

POLITECNICO DI TORINO

Corso di Laurea Magistrale in Ingegneria Aerospaziale

Tesi

**Dinamica instazionaria di un ugello supersonico
con Shock Vector Control**



Relatore:
Michele Ferlauto

Candidato:
Simone Rizzo

Marzo 2018

Sommario

La tesi in oggetto ha come obiettivo lo studio del *Thrust Vectoring* mediante l'impiego dello *Shock Vector Control (SVC)*. Tale lavoro è stato svolto adottando, come modello numerico, quello delle *URANS (Unsteady Reynolds Averaged Navier – Stokes Equations)*, assieme al modello turbolento ad un'equazione di *Spalart – Allmaras*.

Tutte le simulazioni effettuate sono state eseguite su di un ugello a geometria fissa, analizzando il comportamento al variare del rapporto di espansione. Proprio sulla base di quest'ultimo parametro si è studiato come l'ugello risponde alla tecnica dello *SVC*, e si è trovata una biforcazione nel suo funzionamento, individuando una regione dove il flusso è stabile e un'altra dove non lo è.

Di principale interesse sono risultate le configurazioni stabili, le quali sono state studiate allo scopo di capire se vi è o meno la possibilità di implementare un sistema di controllo attivo.

Indice

Sommario	3
1 Vettorizzazione della spinta	6
1.1 Stato dell'arte	6
1.1.1 Mechanical Thrust Vectoring	7
1.1.2 Fluidic Thrust Vectoring	7
1.2 Shock Vector Control	10
1.2.1 Tipologie di SVC	11
1.3 Interazione tra flusso principale e getto secondario	12
2 Modello numerico	15
2.1 Caratteristiche del modello	15
2.1.1 Equazioni del fluido	15
2.1.2 Il modello turbolento	17
2.1.3 Condizioni di interfaccia tra il getto secondario e il flusso principale	18
2.2 Determinazione delle linee caratteristiche	19
2.2.1 Schemi up-wind	21
2.2.2 L'approccio di Godunov	22
2.3 Condizioni al contorno	34
3 Caso di studio	36
3.1 Analisi del problema	36
3.1.1 Dimensioni dell'ugello	37
3.1.2 Griglia computazionale	38
3.2 Risultati generali	40
3.2.1 NPR=2	40
3.2.2 NPR=4.6	49
3.3 Spinta assiale	53
3.3.1 NPR=2	53
3.3.2 NPR=4.6	56
4 Condizioni di forte sovraespansione	58
4.1 Condizione a impulso	58
4.1.1 NPR=3	59
4.1.2 NPR=4	61
4.2 Condizione iniziale non simmetrica	62
4.2.1 NPR=3	62
4.2.2 NPR=2.7	63
4.2.3 NPR=2.5	64
4.2.4 NPR=2.3	65
4.2.5 NPR=2.2	66
Conclusioni	67
Bibliografia	69

Capitolo 1

Vettorizzazione della spinta

Lo studio della vettorizzazione della spinta (*Thrust Vectoring*) nasce da un bisogno sempre maggiore di aumentare le prestazioni del velivolo senza andare ad incrementare il suo peso.

In tale ambito si sono svolti passi avanti in campo militare; mentre per velivoli civili, dove le dimensioni sono decisamente significative e le possibilità di manovre più limitate, non ci sono casi di studio. In ogni caso, comunque, è necessario intervenire sui propulsori, e in modo particolare nei loro ugelli, rendendoli più complessi dal punto di vista della geometria (anche se non sempre), ma soprattutto dal punto di vista del controllo.

L'obiettivo è quello di variare la direzione della spinta, che non sarebbe più solo assiale, in modo da generare componenti in altre direzioni, le quali produrranno un momento richiesto nei piani latero-direzionale e longitudinale del velivolo. Così facendo sarebbe possibile ridurre le dimensioni delle superfici aerodinamiche, o in alcuni casi rimuoverle, ottenendo delle nette migliorie in termini di manovrabilità. Infatti si potrebbero eseguire delle manovre molto complicate, come ad esempio quelle riportate in figura 1.1.

Avere superfici aerodinamiche ridotte causa anche una minore resistenza all'avanzamento del velivolo, la quale aumenta con il quadrato della velocità.

Si tratta dunque di una tecnologia che presenta diversi vantaggi per i velivoli moderni, tra cui spicca la possibilità di controllare il velivolo anche in situazioni di stallo e post-stallo, le quali sono altamente critiche a causa della perdita sempre crescente di efficienza delle superfici.

1.1 Stato dell'arte

Ci sono diverse tipologie di adozione del *Thrust Vectoring*. Le più diffuse sono:

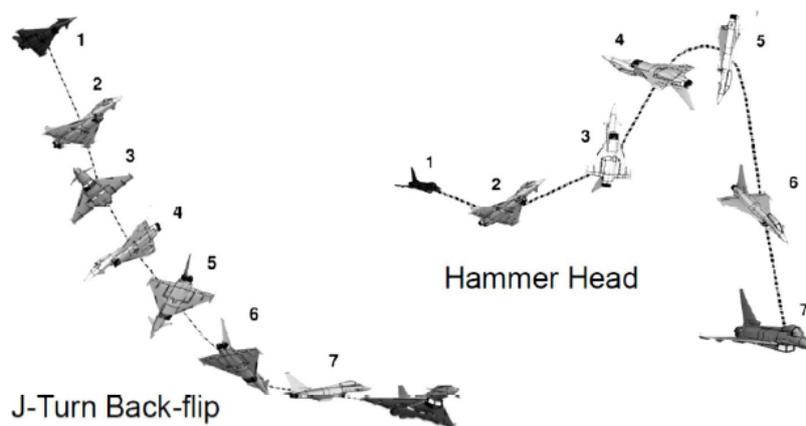


Figura 1.1: Esempio di manovre realizzabili con il Thrust Vectoring (cortesemente da [13]).



Figura 1.2: Esempio di ugelli orientabili.

- MTV (*Mechanical Thrust Vectoring*)
- FTV (*Fluidic Thrust Vectoring*)

1.1.1 Mechanical Thrust Vectoring

Questa vettorizzazione della spinta richiede la presenza di complessi organi meccanici atti a dover modificare la geometria dell'ugello, in modo che la spinta sia obbligata a variare così la propria direzione assiale.

Tale tecnologia è stata utilizzata per diversi velivoli, come il Sea Harrier FA2 ZA 195 e l'F16 MATV, oppure per velivoli più moderni come l'F15 SMTD, l'F18 HARV, l'F22 Raptor e l'F35. In parole semplici si vuole rendere l'ugello multiassiale, cercando di ridurre sempre più la dipendenza del sistema propulsivo con gli angoli d'attacco e di imbardata.

In generale, la MTV viene applicata secondo due approcci differenti:

- Il primo richiede l'utilizzo di *jet vanes*, palette fisse e mobili o spoiler nella regione d'uscita dei gas per modificare la direzione del flusso principale, quindi della spinta.
- Il secondo richiede la deflessione di alette divergenti nell'ugello o l'inclusione di articolazioni per cambiare la direzione della spinta meccanicamente (figura 1.2).

Ci sono però degli svantaggi per quanto riguarda questa tecnica:

- Complessità nel rilevare e controllare continuamente l'angolo di vettorizzazione in base alle condizioni di volo.
- Aumento di peso, costi e complicazioni realizzative legati agli attuatori meccanici (per esempio serve monitorare costantemente l'elevata temperatura a cui sono soggetti i vari componenti).
- Aumento in termini di resistenza causato dai componenti mobili esterni.
- Necessità di una maggiore manutenzione.

1.1.2 Fluidic Thrust Vectoring

Adesso si vuole trattare una diversa tipologia, la quale è stata inizialmente studiata per ovviare allo sgradevole problema di aggiungere del peso a causa dell'implementazione dei sistemi meccanici del MTV.

A tal proposito si è sviluppata una ricerca alternativa basata sul concetto di variare la direzione della spinta senza l'ausilio di alcuna modifica della geometria dell'ugello: si tratta della vettorizzazione di tipo fluidico (FTV).

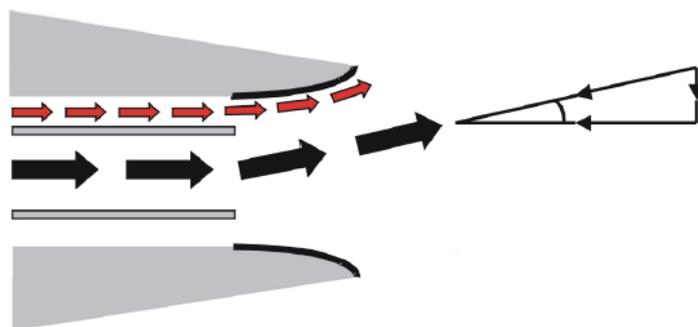


Figura 1.3: Schema del metodo Co-Flow.

Il punto chiave è, chiaramente, sempre una deflessione del flusso principale, ma stavolta adottando un getto secondario introdotto in una determinata posizione all'interno dell'ugello. Suddetta tecnologia, così proposta, presenterebbe diversi vantaggi, tra cui spicca subito una variazione di peso quasi nulla, ma anche una migliore integrazione dell'ugello con il resto della struttura, grazie alle sue caratteristiche geometriche fisse. Proprio l'immobilità di questo, permette alle superfici mobili di non essere esposte direttamente alle alte temperature dei gas in uscita. Vediamo ora il rovescio della medaglia di questa tecnica:

- Necessità di una sorgente di flusso secondaria (comunemente si tratta di uno spillamento da uno stadio del compressore).
- Minori capacità di cambiamento (minor angolo) della direzione della spinta rispetto al sistema meccanico.

Si può vedere che, nonostante presenti pochi svantaggi, il FTV garantisce prestazioni globalmente inferiori al MTV. Si tratta comunque di una brillante metodologia inserita all'interno di un campo di ricerca ancora molto valido.

C'è da premettere che ambedue le tecniche danno sempre migliori prestazioni nelle condizioni di post-stallo, minori distanze di decollo (e atterraggio) e una migliore agilità nelle manovre di combattimento.

Di seguito si riportano le principali tipologie di vettorizzazione fluidica.

Metodo Co-Flow

Tale tecnica sfrutta un fenomeno chiamato effetto Coanda, ovvero la tendenza di un fluido ad aderire alla parte convessa di una superficie solida.

Il getto secondario è immesso lungo il lato di deflusso del primario, in modo che, accelerando, generi un locale abbassamento della pressione con lo scopo di portare alla deflessione del flusso primario (figura 1.3).

Si tratta di un metodo che è migliorato nel tempo, portando ad una riduzione delle perdite di pressione dovute proprio all'effetto Coanda.

Metodo Counter-Flow

Sostanzialmente si tratta di riprendere la tecnica precedente, quindi anche qui ci si basa sull'effetto Coanda, ma in questo caso il flusso secondario agisce controcorrente rispetto al flusso principale: ciò è ottenuto generando il vuoto nella parte avvolta dal collo d'aspirazione vicino al flusso primario a valle del divergente (figura 1.4).

All'interno del collo non avviene trascinarsi di massa, e il flusso vicino ad esso accelera, causando una caduta di pressione e dirigendosi verso la zona a pressione minore.

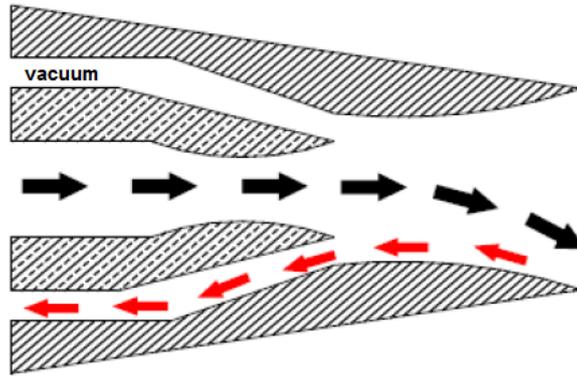


Figura 1.4: Schema del metodo Counter-Flow.

Il collo e gli slot d'aspirazione devono avere dimensioni ridotte per evitare un forte aumento in peso e resistenza del velivolo.

I dati riguardanti la pressione agente sono ottenuti, alle condizioni di progetto, con flusso uscente supersonico o, in condizioni di fuori progetto, con ugello in scala ingrandito. E' importante osservare che un piccolo flusso secondario può generare una considerevole deflessione; inoltre non è soggetto a grandi problemi di stabilità, ma dà comunque delle problematiche, quali, ad esempio, effetti d'isteresi.

L'instabilità compare in determinate condizioni e con varie configurazioni geometriche del collo d'aspirazione [14].

Questo metodo e quello precedente (*Co-Flow*) risulterebbero come i più adatti a livello teorico, ma non sono facilmente integrabili con il resto della struttura a causa delle complessità legate al condotto supplementare laterale.

Metodo Dual-Throat

Questo metodo utilizza un sistema che prevede l'iniezione del getto secondario in prossimità della gola. L'obiettivo è quello di deviare la linea sonica e deflettere così il flusso primario.

Tale iniezione ha anche l'effetto di "cambiare" le dimensioni della gola da un minimo geometrico ad uno aerodinamico. In questo modo, la deviazione del flusso avverrà nella regione subsonica antecedente alla nuova gola (come si evince dalla figura 1.5). Sempre dalla figura, si possono notare dei vortici creatisi dove la separazione dello strato limite diventa più marcata. Ciò porta alla generazione anche di bolle di ricircolazione, le quali fanno sì che una parte del flusso, per un fenomeno di bloccaggio solido vero e proprio, si espanda maggiormente verso la parete superiore costringendo il resto a comprimersi, ottenendo globalmente una deflessione non molto marcata, quindi limitando le manovre realmente effettuabili dal velivolo. Tale ragionamento è ovviamente lo stesso qualora si iniettasse dall'alto.

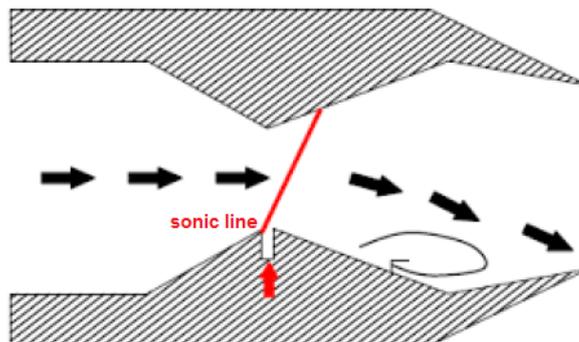


Figura 1.5: Schema del metodo Dual-Throat.

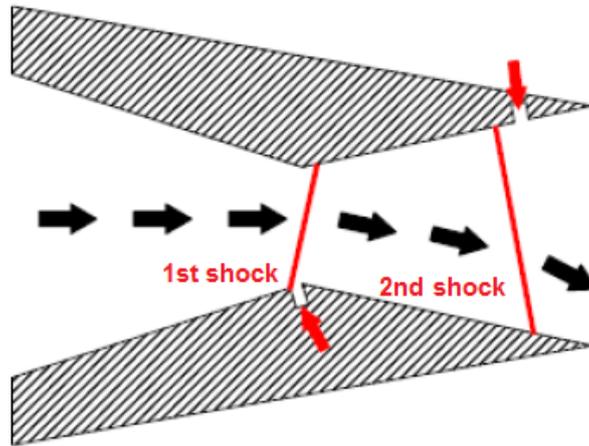


Figura 1.6: Schema di una vettorizzazione combinata.

In generale si tratta comunque di un metodo che prevede alte efficienze di spinta e una struttura abbastanza semplice da realizzare.

Metodo della vettorizzazione combinata

In alcuni casi è possibile combinare diverse tecniche di vettorizzazione in modo da ottenere migliori prestazioni. Ad esempio si può pensare di porre due diversi getti secondari in maniera opposta, uno all'altezza della gola e un altro nella parte divergente dell'ugello. In questo modo si potrebbe disporre di una deflessione del flusso molto considerevole, grazie alla presenza di due diversi urti obliqui in corrispondenza dei due getti (figura 1.6). Ovviamente a parole sembra una tecnica semplice, ma nella parte pratica risiedono non pochi problemi realizzativi e di controllo del sistema. In particolare, per il caso rappresentato in figura 1.6, sorgerebbero delle difficoltà non da poco nel gestire il flusso tra l'immissione del getto alla sezione di gola e quella nella parte divergente.

1.2 Shock Vector Control

Dopo avere analizzato brevemente i principali tipi di vettorizzazione, si va a trattare quello che sarà implementato nel caso di studio oggetto di questa tesi, il quale non prevede l'impiego di tecniche di variazione della geometria dell'ugello, bensì sfrutta l'immissione, a valle della gola, quindi nella sezione divergente, di un flusso secondario. L'interazione che si genera provoca un urto obliquo, in quanto il getto secondario agisce a tutti gli effetti come una rampa, provocando perciò una compressione della corrente.

Il risultato risiede ovviamente in una variazione della direzione della spinta, cioè l'obiettivo richiesto, siccome il flusso principale, una volta attraversato l'urto, si allontana dall'asse longitudinale.

Tale tecnica garantisce migliori efficienze in condizioni di volo fuori progetto, ottenendo anche maggiori angoli di vettorizzazione rispetto ad altri metodi.

Il rovescio della medaglia risiede però in un calo della spinta assiale, che è uno dei problemi principali riscontrati. L'urto obliquo potrebbe anche causare una perdita notevole nel caso in cui andasse a incidere sulla parte opposta dell'ugello, dove rifletterebbe, provocando una ricomprensione più forte.

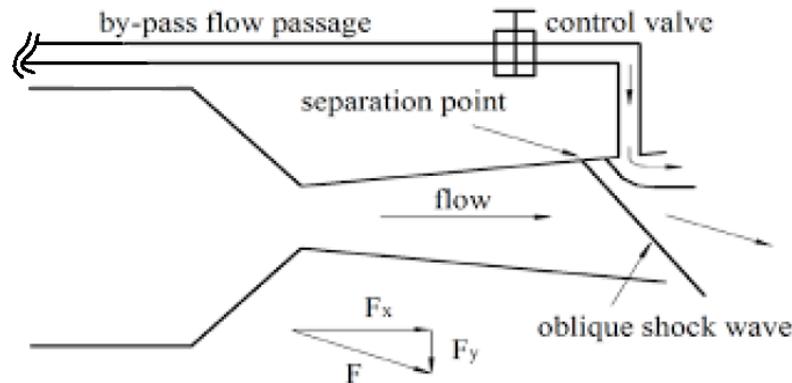


Figura 1.7: SVC con tecnica di bypass.

In figura 1.7 si può vedere una semplice schematizzazione della tecnica dello *Shock Vector Control* adottando come alimentazione del flusso secondario uno spillamento d'aria dal compressore. Solitamente si considera che gli slot di iniezione vengano posti nei pressi della sezione d'uscita del condotto divergente.

L'urto stesso che si viene a manifestare, oltre a generare asimmetria nel flusso, può subire un debole distacco dovuto alla separazione dello strato limite e alla regione di riattaccamento, accompagnata da una ricomprensione a valle del getto secondario.

E' opportuno considerare che le condizioni stazionarie sono più difficili da raggiungere per pressioni dell'ambiente sempre più basse, a causa principalmente del cambiamento delle proprietà del flusso a cavallo dell'onda d'urto.

Le caratteristiche fondamentali che bisognerà tenere in considerazione saranno:

- Posizione del getto secondario all'interno dell'ugello (e numero dei getti).
- Angolo di interazione del getto.
- Caratteristiche del getto secondario.

1.2.1 Tipologie di SVC

Essenzialmente si possono identificare due tipologie di *Shock Vector Control*:

- Getto singolo.
- Getti multipli.

Getto singolo

In questo caso l'interesse primario è quello di gestire al meglio le performance, costruendo il sistema in modo tale che vengano massimizzati gli angoli di vettorizzazione della spinta senza generare onerose perdite della stessa.

Getti multipli

Il concetto di base è ora invece massimizzare la deflessione del flusso senza aumentare la portata all'interno del canale del getto secondario, bensì inserendone un altro. Così il primo urto obliquo sarà a monte del primo getto, mentre il secondo sarà tra i due getti se sono posti sullo stesso lato e in sequenza. In questa situazione si avrà una crescita della capacità di vettorizzazione, in quanto sono presenti due onde d'urto che permettono doppia rotazione della direzione della spinta, ma sarà necessario tenere sotto controllo alcuni parametri relativi all'ugello e ai getti secondari.

Al di sopra di certi valori del rapporto di espansione dell'ugello, questa configurazione a getti multipli non riceve più i benefici di vettorizzazione richiesti, e quindi diventa inutilizzabile: in

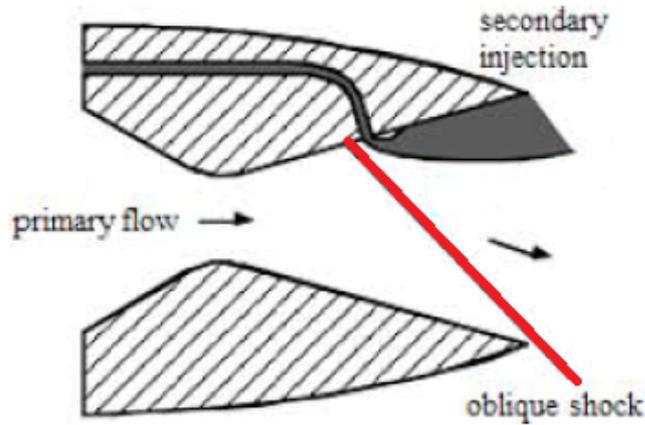


Figura 1.8: SVC con getto singolo.

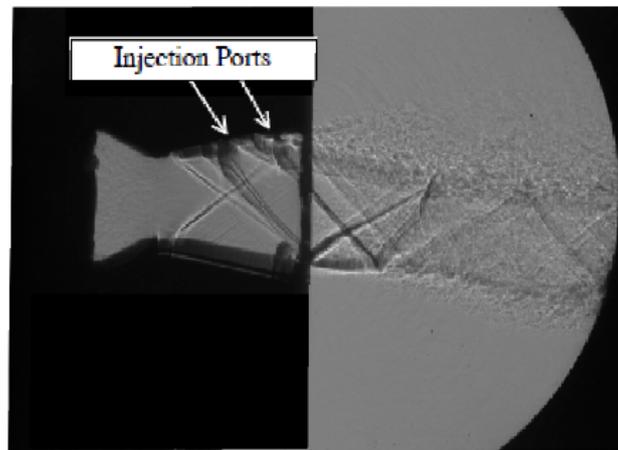


Figura 1.9: Visualizzazione di SVC mediante getti multipli [1].

tali casi è consigliato l'utilizzo del getto singolo [1].

La configurazione migliore, e anche più semplice, sarebbe quella che garantisce all'onda d'urto di toccare il punto esterno del labbro del lato opposto a dove è posizionato il getto secondario. Ciò darebbe la minor perdita possibile, in quanto l'urto non verrebbe riflesso in alcun modo all'interno dell'ugello. A questo punto lo studio verrà fatto sulla gestione dei parametri del getto primario (Mach a monte) e del getto secondario (portata d'aria immessa) tali che garantiscano questa condizione.

1.3 Interazione tra flusso principale e getto secondario

In precedenza sono stati effettuati studi utilizzando un getto secondario in relazione ad una lamina piana, semplificando così di molto il problema rispetto a lavorare su un ugello, siccome non si ha un gradiente di pressione. L'obiettivo è sempre analizzare il fenomeno di controllo dell'onda d'urto, in modo da estendere poi la soluzione, se possibile, ad una applicazione in ambito aeronautico (ovvero schematizzare quello che accade effettivamente dentro ad un ugello). Dei risultati concreti sarebbero anche graditi sul tema della combustione supersonica (ancora oggi parecchio indietro per quanto riguarda un suo sviluppo realistico), infatti si richiedono tecniche sempre più avanzate per risolvere i vari problemi legati all'iniezione di combustibile all'interno di un combustore supersonico.

Di seguito è possibile vedere un'immagine del caso di studio di una lamina piana e relativo andamento della pressione.

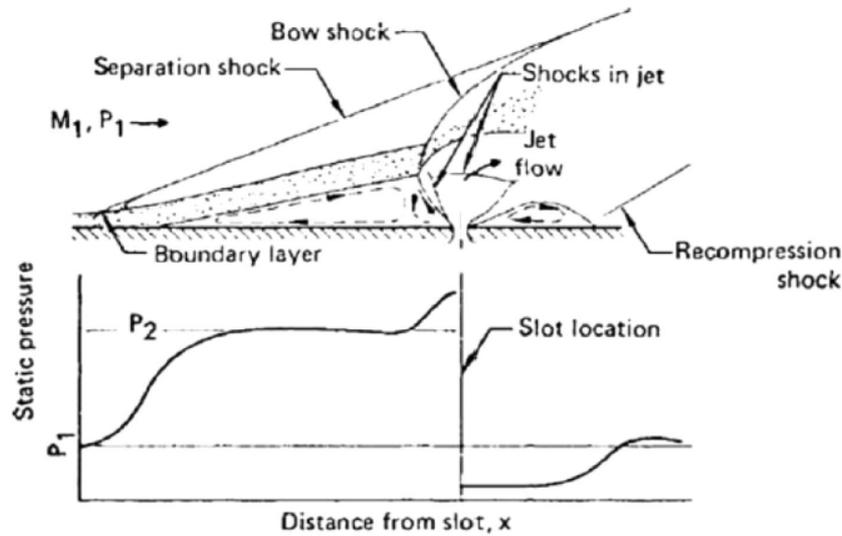


Figura 1.10: Lamina piana con implementazione di un getto secondario.

Come si può notare in figura 1.10, anche se solo per una lamina piana, il campo di moto risulta molto complesso, pertanto non è facile determinare gli effetti di forze e momenti che si vengono a manifestare.

Ciò che è mostrato vale in tutte le applicazioni in cui è attuata la vettorizzazione della spinta: quando un gas è iniettato perpendicolarmente al flusso principale, si genera un'ostruzione ad esso, producendo una forte onda d'urto. Questa interagisce con lo strato limite a parete formando, così, un campo di moto difficile da analizzare, dove si vogliono cercare di comprendere le regole che segue.

Una correlazione dei dati ottenuta da esperimenti, con uno slot del getto secondario di larghezza finita, dimostra che l'altezza effettiva di penetrazione e la larghezza dello slot sono dimensioni caratteristiche importanti di ogni campo di moto. Inoltre, la complessa interazione tra i due flussi è accompagnata da una regione ad alta pressione vicina all'uscita dell'ugello, la quale rappresenta una sorgente di forze che vanno a modificare la spinta mediante cui viene immesso il getto.

In generale, comunque, si cerca di studiare ogni caso in modo da ridurre il più possibile effetti dovuti alla tridimensionalità dello stesso, infatti l'ugello assialsimmetrico esaminato verrà considerato anche bidimensionale.

Proprio all'interno, l'onda d'urto che si crea a monte dello slot d'iniezione, porta a ruotare il getto secondario fino a che diventi parallelo alla parete [8]. In altre parole, a causa della sua stessa presenza, come anche prevedibile, si manifesta una restrizione del flusso principale più significativa, quindi più grande di quella provocata dallo strato limite presente nel caso indisturbato (senza getti).

La separazione dello strato limite è un parametro rilevante e molto importante ai fini dello studio sulle interazioni nel campo di moto. In alcuni casi si è anche provato a semplificare ulteriormente, pensando ad un modello con la presenza di un gradino all'altezza del getto: così facendo, il campo di moto generato risulta quasi invariato, escludendo però la regione immediatamente vicina al gradino o al getto. L'altezza di tale gradino e la distanza di penetrazione sarebbero adattate in modo che la lunghezza della regione di separazione sia approssimativamente la stessa [9].

Il getto secondario, ostruendo quello primario, genera una pseudo-rampa che varia con un angolo a seconda del numero di Mach e della portata; mentre la pressione raggiunge, nella regione stazionaria, il valore corrispondente a quello relativo della situazione di flusso inviscido ruotato per quell'angolo.

Un ultimo fattore di notevole importanza riguarda il definire una semplice forma per rappresentare la divisione aerodinamica tra il flusso secondario e quello principale. A tal proposito si è notato che quando la transizione avviene nel piano di taglio tra il punto di separazione e il getto, si riscontra lo stesso valore delle forze di interazione che ci si aspetta nel caso pienamente turbolento, e anche la pressione statica immediatamente a monte del getto è approssimativamente la stessa. Questo porta a dire che la dimensione della struttura locale del flusso e l'altezza di penetrazione sono le stesse.

Conseguentemente, la crescita della pressione statica sulla parete nella regione di separazione è proporzionale all'angolo di rotazione locale del flusso esterno (inviscido): ciò mostrerebbe che la forza totale a monte del getto è grossomodo indipendente dalla distribuzione dell'angolo di rotazione del flusso esterno o dalla pressione statica a parete, fissata però una distanza dello slot del getto secondario.

Le considerazioni fatte finora sono state validate grazie allo studio effettuato da Zukosky in [10]. La forte conclusione dell'articolo riguarda il fatto di evidenziare uno spostamento del punto di separazione in funzione della pressione totale del getto secondario.

Capitolo 2

Modello numerico

In questo capitolo verranno illustrate le equazioni e le ipotesi che governano il modello atto a simulare il caso in esame, quindi flussi (viscosi e compressibili) con alte velocità e alti numeri di Reynolds.

Si tratta del modo attualmente più comune, ovvero risolvere le equazioni di *Navier – Stokes* mediate alla Reynolds (RANS, *Reynolds Averaged Navier – Stokes Equations*) assieme ad un modello di turbolenza. Quest'ultimo è quello di *Spalart – Allmaras* [3], il quale si basa sull'idea di adottare un tipo di equazione di trasporto che sia "locale". Tale assunzione ha il vantaggio di non essere caratterizzata da molte restrizioni, in modo da poter facilmente lavorare su problemi relativi a flussi complessi.

Si è quindi implementato il modello di turbolenza scelto con una metodologia numerica sviluppata per risolvere configurazioni di flusso assialsimmetriche 2D [4].

2.1 Caratteristiche del modello

L'approccio numerico utilizzato si basa sull'integrazione nel tempo delle equazioni di Navier-Stokes complete, dove il dominio fisico è discretizzato con una tecnica ai volumi finiti. Invece, per quanto riguarda la parte convettiva delle equazioni, si è adottato un modello alle differenze finite mediante una soluzione approssimata del problema di Riemann per ogni interfaccia di cella [5].

I termini diffusivi, infine, sono calcolati con uno schema centrato, il quale sarà descritto nel dettaglio successivamente.

2.1.1 Equazioni del fluido

Le equazioni espresse in forma differenziale hanno validità solo in assenza di discontinuità, e risulterebbero pertanto inutilizzabili in un campo di moto supersonico, dove c'è la presenza di urti, ovvero di discontinuità nelle grandezze fisiche (velocità, pressione, densità, temperatura). Serve allora una forma integrale, siccome l'operatore di integrazione è ovunque definito quando si impone la conservazione di massa, quantità di moto ed energia all'interno di un volume arbitrario.

Tutto il set di equazioni viene scritto nella seguente forma compatta integrale conservativa,

$$\frac{\partial}{\partial t} \int_{\mathcal{V}} \vec{W} d\mathcal{V} + \int_{\mathcal{S}} \vec{F}_I \cdot \hat{n} d\mathcal{S} + \int_{\mathcal{S}} \vec{F}_V \cdot \hat{n} d\mathcal{S} = \int_{\mathcal{V}} \vec{H} d\mathcal{V} \quad (2.1)$$

dove i vari parametri sono ora meglio identificati:

- \mathcal{V} è il volume arbitrario racchiuso da una superficie \mathcal{S} ;
- \vec{W} è il vettore delle variabili conservative;
- \vec{F}_I è il tensore che contiene i termini relativi ai flussi inviscidi;

- \vec{F}_V è il tensore che contiene i termini relativi ai flussi viscosi;
- \vec{H} è il tensore che contiene le parti non omogenee dell'equazione a causa della presenza di un modello turbolento.

E' necessario ridurre adesso tutte le equazioni ad una forma adimensionalizzata, in quanto il codice di calcolo può lavorare solo con numeri puri e non grandezze.

Si considereranno le seguenti grandezze ai fini dell'adimensionalizzazione:

- L per la lunghezza dell'ugello;
- ρ_∞ per la densità del flusso a monte indisturbato;
- T_∞ per la temperatura del flusso a monte indisturbato;
- $\sqrt{RT_\infty}$ per la velocità;
- RT_∞ per l'energia per unità di massa.

Si riscrivono ora più nel dettaglio i termini espressi nell'equazione (2.1):

$$\begin{aligned}
\vec{W} &= \{\rho, \rho\vec{q}, E, \tilde{\nu}_t\}^T \\
\vec{F}_I &= \left\{ \rho\vec{q}, p\bar{I} + \rho\vec{q} \otimes \vec{q}, (E + p)\vec{q}, \tilde{\nu}_t\vec{q} \right\}^T \\
\vec{F}_V &= \frac{\sqrt{\gamma M_\infty}}{Re_\infty} \left\{ 0, -\bar{\tau}, -\kappa\nabla T - \bar{\tau} \cdot \vec{q}, -\frac{\nu + \tilde{\nu}_t}{\sigma} \nabla \tilde{\nu}_t \right\}^T \\
\vec{H} &= \{0, 0, 0, Q(\tilde{\nu}_t)\}^T
\end{aligned} \tag{2.2}$$

dove

- ρ è la densità;
- p è la pressione;
- $\vec{q} = \{u, v, w\}^T$ è il vettore velocità;
- $E = \rho(e + q^2/2)$ è l'energia totale per unità di volume;
- M_∞ è il numero di Mach del flusso a monte indisturbato;
- Re_∞ è il numero di Reynolds del flusso a monte indisturbato;
- γ è il rapporto tra i calori specifici a pressione e volume costante.

Il termine Q verrà analizzato successivamente.

Gli stress viscosi sono contenuti in

$$\tau_{ij} = (\mu + \mu_t) \left[\frac{\partial q_j}{\partial x_i} + \frac{\partial q_i}{\partial x_j} - \frac{2}{3} (\nabla \cdot \vec{q}) \delta_{ij} \right] - \overline{\rho q_i'' q_j''} \tag{2.3}$$

con $\overline{\rho q_i'' q_j''}$ che indicano gli stress di Reynolds modellati in accordo con l'approssimazione di Boussinesq, infatti è necessario trattare un termine di viscosità modificata come somma anche di $\mu_t = \rho\nu_t$ relativa al turbolento.

La viscosità dinamica laminare (μ), invece, è calcolata con la formula di Sutherland (dove però si ricorda che la temperatura T è sempre adimensionalizzata):

$$\mu(T) = T^{3/2} \left(\frac{1 + T_{\text{ref}}}{T + T_{\text{ref}}} \right) \quad T_{\text{ref}} = \frac{110,4 \text{ K}}{T_\infty [K]} \tag{2.4}$$

Da essa è possibile calcolare la conduttività termica

$$\kappa = \frac{\gamma}{\gamma - 1} \left(\frac{\mu}{Pr} + \frac{\mu_t}{Pr_t} \right) \tag{2.5}$$

dove si sono identificati i numeri di Prandtl nel caso laminare (Pr) e turbolento (Pr_t).

Infine completa il set di equazioni la relazione dei gas perfetti

$$p = \rho RT$$

la quale, per il modello di turbolenza in questione, è risultata valida secondo [6].

2.1.2 Il modello turbolento

Il modello in questione (*Spalart – Allmaras*) tratta il termine di viscosità turbolenta modificata ($\tilde{\nu}_t$) relazionata come

$$\mu_t = \rho \tilde{\nu}_t f_{\nu 1}, \quad \chi \equiv \frac{\tilde{\nu}_t}{\nu} \quad (2.6)$$

L'espressione di Q è la seguente:

$$Q = c_{b1} \tilde{S} \tilde{\nu}_t - \frac{\sqrt{\gamma} M_\infty}{\text{Re}_\infty} \left[c_{w1} f_w \left(\frac{\tilde{\nu}_t}{d} \right)^2 + \frac{c_{b2}}{\sigma} (\nabla \tilde{\nu}_t)^2 \right] \quad (2.7)$$

dove il primo e il secondo termine rappresentano la produzione e la distruzione di $\tilde{\nu}_t$. Il terzo termine è invece chiamato "termine di diffusione" del primo ordine. L'ampiezza della vorticità modificata risulta essere

$$\tilde{S} = S + \frac{\sqrt{\gamma} M_\infty}{\text{Re}_\infty} \frac{\tilde{\nu}}{\kappa^2 d^2} f_{\nu 2} \quad (2.8)$$

con l'ampiezza della vorticità espressa come

$$S = \left| \frac{\partial v}{\partial x} - \frac{\partial u}{\partial y} \right|$$

dove d rappresenta la distanza dalla parete più vicina. Occorre ancora definire le funzioni $f_{\nu 1}$ e $f_{\nu 2}$ come di seguito:

$$f_{\nu 1} = \frac{\chi^3}{\chi^3 + c_{\nu 1}^3}, \quad f_{\nu 2} = 1 - \frac{\chi}{1 + \chi f_{\nu 1}} \quad (2.9)$$

Il termine distruttivo, invece, contiene la funzione

$$f_w = g \left[\frac{1 + c_{w3}}{g^6 + c_{w3}^6} \right]^{\frac{1}{6}} \quad (2.10)$$

dove

$$g = r + c_{w2}(r^6 - r), \quad r = \frac{\sqrt{\gamma} M_\infty}{\text{Re}_\infty} \frac{\tilde{\nu}}{\tilde{S} \kappa^2 d^2} \quad (2.11)$$

Infine si riportano i coefficienti del modello:

$$c_{b1} = 0.1355, \quad c_{b2} = 0.622, \quad \sigma = 2/3, \quad \kappa = 0.41, \\ c_{w1} = c_{b1}/\kappa^2 + (1 + c_{b2})/\sigma, \quad c_{w2} = 0.3, \quad c_{w3} = 2, \quad c_{\nu 1} = 7.1$$

La viscosità turbolenta viene specificata come condizione al contorno settando i valori di χ al contorno del flusso libero. Solitamente viene posta a zero sulla superficie, in modo che il flusso inviscido sia assente sulla parete.

La griglia strutturata (*mesh*) deve essere caratterizzata da uno *stretch*, in quanto lo strato limite è turbolento, pertanto risulta necessario avere un maggior numero di punti vicino alla parete. Si è scelto di assumere lungo y la seguente legge:

$$y_i = h \left(\frac{1 + \beta e^{a(1-j\Delta h/h)} - 1}{e^{a(1-j\Delta h/h)} + 1} \right)$$

con

$$\Delta h = \frac{h}{n_y}, \quad a = -\log \left(\frac{\beta + 1}{\beta - 1} \right)$$

dove

- j è l'indice del nodo;
- h è la larghezza del dominio;
- n_y è il numero totale di celle nella direzione y ;
- β è il parametro di stretching (che di solito ha un valore più grande di 1).

2.1.3 Condizioni di interfaccia tra il getto secondario e il flusso principale

Si considera di avere un getto secondario orientato di un certo angolo β rispetto alla direzione normale della parete (figura 2.1 [a]). L'approccio classico è quello dello schema di Godunov, che risolve il problema di Riemann per ogni interfaccia di cella tra il flusso principale e quello secondario (il quale verrà descritto in maniera approfondita successivamente).

Considerando la condizione di soffiaggio del getto secondario, si osservi la figura 2.1: gli stati del flusso nelle condizioni (a) e (b) sono noti, mentre in (c) e (d) sono calcolati usando le equazioni per un modello atto ad approssimare la soluzione del problema di Riemann (non lineare) [7].

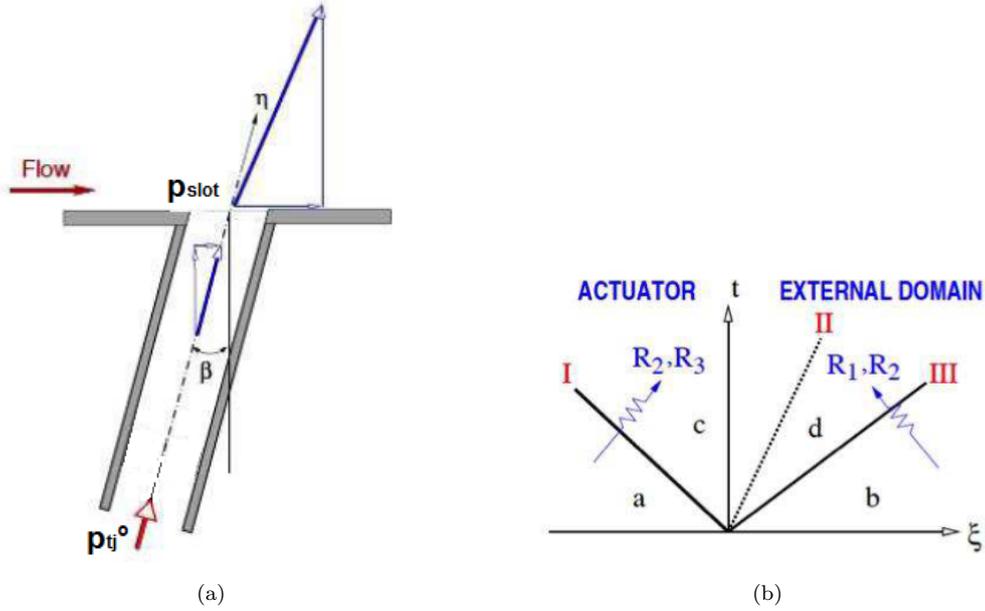


Figura 2.1: [a]: Schematizzazione dell'attuatore per il soffiaggio. [b]: Problema di Riemann.

Il modello adottato è quello di Pandolfi, la cui soluzione sviluppata è già in forma chiusa (non serve nessun procedimento iterativo). Di seguito si riportano le equazioni pertinenti:

$$a_c = \frac{(R_3 + R_1)\delta}{1 + e^{(S_b - S_a)/(2\gamma)}} \quad U_c = R_3 - a_c/\delta \quad V_c = U_c \tan \beta \quad S_c = S_a$$

$$a_d = a_c e^{(S_b - S_a)/(2\gamma)} \quad U_d = U_c \quad V_d = V_b \quad S_d = S_b$$

dove

- a è la velocità del suono
- U e V sono le componenti di velocità normale e tangenziale nel sistema di riferimento locale
- S è l'entropia
- δ è un numero definito come $\delta = (\gamma - 1)/2$
- $R_{1,3}$ sono gli invarianti di Riemann, noti come

$$R_1 = \frac{a}{\delta} - U \quad R_3 = \frac{a}{\delta} + U$$

Da notare che in tale modello salta subito all'occhio l'ipotesi che l'urto tra (a) e (c) è assunto evanescente, in quanto vale $S_c = S_a$.

2.2 Determinazione delle linee caratteristiche

Mediante il metodo dei volumi finiti, il dominio di calcolo bidimensionale viene diviso in celle, dette anche volumi, di forma quadrangolare, contrassegnate con i pedici n ed m . Se la cella di calcolo è sufficientemente piccola, il valore delle grandezze fisiche al suo interno può essere ritenuto costante. Si utilizza uno schema a celle centrate, in cui le variabili conservative, indicate con $W_{n,m}$, sono valutate nel loro valore medio al centro di ogni cella.

Le leggi di conservazione, una volta discretizzate, si presentano nella seguente forma

$$\frac{d}{dt}(V_{n,m} + W_{n,m}) + \sum (\vec{F} \cdot \vec{n} dS)_{n,m} = 0 \quad (2.12)$$

dove V indica il volume della cella, S la sua superficie di contorno, mentre \vec{n} è il versore normale ad ogni singola faccia definito positivo se uscente dalla cella.

Il metodo ai volumi finiti risulta essere conservativo, in quanto garantisce sempre la costanza delle variabili W anche in presenza di discontinuità, e quindi di onde d'urto.

La soluzione stazionaria del problema può essere ricercata attraverso tecniche di tipo *time-dependent*, le quali prevedono l'utilizzo di equazioni instazionarie, ma che per opportune condizioni al contorno, e per il tempo che tende ad infinito, forniscono risultati costanti nel tempo.

I flussi diffusivi vengono invece considerati come termine di sorgente, quindi discretizzati centralmente in ogni cella di calcolo, mantenendo così la forma iperbolica del problema.

Per semplicità si consideri un campo di moto non viscoso, adiabatico ed unidimensionale nel quale le equazioni del moto assumono la forma seguente:

$$\begin{cases} \rho_t + \rho_x u + \rho u_x = 0 \\ u_t + uu_x + \frac{p_x}{\rho} = 0 \\ E_t + (E + p)_x u + (E + p)u_x = 0. \end{cases} \quad (2.13)$$

Utilizzando la notazione matriciale, tale sistema può essere scritto sia in forma differenziale, ovvero

$$W_t + F_x = 0 \quad (2.14)$$

che in forma integrale, quindi

$$\frac{d}{dt} \int_{x_1}^{x_2} W dx = -[F_2 - F_1] \quad (2.15)$$

dove W ed F sono i vettori

$$W = \begin{pmatrix} \rho \\ \rho u \\ E \end{pmatrix} \quad F = \begin{pmatrix} \rho u \\ p + \rho u^2 \\ (p + E)u \end{pmatrix} \quad (2.16)$$

L'equazione (2.14) è scritta in forma di divergenza, ma può essere riscritta in forma quasi lineare definendo la matrice

$$A = \frac{\partial F}{\partial W} \quad (2.17)$$

Il sistema diventa allora

$$W_t + AW_x = 0 \quad (2.18)$$

Si opera adesso un cambiamento di variabili, in modo da prestare al meglio le equazioni per gli sviluppi matematici che seguiranno. Ponendo infatti

$$U = \begin{pmatrix} p \\ h \\ u \end{pmatrix} \quad \tilde{A} = \begin{pmatrix} u & 0 & \rho a^2 \\ 0 & u & a^2 \\ \frac{1}{\rho} & 0 & u \end{pmatrix} \quad (2.19)$$

il sistema matriciale diventa

$$U_t + \tilde{A}U_x = 0 \quad (2.20)$$

Si è pertanto individuato un sistema di equazioni differenziali alle derivate parziali di tipo iperbolico. Queste possono essere riscritte come equazioni differenziali alle derivate ordinarie lungo particolari curve del campo di moto dette linee caratteristiche, dove il segnale trasportato

rimane costante.

Le grandezze R_i , di cui è garantita la costanza lungo le linee caratteristiche, prendono il nome di invarianti di Riemann, già citati in precedenza. Per individuare le linee caratteristiche relative al sistema differenziale in esame, occorre dunque cercare gli invarianti come combinazione lineare delle variabili primitive u , p ed h , in modo tale che riscrivendo risulti un sistema alle derivate ordinarie.

Di seguito si riportano i passaggi effettuati:

$$\frac{\partial R_i}{\partial t} + \lambda_i \frac{\partial R_i}{\partial x} = 0 \quad (2.21)$$

dove λ_i è la pendenza delle linee caratteristiche in un dato punto del campo di moto.

Moltiplicando la prima equazione per μ_1 , la seconda per μ_2 , la terza per μ_3 e sommando si ottiene

$$\begin{aligned} & \mu_1(p_t + p_x \frac{\mu_1 u + \mu_3/\rho}{\mu_1}) + \\ & + \mu_2(h_t + h_x \frac{\mu_2 u}{\mu_2}) + \\ & + \mu_3(u_t + u_x \frac{\mu_1 \rho a^2 + \mu_2 a^2 + \mu_3 u}{\mu_3}) = 0 \end{aligned} \quad (2.22)$$

Deve verificarsi che tutti i coefficienti di p_x , h_x e u_x abbiano lo stesso valore, ovvero si ha la condizione

$$\frac{\mu_1 u + \mu_3/\rho}{\mu_1} = \frac{\mu_2 u}{\mu_2} = \frac{\mu_1 \rho a^2 + \mu_2 a^2 + \mu_3 u}{\mu_3} = \lambda \quad (2.23)$$

e quindi si deve risolvere il sistema nelle variabili μ_1 , μ_2 e μ_3 :

$$\begin{cases} \mu_1(u - \lambda) + \mu_3(1/\rho) = 0 \\ \mu_1(u - \lambda) = 0 \\ \mu_1(\rho a^2) + \mu_2(a^2) + \mu_3(u - \lambda) = 0 \end{cases} \quad (2.24)$$

Escludendo la soluzione ovvia $\mu_1 = \mu_2 = \mu_3 = 0$, affinché il sistema abbia anche soluzioni non nulle, il determinante della matrice dei coefficienti deve essere nullo. Ciò porta a concludere che

$$\begin{vmatrix} u - \lambda & 0 & 1/\rho \\ 0 & u - \lambda & 0 \\ \rho a^2 & a^2 & u - \lambda \end{vmatrix} = 0 \quad (2.25)$$

la quale si riduce nell'equazione in λ

$$(u - \lambda)^3 - (u - \lambda)a^2 = 0 \quad (2.26)$$

le cui soluzioni sono

$$\begin{cases} \lambda_1 = u - a \\ \lambda_2 = u \\ \lambda_3 = u + a \end{cases} \quad (2.27)$$

L'equazione (2.22) può essere scritta anche come

$$(\mu_1 p_t + \mu_2 h_t + \mu_3 u_t) + \lambda_i (\mu_1 p_x + \mu_2 h_x + \mu_3 u_x) = 0 \quad (2.28)$$

Occorre ora ricavare i valori delle costanti μ_1 , μ_2 e μ_3 per determinare l'espressione delle nuove variabili, cioè gli invarianti di Riemann. Questo viene effettuato per mezzo del sistema (2.24), ricordandosi che, essendo nullo il determinante della matrice dei coefficienti, una delle tre equazioni è combinazione lineare delle altre due, quindi μ_1 , μ_2 e μ_3 saranno definite a meno di una costante arbitraria.

Sostituendo i valori di λ_1 , λ_2 e λ_3 nel sistema, si ottengono rispettivamente

$$\begin{aligned} dR_1 &= dp - \rho a du \\ dR_2 &= dh - dp/\rho \\ dR_3 &= dp + \rho a du \end{aligned} \quad (2.29)$$

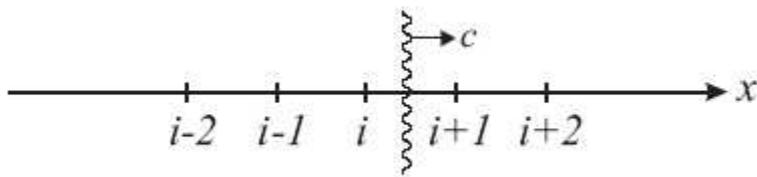


Figura 2.2: Onda di velocità c che viaggia lungo x .

La pendenza delle linee caratteristiche della seconda famiglia λ_2 coincide in ogni punto del campo di moto con la pendenza delle linee di corrente. Si può notare inoltre che l'espressione di R_2 rappresenta, a meno di una costante, quella dell'entropia, e quindi la seconda equazione può essere riscritta nella forma

$$S_t + uS_x = 0 \quad (2.30)$$

che è la conservazione dell'entropia lungo le linee di corrente, risultato già noto per il semplice campo di moto in esempio.

Gli invarianti di Riemann prendono questo nome proprio perchè non variano lungo le linee caratteristiche, e la loro conservazione è garantita dall'equazione (2.21); inoltre dR_1 , dR_2 e dR_3 non sono differenziali esatti, e non possono dunque essere integrati in modo esatto se non precisando la linea lungo la quale avviene l'integrazione.

2.2.1 Schemi up-wind

Da quanto descritto in precedenza riguardo le linee caratteristiche e la propagazione dei segnali all'interno di un campo di moto fluidodinamico, appare naturale che uno schema numerico efficiente in grado di risolvere le equazioni di Eulero, o di Navier-Stokes, deve obbedire alla fisica del flusso, cioè tenere in considerazione la velocità e la direzione con cui le informazioni propagano attraverso il campo di moto, ma non sempre i metodi alle differenze centrate le seguono correttamente.

In molti casi, tali metodi, utilizzano informazioni numeriche che provengono fuori dal dominio di dipendenza di un dato punto di calcolo, e ciò può compromettere la correttezza della soluzione. Inoltre, sebbene si tratta di metodi che possono offrire soluzioni soddisfacenti in molti casi, quando nel campo di moto compaiono onde d'urto, con la necessità di una cattura numerica del fenomeno, essi non lavorano più bene, producendo oscillazioni nella soluzione. Per questa ragione sono stati introdotti gli schemi *up-wind*, descrivendo numericamente discontinuità molto ripide.

Per comprendere meglio la filosofia di tali schemi si analizzi l'equazione d'onda del primo ordine

$$\frac{\partial u}{\partial t} + c \frac{\partial u}{\partial x} = 0 \quad (2.31)$$

Per un valore positivo di c , quest'equazione descrive la propagazione di un'onda nella direzione positiva dell'asse x (figura 2.2).

Dal punto di vista fisico, le proprietà del punto di calcolo i (al tempo $t + \Delta t$) dipendono dalle proprietà del punto $i-1$ (al tempo t) che appartiene al dominio di dipendenza del punto i ; mentre le caratteristiche che partono dal punto $i+1$ non influenzano fisicamente il punto i .

Uno schema numerico appropriato dovrebbe riflettere queste considerazioni.

Quando infatti se ne utilizza uno alle differenze centrate, ad esempio per approssimare la $\frac{\partial u}{\partial x}$, dal punto di vista numerico, le proprietà del punto $i+1$ influenzano il punto i andando in evidente contrasto con la fisica del fenomeno. Se ciò accade la soluzione man mano che si avvanza con il passo temporale tende ad esplodere.

Adottando, invece, una discretizzazione unilaterale di tipo *up-wind* al primo ordine spaziale, come per esempio

$$\frac{\partial u}{\partial x} = \frac{u_i - u_{i-1}}{\Delta x} \quad (2.32)$$

la soluzione diventa stabile, in quanto tale discretizzazione utilizza esclusivamente informazioni provenienti dal dominio di dipendenza del punto i .

2.2.2 L'approccio di Godunov

Invece di risolvere il flusso integralmente attraverso la soluzione numerica delle equazioni di Eulero in forma discreta, Godunov suggerì di utilizzare quella esatta dell'equazione di Eulero in una regione locale, e di ricostruire la soluzione globale unendo insieme le locali. Per maggiore chiarezza si immagini di esaminare il campo di moto in prossimità di un dato punto, quindi si può individuare analiticamente una soluzione esatta per le equazioni fluidodinamiche, ma valida solo in un intorno del punto in esame. Se poi si uniscono insieme le soluzioni locali esatte calcolate per ogni punto della griglia di calcolo, si può ottenere un'immagine del flusso nella sua globalità.

Il problema è individuare la soluzione locale esatta delle equazioni di Eulero, ma ciò può essere effettuato attraverso la soluzione del problema di Riemann.

Il problema di Riemann

Si consideri il problema ai valori iniziali per il sistema iperbolico rappresentato dalle leggi di conservazione (equazione 2.14), espresso in forma quasi lineare da (2.20) con

$$U(x, t = 0) = U_0(x) \quad (2.33)$$

dove U è il vettore delle quantità conservative, ed è funzione di x e t , mentre $U_0(x)$ è il vettore dei dati iniziali.

La condizione iniziale a tratti è data da

$$U(x, t = 0) = \begin{cases} U_L & x < 0 \\ U_R & x > 0 \end{cases} \quad (2.34)$$

dove U_L e U_R sono, rispettivamente, i valori degli stati a sinistra e a destra dell'interfaccia, ovvero la condizione iniziale è una funzione costante a tratti con discontinuità nell'origine.

Una soluzione *self-similare* (ovvero dipendente soltanto da x/t) del problema di Riemann esiste se la matrice \hat{A} ha autovalori tutti reali e autovettori completi.

Assumendo che vi siano n leggi di conservazione indipendenti, la soluzione del problema di Riemann consisterà in generale in n onde che separano $n+1$ regioni caratterizzate dalla costanza delle grandezze conservative, incluse le due regioni iniziali. Si prenda ad esempio una condizione iniziale come quella in figura 2.3, dove sono noti i valori di velocità, pressione e temperatura nelle due regioni A e B all'istante iniziale.

La presenza di una discontinuità, e il suo successivo collasso, provoca la nascita di tre onde: due di tipo acustico, indicate come onda I e onda III, e una superficie di contatto indicata come onda II.

Così si hanno allora due nuove regioni, C e D , le cui caratteristiche fisiche possono essere individuate per mezzo della risoluzione del problema di Riemann (fig. 2.4).

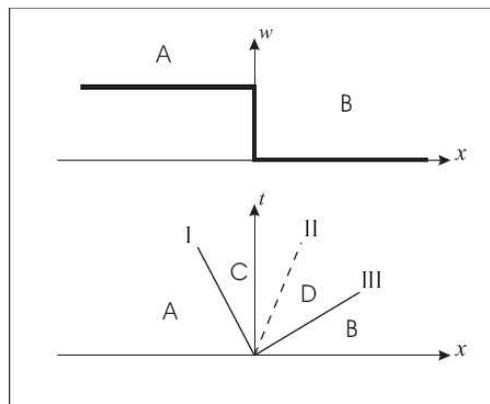


Figura 2.3: Evoluzione di una discontinuità dei valori iniziali.

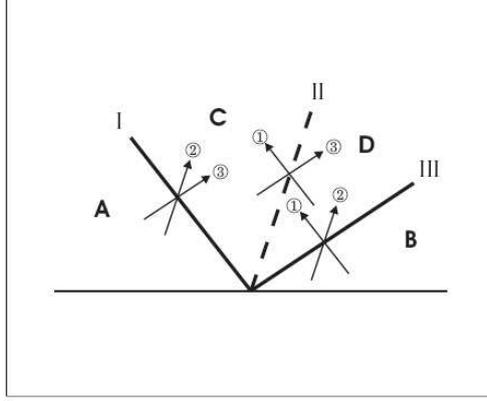


Figura 2.4: Risoluzione del problema di Riemann.

Si può pensare di passare dalla regione A alla regione C , separate da una linea caratteristica della prima famiglia, seguendone una della seconda famiglia o della terza. Imponendo allora la conservazione degli invarianti di Riemann dR_1 e dR_3 si ha

$$\begin{aligned} (R_3)_c &= (R_3)_a & p_c + (\rho a)_c u_c &= p_a + (\rho a)_a u_a \\ (R_2)_c &= (R_2)_a & h_c - p_c/\rho_c &= h_a - p_a/\rho_a \end{aligned}$$

Allo stesso modo, attraverso l'onda III che separa le regioni B e D , si conservano gli invarianti dR_1 e dR_2 , quindi

$$\begin{aligned} (R_1)_d &= (R_1)_b & p_d - (\rho a)_d u_d &= p_b + (\rho a)_b u_b \\ (R_2)_d &= (R_2)_b & h_d - p_d/\rho_d &= h_b - p_b/\rho_b \end{aligned}$$

Lo stesso ragionamento potrebbe essere fatto attraverso l'onda II, imponendo la costanza degli invarianti dR_1 e dR_3 , tuttavia, poichè le due regioni sono separate da una superficie di contatto, c'è un solo salto dell'entropia, ma non di velocità e pressione. Così è immediato imporre l'uguaglianza di queste ultime due grandezze

$$u_c = u_d \quad p_c = p_d$$

Si ottiene infine un sistema di sei equazioni in sei incognite, che risolto fornisce i valori delle variabili primitive nelle regioni C e D

$$\begin{aligned} u_c &= \frac{(R_3)_a - (R_1)_b}{(\rho a)_a + (\rho a)_b} \\ p_c &= (R_3)_a - (\rho a)_a u_c \\ h_c &= p_c/\rho_a + (R_2)_a \\ u_d &= u_c \\ p_d &= p_c \\ h_d &= p_d/\rho_b + (R_2)_b \end{aligned}$$

dalle quali è possibile ricavare in seguito tutte le altre grandezze termodinamiche:

$$\begin{aligned} a_c &= \sqrt{(\gamma - 1)h_c} \\ T_c &= \frac{\gamma - 1}{\gamma} h_c \\ \rho_c &= p_c/T_c \\ e_c &= \frac{p_c}{\gamma - 1} + \rho_c u_c^2/2 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
a_d &= \sqrt{(\gamma - 1)h_d} \\
T_d &= \frac{\gamma - 1}{\gamma} h_d \\
\rho_d &= p_d/T_d \\
e_d &= \frac{p_d}{\gamma - 1} + \rho_d u_d^2/2
\end{aligned}$$

Quanto esposto per il caso unidimensionale può essere esteso al caso bidimensionale scomponendo il vettore velocità nelle due componenti normale e tangenziale all'interfaccia tra due celle contigue (figura 2.5).

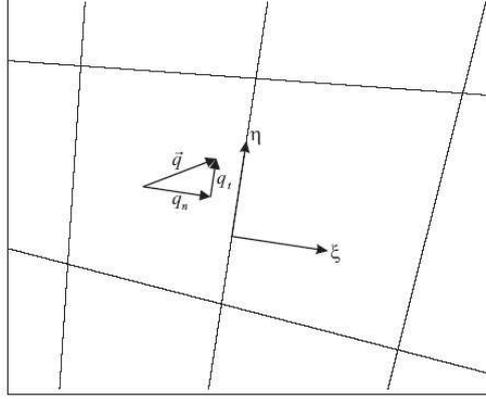


Figura 2.5: Scomposizione del vettore velocità per la risoluzione del problema di Riemann in un campo di moto bidimensionale.

Definendo con ξ ed η , rispettivamente, le direzioni normale e tangenziale ad una faccia, il vettore velocità \vec{q} può essere espresso come

$$\vec{q} = q_n \vec{\xi} + q_t \vec{\eta} \quad (2.35)$$

Le grandezze che descrivono i campi a e b possono essere ricavate dalle variabili conservative:

$$\begin{aligned}
\rho_{a,b} &= (w_1)_{a,b} & U_{a,b} &= \left(\frac{w_2}{w_1}\right)_{a,b} & V_{a,b} &= \left(\frac{w_3}{w_1}\right)_{a,b} \\
e_{a,b} &= (w_4)_{a,b} & p_{a,b} &= (\gamma - 1) \left[e_{a,b} - \frac{1}{2} \rho_{a,b} (U_{a,b}^2 + V_{a,b}^2) \right]
\end{aligned}$$

Note le componenti cartesiane delle velocità U e V , definite nel sistema di riferimento assoluto, quelle tangenziale e normale risultano essere allora

$$\begin{aligned}
(q_n)_{a,b} &= \vec{q}_{a,b} \cdot \vec{n} = U_{a,b} n_x + V_{a,b} n_y \\
(q_t)_{a,b} &= \vec{q}_{a,b} \cdot \vec{t} = -U_{a,b} n_y + V_{a,b} n_x
\end{aligned}$$

dove \vec{n} è il versore relativo alla direzione ξ normale alla faccia (definito positivo se uscente dalla cella), e \vec{t} è il versore relativo alla direzione η tangente alla faccia, ovvero

$$\vec{n} = \begin{Bmatrix} n_x \\ n_y \end{Bmatrix} \quad \vec{t} = \begin{Bmatrix} -n_y \\ n_x \end{Bmatrix}$$

mentre l'entalpia e la velocità del suono sono espresse come

$$\begin{aligned}
h_{a,b} &= \frac{\gamma}{\gamma - 1} \frac{p_{a,b}}{\rho_{a,b}} \\
a_{a,b} &= \sqrt{\gamma \frac{p_{a,b}}{\rho_{a,b}}}
\end{aligned}$$

Proiettando le equazioni di conservazione lungo la direzione ortogonale alla faccia, si ottengono le relazioni precedentemente viste sostituendo u con q_n e x con ξ . A queste deve essere aggiunta la conservazione, lungo ξ , della quantità di moto in direzione η :

$$(q_t)_t + q_n(q_t)_\xi = 0 \quad (2.36)$$

alla quale è associato l'invariante

$$dR = dq_t \quad (2.37)$$

e la pendenza caratteristica

$$\lambda = q_n \quad (2.38)$$

Le relazioni che esprimono la conservazione del segnale diventano, dunque, in corrispondenza di ogni interfaccia, come da seguente elenco:

I) Attraversando un'onda della prima famiglia,

$$p_c + (\rho a)_c q_{n_c} = p_a + (\rho a)_a q_{n_c}$$

$$h_c - p_c/\rho_c = h_a - p_a/\rho_a$$

$$q_{t_c} = q_{t_a}$$

III) Attraversando un'onda della terza famiglia,

$$p_d + (\rho a)_d q_{n_d} = p_b + (\rho a)_b q_{n_b}$$

$$h_d - p_d/\rho_d = h_b - p_b/\rho_b$$

$$q_{t_d} = q_{t_b}$$

II) Attraversando un'onda della seconda famiglia,

$$p_c = p_d$$

$$q_{n_c} = q_{n_d}$$

in quanto vengono imposte semplicemente la continuità di pressione e di velocità, mentre per quanto riguarda la velocità tangenziale, l'equazione (2.36) impone, come fatto precedentemente, la conservazione di q_t attraverso l'interfaccia, cioè

$$q_{t_a} = q_{t_b}$$

Quindi, nel caso bidimensionale, il vettore dei flussi convettivi può essere espresso come

$$F_c = \begin{pmatrix} \rho q_n \\ pn_x + \rho U q_n \\ pn_y + \rho V q_n \\ (p + E)q_n \end{pmatrix} \quad (2.39)$$

Flux difference splitting

Si consideri una generica funzione $w(t)$ continua, quindi interpretabile, ad esempio, come una funzione costante a tratti, ovvero come una distribuzione discreta di punti (figura 2.6). Così facendo, su ogni cella di calcolo, il valore della variabile w_i^k sarà costante e pari al valore medio di w sulla cella. In questo modo si avrà all'interfaccia di ogni cella una discontinuità, portando alla risoluzione di un problema di Riemann in corrispondenza di tale zona secondo le modalità esposte in precedenza.

Una volta note tutte le grandezze fisiche nelle regioni C e D , e quindi anche i valori dei flussi (f_i) di massa, quantità di moto ed energia, occorre ancora conoscere il valore del flusso f della generica variabile w attraverso l'interfaccia tra due celle contigue, ovvero noti i valori w_i e w_{i+1} della variabile conservativa w associata a due celle adiacenti, si deve ricavare il flusso $f_{i+\frac{1}{2}}$ all'interfaccia.

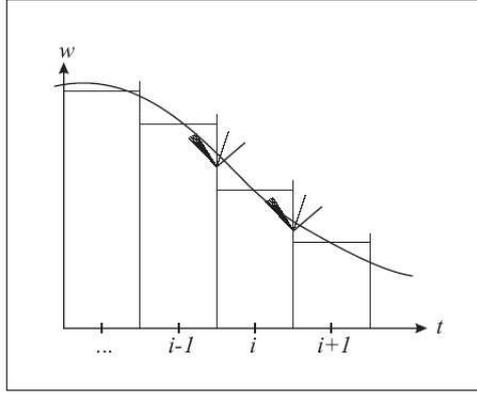


Figura 2.6: Distribuzione costante a tratti della variabile w nel tempo t .

Lo *splitting* consiste appunto nello scomporre la differenza di flusso tra monte e valle in due contributi, come visibile di seguito.

$$f_{i+1} - f_i = \Delta \overleftarrow{f} + \Delta \overrightarrow{f} \quad (2.40)$$

dove $\Delta \overrightarrow{f}$ è la differenza di flusso che si accompagna ad un'onda che viaggia verso destra, ed analogamente $\Delta \overleftarrow{f}$ è la differenza di flusso che si accompagna ad un'onda che viaggia verso sinistra.

Possiamo così esprimere il flusso $f_{i+\frac{1}{2}}$ come

$$f_{i+\frac{1}{2}} = f_i + \Delta \overleftarrow{f} \quad (2.41)$$

oppure

$$f_{i+\frac{1}{2}} = f_{i+1} - \Delta \overrightarrow{f} \quad (2.42)$$

Questo metodo di calcolo, proposto da *Godunov*, permette di rispettare sempre i domini di dipendenza delle equazioni differenziali in esame.

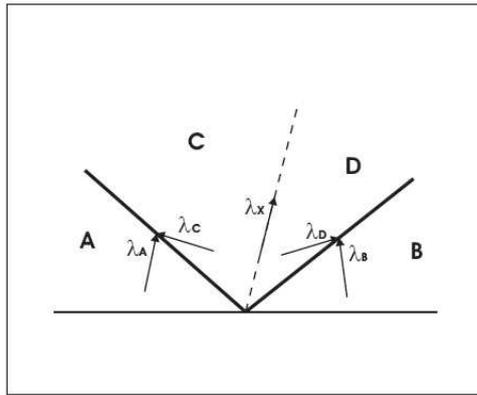


Figura 2.7: Velocità di propagazione delle onde e delle linee caratteristiche.

Rimangono adesso da determinare i valori di $\Delta \overleftarrow{f}$ e $\Delta \overrightarrow{f}$, ma per farlo occorre conoscere le velocità delle onde che dividono le regioni A, C, D e B, in modo da poter trovare, caso per caso, come dividere il flusso nelle sue componenti. In realtà interessa solo sapere quali onde propagano con velocità positiva e quali con velocità negativa.

Si definisce, come velocità di un'onda, la media tra le velocità delle linee caratteristiche che

determinano l'onda stessa. Ad esempio, in figura 2.7, per un'onda della prima famiglia che separa due regioni A e C, la sua velocità sarà

$$V_I = \frac{\lambda_{I_a} + \lambda_{I_c}}{2}$$

La velocità di una superficie di contatto, onda di una seconda famiglia, sarà sempre pari alla velocità del fluido:

$$V_{II} = \lambda_{II_c} = \lambda_{II_d} = u_c = u_d$$

Occorrerà pertanto conoscere le velocità delle linee caratteristiche nelle regioni A, C, D e B, ovvero i valori di λ_a , λ_c , λ_d , λ_b e λ_x :

$$\lambda_a = u_a - a_a$$

$$\lambda_c = u_c - a_c$$

$$\lambda_d = u_d + a_d$$

$$\lambda_b = u_b + a_b$$

$$\lambda_x = u_c = u_d$$

Si possono così analizzare i vari casi che si vengono ad avere al variare del segno delle velocità delle caratteristiche nelle diverse regioni (figura 2.8 e figura 2.9).

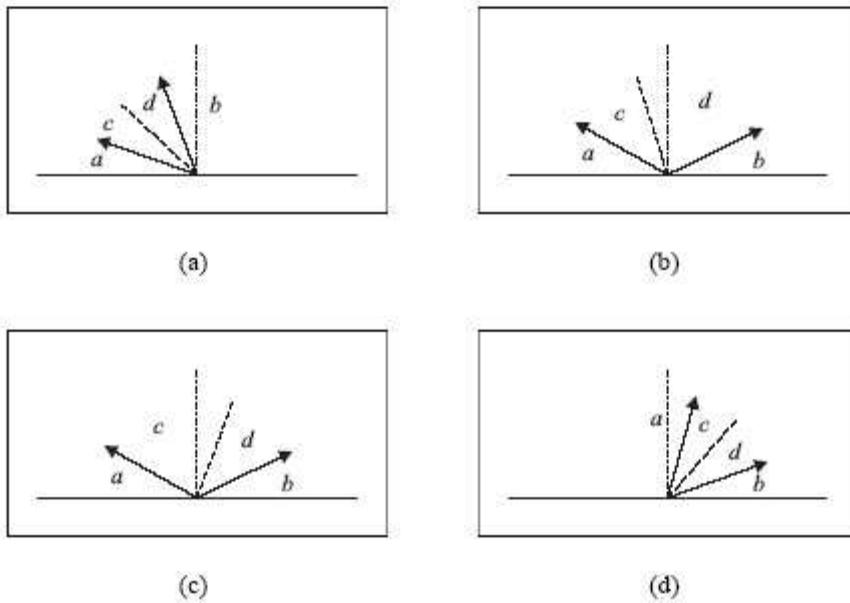


Figura 2.8: Configurazioni possibili per il flux difference splitting.

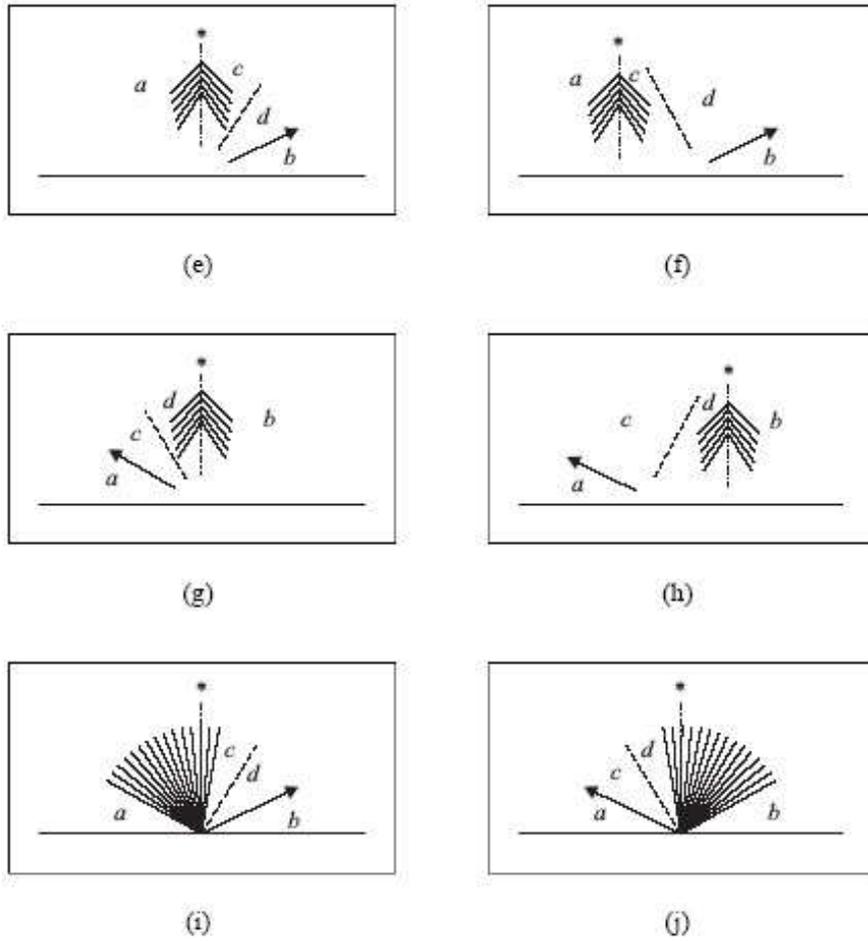


Figura 2.9: Configurazioni possibili per il flux difference splitting.

Caso a):

$$\lambda_a < 0 \quad \lambda_c < 0 \quad \lambda_d < 0 \quad \lambda_b < 0$$

$$\Delta \vec{F} = 0$$

$$\Delta \overleftarrow{F} = F_b - F_a$$

Caso b):

$$\lambda_a < 0 \quad \lambda_c < 0 \quad \lambda_x < 0 \quad \lambda_d > 0 \quad \lambda_b > 0$$

$$\Delta \vec{F} = F_b - F_d$$

$$\Delta \overleftarrow{F} = F_d - F_a$$

Caso c):

$$\lambda_a < 0 \quad \lambda_c < 0 \quad \lambda_x > 0 \quad \lambda_d > 0 \quad \lambda_b > 0$$

$$\Delta \vec{F} = F_b - F_c$$

$$\Delta \overleftarrow{F} = F_c - F_a$$

Caso d):

$$\lambda_a > 0 \quad \lambda_c > 0 \quad \lambda_d > 0 \quad \lambda_b > 0$$

$$\Delta \vec{F} = F_b - F_a$$

$$\Delta \overleftarrow{F} = 0$$

Casi e) e f):

Possono verificarsi delle configurazioni più complesse, in cui si presentano dei fasci di compressione o di espansione ([e] e [f] della figura 2.9). In questi casi è necessario calcolare il valore delle grandezze relative alla linea caratteristica verticale, indicata con un asterisco.

$$\lambda_a > 0 \quad \lambda_c < 0 \quad \lambda_d > 0 \quad \lambda_b > 0$$

E' questo il caso di un fascio di compressione localizzato tra la regione A e la C. Per risolvere il problema si procede utilizzando gli invarianti di Riemann.

$$\begin{aligned} R_{3_a} = R_3^* &= p^* + (\rho_a)_a u^* \\ R_{2_a} = R_2^* &= h^* - p^* / \rho_a \end{aligned}$$

Dividendo la prima relazione per ρ_a e sommandola alla seconda si ottiene

$$h^* + a_a u^* - (R_{2_a} + \frac{R_{3_a}}{\rho_a}) = 0 \quad (2.43)$$

e utilizzando la relazione

$$u^* = a^* = \sqrt{(\gamma - 1)h^*} \quad (2.44)$$

si ricava il valore dell'entalpia relativa alla caratteristica verticale

$$h^* + a_a \sqrt{(\gamma - 1)h^*} - (R_{2_a} + \frac{R_{3_a}}{\rho_a}) = 0 \quad (2.45)$$

$$\sqrt{h^*} = \frac{\sqrt{a_a^2(\gamma - 1) + 4(R_{2_a} + \frac{R_{3_a}}{\rho_a})} - a_a \sqrt{\gamma - 1}}{2} \quad (2.46)$$

e quello della pressione

$$p^* = \rho_a (h^* - R_{2_a}) \quad (2.47)$$

E' possibile ora calcolare i valori dei flussi in corrispondenza della linea caratteristica verticale e procedere allo splitting. Il calcolo deve essere differenziato in due casi a seconda del segno di λ_x :

(e) $\lambda_x > 0$

$$\begin{aligned} \Delta \overrightarrow{F} &= F_b - F_c + F^* - F_a \\ \Delta \overleftarrow{F} &= F_c - F^* \end{aligned}$$

(f) $\lambda_x < 0$

$$\begin{aligned} \Delta \overrightarrow{F} &= F_b - F_d + F^* - F_a \\ \Delta \overleftarrow{F} &= F_d - F^* \end{aligned}$$

Caso i):

Invece di un fascio di compressione, tra le regioni A e C, può formarsi un fascio di espansione, per cui si avrebbe

$$\lambda_a < 0 \quad \lambda_c > 0 \quad \lambda_d > 0 \quad \lambda_b > 0$$

Procedendo allo stesso modo del caso precedente si ottiene

$$\sqrt{h^*} = \frac{\sqrt{a_a^2(\gamma - 1) + 4(R_{1_a} + \frac{R_{3_a}}{\rho_a})} - a_a \sqrt{\gamma - 1}}{2} \quad (2.48)$$

$$p^* = \rho_a (h^* - R_{2_a}) \quad (2.49)$$

Ora inoltre vale $\lambda_x > 0$, e le differenze di flussi sono

$$\Delta \overrightarrow{F} = F_b - F^*$$

$$\Delta \overleftarrow{F} = F^* - F_a$$

Casi g), h) e j):

Fasci di compressione o di espansione si possono verificare tra le regioni D e B . Anche in questi casi il procedimento è lo stesso degli esempi precedenti:

$$\lambda_a < 0 \quad \lambda_c < 0 \quad \lambda_d > 0 \quad \lambda_b < 0$$

Nel caso del fascio di compressione (casi g ed h) si ottiene

$$R_{1_b} = R_1^* = p^* + (\rho a)_b u^*$$

$$R_{2_b} = R_2^* = h^* - p^* / \rho_b$$

Dividendo la prima relazione per ρ_b e sommandola alla seconda si ottiene

$$h^* + a_b u^* - (R_{2_b} + \frac{R_{3_b}}{\rho_b}) = 0 \quad (2.50)$$

e ricordando la relazione

$$u^* = -a^* = -\sqrt{(\gamma - 1)h^*} \quad (2.51)$$

si perviene all'equazione

$$h^* + a_b \sqrt{(\gamma - 1)h^*} - (R_{2_b} + \frac{R_{3_b}}{\rho_b}) = 0 \quad (2.52)$$

$$\sqrt{h^*} = \frac{\sqrt{a_b^2(\gamma - 1) + 4(R_{2_b} + \frac{R_{3_b}}{\rho_b})} - a_b \sqrt{\gamma - 1}}{2} \quad (2.53)$$

Mentre per la pressione si ha

$$p^* = \rho_b (h^* - R_{2_b}) \quad (2.54)$$

Per il calcolo dei flussi deve esser preso in considerazione il segno di λ_x

(g) $\lambda_x < 0$

$$\Delta \overrightarrow{F} = F^* - F_d$$

$$\Delta \overleftarrow{F} = F_d - F_a + F_b - F^*$$

(h) $\lambda_x > 0$

$$\Delta \overrightarrow{F} = F^* - F_c$$

$$\Delta \overleftarrow{F} = F_c - F_a + F_b - F^*$$

Nell'ultimo caso di un fascio di compressione come visibile in figura [j] di 2.9), si ha infine

$$\lambda_a < 0 \quad \lambda_c < 0 \quad \lambda_d < 0 \quad \lambda_b > 0$$

dove valgono ancora le relazioni

$$\sqrt{h^*} = \frac{\sqrt{a_b^2(\gamma - 1) + 4(R_{2_b} + \frac{R_{3_b}}{\rho_b})} - a_b \sqrt{\gamma - 1}}{2} \quad (2.55)$$

$$p^* = \rho_b (h^* - R_{2_b}) \quad (2.56)$$

e i flussi si ricavano dalle seguenti relazioni:

$$\Delta \overrightarrow{F} = F_b - F^*$$

$$\Delta \overleftarrow{F} = F^* - F_a$$

Trattamento dei termini viscosi

Consideriamo ora solo i termini viscosi, ovvero trascuriamo l'effetto della convezione limitandoci a studiare gli effetti diffusivi, quindi

$$\frac{\partial U}{\partial t} = \frac{\partial(F_v)}{\partial x} + \frac{\partial(G_v)}{\partial y} \quad (2.57)$$

L'equazione (2.57) è alle derivate parziali di tipo parabolico, essendo i termini al secondo membro del secondo ordine.

Per la soluzione del problema occorre calcolare i flussi viscosi su ogni faccia delle celle di calcolo, quindi è necessaria la conoscenza dei gradienti $\nabla u, \nabla v$ e ∇T , ovvero di velocità e temperatura. Data la natura parabolica o ellittica dei problemi diffusivi, per il calcolo di questi gradienti non è più possibile utilizzare le tecniche viste prima basate sulla natura ondosa dei flussi convettivi, bensì si impiega una tecnica sviluppata dal teorema di *Gauss*: indicando con ψ una generica grandezza, si vuole calcolare il gradiente $\nabla\psi$ su di un volume V racchiuso dalla superficie S , pertanto

$$\oint_S \psi \vec{n} dS = \int_V \nabla\psi dV \quad (2.58)$$

Se il gradiente $\nabla\psi$ è costante sul volume V , ovvero se la cella di calcolo è sufficientemente piccola da poterlo considerare come tale, allora possiamo scrivere

$$\nabla\psi \simeq \frac{1}{V} \oint_S \psi \vec{n} dS \quad (2.59)$$

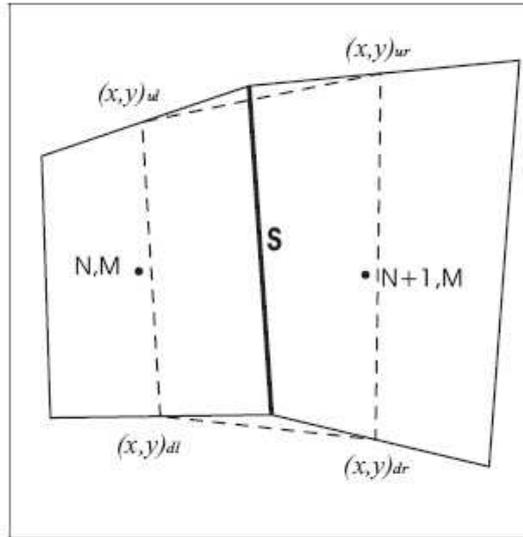


Figura 2.10: Calcolo dei flussi viscosi sulla cella (n,m) .

Così facendo si dispone di una tecnica semplificata per il calcolo dei gradienti, la quale rispetta le caratteristiche ellittiche dei flussi diffusivi, infatti, volendo calcolare il gradiente sulla faccia di una generica cella (n, m) , è sufficiente risolvere in modo approssimato l'integrale

$$\frac{1}{V} \oint_S \psi \vec{n} dS$$

avendo cura di scegliere il volume V in modo tale che contenga la faccia in esame (figura 2.10). Facendo riferimento alla figura 2.12 riportata più avanti, i vertici del volume che racchiude la faccia su cui si vuole calcolare il gradiente $\nabla\psi$, saranno i punti medi delle facce superiori

delle due celle limitrofe, ed avranno coordinate $(x, y)_{dl}$, $(x, y)_{ul}$, $(x, y)_{dr}$ e $(x, y)_{dr}$. Definendo il vettore $z^\perp = (y, -x)$, l'integrale sulla superficie S puo' essere approssimato come

$$\oint_S \psi \vec{n} dS = \psi_d(z_{dr}^\perp - z_{dl}^\perp) + \psi_r(z_{ur}^\perp - z_{dr}^\perp) + \psi_u(z_{ul}^\perp - z_{ur}^\perp) + \psi_l(z_{dl}^\perp - z_{ul}^\perp)$$

Nel caso in esame, i valori di ψ_l e ψ_r sono quelli relativi ai centri cella (n, m) e $(n+1, m)$

$$\psi_l = \psi_{n,m}$$

$$\psi_r = \psi_{n+1,m}$$

mentre per determinare i valori ψ_u e ψ_d si ricorre ad una media tra i valori dei punti vicini

$$\psi_u = \frac{1}{2}(\psi_{ul} + \psi_{ur})$$

$$\psi_d = \frac{1}{2}(\psi_{dl} + \psi_{dr})$$

dove ψ_{ul} , ψ_{ur} , ψ_{dl} e ψ_{dr} sono mediati tra i due valori dei centri cella piu' vicini:

$$\psi_{ul} = \frac{1}{2}(\psi_{n,m} + \psi_{n,m+1})$$

$$\psi_{ur} = \frac{1}{2}(\psi_{n+1,m} + \psi_{n+1,m+1})$$

$$\psi_{dl} = \frac{1}{2}(\psi_{n,m} + \psi_{n,m-1})$$

$$\psi_{dr} = \frac{1}{2}(\psi_{n+1,m} + \psi_{n+1,m-1})$$

Il volume V è infine calcolato mediante la formula

$$V = \frac{1}{2}[(x_{ur} - x_{dl})(y_{ul} - y_{dr})]$$

Lo stesso ragionamento viene naturalmente applicato ai termini diffusivi che provengono dal modello di turbolenza di *Spalart-Almaras*.

Valutazione del passo di integrazione temporale Δt

Si riportano per comodità le equazioni della continuità, quantità di moto ed energia scritte in forma conservativa, le quali hanno l'espressione generale

$$\frac{d}{dt} \int_V W_i dV + \int_S \vec{F}_i \cdot \vec{n} dS = 0 \quad (2.60)$$

L'integrazione viene effettuata poi con uno schema al primo ordine

$$(W_i)_{n,m}^{k+1} = (W_i)_{n,m}^k - \frac{\Delta t}{V_{n,n}} \sum_{r=1}^4 (F_{ir} S_r)_{n,m}^k \quad (2.61)$$

La necessità di rispettare, durante il calcolo, i domini di dipendenza, impone anche un limite superiore durante la valutazione dell'incremento temporale Δt . Questo naturalmente è uno svantaggio, perchè allunga i tempi della simulazione numerica.

La valutazione dei flussi all'interfaccia di due celle, invece, è stata effettuata a partire dai valori delle sole regioni A e B , e tale procedimento è corretto fino a quando le onde generate dal collasso della discontinuità tra tali regioni non interferiscano con quelle delle altre discontinuità. Di conseguenza il Δt massimo ammissibile nel caso bidimensionale puo' essere calcolato come il minimo tra i due incrementi temporali valutati rispettivamente lungo n e lungo m . In altri termini

$$\Delta t_{max} = \Delta t = \min[(\Delta t_{min})_n, (\Delta t_{min})_m], \quad (2.62)$$

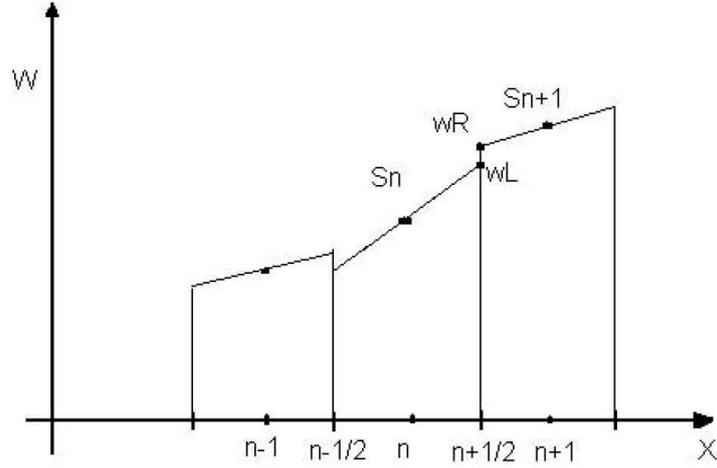


Figura 2.11: Distribuzione lineare a tratti.

dove

$$(\Delta t_{min})_n = \min(\Delta t_n), \quad (\Delta t_{min})_m = \min(\Delta t_m) \quad (2.63)$$

e

$$\Delta t_n = \frac{\Delta x}{|q_n| + a}, \quad \Delta t_m = \frac{\Delta y}{|q_m| + a} \quad (2.64)$$

Nel caso di flusso viscoso, inoltre, l'incremento temporale viene ulteriormente corretto introducendo il numero di Reynolds:

$$Re_n = \frac{(|q_n| + a)\Delta x}{\nu}, \quad Re_m = \frac{(|q_m| + a)\Delta y}{\nu}$$

$$(\Delta t_n)_{visc} = \Delta t_n \frac{1}{1 + 2/Re_n}, \quad (\Delta t_m)_{visc} = \Delta t_m \frac{1}{1 + 2/Re_m} \quad (2.65)$$

e successivamente poi filtrato dal parametro di stabilità σ :

$$\Delta t = \sigma \cdot \min[(\Delta t_{min})_n, (\Delta t_{min})_m] \quad (2.66)$$

La soluzione stazionaria viene raggiunta quando la sommatoria dei flussi (2.61) diventa trascurabile, e quindi

$$(W_i)_{n,m}^{k+1} \simeq (W_i)_{n,m}^k \quad (2.67)$$

con un residuo, in genere, dell'ordine di 10^{-8} .

Accuratezza al secondo ordine

Gli schemi numerici al primo ordine fin qui visti presentano l'inconveniente di essere fortemente dissipativi. Questo non è dovuto alla fisica del problema, bensì ad effetti numerici dovuti allo schema stesso. Tali effetti sono noti in letteratura come fenomeni di viscosità numerica, e causano nel tempo l'annullamento dei gradienti, portando all'appiattimento della soluzione.

Per migliorare lo schema bisogna andare ad un secondo ordine di accuratezza nello spazio, però invece di utilizzare una distribuzione iniziale di dati costante a tratti, se ne impiega una di dati lineare a tratti (figura 2.11). Le pendenze σ_n , in ogni singola cella del dominio, vengono così calcolate definendone altre due: una di tipo *upwind* (2.68), ed un'altra di tipo *downwind* (2.69).

$$\sigma_n^{uw} = \frac{w_{n+1}^k - w_n^k}{\Delta x}, \quad (2.68)$$

$$\sigma_n^{dw} = \frac{w_n^k - w_{n-1}^k}{\Delta x}. \quad (2.69)$$

Si utilizza l'operatore *MINMOD*, cioè:

$$\sigma_n = \text{MINMOD}(\sigma_n^{uw}, \sigma_n^{dw}) = \begin{cases} \min(|\sigma_n^{uw}|, |\sigma_n^{dw}|) & \text{se } (\sigma_n^{uw})(\sigma_n^{dw}) > 0 \\ 0 & \text{se } (\sigma_n^{uw})(\sigma_n^{dw}) < 0 \end{cases} \quad (2.70)$$

Questo implica scegliere la pendenza più modesta se c'è un segno concorde, oppure si considera una pendenza nulla nel caso vi sia segno discorde, ovvero quando si hanno delle situazioni di massimo o di minimo locale. Proprio in quest'ultima situazione, la soluzione è instabile, e incomincia ad oscillare: quando questo avviene bisogna imporre, appena si passa per una discontinuità, una pendenza nulla. Così facendo si abbassa l'ordine dello schema riportandosi ad un primo ordine. Godunov scoprì infatti che passando attraverso una discontinuità, e integrando con uno schema con ordine maggiore del primo, la soluzione oscillava, mentre se si integra con uno schema al primo ordine questo non succede, in quanto la viscosità numerica ha un effetto positivo sulla soluzione, smorzando le oscillazioni.

Una volta note le pendenze è possibile calcolare i valori di w^L e w^R a destra ed a sinistra dell'interfaccia $n + 1/2$

$$w_{n+1/2}^L = w_n^k + \sigma_n^k \frac{\Delta x}{2}$$

$$w_{n+1/2}^R = w_{n+1}^k - \sigma_{n+1}^k \frac{\Delta x}{2}$$

e di conseguenza calcolare i flussi attraverso la risoluzione del problema di Riemann.

Si perviene quindi ad uno schema integrativo di questo tipo:

$$w_n^{k+1} = w_n^k - \frac{\Delta t}{\Delta x} (f_{n+1/2}^k - f_{n-1/2}^k) - \frac{a\Delta t}{2\Delta x} \Delta_2 w \quad (2.71)$$

il quale è accurato al secondo ordine nello spazio, ma al primo nel tempo. Per ottenere un'accuratezza al secondo ordine anche nel tempo, si può modificare lo schema (2.71) semplicemente con un termine aggiuntivo:

$$w_n^{k+1} = w_n^k - \frac{\Delta t}{\Delta x} (f_{n+1/2}^k - f_{n-1/2}^k) - \frac{a\Delta t}{2\Delta x} \Delta_2 w (1 - a \frac{\Delta t}{\Delta x}) \quad (2.72)$$

2.3 Condizioni al contorno

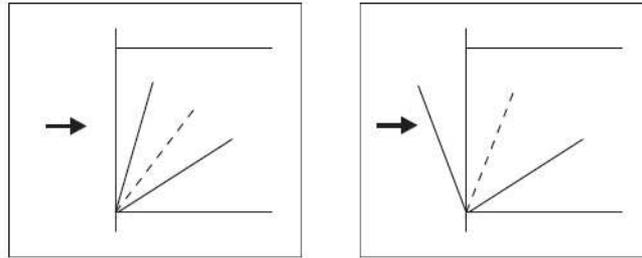


Figura 2.12: Ingresso supersonico a sinistra ed ingresso subsonico a destra.

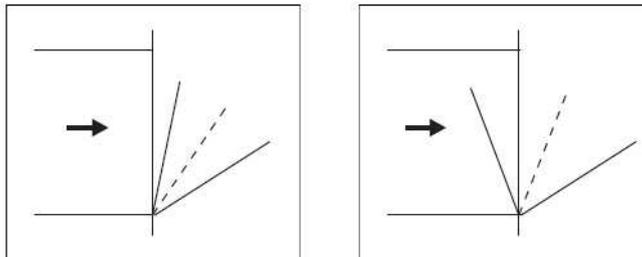


Figura 2.13: Uscita supersonica a sinistra ed uscita subsonica a destra.

Considerando un campo di moto unidimensionale, nel caso di un ingresso supersonico (figura 2.12), ci sarebbero tre caratteristiche entranti, quindi si dovrebbero imporre tre grandezze fisiche sul contorno.

Nel caso di ingresso subsonico, invece, vi saranno due caratteristiche entranti (u e $u+a$) ed una uscente ($u-a$), e allora si dovranno imporre solo due condizioni.

Nel caso di uscita supersonica (figura 2.13), tutte le caratteristiche sono uscenti dal campo di moto, perciò tutte le grandezze fisiche sul contorno saranno determinate dall'interno del campo di moto. Non è quindi necessario imporre alcuna condizione al contorno.

Infine, per quanto riguarda l'uscita subsonica, si avrà una sola caratteristica entrante ($u-a$), e si dovrà imporre una sola delle grandezze fisiche.

Nel caso di un flusso bidimensionale, essendo cinque le incognite, saranno necessarie altrettante condizioni al contorno. Se però il contorno è costituito da una parete solida, come nel caso di un ugello, valgono le seguenti considerazioni:

- Si impongono, sia per l'ingresso del condotto principale che per quelli dei getti secondari, temperatura totale e entropia come costanti, ovvero

$$T^\circ, S = \text{cost}$$

- Le pareti superiore ed inferiore dell'ugello sono considerate non deformabili e adiabatiche, quindi valgono le condizioni di tangenza del flusso e gradiente termico nullo sulle superfici in ogni punto. Perciò

$$\begin{aligned} \vec{V}_n &= 0 \\ \frac{\partial T}{\partial n} &= 0 \end{aligned}$$

- Per i contorni della griglia esterna all'ugello valgono le condizioni di campo all'infinito.

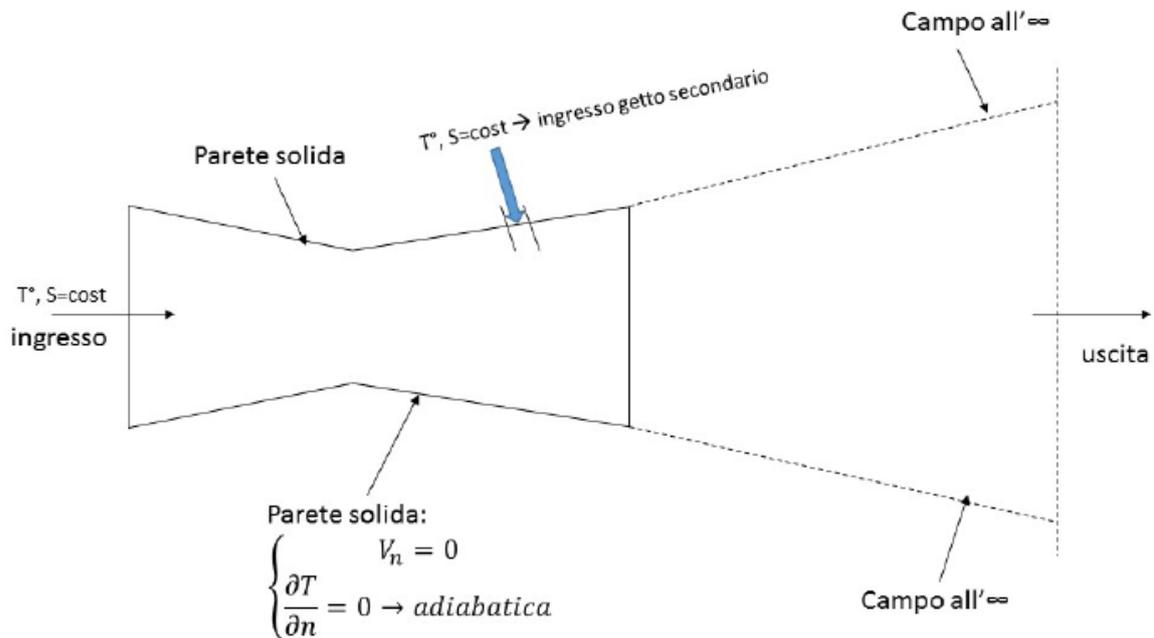


Figura 2.14: Condizioni al contorno del problema.

Capitolo 3

Caso di studio

3.1 Analisi del problema

Il caso in esame considera la geometria e le ipotesi di quello descritto nell'articolo [1]. Mediante l'implementazione della tecnica dello *Shock Vector Control*, descritta nei capitoli precedenti, sono state sviluppate delle simulazioni numeriche utilizzando un codice di calcolo scritto in linguaggio Fortran.

Il punto più importante è capire come studiare tale problema, ovvero individuando i parametri di input, quindi le variabili su cui è possibile interagire in modo da farle cambiare a piacimento. Esse sono:

- La portata del flusso primario.
- Il *nozzle pressure ratio* (*NPR*), quindi il rapporto di espansione dell'ugello.
- La pressione di immissione del flusso secondario (p_j° , figura 2.1), la quale è legata al *secondary pressure ratio* (*SPR*), ovvero il rapporto tra pressione di spillamento e immediatamente all'uscita dallo slot.

Occorre fin da subito precisare che la portata del flusso primario non verrà mai presa in considerazione, siccome si tratta di un parametro che non è proprio sempre imponibile a piacere (se ad esempio l'ugello è critico, la portata è quella critica, e non può aumentare).

Per quanto riguarda il *NPR*, invece, la sua espressione è così definita (basandosi sui nomi delle sezioni indicati in figura 3.1):

$$NPR = \frac{p_i^\circ}{p_e} = \left(1 + \frac{\gamma - 1}{2} M_e^2\right)^{\frac{\gamma}{\gamma - 1}} \quad (3.1)$$

dove si sta facendo l'ipotesi di ugello reversibile, in quanto si considera

$$p_i^\circ = p_e^\circ.$$

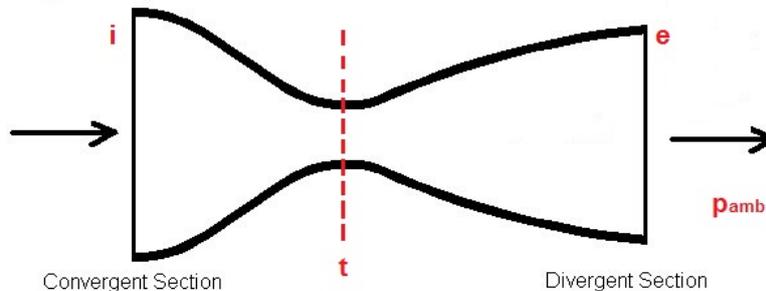


Figura 3.1: Schematizzazione delle sezioni di un ugello.

Tale ipotesi è comunque irrilevante ai fini della tesi in oggetto. Salta subito all'occhio, osservando la (3.1), che una volta fissato il NPR risulta immediato ricavare il numero di Mach nella sezione di uscita (M_e).

3.1.1 Dimensioni dell'ugello

Di seguito si riportano le dimensioni dell'ugello esaminato, assieme anche a una vista degli ingressi per i flussi secondari.

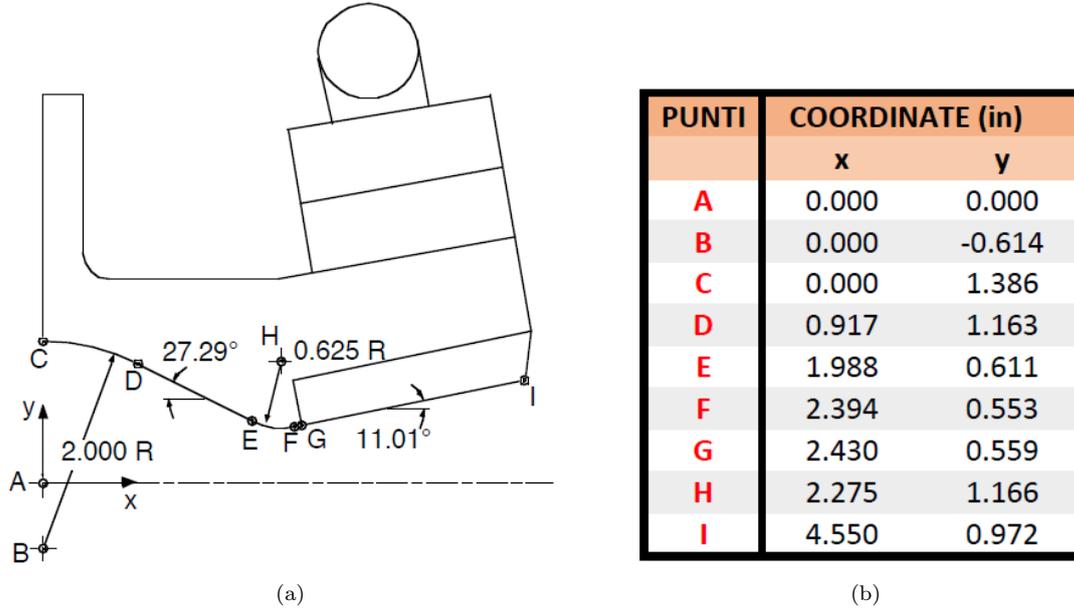


Figura 3.2: [a]: Schema dell'ugello [b]: Coordinate dei punti identificati.

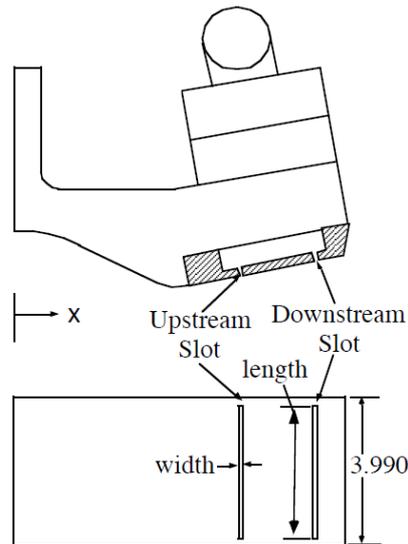


Figura 3.3: Slot di immissione dei getti secondari.

I valori di riferimento del nostro caso sono

$$x_{\text{slot}} = 4.1 \text{ in} \quad \text{width} = 0.08 \text{ in} \quad \text{length} = 3.49 \text{ in}$$

In realtà, nell'articolo [1], sono state effettuate più prove sperimentali per diversi casi della posizione dello slot (x_{slot}). Questo è possibile in quanto si dispone di una struttura dell'ugello

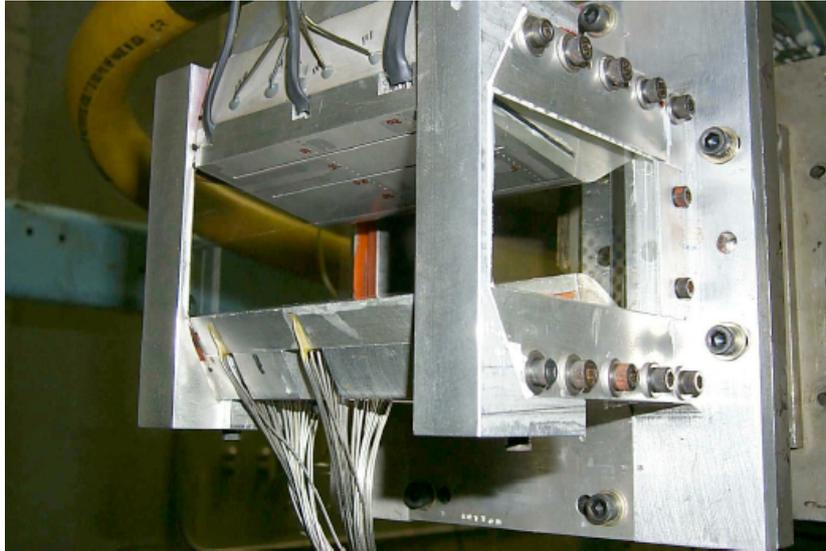


Figura 3.4: Riproduzione dell'ugello [1] (NASA Langley Research Center).

non fissa, ma con parti smontabili (visibile in figura 3.4).

Si può notare, facendo riferimento alla figura 3.2, che la posizione dello slot di immissione risulta essere pertanto non troppo vicina alla sezione di uscita (avendo una lunghezza di $L = 4.55 \text{ in}$). Ciò è auspicabile, infatti non avrebbe senso provocare un urto obliquo che rischia di uscire dall'ugello, perchè così facendo non si otterrebbe l'effetto voluto di creare un angolo δ di deviazione della spinta.

Premesso tale ragionamento, risulta ovvio che il valore adottato di x_{slot} deve essere frutto di un compromesso studiato da coloro che hanno eseguito le prove sperimentali. In sostanza, un soffiaggio troppo vicino alla sezione di gola causerebbe un urto troppo violento, mentre uno troppo lontano rischierebbe proprio di non dare alcun effetto.

3.1.2 Griglia computazionale

All'interno di questa tesi, ogni grandezza priva di un'unità di misura è una grandezza adimensionalizzata rispetto ad un valore di riferimento.

La necessità di adottare delle grandezze di riferimento è una pratica assai comune per studiare problemi di questo tipo. Non si tratta infatti di un passaggio obbligatorio, anche perchè esistono software che elaborano soluzioni direttamente con grandezze dimensionali. Si tratta, però, di una tecnica che permette di studiare il problema in similitudine fluidodinamica. Questo significa che ogni grandezza, essendo adimensionale, può essere riscalata ad una reale utilizzando un qualsiasi parametro di riferimento.

Nel caso in oggetto, ad esempio, osservando la tabella di figura 3.2, si vede che la lunghezza dell'ugello è $L = 4.55 \text{ in}$. Pertanto, adimensionalizzando tutte le lunghezze rispetto ad un pollice, si è riprodotto l'ugello interamente (figura 3.6), e infine si è costruita la griglia per visualizzare anche la scia (figura 3.5).

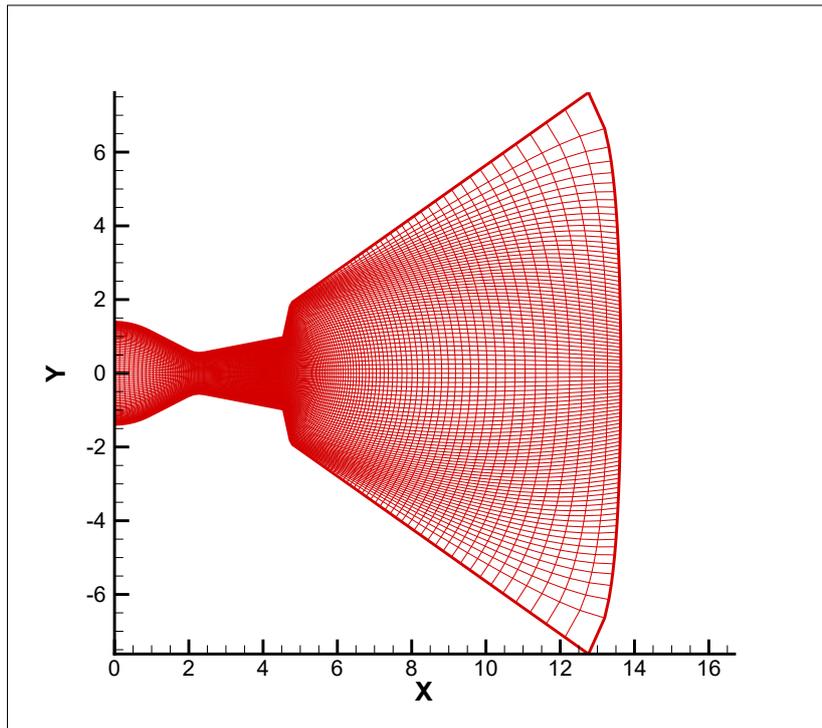


Figura 3.5: Griglia computazionale adottata per l'analisi (250x130).

Si nota che l'infittimento maggiore risulta essere all'interno dell'ugello, dove interessa osservare di più il comportamento del flusso; mentre all'esterno, quindi nella zona di propagazione della scia, pertanto di scarso interesse per i nostri scopi, si è pensato di non adottare una quantità di punti eccessiva in modo da non appesantire troppo il costo computazionale delle simulazioni.

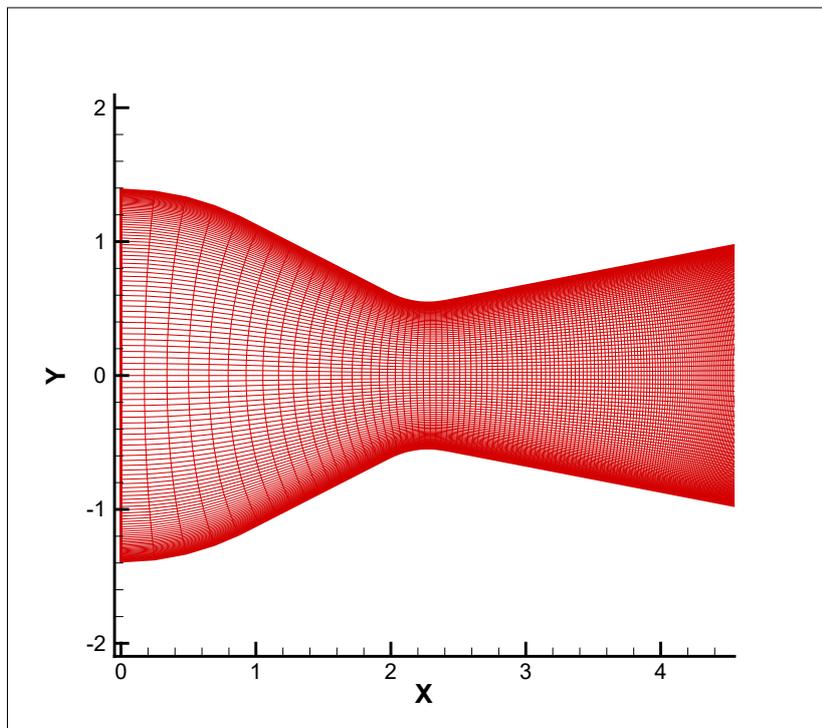


Figura 3.6: Ingrandimento della griglia computazionale sull'ugello.

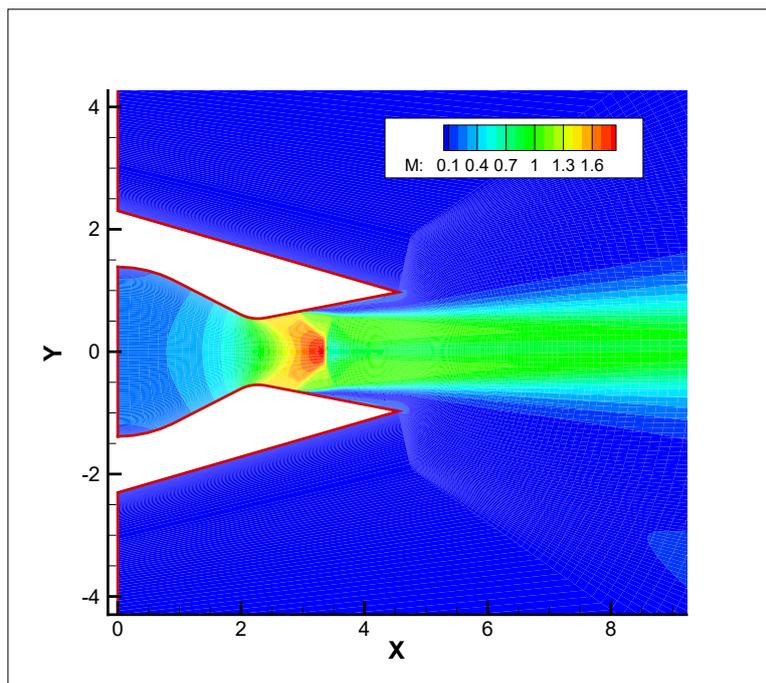


Figura 3.7: Isolivello del numero di Mach, condizione simmetrica ($NPR = 2$).

3.2 Risultati generali

In questa sezione verranno esposti i primi risultati ottenuti per le varie simulazioni effettuate, dove ognuna sarà caratterizzata da diversi valori dei parametri di input (NPR e p_j°). Ciascun tempo impiegato per le simulazioni non sarà arbitrario. Infatti, per ogni caso, verrà adottata una tempistica che permette il raggiungimento delle condizioni stazionarie del sistema. Questa è una prerogativa molto importante ai fini di una valutazione realistica del problema. Da tenere a mente che dei valori negativi delle grandezze, salvo diversi motivi, stanno ad indicare che il soffiaggio avviene dallo slot inferiore e viceversa.

3.2.1 $NPR=2$

Si vuole fin da subito identificare una configurazione come la più critica fra tutte. Questo perchè, essendo lo scopo della presente tesi per lo più di ricerca, una volta presa in considerazione quella configurazione, i risultati che si otterranno avranno certamente un peso di rilievo rispetto ad altri casi meno complicati da risolvere.

Si è scoperto che un caso particolarmente critico è quello per $NPR = 2$, il quale, come flusso indisturbato, è riportato in figura 3.7. Come si può notare, la configurazione simmetrica che si viene a manifestare è complessa: si tratta di due urti obliqui che tendono a convergere, senza riuscirci però, in quanto si crea un urto retto (molto violento) che causa una brusca ricomprensione del flusso (il fenomeno è meglio visibile in figura 3.8).

Avendo un rapporto di espansione considerevolmente basso, l'ugello è altamente sovraespanso. In questo modo, ai fini di riequilibrio con le condizioni esterne, è impossibile non prevedere delle ricomprensioni del flusso anche molto intense.

Verranno adesso inserite le condizioni di soffiaggio, ma è importante precisare come vengono attuate: si tratta di imporre una legge secondo la quale viene immesso il flusso secondario. Questo si può fare nel modo più semplice, ovvero impostando l'azione del getto fin da subito, quindi con il partire della simulazione (*condizione a gradino*); mentre ci sono altri tipi di legge leggermente più complicati, come del tipo *a impulso* (utile più a studiare la stabilità di un sistema), o *a rampa* (qualora si voglia attivare l'impulso per un tempo significativo secondo una legge lineare).

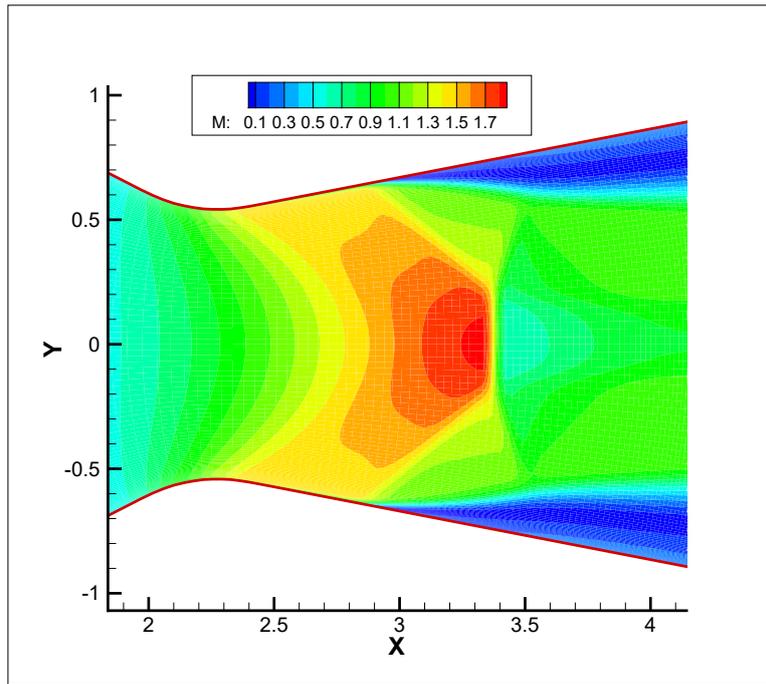


Figura 3.8: Ingrandimento dello schema di urti in prossimità della sezione di gola ($NPR = 2$).

Quelle appena elencate sono le leggi che verranno usate, ma in sostanza ce ne sarebbero infinite altre. Bisogna semplicemente scegliere un certo input per studiare il sistema.

Condizione a gradino

Suddetta condizione, detta anche brevemente *step*, prevede l'esercizio di un soffiaggio dallo slot della parete inferiore sulla struttura aerodinamica vista in figura 3.8 (soffiare dall'alto condurrebbe a considerazioni prettamente analoghe).

Il risultato che si è ottenuto è osservabile in figura 3.10.

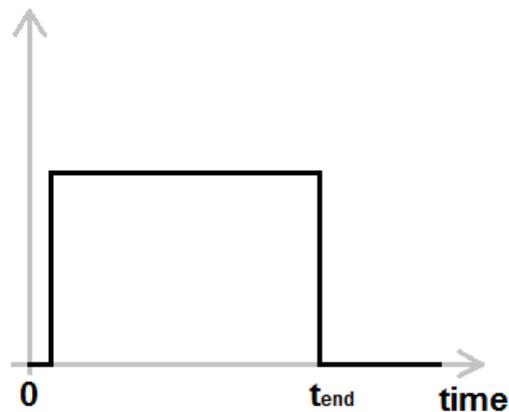


Figura 3.9: Input a gradino.

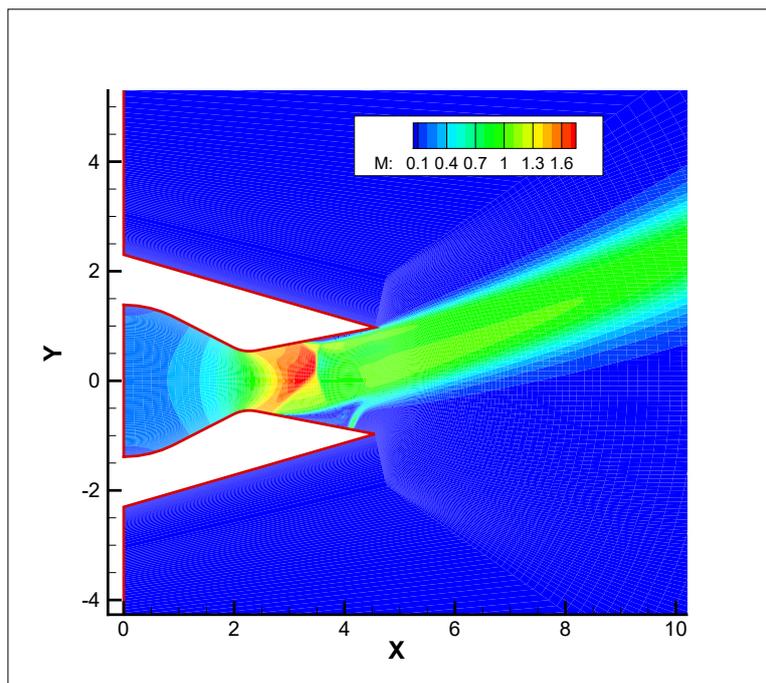


Figura 3.10: Isolivello del numero di Mach, condizione di soffiaggio ($NPR = 2$, $p_j^\circ = 1.2$).

Si è eseguito un soffiaggio con una pressione $p_j^\circ = 1.2$. Tale valore non è scelto a caso, in quanto deve essere sempre maggiore della pressione immediatamente all'uscita dallo slot. Se così non fosse, il flusso secondario non potrebbe essere immesso all'interno dell'ugello. Il valore di p_{slot} è stato rilevato grazie alla soluzione *free* (senza soffiaggio), in quanto il campo di ogni grandezza (Mach, pressione, temperatura...), una volta terminata la simulazione, è completamente noto. A tal proposito si è letto

$$p_{slot} \approx 0.47$$

quindi ogni valore di p_j° , in accordo con la figura 2.1, non può che essere superiore di p_{slot} . Tornando alla simulazione effettuata, sulla base di questi parametri, si può vedere che il flusso primario ha subito una marcata deviazione, ma la configurazione di urti è rimasta intatta. Ciò che interessa è di quanto realmente sia l'angolo prodotto, quindi si riportano anche i seguenti grafici:

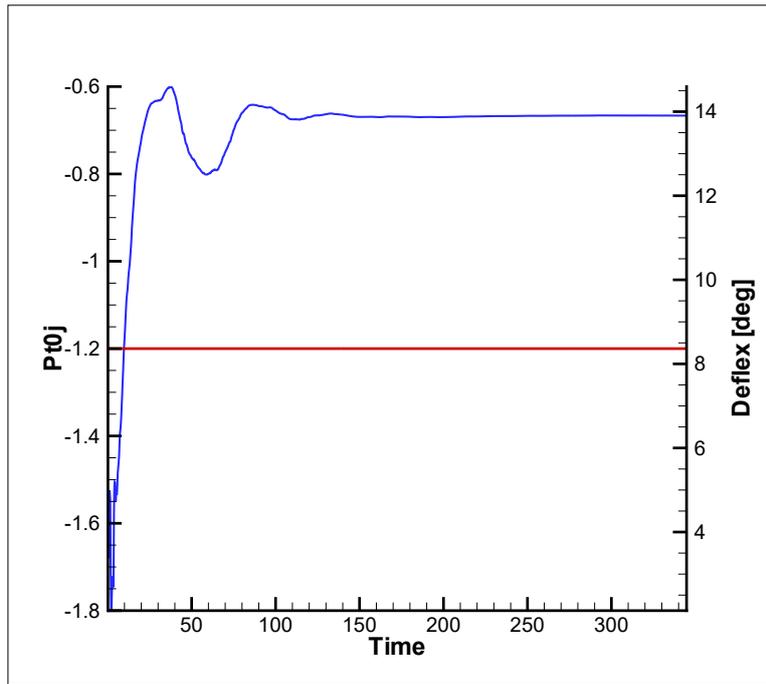


Figura 3.11: Andamento dell'angolo di deflessione durante la simulazione ($NPR = 2$, $p_j^\circ = 1.2$).

Si può vedere che il valore stazionario dell'angolo di deviazione del flusso è di circa 14 gradi, quindi certamente non indifferente.

Aumentando l'entità del soffiaggio si riscontra, invece, un risultato interessante (figura 3.12). Sono presenti delle oscillazioni nella parte finale del grafico della deflessione, ma non vanno ad influenzare i risultati della simulazione.

Come leggibile, si sta adottando ora $p_j^\circ = 1.5$. Questo comporta un abbassamento del valore stazionario dell'angolo di deviazione (infatti raggiunge circa 12 gradi).

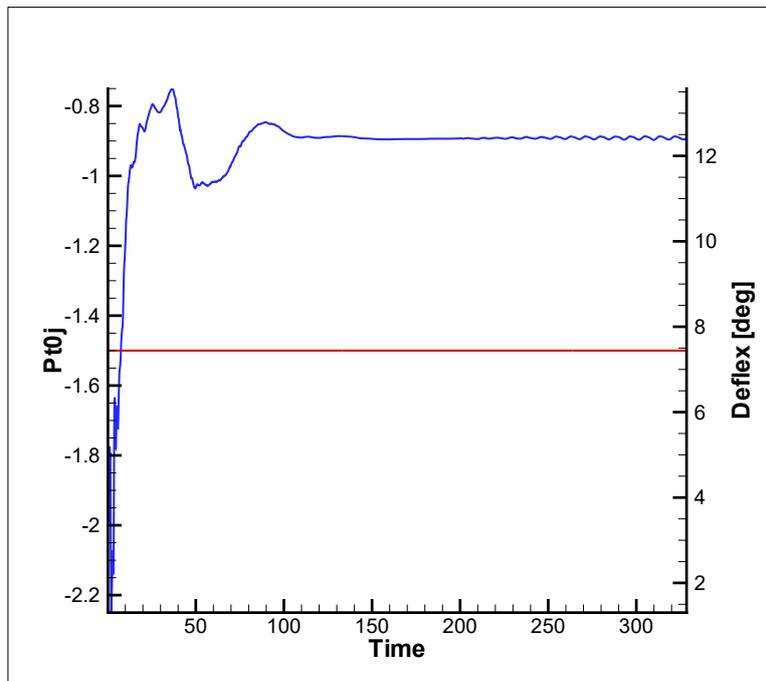


Figura 3.12: Andamento dell'angolo di deflessione durante la simulazione ($NPR = 2$, $p_j^\circ = 1.5$).

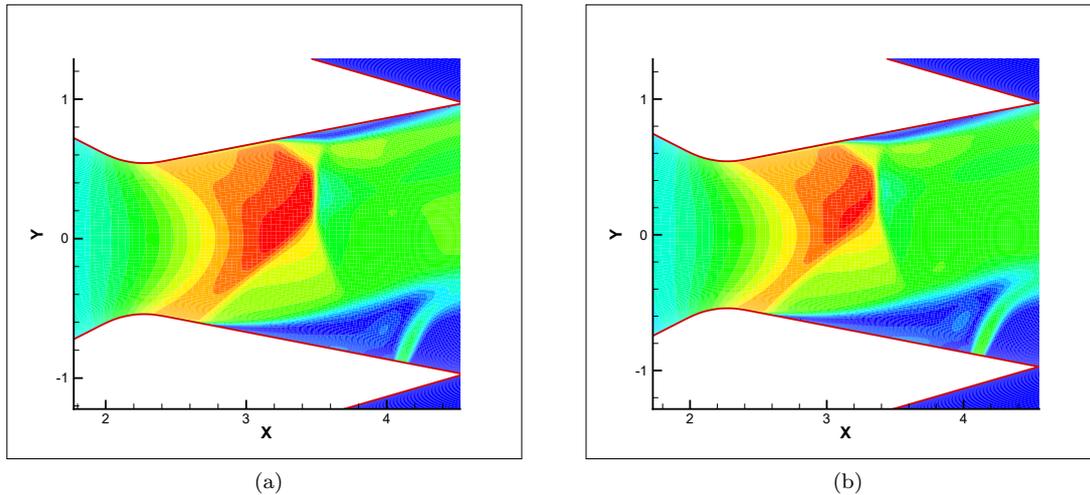


Figura 3.13: Confronto delle configurazioni di urti al variare dell'entità del soffiaggio ($NPR = 2$), [a]: $p_j^\circ = 1.2$, [b]: $p_j^\circ = 1.5$.

Riassumendo, i due casi appena analizzati dicono

$$p_j^\circ = 1.2 \Rightarrow \delta \approx 14^\circ$$

$$p_j^\circ = 1.5 \Rightarrow \delta \approx 12^\circ$$

Mediante un approccio a freddo, si poteva pensare che aumentando l'entità del getto si riscontrasse anche una deviazione maggiore del flusso primario. In realtà accade proprio il contrario, e il motivo risiede negli urti che si vengono a creare.

In figura 3.13, nel caso (b), si può notare che la configurazione di urti è meno nitida rispetto al caso (a). Ciò porta a trovare che a valle degli urti creatisi per $p_j^\circ = 1.5$, il flusso è meno compresso rispetto a quelli per $p_j^\circ = 1.2$.

La conclusione deducibile, per una configurazione a $NPR = 2$, è che gli urti sono meno intensi se si incrementano le condizioni di monte del flusso secondario, allora è normale riscontrare angoli sempre più bassi con l'aumentare di p_j° .

Condizione rampa

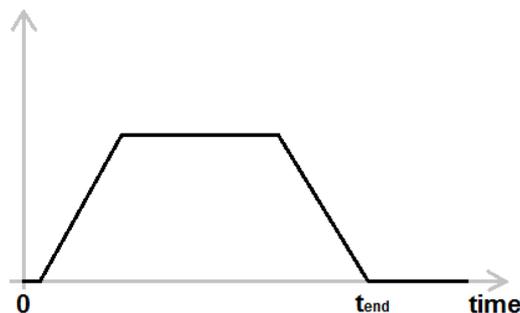


Figura 3.14: Input a rampa.

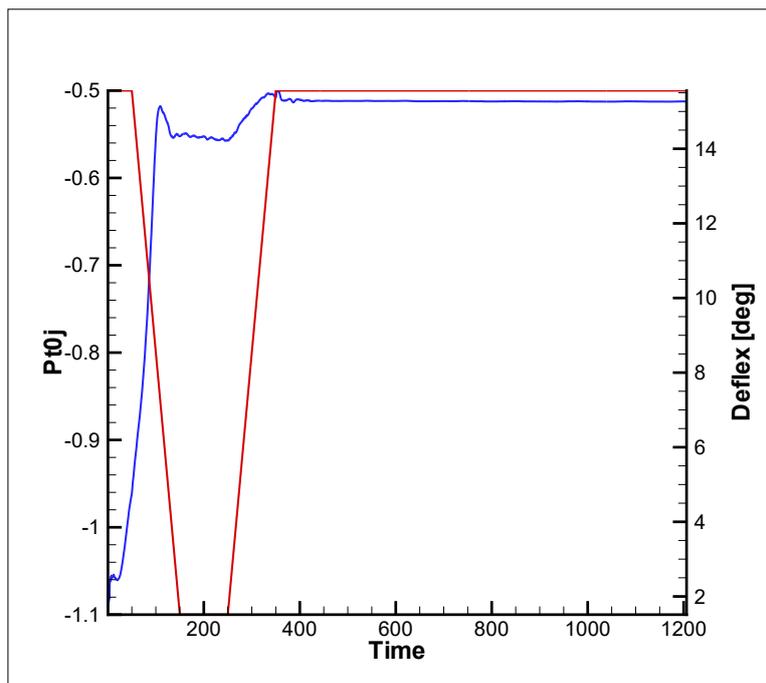


Figura 3.15: Andamento dell'angolo di deflessione durante la simulazione ($NPR = 2$, p_j° da legge riportata sul grafico).

Quello che si intende fare ora è soffiare ad un certo istante, mantenere un getto di intensità costante e poi abbassarlo fino a renderlo nullo. Il risultato che ci si aspetta nel fare ciò risiede in un comportamento analogo della deviazione del flusso, ovvero si prevede che l'angolo δ compia lo stesso percorso del nostro input (sempre p_j° per ora).

Come osservabile in figura 3.15, si è lasciato un po' di tempo all'inizio del sistema per stabilizzarsi, poi, all'istante $t = 50$, si è iniziato a soffiare, e anche per quell'istante inizia a salire l'angolo di deflessione.

Quello che invece risulta strano è ciò che avviene durante la "discesa" (qui nel grafico vista come risalita per il discorso sui segni delle grandezze fatto in precedenza), ossia durante l'attenuazione del soffiaggio, che parte dall'istante $t = 250$. Infatti l'angolo non tende anch'esso ad abbassarsi, bensì risale, portandosi a stabilizzarsi a un valore stazionario di circa 15.5 gradi.

In sintesi, il fenomeno appena descritto, indica una dissimmetrizzazione del flusso nonostante non vi sia alcun fattore che la provochi una volta interrotto il getto (teoria confermata in [2]). Pertanto si è di fronte ad una situazione di instabilità del sistema, la quale necessita di essere studiata più approfonditamente.

Il fatto di aver scelto $p_j^\circ = 1.1$ come valore massimo della rampa non cambia il risultato, infatti sono state realizzate simulazioni analoghe per p_j° più bassi, fino a 0.8, senza comunque ottenere una simmetria del flusso una volta terminato il soffiaggio.

Condizione a impulso

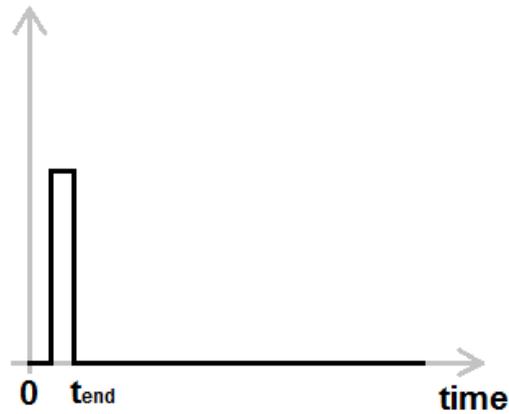


Figura 3.16: Input a impulso.

A partire dalle considerazioni effettuate nella sezione appena precedente, risulta ancora più interessante approfondire il comportamento della configurazione per $NPR = 2$ indicata fin dall'inizio come la più critica. Infatti, con questa scoperta di una instabilità del flusso, bisognerebbe essere molto cauti prima di mettere in pratica la tecnica dello *Shock Vector Control* per casi di ugelli che presentano bassi valori del rapporto di espansione.

Una ulteriore conferma dell'instabilità indicata viene fornita dalla successiva simulazione.

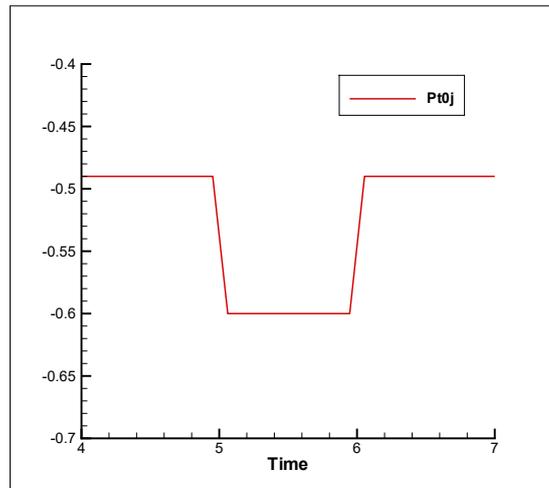


Figura 3.17: Prima condizione impulsiva di p_j° utilizzata.

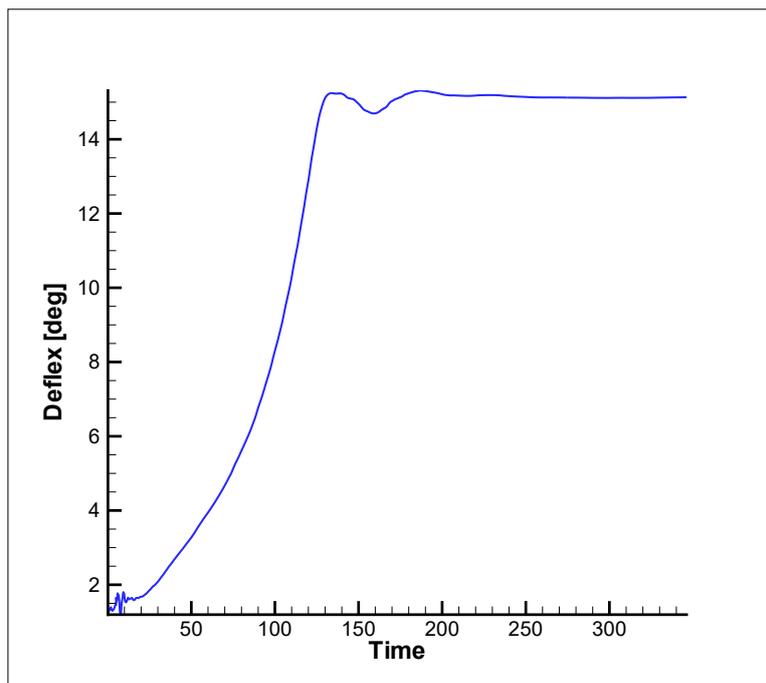


Figura 3.18: Andamento dell'angolo di deflessione durante la simulazione ($NPR = 2$, p_j° da legge di figura 3.17).

Con uno zoom si è identificata meglio la condizione iniziale del getto in figura 3.17: si denota che la scelta di attuare l'impulso a partire da $t = 5$, e di farlo perdurare fino a $t = 6$, è del tutto arbitraria. Non lo è invece la scelta di prendere come valore massimo $p_j^\circ = 0.6$, in quanto ci si vuole proprio portare vicino a quello di p_{slot} , in modo da perturbare il sistema lievemente per vedere come reagisce.

Il risultato ottenuto è visibile in figura 3.18: si nota quello che ci si attendeva, ovvero un aumento dell'angolo di deflessione anche una volta terminato il breve soffiaggio. Pertanto si ha un'altra conferma che il flusso si dissimmetrizza come se il getto fosse sempre presente in maniera continuativa.

In realtà, ciò che si è appena fatto, non fornisce un'estrema certezza di instabilità assoluta del sistema. Questo perchè, considerando $p_{slot} = 0.47$, si potrebbe pensare di abbassare ancora un po' l'entità del segnale adottato, ed è proprio quello che si è fatto successivamente.

Si impiega ora infatti un segnale come rappresentato in figura 3.19.

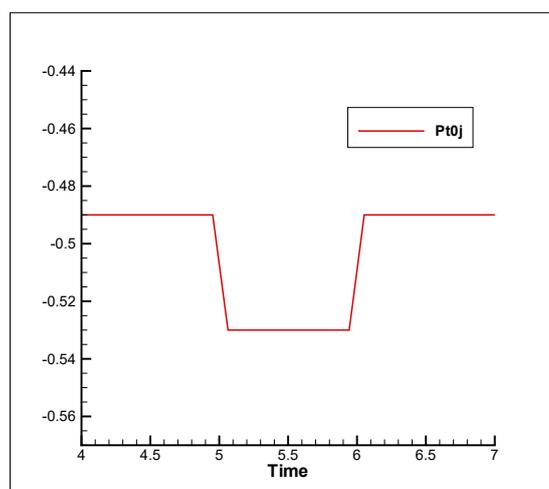


Figura 3.19: Seconda condizione impulsiva di p_j° utilizzata.

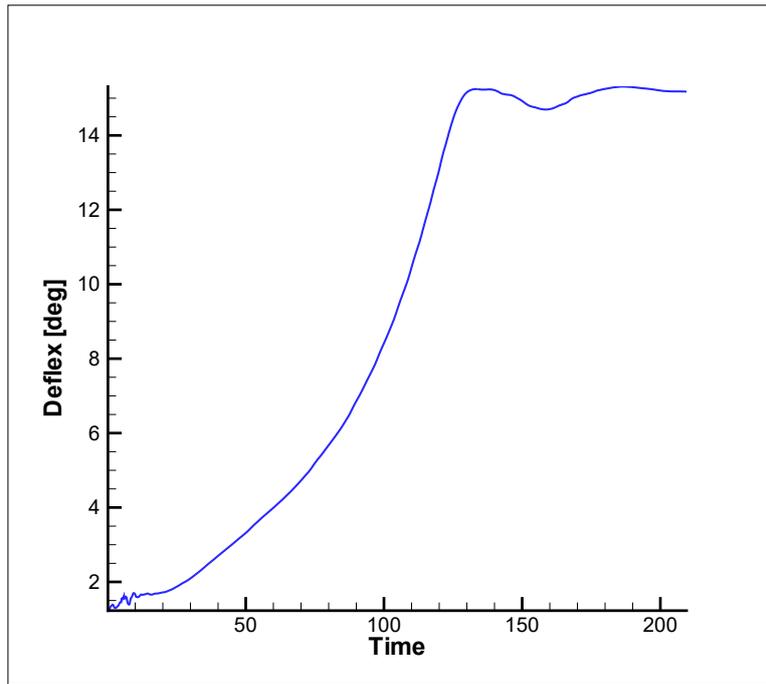


Figura 3.20: Andamento dell'angolo di deflessione durante la simulazione ($NPR = 2$, p_j° da legge di figura 3.19).

Come si può notare dalla figura 3.20, si è preferito troncare la simulazione prima che finisse, in quanto è chiaramente visibile che il fenomeno di instabilità continua a persistere nonostante l'entità massima di p_j° sia ora ancora più vicina al valore di p_{slot} .

3.2.2 NPR=4.6

Suddetta configurazione è quella principalmente analizzata in [1].

Di seguito si mostra, in figura 3.26, l'andamento del flusso indisturbato, riportando anche i campi di varie grandezze.

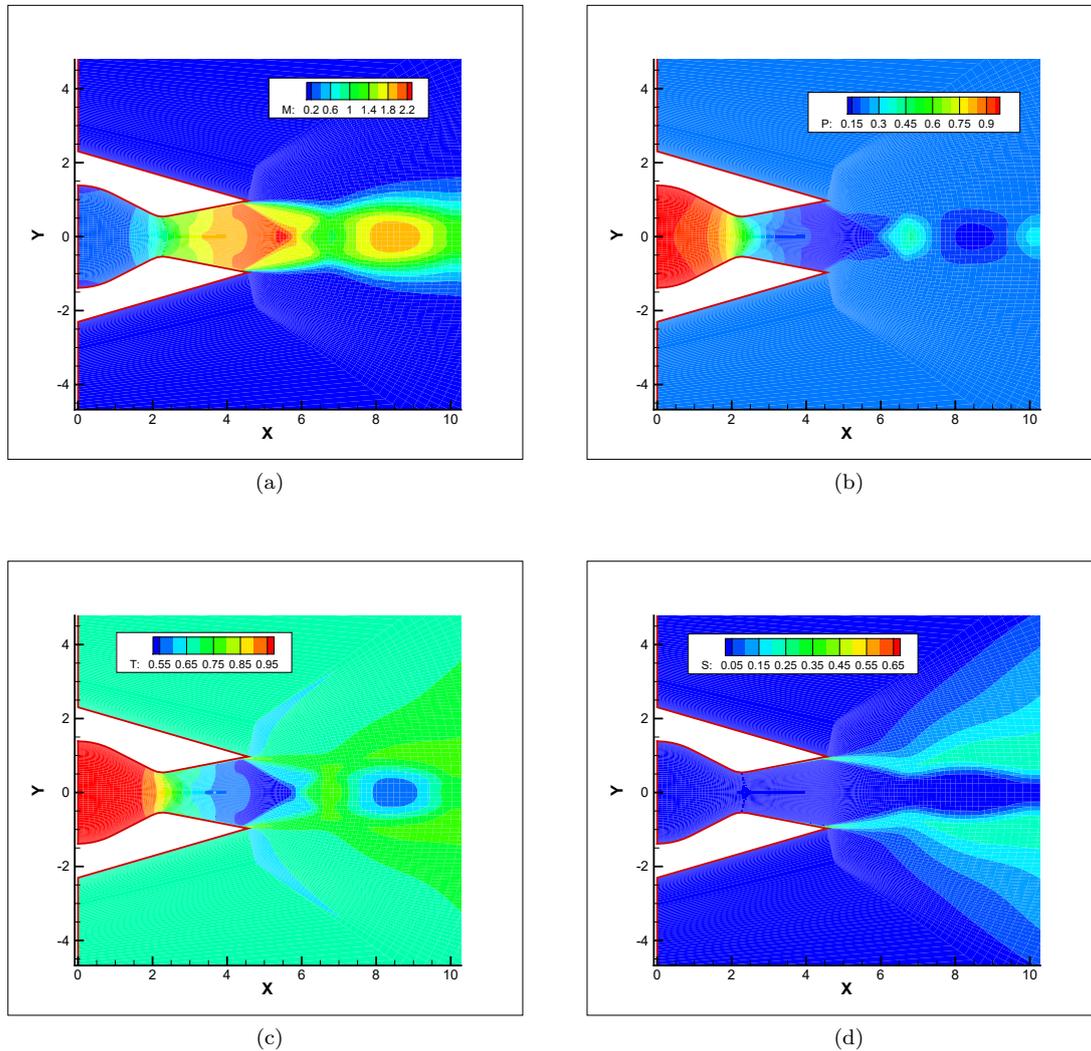


Figura 3.21: Isolivello di varie grandezze ($NPR = 4.6$), rispettivamente [a]: Numero di Mach, [b]: Pressione, [c]: Temperatura, [d]: Entropia.

Come si evince dalla figura [a] della 3.26, c'è una netta differenza rispetto alla struttura aerodinamica che si è descritta in figura 3.7. Qui, infatti, gli urti sfociano ben all'infuori dell'ugello, pertanto la ricompressione del flusso avviene all'esterno (come ben visibile anche dal campo di entropia illustrato nella figura [d], dove si nota che le variazioni sono tutte concentrate esternamente).

Si può già fare una considerazione non da poco: man mano che si aumenta il rapporto di espansione dell'ugello, accade che la configurazione di urti tende a spostarsi verso la sezione di uscita. Tale fenomeno comporta un incremento notevole del valore della spinta assiale, la quale verrà analizzata successivamente.

Adesso si vuole andare a studiare anche questa configurazione come fatto per $NPR = 2$, ovvero variando il tipo di condizione mediante la quale viene adoperato il soffiaggio.

Condizione a gradino

In questo caso, la risposta del sistema è visibile nelle figure seguenti.

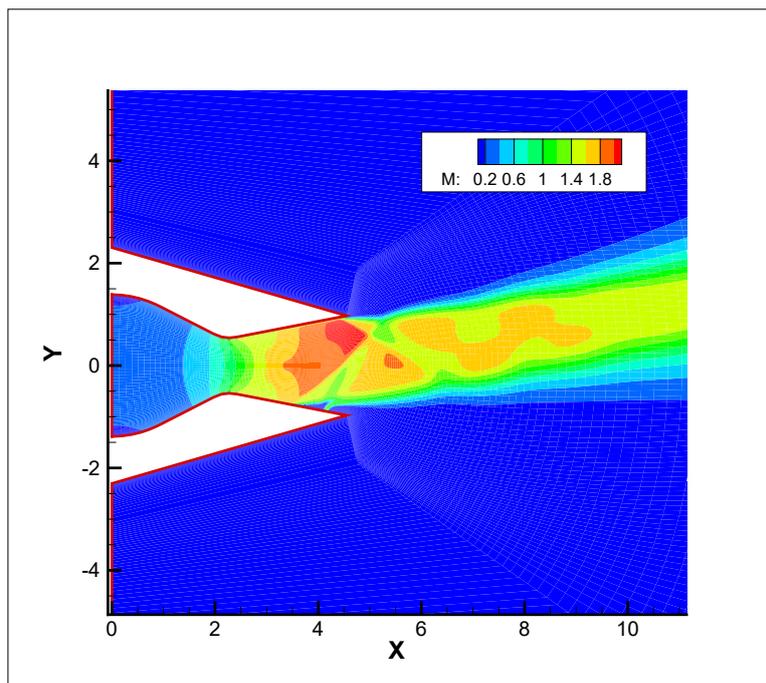


Figura 3.22: Isolivello del numero di Mach, condizione di soffiaggio ($NPR = 4.6$, $p_j^\circ = 1.05$).

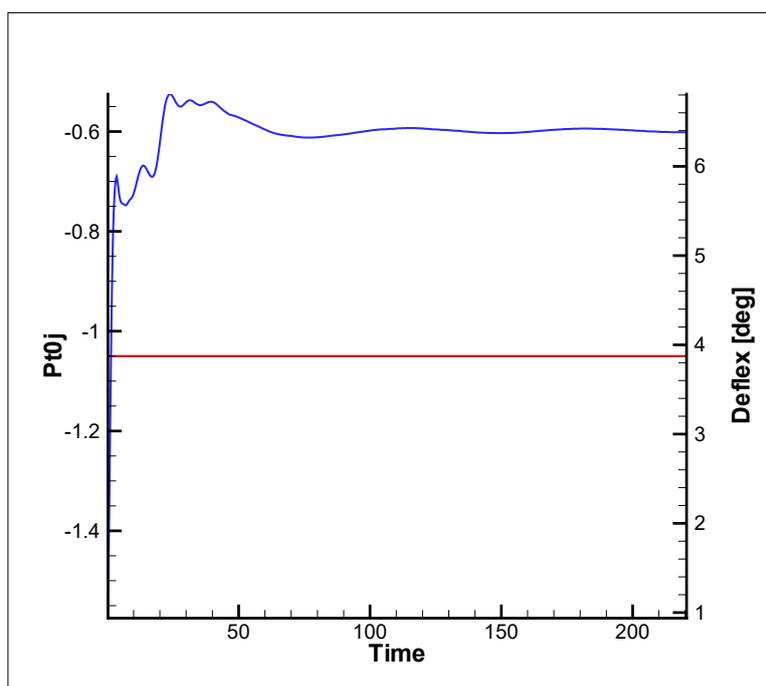


Figura 3.23: Andamento dell'angolo di deflessione durante la simulazione ($NPR = 4.6$, $p_j^\circ = 1.05$).

Come osservabile in figura 3.23, si è adottato per iniziare un valore non molto alto della pressione a monte del soffiaggio, ovvero $p_j^\circ = 1.05$. La risposta così ottenuta di δ presenta un andamento simile ai casi di step-input per $NPR = 2$, ma ovviamente il valore stazionario è decisamente più basso (circa 6.5 gradi). Tale differenza non risiede nella diversa intensità di p_j° impiegata per i due valori di NPR , la quale è poco significativa finché si resta intorno a 1 come ordine di grandezza, bensì è proprio il rapporto di

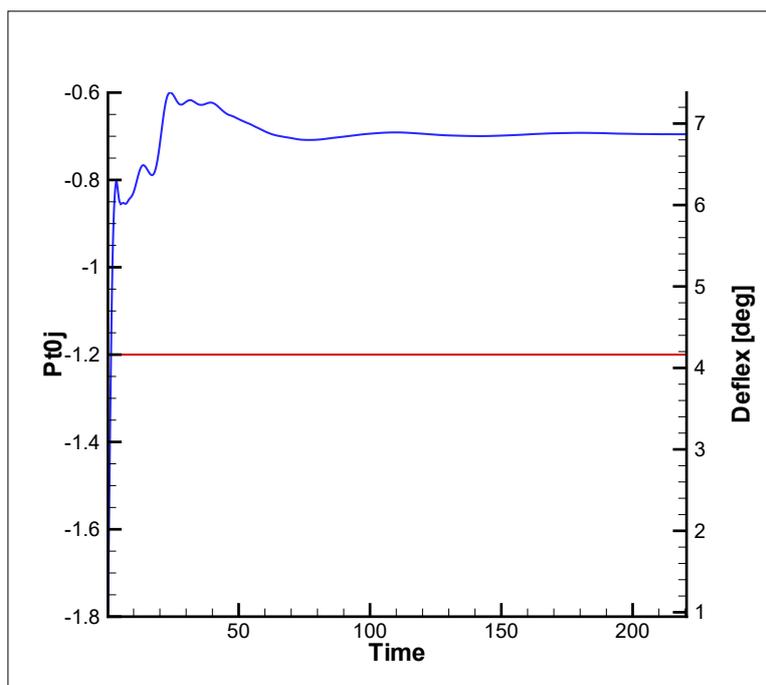


Figura 3.24: Andamento dell'angolo di deflessione durante la simulazione ($NPR = 4.6$, $p_j^\circ = 1.2$).

espansione il principale responsabile di una minore deflessione. Questo afferma che tanto più l'intensità degli urti sviluppatasi all'interno dell'ugello è alta, e tanto più si può prevedere una intensa deviazione del flusso.

Si è riportato anche il caso per $p_j^\circ = 1.2$, in modo da poter confrontare i risultati ottenuti con quelli per $NPR = 2$ di figura 3.11. Si nota, dalla figura 3.24, che il valore stazionario è leggermente aumentato rispetto al caso $p_j^\circ = 1.05$, avendo ora circa 7 gradi.

E' possibile pertanto riassumere le condizioni rilevate per $p_j^\circ = 1.2$:

$$NPR = 2 \quad \Rightarrow \quad \delta \approx 14^\circ$$

$$NPR = 4.6 \quad \Rightarrow \quad \delta \approx 7^\circ$$

Si tratta quindi di una variazione del 50%, anche se altre simulazioni per differenti valori di p_j° (non riportate per brevità), hanno fornito variazioni più piccole (30 ÷ 40%).

Condizione rampa

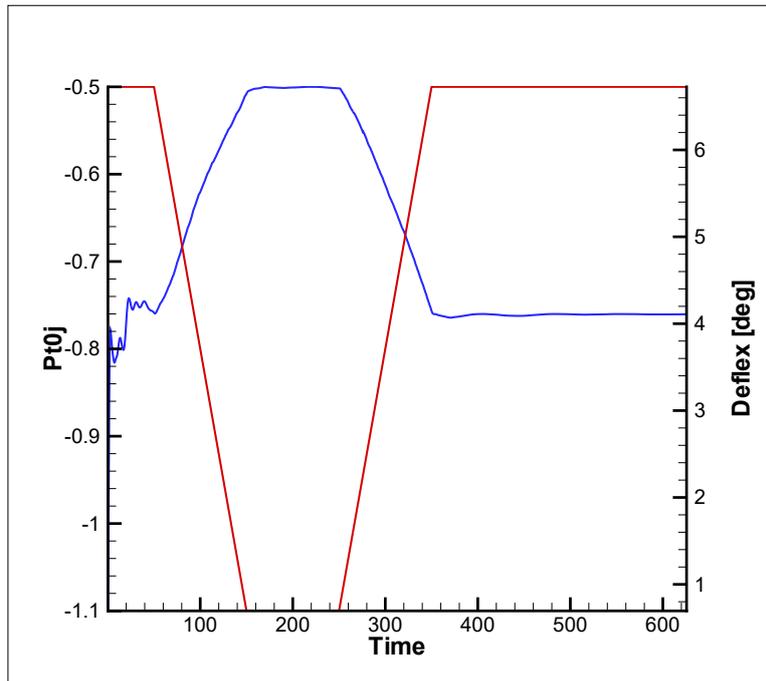


Figura 3.25: Andamento dell'angolo di deflessione durante la simulazione ($NPR = 4.6$, p_j° da legge riportata sul grafico).

Si riporta per completezza, in figura 3.25, la simulazione elaborata con la stessa tipologia di legge a mo' di rampa adottata per $NPR = 2$ (figura 3.15).

Si vede che ora l'angolo tende a smorzarsi una volta cessata l'azione del soffiaggio (figura 3.25), ma non torna al suo valore iniziale, cioè zero (configurazione simmetrica). Questo è lo stesso problema già rilevato in precedenza, ed è dovuto alla legge che si è imposta: essa prevede che, per $t = 250$, il valore di p_j° debba tornare a 0.5, ma non dà la garanzia che il soffiaggio sia completamente nullo. E' solamente un valore molto vicino a p_{slot} , ma evidentemente il sistema lo recepisce come un soffiaggio, seppur piccolo.

L'importante è però visualizzare una corretta discesa di δ appena p_j° inizia a calare, a dimostrazione di una stabilità della configurazione.

Si riportano anche le visualizzazioni del flusso deviato mediante la legge di p_j° riportata in figura 3.25.

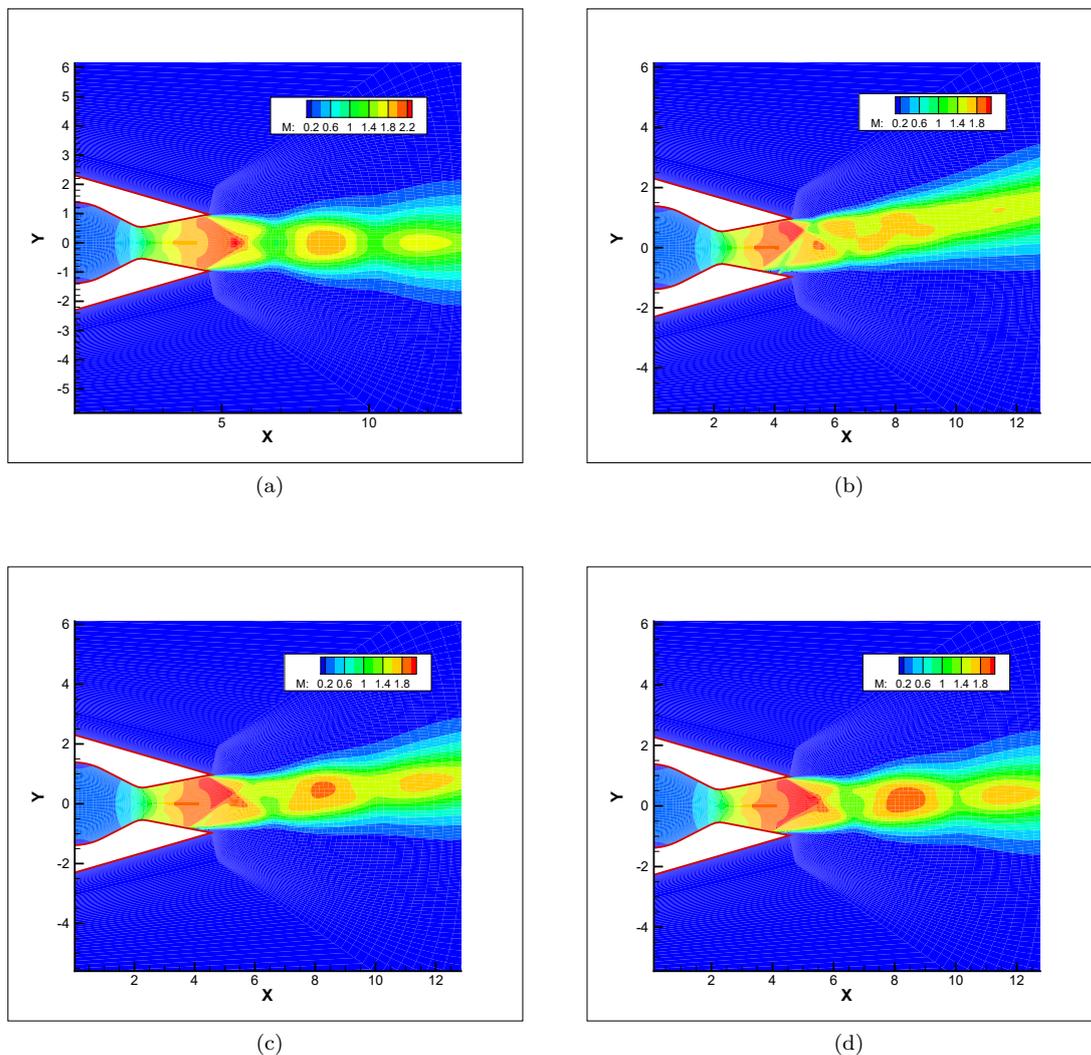


Figura 3.26: Isolivello del numero di Mach ($NPR = 4.6$, p_j° da figura 3.25), rispettivamente [a]: $t = 0$, [b]: $t = 150$, [c]: $t = 280$, [d]: $t = 600$.

3.3 Spinta assiale

In questa sezione verrà analizzata l'influenza dello *SVC* sul valore della spinta assiale. Come è normale aspettarsi, qualsiasi configurazione indisturbata a un generico NPR fornisce un valore di spinta assiale massimale, in quanto, senza nessuna forzante che agisce sul sistema, il flusso resta tutto diretto assialmente, e così fa anche la spinta. La domanda che ci si vuole porre è di quanto l'entità della spinta (assiale) possa variare immettendo un getto secondario, ovvero perturbando il flusso primario.

3.3.1 $NPR=2$

Di seguito si riportano i grafici della spinta assiale (F_x) in funzione del tempo adimensionalizzato della simulazione, in maniera del tutto analoga a come si è fatto per l'angolo di deflessione nella sezione precedente.

Come prima cosa si mostra il grafico della spinta nel caso di flusso indisturbato (figura 3.27), dove si vede che il valore stazionario della spinta è praticamente 0.75.

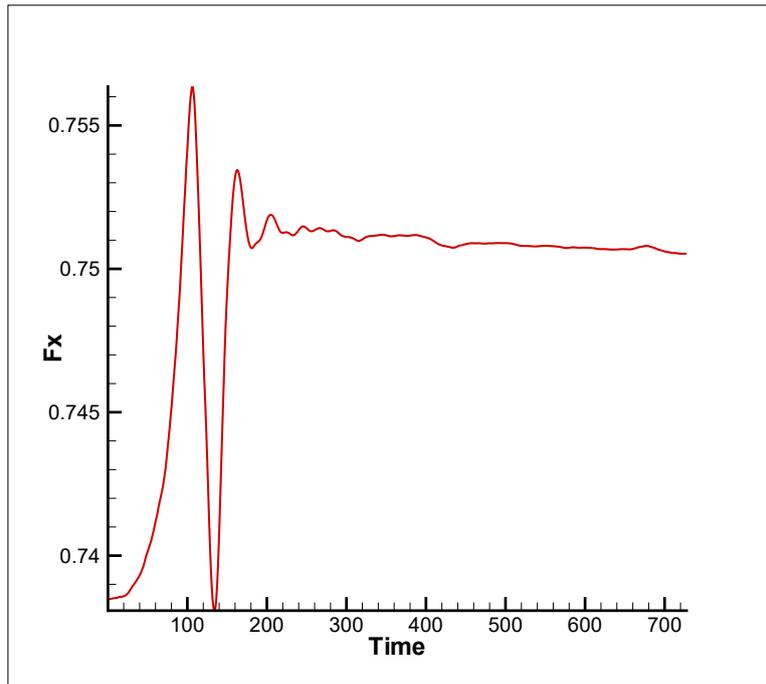


Figura 3.27: Andamento della componente di spinta assiale, condizione simmetrica ($NPR = 2$).

Applicando un soffiaggio, invece, si hanno gli andamenti osservabili nelle figure 3.28 e 3.29.

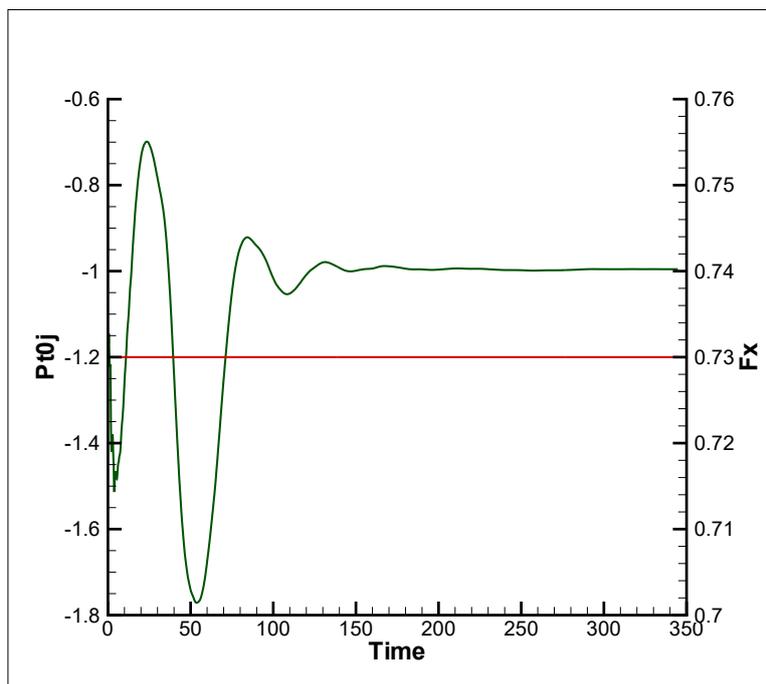


Figura 3.28: Andamento della componente di spinta assiale nel caso di applicazione del getto secondario ($NPR = 2, p_j^o = 1.2$).

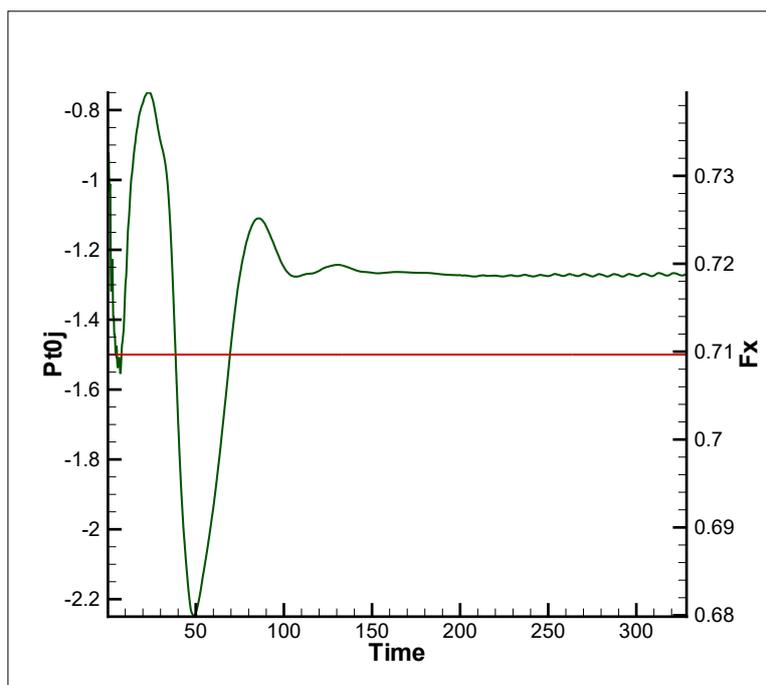


Figura 3.29: Andamento della componente di spinta assiale nel caso di applicazione del getto secondario ($NPR = 2$, $p_j^\circ = 1.5$).

Si è scelto di paragonare i casi per $p_j^\circ = 1.2$ e $p_j^\circ = 1.5$ in maniera arbitraria, e una lettura dei loro grafici porta a elencare i seguenti valori stazionari della spinta:

$$p_j^\circ = 1.2 \quad \Rightarrow \quad F_x \approx 0.74$$

$$p_j^\circ = 1.5 \quad \Rightarrow \quad F_x \approx 0.72$$

Degno di nota è il valore stazionario di F_x nel caso indisturbato, il quale è sì maggiore di entrambi i casi ove è applicato lo *SVC*, ma per $p_j^\circ = 1.5$, dove δ è circa 2 gradi in meno rispetto a $p_j^\circ = 1.2$, dovrebbe quindi avvicinarsi di più a 0.75 rispetto a quanto lo faccia il caso $p_j^\circ = 1.2$. In realtà non bisogna dimenticare che incidono molto anche gli urti sul valore della portata, cioè della spinta stessa.

Si sta parlando comunque di una variazione delle due spinte, per i casi dove c'è *SVC*, intorno al 3%, pertanto non un valore molto significativo.

Per capire se non c'è davvero una stretta dipendenza tra p_j° e F_x , serve almeno un'altra controprova su di un altro valore del *NPR*, la quale viene fornita subito di seguito.

3.3.2 NPR=4.6

Si riporta anche qui subito il grafico di F_x per il flusso indisturbato.

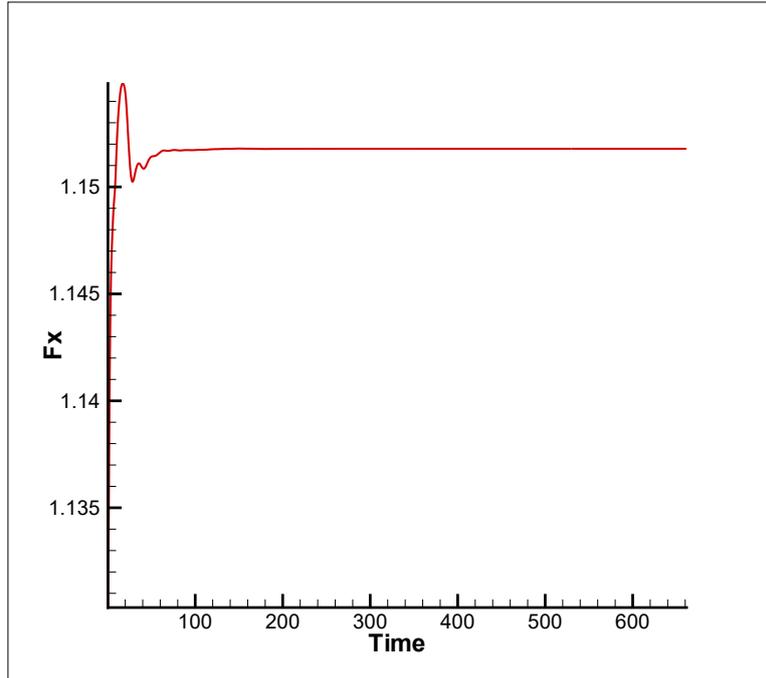


Figura 3.30: Andamento della componente di spinta assiale, condizione simmetrica ($NPR = 4.6$).

Per quanto riguarda quest'altra configurazione, si è preferito optare per differenti valori di p_j° , ma pur sempre mantenendo lo stesso ordine di grandezza, in modo da diversificare i risultati ottenuti.

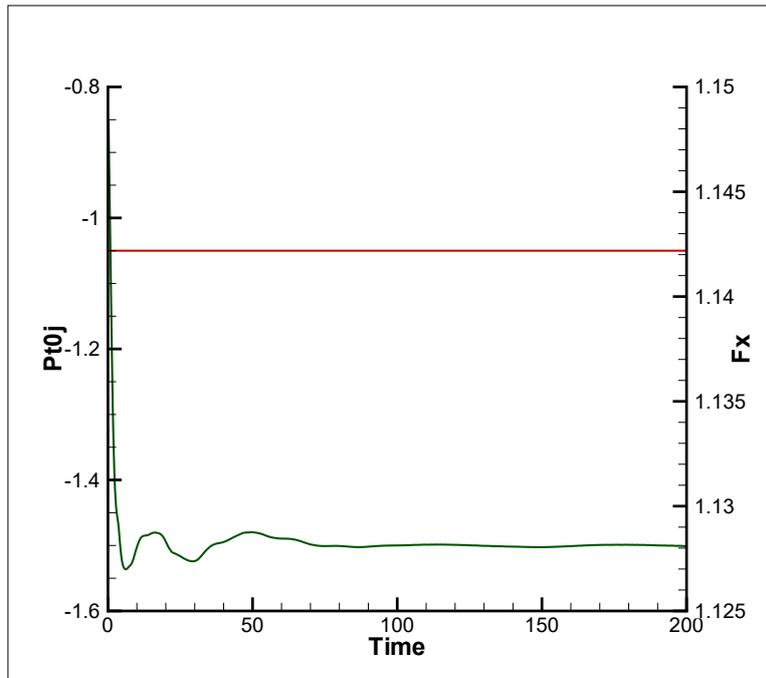


Figura 3.31: Andamento della componente di spinta assiale nel caso di applicazione del getto secondario ($NPR = 4.6$, $p_j^\circ = 1.05$).

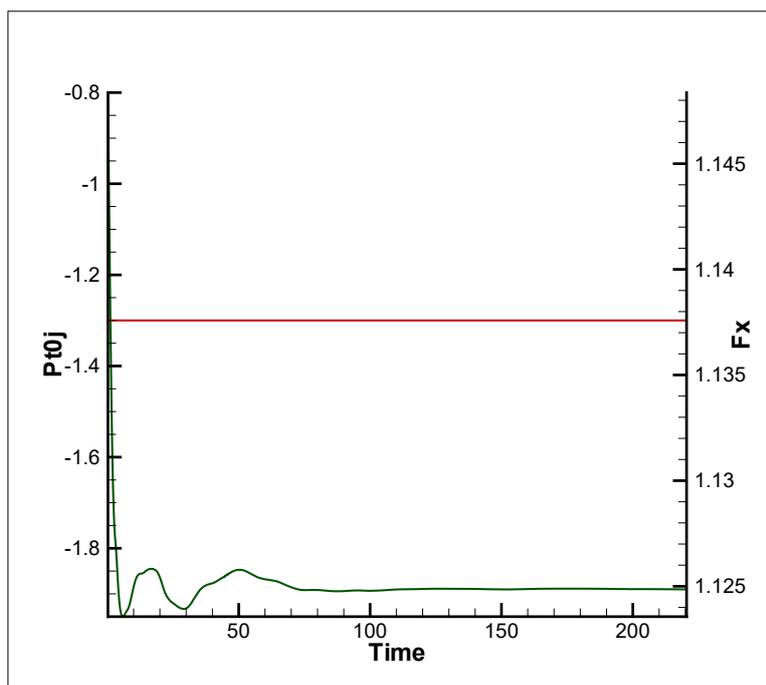


Figura 3.32: Andamento della componente di spinta assiale nel caso di applicazione del getto secondario ($NPR = 4.6$, $p_j^\circ = 1.3$).

Per il caso simmetrico, il valore stazionario è circa $F_x = 1.151$. Stavolta la variazione è ancora meno significativa, siccome si possono leggere, dalle figure 3.31 e 3.32, i valori subito riportati qui sotto.

$$p_j^\circ = 1.05 \quad \Rightarrow \quad F_x \approx 1.128$$

$$p_j^\circ = 1.3 \quad \Rightarrow \quad F_x \approx 1.125$$

In conclusione si può dire che soffiare per valori di pressione intorno all'unità, così come svolto per le configurazioni studiate, non porta di sicuro a marcate variazioni della spinta assiale. Questa assunzione è certamente interessante, perchè una volta fissato il soffiaggio, ad un certo rapporto di espansione dell'ugello, si troverà un valore della spinta assiale già piuttosto ben definito.

Capitolo 4

Condizioni di forte sovraespansione

In quest'ultimo capitolo si vuole determinare se esiste un limite oltre il quale le configurazioni sviluppate per differenti NPR possono ritenersi stabili o meno. Ciò è decisamente importante ai fini pratici, in quanto da tali condizioni si potrebbe capire se sia possibile o meno implementare un sistema di controllo.

Nel capitolo precedente si è osservato che il caso per $NPR = 2$ è instabile, in quanto, come analizzato in figura 3.15, il flusso primario tende ad autosostenersi in maniera asimmetrica una volta cessato il soffiaggio. Da questa considerazione si vuole capire se, tra $NPR = 2$ e $NPR = 4.6$, possano distinguersi due zone di funzionamento: una stabile e l'altra no.

Per procedere sarebbe necessario generare molte situazioni a diversi rapporti di espansione, il che potrebbe diventare piuttosto oneroso. Infatti, per ovviare a ciò, è bene partire da NPR più vicini a 2 che a 4.6, siccome è più probabile che l'instabilità si manifesti più velocemente quando l'ugello si trova in condizioni fortemente sovraespansive.

4.1 Condizione a impulso

L'idea iniziale è di usare la condizione di soffiaggio impulsiva, in quanto comporta in output una risposta che sia in grado di fornire un'idea abbastanza precisa della stabilità o meno del sistema.

Detto in parole semplici, dal punto di vista pratico, si vogliono esaminare configurazioni inizialmente simmetriche per vari rapporti di espansione; quindi si perturberanno con un disturbo non eccessivo, in modo da verificare che dopo un tempo considerevolmente lungo queste si riportino alle condizioni iniziali come garanzia della loro stabilità.

Non verrà riportata nuovamente la condizione per $NPR = 2$, siccome è già stata studiata in precedenza (figure 3.18 e 3.20), trovando che fosse decisamente instabile.

4.1.1 NPR=3

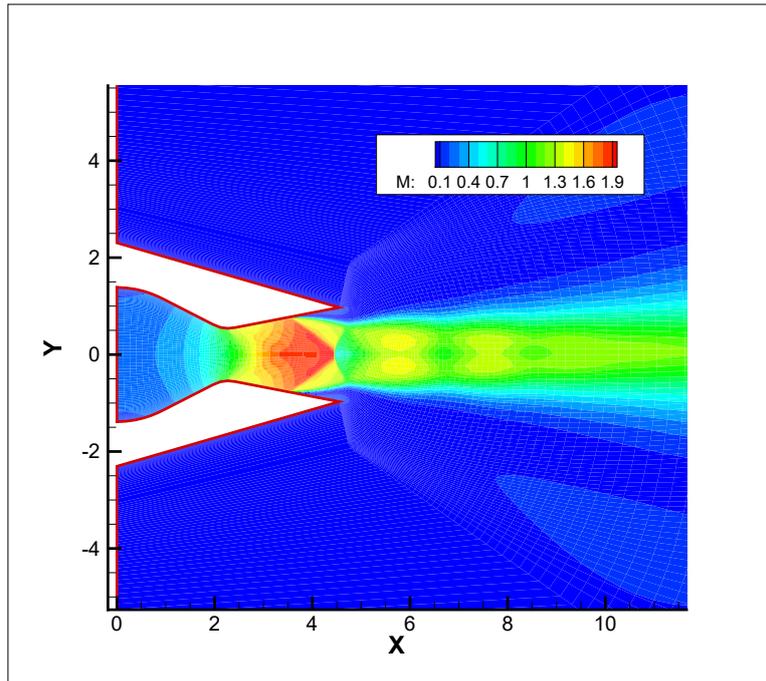


Figura 4.1: Isolivello del numero di Mach, condizione simmetrica ($NPR = 3$).

Si nota, dalla figura 4.1, che la struttura di urti è posizionata più o meno a metà tra la gola e l'uscita, coerentemente con le figure 3.7 e 3.26 [a].

Come visto per $NPR = 2$, il valore stazionario dell'angolo di deviazione non era cambiato con il variare della condizione impulsiva di soffiaggio. Su questa considerazione si è optato per scegliere un'entità del getto secondario non troppo forte, ma neanche irrisoria, in modo da poter lavorare con risultati affidabili. A tal proposito verrà adottata la condizione di figura 4.2.

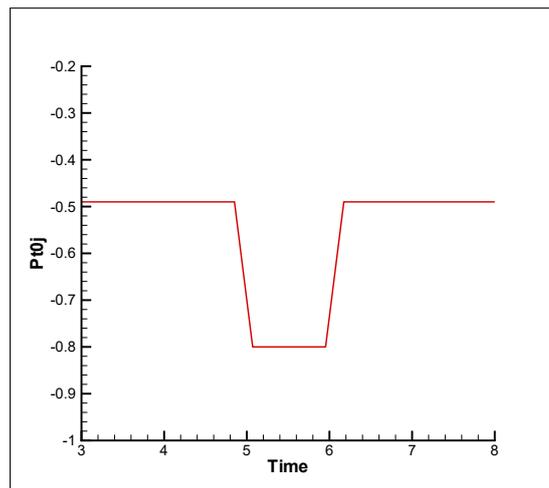


Figura 4.2: Condizione impulsiva di p_j^o utilizzata.

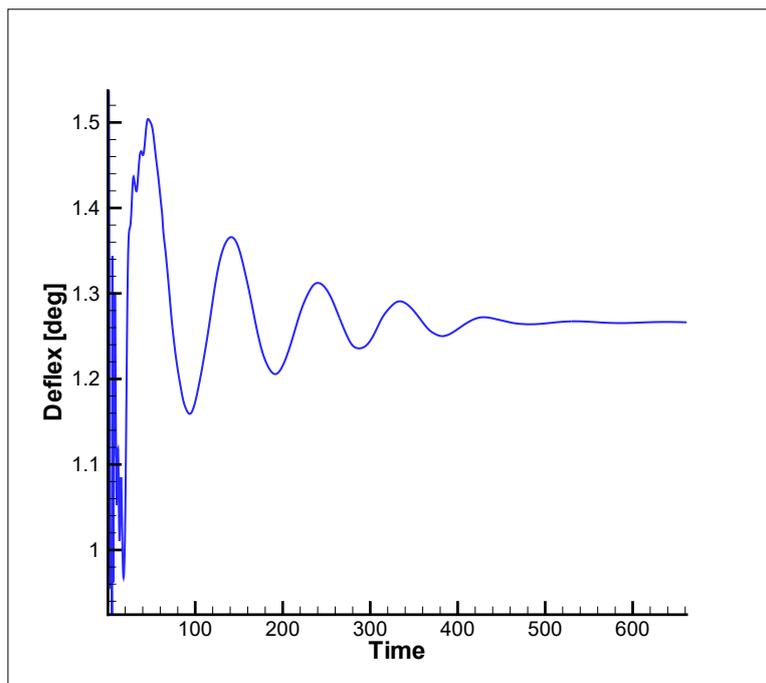


Figura 4.3: Andamento dell'angolo di deflessione durante la simulazione ($NPR = 3$, p_j° da legge di figura 4.2).

Subito è facile notare il grande divario con il caso $NPR = 2$ di figura 3.18, anche se lì il tetto massimo dell'impulso è $p_j^\circ = 0.6$, ma non si tratta di un fattore rilevante, in quanto è pur sempre un soffiaggio impulsivo. Quello che qui salta all'occhio è chiaramente il valore stazionario di $\delta \approx 1.3^\circ$, perciò più di dieci volte inferiore. Questo dimostra che passare da un rapporto di espansione di 2 ad uno di 3, non è certamente una cosa da poco, in quanto le strutture di urti che si instaurano a $NPR = 2$ tendono a perdere la loro intensità abbastanza in fretta.

Per dimostrare la certezza di una configurazione stabile, si dovrebbe avere l'angolo tendente a zero, a prova di un ritorno alla condizione simmetrica.

Il piccolo valore di δ che si è ottenuto, in realtà, non è proprio un indice di instabilità, in quanto bisogna anche tenere conto della condizione imposta: si vede dalla figura 4.2, infatti, che il sistema possa recepire, dopo $t = 6$, un soffiaggio ancora non nullo, essendoci comunque un margine, sebbene molto piccolo, con la pressione minima imponibile (p_{stot}).

4.1.2 NPR=4

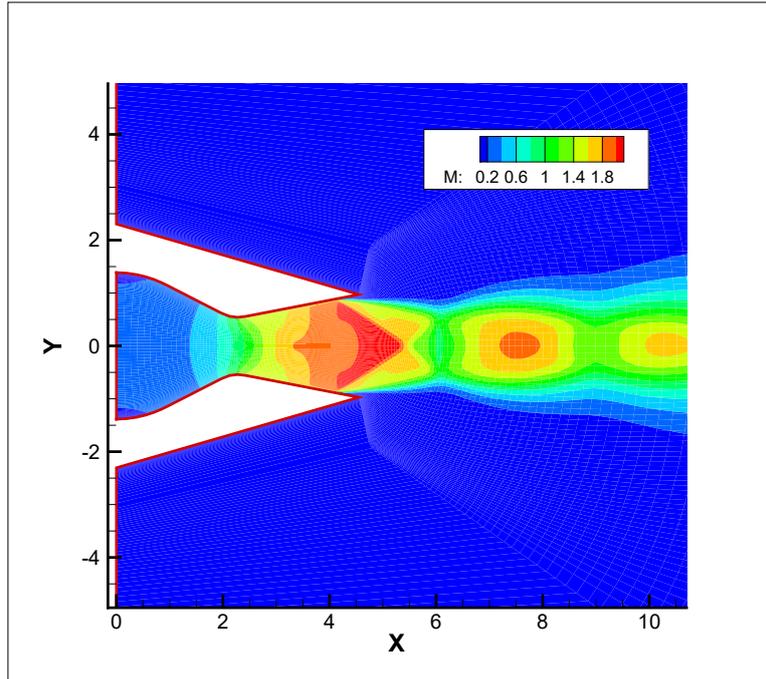


Figura 4.4: Isolivello del numero di Mach, condizione simmetrica ($NPR = 4$).

Per questa nuova configurazione verrà sempre utilizzata la medesima condizione impulsiva appena vista (figura 4.2). Ci si aspetta però che, allontanandosi sempre più dal caso $NPR = 2$, il sistema tenda a stabilizzarsi in misura maggiore, perciò il valore stazionario di δ diminuisca.

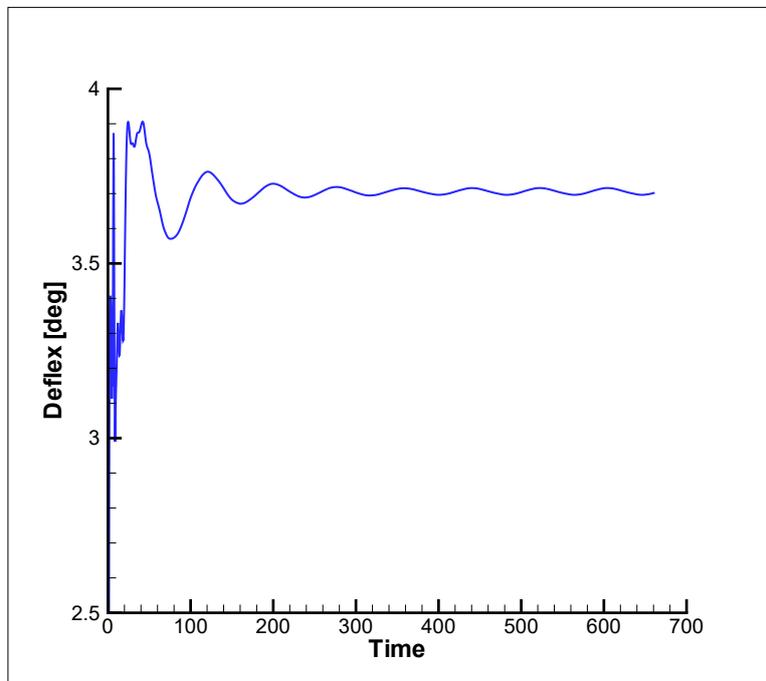


Figura 4.5: Andamento dell'angolo di deflessione durante la simulazione ($NPR = 4$, p_j° da legge di figura 4.2).

La figura 4.5 non mostra quindi un risultato attendibile: il valore stazionario è circa 3.7 gradi, pertanto maggiore del caso $NPR = 3$ appena visto.

Se ne deduce che la legge di soffiaggio usata possa non essere appropriata, ed un motivo può risiedere nel fatto che il sistema la recepisca come un segnale non impulsivo, ossia che veda un getto più consistente di quanto si pensi di averlo fornito.

Si potrebbe pensare allora di variare la legge di input, magari rendendola ancora più istantanea, o meno intensa, ma rischia di diventare una soluzione che dipende da troppi fattori, quindi si è preferito optare per una strada differente.

4.2 Condizione iniziale non simmetrica

I risultati appena ottenuti non aiutano ad identificare una condizione limite, quindi serve un'ulteriore tecnica di visualizzazione della stabilità del sistema in esame.

Ciò che si vuole fare è implementare una configurazione asimmetrica come file di inizializzazione (che può essere anche una di quelle impulsive generate nella sezione precedente). Successivamente si avvierebbe il codice di calcolo senza però effettuare alcun soffiaggio, in modo da ottenere, sempre in caso di stabilità del sistema, una configurazione finale simmetrica, o almeno che ci si avvicini di molto.

4.2.1 $NPR=3$

In questo caso il file di inizializzazione sarà quello rappresentato in figura 4.3, ossia la configurazione allo stesso NPR , ma dando un soffiaggio a impulso.

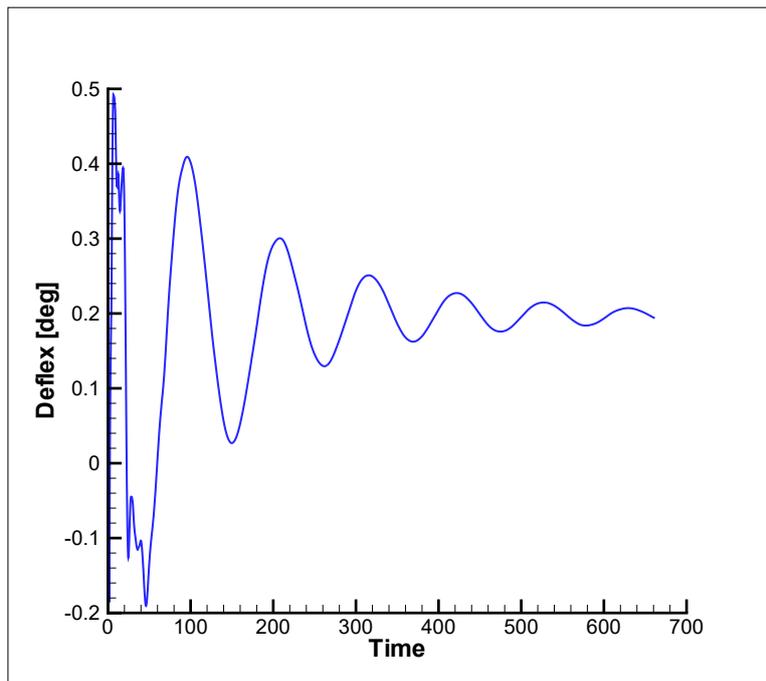


Figura 4.6: Andamento dell'angolo di deflessione a partire da una condizione non simmetrica ($NPR = 3$, no soffiaggio).

Dalla figura 4.6 si vede quello che si è ottenuto: l'angolo di deflessione tende a stabilizzarsi verso un valore prossimo a 0.2° . Pertanto è dimostrato che tale caso può ritenersi stabile.

A questo punto non ha più senso procedere per rapporti di espansione più alti, in quanto l'instabilità incomberà certamente per casi sempre più sovraespansi.

4.2.2 NPR=2.7

Stavolta si sceglie di utilizzare, come file di inizializzazione, quello sviluppato soffiando per $NPR = 2$ visibile in figura 3.11. In realtà non cambia nulla il fatto che abbia un diverso NPR , e che sia una configurazione ancora più asimmetrica, ma trattandosi comunque di un lavoro di ricerca, variare spesso le condizioni iniziali, chiaramente mantenendo pur sempre un senso logico a quel che si sta facendo, può portare talvolta a scoperte inaspettate.

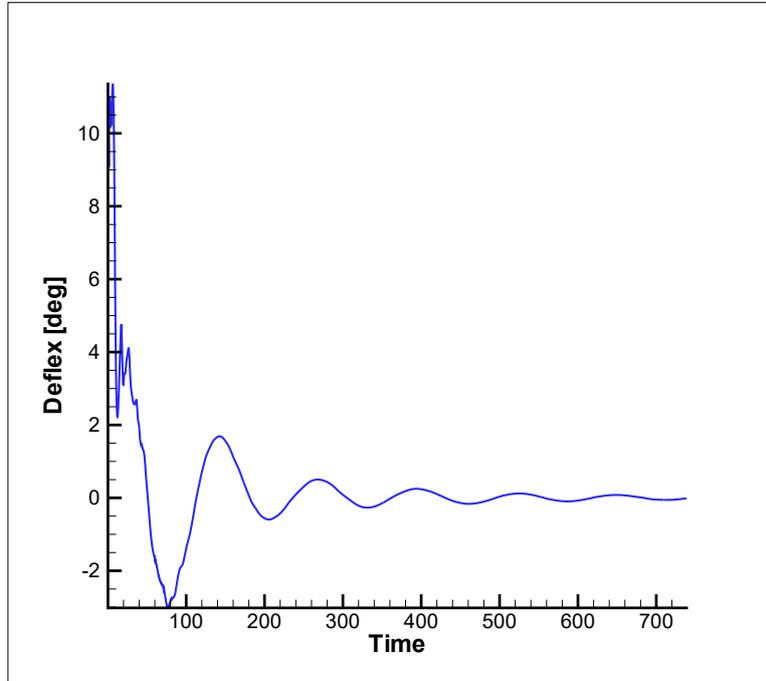


Figura 4.7: Andamento dell'angolo di deflessione a partire da una condizione non simmetrica ($NPR = 2.7$, no soffiaggio).

Si vede che questo caso ha invece portato ad un risultato che ci si attendeva: il grande valore iniziale di δ tende velocemente ad abbattersi, ed infine ad assestarsi, con piccole oscillazioni, verso un valore stazionario prossimo a zero. Dunque bisogna scendere ulteriormente con il NPR .

4.2.3 NPR=2.5

Si mantiene sempre la stessa condizione iniziale appena usata, ovvero di figura 3.11 ($\delta \approx 14^\circ$).

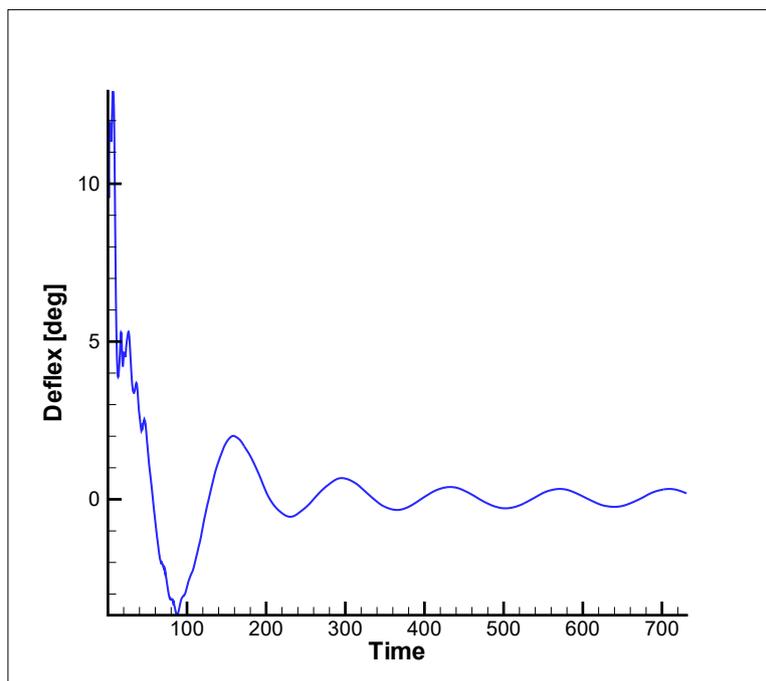


Figura 4.8: Andamento dell'angolo di deflessione a partire da una condizione non simmetrica ($NPR = 2.5$, no soffiaggio).

Ora le oscillazioni stanno leggermente aumentando, avendo un'ampiezza di quasi un grado verso la fine della simulazione, però mantenendo sempre come valor medio lo zero.

4.2.4 NPR=2.3

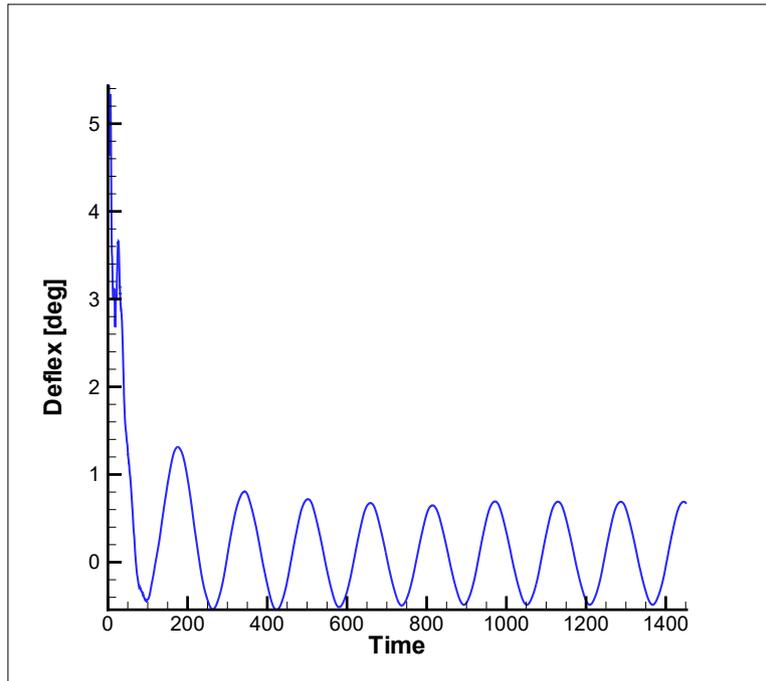


Figura 4.9: Andamento dell'angolo di deflessione a partire da una condizione non simmetrica ($NPR = 2.3$, no soffiaggio).

Come si è potuto constatare finora, il file di inizializzazione ha poca importanza, qualunque sia la condizione asimmetrica in oggetto, e anche il NPR di partenza, in quanto inciderà soltanto sul costo computazionale, ovvero sul tempo che la simulazione adotterà per giungere a convergenza. Si è preferito ora aumentare di parecchio il numero di passi, in quanto ci si sta avvicinando sempre più al caso instabile ($NPR = 2$).

Adesso si notano, in figura 4.9, delle oscillazioni ancora più marcate: il valor medio è sempre circa zero, ma l'ampiezza è ora quasi 1.2 gradi.

4.2.5 NPR=2.2

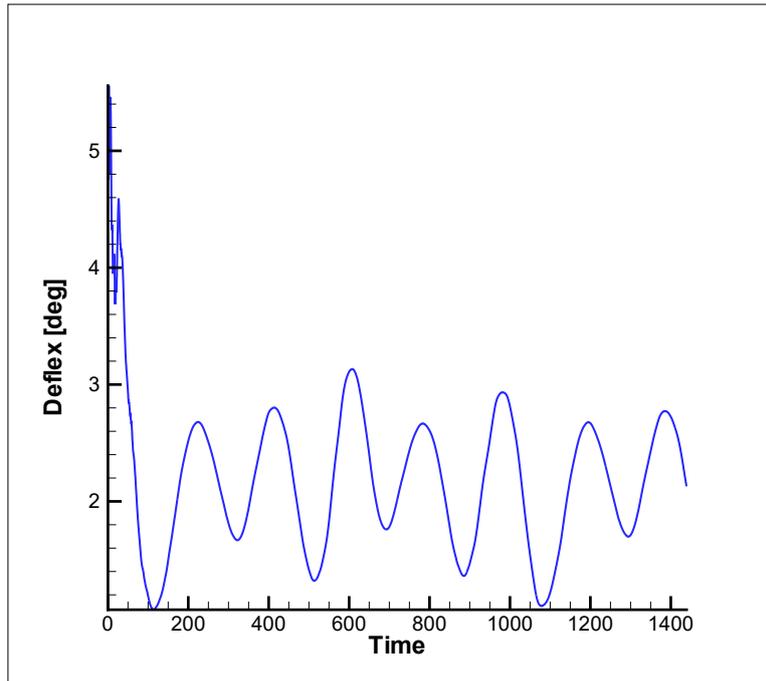


Figura 4.10: Andamento dell'angolo di deflessione a partire da una condizione non simmetrica ($NPR = 2.2$, no soffiaggio).

Finalmente si è trovata una configurazione certamente instabile, la quale, come ben visibile dalla figura 4.10, ha oscillazioni piuttosto marcate oltre che sfasate. Esse presentano inoltre un valor medio vicino a 2 gradi.

Il risultato appena ottenuto ha un'importanza notevole, in quanto indica che per tutti gli NPR inferiori ci siano solo configurazioni instabili. Tale deduzione porta ad identificare una vera e propria regione di funzionamento stabile dell'ugello, che si può collocare per situazioni da $NPR = 2.3$ in su. Vi è allora in tale range di configurazioni la possibilità di implementare un sistema di controllo attivo.

Conclusioni

Si afferma che il NPR tale per cui l'ugello descritto in [1] diventa instabile è stato valutato a metà circa tra 2.2 e 2.3. Non ha senso identificare un solo rapporto di espansione come sicuramente il più critico, in quanto possono esserci dei fattori che nelle analisi svolte non sono stati presi in considerazione (ad esempio effetti di tridimensionalità), e che in qualche modo possano variare, anche se di poco, i risultati rilevati. Questo significa che al massimo, sulla base delle simulazioni effettuate, si può fornire un rapporto di espansione di riferimento ai fini dell'instabilità, magari non precisissimo, ma sicuramente veritiero.

Sono anche di notevole importanza le oscillazioni ottenute nelle simulazioni finali a partire da una condizione non simmetrica, le quali fanno capire che, se si volesse controllare tale sistema, bisogna prevedere di non rientrare in una configurazione troppo vicina a $NPR = 2.2$, dove è molto facile che una perturbazione, anche piccola, possa portare ad un'instabilità globale. Quindi più la qualità del controllore di cui si disporrebbe è alta, o meglio più si è in grado di smorzare le oscillazioni del sistema, e tanto più si potrebbe pensare di lavorare in condizioni per rapporti di espansione molto vicini a 2.2.

In parole più semplici si voleva identificare un margine, e ci si è riusciti, ma non si tratta di un limite che si può definire in maniera assoluta. Si tratta di un problema che spesso accade in fluidodinamica, infatti si pensi ad esempio al numero di Reynolds di un flusso qualunque: esso divide, per un certo valore, il regime laminare da quello turbolento; però, tale valore, è da prendere nel senso che se si vuole permanere con certezza nel regime laminare, se ne sta ben più bassi, mentre volendo creare con sicurezza un regime turbolento lo si deve superare il più possibile.

Un'ultima considerazione importante riguarda il fatto che non si sono mai presentati effetti d'isteresi legati all'applicazione dello *Shock Vector Control*. Si è ritenuto opportuno farlo notare, in quanto esistono studi scientifici che cercano di sfruttare proprio la possibile presenza di fenomeni d'isteresi, all'interno di ugelli supersonici, per svariate applicazioni ingegneristiche.

Bibliografia

- [1] K.A. Waithe, K.A. Deere. *Experimental and Computational Investigation of Multiple Injection Ports in a Convergent-Divergent Nozzle for Fluidic Thrust Vectoring*. The 21st AIAA Applied Aerodynamics Conference, 2003.
- [2] Roy Albert Lawrence. *Symmetrical and Unsymmetrical Flow Separation in Supersonic Nozzles*. N68-15974, Southern Methodist University Institute of Technology, Dallas, Texas, 1967.
- [3] R. Allmaras, P. Spalart. *A one-equation Turbulence Model of Aerodynamics Flows*. La Recherche Aerospatiale, Vol.1, pp.5-21, 1994.
- [4] R. Marsilio. *Numerical Solution for plug nozzle flowfields*. Proc 39th AIAA, Vol.AIAA Paper 2001-0670, 2001.
- [5] R. Marsilio. *Vortical Solution in supersonic corner flows*. AIAA Journal, Vol.31, pp.1651-1658, 1993.
- [6] D. Grillo, R. Marsilio. *Implementation and Validation of the Spalart-Allmaras Turbulence Model for High Speed Flows*. Icas Congress, 2002.
- [7] M. Ferlauto, R. Marsilio. *A computational approach to the simulation of controlled flows by synthetic jets actuators*. Advances in Aircraft and Spacecraft Science, Vol.2, No.1, 2015.
- [8] E. Depussay, V. Zmijanovic, L. Leger. *Experimental and Numerical Parametric Investigation of a Rocket Nozzle Secondary Injection Thrust Vectoring*. Journal of Propulsion and Power, Vol. 32, No. 1, 2016.
- [9] J.R. Sterrett, P.F Holloway. *On the Effect of Transition Parameters within a Separation Region at Hypersonic Speeds with Emphasis on Heat Transfer*. Symposium on Fully Separated Flows, American Society of Mechanical Engineers, 1964.
- [10] E. E. Zukosky. *Review of Data Concerning*. Advances in Aircraft and Spacecraft Science, Vol.2, No.1, 2015.
- [11] E. E. Zukosky., F.W. Spaid *Secondary Injection of Gases into a Supersonic Flow*. AIAA Journal Vol.2 N0.10, 1964.
- [12] E. E. Zukosky., F.W. Spaid *A Study of the Interaction of Gaseous Jet from Transverse Slot with Supersonic External Flows*. AIAA Journal Vol.6 N0.2, 1968.
- [13] M. Ferlauto, R. Marsilio. *Open and closed-loop responses of a dual- throat nozzle during fluidic thrust-vectoring*. 52nd AIAA/SAE/ASEE Joint Propulsion Conference, 25-27 July 2016.
- [14] D.J.Forliti, A.Krothapalli. *Thrust Vector Control of Rectangular Jets Using Counter Flow*. FMRL-TR95-11, 1995.