

POLITECNICO DI TORINO

Collegio di Ingegneria Meccanica, Aerospaziale,
dell'Autoveicolo e della Produzione
Corso di Laurea in Ingegneria Aerospaziale

Tesi di Laurea Magistrale

Analisi spettrale di un flusso di cavità



Relatore

Prof. Gaetano Maria Di Cicca

Candidato

Marco Magazzù

Marzo 2018

Indice

Introduzione	pag. 3
1. Il flusso di cavità	pag. 6
1.1. Introduzione	pag. 6
1.2. Spettro del flusso di cavità	pag. 12
2. Analisi spettrale	pag. 15
2.1. Trasformata di Fourier	pag. 15
2.2. Trasformata wavelet	pag. 16
2.2.1. Definizione di wavelet	pag. 16
2.2.2. Differenze ed analogie con la trasformata di Fourier	pag. 17
2.2.3. Trasformata wavelet continua	pag. 18
2.2.3.1. Analisi wavelet	pag. 19
2.2.3.2. Proprietà elementari della trasformata wavelet	pag. 19
2.2.3.3. Scelta della base wavelet	pag. 22
2.2.3.4. Rappresentazione dei coefficienti wavelet	pag. 25
2.2.3.5. Scala wavelet e frequenza di Fourier	pag. 26
2.2.4. Trasformata wavelet discreta	pag. 26
2.2.4.1. Wavelet ortogonali	pag. 27
3. Modulazione di segnali	pag. 31
3.1. Modulazione in ampiezza (AM)	pag. 32
3.1.1. Modulazione in ampiezza a doppia banda laterale (AM-DSB)	pag. 32
3.1.2. Modulazione in ampiezza a doppia banda laterale con carrier soppressa (AM-DSB-SC)	pag. 34
3.1.3. Modulazione in ampiezza a banda singola (SSB)	pag. 36
3.2. Modulazione angolare	pag. 37
3.2.1. Modulazione in frequenza (FM)	pag. 37
3.2.2. Modulazione di fase (PM)	pag. 38
3.3. Armoniche e subarmoniche	pag. 40
3.3.1. Generazione di armoniche	pag. 40
3.3.2. Generazione di subarmoniche	pag. 42
4. Analisi dei risultati	pag. 44
4.1. Trasformata di Fourier	pag. 47
4.2. Trasformata wavelet	pag. 52
4.2.1. Scelta del tipo di trasformata wavelet	pag. 52
4.2.2. Scelta della base wavelet	pag. 52
4.2.3. Risultati ottenuti	pag. 67
4.3. Modulazione ed energy holes	pag. 86
5. Modello simulante il flusso di cavità	pag. 91
Conclusioni	pag. 110
Bibliografia	pag. 113

Introduzione

È noto che il flusso di cavità presenta dei picchi ben definiti nello spettro d'energia relativo alle fluttuazioni di velocità o pressione di un segnale misurato vicino al bordo di fuga nella zona di impinging (zona d'impatto tra il flusso e il corner della cavità). La frequenza dominante misurata è comune all'intero flusso di cavità, indicando che è presente un'organizzazione globale del flusso.

Nell'ambito di questa tesi abbiamo lavorato su un campione di 3270 frame ottenuti con una frequenza di campionamento di 1000 Hz tramite la tecnica P.I.V. (Particle Image Velocimetry). Il campo di velocità risultante è stato quindi utilizzato per calcolarne le fluttuazioni e per studiare le strutture modali presenti nella zona d'impinging. L'analisi di queste strutture è stata svolta con una tecnica recente, la trasformata wavelet, che rispetto alla più nota trasformata di Fourier permette di studiare il segnale localmente nel tempo e nello spazio. In questo modo è possibile seguire l'evoluzione temporale di una certa struttura modale. Mediando il quadrato dei coefficienti wavelet nel tempo si ottiene lo spettro wavelet, che analogamente allo spettro di Fourier, ci dice come è distribuita l'energia sulle varie frequenze all'interno del flusso. Però mentre la trasformata di Fourier lavora in norma L^1 e la quantità mostrata nello spettro è una densità di energia, la trasformata wavelet lavora in norma L^2 , e la quantità mostrata nello spettro wavelet è proporzionale alla densità di energia; per ottenere la densità d'energia dovrei moltiplicare il risultato ottenuto su ogni frequenza per la radice della scala \sqrt{l} , che è inversamente proporzionale alla frequenza. Tuttavia nell'ambito di questa tesi abbiamo trascurato quest'errore in quanto l'obiettivo è stato quello di identificare le strutture modali che si generano all'interno del flusso di cavità, senza concentrarci sulla densità d'energia delle varie frequenze; inoltre abbiamo ridotto il range di frequenze su cui abbiamo effettuato l'analisi wavelet, centrandoci di volta in volta sulla frequenza dominante o sulle sue armoniche, e riducendo l'errore commesso.

Abbiamo inizialmente calcolato gli spettri del flusso di cavità con la trasformata di Fourier effettuando una DFT (Discrete Fourier Transform) con tutti i 3270 campioni, per utilizzarli come base per confermare i risultati ottenuti dall'analisi wavelet e dagli spettri wavelet. Abbiamo inoltre confrontato i nostri risultati con quelli ottenuti da Basley *et al.* (2011). Negli spettri ottenuti dall'analisi dei risultati si osservano: un massimo relativo alla frequenza dominante f_a , legata alla frequenza con cui le strutture vorticosi che si generano per instabilità di Kelvin-Helmholtz al bordo d'attacco della cavità impattano al bordo di fuga; un massimo relativo alle prime due armoniche

della frequenza dominante $2f_a$ e $3f_a$; un massimo relativo ad una bassa frequenza f_b , ma solo nello spettro della componente streamwise u' ; una coppia di picchi equidistanti dalla frequenza dominante e da ognuna delle sue armoniche, osservati anche da Basley *et al.*, denominati sidepeaks ed indicati con f_+ e f_- i sidepeaks relativi alla frequenza dominante, f_{2+} e f_{2-} i sidepeaks relativi alla prima armonica $2f_a$ della frequenza dominante, f_{3+} e f_{3-} i sidepeaks relativi alla seconda armonica $3f_a$ della frequenza dominante; sono inoltre presenti altre coppie di sidepeaks, che abbiamo indicato con f_{++} e f_{--} .

Come indicato da Basley *et al.*, riteniamo che i sidepeaks f_+ e f_- vengano generati tramite una modulazione in ampiezza della bassa frequenza f_b sulla frequenza dominante f_a e sulle sue armoniche, ed analogamente esisterà un'altra frequenza $f_{b2} > f_b$ che tramite una modulazione in ampiezza sulle frequenze appena elencate genererà l'altra coppia di sidepeaks f_{++} e f_{--} . Il fenomeno della modulazione è ben noto ed utilizzato in campo elettronico e delle telecomunicazioni: esiste quindi una forte analogia tra il campo elettronico e quello fluidodinamico, ma mentre in un caso si studiano fluttuazioni di tensione, nell'altro si studiano fluttuazioni di velocità o di pressione. Nella modulazione in ampiezza, quanto un segnale modulante di frequenza f_b modula un segnale portante di più alta frequenza f_a , si genera un segnale risultante la cui ampiezza varia con la legge della modulante: nello spettro del segnale risultante si osservano un picco sulla frequenza portante di ampiezza pari a quella della portante stessa, e una coppia di picchi simmetrici ed equidistanti f_b dal picco centrale sulle frequenze $f_a - f_b = f_-$ e $f_a + f_b = f_+$ e di ampiezza pari a metà di quella della modulante. Questo tipo di modulazione in ampiezza è detto AM-DSB (Amplitude Modulation – Double Side Band), ed è proprio quello che osserviamo nel flusso di cavità.

Dalle mappe wavelet tempo-frequenza abbiamo inoltre osservato che alle alte frequenze, dove è presente minore energia, si generano delle strutture ellittiche dove la carrier centrale ha molta meno energia dei suoi sidepeaks: abbiamo denominato queste strutture ellittiche "energy holes". A nostro parere gli energy holes si generano a causa di un effetto combinato di due tipi di modulazione: la prima è una sovr modulazione in ampiezza, dovuta al fatto che la modulante f_b possiede molta più energia della carrier f_c considerata ed il rapporto tra le loro ampiezze $m_c = \frac{A_b}{A_c} \gg 1$, detto indice di modulazione, risulta molto maggiore dell'unità (si parla di sovr modulazione quando $m_c > 1$) ed i sidepeaks generati dalla sovr modulazione in ampiezza hanno quindi un'energia molto maggiore della carrier stessa; la seconda è una modulazione in frequenza (o di fase) di una modulante a frequenza $f_{bm} < f_b$ sul segnale a frequenza f_b . La modulazione in frequenza fa oscillare la frequenza della modulante f_b intorno al valore medio f_b . L'energy hole è quindi frutto di una sovr modulazione in ampiezza di una modulante f_b a frequenza variabile, in quanto modulata a sua volta in frequenza da f_{bm} , ed i sidepeaks generati hanno non solo un'energia molto maggiore della carrier, ma la loro distanza dalla carrier stessa varia nel tempo, dando luogo alla forma ellittica osservata nella mappa wavelet.

Abbiamo quindi cercato di simulare il flusso di cavità creando un modello che tenesse conto della modulazione in ampiezza e della modulazione in frequenza. Il modello fornisce ottimi risultati e gli

spettri del flusso simulato si avvicinano molto a quelli del flusso reale. Il rapporto tra la frequenza dominante e della frequenza modulante $\frac{f_a}{f_b}$ a nostro parere potrebbe indicare se la cavità sta lavorando effettivamente in condizioni di oscillazioni autosostenute o no. Nel nostro caso il rapporto è pari $\frac{f_a}{f_b} \cong 4$, e la modulante f_b è proprio la seconda subarmonica della frequenza dominante f_a : quando il rapporto è pari, si genera tramite la modulazione in ampiezza un loop di energia tra la frequenza dominante e le sue subarmoniche e la modulante f_b , e la cavità lavora in condizioni di autosostentamento. Nel caso di Basley *et al.* il rapporto $\frac{f_a}{f_b} \cong 3$ è dispari: in questo caso non è sufficiente una sola modulazione in ampiezza per generare un loop di energia tra la frequenza modulante, la frequenza dominante e le sue armoniche, ma dovrei considerare due modulazioni in ampiezza in istanti di tempi successivi per avere un loop. Il livello di energia della frequenza modulante f_b continuerà quindi ad oscillare e la cavità non lavori in condizioni di autosostentamento.

In questa tesi nel primo capitolo verrà presentata un'introduzione del flusso di cavità e verranno richiamati i risultati ottenuti con la trasformata di Fourier da Basley *et al.* (2011); nel secondo capitolo sarà dedicato all'analisi spettrale, con un breve richiamo alla trasformata di Fourier e con una trattazione più approfondita della trasformata wavelet e delle sue proprietà fondamentali; nel terzo capitolo verrà trattato il fenomeno della modulazione in ampiezza, in frequenza e di fase, un fenomeno ben noto nel campo delle telecomunicazioni e che si riscontra anche all'interno del flusso del cavità;

nel quarto capitolo verrà presentato il setup con cui è stata svolta l'analisi PIV, verranno analizzati gli spettri ottenuti con la trasformata di Fourier, e gli spettri e le mappe ottenute con la trasformata wavelet nella zona di impinging e verranno elencati i vari tipi di modulazione presenti all'interno del flusso, cercando di dare una spiegazione alla presenza degli "energy holes"; nel quinto ed ultimo capitolo infine verrà presentato un modello che simula il flusso reale.

Capitolo 1 Il flusso di cavità

In questo primo capitolo verrà presentata un'introduzione del flusso di cavità, descrivendo le principali strutture vorticosi che si generano all'interno della cavità, e verranno mostrati i risultati ottenuti svolgendo un'analisi spettrale del flusso di cavità, con la trasformata di Fourier, da Basley *et al.* (2011), con cui abbiamo comparato i risultati ottenuti dalla nostra analisi.

1.1 Introduzione

I flussi di cavità sono presenti in molte applicazioni, come il vano carrello e il vano bombe per l'aeronautica, e più in generale in presenza di discontinuità strutturali. Il problema è stato dibattuto e studiato di vari autori, ma ancora non è stato compreso completamente in quanto è molto complesso e dipende da molti parametri (geometria della cavità, caratteristiche dello strato limite a monte, numero di Reynolds, numero di Mach ad elevate velocità, etc).

La risonanza delle onde acustiche, oltre a generare rumore, può creare gradienti di pressione notevoli e danneggiare la struttura a fatica (Rowley e Williams, 2006). La risonanza acustica crea inoltre un aumento di resistenza aerodinamica, stimata intorno al 250% rispetto a condizioni non risonanti (McGregor and White, 1970). Il processo fisico che porta alla condizione di risonanza è stato completamente studiato da Rossiter (1996). Le instabilità vorticosi all'interno dello shear-layer vengono amplificate mentre sono trascinate verso valle. Interagendo con la parete a valle della cavità, generano onde acustiche che si propagano verso monte, dove interagiscono con i disturbi presenti nello shear-layer, creando nuovi vortici. Questo ciclo è responsabile della risonanza acustica.

Consideriamo una cavità di lunghezza L , altezza H , e larghezza W infinita (caso di cavità bidimensionale). Quando il flusso a monte raggiunge il bordo d'attacco della cavità, si generano per instabilità di Kelvin-Helmholtz delle strutture vorticosi, che possiedono una loro periodicità e proseguono verso valle. L'impatto di queste strutture vorticosi con il bordo di fuga della cavità, genera delle onde che risalgono a monte della cavità. Una volta raggiunto il bordo d'attacco, queste onde verranno parzialmente riflesse verso valle ed interagiranno a loro volta con le nuove

onde generate dall'impatto dei vortici al bordo di fuga. Il meccanismo continua finché non si genera a valle all'interno della cavità una struttura vorticoso di diametro pari a circa l'altezza della cavità H , detta bolla primaria. Inoltre se il rapporto $L/H > 1$, il flusso che dalla bolla primaria torna a monte della cavità, genera una seconda struttura vorticoso chiamata bolla secondaria, di più piccole dimensioni, molto più lenta, e che ruota in verso opposto all'altra. Si generano inoltre dei vortici di più piccole dimensioni nei corner della cavità, detti corner vortex, indipendente dal rapporto L/H .

Se invece si considera il caso in cui W sia finito allora le pareti generano uno sforzo tangenziale che interagisce con il flusso all'interno della cavità e genera dei moti trasversali di larga scala; inoltre le due bolle interagendo con la parete e interagendo tra loro, creano altre instabilità di più piccola scala e di vario tipo (Couette, Görtler, getti).

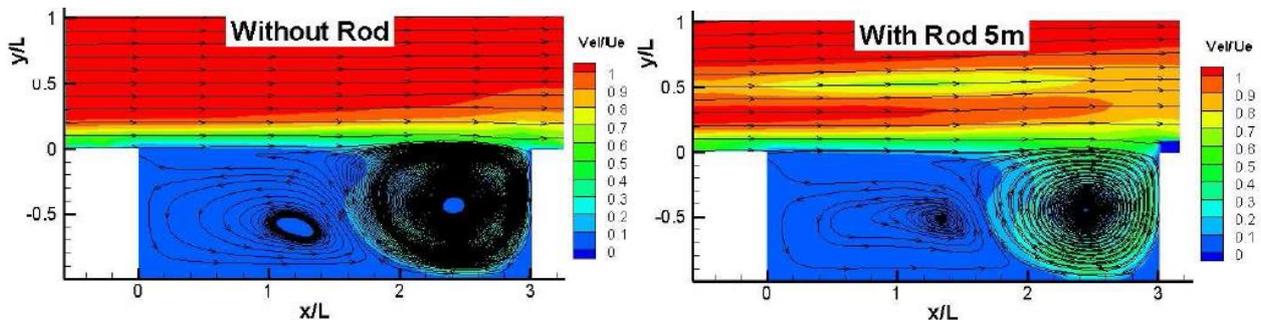


Figura 1. Modulo della velocità scalato con la velocità esterna: a sinistra flusso non controllato, a destra flusso controllato (Martinez et al., 2010).

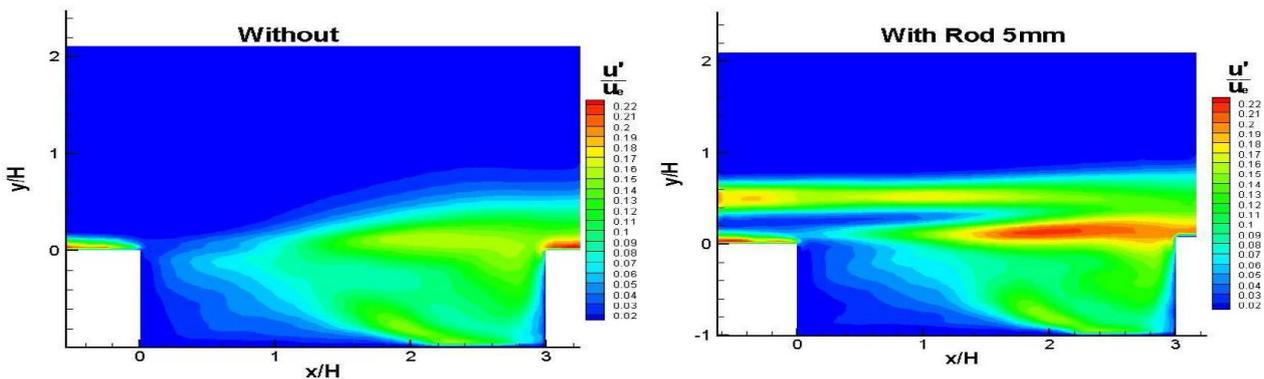


Figura 2. Fluttuazione della velocità streamwise scalata con la velocità esterna (Martinez et al., 2010).

Rossiter ha sviluppato una formula per predire la frequenza delle oscillazioni autosostenute

$$St = \frac{n - \alpha}{M + 1/k}$$

dove n è un numero intero, M è il numero di Mach, k e α sono la velocità media dei vortici nello shear-layer e lo sfasamento, St è il numero di Strouhal.

Dalla figura 1 (Martinez *et al.*, 2010) si vede chiaramente come all'interno della cavità si generano due vortici controrotanti di larga scala: quello più grande che si trova a valle della cavità è la bolla primaria, mentre quello più piccolo a monte della cavità è la bolla secondaria. La bolla primaria ha un diametro circa pari all'altezza di cavità e la sua velocità di rotazione è legata alla velocità esterna indisturbata, mentre le dimensioni e le velocità della bolla secondaria sono molto inferiori.

Il problema è stato studiato da Faure *et al.* (2007) che ha ottenuto dati significativi con la tecnica PIV, variando la lunghezza di cavità, e di conseguenza il rapporto $R=L/H$ ($R=2$, $R=1.5$, $R=1$, $R=0.5$), ha osservato su vari piani il flusso all'interno della cavità, grazie ad un seeding di linee di fumo. Per rapporti $L/H > 1$, sono presenti sia la bolla primaria che quella secondaria: la prima ruota in senso orario, la seconda in senso antiorario, e nel corner si formano altri vortici di più piccola scala (corner vortex). Per $R=2$ e $R=1.5$ si ottiene una situazione simile, a parte per le dimensioni della bolla secondaria.

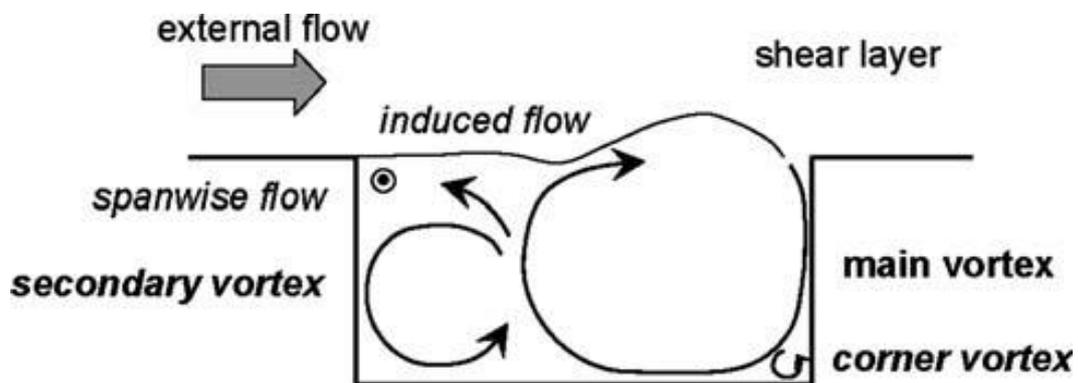


Figura 3. Schema del flusso all'interno della cavità per $R=2$ in un piano verticale (Faure *et al.*, 2007).

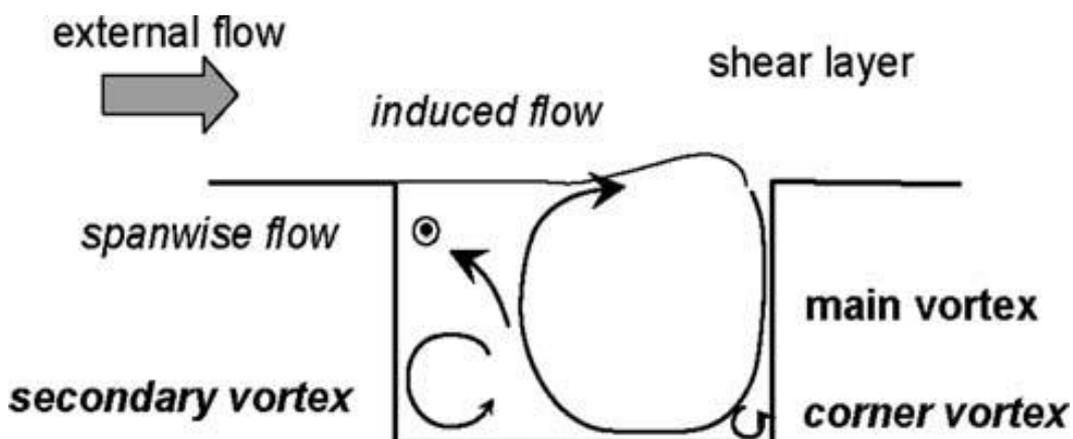


Figura 4. Schema del flusso all'interno della cavità per $R=1.5$ in un piano verticale (Faure *et al.*, 2007).

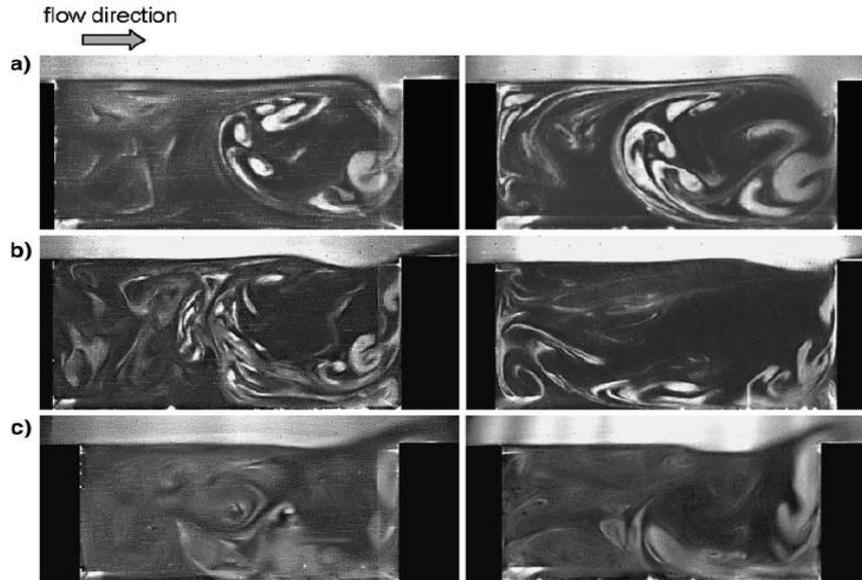


Figura 5. Visualizzazione di due piani verticali paralleli ($z=0$ a sinistra e $z=30\text{mm}$ a destra) nello stesso istante per $R=L/H=2$, a differenti velocità (Faure et al., 2007).

a) $U_e=0.69\text{m/s}$ $Re_L=4600$; b) $U_e=1.21\text{m/s}$ $Re_L=8070$; c) $U_e=1.60\text{m/s}$ $Re_L=10670$

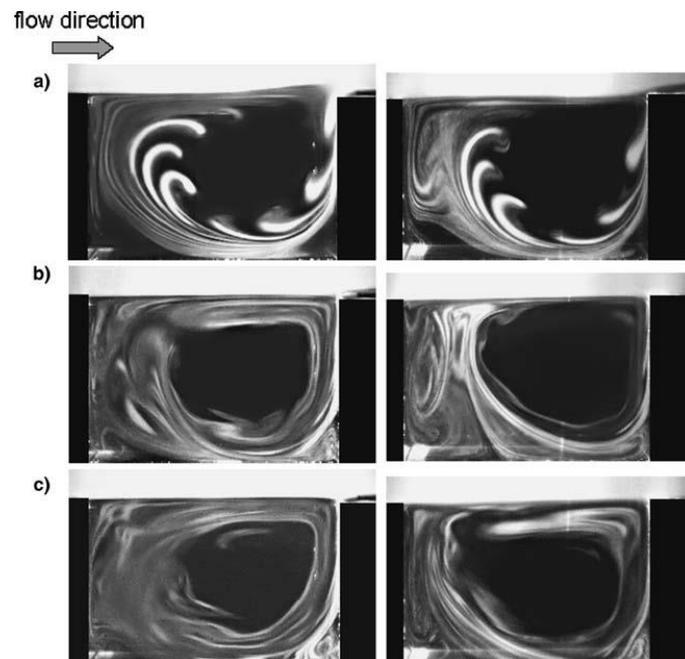


Figura 6. Visualizzazione di due piani verticali paralleli ($z=0$ a sinistra e $z=30\text{mm}$ a destra) nello stesso istante per $R=L/H=1.5$, a differenti velocità (Faure et al., 2007).

a) $U_e=0.69\text{m/s}$ $Re_L=3450$; b) $U_e=1.21\text{m/s}$ $Re_L=6050$; c) $U_e=1.60\text{m/s}$ $Re_L=8000$

Per $R=1$ scompare la bolla secondaria e la bolla primaria occupa tutta la cavità, e sono ancora presenti i corner vortex.

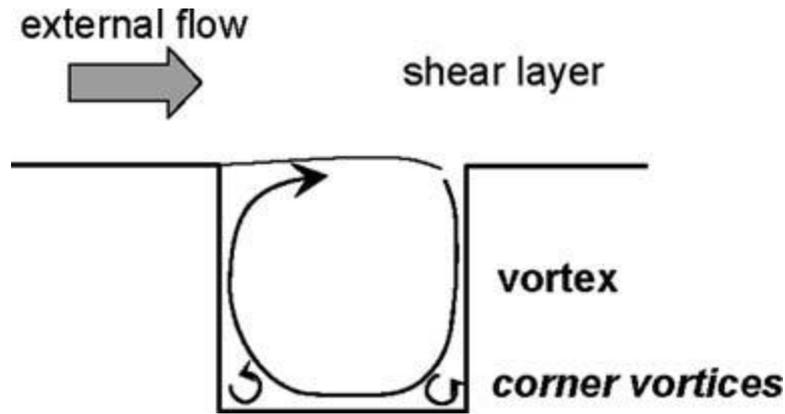


Figura 7. Schema del flusso all'interno della cavità per $R=1$ in un piano verticale (Faure et al., 2007).

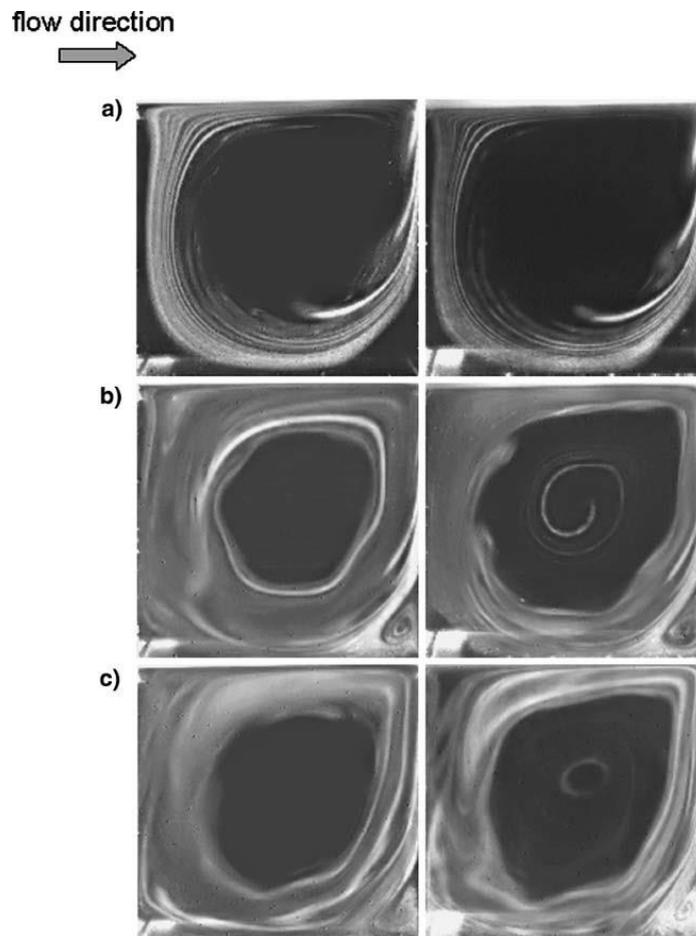


Figura 8. Visualizzazione di due piani verticali paralleli ($z=0$ a sinistra e $z=30\text{mm}$ a destra) nello stesso istante per $R=L/H=1$, a differenti velocità (Faure et al., 2007).

a) $U_e=0.69\text{m/s}$ $Re_L=2300$; b) $U_e=1.21\text{m/s}$ $Re_L=4030$; c) $U_e=1.60\text{m/s}$ $Re_L=5330$

Quando $R < 1$, la bolla primaria si deforma a causa dell'effetto delle pareti, che non le permettono di avere un diametro H (perché $L < H$), e la bolla secondaria si genera al fondo della cavità. Le due bolle si trovano una sopra l'altra e scompaiono i corner vortex.

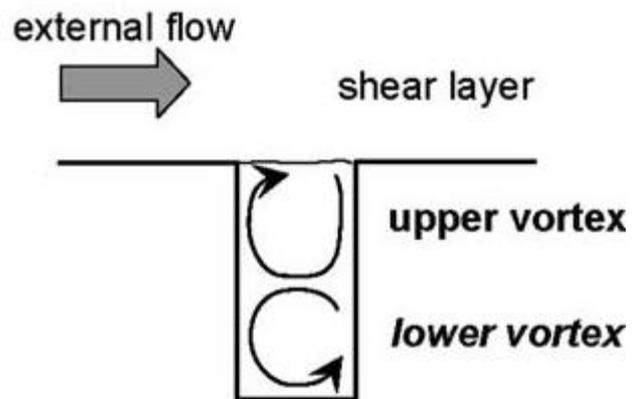


Figura 9. Schema del flusso all'interno della cavità per $R=0.5$ in un piano verticale (Faure et al., 2007).

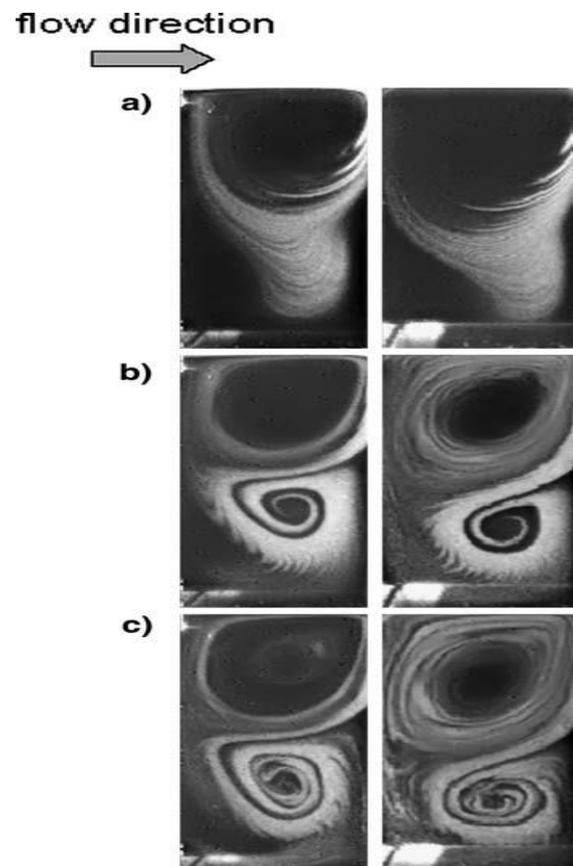


Figura 10. Visualizzazione di due piani verticali paralleli ($z=0$ a sinistra e $z=30\text{mm}$ a destra) nello stesso istante per $R=0.5$, a differenti velocità (Faure et al., 2007).

a) $U_e=0.69\text{m/s}$ $Re_L=1150$; b) $U_e=1.21\text{m/s}$ $Re_L=2020$; c) $U_e=1.60\text{m/s}$ $Re_L=2670$

1.2 Spettro del flusso di cavità

Per comparare i risultati ottenuti dalla nostra analisi spettrale con le trasformate Wavelet, ci siamo basati sui risultati ottenuti da Basley *et al.* (2011). Basley *et al.* hanno ottenuto con la tecnica PIV il campo di velocità all'intero di una cavità di larghezza trasversale $W = 300 \text{ mm}$, altezza $H = 50 \text{ mm}$ ($\frac{W}{H} = 6$) e $L = 100 \text{ mm}$ ($\frac{L}{H} = 2$) per un flusso con $Re_L = 12180$ ($U_\infty = 1.90 \frac{m}{s}$). Per l'analisi spettrale hanno utilizzato la trasformata di Fourier, e per mostrare i dati hanno svolto una PSD (Power Spectral Density). La lunghezza della finestra temporale utilizzata per la PSD è pari a 9s con un overlap del 98%, e il segnale su ogni finestra temporale è stato moltiplicato per la funzione di Hamming, per smorzare le code, definita come:

$$h_j = 0.54 - 0.46 \cos\left(\frac{2\pi j}{n-1}\right)$$

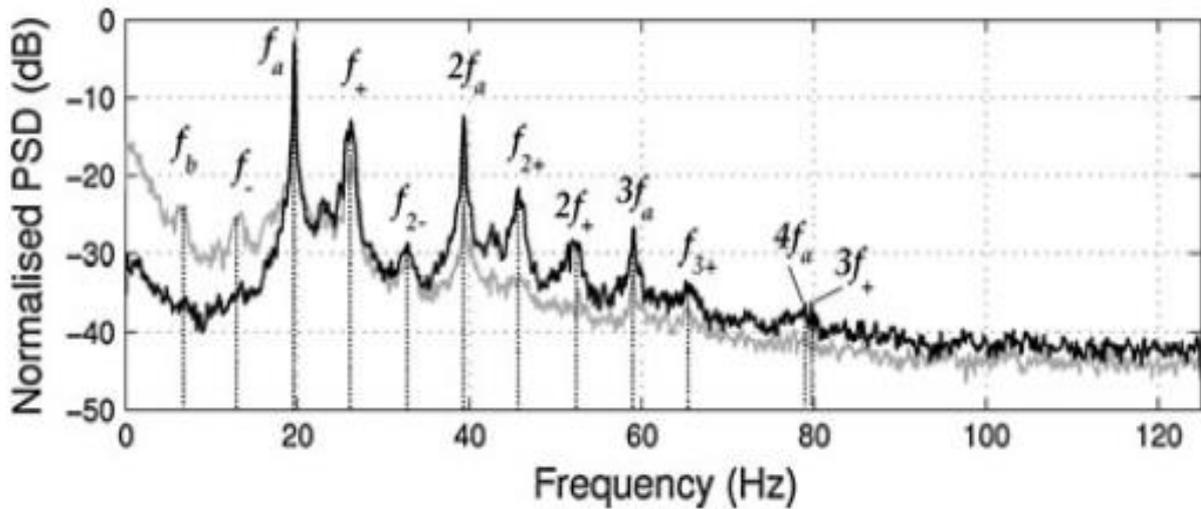


Figura 11. PSD normalizzata espressa in dB ed ottenuta da Basley *et al.* (2011) analizzando il flusso di una cavità con $\frac{L}{H} = 2.0$ e $Re_L = 12180$ ($U_\infty = 1.90 \frac{m}{s}$) nella zona di impinging nel punto $(x_p, y_p) = (0.85L, 0.06H)$ per entrambe le componenti delle fluttuazioni di velocità u' (linea grigia) e v' (linea nera).

La PSD è definita come:

$$W_k^\xi = DFT\{u^\xi h^\xi\} = \sum_{j=(\xi-1)n}^{\xi n-1} u_j h_j e^{-\frac{2\pi i}{n} j k}$$

con $t = j\delta t$, $f = k$ e $\delta f = \frac{k}{n\delta t}$. Il numero totale di finestre utilizzate per l'analisi risulta pari a $N_{wdw}^{PIV} = 750$ finestre. L'espressione analitica dello spettro di Fourier, ottenuto mediando il risultato della PDS nel tempo, è:

$$\bar{W}_k = \frac{1}{N_{wdw}} \sum_{\xi=1}^{N_{wdw}} W_k^\xi$$

Il risultato è stato inoltre normalizzato ed espresso in dB:

$$w_k = 10 * \log \left(\frac{\bar{W}_k}{\max \bar{W}_k} \right)$$

Nello spettro Basley *et al.* hanno riscontrato la presenza di una frequenza dominante $f_a = 19.7 Hz$ e delle sue armoniche $2f_a = 39.3 Hz$, $3f_a = 59.1 Hz$, $4f_a \approx 78.8 Hz$. Il numero di Strouhal associato alla frequenza dominante $St_a = \frac{f_a \delta_2}{U_\infty} = 0.014$, basato sullo spessore di quantità di moto $\delta_2 \approx 1.3 mm$ del flusso a monte della cavità, è abbastanza vicino al valore della teoria della stabilità lineare per casi simili $St_c = 0.017$ (Michalke 1964; Ziada and Rockwell 1982; Chang *et al.*, 2006).

Hanno inoltre riscontrato la presenza di due picchi laterali simmetrici, uno destro e uno sinistro, rispetto alla frequenza dominante e alle sue armoniche, e questo fenomeno era già stato osservato in precedenza da altri autori (Knisely and Rockwell 1982; Lin and Rockwell 2001; Rockwell *et al.*, 2003; Delprat 2006,2010). Hanno denominato $f_+ = 26.3 Hz$ e $f_- = 12.6 Hz$ i picchi laterali della frequenza dominante f_a , $f_{2+} = 46.0 Hz$ e $f_{2-} = 32.6 Hz$ i picchi laterali della prima armonica della frequenza dominante $2f_a$, e $f_{3+} = 65.7 Hz$ il picco destro della seconda armonica della frequenza dominante $3f_a$. Anche noi nella nostra analisi abbiamo riscontrato la presenza di una frequenza dominante, delle sue armoniche, e di questi sidepeaks all'intero dello spettro.

Nello spettro hanno inoltre osservato la presenza di un picco a bassa frequenza $f_b = 6.6 Hz$. Questa frequenza risulta proprio pari, o molto vicina, alla differenza tra la frequenza di un picco laterale e del suo picco centrale di riferimento $f_b = f_+ - f_a = f_a - f_-$, e quindi $f_a - f_b = 13.1 Hz \approx f_- = 12.6 Hz$. Secondo Basley *et al.* questa frequenza potrebbe nascere da un'interazione non lineare tra f_a ed f_+ , o f_+ potrebbe essere il risultato di una combinazione non lineare di f_b su f_a attraverso una modulazione in ampiezza nella zona di impinging (Knisley and Rockwell 1982; Lucas and Rockwell 1984; Delprat 2006, 2010). Secondo noi l'ipotesi più probabile è che sia presente effettivamente una modulazione in ampiezza della modulante f_b sulla frequenza dominante f_a , come verrà spiegato in dettaglio nel terzo e quarto capitolo. A nostro parere inoltre la modulante non è costante, ma è sua volta modulata in frequenza da una frequenza ancora minore f_{bm} .

Una grossa differenza i nostri risultati e quelli di Basley *et al.* è data dal rapporto $\frac{f_a}{f_b}$: nel nostro caso $\frac{f_a}{f_b} \approx 4$, mentre per Basley *et al.* $\frac{f_a}{f_b} \approx 3$. Il rapporto $\frac{f_a}{f_b}$ potrebbe essere importante per capire se la cavità lavora in condizioni di autosostentamento oppure no, in quanto quando il rapporto è pari, la modulante f_b è proprio una subarmonica della frequenza dominante (nel nostro caso è la seconda subarmonica) e tramite una continua modulazione in ampiezza, si genera un loop di energia tra la frequenza dominante e le sue subarmoniche. Una volta instaurato questo loop, anche se il livello di una subarmonica scende al di sotto di una certa soglia, la frequenza dominante ne permette il sostentamento e il flusso si riporta nelle condizioni di equilibrio. Se il rapporto $\frac{f_a}{f_b}$ è dispari, la f_b non è una subarmonica della f_a : è possibile comunque generare un loop di energia attraverso più modulazioni in ampiezza, ma il livello di energia della f_b continuerà ad oscillare intorno ad una posizione di equilibrio. Il rapporto $\frac{f_a}{f_b}$ verrà trattato più in dettaglio nel capito 5, quando si cercherà di simulare il flusso di cavità reale con un modello.

Capitolo 2 Analisi spettrale

In questo secondo capitolo tecnico verrà fatto un breve richiamo sulla trasformata di Fourier e verrà trattata dettagliatamente la trasformata wavelet, che abbiamo utilizzato per analizzare il nostro flusso di cavità.

2.1 Trasformata di Fourier

Nell'ambito di questa tesi ci siamo occupati di svolgere un'analisi spettrale del flusso di cavità nella zona di impinging. Lo scopo dell'analisi spettrale è capire come è suddivisa l'energia cinetica delle fluttuazioni di velocità sulle varie frequenze: noto il campo di velocità all'interno della cavità, ottenuto nell'ambito di questa tesi con la tecnica P.I.V. (Particle Image Velocimetry), è possibile calcolare le fluttuazioni di velocità, e l'analisi spettrale permette di passare dal dominio temporale al dominio delle frequenze tramite una opportuna trasformazione.

Lo strumento più noto ed utilizzato per svolgere un'analisi spettrale è la trasformata di Fourier, in cui il segnale viene moltiplicato scalarmente per una funzione esponenziale, la quale può essere riscritta come funzione sinusoidale. Indicando con $x(t)$ il segnale da analizzare, lo spettro della funzione sarà dato da:

$$X(f) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} x(t) \cdot e^{-i2\pi ft} dt = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} x(t) \cdot \sin(2\pi ft) dt$$

Poiché il segnale è limitato, discretizzo l'integrale come una sommatoria di L termini, con L pari al numero di campioni raccolti. Per ogni frequenza dal prodotto scalare tra il segnale e la funzione sinusoidale otterrò una serie di coefficienti pari al numero di campioni L.

$$C(f) = \frac{1}{2\pi} \sum [x(t) \cdot e^{-i2\pi ft}]$$

Inoltre sarà necessario discretizzare il vettore delle frequenze: solitamente il numero di frequenze utilizzate è pari al numero di campioni arrotondato per eccesso alla potenza più vicina di 2, che

permette di avere un costo computazionale inferiore. Per lo stesso motivo anche il numero di campioni viene arrotondato alla potenza più vicina di 2. L'accuratezza in frequenza della trasformata di Fourier sarà quindi legata al numero di campioni analizzati. Applicando tutte le operazioni di discretizzazione appena elencate otterremo con la trasformata un vettore di coefficienti, detti coefficienti di Fourier. Poiché l'operazione di sommatoria ha sommato per ogni frequenza tutti i termini relativi ad ogni campione, per normalizzare sarà necessario dividere per il numero di campioni L .

$$\tilde{C}(f) = \frac{1}{2\pi L} \sum [x(t) \cdot e^{-i2\pi ft}]$$

I coefficienti così ottenuti, sono legati all'energia cinetica delle fluttuazioni di velocità. Il grafico $(f, C(f))$ mostrerà dei picchi sulle frequenze a cui corrisponde più energia. Se la frequenza di campionamento è sufficiente, alle alte frequenze il grafico tenderà a zero. Se il numero di campioni (o il tempo di campionamento) è sufficiente, i vari picchi saranno nettamente distinti l'uno dall'altro, in quanto la risoluzione in frequenza è legata al numero di campioni.

L'operazione descritta è detta DFT (Discrete Fourier Transform). A causa dell'operazione di media temporale la DFT non mi permette di vedere come varia l'energia istante per istante. Esiste un altro tipo di operazione detta PSD (Power Spectral Density) che mantiene in parte l'informazione temporale del segnale. Nella PSD si utilizza la trasformata di Fourier su una finestra di campioni $n < L$ minore del numero di campioni totale; questa finestra viene shiftata di un certo numero di campioni prima di rianalizzare il segnale, e l'operazione viene ripetuta fino a coprire tutti i campioni L ; il risultato finale sarà una serie di coefficienti per ogni finestra utilizzata. Quando il numero di campioni di cui sposta la finestra è inferiore alla dimensione della finestra stessa si parla di overlap; ogni finestra temporale sarà quindi in parte sovrapposta a quella precedente e l'overlap consente di ottenere una maggiore risoluzione temporale a parità del numero totale di campioni L . Su ogni finestra temporale viene quindi svolta una DFT.

Mostriamo infine un esempio di un'analisi spettrale DFT di un segnale somma di due funzioni sinusoidali di frequenza $f_1 = 50$ Hz e $f_2 = 120$ Hz e ampiezza $A_1 = 0.7$ e $A_2 = 1.0$. Supponiamo di utilizzare un numero di campioni pari a $L = 1500$ *campioni* e una frequenza di campionamento di $F_s = 1000$ Hz.

$$S(t) = 0.7 \sin(2\pi * 50 * t) + 1.0 \sin(2\pi * 120 * t)$$

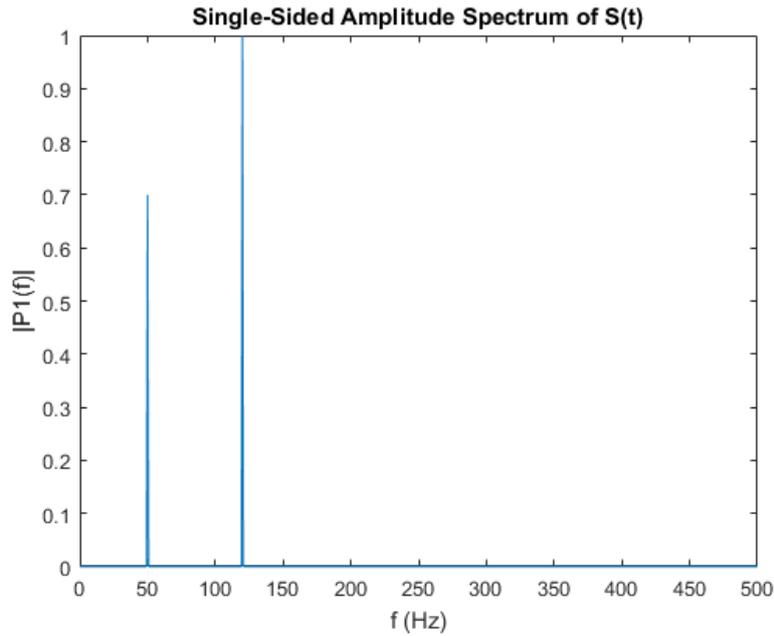


Figura 12. Esempio di uno spettro del segnale $S(t)$ ottenuto con la trasformata di Fourier

2.2 Trasformata wavelet

2.2.1 Definizione di Wavelet

L'analisi Wavelet è uno strumento utilizzato per studiare una serie temporale di variazioni di energia localizzate. La trasformata Wavelet permette quindi di osservare come varia l'energia in un dato punto al variare della frequenza e del tempo. L'analisi viene svolta attraverso una funzione base detta madre Wavelet $\psi_0(\eta)$: una funzione si definisce Wavelet se possiede le seguenti proprietà (Farge 1992):

- 1) Ammissibilità. Per essere definita Wavelet, una funzione deve essere ammissibile, cioè deve avere media nulla e deve essere integrabile.
- 2) Similarità. L'analisi è ottenuta decomponendo il segnale alle diverse scale tramite una trasformazione (dilatazione, rotazione e traslazione) di una sola funzione madre. Tutte le wavelet utilizzate saranno quindi mutualmente simili e dovranno avere un numero limitato di oscillazioni. Questo esclude ad esempio le funzioni sinusoidali utilizzate nella trasformata di Fourier, che pur avendo media nulla, hanno un numero infinito di oscillazioni. La procedura di dilatazione della funzione madre, offre un buon compromesso tra risoluzione temporale e spaziale, nei limiti del principio di indeterminazione. La trasformata Wavelet offre un'ottima risoluzione spaziale alle scale più piccole (alte frequenze) e un'ottima risoluzione temporale alle scale più grandi (basse frequenze).

- 3) Invertibilità. Dev'essere possibile ricostruire il segnale esatto partendo dai coefficienti Wavelet, e calcolare l'energia o altre quantità costanti direttamente da essi. Questo richiede l'invertibilità della funzione madre ed esclude l'utilizzo di tecniche con filtro passabanda, che non ricostruiscono perfettamente il segnale.
- 4) Regolarità. La Wavelet deve essere localizzata nel tempo e nello spazio (Torrence and Compo, 1997), cioè deve essere regolare. Questo requisito esclude funzioni discontinue.
- 5) Cancellazione. Per alcuni applicazioni, in particolare per l'analisi di segnali turbolenti, la wavelet non solo deve avere media nulla, ma deve anche avere momenti di ordine superiore tendenti a zero. Questo requisito, che elimina la parte più regolare del segnale, permette lo studio di fluttuazioni di ordine superiore e di possibili singolarità nelle derivate di ordine superiore. In questo caso i coefficienti wavelet saranno molto piccoli nelle regioni dove la funzione non ha un alto gradiente, e la trasformata wavelet reagirà solo alle fluttuazioni maggiori.

2.2.2 Differenze e analogie con la trasformata di Fourier

Sia l'analisi Wavelet che quella di Fourier si basano sulla convoluzione del segnale con una funzione scelta. La trasformata di Fourier decompone il segnale $f(x) \in L^2(0,2\pi)$, attraverso la convoluzione con una funzione trigonometrica, in una combinazione lineare di vettori di Fourier, definiti dai loro coefficienti di Fourier $\hat{f}(x) = \langle e^{ikx} | f(x) \rangle$. Le funzioni trigonometriche però non hanno un numero di oscillazioni limitate e quindi l'informazione del segnale $f(x)$ è completamente delocalizzata lungo tutto lo spettro dei coefficienti $\hat{f}(x)$. In questo modo la trasformata di Fourier non perde informazioni, ma le "sparge" su tutto lo spettro; in presenza di rumore risulta quindi molto difficile, se non impossibile, studiare le proprietà di $f(x)$ rispetto a quelle di $\hat{f}(x)$. Se la funzione $f(x)$ è ovunque continua tranne in alcuni punti in cui presenta delle singolarità, la posizione delle singolarità sarà legata alla fase di tutti i coefficienti di Fourier e non ci sarà modo di localizzare le singolarità nello spazio di Fourier, e l'unica soluzione sarà ricostruire il segnale $f(x)$ a partire da $\hat{f}(x)$. Se per esempio i punti singolari sono dovuti ad errori sperimentali, noi non saremo in grado di filtrarli perché hanno influenzato tutti i coefficienti di Fourier; si è persa quindi l'informazione che la funzione è regolare ovunque tranne che in un numero finito di punti.

In contrasto alla trasformata di Fourier, la trasformata wavelet è localizzata nel tempo e nello spazio, e permette la ricostruzione del segnale. È quindi possibile ricostruire solo una porzione del segnale o solo il suo contributo in un certo "range" di scale; infatti esiste una relazione che lega il comportamento locale di un segnale e il comportamento locale dei suoi coefficienti wavelet. Per esempio se una funzione è localmente regolare, i suoi coefficienti wavelet saranno piccoli, mentre se il segnale presenta una discontinuità, i coefficienti wavelet nella sua prossimità avranno un valore esponenzialmente crescente. La localizzazione permette di ricostruire una porzione del segnale utilizzando solo i corrispondenti coefficienti wavelet. Può capitare che i coefficienti wavelet siano soggetti ad errore: in questo caso l'errore influenzerà solo il segnale ricostruito localmente nell'intorno della perturbazione, mentre nel caso della trasformata di Fourier l'errore sarebbe diffuso su tutto il segnale ricostruito. Inoltre la trasformata di Fourier è molto sensibile ad errori di fase, a causa dell'oscillazione continua delle serie trigonometriche, mentre questo

problema non si verifica per una trasformata wavelet. Esistono anche degli algoritmi che possono correggere eventuali errori presenti nei coefficienti wavelet sfruttando le proprietà della trasformata wavelet continua.

Va tuttavia sottolineato che la trasformata wavelet non è uno strumento nato per sostituire la trasformata di Fourier, la quale risulta molto efficace nello studio di segnali armonici o nel caso in cui si sia interessati all'informazione globale (mediata) del segnale, e non ad un istante specifico. Inoltre la trasformata di Fourier gioca un ruolo importante nella condizione di ammissibilità, necessaria per definire la trasformata wavelet. Le due trasformate sono legate, infatti in prima approssimazione sommando scala per scala tutti i coefficienti wavelet in tutte le posizioni si può ottenere lo spettro di Fourier.

2.2.3 Trasformata wavelet continua

Per essere una wavelet una funzione $\psi(x)$ deve essere ammissibile cioè:

$$C_\psi = (2\pi)^n \int |\hat{\psi}(k)|^2 \frac{d^n k}{|k|^n} < \infty$$

con

$$\hat{\psi}(k) = (2\pi)^{-n} \int \psi(x) e^{-ikx} d^n x$$

dove n è il numero di dimensioni spaziali (scale). Se $\psi(x)$ è integrabile, questo implica che la sua media è nulla:

$$\int \psi(x) d^n x = 0 \quad \text{oppure} \quad \hat{\psi}(|k| = 0) = 0$$

In pratica la wavelet dev'essere localizzata non solo nello spazio ma anche nel tempo (spazio di Fourier). Inoltre la wavelet deve avere la proprietà di cancellazione fino all'ordine M -esimo, ovvero, deve permettermi di studiare la derivata M -esima senza reagire a variazione di ordine minore di M del segnale $f(x)$, cioè:

$$\int \psi(x) x^m d^n x = 0 \quad \text{con} \quad m \leq M$$

2.2.3.1 Analisi Wavelet

Da una funzione ψ , chiamata madre wavelet, si genera tramite una trasformazione una famiglia di wavelet traslate, dilatate e ruotate:

$$\psi_{l,x'\theta} = l^{-n/2} \psi \left[\Omega^{-1}(\theta) \frac{x - x'}{l} \right]$$

$l \in R^+$ è il parametro di dilatazione della scala corrispondente alla larghezza della wavelet

$x' \in R^+$ è il parametro di traslazione corrispondente alla posizione della wavelet

Ω è la matrice di rotazione

Il fattore $l^{-n/2}$ è una normalizzazione che causa tutte le wavelet ad avere la stessa norma L^2 ; tutte le wavelet hanno quindi la stessa energia e i coefficienti wavelet corrispondono ad una densità di energia.

La condizione di ammissibilità implica che la trasformata di Fourier di ψ decresca rapidamente vicino a $k = 0$. La trasformata di Fourier della famiglia $\psi_{lx'\theta}$ costituisce un filtro passabanda con ampiezza costante e frequenza centrata:

$$\psi_{lx'\theta}(k) = l^{n/2} \hat{\psi}[l\Omega^{-1}(\theta)k] e^{-ikx'}$$

Per riepilogare, la famiglia di wavelet $\psi_{lx'\theta}$ può essere paragonata ad un microscopio matematico, in grado di aumentare la risoluzione spaziale, temporale e di variare l'angolo di polarizzazione. La trasformata wavelet continua di una funzione o distribuzione $f(x)$ è data dal prodotto tra $f(x)$ e la famiglia di wavelet $\psi_{lx'\theta}$ e i coefficienti wavelet sono dati da:

$$\hat{f}(l, x', \theta) = \langle \psi_{lx'\theta} | f \rangle \geq \int f(x) \psi_{lx'\theta}^*(x) d^n x$$

dove ψ^* è il complesso coniugato di ψ .

2.2.3.2 Proprietà elementari della trasformata wavelet

- 1) Linearità. La trasformata wavelet è lineare perché è il prodotto tra il segnale f e la wavelet ψ , entrambe continue.
- 2) Covarianza rispetto alla traslazione e alla dilatazione. La trasformata wavelet continua è covariante sotto ogni traslazione x_0 .

$$\begin{aligned} W[f](x - x_0) &= \check{f}(l, x - x_0) \\ \nabla[W(f)] &= W(\nabla f) \\ \nabla \cdot [W(f)] &= W(\nabla \cdot f) \end{aligned}$$

Come conseguenza la frequenza di un segnale monocromatico può essere letta dalla fase dei coefficienti wavelet; questa proprietà è indipendente dalla wavelet scelta.

La trasformata wavelet continua è inoltre covariante rispetto a qualunque dilatazione l_0

$$W[f](l_0 x) = l_0^{-1} \check{f}(l_0 l, l_0 x)$$

- 3) Differenziazione.

$$W \left[\frac{\delta^m f}{\delta x^m} \right] = (-1)^m \int_{-\infty}^{+\infty} f(x) \frac{\delta^m}{\delta x^m} [\psi_{xl}^*(x)] dx$$

- 4) Conservazione dell'energia.

$$\int_{-\infty}^{+\infty} |f(x)|^2 dx = C_{\bar{\psi}}^{-1} \int_0^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} |\check{f}(l, x)| \cdot |\check{f}^*(l, x)| \frac{dl dx}{l^2}$$

La trasformata wavelet conserva energia non solo globalmente ma anche localmente. Non ci sono quindi perdite del segnale durante la trasformazione e l'energia totale viene suddivisa sulle varie scale.

5) Localizzazione nello spazio e nel tempo.

La funzione madre Wavelet Ψ è localizzata nello spazio e nel tempo, e quindi i coefficienti Wavelet mantengono l'informazione temporale a differenza della trasformata di Fourier. Se Ψ è ben localizzata nell'intervallo di tempo σ_x per $l = 1$, i coefficienti Wavelet corrispondenti ad una posizione x_0 saranno tutti contenuti all'interno di un cono di influenza definito da:

$$x \in \left[x_0 - \left(\frac{l * \sigma_x}{2} \right), x_0 + \left(\frac{l * \sigma_x}{2} \right) \right]$$

Il cono corrisponde al supporto spaziale di tutte le Wavelet dilatate nel punto x_0 . Inoltre se la Ψ è ben localizzata nello spazio di Fourier nell'intervallo Δk nell'intorno di k_ψ per $l = 1$, allora i coefficienti Wavelet corrispondenti alla frequenza k_0 del segnale saranno contenuti all'interno della banda definita da:

$$l \in \left[k_\psi \left(k_0 + \frac{\Delta k}{2l} \right)^{-1}, k_\psi \left(k_0 - \frac{\Delta k}{2l} \right)^{-1} \right]$$

6) Regolarità locale dell'analisi

Una delle proprietà più interessanti delle trasformate Wavelet continue, che deriva dalla covarianza rispetto alla dilatazione, è la possibilità di misurare la regolarità locale di una funzione e quindi di caratterizzare lo spazio funzionale a cui appartiene (Holschneider 1988a,b; Jaffard 1989a,b 1991b; Holschneider and Tchamitchian 1989, 1990; Tchamitchian 1989c). Per esempio se $f \in C^m(x_0)$ e se f è continua e differenziabile in x_0 fino all'ordine m , allora:

$$\tilde{f}(l, x_0) \leq l^{m+1} l^{1/2} \text{ per } l \rightarrow 0$$

Il fattore $l^{1/2}$ deriva dal fatto che, a causa dell'invarianza della scala $W[f](l_0 x) = l_0^{-1} \check{f}(l_0 l, l_0 x)$, se volessimo studiare come scala una funzione dovremmo calcolare i coefficienti wavelet in norma L^1 , anziché in norma L^2 . Il fattore di conversione tra le due norme risulta proprio $l^{1/2}$ e vale:

$$\tilde{f}_{L^1} = l^{1/2} \tilde{f}_{L^2}$$

Se $f \in \Lambda^\alpha(x_0)$, spazio di Hölder delle funzioni di esponente α , e se f è continua, ma non differenziabile in x_0 , come ad esempio

$$|f(x + x_0) - f(x)| = C|x_0|^\alpha \text{ con } \alpha < 1 \text{ e la costante } C > 0$$

allora:

$$\tilde{f}(l, x_0) \sim C e^{i\theta} \sqrt{-l} l^\alpha l^{1/2} \text{ per } l \rightarrow 0$$

dove θ è la fase dei coefficienti wavelet.

La trasformata \tilde{f} è regolare anche se f non lo è. L'informazione di ogni possibile singolarità presente all'interno del segnale, la loro posizione x_0 , la loro intensità C , e il loro esponente α , è data dal comportamento asintotico di $\tilde{f}(l, x_0)$, scritta in norma L^1 , per $l \rightarrow 0$. Se i coefficienti wavelet in norma L^1 divergono alle piccole scale (alte frequenze) nel punto x_0 , allora f ha una singolarità in x_0 e la pendenza del grafico di $\log |\tilde{f}(l, x_0)|$ al variare di $\log l$ darà l'esponente α della singolarità. È anche molto semplice identificare le singolarità di f osservando la fase dei coefficienti wavelet: le linee di fase costante convergono sulle singolarità (figura 13).

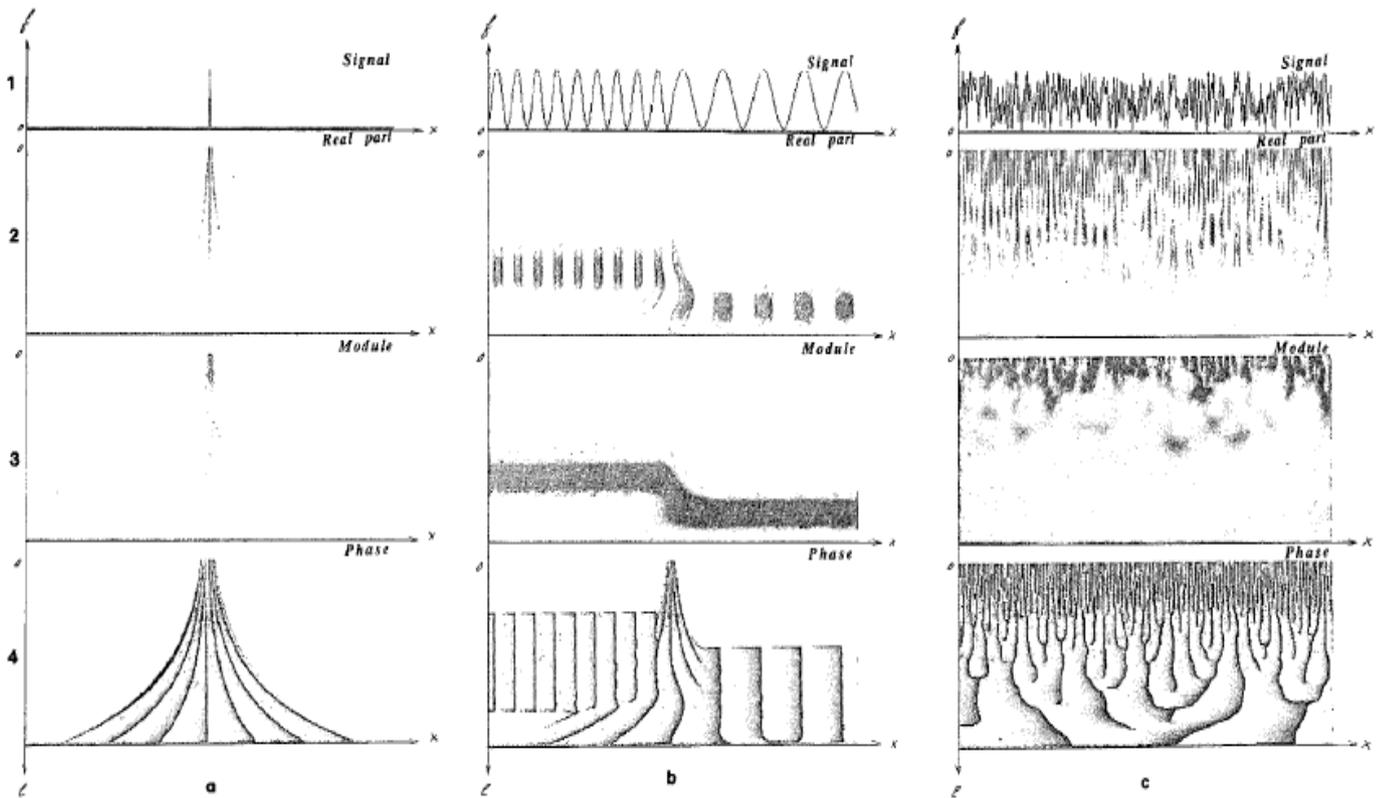


Figura 13. Trasformata wavelet di alcuni segnali accademici ottenuti utilizzando la wavelet Morlet reale con $k_\varphi = 5$. Viene mostrato in 1. il segnale, in 2. la parte reale dei coefficienti wavelet, in 3. il modulo, in 4. la fase. I segnali utilizzati sono: (a) funzione di Dirac (impulso), (b) doppio periodo, (c) rumore bianco Gaussiano. (Farge, 1992).

Se invece il modulo dei coefficienti wavelet diventa nullo alle piccole scale in x_0 , allora la funzione f è regolare in x_0 . Per dare una giustificazione matematica di questo fatto, è necessario analizzare il comportamento globale della funzione nell'intorno di x_0 . Per localizzare una singolarità in x_0 , bisognerà prima verificare che i coefficienti wavelet alle piccole scale nell'intorno di x_0 non siano più grandi di quelli in x_0 stesso. Non bisogna quindi considerare solo i coefficienti $\tilde{f}(l, x_0)$, ma anche i coefficienti il cui cono di influenza punta verso x_0 . Queste proprietà sono indipendenti dalla wavelet utilizzata (Holschneider 1988b; Arnèodo *et al.*, 1989; Ghez & Vaienti 1989; Argoul *et al.*, 1988, 1990; Falconer 1991; Freysz *et al.*, 1990).

2.2.3.3 Scelta della base wavelet

Abbiamo visto che la trasformata wavelet è un prodotto scalare tra una funzione wavelet ad una data scala l e il segnale da analizzare: i coefficienti wavelet contengono quindi l'informazione

combinata sia del segnale che della base wavelet. Per analizzare dei dati è meglio utilizzare la trasformata wavelet continua, perché la sua ridondanza consente di cogliere meglio l'informazione del segnale. Per modellizzare invece, conviene usare una trasformata wavelet ortogonale, in quanto decompone il segnale nel minimo numero di coefficienti indipendenti. La scelta del tipo di trasformata wavelet e della base wavelet da utilizzare dipende quindi dal segnale studiato e dai risultati che vogliamo ottenere.

La trasformata wavelet continua con una base wavelet complessa è ideale per analizzare segnali reali, come quelli studiati nella meccanica dei fluidi, in quanto dato che la parte reale e la parte immaginaria sono sfasate di $\frac{\pi}{2}$, vengono eliminate le oscillazioni calcolando il modulo dei coefficienti wavelet. Inoltre come detto in precedenza, le linee iso-fase convergono sulle singolarità e il numero di linee zero-crossing è legato alla frequenza del segnale.

La base complessa più utilizzata è la wavelet Morlet:

$$\Psi(x) = \pi^{-1/4} e^{\sqrt{-ik_\varphi}x} e^{-(|x|^2/2)}$$

La wavelet Morlet non è altro che un'onda piana modulata da una Gaussiana. La wavelet Morlet è sulla soglia della condizione di ammissibilità, che viene rispettata solo quando $|k_\varphi| \leq 6$. Nell'ambito di questa tesi abbiamo utilizzato come basi wavelet la Morlet complessa e la Morlet reale. Esistono anche altri wavelet ed è possibile crearne infinite, ma ci limiteremo a mostrarne alcune in figura 15, e la seguente Morlet reale ottenuta per $k_\varphi = 5$ (figura 14).

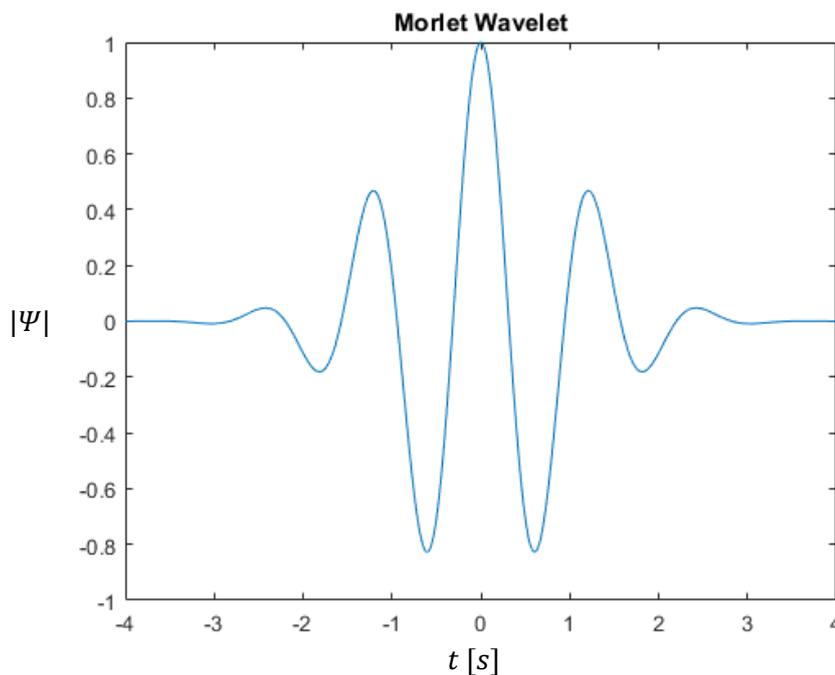


Figura 14. Morlet Wavelet (reale)

Si definisce center frequency la frequenza della sinusoide che meglio approssima la Wavelet considerata; ad esempio per la Morlet con $\omega_0 = 5$ si ottiene $f_c = 0.81\text{Hz}$.

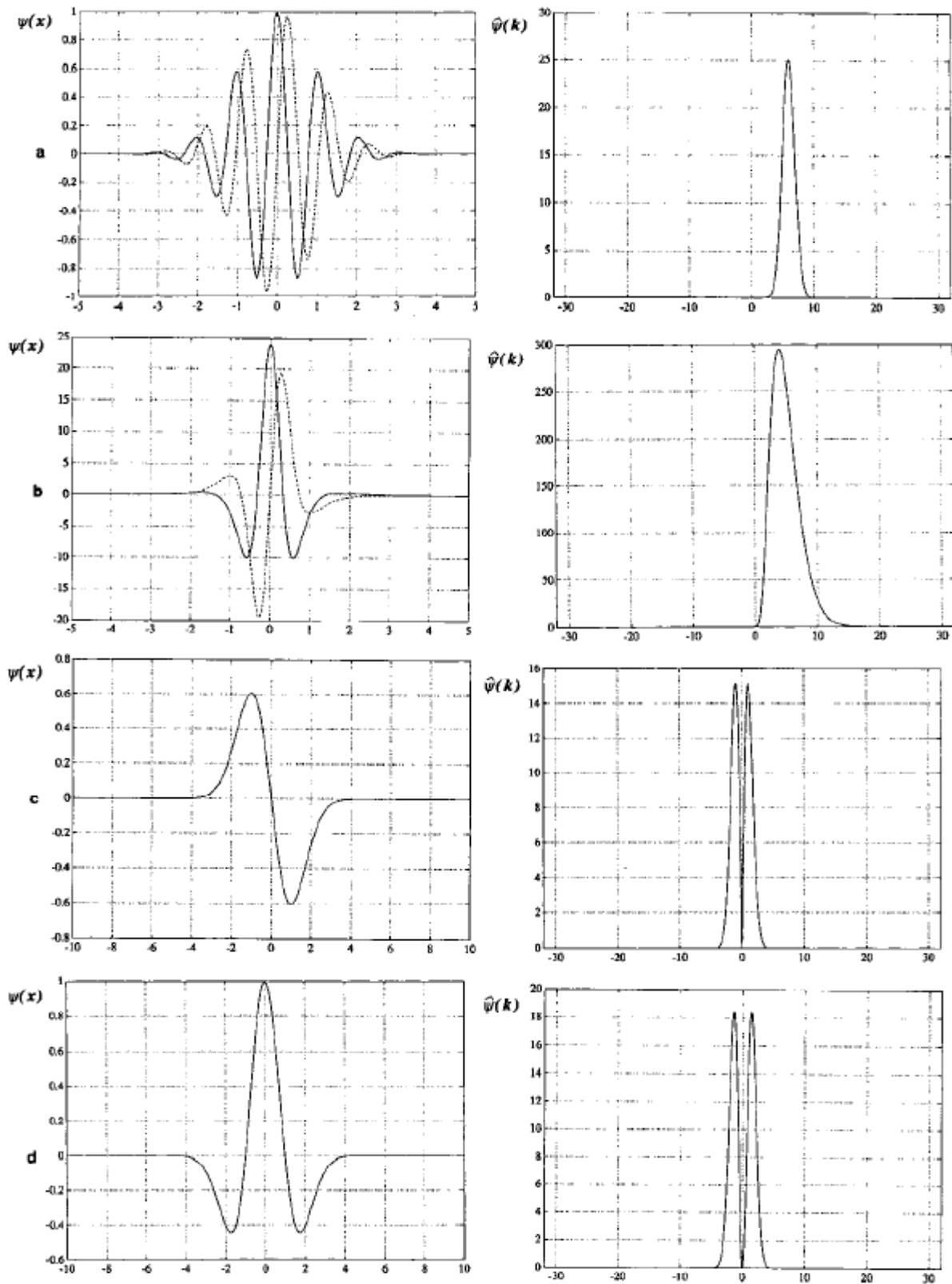


Figura 15. Esempi di wavelet Ψ comunemente usate per la trasformata wavelet continua (linea continua = parte reale, linea tratteggiata = parte immaginaria); a sinistra è mostrato $\Psi(x)$ e a destra $\hat{\Psi}(x)$: (a) wavelet Morlet $k_\phi = 6$, (b) wavelet di Paul, (c) prima derivata della Gaussiana, wavelet Marr (Farge, 1992).

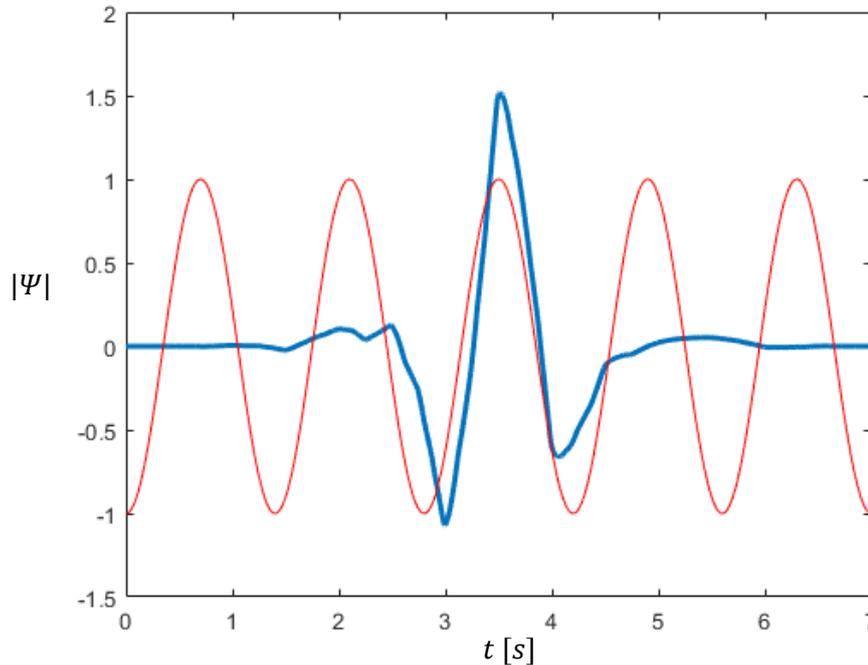


Figura 16. Sinusoide che meglio approssima la Wavelet di Daubechies. La frequenza ($1/T$) della sinusoide è pari alla center frequency della Wavelet.

Un altro esempio di wavelet reale è la m th-derivata della gaussiana:

$$\Psi(x) = (-1)^m \frac{d^m}{dx^m} e^{-(|x|^2/2)}$$

2.2.3.4 Rappresentazione dei coefficienti wavelet

Se la funzione wavelet utilizzata $\psi(x)$ è complessa, anche la trasformata $W_n(s)$ risulta complessa, e può essere suddivisa in parte reale $R(W_n(s))$ ed immaginaria $I(W_n(s))$, o in ampiezza $|W_n(s)|$ e fase $\Phi = \tan^{-1} \left[\frac{I(W_n(s))}{R(W_n(s))} \right]$. Se la funzione wavelet utilizzata è invece reale, la parte immaginaria risulta pari a zero, mentre la fase non è definita.

Per comparare gli spettri di energia ottenuti con basi wavelet diverse, bisognerebbe normalizzare il valore atteso $|W_n(s)|^2$ con la varianza σ^2 . La normalizzazione con la varianza fornisce una misura della potenza relativa al rumore bianco, ovvero dell'errore intrinseco della nostra analisi con la base scelta.

Per ridurre il rumore bisogna scegliere una base adeguata al caso studiato: la center frequency dovrà essere il più vicino possibile alla frequenza dominante del flusso. Inoltre più sarà ampia la finestra temporale, minore sarà l'accuratezza temporale e viceversa. Questo perché l'analisi wavelet è localizzata e ci permette di osservare le variazioni di energia ad una data frequenza al variare del tempo; questa frequenza non risulta però fissa nel tempo, ma oscilla a causa della modulazione, e quindi di scambi di energia all'interno del flusso alle varie frequenze. Per osservare queste oscillazioni è necessario che la finestra temporale sia abbastanza ampia.

La rappresentazione grafica dei coefficienti wavelet più utilizzata è quella in norma L^2 . Per prima cosa è necessario definire il vettore delle scale, lineare o in base logaritmica, su cui calcolare la trasformata: più è grande la scala (bassa frequenza), più il costo computazionale sarà elevato; inoltre data una frequenza, essa corrisponderà a scale diverse prendendo due basi wavelet diverse. La normalizzazione L^2 permette di osservare molto bene le strutture modali presenti su ogni scala, ma non permette di comparare il valore di coefficienti su scale diverse. Se siamo interessati a comparare la densità di energia a diverse scale, è necessario utilizzare la norma L^1 .

2.2.3.5 Scala Wavelet e frequenza di Fourier

I picchi della wavelet $\hat{\psi}(s\omega)$ non corrispondono esattamente alla frequenza s^{-1} di Fourier. La relazione tra il periodo equivalente di Fourier e la scala wavelet può essere derivata analiticamente (Meyers *et al.*, 1993) per una particolare base wavelet, sostituendo un'onda sinusoidale di frequenza nota nella trasformata wavelet

$$W_n(s) = \sum_{k=0}^{N-1} \hat{x}_n \hat{\psi}^*(s\omega_k) e^{i\omega_k n \delta t}$$

e calcolando la scala s alla quale lo spettro wavelet raggiunge il massimo. Ad esempio per la Morlet reale con $\omega_0 = 6$ si trova $\lambda = 1.03s$, dove λ è il periodo di Fourier. λ dipende dalla forma della wavelet utilizzata.

Un altro modo per passare dalla scala alle frequenze equivalenti è utilizzare la center frequency F_c , definita come la frequenza della sinusoide che meglio approssima la funzione wavelet scelta. Si può calcolare quindi la pseudo-frequency F_p , o frequenza equivalente come

$$F_p = \frac{F_c}{s\Delta t}$$

Dove F_p è la pseudo-frequency, F_c è la center-frequency, s la scala, Δt il passo temporale o l'inverso della frequenza di campionamento F_s . Svolgendo il calcolo per tutte le scale è possibile ricavare il set di frequenze a cui è stata calcolata la trasformata wavelet. Ad esempio per la Morlet reale $F_c = 0.81\text{Hz}$, quindi con una frequenza di campionamento di $F_s = 1000\text{Hz}$ ($\Delta t = 0.001\text{s}$) la scala $s = 10$ corrisponderà alla frequenza $F_p = 8.1\text{Hz}$.

2.2.4 Trasformata wavelet discreta

Per definire la trasformata wavelet discreta è necessario discretizzare il piano l, x : l è campionata in modo logaritmico con intervalli pari a $(\Delta \log l)^{-j}$ con $j \in \mathbf{Z}$, e x è campionato linearmente con intervalli pari a $i * \Delta x * (\Delta \log l)^{-j}$ con $i \in \mathbf{Z}$. La formula dell'analisi discreta risulta:

$$\tilde{f}_{ij} = \langle \Psi_{ij}, f \rangle = \int_{-\infty}^{+\infty} f(x) \Psi_{ij} * dx$$

e la formula di ricostruzione del segnale

$$f(x) = C \sum_{j=-\infty}^{+\infty} \sum_{i=-\infty}^{+\infty} \widetilde{f}_{ij} \Psi_{ij} + R$$

dove C è una costante e R è il residuo che vale zero solo se la base è ortogonale o quasi-ortogonale.

Per ricostruire esattamente il segnale occorre che $C \sim 1$ e $R \sim 0$ (Daubechies *et al.*, 1986, Daubechies 1987). Quando è possibile questa ricostruzione si dice che la base è quasi ortogonale e completa.

Con l'utilizzo della trasformata wavelet discreta si perde la covarianza rispetto alla dilatazione e alla traslazione della trasformata wavelet continua e la ridondanza dei coefficienti della trasformata wavelet, entrambe proprietà molto utili per analizzare il segnale. Il vantaggio è un costo computazionale notevolmente ridotto. In realtà utilizzando un'opportuna interpolazione, basata sulla riproducibilità del segnale della trasformata wavelet continua, è possibile ricostruire l'intero set di coefficienti della trasformata wavelet continua partendo da un set di coefficienti della trasformata discreta. Grazie a questa proprietà è possibile combinare i vantaggi della trasformata wavelet continua e di quella discreta, e la differenza tra le due non risulta così importante.

2.2.4.1 Wavelet ortogonali

La generica forma di una base wavelet ortogonale da utilizzare per la trasformata wavelet discreta è:

$$\Psi_{ij} = 2^{\frac{j}{2}} \Psi(2^j x - i) \text{ con } i, j \in \mathbf{Z}$$

Usando la base Ψ_{ij} possiamo decomporre qualunque funzione che decade abbastanza velocemente all'infinito:

$$f(x) = \sum_{j=-\infty}^{+\infty} \sum_{i=-\infty}^{+\infty} \widetilde{f}_{ij} \Psi_{ij}$$

come

$$\widetilde{f}_{ij} = \langle \Psi_{ij} | f \rangle = \int_{-\infty}^{+\infty} f(x) \Psi(x - 2^j i) * dx$$

L'ortogonalità della base implica che l'energia totale si conserva:

$$\int_{-\infty}^{+\infty} |f(x)|^2 dx = \sum_{j=-\infty}^{+\infty} \sum_{i=-\infty}^{+\infty} |\widetilde{f}_{ij}|^2$$

Come detto in precedenza, la trasformata wavelet discreta non è covariante rispetto alla traslazione e alle dilatazione.

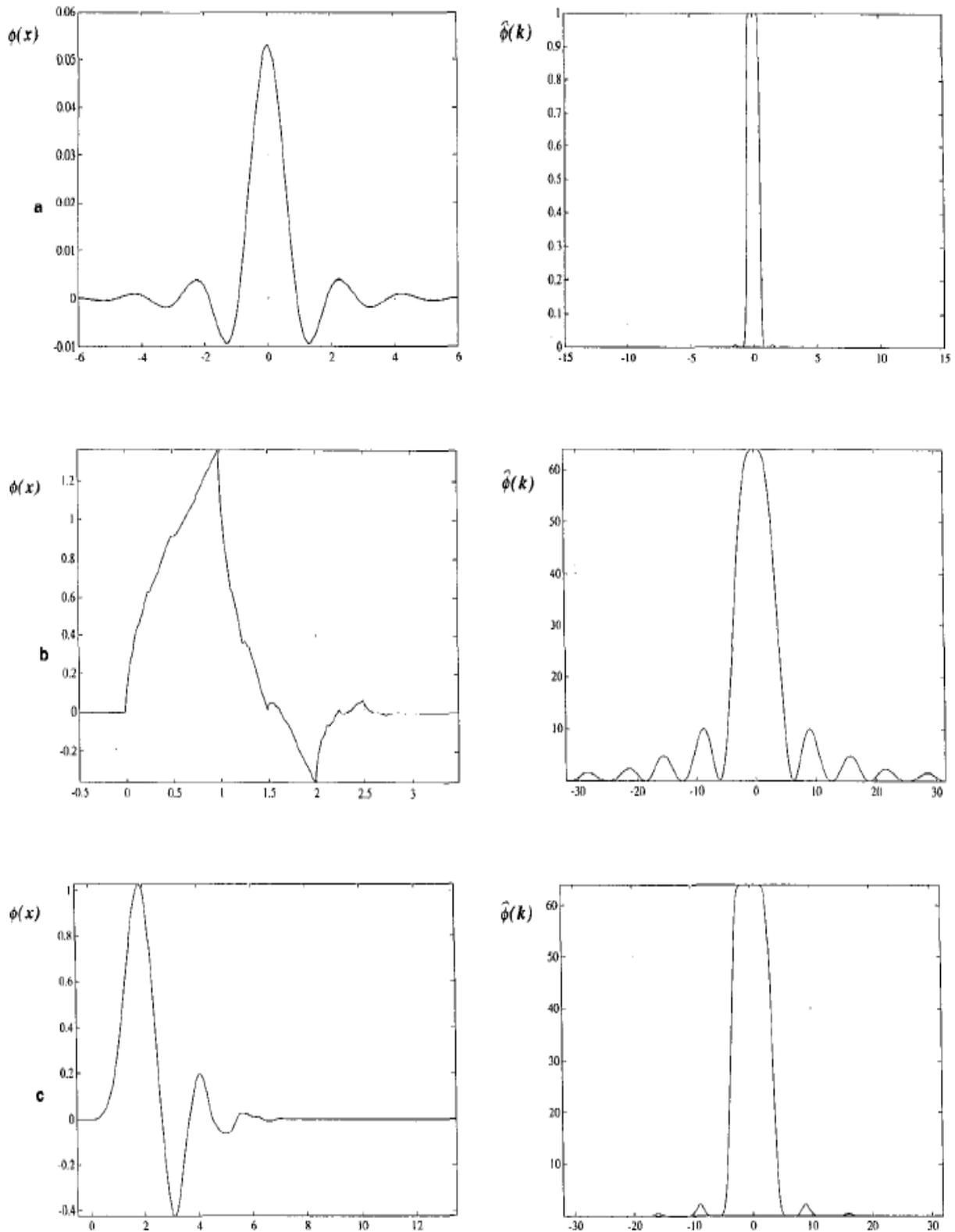


Figura 17. Esempio di father's wavelets ϕ e wavelet Ψ comunemente usate per la trasformata wavelet ortogonale: (a) Battle-Lemarié wavelet costruita con spline al 4th ordine, (b) Daubechies wavelet con $N=2$, (c) Daubechies wavelet con $N=7$ (Farge, 1992).

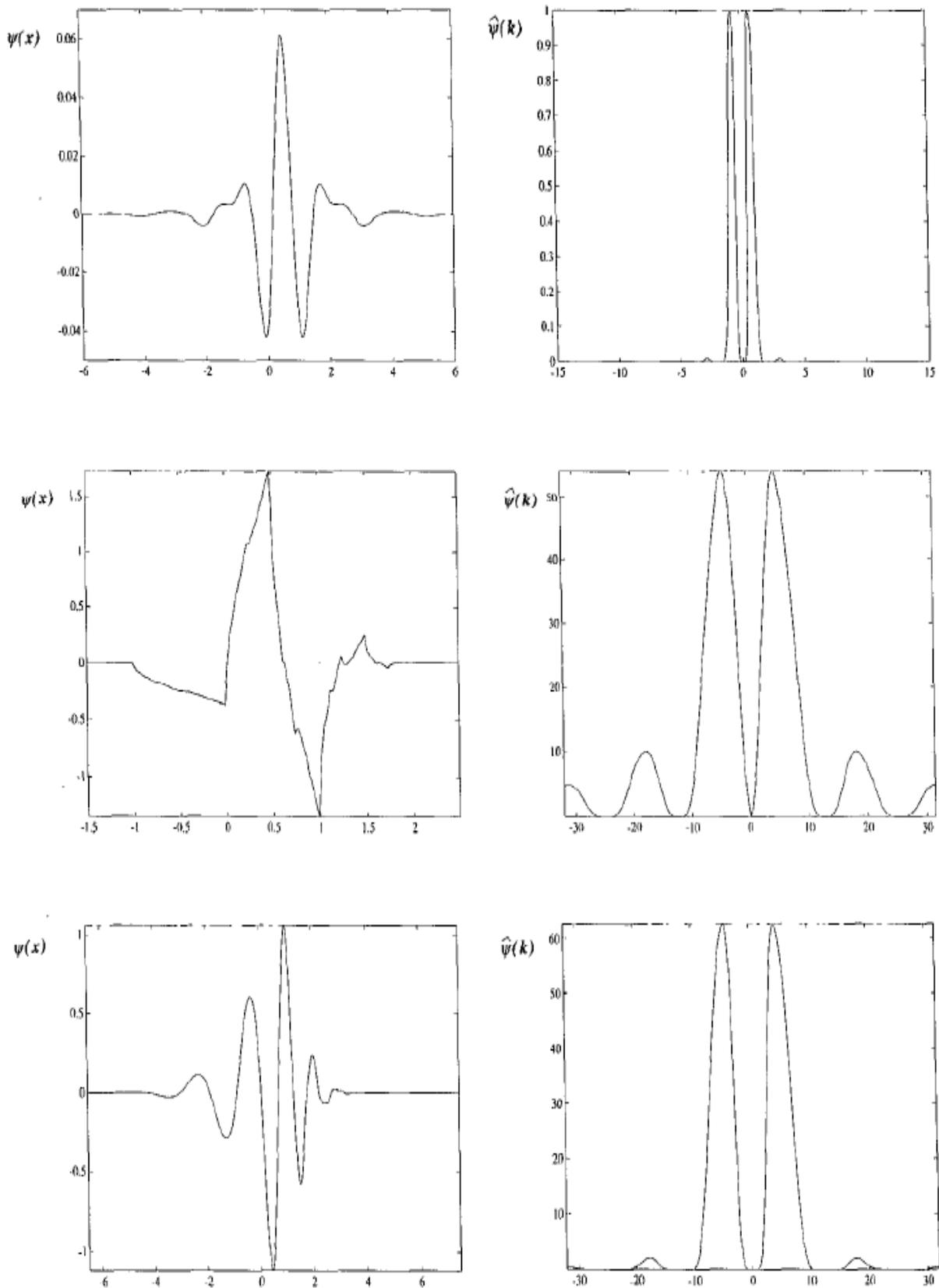


Figura 18. Esempio di father's wavelets ϕ e wavelet Ψ comunemente usate per la trasformata wavelet ortogonale: (a) Battle-Lemarié wavelet costruita con spline al 4th ordine, (b) Daubechies wavelet con $N=2$, (c) Daubechies wavelet con $N=7$ (Farge, 1992).

Per analizzare qualunque funzione, che decada o meno all'infinito, è necessario introdurre una nuova funzione ϕ , detta father's wavelet:

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \phi(x) dx = 1$$

dove

$$\phi_{ji} = 2^{\frac{j}{2}} \phi(2^j x - i)$$

è ortogonale a $\Psi_{i'j'}$, per $j' > j$ e qualunque i, i' . La decomposizione della funzione f risulta quindi pari a:

$$f(x) = \sum_{i=-\infty}^{+\infty} \langle \phi_{ij} | f \rangle \phi_{ij}(x) + \sum_{j=0}^{+\infty} \sum_{i=-\infty}^{+\infty} \langle \Psi_{ij} | f \rangle \Psi_{ij}(x)$$

La funzione ϕ_0 è un filtro passa-basso, mentre Ψ_j costituisce un set di filtri passa-alto.

Capitolo 3 Modulazione di segnali

In questo capitolo verranno introdotte le principali tecniche di modulazione in ampiezza, in frequenza e di fase, sfruttate in campo elettronico e delle comunicazioni. Nonostante questa tesi tratti di fluidodinamica, abbiamo riscontrato questi tipi di modulazione anche all'interno del flusso di cavità, indice del fatto che esiste una forte analogia tra campo elettronico e fluidodinamico, ma mentre in un caso si studiano fluttuazioni di tensione, nell'altro si studiano fluttuazioni di velocità o di pressione.

Per trasferire un'informazione da una sorgente ad un destinatario è necessario far passare il segnale attraverso un canale di trasmissione, che nella maggior parte dei casi è un filtro passa-banda. Il dispositivo utilizzato è detto modulatore e permette una traslazione dello spettro del segnale in modo tale da renderlo di tipo passa-banda e adeguato alla trasmissione attraverso il canale. In uscita del canale di trasmissione sarà necessario utilizzare un altro dispositivo inverso, detto demodulatore, in grado di ricostruire il segnale originale a partire dallo spettro.

Considerando un segnale sinusoidale del tipo:

$$s_{carrier}(t) = A_c * \cos(2\pi f_c t + \varphi_o)$$

Poichè $v_o(t)$ dipende da 3 parametri, l'ampiezza A_c , la frequenza f_c , e la fase φ_o , il segnale potrà essere modulato in tre modi differenti (Beardo 2010, Mamola 2010, Petrizzelli 2000):

- Modulazione in ampiezza (AM Amplitude Modulation): quando l'ampiezza A_c varia linearmente con il segnale modulante.
- Modulazione in frequenza (FM Frequency Modulation): quando la frequenza f_c varia linearmente con il segnale modulante.
- Modulazione di fase (PM Phase Modulation): quando la fase φ_o varia linearmente con il segnale modulante.

3.1 Modulazione in ampiezza (AM)

3.1.1 Modulazione in ampiezza a doppia banda laterale (AM-DSB)

La modulazione in ampiezza classica è detta a doppia banda laterale, in quanto nello spettro del segnale modulato, si osservano due picchi laterali equidistanti dalla frequenza del segnale portante, detti sidepeaks. Indicando con $m(t)$ il segnale modulante e con A_c l'ampiezza del segnale portante, si ottiene che l'ampiezza istantanea del segnale modulato è data da:

$$s(t) = A_c [1 + k_a * m(t)]$$

k_a è costante ed è detto indice di modulazione in ampiezza.

Il segnale modulato risulta pari a:

$$s(t) = A_c * \cos(2\pi f_c t) + A_c k_a m(t) * \cos(2\pi f_c t)$$

e riscritto in forma più compatta

$$s(t) = A_c * [1 + k_a * m(t)] * \cos(2\pi f_c t)$$

Il segnale modulato è quindi pari alla somma della portante più il prodotto tra la portante e la modulante.

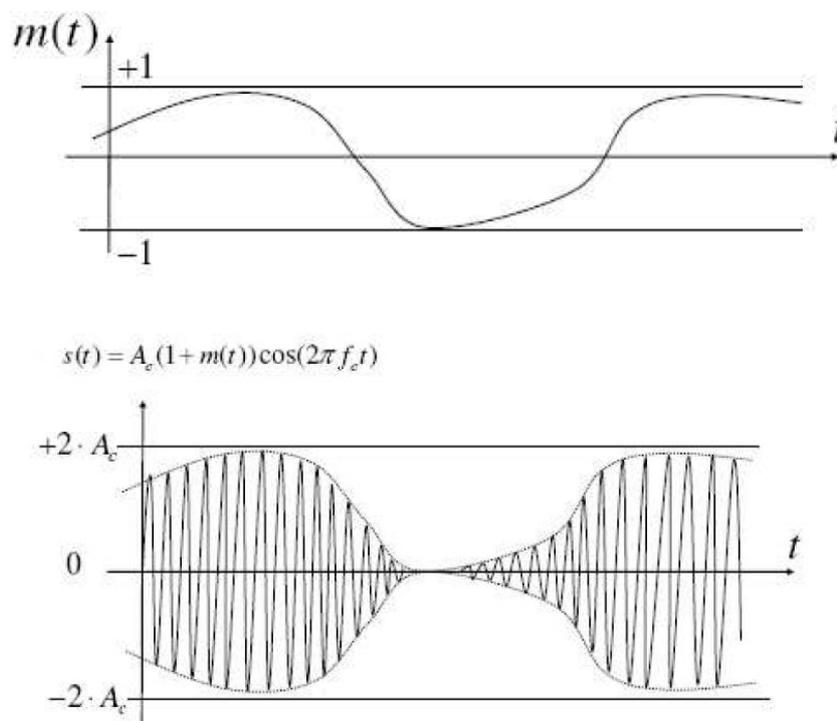


Figura 19. Esempio di modulazione in ampiezza: $m(t)$ è il segnale modulante che modula un segnale sinusoidale in ampiezza e $s(t)$ è il segnale modulato (Beardo, 2010).

Se il segnale modulante è determinato, utilizzando la trasformata di Fourier, si ottiene il seguente spettro del segnale modulato:

$$S(f) = \frac{A_c}{2} \left[\left(e^{j\varphi_0} \delta(f - f_c) + e^{-j\varphi_0} \delta(f + f_c) \right) + k_a \left(e^{j\varphi_0} M(f - f_c) + e^{-j\varphi_0} M(f + f_c) \right) \right]$$

dove $S(f)$ ed $M(f)$ sono rispettivamente le trasformate dei segnali $s(t)$ e $m(t)$. La banda dello spettro è pari al doppio della frequenza della modulante:

$$B = 2f_m$$

Nello spettro osserverò un picco relativo alla frequenza della portante f_c e due picchi equidistanti da quest'ultimo di f_m e corrispondenti alle frequenze $f_- = f_c - f_m$ e $f_+ = f_c + f_m$.

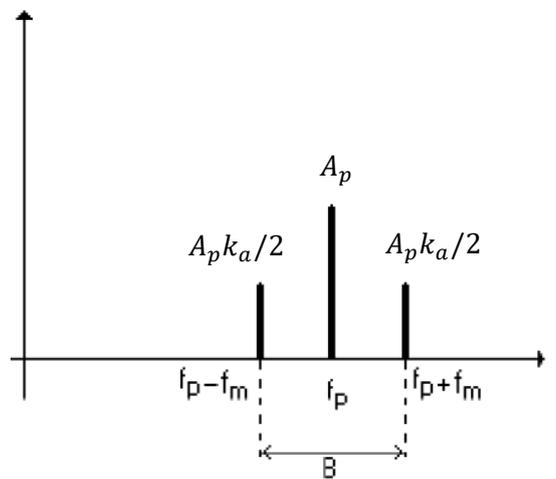


Figura 20. Esempio dello spettro di un segnale sinusoidale modulato in ampiezza da una modulante determinata di frequenza costante: V_p e f_p sono l'ampiezza e la frequenza della portante, m_a è l'indice di modulazione, B è la banda (*"Modulazioni/Demodulazioni Analogiche"*, 2017).

Poiché $k_a = \frac{A_m}{A_c} < 1$, il livello della portante è sempre maggiore di quello dei sidepeaks. Questa condizione può essere riscritta come:

$$1 + k_a * s(t) > 0$$

Se $k_a = \frac{A_m}{A_c} > 1$ si ha una sovr modulazione in ampiezza, un caso da evitare nell'ambito delle comunicazioni affinché la portante modulata conservi, istante per istante, un inviluppo sempre positivo. Se l'inviluppo del segnale è positivo, si può ricostruire il segnale modulante tramite un demodulatore ad inviluppo. Se l'inviluppo del segnale è negativo, non si potrebbe ricostruire il segnale modulante. Nel caso del flusso di cavità abbiamo tuttavia osservato che, soprattutto alle alte frequenze, è presente una sovr modulazione di una bassa frequenza f_b sulle varie portanti.

Il principale difetto della tecnica DSB_AM è che nonostante la carrier trasporti 2/3 della potenza del segnale, essa non è necessaria per la demodulazione e per la ricostruzione del segnale, ma è solo

necessario conoscerne la frequenza. Infatti la potenza specifica del segnale modulato può essere scritta come:

$$P_s = \int_{-\infty}^{+\infty} W_s(f) df = \frac{V_0^2}{2} + \frac{k_a^2 V_0^2}{4} \int_{-\infty}^{+\infty} [W_s(f - f_c) + W(f + f_c)] df$$

$$P_s = \frac{A_c^2}{2} * [1 + k_a^2 * P_m] = P_c [1 + k_a^2 * P_m] \quad \text{con} \quad \frac{A_c^2}{2} = P_c$$

dove P_c è la potenza della portante non modulata e P_m la potenza della modulante . La modulazione in ampiezza comporta quindi un incremento di $k_a^2 * P_m$ nella potenza della portante. Tale incremento è da attribuirsi alle bande laterali, ognuna delle quali ha una potenza specifica pari a $\frac{1}{2} k_a^2 P_m P_c$. Si definisce efficienza della modulazione il seguente rapporto:

$$\eta = \frac{P_c k_a^2 P_m}{P_s} = \frac{P_c k_a^2 P_m}{P_c [1 + k_a^2 P_m]} = \frac{k_a^2 P_m}{1 + k_a^2 P_m}$$

Osservando l'espressione della potenza specifica risulta subito come, sopprimendo la portante prima di inviare il segnale modulato, si potrebbe risparmiare notevolmente sulla potenza richiesta dalla trasmissione. La portante potrà poi essere risommata prima di demodulare il segnale: questa tecnica è detta AM-DSB-SC (Amplitude Modulation Double Side Band-Suppressed Carrier).

3.1.2 Modulazione in ampiezza a doppia banda laterale con carrier soppressa (AM-DSB-SC)

Nella modulazione AM-DSB-SC (Amplitude Modulation Double Side Band-Suppressed Carrier), la soppressione della portante riduce la potenza trasmessa migliorando l'efficienza. Il segnale modulato ha la seguente forma:

$$s(t) = A_c k_a m(t) \cos(2\pi f_c t + \varphi_0)$$

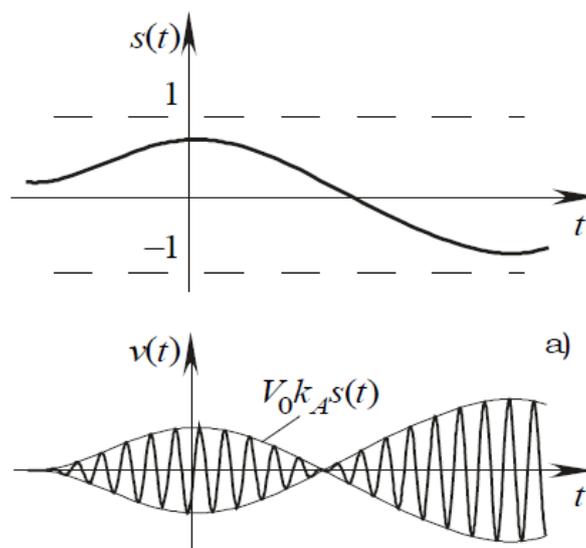


Figura 21. Esempio di modulazione in ampiezza DSB-SC di un segnale sinusoidale: in alto c'è la modulante, in basso il segnale modulato (*“Modulazioni/Demodulazioni Analogiche”, 2017*).

La portante dovrà essere ricostruita prima della demodulazione in ampiezza ed in fase. Lo sfasamento tra la portante ed il segnale modulato porta ad una ricostruzione non corretta del segnale, e nel caso peggiore quando lo sfasamento è pari a $\pi/2$, il segnale non è ricostruibile. Per ricostruire la portante si usa un circuito ad aggancio fase detto PLL (*Phase Locked Loop*), che non fa altro che confrontare la frequenza f_p in ingresso con una frequenza f_c proveniente da un oscillatore a controllo di tensione e che ne modifica la frequenza fin quando la differenza tra le due risulta nulla.

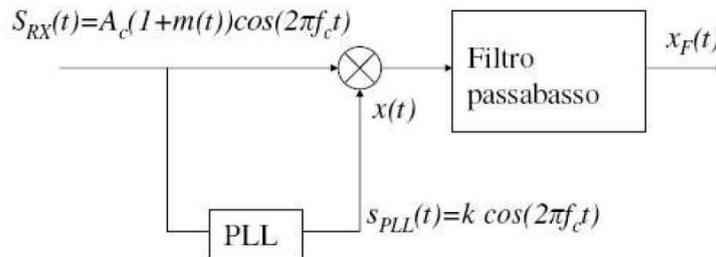


Figura 22. Schema demodulazione AM-DSB-SC (Beardo, 2010).

La densità spettrale di potenza di un segnale modulato con la tecnica AM-DSB-SC è pari a:

$$P_s(f) = \frac{A_c^2}{4} [P_m(f - f_c) + P_m(f + f_c)]$$

In $P_s(f)$ non compare nessun δf , come per il caso della generica modulazione AM-DSB, e questo vuol dire che non viene sprecata potenza per trasmettere la portante. L'efficienza risulta quindi massima e pari a 1.

$$\eta = \frac{k_a^2 P_m}{k_a^2 P_m} = 1$$

Utilizzando la modulazione AM-DSB-SC si guadagna quindi in efficienza a scapito di un aumento di complessità del ricevitore che dovrà essere in grado di ricostruire esattamente la carrier soppressa; tuttavia con la tecnologia attuale un circuito ad aggancio fase PLL è molto semplice da realizzare e viene utilizzato anche per la trasmissione AM semplice, in quanto migliora le prestazioni.

Notiamo che nel caso della modulazione AM-DSB-SC, l'indice di modulazione è sempre maggiore di 1 e si ha sempre sovr modulazione.

$$k_a \gg 1$$

Questo caso è proprio quello che si riscontra nel flusso di cavità alle alte frequenze, dove la carrier possiede un'energia molto inferiore rispetto alla modulante, e i sidepeaks che si generano a causa della modulazione in ampiezza possiedono un'energia nettamente superiore a quella della carrier stessa: alle alte frequenze è presente quindi una sovr modulazione in ampiezza molto simile alla tecnica di modulazione DSB-SC.

3.1.3 Modulazione in ampiezza a banda singola (SSB = *Single Sideband*)

Dato che l'allocazione di banda è molto costosa, per limitarla sono nate altre tecniche di modulazione AM come quella a banda singola, che permette di dimezzare la banda utilizzata sopprimendo uno dei due sidepeaks. Questa tecnica sfrutta il fatto che lo spettro di un segnale reale è simmetrico rispetto all'asse delle ordinate: si potrà quindi ricostruire la parte delle ascisse negative per simmetria.

È possibile quindi eliminare metà della banda, senza perdere informazione, con un filtro passa-basso o un filtro passa-alto.

- AM-SSB-USB (*USB = Upper Side Band*) che sfrutta un filtro passa-alto
- AM-SSB-LSB (*LSB = Lower Side Band*) che sfrutta un filtro passa-basso

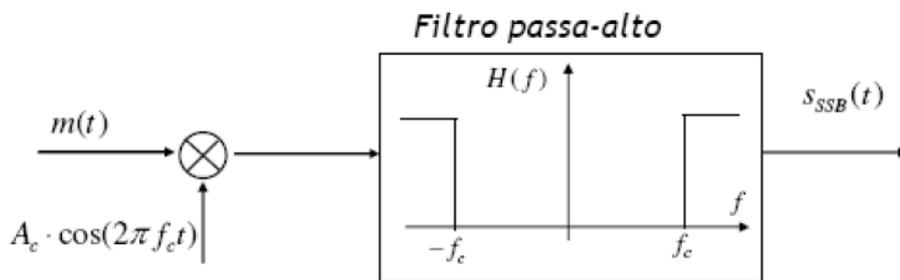


Figura 23. Schema di un trasmettitore AM-SSB-USB (Beardo, 2010).

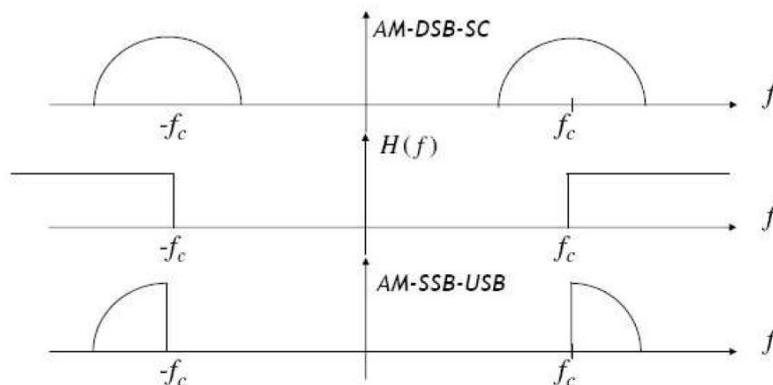


Figura 24. Costruzione segnale AM-SSB-USB nel dominio della frequenza: il segnale viene filtrato con un filtro passa-alto a frequenza di taglio f_c (Beardo, 2010).

Il vantaggio di questa tecnica è che si occupa metà banda rispetto alla tecnica AM-DSB-SC, a parità di prestazioni); lo svantaggio è che si avranno trasmettitori e ricevitori più complessi. La modulazione AM-SSB viene utilizzata per esempio nei sistemi radio per la navigazione.

Un segnale modulato tramite SSB-USB ha la seguente forma:

$$s_{USB}(t) = A_c[m(t) \cos(2\pi f_c t) - \hat{m}(t) \sin(2\pi f_c t)]$$

dove $\hat{m}(t)$ è la trasformata di Hilbert del segnale $m(t)$ e si ottiene con un filtraggio con risposta all'impulso,

$$\hat{m}(t) = m(t) * \frac{1}{\pi t}$$

$$h_{\text{Hilbert}}(t) = \frac{1}{\pi t}$$

3.2 Modulazione angolare

Consideriamo un segnale sinusoidale:

$$s_{\text{carrier}}(t) = A_c * \cos(2\pi f_c t + \varphi(t))$$

f_c è la frequenza della portante e $\varphi(t)$ è la fase. Potrà far variare il termine $(2\pi f_c t + \varphi(t))$ o facendo variare la frequenza della carrier, o variando la fase: quest'operazione è detta modulazione angolare.

3.2.1 Modulazione FM (*Frequency Modulation*)

La modulazione in frequenza FM consiste nel far variare la frequenza della portante in modo proporzionale all'ampiezza della carrier. Questo tipo di modulazione ha il vantaggio di ridurre i disturbi in ricezione dovuti alle interferenze causate da altri apparecchi elettronici.

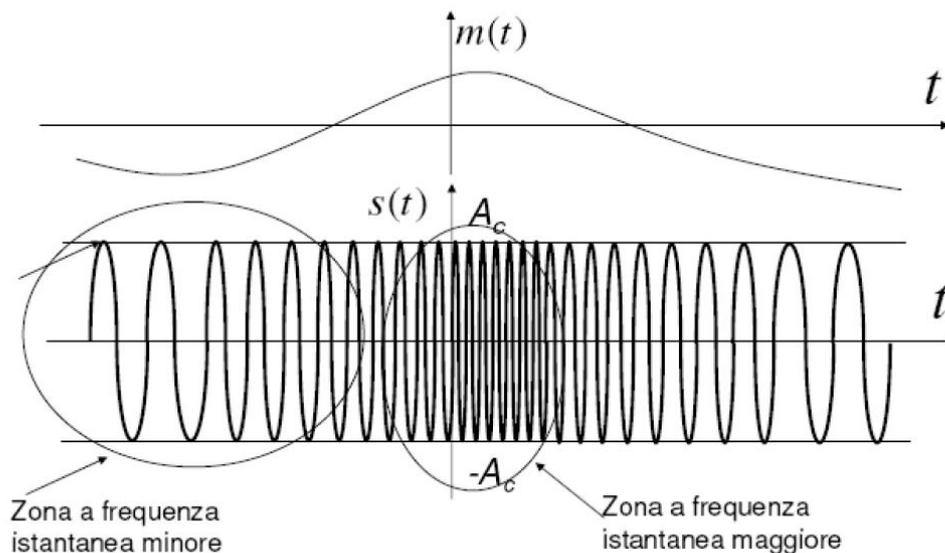


Figura 25. Esempio di modulazione in frequenza FM di un segnale sinusoidale (Beardo, 2010).

L'ampiezza del segnale modulato è pari a quella della portante, in quanto la modulazione angolare ne varia solo la frequenza. Se il segnale modulante è di tipo sinusoidale:

$$m(t) = A_m \cos(\omega_m t)$$

la frequenza del segnale modulato oscilla intorno ad un valore medio f_c .

La pulsazione istantanea potrà essere scritta come:

$$\omega(t) = \omega_c + k_f m(t) = \omega_c + k_f A_m \cos(\omega_m t)$$

dove ω_c è la pulsazione della portante, $m(t)$ è il segnale modulante e k_f è una costante di proporzionalità.

La frequenza istantanea risulta quindi pari a:

$$f(t) = \frac{\omega(t)}{2\pi} = f_c + \frac{k_f A_m}{2\pi} \cos(\omega_m t)$$

La quantità $\Delta f = \frac{k_f A_m}{2\pi}$ è detta massima deviazione in frequenza e la frequenza istantanea $f(t)$ varia tra $f_c - \Delta f$ e $f_c + \Delta f$. Sfruttando l'espressione della frequenza istantanea, il segnale modulato è pari a:

$$s(t) = A_c \cos \left[\omega_c t + \frac{k_f A_m}{\omega_m} \sin(\omega_m t) \right] = A_c \cos[\omega_c t + m_f \sin(\omega_m t)]$$

Il termine $m_f = \frac{k_f A_m}{\omega_m} = \frac{\Delta f}{f_m}$ è detto indice di modulazione in frequenza e rappresenta la deviazione massima della frequenza del segnale FM.

Se il segnale modulante è sinusoidale, si può scomporre il segnale modulato in una somma di armoniche con il teorema di Fourier e la banda risulta pari a:

$$B = 2(\Delta f + f_m) = 2f_m(m_f + 1)$$

La banda è quindi maggiore del doppio della frequenza modulante $2f_m$ e cresce all'aumentare dell'indice di modulazione. Nello spettro del segnale osserverò una distribuzione a campana della densità di energia centrata sulla frequenza f_c della portante.

3.2.2 Modulazione PM (Phase Modulation)

La modulazione di fase è una tecnica di modulazione angolare in grado di far variare la fase della portante. La variazione di fase è proporzionale al valore istantaneo della modulante e segue una legge lineare. Procedendo proprio come per la modulazione in frequenza, consideriamo un segnale portante sinusoidale:

$$s_{carrier}(t) = A_c * \cos(2\pi f_c t + \varphi_0)$$

dove φ_0 è la fase iniziale. Consideriamo inoltre una modulante sinusoidale:

$$m(t) = A_m \cos(\omega_m t)$$

Il segnale modulato in fase sarà dunque pari a:

$$s(t) = A_c \cos[\omega_c t + k_p A_m(t)] = A_c \cos[\omega_c t + k_p B \cos(\omega_m t)]$$

$$k_p A_m(t) = \Delta\varphi$$

$\Delta\varphi$ è la variazione di fase dovuta alla modulazione e B è una costante di proporzionalità. La fase istantanea sarà quindi data dalla seguente relazione:

$$\varphi_{PM}(t) = \frac{d\varphi_{PM}}{dt} = \omega_c + k_p * \left(\frac{dA_m(t)}{dt} \right)$$

Proprio come per gli altri tipi di modulazione, il termine k_p è detto indice di modulazione di fase, e quando $k_p < 1$ si dice che la modulazione è in banda stretta; la modulazione di fase può essere a banda stretta o a banda larga. È importante notare che utilizzando la stessa modulante, un segnale modulato in fase PM risulta sfasato di 180° rispetto allo stesso segnale modulato in frequenza FM. Infatti nella modulazione FM quando la modulante è positiva la frequenza aumenta, e viceversa, ma nella modulazione PM quando la modulante è positiva, la frequenza diminuisce. Per passare da un segnale FM ad un segnale PM basta integrare il segnale stesso, mentre nel caso contrario basta derivare.

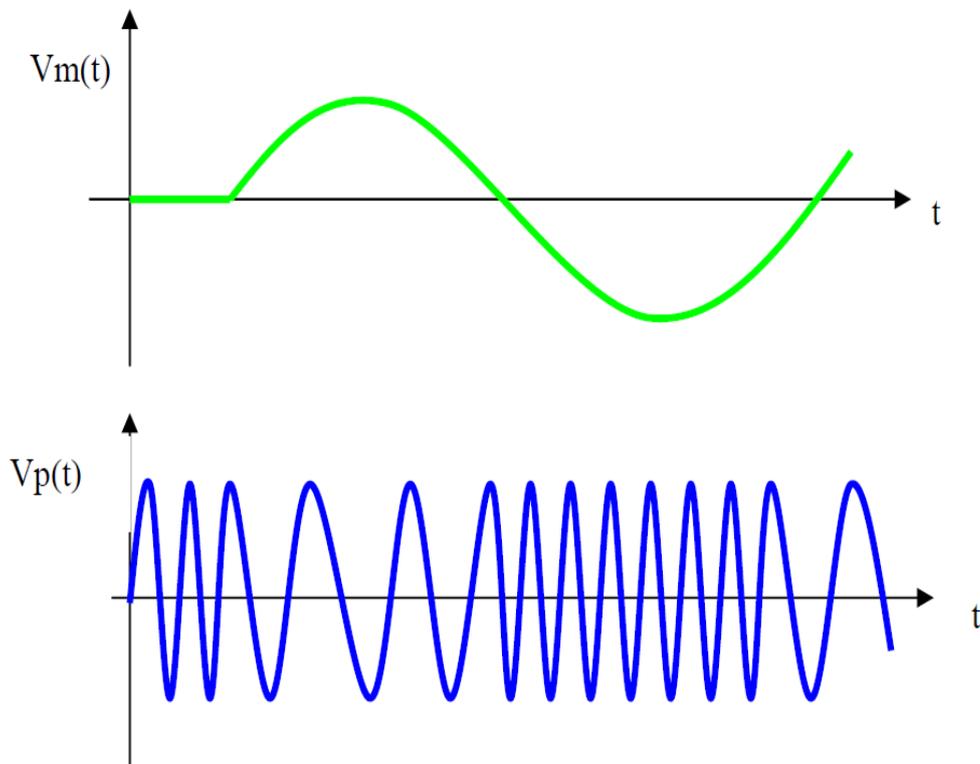


Figura 26. Esempio di una modulazione di fase di una modulante sinusoidale su una portante sinusoidale (*"Modulazioni/Demodulazioni Analogiche"*, 2017).

3.3 Armoniche e subarmoniche

È noto che nei flussi, e in generale in molti sistemi fisici, oltre ad una frequenza di oscillazione dominante, sono presenti anche multipli interi di questa frequenza, detti armoniche, e frequenze frazionarie di quella dominante, dette subarmoniche. In questo paragrafo si spiegherà il meccanismo che porta alla generazione delle armoniche e delle subarmoniche, sfruttando l'equazione di un oscillatore armonico non lineare (*"Appunti complementi armoniche e subarmoniche"*, 2008).

3.3.1 Generazione di armoniche

Consideriamo l'equazione di un oscillatore armonico non lineare, sommando un termine aggiuntivo proporzionale al quadrato della funzione incognita.

$$m\ddot{x} + b\dot{x} + kx + k'x^2 = F_0 \cos(\omega t)$$

Il termine $k'x^2$ può pensarsi dovuto alle forze viscosse; si potrebbero aggiungere altri termini proporzionali a potenze maggiori di 2 della funzione incognita, migliorando l'approssimazione, ma per questa trattazione ci fermeremo al termine $k'x^2$.

Se il termine non lineare è molto più piccolo del termine lineare, allora $kx \gg k'x^2$ e le soluzioni sono del tipo:

$$x(t) = x_0(t) + x'(t)$$

in cui $x'(t) \ll x_0(t)$ è un termine correttivo dovuto alla non linearità. Inserendo $x(t)$ nell'equazione dell'oscillatore

$$m(\ddot{x}_0 + \ddot{x}') + b(\dot{x}_0 + \dot{x}') + k(x_0 + x') + k'(x_0^2 + 2x_0x' + x'^2) = F_0 \cos(\omega t)$$

e ricordando che x_0 soddisfa l'equazione lineare, si trova che:

$$m\ddot{x}' + b\dot{x}' + kx' = -k'(x_0^2 + 2x_0x' + x'^2) \cong -k'x_0^2$$

Sostituendo nell'equazione dell'oscillatore, ricaviamo x_0^2 :

$$x_0^2 = A^2 \cos^2(\omega t + \varphi) = \frac{F_0^2}{2k} \frac{[1 + k \cos(2\omega t + 2\varphi)]}{[m^2(\omega^2 - \omega_0^2)^2 + (b\omega)^2]}$$

Compare quindi un termine con pulsazione 2ω , e quindi frequenza doppia di quella di eccitazione. Si è quindi trovato che l'aggiunta di un termine non lineare nell'equazione dell'oscillatore porta alla generazione della prima armonica della frequenza dominante. Analogamente si potrebbe aggiungere un ulteriore termine non lineare

$$x(t) = x_0(t) + x'(t) + x''(t)$$

con $x''(t) \ll x'(t) \ll x_0(t)$, per generare la terza armonica. Infatti sostituendo la soluzione nell'equazione dell'oscillatore, compare un termine $\cos(\omega t) \cos(2\omega t)$ che con le formule trigonometriche diventa una somma di coseni $\cos(3\omega t + 3\varphi + \psi) + \cos(\omega t - \varphi - \psi)$. Si trova quindi un termine con pulsazione tripla 3ω di quella dominante, corrispondente alla seconda armonica della frequenza dominante. Aggiungendo altri termini non lineari si potrebbero trovare i termini relativi alle successive armoniche di ampiezza via via decrescente. Inoltre l'ampiezza di ogni armonica sarà legata a quella delle armoniche precedenti.

In generale la soluzione può essere scritta come

$$x(t) = \sum_n a_n \cos(n\omega t + \varphi_n)$$

che inserita nell'equazione dell'oscillatore armonico dà:

$$\begin{aligned} -m \sum_n a_n [n^2 \omega^2 \cos(n\omega t + \varphi_n) - bn\omega \sin(n\omega t + \varphi_n) + k \cos(n\omega t + \varphi_n)] \\ = F_0 \cos(\omega t) - k' \sum_n \sum_m a_n a_m \cos(n\omega t + \varphi_n) \cos(m\omega t + \varphi_m) \end{aligned}$$

Ogni termine $a_n a_m \cos(n\omega t + \varphi_n) \cos(m\omega t + \varphi_m)$ può essere riscritto come la somma di un termine con frequenza $(n+m)\omega$ e $(n-m)\omega$. Raccogliendo tutti i termini con la stessa frequenza, si otterrà un sistema di equazioni nelle incognite a_n , che potrà essere risolto per trovare tutte le armoniche.

La generazione delle armoniche può essere spiegata sfruttando il fenomeno della modulazione in ampiezza, introdotto nei paragrafi precedenti. Supponiamo di avere una portante sinusoidale di frequenza f_c , che satura di energia, sia in grado di battere con sé stessa e di modularsi. Considerando l'equazione di un segnale modulato in ampiezza, in cui f_c lavora sia come portante che come modulante, si ottiene:

$$s(t) = A_c \cos(2\pi f_c t) + A_c k_a \cos(2\pi f_c t) \cos(2\pi f_c t)$$

dove $k_a = \frac{A_c}{A_c} = 1$. Il termine $\cos(2\pi f_c t) \cos(2\pi f_c t)$ può essere riscritto utilizzando le formule di prostaferesi, come una somma di coseni con frequenza pari alla differenza e alla somma delle frequenze di partenza, il tutto moltiplicato per 1/2; poiché l'unica frequenza presente è quella dominante f_c , si otterrà un termine con frequenza nulla ed un termine con frequenza doppia di quella dominante $2f_c$. Il segnale modulato sarà quindi pari a:

$$s(t) = A_c \cos(2\pi f_c t) + \frac{1}{2} A_c \cos(2\pi 2f_c t) + \frac{1}{2} A_c$$

La frequenza dominante ha trasferito tramite un'automodulazione metà della sua energia in eccesso sulla sua prima armonica. Questo meccanismo è in grado di spiegare la generazione di tutte le armoniche multipli pari $n f_c$ ($n = 2, 4, 6 \dots$) della frequenza dominante.

Proprio come fatto per l'equazione dell'oscillatore armonico, per spiegare il meccanismo che porta alla generazione delle armoniche multiple dispari della frequenza dominante, bisognerà far interagire due armoniche successive. Ad esempio consideriamo di nuovo la modulazione in ampiezza, ma questa volta la modulante avrà una frequenza pari a quella dominante f_c , mentre la portante sarà la prima armonica $2f_c$.

$$s(t) = A_c \cos(2\pi 2f_c t) + A_c k_a \cos(2\pi 2f_c t) \cos(2\pi f_c t)$$

Riscriviamo il termine $\cos(2\pi 2f_c t) \cos(2\pi f_c t)$ sfruttando le formule di prostaferesi:

$$\cos(2\pi 2f_c t) \cos(2\pi f_c t) = \frac{1}{2} [\cos(2\pi f_c t) \cos(2\pi 3f_c t)]$$

La modulazione in ampiezza della frequenza dominante f_c sulla sua prima armonica $2f_c$, fa nascere la seconda armonica $3f_c$, mentre la restante energia rimane sulla frequenza dominante stessa. La modulazione in ampiezza è quindi in grado di spiegare anche la generazione delle armoniche multiplo dispari nf_c ($n = 3, 5, 7 \dots$) della frequenza dominante.

3.3.2 Generazione di subarmoniche

Abbiamo visto come la frequenza di eccitazione battendo con sé stessa, sia in grado di generare una frequenza doppia, e l'interazione tra questa e la frequenza dominante stessa porta alla generazione di una frequenza tripla di quella di eccitazione. Tuttavia nei fluidi, ed in generale in molti sistemi fisici, sono presenti frequenze frazionarie di quella dominante, dette subarmoniche.

Per spiegare il meccanismo che porta alla generazione di una subarmonica, consideriamo una perturbazione infinitesima di frequenza pari a metà di quella di eccitazione $\frac{1}{2}f_c$. L'interazione tra la frequenza $\frac{1}{2}f_c$ e la frequenza dominante f_c , genererà la frequenza somma $\frac{1}{2}f_c + f_c = \frac{3}{2}f_c$ e la frequenza differenza $f_c - \frac{1}{2}f_c = \frac{1}{2}f_c$, pari proprio alla frequenza della perturbazione stessa. Se l'ampiezza della fondamentale e il coefficiente di non linearità sono abbastanza grandi per far sì che l'ampiezza della frequenza generata $f_c - \frac{1}{2}f_c = \frac{1}{2}f_c$ sia maggiore di quella della perturbazione stessa, si instaura un meccanismo di amplificazione che porta alla generazione della prima subarmonica $\frac{1}{2}f_c$.

Considerando una soluzione del tipo

$$x(t) = \hat{x}_0(t) + \varepsilon(t)$$

dove \hat{x}_0 raccoglie la soluzione lineare x_0 e di tutte le componenti armoniche, $\varepsilon(t) = \varepsilon_0 \cos\left(\frac{\omega t}{2}\right)$ è un termine perturbativo di pulsazione pari a metà di quella di eccitazione, e $\varepsilon_0 \ll x_0$.

Sostituendo tutto nell'equazione dell'oscillatore armonico è possibile ricavare la soluzione:

$$\varepsilon(t) = -2k' \frac{F_0}{\sqrt{m^2(\omega^2 - \omega_0^2)^2 + (b\omega)^2}} \frac{\varepsilon_0 \cos\left(\frac{\omega t}{2} + \varphi + \varphi_{\frac{1}{2}}\right)}{\sqrt{m^2\left(\frac{\omega^2}{4} - \omega_0^2\right)^2 + \left(b\frac{\omega}{2}\right)^2}}$$

Nel caso in cui la soluzione $\varepsilon(t)$ sia maggiore di quella della perturbazione stessa, si instaura un meccanismo di autosostentamento che porta alla generazione della prima subarmonica della frequenza dominante, e il livello della subarmonica si porta ad un livello di equilibrio, in cui tanta potenza fluisce dalla fondamentale alla subarmonica quanta ne viene dissipata verso l'esterno. È possibile calcolare il livello di soglia necessario per instaurare il meccanismo di autosostentamento e per generare la subarmonica, come:

$$F_0 = \frac{\sqrt{m^2(\omega^2 - \omega_0^2)^2 + (b\omega)^2} \sqrt{m^2\left(\frac{\omega^2}{4} - \omega_0^2\right)^2 + \left(b\frac{\omega}{2}\right)^2}}{2k'}$$

Se l'ampiezza di eccitazione dell'oscillatore è minore di F_0 , la subarmonica non è in grado di sostenersi, mentre se è maggiore di F_0 , il suo livello si porta istantaneamente al valore di equilibrio. Inoltre una volta generata, anche se il livello della subarmonica scende al di sotto della soglia, il meccanismo di autosostenamento è in grado di riportarla al livello di equilibrio.

Il meccanismo che porta alla generazione delle subarmoniche potrebbe anche essere spiegato sfruttando l'automodulazione in ampiezza, come fatto per la generazione delle armoniche. Nell'ambito di questa tesi, abbiamo cercato di sviluppare un modello per simulare il flusso di cavità, sfruttando la modulazione in ampiezza per generare le armoniche e le subarmoniche della frequenza dominante. Se la frequenza modulante è una subarmonica della frequenza dominante, la cavità lavora in condizioni di autosostentamento e si genera un loop di energia tra le subarmoniche, le armoniche e la frequenza dominante stessa.

Capitolo 4 Analisi dei risultati

I dati analizzati nell'ambito di questa tesi sono stati ottenuti in un esperimento condotto precedentemente, rispetto a questo lavoro di tesi, presso il laboratorio di velocimetria ottica del DIMEAS (Dipartimento di Ingegneria Meccanica e Aerospaziale) del Politecnico di Torino. I campi di velocità sono stati ottenuti utilizzando la tecnica PIV (Particle Image Velocimetry) nella galleria Hydra in un piano verticale (x, y) posto in mezzeria della cavità ($z = 0$). Per il seeding sono state utilizzate delle particelle di vetro con diametro nominale di $10\mu\text{m}$. Un condotto convergente, posto dopo un honeycomb, porta il fluido verso l'area dell'esperimento, in cui un bordo ellittico posto a 110 mm dalla cavità permette di avere uno strato limite laminare a monte. La cavità ha lunghezza $L = 30$ mm, altezza $H = 10$ mm, e larghezza $W = 350$ mm, dando i seguenti rapporti $R = L/H = 3$ e $F = W/H = 35$. All'uscita della cavità, il fluido è rimandato a monte da una pompa. Le misurazioni sono state eseguite con tecnica PIV con i seguenti strumenti: un laser Spectra-Physics Argon-Ion CW (wavelength 457.9 nm – 514.5 nm) con una massima potenza di emissione di 6W e la cui lama di luce prodotta ha una spessore di 1 mm, e una videocamera Dantec MKIII CMOS con una risoluzione di 1280x1024 pixels e frequenza di registrazione a risoluzione massima di 1000 Hz. Abbiamo posto il nostro sistema d'assi in mezzeria con x in direzione streamwise, y verso l'alto normale alla cavità, e z in direzione spanwise. Le finestre di interrogazione hanno un'area iniziale di 64x64 pixels e un'area finale di 32x32 pixels, con un overlap del 50%.

δ_1 (mm)	θ_1 (mm)	L_1 (mm)	U_e (mm/s)	Re_1	L_2 (mm)	δ_2 (mm)	θ_2 (mm)	Re_2	ν (mm ² /s)
2	0,29	110	310	34100	700	7,51	1,07	217000	≈ 1

Tabella.1. Condizioni a monte della cavità. Le grandezze 1 si riferiscono allo strato limite lungo la superficie del modello, le grandezze 2 si riferiscono allo strato limite che si sviluppa lungo le pareti laterali. δ è lo spessore geometrico dello strato limite, θ lo spessore di quantità di moto, L è la lunghezza su cui si sviluppa lo strato limite, ν è la viscosità cinematica del fluido.

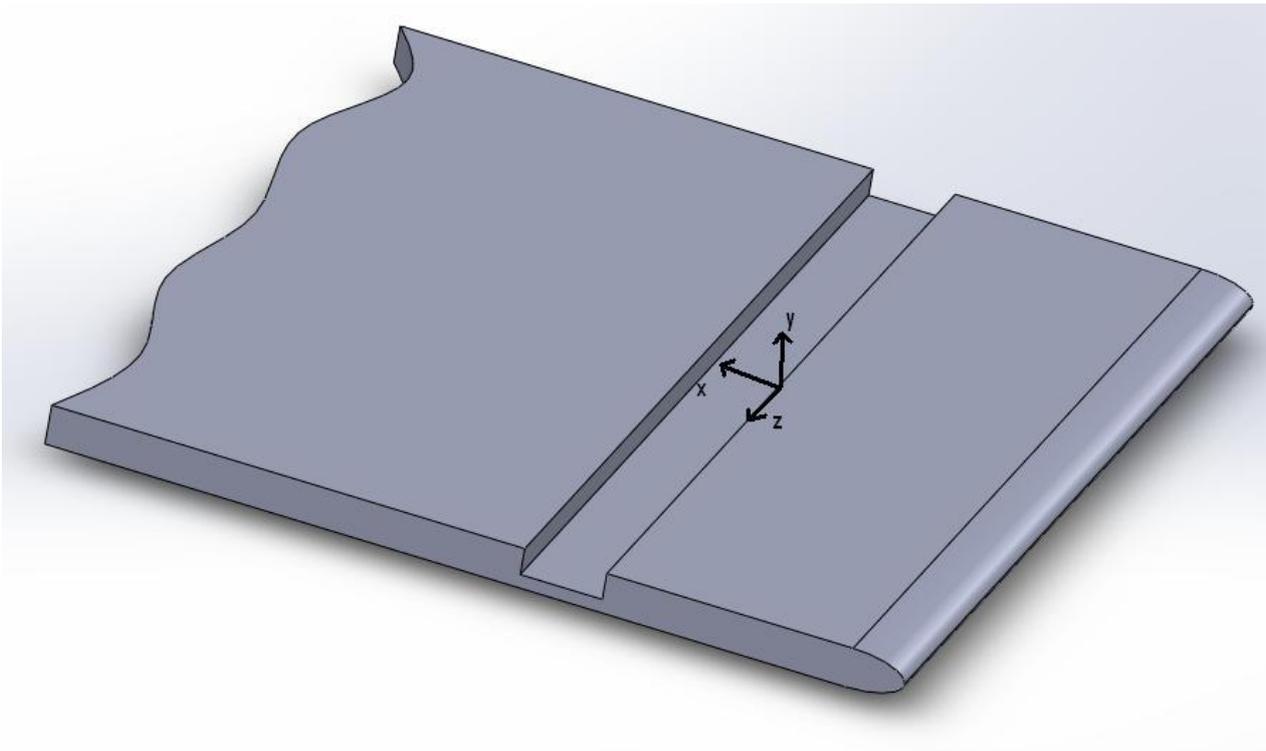


Figura 27. Modello utilizzato nella galleria Hydra.

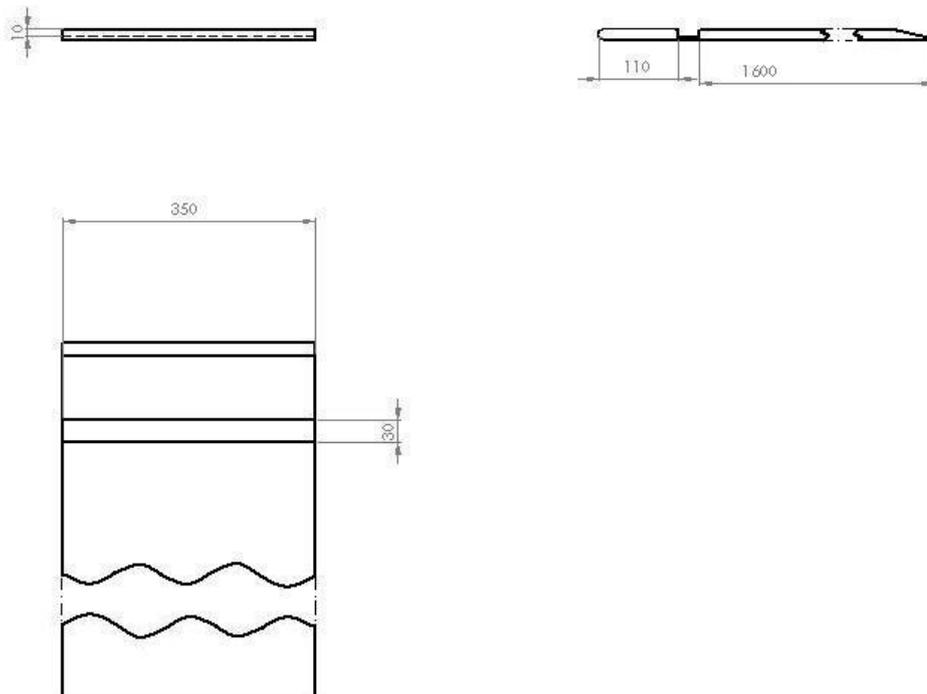


Figura 28. Messa in tavola modello galleria Hydra, dimensioni in millimetri.



a)



b)

Figura 29. a) Foto galleria Hydra b) Laser utilizzato: laser Spectra-Physics Argon-Ion CW (wavelength 457.9 nm – 514.5 nm) con una massima potenza di emissione di 6W

4.1 Trasformata di Fourier

Il problema del flusso di cavità è molto complesso in quanto dipende da molte variabili tra cui la geometria della cavità, il numero di Reynolds, e dai parametri caratterizzanti il flusso a monte della cavità. Per studiare il problema in dettaglio, è necessario conoscere il campo di velocità istante per istante; per ottenere questo campo abbiamo utilizzato la P.I.V. che fornisce un'informazione sia temporale che spaziale sul campo di velocità del flusso. Abbiamo utilizzato una frequenza di campionamento $F_s = 1000 \text{ Hz}$, sufficiente per la maggior parte dei flussi ad oscillazioni autosostenute. Nell'ambito di questa tesi ci siamo occupati di caratterizzare le varie strutture modali presenti nella zona d'impinging, ma prima di entrare nel dettaglio verrà fornita una descrizione generica del flusso di cavità.

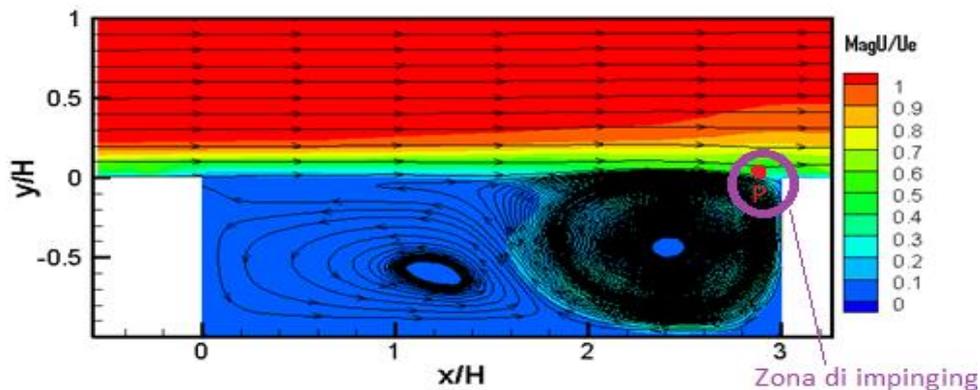


Figura 30. Distribuzione del modulo della velocità media scalata con la velocità esterna e linee di corrente in un piano verticale (x,y) con assi scalati con l'altezza della cavità. La zona rosa rappresenta la zona d'impinging, il punto rosso $P=(2.82H, 0.1H)$ è il punto in cui sono stati analizzati i dati.

Quando il flusso che arriva da monte incontra la cavità si generano per instabilità di Kelvin-Helmholtz dei vortici di scia che viaggiano in direzione streamwise e hanno una loro periodicità. Quando questi vortici impattano il corner del bordo di fuga della cavità, si generano forti oscillazioni autosostenute. Attraverso i gradienti di pressione presente all'interno della cavità, quest'informazione risale a monte e si genera un meccanismo di feedback che esalta le oscillazioni autosostenute ed impone una coerenza globale al flusso. In base alla lunghezza della cavità questo fenomeno può portare alla risonanza e quindi ad esaltare alcune frequenze. Solitamente lo spettro del flusso di cavità, calcolato a partire dalle fluttuazioni di velocità, presenta dei picchi ben definiti ed una frequenza dominante comune all'intero flusso, che è tipico di flussi con un'organizzazione globale; questa frequenza sarà inoltre legata a quella dei vortici che impattano sul corner di impinging. Per identificare e caratterizzare queste frequenze abbiamo utilizzato uno strumento recente, la trasformata wavelet, che a differenza della più utilizzata trasformata di Fourier, permette di mantenere l'informazione temporale del segnale: scelto un punto all'interno della cavità è possibile quindi seguire l'evoluzione temporale delle varie strutture modali. I risultati

ottenuti sono stati comparati con quelli ottenuti da Basley *et al.* (2011) e con quelli ottenuti con la trasformata di Fourier.

In figura 30 è rappresentato il campo di velocità medio in un piano verticale (x,z) posto in mezeria (z=0) del flusso di cavità studiato: come si vede con questi parametri geometrici ($H = 10\text{mm}$, $L = 30\text{mm}$, $R = \frac{L}{H} = 3$) si generano un vortice di diametro circa pari all'altezza di cavità, detto bolla primaria, ed un vortice di dimensioni inferiori e controrotante, detto bolla secondaria. Il picco di velocità all'interno della cavità si ha intorno alla bolla primaria ed è pari a circa $\frac{1}{3}$ della velocità della corrente indisturbata. La zona rosa in figura rappresenta la zona d'impinging, dove i vortici nati per instabilità di Kelvin-Helmholtz al bordo d'attacco della cavità impattano il bordo di fuga. In questa particolare zona abbiamo scelto di analizzare le fluttuazioni di velocità, calcolate a partire dal campo di velocità istantaneo, nel punto $P = (2.82H, 0.1H)$ (rosso in figura 1, 1.82 mm dal bordo di fuga e 0.1 mm sopra la cavità). Con il vettore delle fluttuazioni di velocità abbiamo inizialmente svolto una DFT (Discrete Fourier Transform), normalizzando il risultato dell'analisi di Fourier con il numero di campioni totale pari a 3270 (figura 23-24-25-26). Il numero di campioni è stato arrotondato alla più vicina potenza di 2 per allungare il segnale con il metodo dello zero-padding e la frequenza di sampling è pari a 1000 Hz.

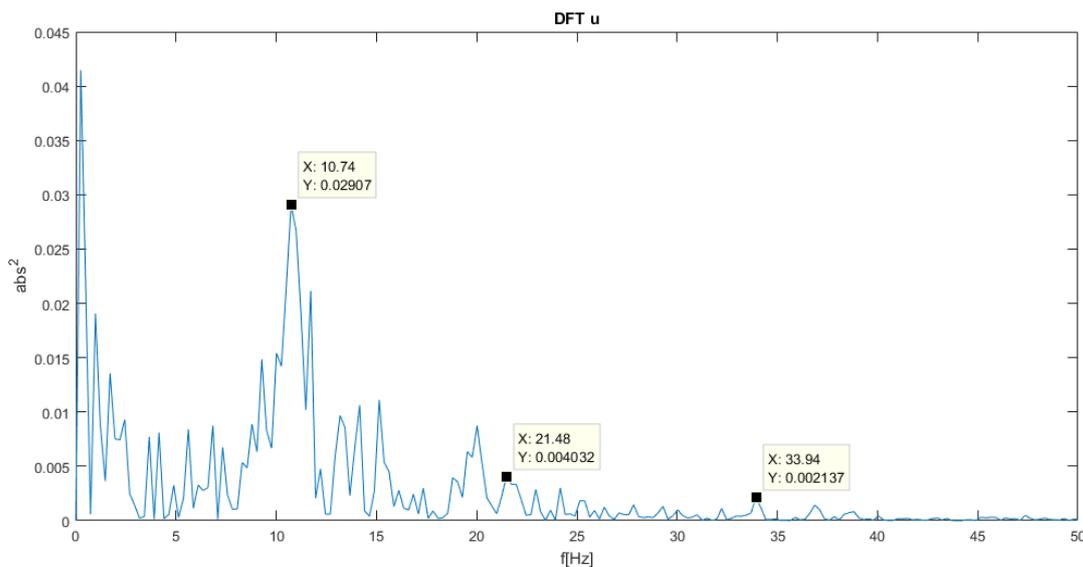


Figura 31. DFT relativa alla componente streamwise u' delle fluttuazioni di velocità: il numero di campioni totale è pari a 3270, arrotondato a 4098 utilizzando il metodo dello zero-padding, e la frequenza di sampling è pari a 1000 Hz. I datatips sono relativi alla frequenza dominante $f_a = 10.74$ Hz e alle sue due armoniche $2f_a = 21.48$ Hz e $3f_a = 33.94$ Hz.

Dallo spettro della componente streamwise (figura 31) si vede che esistono dei picchi di energia relativi a certe frequenze. La frequenza dominante è pari a $f_a = 10.74$ Hz e corrisponde proprio alla frequenza con cui i vortici, nati per instabilità di Kelvin-Helmholtz al bordo d'attacco della cavità, impattano al bordo di fuga. Oltre alla frequenza dominante è possibile osservare le sue armoniche, rispettivamente a $2f_a = 21.48$ Hz e $3f_a = 33.94$ Hz. Lo spettro risulta molto

rumoroso e sono presenti vari picchi, ma è possibile distinguere alcuni picchi laterali, sidepeaks, equidistanti dalla frequenza dominante e dalle sue armoniche (figura 32).

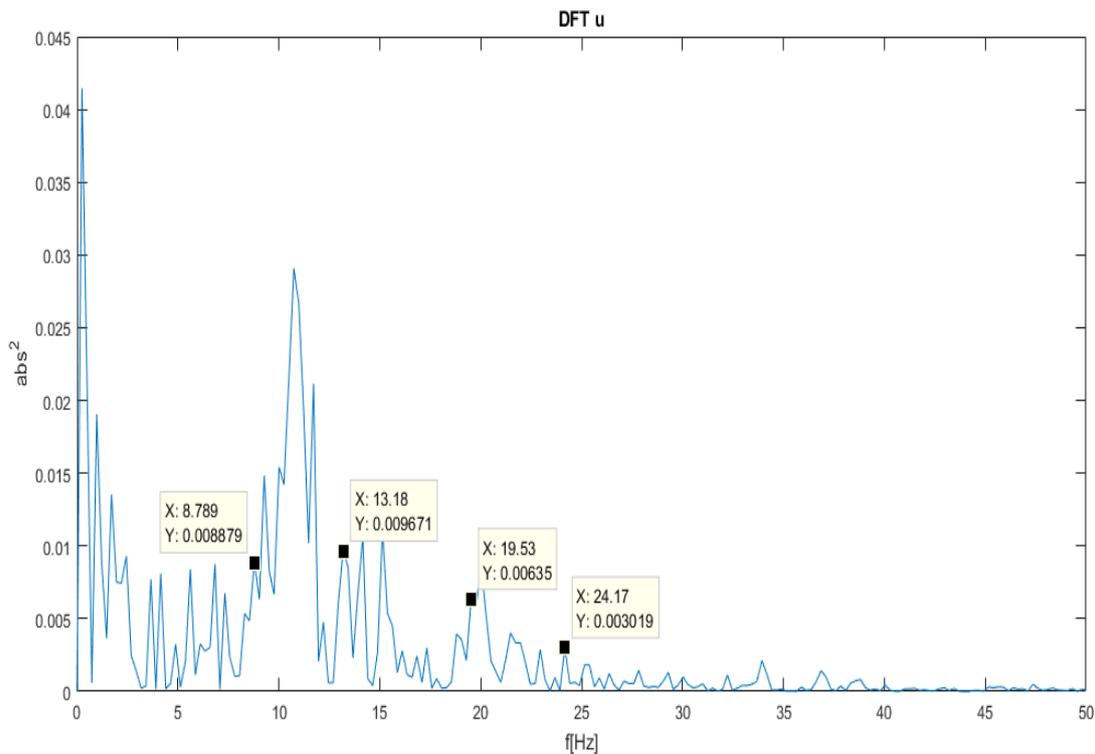


Figura 32. DFT relativa alla componente streamwise u' delle fluttuazioni di velocità: il numero di campioni totale è pari a 3270, arrotondato a 4098 utilizzando il metodo dello zero-padding, e la frequenza di sampling è pari a 1000 Hz. I datatips sono relativi ai sidepeaks della frequenza dominante $f_{a-} = 8.789$ Hz e $f_{a+} = 13.18$ Hz e della sua prima armonica $2f_{a-} = 19.53$ Hz e $2f_{a+} = 24.17$ Hz.

L'energia viene distribuita su queste particolare frequenze a causa di una modulazione in ampiezza: nella modulazione in ampiezza di una modulante di bassa frequenza f_b su una carrier di frequenza più alta f_a , l'energia della modulante viene suddivisa equamente sulle frequenze laterali della carrier ed distanti f_b dalla carrier stessa; si ottiene quindi che $f_+ - f_a = f_a - f_- = f_b$. Prendendo un numero molto elevato di campioni, i due picchi avrebbero esattamente la stessa ampiezza; nel nostro caso poiché il numero di campioni è relativamente corto, anche utilizzando lo zero-padding lo spettro risulta molto rumoroso e i due sidepeaks hanno energia differente, ed in alcuni casi risultano "annegati" all'interno di altri picchi, o leggermente spostati dalla frequenza attesa a causa di oscillazioni in frequenza: ad esempio il sidepeak sinistro della frequenza dominante $f_{a-} = 8.789$ Hz risulta leggermente spostato rispetto al picco di energia adiacente; il sidepeak destro $f_{a+} = 13.18$ Hz si trova invece vicino ad altri picchi di pari energia. Un basso numero di campioni complica quindi la lettura dello spettro ricco di informazioni. Si riescono anche ad osservare i sidepeaks della prima armonica $2f_{a-} = 19.53$ Hz e $2f_{a+} = 24.17$ Hz, ma non chiaramente quelli delle successive armoniche. Prima di trarre delle conclusioni osserviamo lo spettro della componente verticale delle fluttuazioni di velocità e cerchiamo di identificare le stesse strutture.

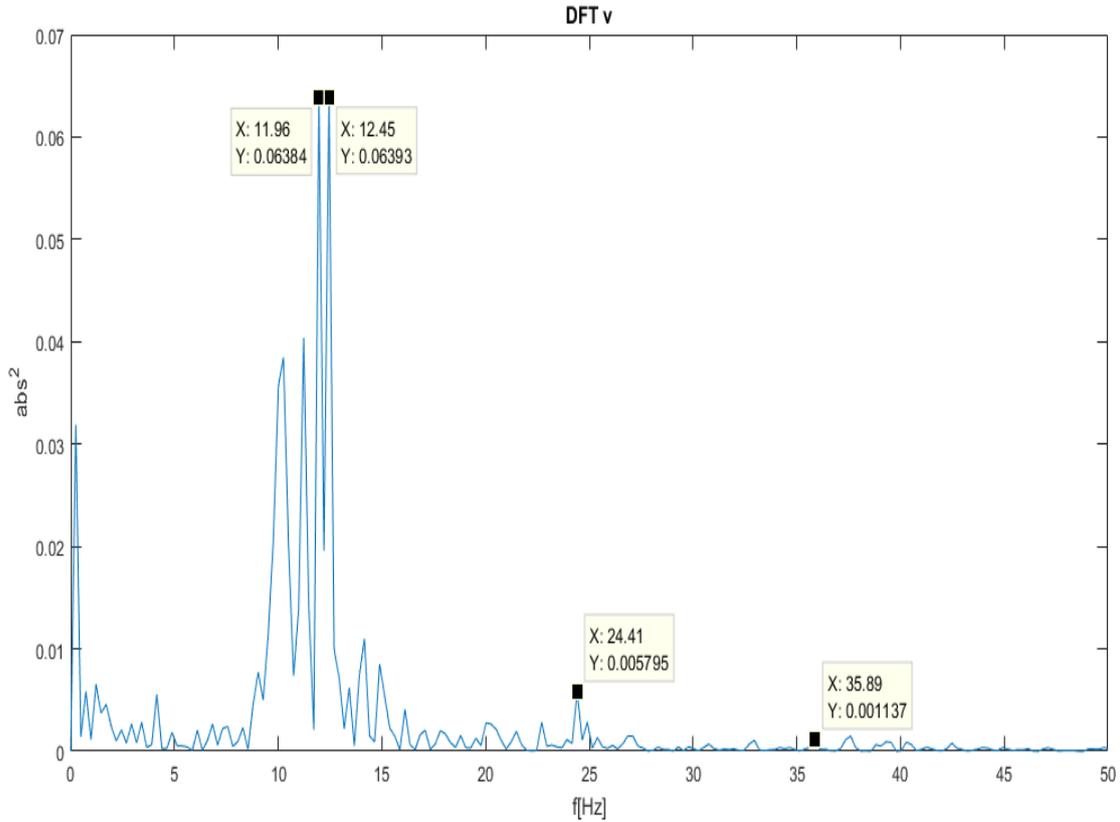


Figura 33. DFT relativa alla componente verticale v' delle fluttuazioni di velocità: il numero di campioni totale è pari a 3270, arrotondato a 4098 utilizzando il metodo dello zero-padding, e la frequenza di sampling è pari a 1000 Hz. I datatips sono relativi alla frequenza dominante $f_a = 12.45$ Hz e alle sue due armoniche $2f_a = 24.41$ Hz e $3f_a = 35.89$ Hz.

Risulta evidente come la frequenza dominante della componente verticale (figura 33) sia più alta rispetto a quella della componente streamwise; inoltre il picco di energia corrisponde a due frequenze molto vicine. Il fatto che osserviamo due picchi adiacenti è probabilmente dovuto alla lunghezza del segnale, e quindi al fatto che 4098 campioni non siano sufficienti per andare a convergenza. Nel nostro spezzone temporale la frequenza dominante oscilla tra gli 11.96 Hz e i 12.45 Hz e lo stesso accade per i sidepeaks. Il valore corretto sarebbe una media tra i due valori, ma per il momento consideriamo come frequenza dominante $f_a = 12.45$ Hz e come sue armoniche $2f_a = 24.41$ Hz e $3f_a = 35.89$ Hz.

Anche per la componente verticale delle fluttuazioni di velocità identifichiamo i sidepeaks relativi alla frequenza dominante (figura 34) $f_{a-} = 10.01$ Hz e $f_{a+} = 14.89$ Hz e alla sua prima armonica $2f_{a-} = 22.71$ Hz e $2f_{a+} = 27.1$ Hz. Trascurando l'errore dovuto alle oscillazioni delle varie frequenze, i sidepeaks si trovano alla stessa distanza dalla frequenza dominante o dalla sua armonica. Si può quindi intuire che esiste una bassa frequenza, pari alla differenza in frequenza tra un sidepeaks e la frequenza dominante, che in qualche modo regola il fenomeno. Indichiamo questa frequenza con $f_b = f_a - f_{a-} = f_{a+} - f_a = 2f_a - 2f_{a-} = 2f_{a+} - 2f_a = 2.68$ Hz.

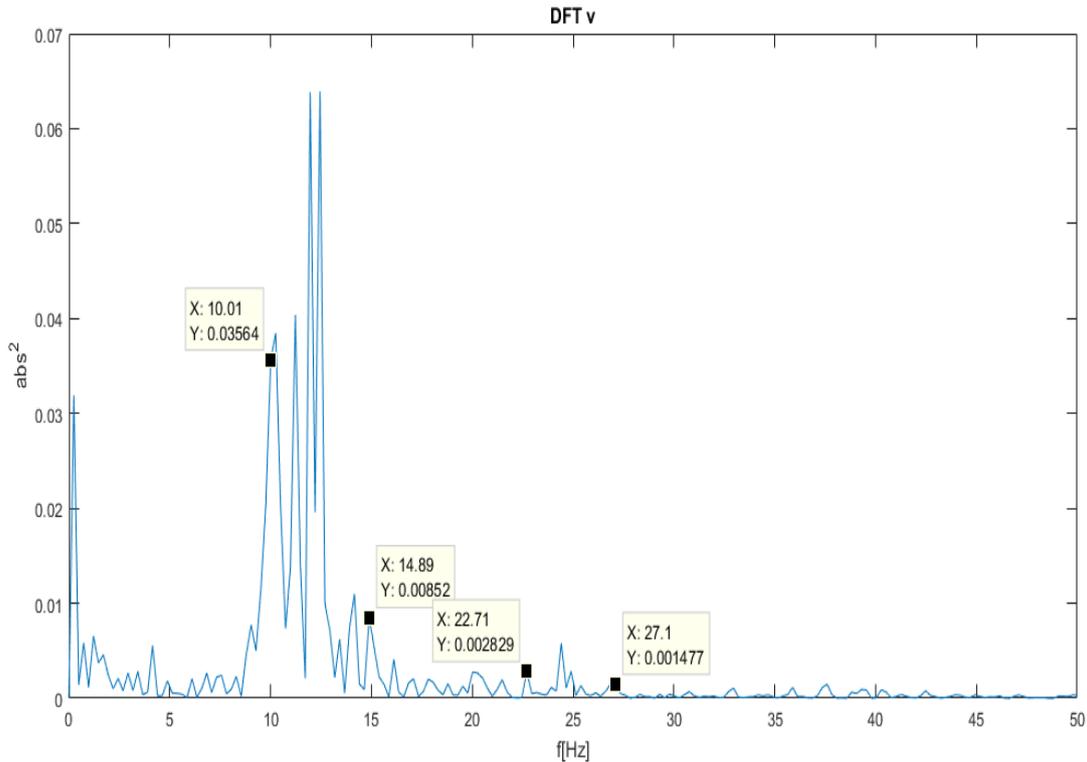


Figura 34. DFT relativa alla componente streamwise v' delle fluttuazioni di velocità: il numero di campioni totale è pari a 3270, arrotondato a 4098 utilizzando il metodo dello zero-padding, e la frequenza di sampling è pari a 1000 Hz. I datatips sono relativi ai sidepeaks della frequenza dominante $f_{a-} = 10.01$ Hz e $f_{a+} = 14.89$ Hz e della sua prima armonica $2f_{a-} = 22.71$ Hz e $2f_{a+} = 27.1$ Hz.

L'esistenza di questa bassa frequenza è stata indicata anche da Basley *et al.* nel loro articolo: la principale differenza rispetto al nostro caso sembra essere il rapporto $\frac{f_b}{f_a}$, che mentre per Basley *et al.* è pari a circa 3, nel nostro caso è pari a 4. Questo rapporto potrebbe indicare se la cavità effettivamente lavora in condizioni di autosostentamento o no: infatti nel caso in cui $\frac{f_b}{f_a} = 4$ la modulante f_b è proprio una subarmonica della portante f_a e si genera un loop di energia tra la f_a e la f_b tramite una modulazione in ampiezza; questo particolare caso verrà trattato nel capitolo successivo quando si cercherà di simulare il flusso di cavità con un modello. Per quanto riguarda l'impronta dello spettro Basley *et al.* svolgendo una PDS, hanno trovato risultati analoghi a quelli appena elencati: la presenza di una frequenza dominante a cui corrisponde il massimo dell'energia, la presenza di picchi di energia relativi alle armoniche di questa frequenza, e la presenza di picchi laterali, sidepeaks, rispetto alla frequenza dominante ed alle sue armoniche; inoltre hanno osservato un picco di energia ad una bassa frequenza nello spettro della componente streamwise, corrispondente alla f_b indicata nel loro articolo.

4.2 Trasformata Wavelet

4.2.1 Scelta del tipo di trasformata wavelet

La trasformata wavelet è un prodotto scalare tra il segnale e la base wavelet: i coefficienti wavelet contengono quindi l'informazione sia sul segnale che sulla base. Risulta quindi importante scegliere la base più adeguata per il segnale da analizzare ed il tipo di trasformata da utilizzare, che può essere continua o discreta. La scelta del tipo di trasformata è legato a quali informazioni vogliamo estrarre dal segnale. Di solito per analizzare un segnale conviene utilizzare la trasformata wavelet continua, in quanto una delle sue principali caratteristiche è la ridondanza, che consente di seguire meglio il segnale. Se l'obiettivo è invece quello di modellizzare, è preferibile utilizzare la trasformata wavelet ortogonale che decompone il segnale in un numero minimo di coefficienti indipendenti.

Per la nostra analisi abbiamo scelto di utilizzare la trasformata wavelet continua che grazie alla ridondanza permette di seguire molto bene le fluttuazioni del segnale. Nonostante per modellizzare convenga usare la trasformata wavelet ortogonale, abbiamo utilizzato la trasformata wavelet continua anche per modellizzare il flusso di cavità, in modo tale da confrontare i risultati ottenuti con il flusso simulato con quelli del flusso reale.

4.2.2 Scelta della base wavelet

Per scegliere la base wavelet più adeguata abbiamo svolto varie prove. Inizialmente abbiamo utilizzato una base wavelet reale. Utilizzando la wavelet Morlet reale per analizzare le fluttuazioni della componente streamwise u' della velocità, si ottiene ad esempio la seguente mappa wavelet.

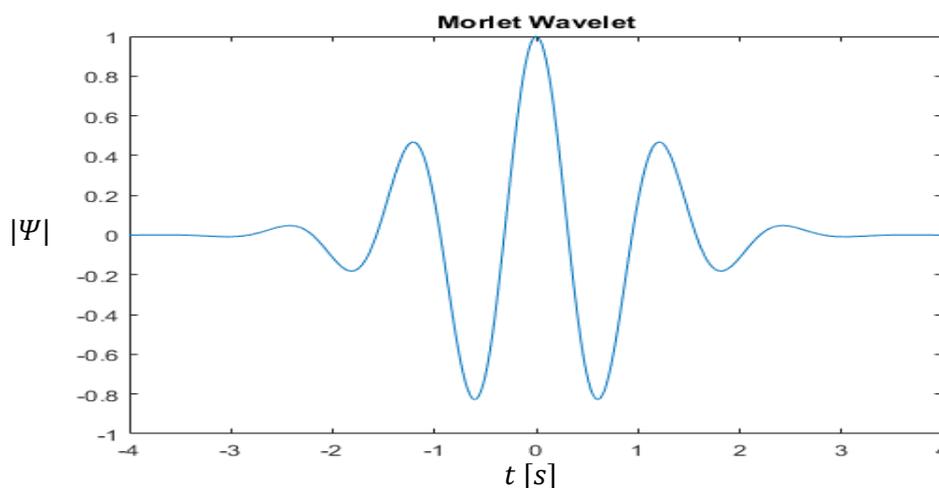


Figura 35. Wavelet di Morlet reale $\psi(x) = e^{-x^2/2} \cos(k_\phi x)$: il parametro k_ϕ deve essere ≥ 5 per rispettare la condizione di ammissibilità e la center frequency è pari a $f_c = 0.8125$ Hz.

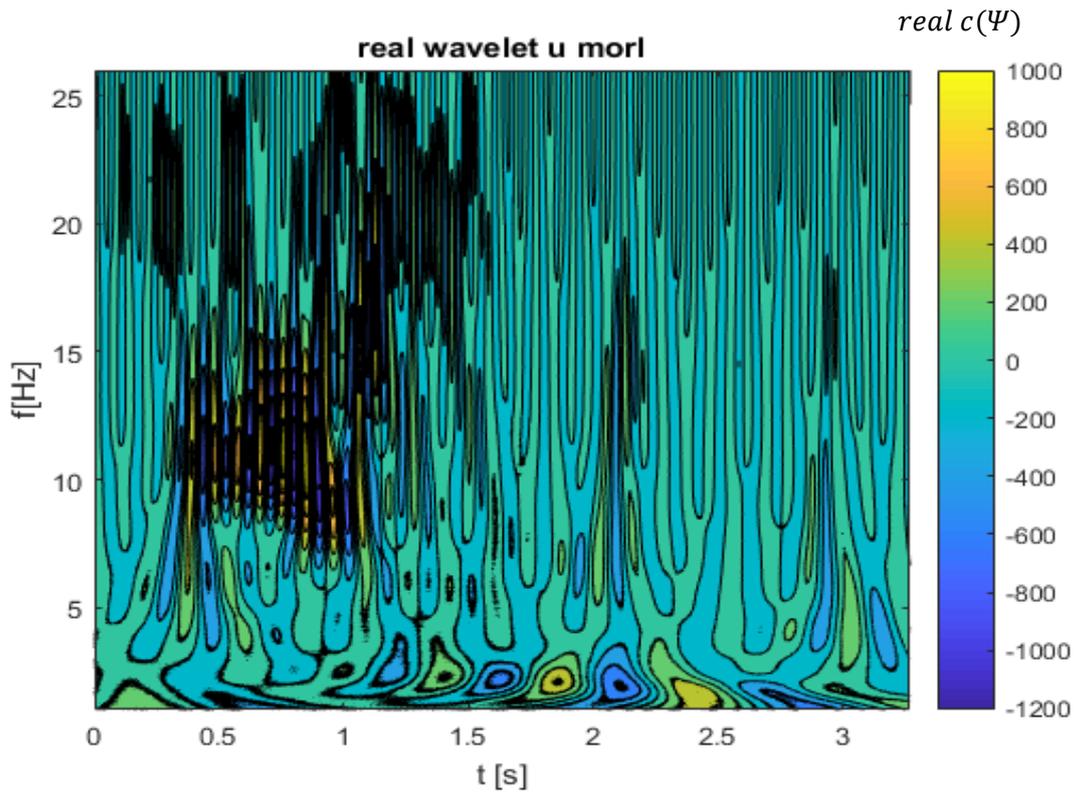


Figura 36. Parte reale dei coefficienti della trasformata Wavelet delle fluttuazioni della componente streamwise della velocità u' ottenuta con la base di Morlet.

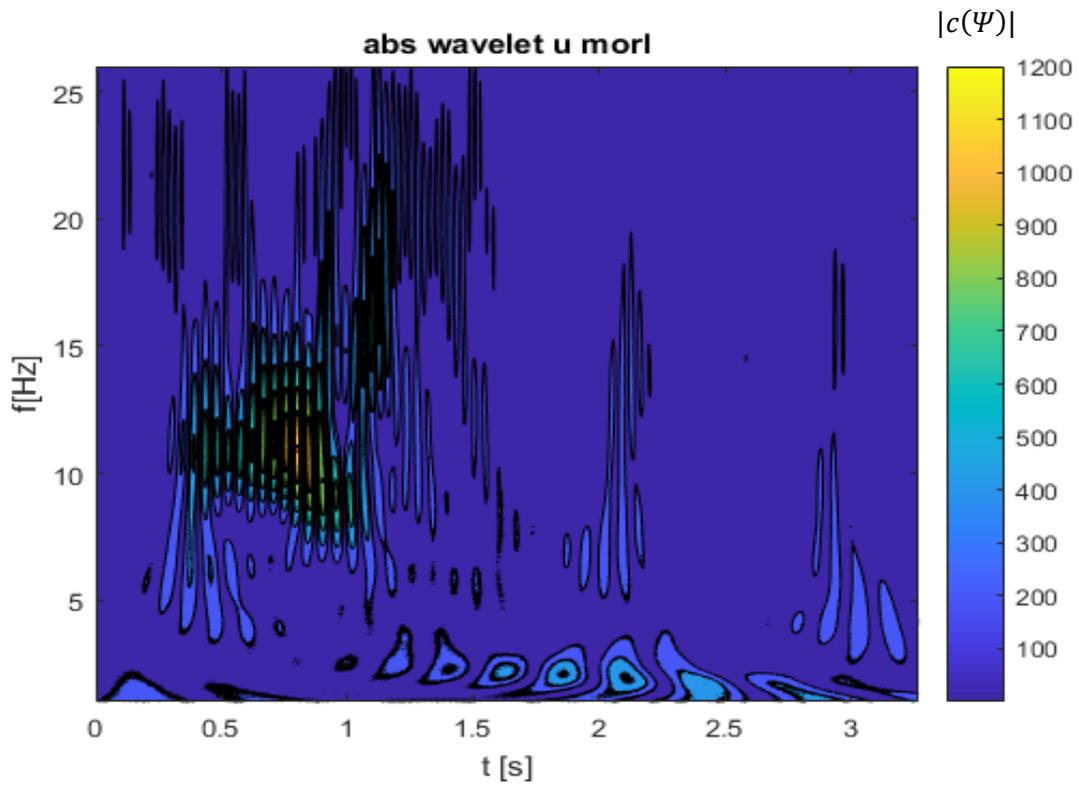


Figura 37. Modulo dei coefficienti della trasformata Wavelet delle fluttuazioni della componente streamwise della velocità u' ottenuta con la base di Morlet.

Mediando lungo l'asse temporale i coefficienti wavelet ed elevandoli al quadrato, è possibile ottenere lo spettro wavelet. È importante ricordare che le mappe dei coefficienti wavelet (figura 36-37) sono ottenute con la norma L^2 , e quindi le quantità osservate nello spettro non sono densità d'energia. Per passare in norma L^1 ed ottenere la densità d'energia bisognerebbe moltiplicare ogni coefficiente per la scala di riferimento. Abbiamo tralasciato quest'operazione perché ai fini della nostra analisi non siamo interessati all'effettivo livello d'energia, ma ci siamo occupati di identificare le strutture modali presenti e come queste evolvono nel tempo; inoltre come si vedrà nel capitolo successivo, sfruttando le proprietà della wavelet di localizzazione nello spazio e nel tempo, abbiamo ridotto il range di frequenze (scale) e di campioni analizzati. Analizzando un range di scale minore l'errore dovuto all'uso della norma L^2 risulta trascurabile.

Calcoliamo ora lo spettro wavelet dei coefficienti ottenuti con la Morlet reale.

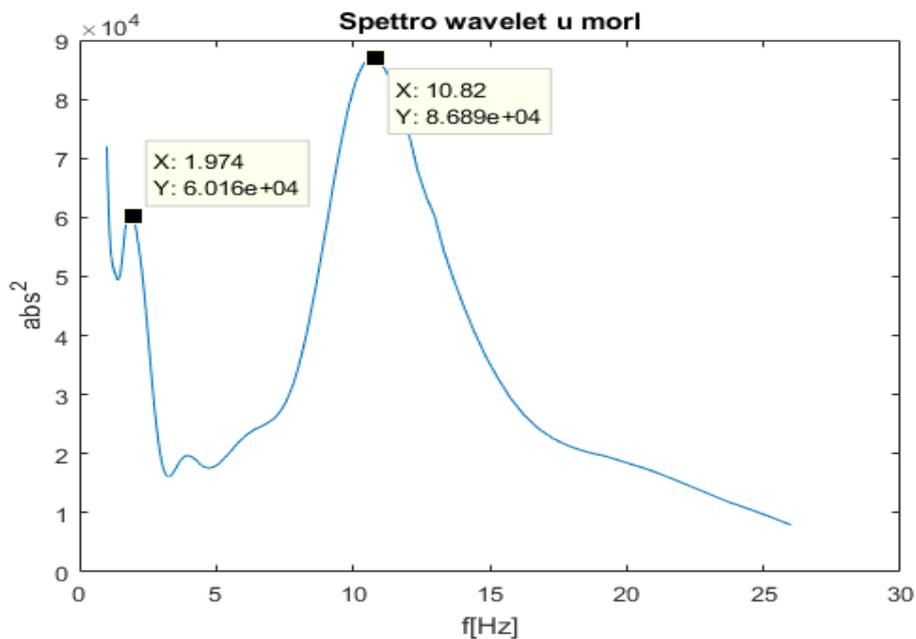


Figura 38. Spettro Wavelet ottenuto mediando lungo l'asse temporale il modulo dei coefficienti della trasformata Wavelet elevati al quadrato delle fluttuazioni della componente streamwise della velocità u' ottenuta con la base di Morlet.

Si osserva chiaramente come utilizzando come base wavelet la Morlet reale, siamo in grado solo di cogliere la frequenza dominante del flusso $f_a = 10.82 \text{ Hz}$ e una struttura modale di bassa frequenza $f = 1.974 \text{ Hz}$. La Morlet reale non ha una risoluzione in frequenza abbastanza elevata per permetterci di studiare in modo adeguato il nostro flusso. Proviamo quindi ad analizzare lo stesso segnale utilizzando un'altra base wavelet reale, ad esempio la Mexican Hat, che è la derivata seconda della Gaussiana.

$$\Psi(x) = \frac{d^2}{dx^2} e^{-(|x|^2/2)}$$

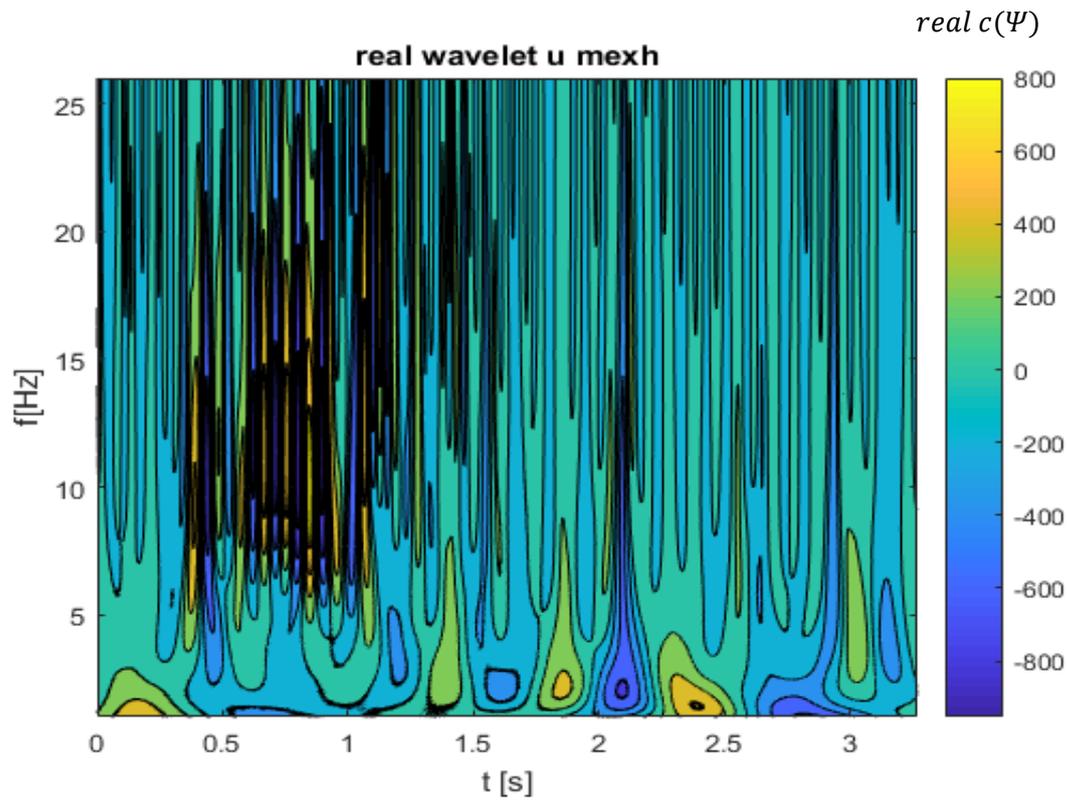


Figura 39. Parte reale dei coefficienti della trasformata Wavelet delle fluttuazioni della componente streamwise della velocità u' ottenuta con la base Mexican Hat.

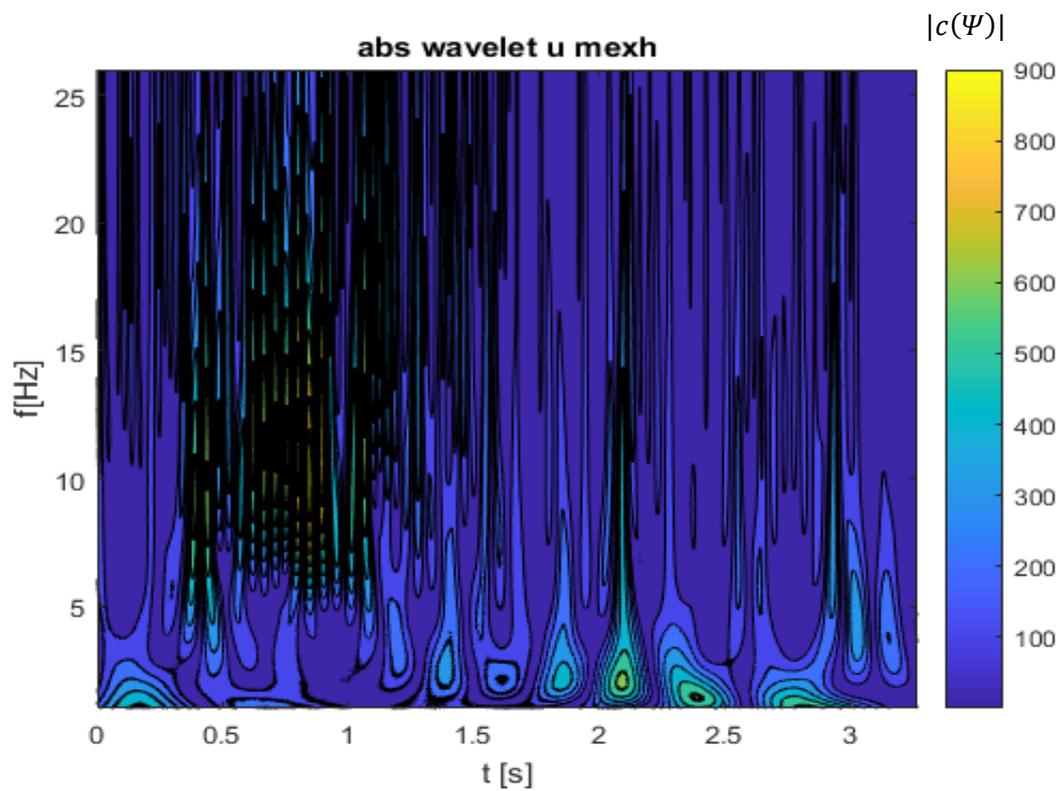


Figura 40. Modulo dei coefficienti della trasformata Wavelet delle fluttuazioni della componente streamwise della velocità u' ottenuta con la base Mexican Hat.

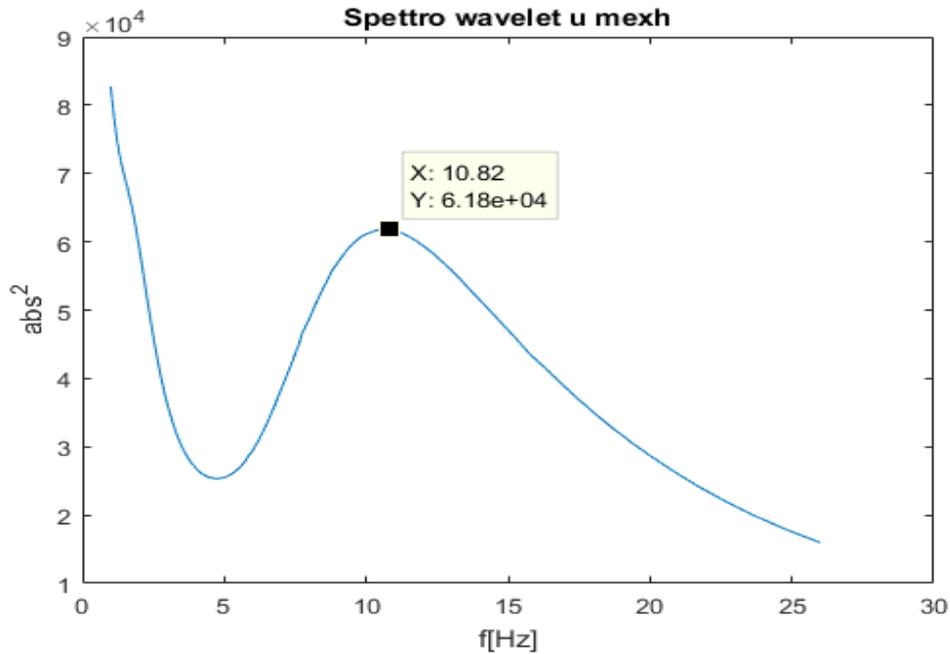


Figura 41. Spettro Wavelet ottenuto mediando lungo l'asse temporale il modulo dei coefficienti della trasformata Wavelet elevati al quadrato delle fluttuazioni della componente streamwise della velocità u' ottenuta con la base Mexican Hat.

Si osserva come i risultati ottenuti con la Mexican Hat siano analoghi a quelli ottenuti con la Morlet reale: entrambe riescono ad identificare solo la frequenza dominante $f_a = 10.82 \text{ Hz}$. Tutte le basi wavelet reali che permettono di utilizzare la trasformata wavelet continua danno un risultato analogo a quello ottenuto, in quanto la loro risoluzione in frequenza non è adeguata al nostro caso. Basandoci sulla trattazione della trasformazione wavelet di Farge (1998), abbiamo provato ad utilizzare una base wavelet complessa. In particolare Farge per flussi turbolenti consiglia l'utilizzo della base Morlet complessa. A differenza della Morlet reale, la Morlet complessa contiene due parametri strettamente legati alla risoluzione in frequenza:

$$\psi(x) = \frac{1}{\sqrt{\pi f_b}} e^{2\pi i f_c x} e^{-x^2/f_b} \quad \text{Morlet complessa}$$

f_c è detta center frequency, f_{band} è detta bandwidth frequency. Si definisce center frequency la frequenza della sinusoide che meglio approssima la Wavelet considerata. Aumentando f_{band} aumenta la risoluzione in frequenza a scapito di un costo computazionale più elevato. Anche la f_c aumenta la risoluzione in frequenza, ma deve essere il più vicina possibile a quella della frequenza dominante del flusso; si dovrà tuttavia fare attenzione, in quanto aumentando il valore di f_c troppo, la base wavelet potrebbe diventare non ammissibile. Da ora la Morlet complessa verrà indicata con la dicitura $cmor_{f_{band} - f_c}$. La $cmor_{1-1}$ è equivalente alla Morlet reale, per cui eviteremo di ripetere l'analisi con questa wavelet. Ripetiamo l'analisi aumentando man mano la f_{band} .

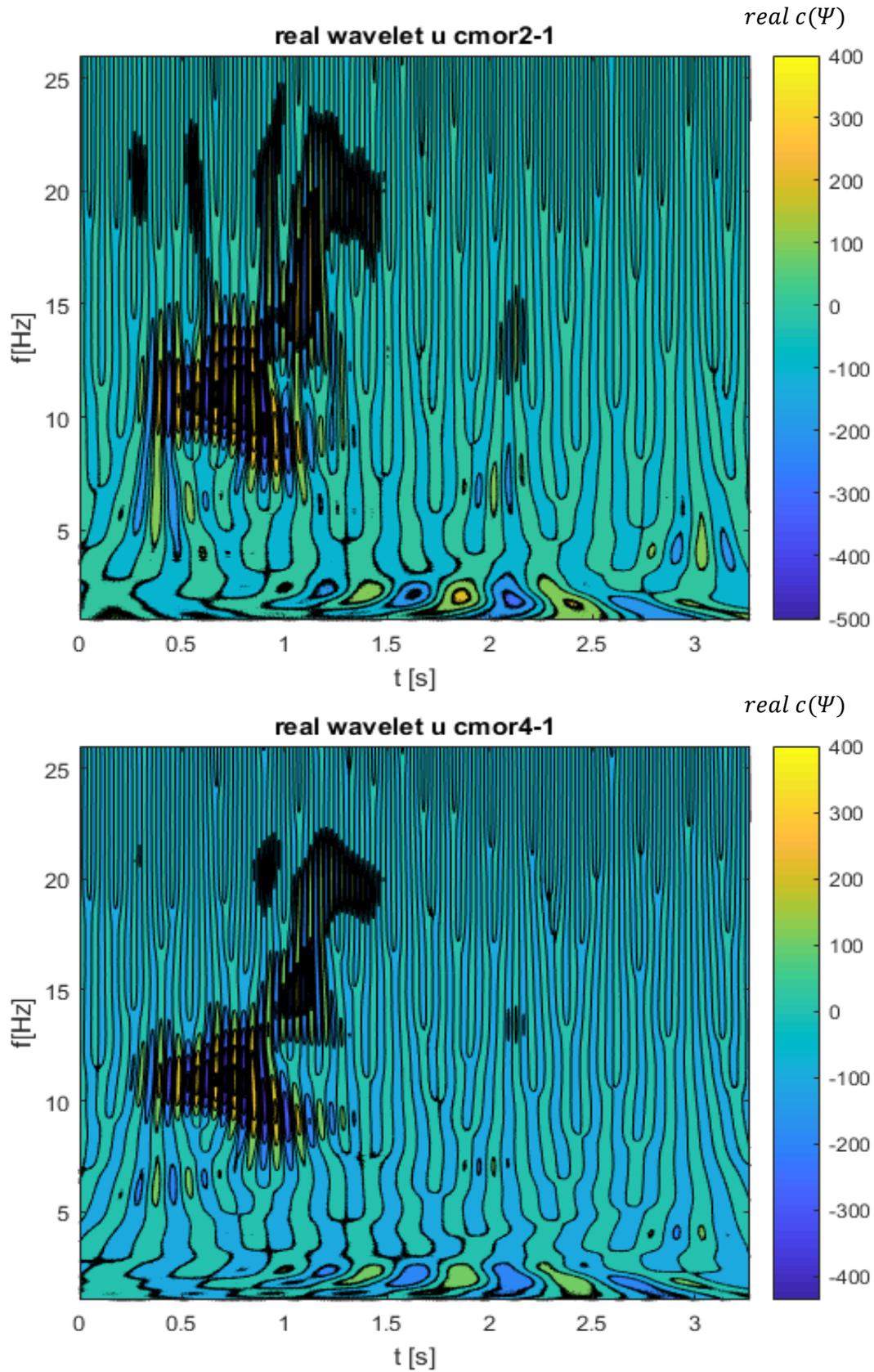


Figura 42. Parte reale dei coefficienti della trasformata Wavelet delle fluttuazioni della componente streamwise della velocità u' ottenuta con la base cmor2-1 (in alto) e cmor4-1 (in basso).

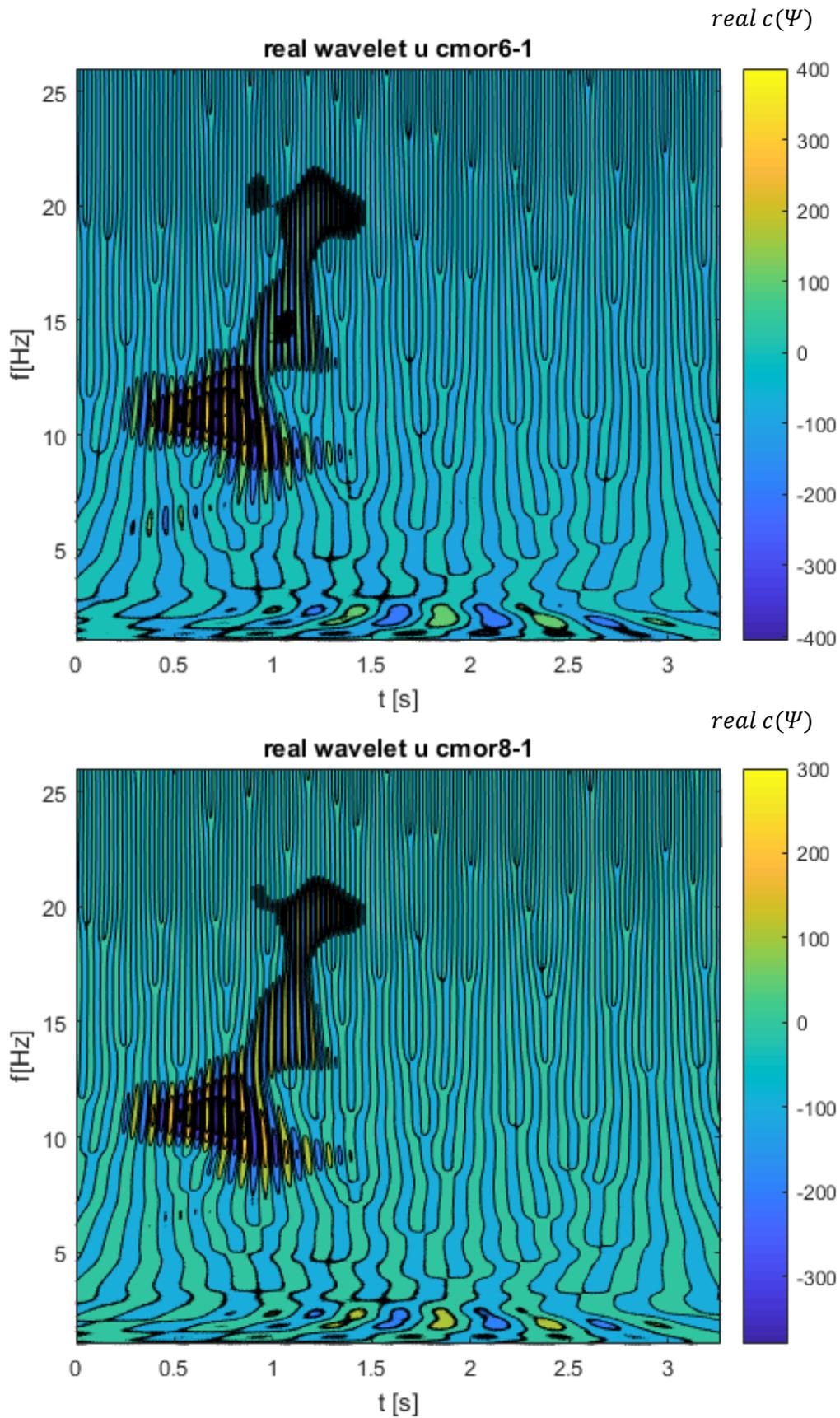


Figura 43. Parte reale dei coefficienti della trasformata Wavelet delle fluttuazioni della componente streamwise della velocità u' ottenuta con la base cmor6-1 (in alto) e cmor8-1 (in basso).

$f_{band} = 8 \text{ Hz}$ (figura 43) sembra essere un buon compromesso tra risoluzione in frequenza e costo computazionale.

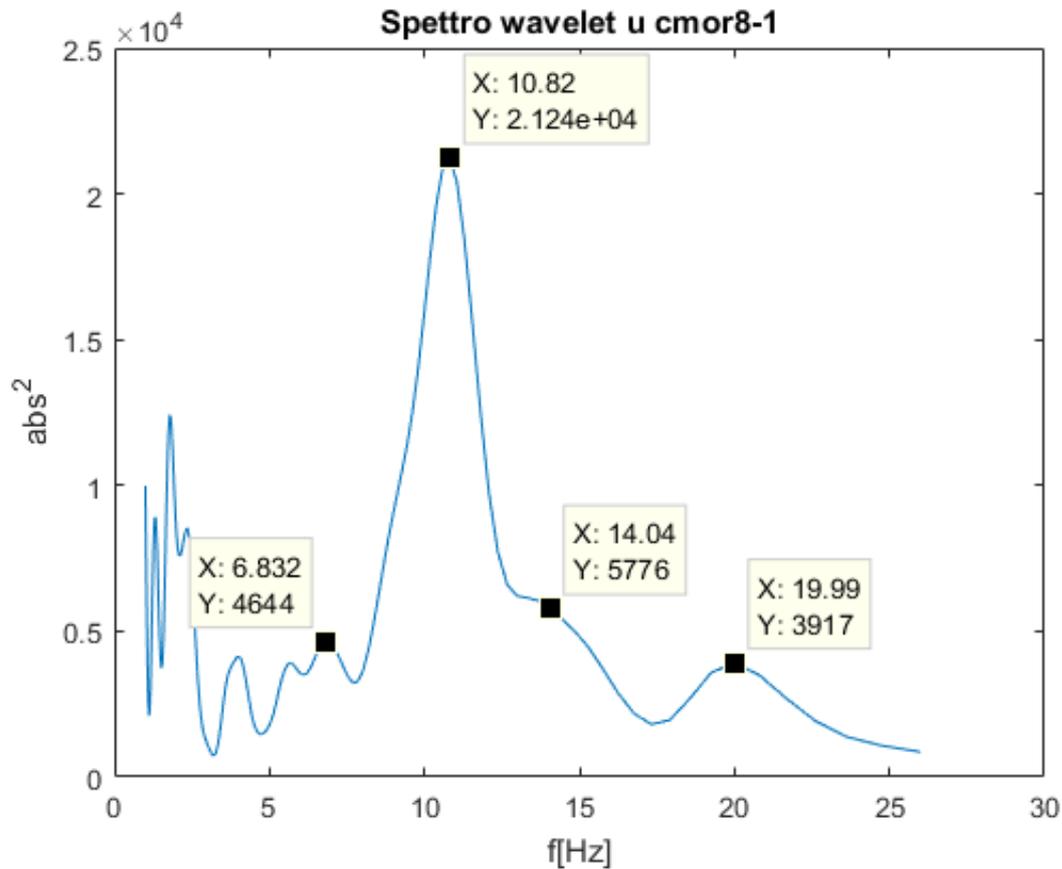


Figura 44. Spettro Wavelet ottenuto mediando lungo l'asse temporale il modulo dei coefficienti della trasformata Wavelet elevati al quadrato delle fluttuazioni della componente streamwise della velocità u' ottenuta con la base cmor8-1.

Nello spettro wavelet ottenuto con la base cmor8-1 (figura 44) riusciamo ad osservare la frequenza dominante $f_a = 10.82 \text{ Hz}$, la sua prima armonica $2f_a = 19.99 \text{ Hz}$, anche se leggermente scostata dal valore atteso, e i sidepeaks della frequenza dominante $f_+ = 14.04 \text{ Hz}$ e $f_- = 6.83 \text{ Hz}$, come osservato da Basley *et al.* (2010). Mantenendo $f_{band} = 8 \text{ Hz}$ aumentiamo man mano la center frequency f_c .

Il limite della condizione di ammissibilità si raggiunge per $f_c = 8 \text{ Hz}$, ma la base wavelet cmor8-8 ha un costo computazionale eccessivo. Un buon compromesso tra risoluzione in frequenza e costo computazionale è dato da un valore medio tra il caso limite cmor8-8 e la wavelet precedentemente utilizzata cmor8-1. Ripetiamo quindi l'analisi aumentando la f_c partendo dal $f_c = 2 \text{ Hz}$ fino a $f_c = 5 \text{ Hz}$.

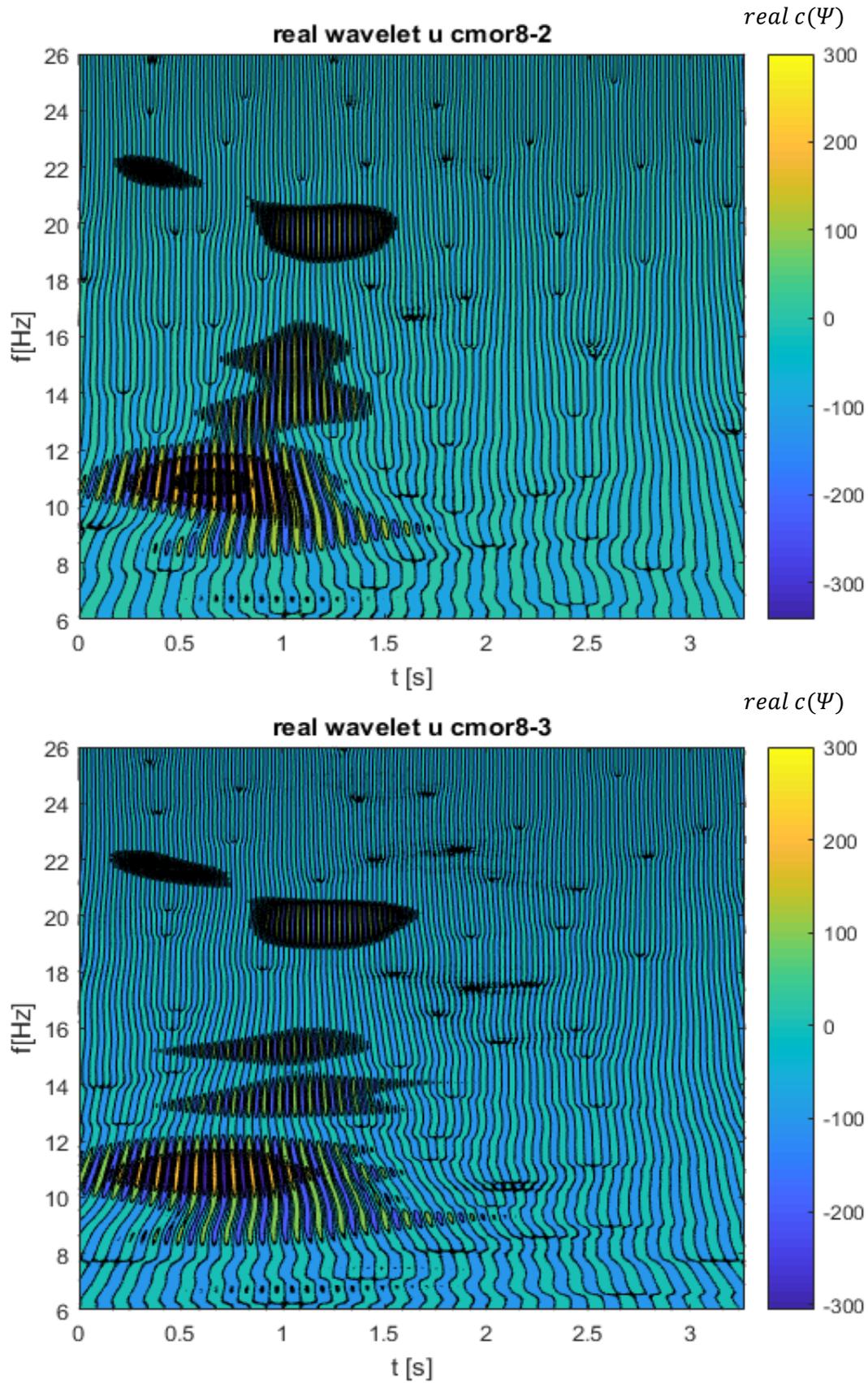


Figura 45. Parte reale dei coefficienti della trasformata Wavelet delle fluttuazioni della componente streamwise della velocità u' ottenuta con la base cmor8-2 (in alto) e cmor8-3 (in basso).

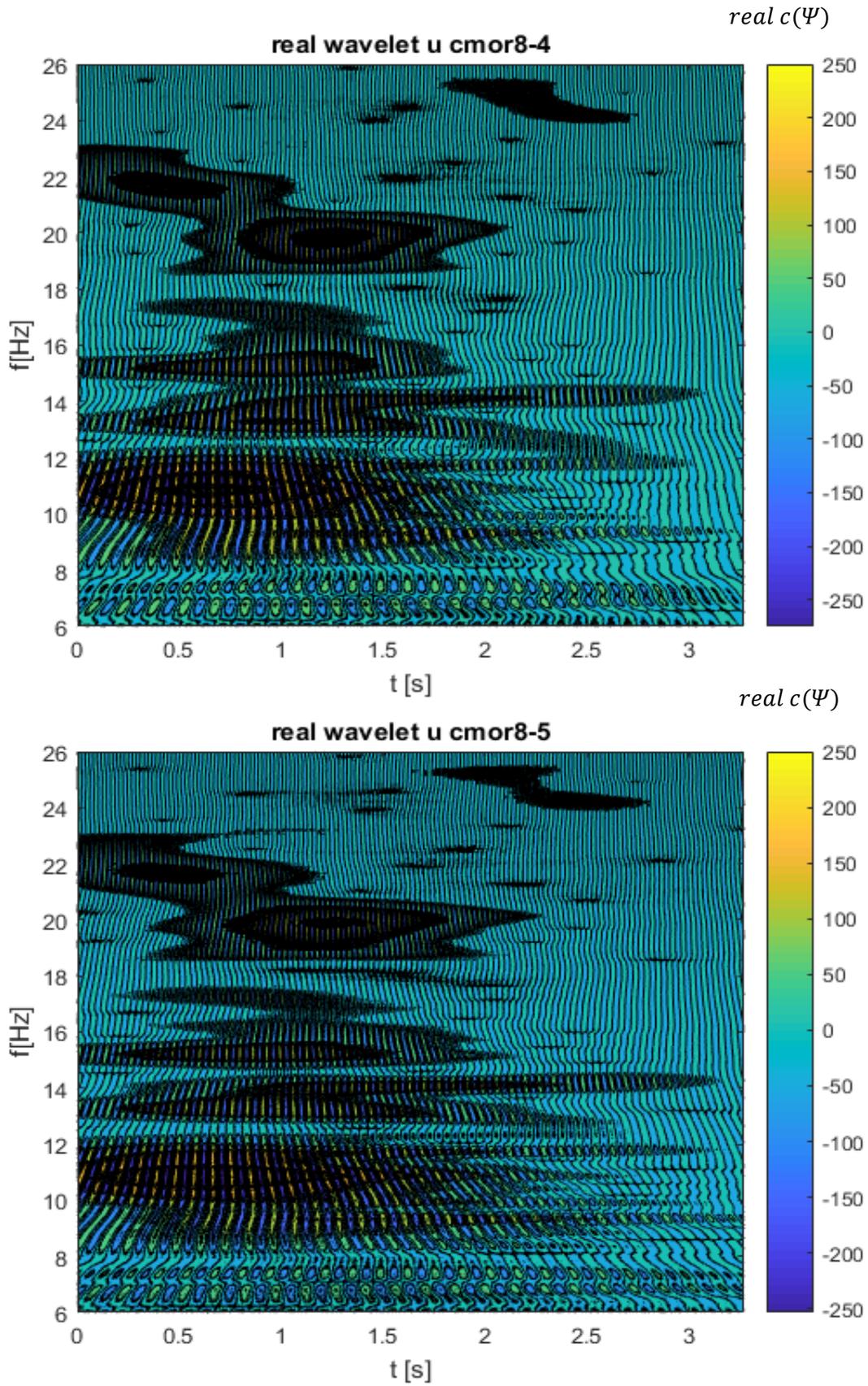


Figura 46. Parte reale dei coefficienti della trasformata Wavelet delle fluttuazioni della componente streamwise della velocità u' ottenuta con la base cmor8-4 (in alto) e cmor8-5 (in basso).

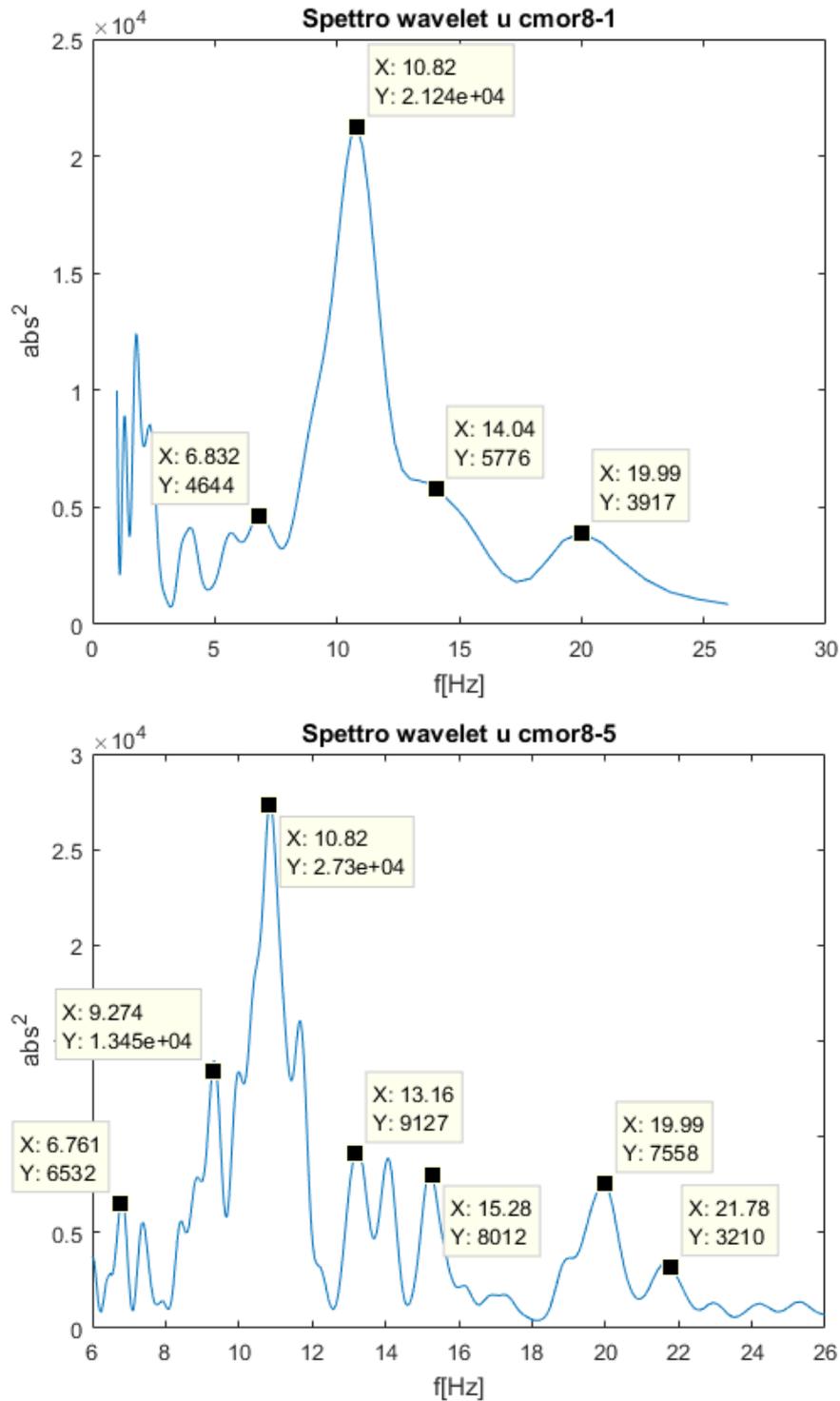


Figura 47. Spettro Wavelet ottenuto mediando lungo l'asse temporale il modulo dei coefficienti della trasformata Wavelet elevati al quadrato delle fluttuazioni della componente streamwise della velocità u' ottenuta con la base cmor8-1 (in alto) e con la base cmor8-5 (in basso).

Si osserva come l'aumentare della center frequency comporti una maggiore risoluzione in frequenza. Rispetto allo spettro ottenuto con la base cmor8-1, la base cmor8-5 (figura 47) ci permette di osservare la frequenza dominante $f_a = 10.82 \text{ Hz}$, i suoi sidepeaks $f_- = 6.76 \text{ Hz}$ e $f_+ = 13.16 \text{ Hz}$, la prima armonica della frequenza dominante $2f_a = 19.99 \text{ Hz}$, il sidepeak destro

della prima armonica $f_{2+} = 21.78 \text{ Hz}$, e altri numerosi picchi. La base cmor8-5 sembra essere quindi il miglior compromesso tra risoluzione e costo computazionale. Tuttavia con l'aumentare della risoluzione in frequenza diventa più complesso leggere lo spettro: per ovviare a questo problema, abbiamo ridotto il range di frequenze e svolto un'analisi spettrale locale centrandonci di volta in volta sulla frequenza dominante e sulle sue armoniche, come verrà mostrato in seguito nei risultati ottenuti. Per la nostra analisi abbiamo scelto inizialmente di utilizzare una base wavelet Morlet reale, per poi passare ad una cmor3-3, ed infine alla base migliore, la cmor8-5.

4.2.3 Risultati ottenuti

Per adesso abbiamo confermato con la DFT l'impronta spettrale del flusso di cavità nella zona d'impinging ottenuta da Basley *et al.* Tuttavia utilizzando la trasformata di Fourier perdiamo l'informazione temporale del segnale tramite l'operazione di media; abbiamo quindi scelto di utilizzare la trasformata Wavelet, che si basa sul moltiplicare scalarmente il segnale per una funzione detta base Wavelet, e come base abbiamo scelto la funzione di Morlet $\psi(x) = e^{-x^2/2} \cos(k_\varphi x)$, con $k_\varphi = 5$ (figura 48).

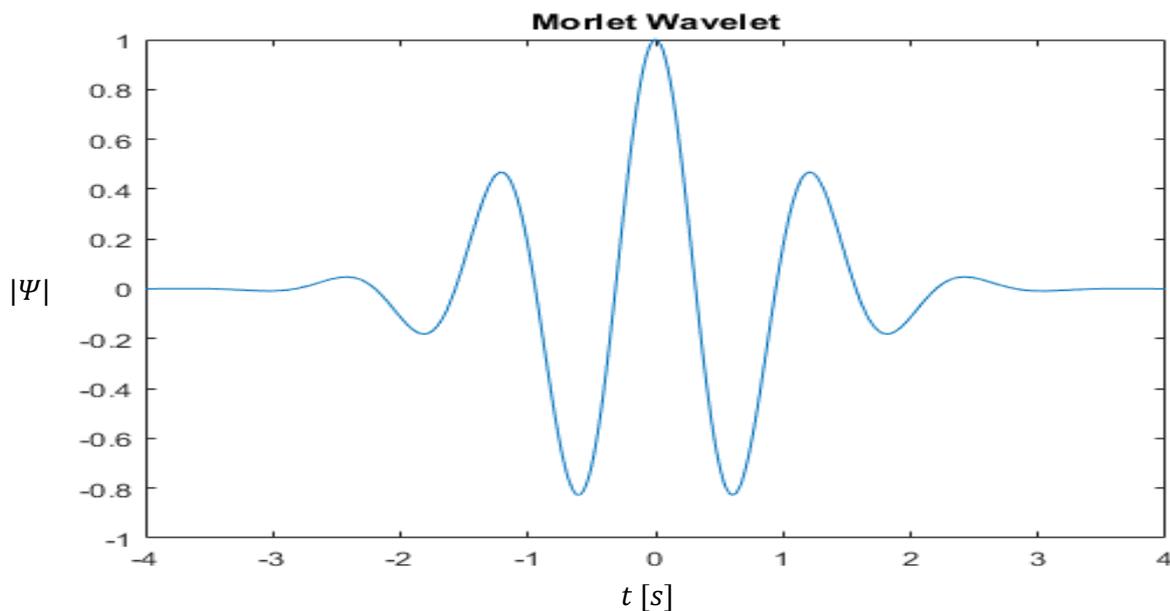


Figura 48. Wavelet di Morlet reale $\psi(x) = e^{-x^2/2} \cos(k_\varphi x)$: il parametro k_φ deve essere ≥ 5 per rispettare la condizione di ammissibilità e la center frequency è pari a $f_c = 0.8125 \text{ Hz}$.

Per essere una wavelet una funzione deve rispettare la condizione di ammissibilità (integrabile e a media nulla) e deve essere localizzata, ovvero deve avere un numero limitato di oscillazioni. Per poter studiare la distribuzione di energia sulle varie scale, che poi verranno convertite in frequenze, la base viene dilatata e ruotata ogni volta prima di essere moltiplicata per il segnale. Il risultato di quest'operazione è una serie di coefficienti reali o complessi per ogni scala studiata: è quindi possibile seguire l'evoluzione temporale dei vari modi e gli scambi di energia presenti tra essi.

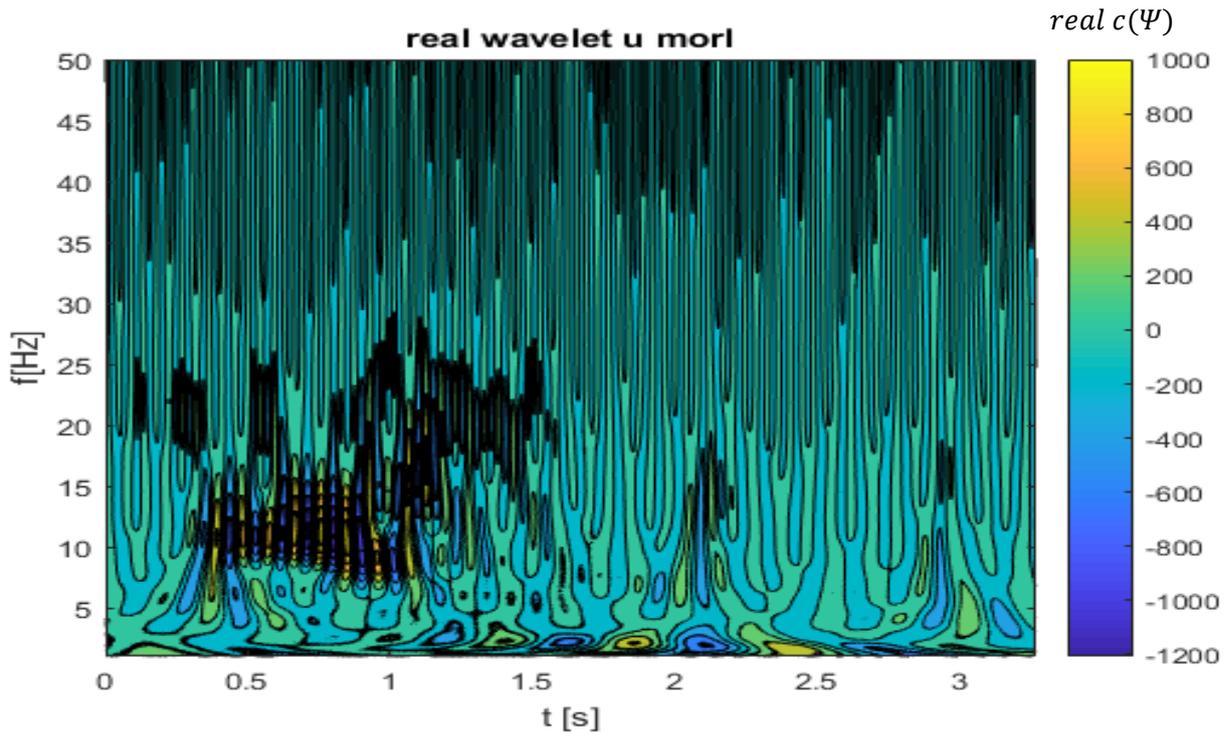


Figura 49. Parte reale dei coefficienti della trasformata Wavelet delle fluttuazioni della componente streamwise della velocità u' ottenuta con la base di Morlet. Sull'asse delle ascisse abbiamo il tempo (secondi) e sull'asse delle ordinate la pseudo-frequency (Hz).

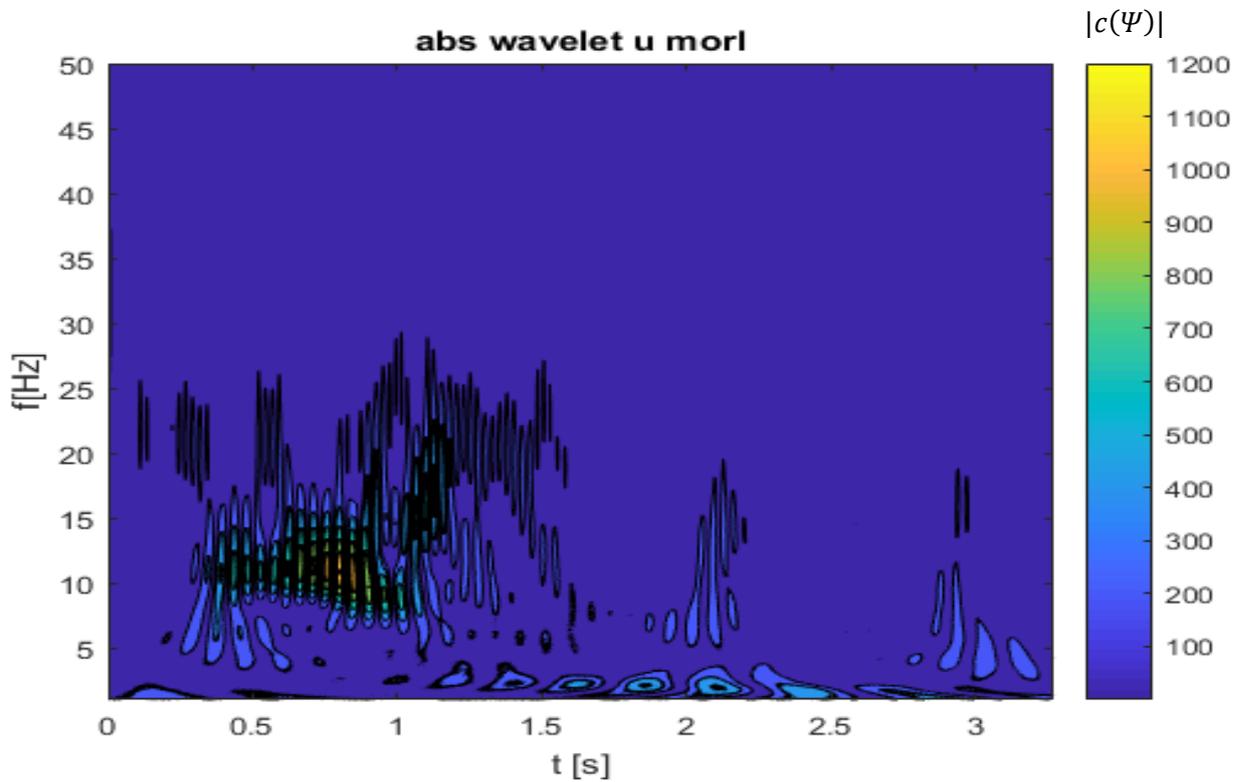


Figura 50. Modulo dei coefficienti della trasformata Wavelet delle fluttuazioni della componente streamwise della velocità u' ottenuta con la base di Morlet. Sull'asse delle ascisse abbiamo il tempo (secondi) e sull'asse delle ordinate la pseudo-frequency (Hz).

In figura 49-50 è mostrato il risultato ottenuto dall'analisi: poiché la Wavelet utilizzata è la Morlet reale, la parte reale e il modulo dei coefficienti della trasformata, a parte per il segno, coincidono. Mediando la serie di coefficienti lungo la direzione temporale è possibile calcolare lo spettro Wavelet.

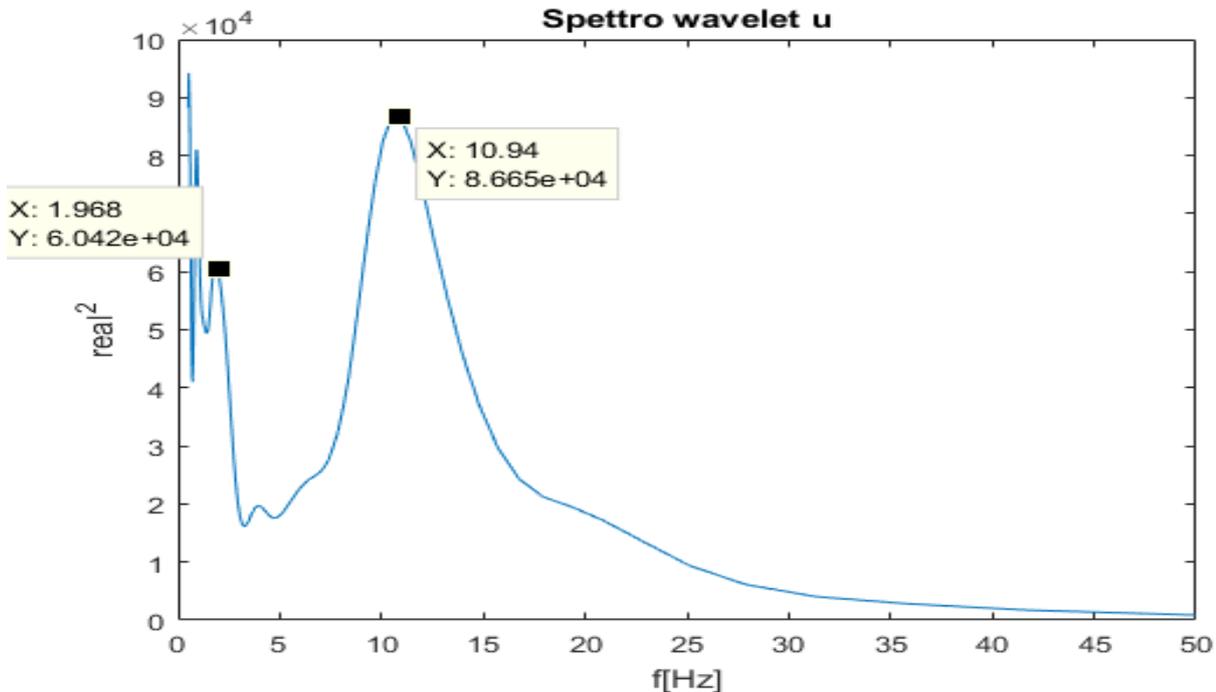


Figura 51. Spettro Wavelet ottenuto mediando lungo l'asse temporale la parte reale dei coefficienti della trasformata Wavelet elevati al quadrato delle fluttuazioni della componente streamwise della velocità u' ottenuta con la base di Morlet.

Si nota subito, sia dallo spettro (figura 51) che dalla mappa dell'energia (figura 49-50), come la Morlet reale non sia la base adeguata per svolgere l'analisi. Lo spettro presenta un picco a 10.94 Hz corrispondente alla frequenza dominante, ma la risoluzione in frequenza è troppo bassa per poter osservare picchi con energia minore; si osserva inoltre che è presente molta energia sulle basse frequenze, in particolare a 1.968 Hz che dovrebbe corrispondere alla f_b osservata con la DFT. Dalle mappe in figura 49-50 si osserva nel primo secondo l'energia è concentrata sulla frequenza dominante e sulla prima armonica; dopo il primo secondo l'energia della frequenza dominante diminuisce e i picchi di energia si spostano sulle frequenze adiacenti f_+ ed f_- e sulla bassa frequenza f_b : questo fenomeno in cui i sidepeaks hanno più energia della carrier è detto sovrarmodulazione in ampiezza e si verifica quando la modulante possiede un'energia superiore a quella della carrier stessa, generando così dei sidepeaks con energia superiore, o quasi equivalente, al loro picco centrale (carrier).

La Morlet reale non è una base adeguata per studiare il nostro segnale perché possiede una center frequency troppo bassa; abbiamo quindi scelto di utilizzare una Morlet complessa, che permette di cambiare la risoluzione in frequenza e temporale tramite due parametri: la center frequency normalizzata e la bandwidth frequency.

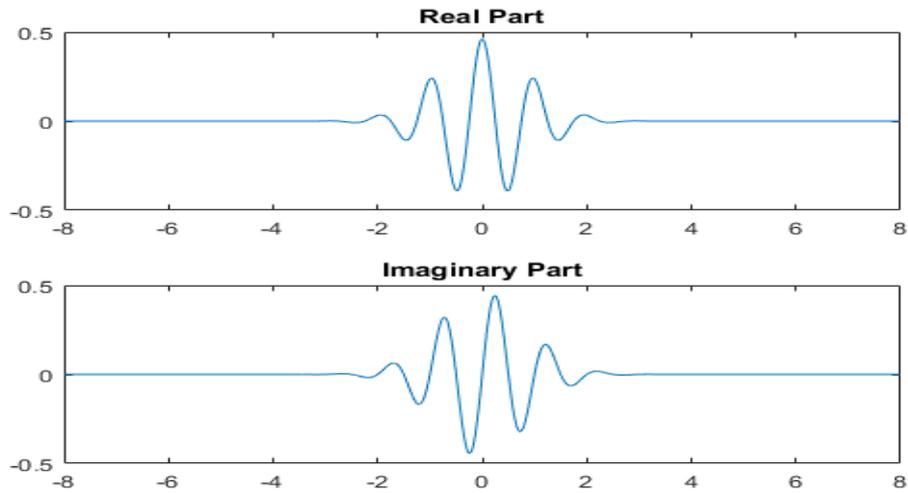


Figura 52. $\psi(x) = \frac{1}{\sqrt{\pi f_b}} e^{2\pi i f_c x} e^{-x^2/f_{band}}$ Morlet Complessa f_c =center frequency f_{band} = bandwidth frequency

Da ora la Morlet complessa verrà indicata con la dicitura $cmor_{f_{band} - f_c}$. Aumentando f_{band} aumenta la risoluzione in frequenza a scapito di un costo computazionale più elevato. Anche la f_c aumenta la risoluzione in frequenza, ma deve essere il più vicina possibile a quella della frequenza dominante del flusso; si dovrà tuttavia fare attenzione, in quanto aumentando il valore di f_c troppo, la base wavelet potrebbe diventare non ammissibile. Ripetiamo quindi l'analisi con una $cmor3-3$, la cui risoluzione in frequenza è superiore alla Morlet reale.

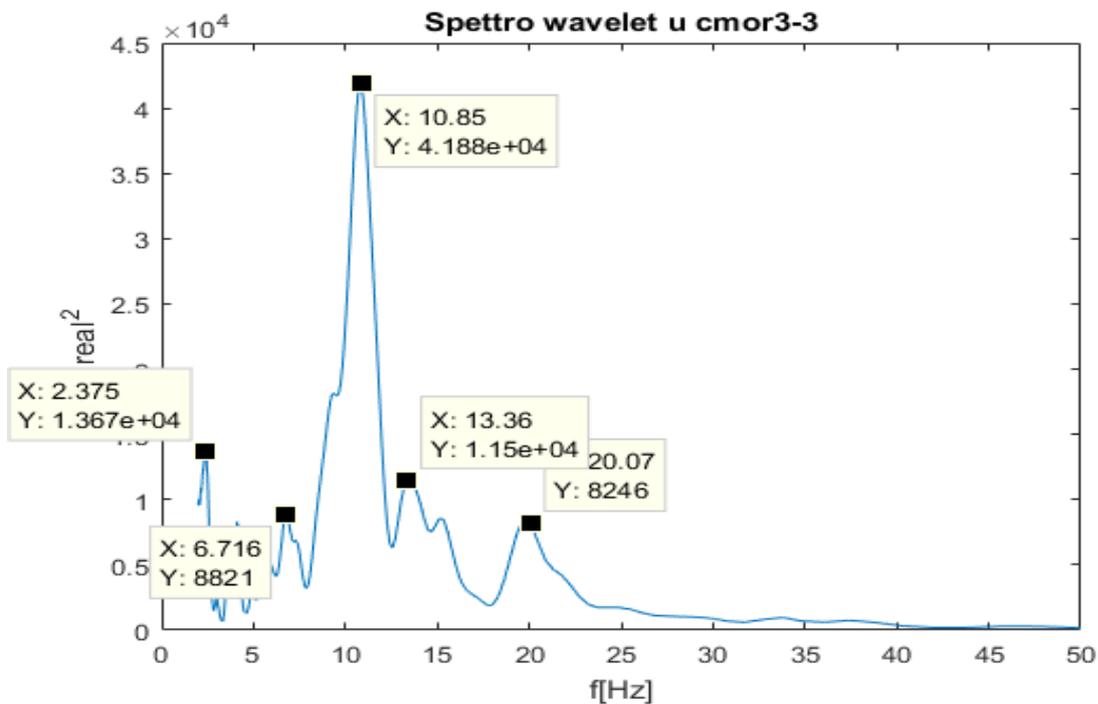


Figura 53. Spettro Wavelet ottenuto mediando lungo l'asse temporale la parte reale dei coefficienti della trasformata Wavelet elevati al quadrato delle fluttuazioni della componente streamwise della velocità u' ottenuta con la base di Morlet complessa $cmor3-3$.

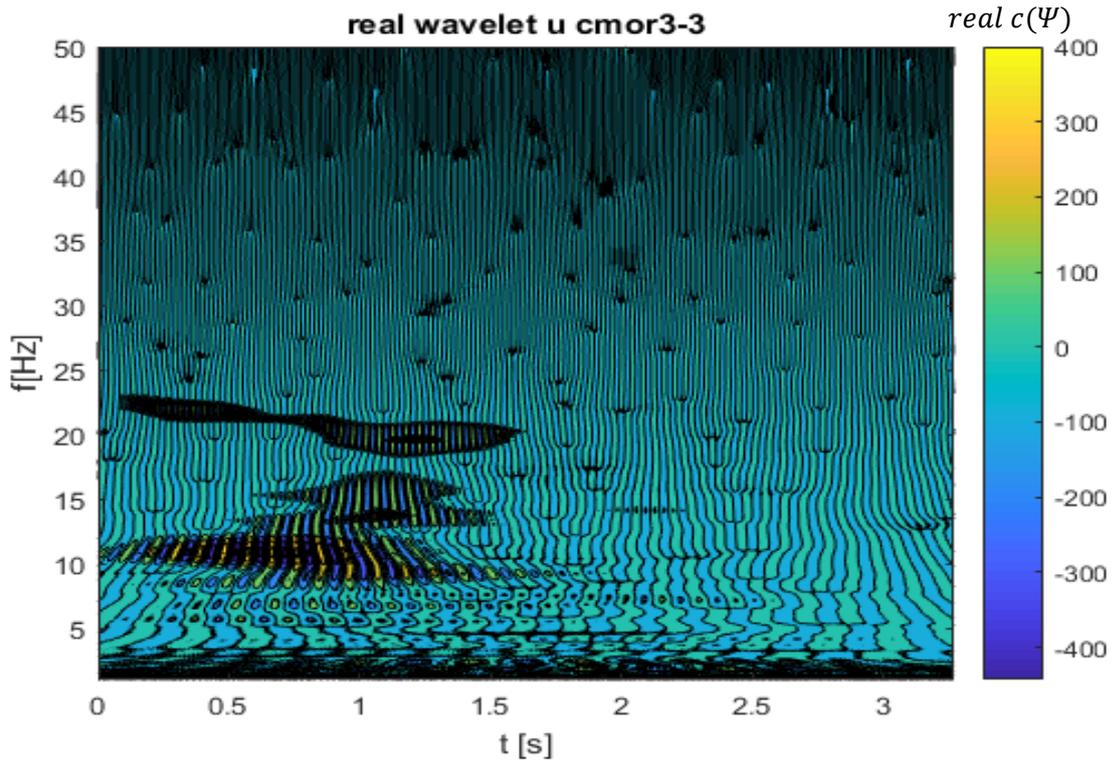


Figura 54. Parte reale dei coefficienti della trasformata Wavelet delle fluttuazioni della componente streamwise della velocità u' ottenuta con la base di Morlet complessa cmor3-3. Sull'asse delle ascisse abbiamo il tempo (secondi) e sull'asse delle ordinate la pseudo-frequency (Hz).

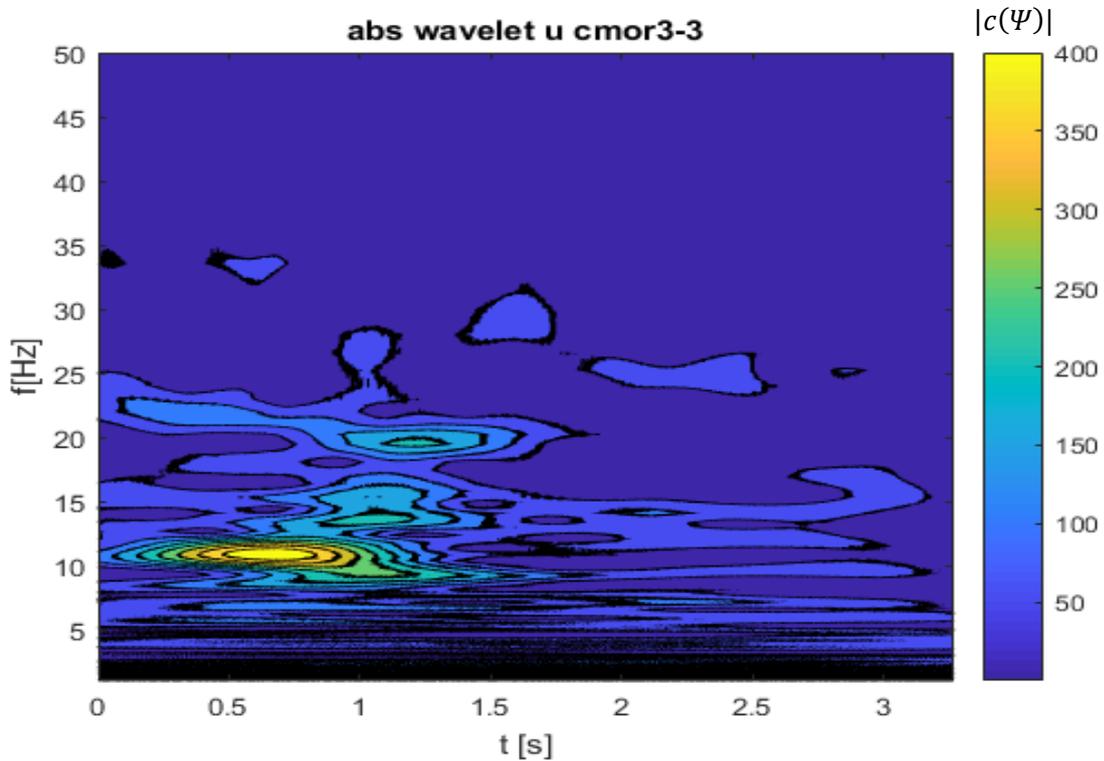


Figura 55. Modulo dei coefficienti della trasformata Wavelet delle fluttuazioni della componente streamwise della velocità u' ottenuta con la base di Morlet complessa cmor3-3. Sull'asse delle ascisse abbiamo il tempo (secondi) e sull'asse delle ordinate la pseudo-frequency (Hz).

Dallo spettro (figura 53) si riescono ad osservare un picco relativo alla frequenza dominante $f_a = 10.85 \text{ Hz}$, i due sidepeaks $f_+ = 13.36 \text{ Hz}$ e $f_- = 6.716 \text{ Hz}$, un picco relativo alla prima armonica della frequenza dominante $2f_a = 20.07 \text{ Hz}$, e un picco relativo alla modulante $f_b = 2.375 \text{ Hz}$. Il fatto che i due sidepeaks non abbiano lo stesso livello di energia e che non siano esattamente equidistanti dalla carrier è dovuto al fatto che il numero di campioni non è sufficiente per andare a convergenza e dal fatto che i coefficienti wavelet sono calcolati in norma L^2 , e quindi l'energia alle diverse scale non è direttamente confrontabile; l'energia su ogni scala è proporzionale alla densità di energia, ma per confrontare scale diverse dovrei calcolare i coefficienti in norma L^1 . Tuttavia rispetto alla morlet reale, la morlet complessa riesce a distinguere i due sidepeaks dalla frequenza dominante. I picchi laterali sono stati anche osservati da Basley *et al.* Osservando le mappe wavelet ottenute con la cmor3-3 (figura 54-55) si vede che nel primo secondo il segnale risulta più chiaro ed il livello di energia è più alto; abbiamo scelto quindi di concentrare l'analisi wavelet sui primi 1024 campioni: in questo modo possiamo ottenere una risoluzione in frequenza maggiore diminuendo la risoluzione temporale, sfruttando la proprietà di localizzazione nello spazio e nel tempo della wavelet.

Concentrando l'analisi sui primi 1024 campioni lo spettro (figura 58) risulta molto più pulito. Si identificano chiaramente la frequenza dominante $f_a = 10.97 \text{ Hz}$, i due sidepeaks $f_+ = 13.19 \text{ Hz}$ e $f_- = 8.331 \text{ Hz}$, un picco relativo alla prima armonica della frequenza dominante $2f_a = 21.14 \text{ Hz}$, e uno dei sidepeaks della prima armonica $f_{2-} = 18.63 \text{ Hz}$. Rispetto allo spettro calcolato con tutti i campioni si è perso il picco relativo alla modulante f_b : questo indica che nei primi 1,024 secondi tutta l'energia della modulante viene distribuita sulle frequenze relativi ai sidepeaks f_+ e f_- . Sono inoltre presenti altri due picchi che nello spettro calcolato con tutti i campioni non erano così distinti a causa della minore risoluzione in frequenza: $f_{--} = 6.347 \text{ Hz}$, che è il picco che prima avevano identificato con il sidepeak sinistro f_- , e $f_{++} = 15.33 \text{ Hz}$. Questi due picchi sono anche loro frutto di una modulazione in ampiezza di una bassa frequenza f_{b2} sulla carrier f_a . Infatti se $f_{b2} > f_b$ allora $f_a - f_{b2} = f_{--} < f_-$ e $f_a + f_{b2} = f_{++} > f_+$.

Per migliorare ulteriormente i risultati abbiamo deciso di suddividere l'analisi in tre range di frequenze: uno relativo alla frequenza dominante e ai suoi sidepeaks, dove l'energia è molto più elevata, e gli altri relativi alle più alte frequenze. In questo modo è possibile osservare l'effetto della modulazione in ampiezza anche sulla prima e sulla seconda armonica. Per aumentare ulteriormente la risoluzione in frequenza abbiamo utilizzato una cmor8-5, che dopo varie prove sembra essere la base migliore per analizzare il nostro flusso.

Nello spettro (figura 61) e nella mappa wavelet (figura 59-60), ottenuti con la wavelet cmor8-5 sul range di frequenze $[6,16] \text{ Hz}$, osserviamo la frequenza dominante $f_a = 10.78 \text{ Hz}$, i suoi sidepeaks $f_+ = 13.18 \text{ Hz}$ e $f_- = 8.473 \text{ Hz}$ frutto della modulazione in ampiezza della modulante $f_b = 2.4 \text{ Hz}$ sulla carrier f_a , e gli altri due sidepeaks osservati anche precedentemente $f_{++} = 15.33 \text{ Hz}$ e $f_{--} = 6.659 \text{ Hz}$ frutto di un'altra modulazione in ampiezza di una modulante di frequenza maggiore di f_b sulla carrier f_a .

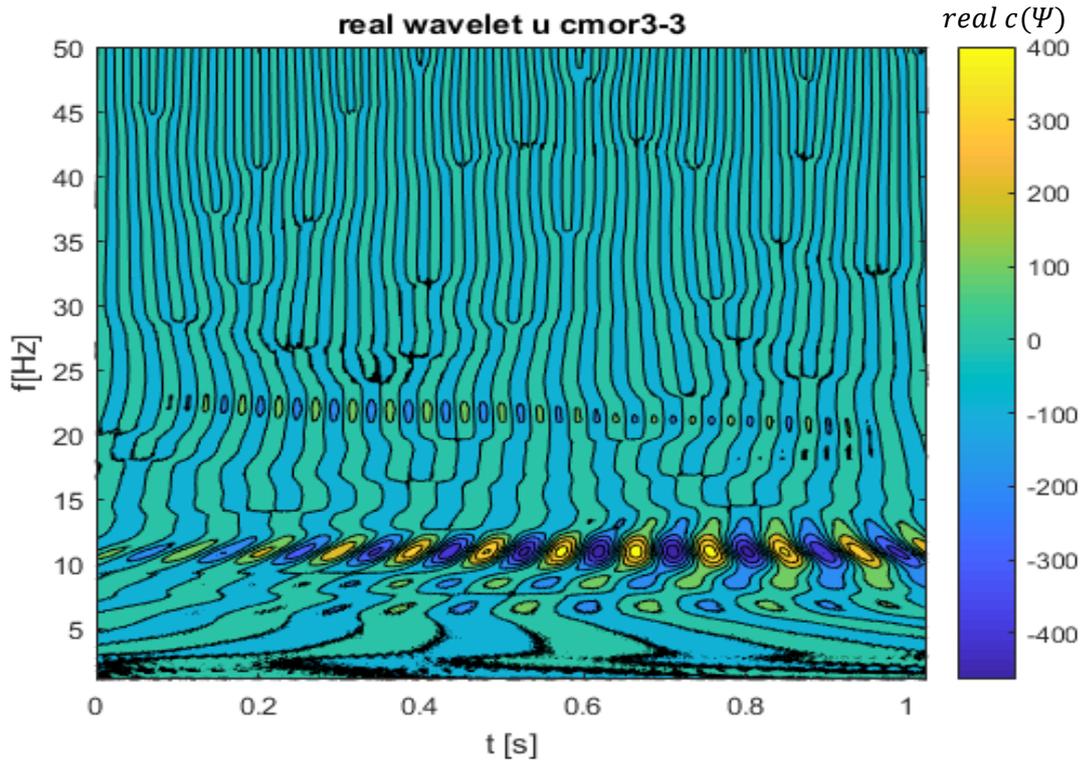


Figura 56. Parte reale dei coefficienti della trasformata Wavelet delle fluttuazioni della componente streamwise della velocità u' calcolata per i primi 1024 campioni e ottenuta con la base di Morlet complessa $cmor3-3$.

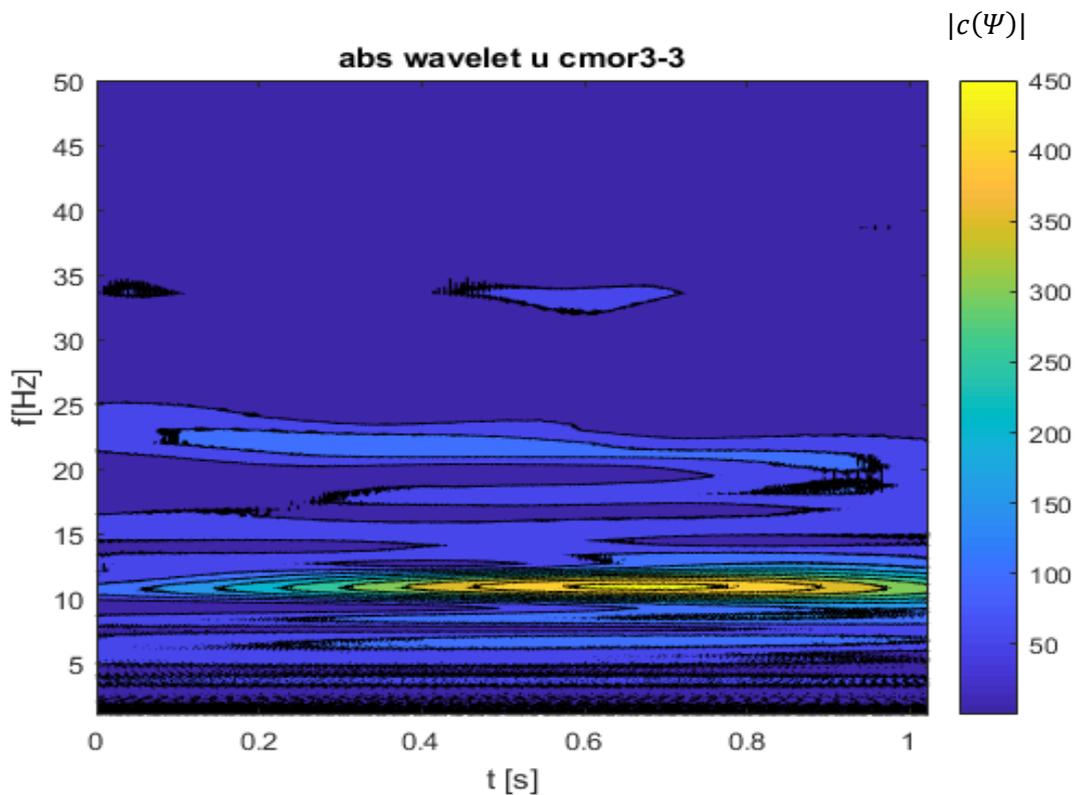


Figura 57. Modulo dei coefficienti della trasformata Wavelet delle fluttuazioni della componente streamwise della velocità u' calcolata per i primi 1024 campioni e ottenuta con la base di Morlet complessa $cmor3-3$.

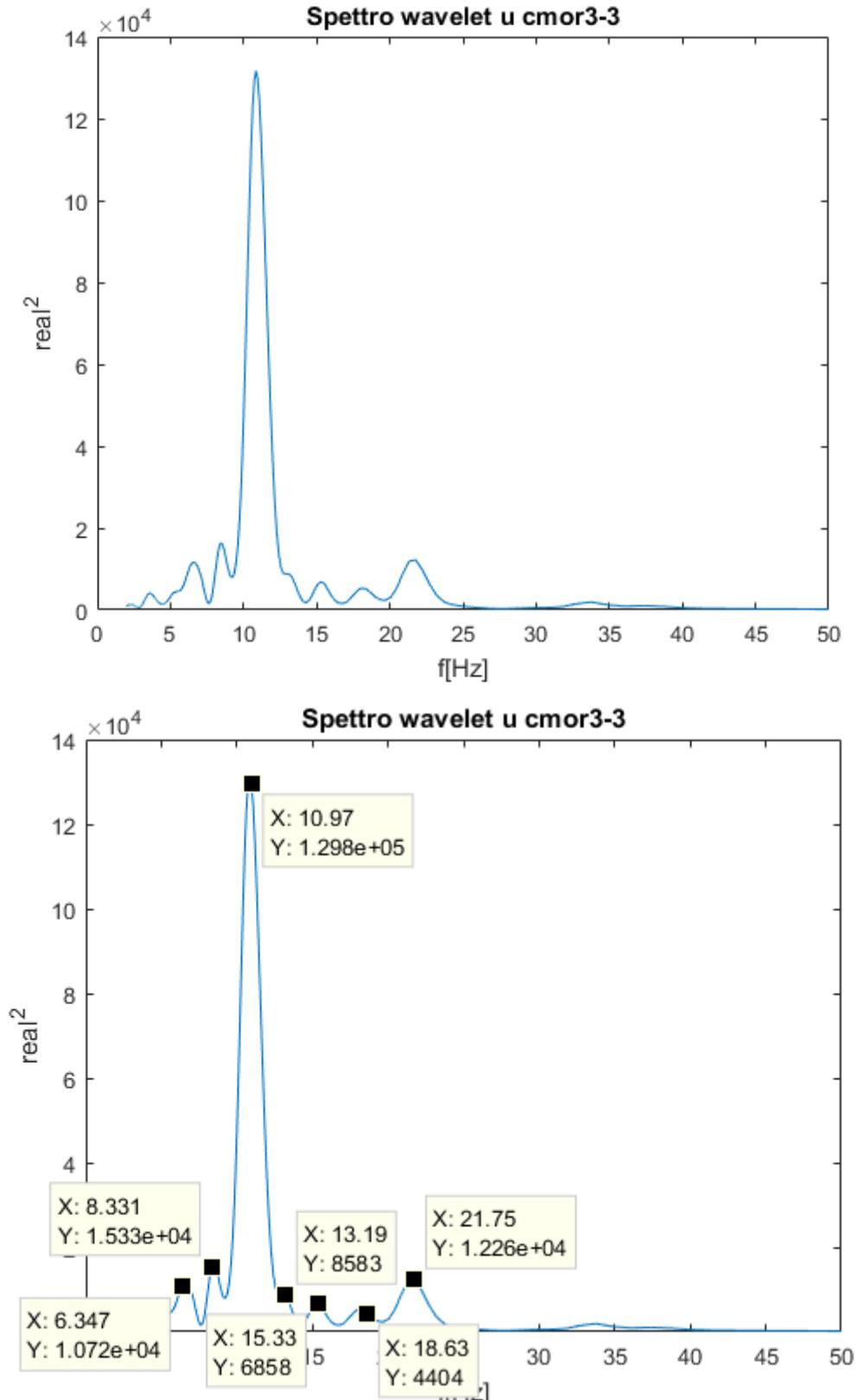


Figura 58. Spettro Wavelet ottenuto mediando lungo l'asse temporale la parte reale dei coefficienti della trasformata Wavelet elevati al quadrato delle fluttuazioni della componente streamwise della velocità u' ottenuta con la base di Morlet complessa cmor3-3.

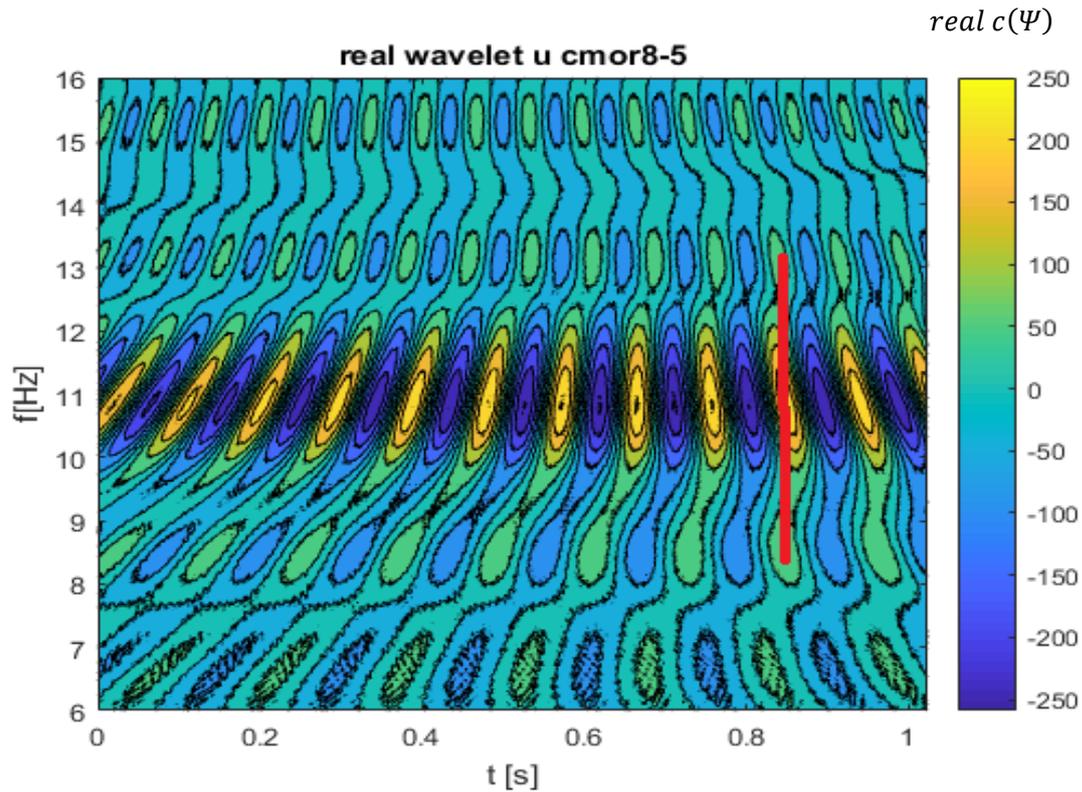


Figura 59. Parte reale dei coefficienti della trasformata Wavelet delle fluttuazioni della componente streamwise della velocità u' calcolata per i primi 1024 campioni e ottenuta con la base di Morlet complessa cmor8-5. Il range di frequenze è [6 , 16] Hz. La linea rossa indica l'istante temporale in cui lo sfasamento tra la carrier ed i sidepeaks è nullo.

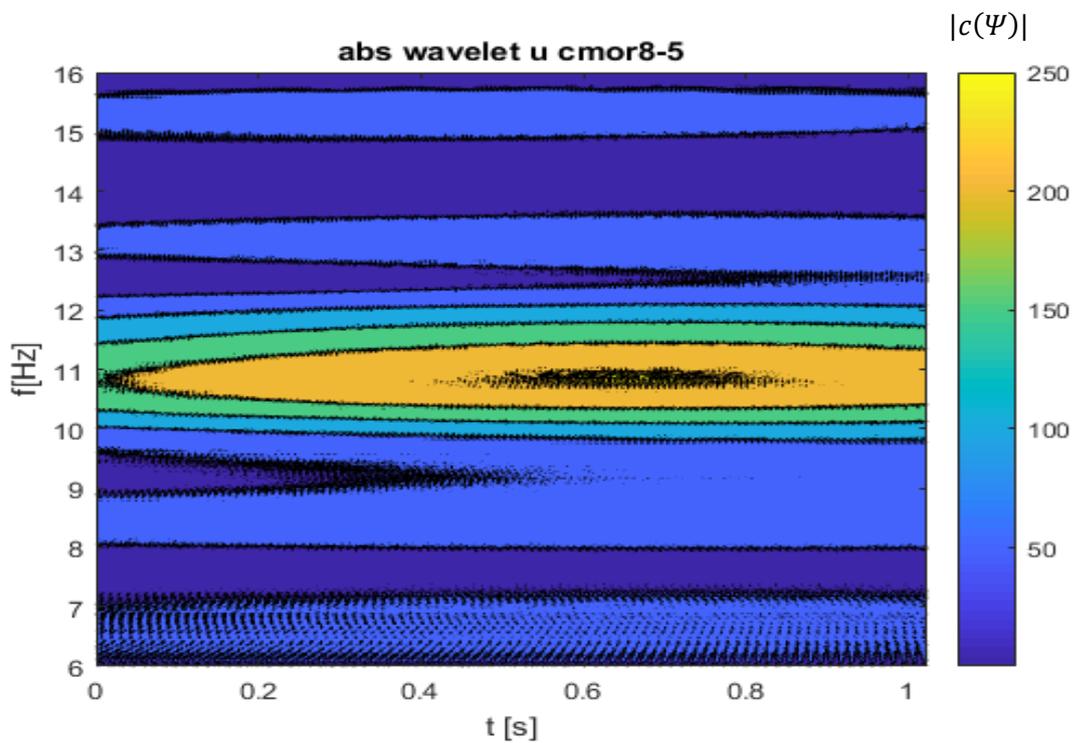


Figura 60. Modulo dei coefficienti della trasformata Wavelet delle fluttuazioni della componente streamwise della velocità u' calcolata per i primi 1024 campioni e ottenuta con la base di Morlet complessa cmor8-5. Il range di frequenze è [6 , 16] Hz.

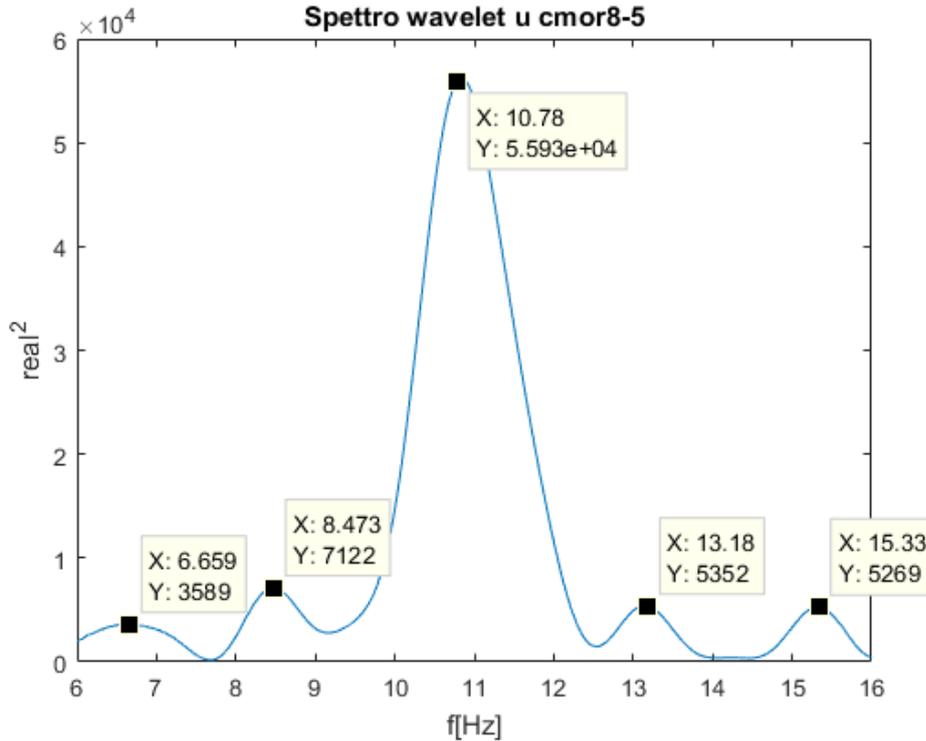


Figura 61. Spettro Wavelet ottenuto mediando lungo l'asse temporale la parte reale dei coefficienti della trasformata Wavelet elevati al quadrato delle fluttuazioni della componente streamwise della velocità u' ottenuta con la base di Morlet complessa cmor8-5.

Dalla mappa della parte reale dei coefficienti wavelet (figura 59) si osserva inoltre che è presente uno sfasamento tra la carrier f_a ed i sidepeaks f_+ e f_- dovuto proprio alla differenza tra le frequenze dei vari modi: questo sfasamento diminuisce man mano fino ad annullarsi dopo circa 0.85 s. Se il campione fosse sufficientemente lungo si potrebbe osservare che questo fenomeno è periodico e quando i tre modi sono in fase presentano tutti un massimo o un minimo di energia: inoltre quando la f_+ è in fase con la f_a , anche la f_- è in fase con la f_a , e viceversa quando la f_+ è in opposizione di fase con la f_a , lo è anche la f_- .

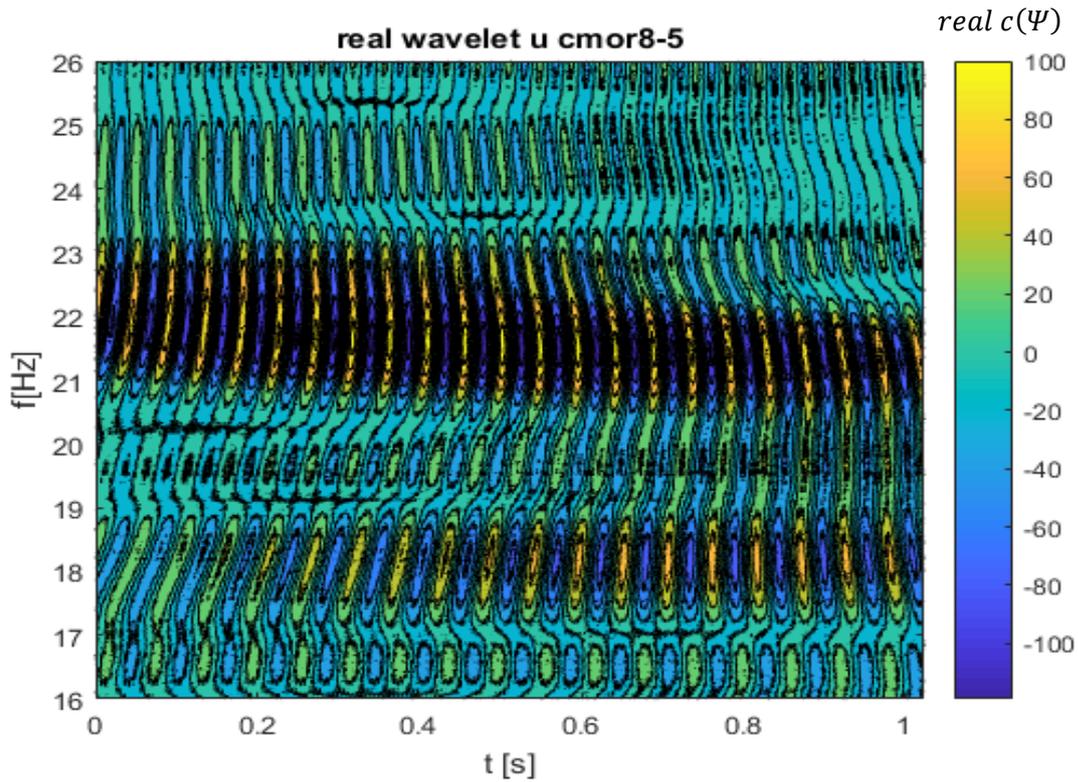


Figura 62. Parte reale dei coefficienti della trasformata Wavelet delle fluttuazioni della componente streamwise della velocità u' calcolata per i primi 1024 campioni e ottenuta con la base di Morlet complessa cmor8-5. (Hz). Il range di frequenze è [16 , 26] Hz.

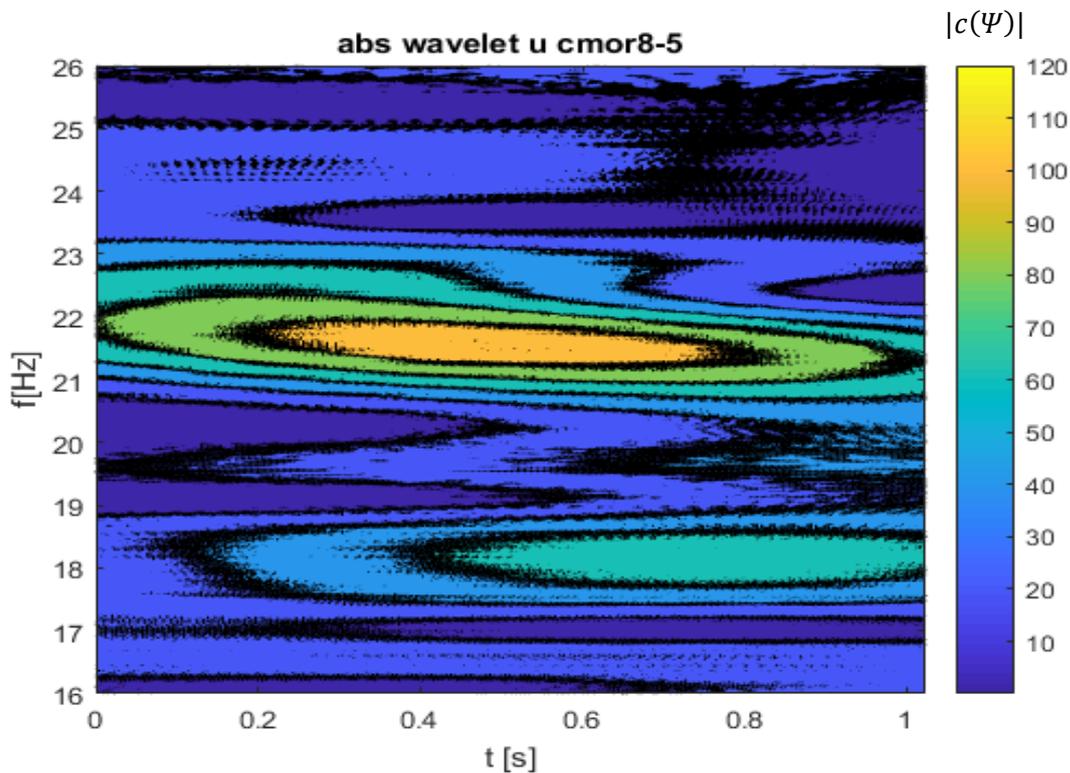


Figura 63. Modulo dei coefficienti della trasformata Wavelet delle fluttuazioni della componente streamwise della velocità u' calcolata per i primi 1024 campioni e ottenuta con la base di Morlet complessa cmor8-5. Il range di frequenze è [16 , 26] Hz.

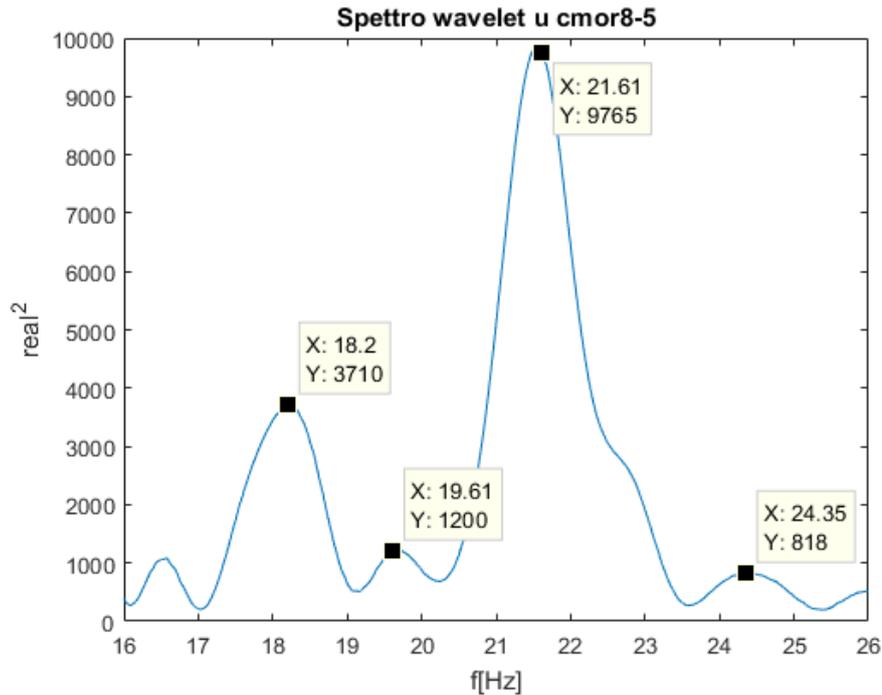


Figura 64. Spettro Wavelet ottenuto mediando lungo l'asse temporale la parte reale dei coefficienti della trasformata Wavelet elevati al quadrato delle fluttuazioni della componente streamwise della velocità u' ottenuta con la base di Morlet complessa cmor8-5. Il range di frequenze è [16 , 26] Hz.

Nello spettro (figura 64) relativo alle frequenze [16 , 26] Hz osserviamo la carrier $2f_a = 21.61 \text{ Hz}$, relativa alla prima armonica della frequenza dominante, e i suoi sidepeaks $f_{2-} = 18.2 \text{ Hz}$ e $f_{2+} = 24.35 \text{ Hz}$. La frequenza della modulante $f_{2+} - 2f_a = 2.74 \text{ Hz}$ risulta superiore alla $f_b = 2.4 \text{ Hz}$ trovata per la frequenza dominante. Sembra quindi che al crescere della frequenza della carrier, cresca anche la frequenza della modulante. Osserviamo inoltre che $2f_a - f_{2-} = 3.41 \text{ Hz} > f_{2+} - 2f_a$: questo è dovuto al fatto che il campione temporale non è sufficientemente lungo e la risoluzione in frequenza non è adeguata. Infatti osservando lo spettro si vede un picco di energia a 19.61 Hz e considerando una frequenza media tra questo picco e la $f_{2-} = 18.2 \text{ Hz}$ che corrisponde a $f = 18.91 \text{ Hz}$, si trova proprio che $2f_a - 18.91 \text{ Hz} = 2.71 \text{ Hz} \approx f_{2+} - 2f_a$.

Per completezza calcoliamo le mappe e lo spettro relativi alla seconda armonica nel range di frequenze [26,40] Hz. Nello spettro (figura 67) relativo alle frequenze [26,40] Hz osserviamo la carrier $3f_a = 33.77 \text{ Hz}$, relativa alla seconda armonica della frequenza dominante, e i suoi sidepeaks $f_{3-} = 30 \text{ Hz}$ e $f_{3+} = 36.93 \text{ Hz}$. La frequenza della modulante, ricavata come differenza tra la carrier e i suoi sidepeaks, risulta differente in base al sidepeak considerato: utilizzando il sidepeak destro troviamo $f_{3+} - 3f_a = 3.16 \text{ Hz}$, mentre utilizzando il sidepeak sinistro $3f_a - f_{3-} = 3.77 \text{ Hz}$.

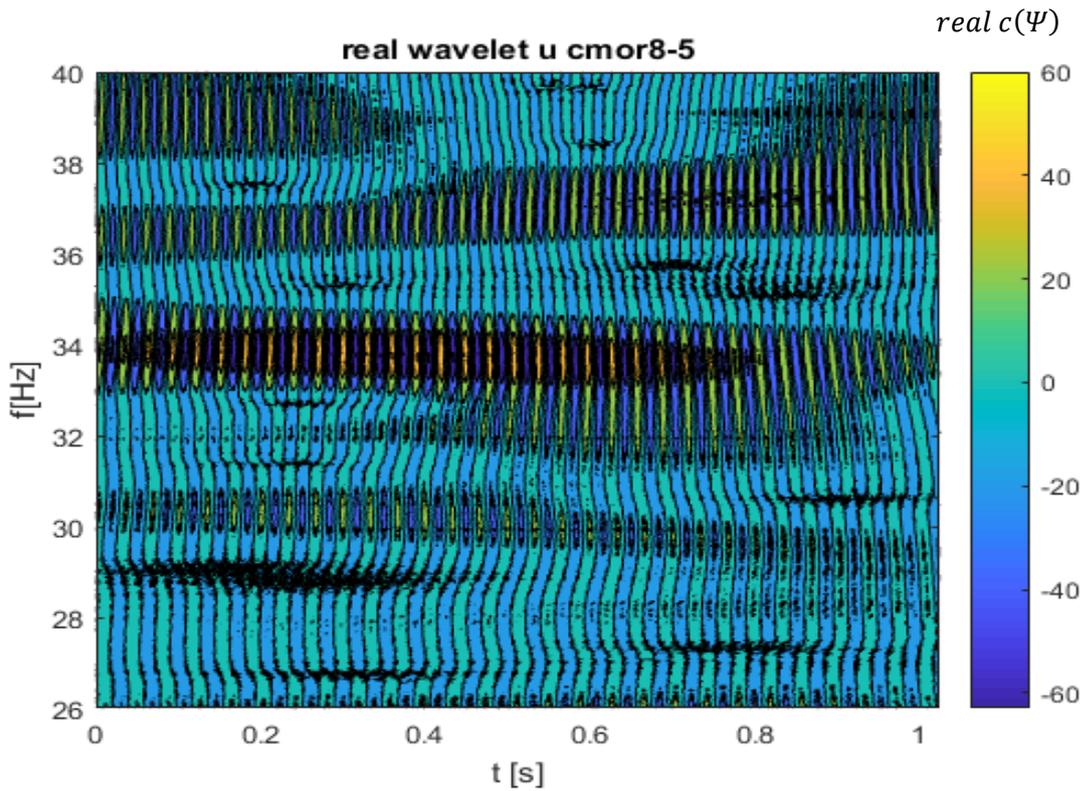


Figura 65. Parte reale dei coefficienti della trasformata Wavelet delle fluttuazioni della componente streamwise della velocità u' calcolata per i primi 1024 campioni e ottenuta con la base di Morlet complessa cmor8-5. Il range di frequenze è [26 , 40] Hz.

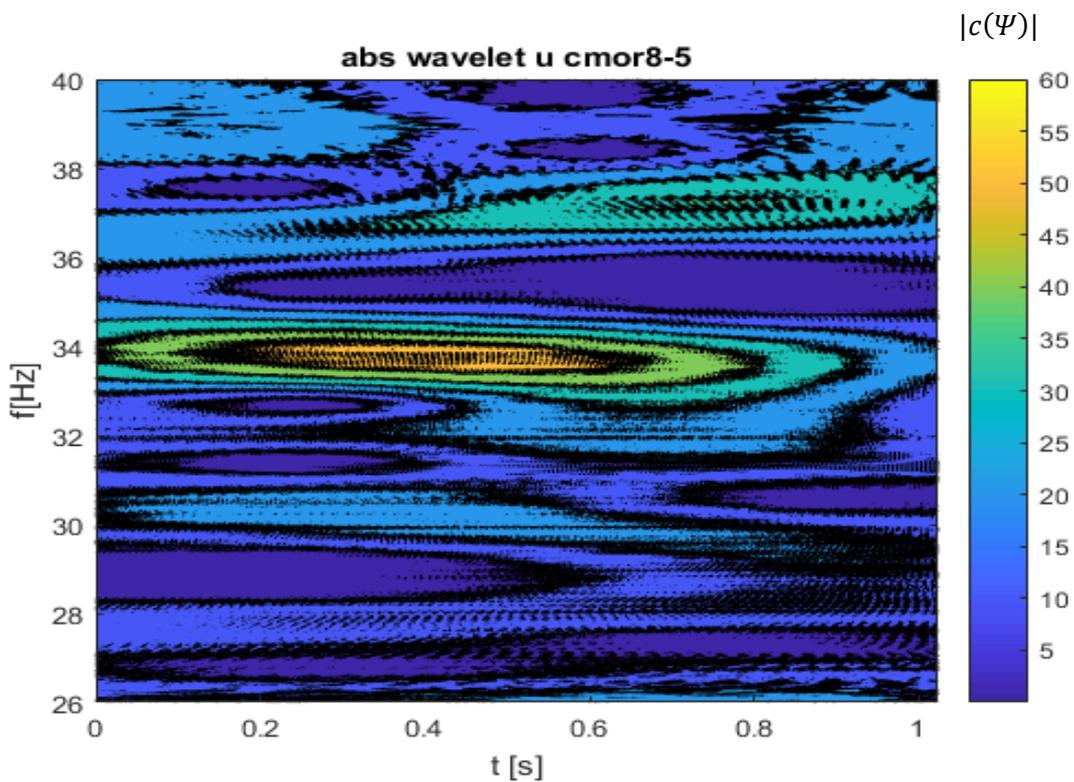


Figura 66. Modulo dei coefficienti della trasformata Wavelet delle fluttuazioni della componente streamwise della velocità u' calcolata per i primi 1024 campioni e ottenuta con la base di Morlet complessa cmor8-5. Il range di frequenze è [26 , 40] Hz.

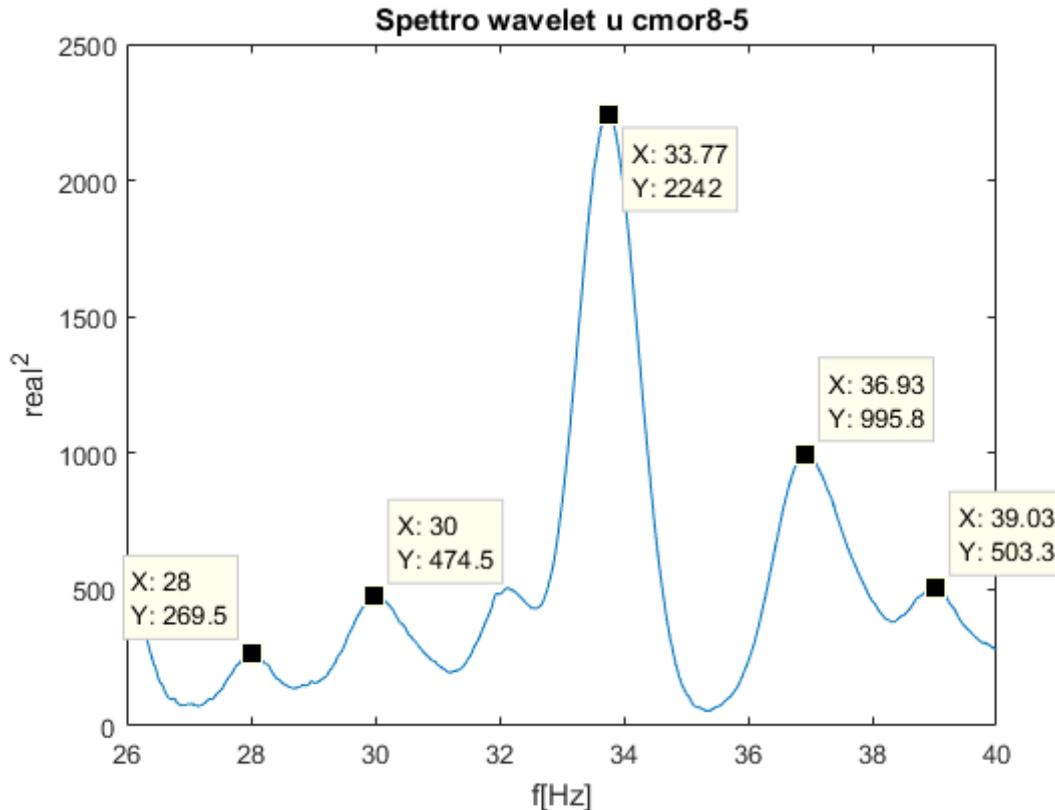


Figura 67. Spettro Wavelet ottenuto mediando lungo l'asse temporale la parte reale dei coefficienti della trasformata Wavelet elevati al quadrato delle fluttuazioni della componente streamwise della velocità u' ottenuta con la base di Morlet complessa cmor8-5. Il range di frequenze è [26 , 40] Hz.

Risulta quindi evidente come il numero di campioni sia insufficiente per andare a convergenza. Notiamo inoltre che la frequenza della modulante sta effettivamente aumentando di pari passo con la frequenza della carrier considerata. Per la frequenza dominante la frequenza modulante risulta $f_b = 2.4 \text{ Hz}$, per la prima armonica $f_b = 2.74 \text{ Hz}$, e per la seconda armonica $f_b = 3.16 \text{ Hz}$. Nello spettro si osservano inoltre altri due sidepeaks $f_{3--} = 28 \text{ Hz}$ e $f_{3+} = 39.03 \text{ Hz}$, come riscontrato per la frequenza dominante, dovuti ad una modulazione in ampiezza di una frequenza maggiore di $f_b = 3.16 \text{ Hz}$ sulla seconda armonica.

Osservando invece la mappa wavelet (figura 68) delle alte frequenze si inizia a riscontrare il fenomeno della sovr modulazione in ampiezza, che crea delle strutture ellittiche sulla mappa e che abbiamo denominato "energy holes". Gli energy holes sono dovuti al fatto che la modulante in un certo tratto temporale possiede un'energia superiore alla carrier: la modulazione in ampiezza della modulante sulla carrier produce quindi due sidepeaks con energia superiore alla carrier stessa e poiché alle alte frequenze l'energia della carrier è molto più bassa rispetto alla frequenza dominante, si creano delle zone ellittiche con un minimo di energia all'interno sulla carrier ed un massimo sui sidepeaks. La struttura ha una forma ellittica perché la modulante f_b , che modula in ampiezza la carrier considerata, viene a sua volta modulata in frequenza (o in fase) da una più bassa frequenza che abbiamo denominato f_{bm} .

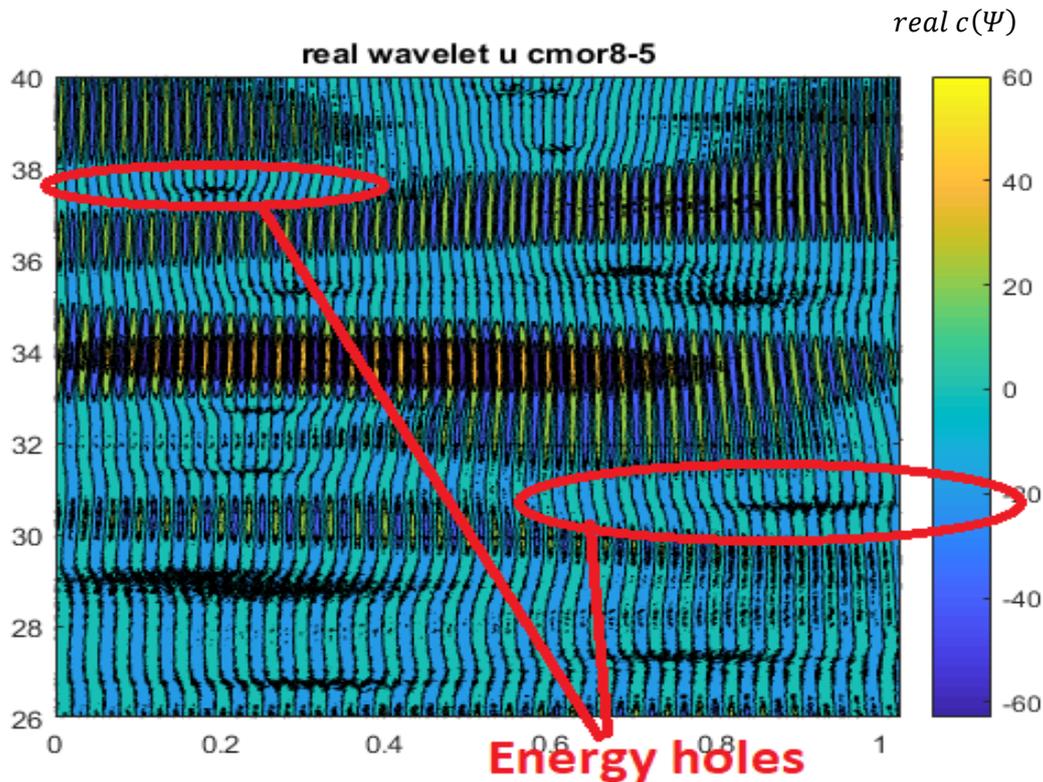


Figura 68. Parte reale dei coefficienti della trasformata Wavelet delle fluttuazioni della componente streamwise della velocità u' calcolata per i primi 1024 campioni e ottenuta con la base di Morlet complessa cmor8-5. Sull'asse delle ascisse abbiamo il tempo (secondi) e sull'asse delle ordinate la pseudo-frequency (Hz). Il range di frequenze è [26 , 40] Hz.

Riassumiamo i risultati ottenuti analizzando la componente streamwise delle fluttuazioni di velocità u' nella zona di impinging: esiste una frequenza dominante legata alla periodicità delle strutture vorticosi che si generano per instabilità di Kelvin-Helmholtz al bordo d'attacco della cavità; osservando lo spettro del flusso nella zona di impinging troviamo dei picchi sulla frequenza dominante f_a e sulle sue armoniche nf_a ($n=1,2,3\dots$); ci sono inoltre coppie di picchi equidistanti da ognuna di queste frequenze e dovuti ad una modulazione in ampiezza da parte di una bassa frequenza f_b sulla frequenza centrale detta carrier; la frequenza della modulante sembra aumentare al crescere della frequenza della carrier considerata; alle alte frequenze si osservano nella mappa di energia wavelet delle strutture ellittiche dovute ad una sovr modulazione in ampiezza della f_b sulla carrier considerata e la forma ellittica di queste strutture è dovuta ad una modulazione in frequenza (o di fase) di una frequenza $f_{bm} < f_b$ sulla modulante f_b stessa; la frequenza della modulante f_b non è quindi costante ma oscilla intorno ad un valore medio.

Ora analizzando la componente verticale delle fluttuazioni di velocità v' nella zona di impinging ci aspetteremo di trovare risultati analoghi a quelli ottenuti per la componente streamwise u' . Abbiamo stabilito che la base migliore per l'analisi risulta la cmor8-5, ma per completezza verranno mostrati anche i risultati ottenuti con la Morlet reale e la cmor3-3, come fatto precedentemente per la componente streamwise u' .

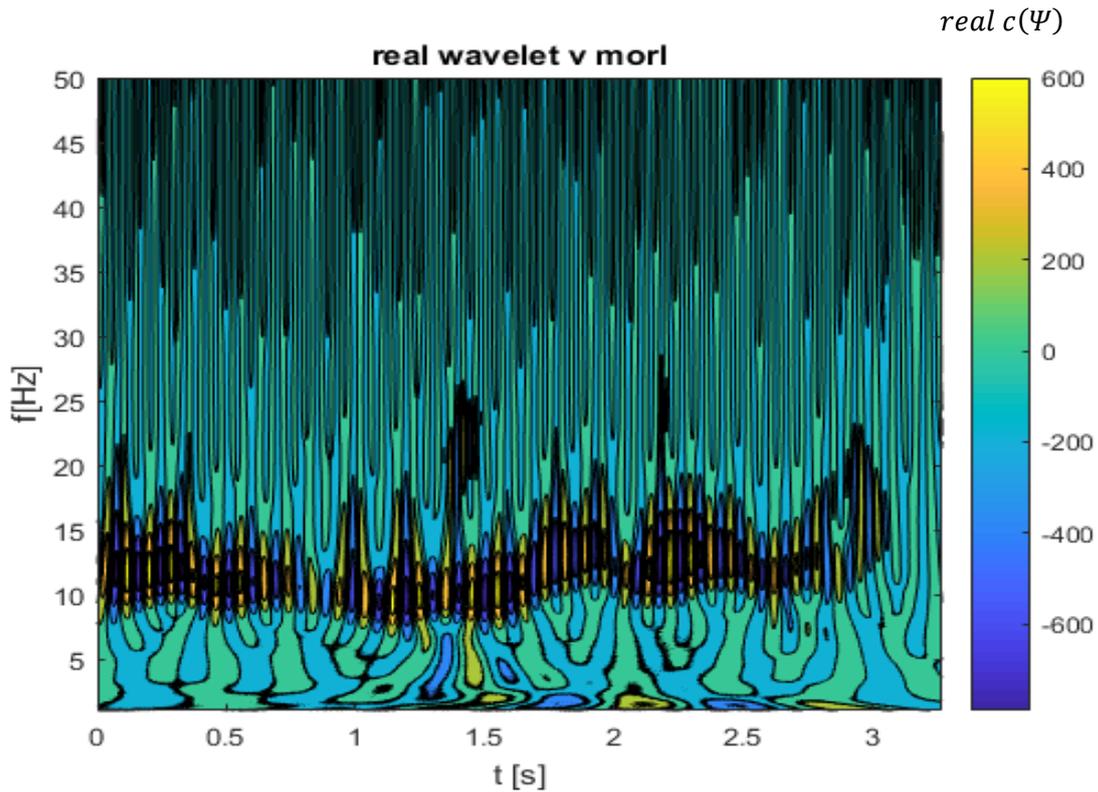


Figura 69. Parte reale dei coefficienti della trasformata Wavelet delle fluttuazioni della componente verticale della velocità v' ottenuta con la base di Morlet reale. Sull'asse delle ascisse abbiamo il tempo (secondi) e sull'asse delle ordinate la pseudo-frequency (Hz).

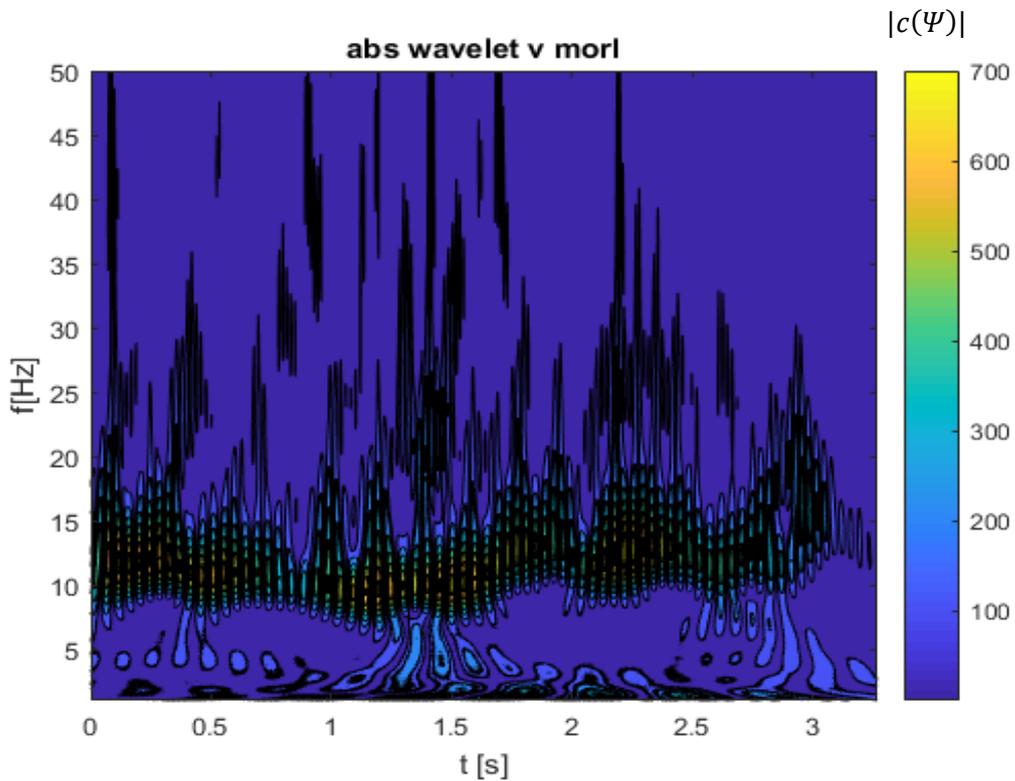


Figura 70. Modulo dei coefficienti della trasformata Wavelet delle fluttuazioni della componente verticale della velocità v' ottenuta con la base di Morlet reale. Sull'asse delle ascisse abbiamo il tempo (secondi) e sull'asse delle ordinate la pseudo-frequency (Hz).

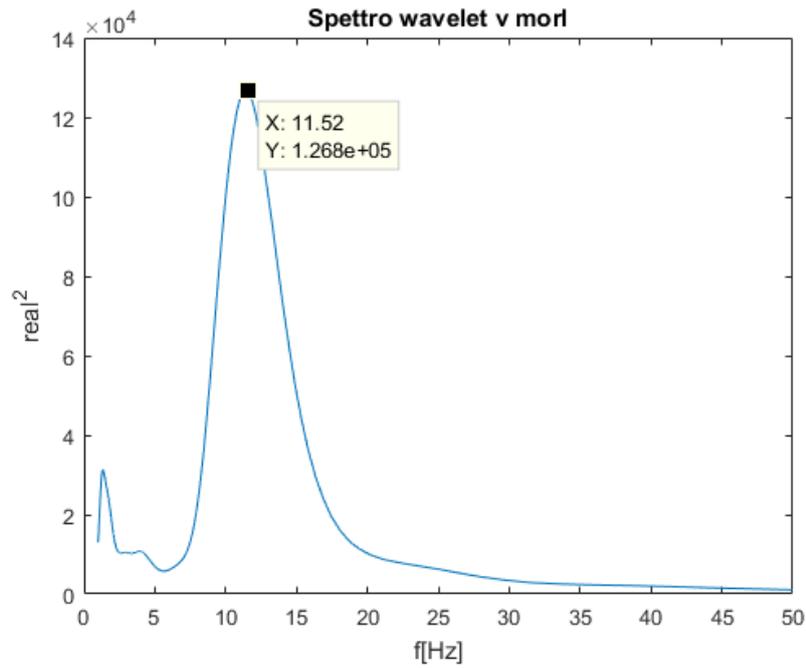


Figura 71. Spettro Wavelet ottenuto mediando lungo l'asse temporale la parte reale dei coefficienti della trasformata Wavelet elevati al quadrato delle fluttuazioni della componente verticale della velocità v' ottenuta con la base di Morlet.

Come per la componente streamwise u' , la Morlet reale riesce a cogliere solo la frequenza dominante. Passiamo all'analisi con la base cmor3-3.

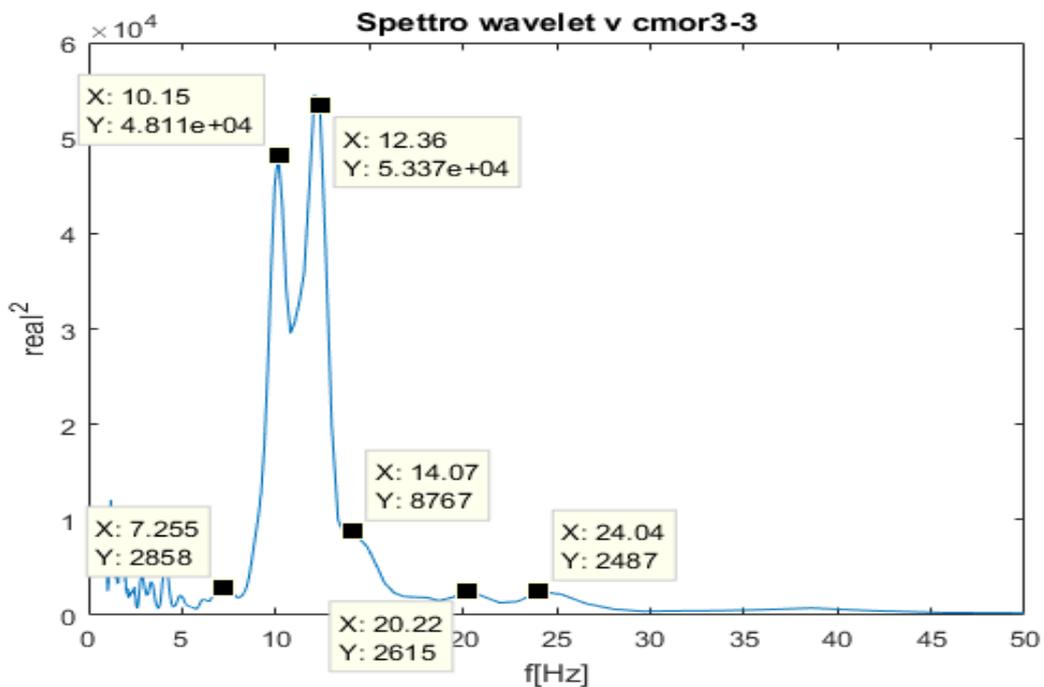


Figura 72. Spettro Wavelet ottenuto mediando lungo l'asse temporale la parte reale dei coefficienti della trasformata Wavelet elevati al quadrato delle fluttuazioni della componente verticale della velocità v' ottenuta con la base di Morlet complessa cmor3-3.

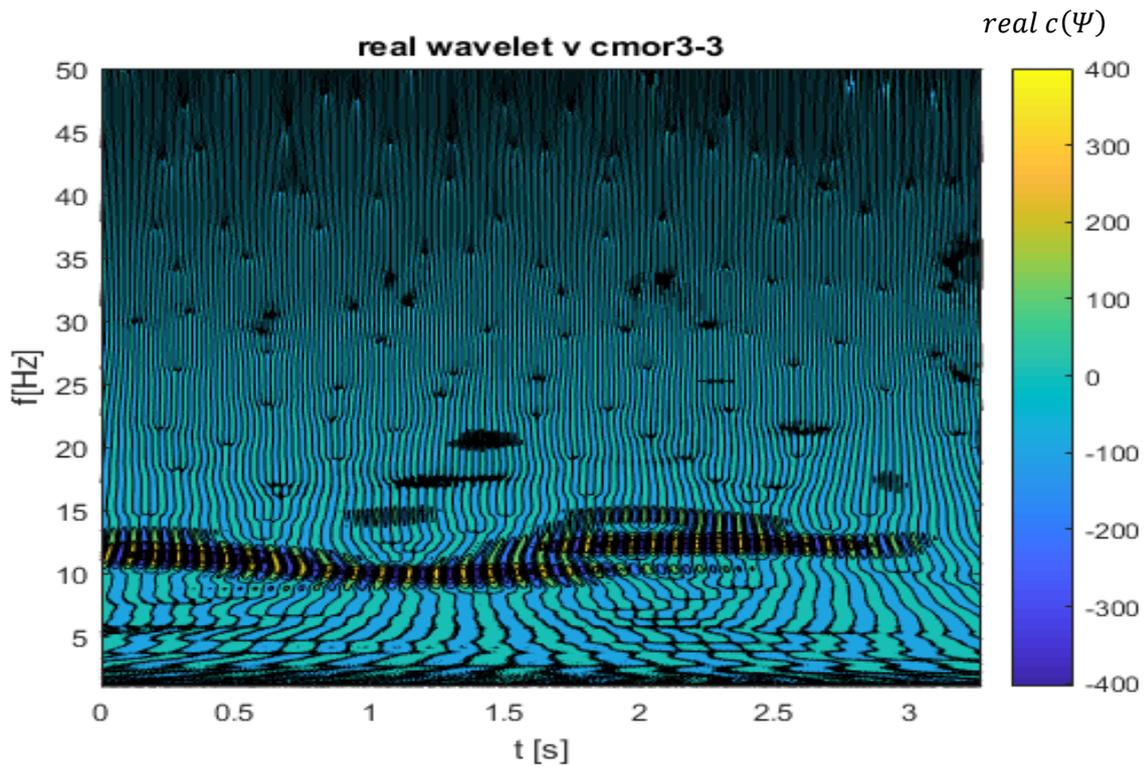


Figura 73. Parte reale dei coefficienti della trasformata Wavelet delle fluttuazioni della componente verticale della velocità v' ottenuta con la base di Morlet complessa cmor3-3. Sull'asse delle ascisse abbiamo il tempo (secondi) e sull'asse delle ordinate la pseudo-frequency (Hz).

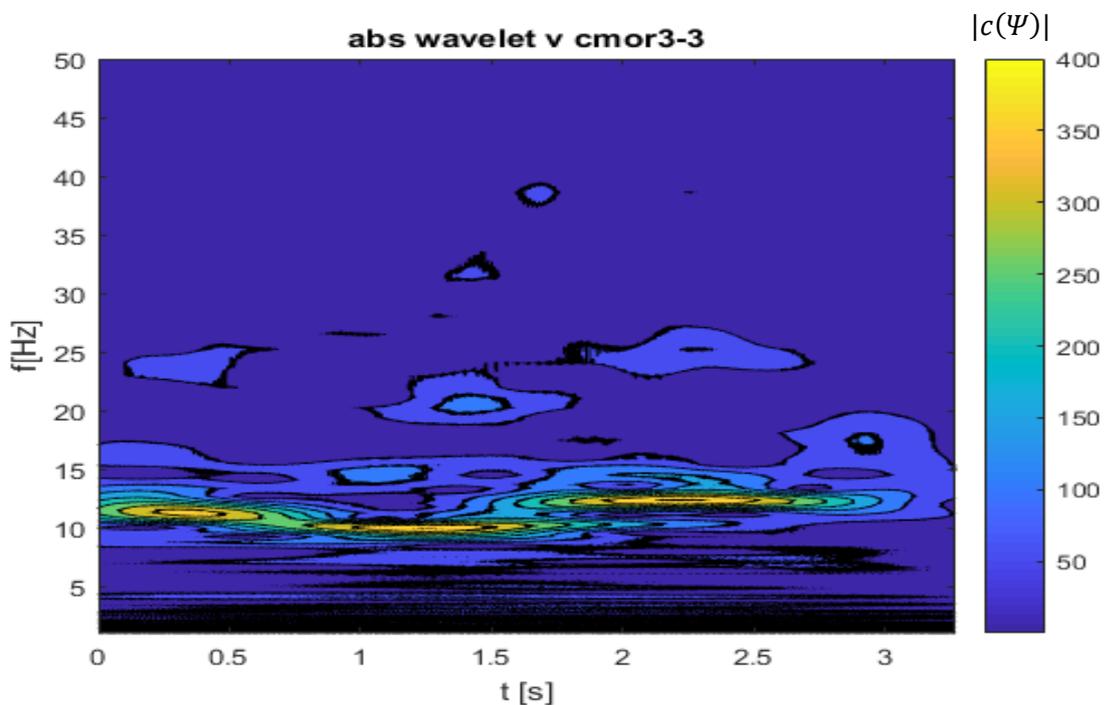


Figura 74. Modulo dei coefficienti della trasformata Wavelet delle fluttuazioni della componente verticale della velocità v' calcolata per i primi 1024 campioni e ottenuta con la base di Morlet complessa cmor3-3. Sull'asse delle ascisse abbiamo il tempo (secondi) e sull'asse delle ordinate la pseudo-frequency (Hz).

Osservando la mappa wavelet (figura 73) ottenuta con tutti i campioni si nota come la componente v' oscilli intorno ad un valore medio. Questo vuol dire che oltre alla frequenza modulante f_b anche la frequenza dominante f_a è soggetta ad una modulazione in frequenza (o fase) da parte di una più bassa frequenza.

Con la cmor3-3 si osservano nello spettro (figura 72) la frequenza dominante f_a , compresa tra 10.15 Hz e 12.36 Hz, i due sidepeaks $f_+ = 14.07$ Hz e $f_- = 7.255$ Hz, la prima armonica della frequenza dominante $2f_a = 24.04$ Hz ed il suo sidepeak sinistro $f_{2-} = 20.22$ Hz.

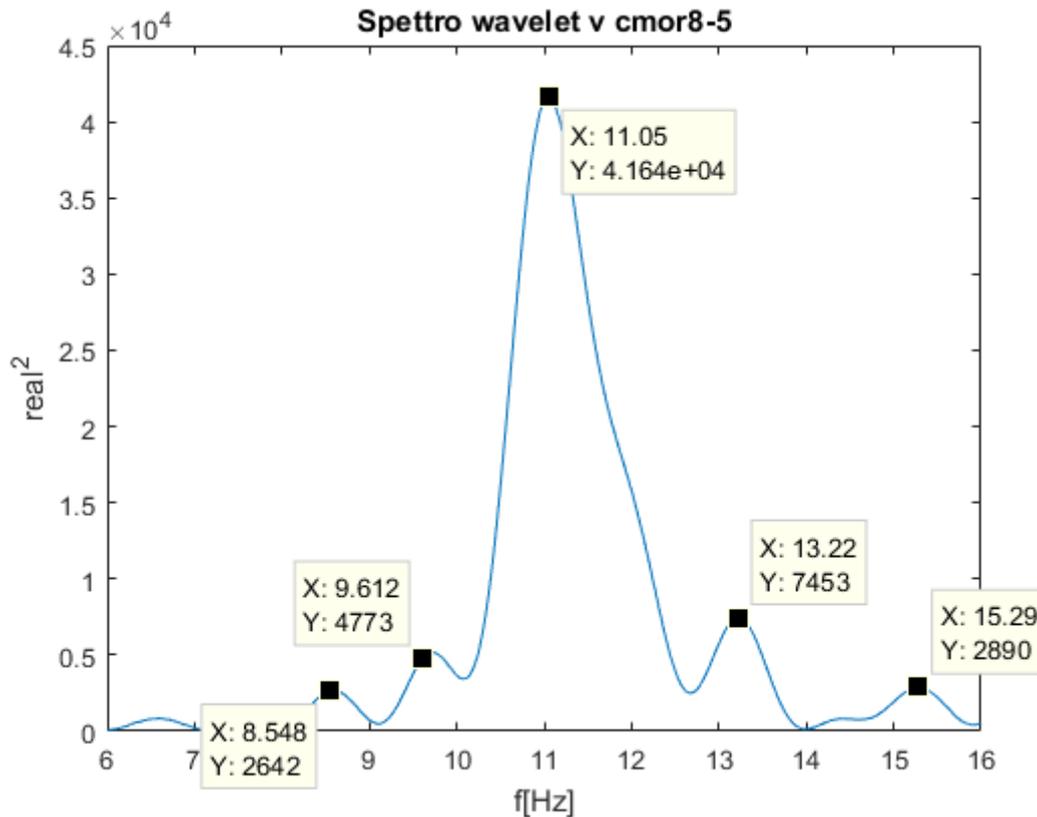


Figura 75. Spettro Wavelet ottenuto mediando lungo l'asse temporale la parte reale dei coefficienti della trasformata Wavelet elevati al quadrato delle fluttuazioni della componente verticale della velocità v' ottenuta con la base di Morlet complessa cmor8-5.

Dallo spettro e dalle mappe wavelet (figura 75-76-77), ottenuti con la base cmor8-5 sul range di frequenze [6,16] Hz, si osservano invece la frequenza dominante $f_a = 11.05$ Hz e le due coppie di sidepeaks dovute alla modulazione in ampiezza di due differenti basse frequenze $f_- = 9.612$ Hz e $f_+ = 13.22$ Hz, $f_{--} = 8.548$ Hz e $f_{++} = 15.29$ Hz. Si trova che $f_b = f_+ - f_a = 2.17$ Hz e $f_b = f_a - f_- = 2.5$ Hz. La differenza tra i due valori di f_b è dovuta al fatto che la frequenza dominante e la frequenza modulante oscillano entrambe intorno ad un valore medio a causa della modulazione in frequenza di una bassa frequenza e per andare a convergenza bisognerebbe considerare un numero di campioni sufficientemente elevato.

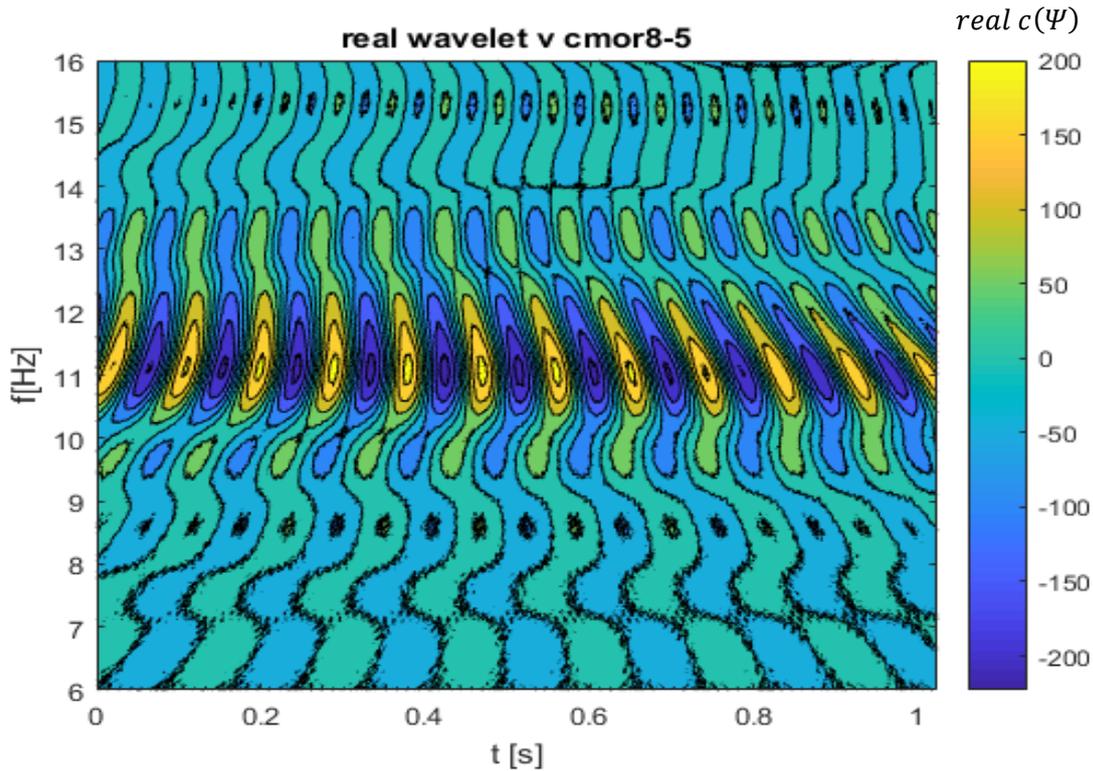


Figura 76. Parte reale dei coefficienti della trasformata Wavelet delle fluttuazioni della componente verticale della velocità v' calcolata per i primi 1024 campioni e ottenuta con la base di Morlet complessa cmor8-5. Il range di frequenze è [6 , 16] Hz.

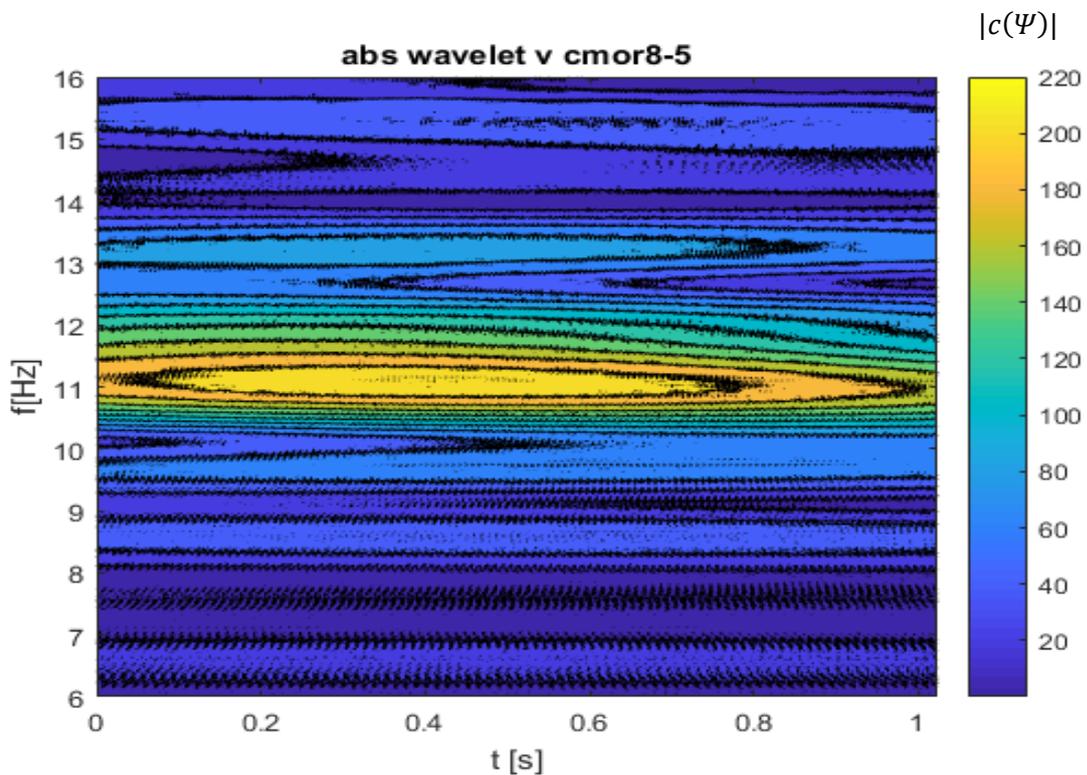


Figura 77. Modulo dei coefficienti della trasformata Wavelet delle fluttuazioni della componente verticale della velocità v' calcolata per i primi 1024 campioni e ottenuta con la base di Morlet complessa cmor8-5. Il range di frequenze è [6 , 16] Hz.

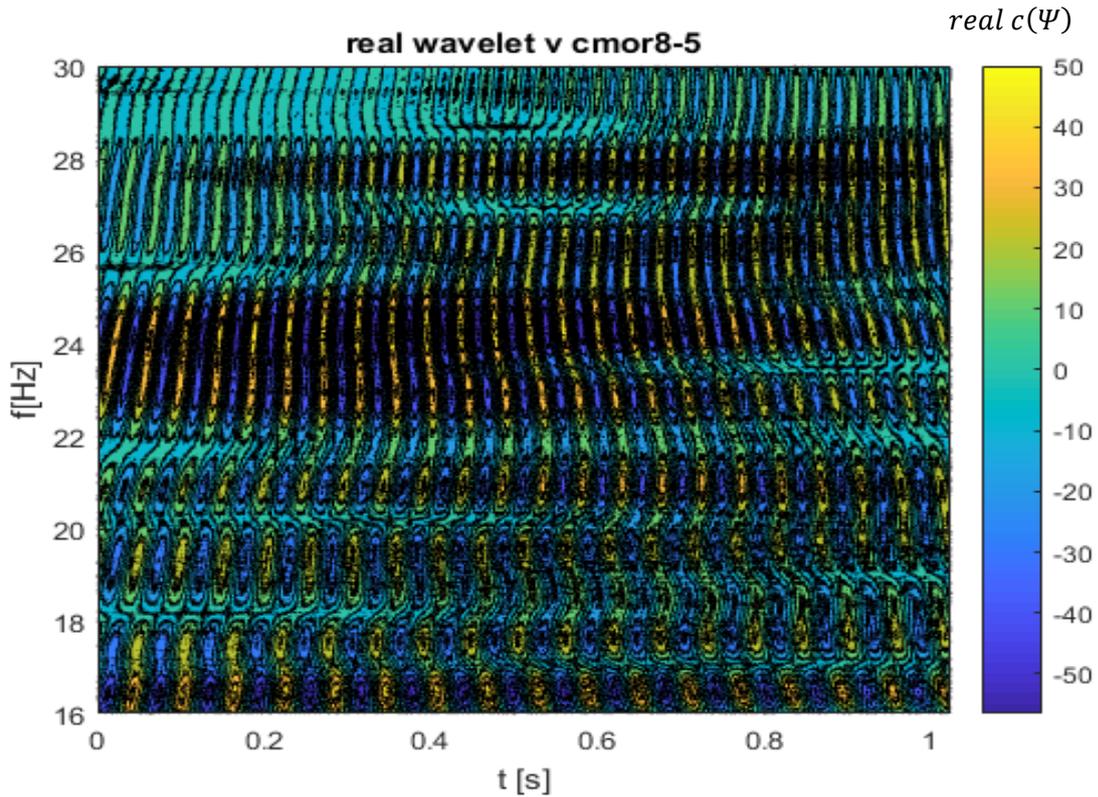


Figura 78. Parte reale dei coefficienti della trasformata Wavelet delle fluttuazioni della componente verticale della velocità v' calcolata per i primi 1024 campioni e ottenuta con la base di Morlet complessa cmor8-5. Il range di frequenze è [16 , 30] Hz.

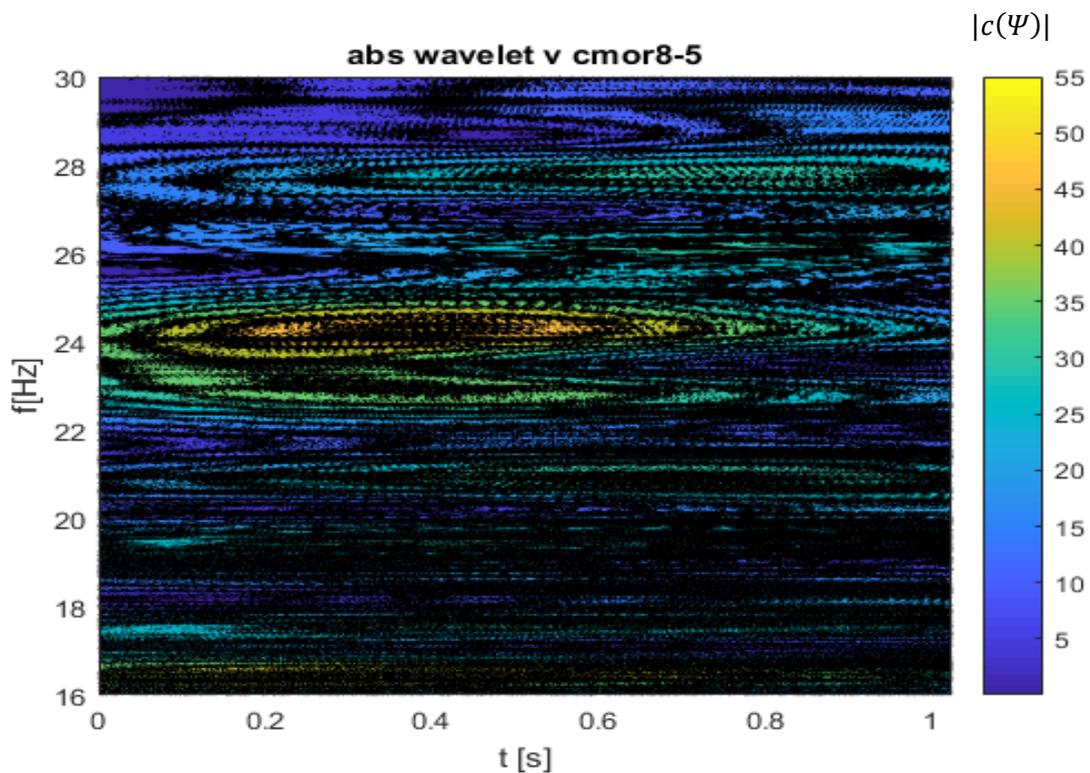


Figura 79. Modulo dei coefficienti della trasformata Wavelet delle fluttuazioni della componente verticale della velocità v' calcolata per i primi 1024 campioni e ottenuta con la base di Morlet complessa cmor8-5. Il range di frequenze è [16 , 30] Hz.

L'analisi wavelet nel range di frequenze [16 , 30] Hz risulta molto rumorosa come si osserva dalla mappa wavelet (figura 78). L'effetto della modulazione in frequenza sulla carrier, sommato al fatto che la prima armonica $2f_a$ oscilla con frequenza doppia rispetto alla frequenza dominante f_a , genera un segnale molto rumoroso, come si osserva anche dallo spettro (figura 80).

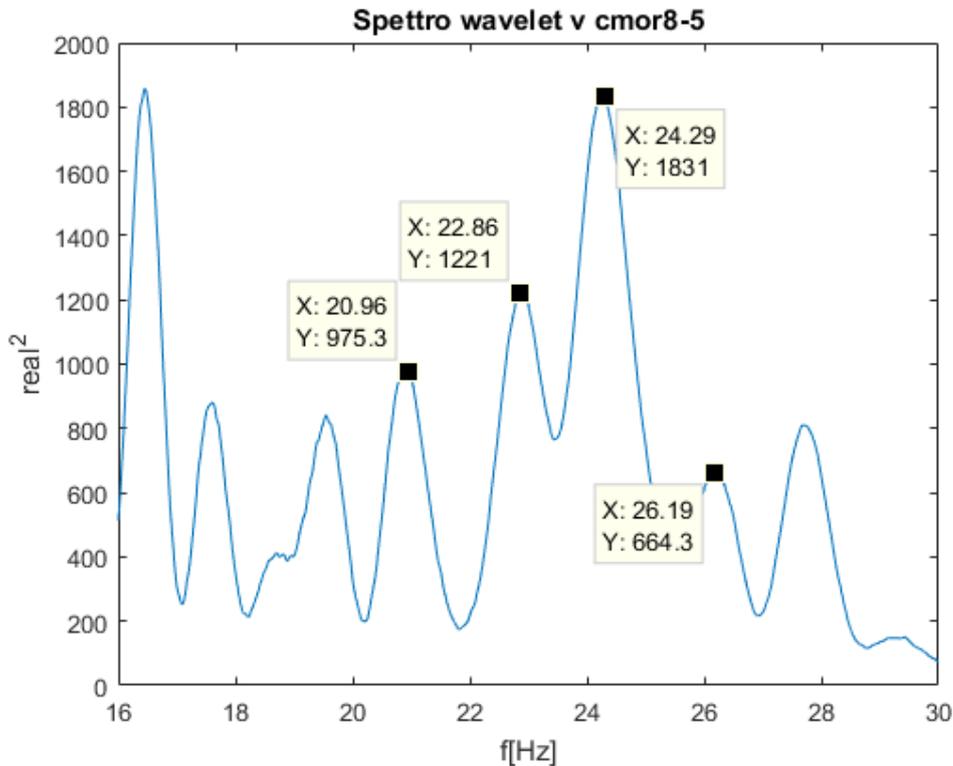


Figura 80. Spettro Wavelet ottenuto mediando lungo l'asse temporale la parte reale dei coefficienti della trasformata Wavelet elevati al quadrato delle fluttuazioni della componente verticale della velocità v' ottenuta con la base di Morlet complessa cmor8-5.

Nello spettro (figura 80) osserviamo due picchi con energia massima dovuti all'oscillazione della prima armonica $2f_a$. Considerando un valore medio tra i due picchi otteniamo che la prima armonica è pari a $2f_a = \frac{22.86+24.29}{2} = 23.58 \text{ Hz}$. Il sidepeak sinistro è pari a $f_{2-} = 20.96 \text{ Hz}$, mentre il sidepeak destro è pari a $f_{2+} = 26.19 \text{ Hz}$. La frequenza modulante risulta pari a $f_b = f_{2+} - 2f_a = 2.61 \text{ Hz} \approx 2f_a - f_{2-} = 2.62 \text{ Hz}$. Il valore della modulante f_b è molto vicino a quello trovato per la prima armonica per la componente streamwise delle fluttuazioni di velocità u' e pari a $f_b = 2.71 \text{ Hz}$.

L'analisi wavelet centrata sulla seconda armonica $3f_a$ (figura 81-82) nel range di frequenze [30,45] Hz, risulta meno rumorosa di quella prima armonica $2f_a$, a causa della minore energia presente a queste frequenze. Dalla mappa wavelet si osservano vari energy holes come osservato precedentemente per la componente u' . In questo range di frequenze si ha quindi una continua sovr modulazione della frequenza f_b sulle varie carrier ed i sidepeaks generati hanno energia superiore alla carrier stessa.

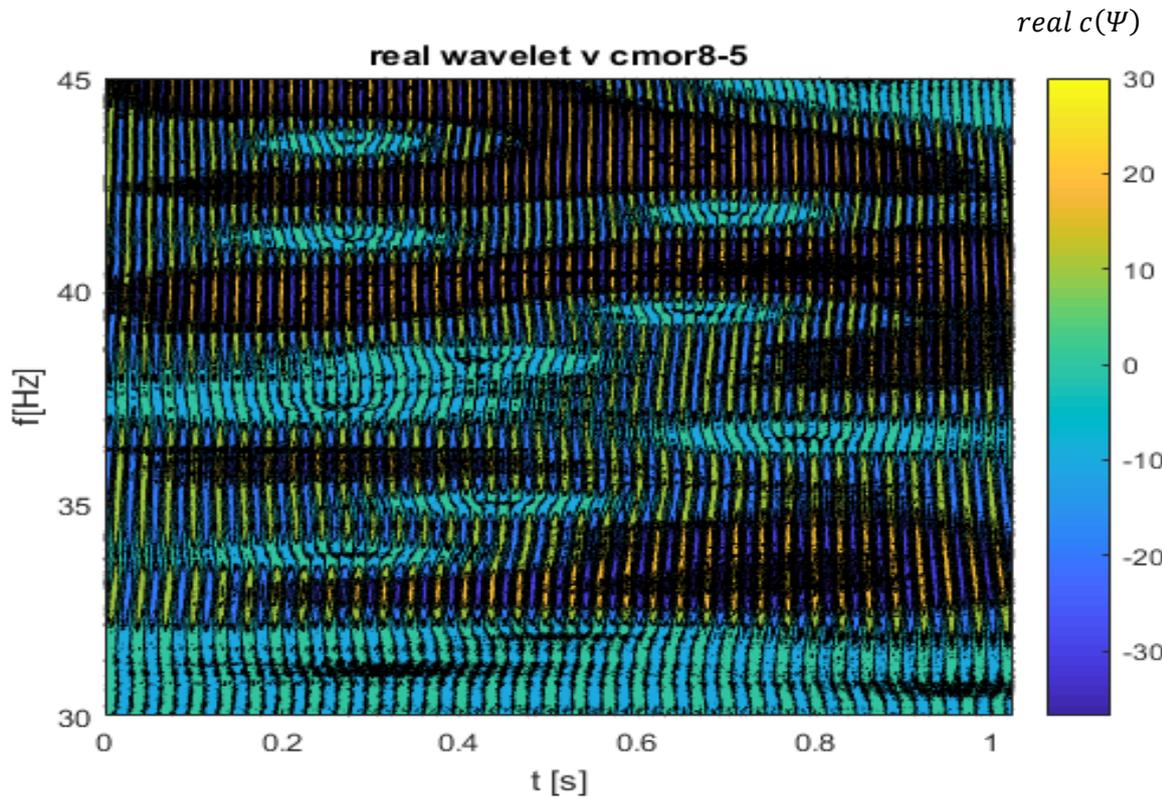


Figura 81. Parte reale dei coefficienti della trasformata Wavelet delle fluttuazioni della componente verticale della velocità v' calcolata per i primi 1024 campioni e ottenuta con la base di Morlet complessa cmor8-5. Il range di frequenze è [30 , 45] Hz.

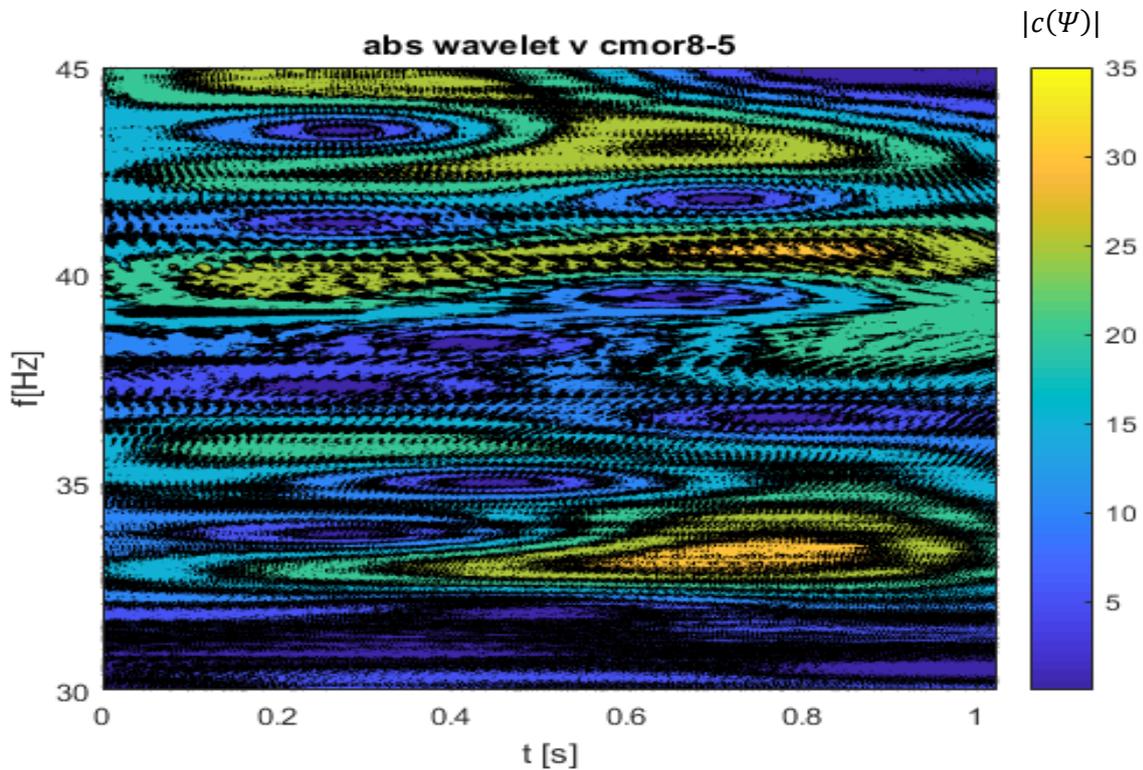


Figura 82. Modulo dei coefficienti della trasformata Wavelet delle fluttuazioni della componente verticale della velocità v' calcolata per i primi 1024 campioni e ottenuta con la base di Morlet complessa cmor8-5. Il range di frequenze è [30 , 45] Hz.

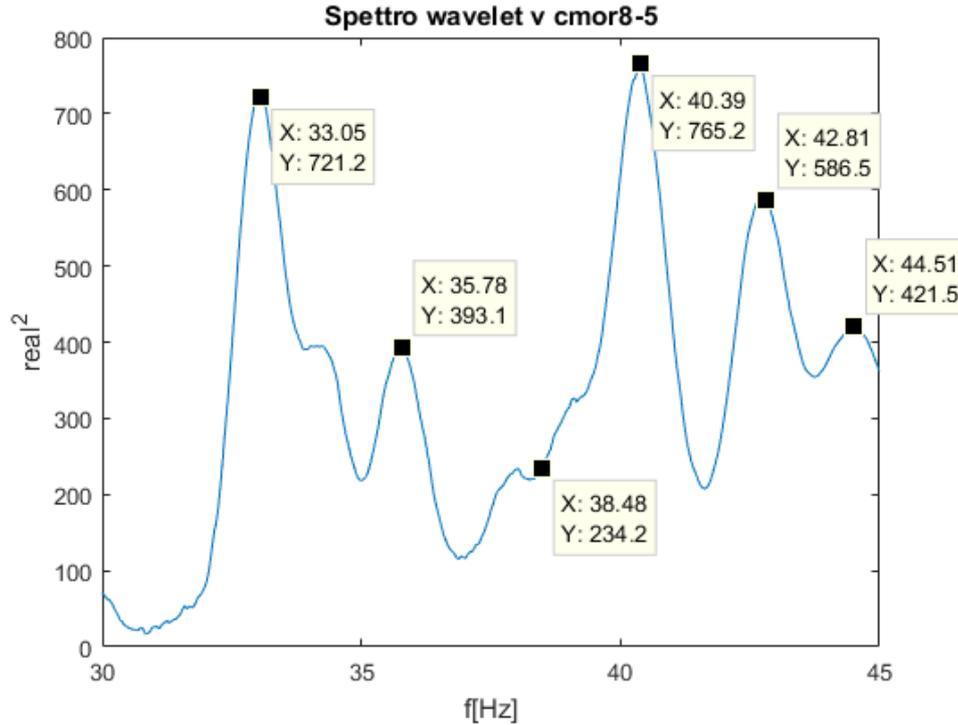


Figura 83. Spettro Wavelet ottenuto mediando lungo l'asse temporale la parte reale dei coefficienti della trasformata Wavelet elevati al quadrato delle fluttuazioni della componente verticale della velocità v' ottenuta con la base di Morlet complessa cmor8-5.

Nello spettro (figura 83) identifichiamo con $3f_a = 35.78 \text{ Hz}$ la seconda armonica della frequenza dominante, e con $f_{3-} = 33.05 \text{ Hz}$ e $f_{3+} = 38.48 \text{ Hz}$ i due sidepeaks. Il sidepeak destro f_{3+} non è facilmente distinguibile dal picco adiacente a frequenza 40.39 Hz , dovuto a qualche ulteriore modulazione in ampiezza. Il fatto che i due sidepeaks abbiano energia molto differente è legato al numero di campioni limitato. Considerando tuttavia questi valori come seconda armonica e sidepeaks della seconda armonica, ricaviamo che la modulante è pari $f_b = f_{3+} - 3f_a = 2.7 \text{ Hz} \approx 3f_a - f_{3-} = 2.73 \text{ Hz}$. I sidepeaks sono equidistanti dalla seconda armonica, ma la frequenza f_b della modulante non è aumentata rispetto a quella calcolata per la prima armonica. Ci aspettiamo quindi che ci sia un errore dovuto all'oscillazione della seconda armonica e al numero di campioni limitato.

4.3 Modulazione ed energy holes

All'interno del flusso sono presenti delle carrier waves che trasportano energia a delle determinate frequenze: una dominante f_a e le sue armoniche nf_a ($n = 2,3,4 \dots$). Osservando lo spettro di Fourier a queste frequenze corrispondono proprio i picchi di energia. Nello spettro si rilevano inoltre altri picchi f_+ ed f_- , equidistanti dalle varie carrier waves e frutto della

modulazione di una più bassa frequenza f_b con quella dominante. Questi picchi sono stati osservati anche da Basley *et al.* (2011) nella loro analisi.

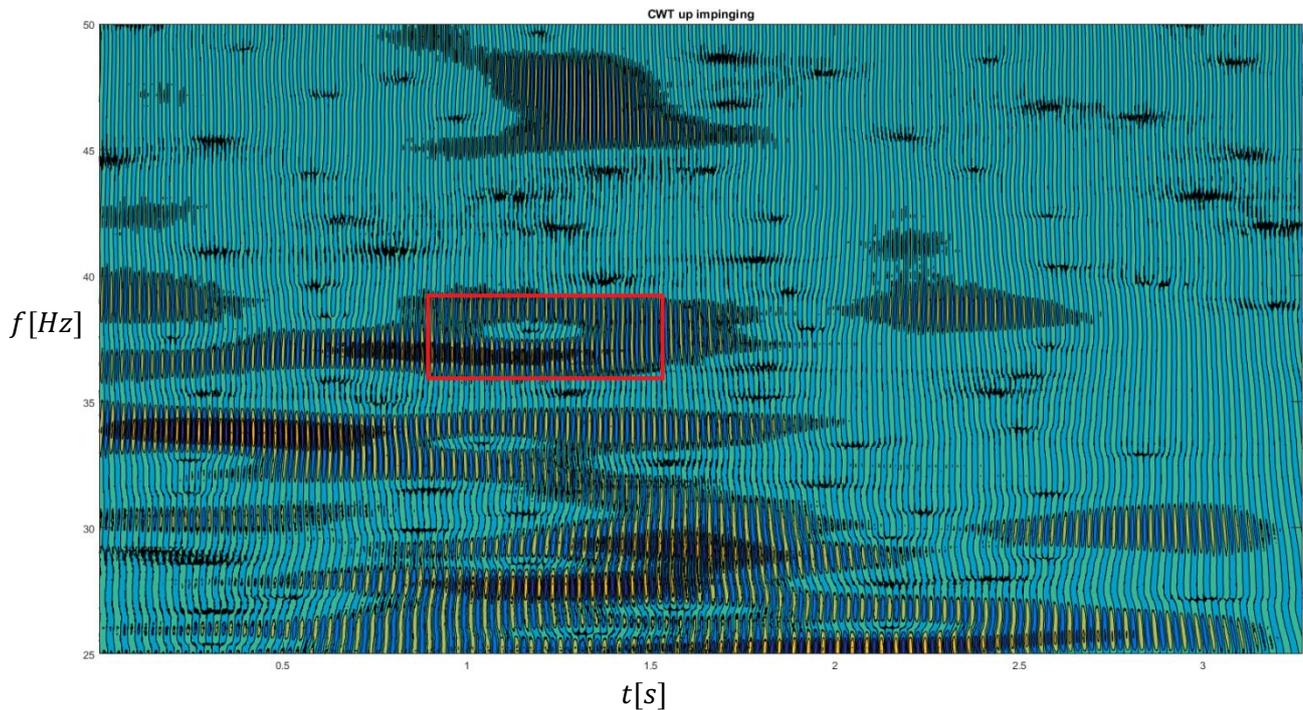


Figura 84. Mappa wavelet tempo-frequenza della distribuzione di energia della componente streamwise fluttuante della velocità u' ottenuta con una base wavelet cmor8-5

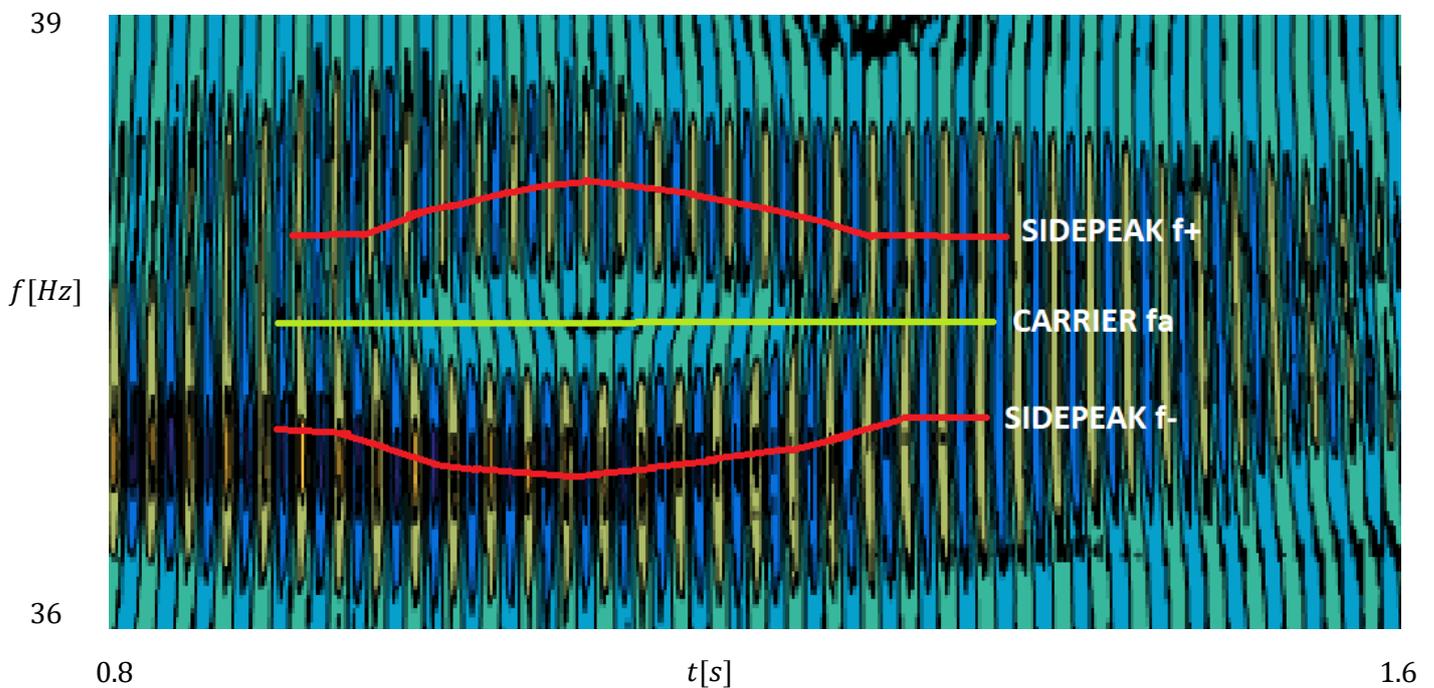


Figura 85. Ingrandimento della zona rossa della figura (84) di un energy hole ricavato dalla Mappa wavelet tempo-frequenza della distribuzione di energia della componente streamwise fluttuante della velocità u' ottenuta con una base wavelet cmor8-5

Utilizzando le trasformate wavelet si osserva che a causa della modulazione, è presente energia sulle frequenze adiacenti alla carrier f_+ ed f_- . A loro volta la f_+ e la f_- vengono modulate in ampiezza e viene trasferita energia dalla modulante alle loro frequenze adiacenti, generando nuove carrier e nuovi sidepeaks di minore energia. Abbiamo osservato grazie all'analisi wavelet, che permette di vedere come varia l'energia ad una data frequenza al passare del tempo, che la modulazione non avviene in modo costante. Secondo noi il fenomeno avviene quando la carrier considerata diventa satura, cioè quando raggiunge un determinato livello di energia e il rapporto tra l'energia della modulante e quella della carrier stessa risulta favorevole.

Alle più alte frequenze, dove l'energia è minore, è possibile osservare nella mappa tempo-frequenza delle zone ellittiche, in cui l'energia al centro è molto bassa ed è massima sul bordo (energy holes), che si formano a causa della modulazione. Il fenomeno è frutto di due tipi di modulazione che lavorano contemporaneamente: una modulazione in frequenza di una modulante a frequenza $f_{bm} < f_b$ che agisce sulla modulante a frequenza f_b ed una sovramodulazione in ampiezza della f_b sulla carrier considerata.

Nella modulazione in frequenza una modulante di bassa frequenza f_1 va a modulare una carrier f_b facendone variare la frequenza istantanea. Ad ogni istante la frequenza della portante f_b varierà con una legge sinusoidale e dipendente da f_1 , ma la sua ampiezza rimarrà costante.

$$y(t) = \cos(2\pi f(t)t), \text{ con } f(t) = F(m(t))$$

dove $m(t) = \cos(2\pi f_1 t)$ è il segnale della modulante. Il segnale modulato $\cos(2\pi f_c t + k_\phi \sin(2\pi f_1 t))$ è anticipato o ritardato rispetto alla portante e $k_\phi \sin(2\pi f_1 t)$ è la deviazione istantanea di fase.

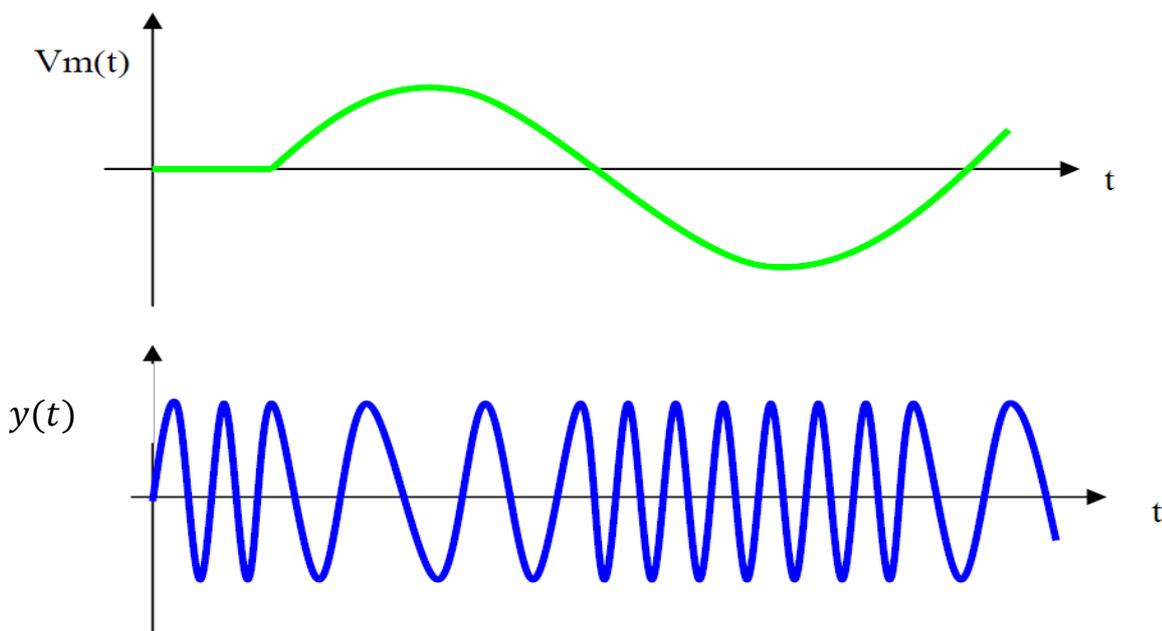


Figura 86. Esempio di modulazione di fase di un segnale sinusoidale con una modulante di più bassa frequenza. $V_m(t)$ è la modulante, $y(t)$ è il segnale modulato (“Modulazioni/Demodulazioni Analogiche”, 2017).

La frequenza istantanea è data da:

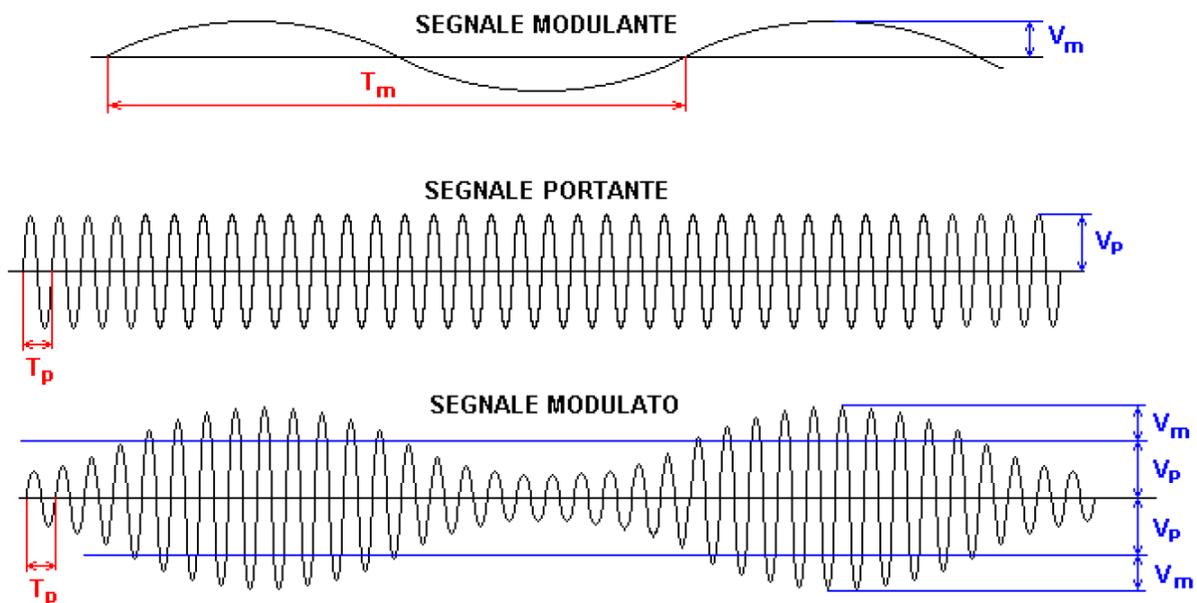
$$f(t) = f_c + k_\phi f_1 \cos(2\pi f_1 t)$$

La frequenza del segnale modulato oscilla quindi intorno al valore medio della frequenza della portante, e la deviazione massima di frequenza è data da $\Delta f_{max} = k_\phi f_1$ dove k_ϕ è detto indice di modulazione di fase. Nel nostro caso abbiamo un segnale di bassa frequenza $f_b = 2.68 \text{ Hz}$ che viene modulato in frequenza; il segnale risultante oscillerà con una frequenza media f_b . Questo segnale è proprio quello che va a modulare in ampiezza la carrier f_a e che genera i sidepeaks f_+ ed f_- .

Nella modulazione in ampiezza un segnale di bassa frequenza f_b modula un segnale portante di più alta frequenza f_a e l'ampiezza del segnale modulato varia con una frequenza pari a quella modulante. L'energia presente sulla modulante a frequenza f_b viene distribuita su due frequenze adiacenti ed equidistanti ad f_a . Il segnale modulato è pari a:

$$y(t) = A_a \cos(2\pi f_a t) + A_b \cos(2\pi f_b t) \cos(2\pi f_a t)$$

$$m = \frac{A_b}{A_a}$$



$$v_m(t) = V_m \cos \omega_m t \quad v_p(t) = V_p \cos \omega_p t$$

Figura 87. Esempio di modulazione in ampiezza di un segnale: l'indice m indica la modulante, l'indice p la portante, $\omega = 2\pi f$ è la pulsazione relativa al segnale considerato (*"Modulazioni/Demodulazioni Analogiche"*, 2017).

m è detto indice di modulazione (in ampiezza) e ci dice se la modulante possiede più energia della carrier, ovvero se l'energia sui sidepeaks sarà minore o maggiore di quella sulla portante stessa; si

parla di sovr modulazione quando l'energia della modulante è superiore a quella della carrier, cioè $m > 1$. Nel caso degli energy holes noi osserviamo un'energia sui sidepeaks molto superiore a quella della carrier e quindi la f_b sta sovr modulando la portante. Inoltre poiché la modulante è a sua volta modulata in frequenza, osserviamo dei sidepeaks con frequenza variabile nel tempo ed una forma ellittica nella mappa dell'energia. Gli energy hoels si riescono ad osservano solo a frequenza più elevate della dominante, dove le carrier hanno un'energia molto minore della modulante.

Si osserva inoltre che al crescere della carrier considerata, gli energy holes hanno una durata sempre più breve, e quindi la modulazione in frequenza avviene sempre più rapidamente, ovvero aumenta la f_1 . Aumenta anche inoltre il valore medio della modulante f_b , che abbiamo ricavato a partire dalla durata temporale di un vari energy holes (tabella 2) .

freq. carrier [Hz]	durata mod. [s]	freq. Modulante [Hz]
25.91	0.443	2.26
26.32	0.439	2.28
26.88	0.413	2.42
27.93	0.556	1.80
28.57	0.347	2.88
32.68	0.426	2.35
33.33	0.327	3.06
33.56	0.426	2.35
36.5	0.363	2.75
37.88	0.29	3.45
38.46	0.31	3.23
38.46	0.301	3.32

Tabella 2. Frequenza delle modulanti ricavata per diverse carrier waves.

Capitolo 5 Modello simulante il flusso di cavità

In questo capitolo mostreremo un modello che sintetizza le principali caratteristiche del flusso di cavità nella zona di impinging e compareremo i risultati ottenuti con il modello e con il flusso reale. Si vedrà che all'interno del flusso di cavità sono presenti vari tipi di modulazione in ampiezza e in frequenza che lavorano contemporaneamente. Il fatto che la modulante non sia unica porta inoltre ad avere uno spettro e delle mappe di energia rumorose. Si mostrerà inoltre il caso particolare in cui la modulante in ampiezza f_b è una subarmonica della frequenza dominante f_a , in cui si genera tramite la modulazione un loop d'energia tra la frequenza dominante e le sue subarmoniche. Questo loop d'energia consente alla cavità di lavorare in condizioni di autosostentamento: risulta quindi molto importante il rapporto tra la frequenza della modulante e la frequenza dominante f_a/f_b , che verrà trattato alla fine del capitolo.

Supponiamo di avere inizialmente nel flusso solo due segnali sinusoidali sinusoidi puri $A \cdot \cos(2\pi f t)$ di frequenza $f_a = 10.75 \text{ Hz}$ e $f_b = 2.4 \text{ Hz}$ e entrambe di ampiezza unitaria $A_a = 1$ e $A_b = 1$. Il segnale risultante sarà dato dalla somma delle due onde, in quanto sono indipendenti tra loro:

$$y(t) = A_a \cos(2\pi f_a t) + A_b \cos(2\pi f_b t)$$

Supponiamo di raccogliere i dati con una frequenza di campionamento pari a $F = 1000 \text{ Hz}$ per $t = 1.024 \text{ s}$ (1024 campioni) per lavorare con le stesse condizioni con cui abbiamo ottenuto i dati del flusso reale. Svolgendo un'analisi spettrale del segnale si troveranno due picchi di pari ampiezza sulle due frequenze f_a e f_b . Nella mappa Wavelet osserverò due strutture modali proprio su queste frequenze.

I picchi che si osservano nello spettro (figura 89) non sono esattamente sulle due frequenze attese f_a e f_b , ma questo è dovuto al numero di campioni limitato. Per conferma ricalcoliamo lo spettro utilizzando un numero di campioni molto elevato $L = 2 * 10^5$.

Con un numero di campioni più elevato (figura 90) un picco risulta esattamente su $f_b = 2.4 \text{ Hz}$, mentre il secondo picco è ancora leggermente scostato dal valore atteso, ma questo è dovuto alla risoluzione in frequenza.

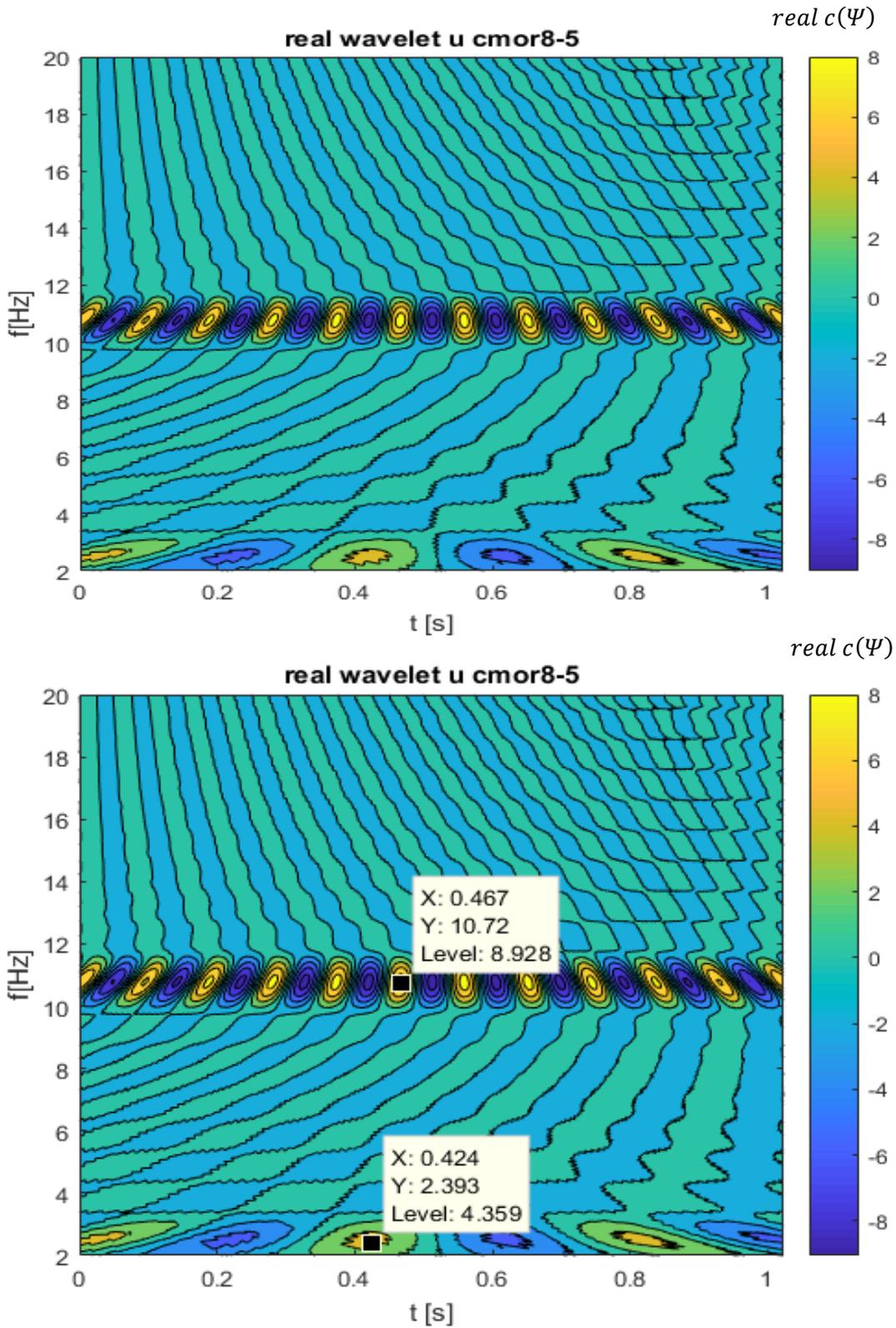


Figura 88. Parte reale dei coefficienti della trasformata Wavelet del segnale sintetizzato calcolata per i primi 1024 campioni e ottenuta con la base di Morlet complessa cmor8-5. In alto è mostrata la mappa ottenuta senza datatips ed in basso è mostrata la stessa mappa con i datatips relativi alle frequenze f_a e f_b delle due sinusoidi in input.

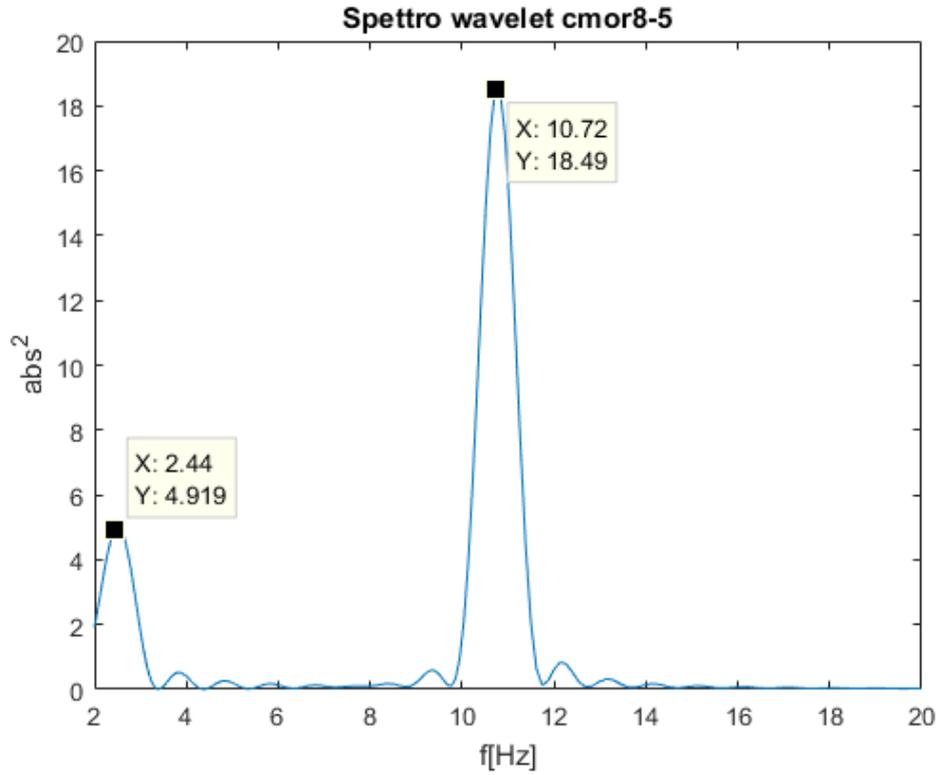


Figura 89. Spettro Wavelet del segnale sintetizzato ottenuto mediando lungo l'asse temporale il modulo dei coefficienti della trasformata Wavelet ottenuta con la base di Morlet complessa cmor8-5.

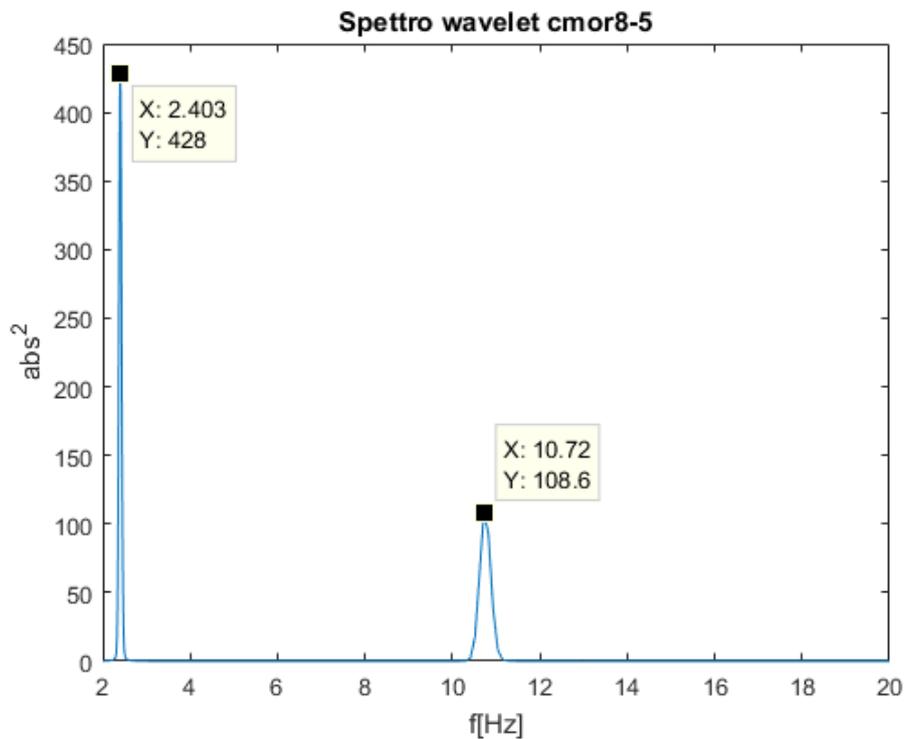


Figura 90. Spettro Wavelet del segnale sintetizzato ottenuto mediando lungo l'asse temporale il modulo dei coefficienti della trasformata Wavelet ottenuta con la base di Morlet complessa cmor8-5. Il numero di campioni utilizzato è pari a $L = 2 * 10^5$.

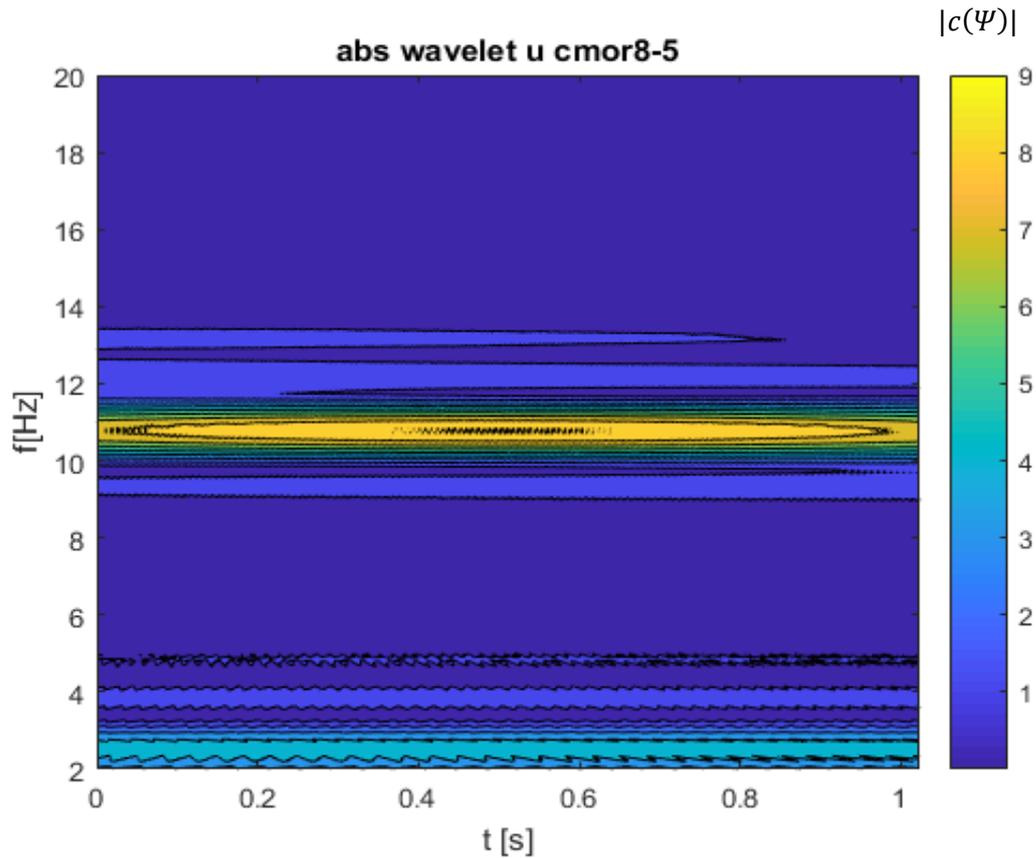


Figura 91. Modulo dei coefficienti della trasformata Wavelet del segnale sintetizzato calcolata per i primi 1024 campioni e ottenuta con la base di Morlet complessa cmor8-5. Sull'asse delle ascisse abbiamo il tempo (secondi) e sull'asse delle ordinate la pseudo-frequency (Hz). Il range di frequenze è [2 , 20] Hz.

Supponiamo ora che il segnale di frequenza f_b moduli in ampiezza il segnale di frequenza f_a . Il segnale risultante è dato dalla somma del segnale portante di frequenza f_a , più il prodotto tra il segnale modulante e quello portante:

$$y(t) = A_a \cos(2\pi f_a t) + A_b \cos(2\pi f_b t) \cos(2\pi f_a t)$$

Introducendo il rapporto tra l'ampiezza della modulante e della portante $m = \frac{A_b}{A_a}$ detto indice di modulazione, il segnale risultante può essere riscritto come:

$$y(t) = A_a \cos(2\pi f_a t) + m A_a \cos(2\pi f_b t) \cos(2\pi f_a t) = A_a \cos(2\pi f_a t) * [1 + m \cos(2\pi f_b t)]$$

Calcolando lo spettro di questo segnale si osservano tre picchi (figura 95): il primo picco è relativo alla frequenza portante f_a , mentre gli altri due picchi sono equidistanti dal picco centrale, sono detti sidepeaks e si trovano sulle frequenze $f_- = f_a - f_b = 8.35 \text{ Hz}$ e $f_+ = f_a + f_b = 13.15 \text{ Hz}$. Non si osserva più un picco sulla frequenza modulante f_b in quanto nella modulazione in ampiezza l'energia della modulante viene suddivisa equamente sui due sidepeaks.

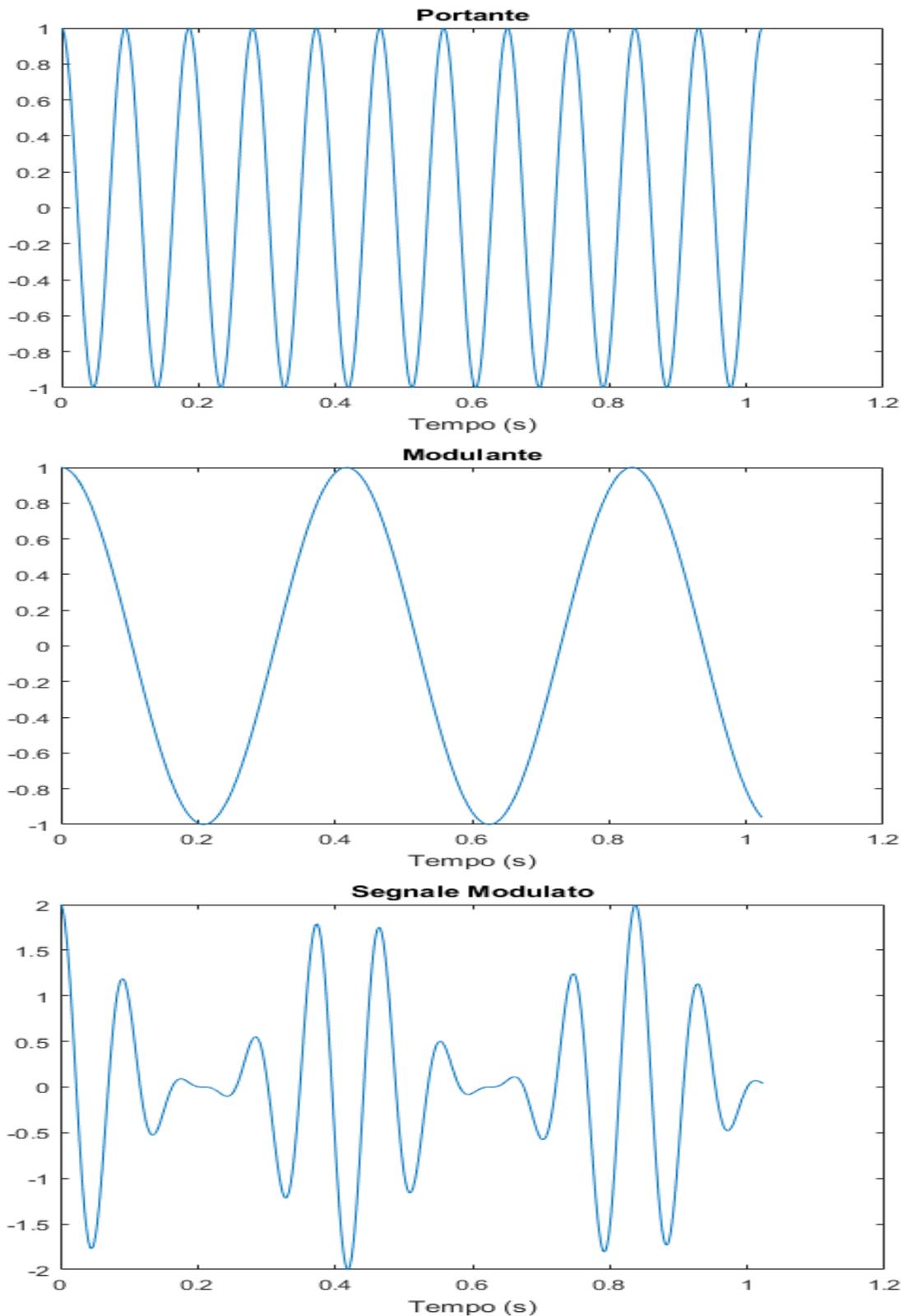


Figura 92. Segnale portante sinusoidale di frequenza $f_a = 10.75 \text{ Hz}$ e ampiezza $A_a = 1$ modulato in ampiezza da un segnale modulante sinusoidale di frequenza $f_b = 2.4 \text{ Hz}$ e ampiezza $A_b = 1$. Il segnale modulato ha un'ampiezza variabile nel tempo.

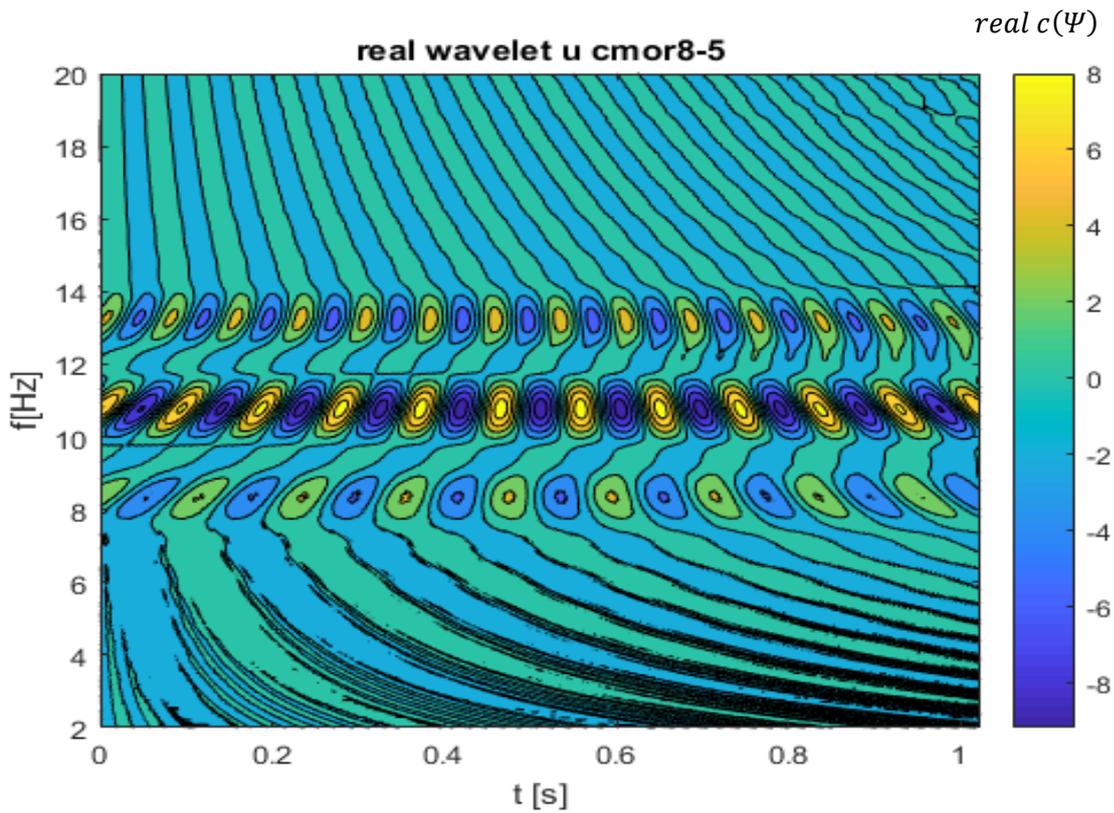


Figura 93. Parte reale dei coefficienti della trasformata Wavelet del segnale sintetizzato calcolata per i primi 1024 campioni e ottenuta con la base di Morlet complessa cmor8-5. Sull'asse delle ascisse abbiamo il tempo (secondi) e sull'asse delle ordinate la pseudo-frequency (Hz). Il range di frequenze è [2 , 20] Hz.

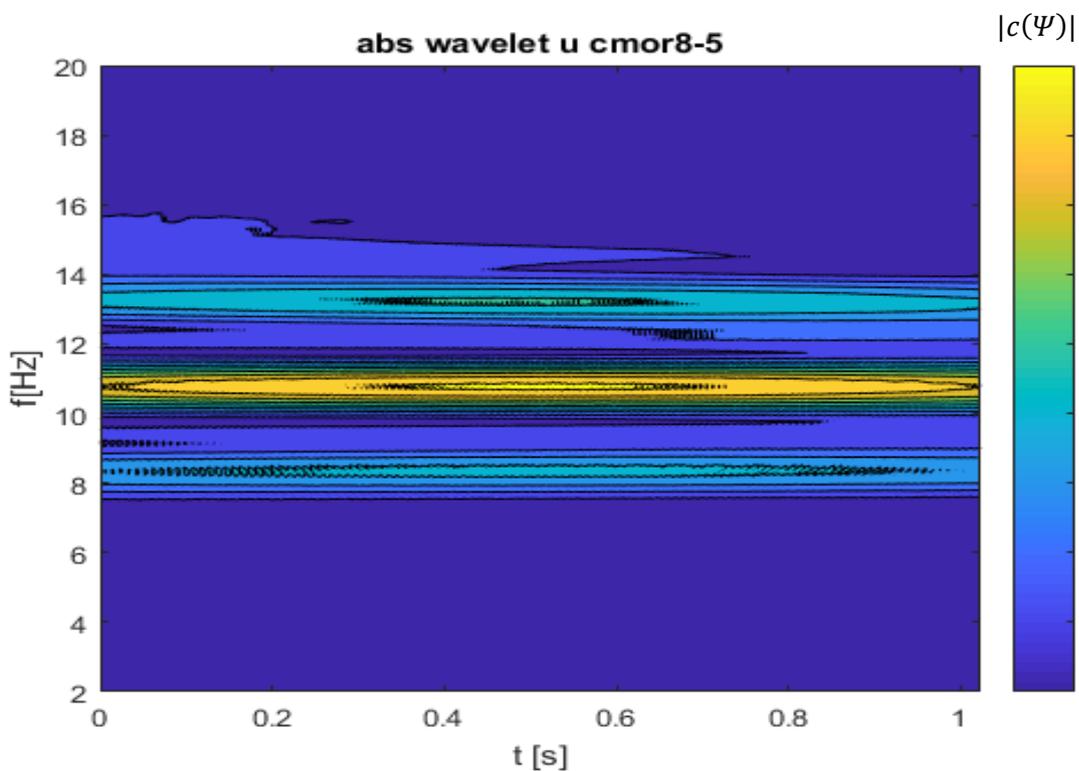


Figura 94. Modulo dei coefficienti della trasformata Wavelet del segnale sintetizzato calcolata per i primi 1024 campioni e ottenuta con la base di Morlet complessa cmor8-5. Il range di frequenze è [2 , 20] Hz.

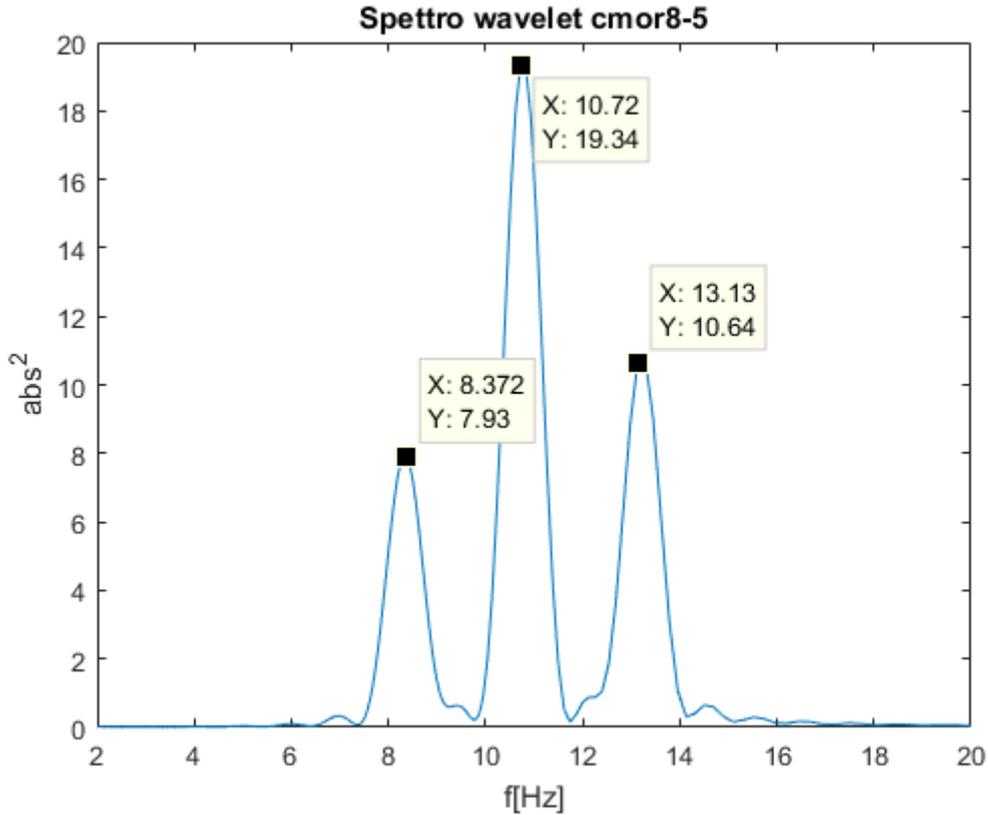


Figura 95. Spettro Wavelet del segnale sintetizzato ottenuto mediando lungo l'asse temporale il modulo dei coefficienti della trasformata Wavelet ottenuta con la base di Morlet complessa cmor8-5.

Il fatto che i picchi non abbiano la stessa ampiezza (figura 95) è dovuto al numero di campioni limitato e al fatto che la trasformata wavelet utilizza la norma L^2 e la quantità osservata nello spettro non è quindi una densità d'energia. Per ottenere la densità d'energia bisognerebbe moltiplicare ogni valore per la radice della scala corrispondente ad ogni frequenza, che dipende dalla base wavelet utilizzata. Infatti la scala s e la frequenza sono legate attraverso la center frequency F_c della base wavelet utilizzata dalla seguente relazione:

$$F = \frac{F_c}{s\Delta t}$$

dove $\Delta t = \frac{1}{F_s}$ è l'inverso della frequenza di campionamento F_s . La scala e la frequenza sono quindi inversamente proporzionali e a frequenze minori corrispondono scale maggiori. L'utilizzo della norma L^2 comporta quindi un difetto di energia sulle basse frequenze e nello spettro il sidepeak sinistro sarà sempre sbilanciato rispetto a quello destro. Mostriamo che moltiplicando per la radice della scala, come definito dalla seguente relazione,

$$E_{L^1} = \sqrt{s} * E_{L^2}$$

il livello del sidepeak sinistro si avvicina a quello del sidepeak destro.

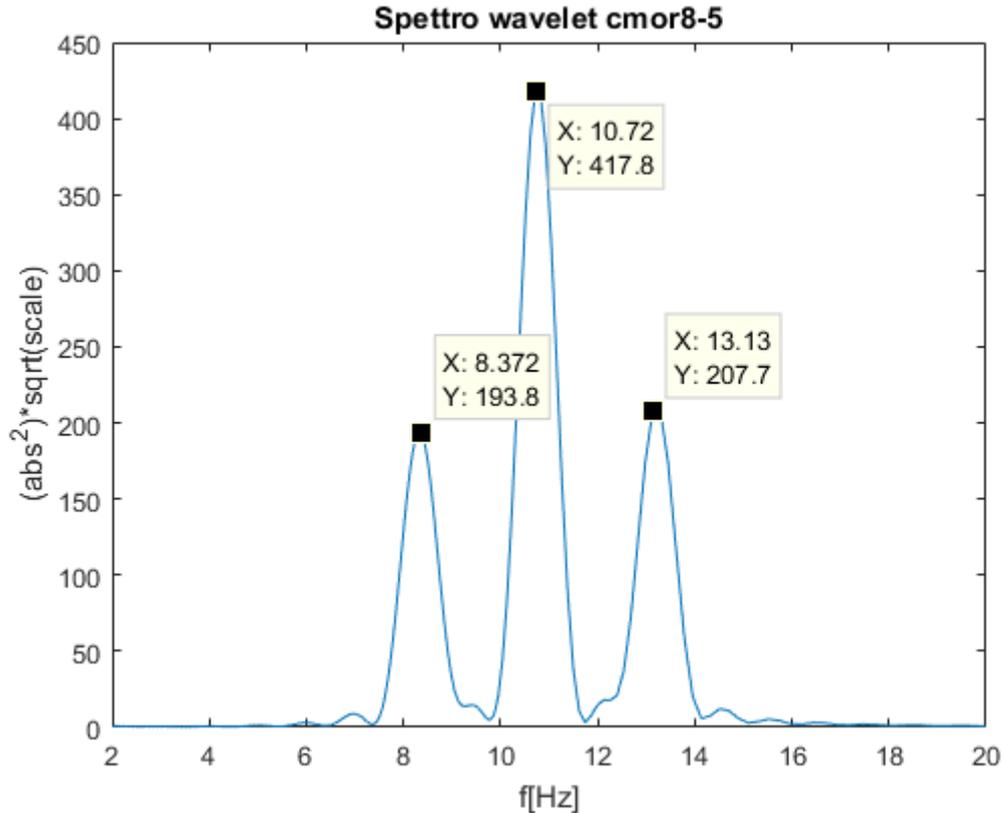


Figura 96. Spettro Wavelet convertito in norma L^1 del segnale sintetizzato ottenuto mediando lungo l'asse temporale il modulo dei coefficienti della trasformata Wavelet ottenuta con la base di Morlet complessa cmor8-5.

Passando in norma L^1 (figura 96), il livello del sidepeak sinistro si è avvicinato di molto a quello del sidepeak destro. La quantità osservata in questo spettro è effettivamente una densità d'energia, e l'energia della modulante f_b viene suddivisa equamente sui due sidepeaks. È ancora presente una piccola differenza d'energia dovuta al numero limitato di campioni considerato, ma è tuttavia trascurabile ai fini dello studio del modello. Inoltre poiché non siamo interessati al livello d'energia, ma alle strutture modali generate tramite la modulazione e a cercare di riprodurre le principali caratteristiche del flusso reale tramite un modello, continueremo ad utilizzare la norma L^2 , consapevoli del fatto che le quantità osservate nello spettro non sono densità d'energia.

Per il flusso reale abbiamo visto che nello spettro si osservano dei picchi relativi alle armoniche della frequenza dominante f_a ($2f_a, 3f_a, \dots, nf_a$); inoltre anche queste armoniche sono a loro volta modulate in ampiezza da una bassa frequenza, e la frequenza di questa modulante cresce con la frequenza della portante considerata. Supponiamo per semplificare il modello che la frequenza della modulante sia costante indipendentemente dalla carrier considerata e che sia proprio pari ad f_b . Consideriamo inoltre come portanti solo la frequenza dominante f_a e la prima e la seconda armonica della frequenza dominante $2f_a$ e $3f_a$ per alleggerire il costo computazionale.

$$\text{seconda armonica frequenza} = 2f_a \quad \text{ampiezza } A_2 = 0.1 \quad x_2(t) = A_2 \cos(2\pi * 2f_a * t)$$

$$\text{terza armonica frequenza} = 3f_a \quad \text{ampiezza } A_3 = 0.01 \quad x_3(t) = A_3 \cos(2\pi * 3f_a * t)$$

Poiché ora abbiamo 3 frequenze portanti, ci saranno tre diversi indici di modulazione e il segnale modulato sarà dato da:

$$y(t) = \sum_{i=1}^3 A_i \cos(2\pi f_i t) * [1 + m_i \cos(2\pi f_b t)]$$

$$m_i = \frac{A_b}{A_i} \quad \text{con } A_i = (A_a, A_2, A_3) \quad f_i = (f_a, 2f_a, 3f_a)$$

Per generare le armoniche della frequenza dominante f_a si può sfruttare la modulazione in ampiezza, supponendo che la frequenza dominante f_a moduli sé stessa: l'energia della modulazione sarà suddivisa tra la frequenza nulla $f_a - f_a = 0$ e la frequenza doppia della dominante $f_a + f_a = 2f_a$. In pratica quando la frequenza f_a satura, è in grado di utilizzare l'energia in eccesso per battere con sé stessa e per generare la prima armonica tramite questa modulazione in ampiezza. Analogamente quando la $2f_a$ raggiunge in certo livello di energia, sarà in grado tramite un'automodulazione in ampiezza di generare la terza armonica $4f_a$; lo stesso discorso potrebbe essere fatto per qualunque armonica pari nf_a ($n = 2, 4, 6 \dots$). La seconda armonica $3f_a$ nasce invece dalla modulazione in ampiezza della frequenza dominante f_a sulla prima armonica $2f_a$: l'energia della modulazione sarà suddivisa tra la frequenza della seconda armonica $3f_a$ e la frequenza dominante stessa f_a ; lo stesso discorso potrebbe essere fatto per le successive armoniche dispari nf_a ($n = 3, 5, 7 \dots$). Si genera quindi un loop di energia tra la frequenza dominante e le sue armoniche.

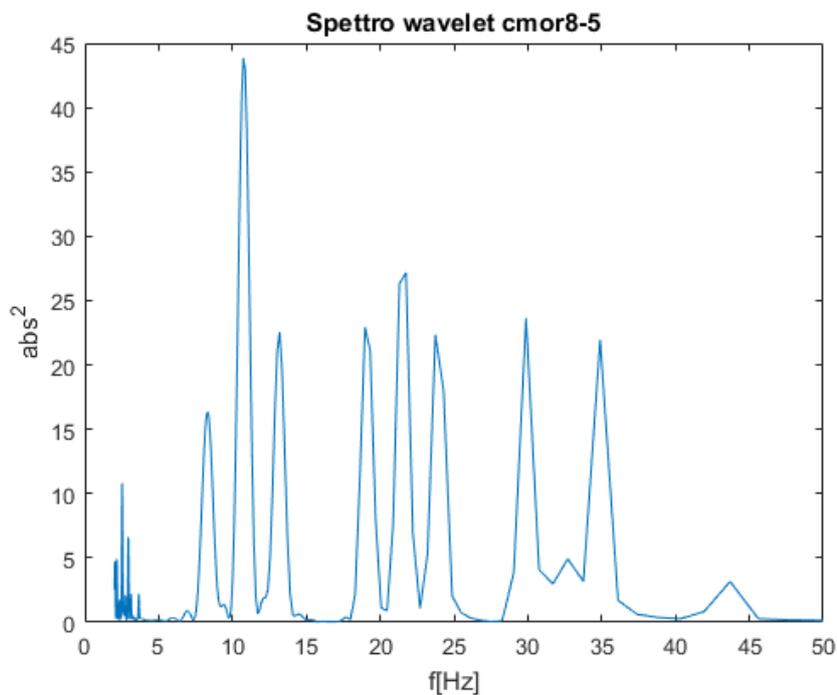


Figura 97. Spettro Wavelet del segnale sintetizzato ottenuto mediando lungo l'asse temporale il modulo dei coefficienti della trasformata Wavelet ottenuta con la base di Morlet complessa cmor8-5.

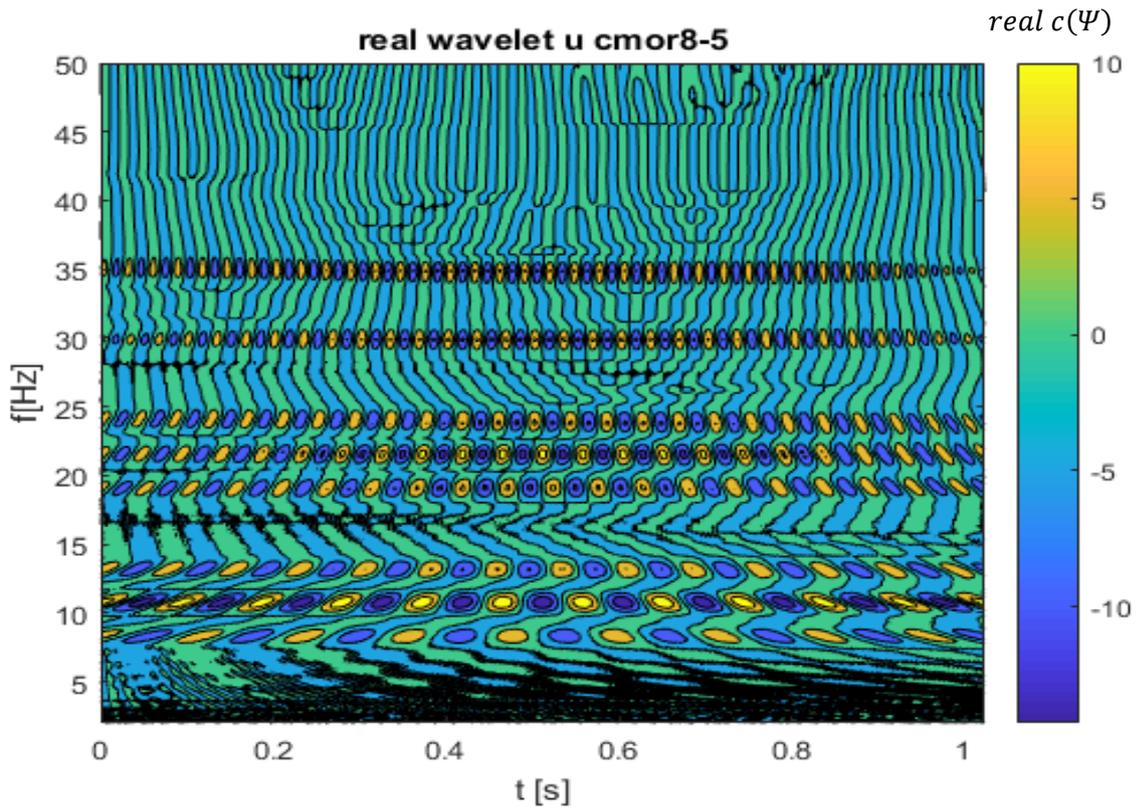


Figura 98. Parte reale dei coefficienti della trasformata Wavelet del segnale sintetizzato calcolata per i primi 1024 campioni e ottenuta con la base di Morlet complessa cmor8-5. Il range di frequenze è [2 , 50] Hz.

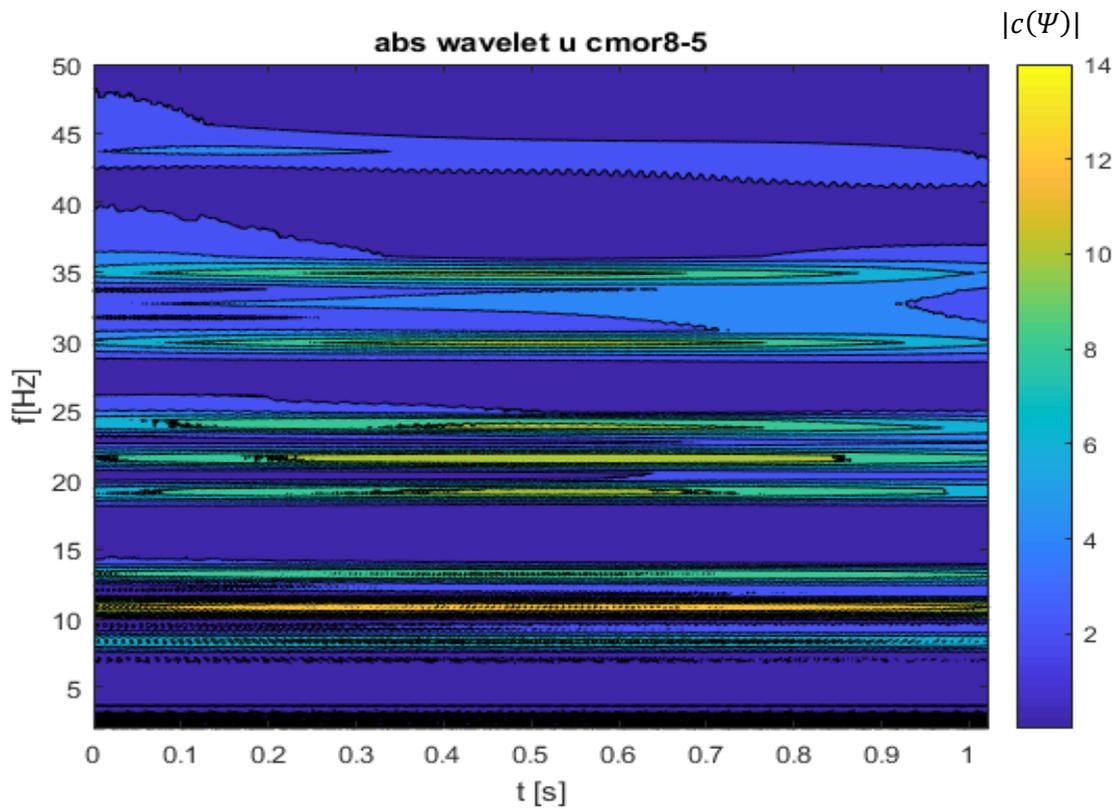


Figura 99. Modulo dei coefficienti della trasformata Wavelet del segnale sintetizzato calcolata per i primi 1024 campioni e ottenuta con la base di Morlet complessa cmor8-5. Il range di frequenze è [2 , 50] Hz.

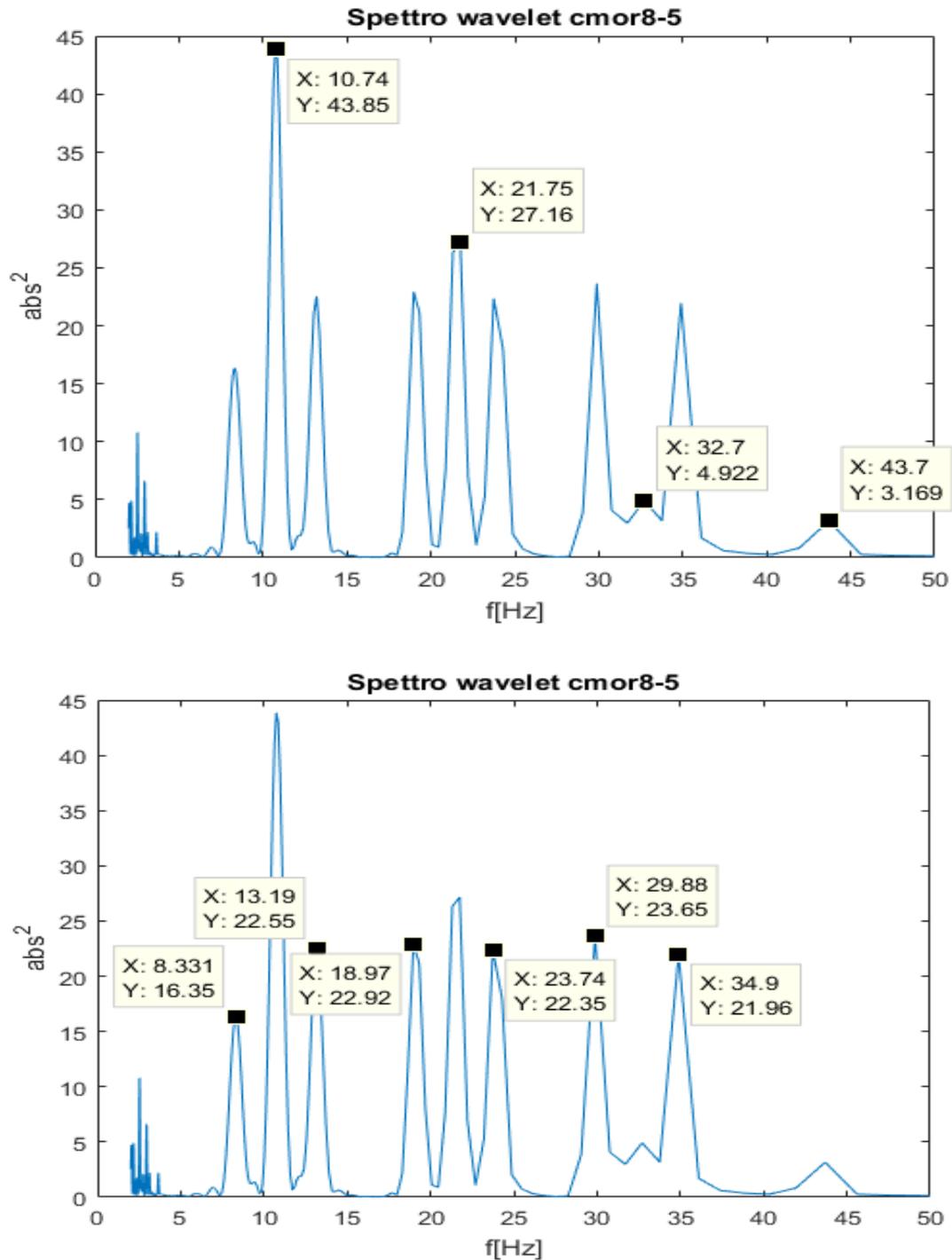


Figura 100. Spettro Wavelet del segnale sintetizzato ottenuto mediando lungo l’asse temporale il modulo dei coefficienti della trasformata Wavelet ottenuta con la base di Morlet complessa cmor8-5: in alto sono mostrati i datatips relativi alla frequenza dominante ed alle sue armoniche, in basso sono mostrati i sidepeaks della frequenza dominante e delle sue armoniche. La frequenza dominante risulta pari a $f_a = 10.74 \text{ Hz}$ e le sue armoniche a $2f_a = 21.75 \text{ Hz}$, $3f_a = 32.7 \text{ Hz}$, $4f_a = 43.7 \text{ Hz}$. I sidepeaks della frequenza dominante f_a sono $f_- = 8.331 \text{ Hz}$ e $f_+ = 13.19 \text{ Hz}$, i sidepeaks della prima armonica della frequenza dominante $2f_a$ sono $f_{2-} = 18.97 \text{ Hz}$ e $f_{2+} = 23.74 \text{ Hz}$, i sidepeaks della seconda armonica della frequenza dominante $3f_a$ sono $f_{3-} = 29.88 \text{ Hz}$ e $f_{3+} = 34.9 \text{ Hz}$.

Dallo spettro (figura 97-100) e dalla mappa wavelet (figura 98-99) si osserva come la seconda armonica della frequenza dominante $3f_a$ abbia energia minore dei suoi sidepeaks f_{3+} e f_{3-} : si ha quindi una sovr modulazione in quanto la modulante f_b possiede più energia della portante $3f_a$ e l'indice di modulazione è superiore a 2 $m_3 = \frac{A_b}{A_3} > 1$. Invece la prima armonica $2f_a$ ed i suoi sidepeaks f_{2+} e f_{2-} hanno un'energia molto vicina, ma poiché l'energia di un sidepeak è la metà di quella della modulante, siamo di nuovo in presenza di una sovr modulazione con $1 < m_2 = \frac{A_b}{A_3} < m_3$.

Per migliorare ulteriormente il nostro modello e avvicinarci al flusso reale, introduciamo gli energy holes. Nel capitolo precedente avevamo detto che l'energy hole è frutto di una modulazione in frequenza di una bassa frequenza f_{bm} su una frequenza maggiore f_b , la quale modula a sua volta in ampiezza una frequenza portante ancora maggiore f_a . Si tratta quindi di una modulazione in ampiezza con una modulante f_b a frequenza variabile nel tempo. Esistono due tipi di modulazioni angolari: la modulazione in frequenza e la modulazione di fase. Entrambe ci permettono di far variare la frequenza della modulante f_b , l'unica differenza è che il risultato sarà sfasato, in quanto in un caso si utilizzerà il coseno, nell'altro il seno; nella mappa wavelet osserverò gli energy holes in istanti diversi in base alla modulazione angolare utilizzata. Prendendo come riferimento la modulazione di fase, faremo variare la modulante con questa legge:

$$modulante(t) = A_b \cos[2\pi f_b t + k_\varphi \sin(2\pi f_{bm} t)] \quad \text{con } f_{bm} < f_b$$

$$k_\varphi = \text{indice di modulazione di fase}$$

L'indice k_φ è detto indice di modulazione di fase e indica di quanto varierà la fase, mentre la frequenza modulante f_{bm} indica la frequenza con cui varierà la fase. Indicando con Δf_b la variazione della frequenza f_b , l'indice di modulazione di fase può essere scritto come:

$$k_\varphi = \frac{\Delta f_b}{f_{bm}}$$

Utilizzando ora la nuova modulante per modulare in ampiezza la portante, il segnale risultante sarà dato da:

$$y(t) = \sum_{i=1}^3 A_i \cos(2\pi f_i t) * [1 + m_i \cos(2\pi f_b t + k_\varphi \sin(2\pi f_{bm} t))]$$

$$m_i = \frac{A_b}{A_i} \quad \text{con } A_i = (A_a, A_2, A_3) \quad f_i = (f_a, 2f_a, 3f_a)$$

Per analizzare il nuovo segnale utilizzeremo tutti i 3270 campioni, poiché per rispettare la condizione imposta dalla modulazione angolare $f_{bm} < f_b$ e poiché la frequenza in gioco sono davvero basse, abbiamo bisogno di un numero di campioni maggiore per poter osservare l'effetto della modulazione di fase.

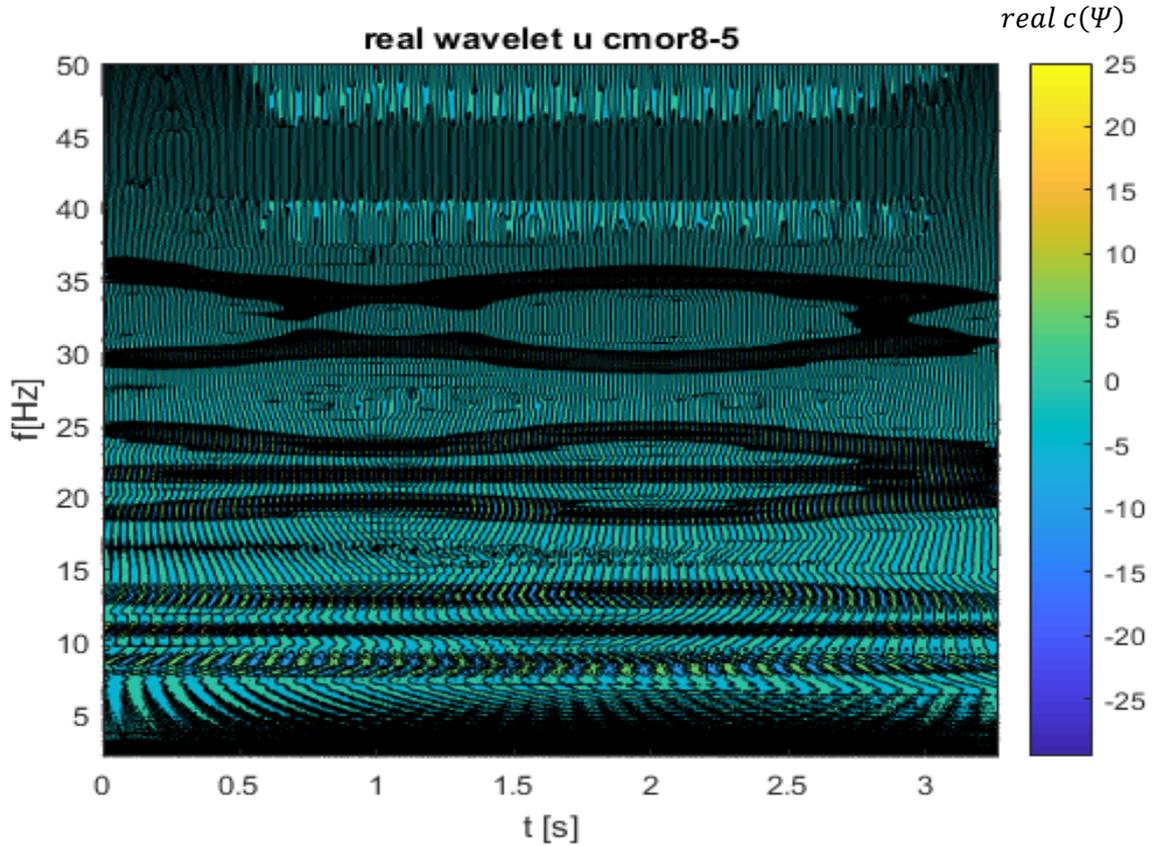


Figura 101. Parte reale dei coefficienti della trasformata Wavelet del segnale sintetizzato calcolata per i primi 1024 campioni e ottenuta con la base di Morlet complessa cmor8-5. Sull'asse delle ascisse abbiamo il tempo (secondi) e sull'asse delle ordinate la pseudo-frequency (Hz). Il range di frequenze è [2 , 50] Hz.

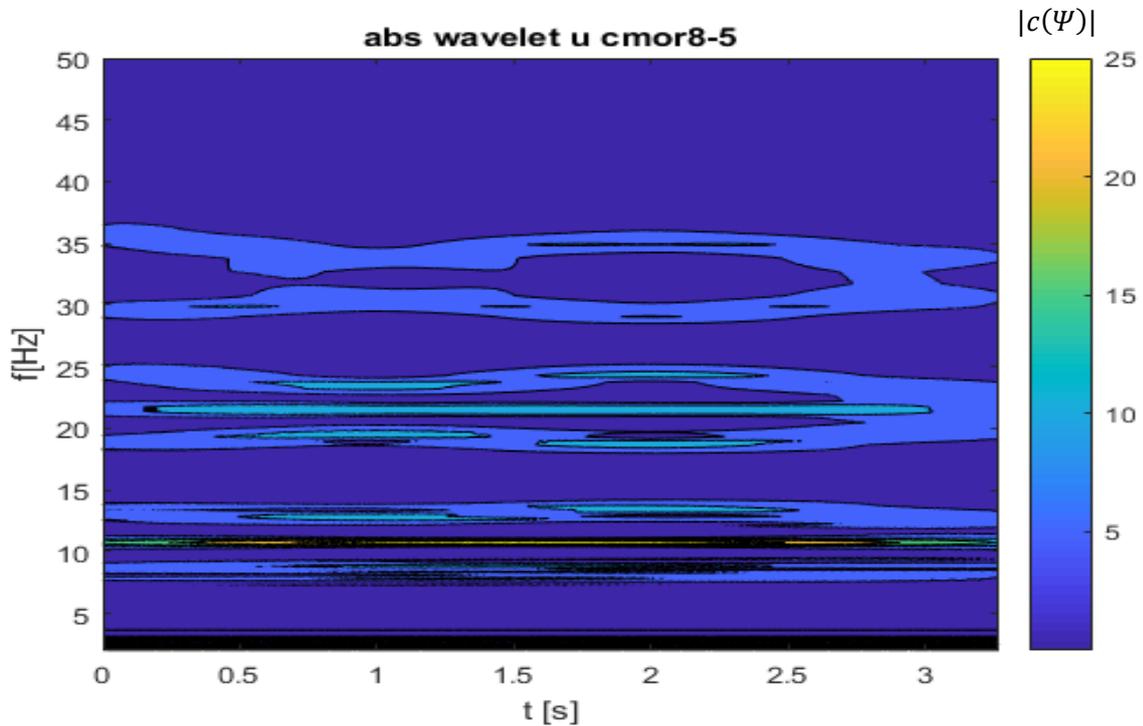


Figura 102. Modulo dei coefficienti della trasformata Wavelet del segnale sintetizzato calcolata per i primi 1024 campioni e ottenuta con la base di Morlet complessa cmor8-5. Il range di frequenze è [2 , 50] Hz.

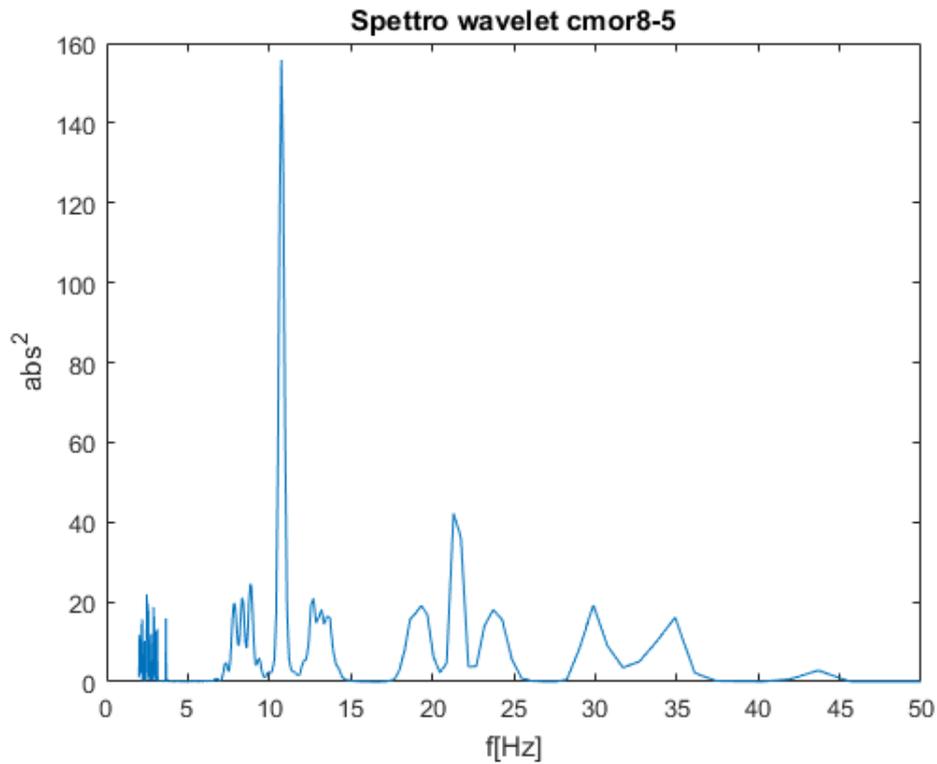


Figura 103. Spettro Wavelet del segnale sintetizzato ottenuto mediando lungo l'asse temporale il modulo dei coefficienti della trasformata Wavelet ottenuta con la base di Morlet complessa cmor8-5. Il numero di campioni utilizzato è pari a 3270.

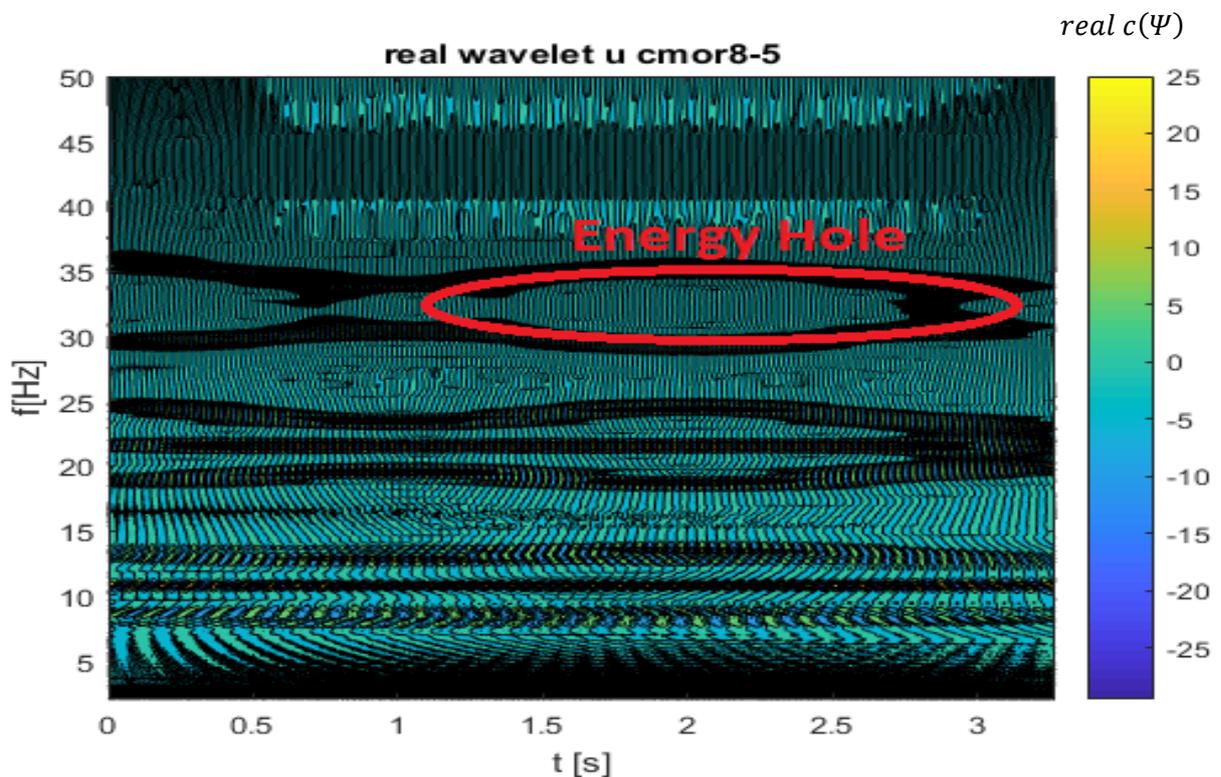


Figura 104. Parte reale dei coefficienti della trasformata Wavelet del segnale sintetizzato calcolata per i primi 1024 campioni e ottenuta con la base di Morlet complessa cmor8-5. Sull'asse delle ascisse abbiamo il tempo (secondi) e sull'asse delle ordinate la pseudo-frequency (Hz). Il range di frequenze è [2 , 50] Hz.

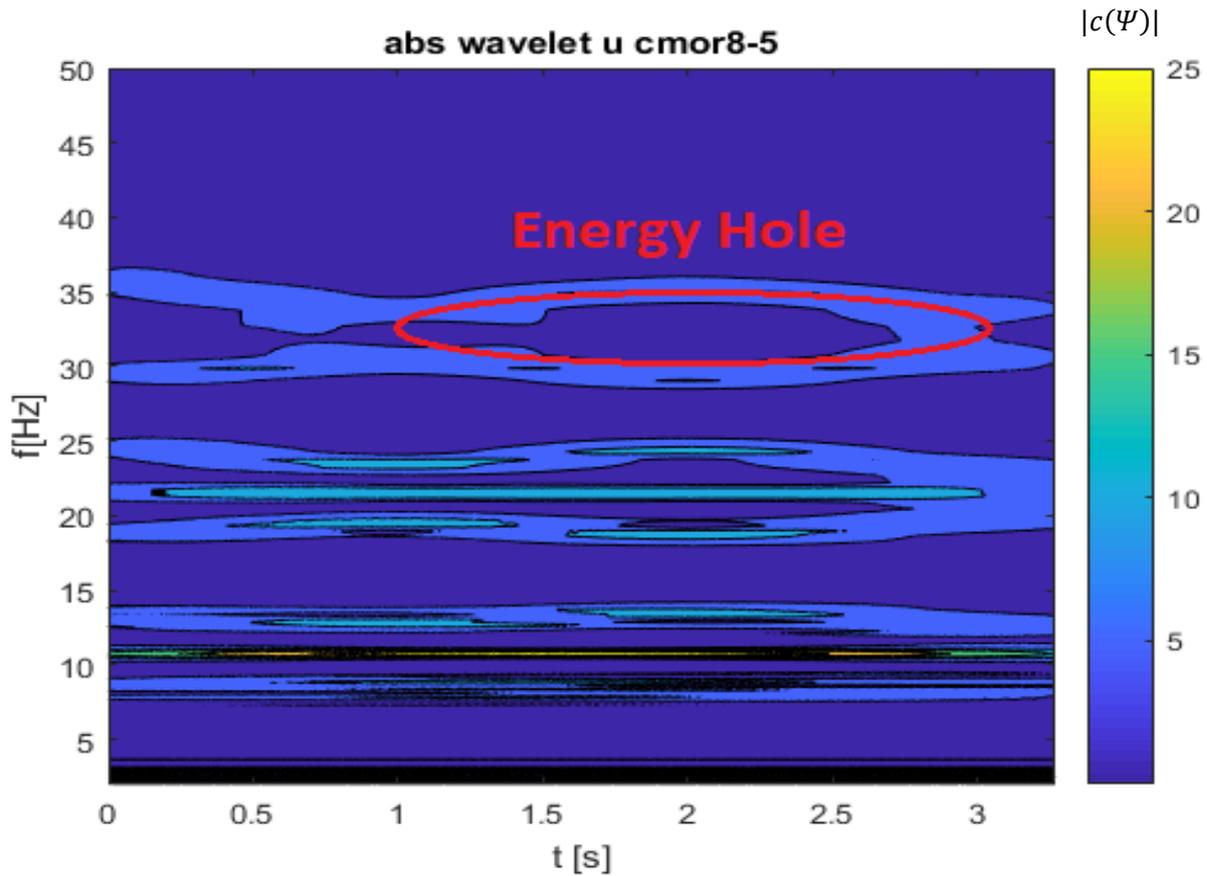


Figura 105. Modulo dei coefficienti della trasformata Wavelet del segnale sintetizzato calcolata per i primi 1024 campioni e ottenuta con la base di Morlet complessa cmor8-5. Sull'asse delle ascisse abbiamo il tempo (secondi) e sull'asse delle ordinate la pseudo-frequency (Hz). Il range di frequenze è [2 , 50] Hz.

Si osserva chiaramente come a causa della sovrarmodulazione in ampiezza e della bassa energia della seconda armonica $3f_a$ (figura 104-105) si generi una zona in cui la carrier ha energia molto minore rispetto ai suoi sidepeaks f_{3+} e f_{3-} . Inoltre dato che la modulante f_b ha una frequenza variabile, perché viene a sua volta modulata in fase dalla frequenza f_{bm} , questa zona di sovrarmodulazione ha una struttura ellittica nella mappa wavelet. Abbiamo denominato queste strutture energy holes. Nel flusso reale si osservano numerosi energy holes a frequenze anche diverse da quella dominante o dalle sue armoniche: questo avviene perché all'interno del flusso è presente una modulazione continua delle basse frequenze sulle frequenze maggiori, e quindi ogni generica frequenza $f_i > f_b$ può essere a sua volta considerata come frequenza portante ed essere modulata dalla f_b . Finora abbiamo inoltre considerato una sola frequenza modulante, che modula in ampiezza, ma ci si potrebbe chiedere se ne esistano altre all'interno del flusso, poiché nel flusso reale abbiamo osservato negli spettri più di due sidepeaks per carrier (fig 35). La presenza di questi picchi suggerisce che esista una frequenza $f_b < f_{b2} < f_a$, che moduli a sua volta in ampiezza la frequenza dominante e le sue armoniche.

Prima di parlare di modulanti multiple, introduciamo le subarmoniche della frequenza dominante. Supponiamo che ad un certo istante temporale si generi un disturbo su una frequenza $\frac{f_a}{2}$ pari a metà della frequenza dominante f_a . Poiché la frequenza $\frac{f_a}{2} < f_a$ essa è in grado di modulare in

ampiezza la frequenza dominante stessa e di generare come prodotto sé stessa $f_a - \frac{f_a}{2} = \frac{f_a}{2}$ e la frequenza $f_a + \frac{f_a}{2} = \frac{3f_a}{2}$. Se il prodotto di questa modulazione è superiore al disturbo di partenza, ovvero ad una certa soglia, si instaura un meccanismo di autosostentamento per cui tanta potenza fluisce dalla frequenza fondamentale alla subarmonica $\frac{f_a}{2}$ quanta ne viene dissipata verso l'esterno. Una volta generata anche se il livello della subarmonica scende al di sotto della soglia, il meccanismo di autosostentamento è in grado di riportarla ad un livello di equilibrio. Analogamente si può parlare di seconda subarmonica supponendo di avere un disturbo sulla frequenza $\frac{f_a}{4}$ e che esso moduli la prima subarmonica $\frac{f_a}{2}$ con il meccanismo precedentemente descritto.

Torniamo ora al nostro modello e supponiamo che la frequenza modulante f_b sia proprio pari alla seconda subarmonica della frequenza dominante $f_b = \frac{f_a}{4} = 2.69 \text{ Hz}$. Per il flusso reale abbiamo visto che per la frequenza dominante $f_b = 2.4 \text{ Hz}$, e questo valore sembra aumentare al crescere della frequenza della carrier considerata; ad esempio per la prima armonica abbiamo trovato $f_b = 2.7 \text{ Hz}$. Riportandoci ai valori ottenuti per la frequenza modulante in tabella 1 e calcolandone un valore medio, troviamo proprio $f_b \approx 2.69 \text{ Hz}$: questo potrebbe giustificare il fatto di considerare come modulante la seconda subarmonica della frequenza dominante. In questo particolare caso quando la modulante f_b modula in ampiezza la carrier f_a si ottiene come prodotto la seconda armonica della seconda subarmonica $f_a - f_b = f_a - \frac{f_a}{4} = \frac{3f_a}{4} = f_-$ e la quarta armonica della prima subarmonica $f_a + f_b = f_a + \frac{f_a}{4} = \frac{5f_a}{4} = f_+$: queste due frequenze sono proprio i due sidepeaks f_- e f_+ identificati in precedenza.

Consideriamo inoltre una seconda modulazione in ampiezza sulla carrier f_a dovuta alla prima subarmonica $\frac{f_a}{2} = 2f_b$. Questa modulazione darà come prodotto la prima subarmonica stessa $f_a - 2f_b = f_a - \frac{f_a}{2} = \frac{f_a}{2} = f_{--}$ e la seconda armonica della prima subarmonica $f_a + 2f_b = f_a + \frac{f_a}{2} = \frac{3f_a}{2} = f_{++}$. Quindi dei due sidepeaks aggiuntivi che avevamo osservato nello spettro del flusso reale, il sidepeak sinistro corrisponde proprio alla prima subarmonica $\frac{f_a}{2} = f_{--}$, mentre il sidepeak destro alla seconda armonica della prima subarmonica $\frac{3f_a}{2} = f_{++}$.

Per completare il modello bisognerebbe modulare in frequenza anche la prima subarmonica $\frac{f_a}{2}$ modulandola in frequenza (o in fase). Bisognerebbe inoltre introdurre una modulazione in frequenza (o in fase) sulla frequenza dominante e sulle sue armoniche, in quanto abbiamo visto che nel flusso reale la frequenza delle varie carrier oscilla nel tempo, soprattutto nella componente verticale delle fluttuazioni di velocità v' .

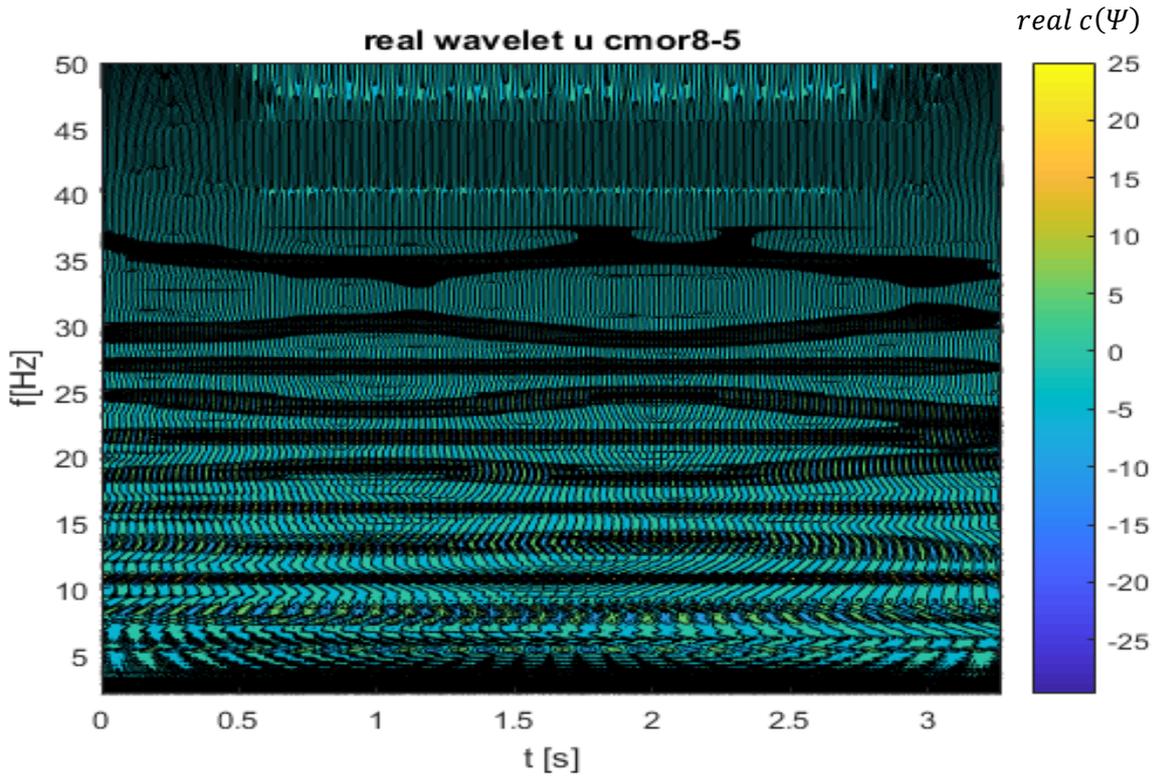


Figura 106. Parte reale dei coefficienti della trasformata Wavelet del segnale sintetizzato calcolata per i primi 1024 campioni e ottenuta con la base di Morlet complessa cmor8-5. Sull'asse delle ascisse abbiamo il tempo (secondi) e sull'asse delle ordinate la pseudo-frequency (Hz). Il range di frequenze è [2 , 50] Hz.

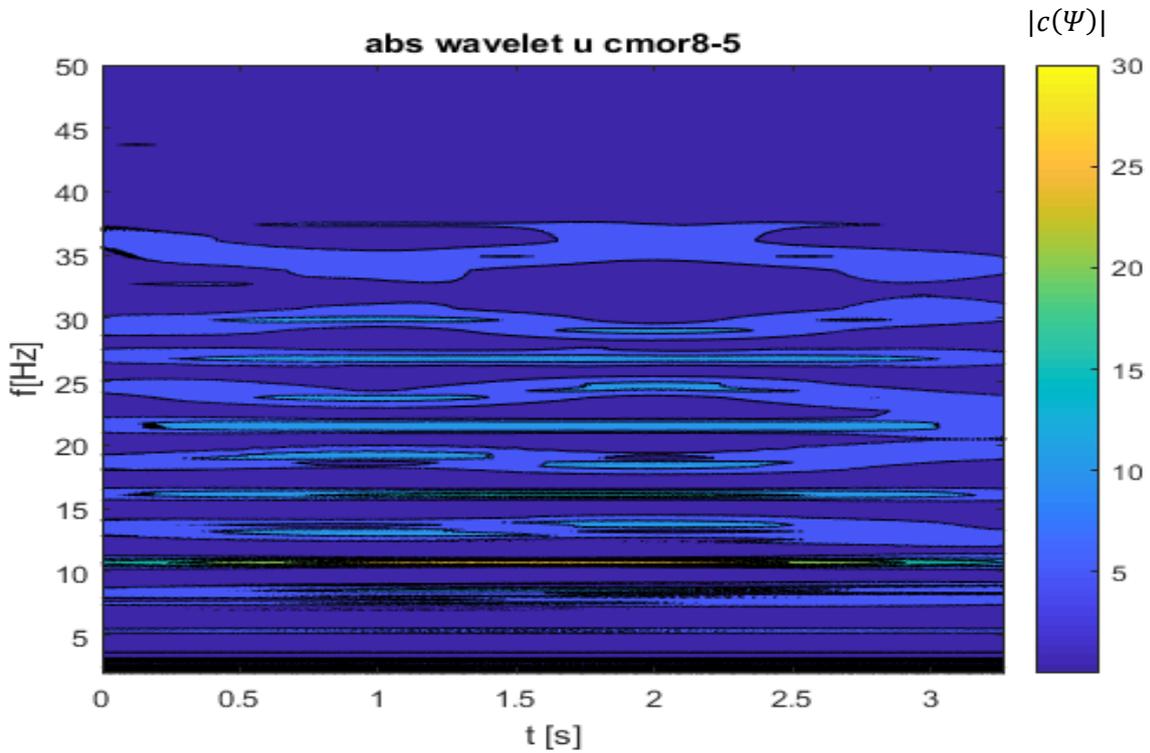


Figura 107. Modulo dei coefficienti della trasformata Wavelet del segnale sintetizzato calcolata per i primi 1024 campioni e ottenuta con la base di Morlet complessa cmor8-5. Sull'asse delle ascisse abbiamo il tempo (secondi) e sull'asse delle ordinate la pseudo-frequency (Hz). Il range di frequenze è [2 , 50] Hz.

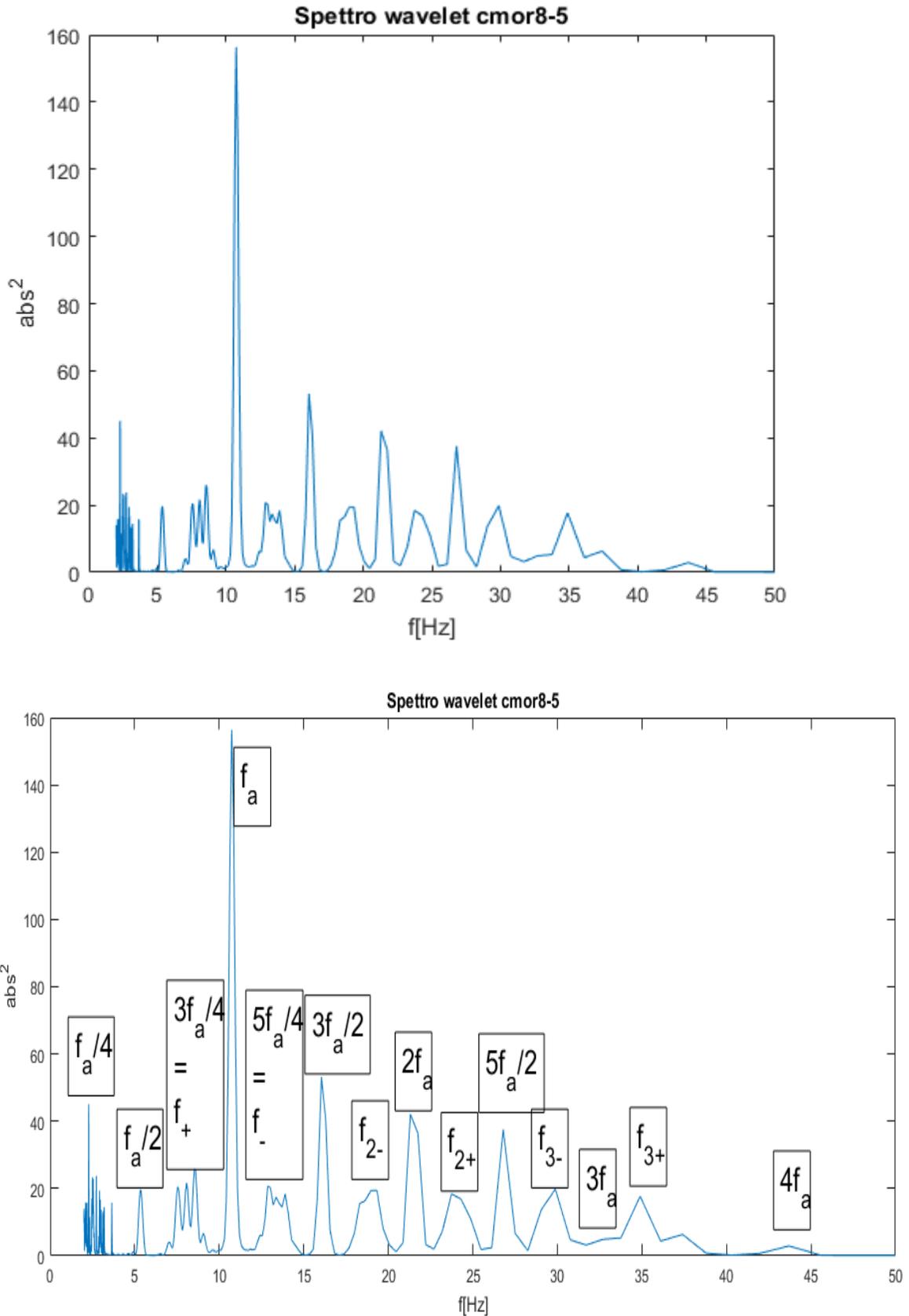


Figura 108. Spettro Wavelet del segnale sintetizzato ottenuto mediando lungo l'asse temporale il modulo dei coefficienti della trasformata Wavelet ottenuta con la base di Morlet complessa cmor8-5: in alto è mostrato lo spettro, in basso sono mostrate le frequenze identificate con i vari picchi.

Abbiamo visto che quando la modulante f_b è una subarmonica della frequenza dominante f_a si instaura un meccanismo di autosostentamento tra la frequenza dominante e le sue subarmoniche. Il rapporto $\frac{f_b}{f_a}$ diventa quindi molto importante: quando questo rapporto è intero ed è pari la cavità è in grado di lavorare in condizioni di autosostentamento; ad esempio per il nostro modello $\frac{f_b}{f_a} = 4$, mentre per il flusso reale $\frac{f_b}{f_a} \approx 4$ e non è pari all'unità perché è presente un errore dovuto al numero limitato di campioni e all'oscillazione della frequenza della carrier e della modulante nel tempo, ma è tuttavia vicino al rapporto del flusso simulato $\frac{f_b}{f_a} = 4$. Quando il rapporto $\frac{f_b}{f_a}$ non è pari, come nel caso di Basley *et al.* che hanno trovato $\frac{f_b}{f_a} = 3$, la modulazione in ampiezza avviene proprio come descritto nel nostro modello, ma il prodotto della modulazione non genera un loop chiuso se si considera una sola modulazione. Vediamo in dettaglio questo caso.

Supponiamo che la frequenza modulante sia $f_b = \frac{f_a}{3}$: come prodotto di una modulazione in ampiezza della f_b sulla frequenza modulante f_a , otteniamo $f_a - f_b = f_a - \frac{f_a}{3} = \frac{2f_a}{3}$ pari alla prima armonica della frequenza modulante, e $f_a + f_b = f_a + \frac{f_a}{3} = \frac{4f_a}{3}$ pari alla terza armonica della frequenza modulante. Non si ha quindi un loop di energia come succede nel caso in cui $\frac{f_b}{f_a}$ sia pari. Tuttavia considerando un secondo step temporale e una seconda modulazione in ampiezza della nuova frequenza generata $\frac{2f_a}{3}$ sulla frequenza dominante f_a si ottiene come prodotto della modulazione $f_a - \frac{2f_a}{3} = \frac{f_a}{3} = f_b$ pari alla frequenza modulante di partenza, e $f_a + \frac{2f_a}{3} = \frac{5f_a}{3}$ pari alla quarta armonica della frequenza modulante di partenza f_b . Poiché abbiamo riottenuto come risultato la frequenza modulante iniziale f_b , esiste anche nel caso in cui $\frac{f_b}{f_a}$ sia dispari un loop ad anello chiuso, ma è necessario considerare due modulazioni in ampiezza che avvengono in due passi temporali consecutivi. Ho inoltre bisogno di una continua immissione di energia sulla frequenza $f_b = \frac{f_a}{3}$, in quanto il loop non si chiude con una sola modulazione in ampiezza.

La nostra ipotesi è che se $\frac{f_b}{f_a} = \text{pari}$ allora la cavità lavora effettivamente in condizioni di autosostentamento, la frequenza modulante è una subarmonica della frequenza dominante, e si ha un continuo flusso di energia dalla frequenza modulante alla frequenza dominante e viceversa tramite una modulazione in ampiezza. Se $\frac{f_b}{f_a} = \text{dispari}$ la cavità non lavora in condizioni di autosostentamento e ho bisogno di una continua immissione di energia sulla frequenza modulante f_b affinché si generi un loop ad anello chiuso simile al caso in cui $\frac{f_b}{f_a} = \text{pari}$: per osservare il loop dovrò considerare due modulazioni in ampiezza relative a due step temporali consecutivi.

Conclusioni

Nell'ambito di questa tesi abbiamo studiato il flusso di cavità, un problema presente in molte applicazioni tra cui il carrello d'atterraggio, il vano bombe o le fessure dei finestrini per aeronautica. Abbiamo studiato l'iterazione tra uno strato limite laminare e una cavità aperta di altezza $H = 10 \text{ mm}$, lunghezza $L = 30 \text{ mm}$, e larghezza $W = 350 \text{ mm}$, e abbiamo svolto un'analisi spettrale del flusso nella zona di impinging, dove i vortici che si generano per instabilità di Kelvin-Helmholtz al bordo d'attacco della cavità, impattano al bordo di fuga. I dati utilizzati per l'analisi spettrale sono stati ottenuti in un'esperienza di laboratorio precedente, nel laboratorio di velocimetria ottica del DIMEAS (Dipartimento di Ingegneria Meccanica e Aerospaziale) del Politecnico di Torino. I campi di velocità sono stati ottenuti con la tecnica PIV nella galleria Hydra. L'esperienza di laboratorio precedente ha confermato che all'interno della cavità si generano due strutture vorticosi principali, dette bolla primaria e bolla secondaria, la prima di dimensioni pari all'altezza della cavità stessa H , e la seconda molto più piccola; la secondaria ruota molto più lentamente e nel verso opposto di quella primaria. Sono inoltre presenti all'interno della cavità numerose strutture secondarie come i corner vortex, o strutture che si generano per instabilità centrifuga.

Nell'ambito di questa tesi ci siamo occupati di svolgere un'analisi spettrale del flusso di cavità nella zona d'impinging, utilizzando uno strumento molto recente: la trasformata wavelet. A differenza della trasformata di Fourier, la trasformata wavelet mantiene l'informazione temporale del segnale, e risulta quindi possibile seguire l'evoluzione temporale delle varie strutture modali presenti all'interno del flusso. Abbiamo comparato i risultati ottenuti con quelli trovati da Basley *et al.* (2011), i quali hanno svolto un'analisi spettrale di un flusso all'interno di una cavità aperta di altezza $H = 50 \text{ mm}$, lunghezza $L = 100 \text{ mm}$, e larghezza $W = 300 \text{ mm}$, utilizzando la trasformata di Fourier e la PSD (Power Spectral Density). Basley *et al.* (2011) hanno trovato che all'interno del flusso esiste una frequenza dominante a cui corrisponde il massimo di energia, che hanno denominato f_a ; questa frequenza dominante è inoltre comune a tutta cavità, indice del fatto che è presente un'organizzazione globale del flusso all'interno della cavità. Oltre alla frequenza dominante, hanno osservato nello spettro la presenza di altri picchi relativi alle prime tre armoniche della frequenza dominante ($2f_a, 3f_a, 4f_a$). Hanno inoltre osservato la presenza di coppie di picchi equidistanti e simmetrici dalla frequenza dominante e da ognuna delle sue armoniche, e hanno denominato queste picchi sidepeaks: hanno denominato i sidepeaks della

frequenza dominante f_- e f_+ , rispettivamente sidepeak sinistro e sidepeak destro; hanno denominato i sidepeaks della prima armonica della frequenza dominante $2f_a$ rispettivamente f_{2-} e f_{2+} ; hanno denominato i sidepeaks della seconda armonica della frequenza dominante $2f_a$ rispettivamente f_{3-} e f_{3+} . Basley *et al.* (2011) hanno inoltre osservato la presenza di un picco a bassa frequenza che hanno denominato f_b , e hanno trovato che questa frequenza è proprio pari alla distanza tra un sidepeaks e il relativo picco centrale $f_b = f_+ - f_a = f_a - f_-$. Secondo Balsey *et al.* (2011) la frequenza f_b potrebbe essere il risultato di un'interazione non lineare tra f_a ed f_+ , oppure come confermato anche da altri autori (Knisely and Rockwell 1982; Lucas and Rockwell 1984; Delptra 2006, 2010), i sidepeaks f_+ ed f_- potrebbero essere frutto di una modulazione in ampiezza di una modulante a frequenza f_b sulla portante a frequenza f_a nella zona di impinging. A nostro parere si tratta di una modulazione in ampiezza.

Per la nostra analisi spettrale abbiamo utilizzato la trasformata wavelet partendo una base wavelet Morlet reale, e per ottenere gli spettri wavelet abbiamo mediato i coefficienti wavelet lungo l'asse temporale. Abbiamo visto che la Morlet reale non è una base adeguata per studiare il nostro flusso di cavità, in quanto non ha una risoluzione in frequenza sufficiente e nello spettro e nelle mappe wavelet riusciamo solo ad osservare la frequenza dominante. Siamo quindi passati ad una Morlet complessa, e variandone man mano i parametri abbiamo trovato una base adeguata per studiare il nostro flusso. La nostra analisi spettrale presenta risultati molto simili a quelli ottenuti da Basley *et al.*: abbiamo identificato nello spettro la presenza di una frequenza dominante f_a , delle sue prime due armoniche $2f_a$ e $3f_a$, e dei sidepeaks f_- , f_+ , f_{2-} e f_{2+} . Rispetto a Balsey *et al.* (2011) non abbiamo osservato il picco relativo alla frequenza f_b , in quanto la minima frequenza per cui abbiamo calcolato la trasformata wavelet è pari a 6 Hz. Abbiamo imposto questo limite per limitare l'alto costo computazionale portato dall'utilizzo della wavelet Morlet complessa con alta risoluzione in frequenza. Abbiamo attribuito la presenza dei vari sidepeaks ad una modulazione in ampiezza di una modulante a frequenza f_b su una portante a frequenza f_a e sulle sue armoniche $2f_a$ e $3f_a$. Riducendo inoltre il calcolo dei coefficienti della trasformata wavelet alle alte frequenze [26,40]Hz, nell'intorno della seconda armonica della frequenza dominante, abbiamo osservato nella mappa wavelet la presenza di strutture ellittiche. Abbiamo attribuito queste strutture ad un effetto combinato di una sovr modulazione in ampiezza della modulante f_b , a frequenza variabile, sulla portante considerata. Il fatto che f_b abbia una frequenza variabile è dovuto ad una modulazione angolare (in frequenza o di fase) di una bassa frequenza $f_{bm} < f_b$ sulla f_b stessa. La variazione in frequenza di f_b genera queste strutture ellittiche; inoltre dato che la modulante f_b possiede un'energia superiore a quella delle portanti relative alle alte frequenze, i sidepeaks generati dalla modulazione in ampiezza hanno un'energia superiore al loro picco centrale di riferimento: questo fenomeno è noto come sovr modulazione in ampiezza. Abbiamo denominato queste strutture ellittiche "energy holes".

Abbiamo successivamente provato a riprodurre lo spettro e la mappa wavelet del flusso di cavità attraverso un modello (capitolo 4). I risultati ottenuti con il modello sono molto vicini a quelli trovati studiando il flusso reale. Abbiamo osservato inoltre che il rapporto $\frac{f_a}{f_b}$ gioca un ruolo molto importante. Se $\frac{f_a}{f_b} \sim \text{pari}$ la cavità è in grado di lavorare in condizioni di autosostentamento, in

quanto la modulante f_b è proprio una subarmonica della frequenza dominante f_a , e tramite una sola modulazione in ampiezza, la modulante f_b riserva energia sulla sua armonica $2f_b$ e riceve energia dalla $2f_b$. Il meccanismo è continuo tra f_a e tutte le sue subarmoniche si genera un loop di energia, che porta ad una condizione di equilibrio: anche se l'energia di una subarmonica scendesse sotto al livello di equilibrio, l'energia ricevuta dalla sua armonica tenderebbe a riportarla all'equilibrio stesso. Se $\frac{f_a}{f_b} \sim \text{dispari}$ una sola modulazione in ampiezza non è necessaria a generare questo loop di energia in quanto f_b non è una subarmonica di f_a . Se però si considerano più modulazioni in ampiezza consecutive, si genera in ogni caso un loop d'energia: il livello della f_b continua però ad oscillare intorno al valore d'equilibrio, in quanto con la prima modulazione trasferirà energia sulla sua prima armonica, e con una modulazione successiva riceverà energia. Per Balsey *et al.* (2011) $\frac{f_a}{f_b} \sim 3$, mentre nel caso da noi studiato dato che $\frac{f_a}{f_b} \sim 4$ pensiamo che la nostra cavità lavori effettivamente in condizioni di autosostentamento. Per avere una conferma di quest'ipotesi bisognerebbe svolgere un'analisi wavelet per un flusso di cavità con $\frac{f_a}{f_b} \sim 3$, ed osservando nella mappa wavelet l'evoluzione temporale della struttura modale relativa a f_b , si potrebbe vedere se effettivamente il livello di energia tende ad oscillare intorno ad un livello di equilibrio. Per completare inoltre il lavoro iniziato in questa tesi, si potrebbe svolgere un'analisi spettrale delle fluttuazioni della componente spanwise della velocità w' , per vedere se la frequenza dominante continua ad essere f_a . Si potrebbe inoltre completare il modello simultante il flusso di cavità con l'introduzione di più subarmoniche e armoniche; ogni subarmonica dovrà essere a sua volta modulata in frequenza dalla bassa frequenza f_{bm} , e modulerà in ampiezza tutte le frequenze maggiori o uguali a sé stessa; si potrebbe inoltre completare il modello introducendo il rumore, ed una modulazione in frequenza sulla frequenza dominante e sulle sue armoniche.

Bibliografia

Basley J., Pastur L. R., Lusseyran F., Faure T. M., Delprat N (2011), "Experimental investigation of global structures in an incompressible cavity flow using time-resolved PIV", *Exp Fluids* (2011) 50-905-918

Farge M. (1992), "Wavelet transforms and their applications to turbulence.", *Annu. Rev. Fluid Mech* 1992 24: 395-457

Michalke A. (1964), "On the inviscid instability of the hyperbolic tangent velocity profile.", *J Fluid Mech* 19(4): 543-556

Ziada S., Rockwell D. (1982), "Oscillations of an unstable mixing layer impinging upon an edge.", *J Fluid Mech* 124: 307-334

Chang K., Constantinescu G., Park S-O. (2006), "Analysis of the flow and mass transfer processes for the incompressible flow past an open cavity with laminar and a fully turbulent incoming boundary layer.", *J Fluid Mech* 561: 113-145

Knisely C., Rockwell D. (1982), "Sel-sustained low-frequency components in an impinging shear layer.", *J Fluid Mech* 116: 157-186

Lin JC., Rockwell D. (2001), "Organized oscillations of initially turbulent flow past a cavity.", *AIAA J* 39: 1139-1151

Rockwell D., Lin JC., Oshkai P., Reiss M., Pollack M. (2003), "Shallow cavity flow tone experiments: onset of locked-on states.", *J Fluids Struct* 17(3): 381-414

Delprat N. (2006), "Rossiter formula: a simple spectral model for a complex amplitude modulation process?", *Phys Fluids* 18(7):071703

Delprat N. (2010), "Low-frequency components and modulation processes in compressible cavity flows.", *J Soun Vib* 329(22):4797-4809

Lucas M., Rockwell D. (1984), "Self-excited jet-upstream modulation and multiple frequencies.", *J Fluid Mech* 147:333-352

Holschneider M. (1988a), "L'analyse d'objets fractals et luer transformée en ondelettes.", PhD thesis. Univ. d'Aix-Marseille II. Lumity, France

Holschneider M. (1988b), "On the wavelet transformation of fractal object.", *J. Stat. Phys.* 50: 953-93

- Jaffard S. (1989a), "Exposants de Hölder en des points donnés et coefficients d'ondelettes.", C. R. Acad. Sci. Paris, Sér. I 308:79-81
- Jaffard S. (1989b), "Construction of wavelets on open sets.", See Combes *et al.*, 1989, pp. 247-52
- Jaffard S. (1991b), "Orthonormal and continuous wavelet transform: algorithms and applications to the study of pointwise properties of functions.", See Farge *et al.*, 1991b
- Holschneider M., Tchamitchian P. (1989), "Pointwise analysis of Riemann's non-differentiable function.", *Inventiones Math.* Submitted
- Holschneider M., Tchamitchian P. (1990), "Règularité locale de la fonction "non-differentiable" de Riemann.", See Lemarié 1990a, pp. 102-24
- Tchamitchian P. (1989c), "Ondelettes et intégrale de Cauchy sur les courbes lipchitziennes.", *Ann. Math.* 129: 641
- Arnèodo A., Grasseau G., Holschneider M. (1989), "Wavelet transform analysis of invariant measures of some dynamical system.", See Combes *et al.*, 1989, pp. 182-96
- Ghez J., Vaienti S. (1989), "On the wavelet analysis for multifractal sets.", *J. Stat. PPhys.* 57(12): 415-20
- Argoul F., Arnèodo A., Elezgaray. J., Grasseau G., Murenzi R. (1988), "Wavelet transform of fractal aggregates.", *Phys. Lett. A* 135: 327
- Argoul F., Arnèodo A., Elezgaray. J., Grasseau G., Murenzi R. (1990), "Wavelet transform analysis of the self-similarity of Diffusion Limited Aggregate and electro-deposition clusters.", *Phys. Rev. A* 41: 5537
- Falconer K. J. (1991), "Wavelets, fractals and order-two densities.", See Farge *et al.*, 1991b
- Freysz E., Pouligny B., Argoul F., Arnéodo A., (1990), "Optical wavelet transform of fractal aggregates.", *Phys. Rev. Lett.* 64: 745
- Daubechies I., Grossmann A., Meyer Y. (1986), "Painless non-orthogonal expansion.", *J. Math. Phys.* 27: 1271-83
- Daubechies I., Paul T. (1987), "Wavelets and applications.", In *Proceedings of the 8th International Congress of Mathematical Physics*, ed. M. Mebkbout, R. Sensor. Singapore: World Scientific.
- Faure T. M., Panayotis A., Lusseyran F., Pastur L. (2007), "Visualizations of the flow inside an open cavity at medium range Reynolds numbers", *Exp Fluids* (2007) 42: 169-184
- Rowley C. W., Williams D. R. (2006), *Annu Rev. Fluid Mechanics*, 38: 251-76.
- McGregor O. W., Shaw L. (1996), *AIAA Paper* 96-1949.

Martinez M., Di Cicca G. M., Iovieno M., Heuler K., Onorato M., "Cavity Flow Control by a Rod in Cross-Flow" (2010).

Rossiter J. E. (1966), Technical Report, Aeronautical Research Council and Memoranda, No. 3438, London.

Torrence C., Compo G. P. (1997), "A Practical Guide to Wavelet Analysis", Program In Atmospheric and Oceanic Sciences, University of Colorado, Boulder, Colorado.

M. Beardo (2010), "Dispense di Comunicazioni Elettriche", Politecnico di Torino.

G. Mamola (2010), "Fondamenti di Comunicazioni Elettriche", Università degli Studi di Palermo.

"Modulazioni/Demodulazioni Analogiche" (2017), Istituto Galileo Artiglio, appunti lezioni elettronica, <http://www.iisgalileiartiglio.gov.it>.

S. Petrizzelli (2000), "Appunti di Comunicazioni Elettriche", Materiale Didattico per Ingegneria Elettronica.

"Appunti complementi armoniche e subarmoniche" (2008), Università degli Studi di Roma.