POLITECNICO DI TORINO

Collegio di Ingegneria Meccanica, Aereospaziale, dell'Autoveicolo e della Produzione

Corso di Laurea Magistrale in Ingegneria Meccanica

Tesi di Laurea Magistrale

Modellazione del comportamento meccanico di lamiere di Niobio

Relatore:

Prof. Ing. Lorenzo Peroni

Correlatore

Ing. Martina Scapin

Candidato

Andrea Amadio

Matricola 235384

Anno scolastico 2017/2018

Indice

Abstract ……6

Capitolo 1: Meccanica dei materiali metallici……8

- 1.1 Reticoli cristallini……8
- 1.2 Prova di trazione……10
- 1.3 Effetto strain rate temperatura……13
    - 1.3.1 Effetto macroscopico strain rate temperatura……13
    - 1.3.2 Effetto microscopico strain rate temperatura……17
- 1.4 Incrudimento……22
- 1.5 Johnson Cook model……24

Capitolo 2: Niobio……26

- 2.1 Proprietà fisiche……27
- 2.2 Proprietà chimiche……29
- 2.3 Proprietà meccaniche……30
- 2.4 Proprietà elettromagnetiche……32
- 2.5 Processo di estrazione……33
- 2.6 Applicazioni……35
    - 2.6.1 Crab Cavities……37

Capitolo 3: Metodo elementi finiti……39

- 3.1 Modello filo elastico……41
- 3.2 Modello FEM provino di trazione……46
    - 3.2.1 Card controllo……48
    - 3.2.2 Card definizione……51
- 3.3 Confronto modelli……54

Capitolo 4: Ottimizzazione……59

- 4.1 Processo ottimizzazione……61
    - 4.1.1. Metamodel……63
    - 4.1.2. SDM……64

4.1.3. Sampling……67
4.1.4. Stage……68
4.1.5. Composite……69
4.1.6. Optimization……70
4.1.7. Termination Criteria……71
- 4.2 Risultati……72

Capitolo 5: Conclusioni……81

Bibliografia……83

Indice figure……85

Abstract

Lo scopo di questa tesi di laurea è ricavare un modello di materiale che possa descrivere il comportamento di lamiere di Niobio in un ampio range di variazione di deformazione e strain rate, si distingue dai precedente lavori effettuati in tal senso perché si passa da un modello basato su una legge empirica, quella di Johnson-Cook, ad uno, il modello MAT_224 del solutore LS-DYNA, che permette di slegarsi da questa equazione. A tal scopo si sono prima sviluppati diversi modelli FEM di un provino di trazione e si è individuato tra questi quello che meglio simula il comportamento reale della prova di trazione, successivamente con questo provino attraverso un procedimento inverso si è effettuato un fitting delle curve sperimentali forza-spostamento attraverso un'ottimizzazione sequenziale con riduzione del dominio. Per comprendere meglio l'obiettivo del seguente lavoro nei primi due capitoli vengono fornite le informazioni essenziali sui fenomeni oggetto di studio, il primo capitolo si sofferma quindi sulle caratteristiche dei metalli e sulla descrizione dei fenomeni che si verificano nel materiale al variare di temperatura e velocità di deformazione, nel secondo invece viene descritto brevemente il Niobio, le proprietà chimiche, fisiche e meccaniche, il processo di estrazione e purificazione e infine le proprietà elettromagnetiche che ne hanno determinato la scelta come materiale per la realizzazione delle Crab Cavities per l'acceleratore LHC al Cern di Ginevra.

1 MECCANICA DEI MATERIALI METALLICI

In questo primo capitolo andiamo a fornire le informazioni essenziali per comprendere il comportamento dei materiali metallici sottoposti a prove di deformazione statiche, quasi statiche e dinamiche, per arrivare a descrivere il modello di Johnson-Cook, che verrà poi adottato, in una sua particolare versione (Tabulata), nelle successive fasi di simulazione e ottimizzazione allo scopo di descrivere il comportamento del materiale al variare di un ampio range di deformazione e velocità di deformazione**.**

1.1 Reticoli Cristallini

I materiali metallici [1] sono alla temperatura ambiente solidi cristallini nei quali gli atomi sono disposti nello spazio con regolarità in modo da costituire un reticolo tridimensionale, la posizione di equilibrio degli atomi è garantita da un bilanciamento di forze attrattive e repulsive generate dai nuclei atomici e dagli elettroni.

Il legame metallico gode delle seguenti proprietà:

- Elevata energia di legame.
- Assenza di proprietà direzionali.
- Non localizzabilità della carica.

Da queste caratteristiche derivano le proprietà dei metalli di elevata compattezza, densità e alti valori di conducibilità elettrica e termica.

Per studiare il comportamento di un metallo sottoposto a sollecitazione non si può prescindere dal valutare il suo reticolo cristallino, per i metalli abbiamo tre principali reticoli:

- Cella cubica a corpo centrato (BCC).
- Cella cubica a facce centrate (FCC)
- Cella esagonale compatta (HCP).

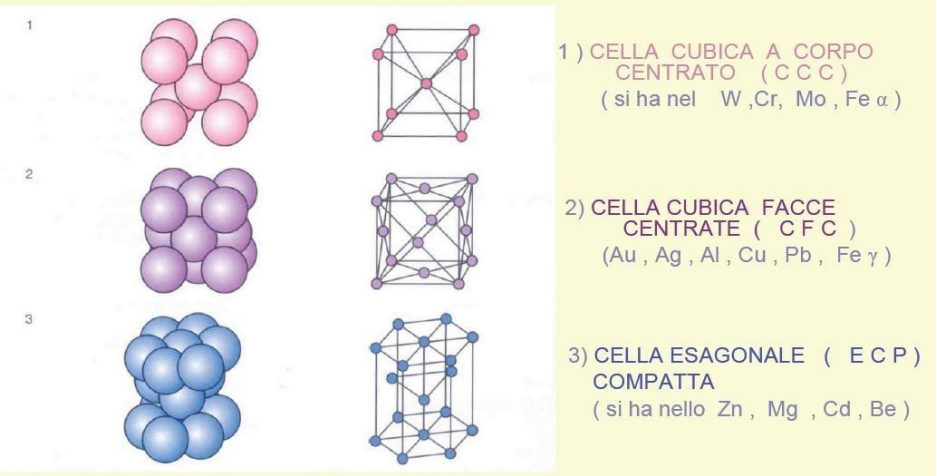


Figura 1 Principali reticoli cristallini dei materiali metallici.

Dai diagrammi di stato di alcuni materiali metallici si può osservare come la struttura reticolare cambi in funzione della temperatura a cui si trova il materiale, questo è uno dei motivi alla base dei trattamenti termici volti ad ottenere le caratteristiche richieste; oltre a fornirci utili informazioni per prevedere il comportamento di un materiale metallico a diverse temperature di esercizio.

Per il presente lavoro è sufficiente sapere che un materiale BCC (Cubic Centre Body) è un materiale con un numero elevato di piani di scorrimento, aventi però delle tensioni di scorrimento elevate, un materiale CFC (Cubic Face Centred) invece è un materiale che dispone di piani di scorrimento a bassa tensione di attivazione, i metalli costituiti da celle cristalline di questa tipologia avranno quindi basse tensioni di snervamento e allungamenti a rottura maggiori, l'ultima tipologia infine si tratta di cristalli aventi pochi piani di scorrimento, sono quindi materiali caratterizzati da un comportamento di tipo fragile, bisognerà aumentarne la temperatura per migliorare la deformabilità [2].

1.2 Prova di Trazione

Il modo più semplice per studiare il legame tensione deformazione che si instaura in un materiale metallico è la prova di trazione [3], la normativa di riferimento è la UNI EN ISO 6892-1:2009.

Il provino è costituito da tre parti, il tratto utile, il tratto calibrato e le teste opportunamente raccordate al tratto calibrato, affinché tutte le grandezze che si ottengono dalla prova risultino indipendenti dalla geometria della provetta è necessario che il rapporto fra la lunghezza L_0 e la sezione iniziale S_0 rispetti le seguenti relazioni:

$$L_0 = K\sqrt{S_0}$$

$$L_0 = nd_0$$

- K=5,65
- n=5

La prova consiste nel sottoporre il provino a un carico mono assiale crescente fino a raggiungere la rottura del campione.

Si fissa il provino tra due morsetti in posizione verticale (in modo tale che la forza di gravità non influisca sulla prova). I morsetti stringono il provino nella zona della testa di afferraggio. I due morsetti si muovono a velocità costante, impostata tramite computer; a causa del movimento dei morsetti si instaura uno stato di sforzo nel materiale. Si impone lo stop alla macchina quando il provino si rompe oppure quando i morsetti si sono spostati di una distanza prefissata. Spesso le prove vengono effettuate in controllo di deformazione.

Sulla macchina è presente una cella di carico che misura istante per istante la forza applicata al provino sul quale inoltre è applicato un estensimetro che ne misura l'allungamento.

Grazie all'estensimetro e alla cella di carico, si ottengono valori di sforzo e deformazione a intervalli di tempo costanti ottenendo quindi un diagramma sforzo-deformazione

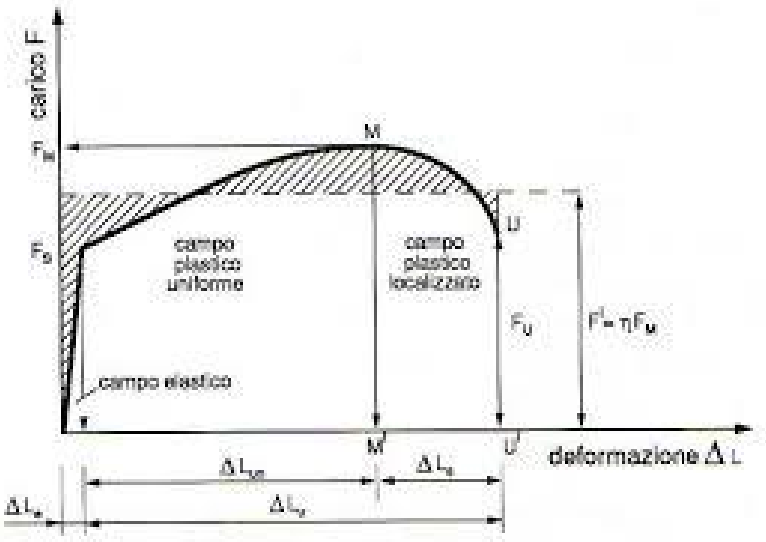


Figura 2 Prova Trazione.

Osservando il grafico si possono osservare due regioni principali, una in cui la curva ha un andamento lineare che descrive la zona di comportamento elastico (scaricando il materiale questo ritorna nella condizione iniziale) e una in regime plastico dove la deformazione è irreversibile. Se nella prima zona vi è univocità nel parlare di tensione e deformazioni vere e tensioni e deformazioni ingegneristiche, nella fase successiva di plasticità uniforme queste non sono più la stessa cosa ma si potrà ancora trovare una relazione tra queste mediante l'ipotesi di conservazione del volume.

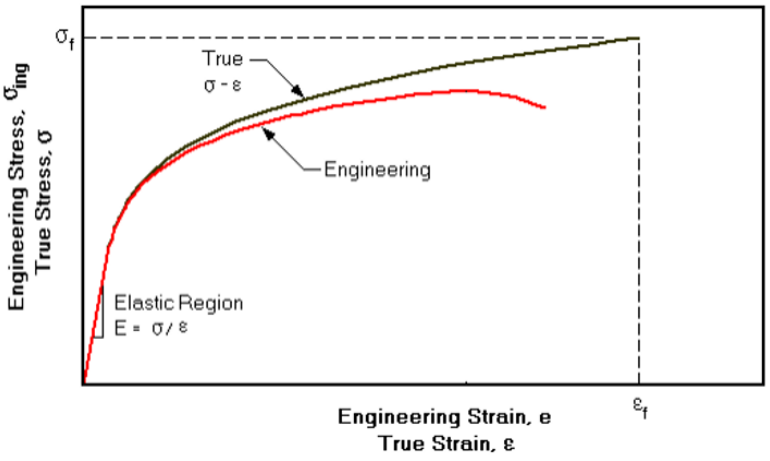


Figura 3 Confronto grandezze vere-ingegneristiche.

Nel momento in cui si raggiunge il massimo della curva (momento in cui l'incrudimento del materiale non riesce a compensare l'attivazione di nuovi piani di scorrimento), si assiste al fenomeno del necking (condizione instabilità) ovvero la deformazione si concentra in una zona del provino, la deformazione non sarà quindi più uniforme ma varierà da punto a punto, cadendo l'ipotesi di uniformità della deformazione cadrà anche quella dell'uniassialità della tensione, si avrà quindi nella sezione ristretta un sistema di tensioni triassiali. Le formule seguenti mostrano che il momento in cui si verifica la strizione è unicamente una caratteristica del materiale.

$$P = \sigma A$$

$$dP = \sigma dA + A d\sigma$$

$$\frac{dL}{L} = -\frac{dA}{A} = d\varepsilon$$

$$-\frac{dA}{A} = \frac{d\sigma}{\sigma}$$

$$\frac{d\sigma}{d\varepsilon} = \sigma$$

In questa fase tensioni e deformazioni devono essere studiate in maniera incrementale. Una possibile soluzione è stata proposta da Bridgman che va a trattare la strizione come una sorta di intaglio con intensificazione delle tensioni, permettendo il calcolo di una tensione radiale e una circonferenziale e con queste un sigma equivalente, Bridgman assume però una distribuzione elastica delle tensioni che stride con la fisica del problema. [4] Sotto è mostrata la formula di Bridgman per il calcolo della tensione:

$$\sigma = \frac{\sigma_T}{\left(1 + \frac{2R}{a}\right)\left[ln\left(1 + \frac{a}{2R}\right)\right]}$$

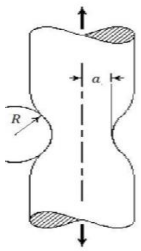


Figura 4 Necking

1.3 Effetto strain rate e temperatura

Approcciando il problema del comportamento di un materiale da un punto di vista sperimentale si osserva che la risposta di questo non dipende solamente dalla tensione applicata ma esistono altre due variabili indipendenti, temperatura e strain rate (derivata nel tempo della deformazione), quest'ultima ci dice che non possiamo più considerare le caratteristiche dei materiali come tempo invarianti, poiché la velocità con cui la deformazione è imposta va a modificare la risposta del materiale. Analizzeremo gli effetti di strain rate e temperatura sia dal punto di vista macroscopico per valutare la risposta globale del materiale, ciò che interessa al progettista, sia microscopico per capire quali sono le cause di questo comportamento.

1.3.1 Effetto macroscopico strain rate – temperatura.

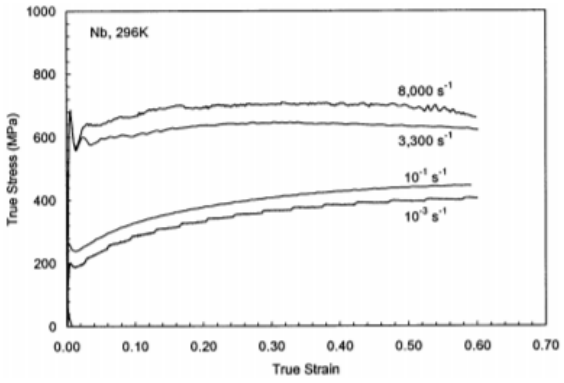


Figura 5 Tensione di flusso plastico a diverse velocità di deformazione per provini di Niobio commercialmente puro.

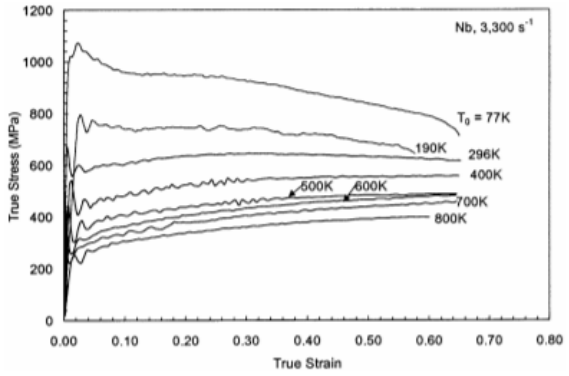


Figura 6 Tensione di flusso plastico a diverse temperature per provini di Niobio commercialmente puro.

Per descrivere correttamente il fenomeno è necessario definire matematicamente lo strain rate e le variazioni di ordini di grandezza di questo che definiscono fenomeni diversi regolati da meccanismi microscopici diversi.

Lo strain rate è definito come la variazione della deformazione nell'unità di tempo, l'unità di misura sono i s^{-1}.

$$\dot{\varepsilon} = \frac{d\varepsilon}{dt} = \frac{d(\frac{l - l_0}{l_0})}{dt} = \frac{l}{l_0}\frac{dl}{dt}$$

Per inquadrare il fenomeno, possiamo distinguere quattro diversi intervalli della velocità di deformazione [5]:

- Tra $10^{-8} - 10^{-5}\ s^{-1}$ si parte dai fenomeni a Creep ovvero caratterizzati da tempi molto lunghi di deformazioni, si tratta di fenomeni particolarmente rilevanti alle alte temperature per arrivare alle prove statiche (very low strain rate)
- Tra $10^{-5} - 10^{-1}\ s^{-1}$ siamo nell'ambito delle deformazioni quasi statiche (low strain rate) per questi due intervalli si possono trascurare le forze di inerzia e la deformazione può essere considerata isoterma, non c'è variazione di temperatura del campione, la velocità è tale da garantire l'evacuazione del calore prodotto
- Tra $10^{-1} - 10^{2}\ s^{-1}$ si parla di medium strain rate e siamo nell'ambito di prove di deformazione "veloci", dinamiche, si deve tener conto delle forze di inerzia e i processi non possono più essere considerati isotermi ma si deve fare l'ipotesi di adiabaticità.
- Per strain rate superiori si parla high strain rate e per descrivere il comportamento del materiale si deve ricorrere a strumenti speciali, oltre i $10^{4}\ s^{-1}$ si tratta di processi di tipo esplosivo e siamo nell'ambito balistico, in questo caso oltre alle forze d'inerzia nel materiale si deve tenere conto della propagazione di onde nel materiale e ricorrere a un'equazione di stato per descriverne il comportamento.

I risultati di prove sperimentale effettuate a diverse velocità di deformazione mostrano come all'aumentare della velocità la caratteristica del materiale cambi, si assiste ad un aumento della regione di deformazione elastica a causa di un aumento della tensione di snervamento ed un aumento della tensione a rottura. Per quel che riguarda l'allungamento a rottura si assiste a comportamenti diversi ma si può generalizzare dicendo che c'è una riduzione della zona di deformazione plastica; si raggiunge dopo lo snervamento ma una volta innescato la rottura avviene prima.

Analizzando invece l'effetto della temperatura, i risultati sperimentali mostrano come aumentando la temperatura si assista ad un addolcimento del materiale, la tensione di snervamento venga raggiunta prima e si osserva un aumento dell'allungamento a rottura, l'effetto della temperatura e più o meno importante a seconda della tipologia di reticolo del materiale.

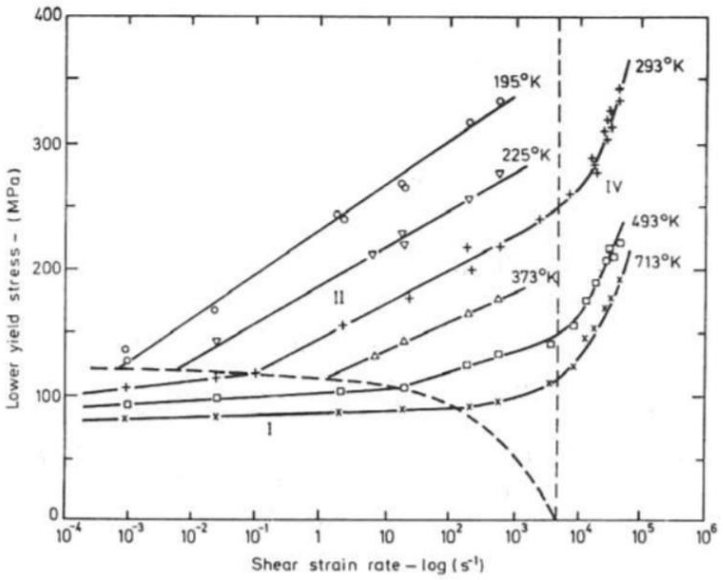


Figura 7 Andamento tensione di snervamento al variare di temperatura e strain rate.

Prove effettuate variando sia lo strain rate che la temperatura ci mostrano poi nella risposta del materiale un'interazione tra le due grandezze, in particolare possiamo vedere come il materiale sia tanto più sensibile alle variazioni di strain rate quanto più è bassa la temperatura. Alzando la temperatura, si passa da comportamenti lineari a comportamenti che per un certo range di temperatura sono insensibili a variazioni dello strain rate stesso.

Il legame tra temperatura e strain rate si può osservare anche per quei processi in cui la velocità di deformazione è tale da non permettere l'evacuazione del calore, il materiale quindi si scalda e scaldandosi diminuisce la sua resistenza favorendo la deformazione, su un diagramma tensione deformazione questo fenomeno si mostra con un abbassamento della curva, l'aumento della resistenza a causa dell'incrudimento viene contrastato dall'addolcimento del materiale.

La stima della temperatura raggiunta in un determinato istante può infine essere calcolata addizionando alla temperatura iniziale l'integrale del flusso plastico diviso per $\rho\ C_p$ moltiplicato per un fattore B che esprime la frazione di lavoro plastico trasformato in calore secondo la relazione di Taylor Quinn. [6]

$$\Delta T = B\frac{1}{\rho C_p}\int \sigma\, d\varepsilon$$

1.3.2 Effetti microscopici strain rate

Per descrivere la deformazione plastica di un materiale metallico dobbiamo introdurre il concetto di dislocazione: "Una dislocazione è un difetto di linea che separa una regione deformata del cristallo dalla restante regione indeformata"[1]. Esistono dislocazioni a spigolo e a vite, una dislocazione a spigolo è ottenuta operando un taglio nel cristallo ed inserendovi un semipiano atomico, la regione che circonda il semipiano aggiuntivo sarà sottoposta a tensioni di compressione, viceversa, la zona sottostante nella figura, sarà sottoposta a trazione.

Una dislocazione a vite invece è stata ottenuta operando un taglio nel cristallo e facendo scorrere le due superfici di taglio. Lo spostamento è parallelo alla line di dislocazione. [7]

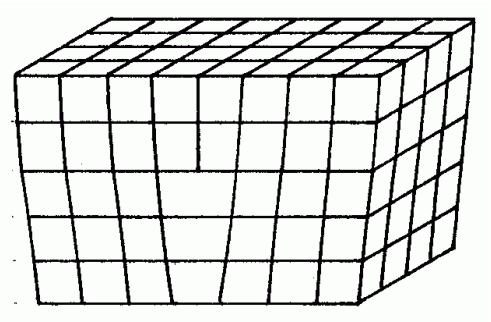


Figura 8 Dislocazione a spigolo.

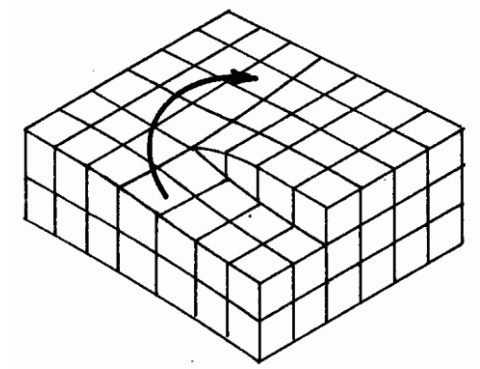


Figura 9 Dislocazione a vite.

[1] Ing. Nadia Ucciardello, corso di Metallurgia.

Sottoponendo un provino di trazione ad un carico crescente le dislocazioni inizieranno a muoversi nel materiale, quelli che inizialmente sono solamente movimenti microscopici, arriveranno per valori prossima alla tensione di snervamento del materiale, ad essere delle vere e proprie deformazioni plastiche. Il flusso plastico quindi può essere descritto macroscopicamente come una deformazione visibile e microscopicamente come l'insieme di bande di scorrimento generate da un gran numero di dislocazioni in movimento. L'interazione delle dislocazioni con il reticolo, le sue distorsioni ed eventuali inclusioni e dispersioni di seconde fasi è la resistenza al flusso plastico.

Queste resistenze sono modellizzate definendo due tipologie di ostacoli che la dislocazione può incontrare nel suo moto attraverso il reticolo, le barriere a short range il cui superamento è facilitato da un aumento di temperatura e le barriere a long range insensibili alle variazioni termiche. Definendo quindi una tensione da fornire al nostro materiale per superare l'ostacolo possiamo individuare due termini. [8]

$$\sigma = \sigma_G(structure) + \sigma^*(T, \dot{\varepsilon}, structure)$$

Il primo termine rappresenta tutti quegli ostacoli che vengono racchiusi dalla definizione di long range obstacles, non sono influenzati dalla temperatura e in qualche modo fanno riferimento al modulo di elasticità tangenziale del materiale.

Per il secondo termine, che descrive gli short range obstacles, gli effetti della temperatura in termini quantitativi sono diversi a seconda che si tratti di un materiale avente reticolo cristallino BCC o FCC, i primi sono fortemente influenzati dalla temperatura poiché per questi materiali la resistenza allo scorrimento delle dislocazioni è dovuta principalmente alle barriere di Peierls-Nabarro, equazione sottostante [9]. Si deve inoltre ricordare che la dislocazione per avanzare nel suo moto deve superare una forza intrinseca per deformare il reticolo cristallino, deformazione del reticolo che viene facilitata da un aumento di temperatura.

$$\tau_P = \frac{2G}{(1-\nu)} e^{(\frac{-2\pi W}{b})}$$

- $W = \frac{a}{1-\nu}$ è la profondita della dislocazione
- b la distanza interplanare
- ν è il coefficiente di Poisson

È quindi evidente che aumentando la temperatura, aumentando quindi l'ampiezza delle oscillazioni degli atomi del reticolo rispetto alla posizione di equilibrio sia più semplice per la dislocazione muoversi all'interno del reticolo. L'effetto è più contenuto nei materiali FCC dove le resistenze a corto raggio dipendono per lo più da foreste di dislocazioni.

Quello che succede quando una dislocazione incontra un ostacolo è che questa si ferma davanti l'ostacolo. Essendo dotata di una certa energia al pari del reticolo stesso si trova in una condizione di moto relativo rispetto al reticolo, può quindi capitare che la dislocazione riesca a superare l'ostacolo. Maggiore è la temperatura è più ampi saranno questi movimenti aumentando la probabilità di superamento dell'ostacolo in un determinato intervallo di tempo. Si parla quindi di probabilità di superamento dell'ostacolo, il che comporta che il tempo disponibile sia una delle grandezze in gioco nei fenomeni di deformazione plastica. Possiamo quindi spiegare l'effetto dello strain rate, un aumento della velocità di deformazione implica minor tempo disponibile per la dislocazione per superare l'ostacolo e quindi minore probabilità di superarlo. Tanto più la velocità di deformazione sarà alta minore sarà l'effetto della temperatura poiché si riduce il tempo a disposizione della dislocazione per superare l'ostacolo.

Globalmente quindi possiamo dire che nella zona di attivazione termica la dislocazione riesce a procedere se la sua energia libera supera un certo valore definito dalla seguente relazione che tiene in considerazione sia l'effetto della temperatura che la velocità di deformazione:

$$\Delta G = kTln\frac{\dot{\varepsilon}_0}{\dot{\varepsilon}}$$

- K è la costante di Boltzman
- $\dot{\varepsilon}_0$ è una costante che ingloba tutto ciò che è una caratteristica intrinseca del materiale.

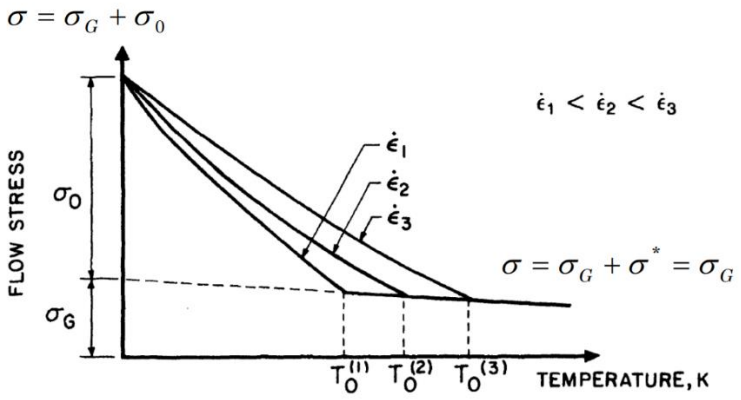


Figura 10 Flow stress al variare della temperatura e della velocità di deformazione.

Per riassumere possiamo utilizzare il grafico sopra che mostra come la risposta del materiale sia la somma di una parte indipendente dalla temperatura o poco dipendente da essa e indipendente dalla velocità di deformazione e da una parte fortemente dipendente da questi due parametri. Per temperature pari allo zero assoluto si ha il valore massimo di tensione di flusso plastico da fornire, aumentando la temperatura questa tensione diminuisce poiché diminuisce la quota parte associata a fenomeni termicamente attivati, la diminuzione è vincolata però allo strain rate, maggiore è la velocità di deformazione minore la diminuzione di tensione. La dipendenza della temperatura è quindi una curva decrescente che decresce però a velocità diverse a seconda dello strain-rate. Lo strain rate influenza pertanto anche la temperatura a cui si ha il passaggio dalla zona di tensione termicamente attivata a quella atermica.

La seconda regione è indipendente dalla temperatura o scarsamente dipendente, poiché è dovuta alla capacità di deformare una porzione grande di reticolo, la grandezza di riferimento è il modulo di elasticità tangenziale, quindi la dipendenza che si osserva è sostanzialmente la dipendenza del modulo di elasticità dalla temperatura. Compresi i meccanismi che si innescano nel materiale al variare di temperatura e strain rate si sceglie il modello che meglio descrive il comportamento del materiale, nel nostro caso si è deciso di utilizzare per le simulazioni e successive ottimizzazioni il modello proposto da Johnson-Cook in una versione tabulata.

1.4 Incrudimento

Per poter spiegare i fenomeni di incrudimento bisogna ricordare che la deformazione plastica è dovuta al movimento delle dislocazioni all'interno del materiale. Come precedentemente spiegato al raggiungimento del valore convenzionale R_{p02} un buon numero di dislocazioni è in movimento grazie allo stato tensionale a cui è sottoposto il materiale, una volta raggiunto questo limite, sperimentalmente si osserva che per continuare a deformare il materiale la tensione che deve essere fornita aumenta. Questo implica che durante la deformazione si innesca un qualche tipo di fenomeno che rende più difficoltoso il movimento delle dislocazioni. Frank-Reed negli anni 50 affermarono che in alcuni punti su determinati piani cristallini distanziati si generano delle dislocazioni e che al procedere della deformazione la dislocazione tenderà a piegarsi su sé stessa fino a raggiungere la forma di un'onda che si propaga all'interno del materiale. Frank e Read avevano quindi scoperto delle sorgenti di dislocazioni e definirono una tensione minima che deve essere soddisfatta affinchè la dislocazione venga generata:

$$\tau = \frac{2\mu b^2}{x}$$

Dove μb^2 rappresenta la forza di curvatura che si oppone alla formazione della dislocazione (forza dovuta all'incurvamento della dislocazione) e x la distanza tra gli estremi legati. [10]

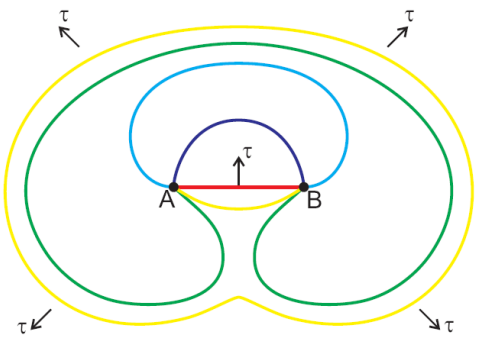


Figura 11 Meccanismo di formazione di una dislocazione in una sorgente di Frank-Reed.

Orowan spiegò poi che durante l'avanzamento le dislocazioni all'interno di un reticolo cristallino incontrano degli ostacoli quali bordi di grano, inclusioni, dispersioni di seconde fasi, che ne causano l'accumulo e l'interazione. Nel momento in cui un gran numero di dislocazioni si trova impilato sul bordo di grano è più difficile per queste continuare nel loro moto, si dovrà quindi fornire una tensione maggiore per continuare a deformare il materiale. Inoltre, Orowan spiega come per superare l'ostacolo la dislocazione si deformi, lasciando intorno all'ostacolo stesso un anello di dislocazioni che ne rendono più difficile il suo superamento. [11] Quindi la generazione di dislocazioni e la loro interazione, con il procedere della deformazione, richiede un sempre continuo aumento della tensione applicata se si vuole mantenere la deformazione stessa. Questo ragionamento è valido fino al massimo della curva tensione-deformazione, successivamente la tensione richiesta per continuare a deformare il materiale calerà poiché l'incrudimento del materiale non sarà più in grado di compensare la riduzione di tensione.

1.5 Johnson Cook model

"Il modello di Johnson-Cook fu proposto negli anni '80 come modello costitutivo per materiali soggetti a grandi deformazioni, alte velocità di deformazione e temperature elevate, con il preciso intento di fornire un modello, sufficientemente accurato, che potesse essere facilmente implementato negli emergenti codici di calcolo automatizzato"[2], è un modello termoviscoplastico ottenuto da un fitting di dati sperimentali, risulta quindi tanto più efficace nel descrivere il comportamento di un materiale quanto più si va a restringere il range di variazione delle grandezze sul quale è definito [12]. È un modello semplice che permette di esprimere con un'unica legge gli effetti che temperatura e strain rate hanno sulla relazione tensione-deformazione, di tipo moltiplicativo pertanto gli effetti di deformazione strain rate e temperatura sono tra loro indipendenti, questo permette di ridurre il numero di prove sperimentali necessarie alla determinazione dei parametri.

Descrive in maniera efficace il comportamento dei materiali FCC e dei metalli puri ovvero quei materiali per i quali al crescere dello strain rate o al diminuire della temperatura la curva di incrudimento aumenta, mantenendo fisso il punto di inizio snervamento. Le grandezze fisiche del modello vengono adimensionalizzate semplificando così l'implementazione in codice di calcolo. La relazione empirica caratteristica del modello di Johnson-Cook è mostrata sotto.

$$\sigma = \left(A + B\varepsilon^{n}\right)\left(1 + C\ln\frac{\dot{\varepsilon}}{\dot{\varepsilon}_0}\right)\left(1 - T^{*m}\right)$$

Dove ε è la deformazione plastica, $\dot{\varepsilon}$ la velocita di deformazione e T^{*m} è la temperatura omologa cosi definita:

$$T^{*m} = \frac{T - T_{room}}{T_{melt} - T_{room}}$$

Che ci permette di garantire la coerenza fisica del modello annullando la tensione quando la temperatura è a pari a quella di fusione (si considera la componente

[2] Caratterizzazione di un polimero ionomerico autoriparante per applicazioni spaziali, Luca CASTELNOVO, Politecnico di Milano.

deviatorica del tensore degli sforzi, possono ancora esistere tensioni idrostatiche). La prima parentesi descrive la risposta del materiale alla temperatura ambiente ($T^{*m} = 0$) e alla velocità di deformazione di riferimento. Gli altri due termini descrivono invece gli effetti di temperatura e strain rate.

Al fine di definire completamento il modello si devono ricavare i valori dei parametri per il materiale considerato, nel nostro caso il Niobio.

2 NIOBIO

In questo capitolo illustriamo le principali proprietà del Niobio, il processo di estrazione e il suo utilizzo al CERN.

Il Niobio è stato identificato dal chimico inglese Charles Hatchett nel 1801 in un campione di minerale spedito in Inghilterra dal Connecticut, inizialmente fu chiamato Columbium dal nome poetico degli Stati Uniti d'America, Columbia. Il nuovo elemento scoperto da Hatchett però non era Niobio puro ma un insieme di Niobio e Tantalio un elemento dalle caratteristiche molto simili. Negli anni successi continuò la confusione tra i due elementi e nel 1809 il chimico inglese William Hyde Wollaston comparando gli ossidi di Niobio e Tantalio, nonostante la diversa densità 5.918 g/cm^3 per la columbite e di più di 8 g/cm^3 per la tantalite, decretò che si trattava dello stesso elemento. Questa conclusione fu contestata nel 1846 da chimico tedesco Heinrich Rose che affermò come ci fossero due diversi elementi nel campione di tantalite dando a questi il nome dei figli di Tantalo, Niobium e Pelopium. Questa differenza nacque dall'osservazione di minime differenze tra il Tantalio e il Niobio. La differenza tra Tantalio e Niobio venne poi dimostrata inequivocabilmente nel 1864 da Christ Wilhelm Blomstrand and Henri Etienne Saint-Claire Deville che determinarono la composizione di alcuni composti del campione e infine dal chimico svizzero Jean Charles Galissard De Marignac nel 1866 che dimostrò come ci fossero soltanto due elementi, Malignac fu anche il primo che ridusse il Cloruro di Niobio riscaldandolo in atmosfera di idrogeno. Le prime applicazioni commerciali risalgono al primo novecento quando venne utilizzato nei filamenti ad incandescenza ma fu presto sostituito dal tungsteno che ha un più alto punto di fusione. Negli anni '20 si scopri che addizionato in quantità opportune migliorava il comportamento degli acciai, ancora oggi questo è il suo utilizzo più importante. Negli anni '60 venne scoperto che il compost Niobio e Stagno riusciva a mantenere caratteristiche di super conduzione anche in presenza di correnti e campi magnetici di elevata intensità, nei decenni successivi si sviluppò quindi il suo utilizzo in acceleratori di particelle e super magneti. [13]

2.1 Proprietà fisiche

Il niobio è un metallo duttile, grigio, lucente, che assume una sfumatura bluastra quando rimane esposto all'aria a temperatura ambiente per tempi prolungati. Sebbene si pensi sia dotato di una struttura cristallina cubica a corpo centrato, l'osservazione con strumenti ad alta risoluzione dell'espansione termica lungo tre assi cristallografici ne ha rivelato l'anisotropia, che non può essere spiegata ipotizzando una struttura BCC, il dibattito è quindi ancora oggi aperto.

A temperature prossime allo zero assoluto diventa un superconduttore, tra i conduttori del secondo tipo è quello con la più alta temperatura critica 9,2 K le proprietà superconduttive sono fortemente influenzate dalla presenza di impurità. Tra i metalli conosciuti ha la più alta permeabilità magnetica.

Dilatazione termica, conducibilità e capacità termica specifica sono simili a quelle degli altri elementi del gruppo dei metalli refrattari aventi elevata temperatura di fusione e sono influenzate dalla temperatura come si può vedere dai grafici sottostanti che fanno un confronto con le proprietà del tantalio.

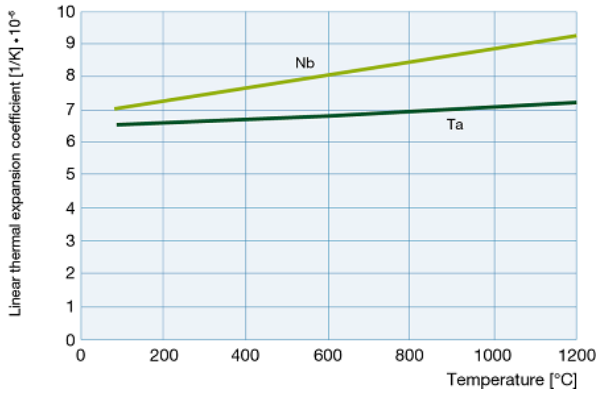


Figura 12 Coefficiente di espansione termica lineare in funzione della temperatura.

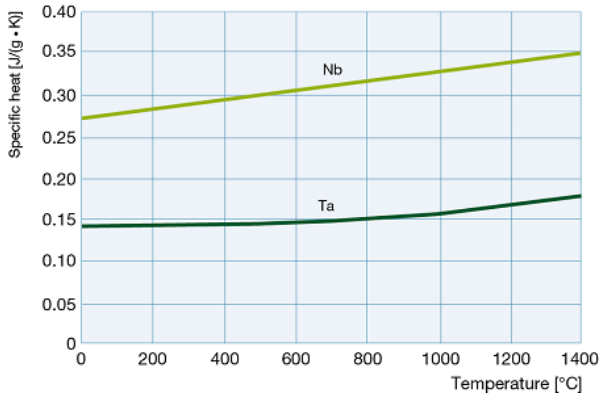


Figura 13 Calore specifico in funzione della temperatura.

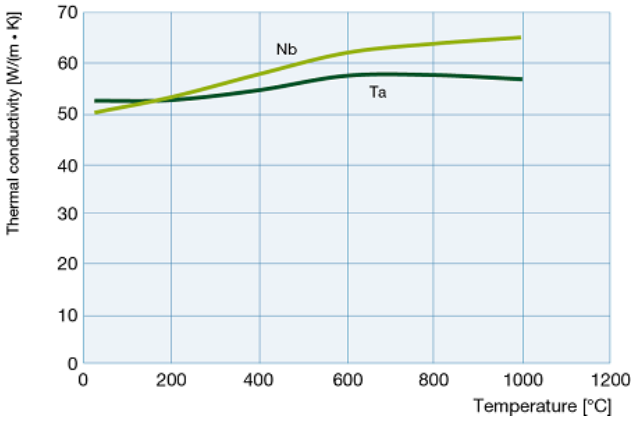


Figura 14 Conduttività termica in funzione della temperatura.

2.2 Proprietà chimiche

Il Niobio è l'elemento 41 della tavola periodica, appartiene ai metalli di transizione ed è un metallo refrattario dotato quindi di una elevata temperatura di fusione, ottima resistenza all'usura e all'abrasione, resistenza agli shock termici e buona conducibilità elettrica e termica, rispetto ad altri metalli refrattari ha una densità minore.

La configurazione elettronica visibile nell'immagine sottostante è: $1s^2\ 2s^2\ 2p^6\ 3s^2\ 3p^6\ 3d^{10}\ 4s^2\ 4p^6\ 4d^4\ 5s^1$.

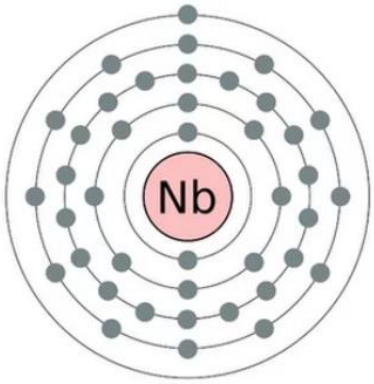


Figura 15 Configurazione elettronica del Niobio.

A temperatura ambiente la sua superficie è ricoperta da uno spesso strato di ossido che lo protegge, garantendo un'elevata resistenza alla corrosione, le uniche sostanze da cui può essere attaccato sono acido solforico concentrato, fluoro, fluoruro di idrogeno, acido fluoridrico e acido ossalico. Le caratteristiche di resistenza alla corrosione permangono fino alla temperatura di 200°C, per temperature superiori si ossida facilmente e alla temperatura di 400°C viene attaccato dall'ossigeno che ne causa l'infragilimento. Un'altra possibile causa di infragilimento è l'idrogeno se ne viene a contatto in soluzione o nel corso di processi di saldatura (Infragilimento ad idrogeno).

Nella tabella sottostante sono state riassunte le principali proprietà chimico-fisiche.

Simbolo	**Nb**
Numero atomico	41
Massa atomica	92,91
Temperatura fusione	2468°C
Energia di Ionizzazione	664 $^{Kj}/_{mol}$
Elettronegatività	1,6
Densità	8,6 $^{g}/_{cm^3}$
Numero di ossidazione	+2 +3 +5
Calore specifico	0,26 $^{J}/_{kg}$
Conduttività termica	0,537 $^{W}/_{cm\ K}$

2.3 Proprietà meccaniche

Le proprietà meccaniche del Niobio dipendono fortemente dalla sua purezza, sono sufficienti piccole percentuali di ossigeno, azoto, idrogeno e carbonio per vedere dei notevoli cambiamenti nel comportamento del materiale. Si deve inoltre tener conto del processo di produzione e dei trattamenti termici. Come tutti i materiali con reticolo cubico a corpo centrato presenta la transizione duttile-fragile, per il niobio la temperatura di transizione è al di sotto della temperatura ambiente. Questo lo rende particolarmente adatto per i processi di imbutitura, formatura, piegatura e stampaggio

limitandone però le lavorazioni per asportazione di truciolo. Garantisce un'elevata saldabilità

L'allungamento a rottura a temperatura ambiente, in virtù della sua bassa temperatura di transizione, è del 20%. Nel grafico sottostante si può osservare l'andamento del modulo elastico al variare della temperatura confrontato con gli altri metalli refrattari.

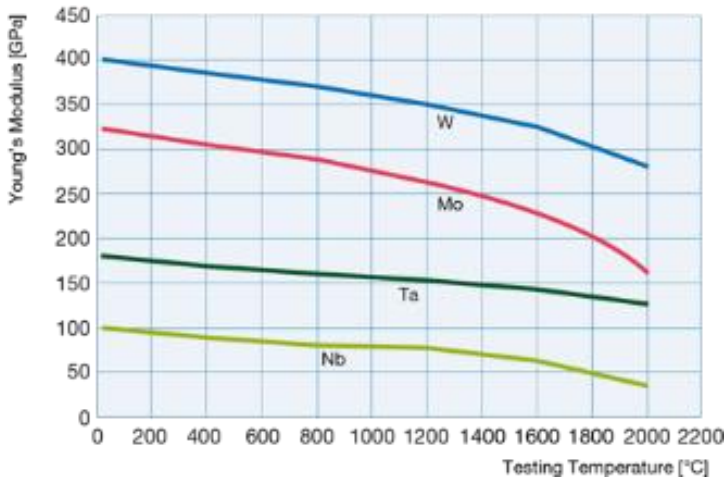


Figura 16 Andamento del Modulo Elastico per i principali metalli refrattari.

Nella tabella sono state riportate le principali proprietà meccaniche

Modulo elastico Young	105 GPa
Modulo di compressibilità (Bulk)	170 GPa
Rp02 a temperatura ambiente	103 MPa
Rm a temperatura ambiente	172 MPa
Coefficiente di Poisson	O,38

2. 4 Proprietà elettromagnetiche

Il niobio a temperatura ambiente è un materiale paramagnetico ma per temperature inferiori alla sua temperatura critica è un superconduttore ed è questo il motivo del suo utilizzo al Cern.

Una delle teorie più semplici per spiegare la superconduttività è quella proposta da Bardeen Cooper e Schrieffer [14],[15] I tre fisici americani affermarono, che al contrario dei conduttori classici dove la conduzione avviene grazie al movimento degli elettroni attraverso il reticolo, quindi con ovvie perdite a causa degli urti con il reticolo, in un materiale superconduttore, al di sotto di una certa temperatura critica gli elettroni condensano in uno stato quantistico di energia minima e viaggiano in maniera coerente. In pratica quello che si verifica secondo il modello CBS è che un elettrone muovendosi attrae le cariche positive, ovvero gli atomi del reticolo e la deformazione del reticolo a sua volta causa il movimento di un altro elettrone verso le zone a più alta concentrazione di carica positiva dove si troverà un altro elettrone. Il legame che si instaura tra i due elettroni è quindi mediato dalla deformazione del reticolo, se la temperatura è al di sotto di un certo livello l'energia vibrazionale del reticolo non è sufficiente a rompere il legame tra i due elettroni che continuano così il loro moto. La stabilità di questo stato di conduzione è legata al fatto che in un materiale superconduttore esiste un numero elevatissimo di coppie di elettroni che vanno a sovrapporsi formando un condensato fortemente correlato, in questa condizione la rottura di una singola coppia avrà effetto su tutte le altre e quindi in qualche modo per rompere una singola coppia si deve rompere il condensato.

Il Niobio è inoltre un superconduttore di Tipo 2 ovvero è uno di quei conduttori che mantengono le proprietà di superconduttività anche per alti valori del campo magnetico, mentre in un super conduttore di tipo 1 superato un certo valore nel campo di induzione le proprietà decadono drasticamente, in questo tipo di materiali si innesca un meccanismo tale per cui per valori di induzione superiori a un certo valore critico il campo magnetico non viene completamente espulso ma riesce a penetrare all'interno del materiale, c'è una resistenza infinitesima che viene però accettata a fronte del fatto che si possono raggiungere valori elevati di induzione e corrente.[16]

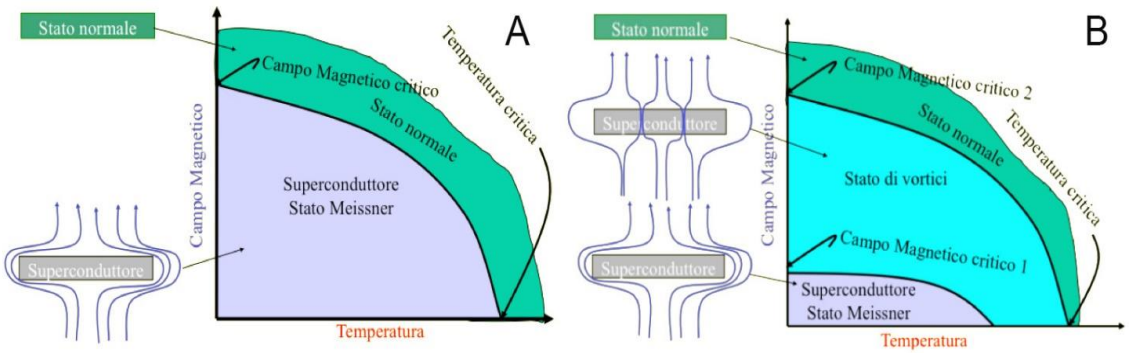


Figura 17 a) Stato magnetico superconduttore di tipo 1 b) Stato magnetico di un superconduttore di tipo 2 in funzione di Temperature e induzione magnetica.

Nell'immagine a sinistra si vede il comportamento di un superconduttore di tipo I in quella a destra di un superconduttore di tipo II.

2.5 Processo di estrazione

In questo paragrafo viene riassunto brevemente il processo di estrazione del niobio come descritto dal professore Diego Colombo dell'università di Trento nel lavoro "Il Niobio, metallurgia dei metalli non ferrosi". Il Niobio in natura non si trova mai allo stato nativo ma nei Minerali: niobite-tantalite $(Fe,Mn)(Nb,Ta)_2O_6$, pirocloro $(Na,Ca)_2(Nb,Ta)_2O_6(OH,F)$ e l'euxenite $(Y, Ca, Ce, U, Th)(Nb, Ta, Ti)_2O_6$. Il 98% del Niobio prodotto o del Perossido di Niobio deriva dal Pirocloro. Il pirocloro si trova in formazioni geologiche di rocce Carbon-Silicatiche in soluzione solida con la microlite (minerale ricco di Tantalio), la concentrazione massima teorica di pentossido di niobio nel pirocloro è del 73% ma i valori reali si attestano nel range 60÷68% a seconda della miniera. La principale miniera che fornisce il 92% della produzione mondiale si trova in Brasile ad Araxa e ha risorse stimata in 8 milioni di tonnellate di Niobio, al ritmo attuale di produzione può garantire 500 anni di sfruttamento. Nel pirocloro del giacimento, si ha il 63.4% di Nb_2O_5, il 16.5% di BaO e soltanto 0.15% di Ta_2O_5. La seconda miniera più grande del mondo si trova in Quebec e garantisce circa il 4% della produzione mondiale In questo caso il pirocloro contiene il 65.8% di Nb_2O_5, 16.6% di CaO e soltanto 0.11% di Ta_2O_5.

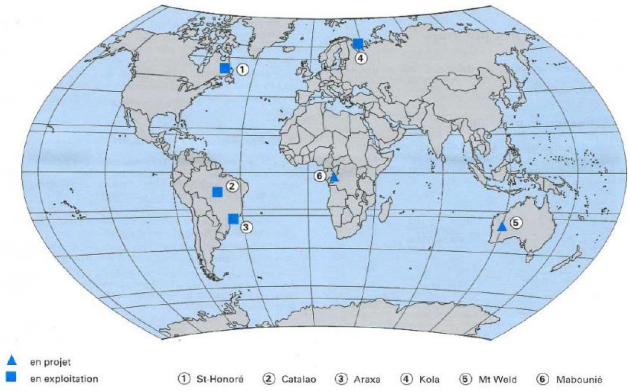


Figura 18 Principali siti di estrazione del Niobio.

Il processo di estrazione del niobio inizia con la concentrazione negli impianti del minerale estratto, qui il pirocloro si trova in una gangla carbonata miscelato ad altri minerali. Attraverso una catena di frantumazione viene setacciato il pirocloro, successivamente con una prima flottazione si ha l'allontanamento dei carbonati e poi vengono separati i materiali paramagnetici. Una seconda setacciatura ci permette di eliminare i solfuri, viene eseguito un lavaggio in acido cloridrico che va a eliminare eventuali residui di carbonati, il concentrato ottenuto è la base per la produzione del ferroniobio. Per la produzione da scorie di stagno il procedimento è più complicato e differisce in base alla concentrazione di ossido di tantalio e ossido di niobio.

Uno dei principali processi utilizzati per l'ottenimento del ferroniobio è il processo alluminotermico utilizzato dalla CBMM nel giacimento di Araxa, la reazione è la seguente:

$$3\ Nb_2O_5 + 2\ Al \rightarrow 6\ NbO_2 + Al_2O_3$$

$$2\ (3\ NbO_2 + 2\ Al \rightarrow 3\ NbO + Al_2O_3)$$

$$2\ (3\ NbO + 2\ Al \rightarrow 3\ Nb + Al_2O_3)$$

complessivamente si ha:

$$3Nb_2O_5 + 10Al \rightarrow 6Nb + 5Al_2O$$

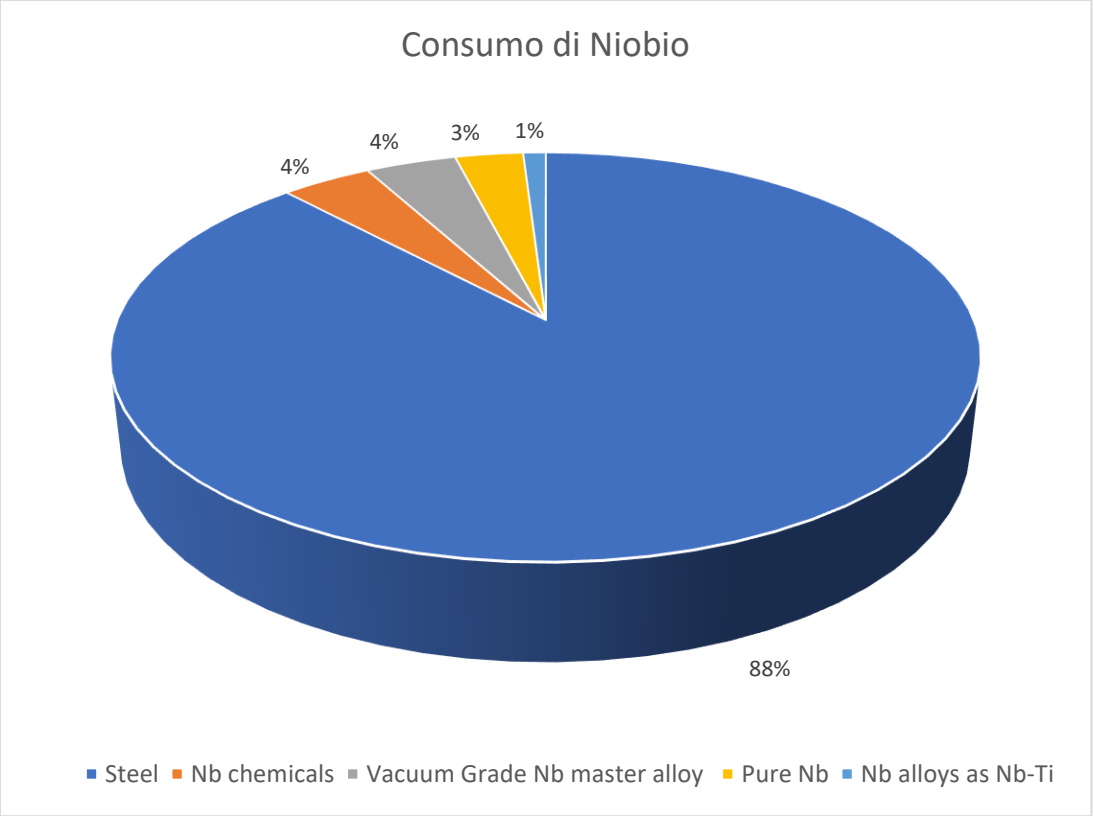
Un altro procedimento sempre adottato nello stabilimento di Araxa è il metodo dell'arco elettrico. Si può anche utilizzare un processo di clorurazione sfruttando la diversa temperatura di fusione dei cloruri di niobio e di tantalio. Il ferroniobio viene poi utilizzato negli acciai HSLA e negli acciai inossidabili.

Per ottenere niobio metallico invece si parte dall'ossido di niobio e si effettuano processi di nitrurazione, riduzione da parte dell'alluminio o elettrolisi. il niobio così ottenuto contiene però ancora delle impurità, per ottenere del niobio puro si deve effettuare un trattamento di purificazione, a causa dell'elevata temperatura di fusione e dell'elevata reattività con i gas alle alte temperature si deve eseguire un processo di bombardamento elettronico in forno in atmosfera controllata. [17]

2.6 Applicazioni Niobio

La maggior parte del Niobio Prodotto è utilizzato nella siderurgia in particolare per la produzione di acciai (HSLA). Il niobio permette l'affinamento del grano attraverso la formazione di carburi e nitrati di niobio inoltre questi carburi precipitando vanno a inibire il movimento delle dislocazioni aumentando il carico di snervamento del materiale. Gli acciai al niobio vengono utilizzati per il settore oil and gas, per il settore automotive e per applicazioni strutturali. La World Steel Association ha stimato che 9$ di Niobio utilizzati nella Produzione di una vettura permettano di ridurre la massa della vettura di circa 100kg e di ridurre del 5% il consumo di carburante, inoltre addizionare lo 0,02% di No ad una tonnellata di acciaio permette di incrementare la resistenza del 30% [16]. Le super leghe al Niobio (>20% Nb, NbTa, NbZr, NbTaZr, NbHfTi) vengono anche utilizzate nelle applicazioni ad alta temperatura per i motori dei jet, turbine a gas. Si stima inoltre che circa il 60% della struttura della capsula del programma spaziale Apollo 11 sia stata costruita con acciai alto resistenziali al niobio [18]. IL niobio puro o in

lega con il Titanio grazie alle sue proprietà superconduttive viene inoltre utilizzato per la produzione di magneti superconduttori per scopi medicali e scientifici. Nel paragrafo successivo verrà in particolare mostrato l'applicazione del niobio per la produzione delle Crab Cavities al Cern di Ginevra, progetto nel quale il presente lavoro di tesi si inserisce.



2.6.1 Crab Cavites

Al Cern, l'organizzazione europea per la ricerca nucleare, fisici, ingegneri e scienziati indagano la struttura dell'universo attraverso l'utilizzo dei più grandi e complessi esperimenti mai realizzati. Allo scopo di studiare le particelle fondamentali fasci di protoni vengono fatti collidere alla velocità della luce, attraverso questo processo analizzando le interazioni tra le particelle si cerca di far luce sulle leggi fondamentali della natura.

Gli strumenti utilizzati in questi esperimenti sono gli acceleratori di particelle e i detector, i primi permettono di accelerare le particelle a velocità prossime e a quelle della luce che attraverso dei magneti vengono poi fatte collidere, i detector osservano e raccolgono i dati di queste collisioni. Il Cern fondato nel 1954 è il miglior esempio di collaborazione scientifica tra le nazioni.

L'ultimo acceleratore è il Large Hadron Collider (LHC) attualmente il più potente al mondo [19]. Ha iniziato la sua attività il 10 settembre del 2008 ed è costituito da un anello di 27 chilometri di magneti superconduttori alternati ad unità di accelerazione che aumentano l'energia delle particelle lungo il percorso. All'interno dell'acceleratore due fasci di protoni che viaggiano in direzione opposta a velocità prossime a quella della luce vengono fatte collidere. I fasci viaggiano in tubi separati in condizioni di vuoto assoluto, quando hanno raggiunto l'energia sufficiente vengono fatti collidere. Nel loro moto circolare vengono guidati grazie all'uso di fortissimi campi magnetici la cui produzione è resa possibile dall'uso di elettromagneti superconduttori che per sfruttare le proprietà di superconduzione operano alla temperatura di -271.3°C.

Lo step successivo nei programmi di sviluppo del Cern è aumentare la luminosità generata nel processo di collisione. Aumentare la luminosità significa aumentare il numero di collisioni che si verificano in un determinato intervallo di tempo potendo così raccogliere più dati "aumentando la probabilità di osservare i rari processi che si cercano"[3].

[3] https://home.cern/

A tal scopo si sono sviluppate delle innovative cavità chiuse (Crab Cavities) realizzate in niobio materiale superconduttore del secondo tipo, avente le caratteristiche illustrate nel paragrafo precedente, che permettono di modificare l'angolo con cui i fasci vanno a collidere. In particolare, permettono di inclinare i due fasci nell'istante che precede la collisione aumentando la sovrapposizione, forzando cosi un protone a percorrere il fascio opposto lungo tutta la lunghezza, incrementando la probabilità di collisione. Le Crab Cavities sono state prodotte al Cern e sono installate all'interno di moduli criogenici che le mantengono alle condizioni operative di 2 K. Il nome deriva dal fatto che i fasci dopo essere stati inclinati si muovono lateralmente come un granchio [20].

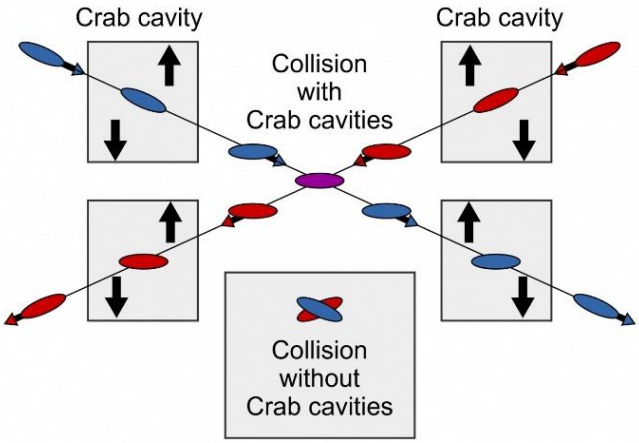


Figura 19 Principio di funzionamento delle Crab Cavities.

Figura 20 Crab Cavity nei laboratori del Cern.

3 Metodo elementi finiti

Il metodo degli elementi finiti è una tecnica dell'analisi numerica che permette la soluzione approssimata per una molteplicità di problemi, inizialmente sviluppato per lo studio delle strutture aeronautiche in sostituzione dei metodi di Holzer-Myklestad la sua applicazione è stata poi estesa al campo della meccanica dei continui. Grazie alla sua duttilità è oggi utilizzato quotidianamente da università e industrie poiché nella maggior parte dei problemi è sufficiente ottenere delle soluzioni numeriche approssimate al posto della corretta soluzione analitica. Ad oggi si tratta del miglior metodo per indagare quei sistemi complessi per i quali uno studio sperimentale richiederebbe spese proibitive e tempi eccessivi.

Il metodo prevede che il dominio venga discretizzato, a differenza di un problema al continuo dove la variabile di campo è funzione di ciascun generico punto del dominio di definizione e pertanto si ha un numero infinito di incognite. Il metodo di risoluzione agli elementi finiti prevede quindi di passare da un numero infinito di incognite a un numero finito ragionevolmente grande attraverso la suddivisione del dominio di partenza in un numero di elementi finiti ed esprimendo il campo incognito in termini di funzioni approssimanti che vengono definite all'interno di ogni elemento. Le funzioni approssimanti sono chiamate funzioni di forma e vengono individuate mediante i valori che la variabile dipendente assume sui nodi, questi sono solitamente agli estremi del dominio in punti comuni a due o più elementi ma possono anche trovarsi all'interno. Le funzioni approssimanti possono essere dei Polinomi (Teorema di Weierstrass[4]) ma possono anche essere funzioni esponenziali o trigonometriche. L'andamento della variabile dipendente è definito univocamente dai valori che questa assume ai nodi. Nella formulazione del problema agli elementi finiti le nuove incognite finite sono i valori che la funzione assume ai nodi. I valori ai nodi della variabile calcolata mediante il metodo agli elementi finiti saranno tanto più vicini al valore reale tanto più piccolo sarà l'elemento con cui si è discretizzato il dominio e tanto più elevato sarà il grado del

[4] Il teorema di Weierstrass mostra che se una funzione f è continua nell'intervallo [a,] fissato un arbitrario $\varepsilon > 0$ allora esiste un polimomio P(x) tale per cui: |f-P(x)|<ε

polinomio della funzione approssimante (funzione di forma). Ovviamente si dovrà trovare una condizione di ottimo per non rendere troppo pesante il calcolo dal punto di vista computazionale [21].

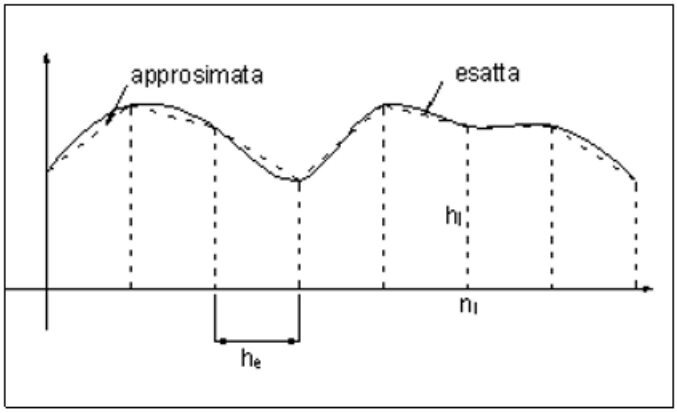


Figura 21 Approssimazione mediante metodo agli elementi finiti.

Nella figura sopra viene mostrato il principio base utilizzato nella modellazione agli elementi finiti:

1. Si suddivide il dominio di integrazione in intervalli, la cui dimensione può anche essere differente. (Poter utilizzare elementi di dimensioni diverse permette di avere analisi che riescono a descrivere accuratamente le zone di maggiore interesse riducendo i costi computazionali).
2. Si va ad approssimare la funzione esatta con funzioni ad andamento noto, per semplicità le funzioni più utilizzate sono i polinomi.

Le incognite del nuovo problema saranno solamente i valori nodali, risolvendo il sistema si ottengono i valori approssimati ai nodi, i valori interni vengono invece derivati utilizzando le funzioni approssimanti. Da questo esempio è chiaro il perché se utilizzo un polinomio di grado più elevato la soluzione approssimata sarà più vicina a quella reale.

3.1 Modello filo elastico

In questo capitolo viene fornito un esempio, quello del filo elastico [22], di una discretizzazione agli elementi finiti. Il modello qui descritto è stato illustrato dal Professor Claudio Canuto nel corso di Modelli e Metodi numerici del Politecnico di Torino. Lo scopo della discretizzazione è passare da un problema complesso risolvibile mediante un'equazione differenziale a un equivalente sistema di equazione algebriche, la cui soluzione approssima il comportamento reale del filo in N nodi in cui il filo è stato suddiviso con N scelto a piacere sufficientemente grande.

Consideriamo un filo elastico sottile avente sezione circolare costante. In assenza di un campo di forze, il filo occupa la posizione di equilibrio corrispondente al suo asse X e consideriamo una densità di forza applicata al filo f continua a tratti sull'intervallo [0, L] e introduciamo una funzione v definita su [0, L] che rappresenta lo spostamento del filo dalla condizione di riposo a causa di una sollecitazione esterna.

Dal punto di vista fisico v è uno spostamento ammissibile dal punto di vista matematico si definisce come funzione di forma, v è una funzione continua essendo un filo e si annulla ai bordi, il filo è vincolato alle estremità.

Il problema del filo elastico può essere descritto come un problema al bordo.

$$\begin{cases} -\dfrac{d}{dx}\left(\mu \dfrac{du}{dx}\right) = f \ in \ (0, L) \\ u(0) = u(L) = 0 \end{cases}$$

Per giungere alla formulazione variazionale, si parte dall'equazione differenziale che descrive il sistema e si moltiplicano entrambi i membri per lo spostamento ammissibile e si integra il risultato sull'intervallo [0, L] il risultato che si ottiene è:

$$-\int_0^L \frac{d}{dx}\left(\mu \frac{du}{dx}\right) v dx = \int_0^L f v dx \quad (1)$$

Per ottenere una formulazione più compatta andiamo ad integrare per parti a primo membro, ipotizzando che v sia derivabile con derivata continua (abbiamo precedentemente imposto che v sia continua).

$$\int_0^L \mu \frac{du}{dx}\frac{dv}{dx}dx - \left[\mu \frac{du}{dx}\right]_0^L = \int_0^L fvdx \qquad (2)$$

Che si semplifica ricordando che i termini al bordo sono nulli. Per avere una definizione completa si deve introdurre l'insieme degli spazi ammissibili, quello che nel passaggio successivo sarà l'insieme delle funzioni di forma, che approssimeranno la soluzione corretta.

$$V = \begin{Bmatrix} v : [0.L] \to R |\ v \text{ è } continua\ su\ [0,L], derivabile\ a\ tratti \\ con\ derivata\ continua, e\ tale\ che\ \ v(0) = v(l) = 0 \end{Bmatrix}.$$

Possiamo così giungere alla formulazione variazionale

$$\begin{cases} v\ \in V \\ \int_0^L \mu \frac{du}{dx}\frac{dv}{dx}dx = \int_0^L fvdx \end{cases} \qquad (3)$$

Poiché il filo elastico è composto da infiniti punti non possiamo pensare di risolvere esattamente il problema ma accettiamo di considerare uno spostamento discreto definito che approssimi u. Consideriamo quindi la formulazione variazionale discreta.

$$\begin{cases} v_h\ \in V_h \\ \int_0^L \mu \frac{du_h}{dx}\frac{dv_h}{dx}dx = \int_0^L fv_h dx \end{cases} \qquad (4)$$

Adesso con il metodo degli elementi finiti andiamo a definire gli spazi V_h di spostamenti discreti che si possano usare nella formulazione variazionale discreta. Prima si discretizza il dominio [0, L] con N+2 nodi non necessariamente equispaziati che definiscono una suddivisione $I = \left[x_{j-1}, x_j\right]$, poi vado a definire gli spostamenti

ammissibili sugli intervalli I_j , per semplicità posso utilizzare polinomi di grado uguale a 1.

Lo spostamento discreto viene quindi univocamente individuato dai valori che esso assume nei nodi interni in ogni intervallo ed esso è espresso dalla seguente relazione:

$$v_h = v_{j-i}\frac{x_j - x}{h_j} + v_j\frac{x - x_{j-1}}{h_j} \quad (5)$$

L'insieme degli spostamenti ai nodi v_h è quindi un vettore v di dimensione pari al numero dei nodi del dominio.

$$\text{v}=\left(v_1, v_{,2}, v \quad \ldots v_{N-1}, v_N\right) \quad (6)$$

Si definisce quindi una base in V_h che esprime ogni spostamento discreto come combinazione lineare delle funzioni di base. A tal scopo ricordiamo che v può essere espresso come:

$$v = (v1e_1 + v1e_1 + v1e_1 v1e_1 + v1e_1 + v1e_1 + v1e_1) \quad (7)$$

Con $e_j = \varphi_j$ il vettore colonna della base canonica le cui componenti sono tutte uguali a 0 tranne la componente J che assume valore 1

$$\varphi_j = \begin{cases} \dfrac{x - x_{j-1}}{h_j} & se\ x\ \in\ I_J \\ \dfrac{x_{j+1} - x}{h_{j+1}} & se\ x\ \in\ I_{J+1} \\ 0 \end{cases}$$

sostituendo quindi questa definizione nella formula precedente si ottiene la seguente definizione

$$v_h = \sum_{J=1}^{N} v_J \varphi_J(x) \quad (8)$$

Adesso attraverso l'utilizzo delle funzioni che definiscono la base di Lagrange si va a convertire la formulazione variazionale del problema in un sistema algebrico avente un

numero di incognite pari al numero di nodi, non si deve quindi più risolvere l'equazione differenziale ma un insieme di equazioni algebriche.

Sostituendo di volta in volta $v_h = \varphi_J$ si ottiene la seguente formulazione:

$$\int_0^L \mu \frac{du_h}{dx}\frac{d\varphi_j}{dx}dx = \int_0^L f\varphi_j dx \quad per\ j = 1,2,3,4,\dots.N \qquad (9)$$

Questa formulazione è equivalente alla formulazione variazionale discreta, ogni equazione della (1) può essere espressa come una combinazione lineare della (9), è sufficiente quindi sfruttando la (8) moltiplicare la j-esima equazione per v_j e sommare su j per ottenere:

$$\sum_{j=1}^{N} v_j \int_0^L \mu \frac{du_h}{dx}\frac{d\varphi_j}{dx}dx = \sum_{j=1}^{N} v_j \int_0^L f\varphi_j dx \qquad (10)$$

Sfruttando la proprietà di linearità della derivata e dell'integrale e con un ragionamento analogo a quello fatto per lo spazio degli spostamenti discreti rappresentando u_h nella base di Lagrange:

$$u_h = \sum_{k=1}^{N} u_k \varphi_k \qquad (11)$$

Che sostituita nella (10) permette di ottenere:

$$\sum_{k=1}^{N} u_k \int_0^L \mu \frac{d\varphi_k}{dx}\frac{d\varphi_j}{dx}dx = \int_0^L f\varphi_j dx \qquad (12)$$

Sfruttando la proprietà di linearità dell'integrale definito e della derivata si ottiene il sistema di equazioni algebriche:

$$\sum_{k=1}^{N} u_k \int_0^L \mu \frac{d\varphi_k}{dx}\frac{d\varphi_j}{dx}dx = \int_0^L f\varphi_j dx \quad per\ \ j = 1,\dots.,N \qquad (13)$$

$$a_{jk} = \int_0^L \mu \frac{d\varphi_k}{dx}\frac{d\varphi_j}{dx}dx \qquad (14)$$

$$f_j = \int_0^L f\varphi_j dx \qquad (15)$$

In forma matriciale

$$Au = f \qquad (16)$$

$A = a_{jk} \in R^{NxN}$ matrice di rigidezza, simmetrica non singolare semi-positiva

$u = u_k \in R^N$ incognita

$f = f_j \in R^N$ termine noto

Si può poi dimostrare che il condizionamento[5] della matrice di rigidezza dipende quadraticamente dal passo di discretizzazione. La soluzione discreta tende poi a zero per h che tende a zero.

[5] Una matrice malcodizionata è una matrice quadrata in cui piccole variazioni degli elementi della matrice A o piccole perturbazioni del termine noto f portano a grandi variazioni nella soluzione del sistema lineare $Au = f$.

3.2 Modello FEM provino di trazione

L'obiettivo del lavoro è quello di caratterizzare il comportamento meccanico del Niobio purissimo attraverso un modello di materiale utilizzabile per prevederne il comportamento in esercizio e durante processi di formatura definendo una superficie che descriva la risposta del materiale in un ampio range di variazione della velocità di deformazione. Ottenute sperimentalmente le curve forze spostamento per un certo numero di prove, si dovrà poi creare un modello agli elementi finiti che simuli il comportamento del provino nelle condizioni di prova, successivamente attraverso un processo di ottimizzazione si cercheranno i parametri del modello al fine di far coincidere le curve di risposta sperimentali con quelle simulate. In particolare, in questo lavoro ci si vuole svincolare dalla legge di Johnson-Cook, nella definizione della risposta del materiale. A tal fine verrà utilizzato un modello tabulato il MAT_224 del solutore LS-DYNA, in cui ogni valore di tensione non è vincolato a quello di deformazione, velocità di deformazione e temperatura da una legge, ma che permette di ottenere una superfice di risposta costituita da un insieme di punti. Riassumendo: costruendo una tabella tridimensionale attraverso un'operazione di fitting delle curve sperimentali con quelle simulate, si riuscirà ad ottenere una superficie che descrive la risposta del materiale in cui ogni punto è slegato da un altro.

Il primo passo è la creazione del modello CAD del provino, viene qui mostrato il provino utilizzato poi per la successiva ottimizzazione, la scelta è ricaduta su un modello solido di un ottavo del provino ottenuto sfruttandone le simmetrie.

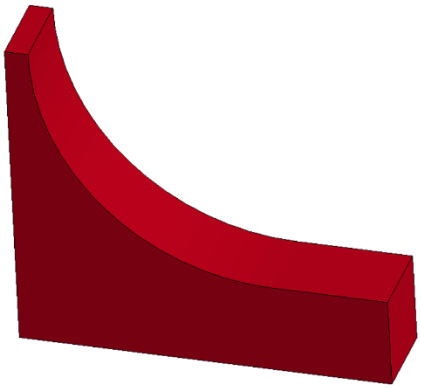


Figura 22 Modello CAD 1/8 provino di trazione.

Successivamente il file viene importato sul preprocessore di LS-DYNA, Ls-PrePost [23], qui viene discretizzato con elementi finiti il modello CAD del provino. Come già detto il metodo agli elementi finiti prevede la suddivisione del dominio in elementi più piccoli, al cui interno le variabili vengono definite da delle funzioni scelte a piacere chiamate funzioni di forma. Questa suddivisione è chiamata mesh, durante la creazione si è fatto attenzione ad avere un numero elevato di elementi nella zona dove si verifica la massima deformazione, la sezione centrale del provino. Al contrario si utilizza un numero ridotto, avendo quindi elementi di maggiore dimensione, nella zona del raccordo e della testa di afferraggio. Il risultato della creazione della mesh è rappresentato nella figura sottostante.

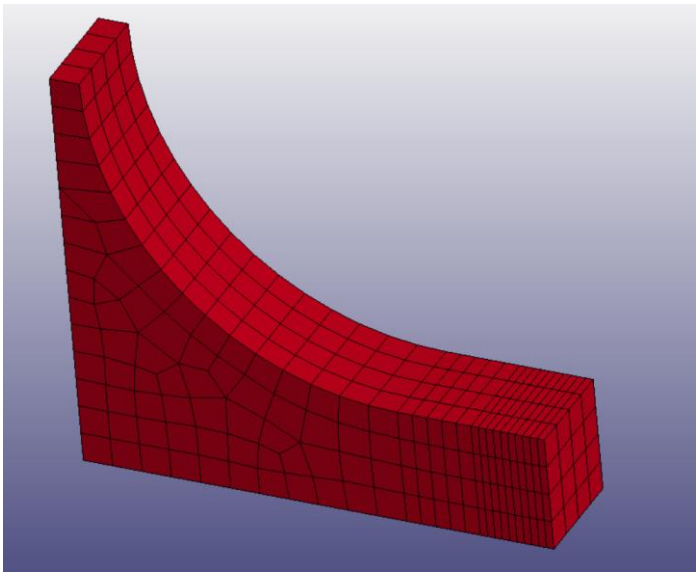


Figura 23 Modello FEM di un 1/8 del Provino per la prova di trazione.

Le caratteristiche del modello fem vengono poi definite attraverso delle CARD, raggruppate in blocchi di dati, suddivise in due categorie principali, il primo è il blocco di controllo attraverso il quale si impostano i parametri dell'analisi, il secondo è invece il blocco di definizione in cui si vanno a definire le caratteristiche fisiche e geometriche del modello, come la tipologia di elementi considerati, le condizioni ai bordi ed il modello di materiale. Sono stati creati quattro modelli diversi uno per ogni velocità di deformazione imposta. Il blocco di controllo è composto da due card principali, il CONTROL_TERMINATION e il CONTROL_TIMESTEP l'obiettivo della prima CARD è definire quando la simulazione deve essere interrotta.

3.2.1 Card Controllo

- **Control_Termination**

***CONTROL** ***CONTROL_TERMINATION**

***CONTROL_TERMINATION**

Purpose: Stop the job.

Card 1	1	2	3	4	5	6	7	8
Variable	ENDTIM	ENDCYC	DTMIN	ENDENG	ENDMAS	NOSOL		
Type	F	I	F	F	F	I		
Default	0.0	0	0.0	0.0	1.0E+08	0		
Remarks	1		2					

Figura 24 Card di controllo termine simulazione.

- END TIME: permette di definire quando deve interrompersi la simulazione.
- ENDCYC: permette di interrompere la simulazione nel caso in cui il ciclo specificato venga raggiunto prima del raggiungimento dell'END TIME
- Il DTMIN è il fattore di scala necessario per determinare il minimo time step secondo la formula TMSTEP=DTMIN x DTSTART dove il secondo rappresenta il time step calcolato dal solutore LS-DYNA, quando questo viene raggiunto la simulazione si interrompe
- ENDMAS è il valore in percentuale massimo che si può raggiungere prima che la simulazione venga interrotta, è rilevante quando si usa il mass scaling

- **Mass scaling**

Il mass scaling è un procedimento utilizzato per simulare in tempi ragionevoli processi che diversamente potrebbero richiedere giorni o settimane. In una simulazione la durata è funzione oltre che della dimensione del modello anche del Time Step, questo è impostato in modo tale da garantire che il singolo time step sia inferiore al tempo richiesto da un'onda di pressione per attraversare il più piccolo elemento della mesh al fine di garantire la stabilità del metodo numerico. Condizione espressa dalla relazione:

$$\Delta T \leq f \left[\frac{h}{c}\right]_{min} \quad (1)$$

Dove h è la dimensione dell'elemento più piccolo del modello f è un fattore di scala e c è la velocità di propagazione delle onde nel mezzo espressa dalla relazione:

$$c = \sqrt{\frac{E}{\rho}}$$

Con E modulo elastico del materiale e ρ densità del materiale.

Per aumentare quindi il modulo elastico del materiale si può quindi lavorare sulla dimensione degli elementi, sul modulo elastico del materiale o sulla densità del materiale. Intervenire sulla dimensione degli elementi è impraticabile soprattutto per quei modelli ad elevata complessità per cui una mesh grossolana causerebbe una scarsa accuratezza del risultato, cosa che si otterrebbe analogamente agendo sul modulo elastico del materiale. Per poter quindi incrementare il time step si va a modificare la densità del materiale, ma non dell'intero modello, che porterebbe a risultati poco accurati, ma solamente degli elementi più piccoli che influenzano effettivamente il time step. Attivando il mass scaling il solutore va a incrementare automaticamente la massa di quegli elementi avente time step inferiore al valore prefissato [24]. (In questo lavoro di tesi i parametri che controllano il mass scaling sono stati fatti variare fino ad ottenere un tempo di simulazione compatibile con il successivo processo di ottimizzazione controllando che questo non inficiasse l'accuratezza dei risultati).

- **Control_Timestep**

La seconda card invece controlla il time step della simulazione, variare il time step permette di effettuare simulazione dinamiche impiegando meno tempo

*CONTROL_TIMESTEP *CONTROL

*CONTROL_TIMESTEP

Purpose: Set structural time step size control using different options.

Card 1	1	2	3	4	5	6	7	8
Variable	DTINIT	TSSFAC	ISDO	TSLIMT	DT2MS	LCTM	ERODE	MS1ST
Type	F	F	I	F	F	I	I	I
Default	-	0.9 or 0.67	0	0.0	0.0	0	0	0

This card is optional.

Card 2	1	2	3	4	5	6	7	8
Variable	DT2MSF	DT2MSLC	IMSCL			RMSCL		
Type	F	I	I			F		
Default	not used	not used	0			0.0		

Figura 25 Card di controllo Time step.

- DTINT è il time step iniziale, se impostato su 0.0 viene calcolato automaticamente dal solutore, il time step è calcolato mediante la formula:
  $\Delta T^{n+1} = TSSFAC\ x\ \min\{\Delta T_1, \Delta T_2, \Delta T_3, \Delta T_4, \dots, \Delta T_n\}$ dove N rappresenta il numero degli elementi, indicativamente il time step coincide con la velocita di propagazione di un'onda sonora attraverso un elemento, considerando la lunghezza caratteristica minore.
- TSSFAC è un fattore di scala per il calcolo del time step
- DT2MS è il parametro che governa il mass scaling
- IMSCL dà la possibilità di usare un mass scaling selettivo che permette di ridurre il numero di cicli di simulazione senza però alterare la risposta del sistema.

3.2.2 Card definizione

Passando invece al blocco di definizione, si deve impostare la tipologia di elementi, il modello di materiale e le condizioni al contorno, in questo caso si è vincolata la superficie centrale del tratto utile e si è tirato il provino imponendo uno spostamento lineare ai nodi della testa di afferraggio, si sono poi opportunamente vincolati i nodi sulle superfici laterali e inferiori (superifici centrali del provino) rispettivamente inibendo il movimento lungo l'asse Z e lungo l'asse Y.

- **Elementi**

La tipologia di elementi scelti è mostrata nella figura sottostante

ELFORM = 2

- selective reduced integrated brick element (volumetric locking alleviated)

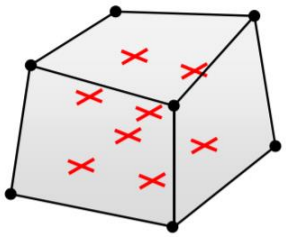


Figura 26 Tipologia di elemento scelto.

Sono elementi che garantiscono un risultato accurato, anche se richiedono un tempo maggiore nella simulazione.

Infine, abbiamo impostato il modello di materiale, in questo caso abbiamo usato il modello MAT_224 ovvero una versione tabulata del modello Johnson-Cook

- **MAT_224**

Il modello di materiale MAT224 è la versione tabulata del modello di Johnson-Cook [25], la differenza tra i due è che nel primo si va a definire un insieme di punti, al variare della velocità di deformazione, della deformazione e della temperatura mentre invece nel secondo si doveva utilizzare una procedura di fitting dei parametri, partendo dalla relazione del modello empirico di Johnson-Cook. Questo modello richiedeva quindi un elevato numero di prove sperimentali ed era molto dispendioso dal punto di vista computazionale. L'applicazione del modello tabulato risulta quindi molto più efficiente richiede però delle correzioni per garantire l'accuratezza del metodo. In particolare, durante l'ottimizzazione è fondamentale evitare che la curva forza-spostamento decresca troppo bruscamente per garantirne la stabilità, a tal fine attraverso l'interfaccia grafica Ls-Opt verranno poi aggiunte delle relazioni che garantiscano la monotonia della curva tensione deformazione.

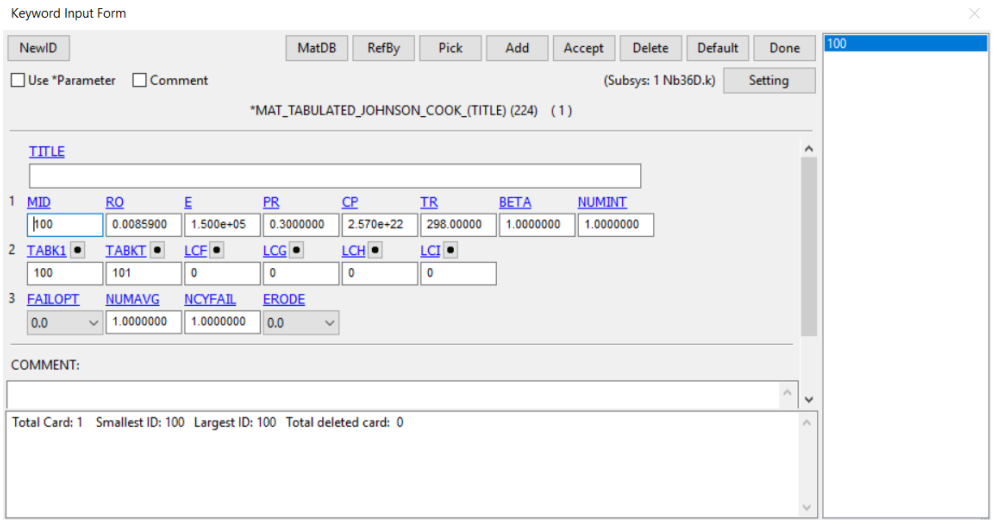


Figura 27 MAT_224.

La formulazione matematica del modello è espressa dalla relazione sottostante:

$$\sigma_y = K_1(\varepsilon_p, \dot{\varepsilon}_p) * k_t(\varepsilon_p, T)$$

Dove i due termini, il primo dipendente da deformazione e strain rate ed il secondo dipendente da deformazione e temperatura non sono descritti da una legge ma sono definiti attraverso delle tabelle. La riposta del materiale in termine di tensione viene quindi costruita attraverso un insieme di punti al variare di deformazione e velocità di deformazione. Per non appesantire eccessivamente la simulazione sono stati utilizzati dieci punti per ognuna delle quattro curve che dovranno poi essere utilizzate durante l'ottimizzazione per il fitting delle curve sperimentali. L'obiettivo di questa tesi è di ricavare i punti di questa tabella a diversi strain rate, il modello come mostrato nell'equazione sopra considera anche l'effetto della temperatura ma nel nostro caso per tenerne conto si è considerata una relazione lineare precedentemente ottenuta non avendo effettuato prove a diverse temperature, l'unica variabilità per quel che riguarda la temperatura nel nostro caso è dovuta ai fenomeni di addolcimento termico per le prove effettuate ad alta velocità di deformazione. Nella tabella sottostante i valori di tensione equivalente al variare dell'effective plastic strain, per diversi strain rate, ottenuti attraverso l'ottimizzazione successivamente illustrata.

ε	σ_{eq} $((10^{-3}\ s^{-1})$	σ_{eq} $(10^{-1}\ s^{-1})$	σ_{eq} $(10^{1}\ s^{-1})$	σ_{eq} $(10^{3}\ s^{-1})$
e_1=0	79,793	129,169	229,484	487,594
e_1=0,001	89,5325	138,585	236,774	490,233
e_1=0,005	100,144	148,845	244,717	493,109
e_1=0,01	107,74	156,196	250,407	495,169
e_1=0,05	138,188	185,645	273,207	503,423
e_1=0,1	160,000	206,742	289,540	509,336
e_1=0,25	201,813	248,183	320,850	520,671
e_1=0,5	247,393	291,269	354,980	533,028
e_1=0,75	281,587	324,342	380,582	542,297
e_1=1	310,000	351,823	401,861	550,000

3.3 Confronto modelli

Prima di giungere a questo modello ne sono stati sviluppati altri per vedere quale simulasse meglio il comportamento del provino reale, per fare ciò sono state utilizzati anche dei modelli shell con diversa formulazione degli elementi oltre al modello solido mostrato prima. Nelle immagini sottostanti i diversi modelli analizzati e le relative deformate nello stesso istante di tempo.

- SHELL: PLANE STRAIN

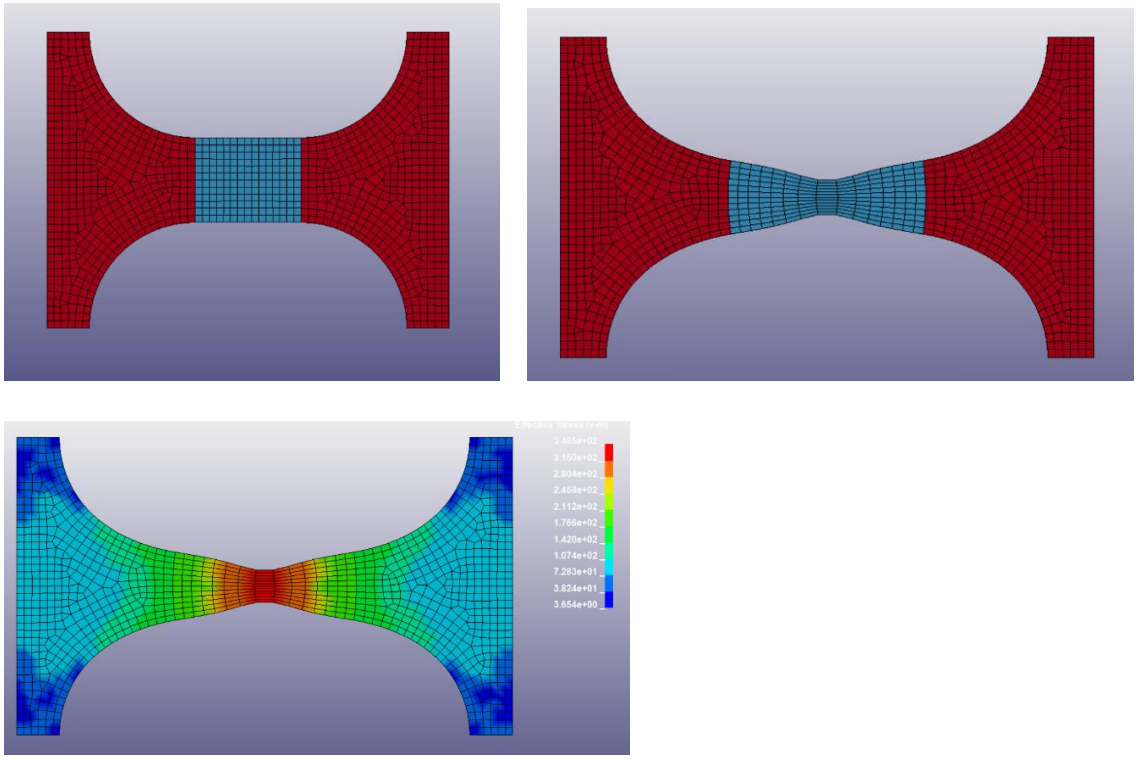


Figura 28 a) b) c) Modello Plane strain in condizione di riposo e a fine prova.

- SHELL: BELYTSCHKO-TSAY (REMESH)

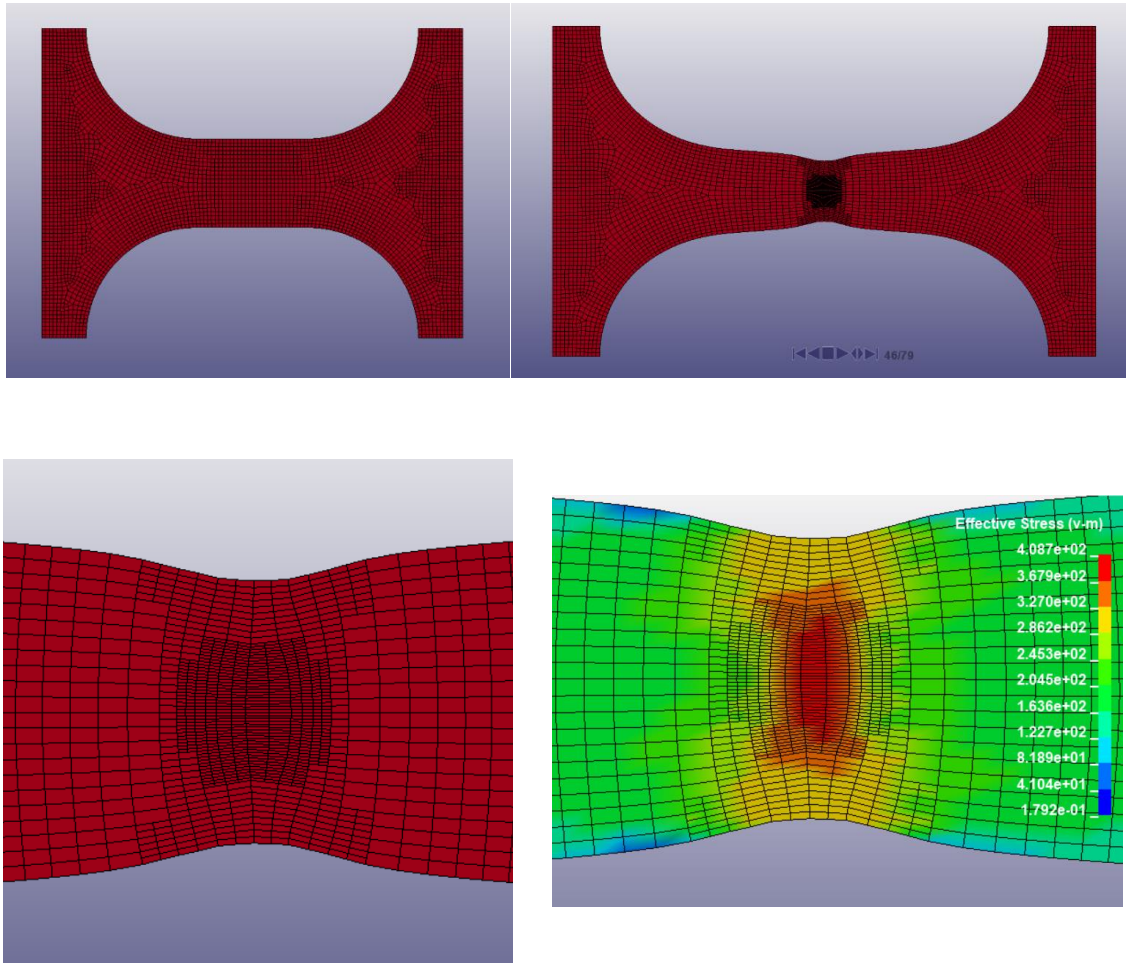


Figura 29 a) b) c) d) Modello belytschko Tsay in condizione indeformata e a fine prova, particolare della zona di remesh

- SHELL BELYTSCHKO-TSAY

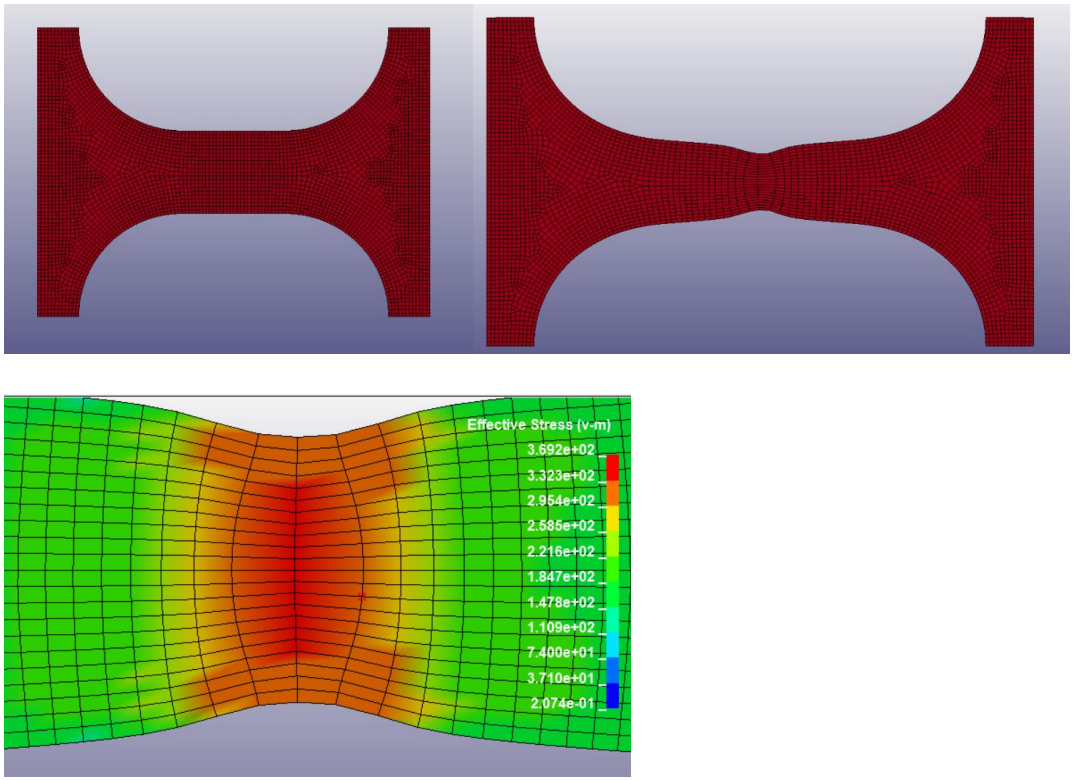


Figura 30 a) b) c) Modello Belytschk Tsay, no remesh, condizione indeformata e a fine prova.

- SOLID

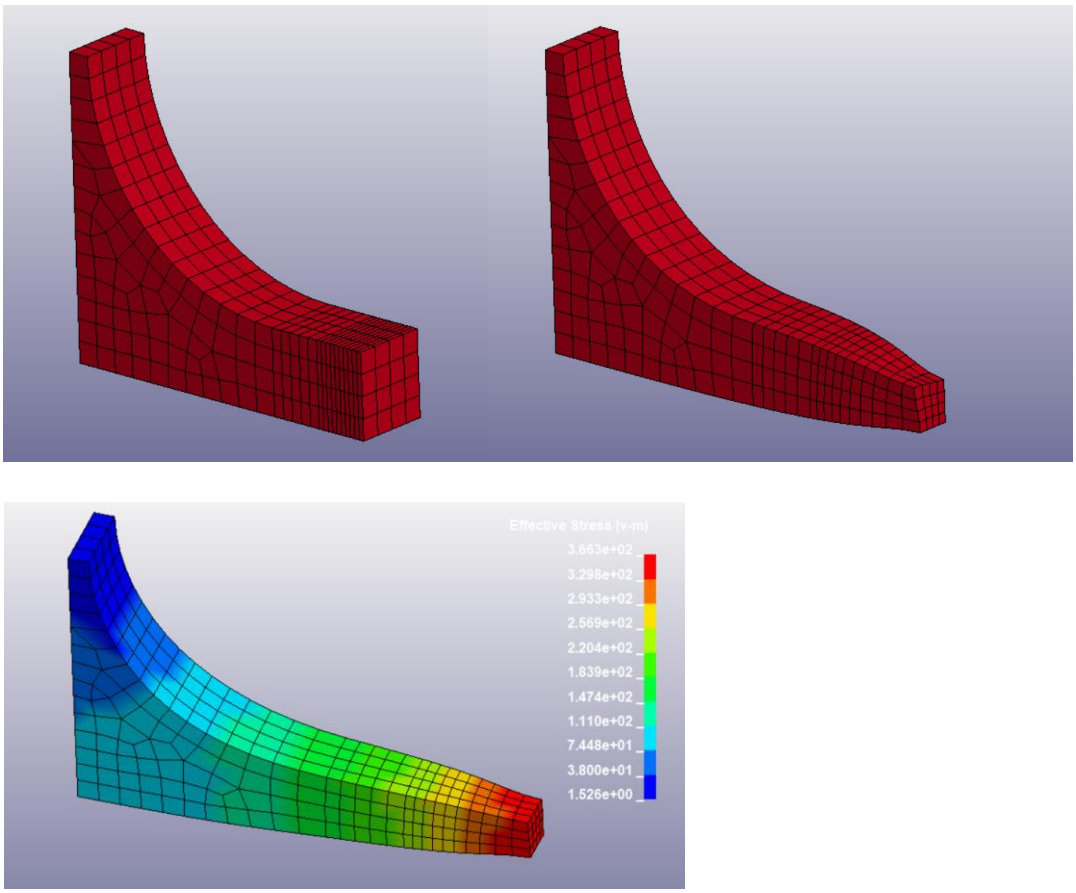


Figura 31 a) b) c) Modello 3D condizione indeformata e a fine prova.

Le prime immagini si riferiscono a un modello shell con formulazione degli elementi Plane Strain che vanno a simulare uno stato di deformazione piana corrispondente alla sezione centrale del provino in cui si genera uno stato di tensione triassiale, le immagini successive invece sono quelle di una simulazione effettuata utilizzando elementi Belytschko-Tsay [26] che garantiscono la miglior economia computazionale essendo molto veloci e con una discreta accuratezza. In questo caso è stata studiata anche la simulazione con una mesh adattiva [27], ovvero sfruttando la possibilità di ricreare una mesh più fitta al procedere della deformazione per evitare elementi eccessivamente distorti. Infine, il modello finale che è stato poi utilizzato per le ottimizzazioni le cui caratteristiche sono state mostrate precedentemente.

Il confronto non si è basato solamente sull'osservazione delle deformate ma anche sull'analisi della curva forza-spostamento. Nella figura sottostante si vedono i risultati e si vede come il modello solido riesca a descrivere meglio il comportamento del provino per un range più ampio di deformazioni. Lo spostamento si riferisce allo spostamento di un nodo all'estremità del tratto utile. Si impone uno spostamento lineare dalla condizione indeformata ai nodi sulla testa di afferraggio.

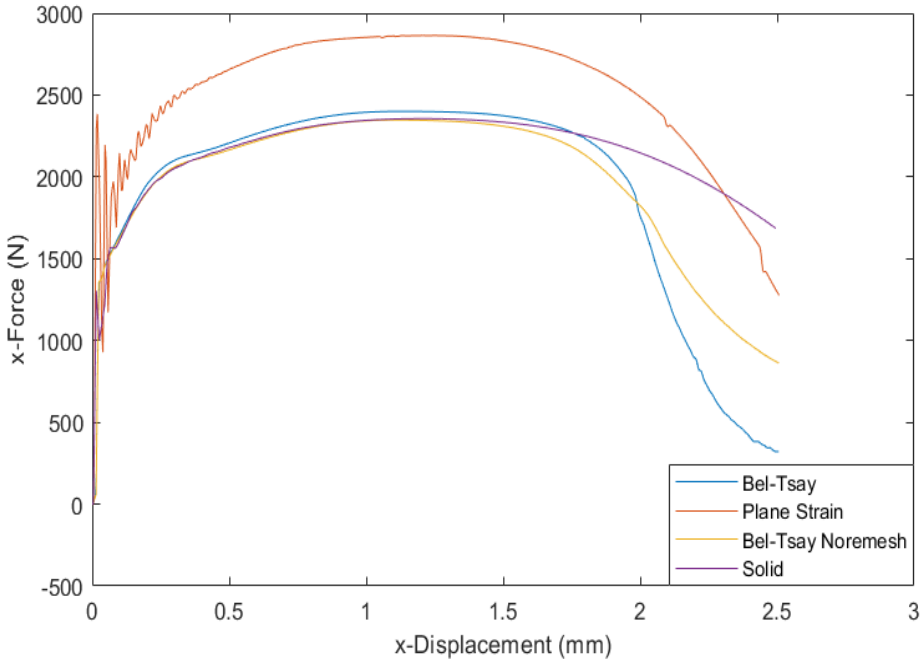


Figura 32 Diagramma forza spostamento dei diversi modelli studiati.

4 OTTIMIZZAZIONE

Un'ottimizzazione è un problema in cui si cerca il valore di alcune variabili per ottenere la condizione di ottimo della funzione che si vuole ottimizzare. I componenti fondamentali di una ottimizzazione sono quindi: delle variabili, una funzione obiettivo, un procedimento, nel nostro caso delle simulazioni e un algoritmo di simulazione. Il processo di ottimizzazione prevede che l'algoritmo di simulazione attraverso delle opportune strategie generi delle diverse configurazioni da testare (valori delle variabili) in accordo con le configurazioni testate precedentemente allo scopo, appunto, di ottimizzare la funzione obiettivo. In questo lavoro di tesi la funzione obiettivo è rappresentata dalla minimizzazione dell'errore tra i risultati sperimentali di una prova di trazione e i risultati ottenuti attraverso delle simulazioni che può essere espressa matematicamente come:

$$minimize\ f(x)$$

$$x \in X \subseteq R^k$$

Con X spazio di tutte le possibili configurazioni [28].

Il processo di identificazione delle relazioni costitutive del materiale è "basato su un metodo numerico inverso che sfrutta le simulazione numeriche agli elementi finiti"[6] di una prova di trazione, attraverso un'apposita interfaccia grafica viene definita come funzione obiettivo la minimizzazione della differenza tra le grandezze computate e quelle sperimentali, la differenza tra le due curve può essere computata in vari modi, nell'ottimizzazione effettuata è stato considerato l'errore quadratico medio. Per ridurre la differenza tra i valori sperimentali e quelli simulati durante le varie simulazioni i parametri del modello vengono iterativamente modificati, rimanendo però all'interno dei range specificati all'inizio. La strategia con cui questi vengono modificati verrà descritta nei paragrafi successivi. Questo metodo permette di ricavare la risposta del

[6] Maria Teresa Gesualdo "CARATTERIZZAZIONE E MODELLAZIONE DEL COMPORTAMENTO MECCANICO DEL NIOBIO A DIFFERENTI STRAIN-RATE".

materiale senza fare ipotesi sul campo di tensioni che si instaura durante il provino poiché il confronto viene fatto su grandezze macroscopiche, forza e spostamento. Il principale problema riguarda il tempo necessario che risulta estremamente elevato soprattutto per quei sistemi con un numero elevato di gradi di liberà, occorre quindi fare molta attenzione nell'utilizzare modelli che siano un buon compromesso tra affidabilità e tempi computazionali ridotti. Per effettuare il processo di ottimizzazione è stato utilizzato il solutore LS-DYNA che permette attraverso la sua interfaccia grafica LS-OPT una facile definizione della strategia e dei parametri di ottimizzazione

Nel nostro caso il procedimento è leggermente diverso poiché il modello di materiale usato nella costruzione del provino non è descritto da una formula ma da un insieme di punti. Ad ogni iterazione quindi il modello fem non vede cambiare i parametri di una legge costitutiva del materiale ma i punti che descrivono la risposta del materiale a diversi strain rate (nel processo di ottimizzazione nel corso delle varie simulazioni i valori di strain rate oscilleranno attorno al valore impostato, il solutore andrà così a ricavarsi i punti tra le curve studiate). Tuttavia, poiché il solutore necessita che la curva di risposta forza-corsa sia monotona crescente o debolmente decrescente, (non può verificarsi durante le iterazioni che il punto n+1 abbia un valore molto inferiore rispetto al punto n per non compromettere la stabilità del metodo) si è dovuto fornire una legge utilizzata dal solutore per andare ad inserire i punti richiesti dal modello. Legge costituita da dei parametri che vengono iterativamente aggiornati per ottenere il miglior fitting. Inizialmente è stata studiata una relazione di tipo incrementale che non è stato però possibile utilizzare poiché avrebbe richiesto un numero eccessivo di variabili (40) e dava enormi problemi nella definizione del design space richiedendo dei metodi specifici per la riduzione. Si è quindi optato per un modello a nove variabili facilmente gestibile dal solutore e che garantisce buoni risultati in tempi ridotti. Il risultato finale dell'ottimizzazione sarà poi un insieme di punti che descrive accuratamente il comportamento del materiale in un ampio range di deformazione e velocità di deformazione.

4.1 Processo ottimizzazione

L'ottimizzazione effettuata è di tipo "MOO" multy-objective-optimization in quanto si va ad effettuare il fitting di quattro curve sperimentali ottenute a diversi valori di velocità di deformazione, l'algoritmo di ottimizzazione "Metamodel based reduction" è associato alla strategia "Sequential with Domain Reduction". [29]

Nell'immagine sottostante è mostrata la strategia di ottimizzazione impostata attraverso l'interfaccia grafica Ls-Opt del solutore LS-DYNA, viene prima effettuato un campionamento delle variabili in accordo con i range specificati, con i valori ottenuti dal campionamento vengono effettuate le simulazioni. La curva forza-corsa ottenuta dalla simulazione viene confrontata con quella sperimentale e se la differenza tra le due rispetta i criteri di terminazione allora l'ottimizzazione è conclusa se questo non si verifica viene ridotto il design space in accordo con i risultati ottenuti e si effettua un nuovo campionamento e una nuova simulazione, il procedimento continua fino a quando non si raggiunge il limite di iterazioni imposto, la variazione dei parametri raggiunge la sensibilità imposta o la funzione obiettivo raggiunge il valore prefissato. Nei paragrafi successivi verranno spiegati i principali step del processo di ottimizzazione e le loro caratteristiche.

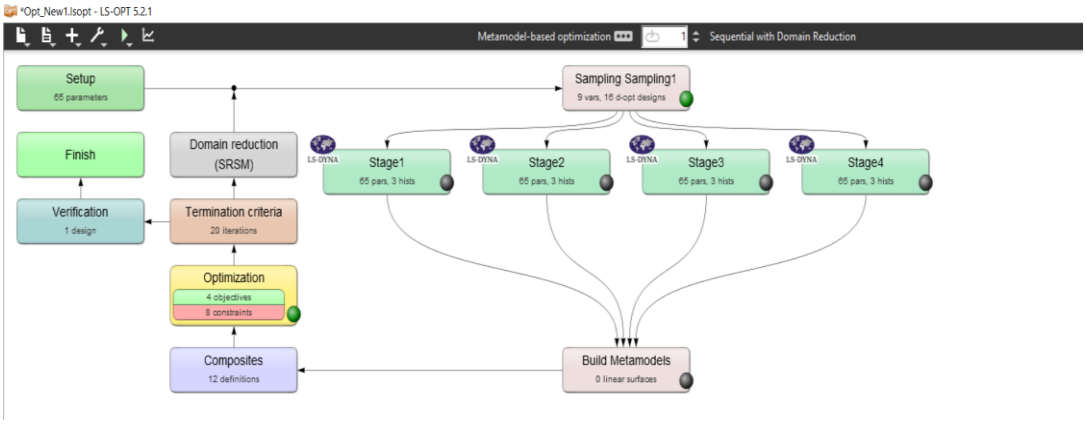


Figura 33 Interfaccia grafica Ls-Opt.

Come detto precedentemente il solutore per andare a trovare i punti della curva di risposta del materiale ha bisogno di una relazione per non compromettere la stabilità del metodo, si è quindi pensato di utilizzare una relazione del tipo:

$$\sigma = A + B\varepsilon^n$$

Per la curva di riferimento, la curva sperimentale ottenuta con una prova statica a temperatura ambiente. Mentre le altre tre curve si è pensato di ottenerle scalando e spostando la curva di riferimento attraverso degli opportuni parametri secondo la seguente relazione:

$$\sigma = C(A + B\varepsilon^n) + K$$

In totale si ottengono quindi nove differenti parametri di ottimizzazione. Le curve di output delle varie simulazioni sono costruite utilizzando dieci punti, valore che è risultato un buono compromesso tra la necessità di accuratezza e la necessità di avere tempi di simulazioni ridotti. Come già anticipato questo tipo di ottimizzazione è una "Metamodel-based Optimization" con strategia "Sequential with Domain Reduction" nei paragrafi successivi viene fornita una breve spiegazione dei metamodelli, della strategia di riduzione del dominio e del metodo di campionamento utilizzato.

4.1.1 Metamodel

È una descrizione matematica di un modello basata su un insieme di dati di input (variabili) e i corrispondenti output (obiettivo) ottenuti da un modello di simulazione dettagliato. "Può quindi fornire delle predizioni sui dati di output per dati di input non direttamente osservati"[7], in definitiva lo scopo è dare la possibilità di effettuare analisi sequenziali riducendo drasticamente i tempi di computazione. La tipologia di metamodello utilizzato dipende dalla fisica del sistema che si vuole descrivere, uno dei metamodelli più semplici è quello di tipo polinomiale ma negli ultimi anni se ne sono sviluppati di più complessi. Poiché il numero di simulazioni utilizzate per la creazione del metamodello varia in funzione del numero di variabili che si vuole studiare, si deve effettuare preliminarmente un controllo sulle variabili per eliminare quelle meno importanti al fine di ridurre il numero di simulazioni. Poiché questo è un'approssimazione si devono definire dei parametri di errore che vanno tenuti sotto controllo durante tutto il processo. Nella figura sottostante si può vedere il procedimento di costruzione di un metamodello. [30]

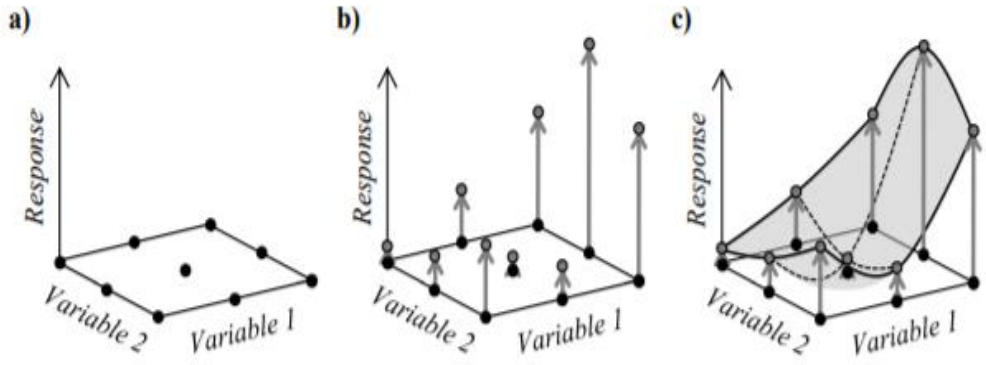


Figura 34 a) Design of experiments, b) Function evaluations, and c) Metamodel.

[7] "Tecniche di metamodeling nel CAE per l'ottimizzazione multi-obiettivo", Principi e Metodologie della Progettazione Meccanica corso tenuto da F. Campana Facoltà di Ingegneria - a.a. 2011-2012 Flavia Campanelli

4.1.2 SDM

La sequential with domain reduction è la strategia scelta per la riduzione del dominio che ha come obiettivo la convergenza della soluzione alla tolleranza richiesta. Inizialmente per la scelta di ogni variabile viene individuato un sottospazio del design space, che ad ogni iterazione successiva viene ridotto o ricentrato in funzione del risultato ottenuto allo scopo di ridurre i possibili valori che la variabile può assumere con l'avanzamento dell'ottimizzazione per giungere a convergenza.

Nella figura sottostante viene mostrato il procedimento con cui si va a ridurre e/o ricentrare il dominio. Nella prima immagine viene mostrato il ricentramento del dominio, nella seconda la riduzione dello stesso e nella terza, situazione più frequente, l'insieme delle due operazioni. [31]

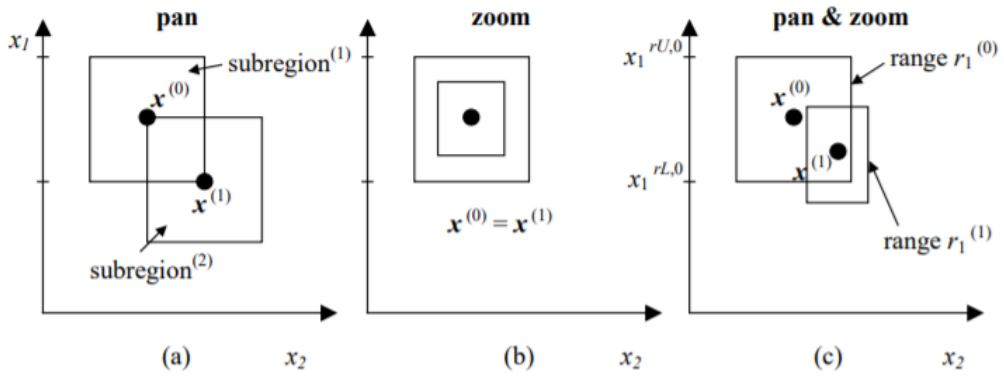


Figura 35 a) Ricentramento del dominio b) riduzione c) operazione mista.

Il solutore una volta definito lo starting point x^0 va poi a definire i limiti superiori ed inferiori del dominio con le relazioni:

$$x_i^{rL,0} = x_i^0 - 0{,}5r_i^0$$

$$x_i^{rR,0} = x_i^0 + 0{,}5r_i^0 \quad i = 1{,}2, \ldots, N$$

Dove il valore r_i^0 è il range iniziale di variazione, ed N è il numero di variabili dell'ottimizzazione, nelle successive iterazioni il valore r_i^0 varia in funzione della natura oscillatoria della soluzione e dall'accuratezza del valore precedente. Durante il processo di riduzione si deve definire poi un parametro di contrazione γ dipendente dal fatto che x^k e x^{k-1} si trovino sullo stesso estremo della regione di variabilità o su estremi opposti e si dovrà poi valutare anche un parametro di oscillazione c definito dalla relazione seguente:

$$c_i^k = d_i^k * d_i^{k-1}$$

Dove d_i^k è espresso da:

$$d_i^k = {2\Delta x_i^k}/{r_i^k}$$

E appartiene all'intervallo chiuso [-1,1].

Il parametro di oscillazione viene poi normalizzato per poter essere utilizzato per definire il parametro di contrazione come segue:

$$\gamma = 0{,}5(\gamma_{pan}(1 + \hat{c}) + \gamma_{osc}(1 - \hat{c}))$$

Dove $\hat{c}$ è il parametro di oscillazione normalizzato, γ_{pan} rappresenta il caso di ricentramento del dominio e generalmente posto uguale a 1 e γ_{osc} il restringimento del dominio ed ha un valore compreso tra lo 0,5 e lo 0,7.

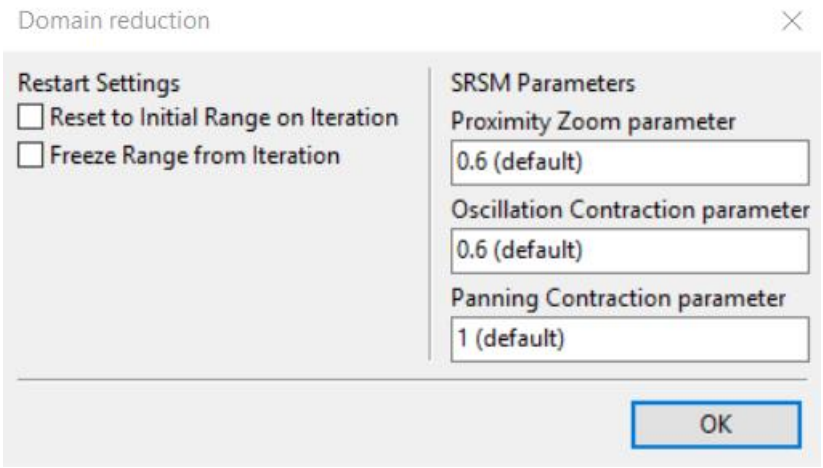


Figura 36 Parametri di riduzione del dominio.

Per poter definire il range di variazione dell'iterazione k+1 si deve prima determinare il tasso di contrazione con la formula:

$$\delta_i = \eta + |d_i^k|(\gamma - n)$$

Dove η rappresenta il parametro di "zooming" e γ, come già detto, il parametro di contrazione. Infine, si può calcolare il range di variazione per la k+1 iterazione con la formula sottostante:

$$r_i^{k+1} = \delta_i r_i^k \qquad k = 1, \dots, niter$$

4.1.3 Sampling

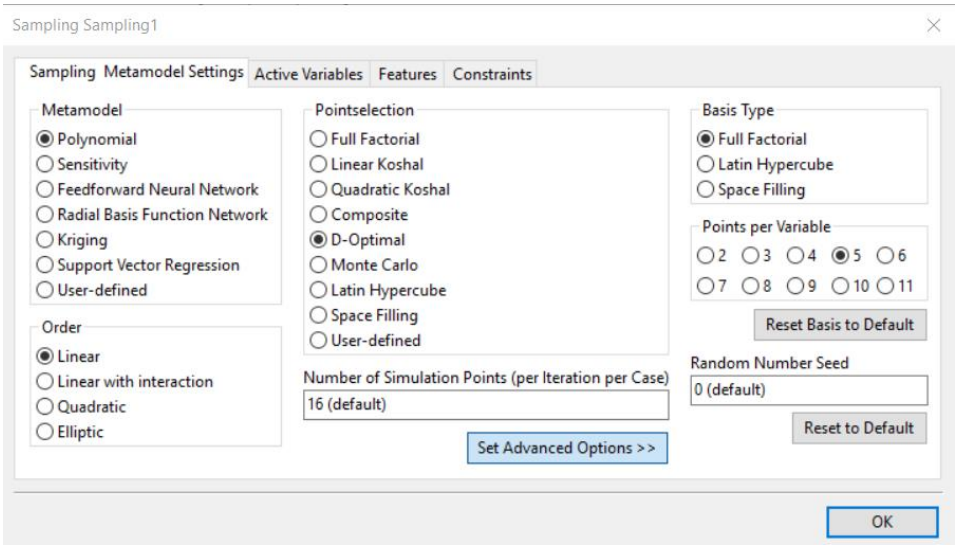


Figura 37 Impostazioni per il campionamento delle variabili.

Il metodo di campionamento usato è il Full Factorial che ha il vantaggio di essere estremamente intuitivo poiché "consiste nel tracciare una griglia più o meno fitta nello spazio di progetto e campionare nei punti in cui le linee della griglia si intersecano"[8]. Per semplificare, considerando un problema a due variabili che variano da [-a, a] a due livelli, il numero di campionamenti da effettuare è pari a 4, ovvero il numero delle possibili permutazioni che si possono ottenere dalle due variabili quando queste assumono i valori estremi del range di variazione, il problema principale è che il numero di campionamenti necessari cresce molto velocemente con il numero di punti per variabile e con il numero di variabili stesso. Inoltre, se il numero di punti per variabile è eccessivamente ridotto esistono delle zone sottocampionate ed il solutore non riuscendo ad ottenere i valori di tentativo della simulazione interrompe l'ottimizzazione. [32]

[8] "Introduzione alle tecniche di ottimizzazione" Marco Cavazzuti MilleChili Lab, DIMeC, Università degli Studi di Modena e Reggio Emilia Aprile 2013

4.1.4 Stage

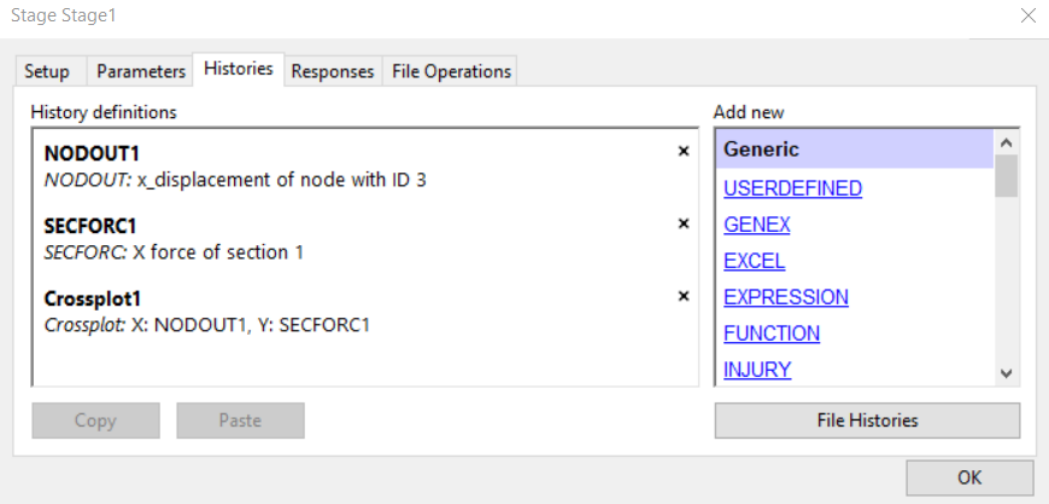


Figura 38 Histories estrapolate dalle singole simulazioni.

Nella sezione Stage si caricano i file di input e si definiscono gli output da estrapolare dalle simulazioni, nel nostro caso, la forza applicata lungo l'asse x e lo spostamento di un punto all'estremo del tratto utile del provino dalla condizione indeformata in funzione del tempo di simulazione, con il comando crossplot andiamo poi ad "incrociare" le due curve per ottenere la curva forza-spostamento.

4.1.5 Composite

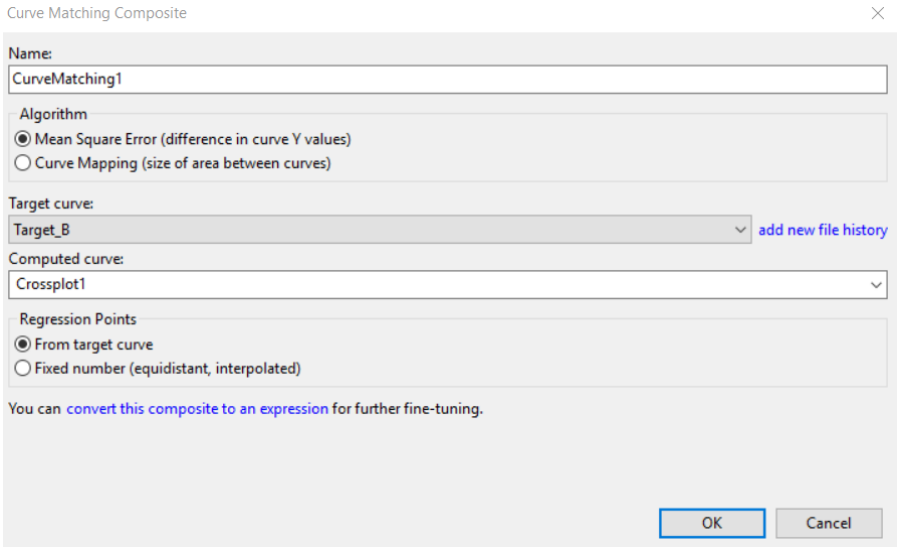


Figura 39 Definizione di un obiettivo di ottimizzazione.

Nella sezione composite vengono definite le constraint e gli obiettivi dell'ottimizzazione, i primi sono i limiti che devono essere rispettati durante le simulazioni, nel nostro caso sono stati imposte dei limiti sui valori di tensione che possono essere raggiunti da alcuni dei dieci punti utilizzati per costruire la curva risultante forza-spostamento. Questi non hanno tanto un significato fisico ma servono per garantire che non si vada a inficiare la stabilità del metodo. Gli obiettivi nel nostro caso sono i 4 "curve matching" per le quattro curve di target, in questa card viene impostato l'algoritmo utilizzato per fittare le curve, per questa simulazione la scelta è ricaduta sull'algoritmo chiamato "mean square error" che cerca di minimizzare la funzione obiettivo espressa dalla seguente equazione:

$$\varepsilon = \frac{1}{P}\sum_{p=1}^{P}\left[\frac{f_p(x) - G_p}{s_p}\right]^2 = \frac{1}{P}\sum_{p=1}^{P} W_p\left[\frac{e_p(x)}{s_p}\right]^2$$

Dove p indica i punti con cui viene costruita la curva, G_p i valori della curva di target e $f_p(x)$ la curva di output al variare del parametro x che si sta studiando, s_p è invece il massimo di G_p.[33]

4.1.6 Optimization

Tramite la card optimization si può scegliere la strategia di ottimizzazione nel nostro caso inizialmente si utilizza l'algoritmo ASA e successivamente per affinare i risultati si passa all'algoritmo LSOP.

Per spiegare l'algoritmo di partenza si può ricorrere ad una analogia metallurgica con la tempra, quando si raffredda un metallo ad alta temperatura questo procedimento deve essere effettuato gradualmente per evitare che nel passaggio da un sistema a più alta energia ad uno a energia inferiore nel reticolo cristallino si creino delle difettosità. Allo stesso modo l'algoritmo ASA in un problema di ottimizzazione volto alla minimizzazione di una funzione obiettivo porta al globale equilibrio del sistema attraverso piccole perturbazioni del sistema di partenza. Il principio di funzionamento può essere riassunto dicendo che, inizialmente, quindi per gradi elevati di disordine, l'algoritmo funziona come una random search ovvero si muove su ampie zone di dominio per cercare la situazione ottimale, quando l'energia del sistema si riduce l'algoritmo va a restringere l'area del dominio in cui cercare la situazione di ottimo e ha un funzionamento analogo ai metodi steepest descent[9].[34]

Per le ultime iterazione come detto passa poi all'algoritmo LSOP che garantisce un affinamento della soluzione.

[9] I metodi steepest descent sono dei metodi utilizzati nei problemei di ottimizzazione in cui si cerca i il massimo o il minimo di una funzione a più variabili, il metodo va a ricercare la direzione di massima discesa di una generica funzione $f(x)$ nel suo punto x identificandola come quella opposta al gradiente nel suo punto.[]

4.1.7 Termination criteria

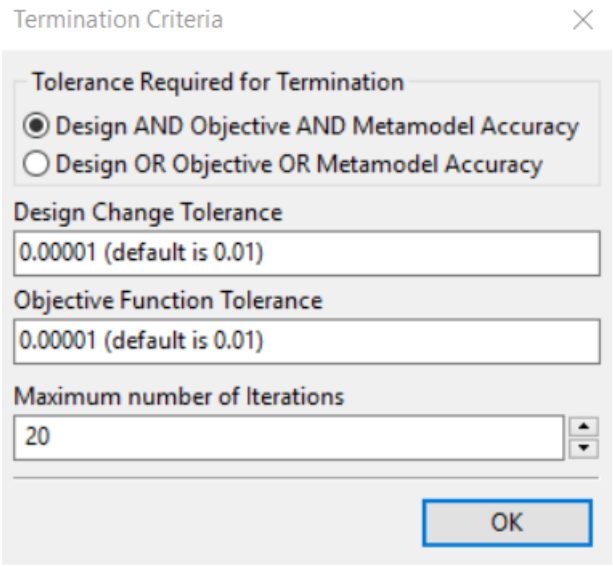


Figura 40 Termination criteria

I termination criteria servono a interrompere il processo di ottimizzazione una volta raggiunti gli obiettivi di ottimizzazione o raggiunto il massimo numero di iterazioni. Nella foto sopra vengono mostrati i valori limite impostati, la scelta è stata effettuata dopo aver osservato i risultati di diverse ottimizzazioni.

La prima condizione (Design change Tolerance) si verifica se

$$\frac{\|x^k - x^{k-1}\|}{\|d\|} < \varepsilon_x$$

Dove x rappresenta il vettore delle variabili di ottimizzazione e d la dimensione del design space.

La seconda condizione (Objective function Tolerance) invece si verifica se:

$$\left|\frac{f^k - f^{k-1}}{f^{k-1}}\right| < \varepsilon_f$$

Dove f è la funzione obiettivo. [35]

4.2 Risultati

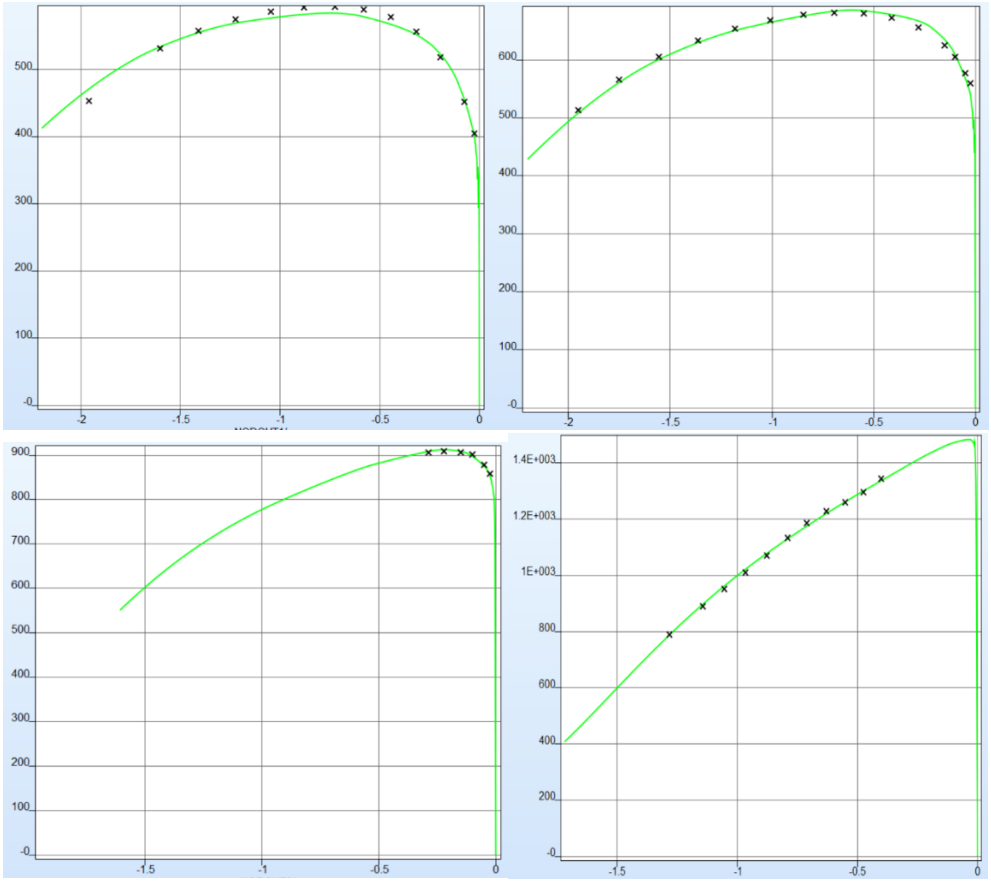


Figura 41 Risultati ottimizzazione curva forza-spostamento a) $10^{-3}\ s^{-1}$ *b)* $10^{-1}\ s^{-1}$ *c)* $10^{1}\ s^{-1}$ *d)* $10^{3}\ s^{-1}$

Nelle immagini soprastanti sono mostrati i risultati del procedimento di fitting delle curve sperimentali (curve orientate da destra a sinistra poiché si è considerato lo spostamento, di un nodo, avente direzione opposta rispetto all'asse x), come si può vedere, la relazione utilizzata permettendo di scalare e spostare la curva di riferimento riesce ad approssimare le curve sperimentali in un ampio range di variazioni di strain rate con un tempo computazionale ridotto (l'ottimizzazione è durata circa quattro ore). In particolare, riesce a replicare in maniera precisa anche i risultati della prova mostrata nella terza immagine della quale non si riesce a definire con certezza se sia isoterma o se debba essere considerata adiabatica, trovandosi al confine tra le due situazioni.

Le immagini mostrate nelle pagine successive mostrano le variazioni dei parametri durante le successive iterazioni e la superficie descritta dalla funzione obiettivo al variare di questi, si ricordano inoltre le relazioni utilizzate dal solutore per determinare i punti da inserire nella tabella tridimensionale del modello MAT_224:

$$\sigma = A + B\varepsilon^n$$

$$\sigma = C(A + B\varepsilon^n) + K$$

- **CURVEMATCHING 1**

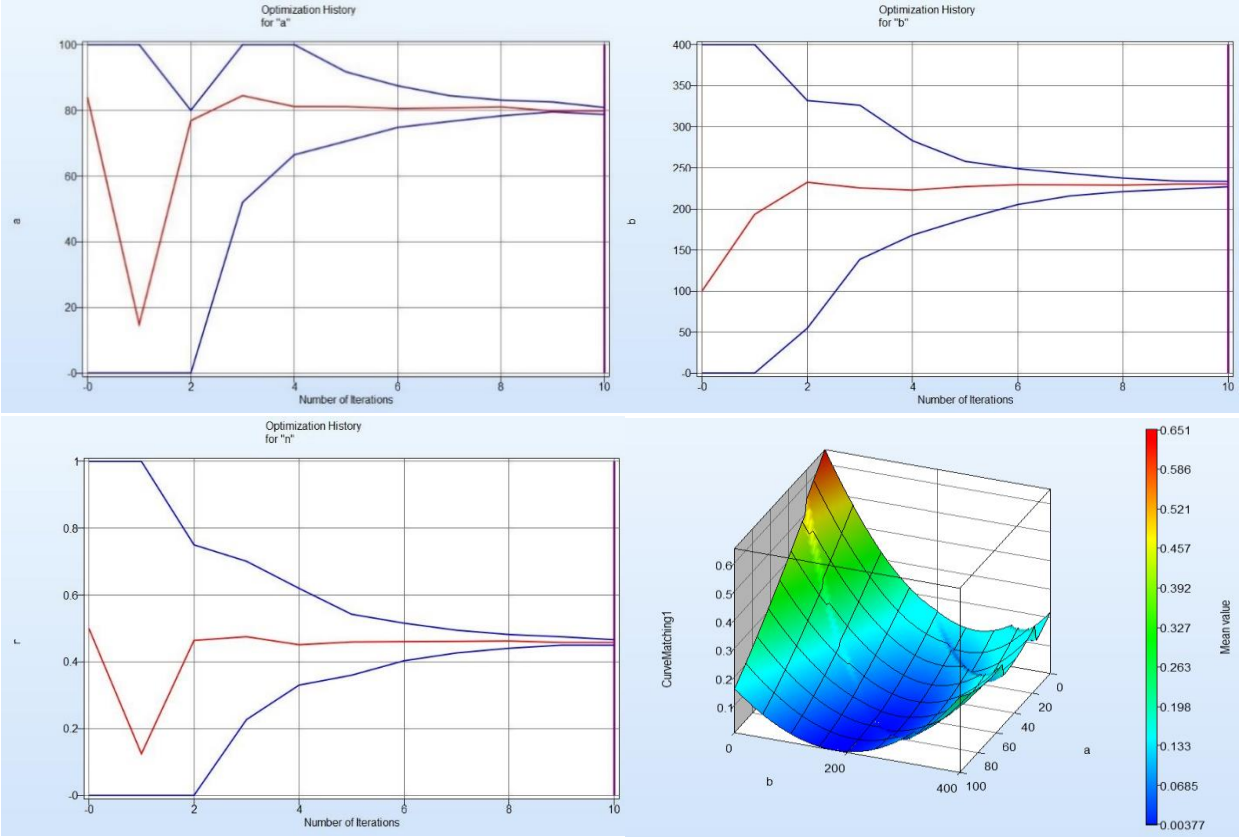


Figura 42 a) Parametro A b) Parametro B c) Parametro n d) Superficie funzione obiettivo

I risultati ottenuti dall'ottimizzazione per i parameteri relativi al primo obiettivo di ottimizzazione sono:

A	79,7973
B	230,203
n	0,45792

- **CURVEMATCHING 2**

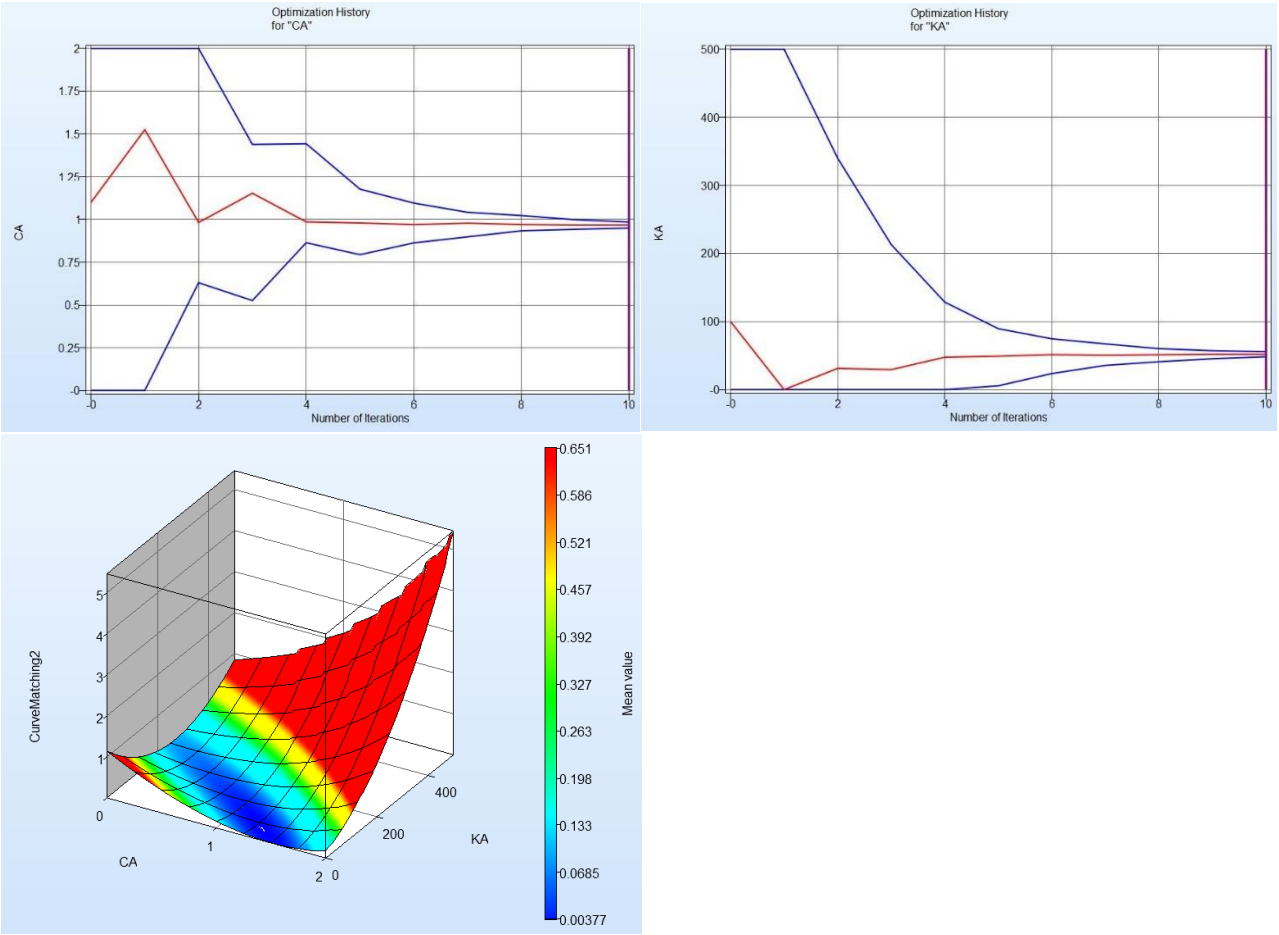


Figura 43 a) Parametro CA b) Parametro KA c) Superficie funzione obiettivo.

I parametri ottenuti dall'ottimizzazione in questo caso sono:

CA	0,96721
KA	51,9888

- **CURVEMATCHING 3**

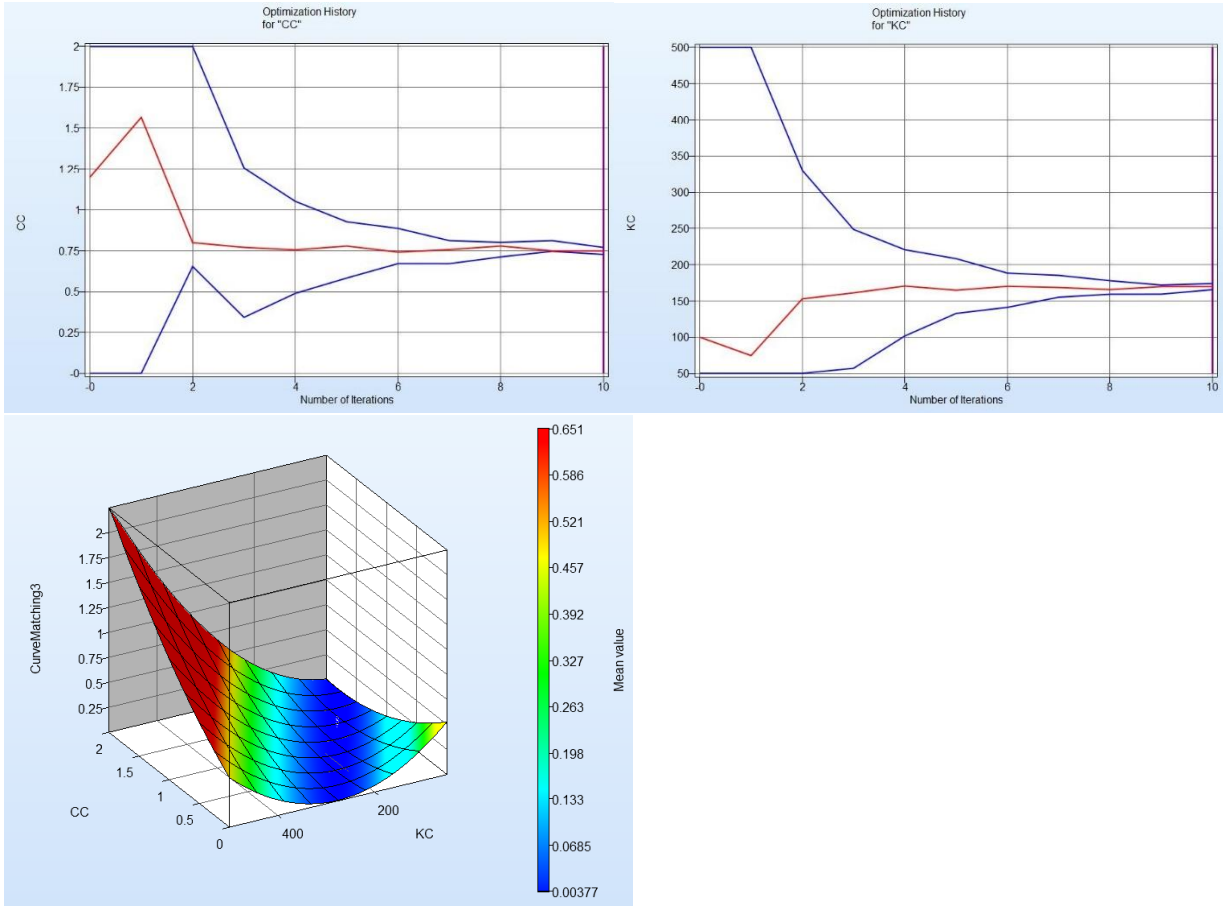


Figura 44 a) Parametro CC b) Parametro KC c) superficie funzione obiettivo.

Risultati parametri ottimizzazione:

CC	0,74881
KC	169,731

- **CURVEMATCHING 4**

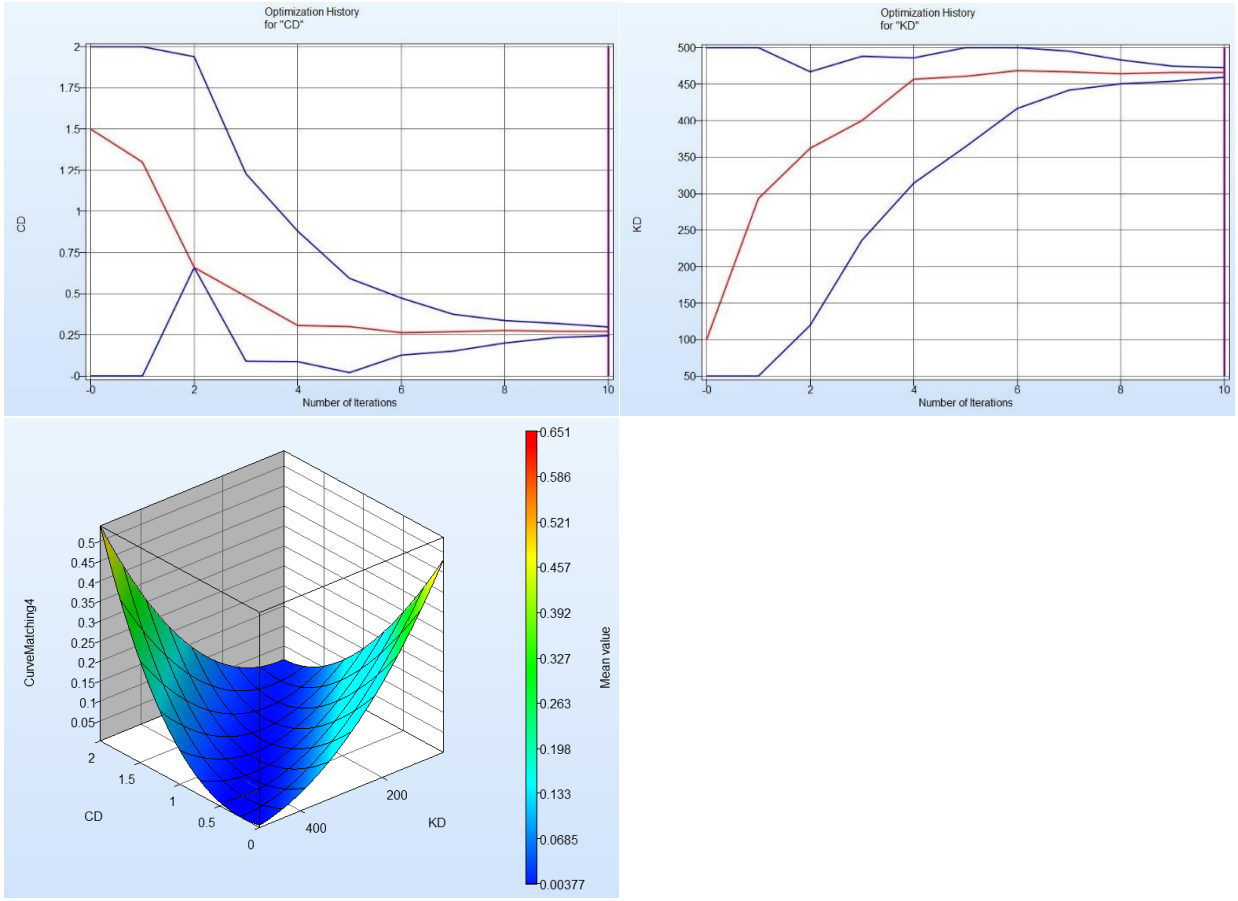


Figura 45 a) Parametro CD b) Parametro KD c) Superficie funzione obiettivo

Risultati parametri ottimizzazione:

CD	0,27109
KD	465,962

Come spiegato precedentemente però questi sono solamente i valori dei parametri che il solutore utilizza per trovare i punti con cui approssimare le curve sperimentali. Quello che a noi interessa invece sono i punti ottenuti durante l'ottimizzazione in termini di tensione equivalente, per i dieci valori di effective plastic strain selezionati, al variare dello strain rate. In seguito verrà poi costruita una superficie in funzione dei parametri precedentemente descritti che rappresenta globalmente il comportamento del materiale.

L'osservazione della superficie e delle curve tensione equivalente-effective plastic strain ci daranno poi la conferma della correttezza del procedimento di ottimizzazioni se queste saranno in accordo con i risultati sperimentali per un materiale come il niobio avente un reticolo cristallino BCC. A tal scopo nella tabella sottostante sono stati riportati i valori di tensione equivalente ottenuti grazie al processo di ottimizzazione.

ε	σ_{eq} $((10^{-3}\ s^{-1})$	σ_{eq} $(10^{-1}\ s^{-1})$	σ_{eq} $(10^{1}\ s^{-1})$	σ_{eq} $(10^{3}\ s^{-1})$
e_1=0	79,793	129,169	229,484	487,594
e_1=0,001	89,5325	138,585	236,774	490,233
e_1=0,005	100,144	148,845	244,717	493,109
e_1=0,01	107,74	156,196	250,407	495,169
e_1=0,05	138,188	185,645	273,207	503,423
e_1=0,1	160,000	206,742	289,540	509,336
e_1=0,25	201,813	248,183	320,850	520,671
e_1=0,5	247,393	291,269	354,980	533,028
e_1=0,75	281,587	324,342	380,582	542,297
e_1=1	310,000	351,823	401,861	550,000

Nell'immagine sottostante sono rappresentate le curve tensione equivalente-effective plastic strain per i 4 diversi valori di strain rate.

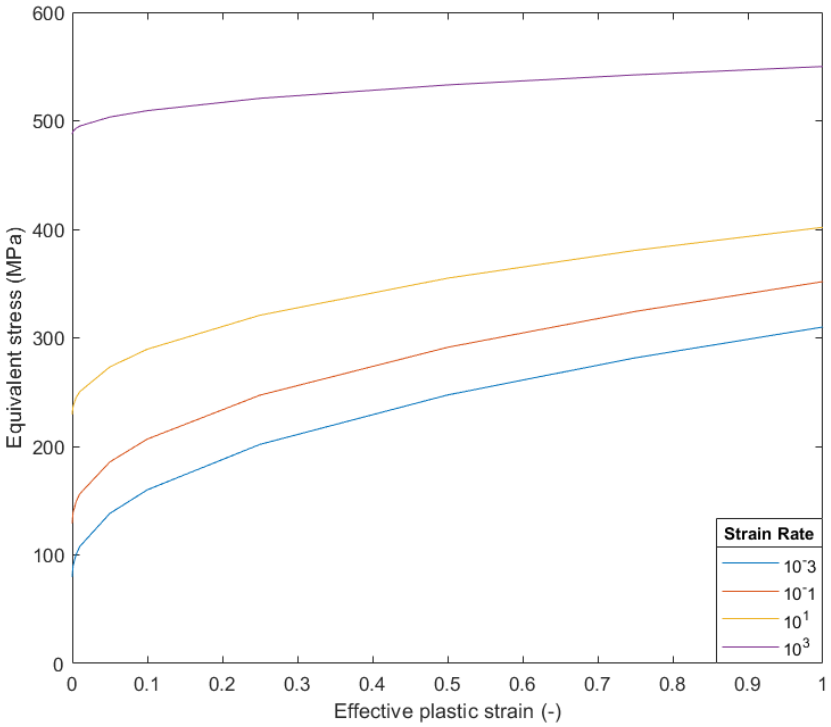


Figura 46 Curve $\sigma - \varepsilon$ per diversi valori di strain rate

Dal grafico possiamo osservare che l'effetto dell'aumento della velocità di deformazione causa uno spostamento verso l'alto delle curve, il risultato è in accordo con le osservazioni sperimentali per un materiale avente reticolo cristallino BCC, si osserva inoltre come l'incremento di tensione dovuto a fenomeni di incrudimento diminuisca all'aumentare della tensione (strain rate maggiori) e al procedere della deformazione (considerando la singola curva) tendendo a raggiungere un valore asintotico. Quindi globalmente si può affermare che il modello di materiale non mostra sensibilità al work-gardening rate, ma che l'aumento di tensione dovuto all'incrudimento diminuisca per valori elevati di strain rate. Esiste un limite all'incrudimento che il materiale può raggiungere.

Per completare il lavoro di tesi è stata infine estrapolata la superficie che descrive la tensione del materiale al variare di deformazione e strain rate a partire dalle quattro curve ottenute dal processo di fitting, si ricorda che in questo lavoro non si sono ricercati anche i valori in funzione della temperatura ma l'effetto di questa è stato tenuto in considerazione utilizzando una relazione lineare precedentemente ottenuta. Questa superficie permette anche di spiegare meglio come avviene il processo di ottimizzazione. Durante le simulazioni che vengono effettuate nel processo di ottimizzazione, il valore di strain rate della singola simulazione non si mantiene costante ma oscilla intorno al valore prefissato quindi il solutore prenderà dei punti che si trovano "sopra" e "sotto" la curva dei risultati sperimentali.

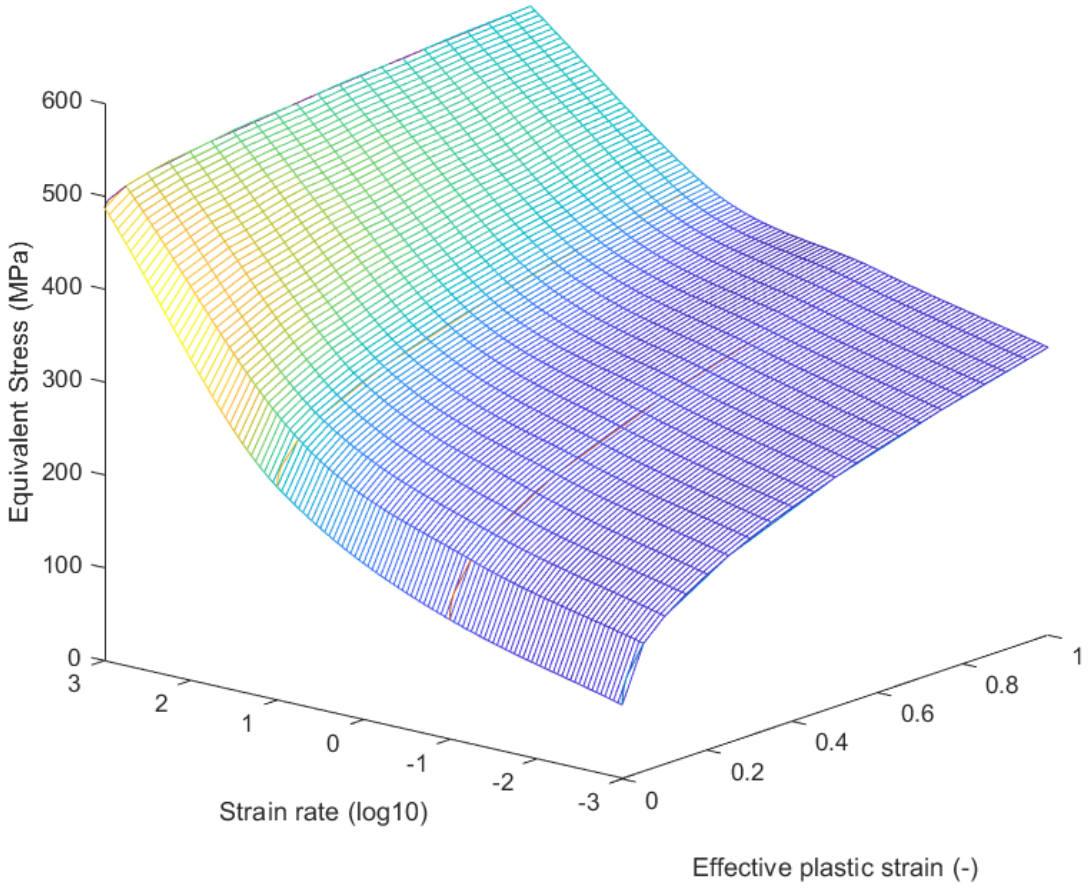


Figura 47 Superfice $\sigma = f(\varepsilon, \dot{\varepsilon})$

5 Conclusioni

In questa tesi si è ricavato un modello di materiale che possa descrivere il comportamento del Niobio al variare di deformazione e strain rate senza dover ricorrere a una legge costitutiva ma che sia descritto da un insieme di punti indipendenti tra loro. Il metodo sviluppato da quindi la possibilità di essere utilizzato per materiali diversi senza dover per forza ricavare una legge empirica, svincolandosi dalla fisica del problema e soprattutto evitando i problemi che utilizzare una relazione empirica comporta, primo fra tutti il fatto che una legge per quanto complicata ed efficace che sia non potrà mai descrivere perfettamente il comportamento del materiale per un ampio range di variazioni dei parametri studiati. Garantisce inoltre la possibilità di descrivere il comportamento del materiale senza dover effettuare un numero elevato di prove sperimentali.

A tal scopo si sono prima creati dei modelli di un provino di trazione valutando sia la possibilità di utilizzare modelli shell che solidi. I primi pur garantendo grazie al numero ridotto di elementi e alla minore complessità una riduzione dei tempi di simulazione e di ottimizzazione, non simulano correttamente la prova di trazione, dando risultati in termini di forza-corsa e soprattutto di deformata, lontani da quelli sperimentali. Si è scelto così di utilizzare un modello solido di un ottavo del provino che rappresenta il miglior compromesso tra veridicità dei risultati e tempi ridotti di simulazione.

Nella successiva fase di ottimizzazione si è implementato un procedimento multi-obiettivo con lo scopo di ricavare i punti del modello di materiale MAT_224. Le principali difficoltà affrontate in questa fase sono state il dover utilizzare una legge che il solutore potesse usare per ricavare i punti del modello al fine di garantire la stabilità del metodo e riuscire ad effettuare la simulazione di prove lente in tempi ragionevoli. Per superare il primo ostacolo si è dovuta scartare l'idea di utilizzare una legge ad incrementi che avrebbe comportato l'utilizzo di un numero eccessivamente elevato di variabili e concentrarsi su un modello a nove parametri. Per risolvere i problemi dei tempi di ottimizzazione si è invece dovuto utilizzare il mass scaling facendo particolare attenzione che questo non falsasse i risultati delle simulazioni e di bilanciare le durate delle diverse

simulazioni per non ottenere dei colli di bottiglia. Alla fine del procedimento di ottimizzazione si è così ottenuta la tabella tridimensionale fornita dal modello MAT_224 che descrive completamente il comportamento del materiale per diversi valori di deformazione e strain rate. Aggiornati quindi i modelli con i risultati dell'ottimizzazione si sono poi effettuati delle ulteriori simulazioni per verificare che le deformate combaciassero con quelle sperimentali e così è stato.

Il processo di ottimizzazione studiato ha quindi fornito una metodologia che potrà essere applicata per modellizzare il comportamento di altri materiali metallici senza dover ricercare una legge di flusso plastico con tutte le difficoltà che questo comporta.

Bibliografia

[1] Walter Nicodemi Metallurgia seconda edizione Zanichelli Pag 63-68

[2] Roesler, Harders, Baekerm; Mechanical Behaviour of Engineering Material, Springer, Pag 175-178.

[3] http://bomet.fci.unibo.it/didattica/laboratorio/Trazione.pdf

[4] P.W. Bridgman, Large Plastic Flow and Fracture, McGraw-Hill, (1952)

[5] Maria Teres gesualdo, "CARATTERIZZAZIONE E MODELLAZIONE DEL COMPORTAMENTO MECCANICO DEL NIOBIO A DIFFERENTI STRAIN-RATE"

[6] J. Hodowany, G. Ravichandram, A.J. Rosakis, P. Rosakis, "Partition of plastic work into heat and stored energy in metals", Experimental Mechanics, 40, 113-123, 2000.

[7] Roesler, Harders, Baekerm; Mechanical Behaviour of Engineering Material, Springer, Pag 166-172

[8] Fundamentals of Strength: Principles, Experiment and Applications of an Internal State Variable Constitutive Formulation Cap.4

[9] Fifty-year study of the Peierls-Nabarro stress F.R.N. Nabarro *, Division of Materials Science and Technology, CSIR, P.O. Box 395, Pretoria 0001, South Africa Received, 4 March 1997

[10] https://mse.ndhu.edu.tw/ezfiles/29/1029/img/3304/Chapter5.pdf

[11] Roesler, Harders, Baekerm; Mechanical Behaviour of Engineering Material, Springer, Pag 189-195

[12] Johnson, G. R. and Cook, W. A., "A constitutive model and data for metals subjected to large strains, high strain rates and high temperatures", 7th International Symposium on Ballistic, 541-547 (1983)

[13] https://education.jlab.org/itselemental/ele041.html

[14] J. Bardeen, L. N. Cooper, and J. R. Schrieffer. Microscopic Theory of Superconductivity. Phys. Rev., 106(1):162–164, Apr 1957.

[15] J. Bardeen, L. N. Cooper, and J. R. Schrieffer. Theory of Superconductivity. Phys. Rev., 108(5):1175– 1204, Dec 1957

[16] http://scienzapertutti.infn.it/7-una-spiegazione-elegante-della-superconduttivita.

[17] Il Niobio, metallurgia dei metalli non ferrosi, Prof. Diego Colombo, Università di Trento.

[18] http://www.cradleresources.com.au/projects/what-is-niobium/

[19] S. Pandolfi, "High-Luminosity LHC", CERN Document Server

[20] https://home.cern/about/updates/2017/12/crab-cavities-colliding-protons-head

[21] Andrea Bacchetto “introduzione alla metodo degli elementi finiti e alla modellazione FEM”

[22] Claudio Canuto, “Appunti per il corso di Modelli e Metodi numerici, Politecnico di Torino

[23] Ls-dyna KEYWORD manual vol.1 vol.2

[24] https://caeai.com/blog/what-mass-scaling-and-when-it-appropriate-explicit-dynamics-analysis

[25] S-DYNA theory manual MAT_224

[26] LS-DYNA theory manual SECTION_SHELL_2

[27] https://www.dynaexamples.com/introduction/intro-by-j.-day/adaptive

[28] Introduzione alle tecniche di ottimizzazione Marco Cavazzuti MilleChili Lab, DIMeC, Università degli Studi di Modena e Reggio Emilia Aprile 2013

[29] Ls-Opt theory manual

[30]”A Multidisciplinary Approach for Automotive Structures Metamodel”, Division of solid mechanics, Linkoping University, Ann-Britt Ryberg, Rebecca Domeij, Larsgunnar Nilson.

[31] Ls-Opt Manual version 5.2 section 23.6

[32] Introduzione alle tecniche di ottimizzazione Marco Cavazzuti MilleChili Lab, DIMeC, Università degli Studi di Modena e Reggio Emilia Aprile 2013

[33] Ls-Opt Manual version 5.2 section 10.5.1

[34] http://www1.unipa.it/valerio.lacagnina/pub/ricercaOperativa/SimulatedAnnealing.pdf

[35] Ls-Opt Manual version 5.2 section 12.1.1

Indice figure

Figura 1) http://www.campanologia.it/contenuto/pagine/01-ATS/ATS-G01/ATS-G01-02-PChimiche.htm

Figura 2) http://bomet.fci.unibo.it/didattica/laboratorio/Trazione.pdf

Figura 3) Maria Teresa Gesualdo, "CARATTERIZZAZIONE E MODELLAZIONE DEL COMPORTAMENTO MECCANICO DEL NIOBIO A DIFFERENTI STRAIN-RATE"

Figura 4) Iván Darío Romero Fonseca "A dissertation submitted to the faculty of The University of North Carolina at Charlotte in partial fulfillment of the requirements for the degree of Doctor of Philosophy in Mechanical Engineering", Charlotte 2014.

Figura 5), 6) "Flow stress of commercially pure niobium over a broad range of temperatures and strain ", Sia Nemat-Nasser *, Weiguo Guo Center of Excellence for Ad6anced Materials, Uni6ersity of California, 4207 Engineering Building, Unit 1, 9500 Gilman Dri6e, San Diego, La Jolla, CA 92093-0416, USA.

Figura 7) Lprenzo Peroni, Slide del corso "Meccanica dei materiali" corso di laurea Magistrale in Ingegneria Meccanica, Politecnico di Torino.

Figura 8), 9) https://it.wikipedia.org/wiki/Dislocazione.

Figura 10) Lorenzo Peroni, Slide del corso "Meccanica dei materiali" corso di laurea Magistrale in Ingegneria Meccanica, Politecnico di Torino.

Figura 11) https://it.wikipedia.org/wiki/Sorgente_di_Frank-Read

Figura 12) https://www.plansee.com/en/materials/niobium.html

Figura 13) https://www.plansee.com/en/materials/niobium.html

Figura 14) https://www.plansee.com/en/materials/niobium.html

Figura 15) https://hif.wikipedia.org/wiki/Niobium

Figura16) https://www.plansee.com/en/materials/niobium.html

Figura 17) http://scienzapertutti.infn.it/4-superconduttori-di-tipo-i-e-ii

Figura 18) Il Niobio, metallurgia dei metalli non ferrosi, Prof. Diego Colombo, Università di Trento

Figura 19) https://home.cern/about/updates/2017/12/crab-cavities-colliding-protons-head

Figura 20) https://home.cern/about/updates/2017/12/crab-cavities-colliding-protons-head

Figura 21) Andrea Bacchetto "introduzione alla metodo degli elementi finiti e alla modellazione FEM"

Figura 24) Ls-PrePost KEYWORD'S MANUAL vol.1

Figura 25) Ls-PrePost KEYWORD'S MANUAL vol.1

Figura 26) https://www.dynamore.de/de/download/papers/forum11/entwicklerforum-2011/erhart.pdf

Figura 34) A Multidisciplinary Approach for Automotive Structures Metamodel", Division of solid mechanics, Linkoping University, Ann-Britt Ryberg, Rebecca Domeij, Larsgunnar Nilson.

Figura 35)] Ls-Opt Manual version 5.2 section 23.6