

POLITECNICO DI TORINO

Corso di Laurea in Ingegneria Aerospaziale

Tesi di Laurea Magistrale

**Proper Orthogonal Decomposition in
aeroelasticità**



Relatore
prof. Renzo Arina

Laureando
Francesca MANCARELLA
matricola: 230984

Supervisore aziendale
Leonardo Divisione Velivoli
dott. Nicola Ceresola

ANNO ACCADEMICO 2017 – 2018

Sommario

Negli ultimi venti anni le simulazioni ad alto livello di precisione effettuate mediante software di calcolo come simulazioni CFD (Computational Fluid Dynamics) o di dinamica delle strutture nel settore aeronautico hanno preso posto accanto alla sperimentazione tradizionale nella progettazione dei velivoli e dei loro componenti.

Questa tesi nasce con lo scopo di ridurre la notevole spesa computazionale in termini di tempi e potenza di calcolo che bisogna affrontare quando si utilizzano queste simulazioni ad alto livello di precisione. Verrà trattato il caso di simulazioni CFD e aeroelastiche in cui i carichi aerodinamici sono accoppiati con la dinamica della struttura.

L'idea di base è quella di generare dei modelli surrogati di ordine ridotto, tramite l'applicazione della metodologia POD (Proper Orthogonal Decomposition) che siano in grado, a parità di input, di replicare, con un'accuratezza sufficientemente adeguata, la risposta del modello matematico di risoluzione delle equazioni del caso di volta in volta preso in esame, permettendo così di ridurre le simulazioni complete a un numero limitato (*snapshots*), che verranno successivamente utilizzate dalla POD per la ricostruzione delle configurazioni mancanti e richieste in fase di progettazione.

Il grande vantaggio dell'utilizzo della POD è quello di poter, in poco tempo e con una limitata potenza di calcolo, ricostruire qualsiasi campo fluidodinamico che si trovi all'interno dello spazio dei parametri con il quale si è costruito il modello surrogato, tramite l'utilizzo della SRM (Surface Response Methodology). Le superfici di risposta generate dipendono solamente dal set di snapshot con il quale si è costruito il modello surrogato e di conseguenza rimangono invariate una volta generato il modello. Il campo incognito verrà quindi determinato interrogando la superficie di risposta per quella precisa combinazione di parametri a cui si è interessati.

La tesi è strutturata in quattro capitoli principali, più il capitolo conclusioni:

- **Cap 1:** racchiude i fondamenti teorici utilizzati per la generazione dei modelli surrogati sviluppati in questa tesi.

In questa parte verranno presentate le formulazioni matematiche della metodologia POD e della SRM, nonché i differenti tipi di interpolazione utilizzati.

- **Cap 2:** racchiude l'applicazione del metodo POD ad un profilo alare NACA0012 immerso in una corrente subsonica. Il test verrà effettuato utilizzando uno spazio dei parametri mono e bidimensionale.
- **Cap 3:** racchiude l'applicazione del metodo POD ad un'ala completa di velivolo transonico. In questo capitolo verranno studiate anche le condizioni di flusso transonico.
- **Cap 4:** tratta dell'applicazione del metodo POD ad un caso aeroelastico. L'ala presa in considerazione è un'ala completa di velivolo transonico. Verranno presi in considerazione dunque sia i fenomeni di accoppiamento tra forze aerodinamiche e dinamica della struttura che le condizioni di campo transonico.

Il presente lavoro di tesi è stato svolto in collaborazione con Leonardo divisione velivoli.

Ringraziamenti

Vorrei iniziare ringraziando il mio tutor accademico e relatore Professor Renzo Arina : per aver accettato di seguirmi in questo lavoro. La sua disponibilità ed i preziosi consigli hanno costituito un importante contributo per la realizzazione del lavoro.

Inoltre vorrei ringraziare vivamente l'azienda Leonardo per avermi dato la possibilità di svolgere presso di essa l'attività di tesi. In particolare il Dottor Nicola Ceresola, mio tutor aziendale, per essere stato sempre disponibile e per avermi seguita e supportata in tutte le attività svolte e fornito informazioni e documentazione utili alla stesura della seguente monografia.

Un ringraziamento va alla mia famiglia per avermi permesso di effettuare gli studi lontano da casa assecondando le mie aspirazioni e sostenendomi nelle scelte e in tutte le fasi del mio percorso di studi.

Indice

Elenco delle tabelle	8
Elenco delle figure	9
1 Fondamenti Teorici	14
1.1 POD - Proper Orthogonal Decomposition	14
1.1.1 SVD come Decomposizione di Ordine Ridotto	15
1.2 Superfici di Risposta	19
1.2.1 Radial Basis Function	20
1.2.2 Least Squares Method	22
2 Applicazioni POD per un profilo alare NACA0012	27
2.1 Test profilo NACA0012 con spazio dei parametri 1D	29
2.2 Test profilo NACA0012 con spazio dei parametri 2D	36
2.2.1 Generazione delle superfici di risposta	36
2.2.2 Confronto dei campi di pressione e Mach intorno al profilo	44
3 Applicazioni POD per un'ala completa di velivolo transonico	51
3.1 Generazione delle superfici di risposta	53
3.2 Confronto dei campi di pressione e Mach intorno al profilo	58
4 Applicazioni POD su un'ala aeroelastica	67
4.1 Test con spazio dei parametri monodimensionale	69
4.2 Test con spazio dei parametri bidimensionale	76
5 Conclusione	81
Bibliografia	99

Elenco delle tabelle

2.1	Valori della polare aerodinamica del profilo NACA0012 ottenuta tramite il simulatore UNS3D	29
2.2	Analisi degli errori relativi alle ricostruzioni POD per la polare del profilo NACA0012 con 11 snapshots	31
2.3	Analisi degli errori relativi alle ricostruzioni POD per la polare del profilo NACA0012 con 10 snapshots	32
2.4	Analisi degli errori relativi alle ricostruzioni POD per la polare del profilo NACA0012 con 9 snapshots	33
2.5	Analisi degli errori relativi alle ricostruzioni POD per la polare del profilo NACA0012 con 8 snapshots	34
2.6	Analisi degli errori relativi alle ricostruzioni POD per la polare del profilo NACA0012 con 5 snapshots	35
2.7	Analisi degli errori relativi alle ricostruzioni POD per mach $M = 0.45$	44
2.8	Analisi degli errori relativi alle ricostruzioni POD per mach $M = 0.25$	44
3.1	Analisi degli errori relativi alle ricostruzioni POD per mach $M = 0.6$	57
4.1	Analisi degli errori relativi percentuali delle ricostruzioni POD per mach $M = 0.77$	71
4.2	Analisi degli errori relativi percentuali per il bending al tip	75
4.3	Analisi degli errori relativi percentuali delle ricostruzioni POD per mach $M = 0.6$	78
5.1	Confronto tra i tempi di simulazioni relativi alle simulazioni ad alta precisione e POD	82

Elenco delle figure

1.1	RBF con base Gaussiana al variare del parametro di forma [3]	21
1.2	Confronto tra RBF con base Gaussiana, Multiquadrica e Multiquadrica inversa [2]	21
2.1	Mesh volumetrica di partenza	28
2.2	Mesh relativa al profilo alare NACA0012; (a) Profilo alare NACA0012 (b) zoom sul bordo d'attacco del profilo	28
2.3	Coefficienti di portanza e resistenza interpolati tramite metodo B-spline con 11 snapshots	30
2.4	Coefficienti di portanza e resistenza interpolati tramite metodo B-spline con 10 snapshots	32
2.5	Coefficienti di portanza e resistenza interpolati tramite metodo B-spline con 9 snapshots	33
2.6	Coefficienti di portanza e resistenza interpolati tramite metodo B-spline con 8 snapshots	34
2.7	Coefficienti di portanza e resistenza interpolati tramite metodo B-spline con 5 snapshots	35
2.8	Superfici di risposta relative ai coefficienti di portanza e resistenza ottenute tramite interpolazione least square di ordine 1 monoparametro con 54 snapshots	37
2.9	Superficie di risposta relativa ai coefficienti di portanza ottenuta tramite interpolazione least square di ordine 2 multiparametro con 54 snapshots	37
2.10	Superficie di risposta relative ai coefficienti di resistenza ottenuta tramite interpolazione least square di ordine 2 multiparametro con 54 snapshots	38
2.11	Superfici di risposta relative ai coefficienti di portanza e resistenza ottenute tramite interpolazione multiparametro RBF con base multiquadric con 54 snapshots	38
2.12	Confronto tra superfici di risposta al variare del parametro delta: Bordo blu: $d=1.7$ Bordo magenta: $d=1.4$ Bordo verde: $d=1$	39
2.13	Superfici di risposta relative ai coefficienti di portanza e resistenza ottenute tramite interpolazione multiparametro RBF con base multiquadric con 66 snapshots	40
2.14	Superfici di risposta relative ai coefficienti di portanza e resistenza ottenute tramite interpolazione multiparametro RBF con base multiquadric con 84 snapshots	40

2.15	Superfici di risposta relative ai coefficienti di portanza e resistenza ottenute tramite interpolazione multiparametro RBF con base multiquadric con 72 snapshots	41
2.16	Superfici di risposta relative ai coefficienti di portanza e resistenza ottenute tramite interpolazione multiparametro RBF con base multiquadric con 96 snapshots	41
2.17	Superfici di risposta relative ai coefficienti di portanza e resistenza ottenute tramite interpolazione multiparametro RBF con base multiquadrica inversa con 96 snapshots	42
2.18	Confronto delle superfici di risposta relative ai coefficienti di resistenza ottenute tramite interpolazione multiparametro RBF con base multiquadric (linea gialla) e multiquadric inversa (linea verde) con 96 snapshots	43
2.19	Coefficienti di pressione per Alpha: 4.5 e Mach: 0.45	45
2.20	Distribuzione del Mach per Alpha: 4.5 e Mach: 0.45	45
2.21	Coefficienti di pressione per Alpha: 6.75 e Mach: 0.45	46
2.22	Distribuzione del Mach per Alpha: 6.75 e Mach: 0.45	46
2.23	Coefficienti di pressione per Alpha: 7.75 e Mach: 0.45	47
2.24	Distribuzione del Mach per Alpha: 7.75 e Mach: 0.45	47
2.25	Confronto coefficienti di pressione ottenuti tramite simulazione CFD e POD per $\alpha = 4.5$ e $M = 0.45$	48
2.26	Confronto coefficienti di pressione ottenuti tramite simulazione CFD e POD per $\alpha = 6.75$ e $M = 0.45$	49
2.27	Confronto coefficienti di pressione ottenuti tramite simulazione CFD e POD per $\alpha = 7.75$ e $M = 0.45$	49
3.1	Mesh relativa all'ala in pianta	52
3.2	Mesh relativa ad una sezione alare	52
3.3	Polari aerodinamiche	54
3.4	Superfici di risposta relative ai coefficienti di portanza e resistenza per un set di 35 snapshots	55
3.5	Superfici di risposta relative ai coefficienti di portanza e resistenza per un set di 40 snapshots	56
3.6	in rosso la griglia relativa al set di 40 snapshots e in blu la griglia relativa ai punti interpolati	57
3.7	Coefficienti di pressione per Alpha: 1 e Mach: 0.4	58
3.8	Distribuzione del Mach per Alpha: 1 e Mach: 0.4	59
3.9	Coefficienti di pressione per Alpha: 1 e Mach: 0.73	59
3.10	Distribuzione del Mach per Alpha: 1 e Mach: 0.73	60
3.11	Coefficienti di pressione per Alpha: 6.3 e Mach: 0.4	60
3.12	Distribuzione del Mach per Alpha: 6.3 e Mach: 0.4	61
3.13	Coefficienti di pressione per Alpha: 6.3 e Mach: 0.73	61
3.14	Distribuzione del Mach per Alpha: 6.3 e Mach: 0.73	62
3.15	Confronto coefficienti di pressione ottenuti tramite simulazione CFD e POD per $\alpha = 1$ e $M = 0.4$	63
3.16	Confronto coefficienti di pressione ottenuti tramite simulazione CFD e POD per $\alpha = 1$ e $M = 0.73$	63

3.17	Confronto coefficienti di pressione ottenuti tramite simulazione CFD e POD per $\alpha = 6.3$ e $M = 0.4$	64
3.18	Confronto coefficienti di pressione ottenuti tramite simulazione CFD e POD per $\alpha = 6.3$ e $M = 0.73$	64
4.1	Confronto campi di pressione in caso di ala rigida e ala aeroelastica per $\alpha = 2$ e $M = 0.77$	68
4.2	Confronto linee di flusso a parete in caso di ala rigida e ala aeroelastica per $\alpha = 2$ e $M = 0.77$	68
4.3	Schema relativo al metodo di accoppiamento tra carichi aerodinamici e modello strutturale	69
4.4	Polare aerodinamica relativa al coefficiente di portanza per Mach $M = 0.77$	70
4.5	Polare aerodinamica relativa alla componente in viscido del coefficiente di resistenza per Mach $M = 0.77$	71
4.6	Confronto griglie di calcolo per $\alpha = -1$: in rosso griglia indeformata, in verde griglia deformata ottenuta tramite simulazione CFD/CSM, in blu griglia deformata ottenuta tramite interpolazione POD	72
4.7	Confronto griglie di calcolo per $\alpha = 1$: in rosso griglia indeformata, in verde griglia deformata ottenuta tramite simulazione CFD/CSM, in blu griglia deformata ottenuta tramite interpolazione POD	73
4.8	Confronto griglie di calcolo per $\alpha = 3$: in rosso griglia indeformata, in verde griglia deformata ottenuta tramite simulazione CFD/CSM, in blu griglia deformata ottenuta tramite interpolazione POD	73
4.9	Confronto griglie di calcolo per $\alpha = 5$: in rosso griglia indeformata, in verde griglia deformata ottenuta tramite simulazione CFD/CSM, in blu griglia deformata ottenuta tramite interpolazione POD	74
4.10	Confronto griglie di calcolo per $\alpha = 6.3$: in rosso griglia indeformata, in verde griglia deformata ottenuta tramite simulazione CFD/CSM, in blu griglia deformata ottenuta tramite interpolazione POD	74
4.11	Confronto deformazione valutata lungo l'asse Z (bending) su un nodo al tip per Mach $M = 0.77$	75
4.12	Distribuzione del coefficiente di pressione per Alpha: 6.3 e Mach: 0.77	76
4.13	Distribuzione del Mach per Alpha: 6.3 e Mach: 0.77	76
4.14	Superficie di risposta relativa al coefficiente di portanza ottenuta con un set di 40 snapshots	77
4.15	Superficie di risposta relativa alla componente in viscido del coefficiente di resistenza ottenuta con un set di 40 snapshots	78
4.16	Confronto griglie di calcolo per $\alpha = 5.5$ e $Mach = 0.6$: in rosso la griglia deformata ottenuta tramite simulazione CFD/CSM, in verde griglia deformata ottenuta tramite interpolazione POD	79
4.17	Distribuzione del coefficiente di pressione per Alpha: 3 e Mach: 0.4	80
4.18	Distribuzione del coefficiente di pressione per Alpha: 6.3 e Mach: 0.73	80
5.1	Visualizzazione del profilo NACA0012	93
5.2	Polari aerodinamiche profilo NACA0012	94

Capitolo 1

Fondamenti Teorici

1.1 POD - Proper Ortogonal Decomposition

Negli ultimi anni vi è stato un notevole progresso per quanto riguarda lo sviluppo di metodi per l'approssimazione delle equazioni di Eulero e Navier-Stokes in campo fluidodinamico. I miglioramenti delle metodologie utilizzate insieme ad un notevole sviluppo della potenza di calcolo dei processori, hanno fatto sì che sistemi governati dalle equazioni precedentemente citate possano essere risolti in tempi relativamente brevi ottenendo risultati prossimi alla realtà. Nonostante ciò, per molte applicazioni sono necessari modelli computazionali complessi da risolvere. In questi casi lo sviluppo di modelli in grado di trovare soluzioni accurate in tempi brevi è ancora ostico.

I *modelli di ordine ridotto (ROM)* rappresentano uno strumento potentissimo per rappresentare in modo rapido ed efficace i sistemi risultanti dalla discretizzazione delle equazioni di Eulero e Navier-Stokes. I metodi di ordine ridotto sono stati sviluppati e applicati in molte discipline come la fluidodinamica e la dinamica delle strutture. In questi campi la modellazione di sistemi di ordine ridotto ha raggiunto livelli di conoscenza che hanno permesso di ottenere risultati soddisfacenti in innumerevoli applicazioni. [1]

Sono state proposte diverse tecniche per ottenere modelli di ordine ridotto. In questa tesi il metodo utilizzato è quello del *Proper Ortogonal Decomposition (POD)*. La tecnica POD è un metodo statistico-matematico di decomposizione ortogonale che permette di ricavare una base di auto-funzioni ortonormali per la decomposizione modale a partire da un insieme di dati multi-dimensionale. Questa tecnica prevede la creazione di un set di vettori, detti basi del POD, i quali contengono le caratteristiche principali di un sistema. Le basi del POD permettono di descrivere l'intero sistema mediante un'interpolazione parametrica delle stesse. Per lo sviluppo di un modello POD sono necessarie due fasi. La prima fase è quella relativa alla generazione degli snapshots necessari al calcolo delle basi POD e alla conseguente derivazione del Modello di Ordine Ridotto (ROM). Essa prevede l'esecuzione di simulazioni ad alto livello di precisione costose in termini di tempo e potenza di calcolo. Nella seconda fase il modello ROM prodotto permette di calcolare velocemente la soluzione in tutto il campo.

In campo fluidodinamico il metodo POD viene generalmente usato per trovare una base per la proiezione delle equazioni di Navier-Stokes e per ottenere un modello ROM composto da un sistema di equazioni differenziali per l'espansione dei coefficienti POD. Più raramente il metodo POD è applicato al dominio delle frequenze o ad uno spazio parametrico.

I vettori delle basi POD vengono creati usando una serie di dati chiamati *snapshots*. Ogni snapshot è rappresentato da una serie discreta di dati ed è un vettore di dimensione n . Gli snapshots possono essere ottenuti da simulazioni relative al modello fluidodinamico completo, modello ad alto livello di fedeltà, per diversi valori dei p parametri. La scelta degli snapshots è critica in quanto le basi risultanti prenderanno in considerazione solamente la dinamica presente nell'insieme degli snapshots.

E' inoltre importante notare che mentre le basi POD sono ottimali nel fornire una rappresentazione efficiente dei dati contenuti nell'insieme degli snapshots, non è detto che lo stesso valga sul risultante modello di ordine ridotto.

1.1.1 SVD come Decomposizione di Ordine Ridotto

Il metodo POD descritto come problema SVD (*Singular Value Decomposition*) è potente in quanto ha il vantaggio di essere più affidabile rispetto al calcolo degli autovalori.

Si consideri la matrice rettangolare A con colonne $u_j \in \mathbb{R}^n$, $1 \leq j \leq m$ dove m è il numero di snapshots cioè m è il numero di realizzazioni ottenute combinando diversi valori dei p parametri. Ogni snapshot corrisponde ad un vettore di dimensione n , soluzione di simulazioni ad alto livello di fedeltà, dove $n \gg m$. La SVD della matrice a valori reali $A[u_1, \dots, u_m] \in \mathbb{R}^{n \times m}$, di rango m , garantisce l'esistenza di m numeri reali $\sigma_1 \geq \sigma_2 \geq \dots \geq \sigma_m \geq 0$ e della matrice ortonormale $U \in \mathbb{R}^{n \times n}$ avente colonne $\varphi_i \in \mathbb{R}^n$, $1 \leq i \leq n$, e $V \in \mathbb{R}^{m \times m}$ avente colonne $\psi_j \in \mathbb{R}^m$, $1 \leq j \leq m$, tale che:

$$U^T A V = \begin{pmatrix} D \\ 0 \end{pmatrix} = \Sigma \in \mathbb{R}^{n \times m}, \quad (1.1)$$

Dove $D = \text{diag}(\sigma_1, \dots, \sigma_m) \in \mathbb{R}^{m \times m}$. Le matrici U e V sono ortonormali, cioè rispettano la relazione $U^T U = U U^T = 1$, e $U^T = U^{-1}$. Relazioni simili valgono per V . Per quanto detto, segue che

$$A V = U \Sigma \quad (1.2)$$

$$A^T U = V \Sigma$$

$$A = U \Sigma V^T \quad (1.3)$$

La matrice diagonale $\Sigma \in \mathbb{R}^{n \times m}$ ha m valori non negativi, ordinati in ordine decrescente, $\{\sigma_l\}_{l=1}^m$ i quali rappresentano i *singular values* della matrice A . I vettori $\{\varphi_i\}_{i=1}^n$ e $\{\psi_j\}_{j=1}^m$ sono rispettivamente i *singular vector* sinistro e destro della matrice A .

Dalle relazioni precedenti segue che

$$A^T = (U\Sigma V^T)^T = V(U\Sigma)^T = V\Sigma U^T,$$

e

$$(A^T A) V = (V\Sigma U^T U\Sigma V^T) V = V\Sigma^2 V^T V = V\Sigma^2 = \Lambda V \quad (1.4)$$

Dove $\Lambda = \Sigma^2$, matrice di elementi $\lambda_l = \sigma_l^2 > 0$ ($1 \leq l \leq m$), i vettori $\{\psi_l\}_{l=1}^m$ sono gli autovettori della matrice $A^T A$ con autovalori λ_l . In modo simile

$$(A A^T) U = (U\Sigma V^T V\Sigma U^T) U = \Sigma^2 U = \Lambda U, \quad (1.5)$$

I vettori $\{\varphi_l\}_{l=1}^m$ sono gli autovettori della matrice $A^T A$ con autovalori λ_l . i vettori $\{\varphi_l\}_{l=m+1}^n$ sono autovettori con zero autovalori.

Lo spazio delle colonne di A può essere rappresentato in termini delle colonne linearmente indipendenti di U

$$A = \tilde{U} D V^T = \tilde{U} B,$$

con $\tilde{U} \in \mathbb{R}^{n \times m}$ ($\tilde{U}_{ij} \equiv U_{ij}$ per $1 \leq i \leq n, 1 \leq j \leq m$) e $B = D V^T \in \mathbb{R}^{n \times m}$. Essendo \tilde{U} una matrice ortogonale ($\tilde{U} \tilde{U}^T = I \in \mathbb{R}^{m \times m}$)

$$\begin{aligned} u_j &= \sum_{l=1}^m B_{lj} \tilde{U}_l = \sum_{l=1}^m (D V^T)_{lj} \varphi_l = \sum_{l=1}^m (\tilde{U}^T \tilde{U} D V^T)_{lj} \varphi_l \\ &= \sum_{l=1}^m (\tilde{U}^T A)_{lj} \varphi_l = \sum_{l=1}^m \langle \varphi_l, u_j \rangle \varphi_l, \quad \text{for } j = 1, \dots, m, \end{aligned} \quad (1.6)$$

Dove $\langle \varphi_l, u_j \rangle = \sum_{k=1}^n (\varphi_{kl} u_{kj})$ è il prodotto interno in \mathbb{R}^n dei vettori $\varphi_l \in \mathbb{R}^n$ e $u_j \in \mathbb{R}^n$.

L'obiettivo principale del POD è quello di esprimere le informazioni essenziali di tutti gli snapshots $\{u_j\}_{j=1}^m$ tramite delle basi. Il problema di approssimare al meglio tutti gli snapshots allo stesso tempo con un unico vettore normalizzato $\varphi \in \mathbb{R}^n$ può essere espresso come

$$\max_{\varphi \in \mathbb{R}^n} \frac{1}{m} \sum_{j=1}^m |\langle u_j, \varphi \rangle|^2 \quad \text{che rispetta} \quad \|\varphi\|^2 = 1, \quad (1.7)$$

dove $\|\varphi\| = \sqrt{\langle \varphi, \varphi \rangle}$.

Considerando la funzione di Lagrange associata all'equazione 1.7,

$$\mathcal{L}(\varphi, \lambda) = \frac{1}{m} \sum_{j=1}^m |\langle u_j, \varphi \rangle|^2 + \lambda (1 - \|\varphi\|^2) \quad \text{per } (\varphi, \lambda) \in \mathbb{R}^n \times \mathbb{R},$$

La funzione $\varphi \in \mathbb{R}^n$ è una soluzione del problema di ottimizzazione espresso dalla condizione 1.7 se la seguente condizione è soddisfatta:

$$\nabla \mathcal{L}(\varphi, \lambda) = 0$$

Calcolando il gradiente di \mathcal{L} segue, essendo $A = [u_1, \dots, u_m]$,

$$\begin{aligned} \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \varphi_i}(\varphi, \lambda) &= \frac{\partial}{\partial \varphi_i} \left[\frac{1}{m} \sum_{j=1}^m \left| \sum_{k=1}^n A_{kj} \varphi_k \right|^2 + \lambda \left(1 - \sum_{k=1}^n \varphi_k^2 \right) \right] \\ &= \frac{2}{m} \sum_{j=1}^m \left(\sum_{k=1}^n A_{kj} \varphi_k \right) A_{ij} - 2\lambda \varphi_i = \frac{2}{m} \sum_{k=1}^n \sum_{j=1}^m A_{ij} A_{jk}^T \varphi_k - 2\lambda \varphi_i, \end{aligned}$$

si ha:

$$\nabla_{\varphi} \mathcal{L}(\varphi, \lambda) = 2 \left(\frac{1}{m} A A^T \varphi - \lambda \varphi \right) = 0 \quad \text{in } \mathbb{R}^n, \quad (1.8)$$

e

$$\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \lambda}(\varphi, \lambda) = 1 - \sum_{k=1}^n \varphi_k^2 = 1 - \|\varphi\|^2 = 0. \quad (1.9)$$

Le condizioni 1.8 e 1.9 sono legate al problema agli autovalori per la matrice simmetrica AA^T

$$\frac{1}{m} A A^T \varphi = \lambda \varphi \quad \in \mathbb{R}^n, \quad (1.10)$$

con la condizione

$$\|\varphi\| = 1 \quad (1.11)$$

La SVD della matrice A mostra che un vettore φ_1 , soluzione del problema 1.10, è un autovettore di AA^T con autovalore $\lambda_1 = m\sigma_1^2 > 0$. Si può dimostrare che φ_1 soddisfa la condizione di ottimizzazione del problema 1.7.

In modo simile se si cerca un secondo vettore φ_2 , ortogonale a φ_1 , che descrive gli snapshots u_j nel miglior modo possibile, che soddisfa la condizione 1.7 e $\langle \varphi_2, \varphi_1 \rangle = 0$, la SVD implica che φ_2 è soluzione del problema di ottimizzazione e il suo valore massimo è pari a $\sigma_2^2 = m\lambda_2$. La stessa procedura può essere applicata agli altri vettori φ .

I vettori ortonormali $\varphi_{i=1}^l$ sono chiamati "basi POD di rango $l \leq m$ ".

Per la relazione 1.6 e essendo $\tilde{U} \in \mathbb{R}^{n \times l}$ la matrice di colonne formate da basi POD $\varphi_{i=1}^l$, l'espansione delle colonne di A nelle basi POD è data da:

$$A = \tilde{U} B^l \quad \text{dove } B_{ij}^l = \langle \varphi_i, u_j \rangle \in \mathbb{R}^{l \times m} \quad 1 \leq i \leq l, \quad 1 \leq j \leq m. \quad (1.12)$$

Il fatto che le basi POD siano ottimali implica che le basi POD di rango l soddisfino il problema

$$\min_{\varphi_1, \dots, \varphi_l \in \mathbb{R}^n} \frac{1}{m} \sum_{j=1}^m \left\| u_j - \sum_{i=1}^l \langle u_j, \varphi_i \rangle \varphi_i \right\|^2$$

soggetto a $\langle \varphi_i, \varphi_j \rangle = \delta_{ij}$ per $1 \leq i, j \leq l$.

Un'altra proprietà della decomposizione alla POD è che i coefficienti POD sono scorrelati:

$$\begin{aligned} \sum_{j=1}^m B_{ij}^l B_{kj}^l &= \sum_{j=1}^m \langle u_j, \varphi_i \rangle \langle u_j, \varphi_k \rangle = \langle \sum_{j=1}^m \langle u_j, \varphi_i \rangle u_j, \varphi_k \rangle \\ &= \langle \sigma_i^2 \varphi_i, \varphi_k \rangle = \sigma_i^2 \delta_{ik}. \end{aligned}$$

Per calcolare le basi POD di rango l , $\varphi_{i=1}^l$, è necessario risolvere gli $n \times n$ autovalori simmetrici del problema 1.10

$$\frac{1}{m} (AA^T) \varphi_i = \lambda_i \varphi_i.$$

Dalle relazioni 1.4 e 1.5 segue $(A^T A)V = (AA^T)U$, inoltre se $m < n$, è più conveniente stimare gli autovettori $\psi_1, \dots, \psi_l \in \mathbb{R}^m$ risolvendo gli $m \times m$ autovalori simmetrici del problema 1.4

$$\left(\frac{1}{m} A^T A \right) \psi_i = \lambda_i \psi_i \quad \text{per } i = 1, \dots, l,$$

la matrice $(\frac{1}{m} A^T A)$ è la matrice di correlazione. Applicando la relazione 1.2,

$$A\psi_i = \sigma_i \varphi_i,$$

per ottenere le basi POD

$$\varphi_i = \frac{1}{\sigma_i} A\psi_i = \frac{1}{\sqrt{m\lambda_i}} A\psi_i \quad \text{per } i = 1, \dots, l. \quad (1.13)$$

Questo metodo è il cosiddetto *metodo degli snapshots*.

La scelta di l è di fondamentale importanza per la POD. Non esiste una regola valida a priori ma è possibile applicare un criterio euristico basato sul rapporto del modellato rispetto all'energia totale contenuta nel sistema che può essere espresso come

$$\varepsilon(l) = \frac{\sum_{i=1}^l \lambda_i}{\sum_{i=1}^m \lambda_i}.$$

Il metodo POD è applicabile ad ogni variabile per determinare una base distinta. Infatti ogni snapshot u_j può essere espanso come:

$$u_j = \sum_{l=1}^m \alpha_{lj} \varphi_l \quad \text{per } j = 1, \dots, m,$$

con coefficienti di proiezione:

$$\alpha_{lj} = \langle \varphi_l, u_j \rangle.$$

I coefficienti di proiezione α_{lj} sono funzioni discrete nello spazio dei parametri con valore definito nel punto corrispondente al singolo snapshot u_j . Per utilizzare il modello ROM derivato come strumento per determinare una nuova configurazione, è necessario estendere le funzioni discrete α_{lj} a funzioni continue α_l nello spazio dei parametri. In questo modo il campo delle variabili in un generico punto dello spazio dei parametri può essere approssimato come una combinazione lineare

$$u = \sum_{l=1}^m \alpha_l \varphi_l.$$

Nel caso mono-parametrico, l'estensione può essere ottenuta tramite interpolazione lineare o tramite spline. Per uno spazio multi-dimensionale può essere adottato il metodo delle superfici di risposta (RSM). [1]

1.2 Superfici di Risposta

In statistica, la Response Surface Methodology (RSM) viene applicata per determinare le relazioni che intercorrono fra una o più variabili di controllo (input) e una o più variabili di risposta (output) [6].

L'approccio principale alle RSM è basato sull'utilizzo di una sequenza di esperimenti progettati, D.o.E Design of Experiments (D.o.E), per ottenere una risposta ottimale.

Il metodo è stato introdotto da Box e Wilson nel 1951, che suggerirono di generare la superficie di risposta utilizzando un polinomio di secondo grado [6].

Essi capirono che se pur i modelli della RSM rappresentano solo un'approssimazione della risposta di un sistema a un determinato input, il loro utilizzo facilita notevolmente la stima e l'applicazione del processo quando si hanno poche informazioni sul sistema studiato.

Col tempo l'utilizzo della RSM è aumentato notevolmente, soprattutto in campo ingegneristico. Questo ha portato alla formulazione di nuovi modelli di costruzione per le superfici di risposta, ampliando notevolmente il database di funzioni a disposizione.

Tra i modi più semplici per la generazione di una RSM vi è l'utilizzo di campagne di esperimenti basate su Factorial Design, che permettono di determinare la relazione fra gli input e gli output tramite l'utilizzo di un polinomio di primo grado. Questo risulta già sufficiente per la determinazione dei parametri di controllo (input) più significativi, in termini di influenza sulla risposta del sistema (output).

Successivamente, dopo la determinazione dei parametri più influenti è possibile implementare delle superfici di risposta basate su approssimazioni ottenute tramite polinomi di secondo grado, passando all'utilizzo di D.o.E più complessi come il Central Composite Design (CCD) o le sue evoluzioni (CCF, CCI), per aumentare l'accuratezza della superficie di risposte generata.

Il modello di secondo grado, viene spesso utilizzato anche in fase di ottimizzazione per raggiungere un determinato obiettivo, che spesso coincide con la massimizzazione o minimizzazione di uno o più coefficienti significativi per il sistema studiato.

Con lo sviluppo dell'utilizzo della RSM si sono create anche estensioni per l'applicazione delle superfici di risposta ad ottimizzazioni multi-obiettivo, nelle quali però ciò che rende ottimo un output ne penalizza quasi sempre un altro.

Altre estensioni del modello sono state utilizzate per ridurre la variabilità di una singola risposta, con l'obiettivo di ottenere uno specifico valore che appartenga a un intorno accettabile del massimo o del minimo reale, evitando elevate variabilità nella ricostruzione della risposta.

Per la generazione dei modelli surrogati con spazio dei parametri multi-dimensionale, l'utilizzo della RSM è una tra le scelte più frequenti per l'interpolazione dei coefficienti POD e la costruzione delle superfici di risposta del metodo. Ovviamente la scelta dell'RSM migliore dipende dal sistema che si vuole ricreare, dal grado di accuratezza che si vuole raggiungere per il modello surrogato e dai parametri che vengono utilizzati come input.

Di seguito si riportano le RSM utilizzate in questo lavoro di tesi.

1.2.1 Radial Basis Function

Per la generazione di modelli surrogati con spazio dei parametri mono-dimensionale, di solito, l'interpolazione dei coefficienti POD è ottenuta tramite l'utilizzo di interpolazioni lineari o basate su funzioni **B-splines**.

Quando invece lo spazio dei parametri si presenta multi-dimensionale è conveniente interpolare i coefficienti POD, tramite l'utilizzo di **Radial Basis Function (RBF)**.

Una funzione a base radiale RBF è una funzione a valori reali con valori dipendenti solo dalla distanza dall'origine del sistema di riferimento:

$$\phi(\mathbf{x}) = \phi(\|\mathbf{x}\|)$$

In alternativa i valori possono dipendere anche dalla distanza da un altro punto \mathbf{c} fissato, chiamato centro, in modo che sia soddisfatta la proprietà:

$$\phi(\mathbf{x}, \mathbf{c}) = \phi(\|\mathbf{x} - \mathbf{c}\|)$$

Ogni funzione ϕ che soddisfa la proprietà $\phi(\mathbf{x}) = \phi(\|\mathbf{x}\|)$ è una funzione radiale. La norma è solitamente una distanza Euclidea, sono possibili altre funzioni distanza.

In certi casi le Radial Basis Function sono utilizzate per approssimare funzioni date.

Un'importante proprietà delle RBF è che una qualsiasi funzione data può essere ottenuta come somma di RBF note.

Tra le principali basi utilizzabili per la costruzione delle RBF troviamo:

- **Gaussiana:** $\phi(r) = e^{-(\epsilon r)^2}$
- **Multiquadric:** $\phi(r) = \sqrt{1 + (\epsilon r)^2}$
- **Multiquadric inverso:** $\phi(r) = \frac{1}{\sqrt{1 + (\epsilon r)^2}}$

Dove $r = \|\mathbf{x} - \mathbf{x}_i\|$ e ϵ è il cosiddetto *parametro di forma*.

Prendendo come esempio una funzione RBF con base Gaussiana possiamo notare che per $\epsilon \rightarrow 0$ la funzione risulta più "piatta". Infatti la condizione di $\epsilon = 0$ rappresenta la funzione costante. La variazione del parametro di forma impatta significativamente sull'accuratezza dell'approssimazione. [3]

L'RBF nella figura seguente è ottenuta con spazio dei parametri bidimensionale.

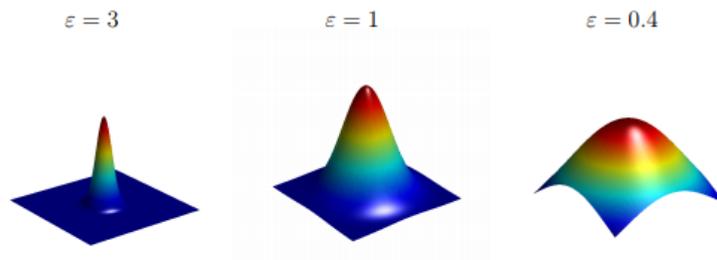


Figura 1.1: RBF con base Gaussiana al variare del parametro di forma [3]

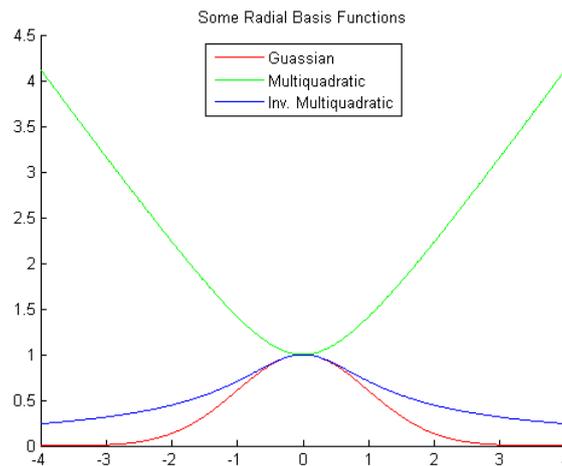


Figura 1.2: Confronto tra RBF con base Gaussiana, Multiquadrica e Multiquadrica inversa [2]

In questo lavoro di tesi le funzioni RBF utilizzate sono la Multiquadrica e la Multiquadrica inversa.

Spesso le RBF presentano un comportamento oscillatorio. Per ovviare a questo problema, in questa trattazione la ricostruzione della superficie di risposta tramite l'utilizzo delle RBF è stata ottenuta introducendo la condizione di rilassamento tramite il polinomio aggiuntivo $p(x)$. [4]

La superficie di risposta \hat{f} è quindi ottenuta come la somma di un polinomio, che è funzione del parametro di input, e di una combinazione lineare della RBF scelte:

$$\hat{f}(x) = p(x) + \sum_{i=1}^m w_i \phi(\|x - x_i\|)$$

dove con w si è indicato il peso associato ad ogni RBF ϕ .

1.2.2 Least Squares Method

Il metodo di approssimazione ai minimi quadrati (**Least Squares Method**), viene utilizzato per la determinazione di una funzione analitica che approssimi un insieme di dati, senza la necessità di passare per i punti di costruzione, come invece avviene per i metodi di interpolazione.

La funzione generata dal metodo risulta essere quella che minimizza la somma dei quadrati delle distanze dai punti.

Si considerino N coppie di dati $(x_1, y_1), (x_2, y_2), \dots, (x_N, y_N)$, e si supponga che l'errore sulle x_i , variabili indipendenti, sia trascurabile. Si supponga inoltre che le y_i , variabili dipendenti, siano affette da indeterminazioni statistiche σ_{y_i} .

Si supponga che la relazione tra x e y sia espressa dalla funzione:

$$y = f(x, c_1, c_2, \dots, c_p)$$

applicando il metodo dei minimi quadrati è possibile determinare i valori dei parametri (c_1, c_2, \dots, c_p) in corrispondenza dei quali la curva f approssima al meglio i punti sperimentali o le simulazioni numeriche effettuate.

Applicando il principio della massima verosimiglianza è possibile dimostrare che i migliori valori per i parametri c_i sono quelli che minimizzano l'equazione:[5]

$$X^2 = \sum_{i=1}^N \frac{[y_i - (c_1, c_2, \dots, c_p)]^2}{\sigma_i^2}$$

Ciò si riduce alla soluzione del sistema di equazioni:

$$\frac{\partial X^2}{\partial c_1} = \frac{\partial X^2}{\partial c_2} = \dots = \frac{\partial X^2}{\partial c_p} = 0$$

che può risultare assai laboriosa a seconda della particolare forma della funzione f .

Spesso, a causa della difficoltà della risoluzione analitica del sistema, il minimo di X viene determinato numericamente.

Se si assume che anche le variabili indipendenti x_i sono affette da errore, la formulazione si complica ulteriormente, in quanto bisogna introdurre anche l'errore statistico σ_x .

L'equazione tenendo conto di ciò si riscrive pertanto come:

$$X^2 = \sum_{i=1}^N \frac{[y_i - (c_1, c_2, \dots, c_p)]^2}{\delta_i^2}$$

dove:

$$\delta_i^2 = \sigma_{y_i}^2 + \left(\frac{\partial f}{\partial x} \right)_{x=x_i}^2 \sigma_{x_i}^2$$

con $\delta_i = \delta_i(c_i)$.

E' possibile osservare che la quantità δ_i^2 rappresenta la varianza degli scarti $s_i = y_i - f(x_i)$, infatti dalla propagazione degli errori statistici si ricava la relazione:

$$\sigma_{s_i}^2 = \sigma_{y_i}^2 + \left(\frac{\partial f}{\partial x} \right)_{x=x_i}^2 \sigma_{x_i}^2$$

Se si sostituisce l'errore σ_{y_i} con l'errore efficace δ_{y_i} (che ha il significato di errore quadratico medio sullo scarto s_i), la propagazione avviene come se non ci fossero errori sulla variabile indipendente x .

D'altra parte è possibile notare che per $\sigma_{x_i} \rightarrow 0$ si ha $\delta_i \rightarrow \sigma_{y_i}$.

Riferendosi al caso semplice in cui $y = f(x, c_1, c_2, \dots, c_p)$ è una relazione lineare del tipo $y = A + Bx$ e assumendo che le variabili indipendenti x non siano affette da errore ($\sigma_{x_i} = 0$) l'equazione da minimizzare, per determinare la retta migliore, può essere riscritta come:

$$X^2 = \sum_{i=1}^N \frac{(y_i - A - Bx_i)^2}{\sigma_{x_i}^2}$$

Per determinare la coppia di parametri A e B ottimale occorre per prima cosa ricercare i punti in cui le derivate parziali di X^2 rispetto ad A e B si annullano:

$$\frac{\partial X^2}{\partial A} = -2 \sum_{i=1}^N \frac{(y_i - A - Bx_i)^2}{\sigma_i^2} = 0$$

$$\frac{\partial X^2}{\partial B} = -2 \sum_{i=1}^N \frac{(y_i - A - Bx_i)^2}{\sigma_i^2} x_i = 0$$

le equazioni (2.14), (2.15) possono essere riscritte come:

$$\begin{cases} \sum_{i=1}^N \frac{y_i}{\sigma_i^2} - A \sum_{i=1}^N \frac{1}{\sigma_i^2} - B \sum_{i=1}^N \frac{x_i}{\sigma_i^2} = 0 \\ \sum_{i=1}^N \frac{x_i y_i}{\sigma_i^2} - A \sum_{i=1}^N \frac{x_i}{\sigma_i^2} - B \sum_{i=1}^N \frac{x_i^2}{\sigma_i^2} = 0 \end{cases}$$

Il sistema ricavato è un sistema di due equazioni lineari nelle due incognite A e B.

Definendo :

- $S_x = \sum_{i=1}^N \frac{x_i}{\sigma_i^2}$;
- $S_y = \sum_{i=1}^N \frac{y_i}{\sigma_i^2}$;
- $S_{xx} = \sum_{i=1}^N \frac{x_i^2}{\sigma_i^2}$;
- $S_{xy} = \sum_{i=1}^N \frac{x_i y_i}{\sigma_i^2}$;
- $S = \sum_{i=1}^N \frac{1}{\sigma_i^2}$;

i coefficienti A e B sono dati da:

$$\begin{cases} A = \frac{S_{xx} S_y - S_x S_{xy}}{S S_{xx} - S_x^2} \\ B = \frac{S S_{xy} - S_x S_y}{S S_{xx} - S_x^2} \end{cases}$$

La retta risultante, che ha come intercetta sull'asse delle Y il valore A e come coefficiente angolare il valore B derivati a partire dai dati sperimentali o dalle simulazioni numeriche di x e y, prende il nome di retta dei minimi quadrati e passa per il punto di coordinate:

$$\begin{cases} \tilde{x} = \frac{\sum_{i=1}^N \frac{x_i}{\sigma_i^2}}{\sum_{i=1}^N \frac{1}{\sigma_i^2}} \\ \tilde{y} = \frac{\sum_{i=1}^N \frac{y_i}{\sigma_i^2}}{\sum_{i=1}^N \frac{1}{\sigma_i^2}} \end{cases}$$

Nel caso di valutazioni y_i tutte affette dalla stessa indeterminazione statistica σ_y , i valori \tilde{x} e \tilde{y} coincidono semplicemente con le medie aritmetiche delle due serie di misure.

In altre parole, la retta di regressione passa per il punto avente come coordinate i valori medi delle due serie di misure.

Introducendo ora anche l'errore statistico, σ_{x_i} sulle variabili indipendenti x_i è possibile esprimere l'errore efficace come:

$$\delta_i = \sqrt{(\sigma_{y_i})^2 + B^2(\sigma_{x_i})^2}$$

che sostituito nell'equazione (2.13) permette di ricavare la formulazione completa per l'equazione da minimizzare:

$$X^2 = \sum_{i=1}^N \frac{y_i - A - Bx_i^2}{\sigma_{y_i}^2 - B^2\sigma_{x_i}^2}$$

Poiché il parametro B compare stavolta anche al denominatore il calcolo delle costanti A e B diventa molto complicato [6], [7].

Per tale motivo, in questi casi, si usa per la derivata di $f(x, c_1, c_2, \dots, c_p)$, (ovvero per B se la funzione è lineare) un valore approssimato, per esempio derivato graficamente, oppure ricavato da una prima stima provvisoria dei parametri, effettuata senza tener conto delle σ_{x_i} .

Formulazione matriciale

Presi $n + 1$ dati all'interno di uno spazio di dimensione finita $m + 1$ (in generale $m \ll n$) e considerando $\phi_i(x)$ funzioni lineari indipendenti, è possibile approssimare una funzione generica tramite l'espressione:

$$f_m(x) = c_0\phi_0(x) + c_1\phi_1(x) + \dots + c_m\phi_m(x)$$

La condizione di migliore approssimazione ai minimi quadrati per $f_m(x)$ si esprime come [8]:

$$\min_{c \in \mathbb{R}^{m+1}} \sum_{i=0}^n \left(\sum_{k=0}^m c_k \phi_k(x_i) - y_i \right)^2 = \min_{c \in \mathbb{R}^{m+1}} \|Ac - y\|_2^2$$

dove:

$$A = \begin{pmatrix} \phi_0(x_0) & \phi_1(x_0) & \dots & \phi_m(x_0) \\ \phi_0(x_1) & \phi_1(x_1) & \dots & \phi_m(x_1) \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ \phi_0(x_n) & \phi_1(x_n) & \dots & \phi_m(x_n) \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{n+1 \times m+1}$$

$$y = (y_0, \dots, y_n)^T \in \mathbb{R}^{n+1}$$

$$c = (c_0, \dots, c_m)^T \in \mathbb{R}^{m+1}$$

Essendo $\|Ac - y\|_2^2$ una funzione quadratica convessa, il minimo assoluto corrisponde ai punti nei quali il gradiente della funzione si annulla:

$$\nabla \|Ac - y\|_2^2 = 0$$

Il vettore c che soddisfa la condizione di migliore approssimazione ai minimi quadrati si ricava quindi dalla relazione matriciale:

$$\nabla \|Ac - y\|_2^2 = A^T Ac - A^T y = 0$$

risolvendo il sistema di equazioni normali:

$$A^T A c - A^T y$$

dove:

$$A^T A = \begin{pmatrix} \sum_i 1 & \sum_i x_i & \dots & \sum_i x_i^m \\ \sum_i x_i & \sum_i x_i^2 & \dots & \sum_i x_i^{m+1} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ \sum_i x_i^m & \sum_i x_i^{m+1} & \dots & \sum_i x_i^{2m} \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{m+1 \times m+1}$$

$$A^T y = \begin{pmatrix} \sum_i y_i \\ \sum_i y_i x_i \\ \vdots \\ \sum_i y_i x_i^m \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{m+1}$$

Capitolo 2

Applicazioni POD per un profilo alare NACA0012

In questo capitolo verranno presentate una serie di applicazioni di tipo aeronautico del metodo POD incrementando ad ogni applicazione la difficoltà del problema che si vuole modellare e di conseguenza la complessità del modello surrogato da sviluppare. Qui il metodo POD viene applicato ad un caso bidimensionale, in particolare ad un profilo alare NACA0012.

Inizialmente verrà affrontato un caso monoparametro in cui si vogliono riprodurre le polari aerodinamiche del profilo NACA0012 tramite metodo POD. In seguito il numero di parametri verrà aumentato a due e verranno ricostruite sia le superfici di risposta relative ai coefficienti di portanza e resistenza sia la distribuzione dei coefficienti di pressione.

Per l'applicazione del metodo sono necessari due step. In primo luogo bisogna calcolare gli snapshots da utilizzare per l'interpolazione tramite simulazioni fluidodinamiche. Questa prima fase è la più costosa in termini di tempo e potenza di calcolo. In secondo luogo gli snapshots vengono interpolati per ottenere i risultati nelle condizioni desiderate. Dalle simulazioni CFD ciò che si ottiene sono i campi di pressione e sono dunque questi ad essere soggetti ad interpolazione. L'integrazione per ottenere i coefficienti di portanza e resistenza viene dunque fatta a posteriori.

Le applicazioni sono state sviluppate in collaborazione con Leonardo utilizzando:

- **UNS3D**: codice di proprietà di Leonardo per la generazione dei campi CFD.
- **Fortran**: come ambiente di sviluppo per l'implementazione del modello POD.
- **TecPlot**: in fase di post-processing per la visualizzazione di dati.

La griglia computazionale viene mantenuta costante per ogni simulazione. La griglia utilizzata è una griglia non strutturata c-grid quasi 2D. La mesh intorno al profilo è una sezione ottenuta a partire da una mesh volumetrica che ha un solo elemento in direzione y . La griglia che si ottiene è costituita da 11368 celle di forma prismica nella parte esterna

e 4846 celle di forma esaedrica intorno al profilo.

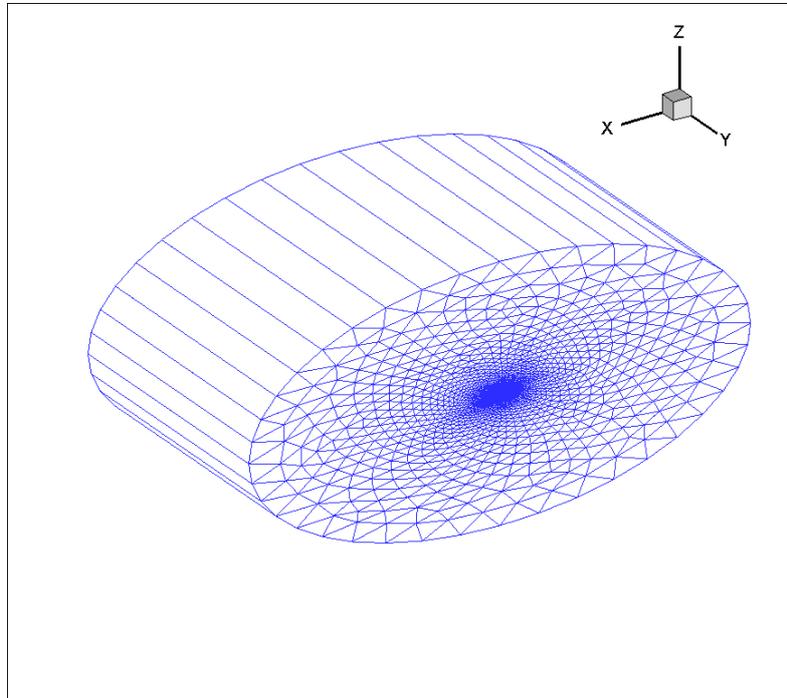


Figura 2.1: Mesh volumetrica di partenza

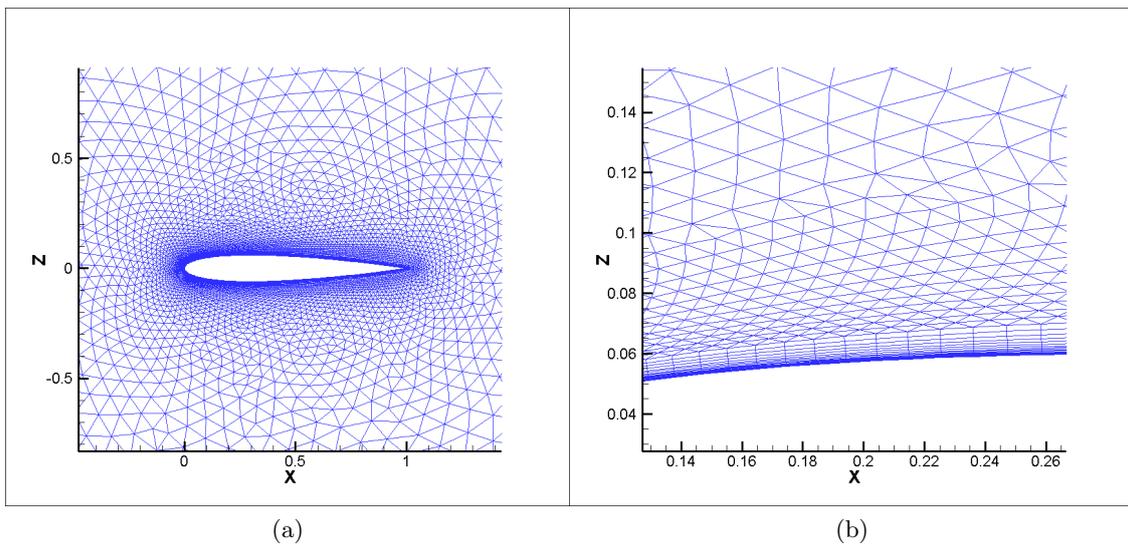


Figura 2.2: Mesh relativa al profilo alare NACA0012; (a) Profilo alare NACA0012 (b) zoom sul bordo d'attacco del profilo

2.1 Test profilo NACA0012 con spazio dei parametri 1D

Nella presente sezione si procederà alla validazione del metodo POD applicato alla ricostruzione delle polari aerodinamiche del profilo NACA0012, tramite integrazione dei campi di pressione ricostruiti.

Il test è effettuato su un profilo alare NACA0012 con corda unitaria, immerso in una corrente fluida a Mach fisso $M = 0.4$ e numero di Reynolds pari a $Re = 3 \cdot 10^6$.

Come già detto, il primo passo per l'utilizzo del metodo POD è la generazione del set di snapshots utilizzando il simulatore fluidodinamico UNS3D. In questo primo esempio lo spazio dei parametri utilizzato è mono-dimensionale. Il parametro usato come input per la generazione del modello surrogato è l'angolo di incidenza α .

In questa applicazione l'angolo di incidenza viene fatto variare in un intervallo:

$$0^\circ \leq \alpha \leq 11.5^\circ$$

Inizialmente si è partiti utilizzando per la ricostruzione della polare un set di snapshots abbastanza fitto composto da 11 snapshots al fine di validare il metodo. Una volta validato il metodo il set di snapshots utilizzati per l'interpolazione è stato sfoltito per valutare l'influenza di determinati snapshots sull'accuratezza del metodo con l'obiettivo di arrivare ad un set di snapshots minimale.

Di seguito viene riportato il set di snapshot di partenza:

n Snapshot	α	Cl	Cd_{inv}
1	0°	0.137E-03	0.155E-02
2	2°	0.237E+00	0.181E-02
3	4°	0.475E+00	0.263E-02
4	6°	0.709E+00	0.411E-02
5	8°	0.931E+00	0.641E-02
6	9°	0.103E+01	0.851E-02
7	9.5°	0.108E+01	0.109E-01
8	10°	0.110E+01	0.145E-01
9	10.5°	0.110E+01	0.197E-01
10	11°	0.110E+01	0.258E-01
11	11.5°	0.108E+01	0.328E-01

Tabella 2.1: Valori della polare aerodinamica del profilo NACA0012 ottenuta tramite il simulatore UNS3D

Lo studio viene effettuato sul coefficiente di portanza e sulla componente inviscido del coefficiente di resistenza, derivante dal contributo di resistenza di forma dovuto all'azione

della componente di pressione in direzione longitudinale sul profilo. Occorre anche ricordare che è proprio questa componente di resistenza a dare le maggiori difficoltà in fase progettuale.

Per ogni set di snapshots utilizzato si è quantificata la bontà dei risultati ottenuti riportando gli errori relativi percentuali commessi in fase di ricostruzione.

Gli errori relativi percentuali sono determinati utilizzando come soluzioni di riferimento i valori del Cl e del Cd_{inv} corrispondenti all'integrazione dei campi di pressione ottenuti dalle simulazioni effettuate tramite il solutore UNS3D sulle griglie ricostruite dalla POD, secondo la seguente formulazione:

$$ErrCl\% = \frac{Cl_{CFD} - Cl_{POD}}{Cl_{CFD}} \cdot 100$$

$$ErrCd_{inv}\% = \frac{Cd_{invCFD} - Cd_{invPOD}}{Cd_{invCFD}} \cdot 100$$

Il metodo di interpolazione utilizzato è il metodo di interpolazione B-spline.

Di seguito troviamo il confronto tra le curve $Cl - \alpha$ e $Cd - \alpha$ ottenute mediante simulazioni CFD e POD.

Come si può osservare, il metodo POD riesce a ricostruire in maniera fedele entrambe le polari aerodinamiche. Gli errori relativi percentuali non superano mai il 2% e per una gran parte dei casi i risultati coincidono con una precisione di 3 cifre significative.

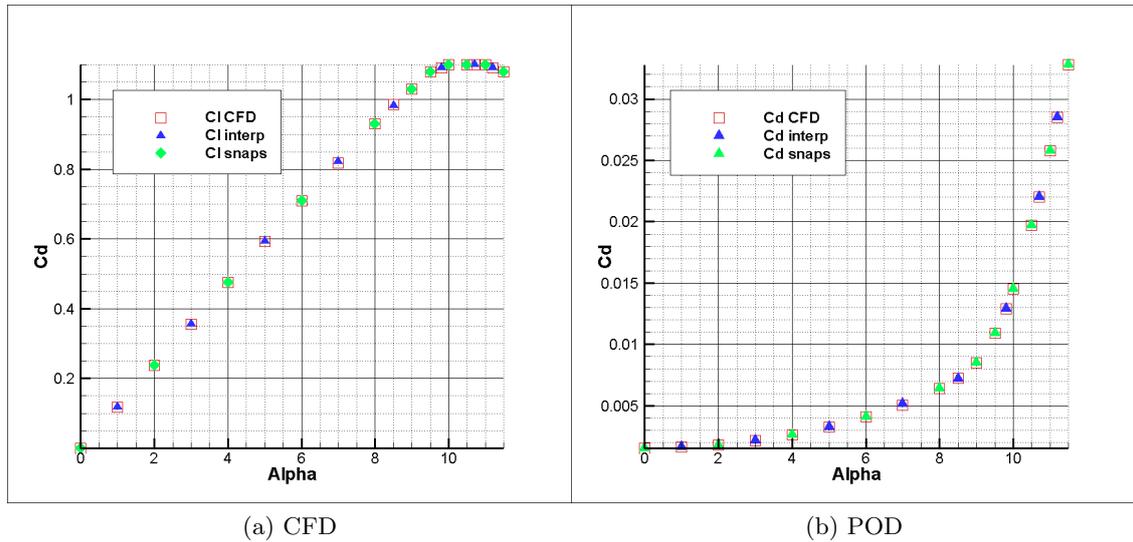


Figura 2.3: Coefficienti di portanza e resistenza interpolati tramite metodo B-spline con 11 snapshots

Ricostruzione 11 snapshots (0,2,4,6,8,9,9.5,10,10.5,11,11.5)						
Interpolazione dei coefficienti POD B-Spline						
α	Cl	Cd_{inv}	Cl_{CFD}	Cd_{invCFD}	$Err\%Cl$	$Err\%Cd_{inv}$
1°	0.118E+00	0.163E-02	0.118E+00	0.162E-02	0	0.62
3°	0.356E+00	0.215E-02	0.356E+00	0.215E-02	0	0
5°	0.593E+00	0.326E-02	0.593E+00	0.328E-02	0	0.61
7°	0.822E+00	0.517E-02	0.818E+00	0.507E-02	0.49	1.97
8.5°	0.983E+00	0.718E-02	0.985E+00	0.725E-02	0.20	0.97
9.8°	0.109E+01	0.129E-01	0.109E+01	0.129E-01	0	0
10.7°	0.110E+01	0.220E-01	0.110E+01	0.220E-01	0	0
11.2°	0.109E+01	0.285E-01	0.109E+01	0.285E-01	0	0

Tabella 2.2: Analisi degli errori relativi alle ricostruzioni POD per la polare del profilo NACA0012 con 11 snapshots

Si vuole valutare ora l'influenza di alcuni snapshots sull'accuratezza del metodo. La zona di maggior interesse è la zona non lineare della curva $Cl - \alpha$ dunque in questa prima fase si lascia invariato il set di snapshots relativo alla zona lineare di questa curva e si valuta l'influenza degli snapshots del tratto non lineare. Più avanti si effettuerà anche uno sfoltimento nella zona lineare della curva. Togliamo lo snapshot relativo all'angolo di incidenza $\alpha = 10^\circ$ e ricostruiamo la nuova polare interpolata utilizzando un set di 10 snapshots.

L'eliminazione di questo snapshot non modifica i risultati per quanto riguarda la polare relativa al coefficiente di portanza. Gli errori relativi percentuali del coefficiente di resistenza aumentano leggermente restando comunque estremamente bassi.

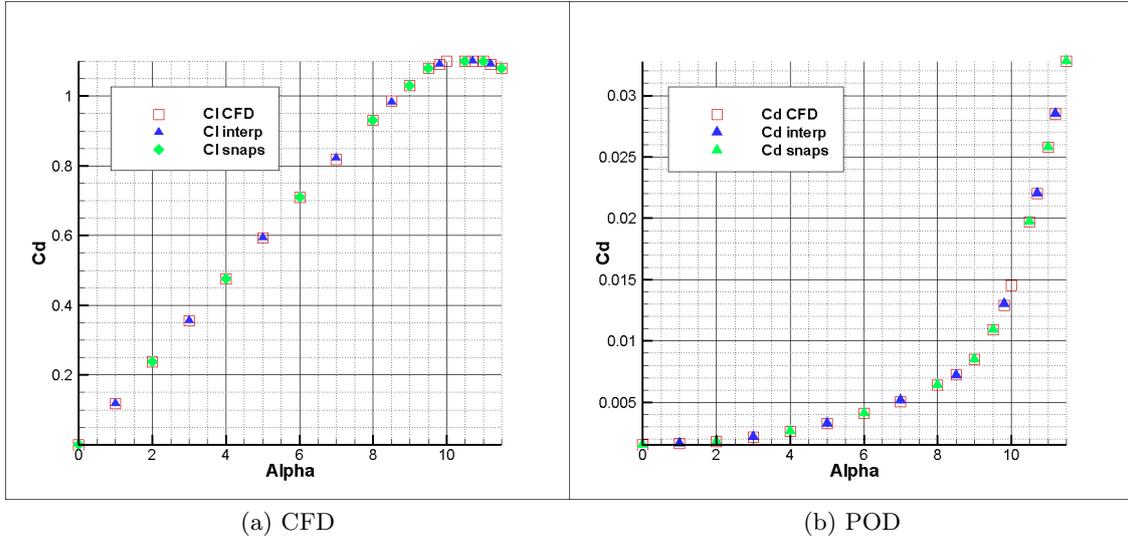


Figura 2.4: Coefficienti di portanza e resistenza interpolati tramite metodo B-spline con 10 snapshots

Ricostruzione 10 snapshots (0,2,4,6,8,9,9.5,10.5,11,11.5)						
Interpolazione dei coefficienti POD B-Spline						
α	Cl	Cd_{inv}	Cl_{CFD}	Cd_{invCFD}	$Err\%Cl$	$Err\%Cd_{inv}$
1°	0.118E+00	0.163E-02	0.118E+00	0.162E-02	0	0.62
3°	0.356E+00	0.215E-02	0.356E+00	0.215E-02	0	0
5°	0.593E+00	0.326E-02	0.593E+00	0.328E-02	0	0.61
7°	0.822E+00	0.517E-02	0.818E+00	0.507E-02	0.49	1.97
8.5°	0.983E+00	0.719E-02	0.985E+00	0.725E-02	0.20	0.83
9.8°	0.109E+01	0.130E-01	0.109E+01	0.129E-01	0	0.76
10.7°	0.110E+01	0.220E-01	0.110E+01	0.220E-01	0	0
11.2°	0.109E+01	0.285E-01	0.109E+01	0.285E-01	0	0

Tabella 2.3: Analisi degli errori relativi alle ricostruzioni POD per la polare del profilo NACA0012 con 10 snapshots

Togliamo ora anche lo snapshot relativo all'angolo di incidenza $\alpha = 10.5^\circ$ e ricostruiamo la nuova polare interpolata utilizzando un set di 9 snapshots. L'eliminazione di questo snapshot ha un'influenza sul tratto non lineare della curva $Cl - \alpha$ oltre che sul coefficiente di resistenza. Gli errori rimangono comunque inferiori al 2%.

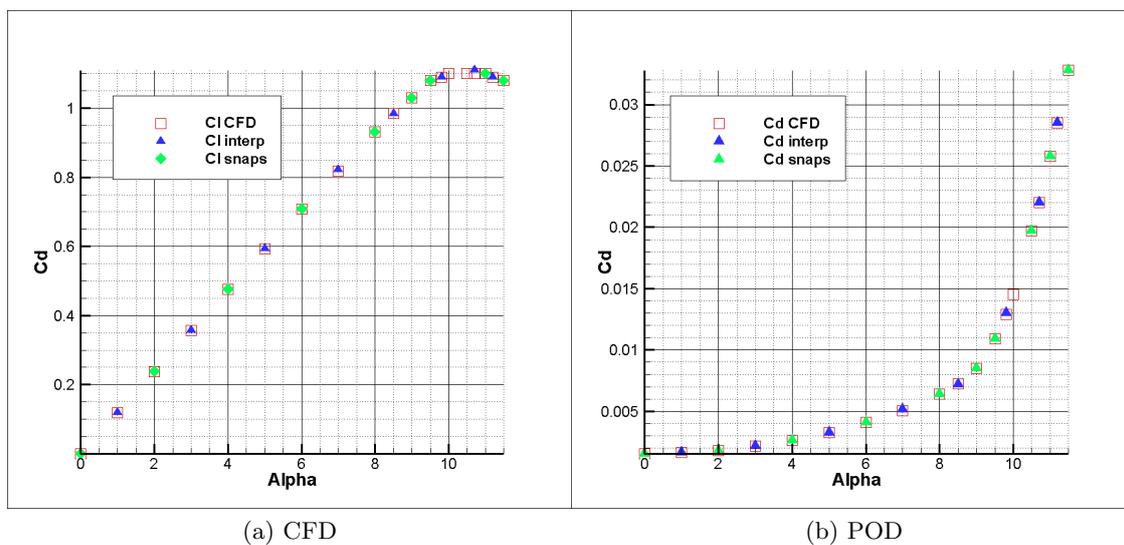


Figura 2.5: Coefficienti di portanza e resistenza interpolati tramite metodo B-spline con 9 snapshots

Ricostruzione 9 snapshots (0,2,4,6,8,9,9.5,11,11.5)						
Interpolazione dei coefficienti POD B-Spline						
α	Cl	Cd_{inv}	Cl_{CFD}	Cd_{invCFD}	$Err\%Cl$	$Err\%Cd_{inv}$
1°	0.118E+00	0.163E-02	0.118E+00	0.162E-02	0	0.62
3°	0.356E+00	0.215E-02	0.356E+00	0.215E-02	0	0
5°	0.593E+00	0.326E-02	0.593E+00	0.328E-02	0	0.61
7°	0.822E+00	0.517E-02	0.818E+00	0.507E-02	0.49	1.97
8.5°	0.983E+00	0.719E-02	0.985E+00	0.725E-02	0.2	0.83
9.8°	0.109E+01	0.130E-01	0.109E+01	0.129E-01	0	0.76
10.7°	0.111E+01	0.221E-01	0.110E+01	0.220E-01	0.91	0.45
11.2°	0.109E+01	0.285E-01	0.109E+01	0.285E-01	0	0

Tabella 2.4: Analisi degli errori relativi alle ricostruzioni POD per la polare del profilo NACA0012 con 9 snapshots

Infine togliamo anche lo snapshot relativo all'angolo di incidenza $\alpha = 11^\circ$ lasciando dunque solo i valori estremi della zona non lineare della curva $Cl - \alpha$. Il set di snapshots utilizzato è dunque di 8.

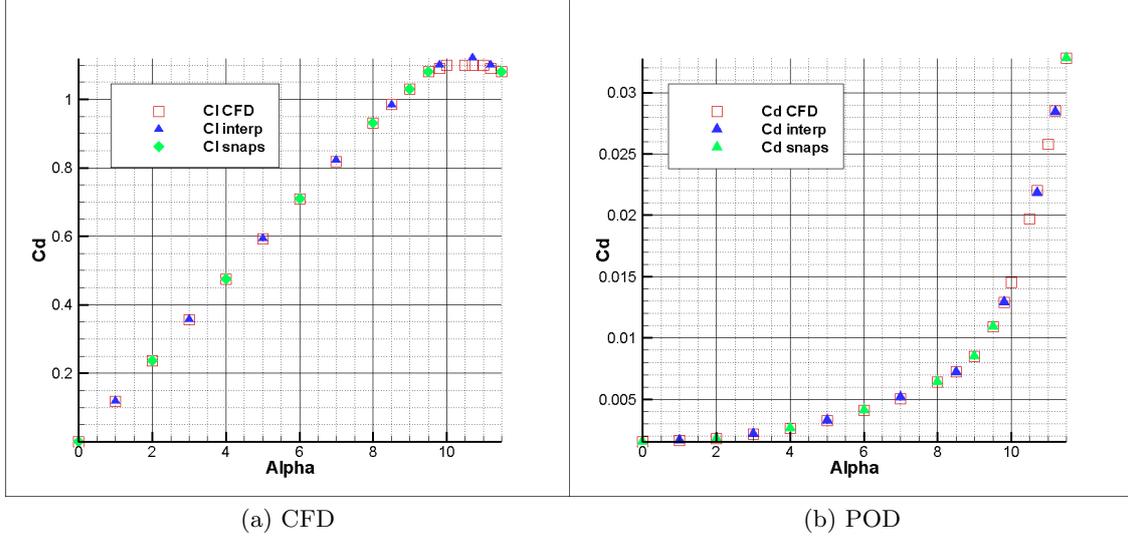


Figura 2.6: Coefficienti di portanza e resistenza interpolati tramite metodo B-spline con 8 snapshots

Ricostruzione 8 snapshots (0,2,4,6,8,9,9.5,11.5)						
Interpolazione dei coefficienti POD B-Spline						
α	Cl	Cd_{inv}	Cl_{CFD}	Cd_{invCFD}	$Err\%Cl$	$Err\%Cd_{inv}$
1°	0.118E+00	0.163E-02	0.118E+00	0.162E-02	0	0.62
3°	0.356E+00	0.215E-02	0.356E+00	0.215E-02	0	0
5°	0.593E+00	0.325E-02	0.593E+00	0.328E-02	0	0.91
7°	0.821E+00	0.518E-02	0.818E+00	0.507E-02	0.37	2.17
8.5°	0.984E+00	0.717E-02	0.985E+00	0.725E-02	0.10	1.10
9.8°	0.110E+01	0.129E-01	0.109E+01	0.129E-01	0.92	0
10.7°	0.112E+01	0.218E-01	0.110E+01	0.220E-01	1.82	0.91
11.2°	0.110E+01	0.284E-01	0.109E+01	0.285E-01	0.92	0.35

Tabella 2.5: Analisi degli errori relativi alle ricostruzioni POD per la polare del profilo NACA0012 con 8 snapshots

Si vuole ora sfolire anche la zona lineare della curva $Cl - \alpha$. Di seguito viene riportata la polare ottenuta utilizzando un set di 5 snapshots: 3 nella zona lineare e 2 alle estremità della zona non lineare.

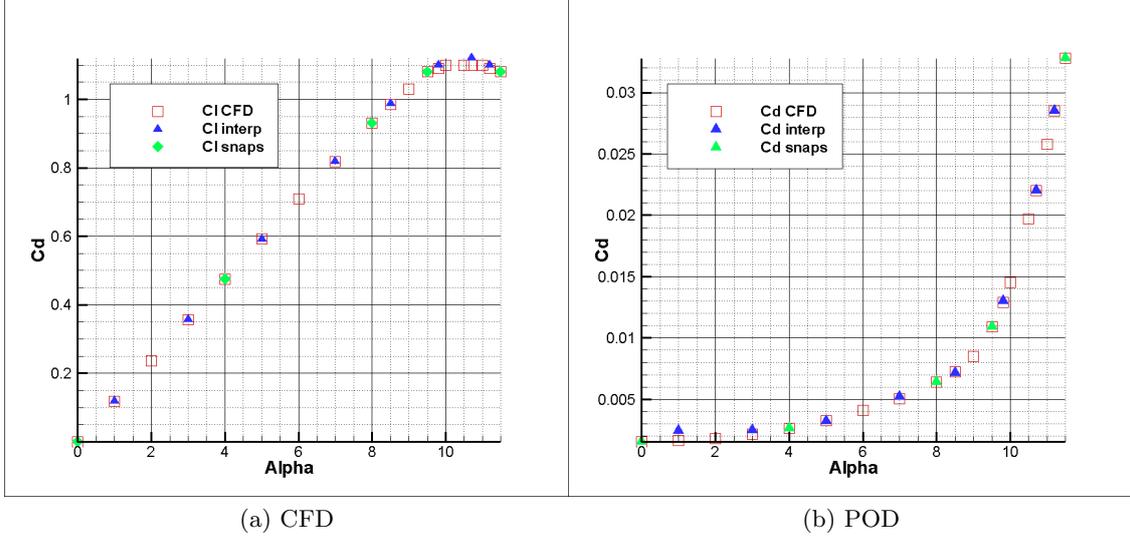


Figura 2.7: Coefficienti di portanza e resistenza interpolati tramite metodo B-spline con 5 snapshots

Ricostruzione 5 snapshots (0,4,8,9.5,11.5)						
Interpolazione dei coefficienti POD B-Spline						
α	Cl	Cd_{inv}	Cl_{CFD}	Cd_{invCFD}	$Err\%Cl$	$Err\%Cd_{inv}$
1°	0.117E+00	0.243E-02	0.118E+00	0.162E-02	0.85	50
3°	0.356E+00	0.250E-02	0.356E+00	0.215E-02	0	16.28
5°	0.591E+00	0.320E-02	0.593E+00	0.328E-02	0.34	2.44
7°	0.818E+00	0.521E-02	0.818E+00	0.507E-02	0	2.76
8.5°	0.986E+00	0.713E-02	0.985E+00	0.725E-02	0.10	1.66
9.8°	0.110E+01	0.130E-01	0.109E+01	0.129E-01	0.92	0.78
10.7°	0.112E+01	0.220E-01	0.110E+01	0.220E-01	1.82	0
11.2°	0.110E+01	0.285E-01	0.109E+01	0.285E-01	0.92	0

Tabella 2.6: Analisi degli errori relativi alle ricostruzioni POD per la polare del profilo NACA0012 con 5 snapshots

Dall'analisi degli errori percentuali calcolati si evince che le ricostruzioni del Cl , a differenza del Cd_{inv} , presentano errori molto minori. Per valutazioni preliminari un'errore percentuale inferiore al 5% è accettabile. Se fissiamo questo valore come soglia massima dell'errore percentuale accettato notiamo che è possibile ricostruire la curva $Cl - \alpha$ anche con un set di 5 snapshots.

D'altro canto lo sfoltimento del set di snapshots utilizzati nel tratto lineare della curva $Cl - \alpha$ comporta un notevole aumento dell'errore percentuale nell'estimazione del coefficiente di resistenza. Gli errori prodotti sono troppo elevati per essere accettabili e si ha dunque bisogno di un set di snapshots più fitto per una precisa ricostruzione. Inoltre i valori dei coefficienti di resistenza sono di due ordini di grandezza inferiori rispetto ai coefficienti di portanza dunque una minima variazione causa un aumento notevole dell'errore percentuale.

E' inoltre importante ricordare che le ricostruzioni vengono effettuate sul campo delle pressioni che non presenta una dipendenza lineare in funzione dell'incidenza aerodinamica α .

2.2 Test profilo NACA0012 con spazio dei parametri 2D

Visti i buoni risultati ottenuti nell'applicazione del modello POD per il caso mono-parametrico, in questa fase ci si pone come obiettivo di testare la validità del metodo per il caso bi-parametrico. Il profilo usato per il test è sempre un profilo NACA0012 ma per questo caso di studio all'angolo di incidenza aerodinamica α è stato aggiunto come parametro il numero di Mach.

Ci si pone come obiettivo la generazione delle superfici di risposta relative al coefficiente di portanza e alla componente inviscido del coefficiente di resistenza. In seguito si confronteranno i campi di pressione ottenuti grazie al metodo POD e alle simulazioni fluidodinamiche.

2.2.1 Generazione delle superfici di risposta

In questa sezione ci si è posti come obiettivo di riprodurre tramite l'applicazione del metodo POD le superfici di risposta relative ai coefficienti di portanza e alla componente inviscido del coefficiente di resistenza.

Si è partiti con un set di snapshots composto da 54 snapshots in cui i due parametri assumono valori equi-spaziati compresi nell'intervallo:

$$0 \leq \alpha \leq 8$$

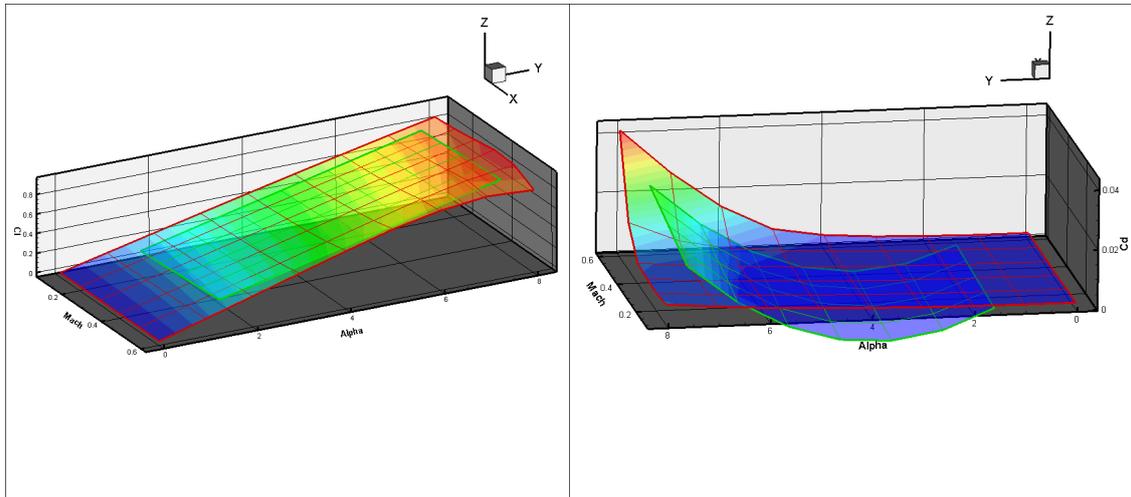
$$0.1 \leq M \leq 0.6$$

In particolare il parametro α viene fatto variare con un passo di 1° mentre il Mach con un passo di 0.1.

In questa prima fase confrontiamo 4 diversi tipi di interpolazione per constatare quale si addice maggiormente al nostro scopo. I metodi di interpolazione confrontati sono:

- Interpolazione least square di ordine 1 monoparametro
- Interpolazione least square di ordine 2 multiparametro
- Interpolazione multiparametro RBF con base multiquadric
- Interpolazione multiparametro RBF con base multiquadric inversa

Nelle figure seguenti gli snapshots utilizzati per l'interpolazione sono rappresentati dalle intersezioni delle linee rosse mentre le soluzioni calcolate tramite metodo POD sono le intersezioni delle linee verdi. E' importante notare che le superfici risultanti sono ricostruite in un secondo momento su tecplot a partire dalle soluzioni calcolate nei punti.



(a) Coefficiente di portanza

(b) Coefficiente di resistenza

Figura 2.8: Superfici di risposta relative ai coefficienti di portanza e resistenza ottenute tramite interpolazione least square di ordine 1 monoparametro con 54 snapshots

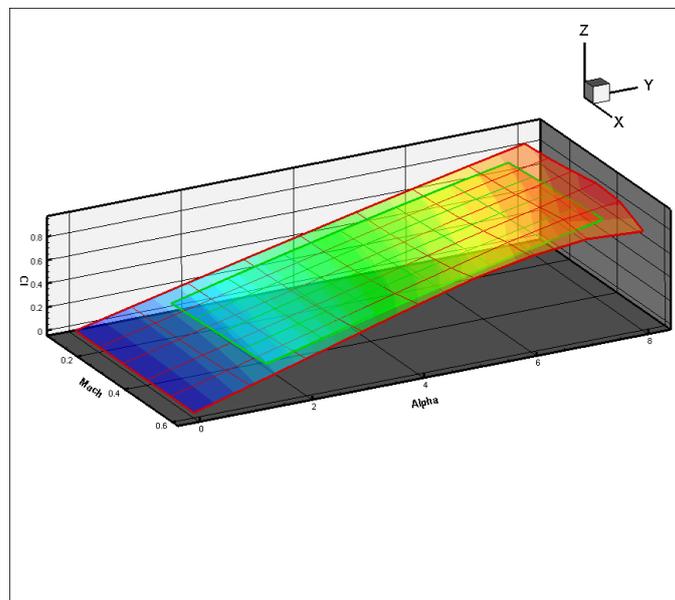


Figura 2.9: Superficie di risposta relativa ai coefficienti di portanza ottenuta tramite interpolazione least square di ordine 2 multiparametro con 54 snapshots

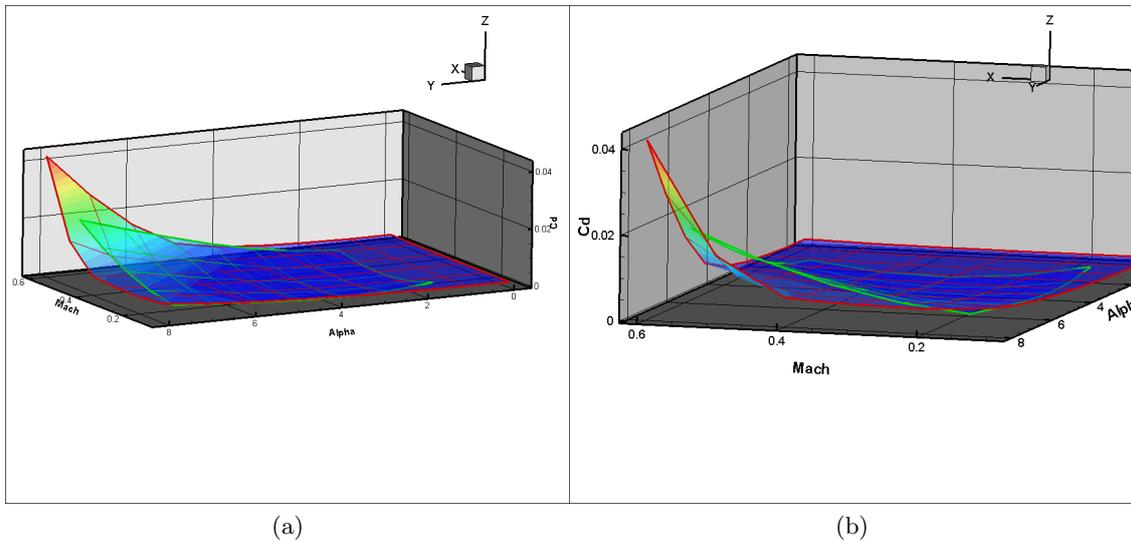


Figura 2.10: Superficie di risposta relative ai coefficienti di resistenza ottenuta tramite interpolazione least square di ordine 2 multiparametro con 54 snapshots

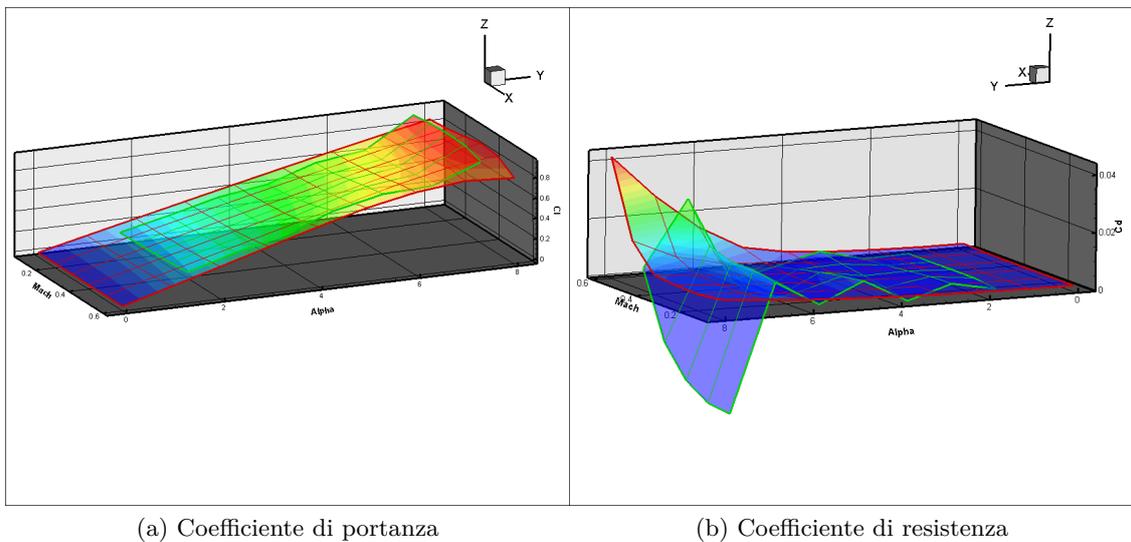
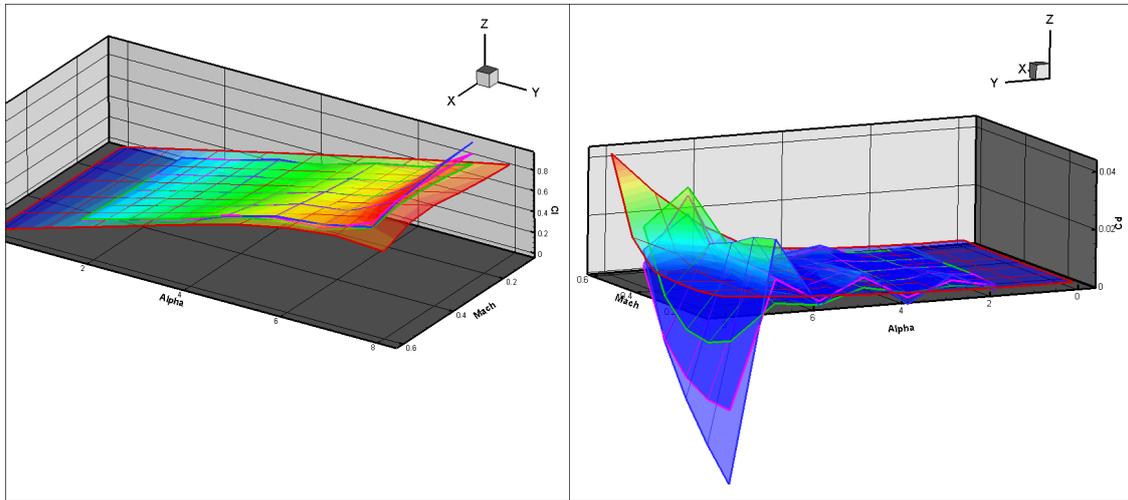


Figura 2.11: Superfici di risposta relative ai coefficienti di portanza e resistenza ottenute tramite interpolazione multiparametro RBF con base multiquadric con 54 snapshots

I metodi di interpolazione least square sia monoparametro che multiparametro generano una superficie di risposta che non prende in considerazione le variazioni locali. Questi metodi di interpolazione sono dunque poco sensibili all'aumento del numero di snapshots o all'infittimento locale di questi. Il metodo di interpolazione RBF è invece molto sensibile a questa variazione. Inoltre è possibile agire anche sul parametro di forma per ottenere

una superficie che meglio approssima la superficie calcolata mediante simulazioni CFD. Nel codice utilizzato per l'interpolazione si fa uso dell'inverso del parametro di forma che in questa trattazione chiameremo *delta*: $d = \frac{1}{\varepsilon}$.

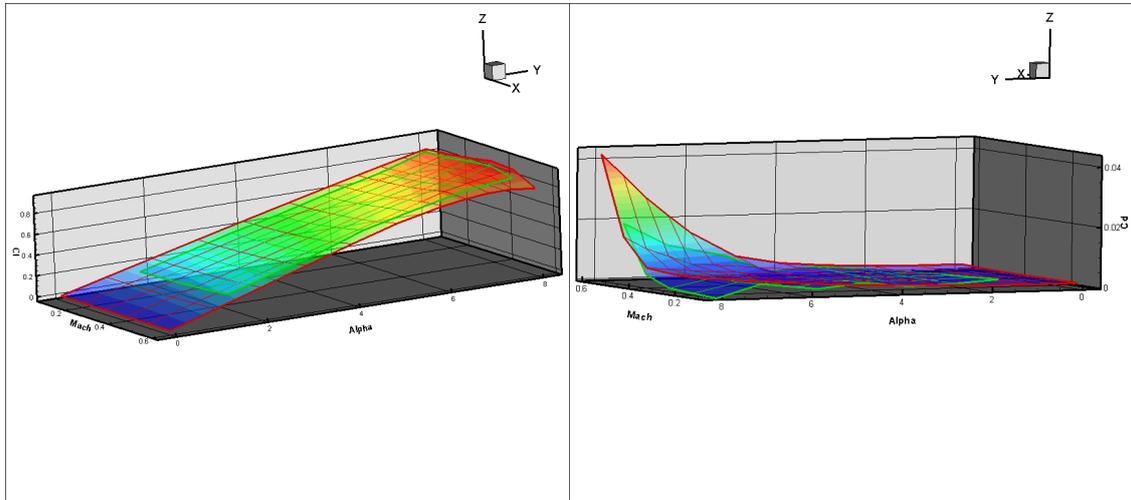


(a) Coefficiente di portanza

(b) Coefficiente di resistenza

Figura 2.12: Confronto tra superfici di risposta al variare del parametro delta: Bordo blu: $d=1.7$ Bordo magenta: $d=1.4$ Bordo verde: $d=1$

Si può notare che le oscillazioni si riducono al decrescere del parametro delta. Tuttavia al di sotto di $d = 0.9$ non si riscontrano miglioramenti. Bisogna dunque agire sul numero di snapshots utilizzati per l'interpolazione. Le oscillazioni maggiori sono presenti ad alte incidenze. Infittiamo quindi questa zona aggiungendo i due angoli di incidenza $\alpha = 6.5^\circ$ e $\alpha = 7.5^\circ$. Il parametro delta utilizzato da ora in avanti sarà $d = 0.9$.

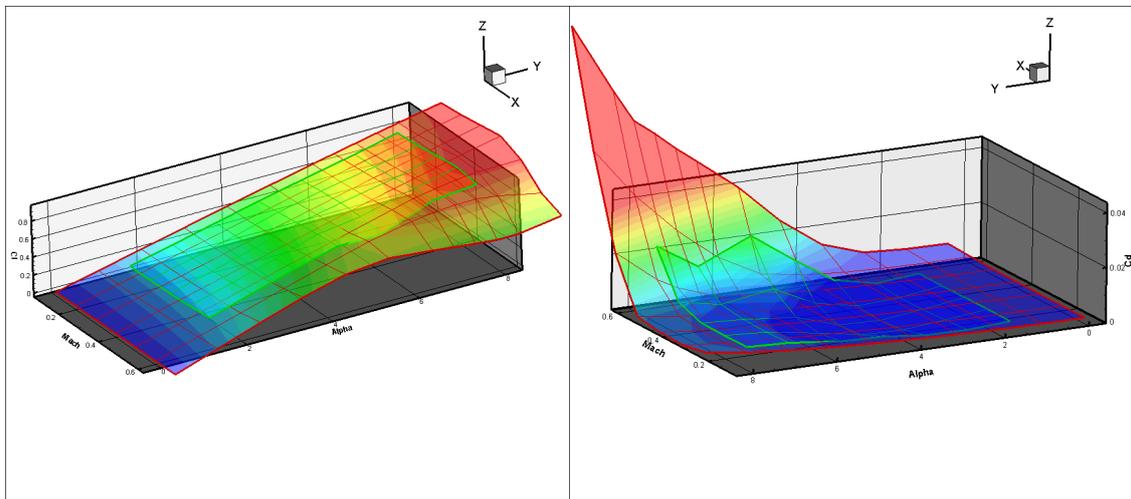


(a) Coefficiente di portanza

(b) Coefficiente di resistenza

Figura 2.13: Superfici di risposta relative ai coefficienti di portanza e resistenza ottenute tramite interpolazione multiparametro RBF con base multiquadric con 66 snapshots

Grazie all'infittimento degli snapshots utilizzati la superficie di risposta risulta più aderente alla superficie ottenuta mediante le soluzioni CFD. Tuttavia ai bordi della superficie sono presenti oscillazioni non trascurabili. Infittiamo gli snapshots aggiungendo i valori $\alpha = 9^\circ$ e $M = 0.7$.



(a) Coefficiente di portanza

(b) Coefficiente di resistenza

Figura 2.14: Superfici di risposta relative ai coefficienti di portanza e resistenza ottenute tramite interpolazione multiparametro RBF con base multiquadric con 84 snapshots

Mentre l'aggiunta degli snapshots relativi all'inserimento dell'angolo di incidenza $\alpha = 9^\circ$

apporta un miglioramento nella superficie di risposta, l'aggiunta di $M = 0.7$ la peggiora. Riduciamo il numero di snapshots a 72.

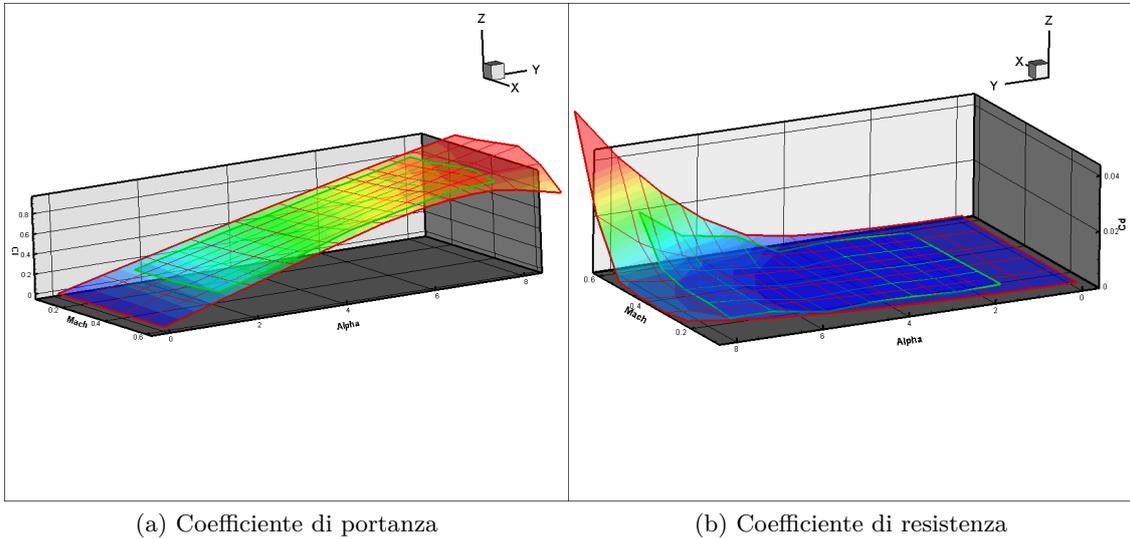


Figura 2.15: Superfici di risposta relative ai coefficienti di portanza e resistenza ottenute tramite interpolazione multiparametro RBF con base multiquadric con 72 snapshots

Per ridurre le oscillazioni sui bordi relativi a $M = 0.1$ e $M = 0.6$ aggiungiamo i due valori di Mach: $M = 0.125$ e $M = 0.575$.

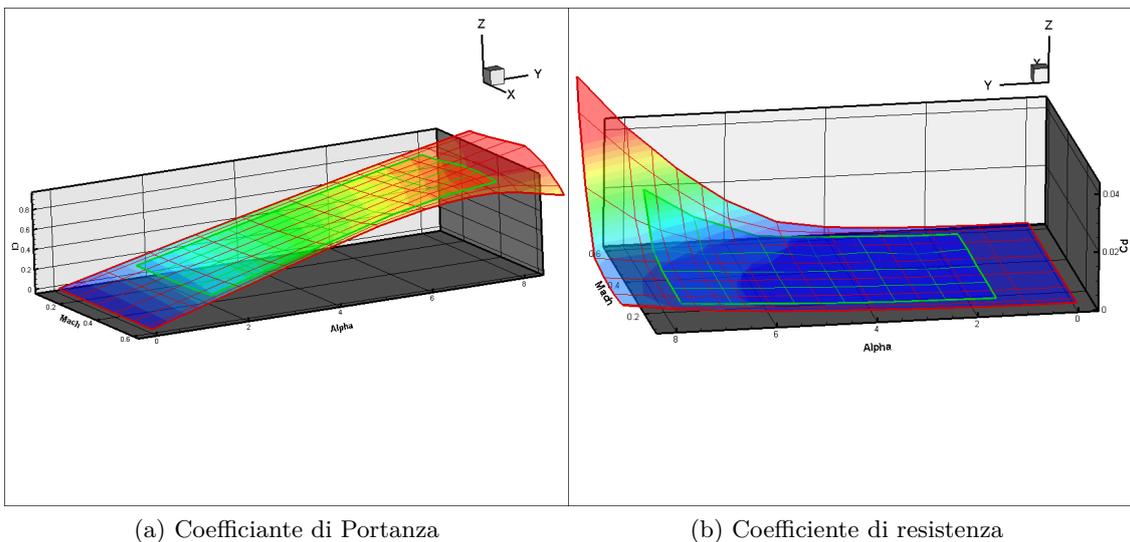
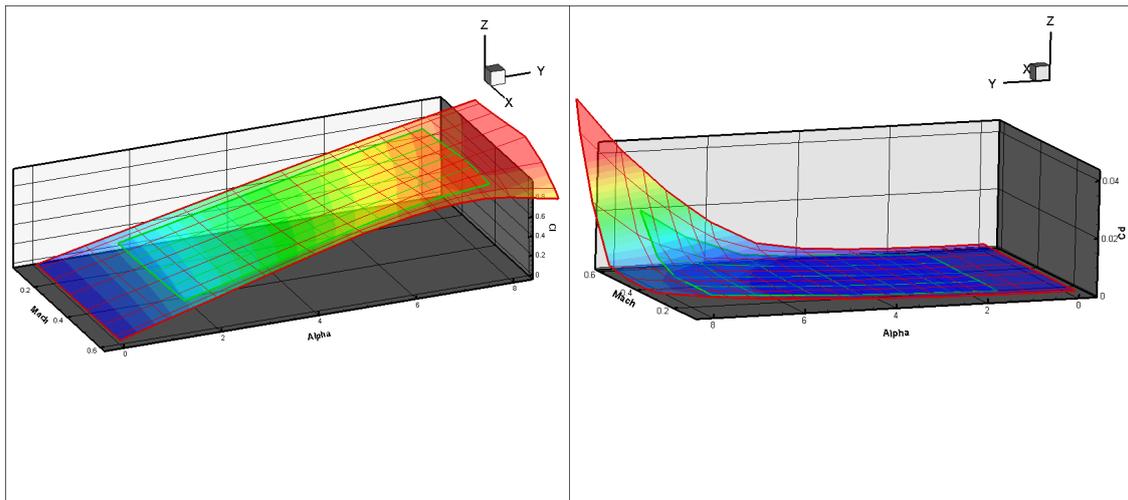


Figura 2.16: Superfici di risposta relative ai coefficienti di portanza e resistenza ottenute tramite interpolazione multiparametro RBF con base multiquadric con 96 snapshots

La superficie di risposta così ottenuta riproduce in maniera fedele la superficie relativa alle soluzioni CFD. Tuttavia la distribuzione dei coefficienti di pressione, come vedremo nel prossimo paragrafo, risulta oscillante. Confrontiamo le superfici di risposta e i grafici relativi ai coefficienti di pressione con i rispettivi risultati ottenuti utilizzando il metodo di interpolazione RBF con base multiquadrica inversa con lo stesso set di snapshots. Per questo tipo di interpolazione il parametro delta che permette di ottenere superfici più aderenti è $d = 0.9$



(a) Coefficiente di Portanza

(b) Coefficiente di resistenza

Figura 2.17: Superfici di risposta relative ai coefficienti di portanza e resistenza ottenute tramite interpolazione multiparametro RBF con base multiquadrica inversa con 96 snapshots

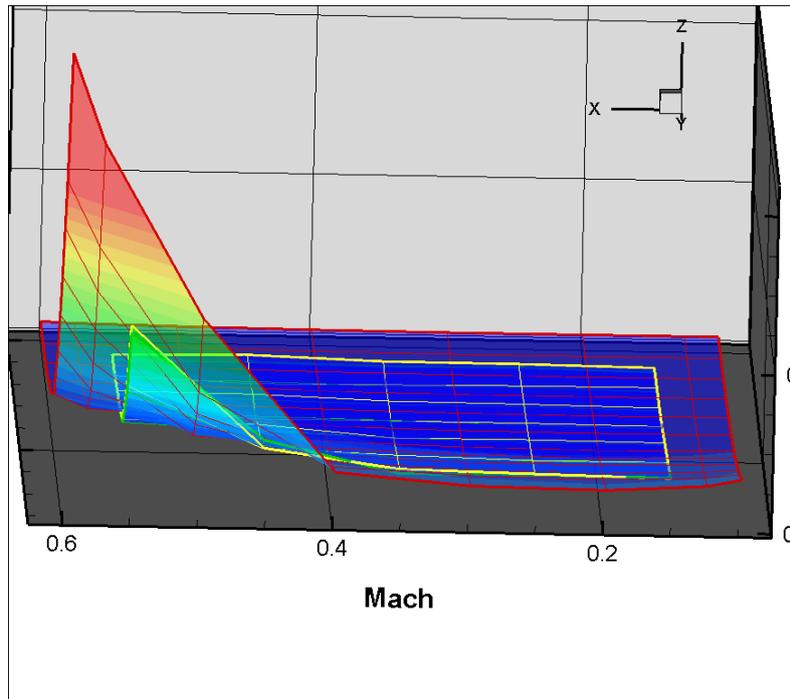


Figura 2.18: Confronto delle superfici di risposta relative ai coefficienti di resistenza ottenute tramite interpolazione multiparametro RBF con base multiquadric (linea gialla) e multiquadric inversa (linea verde) con 96 snapshots

Le superfici di risposta così ottenute approssimano bene le superfici CFD. I risultati sono anche più precisi rispetto a quelli ottenuti con interpolazione RBF con base multiquadric e la distribuzione dei coefficienti di pressione, come si vede nel prossimo paragrafo, risulta notevolmente meno oscillante rispetto al caso precedente.

Per valutare con maggior precisione il livello di accuratezza del metodo, calcoliamo gli errori relativi percentuali per Mach $M = 0.45$ e $M = 0.25$. E' stato scelto di calcolare gli errori per $M = 0.45$ in quanto è in corrispondenza di tale valore che la superficie calcolata con il metodo POD si discosta maggiormente dalla reale permettendo così l'estimazione dell'errore relativo percentuale massimo.

α	Cl	Cd_{inv}	Cl_{CFD}	Cd_{invCFD}	$Err\%Cl$	$Err\%Cd_{inv}$
1.5°	0.186E+00	0.149E-02	0.183E+00	0.176E-02	1.64	15.34
2.5°	0.305E+00	0.180E-02	0.305E+00	0.205E-02	0	12.20
3.5°	0.428E+00	0.228E-02	0.427E+00	0.250E-02	0.23	8.80
4.5°	0.550E+00	0.295E-02	0.549E+00	0.312E-02	0.18	5.45
5.5°	0.670E+00	0.392E-02	0.670E+00	0.393E-02	0	0.25
6.75°	0.813E+00	0.552E-02	0.812E+00	0.541E-02	0.12	2.03
7.75°	0.905E+00	0.893E-02	0.916E+00	0.802E-02	1.20	11.35

Tabella 2.7: Analisi degli errori relativi alle ricostruzioni POD per mach $M = 0.45$

α	Cl	Cd_{inv}	Cl_{CFD}	Cd_{invCFD}	$Err\%Cl$	$Err\%Cd_{inv}$
1.5°	0.170E+00	0.142E-02	0.168E+00	0.163E-02	1.19	12.88
2.5°	0.280E+00	0.167E-02	0.280E+00	0.185E-02	0	9.73
3.5°	0.393E+00	0.202E-02	0.393E+00	0.218E-02	0	7.34
4.5°	0.504E+00	0.246E-02	0.504E+00	0.264E-02	0	6.82
5.5°	0.614E+00	0.313E-02	0.614E+00	0.325E-02	0	3.69
6.75°	0.748E+00	0.414E-02	0.750E+00	0.420E-02	0.27	1.43
7.75°	0.850E+00	0.517E-02	0.850E+00	0.516E-02	0	0.19

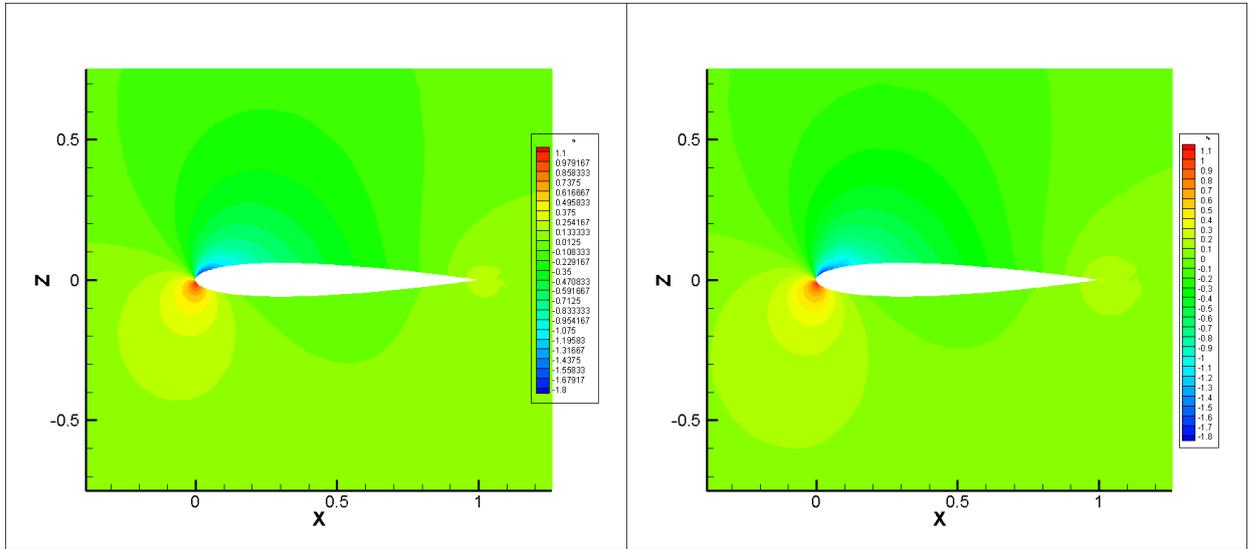
Tabella 2.8: Analisi degli errori relativi alle ricostruzioni POD per mach $M = 0.25$

Come nel caso monparametrico l'errore relativo percentuale è notevolmente maggiore per il coefficiente di resistenza. Tuttavia questo è maggiore a bassa incidenza e non supera il 16% dunque il metodo è efficace e produce buoni risultati. La zona di maggior interesse è quella di alta incidenza ed è dunque questa che si vuole ricostruire con maggiore accuratezza. Una riduzione del parametro delta permette di ottenere errori relativi percentuali ancora inferiori per quanto riguarda l'alta incidenza e l'annullamento delle oscillazioni nei grafici relativi alla distribuzione del coefficiente di pressione. Ciò causa però un aumento notevole dell'errore a bassa incidenza. Il valore delta scelto rappresenta dunque un compromesso tra una buona approssimazione dei coefficienti di portanza e resistenza per tutti gli angoli di incidenza e oscillazioni non eccessive nei grafici del coefficiente di pressione.

2.2.2 Confronto dei campi di pressione e Mach intorno al profilo

Dopo aver validato la bontà del metodo nel riprodurre le superfici relative agli andamenti dei coefficienti Cl e Cd in funzione dell'angolo di incidenza aerodinamico e del numero di Mach, confrontiamo i campi relativi al coefficiente di pressione e al Mach intorno al profilo ottenuti tramite simulazioni CFD e metodo POD con interpolazione con base multiquadrica inversa che aveva dato i risultati migliori nel caso precedente. Per alleggerire la trattazione

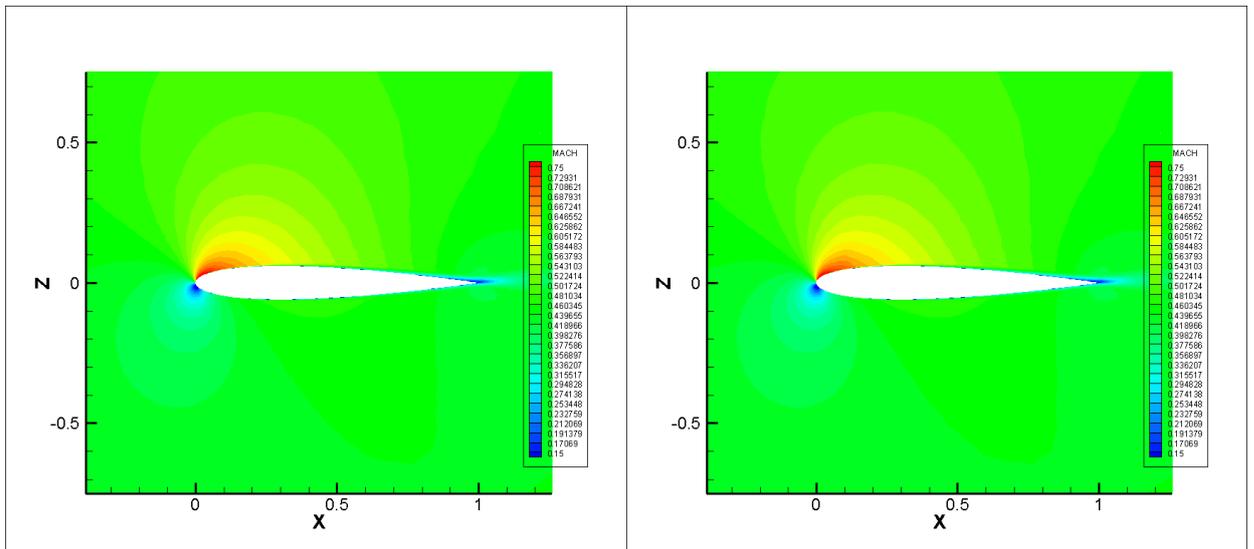
non verranno confrontati i campi di pressione e velocità che presentano oscillazioni non trascurabili ottenuti con interpolazione multiquadrica diretta. Anche in questo caso i confronti sono fatti a Mach $M = 0.45$.



(a) CFD

(b) POD

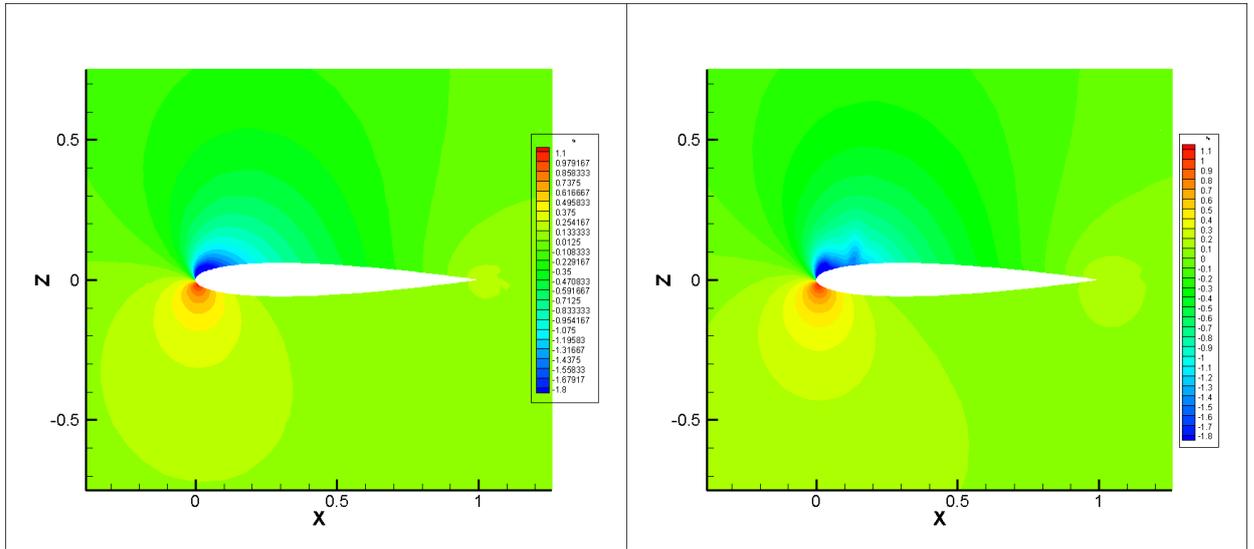
Figura 2.19: Coefficienti di pressione per Alpha: 4.5 e Mach: 0.45



(a) CFD

(b) POD

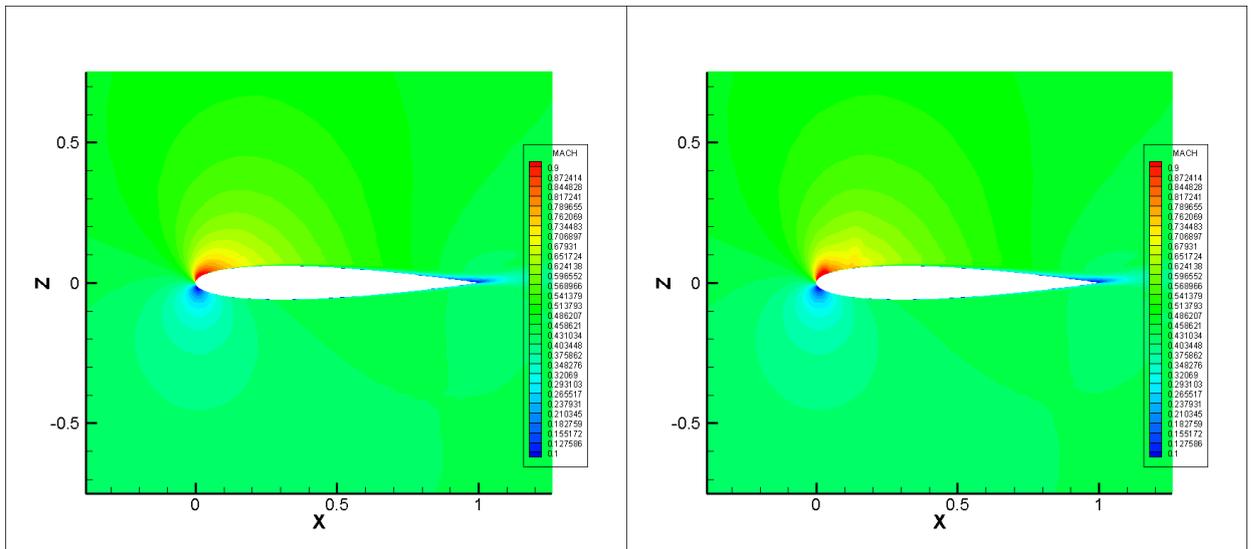
Figura 2.20: Distribuzione del Mach per Alpha: 4.5 e Mach: 0.45



(a) CFD

(b) POD

Figura 2.21: Coefficienti di pressione per Alpha: 6.75 e Mach: 0.45



(a) CFD

(b) POD

Figura 2.22: Distribuzione del Mach per Alpha: 6.75 e Mach: 0.45

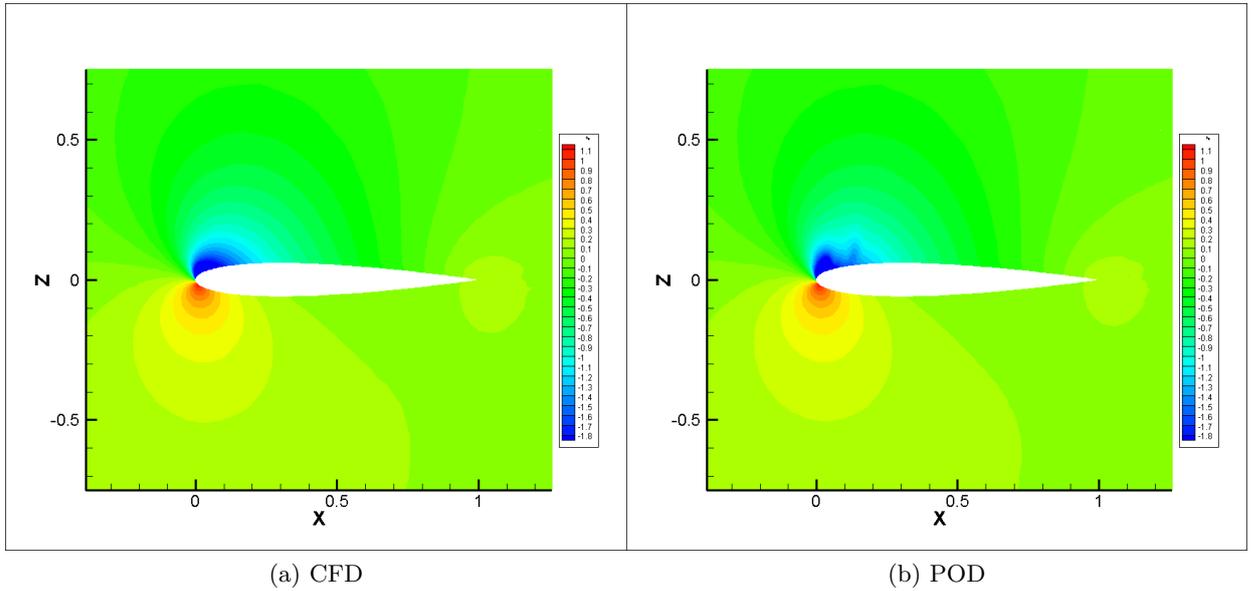


Figura 2.23: Coefficienti di pressione per Alpha: 7.75 e Mach: 0.45

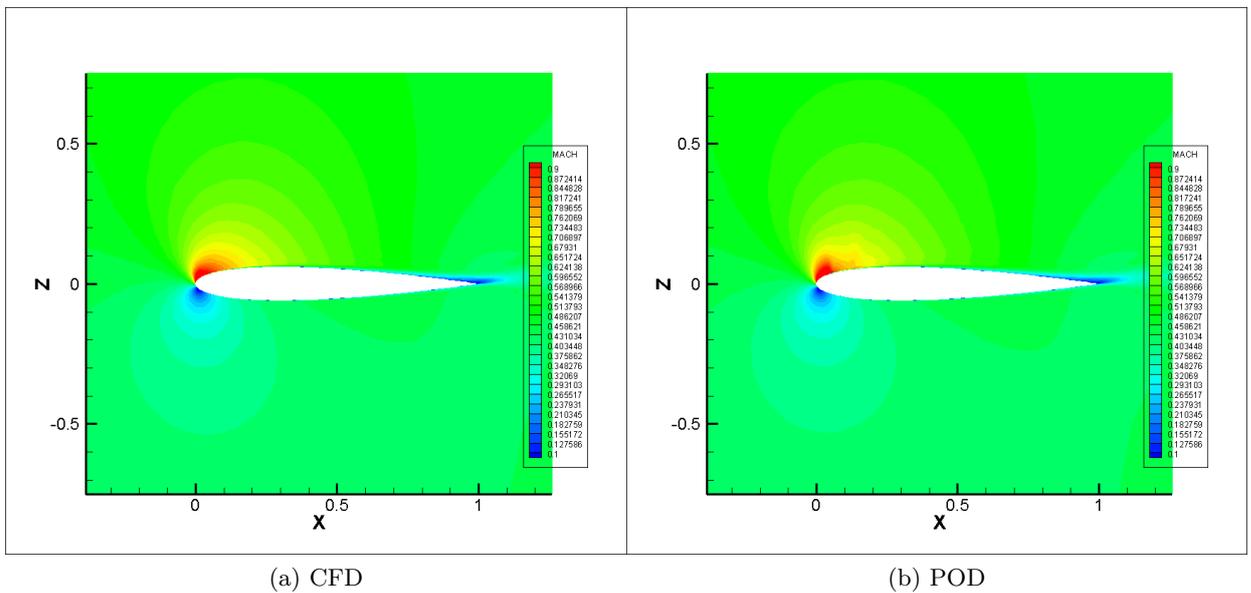


Figura 2.24: Distribuzione del Mach per Alpha: 7.75 e Mach: 0.45

Possiamo notare che a bassa incidenza i campi di pressione e velocità vengono riprodotti in maniera estremamente precisa mentre ad alta incidenza, in corrispondenza della zona del bordo d'attacco, i campi ottenuti con metodo POD presentano delle oscillazioni non presenti nei campi ottenuti con simulazioni CFD.

Confrontiamo infine la distribuzione del coefficiente di pressione intorno al profilo sempre per numero di Mach pari a 0.45. Anche in queste immagini si notano, nelle curve delle ricostruzioni POD, delle oscillazioni sul bordo d'attacco in corrispondenza di angoli di incidenza elevati.

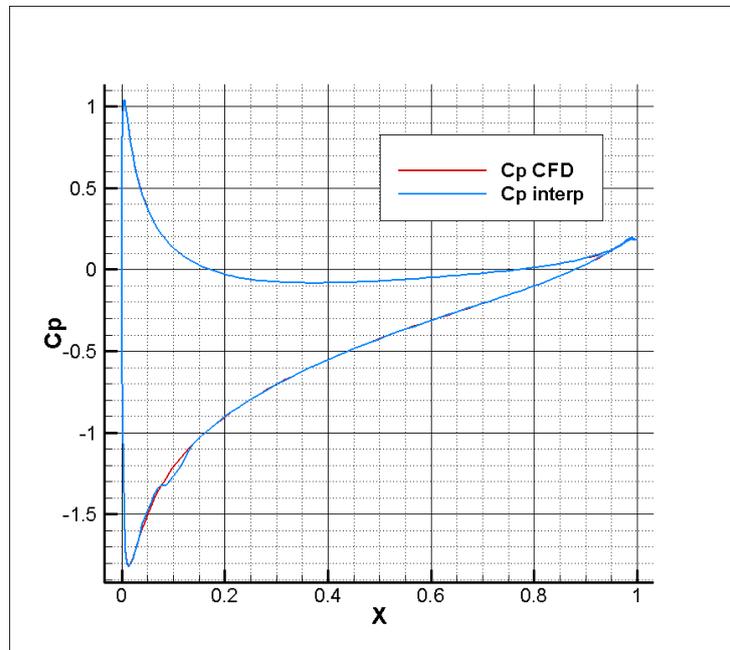


Figura 2.25: Confronto coefficienti di pressione ottenuti tramite simulazione CFD e POD per $\alpha = 4.5$ e $M = 0.45$

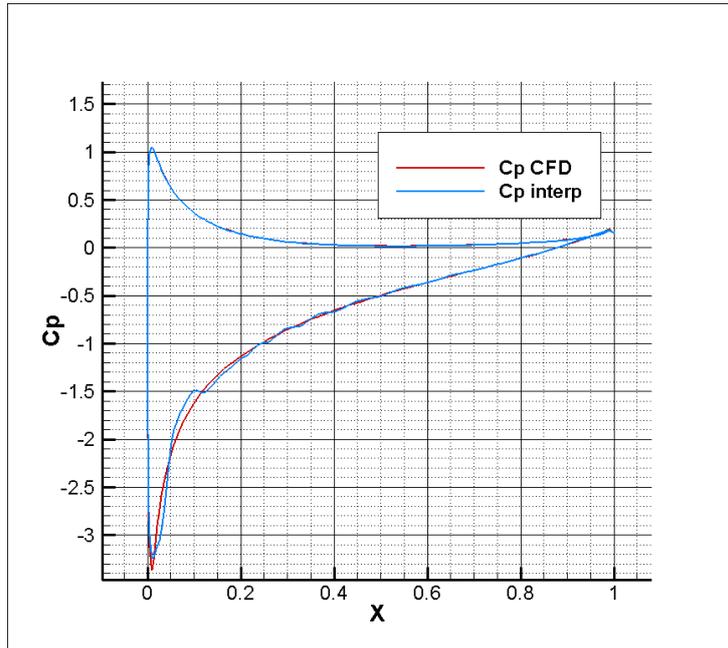


Figura 2.26: Confronto coefficienti di pressione ottenuti tramite simulazione CFD e POD per $\alpha = 6.75$ e $M = 0.45$

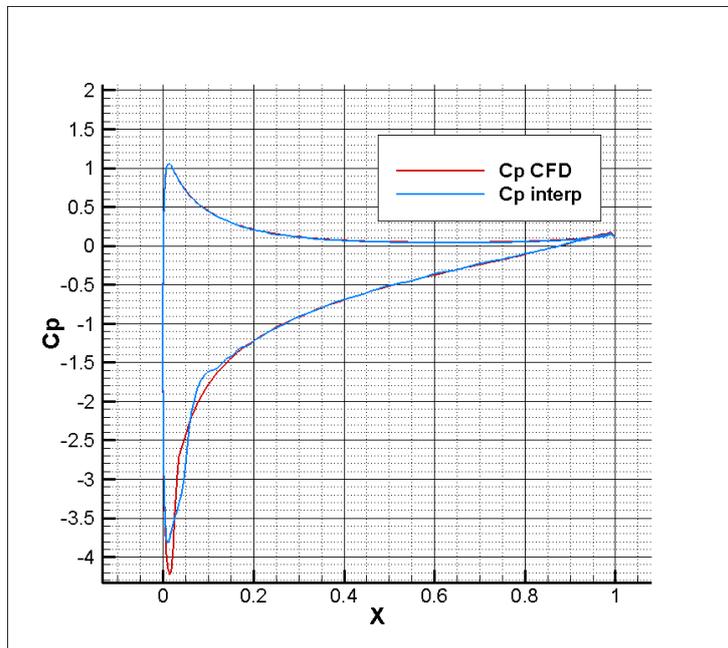


Figura 2.27: Confronto coefficienti di pressione ottenuti tramite simulazione CFD e POD per $\alpha = 7.75$ e $M = 0.45$

Capitolo 3

Applicazioni POD per un'ala completa di velivolo transonico

In questo capitolo verrà presentata un'altra applicazione di tipo aeronautico del metodo POD. Esso verrà validato su un modello più complesso di un'ala completa tridimensionale di velivolo transonico. Per queste applicazioni il calcolo degli snapshots richiede un tempo notevolmente superiore rispetto ai casi del capitolo precedente. Per una questione di tempo verranno dunque accettati risultati con errori maggiori. Per questo studio l'ala verrà supposta rigida e non verranno dunque prese in considerazione le deformazioni della struttura dovute ai carichi aerodinamici. Una volta validato il modello POD per l'ala rigida esso verrà adottato, nel capitolo successivo, per un'ala deformabile elasticamente sotto i carichi a cui essa è sottoposta.

Oltre ad aver aumentato la complessità del modello utilizzando un'ala completa tridimensionale, in questo capitolo il campo studiato è transonico. Si vuole dunque riprodurre con la POD anche la formazione dell'urto sul dorso dell'ala. Verranno studiate condizioni complesse che si trovano al di fuori dell'involucro di volo, verranno infatti presi in considerazione numeri di Mach fino a $M = 0.77$ e angoli di incidenza fino a $\alpha = 6.5^\circ$.

Le applicazioni sono state sviluppate in collaborazione con Leonardo utilizzando:

- **UNS3D**: codice di proprietà di Leonardo per la generazione dei campi CFD.
- **Fortran**: come ambiente di sviluppo per l'implementazione del modello POD.
- **TecPlot**: in fase di post-processing per la visualizzazione di dati.

La quota di volo è mantenuta fissa a 7000 m.

L'ala utilizzata per il test è un'ala generica per velivolo da trasporto civile transonico. L'ala in esame ha una lunghezza di 12.413 m.

La griglia di calcolo è una griglia non strutturata ed è mantenuta costante durante l'applicazione del metodo. Essa è costituita da 586455 celle di forma tetraedrica nella parte esterna e 545809 celle di forma prismica negli strati prossimi al bordo d'attacco.

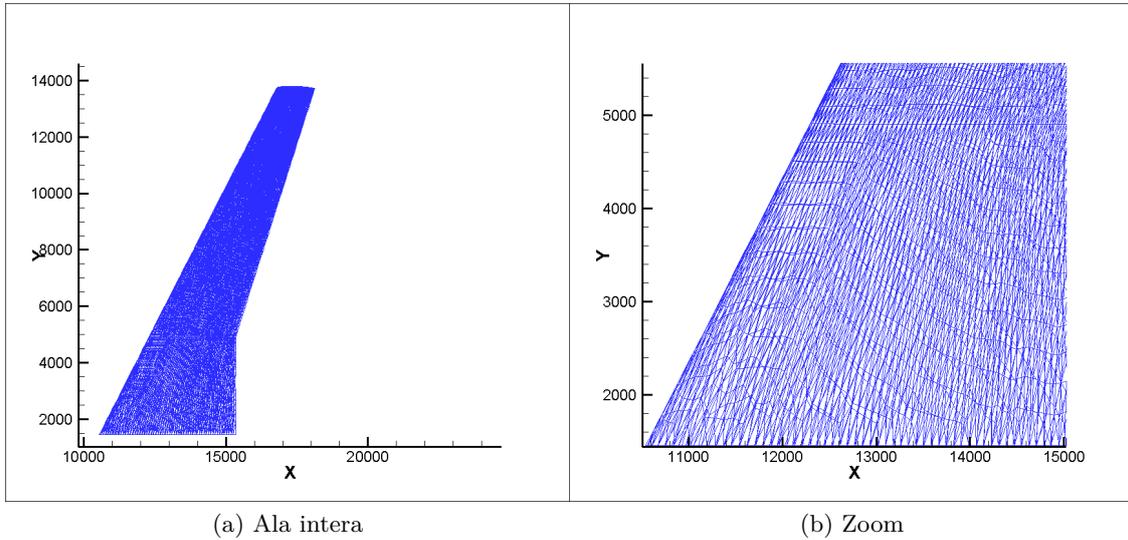


Figura 3.1: Mesh relativa all'ala in pianta

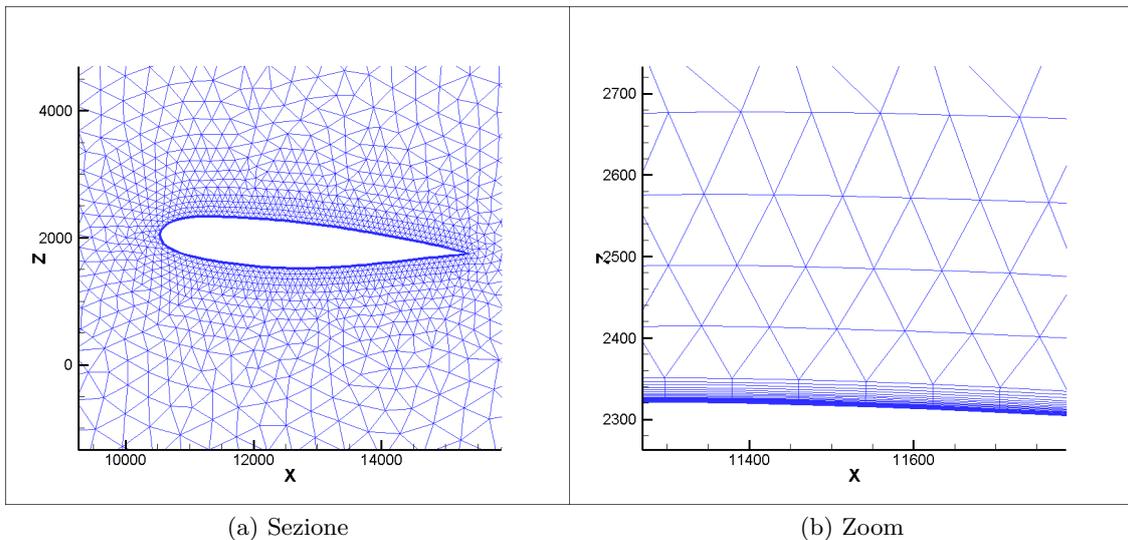


Figura 3.2: Mesh relativa ad una sezione alare

L'obiettivo è di ricostruire le superfici di risposta relative al coefficiente di portanza e alla componente inviscido del coefficiente di resistenza. Si vuole inoltre valutare come il metodo riproduce i campi di pressione e mach intorno all'ala. Lo spazio dei parametri è bidimensionale: angolo di incidenza aerodinamica α e numero di Mach. Il numero di Reynolds è supposto costante al variare del numero di Mach.

Questo studio serve a validare un set di snapshots minimale che soddisfi gli obiettivi imposti per poi utilizzare lo stesso in campo aeroelastico nel capitolo successivo. Per tale scopo il set di snapshots utilizzato non può essere ampio come nel caso di studio del capitolo precedente (profilo NACA0012 con due parametri) in quanto le simulazioni in campo aeroelastico sono notevolmente costose in termini di tempo e potenza di calcolo.

3.1 Generazione delle superfici di risposta

Cominciamo lo studio con la riproduzione delle superfici relative al coefficiente di portanza e alla componente in viscido del coefficiente di resistenza tramite POD. L'interpolazione è eseguita con metodo RBF con base multiquadrica inversa, metodo con cui si erano ottenuti i risultati migliori nel capitolo precedente. Il parametro di forma delta utilizzato è pari a $d = 0.9$.

Per le visualizzazioni si utilizzano superfici ottenute a partire da un numero di risultati CFD più ampio rispetto al numero di snapshots utilizzati per l'interpolazione al fine di confrontare in maniera più precisa i risultati.

Si è partiti con un set di 35 snapshots composto da:

$$\alpha = \{-2; 0; 2; 4; 5; 6; 6.5\}$$

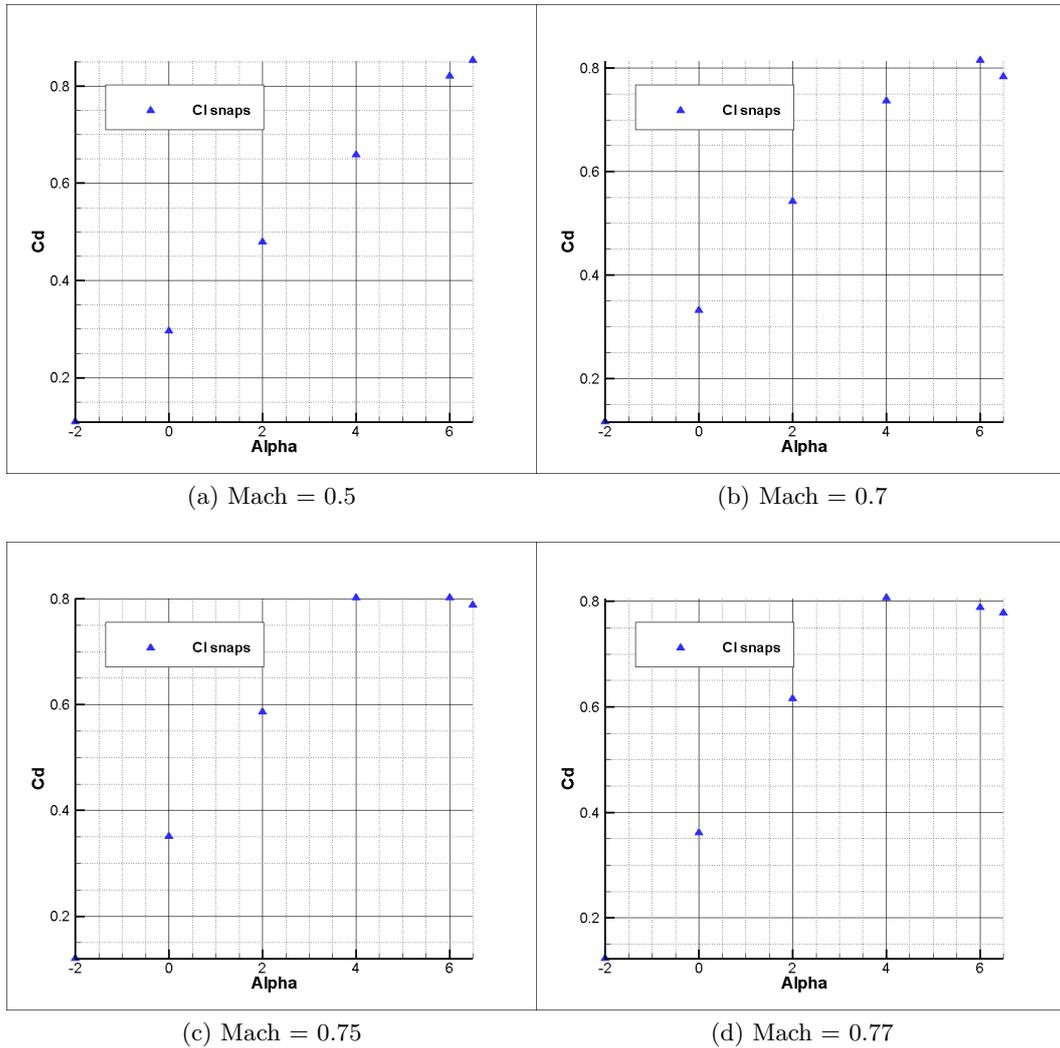
$$M = \{0.3; 0.5; 0.7; 0.75; 0.77\}$$

L'interpolazione viene effettuata nei punti:

$$\alpha = \{-1; 1; 3; 5.5; 6.3\}$$

$$M = \{0.4; 0.6; 0.73; 0.76\}$$

Per raggiungere la convergenza nella zona separata è necessario effettuare le simulazioni fluidodinamiche con parametri differenti. In particolare si aumenta il coefficiente di dissipazione e si prende in considerazione la formazione di un urto. Per individuare la zona di flusso separato plottiamo le polari relative ai numeri di mach utilizzati per il calcolo degli snapshots e agli angoli di incidenza superiori all'angolo di incidenza relativo al Cl_{max} saranno applicati i parametri del caso.



(c) Mach = 0.75

(d) Mach = 0.77

Figura 3.3: Polari aerodinamiche

Nelle immagini che seguono le intersezioni della griglia di colore rosso rappresentano i valori calcolati mediante simulazioni CFD mentre le intersezioni della griglia di colore verde i valore ottenuti con interpolazione POD.

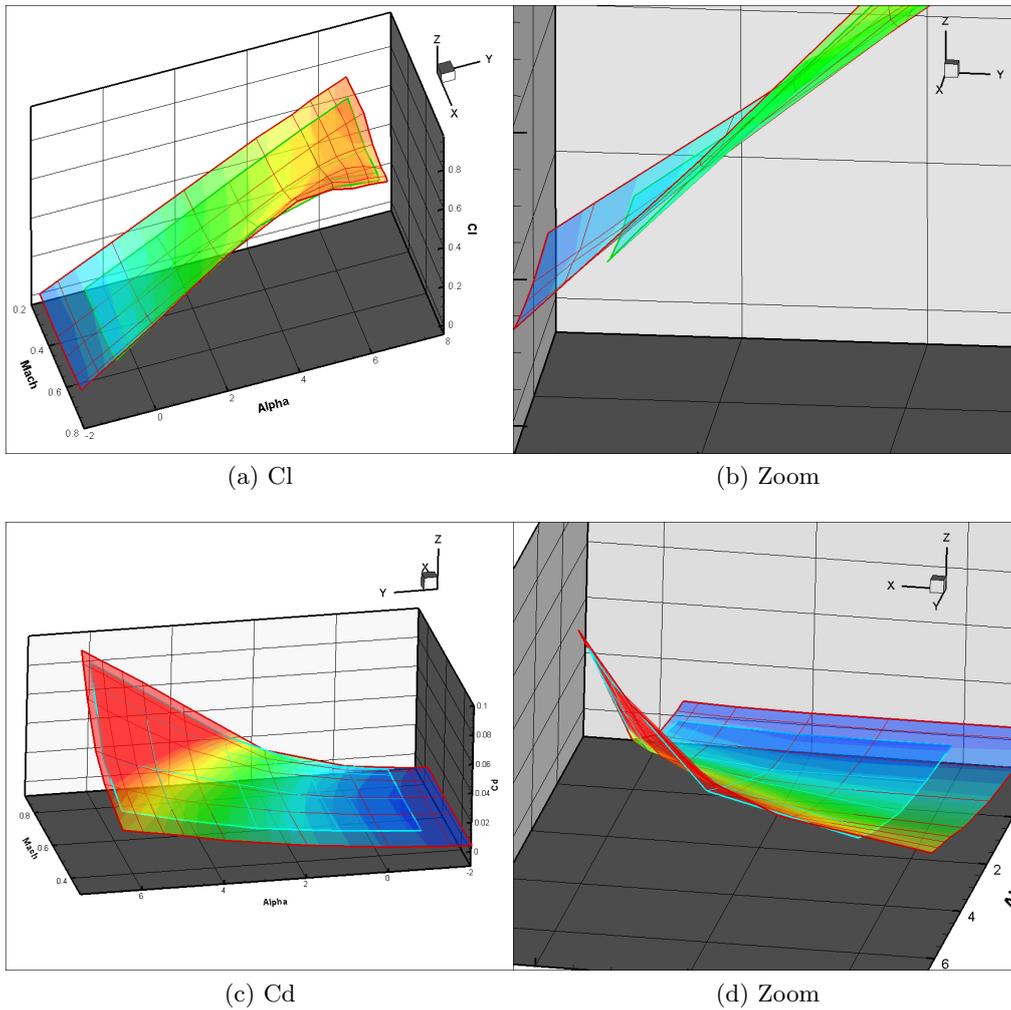


Figura 3.4: Superfici di risposta relative ai coefficienti di portanza e resistenza per un set di 35 snapshots

Le superfici interpolate risultano abbastanza aderenti a quelle reali tranne per angoli di bassa incidenza. Infitiamo il set di snapshots aggiungendo il valore $\alpha = -1.5$. Il numero di snapshots utilizzato diventa dunque pari a 40.

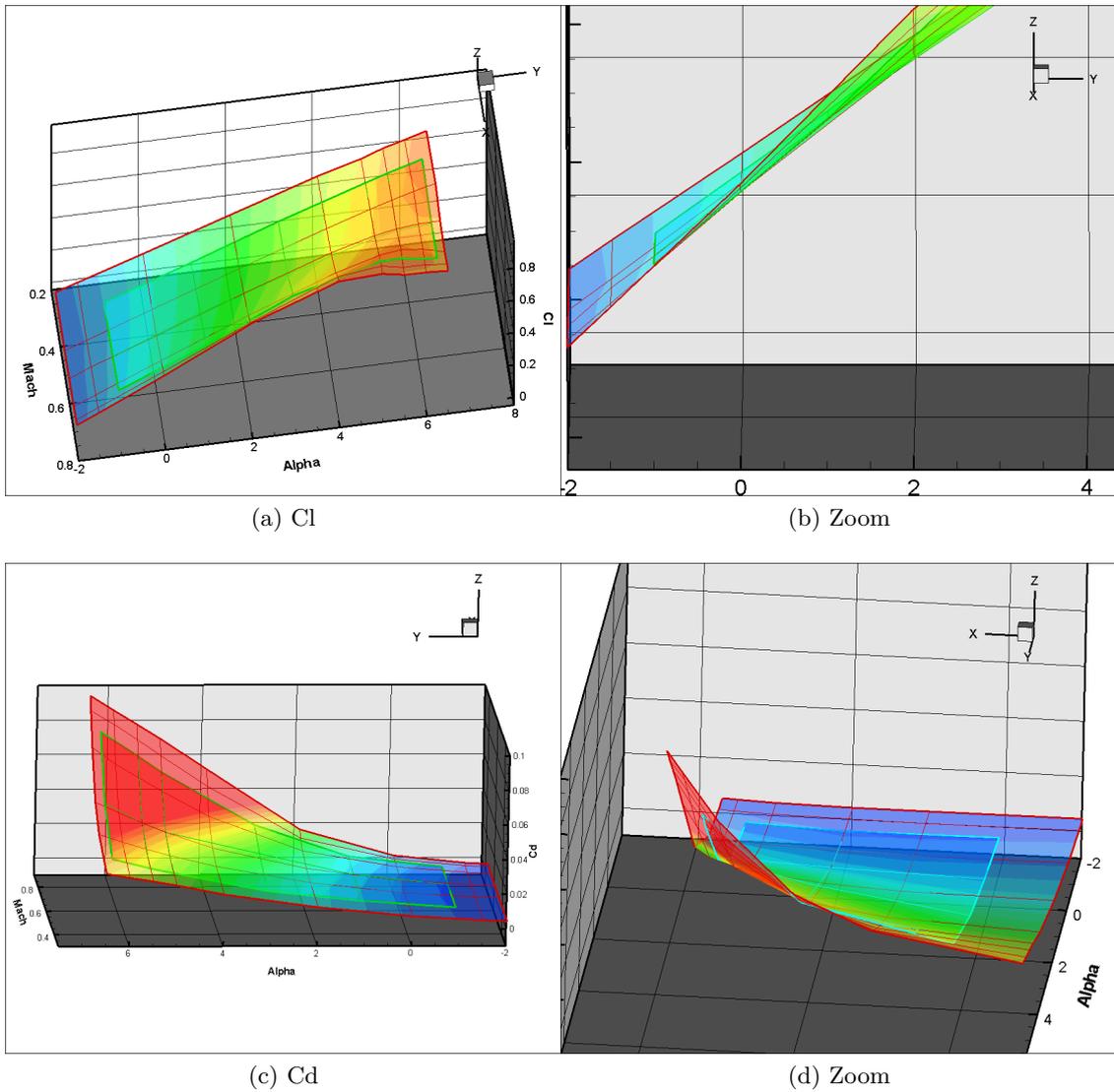


Figura 3.5: Superfici di risposta relative ai coefficienti di portanza e resistenza per un set di 40 snapshots

Per quest'ultima superficie di risposta vengono calcolati qui di seguito gli errori relativi percentuali per mach $M = 0.6$.

α	Cl	Cd_{inv}	Cl_{CFD}	Cd_{invCFD}	$Err\%Cl$	$Err\%Cd_{inv}$
-1°	0.214E+00	0.523E-02	0.209E+00	0.559E-02	2.39	6.44
1°	0.414E+00	0.110E-01	0.405E+00	0.106E-01	2.22	3.77
3°	0.584E+00	0.232E-01	0.596E+00	0.197E-01	2.01	17.77
5.5°	0.771E+00	0.408E-01	0.781E+00	0.411E-01	1.28	0.73
6.3°	0.787E+00	0.525E-01	0.797E+00	0.506E-01	1.25	3.75

Tabella 3.1: Analisi degli errori relativi alle ricostruzioni POD per mach $M = 0.6$

Per questo caso di studio gli errori relativi percentuali sull'estimazione del coefficiente di portanza e della componente inviscido del coefficiente di resistenza sono più alti rispetto al caso bidimensionale ma rimangono accettabili.

Le superfici così ottenute risultano dunque sufficientemente precise per il nostro obiettivo. Sarà questo set di snapshots che verrà utilizzato per il caso di ala aeroelastica. Di seguito viene riportata la griglia relativa al set di snapshots validato. Si ricorda che gli snapshots sono le intersezioni delle linee rosse mentre i punti ottenuti mediante metodo POD sono le intersezioni delle linee blu.

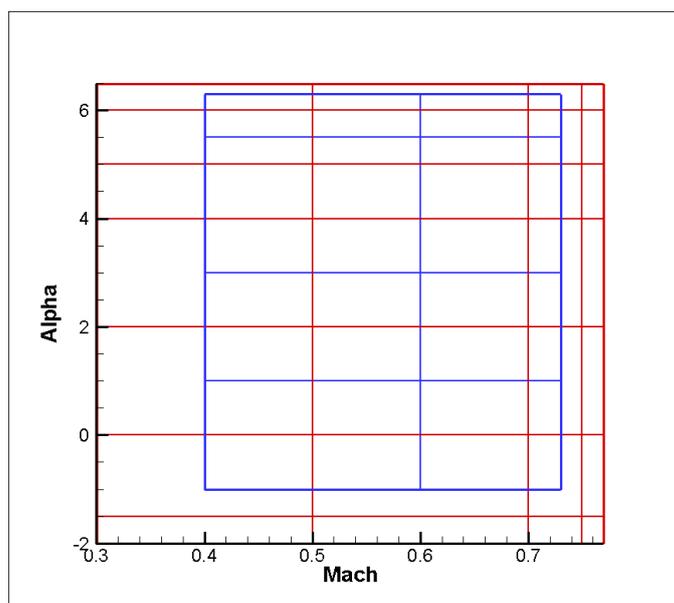


Figura 3.6: in rosso la griglia relativa al set di 40 snapshots e in blu la griglia relativa ai punti interpolati

3.2 Confronto dei campi di pressione e Mach intorno al profilo

Confrontiamo adesso i campi di pressione e Mach relativi alle simulazioni fluidodinamiche e al metodo POD intorno ad un profilo posto al 60% della lunghezza alare partendo dalla radice. E' stato scelto questo profilo per i confronti in quanto in questa zona l'urto e il flusso separato sono ben evidenti. I confronti sono fatti per il più basso e più alto angolo di incidenza e mach.

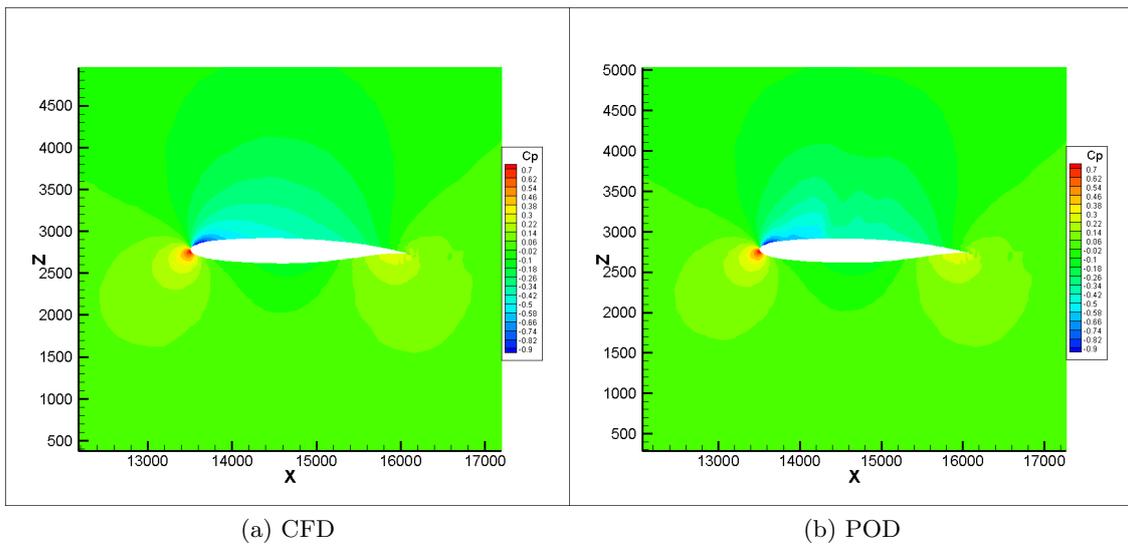


Figura 3.7: Coefficienti di pressione per Alpha: 1 e Mach: 0.4

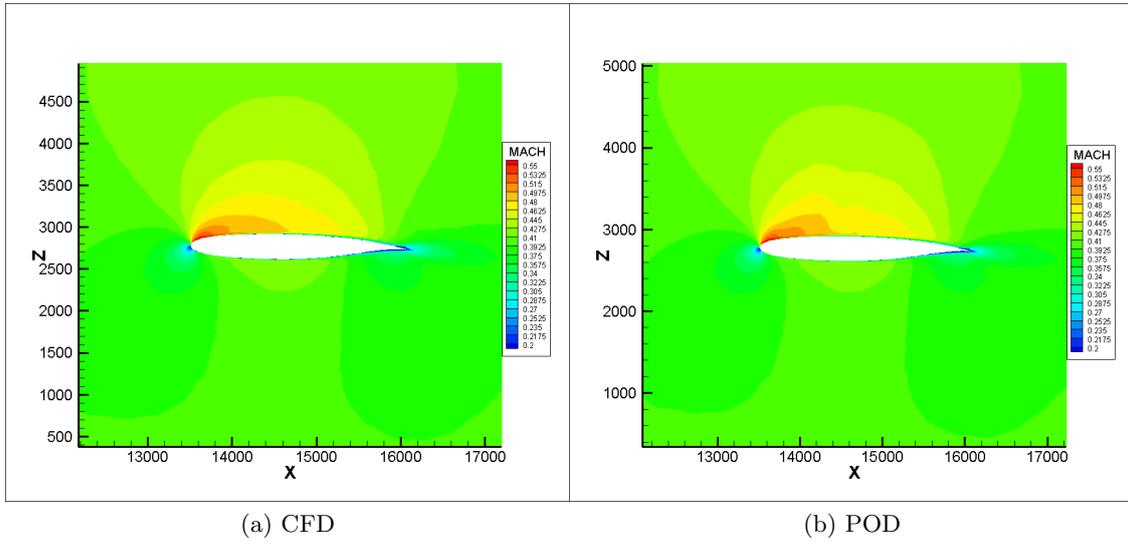


Figura 3.8: Distribuzione del Mach per Alpha: 1 e Mach: 0.4

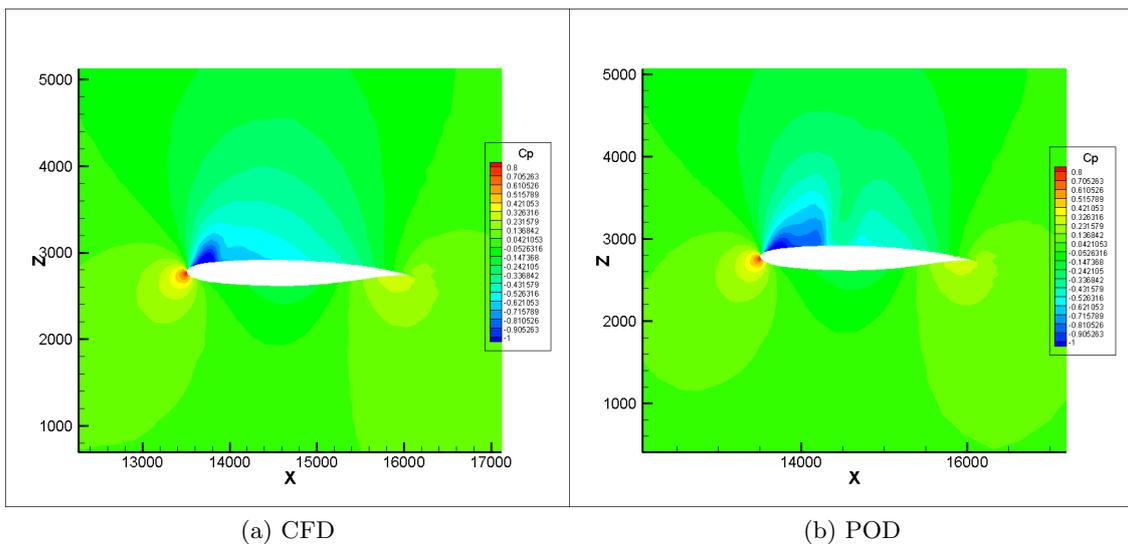
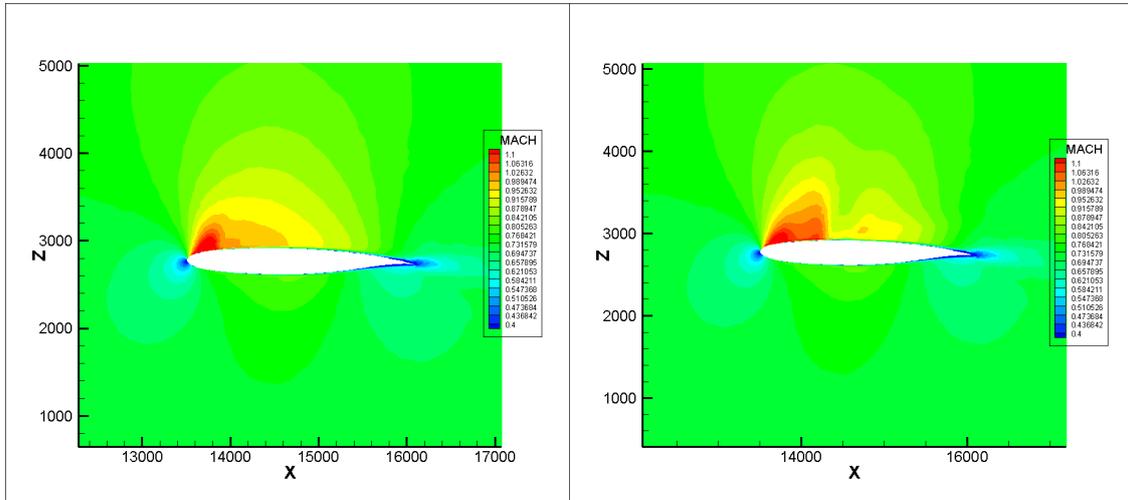


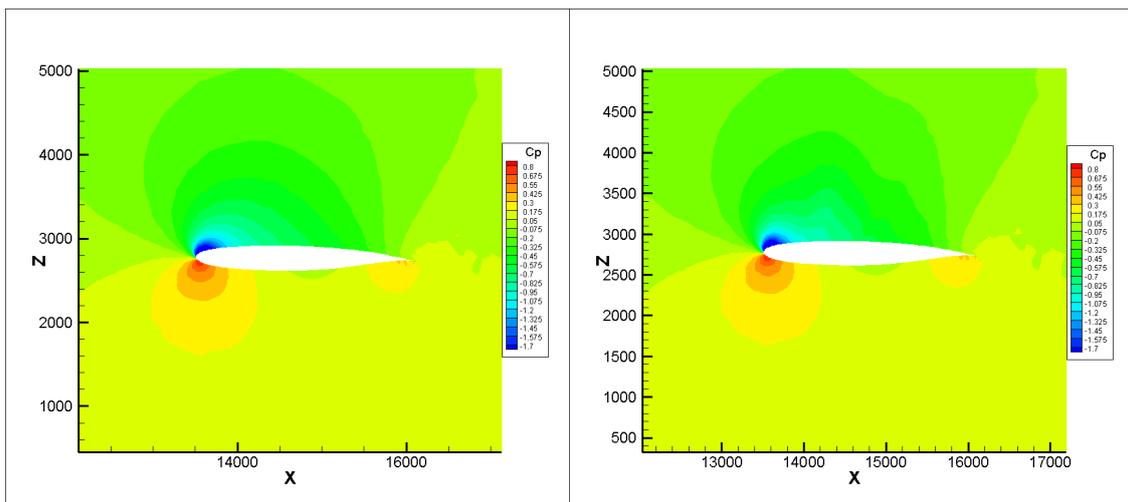
Figura 3.9: Coefficienti di pressione per Alpha: 1 e Mach: 0.73



(a) CFD

(b) POD

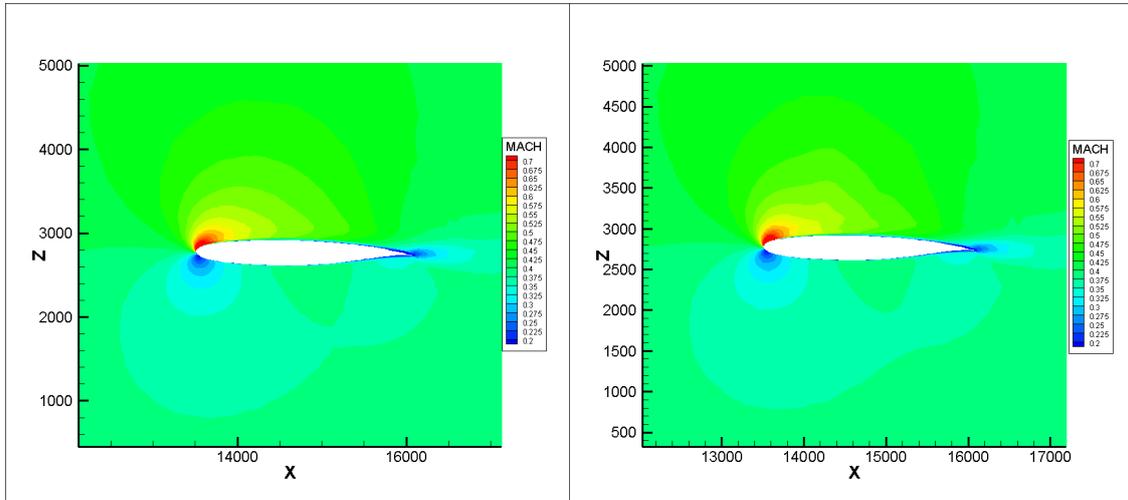
Figura 3.10: Distribuzione del Mach per Alpha: 1 e Mach: 0.73



(a) CFD

(b) POD

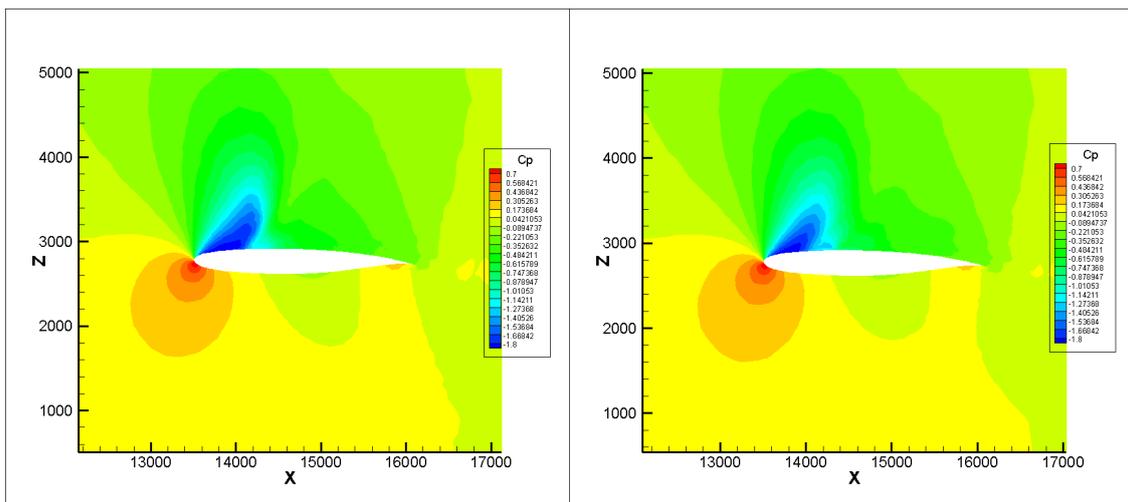
Figura 3.11: Coefficienti di pressione per Alpha: 6.3 e Mach: 0.4



(a) CFD

(b) POD

Figura 3.12: Distribuzione del Mach per Alpha: 6.3 e Mach: 0.4



(a) CFD

(b) POD

Figura 3.13: Coefficienti di pressione per Alpha: 6.3 e Mach: 0.73

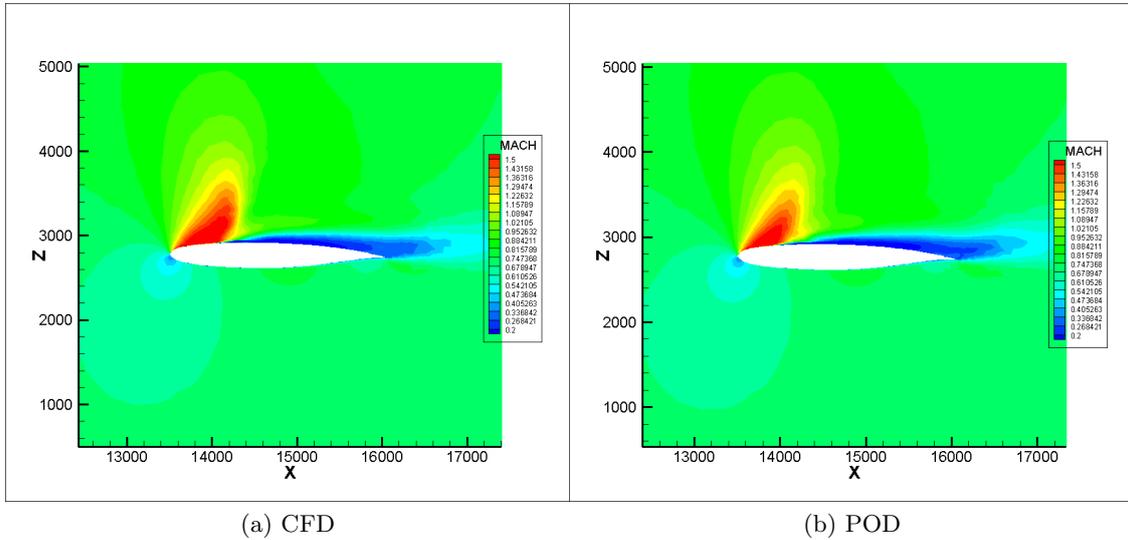


Figura 3.14: Distribuzione del Mach per Alpha: 6.3 e Mach: 0.73

Il metodo di ricostruzione POD riesce a riprodurre l'andamento generale dei campi relativi al coefficiente di pressione e di mach tuttavia, soprattutto per angoli di bassa incidenza, si osservano differenze non trascurabili. Ciò potrebbe essere migliorato aumentando ulteriormente il set di snapshots utilizzato per l'interpolazione ma, come già specificato in precedenza, l'obiettivo del test è di validare un set di snapshots minimale da utilizzare nel caso di ala aeroelastica e, per questo caso di studio, esso non può essere troppo ampio per una questione di tempo. Vengono dunque accettati errori più elevati rispetto al caso del profilo NACA0012 biparametrico. Inoltre si preferisce ricostruire con una precisione maggiore i campi relativi all'alta incidenza, ragion per cui il set di snapshots è più fitto in questa zona.

Confrontiamo infine la distribuzione del coefficiente di pressione ottenuta tramite simulazioni CFD e metodo POD. Anche in questo caso i confronti sono stati fatti per una sezione posta al 60% della lunghezza alare partendo dalla radice. Il confronto viene fatto per gli stessi angoli di incidenza e numeri di mach usati in precedenza.

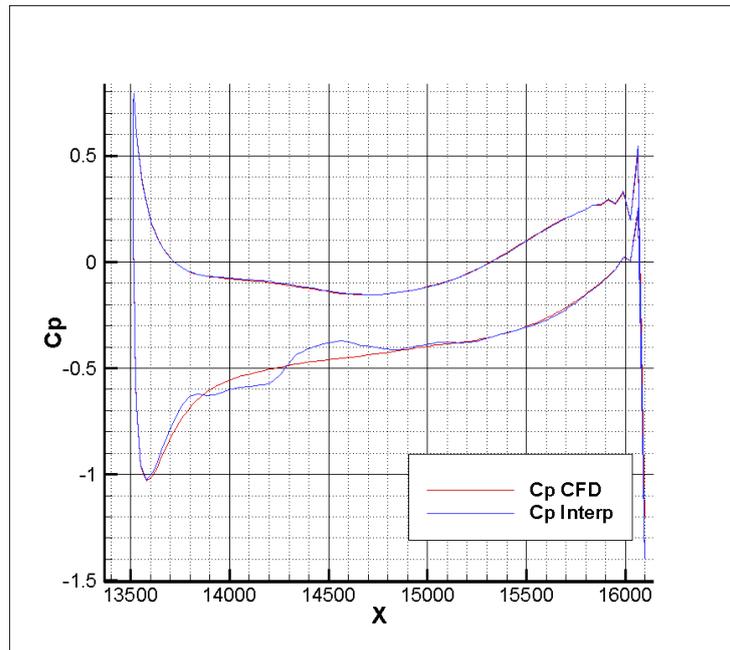


Figura 3.15: Confronto coefficienti di pressione ottenuti tramite simulazione CFD e POD per $\alpha = 1$ e $M = 0.4$

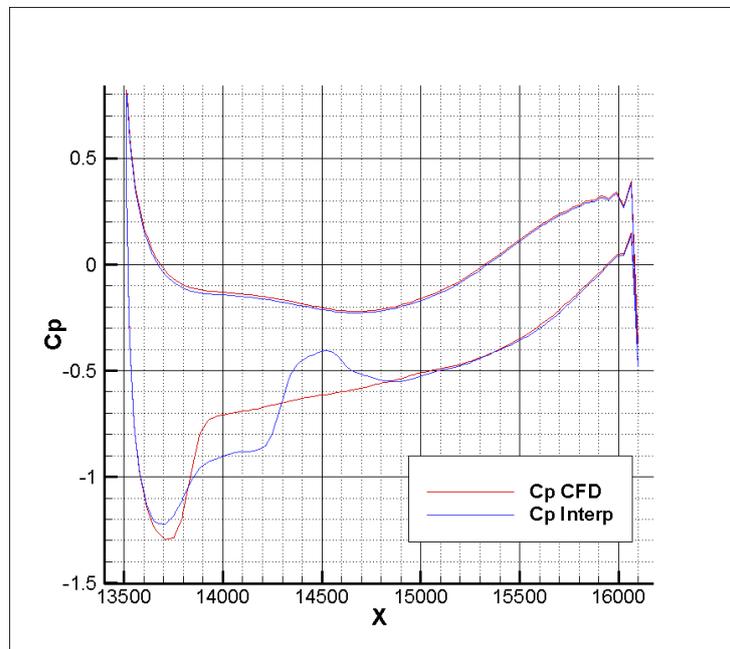


Figura 3.16: Confronto coefficienti di pressione ottenuti tramite simulazione CFD e POD per $\alpha = 1$ e $M = 0.73$

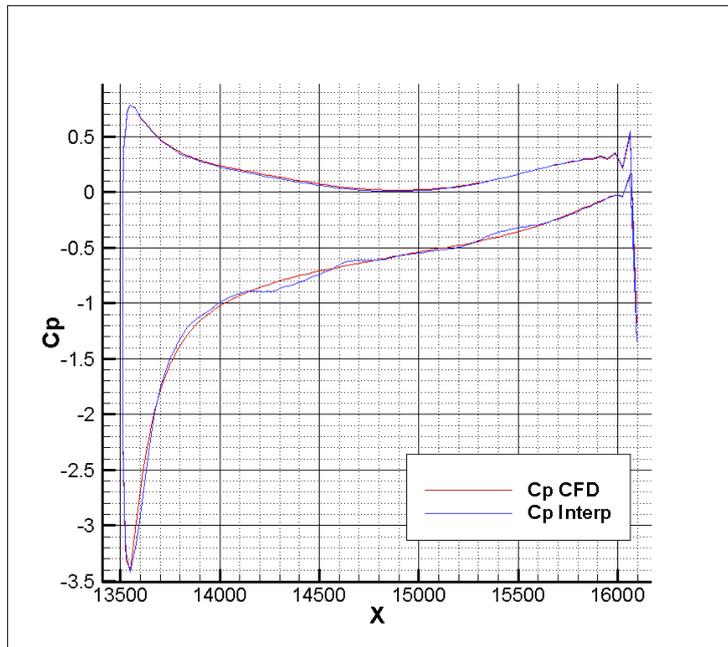


Figura 3.17: Confronto coefficienti di pressione ottenuti tramite simulazione CFD e POD per $\alpha = 6.3$ e $M = 0.4$

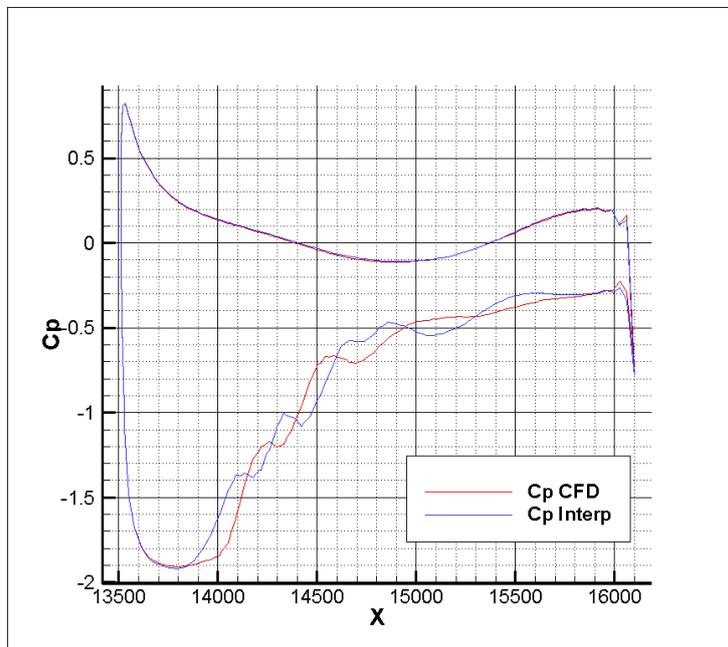


Figura 3.18: Confronto coefficienti di pressione ottenuti tramite simulazione CFD e POD per $\alpha = 6.3$ e $M = 0.73$

Le differenze sopra riscontrate qui sono ancora più evidenti. In particolare a bassa incidenza e mach elevato la distribuzione del coefficiente di pressione ottenuta tramite POD presenta delle oscillazioni non esistenti nella realtà. Ciò può essere causato dall'influenza degli snapshots relativi all'alta incidenza e alto mach sulle ricostruzioni a bassa incidenza.

Capitolo 4

Applicazioni POD su un'ala aeroelastica

Nel presente capitolo il metodo POD verrà applicato ad un modello di ala aeroelastica. L'ala utilizzata è la stessa del capitolo precedente. In questo test però l'ala non è più rigida ma viene presa in considerazione la deformazione che essa subisce quando sottoposta ai carichi aerodinamici. La disciplina che si occupa dello studio dei fenomeni derivanti dall'interazione reciproca tra strutture solide elastiche e le correnti fluide che le investono è detta *aeroelasticità*. Una definizione precisa è stata data da Collar (1947); la riportiamo qui di seguito tradotta in lingua italiana: "L'aeroelasticità è lo studio della mutua interazione tra le forze inerziali, elastiche e aerodinamiche agenti in un solido esposto ad una corrente fluida e dell'influenza di tale studio sul progetto della struttura". [10]

Il campo aeronautico non è l'unico campo in cui insorgono fenomeni aeroelastici: essi possono essere osservati anche in campo meccanico e civile (Ingegneria del Vento).

La formulazione analitica di questi fenomeni è ben compresa dal punto di vista teorico solamente per sistemi strutturali a pochi gradi di libertà. [9]

L'azione del vento sulle strutture aeronautiche e non può essere studiata seguendo approcci differenti, in cui determinati fenomeni sono considerati o meno:

- *fenomeni strettamente aerodinamici*: in cui è trascurabile l'azione di risposta della struttura sul campo fluidodinamico;
- *fenomeni aeroelastici*: in cui non è trascurabile l'azione di risposta della struttura sul campo fluidodinamico.

Nel primo caso, il moto della struttura causato dal vento incidente non altera le caratteristiche del flusso d'aria. Nel secondo caso invece le caratteristiche del vento vengono completamente modificate dal moto della struttura causato dal flusso d'aria, poiché la deformazione determina l'insorgere di moti nel fluido sollecitante.

In questa trattazione verranno trattati problemi di aeroelasticità statica in quanto verrà presa in considerazione la configurazione di equilibrio assunta dalla struttura a transitorio esaurito. L'aerodinamica sarà considerata stazionaria, ovvero le forze aerodinamiche saranno considerate dipendenti istantaneamente dalle condizioni al contorno, senza introdurre

alcuna dipendenza dalla storia precedente del moto della struttura.

E' importante avere una struttura capace di deformarsi sotto i carichi in quanto ciò permette una riduzione dei carichi aerodinamici che la struttura deve sopportare. Nelle figure che seguono si evince come l'urto su un'ala deformabile elasticamente sia minore rispetto al caso di ala rigida. I confronti corrispondono ad un caso di angolo di incidenza $\alpha = 2^\circ$ e mach $M = 0.77$. La sezione utilizzata per i confronti è posta al 60% della lunghezza alare partendo dalla radice.

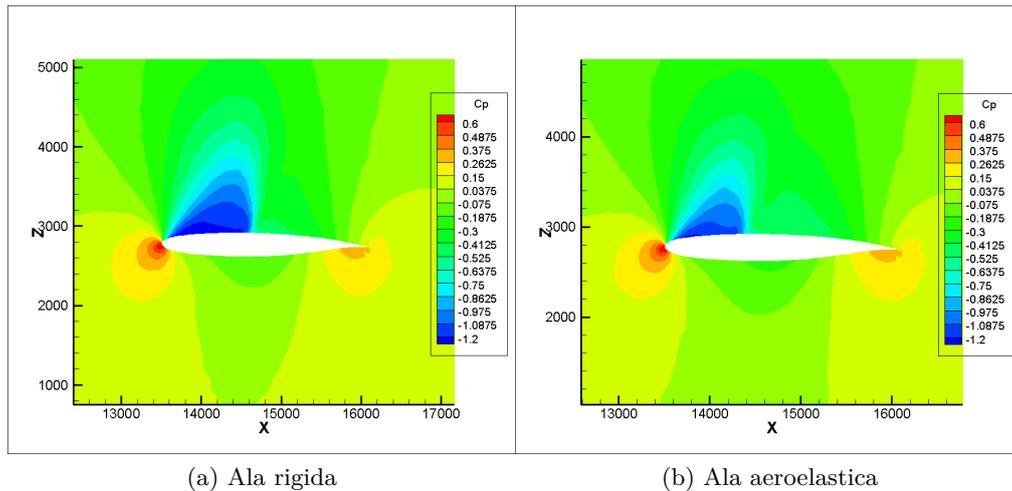


Figura 4.1: Confronto campi di pressione in caso di ala rigida e ala aeroelastica per $\alpha = 2^\circ$ e $M = 0.77$

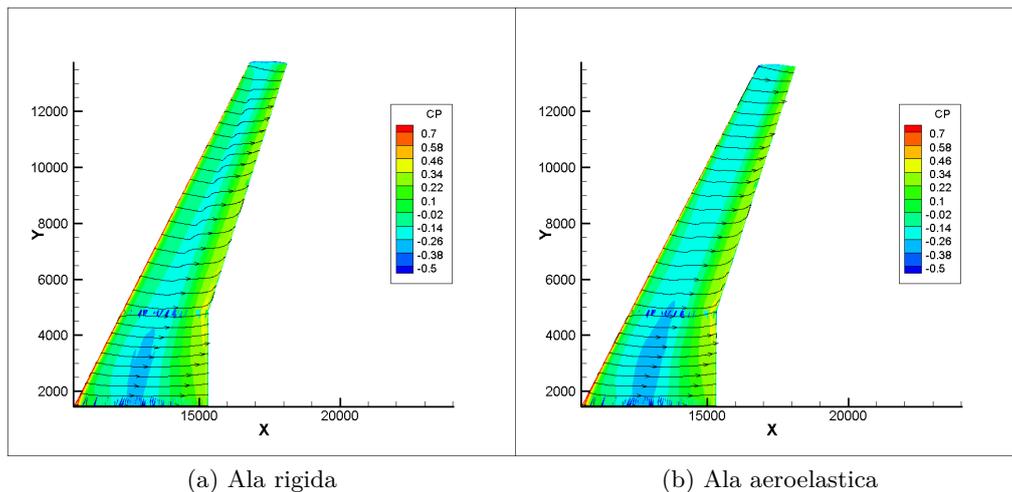


Figura 4.2: Confronto linee di flusso a parete in caso di ala rigida e ala aeroelastica per $\alpha = 2^\circ$ e $M = 0.77$

Per avere una maggiore precisione nel calcolo degli snapshots, in questo caso di studio non viene più fatta l'approssimazione di numero di Reynolds costante al variare del numero di Mach.

Per giungere alla condizione finale di ala deformata si procede iterativamente accoppiando i carichi aerodinamici al modello strutturale. Si parte calcolando i carichi aerodinamici sull'ala mediante simulazioni CFD, essi vengono trasferiti al modello strutturale e viene calcolata la conseguente deformazione. In seguito viene generata la nuova griglia di calcolo relativa all'ala deformata ed è su di essa che verranno determinati i nuovi carichi aerodinamici da trasferire al modello strutturale. Questo processo viene ripetuto iterativamente fino al raggiungimento della convergenza. Infine si ottiene la griglia relativa all'ala deformata e il campo fluidodinamico attorno ad essa. A tal scopo vengono usati i seguenti software:

- **UNS3D**: per la generazione dei campi CFD.
- **Nastran**: per l'analisi FEM del modello strutturale.

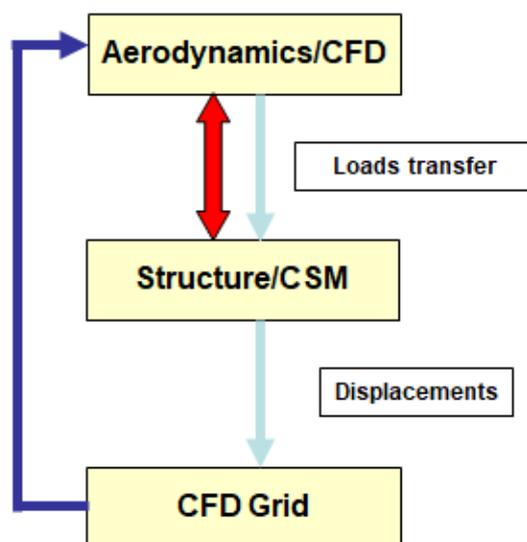


Figura 4.3: Schema relativo al metodo di accoppiamento tra carichi aerodinamici e modello strutturale

4.1 Test con spazio dei parametri monodimensionale

Come primo passo si vuole validare il metodo per il caso monoparametrico. Oltre all'interpolazione dei campi di pressione ora viene effettuata anche l'interpolazione sulle griglie di calcolo relative all'ala deformata. Questa tecnica è di notevole interesse in quanto, grazie ad un'unica procedura di interpolazione, è possibile ottenere i campi di pressione e la griglia di calcolo su cui essi sono applicati. Non è dunque necessario creare a posteriori la

mesh su cui applicare i campi mediante un generatore di griglie. Ciò permette di avere una corrispondenza esatta tra i nodi della mesh dell'ala nelle condizioni iniziali e finali e tra i nodi della mesh delle soluzioni CFD/CSM e quelle interpolate. Su questo aspetto il codice POD usato da Leonardo è estremamente all'avanguardia.

Ci si è fissati come obiettivo la riproduzione delle polari aerodinamiche relative ai coefficienti di portanza e alla componente inviscido del coefficiente di resistenza e la verifica dell'accuratezza delle griglie di calcolo ottenute tramite interpolazione. Infine si confronteranno i campi di pressione ottenuti mediante calcolo CFD/CSM e POD in corrispondenza di una sezione.

Il numero di mach viene mantenuto fisso e pari a $M = 0.77$ mentre l'angolo di incidenza α viene fatto variare. Gli snapshots utilizzati sono relativi ai seguenti valori di α :

$$\alpha = \{-2; -1.5; 0; 2; 4; 6; 6.5\}$$

Per l'interpolazione è stato utilizzato il metodo B-spline.

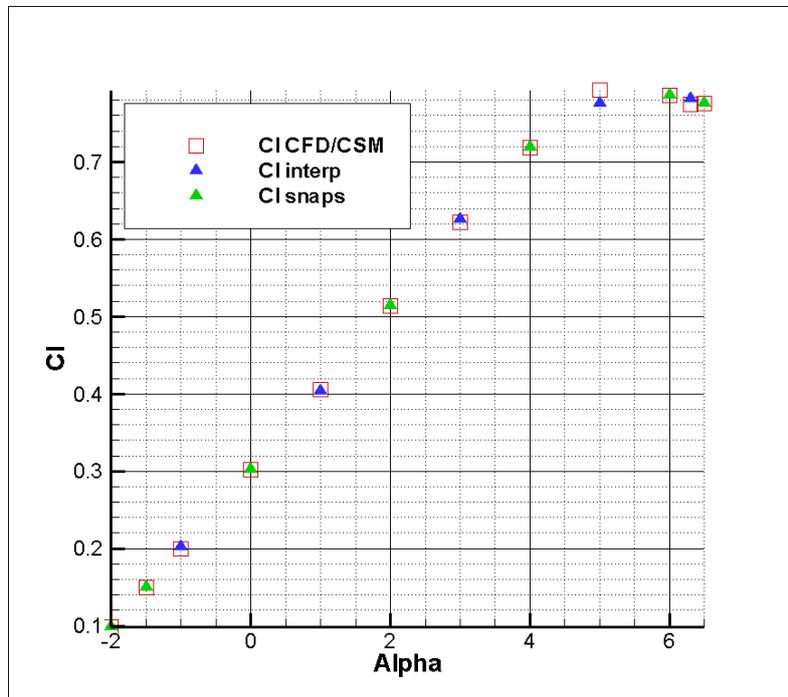


Figura 4.4: Polare aerodinamica relativa al coefficiente di portanza per Mach $M = 0.77$

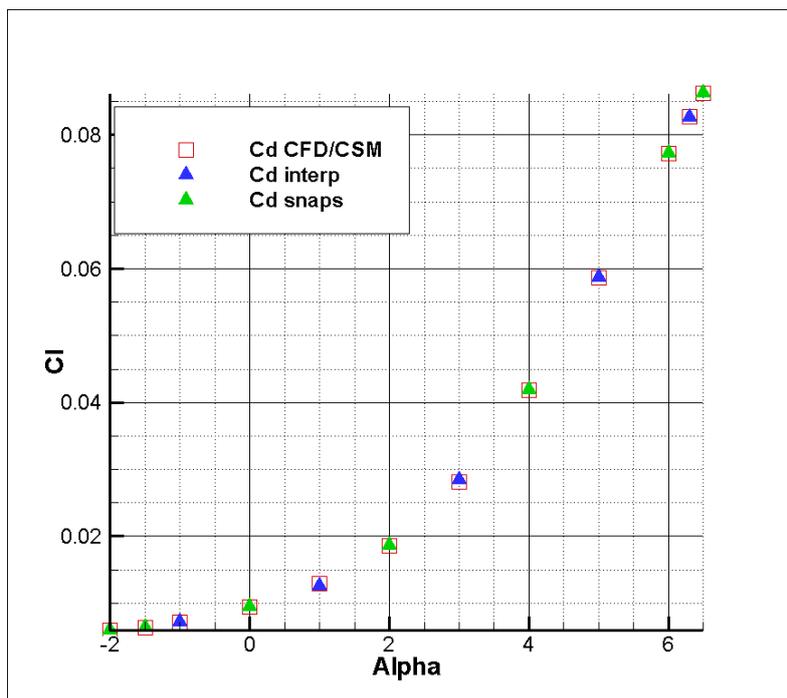


Figura 4.5: Polare aerodinamica relativa alla componente in viscido del coefficiente di resistenza per Mach $M = 0.77$

α	Cl	Cd_{inv}	$Cl_{CFD/CSM}$	$Cd_{invCFD/CSM}$	$Err\%Cl$	$Err\%Cd_{inv}$
-1°	0.202E+00	0.719E-02	0.200E+00	0.712E-02	1	0.98
1°	0.403E+00	0.126E-01	0.406E+00	0.130E-01	0.74	3.08
3°	0.626E+00	0.284E-01	0.622E+00	0.281E-01	0.64	1.07
5°	0.776E+00	0.586E-01	0.793E+00	0.586E-01	2.14	0
6.3°	0.781E+00	0.826E-01	0.775E+00	0.827E-01	0.77	0.12

Tabella 4.1: Analisi degli errori relativi percentuali delle ricostruzioni POD per mach $M = 0.77$

Le polari aerodinamiche ottenute mediante la POD risultano aderenti alle curve reali. L'analisi degli errori relativi percentuali mostra che essi non superano mai il 5% risultando dunque accettabili. Per quanto riguarda la polare del coefficiente di portanza lo scostamento maggiore si ha per $\alpha = 5^\circ$. Infatti è in questa zona che inizia il tratto non lineare della curva e dunque l'interpolazione risulta più delicata. Per una maggiore precisione bisognerebbe infittire gli snapshots nella zona non lineare.

Di seguito vengono effettuati i confronti tra le griglie di calcolo ottenute mediante simulazioni aeroelastiche e quelle ottenute grazie al metodo di interpolazione POD. Nelle immagini

è stata aggiunta anche la griglia corrispondente alla condizione di ala indeformata per dare un'idea della deformazione subita dall'ala al variare dell'angolo d'incidenza. A seguire si trova anche il grafico relativo al confronto delle deformazioni calcolate lungo l'asse Z (bending) prendendo come riferimento un nodo sul tip. Nel grafico il bending è espresso in millimetri. Le due griglie risultano estremamente vicine tanto che, senza ingrandire l'immagine, esse si confondono. Come per la polare aerodinamica relativa al coefficiente di portanza, un errore maggiore si ha per un'incidenza di 5 gradi per il quale l'errore percentuale supera il 5%.

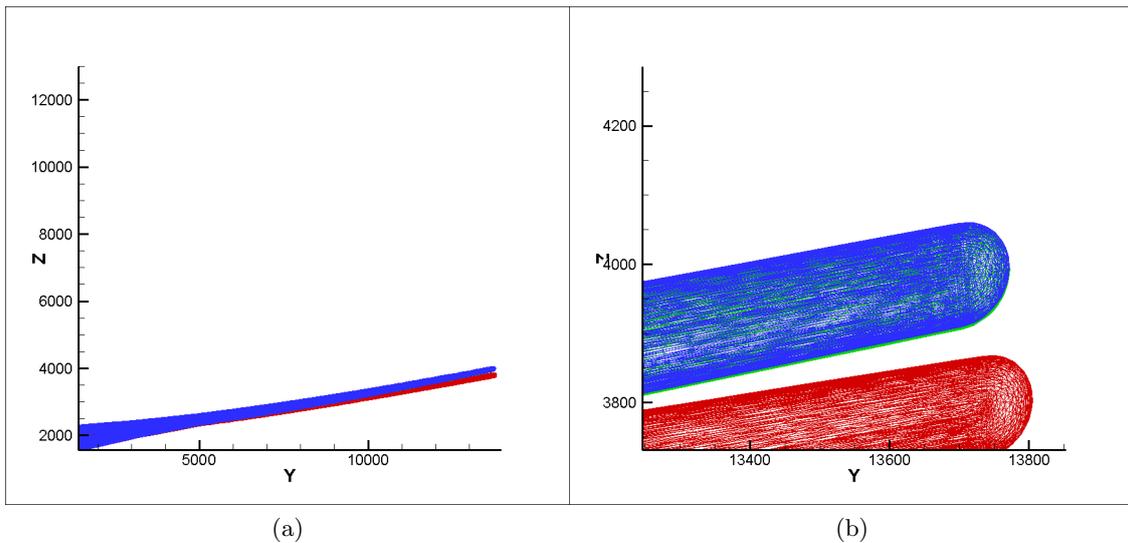


Figura 4.6: Confronto griglie di calcolo per $\alpha = -1$: in rosso griglia indeformata, in verde griglia deformata ottenuta tramite simulazione CFD/CSM, in blu griglia deformata ottenuta tramite interpolazione POD

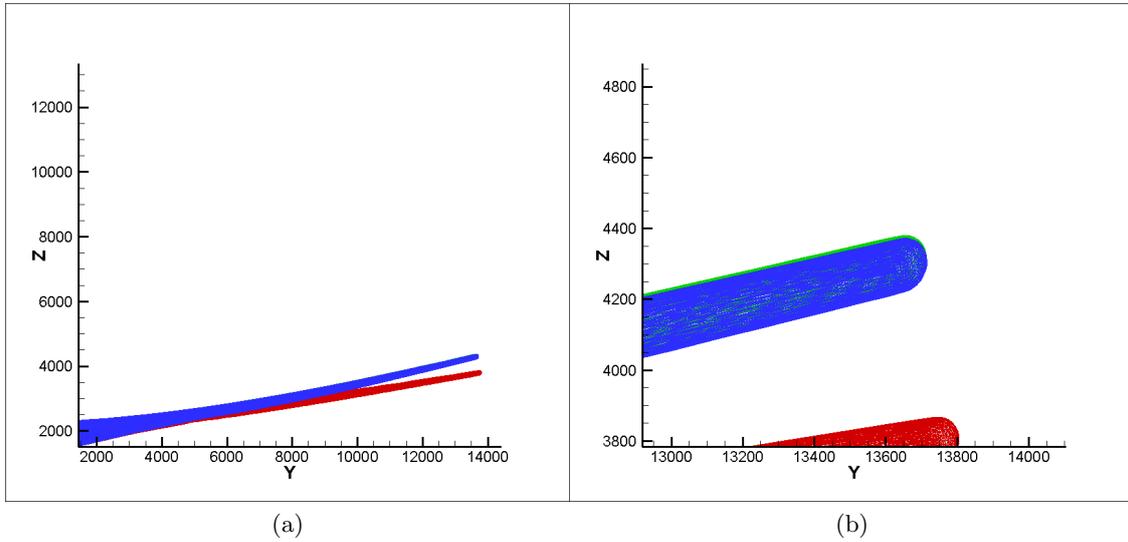


Figura 4.7: Confronto griglie di calcolo per $\alpha = 1$: in rosso griglia indeformata, in verde griglia deformata ottenuta tramite simulazione CFD/CSM, in blu griglia deformata ottenuta tramite interpolazione POD

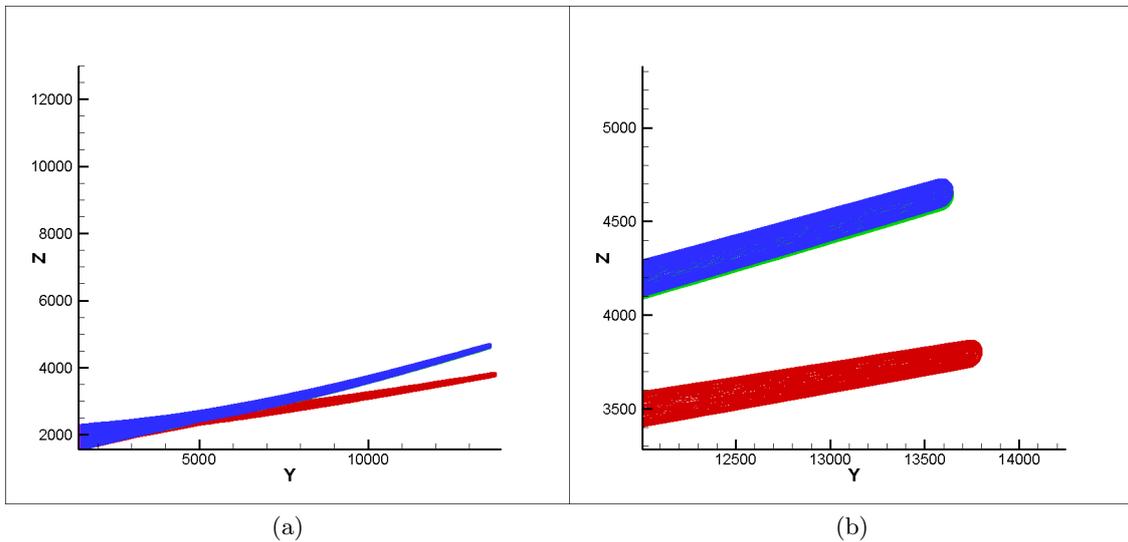


Figura 4.8: Confronto griglie di calcolo per $\alpha = 3$: in rosso griglia indeformata, in verde griglia deformata ottenuta tramite simulazione CFD/CSM, in blu griglia deformata ottenuta tramite interpolazione POD

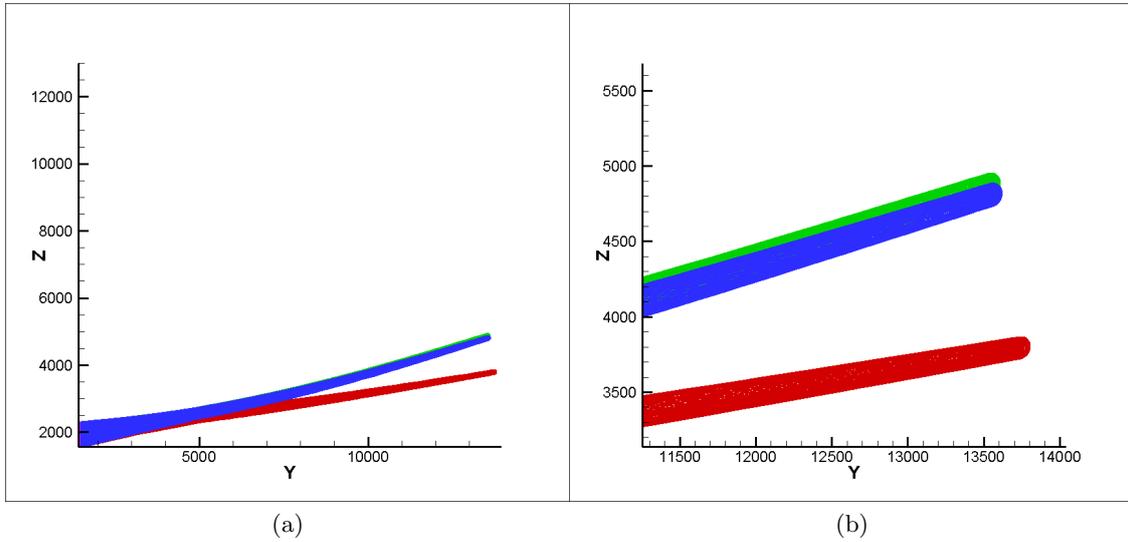


Figura 4.9: Confronto griglie di calcolo per $\alpha = 5$: in rosso griglia indeformata, in verde griglia deformata ottenuta tramite simulazione CFD/CSM, in blu griglia deformata ottenuta tramite interpolazione POD

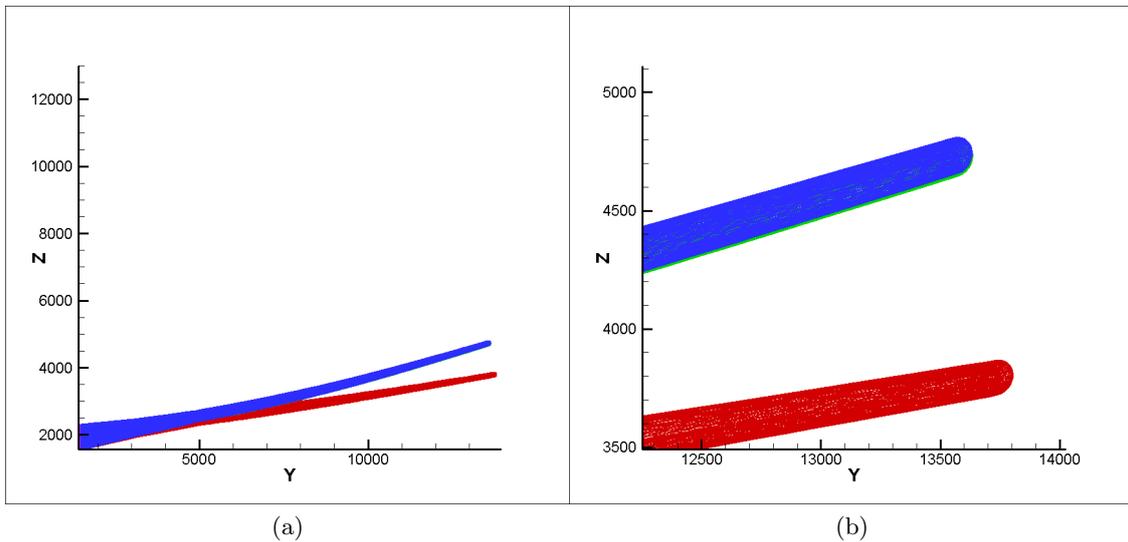


Figura 4.10: Confronto griglie di calcolo per $\alpha = 6.3$: in rosso griglia indeformata, in verde griglia deformata ottenuta tramite simulazione CFD/CSM, in blu griglia deformata ottenuta tramite interpolazione POD

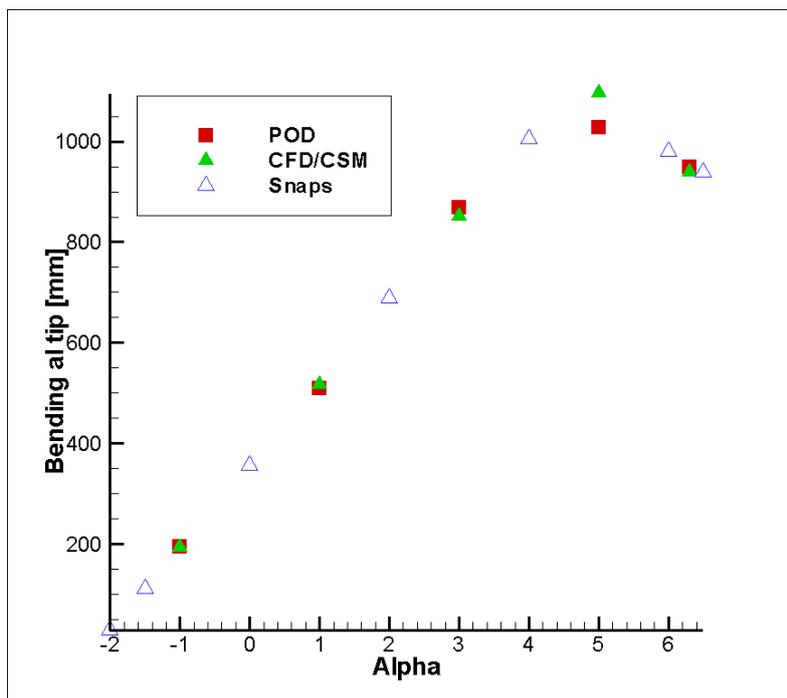


Figura 4.11: Confronto deformazione valutata lungo l'asse Z (bending) su un nodo al tip per Mach $M = 0.77$

α	$Bending_{POD}$ [mm]	$Bending_{Aeroel}$ [mm]	$Err\%$
-1°	195	192	1.56
1°	509	517	1.55
3°	868	851	2
5°	1028	1096	6.2
6.3°	950	939	1.17

Tabella 4.2: Analisi degli errori relativi percentuali per il bending al tip

A questo punto confrontiamo i campi di pressione e di Mach ottenuti tramite simulazioni aeroelastiche e metodo POD. I confronti sono fatti per il più alto valore di angolo di incidenza utilizzato per l'interpolazione.

I risultati ottenuti sono di notevole interesse infatti il metodo POD riesce a individuare perfettamente l'onda d'urto sul dorso dell'ala e la scia dovuta al flusso separato.

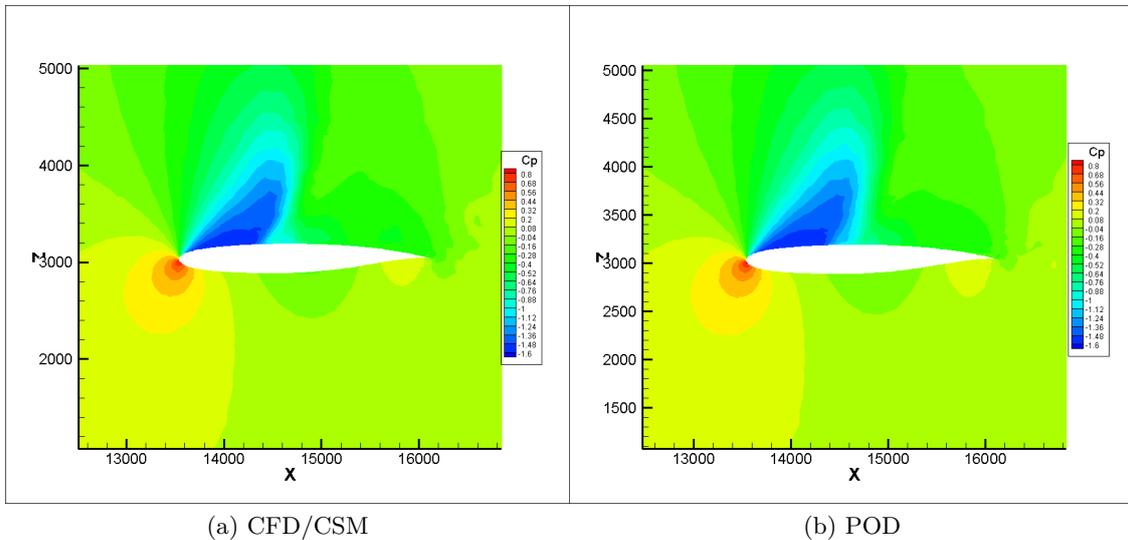


Figura 4.12: Distribuzione del coefficiente di pressione per Alpha: 6.3 e Mach: 0.77

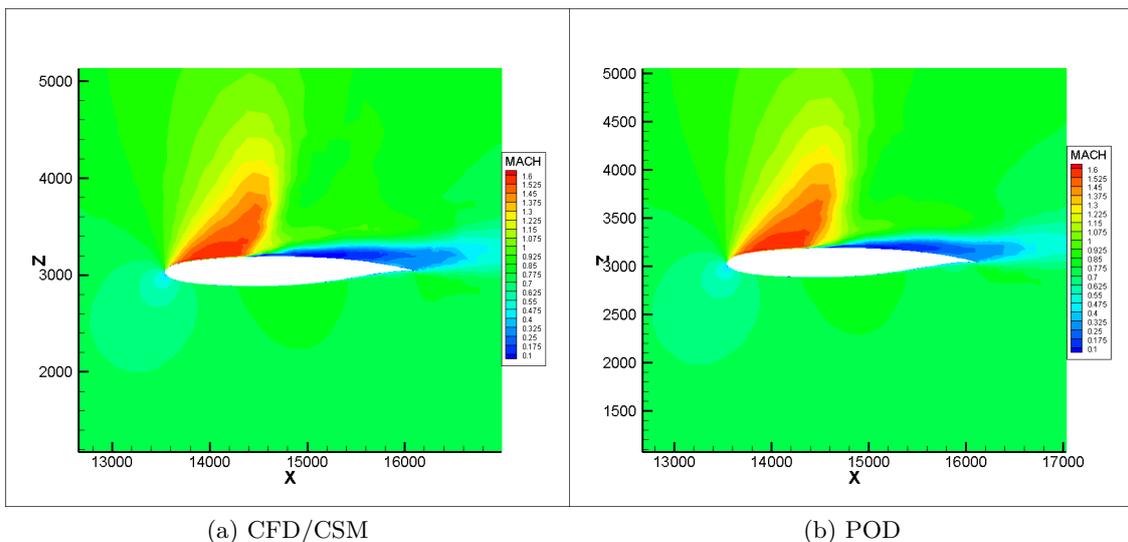


Figura 4.13: Distribuzione del Mach per Alpha: 6.3 e Mach: 0.77

4.2 Test con spazio dei parametri bidimensionale

In questo paragrafo viene analizzato l'ultimo caso di studio ovvero si vogliono ricostruire le superfici di risposta relative al coefficiente di portanza e alla componente inviscida del coefficiente di resistenza per il caso di un'ala deformabile elasticamente. I parametri che vengono fatti variare sono l'angolo di incidenza e il numero di mach. Per l'interpolazione

viene utilizzato il set di 40 snapshots validato per il caso di ala rigida e parametro delta pari a 0.9.

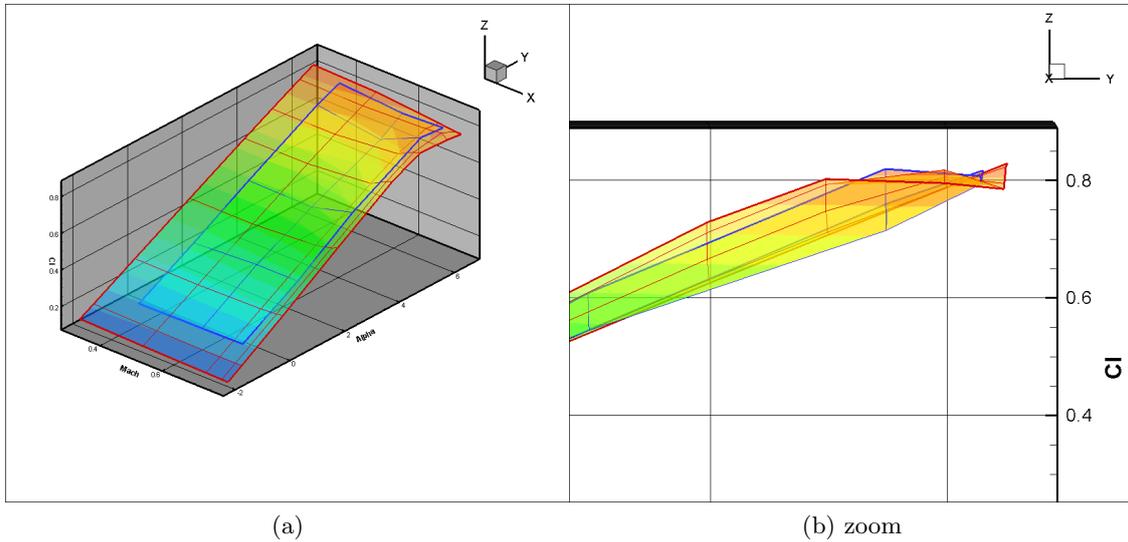


Figura 4.14: Superficie di risposta relativa al coefficiente di portanza ottenuta con un set di 40 snapshots

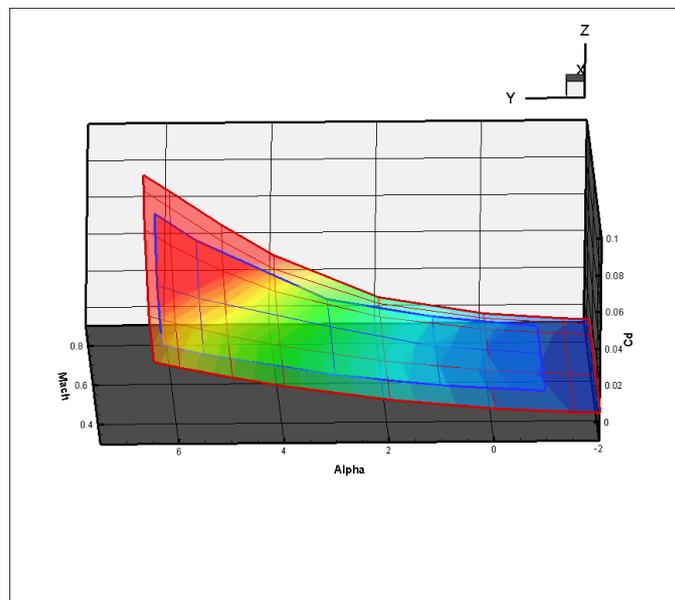


Figura 4.15: Superficie di risposta relativa alla componente in viscido del coefficiente di resistenza ottenuta con un set di 40 snapshots

α	Cl	Cd_{inv}	$Cl_{CFD/CSM}$	$Cd_{invCFD/CSM}$	$Err\%Cl$	$Err\%Cd_{inv}$
-1°	0.194E+00	0.588E-02	0.195E+00	0.577E-02	0.51	1.91
1°	0.384E+00	0.987E-02	0.375E+00	0.102E-01	2.40	3.24
3°	0.539E+00	0.211E-01	0.551E+00	0.180E-01	2.18	1.07
5.5°	0.709E+00	0.370E-01	0.743E+00	0.355E-01	2.14	17.22
6.3°	0.788E+00	0.444E-01	0.780E+00	0.439E-01	1.03	1.14

Tabella 4.3: Analisi degli errori relativi percentuali delle ricostruzioni POD per mach $M = 0.6$

Nonostante la complessità del modello sia aumentata, gli errori percentuali relativi alla ricostruzione delle superfici di risposta dei coefficienti di portanza e resistenza restano confrontabili con quelli ottenuti nel caso di ala indeformabile.

Di seguito viene riportato il confronto tra la griglia ottenuta con interpolazione POD e la griglia deformata risultato di simulazione ad alta precisione per il punto corrispondente a $\alpha = 5.5^\circ$ e $Mach = 0.6$. L'errore relativo percentuale calcolato sulla deformazione lungo l'asse Z prendendo come punto di riferimento il tip dell'ala è $E\%_{Bending} = 0.48\%$. Dunque il metodo POD risponde egregiamente anche per quanto riguarda la ricostruzione della griglia di calcolo.

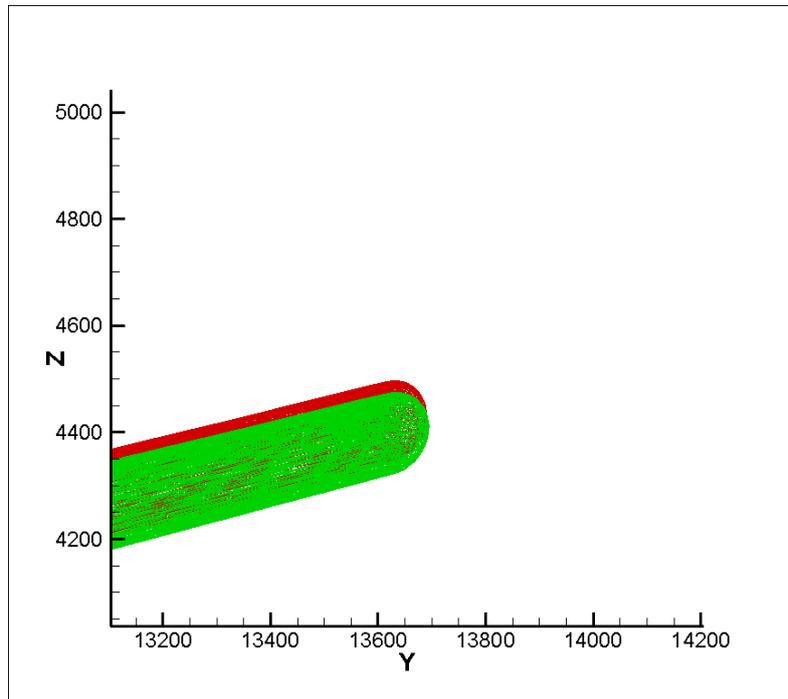


Figura 4.16: Confronto griglie di calcolo per $\alpha = 5.5$ e $Mach = 0.6$: in rosso la griglia deformata ottenuta tramite simulazione CFD/CSM, in verde griglia deformata ottenuta tramite interpolazione POD

Confrontiamo infine i campi di pressione ottenuti mediante simulazioni aeroelastiche e metodo POD. Anche per questo caso di studio il metodo POD risponde egregiamente. L'urto che si forma ad alta incidenza sul bordo d'attacco viene ben individuato del metodo.

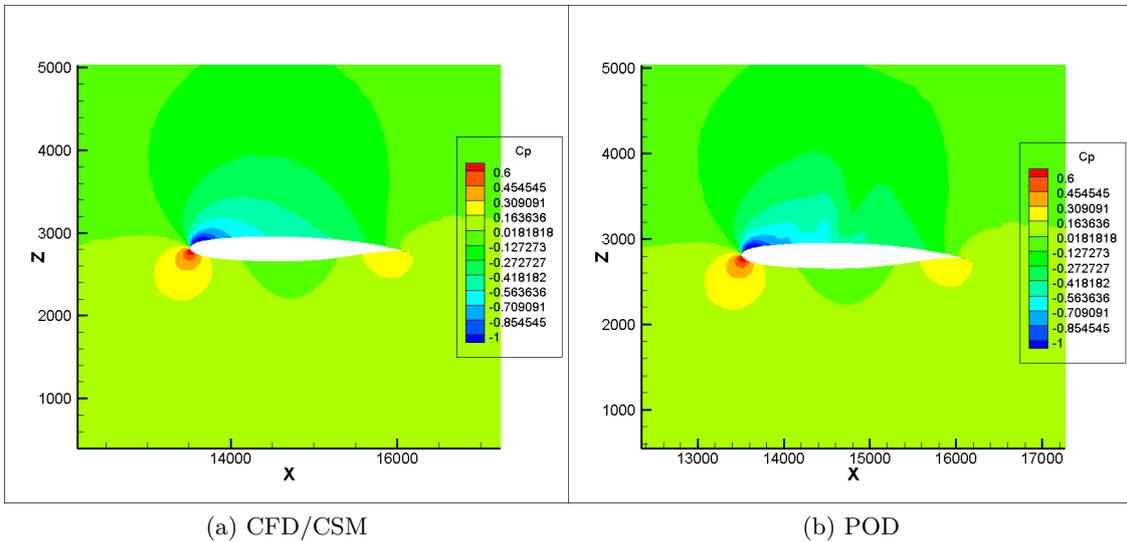


Figura 4.17: Distribuzione del coefficiente di pressione per Alpha: 3 e Mach: 0.4

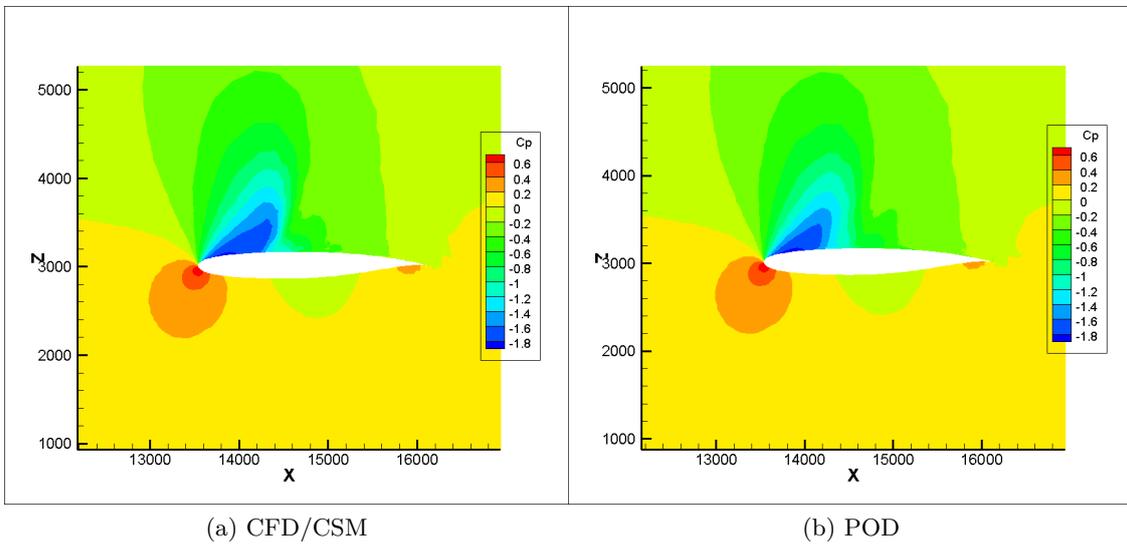


Figura 4.18: Distribuzione del coefficiente di pressione per Alpha: 6.3 e Mach: 0.73

Capitolo 5

Conclusione

Grazie allo studio di questo lavoro di tesi si è giunti alla validazione del metodo POD (Proper Orthogonal Decomposition) per le relative applicazioni aeronautiche trattate.

Ci si è posto come obiettivo la ricostruzione dei campi fluidodinamici e dei coefficienti aerodinamici di portanza C_L e della componente inviscido del coefficiente di resistenza $C_{D_{inv}}$.

Si è partiti applicando il modello ad un profilo alare NACA0012 e si è aumentata la complessità del modello trattato fino ad arrivare alla validazione dello stesso su un'ala completa di velivolo transonico in condizioni di aeroelasticità. La complessità del modello per l'ultimo caso di studio è estremamente elevata. Infatti non solo è stato preso in considerazione l'accoppiamento tra la deformabilità della struttura alare e i carichi su di essa applicati ma anche il campo transonico. Sono state studiate condizioni critiche relative ad angoli di incidenza aerodinamica e numeri di Mach elevati non compresi nell'involuppo di volo. Per questo caso di studio ci si è posti come obiettivo anche la ricostruzione della griglia di calcolo relativa all'ala deformata. La metodologia è stata studiata con spazio dei parametri mono e bi-dimensionale ottenendo risultati ottimi sia in termini di ricostruzione dei campi fluidodinamici e dei coefficienti aerodinamici C_L e $C_{D_{inv}}$ che, per il caso di studio di ala deformabile elasticamente, delle griglie di calcolo. Inoltre il metodo POD ha risposto in maniera accurata anche in termini di valutazione della presenza di un'onda d'urto o di visualizzazione di una zona di flusso separato attorno all'ala.

Per le applicazioni studiate è emerso che l'utilizzo di **RBF** (Radial Basis Function) permette di generare superfici di risposta che prendono in considerazione l'andamento locale dei dati. Agire sul parametro di forma che tiene conto della distanza dal centro preso in considerazione è fondamentale. E' grazie a questo parametro che è possibile agire sul peso che gli snapshots posti a distanze differenti hanno sull'interpolazione dei dati. E' stato inoltre dimostrato che per ricostruire accuratamente tutto il campo compreso nello spazio dei parametri è necessario avere due file di snapshots su ogni bordo: è all'interno di questa zona che il metodo produce risultati accurati. La distanza tra essi non è importante. Inoltre il numero degli snapshots utilizzati per l'interpolazione influenza molto la precisione dei risultati. Va dunque esaminato per ogni caso di studio il numero minimo di snapshots da utilizzare per giungere alla precisione desiderata.

Infine è importante notare che i valori assunti dai parametri utilizzati per il calcolo degli snapshots possono non essere equidistanti tra loro e il passo può cambiare notevolmente da un parametro all'altro. Al fine di interpolare i dati in maniera corretta è necessario normalizzare queste distanze per tutti i parametri. Nel nostro caso la normalizzazione è fatta tra zero e uno.

La POD acquista interesse in condizioni complesse in cui le simulazioni da effettuare per ottenere i campi desiderati richiedono tempi e potenze di calcolo elevati. Grazie alla POD infatti è possibile effettuare un numero limitato di simulazioni e ottenere, grazie all'interpolazione dei dati a disposizione, tutte le condizioni comprese nel campo dei parametri scelto. Di seguito viene riportata una tabella riassuntiva del tempo di calcolo necessario alla generazione del campo fluidodinamico tramite simulazioni effettuate mediante software di calcolo ad alta precisione e interpolazione per i tutti i casi bi-parametro analizzati al fine di valutare il risparmio di tempo ottenuto grazie all'utilizzo del metodo POD.

Simulazioni	Tempo [minuti]		
	Profilo alare	Ala completa rigida	Ala completa aeroelastica
Alta precisione	4	30	100
POD	0.25	0.5	1.5
Time Ratio	0.0625	0.0167	0.015

Tabella 5.1: Confronto tra i tempi di simulazioni relativi alle simulazioni ad alta precisione e POD

Si nota come il metodo POD nel caso di profilo NACA0012 è 16 volte più veloce, nel caso di ala completa rigida 60 volte più veloce mentre nel caso di ala completa deformabile elasticamente è 67 volte più veloce. Il guadagno in termini di tempo di calcolo ottenibile grazie all'utilizzo del metodo POD è estremamente elevato e aumenta all'aumentare della complessità del modello in quanto il tempo di calcolo necessario alla POD non aumenta significativamente all'aumentare della complessità del modello. I modelli surrogati generati in queste applicazioni possono essere utilizzati sia in fase di costruzione del database, si pensi al notevole risparmio in termini di potenza e tempo di calcolo rispetto a una costruzione basata solo su CFD o prove in galleria del vento, nonchè per le ricostruzioni di punti del database che per qualunque motivo vengano cancellati o corrotti.

E' importante notare che il modello surrogato non è costruito sulla base della fisica del problema, ma solo sui dati ottenuti dalle simulazioni e/o esperimenti effettuati; Infatti non sono state introdotte né ipotesi semplificative, derivate dalla fisica del problema trattato, né modellizzazioni fisico-matematiche nell'algoritmo di calcolo utilizzato, che è rimasto lo stesso per le varie applicazioni testate, anche se molto differenti fra di loro.

Il lavoro sviluppato apre nuovi orizzonti di ricerca sulle applicazioni trattate, principalmente in un'ottica di ottimizzazione del processo. I modelli surrogati sviluppati potrebbero quindi essere modificati o interfacciati ad altri modelli per ottenere:

- La ricostruzione dei campi fluidodinamici e i valori dei coefficienti di portanza C_L e resistenza C_D all'interno di uno spazio dei parametri fissato;
- L'individuazione di onde d'urto e zone di flusso separato sull'ala;
- Lo studio di fenomeni aeroelastici in vista di un dimensionamento strutturale;
- La ricostruzione delle griglie di calcolo in caso di ala deformata.

Appendici

Appendice A

Calcolo degli errori

Uno dei requisiti fondamentali quando si testa un metodo numerico, è quello di fornire una stima dell'accuratezza dei risultati ottenuti.

Durante lo svolgimento della tesi, l'accuratezza delle ricostruzioni effettuate, tramite l'applicazione del metodo POD, è stata valutata attraverso dei confronti ottenuti utilizzando delle soluzioni, a parità di input, derivanti dal simulatore fluidodinamico **UNS3D** di proprietà Alenia Aermacchi, con il quale si sono ottenuti anche tutti i dati relativi agli snapshot utilizzati.

Analizzando gli output derivanti dal simulatore CFD si riscontra che:

1. I dati sono suddivisi in array di dimensioni pari al numero di punti della griglia computazionale NS.
2. Ogni dato è normalizzato con un valore di riferimento che può essere impostato dall'utente: o in riferimento alla quota di volo o in riferimento a determinati valori di galleria.

Le variabili fluidodinamiche date in output sono:

- La densità del fluido ρ
- Il prodotto fra la densità e la componente di velocità lungo la direzione x, ρu .
- Il prodotto fra la densità e la componente di velocità lungo la direzione y, ρv .
- Il prodotto fra la densità e la componente di velocità lungo la direzione z, ρw .
- Il prodotto fra la densità e l'energia interna del fluido ρe .

I risultati forniti dal solutore sono però normalizzati attraverso l'utilizzo di:

- Una densità di riferimento ρ_{ref}
- Il prodotto fra la densità di riferimento e una velocità di riferimento $\rho_{ref} V_{ref}$
- Un energia di riferimento $\frac{3}{2} \frac{RT_{ref}}{\rho_{ref}}$, dove:
con R è indicata la costante universale dei gas pari a $R = 8314 \frac{J}{KgK}$ e con T_{ref} una temperatura di riferimento.

Per poter dare una stima più ampia degli errori commessi dai modelli surrogati generati dall'utilizzo del metodo POD, nelle ricostruzioni effettuate, si è scelto di determinare tali errori secondo tre tipologie differenti di calcolo:

Err. Massimo %: corrisponde al massimo fra gli errori effettuati in ogni singolo punto della griglia:

$$\max \frac{CFD_{value}(i, j) - POD_{value}(i, j)}{ref_i} \times 100 \quad \text{con } i = 1, \dots, 5 \quad j = 1, \dots, NS$$

dove con ref_i è indicata la quantità di riferimento del campo della variabile di cui si sta valutando l'errore.

Err. Quadratico %: corrisponde allo scarto quadratico medio totale, normalizzato rispetto alla media del campo:

$$\frac{\sqrt{NS \sum_{i=1}^{NS} (CFD_{value}(i) - POD_{value}(i))^2}}{\sum_{i=1}^{NS} CFD_{value}(i)} \times 100$$

Norma2 dell' Err. %: corrisponde alla norma di ordine 2, calcolata sull'intero campo:

$$\frac{\sqrt{\sum_{i=1}^{NS} (CFD_{value}(i) - POD_{value}(i))^2}}{NS} \times 100$$

E' utile infine fare alcune considerazioni in riferimento al calcolo dello scarto quadratico medio totale: esso verrà imposto uguale a zero nel caso in cui il numeratore di tale espressione sia troppo piccolo; inoltre se, durante gli studi in campo bidimensionale 2-D, il valore dell'errore risulta elevato per uno dei prodotti ρ_u , ρ_v , ρ_w , questo non è grave se quel prodotto fa riferimento alla componente di velocità del piano escluso, in quanto essa risulta nulla e quindi l'errore risulta essere molto grande avendo un numeratore dell'ordine dell'errore di macchina.

Appendice B

UNS3D: il codice CFD proprietario di Leonardo

Di seguito si riporta la descrizione delle caratteristiche del codice così come viene diffusa da Leonardo.

UNS3D
Proprietary CFD code of Leonardo
Outline Description
Prepared by: Nicola Ceresola – Leonardo

In the following, the flow solver and the turbulence model used at Leonardo are briefly described.

Code UNS3D

The solution algorithm is based on a finite volume, node centred approach operating on an unstructured grid. The integration of the fluxes on the cell surfaces is made on a segment basis; the solver can deal therefore without distinction with tetrahedra, hexahedra and prisms, even mixed to form hybrid grids.

The artificial dissipation model is derived from the nonlinear scheme of Jameson. In the sum of the contribution from each face, each dissipation term is multiplied by a factor related to the spectral radius of the inviscid operator in the direction of the corresponding integrated normal. No eigenvalue blending is applied.

The equations are integrated in time with a second order backward difference and the dual time stepping technique. The Navier-Stokes equations are integrated in time with a second order backward difference. The dual time stepping technique is adopted so that a time step much larger than the one based on minimum CFL can be employed.

A five stage Runge-Kutta scheme is used to drive toward zero the residual at each timestep. With the use of implicit residual averaging, a local CFL number of 4.9 could be employed in the five stage multistage subiteration process.

Either Navier-Stokes (viscous flow) or Euler (inviscid flow) models can be switched on for the computation.

ALE implementation:

The ALE (Arbitrary Lagrangian Eulerian) description is adopted, so that the motion of the fluid is considered in a fixed frame of reference, while the grid is moving.

Forced rigid rotations/oscillations along the 3 axes can be prescribed.

1DOF rigid rotation in roll is also allowed. The coupling between the computed aerodynamic moments and the motion of the model is accomplished with a second order scheme, where the corresponding equations of motion are solved at staggered time intervals with respect to the fluid dynamic equations. Examples of application are reported in [1]. Low Mach number preconditioning.

The Weiss and Smith version of low Mach number preconditioning is implemented in the code. For the computation of the present testcases, its application is necessary in case of low Mach flows in order to find a converged solution in a reasonable number of iterations. It is also necessary to introduce a sensor depending on cell Reynolds number to avoid applying the preconditioning inside viscosity-dominated flow regions.

CFD-CSM coupling:

Aero-elastic interaction can be taken in account coupling UNS3D with NASTRAN in the framework of codes AELSTAT/AELDYNA. Examples of application can be found in [2].

The $k - \omega$ - EARSM turbulence model

The length scale model:

A $k - \omega$ turbulence model was implemented, that have been developed by Hellsten [3]. The model equations are of similar form to Menter's SST model [4], but the model was recalibrated, with the requirements of consistent behaviour near the edges between turbulent and laminar flow, inside shear flows and zero pressure gradient wall flows. In particular, the calibration have been considered taking in account a variable c_{μ} , as it is the case if an algebraic stress model (EARSM) is included.

The constitutive model:

The Wallin-Johansson Explicit Algebraic Stress Model (WJ-EARSM) [5] is implemented using Hellsten's $k - \omega$ as the basis RANS model. The model has been obtained from DRSM neglecting the transport terms and expressing the anisotropy tensor as a second order tensor function of the mean velocity gradient and of the time scale. The anisotropy is then given its most general form making use of Cayley- Hamilton theorem and the resulting equation is solved algebraically for a_{ij} .

The full anisotropic version of the model is used, i.e. the anisotropic part of is introduced in the momentum equations, while the isotropic part is taken into account in the form of an effective c_{μ} .

streamline curvature correction:

To neglect the Reynolds stress transport terms implies not taking in account physical phenomena such as the effect of flow rotation on the turbulent field. To try to account for such an effect, the streamline curvature correction devised by Wallin and Johansson has been implemented in the model. The model can be optionally switched on in case the effect of streamline curvature is important, for example for vortical flows or for curved ducts (see e.g. [6]).

DES turbulence model (WJ-EARSM-Hellsten DES)

The methodology essentially consists into using $k-\omega$ - EARSM as a subgrid scale model for LES in the regions where the grid resolution is sufficiently fine, while URANS is employed in the rest of the domain [7]. The switch between URANS and LES zones is determined using the so-called DES length scale, defined to be the minimum between the characteristic URANS length scale and a length related to the local grid, times an appropriate scaling coefficient.

The modified length scale is also employed in the constitutive relations, to obtain the time scale τ used in the computation of eddy viscosity and also to normalize the vorticity and strain rate tensors.

It is worth to note that by this formulation, in LES regions the ω - equation has no influence, so that SGS model reduces effectively to a one-equation model. Examples of applications can be found in [8],[9].

Bibliography

1. L. Djayapertapa, N.Ceresola et al. "Time Accurate Methods" GARTEUR AD(AG38) Technical Report, June 2006.
2. J.-L. Hantrais-Gervois (1), D. Sawyers (2), N. Ceresola et al. "AG45 – Application of CFD to predict high g loads" - 47th Applied Aerodynamics Symposium, Paris, March 2012
3. Hellsten, A. "New Advanced $k - \omega$ Turbulence Model For High-Lift Aerodynamics", 42nd AIAA Aerospace Sciences Meeting and Exhibit, January 5 – 8, 2004, Reno, NV
4. Menter, F.R. "Two-Equation Eddy-Viscosity Turbulence Models for Engineering Applications". AIAA Journal, Vol. 32, No 8, August 1994.
5. Wallin, S. and Johansson, A.V., "An explicit algebraic Reynolds stress model for incompressible and compressible turbulent flows", J. Fluid Mech. Vol. 403, 2000, pp. 89-132.
6. Wallin, S. and Johansson, A.V., "Modelling streamline curvature effects in explicit algebraic Reynolds stress turbulence model", J. Heat and Fluid Flow, 2002

7. M. Shur, M. Strelets, A. Travin, "Detached Eddy Simulation (DES): General Description, Existing Versions, Constants Calibration, and Overview of Applications", FLOMANIA Deliverable no.D4.41-5, EEC Contract No. G4RD-CT-2001-00613, 2003.
8. R. Arina, N. Ceresola, "Numerical simulation of the aerodynamic flow field and radiated noise of a transonic cavity", European Conference on Computational Fluid Dynamics, ECCOMAS CFD 2006
9. T. Berens, M. Rein, A.M. Delot, N.Ceresola et al. "Numerical and Experimental Investigations on Highly Integrated Subsonic Air Intakes" AIAA Paper 2014-0722.

Appendice C

Profilo NACA0012

Il profilo **NACA0012** è un profilo bi-convesso simmetrico che fa parte della famiglia dei profili NACA a quattro cifre.

Le cifre vengono utilizzate per identificare le caratteristiche geometriche del profilo:

- La prima cifra rappresenta la freccia massima espressa in percentuale della corda.
- La seconda cifra indica la distanza, a partire dal bordo di attacco, dell'ascissa relativa al punto di freccia massima espresso in decimi della corda.
- La terza e la quarta cifra indicano il valore dello spessore massimo espresso in percentuale della corda.

Per il profilo NACA0012 lo spessore massimo sarà quindi pari al 12% della corda, mentre essendo le prime due cifre pari a zero il profilo non presenterà nessuna freccia.

Utilizzando la legge dello spessore dei profili NACA simmetrici a 4 cifre, è possibile tracciare qualunque profilo a 4 cifre:

$$y_s = 5s(0.29690\sqrt{x} - 0.12600x - 0.35160x^2 + 0.028430x^3 - 0.10150x^4)$$

Le variabili s , x e y_s rappresentano rispettivamente: lo spessore massimo del profilo, la i -esima coordinata longitudinale del profilo alla quale si sta facendo riferimento e lo spessore relativo a quella data ascissa x . Tutte le variabili contenute all'interno dell'espressione precedente sono adimensionalizzate rispetto alla lunghezza della corda c , così da svincolarsi dal valore della corda, che può cambiare in base alle esigenze di progetto, e definire così la relazione all'interno dell'intervallo $0 \leq x \leq 1$ con $s \leq 1$.

Di seguito viene riportata la curva data dalla relazione precedente che rappresenta il profilo NACA0012 con spessore massimo pari a $s = 0.12$, avendo imposto il valore della corda come unitario:

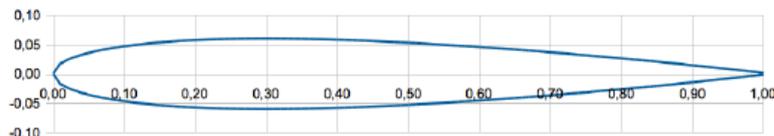


Figura 5.1: Visualizzazione del profilo NACA0012

Per completezza si riportano di seguito le caratteristiche aerodinamiche del profilo al variare del numero di Reynolds, reperite dal database aerodinamico del sito Airfoil Tools (www.airfoiltolls.com) al quale si rimanda per maggior dettaglio.

Plot	Airfoil	Reynolds #	Ncrit	Max Cl/Cd	Description
<input checked="" type="checkbox"/>	n0012-ii	50,000	9	25.7 at $\alpha=5^\circ$	Mach=0 Ncrit=9
<input checked="" type="checkbox"/>	n0012-ii	50,000	5	26.5 at $\alpha=5.5^\circ$	Mach=0 Ncrit=5
<input checked="" type="checkbox"/>	n0012-ii	100,000	9	36.7 at $\alpha=5^\circ$	Mach=0 Ncrit=9
<input checked="" type="checkbox"/>	n0012-ii	100,000	5	36.1 at $\alpha=5.5^\circ$	Mach=0 Ncrit=5
<input checked="" type="checkbox"/>	n0012-ii	200,000	9	47.4 at $\alpha=5^\circ$	Mach=0 Ncrit=9
<input checked="" type="checkbox"/>	n0012-ii	200,000	5	45.9 at $\alpha=5.5^\circ$	Mach=0 Ncrit=5
<input checked="" type="checkbox"/>	n0012-ii	500,000	9	61.7 at $\alpha=6.5^\circ$	Mach=0 Ncrit=9
<input checked="" type="checkbox"/>	n0012-ii	500,000	5	61.7 at $\alpha=7.5^\circ$	Mach=0 Ncrit=5
<input checked="" type="checkbox"/>	n0012-ii	1,000,000	9	75.6 at $\alpha=7.5^\circ$	Mach=0 Ncrit=9
<input checked="" type="checkbox"/>	n0012-ii	1,000,000	5	75.4 at $\alpha=8.5^\circ$	Mach=0 Ncrit=5

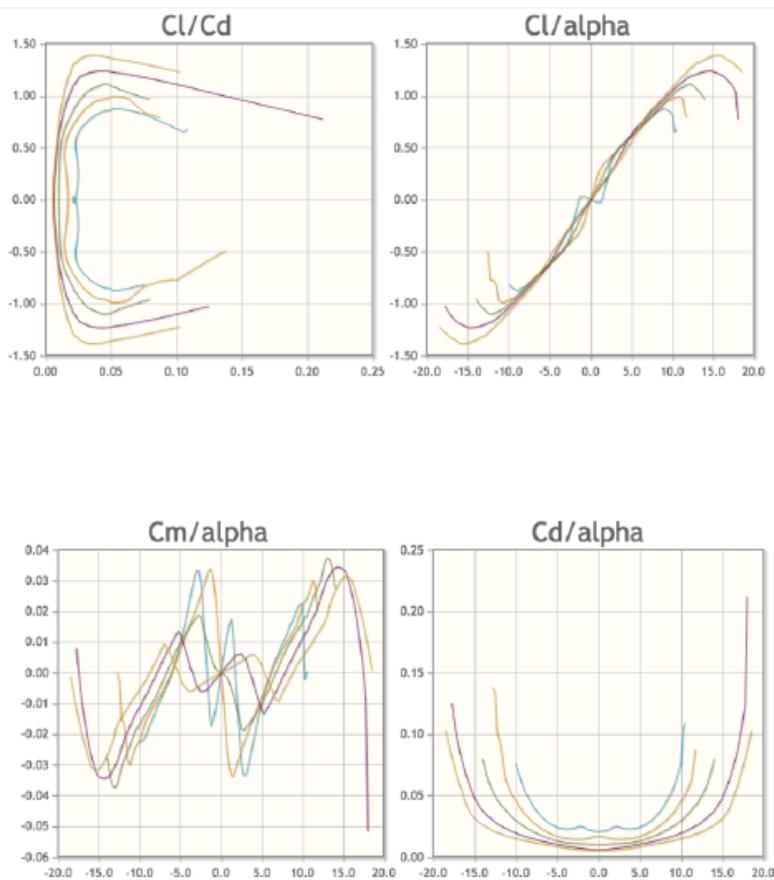


Figura 5.2: Polari aerodinamiche profilo NACA0012

NOTA:

Si ricordi che il **numero di Reynolds** è un valore adimensionale che indica, in fluidodinamica, il rapporto fra le forze di inerzia e le forze viscosi agenti sul fluido.

Esso permette di valutare se il flusso di scorrimento del fluido è in regime laminare (bassi valori di Reynolds), turbolento (alti valori di Reynolds) o di transizione (per i valori intermedi):

$$Re = \frac{\rho \langle u \rangle d}{\mu} = \frac{\langle u \rangle d}{\nu}$$

dove:

- Re = numero di Reynolds.
- $\rho [Kg m^{-3}]$ = densità del fluido.
- $\mu [Kg m^{-1} s^{-1}]$ = viscosità dinamica.
- $\nu [m^2 s^{-1}]$ = viscosità cinematica.
- $\langle u \rangle$ = velocità media delle particelle.
- d = grandezza geometrica di riferimento.

Appendice D

Static aero-elastic simulation (AELSTAT)

Di seguito si riporta la descrizione del processo di interazione fluido-struttura aeroelastico, proprietario di Leonardo, utilizzato per questo lavoro di tesi.

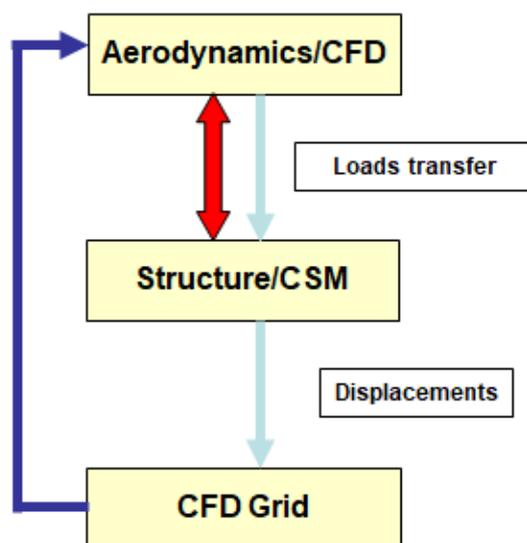
Model description:

The simulation process starts from the CATIA representation of the aerodynamic surfaces and from the corresponding NASTRAN model for the underlying structure.

After a CFD grid is created using a grid generation tool, a CFD computation (viscous or inviscid) is performed using the Leonardo proprietary CFD code UNS3D.

The resulting aerodynamic loads are transferred to the structural grid, by means of an auxiliary model linking the force components on surface CFD grid to integration patches related to a number of reference stations on the structural model. A NASTRAN run is then performed. The resulting deformations are expressed in modal form, with the variables corresponding to the coefficients of participation of the modes involved in the structural model. The displacements are then transferred to the nodes of the aerodynamic grid, and a surface deformation tool is used in order to correspondingly deform the aerodynamic grid on a/c surface. A grid deformation tool, based on the mass+spring analogy, is then used to get a modified grid for the next CFD run.

Typically 5 to 7 of such iterations are needed to reach convergence wrt the maximum structural displacement of the surface. In Fig. a scheme of the process is depicted.



Bibliografia

- [1] Renzo Arina, *POD Reduced-Order Model for Aeroacoustic Applications*, Turin
- [2] http://terpconnect.umd.edu/~jwelsh12/MATLAB/neuralnet/html/activation_script.html
- [3] Michael Mongillo, *Choosing Basis Functions and Shape Parameters for Radial Basis Function Methods*, 2001.
- [4] M. Mifsud, Dr. S.T. Shaw and Dr. D.G. MacManus, *Proper Orthogonal Reduced-order modelling for high-speed aerial weapon aerodynamics*, Cranfield University, 2008.
- [5] E. De Giorgi, I minimi quadrati <http://www.dmf.unisalerno.it>, Università di Salerno, fisica moderna.
- [6] R.H. Myers, D.C. Montgomery, C. M. Anderson-Cook, *Response Surface Methodology*, WILEY, 2009.
- [7] E. De Giorgi, *I minimi quadrati* <http://www.dmf.unisalerno.it>, Università di Salerno, fisica moderna.
- [8] S. Berrone, S. Pieraccini, *Data and function approximation*, Politecnico di Torino, Dipartimento di Scienze Matematiche, 2012.
- [9] G. Bindolino, P. Mantegazza e P. Masarati, *Aeroelasticità Applicata*, Politecnico di Milano, 2001.
- [10] Collar, A. R., *The first fifty years of aeroelasticity*, *Aerospace*, vol. 5, no. 2, pp. 12-20, 1978
- [11] <https://it.wikipedia.org/wiki/Aeroelasticità>