

POLITECNICO DI TORINO

Corso di Laurea Magistrale in Ingegneria Aerospaziale



Tesi di Laurea Magistrale

Rumore aerodinamico di una lamina piana con bordo di fuga dentellato

Relatore

Prof. Renzo Arina

Candidato

Davide Fassio

Dicembre 2018

*A chi mi è accanto, a chi lo è stato,
a chi vorrei tanto che lo fosse ancora*

Indice

Introduzione	1
1 Nozioni elementari di aeroacustica	3
1.1 Caratteristiche del suono	3
1.2 Ordini di grandezza	4
1.3 Effetto della viscosità	5
1.4 Equazione d'onda	6
1.5 Monopolo, dipolo, quadrupolo	6
1.5.1 Approssimazione di campo lontano	7
2 Modello di Amiet	9
2.1 Rumore di una lamina piana in un flusso turbolento	9
2.2 Modelli di turbolenza isotropa	12
2.2.1 Spettro di Karman	12
2.2.2 Spettro di Liepmann	13
2.3 Funzioni di risposta	13
2.4 Risultati numerici	14
2.5 Rumore del bordo di fuga non dentellato	15
2.6 Risultati numerici	16
3 Modello di Howe	17
3.1 Rumore del bordo di fuga con dentellatura sinusoidale	17
3.1.1 Stima della riduzione del rumore	18
3.1.2 Spettro acustico	19
3.1.3 Modello di turbolenza	21
3.1.4 Spettro normalizzato	21
3.2 Rumore del bordo di fuga con dentellatura a dente di sega	21
3.2.1 Spettro normalizzato	22
3.3 Risultati numerici	22
4 Modello di Lyu, Azarpeyvand, Sinayoko	25
4.1 Rumore del bordo di fuga con dentellatura a dente di sega	25
4.1.1 Serie di Fourier	27
4.1.2 Procedura iterativa	28
4.1.3 Densità spettrale di potenza	31
4.1.4 Effetto della dentellatura	31
4.1.5 Modello di turbolenza	32
4.1.6 Spettro normalizzato	32
4.2 Risultati numerici	33
4.3 Estensione al caso rotante	36
4.3.1 Spettro acustico	36
4.3.2 Effetto Doppler	37

5	Conclusioni	39
	Bibliografia	41
	Appendice	43
	A. Modello di Amiet.....	43
	B. Modello di Howe	46
	C. Modello di Lyu,Azarpeyvand,Sinayoko	48

Introduzione

L'aeroacustica è la parte della fluidodinamica che studia la generazione e la propagazione del rumore che viene prodotto dal fluido stesso (turbolenza), dall'interazione del fluido con una superficie fissa o mobile (profili alari, pale di turbomacchine, cavità, etc.), dal mescolamento di flussi a temperature differenti o in generale da altri fenomeni non stazionari che generano fluttuazioni di pressione.

Negli ultimi decenni l'aeroacustica ha avuto un grande sviluppo, in quanto si è posta sempre maggiore attenzione all'inquinamento acustico e alle sue conseguenze sulla salute umana. Tra le molteplici fonti di inquinamento acustico nelle aree urbane riveste un ruolo importante il traffico aereo, mentre in quelle naturali la produzione di energia da fonti rinnovabili, in particolare quella eolica, sia per i velivoli con propulsione a elica che per quelli a reazione la maggior parte del rumore è prodotta dal propulsore, mentre per le turbine eoliche dalle pale del rotore.

Un modo utilizzato per ridurre l'emissione sonora è rendere dentellato o il bordo di fuga o il bordo di attacco dei profili alari: questo perché la dentellatura genera dei vortici lungo la corda che tendono a interrompere la periodicità delle strutture vorticose contenute nella scia, riducendo di conseguenza la radiazione tonale. Con il bordo di attacco dentellato si ha tuttavia una riduzione della portanza e una conseguente perdita di efficienza, quindi si tratterà solo il caso di dentellatura del bordo di fuga.

Questo lavoro si propone di studiare e confrontare vari modelli analitici per calcolare il rumore aerodinamico prodotto dall'interazione dello strato limite turbolento con il bordo di fuga dentellato di una lamina piana. Tra i modelli proposti nel corso degli anni si prenderanno in considerazione quelli classici di Amiet (1976) e di Howe (1991) e quello più recente di Lyu-Azarpeyvand-Sinayoko (2016) presentando brevemente anche l'estensione al caso rotante (2014).



Figura 1: Pala di turbina eolica con bordo di fuga dentellato

1 Nozioni elementari di aeroacustica

1.1 Caratteristiche del suono

Il suono è una vibrazione che si propaga come un'onda longitudinale trasportando energia (*Figura 2*). La velocità di propagazione del suono dipende dalle proprietà fisiche del mezzo in cui si propaga, ad esempio alla temperatura di 20°C per l'aria è $\sim 340\text{ m/s}$ mentre per l'acqua è $\sim 1500\text{ m/s}$. Se l'onda attraversa mezzi diversi o in presenza di discontinuità nello stesso mezzo, si verificano fenomeni come riflessione e rifrazione.

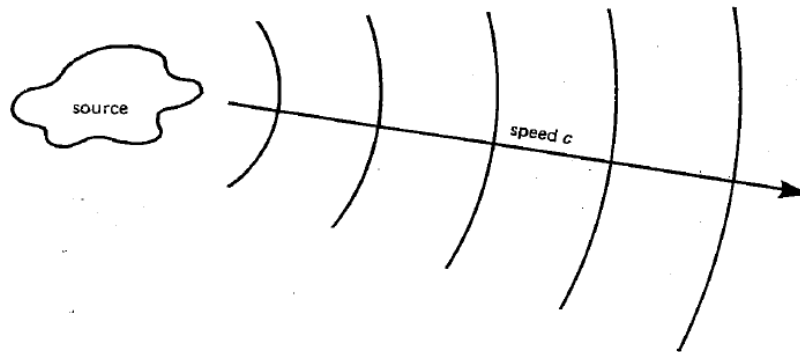


Figura 2: Propagazione del suono

L'orecchio umano è in grado di percepire oscillazioni con frequenze comprese tra 20 Hz e 20 kHz con la massima sensibilità nell'intervallo che va da 1 kHz a 5 kHz .

L'unità di misura della pressione sonora è il $[Pa] = [N/m^2]$, quella della potenza sonora è il $[W] = [J/s]$, mentre quella dell'intensità sonora è $[W/m^2]$. Nella *Tabella 1* si riporta la potenza sonora di alcuni fenomeni fisici:

Tabella 1: Potenza sonora

Fenomeno fisico	P [W]
Bisbiglio	10^{-10}
Urlo	10^{-5}
Turbogetto	10^5
Razzo	10^7

Per esprimere la potenza sonora risulta conveniente utilizzare la scala logaritmica, si definisce quindi il livello di potenza sonora (sound power level) misurato in $[dB]$:

$$SPWL = 10 \log_{10} \left(\frac{P_w}{P_{w\text{ref}}} \right) = 10 \log_{10} P_w + 120\text{ dB}$$

dove $P_{w\text{ref}} = 10^{-12}\text{ W}$.

Definendo la pressione sonora p' come la variazione di pressione rispetto a una pressione di riferimento, si ha che nel caso di segnale periodico di periodo T il suo valore efficace o valore quadratico medio (root mean square) è:

$$p'_{rms} = \frac{1}{T} \int_0^T p'^2(t) dt$$

Invece, nel caso di segnale non periodico vale è:

$$p'_{rms} = \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{T} \int_{t_0 - T/2}^{t_0 + T/2} p'^2(t) dt$$

Nonostante le perturbazioni di pressione siano piccole, riguardano diversi ordini di grandezze e risulta ancora una volta conveniente utilizzare la scala logaritmica, si definisce quindi il livello di pressione sonora (sound pressure level) misurato in [dB]:

$$SPL = 10 \log_{10} \left(\frac{p'_{rms}{}^2}{p_{ref}^2} \right) = 20 \log_{10} \left(\frac{p'_{rms}}{p_{ref}} \right)$$

dove per l'aria $p_{ref} = 2 \cdot 10^{-5} Pa$, che corrisponde al livello sonoro della soglia di udibilità, cioè il suono più basso percepibile dall'orecchio umano. Si osserva che in questa scala una fluttuazione di pressione uguale a $1 atm = 10^5 Pa$ equivale a $194 dB$.

Invertendo la relazione precedente si può calcolare il valore di p'_{rms} a partire dal valore del SPL :

$$p'_{rms} = p_{ref} 10^{SPL/20}$$

Il livello di intensità sonora (intensity level) è definito così:

$$IL = 10 \log_{10} \left(\frac{I}{I_{ref}} \right) = 10 \log_{10} I + 120 dB$$

dove:

$$I_{ref} = \frac{p_{ref}^2}{\rho_0 c_0} \approx \frac{(2 \cdot 10^{-5})^2}{400} = 10^{-12} \frac{W}{m^2}$$

In molti casi si utilizza una misura di p'_{rms} pesata in funzione della frequenza:

$$(p'_{rms})_W = W(f) p'_{rms}{}^2$$

Ponendo:

$$W(f) = 10^{\Delta L_W(f)/10}$$

si ottiene:

$$SPL_W = SPL + \Delta L_W(f)$$

In questo modo le frequenze alle quali l'orecchio umano è più sensibile sono pesate di più rispetto a quelle per cui è meno sensibile.

1.2 Ordini di grandezza

La perturbazione dovuta a un segnale acustico è molto piccola, come si può vedere nella *Tabella 2* dove sono riportati i valori della pressione sonora assoluta e relativa alla pressione atmosferica della soglia di udibilità (0 dB) e della soglia del dolore (~140 dB):

Tabella 2: Pressione sonora

$SPL [dB]$	$p'_{rms} [Pa]$	p'_{rms}/p_0
0	$2 \cdot 10^{-5}$	10^{-10}
140	200	10^{-3}

Inoltre, poiché $p' = c_0^2 \rho'$ e $c_0 = \sqrt{\gamma p_0 / \rho_0}$:

$$\frac{\rho'}{\rho_0} = \frac{p'}{\rho_0 c_0^2} = \frac{p'}{\gamma p_0} \leq 10^{-3}$$

Per un'onda piana vale la relazione $u' = p' / (\rho_0 c_0)$, pertanto il rapporto precedente corrisponde al numero di Mach acustico, cioè relativo alla perturbazione sonora:

$$M_a = \frac{u'}{c_0} = \frac{p'}{\rho_0 c_0^2} = \frac{\rho'}{\rho_0} \leq 10^{-3}$$

Considerando un'oscillazione armonica con frequenza $f = c_0/\lambda$ e pulsazione $\omega = 2\pi f$, lo spostamento δ può essere espresso come:

$$\delta = \delta_0 \operatorname{Re}\{e^{i\omega t}\}$$

e la relativa velocità:

$$|u'| = \frac{d}{dt} |\delta| = \delta_0 \omega$$

Quindi l'ampiezza dello spostamento è:

$$|\delta| = \delta_0 = \frac{|u'|}{\omega}$$

Nella *Tabella 3* si riportano i valori delle variabili acustiche per le soglie sonore di riferimento:

Tabella 3: Variabili acustiche

<i>SPL</i> [dB]	p'_{rms} [Pa]	ρ' [kg/m ³]	$ u' $ [m/s]	$ \delta $ [m]
0	$2 \cdot 10^{-5}$	$8 \cdot 10^{-11}$	$2 \cdot 10^{-8}$	10^{-11}
140	200	$8 \cdot 10^{-4}$	$2 \cdot 10^{-1}$	10^{-4}

Si osserva che per i livelli sonori in prossimità della soglia di udibilità, il libero cammino medio (mean free path) $l_{mfp} \approx 5 \cdot 10^{-8} m$ risulta superiore allo spostamento δ . Tuttavia la lunghezza δ non rappresenta la scala della propagazione acustica, infatti il libero cammino medio l_{mfp} deve essere confrontato con la lunghezza d'onda λ .

Inoltre, è importante notare che le variabili acustiche assumono valori trascurabili, quindi il problema può essere semplificato utilizzando le equazioni linearizzate. Per un flusso stazionario, indicando con $(\cdot)_0$ le quantità relative al campo di moto medio e con $(\cdot)'$ quelle relative alla perturbazione acustica, si può scrivere:

$$p = p_0 + p' \quad ; \quad \left| \frac{p'}{p_0} \right| \ll 1$$

$$\rho = \rho_0 + \rho' \quad ; \quad \left| \frac{\rho'}{\rho_0} \right| \ll 1$$

$$u = u_0 + u' \quad ; \quad \left| \frac{u'}{u_0} \right| \ll 1$$

1.3 Effetto della viscosità

Considerando come grandezza caratteristica la lunghezza d'onda, che nel caso di onda armonica di frequenza 1 kHz vale 0.34 m, il numero di Reynolds acustico vale:

$$Re_a = \frac{2\pi c_0 \lambda}{\nu} = \frac{\omega \lambda^2}{\nu} \sim 10^7$$

Siccome il numero di Reynolds varia in un intervallo $4 \cdot 10^8 \div 4 \cdot 10^5$ per frequenze comprese nell'intervallo di udibilità, gli effetti viscosi sono generalmente trascurabili. Gli effetti della viscosità diventano rilevanti solo nel caso di distanze di propagazione estremamente grandi, infatti il segnale acustico si propaga per circa $\omega \lambda^2 / \nu$ lunghezze d'onda prima di attenuarsi significativamente.

Si osserva che all'aumentare di ω , diminuiscono sia λ che il Re_a , quindi le onde ad alta frequenza si smorzano più velocemente rispetto a quelle a bassa frequenza. Occorre però tenere presente che fenomeni di altra natura come la presenza di umidità nell'aria possono attenuare fortemente le onde acustiche, anche più della viscosità.

1.4 Equazione d'onda

Si è visto che il suono è una piccola perturbazione di pressione, densità e velocità che si propaga come un'onda. L'equazione d'onda scritta in termini di pressione in un mezzo omogeneo in quiete è:

$$\left(\frac{1}{c_0^2} \frac{\partial^2}{\partial t^2} - \nabla^2 \right) p' = \frac{\partial Q_m}{\partial t}$$

dove Q_m è una sorgente di massa.

Definendo il potenziale acustico $u' = \nabla\varphi'$ e considerando il bilancio della quantità di moto si può scrivere:

$$p' = -\rho_0 \frac{\partial \varphi'}{\partial t}$$

L'equazione d'onda scritta in termini di potenziale è:

$$\left(\frac{1}{c_0^2} \frac{\partial^2}{\partial t^2} - \nabla^2 \right) \varphi' = -q_m$$

dove $q_m = Q_m/\rho_0$.

Si osserva che è possibile definire il potenziale solo nel caso in cui il campo di velocità sia irrotazionale, ma si può dimostrare che questo vale in tutto il dominio tranne che nella zona in cui ci sono le sorgenti di vorticità.

Si parla di propagazione in campo libero in assenza di sorgenti, quindi l'equazione d'onda è omogenea e nel caso di onda piana diventa:

$$\frac{1}{c_0^2} \frac{\partial^2 \varphi'}{\partial t^2} - \frac{\partial^2 \varphi'}{\partial x^2} = 0$$

mentre nel caso di onda sferica diventa:

$$\frac{1}{c_0^2} \frac{\partial^2 \varphi'}{\partial t^2} - \frac{1}{r^2} \frac{\partial}{\partial r} \left(r^2 \frac{\partial \varphi'}{\partial r} \right) = 0$$

1.5 Monopolo, dipolo, quadrupolo

Nel *Paragrafo 1.2* si è visto che il campo acustico può essere studiato utilizzando una teoria linearizzata e quindi vale il principio di sovrapposizione degli effetti. Le sorgenti elementari che descrivono il problema sono: monopolo, dipolo e quadrupolo.

Per una distribuzione di monopoli, in cui $q(\vec{x}, t) = \partial Q/\partial t$, la soluzione è:

$$p'(\vec{x}, t) = \frac{1}{4\pi} \frac{\partial}{\partial t} \int_{\Omega} \frac{Q(\vec{y}, t - |\vec{x} - \vec{y}|/c_0)}{|\vec{x} - \vec{y}|} d\vec{y}$$

Per una distribuzione di dipoli, in cui $q(\vec{x}, t) = -\nabla \cdot \vec{F}$, la soluzione è:

$$p'(\vec{x}, t) = -\frac{1}{4\pi} \frac{\partial}{\partial x_i} \int_{\Omega} \frac{F_i(\vec{y}, t - |\vec{x} - \vec{y}|/c_0)}{|\vec{x} - \vec{y}|} d\vec{y}$$

dove \vec{F} è una forza.

Per una distribuzione di quadrupoli, in cui $q(\vec{x}, t) = \partial^2 T_{ij}/\partial x_i \partial x_j$, la soluzione è.

$$p'(\vec{x}, t) = \frac{1}{4\pi} \frac{\partial^2}{\partial x_i \partial x_j} \int_{\Omega} \frac{T_{ij}(\vec{y}, t - |\vec{x} - \vec{y}|/c_0)}{|\vec{x} - \vec{y}|} d\vec{y}$$

dove $T_{ij} = \rho u_i u_j - \tau_{ij} + (p' - c_0^2 \rho') \delta_{ij}$ è il tensore di Lighthill.

1.5.1 Approssimazione di campo lontano

Definendo con i vettori \vec{x} e \vec{y} rispettivamente la posizione dell'osservatore e quella della sorgente rispetto al sistema di riferimento, se l'osservatore si trova in campo lontano:

$$\vec{x} \rightarrow \infty \quad \Rightarrow \quad |\vec{x}| \gg |\vec{y}|$$

Da questa relazione si può scrivere che:

$$|\vec{x} - \vec{y}| = (|\vec{x}|^2 - 2(\vec{x} \cdot \vec{y}) + |\vec{y}|^2)^{1/2} = |\vec{x}| \left(1 - 2 \frac{\vec{x} \cdot \vec{y}}{|\vec{x}|^2} + \frac{|\vec{y}|^2}{|\vec{x}|^2} \right)^{1/2} \approx |\vec{x}| - \frac{\vec{x} \cdot \vec{y}}{|\vec{x}|}$$

da cui:

$$\frac{1}{|\vec{x} - \vec{y}|} \approx \frac{1}{|\vec{x}| - \frac{\vec{x} \cdot \vec{y}}{|\vec{x}|}} \approx \frac{1}{|\vec{x}|} \left(1 + \frac{\vec{x} \cdot \vec{y}}{|\vec{x}|^2} \right) = \frac{1}{|\vec{x}|} + \frac{\vec{x} \cdot \vec{y}}{|\vec{x}|^3} \approx \frac{1}{|\vec{x}|}$$

La relazione che lega la derivata spaziale con quella temporale è:

$$\frac{\partial}{\partial x_i} \approx -\frac{1}{c_0} \frac{x_i}{|\vec{x}|} \frac{\partial}{\partial t}$$

Per una distribuzione di monopoli la soluzione diventa:

$$p'(\vec{x}, t) \approx \frac{1}{4\pi|\vec{x}|} \frac{\partial}{\partial t} \int_{\Omega} Q(\vec{y}, t - \frac{|\vec{x}|}{c_0} + \frac{\vec{x} \cdot \vec{y}}{c_0|\vec{x}|}) d\vec{y}$$

Per una distribuzione di dipoli la soluzione diventa:

$$p'(\vec{x}, t) \approx \frac{1}{4\pi c_0} \frac{x_i}{|\vec{x}|^2} \frac{\partial}{\partial t} \int_{\Omega} F_i(\vec{y}, t - \frac{|\vec{x}|}{c_0} + \frac{\vec{x} \cdot \vec{y}}{c_0|\vec{x}|}) d\vec{y}$$

Per una distribuzione di quadrupoli la soluzione diventa:

$$p'(\vec{x}, t) \approx \frac{1}{4\pi c_0^2} \frac{x_i x_j}{|\vec{x}|^3} \frac{\partial^2}{\partial t^2} \int_{\Omega} T_{ij}(\vec{y}, t - \frac{|\vec{x}|}{c_0} + \frac{\vec{x} \cdot \vec{y}}{c_0|\vec{x}|}) d\vec{y}$$

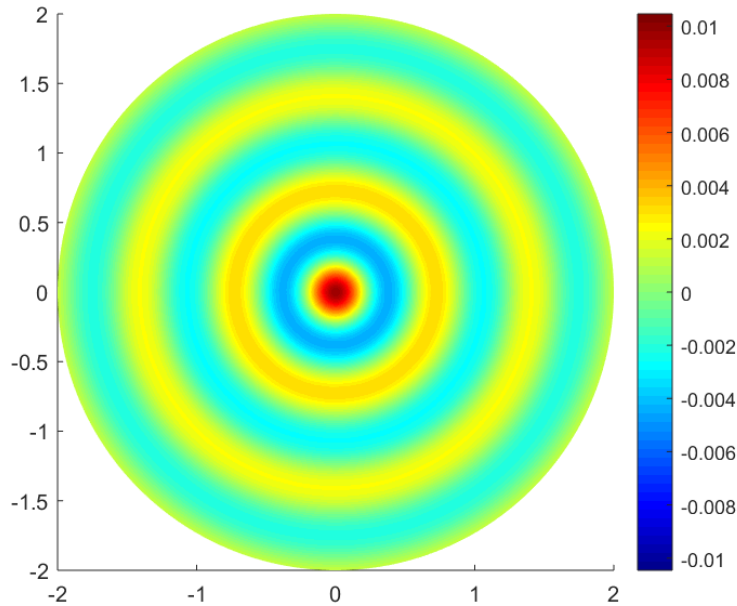


Figura 3: Monopolo

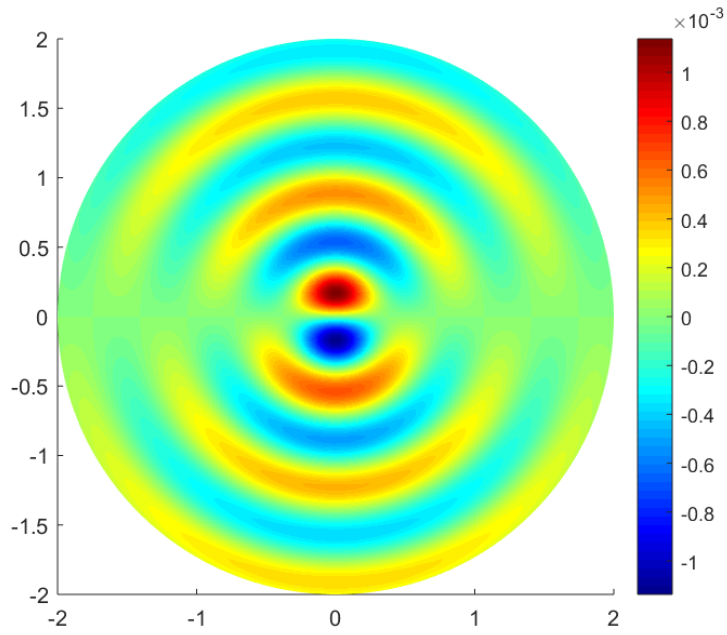


Figura 4: Dipolo

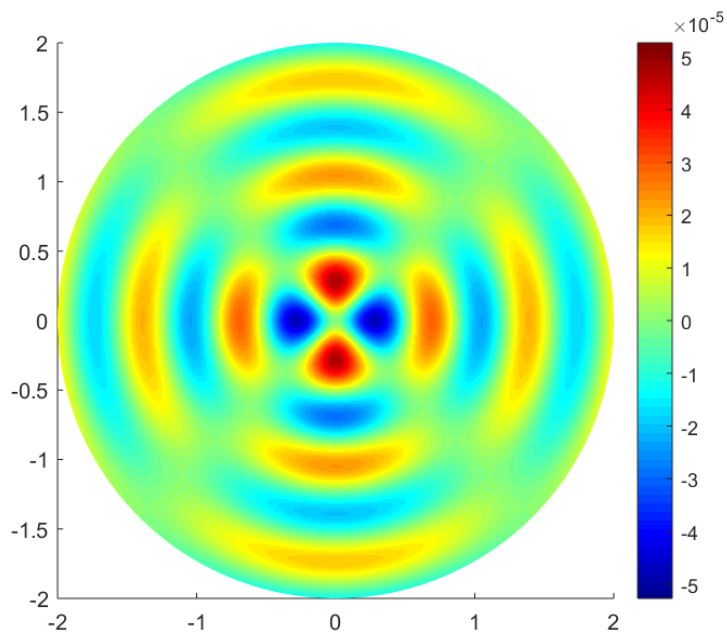


Figura 5: Quadrupolo

2 Modello di Amiet

2.1 Rumore di una lamina piana in un flusso turbolento

Il modello di Amiet permette di calcolare la densità spettrale di potenza (power spectral density) in campo lontano generata da una lamina piana investita da un flusso subsonico turbolento. Il suono è generato dalle fluttuazioni di pressione dovute al campo di moto turbolento.

In questa analisi si considera una lamina piana investita da un fronte d'onda sinusoidale e un osservatore posizionato direttamente sopra di essa in campo lontano (*Figura 6*). Le quantità caratteristiche del problema sono la lunghezza di correlazione lungo l'apertura in funzione della frequenza e la PSD delle fluttuazioni verticali di velocità. Si assume che la lunghezza di correlazione sia molto più piccola dell'apertura.

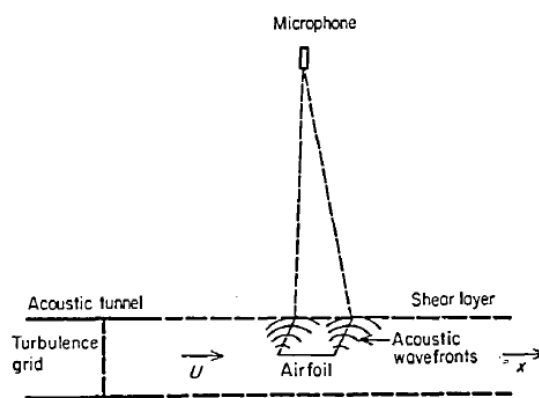


Figura 6: Schema del problema analizzato

In un flusso turbolento, la vorticità genera fluttuazioni di velocità con fronti d'onda sia paralleli sia inclinati rispetto al bordo di attacco della lamina (*Figura 7*). La principale sorgente del rumore aerodinamico è dovuta alle fluttuazioni con fronte d'onda parallelo in quanto quelle con fronte d'onda inclinato sono soggette al fenomeno della cancellazione: le fluttuazioni lungo l'apertura infatti tendono a compensarsi a vicenda. Per questi motivi, si può utilizzare un modello bidimensionale per calcolare la funzione di risposta della portanza totale.

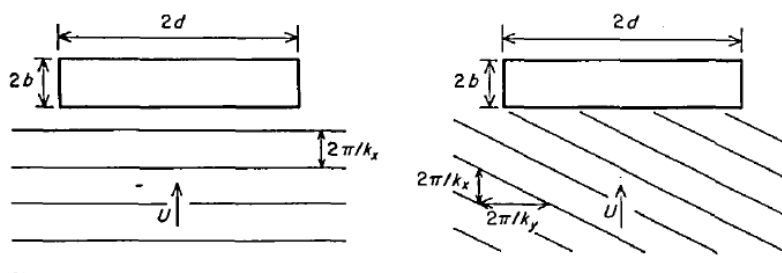


Figura 7: Fronti d'onda paralleli e inclinati rispetto al bordo di attacco

Si considera una lamina piana con corda $2b$ e apertura $2d$ investita da un flusso turbolento con velocità media U . Il sistema di riferimento è posizionato in corrispondenza della mezzeria, con l'asse x diretto parallelamente al flusso, l'asse y diretto lungo l'apertura e l'asse z che va dal ventre al dorso della lamina.

Considerando il piano $z = 0$, la velocità turbolenta $\tilde{w}(x, y, t)$ può essere scritta come:

$$\tilde{w}(x, y, t) = \iint_{-\infty}^{\infty} \hat{w}_R(k_x, k_y) e^{i(k_x(x-Ut) + k_y y)} dk_x dk_y$$

dove $\hat{w}_R(k_x, k_y)$ è la doppia trasformata di Fourier spaziale di w nelle variabili x e y :

$$\hat{w}_R(k_x, k_y) = \frac{1}{(2\pi)^2} \iint_{-R}^R w(x, y) e^{-i(k_x x + k_y y)} dx dy$$

con R numero grande ma finito per problemi di convergenza.

Assumendo che le fluttuazioni di velocità siano funzioni sinusoidali:

$$w_g(x, y, t) = w_0 e^{i(k_x(x-Ut) + k_y y)}$$

le fluttuazioni di pressione relative a una lamina piana possono essere scritte in questo modo:

$$\Delta P(x, y, t) = 2\pi\rho_0 U b w_0 g(x, k_x, k_y) e^{i(k_y y - k_x U t)}$$

dove $g(x, k_x, k_y)$ è la funzione di trasferimento.

La relazione precedente si può riscrivere in funzione dei numeri d'onda k_x e k_y :

$$\Delta P(x, y, t) = 2\pi\rho_0 U b \iint_{-\infty}^{\infty} \hat{w}_R(k_x, k_y) g(x, k_x, k_y) e^{i(k_y y - k_x U t)} dk_x dk_y$$

A questo punto, si utilizza una trasformata di Fourier temporale integrando tra $\pm T$, con $T = R/U$:

$$\Delta \hat{P}_T(x, y, \omega) = 2\pi\rho_0 \int_{-\infty}^{\infty} \hat{w}_R(K_x, k_y) g(x, K_x, k_y) e^{i k_y y} dk_y$$

dove $K_x = -\omega/U$.

Data la natura caotica del regime turbolento, si preferisce utilizzare quantità statistiche come la cross-PSD tra due punti delle fluttuazioni di pressione:

$$S_{QQ}(x_1, x_2, y_1, y_2, \omega) = \lim_{T \rightarrow \infty} \left\{ \frac{\pi}{T} E[\Delta \hat{P}_T^*(x_1, y_1, \omega) \Delta \hat{P}_T(x_2, y_2, \omega)] \right\}$$

dove $E[\dots]$ rappresenta il valore atteso, mentre l'asterisco indica il complesso coniugato.

Sostituendo in questa equazione l'espressione di $\Delta \hat{P}_T$, si osserva che tutte le funzioni tranne \hat{w}_R possono essere portate fuori dall'operatore valore atteso, quindi rimane $E[\hat{w}_R(K_x, k_y) \hat{w}_R^*(K_x, k'_y)]$. Può essere dimostrato che:

$$E[\hat{w}_R(K_x, k_y) \hat{w}_R^*(K_x, k'_y)] = \frac{R}{\pi} \delta(k_y - k'_y) \Phi_{ww}(K_x, k'_y)$$

dove Φ_{ww} è lo spettro di energia della turbolenza (Paragrafo 2.2) e vale:

$$\Phi_{ww}(k_x, k_y) = \int_{-\infty}^{\infty} \Phi_{ww}(k_x, k_y, k_z) dk_z$$

La cross-PSD può quindi essere riscritta così:

$$S_{QQ}(x_1, x_2, \eta, \omega) = (2\pi\rho_0 b)^2 U \int_{-\infty}^{\infty} g^*(x_1, K_x, k_y) g(x_2, K_x, k_y) \Phi_{ww}(K_x, k_y) e^{i k_y \eta} dk_y$$

dove $\eta = y_2 - y_1$ è la distanza tra i due punti per i quali si calcola la cross-PSD.

Utilizzando le teorie di Kirchhoff e di Curle si può mettere in relazione la cross-PSD delle fluttuazioni di pressione sulla superficie con il rumore in campo lontano. Queste teorie affermano che la risposta acustica della lamina può essere determinata per mezzo di una distribuzione di dipoli equivalente in intensità alle forze di superficie.

Il rumore in campo lontano prodotto da una forza $F(x_0, y_0, \omega) e^{i\omega t}$ è:

$$P_1(x, y, z, \omega; x_0, y_0) = \frac{i\omega z F(x_0, y_0, \omega)}{4\pi c_0 \sigma^2} e^{i\omega \left(t + \frac{M(x-x_0) - \sigma}{c_0 \beta^2} + \frac{xx_0 + yy_0 \beta^2}{c_0 \beta^2 \sigma} \right)}$$

dove $\sigma = \sqrt{x^2 + \beta^2(y^2 + z^2)}$ e $\beta = \sqrt{1 - M^2}$.

Per il problema in esame, la forza $F(x_0, y_0)$ si ricava dalla differenza di pressione tra la superficie superiore e quella inferiore della lamina.

La relazione che lega la PSD in campo lontano con la cross-PSD della lamina è:

$$S_{PP}(x, y, z, \omega) = \left(\frac{\omega z}{4\pi c_0 \sigma^2} \right)^2 \int S_{QQ}(x_1, x_2, \eta, \omega) e^{\frac{i\omega}{c_0} [\beta^{-2}(x_1 - x_2)(M - x/\sigma) + y\eta/\sigma]} dx_1 dx_2 dy_1 dy_2$$

Sostituendo l'espressione di S_{QQ} e definendo la quantità:

$$\mathcal{L}(x, K_x, k_y) = \int_{-b}^b g(x_0, K_x, k_y) e^{-i\omega x_0 \frac{(M - x/\sigma)}{c_0 \beta^2}} dx_0$$

si ottiene l'espressione della PSD in campo lontano:

$$S_{PP}(x, y, z, \omega) = \left(\frac{\omega z \rho_0 b}{c_0 \sigma^2} \right)^2 U d \pi \int_{-\infty}^{\infty} \left[\frac{\sin^2(d(k_y + \omega y/c_0 \sigma))}{(k_y + \omega y/c_0 \sigma)^2 \pi d} \right] |\mathcal{L}(x, K_x, k_y)|^2 \Phi_{ww}(K_x, k_y) dk_y$$

La principale assunzione fatta fino a questo punto della trattazione, oltre all'utilizzo della teoria linearizzata, è stata quella di trascurare gli effetti di estremità. Questo è valido per lamine con grande allungamento, tuttavia per flussi turbolenti con scale caratteristiche piccole, cioè per alte frequenze, non è necessaria neanche questa ipotesi.

L'equazione precedente può essere semplificata osservando che per $d \rightarrow \infty$:

$$\left[\frac{\sin^2(d\xi)}{\xi^2 \pi d} \right] \rightarrow \delta(\xi)$$

Quindi, considerando il caso in cui l'osservatore si trovi nel piano $y = 0$, la PSD in campo lontano tende a:

$$S_{PP}(x, 0, z, \omega) \xrightarrow{d \rightarrow \infty} \left(\frac{\omega z \rho_0 b}{c_0 \sigma^2} \right)^2 \pi U d |\mathcal{L}(x, K_x, 0)|^2 \Phi_{ww}(K_x, 0)$$

In altre parole, nel piano $y = 0$ solo le fluttuazioni con fronte d'onda parallelo al bordo di attacco contribuiscono alla generazione di rumore. Per ottenere questa equazione semplificata si osserva che per $M K_x \gg k_y$ il problema diventa praticamente indipendente da k_y , pertanto se il parametro $\Lambda = M K_x d \rightarrow \infty$ sia Φ_{ww} che \mathcal{L} possono essere portati fuori dall'integrale. Nel caso in cui $y \neq 0$:

$$S_{PP}(x, y, z, \omega) \xrightarrow{\Lambda \rightarrow \infty} \left(\frac{\omega z \rho_0 b}{c_0 \sigma^2} \right)^2 \pi U d \left| \mathcal{L}\left(x, K_x, \frac{\omega y}{c_0 \sigma}\right) \right|^2 \Phi_{ww}\left(K_x, \frac{\omega y}{c_0 \sigma}\right)$$

Per scrivere l'equazione di $S_{PP}(x, 0, z, \omega)$ in una forma più intuitiva si introduce la lunghezza di correlazione incrociata l_y in funzione della frequenza ω :

$$l_y(\omega) = \frac{1}{R_{ww}(K_x, 0)} \int_0^\infty R_{ww}(K_x, y) dy = \pi \frac{\Phi_{ww}(K_x, 0)}{R_{ww}(K_x, 0)}$$

dove $R_{ww}(K_x, y)$ è la trasformata di Fourier rispetto a k_y di $\Phi_{ww}(K_x, k_y)$.

Quindi l'equazione precedente può essere riscritta così:

$$S_{PP}(x, 0, z, \omega) \xrightarrow{\Lambda \rightarrow \infty} \left(\frac{\omega z \rho_0 b M}{\sigma^2} \right)^2 d |\mathcal{L}(x, K_x, 0)|^2 l_y(\omega) S_{ww}(\omega)$$

dove $S_{ww}(\omega) = R_{ww}(K_x, 0)/U$ è la PSD delle fluttuazioni verticali di velocità.

La teoria sviluppata finora non tiene conto della presenza della discontinuità attraverso la quale deve passare il suono prima di raggiungere l'osservatore (*Figura 6*). Infatti, volendo confrontare i risultati teorici con quelli sperimentali ottenuti in una galleria del vento acustica, non si può trascurare il fatto che l'osservatore sia al di fuori del flusso turbolento in cui è posizionata la lamina piana.

Si può dimostrare che per un osservatore che si trovi direttamente sopra una sorgente sonora in una galleria del vento acustica non si hanno effetti di amplificazione sonora dovuti al flusso in movimento, pertanto il suono misurato è lo stesso che si misurerebbe nel caso in cui si avesse la stessa sorgente sonora con il flusso fermo. In questo problema, la sorgente sonora consiste in una distribuzione superficiale di dipoli.

Considerando quindi un flusso con $M = 0$ e una distribuzione superficiale di dipoli, la PSD in campo lontano può essere scritta così:

$$S_{PP}(0,0,z,\omega) = \left(\frac{\omega\rho_0 b}{c_0 z}\right)^2 \pi U d |G(\hat{\omega})|^2 \Phi_{ww}(K_x, 0)$$

dove $G(\hat{\omega})$ è la funzione di risposta della lamina piana e $\hat{\omega} = \omega b/U$ è la frequenza ridotta.

È utile anche avere un'espressione della PSD in funzione solo della frequenza:

$$S_{LL}(\omega) = (4\pi\rho_0 b U)^2 l_y(\omega) d |G(\hat{\omega})|^2 S_{ww}(\omega)$$

Dividendo $S_{LL}(\omega)$ per $(4\pi\rho_0 b U d)^2 S_{ww}(\omega)$ si ottiene il quadrato dell'ammittenza $|A(\hat{\omega})|^2$:

$$|A(\hat{\omega})|^2 = \frac{l_y(\omega)}{d} |G(\hat{\omega})|^2$$

2.2 Modelli di turbolenza isotropa

2.2.1 Spettro di Karman

L'espressione dello spettro di energia $E(k)$ in funzione del modulo del vettore d'onda k è:

$$E(k) = \frac{I k^4}{[1 + (k/k_e)^2]^{17/6}}$$

con:

$$I = \frac{55}{9\sqrt{\pi}} \frac{\Gamma(5/6) \bar{u}^2}{\Gamma(1/3) k_e^5} \quad ; \quad k_e = \frac{\sqrt{\pi} \Gamma(5/6)}{L \Gamma(1/3)}$$

dove $\Gamma(\dots)$ è la funzione Gamma, mentre L è la scala di lunghezza integrale della turbolenza che si ottiene dalla correlazione incrociata $R_{uu}(x)$ della componente assiale delle fluttuazioni u :

$$L = \int_0^\infty R_{uu}(x) dx$$

Lo spettro di energia $\Phi_{ww}(k_x, k_y, k_z)$ delle fluttuazioni verticali di velocità è:

$$\Phi_{ww}(k_x, k_y, k_z) = \frac{E(k)}{4\pi k^2} \left(1 - \frac{k_z^2}{k^2}\right)$$

Integrando questa espressione rispetto a k_z si ottiene $\Phi_{ww}(k_x, k_y)$:

$$\Phi_{ww}(k_x, k_y) = \frac{4}{9\pi} \frac{\bar{u}^2}{k_e^2} \frac{\hat{k}_x^2 + \hat{k}_y^2}{(1 + \hat{k}_x^2 + \hat{k}_y^2)^{7/3}}$$

dove $\hat{k} = k/k_e$. Facendo la trasformata di Fourier di $\Phi_{ww}(k_x, k_y)$ rispetto a k_y si ottiene:

$$R_{ww}(k_x, y) = \frac{2^{1/6}}{\Gamma(5/6)} \tilde{y}^{5/6} \left[\mathcal{K}_{5/6}(\tilde{y}) - \frac{3\tilde{y}}{3 + 8\hat{k}_x^2} \mathcal{K}_{1/6}(\tilde{y}) \right] R_{ww}(k_x, 0)$$

dove \mathcal{K} è la funzione di Bessel e:

$$\tilde{y} = y k_e \sqrt{1 + \hat{k}_x^2} \quad ; \quad R_{ww}(k_x, 0) = \frac{L \bar{u}^2}{6\pi} \frac{3 + 8\hat{k}_x^2}{(1 + \hat{k}_x^2)^{11/6}}$$

L'espressione della lunghezza di correlazione $l_y(\omega)$ è:

$$l_y(\omega) = \frac{8L}{3} \left[\frac{\Gamma(1/3)}{\Gamma(5/6)} \right]^2 \frac{\hat{K}_x^2}{(3 + 8\hat{K}_x^2) \sqrt{1 + \hat{K}_x^2}}$$

2.2.2 Spettro di Liepmann

Le corrispondenti quantità per quest'altro modello di turbolenza sono:

$$E(k) = \frac{8}{\pi} \overline{u^2} L \frac{(Lk)^4}{(1 + L^2 k^2)^3}$$

$$\Phi_{ww}(k_x, k_y) = \frac{3}{4\pi} \overline{u^2} L^2 \frac{L^2 (k_x^2 + k_y^2)}{[1 + L^2 (k_x^2 + k_y^2)]^{5/2}}$$

$$R_{ww}(k_x, y) = \left[\hat{y} \mathcal{K}_1(\hat{y}) - \frac{\hat{y}^2 \mathcal{K}_0(\hat{y})}{1 + 3k_x^2 L^2} \right] R_{ww}(k_x, 0)$$

$$\hat{y} = y \sqrt{1 + k_x^2 L^2} / L \quad ; \quad R_{ww}(k_x, 0) = \frac{\overline{u^2} L}{2\pi} \frac{1 + 3k_x^2 L^2}{(1 + k_x^2 L^2)^2}$$

$$l_y(\omega) = \frac{3\pi L}{2\sqrt{1 + K_x^2 L^2}} \frac{K_x^2 L^2}{1 + 3K_x^2 L^2}$$

2.3 Funzioni di risposta

Per il problema analizzato, si considerano funzioni di risposta della lamina piana a una perturbazione bidimensionale sinusoidale in un fluido compressibile. Di seguito sono presentate due differenti soluzioni per quanto riguarda la portanza per due diversi intervalli del parametro $M\hat{\omega}/\beta^2$.

- $M\hat{\omega}/\beta^2 < \pi/4$

$$G(\hat{\omega}) = \left[\frac{1}{\beta} S(\hat{\omega}/\beta^2) (J_0(M^2 \hat{\omega}/\beta^2) - iJ_1(M^2 \hat{\omega}/\beta^2)) \right] e^{-i\hat{\omega}}$$

dove $S(\hat{\omega})$ è la funzione di Sears, mentre J_0 e J_1 sono le funzioni di Bessel del primo tipo.

- $M\hat{\omega}/\beta^2 > \pi/4$

In questo caso si procede con una serie di soluzioni approssimate, in particolare si considerano i primi due termini: la prima soluzione riguarda una lamina piana con corda semi-infinita senza il bordo di fuga, mentre la seconda soluzione riguarda una lamina piana con corda semi-infinita senza il bordo di attacco.

$$G_1(\hat{\omega}) = \frac{1-i}{\pi \hat{\omega} \sqrt{M}} E^* \left(\sqrt{\frac{4\hat{\omega}M}{\pi(1+M)}} \right)$$

$$G_2(\hat{\omega}) \approx \frac{\sqrt{1+M}}{iM(\pi\hat{\omega})^{3/2}} \left\{ E^* \left(\frac{2}{\beta} \sqrt{\frac{2\hat{\omega}M}{\pi}} \right) - \frac{1-i}{2} + \left[\frac{1-i}{2} - \sqrt{\frac{2}{1+M}} E^* \left(\sqrt{\frac{4\hat{\omega}M}{\pi(1-M)}} \right) \right] e^{-i\left(\frac{2\hat{\omega}M}{1+M}\right)} \right\}$$

dove E^* è una combinazione degli integrali di Fresnel:

$$E^*(x) = \mathcal{C}(x) - i\mathcal{S}(x)$$

$$\mathcal{C}(x) = \int_0^x \cos\left(\frac{\pi}{2}\xi^2\right) d\xi \quad ; \quad \mathcal{S}(x) = \int_0^x \sin\left(\frac{\pi}{2}\xi^2\right) d\xi$$

Si osserva che per $\hat{\omega} \rightarrow \infty$:

$$G_1(\hat{\omega}) \rightarrow \frac{-i}{\pi \hat{\omega} \sqrt{M}}$$

2.4 Risultati numerici

Considerando il modello di Karman per lo spettro della turbolenza con l'ipotesi di alta frequenza, utilizzando quindi le equazioni asintotiche, si può scrivere un'espressione semplificata per la PSD:

$$G_{PP}(0,0,z,\omega) = \frac{2d}{\pi c_0} \left(\frac{2L}{3\pi z} \right)^2 \frac{\overline{u^2}}{U^2} (\rho_0 U^2)^2 \left[\frac{\Gamma(1/3)}{\Gamma(5/6)} \right]^2 \frac{\widehat{K}_x^2}{(1 + \widehat{K}_x^2)^{7/3}}$$

dove è stato introdotto il fattore 2 in quanto G_{PP} rappresenta la PSD per le frequenze positive, quindi $G_{PP} = 2S_{PP}$.

I risultati sono presentati suddividendo le frequenze in bande di terzi di ottava, quindi prima di calcolare il livello di pressione sonora (SPL) si deve moltiplicare per $\Delta\omega = 2\pi\Delta f = 2\pi(0.232)f$. L'equazione per il SPL relativo a frequenze in bande di terzi di ottava è:

$$SPL_{1/3} = 10 \log_{10} \left[\frac{Ld}{z^2} M^5 \frac{\overline{u^2}}{U^2} \frac{\widehat{K}_x^3}{(1 + \widehat{K}_x^2)^{7/3}} \right] + 181.3$$

Si osserva che gli unici parametri di input di questa equazione, oltre al numero di Mach M , sono la geometria della lamina piana, la scala di lunghezza integrale della turbolenza L e l'intensità della turbolenza $\overline{u^2}$.

Tabella 4: Dati problema

Posizione osservatore	(x, y, z)	$(0,0,2.1336)$ m
Corda	$2b$	0.4572 m
Apertura	$2d$	0.5334 m
Scala di lunghezza integrale turbolenza	L	0.0318 m
Intensità percentuale turbolenza	$\sqrt{\overline{u^2}}/U$	4.4%

Per alte velocità l'intensità percentuale della turbolenza segue approssimativamente questa legge:

$$\sqrt{\overline{u^2}}/U = CU^{-0.2}$$

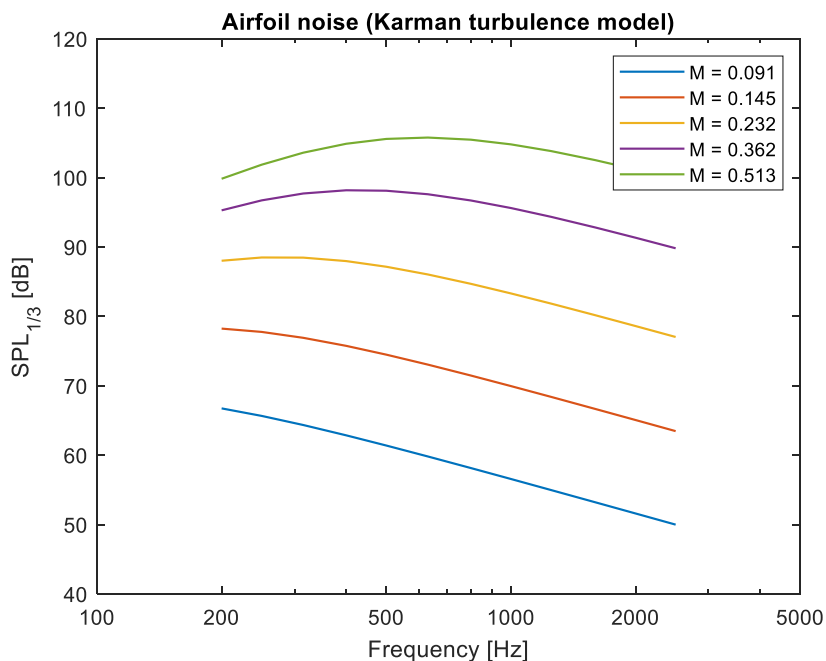


Figura 8: Rumore di una lamina piana in un flusso turbolento al variare di M

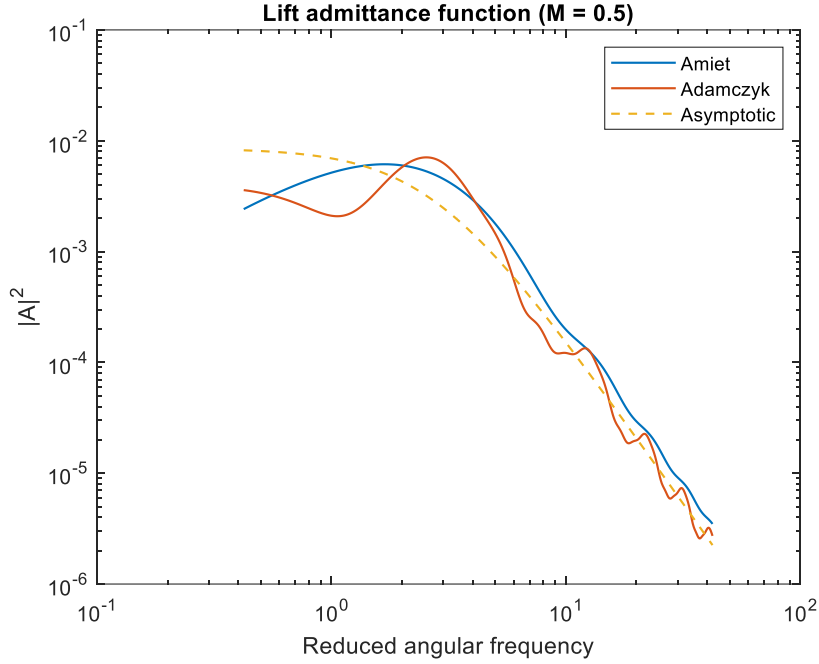


Figura 9: Ammettenza relativa alla portanza

2.5 Rumore del bordo di fuga non dentellato

Il modello teorico precedente può essere esteso per calcolare il rumore prodotto dall'interazione dello strato limite turbolento con il bordo di fuga di una lamina piana. Si utilizza un approccio diverso rispetto a quello classico di Lighthill-Curle perché, sebbene questa formulazione sia matematicamente esatta, si assume che la distribuzione di quadrupoli che rappresenta la turbolenza sia nota e questo può rappresentare una difficoltà di calcolo. L'ipotesi principale che si fa in questa teoria è che il campo di velocità della turbolenza non sia influenzato dalla presenza del bordo di fuga, ciò significa che la turbolenza rimane statisticamente stazionaria. Questa assunzione permette di calcolare il rumore del bordo di fuga dalle caratteristiche spettrali della pressione a parete.

In questa trattazione si considera una lamina piana semi-infinita nella direzione di monte, cioè delimitata dal solo bordo di fuga: tale ipotesi vale per lunghezze d'onda acustiche piccole rispetto alla corda. Il campo di pressione sulla superficie della lamina generato dalle fluttuazioni di pressione turbolente può essere scritto in questo modo:

$$P = P_0 e^{i(\omega(t-x/U_c) - k_y y)}$$

La funzione di risposta della lamina assumendo $k_y = 0$ è:

$$g(\bar{x}, \omega, U_c) = \left[(1+i) E^* \left(-\bar{x}((1+M)\mu + \bar{K}_x) \right) - 1 \right] e^{-i\bar{K}_x \bar{x}} \quad ; \quad -2 < \bar{x} < 0$$

dove $\bar{x} = x/b$, $\bar{K}_x = K_x b = \omega b / U_c$, $\mu = M\omega b / U_c^2$. Inoltre, si ricorda che la funzione E^* è una combinazione degli integrali di Fresnel:

$$E^*(x) = \int_0^x (2\pi\xi)^{-1/2} e^{-i\xi} d\xi$$

La PSD in campo lontano ha questa espressione:

$$S_{pp}(x, 0, z, \omega) = \left(\frac{\omega b z}{2\pi c_0 \sigma^2} \right)^2 l_y(\omega) d|\mathcal{L}|^2 S_{qq}(\omega, 0)$$

con:

$$l_y(\omega) = \frac{1}{S_{qq}(\omega, 0)} \int_0^\infty S_{qq}(\omega, y) dy \quad ; \quad |\mathcal{L}| = \left| \int_{-2}^0 g(\xi, \omega, U_c) e^{-i\mu\xi(M-x/\sigma)} d\xi \right|$$

Si osserva che l'equazione della PSD va moltiplicata per 8π per tenere conto anche dell'effetto dello strato limite turbolento sulla parte inferiore della lamina, per considerare solo le frequenze positive dello spettro e per utilizzare un'ampiezza di banda di 1 Hz. Sostituendo la funzione di risposta g nell'espressione di $|\mathcal{L}|$, si ottiene:

$$|\mathcal{L}| = \frac{1}{\Theta} \left| (1+i) \left[\sqrt{\frac{1+M+\bar{K}_x/\mu}{1+x/\sigma}} E^*(2\mu(1+x/\sigma)) e^{-i2\Theta} - E^*(2((1+M)\mu+\bar{K}_x)) \right] + 1 - e^{-i2\Theta} \right|$$

dove $\Theta = \bar{K}_x + \mu(M - x/\sigma)$.

Inoltre, per lo strato limite turbolento in un flusso uniforme senza gradienti di pressione, la lunghezza di correlazione lungo l'apertura vale approssimativamente:

$$l_y(\omega) \approx 2.1 U_c / \omega$$

La cross-PSD invece può essere approssimata dall'espressione empirica:

$$S_{qq}(\omega, 0) = (1/2 \rho_0 U^2)^2 (\delta^*/U) \frac{2 \cdot 10^{-5}}{1 + \tilde{\omega} + 0.217\tilde{\omega}^2 + 0.00562\tilde{\omega}^4} \quad ; \quad 0.1 < \tilde{\omega} < 20$$

dove $\tilde{\omega} = \omega \delta^*/U$, mentre lo spessore di spostamento dello strato limite turbolento in corrispondenza del bordo di fuga vale approssimativamente:

$$\delta^*/c \approx 0.047 Re_c^{-1/5}$$

2.6 Risultati numerici

Nella *Figura 10* si riporta il rumore del bordo di fuga non dentellato.

Tabella 5: Dati problema

Posizione osservatore	(x, y, z)	(0,0,200) m
Corda	$2b$	5 m
Apertura	$2d$	40 m

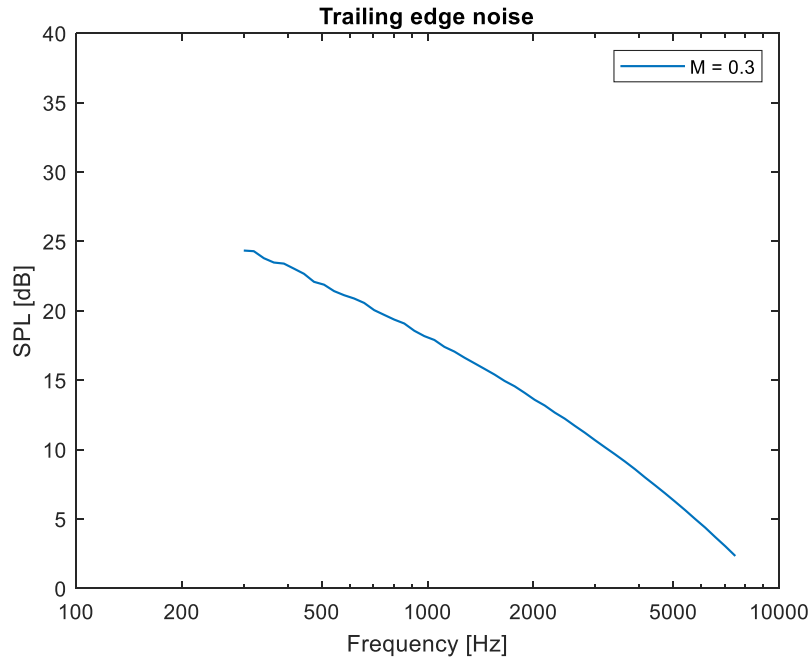


Figura 10: Rumore del bordo di fuga non dentellato

3 Modello di Howe

3.1 Rumore del bordo di fuga con dentellatura sinusoidale

Il modello di Howe permette di calcolare il rumore generato dall'interazione dello strato limite turbolento con il bordo di fuga dentellato di una lamina piana.

In questa analisi si considera una lamina piana bidimensionale di apertura infinita con bordo di fuga dentellato, in particolare si ipotizza una dentellatura sinusoidale con lunghezza d'onda λ e ampiezza h (Figura 11).

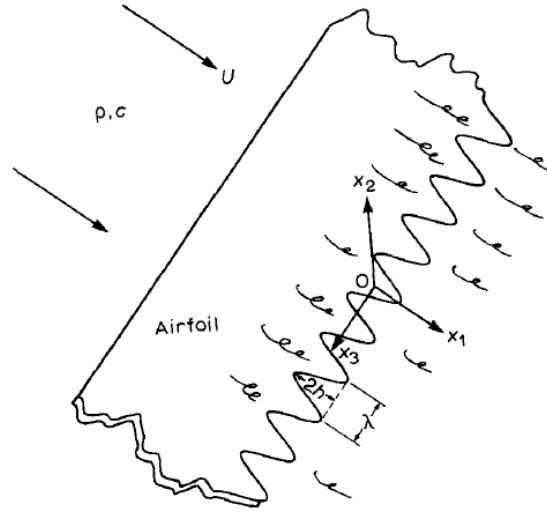


Figura 11: Schema del problema analizzato

Si assume che la frequenza sia abbastanza grande tale da garantire che la lunghezza d'onda della perturbazione sonora sia piccola confrontata con la corda, in questo modo si può considerare la lamina piana come un semipiano.

Introducendo un sistema di riferimento rettangolare $\vec{x} = (x_1, x_2, x_3)$, il dominio è definito da:

$$x_1 < \zeta(x_3) \quad ; \quad -\infty < x_3 < \infty$$

dove $\zeta(x_3)$ è la funzione oscillatoria a media nulla che descrive il bordo di fuga, in particolare:

$$\zeta(x_3) = h \cos(x_3 2\pi/\lambda)$$

La pressione ha questa espressione:

$$p(\vec{x}, t) = p_0(\vec{x}, t) + p_s(\vec{x}, t)$$

dove p_0 è la pressione ipotetica che sia avrebbe con lo stesso campo di vorticità turbolenta in assenza della lamina, mentre p_s è la pressione aggiuntiva legata a fenomeni di riflessione e diffrazione.

Utilizzando le trasformate di Fourier si può scrivere:

$$p_0(\vec{x}, t) = \int_{-\infty}^{\infty} \mathcal{P}_0(\vec{x}, \omega) e^{-i\omega t} d\omega \quad ; \quad p_s(\vec{x}, t) = \int_{-\infty}^{\infty} \mathcal{P}_s(\vec{x}, \omega) e^{-i\omega t} d\omega$$

Se il numero di Reynolds è sufficientemente grande e il numero di Mach è sufficientemente piccolo, si possono trascurare i fenomeni convettivi e diffusivi e valgono le seguenti relazioni:

$$\{\nabla^2 + k_0^2\} \mathcal{P}_0 = Q(\vec{x}, \omega) \quad ; \quad \{\nabla^2 + k_0^2\} \mathcal{P}_s = 0$$

dove $Q(\vec{x}, \omega)$ è la trasformata di Fourier temporale di una sorgente quadrupolare di Lighthill, mentre $k_0 = |\omega|/c$ è il numero d'onda acustico.

Inoltre, per la conservazione della quantità di moto a parete deve valere:

$$\frac{\partial \mathcal{P}_0}{\partial x_2} + \frac{\partial \mathcal{P}_s}{\partial x_2} = 0 \quad \text{per } x_2 = \pm 0 ; x_1 < \zeta(x_3)$$

Il campo di pressione $\mathcal{P}_0(\vec{x}, \omega)$ è dato dall'espressione:

$$\mathcal{P}_0(\vec{x}, \omega) = \int_{-\infty}^{\infty} \hat{p}_0(\vec{K}, \omega) e^{i(\vec{K} \cdot \vec{x} - \gamma(K)x_2)} d^2 \vec{K} \quad \text{per } x_2 \leq 0$$

Nella relazione precedente, $\hat{p}_0(\vec{K}, \omega)$ è la trasformata di Fourier di $p_0(x_1, 0, x_3, t)$ definita da:

$$\hat{p}_0(\vec{K}, \omega) = \frac{1}{(2\pi)^3} \int_{-\infty}^{\infty} p_0(x_1, 0, x_3, t) e^{-i(\vec{K} \cdot \vec{x} - \omega t)} dx_1 dx_3 dt$$

dove $\vec{K} = (K_1, 0, K_3)$ è il vettore dei numeri d'onda, K è il modulo del vettore \vec{K} , mentre $\gamma(K)$ è:

$$\gamma(K) = \begin{cases} \sqrt{(k_0^2 - K^2)} & \text{per } K < k_0 \\ i \sqrt{(K^2 - k_0^2)} & \text{per } K > k_0 \end{cases}$$

Il campo di pressione $\mathcal{P}_s(\vec{x}, \omega)$ può essere rappresentato utilizzando la funzione di Green $G(\vec{x}, \vec{y}, \omega)$, la quale descrive il suono prodotto da una sorgente puntiforme in \vec{y} in presenza della lamina e soddisfa:

$$\begin{cases} \{\nabla^2 + k_0^2\}G = \delta(\vec{x} - \vec{y}) \\ \frac{\partial G}{\partial x_2} = 0 \quad \text{per } x_2 = \pm 0 ; x_1 < \zeta(x_3) \end{cases}$$

Oltre a queste condizioni è richiesto che G sia finita in corrispondenza del bordo di fuga, in modo da assicurare che la condizione di Kutta instazionaria sia soddisfatta.

Dopo alcuni passaggi, si ottiene:

$$\mathcal{P}_s(\vec{x}, \omega) = \oint G(\vec{x}, \vec{y}, \omega) \left(\frac{\partial \mathcal{P}_s(\vec{y}, \omega)}{\partial y_n} \right) dS(\vec{y})$$

L'integrale è calcolato sulla superficie superiore e su quella inferiore della lamina e y_n è il versore normale diretto verso l'esterno. La condizione a parete derivante dalla conservazione della quantità di moto permette di esprimere l'integrale in termini di pressione p_0 . Per fare ciò, si introduce la seguente notazione:

$$\begin{aligned} [G(\vec{x}, y_1, y_3, \omega)] &= G(\vec{x}, y_1, +0, y_3, \omega) - G(\vec{x}, y_1, -0, y_3, \omega) \\ \hat{p}_b(\vec{K}, \omega) &= 2\hat{p}_0(\vec{K}, \omega) \end{aligned}$$

dove $[G(\vec{x}, y_1, y_3, \omega)]$ è il salto della funzione di Green tra superficie superiore e inferiore il quale è diverso da 0 solo per $y_1 < \zeta(y_3)$, mentre $\hat{p}_b(\vec{K}, \omega)$ è la trasformata di Fourier della pressione bloccata della turbolenza, cioè la pressione che la stessa turbolenza produrrebbe su un piano infinito definito da $y_2 = 0$ e $-\infty < y_1 < \infty$.

Con il cambio di variabile $z_1 = y_1 - \zeta(y_3)$, l'integrale precedente diventa:

$$\mathcal{P}_s(\vec{x}, \omega) = \frac{i}{2} \int_{-\infty}^{\infty} dy_3 \int_{-\infty}^0 dz_1 \int_{-\infty}^{\infty} \gamma(K) [G(\vec{x}, z_1 + \zeta(y_3), y_3, \omega)] \hat{p}_b(\vec{K}, \omega) e^{i(K_1 z_1 + K_3 y_3 + K_1 \zeta(y_3))} d^2 \vec{K}$$

3.1.1 Stima della riduzione del rumore

Dalla soluzione generale si può ottenere una stima della riduzione del rumore del bordo di fuga dovuta alla dentellatura senza specificare nel dettaglio né la geometria di quest'ultima né la forma della funzione di Green.

I vortici turbolenti vengono trasportati per convezione con velocità $U_c \sim 0.7U$ e interagendo con il bordo di fuga generano un suono di frequenza $\omega \sim U_c K_1$. L'intensità dell'interazione è legata al fattore esponenziale contenuto nell'integrale della soluzione generale. Quando il parametro $K_1 \zeta \ll 1$, cioè quando la scala dei vortici è molto più grande dell'ampiezza della dentellatura, l'influenza della dentellatura è minima e lo spettro in frequenza della pressione acustica $\Phi(\omega, \vec{x})$ non è molto diverso da quello relativo al bordo di fuga rettilineo $\Phi_0(\omega, \vec{x})$.

Lo spettro in frequenza della pressione acustica del bordo di fuga non dentellato è:

$$\Phi_0(\omega, \vec{x}) \sim \frac{l_3 l \psi(\omega)}{|\vec{x}|^2}$$

dove l_3 è la lunghezza di correlazione lungo l'apertura, l è la lunghezza del bordo di fuga bagnata dal flusso turbolento, $\psi(\omega)$ è lo spettro in frequenza della pressione bloccata della turbolenza, $|\vec{x}| \gg l$ è la posizione dell'osservatore rispetto al bordo di fuga. Si è visto sperimentalmente che:

$$l_3 \approx \frac{U_c}{\omega}$$

Osservando che le regioni del bordo di fuga che contribuiscono maggiormente alla generazione di rumore sono quelle tali per cui $|\partial\zeta(y_3)/\partial y_3| \leq 1$, cioè quelle in cui le fluttuazioni sono normali al bordo, si può affermare che la dentellatura tende a ridurre la lunghezza del bordo di fuga che genera rumore da l a l_e . Per alte frequenze, lo spettro acustico può quindi essere calcolato approssimativamente dalla relazione:

$$\Phi(\omega, \vec{x}) \approx \frac{l_e}{l} \Phi_0(\omega, \vec{x})$$

Considerando il caso di dentellatura sinusoidale con lunghezza d'onda λ e ampiezza h , si ha che per ogni λ la lunghezza del bordo di fuga per cui vale $|\partial\zeta(y_3)/\partial y_3| \leq 1$ è uguale a $4L$, dove:

$$L = \frac{\lambda}{2\pi} \sin^{-1}\left(\frac{\lambda}{2\pi h}\right) \approx \frac{\lambda^2}{(2\pi)^2 h} \quad ; \quad \frac{\lambda}{h} \leq 4$$

di conseguenza $l_e \approx 4L(l/\lambda) \approx l\lambda/\pi^2 h$ e lo spettro in frequenza della pressione acustica vale:

$$\Phi(\omega, \vec{x}) \approx \frac{\Phi_0(\omega, \vec{x})}{\pi^2 h/\lambda} \quad ; \quad \frac{\omega h}{U_c} \gg 1$$

Pertanto, lo spettro del rumore ad alte frequenze del bordo di fuga viene ridotto di circa $10 \log_{10}(10 h/\lambda)$ dB.

3.1.2 Spettro acustico

Per ottenere una soluzione esplicita, si utilizza una generalizzazione della funzione di Green per una lamina piana semi-infinita con un bordo di fuga rettilineo, la quale vale quando il parametro $\omega h/c \ll 1$:

$$G(\vec{x}, \vec{y}, \omega) = \frac{i\omega^{1/2} \sin(\theta/2) \sin^{1/2}(\alpha) \phi^*(\vec{y})}{\pi\sqrt{2\pi c}|\vec{x}|} e^{i(\pi/4 + \omega|\vec{x}|/c)} \quad ; \quad |\vec{x}| \rightarrow \infty$$

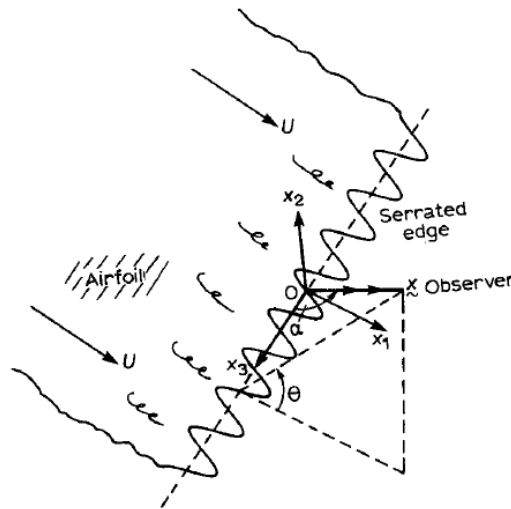


Figura 12: Sistema di riferimento

La funzione $\phi^*(\vec{y})$ è la soluzione dell'equazione di Laplace $\nabla^2 \phi^* = 0$ che descrive un ipotetico flusso incompressibile e irrotazionale, tale per cui $\phi^*(\vec{y})$ sia finita in corrispondenza del bordo di fuga e quando $\sqrt{y_1^2 + y_2^2} \gg h$ la funzione valga $\phi^*(\vec{y}) \approx \text{Re}(-i\sqrt{y_1 + iy_2})$ che è la velocità potenziale del flusso attorno al bordo di fuga rettilineo di una lamina piana semi-infinita. Per bordi di fuga dentellati con $\partial\zeta(y_3)/\partial y_3$ sufficientemente piccolo, la funzione vale:

$$\phi^*(\vec{y}) \approx \text{Re}\left(-i\sqrt{y_1 - \zeta(y_3) + iy_2}\right)$$

Sostituendo $\phi^*(\vec{y})$ in $G(\vec{x}, \vec{y}, \omega)$ e poi in $\mathcal{P}_s(\vec{x}, \omega)$ si ricava:

$$\mathcal{P}_s(\vec{x}, \omega) = \frac{i\omega^{1/2} \sin(\theta/2) \sin^{1/2}(\alpha)}{2\pi\sqrt{2c}|\vec{x}|} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\gamma(K)\vec{p}_b(\vec{K}, \omega)}{K_1^{3/2}} e^{i(K_1\zeta(y_3) + K_3y_3 + \omega|\vec{x}|/c)} d^2\vec{K} dy_3$$

Per un flusso turbolento stazionario si ha:

$$\begin{cases} \langle \mathcal{P}_s(\vec{x}, \omega) \mathcal{P}_s^*(\vec{x}, \omega') \rangle = \Phi(\omega, \vec{x}) \delta(\omega - \omega') \\ \langle p_s^2(\vec{x}, t) \rangle = \int_{-\infty}^{\infty} \Phi(\omega, \vec{x}) d\omega \end{cases}$$

dove le parentesi $\langle \dots \rangle$ indicano la media, mentre l'asterisco indica il complesso coniugato.

Inoltre, assumendo la turbolenza stazionaria si può introdurre lo spettro in termini di numero d'onda e frequenza della pressione bloccata $P(\vec{K}, \omega)$:

$$\langle \hat{p}_b(\vec{K}, \omega) \hat{p}_b^*(\vec{K}', \omega') \rangle = P(\vec{K}, \omega) \delta(\omega - \omega') \delta(\vec{K} - \vec{K}')$$

Con queste considerazioni, lo spettro in frequenza della pressione acustica si può riscrivere così:

$$\Phi(\omega, \vec{x}) = \frac{|\omega| \sin^2(\theta/2) \sin(\alpha)}{8\pi^2 c |\vec{x}|^2} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{|\gamma(K)|^2 P(\vec{K}, \omega)}{|K_1|^3} e^{i(K_1(\zeta(y_3) - \zeta(y'_3)) + K_3(y_3 - y'_3))} d^2\vec{K} dy_3 dy'_3$$

Sostituendo l'espressione di $\zeta(y_3)$ si può scrivere che:

$$e^{iK_1 h \cos(y_3 2\pi/\lambda)} = \sum_{n=-\infty}^{\infty} i^n J_n(K_1 h) e^{-iy_3 2n\pi/\lambda}$$

dove J_n è la funzione di Bessel di ordine n , pertanto:

$$\int_{-\infty}^{\infty} e^{i(K_1 h \cos(y_3 2\pi/\lambda) + K_3 y_3)} dy_3 = \sum_{n=-\infty}^{\infty} 2\pi i^n J_n(K_1 h) \delta(K_3 - 2n\pi/\lambda)$$

Restringendo il dominio di integrazione di y'_3 alla sola porzione di bordo di fuga investita dal flusso turbolento l , lo spettro acustico vale:

$$\Phi(\omega, \vec{x}) = \frac{l|\omega| \sin^2(\theta/2) \sin(\alpha)}{4\pi c |\vec{x}|^2} \sum_{n=-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{|\gamma(K)|^2 P(\vec{K}, \omega)}{|K_1|^3} J_n^2(K_1 h) \delta(K_3 - 2n\pi/\lambda) d\vec{K}^2 \quad ; \quad |\vec{x}| \rightarrow \infty$$

Questa espressione può essere semplificata ulteriormente osservando che i principali contributi all'integrale sono quelli per cui $K \sim \omega/U \gg \omega/c$ (per $M \ll 1$) dove $P(\vec{K}, \omega)$ è massimo e $|\gamma(K)| \approx K$.

Integrando rispetto a K_3 , l'equazione diventa:

$$\Phi(\omega, \vec{x}) = \frac{l|\omega| \sin^2(\theta/2) \sin(\alpha)}{4\pi c |\vec{x}|^2} \sum_{n=-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{(K_1^2 + (2n\pi/\lambda)^2)}{|K_1|^3} J_n^2(K_1 h) P(K_1, 2n\pi/\lambda, \omega) dK_1 \quad ; \quad |\vec{x}| \rightarrow \infty$$

La formula precedente vale sia per valori piccoli di $\omega h/U$, riducendosi alla formula per il rumore del bordo di fuga rettilineo, sia per $\omega h/U \gg 1$, quando la radiazione acustica si propaga dai punti del bordo tali per cui $\sin(y_3 2\pi/\lambda) = n/K_1 h$ con $-\infty < n < \infty$.

3.1.3 Modello di turbolenza

Per calcolare lo spettro acustico $\Phi(\omega, \vec{x})$ è necessario avere un'espressione esplicita dello spettro della pressione bloccata $P(\vec{K}, \omega)$. Si osserva che per bassi numeri di Mach e per $\omega\delta/U > 1$, questa funzione ha un massimo in prossimità della regione convettiva, cioè dove $K_1 = \omega/U_c$, $K_3 = 0$ e la velocità convettiva $U_c \approx 0.7U$ dipende debolmente dalla frequenza. In questa regione, lo spettro $P(\vec{K}, \omega)$ è approssimato bene dalla formula di Chase:

$$P(\vec{K}, \omega) = \frac{C_m \rho^2 v_*^3 K_1^2 \delta^5}{[(K_1 - \omega/U_c)^2 (\delta U_c / 3v_*)^2 + (K\delta)^2 + \varepsilon^2]^{5/2}}$$

dove $v_* = 0.03U$ è la velocità di attrito dello strato limite, $C_m = 0.1553$, $\varepsilon = 1.33$.

3.1.4 Spettro normalizzato

Espandendo la funzione integranda rispetto al massimo in $K_1 = \omega/U_c$, si ottiene la seguente espressione adimensionale dello spettro acustico:

$$\frac{\Phi(\omega, \vec{x})}{(\rho v_*^2)^2 (l/c) (\delta/|\vec{x}|)^2} = (C_m/\pi) \sin^2(\theta/2) \sin(\alpha) \Psi(\omega) \quad ; \quad |\vec{x}| \rightarrow \infty$$

dove:

$$\Psi(\omega) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} \frac{(\omega\delta/U_c)^2 + (2n\pi\delta/\lambda)^2}{[(\omega\delta/U_c)^2 + (2n\pi\delta/\lambda)^2 + \varepsilon^2]^2} J_n^2(\omega h/U_c)$$

Considerando la funzione $\Psi(\omega)$, si osserva che per $\omega h/U_c \rightarrow 0$:

$$\Psi(\omega) \rightarrow \Psi_0(\omega) = \frac{(\omega\delta/U_c)^2}{[(\omega\delta/U_c)^2 + \varepsilon^2]^2}$$

e lo spettro acustico adimensionale si riduce a quello del caso di bordo di fuga non dentellato. Inoltre, quando $\omega\delta/U \gg 1$ vale la seguente relazione:

$$\Psi(\omega) < \frac{1}{(\omega\delta/U_c)^2 + \varepsilon^2} \sum_{n=-\infty}^{\infty} J_n^2(\omega h/U_c) = \frac{1}{(\omega\delta/U_c)^2 + \varepsilon^2} \approx \Psi_0(\omega)$$

Per calcolare numericamente lo spettro $\Psi(\omega)$ si può utilizzare anche la seguente formula asintotica:

$$\Psi(\omega) = \frac{1}{(2\pi\delta/\lambda)^2} \left(1 + z \frac{\partial}{\partial z}\right) f(X, Y, Z) \quad ; \quad \omega h/U_c \gg 1$$

dove:

$$\left\{ \begin{array}{l} f(X, Y, Z) = \frac{1}{X\sqrt{Y+Z}} \left[\frac{2}{\pi} \tan^{-1} \left(\frac{\pi X}{2\sqrt{Y+Z}} \right) + \frac{\sin(2X) + e^{-\pi\sqrt{Y+Z}}}{\sinh(\pi\sqrt{Y+Z})} \right] \\ X = \omega h/U_c \quad ; \quad Y = \frac{(\omega\delta/U_c)^2}{(2\pi\delta/\lambda)^2} \quad ; \quad Z = \frac{\varepsilon^2}{(2\pi\delta/\lambda)^2} \end{array} \right.$$

3.2 Rumore del bordo di fuga con dentellatura a dente di sega

In questa analisi si considera una lamina piana bidimensionale di apertura infinita con bordo di fuga dentellato, in particolare si ipotizza una dentellatura a dente di sega con lunghezza d'onda λ e ampiezza h (Figura 13).

Si considera questo tipo di dentellatura perché per alte frequenze e basse velocità ($\omega h/U \gg 1$) la vorticità contenuta nello strato limite turbolento soddisfa $|K_3/K_1| \leq 1$, quindi per avere una significativa riduzione del rumore i lati della dentellatura devono essere inclinati meno di 45° circa rispetto alla direzione del flusso medio. Infatti, con una dentellatura a dente di sega la lunghezza effettiva del bordo di fuga che contribuisce alla generazione del rumore è circoscritta presumibilmente ai vertici dei denti.

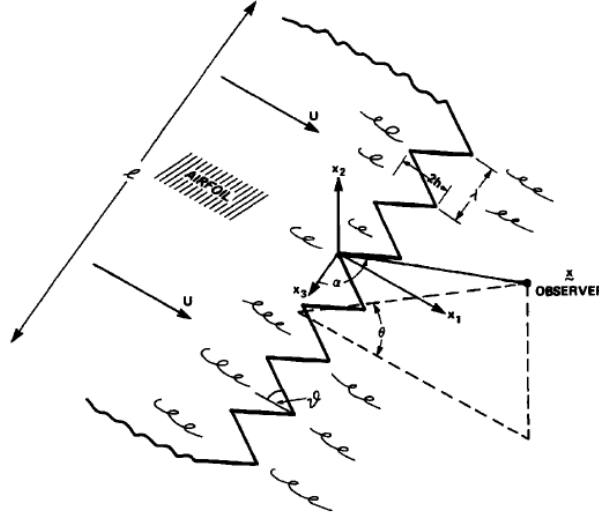


Figura 13: Schema del problema analizzato

La funzione oscillatoria a media nulla che descrive il bordo di fuga è:

$$\zeta(x_3) = \begin{cases} (+4h/\lambda)(x_3 - n\lambda) & n\lambda < x_3 < (n + 1/2)\lambda \\ (-4h/\lambda)(x_3 - n\lambda) & (n - 1/2)\lambda < x_3 < n\lambda \end{cases} ; \quad n = 0, \pm 1, \pm 2, \dots$$

3.2.1 Spettro normalizzato

Come visto nel *Paragrafo 3.1.4*, l'espressione dello spettro acustico è:

$$\frac{\Phi(\omega, \vec{x})}{(\rho v_*^2)^2 (l/c) (\delta/|\vec{x}|)^2} = (C_m/\pi) \sin^2(\theta/2) \sin(\alpha) \Psi(\omega) ; \quad |\vec{x}| \rightarrow \infty$$

dove $\Psi(\omega)$ è lo spettro normalizzato, definito così:

$$\Psi(\omega) = \left(1 + \frac{1}{2}\epsilon \frac{\partial}{\partial \epsilon}\right) f\left(\frac{\omega\delta}{U_c}, \frac{h}{\lambda}, \frac{h}{\delta}; \epsilon\right)$$

con:

$$f\left(\frac{\omega\delta}{U_c}, \frac{h}{\lambda}, \frac{h}{\delta}; \epsilon\right) = \frac{1}{\{(\omega\delta/U_c)^2 [1 + (4h/\lambda)^2] + \epsilon^2\}} \times \left(1 + \frac{64(h/\lambda)^3 (\delta/h) (\omega\delta/U_c)^2 \left(\cosh\{(\lambda/2\delta)\sqrt{[(\omega\delta/U_c)^2 + \epsilon^2]}\} - \cos(2\omega h/U_c)\right)}{\sqrt{[(\omega\delta/U_c)^2 + \epsilon^2]}\{(\omega\delta/U_c)^2 [1 + (4h/\lambda)^2] + \epsilon^2\} \sinh\{(\lambda/2\delta)\sqrt{[(\omega\delta/U_c)^2 + \epsilon^2]}\}}\right)$$

3.3 Risultati numerici

Nelle figure seguenti viene diagrammato lo spettro normalizzato $10 \log_{10}(\Psi)$ nei casi in cui h/δ vale rispettivamente 1 e 10, per tre particolari valori del rapporto λ/h (0.25, 1, 5). Fissato h/δ , l'intensità del rumore del bordo di fuga aumenta all'aumentare della lunghezza d'onda della dentellatura λ . Inoltre, quando $\lambda/h \geq 10$ e $\omega\delta/U_c > 1$ si ha che la soluzione del caso dentellato è praticamente la stessa del caso non dentellato.

Si osserva che, fissato il parametro h/δ , per $\omega\delta/U_c \rightarrow \infty$ la funzione $\Psi(\omega)$ dipende solo dal rapporto λ/h e che l'espressione relativa alla dentellatura a dente di sega decade più velocemente rispetto all'altra:

$$\Psi_{sin}(\omega) \approx \frac{1}{(\omega\delta/U_c)^2 (2\pi h/\lambda)} \approx \frac{\Psi_0(\omega)}{(2\pi h/\lambda)} ; \quad \Psi_{saw} \approx \frac{\Psi_0(\omega)}{[1 + (4h/\lambda)^2]}$$

Tabella 6: Dati problema

Posizione osservatore	(x_1, x_2, x_3)	(0,0,100) m
Corda	c	1 m
Apertura	d	10 m
Numero di Mach	M_0	0.1

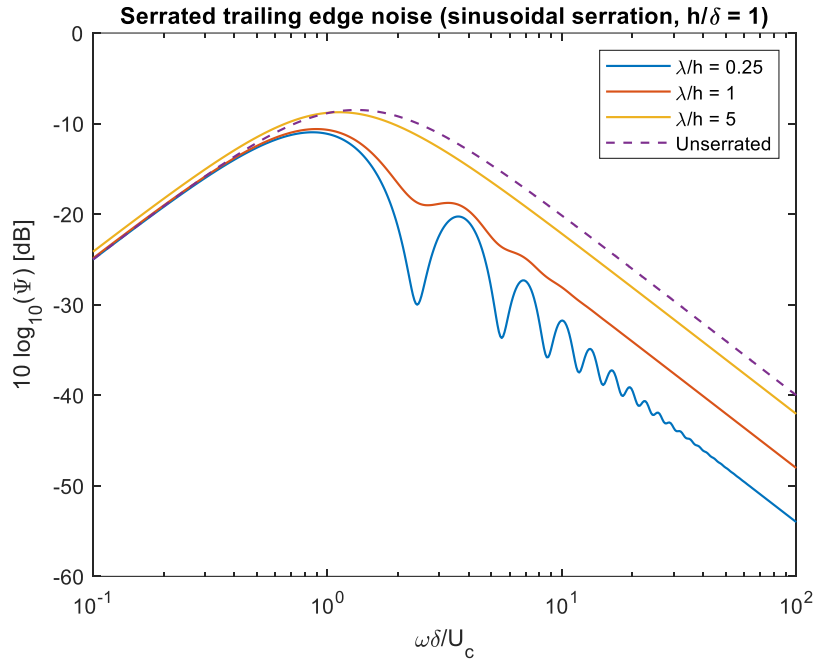


Figura 14: Spettro normalizzato relativo al rumore del bordo di fuga con dentellatura sinusoidale ($h/\delta = 1$)

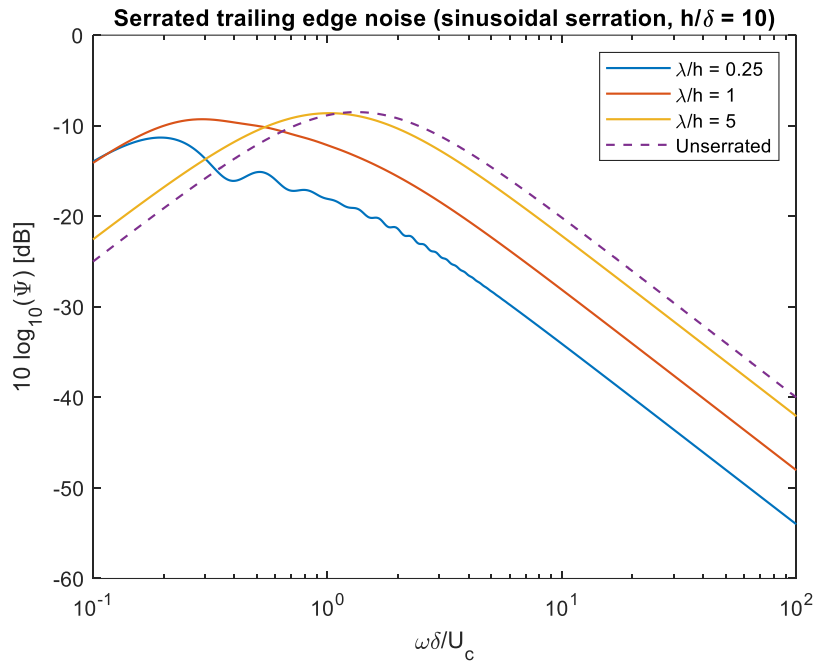


Figura 15: Spettro normalizzato relativo al rumore del bordo di fuga con dentellatura sinusoidale ($h/\delta = 10$)

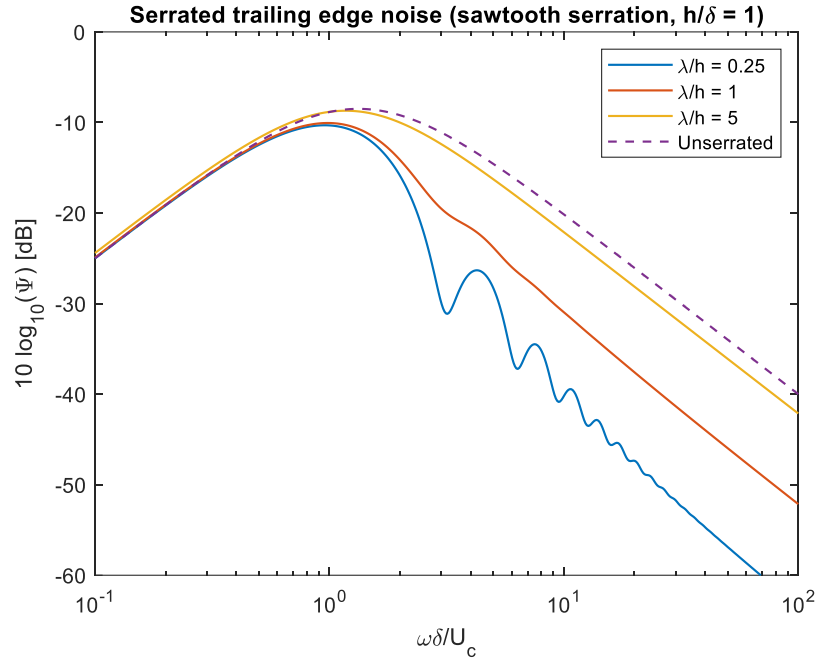


Figura 16: Spettro normalizzato relativo al rumore del bordo di fuga con dentellatura a dente di sega ($h/\delta = 1$)

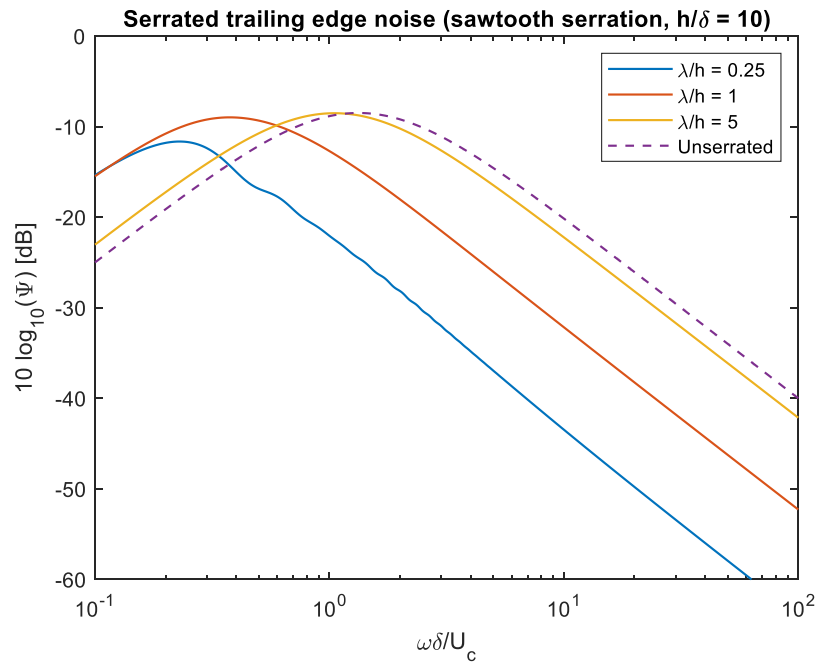


Figura 17: Spettro normalizzato relativo al rumore del bordo di fuga con dentellatura a dente di sega ($h/\delta = 10$)

4 Modello di Lyu, Azarpeyvand, Sinayoko

4.1 Rumore del bordo di fuga con dentellatura a dente di sega

Questo modello generalizza la teoria di Amiet e la estende al caso dei bordi di fuga dentellati. Come visto nel *Capitolo 1*, il modello di Amiet utilizza la tecnica di Schwarzschild per ottenere il campo di pressione sulla superficie della lamina piana generato dall'interazione dello strato limite turbolento con il bordo di fuga, successivamente calcola la densità spettrale di potenza in campo lontano utilizzando le teorie di Kirchhoff e Curle. Invece, l'equazione differenziale alle derivate parziali che descrive questo modello viene risolta mediante le serie di Fourier seguendo una procedura di tipo iterativo.

In questa analisi si considera una lamina piana bidimensionale di corda c apertura d con bordo di fuga dentellato, in particolare si ipotizza una dentellatura a dente di sega con lunghezza d'onda λ e ampiezza h (*Figura 18*).

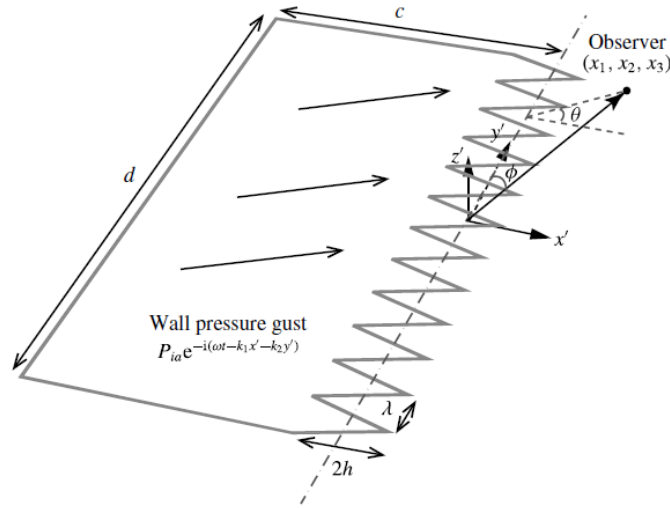


Figura 18: Schema del problema analizzato

Le coordinate x' , y' e z' sono dirette rispettivamente lungo la corda, lungo l'apertura e lungo la normale alla superficie della lamina piana. L'osservatore si trova in campo lontano, la sua posizione in coordinate cartesiane è definita da $\vec{x} = (x_1, x_2, x_3)$ mentre in coordinate sferiche è definita dagli angoli θ e ϕ (*Figura 18*).

La funzione oscillatoria che descrive il bordo di fuga è $H(y')$, la quale è scelta in modo da avere media nulla e tale che $H(y') = 0$ nel caso di bordo di fuga rettilineo. Nel caso di dentellatura a dente di sega è definita così:

$$H(y') = \begin{cases} \sigma_0(y' - (\chi_0 + m\lambda)) + \epsilon_0 & \text{per } \chi_0 + m\lambda < y' \leq \chi_1 + m\lambda \\ \sigma_1(y' - (\chi_1 + m\lambda)) + \epsilon_1 & \text{per } \chi_1 + m\lambda < y' \leq \chi_2 + m\lambda \end{cases}$$

dove $\sigma_j = (\epsilon_{j+1} - \epsilon_j)/(\chi_{j+1} - \chi_j)$ con $j = 0, 1$ e $m = 0, \pm 1, \pm 2, \pm 3, \dots$ (*Figura 19*). Il valore assoluto della pendenza dei bordi dei denti vale $\sigma = |\sigma_j| = 4h/\lambda$.

La derivata prima $H'(y')$ non è continua, pertanto la derivata seconda $H''(y')$ è singolare nei punti angolosi:

$$H'(y') = \begin{cases} \sigma_0 & \text{per } \chi_0 + m\lambda < y' \leq \chi_1 + m\lambda \\ \sigma_1 & \text{per } \chi_1 + m\lambda < y' \leq \chi_2 + m\lambda \end{cases}$$

$$H''(y') = \sum_{m=-\infty}^{\infty} (-1)^{m+1} 2\sigma \delta(y' - m\lambda/2)$$

dove δ è la funzione generalizzata delta di Dirac.

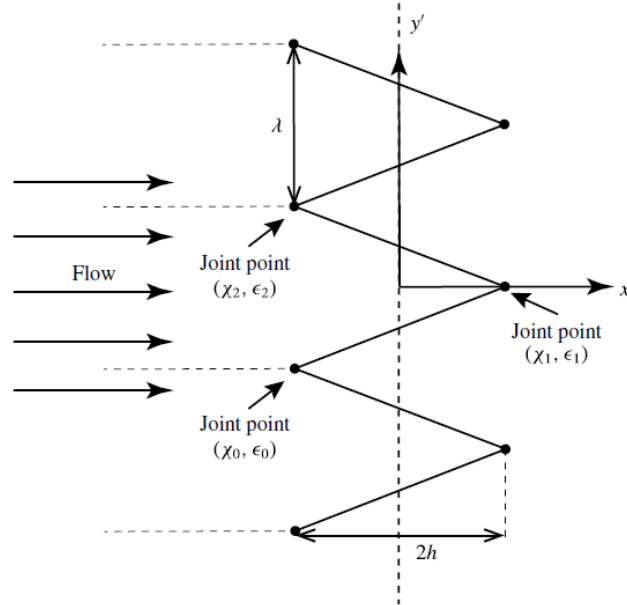


Figura 19: Dentellatura a dente di sega

Se la lunghezza d'onda della perturbazione acustica è più piccola della lunghezza della corda, la lamina piana può essere considerata semi-infinita lungo x' , cioè si trascurano gli effetti dovuti alla presenza del bordo di attacco. Inoltre, se l'allungamento è sufficientemente grande, la lamina può essere considerata infinita lungo y' , cioè si trascurano gli effetti di estremità.

Le sorgenti sonore generate dall'interazione della turbolenza contenuta nello strato limite con la parete solida della lamina piana possono essere modellate come dipoli, mentre in campo libero come quadrupoli. Si assume inoltre che la turbolenza sia statisticamente stazionaria.

La pressione incidente sulla superficie della lamina genera un campo di pressione aggiuntivo dovuto a fenomeni diffusivi a causa della variazione delle condizioni al contorno in corrispondenza del bordo di fuga. Pertanto, la pressione totale si può considerare composta da due contributi $p_t = p_i + p$.

La pressione incidente sulla superficie della lamina piana ha questa espressione:

$$p_i = P_i e^{-i(\omega t - k_1 x' - k_2 y')}$$

dove P_i è l'intensità della perturbazione, mentre k_1 e k_2 sono i numeri d'onda rispettivamente lungo la corda e lungo l'apertura. È importante notare che la pressione p_i è il doppio di quella che si avrebbe se la lamina piana fosse assente.

Il campo di pressione diffusa deve soddisfare le seguenti condizioni per $z' = 0$:

$$\begin{cases} \frac{\partial p}{\partial z'} = 0 & \text{per } x' < H(y') \\ p = -P_i e^{-i(\omega t - k_1 x' - k_2 y')} & \text{per } x' \geq H(y') \end{cases}$$

L'equazione d'onda relativa alla pressione diffusa è:

$$\nabla^2 p - \frac{1}{c_0^2} \left(\frac{\partial}{\partial t} + U \frac{\partial}{\partial x'} \right)^2 p = 0$$

dove U è la velocità del flusso e c_0 è la velocità del suono. Ipotizzando che la perturbazione sia armonica, cioè che $p = P(x', y', z') e^{-i\omega t}$, questa equazione si riduce a:

$$\beta^2 \frac{\partial^2 P}{\partial x'^2} + \frac{\partial^2 P}{\partial y'^2} + \frac{\partial^2 P}{\partial z'^2} + 2ikM_0 \frac{\partial P}{\partial x'} + k^2 P = 0$$

dove $M_0 = U/c_0$, $\beta^2 = 1 - M_0^2$ e $k = \omega/c_0$.

Utilizzando il cambio di coordinate $x = x' - H(y')$, $y = y'$, $z = z'$ per rendere le condizioni al contorno indipendenti da y' , l'equazione precedente si può riscrivere così:

$$(\beta^2 + H'^2(y)) \frac{\partial^2 P}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 P}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 P}{\partial z^2} - 2H'(y) \frac{\partial^2 P}{\partial x \partial y} + (2ikM_0 - H''(y)) \frac{\partial P}{\partial x} + k^2 P = 0$$

Le condizioni al contorno diventano:

$$\begin{cases} P(x, y, 0) = -P_i e^{i(k_1 x + k_2 y)} e^{ik_1 H(y)} & \text{per } x \geq 0 \\ \frac{\partial P(x, y, 0)}{\partial z} = 0 & \text{per } x < 0 \end{cases}$$

4.1.1 Serie di Fourier

Per risolvere l'equazione di governo, si esprime la perturbazione con una serie di Fourier:

$$P(x, y, z) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} P_n(x, z) e^{ik_{2n} y}$$

dove $k_{2n} = k_2 + 2n\pi/\lambda$ è il numero d'onda modale.

Sostituendo l'espressione precedente nell'equazione d'onda:

$$\left\{ (\beta^2 + H'^2(y)) \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2} - 2H'(y) \frac{\partial^2}{\partial x \partial y} + (2ikM_0 - H''(y)) \frac{\partial}{\partial x} + k^2 \right\} \sum_{n=-\infty}^{\infty} P_n(x, z) e^{ik_{2n} y} = 0$$

Moltiplicando per $e^{-ik_{2n'} y}$ e integrando rispetto a y tra $-\lambda/2$ e $\lambda/2$ si ottiene:

$$\begin{aligned} & \left\{ \beta^2 \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2} + 2ikM_0 \frac{\partial}{\partial x} + (k^2 - k_{2n'}^2) \right\} P_{n'}(x, z) \\ & + \frac{1}{\lambda} \int_{-\lambda/2}^{\lambda/2} \sum_{n=-\infty}^{\infty} \left\{ H'^2(y) \frac{\partial^2}{\partial x^2} - (H''(y) + 2ik_{2n} H'(y)) \frac{\partial}{\partial x} \right\} P_n(x, z) e^{i[2(n-n')\pi/\lambda]y} dy = 0 \end{aligned}$$

Si osserva che nel caso di bordo di fuga rettilineo le funzioni $H'(y)$ e $H''(y)$ sono costanti e si ha un'equazione differenziale disaccoppiata per il modo n' . Invece, nel caso di bordo di fuga con dentellatura a dente di sega le funzioni $H'(y)$ e $H''(y)$ dipendono da y e l'equazione differenziale presenta dei modi accoppiati.

Sostituendo la funzione che descrive il bordo di fuga dentellato e le sue derivate nell'equazione d'onda si ottiene:

$$\left\{ (\beta^2 + \sigma^2) \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2} + 2ikM_0 \frac{\partial}{\partial x} + (k^2 - k_{2n'}^2) \right\} P_{n'}(x, z) = -\frac{4\sigma}{\lambda} \sum_{n-n'=\text{dispari}} \left(1 - \frac{k_2 \lambda + 2n\pi}{(n-n')\pi} \right) \frac{\partial P_n(x, z)}{\partial x}$$

Definendo:

$$\begin{aligned} D &= \left\{ (\beta^2 + \sigma^2) \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2} + 2ikM_0 \frac{\partial}{\partial x} \right\} \\ \vec{P} &= (\dots, P_{-n'}(x, z), P_{-n'+1}(x, z), \dots, P_{n'-1}(x, z), P_{n'}(x, z), \dots)^T \\ A_{ml} &= (k_{2m}^2 - k^2) \delta_{ml} \\ B_{ml} &= \begin{cases} \frac{4\sigma}{\lambda} \frac{m+l+k_2\lambda/\pi}{l-m} & \text{per } m-l \text{ dispari} \\ 0 & \text{per } m-l \text{ pari} \end{cases} \end{aligned}$$

si può scrivere l'equazione precedente in forma matriciale:

$$D\vec{P} - \bar{A}\vec{P} = \bar{B} \frac{\partial \vec{P}}{\partial x}$$

Si osserva che gli indici di righe e colonne delle matrici \bar{A} e \bar{B} vanno rispettivamente da $-m$ a $+m$ e da $-l$ a $+l$ e non da 1 a $2m+1$ e da 1 a $2l+1$ in quanto i modi sono simmetrici rispetto al modo 0. Inoltre, si osserva che la matrice \bar{A} è diagonale, che la matrice \bar{B} non è diagonale e che contiene i termini di accoppiamento tra i modi.

Dall'espressione della matrice \bar{B} si nota che i termini di accoppiamento sono proporzionali a σ/λ , quindi se $\bar{B} \approx 0$ e cioè se la dentellatura è molto larga, l'effetto di accoppiamento tra i modi diventa trascurabile e si può risolvere ogni modo in maniera indipendente.

Sostituendo la funzione che descrive il bordo di fuga dentellato nelle condizioni al contorno si ottiene:

$$\begin{cases} P_n(x, 0) = -P_i a_n e^{ik_1 x} & x > 0 \\ \frac{\partial P_n}{\partial z}(x, 0) & x \leq 0 \end{cases}$$

dove:

$$a_n = \frac{1}{\lambda} \int_{-\lambda/2}^{\lambda/2} e^{ik_1 H(y)} e^{-i2n\pi y/\lambda}$$

Per frequenze molto basse, il contributo del modo 0 è predominante rispetto a quello degli altri modi e di conseguenza anche l'accoppiamento è debole, pertanto l'equazione di P_0 si può risolvere in maniera indipendente. Gli effetti di accoppiamento tra i modi diventano importanti per alte frequenze e per dentellature strette.

4.1.2 Procedura iterativa

Per risolvere le equazioni tenendo conto dell'accoppiamento tra i modi si utilizza una procedura iterativa. Sostituendo un valore iniziale noto $\vec{P}^{(0)}$ nel termine di accoppiamento dell'equazione matriciale precedente:

$$D\vec{P} - \bar{A}\vec{P} = \bar{B} \frac{\partial \vec{P}^{(0)}}{\partial x}$$

Se si risolve questa equazione si ottiene una nuova soluzione $\vec{P}^{(1)}$, la quale può essere sostituita a sua volta nell'equazione matriciale:

$$D\vec{P} - \bar{A}\vec{P} = \bar{B} \frac{\partial \vec{P}^{(1)}}{\partial x}$$

Ripetendo questo processo più volte, si ottiene una serie di soluzioni $\vec{P}^{(0)}, \vec{P}^{(1)}, \vec{P}^{(2)}, \vec{P}^{(3)}, \dots$ che converge alla soluzione che soddisfa le condizioni al contorno imposte. La soluzione $\vec{P}^{(0)}$ inserita inizialmente si ottiene non considerando i termini di accoppiamento, cioè imponendo $\bar{B} = 0$ e risolvendo ogni equazione indipendentemente con la tecnica di Schwarzschild.

Si considera il sistema di equazioni disaccoppiate:

$$D\vec{P} - \bar{A}\vec{P} = 0$$

Utilizzando la trasformazione $P_{n'} = \bar{P}_{n'} e^{-ikM_0 x / (\beta^2 + \sigma^2)}$, le equazioni del sistema si riducono a:

$$\left\{ (\beta^2 + \sigma^2) \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2} + K_{n'}^2 (\beta^2 + \sigma^2) \right\} \bar{P}_{n'} = 0$$

dove:

$$K_{n'} = \sqrt{k^2(1 + \sigma^2) - k_{2n'}^2(\beta^2 + \sigma^2) / (\beta^2 + \sigma^2)}$$

Sostituendo $X = x$, $Z = \sqrt{\beta^2 + \sigma^2} z$ si può vedere che l'equazione si riconduce al problema di Schwarzschild:

$$P_{n'}^{(0)} = P_i e^{ik_1 x} a_{n'} ((1 - i)E(-\mu_{n'} x) - 1)$$

dove $P_{n'}^{(0)}$ è l'elemento del vettore $\vec{P}^{(0)}$ corrispondente al n' -esimo modo e:

$$\mu_{n'} = K_{n'} + k_1 + \frac{kM_0}{\beta^2 + \sigma^2}$$

$$E(x) = \int_0^x \frac{e^{it}}{\sqrt{2\pi t}} dt$$

Con questa procedura iterativa si aggiunge alla soluzione la parte di accoppiamento tra i vari modi, quindi per ogni n -esimo modo in input ($x > 0$) si ha un modo n -esimo e alcuni modi m -esimi in output ($x < 0$). Per dentellature a dente di sega l'intensità dell'accoppiamento decresce quadraticamente con la differenza $|m - l|$.

Se si tiene conto dei termini di accoppiamento, il sistema di equazioni precedente non è più omogeneo quindi non risolvibile con la tecnica di Schwarzschild. Il sistema non omogeneo si può tuttavia ricondurre a uno omogeneo, infatti per $x \neq 0$, se $\vec{P}^{(0)}$ è differenziabile vale:

$$D \frac{\partial \vec{P}^{(0)}}{\partial x} - \bar{A} \frac{\partial \vec{P}^{(0)}}{\partial x} = 0$$

Questa espressione può essere riscritta nel seguente modo:

$$D \left(\vec{P} + \bar{v} \frac{\partial \vec{P}^{(0)}}{\partial x} \right) - \bar{A} \left(\vec{P} + \bar{v} \frac{\partial \vec{P}^{(0)}}{\partial x} \right) = 0$$

dove:

$$v_{ml} = \frac{B_{ml}}{k_{2m}^2 - k_{2l}^2} = \begin{cases} -\frac{4h}{\pi^2(m-l)^2} & \text{per } m-l \text{ dispari} \\ 0 & \text{per } m-l \text{ pari} \end{cases}$$

Per poter applicare la tecnica di Schwarzschild, in quanto la derivata prima $\partial \vec{P}^{(0)}/\partial x$ presenta una singolarità per $x = 0$, si deve utilizzare la derivata generalizzata:

$$\frac{\partial \hat{P}_{n'}^{(0)}}{\partial x}(x, 0) = \frac{\partial P_{n'}^{(0)}}{\partial x}(x, 0) + P_i a_{n'} (1-i) (-\sqrt{\mu_{n'}}) \sqrt{2\pi x} \delta(x)$$

La derivata generalizzata permette la presenza di funzioni generalizzate in corrispondenza di $x = 0$, mentre in tutti gli altri punti del dominio è uguale a $\partial \vec{P}^{(0)}/\partial x$.

A questo punto, dopo aver risolto il problema in maniera iterativa come visto precedentemente, si può scrivere la soluzione esatta in questo modo:

$$\vec{P}(x, 0) = \vec{N}(x) + \vec{C}^{(1)}(x) + \vec{C}^{(2)}(x) + \vec{C}^{(3)}(x) + \dots$$

dove \vec{N} è la parte disaccoppiata, mentre $\vec{C}^{(i)} = \vec{P}^{(i)} - \vec{P}^{(i-1)}$ con $i = 1, 2, 3, \dots$ sono le parti accoppiate:

$$N_{n'}(x) = P_i e^{ik_1 x} a_{n'} ((1-i)E(-\mu_{n'} x) - 1)$$

$$C_{n'}^{(1)}(x) = P_i e^{ik_1 x} (1-i) \sum_{m=-\infty}^{\infty} v_{n'm} a_m \left(ik_1 (E(-\mu_{n'} x) - E(-\mu_m x)) - \sqrt{\frac{\mu_m}{-2\pi x}} (e^{-i\mu_{n'} x} - e^{-i\mu_m x}) \right)$$

Poiché $v_{ml} \propto h$, si può dimostrare facilmente che $C_{n'}^{(i)} \propto h^i$ per $i = 1, 2, 3, \dots$ e quindi la soluzione può essere vista come un'espansione in serie di Taylor rispetto all'ampiezza h . Pertanto, per valori piccoli di h rispetto alla lunghezza d'onda della perturbazione l'equazione converge più velocemente. È opportuno notare che la funzione $\vec{C}^{(i)}$ diventa sempre più complessa al crescere di i , tuttavia diventa sempre più irrilevante.

La pressione diffusa sulla superficie della lamina piana si ottiene sommando le soluzioni $P_{n'}(x, 0)$ relative a tutti i modi n' e trasformando nuovamente le coordinate per tornare al sistema di riferimento iniziale:

$$P(x', y', 0) = \sum_{n'=-\infty}^{\infty} P_{n'}(x' - H(y'), 0) e^{ik_{2n'} y'}$$

Scrivendo la soluzione nella forma ottenuta con la procedura iterativa:

$$P(x', y', 0) = \sum_{n'=-\infty}^{\infty} \left(N_{n'} + C_{n'}^{(1)} + C_{n'}^{(2)} + \dots \right) (x' - H(y'), 0) e^{ik_{2n'} y'}$$

Si osserva che per $H(y') = 0$, la funzione $\vec{C}^{(i)}$ diventa trascurabile e la soluzione si riduce a quella ottenuta da Amiet per il bordo di fuga rettilineo.

Si può dimostrare che per frequenze sufficientemente basse ($k_1 h < \pi^2/4$) la serie è assolutamente convergente. Invece, per frequenze alte la serie è ancora convergente ma per ottenere una buona approssimazione della soluzione è necessario utilizzare un numero superiore di iterazioni.

La pressione sonora in campo lontano si ottiene integrando sulla superficie della lamina piana:

$$p_f(\vec{x}, \omega) = \frac{-i\omega x_3}{4\pi c_0 S_0^2} \iint_S \Delta P(x', y') e^{-ikR} dx' dy'$$

dove ΔP è il salto di pressione, $S_0^2 = x_1^2 + \beta^2(x_2^2 + x_3^2)$ e

$$R = \frac{M_0(x_1 - x') - S_0}{\beta^2} + \frac{x_1 x' + x_2 y' \beta^2}{\beta^2 S_0}$$

Sostituendo la soluzione trovata precedentemente nell'espressione della pressione acustica si ottiene:

$$p_f(\vec{x}, \omega, k_2) = P_i \left(\frac{-i\omega x_3 c}{4\pi c_0 S_0^2} \right) \lambda \frac{\sin((N + 1/2)\lambda(k_2 - kx_2/S_0))}{\sin((k_2 - kx_2/S_0)\lambda/2)} \mathcal{L}(\omega, k_1, k_2)$$

dove $2N + 1$ è il numero totale di denti del bordo di fuga, mentre \mathcal{L} è la funzione di risposta:

$$\mathcal{L}(\omega, k_1, k_2) = (1 - i) \frac{1}{\lambda c} e^{-ik(M_0 x_1 - S_0)/\beta^2} e^{ik(M_0 - x_1/S_0)h/\beta^2} \sum_{n'=-\infty}^{\infty} (\Theta_{n'} + \Theta_{n'}^{(1)} + \Theta_{n'}^{(2)} + \dots)$$

con:

$$\left\{ \begin{array}{l} \Theta_{n'} = a_{n'} Q_{n'n'} \\ \Theta_{n'}^{(1)} = \sum_{m=-\infty}^{\infty} v_{n'm} i k_1 a_m (Q_{n'n'} - Q_{n'm}) - v_{n'm} \sqrt{\mu_m} a_m (S_{n'n'} - S_{n'm}) \end{array} \right.$$

Le funzioni Q_{nm} e S_{nm} sono definite così:

$$\begin{aligned} Q_{nm} &= \sum_{j=0}^1 \frac{1}{\kappa_{nj}} \left(\frac{1}{\mu_A} [e^{ik_{nj}\chi_{j+1}} \Gamma(c + \epsilon_{j+1}; \mu_m, \mu_A) - e^{ik_{nj}\chi_j} \Gamma(c + \epsilon_j; \mu_m, \mu_A)] \right. \\ &\quad \left. - \frac{1}{\mu_{Bnj}} e^{ik_{nj}(\chi_j - (c + \epsilon_j)/\sigma_j)} [\Gamma(c + \epsilon_{j+1}; \mu_m, \mu_{Bnj}) - \Gamma(c + \epsilon_j; \mu_m, \mu_{Bnj})] \right) \\ S_{nm} &= \sum_{j=0}^1 \frac{1}{i\kappa_{nj}} \left(\frac{1}{\sqrt{\eta_{Am}}} [e^{ik_{nj}\chi_{j+1}} E(\eta_{Am}(c + \epsilon_{j+1})) - e^{ik_{nj}\chi_j} E(\eta_{Am}(c + \epsilon_j))] \right. \\ &\quad \left. - \frac{1}{\sqrt{\eta_{Bmj}}} e^{ik_{nj}(\chi_j - (c + \epsilon_j)/\sigma_j)} [E(\eta_{Bmj}(c + \epsilon_{j+1})) - E(\eta_{Bmj}(c + \epsilon_j))] \right) \end{aligned}$$

dove la funzione Γ ha questa espressione:

$$\Gamma(x; \mu, \nu) = e^{-ivx} E(\mu x) - \sqrt{\frac{\mu}{\mu - \nu}} E((\mu - \nu)x) + \frac{1}{1 - i} (1 - e^{-ivx})$$

mentre gli altri coefficienti sono:

$$\begin{aligned} \mu_A &= k_1 + k(M_0 - x_1/S_0)/\beta^2 \\ \mu_{Bnj} &= k_1 - (k_{2n} - kx_2/S_0)/\sigma_j \\ \kappa_{nj} &= k_{2n} - kx_2/S_0 + k(M_0 - x_1/S_0)\sigma_j/\beta^2 \\ \eta_{Am} &= K_m + kM_0/(\beta^2 + \sigma^2) - k(M_0 - x_1/S_0)/\beta^2 \\ \eta_{Bmj} &= K_m + kM_0/(\beta^2 + \sigma^2) + (k_{2n} - kx_2/S_0)/\sigma_j \end{aligned}$$

Si osserva che l'espressione di Γ scritta precedentemente si riferisce solo alla pressione diffusa. Per considerare anche l'effetto della pressione incidente si deve sostituire l'ultimo termine:

$$\frac{1}{1 - i} (1 - e^{-ivx}) \rightarrow -\frac{e^{-ivx}}{1 - i}$$

4.1.3 Densità spettrale di potenza

Integrando l'espressione della pressione acustica rispetto a k_2 si ottiene:

$$p_f(\vec{x}, \omega) = \left(\frac{-i\omega x_3 c}{4\pi c_0 S_0^2} \right) \int_{-\infty}^{\infty} \lambda \frac{\sin((N+1/2)\lambda(k_2 - kx_2/S_0))}{\sin((k_2 - kx_2/S_0)\lambda/2)} \mathcal{L}(\omega, k_1, k_2) P_i(\omega, k_2) dk_2$$

È giusto precisare che in generale P_i è funzione di k_1 e k_2 , ma si è visto sperimentalmente che presenta un massimo in prossimità di $k_1 = \omega/U_c$ ed è solo debolmente dipendente da ω .

Si ricorda che la definizione di PSD in campo lontano è:

$$S_{pp}(\vec{x}, \omega) = \lim_{T \rightarrow \infty} \left(\frac{\pi}{T} \langle p_f(\vec{x}, \omega) p_f^*(\vec{x}, \omega) \rangle \right)$$

dove l'asterisco indica il complesso coniugato, mentre $2T$ è l'intervallo di tempo della trasformata di Fourier.

Sostituendo l'espressione della pressione acustica in quella della PSD si ottiene:

$$S_{pp}(\vec{x}, \omega) = \left(\frac{\omega x_3 c}{4\pi c_0 S_0^2} \right)^2 \int_{-\infty}^{\infty} \lambda^2 \left[\frac{\sin((N+1/2)\lambda(k_2 - kx_2/S_0))}{\sin((k_2 - kx_2/S_0)\lambda/2)} \right]^2 |\mathcal{L}|^2 \Pi(\omega, k_2) dk_2$$

dove $\Pi(\omega, k_2)$ è la densità spettrale in termini di numero d'onda della pressione sulla superficie della lamina piana. Per dentellature larghe, cioè per $h \approx 0$, questa equazione si riduce a quella del modello di Amiet. Se il numero di denti $2N+1$ è sufficientemente grande si ha che:

$$\lim_{N \rightarrow \infty} \lambda^2 \frac{\sin^2((N+1/2)\lambda(k_2 - kx_2/S_0))}{\sin^2((k_2 - kx_2/S_0)\lambda/2)} \sim 2\pi d \sum_{m=-\infty}^{\infty} \delta(k_2 - kx_2/S_0 + 2m\pi/\lambda)$$

In definitiva, si può dimostrare quindi che l'espressione della PSD in campo lontano nel piano $y' = 0$ è:

$$S_{pp}(\vec{x}, \omega) = \left(\frac{\omega x_3 c}{4\pi c_0 S_0^2} \right)^2 2\pi d \sum_{m=-\infty}^{\infty} |\mathcal{L}(\omega, k_1, 2m\pi/\lambda)|^2 \Pi(\omega, 2m\pi/\lambda)$$

È interessante osservare che la sommatoria di questa equazione è simile a quella vista nel modello di Howe (Paragrafo 3.1.2), sia nella presenza dello spettro Π che nella dipendenza da k_2 .

4.1.4 Effetto della dentellatura

Minimizzare l'equazione precedente significa massimizzare la riduzione del rumore ma, poiché l'espressione di \mathcal{L} è molto complicata, per trarre delle conclusioni senza ricorrere alla soluzione numerica si fa un'analisi preliminare.

Assumendo che l'osservatore si trovi a 90° nel piano di mezzeria sopra il bordo di fuga, cioè in $x_1 = 0$ e $x_2 = 0$, e che il numero di Mach sia basso, ad esempio $M_0 < 0.2$, quando m soddisfa $k_2 + 2m\pi/\lambda \approx 0$ allora $\kappa_{mj} \approx 0$ e il valore di \mathcal{L} è dominato dal modo m , cioè:

$$|\mathcal{L}(\omega, k_1, 2m\pi/\lambda)|^2 \approx \frac{2}{\lambda^2 c^2} |a_m Q_{mm} + \Theta_m^{(1)} + \Theta_m^{(2)} + \dots|^2$$

Inoltre, osservando che $v_{nm} = 4h/(\pi^2(n-m)^2)$ per $n-m$ dispari, si può approssimare $\Theta_m^{(i)}$ sommando solo tra i modi $m-1$ e $m+1$, dato che i modi $m \pm (2j+1)$ per $j \geq 1$ sono almeno un ordine di grandezza più piccoli a causa del termine quadratico al denominatore di v_{mn} . Utilizzando questa approssimazione, $\Theta_m^{(i)}$ varia linearmente tra a_{m-1} e a_{m+1} . Dalla definizione di a_m si può scrivere:

$$a_m = \frac{e^{im\pi/2}}{2} \text{sinc}(k_1 h - m\pi/2) + \frac{e^{-im\pi/2}}{2} \text{sinc}(k_1 h + m\pi/2)$$

Pertanto, $|a_{m-1}|$ e $|a_{m+1}|$ sono dello stesso ordine di grandezza di $|a_m|$ e $|\Theta_m^{(i)}| = O(|a_m|)$. Per questo $|\mathcal{L}(\omega, k_1, 2m\pi/\lambda)|^2 = O(|a_m|^2)$ e quindi:

$$\sum_{m=-\infty}^{\infty} |\mathcal{L}(\omega, k_1, 2m\pi/\lambda)|^2 \Pi(\omega, 2m\pi/\lambda) = O \left(\sum_{m=-\infty}^{\infty} |a_m|^2 \Pi(\omega, 2m\pi/\lambda) \right)$$

Affinché il secondo membro dell'equazione precedente sia minimo è necessario che $\Pi(\omega, 2m\pi/\lambda) \ll \Pi(\omega, 0)$ quando m si avvicina a $\pm\nu_0$, con $\nu_0 = 2k_1h/\pi$, in quanto $|a_m|$ è massimo per $m \approx \pm\nu_0$.

Assumendo che la turbolenza sia statisticamente stazionaria:

$$\Pi(\omega, 2m\pi/\lambda) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} S_{qq}(\omega, y') e^{-i(2m\pi/\lambda)y'} dy'$$

Quando $2\pi\nu_0 l_{y'}/\lambda = k_1 l_{y'} \sigma \gg 1$, per $m \approx \nu_0$ la funzione integranda oscilla rapidamente con $l_{y'}$, che si ricorda essere la lunghezza di correlazione lungo l'apertura della lamina piana:

$$l_{y'}(\omega) = \frac{1}{S_{qq}(\omega, 0)} \int_{-\infty}^{\infty} S_{qq}(\omega, y') dy'$$

L'espressione della lunghezza di correlazione può essere approssimata con la relazione:

$$l_{y'}(\omega) \approx 2.1 U_c / \omega$$

Definendo l'ampiezza effettiva $2h_e = \sigma l_{y'}(\omega)$, la quale rappresenta l'ampiezza della dentellatura correlata, si ha che una condizione per la riduzione del rumore è $k_1 h_e \gg 1$. Utilizzando la relazione approssimata della lunghezza di correlazione, la condizione precedente diventa costante, nello specifico diventa funzione solo del parametro σ e quindi dalla geometria della dentellatura. Un'altra condizione per la riduzione del rumore è $k_1 h \gg 1$, infatti se il valore di m è sufficientemente distante da quello di ν_0 si ha che $|a_m| \rightarrow 0$. Si osserva che le due condizioni $k_1 h_e \gg 1$ e $k_1 h \gg 1$ sono in accordo con il modello di Howe.

4.1.5 Modello di turbolenza

Per approssimare lo spettro in termini di numero d'onda si utilizza il modello di Chase (*Paragrafo 3.1.3*):

$$\Pi(\omega, k_1, k_2) = \frac{C_m \rho_0^2 v_*^3 k_1^2 \delta^5}{[(k_1 - \omega/U_c)^2 (\delta U_c v_*/3)^2 + (k_1^2 + k_2^2) \delta^2 + \chi^2]^{5/2}}$$

dove $v_* = 0.03U$ è la velocità di attrito dello strato limite, $C_m = 0.1553$, $\chi = 1.33$.

L'equazione precedente presenta un massimo intorno a $k_1 = \omega/U_c$, pertanto integrando rispetto a k_1 e conservando solo i termini significativi si può scrivere:

$$\Pi(\omega, k_2) \approx \frac{4C_m \rho_0^2 v_*^4 (\omega/U_c)^2 \delta^4}{U_c ((\omega/U_c)^2 + k_2^2) \delta^2 + \chi^2}$$

Lo spessore dello strato limite turbolento può essere approssimato dalla relazione:

$$\delta/c = 0.382 Re_c^{-1/5}$$

dove Re_c è il numero di Reynolds relativo alla corda c .

4.1.6 Spettro normalizzato

Sostituendo l'espressione di $\Pi(\omega, k_2)$ nell'equazione della PSD in campo lontano e dividendo per $(\rho_0 v_*^2)^2 (d/c_0)$ si ottiene lo spettro normalizzato:

$$\frac{S_{pp}(\vec{x}, \omega)}{(\rho_0 v_*^2)^2 (d/c_0)} = \frac{C_m}{2\pi} \Psi(\vec{x}, \omega)$$

dove la funzione $\Psi(\vec{x}, \omega)$ è definita così:

$$\Psi(\vec{x}, \omega) = \left(\frac{x_3 c}{S_0^2} \right)^2 \left(\frac{U_c}{c_0} \right) \sum_{m=-\infty}^{\infty} |\mathcal{L}(\omega, k_1, 2m\pi/\lambda)|^2 \frac{(\omega \delta / U_c)^4}{[(\omega \delta / U_c)^2 + (2m\pi \delta / \lambda)^2 + \chi^2]^2}$$

4.2 Risultati numerici

Nella *Figura 20* si mostra la funzione che descrive il bordo di fuga con dentellatura a dente di sega per $h/c = 0.05$ e $\lambda/h = 1$. Il bordo di fuga non è rappresentato nella sua interezza per motivi di chiarezza.

Nelle figure successive viene diagrammato lo spettro normalizzato $10 \log_{10}(\Psi)$ per vari parametri geometrici della dentellatura, nello specifico per quattro particolari valori del rapporto λ/h (8,4,2,1) nei casi in cui h/c vale 0.025 (*Figura 21 e Figura 22*) e 0.05 (*Figura 23 e Figura 24*).

Lo spettro viene calcolato utilizzando un'approssimazione del secondo ordine per la funzione \mathcal{L} e considerando anche la pressione incidente nell'espressione di Γ . Si assume che l'osservatore si trovi a 90° nel piano di mezzeria sopra il bordo di fuga, cioè in $x_1 = 0$ e $x_2 = 0$, e che il numero di Mach sia basso, nello specifico $M_0 < 0.2$.

Tabella 7: Dati problema

Posizione osservatore	(x_1, x_2, x_3)	$(0, 0, 1)$ m
Corda	c	1 m
Apertura	d	10 m
Numero di Mach	M_0	0.1

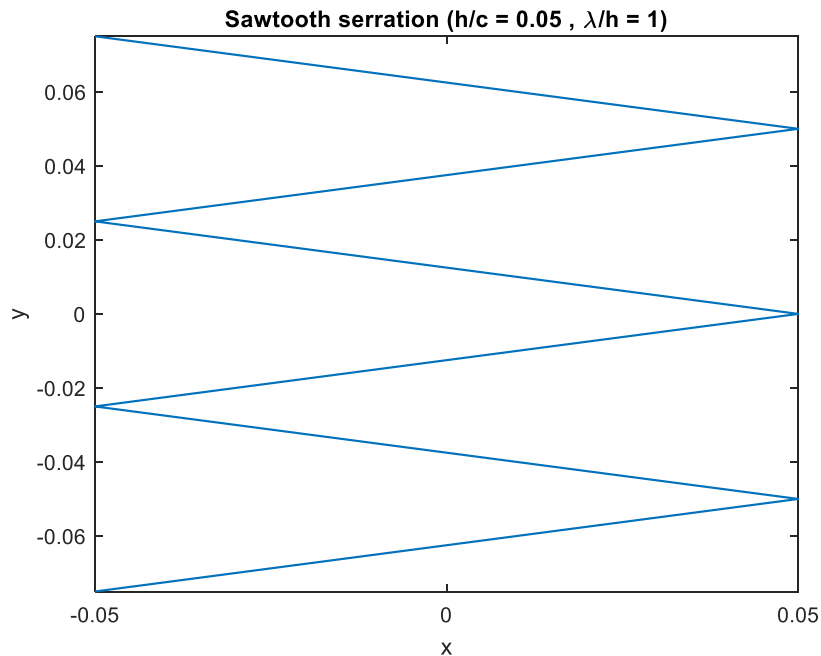


Figura 20: Dentellatura a dente di sega ($h/c = 0.05$, $\lambda/h = 1$)

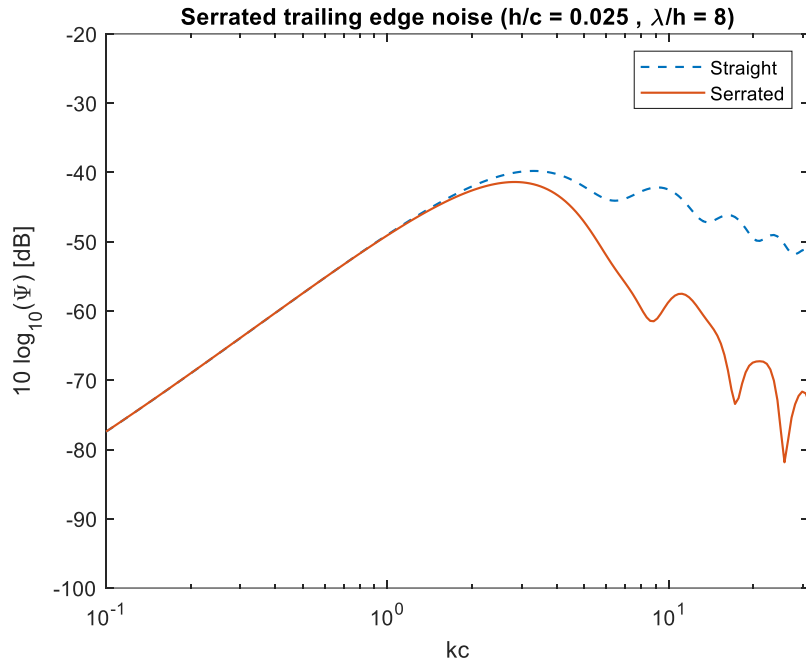


Figura 21: Spettro normalizzato relativo al rumore del bordo di fuga con dentellatura a dente di sega ($h/c = 0.025$, $\lambda/h = 8$)

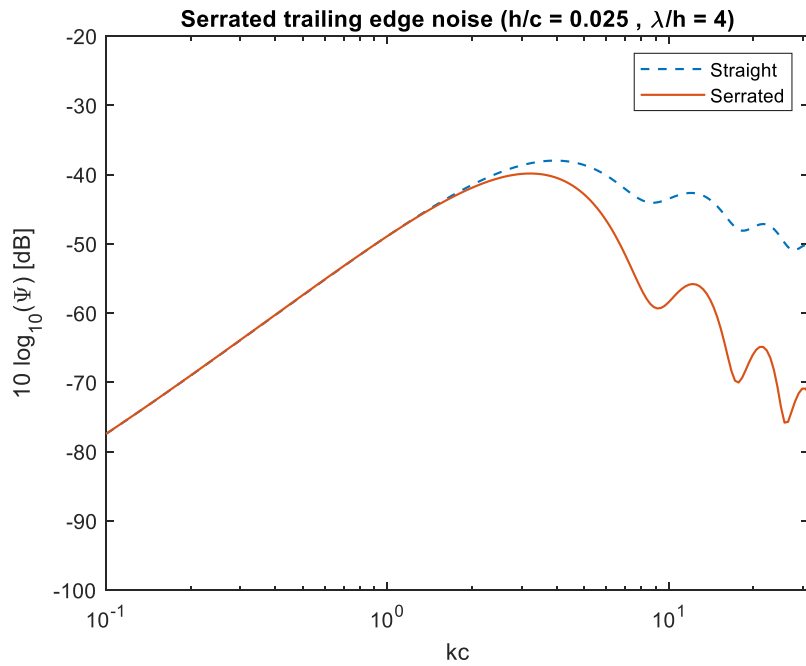


Figura 22: Spettro normalizzato relativo al rumore del bordo di fuga con dentellatura a dente di sega ($h/c = 0.025$, $\lambda/h = 4$)

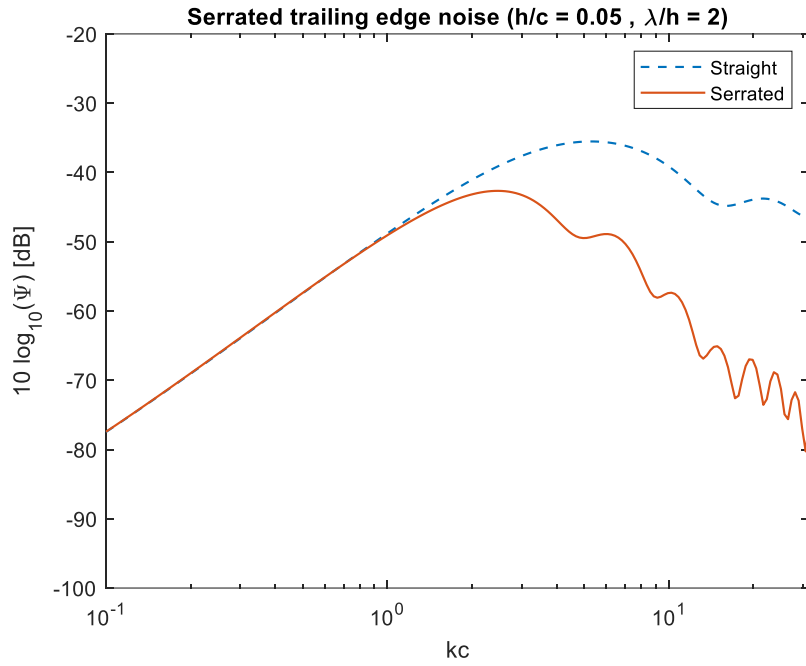


Figura 23: Spettro normalizzato relativo al rumore del bordo di fuga con dentellatura a dente di sega ($h/c = 0.05$, $\lambda/h = 2$)

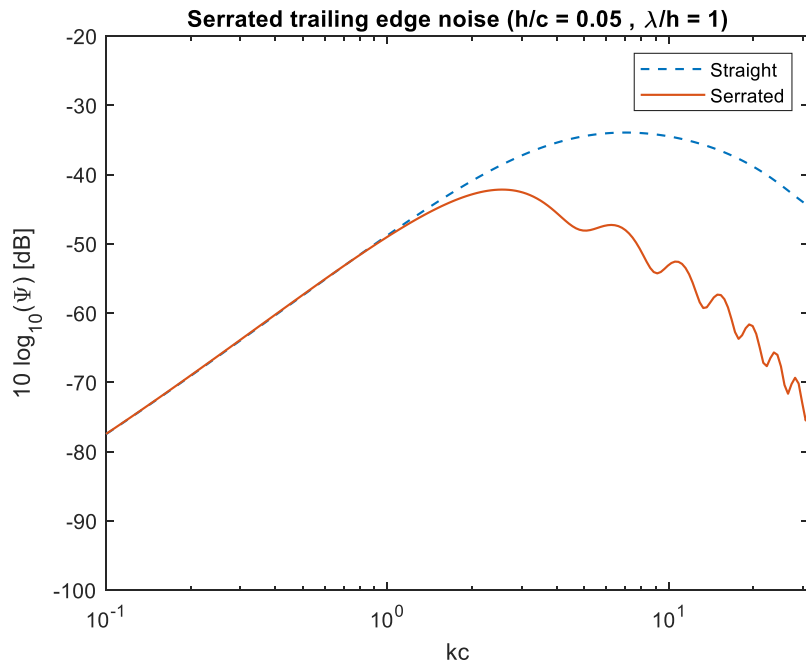


Figura 24: Spettro normalizzato relativo al rumore del bordo di fuga con dentellatura a dente di sega ($h/c = 0.05$, $\lambda/h = 1$)

4.3 Estensione al caso rotante

4.3.1 Spettro acustico

Come anticipato all'inizio di questo lavoro, molti problemi in cui è coinvolto il rumore del bordo di fuga riguardano pale rotanti. Per questo motivo si presenta l'estensione delle teorie precedenti al caso rotante, nello specifico in questo modello si combina la teoria di Howe relativa al caso stazionario con l'estensione della teoria di Amiet al caso rotante. Il problema è presentato per completezza ma non verrà analizzato a fondo, in quanto si è visto che la rotazione non ha un grande impatto sull'efficienza della dentellatura per bassi numeri di Mach.

Si ricorda lo spettro in termini di numero d'onda $P(\vec{K}, \omega)$ proposto da Chase (*Paragrafo 3.1.3*):

$$P(\vec{K}, \omega) = \frac{C_m \rho^2 v_*^3 K_1^2 \delta^5}{[(K_1 - \omega/U_c)^2 (\delta U_c / 3v_*)^2 + (K\delta)^2 + \varepsilon^2]^{5/2}}$$

dove $v_* = 0.03U$ è la velocità di attrito dello strato limite, $C_m = 0.1553$, $\varepsilon = 1.33$.

Dalla relazione precedente si ottiene lo spettro acustico $\Phi(\omega, \vec{x})$ del modello di Howe (*Paragrafo 3.1.4*):

$$\frac{\Phi(\omega, \vec{x})}{(\rho v_*^2)^2 (l/c) (\delta/|\vec{x}|)^2} = (C_m/\pi) \sin^2(\theta/2) \sin(\alpha) \Psi(\omega) \quad ; \quad |\vec{x}| \rightarrow \infty$$

Questo modello può essere applicato a varie geometrie del bordo di fuga (*Figura 25*), per le quali si definiscono diverse espressioni dello spettro normalizzato $\Psi(\omega)$:

1) Rettilineo:

$$\Psi(\omega) = \psi(\tilde{K}_1) = \frac{\tilde{K}_1^2}{(\tilde{K}_1^2 + \varepsilon^2)^2}$$

dove \tilde{K}_1 è il numero d'onda idrodinamico normalizzato rispetto a δ .

2) Generica dentellatura con lunghezza d'onda l_s e ampiezza $2h_s$:

$$\Psi(\omega) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} a_n(\tilde{K}_1) \psi(\tilde{\rho}_n)$$

dove a_n è l'ampiezza modale, \tilde{K}_1 è il numero d'onda idrodinamico normalizzato rispetto a h_s , mentre $\tilde{\rho}_n = \sqrt{\tilde{K}_1^2 + n^2 k_s^2}$ con $k_s = 2\pi/l_s$ numero d'onda della dentellatura.

Le ampiezze modali valgono rispettivamente:

a) dentellatura sinusoidale

$$a_n(\tilde{K}_1) = J_n(\tilde{K}_1)$$

b) dentellatura a dente di sega

$$a_n(\tilde{K}_1) = 8\tilde{K}_1 \frac{(1 - (-1)^n \cos(2\tilde{K}_1))}{(n^2\pi^2 - 4\tilde{K}_1^2)^2}$$

c) dentellatura a dente di sega con q fenditure di spessore d' e profondità h' ($\bar{d} = d'/l_s$)

$$a_n(\tilde{K}_1) = \sum_{m=0}^q \left| \frac{x_n + \epsilon_m y_n}{2(n^2\pi^2 - 4\tilde{K}_1^2)} \right|^2$$

dove:

$$\epsilon_m = \begin{cases} 0 & \text{per } m = 0 \\ 1 & \text{per } m \neq 0 \end{cases}$$

$$x_n = n\pi(A + B) + 2\tilde{K}_1(B - A) \quad ; \quad y_n = n\pi(C + D) + 2\tilde{K}_1(D - C) e^{-i\tilde{K}_1 h'/h_s}$$

$$A = 1 - e^{i(n\pi + 2\tilde{K}_1)(1 - 2q\bar{d})/(q+1)} \quad ; \quad B = e^{-i(n\pi - 2\tilde{K}_1)} - e^{-i(n\pi - 2\tilde{K}_1)(1 + 2\bar{d})q/(q+1)}$$

$$C = e^{-i(n\pi + 2\tilde{K}_1)(2\bar{d})} - 1 \quad ; \quad D = e^{-i(n\pi - 2\tilde{K}_1)(1 + 2\bar{d})} - e^{-i(n\pi - 2\tilde{K}_1)}$$

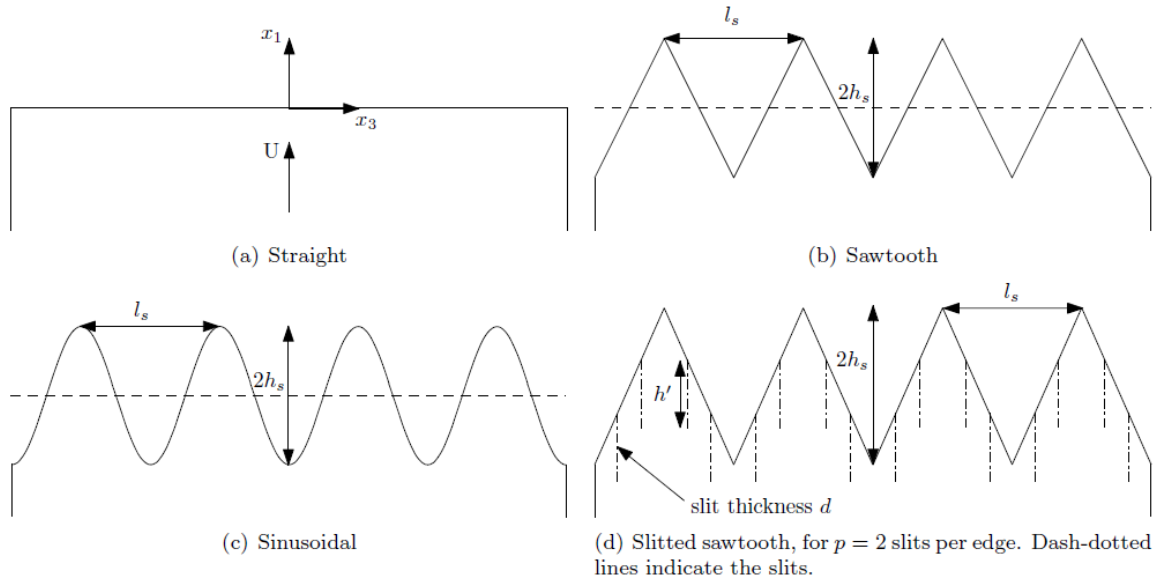


Figura 25: Varie geometrie del bordo di fuga

In questa trattazione, lo spessore dello strato limite δ si stima a partire dallo spessore di spostamento δ^* :

$$\delta = 8\delta^*$$

$$\delta^* = \begin{cases} C(24.3 + 0.6625\chi) \cdot 10^{-4} & \text{per } \chi \leq 4^\circ \\ C(26.95 + 0.6625(\chi - 4) + 0.3044(\chi - 4)^2 + 0.0104(\chi - 4)^3) \cdot 10^{-4} & \text{per } \chi > 4^\circ \end{cases}$$

dove C è la corda e χ è l'angolo di attacco.

4.3.2 Effetto Doppler

Si considera ora una lamina piana rotante in un flusso stazionario (Figura 26). Per un osservatore in campo lontano, la sorgente si può considerare posizionata in corrispondenza del mozzo, dove è centrato il sistema di riferimento (x, y, z) , mentre la sorgente ritardata si trova in x_c a valle del rotore.

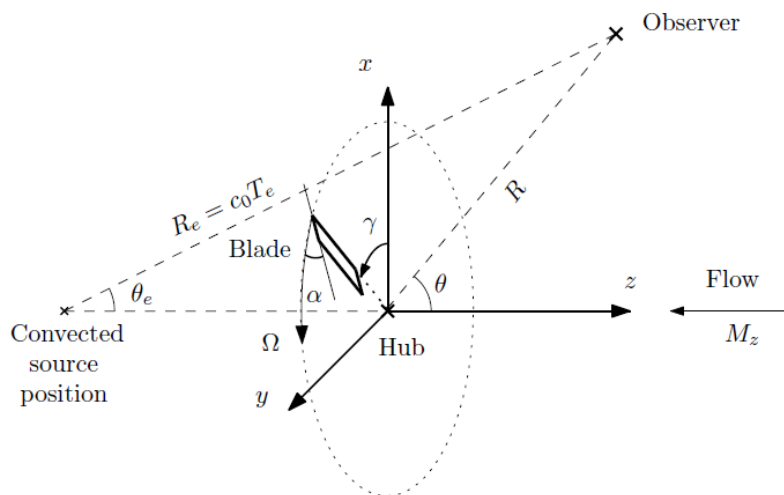


Figura 26: Schema del problema analizzato

Dato che la lamina si muove rispetto all'osservatore si verifica l'effetto Doppler, pertanto la frequenza ω percepita dall'osservatore è diversa dalla frequenza ω' della sorgente sonora. L'effetto Doppler dipende dalla direzione del flusso rispetto alla lamina, che varia con l'angolo γ , pertanto la PSD è una funzione variabile nel tempo.

Indicando con \vec{x}_o la posizione dell'osservatore nel sistema di coordinate fisso, mentre con \vec{X} e con S'_{pp} rispettivamente la posizione dell'osservatore e la PSD nel sistema di coordinate locale della lamina, si può scrivere:

$$S_{pp}(\vec{x}_o, t, \omega) = \frac{\omega'}{\omega} S'_{pp}(\vec{X}, \tau, \omega')$$

dove τ è il tempo di emissione e t è il tempo di ricezione. Si assume che la lamina sia in moto rettilineo uniforme tra τ e t , ciò significa che vengono trascurati gli effetti della rotazione tra i due tempi.

La posizione \vec{X} è definita dalla relazione:

$$\vec{X}(\tau) = \bar{R}_y(\alpha) \bar{R}_z(\pi/2 - \gamma) (x_o - x_p(\tau))$$

dove \bar{R}_z e \bar{R}_y sono le matrici di rotazione rispetto agli assi z e y . Si ricorda che le matrici di rotazione sono:

$$\bar{R}_x(\theta) = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos(\theta) & -\sin(\theta) \\ 0 & \sin(\theta) & \cos(\theta) \end{bmatrix} ; \bar{R}_y(\theta) = \begin{bmatrix} \cos(\theta) & 0 & \sin(\theta) \\ 0 & 1 & 0 \\ -\sin(\theta) & 0 & \cos(\theta) \end{bmatrix} ; \bar{R}_z(\theta) = \begin{bmatrix} \cos(\theta) & -\sin(\theta) & 0 \\ \sin(\theta) & \cos(\theta) & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Indicando con O l'osservatore, con B la lamina piana e con F il flusso, si definiscono le seguenti quantità relative:

$$\vec{M}_{BO} = M_t \hat{y} \quad ; \quad \vec{M}_{FO} = -M_z \hat{z}$$

Di conseguenza, la posizione della sorgente presente e quella della sorgente ritardata valgono rispettivamente:

$$\vec{x}_p \approx \vec{M}_{BO} c_0 T_e \quad ; \quad \vec{x}_c \approx \vec{M}_{FO} c_0 T_e$$

dove T_e è il tempo di propagazione, il quale si ottiene dalla relazione $R_e = c_0 T_e$ che indica la distanza tra l'osservatore e la sorgente ritardata:

$$R_e = \frac{R(-M_z \cos(\theta) + \sqrt{1 - M_z^2 \sin^2(\theta)})}{1 - M_z^2}$$

con $\theta = \pi - \gamma$.

Tornando alla relazione di S_{pp} , la variazione di frequenza ω/ω' dovuta all'effetto Doppler vale:

$$\frac{\omega}{\omega'} = 1 + \frac{\vec{M}_{BO} \cdot \vec{CO}}{1 + (\vec{M}_{FO} - \vec{M}_{BO}) \cdot \vec{CO}}$$

dove $\vec{CO} = CO/|CO|$ è il vettore unitario che va dalla posizione della sorgente ritardata a quella dell'osservatore.

Lo spettro acustico nel sistema di riferimento della lamina è:

$$S'_{pp}(\vec{X}, \tau, \omega') = \Phi(\vec{X}, \omega')$$

La PSD media si ottiene mediando la PSD istantanea nel tempo che la lamina impiega a fare una rotazione:

$$\bar{S}_{pp}(\vec{x}_o, \omega) = \frac{1}{T} \int_0^T \left(\frac{\omega'}{\omega} \right)^2 S'_{pp}(\vec{X}, \tau, \omega') d\tau$$

Si osserva che questo integrale è equivalente all'integrale su $0 < \gamma < 2\pi$, con $\gamma = \Omega\tau$:

$$\bar{S}_{pp}(\vec{x}_o, \omega) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \left(\frac{\omega'}{\omega} \right)^2 S'_{pp}(\vec{X}, \gamma, \omega') d\gamma$$

Infine, si può calcolare il SPWL con le relazioni:

$$W(\omega) = \frac{\pi R^2}{\rho_0 c_0} \int_0^\pi \bar{S}_{pp}(\theta, \omega) F(\theta) \sin(\theta) d\theta \quad ; \quad F(\theta) = \frac{\beta^4 \sqrt{1 - M_z^2 \sin^2(\theta)}}{(\sqrt{1 - M_z^2 \sin^2(\theta)} + M_z \cos(\theta))^2}$$

5 Conclusioni

Tutte e tre le teorie trattate calcolano il rumore del bordo di fuga di una lamina piana considerata semi-infinita lungo la corda, cioè per lunghezze d'onda della perturbazione piccole rispetto alla lunghezza della corda, e infinita lungo l'apertura, cioè per allungamenti sufficientemente grandi. Inoltre, si assume che la turbolenza contenuta nello strato limite sia isotropa e stazionaria. Tutti i modelli valgono per flussi subsonici e per frequenze non troppo elevate della perturbazione.

Il modello di Amiet analizza il caso di bordo di fuga non dentellato, mentre i modelli di Howe e di Lyu-Azarpeyvand-Sinayoko analizzano il caso di bordo di fuga con dentellature di vario tipo.

Il modello di Amiet differisce da quello di Howe per il modo in cui la turbolenza interagisce con il bordo di fuga.

La differenza tra il modello di Lyu-Azarpeyvand-Sinayoko e quello di Amiet, di cui è una generalizzazione, consiste nella risoluzione dell'equazione differenziale alle derivate parziali che lo descrive mediante le serie di Fourier, seguendo una procedura di tipo iterativo. Invece, il modello di Amiet utilizza la tecnica di Schwarzschild per ottenere il campo di pressione sulla superficie della lamina piana, successivamente calcola la densità spettrale di potenza in campo lontano utilizzando le teorie di Kirchhoff e Curle.

Il modello di Lyu-Azarpeyvand-Sinayoko rispetto a quello di Howe è applicabile a geometrie più complesse del bordo di fuga ed è valido per un intervallo più ampio di numeri di Mach.

Dai risultati numerici del modello di Howe si osserva che, fissato il parametro h/δ , l'intensità del rumore del bordo di fuga aumenta all'aumentare della lunghezza d'onda della dentellatura λ . Inoltre, quando $\lambda/h \geq 10$ e $\omega\delta/U_c > 1$ si ha che la soluzione del caso dentellato è praticamente la stessa del caso non dentellato. Si osserva anche che quando la frequenza ridotta $\omega\delta/U_c \rightarrow \infty$, lo spettro normalizzato dipende solo dal rapporto λ/h . Confrontando i risultati della dentellatura sinusoidale con quella a dente di sega, si osserva di come quest'ultima sia più efficace. Questo modello tuttavia tende a sovrastimare la riduzione di rumore nel caso in cui il bordo di fuga abbia una dentellatura con denti molto acuminati.

Dai risultati numerici del modello di Lyu-Azarpeyvand-Sinayoko si osserva che l'effetto dell'accoppiamento tra i modi non può essere trascurato, tuttavia questo modello non è ancora in grado di spiegare l'incremento di rumore osservato sperimentalmente per alte frequenze.

Per quanto riguarda l'estensione delle teorie precedenti al caso rotante, si è visto che la rotazione non ha un grande impatto sull'efficienza della dentellatura per bassi numeri di Mach.

Bibliografia

1. Amiet, R. K. (1975). Acoustic radiation from an airfoil in a turbulent stream. *Journal of Sound and Vibration*.
2. Amiet, R. K. (1976). Noise due to turbulent flow past a trailing edge. *Journal of Sound and Vibration*.
3. Brooks, T. F., Pope, D. S., & Marcolini, M. A. (1989). *Airfoil Self-Noise and Prediction*. NASA.
4. Dowling, A. P., & Ffowcs Williams, J. (1983). *Sound and Sources of Sound*.
5. Howe, M. S. (1978). A review of the theory of trailing edge noise. *Journal of Sound and Vibration*.
6. Howe, M. S. (1991). Aerodynamic noise of a serrated trailing edge. *Journal of Fluids and Structures*.
7. Howe, M. S. (1991). Noise produced by a sawtooth trailing edge. *The Journal of the Acoustical Society of America*.
8. Howe, M. S. (1999). Trailing edge noise at low Mach numbers. *Journal of Sound and Vibration*.
9. Howe, M. S. (2000). Trailing edge noise at low Mach numbers, Part 2: attached and separated edge flows. *Journal of Sound and Vibration*.
10. Lyu, B., Azarpeyvand, M., & Sinayoko, S. (2016). Prediction of noise from serrated trailing edges. *Journal of Fluid Mechanics*.
11. Mayer, Y. D., Lyu, B., Jawahar, H. K., & Azarpeyvand, M. (2018). Toward a Semi-Empirical Noise Prediction for Airfoils with Serrated Trailing Edges. *AIAA/CEAS Aeroacoustics Conference*.
12. Paterson, R. W., & Amiet, R. K. (1976). *Acoustic Radiation and Surface Pressure Characteristics of an Airfoil Due to Incident Turbulence*. NASA.
13. Sinayoko, S., Azarpeyvand, M., & Lyu, B. (2014). Trailing edge noise prediction for rotating serrated blades. *AIAA/CEAS Aeroacoustics Conference*.
14. Sinayoko, S., Joseph, P., & McAlpine, A. (2010). Multimode radiation from an unflanged, semi-infinite circular duct with uniform flow. *The Journal of the Acoustical Society of America*.
15. Sinayoko, S., Kingan, M., & Agarwal, A. (2013). Trailing edge noise theory for rotating blades in uniform flow. *Proceedings of the Royal Society A: Mathematical, Physical and Engineering Sciences*.

Appendice

A. Modello di Amiet

```

close all
clear all
clc

%% Data

% Choose a test case:
% 1. Airfoil noise
% 2. Lift admittance function
% 3. Trailing edge noise
n = 1;
switch n
    case 1
        % Airfoil
        b = 18*0.0254/2;
        d = 21*0.0254/2;
        % Observer position
        x = 0;
        y = 0;
        z = 7*0.3048;
        % Flow
        rho0 = 1.225;
        mu0 = 1.789*1e-5;
        c0 = 340;
        Mach = [0.091 0.145 0.232 0.362 0.513];
        freq = [200 250 315 400 500 630 800 1000 1250 1600 2000 2500];
    case 2
        % Airfoil
        b = 18*0.0254/2;
        d = 21*0.0254/2;
        % Observer position
        x = 0;
        y = 0;
        z = 7*0.3048;
        % Flow
        rho0 = 1.225;
        mu0 = 1.789*1e-5;
        c0 = 340;
        Mach = 0.5;
        freq = logspace(log10(50),log10(5000),500);
    case 3
        % Airfoil
        b = 5/2;
        d = 40/2;
        % Observer position
        x = 0;
        y = 0;
        z = 200;
        x_bar = x/b;
        y_bar = y/b;
        z_bar = z/b;
        % Flow
        rho0 = 1.225;

```

```

mu0 = 1.789*1e-5;
c0 = 340;
Mach = 0.3;
freq = logspace(log10(300),log10(7500),50);
end

%% Aeroacoustic model (Amiet)

for M = Mach
    U = M*c0;
    Uc = 0.7*U;
    Re = rho0*U*(2*b)/mu0;

    % Prandtl-Glauert transformation
    beta = sqrt(1-M^2);
    sigma = sqrt(x^2+beta^2*(y^2+z^2));

    i = 1;
    for fx = freq
        fy = 0;
        fz = 0;
        f = [fx,fy,fz];
        omega_vctr = 2*pi.*f;
        omega(i) = omega_vctr(1);
        omega_hat(i) = omega(i)*b/U;
        k = omega_vctr./c0;
        K = omega_vctr./Uc;
        K_bar = K.*b;

        Lambda(i) = M*K(1)*d;

        % Isotropic turbulence model (Karman spectrum)
        L = 1.25*0.0254;
        u_rms = 0.044*U;
        delta_star = 0.047*Re^(-1/5)*(2*b);
        omega_tilde(i) = omega(i)*delta_star/U;

        ke = sqrt(pi)/L*gamma(5/6)/gamma(1/3);
        k_hat = k./ke;
        K_hat = K./ke;

        I = 55/(9*sqrt(pi))*gamma(5/6)/gamma(1/3)*u_rms^2/ke^5;
        E = I*norm(k)^4/(1+(norm(k)/ke)^2)^(17/6);
        Psi_ww = 4/(9*pi)*u_rms^2/ke^2*(k_hat(1)^2+k_hat(2)^2)/...
            (1+k_hat(1)^2+k_hat(2)^2)^(7/3);
        ly = 8*L/3*(gamma(1/3)/gamma(5/6))^2*(K_hat(1)^2)/...
            ((3+8*K_hat(1)^2)*sqrt(1+K_hat(1)^2));

        % Airfoil response function
        S = @(s) (1/(1+2.4*s)+2*pi*s)^(-1/2);
        E_star = @(e) fresnelc(e)-1i*fresnels(e);
        G_amiet = (1/beta*S(omega_hat(i)/beta^2)*...
            (besselj(0,M^2*omega_hat(i)/beta^2)-...
            1i*besselj(1,M^2*omega_hat(i)/beta^2)))*exp(-1i*omega_hat(i));
        G1 = (1-1i)/(pi*omega_hat(i)*sqrt(M))*...
            E_star(sqrt(4*omega_hat(i)*M/(pi*(1+M))));
        G2 = sqrt(1+M)/(1i*M*(pi*omega_hat(i))^(3/2))*...
            (E_star(2/beta*sqrt(2*omega_hat(i)*M/pi))-(1-1i)/2+...
            ((1-1i)/2-sqrt(2/(1+M)))*...
            E_star(sqrt(4*omega_hat(i)*M/(pi*(1+M))))) *...
            exp(-1i*(2*omega_hat(i)*M/(1+M)));
    end
end

```

```

G_adamczyk = G1+G2;
G_asymptotic = -1i/(pi*omega_hat(i)*sqrt(M));

% Lift admittance function
A_amiet(i) = ly/d*norm(G_amiet)^2;
A_adamczyk(i) = ly/d*norm(G_adamczyk)^2;
A_asymptotic(i) = ly/d*norm(G_asymptotic)^2;

% Airfoil noise
Spp(i) = (omega(i)*rho0*b/(c0*z))^2*pi*U*d*...
    norm(G_asymptotic)^2*Psi_wv;
SPL(i) = 10*log10(L*d/z^2*M^5*(u_rms/U)^2*...
    K_hat(1)^3/(1+K_hat(1)^2)^(7/3))+181.3;

% Trailing edge noise
mu = M*omega(i)*b/(U*beta^2);
Theta = K_bar(1)+mu*(M-x/sigma);
Lift = 1/Theta*norm((1+1i)*(sqrt((1+M+K_bar(1)/mu)/(1+x/sigma))*...
    E_star(2*mu*(1+x/sigma))*exp(-1i*2*Theta)-...
    E_star(2*((1+M)*mu+K_bar(1))))+1-exp(-1i*2*Theta));
ly_TBL = 2.1*Uc/omega(i);
Sqq_TBL = (1/2*rho0*U^2)^2*(delta_star/U)*(2*1e-5)/...
    (1+omega_tilde(i)+0.217*omega_tilde(i)^2+0.00562*...
    omega_tilde(i)^4);
Spp_TE(i) = 8*pi*(omega(i)*b*z/(2*pi*c0*sigma^2))^2*...
    ly_TBL*d*Lift^2*Sqq_TBL;
SPL_TE(i) = 20*log10(sqrt(Spp_TE(i))/(2*1e-5));

i = i+1;
end

switch n
case 1
    figure(1)
    semilogx(omega/(2*pi),SPL,'linewidth',1)
    hold on
case 3
    figure(3)
    semilogx(omega/(2*pi),SPL_TE,'linewidth',1)
    hold on
end
end

switch n
case 1
    figure(1)
    axis([100 5000 40 120])
    set(gca,'xtick',[100 200 500 1000 2000 5000])
    xlabel('Frequency [Hz]')
    ylabel('SPL_{1/3} [dB]')
    for l = 1:length(Mach)
        Legend{1} = strcat(sprintf('M = %g',Mach(l)));
    end
    legend(Legend)
    title('Airfoil noise (Karman turbulence model)')
case 2
    figure(2)
    loglog(omega_hat,A_amiet,'linewidth',1)
    hold on
    loglog(omega_hat,A_adamczyk,'linewidth',1)
    loglog(omega_hat,A_asymptotic,'--','linewidth',1)

```

```

axis([1e-1 1e2 1e-6 1e-1])
xlabel('Reduced angular frequency')
ylabel('|A|^2')
legend('Amiet','Adamczyk','Asymptotic')
title(sprintf('Lift admittance function (M = %g)',Mach))
case 3
figure(3)
axis([1e2 1e4 0 40])
set(gca,'xtick',[100 200 500 1000 2000 5000 10000])
xlabel('Frequency [Hz]')
ylabel('SPL [dB]')
legend(sprintf('M = %g',Mach))
title('Trailing edge noise')
end

```

B. Modello di Howe

```

close all
clear all
clc

%% Data

% Airfoil
b = 1/2;
d = 10*b/2;

% Observer position
x1 = 0;
x2 = 100;
x3 = 0;
x_vctr = [x1,x2,x3];

% Flow
rho0 = 1.225;
mu0 = 1.789*1e-5;
c0 = 340;
M = 0.1;
U = M*c0;
Uc = 0.7*U;
Re = rho0*U*(2*b)/mu0;

% Prandtl-Glauert transformation
beta = sqrt(1-M^2);
sigma = sqrt(x1^2+beta^2*(x2^2+x3^2));

% Turbulence model
delta = 0.382*Re^(-1/5)*(2*b);
Cm = 0.1553;
epsilon = 1.33;
v_star = 0.03*U;

%% Aeroacoustic model (Howe)

lambda_h_vctr = [0.25 1 5];

for lambda_h = lambda_h_vctr
    h_delta = 1;
    h = h_delta*delta;
end

```

```

lambda = lambda_h*h;

red_freq_vctr = logspace(-1,2,500);

i = 1;
for red_freq = red_freq_vctr
    omega = red_freq*Uc/delta;
    f(i) = omega/(2*pi);
    k0 = omega/c0;
    K = omega/Uc;

    % Unserrated trailing edge noise
    Psi0(i) = red_freq^2/(red_freq^2+epsilon^2)^2;

    % Serrated trailing edge noise (sinusoidal serration)
    psi_sin = 0;
    for n = -1e3:1e3
        psi_sin = psi_sin + (red_freq^2+(2*n*pi*delta/lambda)^2)/...
            (red_freq^2+(2*n*pi*delta/lambda)^2+epsilon^2)^2*...
            besselj(n,omega*h/Uc)^2;
    end
    Psi_sin(i) = psi_sin;

    % Serrated trailing edge noise (sawtooth serration)
    syms F(eps)
    F(eps) = 1/(red_freq^2*(1+(4*h/lambda)^2)+eps^2)*...
        (1+(64*(h/lambda)^3*(delta/h)*red_freq^2*...
        (cosh((lambda/(2*delta))*sqrt(red_freq^2+eps^2))-...
        cos(2*omega*h/Uc)))/(sqrt(red_freq^2+eps^2)*(red_freq^2*...
        (1+(4*h/lambda)^2)+eps^2)*sinh((lambda/(2*delta))*...
        sqrt(red_freq^2+eps^2)))));
    dF = diff(F,eps);

    Psi_saw(i) = F(epsilon)+1/2*epsilon*double(dF(epsilon));

    i = i+1;
end

figure(1)
semilogx(red_freq_vctr,real(10*log10(Psi_sin)),'linewidth',1)
hold on

figure(2)
semilogx(red_freq_vctr,real(10*log10(Psi_saw)),'linewidth',1)
hold on
end

figure(1)
semilogx(red_freq_vctr,real(10*log10(Psi0)),'--','linewidth',1)
axis([-inf inf -60 0])
xlabel('\omega\delta/U_c')
ylabel('10 log_{10}(\Psi) [dB]')
for l = 1:length(lambda_h_vctr)
    Legend{1} = strcat(sprintf('%s/h = %g','\lambda',lambda_h_vctr(l)));
end
Legend{1+1} = 'Unserrated';
legend(Legend)
title(sprintf('Serrated trailing edge noise (sinusoidal serration, h/%s = %g)','\delta',h_delta))

figure(2)

```

```

semilogx(red_freq_vctr,real(10*log10(Psi0)),'--','linewidth',1)
axis([-inf inf -60 0])
xlabel('\omega\delta/U_c')
ylabel('10 log_{10}(\Psi) [dB]')
for l = 1:length(lambda_h_vctr)
    Legend{l} = strcat(sprintf('%s/h = %g','\lambda',lambda_h_vctr(l)));
end
Legend{l+1} = 'Unserrated';
legend(Legend)
title(sprintf('Serrated trailing edge noise (sawtooth serration, h/%s = %g)','\delta',h_delta))

```

C. Modello di Lyu,Azarpeyvand,Sinayoko

```

close all
clear all
clc

%% Data

% Airfoil
c = 1;
d = 10*c;

% Observer position
x1 = 0;
x2 = 0;
x3 = c;
x_vctr = [x1,x2,x3];
theta = atan(x3/x1);
phi = atan(x3/x2);

% Flow
rho0 = 1.225;
mu0 = 1.789*1e-5;
c0 = 340;
M0 = 0.1;
U = M0*c0;
Uc = 0.7*U;
Re = rho0*U*c/mu0;

% Prandtl-Glauert transformation
beta = sqrt(1-M0^2);
S0 = sqrt(x1^2+beta^2*(x2^2+x3^2));

% Turbulence model
delta = 0.382*Re^(-1/5)*c;
Cm = 0.1553;
Chi = 1.33;
v_star = 0.03*U;

%% Serration data

h_c = 0.050;
h = h_c*c;
lambda_h = 1;
lambda = lambda_h*h;

M = (d/lambda)/2;

```

```

N = 2*M+1;
eps = [-h,+h,-h];
chi = [-lambda/2,0,+lambda/2];
sigma_j = @(j) (eps(j+1)-eps(j))/(chi(j+1)-chi(j));
sigma = 4*h/lambda;

H_str = @(y) 0;
H_ser = @(y) serration(y,M,lambda,eps,chi,sigma_j);

figure(1)
y = linspace(-(lambda/2+1*lambda),+(lambda/2+1*lambda),1e1*N+1);
plot(H_ser(y),y,'linewidth',1)
axis([eps(1) eps(2) -inf inf])
xlabel('x')
ylabel('y')
title(sprintf('Sawtooth serration (h/c = %g , %s/h = %g)',h_c,'\lambda',lambda_h))

%% Aeroacoustic model (Lyu,Azarpeyvand,Sinayoko)

kc_vctr = logspace(-1,1.5,200);

i = 1;
for kc = kc_vctr
    k = kc/c;
    omega = k*c0;
    f(i) = omega/(2*pi);
    k1 = omega/Uc;
    k2 = 0;

    E = @(x) integral(@(t) exp(1i*t)./sqrt(2*pi*t),0,x);
    Gamma = @(x,mu,nu) exp(-1i*nu*x)*E(mu*x)-sqrt(mu/(mu-nu))*...
        E((mu-nu)*x)-exp(-1i*nu*x)/(1-1i);

    k2 = @(mode) k2+(2*mode*pi/lambda);
    K = @(mode) sqrt(k^2*(1+sigma^2)-k2(mode)^2*(beta^2+sigma^2))/...
        (beta^2+sigma^2);
    mu = @(mode) K(mode)+k1+k*M0/(beta^2+sigma^2);
    mu_A = k1+k*(M0-x1/S0)/beta^2;
    mu_B = @(mode,j) k1-(k2(mode)-k*x2/S0)/sigma_j(j);
    kappa = @(mode,j) k2(mode)-k*x2/S0+k*(M0-x1/S0)*sigma_j(j)/beta^2;
    eta_A = @(mode) K(mode)+k*M0/(beta^2+sigma^2)-k*(M0-x1/S0)/beta^2;
    eta_B = @(mode,j) K(mode)+k*M0/(beta^2+sigma^2)+...
        (k2(mode)-k*x2/S0)/sigma_j(j);

    a_str = @(mode) 1/lambda*integral(@(y) exp(1i*k1*H_str(y)).*...
        exp(-1i*(2*mode*pi/lambda)*y),-lambda/2,+lambda/2);
    a_ser = @(mode) 1/lambda*integral(@(y) exp(1i*k1*H_ser(y)).*...
        exp(-1i*(2*mode*pi/lambda)*y),-lambda/2,+lambda/2);

    Q = @(model,mode2,j) 1/kappa(model,j)*(1/mu_A*...
        (exp(1i*kappa(model,j)*chi(j+1))*...
        Gamma(c+eps(j+1),mu(mode2),mu_A)-exp(1i*kappa(model,j)*chi(j))*...
        Gamma(c+eps(j),mu(mode2),mu_A))-1/mu_B(model,j)*...
        exp(1i*kappa(model,j)*(chi(j)-(c+eps(j))/sigma_j(j)))*...
        (Gamma(c+eps(j+1),mu(mode2),mu_B(model,j))-...
        Gamma(c+eps(j),mu(mode2),mu_B(model,j)))));
    S = @(model,mode2,j) 1/(1i*kappa(model,j))*(1/sqrt(eta_A(mode2))*...
        (exp(1i*kappa(model,j)*chi(j+1))*E(eta_A(mode2)*(c+eps(j+1)))-...
        exp(1i*kappa(model,j)*chi(j))*E(eta_A(mode2)*(c+eps(j)))))-...
        1/sqrt(eta_B(mode2,j))*exp(1i*kappa(model,j))*...

```

```

        (chi(j)-(c+eps(j))/sigma_j(j)))*(E(eta_B(mode2,j)*(c+eps(j+1)))-...
        E(eta_B(mode2,j)*(c+eps(j)))));

psi_str = 0;
psi_ser = 0;
Theta_0_str = 0;
Theta_0_ser = 0;
for n = -1e0:1e0
    Theta_1_str = 0;
    Theta_1_ser = 0;
    for m = n-1:n+1
        if mod(n-m,2)==0
            nu_nm = 0;
        elseif mod(n-m,2)~=0
            nu_nm = 4*h/(pi^2*(n-m)^2);
        end
        Q_nn = 0;
        Q_nm = 0;
        S_nn = 0;
        S_nm = 0;
        for j = 1:2
            Q_nn = Q_nn + Q(n,n,j);
            Q_nm = Q_nm + Q(n,m,j);
            S_nn = S_nn + S(n,n,j);
            S_nm = S_nm + S(n,m,j);
        end
        Theta_1_str = Theta_1_str + nu_nm*li*k1*a_str(m)*...
            (Q_nn-Q_nm)-nu_nm*sqrt(mu(m))*a_str(m)*(S_nn-S_nm);
        Theta_1_ser = Theta_1_ser + nu_nm*li*k1*a_ser(m)*...
            (Q_nn-Q_nm)-nu_nm*sqrt(mu(m))*a_ser(m)*(S_nn-S_nm);
    end
    Theta_0_str = a_str(n)*Q_nn;
    Theta_0_ser = a_ser(n)*Q_nn;

    L_sqrdnorm_str = 2/(lambda^2*c^2)*norm(Theta_0_str+Theta_1_str)^2;
    L_sqrdnorm_ser = 2/(lambda^2*c^2)*norm(Theta_0_ser+Theta_1_ser)^2;

    psi_str = psi_str + L_sqrdnorm_str*(omega*delta/Uc)^4/...
        ((omega*delta/Uc)^2+(2*n*pi*delta/lambda)^2+Chi^2)^2;
    psi_ser = psi_ser + L_sqrdnorm_ser*(omega*delta/Uc)^4/...
        ((omega*delta/Uc)^2+(2*n*pi*delta/lambda)^2+Chi^2)^2;
end

Psi_str(i) = (x3*c/S0^2)^2*(Uc/c0)*psi_str;
Psi_ser(i) = (x3*c/S0^2)^2*(Uc/c0)*psi_ser;
Spp_str(i) = (rho0*v_star^2)^2*(d/c0)*Cm/(2*pi)*Psi_str(i);
Spp_ser(i) = (rho0*v_star^2)^2*(d/c0)*Cm/(2*pi)*Psi_ser(i);
SPL_str(i) = 20*log10(sqrt(Spp_str(i))/(2*1e-5));
SPL_ser(i) = 20*log10(sqrt(Spp_ser(i))/(2*1e-5));

% Howe's model (sawtooth serration)
red_freq = omega*delta/Uc;
syms F(epsilon)
F(epsilon) = 1/(red_freq^2*(1+(4*h/lambda)^2)+epsilon^2)*...
    (1+(64*(h/lambda)^3*(delta/h)*red_freq^2*...
    (cosh((lambda/(2*delta))*sqrt(red_freq^2+epsilon^2))-...
    cos(2*omega*h/Uc)))/sqrt(red_freq^2+epsilon^2)*...
    (red_freq^2*(1+(4*h/lambda)^2)+epsilon^2)*...
    sinh((lambda/(2*delta))*sqrt(red_freq^2+epsilon^2))));
dF = diff(F,epsilon);

```



```

Psi_howe_ser(i) = F(Chi)+1/2*Chi*double(dF(Chi));
Psi_howe_str(i) = red_freq^2/(red_freq^2+Chi^2)^2;
Spp_howe_ser(i) = (rho0*v_star^2)^2*(d/c0)*(delta/norm(x_vctr))^2*...
    Cm/pi*sin(theta/2)^2*sin(phi)*Psi_howe_ser(i);
Spp_howe_str(i) = (rho0*v_star^2)^2*(d/c0)*(delta/norm(x_vctr))^2*...
    Cm/pi*sin(theta/2)^2*sin(phi)*Psi_howe_str(i);
SPL_howe_ser(i) = 20*log10(sqrt(Spp_howe_ser(i))/(2*1e-5));
SPL_howe_str(i) = 20*log10(sqrt(Spp_howe_str(i))/(2*1e-5));

    i = i+1;
end

figure(2)
semilogx(kc_vctr,real(10*log10(Psi_str)),'--','linewidth',1)
hold on
semilogx(kc_vctr,real(10*log10(Psi_ser)),'linewidth',1)
legend('Straight','Serrated')
axis([-inf inf -100 -20])
xlabel('kc')
ylabel('10 log_{10}(\Psi) [dB]')
title(sprintf('Serrated trailing edge noise (h/c = %g , %s/h = %g)',h_c,'\lambda',lambda_h))

figure(3)
semilogx(kc_vctr,real(10*log10(Psi_str)),'--','linewidth',1)
hold on
semilogx(kc_vctr,real(10*log10(Psi_ser)),'linewidth',1)
semilogx(kc_vctr,real(10*log10(Psi_howe_str)),'--','linewidth',1)
semilogx(kc_vctr,real(10*log10(Psi_howe_ser)),'linewidth',1)
legend('New model (straight)','New model (serrated)','Howe''s model (straight)','Howe''s model (serrated)','location','northwest')
xlim([-inf inf])
xlabel('kc')
ylabel('10 log_{10}(\Psi) [dB]')
title(sprintf('Models comparison (h/c = %g , %s/h = %g)',h_c,'\lambda',lambda_h))

%% Serration function

function H = serration(y,M,lambda,eps,chi,sigma_j)

M = -M:M;

for i=1:length(M)
    for j=1:length(y)
        if y(j)>=(chi(1)+M(i)*lambda) && y(j)<=(chi(2)+M(i)*lambda)
            H(j) = sigma_j(1)*(y(j)-(chi(1)+M(i)*lambda))+eps(1);
        elseif y(j)>(chi(2)+M(i)*lambda) && y(j)<=(chi(3)+M(i)*lambda)
            H(j) = sigma_j(2)*(y(j)-(chi(2)+M(i)*lambda))+eps(2);
        end
    end
end
end
end
end

```