

**POLITECNICO DI TORINO**

**Corso di Laurea Magistrale  
in Ingegneria Meccanica**

**Tesi di Laurea Magistrale**

**Analisi della ridondanza nei manipolatori  
collaborativi: studio di indici caratteristici di  
configurazione**



**Relatori:**

Prof. Stefano Paolo Pastorelli

Prof. Stefano Mauro

Ing. Leonardo Sabatino Scimmi

**Candidata:**

Francesca Capetti

A.A. 2017/2018



# INDICE

INDICE.....	I
INDICE DELLE FIGURE .....	IV
INDICE DELLE TABELLE .....	IX
INTRODUZIONE .....	XI
CAPITOLO 1: Robotica collaborativa.....	1
1.1 Robotica.....	1
1.1.1 Manipolatori antropomorfi con polso sferico.....	2
1.1.2 Robotica collaborativa.....	2
1.2 Cinematica.....	4
1.2.1 Spazio operativo e spazio giunti.....	5
1.2.2 Grado di ridondanza .....	8
1.3 Struttura di un robot una volta ridondante nello spazio .....	10
1.3.1 Confronto tra un manipolatore a sette gradi di libertà e il braccio umano .....	14
1.4 Parametri e convenzione standard di Denavit-Hartenberg.....	17
1.5 Metodi di risoluzione della ridondanza .....	22
1.5.1 Pseudoinversa .....	22
1.5.2 Metodi generali di risoluzione della ridondanza .....	23
1.5.2.1 Ottimo vincolato.....	23
1.5.2.2 Spazio nullo .....	24
1.5.2.1 Compito aumentato .....	24

CAPITOLO 2: KUKA LBR iiwa 7 r800.....	25
2.1 Modellazione del robot attraverso la convenzione di Denavit-Hartenberg standard.....	28
2.2 Singularità.....	35
2.3 Modello semplificato di un manipolatore una volta ridondante nello spazio .....	37
2.3.1 Analisi geometrica.....	37
2.3.2 Sistema di riferimento per l'analisi della ridondanza.....	41
2.3.3 Matrice di trasformazione per la costruzione del sistema di riferimento per l'analisi della ridondanza .....	45
2.4 Cinematica inversa .....	57
2.4.1 Centro polso.....	58
2.4.2 Braccio.....	58
2.4.3 Polso .....	66
CAPITOLO 3: Limiti di giunto e ellissoide di manipolabilità.....	78
3.1 Analisi dei limiti di giunto.....	78
3.2 Ellissoide di manipolabilità .....	87
3.2.1 Ellissoide di manipolabilità per la posizione.....	93
CAPITOLO 4: Indici .....	102
4.1 Indici per i limiti dei giunti.....	103
4.1.1 Indice $c_{G1,i,j}$ .....	103
4.1.2 Indice $c_{G2,i,j}$ .....	104
4.1.3 Indice $c_{G3,i,j}$ .....	106
4.1.4 Indice finale per i limiti di giunto.....	108

4.2 Indici per la manipolabilità.....	110
4.2.1 Indice $c_{M,j}$ .....	110
4.3 Somma degli indici dei limiti di giunto e di manipolabilità....	112
4.4 Andamento degli indici lungo una traiettoria.....	117
4.4.1 Andamenti dell'indice dei giunti.....	117
4.4.2 Andamento dell'indice di manipolabilità.....	131
4.4.3 Andamento somma.....	133
4.5 Scelta delle configurazioni lungo una traiettoria.....	134
CONCLUSIONE.....	137
BIBLIOGRAFIA.....	139

# INDICE DELLE FIGURE

FIGURA 1. 1: SCHEMA DEI PRINCIPALI ELEMENTI COSTITUTIVI DI UN MANIPOLATORE .....	1
FIGURA 1. 2: SCHEMA DI UN MANIPOLATORE ANTROPOMORFO CON POLSO SFERICO A SEI ASSI .....	2
FIGURA 1. 3: ESEMPI DI ROBOT COLLABORATIVI. A) IRB 14000 YuMi; B) KUKA LBR iiwa 7 R800; C) UR3 UNIVERSAL ROBOTS.....	3
FIGURA 1. 4: SCHEMA DEL COLLEGAMENTO TRA LO SPAZIO GIUNTI E LO SPAZIO OPERATIVO ATTRAVERSO LA JACOBIANA .....	7
FIGURA 1. 5: SCHEMA DEL COLLEGAMENTO TRA LE FORZE E COPPIE GENERATE AI GIUNTI E LE FORZE E COPPIE GENERATE ALL'END EFFECTOR ATTRAVERSO IL TRASPOSTO DELLA JACOBIANA.....	7
FIGURA 1. 6: ESEMPIO DI RIDONDANZA IN UN GENERICO PIANO X-Y PER UNA GENERICA POSIZIONE, $P_{EE}$ , E ORIENTAZIONE DELL'END EFFECTOR.....	9
FIGURA 1. 7: MODELLO GENERALE DI UN MANIPOLATORE A SEI GRADI DI LIBERTÀ .....	11
FIGURA 1. 8: MODELLO GENERALE DI UN MANIPOLATORE A SETTE GRADI DI LIBERTÀ .....	12
FIGURA 1. 9: ROBOT ABB IRB 140 A SEI ASSI IN UNA CONFIGURAZIONE CHE PORTA L'END EFFECTOR IN UNA POSA CHE RISPETTO AL SISTEMA DI RIFERIMENTO 0 HA COORDINATE $x_0=0.2m$ , $y_0=0.2m$ E $z_0=0.55m$ E UNA ROTAZIONE ATTORNO ALL'ASSE $y_0$ PARI A $180^\circ$ E UNA ATTORNO ALL'ASSE $z_0$ PARI A $180^\circ$ .....	13
FIGURA 1. 10: ROBOT KUKA LBR iiwa 7 R800 A SETTE ASSI IN DUE DIVERSE CONFIGURAZIONI CHE PORTA L'END EFFECTOR NELLA STESSA POSA PRESENTE NELLA FIGURA 1.9 .....	13
FIGURA 1. 11: I SETTE MOVIMENTI POSSIBILI PER IL BRACCIO UMANO .....	14
FIGURA 1. 12: SCHEMA DEL GIUNTO SFERICO DI SPALLA. L'INCROCIO TRA GLI ASSI È IL CENTRO SPALLA $P_s$ .....	15
FIGURA 1. 13: SCHEMA DEL GIUNTO DI POLSO; L'INTERSEZIONE DEGLI ASSI È IL CENTRO POLSO $P_w$ .....	16
FIGURA 1. 14: COSTRUZIONE DEI SISTEMI DI RIFERIMENTO SECONDO LA CONVENZIONE DI DENAVIT-HARTENBERG STANDARD .....	17
FIGURA 2. 1: POSIZIONE DEI LINK E DEI GIUNTI PER IL MANIPOLATORE KUKA LBR iiwa 7 R800.....	26
FIGURA 2. 2: ASSI E VERSO DI ROTAZIONE DEI GIUNTI, POSIZIONE DEL CENTRO SPALLA $P_s$ , DEL GOMITO $P_e$ E DEL CENTRO POLSO $P_w$ E DISTANZE TRA QUESTI PUNTI PER IL ROBOT LBR iiwa 7 R800 .....	28
FIGURA 2. 3: SISTEMI DI RIFERIMENTO PER IL ROBOT KUKA LBR iiwa 7 R800 .....	30
FIGURA 2. 4: SISTEMI DI RIFERIMENTO PER IL ROBOT KUKA LBR iiwa 7 R800 RAPPRESENTATO IN CONFIGURAZIONE DI ZERO: A) SISTEMI DI RIFERIMENTO FISSO 0, SISTEMA DI RIFERIMENTO DELLA BASE E SISTEMA DI RIFERIMENTO DELL'END EFFECTOR; B) SISTEMI DI RIFERIMENTO FISSO 0 E SISTEMA DI RIFERIMENTO DEI GIUNTI DI SPALLA; C) SISTEMA DI RIFERIMENTO FISSO 0 E SISTEMA DI RIFERIMENTO DEL GIUNTO DI GOMITO; D) SISTEMA DI RIFERIMENTO FISSO 0 E SISTEMI DI RIFERIMENTO DEI GIUNTI DI POLSO .....	31

FIGURA 2. 5: POSIZIONI DI SINGOLARITÀ CINEMATICA PER IL ROBOT IN ESAME .....	36
FIGURA 2. 6: CIRCONFERENZA SULLA QUALE PUÒ ESSERE POSIZIONATO IL GIUNTO DI GOMITO .....	40
FIGURA 2. 7: SISTEMA DI RIFERIMENTO AUSILIARIO PER UNA GENERICA CONFIGURAZIONE DEL ROBOT .....	43
FIGURA 2. 8: VERSORI DEGLI ASSI DEL NUOVO SISTEMA DI RIFERIMENTO E ANGOLO DI SWIVEL.....	43
FIGURA 2. 9: SCHEMA DI UNA CONFIGURAZIONE PER LA QUALE IL BRACCIO È COMPLETAMENTE ESTESO .....	44
FIGURA 2. 10: TRASLAZIONE DI UN SISTEMA DI RIFERIMENTO SOLIDALE A QUELLO 0 (IN NERO) PER OTTENERE IL SISTEMA DI RIFERIMENTO $x'-y'-z'$ (IN BLU) .....	46
FIGURA 2. 11: ROTAZIONE DEL SISTEMA $x'-y'-z'$ (IN VERDE) ATTORNO ALL'ASSE $z'$ PER OTTENERE IL SISTEMA DI RIFERIMENTO $x''-y''-z''$ (IN BLU) .....	47
FIGURA 2. 12: ROTAZIONE DEL SISTEMA DI RIFERIMENTO $x''-y''-z''$ (IN VERDE) ATTORNO ALL'ASSE $y''$ PER OTTENERE IL SISTEMA DI RIFERIMENTO $x'''-y'''-z'''$ (IN VIOLA) .....	48
FIGURA 2. 13: FASCIO DI PIANI PASSANTI DA CENTRO SPALLA, CENTRO POLSO E DALLE POSIZIONI DEL GOMITO..	49
FIGURA 2. 14: ESEMPIO DI UN GENERICO PIANO $\pi$ E DEI VETTORI $\underline{n}_\pi$ E $\underline{n}_{\pi_0}$ AD ESSO ASSOCIATI.....	52
FIGURA 2. 15: ESEMPIO DI UN GENERICO PIANO $\pi^*$ E DEI VETTORI $\underline{n}_\pi^*$ E $\underline{n}_{\pi_0}^*$ AD ESSO ASSOCIATI.....	52
FIGURA 2. 16: SISTEMA DI RIFERIMENTO R (IN ARANCIONE).....	54
FIGURA 2. 17: CIRCONFERENZA SULLA QUALE IL GOMITO DEL ROBOT PUÒ POSIZIONARSI PER UNA GENERICA POSA DELL'END EFFECTOR .....	56
FIGURA 2. 18: ESEMPIO DI POSA DEL MANIPOLATORE A SETTE GIUNTI $P_{EE}=[-0.1, -0.1, 0.8]^T \text{ROT}(x_0, 90^\circ),$ $\text{ROT}(y_0, 0^\circ), \text{ROT}(z_0, 0^\circ)$ .....	57
FIGURA 2. 19: ROTAZIONI DERIVANTI DALLA VARIAZIONE DELLA CONFIGURAZIONE DEI GIUNTI ROTAZIONE, È INDICATA CON A LA ROTAZIONE CHE DERIVA DAL GIUNTO 1, CON B QUELLA CHE DERIVA DAL GIUNTO 2, CON C QUELLA CHE DERIVA DAL GIUNTO 3 E LA D DAL GIUNTO 4.....	59
FIGURA 2. 20: ESEMPIO DI CONFIGURAZIONE DEL ROBOT AVENDO APPLICATO LE ROTAZIONI DEI PRIMI DUE GIUNTI E DEL QUARTO UTILI PER FAR SÌ CHE IL ROBOT RAGGIUNGA LA POSA VISIBILE NELLA FIGURA 2.18 .....	62
FIGURA 2. 21: ESEMPIO DI CONFIGURAZIONE DEL ROBOT AVENDO APPLICATO LE ROTAZIONI NEI PRIMI QUATTRO GIUNTI PER RAGGIUNGERE LA POSA VISIBILE NELLA FIGURA 2.18.....	65
FIGURA 2. 22: NELLA COLONNA DI DESTRA SI PUÒ VEDERE IL ROBOT NELLE OTTO POSSIBILI CONFIGURAZIONI PER LA POSA DELL'END EFFECTOR VISIBILE NELLA FIGURA 2.18 E AVENTE IL GOMITO NELLA CONFIGURAZIONE PER LA QUALE L'ANGOLO DI SWIVEL È PARI A ZERO. NELLA COLONNA DI SINISTRA SONO PRESENTI GLI ANDAMENTI DEI SETTE GIUNTI PER OGNUNA DELLE OTTO POSSIBILI CONFIGURAZIONI DEI GIUNTI IN FUNZIONE DELL'ANGOLO DI SWIVEL .....	77

FIGURA 3. 1: ESEMPIO DI POSIZIONI CHE IL GOMITO PUÒ ASSUMERE (IN NERO) RISPETTO ALLA CIRCONFERENZA DELLE POSIZIONI POSSIBILI PER LA POSA VISIBILE NELLA FIGURA 2.18, CHE PORTA L'END EFFECTOR NELLE COORDINATE $[-0.1 -0.1 0.8]$ CON ORIENTAZIONE PARI A $[90^\circ 0^\circ 0^\circ]$ .....	79
FIGURA 3. 2: ESEMPIO DI POSIZIONI CHE IL GOMITO PUÒ ASSUMERE NEL PIANO YR-ZR, PER LA POSA VISIBILE NELLA FIGURA 3.1 .....	79
FIGURA 3. 3: ESEMPIO DI ANGOLI DI SWIVEL (IN NERO) CHE IL ROBOT PUÒ ASSUMERE, PER LA POSA VISIBILE NELLA FIGURA 3.1 .....	79
FIGURA 3. 4: ESEMPIO DI ANGOLI DI SWIVEL CHE GENERANO UNA CONFIGURAZIONE CHE RIENTRA NEI LIMITI DI GIUNTO PER LE OTTO DIVERSE SOLUZIONI DELLA CINEMATICA INVERSA, PER LA POSA VISIBILE NELLA FIGURA 3.1 .....	80
FIGURA 3. 5: ESEMPIO DI SETTORI CIRCOLARI LUNGO I QUALI IL GOMITO PUÒ POSIZIONARSI NEL PIANO YR-ZR, PER LA POSA VISIBILE NELLA FIGURA 3.1, PER UNA DELLE OTTO SOLUZIONI DI CINEMATICA INVERSA .....	80
FIGURA 3. 6: ESEMPIO DI QUALI ANGOLI DI SWIVEL SONO CONSENTITI AL MANIPOLATORE, CONSIDERANDO UN GIUNTO PER VOLTA L'UNICO AD AVERE LIMITI DI GIUNTO, PER LE OTTO POSSIBILI SOLUZIONI DI CINEMATICA INVERSA IN FUNZIONE DELL'ANGOLO DI SWIVEL, PER LA POSA VISIBILE NELLA FIGURA 3.1 .....	83
FIGURA 3. 7: ESEMPIO DI QUALI ANGOLI DI SWIVEL SONO CONSENTITI AL MANIPOLATORE, CONSIDERANDO UN GIUNTO PER VOLTA L'UNICO AD AVERE LIMITI DI GIUNTO, CONSIDERANDO CONTEMPORANEAMENTE TUTTE LE OTTO POSSIBILI SOLUZIONI DELLA CINEMATICA INVERSA, PER LA POSA VISIBILE NELLA FIGURA 3.1 .....	84
FIGURA 3. 8: ESEMPIO DI QUALI ANGOLI DI SWIVEL SONO CONSENTITI AL MANIPOLATORE, CONSIDERANDO UNA VOLTA I GIUNTI DI BRACCIO E UNA VOLTA I GIUNTI DI POLSO GLI UNICI AD AVERE I LIMITI DI GIUNTO, PER LE OTTO POSSIBILI SOLUZIONI DI CINEMATICA INVERSA IN FUNZIONE DELL'ANGOLO DI SWIVEL, PER LA POSA VISIBILE NELLA FIGURA 3.1 .....	85
FIGURA 3. 9: ESEMPIO DI QUALI ANGOLI DI SWIVEL SONO CONSENTITI AL MANIPOLATORE, CONSIDERANDO UNA VOLTA I GIUNTI DI BRACCIO E UNA VOLTA I GIUNTI DI POLSO GLI UNICI AD AVERE I LIMITI DI GIUNTO, CONSIDERANDO CONTEMPORANEAMENTE TUTTE LE OTTO POSSIBILI SOLUZIONI DELLA CINEMATICA INVERSA, PER LA POSA VISIBILE NELLA FIGURA 3.1 .....	85
FIGURA 3. 10: ESEMPIO DI ARCHI DELLA CIRCONFERENZA DI SWIVEL CHE IL ROBOT PUÒ ASSUMERE CONSIDERANDO TUTTI I GIUNTI CON I LIMITI PER LA PRIMA CONFIGURAZIONE PER LA POSA VISIBILE NELLA FIGURA 3.1 .....	86
FIGURA 3. 11: SCHEMA GENERICO DI UN ELLISSOIDE DI MANIPOLABILITÀ CINEMATICA NELLO SPAZIO E DEI SUOI ASSI PRINCIPALI .....	87
FIGURA 3. 12: ESEMPIO DELL'ELLISSOIDE DI MANIPOLABILITÀ CINEMATICA E DELL'ELLISSOIDE DI MANIPOLABILITÀ IN FORZA NEL PIANO .....	88
FIGURA 3. 13: ESEMPIO DI ELLISSOIDE DI MANIPOLABILITÀ PER UNA GENERICA CONFIGURAZIONE .....	91
FIGURA 3. 14: ESEMPIO DEL PUNTO $P_M$ RIFERITO AL SISTEMA DI RIFERIMENTO $O$ .....	94



FIGURA 3. 15: ESEMPIO DI DIVERSE LUNGHEZZE DEL SEGMENTO CHE INDICA QUAL È LA CAPACITÀ DEL ROBOT IN UNA CONFIGURAZIONE DI GENERARE VELOCITÀ ALL'END EFFECTOR IN UNA DETERMINATA DIREZIONE....	94
FIGURA 3. 16: ESEMPIO DI ELLISSOIDE DI MANIPOLABILITÀ PER DUE DIVERSE CONFIGURAZIONI DEL ROBOT PER LA STESSA POSA DELL'END EFFECTOR .....	95
FIGURA 3. 17: ESEMPIO DI DIVERSE LUNGHEZZE DEL SEGMENTO CHE INDICA QUAL È LA CAPACITÀ DEL ROBOT IN DUE DIVERSE CONFIGURAZIONI DI GENERARE VELOCITÀ ALL'END EFFECTOR CONSIDERANDO LO STESSO PUNTO $P_M$ PER LE DUE CONFIGURAZIONI VISIBILI NELLA FIGURA 3.16.....	95
FIGURA 3. 18: ESEMPIO DEGLI ELLISSOIDI DI MANIPOLABILITÀ PER SEI CONFIGURAZIONI DIVERSE CHE PORTANO L'END EFFECTOR AD ASSUMERE LA STESSA POSA .....	98
FIGURA 3. 19: ESEMPIO DELLA DISTANZA $M$ , CIOÈ LA DISTANZA TRA IL PUNTO $P_M$ , PUNTO IN CUI SI VUOLE PORTARE IL CENTRO POLSO, E IL PUNTO DI INTERSEZIONE TRA L'ELLISSOIDE E LA RETTA PASSANTE PER IL PUNTO $P_M$ E IL CENTRO POLSO .....	100
FIGURA 3. 20: ANDAMENTO DEL PARAMETRO $M$ IN FUNZIONE DELL'ANGOLO DI SWIVEL PER LA POSA VISIBILE NELLA FIGURA 3.19 .....	101
FIGURA 4. 1: ESEMPIO DELL'ANDAMENTO DELL'INDICE $C_{G1}$ PER UNA GENERICA POSA DELL'END EFFECTOR, PER UN GENERICO GIUNTO / E PER UNA GENERICA CONFIGURAZIONE $J$ .....	104
FIGURA 4. 2: ESEMPIO GRAFICO DI COME SI POSSA RICAVARE GRAFICAMENTE L'INDICE $C_{G2,i}$ , CONSIDERANDO UN VALORE $Q^*$ DI UN GENERICO GIUNTO.....	105
FIGURA 4. 3: A SINISTRA ESEMPIO DI COME L'INDICE $C_{G2}$ (IN ROSSO) VIENE SCALATO DALL'INDICE $C_{G1}$ (IN BLU) PER DARE L'INDICE $C_{G3}$ (IN GIALLO); A DESTRA SI PUÒ VEDERE COME LO STESSO RISULTATO SIA CONTINUO LUNGO LA CIRCONFERENZA DI SWIVEL .....	106
FIGURA 4. 4: ANDAMENTO DELL'INDICE $C_{G3}$ PER I SETTE I GIUNTI DEL MANIPOLATORE PER UNO DEGLI OTTO RISULTATI DELLA CINEMATICA, IN FUNZIONE DELL'ANGOLO DI SWIVEL PER LA POSA VISIBILE NELLA FIGURA 2.18, CHE PORTA L'END EFFECTOR NELLE COORDINATE $[-0.1 -0.1 0.8]$ CON ORIENTAZIONE PARI A $[90^\circ 0^\circ 0^\circ]$ .....	107
FIGURA 4. 5: ANDAMENTI DEGLI INDICI $C_{G,p}$ , $C_{G,o}$ E $C_{G,r}$ PER LE OTTO POSSIBILI SOLUZIONI DI CINEMATICA INVERSA PER LA POSA A CUI FA RIFERIMENTO LA FIGURA 4.4 .....	109
FIGURA 4. 6: ESEMPIO GRAFICO DI COME SI PUÒ RICAVARE L'INDICE $C_{M,i}$ , CONSIDERANDO UN GENERICO VALORE $M^*$ .....	111
FIGURA 4. 7: ESEMPIO DI ANDAMENTO DEL COEFFICIENTE $C_M$ IN FUNZIONE DELL'ANGOLO DI SWIVEL PER LA POSA VISIBILE NELLA FIGURA 4.4 .....	111
FIGURA 4. 8: ANDAMENTO DEI COEFFICIENTI $P_G$ E $P_M$ IN FUNZIONE DEL COEFFICIENTE $P$ .....	113
FIGURA 4. 9: ESEMPIO DI COME SI POSSONO RICAVARE GRAFICAMENTE I VALORI DEI COEFFICIENTI $P_G$ E $P_M$ PER UN DETERMINATO VALORE DEL COEFFICIENTE $P$ .....	114

FIGURA 4. 10: ANDAMENTO DELLA FUNZIONE LOGISTICA $F$ .....	116
FIGURA 4. 11: ESEMPIO DELLE POSIZIONI CHE IL GOMITO DEL ROBOT PUÒ ASSUMERE RISPETTANDO I LIMITI DI GIUNTO (IN BLU), RISPETTO ALLE CIRCONFERENZE DESCRITTE DAGLI ANGOLI DI SWIVEL (IN NERO), PER PERCORRERE UNA CERTA TRAIETTORIA (IN ROSSO) .....	118
FIGURA 4. 12: NELLA PRIMA RIGA ESEMPIO DEGLI ANGOLI DI SWIVEL CHE IL ROBOT PUÒ ASSUMERE (IN NERO), NELLE ALTRE RIGHE GLI ANGOLI DI SWIVEL (IN NERO) CHE IL ROBOT PUÒ ASSUMERE SE SI CONSIDERA IL ROBOT PRIVO DI LIMITI DI GIUNTI IN TUTTI I GIUNTI A PARTE IL GIUNTO I-ESIMO, PER LA TRAIETTORIA RAPPRESENTATA NELLA FIGURA 4.11 CONSIDERANDO UNA DELLE OTTO POSSIBILI SOLUZIONI DI CINEMATICA INVERSA .....	118
FIGURA 4. 13: NELLA PRIMA RIGA ESEMPIO DEGLI ANGOLI DI SWIVEL CHE IL ROBOT PUÒ ASSUMERE (IN NERO), NELLA SECONDA RIGA GLI ANGOLI DI SWIVEL CHE IL ROBOT PUÒ ASSUMERE (IN NERO) SE SI CONSIDERANO SOLO I GIUNTI RESPONSABILI DELLA POSIZIONE DELL'END EFFECTOR AVENTI LIMITI DI GIUNTO, NELLA TERZA RIGA GLI ANGOLI DI SWIVEL CHE IL ROBOT PUÒ ASSUMERE (IN NERO) SE SI CONSIDERANO SOLO I GIUNTI RESPONSABILI DELL'ORIENTAZIONE DELL'END EFFECTOR AVENTI LIMITI DI GIUNTO, PER LA TRAIETTORIA RAPPRESENTATA NELLA FIGURA 4.11 CONSIDERANDO UNA DELLE OTTO POSSIBILI SOLUZIONI DI CINEMATICA INVERSA .....	119
FIGURA 4. 14: ANDAMENTO DELL'INDICE $C_{G3,l,1}$ PER I SETTE GIUNTI LUNGO LA TRAIETTORIA RAPPRESENTATA NELLA FIGURA 4.11 .....	127
FIGURA 4. 15: ANDAMENTO DEGLI INDICI $C_{G3,p,1}$ , $C_{G3,o,1}$ E $C_{G3,r,1}$ LUNGO LA TRAIETTORIA RAPPRESENTATA NELLA FIGURA 4.11.....	130
FIGURA 4. 16: ANDAMENTO DELL'INDICE DI MANIPOLABILITÀ LUNGO LA TRAIETTORIA VISIBILE NELLA FIGURA 4.11 PER UNA DELLE SOLUZIONI DI CINEMATICA INVERSA .....	131
FIGURA 4. 17: ANDAMENTO DELL'ELLIPSOIDE DI MANIPOLABILITÀ LUNGO LA TRAIETTORIA VISIBILE NELLA FIGURA 4.11 PER L'ANGOLO DI SWIVEL PARI A ZERO PER UNA DELLE POSSIBILI SOLUZIONI DI CINEMATICA INVERSA .....	132
FIGURA 4. 18: ANDAMENTO DELL'INDICE TOTALE LUNGO LA TRAIETTORIA VISIBILE NELLA FIGURA 4.11 PER UNA DELLE SOLUZIONI DI CINEMATICA INVERSA .....	133
FIGURA 4. 19: IN ROSSO, SEQUENZA DI CONFIGURAZIONI PIÙ FAVOREVOLE PER LA TRAIETTORIA VISIBILE NELLA FIGURA 4.11; IN VERDE, PERCORSI ALTERNATIVI CHE NON SONO PERÒ A INDICE MASSIMO .....	135

# INDICE DELLE TABELLE

TABELLA 2. 1: LIMITI DI GIUNTO PER IL ROBOT LBR IIWA KUKA 7 R800.....	26
TABELLA 2. 2: VELOCITÀ ANGOLARI PER I GIUNTI DEL ROBOT LBR IIWA KUKA 7 R800 .....	27
TABELLA 2. 3: PARAMETRI DI DENAVIT-HARTENBERG SECONDO LA CONVENZIONE STANDARD PER IL ROBOT LBR IIWA KUKA 7 R800 .....	29
TABELLA 2. 4: PARAMETRI DI DENAVIT-HARTENBERG SECONDO LA CONVENZIONE STANDARD PER LA BASE E PER L'END EFFECTOR .....	29
TABELLA 4. 1: VALORI ARROTONDATI DEI COEFFICIENTI $A_p$ , $B_p$ , $C_p$ E $D_p$ DELLE FUNZIONI LOGISTICHE CHE RAPPRESENTANO L'ANDAMENTO DEI COEFFICIENTI $P_G$ E $P_M$ .....	112



# INTRODUZIONE

Lo scopo di questo elaborato è l'analisi della ridondanza nei manipolatori collaborativi e lo studio di una metodologia per definire degli indici che permettano di paragonare tra di loro le configurazioni che possono essere assunte dal robot. Inizialmente si sono studiate le caratteristiche principali della cinematica dei robot a sette gradi di libertà e le metodologie di risoluzione del problema della ridondanza. Successivamente si è considerato come caso di studio il manipolatore KUKA LBR iiwa 7 R800, robot collaborativo a sette gradi di libertà, che presenta delle caratteristiche strutturali rappresentative della maggior parte dei robot aventi lo stesso numero di gradi di libertà. La principale problematica nella cinematica dei manipolatori ridondanti è la scelta della configurazione da assumere; infatti, data una certa posa del punto terminale del manipolatore, chiamato End Effector, si possono avere un numero infinito di configurazioni del robot. Studiando la struttura del robot in esame, si è potuto costruirne un modello semplificato, tramite il quale si è studiata la ridondanza. In particolare, si è potuto trovare un unico parametro dato il quale, conoscendo la posa dell'organo terminale del manipolatore, si può individuare la configurazione nella quale si trova il robot. Questo parametro prende il nome di angolo di Swivel.

Il manipolatore presenta capacità diverse, come ad esempio quella di sviluppare una certa forza o velocità all'End Effector. Il peso di tali capacità in ogni configurazione è stato misurato costruendo un indice; tale indice permette il confronto tra diverse configurazioni. Prima della scelta della configurazione si deve stabilire quale o quali capacità del manipolatore si vogliono massimizzare in una determinata posa. Tra le tante capacità misurabili, ci si è focalizzati su due in particolare: la prima è legata ai limiti di giunto; la seconda è legata alla velocità dell'End

Effector. È stata definita una metodologia utile ad ottenere un'indicazione della combinazione delle due capacità in una certa configurazione, assegnata una certa priorità ad una caratteristica piuttosto che all'altra pesandone i rispettivi indici. La suddetta metodologia restituisce un indice utile al confronto di configurazioni diverse, questa ad esempio può essere applicata alla scelta della configurazione per una certa posa dell'End Effector, la configurazione così individuata è quella che offre il miglior compromesso tra le capacità scelte e pesate. Successivamente si è applicato lo studio a una traiettoria. In generale, per un dato percorso che l'End Effector deve eseguire, non tutte le configurazioni per le quali l'indice è massimo possono essere assunte dal manipolatore una successivamente all'altra; infatti potrebbe accadere che non ci sia sufficiente tempo per ruotare il braccio affinché si assuma la configurazione voluta o che per passare da una configurazione all'altra si debba passare da certe configurazioni che hanno uno o più giunti che superano i propri limiti. Si è costruito quindi un metodo che ottimizzi la scelta delle configurazioni tenendo conto del percorso che si vuole compiere; la sequenza di configurazioni così scelte potrebbe non essere quella che si otterrebbe andando a scegliere le configurazioni per ogni posa considerata indipendente dalla traiettoria. Lo studio e la modellazione del manipolatore sono stati eseguiti tramite l'ausilio dell'ambiente di simulazione Matlab, in particolare usufruendo del Robotics Toolbox di Peter Corke. Inoltre, si è impiegato, come ambiente di visualizzazione, il software V-REP.

.

# CAPITOLO 1: Robotica collaborativa

## 1.1 Robotica

L'utilizzo di sistemi automatici in ambito industriale è sempre più diffuso. Infatti, questi sistemi portano numerosi vantaggi, tra cui un minor costo di produzione, una migliore ripetibilità e precisione nelle lavorazioni e la sostituzione dell'operatore umano in azioni che possono essere pericolose o dannose o eccessivamente ripetitive. I robot industriali, o manipolatori, permettono a un sistema automatico di interagire con l'ambiente circostante in modo autonomo. Gli elementi costitutivi di un manipolatore industriale sono: una base, un insieme di corpi rigidi, chiamati *link*, collegati a due a due da giunti, e un organo terminale. La base del robot è solitamente vincolata al terreno ed è il riferimento tramite cui si può risalire alla posizione e all'orientazione dei link del robot. I giunti sono gli elementi che permettono il moto relativo tra i link ad esso collegati. I link sono gli elementi rigidi del manipolatore. Il numero di giunti determina il numero di movimenti che il robot può compiere. Uno schema dei principali elementi di un manipolatore è riportato in figura 1.1.

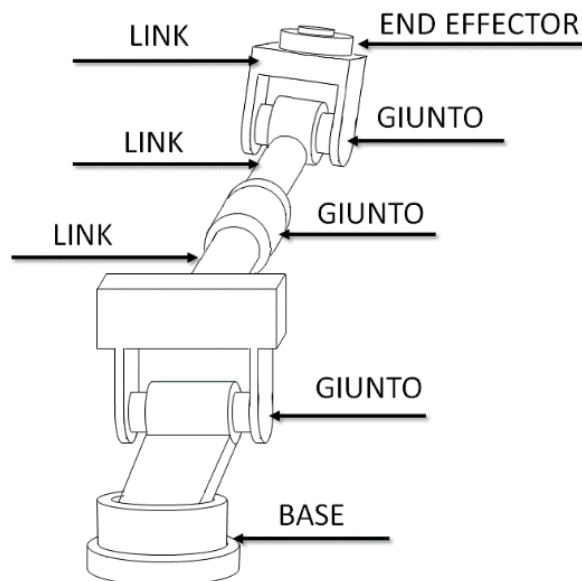


Figura 1. 1:Schema dei principali elementi costitutivi di un manipolatore

### 1.1.1 Manipolatori antropomorfi con polso sferico

In ambito industriale spesso sono utilizzati i manipolatori antropomorfi a polso sferico, dotati di sei giunti. Nella figura 1.2 si può osservare uno schema di questa tipologia di robot. Il nome antropomorfo deriva dal fatto che essi presentano una struttura che in parte ricorda quella del braccio umano. Il polso viene definito monocentrico quando gli assi degli ultimi tre giunti si incrociano in un punto. I primi due giunti solitamente vengono chiamati giunti di spalla; il terzo giunto di gomito e gli ultimi tre giunti compongono quello che è chiamato polso.

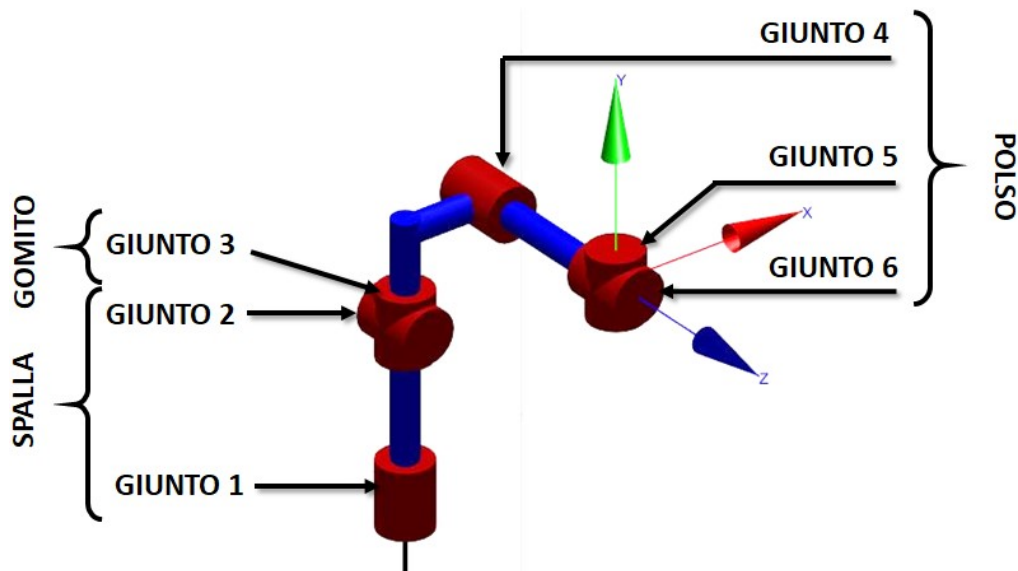


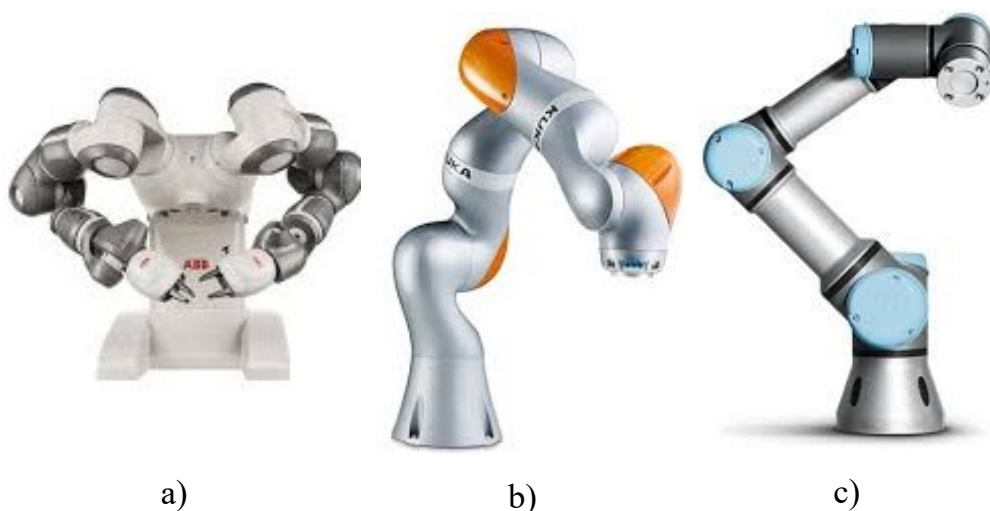
Figura 1. 2: Schema di un manipolatore antropomorfo con polso sferico a sei assi

### 1.1.2 Robotica collaborativa

Da qualche anno sono stati inseriti in ambito industriale dei particolari manipolatori chiamati robot collaborativi. Le caratteristiche di un robot collaborativo, anche chiamato Cobot, dalla contrazione del nome in inglese Collaborative Robot [1], permettono la compresenza nella stessa area di lavoro di operatore umano e robot e lo svolgimento contemporaneo di uno stesso compito.



Nella figura 1.3 sono visibili degli esempi di robot collaborativi. La classe dei rischi, i cui requisiti di sicurezza sono previsti dalla Norma Tecnica UNI EN ISO 10218-2:2011 (Robot per ambienti industriali - Requisiti di sicurezza) e dalla Direttiva Macchine 2006/42/EC, sono indicati nella Specifica Tecnica ISO/TS 15066, dedicata ai requisiti di sicurezza delle modalità collaborative. Queste lasciano all'essere umano il libero accesso allo spazio di lavoro del robot e la possibilità di interazione con questo, garantendo le condizioni di sicurezza per l'operatore umano. Si possono così sfruttare contemporaneamente sia le caratteristiche proprie dell'uomo sia quelle del robot, migliorando così la flessibilità, la produttività e la qualità della produzione. Per rendere l'ambiente di lavoro più confortevole per l'uomo si può cercare di non far compiere al manipolatore operazioni improvvise o a velocità troppo elevata. Per far sì che l'operatore umano abbia percezione di sicurezza il robot dovrebbe assumere delle configurazioni che siano più simili a quelle umane affinché i suoi gesti non siano del tutto imprevedibili da parte dell'essere umano.



**Figura 1. 3: Esempi di robot collaborativi. a) IRB 14000 YuMi; b) KUKA LBR iiwa 7 R800; c) UR3 Universal Robots**

## 1.2 Cinematica

Per poter utilizzare in modo efficiente un robot di qualsiasi tipologia, bisogna poterne programmare i movimenti e prevedere come esso reagisca a stimoli esterni. Per fare ciò è essenziale lo studio della cinematica del manipolatore. In generale, i link dei manipolatori sono collegato tra loro da giunti che possono essere rotoïdali o prismatici. Ogni giunto permette una rotazione o traslazione relativa tra due link successivi. Questi movimenti relativi permettono all'End Effector di posizionarsi in un preciso punto nello spazio con una precisa orientazione. L'insieme delle informazioni di posizione e orientazione prende il nome di *posa*. Descrivere un manipolatore attraverso un modello cinematico permette di mettere in relazione la configurazione dei giunti e, quindi, la posizione relativa dei link, con la posa dell'End Effector. La cinematica diretta permette di individuare, conoscendo la configurazione dei giunti, la posa dell'End Effector; mentre la cinematica inversa permette di individuare una o più configurazioni che assegnate ai giunti permettono all'End Effector di raggiungere una determinata posa.

### 1.2.1 Spazio operativo e spazio giunti

Per poter collegare la posizione fisica nello spazio di ogni link e dell'End Effector al movimento di ogni giunto, può essere utile prima definire i concetti di spazio giunti e di spazio operativo e di analizzare come questi sono collegati tra di loro. Lo spazio operativo  $R$ , è lo spazio cartesiano in cui l'End Effector può muoversi; esso è di dimensione  $m$  ed è lo spazio a cui appartiene il vettore  $\underline{r}$  contenente la posa dell'End Effector del robot. Lo spazio giunti  $Q$ , è lo spazio contenente le configurazioni che i giunti possono assumere, è di dimensione  $n$  ed è lo spazio a cui appartiene il vettore  $\underline{q}$  contenente le configurazioni dei giunti. Si può definire un'applicazione lineare  $f$  che applica il cambiamento tra uno spazio e l'altro [2]:

$$\underline{r} = f(\underline{q}) \text{ dove } f: Q \rightarrow R \quad (1.1)$$

Lo stesso ragionamento può essere applicato allo studio delle velocità. Chiamando  $\underline{\dot{r}}$  il vettore contenente le velocità di traslazione e rotazione dell'End Effector e  $\underline{\dot{q}}$  il vettore contenente le velocità dei giunti si può definire una matrice di trasformazione che applica il cambiamento da uno spazio all'altro. Questa matrice prende il nome di matrice Jacobiana ed è dimensione  $m \times n$ . Si può quindi scrivere:

$$\underline{\dot{r}} = J(\underline{q}) \underline{\dot{q}} \quad (1.2)$$

Dove  $J$  è lo Jacobiano e dipende dalla configurazione dei giunti  $\underline{q}$ . Le  $m/2$  righe superiori collegano le velocità di giunto con le velocità lineari dell'End Effector, mentre le rimanenti righe collegano le velocità di giunto

con il vettore della velocità angolare. Nella figura 1.4 è rappresentato uno schema di come sono collegati lo spazio operativo e lo spazio giunti [2]. Lo spazio immagine dello Jacobiano è il sottospazio  $R^m$  che individua le velocità dell'End Effector generabili dalle velocità dei giunti:

$$Im(J) \in R^m \quad (1.3)$$

Lo spazio nullo dello Jacobiano rappresenta il sottospazio  $R^n$  a cui appartengono le velocità di giunto che non producono alcuna velocità all'organo terminale nella configurazione assegnata:

$$Ker(J) \in R^n \quad (1.4)$$

Il concetto di spazio nullo è direttamente collegato a quello di ridondanza, come verrà spiegato più in dettaglio nel prossimo paragrafo. Per la dualità cineto-statica, lo spazio immagine dello Jacobiano trasposto individua il sottospazio delle forze e coppie che possono essere generate nei giunti per ottenere determinate forze all'End Effector. Lo spazio nullo della trasposta dello Jacobiano indica il sottospazio delle forze e delle coppie esterne che sono bilanciate da coppie e forze ai giunti nulle. Nella figura 1.5 si può vedere uno schema del collegamento tra le forze e coppie generate ai giunti e quelle risultanti all'End Effector [2].

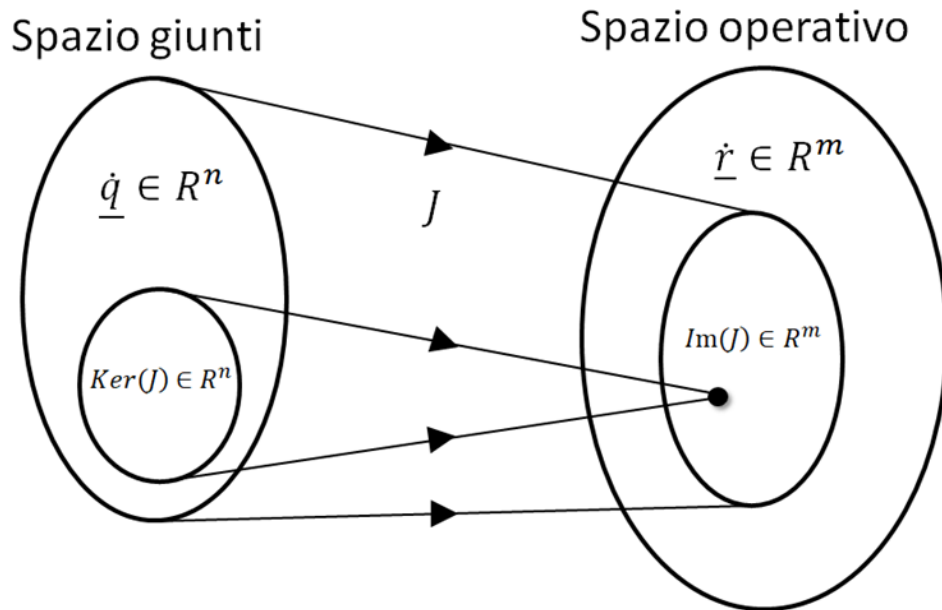


Figura 1. 4: Schema del collegamento tra lo spazio giunti e lo spazio operativo attraverso la Jacobiana

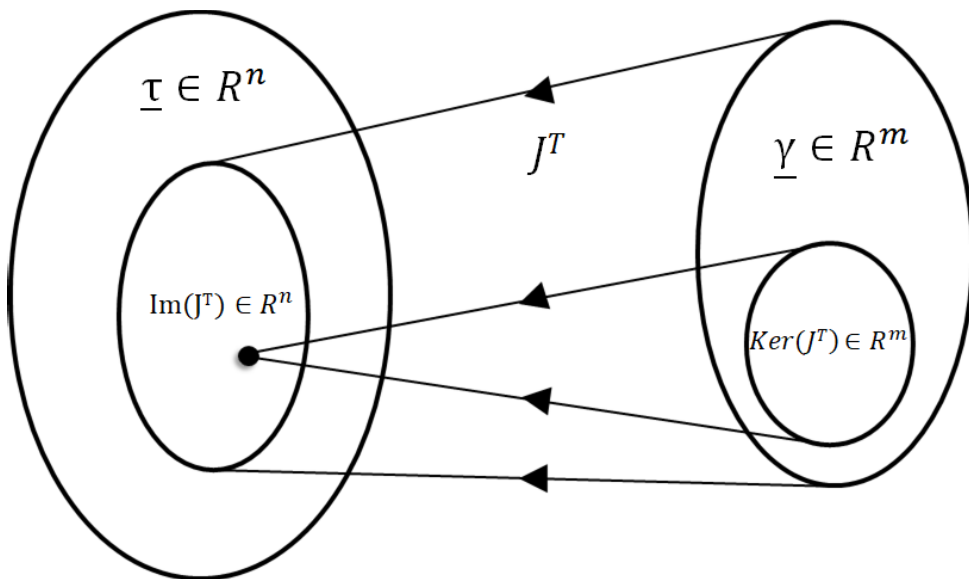


Figura 1. 5: Schema del collegamento tra le forze e coppie generate ai giunti e le forze e coppie generate all'End Effector attraverso il trasposto della Jacobiana

### 1.2.2 Grado di ridondanza

Un modo con cui può essere costruito un manipolatore, e in particolare un manipolatore collaborativo, è sfruttando il concetto di ridondanza. Questa caratteristica permette di sfruttare al meglio alcune caratteristiche dei robot. Si è in una condizione di ridondanza se il compito assegnato al robot necessita di uno o più gradi di libertà in meno di quelli in possesso al robot. Questa differenza definisce il grado di ridondanza. Essa coincide con:

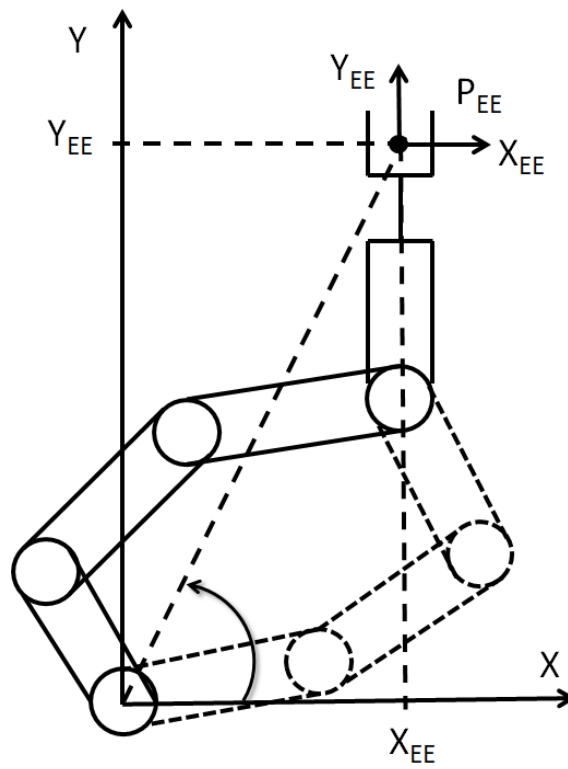
$$\dim(Ker(J)) = n - m \quad (1.5)$$

Se il grado di ridondanza è maggiore di zero allora si avrà che lo spazio nullo non è vuoto. Ciò comporta che, per un'unica posa dell'End Effector, si abbiano infinite possibili configurazioni dei giunti. La struttura del robot può compiere dei movimenti senza che la posa dell'End Effector cambi. Questo fenomeno è anche chiamato self-motion [3].

In particolare, per lavorare nello spazio sono richiesti sei gradi di libertà, tre per la posizione e tre per l'orientazione. In questo caso un robot per essere ridondante deve avere la dimensione  $n$  dello spazio giunti maggiore di quella  $m$  dello spazio operativo e perciò possedere un numero di gradi di libertà pari o superiore a sette. Per ogni grado di ridondanza si aggiunge un ordine di infinito al numero di configurazioni che il robot può assumere per compiere quel determinato compito. Le configurazioni possibili sono quindi  $\infty^l$ , dove  $l$  sono i gradi di libertà ridondanti ed è pari a:

$$l = n - m \quad (1.6)$$

Un esempio di ridondanza nel piano è rappresentato nella figura 1.6, si può vedere infatti che la stessa posa dell'End Effector può essere raggiunta con diverse configurazioni del robot, in particolare ne sono rappresentate due.



**Figura 1. 6: Esempio di ridondanza in un generico piano X-Y per una generica posizione,  $P_{EE}$ , e orientazione dell'End Effector**

### 1.3 Struttura di un robot una volta ridondante nello spazio

Poiché spesso i manipolatori utilizzati servono per muovere l'End Effector nello spazio, si analizza il caso particolare di una struttura una volta ridondante nello spazio. Scelta una terna destrorsa 0 come riferimento per descrivere una posa nello spazio, se si utilizza un metodo di rappresentazione minima, sono necessarie e sufficienti sei informazioni: tre informazioni sulla posizione nello spazio, ad esempio  $x_0$ ,  $y_0$  e  $z_0$ , e tre informazioni per descrivere l'orientazione, ad esempio utilizzando gli angoli di Eulero  $\psi$ ,  $\mu$  e  $\lambda$ . Perciò nello spazio si ha  $m$  pari a sei. Il vettore che esprime la posa nello spazio dell'End Effector risulta quindi essere:

$$\underline{r} = \begin{pmatrix} x_0 \\ y_0 \\ z_0 \\ \psi \\ \mu \\ \lambda \end{pmatrix} \quad (1.7)$$

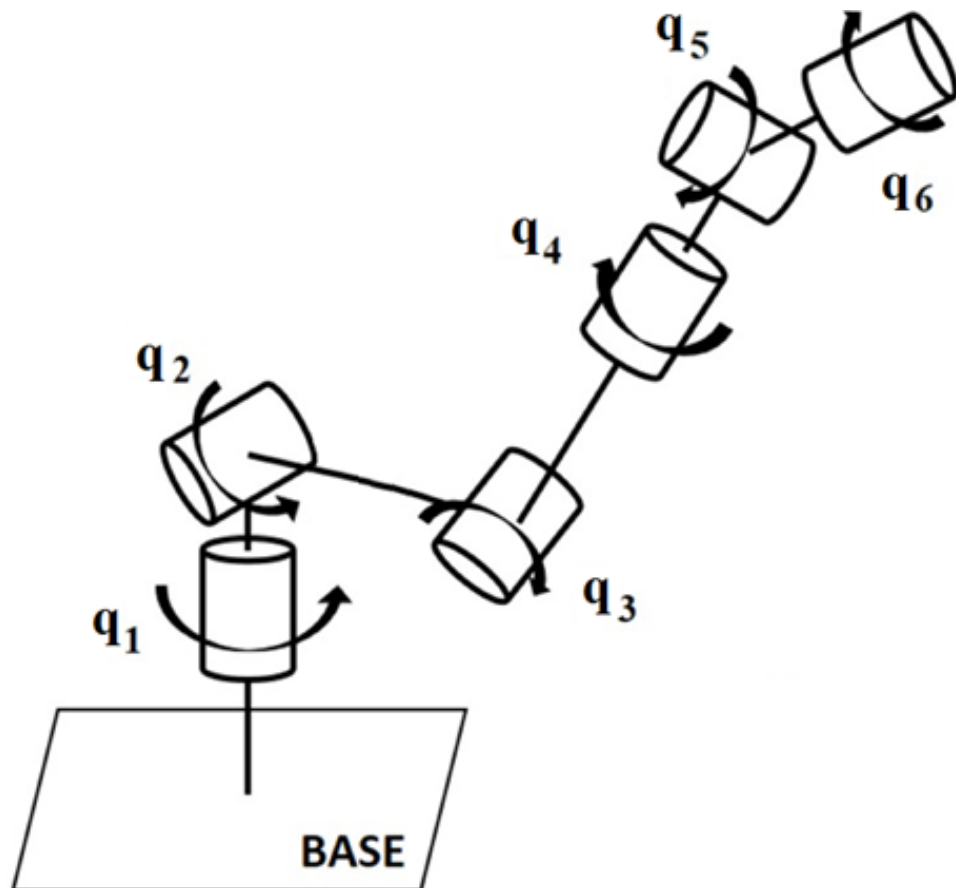
Il vettore che esprime le configurazioni che assumono i giunti risulta invece essere:

$$\underline{q} = \begin{pmatrix} q_1 \\ q_2 \\ \dots \\ q_i \\ \dots \\ q_n \end{pmatrix} \quad i = 1, \dots, n \quad (1.8)$$

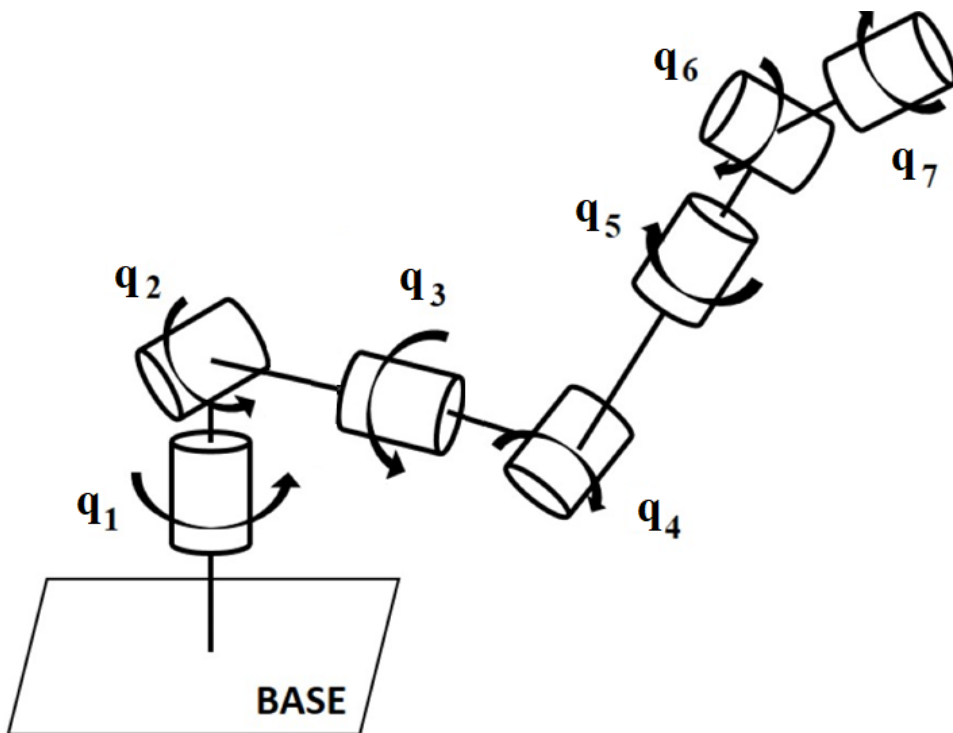
Dove  $n$  è il numero di giunti del manipolatore. Facendo riferimento all'equazione 1.6 se si vuole un manipolatore una volta ridondante nello



spazio, cioè con  $l$  uguale a uno, si deve avere  $n$  pari a sette e cioè si devono avere sette giunti. Un manipolatore a sette gradi di libertà è simile a un robot antropomorfo a sei gradi di libertà a cui viene aggiunto un giunto. Di solito il settimo giunto è inserito tra il secondo e il terzo giunto del robot antropomorfo. Nella figura 1.7 è visibile uno schema di un manipolatore a sei gradi di libertà. Nella figura 1.8 è visibile uno schema di un manipolatore a sette gradi di libertà; si può notare come viene inserito il giunto che produce la ridondanza nel manipolatore.

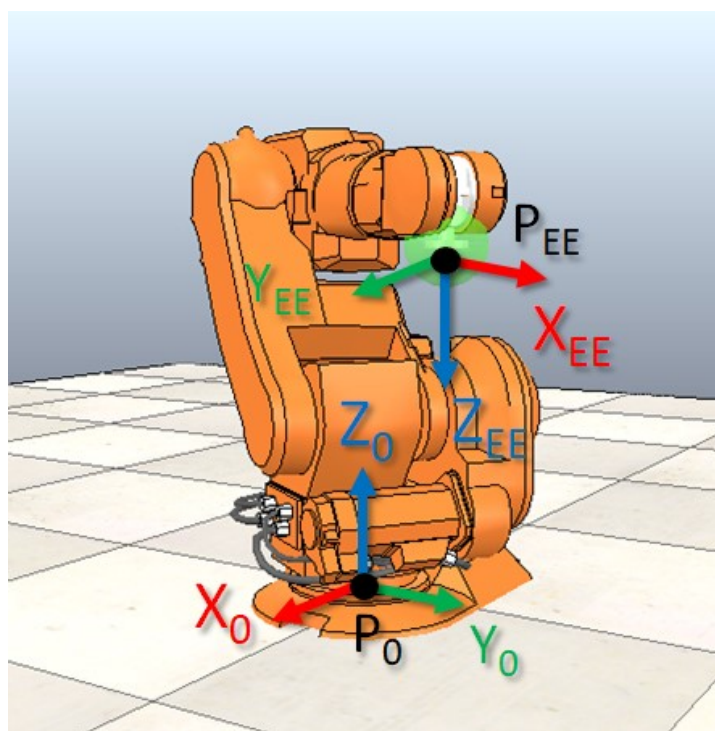


**Figura 1. 7: Modello generale di un manipolatore a sei gradi di libertà**

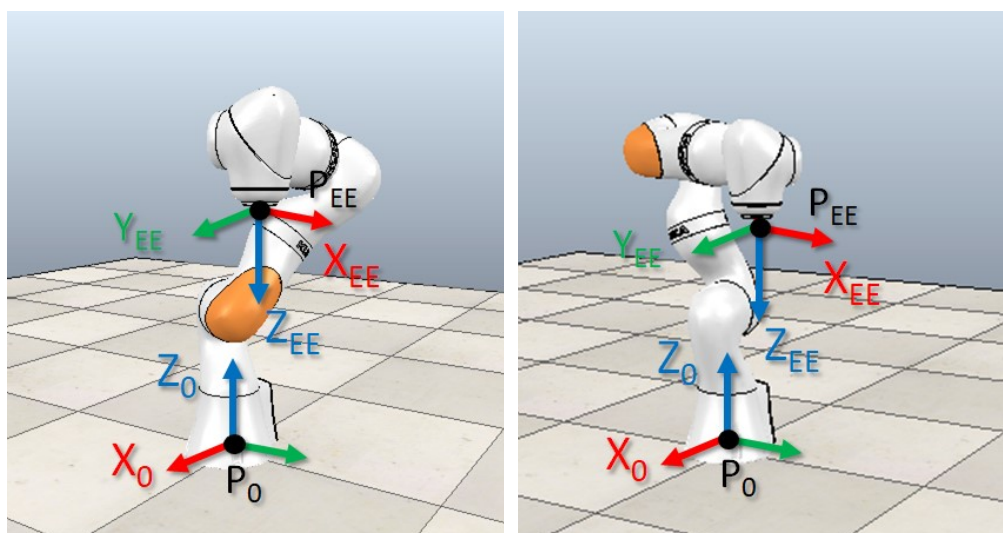


**Figura 1. 8: Modello generale di un manipolatore a sette gradi di libertà**

Il fatto di costruire un robot ridondante porta molti vantaggi; infatti potendo scegliere tra un numero infinito di configurazioni per una stessa posa dell'End Effector si riescono a oltrepassare alcuni limiti meccanici dovuti ad alcune particolari configurazioni e ad avere maggior flessibilità e destrezza. Il fatto di avere dei gradi di libertà in più comporta anche degli svantaggi, quali una struttura meccanica più complessa, quindi un numero maggiore di elementi di attuazione e di sensori la cui gestione diventa più complessa, algoritmi di controllo e di computazione della cinematica inversa più complicati. Nella figura 1.9 si può vedere un robot a sei assi nella configurazione che porta ad una certa posa dell'End Effector, mentre nella figura 1.10 si possono vedere due delle infinite configurazioni che portano un robot una volta ridondante nella stessa posa dell'End Effector.



**Figura 1. 9: Robot ABB IRB 140 a sei assi in una configurazione che porta l'End Effector in una posa che rispetto al sistema di riferimento 0 ha coordinate  $x_0=0.2m$ ,  $y_0=0.2m$  e  $z_0=0.55m$  e una rotazione attorno all'asse  $y_0$  pari a  $180^\circ$  e una attorno all'asse  $z_0$  pari a  $180^\circ$**



**Figura 1. 10: Robot KUKA LBR iiwa 7 R800 a sette assi in due diverse configurazioni che porta l'End Effector nella stessa posa presente nella figura 1.9**

### 1.3.1 Confronto tra un manipolatore a sette gradi di libertà e il braccio umano

Prendendo in esame un manipolatore una volta ridondante nello spazio, si può costruire una struttura che ricorda un modello semplificato, composto da giunti e link rigidi, del braccio umano e dei suoi movimenti [4]. Nella figura 1.11 si possono osservare i movimenti del braccio umano a cui si fa riferimento.

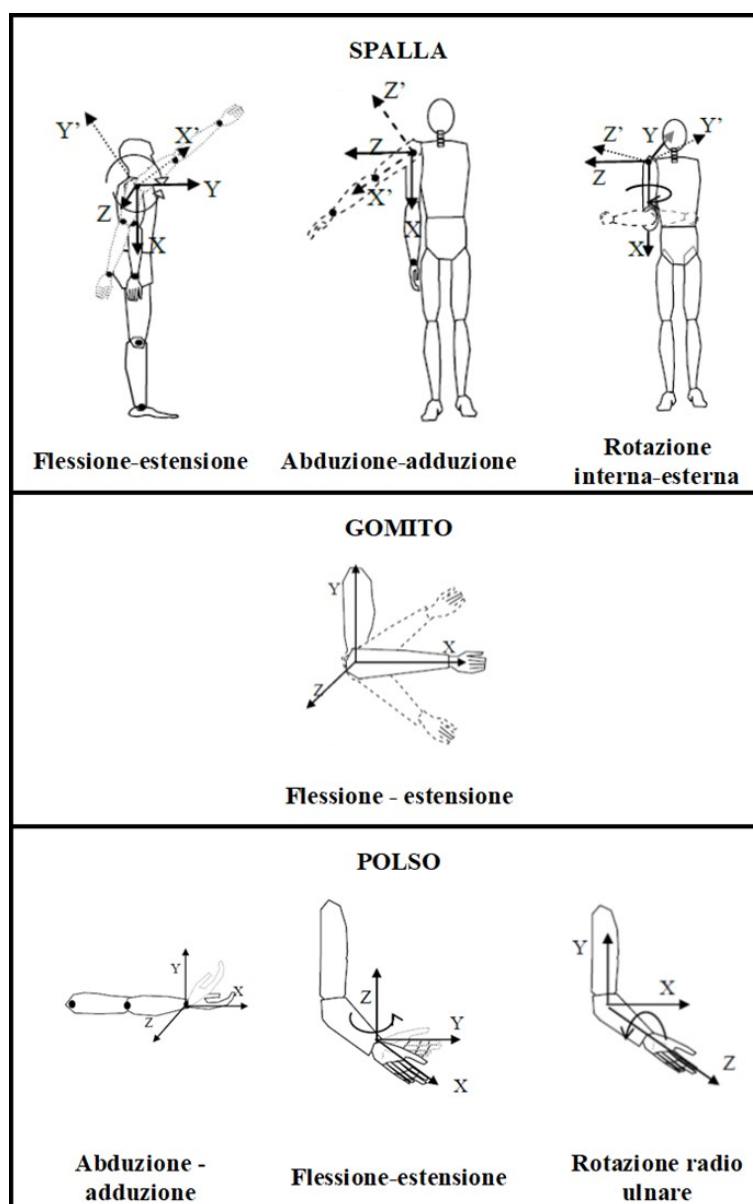


Figura 1. 11: I sette movimenti possibili per il braccio umano

Semplificando il complesso di elementi che compongono l'arto superiore umano, si può comporre una struttura costituita da due giunti sferici e uno rotoidale [5]. Il primo giunto sferico, collegato alla base del robot, solitamente chiamato *spalla*, presenta le tre rotazioni possibili che ricordano quelli di abduzione-adduzione, flessione-estensione e rotazione interna-esterna della spalla umana. Uno schema di questo giunto può essere visto in figura 1.12. Il giunto rotoidale, collegato con un link rigido al giunto di spalla, è chiamato *gomito*, poiché la sua rotazione ricorda il movimento di flessione-estensione del gomito umano. Il punto centrale di questo giunto è chiamato centro gomito. Il giunto gomito è collegato attraverso un secondo link rigido al secondo giunto sferico, chiamato *polso*, e i suoi tre movimenti ricordano i movimenti del polso umano di pronazione-supinazione, flessione-estensione e rotazione radiale-ulnare. A questo giunto è collegato l'End Effector. Il movimento di rotazione radiale-ulnare può essere attribuito sia al polso che al gomito poiché viene eseguito da muscoli appartenenti sia all'uno che all'altro, ma per semplificare il problema questo viene attribuito al polso, affinché si possa avere un giunto sferico.

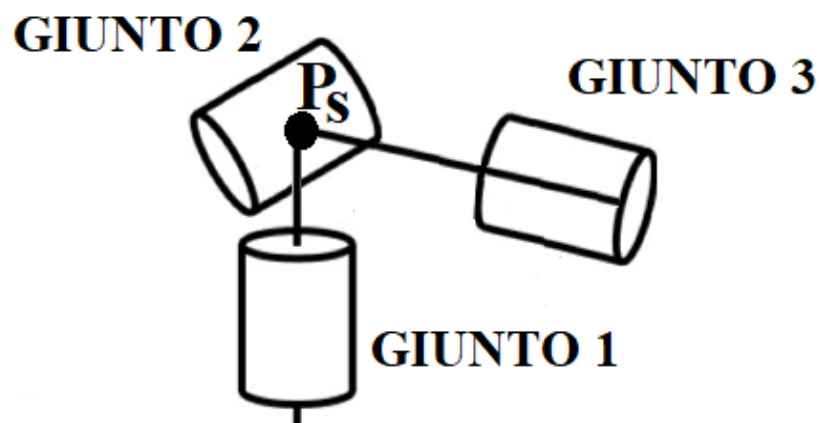
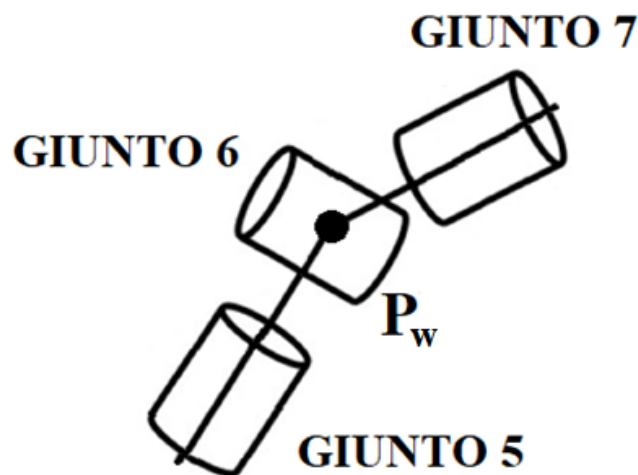


Figura 1. 12: Schema del giunto sferico di spalla. L'incrocio tra gli assi è il centro spalla  $P_s$

Questo è meccanicamente realizzato tramite tre giunti rotoidali, posizionati in modo tale che gli assi di rotazione del primo e del terzo siano incidenti tra loro sull'asse di rotazione del secondo giunto, che è posto perpendicolarmente a questi due assi. Il punto di incidenza è il centro del giunto sferico. Uno schema di questo giunto è visibile nella figura 1.13.

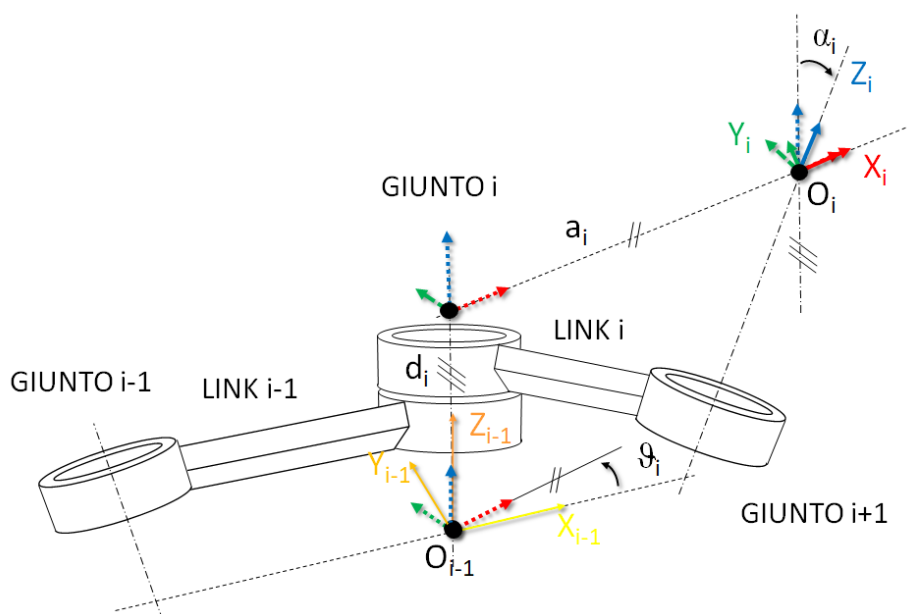
I primi tre giunti del robot nella figura 1.10, che possono compiere rispettivamente le rotazioni indicate come  $q_1$ ,  $q_2$  e  $q_3$ , sono la realizzazione fisica del giunto sferico di spalla, l'incrocio degli assi di questo giunti è il centro spalla  $P_s$ . Il giunto che può compiere la rotazione  $q_4$  è il giunto di gomito, mentre le rotazioni  $q_5$ ,  $q_6$  e  $q_7$  sono rappresentative del giunto sferico di polso e l'incrocio degli assi di questi giunti è chiamato centro polso  $P_w$ .



**Figura 1. 13:** Schema del giunto di polso; l'intersezione degli assi è il centro polso  $P_w$

## 1.4 Parametri e convenzione standard di Denavit-Hartenberg

Poiché i robot sono costituiti da link e due link successivi si possono muovere l'uno rispetto all'altro a seconda della configurazione del giunto presente tra loro, è utile individuare la posa di ogni link nello spazio. Assegnata la geometria di un manipolatore, per schematizzare il sistema multi-body e per agevolarne il controllo si può assegnare ad ogni link un sistema di riferimento [2]. Poiché la posa di ogni link dipende anche dalla posa di tutti i link precedenti, si può descrivere ogni sistema di riferimento con le coordinate espresse nel sistema di riferimento del link precedente e successivamente riferirsi a un sistema di riferimento fisso. Per la definizione dei sistemi di riferimento si utilizza la convenzione di Denavit-Hartenberg (da qui in avanti indicata con D-H); in particolare, in questo lavoro si è adottata la convenzione standard di Denavit-Hartenberg. Nella figura 1.14 si può vedere uno schema rappresentativo della metodologia con cui si scelgono i sistemi di riferimento e i parametri di D-H.



**Figura 1. 14: Costruzione dei sistemi di riferimento secondo la convenzione di Denavit-Hartenberg standard**

Si sceglie per ogni link  $i$ -esimo una terna destrorsa tale per cui l'asse  $z_i$  sia coincidente con l'asse di rotazione del giunto  $i+1$ , preso positivo per il verso di rotazione positiva; l'asse  $x_i$  sia perpendicolare agli assi di rotazione del giunto  $i$  e  $i+1$  e abbia verso da  $i$  a  $i+1$ . L'origine degli assi  $O_i$  è determinata dall'intersezione degli assi  $z_i$  e  $x_i$  e l'asse  $y_i$  è l'asse mancante della terna destrorsa. Costruiti questi sistemi di riferimento si possono individuare i quattro parametri di D-H. Per fare ciò è conveniente costruire un sistema di riferimento ausiliario  $x_{AUX}$ - $y_{AUX}$ - $z_{AUX}$  mobile che inizialmente è coincidente con la terna  $i-1$ . La rotazione attorno all'asse  $z_{AUX}$  affinché  $x_{AUX}$  e  $x_i$  siano paralleli individua l'angolo  $\theta_i$ ; al sistema di riferimento ausiliario così ruotato si dà il nome di  $AUX'$ . La quantità di cui bisogna traslare questo nuovo sistema di riferimento lungo l'asse  $z_{AUX}'$  per far sì che l'asse  $x_{AUX}'$  giaccia sulla stessa retta su cui giace l'asse  $x_i$  è il parametro  $d_i$ ; il sistema di riferimento così traslato prende il nome di sistema  $AUX''$ . La traslazione lungo l'asse  $x_{AUX}''$  che bisogna compiere affinché l'origine  $O_{AUX}''$  coincida con  $O_i$  è la distanza  $a_i$ . Il sistema di riferimento così formato prende il nome  $AUX'''$ . L'angolo di cui bisogna ruotare questa terna attorno all'asse  $x_{AUX}'''$  affinché l'asse  $z_{AUX}'''$  coincida con l'asse  $z_i$  è l'angolo  $\alpha_i$ . Definiti questi parametri si riesce ad individuare univocamente dove è posizionato e come è orientato il sistema di riferimento  $i$  rispetto al sistema  $i-1$ . Questo è descritto dalla matrice di trasformazione omogenea:

$${}^{i-1}\hat{A}_i = {}^{i-1}\hat{A}_{i'} {}^{i'}\hat{A}_i = \begin{bmatrix} c\theta_i & -s\theta_i c\alpha_i & s\theta_i s\alpha_i & a_i c\theta_i \\ s\theta_i & c\theta_i c\alpha_i & -c\theta_i s\alpha_i & a_i s\theta_i \\ 0 & s\alpha_i & c\alpha_i & d_i \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad (1.9)$$

Questa può essere ottenuta moltiplicando la matrice  ${}^{i-1}\hat{A}_{i'}$ , che rappresenta il sistema di riferimento  $AUX''$  rispetto al sistema di riferimento  $i-1$  per la



matrice  ${}^{i'}\hat{A}_i$  che è la matrice che permette di passare dal sistema  $AUX''$  al sistema di riferimento  $i$ . Queste due matrici valgono rispettivamente:

$${}^{i-1}A_{i'} = \begin{bmatrix} c\mathcal{G}_i & -s\mathcal{G}_i & 0 & 0 \\ s\mathcal{G}_i & c\mathcal{G}_i & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & d_i \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad (1.10)$$

$${}^{i'}A_i = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & a_i \\ 0 & c\alpha_i & -s\alpha_i & 0 \\ 0 & s\alpha_i & c\alpha_i & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad (1.11)$$

La matrice  ${}^{i-1}\hat{A}_i$ , che descrive la posa del sistema di riferimento  $i$  rispetto al sistema  $i-1$ , può essere raggruppata in quattro sottomatrici:

$${}^{i-1}\hat{A}_i = \begin{bmatrix} ({}^{i-1}A_i)_{3 \times 3} & (\underline{p})_{3 \times 1} \\ (0)_{3 \times 3} & 1 \end{bmatrix} \quad (1.12)$$

La prima sottomatrice che raggruppa le prime tre colonne delle prime tre righe rappresenta l'orientazione della terna  $i$  rispetto a  $i-1$ ; la seconda sottomatrice composta dall'ultima colonna delle prime tre righe rappresenta la traslazione del sistema  $i$  rispetto a  $i-1$ ; la terza sottomatrice, le prime tre colonne dell'ultima riga è un vettore di tutti zeri; mentre la quarta riga dell'ultima colonna è sempre pari a 1.

Costruendo nel modo precedentemente descritto i sistemi di riferimento per ogni link, per la base e per l'End Effector, e le matrici  ${}^{i-1}\hat{A}_i$ , si può risalire alla posa di ogni link rispetto a qualsiasi sistema di riferimento. Infatti, per far ciò si possono moltiplicare le matrici di trasformazione tra di loro nel seguente modo: scelta la terna  $g$  della quale si vuole esprimere

la posa e scelta la terna  $f$  come terna di riferimento per esprimere la posa di  $g$ , si moltiplicano tra di loro le matrici nel seguente modo:

$${}^f\hat{A}_g = {}^f\hat{A}_i \cdot {}^{i+1}\hat{A}_{i+2} \cdot \dots \cdot {}^{i+k}\hat{A}_g \quad (1.13)$$

Con  $i=f+1$  e  $k=g-2$ . Ad esempio, volendo descrivere la posa del sistema  $i+2$  secondo il sistema di riferimento  $i-2$  e quindi volendo trovare la matrice di trasformazione  ${}^{i-2}\hat{A}_{i+2}$  si possono moltiplicare tra di loro le matrici:

$${}^{i-2}\hat{A}_{i+2} = {}^{i-2}\hat{A}_{i-1} \cdot {}^{i-1}\hat{A}_i \cdot {}^i\hat{A}_{i+1} \cdot {}^{i+1}\hat{A}_{i+2} \quad (1.14)$$

Quindi si può anche individuare univocamente la posa dell'End Effector per ogni configurazione dei giunti del manipolatore rispetto qualsiasi sistema di riferimento. In particolare, si può individuare questa posa rispetto al sistema di riferimento  $0$ , cioè rispetto un sistema di riferimento fisso; essa, per un manipolatore a sette giunti con una base e un End Effector, può essere calcolata come:

$${}^0\hat{A}_{EE} = {}^0\hat{A}_B \cdot {}^B\hat{A}_1 \cdot {}^1\hat{A}_2 \cdot {}^2\hat{A}_3 \cdot {}^3\hat{A}_4 \cdot {}^4\hat{A}_5 \cdot {}^5\hat{A}_6 \cdot {}^6\hat{A}_7 \cdot {}^7\hat{A}_{EE} \quad (1.15)$$

La stessa matrice  ${}^0\hat{A}_{EE}$  può anche essere costruita senza conoscere la configurazione dei giunti, ma partendo dalla posizione e dall'orientamento dell'End-Effector rispetto al sistema di riferimento  $0$ . Per costruire la sottomatrice che rappresenta l'orientazione dell'sistema di riferimento solidale all'End Effector si può procedere ad esempio con la convenzione Roll-Pitch-Yaw. Essa prevede di far compiere tre successive rotazioni ad un sistema di riferimento ausiliario, preso inizialmente coincidente con il

sistema fisso 0, attorno agli assi  $x_0$ ,  $y_0$  e  $z_0$  del sistema di riferimento fisso affinché il sistema di riferimento ausiliario vada a coincidere con quello desiderato. Conoscendo questi angoli, e indicando con  $\beta$  la rotazione attorno all'asse  $x_0$ ,  $\delta$  la rotazione attorno all'asse  $y_0$  e  $\gamma$  la rotazione attorno all'asse  $z_0$ , si può costruire la matrice di rotazione che permette di identificare l'orientazione dell'End Effector rispetto al sistema di riferimento fisso 0. Questa matrice risulta essere:

$$R(\beta, \delta, \gamma) = Rot(z, \gamma)Rot(y, \delta)Rot(x, \beta) =$$

$$= \begin{bmatrix} c\beta \cdot c\delta & c\beta \cdot s\delta \cdot s\gamma - s\beta \cdot c\beta & c\beta \cdot s\delta \cdot c\gamma + s\beta \cdot s\beta \\ s\beta \cdot c\delta & s\beta \cdot s\delta \cdot s\gamma - c\beta \cdot c\beta & s\beta \cdot s\delta \cdot c\gamma - c\beta \cdot s\beta \\ -s\delta & c\delta \cdot s\beta & c\delta \cdot c\beta \end{bmatrix} \quad (1.16)$$

La posizione dell'End Effector si può individuare come vettore colonna contenente le coordinate dell'origine del sistema di riferimento dell'End Effector rispetto al sistema di riferimento fisso. Indicando con:

$${}^0 \underline{p}_{EE} = [p_{EE}(x_0) \quad p_{EE}(y_0) \quad p_{EE}(z_0)]^T \quad (1.17)$$

la posizione dell'origine del sistema di riferimento dell'End Effector rispetto a quello 0, si può comporre la matrice di rototraslazione omogenea tramite la quale si può individuare la posa dell'End Effector  ${}^0 \hat{A}_{EE}$ :

$${}^0 \hat{A}_{EE} = \begin{bmatrix} R(\beta, \delta, \gamma) & {}^0 \underline{p}_{EE} \\ \underline{0} & 1 \end{bmatrix} \quad (1.18)$$

Si sono trovati quindi due diversi metodi per trovare la posa dell'End Effector rispetto al sistema di riferimento fisso 0.

## 1.5 Metodi di risoluzione della ridondanza

Il caso più semplice di risoluzione della ridondanza è il caso in cui si fissa uno o più giunti per fare in modo che il robot non sia più ridondante [6]. Nel caso di manipolatore a sette gradi di libertà il problema della cinematica inversa viene riportato allo studio di un robot a sei gradi di libertà, ottenendo così un numero finito di configurazioni possibili. Questo metodo di risoluzione, però, non riesce a sfruttare al meglio tutti i vantaggi che la ridondanza può portare. I diversi metodi che vengono utilizzati si basano su concetto di pseudoinversa. L'utilizzo della pseudoinversa velocizza la risoluzione del problema anche se diminuisce la precisione dei risultati.

### 1.5.1 Pseudoinversa

Il problema di cinematica differenziale inversa consiste nel trovare il vettore  $\underline{\dot{q}}$  che appare nell'equazione:

$$\underline{\dot{r}} = J(\underline{\dot{q}}) \cdot \underline{\dot{q}} \quad (1.19)$$

E quindi determinare la soluzione dell'equazione:

$$\underline{\dot{q}} = K(\underline{\dot{q}}) \cdot \underline{\dot{r}} \quad (1.20)$$

Dove  $K(\underline{\dot{q}})$  è la generica inversa di  $J(\underline{\dot{q}})$  e possiede la seguente caratteristica:

$$J(\underline{\dot{q}}) \cdot K(\underline{\dot{q}}) \cdot J(\underline{\dot{q}}) = J(\underline{\dot{q}}) \quad (1.21)$$

Poiché, nel caso di ridondanza, la matrice in esame non è quadrata non si può calcolare direttamente l'inversa.

Si utilizza allora la pseudoinversa, definita come:

$$J^\# = J^T (JJ^T)^{-1} \quad (1.22)$$

Essa è di dimensione  $n \times m$  e soddisfa le proprietà di Moore-Penrose [7]:

$$\begin{aligned} JJ^\# J &= J \\ J^\# JJ^\# &= J^\# \\ (JJ^\#)^T &= JJ^\# \\ (J^\# J)^T &= J^\# J \end{aligned} \quad (1.23)$$

Inoltre, si può dare un peso alla pseudoinversa [8] e si ottiene:

$$J_W^\# = W^{-1} J^T (JW^{-1} J^T)^{-1} \quad (1.24)$$

Il peso della pseudoinversa è determinato dalla matrice  $W$ , che è una matrice positiva e simmetrica, di solito diagonale. In questo caso la matrice  $J_W^\#$  soddisfa le prime tre proprietà di Moore-Penrose, ma non la quarta. Questa soluzione permette di attribuire un peso alle componenti della pseudoinversa.

## 1.5.2 Metodi generali di risoluzione della ridondanza

Per sfruttare i benefici che la ridondanza può produrre in generale esistono tre principali gruppi di metodi per la risoluzione della ridondanza [9].

### 1.5.2.1 Ottimo vincolato

Il primo di questi è il criterio basato sulla ricerca di soluzioni in termini di ottimo vincolato. Per esempio, la configurazione può essere scelta affinché

la pseudoinversa minimizzi la funzione di costo delle velocità. Essa può essere scritta come:

$$\frac{1}{2}\|\dot{q}\|^2 = \frac{1}{2}\dot{q}^T \dot{q} \quad (1.25)$$

O nel caso si scelga di utilizzare la pseudoinversa pesata [2]:

$$\frac{1}{2}\|\dot{q}\|_W^2 = \frac{1}{2}\dot{q}^T W \dot{q} \quad (1.26)$$

O la norma dell'errore:

$$\frac{1}{2}\|\dot{r} - J(q)\dot{q}\|^2 \quad (1.27)$$

#### 1.5.2.2 Spazio nullo

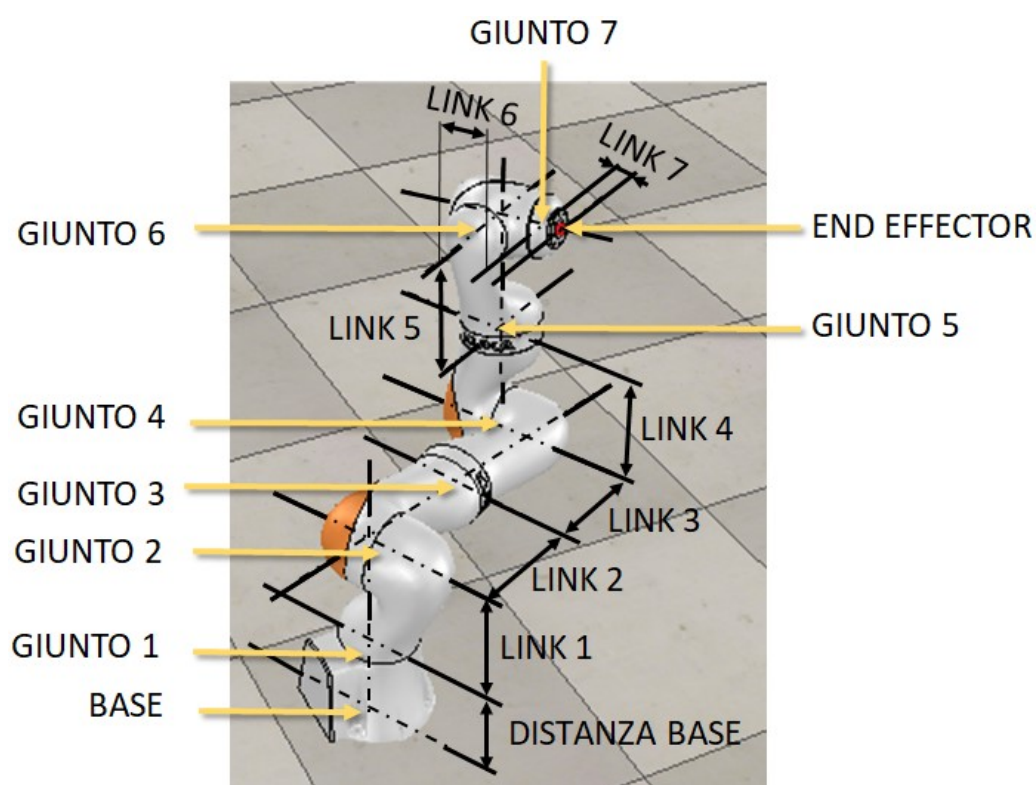
La seconda tipologia di risoluzione della ridondanza è quella basata sullo spazio nullo. Poiché la dimensione del nucleo dello Jacobiano è diversa da zero si può aggiungere un contributo ai giunti che non modifica la posa dell'End Effector. Infatti, dato un vettore  $\dot{r}$  delle velocità dell'End Effector e indicando con  $\underline{\dot{q}}^*$  una possibile soluzione,  $\underline{\dot{q}}_a$  vettore arbitrario e con  $P$  una matrice  $n \times n$  tale che la sua immagine coincida con il nucleo di  $J$ , anche il vettore  $\underline{\dot{q}} = \underline{\dot{q}}^* + P \cdot \underline{\dot{q}}_a$  è soluzione.

#### 1.5.2.1 Compito aumentato

L'ultima categoria di soluzioni è quella basata sul compito aumentato. Esso prevede di aggiungere in generale  $n-m$  vincoli nello spazio operativo affinché si possa virtualmente eliminare la ridondanza [10].

## CAPITOLO 2: KUKA LBR iiwa 7 r800

Per eseguire le analisi successive si prende in esame il robot KUKA LBR iiwa 7 R800, che presenta tutte le caratteristiche descritte in precedenza per quanto riguarda i robot una volta ridondanti nello spazio. Prendere come modello questo manipolatore può essere utile per avere dei valori realistici sugli ingombri, sui limiti di giunto e sulle velocità di giunto. Il robot KUKA LBR iiwa 7 R800, dove LBR è l'acronimo di "Leichtbauroboter", cioè "robot leggero" e iiwa "intelligent industrial work assistant", è un braccio robotico di tipologia collaborativa e dotato di sette giunti [12] e quindi è una volta ridondante nello spazio. Il manipolatore si può osservare nella figura 2.1, in cui è indicata la posizione dei giunti e dei link. Il robot in questione ha un peso di 23.9 kg, un volume di lavoro di 1.7 m<sup>3</sup>, un carico utile nominale di 7kg ed un raggio di azione di 800mm. Nel datasheet del robot sono riportate le caratteristiche principali. Due informazioni importanti, utilizzate poi in seguito, sono quella relativa ai limiti di giunto e quella relativa alle velocità di giunto. I limiti per ognuno dei sette giunti del robot in esame sono indicati nel catalogo del costruttore [13] e sono visibili nella tabella 2.1 e le velocità di giunto nella tabella 2.2.



**Figura 2. 1: Posizione dei link e dei giunti per il manipolatore KUKA LBR iiwa 7 R800**

**Tabella 2. 1: Limiti di giunto per il robot LBR iiwa KUKA 7 R800**

<i>Giunto</i>	<i>Limite minimo</i> $q_{\text{lim\_min}}$	<i>Limite massimo</i> $q_{\text{lim\_max}}$
A1	-170°	170°
A2	-120°	120°
A3	-170°	170°
A4	-120°	120°
A5	-170°	170°
A6	-120°	120°
A7	-175°	175°



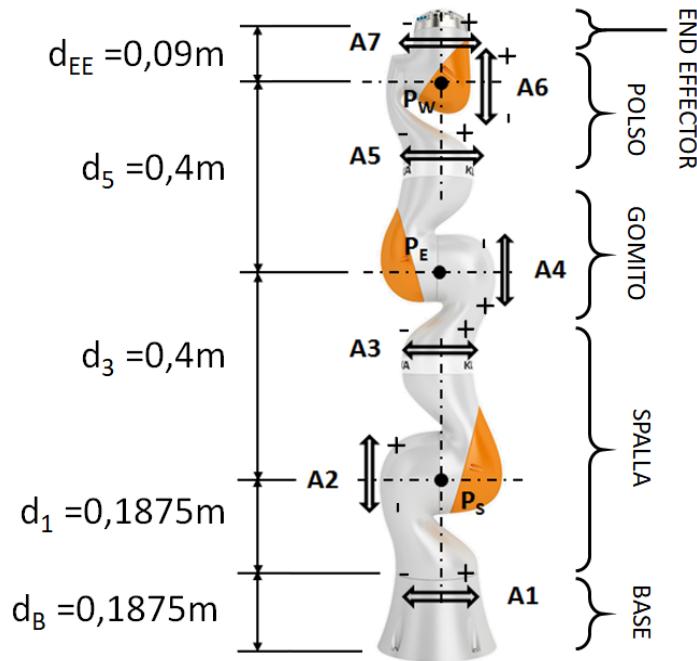
**Tabella 2. 2: Velocità angolari per i giunti del robot LBR iiwa KUKA 7 R800**

<i>Giunto</i>	<i>Velocità con carico utile nominale [°/s]</i>
A1	98
A2	98
A3	100
A4	130
A5	140
A6	180
A7	180

Tutti i giunti per una data configurazione devono rientrare nei limiti prestabiliti, cioè si deve avere:

$$q_{\lim\_min} < q_i < q_{\lim\_max} \quad (2.1)$$

Questo manipolatore possiede le caratteristiche strutturali citate precedentemente, cioè è costruito in modo tale da poter essere schematizzato secondo una struttura avente un giunto sferico come spalla, uno rotoidale come gomito e uno sferico come polso. Si individua la posizione di centro spalla  $P_s$  dove avviene l'intersezione degli assi di rotazione dei giunti A1, A2 e A3 e la posizione del centro polso nel punto di intersezione degli assi dei giunti A5, A6 e A7. Il giunto A4, giunto che identifica il gomito, è rappresentato dal punto  $P_e$ . Nella figura 2.2 sono indicati: gli assi e i versi di rotazione, i punti di centro spalla e centro polso, il punto rappresentativo del gomito e le distanze tra questi punti.



**Figura 2. 2:** Assi e verso di rotazione dei giunti, posizione del centro spalla PS, del gomito PE e del centro polso PW e distanze tra questi punti per il robot LBR iiwa 7 R800

## 2.1 Modellazione del robot attraverso la convenzione di Denavit-Hartenberg standard

Come visto nel capitolo 1.4 è utile definire dei sistemi di riferimento per individuare univocamente la posa di ogni link nello spazio. Per la modellazione del robot si utilizza, quindi, la convenzione di Denavit-Hartenberg, andando a definire la posizione e l'orientazione dei sistemi di riferimento per ogni link del manipolatore. Per definire la posa del sistema di riferimento della base rispetto a quello fisso 0 e la posa del sistema del link 7 rispetto a quello dell'End Effector si inseriscono due sistemi di riferimento aggiuntivi. Nella figura 2.3 sono rappresentati i sistemi di riferimento per l'intero manipolatore, mentre nella figura 2.4 sono riportati in dettaglio i sistemi di riferimento della terna fissa di riferimento, della base, e dell'End Effector e i sistemi di riferimento per i giunti di spalla, di gomito e di polso. Da questi sistemi di riferimento si possono determinare

i parametri di Denavit-Hartenberg, elencati nella tabella 2.3 e in tabella 2.4. Con  $\theta_i$  si indica l'angolo effettivo in una data configurazione, con  $\theta_{i\_0}$  l'angolo di offset e con  $q_i$  l'angolo che il giunto i-esimo assume per far sì che il manipolatore sia in una determinata configurazione.

**Tabella 2. 3: Parametri di Denavit-Hartenberg secondo la convenzione standard per il robot LBR iiwa KUKA 7 R800**

Link	<i>i-1 rispetto i</i>	$\alpha_i$ [°]	$a_i$ [m]	$d_i$ [m]	$\theta_i = \theta_{i\_0} + q_i$ [°]
1	B-1	90	0	$d1=0.1875$	q1
2	1-2	90	0	0	$-180^\circ + q2$
3	2-3	90	0	$d3=0.4$	q3
4	3-4	90	0	0	$180^\circ + q4$
5	4-5	90	0	$d5=0.4$	q5
6	5-6	90	0	0	$-180^\circ + q6$
7	6-7	0	0	0	$180^\circ + q7$

**Tabella 2. 4: Parametri di Denavit-Hartenberg secondo la convenzione standard per la base e per l'End Effector**

<i>i-1 rispetto i</i>	$\alpha_i$ [°]	$a_i$ [m]	$d_i$ [m]	$\theta_i$ [°]
0-B	0	0	$d_B=0.1875$	0
7-EE	0	0	$d_{EE}=0.09$	0

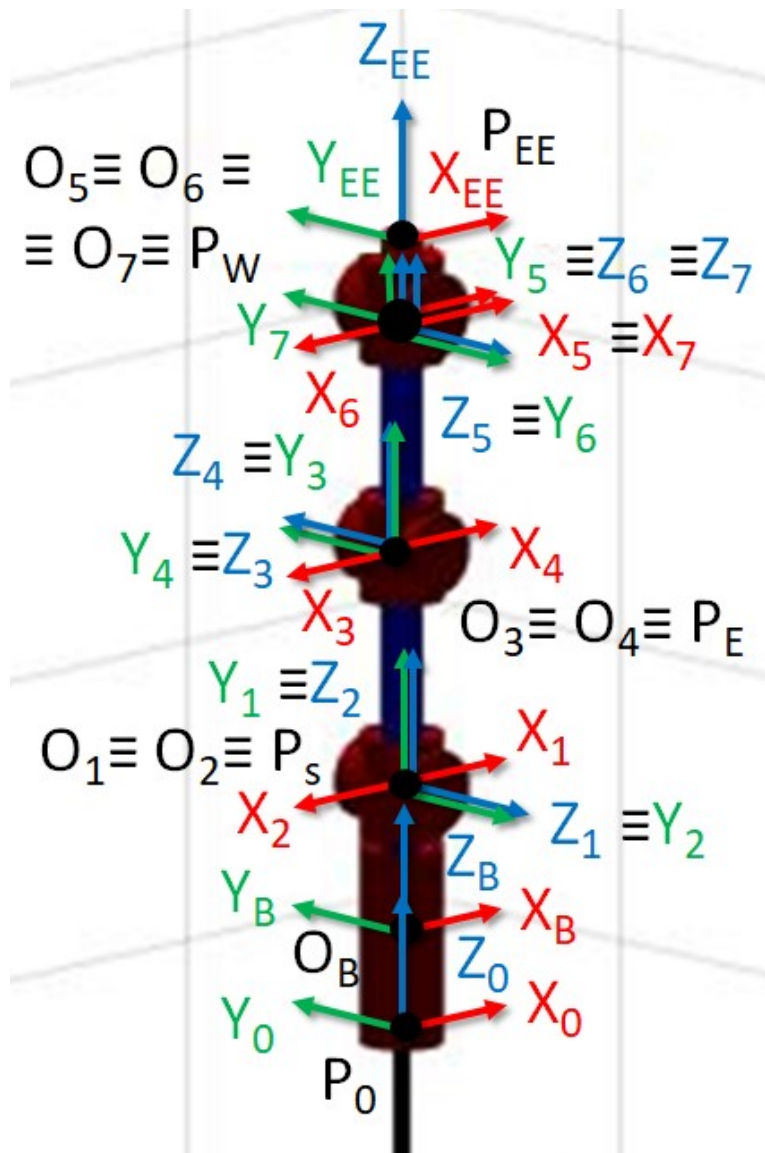
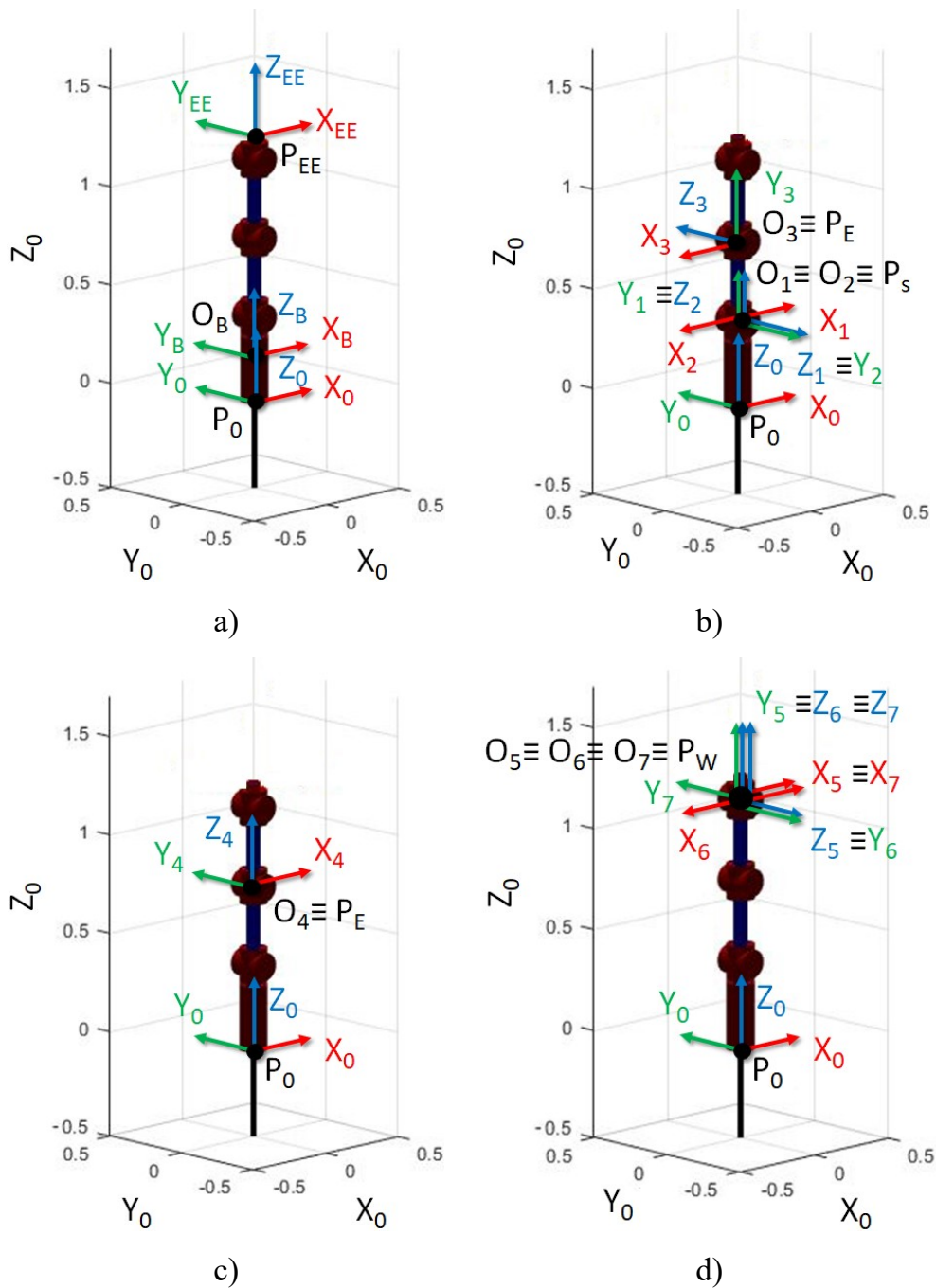


Figura 2. 3: Sistemi di riferimento per il robot KUKA LBR iiwa 7 R800



**Figura 2. 4: Sistemi di riferimento per il robot KUKA LBR iiwa 7 R800 rappresentato in configurazione di zero: a) sistemi di riferimento fisso 0, sistema di riferimento della base e sistema di riferimento dell'End Effector; b) sistemi di riferimento fisso 0 e sistema di riferimento dei giunti di spalla; c) sistema di riferimento fisso 0 e sistema di riferimento del giunto di gomito; d) sistema di riferimento fisso 0 e sistemi di riferimento dei giunti di polso**

Dai parametri di Denavit-Hartenberg si possono costruire le matrici di trasformazione omogenee. Esse risultano essere:

$${}^B\hat{A}_1 = \begin{bmatrix} \cos q_1 & 0 & \sin q_1 & 0 \\ \sin q_1 & 0 & -\cos q_1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & d_1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad (2.2)$$

$${}^1\hat{A}_2 = \begin{bmatrix} -\cos q_2 & 0 & -\sin q_2 & 0 \\ -\sin q_2 & 0 & \cos q_2 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad (2.3)$$

$${}^2\hat{A}_3 = \begin{bmatrix} \cos q_3 & 0 & \sin q_3 & 0 \\ \sin q_3 & 0 & -\cos q_3 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & d_3 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad (2.4)$$

$${}^3\hat{A}_4 = \begin{bmatrix} -\cos q_4 & 0 & -\sin q_4 & 0 \\ -\sin q_4 & 0 & \cos q_4 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad (2.5)$$

$${}^4\hat{A}_5 = \begin{bmatrix} \cos q_5 & 0 & \sin q_5 & 0 \\ \sin q_5 & 0 & -\cos q_5 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & d_5 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad (2.6)$$

$${}^5\hat{A}_6 = \begin{bmatrix} -\cos q_6 & 0 & -\sin q_6 & 0 \\ -\sin q_6 & 0 & \cos q_6 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad (2.7)$$

$${}^6\hat{A}_7 = \begin{bmatrix} -\cos q_7 & \sin q_7 & 0 & 0 \\ -\sin q_7 & -\cos q_7 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad (2.8)$$

Nel caso in cui i giunti siano in configurazione di zero, e quindi abbiano  $q_i$  pari a zero, le matrici di trasformazioni risultano essere:

$${}^0\hat{A}_1(q_1=0)=\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & d_1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad (2.9)$$

$${}^1\hat{A}_2(q_2=0)=\begin{bmatrix} -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad (2.10)$$

$${}^2\hat{A}_3(q_3=0)=\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & d_3 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad (2.11)$$

$${}^3\hat{A}_4(q_4=0)=\begin{bmatrix} -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad (2.12)$$

$${}^4\hat{A}_5(q_5=0)=\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & d_5 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad (2.13)$$

$${}^5\hat{A}_6(q_6=0)=\begin{bmatrix} -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad (2.14)$$

$${}^6\hat{A}_7(q_7=0)=\begin{bmatrix} -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad (2.15)$$

La matrice di trasformazione che rappresenta il sistema di riferimento della base rispetto alla terna di riferimento fissa e la matrice che rappresenta il sistema di riferimento dell'End Effector rispetto alla terna del link 7 risultano essere:

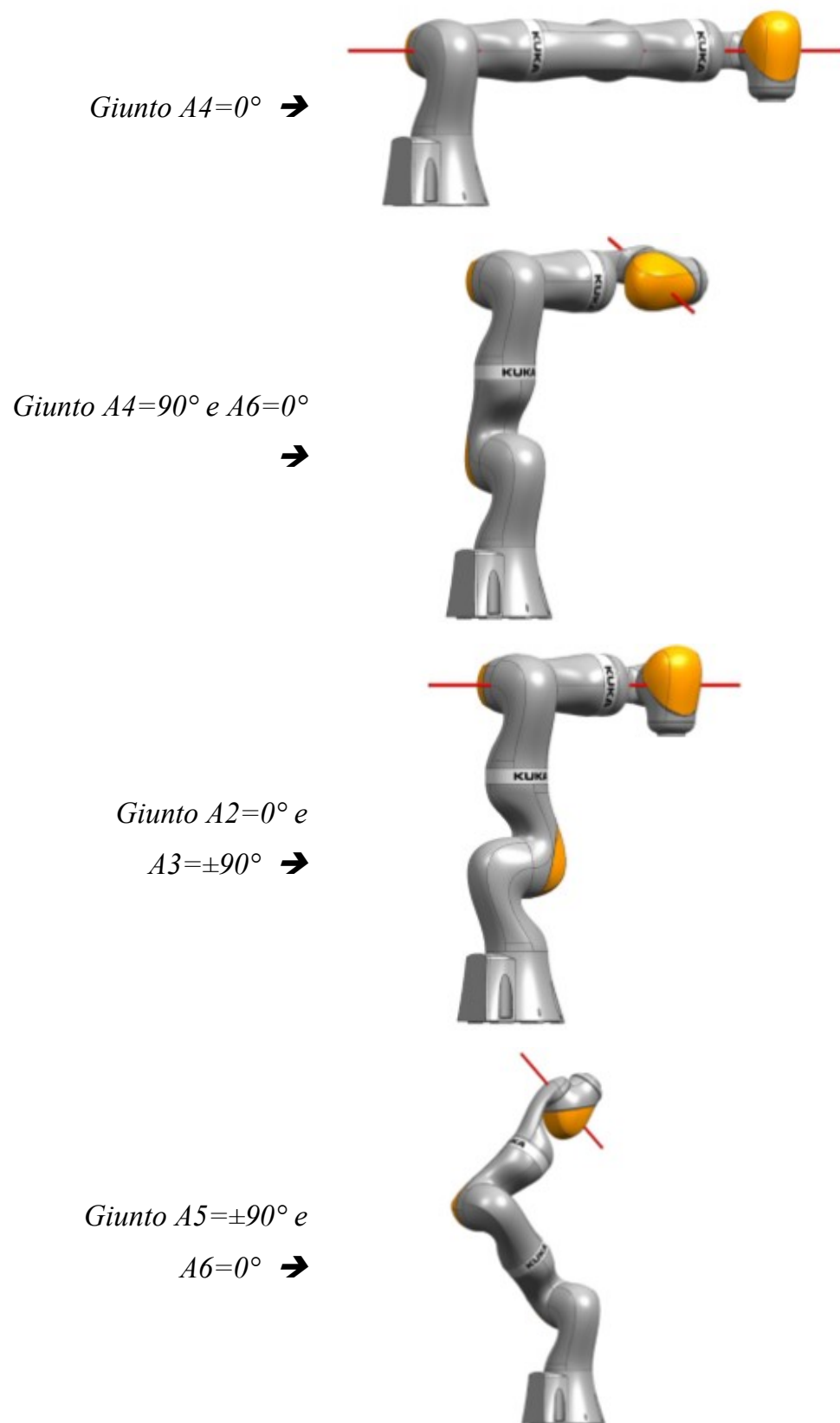
$${}^0\hat{A}_B = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & d_B \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad (2.16)$$

$${}^7\hat{A}_{EE} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & d_{EE} \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad (2.17)$$



## 2.2 Singolarità

Una problematica spesso comune nei robot è il fatto che esistono delle configurazioni nelle quali i manipolatori perdono mobilità e devono essere il più possibile evitate. Queste configurazioni vengono chiamate singolari. Una configurazione è detta singolare quando il rango dello Jacobiano per una data posa risulta non essere massimo. Le singolarità si possono suddividere in tre classi [10] [11]: le singolarità cinematiche, algoritmiche e di rappresentazione. Quando una certa configurazione genera una diminuzione delle possibili direzioni in cui l'End Effector si può muovere, si è in presenza di singolarità cinematica. In una configurazione che ricade in questa tipologia si dovrebbero avere nei giunti velocità infinite per determinare velocità finite nello spazio operativo. Questo problema matematicamente si può osservare nella matrice Jacobiana, che risulta avere determinante pari a zero. Le singolarità di rappresentazione sono legate al metodo scelto per la costruzione dello Jacobiano analitico. Quelle algoritmiche invece sono legate all'algoritmo scelto per la risoluzione della cinematica inversa; ad esempio, se si sceglie di utilizzare lo Jacobiano aumentato questo può diventare singolare a causa dei termini aggiuntivi, anche se non lo è lo Jacobiano di partenza. Le singolarità cinematiche del robot in esame, escluso il caso di posizione estesa, avvengono per tre particolari coppie di angoli dei giunti [15]. Le quattro posizioni di singolarità sono visibili nella figura 2.5.



**Figura 2. 5: Posizioni di singolarità cinematica per il robot in esame**

## 2.3 Modello semplificato di un manipolatore una volta ridondante nello spazio

Prendendo in esame una struttura a sette gradi di libertà con le caratteristiche precedentemente descritte, si può costruire un modello semplificato del robot [11]. Questo modello semplificato è utile a descrivere con un unico parametro le infinite configurazioni che il manipolatore può assumere data una certa posa dell'End Effector. Questo parametro è chiamato *angolo di Swivel*.

### 2.3.1 Analisi geometrica

Per costruire il modello semplificato di un robot avente la struttura definita nel paragrafo 1.3 si possono fare alcune osservazioni. Si possono infatti notare tre particolari fattori geometrici validi per ogni configurazione del manipolatore determinata la posa dell'End Effector:

- 1) la posizione del punto chiamato centro spalla è sempre fissa rispetto al sistema di riferimento  $0$ ; infatti la distanza che è presente tra loro è indipendente dalla configurazione dei giunti;
- 2) la posa del centro polso è sempre fissa rispetto al sistema di riferimento dell'End Effector; infatti il centro polso è collegato all'End Effector da un link rigido e perciò la posizione del centro polso, fissata la posa dell'End Effector, è fissata per il sistema di riferimento  $0$ ;
- 3) la distanza che c'è tra il centro polso e il gomito è sempre uguale, essendo collegati da un link rigido.

Il punto di centro spalla nel sistema di riferimento  $0$  ha coordinate pari a:

$$P_S = (p_S(x_0), p_S(y_0), p_S(z_0)) \quad (2.18)$$

Nello stesso sistema di riferimento, la posizione del centro polso è descritta dal vettore:

$${}^0 \underline{p}_s = \begin{bmatrix} p_s(x_0) \\ p_s(y_0) \\ p_s(z_0) \end{bmatrix} \quad (2.19)$$

Il punto di centro polso, che nel sistema di riferimento  $0$ , ha coordinate pari a:

$$P_w = (p_w(x_0), p_w(y_0), p_w(z_0)) \quad (2.20)$$

nello stesso sistema di riferimento è descritto dal vettore:

$${}^0 \underline{p}_w = \begin{bmatrix} p_w(x_0) \\ p_w(y_0) \\ p_w(z_0) \end{bmatrix} \quad (2.21)$$

Tutte le posizioni del punto di centro gomito rispetto al sistema di riferimento  $0$ , sono individuate dalle coordinate del tipo:

$$P_e = (p_e(x_0), p_e(y_0), p_e(z_0)) \quad (2.22)$$

Il vettore che rappresenta la posizione di questo punto è:

$${}^0 \underline{p}_e = \begin{bmatrix} p_e(x_0) \\ p_e(y_0) \\ p_e(z_0) \end{bmatrix} \quad (2.23)$$

Le distanze che sono presenti tra i punti individuati da questi tre vettori possono essere definite come:

$$l_1 = |P_e - P_s| \quad (2.24)$$

$$l_2 = |P_w - P_e| \quad (2.25)$$

$$L_{ws} = |P_w - P_s| \quad (2.26)$$

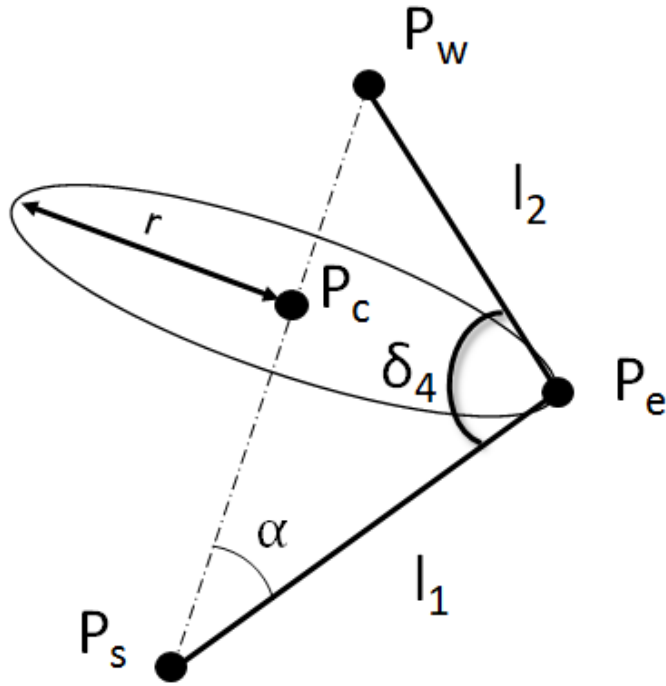
Dove  $l_1$  e  $l_2$  sono due segmenti di lunghezza fissa e determinata dalla sola geometria del manipolatore, che idealmente collegano tra loro il centro spalla al gomito e il gomito al centro polso, mentre  $L_{ws}$  è la distanza tra spalla e polso. Scelta la posa dell'End Effector, la lunghezza  $L_{ws}$  è univocamente determinata. Conoscendo questi tre parametri, si può determinare l'angolo compreso tra i due link  $l_1$  e  $l_2$  tramite il Teorema del coseno. Questo angolo, che ha lo stesso valore in tutte le possibili posizioni del centro gomito  $P_e$  definita una certa posa dell'EE, determina la configurazione del giunto 4 e risulta pari a:

$$\cos \delta_4 = \frac{l_1^2 + l_2^2 - L_{ws}^2}{2l_1 l_2} \quad (2.27)$$

Come si può osservare dalla figura 2.6 le infinite posizioni che il giunto di gomito può assumere possono quindi essere definite come luogo dei punti appartenenti a una circonferenza, il cui centro  $P_c$  giace sull'asse che va dal centro spalla al centro polso, asse che è perpendicolare al piano a cui appartiene la circonferenza. Il centro della circonferenza  $P_c$  ha coordinate:

$$P_c = (P_c(x_0), P_c(y_0), P_c(z_0)) \quad (2.28)$$

ed è il punto di intersezione tra la retta passante da  $P_s$  e da  $P_w$  e la retta perpendicolare a questa e passante da  $P_e$ .



**Figura 2. 6: Circonferenza sulla quale può essere posizionato il giunto di gomito**

Un metodo di calcolo della posizione di questo punto verrà spiegato in seguito. Il raggio può essere calcolato come la distanza tra  $P_e$  e il centro della circonferenza:

$$r = \|P_e - P_c\| \quad (2.29)$$

L'angolo  $\alpha$ , come si vede nella figura 2.6, è l'angolo compreso tra il segmento che collega i punti  $P_s$  e  $P_w$  e il segmento che collega i punti  $P_s$  e  $P_e$  e risulta essere pari a:

$$\cos \alpha = \frac{l_1^2 + L_{ws}^2 - l_2^2}{2l_1 L_{ws}} \quad (2.30)$$

### 2.3.2 Sistema di riferimento per l'analisi della ridondanza

Per l'analisi della ridondanza di un robot una volta ridondante nello spazio e per definire l'angolo di Swivel, può essere utile descrivere il manipolatore tramite un sistema di riferimento che, definito in modo opportuno, permetta di individuare in modo più agile le posizioni che possono essere assunte dal gomito fissata la posa dell'End Effector. Si costruisce quindi un nuovo sistema di riferimento,  $r$ , avente l'origine  $O_r$  nel centro spalla e l'asse  $x_r$  diretto da  $P_s$  a  $P_w$ . La scelta degli altri due assi  $y_r$  e  $z_r$ , che può essere compiuta in modo arbitrario, determina, come si studia in seguito, l'angolo di Swivel. Il versore dell'asse  $x_r$ ,  $\underline{n}$ , è espresso come:

$$\underline{n} = \frac{\underline{p}_w - \underline{p}_s}{\|\underline{p}_w - \underline{p}_s\|} \quad (2.31)$$

Il versore dell'asse  $y_r$ ,  $\underline{u}$ , può essere calcolato come:

$$\underline{u} = \frac{\underline{a} - (\underline{a} \cdot \underline{n}) \cdot \underline{n}}{\|\underline{a} - (\underline{a} \cdot \underline{n}) \cdot \underline{n}\|} \quad (2.32)$$

Dove  $\underline{a}$  è un vettore che si può scegliere in modo arbitrario. Questo vettore può essere scelto pari a un vettore  $\underline{b}$  che ha origine in  $P_s$  e punta verso  $P_e$  [6]. In questo caso risulterà:

$$\underline{u} = \frac{\underline{b} - (\underline{b} \cdot \underline{n}) \cdot \underline{n}}{\|\underline{b} - (\underline{b} \cdot \underline{n}) \cdot \underline{n}\|} \quad (2.33)$$

Il versore mancante per completare la terna destrorsa può essere trovato tramite il prodotto vettoriale degli altri due versori:

$$\underline{v} = \underline{n} \wedge \underline{u} \quad (2.34)$$

L'angolo di rotazione  $\varphi$  attorno al versore  $\underline{n}$  è chiamato angolo di Swivel.

Esso identifica univocamente le possibili posizioni del punto  $P_e$ .

La scelta della configurazione del robot per la quale l'angolo di Swivel è pari a zero verrà analizzata in dettaglio nel sotto-paragrafo successivo.

Nella figura 2.7 si può vedere il sistema di riferimento, i versori  $\underline{n}$ ,  $\underline{u}$  e  $\underline{v}$  e l'angolo di Swivel per una generica posizione del robot; mentre lo schema della stessa configurazione secondo il modello geometrico è visibile nella figura 2.8. Cambiando così il sistema di riferimento si riesce a descrivere in modo più agevole le pose che il gomito può assumere mantenendo fissa la posizione dell'End Effector; infatti, descrivendo queste pose del gomito nel sistema di riferimento  $\theta$ , si ha che, in generale, per ogni posa tutte le coordinate che la descrivono cambiano a seconda del posto in cui si trova il gomito, mentre, nel sistema di riferimento  $r$ , cambiano solo le coordinate  $y_r$  e  $z_r$ . Inoltre, le coordinate  $y_r$  e  $z_r$  cambiano in relazione l'una con l'altra, poiché la posizione del gomito è descritta mediante la circonferenza che è stata in precedenza definita. Nel sistema di riferimento  $r$  le posizioni possibili del gomito sono descritte come luogo di punti equidistanti dall'asse  $x_r$  e individuati dall'angolo di Swivel.



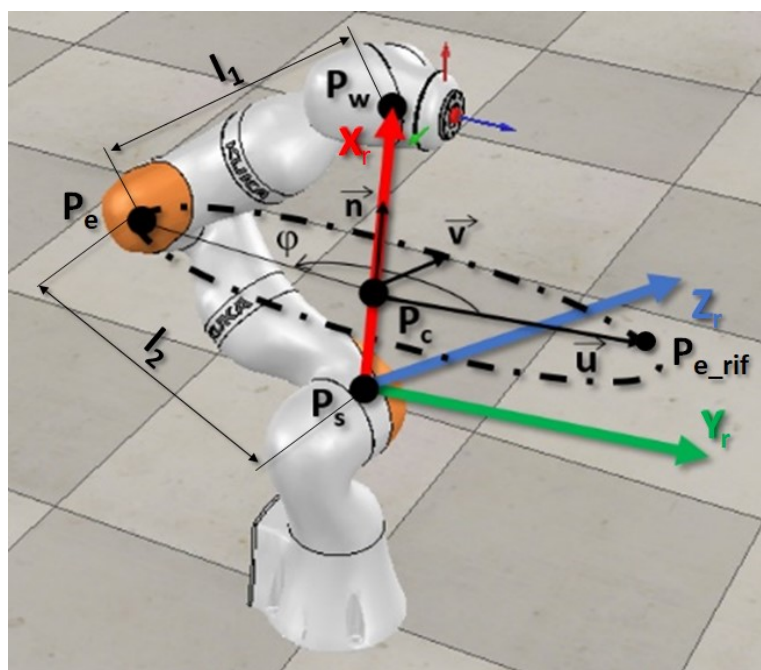


Figura 2. 7: Sistema di riferimento ausiliario per una generica configurazione del robot

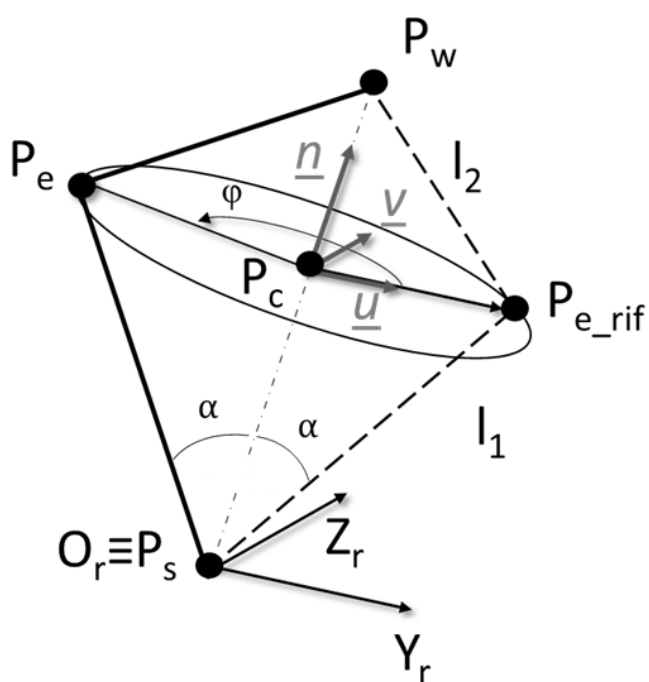
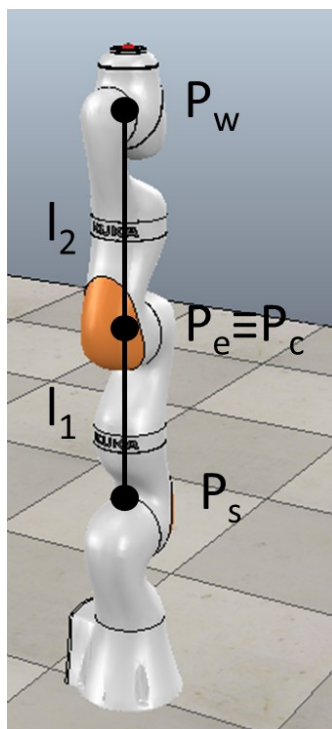


Figura 2. 8: Versori degli assi del nuovo sistema di riferimento e angolo di Swivel

Un caso particolare, visibile nella figura 2.9, è quando il braccio è in posizione completamente estesa. In questo caso la circonferenza si riduce a un punto e le infinite configurazioni possibili portano ad avere sempre il gomito nello stesso punto.



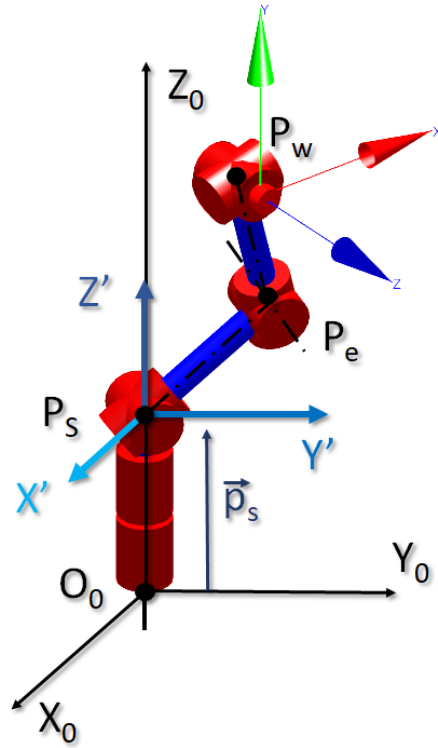
**Figura 2. 9: Schema di una configurazione per la quale il braccio è completamente esteso**

### 2.3.3 Matrice di trasformazione per la costruzione del sistema di riferimento per l'analisi della ridondanza

Per poter descrivere un sistema di riferimento rispetto ad un altro si possono utilizzare le matrici di trasformazioni. Esse permettono, come verrà analizzato meglio in seguito, di esprimere un vettore, indicante la posizione di un punto, o una matrice, indicante la posa di un sistema di riferimento, in un sistema di riferimento diverso da quello in cui sono inizialmente espresse. Si analizza quindi come si può costruire la matrice di trasformazione per descrivere una posizione o una posa, descritta nel sistema di riferimento  $0$ , nel sistema di riferimento  $r$ . Conoscendo la posizione di centro polso rispetto alla terna di riferimento zero si può procedere con la costruzione del nuovo sistema di riferimento  $r$ , precedentemente definito. Per far ciò si utilizza un sistema ausiliario che esegue le trasformazioni che devono essere applicate per passare dal sistema di riferimento  $0$  a quello  $r$ . Questo sistema di riferimento ha inizialmente origine,  $O_{aux}$ , coincidente con l'origine  $O_0$  e gli assi  $x_{aux}$ ,  $y_{aux}$ , e  $z_{aux}$  coincidenti con i  $x_0$ ,  $y_0$  e  $z_0$ . Questo sistema viene traslato affinché l'origine  $O_{aux}$  coincida con il centro spalla  $P_S$ . Per realizzare matematicamente questa trasformazione si costruisce la matrice omogenea di traslazione  $Trâs(\underline{p}_s)$  che può essere scritta come:

$$Trâs(\underline{p}_s) = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & p_s(x) \\ 0 & 1 & 0 & p_s(y) \\ 0 & 0 & 1 & p_s(z) \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad (2.35)$$

Dove  $p_s(x)$ ,  $p_s(y)$  e  $p_s(z)$  sono le componenti del vettore posizione del centro spalla. Applicando la traslazione si ottiene il sistema di riferimento  $x'-y'-z'$ . Un esempio di questa traslazione è visibile nella figura 2.10.



**Figura 2. 10: Traslazione di un sistema di riferimento solidale a quello 0 (in nero) per ottenere il sistema di riferimento x'-y'-z' (in blu)**

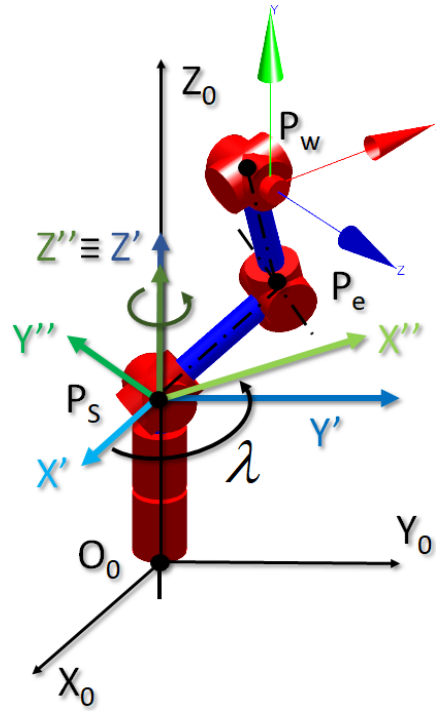
Per descrivere il vettore posizione del centro polso nel sistema di riferimento x'-y'-z' si pre-moltiplica la matrice di traslazione:

$${}^r \underline{p}_w = \text{Trâs}(\underline{p}_s)^{-1} \cdot {}^0 \underline{p}_w \quad (2.36)$$

Il vettore così ottenuto è utile per ricavare gli angoli di rotazione che, applicati sistema x'-y'-z', fanno sì che questo coincida con il sistema di riferimento r. L'angolo  $\lambda$ , angolo di rotazione attorno all'asse z', si può ricavare come:

$$\lambda = a \tan 2({}^r \underline{p}_w(y'), {}^r \underline{p}_w(x')) \quad (2.37)$$

Conoscendo quest'angolo si può costruire matrice di rotazione  $R\hat{o}t(z', \lambda)$ . Essa permette di ruotare il sistema di riferimento  $x'-y'-z'$  per ottenere il sistema di riferimento  $x''-y''-z''$ . Un esempio di questa rotazione è mostrato nella figura 2.11.

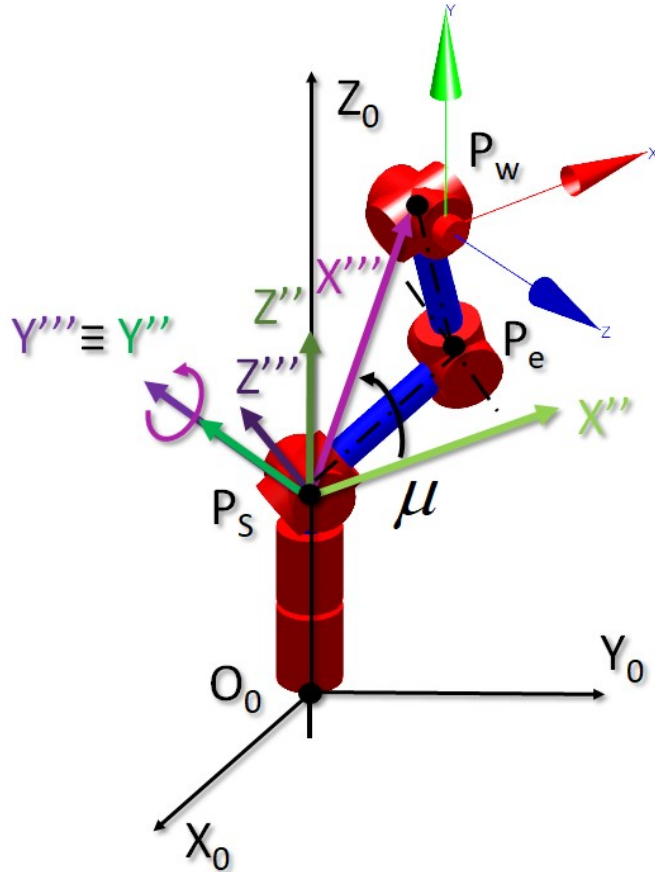


**Figura 2. 11: Rotazione del sistema  $x'-y'-z'$  (in verde) attorno all'asse  $z'$  per ottenere il sistema di riferimento  $x''-y''-z''$  (in blu)**

La rotazione del sistema di riferimento  $x''-y''-z''$  attorno all'asse  $y''$  di un angolo  $\mu$  permette di costruire il sistema di riferimento  $x'''-y'''-z'''$  e di definire la matrice di rotazione  $R\hat{o}t(y'', \mu)$ . Questo angolo è calcolabile come:

$$\mu = 2\pi - a \tan 2(\underline{p}_w(z'), \sqrt{\underline{p}_w(x')^2 + \underline{p}_w(y')^2}) \quad (2.38)$$

Come mostrato nella figura 2.12 la rotazione, dovuta all'applicazione della matrice di rotazione  $R_{\hat{t}(y'', \mu)}$  al sistema di riferimento 2, permette di far passare l'asse  $x'''$  dal centro polso.



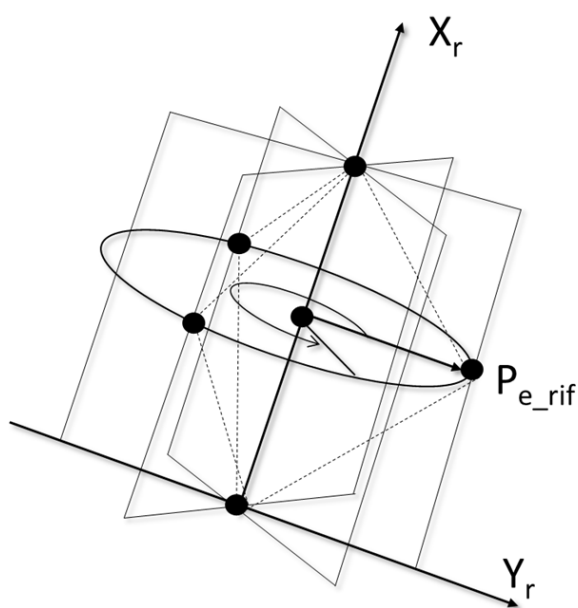
**Figura 2. 12: Rotazione del sistema di riferimento  $x''$ - $y''$ - $z''$  (in verde) attorno all'asse  $y''$  per ottenere il sistema di riferimento  $x'''$ - $y'''$ - $z'''$  (in viola)**

L'ultima rotazione è quella che permette alla terna  $x'''$ - $y'''$ - $z'''$  di coincidere con il sistema di riferimento  $r$ . Questa rotazione è pari a:

$$\psi = \psi_0 + \varphi \quad (2.39)$$

Dove  $\varphi$  è l'angolo di Swivel e  $\psi_0$  è un angolo fisso per ogni posa dell'End Effector e rappresenta l'angolo di cui bisogna far ruotare la terna  $x'''-y'''-z'''$  affinché questa coincida con la configurazione scelta come riferimento di zero dell'angolo di Swivel.

La configurazione per la quale l'angolo di Swivel è pari a zero è individuata dalla configurazione nella quale la proiezione del vettore normale al piano passante dalla spalla, dal gomito e dal polso sul piano individuato dagli assi  $x_0$  e  $y_0$  coincide con l'asse  $y_0$ . Può essere utile individuare il piano che passa per il centro spalla, il centro polso e per il gomito. Per ogni configurazione, infatti, si può individuare un piano passante per la spalla, per il gomito e per il polso, ma poiché tutte le possibili posizioni che il gomito può assumere giacciono su una stessa circonferenza, i piani rappresentativi di ogni configurazione sono appartenenti ad un unico fascio di piani, aventi in comune la retta passante per i punti di centro spalla e centro polso, questo fascio è visibile nella figura 2.13.



**Figura 2. 13: Fascio di piani passanti da centro spalla, centro polso e dalle posizioni del gomito**

Un generico piano passante per i punti  $P_s, P_e$  e  $P_w$  espresso nel sistema di riferimento fisso può essere descritto come:

$$\pi: a_\pi x_0 + b_\pi y_0 + c_\pi z_0 + d_\pi = 0 \quad (2.40)$$

Conoscendo i tre punti da cui ogni piano deve passare si possono cercare i coefficienti  $a_\pi, b_\pi, c_\pi$  e  $d_\pi$  risolvendo l'equazione:

$$\det \begin{bmatrix} x - p_s(x) & y - p_s(y) & z - p_s(z) \\ p_e(x) - p_s(x) & p_e(y) - p_s(y) & p_e(z) - p_s(z) \\ p_w(x) - p_s(x) & p_w(y) - p_s(y) & p_w(z) - p_s(z) \end{bmatrix} = 0 \quad (2.41)$$

I coefficienti  $a_\pi, b_\pi, c_\pi$  e  $d_\pi$  del piano possono essere quindi calcolati come:

$$\begin{aligned} a_\pi &= p_s(y_0)p_e(z_0) - p_s(z_0)p_e(y_0) - p_s(y_0)p_w(z_0) + \\ &\quad + p_s(z_0)p_w(y_0) + p_e(y_0)p_w(z_0) - p_e(z_0)p_w(y_0) \\ b_\pi &= -p_s(x_0)p_e(z_0) + p_s(z_0)p_e(x_0) + p_s(x_0)p_w(z_0) + \\ &\quad - p_s(z_0)p_w(x_0) - p_e(x_0)p_w(z_0) + p_e(z_0)p_w(x_0) \\ c_\pi &= p_s(x_0)p_e(y_0) - p_s(y_0)p_e(x_0) - p_s(x_0)p_w(y_0) + \\ &\quad + p_s(y_0)p_w(x_0) + p_e(x_0)p_w(y_0) - p_e(y_0)p_w(x_0) \\ d_\pi &= p_s(x_0)p_e(z_0)p_w(y_0) - p_s(x_0)p_e(y_0)p_w(z_0) + \\ &\quad + p_s(y_0)p_e(x_0)p_w(z_0) - p_s(y_0)p_e(z_0)p_w(x_0) + \\ &\quad - p_s(z_0)p_e(x_0)p_w(y_0) + p_s(z_0)p_e(y_0)p_w(x_0) \end{aligned} \quad (2.42)$$

Il vettore composto dai coefficienti  $a_\pi, b_\pi$  e  $c_\pi$  è uno dei vettori perpendicolari al piano  $\pi$ :



$$\underline{n}_\pi = \begin{bmatrix} a_\pi \\ b_\pi \\ c_\pi \end{bmatrix} \quad (2.43)$$

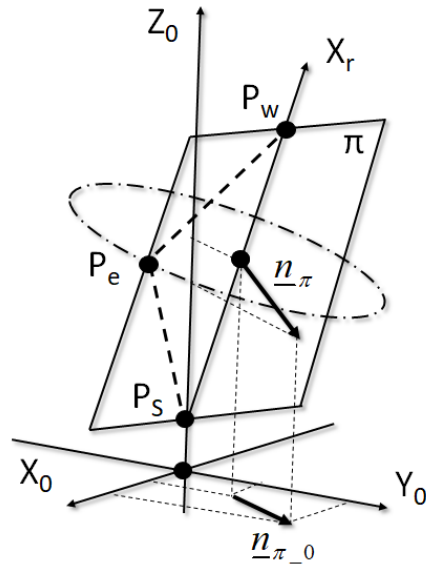
La proiezione del vettore  $\underline{n}_\pi$  sul piano  $x_0$ - $y_0$  è il vettore che ha come prime due componenti  $a_\pi$  e  $b_\pi$  e come terza componente zero e che per semplicità per le operazioni successive viene normalizzato. Può anche essere calcolato come:

$$\underline{n}_{\pi_0} = \frac{\begin{bmatrix} a_\pi \\ b_\pi \\ c_\pi \end{bmatrix} - \left( \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} a_\pi \\ b_\pi \\ 0 \end{bmatrix} \right) \cdot \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}}{\left\| \begin{bmatrix} a_\pi \\ b_\pi \\ c_\pi \end{bmatrix} - \left( \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} a_\pi \\ b_\pi \\ 0 \end{bmatrix} \right) \cdot \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} \right\|}} = \frac{\begin{bmatrix} a_\pi \\ b_\pi \\ 0 \end{bmatrix}}{\left\| \begin{bmatrix} a_\pi \\ b_\pi \\ 0 \end{bmatrix} \right\|} \quad (2.44)$$

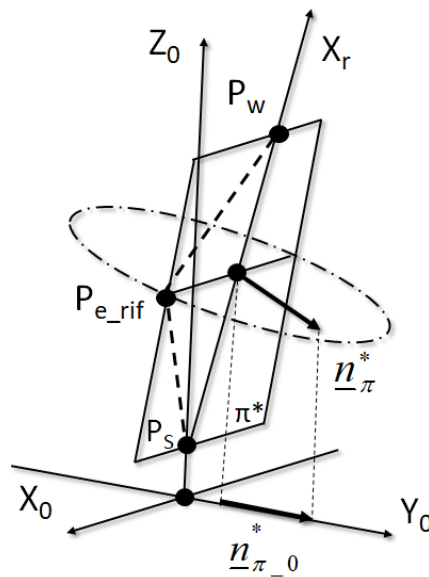
Dove il vettore  $[0 \ 0 \ 1]^T$  è il vettore perpendicolare al piano  $x_0$ - $y_0$ . Nella figura 2.14 si può vedere un generico piano  $\pi$  e i vettori  $\underline{n}_\pi$  e  $\underline{n}_{\pi_0}$  ad esso associati. La configurazione per la quale il vettore  $\underline{n}_{\pi_0}^*$  è parallelo all'asse  $y_0$  è la configurazione che viene scelta come configurazione per la quale l'angolo di Swivel è pari a zero. Esso quindi risulta pari a:

$$\underline{n}_{\pi_0}^* = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} \quad (2.45)$$

Il piano il cui vettore perpendicolare è  $\underline{n}_\pi^*$  è il piano  $\pi^*$ . Nella figura 2.15 si può vedere un esempio di un generico piano  $\pi^*$  e dei vettori  $\underline{n}_\pi^*$  e  $\underline{n}_{\pi_0}^*$  ad esso associati.



**Figura 2. 14: Esempio di un generico piano  $\pi$  e dei vettori  $\underline{n}_\pi$  e  $\underline{n}_{\pi_0}$  ad esso associati**



**Figura 2. 15: Esempio di un generico piano  $\pi^*$  e dei vettori  $\underline{n}_\pi^*$  e  $\underline{n}_{\pi_0}^*$  ad esso associati**

Si ottiene quindi il seguente sistema di equazioni:

$$\begin{cases} \underline{n}_{\pi\_0}^*(x_0) = 0 \\ \underline{n}_{\pi\_0}^*(y_0) = 1 \\ c_{\pi} = 0 \end{cases} \quad (2.46)$$

Gli unici casi in cui questa uguaglianza non può essere mai verificata è quando la retta passante per il centro spalla e il centro polso è parallela al piano  $x_0$ - $y_0$ . Infatti, in questo caso nessun vettore  $\underline{n}_{\pi\_0}$  può essere parallelo all'asse  $y_0$ . In questi casi si prende come zero dell'angolo di Swivel la configurazione che porta il manipolatore ad avere il gomito nella posizione con la coordinata  $z_0$  più piccola.

Chiamando  $P_{e\_rif}$  la posizione del gomito per cui la configurazione del robot ha l'angolo di Swivel pari a zero, l'angolo  $\psi_0$  può essere calcolato come:

$$\psi_0 = a \tan 2(P_{e\_rif}(z_0), P_{e\_rif}(y_0)) \quad (2.47)$$

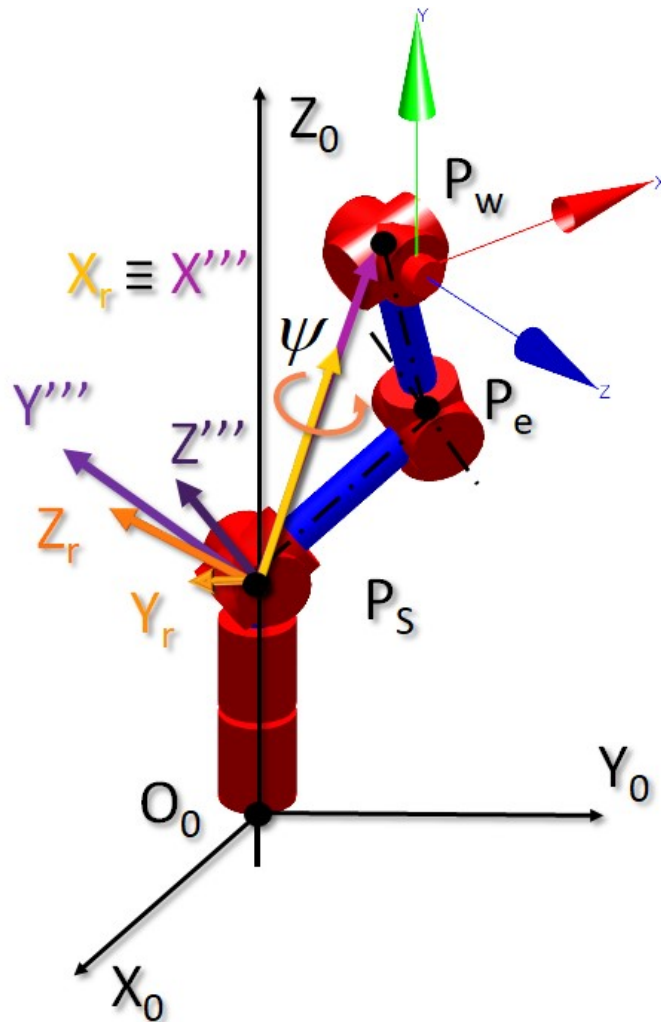
Un esempio della rotazione  $R\hat{o}t(x''', \psi)$  si può vedere nella figura 2.16. La matrice omogenea di trasformazione dalla terna 0 a quella  $r$  può quindi essere calcolata come:

$${}^0\hat{T}_r = Tr\hat{a}s(p_s) \cdot R\hat{o}t(z', \lambda) \cdot R\hat{o}t(y'', \mu) \cdot R\hat{o}t(x''', \psi) \quad (2.48)$$

La matrice  ${}^0\hat{T}_r$  permette di esprimere le coordinate di un qualsiasi vettore espresse nel sistema di riferimento  $r$  in coordinate espresse nel sistema di riferimento  $0$ , questo avviene quando si pre-moltiplica la matrice  ${}^0\hat{T}_r$  al

In particolare, le posizioni del centro polso e del centro spalla nel nuovo sistema di riferimento possono essere calcolate come:

$$\begin{aligned} {}^r \underline{\hat{p}}_w &= {}^r \hat{T}_0 \cdot {}^0 \underline{\hat{p}}_w \\ {}^r \underline{\hat{p}}_S &= {}^r \hat{T}_0 \cdot {}^0 \underline{\hat{p}}_S \end{aligned} \quad (2.49)$$



**Figura 2. 16: Sistema di riferimento r (in arancione)**

Nel sistema di riferimento  $r$  si può andare a scrivere facilmente l'equazione della circonferenza su cui giace il gomito che è descritta dall'angolo di Swivel  $\varphi$ . Infatti, la posizione del gomito può essere descritta in funzione del solo angolo di Swivel. Essa risulta essere:

$$\begin{cases} {}^r p_e(x_r) = l_1 \cos(\alpha) \\ {}^r p_e(y_r) = l_1 \sin(\alpha) \cos(\varphi) \\ {}^r p_e(z_r) = l_1 \sin(\alpha) \sin(\varphi) \end{cases} \quad (2.50)$$

Dove l'angolo  $\alpha$ , come definito nell'equazione 1.30, è l'angolo compreso tra il segmento che collega i punti  $P_S$  e  $P_w$  e il segmento che collega i punti  $P_S$  e  $P_e$  ed è costante scelta una determinata posa dell'End Effector.

La posizione del centro della circonferenza di coordinate:

$$P_c = (P_c(x_r), P_c(y_r), P_c(z_r)) \quad (2.51)$$

è individuata dal vettore  ${}^r \underline{p}_c$  le cui componenti risultano essere:

$$\begin{cases} {}^r p_c(x_r) = {}^r p_e(x_r) = l_1 \cos(\alpha) \\ {}^r p_c(y_r) = 0 \\ {}^r p_c(z_r) = 0 \end{cases} \quad (2.52)$$

Il raggio può essere calcolato come distanza tra il centro e uno dei punti appartenenti alla circonferenza visti dal sistema di riferimento  $r$ :

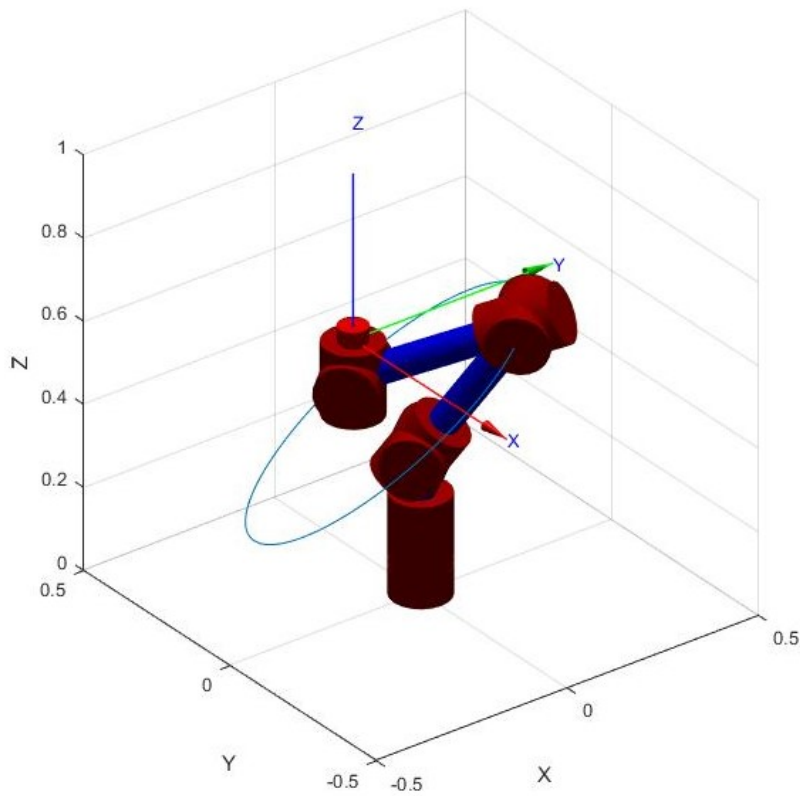
$$r = \| {}^r \underline{p}_e - {}^r \underline{p}_c \| \quad (2.53)$$

Pre-moltiplicando i vettori  ${}^r\hat{\underline{p}}_c$  e  ${}^r\hat{\underline{p}}_e$  per la matrice  ${}^r\hat{T}_0 = {}^0\hat{T}_r^{-1}$  si ottengono i vettori  ${}^0\hat{\underline{p}}_c$  e  ${}^0\hat{\underline{p}}_e$  che sono espressi nel sistema di riferimento iniziale.

$${}^0\hat{\underline{p}}_c = {}^0\hat{T}_r \cdot {}^r\hat{\underline{p}}_c \quad (2.54)$$

$${}^0\hat{\underline{p}}_e = {}^0\hat{T}_r \cdot {}^r\hat{\underline{p}}_e \quad (2.55)$$

Nella figura 2.17 si può vedere la circonferenza così creata per una generica posa dell'End Effector.



**Figura 2. 17: Circonferenza sulla quale il gomito del robot può posizionarsi per una generica posa dell'End Effector**

## 2.4 Cinematica inversa

Come scritto nel paragrafo 1.2, la cinematica inversa consiste nel determinare i valori delle variabili di giunto che permettano di ottenere una determinata posa dell'End Effector. Per far sì che l'End Effector del manipolatore assuma la posa voluta, si devono calcolare, attraverso la cinematica inversa, le configurazioni di tutti i sette giunti. Nella figura 2.18 è possibile vedere un esempio di una posa dell'End Effector che si può ottenere. Data la struttura con polso monocentrico del robot, è stato possibile dividere il problema cinematico inverso in due problemi di minore complessità. Si è infatti prima affrontato il problema del posizionamento del centro polso, che è determinata dall'azione dei soli giunti di spalla e gomito, poi il problema dell'orientazione, legata ai giunti di polso. Un'altra osservazione che si può fare è che se si fissa la posizione del gomito di un manipolatore a sette gradi di libertà, si riduce il problema a quello di un robot a sei gradi di libertà, di più facile risoluzione.

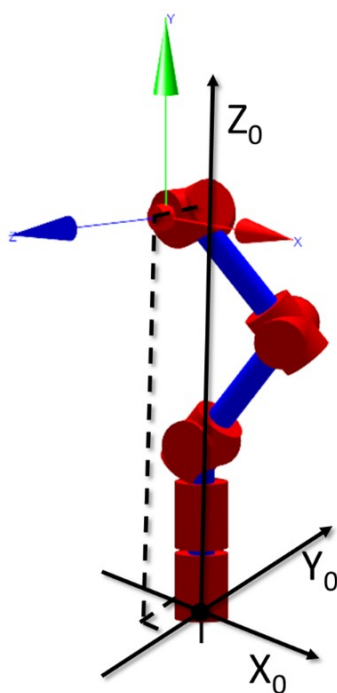


Figura 2. 18: Esempio di posa del manipolatore a sette giunti  $\mathbf{p}_{EE} = [-0.1, -0.1, 0.8]^T$   
 $\text{Rot}(x_0, 90^\circ), \text{Rot}(y_0, 0^\circ), \text{Rot}(z_0, 0^\circ)$

### 2.4.1 Centro polso

È utile individuare la posa del centro polso; infatti per determinare le configurazioni dei giunti ci si può basare sulla posa di questo. La posa del centro polso, conoscendo quella posa, è di facile definizione. Poiché l'orientazione dell'End Effector è la stessa di quella del link sette e la sua posizione rispetto a questo dipende solo da fattori geometrici indipendenti dalla configurazione, è facilmente individuabile, e in particolare si può calcolare la matrice di trasformazione omogenea del settimo link:

$${}^0\hat{A}_7 = {}^0\hat{A}_{EE} {}^7\hat{A}_{EE}^{-1} \quad (2.56)$$

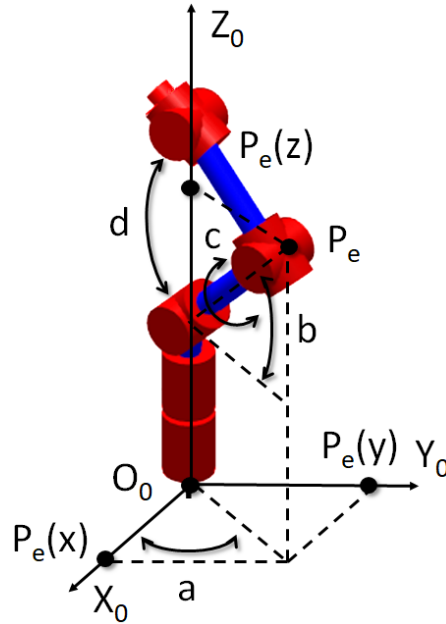
Dove  ${}^0\hat{A}_7$  è la matrice omogenea che indica la posa del sistema di riferimento sette rispetto a quello fisso, mentre  ${}^7\hat{A}_{EE}^{-1}$  è l'inversa della matrice che indica la posa dell'End Effector rispetto al link sette. Da questa si può estrarre la posizione del centro polso  ${}^0\underline{p}_w$ , essa infatti risulta essere la quarta colonna della matrice  ${}^0\hat{A}_7$ .

### 2.4.2 Braccio

La prima parte della risoluzione della cinematica inversa consiste nel valutare le configurazioni che permettono di portare il centro polso nella posizione voluta. La rotazione del primo giunto permette di ruotare il gomito attorno all'asse  $z_0$ , la rotazione del secondo giunto permette di ruotare il gomito attorno a un asse perpendicolare alla direzione individuata dal vettore che va dalla spalla al gomito, il terzo giunto permette la rotazione attorno all'asse passante dalla spalla e dal gomito e il quarto giunto permette la rotazione relativa tra il link  $l_1$  e il link  $l_2$  attorno a un asse tangente alla circonferenza individuata dalle posizioni possibili



del gomito. Nella figura 2.19 è presente uno schema degli angoli che i primi quattro giunti vanno a modificare, rispettivamente la rotazione  $a$  deriva dalla rotazione del giunto 1, la  $b$  dal giunto 2, la  $c$  dal 3 e la  $d$  dal 4.



**Figura 2. 19: Rotazioni derivanti dalla variazione della configurazione dei giunti** rotazione, è indicata con  $a$  la rotazione che deriva dal giunto 1, con  $b$  quella che deriva dal giunto 2, con  $c$  quella che deriva dal giunto 3 e la  $d$  dal giunto 4

Per calcolare la cinematica inversa dei primi quattro giunti si può procedere nel seguente modo. Definita grazie all'angolo di Swivel una determinata posizione del gomito nello spazio rispetto al sistema di riferimento  $0$ , questa, come visto in precedenza, può essere espressa come:

$${}^0 \underline{p}_e = \begin{bmatrix} p_e(x_0) \\ p_e(y_0) \\ p_e(z_0) \end{bmatrix} \quad (2.57)$$

Poiché i giunti responsabili della posizione nello spazio del gomito sono i primi tre giunti, le prime tre righe dell'ultima colonna della matrice di trasformazione dal sistema di riferimento 0 al sistema di riferimento 3 risultano essere le coordinate della posizione dell'origine del sistema di riferimento 3 e quindi del giunto di gomito. La matrice di trasformazione risulta essere:

$$\begin{aligned}
 {}^0\hat{A}_3 &= {}^0\hat{A}_B \cdot {}^B\hat{A}_1 \cdot {}^1\hat{A}_2 \cdot {}^2\hat{A}_3 = \\
 &= \begin{bmatrix} -c_3c_1c_2 + s_3s_1 & -c_1s_2 & -c_3s_1 - s_3c_1c_2 & -d_3c_1s_2 \\ -c_3c_2s_1 - s_3c_1 & -s_1s_2 & -s_3c_2s_1 + c_3c_1 & -d_3s_1s_2 \\ -c_3s_2 & c_2 & -s_2s_3 & d_B + d_1 + d_3c_2 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} = \quad (2.58) \\
 &= \begin{bmatrix} E_{11} & E_{12} & E_{13} & E_{14} \\ E_{21} & E_{22} & E_{23} & E_{24} \\ E_{31} & E_{32} & E_{33} & E_{34} \\ E_{41} & E_{42} & E_{43} & E_{44} \end{bmatrix}
 \end{aligned}$$

Dove le prime tre righe dell'ultima colonna indicano la posizione del gomito rispetto al sistema di riferimento 0. Esse possono essere estratte della matrice attraverso il seguente prodotto tra matrici:

$$\underline{\hat{p}}_e = \begin{bmatrix} p_e(x_0) \\ p_e(y_0) \\ p_e(z_0) \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} E_{14} \\ E_{24} \\ E_{34} \\ E_{44} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} E_{11} & E_{12} & E_{13} & E_{14} \\ E_{21} & E_{22} & E_{23} & E_{24} \\ E_{31} & E_{32} & E_{33} & E_{34} \\ E_{41} & E_{42} & E_{43} & E_{44} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} \quad (2.59)$$

Conoscendo la posizione del gomito si può estrarre dal termine  $E_{34}$  della matrice  ${}^0\hat{A}_3$  il valore del coseno del termine  $q_2$ :

$$\cos(q_2) = \frac{p_e(z) - d_B - d_1}{d_3} \quad (2.60)$$

Da cui si possono calcolare i due possibili valori delle configurazioni del secondo giunto:

$$q_{2,1} = a \tan 2(\sqrt{1 - \cos^2(q_2)}, \cos(q_2)) \quad (2.61)$$

$$q_{2,2} = a \tan 2(-\sqrt{1 - \cos^2(q_2)}, \cos(q_2)) \quad (2.62)$$

Conoscendo  $q_2$  si può calcolare dal termine  $E_{24}$  il seno dell'angolo  $q_1$  e dal termine  $E_{14}$  il suo coseno. Poiché  $E_{24}$  e  $E_{14}$  dipendono dal termine  $q_2$  e questo assume due diversi valori, il termine  $q_1$  può assumere due diversi valori:

$$q_{1,1} = a \tan 2\left(\frac{-p_e(y)}{d_3 \cdot \sin(q_{2,1})}, \frac{-p_e(x)}{d_3 \cdot \sin(q_{2,1})}\right) \quad (2.63)$$

$$q_{1,2} = a \tan 2\left(\frac{-p_e(y)}{d_3 \cdot \sin(q_{2,2})}, \frac{-p_e(x)}{d_3 \cdot \sin(q_{2,2})}\right) \quad (2.64)$$

Le equazioni 2.63 e 2.64 sono sempre applicabili eccetto il caso in cui il valore di  $q_2$  sia zero.

La configurazione che il quarto giunto deve assumere dipende dal coseno del parametro  $\delta_4$ , già calcolato in precedenza, che vale:

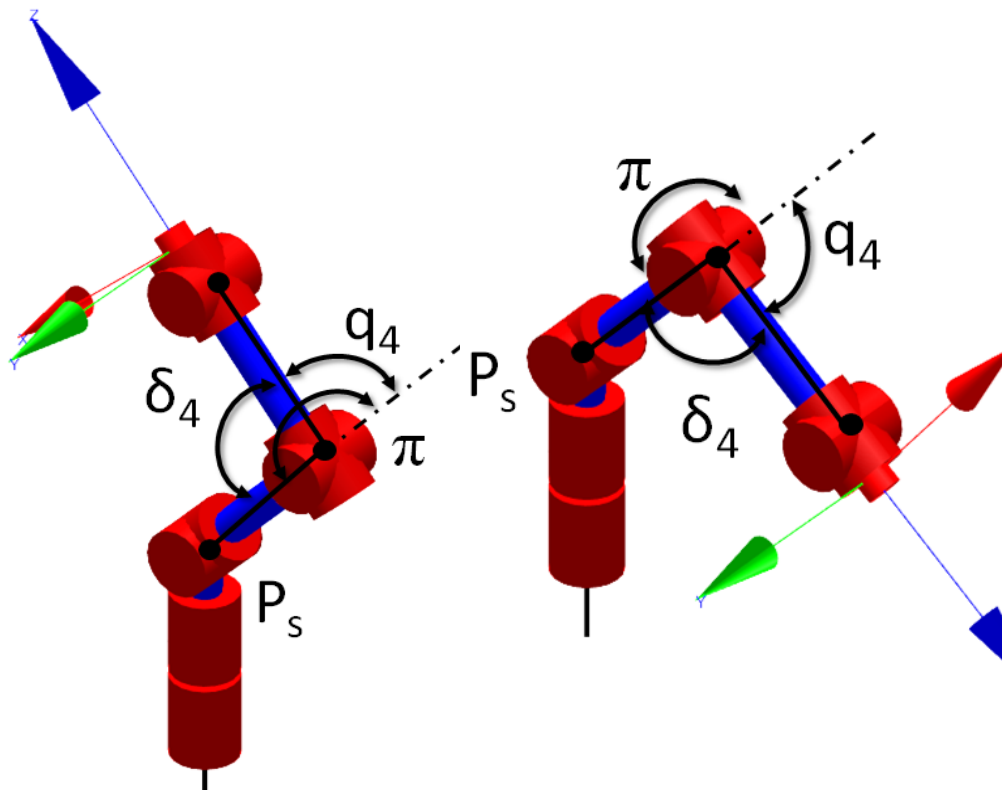
$$\cos \delta_4 = \frac{l_1^2 + l_2^2 - L_{ws}^2}{2l_1 l_2} \quad (2.65)$$

Da cui si possono estrarre le due configurazioni possibili:

$$q_{4,1} = +\left(\pi - a \tan 2\left(\sqrt{1 - \cos^2(\delta_4)}, \cos(\delta_4)\right)\right) \quad (2.66)$$

$$q_{4,2} = -\left(\pi - a \tan 2\left(\sqrt{1 - \cos^2(\delta_4)}, \cos(\delta_4)\right)\right) \quad (2.67)$$

Nella figura 2.20 sono visibili le due configurazioni del robot applicando le due rotazioni  $q_{4,1}$  e  $q_{4,2}$ . Si può notare come, non avendo ancora applicato la rotazione nel terzo giunto, il centro polso è in due posizioni differenti.



**Figura 2. 20: Esempio di configurazione del robot avendo applicato le rotazioni dei primi due giunti e del quarto utili per far sì che il robot raggiunga la posa visibile nella figura 2.18**

Per portare il centro polso nella posizione voluta si deve, a questo punto, andare a ruotare il terzo giunto. Si vuole ruotare il terzo giunto affinché la direzione dell'asse  $z_4$  coincida con la direzione del versore che punta dal centro gomito  $P_e$  al centro polso  $P_w$ . Esso può essere calcolato come:

$$dir(z_4) = \frac{\underline{p}_e - \underline{p}_w}{\|\underline{p}_e - \underline{p}_w\|} \quad (2.68)$$

La stessa direzione  $dir(z_4)$  è anche presente nella matrice  ${}^0\hat{A}_4$  :

$$\begin{aligned} {}^0\hat{A}_4 &= {}^0\hat{A}_B \cdot {}^b\hat{A}_1 \cdot {}^1\hat{A}_2 \cdot {}^2\hat{A}_3 \cdot {}^3\hat{A}_4 = \\ &= \begin{bmatrix} -c4(-c3c1c2 + s3s1) + c1s2s4 & -c3s1 - c1c2s3 & -s4(s3s1 - c3c1c2) - c1c4s2 & -d_3c1s2 \\ s4s2s1 + c4(s3c1 + c2c3s1) & -s3s1c2 + c3c1 & s4(s3c1 + c2c3s1) - c4s1s2 & -d_3s1s2 \\ c3c4s2 - c2s4 & -s2s3 & c2c4 + c3s2s4 & d_B + d_1 + d_3c2 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} = \\ &= \begin{bmatrix} R_{11} & R_{12} & R_{13} & R_{14} \\ R_{21} & R_{22} & R_{23} & R_{24} \\ R_{31} & R_{32} & R_{33} & R_{34} \\ R_{41} & R_{42} & R_{43} & R_{44} \end{bmatrix} \end{aligned} \quad (2.69)$$

Le componenti della direzione dell'asse  $z_4$  sono presenti nelle prime tre righe della terza colonna di questa matrice e possono essere calcolate come:

$$\begin{bmatrix} R_{13} \\ R_{23} \\ R_{33} \\ R_{43} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} R_{11} & R_{12} & R_{13} & R_{14} \\ R_{21} & R_{22} & R_{23} & R_{24} \\ R_{31} & R_{32} & R_{33} & R_{34} \\ R_{41} & R_{42} & R_{43} & R_{44} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} \quad (2.70)$$

La direzione cercata risulta essere quindi:

$$\begin{aligned} \text{dir}(z_4(x_0)) &= R_{13} \\ \text{dir}(z_4(y_0)) &= R_{23} \\ \text{dir}(z_4(z_0)) &= R_{33} \end{aligned} \quad (2.71)$$

Sfruttando questa uguaglianza e conoscendo i valori della direzione  $z_4$  e i valori di  $q_1$ ,  $q_2$  e  $q_4$ , si possono calcolare il seno e il coseno del parametro  $q_3$ . I valori del seno e del coseno di  $q_3$  risultano essere:

$$\cos(q_3) = \frac{\text{dir}(z_4(z_0)) - \cos(q_2) \cdot \cos(q_4)}{\sin(q_2) \cdot \sin(q_4)} \quad (2.72)$$

$$\begin{aligned} \sin(q_3) &= \frac{\text{dir}(z_4(y_0)) - \sin(q_4)(\cos(q_2) \cdot \cos(q_3) \cdot \sin(q_1))}{\cos(q_1) \cdot \sin(q_4)} + \\ &\quad - \frac{\sin(q_4)(\cos(q_4) \cdot \sin(q_1) \cdot \sin(q_2))}{\cos(q_1) \cdot \sin(q_4)} \end{aligned} \quad (2.73)$$

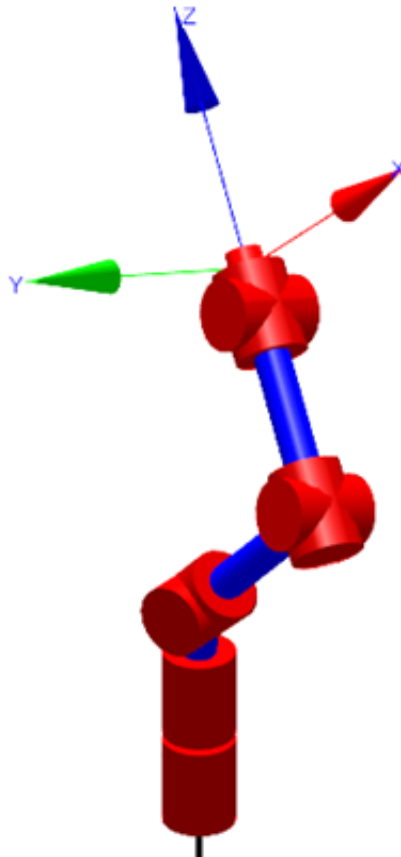
Le equazioni 2.72 e 2.73 sono sempre applicabili eccetto il caso in cui il valore di  $q_2$  o di  $q_4$  sia zero. Da queste equazioni si può calcolare il valore:

$$q_3 = a \tan 2(\sin(q_3), \cos(q_3)) \quad (2.74)$$

Dato che  $q_2$  e  $q_4$  possono assumere due valori ciascuno, tra loro indipendenti, e dato che il valore di  $q_1$  dipende da quello di  $q_2$ , allora  $q_3$  potrà assumere quattro diversi valori. Combinando tra loro le possibili soluzioni si trovano le quattro combinazioni che permettono di portare il centro polso e il gomito nelle posizioni volute; esse quindi risultano essere:

$$\begin{aligned} [q_{1,1}, q_{2,1}, q_{3,1}, q_{4,1}]; [q_{1,2}, q_{2,2}, q_{3,2}, q_{4,2}]; \\ [q_{1,1}, q_{2,1}, q_{3,3}, q_{4,2}]; [q_{1,2}, q_{2,2}, q_{3,4}, q_{4,1}]; \end{aligned} \quad (2.75)$$

Nella figura 2.21 si può vedere una delle configurazioni che il robot può assumere dopo aver applicato le rotazioni nei primi quattro giunti, si può notare come il centro polso sia nella posizione voluta, ma non con l'orientazione cercata.



**Figura 2. 21: Esempio di configurazione del robot avendo applicato le rotazioni nei primi quattro giunti per raggiungere la posa visibile nella figura 2.18**

### 2.4.3 Polso

La seconda parte per la risoluzione del problema della cinematica inversa è il calcolo delle configurazioni dei giunti che determinano l'orientazione dell'End Effector. Definita la configurazione dei primi quattro giunti si ha che il centro polso è nella posizione desiderata. Andando ad agire sugli ultimi tre giunti si può controllare l'orientazione dell'End Effector. La matrice  ${}^4\hat{A}_7$  che è la matrice del sistema di riferimento 7 vista dal sistema di riferimento 4 dipende solo dalla configurazione dei giunti del polso. Essa risulta essere pari a:

$$\begin{aligned}
 {}^4\hat{A}_7 &= {}^4\hat{A}_5 \cdot {}^5\hat{A}_6 \cdot {}^6\hat{A}_7 = \\
 &= \begin{bmatrix} c5 & 0 & s5 & 0 \\ s5 & 0 & -c5 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & d_5 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} -c6 & 0 & -s6 & 0 \\ -s6 & 0 & c6 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} -c7 & s7 & 0 & 0 \\ -s7 & -c7 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} = \\
 &= \begin{bmatrix} c5c6c7 - s5s7 & -c5c6s7 - s5c7 & -c5s6 & 0 \\ s5c6c7 + c5s7 & -s5c6s7 + c5c7 & -s5s6 & 0 \\ s6c7 & -s6s7 & c6 & d_5 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} = \quad (2.76) \\
 &= \begin{bmatrix} R_{11} & R_{12} & R_{13} & R_{14} \\ R_{21} & R_{22} & R_{23} & R_{24} \\ R_{31} & R_{32} & R_{33} & R_{34} \\ R_{41} & R_{42} & R_{43} & R_{44} \end{bmatrix}
 \end{aligned}$$

Determinata la configurazione dei primi quattro giunti e la posizione e l'orientazione del centro polso, la stessa matrice può anche essere calcolata attraverso la relazione:



$${}^4\hat{A}_7 = {}^4\hat{A}_0 \cdot {}^0\hat{A}_7 = \begin{bmatrix} R_{11} & R_{12} & R_{13} & R_{14} \\ R_{21} & R_{22} & R_{23} & R_{24} \\ R_{31} & R_{32} & R_{33} & R_{34} \\ R_{41} & R_{42} & R_{43} & R_{44} \end{bmatrix} \quad (2.77)$$

Dove  ${}^4\hat{A}_0$  è l'inversa della matrice  ${}^0\hat{A}_4$  che può essere calcolata come:

$${}^0\hat{A}_4 = {}^0\hat{A}_B \cdot {}^B\hat{A}_1(q_1) \cdot {}^1\hat{A}_2(q_2) \cdot {}^2\hat{A}_3(q_3) \cdot {}^3\hat{A}_4(q_4) \quad (2.78)$$

Si può estrarre la componente presente nella terza riga e terza colonna della matrice  ${}^4\hat{A}_7$  attraverso il seguente prodotto tra matrici:

$$R_{33} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} R_{11} & R_{12} & R_{13} & R_{14} \\ R_{21} & R_{22} & R_{23} & R_{24} \\ R_{31} & R_{32} & R_{33} & R_{34} \\ R_{41} & R_{42} & R_{43} & R_{44} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} \quad (2.79)$$

Dalla quale si possono estrarre i valori di  $q_6$ :

$$q_{6,1} = a \tan 2\left(\sqrt{1 - R_{33}^2}, R_{33}\right) \quad (2.80)$$

$$q_{6,2} = a \tan 2\left(-\sqrt{1 - R_{33}^2}, R_{33}\right) \quad (2.81)$$

I valori di  $q_5$  e  $q_7$  possono essere calcolati attraverso le componenti della matrice  ${}^4\hat{A}_7$ , in particolare dalle componenti  $R_{23}$ ,  $R_{13}$ ,  $R_{32}$  e  $R_{31}$ , che possono essere calcolate come:

$$R_{23} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} R_{11} & R_{12} & R_{13} & R_{14} \\ R_{21} & R_{22} & R_{23} & R_{24} \\ R_{31} & R_{32} & R_{33} & R_{34} \\ R_{41} & R_{42} & R_{43} & R_{44} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} \quad (2.82)$$

$$R_{13} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} R_{11} & R_{12} & R_{13} & R_{14} \\ R_{21} & R_{22} & R_{23} & R_{24} \\ R_{31} & R_{32} & R_{33} & R_{34} \\ R_{41} & R_{42} & R_{43} & R_{44} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} \quad (2.83)$$

$$R_{32} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} R_{11} & R_{12} & R_{13} & R_{14} \\ R_{21} & R_{22} & R_{23} & R_{24} \\ R_{31} & R_{32} & R_{33} & R_{34} \\ R_{41} & R_{42} & R_{43} & R_{44} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \quad (2.84)$$

$$R_{31} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} R_{11} & R_{12} & R_{13} & R_{14} \\ R_{21} & R_{22} & R_{23} & R_{24} \\ R_{31} & R_{32} & R_{33} & R_{34} \\ R_{41} & R_{42} & R_{43} & R_{44} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \quad (2.85)$$

Infatti, conoscendo il valore di  $q_6$  da queste componenti si possono calcolare i valori di  $q_5$  e  $q_7$ :

$$q_{5,1} = a \tan 2 \left( \frac{-R_{23}}{\sin(q_{6,1})}, \frac{-R_{13}}{\sin(q_{6,1})} \right) \quad (2.86)$$

$$q_{5,2} = a \tan 2 \left( \frac{-R_{23}}{\sin(q_{6,2})}, \frac{-R_{13}}{\sin(q_{6,2})} \right) \quad (2.87)$$

$$q_{7,1} = a \tan 2 \left( \frac{-R_{32}}{\sin(q_{6,1})}, \frac{-R_{31}}{\sin(q_{6,1})} \right) \quad (2.88)$$

$$q_{7,2} = a \tan 2 \left( \frac{-R_{32}}{\sin(q_{6,2})}, \frac{-R_{31}}{\sin(q_{6,2})} \right) \quad (2.89)$$

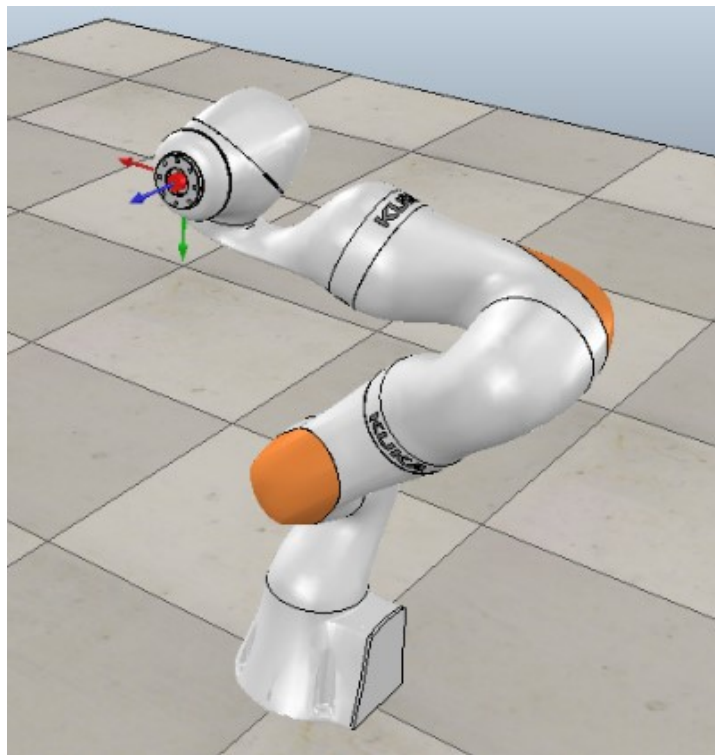
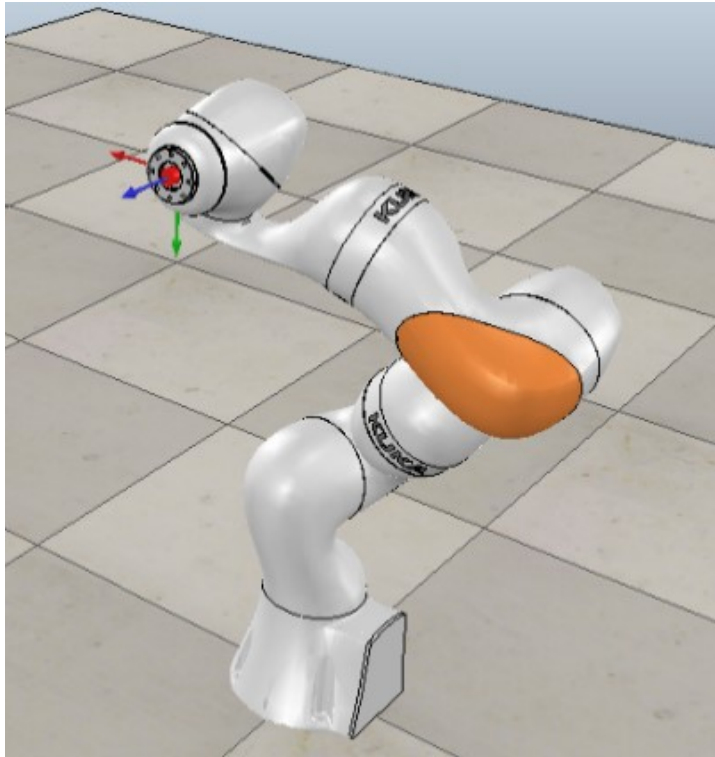
Le equazioni 2.88 e 2.89 sono sempre applicabili eccetto il caso in cui il valore di  $q_6$  si zero. Quindi assegnata una certa configurazione dei prima

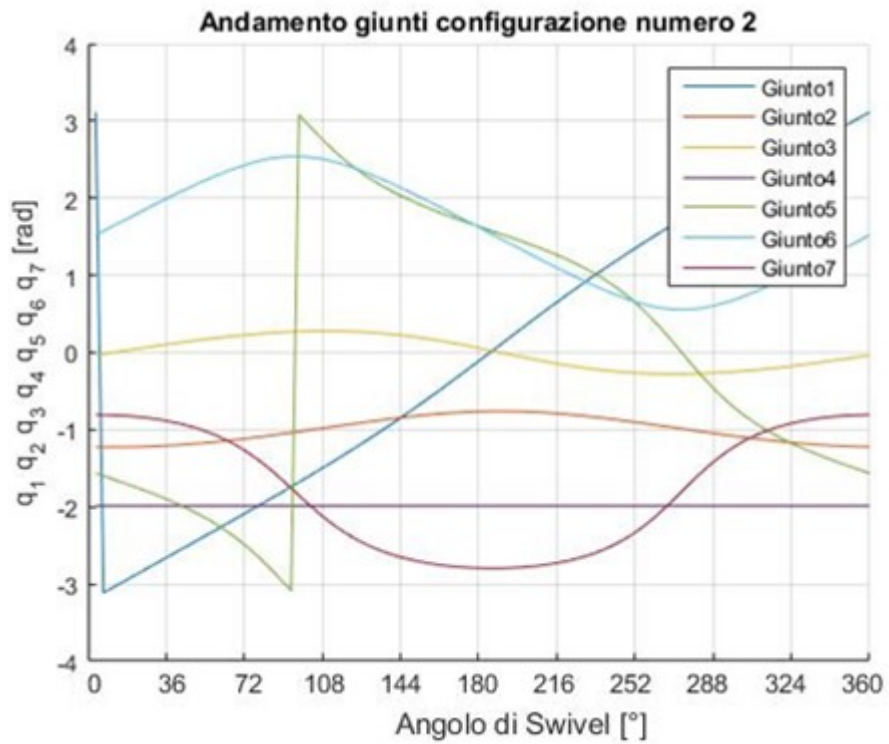
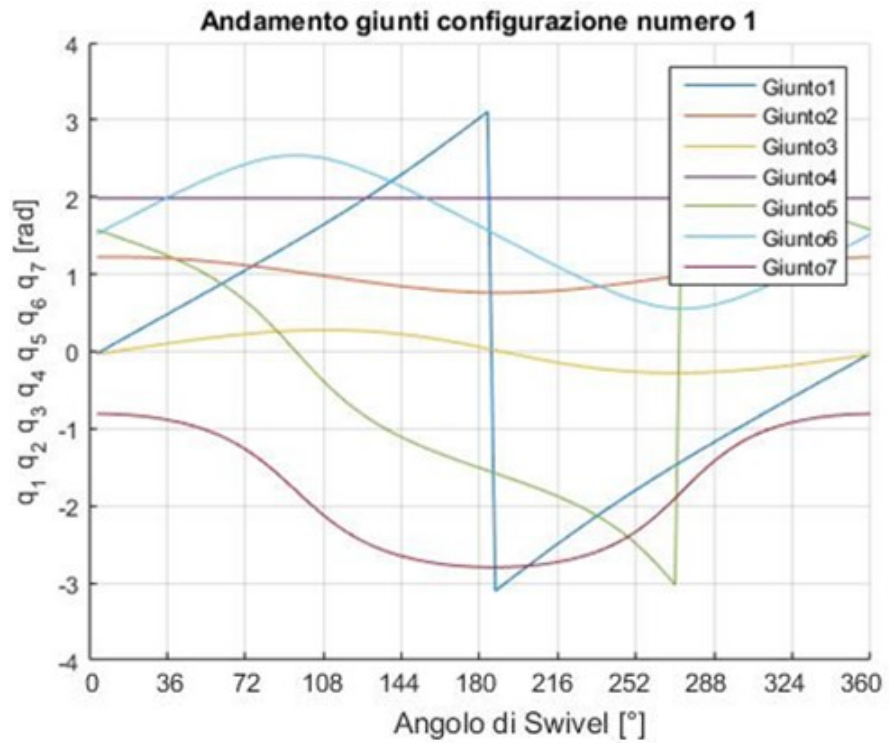
quattro giunti, si hanno due possibili terne di soluzioni per i giunti di polso. Esse risultano essere:

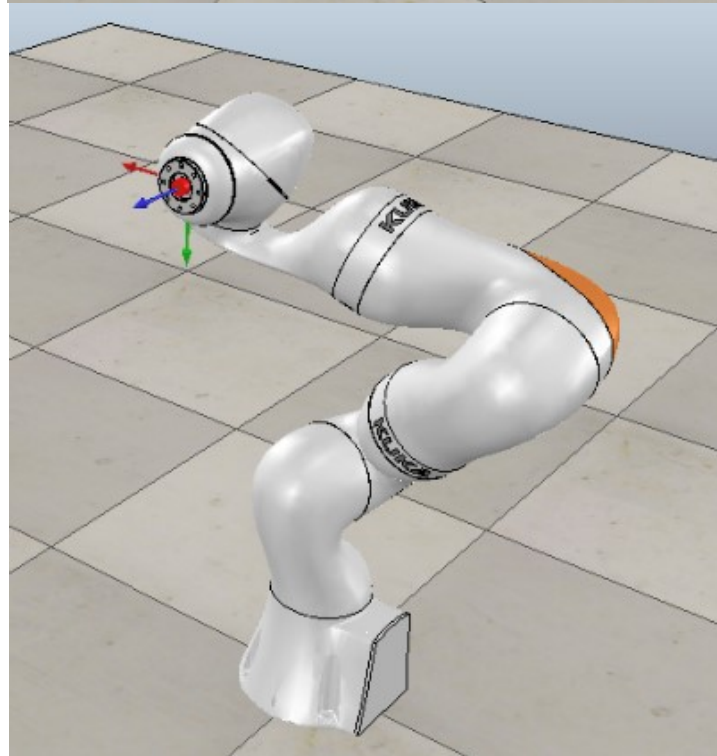
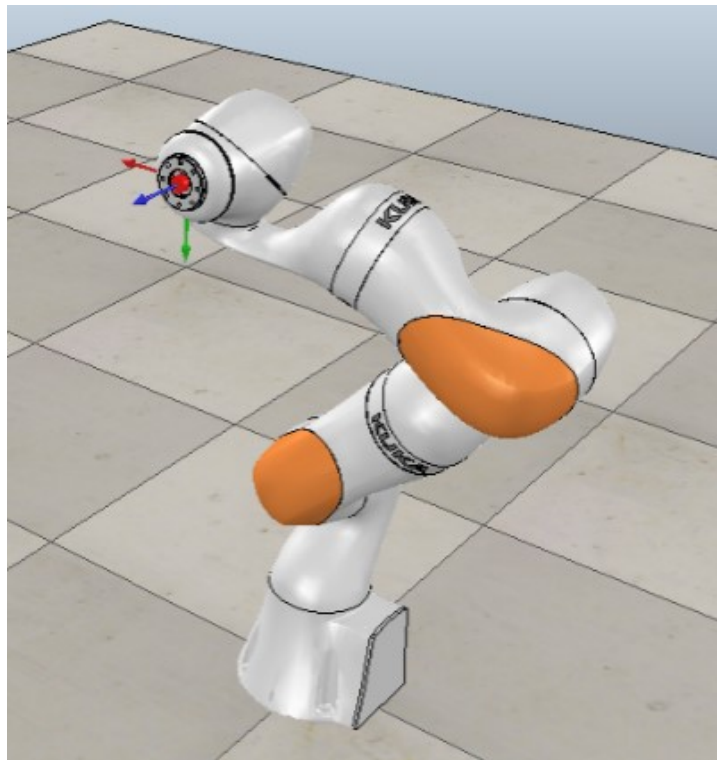
$$[q_{5,1}, q_{6,1}, q_{7,1}]; [q_{5,2}, q_{6,2}, q_{7,2}] \quad (2.90)$$

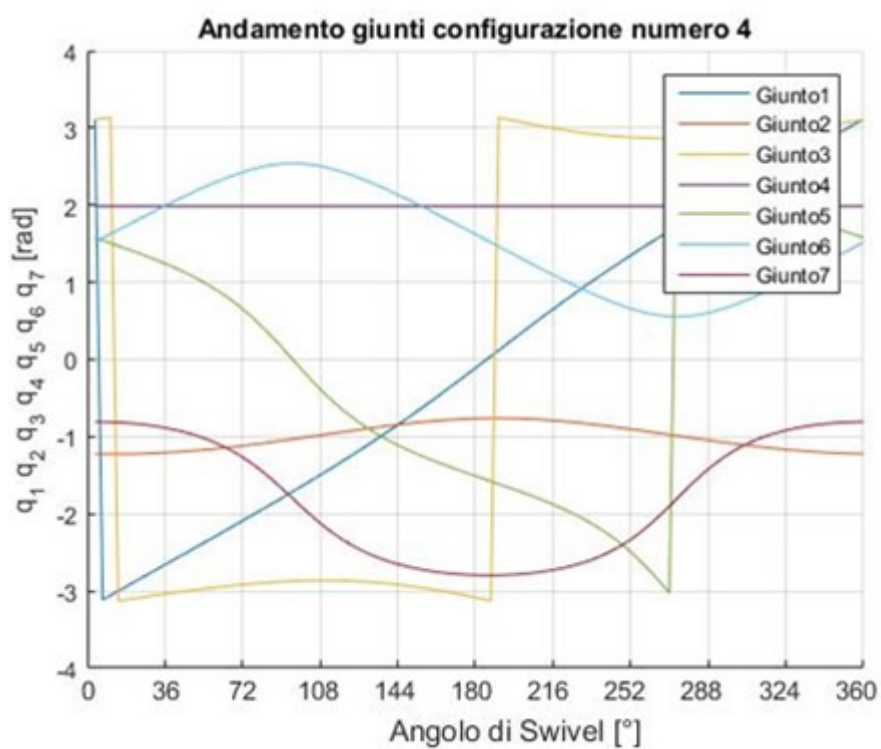
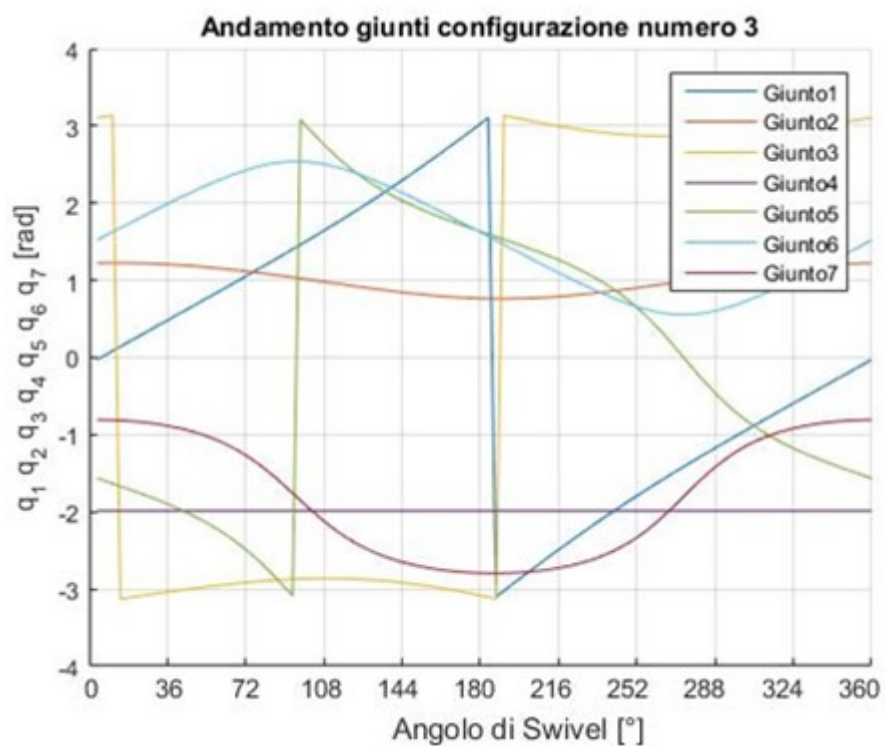
Poiché per ogni posizione del gomito si trovano quattro possibili combinazioni di configurazioni dei giunti e quindi quattro diverse matrici  ${}^4\hat{A}_7$ , per ogni posizione del gomito risultano esserci otto possibili configurazioni dei giunti del manipolatore che producono la stessa posa dell'End Effector.

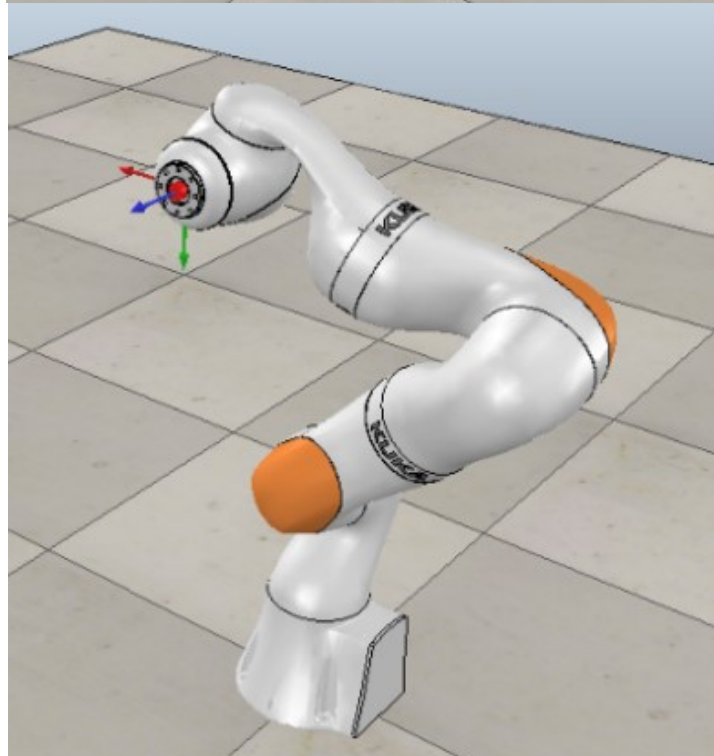
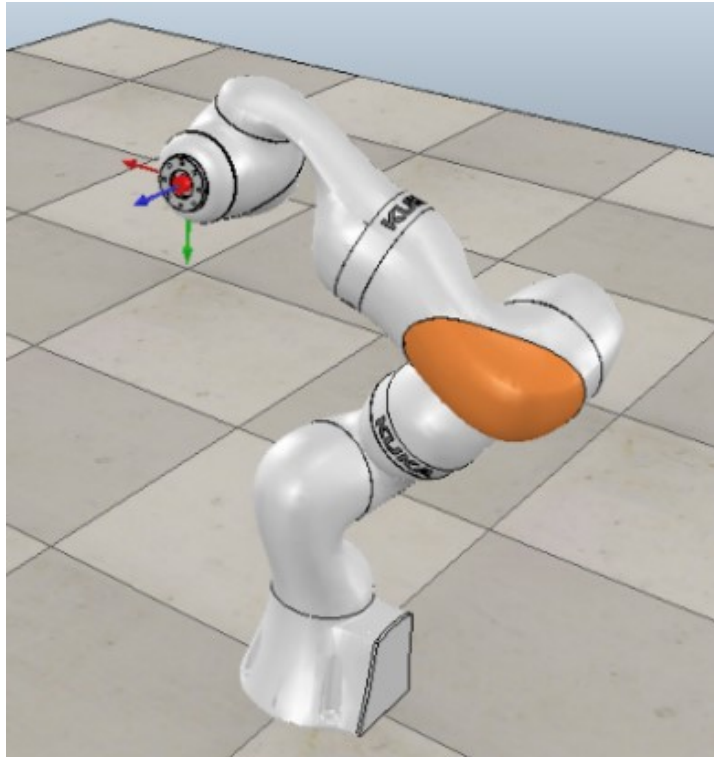
Nella colonna di sinistra della figura 2.22 si possono vedere le otto configurazioni che il robot può assumere per raggiungere la posa visibile nella figura 2.18 per l'angolo di Swivel pari a zero. Nella colonna di destra si possono vedere gli andamenti che i sette giunti hanno per ognuna delle otto configurazioni possibili in funzione dell'angolo di Swivel. In ascisse è riportato l'angolo di Swivel e in ordinata il valore dell'angolo da assegnare al giunto. Si può notare come per ognuna delle otto soluzioni l'andamento dei giunti sia continuo a tratti. Gli unici punti di discontinuità sono quelli in cui il valore dell'angolo richiesto cambia di segno; inoltre si può notare come per ogni configurazione il valore che  $q_4$  assume rimane costante per ogni valore dell'angolo di Swivel.



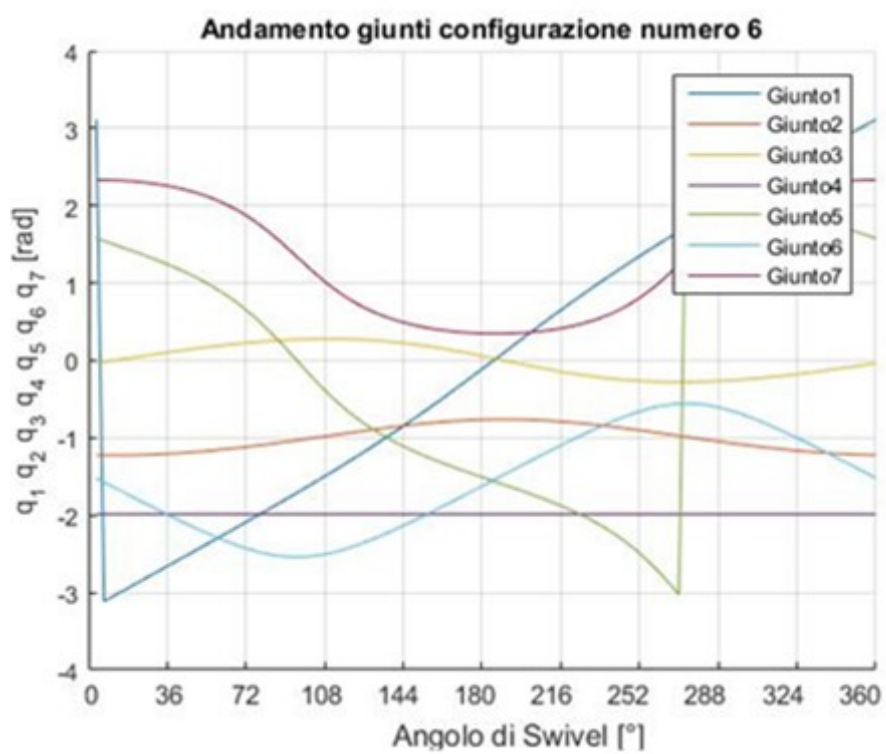
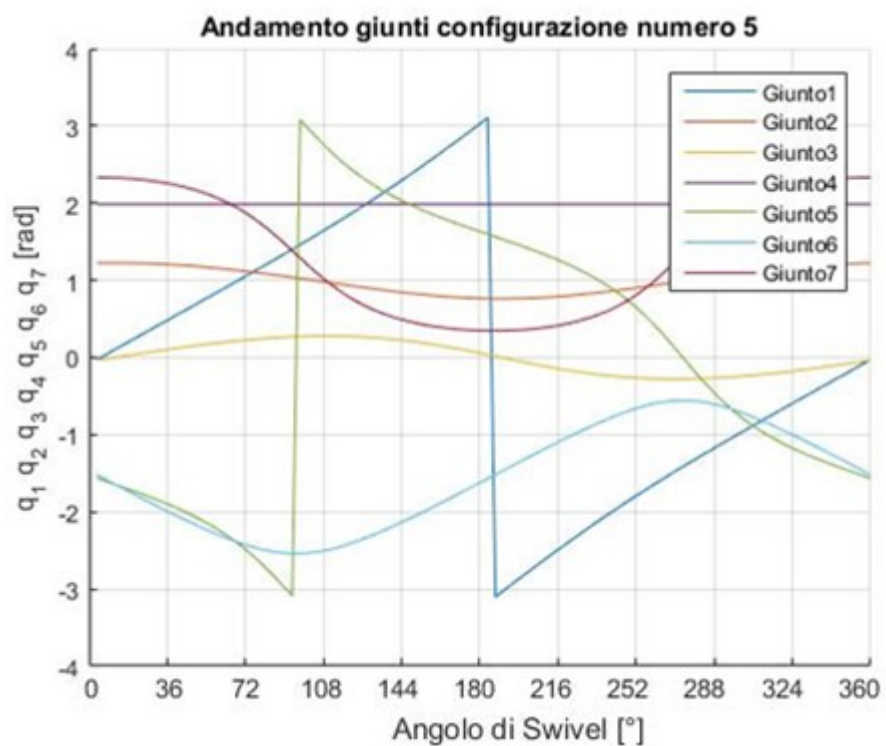


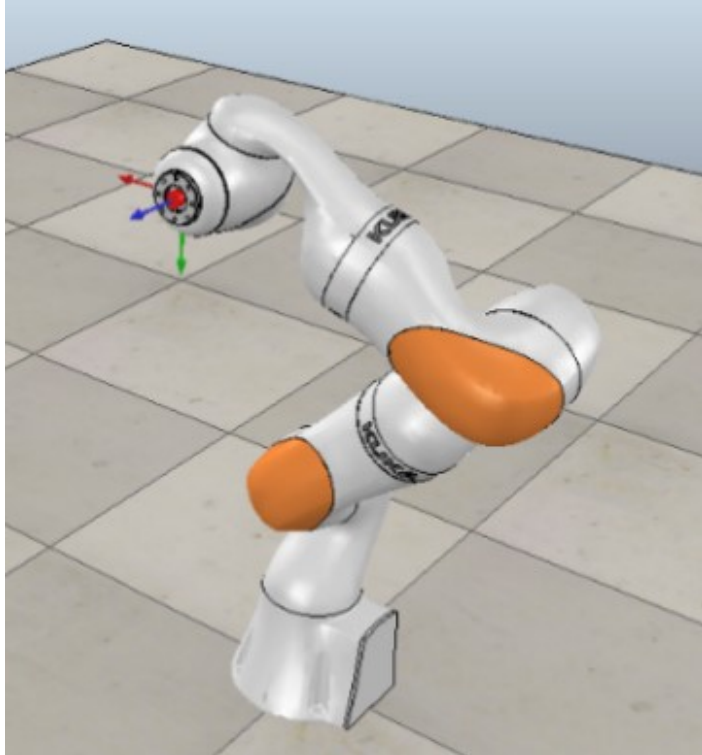
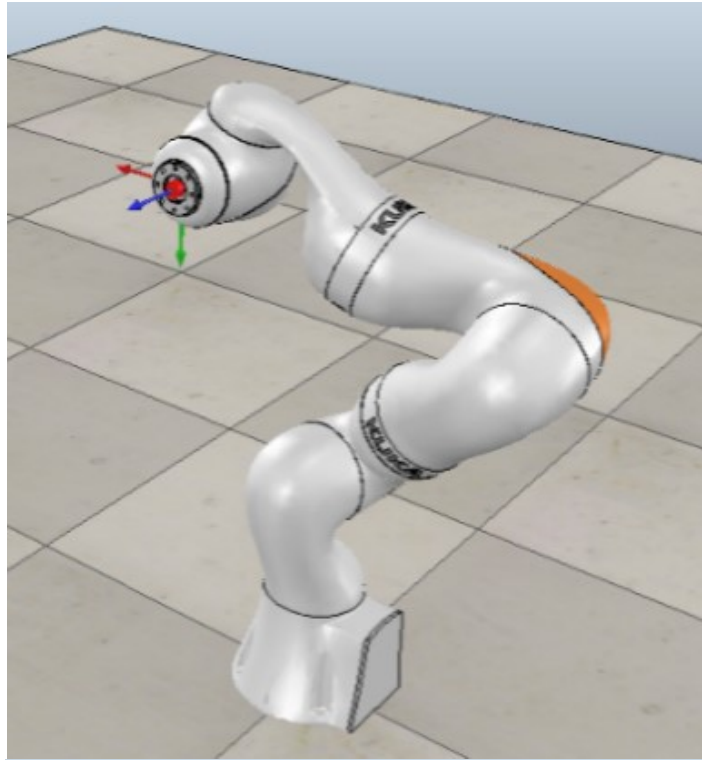


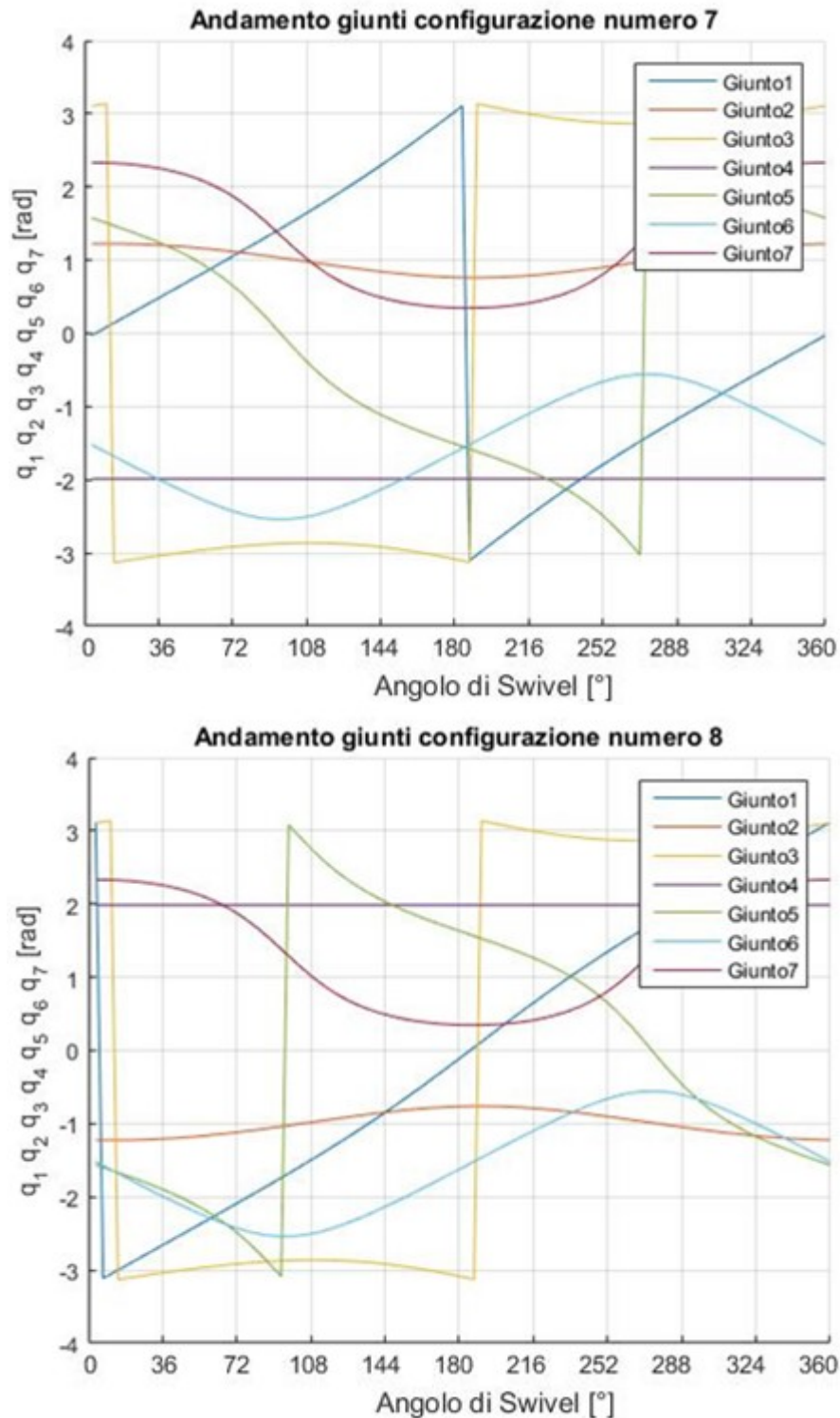












**Figura 2. 22:** Nella colonna di destra si può vedere il robot nelle otto possibili configurazioni per la posa dell'End Effector visibile nella figura 2.18 e avente il gomito nella configurazione per la quale l'angolo di Swivel è pari a zero. Nella colonna di sinistra sono presenti gli andamenti dei sette giunti per ognuna delle otto possibili configurazioni dei giunti in funzione dell'angolo di Swivel

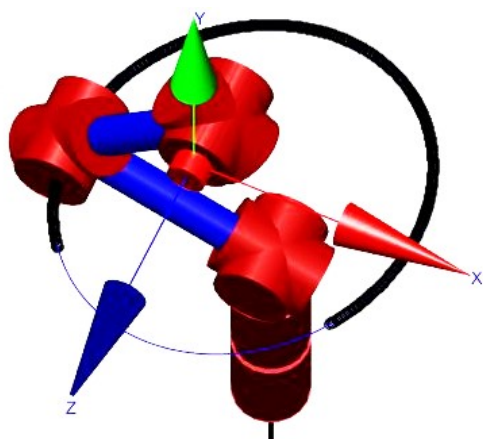
## CAPITOLO 3: Limiti di giunto e ellissoide di manipolabilità

### 3.1 Analisi dei limiti di giunto

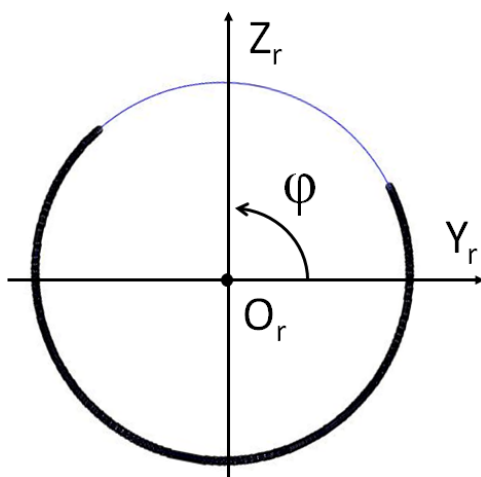
Data una certa posa dell'End Effector, in generale, non tutte le tutte le posizioni del gomito sono possibili; infatti potrebbero esserci delle configurazioni che richiedono a uno o più giunti di assumere degli angoli che si trovano al di fuori dei limiti di giunto. Nella figura 3.1 si può vedere come, per una data posa dell'End Effector, il gomito può assumere solo certe posizioni. Nella figura 3.2 si può vedere la circonferenza della figura 3.1 nel piano  $y_r-z_r$  del sistema di riferimento per l'analisi della ridondanza studiato nel paragrafo 2.3.2. Lo studio delle configurazioni che il robot può assumere può essere eseguito in funzione dell'angolo di Swivel, un esempio di questo è rappresentato nella figura 3.3 nella quale è visibile la stessa circonferenza della figura 3.1.

Questi risultati sono stati ottenuti considerando per ognuna delle infinite posizioni possibili del gomito tutte e otto le soluzioni di cinematica inversa; infatti considerando una sola soluzione, in generale, si ottengono dei risultati diversi. Nella figura 3.4 si possono vedere gli angoli di Swivel che portano a una configurazione del robot che rientra nei limiti di giunto per le otto soluzioni possibili di cinematica inversa.

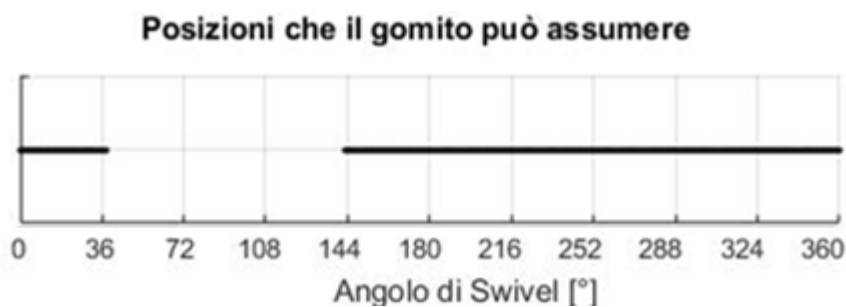
Si può notare come le configurazioni che sono consentite dai limiti di giunto sono descritte da settori circolari. Questo deriva dal fatto che ognuna delle configurazioni di ogni singolo giunto è continua a tratti al variare dell'angolo di Swivel. Nella figura 3.5 sono indicati i settori circolari delle configurazioni possibili riportati sulla circonferenza di Swivel, per una delle otto soluzioni di cinematica inversa.



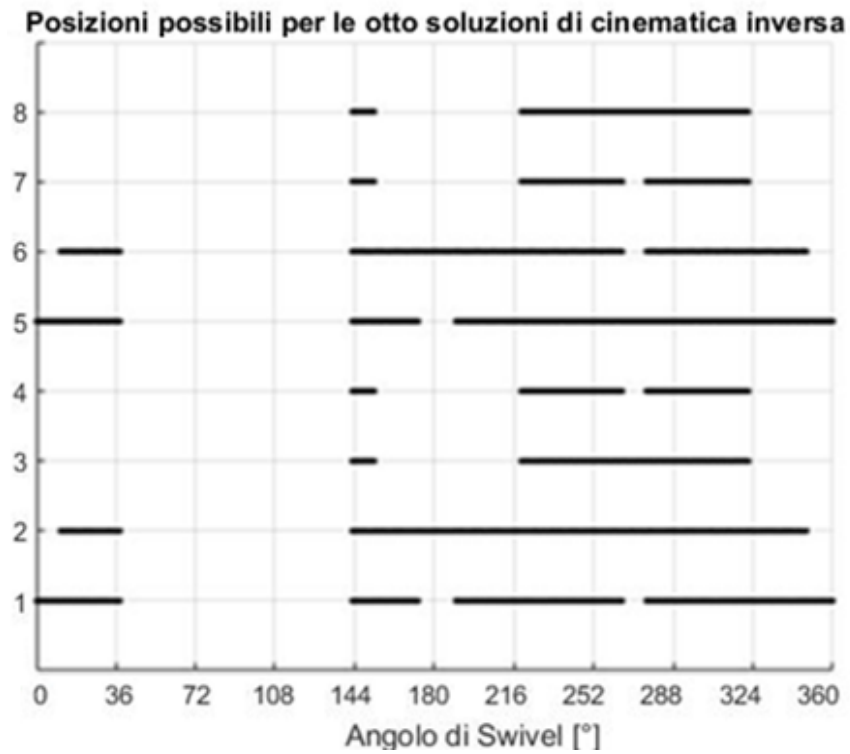
**Figura 3. 1:** Esempio di posizioni che il gomito può assumere (in nero) rispetto alla circonferenza delle posizioni possibili per la posa visibile nella figura 2.18, che porta l'End Effector nelle coordinate  $[-0.1 \ -0.1 \ 0.8]$  con orientazione pari a  $[90^\circ \ 0^\circ \ 0^\circ]$



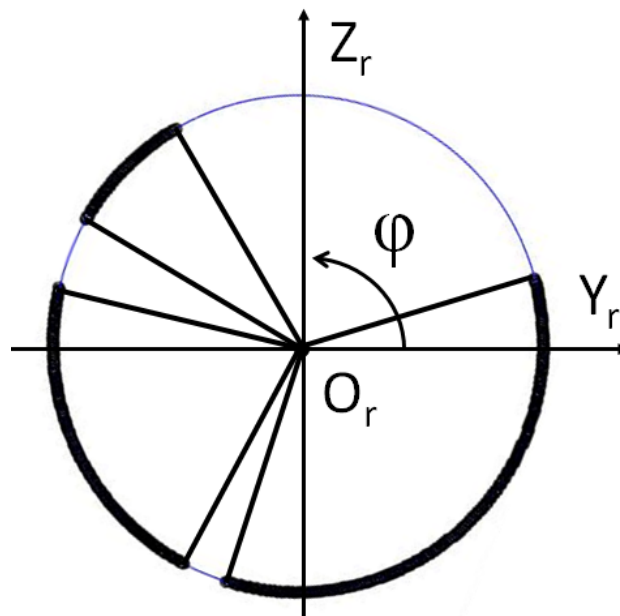
**Figura 3. 2:** Esempio di posizioni che il gomito può assumere nel piano yr-zr, per la posa visibile nella figura 3.1



**Figura 3. 3:** Esempio di angoli di Swivel (in nero) che il robot può assumere, per la posa visibile nella figura 3.1

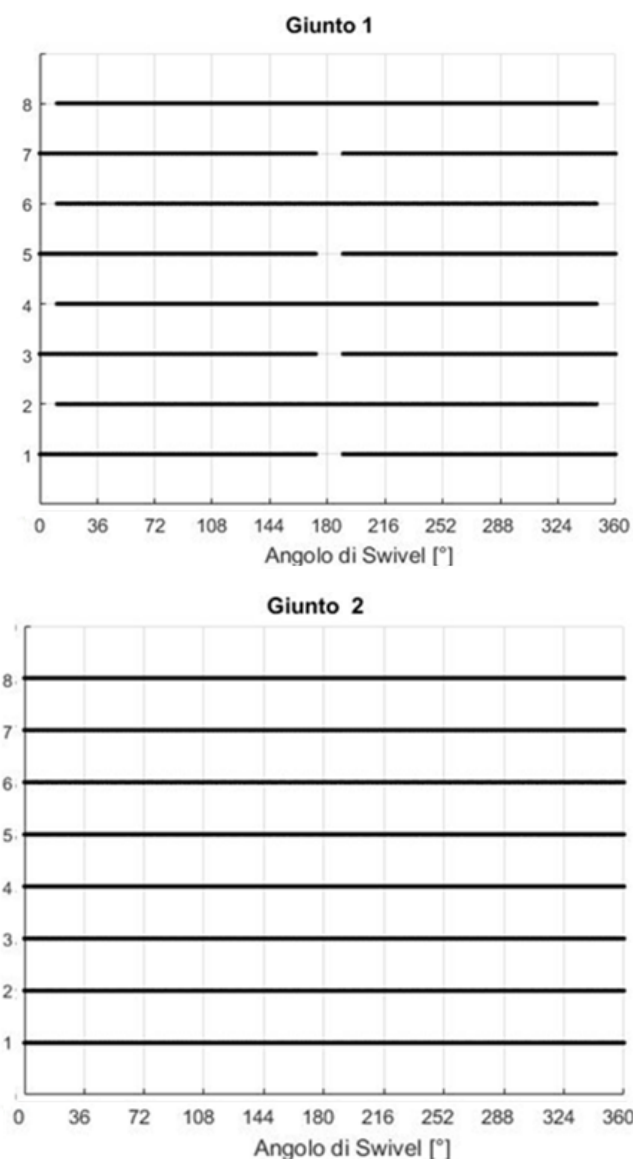


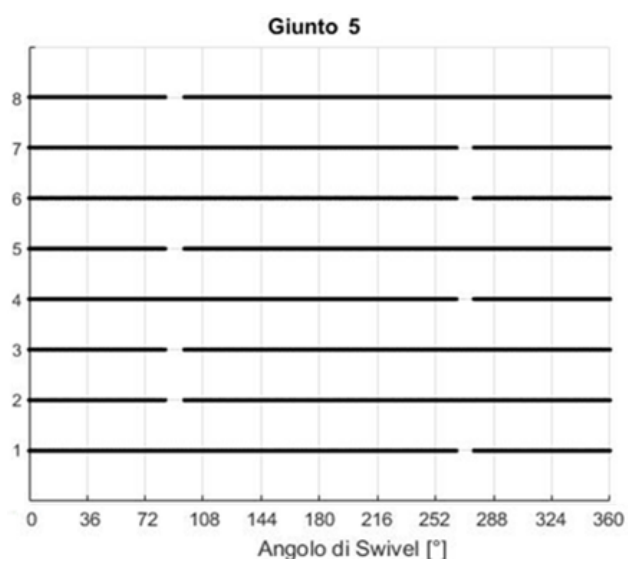
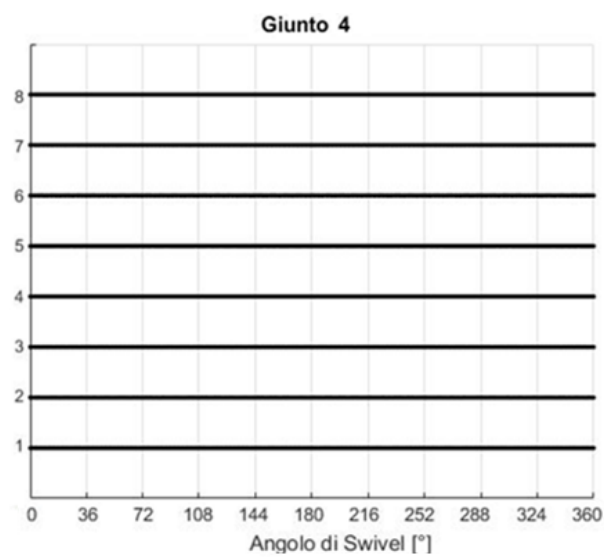
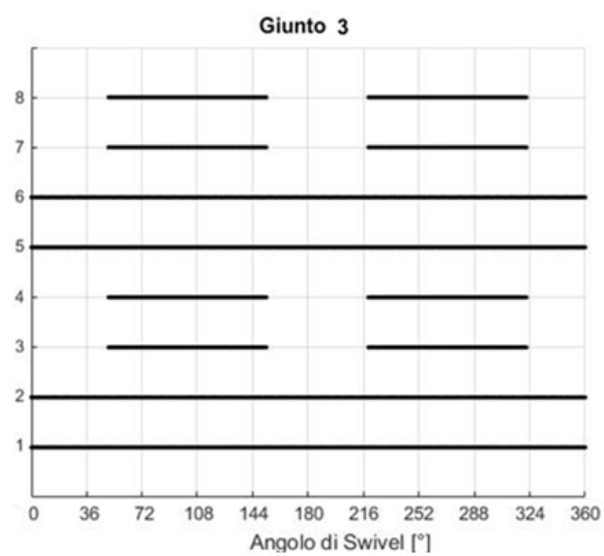
**Figura 3. 4: Esempio di angoli di Swivel che generano una configurazione che rientra nei limiti di giunto per le otto diverse soluzioni della cinematica inversa, per la posa visibile nella figura 3.1**



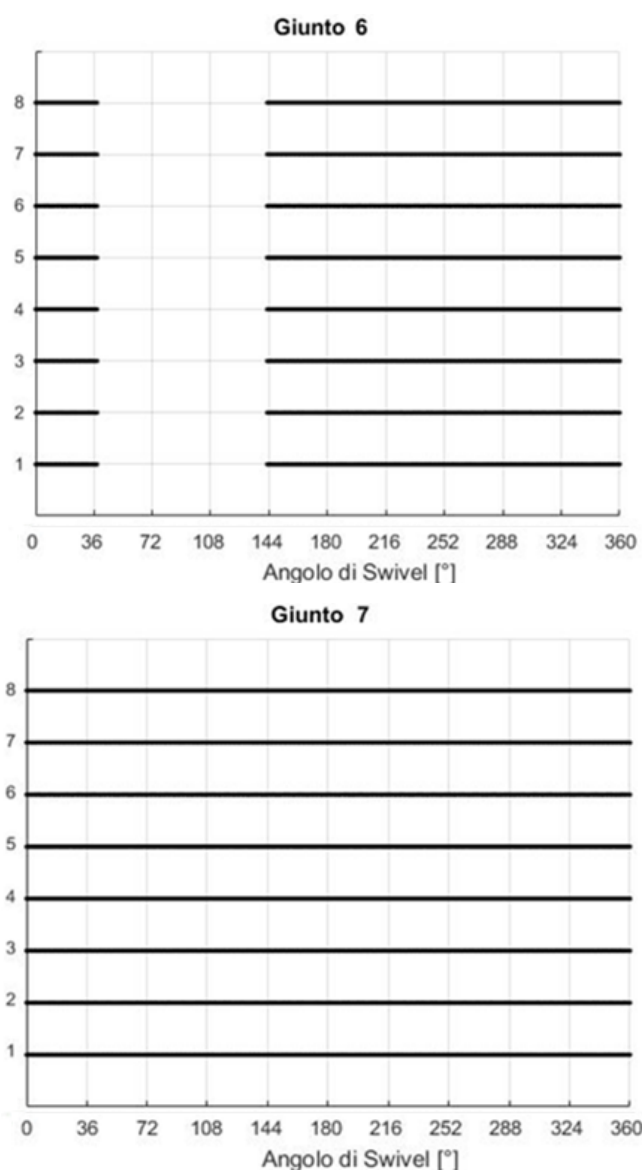
**Figura 3. 5: Esempio di settori circolari lungo i quali il gomito può posizionarsi nel piano yr-zr, per la posa visibile nella figura 3.1, per una delle otto soluzioni di cinematica inversa**

Si può tener conto di quali sono i giunti responsabili del superamento dei limiti. Considerando un giunto per volta come l'unico ad avere limiti di giunto, si può studiare quali angoli di Swivel sono consentiti al manipolatore. Nella figura 3.6 si può vedere un esempio di ciò per le otto possibili soluzioni della cinematica inversa. Nella figura 3.7 si possono vedere quali angoli di Swivel possono essere assunti dal manipolatore considerando un giunto per volta avente i limiti di giunto e considerando tutte le possibili soluzioni della cinematica inversa.

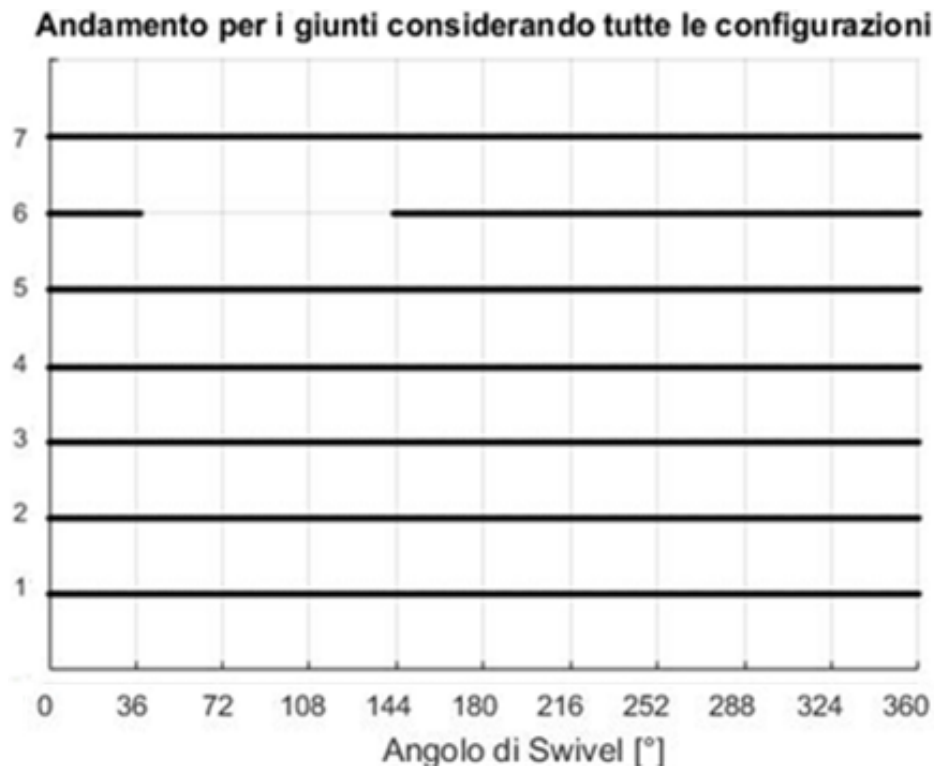






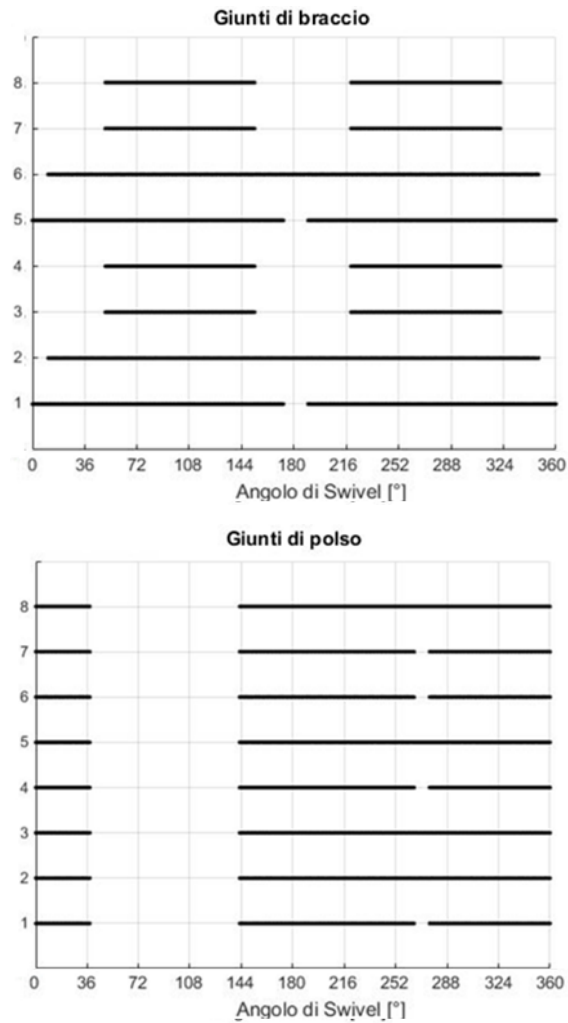


**Figura 3. 6: Esempio di quali angoli di Swivel sono consentiti al manipolatore, considerando un giunto per volta l'unico ad avere limiti di giunto, per le otto possibili soluzioni di cinematica inversa in funzione dell'angolo di Swivel, per la posa visibile nella figura 3.1**

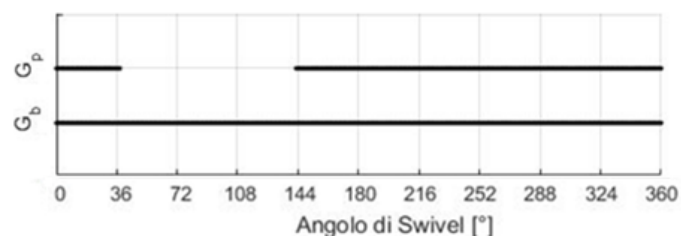


**Figura 3. 7: Esempio di quali angoli di Swivel sono consentiti al manipolatore, considerando un giunto per volta l'unico ad avere limiti di giunto, considerando contemporaneamente tutte le otto possibili soluzioni della cinematica inversa, per la posa visibile nella figura 3.1**

È utile individuare se una configurazione non può essere raggiunta a causa della posizione o dell'orientazione dell'End Effector o di entrambe contemporaneamente. Per studiare se il problema è causato dalla posizione dell'End Effector richiesta si considera il robot come avente i limiti di giunto solo nei giunti di braccio, cioè i primi quattro e si studia quali angoli di Swivel il robot può assumere. Per studiare se il problema è causato dall'orientazione si può eseguire lo studio degli angoli di Swivel possibili considerando il robot avente limiti di giunto solo nei giunti di polso, cioè gli ultimi tre. Nella figura 3.8 si può osservare un esempio di ciò considerando separatamente le otto soluzioni di cinematica inversa, mentre nella figura 3.9 sono riportati i risultati della figura 3.8 considerando contemporaneamente le otto soluzioni di cinematica inversa.

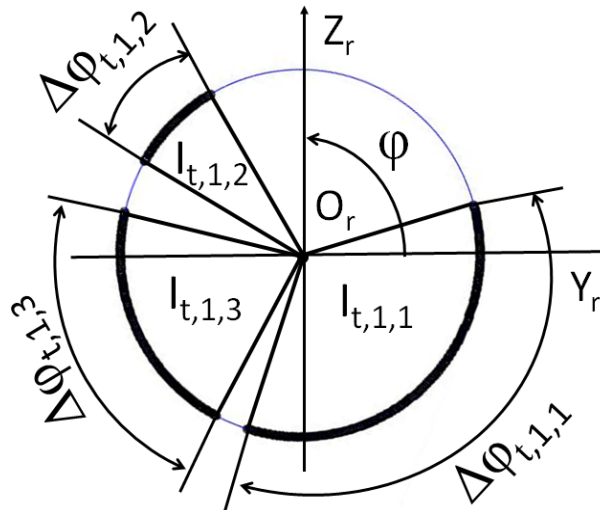


**Figura 3. 8: Esempio di quali angoli di Swivel sono consentiti al manipolatore, considerando una volta i giunti di braccio e una volta i giunti di polso gli unici ad avere i limiti di giunto, per le otto possibili soluzioni di cinematica inversa in funzione dell'angolo di Swivel, per la posa visibile nella figura 3.1**



**Figura 3. 9: Esempio di quali angoli di Swivel sono consentiti al manipolatore, considerando una volta i giunti di braccio e una volta i giunti di polso gli unici ad avere i limiti di giunto, considerando contemporaneamente tutte le otto possibili soluzioni della cinematica inversa, per la posa visibile nella figura 3.1**

Per le successive analisi è utile definire un metodo per poter individuare in modo univoco quale sia l'arco di circonferenza a cui ci si riferisce. In particolare, il numero di archi presenti per una data posa dell'End Effector dipende da quali e quanti giunti si sta considerando e da quali e quante configurazioni sono prese in esame. In particolare, si nomina  $I_{i,j,k}$  l'arco in questione di ampiezza  $\Delta\varphi_{i,j,k}$ . Il pedice  $i$  può assumere un valore compreso tra 1 e 7 nel caso si sia preso in considerazione un solo giunto; oppure può essere pari a  $p$  nel caso si stiano considerando i giunti che generano la posizione dell'End Effector, cioè i primi quattro; oppure  $o$  se si considerano i giunti che generano l'orientazione dell'End Effector, cioè gli ultimi tre; oppure  $t$  se si considerano contemporaneamente tutti i giunti. Il pedice  $j$  può assumere i valori compresi da 1 a 8 se si considera una configurazione per volta oppure può essere pari a  $t$  se si considerano tutte le configurazioni contemporaneamente. Il pedice  $k$  indica il numero dell'arco partendo a contare da un angolo di Swivel pari a zero. Nella figura 3.10 si può vedere un esempio di questo.

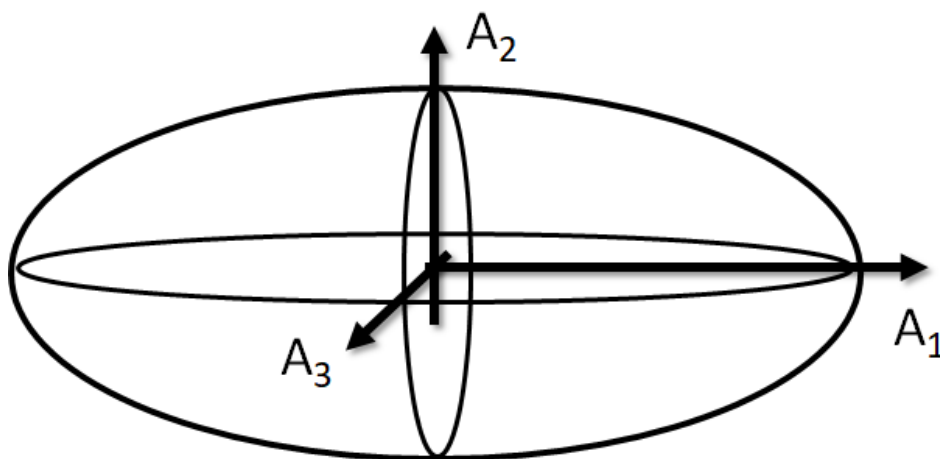


**Figura 3. 10: Esempio di archi della circonferenza di Swivel che il robot può assumere considerando tutti i giunti con i limiti per la prima configurazione per la posa visibile nella figura 3.1**

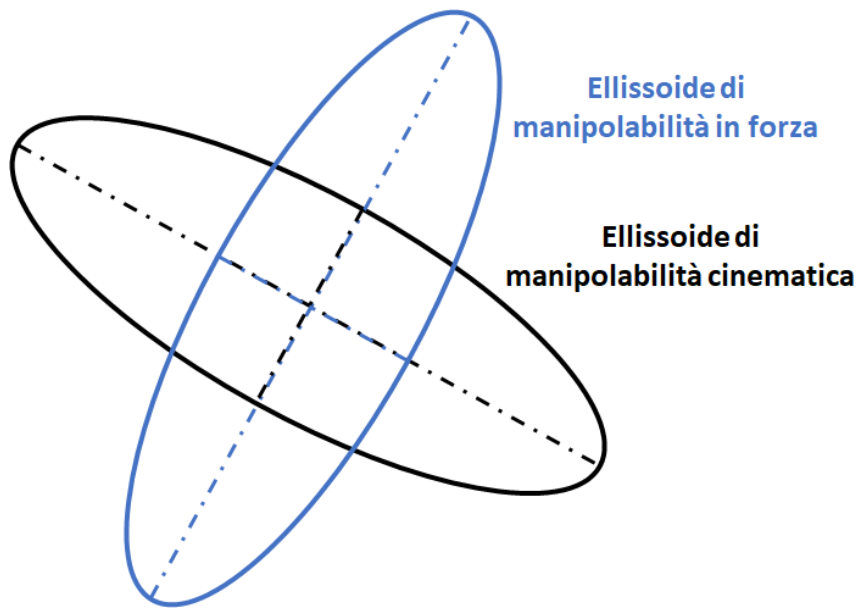
### 3.2 Ellissoide di manipolabilità

L'ellissoide di manipolabilità è una superficie grazie alla quale si riesce ad avere una rappresentazione geometrica della capacità di un punto di un sistema articolato di generare velocità e forze nello spazio. In particolare, applicando lo studio dell'ellissoide di manipolabilità all'End Effector di un manipolatore si riesce ad individuare quale sia la capacità del robot di generare forze e ottenere un cambiamento di posa dell'organo terminale partendo da una determinata configurazione [2].

Si hanno due tipologie di manipolabilità: la manipolabilità cinematica e la manipolabilità in forza. Per il principio di dualità cineto-statica si ha che questi due ellipsoidi sono collegati tra di loro; in particolare si ha che i tre assi principali dell'ellissoide di manipolabilità cinematica sono di lunghezza pari al reciproco della lunghezza degli assi dell'ellissoide di manipolabilità in forza. Nella figura 3.11 si può vedere un esempio generico di ellissoide di manipolabilità nello spazio. Nella figura 3.12 si può vedere un esempio nel piano degli ellipsoidi di manipolabilità cinematica e in forza.



**Figura 3. 11: Schema generico di un ellissoide di manipolabilità cinematica nello spazio e dei suoi assi principali**



**Figura 3. 12: Esempio dell'ellissoide di manipolabilità cinematica e dell'ellissoide di manipolabilità in forza nel piano**

La manipolabilità cinematica può essere definita come:

$$\underline{\dot{q}}^T \underline{\dot{q}} = 1 \quad (3.1)$$

Dove  $\underline{\dot{q}}$  è il vettore contenente le velocità dei giunti del robot. L'ellissoide così costruito fornisce un'indicazione sulla capacità di produrre velocità all'End Effector per ogni direzione nello spazio a seconda della configurazione in esame. In particolare, in direzione dell'asse maggiore, dell'ellissoide  $A_1$  si ha la capacità di produrre la maggiore velocità dell'End Effector, mentre lungo la direzione dell'asse minore,  $A_3$ , si ha la peggiore capacità produrre moto.

La manipolabilità in forza può essere definita come:

$$\underline{\tau}^T \underline{\tau} = 1 \quad (3.2)$$

Dove  $\underline{\tau}$  è il vettore contenente le forze e le coppie generate dai giunti del robot. L'ellissoide così costruito fornisce un'indicazione sulla capacità di produrre forza all'End Effector per ogni direzione nello spazio a seconda della configurazione in esame. La direzione dell'asse maggiore dell'ellissoide di manipolabilità in forza coincide con la direzione dell'asse minore dell'ellissoide di manipolabilità cinematica, lungo questa direzione si ha la maggior capacità di produrre forza dell'End Effector. La direzione dell'asse minore coincide con la direzione dell'asse maggiore dell'ellissoide di manipolabilità cinematica; lungo questa direzione si ha la peggior capacità dell'End Effector di produrre forza.

Per calcolare la direzione e la lunghezza dei semiassi dell'ellissoide bisogna conoscere lo Jacobiano, calcolabile attraverso lo studio della configurazione dei giunti del manipolatore.

Per un manipolatore i cui giunti sono tutti rotoidali le colonne dello Jacobiano risultano essere pari a:

$$J_i = \begin{bmatrix} {}^0\underline{k}_i \times \begin{pmatrix} {}^0\underline{p}_{EE} & -{}^0\underline{p}_i \end{pmatrix} \\ {}^0\underline{k}_i \end{bmatrix} \quad (3.3)$$

Dove  ${}^0\underline{k}_i$  è il versore dell'asse  $z$  del sistema di riferimento  $i$ -esimo visto dal sistema di riferimento fisso e può essere calcolato come:

$${}^0\underline{k}_i = \frac{{}^0A_i \cdot \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}}{\text{norm} \left( {}^0A_i \cdot \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} \right)} \quad (3.4)$$

Il vettore  ${}^0p_{EE}$  è il vettore posizione dell'End Effector rispetto al sistema di riferimento fisso e il vettore  ${}^0p_i$  è il vettore che indica la posizione dell'origine del sistema di riferimento  $i$ -esimo visto dal sistema di riferimento fisso. Lo Jacobiano risulta quindi essere:

$$J = [J_1 \quad \dots \quad J_i \quad \dots \quad J_n] \quad (3.5)$$

Dove  $n$  è il numero di giunti del manipolatore che vengono considerati.

La conoscenza delle componenti dello Jacobiano permette di conoscere come è fatto l'ellissoide; infatti la lunghezza dei semiassi dell'ellissoide di manipolabilità cinematica è pari alla radice quadrata degli autovalori della matrice  $JJ^T$  e la direzione dei semiassi è indicata dalla direzione degli autovettori della stessa matrice [6].

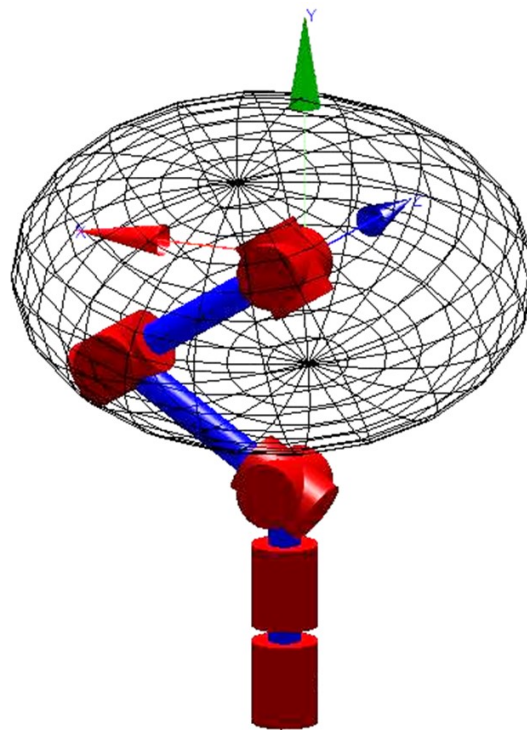
Il rapporto tra l'autovalore più piccolo e quello più grande è chiamato numero di condizionamento dello Jacobiano e dà una stima di quanto siano diversi tra loro la massima e la minima capacità di produrre velocità all'End Effector. Quanto più questo coefficiente si avvicina all'unità, più gli autovalori sono simili tra di loro, meno ci sarà differenza nello sviluppare velocità lungo le varie direzioni. Il numero di condizionamento può anche essere stimato, con minor precisione, analizzando il valore del volume dell'ellissoide; il calcolo di questo risulta essere meno preciso ma di più facile calcolo, esso risulta essere pari a:

$$\det(JJ^T) \quad (3.6)$$

Per come è costruito il manipolatore in esame si possono distinguere due gruppi di giunti, quelli che permettono al centro polso di raggiungere una certa posizione, cioè i primi quattro e i giunti che permettono



l'orientazione, cioè gli ultimi tre. Questo fatto permette di poter dividere in due parti l'ellissoide di manipolabilità e di poterlo rappresentare graficamente. L'ellissoide di manipolabilità è di dimensione  $m$ ; nel caso in cui si lavori nello spazio, per la posa  $m$  è uguale a 6, per la posizione è uguale a 3 e per l'orientazione è uguale a 3, quindi in questi due casi l'ellissoide è facilmente rappresentabile nello spazio. Nella figura 3.13 si può vedere un esempio di rappresentazione grafica dell'ellissoide di manipolabilità di posizione per una generica configurazione del robot.



**Figura 3. 13: Esempio di ellissoide di manipolabilità per una generica configurazione**

Per calcolare l'ellissoide di manipolabilità per la posa quindi si devono calcolare gli autovalori e gli autovettori di:

$$\det(J_t J_t^T) \quad (3.7)$$

Dove  $J_t$  è calcolabile come:

$$J_t = [J_1 \quad J_2 \quad J_3 \quad J_4 \quad J_5 \quad J_6 \quad J_7] \quad (3.8)$$

Per calcolare l'ellissoide di manipolabilità per la posizione si devono calcolare gli autovalori e gli autovettori di:

$$\det(J_p J_p^T) \quad (3.9)$$

Dove  $J_p$  è calcolabile come:

$$J_p = [J_1 \quad J_2 \quad J_3 \quad J_4] =$$

$$= \begin{bmatrix} {}^0\underline{k}_1 \times \begin{pmatrix} {}^0\underline{p}_{EE} - {}^0\underline{p}_1 \\ {}^0\underline{k}_1 \end{pmatrix} & {}^0\underline{k}_2 \times \begin{pmatrix} {}^0\underline{p}_{EE} - {}^0\underline{p}_2 \\ {}^0\underline{k}_2 \end{pmatrix} & {}^0\underline{k}_3 \times \begin{pmatrix} {}^0\underline{p}_{EE} - {}^0\underline{p}_3 \\ {}^0\underline{k}_3 \end{pmatrix} & {}^0\underline{k}_4 \times \begin{pmatrix} {}^0\underline{p}_{EE} - {}^0\underline{p}_4 \\ {}^0\underline{k}_4 \end{pmatrix} \end{bmatrix} \quad (3.10)$$

Per calcolare l'ellissoide di manipolabilità per l'orientazione si devono calcolare gli autovalori e gli autovettori di:

$$\det(J_o J_o^T) \quad (3.11)$$

Dove  $J_o$  è calcolabile come:

$$J_o = [J_5 \quad J_6 \quad J_7] =$$

$$= \begin{bmatrix} {}^0\underline{k}_5 \times \begin{pmatrix} {}^0\underline{p}_{EE} - {}^0\underline{p}_5 \\ {}^0\underline{k}_5 \end{pmatrix} & {}^0\underline{k}_6 \times \begin{pmatrix} {}^0\underline{p}_{EE} - {}^0\underline{p}_6 \\ {}^0\underline{k}_6 \end{pmatrix} & {}^0\underline{k}_7 \times \begin{pmatrix} {}^0\underline{p}_{EE} - {}^0\underline{p}_7 \\ {}^0\underline{k}_7 \end{pmatrix} \end{bmatrix} \quad (3.12)$$

### 3.2.1 Ellissoide di manipolabilità per la posizione

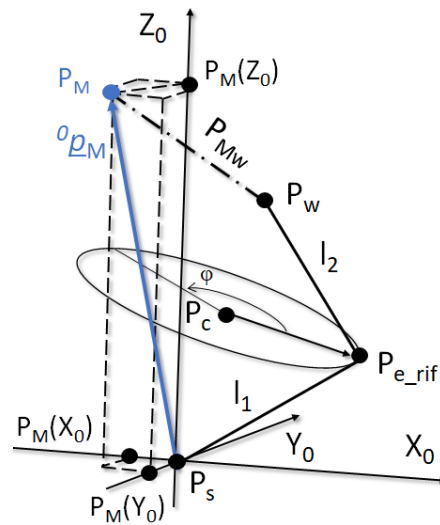
Si prenda in esame l'ellissoide di manipolabilità relativo alla posizione. Da questo si possono studiare quali siano le direzioni preferenziali di movimento. Scelte una posa dell'End Effector e una delle configurazioni possibili, e calcolato l'ellissoide di manipolabilità, si hanno tutte le informazioni per capire quale sia la direzione preferenziale di moto; infatti l'asse maggiore dell'ellissoide indica quale è la direzione nella quale il robot riesce a generare la maggior velocità riferita all'End Effector. Analizzando solo le componenti relative alla posizione dell'End Effector, l'analisi risulta semplificata se si fa riferimento alla posizione che il centro polso deve assumere; infatti, come descritto nei capitoli precedenti, questa può essere immediatamente determinata conoscendo la posizione dell'End Effector. La posizione successiva è indicata come  $P_M$  e ha coordinate:

$$P_M = (p_M(x_0), p_M(y_0), p_M(z_0)) \quad (3.13)$$

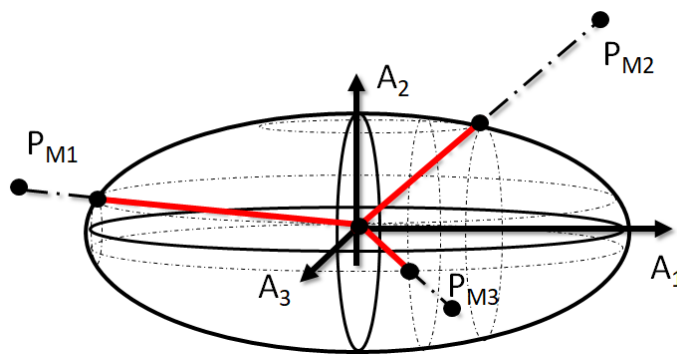
ed è individuata dal vettore:

$${}^0 \underline{p}_M = \begin{bmatrix} p_M(x_0) \\ p_M(y_0) \\ p_M(z_0) \end{bmatrix} \quad (3.14)$$

Nella figura 3.14 si può vedere un esempio di questo punto riferito al sistema di riferimento fisso. Conoscendo la posizione del punto  $P_M$  e conoscendo l'ellissoide si può avere un'indicazione di quale sia la capacità del robot di raggiungere quel punto. Questa indicazione si può avere tramite la conoscenza della lunghezza del segmento che collega il centro dell'ellissoide e il punto di intersezione tra l'ellissoide e la retta passante dal centro dell'ellissoide e dal punto  $P_M$ . Nella figura 3.15 si può vedere come la lunghezza di questo segmento cambi a seconda della posizione del punto  $P_M$ .

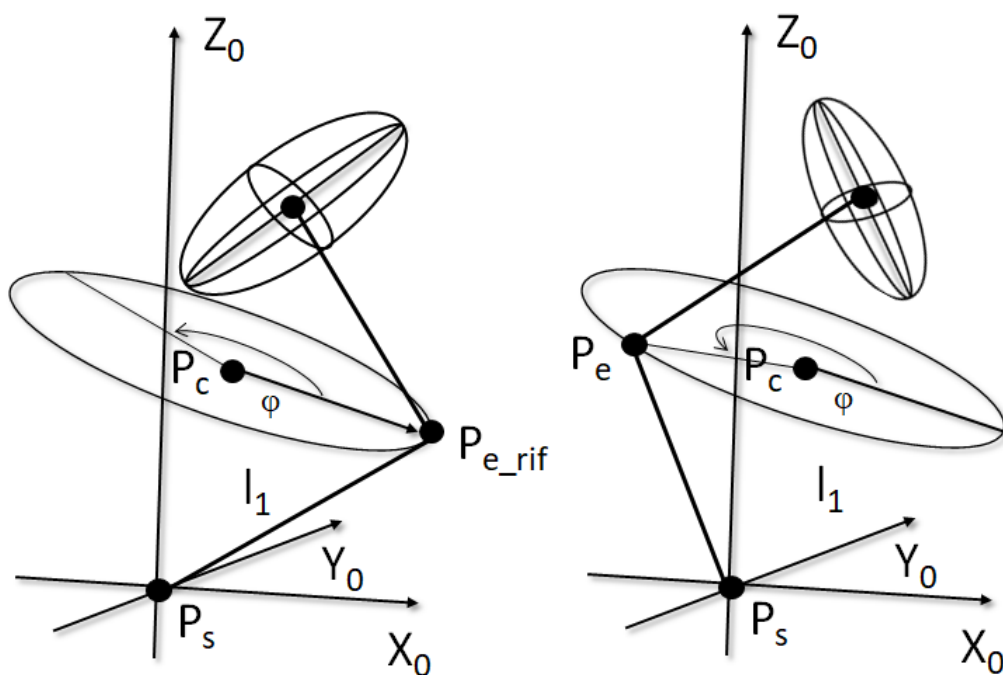


**Figura 3. 14: Esempio del punto  $P_M$  riferito al sistema di riferimento 0**

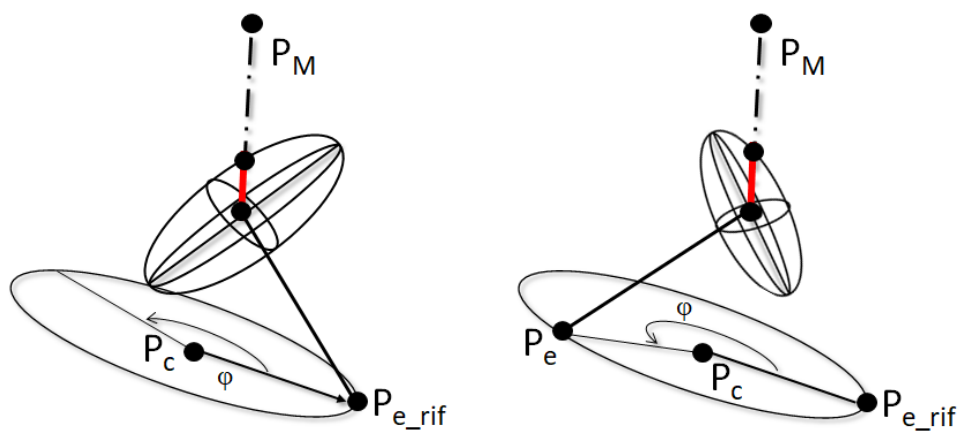


**Figura 3. 15: Esempio di diverse lunghezze del segmento che indica qual è la capacità del robot in una configurazione di generare velocità all'End Effector in una determinata direzione**

Questo ragionamento può essere applicato alla scelta della configurazione del robot; infatti conoscendo due punti successivi nei quali si vuole che l'End Effector sia posizionato, si può scegliere, come si vedrà più in dettaglio nei capitoli successivi, quale sia il migliore angolo di Swivel per il quale il robot riesce a generare la maggiore velocità nel primo dei due punti per andare a posizionarsi nel punto successivo. Per ogni configurazione del manipolatore è possibile calcolare l'ellissoide che, in generale, è orientato ed ha dimensioni diverse in ogni configurazione; nelle figure 3.16 e 3.17 si può vedere un esempio di ciò.



**Figura 3. 16: Esempio di ellissoide di manipolabilità per due diverse configurazioni del robot per la stessa posa dell'End Effector**



**Figura 3. 17: Esempio di diverse lunghezze del segmento che indica qual è la capacità del robot in due diverse configurazioni di generare velocità all'End Effector considerando lo stesso punto  $P_M$  per le due configurazioni visibili nella figura 3.16**

Gli assi principali dell'ellissoide hanno lunghezza pari alla radice quadrata degli autovalori della matrice:

$$A_{3 \times 3} = J_p J_p^t \quad (3.15)$$

Gli autovalori della matrice  $A_{3 \times 3}$ , in ordine dal più grande al più piccolo, sono indicati come:

$$\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3 \quad (3.16)$$

Quindi le lunghezze degli assi principali, in ordine crescente, sono:

$$\sigma_1 = \sqrt{\lambda_1} \quad (3.17)$$

$$\sigma_2 = \sqrt{\lambda_2} \quad (3.18)$$

$$\sigma_3 = \sqrt{\lambda_3} \quad (3.19)$$

Le direzioni degli assi principali dell'ellissoide risultano essere pari agli autovettori di modulo unitario della matrice  $A_{3 \times 3}$ :

$${}^0 \underline{u}_1 = \begin{bmatrix} u_1(x_0) \\ u_1(y_0) \\ u_1(z_0) \end{bmatrix} \quad (3.20)$$

$${}^0 \underline{u}_2 = \begin{bmatrix} u_2(x_0) \\ u_2(y_0) \\ u_2(z_0) \end{bmatrix} \quad (3.21)$$

$${}^0 \underline{u}_3 = \begin{bmatrix} u_3(x_0) \\ u_3(y_0) \\ u_3(z_0) \end{bmatrix} \quad (3.22)$$

L'equazione dell'ellissoide traslata, affinché il suo centro risulti essere posizionato nel centro polso, risulta essere:

$$ax^2 + by^2 + cz^2 + 2dxy + 2exz + 2fyz + 2gx + 2hy + 2lz + m = 0 \quad (3.23)$$

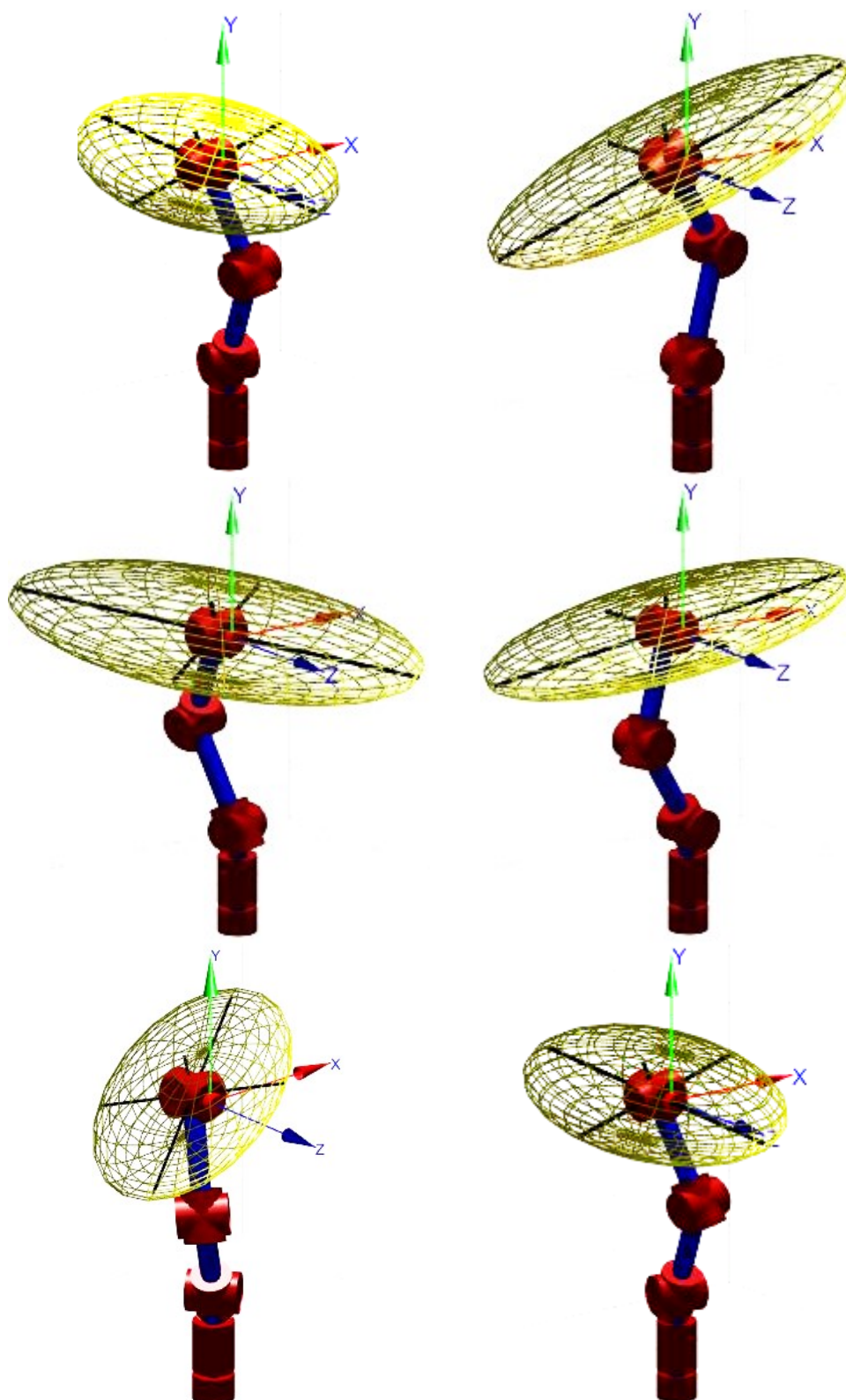
I cui coefficienti possono essere espressi in forma matriciale come:

$$A_{4 \times 4} = \begin{bmatrix} a & d & e & g \\ d & b & f & h \\ e & f & c & l \\ g & h & l & m \end{bmatrix} \quad (3.24)$$

Per la quale valgono le caratteristiche:

$$\left\{ \begin{array}{l} \det(A) \neq 0 \\ \det \begin{pmatrix} a & d & e \\ d & b & f \\ e & f & c \end{pmatrix} \neq 0 \\ \det(A) < 0 \\ \text{autovalori}(A) \text{ concordi} \end{array} \right. \quad (3.25)$$

Nella figura 3.18 si possono vedere sei diversi ellissoidi di manipolabilità che provengono da sei diverse configurazioni del robot che producono la stessa posa dell'End Effector.



**Figura 3. 18: Esempio degli ellissoidi di manipolabilità per sei configurazioni diverse che portano l'End Effector ad assumere la stessa posa**



Conoscendo le coordinate del punto  $P_M$ , si può trovare la retta passante per il punto  $P_m$  e per il centro polso che espressa come l'intersezione tra due i piani, risulta essere:

$$r_{M-w} : \begin{cases} y = m_1 x + q_1 \\ z = m_2 x + q_2 \end{cases} \quad (3.26)$$

Dove i parametri  $m_1$ ,  $m_2$ ,  $q_1$  e  $q_2$  possono essere trovati come:

$$m_1 = \frac{P_m(y_0) - P_w(y_0)}{P_m(x_0) - P_w(x_0)} \quad (3.27)$$

$$m_2 = \frac{P_m(z_0) - P_w(z_0)}{P_m(x_0) - P_w(x_0)} \quad (3.28)$$

$$q_1 = \frac{P_m(x_0)P_w(y_0) - P_m(y_0)P_w(x_0)}{P_m(x_0) - P_w(x_0)} \quad (3.29)$$

$$q_2 = \frac{P_m(x_0)P_w(z_0) - P_m(z_0)P_w(x_0)}{P_m(x_0) - P_w(x_0)} \quad (3.30)$$

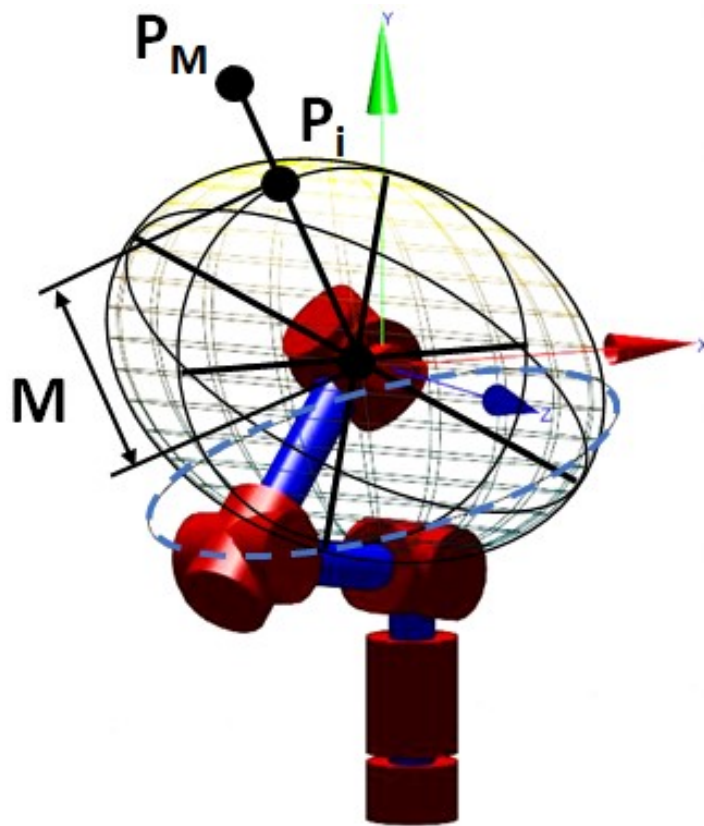
Il punto di intersezione tra l'ellissoide e la retta, chiamato  $P_i$ , nel sistema di riferimento fisso risulta avere coordinate:

$$P_i = (P_i(x_0) \quad P_i(y_0) \quad P_i(z_0)) \quad (3.31)$$

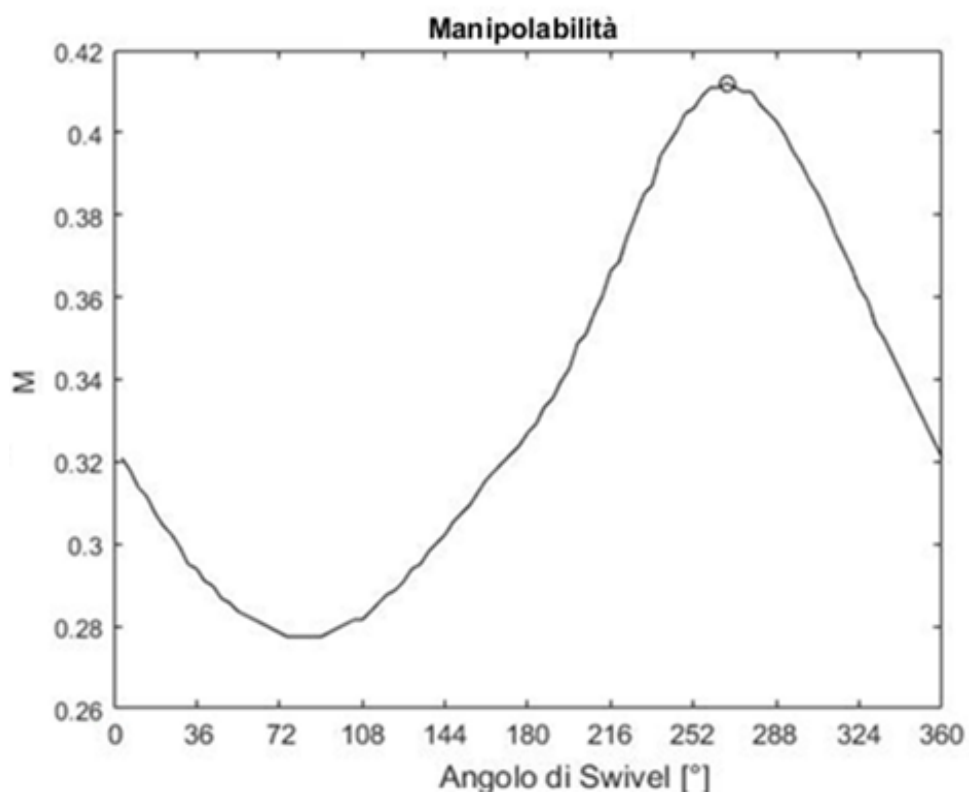
La distanza tra questo punto e il centro dell'ellissoide è indicata come  $M$  e può essere calcolata come:

$$M = \sqrt{(P_w(x_0) - P_i(x_0))^2 + (P_w(y_0) - P_i(y_0))^2 + (P_w(z_0) - P_i(z_0))^2} \quad (3.32)$$

Nella figura 3.19 si può vedere della distanza  $M$ , distanza tra il centro polso e il punto  $P_i$ . Lo studio di questo parametro può essere eseguito per tutte le configurazioni possibili in funzione dell'angolo di Swivel. Nella figura 3.20 è visibile l'andamento del parametro  $M$  in funzione dell'angolo di Swivel, per una delle otto possibili soluzioni della cinematica inversa, per la posa visibile nella figura 3.19.



**Figura 3. 19: Esempio della distanza  $M$ , cioè la distanza tra il punto  $P_M$ , punto in cui si vuole portare il centro polso, e il punto di intersezione tra l'ellissoide e la retta passante per il punto  $P_M$  e il centro polso**



**Figura 3. 20: Andamento del parametro  $M$  in funzione dell'angolo di Swivel per la posa visibile nella figura 3.19**

## CAPITOLO 4: Indici

Per scegliere tra le infinite configurazioni quale sia quella più conveniente, innanzitutto si deve stabilire quale sia il parametro che si vuole massimizzare. Infatti, in generale, ogni diversa configurazione presenta delle caratteristiche diverse, quali, per esempio, una maggiore o peggiore capacità di produrre velocità e forze all'End Effector o di essere più o meno lontani dai limiti di giunto. A seconda della caratteristica che si intende migliorare si ha una diversa scelta della configurazione. Se si vuole massimizzare più di una caratteristica bisogna allora scegliere una configurazione di compromesso. Si crea quindi una procedura per assegnare ad ogni configurazione possibile, per una certa posa dell'End Effector, un indice che permetta di mettere a confronto le proprietà di ogni singola configurazione. È conveniente andare a studiare gli indici in funzione dell'angolo di Swivel, poiché le configurazioni che il manipolatore può assumere, fissata la posizione dell'End Effector, possono essere descritte da questo unico parametro.

In particolare, si analizzano due casi: quello in cui la priorità è che il manipolatore rimanga il più possibile lontano dai limiti di giunto e quello in cui sia in grado di sviluppare la maggiore velocità nell'End Effector. Poiché in generale le configurazioni che massimizzano queste due caratteristiche, in generale, non sono coincidenti, si studia un metodo per scegliere la configurazione per la quale si ottenga il miglior compromesso.

## 4.1 Indici per i limiti dei giunti

Si vuole rimanere sufficientemente lontano dai limiti di ogni giunto poiché, se si arriva esattamente alla posizione di limite, allora si è in una situazione in cui si riduce la mobilità del robot e ci si riconduce al caso di manipolatore che possiede un numero inferiore di gradi di libertà. Come anticipato nel paragrafo 2.5 le configurazioni possibili per una determinata posa dell'End Effector possono essere descritti da uno o più archi della circonferenza descritta dall'angolo di Swivel. Si costruisce un indice che tiene conto di questo fattore, affinché si possano facilmente mettere a confronto tra loro le varie configurazioni. In particolare, l'indice che tiene conto dei limiti di giunto come si vedrà successivamente, è costituito da due parti chiamate  $c_{G1,i,j}$  e  $c_{G2,i,j}$  che moltiplicate tra loro danno come risultato l'indice  $c_{G3,i,j}$ . Il calcolo di questi indici viene eseguito per ogni  $i$ -esimo giunto e per ogni  $j$ -esima configurazione. L'indice  $c_{G3,i,j}$  è utilizzato per costituire l'indice finale; quest'ultimo viene calcolato in modo differente a seconda di cosa si vuole analizzare. Infatti, può essere usato per analizzare solo i giunti responsabili della posizione o dell'orientazione o tutti i giunti del robot.

### 4.1.1 Indice $c_{G1,i,j}$

Si definisce un indice  $c_{G1,i,j}$ , compreso tra 0 e 1, che rappresenta quanto è ampio ogni singolo arco di circonferenza rispetto alla circonferenza totale. Questo indice viene calcolato per tutti gli  $i$ -esimi giunti e per tutte le  $j$ -esime configurazioni ed è definito come:

$$c_{G1,i,j} = \frac{\Delta\varphi_{i,j,k}}{2\pi} \quad (4.1)$$

Per tutti i punti appartenenti all'intervallo  $I_{i,j,k}$  l'indice assume lo stesso valore. Nella figura 4.1 si può vedere un esempio generico dell'andamento dell'indice  $c_{GI,i,j}$ .

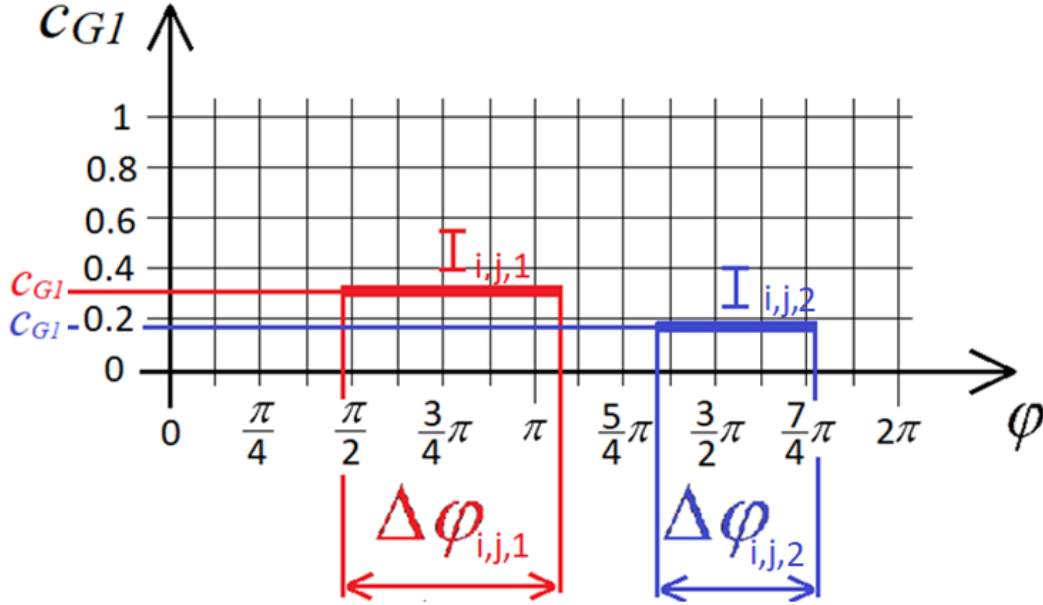


Figura 4. 1: Esempio dell'andamento dell'indice  $c_{GI}$  per una generica posa dell'End Effector, per un generico giunto  $i$  e per una generica configurazione  $j$

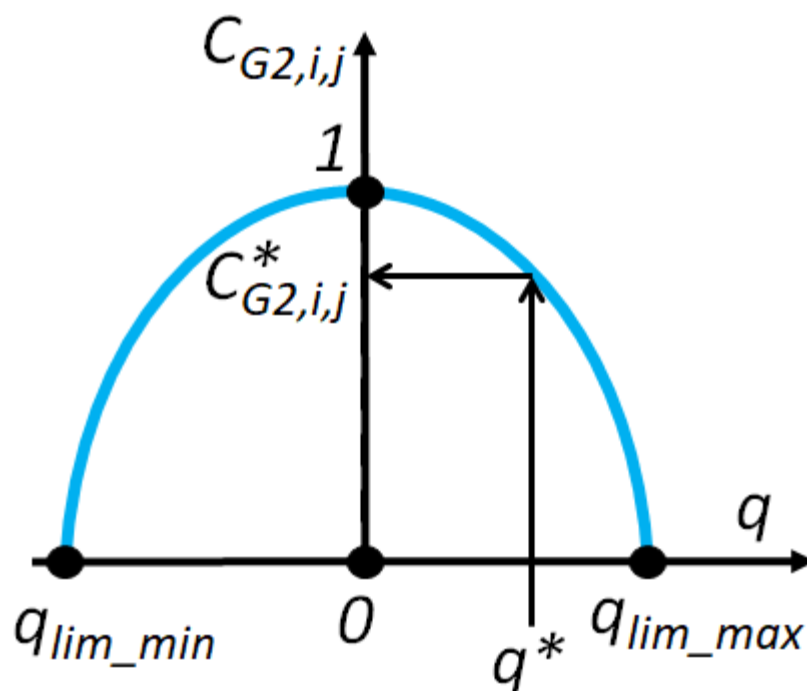
### 3.1.2 Indice $c_{G2,i,j}$

Per tener conto della distanza della configurazione richiesta al singolo giunto dai suoi rispettivi limiti si definisce un indice  $c_{G2}$ . Esso ha un andamento parabolico, per cui non presenta discontinuità. Come il valore che può assumere l'indice  $c_{GI}$ , anche il valore di questo indice può variare tra un minimo di 0 e un massimo 1. In particolare, l'indice assume valore pari a 0 nelle configurazioni in cui il giunto dovrebbe assumere dei valori uguali o minori del valore del limite inferiore o dovrebbe assumere dei valori uguali o maggiori del valore del limite di giunti superiore, e presenta il suo massimo, pari a 1, nel punto corrispondente al centro dell'intervallo tra il limite inferiore e superiore.

L'equazione che definisce questo indice risulta quindi essere:

$$c_{G2,i,j} = \frac{1}{(q_{\lim\_MIN,i} \cdot q_{\lim\_MAX,i})} \cdot [q_i^2 - (q_{\lim\_MIN,i} + q_{\lim\_MAX,i}) \cdot q_i + (q_{\lim\_MIN,i} \cdot q_{\lim\_MAX,i})] \quad (4.2)$$

Nella figura 4.2 si può vedere un esempio come si può ricavare graficamente questo indice.



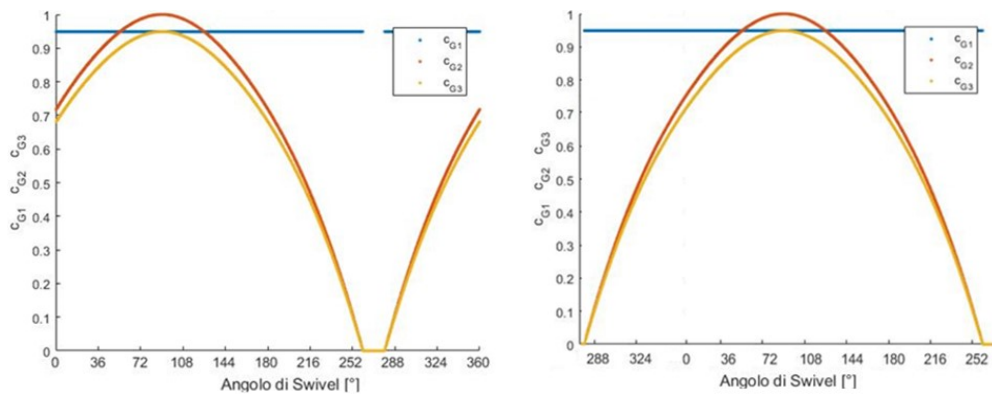
**Figura 4. 2:** Esempio grafico di come si possa ricavare graficamente l'indice  $c_{G2,i,j}$  considerando un valore  $q^*$  di un generico giunto

### 4.1.3 Indice $c_{G3,i,j}$

Se si moltiplicano tra di loro gli indici  $c_{G1,i,j}$  e  $c_{G2,i,j}$  si trova l'indice  $c_{G3,i,j}$ , che rappresenta l'indice totale per ogni singolo giunto:

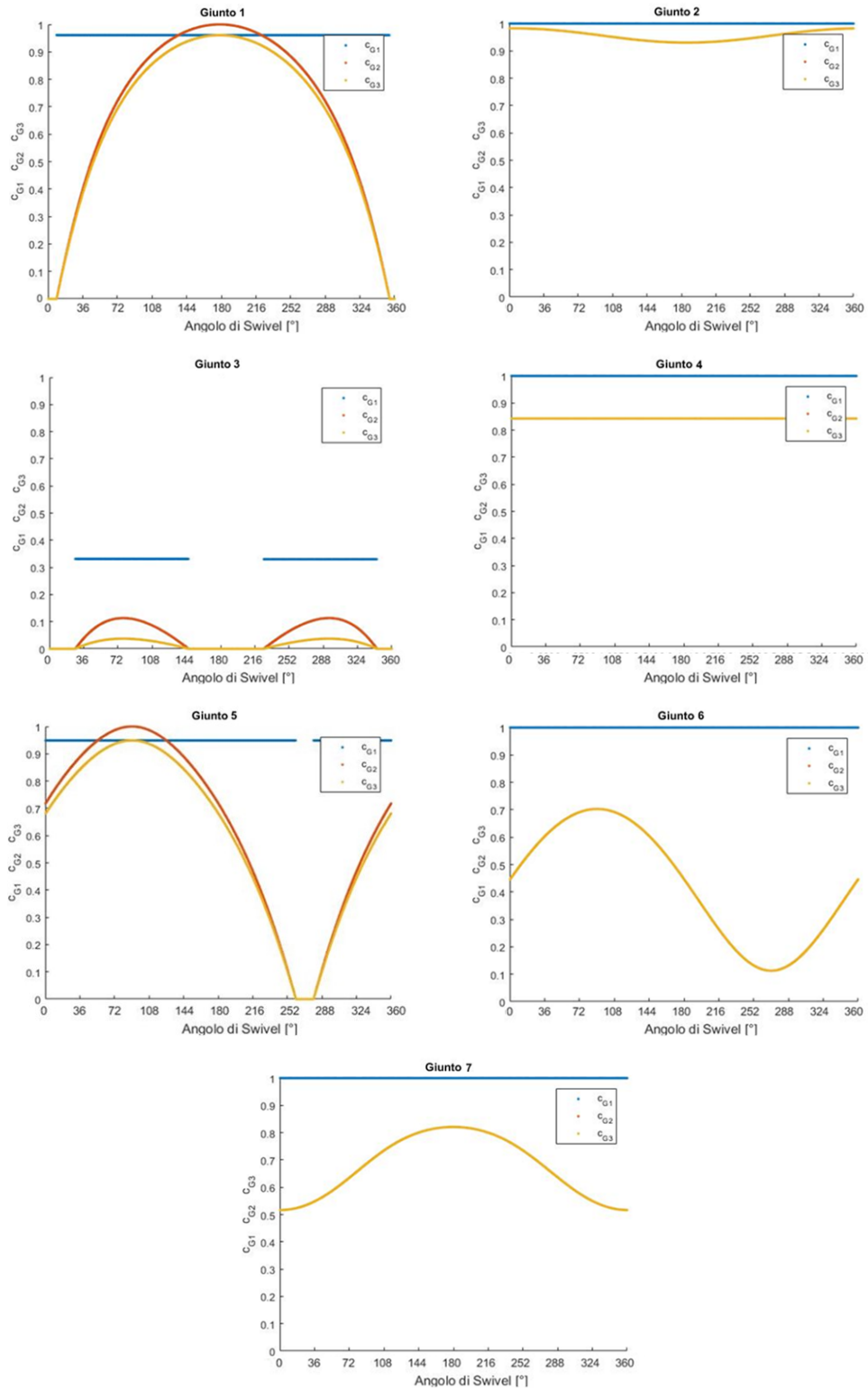
$$c_{G3,i,j} = c_{G1,i,j} \cdot c_{G2,i,j} \quad (4.3)$$

Nella colonna di sinistra della figura 4.3 si può vedere un esempio di come l'indice  $c_{G2,i,j}$  viene scalato di un valore pari all'indice  $c_{G1,i,j}$  per ottenere l'indice  $c_{G3,i,j}$ . La rappresentazione dell'indice così fatta va considerata continua, infatti, essendo l'angolo di Swivel rappresentativo di una circonferenza, il valore che l'indice assume per un valore di zero radianti è coincidente con il valore che assume a  $2\pi$  radianti. Nella figura 4.4 si può vedere un esempio di come, riportando lo stesso grafico non partendo da zero radianti, ma da uno dei punti di minimo dell'indice  $c_{G3}$  la funzione risulti continua. Nella colonna di destra della figura 4.4 si può osservare l'andamento dell'indice  $c_{G3}$  per tutti e sette i giunti del manipolatore, per uno degli otto risultati della cinematica per una posa dell'End Effector, in funzione dell'angolo di Swivel.



**Figura 4. 3: A sinistra esempio di come l'indice  $c_{G2}$  (in rosso) viene scalato dall'indice  $c_{G1}$  (in blu) per dare l'indice  $c_{G3}$  (in giallo); a destra si può vedere come lo stesso risultato sia continuo lungo la circonferenza di Swivel**





**Figura 4. 4: Andamento dell'indice  $c_{G3}$  per i sette i giunti del manipolatore per uno degli otto risultati della cinematica, in funzione dell'angolo di Swivel per la posa visibile nella figura 2.18, che porta l'End Effector nelle coordinate  $[-0.1 \ -0.1 \ 0.8]$  con orientazione pari a  $[90^\circ \ 0^\circ \ 0^\circ]$**

#### 4.1.4 Indice finale per i limiti di giunto

A seconda dello studio che si vuole fare si definisce l'indice dei giunti finale. Se si vuole studiare la distanza con i limiti di giunto per tutto il manipolatore, allora l'indice totale per ognuna delle  $j$ -esime soluzioni della cinematica inversa può essere calcolato come:

$$c_{G,t,j} = \prod_{i=1}^7 c_{G3,i,j} \quad (4.4)$$

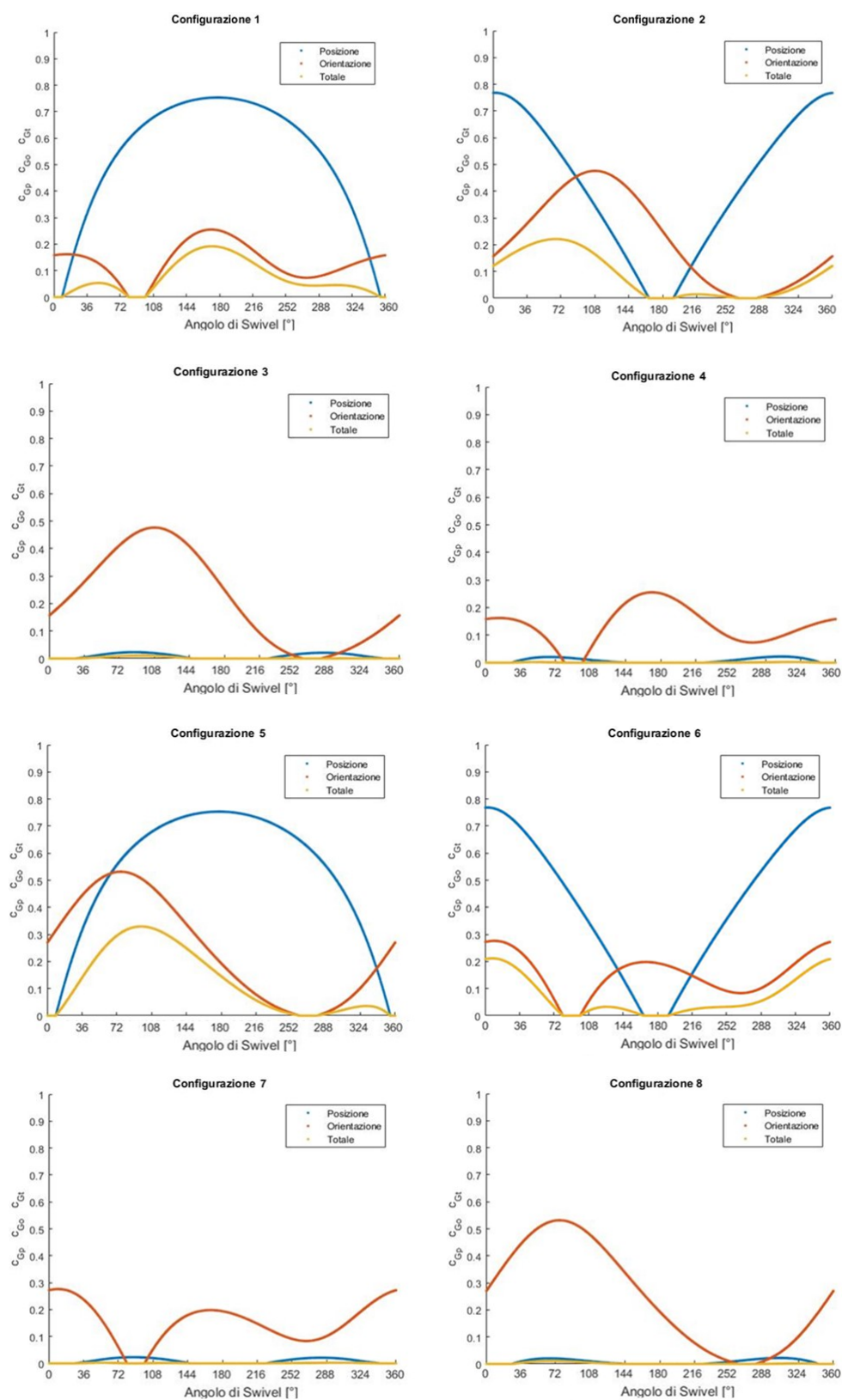
Se si vuole studiare l'andamento degli indici per le parti del robot responsabili della sola posizione dell'End Effector, si devono moltiplicare tra di loro gli indici calcolati per i giunti responsabili della posizione, cioè i giunti di spalla e quello di gomito:

$$c_{G,p,j} = \prod_{i=1}^4 c_{G3,i,j} \quad (4.5)$$

Mentre se si vuole studiare solo la parte riguardante l'orientazione, l'indice totale è pari al prodotto degli indici calcolati per i giunti di polso:

$$c_{G,o,j} = \prod_{i=5}^7 c_{G3,i,j} \quad (4.6)$$

Nella figura 4.5 si possono vedere gli andamenti di tale indice nei tre diversi casi, per le otto possibili soluzioni di cinematica inversa.



**Figura 4.5:** Andamenti degli indici  $c_{G,p}$ ,  $c_{G,o}$  e  $c_{G,t}$  per le otto possibili soluzioni di cinematica inversa per la posa a cui fa riferimento la figura 4.4

## 4.2 Indici per la manipolabilità

Scelti due punti nello spazio in cui l'End Effector deve posizionarsi, si studia un indice attraverso cui si possa scegliere tra le diverse configurazioni che il robot può assumere nel primo punto quella che permetta di raggiungere il secondo punto con la migliore capacità di generare velocità.

### 4.2.1 Indice $c_{M,j}$

Calcolata la distanza  $M$  con il metodo spiegato nel paragrafo 3.1, si può calcolare l'indice  $c_{M,j}$ , indice che può assumere valori compresi tra 0 e 1, ha andamento parabolico e può essere calcolato per ogni  $j$ -esima soluzione di cinematica inversa; l'equazione che rappresenta questo indice è:

$$c_{M,j} = -\frac{1}{\sigma_{MAX}^2} M^2 + \frac{2}{\sigma_{MAX}} M \quad (4.7)$$

Dove  $\sigma_{MAX}$  è la lunghezza massima che l'asse maggiore dell'ellissoide assume lungo l'angolo di Swivel. Nella figura 4.6 si può vedere come si può ricavare graficamente l'indice  $c_{M,j}$ . Nella figura 4.7 si può vedere un esempio dell'andamento dell'indice di manipolabilità per la posa analizzata nella figura 4.4

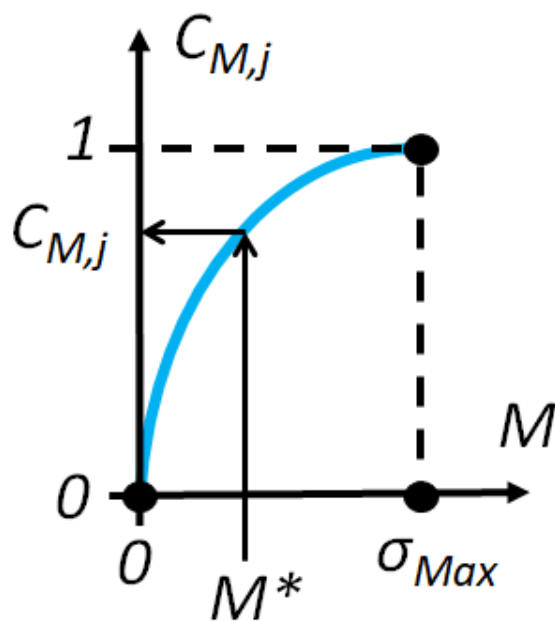


Figura 4. 6: Esempio grafico di come si può ricavare l'indice  $c_{Mj}$  considerando un generico valore  $M^*$

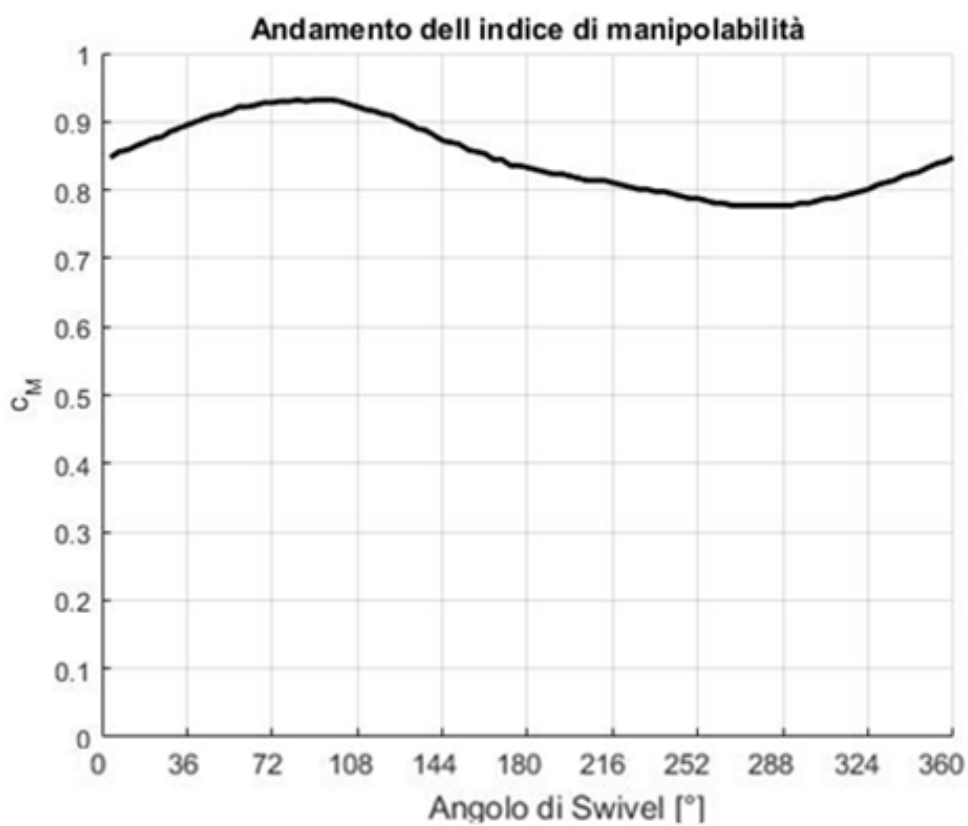


Figura 4. 7: Esempio di andamento del coefficiente  $C_M$  in funzione dell'angolo di Swivel per la posa visibile nella figura 4.4

### 4.3 Somma degli indici dei limiti di giunto e di manipolabilità

Gli indici calcolati in precedenza possono essere confrontati tra loro assegnando a ogni indice una diversa priorità. In particolare, si definisce un indice  $p$  che può assumere valori compresi tra 0 e 1, grazie al quale si determinano i valori dei coefficienti  $p_G$  e  $p_M$ , che rappresentano quale è il valore della priorità che si vuole assegnare rispettivamente all'indice dei giunti e all'indice della manipolabilità. Si è scelto di attribuire ai coefficienti  $p_G$  e  $p_M$  un andamento rappresentato dalla funzione logistica. In particolare, l'andamento dell'indice  $p_G$  ha equazione pari a:

$$p_G(p) = \frac{a_p}{1 + b_p \cdot e^{-c_p \cdot p}} + d_p \quad (4.8)$$

E per l'indice  $p_M$  si ha:

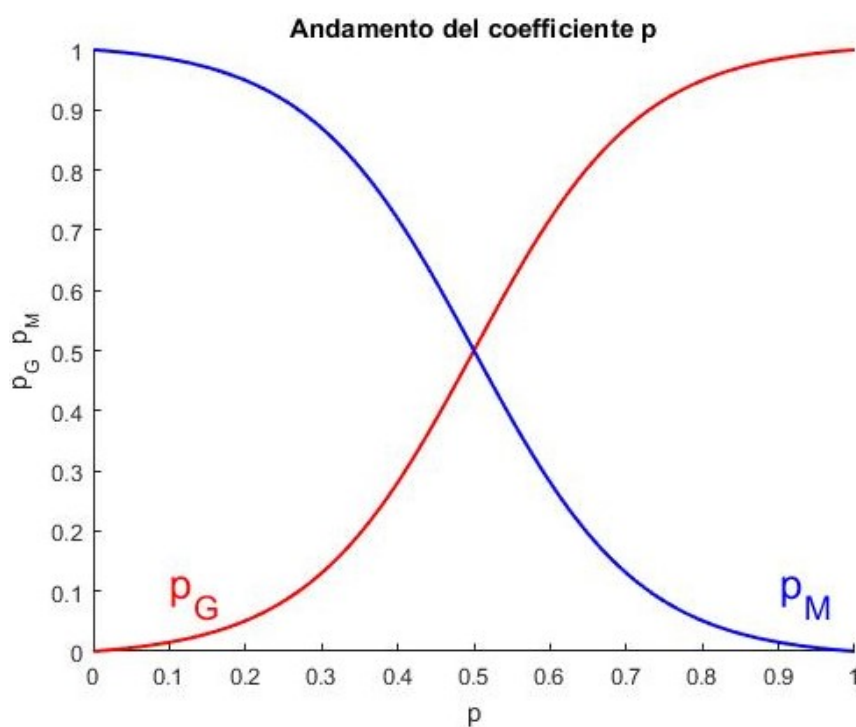
$$p_M(p) = \frac{a_p}{1 + b_p \cdot e^{c_p \cdot (p-1)}} + d_p \quad (4.9)$$

Nella tabella 4.1 sono riportati i valori approssimati dei coefficienti  $a_p$ ,  $b_p$ ,  $c_p$  e  $d_p$ .

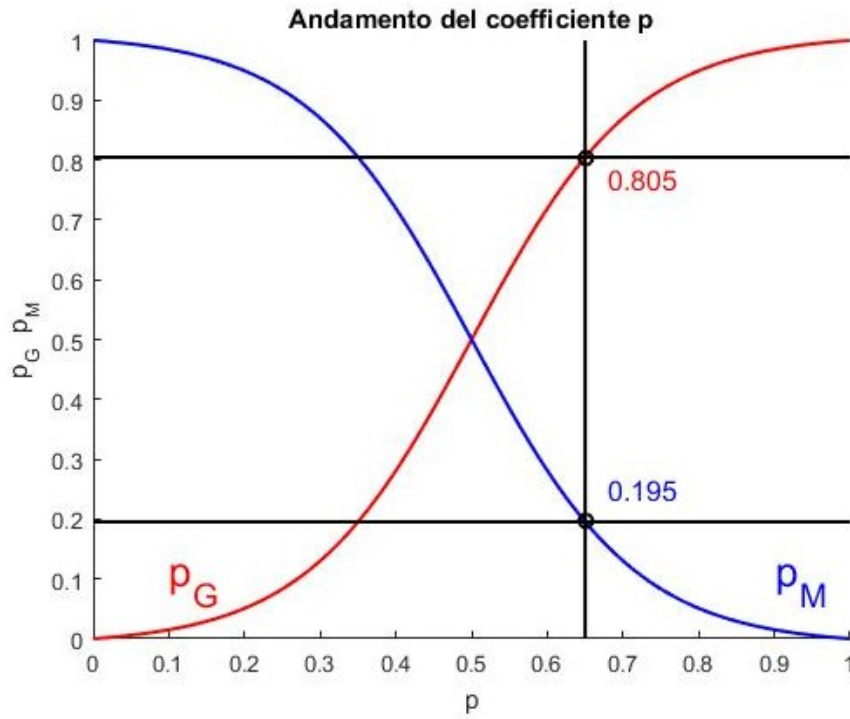
**Tabella 4. 1: Valori arrotondati dei coefficienti  $a_p$ ,  $b_p$ ,  $c_p$  e  $d_p$  delle funzioni logistiche che rappresentano l'andamento dei coefficienti  $p_G$  e  $p_M$**

$a_p$	1.0205
$b_p$	98.3521
$c_p$	9.1771
$d_p$	-0.0103

Nella figura 4.8 si può osservare gli andamenti degli indici  $p_G$  e  $p_M$ . Si può notare come per il valore massimo dell'indice  $p$  si ha che l'unico indice che si vuole massimizzare è quello relativo ai giunti, mentre per il valore minimo dell'indice  $p$  si ha che l'unico indice che si vuole massimizzare è quello relativo alla manipolabilità; per un valore dell'indice  $p$  pari a 0,5 invece si può vedere come la priorità assegnata ai due indici coincida. Nella figura 4.9 si può vedere un esempio grafico di come, scegliendo il valore dell'indice  $p$ , si possono trovare i valori dei coefficienti  $p_G$  e  $p_M$ .



**Figura 4. 8:** Andamento dei coefficienti  $p_G$  e  $p_M$  in funzione del coefficiente  $p$



**Figura 4. 9: Esempio di come si possono ricavare graficamente i valori dei coefficienti  $p_G$  e  $p_M$  per un determinato valore del coefficiente  $p$**

Poiché non si vuole che il robot assuma configurazioni in cui i giunti superino i limiti o che la manipolabilità sia nulla, si crea un indice  $c_{T,j}$  per ognuna delle  $j$ -esime soluzioni della cinematica inversa che tenga conto di tutte le osservazioni fatte in precedenza. In particolare, si ha che l'equazione di questo indice è:

$$c_{TOT} = p_G \cdot c_{G,j} \cdot f(c_{M,j}) + p_M \cdot c_{M,j} \cdot f(c_{G,j}) \quad (4.10)$$

Dove la funzione  $f$  è la funzione logistica che ha equazione:

$$f(indice) = \frac{a_f}{1 + b_f \cdot e^{-c_f \cdot indice}} + d_f \quad (4.11)$$



Le coordinate del punto di flesso possono essere trovare ponendo pari a zero la derivata seconda della funzione  $f$ , la derivata prima risulta essere pari a:

$$f'(indice) = \frac{a_f b_f c_f e^{c \cdot indice}}{(b_f + e^{c \cdot indice})^2} \quad (4.12)$$

La derivata seconda risulta essere pari a:

$$f''(indice) = \frac{a_f b_f c_f^2 e^{c \cdot indice} (b_f - e^{c \cdot indice})}{(b_f + e^{c \cdot indice})^3} \quad (4.13)$$

Ponendo la derivata seconda pari a zero si possono trovare le coordinate del flesso della funzione. Esse risultano essere pari a:

$$x_f = \frac{\ln(b_f)}{c_f} \quad (4.14)$$

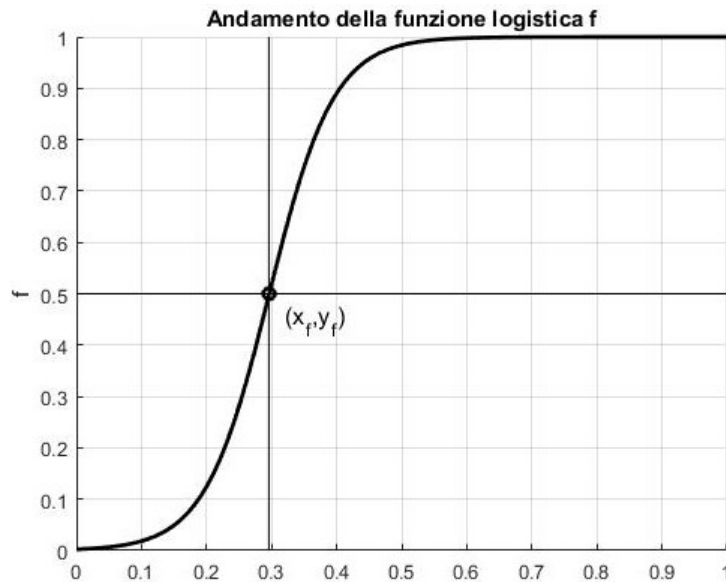
$$y_f = \frac{a_f + 2d_f}{2} \quad (4.15)$$

La funzione  $f$  inoltre ha la caratteristica di passare per i punti di coordinate (0,0) e di coordinate (1,1) e perciò si possono scrivere le seguenti relazioni:

$$0 = \frac{a_f}{1 + b_f} + d_f \quad (4.16)$$

$$1 = \frac{a_f}{1 + b_f e^{-c}} + d_f \quad (4.17)$$

Scelto quindi il punto di flesso si possono trovare i valori dei coefficienti  $a_f$ ,  $b_f$ ,  $c_f$  e  $d_f$ . Nella figura 4.10 si può vedere l'andamento della funzione  $f$ .



**Figura 4. 10: Andamento della funzione logistica  $f$**

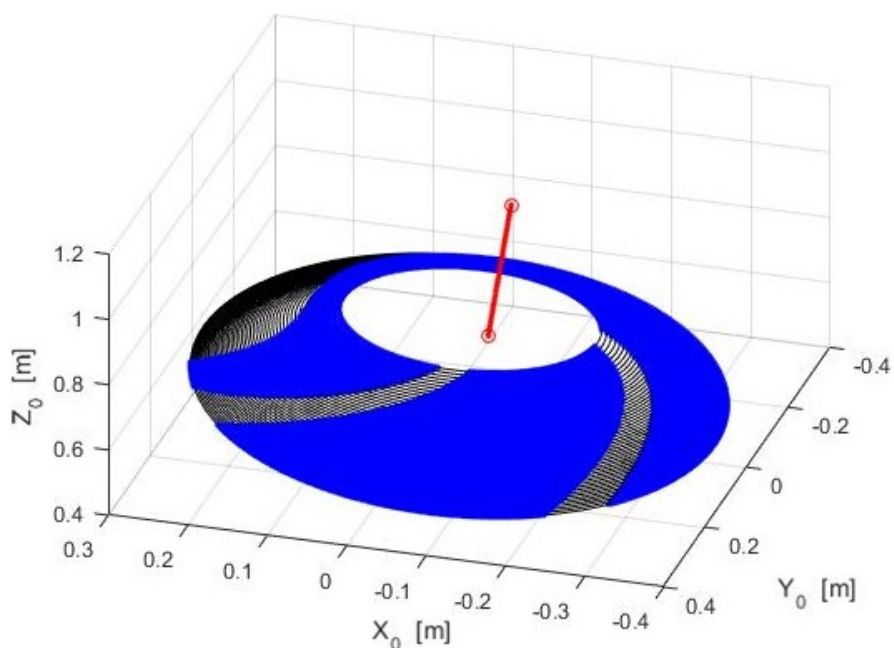
Attraverso l'equazione 4.10 si riesce a creare un indice che tiene conto degli indici relativi ai giunti e alla manipolabilità e dei rispettivi pesi. L'utilizzo della funzione  $f$  permette di tenere in considerazione che alcune configurazioni che ad esempio possono presentare una certa manipolabilità non sono raggiungibili a causa del superamento dei limiti dei giunti o, viceversa, presentano un alto indice  $c_G$  ma la manipolabilità è prossima allo zero.

## 4.4 Andamento degli indici lungo una traiettoria

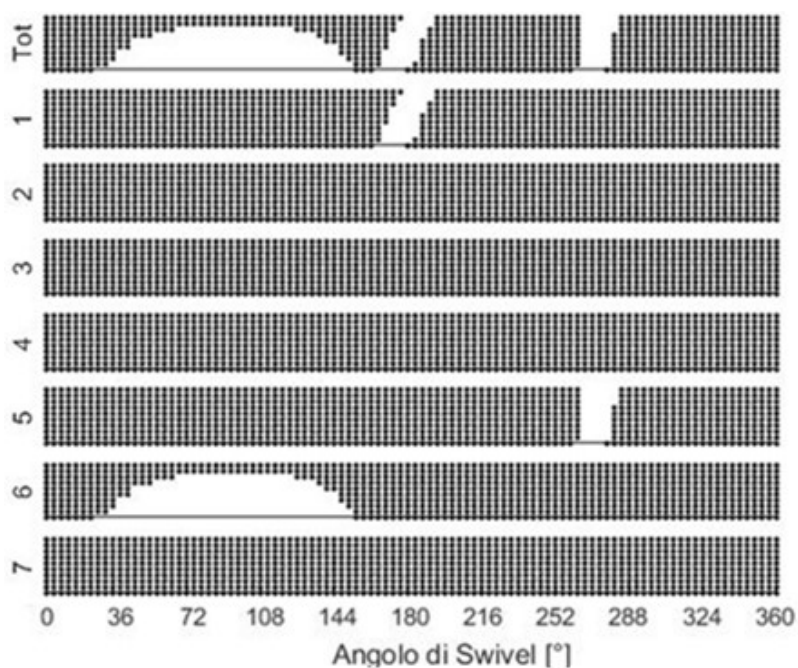
Lo studio degli indici fatto in precedenza si può applicare lungo una traiettoria. In questo modo si possono determinare quali siano le configurazioni che il robot deve assumere affinché si massimizzi una certa priorità non solo considerando una certa posa, ma secondo una certa sequenza di configurazioni lungo una data traiettoria.

### 4.4.1 Andamenti dell'indice dei giunti

Se si considera solo l'indice relativo ai giunti si può studiare il suo andamento lungo una traiettoria. Nella figura 4.11 si può vedere un esempio delle posizioni possibili per il gomito lungo una traiettoria. Nella figura 4.12 si possono vedere gli angoli di Swivel che il robot può assumere se si considera il robot privo di limiti di giunti in tutti i giunti a parte il giunto  $i$ -esimo, per la traiettoria rappresentata nella figura 4.11 considerando una delle otto possibili soluzioni di cinematica inversa. Nella figura 4.13 si possono vedere gli angoli di Swivel che il robot può assumere se si considerano solo i giunti responsabili della posizione dell'End Effector aventi limiti di giunto e gli angoli di Swivel che il robot può assumere se si considerano solo i giunti responsabili dell'orientazione dell'End Effector aventi limiti di giunto, per la traiettoria rappresentata nella figura 4.11 considerando una delle otto possibili soluzioni di cinematica inversa. Nella figura 4.14 si possono vedere gli andamenti, lungo la traiettoria visibile nella figura 4.11, dell'indice dei giunti considerando una delle otto possibili soluzioni della cinematica inversa. Nella figura 4.15 si può vedere l'andamento degli indici  $c_{G3,p,1}$ ,  $c_{G3,o,1}$  e  $c_{G3,t,1}$  lungo la traiettoria rappresentata nella figura 4.11.



**Figura 4. 11: Esempio delle posizioni che il gomito del robot può assumere rispettando i limiti di giunto (in blu), rispetto alle circonferenze descritte dagli angoli di Swivel (in nero), per percorrere una certa traiettoria (in rosso)**



**Figura 4. 12: Nella prima riga esempio degli angoli di Swivel che il robot può assumere (in nero), nelle altre righe gli angoli di Swivel (in nero) che il robot può assumere se si considera il robot privo di limiti di giunti in tutti i giunti a parte il giunto i-esimo, per la traiettoria rappresentata nella figura 4.11 considerando una delle otto possibili soluzioni di cinematica inversa**

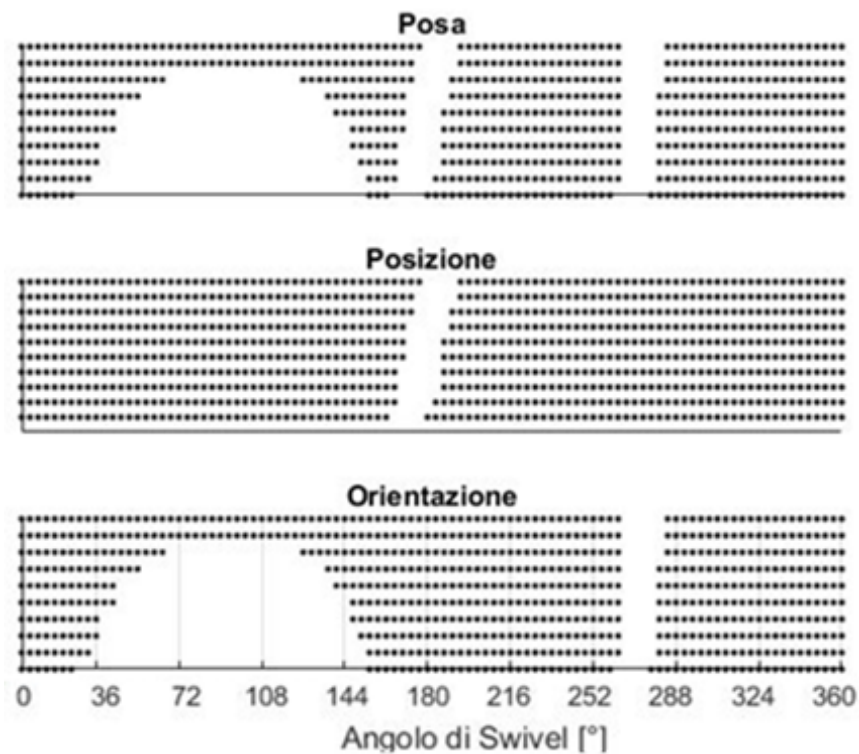
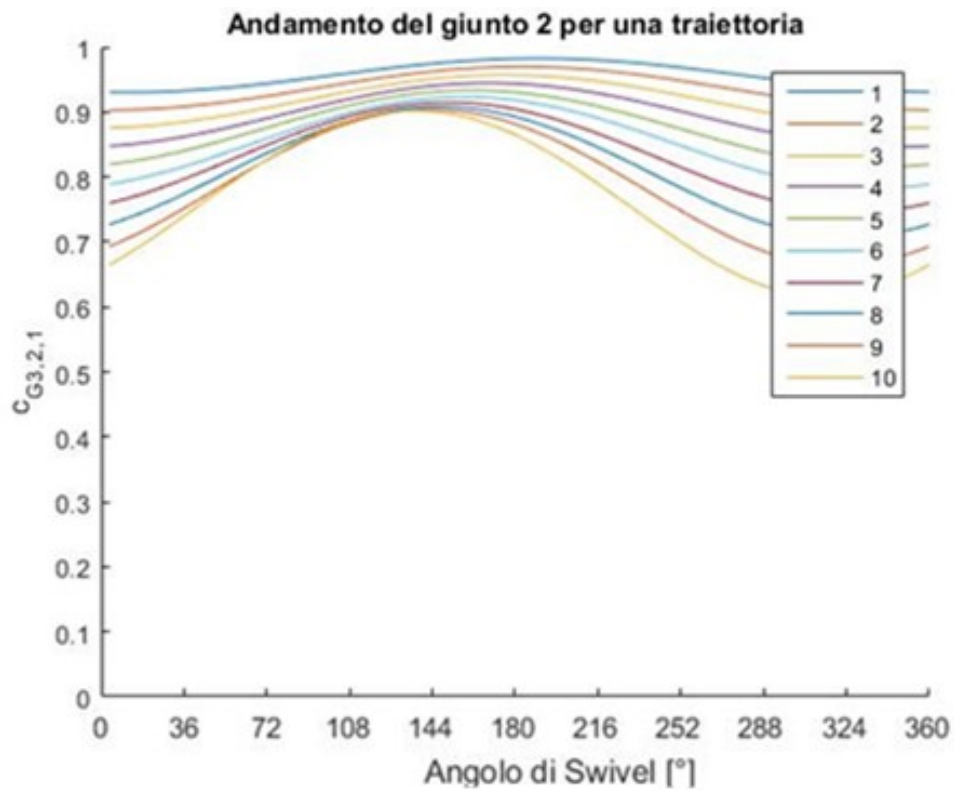
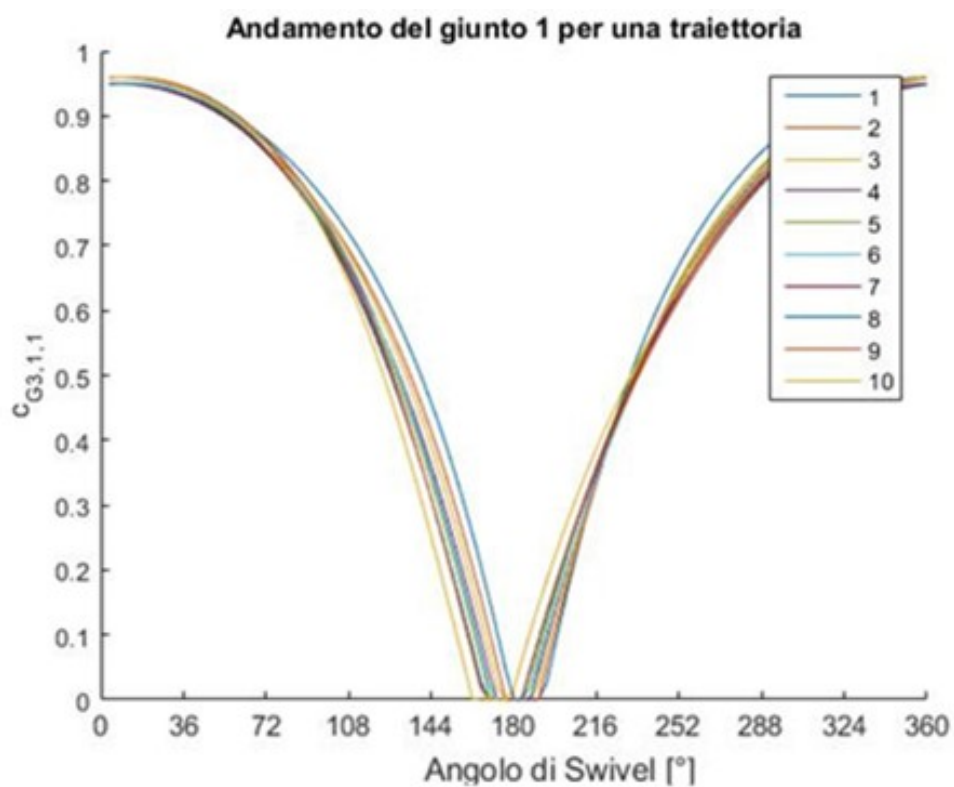
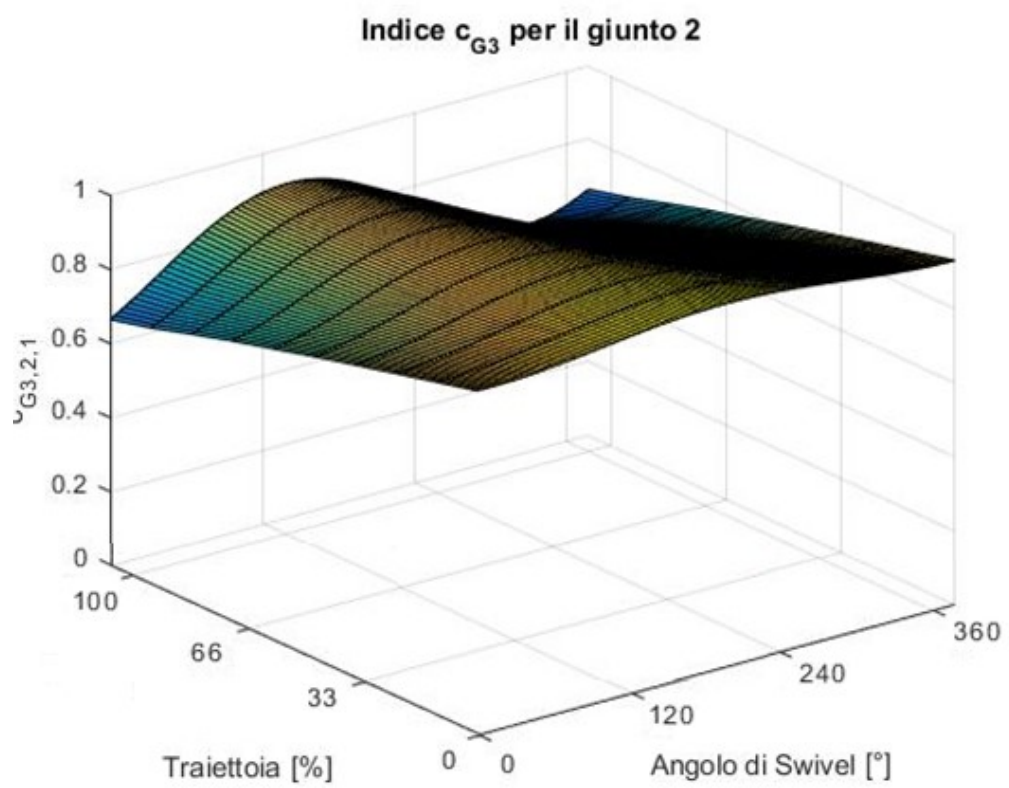
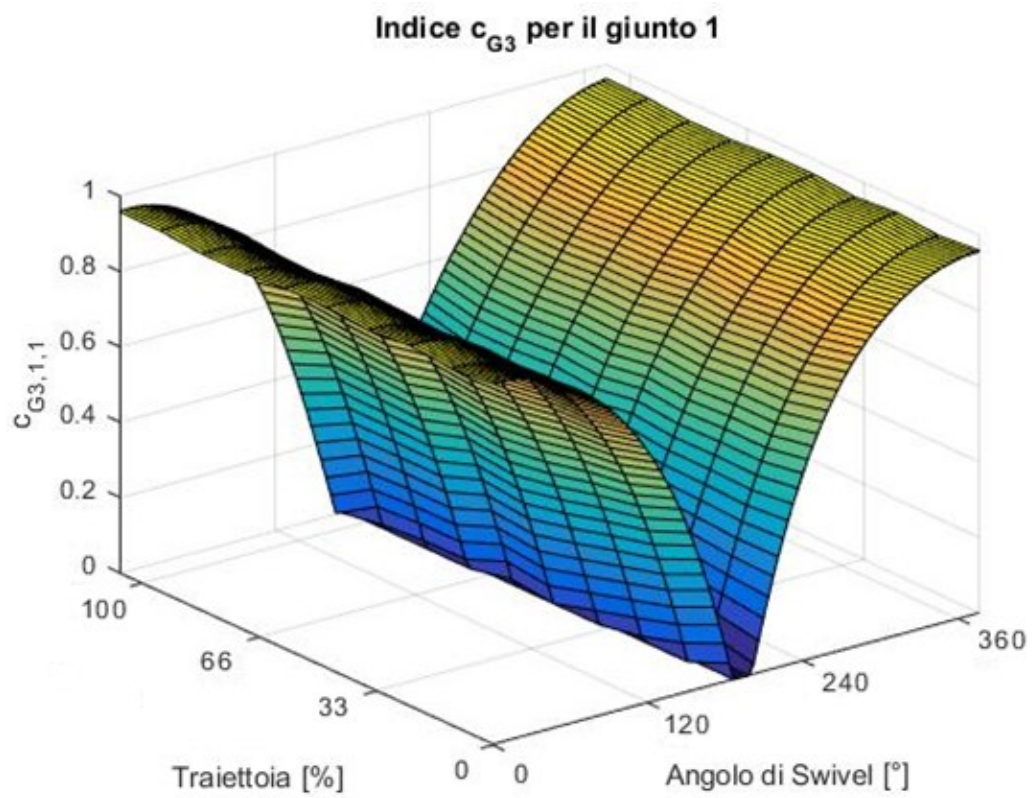
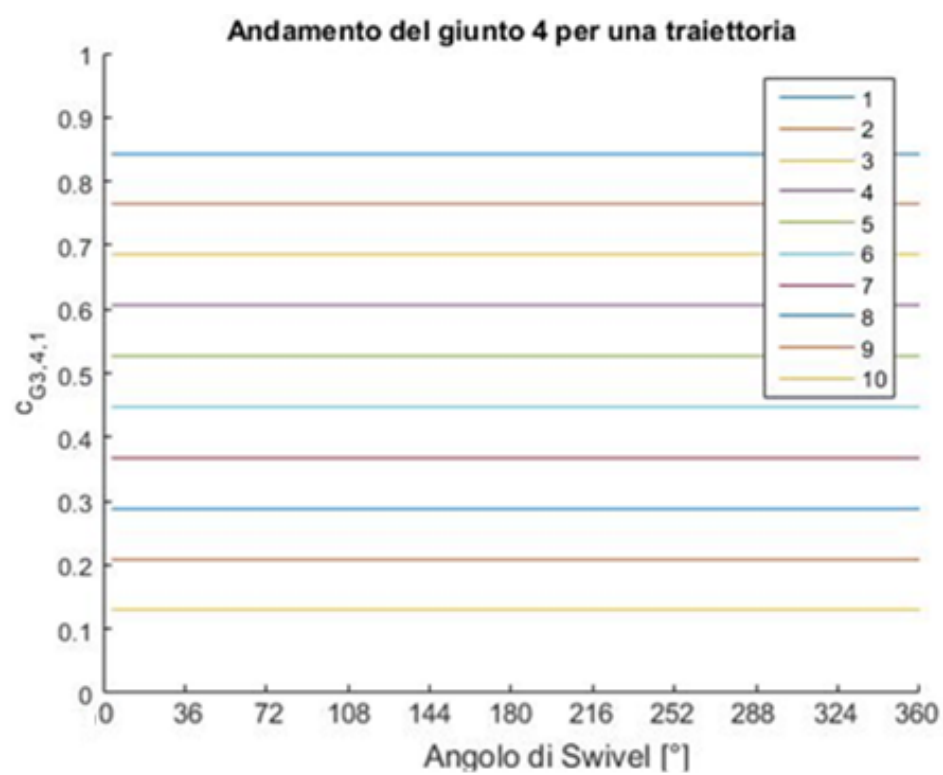
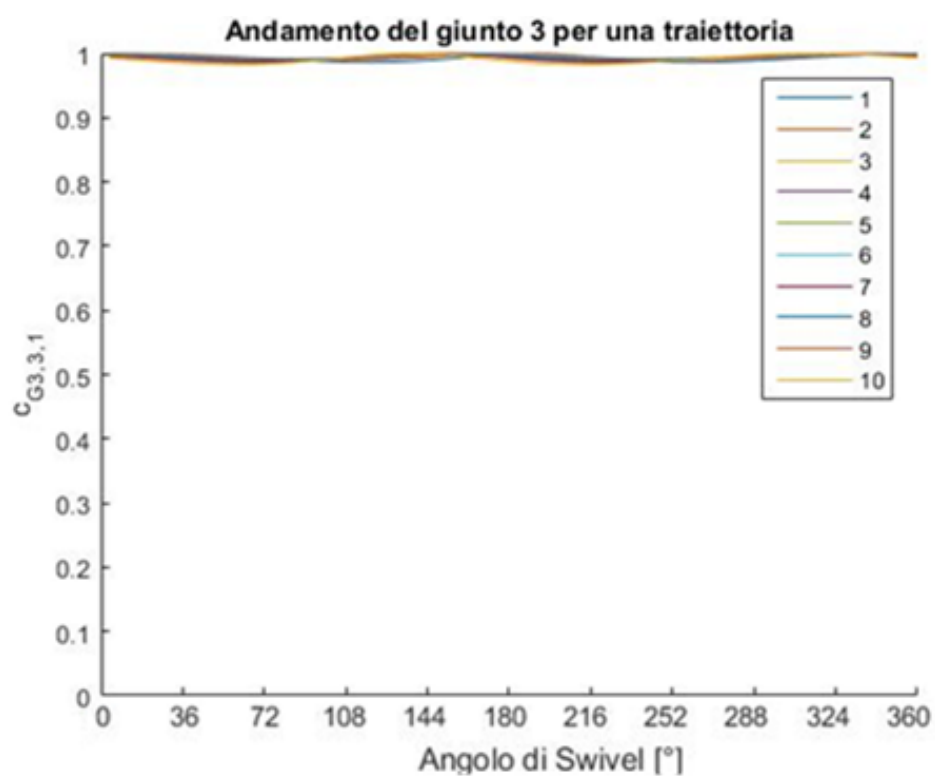


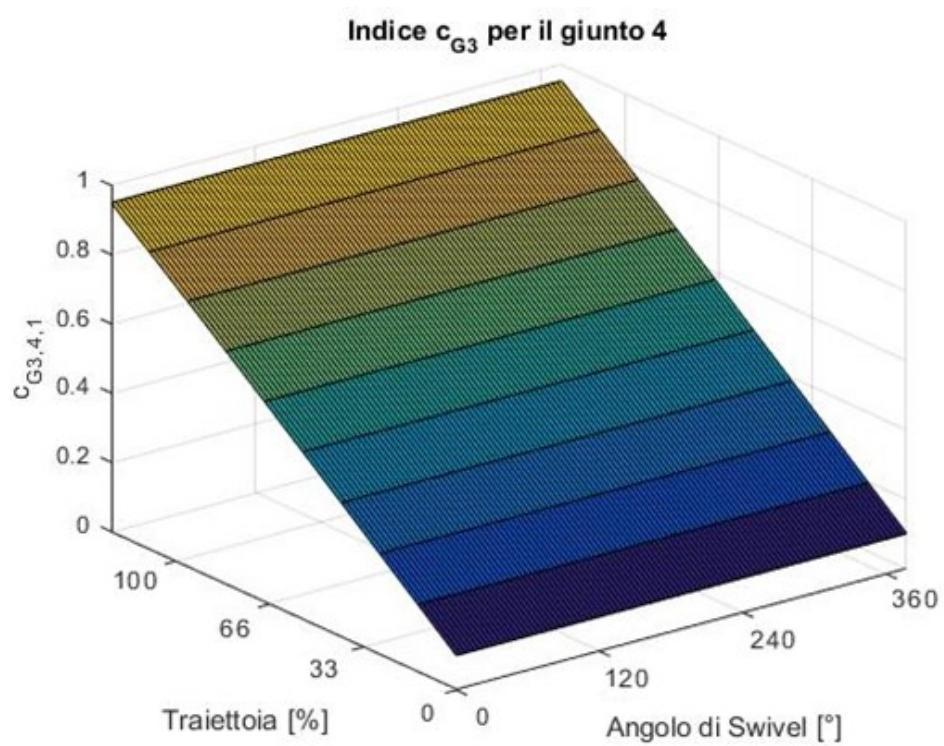
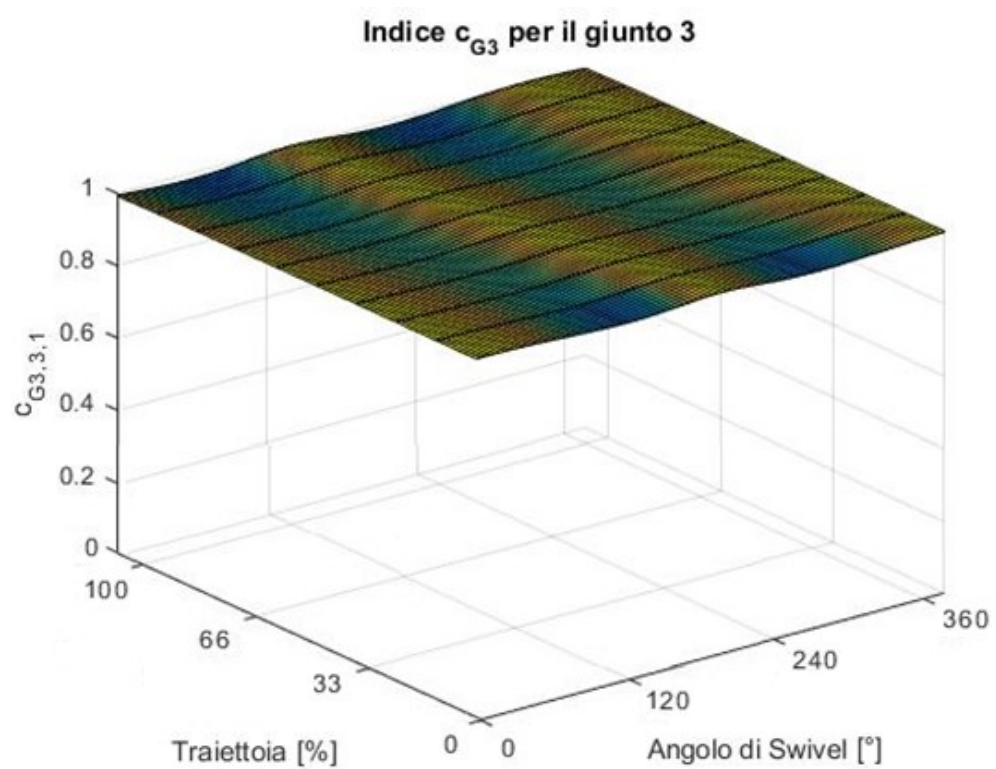
Figura 4. 13: Nella prima riga esempio degli angoli di Swivel che il robot può assumere (in nero), nella seconda riga gli angoli di Swivel che il robot può assumere (in nero) se si considerano solo i giunti responsabili della posizione dell'End Effector aventi limiti di giunto, nella terza riga gli angoli di Swivel che il robot può assumere (in nero) se si considerano solo i giunti responsabili dell'orientazione dell'End Effector aventi limiti di giunto, per la traiettoria rappresentata nella figura 4.11 considerando una delle otto possibili soluzioni di cinematica inversa

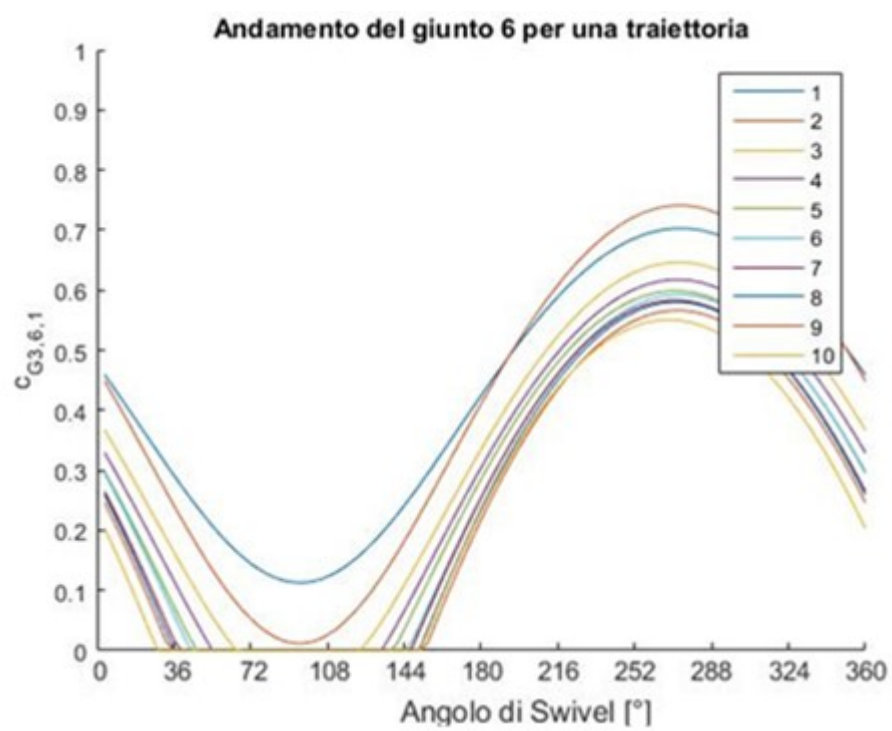
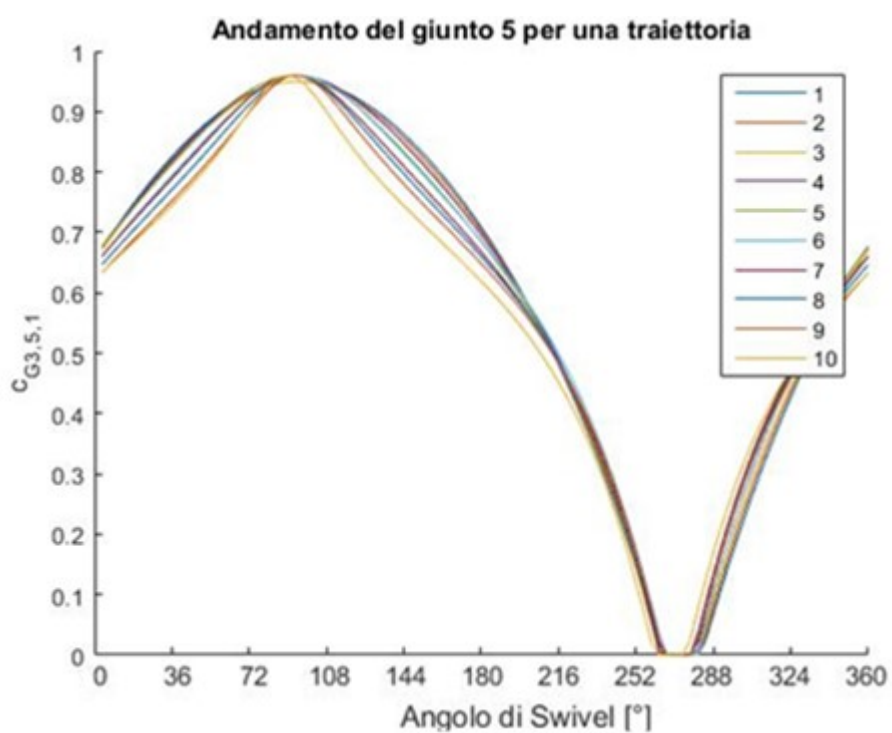




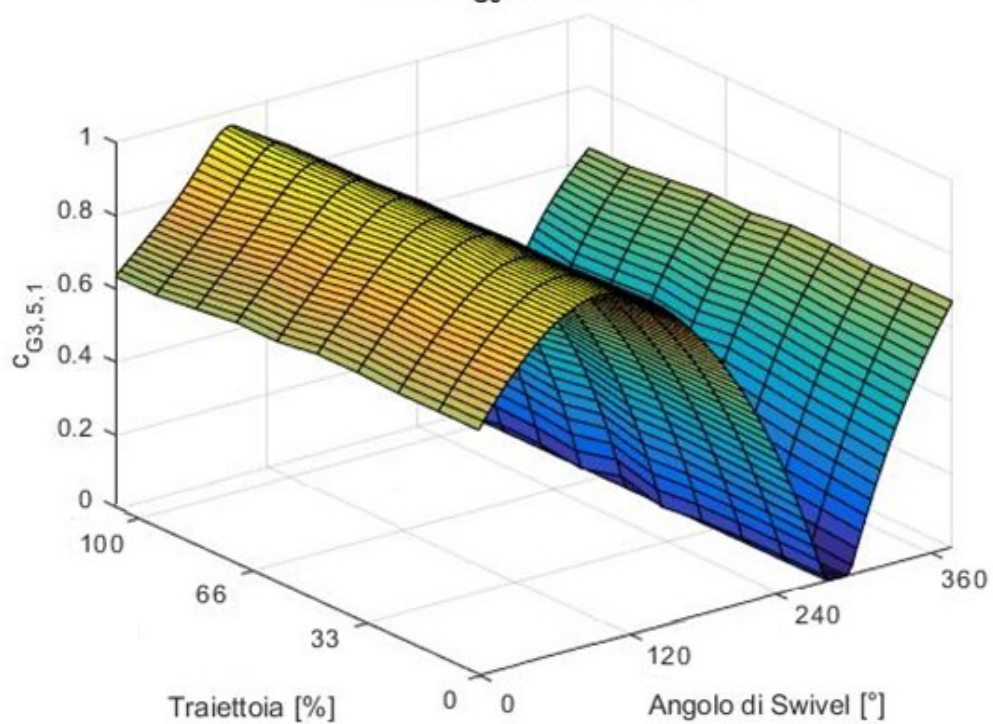




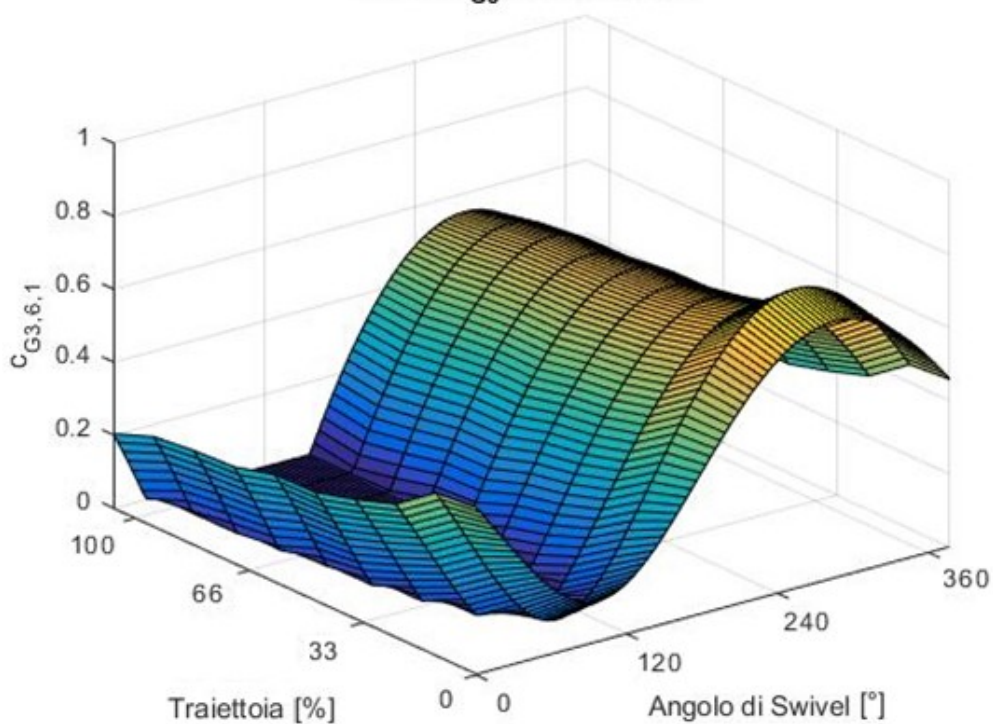


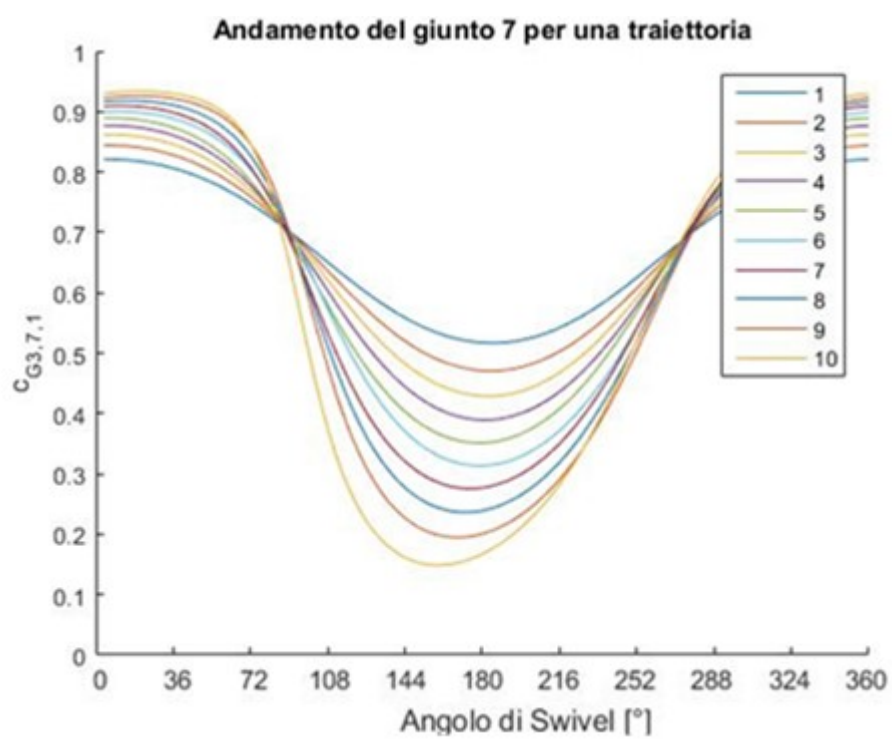


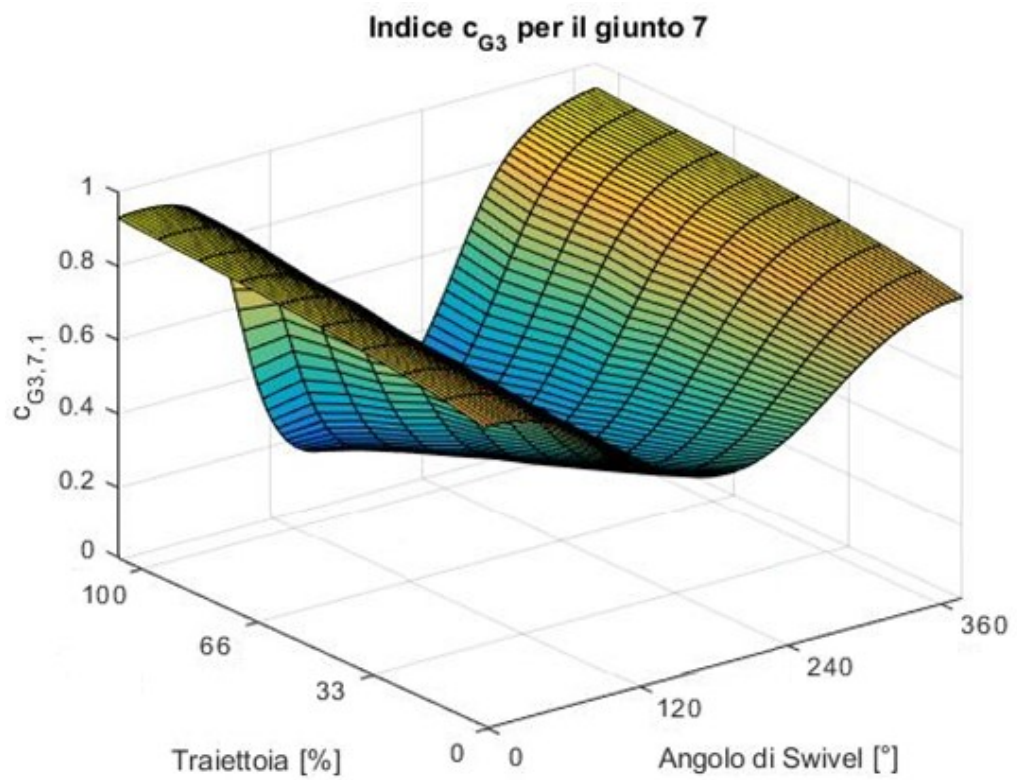
**Indice  $c_{G3}$  per il giunto 5**



**Indice  $c_{G3}$  per il giunto 6**

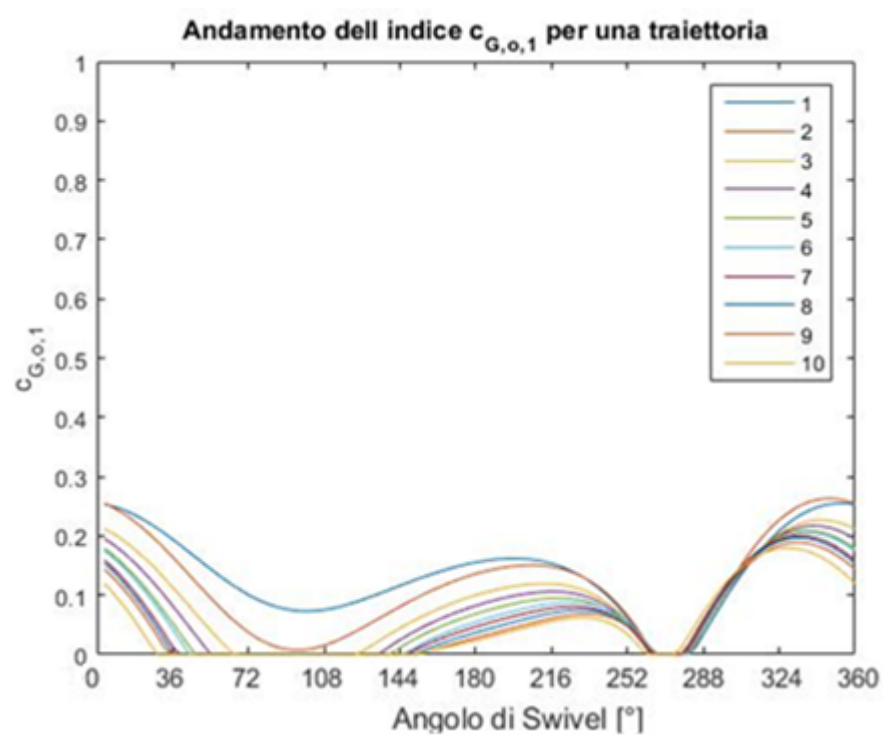
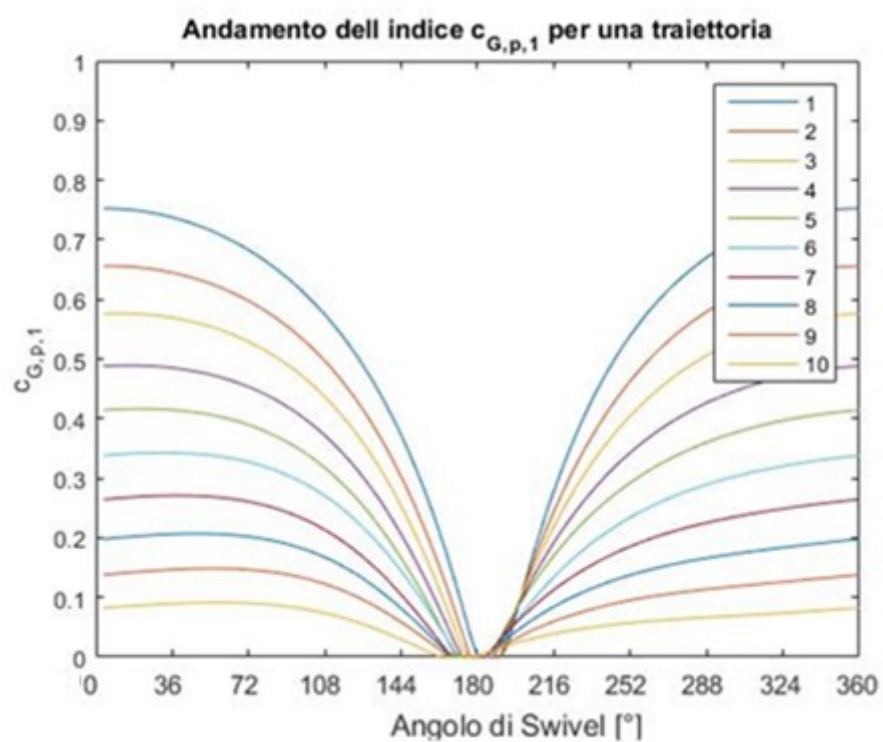




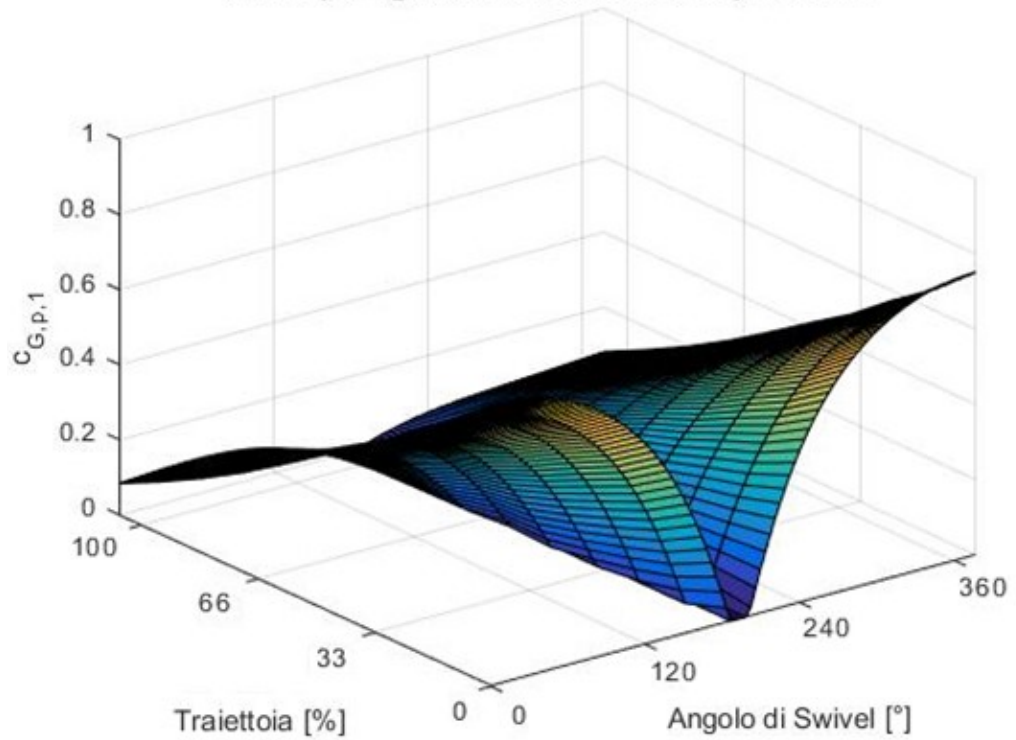


**Figura 4. 14: Andamento dell'indice  $c_{G3,i,1}$  per i sette giunti lungo la traiettoria rappresentata nella figura 4.11**

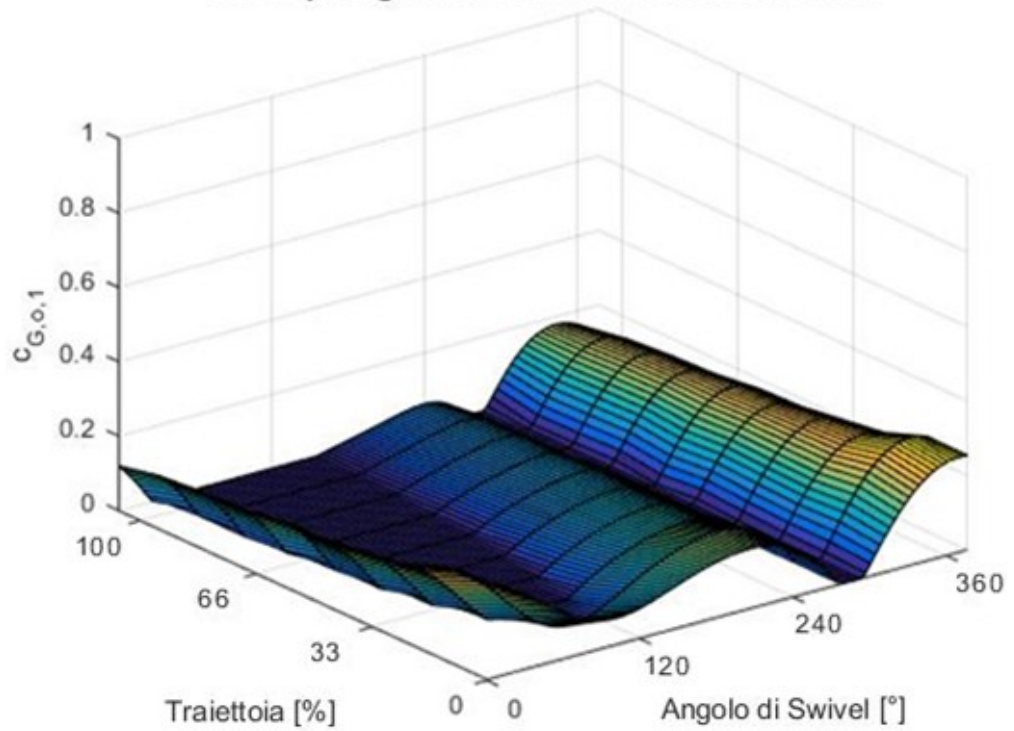


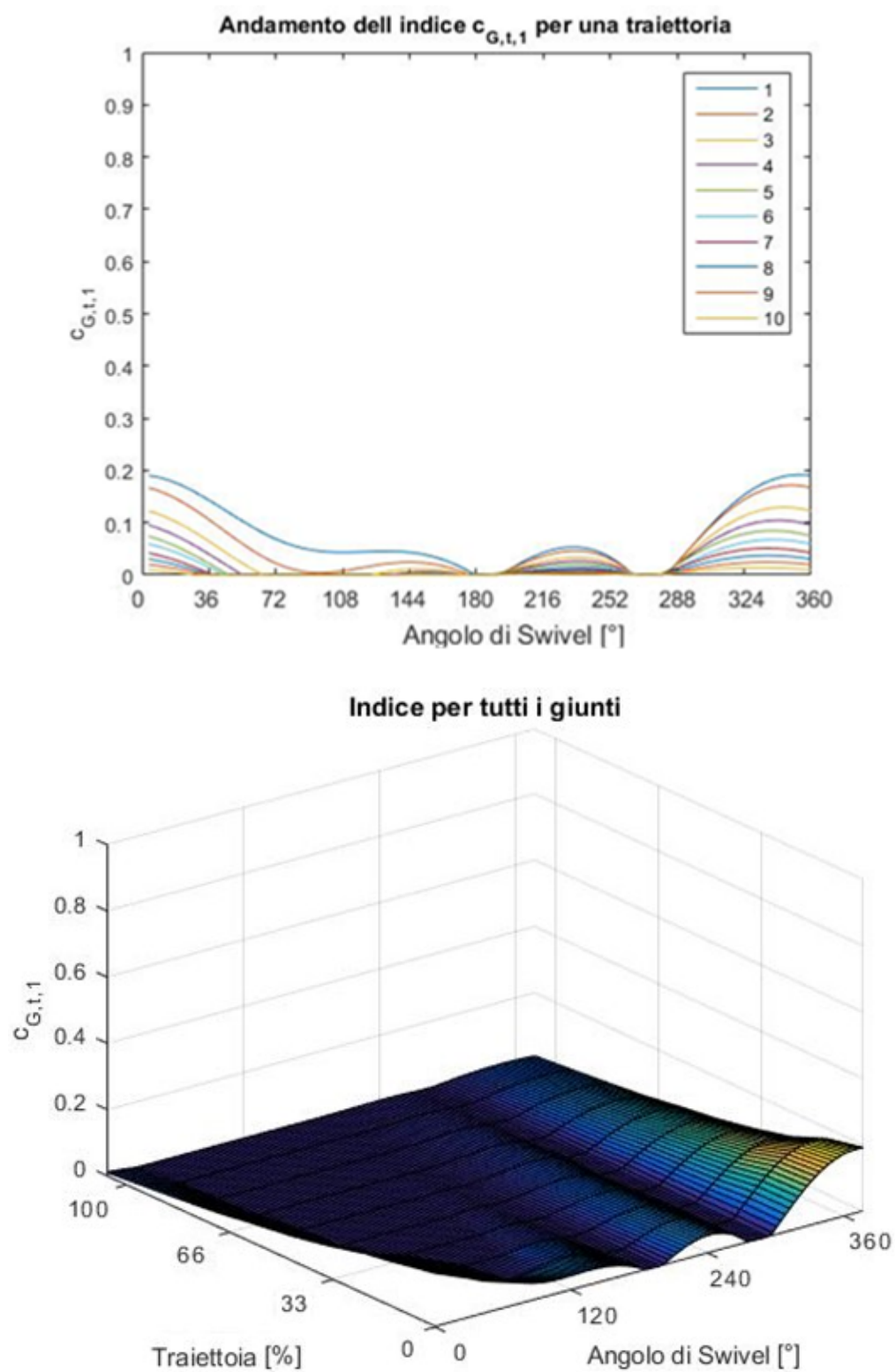


**Indice per i giunti che forniscono la posizione**



**Indice per i giunti che forniscono l'orientazione**



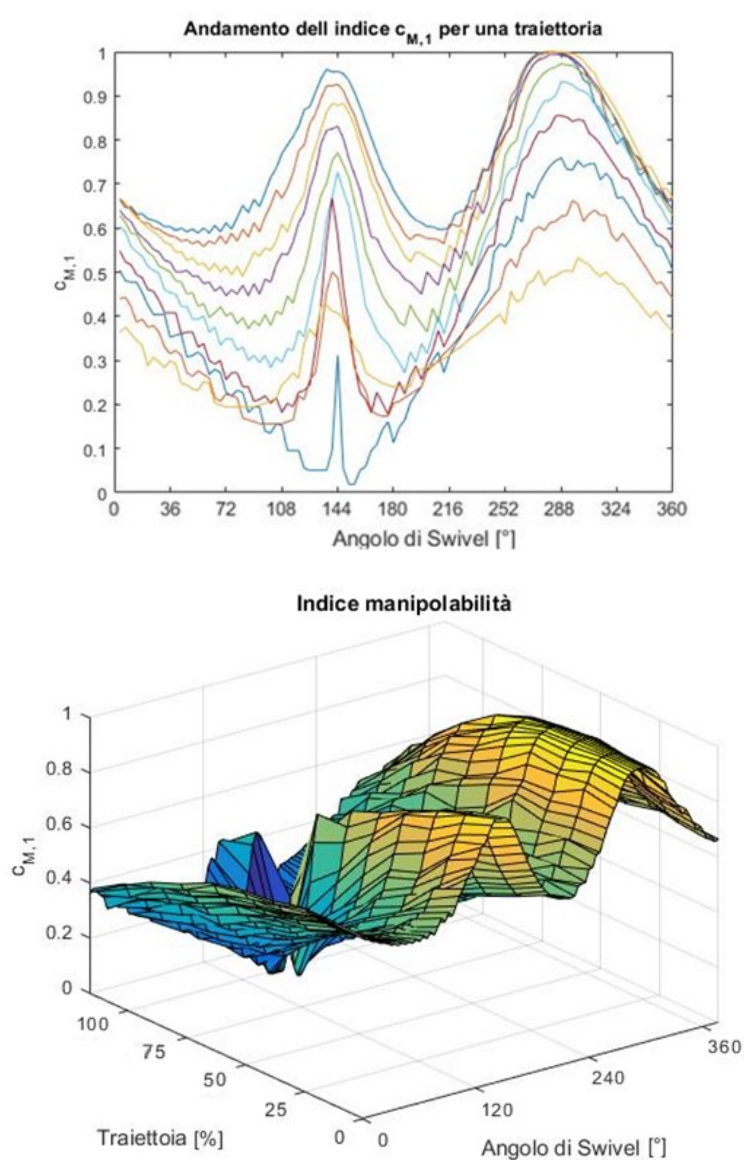


**Figura 4. 15: Andamento degli indici  $c_{G3,p,1}$ ,  $c_{G3,o,1}$  e  $c_{G3,t,1}$  lungo la traiettoria rappresentata nella figura 4.11**

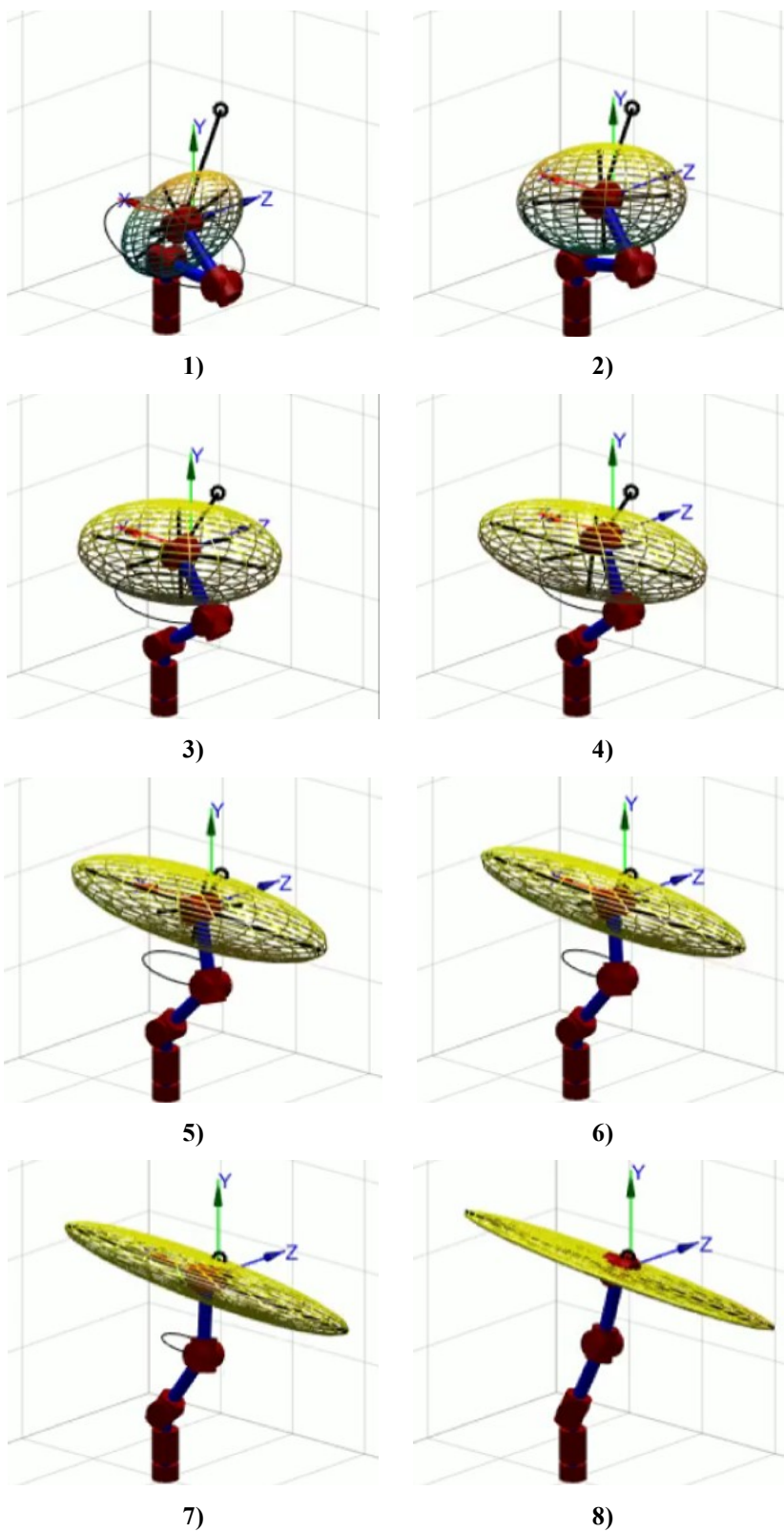


#### 4.4.2 Andamento dell'indice di manipolabilità

Si può andare a studiare l'andamento dell'indice di manipolabilità lungo una traiettoria. Nella figura 4.16 si può vedere l'andamento dell'indice di manipolabilità lungo la traiettoria visibile nella figura 4.11. Nella figura 4.17 si può vedere l'andamento dell'ellissoide di manipolabilità lungo la traiettoria visibile nella figura 4.11 per la configurazione che produce angolo di Swivel pari a zero per una delle soluzioni di cinematica inversa.



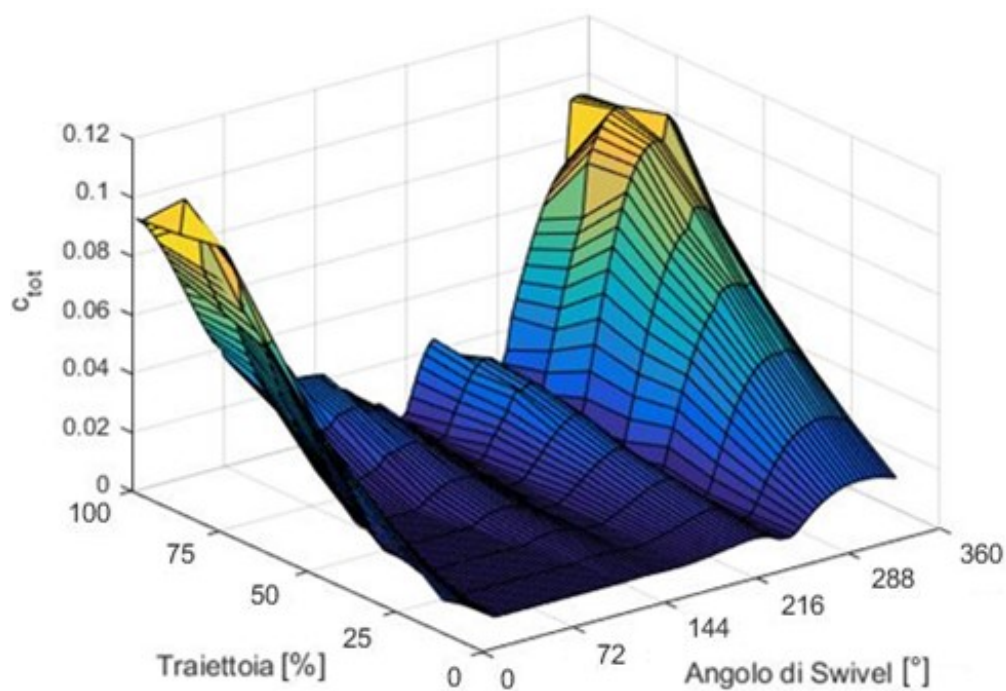
**Figura 4. 16:** Andamento dell'indice di manipolabilità lungo la traiettoria visibile nella figura 4.11 per una delle soluzioni di cinematica inversa



**Figura 4. 17: Andamento dell'ellissoide di manipolabilità lungo la traiettoria visibile nella figura 4.11 per l'angolo di Swivel pari a zero per una delle possibili soluzioni di cinematica inversa**

### 4.4.3 Andamento somma

Lo studio dell'andamento degli indici lungo una traiettoria può essere eseguito anche per l'indice totale nell'equazione 4.10. Nella figura 4.18 si può vedere l'andamento dell'indice di manipolabilità lungo la traiettoria visibile nella figura 4.11.



**Figura 4. 18:** Andamento dell'indice totale lungo la traiettoria visibile nella figura 4.11 per una delle soluzioni di cinematica inversa

## 4.5 Scelta delle configurazioni lungo una traiettoria

La sequenza di configurazioni che il robot deve eseguire deve essere scelta in modo tale da massimizzare l'indice lungo il percorso, tenendo però in conto due fattori. Il primo è il fatto che tra due configurazioni consecutive il robot non deve transitare in una zona in cui uno o più giunti superino i limiti di giunto o in zone nelle quali la manipolabilità è nulla, ciò zone in cui l'indice totale assume valore pari a zero; il secondo è il fatto che il robot deve avere tempo sufficiente per ruotare i suoi giunti per assumere quella configurazione. In particolare, si ha che la rotazione permessa al giunto vale:

$$q\_permesso = \frac{velocità\_giunto}{tempo} \quad (4.18)$$

Dove *tempo* è il tempo che si ha a disposizione per cambiare da una configurazione all'altra e può essere calcolato come:

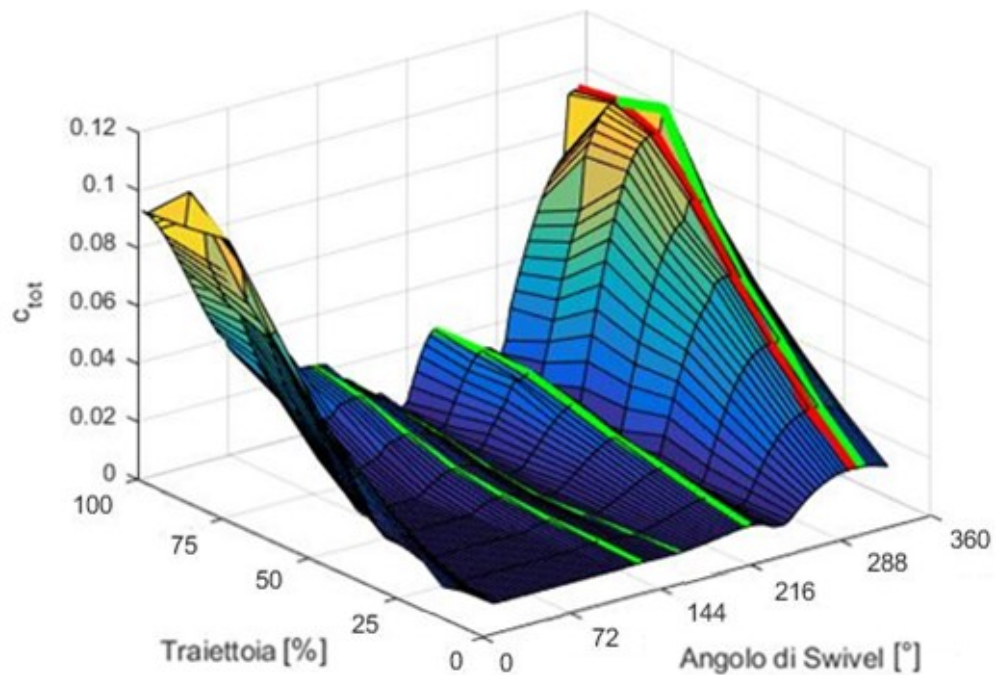
$$tempo = \frac{lunghezza\_da\_percorrere}{velocità\_del\_movimento} \quad (4.19)$$

Perciò la rotazione permessa ai giunti può essere espressa come:

$$q\_permesso = \frac{velocità\_giunto \cdot velocità\_del\_movimento}{lunghezza\_da\_percorrere} \quad (4.20)$$

Tenendo conto di questi due fattori si sceglie la sequenza di configurazioni che massimizza l'indice su tutto il percorso. Nella figura 4.19 si può vedere: in rosso la sequenza di configurazioni più favorevole per la

traiettoria visibile nella figura 4.11. Sempre nella figura 4.19, sono riportati in verde dei percorsi relativi a sequenze di configurazioni alternative che il robot potrebbe assumere, senza però massimizzare l'indice oggetto di studio.



**Figura 4. 19:** In rosso, sequenza di configurazioni più favorevole per la traiettoria visibile nella figura 4.11; in verde, percorsi alternativi che non sono però a indice massimo



## CONCLUSIONE

In questa tesi si è cercata, dopo aver studiato la cinematica dei robot ridondanti, una metodologia per il confronto delle diverse configurazioni che un robot può assumere. Gli indici trovati portano ad avere un metodo per confrontare tra loro le caratteristiche proprie di ogni configurazione ed ottimizzare la scelta della configurazione rispetto a un certo scopo. La configurazione da far assumere al manipolatore, definita una posa dell'End Effector, può essere scelta come massimo dell'indice trovato, mentre per massimizzare la sequenza di configurazioni lungo una traiettoria si deve massimizzare l'indice considerando anche le configurazioni successive alla prima. La metodologia applicata per fare ciò porta a risultati corretti ma con tempo di calcolo non ottimale per l'applicazione on-line. Nonostante lo studio eseguito risulti essere uno studio preliminare e teorico, data la versatilità della metodologia elaborata, l'analisi eseguita può essere applicata anche ad altre caratteristiche proprie della configurazione dei manipolatori, come ad esempio al caso in cui si voglia mantenere il robot più o meno lontano da un ostacolo o nel caso in cui si voglia ridurre al minimo le reazioni vincolari o al caso in cui si voglia far sì che il robot possa sviluppare la massima forza all'End Effector o un certo compromesso tra lo sviluppo di velocità e forza.





## BIBLIOGRAFIA

- [1] "Mechanical Advantage". (11/12/1996). *Chicago Tribune*.
- [2] B. Siciliano, L. S. (s.d.). *Robotics, Modelling Planning Control*.
- [3] Najm, O. W. (s.d.). *Self-Motion Control Of Kinematically Redundant Robot Manipulators*.
- [4] K.T. Patton, G. T. (s.d.). Anatomia e fisiologia.
- [5] Kosuge, M. S. K. (s.d.). *Analytical Inverse Kinematic Computation for 7-DOF Redundant Manipulators With Joint Limits and Its Application to Redundancy Resolution*.
- [6] Badler N.I., T. D. (s.d.). Real-time inverse kinematics of the human arm.
- [7] R. Penrose (1995). *A generalized inverse for matrices. Mathematical Proceedings of the Cambridge Philosophical Society*.
- [8] Park J., Choi, Y., Chung, W. K., & Youm, Y. (s.d.). Multiple tasks kinematics using weighted pseudo-inverse for kinematically redundant manipulators.
- [9] Gabiccini M. (s.d.). Lecture Slides: Cinematica diretta ed inversa di manipolatori seriali.
- [10] Magnoni, P. (s.d.). Coordinazione E Inversione Cinematica Per Manipolatori Ridondanti In Un Sistema Multi-Robot, Tesi di Laurea Specialistica.
- [11] Hyunchul Kim, J. R. (s.d.). Predicting Redundancy of a 7DOF Upper Limb Exoskeleton Toward Improved Transparency between Humanand Robot.
- [12] [www.kuka.com](http://www.kuka.com).
- [13] Kuka Robotics\_Range.

- [14] Chiaverini, S. (s.d.). Singularity-Robust Task-Priority Redundancy Resolution for Real-Time Kinematic Control of Robot Manipulators.
- [15] KUKA Sunrise.OS 1.5 for LBR KUKA Sunrise.Workbench 1.5 iiwa operating and programming instructions.