

POLITECNICO DI TORINO

I Facoltà di Ingegneria

Corso di Laurea Magistrale in Ingegneria Civile



TESI DI LAUREA MAGISTRALE

**Confronto tra strategie al continuo e al  
discreto per la simulazione di flussi granulari**

Relatore:

Prof. Claudio Scavia

Candidato:

Chiara Traversa

Correlatore:

Dott. Alessandro Leonardi

Anno Accademico 2017/2018

*Ai miei nonni,  
che ovunque si trovino  
possano essere fieri  
di me.*

“Ho sceso, dandoti il braccio, almeno un milione di scale  
e ora che non ci sei è il vuoto ad ogni gradino.  
Anche così è stato breve il nostro lungo viaggio.  
Il mio dura tuttora, né più mi occorrono  
le coincidenze, le prenotazioni,  
le trappole, gli scorni di chi crede  
che la realtà sia quella che si vede.

Ho sceso milioni di scale dandoti il braccio  
non già perché con quattr'occhi forse si vede di più.  
Con te le ho scese perché sapevo che di noi due  
le sole vere pupille, sebbene tanto offuscate,  
erano le tue.”

(E. Montale)

# Sommario

I flussi granulari sono fenomeni che manifestano una grande diversità di comportamento a seconda delle situazioni e, per tale motivo, sono oggetto di studio da parte di numerosi ricercatori.

In questo documento di tesi si vuole esaminare il comportamento meccanico dei flussi granulari proponendo due diversi approcci numerici: il Discrete Element Method (DEM), che riproduce la massa reale come un insieme particellare, e il Lattice Boltzmann Method (LBM), che invece la rappresenta come un fluido continuo equivalente.

Nello specifico, viene simulato il crollo di una colonna di materiale granulare secco su una superficie orizzontale. Entrambi i metodi vengono validati attraverso la calibrazione di opportuni parametri per ottenere risultati quanto più corrispondenti a quelli sperimentali.

Attraverso l'approccio discreto si verifica la correlazione tra i parametri interni del materiale (coefficiente di attrito interno tra le particelle e coefficiente di rotolamento) e l'angolo di riposo ottenuto nella configurazione finale dopo il collasso. Si effettuano diverse simulazioni variando le dimensioni iniziali della colonna per verificare l'influenza dell'aspect ratio (rapporto tra altezza e larghezza iniziali della colonna granulare) sull'altezza finale e sulla distanza di arresto del flusso.

Per quanto riguarda il metodo del continuo, si effettuano le analisi utilizzando tre differenti reologie: di Bingham, attritiva (o di Coulomb) e di Voellmy. Per ciascuna legge reologica si calibrano i parametri specifici e si valuta quale tra queste sia la più adatta a rappresentare il comportamento reale del flusso.

Con entrambi gli approcci, una volta ottenuti i parametri che meglio rappresentano il risultato sperimentale, vengono ripetute le stesse simulazioni numeriche con l'aggiunta di un ostacolo lungo il percorso di flusso.

Si effettua infine un confronto tra i metodi DEM e LBM, analizzandone i vantaggi e gli svantaggi per definire quale tra i due sia il più efficace nel riprodurre i risultati sperimentali per i flussi granulari.

Per realizzare le simulazioni si utilizza un codice, non commerciale ma interno all'Ateneo, scritto con il linguaggio di programmazione C++. I risultati vengono visualizzati tramite il programma ParaView (tutte le immagini restituite da questo software contengono misure espresse in metri).

# Indice

<b>Notazioni e simboli utilizzati</b> .....	10
<b>1. Introduzione</b> .....	13
<b>2. Flussi come movimenti franosi</b> .....	15
2.1. Sistemi di classificazione e tipi di flusso.....	15
2.1.1. Classificazione di Varnes (1978) e Cruden & Varnes (1996).....	15
2.1.2. Classificazione di Hungr et al. (2001).....	19
2.1.3. Altri sistemi di classificazione .....	21
2.2. Metodologie di calcolo .....	23
2.2.1. Approccio empirico.....	24
2.2.2. Modellazione fisica .....	24
2.2.3. Modellazione dinamica .....	24
<b>3. Modellazione numerica dei flussi granulari: stato dell'arte</b> .....	27
3.1. Approccio discreto .....	28
3.2. Equazioni di De Saint Venant per le correnti a pelo libero e sviluppo dell'approccio continuo .....	29
<b>4. Descrizione dei metodi utilizzati nelle simulazioni</b> .....	31
4.1. Discrete Element Method (DEM) .....	31
4.1.1. Contatto normale.....	34
4.1.2. Contatto tangenziale.....	37
4.1.3. Coefficiente di rotolamento (rolling) .....	39
4.1.4. Schema d'integrazione di Gear .....	41
4.1.5. Algoritmo DEM .....	42
4.2. Lattice Boltzmann Method (LBM).....	43
4.2.1. Fluidi newtoniani e non newtoniani: leggi reologiche.....	47
<b>5. Collasso di una colonna granulare tramite approccio discreto (DEM) ..</b>	<b>54</b>
5.1. Calibrazione dei parametri e corrispondenza con i risultati sperimentali.....	55
5.2. Correlazione tra i parametri interni del materiale granulare e l'angolo di riposo.....	61
5.3. Influenza dell'aspect ratio $a$ sull'altezza finale e la distanza di arresto del flusso granulare .....	65

<b>6. Collasso di una colonna liquida tramite approccio continuo (LBM).....</b>	<b>70</b>
<b>7. Collasso di una colonna granulare tramite approccio continuo (LBM).</b>	<b>74</b>
7.1. Calibrazione dei parametri e corrispondenza con i risultati sperimentali.....	75
7.1.1. Legge di Bingham.....	75
7.1.2. Legge Attritiva (o di Coulomb) .....	79
7.1.3. Legge di Voellmy.....	87
<b>8. Collasso di una colonna granulare in presenza di un ostacolo lungo il percorso.....</b>	<b>92</b>
8.1. Approccio discreto (DEM).....	93
8.2. Approccio continuo (LBM).....	97
<b>9. Confronto DEM-LBM: osservazioni e conclusioni.....</b>	<b>104</b>
<b>Appendice: File di configurazione utilizzato per analisi numeriche DEM e LBM.....</b>	<b>108</b>
<b>Bibliografia .....</b>	<b>110</b>
<b>Ringraziamenti .....</b>	<b>113</b>

# Indice delle Figure

<b>Figura 2.1</b> - Rappresentazione dei diversi movimenti franosi (Pirulli, 2014) .....	16
<b>Figura 2.2</b> - Esempio di flusso incanalato dove si distinguono una zona d'innesco, di trasporto e di deposito (Pirulli, 2014) .....	17
<b>Figura 2.3</b> - Classificazione di flussi naturali composti da particelle e fluido basata su grandezze adimensionali (Leonardi, 2015) .....	21
<b>Figura 2.4</b> - Approccio continuo e discontinuo (Pirulli, 2014) .....	25
<b>Figura 3.1</b> - Debris flow: aree a diversa granulometria (Bardou, 2003) .....	30
<b>Figura 4.1</b> - Rappresentazione del contatto tra particelle (Leonardi, 2015) .....	32
<b>Figura 4.2</b> - Cluster formati rispettivamente da due e da tre sfere (Leonardi, 2015) .....	33
<b>Figura 4.3</b> - Deformazione e momento che si creano al contatto tra particella e superficie (Marchelli, 2018) .....	39
<b>Figura 4.4</b> - Schema dell'algoritmo utilizzato per il DEM (Poschel e Schwager, 2005) .....	42
<b>Figura 4.5</b> - Reticolo cubico utilizzato nel LBM (a) e serie di velocità discrete nella configurazione D3Q19 (b) (Leonardi, 2015) .....	44
<b>Figura 4.6</b> - Legame tra sforzo di deformazione $\sigma$ e velocità di deformazione $\gamma$ per diversi tipi di fluido (Treccani) .....	47
<b>Figura 4.7</b> - Modello tri-lineare ottenuto dall'approssimazione del modello plastico di Bingham (Leonardi, 2015) .....	49
<b>Figura 4.8</b> - Esempio di coefficiente di attrito $\mu$ funzione del parametro adimensionale $I$ (Jop, Forterre e Pouliquen, 2006) .....	52
<b>Figura 5.1</b> - Colonna ordinata di particelle ugualmente distanziate (a) e configurazione compattata utilizzata come punto di partenza per le successive simulazioni (b) .....	57
<b>Figura 5.2</b> - Dimensioni del dominio del campo di lavoro [mm] (a) ed esempio delle dimensioni e forma del flusso prima e dopo il collasso (b) .....	58
<b>Figura 5.3</b> - Sequenza di collasso della colonna granulare: risultati sperimentali (in alto) e simulazione numerica DEM (in basso) .....	59
<b>Figura 5.4</b> - Massima altezza normalizzata al variare del tempo: simulazione DEM e risultato sperimentale .....	60
<b>Figura 5.5</b> - Lunghezza di diffusione normalizzata al variare del tempo: simulazione DEM e risultato sperimentale .....	60
<b>Figura 5.6</b> - Rappresentazione grafica all'istante finale di arresto del flusso granulare per $\mu_w=0.35$ , $\mu_p=0.25$ , $c=0.02$ (a), $c=0$ (b) .....	61
<b>Figura 5.7</b> - Rappresentazione grafica all'istante finale di arresto del flusso granulare per $\mu_w=0.35$ , $\mu_p=0.35$ , $c=0.02$ (a), $c=0$ (b) .....	62

<b>Figura 5.8</b> - Rappresentazione grafica all'istante finale di arresto del flusso granulare per $\mu_w=0.35$ , $\mu_p=0.45$ , $c=0.02$ (a), $c=0$ (b).....	62
<b>Figura 5.9</b> - Configurazione iniziale e finale per aspect ratio $a=1$ .....	65
<b>Figura 5.10</b> - Configurazione iniziale e finale per aspect ratio $a=2$ .....	65
<b>Figura 5.11</b> - Configurazione iniziale e finale per aspect ratio $a=3$ .....	65
<b>Figura 5.12</b> - Configurazione iniziale e finale per aspect ratio $a=4$ .....	66
<b>Figura 5.13</b> - Configurazione iniziale e finale per aspect ratio $a=5$ .....	66
<b>Figura 5.14</b> - Configurazione iniziale e finale per aspect ratio $a=6$ .....	66
<b>Figura 5.15</b> - Aumento progressivo della distanza di arresto adimensionale all'aumentare dell'aspect ratio .....	68
<b>Figura 5.16</b> - Diminuzione progressiva della massima altezza finale adimensionale all'aumentare dell'aspect ratio .....	68
<b>Figura 6.1</b> - Collasso di una colonna liquida: apparato sperimentale e dimensioni del dominio 3D (Cruchaga, Celentano e Tezduyar, 2007).....	70
<b>Figura 6.2</b> - Sequenza di collasso della colonna liquida per $a=1$ : risultati sperimentali (a sinistra) e simulazione numerica LBM (a destra).....	71
<b>Figura 6.3</b> - Sequenza di collasso della colonna liquida per $a=2$ : risultati sperimentali (a sinistra) e simulazione numerica LBM (a destra).....	72
<b>Figura 7.1</b> - Rappresentazione grafica all'istante finale di arresto del fluido con la legge di Bingham, per $\sigma_y=225$ Pa e $\eta_B=0.01$ Pa·s .....	76
<b>Figura 7.2</b> - Rappresentazione grafica all'istante finale di arresto del fluido con la legge di Bingham, per $\sigma_y=220$ Pa e $\eta_B=0.01$ Pa·s .....	76
<b>Figura 7.3</b> - Rappresentazione grafica all'istante finale di arresto del fluido con la legge di Bingham, per $\sigma_y=210$ Pa e $\eta_B=0.1$ Pa·s .....	77
<b>Figura 7.4</b> - Rappresentazione grafica all'istante finale di arresto del fluido con la legge di Bingham, per $\sigma_y=160$ Pa e $\eta_B=1.0$ Pa·s .....	77
<b>Figura 7.5</b> - Rappresentazione grafica all'istante finale di arresto del fluido con la legge di Bingham, per $\sigma_y=155$ Pa e $\eta_B=1.0$ Pa·s .....	78
<b>Figura 7.6</b> - Rappresentazione grafica all'istante finale di arresto del fluido con la legge attritiva (o di Coulomb), per $\tan(\varphi)=0.35$ e $\eta_0=0$ Pa·s.....	80
<b>Figura 7.7</b> - Rappresentazione grafica all'istante finale di arresto del fluido con la legge attritiva (o di Coulomb), per $\tan(\varphi)=0.35$ e $\eta_0=0.001$ Pa·s.....	80
<b>Figura 7.8</b> - Rappresentazione grafica all'istante finale di arresto del fluido con la legge attritiva (o di Coulomb), per $\tan(\varphi)=0.35$ e $\eta_0=0.01$ Pa·s.....	80
<b>Figura 7.9</b> - Sequenza di collasso: risultati sperimentali (in alto) e simulazione numerica LBM con reologia attritiva (in basso).....	81
<b>Figura 7.10</b> - Massima altezza normalizzata al variare del tempo: simulazione LBM con reologia attritiva e risultato sperimentale .....	82
<b>Figura 7.11</b> - Lunghezza di diffusione normalizzata al variare del tempo: simulazione LBM con reologia attritiva e risultato sperimentale .....	82

<b>Figura 7.12</b> - Configurazione finale del fluido con la legge attritiva (o di Coulomb) in assenza (a) e in presenza (b) di turbolenza, per $\tan(\varphi)=0.35$ e $\eta_0=0$ Pa·s .....	84
<b>Figura 7.13</b> - Configurazione finale del fluido con la legge attritiva (o di Coulomb) in assenza (a) e in presenza (b) di turbolenza, per $\tan(\varphi)=0.35$ e $\eta_0=0.001$ Pa·s .....	84
<b>Figura 7.14</b> - Configurazione finale del fluido con la legge attritiva (o di Coulomb) in assenza (a) e in presenza (b) di turbolenza, per $\tan(\varphi)=0.35$ e $\eta_0=0.01$ Pa·s .....	85
<b>Figura 7.15</b> - Configurazione finale del fluido con la legge attritiva (o di Coulomb) in assenza (a) e in presenza (b) di turbolenza, per $\tan(\varphi)=0.35$ e $\eta_0=0.1$ Pa·s .....	85
<b>Figura 7.16</b> - Configurazione finale del fluido con la legge attritiva (o di Coulomb) in assenza (a) e in presenza (b) di turbolenza, per $\tan(\varphi)=0.35$ e $\eta_0=1.0$ Pa·s .....	86
<b>Figura 7.17</b> - Rappresentazione grafica all'istante finale di arresto del fluido con la legge di Voellmy, per $\tan(\varphi)=0.35$ e $\zeta=40$ m/s <sup>2</sup> .....	88
<b>Figura 7.18</b> - Rappresentazione grafica all'istante finale di arresto del fluido con la legge di Voellmy, per $\tan(\varphi)=0.35$ e $\zeta=50$ m/s <sup>2</sup> .....	88
<b>Figura 7.19</b> - Rappresentazione grafica all'istante finale di arresto del fluido con la legge di Voellmy, per $\tan(\varphi)=0.35$ e $\zeta=60$ m/s <sup>2</sup> .....	89
<b>Figura 7.20</b> - Sequenza di collasso: risultati sperimentali (in alto) e simulazione numerica LBM con reologia di Voellmy (in basso).....	90
<b>Figura 7.21</b> - Massima altezza normalizzata al variare del tempo: simulazione LBM con reologia di Voellmy e risultato sperimentale.....	90
<b>Figura 7.22</b> - Lunghezza di diffusione normalizzata al variare del tempo: simulazione LBM con reologia di Voellmy e risultato sperimentale.....	91
<b>Figura 7.23</b> - Confronto della forma del fluido nel tempo per reologia di Voellmy (in alto) e reologia attritiva (in basso).....	91
<b>Figura 8.1</b> - Dominio con presenza di ostacolo di altezza 2.5 cm (a) e 7.0 cm (b), posto a una distanza di 10.0 cm .....	92
<b>Figura 8.2</b> - Configurazione iniziale ( $t=0$ s) della simulazione DEM in presenza di ostacolo alto 2.5 cm.....	93
<b>Figura 8.3</b> - Sequenza di collasso della simulazione DEM con ostacolo alto 2.5 cm 94	
<b>Figura 8.4</b> - Forza di contatto con l'ostacolo al variare del tempo per la simulazione DEM con ostacolo alto 2.5 cm .....	94
<b>Figura 8.5</b> - Configurazione iniziale ( $t=0$ s) della simulazione DEM in presenza di ostacolo alto 7.0 cm.....	95
<b>Figura 8.6</b> - Sequenza di collasso della simulazione DEM con ostacolo alto 7.0 cm 96	
<b>Figura 8.7</b> - Forza di contatto con l'ostacolo al variare del tempo per la simulazione DEM con ostacolo alto 7.0 cm .....	96
<b>Figura 8.8</b> - Configurazione iniziale ( $t=0$ s) della simulazione LBM in presenza di ostacolo alto 2.5 cm.....	97
<b>Figura 8.9</b> - Sequenza di collasso della simulazione LBM con ostacolo alto 2.5 cm. 98	
<b>Figura 8.10</b> - Forza di contatto con l'ostacolo al variare del tempo per la simulazione LBM con ostacolo alto 2.5 cm .....	98

<b>Figura 8.11</b> - Configurazione iniziale ( $t=0$ s) della simulazione LBM in presenza di ostacolo alto 7.0 cm.....	99
<b>Figura 8.12</b> - Sequenza di collasso della simulazione LBM con ostacolo alto 7.0 cm .....	100
<b>Figura 8.13</b> - Forza di contatto con l'ostacolo al variare del tempo per la simulazione LBM con ostacolo alto 7.0 cm.....	100
<b>Figura 8.14</b> - Forza di contatto con l'ostacolo al variare del tempo: simulazione LBM e simulazione DEM, con ostacolo alto 2.5 cm.....	101
<b>Figura 8.15</b> - Forza di contatto con l'ostacolo al variare del tempo: simulazione LBM e simulazione DEM, con ostacolo alto 7.0 cm.....	101
<b>Figura 9.1</b> - Sequenza di collasso: risultati sperimentali (in alto), simulazione numerica DEM (al centro) e simulazione numerica LBM con reologia attrittiva (in basso).....	105
<b>Figura 9.2</b> - Massima altezza normalizzata al variare del tempo: simulazione numerica DEM, simulazione numerica LBM con reologia attrittiva e risultato sperimentale ..	106
<b>Figura 9.3</b> - Lunghezza di diffusione normalizzata al variare del tempo: simulazione numerica DEM, simulazione numerica LBM con reologia attrittiva e risultato sperimentale.....	106
<b>Figura A.1</b> - Schermata del file di configurazione (prima parte).....	108
<b>Figura A.2</b> - Schermata del file di configurazione (seconda parte) .....	109
<b>Figura A.3</b> - Schermata del file di configurazione (terza parte) .....	109

# Indice delle Tabelle

<b>Tabella 2.1</b> - <i>Principali tipologie di movimenti franosi (Varnes, 1978)</i> .....	16
<b>Tabella 2.2</b> - <i>Scala di velocità di una frana (Cruden e Varnes, 1996)</i> .....	18
<b>Tabella 2.3</b> - <i>Classificazione dei sedimenti in base al loro diametro (British Standard e MIT)</i> .....	19
<b>Tabella 2.4</b> - <i>Classificazione dei tipi di flusso (Hungre et al., 2001)</i> .....	20
<b>Tabella 2.5</b> - <i>Metodologie di calcolo per la previsione dell'evoluzione di un fenomeno</i> .....	23
<b>Tabella 5.1</b> - <i>Dati iniziali della configurazione sperimentale</i> .....	55
<b>Tabella 5.2</b> - <i>Configurazione finale ottenuta dal risultato sperimentale</i> .....	57
<b>Tabella 5.3</b> - <i>Parametri interni della simulazione DEM che meglio rappresentano il risultato sperimentale</i> .....	58
<b>Tabella 5.4</b> - <i>Configurazione finale ottenuta dalla simulazione numerica DEM</i> .....	59
<b>Tabella 5.5</b> - <i>Valori dell'angolo di riposo al variare dei parametri interni del materiale (per <math>\mu_w=0.35</math>)</i> .....	63
<b>Tabella 5.6</b> - <i>Valori dell'angolo di riposo al variare dei parametri interni del materiale (per <math>\mu_w=0.45</math>)</i> .....	64
<b>Tabella 5.7</b> - <i>Valori di energia finale per ogni simulazione effettuata</i> .....	64
<b>Tabella 5.8</b> - <i>Valori di altezza finale e distanza di arresto al variare dell'aspect ratio</i> .....	67
<b>Tabella 7.1</b> - <i>Calibrazione dei parametri per la reologia di Bingham</i> .....	75
<b>Tabella 7.2</b> - <i>Calibrazione dei parametri per la reologia attrittiva (o di Coulomb)</i> ...	79
<b>Tabella 7.3</b> - <i>Configurazione finale ottenuta dalla simulazione numerica LBM con la reologia attrittiva (o di Coulomb)</i> .....	81
<b>Tabella 7.4</b> - <i>Confronto tra le distanze di arresto ottenute tramite la legge attrittiva in assenza e in presenza di turbolenza</i> .....	83
<b>Tabella 7.5</b> - <i>Calibrazione dei parametri per la reologia di Voellmy</i> .....	87
<b>Tabella 7.6</b> - <i>Configurazione finale ottenuta dalla simulazione numerica LBM con la reologia di Voellmy</i> .....	89
<b>Tabella 9.1</b> - <i>Risultati della configurazione finale dopo il collasso: confronto tra risultato sperimentale, simulazione DEM e LBM</i> .....	104

# Notazioni e simboli utilizzati

All'interno di questo documento, se non contrariamente specificato, si utilizza una notazione vettoriale. Le grandezze scalari sono rappresentate da simboli semplici, mentre quelle vettoriali da simboli in grassetto.

Quando ci si riferisce ad una grandezza vettoriale servendosi di entrambi i simboli, quelli semplici identificano il modulo del vettore, ad esempio se  $\mathbf{u}$  è il vettore velocità,  $u$  sarà il suo modulo.

I tensori sono rappresentati con due simboli in grassetto:  $\boldsymbol{\gamma}$  è il tensore delle velocità di deformazione e  $\boldsymbol{\sigma}$  il tensore delle tensioni.

Il sistema di coordinate cartesiane fa riferimento ai tre assi  $x$ ,  $y$  e  $z$ . Spesso viene utilizzato anche un sistema locale definendo rispettivamente  $n$ ,  $t$  e  $b$  come asse normale, tangenziale e binormale.

Segue una lista dei simboli più usati nel testo:

<b>Simbolo</b>	<b>Unità</b>	<b>Descrizione</b>
$a$	-	Aspect Ratio
$Ba$	-	Numero di Bagnold
$\mathbf{c}$	m/s	Velocità nel reticolo (LBM)
$\mathbf{c}_s$	m/s	Velocità del suono nel reticolo
$d$	m	Diametro delle particelle
$\mathbf{d}_{p1,p2}$	m	Vettore distanza tra i centri delle particelle
$E$	kg/(m s <sup>2</sup> )	Modulo di Young
$E_n$	(kg m <sup>2</sup> )/s <sup>2</sup>	Energia
$\mathbf{F}$	(kg m)/s <sup>2</sup>	Forza
$\mathbf{F}_{\text{coll}}$	(kg m)/s <sup>2</sup>	Forza di collisione tra le particelle
$f$	kg/m <sup>3</sup>	Funzione di distribuzione di probabilità
$f^{\text{eq}}$	kg/m <sup>3</sup>	Funzione di distribuzione di probabilità all'equilibrio
$\mathbf{g}$	m/s <sup>2</sup>	Accelerazione di gravità

H	m	Altezza
<b>J</b>	kg m <sup>2</sup>	Momento d'inerzia
k	kg/m	Rigidezza
L	m	Larghezza o Lunghezza
m	kg	Massa
$\tilde{m}$	kg	Massa effettiva
p	kg/(m s <sup>2</sup> )	Pressione
r	m	Raggio delle particelle
$\tilde{r}$	m	Raggio effettivo delle particelle
Re	-	Numero di Reynolds
t	s	Tempo
<b>u</b>	m/s	Velocità di traslazione
W	m	Spessore
w <sub>i</sub>	-	Pesi nel reticolo
$\alpha$	°	Angolo di riposo medio
$\alpha_t$	-	Coefficiente di smorzamento
$\beta$	°	Angolo di riposo del tratto centrale
$\dot{\gamma}$	1/s	Tensore delle velocità di deformazione
$\Delta l$	m	Discretizzazione spaziale del reticolo
$\Delta t$	s	Time step
$\epsilon$	m	Elongazione della molla nel modello di attrito statico
$\zeta$	-	Coefficiente di restituzione
$\eta$	kg/(m s)	Viscosità del fluido
$\eta_0$	kg/(m s)	Viscosità iniziale
$\eta_B$	kg/(m s)	Viscosità plastica (di Bingham)
$\mu_p$	-	Coefficiente di attrito tra le particelle
$\mu_w$	-	Coefficiente di attrito tra particelle e pareti
$\nu$	-	Coefficiente di Poisson

$\xi$	m	Sovrapposizione tra le particelle
$\rho$	kg/m <sup>3</sup>	Densità di massa
$\sigma$	kg/(m s <sup>2</sup> )	Tensore delle tensioni
$\sigma_y$	kg/(m s <sup>2</sup> )	Tensione di snervamento
$\tau$	s	Tempo di rilassamento (LBM)
$\varphi$	°	Angolo di resistenza al taglio
$\phi$	-	Frazione solida
$\phi_{\max}$	-	Massima frazione solida
$\Omega_{\text{coll}}$	kg/m <sup>3</sup>	Operatore di collisione
$\Omega_{\text{force}}$	kg/m <sup>3</sup>	Operatore di forza
$\omega$	1/s	Velocità di rotazione

# 1. Introduzione

La conoscenza del comportamento meccanico dei flussi di materiale granulare è di fondamentale importanza in numerosi campi, quali la geofisica, la fisica, le scienze naturali e l'industria.

Nonostante un gran numero di studi e ricerche a riguardo, la previsione e la modellazione dei flussi granulari è ancora una sfida in corso, in quanto questi materiali sono caratterizzati da una grande diversità di comportamento se sottoposti a condizioni diverse: un materiale granulare eccitato spesso assomiglia a un liquido, in altre situazioni si comporta invece come un solido, altre volte ancora è simile ad un gas. Il passaggio tra questi stati avviene in modo differente rispetto ad altri materiali e al momento non si hanno ancora sufficienti conoscenze sulla teoria cinetica di queste transizioni.

Per questi motivi non è ancora stata raggiunta la definizione di una precisa reologia per il generico flusso granulare continuo. I parametri reologici associati alla complessa natura dei materiali sono molto difficili da calibrare e le proprietà dei materiali possono cambiare anche in modo piuttosto significativo durante il flusso, in particolare a causa della frammentazione, della segregazione e dei processi di erosione che si possono verificare lungo il percorso di colata.

Nonostante queste difficoltà, negli anni sono stati fatti progressi a partire dagli studi di Bagnold (1954) che si basano principalmente su osservazioni fenomenologiche piuttosto che su una modellazione affidabile. Questi riguardano il ruolo delle condizioni iniziali e il comportamento isteretico, la dipendenza dalla dimensione del sistema, gli effetti delle pareti, la fluidificazione, ecc. (Daerr & Douady 1999; Courrech du Pont et al. 2003; Jop, Forterre & Pouliquen 2005; Nichol et al. 2010). In ogni caso si ha ancora carenza di leggi costitutive in grado di spiegare e prevedere queste osservazioni.

Sebbene i flussi granulari alla scala di laboratorio non possano coinvolgere gli stessi processi fisici che agiscono su scala naturale, gli esperimenti in laboratorio restano comunque un metodo molto usato per ricercare e quantificare i possibili meccanismi e per testare le leggi costitutive. Queste analisi a piccola scala forniscono risultati che sono assunti validi anche su grande scala. È il caso del collasso di una colonna di materiale granulare, che è uno degli esperimenti più studiati in laboratorio per riprodurre il flusso transitorio ed ha come scopo il controllo della dinamica e del deposito dei flussi.

Di fondamentale importanza è infatti la previsione della massima distanza di arresto raggiunta dal materiale che, insieme al volume, è una delle grandezze di maggior interesse per la stima e la mappatura della pericolosità di un evento. Più precisamente, la distanza di arresto (o di run-out) è la lunghezza planimetrica

percorsa dalla colata, dal punto nel quale inizia a rallentare la sua corsa al punto in cui si ferma completamente. Nelle aree alpine l'inizio del rallentamento viene spesso a coincidere con l'apice del cono di deiezione, dove si ha un cambio abbastanza netto della pendenza del fondo del canale di scorrimento. In altri contesti il punto di rallentamento si colloca o in zone di discontinuità topografica, o in zone dove il canale registra un brusco allargamento o un incremento significativo della scabrezza di fondo, dovuto ad esempio alla presenza di una serie di briglie molto ravvicinate.

Per uno studio più completo di questi fenomeni, oltre ai risultati sperimentali ottenuti in laboratorio, si sono resi necessari anche studi di simulazione attraverso modellazione numerica, con l'utilizzo di modelli discreti e più recentemente di modelli continui, costantemente in fase sviluppo.

Questa tesi è strutturata come segue: dopo una breve descrizione dei sistemi di classificazione e dei tipi di flusso, si passa alle diverse metodologie di calcolo esistenti, per poi entrare nel merito della modellazione numerica e del suo attuale stato dell'arte. Vengono descritti nel dettaglio i due metodi di analisi utilizzati: il Discrete Element Method e il Lattice Boltzmann Method. Infine vengono svolte diverse simulazioni di flussi granulari secchi attraverso strategie al discontinuo (DEM) e al continuo (LBM), mettendo a confronto i risultati ottenuti.

## 2. Flussi come movimenti franosi

### 2.1. Sistemi di classificazione e tipi di flusso

Il problema dei flussi come movimenti franosi è stato affrontato relativamente tardi rispetto ad altri rischi naturali, a causa della sua complessità e delle conseguenti difficoltà nell'osservazione, nell'analisi e nella riproduzione di questi fenomeni.

Il termine “frana” indica la rapida mobilitazione di una porzione di terreno per effetto della forza di gravità. I fattori d'innesco di questi fenomeni sono molteplici, ad esempio le precipitazioni, le escursioni termiche, i terremoti e anche alcune attività dell'uomo.

Da più di un secolo diversi studiosi hanno sentito la necessità di ricorrere a una terminologia più specifica, in quanto le frane possono avere caratteristiche estremamente diverse tra loro. Da qui il bisogno di redigere un metodo generale per l'inquadramento di questi fenomeni.

I risultati a cui i diversi autori sono pervenuti però sono spesso in contrasto e molto diversi tra loro.

Vengono di seguito passati in rassegna i principali e più diffusi sistemi di classificazione, evidenziando però che tutti i sistemi presentati alla comunità scientifica, nonostante presentino alcuni vantaggi, sono in genere incompleti a causa dell'enorme varietà dei fenomeni naturali.

#### 2.1.1. Classificazione di Varnes (1978) e Cruden & Varnes (1996)

Uno dei più conosciuti e utilizzati sistemi di classificazione è quello sviluppato da Varnes nel 1978 e poi perfezionato da Cruden nel 1996.

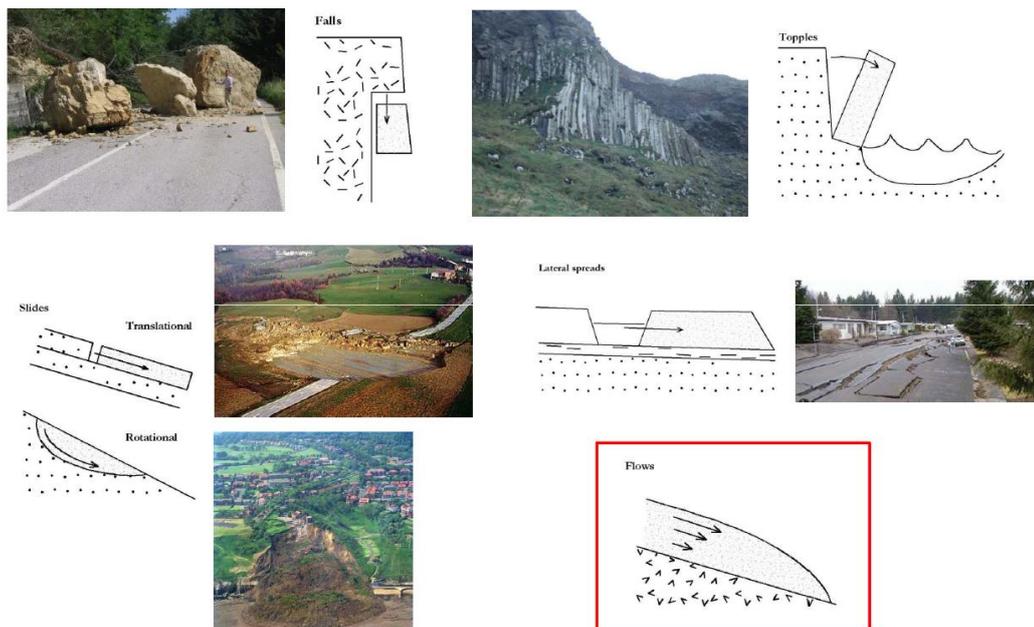
Varnes classifica un movimento franoso (landslide) in base alla tipologia di materiale interessato (roccia, terreno a grana grossa, terreno a grana fine) e alla modalità con cui avviene lo spostamento (*Tabella 2.1*).

Il terreno a grana grossa, indicato con il termine “debris” contiene in questa classificazione dal 20% all'80% di materiale grossolano, mentre quello a grana fine (denominato “earth”) include un quantitativo maggiore dell'80% di materiale fine.

**Tabella 2.1 - Principali tipologie di movimenti franosi (Varnes, 1978)**

TYPE OF MOVEMENT		TYPE OF MATERIAL		
		BEDROCK	ENGINEERING SOILS	
			DEBRIS	EARTH
FALLS		Rock fall	Debris fall	Earth fall
TOPPLES		Rock topple	Debris topple	Earth topple
SLIDES	ROTATIONAL	Rock slide	Debris slide	Earth slide
	TRANSLATIONAL			
LATERAL SPREADS		Rock spread	Debris spread	Earth spread
FLOWS		Rock flow (deep creep)	Debris flow	Earth flow (soil creep)
COMPLEX		Combination of two or more principal types of movement		

Si elencano ed espongono brevemente le diverse tipologie di movimento e se ne dà una rappresentazione grafica in *Figura 2.1*:



**Figura 2.1 - Rappresentazione dei diversi movimenti franosi (Pirulli, 2014)**

- **Crollo (fall):** distacco improvviso di massi, detriti o terreno coesivo da un pendio molto ripido, dovuto alla presenza di fratture nell'ammasso roccioso o dei piani di stratificazione;
- **Ribaltamento (topple):** il materiale distaccato subisce una rotazione attorno al punto di appoggio;

- **Scioglimento (slide):** si ha la formazione di una superficie di scorrimento e in base alla geometria di quest'ultima si distingue lo scorrimento traslazionale da quello rotazionale;
- **Espansione laterale (lateral spread):** fenomeno che avviene anche nelle zone di pianura, generalmente in seguito al cedimento (causato talvolta dalla liquefazione) del terreno sottostante;
- **Flusso o colata (flow):** classe di dissesti in cui il materiale mobilitato presenta un comportamento affine a quello di un liquido ed è in grado di percorrere anche notevoli distanze;
- **Movimento complesso:** combinazione di due o più movimenti elementari nello spazio e nel tempo.

Per quanto riguarda i flussi, Varnes li inquadra all'interno di tre classi principali:

- **Rock flows:** casi in cui il terreno roccioso si comporta come un fluido ad alta viscosità, con movimenti estremamente lenti;
- **Debris flows:** molto più veloci dei precedenti e riguardano miscele di acqua con sedimenti a diversa granulometria;
- **Earth flows:** flussi non molto rapidi di materiale piuttosto fine e saturo.

Viene fatta infine un'ulteriore distinzione tra i flussi incanalati (debris flows), dove è possibile distinguere una zona di innesco, di trasporto e di deposito (*Figura 2.2*), e flussi non incanalati (earth flows e debris avalanches). In quest'ultima categoria sono elencate le valanghe di detriti, che si distinguono dalle colate di detriti per le loro maggiori dimensioni (dell'ordine di milioni di metri cubi); sono meno ricorrenti ma possono raggiungere velocità elevatissime.



**Figura 2.2** - Esempio di flusso incanalato dove si distinguono una zona d'innesco, di trasporto e di deposito (Pirulli, 2014)

Attraverso una modifica a questa classificazione, Cruden e Varnes propongono di restringere l'uso del termine "debris flow" al suo significato letterale: fase di un evento franoso durante cui si verifica il flusso di materiale grossolano (Cruden e Varnes, 1996). Con questa definizione, molti tipi di frane, comprese le valanghe di roccia, i flussi granulari asciutti, ecc. presentano una fase definita come debris flow.

Inoltre, definiscono con il termine "lahar" una colata detritica che si forma sulle pendici di un vulcano ed è quindi costituita da materiale di origine magmatica.

La velocità di movimento è un parametro molto importante per una frana e in *Tabella 2.2* è mostrata la sua correlazione con i probabili danni associati.

**Tabella 2.2 - Scala di velocità di una frana (Cruden e Varnes, 1996)**

Velocity Class	Description	Velocity (mm/sec)	Typical Velocity	Probable Destructive Significance
7	Extremely Rapid			Catastrophe of major violence; buildings destroyed by impact of displaced material; many deaths; escape unlikely
		$5 \times 10^3$	5 m/sec	
6	Very Rapid			Some lives lost; velocity too great to permit all persons to escape
		$5 \times 10^1$	3 m/min	
5	Rapid			Escape evaluation possible; structures, possessions, and equipment destroyed
		$5 \times 10^{-1}$	1.8 m/hr	
4	Moderate			Some temporary and insensitive structures can be temporarily maintained
		$5 \times 10^{-3}$	13 m/month	
3	Slow			Remedial construction can be undertaken during movement; insensitive structures can be maintained with frequent maintenance work if total movement is not large during a particular acceleration phase
		$5 \times 10^{-5}$	1.6 m/year	
2	Very Slow			Some permanent structures undamaged by movement
		$5 \times 10^{-7}$	15 mm/year	
	Extremely SLOW			Imperceptible without instruments; construction POSSIBLE WITH PRECAUTIONS

Quella appena descritta è una classificazione che ha il pregio di essere relativamente semplice, infatti analizzando la composizione granulometrica e morfologica di un deposito è possibile individuare il termine con cui definire il movimento franoso che lo ha provocato. Lo svantaggio è che eventi molto diversi fra loro possono essere inclusi nella stessa classe.

### 2.1.2. Classificazione di Hungr et al. (2001)

La classificazione sopra descritta non è del tutto soddisfacente, in particolare per quanto riguarda i flussi.

Secondo Hungr la classificazione di Varnes, basata solo sulla granulometria e sul tipo di movimento, è inadeguata al caso delle colate detritiche.

Come visto precedentemente, secondo Varnes il termine “earth” dovrebbe essere usato se il numero di particelle con diametro maggiore di 2 mm (limite superiore per la sabbia, vedi *Tabella 2.3*) è inferiore al 20%, mentre il termine “debris” dovrebbe indicare i casi in cui tale valore è compreso tra il 20% e l’80%. Questo criterio risulta spesso difficile da applicare nei casi reali, in quanto la granulometria può dipendere dal punto in cui viene prelevato il campione del deposito.

**Tabella 2.3** - *Classificazione dei sedimenti in base al loro diametro (British Standard e MIT)*

<b><i>d</i> [mm]</b>	<b>CLASSIFICAZIONE</b>
>200	Massi ( <i>boulders</i> )
200÷60	Ciottoli ( <i>cobbles</i> )
60÷2	Ghiaia ( <i>gravel</i> )
2÷0.06	Sabbia ( <i>sand</i> )
0.06÷0.002	Limo ( <i>silt</i> )
<0.002	Argilla ( <i>clay</i> )

Numerose ricerche hanno dimostrato che un limite basato solo sulle dimensioni dei sedimenti non sempre corrisponde a un sostanziale cambiamento delle proprietà di un flusso. Al contrario, sembra più opportuno fare una distinzione che tenga conto della tipologia di materiale presente nella zona d’innescò (ricordando che spesso si verifica un processo di erosione durante il moto verso valle, per cui, entro certi limiti, la composizione iniziale può subire dei cambiamenti), non basata esclusivamente sulla granulometria. La distinzione viene fatta in base al limite liquido  $\omega_L$  (valore del contenuto d’acqua che indica il passaggio dallo stato plastico a quello liquido) e all’indice di plasticità  $I_P$  (pari alla differenza tra limite liquido e limite plastico  $\omega_P$ ; quest’ultimo rappresenta il valore del contenuto d’acqua in corrispondenza della transizione verso lo stato semi-solido).

In *Tabella 2.4* viene presentata una classificazione più formale e completa dei diversi tipi di flusso, i cui termini principali sono di seguito descritti in dettaglio (Hungry et al., 2001):

- **Debris flow:** flusso molto rapido o estremamente rapido formato da materiale saturo non plastico, che scorre lungo un canale ripido ben definito (indice di plasticità minore del 5%);
- **Mud Flow:** flusso estremamente rapido di materiale detritico saturo e plastico lungo un canale, che coinvolge un contenuto d'acqua significativo (indice di plasticità maggiore del 5%);
- **Debris flood:** flusso estremamente rapido di acqua con aggiunta di detriti, che scorre lungo un canale ripido;
- **Debris avalanche:** flusso superficiale estremamente rapido di materiale detritico saturo o parzialmente saturo lungo un pendio ripido, non confinato in un canale stabilito.

**Tabella 2.4 - Classificazione dei tipi di flusso (Hungry et al., 2001)**

Material	Water content <sup>1</sup>	Special condition	Velocity	Name
Silt, sand, gravel, and debris (talus)	Dry, moist, or saturated	No excess pore-pressure Limited volume	Various	<i>Non-liquefied sand (silt, gravel, debris) flow</i>
Silt, sand, debris, and weak rock <sup>2</sup>	Saturated at rupture surface	Liquefiable material <sup>3</sup> Constant water content	Extremely rapid	<i>Sand (silt, debris, rock) flow slide</i>
Sensitive clay	At or above liquid limit	Liquefaction <i>in situ</i> <sup>3</sup> Constant water content <sup>4</sup>	Extremely rapid	<i>Clay flow slide</i>
Peat	Saturated	Excess pore-pressure	Slow to very rapid	<i>Peat flow</i>
Clay or earth	Near plastic limit	Slow movements Plug flow (sliding)	Less than rapid	<i>Earth flow</i>
Debris	Saturated	Established channel <sup>5</sup> Increased water content <sup>4</sup>	Extremely rapid	<i>Debris flow</i>
Mud	At or above liquid limit	Fine-grained debris flow	Greater than, very rapid	<i>Mud flow</i>
Debris	Free water present	Flood <sup>6</sup>	Extremely rapid	<i>Debris flood</i>
Debris	Partly or fully saturated	No established channel <sup>5</sup> Relatively shallow, steep source	Extremely rapid	<i>Debris avalanche</i>
Fragmented rock	Various, mainly dry	Intact rock at source Large volume <sup>7</sup>	Extremely rapid	<i>Rock avalanche</i>

<sup>1</sup> Water content of material in the vicinity of the rupture surface at the time of failure.

<sup>2</sup> Highly porous, weak rock (examples: weak chalk, weathered tuff, pumice).

<sup>3</sup> The presence of full or partial *in situ* liquefaction of the source material of the flow slide may be observed or implied.

<sup>4</sup> Relative to *in situ* source material.

<sup>5</sup> Presence or absence of a defined channel over a large part of the path, and an established deposition landform (fan). *Debris flow* is a recurrent phenomenon within its path, while *debris avalanche* is not.

<sup>6</sup> Peak discharge of the same order as that of a major flood or an accidental flood. Significant tractive forces of free flowing water. Presence of floating debris.

<sup>7</sup> Volume greater than 10,000 m<sup>3</sup> approximately. Mass flow, contrasting with fragmental rock fall.

Viene data particolare importanza alla distinzione tra colate di terreno liquefatto e non liquefatto. Per stabilirlo sarebbe necessaria l'osservazione diretta del fenomeno. In alternativa, ci si può basare sulla mobilità, definita come rapporto tra il dislivello fra la zona di innesco e arresto e la distanza percorsa.

### 2.1.3. Altri sistemi di classificazione

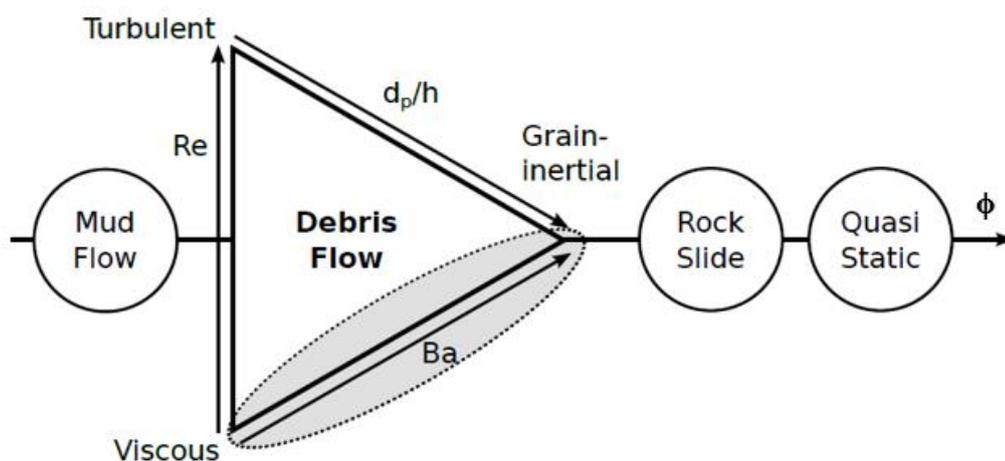
I metodi finora presentati per la classificazione dei flussi si basano quasi esclusivamente sul tipo di movimento e sul materiale che li compone. Altri sistemi più sofisticati tengono in conto più o meno esplicitamente dei fenomeni che avvengono a livello microscopico e che vanno ad influenzare il comportamento globale della miscela (Pierson & Costa, 1987; Davies, 1988; Coussot & Meunier, 1996; Coussot & Ancey, 1999). I parametri di interesse sono ad esempio la granulometria, la concentrazione solida in volume, la viscosità e il gradiente di velocità, anche se spesso viene presa in considerazione la velocità media in quanto più facile da calcolare (Pierson & Costa, 1987).

Lo studioso giapponese Takahashi propone un metodo per caratterizzare i debris flows basato su un set di numeri adimensionali (Takahashi, 2007). Il parametro più importante è la concentrazione in volume dei sedimenti trasportati (o frazione solida,  $\phi$ ), determinata dal rapporto tra il volume della fase granulare e il volume totale

$$\phi = \frac{V_p}{V_f + V_p} \quad (2.1)$$

dove i pedici  $p$  ed  $f$  si riferiscono rispettivamente alle particelle (grani) e al fluido.

Se  $\phi$  è basso ci si riferisce al termine da letteratura “mud flow”. Il contenuto di fluido può essere piccolo a sufficienza da non riempire completamente i vuoti e il mezzo è definito non saturo. Quando il volume fluido è trascurabile e  $\phi$  è grande, ci riferiamo al fenomeno dello scivolamento di materiale roccioso (*Figura 2.3*).



**Figura 2.3** - Classificazione di flussi naturali composti da particelle e fluido basata su grandezze adimensionali (Leonardi, 2015)

L'intervallo di  $\phi$  che definisce un debris flow è complicato da descrivere, in quanto sia la componente granulare che quella fluida esercitano un ruolo non trascurabile sul comportamento meccanico della miscela.

Takahashi propone un sistema di sotto-classificazione per i debris flow utilizzando tre assi, ognuno contenente un numero adimensionale (triangolo di *Figura 2.3*).

La prima grandezza è il numero di Reynolds, dato dal rapporto tra le forze inerziali del fluido e le forze viscosi

$$Re = \frac{\rho_f u_f h}{\eta} \quad (2.2)$$

dove  $\eta$  è la viscosità dinamica del fluido,  $\rho_f$  la densità di massa,  $u_f$  la sua velocità caratteristica e  $h$  l'altezza totale del flusso.

La seconda grandezza è il numero di Bagnold, definito come il rapporto tra le forze di collisione delle particelle (o grani) e le forze viscosi del fluido

$$Ba = \frac{\rho_p d_p \lambda(\phi) \dot{\gamma}}{\eta} \quad (2.3)$$

dove  $d_p$  è il diametro delle particelle,  $\dot{\gamma}$  il gradiente di velocità (perpendicolare alla direzione di deformazione) del flusso e  $\lambda(\phi)$  una funzione della frazione solida  $\phi$ .

Bagnold definisce  $\lambda(\phi)$  come

$$\lambda(\phi) = \frac{1}{\left(\frac{\phi_{max}}{\phi}\right)^{1/3} - 1} \quad (2.4)$$

con  $\phi_{max}$  la massima frazione solida.

Il numero di Bagnold descrive il cambiamento nella reologia complessiva di un fluido dovuto alla presenza delle particelle granulari.

La terza grandezza adimensionale è il rapporto tra la dimensione dei grani e l'altezza della miscela complessiva,  $d_p/h$ .

Una miscela caratterizzata da  $Re$  basso e  $Ba$  basso, indipendentemente dalla dimensione delle particelle, è dominata dalla viscosità della fase fluida. Assumendo il fluido Newtoniano, anche il comportamento globale sarà Newtoniano. Un incremento della velocità (e quindi del gradiente di velocità o velocità di deformazione) fa sì che sia il numero di Reynolds che quello di Bagnold aumentino. Questo avviene in parallelo all'incremento delle forze inerziali di particelle e fluido e, se il rapporto  $d_p/h$  è piccolo, determina il passaggio verso un comportamento turbolento; se  $d_p/h$  è grande porta ad un flusso dominato dall'inerzia dei grani.

Questo metodo non definisce dei limiti precisi tra le varie tipologie di flusso. Inoltre, questa classificazione basata su grandezze adimensionali è ancora di

limitato interesse pratico per professionisti ed esperti, in quanto non prende in considerazione la principale variabile che determina il rischio globale di un fenomeno di flusso: la massa totale del flusso stesso. Per questi motivi, il modello di Takahashi ha una valenza principalmente teorica.

Altri studi hanno portato ad una serie di relazioni empiriche che possono essere impiegate per ricavare alcuni tra i più importanti parametri che caratterizzano il comportamento di un flusso. In ogni caso, molte di queste relazioni, portano soltanto alla stima dell'ordine di grandezza di queste caratteristiche e non definiscono un valore accurato dei parametri, a causa del fatto che molte proprietà evolvono nel tempo durante il flusso.

## 2.2. Metodologie di calcolo

I flussi come movimenti franosi sono caratterizzati da un'elevata forza di impatto, che li rende pericolosi per le strutture, le infrastrutture e la popolazione.

Dal punto di vista normativo, in tema di prevenzione, il DLgs n.49 del 2010, attraverso i Piani stralcio di distretto per l'Assetto Idrogeologico, prevede una mappatura della pericolosità e del rischio.

Per una corretta pianificazione è fondamentale la conoscenza e la stima delle aree di possibile inondazione, degli spessori dei depositi e delle velocità che la massa detritica può raggiungere.

Le variabili che concorrono alla definizione dell'intensità di una colata sono dunque: volumi, portate, velocità, profondità di flusso e distanza di arresto.

Entrando nel merito dell'evoluzione del fenomeno, i metodi di calcolo esistenti per la stima di velocità, spessore e distanza di arresto si possono classificare come segue (*Tabella 2.5*).

**Tabella 2.5** - Metodologie di calcolo per la previsione dell'evoluzione di un fenomeno

APPROCCIO EMPIRICO	Metodo Geomorfologico Metodo Geometrico
MODELLAZIONE FISICA	Metodo Sperimentale
MODELLAZIONE DINAMICA	Metodo Lumped Mass Metodo degli elementi discreti (o distinti) Metodo continuo

### 2.2.1. Approccio empirico

L'approccio empirico viene utilizzato per un'analisi speditiva e si divide a sua volta in due metodi: geomorfologico e geometrico.

I metodi geomorfologici, puramente empirici, si basano su rilievi in situ e interpretazioni fotografiche per la determinazione della propagazione di un flusso, senza la possibilità di trasferire i risultati ad altre aree di interesse. Poiché la delimitazione dell'area si basa sulla presenza di depositi di eventi passati, in aree di bassa attività si ha un alto grado di incertezza ed errori.

I metodi geometrici fanno invece riferimento a una banca dati di eventi passati documentati. Sono applicabili anche in altri contesti a parità di caratteristiche di fenomeno, materiale, bacino, ecc. Lo svantaggio è rappresentato dal largo scarto nelle relazioni empiriche tra i parametri, che limita il loro utilizzo come strumenti di previsione della distanza di propagazione. Tuttavia sono utili come metodi preliminari.

In conclusione, i modelli empirici devono essere applicati con particolare attenzione alla compatibilità tra le caratteristiche del caso analizzato e le caratteristiche dei casi storici esaminati per ottenere la correlazione empirica.

### 2.2.2. Modellazione fisica

I modelli fisici si basano su risultati sperimentali e sono importanti per la validazione dei modelli numerici e, soprattutto se a grande scala, rivelano preziose informazioni per la comprensione del fenomeno reale.

### 2.2.3. Modellazione dinamica

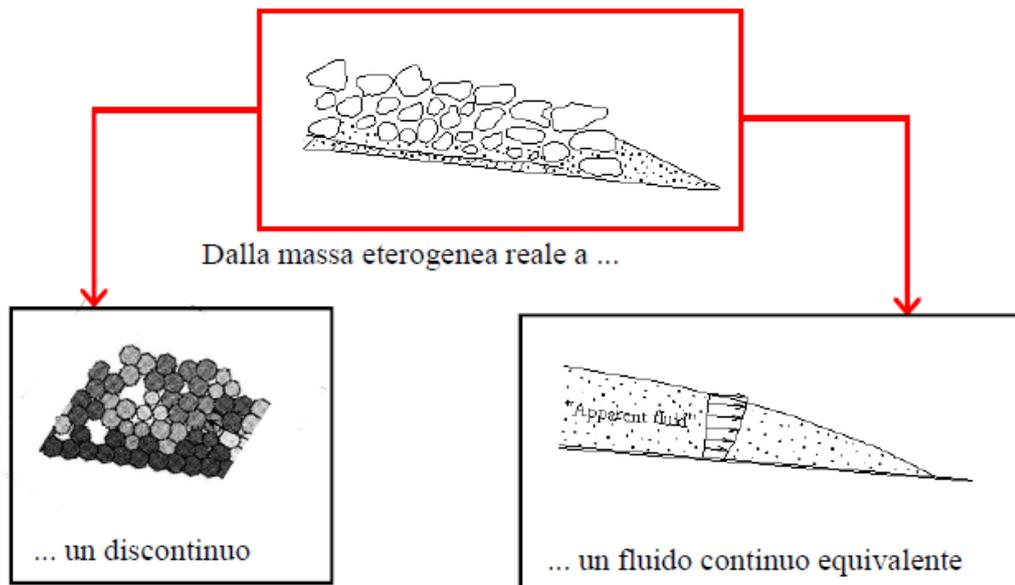
La modellazione dinamica permette sia di analizzare il comportamento meccanico che di studiare il fenomeno di propagazione in condizioni 3D.

Essa si divide a sua volta in metodi analitici (Lumped mass) e metodi numerici, in cui la massa reale viene modellata attraverso un approccio continuo o discontinuo (*Figura 2.4*).

Il modello Lumped mass è basato su un'analisi energetica, in cui l'energia totale è data dalla somma di energia potenziale, energia cinetica ed energia dissipata. Il comportamento globale si riduce a quello del baricentro della massa, è quindi

un'analisi semplificata in quanto si perdono le caratteristiche geometriche reali del fenomeno. Non è un metodo in grado di fornire informazioni sulle proprietà spaziali e temporali del caso analizzato.

I modelli numerici a loro volta si distinguono in modelli del continuo e del discontinuo (collettivamente riconosciuto come Metodo agli Elementi Discreti).



**Figura 2.4 - Approccio continuo e discontinuo (Pirulli, 2014)**

Il modello discontinuo è particellare e tratta il materiale come un insieme di elementi isolati, rigidi o deformabili. La massa viene dunque modellata come un insieme di particelle in movimento lungo una superficie. È un metodo usato principalmente a scopo di ricerca.

Nel modello continuo invece, la massa reale viene rappresentata come un fluido continuo equivalente che ne racchiude le caratteristiche. Si perde la realtà del singolo elemento ma si dà una realtà d'insieme.

I modelli del continuo per la simulazione dei fenomeni di flusso possono utilizzare due diversi approcci: monofasico e bifasico.

Nell'approccio monofasico, la fase solida e liquida sono trattate come un unico continuo. L'intera colata detritica è rappresentata da un fluido equivalente e modellata come un fluido non newtoniano con caratteristiche reologiche omogenee in ogni suo punto. Tra i limiti dell'approccio si osserva che non vengono presi in considerazione l'evoluzione della temperatura granulare, l'equilibrio delle pressioni dei pori e le diverse caratteristiche del fluido man mano che si sposta dal fronte alla coda del flusso.

Nell'approccio bifasico le fasi solida e liquida sono trattate come due continui separati, specificando equazioni costitutive distinte per le due fasi e per le forze di interazione. Dal punto di vista fisico, rispecchia meglio ciò che avviene nella realtà, tuttavia richiede una grande quantità di parametri di non semplice identificazione e allo stato attuale delle conoscenze il loro utilizzo è generalmente limitato a scopi di ricerca.

La modellazione dinamica monofasica ha invece assunto un ruolo sempre più importante sia nella ricerca che nel mondo del lavoro, grazie alla sua facilità di utilizzo e alla capacità di fornire risultati più semplici e immediati.

I modelli numerici del continuo si basano sulle equazioni di conservazione della massa e della quantità di moto, le cosiddette equazioni di bilancio o equazioni di Navier-Stokes (sistema di equazioni differenziali alle derivate parziali che descrivono il comportamento di un fluido dal punto di vista macroscopico), dalla cui integrazione sulla profondità si ricavano le cosiddette equazioni a pelo libero o equazioni di De Saint Venant.

Alle equazioni di bilancio bisogna affiancare le leggi reologiche, equazioni costitutive che descrivono le proprietà fisiche dei fluidi sotto varie condizioni e stati.

Per ottenere risultati affidabili e una simulazione il più realistica possibile bisogna prestare particolare attenzione alla scelta delle leggi reologiche da utilizzare e alla calibrazione dei parametri che descrivono le caratteristiche del flusso, la cui identificazione non è sempre agevole.

### 3. Modellazione numerica dei flussi granulari: stato dell'arte

Le simulazioni tramite l'utilizzo di computer rappresentano uno dei più importanti metodi di indagine dei materiali granulari e si sono rese possibili soprattutto negli ultimi anni grazie agli enormi sviluppi tecnologici. Questo progresso ha contribuito alla rinascita dell'interesse scientifico sulla questione, divenuta oggetto di ricerca fisica ed ingegneristica.

Per comprendere a fondo i metodi numerici utilizzati in questo documento e gli algoritmi alla base, è necessaria una conoscenza di base di MatLab e del linguaggio di programmazione C++.

Le simulazioni numeriche dei flussi granulari sono necessarie per diverse ragioni. In mancanza di una teoria globale per una previsione affidabile del comportamento di questi materiali, le simulazioni numeriche possono essere usate per predire e ottimizzare le funzioni dei macchinari sperimentali. Spesso gli esperimenti sono costosi, richiedono tempi di realizzazione lunghi, e qualche volta sono anche pericolosi. In questi casi le simulazioni numeriche sono in grado di integrare e parzialmente sostituire questi esperimenti.

Gli approcci finora utilizzati per la modellazione numerica dei flussi granulari si dividono in due categorie. La prima, basata sulle equazioni di De Saint Venant per le correnti a pelo libero con una riduzione delle dimensioni del problema (si passa da un problema 3D a un più semplice modello 2D in cui l'altezza del flusso è trattata come una variabile) ottenuta attraverso l'integrazione sulla profondità, rappresenta un approccio continuo. Il secondo approccio invece, utilizza una rappresentazione discreta, dove ogni grano o particella è rappresentata come un punto lagrangiano e la dinamica dell'intero sistema è ricostruita attraverso la risoluzione delle forze di contatto tra i grani.

### 3.1. Approccio discreto

Il modello discreto, definito come Metodo agli Elementi Discreti o Distinti (DEM), schematizza il sistema come un insieme di particelle e si propone come una valida metodologia per lo studio del comportamento tenso-deformativo dei materiali granulari.

A ciascun elemento viene applicata la seconda legge di Newton per determinarne la velocità e la posizione sulla base delle forze e dei momenti applicati.

I metodi discreti sono largamente usati per la simulazione dei flussi granulari lungo piani inclinati.

I primi a proporre un approccio discreto particellare sono stati Cundall & Strack (1979). Successivamente Walton ha condotto una delle prime simulazioni 3D lungo un piano inclinato. A partire da questi primi tentativi, il DEM si è evoluto specialmente grazie all'incremento delle risorse computazionali che oggi permettono il calcolo di un enorme numero di particelle.

Le simulazioni si basano su leggi meccaniche di contatto molto semplici ma sono estremamente realistiche proprio grazie all'alto numero di particelle coinvolte.

I vantaggi dell'approccio discreto sono complementari a quelli dei metodi continui basati sull'integrazione sulla profondità.

Il DEM è particolarmente vantaggioso se usato per riprodurre l'interazione tra flusso ed elementi esterni. In particolare, la capacità di riprodurre il flusso attorno ad un ostacolo, permette lo studio di configurazioni alternative di barriere, senza il bisogno di ricorrere alla modellazione fisica, estremamente costosa e che limita dunque la possibilità di testare nuove configurazioni.

Un altro punto a favore del metodo discreto è la capacità di riprodurre il fenomeno della segregazione senza il bisogno di ulteriori modellazioni ad hoc.

Il DEM presenta però anche numerosi limiti. Spesso il modello è basato su ipotesi semplificative, in primis l'assunzione di una forma sferica delle particelle, ragionevole se le particelle reali sono molto arrotondate, ma notevolmente limitativa se si desidera passare a materiale angoloso o elongato. Inoltre, il modello discreto non è particolarmente indicato per materiali eccessivamente deformabili al contatto.

Un altro limite significativo dei modelli agli elementi discreti è l'elevato onere computazionale dell'algoritmo di calcolo che dipende soprattutto dall'elevato numero di particelle da rappresentare. Un passo in avanti per quanto riguarda la velocità di calcolo è stato compiuto grazie alla diffusione delle tecniche di parallelizzazione.

## 3.2. Equazioni di De Saint Venant per le correnti a pelo libero e sviluppo dell'approccio continuo

Di fondamentale importanza per la crescita dei modelli del continuo è lo studio condotto da Savage, basato sullo sviluppo di una teoria per i per i flussi granulari rapidi ad alta velocità di deformazione e sulla creazione di un modello costitutivo capace di descrivere il comportamento granulare sotto queste condizioni.

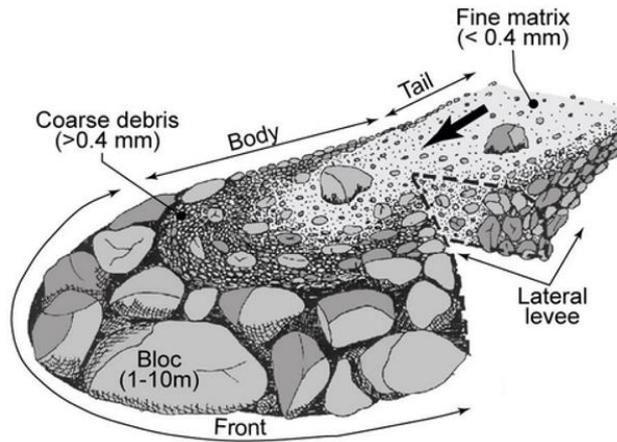
Savage e Hutter, partendo da questa teoria, hanno sviluppato una versione alternativa delle equazioni di De Saint Venant per le correnti a pelo libero per i flussi granulari. Il modello, che a oggi è uno dei più utilizzati nelle simulazioni, è formato da un sistema di equazioni differenziali che descrive il moto dei cosiddetti cluster (raggruppamenti di particelle granulari) lungo una superficie inclinata. È basato sulle ipotesi che il materiale rimanga superficiale durante il flusso e che il profilo di velocità lungo l'altezza sia costante e soprattutto noto. Si assume inoltre che la densità delle particelle sia costante e che l'interazione tra i grani e la superficie segua la legge attrittiva di Coulomb. La versione originale del modello è stata poi estesa per la rappresentazione anche di geometrie più complesse. Il metodo si è dimostrato abbastanza soddisfacente specialmente per quanto riguarda la previsione della forma del deposito dopo l'arresto.

Questo modello è stato ideato per i flussi granulari secchi, se invece si vuole riprodurre il moto di un debris flow, è necessario includere anche una fase fluida. Negli ultimi anni ci sono stati sviluppi in questa direzione basati sulla teoria delle miscele, in cui vengono risolti due insiemi separati di equazioni a pelo libero, una per la fase fluida e l'altra per la fase granulare. L'assunzione alla base di questa teoria è che, dove sono presenti entrambe le fasi, viene scambiata una forza di interazione idrodinamica, proporzionale al volume della frazione solida.

Un'altra formulazione applicata a geometrie reali è quella sviluppata in Svizzera all'interno del progetto RAMMS ( R APID Mass Movements). Il modello è basato sull'ipotesi di materiale omogeneo che segue la legge reologica di Voellmy.

Il modello di Savage e Hutter e quello RAMMS hanno dunque in comune la definizione del materiale come mezzo omogeneo.

L'ipotesi di una distribuzione uniforme delle particelle però limita le capacità del modello. In particolare, la teoria della miscela non è in grado di riprodurre i fenomeni di segregazione osservati durante il flusso reale. La segregazione è un processo che, a causa della formazione continua di vuoti durante un flusso granulare, porta spontaneamente i grani di dimensioni maggiori a muoversi lungo la superficie e quelli di dimensioni inferiori ad accumularsi dietro. Questo fa sì che si formino aree a diversa concentrazione di grani e che parti diverse del flusso richiedano reologie differenti (*Figura 3.1*).



**Figura 3.1** - *Debris flow: aree a diversa granulometria (Bardou, 2003)*

Studi per includere il fenomeno di segregazione all'interno di questi approcci sono stati condotti da Gray e altri studiosi. I modelli ricavati, così come quelli di Savage e Hutter, presentano sia vantaggi che svantaggi: possono essere applicati ad una grande quantità di materiale, ma incontrano difficoltà nel rappresentare geometrie complesse e interazioni con gli ostacoli.

Quindi, nonostante siano stati fatti dei miglioramenti, le equazioni per le correnti a pelo libero di De Saint Venant non sono adatte per determinare l'interazione tra flusso e ostacoli, né per valutare le forze d'impatto, che sono fondamentali per progettare i sistemi di protezione. Mancano della capacità di rappresentare la riorganizzazione tra sedimenti e fluido.

In questa tesi, per la simulazione dei flussi granulari attraverso un approccio continuo, si utilizza un metodo di recente sviluppo, il modello reticolare di Boltzmann (LBM), che negli ultimi anni è diventato una valida alternativa ai metodi sopra descritti, in quanto particolarmente adatto nell'implementare condizioni al contorno complesse, facilmente parallelizzabile, e permette dunque lo studio di simulazione di numerosi sistemi. Una caratteristica del LBM, da cui emergono le principali differenze rispetto ai precedenti metodi di CFD, è il fatto che permette il passaggio da un continuo integrato (e quindi bidimensionale) a un modello continuo tridimensionale.

## 4. Descrizione dei metodi utilizzati nelle simulazioni

### 4.1. Discrete Element Method (DEM)

I materiali granulari sono caratterizzati da un elevato numero di particelle di dimensioni variabili da pochi micrometri a qualche centimetro. Queste particelle interagiscono tra loro attraverso forze a corto raggio, come quelle di contatto meccanico; le forze a lungo raggio, ad esempio quelle elettrostatiche, non vengono prese in considerazione in queste analisi.

Nel metodo discreto ogni grano  $p$  è rappresentato come un punto lagrangiano  $\mathbf{x}_p$  e idealizzato come una particella di massa  $m_p$  e momento d'inerzia  $J_p$ , seguita passo a passo nel suo moto. In uno spazio tridimensionale, lo stato di una particella è definito da sei gradi di libertà, dalla posizione  $\mathbf{x}_p$  e dall'angolo di orientazione  $\boldsymbol{\theta}_p$ . La loro dinamica è governata dalle equazioni del moto di Newton

$$\begin{aligned} m_p \frac{d^2 \mathbf{x}_p}{dt^2} &= \mathbf{F}_p, \\ J_p \frac{d^2 \boldsymbol{\theta}_p}{dt^2} &= \mathbf{M}_p - \frac{d\boldsymbol{\theta}_p}{dt} \times \left( J_p \frac{d\boldsymbol{\theta}_p}{dt} \right), \end{aligned} \quad (4.1)$$

dove la forza  $\mathbf{F}_p$  e il momento  $\mathbf{M}_p$ , sono i risultati delle interazioni agenti sulla particella e sono funzioni non solo della posizione e dell'orientazione, ma anche della velocità lineare  $\mathbf{u}_p$  e di quella angolare  $\boldsymbol{\omega}_p$

$$\begin{aligned} \mathbf{F}_p &= \mathbf{F}_p(\mathbf{x}_p, \mathbf{u}_p, \boldsymbol{\theta}_p, \boldsymbol{\omega}_p), \\ \mathbf{M}_p &= \mathbf{M}_p(\mathbf{x}_p, \mathbf{u}_p, \boldsymbol{\theta}_p, \boldsymbol{\omega}_p). \end{aligned} \quad (4.2)$$

Se si considera invece un sistema bidimensionale, l'orientazione di una particella è descritta da un singolo angolo scalare  $\theta_p$  e il momento d'inerzia si riduce anch'esso ad un valore scalare  $J_p$ .

Proprio come tutti i problemi di meccanica del continuo, anche il DEM richiede la definizione delle condizioni iniziali e di quelle al contorno. La descrizione di un sistema di particelle è completa solo se viene descritto il comportamento particellare al contorno dell'area di simulazione e se sono note le coordinate e le velocità iniziali di ogni singola particella.

Il modello più semplice per una particella granulare è quello di una sfera di raggio  $r_p$ , che nel caso di simulazioni in due dimensioni si riduce a una forma circolare. Stabilire se due particelle entrano in contatto è molto semplice, ciò avviene quando la somma dei loro raggi eccede la distanza tra i loro centri

$$\xi = r_{p1} + r_{p2} - d_{p1,p2} > 0, \quad (4.3)$$

dove  $\xi$  è la lunghezza di sovrapposizione (compressione mutua tra le due particelle),  $\mathbf{d}_{p1,p2} = \mathbf{x}_{p2} - \mathbf{x}_{p1}$  è il vettore distanza tra i due centri, che permette la definizione di un sistema di riferimento locale di contatto (Figura 4.1).

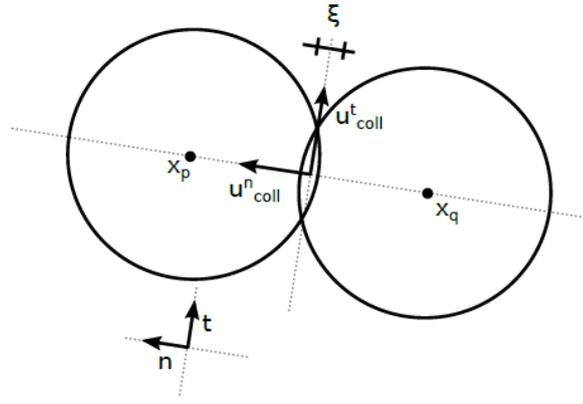


Figura 4.1 - Rappresentazione del contatto tra particelle (Leonardi, 2015)

La prima componente del sistema di riferimento locale è data dal rapporto tra il vettore distanza e il valore del suo modulo

$$\mathbf{n} = \frac{\mathbf{d}_{p1,p2}}{d_{p1,p2}}, \quad (4.4)$$

mentre la seconda e la terza componente,  $\mathbf{t}$  e  $\mathbf{b}$ , sono definite in base alle componenti del vettore velocità di collisione (o di contatto)  $\mathbf{u}_{coll}$ . La velocità di collisione normale è la componente parallela a  $\mathbf{n}$

$$\mathbf{u}_{coll}^n = ((\mathbf{u}_{p2} - \mathbf{u}_{p1}) \cdot \mathbf{n}) \mathbf{n}, \quad (4.5)$$

mentre la velocità tangenziale è quella lungo  $\mathbf{t}$  ed è funzione anche delle velocità angolari delle particelle  $\boldsymbol{\omega}_{p1}$  e  $\boldsymbol{\omega}_{p2}$

$$\mathbf{u}_{coll}^t = \mathbf{u}_{p2} - \mathbf{u}_{p1} - \mathbf{u}_{coll}^n - r_{p1} \boldsymbol{\omega}_{p1} \times \mathbf{n} - r_{p2} \boldsymbol{\omega}_{p2} \times \mathbf{n}. \quad (4.6)$$

Da quest'ultima relazione si ricavano i rimanenti due vettori del sistema di riferimento locale, definiti rispettivamente

$$\mathbf{t} = \frac{\mathbf{u}_{coll}^t}{u_{coll}^t}, \quad (4.7)$$

$$\mathbf{b} = \mathbf{n} \times \mathbf{t}.$$

La lunghezza di sovrapposizione  $\zeta$  rappresenta quindi una deformazione elastica, se è positiva le due particelle si scambiano una forza repulsiva  $\mathbf{F}_{coll}$ , funzione di  $\zeta$  e del modello costitutivo di contatto. La rappresentazione del materiale granulare come particelle sferiche è motivata da una convenienza computazionale ma rappresenta solo una semplificazione del comportamento reale. Una delle possibilità per superare questa limitazione è quella di rappresentare i grani come dei “cluster”, raggruppamenti di sfere rigidamente connesse (Figura 4.2), che permettono di preservare la semplicità della legge di contatto ma dandone una rappresentazione più realistica.

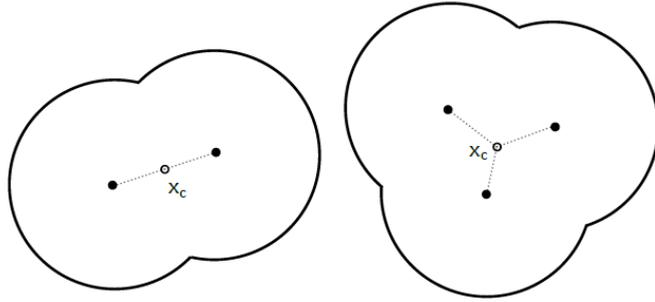


Figura 4.2 - Cluster formati rispettivamente da due e da tre sfere (Leonardi, 2015)

La forza di collisione (o di contatto)  $\mathbf{F}_{coll}$  è ricavata attraverso il calcolo del modulo della sua componente normale  $\mathbf{F}_{coll}^n$ , che causa cambiamenti nel moto traslazionale, e tangenziale  $\mathbf{F}_{coll}^t$ , che causa cambiamenti nel moto di rotazione, entrambe dipendenti dal modello costitutivo assunto. Il sistema finale di interazione durante una collisione tra due particelle è il seguente

$$\begin{aligned} \mathbf{F}_{coll,p1} &= -\mathbf{F}_{coll}^n \mathbf{n} + \mathbf{F}_{coll}^t \mathbf{t}; \\ \mathbf{F}_{coll,p2} &= \mathbf{F}_{coll}^n \mathbf{n} - \mathbf{F}_{coll}^t \mathbf{t}; \\ \mathbf{M}_{coll,p1} &= r_{p1} \mathbf{F}_{coll}^t \mathbf{b}; \\ \mathbf{M}_{coll,p2} &= r_{p2} \mathbf{F}_{coll}^t \mathbf{b}. \end{aligned} \quad (4.8)$$

Se le particelle sono sferiche è solo la componente tangenziale della forza a generare momento, se hanno forme più complesse invece, l'equazione 4.8 va adattata per

tenere in considerazione anche un momento secondario generato dalla componente normale.

Nei sotto-paragrafi seguenti si descrivono i diversi modelli di contatto implementati per la componente normale e tangenziale della forza di collisione.

#### 4.1.1. Contatto normale

Nella realtà, quando le particelle granulari collidono, parte dell'energia cinetica del loro moto relativo viene dissipata, ad esempio sotto forma di calore. In questi modelli le deformazioni delle particelle sono assunte molto piccole e si assume la conservazione in media della loro forma sferica anche dopo molte collisioni. Quest'ultima ipotesi sembra essere plausibile, sebbene ci siano alcuni casi in cui non è giustificata. Viene inoltre trascurata la variazione di temperatura dovuta al contatto tra le particelle, che potrebbe portare a cambiamenti nelle proprietà del materiale durante la simulazione. L'ipotesi di temperatura costante è giustificata se il calore generato viene scaricato dal materiale o se il calore generato dallo scorrimento viscoso delle particelle è molto più piccolo dell'energia termica totale del sistema.

##### - *Modello lineare*

Quello lineare è il più semplice tra i modelli sviluppati e schematizza il contatto attraverso il collegamento in parallelo di una molla di rigidezza  $k_L^n$  e un dissipatore con coefficiente di smorzamento viscoso  $\alpha_L^n$ .

La forza di collisione normale agisce in direzione  $\mathbf{n}$  normale alla superficie di contatto e in questo modello è espressa come

$$F_{coll}^n = k_L^n \xi + 2\alpha_L^n \sqrt{k_L^n \tilde{m}} \dot{\xi}, \quad (4.9)$$

dove  $\tilde{m} = m_{p1}m_{p2}/(m_{p1} + m_{p2})$  rappresenta la massa effettiva delle particelle in collisione.

La sovrapposizione segue la legge di Newton nella forma di un oscillatore armonico

$$\ddot{\xi} + 2\gamma_L \dot{\xi} + \omega_L^2 \xi = 0, \quad (4.10)$$

dove  $\gamma_L = \alpha_L^n \sqrt{k_L^n / \tilde{m}}$  è il rapporto di smorzamento e  $\omega_L = \sqrt{k_L^n / \tilde{m}}$  descrive la frequenza dell'oscillatore non smorzato.

In questo modello, il coefficiente di restituzione  $\zeta$ , definito come il rapporto tra la velocità delle particelle prima e dopo il contatto, è costante e se il sistema non è sovra-smorzato viene definito come segue

$$\zeta = \exp\left(-\frac{\pi\gamma_L}{\sqrt{\omega_L^2 - \gamma_L^2}}\right). \quad (4.11)$$

L'assunzione di un coefficiente di restituzione costante e quindi indipendente dalla velocità di impatto, viola le leggi fisiche: è infatti dimostrato sperimentalmente che  $\zeta$  varia al variare della velocità d'impatto. Assumere un coefficiente di restituzione costante è comunque vantaggioso da un punto di vista pratico in quanto facilmente stimabile.

Un'altra grandezza costante in questo modello è il tempo di contatto  $t_{coll,L}$ , inversamente proporzionale alla frequenza di oscillazione

$$t_{coll,L} = \frac{\pi}{\sqrt{\omega_L^2 - \gamma_L^2}}. \quad (4.12)$$

Il time step è scelto in modo da rappresentare i contatti con un accettabile grado di accuratezza. Ciò si verifica imponendo un time step  $\Delta t^{DEM} < \frac{1}{10} t_{coll,L}$ . Un tempo di contatto costante permette quindi un facile controllo dell'accuratezza della simulazione ed è una caratteristica vantaggiosa del modello lineare.

#### - Modello hertziano

Il modello lineare non tiene in conto in maniera corretta di come la sovrapposizione  $\xi$  tra le particelle sia funzione anche della loro forma. Se le particelle sono sferiche, la legge di contatto può essere modificata in accordo con la teoria di Hertz, che ha il vantaggio di basarsi anche su due proprietà fisiche del materiale: il modulo di Young  $E_p$  e il coefficiente di Poisson  $\nu_p$ .

La forza di collisione normale è espressa come

$$F_{coll}^n = k_H^n \xi + 2\alpha_H^n \sqrt{k_H^n \tilde{m}} \dot{\xi}, \quad (4.13)$$

dove la rigidezza  $k_H^n$  è ora funzione del modulo di Young, del coefficiente di Poisson e della lunghezza di sovrapposizione, producendo un comportamento non lineare.

L'espressione della rigidezza è

$$k_H^n = \frac{2}{3} \frac{E_p}{1 - \nu_p^2} \sqrt{\tilde{r}} \xi^{1/2}, \quad (4.14)$$

in cui  $\tilde{r} = r_{p1}r_{p2}/(r_{p1} + r_{p2})$  rappresenta il raggio effettivo.

L'equazione 4.14 differisce leggermente dalla teoria canonica di Hertz. Si tratta di un metodo sviluppato da Tsuji et al. con lo scopo di ottenere un modello pseudo-hertziano caratterizzato da un coefficiente di restituzione  $\zeta$  costante, da cui è possibile ricavare il valore del coefficiente di smorzamento viscoso

$$\alpha_H^n = \frac{-\sqrt{5}\ln\zeta}{\sqrt{\ln^2\zeta + \pi^2}}. \quad (4.15)$$

A differenza del modello lineare, il modello hertziano non fornisce un metodo semplice per la stima del time step. Il tempo di contatto è funzione della velocità normale di collisione (Eq. 4.5)

$$t_{coll,H} \cong 1.1 \left( \frac{E_p}{1 - \nu_p^2} \rho_p \right)^{\frac{2}{5}} \frac{\tilde{r}}{(u_{coll}^n)^{\frac{1}{5}}}. \quad (4.16)$$

Il time step si può adattare al il principio sopra utilizzato  $\Delta t^{DEM} < \frac{1}{10} t_{coll,H}$ , valutando la massima velocità di una particella nel sistema. In alternativa, la velocità massima può essere ipotizzata allo step iniziale, ciò consente l'uso di un time step costante e quindi una semplificazione che porta ad un miglioramento del tempo computazionale ma a una riduzione delle prestazioni complessive.

### 4.1.2. Contatto tangenziale

La forza di contatto tra due generiche particelle, come sopra descritto, è scomponibile in una forza normale che, nel caso di particelle sferiche, agisce lungo la linea congiungente i centri delle due particelle, e una forza tangenziale che si sviluppa sul piano ortogonale a questa linea.

#### - Modello viscoso di Haff e Werner

La forza di contatto tangenziale in questo modello è assunta proporzionale alla componente tangenziale della velocità relativa di collisione (equazione 4.6) tra due particelle sferiche lungo la superficie di contatto

$$F_{coll}^t = - \min( 2\alpha_t \sqrt{k^t \tilde{m}} u_{coll}^t, \mu_d F_{coll}^n ), \quad (4.17)$$

dove  $k^t$  è la rigidezza tangenziale il cui valore dipende dal modello di contatto normale adoperato

$$k^t = \begin{cases} k_L^n & \text{se modello normale lineare,} \\ \frac{2E_p}{(2 - \nu_p)(1 + \nu_p)} \sqrt{\tilde{r}} (F_{coll}^n)^{-\frac{1}{3}} & \text{se modello normale hertziano.} \end{cases} \quad (4.18)$$

In questo modello viene applicata una forza dissipativa proporzionale al taglio tra le due particelle, un approccio simile al comportamento viscoso di un fluido. La forza massima è data dalla legge attrittiva di Coulomb.

Il comportamento attrittivo risulta semplificato poiché viene considerata solo la componente dinamica dell'attrito, infatti nell'equazione 4.17 compare solo il coefficiente di attrito dinamico  $\mu_d$ .

L'attrito statico non viene preso in considerazione.

#### - Modello di Cundall & Strack

A differenza del modello viscoso appena descritto, questo modello prende in considerazione sia la componente dinamica che quella statica dell'attrito.

In generale, valore della forza di contatto tangenziale  $F_{coll}^t$  si ricava a partire da quello della forza in direzione normale  $F_{coll}^n$  attraverso la legge di Coulomb

$$F_{coll}^t \begin{cases} \leq \mu_s F_{coll}^n & \text{in condizioni statiche,} \\ = \mu_d F_{coll}^n & \text{in condizioni dinamiche,} \end{cases} \quad (4.19)$$

$$\mu_d \leq \mu_s .$$

Nell'equazione 4.19 i due coefficienti  $\mu_d$  e  $\mu_s$  rappresentano rispettivamente il coefficiente di attrito dinamico e statico. Da prove di laboratorio su materiali granulari si assume la seguente relazione:  $\mu_d=0.9\mu_s$ .

Nell'ambito delle simulazioni DEM l'attrito statico è descritto come una molla collegata ai punti di contatto e agente in direzione tangenziale al piano di contatto. La forza di contatto tangenziale  $F_{coll}^t$  diventa ora la somma di un contributo statico e di uno dinamico. La molla è inizializzata al tempo di primo contatto tra le particelle  $t_{init}$  e agisce fino a quando le superfici si separano l'una dall'altra. La sua elongazione è data da

$$\epsilon = \int_{t_{init}}^t \mathbf{u}_{coll}^t dt . \quad (4.20)$$

La molla, collegata in parallelo ad uno smorzatore con coefficiente di smorzamento  $\alpha_t$ , contribuisce a produrre una forza tangenziale di richiamo, sempre governata dalla legge attritiva di Coulomb

$$F_{coll}^t = - \min( k^t \epsilon + 2\alpha_t \sqrt{k^t \tilde{m}} \frac{d\epsilon}{dt} , \mu_d F_{coll}^n ) . \quad (4.21)$$

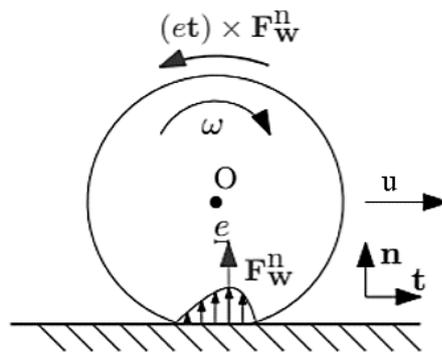
A differenza modelli descritti finora, in quello di Cundall & Strack il vettore  $\mathbf{F}_{coll}^t$  agisce nella stessa direzione della molla,  $\mathbf{t} = \frac{\epsilon}{\epsilon}$ .

### 4.1.3. Coefficiente di rotolamento (rolling)

Da un punto di vista numerico, l'introduzione di un modello che tiene in conto anche dell'attrito statico porta alla formazione di catene di forze stabili tra le particelle, che però, nel caso di singole particelle di forma sferica che si muovono lungo un piano inclinato, non è sufficiente a fermarne il moto. Per questo motivo, si rende necessaria l'introduzione di un modello basato sulla resistenza al rotolamento, che rappresenta il contributo attritivo della rugosità, della deformabilità e della forma delle particelle (Marchelli, 2018).

Nel DEM, dove i grani reali sono approssimati proprio come particelle sferiche, il rolling, che si oppone al mutuo rotolamento tra due corpi, assume un ruolo molto importante.

Nei casi reali, l'attrito al rotolamento deriva dalle deformazioni elastiche e plastiche di due materiali a contatto. Il contatto tra due particelle crea una deformazione, per questo motivo le forze di contatto non agiscono più su un singolo punto, ma su un'area. Come risultato si ha che la forza normale esercita un momento che si oppone alla rotazione (Figura 4.3).



**Figura 4.3** - Deformazione e momento che si creano al contatto tra particella e superficie (Marchelli, 2018)

Solo per sfere perfettamente rigide esiste il caso di assenza di rolling. I grani che formano i materiali reali hanno forme che differiscono da quelle perfettamente sferiche e, di conseguenza, per il metodo discreto, dove si utilizza il modello di una singola sfera per rappresentare il materiale reale, il coefficiente di rotolamento (rolling,  $c$ ) deve considerare anche l'effetto della forma.

Nell'ambito delle analisi numeriche DEM esistono numerosi modelli di resistenza al rotolamento, che si dividono in due categorie principali: i modelli di momento, in cui la resistenza al rotolamento è descritta attraverso un momento che si oppone alla rotazione delle particelle, e i modelli di correzione della velocità angolare, dove

la rotazione è controllata applicando un coefficiente empirico di ritardo (proporzionale al numero di contatti) e un tempo di ritardo alla velocità di rotazione in modo che al successivo time step la velocità angolare si riduca (Marchelli 2018).

Tra tutti i modelli esistenti in letteratura, nel codice utilizzato per le simulazioni discrete in questo documento di tesi si adotta il modello di momento direzionale costante, in cui viene applicato un momento costante  $\mathbf{M}^r$  che si oppone alla rotazione relativa tra due corpi a contatto; il momento è applicato in coppie per ogni coppia di particelle  $i$  e  $j$  a contatto (Girolami et al. 2012)

$$\begin{aligned} \mathbf{M}_i^r &= -cF^n \frac{\boldsymbol{\omega}_{rel}}{\omega_{rel}} A_r , \\ \mathbf{M}_j^r &= +cF^n \frac{\boldsymbol{\omega}_{rel}}{\omega_{rel}} A_r , \end{aligned} \tag{4.22}$$

dove  $A_r$  rappresenta il raggio di rotolamento ed è pari a  $A_r = (r_i r_j) / (r_i + r_j)$ .

Questo modello è semplice e richiede la calibrazione di un unico parametro, il coefficiente di attrito al rotolamento  $c$ , più comunemente chiamato coefficiente di rotolamento.

#### 4.1.4. Schema d'integrazione di Gear

L'integrazione delle equazioni del moto di Newton per i sistemi di materiale granulare è numericamente complicata, infatti si creano interazioni a corto raggio estremamente veloci tra le particelle, che producono un numero elevato di equazioni da risolvere (nel caso 3D si avranno  $6 \times N$  equazioni scalari, dove  $N$  è il numero totale di particelle). La non linearità delle equazioni del moto (equazione 4.1 abbinata ai modelli di contatto) giustifica la loro integrazione attraverso schemi noti con il nome di "predictor-corrector".

Tra i vari metodi di previsione-correzione sviluppati, una scelta comune è lo schema di Gear, il cui algoritmo è particolarmente adatto all'integrazione delle equazioni di Newton per i problemi dei flussi granulari, specialmente per la sua stabilità numerica e per l'importante vantaggio di richiedere ad ogni time step solo una valutazione delle forze di interazione, che porta ad un grande guadagno in efficienza poiché la valutazione delle forze che richiedono un elevato costo computazionale viene eseguita con minor frequenza.

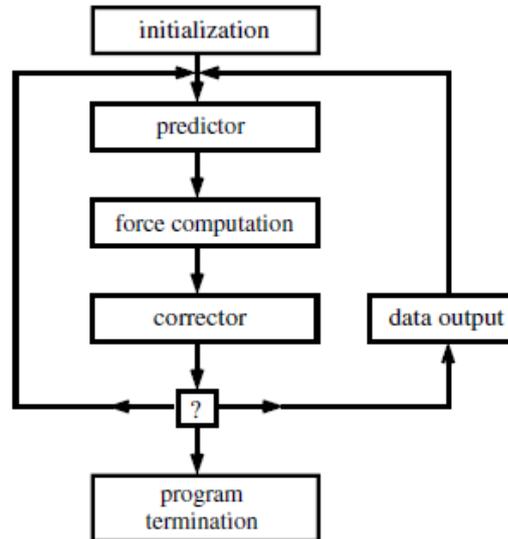
Lo schema di Gear è composto da due step. Il primo, la previsione, dove vengono calcolati valori di tentativo di posizione e orientazione delle particelle e le grandezze da esse derivate, attraverso lo sviluppo in serie di Taylor dei valori del passo temporale precedente. Queste grandezze sono poi utilizzate per verificare i contatti, calcolare le forze di collisione e risolvere le equazioni del moto di Newton.

Il secondo step è quello della correzione, in cui viene calcolata la differenza tra l'accelerazione predetta e il suo valore corretto ottenuto dalla soluzione dell'equazione del moto. Questa differenza viene utilizzata per valutare i valori corretti di posizione, orientazione e velocità da esse derivate, sempre tramite lo sviluppo in serie di Taylor.

A questo punto i valori corretti vengono usati per calcolare nuovi valori previsti e così via fino a quando la differenza tra valori corretti e previsti è minore di una quantità fissata.

#### 4.1.5. Algoritmo DEM

Le simulazioni tramite Metodi agli Elementi Discreti vengono eseguite seguendo l'algoritmo di *Figura 4.4*:



**Figura 4.4** - Schema dell'algoritmo utilizzato per il DEM (Poschel e Schwager, 2005)

1. **Inizializzazione:** le coordinate di posizione e orientazione delle particelle e le loro derivate temporali vengono lette dal file di inizializzazione, che ne specifica anche il tipo.
2. **Previsione:** prevede il calcolo delle coordinate e delle derivate temporali di queste ultime al successivo time step  $(t + \Delta t)$ , attraverso lo sviluppo in serie di Taylor dei valori al tempo  $t$ .
3. **Calcolo delle forze:** scelta delle coppie di interazione e successiva valutazione delle forze tra particella-particella e tra particella-parete, basata sulle grandezze ottenute dalla previsione.
4. **Correzione:** vengono corretti i valori ottenuti dalla previsione sulla base dei risultati ottenuti allo step precedente.
5. **Estrazione dei dati:** i risultati vengono registrati ad intervalli di tempo predefiniti o al verificarsi di determinate condizioni
6. **Termine del processo:** il processo ha fine ad un valore di tempo predefinito o al verificarsi di determinate condizioni; in caso contrario la simulazione riprende dallo step 2 e così via.

## 4.2. Lattice Boltzmann Method (LBM)

Il metodo reticolare di Boltzmann è uno strumento di recente sviluppo, utile per la simulazione dei fluidi, che negli ultimi decenni sta aumentando di popolarità grazie alle sue elevate prestazioni per sistemi anche molto complessi, divenendo così uno dei più promettenti metodi di analisi numerica per lo sviluppo futuro della fluidodinamica computazionale (Computational Fluid Dynamic, CFD).

Il LBM è un metodo del continuo particolarmente indicato nel trattamento di condizioni al contorno complesse ed è un mezzo efficace per quanto riguarda l'accoppiamento particelle-fluido (ad esempio nel caso dei debris flows).

In questo documento viene descritta una versione base del metodo, che può essere poi estesa, con gli opportuni accorgimenti del caso, a sistemi via via più complessi.

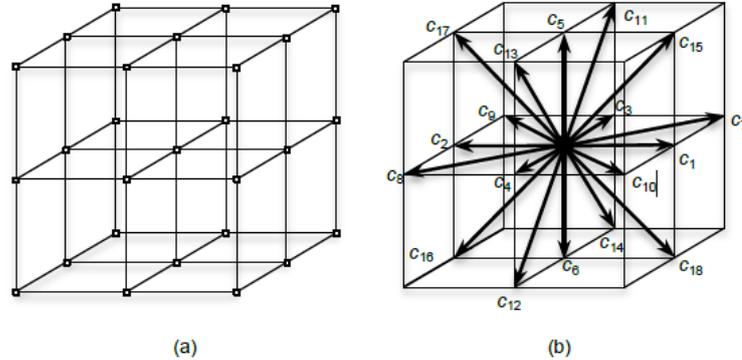
Negli approcci continui tradizionali, la conservazione della massa e del momento viene imposta direttamente tramite grandezze macroscopiche (come velocità e pressione), attraverso la soluzione delle equazioni di Navier-Stokes. Nel Lattice Boltzmann Method il fluido è rappresentato da un insieme di particelle che si muovono nello spazio, un concetto simile alla reale composizione dei fluidi visti come sistemi molecolari. Come nei fluidi reali, la conservazione di massa e momento si applica a livello microscopico ogni volta che avvengono delle collisioni. Nella realtà il numero di molecole presenti in un rilevante volume di fluido è talmente elevato da rendere quasi impossibile la simulazione numerica tramite computer; per risolvere questo problema, il LBM permette di ridurre il numero dei gradi di libertà rappresentando il tempo, lo spazio e le velocità in forma discreta. Spazio e tempo sono discretizzati anche nei metodi continui tradizionali di CFD, mentre la discretizzazione del campo delle velocità è una caratteristica del modello reticolare di Boltzmann, ereditata direttamente dal Lattice Automata, metodo da cui il LBM deriva.

I fondamenti teorici del LBM derivano dalla teoria cinetica dei gas. Si immagini un insieme di particelle gassose che si muovono in modo caotico nello spazio; per riprodurre il sistema si può utilizzare la funzione densità di probabilità  $f(\mathbf{x}, t, \mathbf{c})$ , che rappresenta la probabilità di trovare una particella nella posizione  $\mathbf{x}$  al tempo  $t$ , che si muove con velocità  $\mathbf{c}$ . Come sopra menzionato, imponendo una discretizzazione spaziale e temporale si riduce l'elevato numero di gradi di libertà del sistema.

Nella formulazione del LBM presentata in questo documento, si utilizza un reticolo cubico (*Figura 4.5 a*). Ad ogni time step  $\Delta t$  le particelle collocate nel nodo  $\mathbf{x}_0$  sono libere di muoversi nel nodo vicino  $\mathbf{x}_i$  e, poiché  $\Delta t$  è fissato, ogni movimento corrisponde ad una specifica velocità, calcolata come

$$\mathbf{c}_i = \frac{\mathbf{x}_i - \mathbf{x}_0}{\Delta t}. \quad (4.23)$$

Il LBM limita le posizioni ammissibili attraverso un set di nodi fissati. In particolare, per la simulazione della dinamica di un fluido, una scelta comune consiste nello scegliere i 19 nodi più vicini (Figura 4.5 b).



**Figura 4.5** - Reticolo cubico utilizzato nel LBM (a) e serie di velocità discrete nella configurazione D3Q19 (b) (Leonardi, 2015)

La Figura 4.5 b corrisponde alla seguente serie di velocità

$$c_i = \frac{\Delta x}{\Delta t} \begin{cases} (0,0,0) & \text{per } i=0 \\ (\pm 1,0,0) & \text{per } i=1,2 \\ (0,\pm 1,0) & \text{per } i=3,4 \\ (0,0,\pm 1) & \text{per } i=5,6 \\ (\pm 1,\pm 1,0) & \text{per } i=7..10 \\ (0,\pm 1,\pm 1) & \text{per } i=11..14 \\ (\pm 1,0,\pm 1) & \text{per } i=15..18. \end{cases} \quad (4.24)$$

Questo tipo di reticolo è denominato con la sigla D3Q19 (3 dimensioni, 19 vettori velocità) e, per ogni nodo di posizione  $\mathbf{x}$  al tempo  $t$ , si definiscono 19 funzioni di distribuzione di probabilità  $f_i$ , ciascuna corrispondente ad una delle velocità discrete:  $f_i(\mathbf{x}, t) = f_i(\mathbf{x}, t, \mathbf{c}_i)$ . Ciascuna di queste funzioni si può immaginare come un insieme di particelle che viaggiano alla stessa velocità ( $\mathbf{c}$  è la velocità all'interno del reticolo) e nella medesima direzione.

Un metodo per semplificare la notazione è quello di considerare una discretizzazione spaziale e temporale unitaria:  $\Delta x=1$  e  $\Delta t=1$ , così che anche  $c = \frac{\Delta x}{\Delta t}$  risulti unitaria. In questo modo le equazioni sono risolte velocemente con discretizzazione unitaria e i risultati vengono poi scalati in una elaborazione successiva.

Dopo aver definito il reticolo, si è in grado di stabilire le variabili macroscopiche di densità e velocità del fluido, rispettivamente indicate come  $\rho_f$  e  $\mathbf{u}_f$ , ad ogni nodo, calcolate tramite una semplice sommatoria (equazioni 4.25 e 4.26). Anche la densità del fluido è trattata come una variabile e la compressibilità del mezzo è limitata.

$$\rho_f(\mathbf{x}, t) = \sum_i f_i(\mathbf{x}, t), \quad (4.25)$$

$$\mathbf{u}_f(\mathbf{x}, t) = \frac{\sum_i f_i(\mathbf{x}, t) \mathbf{c}_i}{\rho_f(\mathbf{x}, t)}. \quad (4.26)$$

Inoltre, è possibile ricavare anche il valore della pressione, valutata come

$$p_f(\mathbf{x}, t) = c_s^2 \rho_f(\mathbf{x}, t), \quad (4.27)$$

dove  $c_s$  è la componente normale della velocità del suono del reticolo

$$c_s = \frac{c}{\sqrt{3}}, \quad (4.28)$$

che, nel caso di discretizzazione unitaria come sopra descritto, assume il valore  $c_s = \frac{1}{\sqrt{3}}$  m/s.

Ad ogni time step, le particelle che convergono allo stesso nodo collidono in quella determinata posizione e la dinamica delle collisioni è governata dall'equazione di Boltzmann (altro risultato derivante dalla teoria cinetica) che, in assenza di forze, è rappresentata come

$$\frac{\partial f}{\partial t} + \mathbf{c} \nabla f = \Omega_{coll}, \quad (4.29)$$

dove il termine  $\Omega_{coll}$  implementa l'effetto delle collisioni. Una forma semplificata dell'equazione di Boltzmann, utilizzata all'interno del reticolo, è la seguente

$$f_i(\mathbf{x} + \mathbf{c}_i, t + 1) = f_i(\mathbf{x}, t) + \Omega_{coll,i}(\mathbf{x}, t). \quad (4.30)$$

Un punto cruciale nello sviluppo del LBM è la definizione di  $\Omega_{coll}$ , la cui precisa espressione formulata da Boltzmann non è usata per i casi pratici di interesse in questo elaborato di tesi, ma viene utilizzata una forma approssimata proposta da Bhatnagar, Gross e Krook nel 1954

$$\Omega_{coll,i} = \frac{f_i^{eq} - f_i}{\tau}, \quad (4.31)$$

dove  $\tau$  è una costante temporale (tempo di rilassamento) che controlla come difficilmente il sistema sia spinto verso la condizione di equilibrio.

La distribuzione di equilibrio di Maxwell-Boltzmann  $f^{eq}$  è data dall'espressione

$$f^{eq} = \frac{\rho_f}{(2\pi RT)^{3/2}} e^{-\frac{(c-\mathbf{u}_f)^2}{2RT}}, \quad (4.32)$$

dove  $R$  è la costante universale dei gas, prodotto tra la costante di Boltzmann ( $k_B=1.3806488 \cdot 10^{-23}$  J/K) e il numero di Avogadro ( $N_A=6.02214129 \cdot 10^{23}$  mol<sup>-1</sup>), che assume il valore  $R=8.314472$  Pa·m<sup>3</sup>/(mol·K), e  $T$  rappresenta la temperatura. L'equazione 4.32 può essere riscritta in forma discreta tramite uno sviluppo in serie di Taylor di  $\mathbf{u}_f$  fino al secondo ordine, con  $c = \sqrt{3RT}$  si ottiene

$$f_i^{eq}(\mathbf{u}_f, \rho_f) = \rho_f w_i \left( 1 + 3\mathbf{c}_i \mathbf{u}_f + \frac{9}{2} (\mathbf{c}_i \mathbf{u}_f)^2 - \frac{3}{2} \mathbf{u}_f \mathbf{u}_f \right). \quad (4.33)$$

I pesi  $w_i$  sono scelti in modo che l'operatore di collisione conservi massa e quantità di moto. Per il reticolo di configurazione D3Q19 valgono

$$w_i = \begin{cases} 1/3 & \text{per } i = 1 \\ 1/18 & \text{per } i = 2..7 \\ 1/36 & \text{per } i = 8..19 \end{cases} \quad (4.34)$$

A questo punto, con le leggi sopra descritte, la dinamica di un fluido newtoniano può già essere risolta. La viscosità del fluido  $\eta$  è legata direttamente al tempo di rilassamento  $\tau$  seguendo la legge

$$\eta = \frac{\tau - 1/2}{3}. \quad (4.35)$$

Se si ha la presenza di forze di volume agenti sul sistema (ad esempio la gravità), viene aggiunto un operatore addizionale  $\Omega_{force}$ , rappresentato dall'equazione

$$\Omega_{force,i} = w_i \left( 1 - \frac{1}{2\tau} \right) [3(\mathbf{c}_i - \mathbf{u}_f) + \mathbf{c}_i(\mathbf{c}_i \mathbf{u}_f)] \mathbf{F}, \quad (4.36)$$

dove  $\mathbf{F}$  rappresenta un campo di forza uniforme. L'equazione 4.26 che rappresenta la velocità del fluido a livello macroscopico si modifica nella maniera seguente

$$\mathbf{u}_f(\mathbf{x}, t) = \frac{\sum_i f_i(\mathbf{x}, t) \mathbf{c}_i + \frac{\mathbf{F}}{2}}{\rho_f(\mathbf{x}, t)}. \quad (4.37)$$

Nel LBM se abbiamo a che fare con un fluido non newtoniano, dobbiamo introdurre una formulazione in cui la viscosità risulti variabile, e non più costante come invece si rivela per i fluidi newtoniani.

L'equazione 4.35 viene quindi corretta per i fluidi non newtoniani, tenendo in conto anche della variabilità spaziale di  $\eta$ , introducendo un tempo di rilassamento  $\tau$  variabile anche nello spazio, e diventa

$$\eta(\mathbf{x}, t) = \frac{\tau(\mathbf{x}, t) - \frac{1}{2}}{3}, \quad (4.38)$$

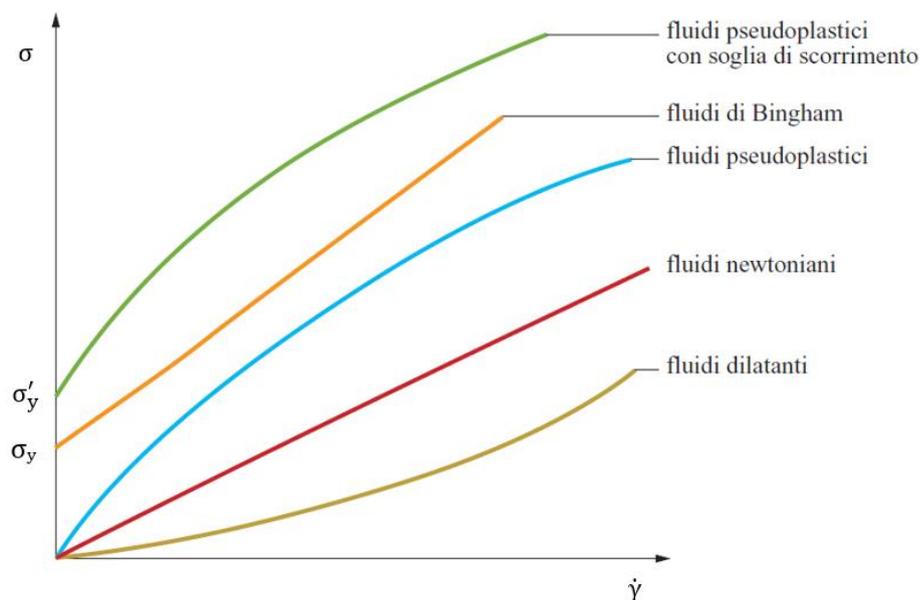
dalla quale, per inversione, si ottiene un tempo di rilassamento in funzione della viscosità

$$\tau(\mathbf{x}, t) = \frac{1}{2} + 3\eta(\mathbf{x}, t). \quad (4.39)$$

#### 4.2.1. Fluidi newtoniani e non newtoniani: leggi reologiche

- *Fluidi newtoniani: legge newtoniana laminare*

Un fluido newtoniano è un fluido la cui viscosità è costante e indipendente dalla velocità di deformazione. Segue un legame di proporzionalità diretta tra lo sforzo di deformazione (o di taglio)  $\sigma$  e la velocità di deformazione (o shear rate)  $\dot{\gamma}$ , rappresentato nel grafico di *Figura 4.6*.



**Figura 4.6** - Legame tra sforzo di deformazione  $\sigma$  e velocità di deformazione  $\dot{\gamma}$  per diversi tipi di fluido (Treccani)

L'equazione che descrive il comportamento di un fluido Newtoniano è la seguente

$$\sigma = \eta \dot{\gamma}. \quad (4.40)$$

Il codice utilizzato però non calcola  $\sigma$ , ma fornisce il valore di viscosità dinamica, ricavata dal rapporto tra sforzo e velocità di deformazione

$$\eta = \frac{\sigma}{\dot{\gamma}}, \quad (4.41)$$

in questo caso  $\eta$  risulta essere costante.

- *Fluidi non newtoniani: legge di Bingham*

Per rappresentare un flusso granulare come un fluido continuo, la formulazione newtoniana non è adatta, poiché non tiene in considerazione alcune importanti proprietà presenti invece nei fluidi non newtoniani.

Un fluido non newtoniano è un fluido la cui viscosità non ha un valore costante ma varia a seconda dello sforzo di deformazione applicato. Il comportamento reologico di questi tipi di fluidi è evidenziato in *Figura 4.6*.

In particolare, il modello plastico di Bingham è descritto dalla legge

$$\sigma = \sigma_y + \eta_B \dot{\gamma}, \quad (4.42)$$

dove  $\sigma_y$  è la tensione di snervamento (il pedice “y” significa “yield”) e  $\eta_B$  la viscosità plastica, detta anche viscosità di Bingham (da cui deriva il pedice “B”).

Partendo dall'equazione 4.42 e dividendola per la velocità di deformazione si ricava la viscosità dinamica calcolata dal codice

$$\eta = \eta_B + \frac{\sigma_y}{\dot{\gamma}}. \quad (4.43)$$

Diversamente dai solutori tradizionali di CFD in cui il calcolo di  $\dot{\gamma}$  necessita la ricostruzione delle derivate spaziali delle velocità, nel LBM la velocità di deformazione è calcolata localmente attraverso la funzione di distribuzione di probabilità, tramite la seguente formula

$$\dot{\gamma}_{ab}(\mathbf{x}, t) = \frac{3}{2\tau(\mathbf{x}, t)} \sum_i \mathbf{c}_{i,a} \mathbf{c}_{i,b} \left( f_i(\mathbf{x}, t) - f_i^{eq}(\mathbf{x}, t) \right), \quad (4.44)$$

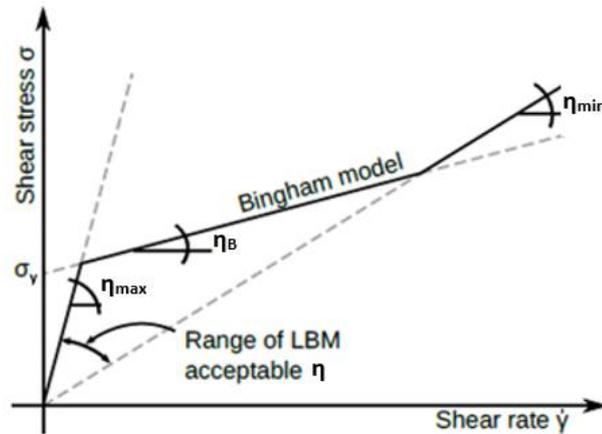
dove per gli indici  $a$  e  $b$  si utilizza la notazione di Einstein.

La capacità del metodo reticolare di Boltzmann di calcolare la velocità di deformazione localmente comporta un grande vantaggio computazionale.

Tornando alla legge di Bingham (equazione 4.43), si ha che quando  $\dot{\gamma}(\mathbf{x}, t) \rightarrow 0$  la viscosità diverge, tendendo ad infinito. Ciò comporta problemi di instabilità del codice, per questo in letteratura si possono trovare diverse alternative di soluzione. La soluzione al problema qui adottata è relativamente semplice e facile da implementare e consiste nel limitare il tempo di rilassamento  $\tau$  tra due valori:  $\tau_{min}$  e  $\tau_{max}$ . I valori di questi due limiti sono determinati empiricamente e valgono  $\tau_{min}=0.500001$  e  $\tau_{max}=1.8$ , scelta ragionevole in quanto rappresenta un giusto compromesso tra accuratezza e prestazioni, effettuata considerando che  $\tau$  vari con la legge seguente

$$\tau(\mathbf{x}, t) = \frac{1}{2} + \frac{\Delta t^{LBM} \eta(\mathbf{x}, t)}{c_s^2 \rho_f (\Delta l^{LBM})^2}. \quad (4.45)$$

La reologia che ne consegue è un modello tri-lineare (Figura 4.7). Se  $\eta_B > \eta_{min}$ , situazione facile da ottenere adattando il time step, la reologia si riduce a un modello bi-lineare.



**Figura 4.7** - Modello tri-lineare ottenuto dall'approssimazione del modello plastico di Bingham (Leonardi, 2015)

I valori di  $\eta_{min}$  e  $\eta_{max}$  si ricavano a partire rispettivamente da quelli di  $\tau_{min}$  e  $\tau_{max}$ , a seconda della discretizzazione spaziale e temporale utilizzata, invertendo l'equazione 4.45.

- *Fluidi non newtoniani: legge attritiva o di Coulomb*

La reologia attritiva è descritta dalla legge di Coulomb

$$\sigma = p \tan(\varphi_a), \quad (4.46)$$

in cui  $p = \rho gh \cos\theta$  rappresenta la pressione, data dal prodotto della densità, dell'accelerazione di gravità, dell'altezza del fluido e del coseno dell'angolo di inclinazione della superficie rispetto all'orizzontale. Il termine  $\varphi_a$  rappresenta invece l'angolo di attrito apparente, che tiene conto della presenza di acqua e di altre fasi che hanno permesso il passaggio a un continuo equivalente; in particolare risulta  $\tan(\varphi_a) = (1 - r_u) \tan(\varphi)$ , dove  $r_u$  è un parametro che tiene conto dell'acqua e  $\varphi$  è l'angolo di resistenza al taglio (comunemente chiamato angolo di attrito).

Nelle simulazioni effettuate e riportate in questo documento, si adotta una superficie orizzontale ( $\theta=0^\circ$ ) e non si ha presenza di acqua, in quanto si lavora in condizioni di materiale secco ( $r_u=0$ ), perciò l'equazione 4.46 diventa

$$\sigma = p \tan(\varphi), \quad (4.47)$$

dalla quale si ricava la viscosità dinamica

$$\eta = \frac{p \tan(\varphi)}{\dot{\gamma}}. \quad (4.48)$$

A differenza dei modelli non newtoniani prima descritti, in quello attritivo vi è una dipendenza dalla pressione  $p$  e si ha che l'arresto di un corpo in movimento dipende dall'angolo di attrito interno al materiale  $\varphi$  supposto nel codice utilizzato anche pari all'angolo di attrito alla base.

Anche in questo caso, si ha che se  $\dot{\gamma}(\mathbf{x}, t) \rightarrow 0$  la viscosità diverge al valore infinito, e se  $\dot{\gamma}(\mathbf{x}, t) \rightarrow \infty$  la viscosità diventa uguale a zero. Per questi due casi limite il codice risulta instabile, perciò si adotta la stessa soluzione vista in precedenza per la legge di Bingham, con la differenza che per la reologia di Coulomb, per evitare  $\eta=0$  si introduce un valore iniziale di viscosità  $\eta_0$  pari proprio a  $\eta_{min}$ .

La nuova legge attritiva risulta quindi essere

$$\eta = \eta_0 + \frac{p \tan(\varphi)}{\dot{\gamma}}. \quad (4.49)$$

- *Fluidi non newtoniani: legge di Voellmy*

La legge di Voellmy è espressa dall'equazione

$$\sigma = p \tan(\varphi) + \rho_f g \frac{u_f^2}{\xi}, \quad (4.50)$$

nella quale il primo termine rappresenta la componente attritiva, mentre il secondo termine rappresenta la componente collisionale/turbolenta, infatti  $\xi$  è il coefficiente di Voellmy che rappresenta proprio un coefficiente di turbolenza. Anche in questo caso si dovrebbe utilizzare l'angolo di attrito apparente  $\varphi_a$  ma, come spiegato precedentemente, nei casi di interesse delle simulazioni svolte in questo documento  $\varphi_a \cong \varphi$ .

Si ricava il valore di viscosità dinamica

$$\eta = \frac{p \tan(\varphi) + \rho_f g \frac{u_f^2}{\xi}}{\dot{\gamma}}. \quad (4.51)$$

- *Fluidi non newtoniani: legge  $\mu(I)$*

La reologia  $\mu(I)$ , di recente sviluppo, si può descrivere come segue

$$\sigma = p \mu(I). \quad (4.52)$$

L'equazione 4.52 è simile a quella della legge attritiva (equazione 4.47), in quanto si ha che anche in questo caso la tensione di deformazione (o di taglio)  $\sigma$  è proporzionale alla pressione  $p$ . La differenza consiste nel termine di proporzionalità rappresentato dal coefficiente di attrito  $\mu$ , che per la legge di Coulomb valeva  $\mu = \tan(\varphi)$ , mentre per la reologia in esame è dipendente dal numero inerziale  $I$ , perciò si ha  $\mu = \mu(I)$ .

Il numero inerziale  $I$  è una grandezza adimensionale ed è definito come

$$I = \frac{d \dot{\gamma}}{\sqrt{p/\rho}}, \quad (4.53)$$

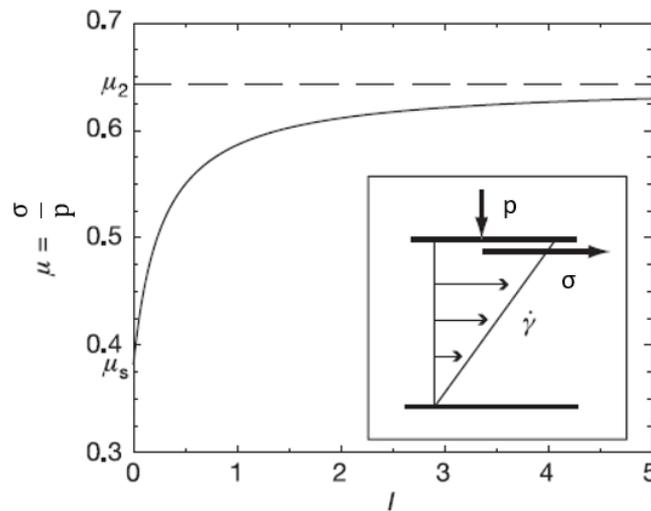
dove  $d$  è il diametro dei grani e  $\rho$  la loro densità. Rappresenta il rapporto tra due scale temporali: una microscopica inerziale governata dal termine  $d/\sqrt{p/\rho}$ , che rappresenta il tempo di caduta di una particella sotto la pressione  $p$ , e una macroscopica  $1/\dot{\gamma}$ , legata alla deformazione media a taglio. Valori bassi di  $I$  corrispondono a un regime quasi-statico, in quanto la deformazione macroscopica

è lenta se paragonata ai riarrangiamenti microscopici, mentre valori grandi di  $I$  corrispondono a flussi rapidi.

Una volta definito  $I$ , il coefficiente di attrito effettivo  $\mu(I)$  si determina con la seguente espressione

$$\mu(I) = \mu_s + \frac{\Delta\mu}{\frac{I_0}{I} + 1}, \quad (4.54)$$

in cui il valore dei coefficienti  $\mu_s$ ,  $\Delta\mu = \mu_2 - \mu_s$  e  $I_0$  dipende dal tipo di materiale. Il coefficiente di attrito effettivo parte da un valore critico  $\mu_s$  e converge a un valore limite  $\mu_2$  ad alti numeri inerziali  $I$  (Figura 4.8).



**Figura 4.8** – Esempio di coefficiente di attrito  $\mu$  funzione del parametro adimensionale  $I$  (Jop, Forterre e Pouliquen, 2006)

A partire dalla legge espressa nell'equazione 4.46, dividendola per la velocità di deformazione (o shear rate)  $\dot{\gamma}$ , si ottiene l'espressione della viscosità dinamica  $\eta$

$$\eta = \frac{p \mu(I)}{\dot{\gamma}}. \quad (4.55)$$

In questa reologia, si ha inoltre che anche la frazione di volume solida  $\phi$  è funzione del numero inerziale  $I$ , perciò si aggiunge per completezza che  $\phi = \phi(I)$  e, conoscendo la formula del parametro adimensionale  $I$  (equazione 4.47), si definisce l'espressione di  $\phi(I)$  nel modo seguente

$$\phi(I) = \phi_{max} + (\phi_{min} - \phi_{max})I. \quad (4.56)$$

Infine, per i modelli reologici sopra descritti, il codice permette di attivare il solutore di turbolenza, aggiungendo alle leggi il parametro di viscosità turbolenta  $\eta_t$ , sviluppato secondo il modello di Smagorinsky-Lilly, la cui formulazione è la seguente

$$\eta_t = \rho_f (C_s \Delta x)^2 \dot{\gamma}, \quad (4.57)$$

in cui  $\Delta x$  è la discretizzazione spaziale del reticolo e  $C_s$  la costante di Smagorinsky. Il codice considera una discretizzazione unitaria e i valori vengono poi scalati in una successiva elaborazione, in modo da risolvere l'equazione più velocemente. In questo modo l'equazione 4.50 si semplifica e diventa

$$\eta_t = c \dot{\gamma}, \quad (4.58)$$

dove  $c=C_s^2$  è la costante di turbolenza.

## 5. Collasso di una colonna granulare tramite approccio discreto (DEM)

Una tra le più comuni situazioni di flusso studiate, che mette in risalto diversi aspetti particolari del fenomeno, è il collasso di una colonna di materiale granulare, che ha catturato l'attenzione dei ricercatori per la sua semplicità, la ricchezza di osservazioni dinamiche e i suoi vasti campi di applicazione (dall'industria alla geofisica).

In questa tesi analizziamo in particolare il collasso di una colonna granulare su superficie orizzontale: una pila rettangolare formata da materiale granulare secco viene fatta crollare per effetto della gravità, distribuendosi su un piano orizzontale e infine arrestandosi. Di fondamentale importanza risulta la valutazione dell'altezza finale massima e della distanza di arresto del flusso, che vedremo essere dipendenti dal parametro  $a$  (aspect ratio), dato dal rapporto tra l'altezza iniziale della colonna e la sua larghezza iniziale

$$a = \frac{H_i}{L_i}. \quad (5.1)$$

Gli obiettivi di questa simulazione numerica tramite approccio discreto sono dimostrare come il Discrete Element Method sia in grado di riprodurre qualitativamente lo stesso comportamento dei risultati sperimentali, verificare la correlazione esistente tra i parametri interni del materiale (coefficiente di attrito interno tra le particelle e coefficiente di rotolamento) e l'angolo di riposo che si forma dopo il collasso.

Infine, andando a variare il parametro  $a$ , si verifica l'influenza dell'aspect ratio sull'altezza finale e sulla distanza di arresto.

L'esperimento fisico su cui si basano le analisi è stato creato e riprodotto in Colombia (Universidad de los Andes) dallo studente di ingegneria civile magistrale Gustavo Adolfo Pinzon Forero.

## 5.1. Calibrazione dei parametri e corrispondenza con i risultati sperimentali

Il primo step da affrontare è quello di verificare la conformità della simulazione numerica agli elementi discreti con i risultati sperimentali.

La configurazione iniziale dell'esperimento consiste in una colonna di materiale granulare (particelle sferiche di vetro) di diametro  $d=2.0$  mm (con una tolleranza di  $\pm 5\%$ ), altezza iniziale  $H_i=14.0$  cm, larghezza iniziale  $L_i=3.5$  cm e spessore  $W=1.2\cdot d$ , collocata tra quattro pareti in vetro. L'aspect ratio  $a$  (equazione 5.1) avrà quindi un valore pari a 4.

Altre caratteristiche del materiale sono il modulo di Young  $E=210$  GPa e la densità del materiale solido  $\rho=3750$  kg/m<sup>3</sup>.

In *Tabella 5.1* si riportano sinteticamente tutte le grandezze di interesse.

Il collasso della colonna granulare avviene per la rimozione di una parete al tempo  $t=0$  s e termina al tempo  $t=\infty$ , quando tutte le particelle sono completamente ferme.

**Tabella 5.1** - *Dati iniziali della configurazione sperimentale*

Diametro particelle ( $d$ )	2.0 mm
Altezza iniziale colonna ( $H_i$ )	14.0 cm
Larghezza iniziale colonna ( $L_i$ )	3.5 cm
Spessore o profondità cella ( $W=1.2\cdot d$ )	0.24 cm
Aspect Ratio ( $a$ )	4
Densità materiale ( $\rho$ )	3750 kg/m <sup>3</sup>
Modulo di Young ( $E$ )	210 GPa

Per poter effettuare la simulazione DEM è necessario conoscere la configurazione iniziale delle particelle, in particolare bisogna creare un file contenente raggio, posizioni, velocità lineari e angolari di ogni singola particella.

Attraverso il software MatLab, è possibile creare una colonna ordinata di particelle ugualmente distanziate l'una dall'altra sia in direzione orizzontale  $x$  che in direzione verticale  $z$  (*Figura 5.1 a*) e di ottenere il file iniziale contenente le informazioni di raggio, posizioni e velocità per questa particolare configurazione ordinata di particelle. Il file ottenuto sarà il punto di partenza della nostra simulazione agli elementi discreti, in quanto verrà inserito come file iniziale delle particelle nel file di configurazione per una prima simulazione in cui la colonna ordinata di particelle creata con MatLab viene fatta crollare verticalmente per effetto della gravità, raggiungendo una configurazione finale compattata corrispondente alla configurazione iniziale sperimentale ( $H_i=14.0$  cm e  $L_i=3.5$  cm), che sarà dunque il punto di partenza per la simulazione successiva del crollo della pila (*Figura 5.1 b*).

Di seguito si riporta il codice MatLab utilizzato per creare il file iniziale delle particelle ordinate (misure in metri):

```
% diametro particelle
d= 0.002;

%dimensioni cella
w= 1.2*d;
h= 0.14;
l=0.035;

%tot particelle
p_tot= 1270;

%dispersione diametro
disp=0.05*d;

d_larger=d+disp;

%distanza tra particelle
spacing=d_larger*1.05;

%numero particelle in lunghezza (tronca per difetto)
p_l=floor(l/spacing);

%numero particelle in altezza (tronca per eccesso)
p_h=ceil(p_tot/p_l);

p_tot=p_h*p_l;

particleFile='particle_init.dat';
fileID=fopen(particleFile, 'w');

fprintf(fileID, '%i\n',p_tot);

for i=1:p_l
    for j=1:p_h

        p_y=random('unif',(w/2)-0.0001,(w/2)+0.0001);

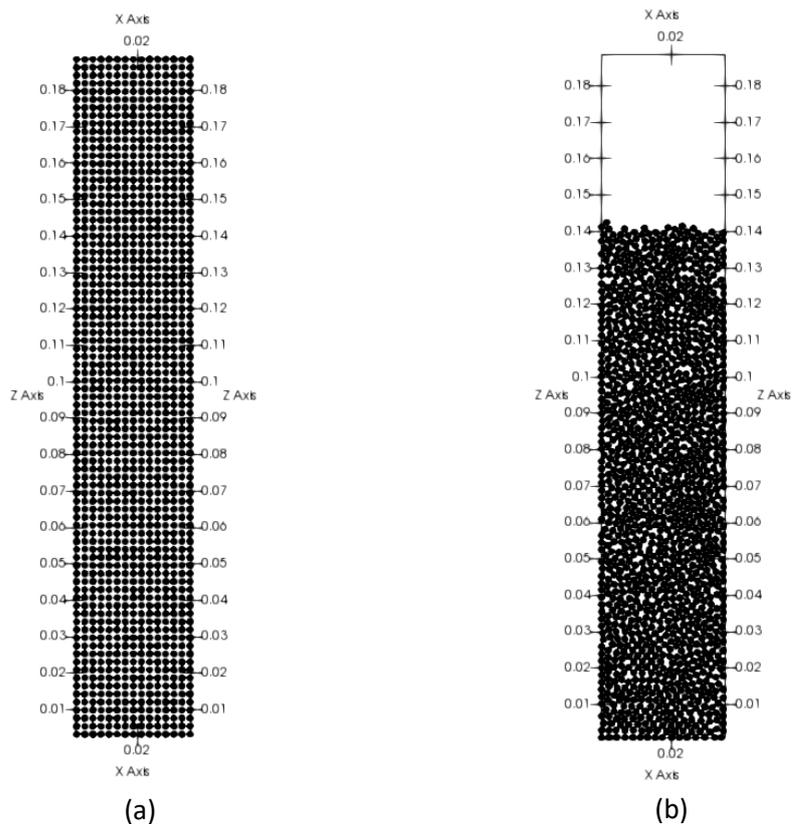
        d_random=random('unif',d-disp,d_larger);
        r_random=d_random/2;

        p_x=(i+0.5)*spacing;
        p_z=(j+0.5)*spacing;

        c=(i-1)*p_h+(j-1);

        fprintf(fileID,'%i 1 %f %f %f %f %f 0.0 0.0 0.0 0.0 0.0 0.0 1.0 0.0 0.0 0.0 0.0 0.0 0.0 0.0\n',c,
r_random, p_x, p_y, p_z);
    end
end

fclose(fileID);
```



**Figura 5.1** - Colonna ordinata di particelle ugualmente distanziate (a) e configurazione compattata utilizzata come punto di partenza per le successive simulazioni (b)

Il passo successivo è quello di simulare il crollo della colonna granulare a partire dalla configurazione compattata ottenuta, di cui si conoscono raggio, posizione lungo  $x$ ,  $y$  e  $z$ , velocità lineari e angolari lungo  $x$ ,  $y$  e  $z$  di ogni particella.

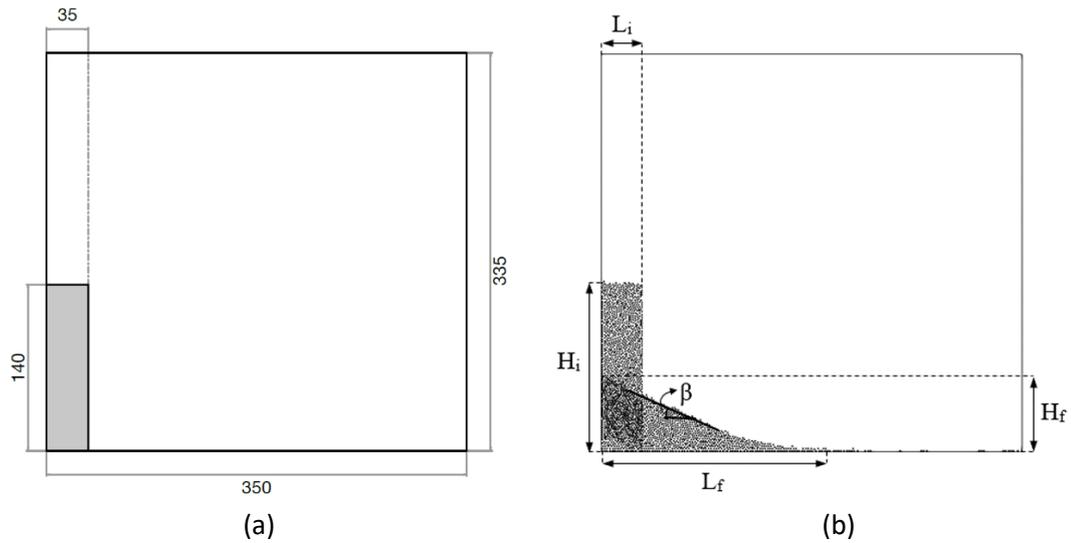
Nel file di configurazione, oltre ai diversi parametri del materiale e alle forze esterne (nel nostro caso solo quella gravitativa in direzione verticale), vengono inserite le dimensioni del dominio del campo di lavoro, come illustrato in *Figura 5.2 a*.

L'obiettivo è raggiungere una configurazione finale a  $t=\infty$  (tempo di arresto del flusso) il più vicina possibile a quella sperimentale (i valori di altezza finale massima  $H_f$ , larghezza finale  $L_f$  e angolo di riposo dell'esperimento sono mostrati in *Tabella 5.2*), e per ottenere ciò si deve lavorare sulla corretta calibrazione dei parametri.

**Tabella 5.2** - Configurazione finale ottenuta dal risultato sperimentale

Altezza finale massima ( $H_f$ )	6.5 cm
Distanza di arresto ( $L_f$ )	19.0 cm
Angolo di riposo medio $\left(\alpha = \tan^{-1} \frac{H_f}{L_f}\right)$	$18.89^\circ \cong 19^\circ$

Il modello di contatto normale utilizzato nella simulazione DEM è di tipo lineare, con una rigidezza  $k$  pari a  $3 \cdot 10^4$  N/m, rigidezza minima al di sopra della quale i risultati delle simulazioni non cambiano, scelta in modo che si abbiano compenetrazioni molto piccole tra le particelle durante il contatto, e un coefficiente di restituzione  $\zeta$  pari a 0.1. Per quanto riguarda il contatto tangenziale si utilizza il modello di Cundall & Strack con attrito statico, e un coefficiente di smorzamento viscoso  $\alpha_t$  pari a 1.



**Figura 5.2** - Dimensioni del dominio del campo di lavoro [mm] (a) ed esempio delle dimensioni e forma del flusso prima e dopo il collasso (b)

I parametri da calibrare sono quelli interni al materiale: il coefficiente di attrito interno tra le particelle  $\mu_p$  e il coefficiente di attrito tra particelle e pareti  $\mu_w$ . Il coefficiente di rotolamento delle particelle  $c$  (rolling coefficient), che rappresenta un momento che si oppone alla rotazione, è stato fissato a un valore pari a 0.02.

Dopo varie simulazioni di tentativo, la combinazione di parametri che meglio rappresenta la configurazione finale sperimentale, raggiungendo lo stesso risultato della misura della distanza di arresto  $L_f$ , è rappresentata in *Tabella 5.3*.

**Tabella 5.3** - Parametri interni della simulazione DEM che meglio rappresentano il risultato sperimentale

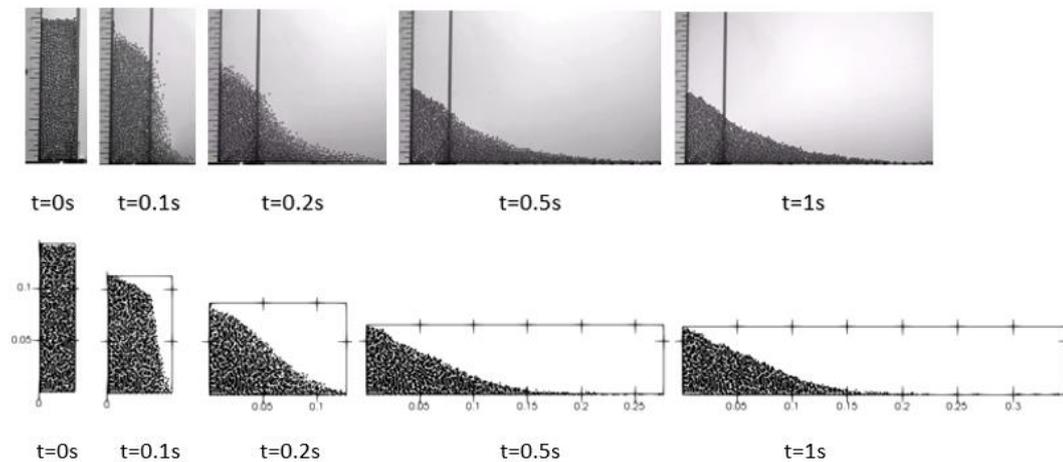
Coefficiente di attrito tra particelle ( $\mu_p$ )	0.35
Coefficiente di attrito particelle-pareti ( $\mu_w$ )	0.35
Coefficiente di rotolamento particelle ( $c$ )	0.02

In *Tabella 5.4* si riportano i valori di altezza massima, distanza di arresto e angolo di riposo della configurazione finale della simulazione DEM dopo il collasso.

**Tabella 5.4** - Configurazione finale ottenuta dalla simulazione numerica DEM

Altezza finale massima ( $H_f$ )	6.35 cm
Distanza di arresto ( $L_f$ )	19.0 cm
Angolo di riposo medio ( $\alpha = \tan^{-1} \frac{H_f}{L_f}$ )	$18.48^\circ \cong 18.5^\circ$

La *Figura 5.3* mostra la rappresentazione grafica della sequenza di collasso a diversi istanti di tempo successivi, fino al tempo di arresto, mettendo a confronto il collasso sperimentale e quello numerico con il metodo discreto.

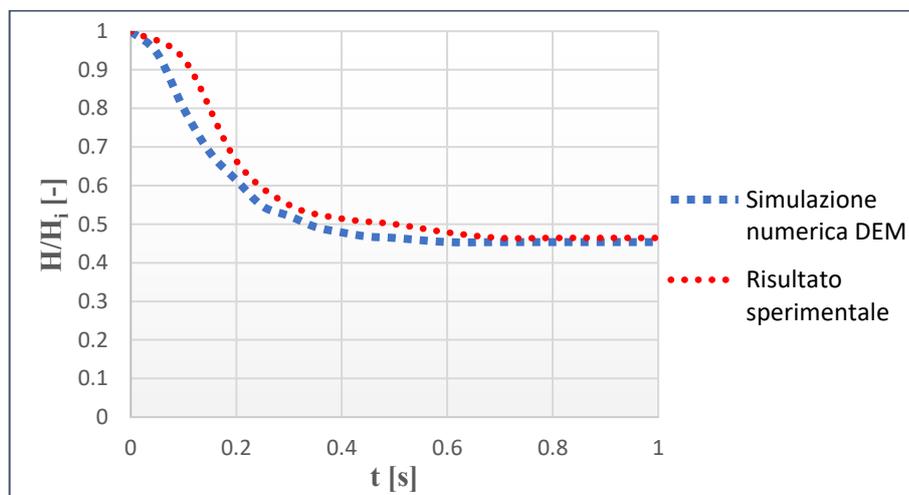


**Figura 5.3** - Sequenza di collasso della colonna granulare: risultati sperimentali (in alto) e simulazione numerica DEM (in basso)

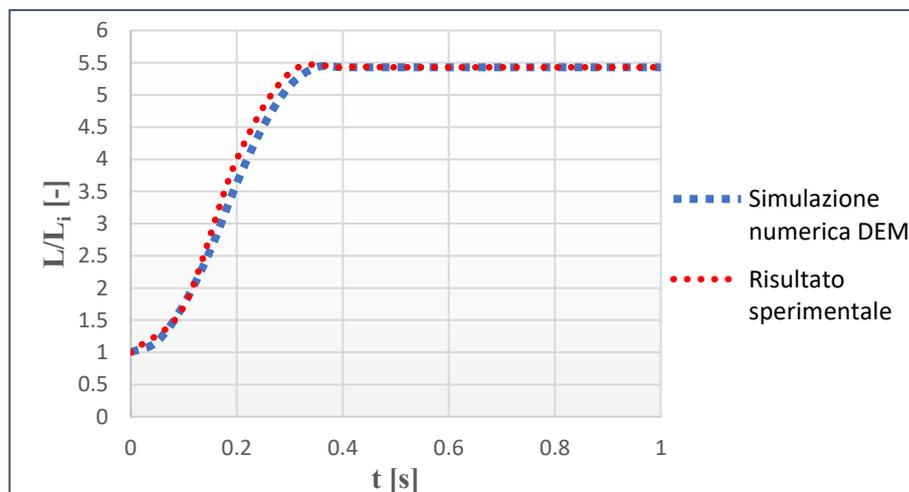
Dai risultati ottenuti possiamo affermare che il Discrete Element Method è adatto a rappresentare con ottima approssimazione i risultati sperimentali del collasso di una colonna granulare, in particolar modo la distanza di arresto risulta identica a quella ricavata dall'esperienza e pari a  $L_f=19.0$  cm, mentre l'altezza finale ottenuta tramite simulazione discreta sottostima leggermente quella sperimentale ma differisce da essa solo di pochi decimi di centimetro (0.15 cm). Anche la forma finale all'arresto del flusso ottenuta dalla simulazione è conforme a quella sperimentale.

Un aspetto negativo del metodo DEM è invece l'elevato costo computazionale, infatti per avere risultati più precisi possibile si è usato un critical ratio (parametro di stabilizzazione:  $\Delta t = \text{critical ratio} \cdot t_{coll}$ ) molto basso, pari a 0.001, andando dunque a discapito della durata dell'analisi numerica: una simulazione interrotta dopo 2 secondi ha una durata di computazione maggiore di 9 ore.

Infine, nelle *Figure 5.4* e *5.5* si riportano rispettivamente gli andamenti al variare del tempo della massima altezza normalizzata (rispetto al valore iniziale  $H_i$ ) e della lunghezza di diffusione normalizzata del flusso (rispetto a  $L_i$ ), mettendo a confronto i valori ottenuti tramite l'analisi numerica con quelli sperimentali. Quello che si evince è nuovamente il fatto che i risultati numerici ottenuti con il DEM sottostimino di pochissimo quelli sperimentali: questa differenza è maggiormente evidente per i valori delle altezze massime, in particolar modo nella fase che segue l'istante iniziale e in quella centrale, mentre per quanto riguarda la lunghezza di diffusione del flusso si osserva una maggiore conformità raggiungendo nella fase finale lo stesso valore del risultato sperimentale.



**Figura 5.4** - *Massima altezza normalizzata al variare del tempo: simulazione DEM e risultato sperimentale*



**Figura 5.5** - *Lunghezza di diffusione normalizzata al variare del tempo: simulazione DEM e risultato sperimentale*

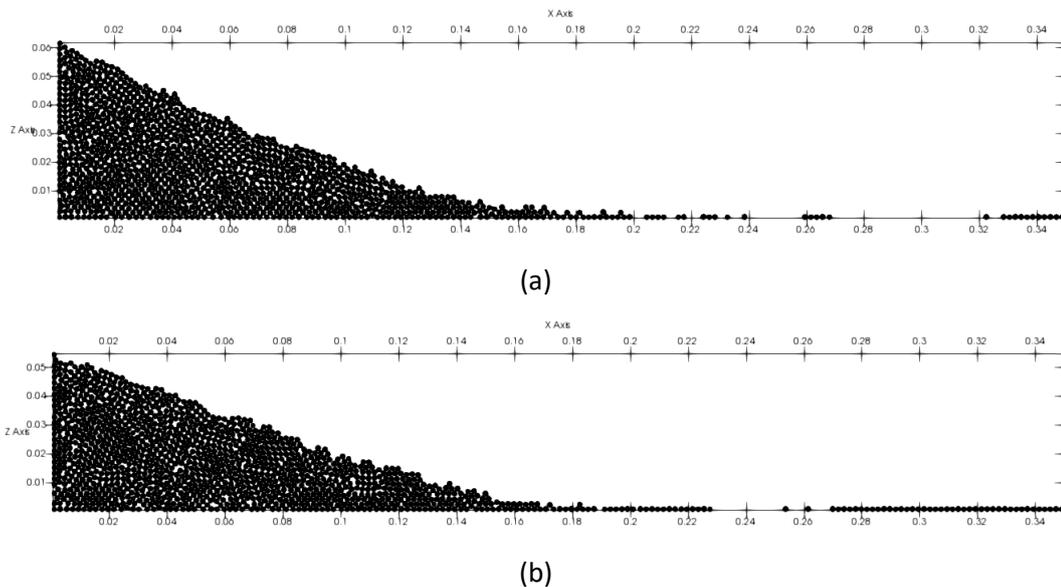
## 5.2. Correlazione tra i parametri interni del materiale granulare e l'angolo di riposo

Una volta calibrati i parametri, si vuole ricercare la correlazione esistente tra i parametri interni e l'angolo di riposo formatosi dopo l'arresto del flusso granulare.

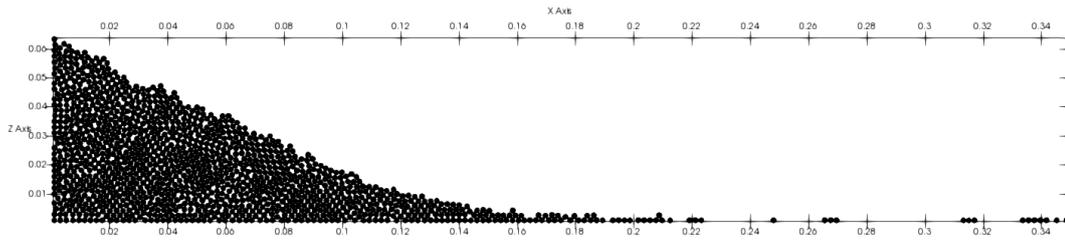
In particolare, si è deciso di procedere mantenendo costante il coefficiente di attrito particelle-pareti pari a  $\mu_w=0.35$  ( $\cong 19.3^\circ$ ) e, variando il coefficiente di attrito interno tra le particelle  $\mu_p=0.25, 0.35$  e  $0.45$ , si osserva come varia l'angolo di riposo.

Per ognuno dei tre casi inoltre, si effettuano due simulazioni, una con coefficiente di rotolamento tra le particelle  $c$  pari a  $0.02$  e l'altra in assenza di rolling ( $c=0$ ). Tutti gli altri parametri rimangono invariati rispetto alle simulazioni effettuate in precedenza.

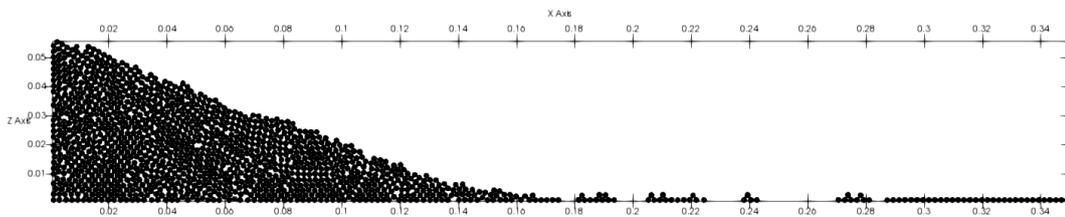
I risultati delle analisi sono riportati nelle *Figure 5.6, 5.7 e 5.8*, che mostrano la rappresentazione grafica delle diverse configurazioni all'istante finale di arresto del flusso, e in *Tabella 5.5*, che invece ne fornisce i valori numerici.



**Figura 5.6** - Rappresentazione grafica all'istante finale di arresto del flusso granulare per  $\mu_w=0.35$ ,  $\mu_p=0.25$ ,  $c=0.02$  (a),  $c=0$  (b)

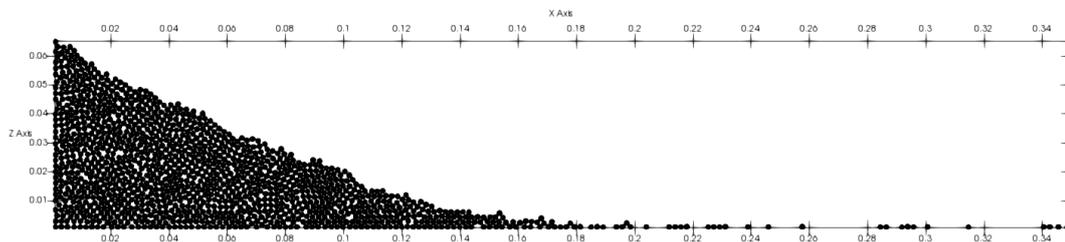


(a)

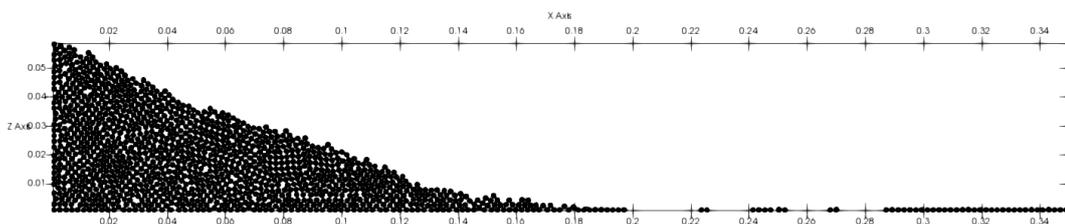


(b)

**Figura 5.7** - *Rappresentazione grafica all'istante finale di arresto del flusso granulare per  $\mu_w=0.35$ ,  $\mu_p=0.35$ ,  $c=0.02$  (a),  $c=0$  (b)*



(a)



(b)

**Figura 5.8** - *Rappresentazione grafica all'istante finale di arresto del flusso granulare per  $\mu_w=0.35$ ,  $\mu_p=0.45$ ,  $c=0.02$  (a),  $c=0$  (b)*

**Tabella 5.5** - Valori dell'angolo di riposo al variare dei parametri interni del materiale (per  $\mu_w=0.35$ )

Coefficiente di attrito tra particelle $\mu_p$	Coefficiente di attrito tra particelle e pareti $\mu_w$	Coefficiente di rotolamento $c$	Altezza finale massima $H_f$	Distanza di arresto $L_f$	Angolo di riposo medio $\alpha$	Angolo di riposo del tratto centrale lineare $\beta$
0.25	0.35	0.02	6.15 cm	20.0 cm	17.1°	20°
		0	5.45 cm	18.0 cm	16.9°	18°
0.35	0.35	0.02	6.35 cm	19.0 cm	18.5°	24°
		0	5.55 cm	17.0 cm	18°	20°
0.45	0.35	0.02	6.60 cm	18.0 cm	20.1°	24.5°
		0	5.85 cm	18.0 cm	18°	20°

Dai valori ottenuti in presenza di coefficiente di rotolamento (rolling  $c=0.02$ ) si può affermare come l'angolo di riposo dipenda dai parametri interni del materiale, in quanto cresce al crescere del coefficiente di attrito tra le particelle, a parità di coefficiente di attrito particelle-pareti, poichè l'altezza finale aumenta e la distanza di arresto diminuisce all'aumentare di  $\mu_p$ . Lo stesso vale in maniera approssimativa anche nel caso di assenza di coefficiente di rotolamento. Passando dal caso in presenza di rolling a quello in assenza di rolling, per gli stessi valori di coefficienti di attrito  $\mu_p$  e  $\mu_w$ , l'angolo di riposo diminuisce.

Nelle simulazioni effettuate con  $c=0$  si nota un numero elevato di particelle in sequenza accumulate nella parte terminale del campo di lavoro, dovute al fatto che in assenza di rolling, la velocità di rotazione delle particelle diminuisce meno rapidamente, mantenendo valori sempre relativamente elevati anche dopo numerosi secondi. Per questo motivo le simulazioni effettuate con rolling nullo sono state fermate dopo circa 5 secondi, in modo che le velocità diminuissero fino a risultare molto piccole (sebbene con  $c=0$  per i valori di velocità di rotazione non si arrivi mai a zero). Le analisi con rolling pari a 0.02 sono state fermate dopo 2 secondi, nonostante il flusso si arrestasse già intorno all'istante di tempo  $t=1$  s o poco più tardi in ognuna della tre simulazioni.

Inoltre, nei casi in assenza di rolling, si è reso necessario l'uso di un critical ratio estremamente basso, pari a 0.0005 (nel caso di  $c=0.02$  si è usato il valore visto in precedenza di 0.001), che ha portato ad un tempo computazionale ancora più elevato: una simulazione fermata dopo 5 secondi ha una durata di circa 40 ore. È stato opportuno usare un valore così basso di critical ratio poichè con valori più elevati si avevano errori di instabilità numerica del codice, visibili dal fatto che l'energia totale durante la simulazione qualche volta cresceva invece di diminuire.

Per un'ulteriore verifica dei risultati di correlazione tra i parametri interni del materiale e l'angolo di riposo, le stesse simulazioni viste in precedenza per il caso di rolling pari a 0.02 sono state effettuate per un valore di coefficiente di attrito tra particelle e pareti  $\mu_w=0.45$  ( $\cong 24.2^\circ$ ), sempre variando il coefficiente di attrito interno tra le particelle  $\mu_p=0.25, 0.35$  e  $0.45$ .

I risultati sono riportati sinteticamente in *Tabella 5.6* e, come ci si aspettava, rispetto ai casi precedenti di  $\mu_w=0.35$ , a parità di  $\mu_p$ , l'altezza finale è più elevata nel caso di  $\mu_w=0.45$ , la distanza di arresto è più piccola e di conseguenza i valori di angolo di riposo medio  $\alpha=\tan^{-1}(H_f/L_f)$  e del tratto centrale  $\beta$  (*Figura 5.2 b*) sono più elevati.

**Tabella 5.6** - Valori dell'angolo di riposo al variare dei parametri interni del materiale (per  $\mu_w=0.45$ )

Coefficiente di attrito tra particelle $\mu_p$	Coefficiente di attrito tra particelle e pareti $\mu_w$	Coefficiente di rotolamento $c$	Altezza finale massima $H_f$	Distanza di arresto $L_f$	Angolo di riposo medio $\alpha$	Angolo di riposo del tratto centrale lineare $\beta$
0.25	0.45	0.02	6.20 cm	17.5 cm	19.4°	22°
0.35	0.45	0.02	6.55 cm	18.0 cm	20°	25°
0.45	0.45	0.02	6.70 cm	16.5 cm	22.1°	26.5°

Infine si riportano i valori di energia totale finale di tutte le simulazioni effettuate (*Tabella 5.7*), dati dall'energia cinetica sommata a quella potenziale. In realtà il valore riportato corrisponde alla sola energia potenziale, in quanto all'istante finale l'energia cinetica è praticamente nulla, essendo tendenti a zero i valori di velocità.

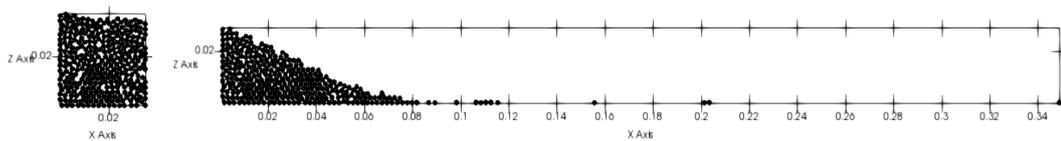
**Tabella 5.7** - Valori di energia finale per ogni simulazione effettuata

Coefficiente di attrito tra particelle $\mu_p$	Coefficiente di attrito tra particelle e pareti $\mu_w$	Coefficiente di rotolamento $c$	Energia finale $\equiv$ Energia potenziale $E_n$
0.25	0.35	0	0.00335 J
		0.02	0.00371 J
	0.45	0.02	0.00396 J
0.35	0.35	0	0.00351 J
		0.02	0.00389 J
	0.45	0.02	0.00414 J
0.45	0.35	0	0.00360 J
		0.02	0.00406 J
	0.45	0.02	0.00423 J

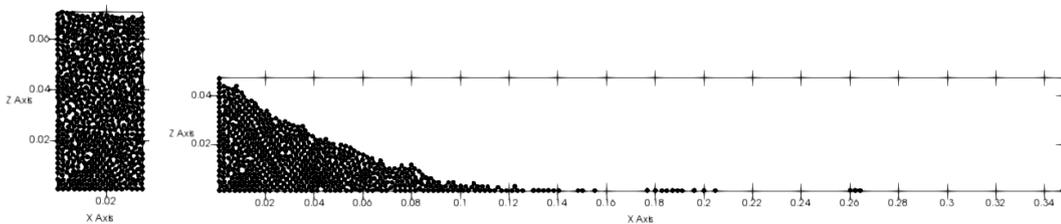
### 5.3. Influenza dell'aspect ratio $a$ sull'altezza finale e la distanza di arresto del flusso granulare

L'ultimo passo è quello di esaminare come il parametro di aspect ratio  $a$  influenzi la legge di scala che emerge dalle misure della massima altezza finale del flusso granulare e della sua distanza di arresto.

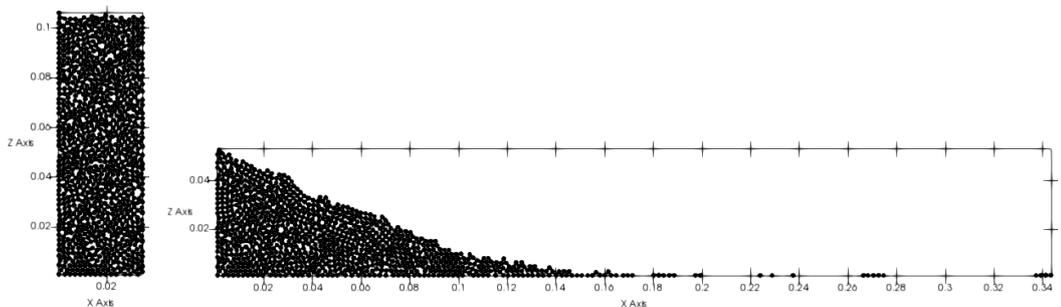
Si è deciso di procedere mantenendo la larghezza iniziale della colonna granulare costante di valore  $L_i=3.5$  cm, andando a variare progressivamente l'altezza iniziale  $H_i$ . In questo modo si ottengono sei colonne con diversa altezza, caratterizzate da valori differenti di aspect ratio pari ad  $a=1, 2, 3, 4, 5$  e  $6$ . Per ognuna di queste si effettua la simulazione di collasso con metodo DEM ottenendo diversi valori di altezza finale e distanza di arresto (*Figure 5.9, 5.10, 5.11, 5.12, 5.13 e 5.14*). I parametri interni del materiale sono quelli risultati in precedenza più conformi al risultato sperimentale:  $\mu_p=0.35, \mu_w=0.35, c=0.02$ .



**Figura 5.9** - Configurazione iniziale e finale per aspect ratio  $a=1$



**Figura 5.10** - Configurazione iniziale e finale per aspect ratio  $a=2$



**Figura 5.11** - Configurazione iniziale e finale per aspect ratio  $a=3$

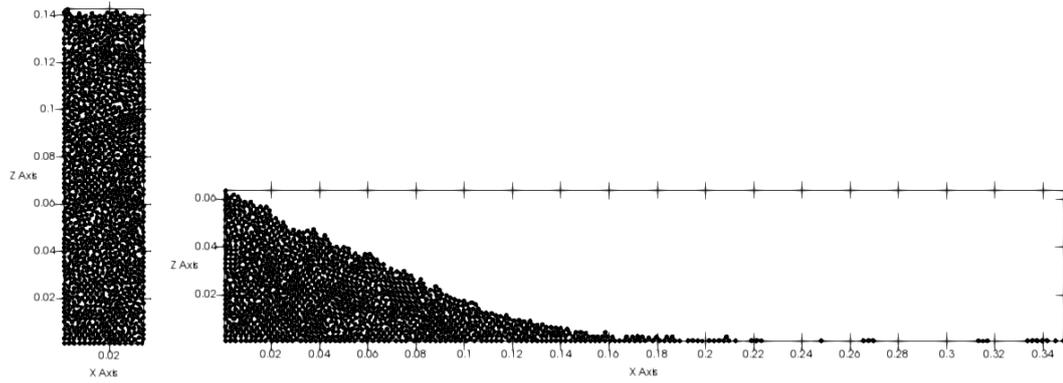


Figura 5.12 - Configurazione iniziale e finale per aspect ratio  $a=4$

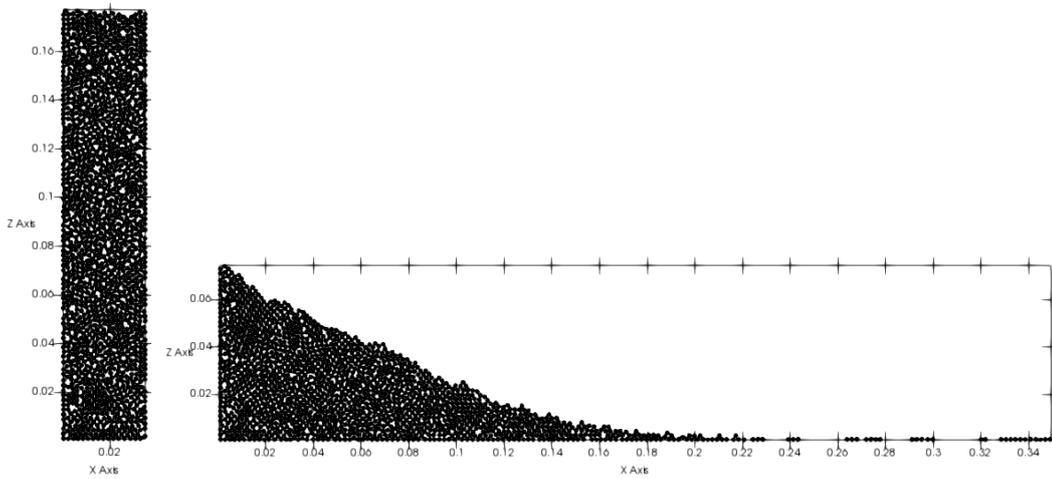


Figura 5.13 - Configurazione iniziale e finale per aspect ratio  $a=5$

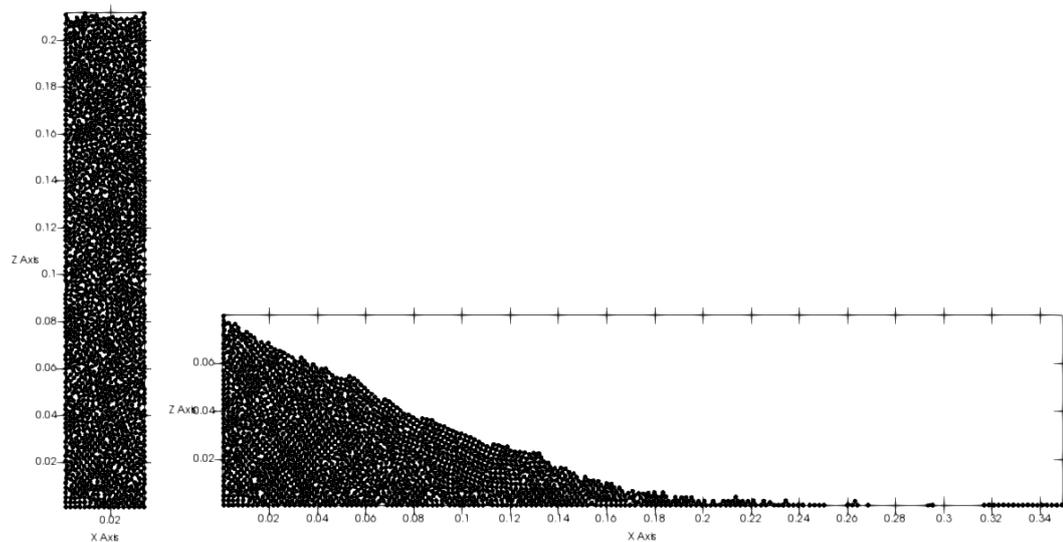


Figura 5.14 - Configurazione iniziale e finale per aspect ratio  $a=6$

I valori dei risultati ottenuti dalle analisi sono sinteticamente riportati in *Tabella 5.8* e si osserva che all'aumentare dell'aspect ratio la massima altezza finale aumenta progressivamente, così come la distanza di arresto.

Per completezza si riporta che la colonna granulare di aspect ratio  $a=1$  è composta da 315 particelle ed ha un'altezza iniziale  $H_i=3.5$  cm.

La colonna di aspect ratio  $a=2$  è composta da 630 particelle ed ha un'altezza iniziale  $H_i=7.0$  cm.

Le colonne di aspect ratio  $a=3$  e  $a=4$  sono rispettivamente composte da 945 e 1275 particelle e le rispettive altezze iniziali sono pari a 10.5 cm e 14.0 cm.

Infine le due colonne di aspect ratio  $a=5$  e  $a=6$  contengono rispettivamente 1590 e 1905 particelle ed hanno altezze iniziali pari a 17.5 cm e 21.0 cm.

**Tabella 5.8** - Valori di altezza finale e distanza di arresto al variare dell'aspect ratio

Aspect ratio $a$	Altezza finale massima $H_f$	Distanza di arresto $L_f$	Altezza finale massima adimensionale $h$	Distanza di arresto adimensionale $l$
1	2.85 cm	7.5 cm	0.8143	1.1429
2	4.70 cm	12.5 cm	0.6714	2.5714
3	5.30 cm	16.5 cm	0.5048	3.7143
4	6.35 cm	19.0 cm	0.4536	4.4286
5	7.40 cm	22.0 cm	0.4229	5.2857
6	7.95 cm	23.5 cm	0.3786	5.7143

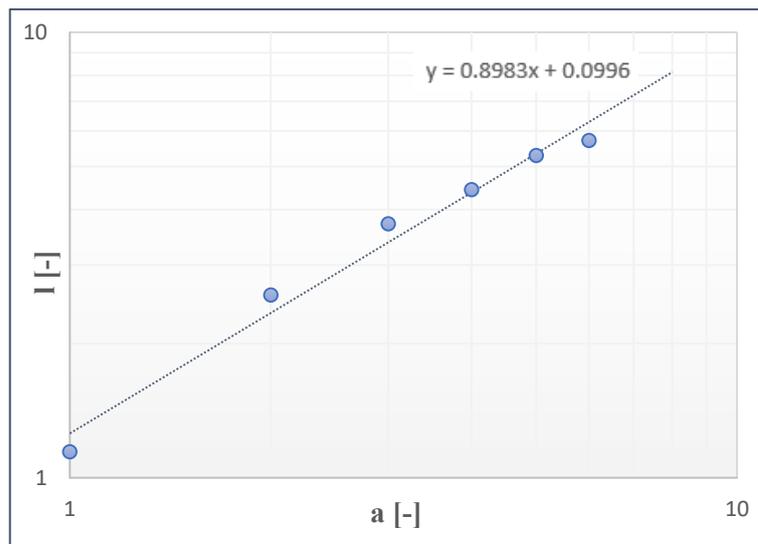
La distanza di arresto adimensionale è definita come

$$l = \frac{(L_f - L_i)}{L_i}, \quad (5.2)$$

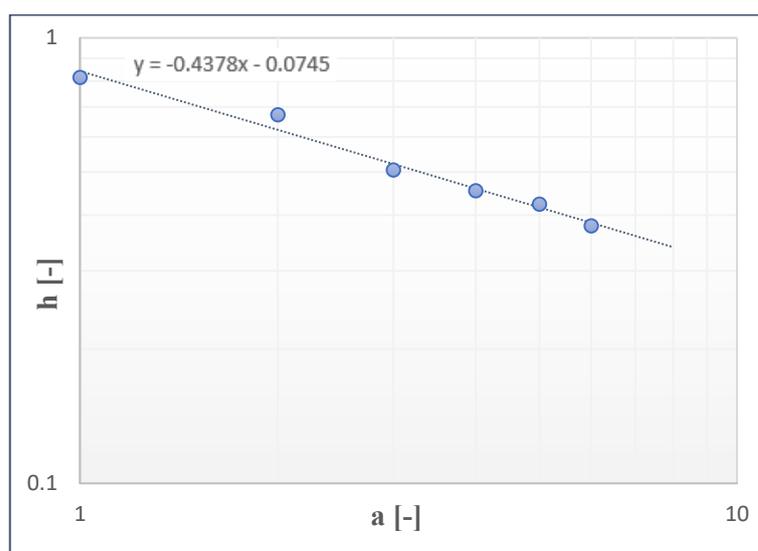
mentre la massima altezza finale adimensionale è calcolata con l'espressione

$$h = \frac{H_f}{H_i}. \quad (5.3)$$

Per meglio rappresentare questa legge di scala, si riportano di seguito due grafici a dispersione, dove in ascissa si hanno i valori di aspect ratio  $a$  e in ordinata la distanza di arresto adimensionale  $l$  (*Figura 5.15*) e la massima altezza finale adimensionale  $h$  (*Figura 5.16*), entrambi in scala logaritmica per meglio raffigurare il comportamento lineare dei punti, che coincide con l'aumento progressivo della distanza di arresto adimensionale e la diminuzione progressiva della massima altezza finale adimensionale all'aumentare del valore di aspect ratio.



**Figura 5.15** - Aumento progressivo della distanza di arresto adimensionale all'aumentare dell'aspect ratio



**Figura 5.16** - Diminuzione progressiva della massima altezza finale adimensionale all'aumentare dell'aspect ratio

Dalle Figure 5.15 e 5.16 risulta inoltre che, per piccoli valori di aspect ratio, la distanza di arresto adimensionale  $l$  è circa uguale ad  $a$ , infatti per  $a=1$  si ha un valore di  $l$  pari a circa 1.1. Lo stesso risultato si ottiene anche per l'altezza finale adimensionale: per  $a=1$  si ottiene  $h$  circa pari a 0.8.

All'aumentare dell'aspect ratio ( $a \geq 2$ ) i valori di  $h$  diminuiscono e si discostano dal valore di  $a$ , mentre i valori crescenti della distanza di arresto adimensionale  $l$  risultano sempre molto vicini a quelli dell'aspect ratio (Tabella 5.8).

Si può dunque affermare che, come già dimostrato in altri studi, la forma e le dimensioni finali del flusso dipendono dalle proporzioni iniziali della colonna granulare. Inoltre, vi è una relazione lineare tra i valori logaritmici della massima altezza finale adimensionale  $h$  e della distanza di arresto adimensionale  $l$  all'aumentare del valore di aspect ratio  $a$ .

Infine, sebbene non sia stato validato in questo documento di tesi, alcuni studi a riguardo (come riportato nell'articolo scientifico "Planar collapse of a granular column: Experiments and discrete simulations" di Lacaze, Phillips e Kerswell) dimostrano che la pendenza della retta di tendenza dei punti è funzione del parametro di attrito particelle-pareti  $\mu_w$ .

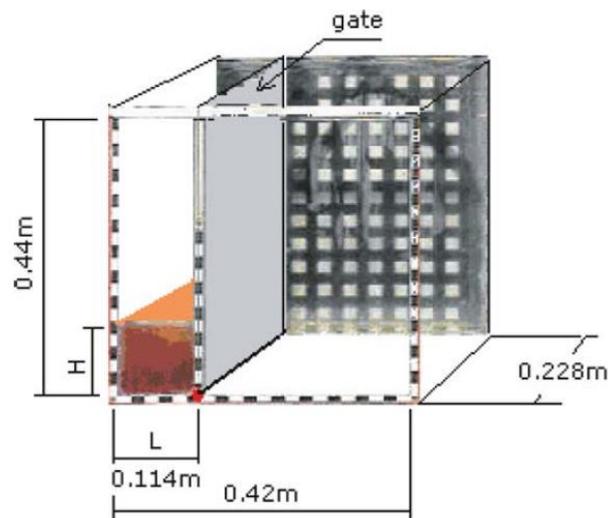
## 6. Collasso di una colonna liquida tramite approccio continuo (LBM)

I flussi granulari sono riproducibili attraverso un approccio continuo come fluidi non newtoniani, in cui la viscosità varia al variare della velocità di deformazione e lo sforzo di taglio è funzione non lineare della velocità di deformazione (o gradiente di velocità).

In questo capitolo si vuole validare il metodo reticolare di Boltzmann e dimostrare come esso sia adatto a riprodurre anche il comportamento di fluidi Newtoniani. Nello specifico, si vuole riprodurre il collasso tridimensionale di una colonna di fluido Newtoniano a comportamento laminare e verificare come la simulazione numerica effettuata con il LBM dia risultati corrispondenti a quelli sperimentali.

L'apparato sperimentale consiste in una scatola di vetro divisa in due parti, separate da una parete che verrà rimossa al momento del collasso, le cui dimensioni sono illustrate in *Figura 6.1*. La parte sinistra del box viene riempita con dello shampoo.

Si effettuano due differenti simulazioni di collasso della colonna liquida, la prima con aspect ratio  $a=1$  e la seconda con  $a=2$ , mantenendo invariata la larghezza iniziale del liquido  $L_i=11.4$  cm e variandone l'altezza iniziale.

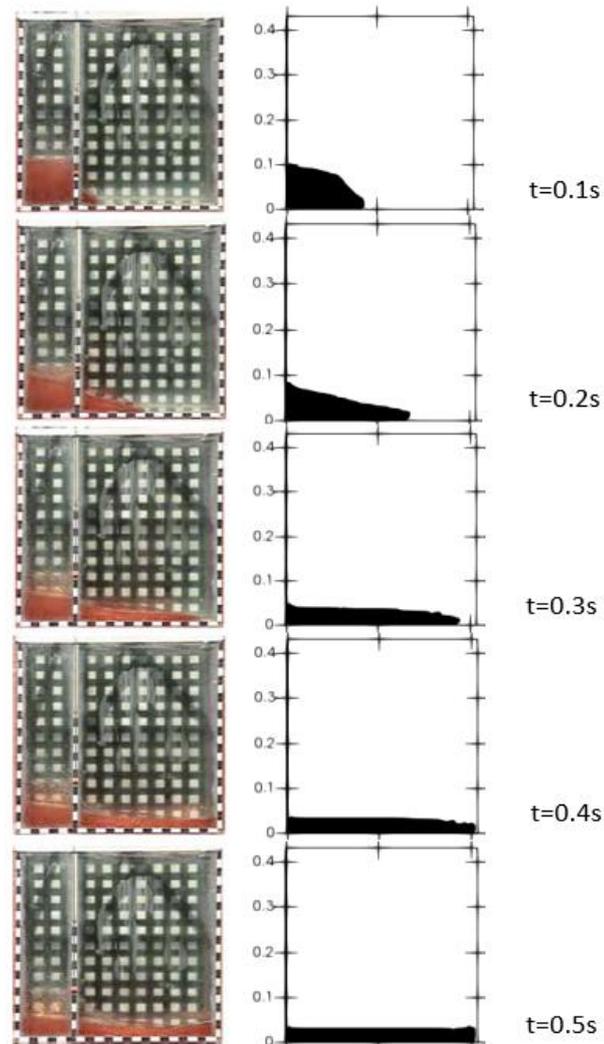


**Figura 6.1** - *Collasso di una colonna liquida: apparato sperimentale e dimensioni del dominio 3D (Cruchaga, Celentano e Tezduyar, 2007)*

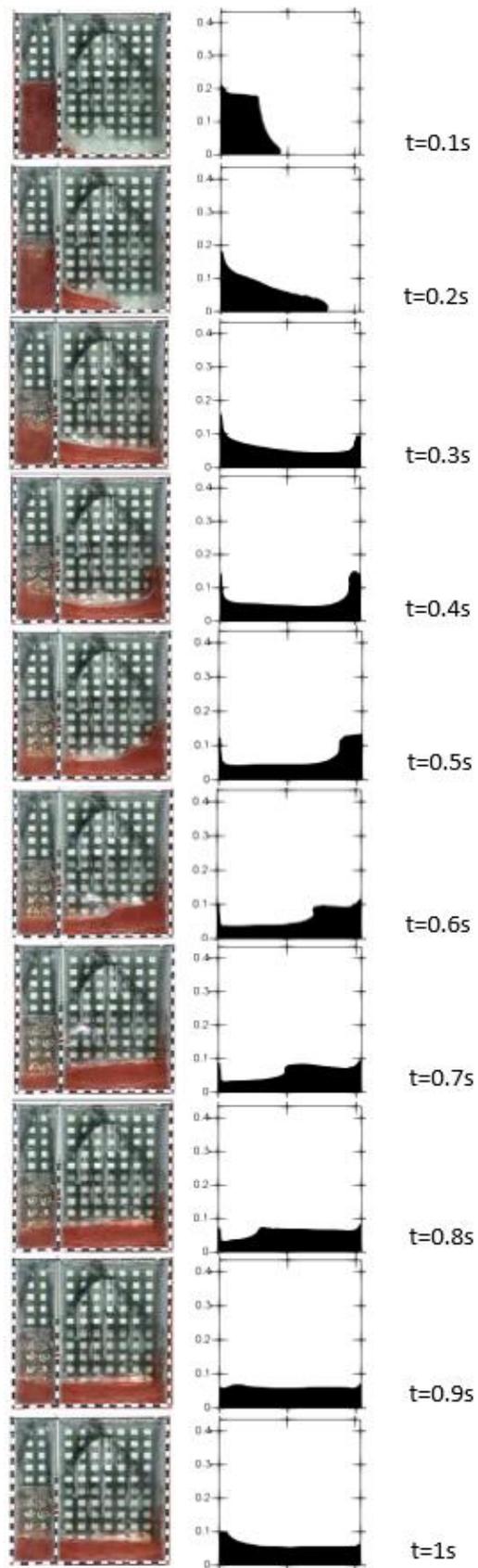
Le proprietà del materiale fluido utilizzate nelle simulazioni sono: densità dello shampoo pari a  $\rho=1042 \text{ kg/m}^3$  (misurata in laboratorio, assunta direttamente dai dati sperimentali forniti nell'articolo "Collapse of a liquid column: numerical simulation and experimental validation" di Cruchaga, Celentano e Tezduyar) e viscosità dello shampoo pari a  $\eta=2 \text{ Pa}\cdot\text{s}$ , parametro ottenuto tramite calibrazione, che ha portato alla miglior corrispondenza con i risultati sperimentali.

Per quanto riguarda le dimensioni del reticolo di Boltzmann, i valori di discretizzazione spaziale e temporale utilizzati nelle analisi sono rispettivamente:  $\Delta x=4.0\cdot 10^{-3} \text{ m}$  e  $\Delta t=1.0\cdot 10^{-4} \text{ s}$ .

Nelle *Figure 6.2* e *6.3* sono rappresentate le sequenze di collasso della colonna liquida rispettivamente di aspect ratio  $a=1$  e  $a=2$ , a differenti istanti di tempo successivi, mettendo a confronto i risultati sperimentali e quelli numerici riprodotti attraverso il LBM con legge reologica Newtoniana laminare.



**Figura 6.2** - Sequenza di collasso della colonna liquida per  $a=1$ : risultati sperimentali (a sinistra) e simulazione numerica LBM (a destra)



**Figura 6.3** - Sequenza di collasso della colonna liquida per  $a=2$ : risultati sperimentali (a sinistra) e simulazione numerica LBM (a destra)

Dalle immagini sopra riportate, si osserva come il Lattice Boltzmann Method sia indicato per effettuare simulazioni anche di fluidi a comportamento Newtoniano, in quanto si ha una buona corrispondenza dei risultati delle simulazioni numeriche con i risultati sperimentali durante i diversi istanti temporali.

Nel caso di aspect ratio  $a=1$  il comportamento del fluido è pressoché identico a quello del caso sperimentale, mentre all'aumentare dell'aspect ratio ( $a=2$ ) si osserva una leggera differenza della forma del fluido nel tempo, che però resta in ogni caso molto simile a quella del risultato sperimentale.

## 7. Collasso di una colonna granulare tramite approccio continuo (LBM)

In questo capitolo si continua ad approfondire il problema del collasso di una colonna di materiale granulare secco su superficie orizzontale, delle stesse dimensioni ( $H_i=14.0$  cm e  $L_i=3.5$  cm, *Figura 5.2*) e proprietà del caso studiato in precedenza nel capitolo 5.

La differenza è che in questo caso il flusso granulare non è più studiato come un insieme particellare, ma viene rappresentato come un fluido continuo equivalente, attraverso il Lattice Boltzmann Method.

Lo scopo è quello di dimostrare come anche l'approccio continuo sia in grado di riprodurre fedelmente il comportamento reale, attraverso il confronto tra le simulazioni numeriche effettuate con il LBM e i risultati sperimentali.

Come accennato in precedenza, il passaggio da un flusso granulare a un fluido continuo non può essere descritto attraverso la legge reologica newtoniana, perché non tiene conto di importanti aspetti e proprietà che caratterizzano invece i fluidi non newtoniani, quali la dipendenza non lineare dello sforzo di deformazione (o di taglio) dal gradiente di velocità (o velocità di deformazione) e la variabilità della viscosità al variare di queste grandezze.

In particolare vengono effettuate diverse simulazioni, con l'utilizzo di tre differenti leggi reologiche per i fluidi non newtoniani: la legge di Bingham, la legge attritiva (o di Coulomb) e la legge di Voellmy. Si vuole valutare quale tra queste sia la reologia più adatta a descrivere il comportamento del flusso in esame.

La scelta delle leggi reologiche è di fondamentale importanza per gli approcci del continuo, poiché il materiale può assumere comportamenti diversi in funzione della reologia scelta. Per ciascuna legge vengono calibrati gli opportuni parametri, in modo che la simulazione numerica si avvicini il più possibile al comportamento sperimentale.

## 7.1. Calibrazione dei parametri e corrispondenza con i risultati sperimentali

L'esperimento fisico di riferimento utilizzato in questo paragrafo è lo stesso visto nel capitolo 5, le cui dimensioni iniziali e i parametri del materiale sono riportati in *Tabella 5.1*. I valori di altezza massima, distanza di arresto e angolo di riposo medio della configurazione finale sperimentale dopo il collasso si ritrovano in *Tabella 5.2* ( $H_f=6.5$  cm,  $L_f=19.0$  cm,  $\alpha \cong 19^\circ$ ).

Per quanto riguarda le analisi numeriche effettuate con il LBM, per le dimensioni del reticolo di Boltzmann vengono utilizzati valori di discretizzazione spaziale e temporale rispettivamente pari a  $\Delta x=1.6 \cdot 10^{-3}$  m e  $\Delta t=2.0 \cdot 10^{-6}$  s. La densità del fluido vale  $\rho_f=1713$  kg/m<sup>3</sup> ed è calcolata a partire dal valore noto di densità del materiale solido  $\rho_p=3750$  kg/m<sup>3</sup>, che moltiplicato per il volume occupato dalle particelle restituisce la massa del materiale, la quale a sua volta divisa per il volume totale occupato dalla colonna di fluido porta alla determinazione del valore di densità del fluido  $\rho_f$ . Conoscendo questi parametri e quelli di  $\tau_{min}=0.500001$  e  $\tau_{max}=1.8$ , il software, attraverso l'inversione dell'equazione 4.39, è in grado di calcolare i valori di viscosità minima e massima, rispettivamente pari a  $\eta_{min}=0.00073$  Pa·s e  $\eta_{max}=950.2$  Pa·s.

### 7.1.1. Legge di Bingham

La prima legge reologica utilizzata è quella di Bingham (equazioni 4.42 e 4.43), in cui i parametri del materiale che devono essere calibrati sono due: la tensione di snervamento  $\sigma_y$  e la viscosità plastica (o viscosità di Bingham)  $\eta_B$ .

Dopo aver effettuato diverse analisi, le uniche combinazioni di parametri in grado di fare arrestare il fluido in corrispondenza della distanza di arresto sperimentale ( $L_f=19.0$  cm) sono quelle riportate in *Tabella 7.1*.

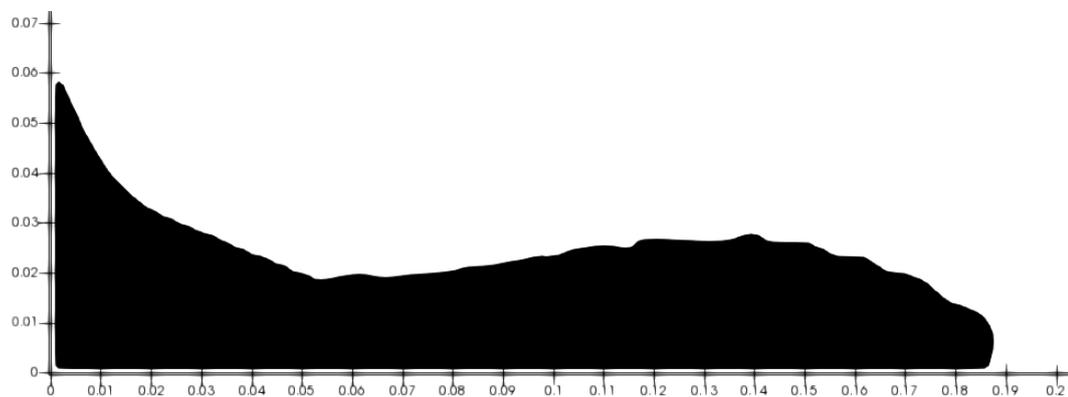
**Tabella 7.1** - Calibrazione dei parametri per la reologia di Bingham

Tensione di snervamento $\sigma_y$	Viscosità plastica (o di Bingham) $\eta_B$	Distanza di arresto $L_f$
225 Pa	0.01 Pa·s	18.8 cm
220 Pa	0.01 Pa·s	19.2 cm
210 Pa	0.1 Pa·s	19.2 cm
160 Pa	1.0 Pa·s	18.9 cm
155 Pa	1.0 Pa·s	19.3 cm

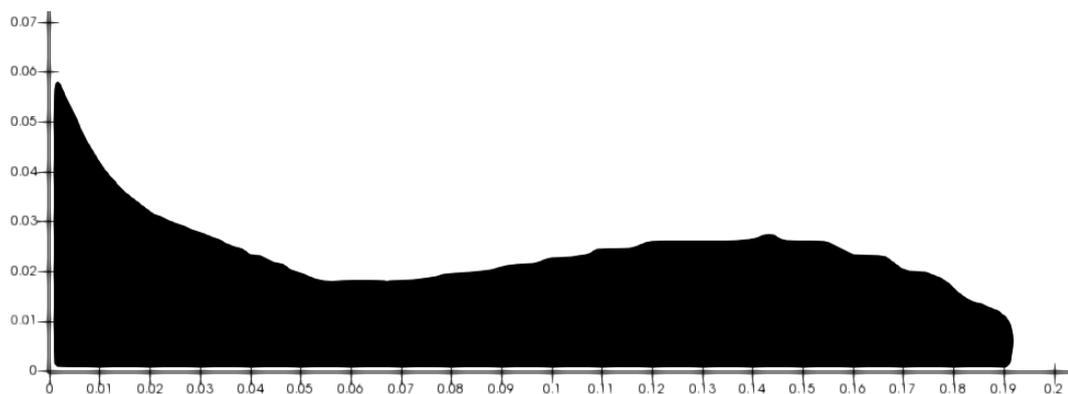
Da questi valori si osserva come esista più di una combinazione possibile per ottenere il punto di arresto sperimentale.

Nonostante nessuna di queste combinazioni di parametri porti al raggiungimento del valore esatto di 19.0 cm, i risultati in termini di distanza di arresto sono comunque accettabili, in quanto differiscono dal valore sperimentale solo di pochi millimetri.

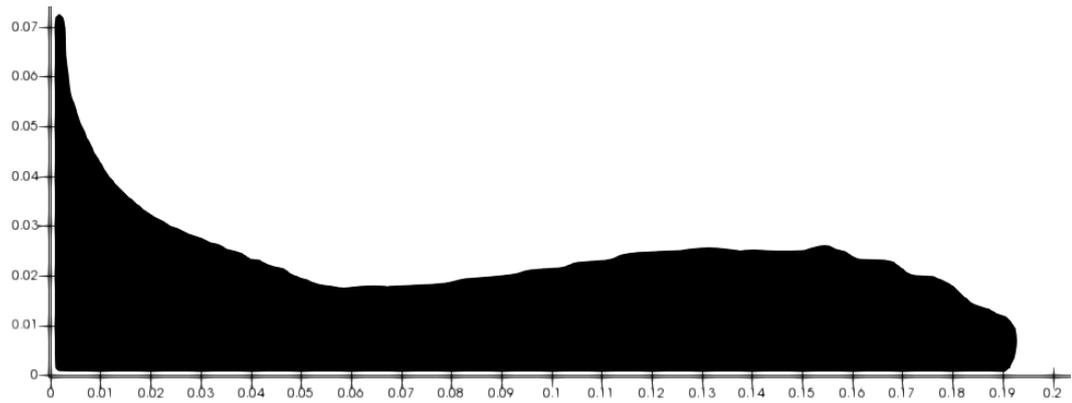
Di seguito viene mostrata una rappresentazione grafica delle configurazioni finali ottenute dopo il collasso con le diverse combinazioni di parametri appena descritte (Figure 7.1, 7.2, 7.3, 7.4 e 7.5).



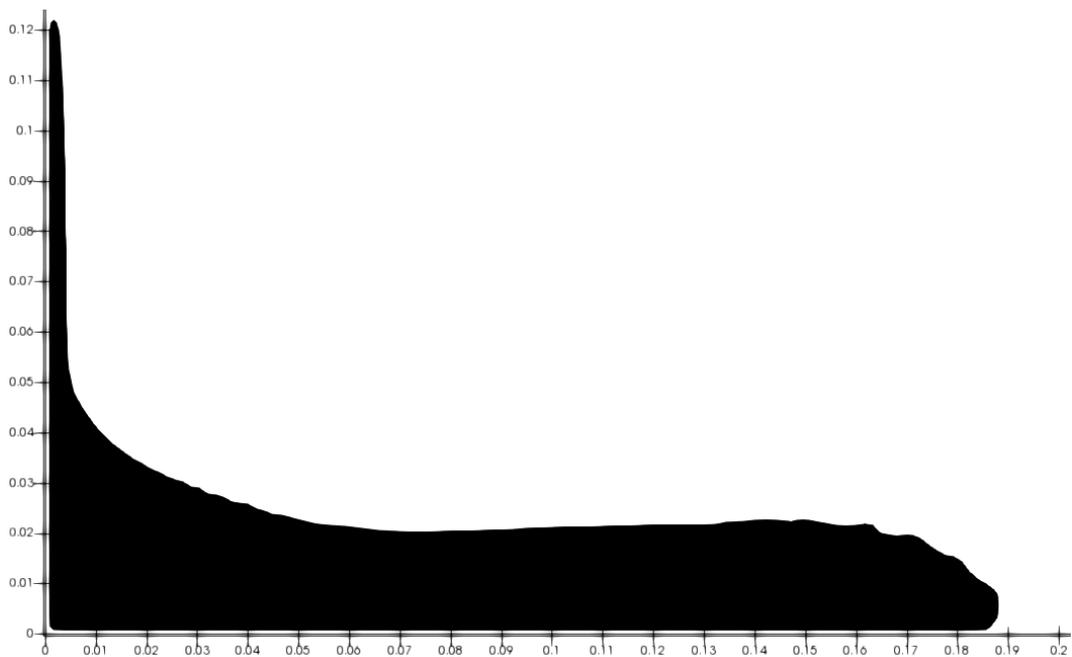
**Figura 7.1** - Rappresentazione grafica all'istante finale di arresto del fluido con la legge di Bingham, per  $\sigma_y=225$  Pa e  $\eta_B=0.01$  Pa·s



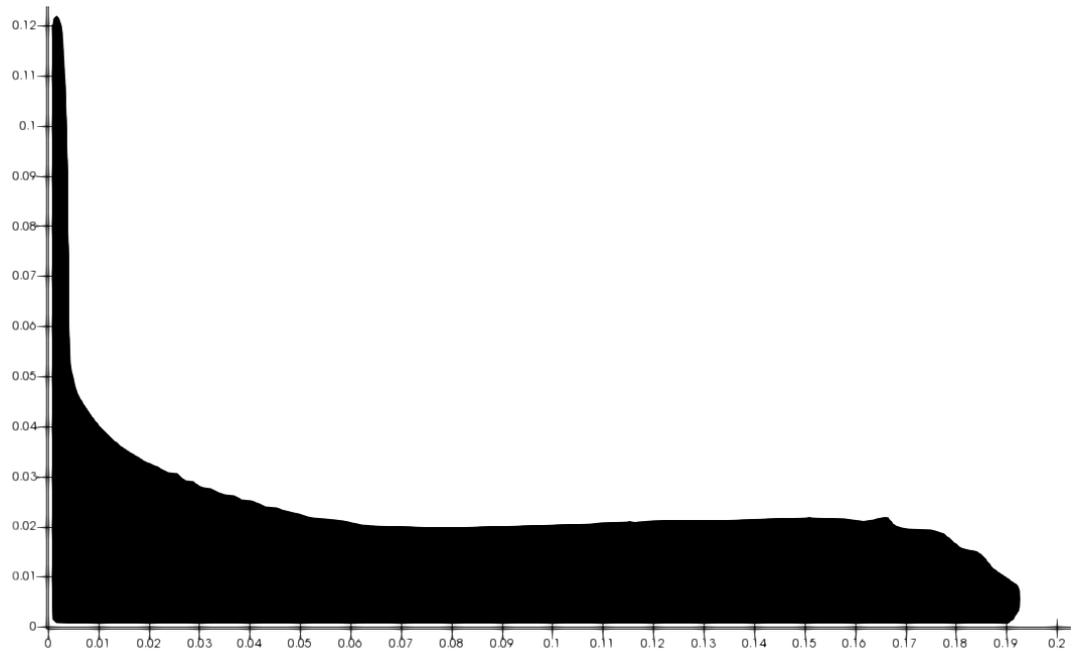
**Figura 7.2** - Rappresentazione grafica all'istante finale di arresto del fluido con la legge di Bingham, per  $\sigma_y=220$  Pa e  $\eta_B=0.01$  Pa·s



**Figura 7.3** - Rappresentazione grafica all'istante finale di arresto del fluido con la legge di Bingham, per  $\sigma_y=210$  Pa e  $\eta_B=0.1$  Pa·s



**Figura 7.4** - Rappresentazione grafica all'istante finale di arresto del fluido con la legge di Bingham, per  $\sigma_y=160$  Pa e  $\eta_B=1.0$  Pa·s



**Figura 7.5** - Rappresentazione grafica all'istante finale di arresto del fluido con la legge di Bingham, per  $\sigma_y=155 \text{ Pa}$  e  $\eta_B=1.0 \text{ Pa}\cdot\text{s}$

Dal confronto tra queste immagini si evince che, nonostante le distanze di arresto siano molto vicine al valore del caso sperimentale, per quanto riguarda l'altezza finale massima e la forma del deposito dopo l'arresto si ottengono risultati molto lontani da quelli attesi.

Si può affermare che all'aumentare della viscosità plastica di Bingham si ha un aumento della massima altezza del fluido a contatto con la parete verticale, che porta ad altezze di molto superiori a quelle del risultato sperimentale di 6.5 cm: per una viscosità plastica  $\eta_B=0.1 \text{ Pa}\cdot\text{s}$  si superano i 7 cm di altezza massima, mentre per  $\eta_B=1.0 \text{ Pa}\cdot\text{s}$  si raggiungono addirittura valori superiori ai 12 cm. A parità di  $\eta_B$  invece, all'aumentare della tensione di snervamento  $\sigma_y$  la distanza di arresto del flusso risulta minore.

La legge reologica di Bingham, sebbene presenti il vantaggio di essere molto semplice, non è quindi in grado di simulare il comportamento reale del flusso, specialmente in termini di geometria.

### 7.1.2. Legge Attritiva (o di Coulomb)

La reologia attritiva (equazioni 4.47 e 4.48) prevede la calibrazione del parametro di angolo di attrito  $\varphi$  (o angolo di resistenza al taglio) del materiale. Nel caso in esame, il software di calcolo prevede l'introduzione di una viscosità iniziale  $\eta_0$  per evitare che per velocità di deformazione troppo elevate o per pressione nulla il codice risulti instabile (equazione 4.49).

I parametri da calibrare, in questo caso, risultano essere due: la viscosità iniziale  $\eta_0$  e il coefficiente di attrito  $\tan(\varphi)$ . Di quest'ultimo però se ne conosce già il valore, ricavato dalla calibrazione del parametro di coefficiente di attrito interno effettuata con il metodo discreto nel capitolo precedente. Si è dunque deciso di procedere fissando il valore  $\tan(\varphi)=0.35$  (ottenuto dalla calibrazione dei parametri con il DEM) e variando la viscosità iniziale, fino ad ottenere valori di distanza di arresto prossimi a quella sperimentale.

La *Tabella 7.2* riporta i valori delle combinazioni di parametri che più si avvicinano al risultato sperimentale ( $L_f=19.0$  cm).

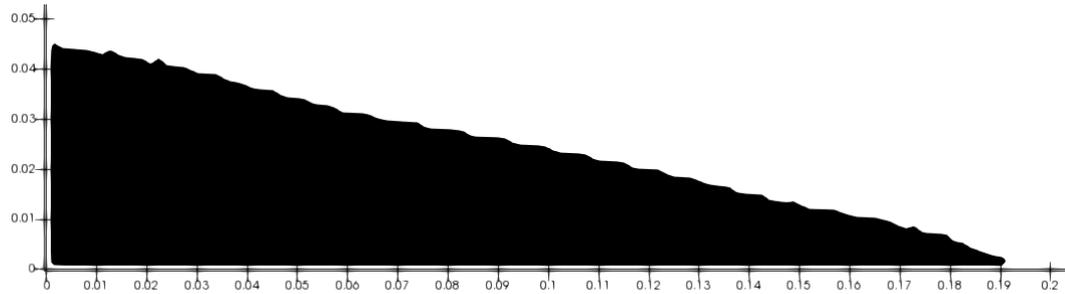
**Tabella 7.2** - Calibrazione dei parametri per la reologia attritiva (o di Coulomb)

Viscosità iniziale $\eta_0$	Coefficiente di attrito $\tan(\varphi)$	Distanza di arresto $L_f$
0 Pa·s	0.35	19.1 cm
0.001 Pa·s	0.35	19.0 cm
0.01 Pa·s	0.35	18.8 cm

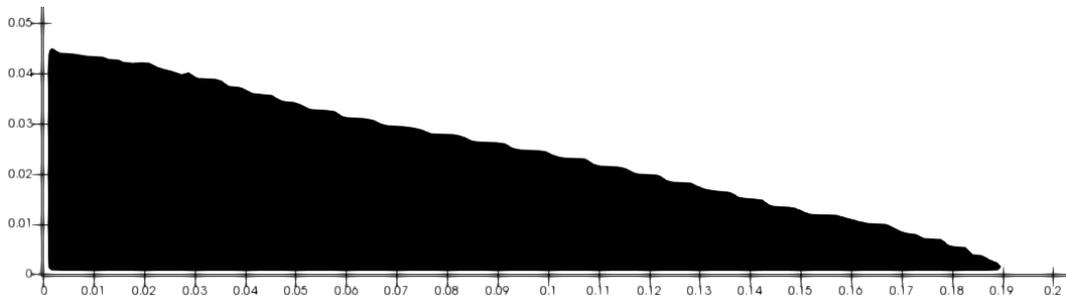
Anche nel caso della reologia attritiva si osserva come la distanza di arresto ottenuta dalle simulazioni numeriche sia molto prossima, se non addirittura in un caso identica, al valore sperimentale.

Da questi risultati si evince che, per un valore fissato del coefficiente di attrito, all'aumentare della viscosità iniziale, la distanza di arresto si riduce. Nel caso in esame questa riduzione vale solo pochi millimetri, in quanto i valori di  $\eta_0$  sono molto bassi e differiscono di pochissimo gli uni rispetto agli altri.

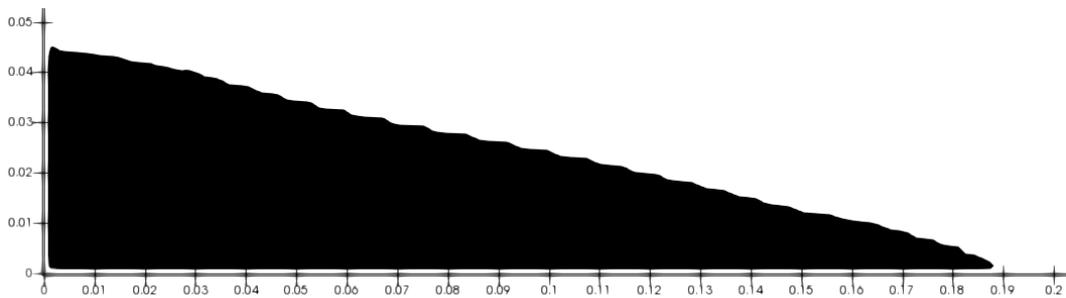
Per dare un'idea della forma finale che assume il fluido, per le diverse combinazioni sopra descritte, nelle *Figure 7.6, 7.7 e 7.8* viene mostrata la rappresentazione grafica della configurazione finale che si ottiene dopo il collasso.



**Figura 7.6** - Rappresentazione grafica all'istante finale di arresto del fluido con la legge attritiva (o di Coulomb), per  $\tan(\varphi)=0.35$  e  $\eta_0=0$  Pa·s



**Figura 7.7** - Rappresentazione grafica all'istante finale di arresto del fluido con la legge attritiva (o di Coulomb), per  $\tan(\varphi)=0.35$  e  $\eta_0=0.001$  Pa·s



**Figura 7.8** - Rappresentazione grafica all'istante finale di arresto del fluido con la legge attritiva (o di Coulomb), per  $\tan(\varphi)=0.35$  e  $\eta_0=0.01$  Pa·s

La forma finale del fluido simulato attraverso l'approccio continuo LBM con la reologia attritiva è confrontabile con quella sperimentale, seppur con delle discordanze, specialmente per quanto riguarda le altezze finali.

Comparando le tre immagini si osserva che, le distanze di arresto, come già affermato, sono molto vicine a quella sperimentale, le massime altezze finali invece raggiungono un valore pari a circa 4.5 cm, sottostimando il risultato sperimentale ( $H_f=6.5$  cm) con uno scarto di 2 cm.

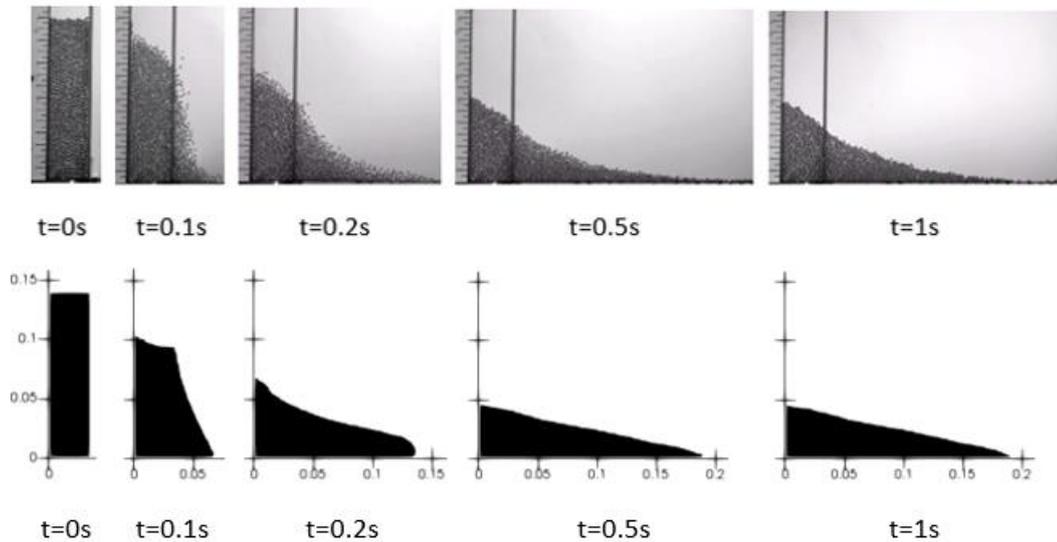
Tra le tre combinazioni di parametri di *Tabella 7.2*, è stata scelta quella che rappresenta in modo più preciso il risultato sperimentale, i cui valori di viscosità iniziale e coefficiente di attrito sono rispettivamente  $\eta_0=0.001$  Pa·s e  $\tan(\varphi)=0.35$ .

In *Tabella 7.3* si riportano i valori di altezza finale massima, distanza di arresto e angolo di riposo medio della configurazione finale.

**Tabella 7.3** - Configurazione finale ottenuta dalla simulazione numerica LBM con la reologia attritiva (o di Coulomb)

Altezza finale massima ( $H_f$ )	4.5 cm
Distanza di arresto ( $L_f$ )	19.0 cm
Angolo di riposo medio $\left(\alpha = \tan^{-1} \frac{H_f}{L_f}\right)$	$13.32^\circ \cong 13^\circ$

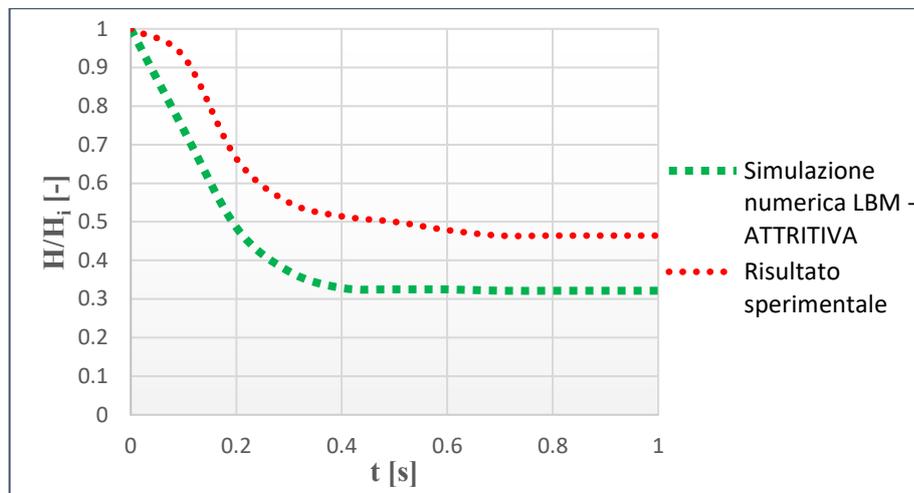
Per un confronto diretto con il risultato sperimentale, in *Figura 7.9* viene rappresentata la sequenza di collasso a diversi istanti temporali successivi fino all'arresto del flusso, sia per il caso numerico LBM con reologia attritiva che per quello sperimentale.



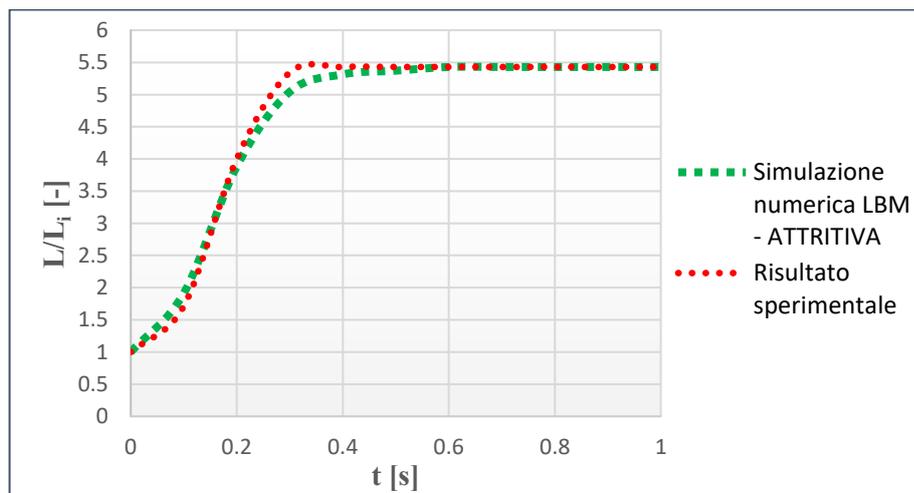
**Figura 7.9** - Sequenza di collasso: risultati sperimentali (in alto) e simulazione numerica LBM con reologia attritiva (in basso)

La reologia attritiva è dunque nel complesso una buona legge per simulare il comportamento reale del flusso attraverso l'approccio continuo, sia per quanto riguarda la distanza di arresto che per la geometria.

Nonostante le massime altezze ai vari istanti temporali risultino sottostimate e, di conseguenza, l'angolo di riposo ottenuto all'arresto risulti anch'esso di valore più basso rispetto alla configurazione sperimentale, dalla *Figura 7.9* si osserva comunque una buona corrispondenza della forma del fluido ottenuta dalla simulazione numerica rispetto al risultato sperimentale durante la sequenza di collasso.



**Figura 7.10** - Massima altezza normalizzata al variare del tempo: simulazione LBM con reologia attritiva e risultato sperimentale



**Figura 7.11** - Lunghezza di diffusione normalizzata al variare del tempo: simulazione LBM con reologia attritiva e risultato sperimentale

Le *Figure 7.10 e 7.11* riportano sotto forma di grafici a dispersione gli andamenti al variare del tempo rispettivamente della massima altezza normalizzata (rispetto al valore iniziale  $H_i$ ) e della lunghezza di diffusione normalizzata del flusso (rispetto a  $L_i$ ), mettendo a confronto i valori ottenuti dall'analisi numerica LBM per la reologia Attritiva con quelli sperimentali.

- *Legge Attritiva con Turbolenza*

Si vuole infine valutare quale sia l'influenza della turbolenza sul comportamento globale del fluido. Per verificare ciò, si attiva il solutore di turbolenza presente nel codice di calcolo, che va ad aggiungere alla legge reologica attritiva (equazione 4.49) una viscosità turbolenta, data dalla formula  $\eta_t = c\dot{\gamma}$ .

Nelle simulazioni in esame, la costante di turbolenza assume un valore pari a  $c=0.0256$ .

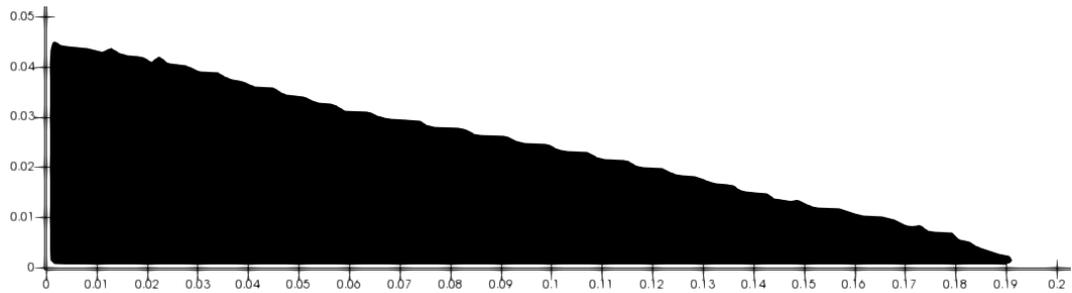
La *Tabella 7.4* fornisce il confronto tra i risultati ottenuti da diverse analisi effettuate con la legge Attritiva in assenza e in presenza di turbolenza.

**Tabella 7.4** - *Confronto tra le distanze di arresto ottenute tramite la legge attritiva in assenza e in presenza di turbolenza*

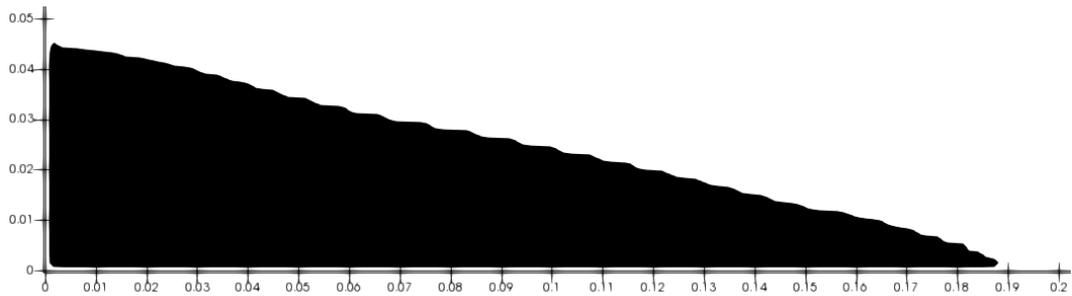
Viscosità iniziale $\eta_0$	Coefficiente di attrito $\tan(\varphi)$	Distanza di arresto in assenza di turbolenza $L_f$	Distanza di arresto in presenza di turbolenza $L_f$
0 Pa·s	0.35	19.1 cm	18.8 cm
0.001 Pa·s	0.35	19.0 cm	18.8 cm
0.01 Pa·s	0.35	18.8 cm	18.6 cm
0.1 Pa·s	0.35	18.5 cm	18.5 cm
1.0 Pa·s	0.35	17.0 cm	17.0 cm

Confrontando i valori ottenuti, si può affermare che per bassi valori di viscosità iniziale ( $\eta_0=0, 0.001$  e  $0.01$  Pa·s) la presenza di turbolenza arresta il flusso prima rispetto al caso di assenza di turbolenza, mentre per valori più elevati di viscosità iniziale il comportamento in presenza di turbolenza non cambia rispetto al caso senza turbolenza. Questo accade poiché se la viscosità del fluido è più elevata, quest'ultimo si muove più lentamente (ad esempio per  $\eta_0=1.0$  Pa·s il flusso si arresta dopo circa 2 secondi, mentre per i casi visti in precedenza il fluido era fermo già dopo 1 secondo) e la componente di viscosità turbolenta aggiuntiva risulta estremamente piccola e quindi trascurabile.

In aggiunta ai risultati sopra riportati, sono rappresentate di seguito le configurazioni finali dopo il collasso nei due casi di assenza e presenza di turbolenza (*Figure 7.12, 7.13, 7.14, 7.15 e 7.16*).

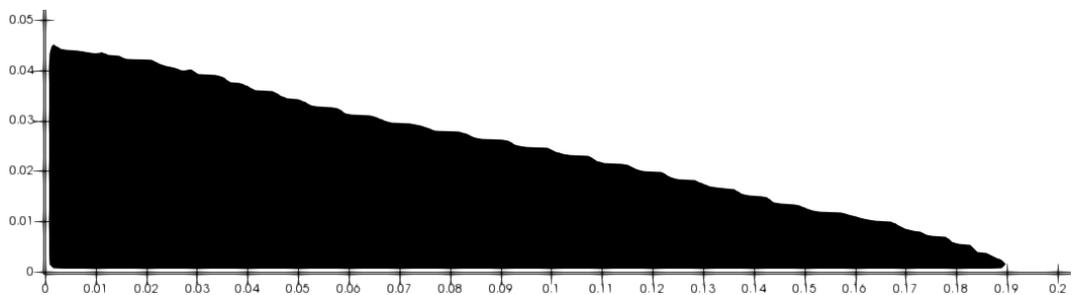


(a)

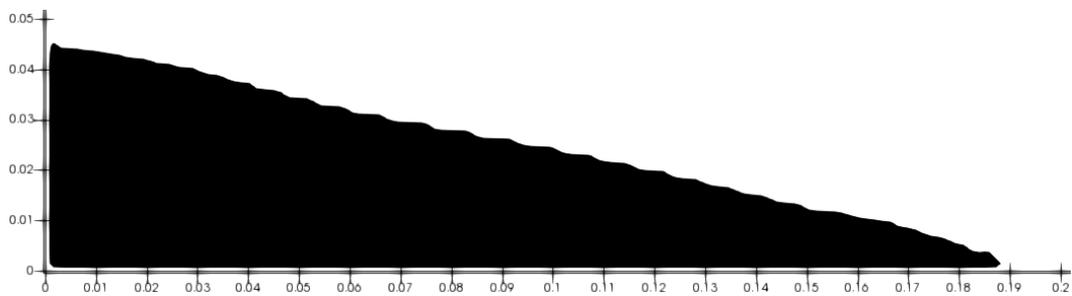


(b)

**Figura 7.12** - Configurazione finale del fluido con la legge attritiva (o di Coulomb) in assenza (a) e in presenza (b) di turbolenza, per  $\tan(\varphi)=0.35$  e  $\eta_0=0 \text{ Pa}\cdot\text{s}$

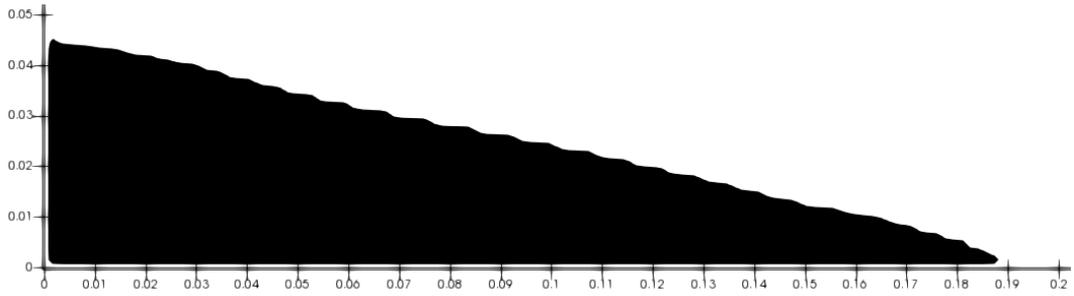


(a)

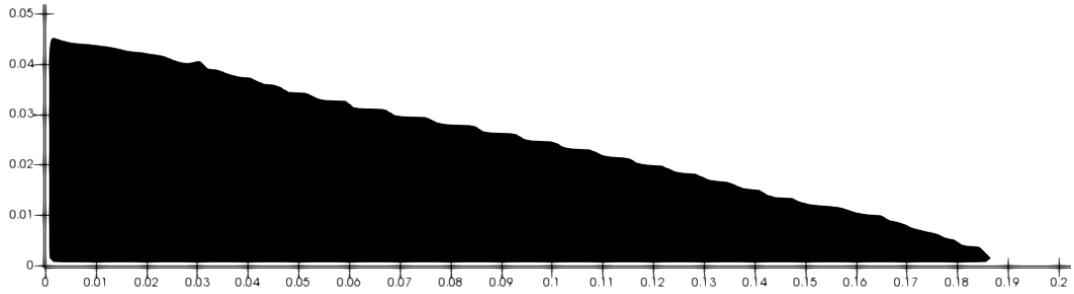


(b)

**Figura 7.13** - Configurazione finale del fluido con la legge attritiva (o di Coulomb) in assenza (a) e in presenza (b) di turbolenza, per  $\tan(\varphi)=0.35$  e  $\eta_0=0.001 \text{ Pa}\cdot\text{s}$

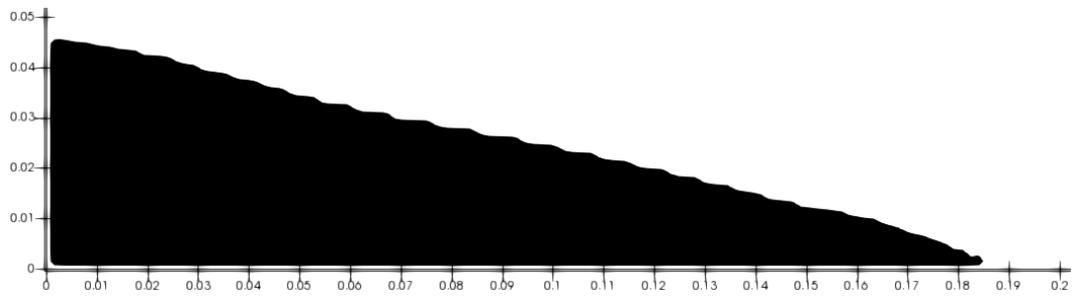


(a)

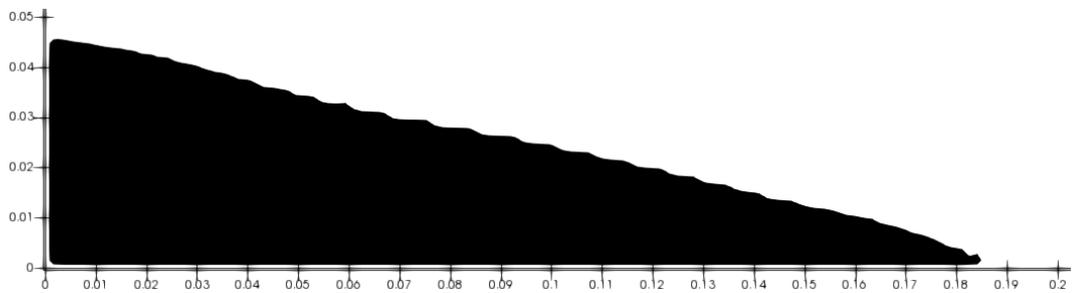


(b)

**Figura 7.14** - Configurazione finale del fluido con la legge attritiva (o di Coulomb) in assenza (a) e in presenza (b) di turbolenza, per  $\tan(\varphi)=0.35$  e  $\eta_0=0.01$  Pa·s

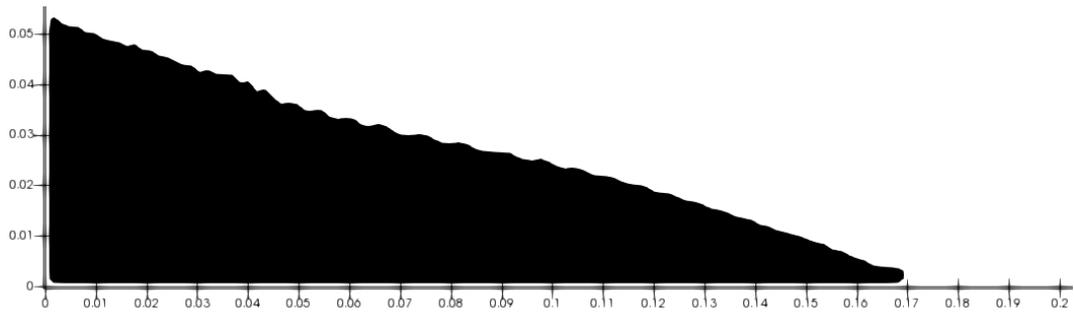


(a)

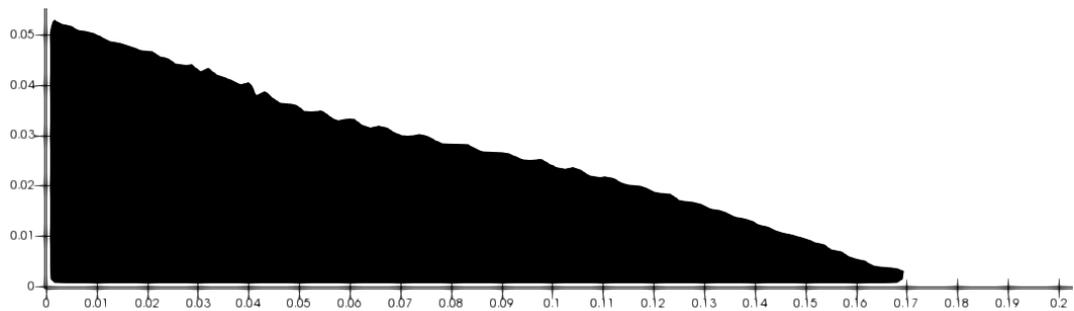


(b)

**Figura 7.15** - Configurazione finale del fluido con la legge attritiva (o di Coulomb) in assenza (a) e in presenza (b) di turbolenza, per  $\tan(\varphi)=0.35$  e  $\eta_0=0.1$  Pa·s



(a)



(b)

**Figura 7.16** - Configurazione finale del fluido con la legge attritiva (o di Coulomb) in assenza (a) e in presenza (b) di turbolenza, per  $\tan(\varphi)=0.35$  e  $\eta_0=1.0 \text{ Pa}\cdot\text{s}$

La presenza di turbolenza va ad influire quindi sulla distanza di arresto del fluido nel caso in cui si abbiano velocità sufficientemente elevate, mentre la massima altezza finale e la forma del deposito restano sostanzialmente invariate rispetto al caso di assenza di turbolenza.

### 7.1.3. Legge di Voellmy

La legge reologica di Voellmy (equazioni 4.50 e 4.51) si basa anch'essa sulla calibrazione di due parametri: il coefficiente di attrito  $\tan(\varphi)$  e il coefficiente di Voellmy (o coefficiente di turbolenza)  $\zeta$ .

Come già spiegato nel caso della reologia attritiva, è già noto il valore di coefficiente di attrito da adottare, in quanto ricavato in precedenza dalla calibrazione dei parametri tramite l'approccio discreto, il cui valore è  $\tan(\varphi)=0.35$ .

Anche in questo caso l'analisi si riduce alla calibrazione di un solo parametro, il coefficiente  $\zeta$ , che ha l'unità di misura di un'accelerazione.

Sono state effettuate numerose simulazioni numeriche, variando il coefficiente di Voellmy da valori bassi a valori molto alti. Ciò che si evince è che per valori di  $\zeta$  elevati, che nel caso in esame con  $\tan(\varphi)=0.35$  si traduce in  $\zeta \geq 100 \text{ m/s}^2$ , il termine collisionale/turbolento della reologia di Voellmy (secondo termine della legge espressa nell'equazione 4.51) risulta estremamente piccolo e dunque trascurabile, il che significa che in questi casi governa solo la componente attritiva della reologia in esame (primo termine dell'equazione 4.51), che corrisponde proprio alla legge attritiva (o di Coulomb).

Un esempio a sostegno di quanto appena illustrato è che, fissato il coefficiente di attrito a 0.35, per  $\zeta=500, 1000$  e  $1500 \text{ m/s}^2$  si ottiene sempre il medesimo risultato di configurazione finale dopo il collasso, raggiungendo in tutti i casi il valore di distanza di arresto  $L_f=19.1 \text{ cm}$ , che è proprio pari al risultato ottenuto nel caso di reologia attritiva (per  $\tan(\varphi)=0.35$  e  $\eta_0=0 \text{ Pa}\cdot\text{s}$ ).

Per evitare che il termine collisionale/turbolento risulti trascurabile si devono scegliere valori di coefficiente di Voellmy più bassi. In particolare, si riportano in *Tabella 7.5* le combinazioni di parametri che più si avvicinano al risultato sperimentale ( $L_f=19.0 \text{ cm}$ ).

**Tabella 7.5** - Calibrazione dei parametri per la reologia di Voellmy

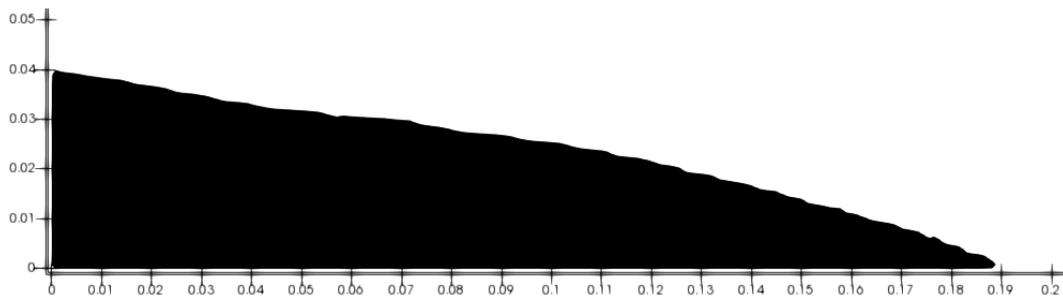
Coefficiente di attrito $\tan(\varphi)$	Coefficiente di Voellmy $\zeta$	Distanza di arresto $L_f$
0.35	40 $\text{m/s}^2$	18.9 cm
0.35	50 $\text{m/s}^2$	19.0 cm
0.35	60 $\text{m/s}^2$	19.4 cm

Dai risultati riportati in tabella, si osserva come all'aumentare del coefficiente di Voellmy la distanza di arresto aumenti. In realtà ci si aspetterebbe che, siccome il coefficiente di Voellmy rappresenta proprio un coefficiente di turbolenza, più

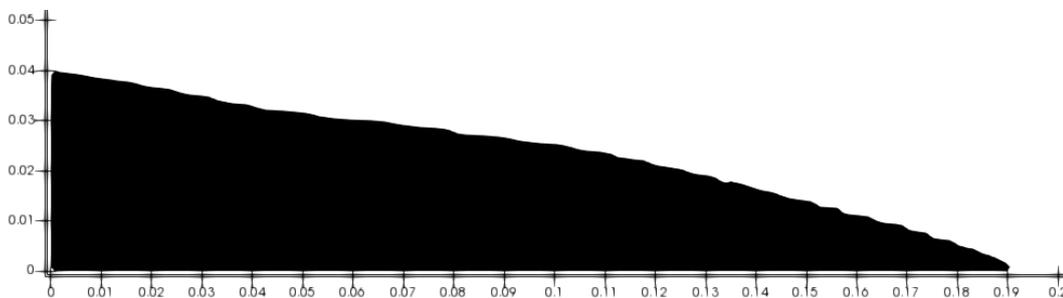
questo è grande e prima dovrebbe fermarsi il fluido, poiché come già espresso in precedenza un fenomeno più turbolento si ferma prima (c'è più impatto tra le particelle o molecole presenti internamente al fluido), ma essendo  $\zeta$  al denominatore della legge reologica di Voellmy il comportamento che si osserva dai risultati delle analisi numeriche è corretto.

Nelle *Figure 7.17, 7.18 e 7.19* si restituisce una rappresentazione grafica delle configurazioni finali a collasso avvenuto per ciascuna combinazione di parametri, per dare un'idea anche della forma finale che assume il fluido una volta arrestatosi.

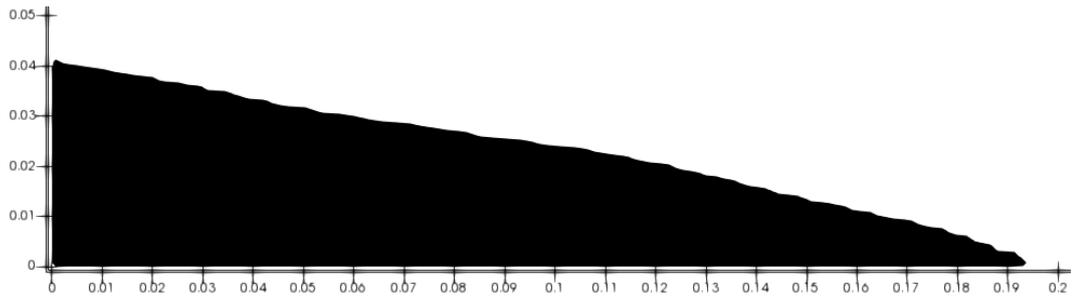
Quello che si evince esaminando le immagini è che le configurazioni finali sono molto vicine a quelle ottenute con la legge reologica attritiva, nonostante le massime altezze finali risultino inferiori di circa mezzo centimetro dalla precedente reologia, e quindi si discostino ancora più significativamente da quelle del risultato sperimentale. Nel complesso, nonostante le sottostime delle altezze, la forma del deposito finale ottenuta con la legge di Voellmy è abbastanza conforme a quella attritiva e dunque confrontabile anche con quella sperimentale.



**Figura 7.17** - Rappresentazione grafica all'istante finale di arresto del fluido con la legge di Voellmy, per  $\tan(\varphi)=0.35$  e  $\zeta=40 \text{ m/s}^2$



**Figura 7.18** - Rappresentazione grafica all'istante finale di arresto del fluido con la legge di Voellmy, per  $\tan(\varphi)=0.35$  e  $\zeta=50 \text{ m/s}^2$



**Figura 7.19** - Rappresentazione grafica all'istante finale di arresto del fluido con la legge di Voellmy, per  $\tan(\varphi)=0.35$  e  $\zeta=60 \text{ m/s}^2$

Si passa ora a selezionare tra le combinazioni dei parametri di *Tabella 7.5*, quella che rappresenta in modo più preciso la distanza di arresto sperimentale, che corrisponde ai valori di coefficiente di attrito  $\tan(\varphi)=0.35$  e di coefficiente di Voellmy pari a  $\zeta=50 \text{ m/s}^2$ .

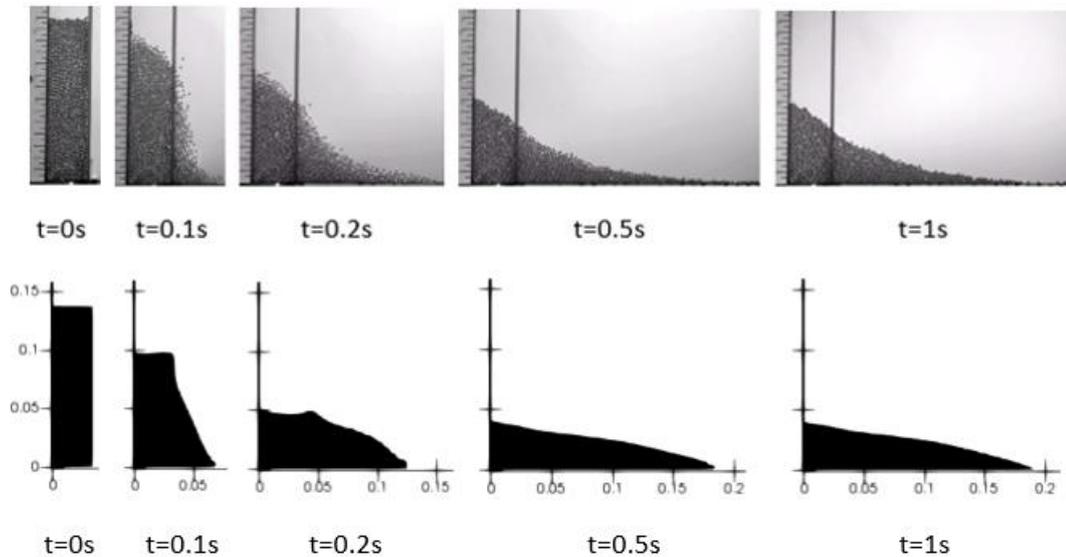
In *Tabella 7.6* si riportano i valori di altezza finale massima, distanza di arresto e angolo di riposo medio della configurazione finale scelta.

**Tabella 7.6** - Configurazione finale ottenuta dalla simulazione numerica LBM con la reologia di Voellmy

Altezza finale massima ( $H_f$ )	4.0 cm
Distanza di arresto ( $L_f$ )	19.0 cm
Angolo di riposo medio $\left(\alpha = \tan^{-1} \frac{H_f}{L_f}\right)$	$11.89^\circ \cong 12^\circ$

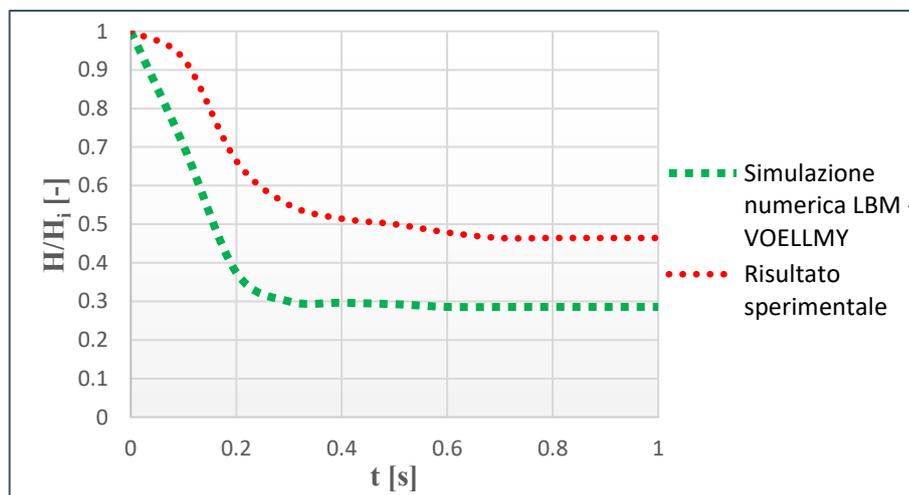
La *Figura 7.20* rappresenta la sequenza di collasso a diversi istanti temporali successivi fino all'arresto del flusso, sia per il caso numerico LBM con reologia di Voellmy che per quello sperimentale.

Dal confronto diretto con il risultato sperimentale si deduce che, nonostante la distanza di arresto ottenuta tramite la simulazione numerica con reologia di Voellmy sia identica al valore sperimentale e la forma finale del deposito sia in buona approssimazione paragonabile a quella sperimentale, le configurazioni geometriche ai vari istanti temporali successivi prima dell'arresto si discostano in modo abbastanza significativo da quelle sperimentali, a differenza del caso precedente con reologia attritiva in cui si aveva una buona corrispondenza anche per le geometrie ai vari istanti di collasso.

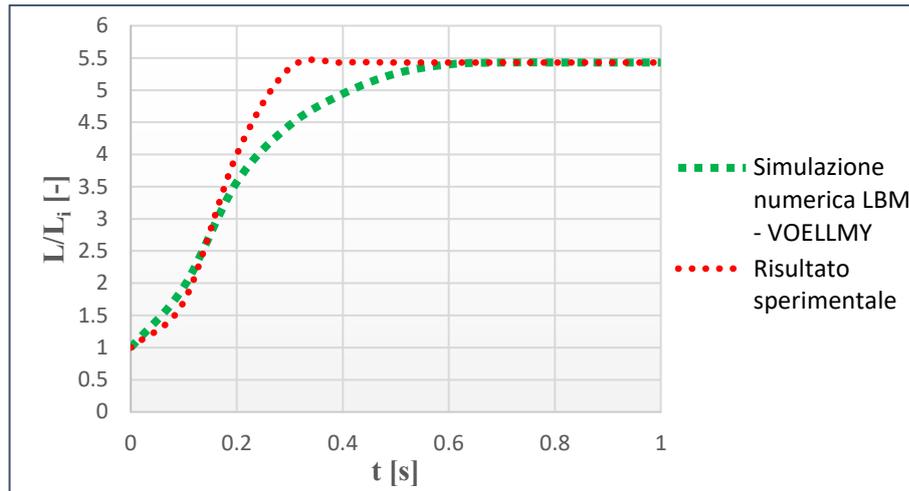


**Figura 7.20** - Sequenza di collasso: risultati sperimentali (in alto) e simulazione numerica LBM con reologia di Voellmy (in basso)

I grafici riportati nelle *Figure 7.21* e *7.22* mostrano gli andamenti al variare del tempo rispettivamente della massima altezza normalizzata (rispetto al valore iniziale  $H_i$ ) e della lunghezza di diffusione normalizzata del flusso (rispetto a  $L_i$ ), mettendo a confronto i valori ottenuti dall'analisi numerica LBM per la reologia di Voellmy con quelli sperimentali.



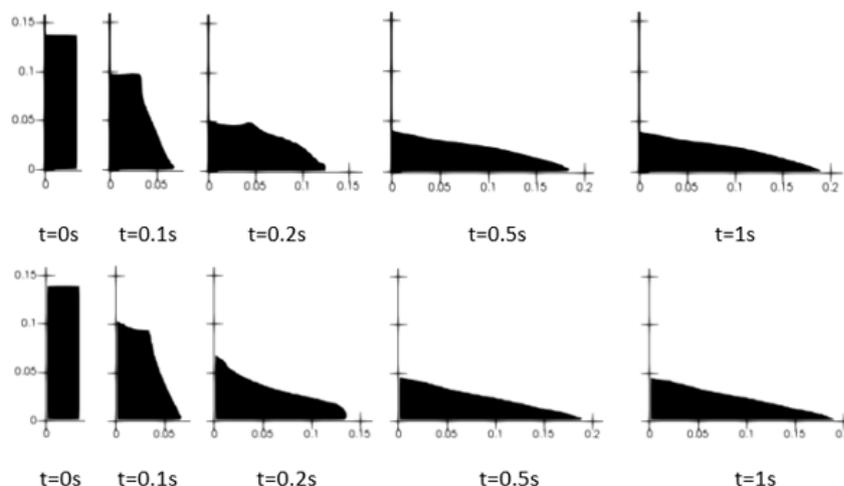
**Figura 7.21** - Massima altezza normalizzata al variare del tempo: simulazione LBM con reologia di Voellmy e risultato sperimentale



**Figura 7.22** - Lunghezza di diffusione normalizzata al variare del tempo: simulazione LBM con reologia di Voellmy e risultato sperimentale

Analizzando i due grafici sopra raffigurati si osserva come al variare del tempo le massime altezze normalizzate si discostino, risultando sottostimate, dai valori sperimentali durante tutta la durata del crollo. Per quanto riguarda le lunghezze percorse dal flusso, si ha una buona corrispondenza con quelle sperimentali nelle fasi iniziali (per  $0 \leq t < 0.2$  s) e finali di collasso (per  $t \geq 0.6$  s), mentre si osserva maggiore discrepanza nella parte centrale (per  $0.2 \text{ s} \leq t < 0.6 \text{ s}$ ).

Nel complesso quindi, si può affermare che per questo tipo di problema la reologia attritiva (o di Coulomb) è più adatta rispetto a quella di Voellmy a rappresentare con maggiore fedeltà i risultati sperimentali, specialmente nel confronto delle configurazioni geometriche del flusso durante la sequenza di collasso (Figura 7.23), nonostante anch'essa sottostimi le altezze, ma in maniera meno significativa.



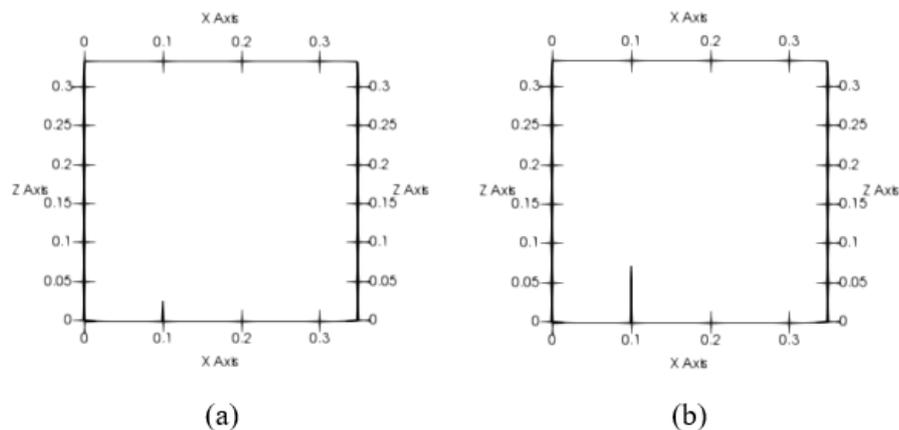
**Figura 7.23** - Confronto della forma del fluido nel tempo per reologia di Voellmy (in alto) e reologia attritiva (in basso)

## 8. Collasso di una colonna granulare in presenza di un ostacolo lungo il percorso

La presenza di un ostacolo lungo il percorso comporta un'alterazione nel moto del flusso rispetto al suo normale cammino e la nascita di forze di contatto con l'ostacolo stesso.

Viene ora ripreso il problema del crollo di una colonna di materiale granulare su superficie orizzontale delle stesse dimensioni, anche per quanto riguarda il dominio, studiate nei capitoli 5 e 7. In aggiunta viene inserito un ostacolo lungo il percorso, posizionato a  $x=10.0$  cm.

Le simulazioni sono effettuate con entrambi i metodi, del discreto (DEM) e del continuo (LBM), adottando gli stessi parametri ricavati dalle precedenti calibrizioni. Per ciascun approccio si effettuano due analisi, la prima in presenza di un ostacolo alto 2.5 cm (*Figura 8.1 a*), dove parte del materiale oltrepassa l'ostacolo, e la seconda con un ostacolo di altezza 7.0 cm (*Figura 8.1 b*), in cui tutto il materiale si arresta a contatto con l'ostacolo senza superarlo.



**Figura 8.1** - Dominio con presenza di ostacolo di altezza 2.5 cm (a) e 7.0 cm (b), posto a una distanza di 10.0 cm

Si è scelta la posizione dell'ostacolo a 10.0 cm in quanto, per entrambi i metodi, è all'incirca il punto in cui il flusso raggiunge le velocità più elevate.

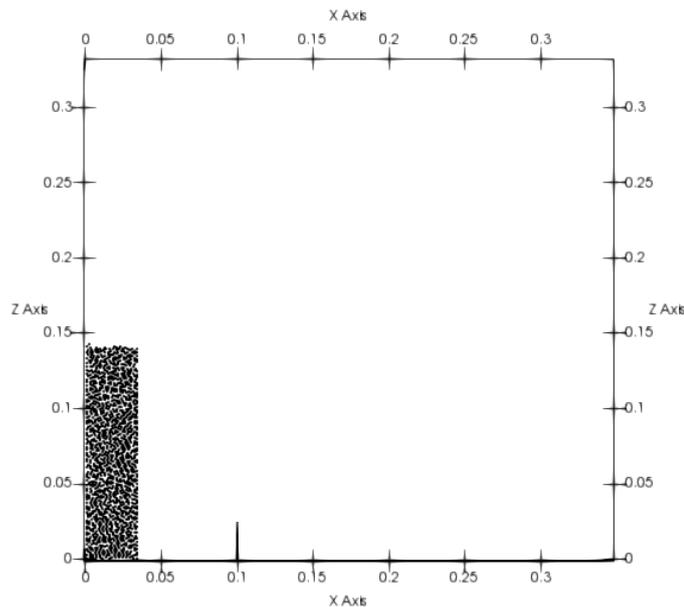
Lo scopo di queste analisi è quello di valutare le forze di impatto con l'ostacolo (nella direzione di flusso  $x$ ) nel tempo.

L'ostacolo viene creato tramite il software MatLab, che permette di creare un file dell'oggetto specificando la posizione lungo le tre direzioni  $x$ ,  $y$  e  $z$  di tutte le particelle che lo compongono. Il codice permette poi di inserire nel file di configurazione il percorso del file oggetto creato con MatLab, rendendo così possibile la simulazione in presenza di ostacolo o di eventuale barriera.

## 8.1. Approccio discreto (DEM)

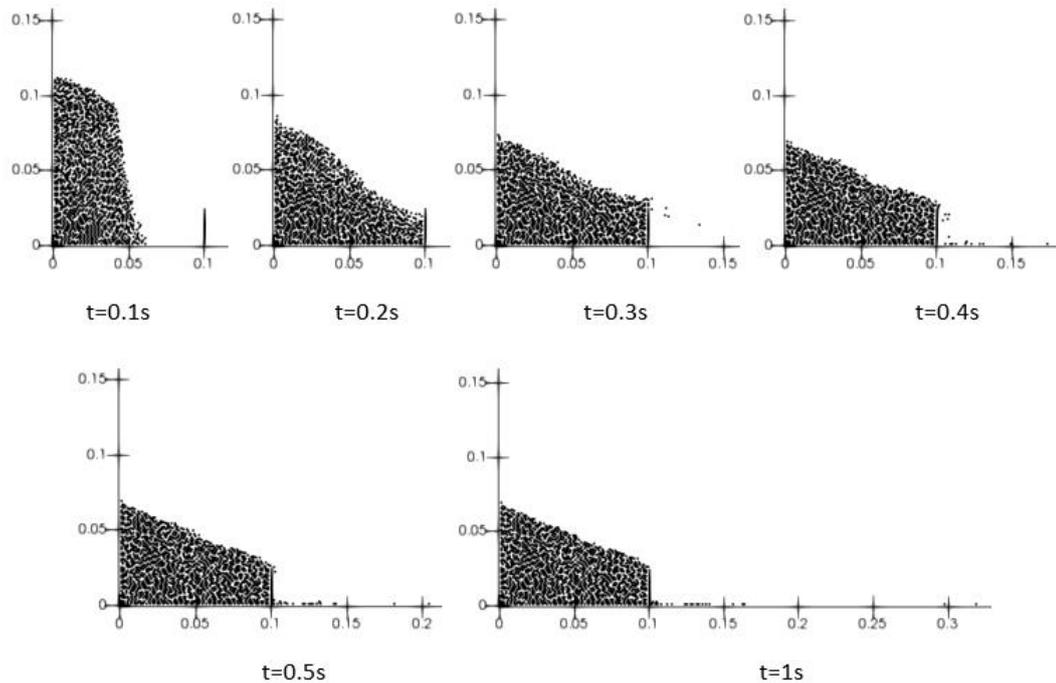
Le prime simulazioni effettuate sono quelle tramite il metodo discreto. Le dimensioni del dominio e le proprietà del materiale e sono descritte nel capitolo 5 in *Tabella 5.1* e i parametri interni del materiale sono gli stessi ricavati dalla calibrazione (*Tabella 5.3*): coefficiente di attrito tra particelle  $\mu_p=0.35$ , coefficiente di attrito tra particelle e pareti  $\mu_w=0.35$  e coefficiente di rotolamento  $c=0.02$ .

La prima analisi DEM è quella in presenza di un ostacolo alto 2.5 cm, la cui configurazione iniziale (per  $t=0$  s) è rappresentata in *Figura 8.2*.



**Figura 8.2** - Configurazione iniziale ( $t=0$  s) della simulazione DEM in presenza di ostacolo alto 2.5 cm

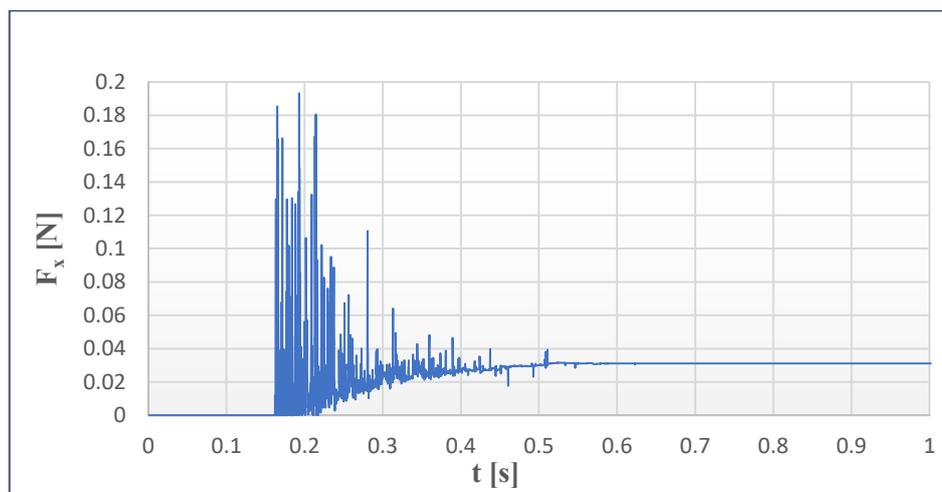
Per avere un'idea chiara di quello che accade durante il crollo, in *Figura 8.3* si rappresenta la sequenza di collasso a successivi istanti temporali fino all'arresto, in presenza dell'ostacolo alto 2.5 cm, osservando che ad un certo istante dopo il contatto con l'ostacolo, alcune particelle riescono ad oltrepassarlo.



**Figura 8.3** - Sequenza di collasso della simulazione DEM con ostacolo alto 2.5 cm

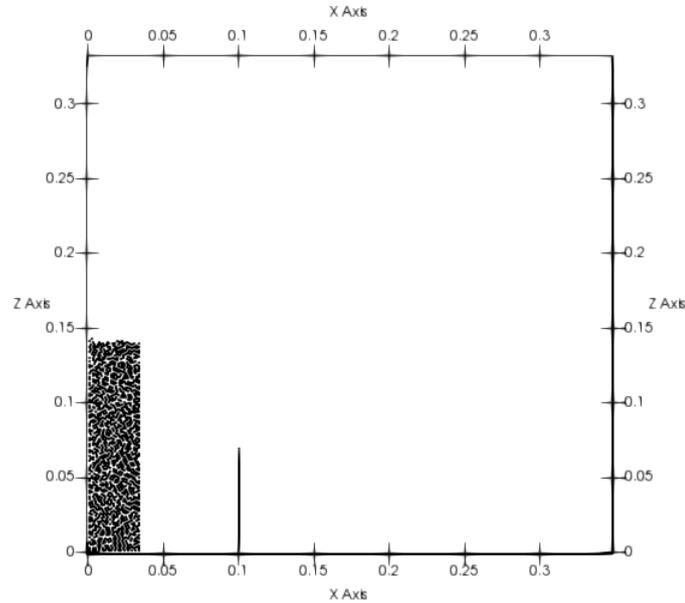
In *Figura 8.4* è rappresentato per mezzo di un grafico l'andamento dei valori delle forze di contatto con l'ostacolo nel tempo, in particolare della componente della forza nella direzione di flusso (lungo la direzione dell'asse x).

Dal grafico si osserva che per la simulazione DEM il contatto del materiale con l'ostacolo avviene dopo 0.162 s dall'inizio del collasso e successivamente, all'istante  $t=0.193$  s, si ha il picco più elevato del valore della forza ( $F_x \cong 0.194$  N), nonostante i valori risultino comunque sempre estremamente bassi.



**Figura 8.4** - Forza di contatto con l'ostacolo al variare del tempo per la simulazione DEM con ostacolo alto 2.5 cm

La seconda analisi DEM è quella in presenza di un ostacolo alto 7.0 cm, la cui configurazione iniziale (per  $t=0$  s) è rappresentata in *Figura 8.5*.



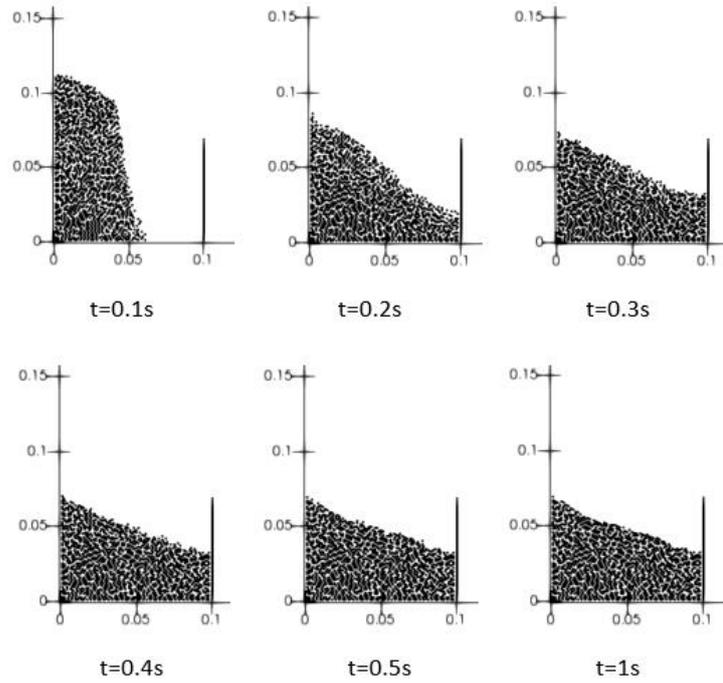
**Figura 8.5** - Configurazione iniziale ( $t=0$  s) della simulazione DEM in presenza di ostacolo alto 7.0 cm

Per visualizzare ciò che accade durante il crollo, in *Figura 8.6* si rappresenta la sequenza di collasso a successivi istanti temporali fino all'arresto, in presenza dell'ostacolo di altezza 7.0 cm, osservando che il flusso si arresta a contatto con l'ostacolo senza che nessuna particella riesca ad oltrepassarlo.

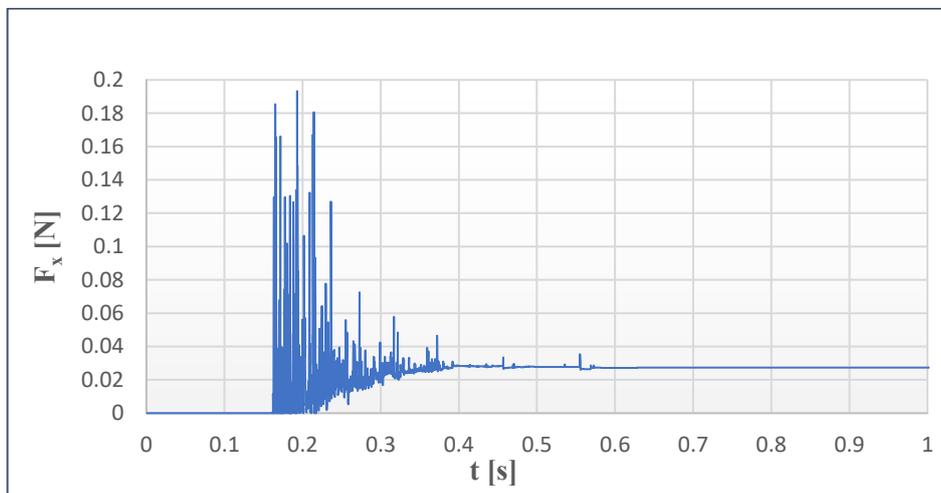
Nel grafico di *Figura 8.7* si riporta l'andamento dei valori delle forze di contatto con l'ostacolo nel tempo, in particolare della componente della forza nella direzione di flusso (lungo la direzione dell'asse  $x$ ).

Dal grafico si osserva che per la simulazione DEM il contatto del materiale con l'ostacolo avviene dopo 0.162 s dall'inizio del collasso e successivamente, all'istante  $t=0.193$  s si ha il picco del valore della forza ( $F_x \cong 0.194$  N), nonostante i valori risultino comunque sempre estremamente bassi.

I valori della forza lungo la direzione di flusso sono molto simili a quelli del caso precedente (ostacolo di altezza pari a 2.5 cm), risultando identici nella prima parte del grafico e iniziando a differire leggermente dall'istante  $t=0.2218$  s (istante di tempo in cui nel caso precedente qualche particella iniziava ad oltrepassare l'ostacolo) in poi.



**Figura 8.6** - Sequenza di collasso della simulazione DEM con ostacolo alto 7.0 cm

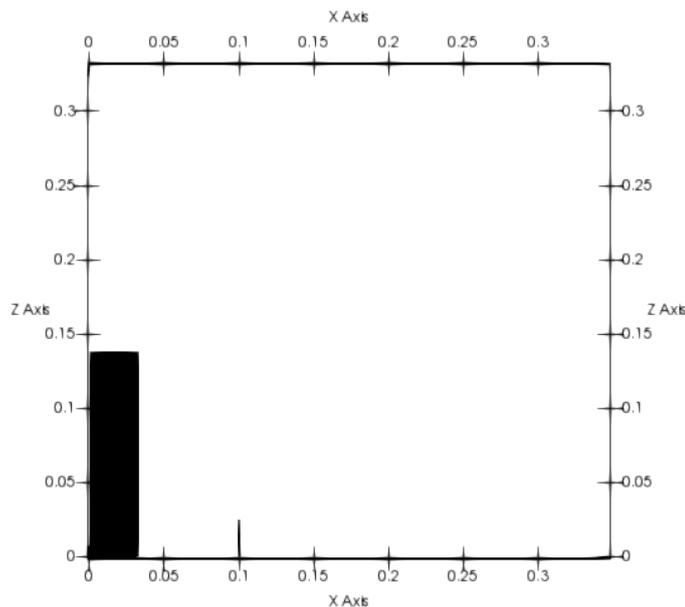


**Figura 8.7** - Forza di contatto con l'ostacolo al variare del tempo per la simulazione DEM con ostacolo alto 7.0 cm

## 8.2. Approccio continuo (LBM)

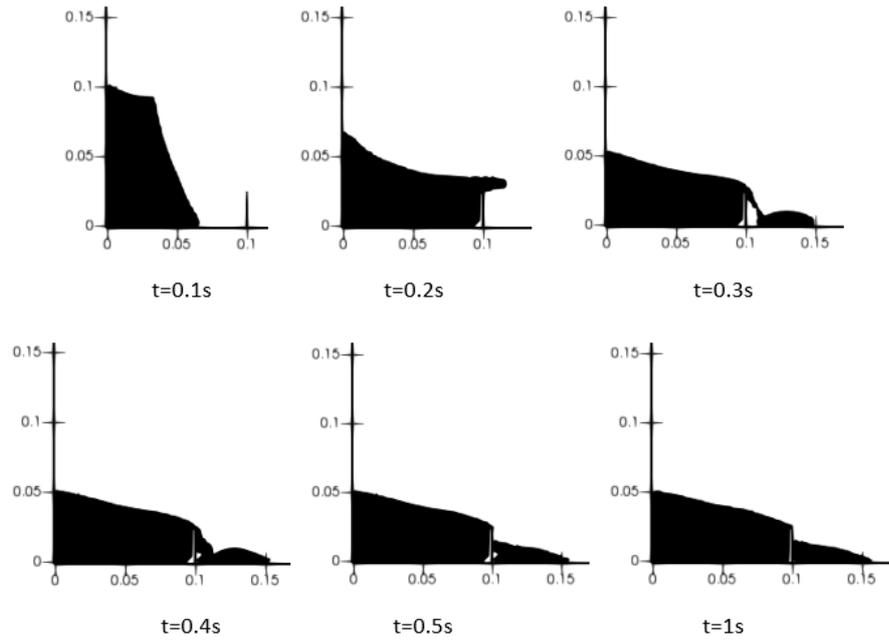
Si effettuano ora le simulazioni tramite il metodo continuo. In riferimento al capitolo 7 di questo documento, si utilizza una legge reologica di tipo attritivo, che si è dimostrata essere la reologia più adatta ed efficace a rappresentare in modo più realistico il comportamento dei flussi di materiale granulare per il problema in esame. I rispettivi parametri interni adottati sono quelli ricavati dalla precedente calibrazione (Tabella 7.2): coefficiente di attrito  $\tan(\varphi)=0.35$  e viscosità iniziale  $\eta_0=0.001$  Pa·s.

La prima analisi LBM è quella in presenza di un ostacolo alto 2.5 cm, la cui configurazione iniziale (per  $t=0$  s) è rappresentata in Figura 8.8.



**Figura 8.8** - Configurazione iniziale ( $t=0$  s) della simulazione LBM in presenza di ostacolo alto 2.5 cm

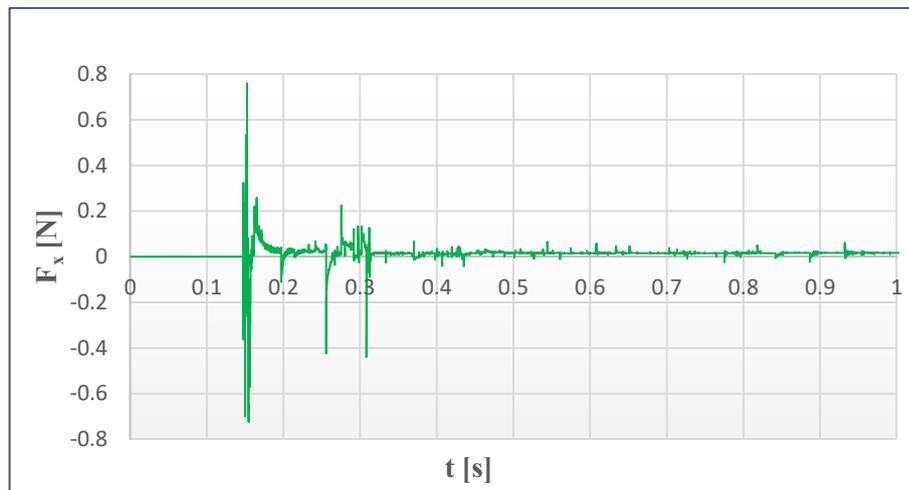
La Figura 8.9 mette in evidenza le fasi più significative che avvengono durante il crollo, raffigurando la sequenza di collasso a successivi istanti temporali fino all'arresto, in presenza dell'ostacolo di altezza 2.5 cm, osservando che ad un certo istante dopo il contatto con l'ostacolo, parte del materiale, in questo caso rappresentato come un fluido, lo oltrepassa.



**Figura 8.9** - Sequenza di collasso della simulazione LBM con ostacolo alto 2.5 cm

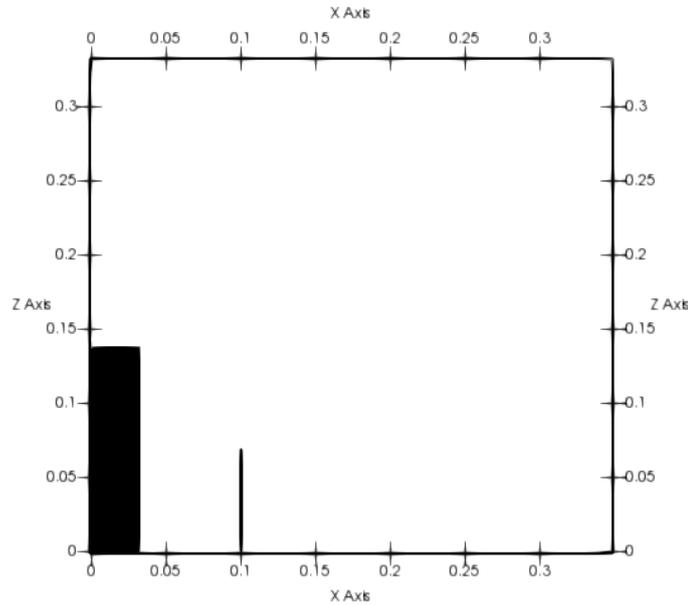
Di seguito, nel grafico di *Figura 8.10*, si riporta l'andamento dei valori delle forze di contatto con l'ostacolo nel tempo, in particolare della componente della forza nella direzione di flusso (lungo la direzione dell'asse  $x$ ).

Dal grafico si osserva che per la simulazione LBM il contatto del materiale con l'ostacolo avviene dopo 0.1476 s dall'inizio del collasso (quasi contemporaneamente al caso discreto, solo due centesimi di secondo prima), mentre all'istante  $t=0.1526$  s si raggiunge il picco del valore della forza ( $F_x \cong 0.76$  N), che risulta più grande rispetto a quello dell'analisi effettuata con il DEM.



**Figura 8.10** - Forza di contatto con l'ostacolo al variare del tempo per la simulazione LBM con ostacolo alto 2.5 cm

La seconda analisi LBM è quella in presenza di un ostacolo alto 7.0 cm, la cui configurazione iniziale (per  $t=0$  s) è rappresentata in *Figura 8.11*.



**Figura 8.11** - Configurazione iniziale ( $t=0$  s) della simulazione LBM in presenza di ostacolo alto 7.0 cm

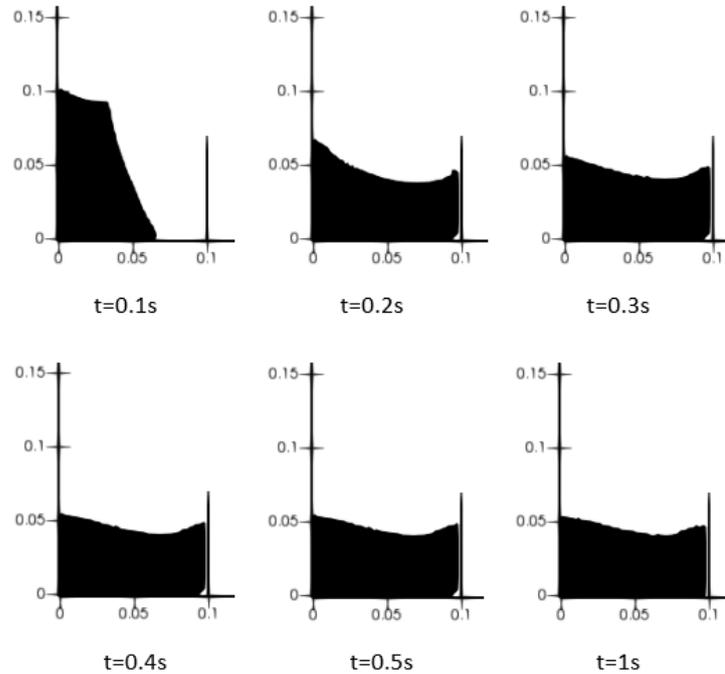
Per visualizzare ciò che accade durante il crollo, in *Figura 8.12* si rappresenta la sequenza di collasso a successivi istanti temporali fino all'arresto, in presenza dell'ostacolo di altezza 7.0 cm, osservando che il flusso si arresta a contatto con l'ostacolo senza che nessuna parte del materiale riesca ad oltrepassarlo.

Si riporta infine, nel grafico di *Figura 8.13* l'andamento dei valori delle forze di contatto con l'ostacolo nel tempo, in particolare della componente della forza nella direzione di flusso (lungo la direzione dell'asse  $x$ ).

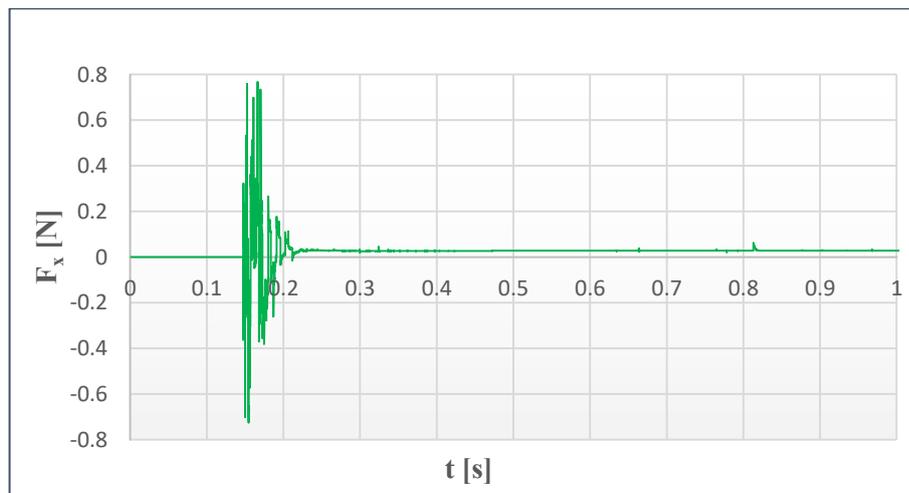
Anche in questo caso, si osserva che per la simulazione LBM il contatto del materiale con l'ostacolo avviene dopo 0.1476 s dall'inizio del collasso (quasi contemporaneamente al caso discreto, solo due centesimi di secondo prima), mentre all'istante  $t=0.1526$  s si raggiunge il picco del valore della forza ( $F_x \cong 0.76$  N), che risulta essere più grande rispetto a quello dell'analisi effettuata con il DEM.

A differenza della simulazione discreta, per il metodo del continuo i valori della forza lungo la direzione di flusso per l'analisi LBM con ostacolo alto 7.0 cm differiscono maggiormente rispetto al caso precedente (analisi LBM con ostacolo di altezza pari a 2.5 cm), risultando identici solo fino per pochi istanti iniziali e differendo in maniera più significativa negli istanti di tempo successivi, a partire da  $t=0.1571$  s, istante in cui nel caso precedente parte del materiale fluido iniziava a superare l'ostacolo. Questo accade in quanto, come si evince dalle immagini, per la

simulazione DEM i due casi di ostacolo alto 2.5 cm (*Figura 8.3*) e 7.0 cm (*Figura 8.6*) sono quasi identici poiché nel primo solo poche particelle oltrepassano l'ostacolo, mentre per la simulazione LBM i due casi (*Figure 8.9 e 8.12*) portano a risultati abbastanza differenti poiché per l'ostacolo di altezza 2.5 cm buona parte del materiale supera l'ostacolo.

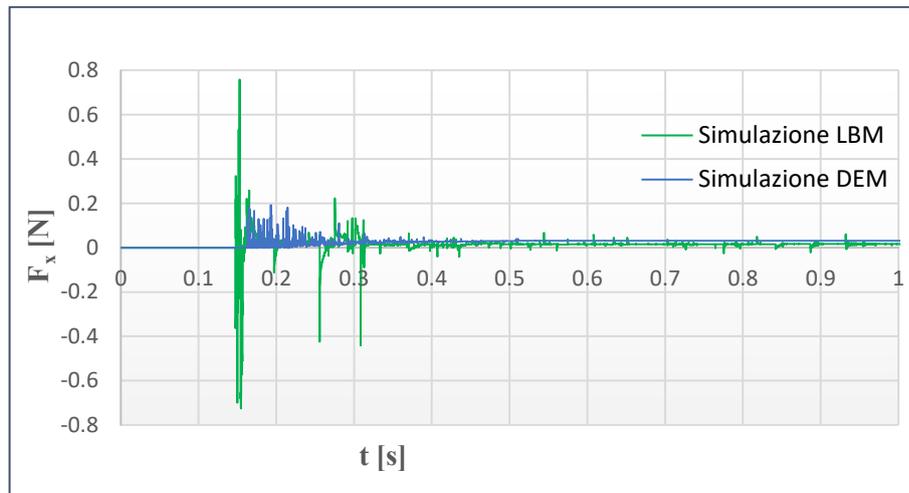


**Figura 8.12** - Sequenza di collasso della simulazione LBM con ostacolo alto 7.0 cm

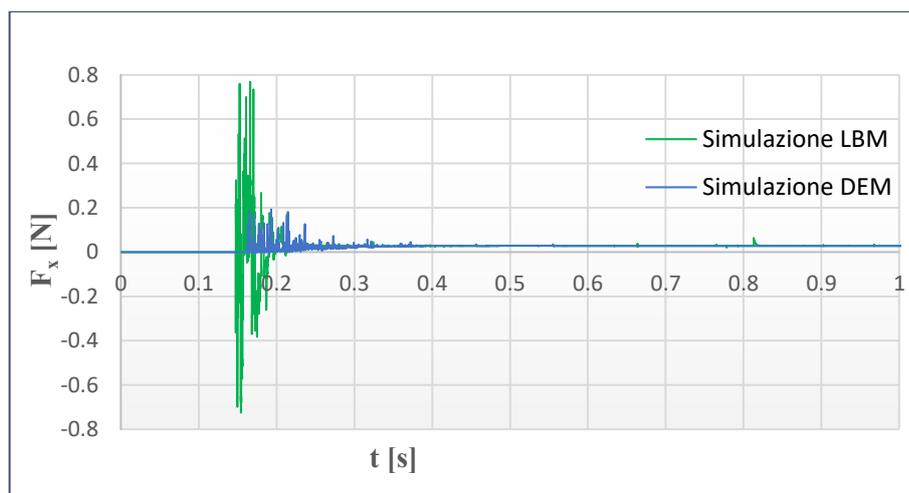


**Figura 8.13** - Forza di contatto con l'ostacolo al variare del tempo per la simulazione LBM con ostacolo alto 7.0 cm

In conclusione, i grafici seguenti rappresentano un confronto diretto tra simulazione DEM e LBM in presenza di ostacolo di altezza 2.5 cm (Figura 8.14) e 7.0 cm (Figura 8.15). Si osserva come in entrambi i casi i valori delle forze per la simulazione LBM raggiungano picchi più elevati rispetto alla simulazione DEM. I risultati ottenuti attraverso l'approccio continuo LBM non sono corretti, in quanto si ottengono numerosi picchi, molti dei quali negativi. Il problema può essere dovuto all'accoppiamento particelle-fluido, poiché l'ostacolo risulta formato da un insieme di diverse particelle incastrate l'una con l'altra, che formano un muro perfettamente rigido.



**Figura 8.14** - Forza di contatto con l'ostacolo al variare del tempo: simulazione LBM e simulazione DEM, con ostacolo alto 2.5 cm



**Figura 8.15** - Forza di contatto con l'ostacolo al variare del tempo: simulazione LBM e simulazione DEM, con ostacolo alto 7.0 cm

Si prende in esempio il caso di *Figura 8.6*, simulazione discreta con ostacolo di altezza pari a 7.0 cm, dove il materiale dopo l'impatto non supera l'ostacolo. Dal grafico di *Figura 8.7* si osserva che la forza finale di contatto nella direzione di flusso raggiunge un valore pari a  $F_x \cong 0.0273$  N.

Si vuole verificare la correttezza di questo risultato numerico mettendolo a confronto con il valore ricavato dalle equazioni usate per la spinta delle terre sui muri.

Per il confronto si utilizza sia il valore della spinta a riposo, sia quello della spinta attiva (calcolata con entrambi i metodi di Rankine e di Coulomb). Entrambi i risultati sono delle approssimazioni, poiché per quanto riguarda la spinta a riposo, si suppone che il muro sia perfettamente rigido (come nel caso in esame) e che il materiale in superficie sia perfettamente orizzontale (invece dalla simulazione DEM si ottiene una leggera inclinazione delle particelle sopra l'ostacolo), mentre per la teoria della spinta attiva il muro è in grado di deformarsi e si tiene in considerazione anche l'inclinazione del materiale che spinge sul muro.

La spinta a riposo è calcolata come segue

$$P_0 = \frac{1}{2} \sigma_{h0} h = \frac{1}{2} \gamma h^2 K_0, \quad (8.1)$$

dove  $\sigma_{h0} = K_0 \sigma_{v0}$  è la tensione orizzontale, data dal prodotto tra il coefficiente di spinta a riposo  $K_0$  e la tensione verticale  $\sigma_{v0}$ , mentre  $h$  rappresenta l'altezza del muro al di sotto del materiale che preme su di esso ed è in questo caso pari a  $h = 3.0$  cm. Il termine  $\gamma = \rho g$  è il peso specifico del materiale, ottenuto moltiplicando la densità delle particelle  $\rho = 3750$  kg/m<sup>3</sup> per l'accelerazione di gravità  $g = 9.81$  m/s<sup>2</sup>.

Il coefficiente di spinta a riposo assume nel caso in esame la seguente espressione

$$K_0 = 1 - \sin(\varphi), \quad (8.2)$$

in cui  $\varphi$  è l'angolo di resistenza al taglio (o angolo di attrito interno del materiale) e vale  $\varphi = 19.3^\circ$ . Quella utilizzata nell'equazione 8.2 è l'espressione del coefficiente di spinta a riposo per terreni normal-consolidati.

Si ottiene  $K_0 = 0.6697$ , da cui si ricava poi il valore della spinta a riposo  $P_0$ . Il valore ottenuto dall'equazione 8.1 è una forza al metro lineare, per ottenere un risultato in Newton confrontabile con quello dell'analisi numerica basta moltiplicare tale valore per la larghezza del muro che è pari a  $w = 0.0024$  m (0.24 cm), ottenendo che  $F_0$  [N] =  $P_0$  [N/m]  $w$  [m].

Dal calcolo finale si ricava  $F_0 = 0.0266$  N, che essendo già una forza in direzione orizzontale è direttamente confrontabile con il risultato numerico  $F_x = 0.0273$  N, a cui risulta molto prossimo.

La spinta attiva è calcolata nel modo seguente

$$P_a = \frac{1}{2} \sigma_a h = \frac{1}{2} \gamma h^2 K_a, \quad (8.3)$$

in cui  $\sigma_a = K_a \sigma_{v0}$  è la tensione attiva, data dal prodotto tra il coefficiente di spinta attiva  $K_a$  e la tensione verticale  $\sigma_{v0}$ .

Il coefficiente di spinta attiva assume due valori diversi a seconda del metodo utilizzato. Per la teoria di Rankine si ottiene

$$K_{a,R} = \frac{\cos(i) - \sqrt{\cos^2(i) - \cos^2(\varphi)}}{\cos(i) + \sqrt{\cos^2(i) - \cos^2(\varphi)}}, \quad (8.4)$$

dove  $i$  rappresenta l'inclinazione del materiale in superficie che spinge sul muro ed è pari a  $i \cong 19^\circ$ . Si ottiene  $K_{a,R} = 0.8882$ .

Per la teoria di Coulomb,  $K_a$  è rappresentato dalla seguente espressione

$$K_{a,C} = \frac{\cos^2(\varphi - \beta)}{\cos^2(\beta) \cos(\beta + \delta) \left( 1 + \sqrt{\frac{\sin(\delta + \varphi) \sin(\varphi - i)}{\cos(\beta + \delta) \cos(\beta - i)}} \right)^2}, \quad (8.5)$$

dove  $\beta$  rappresenta l'inclinazione del muro rispetto alla verticale, in questo caso  $\beta = 0^\circ$ , e  $\delta$  è il valore dell'angolo di attrito con il muro (nel caso in esame si suppone che  $\delta = \varphi = 19.3^\circ$ ). Si ottiene  $K_{a,C} = 0.8409$ .

Si ricava poi per entrambi i metodi il valore di spinta attiva  $P_a$ , che moltiplicato per la larghezza del muro porta alle seguenti forze:  $F_{a,R} = 0.0353$  N e  $F_{a,C} = 0.0334$  N, inclinate di un angolo  $\delta$  rispetto alla direzione normale al muro (in questo caso la direzione orizzontale  $x$ ). Moltiplicando entrambi i valori per il  $\cos(\delta)$  si ottengono le componenti orizzontali della spinta attiva, rispettivamente per la teoria di Rankine e di Coulomb:  $F_{x,a,R} = 0.0319$  N e  $F_{x,a,C} = 0.0315$  N, direttamente confrontabili con il risultato numerico  $F_x = 0.0273$  N. Anche in questo caso i valori ottenuti sono molto vicini a quello dell'analisi DEM.

## 9. Confronto DEM-LBM: osservazioni e conclusioni

In questo capitolo conclusivo si mettono a confronto le simulazioni numeriche ricavate dall'approccio discreto (DEM) e continuo (LBM con reologia attritiva), per valutare i vantaggi e gli svantaggi di ciascun metodo e determinare quale sia maggiormente adatto per la simulazione di flussi granulari secchi.

In *Tabella 9.1* si riportano i valori di massima altezza finale, distanza di arresto e angolo di riposo medio della configurazione finale formatasi dopo il collasso di una colonna di materiale granulare secco di altezza iniziale  $H_i=14.0$  cm e larghezza iniziale  $L_i=3.5$  cm, ottenuti sia per il risultato sperimentale che per le analisi numeriche.

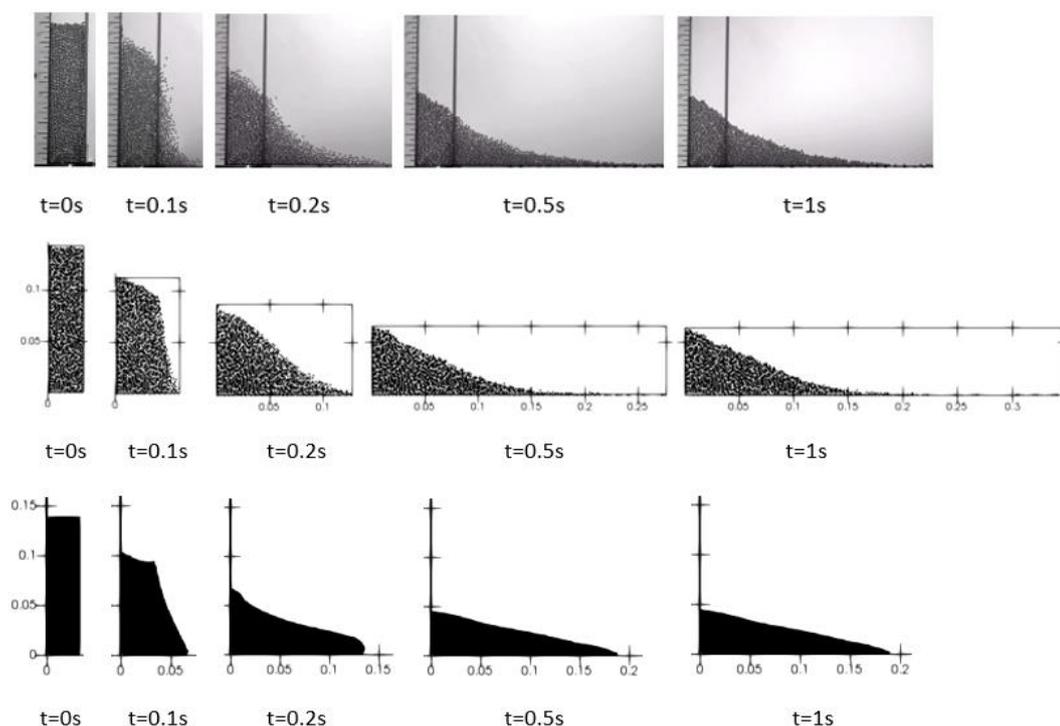
**Tabella 9.1** - Risultati della configurazione finale dopo il collasso: confronto tra risultato sperimentale, simulazione DEM e LBM

	Altezza finale massima $H_f$	Distanza di arresto $L_f$	Angolo di riposo medio $\alpha$
Risultato sperimentale	6.5 cm	19.0 cm	$18.89^\circ \cong 19^\circ$
Simulazione DEM	6.35 cm	19.0 cm	$18.48^\circ \cong 18.5^\circ$
Simulazione LBM	4.5 cm	19.0 cm	$13.32^\circ \cong 13^\circ$

Dai risultati ottenuti si evince che il Discrete Element Method rappresenta meglio la configurazione finale sperimentale, in quanto raggiunge valori molto vicini a quelli sperimentali per tutte e tre le grandezze riportate in *Tabella 9.1*: la distanza di arresto risulta identica a quella sperimentale, la massima altezza finale è sottostimata di soli 0.15 cm e, di conseguenza, anche l'angolo di riposo medio è molto prossimo al valore sperimentale.

Il Lattice Boltzmann Method con reologia Attritiva è in grado di rappresentare bene la distanza di arresto del flusso, ma sottostima la massima altezza finale di 2 cm, che porta ad ottenere un angolo di riposo medio di circa  $6^\circ$  inferiore a quello sperimentale.

La *Figura 9.1* rappresenta la sequenza di collasso a diversi istanti di tempo successivi, fino all'arresto del flusso, mettendo a confronto le simulazioni numeriche con quella sperimentale.

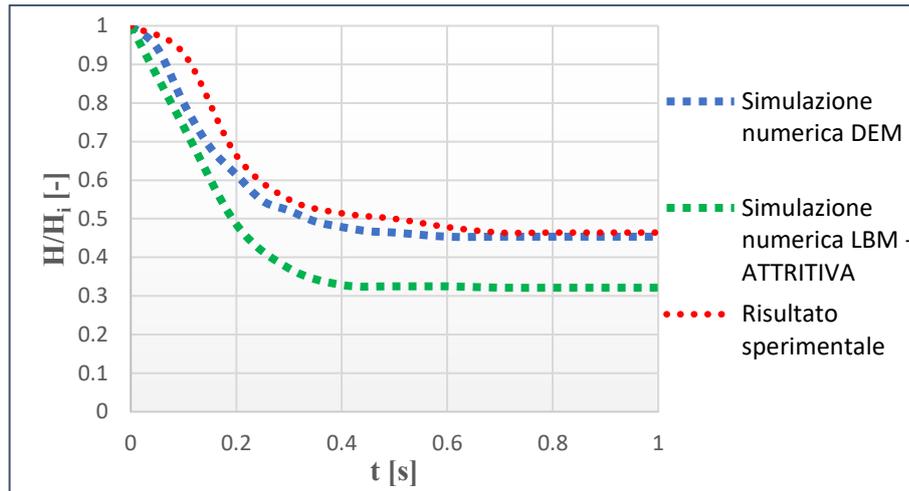


**Figura 9.1** - Sequenza di collasso: risultati sperimentali (in alto), simulazione numerica DEM (al centro) e simulazione numerica LBM con reologia attritiva (in basso)

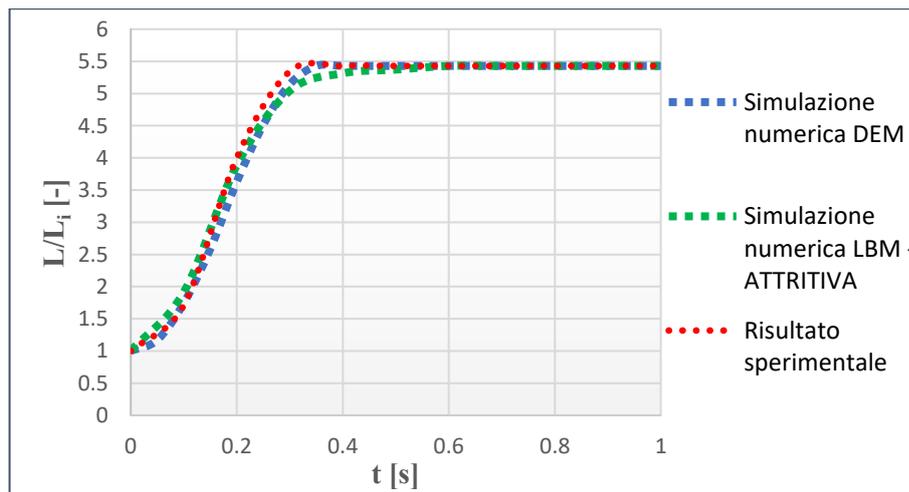
Osservando l'immagine sopra rappresentata, risulta evidente come l'approccio discreto (riga centrale di *Figura 9.1*), rappresenti meglio di quello continuo (ultima riga di *Figura 9.1*) oltre che la configurazione finale (per  $t=1$  s), anche le diverse geometrie durante la sequenza di collasso, riproducendo quindi più fedelmente sia la forma che le dimensioni del flusso granulare durante il moto.

I grafici delle *Figure 9.2* e *9.3* riportano rispettivamente gli andamenti al variare del tempo della massima altezza normalizzata (rispetto al valore iniziale  $H_i$ ) e della lunghezza di diffusione normalizzata del flusso (rispetto a  $L_i$ ), mettendo nuovamente a confronto i valori ottenuti tramite le analisi numeriche con quelli sperimentali.

Quello che si desume è il fatto che in generale i risultati numerici sottostimino quelli sperimentali: questa differenza è maggiormente evidente per il LBM, specialmente per quanto riguarda i valori delle altezze massime. Il DEM è più conforme al risultato sperimentale sia per quanto riguarda le altezze (*Figura 9.2*) che le lunghezze di percorrenza del flusso, anche se per quanto riguarda quest'ultima grandezza e la distanza di arresto, possiamo affermare che entrambi i metodi la simulino con buona approssimazione (*Figura 9.3*).



**Figura 9.2** - *Massima altezza normalizzata al variare del tempo: simulazione numerica DEM, simulazione numerica LBM con reologia attritiva e risultato sperimentale*



**Figura 9.3** - *Lunghezza di diffusione normalizzata al variare del tempo: simulazione numerica DEM, simulazione numerica LBM con reologia attritiva e risultato sperimentale*

Il Discrete Element Method risulta più efficace nel rappresentare i risultati sperimentali per un flusso di materiale granulare, sia per quanto riguarda la forma che le dimensioni di altezza massima e lunghezza di percorrenza durante il collasso e all'arresto.

Il limite del metodo discreto però, sono i costi computazionali, in quanto le simulazioni effettuate con il DEM hanno una durata particolarmente elevata: nel problema in esame (collasso di una colonna granulare formata da 1275 particelle), un'analisi interrotta dopo 2 secondi ha una durata pari a circa 9 ore, durata che

diventa sempre più grande all'aumentare del numero di particelle presenti nel caso oggetto di studio.

Il Lattice Boltzmann Method invece, nonostante si discosti maggiormente dal risultato sperimentale rispetto al metodo discreto, specialmente per quanto riguarda la geometria e le massime altezze durante il collasso, ha una bassa durata computazionale: la stessa simulazione di collasso di una colonna di altezza iniziale  $H_i=14.0$  cm e larghezza iniziale  $L_i=3.5$  cm, interrotta dopo 2 secondi, ha per il metodo del continuo una durata di circa 20 minuti.

In conclusione si può affermare che, per un'analisi a piccola scala, come nel caso oggetto di studio in questo documento di tesi, il DEM è più efficace e maggiormente adatto per la simulazione dei flussi granulari. Invece, se si devono effettuare analisi a grande scala, o comunque analisi dove il numero di particelle per il metodo discreto risulta particolarmente elevato, è più conveniente usare un approccio continuo LBM, poiché la forma e le dimensioni del flusso risultano in ogni caso accettabili e si hanno dei vantaggi soprattutto per quanto riguarda i costi computazionali decisamente più bassi.

# Appendice: File di configurazione utilizzato per analisi numeriche DEM e LBM

Per completezza si riportano nelle immagini seguenti le schermate del file di configurazione usato sia per le simulazioni discrete che per quelle del continuo.

In *Figura A.1* è rappresentata la prima parte della schermata del file, in cui si effettua la scelta del tipo di solutore da adottare (`#SOLVER SWITCHERS`, 1=attivo, 0=disattivo), del tempo di durata reale della simulazione (`#TIME INTEGRATION – maxTime`) e dei risultati visualizzati a video (`#OUTPUT`).

```
1 # CONFIGURATION FILE FOR HYBRID
2
3 # SOLVER SWITCHERS
4 demSolve           = 0      #
5 lbSolve            = 1      #
6 freeSurfaceSolve  = 1      #
7 forceFieldsSolve  = 1      #
8 coriolisSolve     = 0      #
9 centrifugalSolve  = 0      #
10 staticFrictionSolve = 0    #
11
12 # PROBLEM NAME
13 problemName       = DAMBREAK #
14
15 # TIME INTEGRATION
16 demInitialRepeat  = 0
17 lbmInitialRepeat  = 0      #
18 maximumTimeSteps = 0      # run until this number of time steps is reached (0 for infinite)
19 maxTime           = 2.0    # run until the time variable has reached this value (0 for infinite) 50
20
21 # OUTPUT
22 screenExpTime     = 0.01   # print data after x simulation time units (0 for deactivated)
23 fluidExpTime      = 0.1    # write vtk file after x simulation time units (0 for deactivated)
24 fluidLagrangianExpTime = 0  # write Lagrangian vtk file after x simulation time units (0 for deactivated)
25 partExpTime       = 0      # write vtk file after x simulation time units (0 for deactivated)
26 partRecycleExpTime = 0     # write particle recycle file after x simulation time units (0 for deactivated)
27 fluidRecycleExpTime = 0    # write particle recycle file after x simulation time units (0 for deactivated)
28 fluid2DExpTime    = 0      # write a 2D topographical file every x simulation time. Maximum values are updated every screenExpTime
29 objectExpTime     = 0      # write object file after x simulation time units (0 for deactivated)
30
```

**Figura A.1** - Schermata del file di configurazione (prima parte)

Si passa poi alla schermata dedicata all'approccio continuo LBM (*Figura A.2*), in cui si compilano i parametri di discretizzazione spaziale e temporale del reticolo e il valore della densità del fluido (`#LBM SCALING UNITS – unitLength, unitTime` e `unitDensity`). La sezione `#LBM PARAMETERS` permette la scelta delle dimensioni del campo di lavoro (`lbSizeX, lbSizeY` e `lbSizeZ`) e delle forze in gioco, sia per il metodo continuo che per quello discreto. Inoltre, la parte finale della sezione è riservata alla scelta della legge reologica per la simulazione del fluido equivalente alla massa reale (`rheologyModel`) e all'introduzione dei rispettivi valori dei parametri di riferimento.

```

31 # LBM SCALING UNITS
32 unitLength      = 1.6e-3 # length
33 unitTime        = 2.0e-6 # time 1.0e-4
34 unitDensity     = 1713.0 # mass/length^3
35
36 # LBM PARAMETERS
37 lbRestart       = false #
38 lbRestartFile   = input/ #
39 lbTopography    = false #
40 lbTopographyFile = input/ # need to fully contain the domain in direction x and y
41 lbSizeX         = 0.350 # length 50 30
42 lbSizeY         = 0.0024 # length
43 lbSizeZ         = 0.335 # length
44 initVelocityX   = 0.0 # length/time
45 initVelocityY   = 0.0 # length/time
46 initVelocityZ   = 0.0 # length/time
47 lbFX            = 0 # length/time^2
48 lbFY            = 0 # length/time^2
49 lbFZ            = -9.81 # length/time^2
50 lbRotX          = 0.0 # 1/time
51 lbRotY          = 0.0 # 1/time
52 lbRotZ          = 0.0 # 1/time
53 lbRotCenterX   = 0.0 # length
54 lbRotCenterY   = 0.0 # length
55 lbRotCenterZ   = 0.0 # length
56 boundary0      = 7 #
57 boundary1      = 7 #
58 boundary2      = 4 #
59 boundary3      = 4 #
60 boundary4      = 7 #
61 boundary5      = 7 #
62 slipCoefficient = 0.0 # /
63 rheologyModel  = FRICTIONAL# either NEWTONIAN, BINGHAM, VOELLMY, or FRICTIONAL
64 initVisc       = 0.001 # mass/length/time # NEWTONIAN, ALSO MINIMUM FOR FRICTIONAL
65 plasticVisc    = 0.01 # mass/length/time # BINGHAM
66 yieldStress    = 225.0 # mass/length/time^2 # BINGHAM
67 frictionCoefFluid = 0.35 # / # FRICTIONAL or VOELLMY
68 voellmyConstant = 50.0 # length/time^2 # VOELLMY
69 turbulenceSolve = 0 #
70 turbConst      = 0.0256 # /
71

```

Figura A.2 - Schermata del file di configurazione (seconda parte)

L'ultima immagine (Figura A.3) rappresenta la schermata destinata all'approccio discreto DEM, dove vengono inserite le proprietà del materiale particellare (*#DEM PARAMETERS*) e i valori dei parametri di stabilizzazione numerica (*numVisc* e *criticalRatio*). Alle voci "particleFile" e "objectFile" viene inserito il percorso del file rispettivamente della configurazione iniziale delle particelle (contenente informazioni di raggio, posizioni, velocità lineari e rotazionali lungo gli assi *x*, *y* e *z* di ogni singola particella) e di eventuali ostacoli o barriere.

```

72 # DEM PARAMETERS
73 density         = 3750.0 # mass/length^3
74 contactModel    = LINEAR # LINEAR OR HERTZIAN
75 youngMod       = 2.1e8 # mass/length/time^2
76 poisson        = 0.3 #
77 linearStiff     = 3.0e4 # LINEAR 5.3e4
78 restitution     = 0.1 # / a viscosity coefficient is calculated so that the restitution keeps this value
79 viscTang       = 1.0 # 0.2
80 frictionCoefPart = 0.35 # 0.3
81 frictionCoefWall = 0.35 # 0.3
82 rollingCoefPart = 0.02 # 0.3
83 particleFile    = C:/cygwin64/home/chiar/configurationfile/zero.dat #
84 translateX      = 0.0 # length 42
85 translateY      = 0.0 # length
86 translateZ      = 0.0 # length
87 scale          = 1.0 #
88 objectFile      = C:/cygwin64/home/chiar/configurationfile/zero.dat #
89 numVisc         = 0.0 # mass/length/time -> like dynamic viscosity
90 multiStep       = 0 # number of DEM steps between LBM steps. If 0, it is determined inside the program
91 criticalRatio   = 0.001 # ratio between time step and estimated duration of contacts (only if multiStep=0)
92

```

Figura A.3 - Schermata del file di configurazione (terza parte)

# Bibliografia

- Artoni R. (2010) «Mechanics of Dense and Multiphase Flows of Granular Materials», Università degli studi di Padova.
- Bao Y.B. e Meskas J. (2011) «Lattice Boltzmann Method for Fluid Simulation».
- Bettella F. (2013) «Reologia e dinamica di propagazione delle colate detritiche: analisi e modellazione a diversa scala», Università degli studi di Padova.
- Bortolami S. (2016) «Propagazione di flussi granulari e loro impatto sulle strutture analizzati mediante approccio MPM», Università degli studi di Padova.
- Bosco A., Pirulli M., Scavia C., Hungr O., Kaitna R. e Pastor M. (2013) «Analisi della dinamica di flussi granulari attraverso prove di laboratorio con tamburo rotante e simulazione numerica», Incontro Annuale dei Ricercatori di Geotecnica, Perugia.
- Chen S. e Doolen G.D. (1998) «Lattice Boltzmann method for fluid flows», *Annual review of fluid mechanics*, vol. 30, n. 1, pp. 329–364.
- Cianci S., Scarpazzi M. (2013) «Il coefficiente di spinta a riposo ( $K_0$ ) delle terre: applicazioni pratiche e sua determinazione sperimentale», *Professione Geologo*, n. 35, pp. 20-22.
- Cruchaga M.A., Celentano D.J., Tezduyar T.E. (2007) «Collapse of a Liquid Column: Numerical Simulation and Experimental Validation», *Computational Mechanics*, vol. 39, n. 4, pp. 453–476.
- D'Agostino e M. Cesca M. (2009) «Reologia e distanza di arresto dei debris flow: sperimentazioni su modello fisico a piccola scala», *IX Convegno Nazionale dell'Associazione Italiana di Ingegneria Agraria, Ischia Porto*, pp. 12–16.
- De Fanti M. (2012) «Studio sperimentale del collasso di colonne granulari umide», Università degli studi di Padova.
- Forterre Y. e Pouliquen O. (2011) «Granular flows», *Glasses and Grains*, Springer, pp. 77–109.

- Gabrieli F. (2009) «L'approccio particellare per la modellazione numerica dell'insacco di instabilità di versante in terreni granulari», Università degli studi di Padova.
- Hungr O., Evans S.G., Bovis M.J., e Hutchinson J.N. (2001) «A Review of the Classification of Landslides of the Flow Type», *Environmental & Engineering Geoscience*, vol. VII, pp. 221–238.
- Ionescu I.R., Mangeney A., Bouchut F. e Roche O. (2015) «Viscoplastic modeling of granular column collapse with pressure-dependent rheology», *Journal of Non-Newtonian Fluid Mechanics*, vol. 219, pp. 1–18.
- Jakob M. e Hungr O. (2005) *Debris-flow hazards and related phenomena*. Berlin; New York: Springer.
- Jop P., Forterre Y. e Pouliquen O. (2006) «A constitutive law for dense granular flows», *Nature*, vol. 441, n. 7094, , pp. 727–30.
- Lacaze L., Phillips J.C., Kerswell R.R. (2008) «Planar collapse of a granular column: Experiments and discrete element simulations», *Physics of Fluids*.
- Lagrée P.Y., Staron L. e Popinet S. (2011) «The granular column collapse as continuum: validity of a two-dimensional Navier-Stokes model with a  $\mu(I)$ -rheology», *J. Fluid Mech. - Cambridge University*, vol. 686, pp. 378–478.
- Lanciotti M. (2009) «Metodi Numerici avanzati», Università degli studi di Bologna.
- Lanzoni S. (2007) «Le equazioni delle correnti a superficie libera», Università degli studi di Padova.
- Leonardi A. (2015) «Numerical simulation of debris flow and interaction between flow and obstacle via DEM», ETH Zurich.
- Luding S. (2008) «Introduction to discrete element methods: basic of contact force models and how to perform the micro-macro transition to continuum theory». *European Journal of Environmental and Civil Engineering*, vol. 12, n. 7–8, pp. 785–826.
- Marchelli M. (2018) «Debris flow interaction with open rigid barriers. A DEM\_LBM approach for trapping efficiency and impact force analysis», Politecnico di Torino.
- Morsilli M. (2010) «Flussi gravitativi», Università degli studi di Ferrara.

- Peng C. (2011) «The lattice Boltzmann method for fluid dynamics: theory and applications», Ecole Polytechnique Federale de Lausanne.
- Pirulli M. (2014) «Il fenomeno del Debris flow e metodologie di calcolo dei percorsi di colata», Politecnico di Torino.
- Pirulli M. e Sorbino G. (2006) «Effetto della reologia sull'analisi della propagazione di flussi di detrito», Incontro Annuale dei Ricercatori di Geotecnica, Pisa.
- Pöschel T. e Schwager T. (2005) *Computational granular dynamics: models and algorithms*. Berlin; New York: Springer-Verlag.
- Scavia C., Labiouse V., Pirulli M., Pisani G. e Sauthier C. (2012) «Numerical modelling with a continuum mechanics approach», INTERREG IVC alcotra, Torino.
- Soatto F. (2014) «Le colate di detriti; creazione di una interfaccia tra FV Shock e un GIS per simulare due eventi avvenuti nel bacino del rio Lazer e di Cancia», Università degli studi di Padova.
- Sosio R., Crosta G.B., Frattini P. e Valbuzzi E. (2006) «Caratterizzazione reologica e modellazione numerica di un debris flow in ambiente alpino», *Giornale di Geologia Applicata*, vol. 3, pp. 263–268.
- Volpato S. e Santomaso A.C. (2017) «Modellazione numerica di flussi granulari», *Bollettino Panta Rei*, vol. 16, pp. 9–14.
- Wagner A.J. (2008) «A practical introduction to the lattice Boltzmann method». *Adv. notes for Statistical Mechanics*, vol. 463.

# Ringraziamenti

È arrivato il momento tanto atteso. Questo lavoro di tesi rappresenta il raggiungimento del traguardo finale del mio percorso universitario, punto di arrivo e contemporaneamente di partenza della mia vita.

Sono stati anni di fatica e sacrifici, ma anche di gioia, divertimento, nuove esperienze e conoscenze. Per questo mi sento in dovere di ringraziare tutte le persone che, in modi diversi, hanno condiviso con me questo percorso.

Ringrazio il relatore di questa tesi, il Professor Claudio Scavia, per i consigli forniti e la disponibilità dimostrata durante il periodo di stesura. Un sentito grazie anche all'Ingegnere Alessandro Leonardi, senza il quale questo lavoro non avrebbe preso forma.

Un ringraziamento speciale va ai miei genitori che, con il loro sostegno, mi hanno sempre dato la spinta necessaria a superare le difficoltà e a credere sempre in me stessa.

Grazie a tutti gli amici che nei momenti difficili mi hanno donato spensieratezza e risate. In particolare grazie alle mie amiche di sempre: Sara, Chiara, Luisa, Costanza, Laura, Elisabetta e Martina, su cui so di poter contare in ogni momento.

Voglio ringraziare i miei compagni e colleghi universitari, con cui ho condiviso la vita al Politecnico e che hanno alleggerito ore di interminabili lezioni, di ricerche e di studio disperato.

Infine, ma non per importanza, grazie ad Amedeo per avermi supportata e sopportata quando ne avevo più bisogno, grazie per essere una certezza nel mio presente e futuro.

Grazie quindi a tutti coloro che negli anni hanno creduto in me e hanno saputo trasmettermi valori, insegnamenti e consigli che mi accompagneranno sempre nel corso della vita. A voi va la mia più grande riconoscenza.