

# **POLITECNICO DI TORINO**

Dipartimento di Ingegneria Strutturale, Edile e Geotecnica  
Corso di Laurea Magistrale in Ingegneria Edile

**Tesi di Laurea Magistrale**

## **Archi in muratura soggetti ad elevati gradienti termici**



Relatori:  
Prof. Alessandro Pasquale Fantilli  
Prof. Bernardino Chiaia

Candidato:  
Nicholas Sergio Burello

Marzo 2018



# Sommario

<b>1. Introduzione .....</b>	<b>5</b>
<b>2. Il fuoco e le problematiche annesse nelle costruzioni .....</b>	<b>7</b>
2.1 Metodo tabellare – EC6 Allegato B .....	8
2.2 Metodo semplificato – EC6 Allegato C .....	9
2.3 Modello di calcolo avanzato – EC6 Allegato D .....	11
<b>3. Modello di calcolo non lineare di strutture ad asse curvilineo .....</b>	<b>18</b>
3.1 Analisi lineare.....	19
3.2 Analisi non lineare .....	30
3.2.1 Struttura isostatica e struttura iperstatica a confronto .....	33
3.2.2 Analisi non lineare con strutture iperstatiche.....	36
3.3 Algoritmo di calcolo – Parte I.....	40
3.3.1 Variabili di Input .....	44
3.3.2 Routine coordinate geometriche Input_Geo .....	47
3.3.3 Routine Principale - Main.....	48
3.3.4 Routine momento_curvatura .....	60
3.3.5 Routine sigma.....	63
<b>4. Effetti del calore sul materiale.....</b>	<b>67</b>
4.1 Trasmissione del calore – Legge di Fourier .....	68
4.2 Proprietà termofisiche .....	72
4.2.1 Calore specifico ( $C_p$ ), conducibilità termica ( $\lambda$ ) e densità ( $\rho$ ).....	73
4.2.2 Dilatazione termica ( $\varepsilon_{th}$ ) .....	77
4.2.3 Resistenza massima ( $f_y$ ) e Modulo elastico ( $E_{pre\_pick} - E_{post\_pick}$ )...	78
4.3 Algoritmo di calcolo – Parte II .....	82
4.3.1 Routine temperatura_temp.....	82
4.3.2 Routine epsT .....	85
4.3.3 Routine sig_temp .....	85
4.3.4 Flow-chart completo – Archi in muratura soggetti a incendio .....	86
<b>5. Confronto con la sperimentazione .....</b>	<b>90</b>
5.1 Arco soggetto a carico crescente – Arco di Capozucca .....	90
5.1.1 Variabili di Input .....	93
5.1.2 Analisi arco di Capozucca – arco non rinforzato in assenza di incendio ....	96
5.1.3 Diagrammi riassuntivi – Legami costitutivi a confronto.....	106
5.2 Arco soggetto ad elevati gradienti termici - Arco dei VVF .....	110

5.2.1	Variabili di Input .....	114
5.2.2	Digrammi di sollecitazione M, N ed eccentricità .....	118
5.2.3	Profilo delle temperature e deformazione termica .....	120
5.2.4	Abbassamento in freccia dell'arco .....	123
<b>6.</b>	<b>Conclusioni .....</b>	<b>130</b>
<b>7.</b>	<b>Bibliografia .....</b>	<b>134</b>

## 1. Introduzione

La seguente tesi ha l'obiettivo di integrare il modello di calcolo di strutture ad asse curvilineo (quali per esempio gli archi in muratura) con il contributo di azioni termiche introdotte in seguito all'avvento di un incendio, per poterne determinare stato tensionale, tempi di resistenza e stato deformativo in ciascun punto della struttura.

Nello specifico l'obiettivo è quello di analizzare gradienti termici elevati applicati a strutture in muratura con conformazione geometrica ad arco. In letteratura le rispettive teorie e modelli di calcolo proposti sono in genere rivolti a elementi verticali a superficie piana.

È sicuramente di particolare interesse, specialmente in Italia, avere la possibilità di analizzare archi in muratura soggetti ad incendio, poiché questi sono notevolmente diffusi nel territorio nazionale all'interno di edifici storici e di civile abitazione.

La Normativa vigente propone modelli di calcolo tabellari o semplificati; la trattazione è limitata al caso di pareti e solai, rendendo necessaria un'analisi più approfondita per le altre tipologie strutturali, a partire dalla risoluzione della legge di diffusione del calore, dalle leggi costitutive dei materiali ( $\sigma$ - $\varepsilon$ ) influenzate dalla temperatura raggiunta e dal legame deformazione - temperatura ( $\varepsilon$ - $T$ ).

Nelle pagine seguenti si esporrà il metodo adottato per il calcolo di strutture ad asse curvilineo, per poi introdurre la modellazione dell'azione termica e tutto ciò che essa comporta. Si individueranno gli effetti del calore sul materiale, con la definizione delle reazioni chimico-fisiche che insorgono.

Con riferimento alla teoria generale delle deformazioni impresse, utile strumento per la trattazione delle dilatazioni non uniformi, verrà quindi proposta un'analisi per le singole sezioni, ponendo l'accento sulla variazione delle capacità di resistenza e sullo stato deformativo raggiunto.

Definito il modello di calcolo dell'arco non lineare soggetto ad elevati gradienti termici si procederà con il confronto con due prove sperimentali.

Il primo confronto viene eseguito con una prova sperimentale in assenza di incendio, il cui fine è quello di dedurre quale sia il comportamento caratteristico della muratura in termini quanto meno deformativi. L'obiettivo è quello di osservare il comportamento delle strutture nei casi in cui si riconosca o meno una minima resistenza a trazione del materiale impiegato.

Il secondo paragone pone invece l'attenzione sulla risposta deformativa della struttura soggetta ad elevati gradienti termici, in cui verranno

## 1. Introduzione

applicare le leggi e reazioni chimico-fisiche che regolano il fenomeno incendio.

## 2. Il fuoco e le problematiche annesse nelle costruzioni

### **2. Il fuoco e le problematiche annesse nelle costruzioni**

La progettazione e verifica degli elementi strutturali può essere effettuata in condizioni standard, quindi in presenza dei carichi ordinari (peso proprio della struttura, carichi permanenti strutturali, carichi variabili, etc.) oppure in condizioni definite eccezionali quali per esempio l'evento incendio.

Le norme tecniche per le costruzioni (NTC 2008) e le norme europee (Eurocodici) considerano il fenomeno di incendio come azione, per l'appunto, eccezionale e dettano i principi per eseguire una corretta progettazione e/o verifica della struttura in tali condizioni. Vengono fornite le curve di temperatura da adottare in funzione della tipologia di incendio innescato dove, per materiali di natura prevalentemente cellulosa, viene definita la curva di incendio di riferimento standard, mentre vengono prescritte altre tipologie di curve in funzione delle diverse condizioni al contorno che si possono manifestare.

Vengono infatti descritte curve differenti a seconda di elevata concentrazione di idrocarburi oppure in caso di incendi sviluppatosi all'interno di un compartimento, ma che coinvolgono strutture poste all'esterno.

Tra le varie tipologie di strutture interessate a questa verifica, ricadono anche quelle in muratura che rappresentano la tipologia edilizia costruttiva più antica e diffusa, specialmente nel territorio nazionale italiano. Tra le diverse opere in muratura rivestono particolare importanza gli archi e le volte che sono un tipico esempio di copertura architettonica e caratterizzano gran parte degli edifici sul suolo italiano, di cui in elevato numero di interesse culturale.

Anche per questa tecnologia strutturale occorre avere strumenti e algoritmi di calcolo adatti per effettuare la verifica di resistenza al fuoco, il che ha reso le volte una problematica attuale, indipendentemente dall'essere soggette o meno al controllo dei Vigili del Fuoco.

Nonostante le volte in muratura rappresentino una tipologia costruttiva piuttosto ricorrente nell'ambito del panorama edilizio italiano, non sono facilmente reperibili indicazioni su come eseguire la verifica al fuoco né in Normativa né in bibliografia.

L'Eurocodice 6, sezione della normativa dedicata alla progettazione di strutture in muratura, nello specifico all'interno delle parti I-II descrittive delle regole generali per la progettazione in caso di incendio, fornisce precise indicazioni sui requisiti della

## 2. Il fuoco e le problematiche annesse nelle costruzioni

muratura e propone tre differenti metodi per la modellazione ed il calcolo di strutture in muratura esposte al fuoco.

Prima di procedere con la scrittura ed elaborazione del programma, occorre quindi analizzare e valutare i diversi aspetti dei metodi proposti dalla normativa per poterne assumere uno e svilupparlo.

### **2.1 Metodo tabellare – EC6 Allegato B**

L'Eurocodice 6, all'interno dell'allegato B, fornisce delle indicazioni di massima per assicurare la resistenza al fuoco in funzione del tipo di parete analizzata, dei materiali che la costituiscono, delle condizioni di carico e delle funzioni svolte.

Ragionevolmente si può intuire che sono molteplici i fattori che influenzano il comportamento di una struttura in muratura in caso di incendio, quali per esempio: il materiale costituente i mattoni, la morfologia del laterizio, la tipologia della malta, lo spessore, etc. All'interno dell'allegato vengono proposte un elevato numero di tabelle, distinte a seconda della tipologia del laterizio utilizzato per la realizzazione della parete in esame e a seconda delle funzioni richieste; in ciascuna di esse si suddividono nuovamente diverse categorie, distinte per tipo di malta, resistenza  $f_b$ , densità  $\rho$  e livello di carico rispetto al massimo sopportabile.

È sufficiente quindi porre il tempo di esposizione al fuoco per il quale si vogliono verificare i requisiti della struttura e ricercare all'interno della tabella lo spessore minimo o la lunghezza, se richiesta, da rispettare affinché la verifica sia valutata come rispettata.

Le tabelle così proposte offrono però una valutazione tabellare e approssimativa, oltre che valida in caso di sole opere in muratura quali le partizioni verticali, senza fare riferimento a strutture ad asse curvilineo con funzione portante di copertura quali le volte, sulle quali verte l'interesse di questa Tesi.

## 2. Il fuoco e le problematiche annesse nelle costruzioni

row number	material properties unit strength $f_b$ [N/mm <sup>2</sup> ] gross density $\rho$ [kg/m <sup>3</sup> ]	Minimum wall thickness (mm) $t_F$ for fire resistance classification REI for time (minutes) $t_{R,d}$						
		30	45	60	90	120	180	240
IS	<b>Group IS units</b>							
IS.1	mortar: general purpose $12 \leq f_b \leq 15$ $1\ 700 \leq \rho \leq 2\ 400$							
IS.1.1	$\alpha \leq 1,0$	90	90	90	100	100/170	170	140/190
IS.1.2		(90)	(90)	(90)	(90/100)	(100/140)	(170)	(140/190)
IS.1.3	$\alpha \leq 0,6$	90	90	90	100	100/10	170	140/190
IS.1.4		(90)	(90)	(90)	(90/100)	(100/140)	(170)	(140/190)
IS.2	mortar: thin layer $12 \leq f_b \leq 15$ $1\ 700 \leq \rho \leq 2\ 400$							
IS.2.1	$\alpha \leq 1,0$	90	90	90	100	100/170	170	140/190
IS.2.2		(90)	(90)	(90)	(90/100)	(100/140)	(170)	(140/190)
IS.2.3	$\alpha \leq 0,6$	90	90	90	100	100/10	170	140/190
IS.2.4		(90)	(90)	(90)	(90/100)	(100/140)	(170)	(140/190)

Figura 2.1 Esempio di Tabella tratta dall'Allegato B dell'Eurocodice 6, parte 1-2

### 2.2 Metodo semplificato – EC6 Allegato C

L'allegato C della norma propone invece un metodo semplificato per il calcolo, valido nuovamente per sole pareti e colonne in muratura, esposte alla curva di temperature standard. Sono ammessi anche altri materiali di impiego quali blocchi di calcestruzzo aerato di autoclave, alleggerito e in silicato di calcio. Con questo metodo si assume che lo strato superficiale della faccia rivolta verso le fiamme si deteriori riducendo la propria capacità di reazione ai carichi applicati e alla compartimentazione rispetto i vani adiacenti.

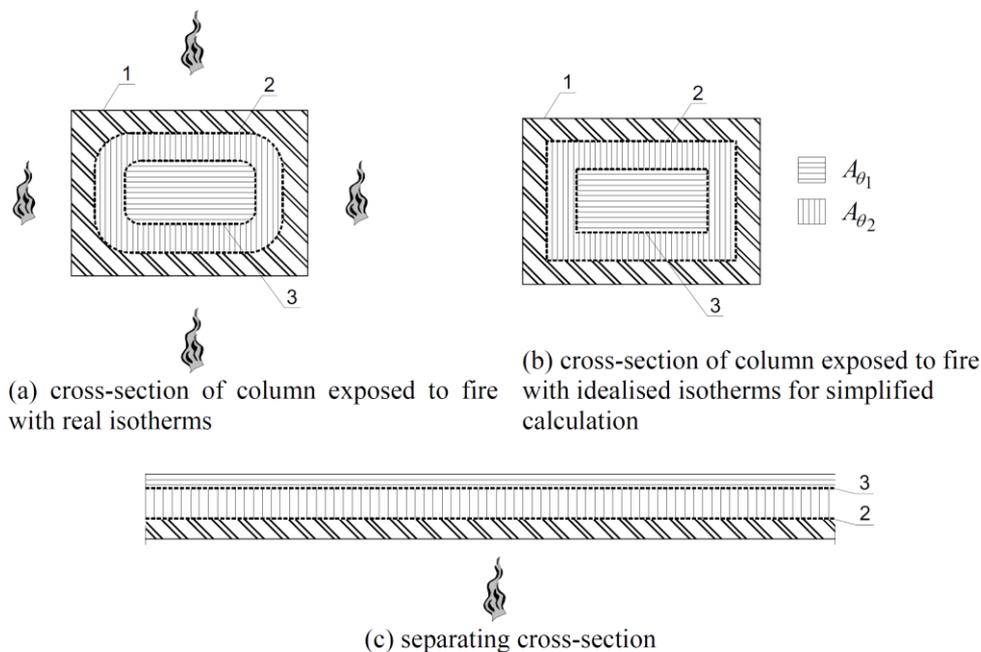
In funzione della temperatura raggiunta nei punti all'interno della sezione, dei tempi di esposizione considerati e della composizione della muratura, si genera una distribuzione di resistenze non omogenea.

Si distinguono quindi tre zone all'interno della sezione tipo, partendo dalla superficie esterna (Figura 2.2) si individuano:

- Zona 1: l'area della sezione non più reagente in cui la temperatura ha raggiunto valori superiori a quelli consentiti ( $\theta_2$ );
- Zona 2: la sezione a forma di "o" inscritta all'interno dell'area non più reagente, dove si hanno resistenze che decrescono al crescere della temperatura, a partire dal centro ( $\theta_1$ ) verso il limite esterno ( $\theta_2$ );
- Zona 3: la zona centrale o comunque non ancora esposta all'elevato gradiente termico in cui i valori di resistenza sono pari a quelli a temperatura ambiente.

## 2. Il fuoco e le problematiche annesse nelle costruzioni

Dove  $\theta_1$  e  $\theta_2$  sono i due valori della temperatura che regolano la dimensione delle tre zone e dipendono dalle caratteristiche del materiale impiegato.



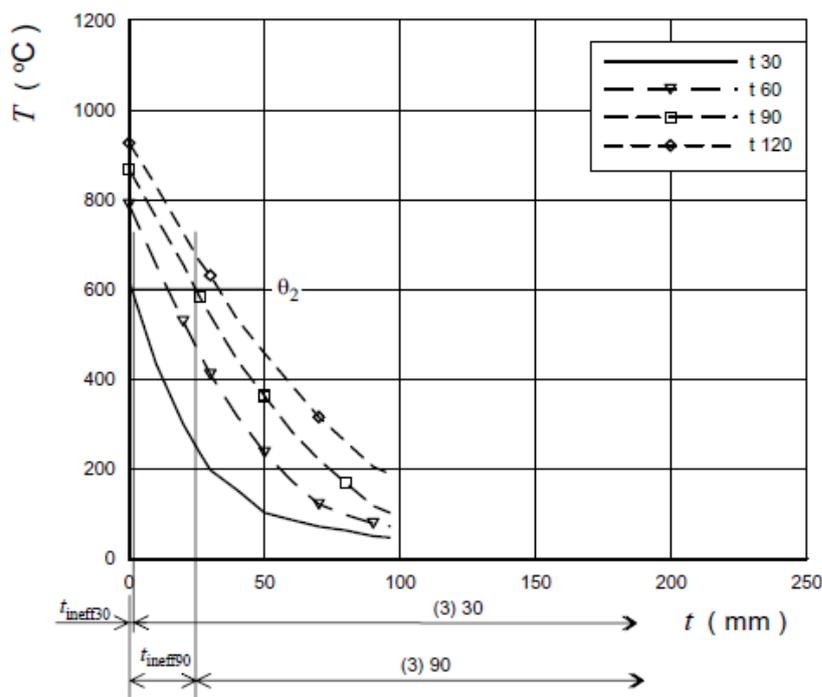
**Figura 2.2** Indicazioni della sezione inefficace, intermedia e residua – Eurocodice 6

Il procedimento prevede la determinazione del profilo di temperatura nella sezione trasversale, delle zone strutturalmente inefficaci e la sezione residua. Si calcola quindi la capacità portante a stato limite ultimo e si verifica che questa sia superiore a quella richiesta dalle condizioni di carico proprie della situazione studiata, secondo la formula di seguito riportata.

$$N_{Ed} \leq N_{R,fi(\theta)} \quad (2.1)$$

dove  $N_{Ed}$  è la sollecitazione a stato limite ultimo e  $N_{R,fi(\theta)}$  è la resistenza calcolata in funzione della temperatura raggiunta e delle proprietà del materiale stesso. Occorre inoltre considerare l'eccentricità correlata alla distribuzione non omogenea delle resistenze per via del gradiente termico. In definitiva, per completare il calcolo semplificato così definito in funzione del tipo di materiale, vengono forniti i profili della temperatura lungo la sezione considerata, di cui se ne riporta uno a titolo esemplificativo.

## 2. Il fuoco e le problematiche annesse nelle costruzioni



*Figura 2.3 Profilo della temperatura-profondità.  
Struttura in muratura con  $\rho=1000-2000\text{kg/m}^3$*

Questo metodo, maggiormente verosimile alla realtà rispetto al metodo tabellare, si focalizza tuttavia ancora sulle strutture verticali, quali pareti e colonne, e offre un'approssimazione eccessiva; risulta per cui necessario proseguire la ricerca di calcoli più accurati per poter tenere conto di strutture con conformazione geometrica differente.

### **2.3 Modello di calcolo avanzato – EC6 Allegato D**

In definitiva, gli Eurocodici mettono a disposizione le basi per una progettazione maggiormente raffinata, al fine di ottenere una risposta strutturale di un sistema generico soggetto a incendio con una precisione maggiormente accurata. Questo modello di calcolo può infatti essere adattato a strutture diverse da pareti e colonne, quali appunto archi e volte in muratura, e quindi è quello su cui verranno poste le basi per la realizzazione del programma di calcolo.

All'interno del modello di calcolo avanzato è prevista la definizione di:

- Mappa termica della struttura sviluppatasi durante il fenomeno di incendio durante l'intera durata dello stesso  $T(x,t)$ ;

## 2. Il fuoco e le problematiche annesse nelle costruzioni

- Modellazione del comportamento meccanico della struttura o di sue parti, quali la deformazione termica indotta [-] e il legame costitutivo [ $\sigma$ - $\varepsilon$ ] soggetto a degrado per azione dell'elevato gradiente termico.

All'interno di questo allegato vengono indicate le relazioni necessarie per condurre il calcolo avanzato, consentendo di creare un modello fisico con un'approssimazione sufficientemente affidabile del comportamento di un qualunque componente strutturale in condizioni di incendio.

Il calcolo deve includere il modello di risposta termica, con cui determinare lo sviluppo e la distribuzione della temperatura all'interno dell'elemento, ed il modello di risposta meccanica, con cui valutare il comportamento della struttura o parte di essa.

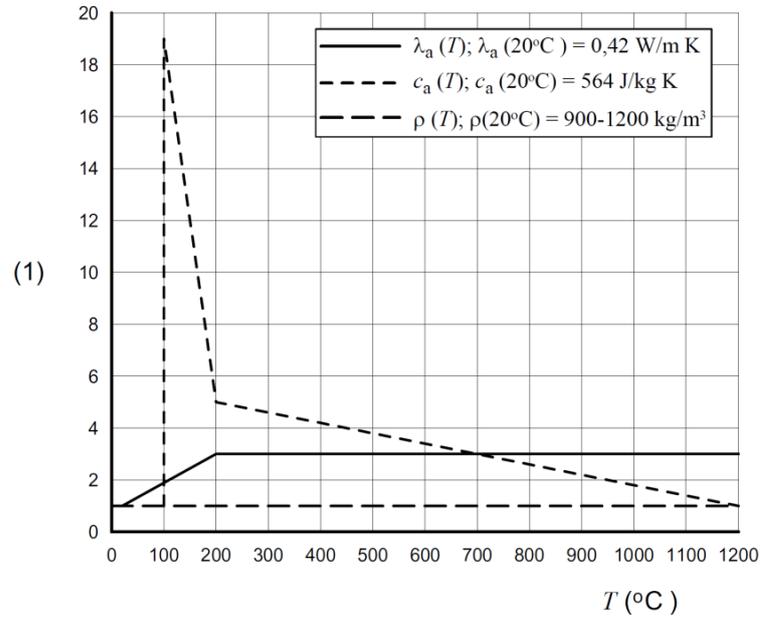
Il primo passo è la regolazione dei parametri termofisici che definiscono e condizionano la trasmissione del calore per conduzione all'interno di mezzi solidi, secondo l'equazione differenziale di II grado di Fourier (trattata esplicitamente al paragrafo 4.1).

I parametri interessati ai fini dei calcoli delle murature più comuni sono riportati in una serie di diagrammi, di seguito proposti, in cui vengono indicati con:

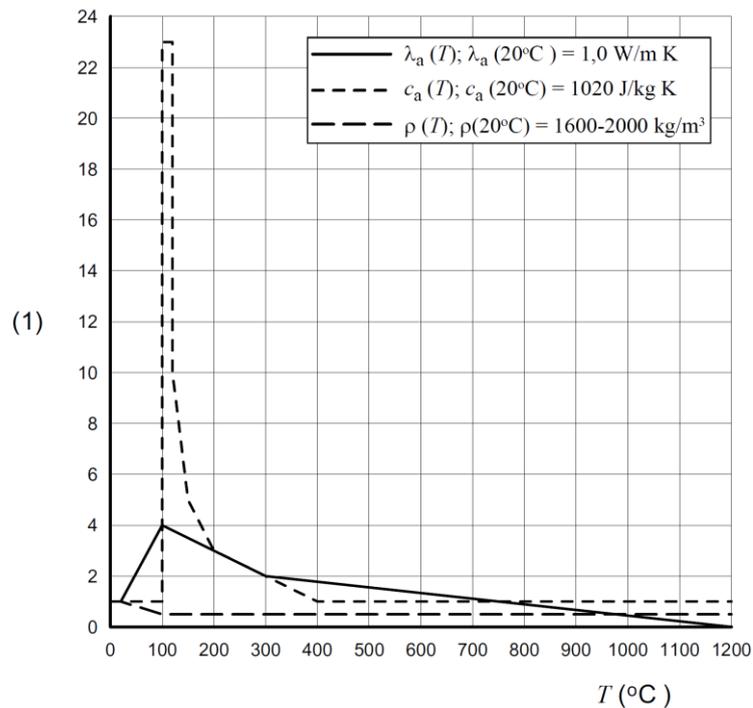
- $T$ , temperatura;
- $\lambda_a$ , conducibilità termica;
- $\rho$ , densità;
- $c_a$ , calore specifico.

Occorre osservare che, in ciascun grafico, i parametri vengono normalizzati rispetto il valore del parametro stesso alla temperatura di 20°C. Ciò che si legge sull'asse delle ordinate è quindi un moltiplicatore per i valori "standard" a temperatura ambiente.

## 2. Il fuoco e le problematiche annesse nelle costruzioni

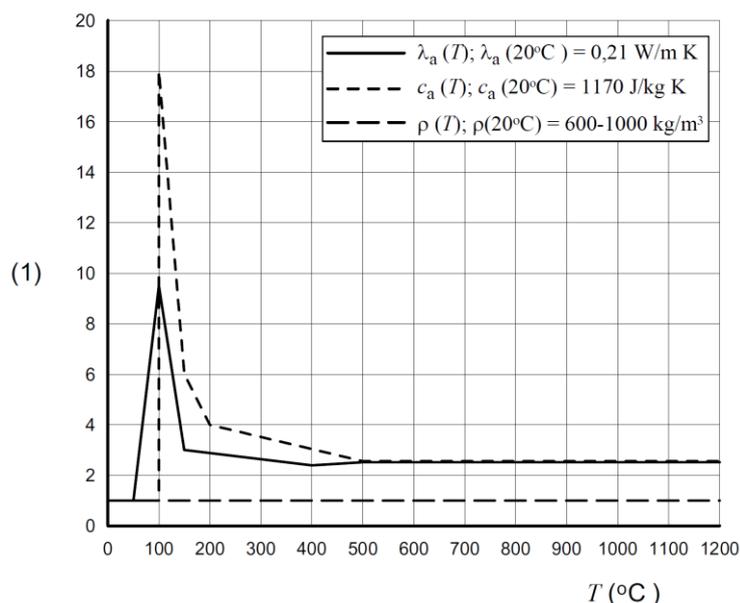


**Figura 2.4 EC6-D: Parametri termofisici – temperatura. Mattoni in argilla con densità compresa tra 900 e 1200 kg/m<sup>3</sup>**

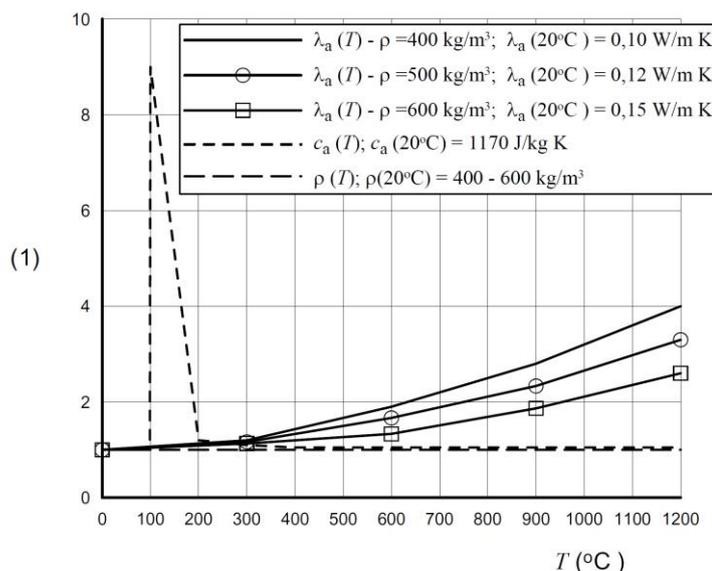


**Figura 2.5 EC6-D: Parametri termofisici – temperatura. Mattoni in silicato di calcio con densità compresa tra 1600 e 2000 kg/m<sup>3</sup>**

## 2. Il fuoco e le problematiche annesse nelle costruzioni



**Figura 2.6 EC6-D: Parametri termofisici – temperatura.**  
**Blocchi in calcestruzzo alleggerito con densità compresa tra 600 e 1000 kg/m<sup>3</sup>**



**Figura 2.7 EC6-D: Parametri termofisici – temperatura.**  
**Blocchi in calcestruzzo aerato d'autoclave con densità compresa tra 400 e 600 kg/m<sup>3</sup>**

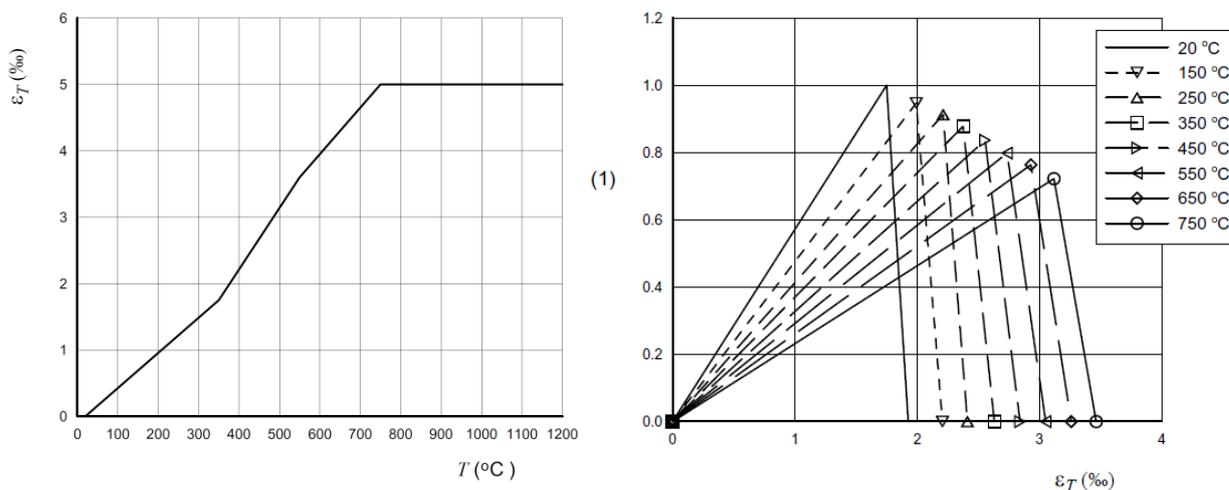
La trattazione di questi diagrammi si rimanda al paragrafo 4.2, dove l'attenzione si concentrerà sui mattoni in argilla per l'analisi di volte e archi in muratura. Si può però osservare che i diagrammi sopra riportati sono accomunati da un fenomeno che si manifesta intorno ai 100°C. I picchi raggiunti da due parametri termici (conducibilità termica e calore specifico) sono causati dall'evaporazione dell'acqua all'interno del materiale,

## 2. Il fuoco e le problematiche annesse nelle costruzioni

accumulatosi in fase di stoccaggio o comunque in seguito alla produzione dei blocchi.

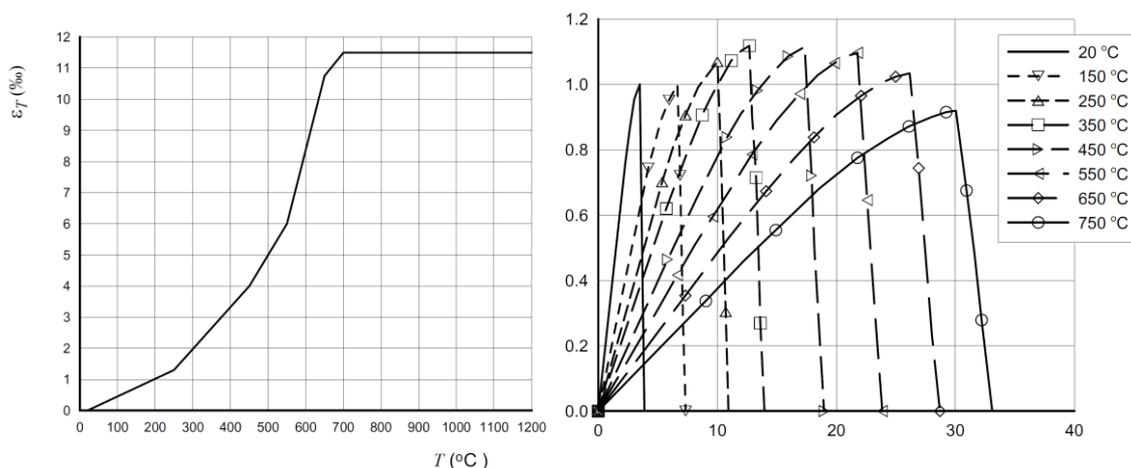
Si nota quindi che al crescere della temperatura la densità rimane costante, mentre le altre grandezze, una volta superato il picco, tendono a tornare, in modo più o meno accentuato, al valore iniziale; solo la conducibilità termica del calcestruzzo d'autoclave mostra un andamento crescente con la temperatura.

Con le relazioni proposte nei grafici si può costruire un modello di trasmissione del calore; una volta definita la mappa termica occorre correlarla alla dilatazione indotta. La deformazione termica  $\varepsilon_T$  è nuovamente un parametro dipendente dalla tipologia di materiale impiegato e viene espressa in millesimi (‰). A sua volta, definita la dilatazione termica, si può risalire alla sollecitazione associata mediante l'impiego di un'ulteriore correlazione fra la deformazione e la tensione. Questa relazione è il legame costitutivo, dipendente dal materiale e dalla temperatura in cui si sta eseguendo la valutazione dello stato tensionale. Analogamente a quanto fatto precedentemente, vengono riportati i diagrammi caratteristici dei diversi mattoni/blocchi principalmente utilizzati e considerati nella realizzazione di opere in muratura.

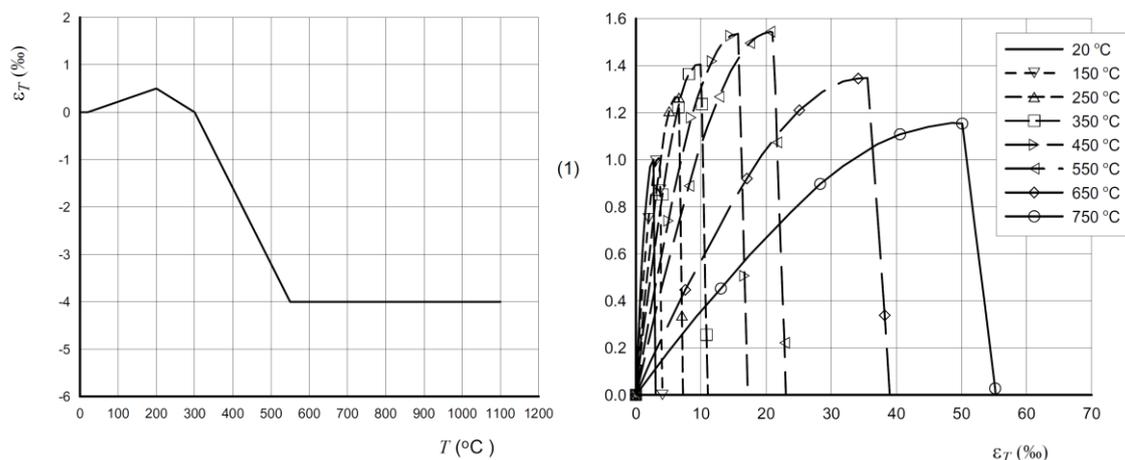


**Figura 2.8 EC6-D Legge di deformazione termica e legge costitutiva.  
Mattoni con resistenza tra 12 e 20 N/mm<sup>2</sup> e densità compresa tra 900 e 1200 kg/m<sup>3</sup>**

## 2. Il fuoco e le problematiche annesse nelle costruzioni



**Figura 2.9 EC6-D Legge di deformazione termica e legge costitutiva. Blocchi in silicato di calcio con resistenza tra 12 e 20 N/mm<sup>2</sup> e densità tra 1600 e 2000 kg/m<sup>3</sup>**



**Figura 2.10 EC6-D Legge di deformazione termica e legge costitutiva. Calcestruzzo alleggerito con resistenza tra 4 e 6 N/mm<sup>2</sup> e densità tra 600 e 1000 kg/m<sup>3</sup>**

Analizzando i grafici precedentemente riportati si può osservare la similarità tra il comportamento deformativo dei mattoni in argilla rispetto i mattoni in silicato di calcio.

Risulta significativamente differente il comportamento dei blocchi in calcestruzzo alleggerito, dove si riscontra contrazione all'aumentare della temperatura oltre una soglia iniziale in cui si denota invece una leggera dilatazione. Contrariamente, per i mattoni in argilla, si denota fin da subito un'espansione quasi lineare sino al raggiungimento della temperatura di soglia, circa 750°C, oltre la quale la dilatazione termica è costante.

Le leggi costitutive ripropongono un comportamento di tipo fragile del materiale, evidenziato dal brusco decadimento che segue il raggiungimento della resistenza ultima. In tutti i grafici si nota che

## 2. Il fuoco e le problematiche annesse nelle costruzioni

con il crescere della temperatura, il modulo elastico (in seguito definito all'interno del programma  $E_{pre\_pick}$ ) diminuisce e la deformazione ultima ( $\epsilon_{MAX}$ ) aumenta. Nelle strutture con mattoni in terracotta la resistenza diminuisce progressivamente, mentre negli altri due tipi di materiale essa presenta dapprima un incremento, andando a superare il valore assunto a temperatura ambiente, per poi subire il degrado causato dal gradiente termico. L'osservazione più importante è che in ciascun legame costitutivo proposto si pone nulla la resistenza a trazione. La ragione di quest'ultima differenza risiede nel tipo di analisi che si vuole effettuare: la normativa fornisce indicazioni per valutare le capacità di resistenza ultime di una struttura soggetta a incendio, però a livello deformativo questa assunzione cautelativa potrebbe rivelarsi controproducente.

Nei capitoli successivi si definiscono le routine di calcolo per strutture ad asse curvilineo in condizioni ordinarie, per poi integrare il modello di calcolo con le routine che regolano e descrivono il fenomeno incendio, dalla mappatura termica dei punti contenuti nelle sezioni della struttura alla definizione della dilatazione termica e tensione sollecitante associata.

### 3. Modello di calcolo non lineare di strutture ad asse curvilineo

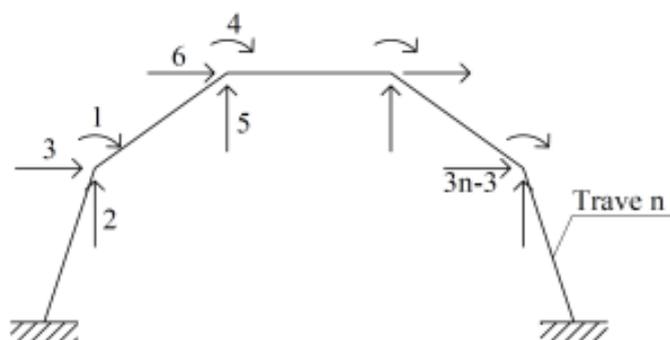
## 3. Modello di calcolo non lineare di strutture ad asse curvilineo

L'analisi di strutture ad asse curvilineo, quali i due archi in muratura oggetti di analisi all'interno di questa Tesi, può essere svolta con due metodi differenti.

Il primo prevede la suddivisione della struttura in un numero finito di elementi trave definenti una poligonale; i vertici della poligonale sono punti appartenenti alla linea media della struttura.

Per studiare il comportamento del telaio così composto, occorre dapprima valutare a livello locale la matrice di rigidezza dei singoli elementi trave, ciascuno dei quali possiede in generale sei gradi di libertà, tre per ogni estremità. Eccezione vien fatta per le travi agli estremi dove i gradi di libertà vengono ridotti per la presenza dei vincoli esterni, collegati al terreno mediante incastro.

Una volta definite le matrici di rigidezza locale è possibile procedere con l'assemblaggio della matrice di rigidezza globale e l'analisi dell'intera struttura, per poi tornare a valutare la risposta locale e lo stato di sollecitazione interno ai singoli elementi.



*Figura 3.1 Schema a telaio di strutture ad asse curvilineo*

Per una analisi più raffinata è necessario ridurre l'estensione degli elementi trave sino a raggiungere una estensione ridotta con elevata discretizzazione, il che comporta l'introduzione di un numero elevatissimo di variabili e incognite.

Il metodo adottato per la realizzazione del programma di calcolo è invece quello che definisce la struttura come un unico elemento a forma d'arco, ovvero mediante la rappresentazione dell'arco come una trave curvilinea continua. Con questo metodo si avrà un'unica matrice di rigidezza, come rappresentato nella seguente figura.

### 3. Modello di calcolo non lineare di strutture ad asse curvilineo

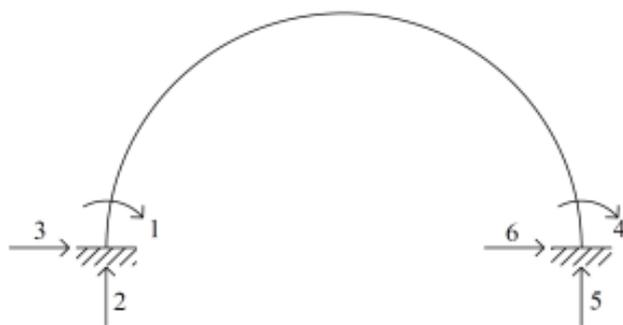


Figura 3.2 Schema a macro-elemento o trave curvilinea continua

#### 3.1 Analisi lineare

La linea media della struttura da esaminare può essere definita come luogo dei punti aventi la caratteristica di essere i centri dei cerchi bitangenti ad intradosso ed estradosso dell'arco; in questo modo lo spessore dello stesso può essere indicato per mezzo del diametro di detti cerchi.

L'arco viene considerato incastrato alla base ed isolato dal contesto strutturale in cui si colloca; la sua sagoma viene definita per mezzo delle coordinate  $z_i$  ed  $y_i$  dei punti della linea media, nei quali possono poi essere definiti eventuali carichi applicati (verticali,  $V_i$ , ed orizzontali,  $H_i$ ) e deformazioni impresse (curvatura,  $\mu_{i,imp}$ , ed allungamento assiale,  $\lambda_{i,imp}$ ).

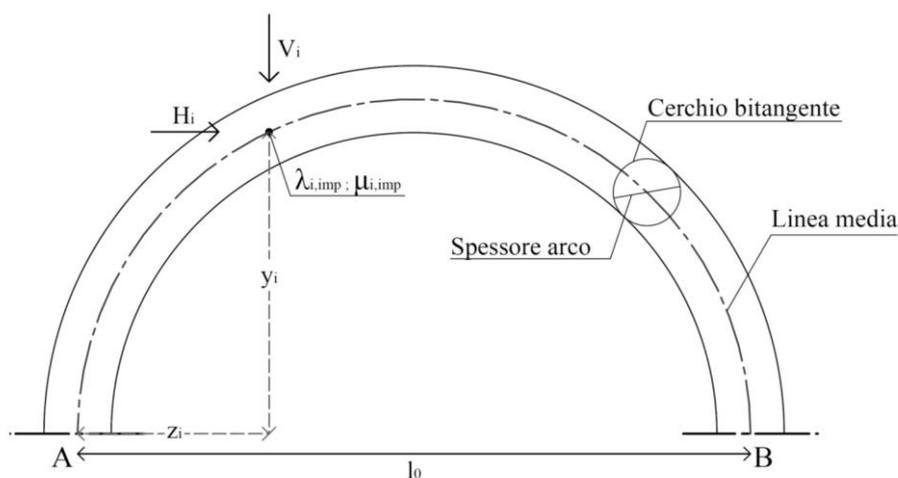
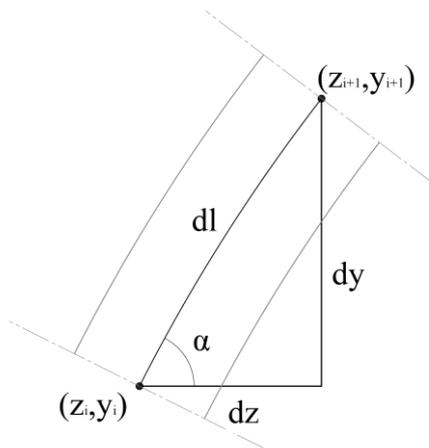


Figura 3.3 - Schematizzazione di un arco

La struttura viene discretizzata in un numero sufficiente di conci, le cui posizioni sono individuate mediante le coordinate  $z$  e  $y$  del baricentro delle sezioni che li delimitano. Con  $A$  viene indicata l'area delle sezioni stesse,  $J$  ne rappresenta il momento di inerzia, mentre  $E$  il modulo elastico del materiale. La lunghezza di ciascun

### 3. Modello di calcolo non lineare di strutture ad asse curvilineo

concio viene indicata con  $dl$ , mentre  $\alpha$  rappresenta l'angolo racchiuso tra l'orizzontale e l'asse del concio, considerato rettilineo, nell'ipotesi di suddivisioni sufficientemente piccole.



*Figura 3.4 - Indicazioni per i conci*

Con questa schematizzazione si può calcolare la lunghezza  $dl$  del concio ed i valori di seno e coseno dell'angolo  $\alpha$ :

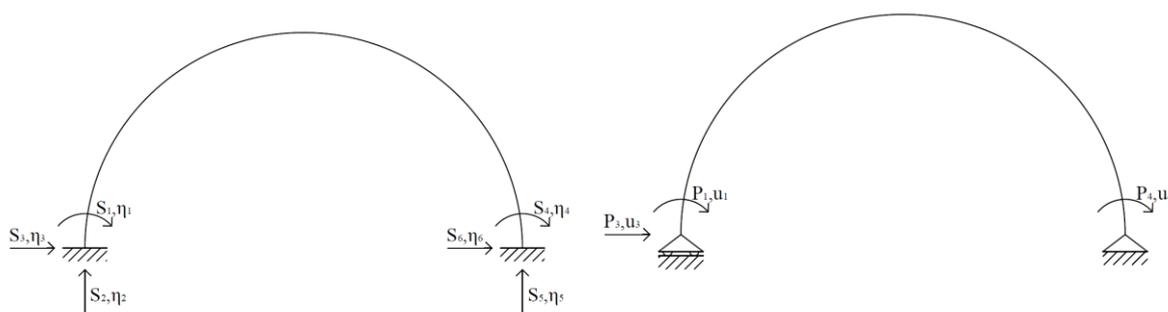
$$dl = \sqrt{dz^2 + dy^2} = dz \sqrt{1 + \left(\frac{dy}{dz}\right)^2} = dz \sqrt{1 + (y')^2} \quad (3.1)$$

$$\cos \alpha = \frac{dz}{dl} \quad (3.2)$$

$$\sin \alpha = \frac{dy}{dl} = \frac{dy}{dz} \frac{dz}{dl} = y' \cos \alpha \quad (3.3)$$

Per ricavare la matrice di rigidezza, che permette di correlare gli spostamenti ( $\eta$ ) di estremità con le sollecitazioni ( $S$ ) agenti, si riconduce la struttura ad una equivalente, isostatica, su cui agiscono azioni esterne ( $P$ ) in sostituzione dei gradi di vincolo rimossi. Nella Figura 3.5 Schema dell'arco iperstatico (sinistra) e struttura isostatica associata (destra) sono rappresentate le due tipologie di struttura, con indicazione della numerazione e delle convenzioni di verso positivo, valide sia per le azioni che per gli spostamenti.

### 3. Modello di calcolo non lineare di strutture ad asse curvilineo



**Figura 3.5** Schema dell'arco iperstatico (sinistra) e struttura isostatica associata (destra)

Analizzando la struttura isostatica, si definisce il legame tra gli spostamenti nodali  $u$  e le forze nodali  $P$ :  $\{u\} = [d]\{P\}$ , che in forma estesa risulta:

$$\begin{Bmatrix} u_1 \\ u_3 \\ u_4 \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} d_{11} & d_{13} & d_{14} \\ d_{31} & d_{33} & d_{34} \\ d_{41} & d_{43} & d_{44} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} P_1 \\ P_3 \\ P_4 \end{Bmatrix} \quad (3.4)$$

La matrice  $[d]$  è nota come matrice di deformabilità della struttura: è quadrata, di dimensioni  $3 \times 3$ , simmetrica e definita positiva. I suoi termini  $d_{ij}$  rappresentano lo spostamento  $u_i$  dovuto alla forza  $P_j$  agente singolarmente ed assunta di valore unitario; per semplicità si è mantenuta una numerazione di forze e spostamenti concorde con quella dell'arco iperstatico.

I termini della matrice di deformabilità si ricavano attraverso l'applicazione del Principio dei Lavori Virtuali (PLV).

Si considerino perciò due sistemi di arco isostatico identici: uno rappresentativo del sistema reale ed indicato con l'apice  $a$ , su cui leggere forze e sollecitazioni, e l'altro del sistema virtuale con apice  $b$ , su cui leggere spostamenti e deformazioni.

In figura 3.6 sono rappresentati i tre sistemi che si possono ottenere dall'applicazione delle tre forze duali ai tre possibili spostamenti di estremità; l'azione applicata, indicata con la lettera  $X$ , rappresenta equivalentemente le forze reali  $P$  e quelle virtuali, che verranno chiamate  $U$ . Vengono di seguito riportate le reazioni e le sollecitazioni che insorgono.

### 3. Modello di calcolo non lineare di strutture ad asse curvilineo

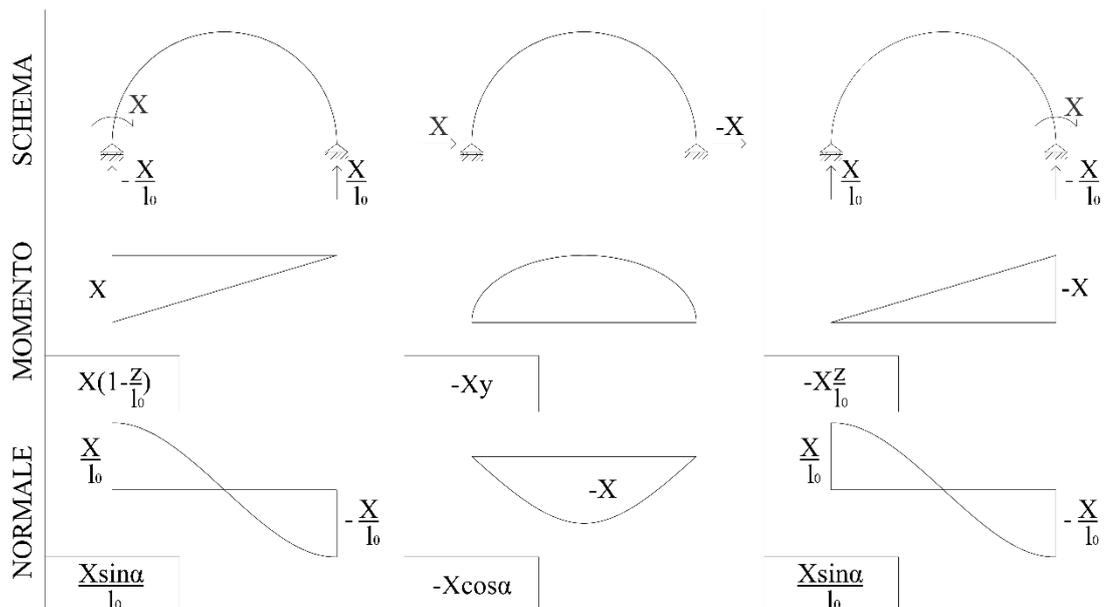


Figura 3.6 - Schemi delle sollecitazioni  $M, N$  che insorgono per applicazione dell'azione  $X$

Si procede quindi al calcolo dei diversi termini della matrice  $d$ , trascurando il contributo a taglio.

#### Coefficiente $d_{11}$

Si cerca la rotazione  $u_1$  dovuta all'applicazione della coppia  $P_1$  unitaria. I sistemi reale e virtuale sono analoghi e rappresentati nella figura 3.6 dal primo sistema.

Per il Principio dei Lavori Virtuali si può scrivere:

$$U_1^b u_1^a = \int_{l_0} \frac{M^a M^b}{EJ} dl + \int_{l_0} \frac{N^a N^b}{EA} dl = \int_0^{l_0} \frac{M^a M^b}{EJ} \sqrt{1+y'^2} dz + \int_0^{l_0} \frac{N^a N^b}{EA} \sqrt{1+y'^2} dz \quad (3.5)$$

Dalla figura 3.6 si ricava:

$$\begin{aligned} M^a &= P_1 \left(1 - \frac{z}{l_0}\right) = 1 - \frac{z}{l_0} & M^b &= U \left(1 - \frac{z}{l_0}\right) \\ N^a &= P_1 \frac{\sin \alpha}{l_0} = \frac{\sin \alpha}{l_0} & N^b &= U \frac{\sin \alpha}{l_0}. \end{aligned}$$

L'integrale diventa allora:

$$U u_1 = \int_0^{l_0} \left(1 - \frac{z}{l_0}\right)^2 \frac{U}{EJ} \sqrt{1+y'^2} dz + \int_0^{l_0} \frac{U}{EA} \left(\frac{\sin \alpha}{l_0}\right)^2 \sqrt{1+y'^2} dz \quad (3.6)$$

Dividendo entrambi i membri per  $U$  e risolvendo per via numerica l'integrale si ottiene il valore del termine  $u_1$ , pari a  $d_{11}$ .

### 3. Modello di calcolo non lineare di strutture ad asse curvilineo

#### **Coefficiente $d_{13}$**

Si vuole ora ricavare la rotazione  $u_1$  all'estremo  $A$ , dovuta all'applicazione della forza  $P_3$ . Il sistema reale è rappresentato dal secondo schema di figura 3.6, mentre quello virtuale è costituito dal primo.

$$\begin{aligned} M^a &= -P_3 y = -y & M^b &= U \left( 1 - \frac{z}{l_0} \right) \\ N^a &= -P_3 \cos \alpha = -\cos \alpha & N^b &= U \frac{\sin \alpha}{l_0} \end{aligned}$$

Si ottiene:

$$Uu_1 = \int_0^{l_0} -y \left( 1 - \frac{z}{l_0} \right) \frac{U}{EJ} \sqrt{1+y'^2} dz - \int_0^{l_0} \frac{U}{EA} \frac{\sin \alpha \cos \alpha}{l_0} \sqrt{1+y'^2} dz \quad (3.7)$$

#### **Coefficiente $d_{14}$**

Il termine  $d_{14}$  è pari alla rotazione  $u_1$ , quando viene applicata la forza  $P_4$ . I sistemi cui riferirsi sono il primo ed il terzo.

$$\begin{aligned} M^a &= -P_4 \frac{z}{l_0} = -\frac{z}{l_0} & M^b &= U \left( 1 - \frac{z}{l_0} \right) \\ N^a &= P_4 \frac{\sin \alpha}{l_0} = \frac{\sin \alpha}{l_0} & N^b &= U \frac{\sin \alpha}{l_0} \end{aligned}$$

Si ottiene:

$$d_{14} = u_1 = \int_0^{l_0} -\frac{z}{l_0} \left( 1 - \frac{z}{l_0} \right) \frac{1}{EJ} \sqrt{1+y'^2} dz + \int_0^{l_0} \frac{1}{EA} \left( \frac{\sin \alpha}{l_0} \right)^2 \sqrt{1+y'^2} dz \quad (3.8)$$

#### **Coefficiente $d_{33}$**

In questo caso si deve valutare lo spostamento  $u_3$  causato dall'applicazione della forza  $P_3$ . Si fa riferimento allo schema n.2.

$$\begin{aligned} M^a &= -P_3 y = -y & M^b &= -Uy \\ N^a &= -P_3 \cos \alpha = -\cos \alpha & N^b &= -U \cos \alpha \end{aligned}$$

$$d_{33} = u_3 = \int_0^{l_0} \frac{y^2}{EJ} \sqrt{1+y'^2} dz + \int_0^{l_0} \frac{\cos^2 \alpha}{EA} \sqrt{1+y'^2} dz \quad (3.9)$$

### 3. Modello di calcolo non lineare di strutture ad asse curvilineo

#### **Coefficiente $d_{34}$**

Allo schema reale, rappresentato dal terzo modello della figura, si associa il sistema virtuale, corrispondente al secondo. Si ottiene:

$$\begin{aligned}
 M^a &= -P_4 \frac{z}{l_0} = -\frac{z}{l_0} & M^b &= -Uy \\
 N^a &= P_4 \frac{\sin \alpha}{l_0} = \frac{\sin \alpha}{l_0} & N^b &= -U \cos \alpha \\
 d_{34} &= \int_0^{l_0} \frac{z}{l_0} \frac{y}{EJ} \sqrt{1+y'^2} dz - \int_0^{l_0} \frac{\sin \alpha \cos \alpha}{l_0} \frac{1}{EA} \sqrt{1+y'^2} dz & (3.10)
 \end{aligned}$$

#### **Coefficiente $d_{44}$**

Questo termine si ricava considerando esclusivamente l'ultimo schema di figura 3.6.

$$\begin{aligned}
 M^a &= -P_4 \frac{z}{l_0} = -\frac{z}{l_0} & M^b &= -U \frac{z}{l_0} \\
 N^b &= P_4 \frac{\sin \alpha}{l_0} & N^b &= U \frac{\sin \alpha}{l_0} \\
 d_{44} &= \int_0^{l_0} \left( \frac{z}{l_0} \right)^2 \frac{1}{EJ} \sqrt{1+y'^2} dz + \int_0^{l_0} \left( \frac{\sin \alpha}{l_0} \right)^2 \frac{1}{EA} \sqrt{1+y'^2} dz & (3.11)
 \end{aligned}$$

Gli altri termini si ottengono per simmetria:

$$\begin{aligned}
 d_{31} &= d_{13}; \\
 d_{41} &= d_{14}; \\
 d_{43} &= d_{34}.
 \end{aligned}$$

Ottenuta la matrice di deformabilità, la si inverte per ricavare la matrice di rigidezza  $[a]$  dell'arco isostatico:

$$[a] = [d]^{-1} \quad (3.12)$$

Questo passaggio, come si vedrà di seguito, consente di ricavare la matrice di rigidezza per l'arco reale iperstatico. Tale matrice viene calcolata per colonne, imponendo di volta in volta un solo cedimento non nullo e calcolando le sollecitazioni prodotte nei vincoli.

Il primo passo consiste nell'imporre lo spostamento  $\eta_1$  pari a 1. Si ottiene, di conseguenza:

$$\begin{aligned}
 S_1 &= K_{11} \eta_1 = K_{11} & S_3 &= K_{31} \eta_1 = K_{31} & S_5 &= K_{51} \eta_1 = K_{51} \\
 S_2 &= K_{21} \eta_1 = K_{21} & S_4 &= K_{41} \eta_1 = K_{41} & S_6 &= K_{61} \eta_1 = K_{61}
 \end{aligned} \quad (3.13)$$

### 3. Modello di calcolo non lineare di strutture ad asse curvilineo

Come si può notare, i termini  $K_{ij}$  della matrice di rigidezza rappresentano la sollecitazione  $S_i$  causata da uno spostamento  $\eta_j$  unitario.

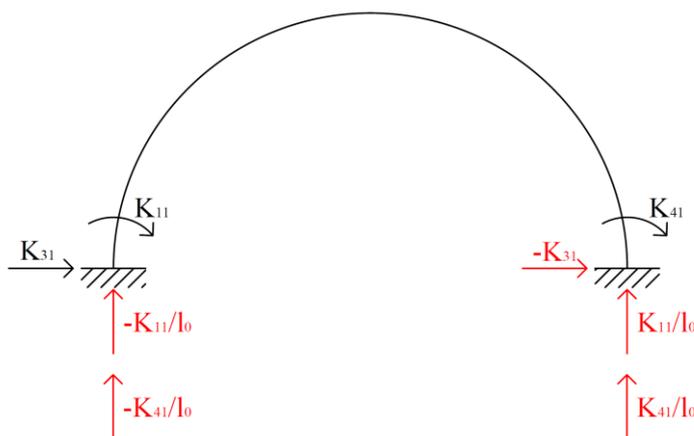
Le sollecitazioni che nascono negli incastrati vengono valutate con riferimento a quelle trovate con il sistema isostatico, almeno per quanto concerne i seguenti termini:

$$S_1 = K_{11} = a_{11} \quad S_3 = K_{31} = a_{31} \quad S_4 = K_{41} = a_{41} \quad (3.14)$$

Si noti che i pedici dei termini della matrice  $[a]$  non si riferiscono alle posizioni occupate nella matrice, ma richiamano gli spostamenti e le forze a cui sono associati.

I rimanenti tre termini della prima colonna della matrice di rigidezza si ricavano da considerazioni sull'equilibrio, come mostrato nella figura 3.7.

$$K_{61} = -K_{31} \quad K_{21} = -\frac{K_{11} + K_{41}}{l_0} \quad K_{51} = -K_{21} \quad (3.15)$$



**Figura 3.7 – Condizioni di equilibrio**

Seguendo i passi sopra descritti si procede con il calcolo delle colonne 3 e 4, essendo riconducibili alle situazioni già valutate per l'arco isostatico.

Imponendo  $\eta_3=1$  si ottiene:

$$\begin{aligned} K_{13} &= a_{13} & K_{33} &= a_{33} & K_{43} &= a_{43} \\ K_{63} &= -K_{33} & K_{23} &= -\frac{K_{13} + K_{43}}{l_0} & K_{53} &= -K_{23} \end{aligned} \quad (3.16)$$

Per  $\eta_4=1$  si avrà:

$$K_{14} = a_{14} \quad K_{34} = a_{34} \quad K_{44} = a_{44}$$

### 3. Modello di calcolo non lineare di strutture ad asse curvilineo

$$K_{64} = -K_{34} = -a_{34} \quad K_{24} = -\frac{K_{14} + K_{44}}{l_0} \quad K_{54} = -K_{24} \quad (3.17)$$

La matrice di rigidezza, a questo punto, assume la seguente forma:

$$[K] = \begin{bmatrix} a_{11} & - & a_{13} & a_{14} & - & - \\ -\frac{K_{11} + K_{41}}{l_0} & - & -\frac{K_{13} + K_{43}}{l_0} & -\frac{K_{14} + K_{44}}{l_0} & - & - \\ a_{31} & - & a_{33} & a_{34} & - & - \\ a_{41} & - & a_{43} & a_{44} & - & - \\ -K_{21} & - & -K_{23} & -K_{24} & - & - \\ -K_{31} & - & -K_{33} & -K_{34} & - & - \end{bmatrix} \quad (3.18)$$

I termini mancanti si ricavano o per simmetria o dall'analisi dell'equilibrio. Si ottiene allora:

- Colonna 2:

$$\begin{aligned} K_{12} &= K_{21} & K_{32} &= K_{23} & K_{42} &= K_{24} \\ K_{62} &= -K_{32} & K_{22} &= -\frac{K_{12} + K_{42}}{l_0} & K_{52} &= -K_{22} \end{aligned} \quad (3.19)$$

- Colonna 5:

$$\begin{aligned} K_{15} &= K_{51} & K_{35} &= K_{53} & K_{52} &= K_{54} \\ K_{65} &= -K_{35} & K_{25} &= K_{52} & K_{55} &= -K_{25} \end{aligned} \quad (3.20)$$

- Colonna 6:

$$\begin{aligned} K_{16} &= K_{61} & K_{36} &= K_{63} & K_{46} &= K_{64} \\ K_{66} &= -K_{36} & K_{26} &= K_{62} & K_{56} &= K_{65} \end{aligned} \quad (3.21)$$

La definizione delle azioni nodali si effettua attraverso la relazione

$$\{S\} = [K]\{\eta\} + \{S_0\} \quad (3.22)$$

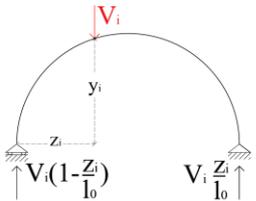
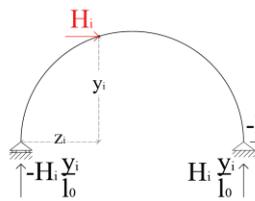
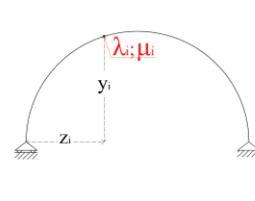
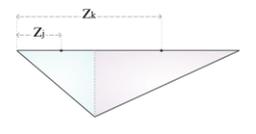
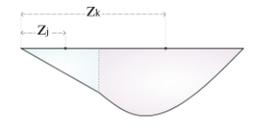
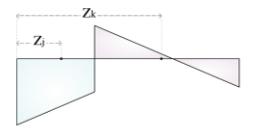
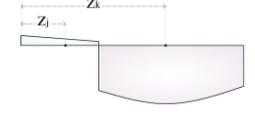
Occorre quindi andare a definire il termine  $\{S_0\}$ , vettore dei carichi nodali equivalenti ai carichi impliciti ed espliciti applicati su tutto lo sviluppo dell'arco; esso può essere inteso come vettore delle azioni che annullano gli spostamenti causati dalle sollecitazioni esterne.

Si consideri dunque un generico punto  $i$ , di coordinate  $z_i$  e  $y_i$ , posto sull'asse dell'arco; come mostrato in figura 3.3, vengono indicati

### 3. Modello di calcolo non lineare di strutture ad asse curvilineo

con  $V_i$  il carico verticale  $i$ vi agente, con  $H_i$  quello orizzontale, con  $\lambda_i$  la deformazione assiale impressa e con  $\mu_i$  la curvatura, anch'essa impressa.

Facendo ancora una volta riferimento all'arco isostatico, si applica il Principio dei Lavori Virtuali; a questo scopo si considerano come sistemi virtuali i tre schemi precedentemente utilizzati (figura 3.6), da combinare con i tre modelli proposti in figura 3.8, rappresentativi dei sistemi reali.

SCHEMA						
MOMENTO			Sistema isostatico: le deformazioni reali e quelle imprresse coincidono			
	$V_i(1-\frac{Z_i}{l_0})Z_j$	$V_i\frac{Z_i}{l_0}(l_0-Z_k)$		$-H_i\frac{Y_i}{l_0}Z_j$	$-H_i\frac{Y_i}{l_0}Z_k+H_i(y_i-y_k)$	
NORMALE				$-V_i(1-\frac{Z_i}{l_0})\sin\alpha_i$	$V_i\frac{\sin\alpha_k}{l_0}$	$H_i\frac{Y_i}{l_0}\sin\alpha_i$

**Figura 3.8 - Schemi per il calcolo delle sollecitazioni  $M, N$  che insorgono per l'applicazione di azioni esterne**

#### **Sistema reale 1: carichi verticali**

Si valuteranno ora i tre spostamenti dovuti ai carichi verticali, mantenendo fisso il sistema reale di riferimento (il primo) e variando quello virtuale, rappresentativo dello spostamento che si intende determinare.

#### **Spostamento $u_{1Vi}$**

Lo spostamento  $u_{1Vi}$  è la rotazione all'estremo A causata dai carichi verticali. Il sistema virtuale di riferimento è il primo.

$$u_{1Vi}U = \int_0^{l_0} U \left(1 - \frac{z}{l_0}\right) \frac{M_{Vi}}{EJ} \sqrt{1+y'^2} dz + \int_0^{l_0} U \frac{\sin\alpha}{l_0} \frac{N_{Vi}}{EA} \sqrt{1+y'^2} dz \quad (3.23)$$

Dividendo entrambi i membri per la forza virtuale  $U$  si ricava l'espressione dello spostamento voluto.

### 3. Modello di calcolo non lineare di strutture ad asse curvilineo

Nella formula non sono stati esplicitati i valori di momento e sforzo normale causati dai carichi, poiché dipendenti dalla posizione della sezione in cui tali sollecitazioni vengono valutate rispetto a quella caricata (si vedano le formule di figura 3.8).

#### **Spostamento $u_{3Vi}$**

Facendo riferimento al secondo sistema virtuale, si calcola lo spostamento orizzontale dell'estremo  $A$ .

$$u_{3Vi} = -\int_0^{l_0} y \frac{M_{Vi}}{EJ} \sqrt{1+y'^2} dz + \int_0^{l_0} \frac{\cos \alpha}{l_0} \frac{N_{Vi}}{EA} \sqrt{1+y'^2} dz \quad (3.24)$$

#### **Spostamento $u_{4Vi}$**

Si determina ora l'espressione per la rotazione in  $B$ .

$$u_{4Vi} = -\int_0^{l_0} \frac{z}{l_0} \frac{M_{Vi}}{EJ} \sqrt{1+y'^2} dz + \int_0^{l_0} \frac{\sin \alpha}{l_0} \frac{N_{Vi}}{EA} \sqrt{1+y'^2} dz \quad (3.25)$$

#### **Sistema reale 2: carichi orizzontali**

Si intende ricavare ora le espressioni degli spostamenti  $u_1, u_3, u_4$  provocati dai carichi orizzontali; il sistema reale di riferimento è il secondo ed il procedimento di calcolo è analogo a quello visto al punto precedente.

#### **Spostamento $u_{1Hi}$**

$$u_{1Hi} = \int_0^{l_0} \left(1 - \frac{z}{l_0}\right) \frac{M_{Hi}}{EJ} \sqrt{1+y'^2} dz + \int_0^{l_0} \frac{\sin \alpha}{l_0} \frac{N_{Hi}}{EA} \sqrt{1+y'^2} dz \quad (3.26)$$

#### **Spostamento $u_{3Hi}$**

$$u_{3Hi} = -\int_0^{l_0} y \frac{M_{Hi}}{EJ} \sqrt{1+y'^2} dz + \int_0^{l_0} \frac{\cos \alpha}{l_0} \frac{N_{Hi}}{EA} \sqrt{1+y'^2} dz \quad (3.27)$$

#### **Spostamento $u_{4Hi}$**

$$u_{4Hi} = -\int_0^{l_0} \frac{z}{l_0} \frac{M_{Hi}}{EJ} \sqrt{1+y'^2} dz + \int_0^{l_0} \frac{\sin \alpha}{l_0} \frac{N_{Hi}}{EA} \sqrt{1+y'^2} dz \quad (3.28)$$

#### **Sistema reale 3: deformazioni impresse**

Avendo a che fare con un sistema isostatico, le deformazioni impresse coincideranno con quelle reali, andando a sostituire nelle

### 3. Modello di calcolo non lineare di strutture ad asse curvilineo

espressioni i termini  $\frac{M}{EJ}$  e  $\frac{N}{EA}$ . In questo caso il sistema reale è il terzo.

#### **Spostamento $u_{1\lambda_i, \mu_i}$**

$$u_{1\lambda_i, \mu_i} = \int_0^{l_0} \left(1 - \frac{z}{l_0}\right) \mu_i \sqrt{1+y'^2} dz + \int_0^{l_0} \frac{\sin \alpha}{l_0} \lambda_i \sqrt{1+y'^2} dz \quad (3.29)$$

#### **Spostamento $u_{3\lambda_i, \mu_i}$**

$$u_{3\lambda_i, \mu_i} = -\int_0^{l_0} y \mu_i \sqrt{1+y'^2} dz + \int_0^{l_0} \frac{\cos \alpha}{l_0} \lambda_i \sqrt{1+y'^2} dz \quad (3.30)$$

#### **Spostamento $u_{4\lambda_i, \mu_i}$**

$$u_{4\lambda_i, \mu_i} = -\int_0^{l_0} \frac{z}{l_0} \mu_i \sqrt{1+y'^2} dz + \int_0^{l_0} \frac{\sin \alpha}{l_0} \lambda_i \sqrt{1+y'^2} dz \quad (3.31)$$

In ultimo si calcolano gli spostamenti complessivi, dovuti alla contemporaneità delle diverse tipologie di carico, sommando i singoli contributi:

$$u_1 = \sum_1^{N+1} (u_{1Vi} + u_{1Hi} + u_{1\lambda_i, \mu_i}) \quad (3.32)$$

$$u_3 = \sum_1^{N+1} (u_{3Vi} + u_{3Hi} + u_{3\lambda_i, \mu_i}) \quad (3.33)$$

$$u_4 = \sum_1^{N+1} (u_{4Vi} + u_{4Hi} + u_{4\lambda_i, \mu_i}) \quad (3.34)$$

Si noti che gli spostamenti nodali equivalenti appena ricavati corrispondono a quelli reali, quando i cedimenti vincolari  $\{\eta\}$  sono nulli. Vengono allora imposti sull'arco gli spostamenti che

### 3. Modello di calcolo non lineare di strutture ad asse curvilineo

annullano quelli prodotti dalle forze, ricavando di conseguenza le azioni nodali  $\{S_0\}$ :

$$\{S_0\} = [K] \begin{Bmatrix} -u_1 \\ 0 \\ -u_3 \\ -u_4 \\ 0 \\ 0 \end{Bmatrix} \quad (3.35)$$

Si dispone ora di tutti gli elementi necessari per il calcolo delle azioni nodali  $\{S\}$ , da cui ricavare la distribuzione caratteristica di sollecitazione all'interno dell'arco.

### 3.2 Analisi non lineare

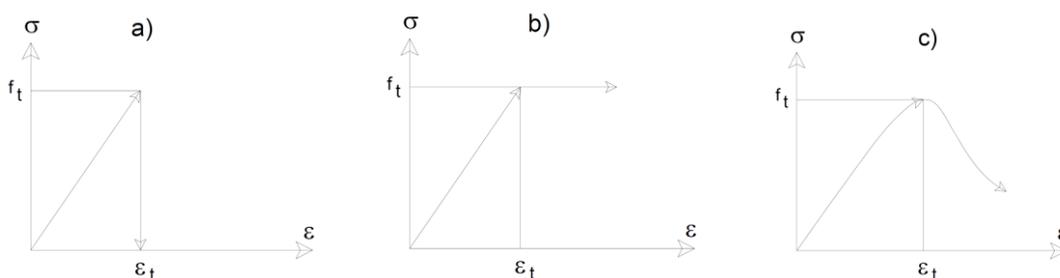
L'analisi esposta nel paragrafo precedente suppone che il materiale abbia un comportamento lineare, che arrivi a rottura, sia in trazione sia in compressione, con una semplice correlazione lineare fra la deformazione avvenuta e la sollecitazione associata. Questo metodo, oltre che non analizzare realmente il comportamento delle strutture poiché si supera nella maggior parte dei casi il campo elastico, non tiene conto delle riserve di resistenza della medesima struttura una volta raggiunto il campo plastico.

Si trascurerebbero così le capacità di adattamento al carico, la formazione di cerniere plastiche con conseguente assorbimento di energia e la redistribuzione delle sollecitazioni nelle sezioni adiacenti.

Volendo approcciarsi al problema nel modo più verosimile possibile alla realtà, oltre che cercare di tenere conto della resistenza della struttura in entrambi i campi deformativi, si procede con l'integrazione dell'analisi non lineare.

A titolo esplicativo si passa quindi dal considerare il legame costitutivo elastico lineare (Figura 3.9.a) al legame costitutivo non lineare (Figura 3.9.c) che varierà in funzione del tipo di materiale impiegato.

### 3. Modello di calcolo non lineare di strutture ad asse curvilineo



**Figura 3.9** Legami costitutivi: elastico lineare (a) - elasto-plastico (b) - quasi fragile (c)

I materiali fragili presentano una risposta piuttosto regolare fino al raggiungimento della tensione massima sopportabile ( $f_t$ ), corrispondente ad una deformazione limite ( $\epsilon_t$ ), dopo la quale si ha una brusca caduta di resistenza, tale per cui il materiale non è più in grado di sopportare ulteriori deformazioni.

I materiali duttili possono invece raggiungere deformazioni molto grandi senza ridurre la loro resistenza: raggiunta la tensione  $f_t$ , questa può poi mantenersi costante o addirittura aumentare, anche se in misura minore rispetto al tratto iniziale.

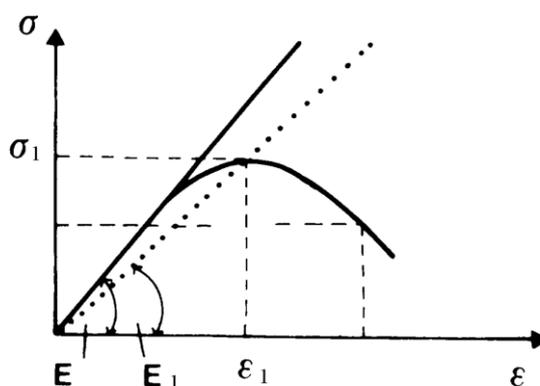
I materiali quasi fragili sono invece caratterizzati da un diagramma  $\sigma$ - $\epsilon$  crescente fino al raggiungimento della tensione massima  $f_t$ , cui segue un tratto decrescente che indica una diminuzione della capacità di resistenza all'aumentare della deformazione; il loro comportamento è intermedio a quelli delle due classi precedenti.

Le definizioni sopra presentate sono piuttosto teoriche: descrivono comportamenti che potrebbero essere definiti perfetti, mentre nella realtà le leggi costitutive tendono a tali modelli, ma non sono quasi mai una copia di essi. In generale si può affermare che il modulo di elasticità  $E$  dei materiali non è costante, ma varia, in modo più o meno accentuato, in funzione della deformazione raggiunta e in certi casi anche di altre condizioni al contorno, quali per esempio la temperatura.

Per quanto riguarda il modulo elastico e la resistenza massima a compressione delle strutture in muratura, adottati ai fini del calcolo, si rimanda alla trattazione al paragrafo 4.2.3.

Si procede ora con la trattazione della mera procedura di calcolo in campo non lineare.

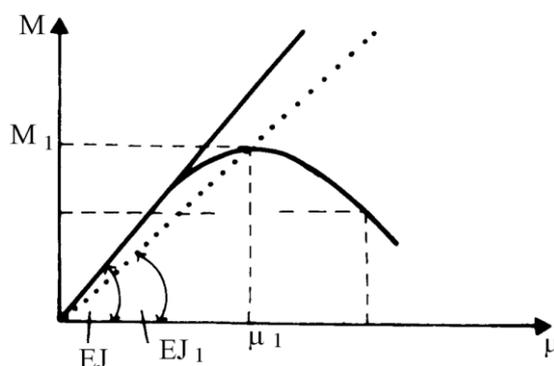
### 3. Modello di calcolo non lineare di strutture ad asse curvilineo



*Figura 3.10 Legge costitutiva di un materiale reale  
Modulo elastico funzione della deformazione raggiunta*

Si è detto che la non linearità si osserva anche nei diagrammi momento-curvatura; questi dipendono dalla geometria della sezione, dalle caratteristiche del materiale e dallo sforzo normale cui la sezione è soggetta. Per una stessa sezione, pertanto, si avranno diversi diagrammi  $M-\mu$  al variare della sollecitazione assiale.

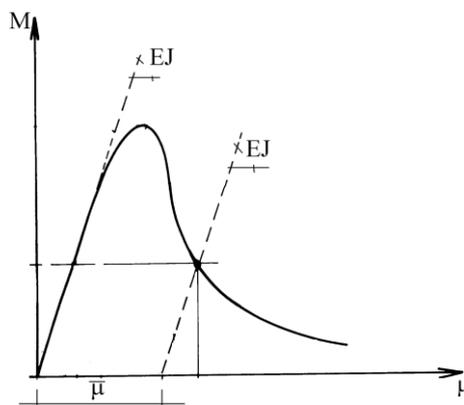
La non linearità del diagramma è legata ad una variazione progressiva del modulo di rigidezza secante  $EJ$ .



*Figura 3.11 Non linearità nel diagramma momento-curvatura:  
 $EJ$  variabile in funzione della curvatura*

La considerazione della non linearità nell'analisi comporta, per ogni sezione esaminata, un adeguamento della matrice di rigidezza ad ogni variazione di  $EJ$ , che è funzione dello stato deformativo. Una valida alternativa è quella di considerare costante il valore  $EJ$ , quindi i termini della matrice  $[K]$ , ed operare una traslazione del sistema di riferimento nel diagramma  $M-\mu$ , attraverso l'imposizione di curvature impresse, realizzando così uno spostamento dell'origine.

### 3. Modello di calcolo non lineare di strutture ad asse curvilineo

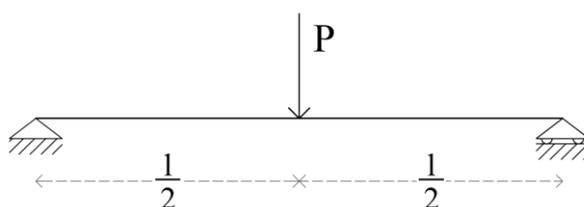


*Figura 3.12 Non linearità nel diagramma momento-curvatura  
Imposizione di curvature impresse e traslazione dell'origine*

#### 3.2.1 Struttura isostatica e struttura iperstatica a confronto

Al fine di una migliore comprensione e di un confronto dei due metodi di valutazione della relazione non lineare tra momento e curvatura, si analizza ora una struttura semplice, con l'applicazione di entrambi.

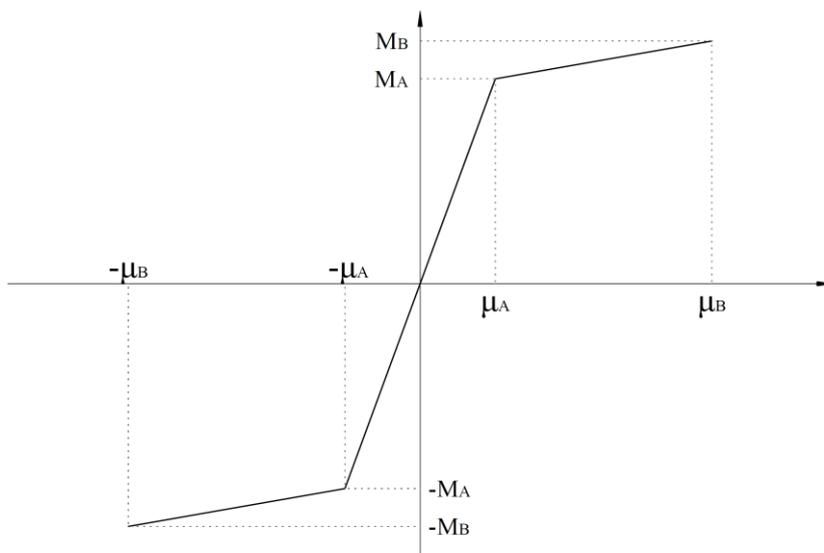
Si consideri una struttura soggetta al solo momento flettente, quale quella rappresentata in figura, costituita da una trave appoggiata agli estremi, sulla quale agisce un carico verticale concentrato in mezzeria.



*Figura 3.13 Struttura analizzata*

La relazione momento-curvatura per  $N=0$  sia costituita da una bilatera, rappresentativa di comportamento duttile: al primo tratto crescente, di pendenza  $EJ=M_A/\mu_A$ , segue un secondo tratto, anch'esso crescente, ma con pendenza minore.

### 3. Modello di calcolo non lineare di strutture ad asse curvilineo

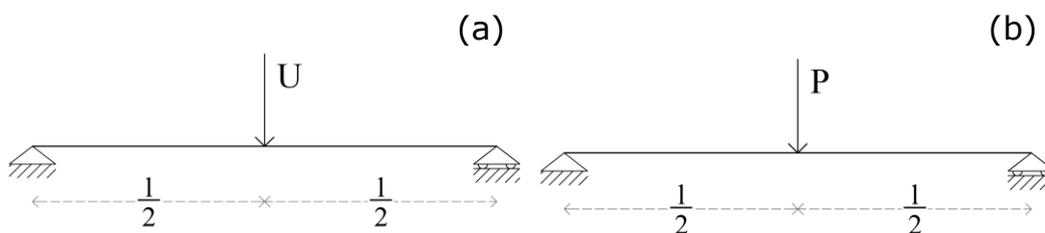


**Figura 3.15 - Diagramma momento-curvatura per  $N=0$**

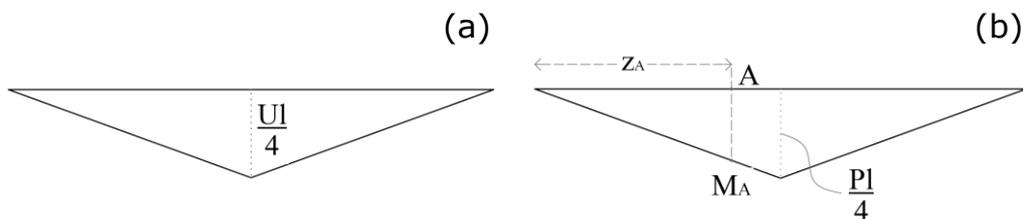
Si vuole conoscere la freccia in mezzeria  $\eta_C$ , applicando il Principio dei Lavori Virtuali:

$$U \cdot \eta_C = \int_0^l M^a \mu^b dx \quad (3.36)$$

La figura Figura 3.14 mostra i sistemi reale (b) e virtuale (a), a cui fare riferimento per la definizione del momento (sistema virtuale) e della curvatura (sistema reale).



**Figura 3.14 Sistema virtuale (a); Sistema reale (b)**



**Figura 3.15 - Schema dei momenti flettenti: sistema virtuale (a); sistema reale (b)**

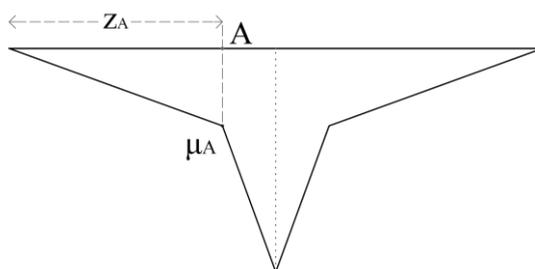
### 3. Modello di calcolo non lineare di strutture ad asse curvilineo

Con il metodo secante, la curvatura viene definita attraverso due relazioni:

$$\mu = \frac{M}{EJ} \text{ se } M < M_A$$

$$\mu = \mu_A + \frac{M - M_A}{M_B - M_A} (\mu_B - \mu_A) \text{ se } M > M_A \quad (3.37)$$

Finché il carico applicato è minore o uguale a  $P_A$ , forza per cui si raggiunge il momento  $M_A$  in mezzera ( $M_A = P_A l / 4$ ;  $P_A = 4M_A / l$ ), la curvatura è descritta solo dalla prima relazione, mentre per  $P > P_A$  si deve ricorrere anche all'espressione non lineare per le sezioni all'interno della zona plasticizzata, compresa tra due tratti di lunghezza  $z_A = 2M_A / P$  a comportamento elastico.



**Figura 3.16 Distribuzione delle curvature; sistema reale**

L'integrale per il calcolo della freccia sarà:

$$\eta_C = \frac{2}{U} \left\{ \int_0^{z_A} M^a \frac{M}{EJ} dx + \int_{z_A}^{l/2} M^a \left[ \mu_A + \frac{M - M_A}{M_B - M_A} (\mu_B - \mu_A) \right] dx \right\} \quad (3.38)$$

Applicando invece il metodo di traslazione del sistema di riferimento l'integrale viene definito interamente su tutta la lunghezza di metà trave, sottovalutando così l'andamento delle curvature ed inserendo una correzione  $A$ :

$$\eta_C = \frac{2}{U} \int_0^{l/2} M^a \left( \frac{M}{EJ} + A \right) dx \quad (3.39)$$

Il termine  $A$  rappresenta la differenza tra la curvatura reale e quella elastica ed è equivalente alla curvatura impressa  $\bar{\mu}$  che realizza la traslazione dell'origine del diagramma; essa vale:

### 3. Modello di calcolo non lineare di strutture ad asse curvilineo

$$\bar{\mu} = \mu - \frac{M}{EJ} = 0, \text{ se } x < z_A$$

$$\bar{\mu} = \mu_A + \frac{M - M_A}{M_B - M_A} (\mu_B - \mu_A) - \frac{M}{EJ}, \text{ se } x > z_A \quad (3.40)$$

L'espressione della freccia risulta così:

$$\begin{aligned} \eta_C &= \frac{2}{U} \left\{ \int_0^{l/2} M^a \frac{M}{EJ} dx + \int_{z_A}^{l/2} M^a \left[ \mu_A + \frac{M - M_A}{M_B - M_A} (\mu_B - \mu_A) \right] dx - \int_{z_A}^{l/2} M^a \frac{M}{EJ} dx \right\} = \\ &= \frac{2}{U} \left\{ \int_0^{z_A} M^a \frac{M}{EJ} dx + \int_{z_A}^{l/2} M^a \left[ \mu_A + \frac{M - M_A}{M_B - M_A} (\mu_B - \mu_A) \right] dx \right\} \quad (3.41) \end{aligned}$$

Si può osservare che i due integrali 3.38 e 3.41 sono uguali, a conferma dell'equivalenza dei due metodi.

#### 3.2.2 Analisi non lineare con strutture iperstatiche

L'analisi con il metodo non lineare diventa molto complessa quando si trattano strutture iperstatiche; si riporta un caso a titolo esemplificativo per individuare la soluzione al problema.

Si consideri una trave a sezione costante incastrata ad un estremo ed appoggiata all'altro, sulla quale agisce un carico verticale concentrato in mezzeria, come rappresentato in figura.

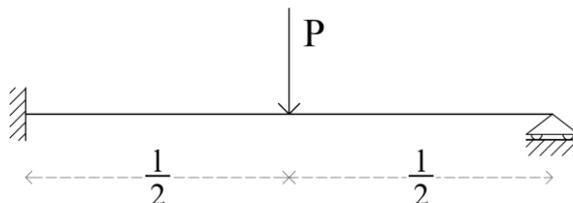


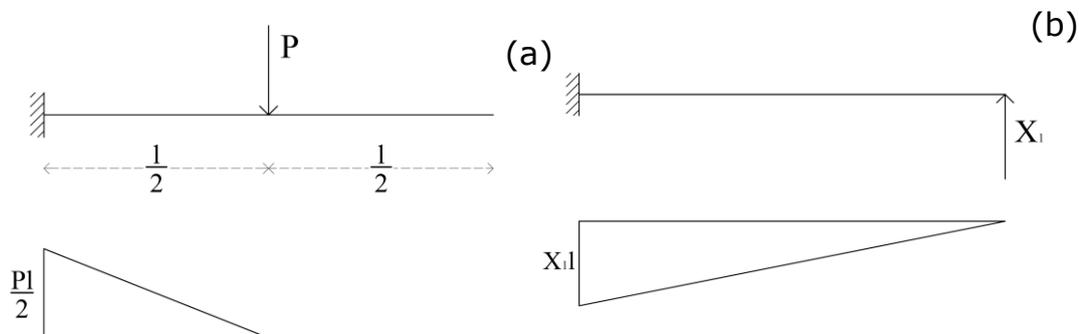
Figura 3.17 Struttura analizzata

Per il calcolo delle reazioni vincolari e delle sollecitazioni si ricorre nuovamente all'utilizzo del P.L.V.

La struttura viene ridotta ad una isostatica principale equivalente sostituendo l'appoggio (1 GdL) con una reazione incognita  $X_1$ . Richiamando il principio di sovrapposizione degli effetti, la distribuzione reale del momento flettente si ottiene valutando

### 3. Modello di calcolo non lineare di strutture ad asse curvilineo

separatamente il momento generato dal carico esterno sulla semplice mensola (isostatica principale) e quello dovuto alla sola reazione incognita, in assenza di ulteriori carichi (Figura 3.17).



**Figura 3.18** Scomposizione dell'isostatica principale e relativi diagrammi di momento

Per poter ottenere il valore di  $X_1$  si ricorre ad un sistema di forze fittizio, in cui alla reazione vincolare è assegnato valore unitario. Indicando con  $M_0$  il momento causato dal carico reale e con  $M_1$  quello relativo allo schema fittizio, il momento reale  $M_r$  sollecitante la struttura completa si ottiene dalla somma  $M_r = M_0 + X_1 M_1$ .

L'incognita iperstatica viene ricavata dall'espressione dello spostamento reale duale all'incognita stessa, il quale deve essere nullo, poiché impedito dal vincolo (si tratta infatti dello spostamento verticale dell'estremità destra della trave, impedito appunto dalla presenza dell'appoggio):

$$0 = \int_0^l M_1 \mu_r dx$$

Applicando il metodo della traslazione dell'origine la curvatura reale  $\mu_r$  viene espressa come:

$$\mu_r = \frac{M_r}{EJ} + \bar{\mu} = \frac{M_0 + X_1 M_1}{EJ} + \bar{\mu}$$

Ovviamente la curvatura impressa sarà non nulla solo nelle sezioni all'interno della zona in campo non lineare, di lunghezza  $a$  e posizione non ancora definibile.

Si ottiene infine la seguente espressione, risolvete il problema iperstatico:

$$0 = \int_0^a \frac{M_0 M_1}{EJ} dx + X_1 \int_0^l \frac{M_1^2}{EJ} dx + \int_a^l M_1 \bar{\mu} dx \quad (3.42)$$

### 3. Modello di calcolo non lineare di strutture ad asse curvilineo

Il problema che si incontra nella risoluzione dell'espressione è dovuto alla presenza di due incognite,  $X_1$  ed  $a$ , tra loro correlate: la lunghezza del tratto a comportamento non lineare, infatti, deriva dalla distribuzione del momento, il quale può essere determinato solo in funzione dell'incognita iperstatica, che dipende a sua volta da  $a$ .

Si rende allora necessario un calcolo iterativo con procedura non lineare, che può essere riassunto nei seguenti punti:

1. Calcolo di  $X_1$  nell'ipotesi di comportamento lineare di tutte le sezioni della trave ( $a=0$ );
2. Introduzione della variabile  $X_{1, attuale}$ , posta pari a  $X_1$ ;
3. Calcolo di  $M_r$ :  $M_r = M_0 + X_1 M_1$ ;
4. Individuazione dei punti in cui  $|M^r| > M_A$  e calcolo di  $\bar{\mu}$  in funzione del legame  $M-\mu$ ;
5. Calcolo di  $X_1$  con considerazione della non linearità:

$$X_1 = -\frac{\int_0^l M_1 \bar{\mu} dx + \int_0^l \frac{M_0 M_1}{EJ} dx}{\int_0^l \frac{M_1^2}{EJ} dx}$$

6. Controllo: se  $|X_1 - X_{1, attuale}| < tolleranza$ , allora  $X_1$  è la soluzione cercata, altrimenti si itera nuovamente tornando al punto 2, con il nuovo valore dell'incognita iperstatica.

Questo procedimento può risultare efficace e rapido per strutture analoghe a quella proposta, con sezione trasversale che si mantiene costante su tutta la lunghezza e sforzo normale nullo, poiché si può fare riferimento ad un unico diagramma momento-curvatura. Questo non accade però nelle strutture ad arco, in cui lo sforzo normale varia lungo lo sviluppo ed anche la geometria delle sezioni può cambiare.

L'applicazione della procedura descritta comporta in questo caso la necessità di avere a disposizione diagrammi  $M-\mu$  per ogni tipologia di sezione ed ogni possibile valore di sforzo normale, rendendo il calcolo eccessivamente laborioso.

Al problema si può ovviare ricorrendo in modo indiretto alla relazione, attraverso la legge costitutiva  $\sigma-\varepsilon$ ; in questo modo, infatti, si utilizza una sola legge che dipende esclusivamente dal

### 3. Modello di calcolo non lineare di strutture ad asse curvilineo

materiale costituente la struttura anziché far riferimento ad innumerevoli legami  $M-\mu^1$ .

Con queste premesse si può adattare il procedimento di analisi lineare precedentemente descritto alle esigenze di calcolo non lineare.

Seguendo le indicazioni dell'analisi lineare, si arriva alla definizione delle azioni nodali  $\{S_0\}$ , da cui ricavare le sollecitazioni  $\{S\}$ .

In ogni sezione dell'arco vengono determinati i valori di sforzo normale, momento e taglio (il contributo di quest'ultimo verrà trascurato) e si procede al calcolo della risposta in termini di deformazione e tensione:

1. Calcolo della deformazione assiale e della curvatura della sezione esaminata (pedice  $i$ ):

$$\mu_i = \frac{M_i}{EJ_i} + \bar{\mu}_i,$$
$$\lambda_i = \frac{N_i}{EA_i} + \bar{\lambda}_i \quad (3.43)$$

2. Calcolo delle deformazioni:

$$\varepsilon_i(y) = \lambda_i + \mu_i y \quad (3.44)$$

essendo  $y$  l'asse verticale, nel riferimento locale, con origine nel centro della sezione;

3. Calcolo della distribuzione delle tensioni all'interno della sezione, ricorrendo alla legge costitutiva del materiale:

$$\sigma_i(y) = \sigma(\varepsilon_i) \quad (3.45)$$

4. Determinazione dello sforzo normale di risposta:

$$N_{resp} = \int_{A_i} \sigma_i dA \quad (3.46)$$

5. Controllo: se  $|N_i - N_{resp}| > \text{tolleranza}$  si corregge la deformazione assiale attraverso l'imposizione di una deformazione impressa aggiuntiva  $\Delta\bar{\lambda}_i$ :

$$\bar{\lambda}_i = \bar{\lambda}_i + \Delta\bar{\lambda}_i = \bar{\lambda}_i + \frac{N_i - N_{resp}}{EA_i} \quad (3.47)$$

---

<sup>1</sup> Nel caso di struttura eterogenea si utilizzeranno tante leggi costitutive quanti sono i materiali costituenti, ma saranno comunque in numero minore rispetto a tutti i possibili diagrammi  $M-\mu$ .

### 3. Modello di calcolo non lineare di strutture ad asse curvilineo

e si ritorna al punto 1. Se la verifica viene soddisfatta si procede con il passaggio successivo;

6. Calcolo del momento di risposta:

$$M_{resp} = \int_{A_i} \sigma_i y dA \quad (3.48)$$

7. Calcolo del termine di correzione della curvatura:

$$\Delta \bar{\mu}_i = \frac{M_i - M_{resp}}{EJ_i} \quad (3.49)$$

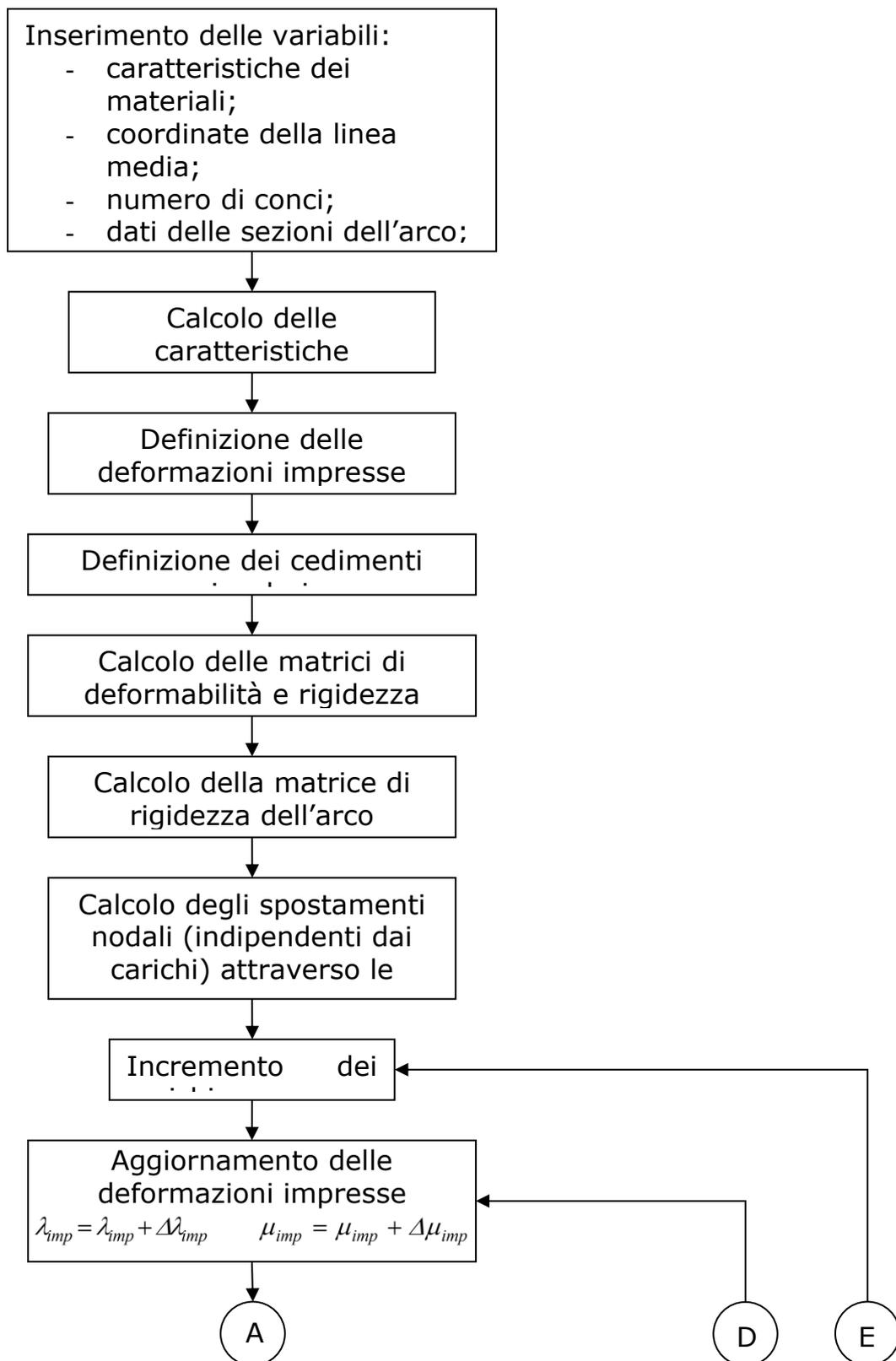
8. Controllo: se  $\Delta \bar{\mu}_i \neq 0$  in almeno una sezione, si ritorna al calcolo di  $\{S_0\}$  con i nuovi valori di deformazione; in caso contrario si è ottenuta la soluzione del problema.

I passaggi di calcolo presentati consentono di adattare il procedimento di calcolo lineare all'analisi non lineare; si può notare che il problema legato alla numerosità dei diagrammi curvatura-momento è stato aggirato ricavando le stesse informazioni indirettamente, in funzione delle deformazioni e delle tensioni.

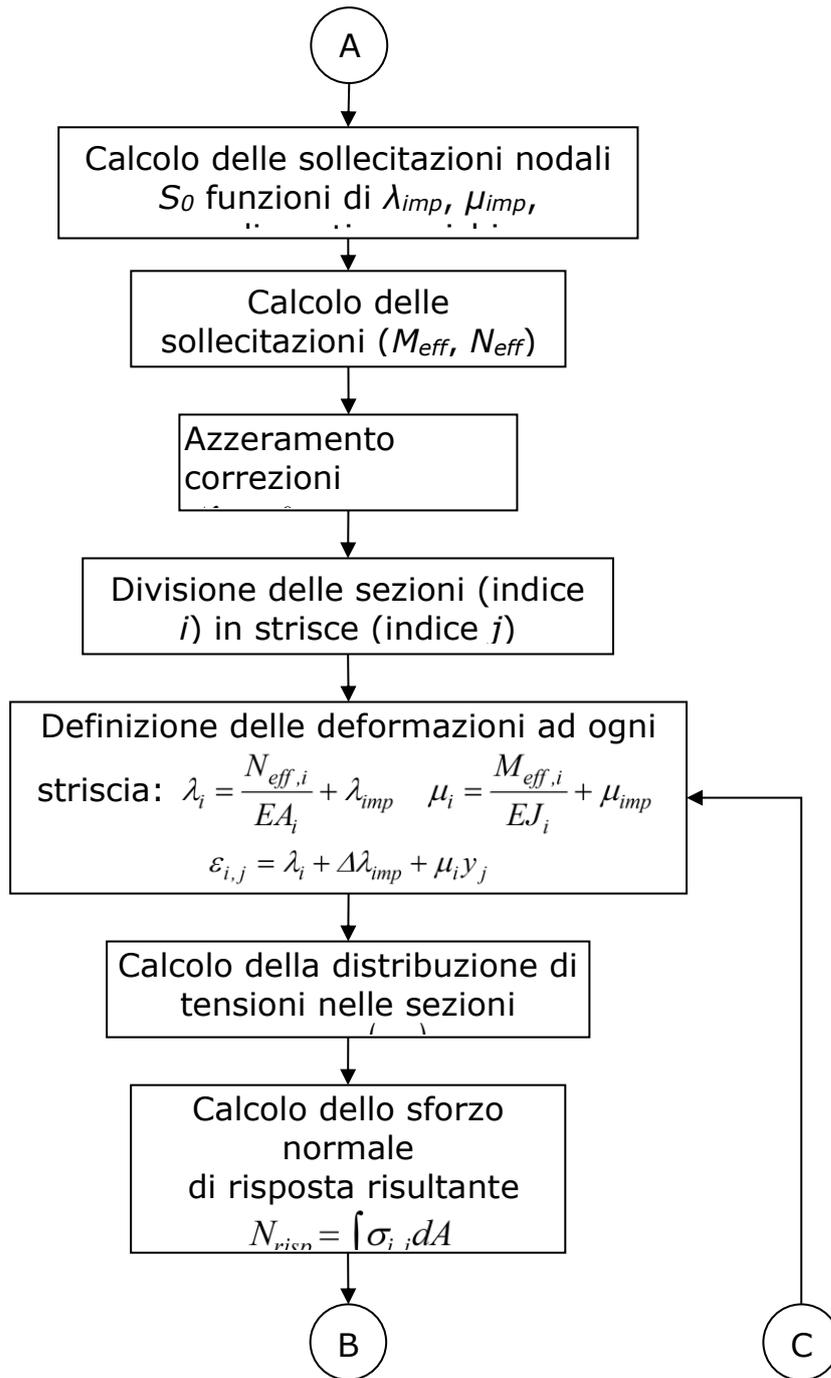
### 3.3 Algoritmo di calcolo – Parte I

Le considerazioni dei paragrafi precedenti consentono di compilare un algoritmo per il calcolo della risposta alle sollecitazioni esterne di un arco in muratura iperstatico.

### 3. Modello di calcolo non lineare di strutture ad asse curvilineo



### 3. Modello di calcolo non lineare di strutture ad asse curvilineo



### 3. Modello di calcolo non lineare di strutture ad asse curvilineo

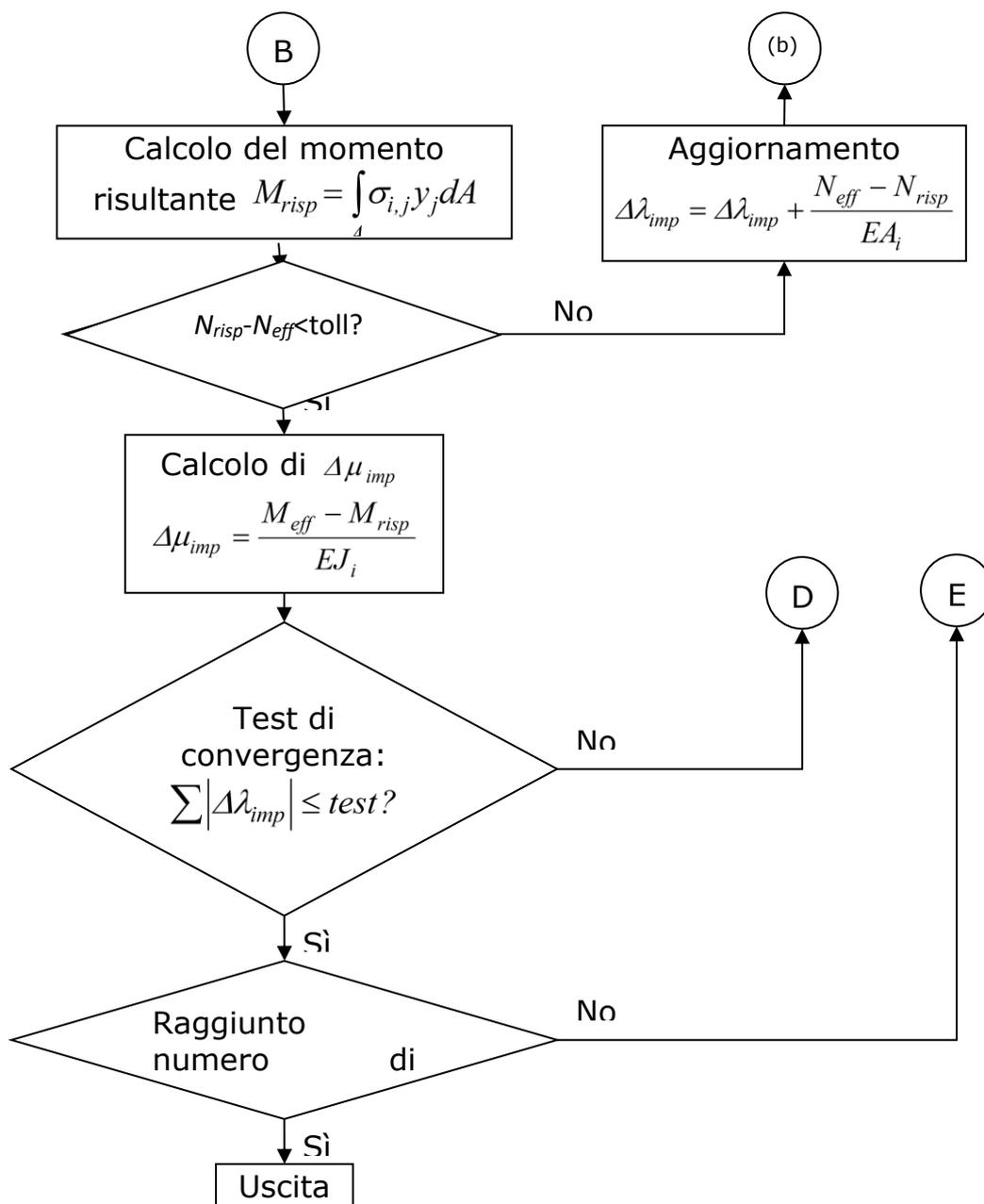


Figura 3.20 - Diagramma di flusso per l'analisi non lineare di una struttura ad arco

Il programma si sviluppa in diverse routine e funzioni, compilate con il programma di calcolo "Visual Basic", programma supportato all'interno di Excel. Di seguito si riportano le routine impiegate e le funzioni richiamate durante la compilazione del programma:

- **Main:** routine principale che imposta la procedura di calcolo in caso di analisi lineare e, in seguito alla completata elaborazione delle non linearità completa l'elaborazione dei

### 3. Modello di calcolo non lineare di strutture ad asse curvilineo

dati, definendo lo stato deformativo, con conseguente stampa dei risultati ottenuti;

- **Momento-curvatura**: routine che provvede alla correzione dei valori interessati in caso di analisi non lineare;
- **Temperatura\_tempo**: funzione che definisce la matrice bidimensionale della temperatura in funzione di spazio (interno alla sezione) e del tempo (in cui si evolve l'incendio);
- **EpsT\_temperatura**: funzione che deduce la dilatazione termica indotta dalla temperatura raggiunta nello specifico punto oggetto di calcolo;
- **sig\_eps**: funzione che, in funzione del legame costitutivo scelto, definisce lo stato tensionale a freddo della struttura in funzione della deformazione calcolata;
- **sig\_eps\_temp**: funzione, alternativa alla precedente, che definisce la curva  $\sigma-\varepsilon$  in funzione della temperatura, definita in temperatura\_temp, e, ricevuto in input la deformazione pseudo-elastica deduce la tensione raggiunta.

Qui di seguito vengono riportate le routine principali per il calcolo in caso di analisi lineare e nel caso di raggiungimento del campo plastico: main e momento-curvatura. Vengono inoltre definiti i legami costitutivi, in assenza di incendio, usufruibili all'interno del programma mediante impiego della funzione sig\_eps.

Nel capitolo successivo, dopo aver trattato la legge di trasmissione del calore di Fourier e i parametri termofisici coinvolti nel calcolo in presenza di incendio, si riporteranno gli algoritmi di calcolo delle routine che regolano il campo termico.

#### 3.3.1 Variabili di Input

Prima di riportare il codice programma realizzato occorre puntualizzare quali sono i dati di input e come vengono consegnati all'elaboratore. Grazie all'uso di Visual Basic si è dotati dell'interfaccia di Excel Office, pertanto il "Foglio1" sarà impiegato per l'introduzione delle variabili di calcolo.

Innanzitutto vengono definite le caratteristiche geometriche dell'arco: numero dei conci ( $N$ ) in cui esso viene discretizzato, coordinate delle sezioni che li delimitano ( $y$  e  $z$ ), luce della struttura ( $L$ ), base ( $B$ ) ed altezza ( $H$ ) delle sezioni trasversali, interasse tra gli archi (*interarch*) se più di uno, peso specifico dell'arco (*garco*) e del riempimento ( $g$ ), sovraccarico distribuito ( $qvar$ ), caratteristiche del materiale quali tipologia di comportamento (*tipo*), modulo elastico ( $E$ ), tensione ammissibile (*sigamm*), tensione ultima ( $fy$ ).

### 3. Modello di calcolo non lineare di strutture ad asse curvilineo

Dati generali dell'arco		
L=	1.714,730	Luce arco (mm)
B=	2000	Base dell'arco (mm)
g=	0	Peso specifico riempimento (N/mm <sup>3</sup> )
garco=	0,000018	Peso specifico arco (N/mm <sup>3</sup> )
q=	0	Carico verticale agente (N/mm)
N=	128	Numero di conci dell'arco
Dati della curva di carico		
interarch=	0	Interasse degli archi (mm)
tuttocarico=	1	1=tuttocarico; 0=metà carico
yg=	0	Posizione del baricentro delle sezioni rispetto ad H/2
Dati della curva di carico		
NN=	10	Numero di incrementi del carico esterno
factor=	0	Percentuale di incremento dei carichi esterni (<1)
coefforizz=	0	Rappotto tra carichi verticali e orizzontali

*Figura 3.21 Foglio1 - Input dati (parte I)*

Oltre alle caratteristiche geometriche e la distinzione dei carichi applicati e propri, occorre indicare:

- La modalità di carico dell'arco ovvero se l'arco è caricato per metà o per tutta la sua estensione (tuttocarico);
- Eventuale offset tra baricentro e la mezzzeria della sezione (yg);
- Numero di incrementi di carico (NN) – questo parametro verrà ampiamente esplicitato nella routine principale – main;
- Factor ovvero valore percentuale di incremento del carico (%) di cui lo si vuole aumentare ad ogni iterazione del calcolo (da 1 a NN).

A seguire vengono indicati i termini di resistenza meccanica e legami costitutivi che si possono impiegare durante il calcolo. Scegliendo un legame costitutivo all'interno del range 1-5 verrà richiamata la funzione sig\_eps, mentre nel caso di comportamento come da EC6 1-2 verrà impiegata la funzione sig\_eps\_temp.

Dati delle leggi costitutive		
Tipo=	1	1 Lineare elastico traz e comp
		2 Lineare fino a rottura traz. e comp.
		3 Lineare fino rottura solo compressione
		4 Lineare e plastica solo compressione
		5 Lineare e plastica trazione e compressione
		6 Come da EC6 1-2
fy=	12	Tensione di rottura a compressione [MPa]
E=	6720	Modulo elastico
fct=	1,2	Resistenza a trazione (MPa)

*Figura 3.22 Foglio1 - Input dati (parte II)*

### 3. Modello di calcolo non lineare di strutture ad asse curvilineo

Le leggi costitutive (1-5), come precedentemente affermato, non tengono conto della possibile manifestazione dell'incendio; l'ultimo legame costitutivo (6) è stato integrato all'interno del modello di calcolo originale e occorre fornire ulteriori dati per una corretta elaborazione, quali il tempo complessivo in cui si vuole effettuare la stima del tempo di resistenza, la tipologia d'incendio contemplata dal caso oggetto di analisi e il salto temporale/termico da attuare ad ogni incremento di carico (NN). Vengono quindi riportate le variabili relative all'incendio analizzato.

Tipologia di incendio		
Tipo=	6	Iso 834
		Fuoco esterno
		Idrocarburi
		Riscaldamento lento
		RSW
		Prova sperimentale VVF
step_th	2	Incremento della variabile "tempo" ad ogni incremento di carico per raggiungere il tempo di valutazione dell'incendio (non alterare formula)

*Figura 3.23 Foglio1 - Input dati (parte III)*

*Osservazione.* Attualmente sono disponibili le curve d'incendio standard ISO 834 e quella estratta dalla prova sperimentale dei VVF, la cui applicabilità si limita alla simulazione della medesima prova. È però possibile implementare altre curve, presenti in Letteratura, ai fini di applicare il gradiente termico più appropriato a seconda della tipologia di incendio innescata.

Vengono quindi definiti gli ultimi parametri globali caratterizzanti la struttura, quali i parametri termofisici, coinvolti nell'elaborazione della funzione temperatura\_temp, e alcuni valori che definiscono la conformazione geometrica della medesima struttura, ovvero i dati di input per la funzione Input\_Geom.

Caratteristiche termiche materiale (mattone+malta)		
$\lambda$	0,84	Conducibilità termica [W/mK]
$\rho$	1200	Densità volumica [kg/mm <sup>3</sup> ]
c	564	Calore specifico [J/kgK]
Geometria arco muratura		
R	990	Raggio filo medio della sezione
$\alpha$	120	Angolo complessivo arco
$\alpha_0$	30	Angolo di inizio arco
H	120	Spessore sezione (costante)

*Figura 3.24 Foglio1 - Input dati (parte IV)*

### 3. Modello di calcolo non lineare di strutture ad asse curvilineo

#### 3.3.2 Routine coordinate geometriche Input\_Geo

Noti i parametri geometrici definiti in Figura 3.24 si introduce quindi la funzione che permette di definire con precisione le coordinate  $z_i$  e  $y_i$  definenti la linea media dell'arco, funzione applicabile in caso di strutture ad arco di circonferenza. Memorizzando il raggio ( $R$ ), il numero di conci di cui è definita la struttura ( $N$ ), l'angolo complessivo di estensione dell'arco ( $\alpha$ ) e l'angolo iniziale ( $\alpha_0$ ) è possibile, con una formulazione e traslazione del sistema di riferimento, definire parametricamente le coordinate di ciascuna sezione.

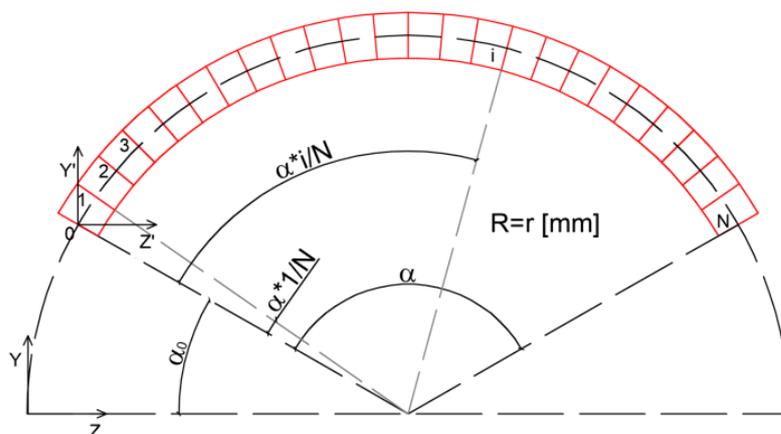


Figura 3.25 Schema esemplificativo per la definizione della linea media dell'arco geometrico

A seguire viene riportato stralcio del codice programma con cui si calcolano e stampano i valori delle coordinate geometriche caratterizzanti l'arco, per il completamento delle variabili di input.

```
Range("G4").Select
For i = 0 To N
    ActiveCell.Value = i
    ActiveCell.Offset(0, 1).Select
    ActiveCell.Value = R * (Cos(rad * (alfa_0)) - Cos(rad * (alfa_0 + alfa / (N) * i)))
    ActiveCell.Offset(0, 1).Select
    ActiveCell.Value = R * (Sin(rad * (alfa_0 + alfa / (N) * i)) - Sin(rad * (alfa_0)))
    ActiveCell.Offset(0, 1).Select
    ActiveCell.Value = H
    ActiveCell.Offset(1, -3).Select
Next i
```

Come si evince dal codice riportato di sopra, il software punta la cella G4 (Foglio1), per immettere in sequenza sezione  $i$ -esima e le rispettive coordinate geometriche  $z_i$  e  $y_i$ .

### 3. Modello di calcolo non lineare di strutture ad asse curvilineo

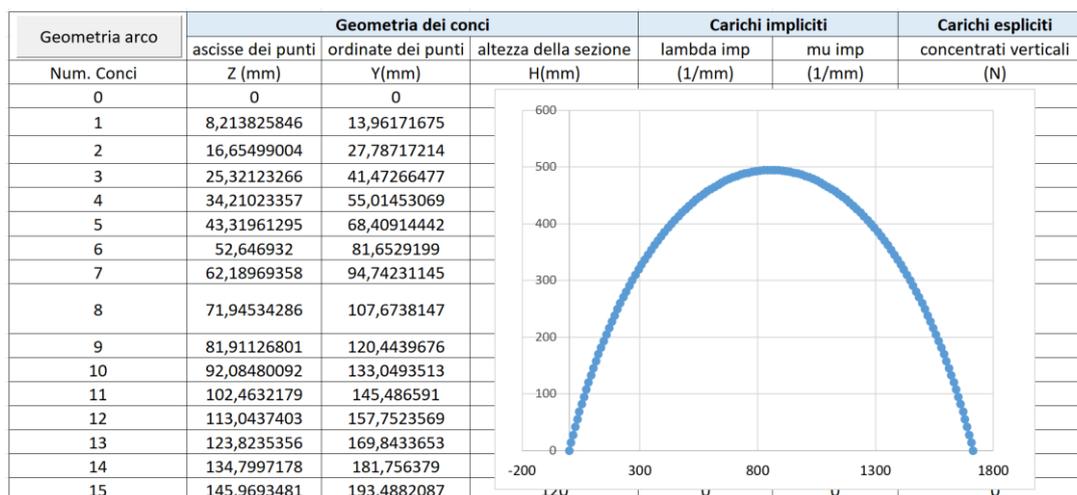


Figura 3.26 Foglio1 - Input dati (parte V)

Come si può notare dalla Figura 3.26, premendo sul pulsante "Geometria arco" si realizzano automaticamente i vettori contenenti i punti interessati (da 0 a N) e, per ciascuno di essi, vengono stampate le rispettive coordinate. Come ultimo valore di Input occorre inserire eventuali carichi concentrati agenti sui singoli conci.

Osservazione: per quanto riguarda le variabili di input è di estrema importanza rispettare accuratamente le unità di misura richieste in ciascuna cella, onde evitare errori grossolani automaticamente generati in fase di elaborazione dei dati.

#### 3.3.3 Routine Principale - Main

Definito l'input delle molteplici variabili interessate è possibile quindi avviare il programma e quindi la routine principale.

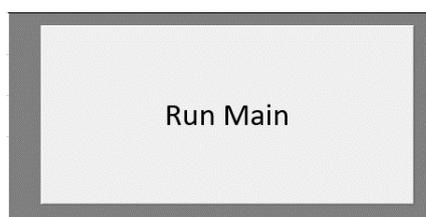


Figura 3.27 Pulsante avviamento routine principale

Con i dati delle sezioni trasversali, si determinano per ognuna le proprietà geometriche: area ( $A_{sez_i}$ ), momento d'inerzia baricentrico ( $J(i)$ ).

### 3. Modello di calcolo non lineare di strutture ad asse curvilineo

```
For i = 0 To N
  'area della sezione dell'arco
  Asez(i) = B * H(i)
  'momento di'neria della sezione dell' arco
  j(i) = B * H(i) ^ 3 / 12 + B * H(i) * yg ^ 2
  ....
Next i
```

Dalle coordinate baricentriche delle sezioni si ricavano le lunghezze di competenza *deltaz*, di ciascuna: ogni sezione diventa così rappresentativa delle condizioni che si hanno nella seconda metà del concio precedente e nella prima del successivo. Bisogna precisare che alle due sezioni di estremità compete soltanto una metà di concio, quello iniziale per la prima e finale per l'ultima.

```
For i = 0 To N
  ...
  'area di competenza dei conci
  If i = 0 Then
    deltaz = (z(1) - z(0)) / 2
  ElseIf i = N Then
    deltaz = (z(N) - z(N - 1)) / 2
  Else
    deltaz = (z(i) - z(i - 1)) / 2 + (z(i + 1) - z(i)) / 2
  End If
  ....
Next i
```

Moltiplicando i carichi distribuiti per tali lunghezze si determina il carico gravante sulla singola sezione considerata. Nella definizione dei carichi interviene anche il termine *coeffiq*, coefficiente pari a 1 o a 0, che moltiplica il sovraccarico per simulare la condizione di arco caricato su tutta la luce (*tuttocarico=1*) o solo per metà (*tuttocarico=0*).

```
For i = 0 To N
  ....
  If tuttocarico = 1 Then
    coeffiq = 1
  ElseIf tuttocarico = 0 And i <= N / 2 Then
    coeffiq = 1
  ElseIf tuttocarico = 0 And i > N / 2 Then
    coeffiq = 0
  End If
  ....
Next i
```

### 3. Modello di calcolo non lineare di strutture ad asse curvilineo

Si definiscono quindi i carichi verticali e orizzontali che gravano sulle sezioni:

```
For i = 0 To N
.....
'carico verticale agente nel concio
qver(i) = deltaz * (g * interarch * (ymax - y(i)) + q * coeffiq + garco / cosalpha(i) * B *
          H(i)) + Pconc(i)

'carico orizzontale agente nel concio (%carico verticale)
qori(i) = coefforizz * qver(i)
Next i
```

Come si può osservare, il calcolo del carico verticale viene effettuato considerando tutte le tipologie di carico. In primo luogo, viene calcolato il peso del riempimento, ottenuto moltiplicando la densità  $g$  per il volume individuato dall'asse della struttura (quota baricentrica  $y$  della sezione) ed il filo superiore della stessa (quota  $y(N/2+1)$  della sezione di mezzeria, dalla lunghezza di competenza  $deltaz$  della sezione in esame e dalla profondità, pari all'interasse degli archi. Vengono quindi valutati il carico variabile, calcolato mediando la condizione di carico dei conci adiacenti, ed il peso proprio della struttura, valutando il volume relativo alle lunghezze  $deltaz$ .

Noti tutti i dati relativi alla geometria ed al carico, si passa al calcolo dei termini che consentiranno di definire la matrice di deformabilità:  $cosa$ ,  $sina$  e  $y'$ . Si evince dal seguente codice che per poter calcolare la derivata dei due estremi occorre correggere la formula parametrizzata nel ciclo for, poiché la sezione è caricata esclusivamente di metà concio, quello successivo o quello precedente, con conseguente esclusione dal ciclo iterativo.

```
' Calcolo sinalpha, cosalpha e derivate
' Estremo sinistro
dy(0) = (y(1) - y(0)) / (z(1) - z(0))
dsdz(0) = (1 + dy(0) ^ 2) ^ 0.5
cosalpha(0) = 1 / dsdz(0)
sinalpha(0) = 1 / (1 + (1 / dy(0)) ^ 2) ^ 0.5 * Sgn(y(1) - y(0))

' Estremo destro
dy(N) = (y(N) - y(N - 1)) / (z(N) - z(N - 1))
dsdz(N) = (1 + dy(N) ^ 2) ^ 0.5
cosalpha(N) = 1 / dsdz(N)
sinalpha(N) = 1 / (1 + (1 / dy(N)) ^ 2) ^ 0.5 * Sgn(y(N) - y(N - 1))
```

### 3. Modello di calcolo non lineare di strutture ad asse curvilineo

```

For i = 1 To N - 1
  dy(i) = (y(i + 1) - y(i - 1)) / (z(i + 1) - z(i - 1))
  dsdz(i) = (1 + dy(i) ^ 2) ^ 0.5
  cosalpha(i) = 1 / dsdz(i)
  If dy(i) = 0 Then
    sinalpha(i) = 0
  Else
    sinalpha(i) = 1 / (1 + (1 / dy(i)) ^ 2) ^ 0.5 * Sgn(y(i + 1) - y(i - 1))
  End If
Next i

```

Si procede infine al calcolo delle matrici di deformabilità ( $d$ ) e rigidità ( $K$ ), ricorrendo alla matrice  $A$  di rigidità dell'arco isostatico.

```

'matrice di deformabilità della struttura isostatica (dimensioni: 3x3)
ReDim d(3, 3) As Double
For i = 1 To N
  d(1, 1) = d(1, 1) + ((1 - z(i) / L) ^ 2 / E / j(i) * dsdz(i) + (1 - z(i - 1) / L) ^ 2 / E / j(i - 1) * dsdz(i - 1)) / 2 * (z(i) - z(i - 1)) + (sinalpha(i) ^ 2 / L ^ 2 / E / Asez(i) * dsdz(i) + sinalpha(i - 1) ^ 2 / L ^ 2 / E / Asez(i - 1) * dsdz(i - 1)) / 2 * (z(i) - z(i - 1))
  d(1, 2) = d(1, 2) - (((1 - z(i) / L) * y(i) / E / j(i) * dsdz(i)) + ((1 - z(i - 1) / L) * y(i - 1) / E / j(i - 1) * dsdz(i - 1))) / 2 * (z(i) - z(i - 1)) - ((cosalpha(i) * sinalpha(i) / E / L / Asez(i) * dsdz(i)) + (cosalpha(i - 1) * sinalpha(i - 1) / E / L / Asez(i - 1) * dsdz(i - 1))) / 2 * (z(i) - z(i - 1))
  d(1, 3) = d(1, 3) - (((1 - z(i) / L) * z(i) / L / E / j(i) * dsdz(i)) + ((1 - z(i - 1) / L) * z(i - 1) / L / E / j(i - 1) * dsdz(i - 1))) / 2 * (z(i) - z(i - 1)) + ((sinalpha(i) ^ 2 / L ^ 2 / E / Asez(i) * dsdz(i)) + (sinalpha(i - 1) ^ 2 / L ^ 2 / E / Asez(i - 1) * dsdz(i - 1))) / 2 * (z(i) - z(i - 1))
  d(2, 2) = d(2, 2) + ((y(i) ^ 2 / E / j(i) * dsdz(i)) + (y(i - 1) ^ 2 / E / j(i - 1) * dsdz(i - 1))) / 2 * (z(i) - z(i - 1)) + ((cosalpha(i) ^ 2 / E / Asez(i) * dsdz(i)) + (cosalpha(i - 1) ^ 2 / E / Asez(i - 1) * dsdz(i - 1))) / 2 * (z(i) - z(i - 1))
  d(2, 3) = d(2, 3) + ((y(i) * z(i) / L / E / j(i) * dsdz(i)) + (y(i - 1) * z(i - 1) / L / E / j(i - 1) * dsdz(i - 1))) / 2 * (z(i) - z(i - 1)) - ((cosalpha(i) * sinalpha(i) / L / E / Asez(i) * dsdz(i)) + (cosalpha(i - 1) * sinalpha(i - 1) / L / E / Asez(i - 1) * dsdz(i - 1))) / 2 * (z(i) - z(i - 1))
  d(3, 3) = d(3, 3) + ((z(i) ^ 2 / L ^ 2 / E / j(i) * dsdz(i)) + (z(i - 1) ^ 2 / L ^ 2 / E / j(i - 1) * dsdz(i - 1))) / 2 * (z(i) - z(i - 1)) + ((sinalpha(i) ^ 2 / L ^ 2 / E / Asez(i) * dsdz(i)) + (sinalpha(i - 1) ^ 2 / L ^ 2 / E / Asez(i - 1) * dsdz(i - 1))) / 2 * (z(i) - z(i - 1))
Next i
d(2, 1) = d(1, 2)
d(3, 1) = d(1, 3)
d(3, 2) = d(2, 3)

'inversione di d per ottenere A (matrice di rigidità)
Sheets("Foglio2").Select
Range("A1").Select
For i = 1 To 3

```

### 3. Modello di calcolo non lineare di strutture ad asse curvilineo

```
For ii = 1 To 3
    ActiveCell.Value = d(i, ii)
    ActiveCell.Offset(0, 1).Select
Next ii
ActiveCell.Offset(1, -3).Select
Next i
ReDim a(3, 3) As Double 'matrice di rigidezza arco isostatico
Range("A5").Select
For i = 1 To 3
    For ii = 1 To 3
        a(i, ii) = ActiveCell.Value
        ActiveCell.Offset(0, 1).Select
    Next ii
    ActiveCell.Offset(1, -3).Select
Next i
'matrice di rigidezza dell'arco
ReDim k(6, 6) As Double
k(1, 1) = a(1, 1)
k(1, 3) = a(1, 2)
k(1, 4) = a(1, 3)
k(3, 3) = a(2, 2)
k(3, 4) = a(2, 3)
k(4, 4) = a(3, 3)
k(1, 2) = -(k(1, 1) + k(1, 4)) / L
k(1, 5) = -k(1, 2)
k(1, 6) = -k(1, 3)
k(2, 4) = -(k(1, 4) + k(4, 4)) / L
k(4, 5) = -k(2, 4)
k(4, 6) = -k(3, 4)
k(2, 3) = -(k(1, 3) + k(3, 4)) / L
k(3, 5) = -k(2, 3)
k(3, 6) = -k(3, 3)
k(2, 2) = -(k(1, 2) + k(2, 4)) / L
k(2, 5) = -k(2, 2)
k(2, 6) = -k(2, 3)
k(5, 5) = (k(1, 5) + k(4, 5)) / L
k(5, 6) = -k(3, 5)
k(6, 6) = -k(3, 6)
k(3, 1) = k(1, 3)
k(4, 1) = k(1, 4)
k(4, 3) = k(3, 4)
k(2, 1) = k(1, 2)
k(3, 2) = k(2, 3)
k(4, 2) = k(2, 4)
k(5, 1) = k(1, 5)
k(5, 3) = k(3, 5)
k(5, 4) = k(4, 5)
k(5, 2) = k(2, 5)
```

### 3. Modello di calcolo non lineare di strutture ad asse curvilineo

$$k(6, 1) = k(1, 6)$$

$$k(6, 2) = k(2, 6)$$

$$k(6, 3) = k(3, 6)$$

$$k(6, 4) = k(4, 6)$$

$$k(6, 5) = k(5, 6)$$

Si passa ora al calcolo degli spostamenti di estremità  $x_i$  e  $y_i$  per valori unitari di carico e cedimenti; questo si ottiene valutando il momento e lo sforzo normale prodotti dai singoli cedimenti e dai carichi verticali ed orizzontali.

$MMel$  ed  $NNel$  sono rispettivamente momento e sforzo normale prodotti da un cedimento non nullo; le reazioni vincolari necessarie per il loro calcolo sono i termini  $K_{ij}$  della matrice di rigidezza, che, si ricorda, rappresentano la sollecitazione  $S_i$  causata da uno spostamento  $\eta_j$  unitario.

Per ciascuna sezione  $ii$  si calcolano quindi le sollecitazioni  $m_x, n_x, m_y, n_y$  di momento ( $m$ ) e sforzo normale ( $n$ ) dovute ad un carico orizzontale ( $x$ ) o verticale ( $y$ ) agente nella sezione  $i$ .

In ultimo si calcolano le reazioni vincolari prodotte dai carichi distribuiti lungo l'arco; queste vengono da subito valutate con i segni opposti, in modo da avere a disposizione immediatamente il termine di spostamento d'estremità (trattandosi di carichi e cedimenti unitari, tali spostamenti coincidono con le reazioni d'estremità con segno invertito).

Infine, viene ultimato il calcolo degli spostamenti  $x_i$  ed  $y_i$  combinando gli effetti di cedimenti e carichi attraverso il Principio dei Lavori Virtuali.

Tali relazioni costituiscono le funzioni di influenza, che, moltiplicate per i reali valori di carico e cedimento, permetteranno di ricavare le sollecitazioni  $S_0$ .

*For jj = 1 To 6*

*'Calcolo delle sollecitazioni nell'arco dovute al solo j-esimo cedimento non nullo*

*For ii = 0 To N*

*'momento elastico*

$$MMel(jj, ii) = k(jj, 1) + k(jj, 2) * z(ii) - k(jj, 3) * y(ii)$$

*'sforzo normale*

$$NNel(jj, ii) = -k(jj, 2) * sinalpha(ii) - k(jj, 3) * cosalpha(ii)$$

*Next ii*

*'Si considerano i carichi agenti in ciascuna delle N+1 sezioni (i)*

*For i = 0 To N*

*'spostamenti*

$$y_i(jj, i) = 0$$

$$x_i(jj, i) = 0$$

### 3. Modello di calcolo non lineare di strutture ad asse curvilineo

For ii = 0 To N

'nuovi valori delle sollecitazioni per effetto delle sollecitazioni in i

If ii < i Then

$$mx(i, ii) = -y(i) / L * z(ii)$$

$$nx(i, ii) = y(i) / L * sinalpha(ii)$$

$$my(i, ii) = (1 - z(i) / L) * z(ii)$$

$$ny(i, ii) = -(1 - z(i) / L) * sinalpha(ii)$$

Else

$$mx(i, ii) = -1 * y(i) / L * z(ii) + 1 * (y(i) - y(ii))$$

$$nx(i, ii) = y(i) / L * sinalpha(ii) - cosalpha(ii)$$

$$my(i, ii) = z(i) / L * (L - z(ii))$$

$$ny(i, ii) = z(i) / L * sinalpha(ii)$$

End If

Next ii

'calcolo del lavoro compiuto dalle reazioni

'yi(jj)=-Sjj

If jj = 2 Then

$$yi(jj, i) = z(i) / L - 1$$

$$xi(jj, i) = y(i) / L$$

Elseif jj = 5 Then

$$yi(jj, i) = -z(i) / L$$

$$xi(jj, i) = -y(i) / L$$

Elseif jj = 6 Then

$$xi(jj, i) = 1$$

$$yi(jj, i) = 0$$

Else

$$xi(jj, i) = 0$$

$$yi(jj, i) = 0$$

End If

'valori degli spostamenti

For ii = 1 To N

$$yi(jj, i) = yi(jj, i) + (MMel(jj, ii) * my(i, ii) / E / j(ii) * dsdz(ii) + MMel(jj, ii - 1) * my(i, ii - 1) / E / j(ii - 1) * dsdz(ii - 1)) * (z(ii) - z(ii - 1)) * 0.5 + (NNel(jj, ii) * ny(i, ii) / E / Asez(ii) * dsdz(ii) + NNel(jj, ii - 1) * ny(i, ii - 1) / E / Asez(ii - 1) * dsdz(ii - 1)) * (z(ii) - z(ii - 1)) * 0.5$$

$$xi(jj, i) = xi(jj, i) + (MMel(jj, ii) * mx(i, ii) / E / j(ii) * dsdz(ii) + MMel(jj, ii - 1) * mx(i, ii - 1) / E / j(ii - 1) * dsdz(ii - 1)) * (z(ii) - z(ii - 1)) * 0.5 + (NNel(jj, ii) * nx(i, ii) / E / Asez(ii) * dsdz(ii) + NNel(jj, ii - 1) * nx(i, ii - 1) / E / Asez(ii - 1) * dsdz(ii - 1)) * (z(ii) - z(ii - 1)) * 0.5$$

Next ii

Next i

### 3. Modello di calcolo non lineare di strutture ad asse curvilineo

*Next jj*

A questo punto si possiedono tutti gli elementi necessari per il calcolo della risposta della struttura.

Definito il moltiplicatore *factor* dei carichi iniziali in funzione del numero di incrementi e della loro entità, si ripete il calcolo dei carichi considerando quelli variabili verticali ed orizzontali maggiorati in ragione del moltiplicatore.

*For iii = 1 To NN*

*'aggiornamento dei cedimenti vincolari*

*For i = 1 To 6*

*eta(i) = eta(i) \* (1 + factor)*

*Next i*

*'aggiornamento del tempo di valutazione*

*If iii > 1 Then*

*temp\_val\_inc = temp\_val\_inc + 2*

*End If*

*'aggiornamento dei carichi*

*q = q \* (1 + factor)*

*For i = 0 To N*

*If tuttocarico = 1 Then*

*coeffiq = 1*

*Elseif tuttocarico = 0 And i <= N / 2 Then*

*coeffiq = 1*

*Elseif tuttocarico = 0 And i > N / 2 Then*

*coeffiq = 0*

*End If*

*'ampiezza dei conci inclinata*

*If i = 0 Then*

*deltaz = (z(1) - z(0)) / 2*

*Elseif i = N Then*

*deltaz = (z(N) - z(N - 1)) / 2*

*Else*

*deltaz = (z(i) - z(i - 1)) / 2 + (z(i + 1) - z(i)) / 2*

*End If*

*'carico verticale agente nel concio*

*qver(i) = deltax \* (g \* interarch \* (ymax - y(i)) + q \* coeffiq + garco /  
cosalpha(i) \* B \* H(i))  
+ (1 + iii \* factor) \* Pconc(i)*

*'carico orizzontale agente nel concio*

*qori(i) = coefforizz \* qver(i)*

*Next i*

### 3. Modello di calcolo non lineare di strutture ad asse curvilineo

Si introduce quindi un ciclo iterativo per la ricerca della convergenza nel calcolo della risposta della struttura. I passaggi sono ben descritti nel diagramma di flusso indicato precedentemente, ma si rendono necessarie alcune precisazioni. *Norlam* e *Normu* sono i parametri per la verifica della convergenza e rappresentano la norma dei vettori di correzione dell'allungamento assiale e della curvatura di tutte le sezioni; vengono confrontati con i massimi valori di curvatura ed allungamento valutati con calcolo lineare (*LamMax* e *muMax*).

```
Do While controllo = 0 'condizione di uscita dal ciclo
...
...
If Norlam < 0.001 * Lammax And normu < 0.001 * Mumax Then
    controllo = 1
End If
Loop
```

Si calcolano le sollecitazioni nodali *S0* utilizzando le funzioni di influenza calcolate in precedenza, con l'aggiunta dei cedimenti vincolari imposti come condizione esterna (termine *eta*)

```
Do While controllo = 0 'condizione di uscita dal ciclo
'aggiornamento di lambda e mu impressi
For i = 0 To N
    lamImp(i) = lamImp(i) + Delamsegn(iii, i)
    mulImp(i) = mulImp(i) + Demusegn(iii, i)
Next i
'calcolo delle sollecitazioni nodali
For jj = 1 To 6
'calcolo della sollecitazione nodale jj
SO(jj) = -qver(0) * yi(jj, 0) - qori(0) * xi(jj, 0)
For i = 1 To N
    SO(jj) = SO(jj) - qver(i) * yi(jj, i) - qori(i) * xi(jj, i) - (lamImp(i) * NNel(jj, i)
    + lamImp(i - 1) * NNel(jj, i - 1)) * (z(i)
    - z(i-1)) / 2 - (mulImp(i) * MMel(jj, i) + mulImp(i - 1) * MMel(jj, i - 1)) *
    (z(i) - z(i - 1)) / 2
Next i
'aggiunta dei termini relativi ai cedimenti vincolari
For i = 1 To 6
    SO(jj) = SO(jj) + k(jj, i) * eta(i)
Next i
Next jj
...
If Norlam < 0.001 * Lammax And normu < 0.001 * Mumax Then
    controllo = 1
End If
Loop
```

### 3. Modello di calcolo non lineare di strutture ad asse curvilineo

Segue il calcolo di momento  $MMeff$  e sforzo normale  $NNeff$  in tutte le sezioni dell'arco, considerando sia il contributo delle azioni nodali, sia quello dei carichi applicati.

```
Do While controllo = 0 'condizione di uscita dal ciclo
...
'calcolo sollecitazioni metà arco da sx
For ii = 0 To (N / 2)
    'contributo delle azioni nodali
    'momento
     $MMeff(iii, ii) = SO(1) + SO(2) * z(ii) - SO(3) * y(ii)$ 
    'sforzo normale
     $NNeff(iii, ii) = -SO(2) * sinalpha(ii) - SO(3) * cosalpha(ii)$ 

    'contributi dei carichi
    For i = 0 To ii
        'verticali ed orizzontali
         $MMeff(iii, ii) = MMeff(iii, ii) - qver(i) * (z(ii) - z(i)) - qori(i) * (y(ii) - y(i))$ 
         $NNeff(iii, ii) = NNeff(iii, ii) + qver(i) * sinalpha(ii) - qori(i) * cosalpha(ii)$ 
    Next i

Next ii

'calcolo sollecitazioni metà arco da dx
For ii = N To N / 2 Step -1
    'contributo delle azioni nodali
    'momento
     $MMeff(iii, ii) = -SO(4) + SO(5) * (z(N) - z(ii)) + SO(6) * y(ii)$ 
    'sforzo normale
     $NNeff(iii, ii) = -SO(5) * (-sinalpha(ii)) + SO(6) * cosalpha(ii)$ 

    'contributi dei carichi
    For i = N To ii Step -1
        'verticali ed orizzontali
         $MMeff(iii, ii) = MMeff(iii, ii) - qver(i) * (z(i) - z(ii)) - qori(i) * (y(i) - y(ii))$ 
         $NNeff(iii, ii) = NNeff(iii, ii) + qver(i) * (-sinalpha(ii)) - qori(i) * cosalpha(ii)$ 
    Next i

Next ii

...
If Norlam < 0.001 * Lammax And normu < 0.001 * Mumax Then
    controllo = 1

End If
Loop
```

Prima di procedere con la routine momento curvatura occorre, in funzione dell'altezza dell' $i$ -esima sezione analizzata, realizzare la matrice della temperatura in funzione di spazio e tempo.

### 3. Modello di calcolo non lineare di strutture ad asse curvilineo

```
" realizzazione della matrice spazio-tempo-temperatura  
Call temp(H(i), Ns)
```

Dove Ns indica il numero di strisce in cui viene discretizzata ciascuna sezione. Di default si è scelto di adottare un numero sufficientemente grande ed è stato impostato: Ns=200

Si richiama a questo punto la routine chiamata *momento\_curvatura* che permette di valutare la correzione da imporre ai valori di deformazione assiale e curvatura, in funzione delle deformazioni impresse e delle sollecitazioni.

```
'calcolo Delamsegn(iii, i) e Demusegn(iii, i)  
For i = 0 To N  
    'azzeramento dei valori  
    Delamsegn(iii, i) = 0  
    Demusegn(iii, i) = 0  
  
    'calcolo dei nuovi valori con la routine momento-curvatura  
    Call momcurv(Delamsegn(iii, i), Demusegn(iii, i), MMeff(iii, i), NNeff(iii,  
    i), H(i), lamImp(i), mulmp(i), i)  
Next i
```

Si procede quindi alla valutazione dei termini già descritti per la verifica della convergenza.

```
For i = 0 To N  
    Norlam = Norlam + Abs(Delamsegn(iii, i))  
    normu = normu + Abs(Demusegn(iii, i))  
    'calcolo dei valori massimo di lambda e mu  
    If Abs(NNeff(iii, i) / E / Asez(i)) > Lammax Then  
        Lammax = Abs(NNeff(iii, i) / E / Asez(i))  
    End If  
    If Abs(MMeff(iii, i) / E / j(i)) > Mumax Then  
        Mumax = Abs(MMeff(iii, i) / E / j(i))  
    End If  
Next i  
If Norlam < 0.001 * Lammax And normu < 0.001 * Mumax Then  
    controllo = 1  
End If  
Loop
```

A questo punto, se le condizioni di convergenza sono rispettate, si passa al successivo incremento di carico, ove richiesto, altrimenti si calcolano le nuove sollecitazioni in funzione delle correzioni introdotte.

Conclusi i cicli incrementali del carico si procede con la determinazione della deformatata della struttura; il primo passo è lo

### 3. Modello di calcolo non lineare di strutture ad asse curvilineo

“azzeramento” dei carichi agenti, ove per azzeramento si intende rendere i carichi agenti unitari. Si calcola quindi le sollecitazioni nodali agenti per carichi verticali unitari.

```
'-----  
'calcolo degli spostamenti  
'-----  
ReDim MMvir(N, N) As Double 'momento virtuale  
ReDim NNvir(N, N) As Double 'sforzo normale virtuale  
ReDim spost(NN, N) As Double 'spostamenti  
  
For iii = 0 To N  
  ReDim qvir(N) As Double 'azzeramento dei carichi verticali  
  qvir(iii) = 1  
  'calcolo delle sollecitazioni nodali  
  For jj = 1 To 6  
    'calcolo della sollecitazione nodale jj  
    SO(jj) = -qvir(0) * yi(jj, 0)  
    For i = 1 To N  
      SO(jj) = SO(jj) - qvir(i) * yi(jj, i)  
    Next i  
  Next jj
```

Una volta calcolate le sollecitazioni nodali, si procede con il calcolo delle sollecitazioni fittizie per ciascuna sezione in cui l'arco è stato discretizzato.

```
...  
'calcolo delle sollecitazioni virtuali nelle varie sezioni dell'arco  
For ii = 0 To N  
  'contributo delle azioni nodali  
  'momento  
  MMvir(iii, ii) = SO(1) + SO(2) * z(ii) - SO(3) * y(ii)  
  'sforzo normale  
  NNvir(iii, ii) = -SO(2) * sinalpha(ii) - SO(3) * cosalpha(ii)  
  'contributi dei carichi  
  For i = 0 To ii  
    'verticali  
    MMvir(iii, ii) = MMvir(iii, ii) - qvir(i) * (z(ii) - z(i))  
    NNvir(iii, ii) = NNvir(iii, ii) + qvir(i) * sinalpha(ii)  
  Next i  
Next ii  
Next iii
```

Definite le sollecitazioni virtuali globali si calcolano gli spostamenti effettivi delle sezioni della struttura.

```
'calcolo degli spostamenti
```

### 3. Modello di calcolo non lineare di strutture ad asse curvilineo

```
For iii = 1 To NN
  For ii = 0 To N
    For i = 1 To N
      spost(iii, ii) = spost(iii, ii) + 0.5 * (MMvir(ii, i) * muTot(iii, i) * dsdz(i) + MMvir(ii, i - 1) * muTot(iii, i - 1) * dsdz(i - 1) +
        + NNvir(ii, i) * lamTot(iii, i) * dsdz(i) + NNvir(ii, i - 1) * lamTot(iii, i - 1) *
        dsdz(i - 1)) * (z(i) - z(i - 1))
    Next i
  Next ii
Next iii
```

#### 3.3.4 Routine momento\_curvatura

La routine che verrà ora descritta valuta la relazione  $M-\mu$  per le singole sezioni in funzione delle sollecitazioni calcolate nella routine principale e delle deformazioni impresse.

La relazione viene valutata richiamando un'ulteriore routine che definisce la legge costitutiva del materiale, secondo quanto espresso dalla variabile *tipo*.

Si possono qui distinguere due parti: nella prima viene effettuata una divisione in strisce della sezione analizzata, con relativo calcolo dei parametri geometrici; nella seconda viene ricercata, attraverso un calcolo iterativo, una configurazione di deformata che equilibri lo sforzo normale sollecitante e permetta di valutare una correzione di curvatura da introdurre successivamente, nei calcoli della routine principale.

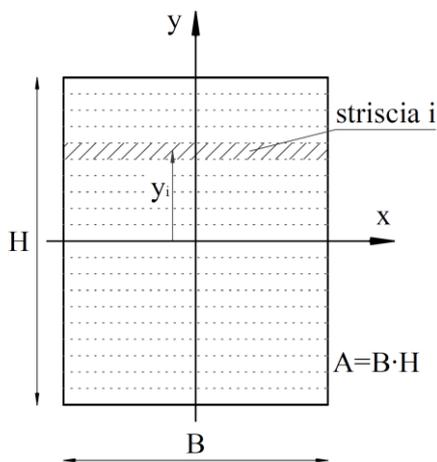


Figura 3.28 Discretizzazione della sezione i-esima

Di seguito vengono elencati i comandi per la discretizzazione della sezione ed il calcolo dei relativi parametri geometrici.

```
'proprietà di ciascuna striscia
For i = 1 To Ns
```

### 3. Modello di calcolo non lineare di strutture ad asse curvilineo

$y_{sez}(section, i) = y_{sez}(section, 0) + alt / Ns * i$  'posizione  
rispetto ad H/2

$Ba(section, i) = B$  'base

$H(section, i) = alt / Ns$  'altezza di  
ciascuna striscia

$a(section, i) = (Ba(section, i) + Ba(section, i - 1)) / 2 * H(section, i)$  'area di  
ciascuna striscia

$Tem(section, i) = celsius(i, (temp\_val\_inc * 60 / delta\_t))$  'temperatura  
nella striscia

$epster(section, i) = epsT(Tem(section, i))$  'deformazione  
impressa temperatura

$Atot = Atot + a(section, i)$  'area della  
sezione

Next i

$Momin = 1 / 12 * B * alt ^ 3 + B * alt * yg ^ 2$  'momento  
d'inertia della sezione

#### Dove:

- section è la sezione analizzata dell'arco (da 0 a N, N=numero di conci - valore di input);
- i è il punto i-esimo analizzato all'interno della sezione (da 0 a Ns, Ns=200);
- Tem(i) è la temperature raggiunta nel punto in quel determinato istante di calcolo. Temp\_val\_inc (tempo di valutazione dell'incendio) è uno dei parametri di input per la funzione momento\_curvatura;
- epsT è la funzione che viene richiamata per definire la deformazione termica indotta in base alla temperatura raggiunta in quell punto (questa routine verrà evidenziata in seguito ad una breve trattazione della materia, nel capitolo 4. Effetti del calore sul materiale).

Si valuta quindi lo stato deformativo con calcolo elastico lineare, a cui si sommano le deformazioni impresse accumulate durante gli incrementi di carico precedentemente elaborati.

Oss. Al primo incremento di carico la muImp e lamImp sono inizializzati a 0.

$lambda = Nor / (E * Atot) + lamImp$  'valore iniziale di  
lambda

$mu = Mreal / (E * Momin) + muImp$  'valore iniziale di  
mu

Azzerati a questo punto i parametri che interverranno nel calcolo, inizia il ciclo iterativo: noti la deformazione assiale (*lambda*) e la curvatura (*mu*) della sezione, si valutano le deformazioni  $\epsilon$  nei punti individuati dalle coordinate ysez (sono i punti in cui si passa

### 3. Modello di calcolo non lineare di strutture ad asse curvilineo

da una striscia alla successiva) e, richiamando la function *sigm\_temp*, si calcolano le tensioni corrispondenti. Il calcolo prosegue con la definizione dello sforzo normale e del momento risultanti; il primo viene confrontato con lo sforzo normale sollecitante al fine di verificare l'equilibrio e calcolare l'eventuale correzione per l'allungamento assiale, mentre il secondo viene utilizzato per il calcolo della correzione della curvatura, che servirà nella routine esterna, come già indicato.

```
'calcolo di deltaLambda segnato
Do While contr = 0
  'correzione a Delamseg
  If cont > 0 Then
    Delamseg = Delamseg + (Nor - Nrisp) / (E * Atot)
  End If
  'calcolo nelle varie strisce
  Nrisp = 0 'valore iniziale dello sforzo normale di risposta
  mome = 0 'valore iniziale del momento di risposta
  eps(section, 0) = lambda + Delamseg + mu * ysez(section, 0) - epster(section, 0)
    'deformazione

  ' Legge costitutiva
  If tipo = 6 Then
    'tensione con legame costitutivo in funzione della temperatura
    sig(section, 0) = sig_temp(eps(section, 0), Tem(section, 0))
  Else
    'tensione con legami costitutivi "ordinari"
    sig(section, 0) = sigeps(eps(section, 0))
  End If

  For i = 1 To Ns
    eps(section, i) = lambda + Delamseg + mu * ysez(section, i) - epster(section, i)
      'deformazione
    ' Legge costitutiva
    If tipo = 6 Then
      'tensione con legame costitutivo in funzione della temperatura
      sig(section, i) = sig_temp(eps(section, i), Tem(section, i))
    Else
      'tensione con legami costitutivi "ordinari"
      sig(section, i) = sigeps(eps(section, i))
    End If

    'sforzo normale di risposta
    Nrisp = Nrisp + (sig(section, i - 1) * Ba(section, i - 1) + sig(section, i) * Ba(section, i))
      / 2 * H(section, i)
    'momento rispetto all'asse baricentrico
    mome = mome + (sig(section, i - 1) * Ba(section, i - 1) * ysez(section, i - 1)
```

### 3. Modello di calcolo non lineare di strutture ad asse curvilineo

```

+ sig(section, i) * Ba(section, i) * ysez(section, i)) / 2 * H(section, i)
Next i
cont = cont + 1
If Abs(Nor - Nrisp) < 0.001 * Abs(Nor) Then 'condizione di
uscita dal ciclo
contr = 1
End If
Loop
Demuseg = (Mreal - mome) / (E * Momin)

End Function

```

#### 3.3.5 Routine sigma

La routine *Momento\_curvatura* richiama altre funzioni al suo interno per il calcolo della deformazione termica ( $\epsilon_{sT}$ ) e della tensione sollecitante. Per quanto riguarda la tensione vengono richiamate due tipologie di funzioni, *sig* e *sig\_temp*, a seconda del comportamento che si vuole analizzare sia in assenza o presenza di gradienti termici.

Tra i dati inseriti nella routine principale vi è la variabile *tipo*, cui viene assegnato un numero corrispondente ad una delle leggi costitutive memorizzate all'interno del programma; in questo modo è possibile avere a disposizione più comportamenti del materiale – legami costitutivi, senza la necessità di modificare la routine per adattarla a nuovi casi.

Il principio è identico per entrambe le funzioni: ricevendo come input la deformazione *eps* di un punto/striscia di sezione, restituiscono come output la tensione *sig* corrispondente, conformemente alla legge costitutiva scelta. La differenza sostanziale risiede nel fatto che la *sig\_temp* è la funzione (*tipo*=6) che tiene conto del degrado del legame costitutivo a causa di elevati gradienti termici, mentre la funzione *sig* contiene al suo interno le altre tipologie di legame adottabili (*tipo* = 1, ..., 5), che non risentono però della temperatura cui è sottoposta la struttura.

Dati delle leggi costitutive		
Tipo=	6	1 Lineare elastico traz e comp
		2 Lineare fino a rottura traz. e comp.
		3 Lineare fino rottura solo compressione
		4 Lineare e plastica solo compressione
		5 Lineare e plastica trazione e compressione
		6 Come da EC6 1-2

**Figura 3.29 Input - Leggi costitutive**

### 3. Modello di calcolo non lineare di strutture ad asse curvilineo

In base alle leggi precedentemente riportate si evince il diverso comportamento che può essere considerato per l'analisi della struttura:

1. Legge lineare elastica a trazione e compressione. In questo caso la tensione è semplicemente definita dalla relazione  $\sigma = E \cdot \varepsilon$ , senza considerare alcun limite tensionale, sia in campo positivo (trazione) sia in campo negativo (compressione);

$$\sigma = E \cdot \varepsilon$$

2. Legge lineare elastica con resistenza massima a trazione e compressione. La tensione viene calcolata come nel caso del legame 1, ma in entrambi i campi vi è un valore limite (rispettivamente  $f_{ct}$  e  $f_y$ ) oltre il quale la tensione è nulla,  $\sigma = 0$ ;

$$\begin{cases} \sigma = E \cdot \varepsilon \\ \sigma > \sigma_{\max}(f_{ct}) \Rightarrow \sigma = 0 \\ \sigma < -\sigma_{\min}(-f_y) \Rightarrow \sigma = 0 \end{cases}$$

3. Legge lineare elastica a resistenza massima a sola compressione. Questo legame è uguale al secondo, a meno del campo delle tensioni positive, dove per  $\varepsilon > 0$  la tensione è sempre nulla;

$$\begin{cases} \sigma = E \cdot \varepsilon \\ \sigma < -f_y \Rightarrow \sigma = 0 \\ \varepsilon > 0 \Rightarrow \sigma = 0 \end{cases}$$

4. Legge elasto-plastica a sola compressione. Questo comportamento prevede che, per deformazioni a compressione oltre lo stato limite, la tensione indotta sia pari a  $f_y$ , ovvero per  $\varepsilon < \varepsilon_{fy}$  allora  $\sigma = -f_y$ ;

$$\begin{cases} \sigma = E \cdot \varepsilon \\ \sigma < -f_y \Rightarrow \sigma = -f_y \\ \varepsilon > 0 \Rightarrow \sigma = 0 \end{cases}$$

5. Legge elasto-plastica a compressione e trazione. Questo comportamento prevede due rami paralleli all'asse delle ascisse, sia in campo positivo sia negativo, dove i due valori limite tensionali sono rispettivamente  $f_{ct}$  e  $-f_y$ .

$$\begin{cases} \sigma = E \cdot \varepsilon \\ \sigma < -f_y \Rightarrow \sigma = -f_y \\ \sigma > f_{ct} \Rightarrow \sigma = f_{ct} \end{cases}$$

### 3. Modello di calcolo non lineare di strutture ad asse curvilineo

Si riporta a seguire la routine sigma, in cui l'unico parametro di input "variabile", calcolato nella routine momento\_curvatura, è il valore della deformazione raggiunta nel punto analizzato.

```
Function sigeps(def)
  If tipo = 1 Then
    'legge lineare elastica
    sigeps = E * def

  ElseIf tipo = 2 Then
    'legge lineare fino a rottura in trazione e compressione
    sigeps = E * def
    If sigeps < -fy Or sigeps > fct Then
      sigeps = 0
    End If

  ElseIf tipo = 3 Then
    'legge lineare fino a rottura solo compressione
    sigeps = E * def
    If sigeps < -fy Or sigeps > 0 Then
      sigeps = 0
    End If

  ElseIf tipo = 4 Then
    'legge lineare plastica solo comp.
    sigeps = E * def
    If sigeps < -fy Then
      sigeps = -fy
    ElseIf sigeps > 0 Then
      sigeps = 0
    End If

  ElseIf tipo = 5 Then
    'legge lineare plastica trazione e comp.
    sigeps = E * def
    If sigeps < -fy Then
      sigeps = -fy
    ElseIf sigeps > fct Then
      sigeps = fct
    End If

    ElseIf sigeps > fct Then
      sigeps = 0
    End If
  End If

End Function
```

### 3. Modello di calcolo non lineare di strutture ad asse curvilineo

La trattazione della routine sig\_temp viene riportata capitolo successivo con la routine temperatura\_temp e epsT, in seguito alla trattazione dei parametri termofisici nel paragrafo 4.3 Algoritmo di calcolo – Parte II.

#### 4. Effetti del calore sul materiale

### **4. Effetti del calore sul materiale**

Per analizzare strutture soggette ad elevati gradienti termici occorre innanzitutto conoscere il comportamento dei materiali, costituenti le strutture stesse, e quindi ogni tipologia coinvolta nell'incendio.

Gli aspetti fondamentali che entrano in gioco sono quindi gli effetti della propagazione del calore all'interno del mezzo, la reazione del materiale al gradiente termico applicato, nonché il degrado progressivo che il materiale subisce via via che viene soggetto a temperature sempre più elevate.

Gli obiettivi fondamentali sono definire:

- il profilo di temperatura che si sviluppa all'interno della sezione, al fine di sottoporre la struttura all'effettivo gradiente termico che si sviluppa durante uno specifico incendio;
- il comportamento del materiale all'evolvere della temperatura (in campo spaziale e temporale), che generalmente consiste nell'introduzione di deformazioni termiche (dilatazione);
- l'abbattimento della resistenza al progredire dell'incendio ossia del modulo elastico e il picco di resistenza massima, caratterizzante ciascun materiale all'interno della struttura analizzata.

Per analisi approfondite di questo tipo, come accennato al paragrafo 2.3, ad oggi abbiamo a disposizione un numero limitato di analisi su diversi campioni di materiali da costruzione, tra cui quelli esposti all'interno degli Eurocodici (E6 Parte I-II). Focalizzandosi sui campioni da noi interessati, "clay units", gli Eurocodici pongono quindi le basi per introdurre un calcolo numerico avanzato.

Si introduce ora la teoria della trasmissione del calore, nonché il calcolo numerico adottato per la realizzazione del profilo della temperatura.

A seguire vengono invece trattati gli altri aspetti sopra elencati nello specifico caso di strutture in muratura in cui i materiali impiegati sono principalmente due: l'elemento "mattone" e il legante "malta".

## 4. Effetti del calore sul materiale

### 4.1 Trasmissione del calore – Legge di Fourier

Lo scopo di analizzare la trasmissione del calore, ai fini del calcolo delle sollecitazioni, ha lo scopo di definire in modo puntuale sezione per sezione, nonché punto per punto di ciascuna sezione, il valore della temperatura raggiunta.

$$T = T(x, y, z, t) \quad (4.1)$$

Dove:

- T = temperatura [°C];
- x,y,z sono le coordinate geometriche del punto analizzato [mm];
- t è la variabile temporale [s].

Il calcolo numerico pone le proprie basi sulla risoluzione della equazione differenziale di secondo grado di Fourier, che fornisce una descrizione completa dell'evoluzione della temperatura in funzione del tempo e dello spazio, qui di seguito esposta:

$$\frac{\partial T}{\partial t} = \alpha \frac{\partial^2 T}{\partial x^2} \quad (4.2)$$

Dove:

$$\alpha = \frac{\lambda}{\rho \cdot c} \quad (4.3)$$

Con:

- $\lambda$ : conducibilità termica del materiale [W/m°C];
- $\rho$ : densità volumica [kg/m<sup>3</sup>];
- c: calore specifico del materiale [J/kg K].

Definito quindi il punto di partenza si può osservare come, a meno della costante dipendente dai parametri termo-fisici, descritti nel paragrafo successivo, l'equazione esposta risulti essere un'equazione di tipo parabolico, di seguito riportata portando a sinistra il secondo termine:

$$\frac{\partial U}{\partial t} - (\alpha) \frac{\partial^2 U}{\partial x^2} = 0 \quad (4.4)$$

dove U=T (temperatura).

Volendo conoscere quindi la distribuzione u(x,t), avremo che il problema può essere risolto in termini adimensionali, grazie all'introduzione di tre funzioni che definiscano le condizioni al contorno, quali:

$$u(x, 0) = f(x) , 0 \leq x \leq 1 \quad (4.5)$$

$$u(1, t) = g_1(t), 0 < t \quad (4.6)$$

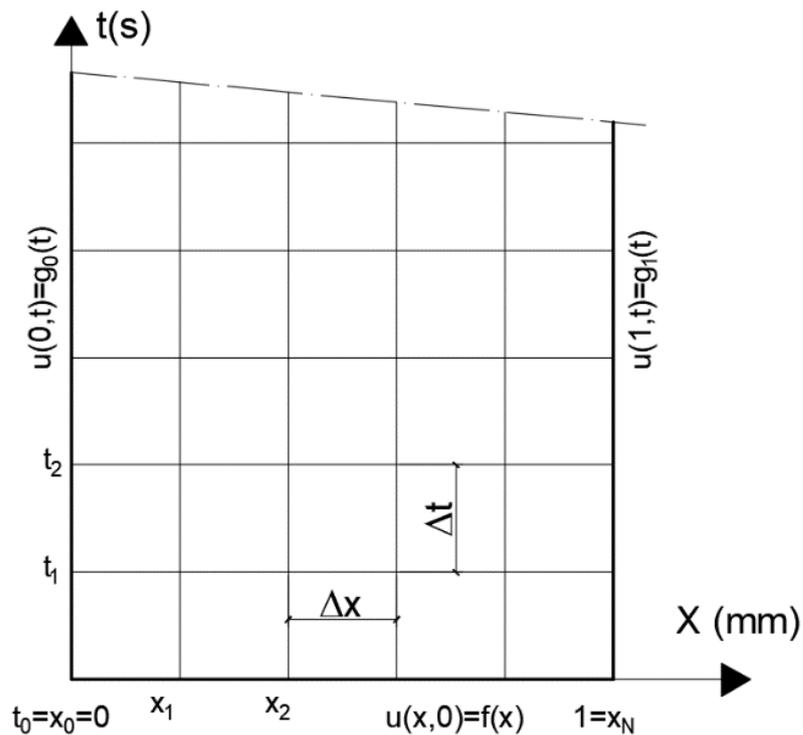
#### 4. Effetti del calore sul materiale

$$u(0,t) = g_0(t), 0 < t \quad (4.7)$$

Dove le precedenti equazioni definiscono:

- la temperatura in ciascun punto, quando la variabile temporale è inizializzata a 0. In questo caso la funzione assume il valore della temperatura ambiente pari a 20°C, poiché al tempo "t=0" non si è ancora innescato l'incendio e quindi non vi è passaggio di calore tra le due facce di bordo (3.5);
- la temperatura per x=1, ovvero la temperatura sul lato non esposto all'incendio al variare della variabile tempo (4.6);
- la temperatura per x=0, ovvero la temperatura sul lato esposto all'incendio, al variare della variabile tempo (4.7);

Le funzioni che impongono le condizioni al contorno si possono riscontrare nella seguente figura evidenziate in grassetto; tali funzioni delimitano il dominio all'interno del quale vengono calcolati i valori delle temperature.



*Figura 4.1 Dominio della temperatura discretizzato nelle due variabili*

Mentre per la prima equazione il valore della temperatura è nota a priori, poiché si esclude il passaggio di calore da un punto all'altro ad incendio non ancora avvenuto, per le equazioni 4.6 e 4.7 occorre introdurre due funzioni,  $g_0$  e  $g_1$ , che tengano conto

#### 4. Effetti del calore sul materiale

dell'effettivo andamento delle temperature sulle due facce esterne della struttura.

A tal scopo, nel caso di progettazione della resistenza al fuoco di strutture standard si impiega la curva temperatura-tempo (T,t) fornita dalla Normativa, ovvero la curva ISO 834 di seguito riportata, di cui viene riportata l'equazione caratteristica:

$$T = 20 + 345 \cdot \log(8 \cdot t + 1) \quad (4.8)$$

Dove la variabile temporale t è espressa in minuti (min).

La Normativa offre inoltre altre curve d'incendio in funzione dei materiali maggiormente coinvolti da esso. Nel caso in esame all'interno di questa Tesi, essendo una comparazione con una prova sperimentale, verranno utilizzati i profili di temperatura realmente indotti, riportati nella relazione tecnica, di cui la trattazione è rimandata al paragrafo 5.2.3.

Si rimanda pertanto a tale capitolo la definizione delle due funzioni che definiscono l'andamento delle temperature, sulle due superfici, al variare del tempo ( $g_0$  e  $g_1$ ).

Per procedere con il calcolo numerico occorre ora discretizzare i due termini dell'equazione di Fourier (3.3):

$$\frac{\partial u}{\partial t}(x_i, y_i) \approx \frac{u_{i,j+1} - u_{i,j}}{k}, k = \Delta t \quad (4.9)$$

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}(x_i, y_i) \approx \alpha \cdot \frac{u_{i+1,j} - 2u_{i,j} + u_{i-1,j}}{h^2}, h = \Delta x \quad (4.10)$$

Dove:

- i,j sono i pedici del punto a cui si riferisce la grandezza parabolica (la temperatura);
- $\Delta t$  è l'intervallo di discretizzazione temporale;
- $\Delta x$  è l'intervallo di discretizzazione spaziale.

Procedendo con il calcolo si pone:

$$\lambda = \frac{k}{h^2} \quad (4.11)$$

E sostituendo le equazioni 4.9 e 4.10 nella equazione di Fourier, 4.4, si può esplicitare il valore della temperatura incognita (tempo successivo), come evidenziato qui di seguito:

$$u_{i,j+1} = \alpha \lambda \cdot u_{i-1,j} + (1 - 2\alpha \lambda) \cdot u_{i,j} + \alpha \lambda \cdot u_{i+1,j}, i = 1, 2, \dots, N \quad (4.12)$$

Grazie all'equazione 4.11 infatti si può calcolare il valore della temperatura del punto i "in avanti", al tempo  $t=j+1$ , introducendo i valori della temperatura, al tempo  $t=j$ , di tre punti adiacenti ( $x=i-$

#### 4. Effetti del calore sul materiale

1,  $x=i$  e  $x=i+1$ ). È sufficiente quindi introdurre nell'equazione ogni terna di valori della temperatura, spostandosi di uno step per volta, per definire ogni punto in avanti della "riga" successiva. Una migliore deduzione può essere realizzata grazie la seguente figura:

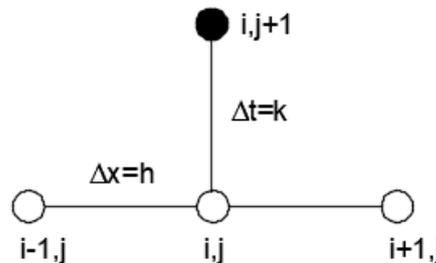


Figura 4.2 Sintesi parametri coinvolti nel calcolo del termine in avanti  $u_{i,j+1}$

Per cominciare il calcolo numerico occorre collocarsi nel punto con coordinate  $(x_1,0)$ , vedere Figura 4.1, per poter calcolare il punto in avanti "i, j+1". È sufficiente quindi iterare completando l'intera "riga", per poi spostarsi sulla successiva sino ad arrivare alla penultima.

Tra le molteplici variabili interessate, di particolare importanza sono le ampiezze di discretizzazione geometriche e temporali. Per definire la matrice delle temperature bidimensionale (spazio e tempo) occorre quindi discretizzare la sezione geometrica e l'intervallo temporale di calcolo.

Uno dei passi fondamentali è quello di rispettare il limite di discretizzazione, spaziale e temporale, al di fuori del quale il calcolo numerico risulta instabile e i valori calcolati, con le equazioni precedentemente descritte, risulterebbero inattendibili e affetti da errori grossolani.

Il calcolo numerico impone infatti che  $\Delta t$  e  $\Delta x$  siano correlati dalla seguente equazione:

$$\lambda = \frac{k}{h^2} < \frac{1}{2} \quad (4.13)$$

A tal fine, posta a priori la suddivisione della sezione oggetto di calcolo in un numero di strisce sufficientemente piccolo, si può dedurre l'intervallo di tempo massimo:

$$\Delta t \leq \frac{1}{2} \Delta x^2 \quad (4.14)$$

Un aspetto fondamentale, trascurato sino ad ora, sono i parametri termofisici che influenzano l'equazione descrivendo la costante  $\alpha$  all'interno dell'equazione 4.12.

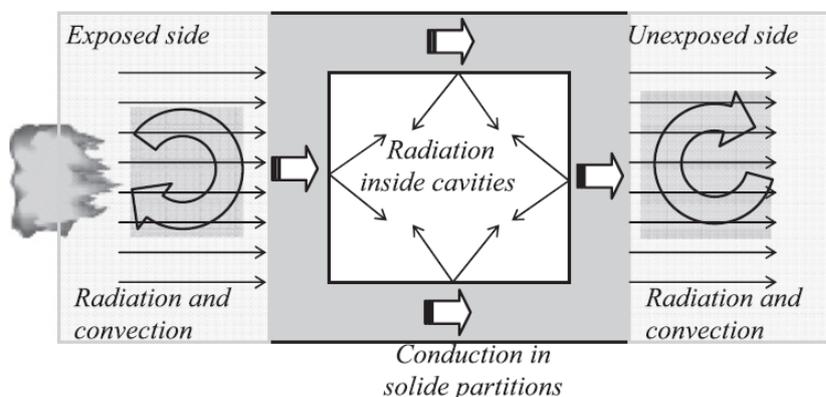
## 4. Effetti del calore sul materiale

Prima di procedere con il calcolo numerico occorre quindi introdurli ed analizzarli.

### 4.2 Proprietà termofisiche

Nel caso di opere in muratura la tipologia di trasmissione del calore si distingue in funzione del mezzo che deve attraversare, come di seguito descritto:

- convezione e irraggiamento, sulle due superfici di intradosso ed estradosso;
- conduzione, attraverso la parte solida della struttura;
- irraggiamento, all'interno dei vuoti (non si instaurano moti di convezione).



*Figura 4.3 Diagramma esemplificativo di trasmissione del calore*

Si possono distinguere i due materiali impiegati per la realizzazione di opere murarie per definire il comportamento al fuoco di ciascuno di essi, quali i mattoni e la malta.

La terracotta, che costituisce l'elemento principale dei mattoni, presenta in sé notevole eterogeneità, a cui si devono aggiungere le diverse conformazioni geometriche realizzate al fine di soddisfare ogni esigenza costruttiva e pertanto gli elementi in laterizio risultano avere comportamenti piuttosto differenti a seconda della tipologia impiegata.

Ad ogni modo, è possibile caratterizzarli definendo i principali parametri termofisici coinvolti all'interno del calcolo di trasmissione del calore e degli effetti prodotti da esso, quali:

- **Calore specifico**, ovvero la capacità termica di unità di massa di un determinato corpo o sostanza;
- **Conducibilità termica**, che indica il rapporto tra il flusso di calore passante attraverso l'unità di superficie e il gradiente termico tra i due estremi del materiale stesso;

#### 4. Effetti del calore sul materiale

- **Densità volumica**, ovvero il rapporto tra la massa e il volume dell'elemento in laterizio;
- **Dilatazione termica**, ovvero l'espansione che un corpo riceve quando sottoposto ad aumento di temperatura.

##### 4.2.1 Calore specifico ( $C_p$ ), conducibilità termica ( $\lambda$ ) e densità ( $\rho$ )

Come accennato precedentemente, sono tre i parametri che influenzano la trasmissione del calore all'interno di un mezzo solido: calore specifico, conducibilità termica e densità volumica.

Il *calore specifico* ( $C_p$ ) in letteratura viene discretizzato in funzione della densità del materiale; per la terra cotta varia da circa 700 a 1200 W/kg K, con un range di densità compreso tra 1400 e 2200 kg/m<sup>3</sup>. Questo parametro indica il calore che deve essere somministrato in un secondo, ad un kg del materiale per ottenere l'aumento di 1 °C dello stesso.

La *conducibilità termica* ( $\lambda$ ), da non confondere con la  $\lambda$  impiegata nel calcolo numerico, indica l'attitudine di un materiale a trasmettere il calore; minore è il valore di  $\lambda$  e maggiormente isolante è il materiale preso in considerazione. Quindi, in altri termini, minore è il valore di  $\lambda$ , tanto più il materiale esaminato è un buon isolante termico.

La conducibilità termica dei laterizi,  $\lambda$ , viene in genere relazionata alla densità del materiale, come nel caso della capacità termica, preservando un range di valori da 0,35 a 1,5 W/mK.

L'ultimo, la *densità o massa volumica* ( $\rho$ ), è il parametro che indica la relazione fra la massa di un corpo e il volume da esso occupato, generalmente espresso in kg/m<sup>3</sup>. Nel caso dei materiali in laterizio riveste particolare importanza la percentuale dei vuoti all'interno del blocco stesso.

All'aumentare della temperatura hanno luogo reazioni chimico-fisiche e cambiamenti di fase che portano alla variazione di questi parametri, ai quali si aggiunge la trasmissione del calore per irraggiamento all'interno dei vuoti che, ad elevate temperature, riveste un ruolo significativo.

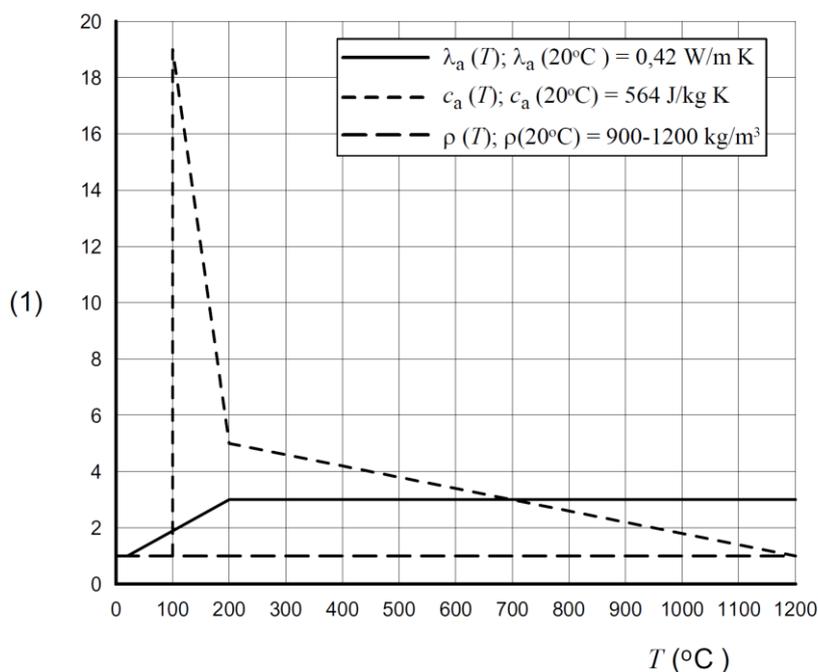
I tre parametri interessati sono quindi dipendenti dal numero e dalla dimensione dei vuoti, pertanto variano con le diverse tipologie di blocchi. A seguire viene riportata una tabella a titolo esemplificativo per mostrare l'alta variabilità del parametro analizzato.

#### 4. Effetti del calore sul materiale

	densità [kg/m <sup>3</sup> ]	conducibilità termica [W/m·K]	calore specifico [J/kg·K]	effusività termica [W/m <sup>2</sup> ·K]
laterizio porizzato alleggerito	600	0,17	840	2,5
laterizio porizzato con funzioni portanti	850	0,20	840	3,2
laterizi forati	750	0,40	840	4,3
laterizi pieni	1800	0,80	840	9,4
pietra naturale (tufo)	2300	2,00	840	16,8

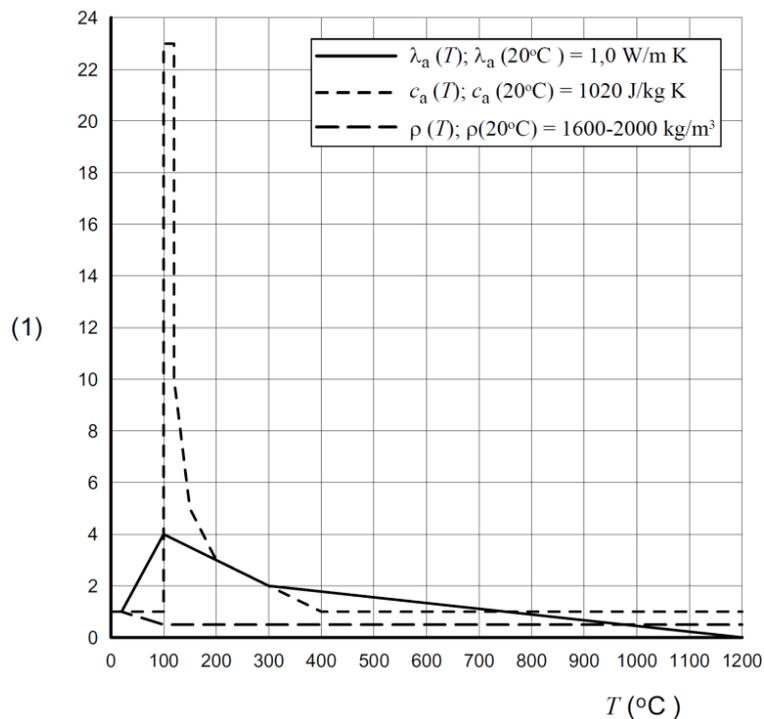
**Figura 4.4 – Proprietà termofisiche indicative per diverse tipologie di laterizio**

Ai fini del calcolo numerico si è scelto di procedere con l'assunzione delle analisi esposte all'interno degli Eurocodici, nello specifico EC 6 – Parte I-II, di cui vengono richiamati nuovamente i diagrammi riassuntivi per tipologia di materiale, contenuti nell'allegato D (a partire da pag. 71), già riportati nel paragrafo introduttivo 2.3.

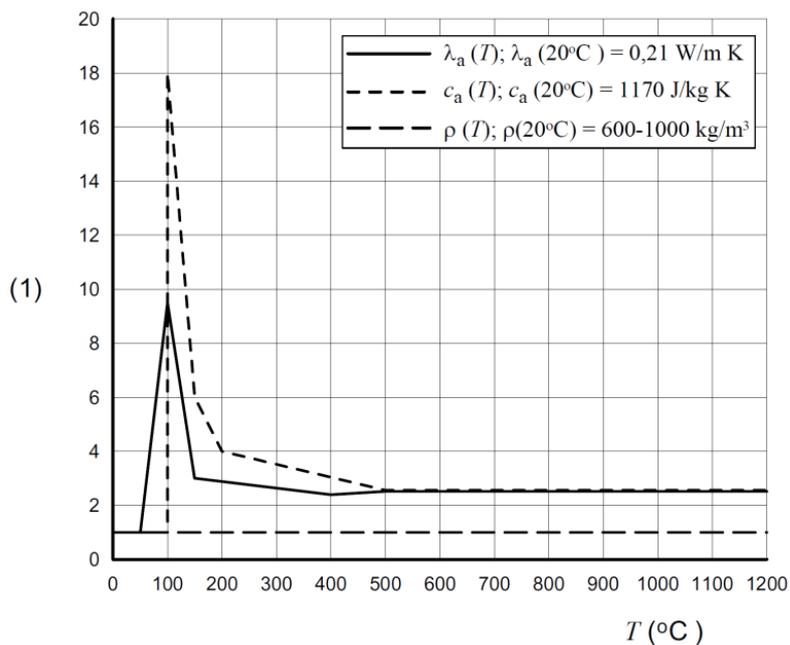


**Figura 4.5 EC6-D: Parametri termofisici – temperatura.  
Mattoni in argilla con densità compresa tra 900 e 1200 kg/m<sup>3</sup>**

#### 4. Effetti del calore sul materiale

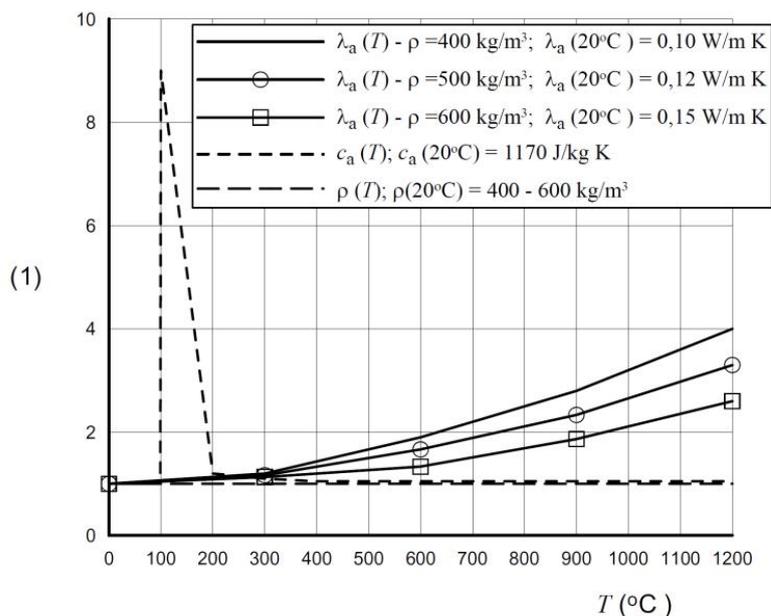


**Figura 4.6 EC6-D: Parametri termofisici – temperatura.**  
**Mattoni in silicato di calcio con densità compresa tra 1600 e 2000 kg/m<sup>3</sup>**



**Figura 4.7 EC6-D: Parametri termofisici – temperatura.**  
**Blocchi in calcestruzzo alleggerito con densità compresa tra 600 e 1000 kg/m<sup>3</sup>**

#### 4. Effetti del calore sul materiale



**Figura 4.8 EC6-D: Parametri termofisici – temperatura.**

**Blocchi in calcestruzzo aerato d'autoclave con densità compresa tra 400 e 600 kg/m<sup>3</sup>**

In base a quanto fornito, è quindi possibile caratterizzare il calcolo numerico in base a quattro tipologie di materiali costruttivi, purché il materiale progettato appartenga a opportuni range di densità:

- materiali da costruzione in laterizio ( $\rho = 900\text{-}1200 \text{ kg/m}^3$ );
- materiali in silicato di calcio ( $\rho = 1600\text{-}2000 \text{ kg/m}^3$ );
- materiali da costruzione in calcestruzzo alleggerito ( $\rho = 600\text{-}1000 \text{ kg/m}^3$ );
- materiali di autoclave areati con ( $\rho = 400\text{-}600 \text{ kg/m}^3$ ).

Mentre la densità volumica manifesta un comportamento pressoché costante, occorre considerare la significativa variazione dei parametri di calore specifico e conducibilità termica intorno alla temperatura di 100°C, riscontrabile nella maggior parte dei materiali esposti nelle figure precedenti, la quale può essere ricondotta al fenomeno di evaporazione dell'acqua residua nei pori dei singoli materiali.

Nel caso specifico dei mattoni, o meglio dei laterizi, la cottura dell'argilla a temperature anche superiori a 1000°C porta alla completa disidratazione del materiale, però durante lo stoccaggio il vapore acqueo dell'atmosfera viene adsorbito dalla fase solida all'interno del reticolo di pori. L'acqua adsorbita ha una grande influenza sulla variazione della capacità termica, infatti è stato verificato sperimentalmente che, nonostante i molteplici fenomeni fisico-chimici che intervengono durante il riscaldamento, a 100°C, temperatura alla quale l'acqua vaporizza, si registra il più rilevante picco endotermico, come esposto nei precedenti diagrammi.

## 4. Effetti del calore sul materiale

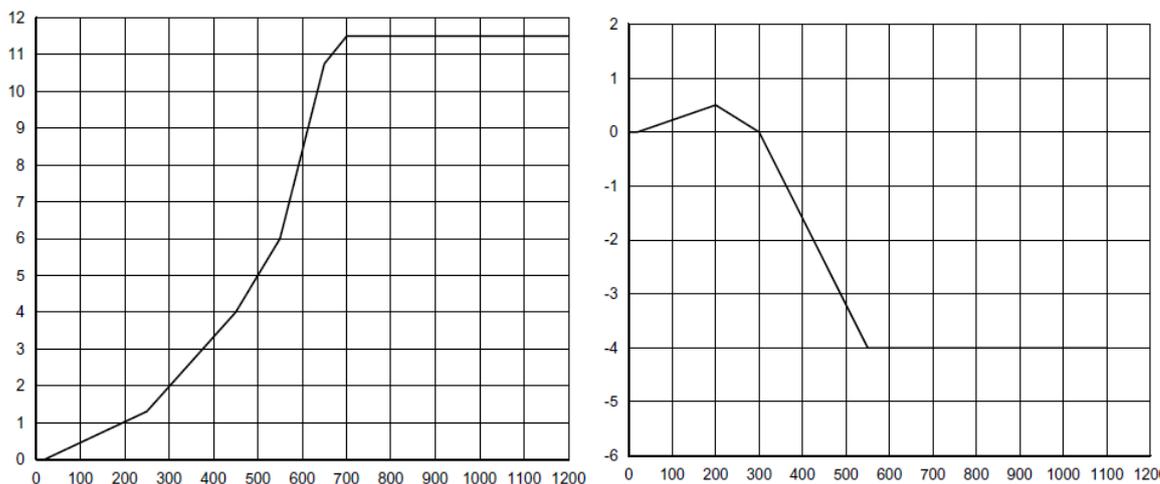
Ai fini del calcolo strutturale i parametri termo-fisici sono stati assunti come delle costanti, seppur un calcolo maggiormente raffinato debba includere le oscillazioni che tali parametri possono avere al variare della temperatura stessa. Prendendo in considerazione i materiali da costruzione in laterizio si sono quindi adottati valori intermedi, trascurando il picco endotermico.

Si osserva che per considerare l'oscillazione di questi parametri al variare della temperatura e quindi del tempo ( $\lambda(T(t))$  e  $C_p(T(t))$ ) è sufficiente, partendo dalla condizione al contorno iniziale (temperatura ambiente di 20°C), iterare il calcolo numerico introducendo nel calcolo stesso ogni volta i nuovi valori di questi due parametri, mentre rimarrebbe costante la densità come si evince dalla Figura 4.5

### 4.2.2 Dilatazione termica ( $\varepsilon_{th}$ )

Per quanto concerne la dilatazione termica ( $\varepsilon_{th}$ ), parametro adimensionale che regola il fenomeno di adattamento di un corpo soggetto ad aumento di temperatura con il rispettivo aumento di volume, si fa nuovamente riferimento a quanto proposto dagli Eurocodici.

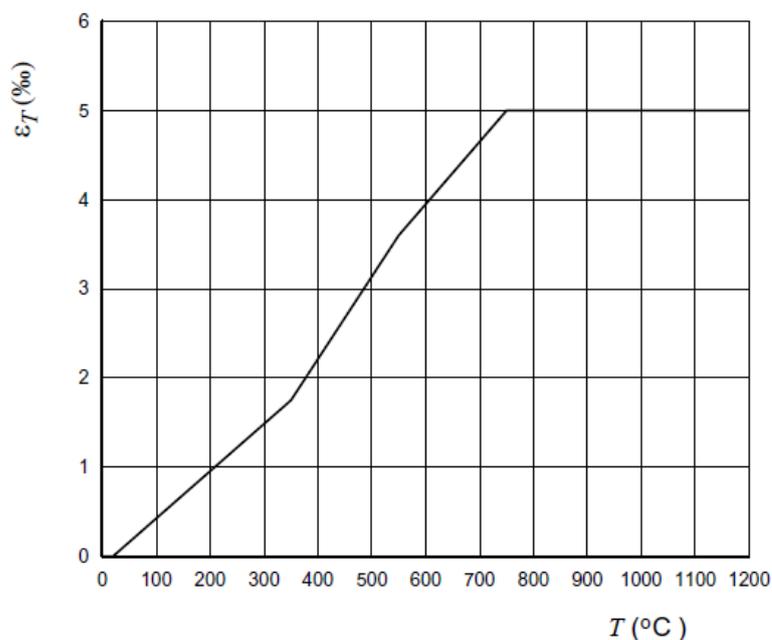
Analogamente a quanto riportato precedentemente vengono ora riportati i diagrammi, in cui la deformazione termica ( $\varepsilon_T$ ) è espressa in ‰ in funzione della temperatura sviluppata  $T(^{\circ}C)$ .



*Figura 4.9 Diagramma di deformazione termica – temperatura.  
Blocchi in silicati di calcio (sinistra) e calcestruzzo alleggerito (destra)*

Concentrandosi ora sul laterizio si riporta il diagramma  $\varepsilon_T$  (‰) -  $T$  ( $^{\circ}C$ ) di interesse ai fini del calcolo.

#### 4. Effetti del calore sul materiale



**Figura 4.10** Diagramma deformazione-temperatura.  
*Mattoni in terracotta con  $\rho = 900-1200 \text{ kg/m}^3$*

Come si evince dal diagramma non si hanno deformazioni termiche per  $T \leq 20^\circ\text{C}$ , mentre a seguire si ha una crescita lineare, con tre cambi di pendenza, per poi terminare oltre i  $750^\circ\text{C}$  con un plateau per un valore di deformazione termica massima del 5 ‰. Obiettivo del programma di calcolo è quindi definire la deformazione termica indotta dalla temperatura, per ciascun punto delle sezioni analizzate.

Una volta note le deformazioni termiche, più elevate nei punti maggiormente esposti all'incendio, minori in quelli più lontani, occorre prendere in considerazione il comportamento che il materiale ha in termini di resistenza e legami costitutivi, in condizioni dinamiche che portano appunto alla progressiva variazione della temperatura. Questo problema viene analizzato nel paragrafo successivo.

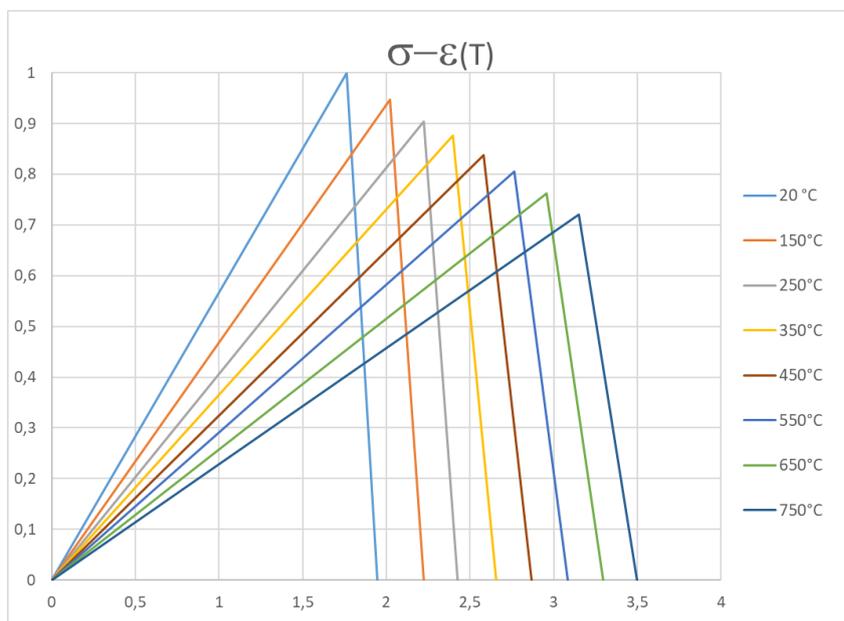
#### **4.2.3 Resistenza massima ( $f_y$ ) e Modulo elastico ( $E_{\text{pre\_pick}} - E_{\text{post\_pick}}$ )**

Le proprietà meccaniche della terracotta dipendono da vari parametri: la modalità di lavorazione, la composizione del materiale, la sua microstruttura, la porosità, la temperatura e la durata della fase di *curing*.

A temperatura ambiente la terracotta mostra, sia in trazione che in compressione, un comportamento lineare elastico fino al valore di resistenza massima, cui segue una rottura fragile. A

#### 4. Effetti del calore sul materiale

temperature elevate occorre considerare il degrado che subentra a causa di una minore capacità meccanica indotta dal degrado del materiale, di seguito esposta nei diagrammi.



**Figura 4.11** Legame costitutivo  $\sigma-\varepsilon(T)$  per laterizi con  $\rho = 900-1200 \text{ kg/m}^3$

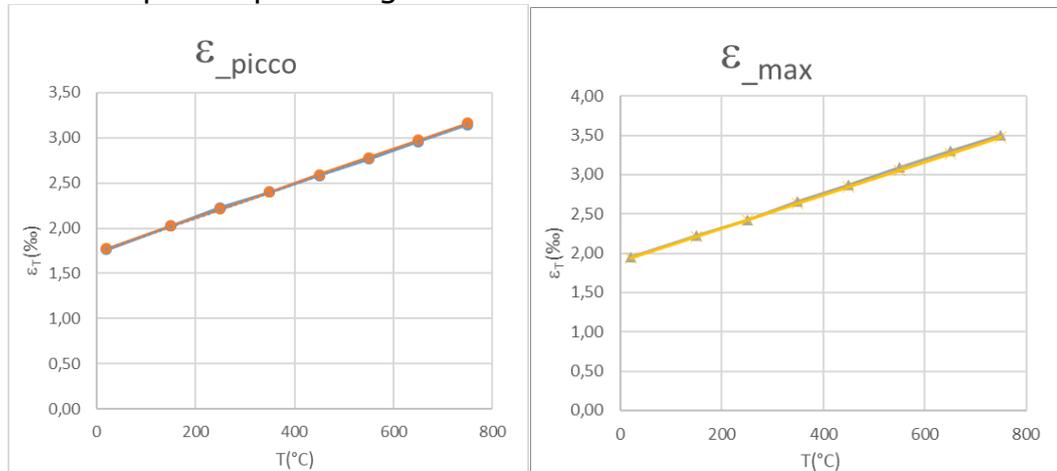
Nel grafico si evidenzia sulle ordinate la grandezza normalizzata rispetto il valore massimo. La tensione massima è infatti raggiungibile solo a temperatura ambiente, in condizioni di deformazioni di picco. A seguire, all'aumentare della temperatura, si può osservare l'azione del degrado che porta ad un abbattimento fino a circa il 30%, oltre il quale si assume che la sezione non sia più reagente cautelativamente poiché si raggiungono temperature che eccedono il limite massimo di 750°C.

Una volta ricavato il diagramma in forma analitica è stato possibile analizzare il comportamento del legame costitutivo per ricavare la funzione dei quattro parametri che regolano l'andamento del legame:

- $\varepsilon_{\text{picco}}$ : deformazione termica cui corrisponde la massima risposta tensionale, oltre la quale inizia il ramo decrescente;
- $\varepsilon_{\text{max}}$ : deformazione termica massima oltre la quale il materiale non reagisce e offre resistenza nulla;
- $E_{\text{pre\_pick}}$ : modulo elastico di pre picco ovvero la pendenza della retta che definisce il primo ramo;
- $E_{\text{post\_pick}}$ : modulo elastico post picco ovvero la pendenza della retta decrescente che descrive il secondo ramo, una volta che le deformazioni  $\varepsilon_i$  superano la  $\varepsilon_{\text{picco}}$ .

#### 4. Effetti del calore sul materiale

Diagrammando i diversi parametri per ogni valore di temperatura è possibile ottenere la funzione che definisce ciascun parametro, come esposto qui di seguito.



**Figura 4.12** Diagramma deformazione termica - temperatura

Per quanto riguarda le deformazioni di picco e massime, la funzione ha evidente comportamento lineare, infatti la linea di tendenza si sovrappone correttamente all'originale serie di punti, senza osservare valori discordanti.

Per esse è dunque sufficiente estrapolare l'equazione della linea di tendenza (lineare), come segue:

$$y_1 = 1,7376 + 0,0019 \cdot x \quad (4.15)$$

$$y_2 = 1,9024 + 0,0021 \cdot x \quad (4.16)$$

Dove:

- $y_i$ : deformazione di picco ( $i=1$ ) o massima ( $i=2$ ), a cui corrispondono rispettivamente le tensioni massima o nulla;
- $x$ : coordinata in ascissa ovvero la temperatura (espressa in °C).

Procedendo con l'analisi occorre ora interpolare i moduli elastici delle due rette.

#### 4. Effetti del calore sul materiale

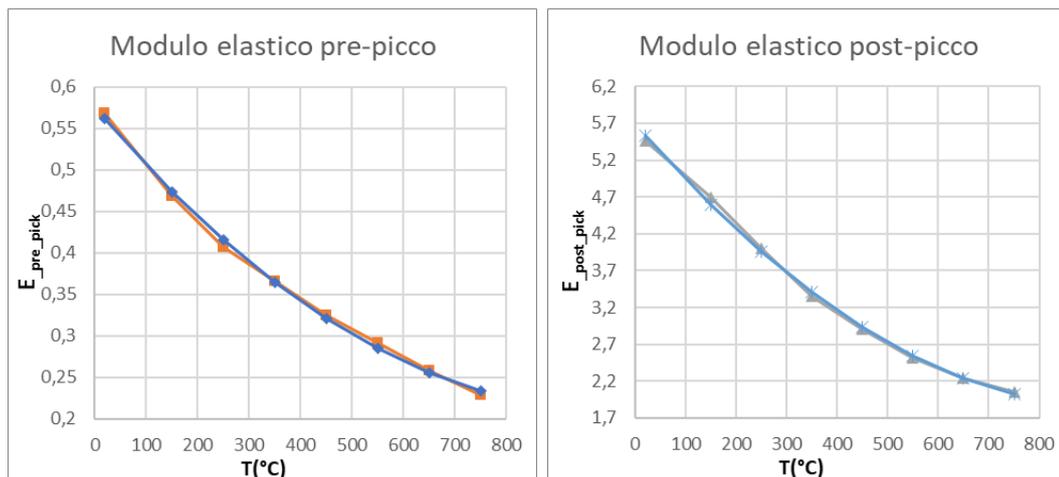


Figura 4.13 Diagramma modulo elastico – temperatura

Come si evidenzia dalla Figura 4.4 il profilo dei due moduli elastici non è lineare, bensì decrescente.

In questo caso è stata ricavata l'equazione dalla linea di tendenza di tipo polinomiale con approssimazione al II grado.

Le equazioni risultanti sono:

$$y_3 = 3,712 \cdot 10^{-7} \cdot x^2 - 7,335 \cdot 10^{-4} \cdot x + 0,5755 \quad (4.17)$$

$$y_4 = 4,112 \cdot 10^{-6} \cdot x^2 - 7,978 \cdot 10^{-3} \cdot x + 5,692 \quad (4.18)$$

Dove la x è nuovamente la temperatura e la y indica la variabile interesse di calcolo, rispettivamente il modulo pre-picco (4.17) e il modulo post picco (4.18).

Definite le funzioni che governano i quattro parametri è ora possibile costruire la curva  $\sigma$ - $\varepsilon$  per ogni temperatura analizzata, individuando senza alcuna interpolazione la curva caratteristica.

### 4.3 L'unico parametro da inserire ancora in output è la resistenza massima a temperatura ambiente, che dipende nuovamente dalla tipologia del materiale resistente. [Confronto con la sperimentazione](#) **Algoritmo di calcolo – Parte II**

Una volta chiariti gli aspetti legati al campo termico e alla trasmissione del calore vengono ora riportate le routine implementate nel programma di calcolo, quali:

- **temperatura\_temp**: funzione, richiamata all'interno della routine principale, che in funzione della dimensione della sezione analizzata, restituisce la temperatura raggiunta in ciascun punto in cui essa viene discretizzata per ogni istante,

#### 4. Effetti del calore sul materiale

secondo formule definite nel calcolo numerico al paragrafo 4.1;

- **epsT**: funzione, richiamata all'interno della routine momento\_curvatura, che in funzione della temperatura raggiunta nel punto analizzato restituisce il valore della deformazione termica corrispondente, calcolata in base a quanto affermato al paragrafo 4.2.2;
- **sig\_temp**: funzione, anch'essa richiamata all'interno della routine momento\_curvatura, che, in funzione della deformazione pseudo-elastica restituisce la corrispondente tensione sollecitante, di cui la teoria al paragrafo 4.2.3.

##### 4.3.1 Routine temperatura\_temp

Per definire la temperatura in ogni punto di una sezione, data l'altezza della stessa e il numero di strisce in cui viene discretizzata, occorre in primis definire la variazione temporale massima affinché il calcolo numerico risulti stabile, secondo quanto indicato dall'equazione 4.13.

In termini di calcolo si impone un valore di delta\_t ( $\Delta t$ ) infinitesimo e, mediante un loop di calcolo si definisce il multiplo inferiore prossimo al deltat\_max ( $\Delta t_{max}$ )

```
Function temp(alt, num_strisce)
```

```
delta_t = 5 / 1000000000
```

```
deltat_max = (0.5 * alt * alt) / (num_strisce * num_strisce)
```

```
Do While delta_t < deltat_max
```

```
    delta_t = delta_t * 10
```

```
Loop
```

```
delta_t = delta_t / 10
```

```
...
```

Dedotto il salto temporale massimo si può dedurre la dimensione della matrice nella seconda direzione, mentre avrà tante righe quanto le strisce in cui viene discretizzata la sezione ( $N_s$  posto pari a 200).

Nel caso specifico della prova sperimentale con cui ci si pone a confronto, la durata d'incendio simulato interessato ai fini dei calcoli è di poco più di 50 minuti. Assumendo una durata di 60 minuti, nell'ipotesi di una sezione alta 120 mm, la matrice sarà dimensionata come segue:

Posto:

#### 4. Effetti del calore sul materiale

$$\text{delta\_t} = 0.05 < 0.5 \cdot \frac{120^2}{200^2} = 0.18 \quad (4.19)$$

Il numero di colonne, pari a "tempo\_max", sarà dato da:

$$\text{tempo\_max} = \text{min\_incendio} \cdot \left(60 \cdot \frac{\text{sec}}{\text{min}}\right) \cdot \left(\frac{1}{\text{delta\_t}}\right) \quad (4.20)$$

$$\text{tempo\_max} = 60 \cdot \frac{1}{0.05} \cdot 60 = 72000 \quad (4.21)$$

Qui di seguito il codice in forma parametrica.

```
If tipo_fuoco = 6 Then 'VVF
  ' Definizione durata incendio
  tempo_max = (60 / delta_t) * 60
  ReDim celsius(num_strisce + 1, tempo_max + 1) As Double 'matrice temperatura
  'Calcolo temperatura intradosso
  For i = 1 To tempo_max
    celsius(0, i) = -0.12157 * ((delta_t * i / 60) ^ 2) + 16.459 * (delta_t * i / 60) +
      2.8366
    If celsius(0, i) < 20 Then
      celsius(0, i) = 20#
    End If
  Next i

  'Calcolo temperatura estradosso
  For i = 1 To tempo_max
    celsius(num_strisce + 1, i) = 0.0163 * ((delta_t * i / 60) ^ 2) - 0.2862 * (delta_t * i /
      60) + 20.754
    'correzione a valori temperatura ambiente nei primi 10 minuti
    If i <= 10 * 60 / delta_t Then
      celsius(num_strisce + 1, i) = 20#
    End If
    If celsius(num_strisce + 1, i) < 20 Then
      celsius(num_strisce + 1, i) = 20#
    End If
  Next i
```

Una volta calcolata la dimensione della matrice e definito l'andamento delle temperature sulle due facce esterne della sezione, secondo le curve ricavate dalla prova sperimentale di cui si approfondirà il discorso nel capitolo successivo, si procede con l'inizializzazione dell'ultima condizione al contorno per la risoluzione del calcolo numerico.

```
'Inizializzazione temperatura a t=0
For i = 0 To num_strisce
```

#### 4. Effetti del calore sul materiale

```
celsius(i, 0) = 20  
Next i
```

Come si evidenzia nel codice sopra riportato, al "tempo zero" l'incendio non è ancora cominciato e quindi i punti sono posti a temperatura ambiente pari a 20°C.

Per concludere occorre calcolare ogni valore delle celle all'interno della matrice, secondo l'equazione 4.12 del paragrafo 4.1.

```
' Calcolo valori nel dominio del pallogramma  
'Parametri termofisici per calcolo numerico  
alfa = (conduc * 1000000) / (ro * c)  
lambda = alfa * delta_t / (alt / num_strisce) ^ 2  
  
For j = 0 To tempo_max  
  For i = 1 To num_strisce  
  
    celsius(i, j + 1) = (alfa * lambda * celsius(i - 1, j) + (1 - 2 * lambda * alfa) * celsius(i,  
      j)  
      + alfa * lambda * celsius(i + 1, j))  
  
    If celsius(i, j + 1) < 20 Then 'Imposizione condizione al contorno  
      celsius(i, j + 1) = 20  
    End If  
  Next i  
Next j  
...  
'Stampa matrice temperature  
...  
End function
```

Una volta definita la matrice delle temperature è possibile procedere con l'analisi non lineare introducendo gradienti termici.

#### 4.3.2 Routine epsT

La routine che definisce il calcolo della deformazione termica, esplicita una semplice correlazione fra i due parametri. Nello specifico è stato adottato il diagramma di cui al paragrafo 4.2.2 Dilatazione termica ( $\epsilon_{th}$ ).

La routine di seguito esposta, ricevendo la temperatura del punto analizzato entra nel diagramma e restituisce la deformazione ad essa associata.

```
Function epsT(temp)
```



## 4. Effetti del calore sul materiale

Definita la curva  $\sigma-\varepsilon(T)$  si procede con il calcolo della tensione.

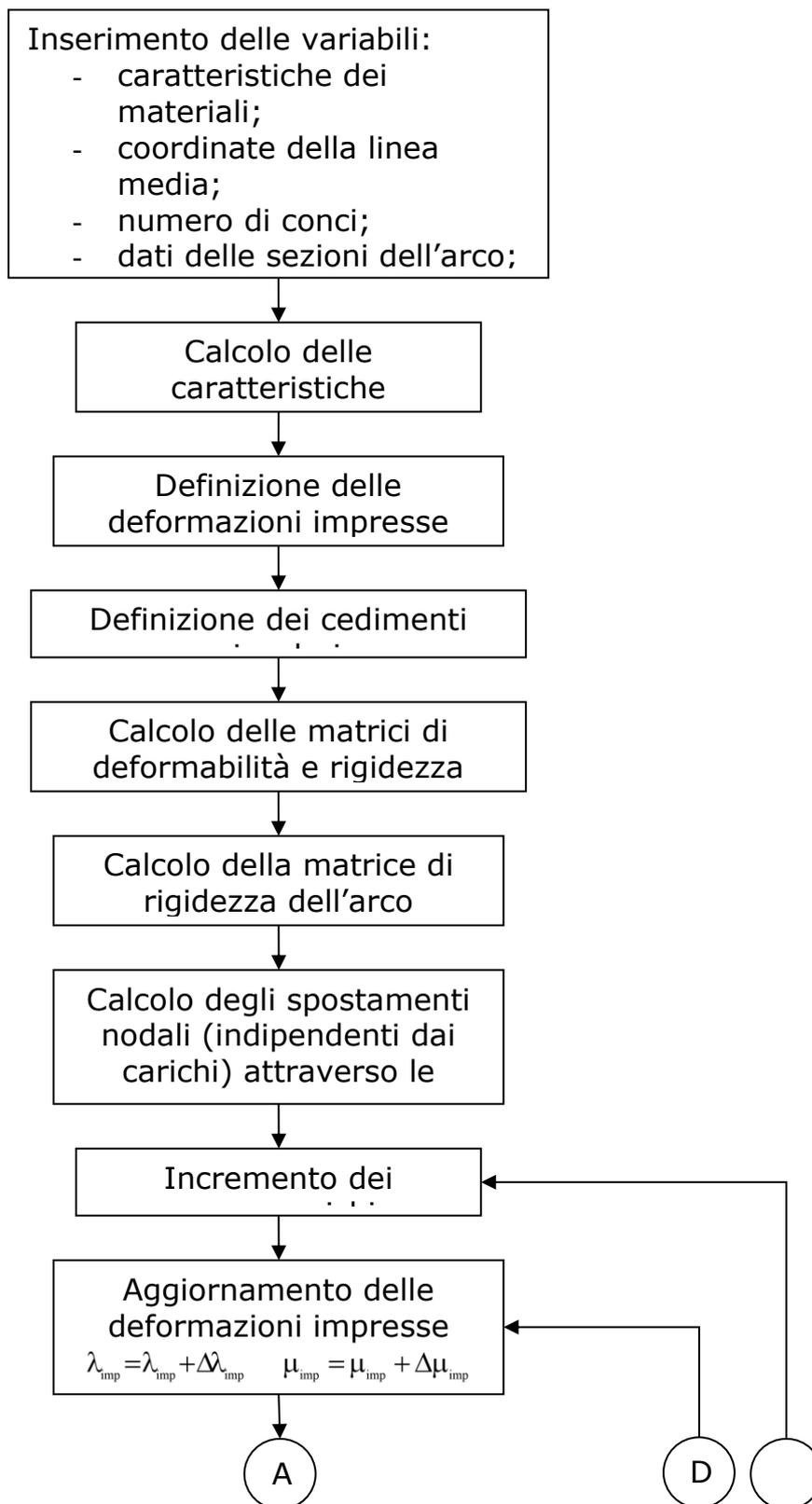
```
If Sgn(def) > 0 Then
  sig_temp = 0
Else
  'Calcolo sigma
  If def >= eps_picco Then
    sig_temp = fc_max * E_pre_pick * def
  ElseIf def < eps_picco And def >= eps_max Then
    sig_temp = (eps_max - def) * E_post_pick * fc_max
  ElseIf def < eps_max Then
    sig_temp = 0
  End If
End If
If temp > 750 Then
  sig_temp = 0
End If
End Function
```

Calcolata la tensione agente si rientra nella routine momento\_curvatura dove si calcolano a loro volta le deformazioni assiali e le curvature impresse, iterando il calcolo sino a raggiungimento della convergenza.

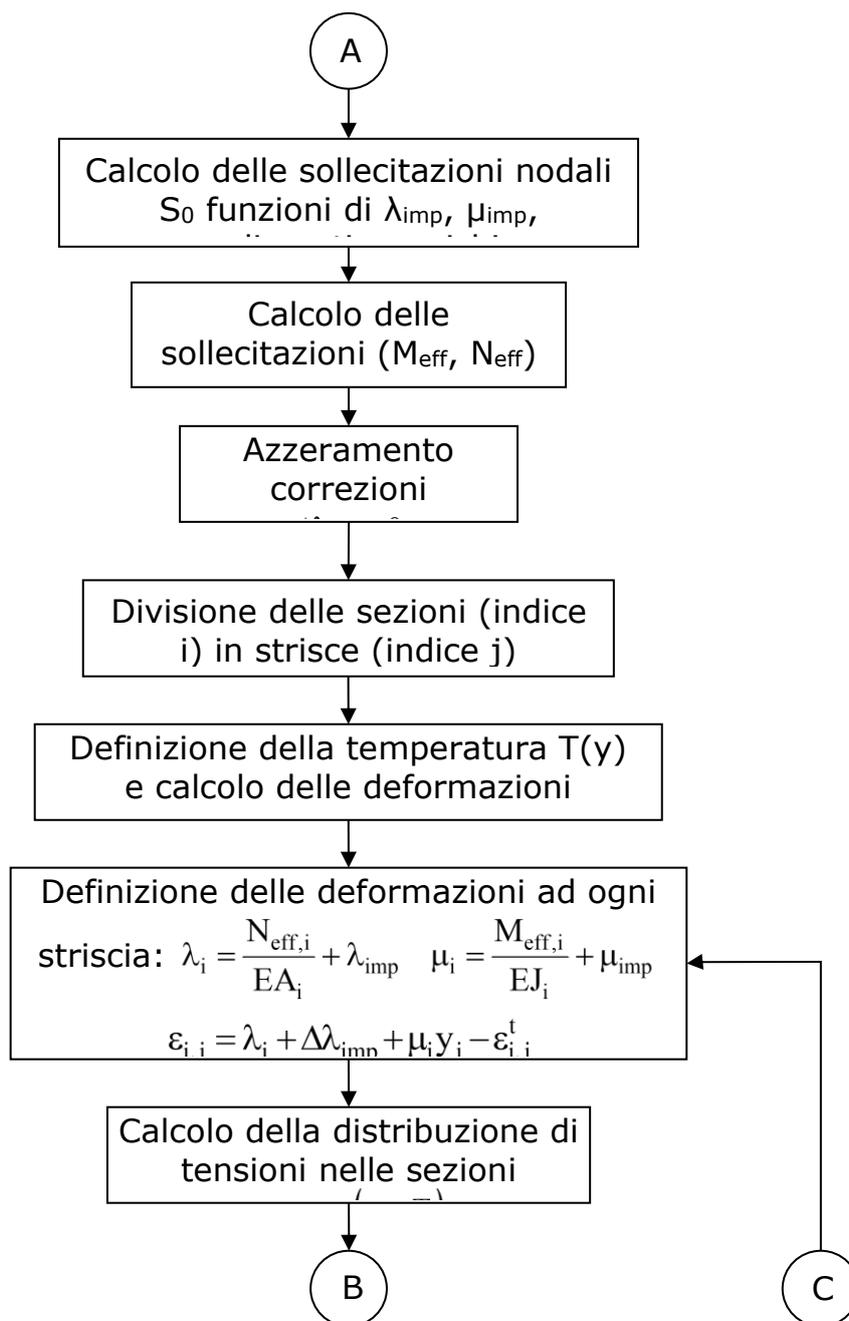
### 4.3.4 Flow-chart completo – Archi in muratura soggetti a incendio

A seguire viene riportato il flow-chart generale per l'analisi non lineare di archi in muratura soggetti a elevati gradienti termici.

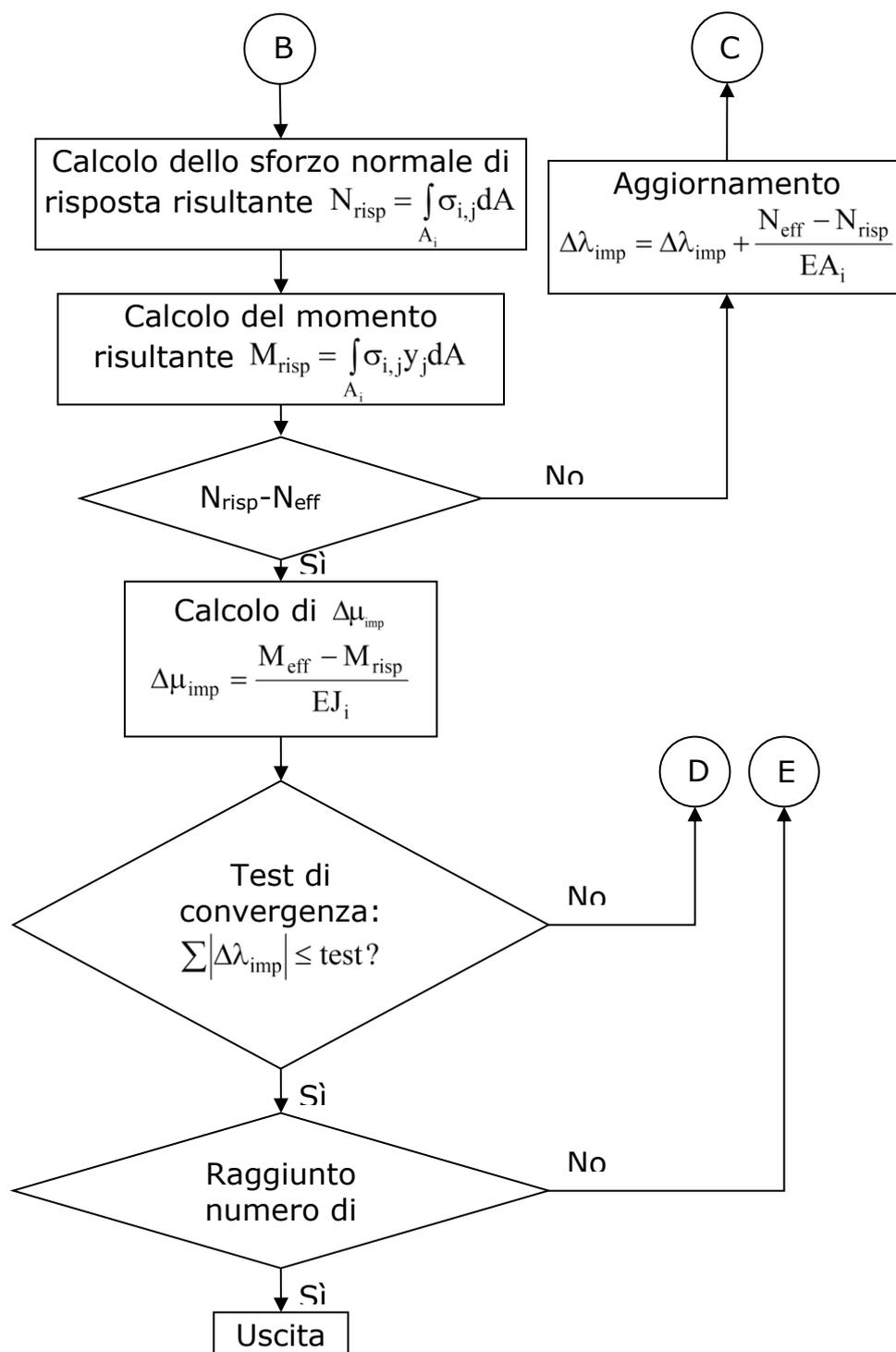
#### 4. Effetti del calore sul materiale



#### 4. Effetti del calore sul materiale



#### 4. Effetti del calore sul materiale



*Figura 4.14 - Diagramma di flusso per l'analisi non lineare di una struttura ad arco esposta al fuoco*

## 5. Confronto con la sperimentazione

### 5. Confronto con la sperimentazione

Definito il programma di calcolo, se ne vuole verificare l'attendibilità mediante una comparazione tra i dati calcolati con la sua elaborazione e quelli raccolti durante due prove sperimentali. Nello specifico, come primo mezzo di paragone si prende in considerazione la "**Analisi di un modello sperimentale di volta in muratura danneggiato e rinforzato con CFRP**" (Carbon Fiber Reinforced Polymer) realizzata dal dipartimento di Ingegneria Strutturale dell'Università di Ancona.

Di questa prova sono stati forniti i valori deformativi raggiunti dalla struttura, in assenza di CFRP, con un carico concentrato asimmetrico crescente, sino a danneggiamento della stessa. Con questa analisi si vuole osservare l'influenza, in termini deformativi, dell'eventuale resistenza a trazione nonché il comportamento più significativo del materiale, individuando la legge costitutiva che descrive meglio la deformata della struttura.

Il secondo mezzo di confronto è la prova sperimentale eseguita dal Corpo Nazionale dei Vigili del fuoco, VVF, i quali hanno eseguito la "**Prova di resistenza al fuoco su una volta a botte in muratura**" condividendo i diversi valori deformativi raggiunti durante lo sviluppo della simulazione dell'incendio. Con questa comparazione si vuole verificare il grado di approssimazione della procedura di calcolo impiegata all'interno del programma.

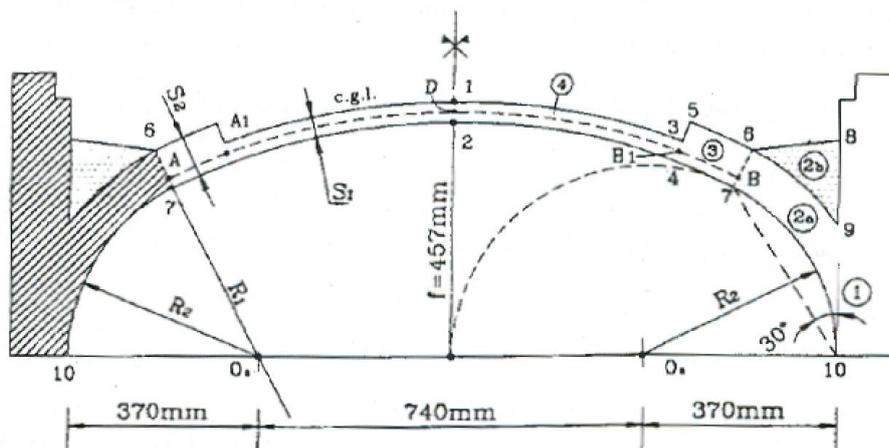
#### 5.1 Arco soggetto a carico crescente – Arco di Capozucca

Come accennato all'interno dell'introduzione del capitolo, il primo termine di paragone è una volta in muratura soggetta a diversi step di carico incrementali di un carico concentrato asimmetrico, in completa assenza di gradienti termici. Secondo quanto riportato dalla relazione tecnica, la struttura è caratterizzata dalla geometria riportata nella seguente figura.

## 5. Confronto con la sperimentazione

**Tab. 1. Dimensioni geometriche del modello di volta**

Luce L (m)	Profondità B (m)	Raggio R <sub>1</sub> (m)	Raggio R <sub>2</sub> (m)	Angolo θ (°)	Spessore S <sub>1</sub> (mm)	Spessore S <sub>2</sub> (mm)	Freccia f (m)
1.48	0.25	1.20	0.37	26	80	40	0.457



**Figura 5.1 Geometria dell'Arco di Capozucca**

Mediante i dati geometrici forniti è stato ricavato lo schema strutturale dell'arco dato e sono state definite le coordinate dei punti che ne definiscono la linea media (z,y).

La struttura è stata caricata asimmetricamente, con azione monotona crescente sino al raggiungimento del meccanismo di danneggiamento, con carico associato di 1.04 kN.

La prova sperimentale adotta un legame costitutivo elastico lineare, per la muratura, e assume le caratteristiche meccaniche di seguito riportate:

- $f_m = 12.15 \text{ N/mm}^2$ ;
- $E_m = 4370 \text{ N/mm}^2$ .

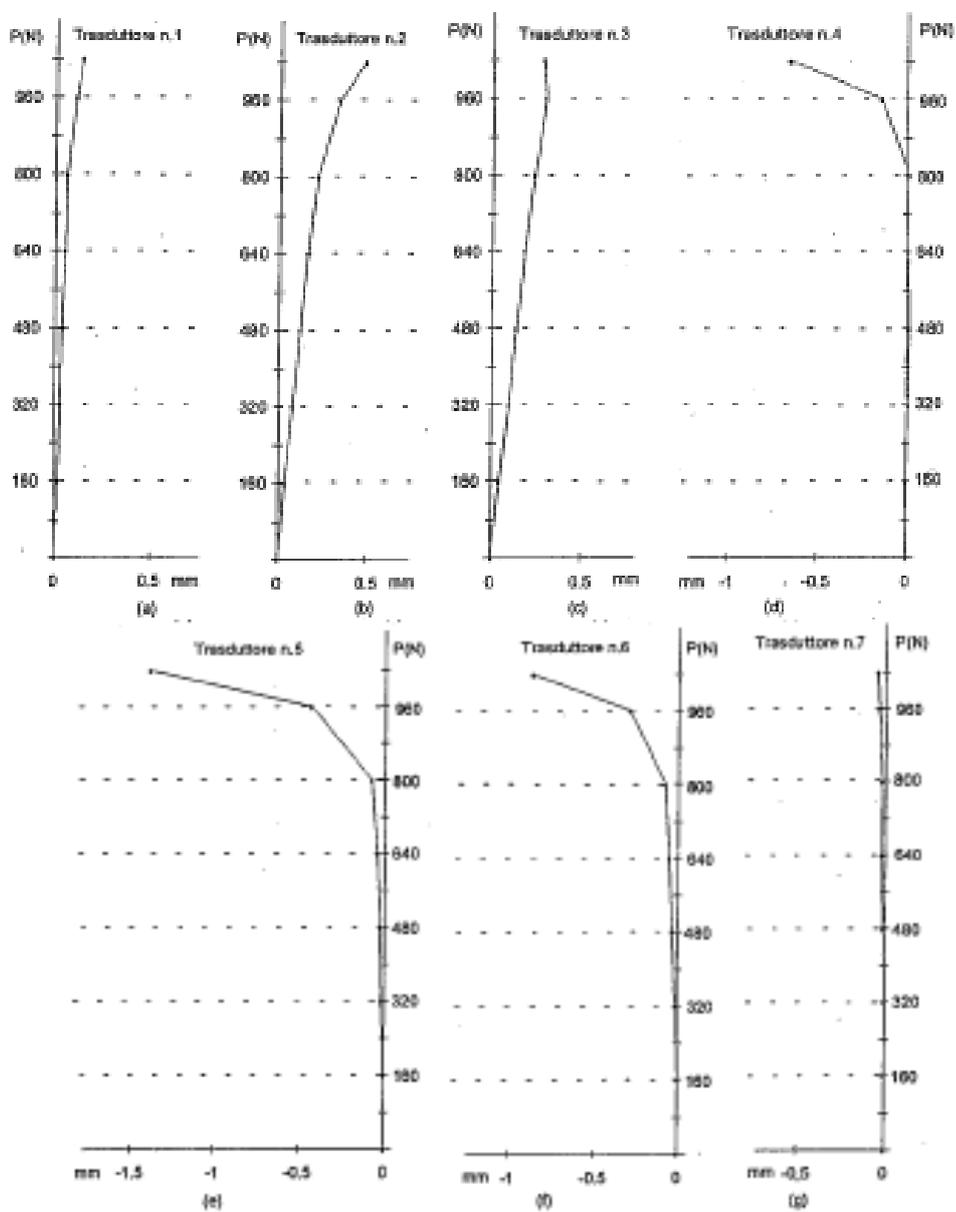
Analizzate le principali caratteristiche della struttura, si procede con la compilazione delle variabili di input. Successivamente verranno elaborate diverse soluzioni con il programma di calcolo, variando, di volta in volta, la legge costitutiva del materiale al fine di osservare quale sia il comportamento del materiale grazie al quale si raggiunge maggiore compatibilità tra i dati calcolati e quelli rilevati durante la sperimentazione.

I valori cui si fa riferimento sono solo ed esclusivamente quelli relativi alle prove di carico della struttura originale, tralasciando i risultati ottenuti mediante applicazione del materiale rinforzante, poiché l'interesse è quello di definire quale sia il comportamento del materiale, quanto meno a livello deformativo, che rappresenti maggiormente la realtà delle strutture in muratura.

Durante la prova sono stati raccolti diversi valori deformativi, in corrispondenza dei sensori collocati sulla struttura. In definitiva

## 5. Confronto con la sperimentazione

sono stati applicati sette trasduttori posti a 160 mm di distanza uno dall'altro.



**Figura 5.2** Diagrammi di Carico-Spostamento

I dati precedentemente riportati sono riassunti nella tabella, riportata qui di seguito, dove vengono esposti i valori deformativi associati a tre carichi significativi e a quello con cui si è raggiunta la creazione del meccanismo.

## 5. Confronto con la sperimentazione

Carico P (kN)	Trasduttore n. 1 (mm)	Trasduttore n. 2 (mm)	Trasduttore n. 3 (mm)	Trasduttore n. 4 (mm)	Trasduttore n. 5 (mm)	Trasduttore n. 6 (mm)	Trasduttore n. 7 (mm)
0	0	0	0	0	0	0	0
0.32	0.028	0.800	0.092	0.005	-0.014	-0.018	-0.006
0.64	0.051	0.163	0.182	0.011	-0.046	-0.054	-0.014
0.96	0.100	0.339	0.301	-0.155	-0.437	-0.290	-0.033
1.04	0.137	0.488	0.278	-0.656	-1.387	-0.870	-0.043

*Figura 5.3 Valori sperimentali degli spostamenti - Arco di Capozucca non rinforzato*

Definiti quindi geometria, carichi e risultati attesi si procede con la compilazione e analisi del programma.

### 5.1.1 Variabili di Input

Vengono ora riportate le tabelle di Input, compilate secondo i dati forniti.

<b>Dati generali dell'arco</b>		
L=	1.173,513	Luce arco (mm)
B=	250	Base dell'arco (mm)
g=	0	Peso specifico riempimento (N/mm <sup>3</sup> )
garco=	0,000015	Peso specifico arco (N/mm <sup>3</sup> )
q=	0	Carico verticale agente (N/mm)
N=	43	Numero di conci dell'arco
<b>Dati della curva di carico</b>		
interarch=	0	Interasse degli archi (mm)
tuttocarico=	1	1=tuttocarico; 0=metà carico
yg=	0	Posizione del baricentro delle sezioni rispetto ad H/2
<b>Dati delle leggi costitutive</b>		
Tipo=	1	1 Lineare elastico traz e comp
		2 Lineare fino a rottura traz. e comp.
		3 Lineare fino rottura solo compressione
		4 Lineare e plastica solo compressione
		5 Lineare e plastica trazione e compressione
		6 Come da EC6 1-2
fy=	12,15	Tensione di rottura a compressione [MPa]
E=	4370	Modulo elastico
fct=	0,486	Resistenza a trazione (MPa)

*Tabella 5.1 Input variabili - Arco di Capozucca (Parte I)*

## 5. Confronto con la sperimentazione

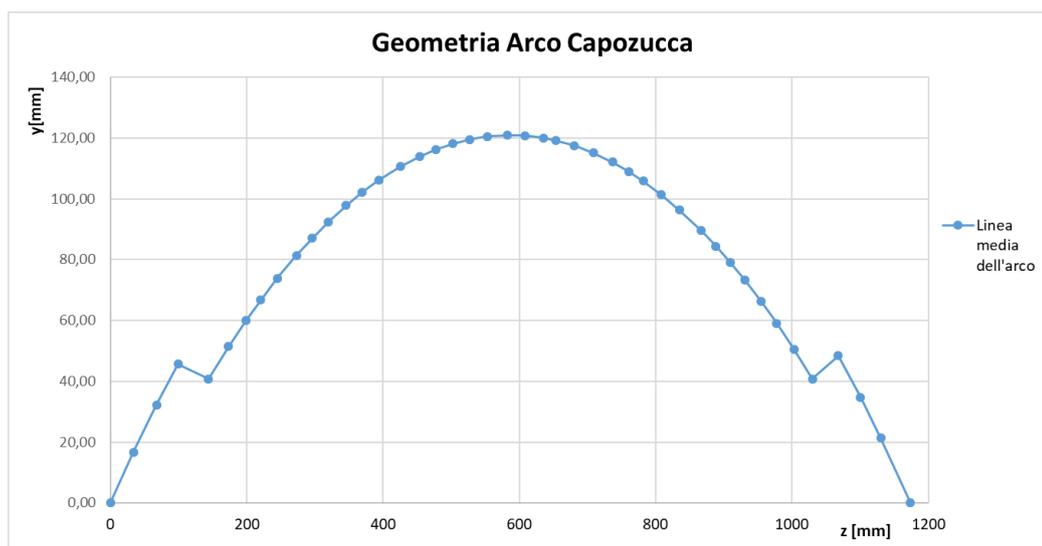
Sono state eseguite diverse valutazioni dello stesso arco, prendendo in considerazione diversi comportamenti della struttura; sono state utilizzate cinque delle sei leggi costitutive disponibili per eseguirne successivamente un confronto.

Poiché la prova viene condotta in assenza di incendio, si evince che l'incremento termico ad ogni step di carico deve essere nullo e quindi tale deve essere anche l'avanzo temporale all'interno dell'analisi (step\_th=0).

Istante di valutazione dell'incendio		
t=	0	Tempo di stima delle sollecitazioni (30-60-90-120-150-180) Inserire tempo istante in cui si vuole fare la valutazione dall'istante in cui si è avviato l'incendio - "0" = condizioni ordinarie
Tipologia di incendio		
Tipo=	6	Iso-834
		Fuoco esterno
		Idrocarburi
		Riscaldamento lento
		RSW
		Prova sperimentale VVF
step_th	0	Incremento della variabile "tempo" ad ogni incremento di carico per raggiungere il tempo di valutazione dell'incendio (non alterare formula)

**Tabella 5.2 Input variabili - Arco di Capozucca (Parte II)**

Poiché l'arco è dotato di due sezioni differenti, la linea media risulta discontinua e l'input delle coordinate dei conci caratterizzanti la struttura è stato necessariamente manuale.



**Figura 5.4 Geometria della linea media dell'arco di Capozucca**

## 5. Confronto con la sperimentazione

Geometria arco	Geometria dei conci			Carichi impliciti		Carichi espliciti
	ascisse dei punti	ordinate dei punti	altezza della sezione	lambda imp	mu imp	concentrati verticali
Num. Conci	Z (mm)	Y(mm)	H(mm)	(1/mm)	(1/mm)	(N)
0	0,00	0,00	80	0	0	0
1	33,74	16,72	80	0	0	0
2	67,60	32,24	80	0	0	0
3	98,98	45,61	80	0	0	0
4	143,76	40,79	40	0	0	0
5	173,15	51,38	40	0	0	0
6	199,09	60,04	40	0	0	0
7	220,48	66,72	40	0	0	0
8	244,79	73,82	40	0	0	0
9	272,79	81,34	40	0	0	0
10	295,83	87,02	40	0	0	0
11	319,16	92,30	40	0	0	0
12	345,87	97,78	40	0	0	0
13	369,56	102,15	40	0	0	0
14	394,39	106,23	40	0	0	320
15	425,09	110,57	40	0	0	0
16	453,12	113,86	40	0	0	0
17	477,44	116,21	40	0	0	0
18	502,36	118,13	40	0	0	0
19	527,27	119,55	40	0	0	0
20	552,76	120,49	40	0	0	0
21	581,68	120,94	40	0	0	0
22	607,93	120,77	40	0	0	0
23	635,50	120,01	40	0	0	0
24	653,51	119,18	40	0	0	0
25	680,44	117,47	40	0	0	0
26	708,09	115,11	40	0	0	0
27	736,31	112,07	40	0	0	0
28	759,94	109,03	40	0	0	0
29	781,47	105,86	40	0	0	0
30	808,32	101,38	40	0	0	0
31	834,82	96,37	40	0	0	0
32	866,60	89,59	40	0	0	0
33	888,39	84,44	40	0	0	0
34	908,99	79,19	40	0	0	0
35	930,36	73,36	40	0	0	0
36	954,65	66,23	40	0	0	0
37	977,52	59,04	40	0	0	0
38	1002,88	50,50	40	0	0	0
39	1029,76	40,79	40	0	0	0
40	1067,57	48,44	80	0	0	0
41	1100,34	34,69	80	0	0	0
42	1129,94	21,33	80	0	0	0
43	1173,51	0,00	80	0	0	0

**Tabella 5.3 Input variabili - Arco di Capozucca (Parte III)**

Il carico esplicito agente sulla struttura, come anticipato precedentemente, è asimmetrico e si colloca nella metà di sinistra della struttura, nello specifico in corrispondenza della sezione 14. Sono previsti tre step carico (NN=3 - Tabella 5.1), dove la percentuale di incremento del carico "factor" è pari a uno. Si evince quindi che verranno esaminate tre prove di carico che coincidono con i valori richiamati nella prova sperimentale, Figura 5.3 , dove:

$$P_{14} = \{320, 640, 960\} N$$

## 5. Confronto con la sperimentazione

### 5.1.2 Analisi arco di Capozucca – arco non rinforzato in assenza di incendio

L'arco precedentemente descritto viene ora analizzato considerando le diverse leggi costitutive:

1. Legame elastico lineare –contributo trazione e compressione;
2. Legame elastico lineare sino a rottura, trazione e compressione;
3. Legame elastico lineare sino a rottura, solo compressione;
4. Legame elastico-plastico sino a rottura, solo compressione;
5. Legame elastico-plastico sino a rottura, trazione e compressione.

#### 5.1.2.1 Comportamento elastico lineare ideale – Compressione e Trazione

Il primo legame costitutivo analizzato prevede l'assunzione di una legge costitutiva ideale, dove non c'è limite resistenziale e le tensioni con regolate dalla seguente equazione:

$$\sigma = E \cdot \varepsilon \quad (5.1)$$

Qui di seguito i tre diagrammi elaborati con questo legame, riportati in serie.

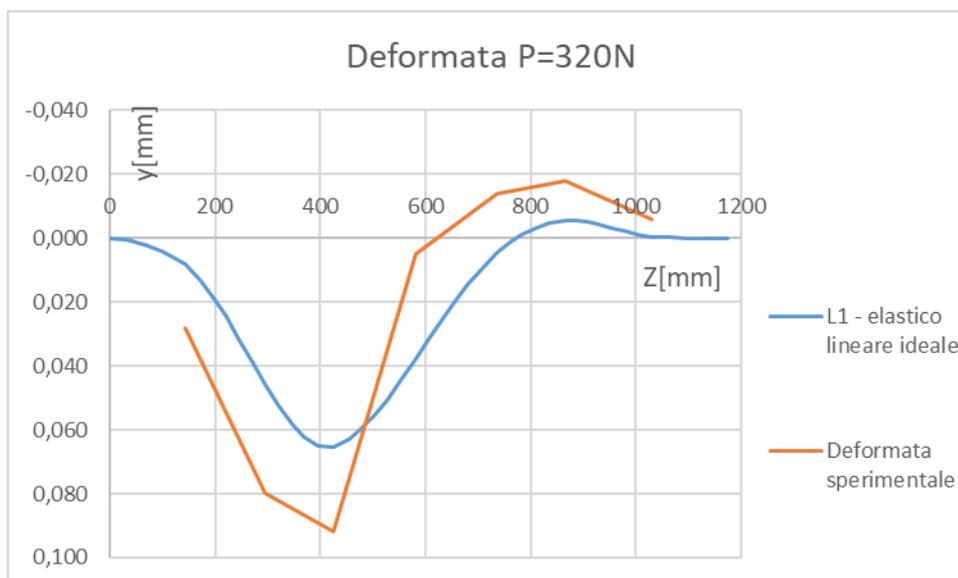
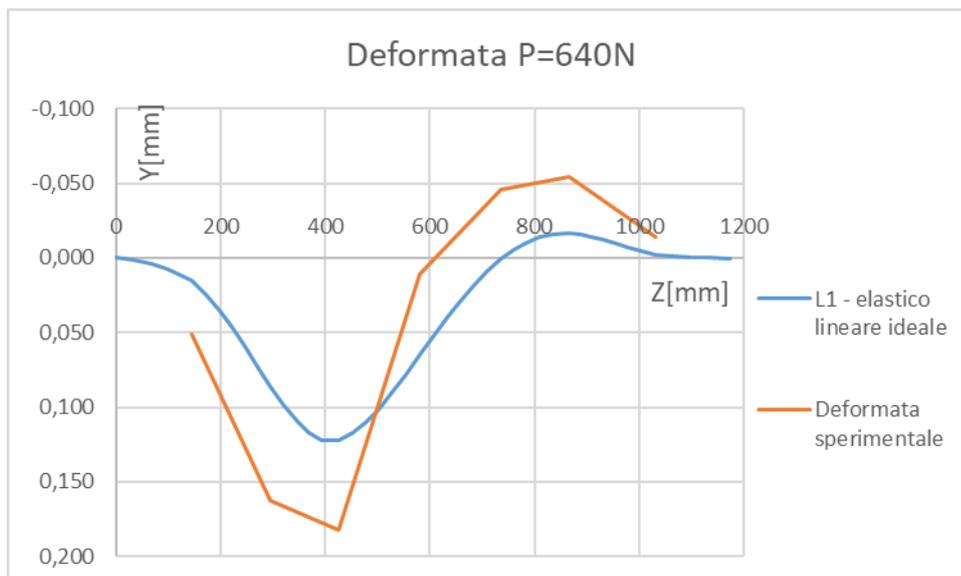
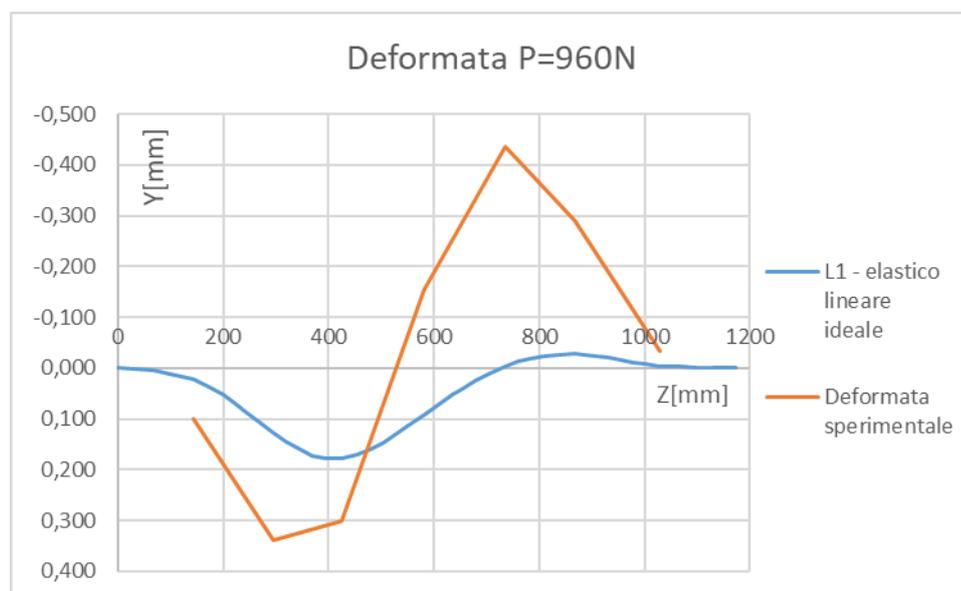


Figura 5.5 Diagramma di comparazione deformata P=320 N - Legge costitutiva 1

## 5. Confronto con la sperimentazione



**Figura 5.6** Diagramma di comparazione deformata P=640 N - Legge costitutiva 1



**Figura 5.7** Diagramma di comparazione deformata P=960 N - Legge costitutiva 1

Mediante l'uso del primo legame il comportamento deformativo della struttura risulta essere dello stesso ordine di grandezza dei valori sperimentali, tuttavia in tutti i casi la deformata è nettamente inferiore a quella rilevata durante la prova. Inoltre, non imponendo alcun limite al valore tensionale raggiunto, iterando le prove di calcolo per carichi superiori a quello massimo consentito, sperimentale, risulterebbe che l'arco è in grado di supportare un'azione superiore a 2 kN.

## 5. Confronto con la sperimentazione

### 5.1.2.2 Comportamento elastico lineare sino a rottura – Compressione e Trazione

Eseguita una prima analisi della struttura, con comportamento ideale del materiale, si prova ora a introdurre un limite di resistenza massima sia a trazione sia a compressione, oltre il quale il materiale è non rispondente.

L'ordine di grandezza della tensione massima a trazione ( $f_{ct}$ ) si assume essere contenuto in un range tra 1 e 5% della massima tensione a compressione ( $f_y$ ). Nel caso in esame sono stati confrontati tre valori di  $f_{ct}$ , in base ai quali si ottiene una differente azione minima necessaria a raggiungere il meccanismo.

Nello specifico sono stati assunti i seguenti valori percentuali, riportati in tabella, con associati i valori di azione  $P(N)$  per cui si ottiene la mancata convergenza dell'elaboratore (ovvero il raggiungimento del meccanismo).

Fct [%]	$f_y$ [N/mm <sup>2</sup> ]	$f_{ct}$ [N/mm <sup>2</sup> ]	$P_{MC}$ [N]
1.0	12	0,12	1020
2.0		0,24	1100÷1150
3.0		0,36	1300÷1350

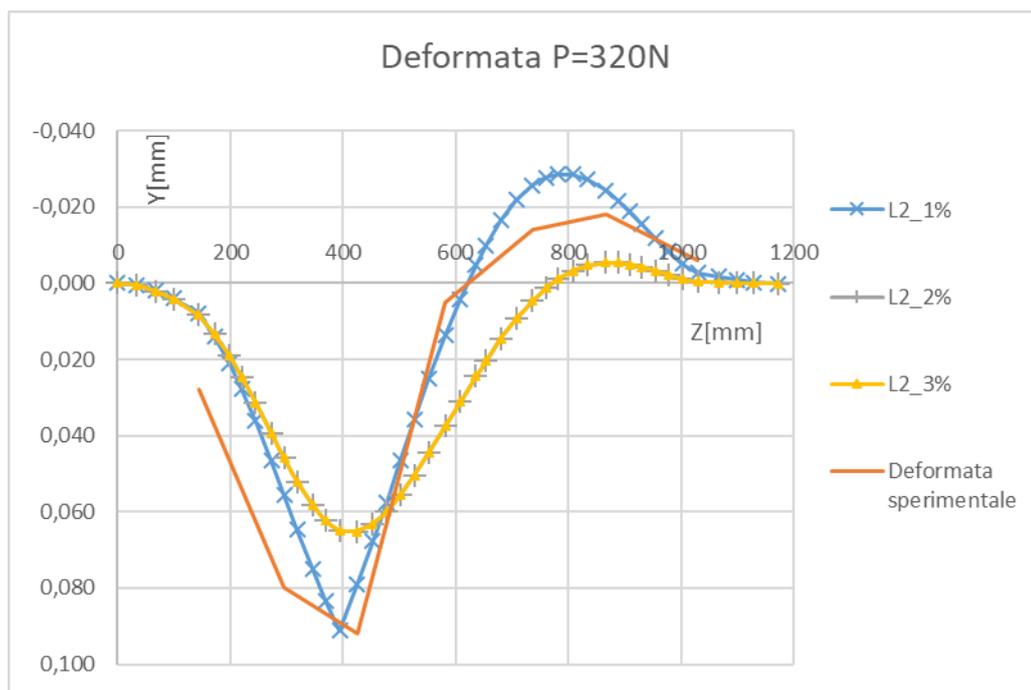
Figura 5.8 Valori di calcolo di  $f_{ct}$  e carico minimo di mancata convergenza

In definitiva il legame costitutivo è regolato dal seguente sistema di equazioni.

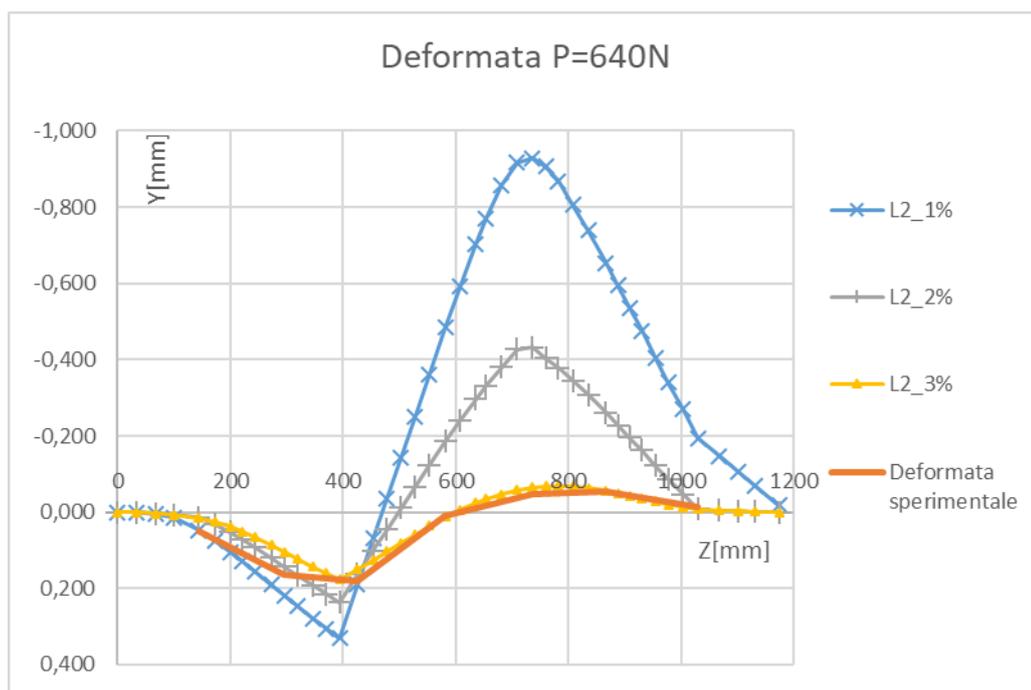
$$\begin{cases} \sigma = E \cdot \varepsilon \\ \sigma > \sigma_{\max}(f_{ct}) \Rightarrow \sigma = 0 \\ \sigma < -\sigma_{\min}(f_y) \Rightarrow \sigma = 0 \end{cases} \quad (5.2)$$

Ponendo nuovamente a confronto i valori sperimentali e quelli calcolati in questa maniera, si ottiene quanto riportato nei seguenti diagrammi riassuntivi.

## 5. Confronto con la sperimentazione

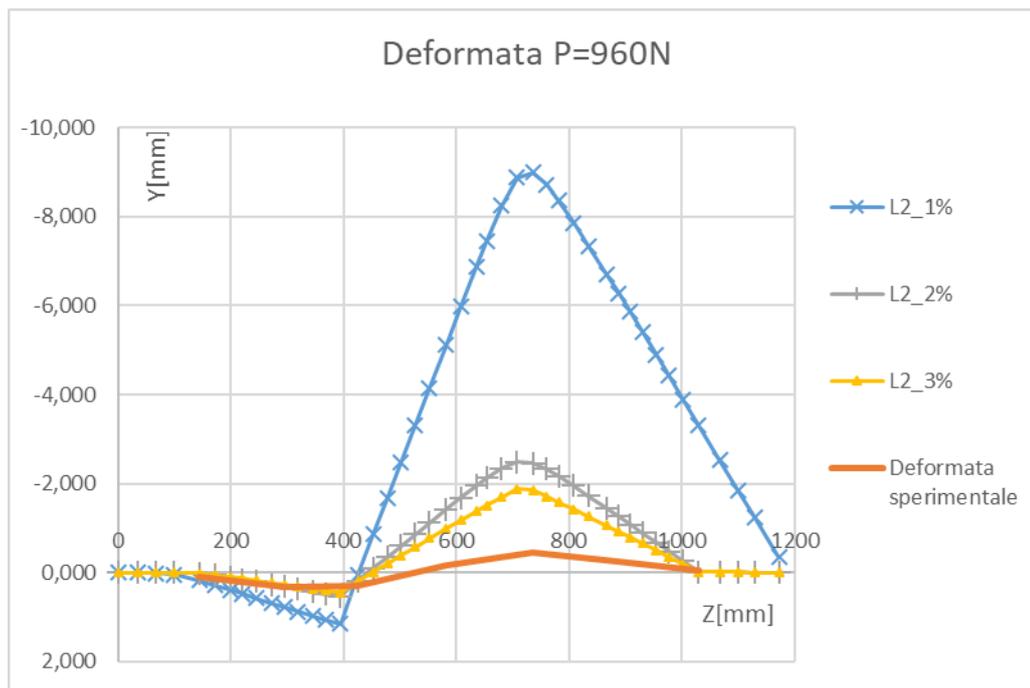


**Figura 5.9** Diagramma di comparazione deformata P=320 N - Legge costitutiva 2



**Figura 5.10** Diagramma di comparazione deformata P=640 N - Legge costitutiva 2

## 5. Confronto con la sperimentazione



*Figura 5.11 Diagramma di comparazione deformata P=960 N - Legge costitutiva 2*

Dai diagrammi precedentemente riportati si denota come il comportamento del materiale, prendendo in considerazione anche una piccolissima capacità a trazione e i limiti tensionali correlati, risulti essere significativamente differente rispetto il comportamento ideale precedentemente analizzato.

Analizzando i diagrammi esposti si evidenziano i diversi comportamenti al variare del carico:

- fct 1% - Comportamento deformativo coerente per bassa entità dell'azione e immediata discordanza già dal secondo step di carico. Nel caso di  $P=960\text{N}$ , la deformata raggiunge un rapporto di circa 1:10, rispetto i valori sperimentali;
- fct 2% - Comportamento deformativo nuovamente coerente per il primo step, mentre l'errore di calcolo generato al secondo e al terzo step sono significativamente contenuti rispetto al caso di fct 1%;
- fct 3% - Deformazione raggiunta in sintonia con i valori sperimentali per i primi due step di carico e errore marginale nel caso di  $P=960\text{ N}$ .

Osservando il diagramma riportato in Figura 5.11, si osserva come la deformata raggiunta nella parte di destra si scosti in maniera accentuata da quanto rilevato. Occorre però osservare che il carico è prossimo al massimo raggiungibile ( $P_{\max}= 1040\text{N}$  secondo prova sperimentale).

## 5. Confronto con la sperimentazione

### 5.1.2.3 Comportamento elastico lineare con resistenza massima a sola compressione

Si analizza ora il legame elastico lineare, con resistenza massima a compressione e privo di contributo a trazione.

$$\begin{cases} \sigma = E \cdot \varepsilon \\ \sigma < -f_y \Rightarrow \sigma = 0 \\ \varepsilon > 0 \Rightarrow \sigma = 0 \end{cases} \quad (5.3)$$

Vengono ora riportati i valori di deformata della struttura ottenuti per i tre carichi interessati.

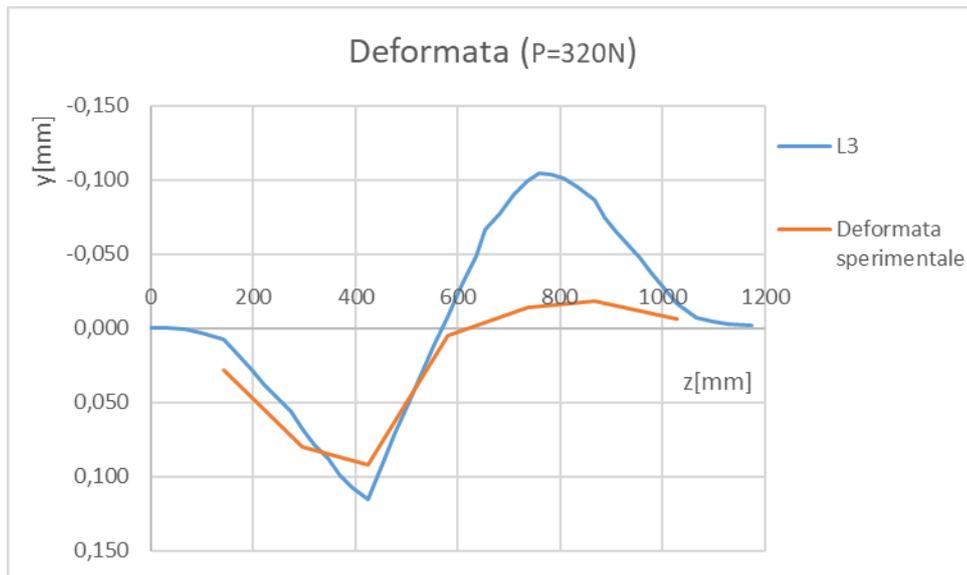


Figura 5.12 Diagramma di comparazione deformata P=320N - Legge costitutiva 3

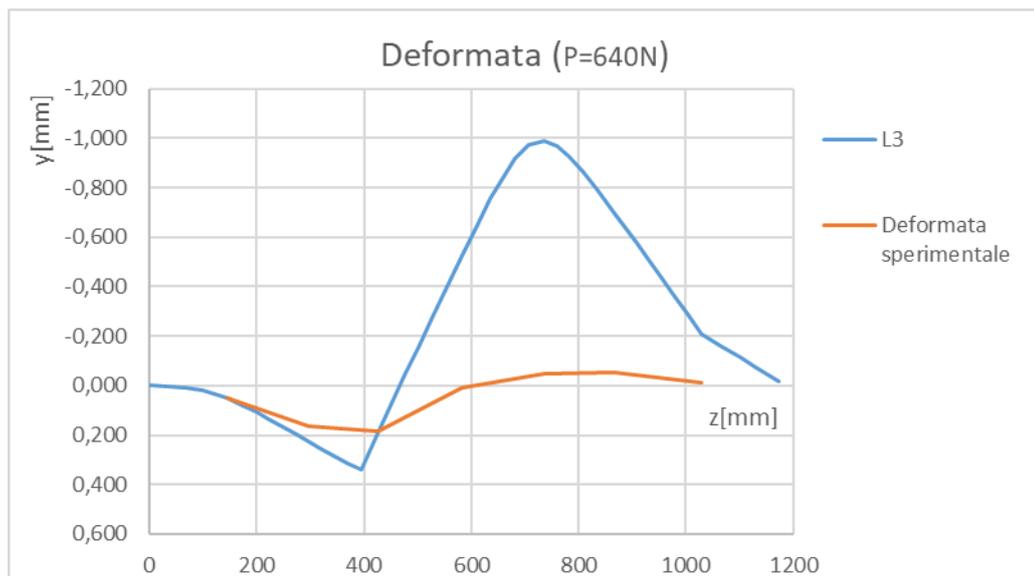
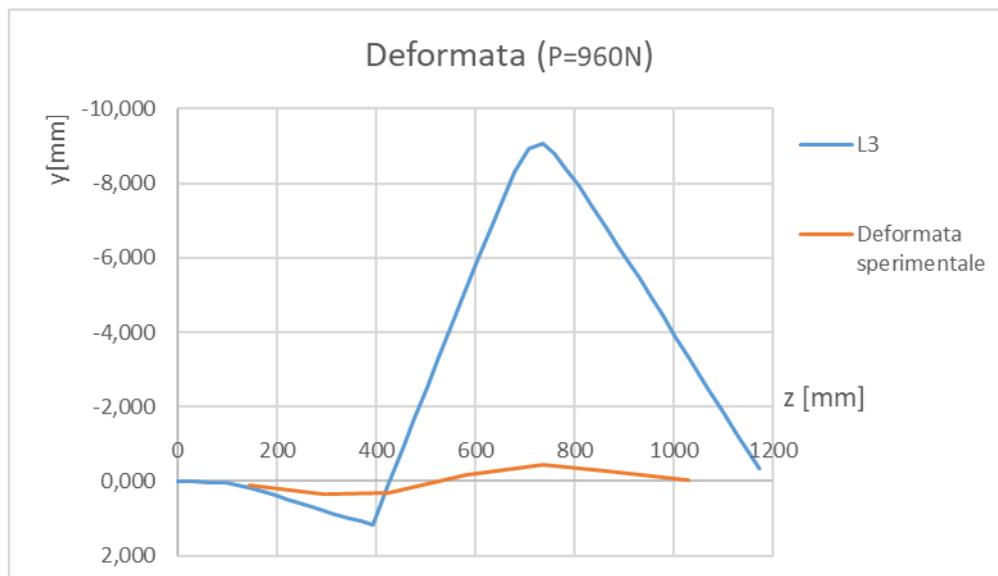


Figura 5.13 Diagramma di comparazione deformata P=640N - Legge costitutiva 3

## 5. Confronto con la sperimentazione



**Figura 5.14** Diagramma di comparazione deformata  $P=960N$  - Legge costitutiva 3

Come si evince nei diagrammi precedentemente esposti, la deformata risulta avere andamento quanto meno coerente con quanto rilevato sperimentalmente solo per entità del carico basse (Figura 5.15).

Si evidenzia già al primo incremento del carico, ovvero durante il secondo ciclo iterativo ( $NN=2$ ,  $P=640N$ ), come i valori sperimentali e quelli calcolati siano significativamente discordanti. L'analisi si conclude in totale contraddizione per il carico  $P=960N$ , per cui si osserva un rapporto di circa 1:10 tra la deformata sperimentale e quella di calcolo.

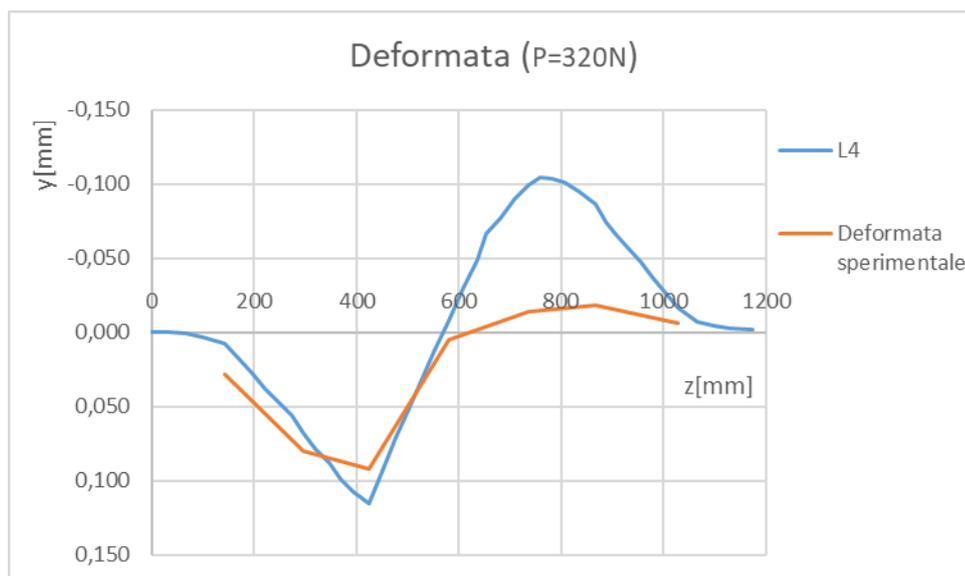
### **5.1.2.4 Legge elasto-plastica con resistenza massima a sola compressione**

Si procede ora con l'analisi della struttura con comportamento elasto-plastico. Come per il legame 3, in questo caso non si ammette resistenza a trazione e in seguito al raggiungimento di un valore limite, la curva  $\sigma-\varepsilon$  assume andamento parallelo all'asse delle deformazioni.

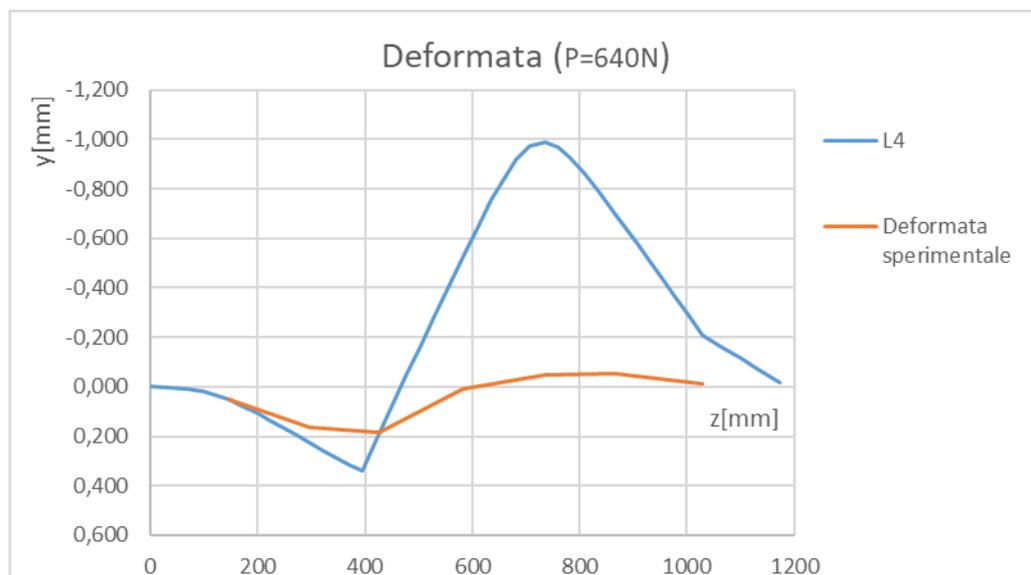
$$\begin{cases} \sigma = E \cdot \varepsilon \\ \sigma < -f_y \Rightarrow \sigma = -f_y \\ \varepsilon > 0 \Rightarrow \sigma = 0 \end{cases} \quad (5.4)$$

Analogamente ai casi precedenti si riportano i diagrammi così realizzati.

## 5. Confronto con la sperimentazione



**Figura 5.15** Diagramma di comparazione deformata P=320N - Legge costitutiva 4



**Figura 5.16** Diagramma di comparazione deformata P=640N - Legge costitutiva 4

## 5. Confronto con la sperimentazione

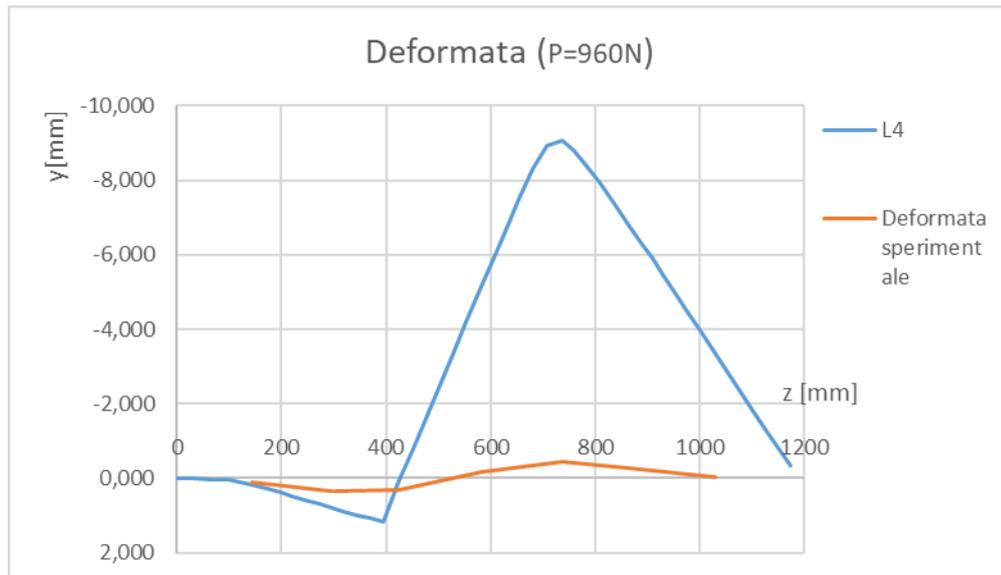


Figura 5.17 Diagramma di comparazione deformata P=960N - Legge costitutiva 4

Si osserva come, rispetto al caso di legge elastica lineare a sola compressione, la deformata abbia lo stesso grado di approssimazione in tutte e tre le prove di carico, indipendentemente dall'imposizione di un limite a rottura.

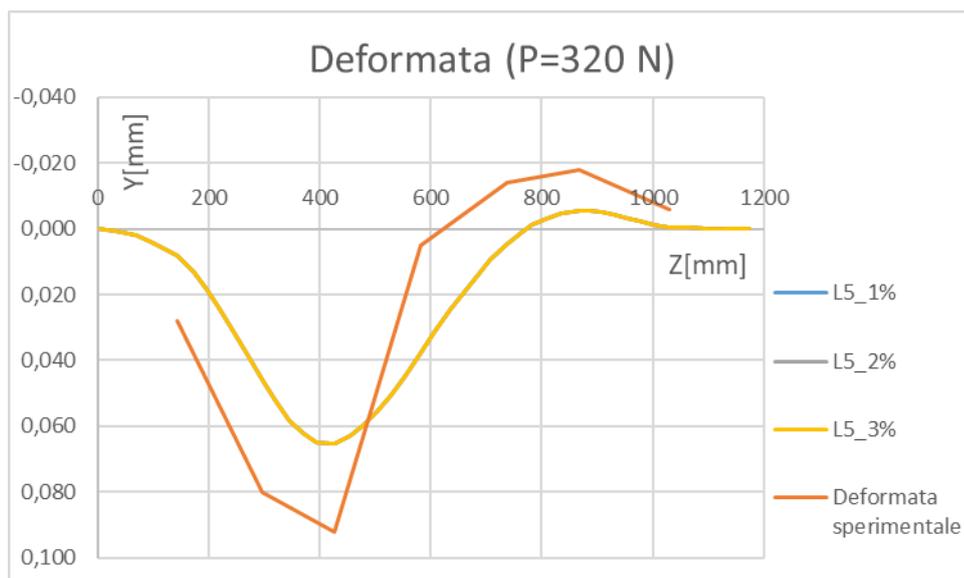
### 5.1.2.5 Legge elasto-plastica con resistenza massima a compressione e trazione

L'ultima legge presa in considerazione è quella che ammette due rette bilatere sia con tensioni negative sia con tensioni positive, come descritta dal seguente sistema.

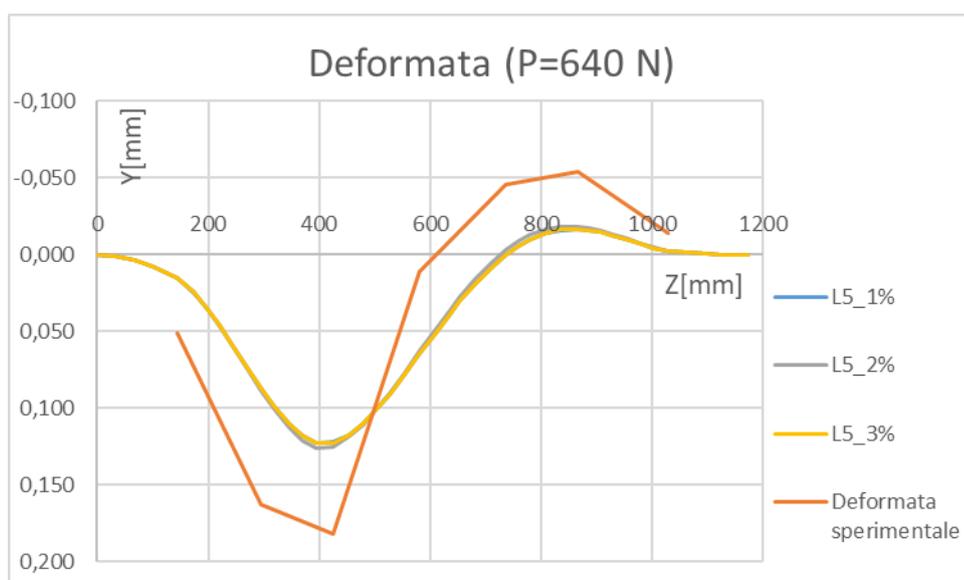
$$\begin{cases} \sigma = E \cdot \varepsilon \\ \sigma < -f_y \Rightarrow \sigma = -f_y \\ \sigma > f_{ct} \Rightarrow \sigma = f_{ct} \end{cases} \quad (5.5)$$

Anche in questo caso, come per il legame costitutivo 2, il valore di  $f_{ct}$  si assume pari a 1,2 e 3% di  $f_y$ , dove  $f_y$  è il valore fornito dalla prova sperimentale ( $f_y=12.00 \text{ N/mm}^2$ ). Si riportano ora i diagrammi così realizzati.

## 5. Confronto con la sperimentazione

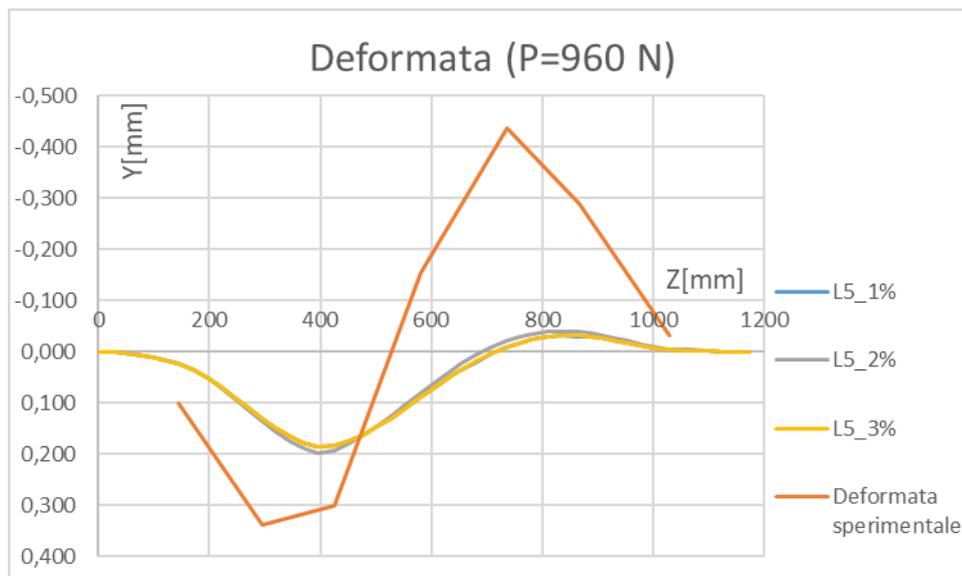


**Figura 5.18** Diagramma di comparazione deformata P=320N - Legge costitutiva 5



**Figura 5.19** Diagramma di comparazione deformata P=640N - Legge costitutiva 5

## 5. Confronto con la sperimentazione



**Figura 5.20** Diagramma di comparazione deformata  $P=960N$  - Legge costitutiva 5

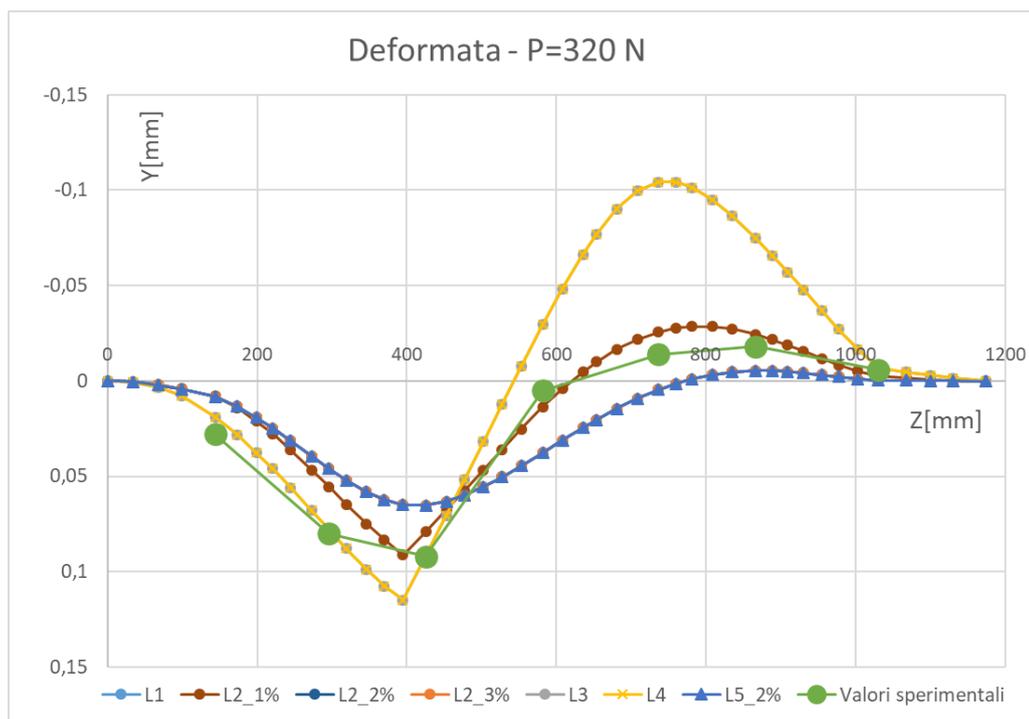
A contrario di quanto manifestatosi con applicazione della seconda legge costitutiva, imponendo un legame di tipo elasto-plastico si può osservare come, al variare del valore percentuale di  $f_{ct}$ , le variazioni deformative raggiunte siano tra loro poco significative. Tale proprietà viene riscontrata in tutte le prove di carico, da 320 a 960N.

### 5.1.3 Diagrammi riassuntivi – Legami costitutivi a confronto

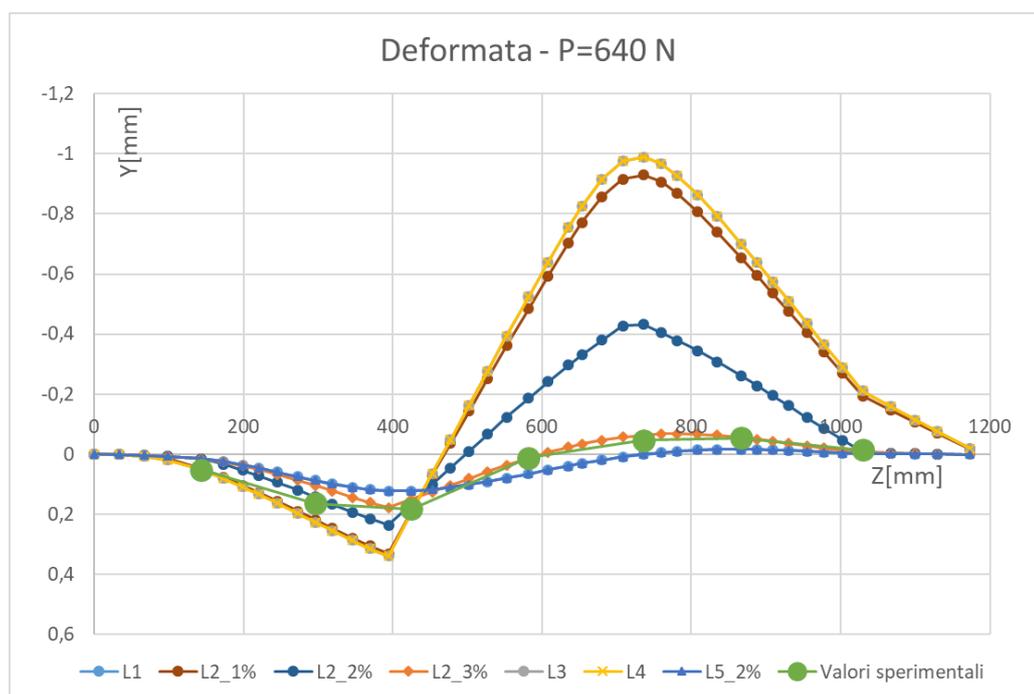
Analizzato l'arco di Capozucca con cinque possibili legami costitutivi, occorre ora sovrapporre i risultati ottenuti per analizzarli in maniera complessiva. Vengono riportati qui di seguito i tre diagrammi riassuntivi che sovrappongono le diverse conformazioni di deformate raggiunte, nelle tre rispettive condizioni di carico.

In ogni step di carico, per una rappresentazione più chiara, si evidenzia, nel caso della legge L5, la sola curva con  $f_{ct}=2\%f_y$ , poiché le altre due sono pressoché uguali alla precedente.

## 5. Confronto con la sperimentazione



**Figura 5.21** Diagramma deformato in sovrapposizione - P=320 N



**Figura 5.22** Diagramma deformato in sovrapposizione - P=640 N

## 5. Confronto con la sperimentazione

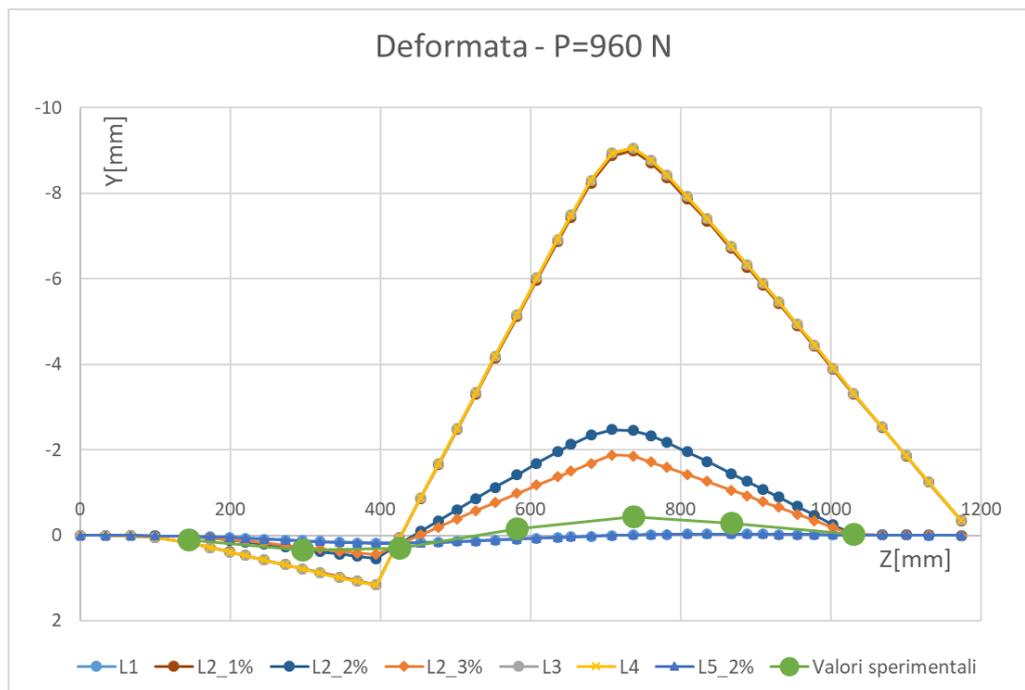


Figura 5.23 Diagramma deformato in sovrapposizione - P=960 N

In base a quanto mostrato nei diagrammi precedenti, si possono effettuare le seguenti considerazioni.

### Osservazione 1

Assumere un legame costitutivo privo di contributi a trazione (L3 e L4), indipendentemente dal fatto che il legame sia elastico o elasto-plastico, comporta una stima della deformata di almeno un ordine di grandezza superiore a quello reale.

### Osservazione 2

Con l'assunzione di un legame costitutivo che ammetta contributo a trazione, ponendo la resistenza a trazione ( $f_{ct}$ ) pari al 3% di quella a compressione ( $f_y$ ), sono stati raggiunti i migliori risultati in termini di comparazione deformativa. Nel caso specifico di prova di carico intermedia c'è stato un riscontro pressoché totale tra i valori calcolati e quelli sperimentali.

### Osservazione 3

Osservando quanto riportato in Figura 5.8 e nel rispetto di quanto dichiarato all'interno della prova sperimentale di Capozucca, ovvero che il carico minimo per la formazione del meccanismo risulti essere pari a 1.04 kN, si deve riscontrare un'eccessiva performance nel caso di  $f_{ct}=3\%f_y$ , raggiungendo un carico minimo pari a circa 1.3 kN.

Occorre pertanto prendere in considerazione il caso precedente,  $f_{ct}=2\%f_y$ , meno rappresentativo dal punto di vista deformativo, ma maggiormente conforme rispetto la formazione del meccanismo all'interno della struttura. In questo caso infatti, la

## 5. Confronto con la sperimentazione

deformazione così calcolata, rispetto al caso maggiormente performante, è tuttavia prossima, mentre si riconosce un notevole distacco in caso di analisi a sola resistenza a compressione.

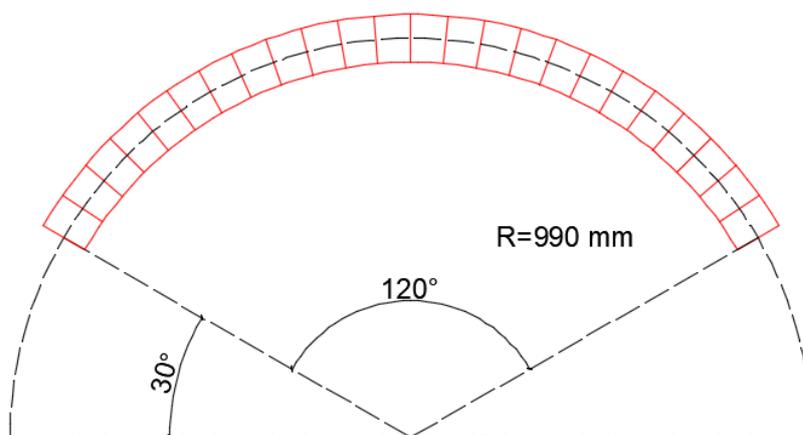
## 5. Confronto con la sperimentazione

### 5.2 Arco soggetto ad elevati gradienti termici - Arco dei VVF

Per prima cosa è stato necessario ricavare quanti più dati possibili dalla relazione tecnica fornita; considerata la complessità del problema, il numero delle variabili che subentrano è significativamente maggiore di quelle prese in considerazione nel confronto con l'arco di Capozucca.

Per tutti i parametri non indicati all'interno di tale prova sono stati immessi valori ordinari intermedi, forniti in letteratura.

Sono quindi stati definiti i vincoli geometrici, quali il raggio del filo medio dell'arco, l'angolo di apertura della volta e sua estensione, grazie ai quali essa è stata discretizzata in 128 conci che ripercorrono fedelmente l'andamento della stessa, ricorrendo alla routine Input\_geom (definita nel paragrafo 3.3.2).

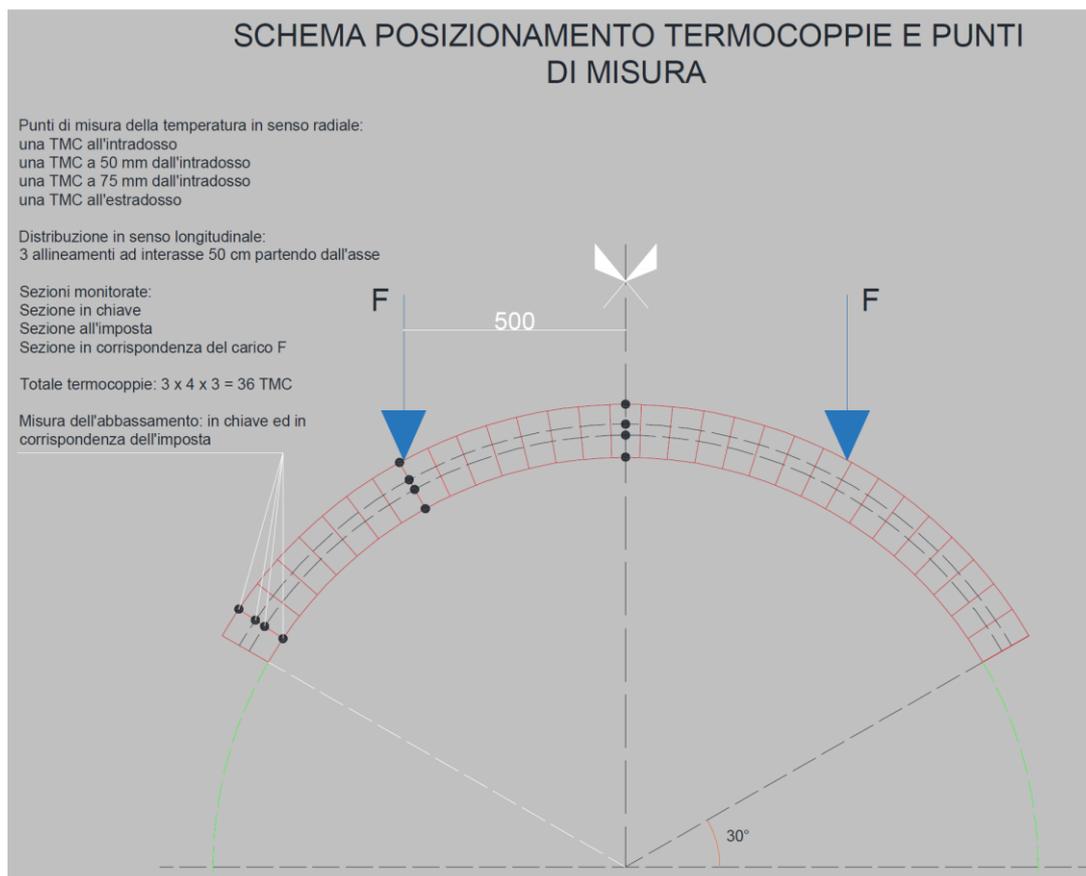


*Figura 5.24 Misure geometriche arco muratura VVF*

Sono state ricavate la posizione ed entità dei due carichi concentrati applicati alla struttura, di seguito associate alle rispettive sezioni 32 e 96, nelle tabelle di Input. La posizione del carico è fornita all'interno dello schema di posizionamento delle termocoppie, di cui viene riportata la figura a seguire, dove si evidenzia una distanza simmetrica di circa 50 cm dal centro.

L'entità del carico è definita a pagina 10 di suddetta relazione e viene posta pari a 9.2 kN ovvero 9200 N (secondo unità di misura richieste in Input).

## 5. Confronto con la sperimentazione



**Figura 5.25 Distribuzione delle termocoppie e dei carichi applicati sulla volta**

Le caratteristiche meccaniche del materiale costituente la volta sono state ricavate mediante tre prove a compressione semplice, su tre campioni di muratura. La relazione afferma:

*"Il giorno 15/6/2015, a distanza di più 28 giorni dall'esecuzione di tre provini di muratura (4 maggio 2015), si sono effettuate tre prove di compressione semplice sui campioni finalizzate alla verifica della resistenza a compressione della muratura stimata in  $10,4 \text{ N/mm}^2$ ."*

Ai fini dei calcoli, nel rispetto di quanto richiesto dal legame costitutivo adottato secondo EC6, è stato imposto il valore minimo di resistenza meccanica all'interno del range 12-20  $\text{N/mm}^2$ .

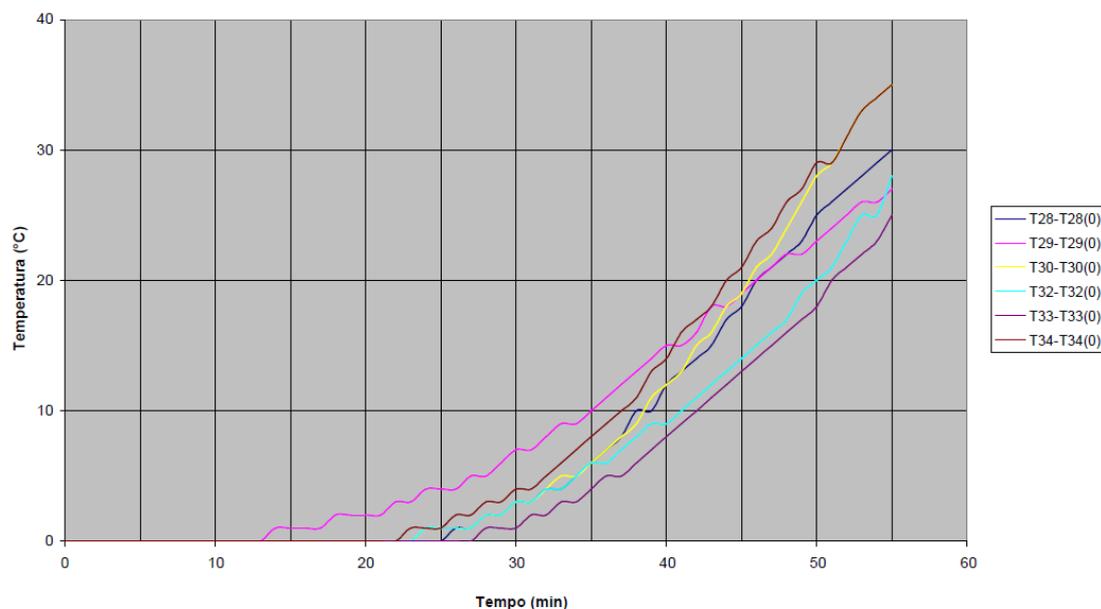
## 5. Confronto con la sperimentazione



*Figura 5.26 Prova a compressione del campione n°1*

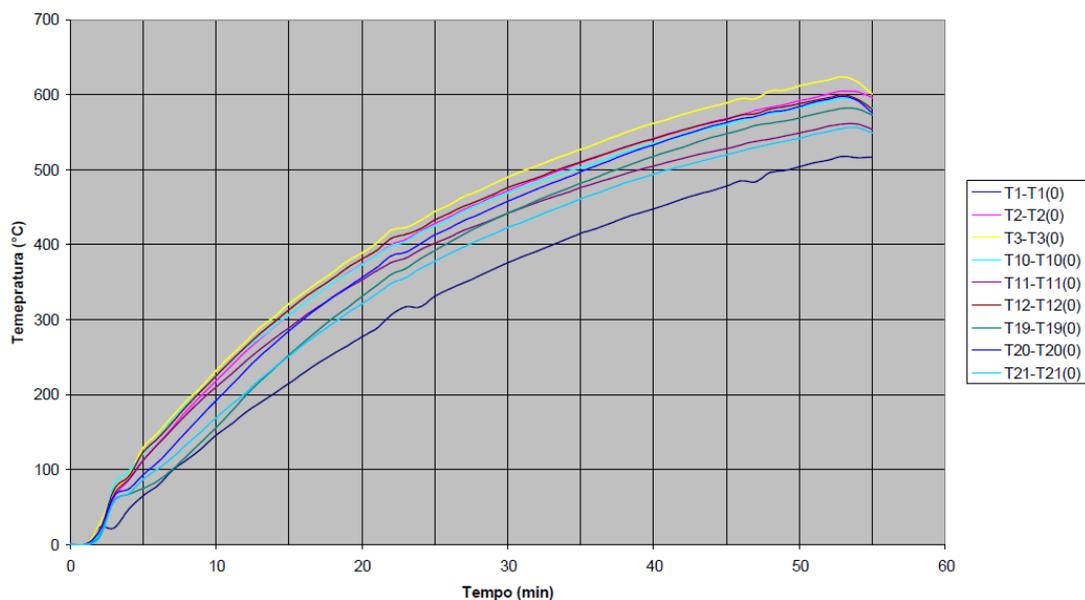
In definitiva sono stati estratti ed elaborati i profili delle temperature raggiunte sulle due superfici di intradosso e estradosso, durante il riscaldamento della volta, grazie ai quali si può realizzare la mappa termica dei punti all'interno della volta stessa per l'intera durata della prova.

Si riportano a seguire i diagrammi che mappano la temperatura nei punti di posizionamento delle termocoppie, contenuti all'interno della relazione, impiegati per la definizione delle curve di temperatura impiegate all'interno del calcolo numerico.



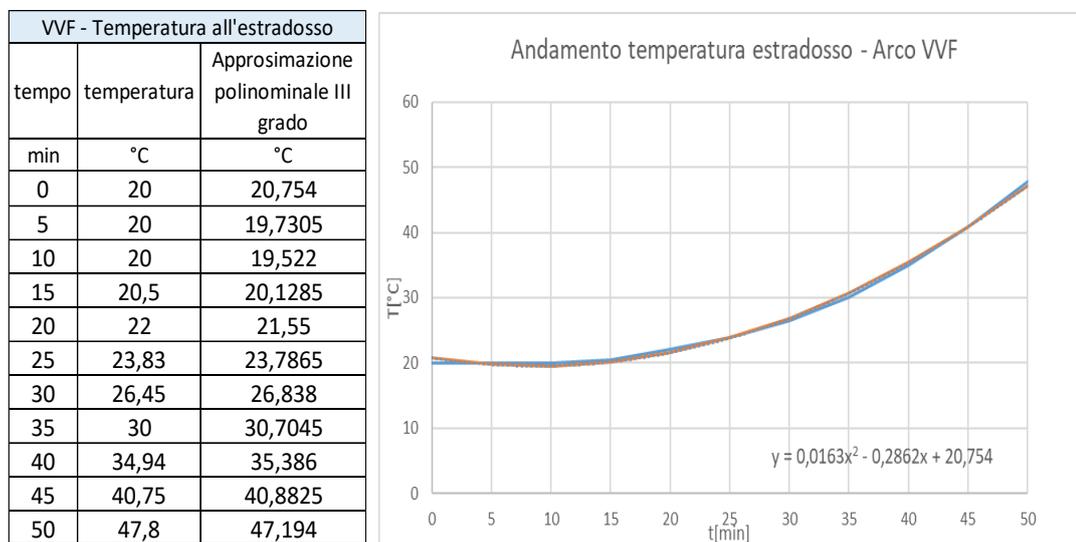
*Figura 5.27 Incremento delle temperature sulla faccia non esposta*

## 5. Confronto con la sperimentazione



**Figura 5.28** Andamento della temperatura sulla superficie di intradosso (esposta al calore)

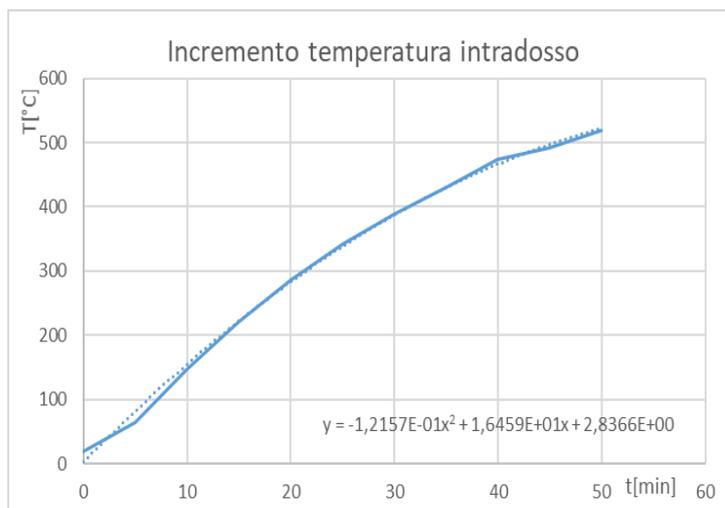
Grazie ai precedenti due grafici, prendendo in considerazione le termocoppie poste sulla freccia ( $T_1-T_{1(0)}$ ), sono state definite le due funzioni che regolano l'andamento della temperatura, applicata sull'intero modello della volta.



**Figura 5.29** Profilo temperatura estradosso arco

## 5. Confronto con la sperimentazione

VVF - Temperatura all'introdosso		
tempo	temperatura	Approssimazione polinomiale III grado
min	°C	
0	20,00	2,84
5	64,20	82,09
10	147,40	155,27
15	221,24	222,37
20	286,80	283,39
25	343,00	338,33
30	388,80	387,19
35	430,00	429,98
40	474,36	466,68
45	491,62	497,31
50	519,80	521,86



**Figura 5.30 Profilo temperatura intradosso arco**

*Osservazioni.* Sono state prese in considerazione le termocoppie centrali poiché il confronto della deformata verrà eseguito in prossimità della freccia. Un calcolo maggiormente accurato prevedrebbe l'integrazione di una funzione che regoli l'andamento delle temperature sulle superfici esterne, in funzione dell'altezza dei punti analizzati.

### 5.2.1 Variabili di Input

A seguire vengono riportate le tabelle complessive delle variabili di Input.

## 5. Confronto con la sperimentazione

Dati generali dell'arco		
L=	1.714,730	Luca arco (mm)
B=	2000	Base dell'arco (mm)
g=	0	Peso specifico riempimento (N/mm <sup>3</sup> )
garco=	0,000018	Peso specifico arco (N/mm <sup>3</sup> )
q=	0	Carico verticale agente (N/mm)
N=	128	Numero di conci dell'arco
Dati della curva di carico		
interarch=	0	Interasse degli archi (mm)
tuttocarico=	1	1=tuttocarico; 0=metà carico
yg=	0	Posizione del baricentro delle sezioni rispetto ad H/2
Dati delle leggi costitutive		
Tipo=	1	1 Lineare elastico traz e comp
		2 Lineare fino a rottura traz. e comp.
		3 Lineare fino rottura solo compressione
		4 Lineare e plastica solo compressione
		5 Lineare e plastica trazione e compressione
		6 Come da EC6 1-2 - degrado termico
fy=	12	Tensione di rottura a compressione [MPa]
E=	6720	Modulo elastico
fct=	1,2	Resistenza a trazione (MPa)
Istante di valutazione dell'incendio		
t=	52	Tempo di stima delle sollecitazioni (30-60-90-120-150-180) Inserire tempo istante in cui si vuole fare la valutazione dall'istante in cui si è avviato l'incendio - "0" = condizioni ordinarie
Tipologia di incendio		
Tipo=	6	Iso 834
		Fuoco esterno-
		Idrocarburi
		Riscaldamento lento-
		RSW
		Prova sperimentale VVF
fc_max	12	Tensione di rottura a compressione massima _ stimato a 20° per analisi n presenza di incendio[MPa]
Caratteristiche termiche materiale (matton+malta)		
λ	0,84	Conducibilità termica [W/mK]
ρ	1200	Densità volumica [kg/mm <sup>3</sup> ]
c	564	Calore specifico [J/kgK]
Geometria arco muratura (valido solo se arco di circonferenza)		
R	990	Raggio filo medio della sezione
α	120	Angolo complessivo arco
α0	30	Angolo di inizio arco
H	120	Spessore sezione (costante)

**Figura 5.31 Variabili di Input – Arco VVF - Parte I**

## 5. Confronto con la sperimentazione

In definitiva vengono generate le variabili di input geometriche, caratterizzanti le sezioni analizzate all'interno dell'arco, e vengono assegnati i carichi concentrati agenti sulla struttura.

Geometria arco	Geometria dei conci			Carichi impliciti		Carichi espliciti
	ascisse dei punti	ordinate dei punti	altezza della sezione	lambda imp	mu imp	concentrati verticali
Num. Conci	Z (mm)	Y(mm)	H(mm)	(1/mm)	(1/mm)	(N)
0	0	0	120	0	0	0
1	8,213825846	13,96171675	120	0	0	0
2	16,65499004	27,78717214	120	0	0	0
3	25,32123266	41,47266477	120	0	0	0
4	34,21023357	55,01453069	120	0	0	0
5	43,31961295	68,40914442	120	0	0	0
6	52,646932	81,6529199	120	0	0	0
7	62,18969358	94,74231145	120	0	0	0
8	71,94534286	107,6738147	120	0	0	0
9	81,91126801	120,4439676	120	0	0	0
10	92,08480092	133,0493513	120	0	0	0
11	102,4632179	145,486591	120	0	0	0
12	113,0437403	157,7523569	120	0	0	0
13	123,8235356	169,8433653	120	0	0	0
14	134,7997178	181,756379	120	0	0	0
15	145,9693481	193,4882087	120	0	0	0
16	157,3294364	205,0357134	120	0	0	0
17	168,8769411	216,3958016	120	0	0	0
18	180,6087707	227,565432	120	0	0	0
19	192,5217844	238,5416141	120	0	0	0
20	204,6127928	249,3214094	120	0	0	0
21	216,8785587	259,9019319	120	0	0	0
22	229,3157984	270,2803488	120	0	0	0
23	241,9211821	280,4538817	120	0	0	0
24	254,691335	290,4198069	120	0	0	0
25	267,6228383	300,1754562	120	0	0	0
26	280,7122298	309,7182177	120	0	0	0
27	293,9560053	319,0455368	120	0	0	0
28	307,3506191	328,1549162	120	0	0	0
29	320,892485	337,0439171	120	0	0	0
30	334,5779776	345,7101597	120	0	0	0
31	348,403433	354,1513239	120	0	0	0
32	362,3651497	362,3651497	120	0	0	9200
33	376,45939	370,3494382	120	0	0	0
34	390,6823803	378,1020517	120	0	0	0
35	405,0303129	385,6209147	120	0	0	0
36	419,4993464	392,9040141	120	0	0	0
37	434,0856073	399,9494002	120	0	0	0
38	448,7851902	406,7551867	120	0	0	0
39	463,59416	413,3195515	120	0	0	0
40	478,5085517	419,6407372	120	0	0	0
41	493,5243725	425,7170514	120	0	0	0
42	508,6376023	431,5468675	120	0	0	0
43	523,8441949	437,1286245	120	0	0	0
44	539,1400791	442,4608282	120	0	0	0
45	554,5211599	447,5420509	120	0	0	0
46	569,9833193	452,3709324	120	0	0	0
47	585,5224177	456,9461797	120	0	0	0
48	601,1342951	461,266568	120	0	0	0
49	616,8147716	465,3309407	120	0	0	0
50	632,5596493	469,1382095	120	0	0	0
51	648,3647129	472,6873552	120	0	0	0
52	664,225731	475,9774276	120	0	0	0
53	680,1384571	479,0075459	120	0	0	0
54	696,0986311	481,7768988	120	0	0	0
55	712,10198	484,2847449	120	0	0	0
56	728,1442194	486,5304128	120	0	0	0
57	744,2210544	488,5133012	120	0	0	0
58	760,3281808	490,2328794	120	0	0	0
59	776,4612864	491,6886869	120	0	0	0
60	792,6160518	492,880334	120	0	0	0
61	808,7881522	493,8075016	120	0	0	0
62	824,9732578	494,4699416	120	0	0	0
63	841,1670354	494,8674765	120	0	0	0
64	857,3651497	495	120	0	0	0

Figura 5.32 Input Coordinate - Arco VVF - Parte II

## 5. Confronto con la sperimentazione

Geometria arco	Geometria dei concii			Carichi impliciti		Carichi espliciti
	ascisse dei punti Z (mm)	ordinate dei punti Y (mm)	altezza della sezione H (mm)	lambda imp (1/mm)	mu imp (1/mm)	concentrati verticali (N)
65	873,5632641	494,8674765	120	0	0	0
66	889,7570417	494,4699416	120	0	0	0
67	905,9421473	493,8075016	120	0	0	0
68	922,1142477	492,8803334	120	0	0	0
69	938,2690131	491,6886869	120	0	0	0
70	954,4021187	490,2328794	120	0	0	0
71	970,5092451	488,5133012	120	0	0	0
72	986,58608	486,5304128	120	0	0	0
73	1002,628319	484,2847449	120	0	0	0
74	1018,631668	481,7768988	120	0	0	0
75	1034,591842	479,0075459	120	0	0	0
76	1050,504569	475,9774276	120	0	0	0
77	1066,365587	472,6873552	120	0	0	0
78	1082,17065	469,1382095	120	0	0	0
79	1097,915528	465,3309407	120	0	0	0
80	1113,596004	461,266568	120	0	0	0
81	1129,207882	456,9461797	120	0	0	0
82	1144,74698	452,3709324	120	0	0	0
83	1160,20914	447,5420509	120	0	0	0
84	1175,59022	442,4608282	120	0	0	0
85	1190,886105	437,1286245	120	0	0	0
86	1206,092697	431,5468675	120	0	0	0
87	1221,205927	425,7170514	120	0	0	0
88	1236,221748	419,6407372	120	0	0	0
89	1251,13614	413,3195515	120	0	0	0
90	1265,945109	406,7551867	120	0	0	0
91	1280,644692	399,9494002	120	0	0	0
92	1295,230953	392,9040141	120	0	0	0
93	1309,699987	385,6209147	120	0	0	0
94	1324,047919	378,1020517	120	0	0	0
95	1338,27091	370,3494382	120	0	0	0
96	1352,36515	362,3651497	120	0	0	9200
97	1366,326866	354,1513239	120	0	0	0
98	1380,152322	345,7101597	120	0	0	0
99	1393,837815	337,0439171	120	0	0	0
100	1407,37968	328,1549162	120	0	0	0
101	1420,774294	319,0455368	120	0	0	0
102	1434,01807	309,7182177	120	0	0	0
103	1447,107461	300,1754562	120	0	0	0
104	1460,038964	290,4198069	120	0	0	0
105	1472,809117	280,4538817	120	0	0	0
106	1485,414501	270,2803488	120	0	0	0
107	1497,851741	259,9019319	120	0	0	0
108	1510,117507	249,3214094	120	0	0	0
109	1522,208515	238,5416141	120	0	0	0
110	1534,121529	227,565432	120	0	0	0
111	1545,853358	216,3958016	120	0	0	0
112	1557,400863	205,0357134	120	0	0	0
113	1568,760951	193,4882087	120	0	0	0
114	1579,930582	181,756379	120	0	0	0
115	1590,906764	169,8433653	120	0	0	0
116	1601,686559	157,7523569	120	0	0	0
117	1612,267082	145,486591	120	0	0	0
118	1622,645499	133,0493513	120	0	0	0
119	1632,819031	120,4439676	120	0	0	0
120	1642,784957	107,6738147	120	0	0	0
121	1652,540606	94,74231145	120	0	0	0
122	1662,083367	81,6529199	120	0	0	0
123	1671,410687	68,40914442	120	0	0	0
124	1680,520066	55,01453069	120	0	0	0
125	1689,409067	41,47266477	120	0	0	0
126	1698,075309	27,78717214	120	0	0	0
127	1706,516474	13,96171675	120	0	0	0
128	1714,730299	0	120	0	0	0

**Figura 5.33 Input Coordinate - Arco VVF - Parte III**

## 5. Confronto con la sperimentazione

### **5.2.2 Diagrammi di sollecitazione M, N ed eccentricità**

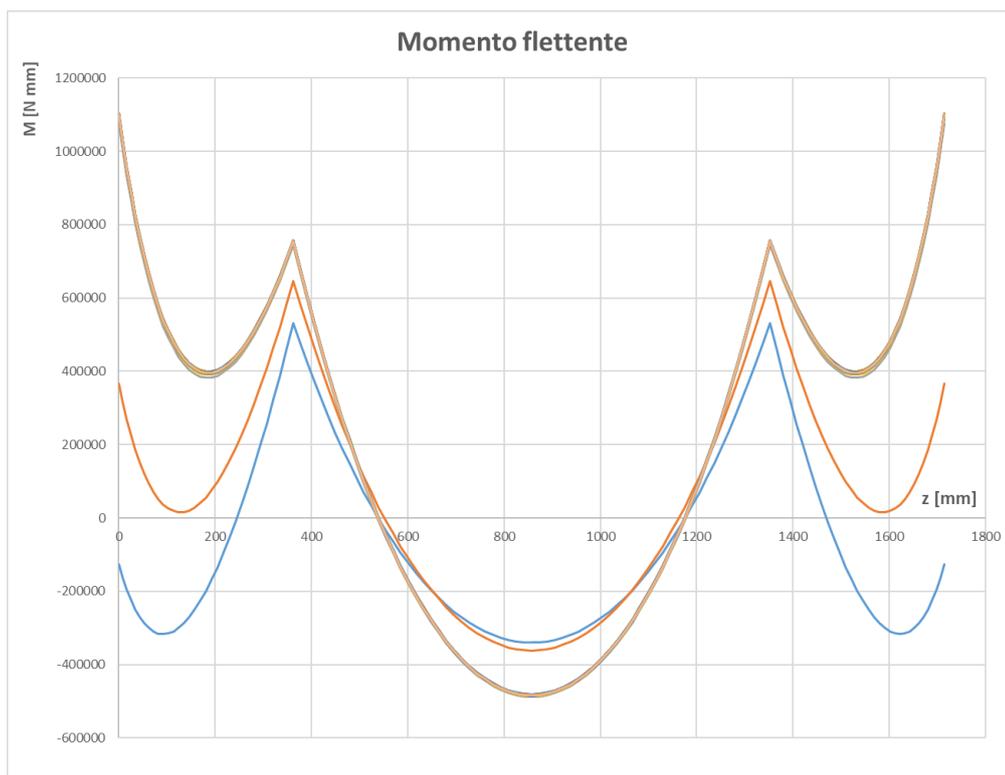
Il programma è stato avviato impostando incrementi graduali di temperatura e carico sino al raggiungimento dell'istante di valutazione dell'incendio desiderato (50 minuti).

In questo specifico caso il carico esplicito gravante, ovvero la coppia di forze da 9200N gravanti nelle sezioni 32 e 96, è costante nel tempo e pertanto la percentuale di incremento dei carichi a ciascun ciclo iterativo è nulla (vedere Figura 5.31 Variabili di Input - Arco VVF - Parte I).

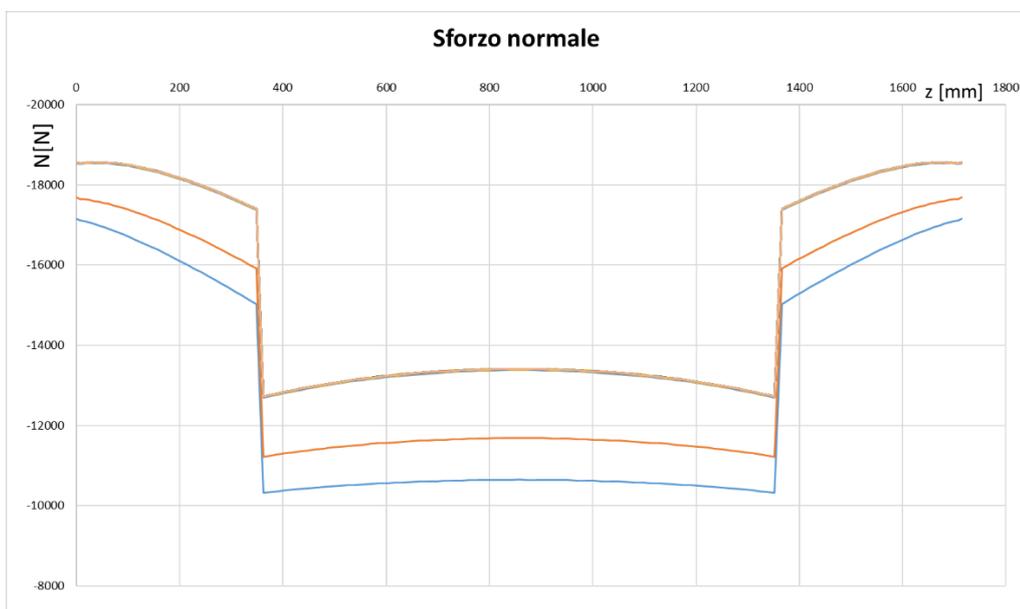
Per quanto riguarda il gradiente termico applicato, partendo dalla condizione di assenza di incendio ("temp\_val\_inc=0"), si incrementa la variabile temporale di due minuti ad ogni step di carico, per cui risultano necessari 26 cicli iterativi, al fine di raggiungere un tempo di valutazione dell'incendio pari a 50 minuti. Si riportano qui di seguito i diagrammi di sforzo normale, momento flettente e dell'eccentricità delle sollecitazioni così calcolate.

Nei seguenti diagrammi non viene riportata la didascalia poiché le curve si intensificano e sovrappongono sin dal terzo incremento di carico, rendendo inutile la distinzione formale tra le diverse curve. Le sollecitazioni M e N a tempo nullo sono associate alla curva blu, ben distinta dalle altre, mentre le sollecitazioni associate al tempo di calcolo pari a 50 minuti sono evidenti nei seguenti grafici, dove si sovrappongono e intensificano le diverse curve.

## 5. Confronto con la sperimentazione

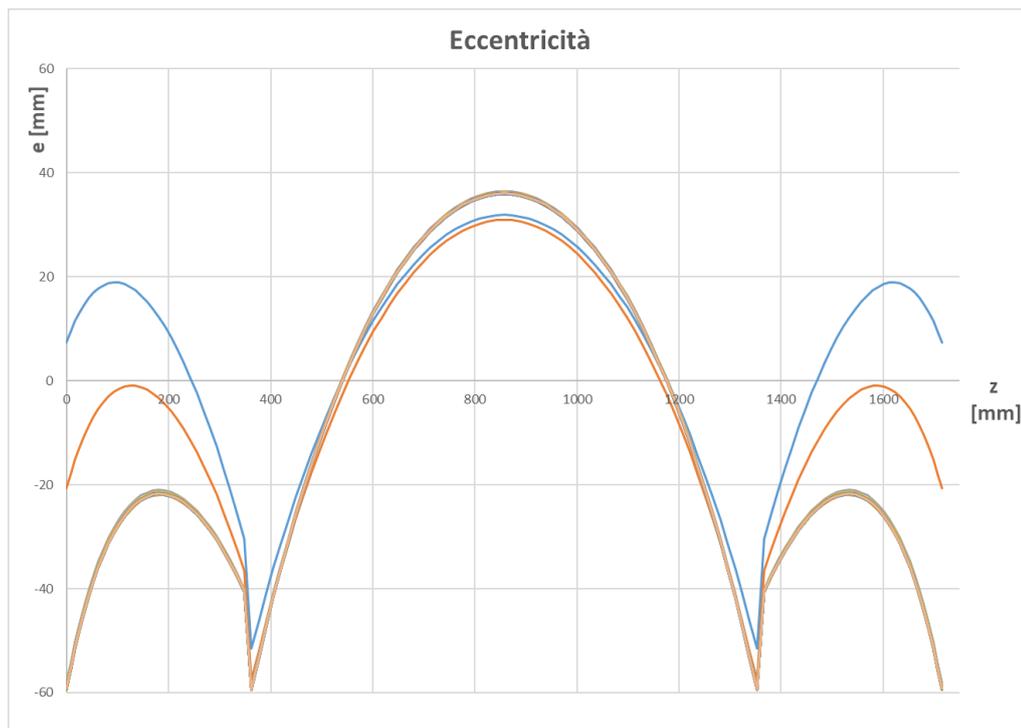


*Figura 5.34 Momento flettente - Arco VVF*



*Figura 5.35 Sforzo Normale - Arco VVF*

## 5. Confronto con la sperimentazione



*Figura 5.36 Eccentricità - Arco VVF*

Nei diagrammi precedentemente riportati si può osservare lo sviluppo delle cerniere plastiche all'aumentare della temperatura, cui consegue inoltre il degrado del legame costitutivo e l'espansione termica generata all'interno del materiale.

Essendo la struttura simmetrica e caricata simmetricamente, i diagrammi così calcolati sono ragionevolmente simmetrici e le cerniere plastiche si formano in corrispondenza del carico applicato e dei vincoli esterni. Dal grafico  $e-z$ , dove  $e=M/N$ , si può notare come all'aumentare della temperatura ci si avvicini maggiormente sul bordo ( $H/2=60\text{mm}$ ) senza mai andare oltre.

I diagrammi così esposti sono stati realizzati utilizzando il legame costitutivo 6, precedentemente descritto nel paragrafo 4.2.3.

### **5.2.3 Profilo delle temperature e deformazione termica**

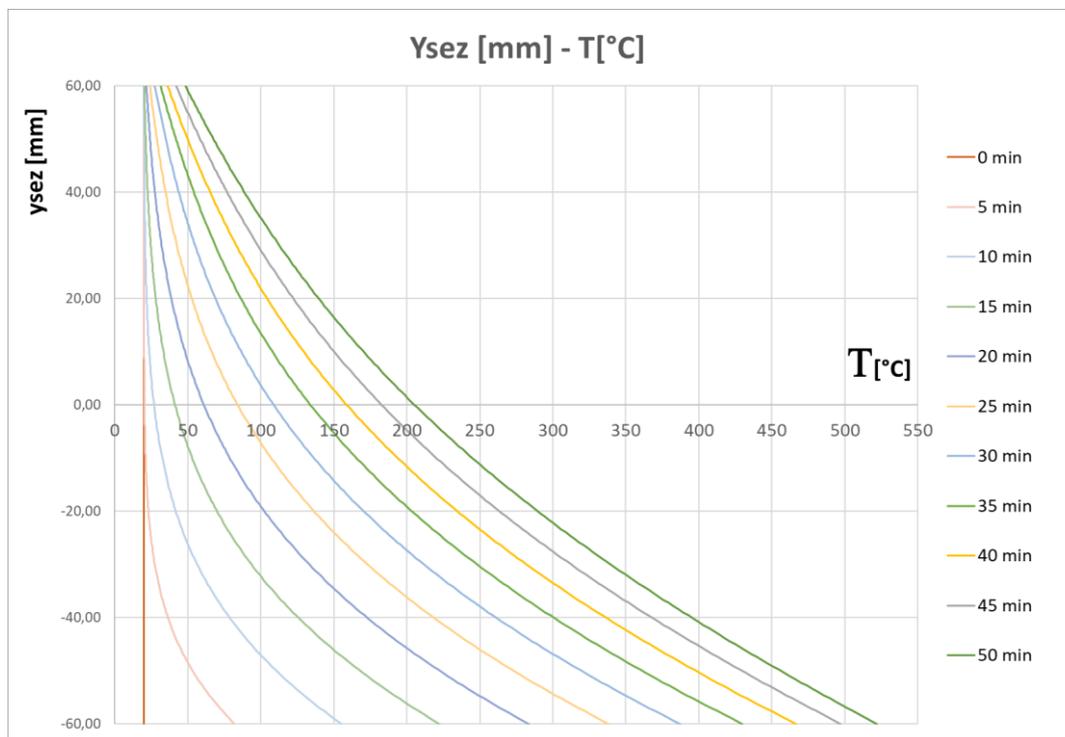
Volendo ora analizzare quanto accade all'interno delle singole sezioni, sono stati ricavati i diagrammi in corrispondenza della prima sezione caricata a sinistra e la sezione centrale (sezioni 32 e 64).

Poiché, come affermato precedentemente nell'introduzione di questa prova sperimentale, la distribuzione della diffusione termica è stata assunta uniforme per qualsiasi sezione, in funzione

## 5. Confronto con la sperimentazione

delle termocoppie applicate nella freccia, indipendentemente dalla sua quota, i profili della temperatura e delle dilatazioni termiche risultano uguali per ciascun punto.

Si riporta ora l'evoluzione della temperatura nel tempo delle 200 strisce in cui ciascuna sezione viene discretizzata.



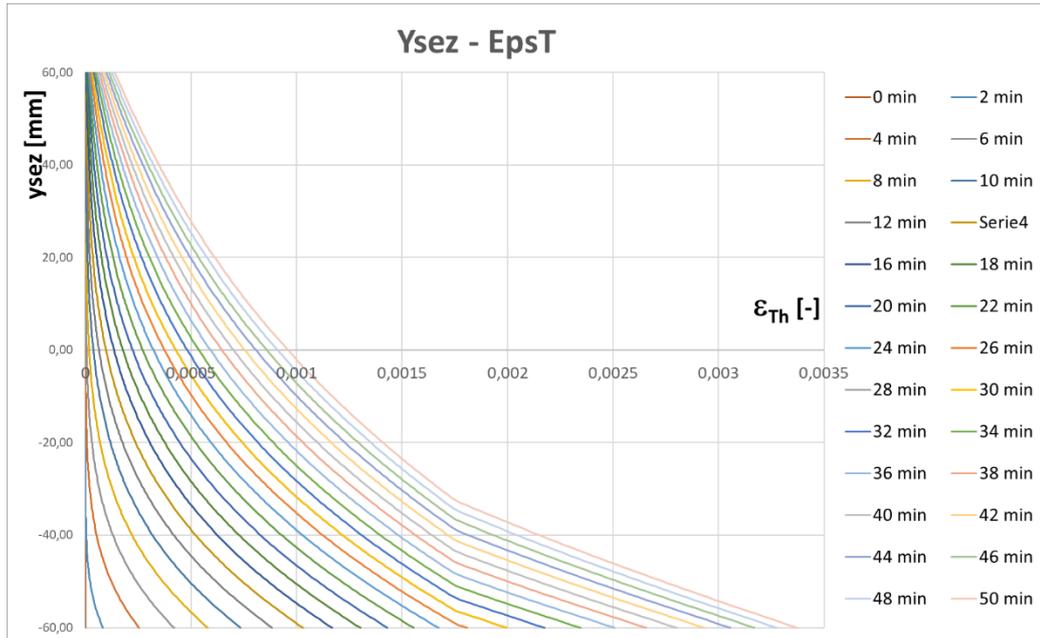
**Figura 5.37 Profilo della temperatura in una sezione generica sezione**

Il diagramma rappresentato in Figura 5.37 evidenzia l'aumento di temperatura nell'arco temporale per la sezione considerata. In particolare si osserva il rispetto delle condizioni al contorno, infatti sui due estremi ( $y=-60$  mm e  $y=60$  mm) agiscono le temperature rilevate durante la prova sperimentale, riportate in Figura 5.16 e 5.17, i cui valori appartengono alle funzioni descritte dalle equazioni esposte nelle Figure 5.29 e 5.30.

Attraverso la routine *epsT* (paragrafo 4.3.2) si ricavano le deformazioni termiche indotte dalla temperatura in ciascuna striscia interna della sezione considerata.

Poiché nel caso esaminato le sezioni sono costanti e la mappa termica è uniforme lungo la linea media dell'arco, si ottiene lo stesso diagramma per ciascuna sezione, di seguito riportato.

## 5. Confronto con la sperimentazione



*Figura 5.38 Diagramma  $\epsilon_{Th}$  - y di una generica sezione*

In funzione della deformazione termica raggiunta, procedendo con la medesima tipologia di analisi, il programma definisce per ciascuna striscia interna alla sezione la tensione associata alla deformazione pseudo-elastica, secondo la equazione esposta nel flow-chart completo (4.3.4). A titolo esemplificativo, si riporta un diagramma  $\sigma$ -Y realizzato mediante questa analisi, la cui sezione corrisponde al concio dell'arco in mezzzeria.

## 5. Confronto con la sperimentazione

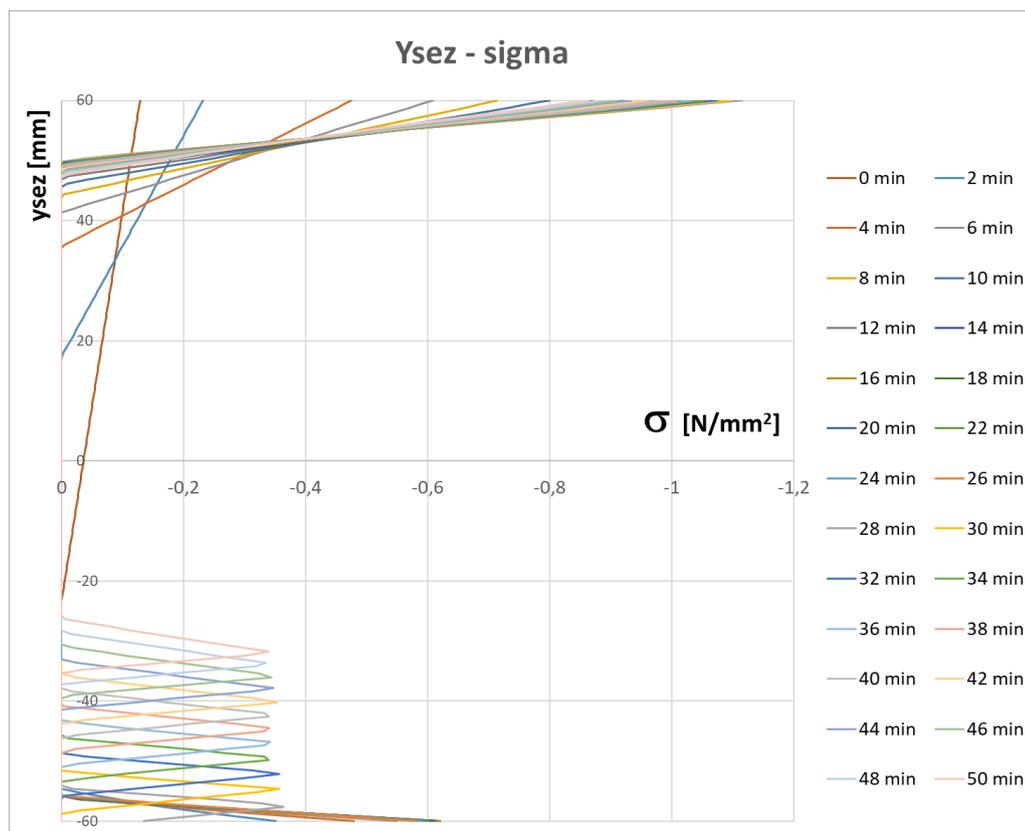


Figura 5.39 Diagramma  $\sigma$ - $y$  della sezione di mezzeria

Dal diagramma in Figura 5.39, si evince l'azione del degrado del legame costitutivo all'aumentare della temperatura raggiunta. La sezione di mezzeria evidenzia infatti lo spostamento delle fibre reagenti verso l'alto. Considerando la parte inferiore della sezione, inizialmente le fibre sollecitate sono quelle esterne ( $t=0$ min), ma all'incrementare della temperatura, il picco di tensione viene traslato dal lembo a  $y=-60$ mm sino al range di fibre comprese in  $y=20 \div 30$ mm.

Osservando il modulo di  $\sigma$  si evidenzia progressivamente una riduzione, nel caso specifico da  $\sigma=-0.6$ N/mm<sup>2</sup> a  $\sigma=-0.35$  N/mm<sup>2</sup>.

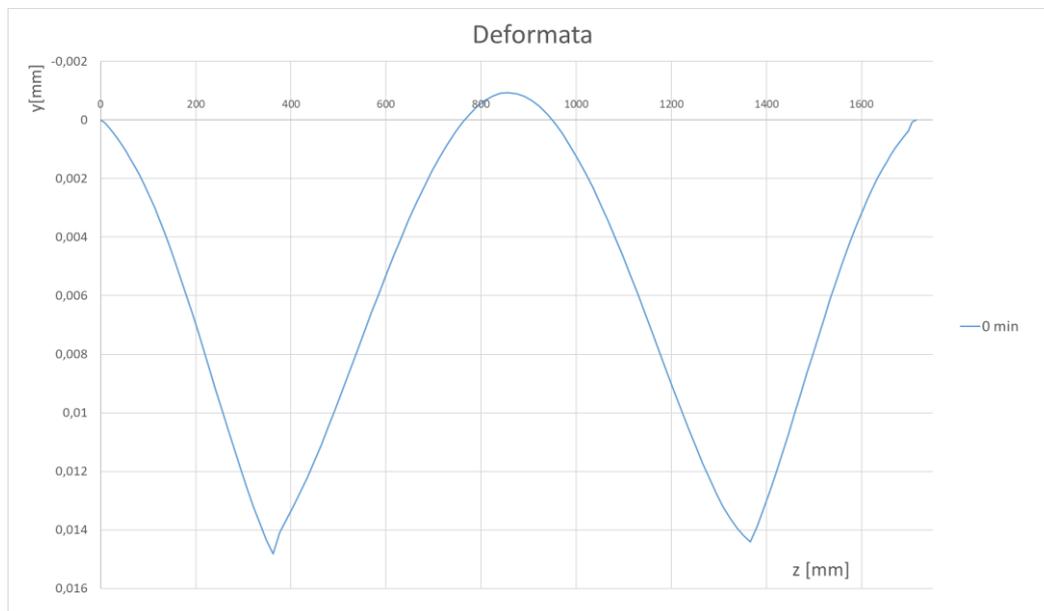
### 5.2.4 Abbassamento in freccia dell'arco – Confronto con la prova sperimentale

Calcolate deformazioni e sollecitazioni, occorre ora concludere l'elaborazione dei dati con il calcolo della deformata della struttura. Dalla relazione tecnica si sono ottenuti i valori di abbassamento-innalzamento della struttura in prossimità di uno dei due carichi e della freccia.

Innanzitutto si riporta la deformata calcolata con il programma al tempo zero in assenza di incendio. A meno di un errore di

## 5. Confronto con la sperimentazione

approssimazione del calcolo si evidenzia la simmetria della deformata rispetto la mezzeria poiché la struttura è simmetrica geometricamente, con carichi ugualmente collocati e della stessa entità.



**Figura 5.40 Deformata in assenza di incendio**

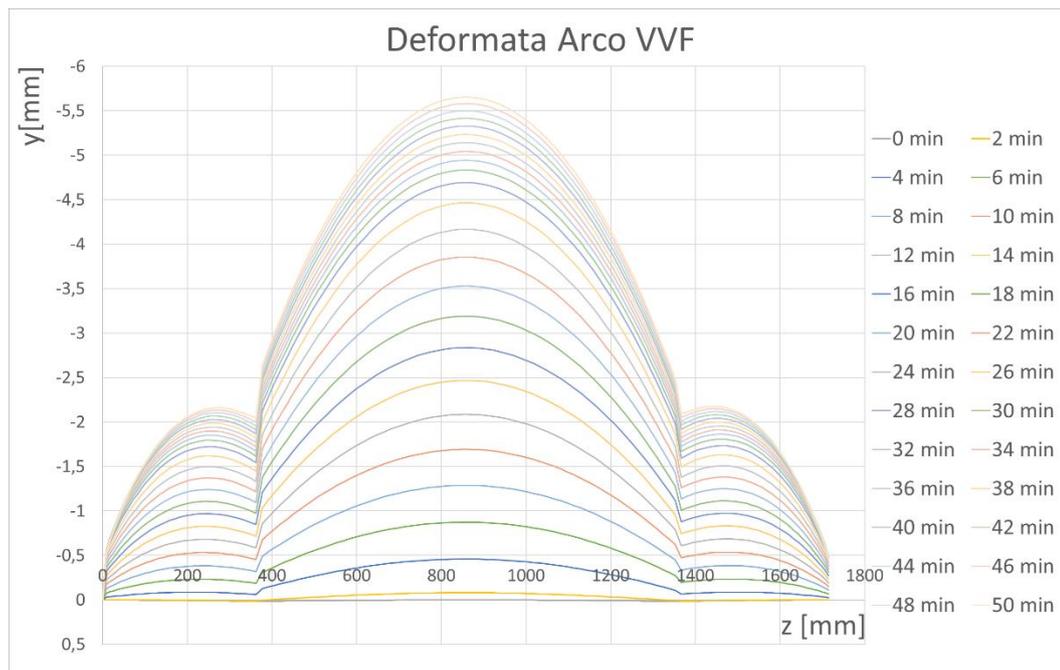
Poiché si è assunta una mappa termica equivalente per ciascuna sezione, risulta intuitivo ricercare una deformata ancora simmetrica, anche in condizioni di elevati gradienti termici applicati.

Si riporta a seguire la deformata della struttura, calcolata aumentando la variabile temporale di 2 minuti a ciascun incremento di carico, sino al raggiungimento del 50° minuto di simulazione d'incendio.

Si può nuovamente osservare, a meno di errori numerici ingegneristicamente trascurabili, la simmetria della deformata calcolata con il programma.

L'espansione termica indotta dall'incendio risulta essere di almeno un ordine di grandezza superiore rispetto le deformazioni indotte dai due carichi applicati alla struttura, infatti quest'ultima si sovrappone quasi con l'asse delle ascisse se confrontata con le deformate generate dal gradiente termico.

## 5. Confronto con la sperimentazione



*Figura 5.41 Esempio di deformata progressiva - Arco VVF*

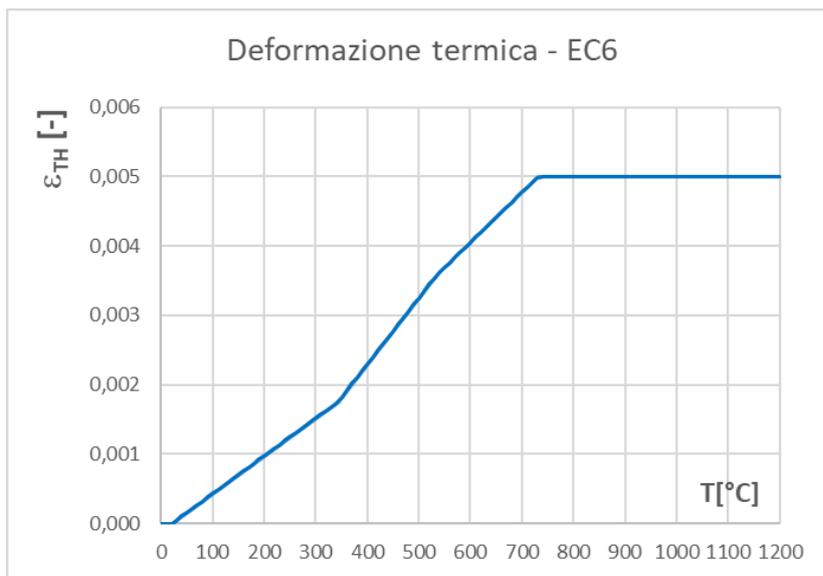
Focalizzando ora l'attenzione sull'evoluzione della deformata in freccia, la si vuole confrontare con i risultati elaborati dal software. Sono stati realizzati due casi:

- Caso I. Analisi deformativa della struttura senza alterazione del legame costitutivo;
- Caso II. Analisi deformativa con integrazione di un contributo di resistenza a trazione nel modello di calcolo.

Il primo confronto è stato realizzato mantenendo inalterato il legame costitutivo descritto nella routine sig\_eps\_temp, ovvero il legame proposto negli EC6 - P. II - Allegato D. Come già anticipato, questo legame prevede la sola resistenza a compressione.

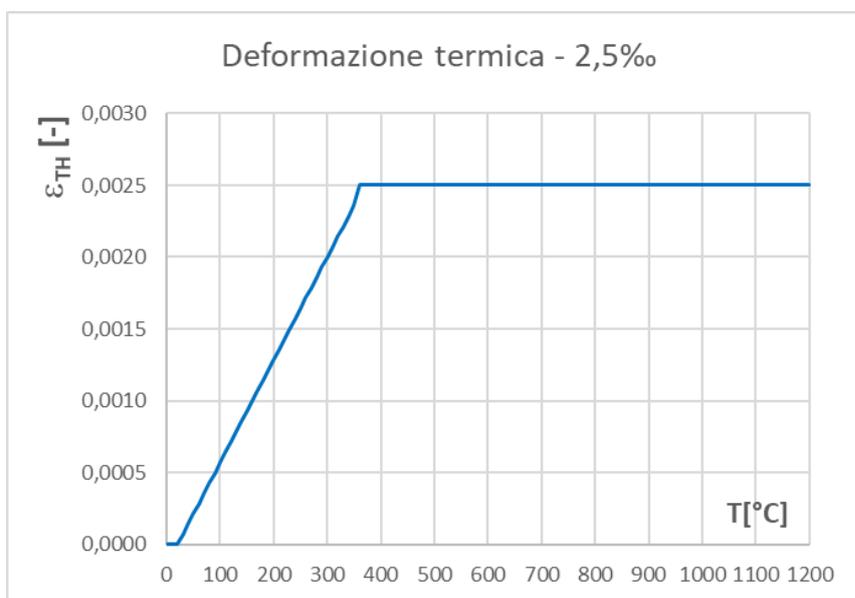
Sono state realizzate più prove ipotizzando diversi legami eps-T, a discapito di quanto proposto nel medesimo allegato per i mattoni in terracotta. I due casi alternativi prevedono il raggiungimento del plateau di deformazione alla temperatura di 350°, per un valore di 2 e 2.5‰. Queste ipotesi sono prive di fondamento e lo scopo è esclusivamente analizzare l'influenza del legame all'interno dell'analisi.

## 5. Confronto con la sperimentazione



**Figura 5.42** Deformazione termica - temperatura. Come da EC6 - P.II - Allegato D

Le alternative analizzate sono invece significativamente ridotte, sia in termini deformativi sia in base alle condizioni cui si raggiungono tali proprietà. A titolo esemplificativo si riporta il diagramma in caso di deformazione termica massima pari al 2.5‰, associato a temperature pari o superiori a 350°C.



**Figura 5.43** Deformazione termica - temperatura. EpsT 2.5‰

## 5. Confronto con la sperimentazione

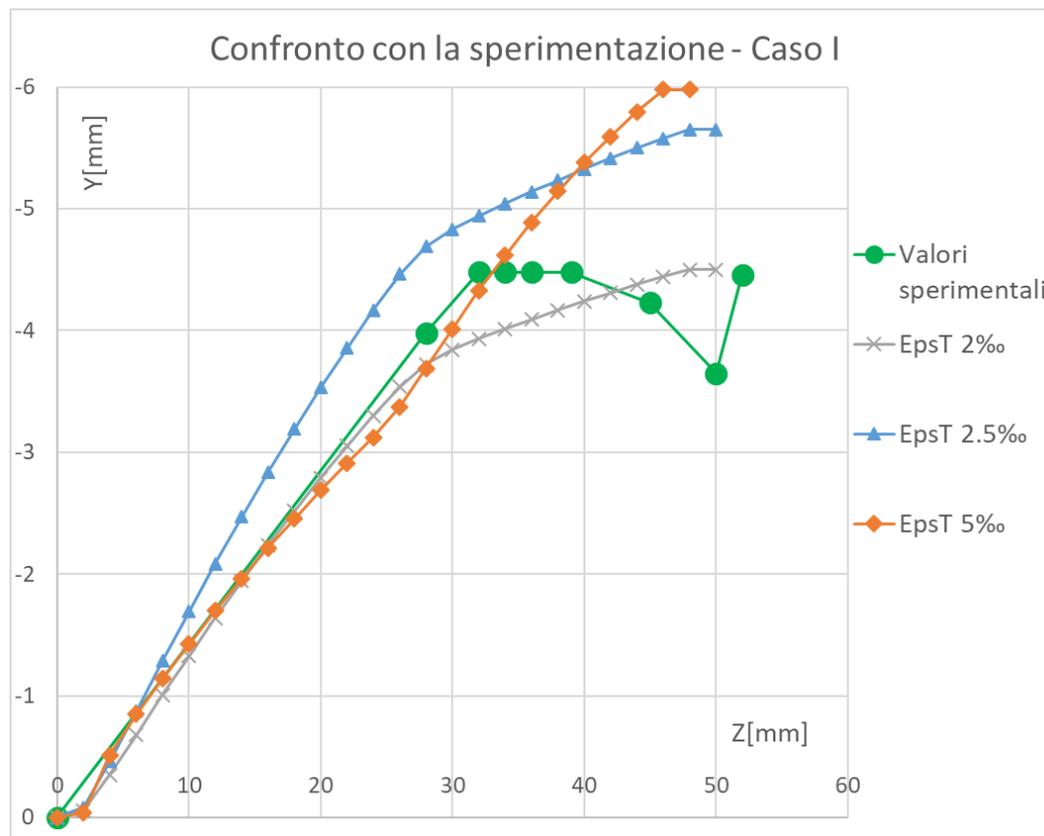


Figura 5.44 Confronto con la sperimentazione - Caso I

In seguito, sono state effettuate altre tre prove, con applicazione delle medesime dilatazioni termiche ammesse nel caso precedente. La modifica è stata apportata al legame costitutivo, aggiungendo un contributo di resistenza a trazione. Il calcolo della tensione in questa analisi prevede l'uso dello stesso modulo elastico, sia in caso di dilatazione sia in caso di compressione, funzione della temperatura.

Il valore di picco a trazione,  $f_{ct}$ , posto originariamente pari al 3% della resistenza massima a compressione,  $f_y$ , è stato sottoposto allo stesso effetto di degrado imposto per la resistenza a compressione.

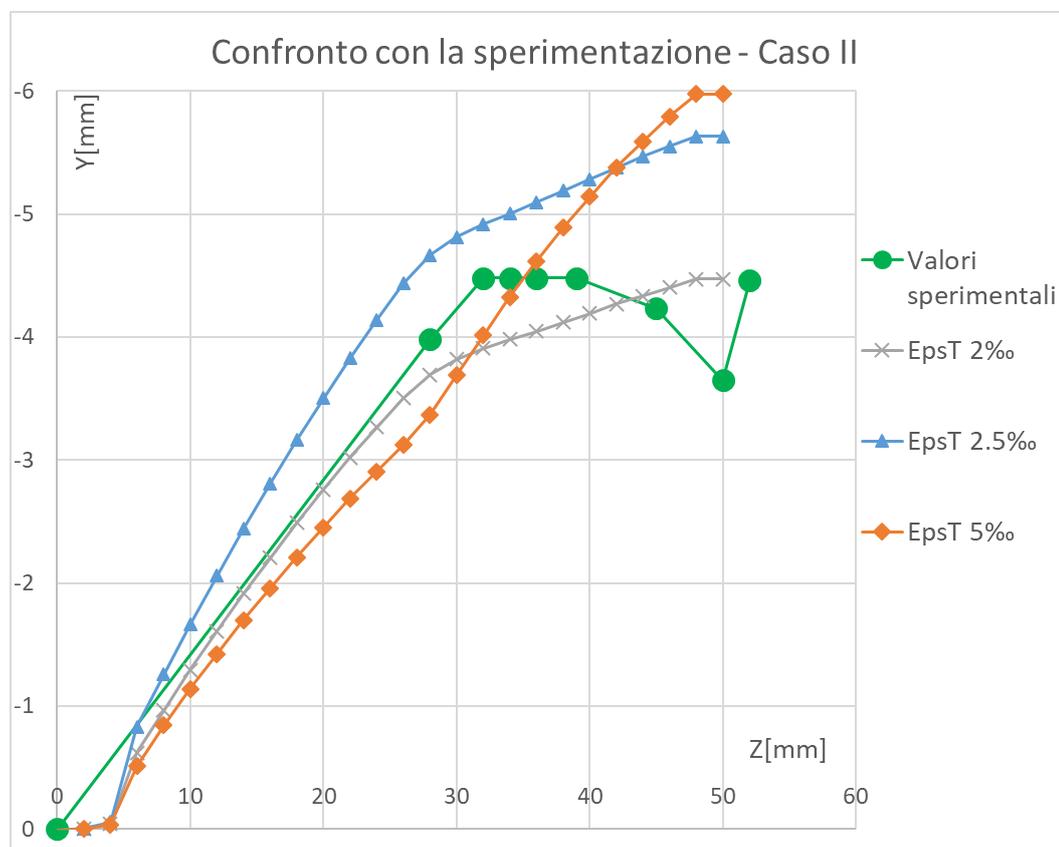
$$f_{ct_{max}} = f_{ct} \cdot \frac{E_T}{E_{20}} \quad (5.6)$$

Dove:

- $E_T$  è il modulo elastico pre-picco calcolato all'interno della routine sig-eps-temp in funzione della temperatura raggiunta nella striscia analizzata;
- $E_{20}$  è il modulo elastico calcolato come nel caso di  $E_T$ , ma a temperatura ambiente, ovvero 20°C, cui corrisponde la tensione massima.

## 5. Confronto con la sperimentazione

Dall'equazione 5.6 si evidenzia che il valore di  $fct_{max}$  risulta pari a  $fct$  solo se il modulo elastico viene calcolato in condizioni di temperatura ambiente.



*Figura 5.45 Confronto con la sperimentazione - Caso II*

Analogamente a quanto fatto per l'arco in muratura in assenza di incendio, si evidenziano con questa prova diverse osservazioni.

### **Osservazione 1**

Il profilo della deformata calcolato con il software risulta essere coerente con quello rilevato durante la prova sperimentale, in entrambi i casi analizzati ( $f_{tc}=0$  e  $f_{ct}=3\%$ ). Ciò che si può ulteriormente dedurre è che l'arco analizzato sembra raggiungere la deformazione massima anticipatamente, a meno di piccole oscillazioni, sia in campo temporale sia in termini di ampiezza della deformazione, rispetto la curva al 5‰. Rispettivamente vengono raggiunte deformate pari a 4.5 mm, secondo la prova sperimentale, e 6 mm, secondo i legami proposti da EC6.

## 5. Confronto con la sperimentazione

### **Osservazione 2**

In base alle due prove elaborate, con e senza resistenza a trazione, occorre osservare come il comportamento a trazione della struttura sia pressoché irrilevante in termini deformativi. L'introduzione della resistenza a trazione infatti comporta una leggera oscillazione dei valori deformativi raggiunti, il cui ordine di grandezza risulta tuttavia trascurabile. I due grafici, confrontando le curve a due a due, con uguale legge deformativa, sono pressoché sovrapponibili.

### **Osservazione 3**

Analizzando il comportamento della struttura, al variare della legge deformativa (2, 2.5 e 5‰) si osserva come il legame influenzi significativamente l'andamento della deformata: sono le deformazioni termiche indotte dal gradiente termico a regolare il processo in presenza di incendio.

Osservazione puramente qualitativa è che la deformata sperimentale rilevata risulta compresa fra le due deformate calcolate con picchi di  $EpsT$  posti pari a 2 e 2.5‰.

## 6. Conclusioni

La Tesi precedentemente esposta è basata sull'analisi di strutture ad asse curvilineo, nello specifico in muratura, focalizzando l'attenzione sull'azione di elevati gradienti termici.

In seguito all'elaborazione del programma per analisi di strutture curvilinee e all'integrazione delle componenti di calcolo per l'analisi termica, si è reso necessario verificare la compatibilità tra i risultati così elaborati e quelli forniti dalle due prove sperimentali reperibili in Letteratura.

In primis è stato effettuato un paragone con la prova sperimentale in assenza di incendio, per analizzare la precisione di calcolo delle routine *main*, *mom\_curv* e *sig\_eps*, ovvero le procedure di calcolo interne al programma che definiscono l'analisi in campo lineare e non.

A tale scopo il confronto è stato realizzato grazie alla prova richiamata più volte sotto il nome di "Arco di Capozucca".

Grazie a molteplici analisi realizzate ed impiegando diversi legami costitutivi possibili, si è riscontrata una discreta convergenza con i risultati sperimentali.

Nello specifico si è osservato come, in assenza di incendio, contemplare una piccola resistenza a trazione degli elementi in muratura è necessario per poter ottenere risultati, in termini deformativi, dello stesso ordine di grandezza di quelli che si manifestano nella realtà.

Si richiama nuovamente quanto mostrato dalle Figura 5.21, Figura 5.22 e Figura 5.23, per evidenziare la radicale discordanza tra le deformazioni raggiunte ammettendo la sola resistenza a compressione oppure riconoscendo una minima resistenza a trazione. Infatti, nel primo caso la deformazione raggiunta era in rapporto 10:1 rispetto i dati sperimentali, mentre con trazione si è raggiunto un rapporto di quasi 1:1 (riferimento al caso di  $fct=3\%$  con  $P=640\text{ N}$ ).

Muovendosi ora verso il fulcro della Tesi, il confronto viene mosso verso la prova sperimentale riguardante una volta in muratura in presenza di elevati gradienti termici; la struttura è stata richiamata comunemente come "Arco dei VVF".

In questo caso, sviluppando il Metodo di Calcolo Avanzato proposto dagli EC6, di cui al paragrafo 2.3, sono state verificate le procedure di calcolo relative all'analisi termica, dalla definizione della mappatura termica 2D della struttura al legame costitutivo proposto per gli elementi in muratura.

## 6. Conclusioni

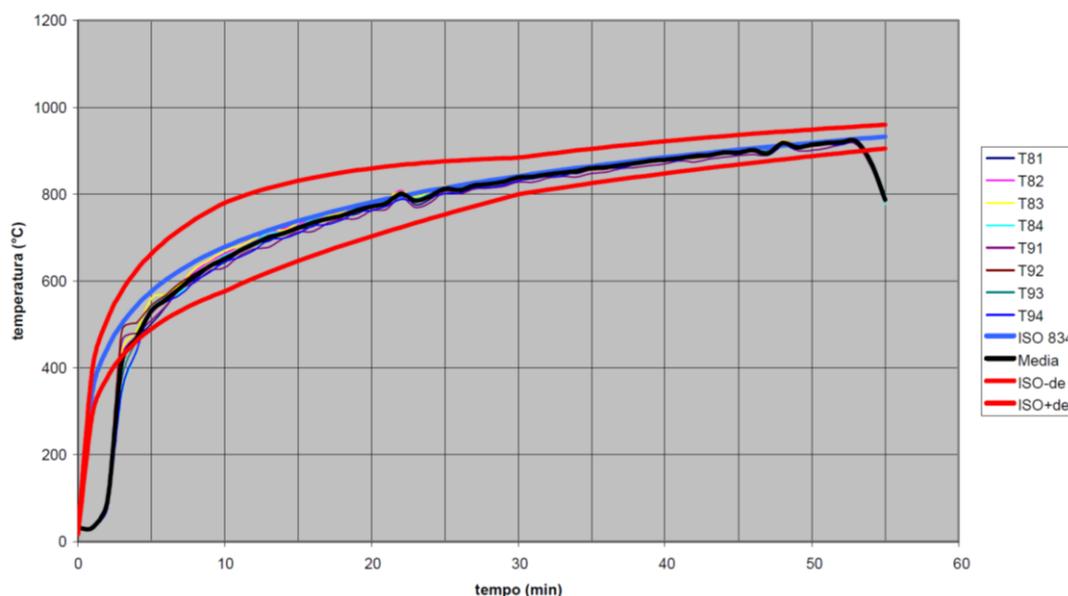
La prima osservazione, sorta spontanea analizzando il problema, è che il legame costitutivo proposto dalla normativa non contempla minimamente l'eventuale resistenza a trazione della muratura. In merito a questo fenomeno, analizzando lo stesso modello sia in presenza sia in assenza di resistenza a trazione (Figura 5.44 e Figura 5.45), si è osservato come non influenzi in maniera significativa i risultati raggiunti e che riconoscerla sia pressoché superfluo.

Inoltre, da questa analisi si evince come sia di particolare importanza elaborare, durante la prova sperimentale, non solo la resistenza caratteristica del materiale, per esempio mediante prove a compressione come nel caso dell'arco dei VVF, bensì anche i parametri termici.

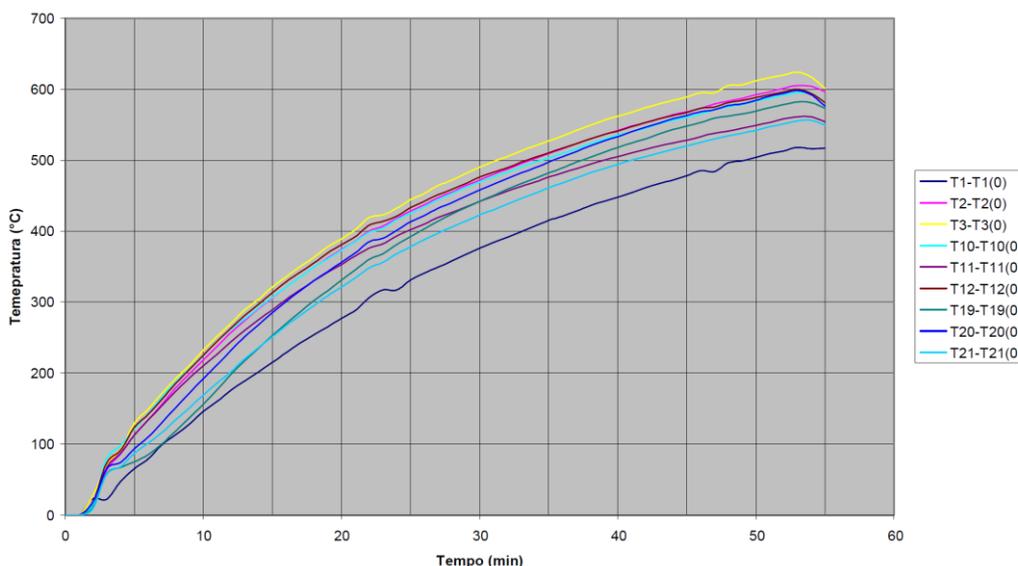
All'interno del programma è stato implementato il legame deformazione-temperatura proposto dagli EC6, ma ipotizzando casualmente altri comportamenti si è riscontrata una migliore approssimazione della deformazione temporale della struttura soggetta al gradiente termico. I parametri termici dovrebbero quindi essere analizzati preventivamente nel caso di prove sperimentali che prevedano l'impiego di elevati gradienti termici. Una particolare attenzione viene posta in merito alla prova sperimentale dei Vigili Del Fuoco; la normativa prevede, in caso di verifica di resistenza al fuoco di strutture, l'applicazione di una curva di temperature stabilita in funzione dell'incendio che si vuole analizzare.

Durante la prova è stata imposta la curva standard e verificata alla base del forno sperimentale, mentre le temperature che hanno realmente coinvolto la volta in muratura risultano essere significativamente inferiori, come riportato nelle seguenti figure.

## 6. Conclusioni



*Figura 6.1 Profilo delle temperature nel forno sperimentale*



*Figura 6.2 Profilo di temperatura sulla faccia esposta al calore*

Si può notare come, a parità di tempo, le temperature misurate all'interno del forno e sulla superficie di intradosso siano significativamente differenti, raggiungendo un delta superiore a 300°C in alcuni casi.

Tra le considerazioni sin qui realizzate occorre quindi prevedere di sottoporre la medesima struttura alle reali temperature imposte dalla normativa (Curva ISO 834) e considerare eventuali discordanze generate rispetto il metodo semplificato proposto dagli stessi Eurocodici.

## 6. Conclusioni

Risulta inoltre interessante l'idea di realizzare una procedura di calcolo più compatta che permetta l'utilizzo di questo metodo, maggiormente raffinato rispetto quello proposto al paragrafo 2.2. Si riscontra tuttavia come, sia in presenza sia in assenza di elevati gradienti termici, il programma elabori risultati coerenti con quelli rilevati durante le due prove sperimentali.

## 7. Bibliografia

### 7. Bibliografia

Colonnetti G., *Elastoplasticità: saggio di interpretazione delle deformazioni plastiche come fenomeni ereditari*, Pontificiae academiae scientiarum scripta varia, n. 19, 1960.

Nadjai A., O'Garra M., Ali F., *Finite element modelling of compartment masonry walls in fire*, Computer and Structures, n. 81, 2003, pp. 1923-1930.

Nadjai A., O'Garra M., Ali F., Laverty D., *A numerical model for the behaviour of masonry under elevated temperatures*, Fire and Materials, n. 27, 2003, pp. 163-182.

Nadjai A., O'Garra M., Ali F., Jurgen R., *Compartment masonry walls in fire situations*, Fire Technology, n. 42, 2006, pp. 211-231.

*Eurocodice 4, UNI EN 1994-1-2:2005. Progettazione delle strutture composte acciaio-calcestruzzo – Parte 1-2: Regole generali - Progettazione strutturale contro l'incendio*

*Eurocodice 6, UNI EN 1996-1-2:2005. Progettazione delle strutture in muratura – Parte 1-2: Regole generali – Progettazione strutturale contro l'incendio.*

#### **Prove sperimentali di riferimento.**

Prova Di Resistenza Al Fuoco Su Una Volta A Botte In Muratura.

*Eseguita dal dipartimento dei vigili del fuoco, del soccorso pubblico e della difesa civile direzione centrale per la prevenzione e la sicurezza tecnica - area protezione passiva - settore resistenza al fuoco.*

Analisi di un modello sperimentale di volta in muratura danneggiato e rinforzato con CFRP.

*Realizzata dal dipartimento di Ingegneria Strutturale dell'Università di Ancona.*