale stesse, le quali si manifestano in presenza di tensioni ben al di sotto della tensione di rottura del materiale e piuttosto spesso anche sotto la tensione di snervamento. Questo è ciò che in breve accade quando si parla di rotture per fatica ad alto numero di cicli (HCF, dall'inglese *High Cycles Fatigue*), ed è ciò che si vuole evitare di avere essendo queste tipologie di cedimenti del tutto imprevedibili. Di seguito entrambi i fenomeni di instabilità aeroelastica dinamica appena citati vengono brevemente presentati poiché oggetto di studio nel lavoro successivo.

1.2.1 Risposta forzata

Questo fenomeno di vibrazione è uno dei più studiati ed analizzati in quanto non solo, come altri, deve essere tenuto sotto controllo per garantire la stabilità della struttura rotante, ma perché rappresenta un problema sempre presente. Il motivo di ciò è dovuto alla natura della causa della vibrazione, che non può essere eliminata, ossia il movimento relativo del rotore rispetto agli statori posti in prossimità di esso. Le ruote palettate delle turbine (o compressori) sono infatti costantemente sollecitate a vibrare per effetto dell'interazione del fluido fra la girante e lo statore, anch'esso palettato. Volendo evitare di lavorare in condizioni in cui le vibrazioni palari possano raggiungere ampiezze molto grandi, il primo passo per la verifica del funzionamento in sicurezza della girante è la

determinazione delle frequenze proprie, affinché si possa lavorare in un range di frequenze di eccitazione lontano da esse o si possa vedere quanto dannosa sarebbe una possibile condizione di lavoro di quel genere. La condizione di risonanza va cercata tenendo conto della natura della forzante, una forzante armonica. L'interazione del fluido con la pale della girante è infatti di natura armonica poiché il fluido è distribuito dallo statore i cui vani sono angolarmente equidistanti e dunque l'interazione si ripete ciclicamente al passaggio di ogni settore [5]. Da ciò ne deriva una sollecitazione armonica, scomponibile tramite la serie di Fourier in più componenti. La frequenza dell'armonica principale è legata alla velocità di rotazione della girante e al numero di pale dello statore, tutte le altre armoniche costituenti la forzante hanno come frequenza un valore multiplo di quella principale e quindi anche esse variano linearmente con la velocità di rotazione angolare della turbina. La relazione di molteplicità esistente tra la frequenza principale e quelle multiple è definita tramite il valore di Engine Order (EO) che per definizione rappresenta il rapporto tra la pulsazione principale della forzante (ω_n) e la velocità di rotazione del disco (Ω):

$$EO = \omega_n \cdot \frac{2 \cdot \pi}{\Omega} \quad (1.1)$$

Il tutto viene rappresentato in maniera grafica tramite il diagramma di Campbell in figura 1.2, che riporta alle ascisse i valori di velocità angolare a cui si può far lavorare la turbina, alle ordinate le frequenze naturali del sistema (definite tramite linee orizzontali, di cui la verde ne è un esempio) e nel mezzo delle rette oblique che definiscono in maniera crescente i valori di EO (si veda la retta obliqua evidenziata in rosso come esempio). I

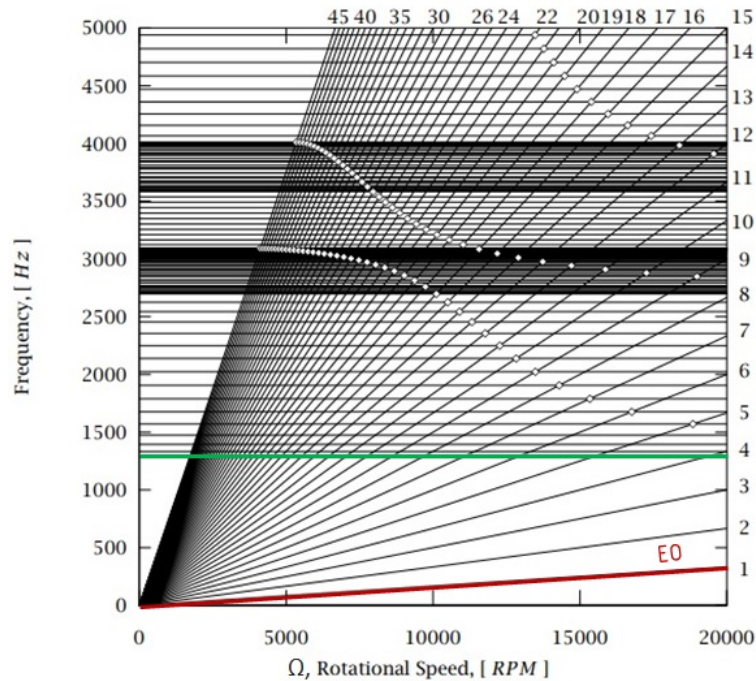


Figura 1.2: Esempio qualitativo di diagramma Campbell [18]

punti di incontro delle rette associate agli EO con la velocità Ω di lavoro e i valori di f_n , individuano nel piano i potenziali punti di risonanza del sistema. Non è detto che non si debba lavorare in ognuna di queste condizioni proprio perché non tutti definiscono una condizione di risonanza. Per distinguere una condizione di questo tipo da una non dannosa al sistema, si può tener conto di questa relazione

$$EO = m \cdot N \pm ND \quad (1.2)$$

dove $m = 0, 1, \dots, \mathcal{N}$ è un intero variabile, N è il numero di pale e ND definisce il diametro nodale preso in considerazione. Quando l'uguaglianza di (1.2) è soddisfatta, allora si è in condizione di risonanza. Nel grafico questi punti sono evidenziati in bianco.

E' opportuno introdurre alcuni concetti relativi ai diametri nodali dato che assumono una notevole importanza all'interno dell'analisi di tesi oltre che ad essere questi, in generale, una componente fondamentale alla comprensione della risposta dinamica di un rotore, come si vede per la condizione di risonanza. E risulta di conseguenza necessario chiarire alcuni aspetti relativi ai modi di vibrare della struttura essendo questi legati.

Diametri Nodali

I diametri nodali (ND, dall'inglese *Nodal Diameter*) sono definiti come linee di punti passanti per il centro della circonferenza della ruota per i quali lo spostamento è nullo, fig 1.3. Ogni modo proprio ha associato un certo numero di diametro nodale.

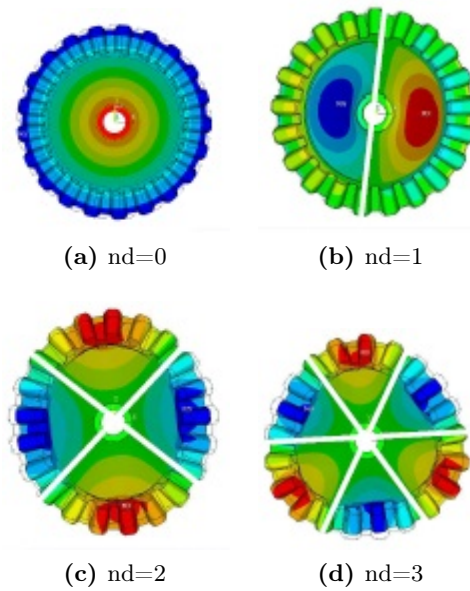


Figura 1.3: Esempi di diametri nodali [8]

Il loro numero è funzione del numero di settori N del disco secondo la seguente relazione:

$$\begin{cases} 0 \leq ND \leq \frac{N}{2} & \text{se } N \text{ e' pari} \\ 0 \leq ND \leq \frac{N-1}{2} & \text{se } N \text{ e' dispari} \end{cases} \quad (1.3)$$

Si vede dalla (1.3) che il numero di ND è finito; dunque, ordinando i modi secondo una frequenza propria crescente, anche i ND saranno crescenti, ma essendo limitati si avrà che molti modi a frequenze proprie diverse potranno avere lo stesso numero di diametro nodale ma rimanere differenti solamente per la complessità della deformata della pala.

Modi e famiglie modali

Per ogni diametro nodale la palettatura rotante può avere diversi modi di vibrare. Ad ogni modo corrisponde una forma modale e una frequenza modale che a crescere di

ND vanno rispettivamente e progressivamente a raggiungere una configurazione più complessa e un valore maggiore tanto da rendere più rigido tutto il sistema. In campo ingegneristico si è soliti ordinare tutti questi modi tramite una classificazione per *famiglie modali*, cioè si raggruppano i primi valori di frequenza per tutti i ND definendo la *I* famiglia modale, i secondi valori di frequenza per la *II* famiglia modale e così andando avanti. Le famiglie che però vengono effettivamente prese in considerazione sono solo le prime poiché più rilevanti. Infatti essendo queste legate a valori di frequenze e rigidità minori, sono quelle che più agevolmente possono essere sollecitate da parte di forzanti esterne (risposta forzata) o autoindotte (flutter).

Un aspetto di notevole interesse è la presenza di modi doppi, ossia quei modi che hanno la stessa frequenza e la stessa forma e dunque anche lo stesso numero di diametro nodale. L'esistenza di questa duplicità si ha solamente per quei modi con numero di ND maggiore di zero. Da qui deriva la distinzione tra modi stazionari e modi rotanti [7]:

- **i modi stazionari** sono quelli con $ND = 0$ o $ND = N/2$ e sono caratterizzati da una vibrazione rappresentabile come un'onda stazionaria che porta tutte le pale a rispondere con una stessa ampiezza e fase. Questi modi oltre che ad avere un valore di frequenza che non si ripete, hanno un autovettore reale ϕ_i che li definisce. In figura 1.4a è possibile vedere la risposta di 12 pale nel tempo. Essendo i modi stazionari, anche la risposta di tutte le pale è stazionaria, raggiungendo per ogni istante di tempo gli stessi valori di spostamento.
- **i modi rotanti** si hanno per tutti gli altri ND e si originano dalla presenza dei modi stazionari doppi. Sono caratterizzati infatti da una vibrazione rappresentabile come la sovrapposizione di due onde sfasate tra loro di 90 gradi (ossia gli autovettori stazionari associati ai due modi doppi) che portano ad ottenere delle onde rotanti in direzione concorde al verso di rotazione del disco o discorde. Questi modi rotanti portano le pale a raggiungere le stesse ampiezze ma con uno sfasamento tra di loro definito come *Inter Blade Phase Angle* (IBPA):

$$IBPA = \theta = \frac{2 \cdot \pi \cdot ND}{N} \quad (1.4)$$

con N numero di pale. L'IBPA è dunque una relazione di fase che lega il movimento di una pala rispetto a quello di altre ad essa adiacente. Dalla figura 1.4b lo sfasamento di risposta tra le pale è evidente ed è ora possibile distinguere l'andamento delle singole pale che presentano una stessa frequenza di vibrazione e una uguale ampiezza raggiunta in istanti di tempo differenti. Questi modi rotanti sono descritti tramite autovettori complessi e coniugati $\bar{\psi}_{1,2}$ dati dalla somma degli autovettori stazionari associati ai corrispondenti modi doppi nel seguente modo: $\bar{\psi}_{1,2} = \phi_1 \pm j \cdot \phi_2$.

1.2.2 Flutter

Altro importante fenomeno di instabilità aerodinamica è il flutter, fenomeno che nello specifico è stato considerato in questa tesi per l'analisi di stabilità del corpo rotante. Questa instabilità porta ad avere oscillazioni autoeccitate dal movimento delle pale stesse per via dell'interazione con il flusso esterno, dalla risposta elastica della struttura e dalle forze inerziali. L'innesco si verifica quando l'energia in ingresso al sistema, dovuto alle forze aerodinamiche, eccede quella che il sistema è in grado di dissipare. Continuando ad arrivare energia come input, lo stress sulla struttura aumenta e cresce di ciclo in ciclo inducendo le pale a vibrare sempre più e portando il rotore ad un affaticamento sempre

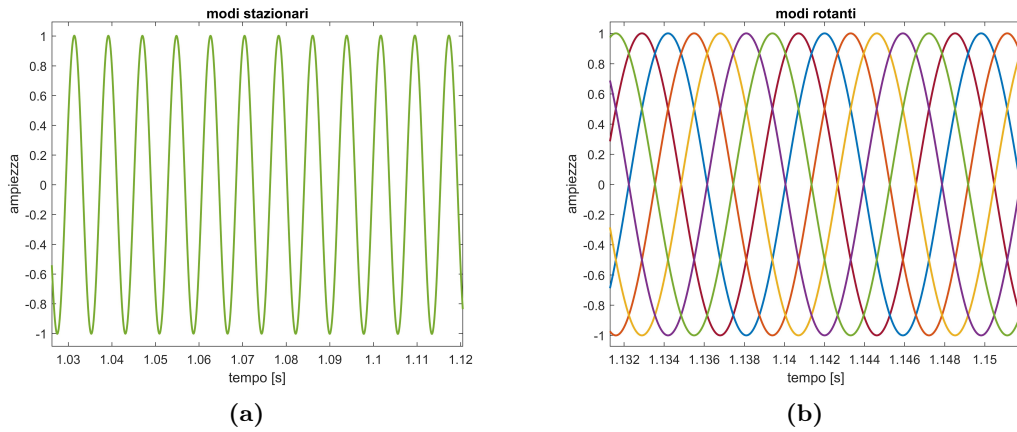


Figura 1.4: Risposta di vibrazione delle pale in presenza di modi stazionari o rotanti

maggiore fino ad un possibile collasso. Una volta innescato il fenomeno è davvero difficile fermarlo, si cerca quindi di prevenirlo. Una soluzione efficace che si utilizza è quella di dotare la struttura rotante di elementi aggiuntivi capaci di dissipare energia. Esistono diverse tipologie di elementi smorzatori tipici di un disco palettato, qualunque sia però la loro natura, il principio di funzionamento alla base resta lo stesso e consiste nello sfruttare le forze di attrito che si generano alle interfacce di contatto di questi elementi con quelle del disco o delle pale. L'effetto dell'attrito sull'instabilità aerodinamica è stato oggetto di studio di molti autori [1, 2, 6, 9], e ciò che ne emerge è che in maniera molto efficace questo riesce a diminuire l'ampiezza di vibrazione delle pale. Si presenta in breve l'effetto di questi elementi di contatto che sarà esaminato nei capitoli successivi in maniera più approfondita.

Le forze tangenziali di attrito che si generano alle interfacce degli elementi congiunti sono di tipo non lineare. Quando queste forze, per via dell'eccitazione aerodinamica, crescono e raggiungono un valore limite pari al limite di Coulomb

$$F_t = \mu \cdot N \quad (1.5)$$

(dove F_t è la forza tangenziale al contatto, μ è il coefficiente di attrito, N è la forza normale al contatto), gli elementi congiunti cominciano a slittare dissipando energia per attrito e riducendo la crescita delle ampiezze di vibrazione delle pale fino a definire una condizione di vibrazione periodica e stabile. In altre parole si raggiunge la condizione limite di oscillazione in equilibrio definita come *Limit-Cycle Oscillations* (LCO), come in figura 1.5.

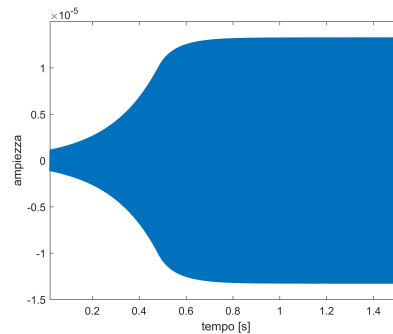


Figura 1.5: Ciclo limite

Queste oscillazioni che hanno raggiunto una certa stabilità hanno una ampiezza e una frequenza di equilibrio che non sono conosciute a priori e che devono dunque essere definite per avere una visione totale e controllata della risposta del sistema.

Possono verificarsi però anche altri casi. Qualora i sistemi di smorzamento non fossero adeguati a garantire il raggiungimento di un LCO, l'ampiezza di vibrazione delle pale continuerebbe a crescere fino alla divergenza e ad un possibile collasso della struttura. Il flutter non sarebbe controllato e si avrebbe l'andamento caratteristico di questo fenomeno: una risposta del sistema di tipo divergente, figura 1.6a .

Al contrario, sistemi di smorzamento molto efficaci potrebbero portare ad un annullamento delle vibrazioni stesse. In figura 1.6b il caso di un flutter che non è più presente.

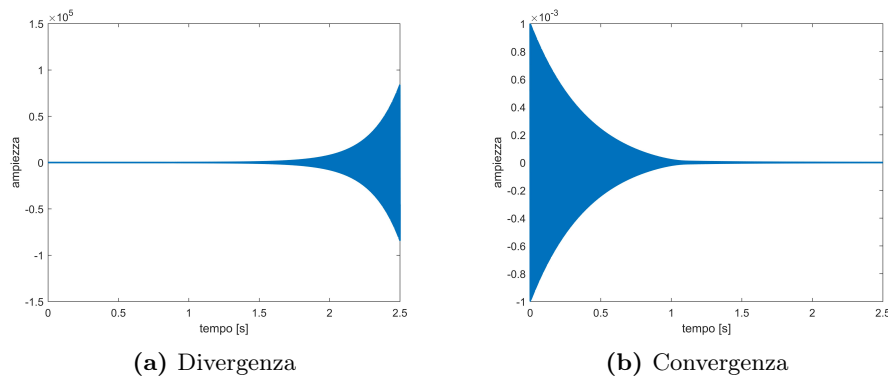


Figura 1.6: Alternativa di risposte oltre il ciclo limite

Il fatto di avere una risposta piuttosto che un'altra è funzione dei parametri in gioco nella definizione dei sistemi smorzanti. Appare dunque evidente perché questi siano importanti e perché tanti studi si siano concentrati sull'analisi di tale problema.

Dal punto di vista energetico il tutto è raffigurato in maniera molto compatta da un grafico rappresentante l'andamento delle energie agenti. Guardando in figura 1.7 in blu è rappresentata l'energia aerodinamica in ingresso al sistema, in rosso quella che il sistema è in grado di dissipare. Quando le due energie si eguagliano si raggiunge una condizione di equilibrio, sul grafico definita dai due punti di intersezione delle linee. Quando l'energia aerodinamica è maggiore il flutter non è controllato e si ha divergenza, quando invece è maggiore quella dissipata allora si ha il controllo e l'annullamento delle vibrazioni autoeccitate. Informazioni più dettagliate sono fornite nel paragrafo 4.2 .

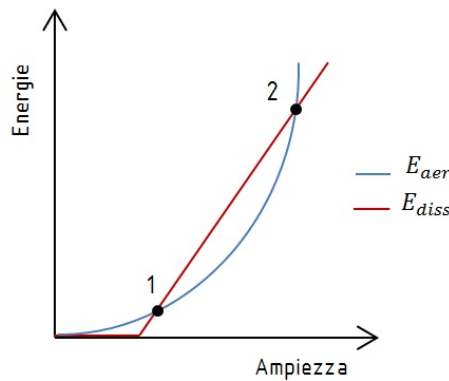


Figura 1.7: Grafico di bilancio delle energie

Capitolo 2

Cenni di analisi in risposta forzata

Prima di analizzare il fenomeno instabile fulcro del lavoro di tesi, quale il flutter, in questo capitolo viene fornita una introduzione sintetica all'analisi di risposta forzata di un disco palettato. Sebbene questo sia un campo di indagine molto vasto e sebbene sia trattato in maniera molto più approfondita in altri studi, pochi semplici concetti possono essere utili al fine di comprendere in maniera sommaria la dinamica di risposta di un sistema rotante. Ciò sarà un elemento favorevole a poter passare, tramite gradi di complessità via via più vasti, all'analisi del flutter, un fenomeno rotante, non lineare e meno prevedibile rispetto alla risposta forzata. Per lo studio ci si avvale di un modello parametrizzato che verrà successivamente ripreso nelle analisi a flutter, apportando le dovute modifiche.

2.1 Modello lineare con forzante pulsante

Si consideri un disco palettato schematizzato come in figura 2.1a. Esso è composto di 12 settori ciascuno dei quali è rappresentato tramite un modello parametrico come in figura 2.1b.

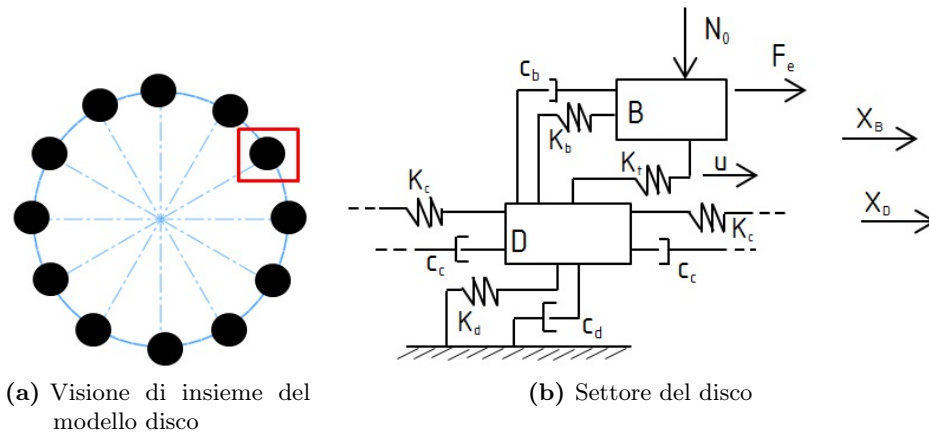


Figura 2.1: Sistema parametrico a più gradi di libertà, per lo studio di risposta forzata lineare

Gli elementi presenti sono: la porzione di disco D (dall'inglese *Disk*), la pala B (dall'inglese *Blade*) di massa rispettivamente m_d e m_b , la rigidezza di contatto K_t che unisce i due corpi, le rigidzze e gli smorzamenti di entrambi K_d , K_b , c_d , c_b . Vi sono poi K_c e c_c , rigidezza e smorzamento di collegamento tra settori adiacenti, il precarico costante N_0 che agisce normalmente al settore (dunque radiale per l'intera struttura, rappresentante

la forza centrifuga che si genera alla rotazione del componente) e la forzante esterna F_e che agisce sulla pala.

L'equazione del moto di questo sistema è:

$$[M]\ddot{X} + [C]\dot{X} + [K]X = F_e \quad (2.1)$$

con $[M]$, $[C]$, $[K]$ le matrici di massa, smorzamento e rigidezza (la cui definizione verrà data in seguito, si veda il capitolo 5), e X il vettore complessivo dei gradi di libertà di tutto il disco. Considerando un sistema di 12 settori (N) ciascuno con due gradi di libertà (x_d e x_b), in totale si considerano $m(= \text{gradi di libertà per settore} \cdot N)$ gradi di libertà.

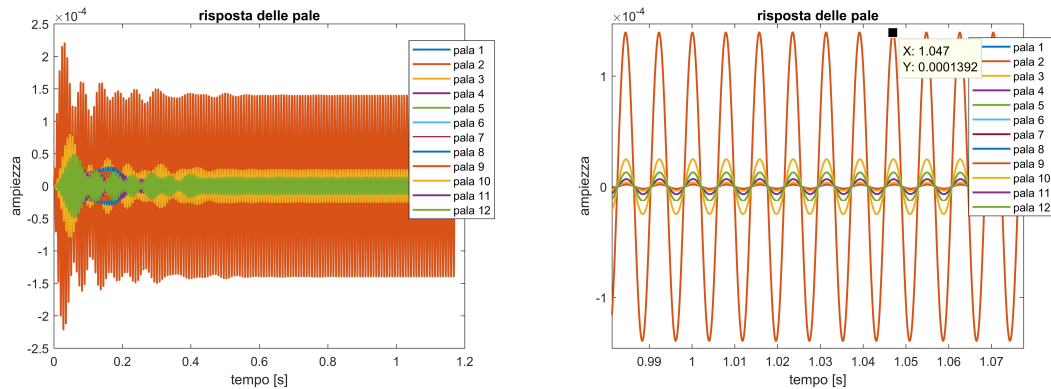
La forzante esterna considerata in questa sezione di analisi è una forzante pulsante agente su di una sola pala; si è scelta la numero 2. La natura di questa forzante è armonica, del tipo:

$$F_e = F_0 \cdot \cos(\omega_{ecc}t) \quad (2.2)$$

con F_0 ampiezza dell'onda e ω_{ecc} la pulsazione di eccitazione esterna dell'onda.

Per trovare la risposta dinamica del disco palettato l'equazione (2.3) viene implementata al calcolatore tramite un approccio di integrazione diretta nel tempo, in coordinate fisiche e modali, e tramite un calcolo il frequenza (le procedure di calcolo vengono spiegate nel paragrafo 3.4 prendendo in considerazione il caso più complesso di equazioni non lineari; per applicare il processo ad una equazione lineare sarà sufficiente semplicemente eliminare il termine di non linearità).

La risposta che si ottiene nel dominio del tempo fisico è mostrata in figura 2.2. Nella



(a) Risposta complessiva funzione del tempo

(b) Dettaglio della zona a regime

Figura 2.2: Risposta forzata lineare nel dominio del tempo fisico - forzante pulsante

figura 2.2a è mostrato lo sviluppo dell'andamento di vibrazione delle pale nel tempo, dove è possibile distinguere una fase transitoria e una a regime quando la risposta ha ormai raggiunto l'equilibrio. Il dettaglio di questa ultima fase è in figura 2.2b, dove si distingue la presenza di una pala che vibra più delle altre, la pala 2. Ciò è giustificato dal fatto che è proprio questa la pala che direttamente subisce l'azione della forzante esterna. E' interessante poi osservare la risposta delle altre pale le quali presentano una ampiezza di vibrazione via via decrescente. Analizzando dettagliatamente questa decrescenza emerge quanto mostrato in figura 2.3 che più intuitivamente può essere compreso tramite una rappresentazione più qualitativa in figura 2.4. In questa ultima immagine vengono riportate a confronto più diretto le ampiezze di vibrazione delle pale; quella con ampiezza più alta, come già detto, è la numero 2, per tutte le altre si presenta

uno scenario simmetrico per cui a mano a mano che si considerano pale progressivamente più lontane da quella eccitata, l'azione della forzante si riduce facendo vibrare meno il corpo. La pala che quindi ha ampiezza minore di tutte, è quella in posizione opposta alla paletta forzata 2, la numero 8.

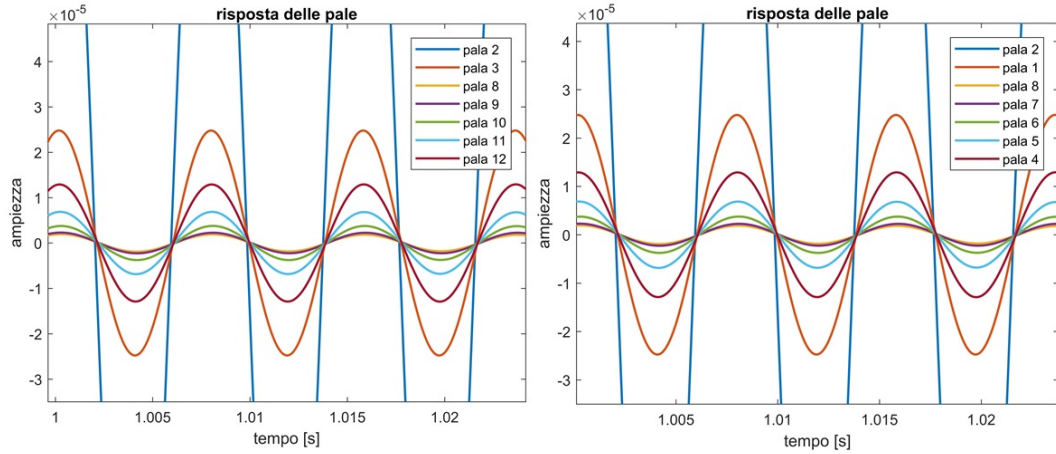


Figura 2.3: Scomposizione della risposta del disco nelle singole componenti palari

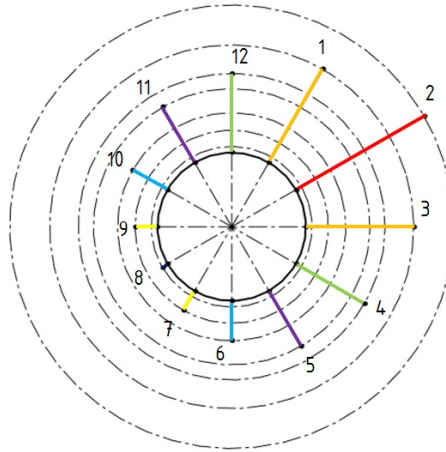


Figura 2.4: Diagramma qualitativo delle ampiezze delle pale

Questa è la tipologia di risposta dinamica per un sistema puramente lineare soggetto ad una forzante pulsante. Poiché lo scopo delle successive analisi a flutter sarà anche quello di confrontare tra loro le diverse metodologie di calcolo in modo da evidenziarne svantaggi e vantaggi, la stessa indagine è qui applicata. Si confrontano quindi i risultati ottenuti nel dominio del tempo fisico con quelli nel tempo modale ed in frequenza. In figura 2.5 viene sovrapposto il risultato nel tempo fisico a quello modale nella zona di equilibrio finale della risposta. Per comodità di rappresentazione si fa riferimento solamente alla risposta della pala 2.

Dal punto di vista dell'ampiezza non emerge alcun errore relativo tra le due implementazioni.

In figura 2.6 si osserva il risultato dell'analisi in frequenza. I punti nel grafico definiscono i valori delle ampiezze di vibrazione delle palette; rispecchiando quanto visto nella figura 2.4 si ha che la 2 e la 8 sono valori singoli, le altre invece hanno valori due a

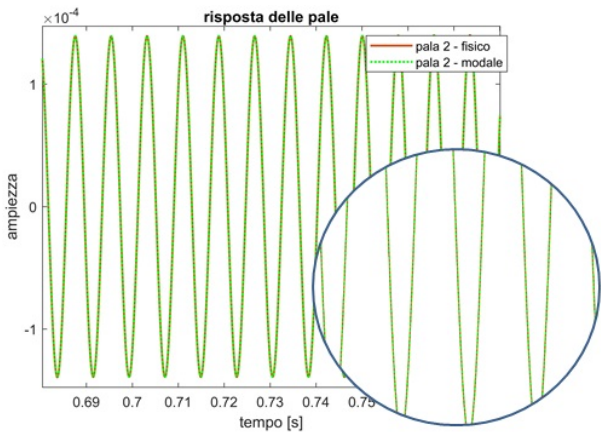


Figura 2.5: Dettaglio della risposta forzata lineare nel dominio del tempo modale - forzante pulsante

due uguali. Per l’analisi in frequenza si riscontra, nel totale, un’ottima accuratezza di risposta.

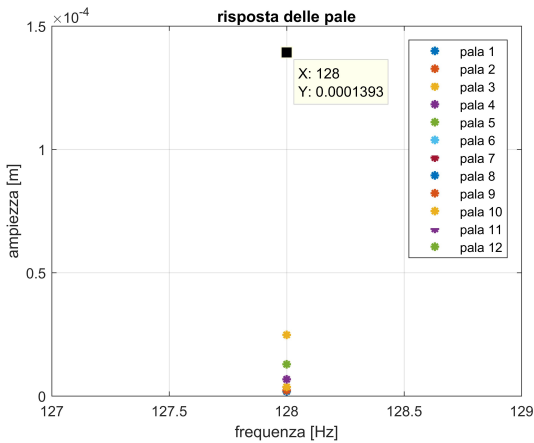


Figura 2.6: Risposta forzata lineare in frequenza - forzante pulsante

Si riassumono nella tabella 2.1 i parametri utili al confronto delle metodologie di analisi.

	ampiezza [m]	Errore ampiezza [%] rispetto ad ¹	tempo di calcolo [s]	Δt [%] rispetto ad ¹
Dominio tempo fisico ¹	$1.392 \cdot 10^{-4}$		24	
Dominio tempo modale	$1.392 \cdot 10^{-4}$	0	79	+229
Dominio in frequenza	$1.392 \cdot 10^{-4}$	0	9	-62.5

Tabella 2.1: Metodi per la risoluzione del problema lineare pulsante a confronto

Dal punto di vista delle ampiezze tutti e tre i metodi giungono ad un valore univoco. Ci si riferisce per semplicità al valore di ampiezza maggiore, ossia della pala più sollecitata. Dal punto di vista del tempo però, il metodo in frequenza risulta essere sicuramente il più vantaggioso.

2.2 Modello lineare con forzante rotante

Nella realtà delle applicazioni delle turbomacchine una risposta del disco rotorico del tipo appena ottenuto non si riscontra mai. Questo perché non può verificarsi la condizione per cui una sola pala è soggetta a forzante pulsante quando si ha a che fare con un elemento in rotazione. Ciò che nella realtà accade è la presenza di un carico rotante derivante dall'azione del fluido proveniente dallo statore che impatta sulla superficie della paletta. Ciò può essere rappresentato tramite una forza periodica che agisce su ogni pala con un ritardo di fase costante rispetto alle pale adiacenti, ritardo funzione del IBPA. L'equazione (2.2) va quindi modificata variando il termine F_e nel seguente modo:

$$F_{eROT} = \{A\} \cdot \cos(\omega_{ecc}t) \quad (2.3)$$

dove $\{A\}$ è il fattore che serve a definire l'azione rotante su tutte le pale del disco e $\cos(\omega_{ecc}t)$ descrive la natura armonica e periodica della forza che agisce su ogni pala. Nello specifico si ha che

$$\begin{aligned} \{A\} &= \{F_0 e^{j\psi}\} \\ \psi &= IBPA \cdot a = IBPA \cdot (tt - 1), \quad tt = 1, \dots, N \end{aligned}$$

con F_0 ampiezza della forzante, ψ il parametro che modula l'ampiezza agendo tramite a , un indice che fa variare l' $IBPA$ in funzione della pala considerata. In questo modo, per un istante di tempo t , le pale saranno soggette ad un valore di ampiezza di forzante diverso e sfasato in funzione del $IBPA$.

Nel complesso l'equazione da implementare risulta

$$[M]\ddot{X} + [C]\dot{X} + [K]X = F_0 e^{j\psi} \cdot \cos(\omega_{ecc}t) \quad (2.4)$$

La risposta che si ottiene nel dominio del tempo fisico è mostrata in figura 2.7a con un particolare in figura 2.7b della zona di equilibrio finale raggiunta dal sistema.

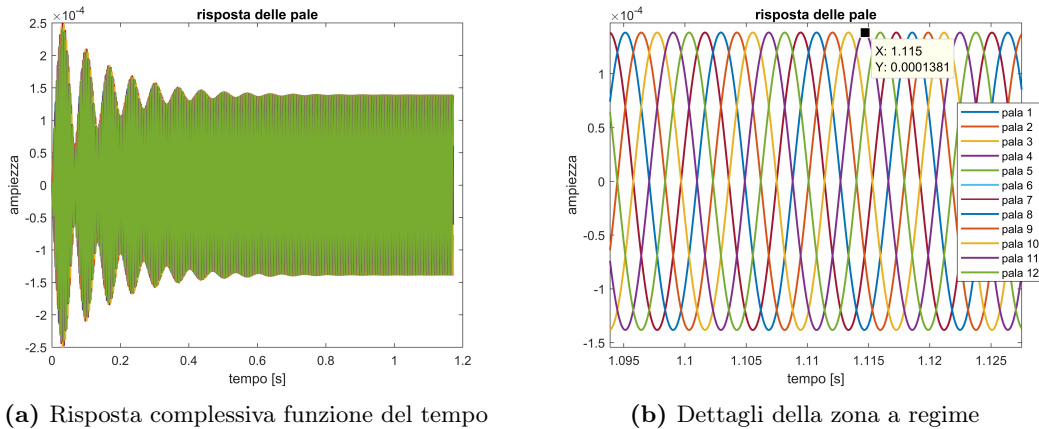


Figura 2.7: Risposta forzata lineare nel dominio del tempo fisico - forzante rotante

A differenza di quanto osservato in figura 2.2b è ora visibile la natura rotante della forzante che ciclicamente sollecita tutte le pale facendole arrivare ad una stessa ampiezza di vibrazione. Lo sfasamento di risposta è dovuto all' $IBPA$. Il risultato nel dominio del tempo in coordinate fisiche viene confrontato con quello in coordinate modali in figura 2.8 da cui emerge una perfetta corrispondenza degli spostamenti palari, e in figura 2.9 con il risultato nel dominio in frequenza.

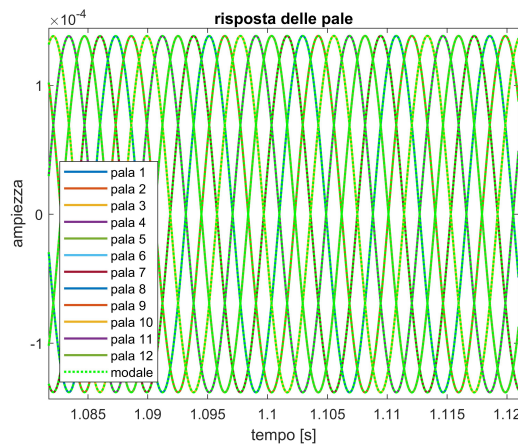


Figura 2.8: Dettaglio della risposta forzata lineare nel dominio del tempo modale - forzante rotante

In questo grafico appare un solo valore di ampiezza perché identico per tutte le pale.

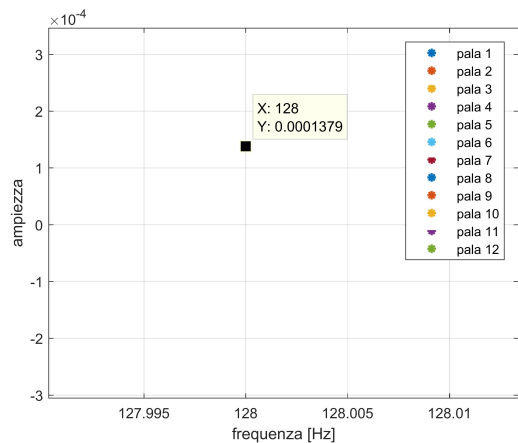


Figura 2.9: Risposta forzata lineare in frequenza - forzante rotante

Si riassumono in tabella 2.2 tutti i parametri relativi ai tre metodi di analisi.

	ampiezza [m]	Errore ampiezza [%] rispetto ad ¹	tempo di calcolo [s]	Δt [%] rispetto ad ¹
Dominio tempo fisico ¹	$1.381 \cdot 10^{-4}$		30	
Dominio tempo modale	$1.381 \cdot 10^{-4}$	0	447	+1390
Dominio in frequenza	$1.379 \cdot 10^{-4}$	0.14	11	-66.7

Tabella 2.2: Metodi per la risoluzione del problema lineare rotante a confronto

Rispetto a quanto trovato in tabella 2.1 risulta evidente l'aumento generale del tempo di calcolo. In particolare, il dominio modale è quello che presenta un Δt maggiore.

2.3 Introduzione alle non linearità

Il passaggio aggiuntivo per giungere ad un grado di complessità più alto e più realistico è quello che prevede di inserire nel problema (equazione 2.4) delle non linearità. Si è parlato nel paragrafo 1.2.2 relativo all'introduzione al flutter, che questo è un fenomeno di instabilità che prevede la presenza di forzanti aerodinamiche ed elementi smorzatori dissipatori di energia per attrito. Sono proprio questi due elementi la causa delle non linearità e si parla rispettivamente di *non linearità aerodinamica* e *non linearità di contatto*. Una struttura che prevede questi elementi di attrito, che deve essere studiata in flutter, e che viene analizzata anche in termini di risposta forzata, deve prendere in considerazione la presenza di questi ed inserirli nel modello di studio. Il passaggio graduale è quindi quello di inserire per prima la non linearità di contatto nell'analisi di risposta forzata (come si vedrà nel paragrafo 2.5). Successivamente, nello studio a flutter, si provvederà ad aggiungere la non linearità aerodinamica ed ad eliminare la componente di forzante rotante esterna perché trascurabile rispetto al fenomeno autoeccitato in analisi. In quel caso non si tratterà più dunque di risposta forzata, essendo la forzante esterna nulla, ma di pura analisi a flutter.

2.4 Modello di contatto per attrito

Sia nella risposta forzata, che nella futura analisi a flutter, le non linearità di contatto sono presenti ed espresse tramite il termine $F_{nl}(X)$, ossia un vettore di forze di attrito di natura non lineare (poiché dipendente dagli spostamenti dei gradi di libertà X) che si genera all'interfaccia degli elementi a contatto. Come anticipato nel paragrafo 1.2.2 gli elementi di attrito che generano tali forze sono essenziali all'equilibrio del sistema nella risposta a flutter in quanto riescono a smorzare tutte quelle vibrazioni che tenderebbero a crescere in maniera incontrollata portando la risposta del sistema a divergere fino al collasso. Qualora siano presenti sulla struttura soggetta ad analisi in risposta forzata si deve tener conto della loro presenza essendo parti integranti dei settori in analisi.

Esistono diverse tipologie di questi giunti di attrito, i quali si differenziano per il modo attraverso il quale le palette dell'elemento rotante sono collegate tra di loro. Le tipologie principali sono mostrate in figura 2.10. Queste soluzioni rappresentano degli elementi che seppur diversi operano con la stessa funzione, ossia quella di aumentare la rigidità complessiva della struttura mantenendo però nella zona di interfaccia una certa labilità al fine di permettere un movimento relativo che possa garantire una adeguata dissipazione di energia durante la vibrazione. In questo modo la risposta a flutter viene limitata inducendo le pale a vibrare in modo periodico all'interno dell'LCO. Anche se questi elementi esterni risultano molto utili, non è sempre garantita la loro presenza sulla struttura. Al contrario è sempre incluso nel disco palettato quanto rappresentato in figura 2.11. L'elemento evidenziato in rosso mostra l'attacco pala-disco in una forma molto schematizzata di quelle che solitamente possono essere le soluzioni di tipo *dovetail* (o coda di rondine) o *fir tree* (ad abete). Questi attacchi permettono di avere sempre disponibili delle superfici di accoppiamento che si serrano al crescere della velocità di rotazione per effetto della forza centrifuga, capaci quindi di generare un moto di strisciamento relativo tra i due componenti che possa dissipare energia per attrito.

L'aspetto fondamentale, per tener conto del contributo smorzante di questi giunti, è descrivere matematicamente la loro partecipazione al fenomeno. Per fare questo esistono

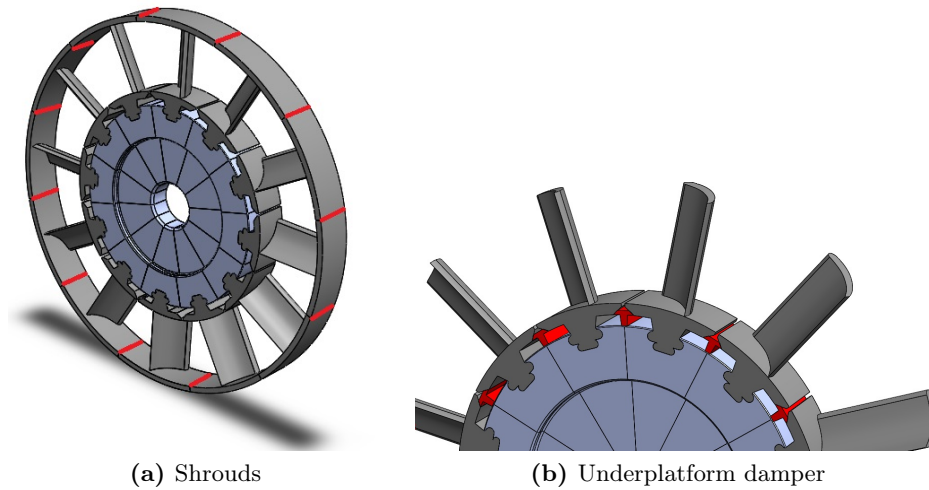


Figura 2.10: Esempi di giunti di attrito interpalari

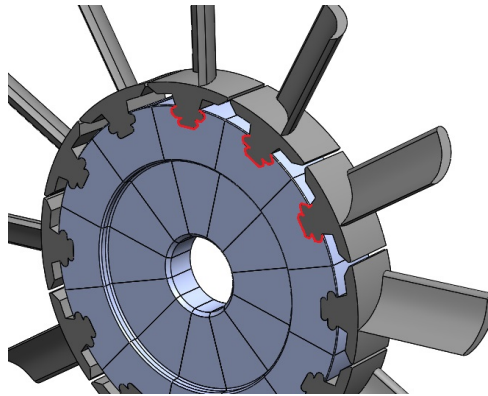


Figura 2.11: Root joints

i *modelli di contatto*. Ci sono diverse tipologie di modelli di contatto [9] e in questa analisi si è deciso di utilizzare il *modello di contatto di Coulomb 1D con rigidità tangenziale*, anche detto *modello di contatto Jenkins*. In figura 2.12 una sua rappresentazione schematica (per semplicità di comprensione i due elementi a contatto nel giunto vengono chiamati B e D, rappresentativi del collegamento esistente, e non completamente rigido, tra disco e pala):

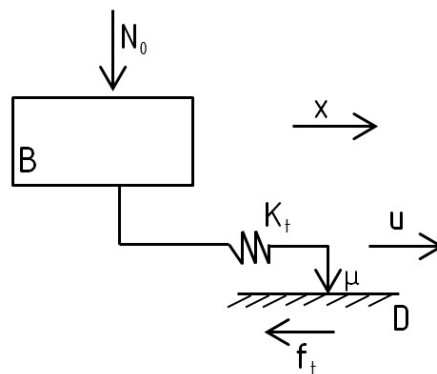


Figura 2.12: Modello di contatto

dove:

- $f_t(t)$ è la forza di contatto di attrito (componente del settore i-esimo nel vettore delle forze di attrito F_{nl});
- N_0 è il precarico costante agente sulla struttura, rappresentativo della forza centrifuga radiale;
- K_t è la rigidezza tangenziale di contatto che permette alla pala di muoversi rispetto al disco producendo una deformazione elastica all'interfaccia (fase stick) fino a quando lo slip non sopraggiunge;
- μ è il coefficiente di attrito;
- $u(t)$ è lo spostamento relativo tra i due corpi.

Le equazioni costitutive possono essere di due tipi:

1. **condizione stick**, quando $f_t < F_{Coulomb}$ ¹. In questo caso le interfacce di disco e pala si trovano in fase di aderenza, i corpi subiscono deformazioni elastiche e si ha che:

$$f_t(t) = f_0 + K_t \cdot (u(t) - u_0) \quad (2.5)$$

dove u_0 e f_0 sono rispettivamente la posizione relativa tangenziale e il valore della forza di contatto quando comincia la fase di stick;

2. **condizione slip**, quando f_t ha raggiunto il suo valore massimo pari al limite di Coulomb:

$$f_t(t) = -\text{sgn}(\dot{x}) \cdot \mu \cdot N_0 \quad (2.6)$$

L'alternanza di queste due situazioni permette la dissipazione di energia. In fase stick, aumentando $u(t)$ aumenta f_t fino al raggiungimento del valore limite di Coulomb dove il corpo B inizia a slittare seguendo l'andamento imposto da questa legge. Trattandosi di un fenomeno vibratorio, gli spostamenti come le forze di contatto, sono di tipo sinusoidale e questo implica che, ad un certo punto, quando il corpo raggiunge l'ampiezza massima di spostamento, il moto si inverte e u_t comincia a diminuire. Diminuendo lo spostamento relativo si riduce la forza tangenziale di contatto f_t diventando inferiore al limite di attrito coulombiano e il sistema ritorna nella fase stick, tornando ad avere un comportamento lineare. Analogamente accade per i valori negativi assunti da $u(t)$. Al termine di un periodo di oscillazione si ottiene quindi un ciclo chiamato *Ciclo di Isteresi*, figura 2.13. L'area di questo ciclo definisce l'energia dissipata dal sistema. Tanto più è grande, tanto più è l'energia dissipata e il giunto riesce a ridurre l'effetto di vibrazione che il flusso ha sulla struttura palare.

Il ciclo di isteresi è stato ottenuto usando il metodo "predictor-corrector" definito in [14].

¹ $F_{Coulomb} = \mu \cdot N_0$

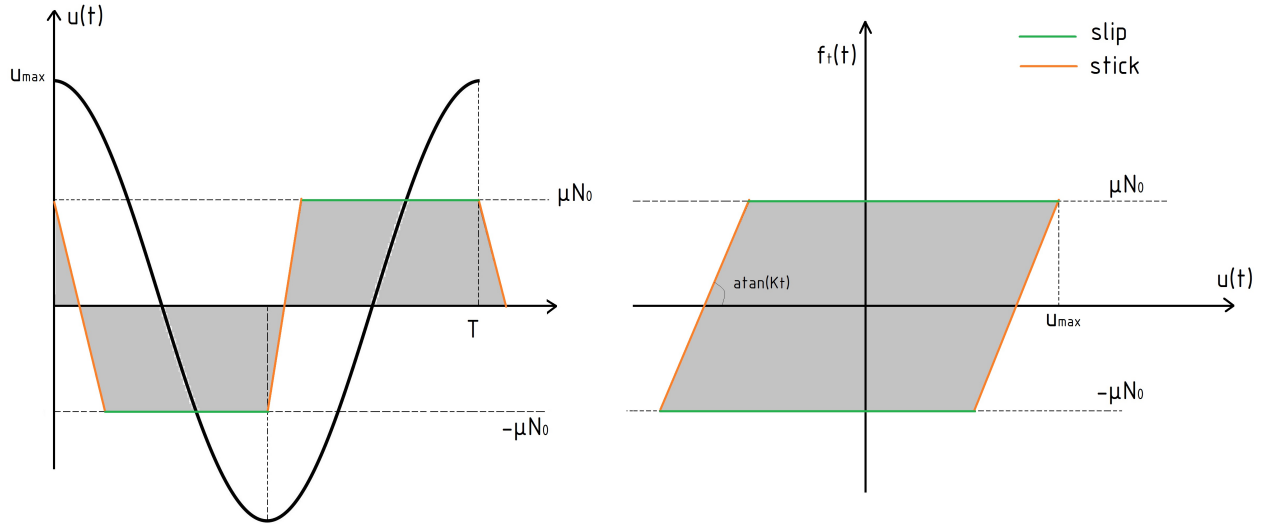


Figura 2.13: Ciclo di isteresi

2.5 Modello non lineare con forzante rotante

Avendo introdotto l'elemento di contatto, l'equazione 2.4 si modifica con l'aggiunta del vettore delle forze non lineari di attrito nel seguente modo:

$$[M]\ddot{X} + [C]\dot{X} + [K]X = F_{e_{ROT}} + F_{nl}(X) \quad (2.7)$$

e anche il modello parametrico del settore è aggiornato considerando la presenza dell'elemento di contatto.

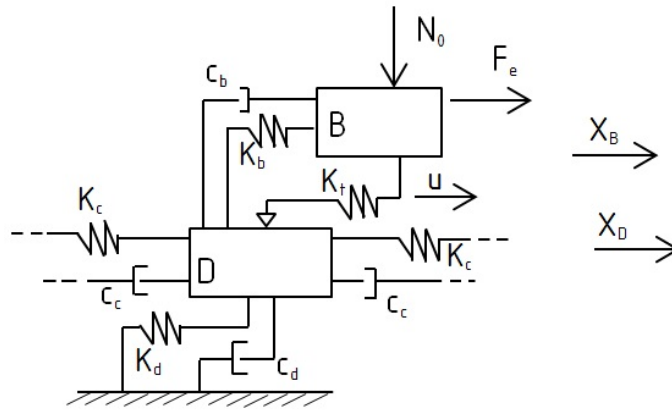


Figura 2.14: Settore del sistema parametrico a più gradi di libertà, per lo studio di risposta forzata non lineare

Come definito nel paragrafo precedente, l'espressione di F_{nl} varia ad ogni istante di tempo in funzione della condizione di stick o slip in cui si trovano gli elementi a contatto nell'interfaccia del giunto. In fase stick, ossia in fase di aderenza, la forza ha valore inferiore al limite di Coulomb ed è presente una pura deformazione elastica all'interfaccia pala-disco. Se la forza supera il limite di Coulomb comincia la fase slip, ossia la fase di slittamento, in cui viene dissipata energia per attrito e ridotta così l'ampiezza di vibrazione delle pale. Considerando, ad esempio, un precarico $N_0 = 2 \text{ N}$ la risposta del sistema nel tempo fisico è quella mostrata in figura 2.15.

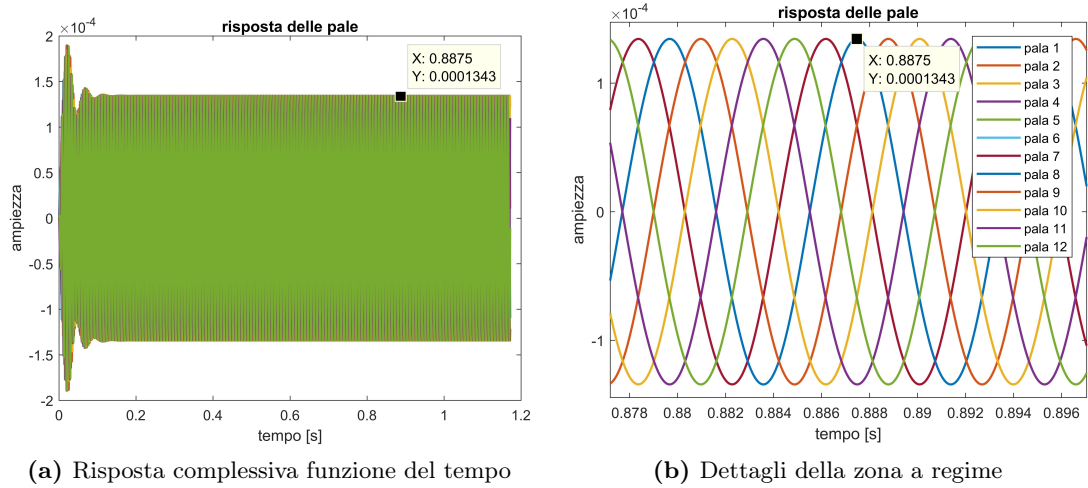


Figura 2.15: Risposta forzata non lineare nel dominio del tempo fisico - forzante rotante e $N_0 = 2 \text{ N}$

In figura 2.16 viene mostrato l'andamento della forza di contatto per un settore i -esimo (avendo per tutti i settori uguali modelli di analisi, ed essendo soggetti allo stesso precarico e alla stessa forzante, tutte le forze di contatto all'interfaccia tra B_i e D_i sono uguali).

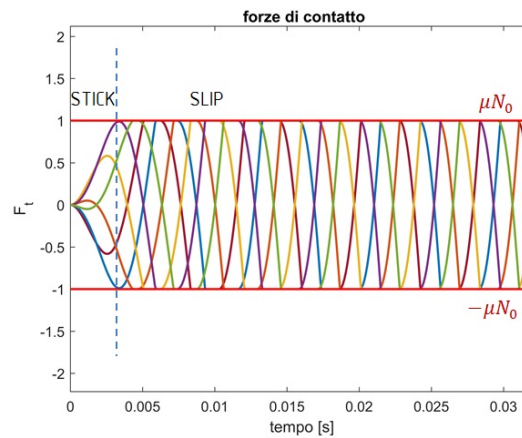


Figura 2.16: Andamento della forza di attrito tangenziale di contatto - $N_0 = 2 \text{ N}$

Si osserva che quando F_t è inferiore al limite di Coulomb (definito dalle linee rosse) quindi in fase stick, le ampiezze di vibrazione delle pale sono elevate. Quando la F_t raggiunge il limite di Coulomb comincia la fase slip e tramite la dissipazione di energia per attrito l'ampiezza di vibrazione delle pale si riduce e si raggiunge l'equilibrio di una risposta periodica e stabile, poiché l'energia introdotta dalla forzante esterna viene equilibrata da quella dissipata per attrito.

Variando il precarico N_0 , varia il limite di Coulomb, quindi il limite per cui comincia la fase slip. Considerando, per esempio, $N_0 = 4 \text{ N}$ si ottiene quanto mostrato nelle figure 2.17 e 2.18.

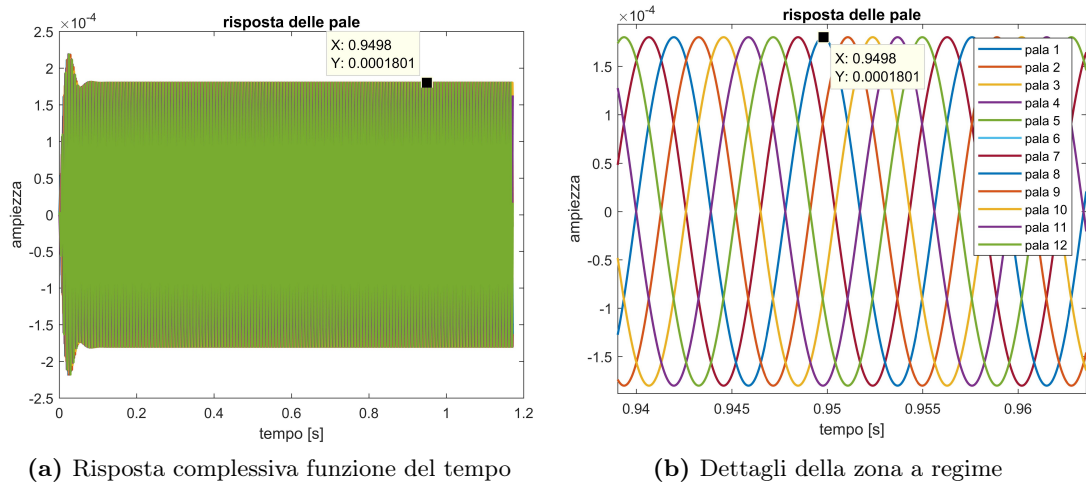


Figura 2.17: Risposta forzata non lineare nel dominio del tempo fisico - forzante rotante e $N_0 = 4 \text{ N}$

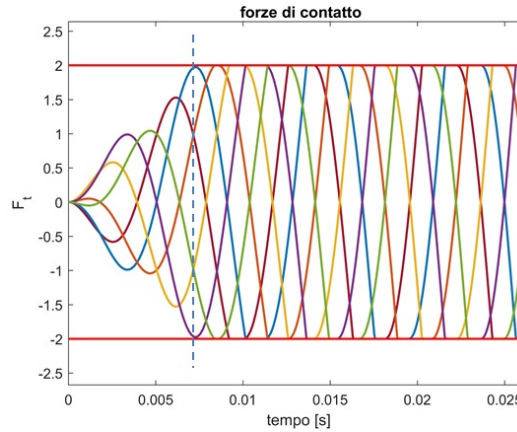


Figura 2.18: Andamento della forza di attrito tangenziale di contatto - $N_0 = 4 \text{ N}$

Aumentando N_0 da 2 N a 4 N , il limite di Coulomb si alza e lo slip che per $N_0 = 2 \text{ N}$ comincia a meno di 0.005 s , si presenta ora a circa 0.007 s . Il risultato dell'aumento di N_0 è quindi una struttura più rigida e vincolata che entra con ritardo nella fase di slittamento. La conseguenza di ciò è un aumento delle ampiezze di vibrazione delle pale poiché il sistema più rigido ha la necessità di dover vibrare di più per dissipare energia. Si trova quindi che al crescere del precarico la risposta in LCO aumenta. In figura 2.19 vengono presi dei valori di precarico a campione per dimostrare ciò.

Nei casi 2.19a, 2.19b, 2.19c, aumentando N_0 il valore di ampiezza cresce secondo quanto detto, ma rimane poi costante per i casi 2.19d e 2.19e. In questi due ultimi esempi il precarico elevato vincola la struttura tanto da non permettergli di slittare. Durante l'evoluzione della risposta nel tempo, all'interfaccia disco-pala, sarà quindi sempre presente una condizione di stick. Ciò è confermato dall'analisi dell'andamento delle forze di attrito in figura 2.19f che effettivamente rimangono sempre al di sotto del limite di Coulomb. Per comprendere meglio questo aspetto, si plotta in figura 2.20 l'andamento delle ampiezze di risposta delle pale in funzione di N_0 e in funzione della variazione di ω che finora è stata mantenuta costante alla ω_{ecc} della forzante. Delle curve presenti, due

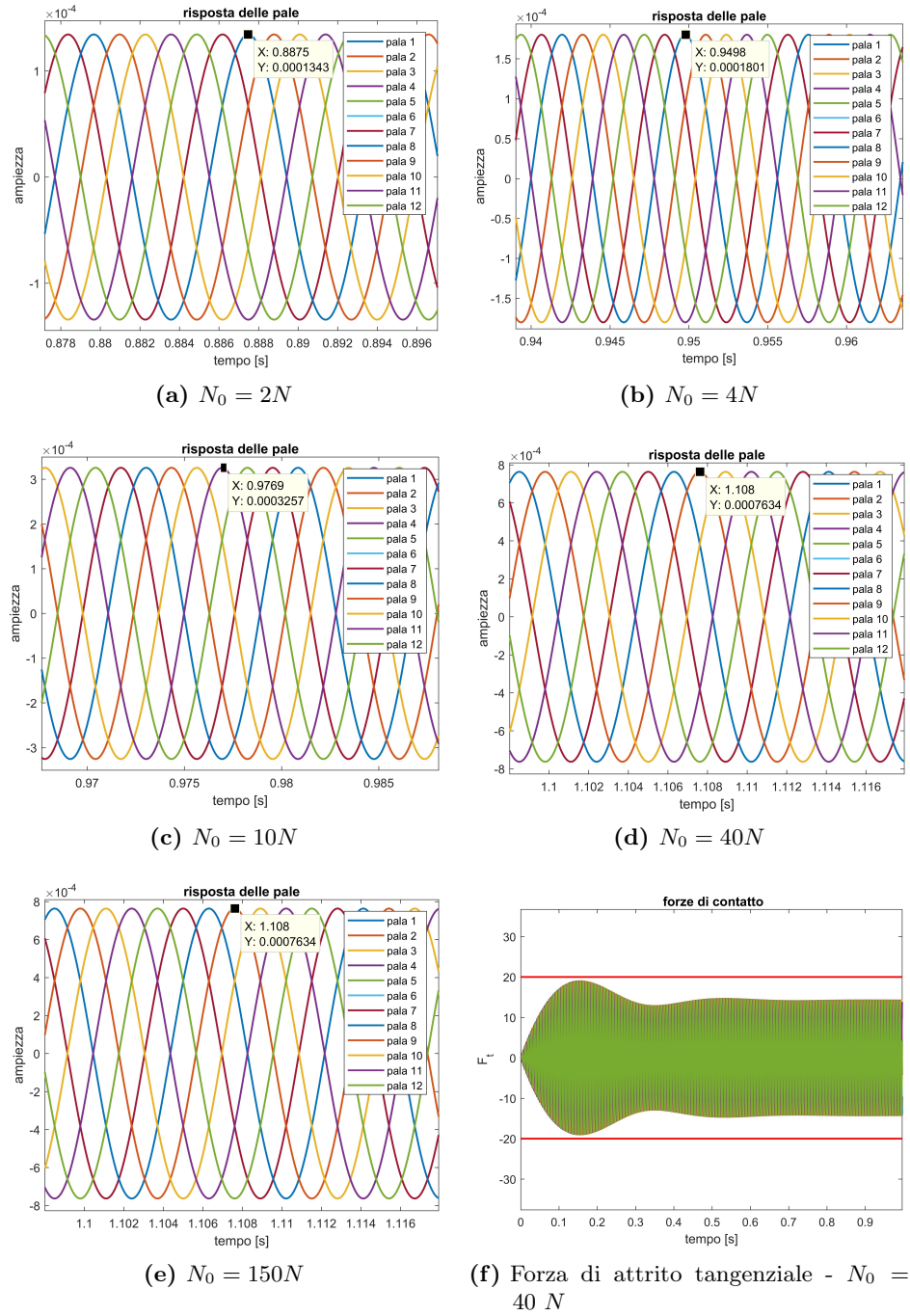


Figura 2.19: Variazione delle ampiezze di vibrazione in funzione del precarico

definiscono i limiti di risposta delle pale:

- *curva FREE*: è la curva che simula la risposta in frequenza delle pale con elemento di contatto assente, dunque una struttura non smorzata e libera di vibrare;
- *curva STICK*: è la curva che simula la risposta delle pale in campo lineare elastico, quando l'elemento di contatto è presente e lavora in condizione stick.

Spostandosi dalla curva free a quella stick, le pale aumentano la loro frequenza di risonanza poiché tutta la struttura diviene più rigida. Nel mezzo delle due curve limite si

posizionano le condizioni intermedie di slip, qui plottate in funzione della variazione del precarico. La condizione di $N_0 = 0N$ coincide con quella free; quando poi il precarico aumenta, la massima risposta del sistema decresce (si osservi il caso di $N_0 = 4N$) raggiungendo un valore minimo e successivamente aumenta ancora. Si parla di slip fino a quando N_0 non cresce in modo tale da portare il contatto a lavorare in condizione stick. A quel punto la curva di risposta coinciderà con la curva stick (si osservi il caso $N_0 = 150N$).

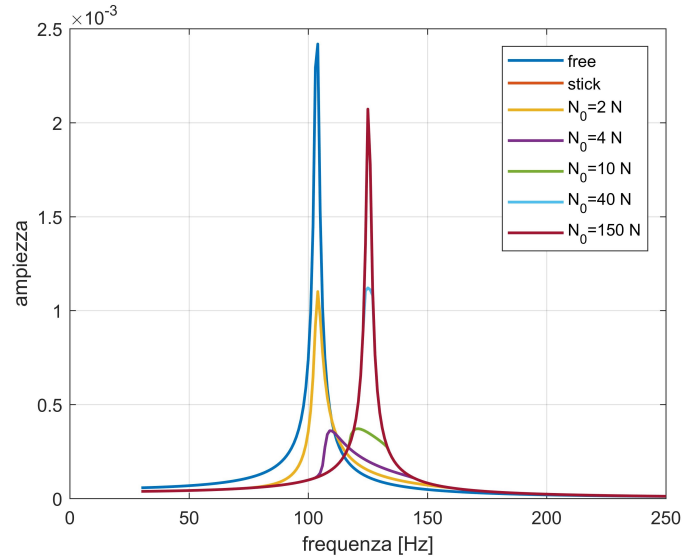


Figura 2.20: Risposta in frequenza delle pale funzione della variazione di precarico N_0

Entrando nel grafico di risposta in frequenza (2.21) con il valore della frequenza ω_{ecc} , che nel caso specifico corrisponde a $128Hz$, e intersecando per questo valore le curve a precarico variabile si ottengono i valori di ampiezza riportati in figura 2.19.

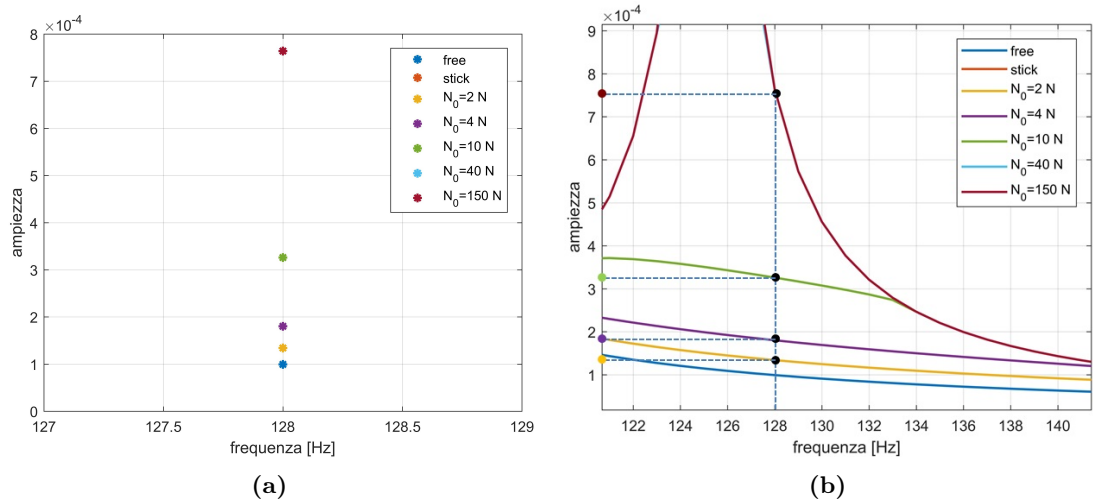


Figura 2.21: Vista in dettaglio della risposta in frequenza per il valore di ω_{ecc}

Sono quindi giustificate le risposte in figura 2.19 e verificata la corrispondenza dei risultati nel dominio del tempo fisico e nel dominio in frequenza. Per il caso $N_0 = 2N$ è stato effettuato il confronto della risposta nel dominio del tempo fisico con quello nel tempo in coordinate modali, figura 2.22.

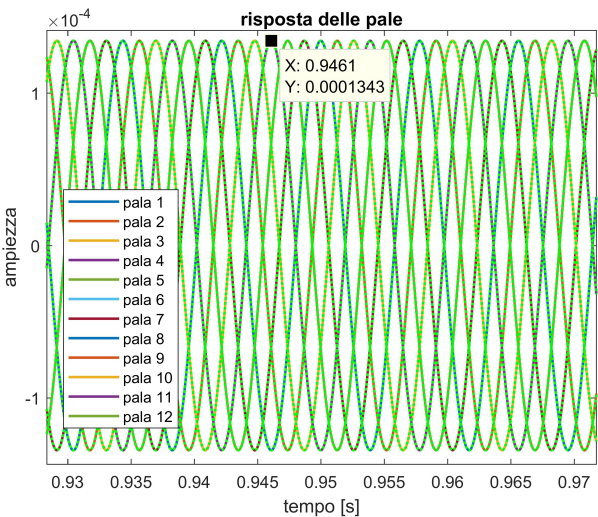


Figura 2.22: Dettaglio della risposta forzata non lineare nel dominio del tempo modale - forzante rotante

Si riportano in tabella 2.3 tutti i parametri relativi ai tre metodi di analisi.

	ampiezza [m]	Errore ampiezza [%] rispetto ad ¹	tempo di calcolo [s]	Δt [%] rispetto ad ¹
Dominio tempo fisico ¹	$1.343 \cdot 10^{-4}$		36	
Dominio tempo modale	$1.343 \cdot 10^{-4}$	0	4696	+12945
Dominio in frequenza	$1.342 \cdot 10^{-4}$	0.07	28	-23

Tabella 2.3: Metodi per la risoluzione del problema non lineare rotante a confronto, per il caso $N_0 = 2N$

Capitolo 3

Gli elementi dell'analisi a flutter

3.1 Strategia di calcolo

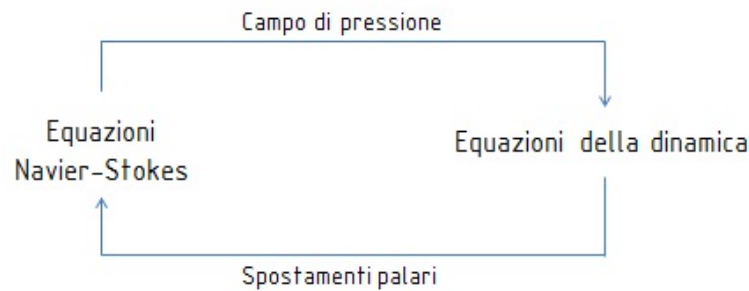
Definire la risposta dinamica di una struttura soggetta a flutter porta con sé il "problema" di dover considerare due ambienti: quello strutturale e quello del flusso. Bisogna quindi trovare un ponte che colleghi questi due domini. Inoltre in applicazioni in cui è importante predire correttamente l'evoluzione della dinamica del sistema le complessità aumentano dovendosi considerare fenomeni non lineari in entrambe le parti. Se queste non linearità e il legame dei due settori fossero tralasciati, la veridicità della risposta potrebbe andare persa. Così anche per l'accuratezza e la sensibilità a parametri che potrebbero sembrare poco influenti ma che se tralasciati potrebbero condurre a risultati inevitabilmente inappropriati. Devono quindi essere utilizzati opportuni modelli numerici. Considerando singolarmente questi due domini si ha che:

- la risposta fluidodinamica viene definita tramite la risoluzione delle equazioni RANS (Reynolds Averaged Navier Stokes) ovvero equazioni derivate dalle equazioni di Navier-Stokes, per mezzo dei solutori CFD (Computational Fluid Dynamics);
- la risposta strutturale è ottenuta invece tramite un'analisi modale e la risoluzione delle equazioni caratteristiche della dinamica del solido, generalmente tramite solutori CSD.



Questi due domini non sono però separati tra di loro. I fenomeni aeroelastici sono fenomeni che si verificano all'interfaccia fluido-struttura, di conseguenza il movimento delle pale è istantaneamente condizionato dalla distribuzione delle pressioni esercitate dal fluido, e viceversa la risposta vibrante della struttura modifica il flusso attorno ad

essa.



Dal punto di vista computazionale, si distinguono quindi due possibili approcci [11-12]:

- **Approccio accoppiato:** consiste nella risoluzione contemporanea delle equazioni strutturali e di flusso tenendo in conto le interazioni continue tra i due campi. Ad ogni istante di tempo di calcolo si ha uno scambio di informazioni che permettono di aggiornare le condizioni a contorno in input ai due domini, e di adeguare i dati necessari per il calcolo al tempo successivo. Questo è l'approccio più completo e che permette di ottenere i risultati più corretti, tuttavia richiede metodi di risoluzione complessi e lunghi tempi di calcolo;
- **Approccio disaccoppiato:** In questo approccio viene risolto per primo uno solo dei due campi e i suoi risultati vengono usati come input per il calcolo del secondo dominio.
 1. Si può partire, per esempio, dal calcolo aeroelastico definendo la risposta del fluido tramite la risoluzione delle equazioni RANS. Questi dati vengono poi usati come input al problema strutturale supponendo che la presenza del fluido non alteri apprezzabilmente frequenza e modo di vibrare della struttura. Questo è definito come **approccio disaccoppiato nel campo strutturale**.
 2. Viceversa si può definire la risposta strutturale tramite una analisi modale e una volta determinate le forme modali queste sono usate come input al dominio aerodinamico. Questo è definito come **approccio disaccoppiato nel campo aerodinamico**.

Tra i due domini non c'è quindi un feedback continuo e ciò rende il calcolo più veloce, tuttavia ciò che si ottiene è una approssimazione della reale soluzione del problema.

Il metodo utilizzato nella seguente analisi è l'approccio disaccoppiato nel dominio strutturale. I dati aeroelastici in ingresso alle equazioni strutturali, come il fattore modale di smorzamento aerodinamico ζ_{aer} ¹, non sono stati ottenuti tramite calcolo diretto ma sono stati assunti considerando i tipici valori ed andamenti definiti tramite pregresse analisi [11].

¹fattore che definisce la stabilità aeroelastica delle pale, definito in 3.3

3.2 Approccio parametrico e disco "tuned"

Per studiare il comportamento dinamico di un disco palettato sottoposto a vibrazioni è necessario effettuare un'analisi modale della struttura. Per i sistemi complessi si utilizza il metodo degli elementi finiti (FEM, dall'inglese *Finite Element Method*) che è una tecnica numerica che permette di trovare soluzioni approssimate di problemi descritti da equazioni differenziali alle derivate parziali riconducibili ad un sistema di equazioni algebriche. Per questo metodo è necessario definire un modello della struttura e poi discretizzarlo in un numero, molto alto ma finito, di gradi di libertà. Questo approccio è importante ma non necessario quando lo scopo è di studiare le principali caratteristiche dinamiche della risposta e gli aspetti basilari di un fenomeno, quale il flutter nello specifico. Questo è il motivo per cui in questa indagine non è stato necessario ricorrere a modelli sofisticati ma ci si è avvalsi di un sistema a parametri concentrati. L'utilizzo di una formulazione più semplice di un problema complesso è una fase fondamentale e necessaria per verificare ed interpretare i risultati di un approccio numerico. Solo i progressi nelle formulazioni più essenziali possono fornire una base per approcci numerici nuovi e migliori.

Per queste ragioni si procede tramite due fasi a complessità crescente. Nella prima fase si studia la risposta dinamica di un sistema parametrico ad un grado di libertà simulante una pala in contatto con un elemento fisso (figura 3.1). Questo sistema assai semplice è in grado di fare emergere importanti aspetti relativi allo studio del flutter, non a caso due dei maggiori studiosi del campo, Griffin e Sinha, hanno focalizzato le loro analisi su di esso [1]. Lo studio di questo sistema è effettuato nel capitolo 4. Passando

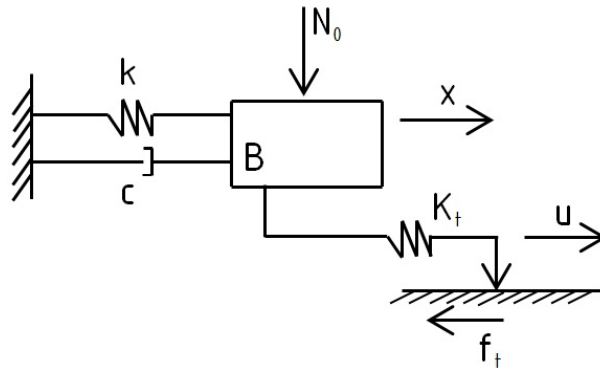


Figura 3.1: Sistema parametrico ad un grado di libertà per lo studio del flutter

poi ad un livello di complessità maggiore, nel capitolo 5 si studia la risposta dinamica di un sistema a più gradi di libertà rappresentante un disco palettato. Come si vede in figura 3.2a, questo disco è costituito solamente da 12 settori e ciò ovviamente non rappresenta il caso di un componente palettato reale. Questo fattore e l'utilizzo dei parametri concentrati definiscono nel complesso una schematizzazione che non ha la pretesa di rappresentare fedelmente la complessità del concreto componente rotorico ma ha il pregio di condurre, con relativa semplicità, ad un modello adatto a fornire una spiegazione accurata del fenomeno di instabilità.

Tra le semplificazioni del modello reale del disco palettato vi è anche quella di considerare un *tuned bladed disk*. Quando si parla di disco "tuned" si intende un disco palettato idealmente perfetto, costituito, per esempio, da palette ugualmente distanziate ed identiche; ciò però non rappresenta mai la realtà. Quando si realizza un componente meccanico saranno sempre inevitabilmente presenti delle piccole differenze dovute alle

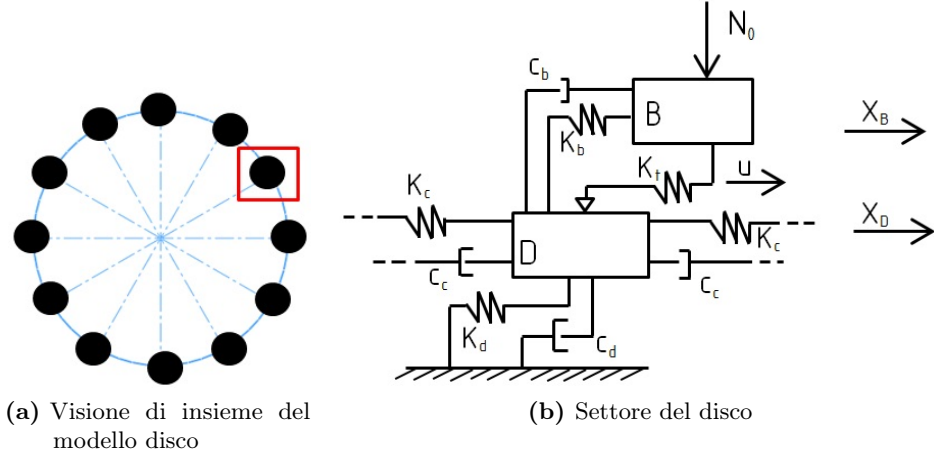


Figura 3.2: Modello parametrico del disco palettato per lo studio del flutter

tolleranze di lavorazione, all'usura, al danneggiamento. Si parla allora di *mistuning* quando sono presenti queste discrepanze. Il mistuning è quindi sempre presente, tuttavia questo fenomeno non ha un effetto dannoso ai fini della stabilità dinamica del sistema [2-13] e per questo non è stato considerato nel presente studio.

3.3 Componente aerodinamica

Si è più volte anticipato che il flutter è un fenomeno aeroelastico non lineare e che queste non linearità sono dovute alla presenza di giunti di attrito e alla presenza delle forzanti aerodinamiche. Trascurabile invece sono le forzanti di eccitazione esterna ai fini di tale analisi. Modificando il termine della forzante nell'equazione (2.7) si ha quindi che l'equazione generale del moto di un disco palettato soggetto ad eccitazione autoindotta per via di una forzante aerodinamica ha la seguente forma:

$$[M]\ddot{X} + [C]\dot{X} + [K]X = F_{aer} + F_{nl}(X) \quad (3.1)$$

dove $[M]$, $[C]$ e $[K]$ sono rispettivamente le matrici strutturali di massa, smorzamento e rigidità, X è il vettore degli spostamenti dei gradi di libertà della struttura, F_{nl} è il vettore delle forze non lineari di attrito e F_{aer} è il vettore della forza aerodinamica agente sui gradi di libertà. E' in questo ultimo vettore che vi è la partecipazione aerodinamica al problema.

Avendo scelto di utilizzare un approccio di calcolo disaccoppiato e in campo strutturale, si è deciso di tener conto della non linearità di contatto, come definito nel paragrafo 2.4, e di trattare in maniera linearizzata la componente aerodinamica che entra nel sistema semplicemente come input. La definizione della forzante aerodinamica è ottenuta per linearizzazione delle equazioni RANS, sotto l'ipotesi di piccole perturbazioni [11, 15]. Definendola nel dominio della frequenza si ha che:

$$F_{aer} = [AM] \cdot \{X\} e^{i\omega t} \quad (3.2)$$

dove $[AM]$ è la matrice aerodinamica che include i due principali fattori che definiscono l'interazione lineare fluido-struttura:

- η_{aer} : coefficiente modale di rigidità aerodinamica, che definisce la variazione di rigidità delle pale dovuta all'effetto del flusso;

- ζ_{aer} : coefficiente modale di smorzamento aerodinamico, che definisce la stabilità aerodinamica delle pale.

In funzione di questi due fattori la matrice può essere scomposta in due componenti:

$$[AM] = -[K_{aer}] - i\omega[C_{aer}] \quad (3.3)$$

dove:

$$[K_{aer}] = inv[\Psi^H] \cdot [K_{aer,mod}] \cdot inv[\Psi]$$

$$[K_{aer,mod}] = \begin{bmatrix} 2\omega_1\eta_{aer,1} & 0 & 0 \\ 0 & \ddots & 0 \\ 0 & 0 & 2\omega_n\eta_{aer,n} \end{bmatrix}$$

e

$$[C_{aer}] = inv[\Psi^H] \cdot [C_{aer,mod}] \cdot inv[\Psi]$$

$$[C_{aer,mod}] = \begin{bmatrix} 2\omega_1\zeta_{aer,1} & 0 & 0 \\ 0 & \ddots & 0 \\ 0 & 0 & 2\omega_n\zeta_{aer,n} \end{bmatrix}$$

con $[\Psi]$ matrice degli autovettori rotanti normalizzati rispetto alla matrice di massa $[M]$. $[K_{aer}]$ definisce la rigidezza aerodinamica dei gradi di libertà delle pale, $[C_{aer}]$ definisce lo smorzamento aerodinamico sui gradi di libertà delle pale.

Riscrivendo al completo la forzante linearizzata nel dominio della frequenza si ha:

$$F_{aer} = -[K_{aer}] - i\omega[C_{aer}] \cdot \{X\}e^{i\omega t} \quad (3.4)$$

che nel dominio del tempo corrisponde a:

$$F_{aer} = -[K_{aer}]X - [C_{aer}]\dot{X} \quad (3.5)$$

Sostituendo la (3.5) nella (3.1) si può quindi scrivere l'equazione generale del moto come:

$$[M]\ddot{X} + [C + C_{aer}]\dot{X} + [K + K_{aer}]X = F_{nl}(X)$$

La matrice $[C_{aer}]$ è l'elemento principale per lo studio del disco palare soggetto a flutter; è questa componente che infatti permette la modellizzazione e l'applicazione della vibrazione instabile alla struttura rotorica. La matrice $[K_{aer}]$ invece ha solamente lo scopo di avvicinare la risposta del modello ad una risposta più reale del fenomeno ma non ha influenza sul metodo di analisi del flutter. Inoltre mettendo $[K_{aer}]$ in proporzione a $[K]$, ne risulta che $[K_{aer}]$ ha un valore molto piccolo rispetto alla rigidezza strutturale del sistema. Questi due motivi sono la ragione per cui nel calcolo si è scelto di considerare trascurabile la componente di rigidezza legata al flusso. Dunque, *l'equazione generale del moto di un disco palettato soggetto ad eccitazione autoindotta per via di una forzante aerodinamica e dotata di contatti non lineari di attrito*, assume la seguente forma:

$$[M]\ddot{X} + [C + C_{aer}]\dot{X} + [K]X = F_{nl}(X) \quad (3.6)$$

e, in definitiva, il parametro ζ_{aer} risulta essere l'unico parametro aerodinamico ad entrare nell'analisi tramite la matrice $[C_{aer}]$.

Il coefficiente di smorzamento aerodinamico modale si ottiene generalmente tramite analisi CFD ma è da specificarsi che, trattandosi questa di un'analisi volta a validare una metodologia di studio del fenomeno e non ad effettuare dei precisi confronti numerici sperimentali, i valori di questo parametro vengono presi considerando i range e gli andamenti tipici entro cui questa variabile generalmente opera con il solo scopo di esaminare il suo contributo al fenomeno.

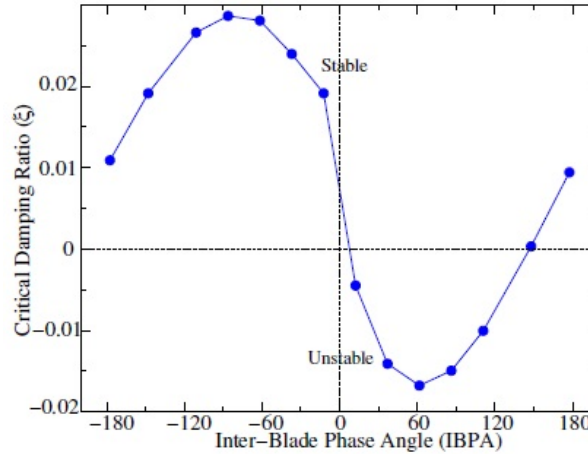


Figura 3.3: Andamento tipico del coefficiente modale di smorzamento aerodinamico [15]

La figura 3.3 ottenuta tramite analisi CFD [15] è un esempio del tipico andamento assunto da questo parametro in funzione del IBPA; in alternativa potrebbe essere definito in funzione di ND. E' importante sottolineare che il coefficiente ζ_{aer} è legato al lavoro aerodinamico e il suo segno positivo o negativo, da cui dipende rispettivamente la stabilità o instabilità del sistema, è *opposto* a quello del lavoro aerodinamico che invece può essere:

- positivo: quando l'energia è trasferita dal fluido alla struttura. In questo caso si favoriscono i fenomeni di oscillazione autoeccitata, quindi si parla di condizione instabile;
- negativo: quando l'energia è trasferita dalla struttura al fluido. In questo caso l'energia in uscita dalle pale definisce lo smorzamento avvenuto sull'oscillazione e quindi si parla di condizione stabile.

3.4 Procedure di calcolo per le equazioni non lineari

Il modello matematico in grado di descrivere il comportamento non lineare del disco palettato con elementi di contatto per attrito è racchiuso nell'equazione (3.6), considerando la presenza di più gradi di libertà. E' evidente come per calcolare la risposta allo stato stazionario sia necessario risolvere un problema non lineare caratterizzato da equazioni differenziali del secondo ordine. Si può procedere alla risoluzione di questa equazione tramite diversi approcci. Di seguito sono quindi analizzati i metodi di calcolo utilizzati nella seguente indagine; i relativi vantaggi e svantaggi verranno presentati nella discussione dei risultati ottenuti. Per completezza di spiegazione vengono mostrati i procedimenti relativi al sistema a più gradi di libertà. L'utilizzo di tali strumenti di calcolo è però analogo anche per il sistema ad un solo grado di libertà.

3.4.1 Dominio del tempo

L'analisi nel dominio del tempo permette di studiare il comportamento dinamico di un sistema tramite la risoluzione per integrazione diretta delle sue equazioni; viene anche detto metodo DTI (dall'inglese *Direct Time Integration*). L'analisi nel tempo richiede un grande sforzo computazionale ma risulta essere sicuramente la più accurata dato che, oltre che trovare la soluzione a regime, permette di avere informazioni relative anche allo stato transitorio della risposta. La chiave per un utilizzo ottimale di tale metodologia sta nella giusta scelta del time-step Δt necessario alla discretizzazione del segnale nel tempo. Questo infatti dovrà essere piccolo abbastanza per ottenere la corretta previsione del segnale (si ricordi il teorema di campionamento di Nyquist-Shannon) ma anche grande abbastanza per salvaguardare il tempo di calcolo. Una volta scelto un Δt soddisfacente, possono essere applicate diverse tipologie di metodi di integrazione (come riassunte in A.1).

Per questo lavoro di analisi è stato utilizzato *il metodo Runge Kutta*, implementato tramite Matlab attraverso la funzione ODE45. Questa analisi nel tempo è stata realizzata tramite due coordinate: fisiche e modali.

1. Dominio del tempo fisico

L'equazione da risolvere è la seguente:

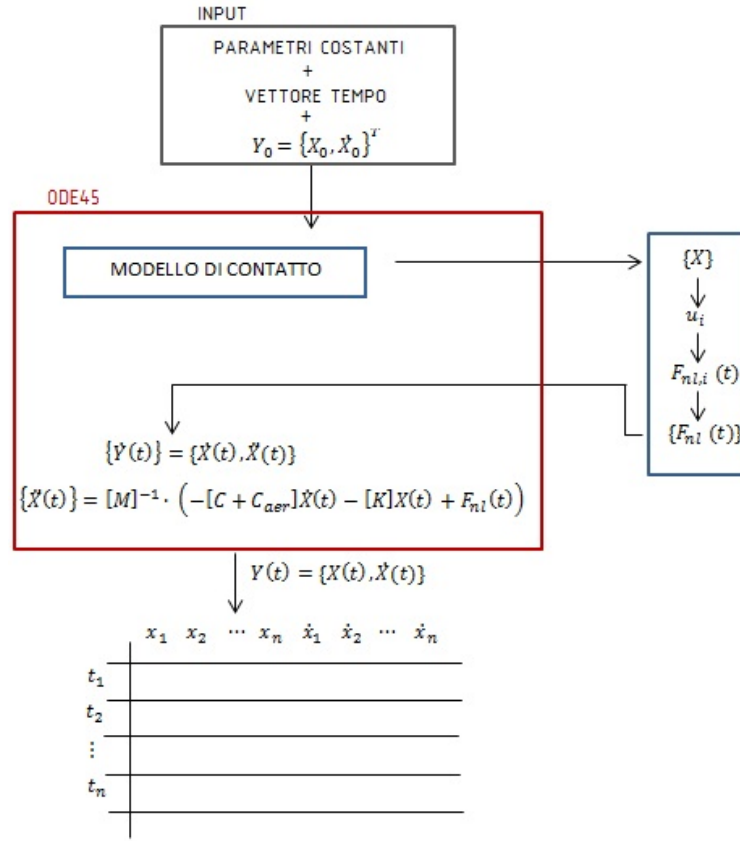
$$[M]\ddot{X}(t) + [C + C_{aer}]\dot{X}(t) + [K]X(t) = F_{nl}(X, t) \quad (3.7)$$

Questo metodo risulta molto semplice da un punto di vista di sviluppo di codice poiché oltre la normale risoluzione dell'equazione differenziale a più gradi di libertà tramite ODE45 va aggiunto un solo passaggio intermedio prima di eseguire il calcolo: il passaggio per il modello di contatto per la definizione del vettore $F_{nl}(X, t)$. Dunque si procede come illustrato schematicamente in figura 3.4. La procedura di calcolo prevede dapprima di inserire i dati di input alla funzione Matlab. Tra questi vi fanno parte tutti gli elementi costanti e rappresentativi della struttura fisica del sistema $[M], [C], [C_{aer}]$ e $[K]$, e i parametri relativi al modello di contatto μ, N_0 e K_t . Insieme a questi vengono poi definiti ed inseriti un vettore di spostamento e velocità di primo tentativo per tutti i gradi di libertà appartenenti ai dodici settori $Y_0 = \{x_{D_1}, x_{B_1}, \dots, x_{D_{12}}, x_{B_{12}}, \dot{x}_{D_1}, \dot{x}_{B_1}, \dots, \dot{x}_{D_{12}}, \dot{x}_{B_{12}}\}^T$ e un vettore tempo $\{t\}$ lungo il quale si vuole conoscere la risposta del sistema.

Non appena si entra in ODE45 inizia il processo di definizione delle componenti del vettore di forza tangenziale di attrito istantaneo $F_{nl}(X, t)$ secondo la teoria del modello di contatto utilizzato:

- si passa dagli spostamenti assoluti X a quelli relativi per ogni settore $u_i = x_{B_i} - x_{D_i}$, con $i = 1, \dots, N = \text{numero del settore}$;
- si calcolano le forze $F_{slip} = \text{limite di Coulomb} = \mu \cdot N_0$ e $F_{stick} = f_0 + K_t \cdot u_i$;
- si definisce $F_{nl_i}(t)$ nel seguente modo:

$$\begin{cases} |F_{stick}| \geq |F_{slip}| \rightarrow F_{nl_i}(t) = \text{sgn}(F_{stick}) \cdot \mu N_0 \rightarrow SLIP \\ |F_{stick}| < |F_{slip}| \rightarrow F_{nl_i}(t) = F_{stick} \rightarrow STICK \end{cases} \quad (3.8)$$

**Figura 3.4:** Procedimento di calcolo nel tempo fisico

L'insieme di tutte le componenti di forza dei singoli settori definisce il vettore $F_{nl}(t)$; quindi si risolve per questo istante di tempo l'equazione di equilibrio come impone lo schema di algoritmo della funzione di Matlab:

$$\{\dot{Y}(t)\} = [\dot{X}(t); \ddot{X}(t)]$$

con

$$\ddot{X}(t) = [M]^{-1} \cdot (-[C + C_{aer}]\dot{X}(t) - [K]X(t) + F_{nl}(t))$$

Passando ad ODE45 un vettore discretizzato di tempo, questo effettuerà in modo iterativo e tramite diverse interpolazioni tutti i calcoli necessari a trovare le soluzioni negli istanti di tempo da noi definiti. Si ottiene quindi, all'uscita, una matrice Y con le soluzioni finali di spostamento e velocità di ogni grado di libertà in gioco, ad ogni istante di tempo:

	X	\dot{X}
t_1	\dots	\dots
\vdots	\dots	\dots
t_n	\dots	\dots

considerando una riga al tempo t-esimo si ha:

$$Y(t_i, :) = [x_{D_1}(t_i), x_{B_1}(t_i), \dots, x_{D_{12}}(t_i), x_{B_{12}}(t_i), \dot{x}_{D_1}(t_i), \dot{x}_{B_1}(t_i), \dots, \dot{x}_{D_{12}}(t_i), \dot{x}_{B_{12}}(t_i)]$$

2. Dominio del tempo modale

Genericamente, passando alle coordinate modali lo studio del sistema vibrante a n gradi di libertà viene ridotto a quello di n sistemi indipendenti a un grado di libertà. Questo porta ad una risoluzione numerica più semplice per il calcolatore. L'analisi modale si basa infatti sul presupposto che il comportamento di una struttura complessa costituita da un numero consistente di gradi di libertà possa essere rappresentata adeguatamente attraverso una combinazione lineare di sistemi a un grado di libertà. Ognuno di questi modelli semplici ha associato una frequenza modale (autovalore - ω_n^2) e una forma modale (autovettore - $\{\phi\}$). Queste forme modali definite anche semplicemente modi, costituiscono una base dello spazio delle configurazioni deformate del sistema, per cui la deformata in un certo istante di tempo t si può vedere come combinazione lineare dei modi di vibrare:

$$\{X(t)\} = \eta_1(t) \cdot \{\phi_1\} + \eta_2(t) \cdot \{\phi_2\} + \dots + \eta_i(t) \cdot \{\phi_i\}$$

dove i coefficienti $\eta_i(t)$ variano istante per istante. In forma matriciale l'espressione diventa:

$$\{X(t)\} = [\Phi] \cdot \{\eta(t)\} \quad (3.9)$$

anche detta *trasformazione modale diretta*, dove $[\Phi]$ è la matrice modale, che ha in colonna gli autovettori del sistema; $\{\eta(t)\}$ è il vettore delle coordinate modali del sistema. Dal punto di vista fisico, ogni componente $\eta_i(t)$ di questo vettore definisce quanto è coinvolto il modo i -esimo nella vibrazione.

Si vedrà che in questo specifico studio a flutter, essendo questo un fenomeno rotante, la matrice modale degli autovettori reali $[\Phi]$ deve essere sostituita da $[\Psi]$ la matrice modale degli autovettori rotanti. La sua esplicitazione è definita nel paragrafo 5.1.

Per passare quindi da un dominio fisico ad uno modale è sufficiente applicare la trasformazione (3.9) all'espressione nel tempo fisico (3.7) considerando però la matrice modale rotante, e l'equazione del moto si scrive come:

$$[M][\Psi]\{\ddot{\eta}(t)\} + [C][\Psi]\{\dot{\eta}(t)\} + [C_{aer}][\Psi]\{\dot{\eta}(t)\} + [K][\Psi]\{\eta(t)\} = F_{nl}(X, t)$$

pre-moltiplicando per $[\Psi]^T$ si ha:

$$\begin{aligned} & [\Psi]^T[M][\Psi]\{\ddot{\eta}(t)\} + [\Psi]^T[C][\Psi]\{\dot{\eta}(t)\} + [\Psi]^T[C_{aer}][\Psi]\{\dot{\eta}(t)\} + [\Psi]^T[K][\Psi]\{\eta(t)\} = \\ & = [\Psi]^T F_{nl}(X, t) \end{aligned}$$

da cui si ottiene, per le proprietà dimostrate in [16], l'equazione definitiva da studiare nel dominio del tempo modale:

$$[M_{mod}]\{\ddot{\eta}(t)\} + [C_{mod} + C_{aer,mod}]\{\dot{\eta}(t)\} + [K_{mod}]\{\eta(t)\} = F_{nl,mod}(t) \quad (3.10)$$

con $[M_{mod}]$, $[C_{mod}]$, $[C_{aer,mod}]$ e $[K_{mod}]$ matrici modali diagonali del seguente tipo:

$$[M_{mod}] = [I]$$

$$[C_{mod}] = \begin{bmatrix} 2\zeta_1\omega_1 & 0 & 0 \\ 0 & \ddots & 0 \\ 0 & 0 & 2\zeta_n\omega_n \end{bmatrix}$$

$$[C_{aer,mod}] = \begin{bmatrix} 2\zeta_{aer,1}\omega_1 & 0 & 0 \\ 0 & \ddots & 0 \\ 0 & 0 & 2\zeta_{aer,n}\omega_n \end{bmatrix}$$

$$[K_{mod}] = \begin{bmatrix} \omega_1^2 & 0 & 0 \\ 0 & \ddots & 0 \\ 0 & 0 & \omega_n^2 \end{bmatrix}$$

In questo caso si procede al calcolo come indicato in figura 3.5.

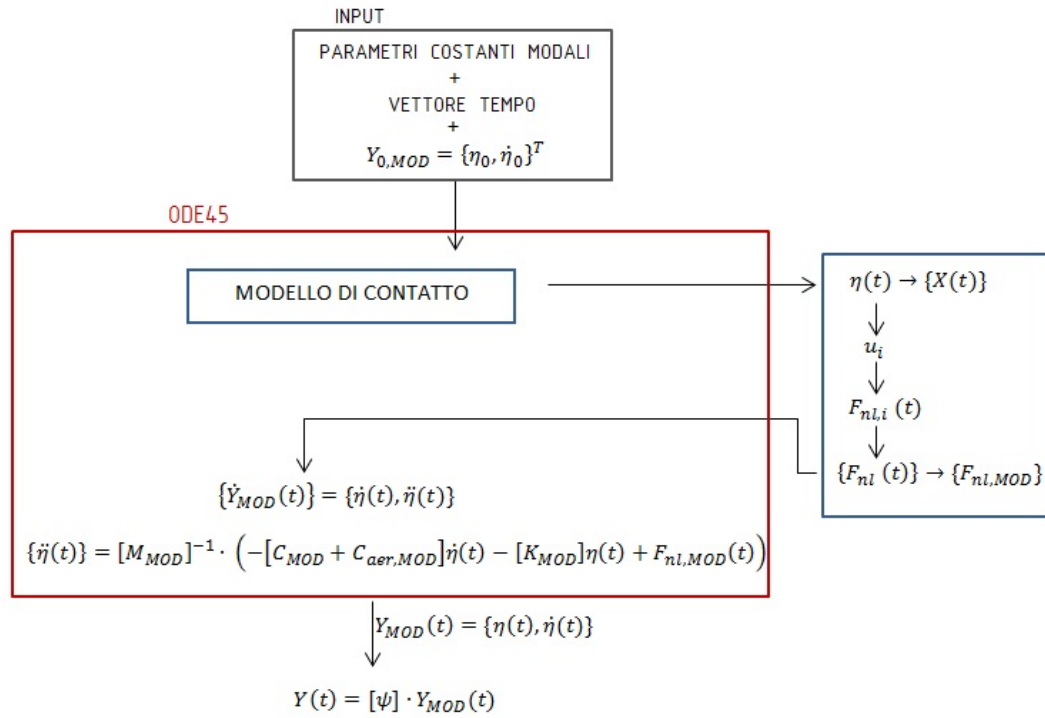


Figura 3.5: Procedimento di calcolo nel tempo modale

Il procedimento è del tutto simile a quello nel dominio del tempo fisico; i parametri in input alla funzione ODE45 sono gli stessi del caso precedente ma in forma modale. Entreranno quindi le matrici modali e i parametri relativi al modello di contatto μ , N_0 e K_t che rimangono invariati. Ci sarà poi il vettore discretizzato del tempo $\{t\}$ e un vettore di spostamenti e velocità espresso in forma modale tramite:

$$\{Y_{0,mod}\} = [\Psi]^{-1} \cdot \{Y_0\} = \{\eta(t_0); \dot{\eta}(t_0)\} \quad (3.11)$$

dove Y_0 è il vettore di primo tentativo nel dominio fisico.

Non appena si entra in ODE45 inizia il processo di definizione delle componenti di forza non lineare, specifiche per settore, per comporre il vettore completo di forza tangenziale di attrito relativo al tempo t-esimo. Il tutto avviene nella funzione del modello di contatto. Il metodo di calcolo di queste componenti passa però per due trasformazioni dato che le $F_{nl,i}(t)$ possono essere definite solo nel dominio fisico.

- Si ha quindi una prima trasformazione dominio modale \rightarrow dominio fisico:

$$X(t) = [\Psi] \cdot \{\eta(t)\} = (x_{D_1}, x_{B_1}, \dots, x_{D_{12}}, x_{B_{12}})^T$$

- trovati gli spostamenti assoluti nelle coordinate fisiche si passa agli spostamenti relativi per ogni settore $u_i = x_{B_i} - x_{D_i}$;
- Si calcolano le forze F_{slip} e F_{stick} e si determinano le $F_{nl_i}(t)$ come in 3.8, per ottenere al completo il vettore $F_{nl}(t)$;
- Si ha infine la seconda trasformazione per esprimere la forza in coordinate modali, per tornare quindi nel dominio di partenza:

$$\{F_{nl,mod}(t)\} = [\Psi]^T \{F_{nl}(t)\}$$

Una volta effettuato questo processo, si risolve istante per istante l'equazione di equilibrio algebricamente simile a quella del dominio fisico, ma in coordinate modali:

$$\{\dot{Y}_{mod}(t)\} = [\dot{\eta}(t); \ddot{\eta}(t)]$$

con

$$\ddot{\eta}(t) = [M_{mod}]^{-1} \cdot (-[C_{mod} + C_{aer,mod}]\dot{\eta}(t) - [K_{mod}]\eta(t) + F_{nl,mod}(t))$$

Avendo passato alla funzione un vettore di tempo discretizzato, anche in questo caso il risultato consisterà nell'ottenere una soluzione matriciale funzione del tempo, per cui considerando una riga associata ad un tempo t -esimo si avrà:

$$Y_{mod}(t_i, :) = [\{\eta(t_i)\}, \{\dot{\eta}(t_i)\}]$$

Il risultato viene infine riportato nel dominio fisico applicando per ogni istante di tempo la trasformazione modale (3.9).

3.4.2 Dominio della frequenza

Al fine di ridurre il tempo di calcolo necessario a trovare la risposta di vibrazione del sistema tramite integrazione diretta nel tempo, diversi metodi nel dominio della frequenza sono stati sviluppati per definire in maniera efficiente la risposta stazionaria. Tra questi il metodo di bilancio armonico (HBM, dall'inglese *Harmonic Balance Method*). Il concetto su cui questo si basa è quello di trovare una approssimazione, in serie di Fourier, della reale risposta di un sistema non lineare in condizione di oscillazione in ciclo limite (LCO). Si tratta quindi di calcolare la risposta valutando solamente lo stato stazionario periodico che il sistema raggiunge. Assumendo di considerare solo la risposta in LCO si può presupporre che la soluzione possa essere rappresentata come la somma di H armoniche nel seguente modo:

$$X(t) = X_0 + \sum_{h=0}^H (X_h^c \cosh \omega t + X_h^s \sinh \omega t) = X_0 + \sum_{h=0}^H (\bar{X}_h e^{i h \omega t}) \quad (3.12)$$

dove ω è la frequenza principale e sconosciuta della risposta in LCO, $\{X_h^c\}$ e $\{X_h^s\}$ (con $h = 0, \dots, H$) sono i vettori dei coefficienti armonici di seno e coseno per i gradi di libertà del sistema, X_0 è un vettore di componenti costanti di spostamento, h è il numero associato ad un'armonica e H è il numero totale di armoniche che si vuole considerare ed è il parametro che incide sull'ordine di accuratezza che si ha nell'approssimare la risposta reale. In particolare, quando si ha $H > 1$ si parla anche di metodo di bilancio multi-armonico (MHBM, dall'inglese *Multi Harmonic Balance Method*).

La proprietà di periodicità va estesa oltre che allo spostamento, anche alle forze non

lineari; si possono quindi esprimere anche queste tramite la serie di Fourier nel seguente modo:

$$F_{nl}(X, t) = F_0 + \sum_{h=0}^H \left(F_h^c \cosh \omega t + F_h^s \sinh \omega t \right) = F_0 + \sum_{h=0}^H \left(\bar{F}_h e^{i h \omega t} \right) \quad (3.13)$$

dove F_0 , F_h^c e F_h^s sono i vettori dei coefficienti armonici per le forze di contatto non lineari che sono rispettivamente dipendenti dai coefficienti armonici di spostamento X_0 , X_h^c e X_h^s .

La possibilità di poter esprimere in questo modo le variabili rende il metodo computazionalmente più semplice poiché imponendo il bilancio di tutte le armoniche (come si vedrà di seguito) si passa dalle originali equazioni differenziali non lineari ad un set di equazioni algebriche non lineari. Le incognite di queste equazioni sono la frequenza fondamentale che il sistema andrà a raggiungere a regime e i coefficienti delle armoniche che serviranno a dare l'informazione di ampiezza di oscillazione in LCO.

Di seguito si presenta in maniera più dettagliata il procedimento usato nell'applicazione dell'MHBM in presenza di coordinate fisiche.

1. Dominio di frequenza fisico

Partendo dall'equazione generale (3.7) e sostituendo in essa le espressioni, opportunamente derivate, di forza e spostamento espressi in serie di Fourier (3.12) e (3.13) in versione compatta si ottiene:

$$-\omega^2 [M] \sum_{h=0}^H h^2 \{ \bar{X}_h \} e^{i h \omega t} + i \omega [C + C_{aer}] \sum_{h=0}^H h \{ \bar{X}_h \} e^{i h \omega t} + [K] \sum_{h=0}^H \{ \bar{X}_h \} e^{i h \omega t} = \sum_{h=0}^H \bar{F}_{nl_h}(\bar{X}) e^{i h \omega t}$$

che si riscrive come:

$$\sum_{h=0}^H \left[-(h\omega)^2 [M] + i h \omega [C + C_{aer}] + [K] \right] \{ \bar{X}_h \} e^{i h \omega t} = \sum_{h=0}^H \bar{F}_{nl_h}(\bar{X}) e^{i h \omega t}$$

Eliminando la dipendenza dal tempo si ottiene un set di equazioni algebriche complesse indipendenti pari al numero di armoniche H che si vogliono considerare, del tipo:

$$\left[-(h\omega)^2 [M] + i h \omega [C + C_{aer}] + [K] \right] \{ \bar{X}_h \} = \{ \bar{F}_{nl_h}(\bar{X}) \} \quad h = 0, \dots, H$$

Definendo $[\bar{A}_h] = \left[-(h\omega)^2 [M] + i h \omega [C + C_{aer}] + [K] \right]$ l'equazione è riscrivibile in maniera più sintetica come:

$$[\bar{A}_h] \{ \bar{X}_h \} = \{ \bar{F}_{nl_h}(\bar{X}) \} \quad h = 0, \dots, H \quad (3.14)$$

Questa espressione è non lineare per la presenza della forza di contatto \bar{F}_{nl_h} . Per definire questa componente viene utilizzato il metodo alternato tempo-frequenza (AFT, dall'inglese *Alternating Frequency-Time domain method*) [17], anche conosciuto come metodo ibrido tempo-frequenza (HFT, dall'inglese *Hybrid Frequency Time method*). Il metodo consiste nel passare dal dominio della frequenza al dominio del tempo, dove è possibile utilizzare il modello di contatto fisico per il calcolo delle forze di attrito non lineari, per poi trasformare il risultato nuovamente nel dominio della frequenza tramite la trasformata di Fourier.

Analizzando passo passo gli step, si procede in questo modo:

- A partire dal vettore dei coefficienti complessi di Fourier \bar{X}_h si calcolano gli spostamenti relativi per ogni settore e per ogni armonica $\bar{u}_h = \Delta\bar{X}_h = \bar{X}_{h_B} - \bar{X}_{h_D}$ per $h = 0, \dots, H$;
- Agli spostamenti relativi $\Delta\bar{X}_h$ viene applicata la trasformata inversa di Fourier (IFFT, dall'inglese *Inverse Fast Fourier Transform*) per definire gli spostamenti relativi periodici $u(t)$ nel dominio del tempo;
- Si applicano le equazioni costitutive del modello di contatto per definire il ciclo di isteresi e di conseguenza l'andamento nel tempo della forza di contatto $F_{nl}(t)$;
- Alla $F_{nl}(t)$ viene applicata la trasformata di Fourier (FFT, dall'inglese *Fast Fourier Transform*) per trovare, infine, le componenti armoniche della forza: \bar{F}_{nl_h} .

Schematicamente i quattro step corrispondono ai passaggi della figura 3.6, dove il rosso definisce il dominio della frequenza e il blu il dominio del tempo.

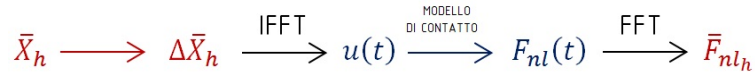


Figura 3.6: Schema di applicazione del metodo AFT

La definizione del vettore $\{\bar{F}_{nl_h}\}$ è un passaggio intermedio all'interno di un calcolo iterativo più grande, quello necessario ad aggiornare i coefficienti di spostamento \bar{X}_h , incognite del problema, tramite il metodo iterativo di Newton-Raphson. L'equazione iterativa che permette ciò è l'equazione di residuo:

$$R = [\bar{A}_h]\{\bar{X}_h\} - \{\bar{F}_{nl_h}(\bar{X})\} \quad h = 0, \dots, H \quad (3.15)$$

che non è altro che l'insieme di un set di equazioni non lineari che, partendo da dei valori di primo tentativo, segue sempre un processo di aggiornamento per far tendere il residuo R a zero, ossia per trovare la soluzione effettiva $\{\bar{X}_h\}$ che risolva l'equilibrio.

Per ogni modifica del residuo viene quindi aggiornato il vettore $\{\bar{X}_h\}$ che a sua volta definisce un nuovo $\{\bar{F}_{nl_h}\}$ e così l'iterazione procede fino a convergenza verso la soluzione che approssima la risposta in LCO del sistema non lineare. La (3.15) non è però l'unica equazione che viene iterata. Il fatto di dover definire la risposta dinamica di un sistema non forzato ma soggetto ad un fenomeno di autoeccitazione, porta con sé il problema di avere un'altra incognita oltre i coefficienti armonici di spostamento: la frequenza principale ω che il sistema raggiunge all'equilibrio finale.

Questo porta ad avere, in ogni ciclo di iterazione, un numero di incognite maggiore di 1 rispetto al numero di equazioni disponibili. Si hanno quindi $gdl \cdot N \cdot (2 \cdot H + 1)$ equazioni (vedi appendice A.2) e $gdl \cdot N \cdot (2 \cdot H + 1) + 1$ incognite. Per poter risolvere il problema e trovare tutti i parametri non conosciuti si impone quindi un'altra relazione: l'equazione di bilancio dell'energia

$$E_{aer} = E_{diss} \quad (3.16)$$

posta sotto forma di residuo per essere inserita nel metodo Newton-Raphson:

$$r = E_{aer} - E_{diss} \quad (3.17)$$

dove E_{aer} è l'energia introdotta al sistema dal flusso aerodinamico e E_{diss} è l'energia dissipata dalla struttura. Le definizioni di queste energie e del bilancio risultante saranno trattate nei capitoli 4 e 5 in funzione della tipologia di sistema sotto analisi.

Le equazioni (3.15) e (3.17) devono quindi essere combinate e risolte simultaneamente in questo modo:

$$Res_{tot} = \{R ; r\} \quad (3.18)$$

dove R servirà ad aggiornare i valori di $\{\bar{X}_h\}$, e r di valori di ω .

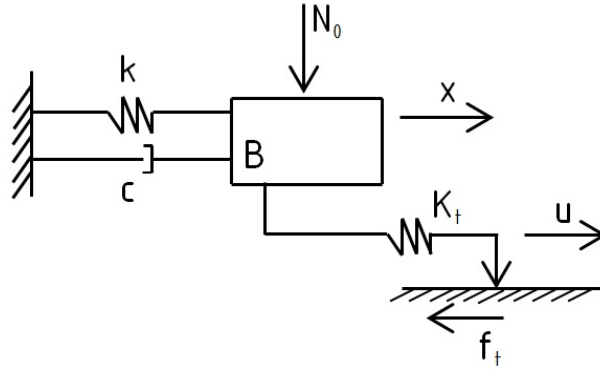
Si termina il processo di calcolo quando, conclusa l'iterazione, si ottengono $\{\bar{X}_h\}$ e ω , i due elementi sufficienti a descrivere la risposta in LCO. Tramite una operazione di IFFT sui coefficienti armonici di spostamento si risale infine all'informazione di ampiezza di equilibrio in LCO.

Capitolo 4

Analisi flutter per modello ad un grado di libertà

4.1 Definizione del modello

Il primo passo per lo studio del fenomeno flutter agente su una struttura palare è quello di analizzare il problema partendo dalla formulazione più semplice dello stesso. Il vantaggio di utilizzare ciò è che la fisica relativamente essenziale del sistema consente una migliore interpretazione dei risultati e una prima approssimazione della soluzione generale di questa tipologia di problema dinamico. Come anticipato quindi nel paragrafo 3.2 la prima fase di indagine si concentra sullo studio di un sistema parametrico ad un grado di libertà ("1DOF", dall'inglese *Degree Of Freedom*) simulante una pala in contatto con un elemento fisso (figura 3.1, riportata anche qui di seguito):



Sistema parametrico ad un grado di libertà

L'equazione generale (3.6) fino ad ora riportata assume quindi una formulazione "ridotta" quale:

$$m\ddot{x} + c\dot{x} + kx = f_{nl}(x) \quad (4.1)$$

dove m e k sono la massa e la rigidità del sistema, $f_{nl}(x)$ è la forza di contatto di attrito non lineare, N_0 è il precarico costante, K_t è la rigidità di contatto tangenziale e c è uno smorzamento viscoso *negativo* che ha lo scopo di simulare l'effetto di una forzante aerodinamica. Il fattore di smorzamento può infatti essere:

- $c > 0$ (positivo) : definisce una dissipazione di energia dalla struttura verso l'esterno;
- $c < 0$ (negativo): definisce energia in ingresso alla struttura.

Il fatto di avere $c < 0$, che raffigura un input energetico, si avvicina quindi a riprodurre l'azione della forzante aerodinamica che trasferisce energia dal flusso alla struttura palare. Questo coefficiente di smorzamento è espresso come:

$$c = 2\zeta_{aer}\omega_n$$

4.2 Lo studio di Sinha e Griffin

Un'analisi su un sistema ad un solo grado di libertà è stata già effettuata da Sinha e Griffin [1] ed è utile riassumere in breve due degli aspetti principali emersi dal loro studio, poiché questi saranno i pilastri su cui basare l'indagine successiva.

Condizione limite di stabilità funzione di ζ_{aer}

Si è già sottolineata l'importanza dei giunti di contatto per attrito nel controllo della risposta a flutter. Questi permettono di dissipare energia per attrito, in opposizione a quella aerodinamica in ingresso. Il sistema quindi può raggiungere la condizione di equilibrio LCO quando il bilancio energetico è soddisfatto e ciò è definito nel grafico delle energie (figura 1.7) come quei punti di intersezione in cui $E_{aer} = E_{diss}$. Il perché di questi andamenti di energia viene dettagliatamente spiegato in [3]; per questo studio risulta invece più importante osservare la diversa natura dei due punti di equilibrio, si parla infatti di condizione di equilibrio stabile per il punto 1 ed instabile per il punto 2. Si spiega il perché di seguito:

- **punto 1-stabile:** ipotizzando di partire da una condizione iniziale di ampiezza compresa nella zona centrale (zona tra i punti 1 e 2) si avrebbe $E_{diss} > E_{aer}$. Ciò significa che la struttura starebbe dissipando più energia di quella in ingresso, dunque più energia rispetto a quanto sarebbe effettivamente necessario disperdere. Il sistema allora tornerebbe ad abbassare l'ampiezza di vibrazione fino al raggiungimento del punto 1.

Partendo invece da una zona inferiore al punto 1, essendo $E_{aer} > E_{diss}$, il sistema aumenterebbe la sua ampiezza di vibrazione in modo da aumentare la sua dissipazione e contrastare l'arrivo dell'energia dall'esterno.

Si capisce quindi che possibili perturbazioni rispetto alla condizione di equilibrio riporterebbero il sistema a convergere in 1 e questo è il motivo per cui il punto 1 viene definito un *punto di equilibrio stabile* o *punto di LCO*;

- **punto 2-instabile:** partendo da una condizione iniziale di ampiezza molto grande si avrebbe $E_{aer} > E_{diss}$. Il sistema, nel tentativo di aumentare la sua capacità di dissipare energia si porterebbe ad ampiezze di vibrazione maggiori ma questo porterebbe di conseguenza ad aumentare anche l'energia aerodinamica in ingresso alla struttura. La conseguenza di ciò sarebbe una risposta che diverge.

Ipotizzando di partire invece nella zona centrale tra 1 e 2 si genererebbe quanto detto nel punto 1.

Si vede quindi che le perturbazioni attorno al punto 2 porterebbero il sistema ad allontanarsi sempre più da questo e tale condizione lo rende un *punto di equilibrio instabile* o *punto limite della stabilità*.

Da qui si comprende come considerare solamente il bilancio energetico non sia un presupposto sufficiente alla stabilità. Mentre le condizioni nel punto 1 sono in grado di sopprimere il flutter, le condizioni nell'intorno destro del punto 2 sono quelle che lo alimentano. Ecco quindi che risulta evidente come sia necessario mantenere la zona

di lavoro limitata attorno al punto stabile del sistema (bacino di attrazione del ciclo limite stabile) e come poi sia indispensabile la presenza degli elementi di contatto per attrito; sono questi che in fase slip disperdono energia rendendo possibile un continuo equilibramento del sistema.

Capire il grafico delle energie aiuta a comprendere meglio il primo risultato dello studio di Sinha e Griffin che definisce il massimo valore di smorzamento aerodinamico negativo, ζ_{aer} , il cui effetto di instabilità può essere equilibrato dall'elemento di attrito. Si guardi la figura 4.1.

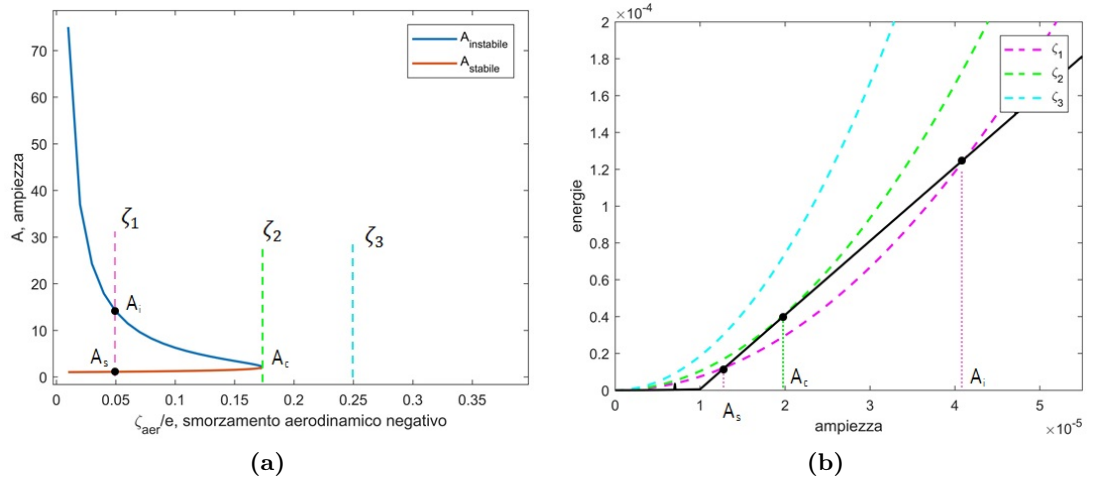


Figura 4.1: Influenza di ζ_{aer} sulla stabilità

Essendo i valori positivi di smorzamento aerodinamico non un problema alla stabilità del sistema questi non vengono presi in considerazione, invece per quelli negativi che definiscono instabilità emerge quanto segue:

- All'interno di un certo range $0 < \zeta_{aer} < \zeta_{aer}^*$, considerato un valore di ζ_{aer} (per esempio $\zeta_{aer,1}$) sono presenti per questo due possibili valori di ampiezza per cui si può avere la condizione $E_{diss} = E_{aer}$; nello specifico sono A_i e A_s . A_s (con s =stabile) e tutti i punti appartenenti alla sua curva, definiscono la condizione di equilibrio stabile, quindi quei valori di ampiezza per cui si stabilisce un LCO (punto 1 del grafico delle energie). A_i (con i =instabile) e tutti i punti appartenenti alla sua curva, definiscono invece una condizione di equilibrio instabile (punto 2 del grafico delle energie);
- Aumentando in valore assoluto il valore negativo di ζ_{aer} si arriva alla condizione limite $\zeta_{aer}^* = \zeta_{aer,2}$ per cui l'ampiezza corrispondente che può stabilirsi è solo una, A_c , che rappresenta una condizione limite di equilibrio instabile;
- Per valori di $\zeta_{aer} > \zeta_{aer}^*$ il sistema non assume nessun valore di ampiezza definito; ciò significa che non è possibile raggiungere una stabilità dal momento che il giunto di attrito non riesce a limitare le vibrazioni, per cui si ha sempre $E_{aer} > E_{diss}$ e risposta divergente.

Da qui emerge quindi quanto il parametro ζ_{aer} negativo sia influente ai fini della stabilità a flutter e che per quanto i contatti di attrito siano spesso la soluzione a questo problema dinamico, non sempre questi riescono a garantire la stabilità del sistema.

Importanza delle condizioni iniziali sulla stabilità della risposta

Il secondo aspetto che emerge dallo studio di Sinha e Griffin è l'importanza assunta dalle condizioni di ampiezza iniziali sulla stabilità della risposta dinamica del sistema. Un sistema infatti risulta instabile per grandi valori di spostamenti iniziali perché il lavoro fatto dalla forza aerodinamica (che è proporzionale al quadrato dell'ampiezza - eq. (4.3)) è maggiore di quello dissipato ai contatti di attrito (proporzionale all'ampiezza - eq. (4.4)). In questa condizione si ha una risposta di tipo divergente (figura 4.5c). Il sistema invece risulta stabile se, a parità di parametri, gli spostamenti iniziali sono piccoli (figure 4.5a e 4.5b).

I limiti entro cui questi valori iniziali di ampiezze possono variare garantendo una risposta stabile o instabile sono visibili in figura 4.1a. Un punto appartenente all'area compresa tra linea rossa e blu porterà ad una risposta di tipo stabile, uno nell'area circostante porterà ad una risposta di tipo instabile. Nel grafico in figura 4.1b ciò equivale a dire che valori di ampiezze più piccoli del punto di instabilità portano ad una soluzione in equilibrio, per valori maggiori il sistema avrà una risposta divergente.

4.3 Sviluppo dell'analisi

Dopo aver definito gli aspetti principali emersi dallo studio dei due tra i più importanti studiosi in questo ambito, si procede ad esaminare l'indagine svolta sul sistema appena presentato nel paragrafo 4.1. Per determinare la risposta dinamica del sistema l'equazione (4.1) è stata implementata sia nel dominio del tempo fisico sia nel dominio in frequenza. In questo modo, oltre che essere sicuri del risultato, è possibile evidenziare la differenza computazionale tra i metodi. Per il dominio nel tempo si è applicato esattamente il procedimento definito nel paragrafo 3.4.1 avendo però un solo grado di libertà in gioco. Nel dominio della frequenza si è utilizzato il procedimento definito nel paragrafo 3.4.2 implementando l'equazione

$$\left(-(h\omega)^2 m + ih\omega c + k \right) \bar{x}_h = \bar{f}_{nl_h}(\bar{x}) \quad h = 1, \dots, H \quad (4.2)$$

Essendo presente nel dominio della frequenza anche l'incognita ω , frequenza di equilibrio in LCO, risulta necessario implementare una seconda espressione per avere tante equazioni quante le incognite del problema. Si usa quindi, come anticipato in 3.4.2 il bilancio delle energie

$$E_{aer} = E_{diss}$$

Secondo quanto definito in [11] si ha:

$$E_{aer} = \pi |\bar{x}_1| \text{imag}(i\omega c \bar{x}_1) = \pi |\bar{x}_1| \text{imag}(i\omega 2\zeta_{aer} \omega^2 \bar{x}_1) \quad (4.3)$$

$$E_{diss} = \pi |\bar{x}_1| \text{imag}(\bar{f}_{nl_1}) \quad (4.4)$$

In queste equazioni i coefficienti di \bar{x}_h e \bar{f}_{nl_h} sono espressi solamente in funzione della prima armonica poiché è questa che apporta il maggior contributo energetico mentre le altre hanno contributo trascurabile.

Parametri di primo tentativo

Impostare dei parametri di primo tentativo $Y_0 = \{x; \dot{x}\}$ per l'analisi nel tempo non è complicato. Il sistema, al termine della fase transitoria, riesce a raggiungere facilmente la risposta in LCO; è necessario semplicemente fare attenzione nell'evitare valori troppo

elevati di ampiezza che possano portare la risposta a divergere (come spiegato nel paragrafo 4.2).

Nel caso invece del dominio in frequenza i parametri di primo tentativo assumono un ruolo molto più importante in quanto il calcolatore che tramite Newton-Raphson deve risolvere iterativamente l'equilibrio del $\{Res_{tot}\}$ può non arrivare a convergenza partendo da condizioni troppo lontane da quelle che effettivamente caratterizzano la risposta del sistema. Per ovviare a ciò si trovano due punti di primo tentativo tramite il bilancio delle energie usando le equazioni (4.3) e (4.4), in cui viene definito un range di spostamento x variabile entro cui trovare i due punti di equilibrio, e viene imposta $\omega = \omega_{stick}$. Ciò che si trova è il grafico in figura 4.2 con i due punti di primo tentativo 1 e 2.

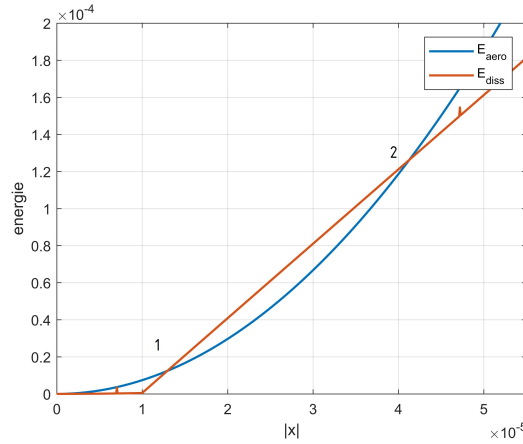


Figura 4.2: Grafico delle energie per modello 1dof

4.4 Discussione dei risultati

Inserendo i due valori di tentativo nel calcolo il frequenza emergono due risultati di possibili LCO, figura 4.3. Quello in blu derivante dal punto 1 del grafico 4.2 e quello in rosso dal punto 2.

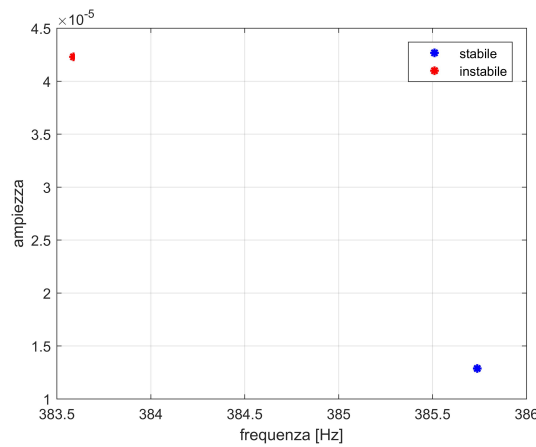


Figura 4.3: Risultato del calcolo in frequenza, modello 1dof

Conoscendo il significato del grafico delle energie ottenuto si prevede già che il punto blu sia la soluzione dell'equilibrio stabile del sistema e che quella in rosso sia quella

relativa all'equilibrio instabile. A conferma di ciò il risultato nel dominio del tempo, figura 4.4. La curva è molto compatta, sul lato destro del grafico viene quindi mostrato un intervallo di tempo ridotto per osservare in modo chiaro l'oscillazione.

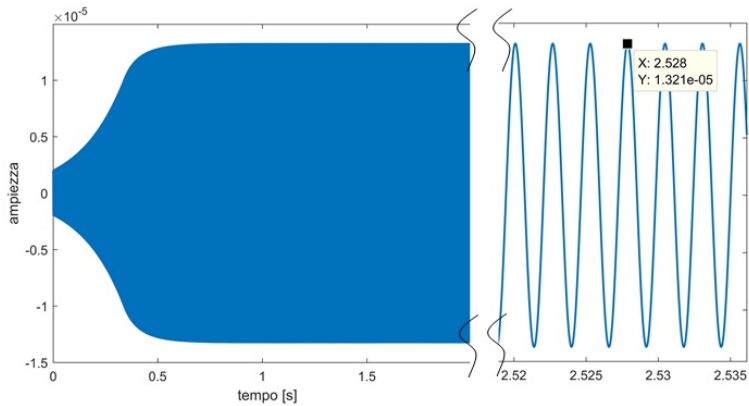


Figura 4.4: Risultato del calcolo nel tempo, modello 1dof

	ampiezza [m]	Errore amp[%] rispetto ad ¹	frequenza [Hz]	Errore freq.[%] rispetto ad ¹	tempo di calcolo [s]	Δt [%] rispetto ad ¹
Tempo ¹	$1.322 \cdot 10^{-5}$		386.5		39	
Frequenza	$1.288 \cdot 10^{-5}$	2.57	385.7	0.2	7	-82

Tabella 4.1: Risultati tempo - frequenza a confronto, modello 1dof

Confrontando i due metodi nella tabella 4.1 risulta che il dominio del tempo consente di ottenere la soluzione esatta del problema dinamico della struttura ma impiega un elevato tempo di calcolo, che tende a crescere di molto con l'aumentare della complessità del sistema. Il dominio della frequenza seppur con un errore minimo riesce ad approssimare bene la soluzione e con una diminuzione notevole del tempo di calcolo.

Considerando poi solamente il dominio in frequenza, si può analizzare quanto il grado di approssimazione della soluzione esatta sia tanto migliore quanto più si considerano armoniche in gioco. Guardando in tabella 4.2 si nota che la differenza non è elevata ma lo sarebbe di più considerando un sistema molto complesso. In questo caso anche utilizzare $H = 1$ risulterebbe di per se sufficiente a definire una risposta che rispecchi quella del dominio del tempo.

	ampiezza [m]	Errore [%]
$H = 1$	$1.2878 \cdot 10^{-5}$	2.59
$H = 2$	$1.2878 \cdot 10^{-5}$	2.59
$H = 3$	$1.288 \cdot 10^{-5}$	2.57

Tabella 4.2: Numero di armoniche considerate nel calcolo MHBM, modello 1dof

4.4.1 Variazione dei parametri

Dopo aver riprodotto la risposta dinamica del sistema, il secondo step è quello di studiare ciò che la condiziona. In questo modo, oltre che essere in grado di osservare come il sistema risponde, si potranno trovare soluzioni per controllare la dinamica del sistema e prevenire eventuali criticità. Viene quindi eseguita un'analisi di sensitività variando, rispetto alla condizione nominale di calcolo, uno ad uno tutti i parametri che definiscono la risposta non lineare a flutter del modello appena analizzato.

Condizione iniziale

La figura 4.5 mostra la risposta nel tempo per tre condizioni iniziali: (4.5a) con condizione iniziale compresa tra lo zero e il punto di LCO; (4.5b) con condizione iniziale compresa tra il punto di LCO e il punto limite di stabilità; (4.5c) con condizione iniziale superiore a quello di stabilità. In arancio il valore di ampiezza di equilibrio in LCO. Il risultato è coerente con quanto spiegato nell'analisi di Sinha e Griffin relativamente ai possibili valori di spostamento iniziali. Si nota inoltre, per i casi (a) e (b), che pur arrivando allo stesso valore di equilibrio in LCO, la scelta del parametro iniziale influenza il tempo con il quale il sistema arriva allo stato a regime.

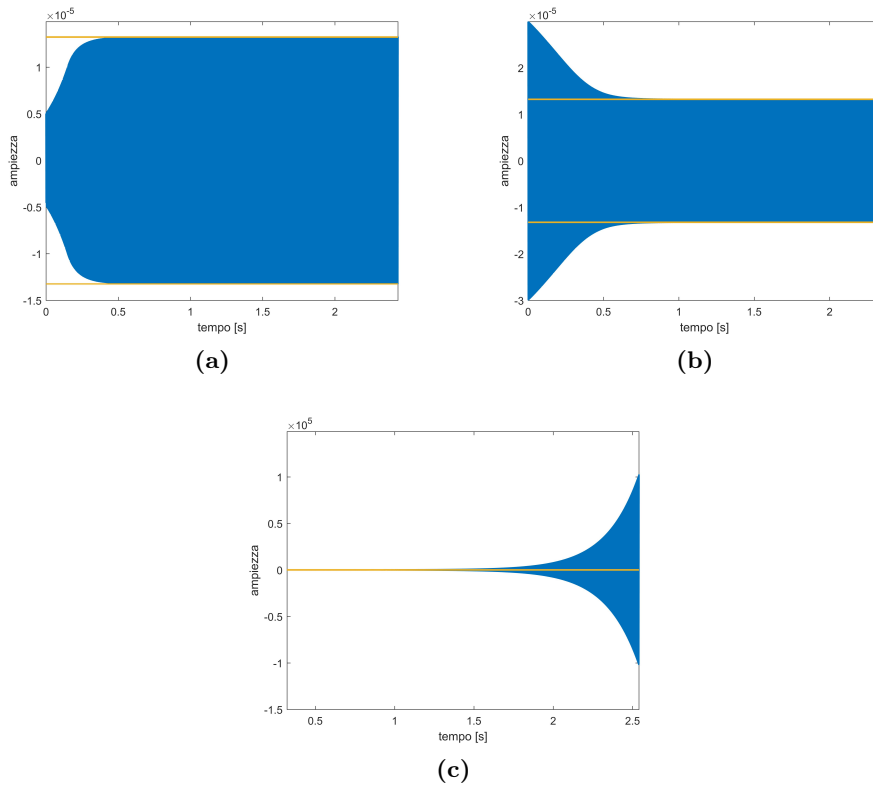


Figura 4.5: Influenza delle condizioni iniziali sulla risposta nel tempo

Coefficiente ζ_{aer}

Variando il valore del coefficiente ζ_{aer} si ottiene quanto mostrato in figura 4.6. Si osserva che, aumentando in valore assoluto il valore del parametro, si ha un aumento di ampiezza di LCO e una riduzione di frequenza di equilibrio. In senso fisico il tutto è giustificato per il fatto che, entrando più energia aerodinamica nel sistema, quest'ultimo aumenta la sua

ampiezza di vibrazione per dissipare maggiore energia e contemporaneamente diminuisce la sua frequenza di equilibrio perché, per via dello slip che aumenta progressivamente, il sistema diviene meno rigido.

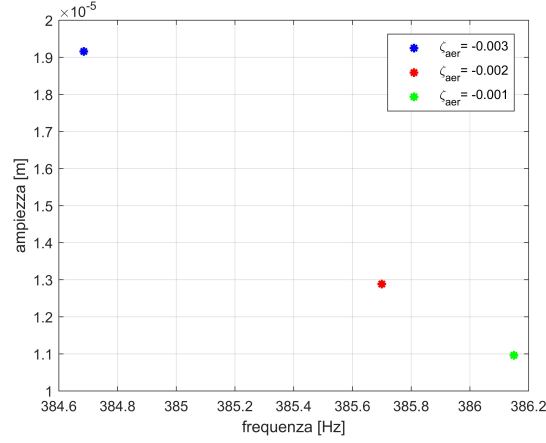


Figura 4.6: Influenza di ζ_{aer} sulla risposta del punto stabile

Coefficiente di attrito μ

Variando il coefficiente di attrito, figura 4.7, emerge che all'aumentare del valore del parametro la frequenza di equilibrio rimane costante e l'ampiezza in LCO cresce. Fisicamente questo trova spiegazione nel fatto che aumentando il coefficiente di attrito il sistema diviene più rigido, dunque per dissipare uno stesso quantitativo di energia aerodinamica in ingresso, esso necessita di una maggiore ampiezza di vibrazione.

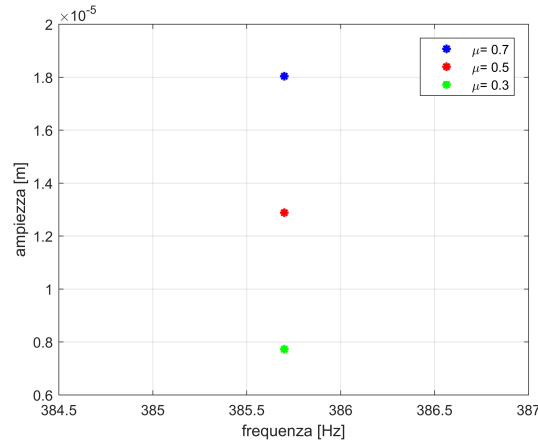


Figura 4.7: Influenza di μ sulla risposta del punto stabile

Precarico N_0

La figura 4.8 mostra la risposta del sistema al variare del precarico N_0 ; essa è uguale a quella relativa alla variazione del parametro μ . Infatti N_0 , come μ , influisce sulla rigidità del contatto. Tanto più il precarico è alto, tanto più la struttura è vincolata ed ha bisogno di ampiezze di vibrazione maggiori per dissipare energia.

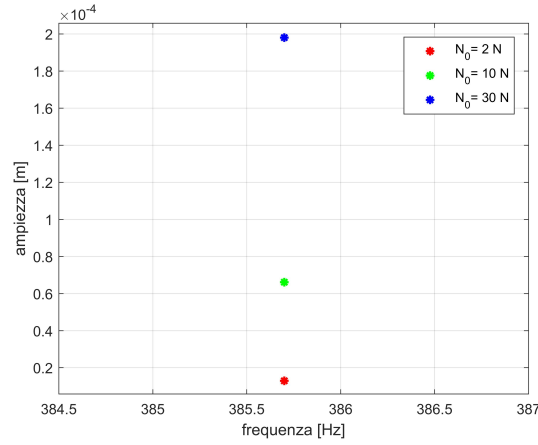


Figura 4.8: Influenza di N_0 sulla risposta del punto stabile

L'aumento di energia dissipata al crescere di N_0 , così anche al crescere di μ , può essere visualizzata confrontando le aree dei cicli di isteresi di due dei casi analizzati, si veda la figura 4.9. Dal confronto dei cicli di isteresi si osserva per il caso con precarico maggiore un'area più grande (dunque più energia dissipata) e una fase di slip maggiore.

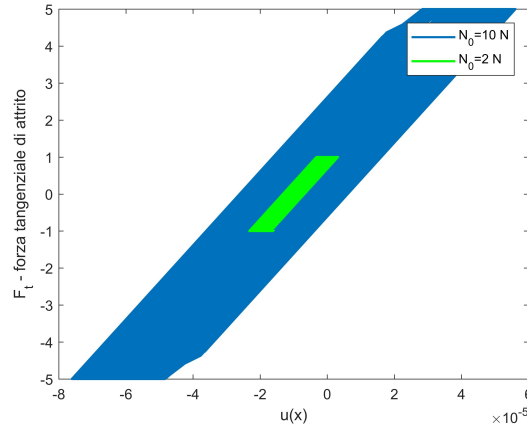


Figura 4.9: Cicli di isteresi al variare di N_0

Rigidezza di contatto tangenziale K_t

Variando infine la rigidezza di contatto tangenziale si ottiene la risposta in figura 4.10. All'aumentare di K_t aumenta la frequenza di equilibrio della struttura e diminuisce l'ampiezza in LCO. Per capire il perché di tale risposta si osservino i cicli di isteresi in figura 4.11. All'aumentare di K_t corrisponde un ciclo di isteresi più piccolo, dunque una dissipazione di energia minore. Questo accade perché il sistema diviene più rigido aumentando così la sua frequenza di vibrazione, e diminuendo la fase di slip il sistema è meno libero di vibrare e raggiunge ampiezze minori.

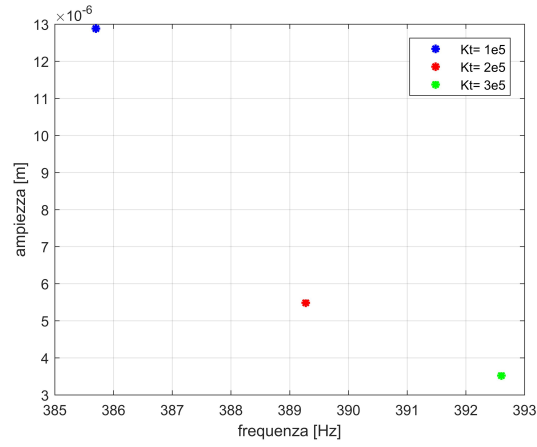


Figura 4.10: Influenza di K_t sulla risposta del punto stabile

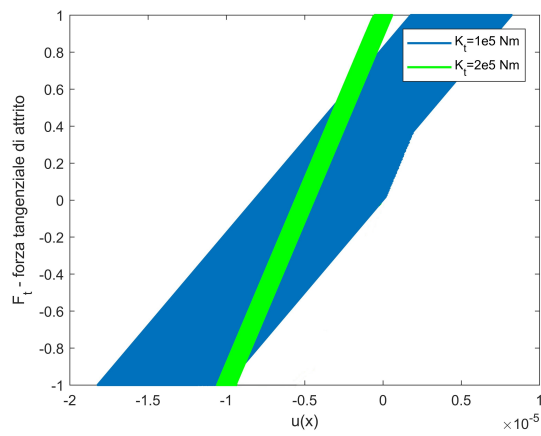


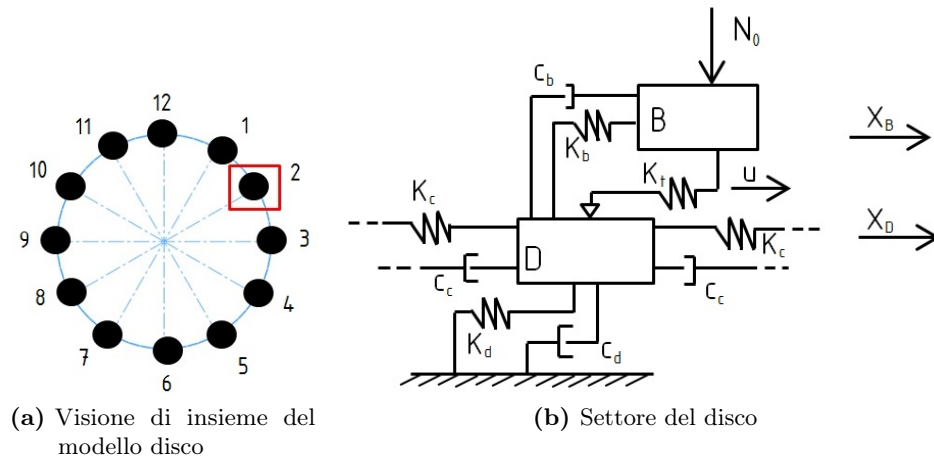
Figura 4.11: Cicli di isteresi al variare di K_t

Capitolo 5

Analisi flutter per modello a più gradi di libertà

5.1 Definizione del modello

Lo studio del modello parametrico ad un grado di libertà ha permesso di definire l'importanza che i singoli parametri hanno nella determinazione della risposta del sistema. Per rappresentare più realisticamente il fenomeno del flutter su un componente rotorico il passo successivo è poi quello di considerare un sistema di complessità maggiore. Si procede quindi nell'analisi di un sistema parametrico a più gradi di libertà rappresentante un disco palettato costituito da 12 settori, presentato precedentemente in figura 3.2 e riportato anche qui di seguito:



Sistema parametrico a più gradi di libertà

La schematizzazione utilizzata non ha la pretesa di rappresentare fedelmente la complessità del concreto componente palettato ma ha il pregio di condurre con relativa semplicità, ad un modello adatto a fornire una spiegazione accurata del fenomeno di instabilità. Di seguito si definiscono gli elementi presenti.

La figura 3.2b rappresenta uno dei 12 settori che costituiscono il disco palettato. Questo è costituito da due corpi principali: B, la pala e D, il disco, di rispettive masse m_b e m_d . Questi sono connessi tra loro tramite il giunto di contatto per attrito la cui modellizzazio-

ne è stata studiata nel paragrafo 2.4 e la cui applicazione è stata precedentemente vista anche nel modello ad un grado di libertà; anche in questo caso i parametri caratteristici del giunto di contatto sono K_t , la rigidezza tangenziale di contatto e N_0 il precarico costante e normale all'interfaccia di collegamento disco-pala. Gli altri elementi presenti sono: K_d e K_b , rispettivamente le rigidezze associate a disco e pala, K_c la rigidezza di collegamento tra settori adiacenti e c_d, c_b e c_c gli smorzamenti viscosi strutturali rispettivamente associati. Per ogni settore N , con $N = 1, \dots, 12$ ci sono due gradi di libertà (DOFS, dall'inglese *Degrees Of Freedom*), uno relativo allo spostamento del disco x_d e uno relativo a quello della pala x_b .

L'equazione generale del moto del disco palettato studiato nella sua totalità è la (3.6), qui riportata per convenienza:

$$[M]\ddot{X} + [C + C_{aer}]\dot{X} + [K]X = F_{nl}(X) \quad (5.1)$$

con $[M], [C], [K]$ le matrici di massa, smorzamento e rigidezza del sistema, $[C_{aer}]$ la matrice di smorzamento aerodinamico e $F_{nl}(X)$ il vettore delle forze non lineari di attrito.

Le matrici $[M]$ e $[K]$, entrambe di dimensioni $(m \times m)$ con $m = DOFS \text{ per settore} \cdot \text{numero di settori} = DOFS \cdot N$, sono così definite:

$$[M] = \begin{bmatrix} [m]_{S,1} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & [m]_{S,2} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \ddots & 0 \\ 0 & 0 & 0 & [m]_{S,N} \end{bmatrix}$$

con la matrice di massa del settore i -esimo:

$$[m]_{S,i} = \begin{bmatrix} m_d & 0 \\ 0 & m_b \end{bmatrix} \quad i = 1, \dots, N$$

$$[K] = \begin{bmatrix} [k]_{S,1} & [k]_c & 0 & [k]_c \\ [k]_c & [k]_{S,2} & \ddots & 0 \\ 0 & \ddots & \ddots & [k]_c \\ [k]_c & 0 & [k]_c & [k]_{S,N} \end{bmatrix}$$

con la matrice di rigidezza del settore i -esimo:

$$[k]_{S,i} = \begin{bmatrix} K_d + K_b + 2K_c & -K_b \\ -K_b & K_b \end{bmatrix} \quad i = 1, \dots, N$$

e

$$[k]_c = \begin{bmatrix} -K_c & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$$

Viene definita anche la matrice di rigidezza in condizioni stick $[K]_{STICK}$ per cui l'elemento di contatto lavora in aderenza e il disco e la pala sono collegati tramite la rigidezza K_t . In questa condizione la matrice di rigidezza del settore i -esimo è:

$$[k]_{S,i,STICK} = \begin{bmatrix} K_d + K_b + 2K_c + K_t & -K_b - K_t \\ -K_b - K_t & K_b + K_t \end{bmatrix} \quad i = 1, \dots, N$$

Queste matrici sono necessarie ad individuare, per mezzo dell'analisi modale, le caratteristiche dinamiche "proprie" della struttura quali il vettore delle frequenze naturali

f_n e le deformate modali corrispondenti alle frequenze naturali ϕ_n ossia gli autovettori stazionari reali e positivi (parametri trovati sia in condizione free che stick utilizzando rispettivamente $[K]$ e $[K]_{STICK}$ nell'analisi modale). Sono queste caratteristiche proprie della struttura che permettono il calcolo delle matrici di smorzamento $[C]$ e $[C_{aer}]$. Prima di poterle esplicitare è però necessario il passaggio da autovettori reali ad autovettori rotanti per tutti i modi doppi (come definiti nel paragrafo 1.2.1). Le matrici fisiche di smorzamento devono infatti tener conto della natura rotante del fenomeno flutter dunque la base modale che le definisce deve essere coerente al fenomeno fisico rotante. Inoltre queste matrici sono funzione dei coefficienti di smorzamento aerodinamici adimensionali ζ_{aer} che vengono forniti dalle analisi CFD come associati a modi di vibrare rotanti, quindi questa associazione deve essere mantenuta per ottenere un risultato fisico che sia veritiero e ragionevole.

Per ottenere degli autovettori rotanti a partire da quelli stazionari è sufficiente considerare i modi doppi $\phi_{1,i}$ e $\phi_{2,i}$ (definendo con 1 e 2 il primo e il secondo componente per tutte le i -esime coppie di modi doppi) e scrivere:

$$\bar{\psi}_1 = \phi_1 + i\phi_2$$

$$\bar{\psi}_2 = \phi_1 - i\phi_2$$

La rotazione è matematicamente data dalla somma delle due onde ϕ_1 e ϕ_2 uguali in deformata modale e frequenza ma sfasate di 90 gradi. Si ottengono due autovettori rotanti $\bar{\psi}_1$ e $\bar{\psi}_2$ che in funzione del segno + o - definiscono una rotazione concorde o discorde alla direzione di rotazione del disco. In questo modo si passa quindi da autovettori stazionari e reali ad autovettori rotanti e complessi; entrambi sono collocati nelle colonne delle rispettive matrici di autovettori $[\Phi]$ e $[\Psi]$.

Dopo aver normalizzato gli autovettori in funzione della matrice di massa si procede a definire le matrici di smorzamento come:

$$[C] = inv[\Psi^H] \cdot (2\{\zeta_m\}[\omega_n]) \cdot inv[\Psi] \quad (5.2)$$

$$[C_{aer}] = inv[\Psi^H]_{STICK} \cdot (2\{\zeta_{aer}\}[\omega_n]_{STICK}) \cdot inv[\Psi]_{STICK} \quad (5.3)$$

dove ζ_m è il coefficiente adimensionale di smorzamento strutturale ed entra nel calcolo come un vettore con componenti di valore costante, ζ_{aer} il vettore di coefficienti adimensionali di smorzamento aerodinamico definito nel paragrafo 3.3 e $[\omega_n]$ e $[\omega_n]_{STICK}$ sono le matrici diagonali delle pulsazioni naturali del sistema in condizione free e stick. L'espressione di $[C_{aer}]$ in (5.3) riprende esattamente quella presentata nel paragrafo 3.3.

Per comprendere al meglio i concetti legati ai diametri nodali, ai modi singoli e doppi, stazionari o rotanti, si riportano di seguito degli esempi numerici a chiarimento di questi elementi fondamentali a definire la base delle analisi di risposta dinamica di un disco rotorico vibrante.

Nelle analisi del sistema parametrico rappresentante un disco palettato soggetto a flutter sono considerati 12 settori, da ciò ne consegue per via dell'equazione (1.3) un numero di diametri nodali pari a 6. Di questi, il numero 0 e 6 sono associati a modi singoli, quelli da 1 a 5 sono associati a modi doppi. I modi sono ordinati per valore di frequenza crescente e sono classificati in famiglie modali. Una rappresentazione schematica è utile a capire più facilmente quanto detto, si veda quindi la tabella 5.1. Si considerano le frequenze ottenute dall'analisi modale in condizione stick; i modi singoli sono definiti da un unico valore di frequenza, i modi doppi ne hanno due uguali.

ND	frequenze 1° famiglia modale	2° famiglia modale
0	121.136	381.774
1	122.837	418.930
	122.837	418.930
2	125.303	507.251
	125.303	507.251
3	126.800	607.869
	126.800	607.869
4	127.568	694.182
	127.568	694.182
5	127.929	751.139
	127.929	751.139
6	128.035	770.940

Tabella 5.1: Frequenze naturali $[Hz]$ del sistema in condizione stick associate ai DN

Esistono diversi approcci per la classificazione delle famiglie nodali ma se si utilizza quella in frequenza (come in questo caso) il modo più semplice per distinguerle è per via grafica. In figura 5.1 si mostra un grafico in cui si riportano in ascissa i diametri nodali e in ordinata le frequenze naturali dei modi di vibrare in condizione stick ad essi associate come appena visto in tabella 5.1.

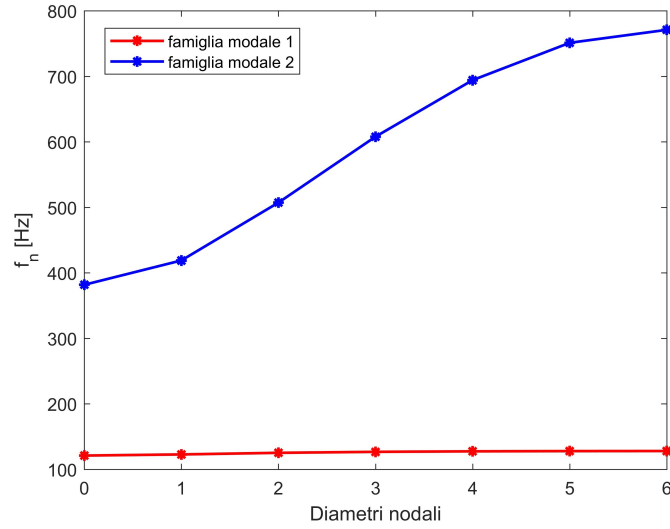


Figura 5.1: Grafico delle famiglie modali

Per spiegare il passaggio da modi stazionari a rotanti si considerino gli esempi $ND = 0$ e $ND = 1$ della tabella precedente 5.1. Il valore di frequenza associato a $ND = 0$ ha associato un autovettore reale definito stazionario

$$ND = 0 \rightarrow f_n = 121.136Hz \rightarrow \phi_0$$

I valori di frequenza associati a $ND = 1$ avranno associati degli autovettori anche essi reali, stazionari e uguali ma sfasati di 90 gradi. La loro combinazione permette di

definire autovettori rotanti, complessi e coniugati nel seguente modo:

$$ND = 1 \quad \begin{array}{ll} \rightarrow f_n = 122.830 \text{ Hz} \rightarrow \phi_1 & \bar{\psi}_1 = \phi_1 + i\phi_2 \\ \rightarrow f_n = 122.830 \text{ Hz} \rightarrow \phi_2 & \bar{\psi}_2 = \phi_1 - i\phi_2 \end{array}$$

$\bar{\psi}_1$ e $\bar{\psi}_2$ definiscono modi rotanti con rotazioni in direzioni opposte. Per tener conto di ciò si attribuisce convenzionalmente il modo di rotazione concorde alla direzione di rotazione del disco a $ND = 1$ e quello discorde a $DN = -1$.

5.2 Sviluppo dell'analisi

Tutti gli elementi dell'equazione (5.1) sono stati esplicitati e si può procedere a determinare la risposta dinamica del sistema. Anche in questo ultimo caso l'equazione è stata implementata nel dominio del tempo fisico e modale, e in quello in frequenza.

Per il dominio del tempo fisico e modale si è applicato il procedimento definito nel paragrafo 3.4.1. Nel dominio della frequenza si è utilizzato il procedimento definito nel paragrafo 3.4.2. Relativamente a questo ultimo vi è da chiarire quale sia la seconda equazione da implementare insieme alla (3.15) all'interno del calcolo iterativo di Newton-Raphson. Infatti è stato già definito il fatto che sia necessario il bilancio dell'energia (3.17) ma non le componenti che vi sono in gioco e come siano definite nel caso di un sistema a più gradi di libertà. Secondo quanto spiegato in [11] si ha che:

$$E_{aer} = \pi \cdot \text{imag}(\bar{X}_1^H \cdot F_{aer}) = \pi \cdot \text{imag}(\bar{X}_1^H \cdot (-i\omega[C_{aer}]) \cdot \bar{X}_1) \quad (5.4)$$

e

$$E_{diss} = E_{diss,s} + E_{diss,c} \quad (5.5)$$

La componente $E_{diss,s}$ è la componente di energia dissipata per via dello smorzamento viscoso proprio della struttura, mentre $E_{diss,c}$ è la somma delle energie dissipate dagli elementi di contatto di ciascun settore i -esimo del disco. Esse sono espresse come:

$$E_{diss,s} = \pi \cdot \text{imag}(\bar{X}_1^H \cdot (i\omega[C]) \cdot \bar{X}_1) \quad (5.6)$$

$$E_{diss,c} = \sum_{i=1}^N \pi |\bar{u}_{1,i}| \cdot \text{imag}(\bar{F}_{nl1,i}) \quad (5.7)$$

con $N = 12$ i settori del disco e $\bar{u}_{1,i}$ lo spostamento relativo complesso approssimato al primo ordine dell' i -esimo elemento di contatto definito come $\bar{x}_{1B,i} - \bar{x}_{1D,i}$. Come nel sistema ad un grado di libertà i coefficienti di \bar{X}_h e \bar{F}_{nlh} sono espressi solamente in funzione della prima armonica perché è questa che apporta il maggior contributo energetico.

Parametri di primo tentativo

Impostare il parametro di primo tentativo nel tempo corrisponde a definire una deformata associata ad un certo modo pre-moltiplicata per un coefficiente di ampiezza che rientri nei limiti della risposta stabile come spiegato nel paragrafo 4.2.

Nel caso del dominio in frequenza si cercano i due valori di primo tentativo come spiegato nell'ultima sezione del paragrafo 4.3 tramite il bilancio delle energie con le equazioni (5.4), (5.6) e (5.7), da cui ne derivano i punti in figura 5.2.

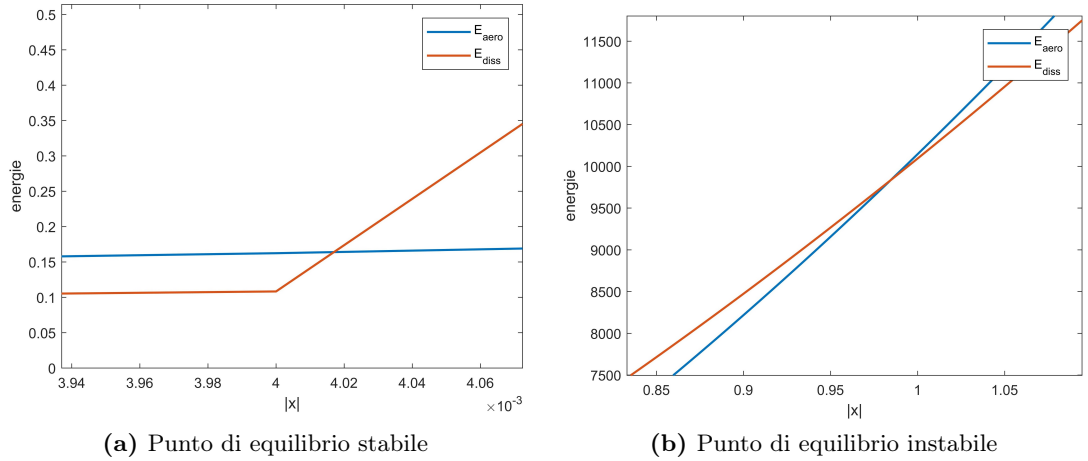


Figura 5.2: Risultati di primo tentativo nel dominio in frequenza, modello multi-dof

5.3 Discussione dei risultati

Le analisi a flutter effettuate sul sistema parametrico a più gradi di libertà si sono concentrate a definire l'importanza e l'influenza del parametro ζ_{aer} sulla risposta dinamica del disco palettato. Si è infatti già detto come sia questo parametro ad indicare la stabilità aerodinamica delle pale (si veda il paragrafo 3.3). Il coefficiente ζ_{aer} viene definito tramite l'analisi CFD per ogni modo ad ogni diametro nodale. I valori che risultano più influenti sulla risposta del sistema sono quelli associati ai modi appartenenti alla prima famiglia modale in quanto sono questi modi quelli che più facilmente vengono sollecitati essendo i meno rigidi. L'andamento tipico di questo parametro per la prima famiglia modale è mostrato in figura 3.3. Sulle ascisse è riportato l'IBPA (talvolta si utilizza ND dato il legame tra i due - equazione (1.4)) e sulle ordinate è riportato il corrispondente valore associato di ζ_{aer} . Di questi valori di smorzamento aerodinamico adimensionale l'attenzione va posta su quelli negativi poiché definiscono modi instabili responsabili del flutter; quelli positivi invece non sono rilevanti ai fini della instabilità. Un modo di effettuare l'analisi a flutter è quello di considerare solamente il valore negativo più critico e di considerare trascurabili tutti gli altri. Questo semplifica di molto le analisi e segue il corrente stato di conoscenza per cui si afferma che, in assenza di mistuning, le vibrazioni in LCO sono dominate da una unica onda viaggiante (o onda rotante), quella associata al modo più aerodinamicamente instabile, dunque con ζ_{aer} minore [3, 10, 19]. Tuttavia nuovi studi suggeriscono che più onde viaggianti possono contribuire allo stato a regime della risposta del sistema che ha raggiunto il ciclo limite [20]. Se nel primo caso si ha una risposta periodica nell'arco di una rotazione del disco, in questo ultimo caso la periodicità non è ancora stata del tutto indagata.

In questa parte del lavoro di tesi si sono dunque analizzati due casi di studio:

- 1° caso: Analisi a flutter con un solo valore di ζ_{aer} negativo;
- 2° caso: Analisi a flutter con due valori di ζ_{aer} negativi.

Nel 1° caso di analisi oltre che indagare sulla risposta dinamica del sistema si procede anche a variare i parametri che condizionano la risposta non lineare a flutter, così come è stato fatto per il sistema ad un grado di libertà nel capitolo precedente.

Nel 2° caso si indaga sulla potenziale interazione di due onde viaggianti impostando una analisi di sensibilità relativa a diversi fattori come il valore degli associati coefficienti di smorzamento aerodinamici adimensionali negativi, l'influenza degli altri coefficienti

positivi, l'importanza delle condizioni iniziali, il contenuto in frequenza della risposta allo stato di regime e l'efficacia dei diversi metodi computazionali a descrivere il comportamento del sistema. Di seguito vengono visti nel dettaglio tutte le seguenti analisi.

5.3.1 Caso di analisi 1

In questa sezione di indagine viene considerata la presenza di un solo coefficiente ζ_{aer} negativo (detto anche "critico"), tutti gli altri sono inizialmente posti a zero e dunque ininfluenti sulla stabilità della risposta del sistema.

In condizione nominale di analisi i parametri influenti sulla risposta dinamica sono i seguenti (tabella 5.2):

ζ_{aer}	-0.005 per $ND = +1$
ζ_m	0.002
N_0	$150\ N$
μ	0.5
K_t	$2 \cdot 10^4\ N/m$

Tabella 5.2: Parametri per il caso di analisi 1

Inserendo nel calcolo in frequenza i due valori di tentativo trovati tramite il bilancio delle energie, si trovano le due soluzioni in figura 5.3 indicanti la risposta in LCO e la risposta al limite di stabilità. La prima corrisponde all'equilibrio stabile del sistema e la seconda all'equilibrio instabile.

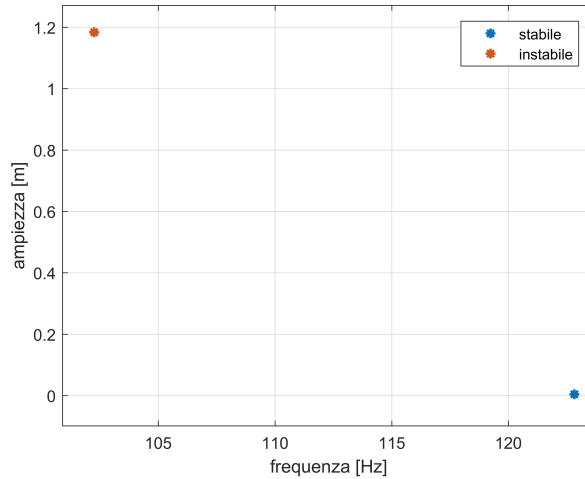


Figura 5.3: Risultato del calcolo in frequenza, modello multi-dof, caso 1°

Il risultato nel dominio del tempo tiene conto solamente dell'equilibrio stabile, e infatti in figura 5.4 si trova la coincidenza con il punto blu del dominio in frequenza. In questa immagine è mostrata la risposta nel dominio del tempo fisico ed essendo la curva molto compatta, sul lato destro del grafico viene mostrato un intervallo di tempo ridotto per osservare in modo più chiaro l'oscillazione delle pale.

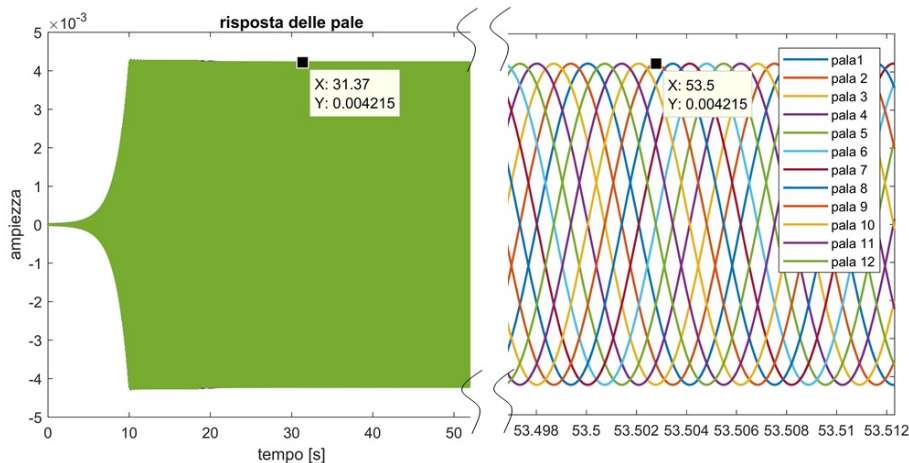


Figura 5.4: Risultato del calcolo nel tempo fisico, modello multi-dof, caso 1°

Il risultato nel tempo è ugualmente ottenuto anche nel dominio del tempo modale. In figura 5.5 un confronto tra la risposta in coordinate fisiche e in coordinate modali.

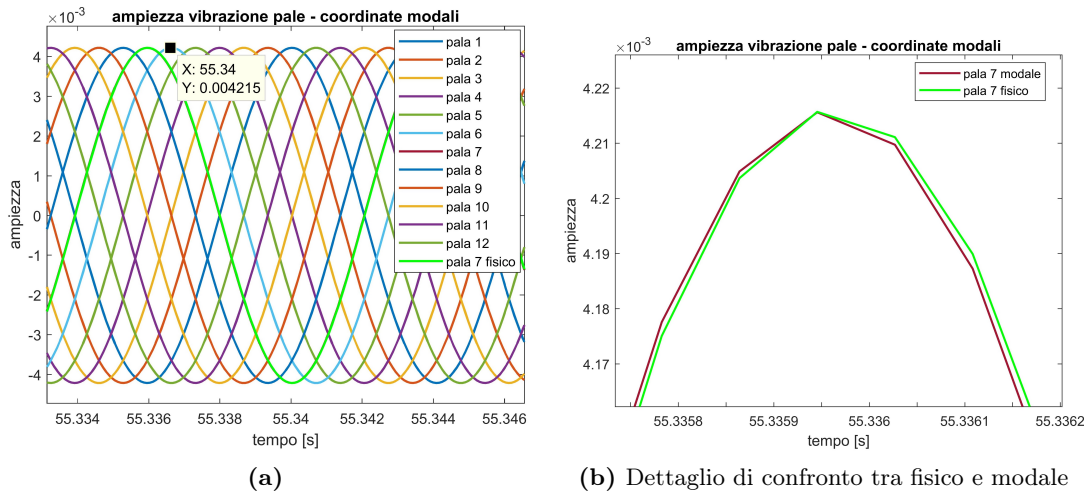


Figura 5.5: Risultato del calcolo nel tempo modale, modello multi-dof, caso 1°

Nella tabella 5.3 si riassumono i principali parametri utili al confronto delle tre metodologie di analisi.

	ampiezza [m]	Errore amp[%] rispetto ad ¹	frequenza [Hz]	Errore freq.[%]	tempo di calcolo [s]	Δt [%] rispetto ad ¹
T. fisico ¹	$4.2154 \cdot 10^{-3}$		122.837	0	1109	
T. modale	$4.2152 \cdot 10^{-3}$	0.004	122.837	0	2773	+150
Frequenza	tabella 5.4	tabella 5.4	122.828	0.007	410	-63

Tabella 5.3: Risultati tempo - frequenza a confronto, modello muti- dof

Dalla tabella 5.3 emerge che le ampiezze ottenute con i metodi nel dominio nel tempo portano a valori molto simili e soprattutto costanti per tutte le pale. I valori nel dominio della frequenza sono invece meno accurati tanto che per ogni pala si riscontra un errore diverso rispetto al valore ottenuto nel tempo fisico, preso come riferimento. Questi valori

sono riportati in tabella 5.4.

Pala	Errore amp[%] rispetto ad ¹
1	0.004
2	0.005
3	0.006
4	0.005
5	0.006
6	0.006
7	0.004
8	0.005
9	0.006
10	0.005
11	0.006
12	0.006

Tabella 5.4: Errore delle ampiezze delle pale ottenute in frequenza rispetto al valore ottenuto nel tempo

Dal punto di vista del tempo di calcolo, ancora una volta il più conveniente risulta quello in frequenza. Appare però insolita la relazione tra il calcolo nel dominio del tempo modale e quello fisico, relazione che è rimasta tale anche per tutte le analisi effettuate sino ad ora. Ci si aspetterebbe di trovare infatti un calcolo modale più veloce rispetto ad uno fisico dato che le equazioni nel calcolo modale sono disaccoppiate a causa della presenza di matrici diagonali, ma non si ottiene ciò. Bisogna infatti considerare che nel dominio modale per ogni tempo di calcolo è necessario tornare nel dominio fisico per definire le forze di contatto, per tornare poi nuovamente nel dominio modale; inoltre un ulteriore passaggio di coordinate è presente nella parte terminale del codice per trasformare gli spostamenti palari modali, trovati per ogni istante di tempo, nel dominio fisico. Per compensare, in fattore tempo, il passaggio da un dominio all'altro, si è ottimizzato il codice modale trasformando le matrici diagonali in vettori esplicitando così l'equazione iterativa finale in termini vettoriali e non tramite matrici per lo più riempite di zeri. Il tempo necessario al calcolo è risultato 2658 secondi. La riduzione ottenuta è del 4.15 %, dunque una riduzione non molto influente e sicuramente non competitiva rispetto al tempo di calcolo nel dominio fisico. Potrebbe quindi apparire sicuramente migliore il dominio fisico, bisogna però considerare che le informazioni di smorzamento aerodinamico (ossia i coefficienti ζ_{aer}) arrivano dal codice CFD associati a modi di vibrare; avendo informazioni di tipo modale si potrebbe quindi decidere di rimanere in questo dominio accettando di perdere del tempo di calcolo. Inoltre anche nel dominio fisico è necessario passare per una analisi modale per ottenere i parametri necessari a definire la matrici di smorzamento fisiche (si vedano le equazioni (5.2) e (5.3)) e sebbene questo passaggio sia fatto una sola volta (poiché le matrici di smorzamento rimangono poi costanti) il calcolo potrebbe diventare più complesso per strutture diverse da quelle in analisi, ossia modelli di dischi palettati più vicini alla loro reale conformazione e con molti gradi di libertà in più. In definitiva il dominio fisico risulta essere il più conveniente per uno studio di questo genere ma ciò non è un risultato generalizzabile.

Riguardo al contenuto in frequenza della risposta a ciclo limite, tutti i metodi giungono ad un valore che si osserva essere, a meno di un errore minimo nel dominio in frequenza, il valore corrispondente alla frequenza relativa al modo con $ND = 1$ (si veda la tabella 5.1). Proprio su questo modo (più nello specifico per $ND = +1$) è stato posto $\zeta_{aer} = -0.005$,

l'unico coefficiente negativo di smorzamento aerodinamico adimensionale. Il risultato trovato è coerente con la teoria per la quale si afferma che le risposta in termini di frequenza è definita dal modo più aerodinamicamente instabile. Quindi è $ND = +1$ che condiziona la risposta finale di tutto il sistema, imponendo la frequenza di equilibrio finale. Si vede infatti, in figura 5.6, che, dopo un certo periodo di tempo in cui si sviluppa la risposta, tutti i modi, eccetto il più instabile, vengono limitati ed il loro contributo annullato da parte del sistema tramite gli elementi di contatto. Gli elementi di attrito riescono infatti a smorzare il contributo energetico associato a queste onde facendo tendere a zero le loro ampiezze.

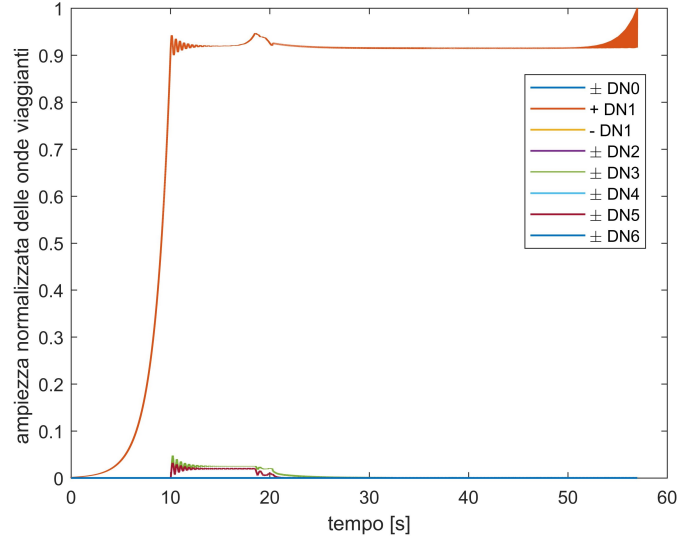


Figura 5.6: Evoluzione nel tempo delle onde viaggianti - o modi rotanti

5.3.2 Variazione dei parametri

Lo studio appena presentato è molto semplice ed i risultati possono apparire quasi intuitivi, tuttavia esso si dimostra molto utile all'analisi di sensitività che viene di qui effettuata sui parametri in gioco.

Coefficienti ζ_{aer} associati ai restanti modi

Nell'analisi principale appena discussa si è considerato un solo coefficiente ζ_{aer} critico, associato nello specifico a $ND = +1$. Per tutti gli altri modi i coefficienti adimensionali di smorzamento sono stati posti nulli. In questa sezione si vuole invece valutare il loro effetto sulla risposta dinamica del sistema nel caso più generale in cui essi risultino tutti uguali e con valore diverso da zero. In queste prove il coefficiente $\zeta_{aer} = -0.005$ associato a $ND = +1$ non viene cambiato e rimane costante anche il coefficiente di smorzamento viscoso strutturale $\zeta_m = 0.002$.

La prima analisi viene fatta portando i coefficienti aerodinamici adimensionali di tutti i restanti modi ad un valore positivo pari a $+0.001$. Essendo valori positivi essi non rappresentano un limite alla stabilità. La risposta del sistema risulta infatti essere quella in figura 5.7, dove il ciclo limite di oscillazione viene raggiunto. Rispetto all'analisi in condizione nominale cambia la fase transitoria dopo cui il sistema riesce a raggiungere l'equilibrio finale, ma una volta stabilizzatosi, la risposta finale è comunque definita dal contributo del $ND = +1$, come si vede dalla figura 5.8 relativa all'andamento dei

modi rotanti nel tempo. Guardando proprio quest'ultima figura si nota anche come tra i secondi 25 – 50 sia evidente una compresenza di modi. E' quindi interessante osservare la risposta del sistema in quell'arco di tempo; si ottiene quanto mostrato nella figura 5.9.

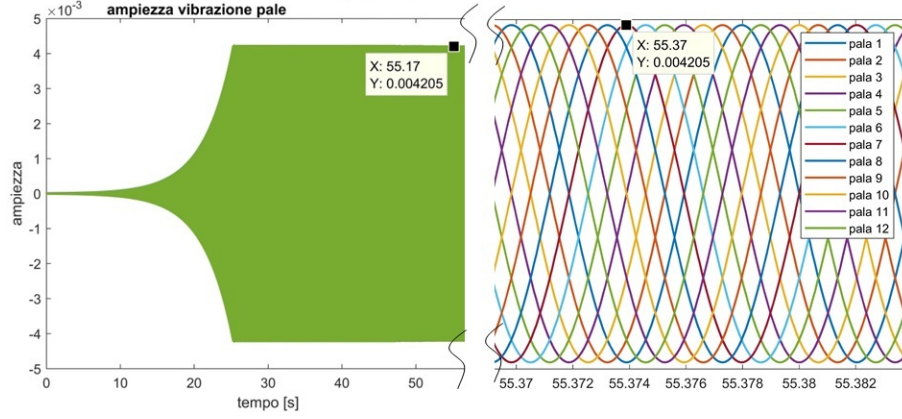


Figura 5.7: Risposta nel tempo, caso di analisi 1° - variazione ζ_{aer} ai modi (1)

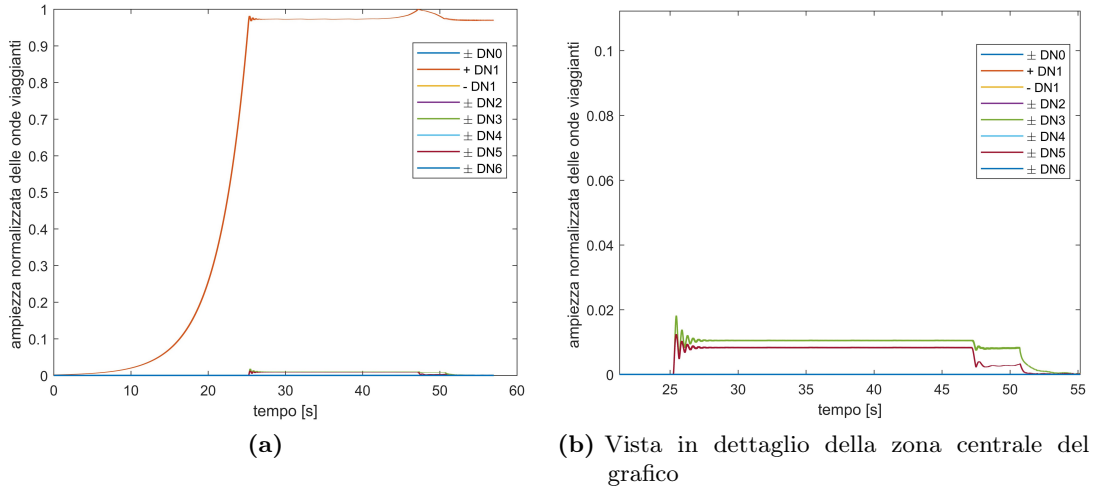


Figura 5.8: Evoluzione dei modi nel tempo, caso di analisi 1° - variazione ζ_{aer} ai modi (1)

E' dunque evidente che la presenza di più modi determina nel sistema una risposta particolare, con un contributo in frequenza non ben definito. Tuttavia al trascorrere del tempo un solo modo permane, quello più aerodinamicamente instabile ossia $ND = +1$ definendo anche il contenuto in frequenza in LCO. Tutti gli altri modi vengono smorzati dagli elementi di contatto per attrito.

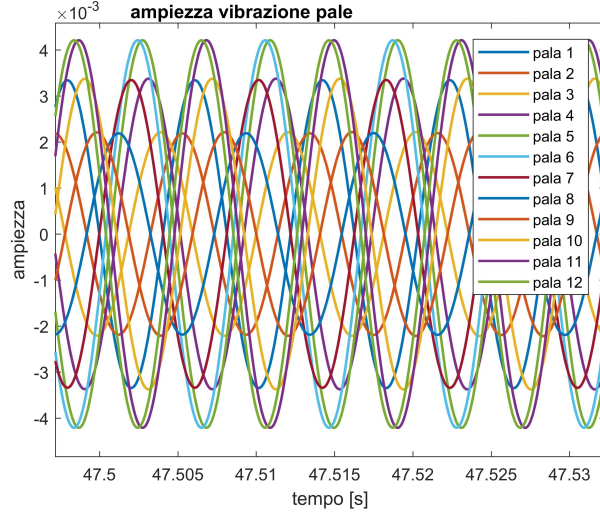


Figura 5.9: Zoom della risposta nel tempo nel periodo di compresenza di modi diversi

La seconda analisi è fatta ponendo i valori degli ζ_{aer} a $+0.002$; il valore è dunque stato aumentato rispetto al caso precedente e sebbene siano valori positivi, questa volta la stabilità assume una forma diversa dal tipico LCO. La risposta che si ha è mostrata in figura 5.10. Ciò che si ottiene è una convergenza delle ampiezze delle pale verso un valore vicino lo zero. Le vibrazioni vengono quindi soppresse dagli elementi di contatto e non c'è un modo che riesce a prevalere sulla risposta tanto che l'andamento dei modi nel tempo risulta per tutti una linea lungo lo zero e per questo non viene mostrata.

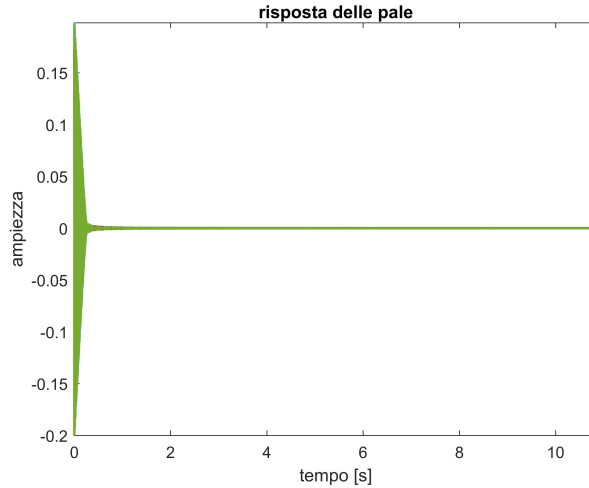


Figura 5.10: Risposta nel tempo, caso di analisi 1° - variazione ζ_{aer} ai modi (2)

Infine l'ultima prova è fatta ponendo i coefficienti ζ_{aer} ad un valore negativo pari a -0.001 . La risposta che si ottiene è mostrata in figura 5.11. In questo caso non si ottiene una condizione stabile ma si presenta una risposta divergente indice del fatto che le forze di attrito agli elementi di contatto non riescono a limitare le vibrazioni quindi le ampiezze di vibrazione delle pale crescono in modo illimitato. Il modo che porta la risposta a divergere risulta comunque essere il più instabile ossia $ND = +1$, come si vede dalla figura 5.12, avendo questo il coefficiente di valore più piccolo.

Risulta quindi evidente l'azione d'insieme che questi valori positivi o negativi dei coefficienti di smorzamento associati agli altri modi oltre $ND = +1$ hanno sulla risposta

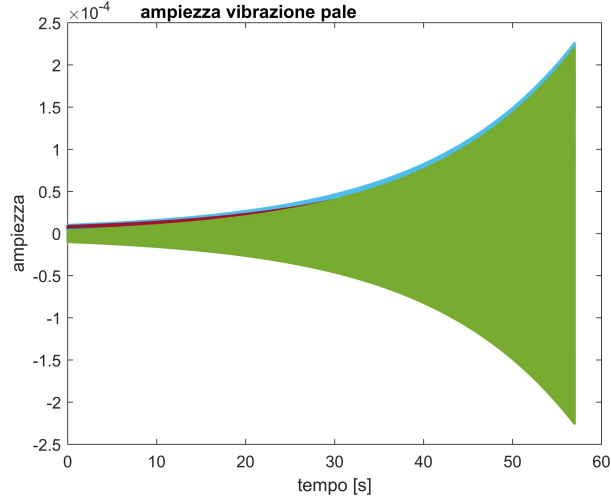


Figura 5.11: Risposta nel tempo, caso di analisi 1° - variazione ζ_{aer} ai modi (3)

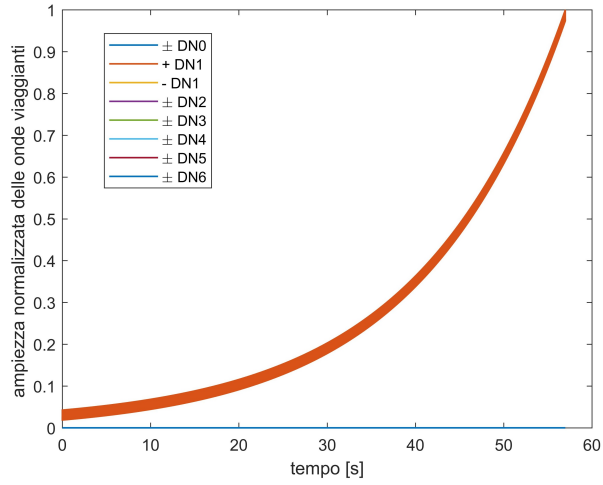


Figura 5.12: Evoluzione dei modi nel tempo, caso di analisi 1° - variazione ζ_{aer} ai modi (3)

del sistema. Essi possono essere visti come un contributo energetico in uscita al sistema (se positivi) e quindi favorevole alla stabilità, o come un contributo in ingresso al sistema (se negativi) più favorevole all'instabilità. Il loro contributo va ad aggiungersi a quello associato al diametro nodale più critico (contributo energetico negativo) e a quello strutturale di ζ_m (contributo energetico positivo).

Se il bilancio energetico totale è orientato più ai valori positivi, gli elementi di contatto hanno meno energia per attrito da dover dissipare per equilibrare quella in ingresso e il sistema riesce a raggiungere la stabilità.

Se il bilancio energetico totale è orientato più ad un valore negativo, difficilmente gli elementi di contatto riescono a dissipare tutta l'energia in ingresso ed il rischio di una risposta divergente non controllata è tanto maggiore quanto più negativi sono i valori di ζ_{aer} .

Valore di ζ_{aer} critico

Tornando al caso di analisi che prevede la presenza di un unico valore di smorzamento aerodinamico diverso da zero, ossia quello critico che per scelta è associato nuovamente

a $ND = +1$, si procede con il variare il valore di questo parametro per valutarne gli effetti sulla risposta:

- $\zeta_{aer} = -0.003$: la risposta di vibrazione del sistema è di tipo convergente, figura 5.16a;
- $\zeta_{aer} = -0.005$: (condizione nominale di analisi) il sistema raggiunge le oscillazioni a ciclo limite con ampiezza pari a $4.215 \cdot 10^{-3}$, figura 5.16b;
- $\zeta_{aer} = -0.006$: il sistema raggiunge le oscillazioni a ciclo limite con valore di ampiezza pari a $4.233 \cdot 10^{-3}$, figura 5.13c;
- $\zeta_{aer} = -0.007$: la risposta del sistema è di tipo divergente, figura 5.13d.

Si osserva che tanto più piccolo diventa il valore di ζ_{aer} tanto più il sistema è spinto verso una condizione di instabilità. Questo perché l'ampiezza di vibrazione è ottenuta dal bilancio energetico tra l'energia esercitata sul sistema dal modo più aerodinamicamente instabile e quella dissipata dagli elementi di contatto. In fondo si ritrova quanto già presentato nel paragrafo 4.2, che in modo schematico è quanto descritto dalla figura 4.1b. Guardando questa ultima figura si può collocare la risposta 5.16a nella zona intermedia dove $E_{diss} > E_{aer}$, la risposta 5.16b e 5.13c nel punto di equilibrio stabile (in figura corrispondente all'ampiezza A_s), punto che si sposta verso valori di ampiezza maggiori tanto più il valore di ζ_{aer} diminuisce; infine la risposta 5.13d corrisponde ad avere un valore di ζ_{aer} troppo piccolo per cui si ha sempre $E_{aer} > E_{diss}$ e la stabilità non può essere raggiunta (che nella figura corrisponde al caso di ζ_3).

Dal punto di vista delle frequenze in LCO si ritrova quanto visto anche nel caso del sistema ad un grado di libertà, ossia che all'aumentare del valore assoluto del parametro si ha un aumento di ampiezza, come visibile in 5.16b e 5.13c, ma anche una riduzione delle frequenze di equilibrio. Considerando infatti le due soluzioni che raggiungono il ciclo limite si ottiene la figura 5.14. Ovviamente essendo molto piccolo il $\Delta\zeta_{aer}$ lo sarà anche il delta in frequenza. Il perché della riduzione di frequenza è sempre dovuto all'ingresso di una maggiore energia aerodinamica che porta il sistema a vibrare maggiormente diminuendo di conseguenza la sua rigidità.

Coefficiente di smorzamento strutturale ζ_m

Un altro fattore di smorzamento da tener presente è quello di attrito viscoso strutturale ζ_m . Variando il suo valore si ottiene la risposta del sistema mostrata in figura 5.15. Si prendono in considerazione il valore nominale $\zeta_m = 0.002$, un valore più piccolo e uno più grande. Si osserva che all'aumentare del coefficiente di attrito strutturale l'ampiezza di vibrazione delle pale diminuisce e la frequenza aumenta dunque si ottiene un andamento opposto a quello generato dalla variazione di ζ_{aer} . La diminuzione di ampiezza al crescere di ζ_m è giustificata dall'aumento di energia dissipata dalla componente strutturale. L'energia dissipata ai contatti rimane invece invariata. Riguardo la frequenza, un maggior smorzamento porta la struttura a diventare più rigida, ne consegue dunque un aumento di frequenza. Essendo le variazioni in gioco molto piccole, i risultati sono riportati in forma normalizzata rispetto alla condizione nominale. Scegliendo dei valori di ζ_m ancora più grandi o più piccoli si incorrerebbe non più ad una risposta a ciclo limite, ma rispettivamente ad una completa riduzione delle oscillazioni (se l'energia strutturale cresce molto) o ad una risposta divergente (se l'energia strutturale diminuisce e la sola componente dissipata dagli elementi di contatto non è sufficiente a garantire una limitazione delle vibrazioni).

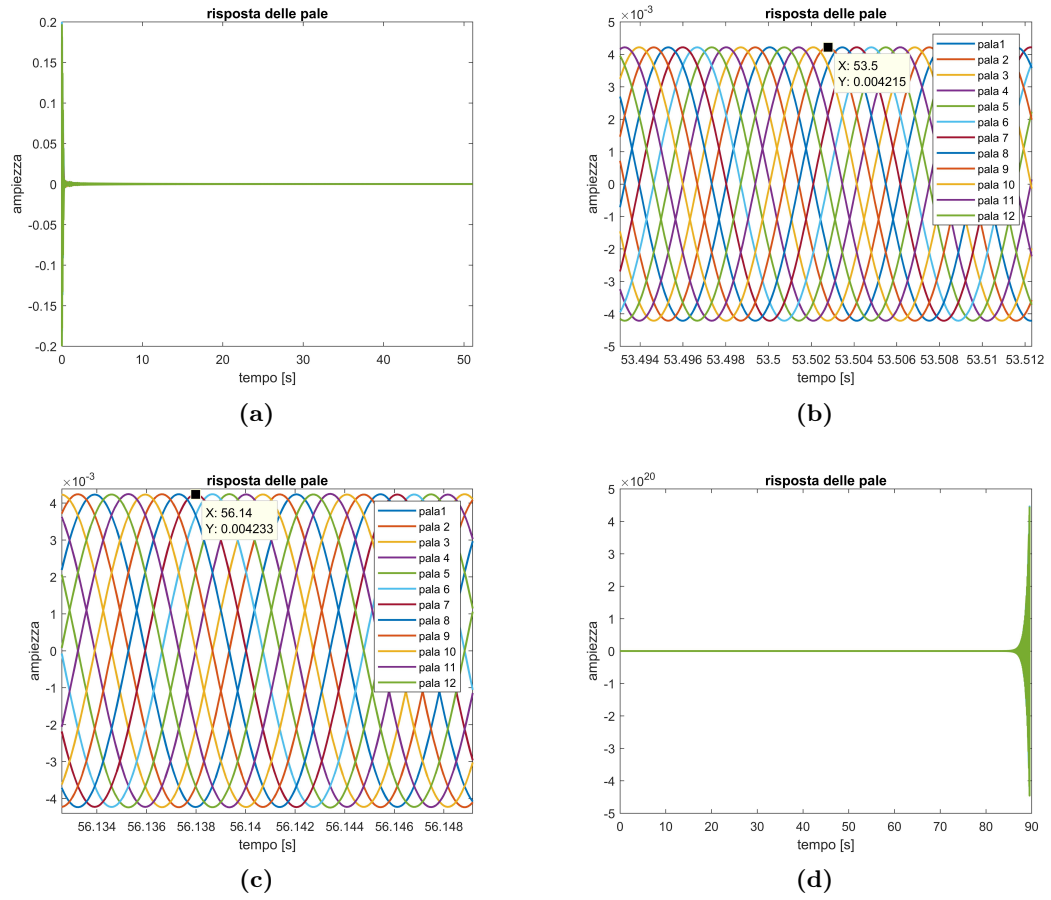


Figura 5.13: Tipologie di risposte nel tempo, caso di analisi 1° - variazione del valore di ζ_{aer} critico

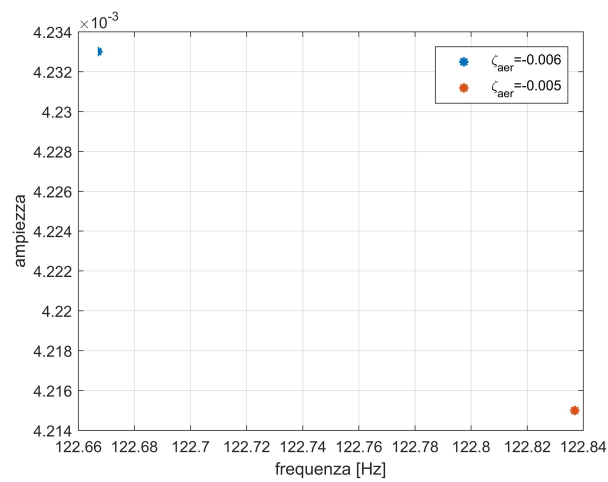


Figura 5.14: Caso di analisi 1° - influenza della variazione di ζ_{aer} critico sulle risposte in LCO

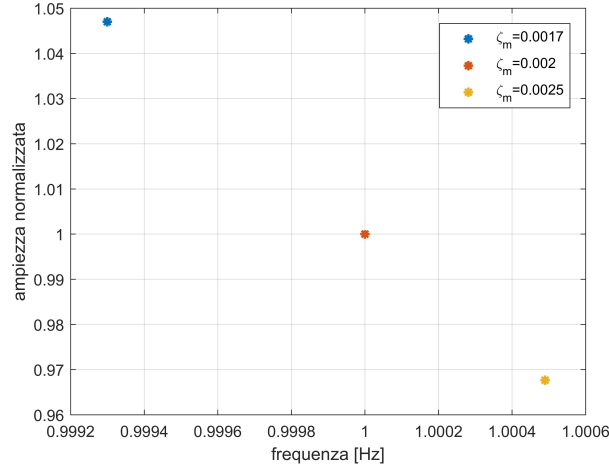


Figura 5.15: Caso di analisi 1° - influenza della variazione di ζ_m sulle risposte in LCO

Modo critico

Nel caso sia presente un solo ζ_{aer} critico associato ad un certo modo, risulta indifferente quale modo esso sia: è sicuro che sarà quel modo a condizionare la risposta del sistema una volta raggiunta la condizione di LCO. Ponendo infatti il valore di ζ_{aer} negativo per $ND = +3$, dopo una fase transitoria in cui tutti i modi diversi da questo ultimo vengono smorzati dagli elementi di contatto, quello che permane nella zona di LCO è esattamente il diametro nodale $+3$ che ne va a definire il contributo in frequenza pari a 126.800 Hz , coerente con quanto scritto nella tabella 5.1. In figura 5.16 sono mostrati un dettaglio della zona di LCO della risposta, dove si osserva la variazione della frequenza di risposta del sistema rispetto al caso nominale di analisi in cui a prevalere è il modo $ND = +1$ (figura 5.4), e di fianco è riportata l'evoluzione dei modi nel tempo.

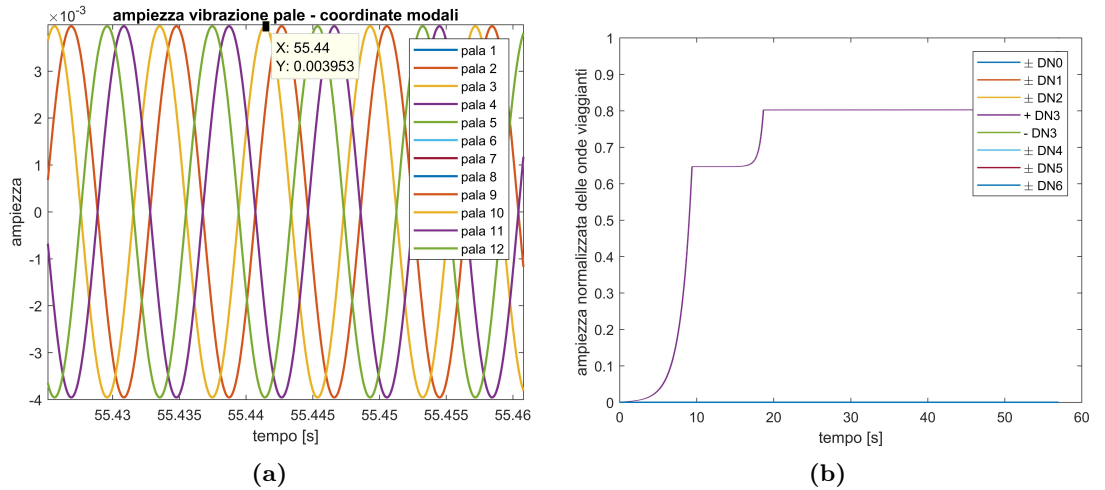


Figura 5.16: Risposta in LCO ed evoluzione dei modi nel tempo, caso di analisi 1° - variazione del modo critico

Altre analisi sono state realizzate a conferma del fatto che a rispondere sia sempre il modo più critico qualora esso sia anche l'unico negativo. In tabella 5.5 sono riportati i risultati ottenuti; nella prima colonna è indicato il modo critico considerato e nella

seconda sono registrati i valori di frequenza in LCO che secondo la tabella di riferimento delle frequenze associate ai modi 5.1 conferma quanto appena dichiarato.

ND	frequenza [Hz]
2	125.303
4	127.568
5	127.929

Tabella 5.5: Caso di analisi 1° - variazione del modo critico e della frequenza in LCO

Condizioni iniziali

Variando le condizioni iniziali si trovano andamenti nel tempo analoghi a quelli in figura 4.5 riferiti al sistema ad un solo grado di libertà. Non si ritiene quindi necessario plottare le medesime risposte.

Precarico N_0 e coefficiente di attrito μ

La figura 5.17 mostra la risposta del sistema al variare rispettivamente del precarico N_0 e al variare di μ . In entrambe le prove tutti i parametri vengono mantenuti costanti alla condizione nominale di prova tranne il parametro oggetto di analisi. Gli andamenti trovati sono analoghi a quanto visto nel caso del sistema ad un grado di libertà.

Incrementando il coefficiente di attrito aumenta l'ampiezza di vibrazione delle pale mentre la frequenza rimane costante. All'aumentare di μ l'elemento di contatto diviene infatti più rigido e il cambio di stato da stick a slip avviene per valori di oscillazioni maggiori rispetto a quanto fosse prima necessario. La variazione del precarico agisce allo stesso modo poiché anche questo, aumentando, ha una azione di irrigidimento sul contatto agendo nello stesso modo in cui fa μ . Un valore alto di N_0 definisce un comportamento più rigido dell'elemento di contatto, un valore più basso porta una rigidità minore e tutto ciò va ad influire sulla produzione di energia dissipata e sull'ampiezza di vibrazione che ne consegue.

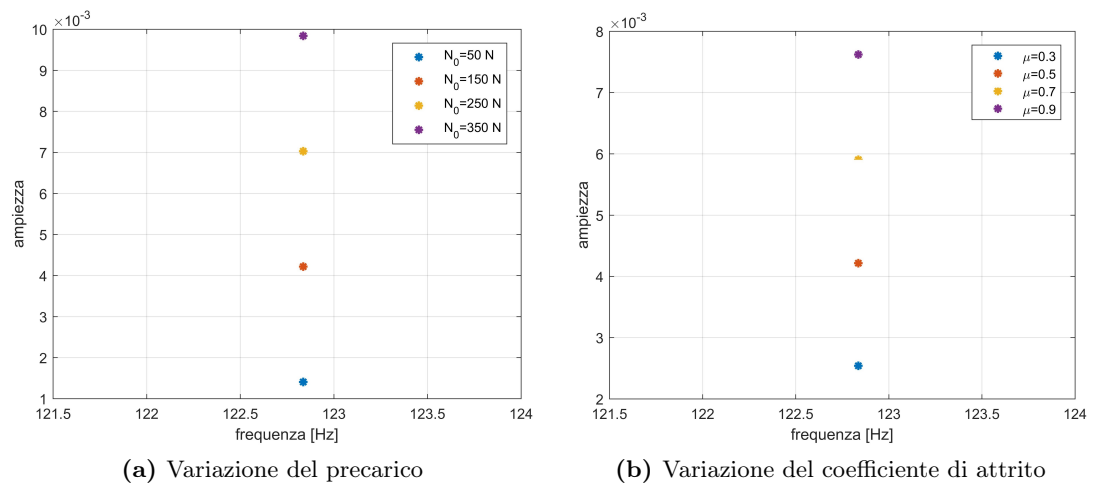


Figura 5.17: Caso di analisi 1° - variazione di N_0 e μ

Rigidezza di contatto tangenziale K_t

La risposta del sistema in LCO al variare di K_t è mostrata in figura 5.18. Così come per il modello ad un grado di libertà si ottiene che all'aumentare della rigidezza di contatto la frequenza di equilibrio aumenta, mentre diminuisce l'ampiezza di risposta essendo il sistema meno libero di vibrare.

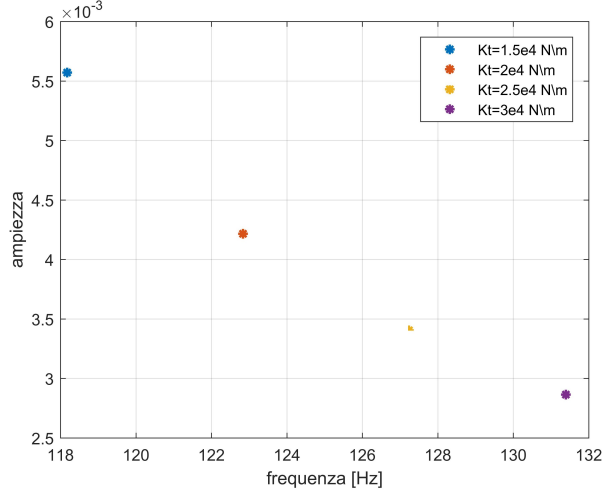


Figura 5.18: Caso di analisi 1° - variazione del valore di K_t

5.3.3 Caso di analisi 2

In questa sezione di indagine viene considerata la presenza di due coefficienti ζ_{aer} critici. Lo scopo è studiare la risposta del sistema e capire se l'andamento finale sia dovuto all'azione di uno solo dei due modi instabili o alla loro combinazione; in questo ultimo caso è interessante analizzare il contenuto in frequenza nella zona di LCO. Tutte le indagini vengono fatte tramite integrazione diretta nel tempo ed un numero molto elevato di prove viene registrato per costruire un database in grado di definire una linea guida della risposta del sistema. Lo scopo di questa indagine è anche quello di confrontare i risultati ottenuti nel dominio del tempo con quelli ottenuti nel dominio in frequenza per verificare se il metodo HBM sia in grado di fornire una buona approssimazione della risposta anche in casi così particolari. L'idea è quindi quella di utilizzare i risultati nel tempo per verificare l'adeguatezza del metodo di bilanciamento armonico per poi pensare di estendere l'utilizzo di questo ultimo anche nel caso più completo e complesso quale quello che non prevede solo la presenza di due modi instabili ma quello che segue l'andamento standard sinusoidale di distribuzione dei coefficienti di ζ_{aer} per ciascun modo. In questa maniera si andrebbe a conciliare la necessità di avere soluzioni ragionevoli con una notevole riduzione dei tempi di calcolo.

Sono state analizzate diverse casistiche di seguito presentate.

Analisi 2.1 - Due valori di ζ_{aer} critici uguali

Per rendere più comprensibile la distribuzione dei valori di smorzamento aerodinamico adimensionale si riporta in figura 5.19 un'immagine in cui si mostra il valore di ζ_{aer} associato a ciascun modo della prima famiglia modale. Per la seconda famiglia i valori sono tutti posti a zero.

Come si osserva dalla figura solamente i modi associati a $ND = +1$ e $ND = +2$ hanno valori di ζ_{aer} diversi da zero, in particolare essi hanno un valore uguale e pari a -0.005.

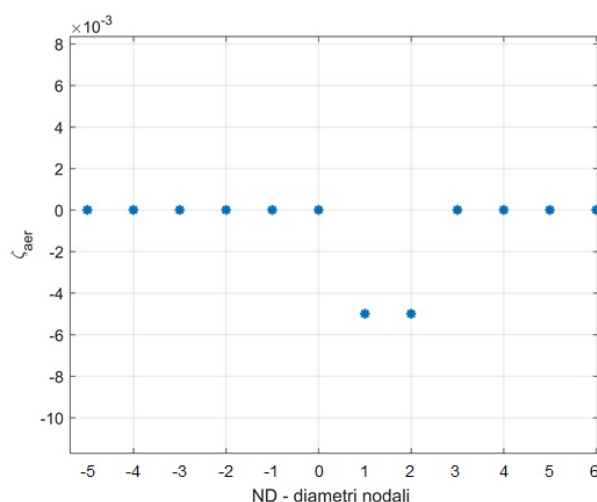


Figura 5.19: Valori di ζ_{aer} per la 1° famiglia modale - caso di analisi 2.1

Le prove di analisi della risposta vengono fatte mantenendo costanti i seguenti parametri (tabella 5.6):

ζ_m	0.002
N_0	150 N
μ	0.5
K_t	$2 \cdot 10^4$ N/m

Tabella 5.6: Parametri per il caso di analisi 2

L'effetto della loro variazione sulla risposta è già stata analizzata nel paragrafo precedente e non è necessario ripetere quanto già mostrato. Il solo elemento che influenza la risposta in modo rilevante e che deve quindi essere preso in considerazione è il valore di condizione iniziale al calcolo, o parametro di primo tentativo come è stato spesso citato. In questo caso infatti questo parametro non si limita solamente a determinare il tipo di risposta, instabile o stabile, ma per questo ultimo caso la condizione iniziale influenza anche il tipo di modo che definisce la risposta in LCO: uno solo dei due modi instabili o una loro combinazione. Considerando il dominio nel tempo, come condizione iniziale viene utilizzata la deformata associata ad un modo specifico variata però in ampiezza per mezzo di un valore capace di determinare una risposta stabile perché rientrante nei limiti spiegati nel paragrafo 4.2.

Dall'analisi emerge quanto mostrato in tabella 5.7

La prima colonna indica a quale modo è associata la deformata iniziale, dunque quale modo è utilizzato per definire la condizione iniziale di primo tentativo per il calcolo. Dalla seconda colonna in poi si analizza il risultato ottenuto nella zona di ciclo limite: il valore dell'ampiezza di vibrazione delle pale, il contenuto in frequenza e, associata alla frequenza di risposta, il modo che definisce la risposta stessa (in funzione dei valori in tabella 5.1).

Osservando l'ultima colonna risulta che nella risposta in LCO non si presenta mai un valore di frequenza che sia diverso da quello associato ad uno dei due modi instabili. Di conseguenza si ha che nella risposta finale sempre e solo uno dei due modi non subisce smorzamento e proprio questo modo definisce lo sfasamento delle risposte delle pale

condizione di deformata iniziale	ampiezza LCO	frequenza [Hz]	modo in LCO
$ND = +1$	$4.22 \cdot 10^{-3}$	122.837	$ND = +1$
$ND = +2$	$4.06 \cdot 10^{-3}$	125.34	$ND = +2$
$ND = +3$	$4.06 \cdot 10^{-3}$	125.34	$ND = +2$
$ND = +4$	$4.06 \cdot 10^{-3}$	125.34	$ND = +2$
$ND = +5$	$4.06 \cdot 10^{-3}$	125.34	$ND = +2$
$ND = -3$	$4.06 \cdot 10^{-3}$	125.34	$ND = +2$

Tabella 5.7: Risultati analisi nel tempo per ζ_{aer} critici uguali (-0.005) associati a $ND = +1$ e $ND = +2$

in ciclo limite e la loro ampiezza. Altre prove sono state condotte modificando i modi instabili (tabella 5.8) e quanto trovato nel primo caso di indagine è confermato: con due modi instabili e uguali, solo uno dei due definisce la risposta a ciclo limite, e il parametro discriminante è la condizione iniziale. Si osservi inoltre, l'ampiezza raggiunta a ciclo limite. Emerge dalle analisi che più la risposta è definita da un modo associato ad un diametro nodale grande, più l'ampiezza di vibrazione delle pale tende a diminuire. Questo accade perché la frequenza di risposta aumenta, il sistema diventa più rigido e questo porta ad una minore ampiezza di oscillazione.

condizione di deformata iniziale	ampiezza LCO	frequenza [Hz]	modo in LCO
$ND = +1$	$4.22 \cdot 10^{-3}$	122.837	$ND = +1$
$ND = +4$	$3.97 \cdot 10^{-3}$	127.568	$ND = +4$
$ND = +2$	$4.22 \cdot 10^{-3}$	122.837	$ND = +1$
$ND = +3$	$3.97 \cdot 10^{-3}$	127.568	$ND = +4$

Tabella 5.8: Risultati analisi nel tempo per ζ_{aer} critici uguali (-0.005) associati a $ND = +1$ e $ND = +4$

I risultati nel tempo vengono usati per verificare il calcolo nel dominio in frequenza. Lo scopo è infatti verificare che il metodo HBM riesca a garantire una buona approssimazione della risposta del sistema sia in termini di ampiezza che in termini di frequenza in LCO, anche in presenza di più diametri critici. Vengono analizzati gli stessi casi riportati in tabella 5.7 e 5.8 e ciò che rispettivamente si ottiene è contenuto nelle tabelle 5.9 e 5.10 (si considera il contributo di una sola armonica).

prova	condizione di deformata iniz.	condizione iniz. di frequenza	ampiezza	frequenza [Hz]	modo in LCO
1	$ND = +1$	$ND = +1$	$4.2154 \cdot 10^{-3}$	122.828	$ND = +1$
2	$ND = +2$	$ND = +2$	$4.0509 \cdot 10^{-3}$	125.293	$ND = +2$
3	$ND = +1$	$ND = +2$	$4.2154 \cdot 10^{-3}$	122.828	$ND = +1$
4	$ND = +2$	$ND = +1$	$4.0509 \cdot 10^{-3}$	125.293	$ND = +2$
5	$ND = +3$	$ND = +3$	-	-	-

Tabella 5.9: Risultati analisi in HBM ($H = 1$) per ζ_{aer} critici uguali (-0.005) associati a $ND = +1$ e $ND = +2$

prova	condizione di deformata iniz.	condizione iniz. di frequenza	ampiezza	frequenza [Hz]	modo in LCO
6	$ND = +1$	$ND = +1$	$4.2154 \cdot 10^{-3}$	122.828	$ND = +1$
7	$ND = +4$	$ND = +4$	$3.9079 \cdot 10^{-3}$	127.558	$ND = +4$
8	$ND = +1$	$ND = +4$	$4.2154 \cdot 10^{-3}$	122.828	$ND = +1$
9	$ND = +4$	$ND = +1$	$3.9079 \cdot 10^{-3}$	127.558	$ND = +4$
10	$ND = +2$	$ND = +2$	-	-	-

Tabella 5.10: Risultati analisi in HBM ($H = 1$) per ζ_{aer} critici uguali (-0.005) associati a $ND = +1$ e $ND = +4$

In entrambe queste tabelle con analisi in frequenza le prime colonne definiscono il modo e la frequenza che sono utilizzati come parametri di primo tentativo al calcolo iterativo di Newton-Raphson. Le colonne successive contengono i risultati in termini di ampiezza e frequenza ottenuti a ciclo limite. Confrontando le tabelle del tempo e quelle della frequenza, si può affermare che il metodo HBM riesce a definire correttamente la risposta del sistema anche considerando la presenza di due nd critici e, in questo caso, uguali tra loro. Dopotutto il metodo in frequenza si basa sull'ipotesi di periodicità e tale ipotesi rimane valida anche in presenza di due diametri nodali critici dato che, prevalendone solo uno, si ottiene in LCO una risposta di vibrazione periodica nel tempo e simile a quelle mostrate nel caso di un solo modo instabile nel 1° caso di analisi. Si osserva però che la convergenza al risultato non è ottenuta in quelle prove per cui i valori di primo tentativo sono riferiti a modi che non hanno a che vedere con quelli critici, cosa che invece non si verifica nel dominio del tempo dove il ciclo limite viene comunque definito (maggiori dettagli su questa differenza tra dominio del tempo e frequenza sono dati in A.3). Questo dunque rappresenta uno svantaggio per il metodo in frequenza poiché si presuppone che debbano essere individuati a priori i modi più instabili per inserire delle opportune condizioni iniziali. Questa condizione sfavorevole è però compensata con il tempo necessario al calcolo; considerando per esempio la prova 1 della tabella 5.9 e confrontando i tempi di calcolo per tutti i metodi si evidenzia una notevole riduzione dei tempi in gioco (tabella 5.11). I risultati in frequenza sono poi calcolati considerando un numero di armoniche pari a 3, per verificare di quanto la soluzione risulti più vicina a quella del tempo all'aumentare del contenuto armonico considerato. Si riportano quindi in tabella 5.12 gli errori, per tutte le prove, delle ampiezze ottenute in HBM rispetto alle prove nel tempo e anche gli errori delle frequenze associate ai modi trovati in LCO rispetto ai valori della tabella di riferimento della frequenze 5.1. Si osserva che un numero piccolo di armoniche è sufficiente a definire un valore accettabile della frequenza di equilibrio, mentre per diminuire l'errore relativo al valore di ampiezza si dovrebbe considerare un numero maggiore di armoniche per una migliore convergenza verso il valore trovato nella prova del tempo. A conferma di ciò vengono fatte delle prove considerando un contenuto di armoniche superiore a 3, e i risultati in termini di errore in ampiezza e frequenza e dell'aumento del tempo di calcolo sono riportati in figura 5.20.

dominio	tempo [s]
tempo fisico	2336
tempo modale	4353
HBM ($H = 1$)	37

Tabella 5.11: Tempi a confronto - caso di analisi 2.1

prova	errore ampiezza		errore frequenza	
	$H = 1$	$H = 3$	$H = 1$	$H = 3$
1	0.11	0.1	0.007	0.007
2	0.22	0.2	0.008	0.008
3	0.11	0.1	0.007	0.007
4	0.22	0.2	0.008	0.008
6	0.11	0.1	0.007	0.007
7	1.5	0.5	0.01	0.008
8	0.11	0.09	0.007	0.007
9	1.5	0.5	0.01	0.008

Tabella 5.12: Errori di ampiezza e frequenza nel metodo M-HBM (con numero H variabile), rispetto al risultato delle prove nel tempo

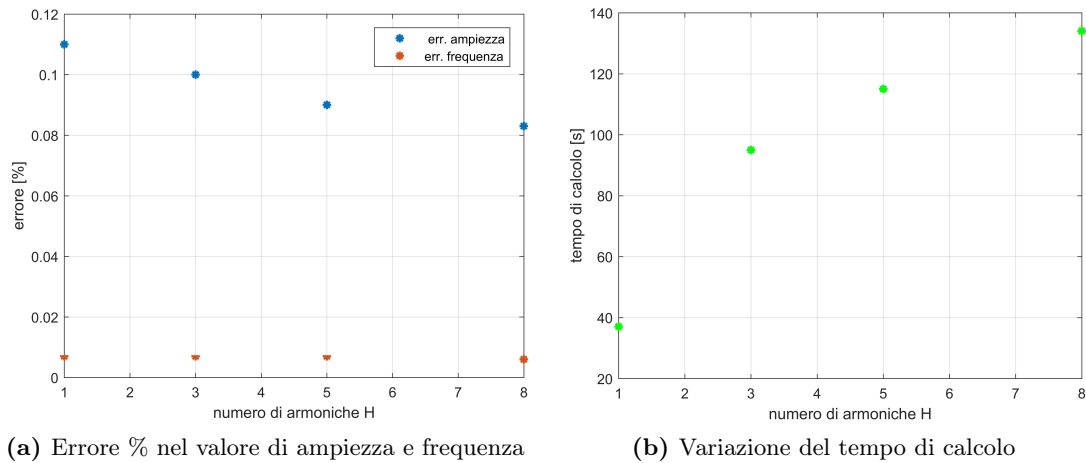


Figura 5.20: Variazione dell'errore dei valori di frequenza e ampiezza ottenuti in MHBM rispetto al valore nel tempo

Analisi 2.2 - Due valori di ζ_{aer} critici diversi

Lo step successivo all'analisi è quello di differenziare i due valori di smorzamento critico per condurre nuovamente una analisi di sensibilità che porti ad indicare quando sia favorita la risposta di un modo piuttosto che di un altro. Le prove effettuate nel tempo sono riportate in tabella 5.13, considernado due coppie di modi instabili (1-2 e 1-4) con valori di $\Delta\zeta_{aer}$ tra il primo modo e il secondo modo instabile costante al 40%.

1°ND critico	ζ_{aer}	2° ND critico	ζ_{aer}	condizione di deformata iniziale	ampiezza LCO	frequenza [Hz]	modo in LCO
+1	-0.005	+2	-0.003	$ND = +1$	$4.22 \cdot 10^{-3}$	122.837	$ND = +1$
	-0.005		-0.003	$ND = +2$	$4.22 \cdot 10^{-3}$	122.837	$ND = +1$
	-0.003		-0.005	$ND = +1$	$4.06 \cdot 10^{-3}$	125.34	$ND = +2$
	-0.003		-0.005	$ND = +2$	$4.06 \cdot 10^{-3}$	125.34	$ND = +2$
	-0.003		-0.005	$ND = +3$	$4.06 \cdot 10^{-3}$	125.34	$ND = +2$
	-0.003		-0.005	$ND = +4$	$4.06 \cdot 10^{-3}$	125.34	$ND = +2$
+1	-0.005	+4	-0.003	$ND = +1$	$4.22 \cdot 10^{-3}$	122.837	$ND = +1$
	-0.005		-0.003	$ND = +4$	$4.22 \cdot 10^{-3}$	122.837	$ND = +1$
	-0.003		-0.005	$ND = +1$	$3.97 \cdot 10^{-3}$	127.568	$ND = +4$
	-0.003		-0.005	$ND = +4$	$3.97 \cdot 10^{-3}$	127.568	$ND = +4$

Tabella 5.13: Risultati analisi nel tempo per ζ_{aer} critici diversi ($\Delta\zeta_{aer} = 40\%$) associati a $ND = +1$ e $ND = +2$ o $ND = +1$ e $ND = +4$

La prima e la terza colonna della tabella indicano i modi della prima famiglia modale a cui è stato attribuito un fattore di smorzamento aerodinamico negativo e le colonne rispettivamente alla loro destra definiscono il valore del parametro. Le successive quattro sono analoghe alle colonne delle tabelle viste nel tempo della precedente analisi: la quarta specifica il modo utilizzato per definire la condizione di deformata iniziale, la quinta e la sesta riportano il valore di ampiezza e frequenza della risposta on LCO e l'ultima esplicita il modo che prende parte alla risposta del sistema.

Anche in questo caso sembra delinearsi un certo schema di risposta del sistema, ossia che indipendentemente da quale sia il modo utilizzato per la condizione di spostamento iniziale, l'ampiezza e la frequenza nella zona di ciclo limite sono definite dal modo più instabile ossia quello con ζ_{aer} in valore assoluto più grande. Conducendo un numero più ampio di analisi, variando i valori di ζ_{aer} si trova però che quanto ipotizzato non è più vero. Si considerino le prove in tabella 5.14.

1°ND critico	ζ_{aer}	2° ND critico	ζ_{aer}	condizione di deformata iniziale	ampiezza LCO	frequenza [Hz]	modo in LCO
+1	-0.005	+2	-0.004	$ND = +1$	$4.22 \cdot 10^{-3}$	122.837	$ND = +1$
	-0.005		-0.004	$ND = +2$	$4.06 \cdot 10^{-3}$	125.34	$ND = +2$
+1	-0.005	+4	-0.004	$ND = +1$	$4.22 \cdot 10^{-3}$	122.837	$ND = +1$
	-0.005		-0.004	$ND = +4$	$3.97 \cdot 10^{-3}$	127.568	$ND = +4$

Tabella 5.14: Risultati analisi nel tempo per ζ_{aer} critici diversi ($\Delta\zeta_{aer} = 20\%$) associati a $ND = +1$ e $ND = +2$ o $ND = +1$ e $ND = +4$

Si osserva che pur essendo il valore di ζ_{aer} associato al diametro nodale 1 quello in valore assoluto più grande, la risposta del sistema in ciclo limite non è più definita sempre da questo; quindi non è più corretto affermare che sia il modo più instabile a definire la risposta allo stato stazionario, e al contrario torna nuovamente ad essere importante

la condizione iniziale. La verità si trova nel mezzo; sperimentalmente si dimostra che la linea guida di risposta del sistema nel caso di due ζ_{aer} critici diversi può essere così riassunta:

- per $\Delta\zeta_{aer} \geq 40\%$ l'ampiezza e la frequenza a ciclo limite sono determinati dal modo più instabile indipendentemente dalla condizione iniziale;
- per $\Delta\zeta_{aer} < 40\%$ il modo che compare nella zona di LCO è funzione della condizione iniziale.

Gli stessi risultati sono confermati dall'analisi in frequenza e le tabelle 5.13 e 5.14 sono rispettivamente definite in 5.15, 5.16, 5.17 (considerando solo il caso di analisi con la coppia di modi instabili a diametro nodale 1 e 2).

condizione di deformata iniziale	condizione iniz. di frequenza	ampiezza LCO	frequenza [Hz]	modo in LCO
$ND = +1$	$ND = +1$	$4.2154 \cdot 10^{-3}$	122.828	$ND = +1$
$ND = +2$	$ND = +2$	-	-	-
$ND = +1$	$ND = +2$	$4.2154 \cdot 10^{-3}$	122.828	$ND = +1$
$ND = +2$	$ND = +1$	-	-	-

Tabella 5.15: Risultati analisi in HBM ($H=1$), con $\zeta_{aer}(ND=1) = -0.005$, $\zeta_{aer}(ND=2) = -0.003 \rightarrow \Delta\zeta_{aer} = 40\%$

condizione di deformata iniziale	condizione iniz. di frequenza	ampiezza LCO	frequenza [Hz]	modo in LCO
$ND = +1$	$ND = +1$	-	-	-
$ND = +2$	$ND = +2$	$4.0509 \cdot 10^{-3}$	125.293	$ND = +2$
$ND = +1$	$ND = +2$	-	-	-
$ND = +2$	$ND = +1$	$4.0509 \cdot 10^{-3}$	125.293	$ND = +2$

Tabella 5.16: Risultati analisi in HBM ($H=1$), con $\zeta_{aer}(ND=1) = -0.003$, $\zeta_{aer}(ND=2) = -0.005 \rightarrow \Delta\zeta_{aer} = 40\%$

condizione di deformata iniziale	condizione iniz. di frequenza	ampiezza LCO	frequenza [Hz]	modo in LCO
$ND = +2$	$ND = +2$	$4.0505 \cdot 10^{-3}$	125.300	$ND = +2$
$ND = +1$	$ND = +2$	$4.2154 \cdot 10^{-3}$	122.828	$ND = +1$
$ND = +2$	$ND = +1$	$4.0505 \cdot 10^{-3}$	125.300	$ND = +2$
$ND = +1$	$ND = +1$	$4.2154 \cdot 10^{-3}$	122.828	$ND = +1$

Tabella 5.17: Risultati analisi in HBM ($H=1$), con $\zeta_{aer}(ND=1) = -0.005$, $\zeta_{aer}(ND=2) = -0.004 \rightarrow \Delta\zeta_{aer} = 20\%$

Per gli stessi motivi spiegati nei casi di analisi 2.1 il metodo in frequenza non è in grado di definire la risposta a ciclo limite in caso di modi di primo tentativo che associati ad un certo indice armonico H (in questo caso $H=1$) non riescono a definire un certo pattern di forze di contatto il cui EO sia in grado di sollecitare il modo che nel tempo risulta essere quello responsabile della risposta in LCO del sistema.

Considerando il caso $\Delta\zeta_{aer} < 40\%$, poiché non può essere stabilito a priori quando a rispondere sia il modo con coefficiente aerodinamico più grande o più piccolo essendo fondamentale l'informazione della condizione iniziale, una analisi più dettagliata si esegue tramite *lo studio del bacino di attrazione di ciclo limite*. Per bacino di attrazione di ciclo limite si intende una "zona" all'interno della quale il sistema è portato a rispondere, dopo la fase transitoria, sempre alle condizioni definite dal punto di equilibrio stabile di quel ciclo limite. E' da specificarsi che un sistema può avere differenti punti di equilibrio stabili e in funzione delle condizioni in cui il sistema si trova ad operare, questo può rispondere secondo un ciclo limite (con suo valore di ampiezza e frequenza) o secondo un altro; ed è da specificarsi anche che per zona si intende un insieme di specifiche con cui il sistema lavora. Nel caso delle analisi qui condotte, la condizione discriminante i cicli limite è la condizione di spostamento iniziale. Ovviamente il sistema potrebbe anche lavorare in condizioni lontane dal bacino di attrazione di ciclo limite e in questo caso, non riuscendo a stabilizzarsi, la risposta sarebbe di tipo instabile con vibrazioni divergenti nel tempo.

Per questo studio i due modi instabili considerati sono quelli associati a $ND = +1$ e $ND = +2$. La differenza di frequenza in condizione stick tra i due modi risulta essere:

$$\Delta f_{STICK,1-2} = \frac{f_2 - f_1}{f_1} = 2 \%$$

Δf rimane costante, lo studio è invece condotto considerando casi differenti di $\Delta\zeta_{aer}$ come riportato in tabella 5.18.

$\Delta\zeta_{aer}$
20%
10%
2%
0.2%

Tabella 5.18: Casi di $\Delta\zeta_{aer}$ considerati per l'indagine dei bacini di attrazione di ciclo limite ($\zeta_{aer,1} > \zeta_{aer,2}$)

Le risposte ottenute sono mostrate in figura 5.21. Per ciascun punto dei grafici la risposta del sistema è ottenuta per integrazione diretta nel tempo per differenti condizioni iniziali di ampiezza, moltiplicate per le corrispondenti deformate associate ai due modi. La scala di rappresentazione è di tipo logaritmica. Si osserva che due bacini di attrazione possono essere definiti in ciascuna immagine, uno associato a $ND = +1$, definito dai punti in blu, e uno associato a $ND = +2$, definito dai punti in verde. I punti in rosso definiscono invece la zona di instabilità.

Per comprendere in modo migliore la risposta del sistema si considerino i punti indicati nell'immagine 5.21a. Le risposte del sistema per le condizioni iniziali definite da questi punti sono riportate nell'immagine 5.22. A sinistra sono rappresentati gli andamenti delle risposte del sistema nel tempo mentre a destra le risposte sono scomposte per ottenere l'evoluzione dei modi rotanti che vi partecipano.

La figura 5.22a rappresenta l'evoluzione della risposta del sistema per la condizione di ampiezza iniziale associata al punto 1. Questo valore non è molto elevato e così la corrispondente energia in ingresso al sistema. In questo caso le vibrazioni aumentano fino a quando le dissipazioni per attrito agli elementi di contatto non iniziano; quando lo slip si stabilisce, le vibrazioni vengono saturate e stabilizzate in un ciclo limite. Dall'immagine alla destra del grafico delle ampiezze si osserva l'unico modo che non viene smorzato dagli elementi di attrito, il modo che definisce la risposta nel suo contenuto in frequenza

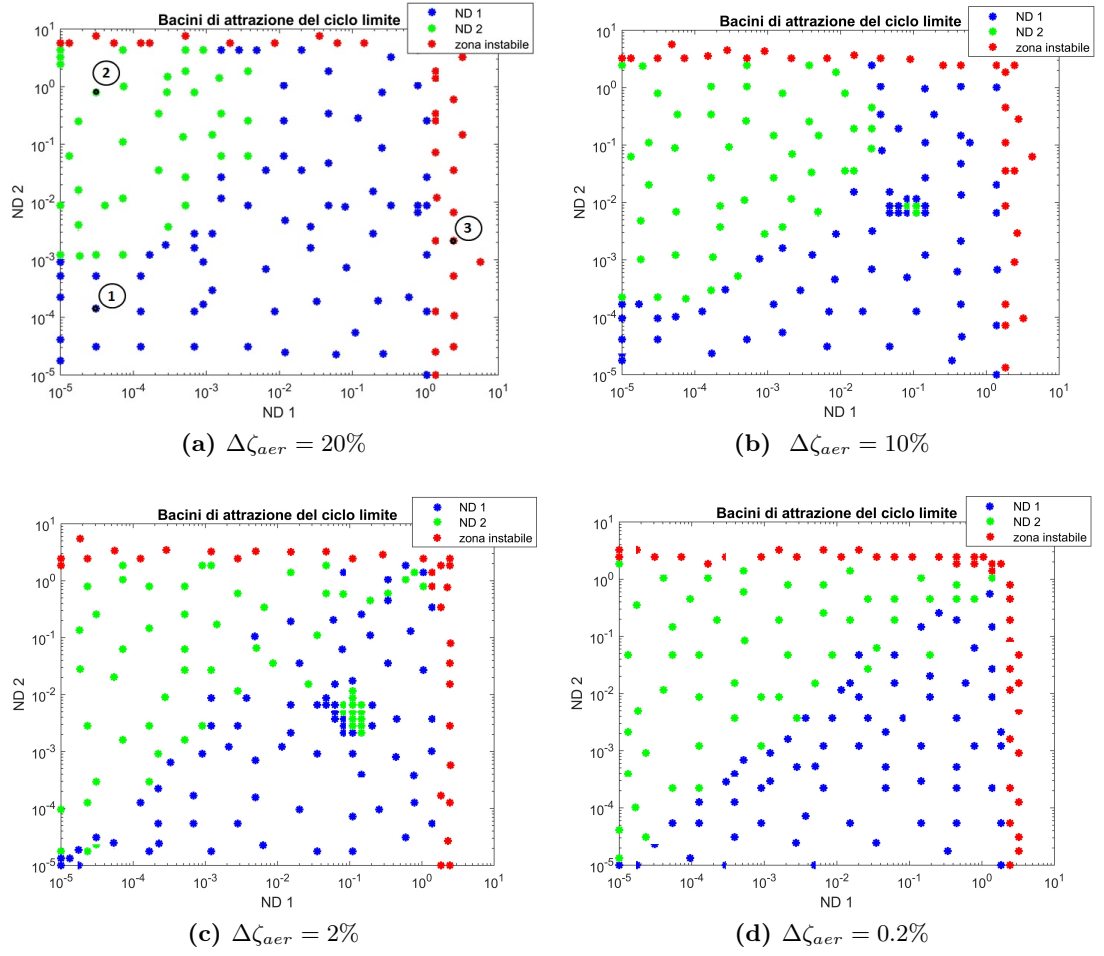


Figura 5.21: Bacini di attrazione di ciclo limite per modi instabili con $\Delta f_{STICK,1-2} = 2\%$

e ampiezza. La figura 5.22c mostra un caso analogo considerando però un'ampiezza di partenza maggiore. Essendo però l'apporto di energia al sistema ancora accettabile, le vibrazioni decrescono grazie alla dissipazione di energia per attrito e il ciclo limite è stabilito. Nella figura 5.22e invece la risposta non è più controllata e le vibrazioni crescono in modo divergente senza raggiungere nessun ciclo limite. La ragione di ciò è dovuta all'utilizzo di una ampiezza iniziale eccessiva e dunque di una energia così grande che gli elementi di contatto non sono in grado di dissipare; il sistema continua così ad autoeccitarsi senza alcuna limitazione.

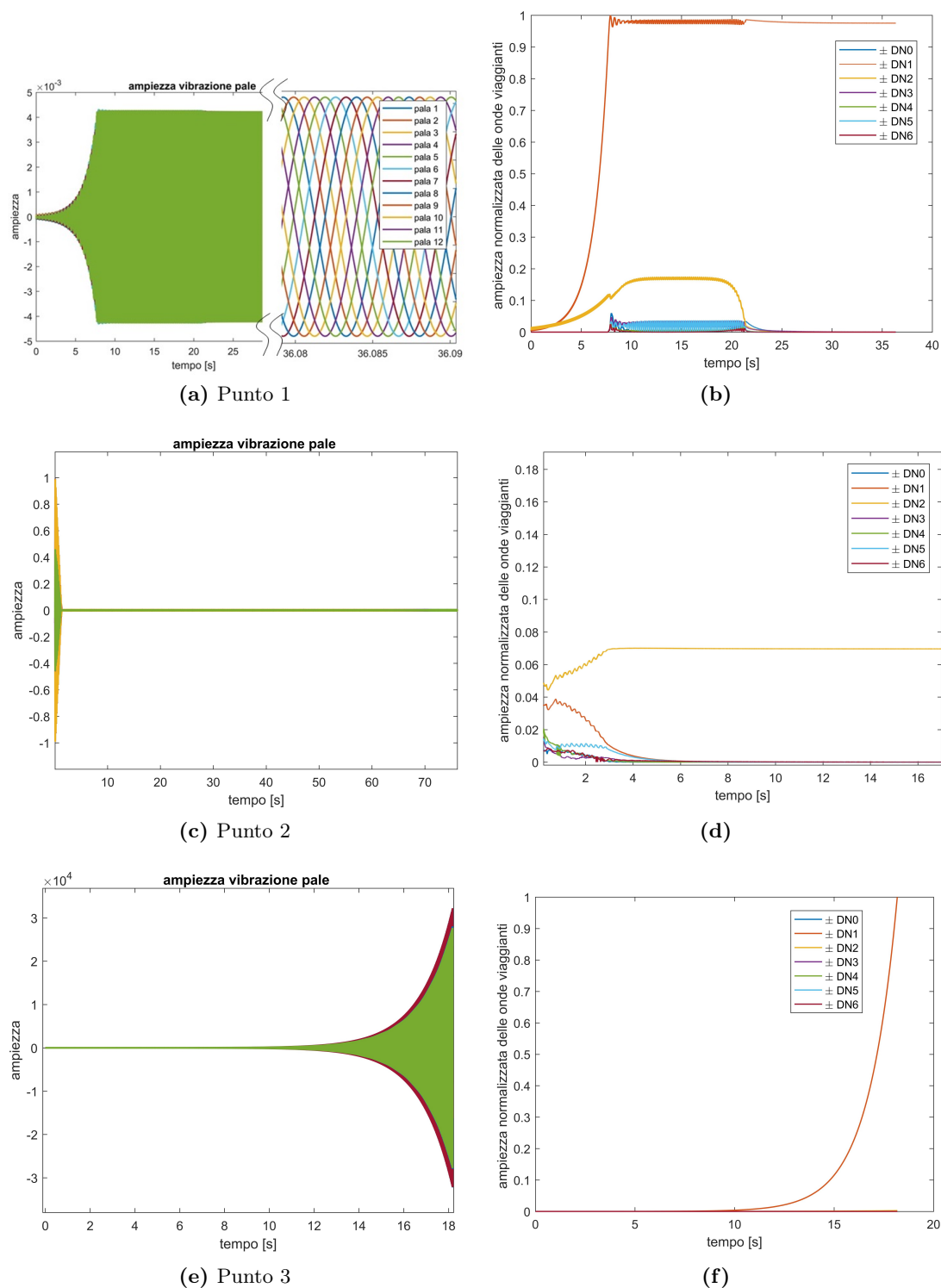


Figura 5.22: Analisi delle risposte dei punti della figura 5.21a

Considerando tutti i casi di $\Delta\zeta_{aer}$ analizzati e raffigurati in figura 5.21 si osserva che il bacino di attrazione legato a $ND = +2$, il modo a cui è associato il coefficiente di smorzamento ζ_{aer} più piccolo in valore assoluto, tende a diventare sempre più ampio quanto più $\Delta\zeta_{aer}$ diminuisce. Nel corso delle analisi però non si riesce a trovare in alcun punto la compresenza di entrambi i due modi instabili al ciclo limite finale; a rispondere è sempre l'uno o l'altro. Con lo scopo di poter valutare la compresenza di entrambi i modi, si considera quindi un caso di indagine diverso. I modi critici in analisi sono ora $ND = +4$ e $ND = +5$; il perché è dovuto alla presenza di una differenza di frequenza stick minore :

$$\Delta f_{STICK,4-5} = \frac{f_5 - f_4}{f_4} = 0.28 \%$$

Si ipotizza che avendo questi una frequenza molto simile, sia più probabile il caso che entrambi riescano a partecipare alla risposta finale. Tenendo costante $\Delta\zeta_{aer} = 0.2\%$ tra i due modi, assumendo $\zeta_{aer,4} > \zeta_{aer,5}$, si ottiene quanto mostrato in figura 5.23.

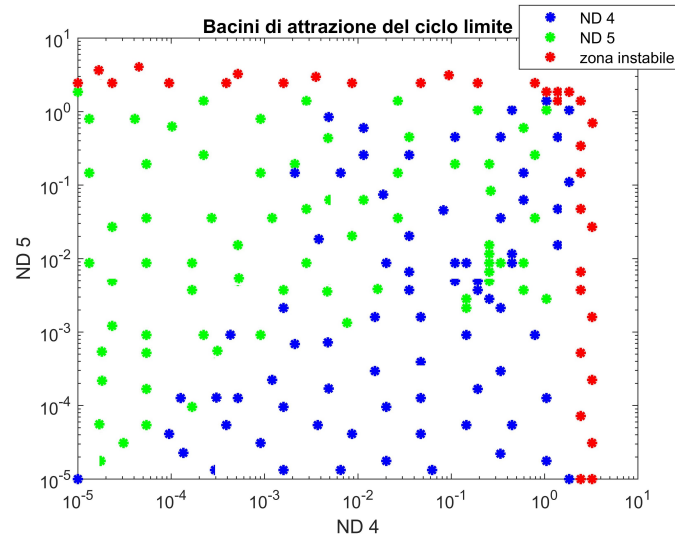


Figura 5.23: Bacini di attrazione di ciclo limite per modi instabili con $\Delta f_{STICK,4-5} = 0.28\%$ e $\Delta\zeta_{aer} = 0.2\%$

Dalle analisi, per ogni punto studiato della figura 5.23, non appare la compresenza dei due modi nella risposta del sistema allo stato di equilibrio di ciclo limite. Si osserva però che:

- è meno netta la distinzione dei due bacini di attrazione probabilmente perché rispetto ai casi precedenti in cui i modi erano dotati di frequenze ben distinte e dunque a rispondere era l'uno o l'altro, qui la distinzione è meno chiara e il sistema si adegua di volta in volta al pattern di forze di attrito;
- analizzando lo sviluppo della risposta dei modi nel tempo questi appaiono essere molto più sollecitati e presenti nella risposta del sistema in fase transitoria rispetto ai casi precedentemente analizzati. Se precedentemente la maggior parte dei modi veniva smorzata dopo pochi secondi per far spazio a quello responsabile della risposta del sistema, in questo caso invece i modi sono ben distinti e coinvolti per periodi di tempo elevati; per trovare, infatti, la risposta di ciclo limite in cui il solo modo principale sia visibile, bisogna analizzare istanti di tempo molto lunghi. Si consideri ad esempio la risposta dei modi ottenuta per un punto appartenente al bacino di attrazione di $ND = +4$, figura 5.24; si osserva come, per tempi di

analisi molto più elevati rispetto a quanto visibile nelle figure 5.22b e 5.22d, i modi sono ancora tutti presenti nella risposta del sistema. Questo favorisce l'ipotesi che più i modi abbiano un contenuto in frequenza simile, più è probabile che possa verificarsi una compresenza di essi nella risposta finale del sistema.

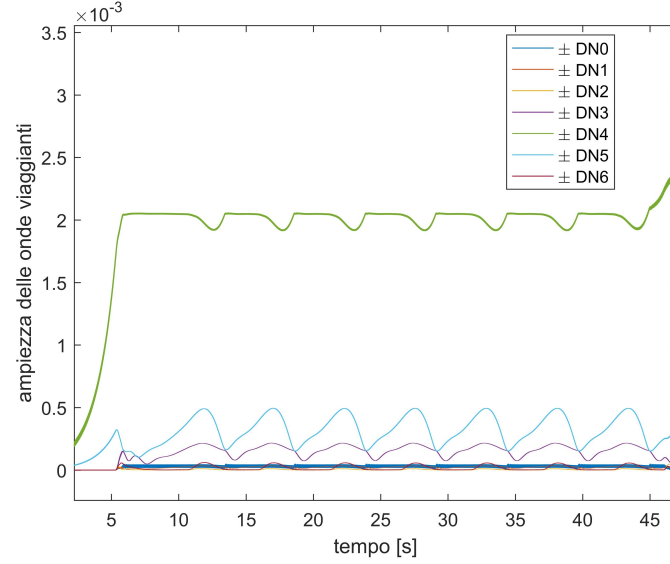


Figura 5.24: Evoluzione nel tempo dei modi per un punto appartenente al bacino di attrazione del ciclo limite di $ND = +4$ (coordinate sul grafico: $1.2649e-4$ nd4 - $2.33e-5$ nd5)

Capitolo 6

Conclusioni

Partendo dal caso più semplice di sistema soggetto a forzante esterna si arriva a comprendere la natura del fenomeno di instabilità a flutter e il suo effetto sulle vibrazioni dei componenti rotorici.

I risultati mostrano che è possibile limitare le oscillazioni autoindotte generate dal flutter in oscillazioni a ciclo limite e tramite i metodi di analisi presentati è possibile quantificarne il valore di ampiezza e di frequenza. Affinché ciò sia possibile la struttura deve essere dotata di elementi di contatto per attrito.

Il modello utilizzato per definire la risposta dinamica non lineare del disco palettato è di tipo parametrico; i settori del disco sono composti di elementi masse-molle-smorzatori e l'effetto dell'attrito generato alle interfacce dei giunti è definito da un modello di contatto Jenkins. Altre ipotesi di semplificazione sono utilizzate come la linearizzazione della componente aerodinamica al problema, l'utilizzo di una struttura rotorica tuned, l'impostazione di un approccio di calcolo disaccoppiato nel campo strutturale e la trascurabilità della forzante esterna.

L'utilizzo di un modello di indagine semplice permette di comprendere più nel dettaglio gli aspetti basilari del fenomeno e di interpretare al meglio i risultati numerici; dopotutto solo i progressi nelle formulazioni più essenziali possono fornire una base per approcci numerici più complessi. La relativa essenzialità del modello permette inoltre di condurre una analisi di sensitività alla variazione dei parametri in gioco. In questo modo infatti è più semplice valutare l'effetto di questi sulla risposta del sistema. Emerge che un'accurata scelta dei valori dei parametri relativi agli elementi di contatto e del coefficiente di smorzamento aerodinamico comporta la possibilità di poter limitare le oscillazioni nella risposta di ciclo limite a valori di ampiezza per cui l'affaticamento della struttura può essere controllata.

Il metodo di calcolo della risposta viene presentato in maniera dettagliata per entrambi i domini in cui l'equazione non lineare del moto viene risolta, il dominio del tempo e il dominio in frequenza.

Il metodo nel dominio del tempo viene sviluppato in coordinate fisiche e modali. Se dal punto di vista del risultato i valori della risposta coincidono a meno di errori trascurabili, dal punto di vista del tempo di calcolo si presenta una grande differenza. In tutte le analisi svolte nel corso dell'indagine il metodo in coordinate modali impiega più del doppio del tempo di calcolo rispetto a quanto impiegato dal metodo in coordinate fisiche. Il perché è dovuto al fatto che nel calcolo modale è necessario compiere, per ogni istante di tempo, un passaggio al dominio fisico per il calcolo delle forzanti di attrito non lineare, per poi tornare nuovamente nel dominio di partenza. Risulta dunque più adatto, per uno studio di questo tipo, l'utilizzo del dominio fisico.

Per il calcolo in frequenza viene utilizzato il MHBM dove viene aggiunta, rispetto al dominio nel tempo, l'ipotesi di linearizzazione delle forze di attrito e viene inserito nel calcolo l'equazione di bilancio delle energie. Si osserva che il metodo in frequenza riesce a definire in maniera molto precisa il valore di frequenza della risposta anche considerando un contributo armonico minimo ($H=1$). Per il valore di ampiezza invece, un contributo armonico superiore è più adatto a definire con migliore accuratezza la risposta. I tempi di calcolo sono notevolmente ridotti rispetto al dominio del tempo ma tante più armoniche si considerano tanto più questo aumenta. Dal dominio in frequenza emerge inoltre che, per ottenere un risultato diverso dalla soluzione banale e che converga correttamente al risultato nel dominio del tempo, è importante definire la giusta condizione iniziale. Sebbene infatti il metodo sia un ottimo compromesso per ottenere una risposta con un livello accettabile di approssimazione a un tempo computazionale molto ridotto, si potrebbe interpretare in modo errato la convergenza verso il valore di zero quando nel tempo la vibrazione ha invece raggiunto un altro sviluppo.

Lo studio della risposta del disco viene fatta inizialmente considerando un solo diametro nodale critico. Dato che dalle analisi CFD la distribuzione dei parametri di instabilità fa sì che i diametri critici siano in numero superiore ad uno, l'analisi si concentra successivamente a valutare il caso progressivamente più complesso quale la presenza di due diametri nodali critici. Il fatto di non considerare l'azione contemporanea di tutti i modi instabili, ma di soffermarsi ad analizzare l'interazione tra due, permette di comprendere in che modo questi influenzano la risposta del sistema. Alcuni recenti studi hanno dimostrato inoltre che è possibile verificare la compresenza dei due modi più instabili nella risposta a ciclo limite tuttavia in questa indagine ciò non è risultato ed emerge che solamente l'uno o l'altro definisce l'andamento nella zona stazionaria finale. Ricerche future potrebbero essere condotte verso uno studio che tenga conto di più di due diametri nodali critici o, considerandone due, si potrebbero indagare le condizioni per cui la combinazione dei due modi instabili potrebbe dar vita a risposte con un contenuto in frequenza diverso da quello di entrambi i modi partecipanti e con una evoluzione dell'ampiezza diversa dalla periodicità fino ad ora mostrata.

Un passo ulteriore verso una analisi più accurata potrebbe inoltre essere fatta eliminando alcune delle ipotesi utilizzate, come il considerare un disco tuned. I dischi reali infatti non sono mai costituiti da settori perfettamente identici e le differenze in gioco influenzano la dinamica del sistema e la sua risposta.

Per orientare l'indagine verso una analisi più realistica, sarebbe inoltre importante inserire quanto visto all'interno di un approccio accoppiato, così che lo scambio continuo di informazioni tra dominio strutturale e di flusso sia in grado di aggiornare costantemente le informazioni di input al calcolo per ogni istante di tempo, e ottenere così un risultato quanto più vicino al caso reale di funzionamento del componente.

"Questo lavoro non sarebbe stato possibile senza il supporto più che esperto del Prof. Firrone Christian Maria. Per questo lo ringrazio sentitamente per avermi aiutato a concludere questo percorso con grande soddisfazione."

Marianna Massone

Appendice A

A.1 Classificazione dei metodi DTI

	For 1st order ODE		For 2nd order ODE
	General multistep integration methods	Runge Kutta Methods	Newmark's family of methods
Explicit	Forward Euler Adams-Bashfort: ode113	Classic : ode45 ode23	Central Difference
Implicit	Trapezoidal rule: ode23t Backward Euler : ode15s Adams-Moulton: ode113	ode23tb	Constant average acceleration Linear acceleration Wilson- θ Houbolt

Funzioni Matlab non disponibili

Figura A.1: Schema riassuntivo dei principali metodi DTI

Di fianco ad ogni metodo di integrazione nel tempo sono riportate le corrispondenti funzioni Matlab in grado di risolvere le equazioni differenziali nel tempo.

A.2 Dimensioni dei vettori nel dominio della frequenza

Assumendo di utilizzare un metodo MHBM, con un numero di armoniche complessive H , l'equazione (3.15) è così esplicitata:

- $\{\bar{X}_h\} = \left\{ \{X_0\}, \{X_1^c\}, \{X_1^s\}, \dots, \{X_H^c\}, \{X_H^s\} \right\}^T$ è un vettore di coefficienti armonici di spostamento in cui tutte le componenti complesse sono suddivise, per ogni armonica, in parte reale (componenti coseno) e in parte immaginaria (componenti seno), a meno della parte costante $\{X_0\}$.

A loro volta tutti questi elementi $\{X_0\}, \{X_n^c\}$ e $\{X_n^s\}$ sono vettori con un numero di elementi pari ai gradi di libertà della struttura:

DOFS di un settore · numero di settori.

Nel complesso il vettore colonna $\{\bar{X}_h\}$ avrà una dimensione di

$$gdl \cdot N \cdot (2 \cdot H + 1)$$

con gdl i gradi di libertà per un settore (DOFS), N il numero di settori del disco, H il numero di armoniche considerate, "+1" il termine per includere nel conteggio gli

elementi costanti che costituiscono il vettore $\{X_0\}$ e "2 ." il termine per tener conto della presenza di due componenti (seno e coseno) per ogni armonica.

- $\{\bar{F}_{nl_h}(\bar{X})\} = \left\{ \{F_0\}, \{F_1^c\}, \{F_1^s\}, \dots, \{F_H^c\}, \{F_H^s\} \right\}^T$ è il vettore di coefficienti armonici delle forze non lineari di attrito, di dimensioni e caratteristiche analoghe a $\{\bar{X}_h\}$.

- $[\bar{A}_h] = \text{diag}[A_0, A_1, \dots, A_H]$ è una matrice diagonale a blocchi in cui

$$[A_0] = [K]$$

$$[A_n] = \begin{bmatrix} \text{Re}(A_j) & \text{Im}(A_j) \\ -\text{Im}(A_j) & \text{Re}(A_j) \end{bmatrix} \quad n = 1, \dots, H$$

$$\text{con } [A_j] = \left[-(h\omega)^2[M] + ih\omega[C + C_{aer}] + [K] \right]$$

$[\bar{A}_h]$ avrà una dimensione $m \times m$ con $m = gdl \cdot N \cdot (2 \cdot H + 1)$.

Essendo la matrice diagonale, si avrà un set di m equazioni non lineari indipendenti.

A.3 Differenza tra approccio nel tempo e in frequenza nella convergenza alla soluzione di equilibrio

Considerando le prove definite nelle tabelle 5.7 (per il dominio nel tempo) e 5.9 (per il dominio in frequenza) si osserva la differenza per cui nel primo caso, indifferentemente dal tipo di modo che si usa per definire la condizione di deformata di primo tentativo, il sistema riesce a giungere correttamente alla soluzione finale e definire il modo prevalente nella zona di LCO; nel metodo in frequenza questo non accade. Ci si potrebbe chiedere quindi perché impostando ad esempio come modo di primo tentativo quello associato a $ND = +3$ il metodo nel tempo arrivi al risultato finale mentre quello in frequenza no; considerando proprio questo esempio si giustifica la differenza tra i due metodi.

Quando si integra nel tempo il sistema evolve istante per istante senza alcuna approssimazione nel contenuto armonico delle forze di contatto, dunque nel momento in cui si avvia la fase di slip e si apre il ciclo di isteresi questo avrà al suo interno un contenuto multi-armonico. L'insieme di queste armoniche differenti permette di avere sì l'informazione della deformata iniziale tramite l'armonica principale, ma può accadere che con l'insieme di tutte le superarmoniche le risposte si sincronizzino in maniera tale che nello spazio della coordinata circonferenziale si generi un pattern di forze che ricordi $ND = 2$. In questo modo quindi l'insieme di tutte le superarmoniche riesce a sollecitare il modo a $ND = 2$ che avendo associato una energia aerodinamica non nulla comincia a vibrare perché autoeccitato; essendo però presente lo smorzamento strutturale e quello per attrito, il sistema riesce a limitare la vibrazione del modo trovando il suo equilibrio a ciclo limite.

Nel dominio della frequenza, con il metodo HBM singolo, non può avvenire quanto detto per il dominio nel tempo poiché si effettua una linearizzazione alla prima armonica del ciclo di isteresi. Considerando quindi come condizione di partenza $ND = 3$ si ha che anche gli spostamenti fisici, quelli relativi e quindi anche le forze di contatto ricostruiranno nella coordinata θ un pattern associato a $ND = 3$. Il modo a diametro nodale 3 viene quindi sollecitato a rispondere ma avendo associato uno smorzamento aerodinamico nullo e uno smorzamento strutturale e di attrito maggiore di zero, questo viene smorzato portando la risposta a tendere alla soluzione banale, ossia la soluzione nulla. Il fatto di non ottenere perfettamente una convergenza a zero è dovuto puramente

a motivi di tipo numerici. Si ipotizza infatti che se il numero di iterazioni possibili al calcolatore fossero maggiori, il risultato riuscirebbe a convergere al valore nullo. In alternativa si potrebbe procedere per tentativi a modificare le condizioni iniziali per avvicinarle al valore minimo necessario per la convergenza.

Ipotizzando di utilizzare un numero di armoniche superiore ad 1 il ragionamento risulta analogo al caso di una sola armonica. Qualora si sviluppi un pattern di forze non lineari capaci di sollecitare il modo instabile $ND = 2$ o $ND = 1$ allora si avrebbe una risposta diversa da quella nulla. La complessità rispetto al dominio del tempo che giunge sempre a definire la soluzione a ciclo limite, sta quindi nel fatto che qui si dovrebbe scegliere un indice armonico opportuno, che generi cioè un pattern di forze di EO uguale a $m \cdot N \pm ND$.

In conclusione la differenza tra i due metodi sta nell'ipotesi di approssimazione che si usa nell'HBM.

Bibliografia

- [1] Sinha, A. and Griffin, J.H., "*Friction Damping of Flutter in Gas Turbine Engine Airfoils*", AIAA Journal of Aircraft, Vol. 2, April 1983.
- [2] Sinha, A. and Griffin, J.H., "*Effect of Friction Dampers on Aerodynamically Unstable Rotor Stages*", AIAA Journal, Vol. 23, Feb 1985.
- [3] Corral, R. and Gallardo, J., "*Verification of the Vibration Amplitude Prediction of Self-Excited LPT Rotor Blades Using a Fully Coupled Time-Domain Non-Linear Method and Experimental Data*", ASME Paper 2008-GT-51416, June 2008.
- [4] Dewey H.Hodges, G.Alvin Pierce, "*Introduction to structural dynamics and aeroelasticity*", Cambridge University Press, 2011-2nd ed.
- [5] Beghini M., Bertini L., Santus C., Mariotti G., "*Condizioni di risonanza per ruote palettate, definizione del diagramma Safe*", AIAS 2011-116.
- [6] Srinivasan A.V., "*Flutter and resonant vibration characteristics of engine blades*", IGTI Scholar Paper, Journal of Engineering for Gas Turbines and Power (1997), Vol. 119, 741-775.
- [7] Fantino C., "*Caratterizzazione dinamica di un rotore LPT in presenza di mistuning intenzionale*", Politecnico di Torino, 2017.
- [8] Firrone C.M., "*Comportamento dinamico di ingranaggi per applicazioni aeronautiche*", Politecnico di Torino, 2014.
- [9] Firrone C.M., "*Dynamics of the underplatform damper for aeronautical turbo engines*", PhD Thesis, April 2006.
- [10] Petrov, E.P., "*Analysis of flutter-induced limit cycle oscillations in gas-turbine structures with friction, gap and other nonlinear contact interfaces*", Proceedings of ASME Turbo Expo 2011, June 6-10, 2011, Vancouver, British Columbia, Canada GT2011-46188.
- [11] Lassalle M., "*Self-excited vibrations controlled by damping at blade root joints of turbine disks*", PhD Thesis, 2018.
- [12] Marshall J.G. and Imregun M., "*A review of aeroelasticity methods with emphasis on turbomachinery applications*", Journal of Fluids and Structures, 1996, Vol. 10, Pages: 237-267.
- [13] Kaza K.R.V. and Kielb R.E., "*Effects of Mistuning on bending-torsion and response of a cascade in incompressible flow*", Proceedings of the 22nd AIAA/ASME/ASCE/AHS Structures, Structural Dynamics and Materials Conference, Atlanta, Ga., 1981, Paper 81-0602.

- [14] Siewert C., Panning L., Wallascheck J. and Richter C., "*Multiharmonic forced response analysis of a turbine blading coupled by nonlinear contact forces*", Proceedings of ASME Turbo Expo 2009: Power for Land, Sea and Air, June 8-12, Orlando, Florida, USA.
- [15] Corral R., Gallardo J.M. and Ivaturi R., "*Conceptual analysis of the non-linear forced response of aerodynamically unstable bladed-disk*", Proceedings of ASME Turbo Expo 2013: Turbine Technical Conference and Exposition, June 3-7, 2013, San Antonio, Texas, USA GT013-94851.
- [16] Fasana A. and Marchesiello S., "*Meccanica delle vibrazioni*", CLUT Editrice, 2006.
- [17] Cameron T. and Griffin J., "*An alternating frequency/time domain method for calculating the steady-state response of nonlinear dynamic systems*", Journal of Applied Mechanics 56, 1989, 149-154.
- [18] Ottarsson G., "*Dynamic modeling and vibration analysis of mistuned bladed disks*", PhD Thesis, University of Michigan, 1994.
- [19] Corral R. and Gallardo, J., "*Non-linear dynamics of multi-mode unstable bladed-disks: part 1- Description of a canonical model and phenomenological results*", Proceedings of ASME Turbo Expo 2011, June 6-10, 2011, Vancouver, British Columbia, Canada, GT2011-45983
- [20] Krack M., Panning-von Scheidt L. and Wallaschek J., "*On the interaction of multiple traveling wave modes in the flutter vibrations of friction-damped tuned bladed disks*", Proceedings of ASME Turbo Expo 2016: Turbomachinery Technical Conference and Exposition, June 13-17, 2016, Seoul, South Korea, GT2016-56126.