POLITECNICO DI TORINO

Corso di Laurea Magistrale in Ingegneria Aerospaziale

TESI DI LAUREA MAGISTRALE

Ripartizione ottimale della potenza tra propulsori elettrici per missioni interplanetarie

Relatore:

Prof. Lorenzo Casalino

Candidato:

Claudia Mingarelli

Marzo 2018

Introduzione

Una delle missioni spaziali proposte dalla NASA e, successivamente cancellata, è l'*Asteroid Redirect Mission* (ARM), nota anche come *Asteroid Retrieval and Utilization* (ARU) con l'obiettivo di recuperare un frammento da un *Near-Earth Asteroids* (NEA), utilizzando una sonda robotica a propulsione solare elettrica (SEP). Da questo corpo celeste si sarebbe dovuto prelevare un masso di 4 metri per poi trasportarlo in un'orbita lunare stabile dove sarebbe stato visitato da una capsula *Orion*, lanciata dallo *Space Launch System* (SLS) con due astronauti a bordo. La missione, prevista con un primo lancio nel 2020, non era un "programma", ovvero una serie di missioni stabili e ripetute in cui vengono utilizzati SLS e Orion, ma una singola missione composta da diverse fasi destinate all'utilizzo di questi sistemi.

Gli obiettivi secondari erano, inoltre, i test di varie tecnologie e procedure utilizzabili a passaggi incrementali per missioni sempre più complesse con un comune obiettivo: l'arrivo su Marte.

La prima 'macrofase' della missione, già iniziata nel 2014, aveva come obiettivo l'identificazione di un asteroide *Near Earth Object* (NEO). Con l'utilizzo di telescopi terrestri e spaziali, la NASA aveva esaminato i possibili candidati NEO; la scelta dell'obiettivo definitivo non sarebbe avvenuta prima del 2020-21.

Nei seguenti capitoli verrà descritta la missione *Asteroid Redirect Mission* e la possibilità che avrebbe dato di raggiungere, grazie all'utilizzo della propulsione elettrica, il suolo marziano. Successivamente sarà analizzata la fase interplanetaria di questa missione e, nello specifico, verrà effettuata un'ottimizzazione delle traiettorie interplanetarie. Prevedendo di utilizzare uno spacecraft con tre propulsori elettrici, si proseguirà con un metodo indiretto per formulare le possibili combinazioni ottimali delle potenze dei tre propulsori, dove, nel contesto della propulsione elettrica, la spinta e la portata di propellente sono legati da una dipendenza cubica alla potenza in ingresso. Inizialmente si eseguirà questo procedimento per un caso in cui il coefficiente del termine al cubo è maggiore di zero e, successivamente, lo si confronterà con un altro a coefficiente minore di zero ed, infine, uguale a zero. Gli andamenti della potenza, della spinta e dell'impulso specifico ad essi associati saranno poi analizzati e discussi prendendo come modello di confronto un altro propulsore avente sempre stesso range di potenza del motore analizzato precedentemente, con impulso specifico maggiore e coefficiente minore di zero.

Ringraziamenti

Vorrei ringraziare prima di tutto il professor Lorenzo Casalino, che mi ha seguita e si è reso sempre disponibile lungo tutto il percorso di tesi e nella stesura di quest'elaborato. Durante gli anni universitari ho tracciato il mio percorso grazie alle sue materie e alla passione che mi trasmetteva nelle lezioni, avvicinandomi al mondo dei motori aeronautici e spaziali e concludendo questi cinque anni accademici con un argomento di tesi che mi ha sempre incuriosita e mi ha portata a scegliere come facoltà quella di ingegneria aerospaziale.

Ringrazio i miei genitori, per tutto quello che hanno sempre fatto per me, per avermi sostenuta, per non avermi abbandonata mai nei momenti più difficili, per avermi fatto credere più in me stessa e per avermi fatto capire il vero senso della parola 'Famiglia'. A loro devo tutto.

Ringrazio le mie sorelle Francesca e Valentina che mi sono state vicine anche vivendo in città differenti. Grazie ai loro consigli e al loro affetto sono riuscita a ricostruire un bellissimo rapporto che spero si rinforzerà sempre di più. Vi voglio bene.

Ringrazio Domenico, che da nove anni è sempre stato al mio fianco, non mi ha mai lasciata andare e che mi ha aiutata a ritrovare la strada quando mi ero persa. Lo ringrazio per il sostegno continuo, per la pazienza, per le sue parole e per avermi fatto riscoprire il valore e la bellezza delle piccole

cose. Grazie per aver condiviso le mie passioni e aver raggiunto tutti i traguardi insieme mano per la mano, sei la cosa più bella che mi sia mai capitata. 'Grazie che quando sto per crollare mi ami al posto mio'.

Ringrazio Andrea, una certezza da cinque anni e una persona unica, leale e speciale che spero di avere al mio fianco per molto tempo ancora. Ringrazio i miei amici di avventura Mello, Tonu e Chiara che mi hanno fatta innamorare di questa città e sono parte della mia vita. Vi porterò sempre nel cuore.

Ringrazio Cristina, la mia 'terza sorella' che nei momenti più tristi è sempre riuscita a farmi sorridere con la sua positività, la sua forza e la sua gioia.

Ringrazio Feffa, un esempio da seguire perché non credo esista una Donna più forte di lei.

Ringrazio le mie coinquiline, Simona e Federica per questi ultimi anni a Torino, per i loro fantastici dolci, la loro compagnia e le risate insieme; grazie per avermi fatto sentire a 'casa mia'.

Infine, desidero ringraziare tutti gli amici di università e lontani e, soprattutto, un grazie va al mio compagno di studi Alessandro a cui auguro un bellissimo futuro.

Indice

Introduzione 3

Ringraziamenti 5

1 Asteroid Redirect Mission (ARM), Asteroid Retrieval and Utilization (ARU) 9

1.1 Cos'è la missione ARM? 9

1.1.1 Fasi dell'ARM 11

1.2 Ricerca di possibili asteroidi target per la missione ARM 13

1.2.1 Asteroide target: 433 Eros 13

1.3 Propulsione Solare Elettrica (SEP) 15

1.3.1 Caratteristiche di un propulsore SEP 31

2 Modello matematico 33

2.1 Problema dei due corpi e condizioni al contorno 33

2.2 Introduzione all'ottimizzazione di traiettorie spaziali. 39

2.2.1 Teoria del controllo ottimale 39

2.2.2 Problema differenziale ai limiti 43

2.3 Ottimizzazione con metodi indiretti 47

3 Ripartizione ottimale della potenza tra tre propulsori con $c_3>0$, $c_3<0$ e $c_3=0$ 49

3.1 Caso $c_3>0$ 51

3.2 Caso $c_3<0$ 52

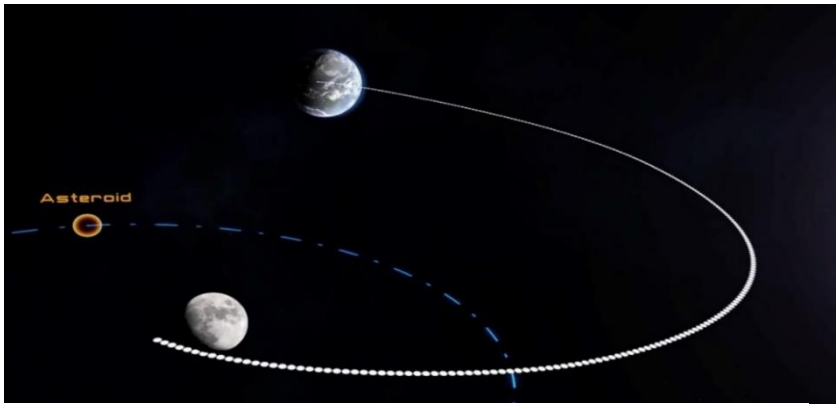
3.3 Caso $c_3=0$ 53

4 Risultati 54
4.1 Ripartizione ottimale della potenza 56
4.1.1 Caso $c_3>0$ 56
4.1.2 Caso $c_3<0$ 59
4.1.3 Caso $c_3=0$ 61
4.1.4 Ripartizione ottimale delle potenze per due e un solo propulsore per tutti i coefficienti c_3 63
4.2 Analisi di due tipi di propulsori con diverso coefficiente c_3 65
4.3 Risultati e confronto 67
4.3.1 Ripartizione della spinta per tre propulsori dell'ARM e andamento dell'impulso specifico e della spinta per il caso con $c_3>0$ 67
4.3.2 Ripartizione della spinta per tre propulsori fittizi e andamento dell'impulso specifico e della spinta per il caso con $c_3<0$ 69
4.4 Confronto tra i propulsori di riferimento dell'ARM nel caso $c_3>0$ e i propulsori con $c_3<0$ 71
4.5 Confronto tra i due tipi di propulsori per diverse durate di missione 74
5 Conclusioni 77
Appendice 79
Sitografia 84

1 Asteroid Redirect Mission (ARM), Asteroid Retrieval and Utilization (ARU)

1.1 Cos'è la missione ARM?

L'agenzia *National Aeronautics and Space Administration* (NASA), tra il 2011 e il 2012, ha sviluppato una prima missione robotica per visitare un asteroide di grandi dimensioni vicino alla Terra, raccoglierne un masso dalla sua superficie per campionarlo e, successivamente, reindirizzare il suddetto asteroide in un'orbita lunare stabile facente parte della classe delle orbite retrogradi distanti o *Distant Retrograde Orbit* (DRO), le quali rimangono stabili anche per centinaia di anni.



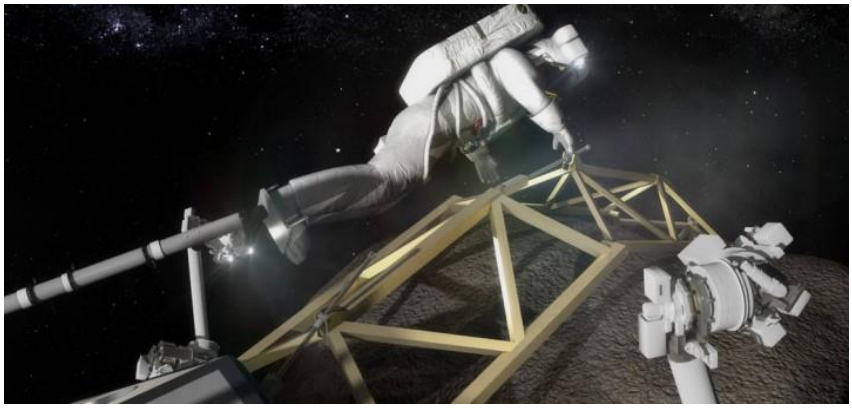
"Figura 1. Traiettoria della missione ARM"

Gli astronauti, una volta giunti sulla superficie del corpo celeste, avrebbero potuto esplorare e ritornare sulla Terra con campioni per analizzarli. Questa missione è chiamata *Asteroid Redirect Mission* (ARM) e, se non fosse stata cancellata, avrebbe permesso alla NASA di far avanzare nuove tecnologie ed esperienze di volo spaziale necessarie per una futura missione sul pianeta Marte. Il programma di osservazione degli oggetti vicini alla Terra della NASA ha catalogato più di

mille nuovi *Near-Earth Asteroids* (NEA), dei quali quattro sarebbero potuti essere i candidati ideali per la missione ARM. Prima di decidere l'asteroide target, la NASA ne avrebbe studiato la velocità, l'orbita, la dimensione e lo spin. Per la missione si sarebbe utilizzata una navicella robotica spaziale che, in prima fase, sarebbe stata lanciata per reindirizzare l'asteroide sull'orbita lunare e, successivamente, verso il 2025, la capsula *Orion* sarebbe stata portata in orbita dal razzo *Space Launch System* (SLS) con un equipaggio composto da due astronauti. Per la prima volta nella storia dell'uomo si sarebbe riuscito ad esplorare ed entrare in contatto con un asteroide, testando un avanzato sistema a propulsione elettrica la *Solar Electric Propulsion* (SEP) ed anche un evoluto sistema di recupero di un *Near-Earth Asteroid*. Inoltre, grazie a questa missione, si sarebbe data dimostrazione di tecniche di difesa planetaria per deviare pericolosi asteroidi e proteggere il nostro pianeta, reindirizzando queste minacce in un'orbita retrograda distante intorno alla Luna. Ancora più importante sarebbe stata la possibilità data dall'ARM di raggiungere per la prima volta, da parte di un equipaggio, il suolo marziano dove sarebbe stato necessario un continuo rifornimento di risorse per la vita umana. Le missioni che prevedono un mantenimento della vita dell'uomo per lungo periodo, infatti, devono essere supportate da sistemi funzionali ed affidabili per anni, devono fornire numerosi e adeguati equipaggiamenti assieme a grandi quantità di propellente, ed infine, devono essere in grado di garantire la salute dell'individuo. Tutte queste esigenze potrebbero essere soddisfatte attraverso lo sfruttamento di risorse materiali prelevate dallo spazio come ad esempio, appunto, da un asteroide.

1.1.1 Fasi dell'ARM

Come già detto in precedenza, questa missione aveva il compito di mandare una navicella robotica per reindirizzare l'asteroide target su un'orbita lunare stabile intorno al 2020 di modo che, nel 2025, la capsula con equipaggio Orion lanciata dal razzo SLS sarebbe riuscita a compiere un rendezvous con questo corpo celeste e, quindi, atterrare sulla sua superficie. Gli astronauti avrebbero compiuto 'passeggiate spaziali' o *Extravehicular Activity* (EVA) per raccogliere campioni da portare sulla Terra.



"Figura 2. Extravehicular activity"

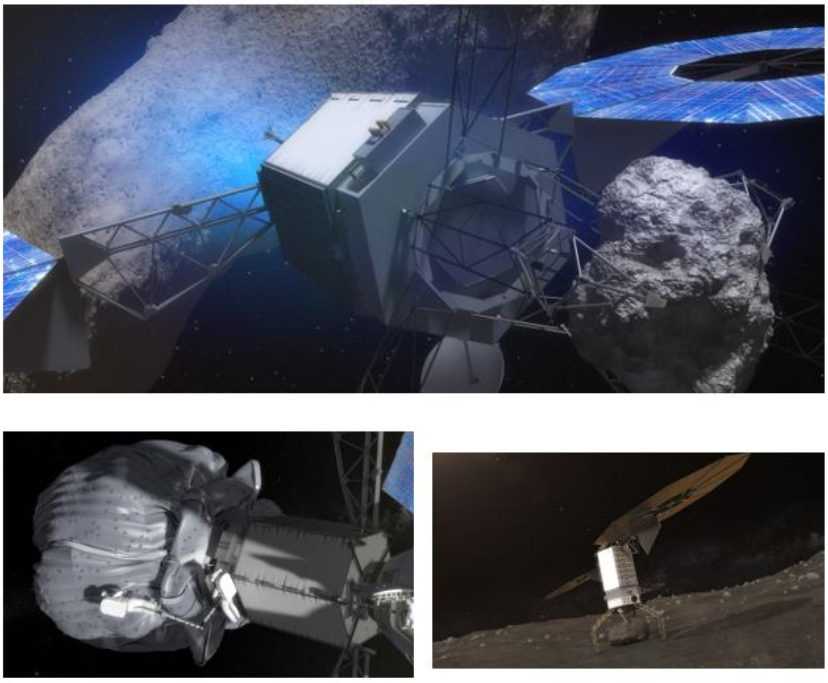
Possiamo quindi identificare tre fasi della missione:

1) *osservazione ed identificazione:* si tratta della fase in cui, attraverso telescopi ottici, telescopi a raggi infrarossi ed impianti radar, si scoprono e catalogano gli asteroidi attorno ai quali sarebbe stato possibile programmare l'ARM analizzandone la velocità, l'orbita, la dimensione e lo spin
2) *reindirizzamento:* in questa fase si cerca di catturare un NEA con una massa anche di circa 1.000 tonnellate e di deviarne la traiettoria verso un'orbita distante 70.000 chilometri dalla Luna. Nel 2020 si sarebbe dovuto lanciare l'*Asteroid Retrieval Vehicle* (ARV) composto dal modulo Solar Electric Propulsion, contenente sistemi propulsivi ad

alta potenza, e il Modulo di Missione in cui vi sono le tecnologie avioniche, le sonde e il meccanismo di cattura→ *Asteroid Robotic Redirect Mission* (ARRM)

3) *esplorazione e EVA:* in quest'ultima fase della missione era previsto di agganciare l'asteroide nell'orbita lunare utilizzando la capsula Orion in modo da poterlo ispezionare e campionare, valutarne la struttura interna e la presenza di potenziali risorse con due *Extravehicular Activity* ognuna della durata di quattro ore→ *Asteroid Redirect Crewed Mission* (ARCM).

Successivamente, al rientro dell'equipaggio, tonnellate di materiale sarebbero rimaste in orbita per centinaia di anni, disponibili per eventuali missioni future ed anche strutture di supporto per missioni verso lo spazio profondo, in prospettiva di un'esplorazione verso il 'pianeta rosso'.



"Figura 3. Fasi della missione ARM: cattura dell'asteroide, inglobamento, analisi in-situ"

1.2 Ricerca di possibili asteroidi target per la missione ARM

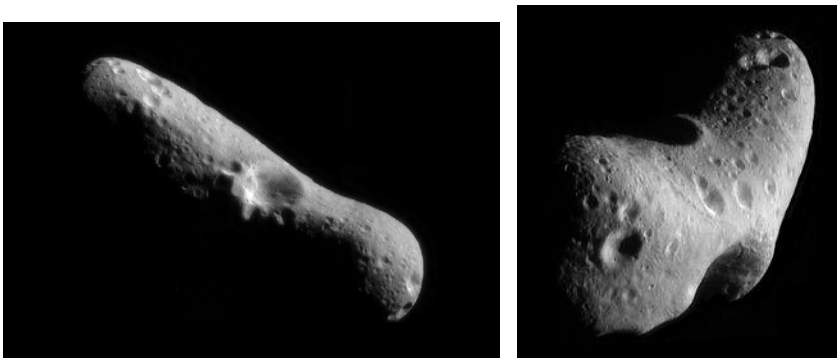
La Nasa sta facendo molti progressi per quanto riguarda il rilevamento di oggetti che rappresentano un maggior rischio se si scontrassero con la Terra, ma ce ne sono ancora molti da scoprire. Secondo un rapporto del Team di Definizione Scientifica '*gli asteroidi di 140 metri e più, sono di grande preoccupazione e dovrebbero continuare ad essere al centro degli sforzi di rilevamento globale'.* La NASA stima che questi corpi attorno alla Terra arriveranno a circa 25.000 alla fine del 2020. Ad oggi sono stati catalogati più di 7.800 NEA, ovvero comete morte o frammenti di collisioni di asteroidi della cintura principale.

1.2.1 Asteroide target: 433 Eros

Come asteroide target per la missione ARM era stato scelto il corpo celeste 433 EROS, primo asteroide su cui atterrò una navicella spaziale; appartiene al gruppo *Amors* dei NEA che attraversano l'orbita di Marte, ma non raggiungono abbastanza quella della Terra. Questo asteroide è importante sin dal 1898 quando divenne il primo corpo extraterrestre NEA ad essere scoperto. La navicella spaziale NEAR volò per la prima volta da Eros il 23 Dicembre 1998 ad una distanza di circa 3.800 chilometri e scoprì che l'asteroide era più piccolo del previsto con due crateri di medie dimensioni, una lunga cresta superficiale ed una densità simile a quella della crosta terrestre. NEAR entrò in orbita intorno ad Eros (nome del Dio greco dell'amore) il 14 Febbraio del 2000, giorno di San Valentino. In onore del pioniere dell'astrogeologia, Eugene

Shoemaker, il veicolo spaziale fu ribattezzato 'NEAR Shoemaker' e la sua missione effettuò il primo atterraggio su di un asteroide, evento mai avvenuto in tutta la storia dell'uomo. Accadde il 12 Febbraio 2001, quando Eros distava 315 milioni di chilometri dalla Terra. Fu il primo esperimento a raggi gamma mai realizzato sulla superficie di un corpo diverso da quello terrestre. Il veicolo spaziale emise la sua trasmissione finale dalla superficie di Eros il 1 Marzo 2001. Prima che il radar terrestre fosse disponibile per osservare corpi extraterrestri, Eros venne usato per calcolare la massa del sistema Terra-Luna e il valore dell'unità astronomica AU, ovvero la distanza tra il sole e l'orbita terrestre pari a $1{,}496 \cdot 10^8\ km$.

433 EROS:



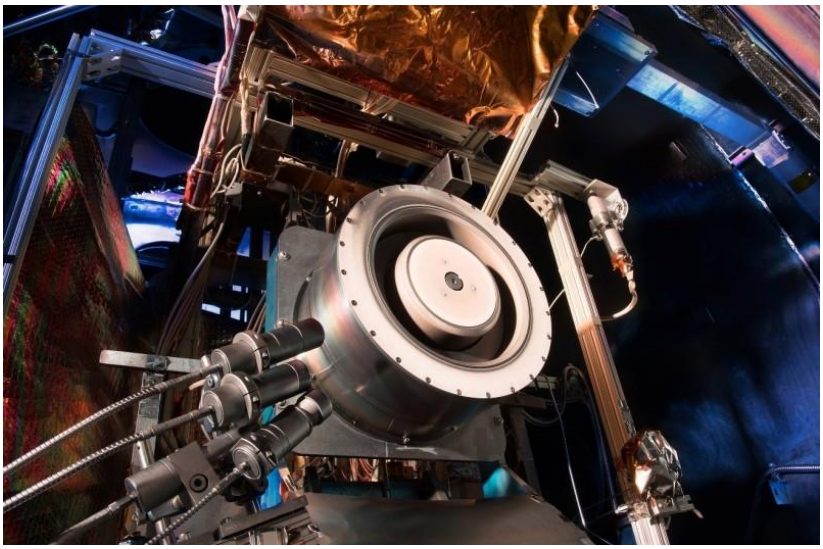
"Figura 4. 433 Eros fotografato dalla sonda NEAR Shoemaker della NASA"

Dimensioni	34,4 × 11,2 × 11,2 km
Diametro medio	16,84 ± 0,06 km 16,92 ± 0,04 km
Superficie	1 125 ± 15 km²
Volume	2 503 ± 25 km³ 2.535 ± 20 km³
Massa	6,687 ± 0,003 × 10¹⁵ kg
Densità media	2,67 ± 0,03 × 10³ kg/m³ 2,64 ± 0,02 × 10³ kg/m³
Acceleraz. di gravità in superficie	0,0021 ÷ 0,0055 m/s²
Velocità di fuga	3,1 ÷ 17,2 m/s
Periodo di rotazione	0,2194 giorni (5h 16min)
Inclinazione assiale	89°
A.R. polo nord	11,3692 ± 0,003°
Declinazione	17,2273 ± 0,006°
Temperatura superficiale	~227 K (media)
Albedo	0,25

Semiasse maggiore	218 155 000 km (1,458 UA)
Perielio	169 548 000 km (1,133 UA)
Afelio	446 266 762 000 km (1,783 UA)
Periodo orbitale	643,246 giorni (1,76 anni)
Velocità orbitale	24,36 km/s (media)
Inclinazione sull'eclittica	10,830°
Eccentricità	0,223
Longitudine del nodo ascendente	304,376°
Argom. del perielio	178,707°
Anomalia media	191,790°
Par. Tisserand (T_J)	4,582
MOID da Terra	0,149489 UA
Satelliti	no
Anelli	no

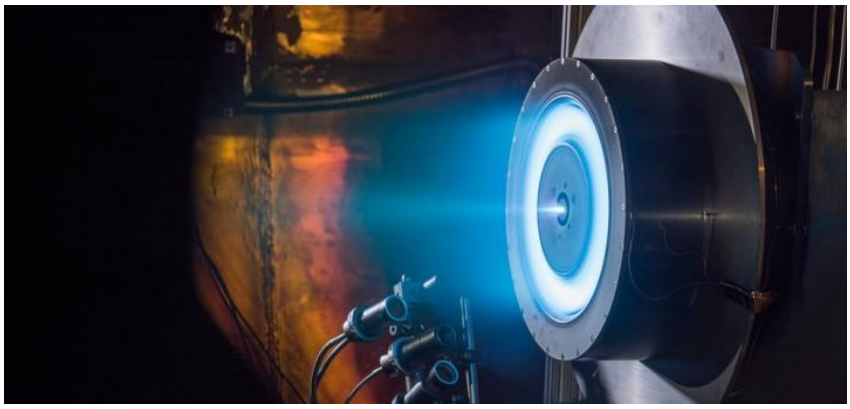
1.3 Propulsione Solare Elettrica (SEP)

Si è detto in precedenza che uno dei principali punti di forza della missione ARM sarebbe stato l'utilizzo di un sistema avanzato di propulsione elettrica, ma anche quello dell'impiego di pannelli solari di grandi dimensioni. Questi tipi di sistemi vengono chiamati *Solar Electric Propulsion* (SEP), propulsori a ioni che fanno uso dell'*effetto Hall* con alimentazione solare.



"Figura 5. Propulsore a ioni: motore SEP"

Questi permetteranno in futuro di puntare all'esplorazione dello spazio profondo e del suolo marziano. La solar electric propulsion, infatti, consuma meno rispetto ad altri tipi di propulsione elettrica e garantisce periodi di spinta più lunghi anche se con modulo di quest'ultima inferiore. Per queste ragioni, è un tipo di propulsione che si adatta bene al vuoto dello spazio. I motori SEP forniscono la spinta convertendo l'energia solare in elettrica ed usano tale elettricità per accelerare il propellente ionizzato a velocità estremamente elevate. I fotoni rilasciati dagli ioni perdono energia al momento del distacco dal motore, creando un bagliore di colore blu.



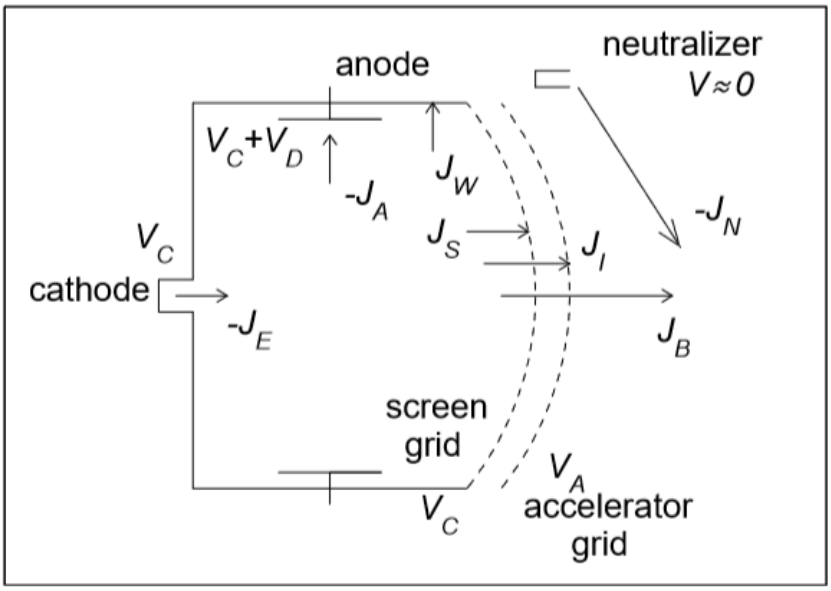
"Figura 6. Fascio 'blu' di ioni che generano spinta"

La costruttrice di questo sistema di motori all'avanguardia è la Aerojet Rocketdine, storica azienda californiana che ne ha raddoppiato la capacità di spinta rispetto ai propulsori elettrici attuali e ne ha aumentato l'efficienza di carburante di dieci volte rispetto alla propulsione chimica odierna. Allo stesso tempo, però, i pannelli solari devono essere resi più efficienti mano a mano che ci si allontana dal sole, quindi anche a grandi distanze dalla sua luce.

Questo genere di propulsori utilizza l'effetto Hall attraverso la combinazione di un intenso campo elettrico e di un campo magnetico applicato, perpendicolari tra loro.

Funzionamento propulsori a ioni con effetto Hall:

I propulsori a ioni sono propulsori elettrostatici i quali accelerano gli ioni che sono più pesanti e garantiscono una spinta efficiente attraverso un campo elettrico di forte intensità. Questi propulsori hanno la seguente struttura:



"Figura 7. Schema semplificato del funzionamento di un propulsore a ioni"

Dallo schema si può notare che si ha una *tensione di scarica* V_D che nello Xeno sarebbe di $12V$, ma che nella realtà viene aumentata a $30V$, in modo da avere una più efficace e sicura ionizzazione. Il catodo, ovvero l'elettrodo negativo, le pareti della camera di scarica e la *screen grid* (griglia curva estrattrice), sono ad un potenziale più alto V_C . La tensione dell'anodo, ovvero l'elettrodo positivo, è di $V_C + V_D$. Il plasma, un gas ionizzato costituito da un insieme di elettroni e ioni e globalmente neutro la cui carica elettrica totale è cioè nulla, si trova, invece, ad un potenziale positivo netto leggermente più basso di quello dell'anodo, $V_N \approx V_C + V_D$. Il valore di V_N è dettato dai requisiti di missione ovvero dall'impulso specifico. Successivamente, dopo la screen grid, vi è l'*accelerator grid* ovvero una griglia curva di accelerazione che, avendo un potenziale grande, ma negativo $V_A = -|V_A|$, permette di accelerare gli ioni facendoli uscire dalla camera di scarica J_B. Infine è presente, all'esterno della camera, un neutralizzatore a potenziale nullo che emette un fascio di elettroni $-J_N$ per neutralizzare il fascio di ioni uscente dalla

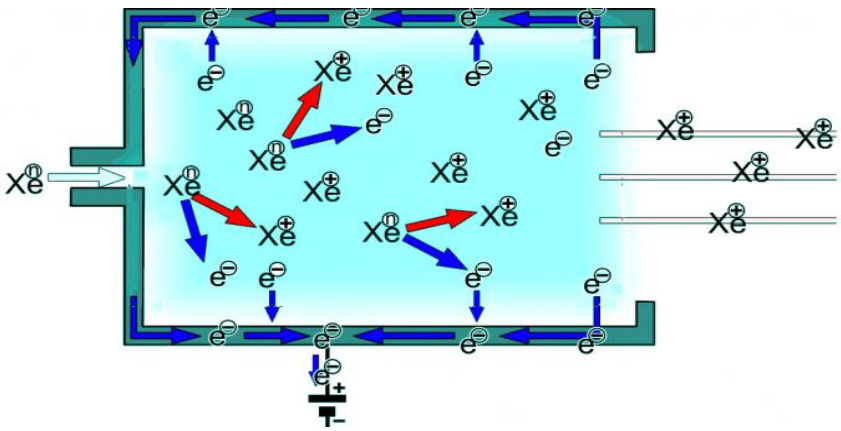
camera. Grazie al fatto che l'accelerator grid è posta ad un potenziale negativo, questi ioni di neutralizzazione non tendono a risalire verso la camera, ma continuano a procedere in direzione di accelerazione degli ioni. Un altro vantaggio del fatto che il potenziale della griglia acceleratrice sia alto e negativo, è quello di riuscire ad avere un'accelerazione maggiore degli ioni grazie ad un grande *intra-grid voltage,* ovvero alla differenza di potenziale tra la screen grid e l'accelerator grid, pari a V_G.

La camera di scarica è cilindrica e possiede questo catodo cavo che, per effetto *termoionico,* ovvero scaldandolo, emette i cosiddetti elettroni primari, cioè il flusso $-J_E$, i quali vengono utilizzati per andare a colpire gli atomi del plasma, ionizzandoli. Gli elettroni primari sono attratti dall'anodo $-J_A$ ed è fondamentale che questi non raggiungano troppo presto l'elettrodo positivo altrimenti il potenziale V_D andrebbe sprecato. Per evitare ciò, nella camera di scarica vicino all'anodo, è presente un campo magnetico $\boldsymbol{B}$ di $10T$, generato da magneti, che agisce perpendicolarmente al campo elettrico. Grazie all'*effetto Hall*, gli elettroni iniziano ad acquisire una velocità chiamata *velocità di deriva* che, nel caso in cui il campo magnetico sia assiale e verso destra, indirizza gli elettroni verso il basso. Con questo effetto si riesce ad ottenere un'azione di confinamento degli elettroni primari nella camera di scarica ed è tanto più efficiente quanto il *parametro di Hall* è alto. Il parametro di Hall è un'indicazione di quante oscillazioni avvengono intorno al campo magnetico durante il tempo caratteristico assente da collisioni e varia con la massa delle particelle m, la loro carica q e la temperatura tramite ν_c, ovvero la frequenza delle collisioni. Questa frequenza è ricavabile come $\nu_c = \sum_k n_k Q_{jk} v_{jk}$ con n numero di particelle su unità di volume, Q probabilità che avvenga un urto tra la particella di tipo j e quella di tipo k e v è

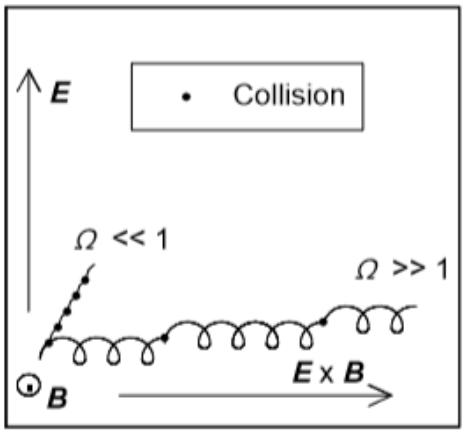
la velocità di agitazione termica della particella. Il parametro di Hall è dato da:

$$\Omega = \frac{\omega_B}{\nu_c} = \frac{qB}{m\nu_c} = \frac{N_{giri}}{N_{collisioni}}$$

- Se Ω è elevato allora il campo magnetico sarà molto forte, di conseguenza si avranno poche collisioni e la particella avrà una direzione parallela a $\boldsymbol{E}$x$\boldsymbol{B}$. Il confinamento degli elettroni in questo caso è molto efficace
- Se Ω è basso allora si avrà una maggior frequenza di collisioni e un peggior confinamento, dovuto al fatto che il campo magnetico ha una bassa intensità; di conseguenza l'elettrone tenderà ad avere una direzione parallela al campo elettrico $\boldsymbol{E}$, andando quindi a collidere subito con le pareti dell'anodo.



"Figura 8. Effetto Hall nella camera di scarica in un propulsore a ioni"



"Figura 9. Andamento delle particelle al variare del parametro di Hall"

Inoltre, questo campo magnetico elevato permette di non avere un grosso flusso di ioni che andrebbe a sbattere verso le pareti della camera, J_w.

Le tre fasi fondamentali dei propulsori a ioni sono:

1) ionizzazione ed estrazione degli ioni: gli ioni sono generati e separati dagli elettroni attraverso la screen grid posta all'uscita della camera di ionizzazione. Possono essere generati in due modi:
   - *bombardamento di elettroni* (tecnologia americana): vi sono due elettrodi, ovvero il catodo che emette elettroni primari ad alta energia nella camera di scarica e l'anodo che li accelera grazie al campo elettrico formatosi tra catodo e anodo. Tali elettroni primari vanno ad urtare gli atomi ionizzandoli
   - *radiazione a radio frequenza* (tecnologia europea): gli elettroni liberi nel gas vengono accelerati da un'onda elettromagnetica e vanno ad urtare gli atomi ionizzandoli. In questo caso non ci sono elettroni primari, l'anodo è assente

2) accelerazione: gli ioni sono accelerati da un forte campo elettrico $\boldsymbol{E}$ attraverso un'accelerator grid, generando così una spinta. Le particelle che vengono accelerate tra la screen e l'accelerator grid producono, a loro volta, un campo elettrico che va a modificare il profilo del potenziale. Il problema fondamentale, relativo a questa fase, consiste nella massima quantità di corrente, ovvero, nel numero massimo di ioni nell'unità di tempo che si può far passare per unità di area attraverso le due griglie. Esiste, quindi, un limite dettato dalla *Legge di Child.* Tra le due griglie vi sono solamente cariche positive e, di conseguenza, gli ioni tendono a respingersi tra loro. Lo ione entrante in questa fascia sente una forza repulsiva che lo rallenta e che diminuisce all'aumentare della distanza dalla screen grid, ovvero mano a mano che gli ioni accelerano. Se la differenza di potenziale tra le due griglie è sufficiente a vincere la forza di repulsione, gli ioni riusciranno a passare attraverso le due griglie, altrimenti non vi riusciranno fino a quando altri ioni non usciranno dalla zona compresa tra le due griglie. Tale limite sulla corrente si traduce in un limite sulla portata degli ioni m_+ e, quindi, sulla spinta $T = m_+ u_+$. La legge di Child consiste nell'espressione della massima corrente che si può avere tra le due griglie in funzione di differenti parametri:

$$j_{massima} = \frac{\frac{4\varepsilon_0}{9}\sqrt{\frac{2q}{m_+}}V_G^{\frac{3}{2}}}{x_a^2}$$

dove con $j_{massima}$ indichiamo la densità di corrente

$j = \frac{J}{Area}$, con ε_0 la costante dielettrica del vuoto, con V_G l'intra-grid voltage e con x_a la distanza tra la griglia estrattrice e la griglia acceleratrice. Da questa relazione si evince che, per avere un valore della corrente massima elevato, dovremmo:

- avere una V_G elevata
- avere una minima distanza tra gli elettrodi, il che implica meno particelle presenti e, quindi, minore azione frenante/repulsiva.

Vi sono però dei limiti tecnologici:

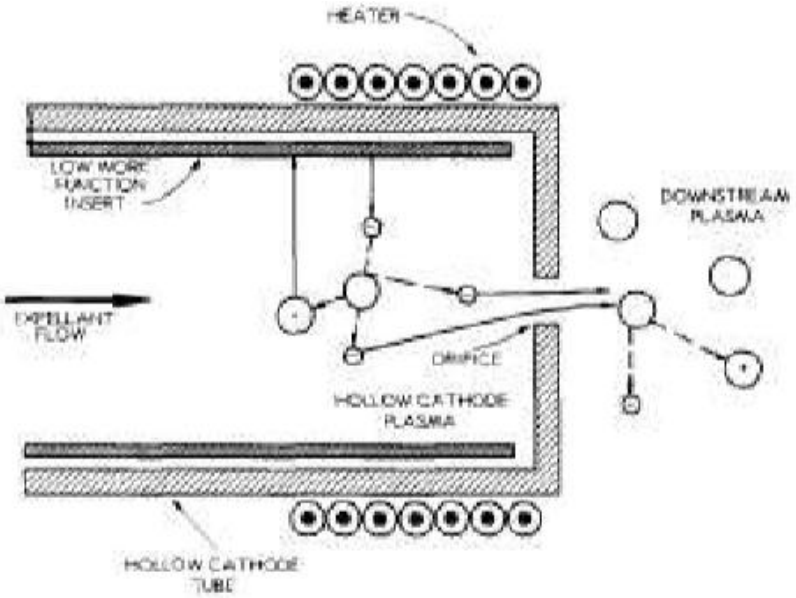
- x_a non può diminuire troppo ma deve far in modo che $\frac{D}{x_a} < 600$ dove D è la lunghezza della griglia. Infatti le deformazioni dovute ai carichi termici devono essere piccole rispetto a x_a. Inoltre, per prevenire la formazione di archi elettrici, bisogna che venga rispettata la condizione: $\frac{V_G}{x_a} < \frac{2kV}{mm}$
- il campo elettrico non dev'essere troppo elevato per non rischiare di avere archi elettrici o scintille tra i due elettrodi
- la struttura è composta da materiali differenti: le griglie sono in molibdeno facilmente lavorabile che permette deformazioni, mentre la camera di scarica è in acciaio. Si avranno quindi differenti deformazioni delle strutture in risposta ai carichi termici applicati.

La repulsione tra gli ioni in mezzo alle due griglie viene sentita anche in direzione trasversale, di conseguenza, il fascio di ioni tenderebbe a divergere sempre di più. Per ovviare a questo problema vengono utilizzate griglie forate in modo che, avendo un potenziale pari a V_C e $-|V_A|$,

le due griglie fungano da catodo e, quindi, in vicinanza dei fori, i primi ioni che le attraversano vengono attirate dalle pareti del catodo formando una guaina (*effetto sheath)* che permette la repulsione di successivi ioni provenienti dalla ionizzazione e la cattura di elettroni. A questo punto si avrà, in presenza degli elettrodi, un campo elettrico elevato mentre, nei fori, vi sarà un campo elettrico più basso. Le linee equipotenziali del plasma tenderanno, quindi, ad incurvarsi e in presenza dei fori si genereranno delle forze centripete che faranno convergere il fascio di ioni nei fori garantendo un'efficace *focalizzazione del fascio*.

3) neutralizzazione: il fascio di ioni uscente dall'accelerator grid viene neutralizzato da un opportuno fascio di elettroni. Per ogni ione espulso si deve espellere anche un elettrone altrimenti, se si espellessero solo ioni, il propulsore si caricherebbe negativamente e tenderebbe a riattrarre gli ioni appena espulsi. È necessario neutralizzare il fascio di ioni nella zona compresa tra $2x_a$ e $2{,}82x_a$ in modo da non avere un effetto di riflessione del fascio che tornerebbe indietro al raggiungere della velocità nulla. È impossibile, però, immettere gli elettroni direttamente nel fascio di ioni poiché il catodo del neutralizzatore potrebbe essere danneggiato, colpito dalle cariche positive ad alta velocità. Pertanto gli elettroni vengono emessi lateralmente. Come il flusso di ioni, anche il flusso di elettroni, provenienti dal neutralizzatore, è limitato dalla legge di Child. Per aggirare questa limitazione il neutralizzatore è formato da un catodo forato, o *hollow cathode,* che non emetterà solo elettroni, ma anche ioni generando un plasma quasi neutro in cui la densità di carica è nulla. Per emettere il plasma è,

ovviamente, necessario immettere nel catodo il propellente, solitamente lo Xeno, il quale, in questo caso, verrà ionizzato dagli elettroni primari del catodo per effetto termoionico che urtano contro gli atomi di Xeno (bombardamento di elettroni), creando coppie elettrone-ione.
Grazie ad un *Keeper*, ovvero un anodo estrattore, si innesca la scarica di elettroni dal catodo e protegge quest'ultimo da eventuale bombardamento di ioni. In questo caso si avrebbe solo lo svantaggio di consumare un po' di propellente, ma favorendo il superamento dei limiti della legge di Child.



"Figura 10. Raffigurazione dell''hollow cathode' del neutralizzatore"

Questi propulsori elettrostatici hanno elevate prestazioni e una spesa pari a:

$$P_E = V_D J_A + \ J_B + J_I \ V_C + J_I V_A + J_K V_K$$

dove:

- $V_D J_A \approx n_+ \varepsilon_B$ è la potenza di ionizzazione
- $J_B + J_I \; V_C$ rappresenta la potenza fornita in camera agli ioni
- $J_I V_A$ è la potenza necessaria a ristabilire V_A , perché quando gli ioni sbattono contro la griglia, sottraggono elettroni
- $J_K V_K$ è la spesa necessaria per indirizzare gli elettroni che, invece di neutralizzare gli ioni, vanno a sbattere contro l'accelerator grid

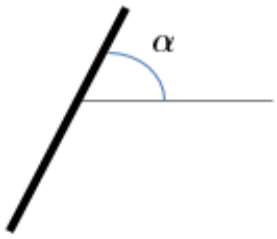
Di seguito vengono riportati i valori tipici prestazionali dei propulsori a ioni:

$\boldsymbol{Propulsore}$	$Propulsore\ a\ ioni$
$\boldsymbol{Propellente}$	$Xeno$
$\boldsymbol{Isp}\ [\boldsymbol{s}]$	$2000 - 4000$
$\boldsymbol{P_E}\ [\boldsymbol{W}]$	$200 - 5000$
$\boldsymbol{\eta}$	0,65
$\boldsymbol{Voltaggio}\ [\boldsymbol{V}]$	$1000 - 2000$
$\boldsymbol{Thruster\ mass}\ \left[\frac{\boldsymbol{kg}}{\boldsymbol{kW}}\right]$	$3 - 6$
$\boldsymbol{PPU\ mass}\ \left[\frac{\boldsymbol{kg}}{\boldsymbol{kW}}\right]$	$6 - 10$
$\boldsymbol{Feed\ system}$	$regulated$
$\boldsymbol{Lifetime}\ [\boldsymbol{h}]$	> 10000
$\boldsymbol{Missioni}$	$Station\ keeping, trasferte\ orbitali\ (grandi\ \Delta V)$

<u>Funzionamento dei pannelli solari-Effetto fotovoltaico:</u>

In una giunzione "p-n", i pannelli solari sfruttato l'effetto fotoelettrico per convertire la radiazione solare, ovvero elettromagnetica, in potenza elettrica, generando una differenza di potenziale che permette di far circolare corrente elettrica. In

fisica dello stato solido, l'effetto fotoelettrico, è il fenomeno fisico caratterizzato dall'emissione di elettroni da una superficie, solitamente metallica, quando questa viene colpita da una radiazione elettromagnetica, ossia da fotoni aventi una certa lunghezza d'onda. Un caso particolare di effetto fotoelettrico è l'effetto *fotovoltaico*, ovvero un fenomeno fisico che si realizza quando un elettrone presente nella banda di valenza di un materiale, generalmente semiconduttore, passa alla banda di conduzione a causa dell'assorbimento di un fotone sufficientemente energetico incidente sul materiale. Per generare la massima potenza disponibile i pannelli solari devono essere perpendicolari alla direzione della radiazione incidente; infatti l'area intercettata dalla luce è pari ad $Asin\alpha$:



"Figura 11. Inclinazione di un pannello solare di area A"

La costante solare ϕ è la quantità di energia radiante che arriva dal sole ad una distanza di $1\ AU$, perpendicolare ed è pari a:

$$\phi = 1{,}367\frac{kW}{m^2}$$

Questi pannelli solari generano una potenza elettrica pari a:

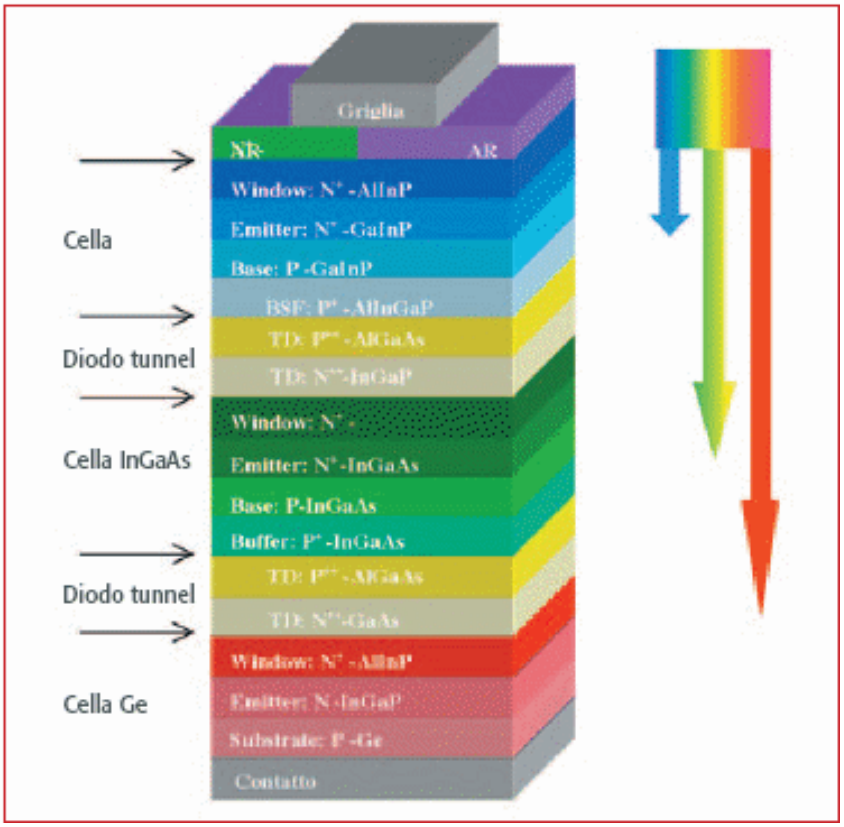
$$P_{1AU} = \eta\phi Asin\alpha$$

dove il termine $\phi A sin\alpha$ rappresenta la quantità di radiazione intercettata dal pannello. Valori tipici di potenza dei pannelli solari si aggirano intorno ai $300 - 400 \frac{W}{m^2}$. Questa potenza elettrica generata varia, però, con la distanza dal sole e cala allontanandosi da esso:

$$P = \frac{P_{1AU}}{r^2}$$

dove r è espresso in AU. Il rendimento η raggiunge valori massimi pari a $\eta \approx 30\%$. Con lo scopo di aumentare P si cerca di massimizzare η, ovvero di massimizzare la quantità di fotoni assorbiti.

I pannelli più efficienti sono quelli a multigiunzione come, ad esempio, i pannelli a *tripla giunzione,* costituiti da *InGaP/InGaAs/Ge* con rendimento anche del $24 - 28\%$.



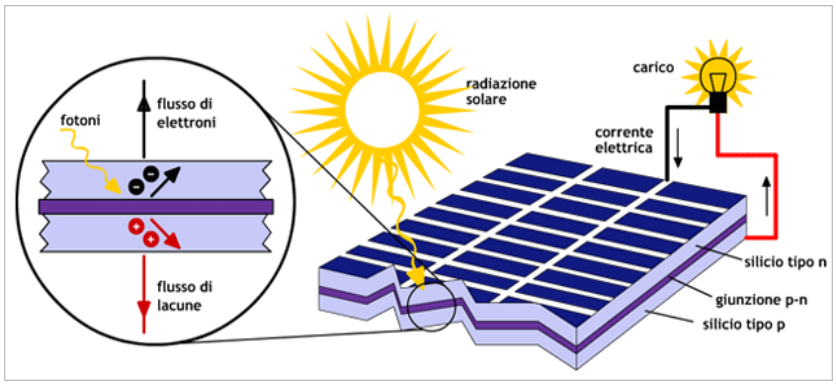
"Figura 12. Pannelli solari a tripla giunzione"

Con il termine *giunzione p-n* si indica l'interfaccia che separa le parti di un semiconduttore. La giunzione p-n è composta da due zone: una con un eccesso di elettroni, lo strato "n", ed una ad eccedenza di lacune, strato "p". Le eccedenze di elettroni e lacune si ottengono mediante *drogaggio.* Il termine giunzione fa riferimento alla regione in cui si incontrano i due tipi di drogaggio, "p" e "n". La regione di confine tra i due blocchi, detta zona di carica spaziale o di *svuotamento*, è praticamente priva di portatori liberi. Tra i due lati di questa zona vi è una differenza di potenziale costante chiamata *tensione di built-in.*

L'atomo di silicio ha quattro elettroni di valenza mentre l'atomo di fosforo ne ha cinque. Inserendo atomi di fosforo fra quelli di silicio si crea una struttura avente un elettrone disponibile per la conduzione; nel silicio si genera quindi un eccesso di cariche negative e si dice che esso è 'drogato negativamente' (n). L'atomo di boro ha tre elettroni di valenza e, inserendo atomi di boro fra quelli del silicio, si crea una struttura con zone in cui manca l'elettrone (lacune). In questo caso si dice che il conduttore è 'drogato positivamente' (p). La lacuna può essere colmata da un elettrone che si sposta da un atomo vicino formando, a sua volta, una lacuna. Lo spostamento di elettroni in un verso corrisponde allo spostamento di lacune nel verso opposto.

Mettendo a contatto le due zone drogate si ottiene la cosiddetta giunzione p-n. La regione "n" ha un eccesso di elettroni mentre quella "p" ha un eccesso di lacune. In questa giunzione gli elettroni si diffondono naturalmente dalla regione ad alta densità "n" a quella a bassa densità "p", creando un accumulo di carica negativa nella regione "p". Lo stesso avviene per le lacune con formazione di accumulo di lacune nella regione "n". A ridosso della zona di giunzione, quindi, si stabilisce un campo elettrico $\boldsymbol{E}$, il quale, una volta raggiunta

la situazione di equilibrio, si oppone all'ulteriore naturale diffusione di cariche. Applicando dall'esterno una differenza di potenziale V, la giunzione permette il passaggio della corrente in un solo senso funzionando come un diodo. Tale situazione viene attuata dall'effetto fotovoltaico. La luce fornisce, infatti, agli elettroni l'energia sufficiente, ovvero i fotoni, per passare dalla banda di valenza a quella di conduzione. L'elettrone, passando nella banda di conduzione, determina una lacuna. Le cariche elettriche sono messe in moto dalla differenza di potenziale presente nella giunzione p-n.



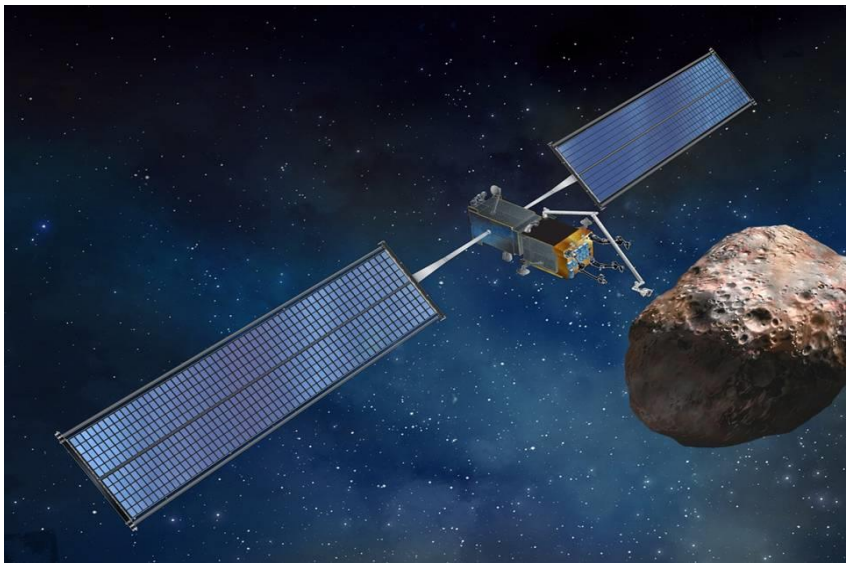
"Figura 13. Funzionamento di un pannello solare a giunzione p-n"

Pannelli solari 'UltraFlex e MegaFlex':

L'obiettivo della NASA è quello di favorire lo sviluppo di pannelli solari con bassa massa e che possano essere ripiegati con minimi ingombri per sistemi di Propulsione Elettrica Solare (Solar Electic Propulsion – SEP) così da poterli utilizzare nelle prossime missioni di esplorazione con sonde robotiche o con equipaggio umano.

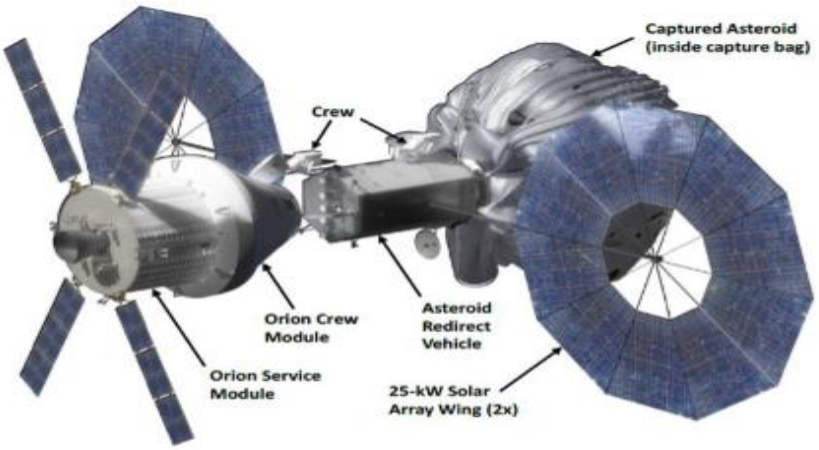
La missione ARM aveva diversi tipi di candidati di pannelli solari per equipaggiarla. Uno di essi era il *Roll Out Solar Array (ROSA)* che sarà sfruttato comunque per missioni di esplorazione planetaria e, ad oggi, viene sempre più indicato per equipaggiare grandi satelliti per telecomunicazioni private.

ROSA ha uno speciale sistema di immagazzinamento al lancio poiché i pannelli solari ultraflessibili sono arrotolati in una forma cilindrica e in orbita verranno 'srotolati' per poter successivamente eseguire la loro funzione. È un sistema scalabile, ovvero permette di raggiungere estensioni molto grandi e, quindi, altrettante potenze elevate. Ogni 'rotolo' infatti è in grado di fornire da 1kW fino anche a 30kW. Attualmente si stima che le sue prestazioni possano raggiungere una densità di potenza di 400W/kg, mentre, in fase di lancio, sarà possibile superare i 50kW/m^3



"Figura 14. Pannelli solari 'UltraFlex' per missione ARM"

Un altro sistema candidato era il 'Megaflex'. Sono anch'essi pannelli solari ad alta potenza composta da pannelli circolari realizzati da Alliant Techsystem Inc. con un diametro di $9{,}6$ metri ciascuno, in grado di erogare fino a $40 - 50\ kW$ di potenza. La realizzazione dei pannelli solari MegaFlex si basa sulla tecnologia già collaudata nello spazio dei pannelli solari UltraFlex, descritti precedentemente.



"Figura 15. Pannelli solari 'MegaFlex' per missione ARM"

1.3.1 Caratteristiche di un propulsore SEP

Il sistema consiste in un ugello, un'unità di potenza, un controller del flusso di propellente a bassa pressione e il sistema elettrico vero e proprio. Come propellente viene utilizzato solitamente lo Xeno perché presenta una bassa energia di ionizzazione e una massa pesante e, per questo, ha tutte le caratteristiche per rendere il rendimento di questi propulsori a ioni molto alto:

$$\eta = \frac{1}{1 + \frac{2\varepsilon_B}{m_+ u_+^2}}$$

dove ε_B è l'energia di ionizzazione, ovvero il costo per creare uno ione e $\frac{1}{2}m_+u_+^2$ è l'effetto utile, ovvero l'energia cinetica conferita allo ione generato di massa m_+ con velocità u_+. L'impulso specifico di questo motore, ovvero per quanto tempo il propellente riesce a garantire una spinta pari al suo peso, si calcola come:

$$I_{sp} = \frac{T}{m_p g_0} \ [s]$$

dove T è la spinta in Newton e si può calcolare come la portata di propellente per la velocità efficace di scarico c in metri al secondo, ovvero la velocità alla quale il propellente viene accelerato grazie alla potenza acquisita:

$$T = m_p c \ [N]$$

mentre con g_0 indichiamo l'accelerazione di gravità sulla Terra pari a $9{,}80665\frac{m}{s^2}$. Di conseguenza, nel caso di portata di propellente costante e di spinta costante, possiamo scrivere l'impulso specifico anche come:

$$I_{sp} = \frac{c}{g_0}$$

2 Modello matematico

In questo capitolo andremo ad analizzare, con un modello matematico, la teoria del controllo ottimale su cui si basa l'ottimizzazione indiretta di traiettorie. Lo studio verrà limitato al problema dei due corpi che caratterizza la parte interplanetaria della missione, ovvero, la fase successiva al lancio fino al rendez-vous con il corpo da agganciare. Le variabili di controllo del nostro problema sono il modulo e la direzione della spinta. Utilizzeremo tre propulsori (*thrusters*), ognuno dei quali ha un range di funzionamento tra una potenza di input minima pari a $7kW$ e una massima di $13{,}95kW$.

Nel nostro caso, come target da agganciare, considereremo l'asteroide (433) Eros.

2.1 Problema dei due corpi e condizioni al contorno

Ogni corpo presente nello spazio esercita un campo gravitazionale che si estenderebbe idealmente all'infinito, ma la sua quantità decresce con il quadrato della distanza. Questo permette allo spacecraft, che risente del campo quando è nelle vicinanze del corpo che lo esercita, di poter superare questi effetti gravitazionali con una quantità di energia cinetica finita. Quando un corpo di massa m entra nella sfera di influenza di un corpo di massa M con $M >> m$, risentirà da quel momento solo della forza gravitazionale esercitata dal corpo M e non delle altre forze che lo circondano. Questa forza è data dalla formula della legge di gravitazione universale di Newton:

$$\boldsymbol{F} = -\frac{Gm_1M}{r^2}\widehat{e_r}$$

dove con G abbiamo la costante di gravitazione universale pari a $6{,}67 \cdot 10^{-11} \frac{N\,m^2}{kg^2}$ ed r la distanza tra i centri delle due masse. Chiamiamo ora con $\boldsymbol{r_m}$ e $\boldsymbol{r_M}$ i vettori posizione dei corpi rispetto ad un sistema di riferimento inerziale (X, Y, Z) e con X_M, Y_M, Z_M un sistema di riferimento centrato in M con assi paralleli a quello inerziale.

Definiamo:

$$\boldsymbol{r} = \boldsymbol{r_m} - \boldsymbol{r_M}$$

e andiamo a riscrivere la formula di Newton nel seguente modo:

$$\frac{d}{dt}\ m_i \boldsymbol{r_i} \ = \boldsymbol{F_{tot}}$$

$$m_i \frac{d\boldsymbol{r_i}}{dt} + \ \boldsymbol{r_i} \frac{dm_i}{dt} = \ \boldsymbol{F_{tot}}$$

da cui andiamo a ricavare l'accelerazione:

$$\boldsymbol{r_i} \ = \boldsymbol{F_{tot}} m_i - \frac{\boldsymbol{r_i} m_i}{m_i}$$

dove con m_i si indica che il propellente viene consumato, traducendosi in una variazione di massa. Secondo il sistema di riferimento inerziale se il corpo m agisce sul corpo M con una forza $\boldsymbol{F}$, per la legge di azione e reazione (terzo principio della dinamica), il corpo M agisce su m con una forza uguale e contraria $-\boldsymbol{F}$. Di conseguenza le equazioni del moto saranno:

$$m\boldsymbol{r_m} \ = \ -\frac{GMm}{r^2}\frac{\boldsymbol{r}}{r} \ - \ \boldsymbol{r_m}\dot{m}$$

$$M\boldsymbol{r_M} \ = \frac{GMm}{r^2}\frac{\boldsymbol{r}}{r}$$

riscrivendole in una diversa forma:

$$\boldsymbol{r_m} = -\frac{GM}{r^3}\boldsymbol{r} - \boldsymbol{r_m}\frac{m}{m}$$

$$\boldsymbol{r_M} = \frac{Gm}{r^3}\ \boldsymbol{r}$$

A questo punto si trova l'equazione vettoriale che descrive il moto relativo nel problema dei due corpi:

$$\boldsymbol{r} = \boldsymbol{r_m} - \boldsymbol{r_M}$$

$$\boxed{\boldsymbol{r} = -\frac{G\ M+m}{r^3}\boldsymbol{r} - \boldsymbol{r_m}\frac{m}{m}}$$

Con le seguenti ipotesi:

- simmetria sferica
- masse concentrate, punti materiali a 3 gradi di libertà
- $M >> m$

  si può scrivere, di conseguenza, come cambia la posizione relativa di m rispetto a M, ovvero la legge del moto del corpo di massa m:

$$\boldsymbol{r} = -\frac{\mu}{r^2}\frac{\boldsymbol{r}}{|\boldsymbol{r}|}$$

➢ Se il corpo non fosse a simmetria sferica potrebbe essere approssimato come tale da molto lontano, oppure, se siamo molto vicini, si aggiunge a $\boldsymbol{r}$ un'accelerazione perturbativa $\boldsymbol{a_p}$: in questa analisi si va a considerare il caso più semplice, ovvero quello in cui viene trascurata $\boldsymbol{a_p}$

- μ è il parametro gravitazionale pari a $GM \approx G(M+m)$ ed è tipico del corpo intorno a cui si sta orbitando: per la Terra $\mu = 398600 \frac{km^3}{s^2}$.

  La soluzione dell'equazione precedente è una conica *(patched-conic approximation),* quindi la traiettoria del corpo m può essere un'ellisse, una parabola o un'iperbole. L'orbita definita dai parametri iniziali (V_o, r_o) sarà percorsa infinite volte. Per modificare l'orbita è, quindi, necessario fornire una spinta:

- propulsione primaria: una forza produce una velocità in grado di variare l'orbita percorsa; vengono modificati i parametri orbitali
- propulsione ausiliaria: genera una spinta che annulla altre forze (resistenza aerodinamica, forza gravitazionale del terzo corpo…) in modo da mantenere lo spacecraft su un'orbita predefinita e costante.

Per poter evadere dal campo gravitazionale, in questo caso quello terrestre, il corpo deve avere una velocità chiamata *escape velocity* (velocità di fuga). Converrebbe, però, avere un valore della velocità maggiore di quella di fuga affinché lo spacecraft avrà, anche ad una distanza sufficientemente grande dalla Terra, una velocità finita. Infatti, se si avesse una velocità pari a quella di fuga, al tendere della distanza dal corpo principale all'infinito, essa tenderebbe a zero. Questa velocità finita viene chiamata *hyperbolic excess velocity* (velocità di eccesso iperbolica) e può essere ricavata dall'equazione della conservazione dell'energia orbitale scritta per due punti appartenenti alla traiettoria di fuga iperbolica:

– uno vicino alla Terra detto *burnout point* (poiché tra questo punto e quello dove si sfugge alla sfera di influenza terrestre non ci sono manovre, quindi vale la conservazione dell'energia orbitale)

– uno a distanza infinita, dove la velocità sarà esattamente la velocità d'eccesso iperbolica V_∞.

Poiché l'energia orbitale specifica, suddivisa in energia cinetica ed energia potenziale, si conserva per punti appartenenti ad una stessa orbita, si può scrivere:

$$\xi = \frac{V_0^2}{2} - \frac{\mu}{\boldsymbol{r_0}} = \frac{V_\infty^2}{2} - \frac{\mu}{\boldsymbol{r}_\infty}$$

Poichè $\frac{\mu}{r_\infty} \to 0$, si può ricavare:

$$V_\infty^2 = V_0^2 - \frac{2\mu}{\boldsymbol{r_0}} = V_0^2 - V_{esc}^2$$

dove V_{esc} è la velocità di fuga. Ovviamente, se V_∞ fosse nulla (come in una traiettoria parabolica), V_0 assumerebbe esattamente il valore della velocità di fuga. Se ci si pone ora in un sistema di riferimento eliocentrico, si possono scrivere le seguenti formule:

$$\frac{d\boldsymbol{r}}{dt} = \boldsymbol{V}$$

$$\frac{d\boldsymbol{V}}{dt} = g + \frac{\boldsymbol{T}}{m}$$

$$\frac{dm}{dt} = -q$$

dove T è la spinta, quindi $\frac{T}{m}$ è la conseguente accelerazione, e q è la portata in massa del propellente. La massa iniziale dello spacecraft la si assume pari a 10.000 kg e la velocità di escape al quadrato pari a $V_{esc}^2 = 2\,\frac{km^2}{s^2}$. Le condizioni al contorno del problema saranno:

$$\boldsymbol{r_0} = \boldsymbol{r_{Earth}}\ t_0$$

$$[\boldsymbol{V_0} - \boldsymbol{V_{Earth}}\ t_0\ ]^2 = \boldsymbol{V_{esc_0}}$$

$$m_0 = 10000\ kg$$

$$\boldsymbol{r_1} = \boldsymbol{r_{asteroid}}\ t_1$$

$$\boldsymbol{V_1} = \boldsymbol{V_{asteroid}}\ t_1$$

dove con i pedici viene indicato:

0→ Fase di partenza dalla Terra

1→ Fase di arrivo su Eros

In questo elaborato faremo riferimento al solo segmento di missione che va dalla fase di post-lancio all'arrivo sull'asteroide target.

2.2 Introduzione all'ottimizzazione di traiettorie spaziali

Un problema di ottimizzazione prevede di rendere massimo o minimo un particolare indice di prestazione mediante opportune leggi di controllo. Di norma, infatti, quello che si vuole cercare di minimizzare sarebbe il propellente necessario per la missione e, ciò che invece si vuole massimizzare, è la massa finale dello spacecraft fissata quella iniziale. Soluzioni analitiche sono difficili da individuare a meno di grandi semplificazioni. Per questo motivo vengono utilizzati metodi numerici come quello trattato di seguito, ovvero la teoria del controllo ottimale per le tecniche di ottimizzazione indiretta. L'ottimizzazione indiretta, infatti, permette di raggiungere la condizione ottimale con un basso numero di parametri, con maggior precisione numerica, con contenuto teorico importante e con tempi di calcolo ridotti.

2.2.1 Teoria del controllo ottimale

La teoria del controllo ottimale è basata su principi del calcolo variazionale e viene utilizzata per l'ottimizzazione di traiettorie spaziali. Prendiamo un vettore di variabili di stato $\boldsymbol{x}$. I *contorni esterni* che definiscono l'evoluzione tra gli istanti iniziale e finale di $\boldsymbol{x}$, sono funzioni della stessa $\boldsymbol{x}$, di $\boldsymbol{u}$ (vettore dei controlli) e di t, ovvero, la variabile indipendente tempo, quindi:

$$\frac{d\boldsymbol{x}}{dt} = \boldsymbol{f}(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{u}, t)$$

Dal momento che si vuole tenere conto delle possibili discontinuità delle variabili (applicate ai *contorni interni*) dovute, ad

esempio, a manovre impulsive o in caso di flyby di un pianeta (non trattati in questo elaborato), si suddivide, in seguito, la traiettoria in un numero n di archi (sottointervalli) in cui in ognuno di essi le variabili precedenti sono continue. L'inizio del j-esimo intervallo è $t_{\ j-1\ +}$ e termina al tempo t_{j_-}. I valori delle variabili agli estremi sono $\boldsymbol{x}_{\ j-1\ +}$ e $\boldsymbol{x}_{j_}$. Sono imposte condizioni al contorno in generale di tipo misto, ovvero che coinvolgono le variabili di stato e la variabile indipendente tempo sia ai contorni esterni che a quelli interni e sono solitamente non lineari:

$$\boldsymbol{\mathcal{X}}(\boldsymbol{x}_{\ j-1\ +}, \boldsymbol{x}_{j_-}, t_{\ j-1\ +}, t_{j_-}) = 0 \qquad\qquad j = 1, \dots, n$$

L'ottimo si ricava da valori di massimo o minimo relativi di un funzionale del tipo:

$$J = \varphi(\boldsymbol{x}_{\ j-1\ +}, \boldsymbol{x}_{j_-}, t_{\ j-1\ +}, t_{j_-}) + \sum_j \int_{t_{\ j-1\ +}}^{t_{j_-}} \Phi\ \boldsymbol{x}\ t\ , \boldsymbol{u}\ t\ , t\ dt$$
$$j = 1, \dots, n$$

Se si introducono ora opportune variabili ausiliarie, ci si può ricondurre alla *formulazione di Lagrange* ($\varphi = 0$). Si inseriscono i *moltiplicatori di Lagrange*, le costanti $\boldsymbol{\mu}$ associate alle condizioni al contorno e le variabili $\boldsymbol{\lambda}$, chiamate anche *variabili aggiunte,* associate alle equazioni di stato. Si può allora riscrivere il funzionale:

$$J^* = \varphi + \boldsymbol{\mu}^T \boldsymbol{\mathcal{X}} + \sum_j \left(\Phi + \boldsymbol{\lambda}^T\ \boldsymbol{f} - \boldsymbol{x}\ \right) dt$$
$$j = 1, \dots, n$$

In questo caso, utilizzando la formulazione di Mayer, si impone $\Phi = 0$. I due funzionali J, J^* dipendono da t, da $\boldsymbol{x}$,

dalle loro derivate $\boldsymbol{x}$ e dai controlli $\boldsymbol{u}$. J e J^*, come anche i loro massimi o minimi, coincidono nel caso in cui condizioni al contorno ed equazioni di stato siano soddisfatte. Integrando per parti per eliminare la dipendenza delle derivate dalle variabili $\boldsymbol{x}$, si ha:

$$J^* = \varphi + \boldsymbol{\mu}^T \boldsymbol{\mathcal{X}} + \sum_j \left(\boldsymbol{\lambda}^T_{\boldsymbol{j-1}_+} \boldsymbol{x}_{j-1_+} - \boldsymbol{\lambda}^T_{j_-} \boldsymbol{x}_{j_-}\right) + \sum_j \int_{t_{j-1_+}}^{t_j} (\boldsymbol{\lambda}^T \boldsymbol{f} - \lambda^T \boldsymbol{x}) dt$$

Quando si va a differenziare il funzionale, si introduce l'Hamiltoniano H del sistema come:

$$H = \boldsymbol{\lambda}^T \boldsymbol{f}$$

L'ottimo prevede l'annullarsi della derivata prima del funzionale per qualsiasi scelta di variazione, grazie alle variabili e alle costanti aggiunte. Il valore ottimale, in ogni punto della traiettoria, è quello che rende massimo o minimo l'Hamiltoniano in quel punto, ma si devono considerare i vincoli per uno o più controlli, come ad esempio il fatto che la spinta può variare solo in un range compreso tra zero e T_{max}. Per le variabili aggiunte si ottengono le equazioni differenziali di Eulero-Lagrange riportate di seguito:

$$\frac{d\boldsymbol{\lambda}}{dt} = -\left(\frac{\partial H}{\partial \boldsymbol{x}}\right)^T$$

con le equazioni algebriche per i controlli:

$$\left(\frac{\partial H}{\partial \boldsymbol{x}}\right)^T = 0$$

Per facilitare la risoluzione di queste equazioni, si fa uso di coordinate sferiche. La descrizione delle equazioni differenziali di Eulero-Lagrange in coordinate sferiche verrà trattata nell'Appendice.

Occorrono, infine, le condizioni al contorno mancanti per poter chiudere il sistema con quelle precedentemente assegnate. Con riferimento nuovamente al j-esimo sottointervallo, le condizioni al contorno di ottimo saranno:

$$\boldsymbol{\sigma}(\boldsymbol{x}_{j-1_+}, \boldsymbol{x}_{j_-}, \boldsymbol{\lambda}_{j-1_+}, \boldsymbol{\lambda}_{j_-}, t_{j-1_+}, t_{j_-}) = 0$$

2.2.2 Problema differenziale ai limiti

La teoria del controllo ottimale formula un nuovo sistema di equazioni differenziali ai limiti in cui alcuni dei valori iniziali delle variabili di stato e aggiunte sono incogniti. La soluzione di questo problema consiste nel trovare quali valori iniziali consentono, integrando numericamente il sistema differenziale, di soddisfare tutte le condizioni al contorno sia imposte che di ottimo. Per richiami sul calcolo vettoriale e matriciale e sulla notazione adottata si rimanda ancora all'Appendice. Di seguito si riportano le caratteristiche del problema in questione:

- l'intervallo di integrazione è suddiviso in sottointervalli in cui le equazioni differenziali possono avere differente espressione
- la durata di ciascun intervallo è di solito incognita
- le condizioni al contorno possono essere non lineari e coinvolgere i valori delle variabili sia ai contorni esterni sia a quelli interni
- le variabili possono essere discontinue ai contorni interni e il loro valore dopo la discontinuità può essere incognito.

La soluzione del problema ai limiti viene ottenuta riducendolo a una successione di problemi ai valori iniziali che viene portata alla convergenza secondo il metodo di Newton. Dal momento che, precedentemente, si è detto che la durata di ciascun intervallo è incognita, si cerca di aggirare questo problema sostituendo alla variabile t una nuova variabile ε definita nel *j*-esimo sottointervallo attraverso la relazione:

$$\varepsilon = j - 1 + \frac{t - t_{j-1}}{t_j - t_{j-1}} = j - 1 + \frac{t - t_{j-1}}{\tau_j}$$

dove con τ_j viene definita la durata incognita del sottointervallo. Così facendo i contorni interni ed esterni risultano fissati grazie a questo parametro e corrispondo ai valori interi consecutivi della variabile indipendente ε. Il sistema di equazioni differenziali, quindi, diventa:

$$\frac{d\boldsymbol{z}}{d\varepsilon} = \boldsymbol{f}(\boldsymbol{z}, \varepsilon)$$

dove con $\boldsymbol{z} = (\boldsymbol{y}, \boldsymbol{c})$ viene indicato un vettore che contiene le variabili di stato $\boldsymbol{x}$ e aggiunte $\boldsymbol{\lambda}$ e il vettore c dei parametri costanti quali, ad esempio, le durate dei sottointervalli τ_j o i valori delle variabili dopo una discontinuità.

Per le variabili di stato e aggiunte si ha:

$$\frac{d\boldsymbol{y}}{d\varepsilon} = \tau_j \frac{d\boldsymbol{y}}{dt}$$

dove si ha $\boldsymbol{y} = \boldsymbol{x}, \boldsymbol{\lambda}$. Per I parametri costanti si ha invece:

$$\frac{d\boldsymbol{c}}{d\varepsilon} = 0$$

Vengono indicate ora le condizioni al contorno sia imposte che di ottimo con il seguente parametro:

$$\boldsymbol{\Psi}\ \boldsymbol{s} = 0$$

in cui $\boldsymbol{s}$ rappesenta il vettore contenente i valori assunti dalle variabili ad ogni contorno interno o esterno

$$\boldsymbol{s} = (\boldsymbol{y}_0, \boldsymbol{y}_1, \dots, \boldsymbol{y}_n, c)$$

I valori iniziali di alcune variabili sono in genere incogniti, e, utilizzando un procedimento iterativo, si ricerca la soluzione determinando quali valori devono assumere per soddisfare le equazioni. Si suppone che nessuno dei valori iniziali sia noto. Si integra quindi il sistema di equazioni principale, utilizzando dei valori iniziali di tentativo $\boldsymbol{p}^1$, e si integra di seguito lungo tutta la traiettoria, utilizzando, come valori iniziali, i risultati trovati al termine dell'interazione precedente tenendo conto delle eventuali discontinuità ai contorni interni. Si ha, però, un errore che, di volta in volta, varia sulle condizioni al contorno. Per annullarlo occorre che, ad ogni iterazione, i valori iniziali vengano corretti nel modo seguente:

$$\Delta \boldsymbol{p} = \boldsymbol{p}^{r+1} - \boldsymbol{p}^r$$

con $\boldsymbol{z}\ 0\ = \boldsymbol{p}^r$ fino a che le condizioni al contorno non siano soddisfatte il più precisamente possibile. Si può osservare che, nel caso in cui fossero noti alcuni valori iniziali delle variabili, il vettore $\boldsymbol{p}$ si avrebbe solo calcolando le componenti incognite di $\boldsymbol{z}\ 0$ e, inoltre, il vettore $\boldsymbol{\Psi}$ si calcolerebbe tramite le sole condizioni al contorno non esplicite al tempo iniziale.

C'è da notare che, dal momento che si è introdotta una linearizzazione per il calcolo della correzione $\Delta \boldsymbol{p}$ da apportare ai valori iniziali di tentativo, si sono automaticamente generati errori che possono compromettere la convergenza facendo aumentare l'errore sulle condizioni al contorno. Per evitare ciò si fanno alcune considerazioni:

- per evitare che la soluzione diverga, la correzione apportata è, in realtà, una frazione di quella determinata cioè:

$$\boldsymbol{p}^{r+1} = \boldsymbol{p}^r + K_1 \Delta \boldsymbol{p}$$

con $K_1 = 0.1 \div 1$ (valori empirici)

- dopo che il vettore dei valori iniziali di tentativo $\boldsymbol{p}^{r+1}$ è stato calcolato e si sono integrate le equazioni del moto, ad ogni iterazione si confronta l'errore massimo sulle condizioni al contorno ϵ_{max}^{r+1} con quello ottenuto dall'iterazione precedente ϵ_{max}^{r}. Se $\epsilon_{max}^{r+1} < K_2 \epsilon_{max}^{r}$, si può procedere con la successiva iterazione. Un valore di $K_2 = 2 \div 3$ garantisce che la soluzione converga anche all'aumentare del valore dell'errore sulle condizioni al contorno nelle prime iterazioni
- se l'errore della successiva iterazione diventa eccessivamente grande rispetto al precedente, si procede con il metodo di bisezione dimezzando la correzione apportata e si integrano, quindi, le equazioni del moto con I valori di tentativo:

$$\boldsymbol{p}^{r+1} = \boldsymbol{p}^{r} + K_1 \frac{\Delta \boldsymbol{p}}{2}$$

Nuovamente si confronta il nuovo errore massimo ottenuto con quello precedente e, se necessario, si ripete la bisezione. Se dopo un numero limite di cinque bisezioni non si ottiene una diminuzione dell'errore, il procedimento si arresta poiché, in quel caso, la soluzione di tentativo scelta non è in grado di portare a convergenza.

2.3 Ottimizzazione con metodi indiretti

Come detto precedentemente, i metodi indiretti si basano sulla teoria del controllo ottimale e risolvono il problema di ottimizzazione definendo e risolvendo le condizioni al contorno del problema.

In generale, nella *Solar Electric Propulsion*, la spinta e la portata sono funzioni cubiche della potenza:

$$T = a_0 + a_1 P + a_2 P^2 + a_3 P^3$$
$$q = b_0 + b_1 P + b_2 P^2 + b_3 P^3$$

L'espressione maggiormente utilizzata per l'Hamiltoniano è definibile tramite la legge:

$$H = \boldsymbol{\lambda_r^T V} + \boldsymbol{\lambda_V^T g} + T S_F$$

dove S_F è la *switching function* ed è definita come:

$$S_F = \frac{\boldsymbol{\lambda}_V^T \left(\frac{\boldsymbol{T}}{T}\right)}{m} - \lambda_m \frac{q}{T}$$

Per far sì che il controllo ottimale massimizzi l'Hamiltoniano, bisogna avere una spinta parallela alla velocità, ovvero parallela al vettore $\boldsymbol{\lambda}_V$. Di conseguenza la switching function diventerà:

$$S_F = \frac{\lambda_V}{m} - \lambda_m \frac{q}{T}$$

dove si ha $S_F > 0$ quando la spinta assume il suo valore massimo, mentre $S_F < 0$ quando la spinta raggiunge il suo

valore minimo, ovvero quando tutti i propulsori sono spenti. Si vuole, di conseguenza, massimizzare la switching function e, se si è in un caso con la velocità efficace di scarico c non costante e con più propulsori coinvolti, bisognerà avere una potenza elettrica spartita tra tutti i propulsori in considerazione e, successivamente, massimizzare il seguente Hamiltoniano:

$$\bar{H} = \sum_{i=1}^{N} T_i - \frac{m\lambda_m}{\lambda_V} q_i$$

- $\bar{H}$ è una combinazione lineare di T e q (dove con quest'ultima si indica la portata) e dipende dal solo parametro $\frac{m\lambda_m}{\lambda_V}$ che varia lungo la traiettoria
- $\frac{m\lambda_m}{\lambda_V}$ è noto per ogni punto della traiettoria per cui si riesce a conoscere il valore massimo di $\bar{H}$.

Con K viene indicato il termine $\frac{m\lambda_m}{\lambda_V}$ e si può scrivere:

$$\bar{H} = \sum_{i=1}^{N} T_i - Kq_i$$

In questa analisi si vanno a considerare tre propulsori$(N = 3)$ e, chiamando con $c_j = a_j - Kb_j$ con $j = 0,1,2,3$, si avrà la nuova scrittura dell'Hamiltoniano:

$$\bar{H} = \sum_{i=1}^{3} c_0 + c_1 P_i + c_2 P_i^2 + c_3 P_i^3 = \sum_{i=1}^{3} f_i$$

3 Ripartizione ottimale della potenza tra tre propulsori con c_3>0, c_3<0 e c_3=0

In questa analisi verranno presi in considerazione tre propulsori che avranno le funzioni delle prestazioni al cubo con la potenza in input, come discusso nel capitolo precedente. Di questi se ne andrà a determinare la ripartizione ottimale della potenza in ogni punto della traiettoria, ovvero trovare le variabili P_1, P_2, P_3 che massimizzano $\overline{H}$. L'Hamiltoniano $\overline{H}$ è funzione cubica delle tre varabili, rispettando i vincoli lineari trattati in precedenza. Un vincolo è 'attivo' se è presente il segno di uguaglianza; quando si ha il segno di disuguaglianza stretta, allora il vincolo sarà 'inattivo'. Il massimo locale di $\overline{H}$ viene ricercato per ogni combinazione di vincoli attivi e inattivi e, proseguendo, questi massimi locali vengono comparati per trovare il massimo globale.

La funzione $\overline{H}$ ha un massimo locale quando la sua variazione è nulla o negativa, $\delta^1 \overline{H} \leq 0$ per ogni variazione ammissibile delle variabili di controllo, senza violarne i vincoli. Questo è reso possibile annullando δP_i per ogni i.

Utilizzando i moltiplicatori di Lagrange μ, si può riscrivere $\overline{H}$ come:

$$\overline{H}^* = \sum_{i=1}^{3} f_i + \mu_a(\sum_{i=1}^{3} P_i - P_a) + \sum_{i=1}^{3} \mu_{i,M} \ P_i - P_M \ + \sum_{i=1}^{3} \mu_{i,m} \ P_i - P_m$$

quindi, le derivate prime e seconde saranno:

$$\delta^1 \overline{H}^* = \sum_{i=1}^{3} (\frac{\partial f_i}{\partial P_i} + \mu_a + \mu_{i,M+} \mu_{i,m}) \partial P_i$$

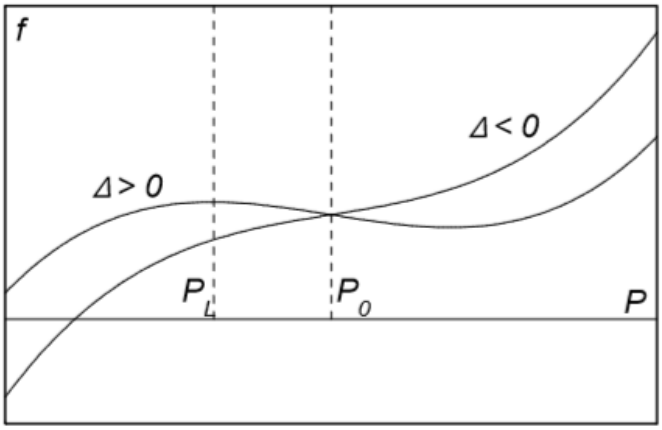
$$\delta^2 \overline{H}^* = \sum_{i=1}^{3} \left(\frac{\partial^2 f_i}{\partial P_i^2} \right) \partial P_i^2$$

Un massimo si ha quando la derivata prima dell'Hamiltoniano si annulla, $\delta^1 \overline{H^*} = 0$ con i vincoli imposti, così si garantisce che anche $\delta^1 \overline{H} = 0$ e quindi si verifica che $\delta^2 \overline{H}$ sarà sempre minore di 0, condizione necessaria e sufficiente per avere un massimo. Quando sono rispettati tutti i vincoli, infatti, i due Hamiltoniani si equivarranno, $\overline{H}^* = \overline{H}$, per ogni moltiplicatore di Lagrange scelto arbitrariamente, per cui trovare il massimo dell'uno equivale a trovare il massimo dell'altro. Occorre, infine, verificare che la soluzione non migliori rimuovendo uno dei vincoli di sopra discussi.

Di questi tre propulsori ne verrà esaminato il caso in cui, nell'Hamiltoniano, il coefficiente del termine della potenza al cubo c_3 è maggiore di zero e, successivamente il caso in cui è minore di zero ed infine, uguale a zero.

3.1 Caso c_3>0

Di sotto vengono riportati i possibili andamenti dell'H in cui il coefficiente del termine della potenza elevato al cubo è positivo:



"Figura 16. Andamento dell'Hamiltoniano e, quindi, di f e della derivata seconda nel caso c3>0"

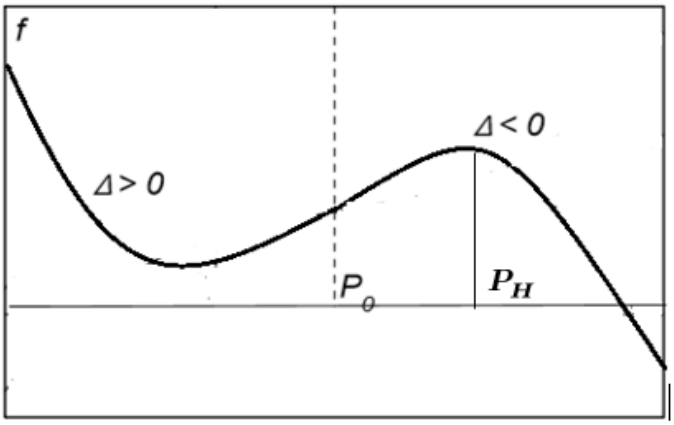
Con rappresentate la $f = c_0 + c_1 P + c_2 P^2 + c_3 P^3$ e la curva della derivata seconda che cambia il suo segno da negativo a positivo nel punto $P_0 = -c_2/3c_3^3$. Nel caso in cui il discriminante dell'equazione quadratica che annulla la derivata prima di f, $\Delta = c_2^2 - 3c_1c_3$, fosse $\Delta > 0$, allora ci sarà un massimo locale a $P = P_L = P_0 - \sqrt{\frac{\Delta}{6c_3}}$ ed un minimo locale alla posizione simmetrica rispetto a P_0 . In P_0 si ha $\Delta = 0$, ovvero, si ha un punto stazionario. Invece per $\Delta < 0$ la curva diventa monotonica e non esistono punti stazionari. Si prendono in esame tre propulsori e, per ognuno di essi, bisogna rispettare però dei vincoli, ecco perché questo problema viene chiamato anche problema dei *massimi vincolati:*

- tutti i propulsori possono essere spenti $P_i = 0$ oppure operare
- ogni propulsore può operare tra limiti di massimo e minimo $P_m \leq P_i \leq P_M$

- la potenza totale non deve eccedere la potenza disponibile P_a, ovvero, $P_i \leq P_a$
- $P_1 \geq P_2 \geq P_3$
- T e q sono funzioni cubiche di P. $c_3 > 0$.

3.2 Caso c_3<0

Viene riportato qui l'andamento di H con coefficiente del termine della potenza al cubo negativo:



"Figura 17. Andamento dell'Hamiltoniano e, quindi, di f con derivata seconda nel caso c3<0"

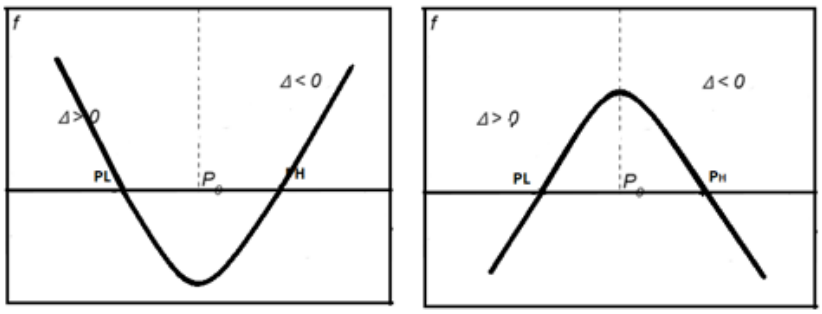
Anche in questo caso sono validi gli stessi vincoli dell'analisi con $c_3 > 0$. Si nota che ora il massimo è nella parte opposta dove $\Delta < 0$ all'altezza di P_H. Il punto stazionario è sempre P_0.

3.3 Caso c_3=0

In questo caso abbiamo una parabola, infatti la funzione dell'Hamiltoniano avrà una forma del tipo

$f = c_0 + c_1 P + c_2 P^2$ i cui andamenti per $c_2 > 0$ che per

$c_2 < 0$ saranno:



"Figura 18. Andamento della funzione Hamiltoniana con coefficiente c_3=0, a sinistra con c_2>0 e a destra con c_2<0"

4 Risultati

In questo capitolo si andrà ad applicare il metodo di ottimizzazione indiretta al propulsore di riferimento della missione ARM con relazioni tra la spinta e la potenza e tra la portata di massa del flusso e la potenza cubiche come si è detto in precedenza. Successivamente, il caso con $c_3 > 0$ di questo propulsore di riferimento, verrà confrontato con il caso con

$c_3 < 0$ di uno fittizio facendo riferimento ad un propulsore per missioni su asteroidi dell'Agenzia Spaziale Europea con stesso range di potenza del precedente.

Verranno presi in esame sia tre, due e un propulsore dei due tipi descritti precedentemente e, successivamente, ne verranno diagrammati gli andamenti della ripartizione ottimale della potenza, della spinta e dell'impulso specifico. Verranno, quindi, messi a confronto e, di seguito, si cercherà di capire il perché le prestazioni abbiano quell'andamento, facendo uso del raggio compiuto durante la missione. Infine, si vedrà come le prestazioni dei due tipi di propulsori variano al variare della durata della missione.

Verranno prese durate espresse in radianti:

$$2\pi = 1\ anno$$

L'impulso specifico Isp sarà in $10^3 s$ e la spinta T in Newton N.

Il tempo verrà indicato in *Modified Julian Date* MJD*:*

$$T[MJD] = 51544 + T_{adimensionale} \cdot T_{conv}$$

dove $T_{conv} = V_{conv}/(\frac{A_{conv}}{86400})$ con:

- $r_{conv} = 1{,}49597870691 \cdot 10^8$ ovvero una conversione in unità astronomiche AU

- $V_{conv} = \sqrt{\frac{1{,}32712440018 \cdot 10^{11}}{1{,}49597870691 \cdot 10^8}}$ in $\frac{km}{s}$

- $A_{conv} = \frac{1{,}32712440018 \cdot 10^{11}}{1{,}49597870691 \cdot 10^{8\ 2}}$ in $\frac{km}{s^2}$

mentre il $T_{adimensionale}$ ed altri parametri vengono presi da un codice fortran. Inoltre $T = 0$ corrisponde alla data 1/1/2000.

4.1 Ripartizione ottimale della potenza

Vengono riportate in questo paragrafo delle tabelle riassuntive con successiva spiegazione su come sono stati trovati i massimi nei tre casi.

4.1.1 Caso c_3>0

3 propulsori:

	Casi									
i	**31**	**32**	**33**	**34**	**35**	**36**	**37**	**38**	**39**	**310**
1	$\frac{P_a}{3}$	P_M	P_M	P_M	$P_a - 2P_m$	P_L	P_M	P_M	P_m	$\frac{P_a - P_m}{2}$
2	$\frac{P_a}{3}$	$\frac{P_a - P_M}{2}$	P_M	$P_a - P_M - P_m$	P_m	P_L	P_L	P_M	P_m	$\frac{P_a - P_m}{2}$
3	$\frac{P_a}{3}$	$\frac{P_a - P_M}{2}$	$P_a - 2P_M$	P_m	P_m	P_L	P_L	P_L	P_m	P_m

	Casi		
i	**34*bis***	**35*bis***	**31*bis***
1	P_M	P_M	P_M
2	P_M	P_m	P_M
3	P_m	P_m	P_M

Dove i casi $xxbis$ sostituiscono i casi xx, quando la potenza disponibile è tale per cui uno dei tre propulsori avrebbe potenza maggiore della massima ammissibile. Si analizzano ora i vari casi:

$31)$ solamente il vincolo della potenza disponibile è attivo, quindi, è presente solo μ_a. La massimizzazione implica $\partial f_i / \partial P_i + \mu_a = 0$ per $i = 1,2,3$. Le derivate parziali sono uguali sia se i tre propulsori sono allo stesso livello di potenza

$P_i = \frac{P_a}{3}$ o due alla stessa potenza $P_1 = P_2 = P_a - 2P_0$ e il terzo ad un livello ad esso simmetrico rispetto a P_0, ovvero $P_3 = 4P_0 - P_a$, ma quest'ultima situazione è un punto di flesso poiché si può sempre trovare una soluzione che garantisca l'uguaglianza $\partial P_1 + \partial P_2 + \partial P_3 = 0$ e renda $\partial^2 \overline{H}$ sia positiva che negativa. $P_i = \frac{P_a}{3}$ sarà un massimo solo se

$P_i < P_0$ ovvero $\partial^2 f_i / \partial P_i^2 < 0$

$32)$ caso con vincolo della potenza disponibile e un propulsore al massimo $P_1 = P_M$, quindi, solo μ_a e $\mu_{1,M}$ sono presenti. Si avrà massimo solo se $P_2 = P_3 < P_0$ e

$\partial f_1 / \partial P_1 > \partial f_2 / \partial P_2$. Non potrà mai verificarsi una situazione in cui due propulsori alla stessa potenza si trovino nel ramo in cui $\partial^2 f / \partial P^2 > 0$

$33)$ caso con vincolo della potenza disponibile e in cui due propulsori sono vincolati al massimo $P_1 = P_2 = P_M$ quindi sono presenti μ_a, $\mu_{1,M}$ e $\mu_{2,M}$. Per avere un massimo bisogna che sia rispettata la disuguaglianza

$\partial f_1 / \partial P_1 > \partial f_3 / \partial P_3 > 0$

$34)$ caso in cui si vincolano un propulsore alla potenza massima $P_1 = P_M$ e uno alla potenza minima $P_3 = P_m$. È presente anche il vincolo della potenza disponibile, quindi, si avranno μ_a, $\mu_{1,M}$ e $\mu_{3,m}$. Questo caso può essere o meno un massimo a seconda del segno che le derivate di f avranno in quei punti

$35)$ caso in cui è presente il vincolo della potenza disponibile e due propulsori sono alla potenza minima $P_2 = P_3 = P_m$. Si avranno, quindi, μ_a, $\mu_{2,m}$ e $\mu_{3,m}$. Questo caso può essere o meno un massimo a seconda del segno che le derivate di f avranno in quei punti

$36)$ caso con tutti i vincoli inattivi. Tutti I moltiplicatori di Lagrange sono nulli. Si avrà un massimo per $\partial f_i / \partial P_i = 0$ per $i = 1,2,3$ e l'unica soluzione per cui $\partial^2 \overline{H} < 0$ è che $P_i = P_L$

per ogni i quando $\Delta > 0$ e i propulsori operano allo stesso livello. Non vi sono massimi per $\Delta < 0$

$37)$ Si vincola solo P_1 e lo si pone pari a P_M, quindi solamente $\mu_{1,M}$ è presente. Si avrà $P_2 = P_3 = P_L$ e si è in presenza di un massimo solo se $\Delta > 0$ e $\partial f_i / \partial P_i > 0$

$38)$ caso in cui si vincolano due propulsori al massimo

$P_1 = P_2 = P_M$, quindi, solo $\mu_{1,M}$ e $\mu_{2,M}$ sono presenti. Si è in presenza di un massimo solo se $\Delta > 0$ e $\partial f_i / \partial P_i > 0$

$39)$ caso in cui tutti i propulsori hanno le potenze vincolate al minimo $P_i = P_m$ quindi si avranno $\mu_{1,m}$ $\mu_{2,m}$ e $\mu_{3,m}$. Si ha un massimo se $\partial f_i / \partial P_i < 0$

$310)$ caso in cui si ha il vincolo della potenza disponibile e un propulsore è al minimo $P_3 = P_m$, quindi, saranno presenti μ_a e $\mu_{3,m}$

$34bis)$ caso particolare del $34)$ in cui $P_2 = P_M$ quando

$$P_a > 2P_M + P_m$$

$35bis)$ caso particolare del $35)$ in cui $P_1 = P_M$ quando

$$P_a > P_M + 2P_m$$

$31bis)$ caso particolare del $31)$ in cui $P_i = P_M$ quando

$$P_a > 3P_M$$

4.1.2 Caso c_3<0

Nel seguente paragrafo andiamo a visualizzare gli andamenti ottimali delle potenze quando il coefficiente della potenza al cubo in H è negativo:

3 propulsori:

	Casi									
i	**31**	**32**	**33**	**34**	**35**	**36**	**37**	**38**	**39**	**310**
1	$\frac{P_a}{3}$	P_M	P_M	P_M	$P_a - 2P_m$	P_L			P_m	$\frac{P_a - P_m}{2}$
2	$\frac{P_a}{3}$	$\frac{P_a - P_M}{2}$	P_M	$P_a - P_M - P_m$	P_m	P_L			P_m	$\frac{P_a - P_m}{2}$
3	$\frac{P_a}{3}$	$\frac{P_a - P_M}{2}$	$P_a - 2P_M$	P_m	P_m	P_L			P_m	P_m

	Casi				
i	$34bis$	$35bis$	$31bis$	$37bis$	$38bis$
1	P_M	P_M	P_M	P_L	P_L
2	P_M	P_m	P_M	P_L	P_m
3	P_m	P_m	P_M	P_m	P_m

A differenza del caso con $c_3 > 0$, qui non sono presenti i casi $37)$ e $38)$, ma, in aggiunta, vi sono i $37bis)$ e $38bis)$. Per ogni caso valgono gli stessi vincoli e imposizioni del caso positivo, ma qui, dato che si ha una curva ribaltata, risulteranno dei massimi quando:

$31)$ $P_i > P_0$

$32)$ $P_{2,3} > P_0$ e $P_1 < P_L$. Dato che dev'essere rispettato il vincolo $P_1 = P_M$, questo propulsore deve avere una potenza a sinistra di P_L. In tal caso, dal momento che si ha una pendenza della curva più ripida in quel punto, anche se si avessero i rimanenti propulsori con potenze a destra del primo, si

potrà avere solo un peggioramento della situazione e, quindi, si è in presenza di un massimo

33) $P_{1,2} < P_L \; e \; P_3 > P_H < P_L$ dove H è il nuovo punto di massimo a destra di P_0. Oppure quando $P_3 < P_H$ e $P_{1,2} < P_L$

34) sempre, poiché dal momento che il minimo si trova su una curva a pendenza maggiore, anche se si prendessero propulsori con potenze a destra del minimo, si avrà sempre una soluzione che può solo peggiorare, quindi si è in presenza di un massimo

35) caso in cui è presente il vincolo della potenza disponibile e due propulsori sono alla potenza minima $P_2 = P_3 = P_m$. Si avrà, quindi, μ_a, $\mu_{2,m}$ e $\mu_{3,m}$. I propulsori al minimo saranno posizionati su una curva a pendenza maggiore. Si ha un massimo in quanto la soluzione può solo peggiorare

36) $\Delta > 0$

37) MAI. Il caso P_M, P_L, P_L per rispettare il vincolo dovuto alla presenza di $\mu_{1,M}$ presenterà sempre una soluzione che può migliorare, quindi non si avrà mai un massimo

38) MAI. Il caso P_M, P_M, P_L non presenterà mai un massimo, in quanto, avendo ora la curva ribaltata e rispettando i vincoli con $\mu_{1,M}$ e $\mu_{2,M}$, sarà a destra del punto P_L. In questo punto non si ha alcuna variazione delle potenze mentre a destra di esso, la soluzione può sempre migliorare

39) $f_i' > 0$. Si avrà un massimo, quindi, solo se si è sul ramo più pendente della curva ovvero a sinistra di P_L dove la derivata della curva è positiva

310) $P_3 < P_0$ e $P_{1,2} > P_0$

$34bis$) $f_{2,3}' > 0 \; e \; f_{2,3}' > f_1'$

$35bis$) $f_{2,3}' > 0 \; e \; f_{2,3}' > f_1'$

$31bis$) $f_i' > 0$ e $P_i < P_M$

Nei nuovi casi:

$37bis)$ un propulsore è vincolato al minimo $P_3 = P_m$ quindi è presente solo $\mu_{3,m}$. Si ha un massimo se $f'_3 > 0$ ovvero solo se si è sul ramo più pendente della curva a sinistra di P_L dove la derivata nel caso del terzo propulsore è positiva

$38bis)$ due propulsori vincolati al minimo $P_2 = P_3 = P_m$ e quindi ci saranno $\mu_{2,m}$ e $\mu_{3,m}$. Vi è un massimo per $f'_{2,3} > 0$ e $P_{2,3} < P_0$

4.1.3 Caso c_3=0

Continuando a rispettare i vincoli si avrà la seguente ripartizione ottimale per entrambi i c_2, positivo e negativo:

	Casi					
$\boldsymbol{i}$	**31**	**33**	**34**	**35**	**36**	**39**
1	$\frac{P_a}{3}$	P_M	P_M	$P_a - 2P_m$	P_L	P_m
2	$\frac{P_a}{3}$	P_M	$P_a - P_M - P_m$	P_m	P_L	P_m
3	$\frac{P_a}{3}$	$P_a - 2P_M$	P_m	P_m	P_L	P_m

Si presenteranno dei massimi se:

31) $c_2 < 0$ e $f'_i > 0$ poiché la soluzione può solo peggiorare

33) $c_2 > 0$ e $f'_1 > 0$ oppure $f'_3 > 0$ e $f'_1 > f'_3$

34) $c_2 > 0$ e $f'_1 > 0$, $f'_1 > f'_2$, $f'_2 > 0$, $f'_1 > f'_2 > f'_3$

35) $c_2 > 0$ e $f'_1 > 0$, $f'_1 > f'_2$, $f'_1 > f'_{2,3}$

36) $c_2 < 0$. Solo in questo caso infatti i tre propulsori a P_L saranno una soluzione che presenterà massimo. Nel caso a $c_2 > 0$, infatti, si avrà solo un minimo in quel punto

39) $c_2 < 0$ $f_i' < 0$ ovvero solo se si è sul ramo della curva dove la soluzione può solo peggiorare

Si può, di conseguenza, costruire una tabella riassuntiva ed evidenziare i casi che non hanno in comune le tre analisi:

$Casi$	$c_3 > 0$	$c_3 < 0$	$c_3 = 0$
31	✓	✓	✓
32	✓	✓	*NO*
33	✓	✓	✓
34	✓	✓	✓
35	✓	✓	✓
36	✓	✓	✓
37	✓	***NO***	***NO***
38	✓	***NO***	***NO***
39	✓	✓	✓
310	✓	✓	*NO*
34*bis*	✓	✓	*NO*
35*bis*	✓	✓	*NO*
31*bis*	✓	✓	*NO*
37*bis*	***NO***	✓	*NO*
38*bis*	***NO***	✓	*NO*

Si può notare da questo confronto che vi è una certa antisimmetria tra $c_3 > 0$ e $c_3 < 0$ infatti, dove non sono presenti dei casi in uno, sono presenti nell'altro e viceversa. Nell'analisi con $c_3 = 0$, ovvero in presenza di una parabola, invece, si hanno meno possibilità di avere un massimo.

4.1.4 Ripartizione ottimale delle potenze per due e un solo propulsore per tutti i coefficienti c_3

Successivamente, utilizzando lo stesso procedimento, vengono riportati i risultati anche per due propulsori e per un propulsore avendo coefficiente $c_3 < 0, c_3 > 0$ e $c_3 = 0$.

2 propulsori:

$c_3 > 0$	Casi								
i	21	22	23	24	25	23bis	26	21bis	25bis
1	$\frac{P_a}{2}$	P_M	$P_a - P_m$	P_L	$\boldsymbol{P_M}$	P_M	P_m	P_M	
2	$\frac{P_a}{2}$	$P_a - P_M$	P_m	P_L	$\boldsymbol{P_L}$	P_m	P_m	P_M	

$c_3 < 0$	Casi								
i	21	22	23	24	25	23bis	26	21bis	25bis
1	$\frac{P_a}{2}$	P_M	$P_a - P_m$	P_L		P_M	P_m	P_M	$\boldsymbol{P_m}$
2	$\frac{P_a}{2}$	$P_a - P_M$	P_m	P_L		P_m	P_m	P_M	$\boldsymbol{P_L}$

$c_3 = 0$	Casi				
i	21	22	23	24	26
1	$\frac{P_a}{2}$	P_M	$P_a - P_m$	P_L	P_m
2	$\frac{P_a}{2}$	$P_a - P_M$	P_m	P_L	P_m

Dove in rosso sono state evidenziate le antisimmetrie.

1 propulsore:

$c_3 > 0$	*Casi*			
i	**11**	**12**	**13**	**11*bis***
1	P_a	P_L	P_m	P_M

$c_3 < 0$	*Casi*			
i	**11**	**12**	**13**	**11*bis***
1	P_a	P_L	P_m	P_M

$c_3 = 0$	*Casi*			
i	**11**	**12**	**13**	**11*bis***
1	P_a	P_L	P_m	P_M

Da notare che nello studio di un solo propulsore, sono presenti tutti i casi sia per $c_3 > 0$, sia per $c_3 < 0$ e sia per $c_3 = 0$, mentre nell'analisi di due e tre propulsori, la parabola presenta meno situazioni di massimo rispetto alle due curve cubiche che saranno, invece, antisimmetriche.

4.2 Analisi di due tipi di propulsori con diverso coefficiente c_3

In questo capitolo vengono riportati i risultati del propulsore di riferimento dell'ARM caratterizzato da un coefficiente $c_3 > 0$ con pannelli solari che producono $47\ kW$ di potenza elettrica a $1\ AU$ (End-of-Life), ma, di questi, $5kW$ devono essere riservati per l'elettronica di bordo. La potenza dei pannelli solari varia inversamente al quadrato della distanza dal sole e la potenza disponibile per la fase di spinta è $Pa\ = \frac{47}{r^2} - 5\ kW$, con r in AU. Viene considerato un duty-cycle del 90%. Ha un range di funzionamento tra una potenza di input minima pari a $7kW$ e una massima di $13{,}95kW$. Per confronto si assume un diverso propulsore caratterizzato da stesso range di potenza del propulsore di riferimento dell'ARM, ma con impulso specifico di poco più alto le cui relazioni dell'impulso specifico, della spinta e, quindi, della portata sono state estrapolate da un'analisi di un motore di piccole potenze (adattato quindi al nostro range di potenza) per missioni su asteroidi dell'Agenzia Spaziale Europea. Sia la portata che l'impulso specifico hanno sempre un andamento cubico rispetto alla potenza mentre, stavolta, la forza ha un andamento lineare dal momento che questa proviene da un'estrapolazione.

Dati del nuovo propulsore di confronto:

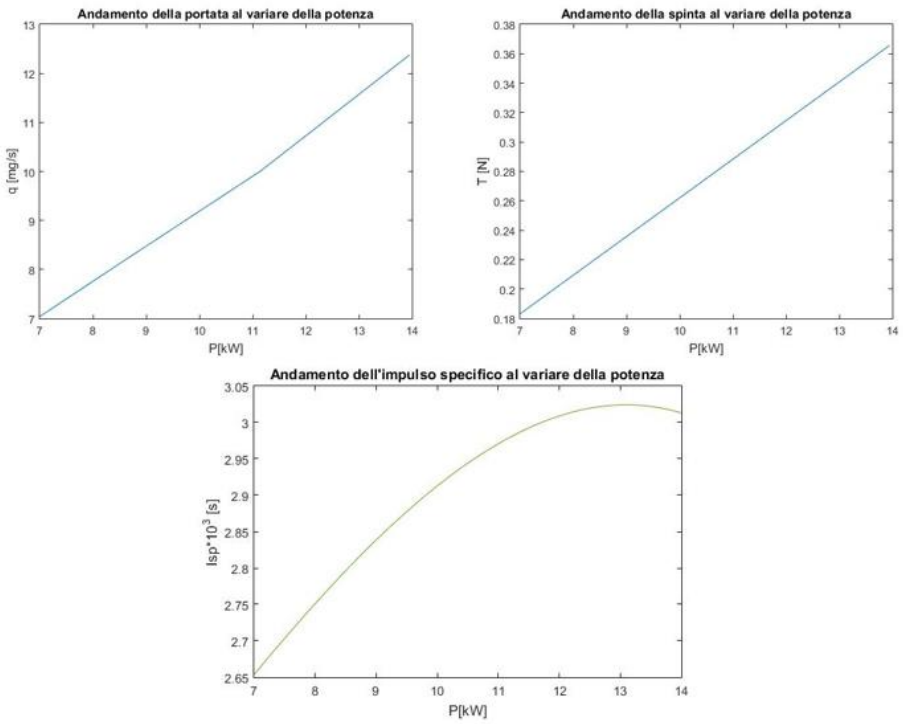
Viene considerato un propulsore i cui parametri impulso specifico Isp, spinta T e portata q saranno espressi da relazioni estrapolate da un motore già analizzato per missioni verso asteroidi dall'Agenzia Spaziale Europea. Di seguito ne vengono riportate le relazioni:

$$T\ [mN] = 26.27127P - 0.708973$$

$$Isp\ [10^3 s] = -5.5 * 10^{-4}P^3 + 0.0082P^2 + 0.067P + 2$$

$$q\ [\frac{mg}{s}] = 3.7 * 10^{-3}P^3 - 1 * 10^{-1}P^2 + 1.6P - 0.53$$

Gli andamenti sono:



"Figura 19. Andamento della portata, della spinta e dell'impulso specifico"

4.3 Risultati e confronto

Di seguito verranno riportati graficamente i risultati delle analisi del capitolo precedente, prima prendendo in esame il caso $c_3 > 0$ del propulsore di riferimento e poi il caso $c_3 < 0$ del nuovo propulsore.

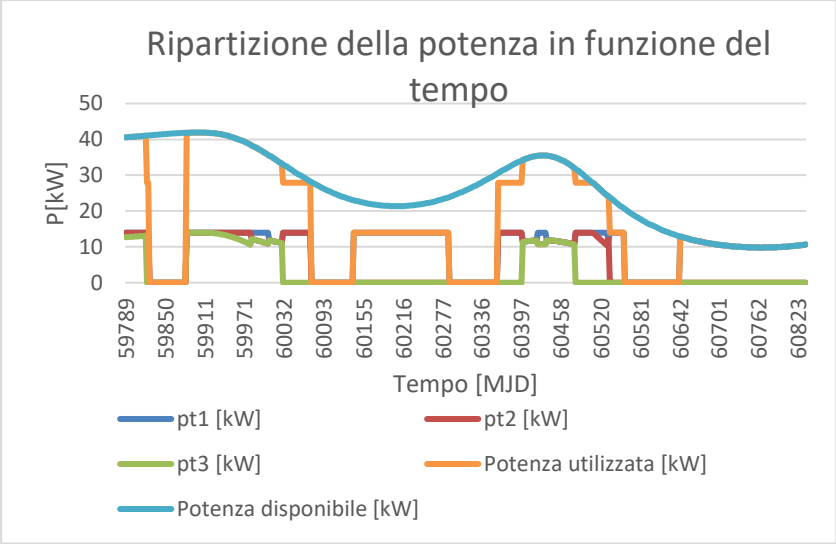
4.3.1 Ripartizione della spinta per tre propulsori dell'ARM e andamento dell'impulso specifico e della spinta per il caso con c_3>0

In questo caso erano state fissate alcune date rilevanti per la missione:

- l'*escape* dalla Terra sarebbe avvenuto nel 13/01/2022 a $V_{esc}^2 = 2\ km^2/s^2$
- l'arrivo su Eros sarebbe stato nel 16/05/2024

Il tutto, ovviamente, rispettando i tempi per le finestre di lancio. Di seguito vengono riportati i grafici delle prestazioni per la durata di missione di circa sei anni.

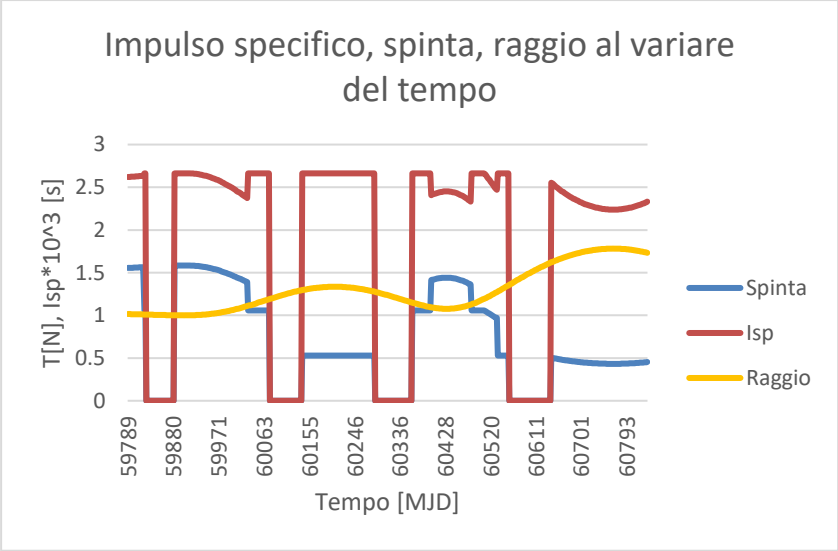
Ripartizione ottimale della spinta



"Figura 20. Ripartizione ottimale della potenza in funzione del tempo per caso con $c_3>0$"

Da questo grafico si può notare come gli archi temporali, in cui si utilizza tutta la potenza disponibile, si alternano, in genere, ad archi in cui i propulsori sono spenti, ma vi sono anche zone in cui si utilizza una potenza inferiore rispetto a quella a disposizione. La ripartizione è, di norma, non uniforme, cioè si hanno spesso uno o due propulsori al massimo e l'altro o i restanti che spingono, ma non al massimo.

Andamento dell'impulso specifico e della spinta



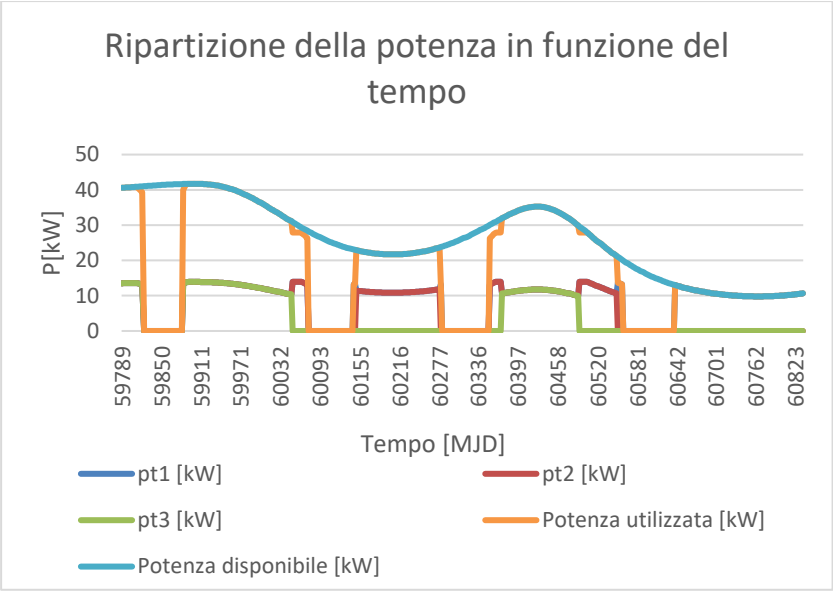
"Figura 21. Andamento dell'impulso specifico, della spinta e del raggio al variare del tempo per il caso $c_3>0$"

Da questi andamenti si nota come sia, in genere, conveniente utilizzare un impulso specifico più alto possibile. Nel tratto vicino al perielio però, ovvero a raggi bassi, la velocità efficace di scarico c e, quindi, l'impulso specifico, scende per poter avere a disposizione una spinta più alta. Questo è dovuto al fatto che evidentemente in quegli archi si avrà bisogno di una grande accelerazione.

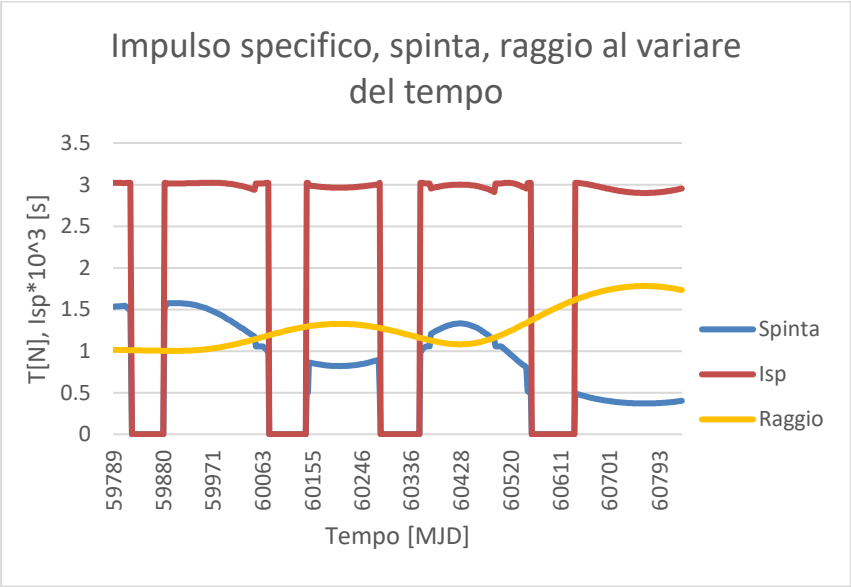
4.3.2 Ripartizione della spinta per tre propulsori di confronto e andamento dell'impulso specifico e della spinta per il caso con $c_3<0$

In questo paragrafo verranno discussi più approfonditamente gli andamenti dei grafici della ripartizione ottimale della spinta, dell'impulso specifico e della spinta del propulsore di confronto, con stesso range di potenza del motore di riferimento dell'ARM. Viene presa in considerazione una durata di

missione di quasi 6 anni con $c_3 < 0$. Si ricorda che l'asteroide in esame, Eros, ha un perielio di $1{,}13\ AU$ e un afelio di $1{,}78\ AU$.



"Figura 22. Ripartizione ottimale della potenza in funzione del tempo per caso con c_3<0"

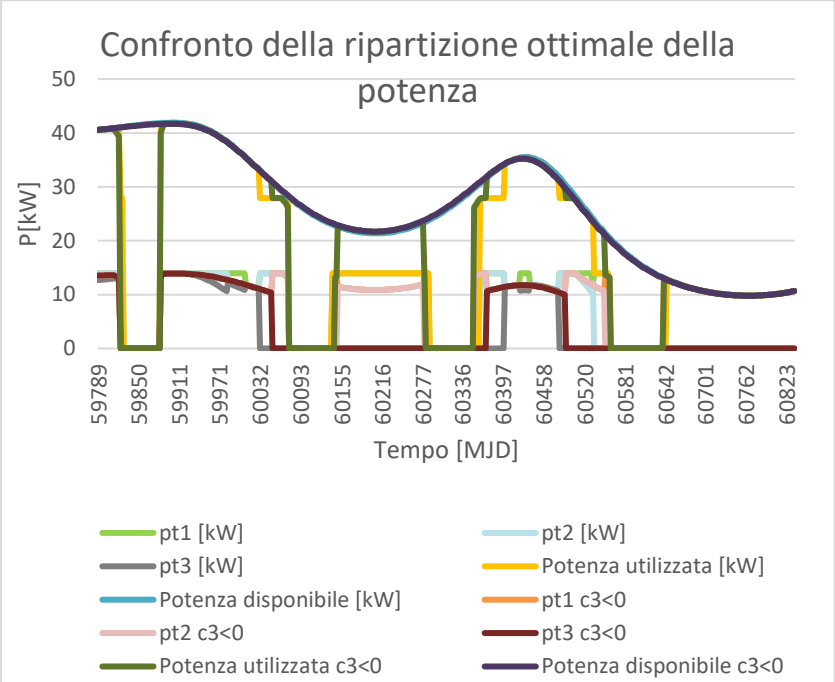


"Figura 23. Andamento dell'impulso specifico, della spinta e del raggio al variare del tempo per il caso c3<0"

L'andamento della spinta è più continuo nel caso di propulsori con $c_3 < 0$ senza bruschi cambiamenti. Tra perielio e afelio vi è zero spinta e impulso specifico nullo.

4.4 Confronto tra i propulsori di riferimento dell'ARM nel caso $c_3>0$ e i propulsori con $c_3<0$

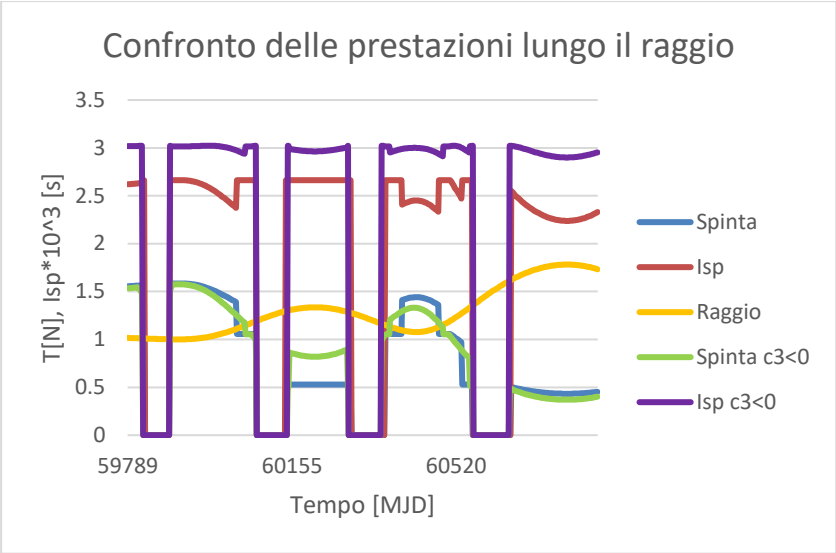
Caso con durata 6 anni:



"Figura 24. Confronto tra propulsori con $c_3>0$ e propulsori con $c_3<0$"

Si può notare che sia i propulsori di riferimento dell'ARM sia quelli nuovi presi per il confronto, per una ripartizione ottima della potenza, vengono spenti diverse volte, non generando spinta tra perielio ed afelio, per poi riaccendersi alla massima potenza disponibile. Entrambi i casi hanno una ripartizione ottimale della potenza simile eccetto verso il periodo che intercorre tra 60155 e $60277 MJD$ dove, nel caso con coefficiente negativo, si ha una maggior potenza utilizzata poiché la potenza del secondo propulsore è più elevata in quei punti rispetto a quella del secondo nel caso a coefficiente positivo. Quasi a $60400 MJD$ la potenza utilizzata dei propulsori

dell'ARM ritorna ad essere grande e pari a quella dei propulsori con coefficiente negativo, grazie ad una spinta maggiore dovuta al secondo propulsore.



"Figura 25. Confronto tra propulsori con $c_3>0$ e propulsori con $c_3<0$"

Anche gli andamenti delle prestazioni sono quasi uguali in entrambi i casi anche se l'impulso specifico del caso con coefficiente negativo è maggiore rispetto a quello a coefficiente positivo in accordo con quello detto al paragrafo 4.2. Al perielio viene spinto di più fino ad arrivare all'afelio. La manovra in questione prevede, infatti, di variare il perielio spingendo all'afelio, e viceversa di variare l'afelio spingendo al perielio. Per un breve tratto l'impulso specifico cala poiché tutti i propulsori sono o al minimo o spenti, per poi di nuovo crescere con la spinta, ma di poco, poiché viene riacceso almeno un propulsore alla potenza pari a quella disponibile. Verso l'afelio, a circa $60700MJD$, si ha una diminuzione della spinta ed anche dell'impulso specifico dal momento che si ha poca potenza disponibile all'afelio e, per questo, i propulsori hanno una velocità efficace di scarico minore. L'andamento con coefficiente positivo dei propulsori di riferimento dell'ARM, inoltre, è più discontinuo rispetto a quello con coefficiente

negativo dei propulsori di confronto infatti, nelle prestazioni dei thrusters dell'ARM a $60700 MJD$, si ha bisogno di due passaggi al perielio, evidentemente perché si necessita di più spinta, rispetto a quelli con coefficiente negativo. Nel tratto tra $60155\ e\ 60246\ MJD$, invece, i propulsori a coefficiente negativo tendono a spingere di più rispetto ai thrusters dell'ARM.

Di norma si preferisce spingere tanto a raggi piccoli (perielio) e meno a raggi grandi (afelio), per avere così un minor consumo e quindi una minor spesa energetica. Infatti, secondo la formula della variazione dell'energia,

$$\Delta\zeta = V\Delta V$$

si ha un guadagno di energia $\Delta\zeta$ a spese di un costo ΔV. Affinché questo costo sia minimo si vuole, a parità di variazione dell'energia, una velocità V alta e, considerando una velocità circolare (come se l'orbita per il momento fosse circolare e non ellittica), si avrebbe che:

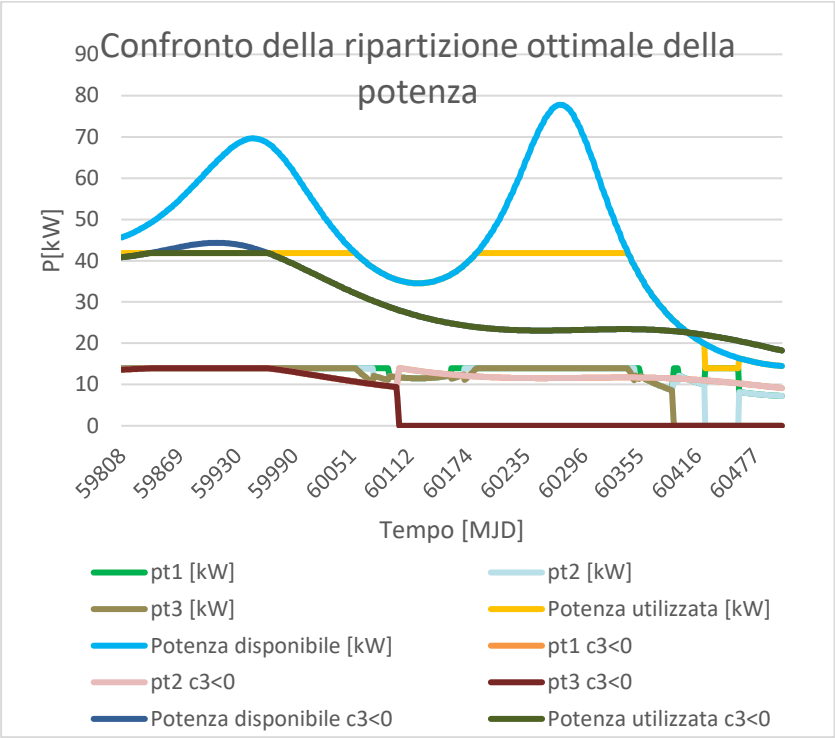
$$V = \sqrt{\frac{\mu}{r}}$$

Quindi, a raggi piccoli (perielio in un'orbita ellittica) si avrà maggior velocità.

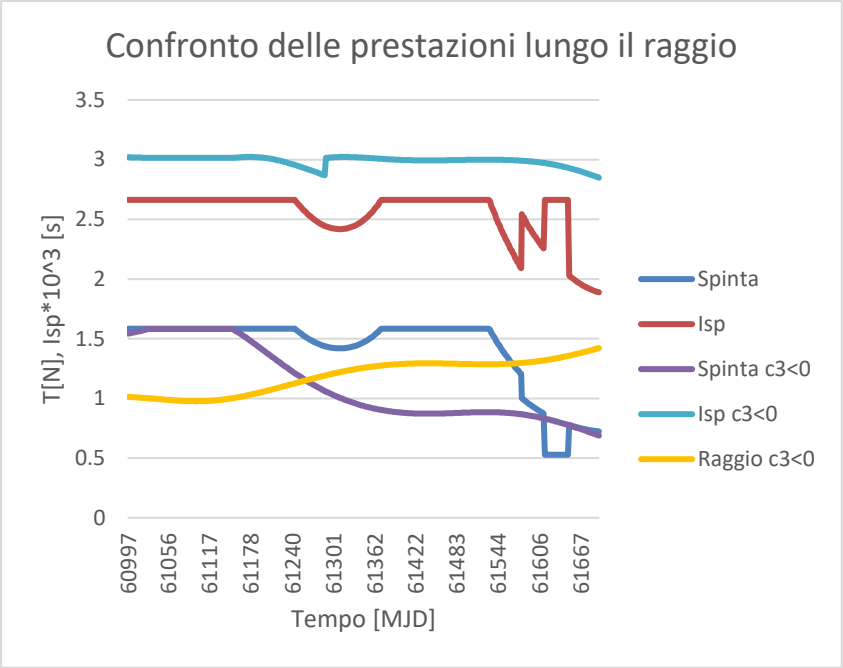
4.5 Confronto tra i due tipi di propulsori per diverse durate di missione

Si va ad analizzare, infine, la ripartizione ottimale delle potenze per diverse durate di missione rispettivamente di quattro e otto anni.

Caso con durata 4 anni:

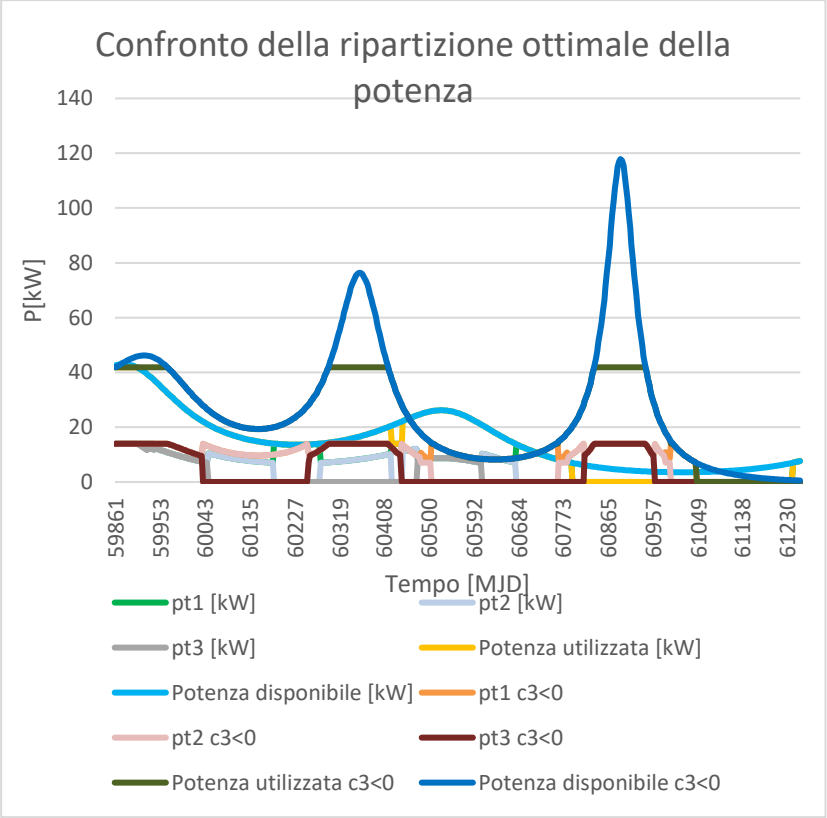


"Figura 26. Confronto tra propulsori con c3>0 e propulsori con c3<0 per missione di durata quattro anni"

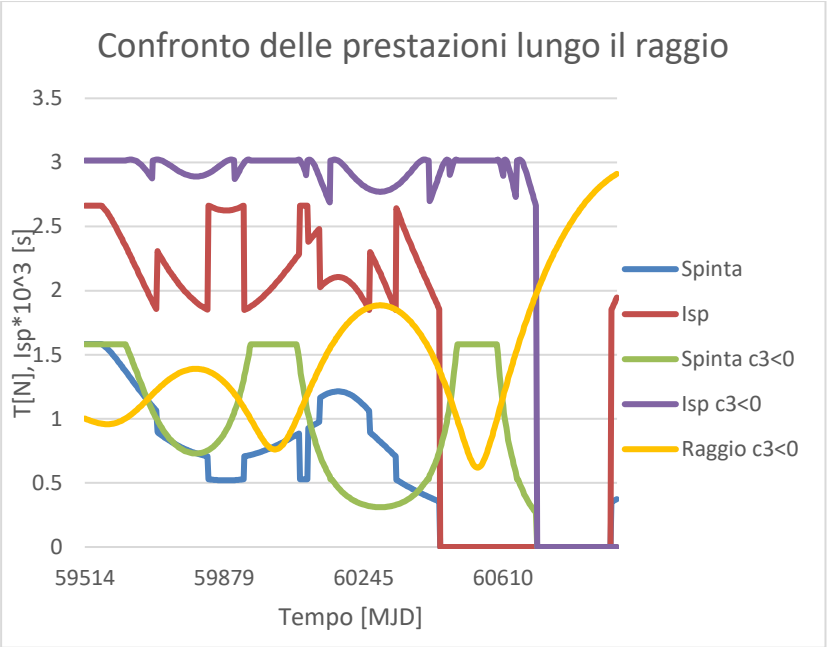


"Figura 27. Confronto tra propulsori con c3>0 e propulsori con c3<0 per missione di durata 4 anni"

Caso con durata 8 anni:



"Figura 28. Confronto tra propulsori con c3>0 e propulsori con c3<0 per missione di durata 8 anni"



"Figura 29. Confronto tra propulsori con c3>0 e propulsori con c3<0 per missione di durata 8 anni"

Nella missione con durata di otto anni, il secondo passaggio all'afelio non risulta molto significativo in quanto va a superare l'afelio di Eros. Infatti, in quel punto i propulsori si spengono, dando solo verso la fine un piccolo spunto di impulso specifico.

Per lunghe durate di missione i propulsori con coefficiente c_3 negativo hanno maggior potenza disponibile quindi riescono a spingere di più.

Si può notare dal confronto delle diverse durate, che in missioni più brevi i propulsori tendono a spingere di più e ad avere un impulso specifico più basso usando quasi sempre una spinta massima, mentre per missioni molto lunghe si prediligono livelli di spinta minori, infatti si può notare un andamento molto discontinuo di essa, e impulsi specifici più elevati. Per queste missioni i propulsori a ioni sono molto efficaci.

5 Conclusioni

In questo studio si è voluto illustrare un metodo di ottimizzazione indiretta di traiettorie interplanetarie che consenta di analizzare le principali caratteristiche di un trasferimento orbitale dal pianeta Terra ad un asteroide target adeguato per l'Asteroid Redirect Mission. Il metodo risulta veloce, preciso, efficace e vantaggioso. Vista la grande influenza che i consumi di propellente hanno sui costi di un trasferimento orbitale (e anche su quelli della messa in orbita del veicolo che lo deve realizzare), questo metodo permette di effettuare il trasferimento orbitale rendendo massima la massa al termine della manovra, o minimo il consumo di propellente (ma altri indici di prestazione, quali ad esempio la massimizzazione del carico utile tenendo in conto anche il peso del sistema propulsivo, possono comunque essere presi in considerazione). Il metodo indiretto garantisce un beneficio massimo. Il vantaggio generale è quello di usare un grande impulso specifico per traiettorie lunghe, mentre una spinta massima è di solito preferibile per missioni brevi. Per le missioni di lunga durata viene privilegiata la propulsione elettrica, utilizzata nella fase post-lancio. Questa, anche se fornisce una piccola spinta per tempi lunghi, favorisce un grande impulso specifico ed una riduzione dei costi.

Il metodo indiretto è innanzitutto utilizzato per comparare una ripartizione ottimale della potenza con una uniforme, non trattata in questa analisi, sia con l'uso di un massimo numero di propulsori, ovvero 3 con $P_a > 3P_m$, oppure con l'utilizzo di un minimo numero di propulsori, ovvero 2 con $P_a < 2P_M$.

Nella tabella di seguito vengono riportati i risultati:

Ripartizione	$\boldsymbol{m_1[kg]}$	$\boldsymbol{m_{masso}[kg]}$
Ottimale	7015	2366
Numero massimo di propulsori	6935	2194
Numero minimo di propulsori	6988	2273

Dove con $m_1$viene identificata la massa portata a destinazione sull'asteroide Eros e con m_{masso} è il campione prelevato dall'asteroide per studiarlo. Da notare come la ripartizione ottimale garantita con il metodo indiretto, permette di avere una maggior massa all'arrivo e una maggior massa del campione da poter analizzare quindi, di norma, è favorita rispetto a quella uniforme.

Nella ripartizione ottimale infatti, quando siamo in tratti in cui la spinta è minore, è più conveniente ripartire le potenze in modo da avere un maggior impulso specifico per garantire uno sfruttamento migliore del propellente senza ulteriori sprechi. Il miglior utilizzo dei propulsori è, inoltre, evidenziato dal fatto che la soluzione ottimale garantisce la spinta in posti dove non sarebbe conveniente la ripartizione uniforme della potenza: la ripartizione uniforme è consigliata maggiormente per più lunghi archi di missione, ad esempio per il ritorno.

Nell'applicazione del metodo indiretto si può notare che sia utilizzando un propulsore con coefficiente $c_3 > 0$ o con

$c_3 < 0$ i risultati non cambiano e le prestazioni hanno un andamento simile. Per questo motivo il metodo indiretto ha riscosso un notevole successo nell'analisi di ripartizione ottimale di due tipi di propulsori con coefficienti della potenza al cubo seppur diversi.

Appendice

Sistema di equazioni differenziali

Abbiamo un sistema differenziale alla base della teoria del controllo ottimale, ma, essendo in forma vettoriale, bisogna proiettare le equazioni in un sistema di riferimento inerziale. Adottiamo delle coordinate sferiche in un sistema sul piano equatoriale:

- identifichiamo la posizione con il raggio r, la longitudine con ϑ e la latitudine con ϕ.
- la velocità ha tre componenti: u (radiale), v (con direzione Est) e w (con direzione Nord) in un sistema di riferimento locale
- con γ indichiamo il *flight path angle* o *angolo di elevazione* e con ψ *l'angolo di heading* della velocità relativa $\boldsymbol{Vr}$, misurati secondo un piano orizzontale e con angoli positivi in senso antiorario e verso Nord.
- γT e ψT sono gli stessi angoli del punto precedente misurati stavolta per la spinta $\boldsymbol{T}$

Gli angoli dipendono solo dalle variabili di stato, mentre il modulo di $\boldsymbol{Vr}$ è dato da:

$$V\,r = \sqrt{u^2 + (v - wrcos\phi)^2 + w^2}$$

Di conseguenza si avranno le seguenti equazioni del moto proiettate:

$$\frac{dr}{d\varepsilon} = \tau u$$

$$\frac{d\vartheta}{d\varepsilon} = \tau \frac{v}{rcos\varphi}$$

$$\frac{d\phi}{d\varepsilon} = \tau \frac{w}{r}$$

$$\frac{du}{d\varepsilon} = \tau \left(-\frac{1}{r^2} + \frac{v^2}{r} + \frac{w^2}{r} + \frac{T}{m} sin\gamma_T \right)$$

$$\frac{dv}{d\varepsilon} = \tau \left(-\frac{uv}{r} + \frac{vw}{r} tan\varphi + \frac{T}{m} cos\gamma_T cos\psi_T \right)$$

$$\frac{dw}{d\varepsilon} = \tau \left(-\frac{uw}{r} - \frac{v^2}{r} tan\varphi + \frac{T}{m} cos\gamma_T cos\psi_T \right)$$

$$\frac{dm}{d\varepsilon} = -\tau \frac{T}{c}$$

Angoli di spinta

Esplicitiamo ora l'espressione dell'Hamiltoniano per ottenere i valori ottimali per gli angoli di spinta γ_T e ψ_T annullandone le derivate parziali rispetto a questi angoli. Si ha:

$$sin\gamma_T = \frac{\lambda_u}{\lambda_V}$$

$$cos\gamma_T cos\psi_T = \frac{\lambda_v}{\lambda_V}$$

$$cos\gamma_T sin\psi_T = \frac{\lambda_w}{\lambda_V}$$

dove λ_V è il modulo del primer vector, parallelo alla direzione della

spinta, ovvero:

$$\lambda_V = \sqrt{\lambda_u^2 + \lambda_v^2 + \lambda_w^2}$$

Equazioni di Eulero-Lagrange

Andiamo ora a vedere come sono definite le equazioni differenziali delle variabili aggiunte dalle equazioni di Eulero-Lagrange:

$$\dot{\lambda}_r = \frac{\tau}{r^2}\left[\frac{\lambda_\vartheta v}{cos\phi} + \lambda_\phi w + \lambda_u\left(-\frac{2}{r} + v^2 + w^2\right) + \lambda_v(-uv + vwtan\phi) - \lambda_w(uw + v^2 tan\phi)\right]$$

$$\dot{\lambda}_\vartheta = 0$$

$$\dot{\lambda}_\phi = \frac{\tau}{rcos^2\phi}(-\lambda_\vartheta vsin\phi - \lambda_v vw + \lambda_w v^2)$$

$$\dot{\lambda}_u = \frac{\tau}{r}(-\lambda_r r + \lambda_v v + \lambda_w w)$$

$$\dot{\lambda}_v = \frac{\tau}{r}\left[-\lambda_\vartheta \frac{1}{cos\phi} - 2\lambda_u v + \lambda_v(u - wtan\phi) + 2\lambda_w vtan\phi\right]$$

$$\dot{\lambda}_w = \frac{\tau}{r}\left(-\lambda_\phi - 2\lambda_u w - \lambda_v v\, tan\phi + \lambda_w u\right)$$

$$\dot{\lambda}_m = \tau\frac{T}{m^2}\lambda_v$$

Calcolo vettoriale e matriciale

La notazione scelta indica con un carattere grassetto un vettore colonna:

$$\boldsymbol{a} = \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ \vdots \\ a_n \end{pmatrix}$$

Un vettore riga è quindi indicato come $\boldsymbol{a^T}$, dove il simbolo T indica la matrice trasposta. In questo modo, riferendosi al calcolo matriciale, il prodotto scalare tra due vettori $\boldsymbol{a} \cdot \boldsymbol{b}$ viene scritto indifferentemente come:

$$\boldsymbol{a} \cdot \boldsymbol{b} = \boldsymbol{a^T b} = \boldsymbol{b^T a}$$

La derivazione di un vettore colonna rispetto ad una grandezza scalare (ad esempio il tempo t) origina un nuovo vettore colonna le cui componenti sono le derivate delle singole componenti del vettore originario:

$$\frac{\mathrm{d}\boldsymbol{a}}{\mathrm{d}t} = \begin{pmatrix} \mathrm{d}a_1/\mathrm{d}t \\ \mathrm{d}a_2/\mathrm{d}t \\ \vdots \\ \mathrm{d}a_n/\mathrm{d}t \end{pmatrix}$$

Al contrario, la derivazione di una grandezza scalare (ad esempio l'indice di prestazione φ) rispetto ad un vettore colonna $\boldsymbol{a}$ origina un vettore riga le cui componenti sono le derivate di φ rispetto alle componenti del vettore originario:

$$\frac{\mathrm{d}\varphi}{\mathrm{d}\boldsymbol{a}} = \left(\frac{\mathrm{d}\varphi}{\mathrm{d}a_1}, \frac{\mathrm{d}\varphi}{\mathrm{d}a_2}, \ldots, \frac{\mathrm{d}\varphi}{\mathrm{d}a_n}\right)$$

Infine, in similitudine con quanto visto sopra, la derivazione di un vettore $\boldsymbol{a}$ (*n* componenti) rispetto ad un secondo vettore $\boldsymbol{b}$ (*m* componenti) origina una matrice, indicata da parentesi quadre, con *n* righe e *m* colonne: ogni colonna è infatti data dalle derivate delle componenti di $\boldsymbol{a}$ rispetto ad una singola componente di $\boldsymbol{b}$ (trattando quest'ultima come una grandezza scalare, questo caso è analogo alla derivazione di un vettore rispetto ad uno scalare), mentre ogni riga è data dalle derivate di una singola componente di $\boldsymbol{a}$ (vista come scalare, in analogia alla derivazione di uno scalare rispetto ad un vettore) rispetto alle componenti di $\boldsymbol{b}$:

$$\left[\frac{\mathrm{d}\boldsymbol{a}}{\mathrm{d}\boldsymbol{b}}\right] = \begin{bmatrix} \mathrm{d}a_1/\mathrm{d}b_1 & \ldots & \mathrm{d}a_1/\mathrm{d}b_m \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \mathrm{d}a_n/\mathrm{d}b_1 & \ldots & \mathrm{d}a_n/\mathrm{d}b_m \end{bmatrix}$$

Si sottolinea che i pedici usati in questa Appendice (che identificano la componente del vettore), non vanno confusi con quelli utilizzati nel resto del lavoro (dove indicano, in genere, il punto in cui il vettore va calcolato).

Sitografia

https://www.tomshw.it/propulsione-solare-elettrica-le-future-missioni-nasa-76434

https://it.wikipedia.org/wiki/Asteroid_Redirect_Mission

https://www.astronautinews.it/2016/05/03/aerojet-rocketdyne-incaricata-costruire-un-motore-elettrico-ad-alta-potenza/

http://www.repubblica.it/online/cultura_scienze/foto/atterrato/atterrato.html

https://www.astronautinews.it/2016/03/19/inizia-la-pianificazione-dettaglio-della-missione-arm/

https://www.nasa.gov/content/what-is-nasa-s-asteroid-redirect-mission