

POLITECNICO DI TORINO

I Facoltà di Ingegneria

Corso di Laurea Magistrale in Ingegneria Civile

Tesi di Laurea Magistrale

**INSTABILITA DI PROFILI SOTTILI IN ACCIAIO:
CONFRONTO TRA FEM E FSM**



Relatori:

Prof. Luca Giordano

Prof. Gabriele Bertagnoli

Candidato:

José Ignacio Barriga Baquero

Dicembre 2017

Ringraziamenti

Vorrei ringraziare al mio relatore ed insegnante del corso delle strutture in acciaio, Professore Luca Giordano, per la grande conoscenza che mi ha donato.

Al Professore Alberto Sabora, per avermi presentato la straordinaria e lodevole strada della Scienza delle costruzioni.

Soprattutto, voglio ringraziare alla mia famiglia, parte fondamentale in questo mio percorso: ai miei genitori e ai miei fratelli che, con il suo appoggio economico, morale e dolce consiglio, mi hanno permesso di arrivare fin qui, senza mai dubitare della mia capacità. A la mia sorellina Hilda, per essere la mia cara amica e seconda madre.

Vorrei esprimere la mia gratitudine alla mia dolcissima fidanzata e ingegnere Liz Sally Juarez Ramirez, per il suo appoggio incondizionato, saggi consigli e per avermi dato il coraggio di intraprendere la strada giusta e portare a compimento la mia tesi.

Per ultimi ma non meno importanti, ai miei amici, Lis Maria, Raul y Sully Carpio, Renzo de Jesus, compadre Delos, Claudita, Paulito, el viejo Ronys, el viejo Pipe, e la compagnia di supplizio Celia Maria.

*“Non è finita finché non è finita”
“It ain’t over ‘til it’s over”*

Yogi Berra

Sommario

Dovuto al costante sviluppo delle tecnologie dei materiali nel campo dell'acciaio e la crescita degli strumenti di analisi computazionali in ambito ingegneristico è necessario studiare strade innovative, con lo scopo di trovare metodologie più raffinate per l'analisi delle sezioni sottili in acciaio laminati a freddo secondo le loro caratteristiche e proprietà.

I profili sottili in acciaio (snelli-classe 4-Eurocodice) vengono, di solito, ottenuti tramite processi di elaborazione a freddo usando lamiera di piccolo spessore (1-4 mm), attraverso piegatura su rulli o presse di lamiera d'acciaio. Questi sono più utilizzati in strutture secondarie, in componenti di tamponamento ed in elementi secondari di solai e copertura. Tra i tipi di sezioni commerciale più usati si trovano le sezioni a C, a Z ed tipo omega.

Le caratteristiche proprie di questo tipo di profilo conducono a considerare non solo l'instabilità globale ma anche quella locale e distorsionale. Di fatto, questa importante considerazione sarà il motivo per confrontare due strumenti per l'analisi dell'instabilità, come sono: il metodo degli elementi finiti - FEM (Finite Element Method) e il metodo delle strisce finite FSM (Finite Strip Method), con lo scopo di verificare il grado di approssimazione relativo tra loro.

Si vuole realizzare, anche, un'analisi su che tipo di instabilità e il rango di snellezza nel quale è opportuno applicare sia il metodo degli elementi finiti che il metodo delle strisce finite.

Summary

Due to the constant development of materials technologies in the steel industry and the growth of computational analysis instruments in the engineering field, it is necessary to study innovative ways, with the aim of finding more refined methods for the analysis of cold-formed steel member according to their characteristics and properties.

Cold-formed steel member (class 4-Eurocode) are usually obtained through cold processing procedures using sheets of small thickness (1-4 mm) by bending on rollers or steel sheet presses. These profiles are most used in secondary structures, side rails, in purlins, and in floor and roof elements. Among the most used commercial types are the C, Z and omega sections.

The characteristics of this type of profile lead to consider not only global but also local and distortional buckling. In fact, this important consideration will be the reason for comparing two numerical methods for buckling analysis, such as the Finite Element Method (FEM) and the Finite Strip method (FSM), with the aim of verifying the degree of relative approximation between them.

It wants to accomplish, also, an analysis of the type of buckling and the rank of slenderness in which both the finite element method and the finite strip method should be applied.

Introduzione

Nella presente tesi viene confrontato il metodo degli elementi finiti (FEM -Finite Element Method) con il metodo delle strisce finite (FSM – Finite Strip Method), applicato nel campo dell'instabilità nelle sezioni sottili in acciaio.

Di fronte al costante sviluppo delle tecnologie dei materiali nel campo dell'acciaio e la crescita degli strumenti di analisi computazionali in ambito ingegneristico è necessario studiare strade innovative, con lo scopo di trovare metodologie più raffinate per l'analisi delle sezioni sottili in acciaio laminati a freddo secondo le loro caratteristiche e proprietà.

Nella prima parte vengono analizzate, a partire dallo stato dell'arte, tutte quelle motivazioni che hanno condotto all'analisi del confronto tra questi due metodi FEM- FSM, e la sua applicazione nel campo delle sezioni sottili.

Nel primo capitolo sono introdotte, nozioni sulle problematiche e definizioni teoriche, si presenta un richiamo all'acciaio come materiale strutturale, ai tipi di sezioni, e la loro classificazione e la possibilità che ammette l'Eurocodice riguardo allo studio mediante elementi finiti.

Il capitolo 3 accenna il fenomeno dell'instabilità globale e flesso-torsionale nell'elemento asta, per concludere con la lastra inflessa, principale componente delle sezioni sottili in acciaio.

Si spono in linee generali il metodo delle strisce finite nel capitolo 4.

L'applicazione dei metodi FSM e FEM, attraverso il software Adina e cuFSM, rispettivamente, viene condotto in 5 sezioni sottili aperti, tipo saggomario, analizzando per ognuna 14 valori di lunghezza, da 500 mm a 7000 mm. Tutto l'analisi viene fatto su un schema o configurazione strutturale dell'asta in semplice appoggio, considerando la non linearità geometria nel riguardo a grandi spostamenti. Viene anche esaminato l'effetto delle imperfezioni iniziali nel carico di collasso dell'asta. Vengono confrontati i risultati ottenuti tramite il metodo degli elementi finiti con quello del metodo delle strisce finite.

È stata svolta una parte aggiuntiva (appendici) attraverso FEM con la finalità di assicurare una corretta affidabilità nel processo di modellazione con elementi finiti. Quest'esperienza, tramite il software FEM, è stata applicata nell'esecuzione dello scopo della tesi

Nella prima appendice, su una sezione circolare cava retta in ADINA con elemento tipo frame (barra), si esegue un'analisi di buckling e si trova il carico critico di Eulero, il quale è confrontato con la teoria esatta.

Nell'appendice due sono state analizzate quattro tipi diversi di sezioni (rettangolare, rettangolare cava, doppia T e sezione a C).

INDICE GENERALE

1	STATO DELL'ARTE	21
1.1	<i>Metodi di analisi sezioni sottili a freddo</i>	22
1.1.1	Il metodo della larghezza efficace	23
1.1.2	Metodo della resistenza diretta	24
1.2	<i>Istrumenti computazionale.....</i>	25
1.2.1	Il metodo degli elementi finiti	25
1.2.2	Il metodo della striscia finita	25
1.2.3	Il metodo della trave generalizzata.....	26
1.3	<i>Scopo e obiettivi.....</i>	27
2	PROFILI SOTTILI IN ACCIAIO	29
2.1	<i>Materiale.....</i>	29
2.2	<i>Sezioni.....</i>	32
2.2.1	Profilati	32
2.2.2	Sezioni composte.....	34
2.2.3	Sezioni costruite	34
2.2.4	Profilati formati a freddo	34
2.2.5	Classificazione delle sezioni trasversali	36
2.2.6	Proprietà delle sezioni	38
2.3	<i>Progettazione delle strutture di acciaio.</i>	39
2.3.1	Uso di metodi di elementi finiti.....	40
2.3.2	Modello di elementi finiti.....	41

2.3.3	software per l'analisi con elementi finiti	41
2.3.4	Uso delle imperfezioni con elementi finiti	41
2.3.5	Proprietà del materiale con elementi finiti	44
2.3.6	Carico in modello con elementi finiti	44
2.3.7	Criterio dei Stati limite con elementi finiti	44
2.3.8	Coefficienti di sicurezza con modelli degli elementi finiti.....	45
3	RICHIAMO INSTABILITÀ.....	47
3.1	<i>ASTA RETTILINEA CON ELASTICITÀ DIFUSA</i>	48
3.2	<i>EFFETTO DELLE IMPERFEZIONI</i>	51
3.3	<i>INSTABILITÀ FLESSO-TORSIONALE</i>	53
3.4	<i>LASTRE IN COMPRESSIONE</i>	55
3.5	<i>INSTABILITÀ DI ELEMENTI SOTTILI IN ACCIAIO</i>	59
3.5.1	Instabilità locale.....	59
3.5.2	Instabilità distorsionale.....	59
3.5.3	Instabilità globale	60
4	METODI E SOFTWARE	63
4.1	<i>Metodo delle strisce finite - FSM</i>	63
4.2	<i>Scelta delle funzioni di spostamento</i>	67
4.3	<i>Funzioni di spostamento disponibile</i>	68
4.3.1	Parte di serie della funzione di spostamento	68
4.3.2	Parte di funzione di forma della funzione di spostamento	70
4.4	<i>Formula delle caratteristiche di striscia attraverso il principio dell'energia potenziale totale minima</i>	74
4.4.1	Funzioni di spostamento	75
4.4.2	Deformazioni	75
4.4.3	Sforzi	76
4.4.4	Minimizzazione dell'energia potenziale totale.....	76
4.5	<i>Metodo degli elementi finiti FSM</i>	78
4.6	<i>Software usato nello sviluppo della tesi</i>	79
5	ANALISI E CONFRONTO PROFILI SOTTILI	81
5.1	<i>Profili e schema usati nell'analisi</i>	81
5.2	<i>Procedura dell'analisi</i>	83
5.2.1	Procedura carico di instabilità	83
5.2.2	Procedura carico critico con imperfezioni geometriche	83
5.3	<i>Analisi carico instabilità FEM sul profilo 1</i>	85
5.3.1	Modelli del profilo 1 in elementi finiti ed risposta nel primo modo. .	85

5.3.2	Carico di instabilità del profilo 1.....	89
5.4	<i>Analisi carico instabilità FEM sul profilo 2.....</i>	<i>90</i>
5.4.1	Modelli del profili 2 in elementi finiti ed risposta nel primo modo. .	90
5.4.2	Carichi di instabilità del profilo 2.....	94
5.5	<i>Analisi carico instabilità FEM sul profilo 3.....</i>	<i>95</i>
5.5.1	Modelli del profili 3 in elementi finiti ed risposta nel primo modo. .	95
5.5.2	Carichi di instabilità del profilo 3.....	99
5.6	<i>Analisi carico instabilità FEM sul profilo 4.....</i>	<i>100</i>
5.6.1	Modelli del profili 4 in elementi finiti ed risposta nel primo modo.	100
5.6.2	Carichi di instabilità del profilo 4.....	104
5.7	<i>Analisi carico instabilità FEM sul profilo 5.....</i>	<i>105</i>
5.7.1	Modelli del profili 5 in elementi finiti ed risposta nel primo modo.	105
5.7.2	Carichi di instabilità del profilo 5.....	109
5.8	<i>Analisi carico instabilità FSM sul profilo 1.....</i>	<i>110</i>
5.8.1	Modelli del profili 1 in strisce finite ed risposta nel primo modo. .	110
5.8.2	Carico di instabilità del profilo 1.....	113
5.9	<i>Analisi carico instabilità FSM sul profilo 2.....</i>	<i>114</i>
5.9.1	Modelli del profili 2 in strisce finite ed risposta nel primo modo. .	114
5.9.2	Carico di instabilità del profilo 2.....	117
5.10	<i>Analisi carico instabilità FSM sul profilo 3.....</i>	<i>118</i>
5.10.1	Modelli del profili 3 in strisce finite ed risposta nel primo modo. .	118
5.10.2	Carico di instabilità del profilo 3.....	121
5.11	<i>Analisi carico instabilità FSM sul profilo 4.....</i>	<i>122</i>
5.11.1	Modelli del profili 4 in strisce finite ed risposta nel primo modo. .	122
5.11.2	Carico di instabilità del profilo 4.....	125
5.12	<i>Analisi carico instabilità FSM sul profilo 5.....</i>	<i>126</i>
5.12.1	Modelli del profili 4 in strisce finite ed risposta nel primo modo. .	126
5.12.2	Carico di instabilità del profilo 5.....	129
5.13	<i>Analisi ed confronto.....</i>	<i>130</i>
5.13.1	Analisi e confronto tra FSM e FEM in profilo 1.....	130
5.13.2	Analisi e confronto tra FSM e FEM in profilo 2.....	131
5.13.3	Analisi e confronto tra FSM e FEM in profilo 3.....	132
5.13.4	Analisi e confronto tra FSM e FEM in profilo 4.....	133
5.13.5	Analisi e confronto tra FSM e FEM in profilo 5.....	134

6 CONCLUSIONI..... 137

Appendici	139
1 ANALISI SEZIONE CIRCOLARE CAVA	141
1.1 <i>Sistema statico e sezione trasversale</i>	141
1.2 <i>Calcolo carico limite in asta senza imperfezioni iniziali.....</i>	142
1.2.1 <i>Calcolo carico limite secondo l'Eurocodice</i>	142
1.2.2 <i>Analisi di buckling in Adina.....</i>	143
1.3 <i>Calcolo carico limite in asta con imperfezioni iniziali.....</i>	145
1.3.1 <i>Analisi con imperfezioni iniziale con forma sinusoidale.</i>	145
1.3.2 <i>Analisi con imperfezioni iniziale con la forma del modo 1.</i>	151
1.3.3 <i>Confronto tra analisi forma sinusoidale e forma del modo 1</i>	154
2 Modellazione in FEM di 4 sessioni	156
2.1 <i>Limiti nella modellazione</i>	157
2.1.1 <i>Tipo di elementi finiti.....</i>	157
2.1.2 <i>Sezione trasversale</i>	158
2.1.3 <i>Materiale.....</i>	158
2.1.4 <i>Vincoli</i>	158
2.1.5 <i>Carico iniziale, funzione di paso temporale, funzione temporale di carico.</i>	158
2.1.6 <i>Imperfezione iniziale</i>	159
2.1.7 <i>Spostamenti iniziali e massimi per la iterazione.</i>	160
2.1.8 <i>Schemi e riassunto risultati.</i>	160
2.2 <i>Sezione rettangolare</i>	163
2.2.1 <i>Analisi schema semplice appoggio: carico di punta.....</i>	163
2.2.1.1 <i>Analisi carico di instabilità.....</i>	163
2.2.1.2 <i>Analisi di collasso con imperfezioni iniziali-modo I.....</i>	164
2.2.2 <i>Analisi schema semplice appoggio: carico in mezzzeria.</i>	166
2.2.2.1 <i>Analisi carico di instabilità.....</i>	166
2.2.2.2 <i>Analisi di collasso con imperfezioni iniziali-modo I.....</i>	166
2.2.3 <i>Analisi schema doppio incastro: carico in mezzzeria.</i>	168
2.2.3.1 <i>Analisi carico di instabilità.....</i>	168
2.2.3.2 <i>Analisi di collasso con imperfezioni iniziali-modo I.....</i>	168
2.3 <i>Sezione rettangolare cava.....</i>	170
2.3.1 <i>Analisi schema semplice appoggio: carico di punta.....</i>	170
2.3.1.1 <i>Analisi carico di instabilità.....</i>	170
2.3.1.2 <i>Analisi di collasso con imperfezioni iniziali-modo I.....</i>	171
2.3.2 <i>Analisi schema semplice appoggio: carico in mezzzeria.</i>	173
2.3.2.1 <i>Analisi carico di instabilità.....</i>	173
2.3.2.2 <i>Analisi di collasso con imperfezioni iniziali-modo I.....</i>	173

2.3.3	Analisi schema doppio incastro: carico in mezzeria.	175
2.3.3.1	Analisi carico di instabilità	175
2.3.3.2	Analisi di collasso con imperfezioni iniziali-modo I.....	175
2.4	<i>Sezione a doppia T</i>	177
2.4.1	Analisi schema semplice appoggio: carico di punta.....	177
2.4.1.1	Analisi carico di instabilità	177
2.4.1.2	Analisi di collasso con imperfezioni iniziali-modo I.....	178
2.4.2	Analisi schema semplice appoggio: carico in mezzeria.	180
2.4.2.1	Analisi carico di instabilità	180
2.4.2.2	Analisi di collasso con imperfezioni iniziali-modo I.....	180
2.4.3	Analisi schema doppio incastro: carico in mezzeria.	182
2.4.3.1	Analisi carico di instabilità	182
2.4.3.2	Analisi di collasso con imperfezioni iniziali-modo I.....	182
2.5	<i>Sezione a C</i>	184
2.5.1	Analisi schema semplice appoggio: carico di punta.....	184
2.5.1.1	Analisi carico di instabilità	184
2.5.1.2	Analisi di collasso con imperfezioni iniziali-modo I.....	185
2.5.2	Analisi schema semplice appoggio: carico in mezzeria.	187
2.5.2.1	Analisi carico di instabilità	187
2.5.2.2	Analisi di collasso con imperfezioni iniziali-modo I.....	187
2.5.3	Analisi schema doppio incastro: carico in mezzeria.	189
2.5.3.1	Analisi carico di instabilità	189
2.5.3.2	Analisi di collasso con imperfezioni iniziali-modo I.....	189
2.6	<i>Confronti risultati</i>	191
3	ELABORATI SEZIONI	193
	Bibliografia.....	195

INDICE DELLE FIGURE

Figura 1-1. Tipi instabilità di profilo sottili.....	22
Figura 1-2. Sezione efficace tipica di profilo sottili.....	23
Figura 1-3. Sezione Mesh FEM vs FSM.....	26
Figura 2-1. Diagramma tensione-deformazione.....	31
Figura 2-2. Sezione di tipo profilati formati a caldo.....	33
Figura 2-3. Sezione tipo composte.....	34
Figura 2-4. Sezione costruite.....	34
Figura 2-5. Forme dei profilati a freddo.....	35
Figura 2-6. Esempi di sezioni con profilati a freddo di base.....	35
Figura 2-7. Tipi di irrigidimenti profilati formati a freddo.....	36
Figura 2-8. Sintesi classificazione delle sezioni secondo EC'3.....	38
Figura 2-9. Diagramma momento-curvatura classi sezioni secondo EC'3.....	38
Figura 2-10. Dimensione tipiche della sezione.....	39
Figura 2-11. Convenzioni assi profili.....	39
Figura 2-12. Modellazione di imperfezioni geometriche equivalenti. EN 1993-1-5.....	43
Figura 2-13. Comportamento del materiale. EN 1993-1-5.....	44
Figura 3-1. Schema trave rettilinea effetti secondo ordine.....	48
Figura 3-2. Modi critici di deformazione.....	50
Figura 3-3. Iperbole di Eulero.....	51
Figura 3-4. Sistema 1 calcolo imperfezioni.....	51
Figura 3-5. Sistema 1 calcolo imperfezioni asta imperfetta.....	52
Figura 3-6. Risposta strutturale con la variazione delle imperfezioni. Pozzati P. 1987.....	53
Figura 3-7. Trave soggetta a instabilità flesso-torsionale.....	53
Figura 3-8. Lastra piana.....	55
Figura 3-9. Lastra rettangolare soggetta a forza N_x	57
Figura 3-10. Deformate e carico critico in lastre rettangolari.....	58
Figura 3-11. Sezione caratterizzata per instabilità locale.....	59
Figura 3-12. Sezione caratterizzata per instabilità distorsionale.....	60
Figura 3-13. Sezione caratterizzata per instabilità globale.....	60
Figura 3-14. Curva caratteristica instabilità sezione sottili.....	61
Figura 4-1. Discretizzazione tipica di alcune strutture.....	66
Figura 4-2. Configurazione di strisce e prismi.....	71
Figura 5-1. Sezioni trasversali profili tipici.....	82
Figura 5-2. Schema strutturale.....	82
Figura 5-3. Schema e risultato modo 1, modello FEM, profilo 1. L=500 mm.....	85
Figura 5-4. Schema e risultato modo 1, modello FEM, profilo 1. L=1000 mm.....	85
Figura 5-5. Schema e risultato modo 1, modello FEM, profilo 1. L=1500 mm.....	86
Figura 5-6. Schema e risultato modo 1, modello FEM, profilo 1. L=2000 mm.....	86
Figura 5-7. Schema e risultato modo 1, modello FEM, profilo 1. L=2500 mm.....	86

Figura 5-8. Schema e risultato modo 1, modello FEM, profilo 1. L=3000 mm.....	86
Figura 5-9. Schema e risultato modo 1, modello FEM, profilo 1. L=3500 mm.....	87
Figura 5-10. Schema e risultato modo 1, modello FEM, profilo 1. L=4000 mm.....	87
Figura 5-11. Schema e risultato modo 1, modello FEM, profilo 1. L=4500 mm.....	87
Figura 5-12. Schema e risultato modo 1, modello FEM, profilo 1. L=5000 mm.....	87
Figura 5-13. Schema e risultato modo 1, modello FEM, profilo 1. L=5500 mm.....	88
Figura 5-14. Schema e risultato modo 1, modello FEM, profilo 1. L=6000 mm.....	88
Figura 5-15. Schema e risultato modo 1, modello FEM, profilo 1. L=6500 mm.....	88
Figura 5-16. Schema e risultato modo 1, modello FEM, profilo 1. L=7000 mm.....	88
Figura 5-17. Risultati carico instabilità profilo 1 modello FEM.	89
Figura 5-18. Carico instabilità vs snellezza profilo 1 modello FEM.....	89
Figura 5-19. Schema e risultato modo 1, modello FEM, profilo 2. L=500 mm.....	90
Figura 5-20. Schema e risultato modo 1, modello FEM, profilo 2. L=1000 mm.....	90
Figura 5-21. Schema e risultato modo 1, modello FEM, profilo 2. L=1500 mm.....	91
Figura 5-22. Schema e risultato modo 1, modello FEM, profilo 2. L=2000 mm.....	91
Figura 5-23. Schema e risultato modo 1, modello FEM, profilo 2. L=2500 mm.....	91
Figura 5-24. Schema e risultato modo 1, modello FEM, profilo 2. L=3000 mm.....	91
Figura 5-25. Schema e risultato modo 1, modello FEM, profilo 2. L=3500 mm.....	92
Figura 5-26. Schema e risultato modo 1, modello FEM, profilo 2. L=4000 mm.....	92
Figura 5-27. Schema e risultato modo 1, modello FEM, profilo 2. L=4500 mm.....	92
Figura 5-28. Schema e risultato modo 1, modello FEM, profilo 2. L=5000 mm.....	92
Figura 5-29. Schema e risultato modo 1, modello FEM, profilo 2. L=5500 mm.....	93
Figura 5-30. Schema e risultato modo 1, modello FEM, profilo 2. L=6000 mm.....	93
Figura 5-31. Schema e risultato modo 1, modello FEM, profilo 2. L=6500 mm.....	93
Figura 5-32. Schema e risultato modo 1, modello FEM, profilo 2. L=7000 mm.....	93
Figura 5-33. Risultati carico instabilità profilo 2 modello FEM.	94
Figura 5-34. Carico instabilità vs snellezza profilo 2 modello FEM.....	94
Figura 5-35. Schema e risultato modo 1, modello FEM, profilo 3. L=500 mm.....	95
Figura 5-36. Schema e risultato modo 1, modello FEM, profilo 3. L=1000 mm.....	95
Figura 5-37. Schema e risultato modo 1, modello FEM, profilo 3. L=1500 mm.....	96
Figura 5-38. Schema e risultato modo 1, modello FEM, profilo 3. L=2000 mm.....	96
Figura 5-39. Schema e risultato modo 1, modello FEM, profilo 3. L=2500 mm.....	96
Figura 5-40. Schema e risultato modo 1, modello FEM, profilo 3. L=3000 mm.....	96
Figura 5-41. Schema e risultato modo 1, modello FEM, profilo 3. L=3500 mm.....	97
Figura 5-42. Schema e risultato modo 1, modello FEM, profilo 3. L=4000 mm.....	97
Figura 5-43. Schema e risultato modo 1, modello FEM, profilo 3. L=4500 mm.....	97
Figura 5-44. Schema e risultato modo 1, modello FEM, profilo 3. L=5000 mm.....	97
Figura 5-45. Schema e risultato modo 1, modello FEM, profilo 3. L=5500 mm.....	98
Figura 5-46. Schema e risultato modo 1, modello FEM, profilo 3. L=6000 mm.....	98
Figura 5-47. Schema e risultato modo 1, modello FEM, profilo 3. L=6500 mm.....	98
Figura 5-48. Schema e risultato modo 1, modello FEM, profilo 3. L=7000 mm.....	98
Figura 5-49. Risultati carico instabilità profilo 3 modello FEM.	99
Figura 5-50. Carico instabilità vs snellezza profilo 3 modello FEM.....	99
Figura 5-51. Schema e risultato modo 1, modello FEM, profilo 4. L=500 mm.....	100

Figura 5-52. Schema e risultato modo 1, modello FEM, profilo 4. L=1000 mm.....	100
Figura 5-53. Schema e risultato modo 1, modello FEM, profilo 4. L=1500 mm.....	101
Figura 5-54. Schema e risultato modo 1, modello FEM, profilo 4. L=2000 mm.....	101
Figura 5-55. Schema e risultato modo 1, modello FEM, profilo 4. L=2500 mm.....	101
Figura 5-56. Schema e risultato modo 1, modello FEM, profilo 4. L=3000 mm.....	101
Figura 5-57. Schema e risultato modo 1, modello FEM, profilo 4. L=3500 mm.....	102
Figura 5-58. Schema e risultato modo 1, modello FEM, profilo 4. L=4000 mm.....	102
Figura 5-59. Schema e risultato modo 1, modello FEM, profilo 4. L=4500 mm.....	102
Figura 5-60. Schema e risultato modo 1, modello FEM, profilo 4. L=5000 mm.....	102
Figura 5-61. Schema e risultato modo 1, modello FEM, profilo 4. L=5500 mm.....	103
Figura 5-62. Schema e risultato modo 1, modello FEM, profilo 4. L=6000 mm.....	103
Figura 5-63. Schema e risultato modo 1, modello FEM, profilo 4. L=6500 mm.....	103
Figura 5-64. Schema e risultato modo 1, modello FEM, profilo 4. L=7000 mm.....	103
Figura 5-65. Risultati carico instabilità profilo 4 modello FEM.	104
Figura 5-66. Carico instabilità vs snellezza profilo 4 modello FEM.....	104
Figura 5-67. Schema e risultato modo 1, modello FEM, profilo 5. L=500 mm.....	105
Figura 5-68. Schema e risultato modo 1, modello FEM, profilo 5. L=1000 mm.....	105
Figura 5-69. Schema e risultato modo 1, modello FEM, profilo 5. L=1500 mm.....	106
Figura 5-70. Schema e risultato modo 1, modello FEM, profilo 5. L=2000 mm.....	106
Figura 5-71. Schema e risultato modo 1, modello FEM, profilo 5. L=2500 mm.....	106
Figura 5-72. Schema e risultato modo 1, modello FEM, profilo 5. L=3000 mm.....	106
Figura 5-73. Schema e risultato modo 1, modello FEM, profilo 5. L=3500 mm.....	107
Figura 5-74. Schema e risultato modo 1, modello FEM, profilo 5. L=4000 mm.....	107
Figura 5-75. Schema e risultato modo 1, modello FEM, profilo 5. L=4500 mm.....	107
Figura 5-76. Schema e risultato modo 1, modello FEM, profilo 5. L=5000 mm.....	107
Figura 5-77. Schema e risultato modo 1, modello FEM, profilo 5. L=5500 mm.....	108
Figura 5-78. Schema e risultato modo 1, modello FEM, profilo 5. L=6000 mm.....	108
Figura 5-79. Schema e risultato modo 1, modello FEM, profilo 5. L=6500 mm.....	108
Figura 5-80. Schema e risultato modo 1, modello FEM, profilo 5. L=7000 mm.....	108
Figura 5-81. Risultati carico instabilità profilo 5 modello FEM.	109
Figura 5-82. Carico instabilità vs snellezza profilo 1 modello FEM.....	109
Figura 5-83. Risultati modello FSM, profilo 1. L=100 mm, L=200 mm.	110
Figura 5-84. Risultati modello FSM, profilo 1. L=500 mm, L=1000 mm.	110
Figura 5-85. Risultati modello FSM, profilo 1. L=1500 mm, L=2000 mm.	111
Figura 5-86. Risultati modello FSM, profilo 1. L=2500 mm, L=3000 mm.	111
Figura 5-87. Risultati modello FSM, profilo 1. L=3500 mm, L=4000 mm.	111
Figura 5-88. Risultati modello FSM, profilo 1. L=4500 mm, L=5000 mm.	112
Figura 5-89. Risultati modello FSM, profilo 1. L=5500 mm, L=6000 mm.	112
Figura 5-90. Risultati modello FSM, profilo 1. L=6500 mm, L=7000 mm.	112
Figura 5-91. Risultati carico instabilità profilo 1 modello FSM.	113
Figura 5-92. Carico instabilità vs snellezza profilo 1 modello FSM.....	113
Figura 5-93. Risultati modello FSM, profilo 2. L=100 mm, L=200 mm.	114
Figura 5-94. Risultati modello FSM, profilo 2. L=500 mm, L=1000 mm.	114
Figura 5-95. Risultati modello FSM, profilo 2. L=1500 mm, L=2000 mm.	115

Figura 5-96. Risultati modello FSM, profilo 2. L=2500 mm, L=3000 mm.	115
Figura 5-97. Risultati modello FSM, profilo 2. L=3500 mm, L=4000 mm.	115
Figura 5-98. Risultati modello FSM, profilo 2. L=4500 mm, L=5000 mm.	116
Figura 5-99. Risultati modello FSM, profilo 2. L=5500 mm, L=6000 mm.	116
Figura 5-100. Risultati modello FSM, profilo 2. L=6500 mm, L=7000 mm.	116
Figura 5-101. Risultati carico instabilità profilo 2- modello FSM.	117
Figura 5-102. Carico instabilità vs snellezza profilo 2 - modello FSM.	117
Figura 5-103. Risultati modello FSM, profilo 3. L=100 mm, L=200 mm.	118
Figura 5-104. Risultati modello FSM, profilo 3. L=500 mm, L=1000 mm.	118
Figura 5-105. Risultati modello FSM, profilo 3. L=1500 mm, L=2000 mm.	119
Figura 5-106. Risultati modello FSM, profilo 3. L=2500 mm, L=3000 mm.	119
Figura 5-107. Risultati modello FSM, profilo 3. L=3500 mm, L=4000 mm.	119
Figura 5-108. Risultati modello FSM, profilo 3. L=4500 mm, L=5000 mm.	120
Figura 5-109. Risultati modello FSM, profilo 3. L=5500 mm, L=6000 mm.	120
Figura 5-110. Risultati modello FSM, profilo 3. L=6500 mm, L=7000 mm.	120
Figura 5-111. Risultati carico instabilità profilo 3- modello FSM.	121
Figura 5-112. Carico instabilità vs snellezza profilo 3 - modello FSM.	121
Figura 5-113. Risultati modello FSM, profilo 4. L=100 mm, L=200 mm.	122
Figura 5-114. Risultati modello FSM, profilo 4. L=500 mm, L=1000 mm.	122
Figura 5-115. Risultati modello FSM, profilo 4. L=1500 mm, L=2000 mm.	123
Figura 5-116. Risultati modello FSM, profilo 4. L=2500 mm, L=3000 mm.	123
Figura 5-117. Risultati modello FSM, profilo 4. L=3500 mm, L=4000 mm.	123
Figura 5-118. Risultati modello FSM, profilo 4. L=4500 mm, L=5000 mm.	124
Figura 5-119. Risultati modello FSM, profilo 4. L=5500 mm, L=6000 mm.	124
Figura 5-120. Risultati modello FSM, profilo 4. L=6500 mm, L=7000 mm.	124
Figura 5-121. Risultati carico instabilità profilo 4- modello FSM.	125
Figura 5-122. Carico instabilità vs snellezza profilo 4 - modello FSM.	125
Figura 5-123. Risultati modello FSM, profilo 5. L=100 mm, L=200 mm.	126
Figura 5-124. Risultati modello FSM, profilo 5. L=500 mm, L=1000 mm.	126
Figura 5-125. Risultati modello FSM, profilo 5. L=1500 mm, L=2000 mm.	127
Figura 5-126. Risultati modello FSM, profilo 5. L=2500 mm, L=3000 mm.	127
Figura 5-127. Risultati modello FSM, profilo 5. L=3500 mm, L=4000 mm.	127
Figura 5-128. Risultati modello FSM, profilo 5. L=4500 mm, L=5000 mm.	128
Figura 5-129. Risultati modello FSM, profilo 5. L=5500 mm, L=6000 mm.	128
Figura 5-130. Risultati modello FSM, profilo 5. L=6500 mm, L=7000 mm.	128
Figura 5-131. Risultati carico instabilità profilo 5- modello FSM.	129
Figura 5-132. Carico instabilità vs snellezza profilo 5 - modello FSM.	129
Figura 5-133. Confronto carichi instabilità profilo 1, FEM - FSM.	130
Figura 5-134. Confronto carichi instabilità profilo 2, FEM - FSM.	131
Figura 5-135. Confronto carichi instabilità profilo 3, FEM - FSM.	133
Figura 5-136. Confronto carichi instabilità profilo 4, FEM - FSM.	133
Figura 5-137. Confronto carichi instabilità profilo 5, FEM - FSM.	135
Figura a1-1. Caratteristiche geometriche sezione circolare cava	142
Figura a1-2. Relazione formule usate in calcolo del NbRd.....	142

Figura a1-3. Modello sezione cava in EF.	143
Figura a1-4. Risposta Buckling modello sezione cava in EF.	144
Figura a1-5. Funzione per rappresentare la geometria iniziale dell'asta.	146
Figura a1-6. Procedura risposta iterativa modello sezione cava in EF.	146
Figura a1-7. Risposta modello step 15. Sezione cava in EF.	148
Figura a1-8. Curve di risposta analisi asta con imperfezioni iniziali, forma sinusoidale .	150
Figura a1-9. Risposta analisi di frequenza asta semplice, 1 e 2 modo, attraverso Adina .	151
Figura a1-10. Risposta analisi di collasso (Collapse analysis) modo 1, attraverso Adina .	152
.....	152
Figura a1-11. Andamento della risposta modo 1, attraverso Adina .	154
Figura a1-12. Confronto risposta metodologia geometrica e modo I-Adina.	154
Figura a2-1. Sezione trasversale per studio di Adina.	157
Figura a2-2. Configurazione strutturale per studio in Adina.	159
Figura a2-3. Sequenza temporale di applicazione dei carichi per buckling e collasso	159
Figura a2-4. Comportamento del carico di collasso in funzione dello spostamento massimo iniziale	161
Figura a2-5. Schemi di calcolo 4 sezioni.	162
Figura a2-6. Schema figura riassuntiva dati input, risultati e confronto.	162
Figura a2-7. Sezione rettangolare: schemi strutturale e sezione.	163
Figura a2-8. Sezione rettangolare: schemi strutturale 1.	165
Figura a2-9. Sezione rettangolare: schemi strutturale 2.	167
Figura a2-10. Sezione rettangolare: schemi strutturale 3.	169
Figura a2-11. Sezione rettangolare cava: schemi strutturale e sezione.	170
Figura a2-12. Sezione rettangolare cava: schemi strutturale 1.	172
Figura a2-13. Sezione rettangolare cava: schemi strutturale 2.	174
Figura a2-14. Sezione rettangolare cava: schemi strutturale 3.	176
Figura a2-15. Sezione a doppia T: schemi strutturale e sezione.	177
Figura a2-16. Sezione a doppia t: schemi strutturale 1.	179
Figura a2-17. Sezione a doppia t: schemi strutturale 2.	181
Figura a2-18. Sezione a doppia t: schemi strutturale 3.	183
Figura a2-19. Sezione a C: schemi strutturale e sezione.	184
Figura a2-20. Sezione a C: schemi strutturale 1.	186
Figura a2-21. Sezione a C: schemi strutturale 2.	188
Figura a2-22. Sezione a C: schemi strutturale 3.	190

INDICE DELLE TABELLE

Tabella 2-1. Valori nominali della resistenza di snervamento f_y e della resistenza a trazione f_u per acciai strutturali laminati a caldo.	30
Tabella 2-2. Valori nominali della resistenza di snervamento f_y e della resistenza a trazione f_u per profili cavi strutturali.	30
Tabella 2-3. Valori nominali della resistenza di snervamento f_{yb} e della resistenza a trazione f_u per profilati e lamiere sottili piegati a freddo.	31
Tabella 2-4. Assunzioni per metodi FE- EN 1993-1-5.	40
Tabella 2-5. Imperfezioni geometriche equivalenti. Metodi FE- EN 1993-1-5.	42
Tabella 2-6. Imperfezioni geometriche EN-1993-1-1, tabella 5.1.	42
Tabella 4-1. Confronto tra il metodo degli elementi finiti e il metodo delle strisce finite. .	65
Tabella 5-1. Proprietà profili sottili.	82
Tabella 5-2. Caratterizzazione modello FEM profilo 1.	85
Tabella 5-3. Carichi di instabilità profilo 1 – modello FEM.	89
Tabella 5-4. Caratterizzazione modello FEM profilo 2.	90
Tabella 5-5. Carichi di instabilità profilo 2 – modello FEM.	94
Tabella 5-6. Caratterizzazione modello FEM profilo 3.	95
Tabella 5-7. Carichi di instabilità profilo 3 – modello FEM.	99
Tabella 5-8. Caratterizzazione modello FEM profilo 4.	100
Tabella 5-9. Carichi di instabilità profilo 4 – modello FEM.	104
Tabella 5-10. Caratterizzazione modello FEM profilo 5.	105
Tabella 5-11. Carichi di instabilità profilo 5 – modello FEM.	109
Tabella 5-12. Carichi di instabilità profilo 1 – modello FSM.	113
Tabella 5-13. Carichi di instabilità profilo 2 – modello FSM.	117
Tabella 5-14. Carichi di instabilità profilo 3 – modello FSM.	121
Tabella 5-15. Carichi di instabilità profilo 4 – modello FSM.	125
Tabella 5-16. Carichi di instabilità profilo 5 – modello FSM.	129
Tabella a1-1. Calcoli riassunti sezione circolari.	143
Tabella a1-2. Riassunto analisi asta con imperfezioni iniziali, forma sinusoidale.	149
Tabella a1-3. Riassunto Analisi di collasso con imperfezioni iniziali modo I.	153
Tabella a1-4. Confronto risultati modellazione asta sezione circolare cava con imperfezioni iniziali.	155
Tabella a2-1. Valori costanti funzioni temporali.	159
Tabella a2-2. Confronto carico instabilità 4 sezioni.	191

Capitolo

1

STATO DELL'ARTE

Lo studio del comportamento dell'instabilità in sezioni sottili è uno dei argomenti di maggiore interesse e studio nel settore delle strutture in acciaio laminato a freddo.

Il principale motivo di questo interesse è che tali sezioni vengono usati in arcarecci, monorotaie, orditura di sostegno delle baraccature perimetrali per i capannoni industriali, nei solai misti come trave secondarie o terziarie, nelle strutture provvisorie, nelle costruzioni a massa, ecc., rappresentando un peso considerevole nella produzione mondiale dell'acciaio.

Le sezioni sottili laminati a freddo sono caratterizzate particolarmente dalla loro instabilità locale e/o distorsionale della sezione trasversale. Quindi, l'instabilità delle flange e dell'anima come la distorsione della sezione trasversale devono essere considerate come parte fondamentale o essenziale della progettazione (figura 1-1).

L'utilizzo delle sezioni sottili comporta dei benefici tali come l'aumento della risorsa di capacità delle singole lastre in modo locale per lo stato post-critico. Ugualmente dal punto di vista relazione capacità ultima – peso della sezione, la quale è più efficace

La sfida in ogni metodo di analisi proposto, è poter considerare questi fenomeni complessi, i quali non sono presenti nelle *sezioni compatte*, in modo tale di ottenere una soluzione semplice e poco complicata considerando ulteriori incertezze, dovute alla carenza di simmetria e al suo processo proprio di produzione ed di applicazione.

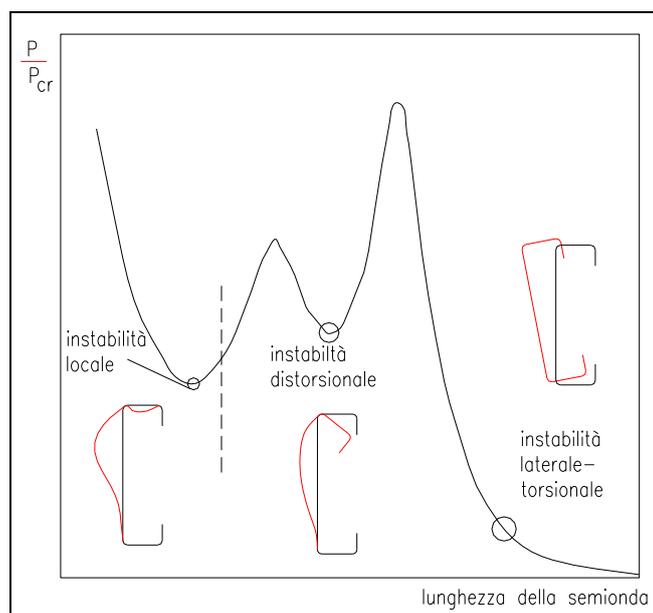


Figura 1-1. Tipi instabilità di profilo sottili.

Attualmente, non esiste un approccio analitico, rigoroso e deterministico per il calcolo del carico di instabilità in tutti i modi (locale, distorsionale e globale) applicabile nelle sezioni sottili in acciaio. Gli attuali strumenti di calcolo sono limitati o abbastanza complessi nella sua applicazione non proponendo un approccio generale.

Un tipico approccio all'analisi di questi tipi di instabilità proposto nell'Eurocodice EC3, consiste nella determinazione delle caratteristiche geometriche efficaci con eventuale determinazione dello spessore equivalente ridotto delle zone interessate per via iterativa, ed applicazione dei diversi modelli di calcolo nei diversi irrigidimenti di bordo.

1.1 Metodi di analisi sezioni sottili a freddo

I metodi di più usati ed importanti per analisi delle sezioni sottili sono:

- metodo della larghezza efficace (EWM – Effective Width Method)
- metodo della resistenza diretta (DSM – Direct Strength Method)
- metodo degli sforzi ridotti (RSM- Reduce Stress Method)
- metodo dello spessore efficace (ETM – Effective Thickness Method)
- l'approccio del fattore Q
- Erosion of critical Bifurcation Load [1 , 2]

Tra i metodi più diffusi si trovano il metodo EWM (Effective Width Method) come la base delle specifiche principali della normativa americana [3] e gran parte della

normativa mondiale, e il metodo DSM [4] (Direct Strength Method) applicato come appendice di progettazione in Nord America, Australia e Nuova Zelanda.

1.1.1 Il metodo della larghezza efficace

I principi del metodo della larghezza efficace sono correntemente spiegati nella letteratura tecnica e nelle diverse normative. Il concetto principale è che l’instabilità locale della flangia porti alla riduzione della parte resistente dei diversi elementi (l’anima, flangi, irrigidizzatori) che compongono la sezione trasversale del profilo (figura 1-2).

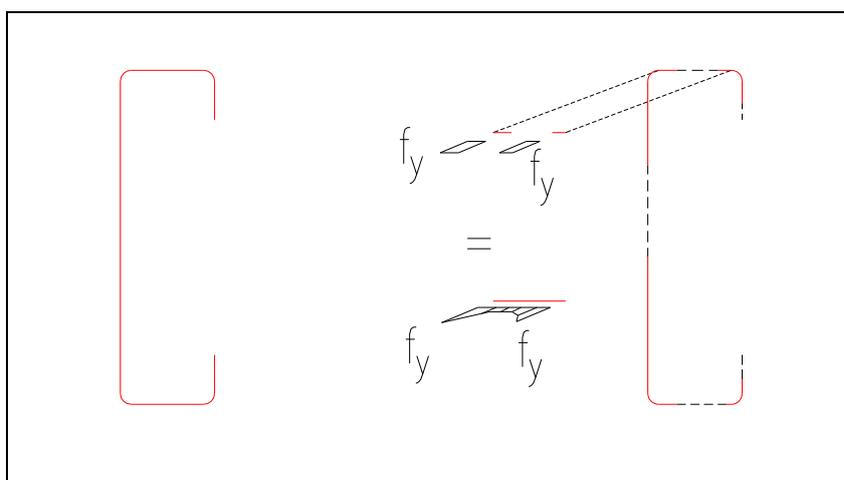


Figura 1-2. Sezione efficace tipica di profilo sottili.

Questa riduzione nella larghezza della flangia può intendersi come un’approssimazione tra l’uguaglianza delle tensione medie agenti sull’intera lastra e quella tensione massima nella sezione penalizzata. La riduzione della larghezza viene fatta su tutte le lastre che compongono la sezione trasversale.

Alcune considerazioni sono presenti nell’applicazione del modello della larghezza efficace:

- Fornisce un modello della sezione trasversale dove il materiale è inefficace.
- Riduzione dell’area grossa della sezione e redistribuzione degli sforzi: La redistribuzione media degli sforzi nella lunghezza efficace porta a disstimare la variazione degli sforzi nella sezione trasversale e anche nella lunghezza propria della membratura.
- Cambiamento nella la posizione dell’baricentro della sezione
- Influenza nel vero comportamento dell’instabilità dell’elemento.
- L’interazione flangia-anima riguardo alla compatibilità dell’equilibrio flessionale non è presa in considerazione.
- Uso di iterazioni ingombranti per ottenere lo sforzo della lastra.
- Possono essere presenti modi spuri nel modo di instabilità distorsionale.

- Comportamenti di sforzi semplici sono assunti in modo complesso.
- Nel caso di ottimizzazione della sezione, il calcolo della sezione efficace può diventare una attività non banale.

Il metodo della larghezza efficace è una metodologia abbastanza usata, ma i suoi principali approcci sono legati alla teoria degli elementi bidimensionali che fornisce a una metodologia di progettazione diversa dalla progettazione convenzionale delle sezioni formate a caldo. Questo ultimo provoca un non uso dei profili sottili da parte degli ingegneri.

L'Eurocodice 3, basato nel metodo agli stati ultimi, comprende la progettazione delle strutture in acciaio. Inoltre, è stata introdotta la classificazione delle sezioni trasversale per la caratterizzazione della capacità rotazionale (C_{θ}) che è dipendente e limitata dalla instabilità locale delle parti soggette a compressione nella sezione trasversale dell'elemento.

Nella corrispondente classificazione, le sezioni sottili aperti di solito classificati in classe 4, con il suo analisi è condotto sotto la teoria degli elementi bidimensionali, facendo riferimento alla caratterizzazione del metodo della larghezza efficace.

La sua parte 1-3 specifica le regole supplementari per la progettazione di membratura e lamiere grecate di acciaio ottenute mediante piegatura a freddo di prodotti piani laminati a caldo oppure a freddo, rivestiti o non rivestiti.

UNI EN 1993-1-3 “*Design of steel structures. Part 1-3: General rules - Supplementary rules for cold-formed members and sheeting*” nella sua parte 2 “*Basis of design*” specifica la progettazione dei profilati e delle lamiere sottili piegati a freddo secondo le regole generali UNI EN 1990 e UNI EN 1993-1-1 ed inoltre consente l'uso dell'approccio generale attraverso metodi di elementi finiti (FE-methods) specificati in UNI EN 1993-1-5 “*Design of steel structures. Part 1-5: Plated structural elements*” nel suo appendice C.

1.1.2 Metodo della resistenza diretta

Il metodo DSM è fondato sull'idea che è possibile conoscere o determinare tutti i tipi di instabilità presenti nella sezione lorda, cioè l'instabilità locale, l'instabilità torsionale e l'instabilità globale, e determinare le sollecitazioni che portano all'elemento alla resistenza di snervamento (f_y). Questi ultimi valori sono usati per determinare la resistenza dell'elemento [5].

Nel caso di carico assiale:

$$P_n = f: (P_{cre}, P_{cr\lambda}, P_{crd})$$

In cui:

- P_{cre} : minimo carico elastico di instabilità: flessionale, torsionale, flesso-torsionale.
- $P_{cr\lambda}$: carico elastico di instabilità locale
- P_{crd} : carico elastico di instabilità distorsionale

Il metodo della resistenza diretta è l’applicazione delle curve per instabilità globale in colonne, ma viene applicato nelle instabilità locale e torsionale.

L’Istituto Americano del ferro e dell’acciaio (American Iron and Steel Institute) ha sponsorizzata la ricerca riguardo allo sviluppo di strumenti per il calcolo dei carichi di instabilità nelle sezioni sottili aperti ch’è stata condotta nella università di Johns Hopkins [6]. Questa ricerca ha preso in considerazione il metodo delle strisce finite.

1.2 Istrumenti computazionale

Per studiare il modello non lineare, uno strumento è quello dell’uso della simulazione computazionale. In questo campo, i metodi numerici più usati che permettono di ricavare il carico di instabilità sono:

- Il metodo degli elementi finiti (FEM, dall’inglese Finite Element Method)
- Il metodo delle strisce finite (FSM, dall’inglese Finite Strip Method)
- Il metodo della trave generalizzata (GBT, dall’inglese Generalised Beam Theory).

È opportuno precisare che nessun metodo è teoricamente corretto, nonostante tutti i metodi consentano di tenere una semplificazione a un complicato e complesso problema non lineare, e facilitano così il lavoro dell’ingegnere dovuto a che non è richiesto testare ogni elemento a progettare quando questo viene usato.

1.2.1 Il metodo degli elementi finiti

È il metodo più conosciuto nella ingegneria strutturale, di solito è applicato a qualsiasi tipo di elemento strutturale, sotto qualsiasi sollecitazione di carico e condizioni di contorno e/o frontiera.

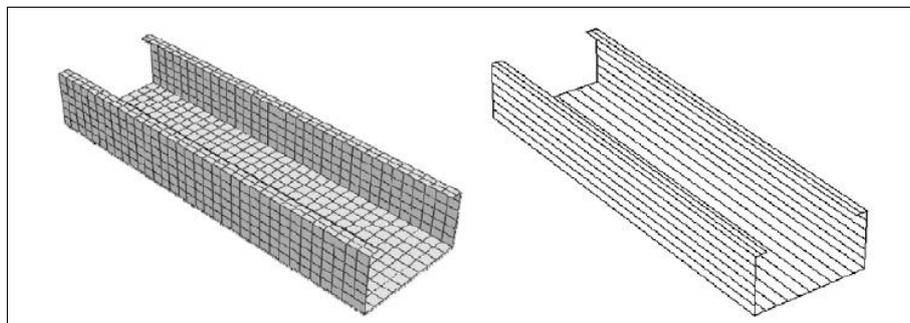
Il FEM presenta lo svantaggio di usare grandi risorse di tempo nello sviluppo dei calcoli, giacché nella realizzazione del modello, il numero di elementi finiti richiesti per la discretizzazione e interpolazione è relativamente elevato, aggiungendo un gran numero di gradi di libertà.

Attualmente è disponibile un gran numero di software per l’analisi agli elementi finiti a livello commerciale, ad esempio: ADINA, ABAQUS, ANSYS, LUSAS, AUTODESK NASTRAN.

1.2.2 Il metodo della striscia finita

È una variazione del metodo degli elementi finiti. La differenza sostanziale viene fatta nella discretizzazione, mentre FEM impiega la discretizzazione in entrambi le direzioni

(trasversale e longitudinale), FSM usa la discretizzazione nella direzione trasversale ed un unico elemento nella longitudinale. In questo caso si fa soltanto riferimento a un profilo sottili (figura 1-3).



*Figura 1-3. Sezione Mesh FEM vs FSM.
Riferimento Fonte [7]*

1.2.3 Il metodo della trave generalizzata

Il metodo della trave generalizzata, GBT, è una estensione della teoria generale delle travi.

La sua principale caratteristica è quella di considerare una cinematica della sezione trasversale del tutto generale, dove la configurazione deformata della membratura è espressa come combinazione lineare di predeterminati modi deformativi della sezione. Attualmente è applicata nell’analisi torsionale di elementi prismatici e lastre [8].

Oltre alla suddetta caratteristica, la teoria GBT consente di includere gli effetti di distorsione della sezione del profilo nel calcolo, analogo a un modo di corpo rigido; classificare e calcolare i modi di instabilità di maniera automatica e indipendente per ogni modo; impiegare tempi di calcolo minore di FSM e FEM, dovuto al minore numero di gradi di libertà.

Il GBT considera le ipotesi rispetto alla deformazione del profilo, limitando il suo campo d’applicazione. Questo svantaggio insieme alla poca letteratura sull’argomento limitano la sua conoscenza.

Nello scopo di impostare il problema è richiesto tenere conto le imperfezioni geometriche [9], gli sforzi residuali e l’assunzione del modello rispetto ad elementi e materiali [10].

Sebbene tutte queste assunzioni sono prese in considerazione, l’attuale ricerca globale nel campo della stabilità può cambiare queste.

1.3 Scopo e obiettivi

Lo scopo di questa tesi è centrato a confrontare l’analisi di instabilità di profili in acciaio sottili laminati a freddo soggetti a carico di punta usando tecniche numerici.

Queste due metodi sono: il metodo degli elementi finiti-FEM e il metodo della strisce finite-FSM.

Il metodo FEM viene applicato tramite l’uso dell’algoritmo non lineare proprio del software commerciale Adina (Automatic Dynamic Incremental Nonlinear Analysis), invece il metodo FSM viene adottato con il software cuFSM (conventional and constrained Finite Strip Method) sviluppato nella Università Johns Hopkins per il professore Ben Schafer.

I principali obiettivi individuati nel sviluppo di questo lavoro di tesi sono:

Confrontare come l’approssimazione nelle funzione di forme longitudinali in FSM influiscono nel valore del carico di instabilità ed la sua incidenza nella curva di risposta di instabilità per entrambi i metodi.

Conoscere la capacità di ogni metodo nella determinazione del tipo di instabilità con i suoi corrispondenti vantaggi o svantaggi

Analizzare e valutare la incidenza della modellazione del vincoli nel risultato instabile.

Analizzare l’influenza delle imperfezioni geometriche iniziale nel carico critico totale del profilo

Infine, valutare se il risparmio di tempo e capacità computazionale in confronto alla percentuale di errore tra entrambi metodi è un fattore decisivo nella scelta del metodo usato per l’analisi.

Capitolo

2

PROFILI SOTTILI IN ACCIAIO

I prodotti di acciaio laminato a freddo sono il risultato di processi siderurgici di tipo flessibile nella fase di laminazione del materiale, con scopo di ottenere piccoli spessori portando con sé un ottimo risparmio di materiale rispetto ai classici profili laminati a caldo. Questi processi, in aggiunta ad opportuni rapporti di diversi elementi (manganese, silicio, cromo, nichel) nella lega ferro-carbonio (Fe-C), garantiscono una elevata resistenza ed assicurano sezioni sottili con l'obiettivo di avere rendimenti strutturali, economici ed ambientali molto elevati.

2.1 Materiale

L'acciaio, usato nei diversi elementi delle costruzioni metalliche, è formato di una lega ferro-carbonio con una bassa percentuale di carbonio compresa tra 0.1 e 0.3% ed in circa il 98% di ferro. Sono presenti o aggiunti nella lega materiali come fosforo (P), zolfo (S), manganese (Mn), silicio (Si), cromo (Cr), nichel (Ni) che ottimizzano o abbassano le sue prestazioni e caratteristiche meccaniche tali come resistenza, duttilità, saldabilità, fragilità, tendenza alla rottura fragile, corrosione e deformabilità.

Le normatività europea ed italiane (Eurocodice e Norme Tecniche per le Costruzioni-NTC) forniscono i tipi di acciaio e le loro caratteristiche meccaniche. Nella tabella 2-1 e tabella 2-2 sono riportati i valori di resistenza di snervamento e di trazione ultima per acciai strutturali laminati a caldo. La tabella 2-3 riporta gli stessi valori per acciai laminati a freddo.

Tabella 2-1. Valori nominali della resistenza di snervamento f_y e della resistenza a trazione f_u per acciai strutturali laminati a caldo.

Norma e tipo di acciaio		Spessore nominale dell'elemento t[mm]			
		t ≤ 40 mm		40 mm < t ≤ 80 mm	
		f_y [N/mm ²]	f_u [N/mm ²]	f_y [N/mm ²]	f_u [N/mm ²]
EN 10025-2	S 235	235	360	215	360
	S 275	275	430	255	410
	S 355	355	510	335	470
	S 450	440	550	410	550
EN 10025-3	S 275 N/NL	275	390	255	370
	S 355 N/NL	355	490	335	470
	S 420 N/NL	420	520	390	520
	S 460 N/NL	460	540	430	540
EN 10025-4	S 275 M/ML	275	370	255	360
	S 355 M/ML	355	470	335	450
	S 420 M/ML	420	520	390	500
	S 460 M/ML	460	540	430	530

Tabella 2-2. Valori nominali della resistenza di snervamento f_y e della resistenza a trazione f_u per profili cavi strutturali.

Norma e tipo di acciaio		Spessore nominale dell'elemento t[mm]			
		t ≤ 40 mm		40 mm < t ≤ 80 mm	
		f_y [N/mm ²]	f_u [N/mm ²]	f_y [N/mm ²]	f_u [N/mm ²]
EN 10210-1 (profilati cavi formati a caldo)	S 235 H	235	360	215	340
	S 275 H	275	430	255	410
	S 355 H	355	510	335	490
	S 275 NH/NLH	275	390	255	370
	S 355 NH/NLH	355	490	335	470
	S 420 NH/NLH	420	540	390	520
	S 460 NH/NLH	460	560	430	550
EN 10219-1 (profilati cavi formati a caldo)	S 235 H	235	360		
	S 275 H	275	430		
	S 355 H	355	510		
	S 275 NH/NLH	275	370		
	S 355 NH/NLH	355	470		
	S 460 NH/NLH	460	550		
	S 275 NH/NLH	275	360		
	S 355 NH/NLH	355	470		
S 420 NH/NLH	420	500			
S 460 NH/NLH	460	530			

Tabella 2-3. Valori nominali della resistenza di snervamento f_{yb} e della resistenza a trazione f_u per profilati e lamiere sottili piegati a freddo.

Tipo di acciaio	Norma	Grado	f_{yb} [N/mm ²]	f_u [N/mm ²]
Hot rolled products of non-ally structural steels. Part 2: Technical delivery conditions for non alloy structural steels	EN 10025-2	S 235	235	360
		S 275	275	430
		S 355	355	510
Hot rolled products of structural steels. Part 3: Technical delivery conditions for normalized/normalize rolled weldable fine grain structural steels.	EN 10025-3	S 275 N	275	370
		S 355 N	355	470
		S 420 N	420	520
		S 460 N	460	550
		S 275 NL	275	370
		S 355 NL	355	470
		S 420 NL	420	520
Hot rolled products of structural steels. Part 4: Technical delivery conditions for thermomechanical rolled weldable fine grain structural steels.	EN 10025-4	S 275 M	275	360
		S 355 M	355	450
		S 420 M	420	500
		S 460 M	460 </td <td>530</td>	530
		S 275 ML	275	360
		S 355 ML	355	450
		S 420 ML	420	500
S 460 ML	460	530		

Dove gli spessori $t \leq 40$ mm, la lettera S sta per steel (acciaio) affianco di essa il numero rappresenta la resistenza allo snervamento f_y (acciai formati a caldo) o f_{yb} (acciai formati a freddo), ad esempio S 235.

Le caratteristiche più rilevanti dell'acciaio sono: la resistenza a rottura, la duttilità, la resistenza agli urti e la saldabilità.

Il diagramma tensione-deformazione è caratteristico della progettazione di strutture in acciaio. In cui si nota un primo tratto elastico-lineare e un secondo tratto in cui il materiale presenta un comportamento plastico. Le norme effettuano una semplificazione dove non è considerato l'incremento delle tensioni tra la tensione di snervamento e quella presente nel momento della rottura. La figura 2-1 mostra un diagramma tensione-deformazione caratteristico dell'acciaio.

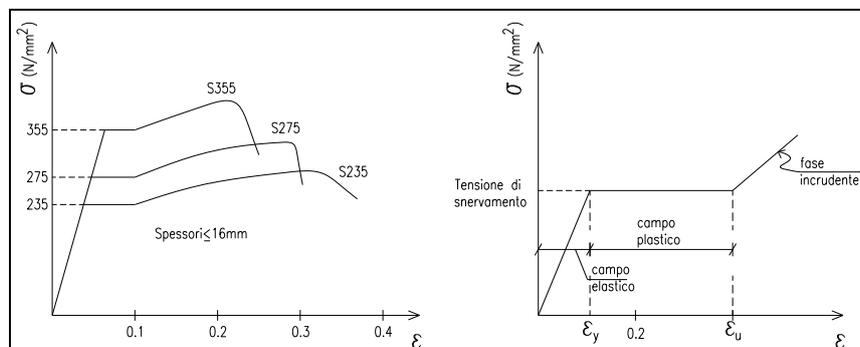


Figura 2-1. Diagramma tensione-deformazione.

Nel metodo di progettazione alle tensioni ammissibili (TA), sostituito per il metodo di progettazione agli stati limite (SL), gli sforzi a cui è assoggettata una struttura devono rimanere in campo elastico considerando un coefficiente di sicurezza, coerente con il comportamento elastico-lineare dell'acciaio quasi isotropo e omogeneo, rispettando tutta la base della teoria dell'elasticità che rappresenta le fondamenta della Scienza delle costruzioni.

Il secondo tratto del diagramma tensione-deformazione è la base per il calcolo a rottura e per l'attuale metodo di progettazione agli stati limiti ultimi (SLU) permettendo il calcolo delle sollecitazioni in campo elastico.

EN 1993-1-1 raccomanda coefficienti di materiali nei calcoli per gli acciai strutturali pari a:

- | | |
|---|--|
| - modulo di elasticità: | $E = 210\,000 \text{ N/mm}^2$. |
| - modulo di elasticità tangenziale: | $G = \frac{E}{2(1+\nu)} \approx 81\,000 \text{ N/mm}^2$ |
| - coefficiente di Poisson in campo elastico | $\nu = 0.3$. |
| - coefficiente di dilatazione termica lineare | $\alpha = 12 \times 10^{-6} \text{ per K (per } T \leq 100^\circ\text{C)}$. |
| - densità (peso specifico) | $\rho = 7850 \text{ kg/m}^3$. |

2.2 Sezioni

Ci sono 4 tipi principali di sezioni metalliche usati nella progettazione civile:

- Profilati
- Sezioni composte
- Sezione costruite o saldate
- Profilati formati a freddo

2.2.1 Profilati

in questo tipo di sezioni vengono classificati ferri sagomati a caldo ottenuti facendoli passare attraverso una serie di rulli. Le principali sezioni sono:

- **profilato a doppio T ad ali parallele:** in questo tipo di sezione le facce interne delle ali sono parallele a quelle esterne semplificando l'elaborazione di giunti, attacchi, collegamenti. Sono sezioni molto efficienti per resistere azioni flettente intorno all'asse minore. Generalmente, sono usati in travi e se designano col simbolo IPE seguito dell'altezza espressa in mm, ad esempio IPE 300, figura 2-2.
- **profilati a doppio T ad ali larghe e parallele:** caratterizzati per ali di larghezza pari all'altezza sino a 300 mm e di larghezza costante di 300 mm per altezze superiori. Impiegati principalmente in colonne e sono capaci di resistere carichi verticali dovuto al suo alto raggio minimo di inerzia per prevenire l'instabilità. Vengono elaborati nelle

serie: leggera A, normale B, pesante M. Indicati con il simbolo HE seguito dalla serie e dall'altezza espressa in mm, ad esempio HEA 200, figura 2-2.

- **Profilati a U:** di solito usati come arcarecci, profili per capriate, e per sezioni composte. Si indicano col simbolo UNP o UPN seguito dall'altezza espressa in mm, ad esempio UPN 180 o UNP 180, figura 2-2.
- **Profilati ad L:** ci sono due tipi: a lati uguali (angolari) designati col simbolo L seguito dalla lunghezza e dallo spessore del lato in mm (ad esempio L50 x 5) e a lati disuguali designati col simbolo L seguito dalla lunghezza dei lati e dallo spessore del lato in mm (ad esempio L90 x 200 x 12). Di solito sono usati per formare giunti, capriate e sezioni composte, figura 2-2.
- **Profilati a T:** hanno altezza e larghezza uguali. Si designano col simbolo T seguito dalla larghezza, dall'altezza e dallo spessore, ad esempio T 80 x 80 x 6. Usati in capriate, tiranti e travi leggeri, figura 2-2.
- **Tubi:** sono prodotti da piastre mediante processo di laminazione a caldo con una prima sezione circolare che viene poi eventualmente convertita nella forma rettangolare o quadrata. Hanno sezione circolare, quadrata o rettangolare. Elevate prestazioni a carichi di compressione. Vengono designate indicando il diametro oppure base x altezza seguito dello spessore in mm, ad esempio: Tub. 25.4 x 3, Tub. 80 x 40 x 3. Figura 2-2.

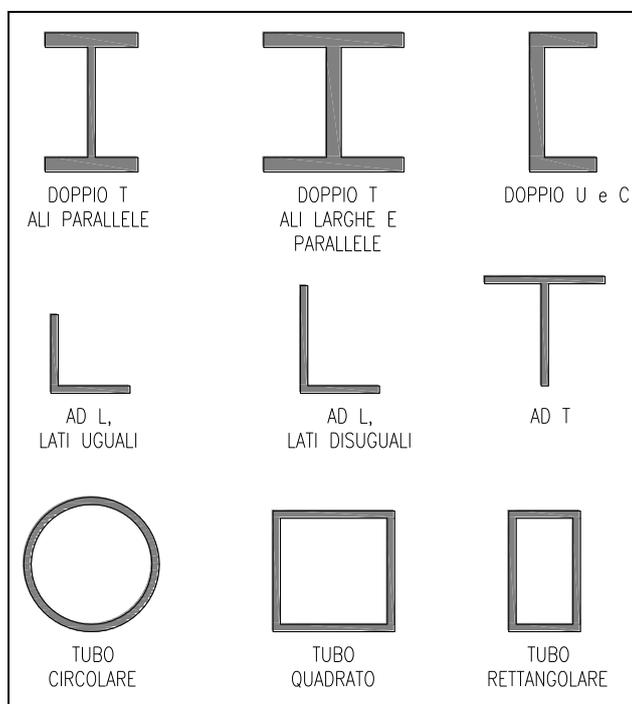


Figura 2-2. Sezione di tipo profilati formati a caldo.

2.2.2 Sezioni composte

Le sezioni composte sono formate per l'accoppio di uno o più profili, in aggiunta di un elemento di collegamento. In figura 2-3, sono mostrate alcuni esempi di sezioni composte. I motivi principali per realizzarle sono:

- Irrigidire dei profili mediante piatti saldati sulle ali.
- Combinare insieme due tipi di profili assorbendo ognuno di loro il tipo di carico della sua idoneità.
- Formare un elemento più resistente accoppiando in genere, simmetricamente, due o più profili tra loro.

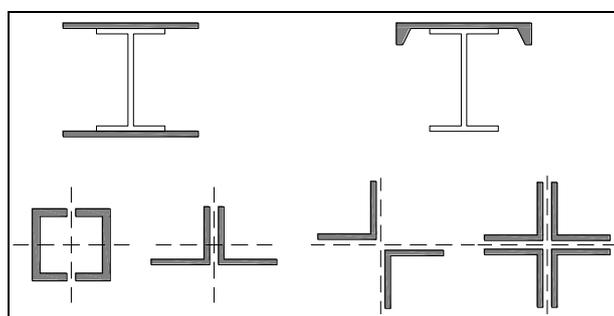


Figura 2-3. Sezione tipo composte.

2.2.3 Sezioni costruite

Queste tipo di sezioni sono fatte saldando insieme delle lamiere per formare delle sezioni che non sono riportate nel sagomario. Di solito usati per grossi carichi o luci di considerevole dimensioni. Generalmente sono sezione a doppia T, travi composte o sezioni scatolari, alcuni esempi sono riportati in figura 2-4.

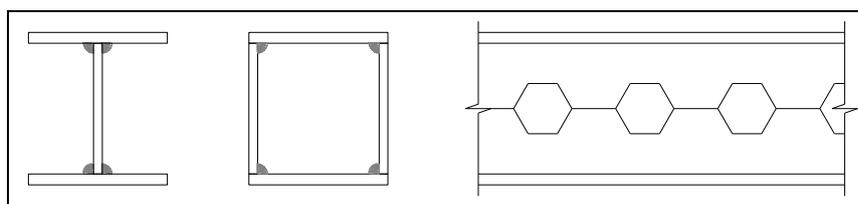


Figura 2-4. Sezione costruite.

2.2.4 Profilati formati a freddo

Oltre ai profili laminati a caldo sono disponibili dei profili ottenuti per sagomatura a freddo di lamiere e nastri d'acciaio di piccolo spessore. Nel campo progettuale vengono utilizzati come arcarecci, monorotaie, orditura di sostegno delle baraccature perimetrali per i capannoni industriali, nei solai misti come trave secondarie o terziarie, nelle strutture provvisorie, nelle costruzioni a massa, ecc.

In questa categoria sono classificati i profili, oggetti di studio di questa tesi.

Le forme dei profilati a freddo, per la facilità di esecuzione, sono molto più variate di quelle dei profilati a caldo. EN 1993-1-3 riporta le più comuni forme dei profilati e delle lamiere sottili piegate a freddo. In figura 2-5 sono riportati le forme più comuni dei profilati a freddo ed in figura 2-6 sono mostrati alcuni esempi di profili, di sezioni e di lamiere grecate sottili piegate a freddo.

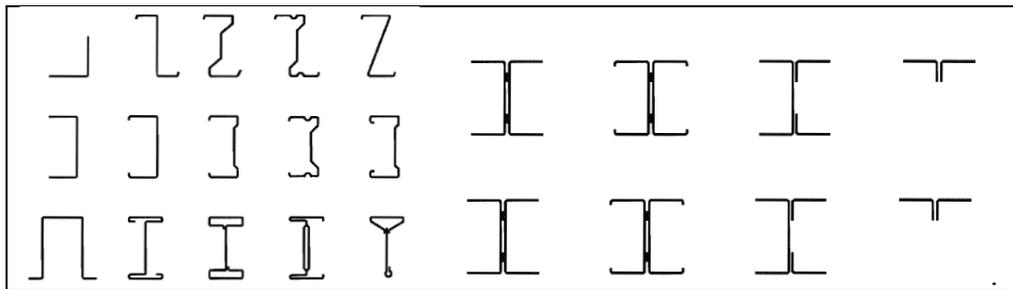


Figura 2-5. Forme dei profilati a freddo.

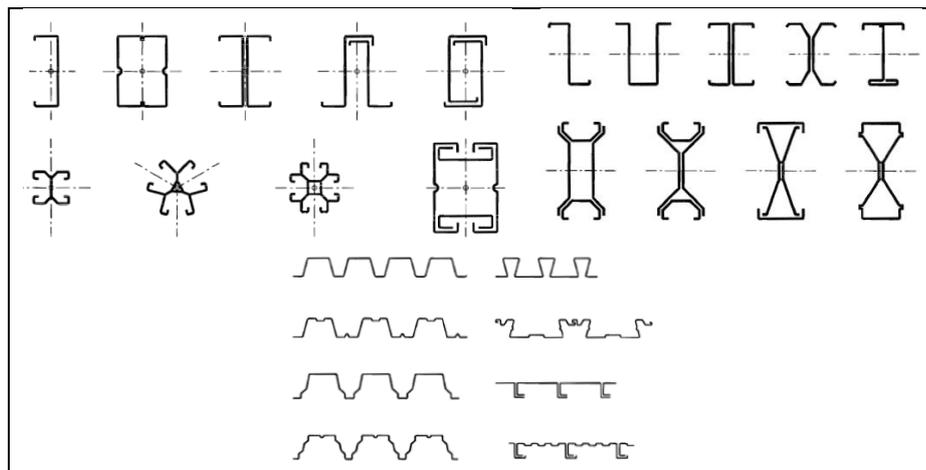


Figura 2-6. Esempi di sezioni con profilati a freddo di base.

I profili sottili sono caratterizzati per da irrigidimenti di bordo o estremità e irrigidimenti intermedie grazie al suo processo di laminazione. La EN 1993-1-3 presenta forme tipiche di irrigidimenti, la figura 2-7 mostrano alcuni tipi di irrigidimenti di bordi ed intermedie.

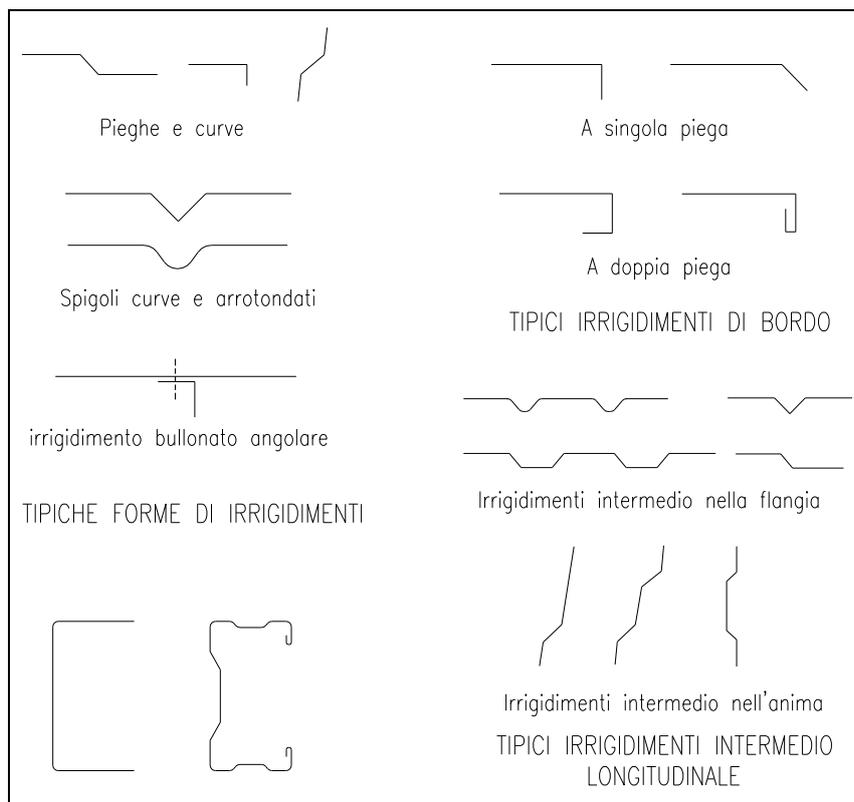


Figura 2-7. Tipi di irrigidimenti profilati formati a freddo.

2.2.5 Classificazione delle sezioni trasversali

L'Eurocodice 3 ha introdotto ed attraverso NTC viene confermata la classificazione delle sezioni trasversale per la caratterizzazione della capacità rotazionale (C_θ) ch'è dipendente e limitata dalla instabilità locale delle parti soggette a compressione nella sezione trasversale dell'elemento.

Questa viene richiesta qualora sia adottata l'analisi plastica globale della struttura, dovuto a che le membrature devono essere in grado di sviluppare cerniere plastiche aventi la sufficiente capacità rotazionale per permettere che avvenga la distribuzione dei momenti flettenti richiesta. Nel caso che sia impiegata l'analisi globale elastica (metodo elastico), qualunque classe di sezione trasversale può essere adottata condizionando il suo calcolo alle considerazioni nel riguardo alle limitazioni dell'imbozzamento locale.

Secondo le NTC le sezioni trasversali degli elementi strutturali vengono classificate in funzione della loro capacità rotazionale C_θ definita come:

$$C_\theta = \frac{\theta_r}{\theta_y} - 1$$

dove, θ_r e θ_y sono rispettivamente le curvature corrispondenti al raggiungimento della deformazione unitaria ε riferita alla condizione ultima e allo snervamento.

Si distinguono così quattro classi di sezioni trasversale:

- Classe 1** Quando la sezione è in grado di sviluppare l'intero momento resistente plastico con una significativa capacità rotazionale richiesta per l'analisi plastica (sezioni plastiche o duttili). Possono generalmente classificarsi come tali le sezioni con capacità rotazionale $C_{\theta} \geq 3$.
- Classe 2** Quando la sezione è in grado di sviluppare il proprio momento resistente plastico, ma con capacità rotazionale limitata. Possono generalmente classificarsi come tali le sezioni con capacità rotazionale $C_{\theta} \geq 1.5$.
- Classe 3** Quando nella sezione le tensioni calcolate nelle fibre estreme compresse possono raggiungere la tensione di snervamento, ma l'instabilità locale impedisce lo sviluppo del momento resistente plastico.
- Classe 4** Quando, per determinarne la resistenza flettente, tagliante o normale, è necessario tener conto degli effetti dell'instabilità locale in fase elastica nelle parti compresse che compongono la sezione. In tal caso nel calcolo della resistenza la sezione geometrica effettiva può sostituirsi con una sezione efficace.
In questo caso la sezione non è interamente reagente, in quanto la parte imbozzata non è considerata efficace a portare i carichi applicati. La sezione resistente è funzione delle sollecitazioni applicate e del fenomeno di instabilità a cui la sezione è soggetta (***problema ancora in parte aperto è l'interazione tra instabilità locale ed instabilità globale***).

Componenti come arcarecci e travi di attacco dei tamponamenti (tipicamente profilati sagomati a freddo con sezione a C, Z oppure a Ω) sono spesso in classe 4, così come le lamiere grecate dei solai e di rivestimento dei pannelli coibentanti

Le sezioni di classe 1 e 2 si definiscono *compatte*, quelle in classe 3 *moderatamente snelle* o *semi-compatte* e quelle di classe 4 *snelle*. La classe di una sezione composta corrisponde al valore di classe più alto tra quelli dei suoi elementi componenti.

La figura 2-8 mostra una sintesi della classificazione delle sezioni, e la figura 2-9 presenta il diagramma momento-curvatura per le differenti classi di sezioni trasversali previste dall'EC'3.

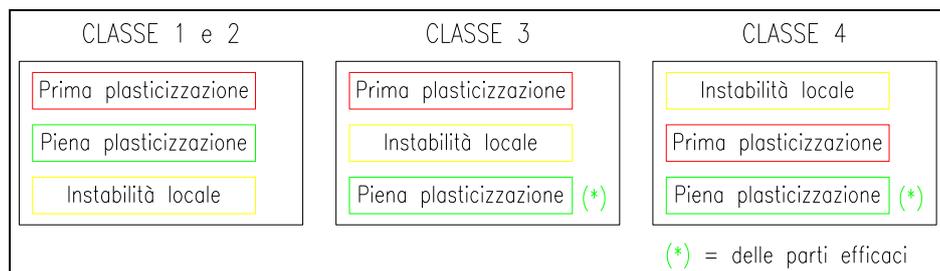


Figura 2-8. Sintesi classificazione delle sezioni secondo EC'3.

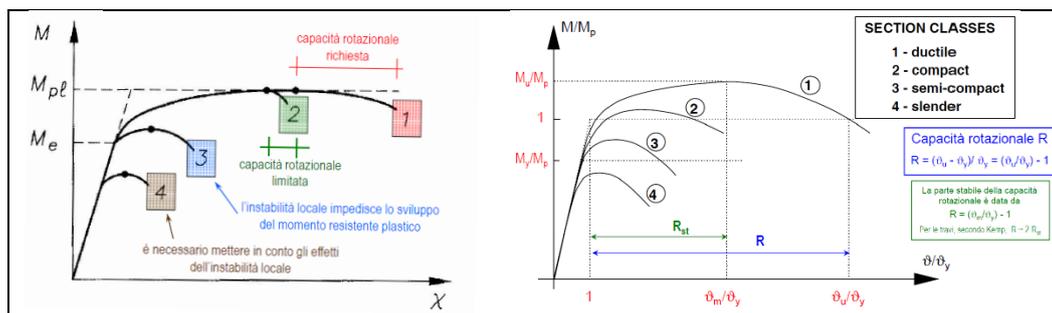


Figura 2-9. Diagramma momento-curvatura classi sezioni secondo EC'3.

2.2.6 Proprietà delle sezioni

Le proprietà più rilevanti sono:

- *Dimensioni delle sezioni:* di solito le dimensioni dei profilati d'acciai laminati a freddo, compresi la larghezza b , la altezza h , il raggio interno delle zone di raccordo r , ed altri dimensioni esterni sono indicati con simboli senza indici, tali come a , c o d , sono misurati tra le facce del materiale salvo diverse specificazioni. Altre dimensioni sono misurate alla linea centrale del materiale oppure il punto medio dell'angolo, e vengono designate attraverso simboli con indici, ad esempio b_d , h_w o s_w . La figura 2-10 mostra una sezione tipica

Lo spessore t è quello di progettazione in acciaio con i limiti (EC3):

- Profili e lamiera : $0.45 \text{ mm} \leq t \leq 15 \text{ mm}$.
- Giunti: $0.45 \text{ mm} \leq t \leq 4 \text{ mm}$.

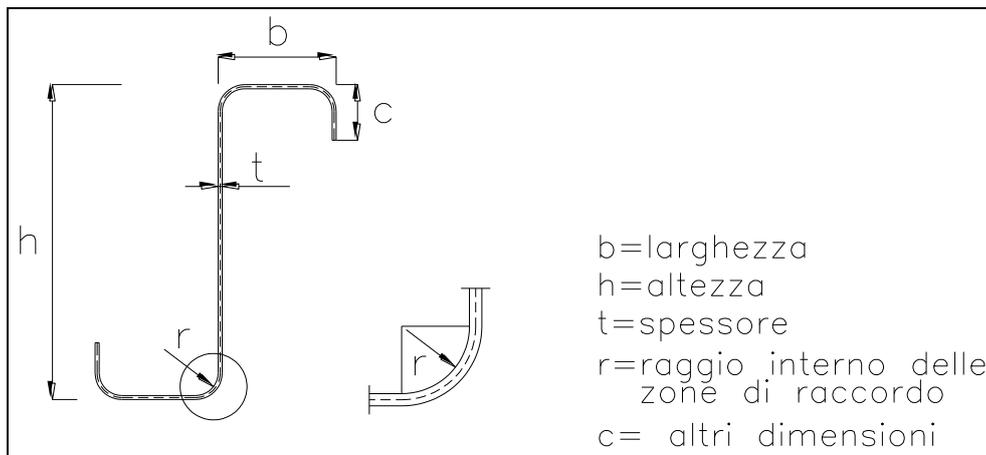


Figura 2-10. Dimensione tipiche della sezione.

- *Posizione del baricentro:* nella determinazione del baricentro devono essere considerati tutti gli elementi che compongono la sezione. Figura 2-11.

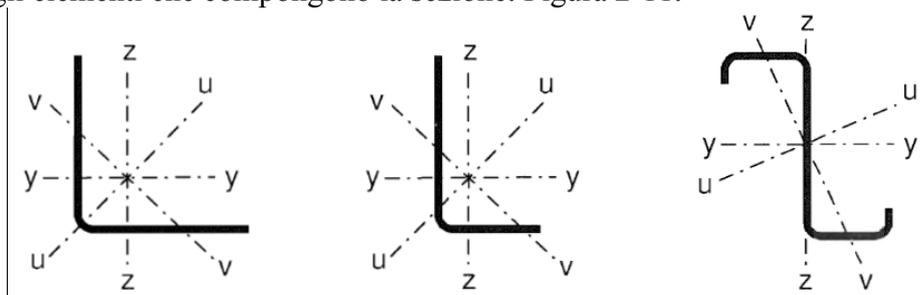


Figura 2-11. Convenzioni assi profili.

- *Area*
- *Momenti d'inerzia rispetto ai vari assi*
- *Raggi minimi d'inerzia rispetto ai vari assi*
- *Moduli resistenti sia elastici che plastici rispetto ai vari assi*

2.3 Progettazione delle strutture di acciaio.

Il metodo delle tensioni ammissibili prevede nella resistenza di calcolo dei materiali, l'uso di un valore massimo pari alla tensione di snervamento diviso per un coefficiente di sicurezza s , quindi la tensione ammissibile per un materiale è:

$$\sigma_{amm} = \frac{f_y}{s} \quad \text{con} \quad \sigma_{amm} \geq \sigma_{cal}$$

Tale tensione dev'essere maggiore o uguale al valore di calcolo σ_{cal} . Il coefficiente di sicurezza s prende in considerazione gli errori dovuti dalla non perfetta conoscenza delle caratteristiche dei materiali e dei carichi applicati. Nessuna distinzione è fatta tra i vari tipi di carichi. Il maggiore svantaggio di questo metodo è la limitazione di non poter variare il valore del grado di incertezza relativo ai carichi.

Nel metodo agli stati limiti si moltiplica ciascun tipo di carico per un coefficiente fissato dalle normative, tenendo conto del grado di incertezza dei vari carichi, ottenendo così un carico di progetto con cui si determinano le sollecitazioni che dovranno essere inferiori alle sollecitazioni di calcolo ottenute tramite la divisione della tensione di snervamento per un altro coefficiente che il cui ha conto delle incertezze nella determinazione delle caratteristiche di resistenza dei materiali.

Dunque, la principale differenza tra il metodo alle tensioni ammissibili e quello agli stati limiti è che i coefficienti di sicurezza del secondo sono conosciuti e applicati separatamente prima ai carichi e poi alla tensione di snervamento del materiale, mentre il coefficiente di sicurezza del primo è unico e normalmente non è esplicitamente dichiarato dalle norme.

L'Eurocodice 3, basato nel metodo agli stati ultimi, comprende la progettazione delle strutture in acciaio. La sua parte 1-3 specifica le regole supplementari per la progettazione di membratura e lamiera grecate di acciaio ottenute mediante piegatura a freddo di prodotti piani laminati a caldo oppure a freddo, rivestiti o non rivestiti.

UNI EN 1993-1-3 “*Design of steel structures. Part 1-3: General rules - Supplementary rules for cold-formed members and sheeting*” nella sua parte 2 “*Basis of design*” specifica la progettazione dei profilati e delle lamiere sottili piegati a freddo secondo le regole generali UNI EN 1990 e UNI EN 1993-1-1 ed inoltre consente l'uso dell'approccio generale attraverso metodi di elementi finiti (FE-methods) specificati in UNI EN 1993-1-5 “*Design of steel structures. Part 1-5: Plated structural elements*” nel suo appendice C.

2.3.1 Uso di metodi di elementi finiti

Il suddetto appendice C, prevede una guida per l'uso dei metodi di elementi finiti per stato limite ultimo, stato servizio di servizio o stato limite di fatica. Le diverse assunzioni nell'uso dei metodo finiti è rapportato nella tabella 2-4.

Tabella 2-4. Assunzioni per metodi FE- EN 1993-1-5.

ASSUNZIONI PER METODI DI ELEMENTI FINITI				
No.	Comportamento del materiale	Comportamento della geometria	Imperfezioni	Alcuni applicazioni
1	lineare	lineare	no	Efetto di rottura elastica, resistenza elastica
2	non lineare	lineare	no	Resistenza plastica in SLU
3	lineare	non lineare	no	Carico critico di instabilità di lastre
4	lineare	non lineare	si	Resistenza elastica di instabilità di lastre
5	non lineare	non lineare	si	Resistenza elasto-plastica in SLU

Nell'uso degli elementi finiti EN 1993-1-5 si considerano i seguenti punti:

- modello strutturale e le condizioni di vincoli,
- la scelta del software e la sua documentazione tecnica di supporto,
- l'uso delle imperfezioni,
- le proprietà dei materiali nel modello.
- la modellazione del carico,
- la modellazione dei criteri di stato limite,
- i coefficienti parziali di sicurezza.

2.3.2 Modello di elementi finiti

La scelta del modello-FE (shell o volume) e la dimensione della mesh determina la accuratezza dei risultati. Per verificare la validità è probabile eseguire controlli di sensibilità sul mesh con diversa fittezza.

La modellazione può essere svolta su una parte o sull'intera struttura.

Le condizioni di frontiere per i vincoli, lati e carichi applicati, devono essere scelti in modo di ottenere risultati conservativi.

Le proprietà geometriche devono corrispondere a quelle nominali.

Tutte le imperfezioni devono essere in corrispondenza con le forme e ampiezze secondo il paragrafo 2.3.4 ed il materiali col paragrafo 2.3.5.

2.3.3 software per l'analisi con elementi finiti

Il software dovrebbe essere adatto al compito e documentata la sua affidabilità. Questa può essere dimostrata mediante appropriati test di riferimento.

La dimensione della mesh, il carico, le condizioni di vincoli, gli altri dati input ed tutti i risultati (output) devono essere documentati in modo da essere ricreati da terzi.

2.3.4 Uso delle imperfezioni con elementi finiti

Nei modelli FE dove le imperfezioni dovrebbero essere incluse inoltre devono considerare sia le imperfezioni geometriche che quelle strutturali, ed possono essere utilizzate quelle imperfezioni geometriche equivalenti a meno che non venga effettuata un'analisi più raffinata.

Le imperfezioni geometriche possono essere basate sulla forma del modo critico della lastra con ampiezze riportate nelle norme tecniche, Sono consigliati valori dall'80% delle tolleranze geometriche di fabbricazione.

Le imperfezioni strutturali possono essere rappresentate in termini di sforzi residuali per un modello di sforzi caratteristico di processi di fabbricazione con ampiezze equivalenti ai valori medi.

La direzione di applicazione delle imperfezioni deve garantire che tale la minima resistenza sia ottenuta. La figura 2-12, la tabella 2-5 e tabella 2-6 presentano i valori delle imperfezioni geometriche equivalenti.

Tabella 2-5. Imperfezioni geometriche equivalenti. Metodi FE- EN 1993-1-5.

Tipo di imperfezioni	Componenti	Forma	Valore
globale	member con lunghezza l	arco	EN-1993-1-1, Tabella 5.1
globale	rigidizzatore longitudinale di lunghezza a	arco	min (a/400, b/400)
locale	panello o sub-panello con lato corto a o b	forma modale	min (a/200, b/200)
locale	rigidizzatore o flangia soggetta a torsione	bow twist	1/50

Tabella 2-6. Imperfezioni geometriche EN-1993-1-1, tabella 5.1.

Curva di instabilità secondo il prospetto 6.1	Analisi elastica	Analisi plastica
	e_0 / L	e_0 / L
a0	1/350	1/300
a	1/300	1/250
b	1/250	1/200
c	1/200	1/150
d	1/150	1/100

Nel caso di usare combinazioni di imperfezioni una deve essere scelta come principale e le altre possono essere ridotte a un massimo valore di 70%.

Le imperfezioni equivalenti geometriche possono essere sostituite per appropriate forze fittizie attuando nell'elemento.

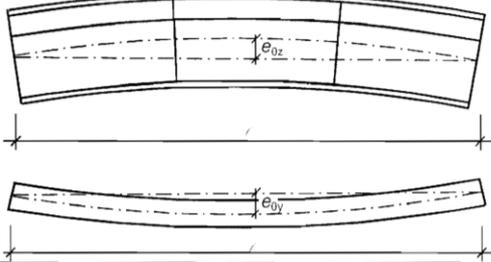
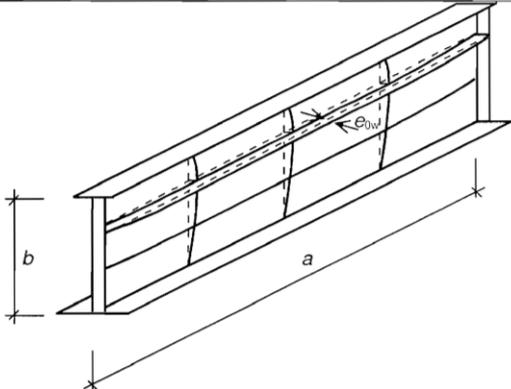
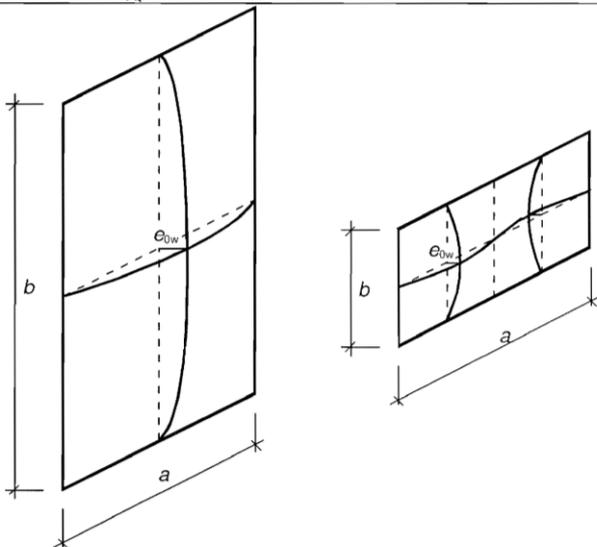
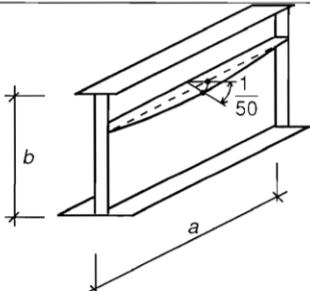
Type of imperfection	Component
global member with length ℓ	 <p>The diagram shows two views of a global member of length ℓ. The top view shows a curved member with an imperfection e_{0z} along the longitudinal axis. The bottom view shows a curved member with an imperfection e_{0y} perpendicular to the longitudinal axis.</p>
global longitudinal stiffener with length a	 <p>The diagram shows a 3D perspective view of a global longitudinal stiffener with length a and width b. It illustrates an imperfection e_{0w} along the length of the stiffener.</p>
local panel or subpanel	 <p>The diagram shows two views of a local panel or subpanel with dimensions a and b. The left view shows a curved panel with an imperfection e_{0w}. The right view shows a similar panel with a different imperfection profile.</p>
local stiffener or flange subject to twist	 <p>The diagram shows a 3D perspective view of a local stiffener or flange with length a and width b. It illustrates a twist imperfection with a slope of $\frac{1}{50}$.</p>

Figura 2-12. Modellazione di imperfezioni geometriche equivalenti. EN 1993-1-5.

2.3.5 Proprietà del materiale con elementi finiti

Le proprietà dei materiali devono essere considerate come i valori caratteristici. A seconda del livello di accuratezza e delle deformazioni ammissibile richieste nell’analisi, le ipotesi per il comportamento del materiale possono essere assunti come (figura 2-13):

- Elastico perfettamente plastico senza incrudimento
- Elastico perfettamente plastico con incrudimento lineare
- Elastico - plastico con incrudimento
- Curva sforzo - deformazione modificata secondo i risultati dei provini.

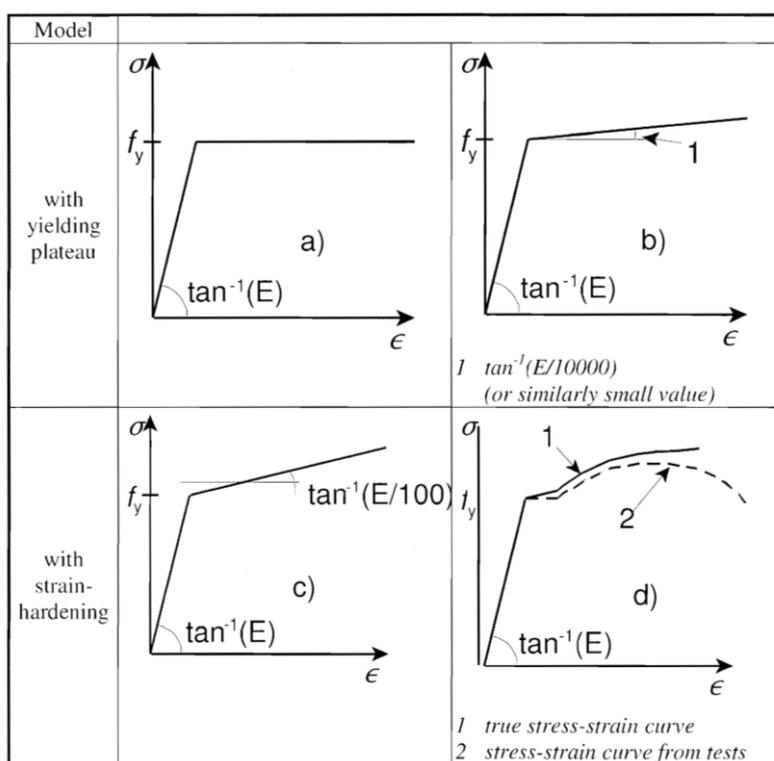


Figura 2-13. Comportamento del materiale. EN 1993-1-5.

2.3.6 Carico in modello con elementi finiti

I carichi applicati alle strutture devono includere rilevanti coefficienti delle azioni e delle combinazioni. Per semplicità è possibile usare un singolo moltiplicatore di carico α .

2.3.7 Criterio dei Stati limite con elementi finiti

Gli Stati Limiti Ultimi dovrebbero essere utilizzati:

- in strutture suscettibili di instabilità: raggiungimento del massimo carico.

- in zone sottoposte a sforzi di tensione: raggiungimento del valore limite delle deformazione membranale.

In questo livello le Norme Tecniche possono specificare il limite nelle deformazione principali con un valore consigliato di 5%.

Altri criteri come il raggiungimento del valore limite di snervamento o limite della zona di collasso possono essere usati.

2.3.8 Coefficienti di sicurezza con modelli degli elementi finiti

I valori dei coefficienti delle azioni α_u allo stato limite ultimo dovrebbero essere tali che raggiungano il livello di affidabilità richiesto. Tali valori dovrebbero essere costituito da due valori:

- a. α_1 considera le incertezze del modello FE usato, che può essere ottenuto tramite test di calibrazione.
- b. α_2 considera la dispersione dei modelli di carico e resistenza. Possono essere presi valori di γ_{M1} se l'instabilità è predominante o γ_{M2} se la frattura è predominante.

In tutti i casi deve essere verificato che $\alpha_u > \alpha_1 \cdot \alpha_2$.

Capitolo

3

RICHIAMO INSTABILITÀ

In questo capitolo viene studiato in maniera semplificata uno dei fenomeni che conducono al collasso di alcune tipologie strutturali, ovvero l'instabilità o la perdita di rigidità.

Nelle equazioni principali della statica, gli spostamenti sono considerati così piccoli che la configurazione deformata viene confusa con quella indeformata nel calcolo delle caratteristiche statiche interne. Considerando il caso contrario, l'ipotesi di grandi spostamenti, la soluzione del problema elastico può condurre a una condizione di equilibrio stabile, indifferente o instabile in funzione della grandezza del carico applicato.

Elementi strutturali snelli, soggetti a compressione, sono correntemente individuati dall'instabilità dell'equilibrio elastico, ad esempio: i profili sottili in acciaio usati come arcarecci per la portanza laterale delle forze di vento in strutture industriali.

Considerando tanto la geometria come le sollecitazioni, ci troviamo davanti all'instabilità flessione-torsionale delle travi a sezione rettangolare sottile, dove una considerevole differenza tra i due momenti centrali d'inerzia può condurre un improvviso avviticciamento torsionale.

I tre fenomeni fondamentali di collasso strutturale sono lo svergolamento (perdita di stabilità dell'equilibrio elastico), lo snervamento e la frattura fragile. Considerando l'aumento della snellezza, i primi due di questi fenomeni possono reagire in maniera continua.

3.1 ASTA RETTILINEA CON ELASTICITÀ DIFUSA

Si considera un'asta snella con una sezione costante, deformabile a flessione, non deformabile a taglio ed inestensibile, vincolata agli estremi con un carrello e una cerniera, sollecitata da un carico distribuito ortogonale $q(z)$ e una forza assiale N (figura 3-1).

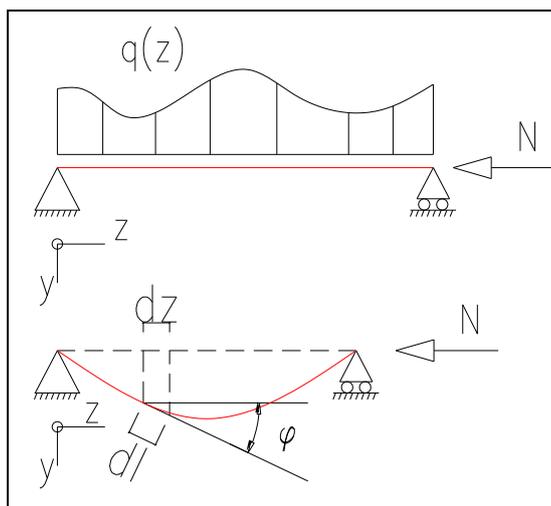


Figura 3-1. Schema trave rettilinea effetti secondo ordine.

In una configurazione deformata, $v(z)$, l'energia potenziale totale viene data da:

Eq. 3-1
$$W = \frac{1}{2} \int_0^l \frac{M^2}{EI} dz - Nw - \int_0^l q(z)v(z) dz$$

Nel punto di applicazione della forza N lo spostamento w è:

Eq. 3-2
$$w = \int_0^l (dl - dz) = \int_0^l (1 - \cos \varphi) dl$$

Ricordando che l'equazione della linea elastica è fornita da $\frac{d^2v}{dz^2} = -\frac{M}{EI}$, l'energia potenziale totale è:

Eq. 3-3
$$W = \frac{1}{2} \int_0^l \frac{M^2}{EI} dz - Nw - \int_0^l q(z)v(z) dz$$

imponendo la stazionarietà del funzionale $W(v)$, si ha:

Eq. 3-4
$$\delta W = \int_0^l (EIv''\delta v'' - Nv'\delta v') - q\delta v dz = 0$$

Dove δv è una funzione a valori infinitesimi compresa nella classe delle soluzioni v .
risolvendo per parti si ottiene:

Eq. 3-5
$$-[(EIv''' + Nv')\delta v]_0^l + [(EIv''\delta v')]_0^l + \int_0^l (EIv^{IV} + Nv'' - q)\delta v dz = 0$$

Essendo l'eq. 3-5 valida per ogni δv , le successive equazioni risultano soddisfatte:

$$\begin{aligned} \text{Eq. 3-6} \quad & EIv^{IV} + Nv'' - q = 0 \\ \text{Eq. 3-7} \quad & (EIv''' + Nv')\delta v = 0, \quad \text{per } z = 0, l \\ \text{Eq. 3-8} \quad & (EIv'')\delta v' = 0, \quad \text{per } z = 0, l \end{aligned}$$

L'espressione 3-6 rappresenta l'equazione della linea elastica con effetti del secondo ordine. Le condizioni al contorno per la trave della figura 3-1, impongono che gli spostamenti in $z=0$ e $z=l$ siano nulli, ossia $v(0) = v(l) = 0$, di maniera che la equazione 3-7 viene soddisfatta. Nelle cerniere il momento deve essere nullo, cioè $v''(z)$, con $z=0$ e $z=l$ deve essere nullo, soddisfacendo l'equazione 3-8.

Nel caso in cui il carico distribuito sia pari a zero, $q=0$, l'equazione della linea elastica con non-linearità geometriche viene data da:

$$\text{Eq. 3-9} \quad EIv^{IV} + Nv'' = 0$$

La cui integrale è:

$$\text{Eq. 3-10} \quad v(z) = A \cos \alpha z + B \sin \alpha z + Cz + D$$

dove

$$\text{Eq. 3-11} \quad \alpha^2 = \frac{N}{EI}$$

Con le condizioni al contorno $v(0) = v(l) = EIv''(0) = EIv''(l) = 0$, si ha:

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 1 \\ \cos \alpha l & \sin \alpha l & l & 1 \\ -\alpha^2 & 0 & 0 & 0 \\ -\alpha^2 \cos \alpha l & -\alpha^2 \sin \alpha l & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} A \\ B \\ C \\ D \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

Il precedente sistema fornisce una soluzione diversa a quella ovvia se e solo se il determinante della matrice dei coefficienti è nullo, che viene dato quando $\sin \alpha l = 0$.

A questo punto è possibile indicare che, considerando le non-linearità geometriche ed il caso di q non nulla, la rigidezza di un'asta compressa è inferiore a quella della stessa asta non sollecitata a compressione.

Considerando le condizioni al contorno dell'equazione 3-10, si ottiene che:

$$A = 0, \quad C = 0, \quad D = 0, \quad \sin \alpha l = 0.$$

potendo assumere il coefficiente B qualsivoglia valore .

L'espressione $\sin \alpha l = 0$ ci permette di ottenere una successione di autovalori del problema:

Eq. 3-12
$$\alpha_n = \frac{n\pi}{l}, \quad \text{con } n = \text{numero naturale,}$$

considerando le equazioni 3-11 e 3-12 si ha che:

Eq. 3-13
$$N_{cn} = n^2 \pi^2 \frac{EI}{l^2} \quad \text{detto } N_{cn} \text{ autovalore}$$

Considerando l'equazione 3-10, per ogni autovalore c è una autofunzione:

Eq. 3-14
$$v_n(z) = B \sin \alpha_n z$$

la cui rappresenta il **modo critico di deformazione** per la forza N_{cn} in considerazione. Nel caso che non vi sono ulteriori vincoli (figura 3-1), il carico critico è quello relativo ad $n=1$, che viene pari a:

Eq. 3-15
$$N_{c1} = \pi^2 \frac{EI}{l^2} \quad N_{c1} = \text{carico critico di Eulero}$$

In figura 3-2 si presenta una deformata tipica di una asta a unica campata in semplice appoggio, costituita di n semionde sinusoidali.

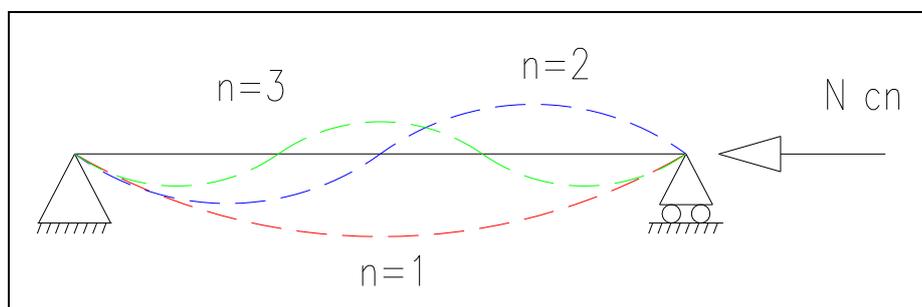


Figura 3-2. Modi critici di deformazione.

Lo svergolamento è la perdita di stabilità dell'equilibrio elastico. Il carico critico di Eulero, determina la crisi per svergolamento dell'asta.

Per valori di carico $N < N_{c1}$ si ha equilibrio stabile,
 $N = N_{c1}$ si ha equilibrio indifferente,
 $N > N_{c1}$ si ha equilibrio instabile,

Considerando l'area dell'asta, è possibile determinar la pressione critica di Eulero come:

Eq. 3-16
$$\sigma_c = \frac{N_{c1}}{A} = \pi^2 \frac{EI}{l^2 A} = \pi^2 E \frac{\rho^2}{l^2} = \frac{\pi^2 E}{\lambda^2} \quad \text{con } \rho = \sqrt{\frac{I}{A}}, \quad \lambda = \frac{l}{\rho}$$

Dove ρ è il raggio di inerzia della sezione e λ è la snellezza. Un diagramma tipico σ_c - λ^2 è mostrato nella figura 3-3.

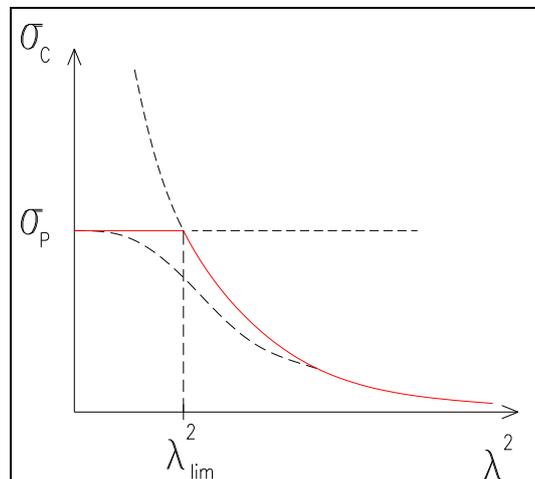


Figura 3-3. Iperbole di Eulero.

Quando la snellezza tende a zero il carico critico tende a infinito, situazione inverosimile poiché per travi tozze la crisi viene data per snervamento, caso dove $\sigma_c = \sigma_p$.

La snellezza limite consente di limitare le due crisi: snervamento e svergolamento, e viene descritta da:

Eq. 3-17
$$\lambda_{lim} = \pi \sqrt{\frac{E}{\sigma_p}}$$

La transizione tra entrambi le crisi viene fornita attraverso una transizione graduale, imponendo un fattore di sicurezza che considera il materiale e la snellezza dell'asta.

3.2 EFFETTO DELLE IMPERFEZIONI

Si consideri il sistema meccanico (guardare figura 3-4) costituito da un'asta rigida vincolata all'estremità da una cerniera rotazionale elastica di rigidezza k , sollecitata con una forza orizzontale N e la coordinata generalizzata viene considerata come la rotazione assoluta φ .

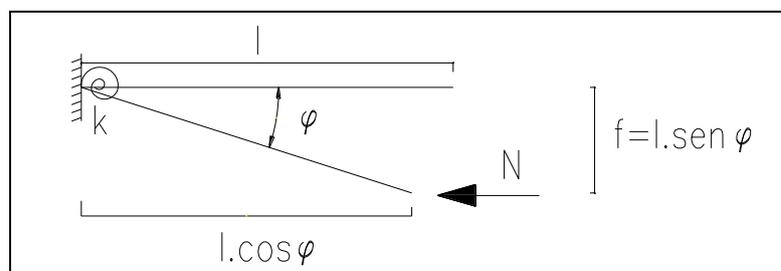


Figura 3-4. Sistema 1 calcolo imperfezioni.

La determinazione del carico critico, può effettuarsi tramite il metodo dell’equilibrio diretto, cioè uguagliando il momento instabilizzante:

Eq. 3-18
$$M_i = N \cdot l \cdot \sin \varphi$$

E il momento stabilizzante:

Eq. 3-19
$$M_s = k \cdot \varphi$$

 Eq. 3-20
$$N \cdot l \cdot \sin \varphi = k \cdot \varphi$$

Sebbene il legame costitutivo della molla è lineare, l’equazione di equilibrio è non lineare. Considerando la teoria del I ordine, in cui l’ipotesi di piccoli spostamenti è assunta, è lecito porre che $\sin \varphi \cong \varphi$, l’equazione 3-20 viene data per:

Eq. 3-21
$$N \cdot l \cdot \varphi \cong k \cdot \varphi$$

Quindi il carico viene dato per:

Eq. 3-22
$$N = \frac{k}{l}$$

L’equilibrio è stabile se il momento stabilizzante supera il momento instabilizzante. Il carico che soddisfa l’equilibrio indifferente con l’asta nella posizione assegnata è:

Eq. 3-23
$$N_{cr} = \frac{k}{l}$$

Il quale corrisponde al carico critico euleriano. Per valori di $N > N_{cr}$ il carico è instabile.

Considerando delle imperfezioni geometriche iniziali sulla stesa asta (figura 3-5), attraverso una rotazione iniziale φ_0 , l’equazione di equilibrio attraverso il metodo diretto, porre:

Eq. 3-24
$$N \cdot l \cdot \sin(\varphi + \varphi_0) = k \cdot \varphi$$

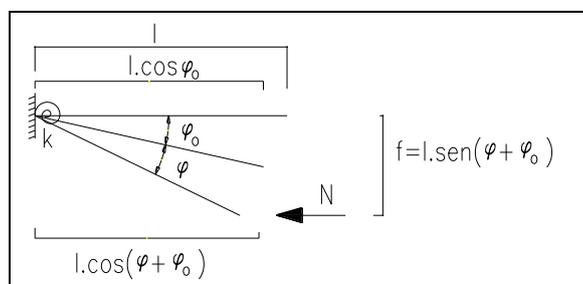


Figura 3-5. Sistema 1 calcolo imperfezioni asta imperfetta.

Considerando che il carico critico sotto l'ipotesi di piccoli spostamenti non varia e viene dato da: $N_{cr} = \frac{k}{l}$, l'equazione può essere scritta come:

Eq. 3-25
$$N \cdot l \cdot \sin(\varphi + \varphi_0) = N_{cr} \cdot \varphi$$

Oppure in forma adimensionalizzata:

Eq. 3-26
$$\frac{N}{N_{cr}} = \frac{\varphi}{\sin(\varphi + \varphi_0)}$$

Nella figura 3-6 si mostra il comportamento del carico con la variazione delle imperfezioni.

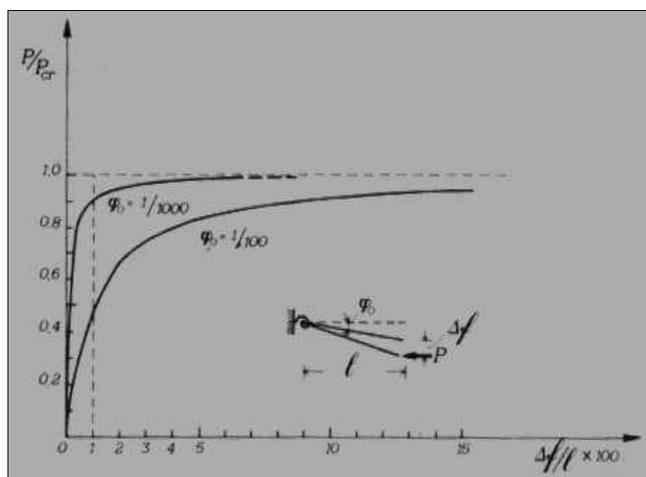


Figura 3-6. Risposta strutturale con la variazione delle imperfezioni. Pozzati P. 1987

3.3 INSTABILITÀ FLESSO-TORSIONALE

Si considera una trave sottile di sezione rettangolare (figura 3-7), vincolata agli estremi, in maniera che la rotazione attorno all'asse longitudinale Z sia bloccata.

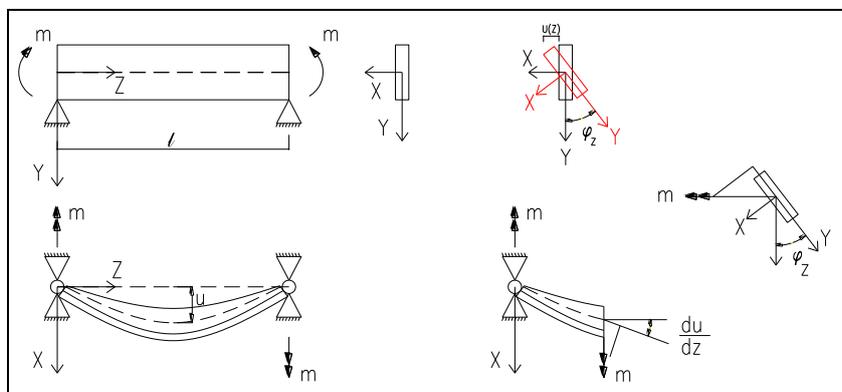


Figura 3-7. Trave soggetta a instabilità flessio-torsionale.

Tale trave è soggetta a una flessione uniforme dovuto all'applicazione alle estremità di due momenti m contenuti nel piano YZ, cioè attorno l'asse X.

Nel piano XZ, quello di minore rigidezza flessionale, è considerata una configurazione deformata accompagnata di una torsione attorno all'asse Z. L'inflessione $u(z)$ e la rotazione $\varphi_z(z)$ provocano delle componenti del momento esterno m nella direzione assiale Z e nella direzione trasversale Y.

Eq. 3-27
$$M_{zi} = m \frac{du}{dz}, \quad \text{momento dovuto a } u(z)$$

Eq. 3-28
$$M_{yi} = -m\varphi_z, \quad \text{momento dovuto a } \varphi_z(z)$$

Le due sollecitazioni M_{zi} e M_{yi} sono instabilizzanti, poiché tendono ad aumentare la rotazione torsionale φ_z e lo spostamento flessionale u .

Attraverso il metodo dell'equilibrio diretto possiamo trovare le sollecitazioni stabilizzanti:

Eq. 3-29
$$M_{zs} = GI_t \frac{d\varphi_z}{dz}$$

Eq. 3-30
$$M_{ys} = EI_y \frac{d^2u}{dz^2}$$

Quando le sollecitazioni instabilizzanti sono pari a quelle stabilizzanti siamo nel caso di equilibrio indifferente e uguagliando l'equazione 3-27 con la 3-29 e la 3-28 con la 3-30, abbiamo:

Eq. 3-31
$$GI_t \frac{d\varphi_z}{dz} = m \frac{du}{dz}$$

Eq. 3-32
$$EI_y \frac{d^2u}{dz^2} = -m\varphi_z$$

Derivando l'equazione 3-31 e inserendo il risultato nell'equazione 3-32 si ottiene:

Eq. 3-33
$$\frac{d^2\varphi_z}{dz^2} + \frac{m^2}{EGI_y I_t} \varphi_z = 0$$

Si fa notare come il denominatore del secondo membro a sinistra ($EGI_y I_t$) rappresenta le caratteristiche costitutive.

Imponendo:

Eq. 3-34
$$\alpha^2 = \frac{m^2}{EGI_y I_t} = 0$$

L'equazione 3-33 può essere vista nella stessa forma dell'equazione relativa all'asta caricata di punta:

Eq. 3-35
$$\varphi_z'' + \alpha^2 \varphi_z = 0$$

Un integrale generale che soddisfa la precedente equazione e le sue condizioni al contorno è:

Eq. 3-36
$$\varphi_z(z) = A \cos \alpha z + B \sin \alpha z$$

$$\varphi_z(0) = \varphi_z(l) = 0, \text{ con } A = 0 \text{ e } \sin \alpha l = 0 \text{ si ha:}$$

Gli autovalori del problema sono:

Eq. 3-37
$$\alpha_n = n \frac{\pi}{l}, \text{ con } n = \text{numero naturale}$$

Con $n=1$, cioè il primo $\alpha_1 = \pi/l$, il carico critico è:

Eq. 3-38
$$m_c = \frac{\pi}{l} \sqrt{EG I_y I_t} \quad \text{Formula di Prandtl}$$

L'equazione 3-38, detta formula di Prandtl, presenta la soluzione al problema della trave alta-snella.

Il fenomeno della instabilità flesso-torsionale riguarda in modo particolare le **travi alte e sottili**.

3.4 LASTRE IN COMPRESSIONE

Le lastre sono elementi strutturali con una dimensione (spessore) trascurabile rispetto alle altre due. Le lastre piane sono dei solidi cilindrici e le sue generatrici sono di almeno un ordine di grandezza inferiore in confronto alle dimensioni delle basi, contrario a quello che accade nel solido di Saint-Venant. (guardare Figura 3-8.

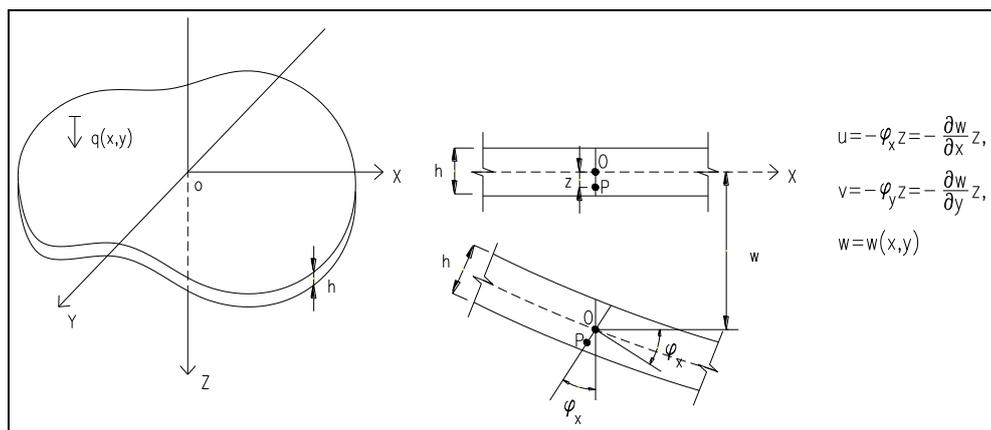


Figura 3-8. Lastra piana.

Il campo deformativo della lastra piana viene dato come:

$$\begin{aligned}
 \text{Eq. 3-39} \quad \varepsilon_x &= \frac{\partial u}{\partial x} = \frac{\partial \varphi_x}{\partial x} z = -\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} z, \\
 \varepsilon_y &= \frac{\partial v}{\partial y} = \frac{\partial \varphi_y}{\partial y} z = -\frac{\partial^2 w}{\partial y^2} z, \\
 \varepsilon_z &= \frac{\partial w}{\partial z} = 0, \\
 \gamma_{xy} &= \frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x} = \left(\frac{\partial \varphi_x}{\partial y} + \frac{\partial \varphi_y}{\partial x} \right) z = -2 \frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y} z, \\
 \gamma_{xz} &= \frac{\partial u}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial x} = 0, \\
 \gamma_{yz} &= \frac{\partial v}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial y} = 0
 \end{aligned}$$

Considerando l'ipotesi cinematica di Kirchhoff (i segmenti ortogonali al piano medio, a deformazione avvenuta, restino ortogonali al piano medio deformato) la quale genera *uno stato deformativo piano* con le sue tre componenti di deformazione uguali a:

$$\text{Eq. 3-40} \quad \varepsilon_x = \chi_x z; \quad \varepsilon_y = \chi_y z; \quad \gamma_{xy} = \chi_{xy} z;$$

Dove χ_x e χ_y sono le curvature flessionali del piano medio nelle direzioni x e y, e χ_{xy} il doppio dell'angolo unitario di torsione nelle direzioni x e y.

In base alle equazioni 3-39 e 3-40, l'energia di deformazione di una lastra piana inflessa viene data da:

$$\text{Eq. 3-41} \quad \Phi = -\frac{1}{2} \left(M_x \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + M_y \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} + 2M_{xy} \frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y} \right)$$

Trascurando la deformabilità al taglio della lastra e gli scorrimenti angolari, le equazioni costitutive della lastra piana sono:

$$\text{Eq. 3-42} \quad M_x = D(\chi_x + \nu \chi_y); \quad M_y = D(\chi_y + \nu \chi_x); \quad M_{xy} = M_{yx} = \frac{1-\nu}{2} D \chi_{xy}.$$

Diventano:

$$\text{Eq. 3-43} \quad M_x = -D \left(\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + \nu \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} \right); \quad M_y = -D \left(\frac{\partial^2 w}{\partial y^2} + \nu \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} \right); \quad M_{xy} = -D(1-\nu) \frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y}$$

Utilizzando la relazione 3-43, l'equazione 3-41 diventa:

$$\text{Eq. 3-44} \quad \Phi = -\frac{1}{2} D \left[\left(\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} \right)^2 + \left(\frac{\partial^2 w}{\partial y^2} \right)^2 + 2\nu \left(\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} \right) \left(\frac{\partial^2 w}{\partial y^2} \right) \right] + D(1-\nu) \left(\frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y} \right)^2$$

Oltre che indeformabile a taglio, la lastra è considerata anche inestensibile e soggetta a un regime membranale N_x , N_y e N_{xy} , l'energia potenziale (dovuta allo stato membranale) di tali sollecitazioni può essere espressa come:

Eq. 3-45
$$\Phi_N = \frac{1}{2} D \left[N_x \left(\frac{\partial w}{\partial x} \right)^2 + N_y \left(\frac{\partial w}{\partial y} \right)^2 + 2N_{xy} \left(\frac{\partial w}{\partial x} \right) \left(\frac{\partial w}{\partial y} \right) \right]$$

L'energia potenziale totale della lastra è uguale al contributo dell'energia di deformazione (eq. 3-44) più il contributo dell'energia potenziale dello stato membranale (eq. 3-45):

Eq. 3-46
$$W = \frac{1}{2} D \int_A \left\{ \left(\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} \right)^2 - 2(1 - \nu) \left[\left(\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} \right) \left(\frac{\partial^2 w}{\partial y^2} \right) - \left(\frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y} \right)^2 \right] \right\} dx dy + \frac{1}{2} \int_A \left[N_x \left(\frac{\partial w}{\partial x} \right)^2 + N_y \left(\frac{\partial w}{\partial y} \right)^2 + 2N_{xy} \left(\frac{\partial w}{\partial x} \right) \left(\frac{\partial w}{\partial y} \right) \right] dx dy$$

Imponendo la stazionarietà all'energia potenziale totale W, si ottiene l'equazione dell'equilibrio variato della lastra inflessa.

Eq. 3-47
$$D \left(\frac{\partial^4 w}{\partial x^4} + 2 \frac{\partial^4 w}{\partial x^2 \partial y^2} + \frac{\partial^4 w}{\partial y^4} \right) = N_x \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + N_y \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} + 2N_{xy} \frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y}$$

Indicando con

$$\nabla^2 = \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2}$$

l'operatore Laplaciano, e con [N], la matrice

$$[N] = [N_x \quad N_y \quad N_{xy}]$$

L'equazione 3-47 può essere scritta in modo più sintetico come:

Eq. 3-48
$$D \nabla^4 w + \nabla^2 [N] \quad \text{analogo con} \quad EI v^{IV} + N v''$$

Si considera una lastra rettangolare piana di lati a e b, ch'è appoggiata sui quattro lati e soggetta a una forza di compressione N per unità di lunghezza del bordo, agente sul lato b (figura 3-9).

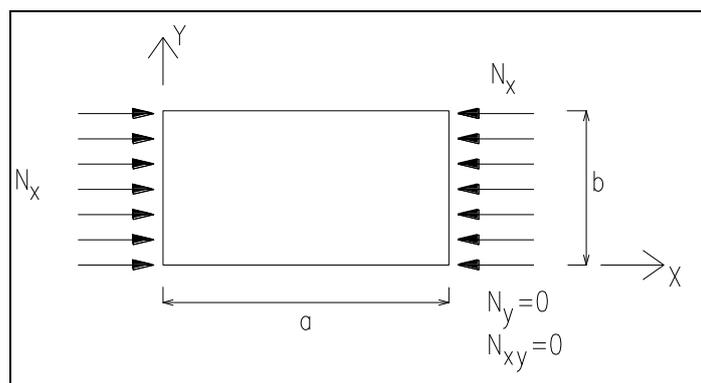


Figura 3-9. Lastra rettangolare soggetta a forza Nx.

L'equazione dell'equilibrio variato per la lastra in considerazione è:

Eq. 3-49
$$\left(\frac{\partial^4 w}{\partial x^4} + 2 \frac{\partial^4 w}{\partial x^2 \partial y^2} + \frac{\partial^4 w}{\partial y^4} \right) = - \frac{N}{D} \left(\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} \right)$$

Le condizioni di vincoli impongono $w=0$ sui quattro lati, e l’annullamento del momento flettente agente sul bordo. Considerando la equazione 3.43, si ha:

Eq. 3-50

$$M_x = -D \left(\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + \nu \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} \right) \quad e \quad M_y = -D \left(\frac{\partial^2 w}{\partial y^2} + \nu \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} \right)$$

$$w = 0, \quad \text{quindi} \quad \left(\frac{\partial^2 w}{\partial y^2} + \nu \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} \right), \quad \text{per } y = 0, b$$

$$w = 0, \quad \text{quindi} \quad \left(\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + \nu \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} \right), \quad \text{per } x = 0, a$$

Ogni funzione della forma :

Eq. 3-51

$$w(x, y) = A_{nm} \sin n\pi \frac{x}{a} \sin m\pi \frac{y}{b}$$

Soddisfa le condizione al contorno precedenti, con $n, m =$ numero naturali.

Sostituendo l’equazione 3-51 nella 3-49 e con un fattore divisore pari a $A_{nm} \sin n\pi \frac{x}{a} \sin m\pi \frac{y}{b}$, si ottiene che:

Eq. 3-52

$$\left(\frac{n\pi}{a} \right)^4 + 2 \left(\frac{n\pi}{a} \right)^2 \left(\frac{m\pi}{b} \right)^2 + \left(\frac{m\pi}{b} \right)^4 = \frac{N}{D} \left(\frac{n\pi}{a} \right)^2$$

e un carico critico coincidente con la stazionarietà dell’energia potenziale del sistema:

Eq. 3-53

$$N_c^{nm} = \pi^2 D \frac{a^2}{n^2} \left(\frac{n^2}{a^2} + \frac{m^2}{b^2} \right)^2$$

Il valore di N_c^{n1} è il carico critico per instabilità dell’equilibrio elastico della lastra:

Eq. 3-54

$$N_c^{n1} = \pi^2 \frac{D}{b^2} \left(n \frac{b}{a} + \frac{1}{n} \frac{a}{b} \right)^2$$

Il cui corrisponde ad una deformata con una sola semionda lungo il lato b ed n semionde lungo il lato a (figura 3-10) .

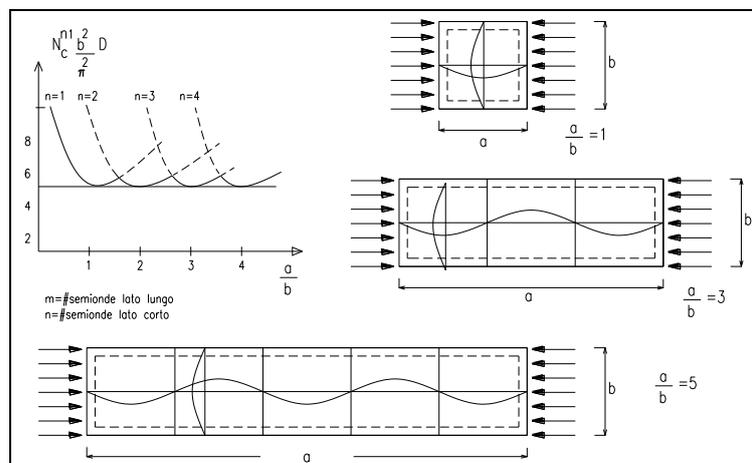


Figura 3-10. Deformate e carico critico in lastre rettangolari.

3.5 INSTABILITÀ DI ELEMENTI SOTTILI IN ACCIAIO

Le sezioni laminati sottili in acciaio per la sua propria natura sono interessati da uno o più tipi di instabilità. Il comportamento e gli effetti dell'instabilità devono essere considerati nella determinazione della resistenza.

Posso essere caratterizzati tre tipi di instabilità nelle sezioni sottili:

- Instabilità locale
- Instabilità distorsionale
- Instabilità globale

Il valore del carico di instabilità elastico, è quello in cui l'equilibrio dell'elemento è indifferente, trovandosi tra due stati, quello dell'equilibrio stabile e quello dello equilibrio instabile.

$$\begin{aligned} N < N_{c1} & \text{ si ha equilibrio è stabile,} \\ N = N_{c1} & \text{ si ha equilibrio è indifferente,} \\ N > N_{c1} & \text{ si ha equilibrio è instabile,} \end{aligned}$$

3.5.1 Instabilità locale

Questo tipo di instabilità è caratterizzata per una significativa distorsione della sezione trasversale soltanto del tipo rotazionale, senza presenza di traslazione degli spigoli o punti di piegatura delle flangi. La lunghezza della semionda del modo naturale del tipo di instabilità locale è caratterizzato per un valore minore o uguale alla lunghezza del più grande elemento costituente della sezione trasversale.

In questo tipo di instabilità di solito viene computato il carico instabile attraverso la teoria delle lastre complesse (figura 3-11 e figura 3-14).

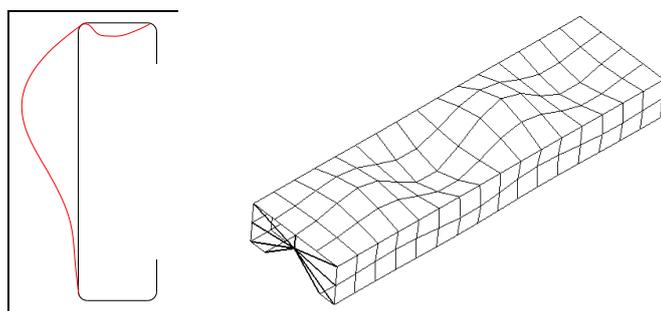


Figura 3-11. Sezione caratterizzata per instabilità locale.

3.5.2 Instabilità distorsionale

Questo tipo di instabilità è caratterizzato per una significativa distorsione della sezione trasversale del tipo rotazionale e traslazione di uno o più spigoli o punti di piegatura delle

flangi. La lunghezza della semionda del modo naturale del tipo di instabilità distorsionale è caratterizzato per il carico e la geometria propria di ogni flangia che conforma la sezione trasversale, il suo valore si trova tra quello caratterizzato per instabilità locale e il corrispondente di instabilità globale.

In questo tipo di instabilità di solito viene computato il carico instabile attraverso la teoria delle lastre complesse e la instabilità flesso-torsionale. (figura 3-12 e figura 3-14).

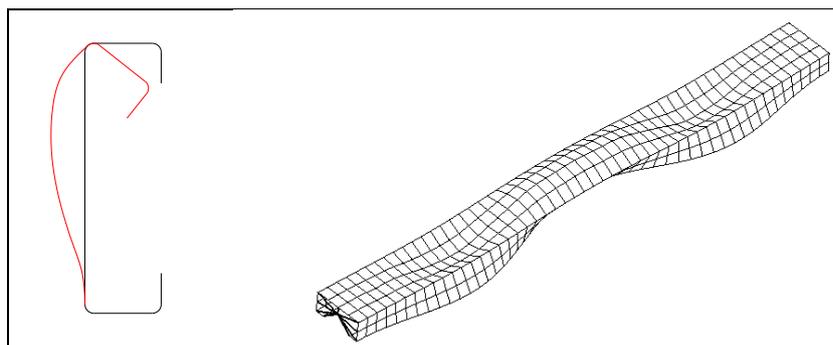


Figura 3-12. Sezione caratterizzata per instabilità distorsionale.

3.5.3 Instabilità globale

Questo tipo di instabilità non consente la distorsione della sezione trasversale, ma viene verificata per traslazione (flessione) e/o la rotazione (torsione) dell'intera sezione trasversale.

I diversi modi dell'instabilità globale o euleriana: flessionale, torsionale, flesso-torsionale in colonne, latera-torsionale in travi, si verificano nel minimo modo naturale di vibrare per lunghe semionde.

In questo tipo di instabilità di solito viene computato il carico instabile attraverso l'instabilità Euleriana e flesso-torsionale. (figura 3-13 figura 3-12 e figura 3-14).

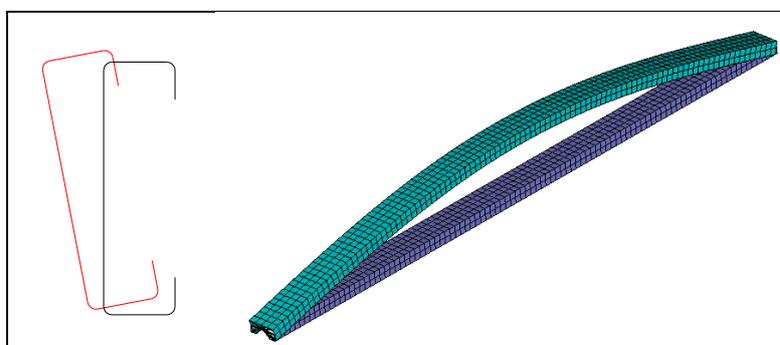


Figura 3-13. Sezione caratterizzata per instabilità globale.

La figura 3-14 mostra il comportamento tipico del carico critico in funzione della lunghezza della semionda del primo modo di un'asta sottili d'acciaio.

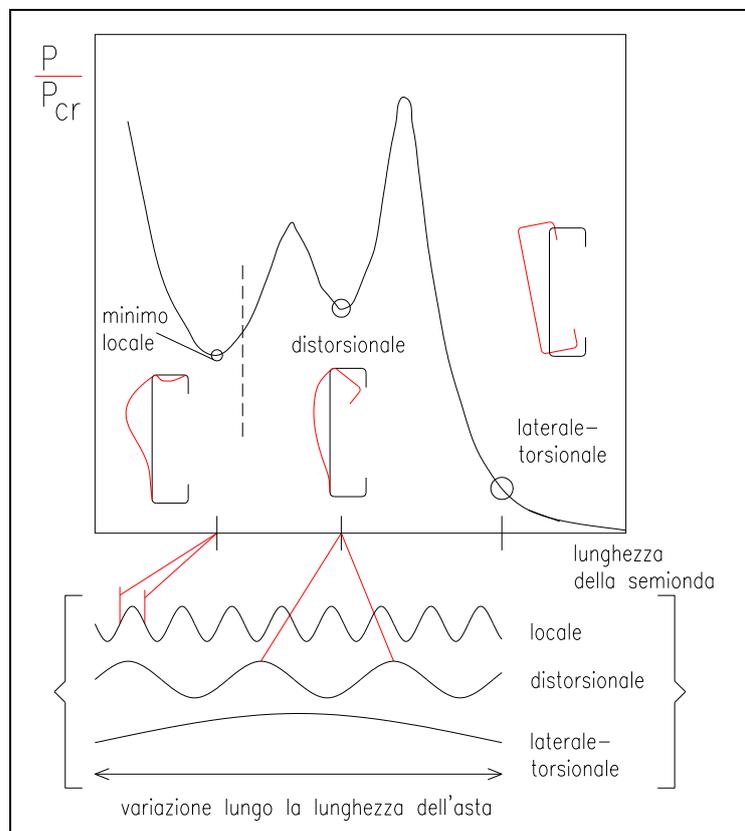


Figura 3-14. Curva caratteristica instabilità sezione sottili.

Capitolo

4

METODI E SOFTWARE

4.1 Metodo delle strisce finite - FSM

Attualmente il metodo degli elementi finiti è conosciuto e stabilito come il più potente e versatile strumento di soluzione in analisi strutturale. Però, per molte strutture che hanno piani geometrici regolari e condizioni vincolari semplici una completa analisi con elementi finiti risulta abbastanza stravagante e non necessaria, avvolta impossibile. Il costo della soluzione può essere abbastanza alto e di solito raggiunge un ordine di grandezza maggiore a quello richiesto nell'analisi dimensionale. Inoltre, molto spesso la dimensione dell'accuratezza di un problema potrebbe essere così travolgente che sovraccarica qualunque processore disponibile a un progettista o a un ricercatore, in modo che il problema dovrà essere risolto in maniera approssimativa, o usando qualche subroutine addizionale che impiega tempo, scritta per ridurre i requisiti di processore. Le suddette osservazioni assai importanti per l'analisi statica di strutture spaziali e tridimensionali e per problemi agli auto valori nel caso di analisi di vibrazione e stabilità. Un metodo alternativo può essere quello di ridurre l'impegno computazionale e i requisiti di processore, ma conservando in qualche modo la versatilità dell'analisi proprio degli elementi finiti, quello è desiderabile per le suddette tipologie di strutture.

Queste esigenze possono essere soddisfatte completamente attraverso il *recente e sviluppato* metodo delle strisce finite (finite strip method FSM). In questo metodo, la struttura è divisa in sottodomini bidimensionale (strisce - strips) o tridimensionali (prisms, layers) i quali una

coppia opposta dei lati (2-D) o uno o più paia di facce (3-D) di tale sottodominio sono in coincidenza con i contorni della struttura. La geometria della struttura è di solito costante lungo uno o due assi coordinati cosicché la larghezza di una striscia o della sezione trasversale di un prisma o superficie (layer) non cambierà da uno stremo all'altro. Così, mentre in ponti di travi a cassone e lastre alleggerite sono convenientemente divisi in strisce oppure in prismi, per piastre spesse, isotropiche e/o multistrato (multilayer) e lastre una divisione negli strati (layers) sarebbe definitivamente più adatta.

Il metodo delle strisce finite (FSM) può essere considerato come una forma speciale della procedura degli elementi finiti usando l'approccio degli spostamenti. A differenza del metodo standard degli elementi finiti, il quale usa funzioni di spostamento polinomiale in tutte le direzioni, il metodo delle strisce finite così chiamato dovuto all'uso di polinomi semplici in alcune direzioni e le serie lisce differenziabili continuamente nelle altre direzioni, con la condizione che le suddette serie devono soddisfare, *a priori*, le condizioni di contorno negli estremi delle strisce o dei prismi.

La forma generale della funzione di spostamento è data come il prodotto di polinomi e serie. Quindi, nel caso di una striscia, nella quale un problema bidimensionale è ridotto a un problema unidimensionale.

$$w = \sum_{m=1}^r f_m(x) Y_m$$

Analogamente, nel caso di un prisma, un problema tridimensionale è ridotto a quello di uno bidimensionale e la sua funzione di spostamento è scritta come.

$$w = \sum_{m=1}^r f_m(x, z) Y_m$$

Finalmente, un problema tridimensionale è trattato come uno unidimensionale, nel caso di un strato (layer), e

$$w = \sum_{m=1}^r \sum_{n=1}^t f_{mn}(z) X_m Y_n$$

Nelle suddette espressioni, le serie sono state troncate ai termini r th e t th: $f_m(x)$, $f_m(x, z)$, $f_{mn}(z)$ sono espressioni polinomiali con costanti indeterminati per i termini m th e n th delle serie; e X_m , Y_n sono serie che soddisfano le condizioni di estremi nelle direzioni x e y rispettivamente ed anche specificano le forme deflesse in quelle direzioni. Una spiegazione schematica riguardo alle discussioni precedenti e all'effetto di dimensione ridotta sulla banda matriciale è mostrata nella figura 4-1 per alcune strutture pratiche. Un breve confronto tra il metodo degli elementi finiti e il metodo delle strisce è elencato nella tabella 2.1.

Tabella 4-1. Confronto tra il metodo degli elementi finiti e il metodo delle strisce finite.

Elemento finito	Striscia finita
Applicabile in qualsiasi geometria, condizioni di contorno e variazione di materiale. Estremamente versatile e potente	In analisi statica, di solito usato per strutture con due vincoli agli estremi e con/senza appoggi elastici intermedi
Di solito, largo numero di equazioni e di matrici con banda larga relativamente. Può essere molto dispendioso e avvolta impossibile per elaborare soluzioni a causa dei limiti nei servizi computazionali.	Di solito, piccolo numero di equazioni e di matrici con una banda stretta, specialmente reale per problemi con una coppia opposta di estremità semplicemente supportate. In conseguenza, più corto il tempo computazionale per la soluzione di accuratezza comparabile.
Larghe quantità di dati in ingresso e più facile fare degli errori. Richiede una mesh automatica e schemi di generazione carico.	Piccola quantità di dati in ingresso a causa del piccolo numero di linee mesh coinvolte dovuto alla riduzione nell'analisi dimensionale.
Larghe quantità di uscite perché come regola tutti gli spostamenti nodali e gli elementi di sforzi sono stampati. Anche, molti elementi di ordine inferiore non produrranno sforzi corretti ai nodi e la media degli sforzi o la tecnica di interpolazione deve essere usata nell'interpretazione dei risultati.	Facile per specificare solo quelle locazioni alle quali spostamenti e sforzi sono richiesti e allora uscite di conseguenza.
Richiede una larga quantità di processore ed è più difficile da programmare. Molto spesso, tecniche avanzate come la condensazione di massa o l'iterazione di sottostrutture devono essere utilizzati a/per problemi di auto valori con lo scopo di ridurre i requisiti del processore.	Richiede più piccola quantità di processore ed è più facile programmare. Perché solo i pochi più bassi auto valori sono richiesti (comunque per la maggior parte dei casi), i primi due o tre termini delle serie normalmente forniranno sufficientemente risultati accurati. La matrice può di solito essere risolta dalle subroutines di auto valori standardizzati.

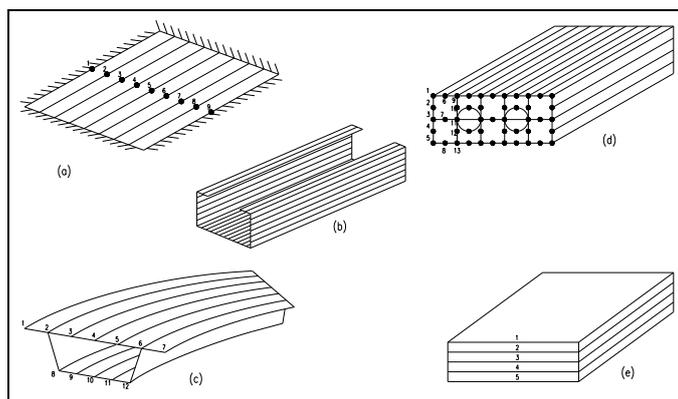


Figura 4-1. Discretizzazione tipica di alcune strutture.

La filosofia del metodo della striscia finita è simile a quella del metodo di Kantorovich, il quale è ampiamente usato per ridurre un'equazione differenziale alle derivate parziali in un'equazione differenziale ordinaria.

Il metodo delle strisce finite richiede la discretizzazione del continuo in modo che soltanto un numero finito di incognite esisterà nella formulazione risultante. La seguente procedura è adottata:

- i) Il continuo è diviso (discretizzato) in strisce (prismi, layers) per linee immaginarie (superficie). Gli estremi di tali strisce (prismi, layers) costituiscono sempre una parte dei contorni del continuo (figura 4-1) Per comodità e natura di questo lavoro di tesi, solo la striscia sarà discussa nella formula generale, la quale è in ogni caso anche applicabile ai prismi e agli strati(layers).
- ii) Le strisce devono essere collegate tra di loro lungo un numero discreto di linee nodali le quali coincidono con i bordi longitudinali della striscia. In alcuni casi è anche possibile l'uso di linee nodali interne per arrivare a un ordine superiore di striscia..

I gradi di libertà (DOF – Degree of Freedom) di ogni linea nodali, chiamati parametri di spostamento nodale, sono di solito collegati con gli spostamenti e le sue prime derivate parziali (rotazioni) rispetto alla variabile polinomiale x nella direzione trasversale. Loro possono anche comprendere termini di non spostamenti tale come deformazioni (includendo deformazioni assiali, deformazione di taglio, curvatura flessionale e torcente).

Dovuto all'uso di funzioni continue nella direzione longitudinale, il DOF alla linea nodale di striscia è di solito minore di un elemento tipo nodo. Per esempio, in una lastra di piegatura, w e θ_x esistono ad ogni linea nodale della striscia, mentre w , θ_x e θ_y esistono ad ogni elemento nodale.

- iii) Una funzione di spostamento (oppure funzioni), in termini di parametri di spostamento nodale, è scelta per rappresentare il campo degli spostamenti e in conseguenza, i campi delle deformazioni e le sollecitazione (inclusi sforzi

normali, sforzi di taglio e momenti flessionale e torcenti) all'interno di ogni elemento.

- iv) Sulla base della funzione di spostamento scelta, è possibile ottenere una matrice di rigidezza e matrici di forza che equilibrano le varie forze concentrate e distribuite agendo sulla striscia attraverso entrambi lavoro virtuale oppure i principi dell'energia potenziale totale.
- v) L'assemblaggio delle matrici di rigidezza e dei carichi di tutte le strisce formano un insieme di equazioni di rigidezza globale. Dato che l'ampiezza di banda e la dimensione della matrice sono di solito basse, le suddette equazioni possono essere risolte facilmente per qualunque tecnica matriciale standard di soluzione a banda con lo scopo di trovare i parametri di spostamenti nodali. Infatti, dopo che le matrici di rigidezza e di carichi sono state sviluppate per una striscia, si può dire che l'analisi della striscia finita del problema di una lastra sarà uguale a uno di rigidezza di una trave, mentre per un SHELL o ponti di travi a cassone l'analisi sarà quello corrispondente a un telaio piano.

4.2 Scelta delle funzioni di spostamento.

La scelta delle funzioni di spostamento per una striscia è innanzitutto la parte fondamentale dell'analisi, e quindi un gran impegno deve essere messo a tale parte. Una funzione di spostamento scelta scorrettamente potrebbe non solo produrre risultati ovviamente assurdi, ma può anche portare a risultati che convergono a risposte sbagliate anche per mesh abbastanza raffinate.

Per garantire la convergenza ai corretti risultati nel metodo delle strisce finite, devono essere soddisfatti i seguenti semplici requisiti.

- i) La parte delle serie Y_m della funzione di spostamento dovrebbe soddisfare *a priori* le condizioni di bordo della striscia (in problemi di vibrazioni soltanto le condizioni di spostamento sono soddisfatte). Per esempio in una striscia con vincoli semplici in flessione, la funzione di spostamento dovrebbe essere in grado di soddisfare le condizioni di deformazione w e curvatura $\partial^2 w / \partial^2 y$ essendo uguale a zero in entrambi gli estremi.
- ii) La parte polinomiale della funzione di spostamento ($f_m(x)$) deve essere in grado di rappresentare uno stato costante di deformazione nella direzione trasversale (x). Se quello non è rispettato allora tale non è in grado di garantire che la deformazione converga verso il vero stato di deformazione nonostante la mesh sia assai fitta. Lo stato costante di deformazione può essere verificato attraverso due approcci:

- a) Se un semplice polinomio della forma $a_1+a_2x+a_3x^2+\dots$ è usato come funzione $f(x)$, uno stato di deformazione costante può esistere se il polinomio è completo fino o al di sopra l'ordine dove sia ottenuto un termine costante quando il calcolo delle deformazioni attraverso la differenziazione sia compiuta.
- b) Se le tipiche funzioni di forma sono usate e non è possibile decidere così facilmente se il polinomio è/ o non completo, un approccio differente è stato usato per tale scopo.
- iii) La funzione di spostamento devono soddisfare la compatibilità di spostamenti lungo i bordi con le strisce adiacenti e questo può includere la continuità della “prima derivata parziale” e anche i valori di spostamenti.
- La suddetta affermazione può soltanto essere riformulata come “la funzione di spostamento deve essere scelta in modo che le deformazioni richieste nella formulazione dell'energia rimangono finite nell'interfaccia tra le strisce”.
- Così nell'elasticità bi- dimensionale le deformazioni coinvolte sono derivate parziali prime, e inoltre solo gli spostamenti necessitano di essere continui. Dall'altro lato, per i problemi flessionali le deformazioni coinvolte sono derivate parziali seconde, ed entrambi gli spostamenti e le sue derivate parziali prime dovranno essere continui all'interfaccia.

Se tali condizioni sono aderite, allora non ci saranno infiniti sforzi all'interfaccia e quindi nessun contributo per l'impostazione di energia dall'interfaccia, il quale può essere considerato come una striscia stretta dell'area convergente a zero. Solo in questo modo noi possiamo essere sicuri che una somma semplice dell'energia potenziale totale di tutte le strisce sarà, infatti, uguale all'energia potenziale totale del corpo elastico in questione. La rappresentazione dell'energia potenziale totale di tale striscia finita fornirà sempre un'energia approssimativa più grande di quello reale, quindi dando un legame all'energia potenziale totale assoluta del sistema elastico. Una discussione matematica e dettagliata di questa condizione è stata presentata in un documento da Tong and Pian.

4.3 Funzioni di spostamento disponibile

Dato una funzione di spostamento è sempre composta di due parti: un polinomiale $f_m(x)$ dominato dalla forma di una sezione trasversale (ad esempio linea, triangolo, ecc), insieme con la composizione nodale entro la sezione trasversale, e serie Y_m determinate dalle condizioni di estremo, sarebbe conveniente per noi discutere separatamente ciascuna parte.

4.3.1 Parte di serie della funzione di spostamento

Le serie più comunemente usate sono le funzioni di base (oppure autofunzioni) le quali sono derivate dalla soluzione dell'equazione differenziale di vibrazione del fascio.

$$Y'''' = \frac{\mu^4}{a^4} Y \quad (2.1)$$

In cui a è la lunghezza del fascio (striscia) e μ è un parametro.

La forma generale di una funzione di base è

$$Y(y) = C_1 \sin\left(\frac{\mu y}{a}\right) + C_2 \cos\left(\frac{\mu y}{a}\right) + C_3 \sinh\left(\frac{\mu y}{a}\right) + C_4 \cosh\left(\frac{\mu y}{a}\right)$$

Con i coefficienti C_1, \dots , per essere determinati dalle condizioni finali. Questi sono stati sviluppati in letteratura per le diversi condizioni di estremo e sono elencati sotto:

(a) Entrambi estremi con semplice appoggio

$$Y_m(y) = \sin\left(\frac{\mu_m y}{a}\right) \quad \text{con } \mu_m = \pi, 2\pi, 3\pi, \dots, m\pi.$$

(b) Entrambi estremi incastrati

$$Y_m(y) = \sin\left(\frac{\mu_m y}{a}\right) - \sinh\left(\frac{\mu_m y}{a}\right) - \frac{\sin \mu_m - \sinh \mu_m}{\cos \mu_m - \cosh \mu_m} \left[\cos\left(\frac{\mu_m y}{a}\right) - \cosh\left(\frac{\mu_m y}{a}\right) \right]$$

$$\text{con } \mu_m = 4.7300, 7.8532, 10.9960, \dots, \frac{2m+1}{2} \pi.$$

(c) Un estremo in semplice appoggio e l'altro estremo incastrato

$$(Y_{(0)} = Y'_{(0)} = 0, \quad Y_{(a)} = Y'_{(a)} = 0)$$

$$Y_m(y) = \sin\left(\frac{\mu_m y}{a}\right) - \frac{\sin \mu_m}{\sinh \mu_m} \sinh\left(\frac{\mu_m y}{a}\right)$$

$$\text{con } \mu_m = 3.9266, 7.0685, 10.2102, \dots, \frac{4m+1}{4} \pi.$$

(d) Entrambi gli estremi liberi

$$(Y''_{(0)} = Y''_{(a)} = 0, \quad Y''_{(0)} = Y''_{(a)} = 0)$$

$$\left(Y_1(y) = 1, \quad \mu_1 = 0, \quad Y_2(y) = 1 - \frac{2y}{a}, \quad \mu_2 = 1 \right)$$

$$Y_m(y) = \sin\left(\frac{\mu_m y}{a}\right) - \sinh\left(\frac{\mu_m y}{a}\right) - \frac{\sin \mu_m - \sinh \mu_m}{\cos \mu_m - \cosh \mu_m} \left[\cos\left(\frac{\mu_m y}{a}\right) + \cosh\left(\frac{\mu_m y}{a}\right) \right]$$

$$\text{con } \mu_m = 4.7300, 7.8532, 10.9960, \dots, \frac{2m-3}{2} \pi, \quad m = 3, 4, \dots, \infty$$

(e) Un estremo tenuto e l'altro estremo libero

$$(Y_{(0)} = Y'_{(0)} = 0, \quad Y''_{(a)} = Y'''_{(a)} = 0)$$

$$Y_m(y) = \sin\left(\frac{\mu_m y}{a}\right) + \sinh\left(\frac{\mu_m y}{a}\right) - \frac{\sin \mu_m + \sinh \mu_m}{\cos \mu_m + \cosh \mu_m} \left[\cos\left(\frac{\mu_m y}{a}\right) - \cosh\left(\frac{\mu_m y}{a}\right) \right]$$

$$\text{con } \mu_m = 1.875, 4.694, \dots, \frac{2m-1}{2} \pi.$$

(f) Un estremo semplicemente supportato e l'altro estremo libero

$$(Y_{(0)} = Y''_{(0)} = 0, \quad Y''_{(a)} = Y'''_{(a)} = 0)$$

$$\left(Y_1(y) = \frac{y}{a}, \quad \mu_1 = 1 \right)$$

$$Y_m(y) = \sin\left(\frac{\mu_m y}{a}\right) + \frac{\sin \mu_m}{\sinh \mu_m} \sinh\left(\frac{\mu_m y}{a}\right)$$

$$\text{con } \mu_m = 3.9266, 7.0685, 10.2102, 13.3520, \dots, \frac{2m-3}{4}\pi, \quad m = 3, 4, \dots, \infty$$

Le funzioni, sopra menzionate, sono in primis usate per le strisce flessionali. Per problemi di elasticità 2-3 dimensionali, i quali saranno discussi in dettaglio prossimamente, entrambi Y_m e Y'_m saranno usati per le u, v (e w) spostamenti. Solo un'altra funzione è stata impiegata con successo nell'analisi del piano e sarà discussa più tardi.

Le funzioni di base possiedono proprietà preziosi di ortogonalità, ad esempio

$$\left. \begin{aligned} \int_0^a Y_m Y_n dy &= 0 \\ \int_0^a Y''_m Y''_n dy &= 0 \end{aligned} \right\} \text{ per } m \neq n$$

Sarà osservato che questi integrali appaiono in tutta le successive formule, e l'utilizzo di queste proprietà risulta un risparmio significativo nell'efficienza computazionale.

L'esistenza di così tante funzioni dovrebbe, in qualsiasi modo, essere interpretata come una necessità per un numero compatibile di subroutines del calcolatore. Nella pratica reale, tutte le funzioni rilevanti sono immagazzinate nello stesso subroutine, ed gli integrali che coinvolgono combinazioni differenti delle funzioni sono numericamente integrati. In conseguenza, problemi con tanti diversi tipi di condizioni di contorno possono essere risolti dallo stesso programma.

4.3.2 Parte di funzione di forma della funzione di spostamento

Una funzione di forma è un polinomio associato con un parametro di spostamento nodale, e descrive il campo di spostamento corrispondente con la sezione trasversale di una striscia quando il parametro di spostamento nodale, in questione, è dato un valore unità. Infatti tali funzioni di forma sono derivate specificando un valore unità normalizzato del componente di spostamento rilevante al proprio nodo, e un valore di zero per il medesimo componente di spostamento a tutti gli altri nodi.

Ad esempio, (4.2) può essere scritto come

$$w = \sum_{m=1}^r [[C_1] [C_2]] \begin{Bmatrix} \{\delta_1\} \\ \{\delta_2\} \end{Bmatrix}_m Y_m = \sum_{m=1}^r Y_m \sum_{k=1}^2 [C_k] \{\delta_k\}_m$$

Nel quale $\begin{Bmatrix} \{\delta_1\} \\ \{\delta_2\} \end{Bmatrix}$ è un vettore rappresentando i parametri di spostamento nodale del termine m th (deflessione e rotazione) ai nodi 1 e 2, e $[C_1], [C_2]$ sono le funzioni di forma associate con $\{\delta_1\}$ e $\{\delta_2\}$ rispettivamente.

In virtù di (1.2) e di (1.8), noi troviamo che a $x=0$

$$[[C_1] [C_1]] = [1 \ 0 \ 0 \ 0], \quad \begin{bmatrix} \frac{\partial [C_1]}{\partial x} & \frac{\partial [C_2]}{\partial x} \end{bmatrix} = [0 \ 1 \ 0 \ 0]$$

E a $x=b$

$$[[C_1] [C_1]] = [0 \ 0 \ 1 \ 0], \quad \begin{bmatrix} \frac{\partial [C_1]}{\partial x} & \frac{\partial [C_2]}{\partial x} \end{bmatrix} = [0 \ 0 \ 0 \ 1]$$

Soddisfacendo così il criterio indicato.

Lo scopo principale dell'uso di una funzione di forma direttamente, invece di un polinomio semplice con costanti indeterminate, è duplice: evitare il lungo percorso di correlare le costanti indeterminate ai parametri di spostamento nodale, e per assicurare che c'è compatibilità di spostamenti lungo l'interfaccia di strisce adiacenti (prismi). Il primo punto è piuttosto obvio e non richiede discussione. Il secondo punto può essere meglio spiegato notando che dagli spostamenti lungo qualsiasi interfaccia di strisce adiacenti (prismi) sono unicamente determinati dai parametri di spostamento al nodo (o ai nodi) comune per strisce adiacenti, poiché dalla definizione la funzione di forma per i parametri di spostamento di qualsiasi altro nodo prenderà valori zero alla cosiddetta interfaccia. Tante funzioni di forma sono disponibili, e alcuni dei più comuni sono elencati sotto:

(a) La retta con due nodi (figura 4-2) e con spostamenti come parametri nodali:

$$C_1 = (1 - \bar{x}), \quad C_2 = \bar{x}$$

(b) La retta con due nodi (fig 1.2b); spostamenti e derivate prime:

$$\left. \begin{aligned} [C_1] &= [(1 - 3\bar{x}^2 + 2\bar{x}^3), \quad x(1 - 2\bar{x} + \bar{x}^2)] \\ [C_2] &= [(3\bar{x}^2 - 2\bar{x}^2), \quad x(\bar{x}^2 - \bar{x})] \end{aligned} \right\}$$

(c) La retta con due nodi (fig 1.2c); spostamenti, prima e seconda derivate:

$$\left. \begin{aligned} [C_1] &= [(1 - 10\bar{x}^3 + 15\bar{x}^4 - 6\bar{x}^5), \quad x(1 - 6\bar{x}^2 + 8\bar{x}^3 - 3\bar{x}^4), \quad x^2(0.5 - 1.5\bar{x} + 1.5\bar{x}^2 - 0.5\bar{x}^3)] \\ [C_2] &= [(10\bar{x}^3 - 15\bar{x}^4 + 6\bar{x}^5), \quad x(-4\bar{x}^2 + 7\bar{x}^3 - 3\bar{x}^4), \quad x^2(0.5\bar{x} - \bar{x}^2 - 0.5\bar{x}^3)] \end{aligned} \right\}$$

(d) La retta con tre nodi (fig 1.2d); spostamenti solo:

$$C_1 = (1 - 3\bar{x} + 2\bar{x}^2), \quad C_2 = (4\bar{x} - 4\bar{x}^2), \quad C_3 = (-\bar{x} + 2\bar{x}^2).$$

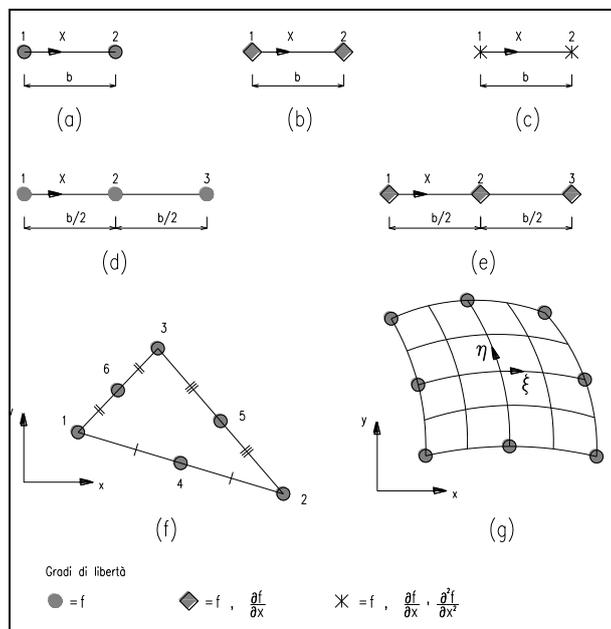


Figura 4-2. Configurazione di strisce e prismi.

(e) La retta con tre nodi (figura 4-2); spostamenti e le derivate prime:

$$\left. \begin{aligned} [C_1] &= [(1 - 23\bar{x}^2 + 66\bar{x}^3 - 68\bar{x}^4 + 24\bar{x}^5), \quad x(1 - 6\bar{x} + 13\bar{x}^2 - 12\bar{x}^3 + 4\bar{x}^4)], \\ [C_1] &= [(16\bar{x}^2 - 32\bar{x}^3 - 16\bar{x}^4), \quad x(-8\bar{x} + 32\bar{x}^2 - 40\bar{x}^3 + 16\bar{x}^4)], \\ [C_1] &= [(7\bar{x}^2 - 34\bar{x}^3 + 52\bar{x}^4 - 24\bar{x}^5), \quad x(-\bar{x} + 5\bar{x}^2 - 8\bar{x}^3 + 4\bar{x}^4)]. \end{aligned} \right\}$$

(f) Triangolo con sei nodi (figura 4-2); spostamenti solo:

(1) nodi angolari:

$$C_i = (2L_i - 1)L_i \quad \text{con } i = 1, 2, 3.$$

(2) nodi dimezzati:

$$C_4 = 4L_1L_2, \quad C_5 = 4L_2L_3, \quad C_6 = 4L_3L_1,$$

con L_1 , ecc, sono le coordinate dell'area.

Una formula estremamente utile per l'integrazione delle quantità di coordinate dell'area sopra l'area del triangolo è

$$\iint_{\Delta} L_1^a L_2^b L_3^c dx dy = \frac{a! b! c!}{(a + b + c + 2)!} 2\Delta$$

In cui Δ si riferisce all'area di un triangolo.

(g) Curva isoparametrica quadrilaterale con 8 nodi (figura 4-2); spostamenti solo:

(1) nodi angolari:

$$C_i = \frac{1}{4} (1 + \xi_0)(1 + \eta_0)(\xi_0 + \eta_0 - 1).$$

(2) nodi dimezzati ($\xi_i = 0$):

$$C_i = \frac{1}{2} (1 - \xi^2)(1 + \eta_0).$$

(3) nodi dimezzati ($\eta_i = 0$)

$$C_i = \frac{1}{2} (1 + \xi_0)(1 - \eta^2).$$

Con $\xi_0 = \xi \xi_i$, $\eta_0 = \eta \eta_i$, e ξ_i e η_i essendo il ξ e il η coordinate di un i -esimo nodo.

Una discussione dettagliata sugli elementi isoparametrici era presentato dal Zienkiewicz et al.

La derivazione delle funzione di forma merita una certa attenzione. In generale, uno dei due metodi qui descritto puo essere adottato, e caso

(d) della figura 4-2 (sezione 4.3.2) sarà usato come un'esempio nelle discussione successive.

(i) Polinomio semplice ed inversione diretta

Ci sono insieme 3 DOF per il caso (d), e quindi un polinomio di secondo grado con tre costanti indeterminati sarebbe adeguato per descrivere gli spostamenti.

$$f = A_1 + A_2x + A_3x^2$$

Oppure, nella forma matriciale,

$$f = [1 \quad x \quad x^2] \begin{Bmatrix} A_1 \\ A_2 \\ A_3 \end{Bmatrix}$$

Applicando (1.11) successivamente ai tre nodi, otteniamo:

$$\begin{Bmatrix} f_1 \\ f_2 \\ f_3 \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & x_1 & x_1^2 \\ 1 & x_2 & x_2^2 \\ 1 & x_3 & x_3^2 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} A_1 \\ A_2 \\ A_3 \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & \frac{b}{2} & \frac{b^2}{4} \\ 1 & b & b^2 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} A_1 \\ A_2 \\ A_3 \end{Bmatrix}$$

In cui f_1, f_2, f_3 sono i valori di f ai tre nodi.

Le costanti $\{A\}$ possono essere indicate in termini dei parametri nodali f_i dalla inversione di (1.12). Questo è fatto numericamente dal calcolatore oppure algebricamente come segue:

(a) scrivere (1.12) in lungo tempo:

$$f_1 = A_1, \quad f_2 = A_1 + A_2 \frac{b}{2} + A_3 \frac{b^2}{4}, \quad f_3 = A_1 + A_2 b + A_3 b^2$$

(b) Eliminare A_2 eseguendo [(1.13c) - 2x (1.13b)]; allora

$$A_3 = \frac{2}{b^2} (f_1 - 2f_2 + f_3)$$

(c) Ottenere A_2 sostituendo (1.13d) entro (1.13c):

$$A_2 = \frac{1}{b} (-3f_1 + 4f_2 - f_3)$$

(d) Mettere (1.13a), (1.13d), e (1.13e) nella forma matriciale:

$$\begin{Bmatrix} A_1 \\ A_2 \\ A_3 \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -\frac{3}{b} & \frac{4}{b} & -\frac{1}{b} \\ \frac{2}{b^2} & -\frac{4}{b^2} & \frac{2}{b^2} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} f_1 \\ f_2 \\ f_3 \end{Bmatrix}$$

(e) Equazione (1.13f) è ora sostituito entro (1.11) per fornire:

$$f = [1 \quad x \quad x^2] = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -\frac{3}{b} & \frac{4}{b} & -\frac{1}{b} \\ \frac{2}{b^2} & -\frac{4}{b^2} & \frac{2}{b^2} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} f_1 \\ f_2 \\ f_3 \end{Bmatrix}$$

Il prodotto delle prime due matrici darà ovviamente le funzioni di forma a tutti i tre nodi. Quindi, se vengono eseguite le operazioni di moltiplicazione della matrice:

$$f = \left[\left(1 - \frac{3x}{b} + \frac{2x^2}{b^2} \right), \left(\frac{4x}{b} - \frac{4x^2}{b^2} \right), \left(-\frac{x}{b} + \frac{2x^2}{b^2} \right) \right] \begin{Bmatrix} f_1 \\ f_2 \\ f_3 \end{Bmatrix}$$

$$= [(1 - 3\bar{x} + 2\bar{x}^2), (4\bar{x} - 4\bar{x}^2), (-\bar{x} + 2\bar{x}^2)] \begin{Bmatrix} f_1 \\ f_2 \\ f_3 \end{Bmatrix}$$

$$f = [C_1 \quad C_2 \quad C_3] \begin{Bmatrix} f_1 \\ f_2 \\ f_3 \end{Bmatrix}$$

Quindi le funzioni forme di (1.9d) sono stati raggiunti assumendo un polinomio semplice e successivamente passando attraverso il processo di correlare le costanti indeterminate ai parametri nodali.

Il processo, sopra, richiede un po' di ingegnoseria ed è trovato per essere conveniente ed utile nella creazione di funzioni di forma per casi più semplici. Per casi molto complessi, il processo di inversione algebrica delineato in (1.13) diventa molto lungo e coinvolto ed una formula diretta delle funzioni di forma (guardare sotto) sarà molto spesso più vantaggioso. Il lettore dovrebbe anche fare attenzione per i casi occasionali in cui un'inversione semplicemente non esiste.

(ii) Formula diretta delle funzioni di forma

In questo approccio diretto, i polinomi di Lagrange e Hermitian sono stati usati per la creazione di speciali famiglie di funzioni di forma. Per il caso generale, tuttavia, le funzioni di forma sono molto spesso semplicemente ottenute dall'ispezione.

Di nuovo si prende il caso (d) come un esempio. Per i requisiti di compatibilità è necessario soddisfare le condizioni di

Al node 1, $C_1=1$

E ai nodi 2 e 3 $C_1=0$

Ecc.

Le funzioni di interpolazione lineare sono usati come base e sono combinati in modo tale che le condizioni stabilite in (1.14) possono essere realizzate. Il processo della costruzione di funzioni di forma adatta è riassunta in tabella 1.2. Notare che una funzione lineare, avente valore zero ad un particolare nodo, determinerà la funzione combinata per avere valore zero allo stesso nodo.

4.4 Formula delle caratteristiche di striscia attraverso il principio dell'energia potenziale totale minima

La formula delle caratteristiche di striscia sarà ora presentata in dettaglio usando il principio dell'energia totale minima il quale è ben conosciuto nella meccanica strutturale. Il principio afferma che “di tutti gli spostamenti compatibili che soddisfano determinate condizioni di contorno, quelli che soddisfano le condizioni di equilibrio fanno l'energia potenziale totale assumere un valore stazionario”, nella forma matematica abbiamo:

$$\left\{ \frac{\partial \phi}{\partial \{\delta\}} \right\} = \left\{ \begin{array}{c} \frac{\partial \phi}{\partial \{\delta\}_1} \\ \frac{\partial \phi}{\partial \{\delta\}_2} \\ \vdots \end{array} \right\} = \{0\}$$

In cui l'energia potenziale totale ϕ è definita come la somma dell'energia potenziale di forze esterne W e l'energia di deformazione U . $\{\delta\}_m$ è un vettore di parametri di spostamenti nodale a tutti i nodi per il mth termine delle serie.

Quest'equazione può anche essere interpretato come il più generale approccio RaleighRitz applicato per l'analisi elastico.

4.4.1 Funzioni di spostamento

La forma generale delle funzione di spostamento può essere scritto come:

$$\{f\} = \sum_{m=1}^r [[C_1] \quad [C_2] \quad \dots] \begin{Bmatrix} \{\delta_1\} \\ \{\delta_2\} \\ \vdots \end{Bmatrix}_m Y_m$$

$$\{f\} = \sum_{m=1}^r Y_m \sum_{k=1}^s [C_k] \{\delta_k\}_m$$

Le espressioni possono essere fatte più compatte dalla combinazione insieme delle serie e delle funzioni di forma. In questo modo:

$$\{f\} = \sum_{m=1}^r \sum_{k=1}^s [N_k]_m \{\delta_k\}_m = \sum_{m=1}^r [N]_m \{\delta\}_m = [N]\{\delta\}$$

In cui $k=1,2,\dots,s$ corrispondono ai numeri delle linee nodali.

Per il caso di un piano di striscia di sforzo con due linee nodali e u,v come parametri di spostamento nodale, le seguenti uguaglianze sarebbe applicabile:

$$\left. \begin{aligned} \{f\} &= \begin{Bmatrix} u \\ v \end{Bmatrix}, & s &= 2, \\ \{\delta_k\}_m &= \begin{Bmatrix} u_k & v_k \end{Bmatrix}_m^T \end{aligned} \right\}$$

4.4.2 Deformazioni

Una volta le funzioni di spostamento sono conosciute, è possibile ottenere le deformazioni attraverso differenziazioni appropriate rispetto alle variabili coordinate rilevanti x,y , oppure z , dunque

$$\{\varepsilon\} = [B]\{\delta\} = \sum_{m=1}^r [B]_m \{\delta\}_m = \sum_{m=1}^r \sum_{k=1}^s [B_k]_m \{\delta_k\}_m$$

In questa formula, le così chiamate deformazioni sono sicuramente deformazioni generalizzati e include una deformazione normale e di taglio così come le curvature flessionali e torcenti. La matrice $[B]$ è riferita così alla matrice di deformazione.

Ad esempio, nel caso di una striscia flessionale, abbiamo

$$\{\varepsilon\} = \begin{Bmatrix} \chi_x \\ \chi_y \\ 2\chi_{xy} \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} \frac{-\partial^2 w}{\partial x^2} \\ \frac{-\partial^2 w}{\partial y^2} \\ 2 \frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y} \end{Bmatrix} \quad \text{con } [B] = \begin{Bmatrix} \frac{-\partial^2 [N]}{\partial x^2} \\ \frac{-\partial^2 [N]}{\partial y^2} \\ 2 \frac{\partial^2 [N]}{\partial x \partial y} \end{Bmatrix}$$

Mentre per una striscia di piano a due dimensioni,

$$\{\varepsilon\} = \begin{Bmatrix} \varepsilon_x \\ \varepsilon_y \\ \gamma_{xy} \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} \frac{\partial u}{\partial x} \\ \frac{\partial v}{\partial y} \\ \frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x} \end{Bmatrix}$$

E la matrice di deformazione [B] può essere scritto in un modo simile.

4.4.3 Sforzi

Gli sforzi sono relativi alle deformazioni dalla:

$$\{\sigma\} = [D]\{\varepsilon\} = [D][B]\{\delta\} = [D] \sum_{m=1}^r [B]_m \{\delta\}_m = [D] \sum_{m=1}^r \sum_{k=1}^s [B_k]_m \{\delta_k\}_m$$

La matrice [D] è spesso riferito alla matrice elastica oppure alla propria matrice. Per la flessione di una lastra isotropica,

$$[D] = \frac{Et^3}{12(1-\nu^2)} \begin{bmatrix} 1 & \nu & 0 \\ \nu & 1 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1-\nu}{2} \end{bmatrix}$$

E per il piano isotropico i problemi di sforzi

$$[D] = \frac{E}{1-\nu^2} \begin{bmatrix} 1 & \nu & 0 \\ \nu & 1 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1-\nu}{2} \end{bmatrix}$$

Di nuovo, nel presente contesto gli sforzi rappresentano sforzi generalizzati includendo sforzi normali e di taglio così come i momenti flessionali e torcenti e forze di taglio.

4.4.4 Minimizzazione dell'energia potenziale totale

(a) Energia della deformazione

L'energia della deformazione di un corpo elastico è dato da:

$$U = \frac{1}{2} \int \{\varepsilon\}^T \{\sigma\} d(vol.)$$

Dalla virtù di (1.18) e (1.21), la formula precedente può essere riscritta come

$$U = \frac{1}{2} \int \{\delta\}^T [B]^T [D] [B] \{\delta\} d(vol.)$$

(b) Energia potenziale

L'energia potenziale a causa dei carichi di superficie esterna $\{q\}$ può essere scritta in modo semplice come:

$$W = - \int \{f\}^T \{q\} d(area.)$$

Sostituendo (1.16) in quest'ultima, abbiamo:

$$W = - \int \{\delta\}^T [N]^T \{q\} d(\text{area})$$

Per un carico concentrato, l'integrale sopra è ridotto alla semplice espressione di un carico moltiplicato dallo spostamento corrispondente. Per tutti gli altri carichi distribuiti, l'energia potenziale può essere ottenuta attraverso tanti processi di semplice integrazione.

(c) Energia potenziale totale

L'energia potenziale totale, come dichiarato precedentemente, è la somma dell'energia immagazzinata delle deformazioni elastiche nel corpo e l'energia potenziale dei carichi. Allora:

$$\phi = U + W = \frac{1}{2} \int \{\delta\}^T [B]^T [D] [B] \{\delta\} d(\text{vol.}) = - \int \{\delta\}^T [N]^T \{q\} d(\text{area})$$

(d) Procedura di minimizzazione

Il principio dell'energia potenziale totale minima richiede che

$$\left\{ \frac{\partial \phi}{\partial \{\delta\}} \right\} = \{0\}$$

Sostituendo le ultime due formule ed eseguendo il differenziale parziale, otteniamo

$$\left\{ \frac{\partial \phi}{\partial \{\delta\}} \right\} = \int [B]^T [D] [B] \{\delta\} d(\text{vol.}) - \int [N]^T \{q\} d(\text{area}) = \{0\}$$

oppure

$$[S] \{\delta\} - \{F\} = \{0\}$$

In cui:

$$[S] = \int [B]^T [D] [B] d(\text{vol.})$$

$$[S] = \int \left[\begin{array}{cccc} [B]_1 & [B]_2 & \dots & [B]_r \end{array} \right]^T [D] \left[\begin{array}{cccc} [B]_1 & [B]_2 & \dots & [B]_r \end{array} \right] d(\text{vol.})$$

$$[S] = \int \left[\begin{array}{cccc} [B]_1^T [D] [B]_1 & [B]_1^T [D] [B]_2 & \dots & [B]_1^T [D] [B]_r \\ [B]_2^T [D] [B]_1 & [B]_2^T [D] [B]_2 & \dots & [B]_2^T [D] [B]_r \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ [B]_r^T [D] [B]_1 & [B]_r^T [D] [B]_2 & \dots & [B]_r^T [D] [B]_r \end{array} \right] d(\text{vol.})$$

$$[S] = \int \left[\begin{array}{cccc} [S]_{11} & [S]_{12} & \dots & [S]_{1r} \\ [S]_{21} & [S]_{22} & \dots & [S]_{2r} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ [S]_{r1} & [S]_{r2} & \dots & [S]_{rr} \end{array} \right]$$

Con $[S]_{mn} = \int [B]_m^T [D] [B]_n d(\text{vol.})$

Questa ultima espressione può essere ulteriormente definita, in accordo con il numero totale di linee nodali s con ogni striscia, come

$$[S]_{mn} = \left[\begin{array}{cccc} [S_{11}] & [S_{11}] & \dots & [S_{1s}] \\ [S_{21}] & [S_{22}] & \dots & [S_{2s}] \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ [S_{s1}] & [S_{s2}] & \dots & [S_{ss}] \end{array} \right]_{mn}$$

In cui il suffisso ij è riferito alle linee nodali i e j .

Finalmente, con l'aiuto di (1.18), possiamo scrivere

$$[S_{ij}]_{mn} = \int [B_i]_m^T [D] [B_j]_n d(vol.)$$

Sarà visto più tardi che questa formula produce l'unità basica quando le matrici di rigidità di tutte le strisce, facendo una struttura, sono assemblati per formare una matrice di rigidità completa.

La matrice di carico è interpretata dalla (1.27) e dalla (1.28) per essere

$$\{F\} = \int [N]^T \{q\} d(area) = \int \begin{bmatrix} [N]_1^T \\ [N]_2^T \\ \dots \\ \dots \\ [N]_r^T \end{bmatrix} \{q\} d(area)$$

Oppure per il termine mth della sola serie,

$$\{F\}_m = \int [N]_m^T \{q\} d(area)$$

Simile a cos'è stato fatto nello sviluppo della matrice di rigidità, la matrice di carico può anche essere diviso ulteriormente scrivendo

$$\{F\}_m = \begin{Bmatrix} \{F_1\}_m \\ \{F_2\}_m \\ \vdots \\ \{F_s\}_m \end{Bmatrix} = \int \begin{bmatrix} [N_1]_m^T \\ [N_2]_m^T \\ \dots \\ \dots \\ [N_s]_m^T \end{bmatrix} \{q\} d(area)$$

Quindi:

$$\{F_i\}_m = \int [N_i]_m^T \{q\} d(area)$$

Una grande quantità di integrazione che coinvolge molti diversi integrali si trovano nelle forme espanse di (1.32) e di (1.36). Tuttavia, teoricamente parlando, tutti o quasi tutti di questi integrali possono essere integrati analiticamente, la quantità di lavoro manuale coinvolto è molto spesso di proporzioni sconcertanti.

La regola generale è dunque che solo quei coefficienti di matrice, usando integrali molto semplici, dovrebbero essere dati nelle soluzioni di forma chiusa, mentre qualsiasi componente che coinvolge una certa complessità deve sempre essere fatto numericamente sul computer, usando le regole dell'efficienza di integrazione come la formula di quadratura Gaussian.

4.5 Metodo degli elementi finiti FSM

Nel paragrafo precedente è stata sviluppata di maniera dettagliata il metodo della strisce finite, e il principio del minimo dell'energia potenziale totale. In questo paragrafo è affrontato in linee generali l'analisi strutturali non lineari tramite il metodo FEM (Finite Element Method)

Il metodo FEM è basato sulla possibilità di risolvere le equazioni differenziali dell'analisi strutturale in un dominio ristretto e in modo approssimato, in un piccolo dominio, cioè in elemento finito. Il campo d'analisi è decomposto in diversi tipi di elementi connessi tra di loro per nodi. Gli elementi hanno diverse caratterizzazioni e proprietà a seconda del tipo di analisi che si presta in considerazione. I tipi di elementi sono di solito triangoli, quadrilateri, esaedri e tetraedri, a seconda del dominio dimensionale. Nei nodi viene applicato il carico e le condizioni al contorno. Le incognite nel metodo sono gli spostamenti nodali, ed una volta trovati è possibile valutare i valori degli sforzi e delle deformazioni.

La prima condizione imposta è quella di definire una funzione di forma dell'elemento, cioè,

$$u(x) = N(x)u$$

Dove N è la matrice che lega gli spostamenti al interno dell'elemento con i corrispondenti spostamenti nodali.

Considerando il legame costitutivo del materiale ed anche quello cinematico le deformazioni vengono in relazione con gli sforzi tramite:

$$\varepsilon(x) = L [u(x)] = B u$$

$$\sigma(x) = D(x)\varepsilon$$

Dopodiché vengono costruite le matrici degli elementi, k . $u + f = 0$, le cui sono assemblate trovando la matrice di rigidezza del sistema K .

avendo in considerazione le condizioni vincolari e di carico, vengono trovati gli spostamenti incogniti, per l'intero sistema. Una volta trovati, gli spostamenti e col legame cinematico e costitutivo è possibile trovare gli sforzi e delle deformazioni.

4.6 Software usato nello sviluppo della tesi.

Per lo sviluppo del metodo degli elementi finiti, si ha preso il software commerciale Adina, Adina (Automatic Dynamic Incremental Nonlinear Analysis) il cui consente di sviluppare analisi lineare e non-lineare di strutture.

Nel caso dell'analisi strutturale consente modellare una sezione attraverso di elementi tipo frame, 3D, Shell, plate, etc. Anche s'inserisce le caratteristiche proprie del materiale, geometria, vincoli, gruppo e tipo dell'elemento finito.

Alla fine si trovano le deformazioni, i modi propri della struttura, gli sforzi le caratteristiche, gli spostamenti, etc.

Viene anche usato, cuFSM (Conventional and Constrained finite strip methods) che è un software basato sul metodo delle strisce finite, che consente trovare i carichi di buckling di sezioni sottili.

Il FSM presenta alcuni problemi, tra quelli: il modello solo prende travi con una luce, la sezione non può variare lungo l'elemento.

Capitolo

5

ANALISI E CONFRONTO PROFILI SOTTILI

Lo studio principale della tesi è centrato al confronto della risposta dell'instabilità dei profili sottili in acciaio sia con il metodo degli elementi finiti, che con il metodo delle strisce finite.

Il studio viene eseguito, sui profili sottili di acciaio, con caratteristiche proprie e tipiche di quelli dei saggomari commerciale. Lo studio viene indirizzato in due diversi approcci: il primo a trovare il tipo di instabilità di ogni profilo in funzione della sua lunghezza, e il secondo legato alla influenza delle imperfezione iniziale nella loro capacità.

La prima parte dell'analisi viene svolta sia con ADINA, software sotto il metodo degli elementi finiti, che con cuFSM, software basato nell'approccio o metodo delle strisce finite.

5.1 Profili e schema usati nell'analisi

Per svolgere l'analisi si hanno presso cinque diversi sezioni: Profilo a C, profilo a C con irrigidimenti, profilo un profilo a omega, un secondo profilo a omega con altezza maggiore e per ultimo un profilo a n, tipico degli usati nella copertura per gli arcarecci. La figura 5-1, fa vedere le loro sezioni trasversali (misure in mm).

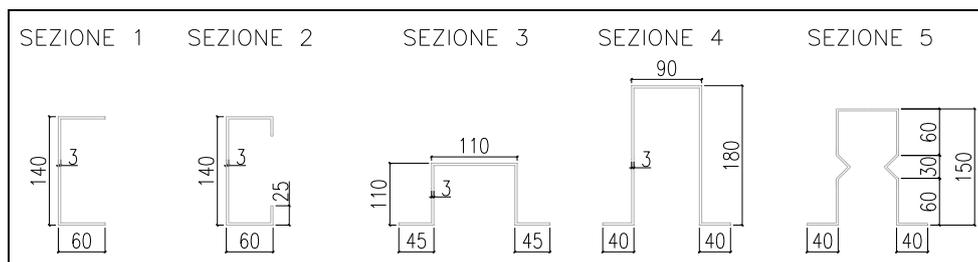


Figura 5-1. Sezioni trasversali profili tipici.

Le caratteristiche principali di ogni sezione sono riportati in tabella 5.1.

Tabella 5-1. Proprietà profili sottili

PROPIETA	SEZIONE 1	SEZIONE 2	SEZIONE 3	SEZIONE 4	SEZIONE 5
Area (mm ²)	762	894	1044	1554	1189
Xo (mm)	14.69	21.39	0.00	0.00	0.00
Yo (mm)	70	70	42.2	91.71	75
Ix (mm ⁴)	2291006	475908	1087300	3113102	1865793
Iy (mm ⁴)	262565	2710282	3148052	6624306	3451259
fy (MPa)	S235/160	S235/160	S235/160	S235/160	S235/160
E (MPa)	210000	210000	210000	210000	210000

Per svolgere l'analisi delle diverse sezioni, si considera lo schema strutturale di un'asta ad unica campata, le condizioni di vincoli negli estremi tipo cerniera – carrello e materiale acciaio con modulo di elasticità pari a $E=210000$ MPa e il coefficiente di Poisson $\nu=0.30$.

Per quanto riguarda il carico, è stato usato un carico di punta nel lato del carrello. La figura 5-2 mostra lo schema strutturale del modello.

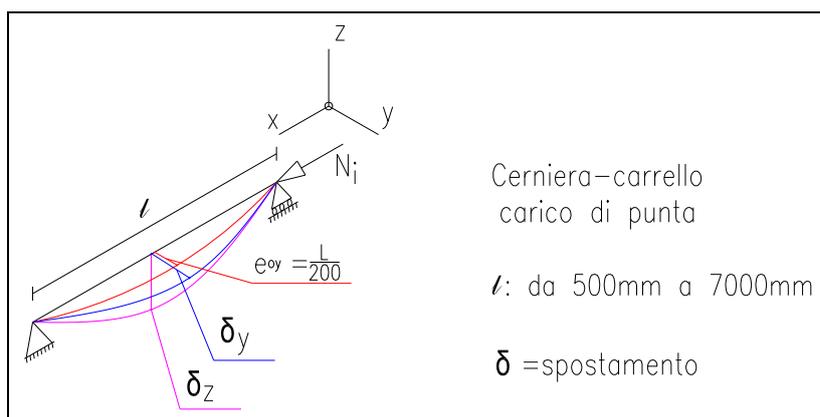


Figura 5-2. Schema strutturale.

5.2 Procedura dell’analisi

Sono stati effettuati due tipi di analisi, il primo indirizzato a trovare il carico di instabilità del profilo sottili in acciaio (instabilità locale, distorsionale o globale) a seconda la lunghezza del profilo tramite FEM e FSM e il secondo a trovare il carico critico del profilo in corrispondenza delle imperfezioni geometriche iniziali solo nel metodo FSM.

5.2.1 Procedura carico di instabilità.

Per eseguire l’analisi di instabilità per i diversi tipi di sezioni, è stata condotta la seguente procedura:

- Modellazione e discretizzazione del profilo in elementi finiti o in strisce finite, secondo il metodo FEM o FSM
- Applicazione di un carico iniziale condotto a ottenere il carico di instabilità. Nel metodo FEM, si ha scelto un valore di carico consistente con la lunghezza del profilo. Nel metodo FSM, il carico base è stato quello dello sforzo limite del materiale agli stati limiti di servizio.
- Analisi di secondo ordine a grandi spostamenti e piccole deformazioni, attraverso il metodo FEM, trovando il carico di instabilità per ogni lunghezza di studio
- Analisi di collasso attraverso il metodo FSM, trovando il carico di instabilità per tutte le lunghezze in studio.

La suddetta procedura è stata eseguita per valori di lunghezza, da 500mm a 7000mm, con variazione tra di loro di 500mm, cioè sono state analizzate 14 lunghezze per ogni profilo: 500 mm, 1000mm, 1500mm, 2000mm, 2500mm, 3000mm, 3500mm, 4000mm, 4500mm, 5000mm, 5500mm, 6000mm, 6500mm.

5.2.2 Procedura carico critico con imperfezioni geometriche.

Per ogni lunghezza del profilo è stato seguito un’analisi di carico di collasso, considerando la geometria deformata, secondo l’entità imposta nel Eurocodice (tabella 2-5 e tabella 2-6)

Per eseguire l’analisi di carico di collasso delle diversi sezioni, è stata condotta la seguente procedura:

- Modellazione e discretizzazione del profilo in elementi finiti, secondo il metodo FEM o FSM,
- Applicazione di un carico iniziale condotto a ottenere il carico di collasso. Si ha scelto un valore di carico consistente con il carico di instabilità trovato nell’analisi precedente
- Applicazione dell’entità delle imperfezioni iniziale, considerando una deformata con la forma del primo modo naturale di vibrare, trovato nell’analisi precedente. Per

alcune lunghezze non corrispondente con il suo primo modo. L'entità massima delle imperfezioni è stata fissata in $L/200$ per tutti i profili e lunghezze.

- Si ha fissato uno spostamento massimo in mezzzeria per ogni lunghezza pari a $L/100$.
- Analisi di secondo ordine a grandi spostamenti, attraverso il metodo FEM, trovando il carico di collasso per la lunghezza e profilo in studio

La suddetta procedura è stata eseguita per valori di lunghezza, da 500mm a 7000mm, con variazione tra di loro di 500mm, cioè sono stati analizzati 14 lunghezze per ogni profilo: 500 mm, 1000mm, 1500mm, 2000mm, 2500mm, 3000mm, 3500mm, 4000mm, 4500mm, 5000mm, 5500mm, 6000mm, 6500mm.

5.3 Analisi carico instabilità FEM sul profilo 1.

La sezione 1 (vedere figura 5-1), corrispondente al profilo C, è stata modellata in FEM, trovando il suo corrispondente carico di instabilità. Dalla figura 5-3 a la figura 5-16 vengono riportati tutti i modelli, il suo carico e la forma del primo modo di instabilità (L o D o G).

La densità nella mesh, il numero di nodi, il tipo e quantità di elementi finiti, sono riassunti nella tabella 5-2.

Tabella 5-2. Caratterizzazione modello FEM profilo 1.

Lunghezza (mm)	Numero di nodi	Elemento		Lunghezza (mm)	Numero di nodi	Elemento	
		numero	tipo			numero	tipo
500	155	128	shell-4	4000	1217	1071	shell-4
1000	317	272	shell-4	4500	1361	1200	shell-4
1500	466	400	shell-4	5000	1505	1328	shell-4
2000	605	528	shell-4	5500	1667	1472	shell-4
2500	767	672	shell-4	6000	1811	1600	shell-4
3000	911	800	shell-4	6500	1955	1728	shell-4
3500	1055	928	shell-4	7000	2117	1872	shell-4

5.3.1 Modelli del profili 1 in elementi finiti ed risposta nel primo modo.

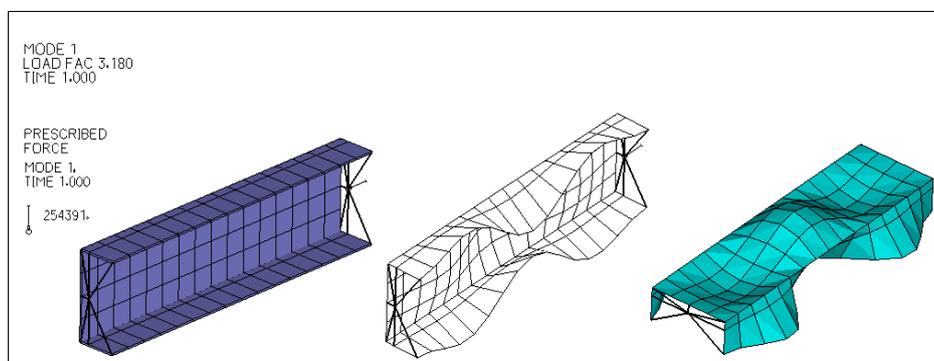


Figura 5-3. Schema e risultato modo 1, modello FEM, profilo 1. L=500 mm.

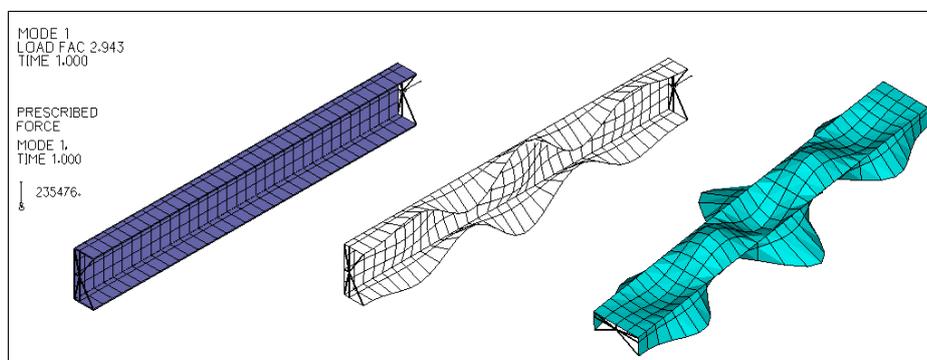


Figura 5-4. Schema e risultato modo 1, modello FEM, profilo 1. L=1000 mm.

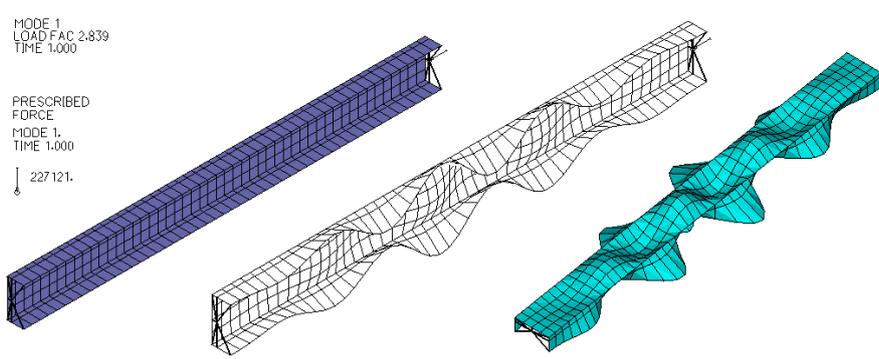


Figura 5-5. Schema e risultato modo 1, modello FEM, profilo 1. L=1500 mm.

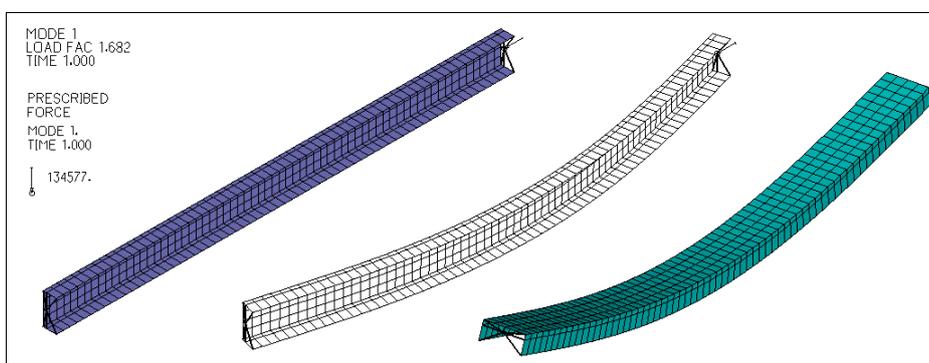


Figura 5-6. Schema e risultato modo 1, modello FEM, profilo 1. L=2000 mm.

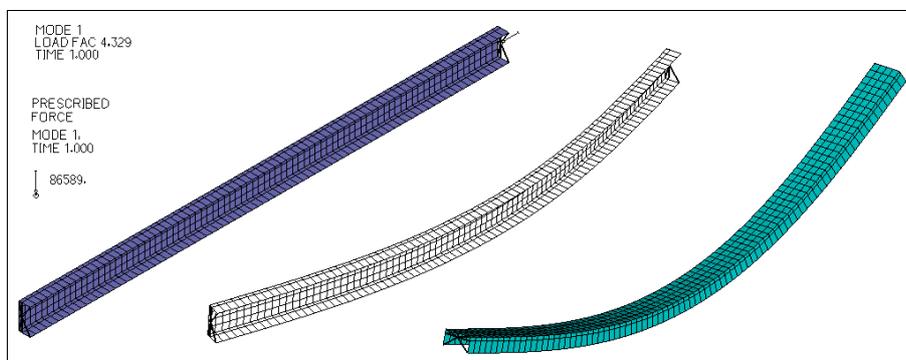


Figura 5-7. Schema e risultato modo 1, modello FEM, profilo 1. L=2500 mm.

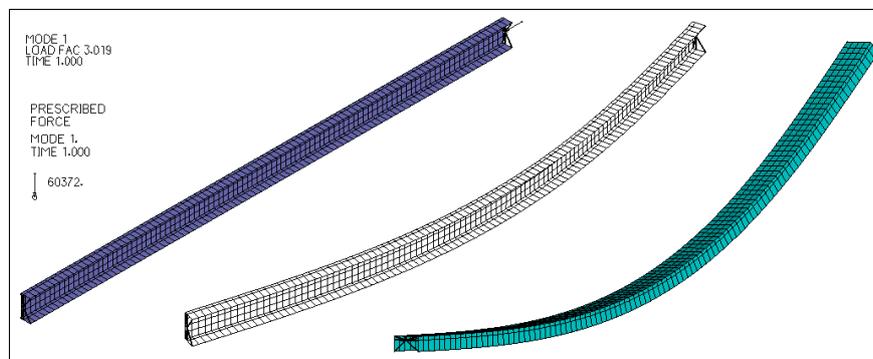


Figura 5-8. Schema e risultato modo 1, modello FEM, profilo 1. L=3000 mm.

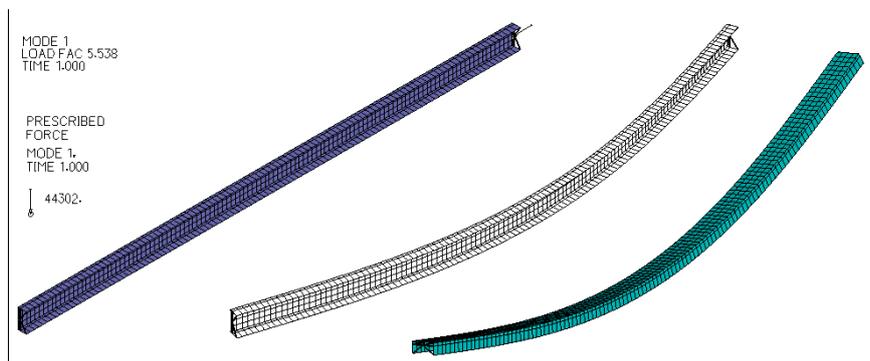


Figura 5-9. Schema e risultato modo 1, modello FEM, profilo 1. $L=3500$ mm.

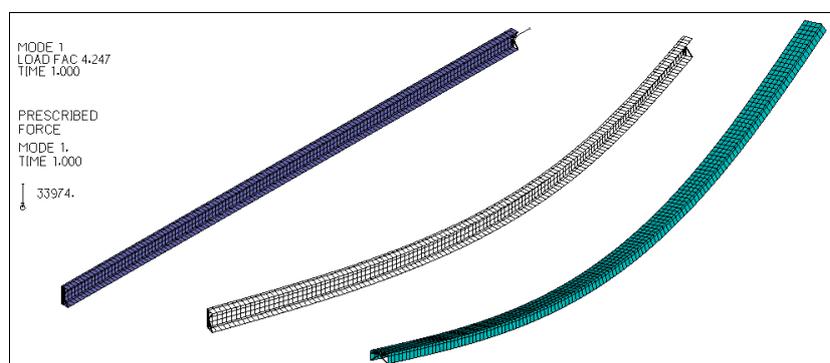


Figura 5-10. Schema e risultato modo 1, modello FEM, profilo 1. $L=4000$ mm.

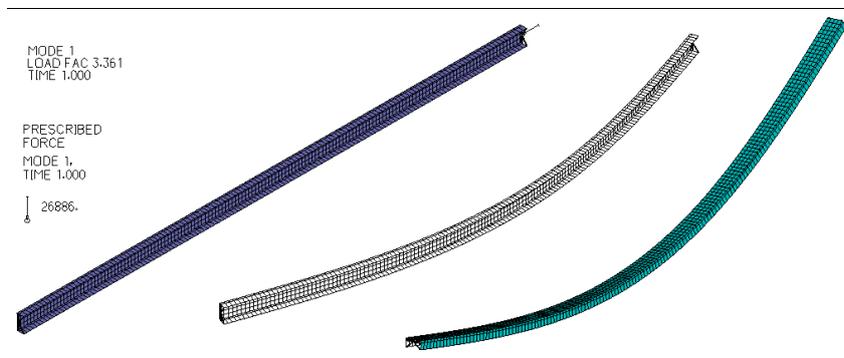


Figura 5-11. Schema e risultato modo 1, modello FEM, profilo 1. $L=4500$ mm.

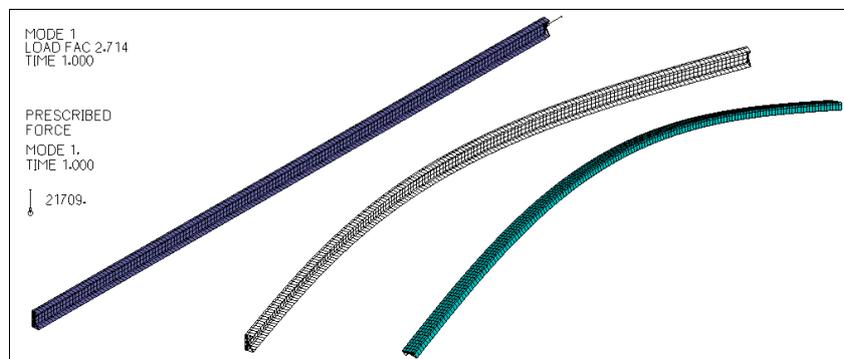


Figura 5-12. Schema e risultato modo 1, modello FEM, profilo 1. $L=5000$ mm.

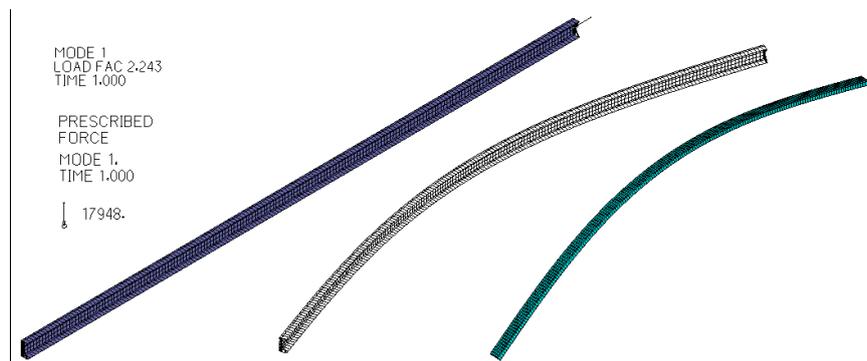


Figura 5-13. Schema e risultato modo 1, modello FEM, profilo 1. L=5500 mm.

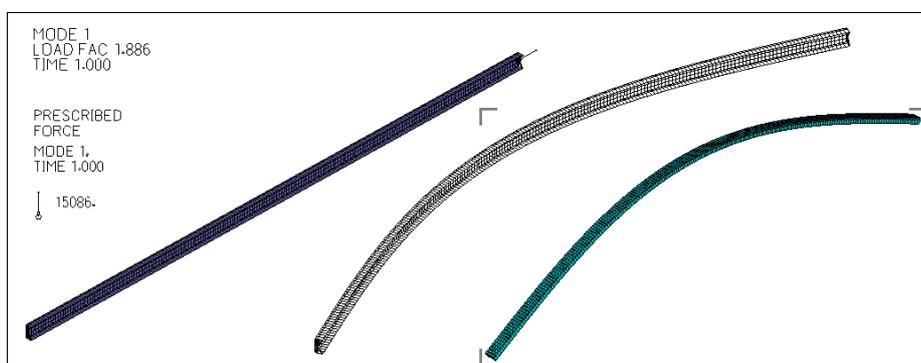


Figura 5-14. Schema e risultato modo 1, modello FEM, profilo 1. L=6000 mm.

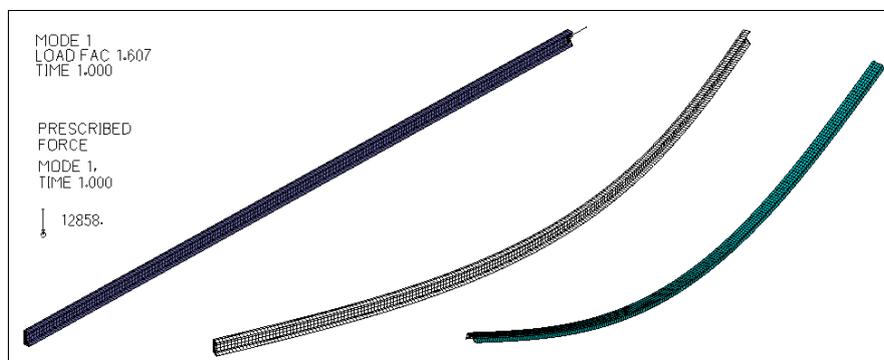


Figura 5-15. Schema e risultato modo 1, modello FEM, profilo 1. L=6500 mm.

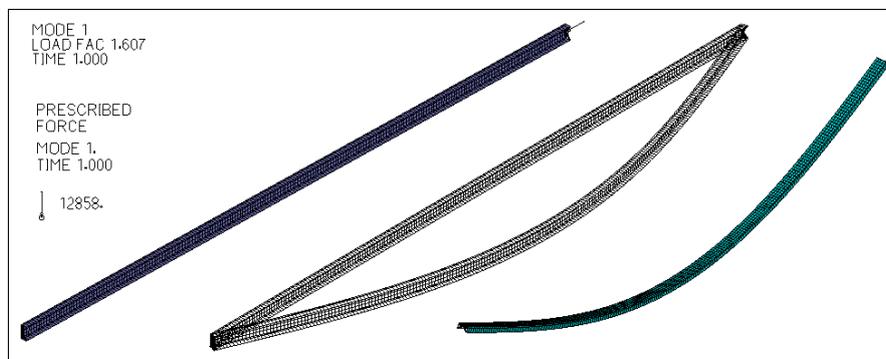


Figura 5-16. Schema e risultato modo 1, modello FEM, profilo 1. L=7000 mm.

5.3.2 Carico di instabilità del profilo 1.

Nella tabella 5-3 sono riportati i carichi di instabilità del profilo 1 in funzione della sua lunghezza e diagrammati in figura 5-17.

Tabella 5-3. Carichi di instabilità profilo 1 – modello FEM.

Lunghezza (mm)	carico collasso (kN)	Lunghezza (mm)	carico collasso (kN)
500	254.4	4000	34.0
1000	235.5	4500	26.9
1500	235.5	5000	21.7
2000	227.1	5500	17.9
2500	86.6	6000	15.1
3000	60.4	6500	12.9
3500	44.3	7000	11.1

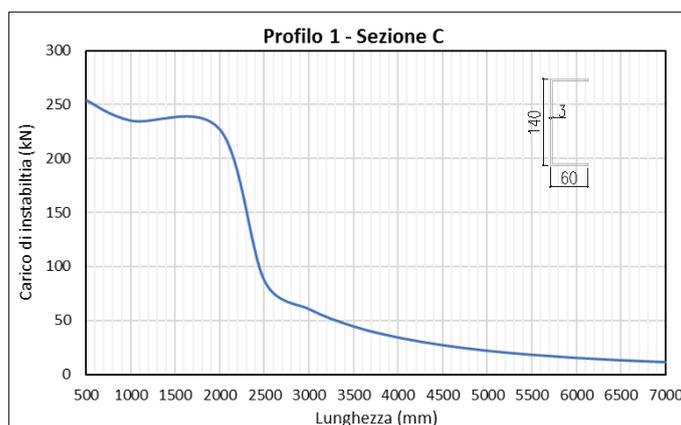


Figura 5-17. Risultati carico instabilità profilo 1 modello FEM.

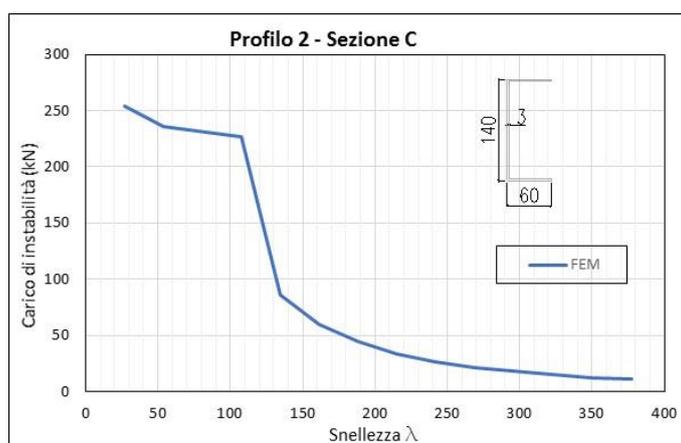


Figura 5-18. Carico instabilità vs snellezza profilo 1 modello FEM.

5.4 Analisi carico instabilità FEM sul profilo 2.

La sezione 2 (vedere figura 5-1), corrispondente al profilo C con irrigidimento, è stata modellata in FEM, trovando il suo corrispondente carico di instabilità. Dalla figura 5-19 a la figura 5-32 vengono riportati tutti i modelli, il suo carico e la forma del primo modo di instabilità (L o D o G).

La densità nella mesh, il numero di nodi, il tipo e quantità di elementi finiti, sono stati riassunti nella tabella 5-4.

Tabella 5-4. Caratterizzazione modello FEM profilo 2.

Lunghezza (mm)	Numero di nodi	Elemento		Lunghezza (mm)	Numero di nodi	Elemento	
		numero	tipo			numero	tipo
500	189	160	shell-4	4000	1487	1340	shell-4
1000	387	340	shell-4	4500	1663	1500	shell-4
1500	563	500	shell-4	5000	1839	1660	shell-4
2000	739	660	shell-4	5500	2037	1840	shell-4
2500	937	840	shell-4	6000	2213	2000	shell-4
3000	1113	1000	shell-4	6500	2389	2160	shell-4
3500	1289	1160	shell-4	7000	2587	2340	shell-4

5.4.1 Modelli del profili 2 in elementi finiti ed risposta nel primo modo.

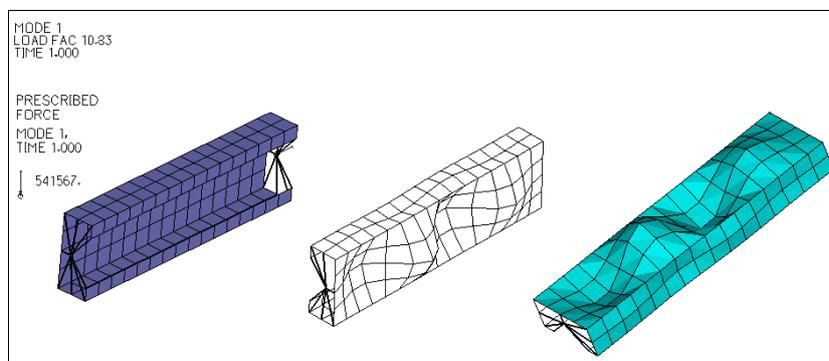


Figura 5-19. Schema e risultato modo 1, modello FEM, profilo 2. L=500 mm.

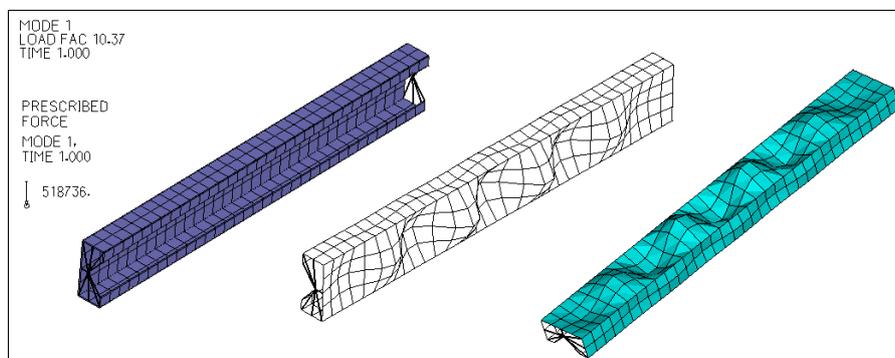


Figura 5-20. Schema e risultato modo 1, modello FEM, profilo 2. L=1000 mm.

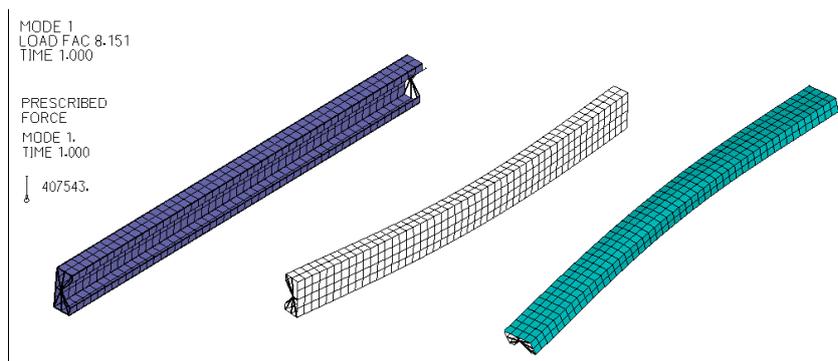


Figura 5-21. Schema e risultato modo 1, modello FEM, profilo 2. $L=1500$ mm.

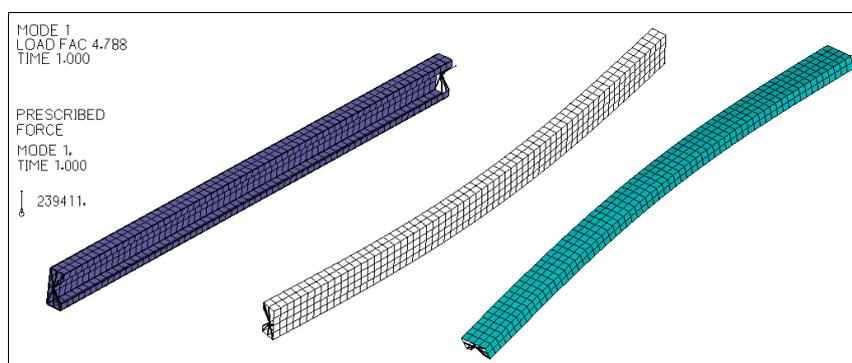


Figura 5-22. Schema e risultato modo 1, modello FEM, profilo 2. $L=2000$ mm.

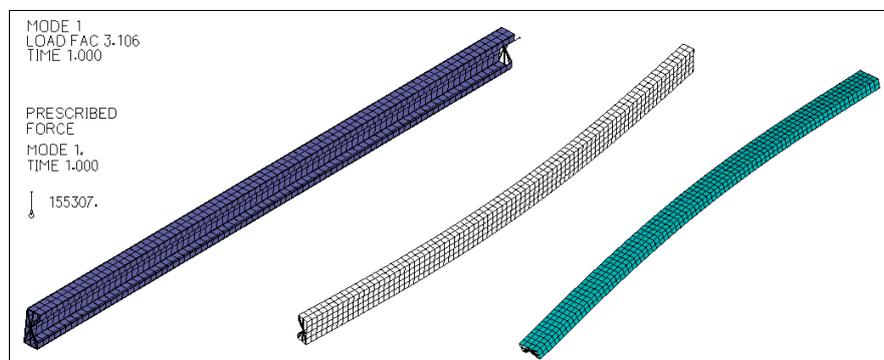


Figura 5-23. Schema e risultato modo 1, modello FEM, profilo 2. $L=2500$ mm.

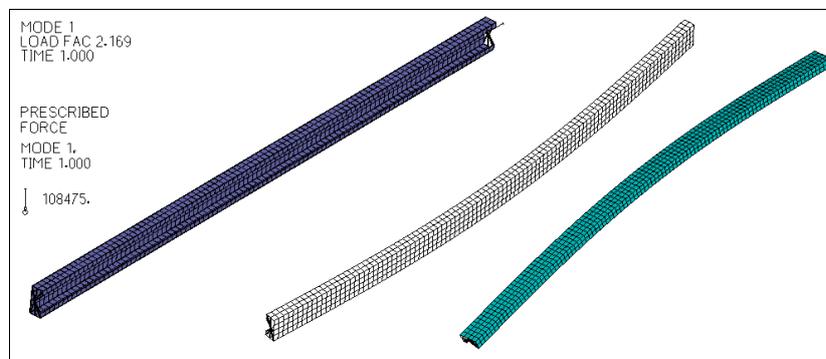


Figura 5-24. Schema e risultato modo 1, modello FEM, profilo 2. $L=3000$ mm.



Figura 5-25. Schema e risultato modo 1, modello FEM, profilo 2. L=3500 mm.

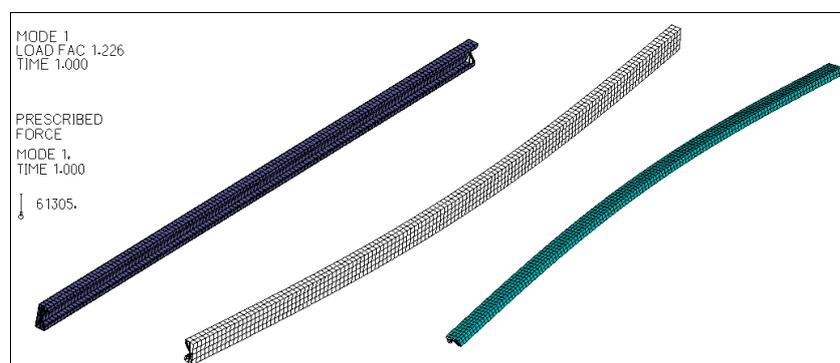


Figura 5-26. Schema e risultato modo 1, modello FEM, profilo 2. L=4000 mm.

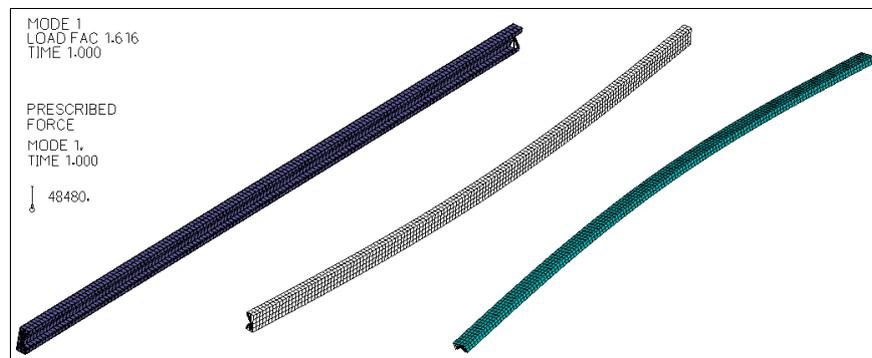


Figura 5-27. Schema e risultato modo 1, modello FEM, profilo 2. L=4500 mm.

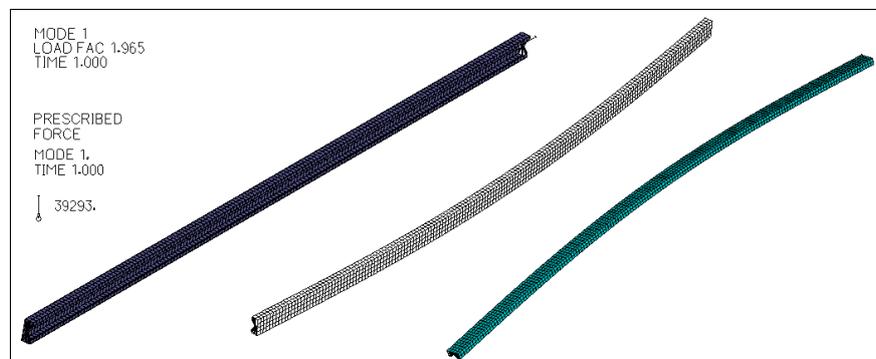


Figura 5-28. Schema e risultato modo 1, modello FEM, profilo 2. L=5000 mm.



Figura 5-29. Schema e risultato modo 1, modello FEM, profilo 2. $L=5500$ mm.



Figura 5-30. Schema e risultato modo 1, modello FEM, profilo 2. $L=6000$ mm.



Figura 5-31. Schema e risultato modo 1, modello FEM, profilo 2. $L=6500$ mm.



Figura 5-32. Schema e risultato modo 1, modello FEM, profilo 2. $L=7000$ mm.

5.4.2 Carichi di instabilità del profilo 2.

Nella tabella 5-5 sono riportati i carichi di instabilità del profilo 2 in funzione della sua lunghezza e diagrammati in figura 5-33.

Tabella 5-5. Carichi di instabilità profilo 2 – modello FEM.

Lunghezza (mm)	carico collasso (kN)	Lunghezza (mm)	carico collasso (kN)
500	541.6	4000	61.3
1000	518.7	4500	48.5
1500	407.5	5000	39.3
2000	239.4	5500	32.5
2500	155.3	6000	27.3
3000	108.5	6500	23.3
3500	79.9	7000	20.1

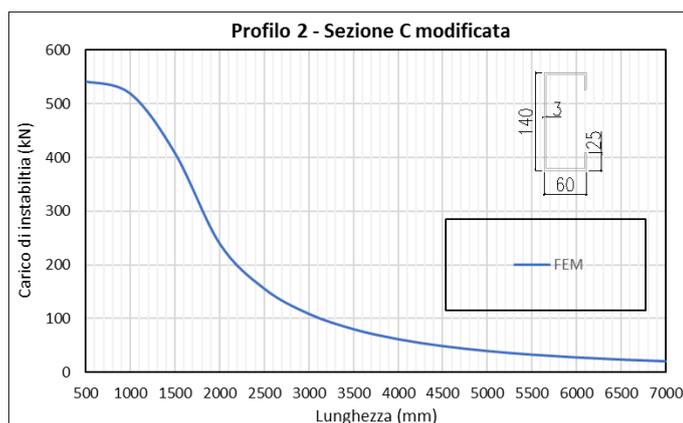


Figura 5-33. Risultati carico instabilità profilo 2 modello FEM.

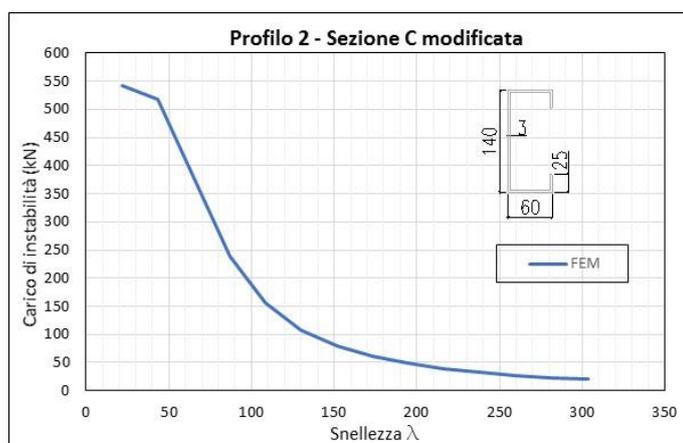


Figura 5-34. Carico instabilità vs snellezza profilo 2 modello FEM.

5.5 Analisi carico instabilità FEM sul profilo 3.

La sezione 3 (vedere figura 5-1), corrispondente a un profilo tipo omega, è stata modellata in FEM, trovando il suo corrispondente carico di instabilità. Dalla figura 5-35 a la figura 5-48 vengono riportati tutti i modelli, il suo carico e la forma del primo modo di instabilità (L o D o G).

La densità nella mesh, il numero di nodi, il tipo e quantità di elementi finiti, sono riassunti nella tabella 5-6.

Tabella 5-6. Caratterizzazione modello FEM profilo 3.

Lunghezza (mm)	Numero di nodi	Elemento		Lunghezza (mm)	Numero di nodi	Elemento	
		numero	tipo			numero	tipo
500	223	192	shell-4	4000	1757	1608	shell-4
1000	457	408	shell-4	4500	1965	1800	shell-4
1500	665	600	shell-4	5000	2173	1992	shell-4
2000	873	792	shell-4	5500	2407	2208	shell-4
2500	1107	1008	shell-4	6000	2615	2400	shell-4
3000	1315	1200	shell-4	6500	2823	2592	shell-4
3500	1523	1392	shell-4	7000	3057	2808	shell-4

5.5.1 Modelli del profili 3 in elementi finiti ed risposta nel primo modo.

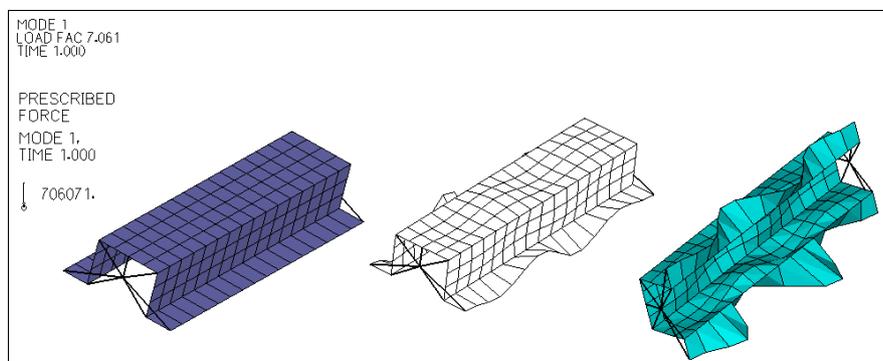


Figura 5-35. Schema e risultato modo 1, modello FEM, profilo 3. L=500 mm.

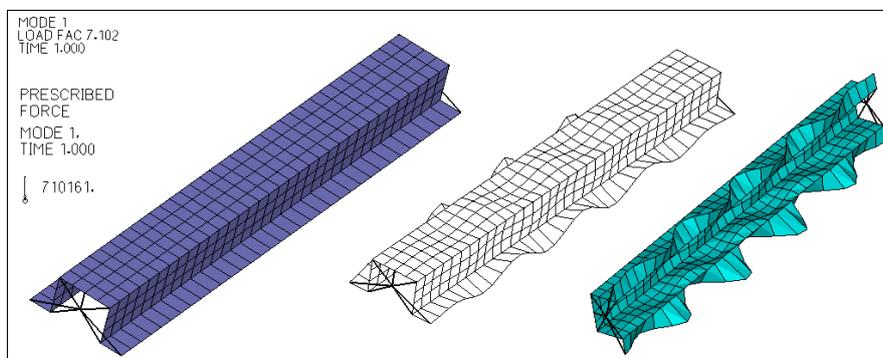


Figura 5-36. Schema e risultato modo 1, modello FEM, profilo 3. L=1000 mm.

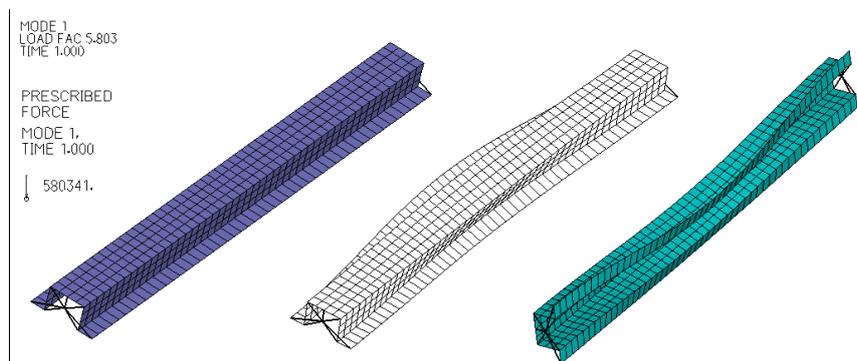


Figura 5-37. Schema e risultato modo 1, modello FEM, profilo 3. $L=1500$ mm.

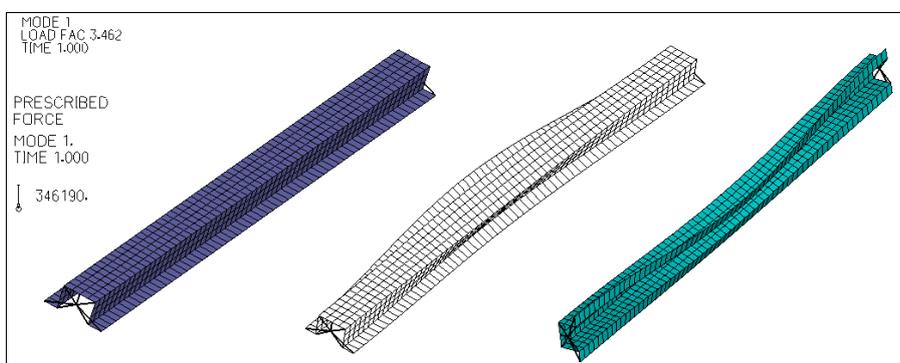


Figura 5-38. Schema e risultato modo 1, modello FEM, profilo 3. $L=2000$ mm.

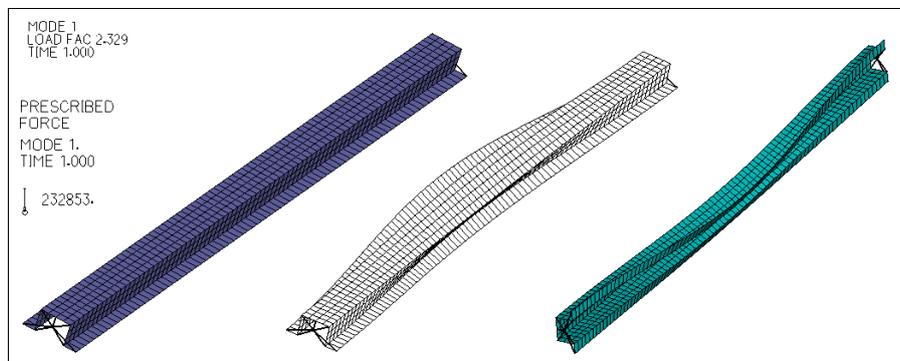


Figura 5-39. Schema e risultato modo 1, modello FEM, profilo 3. $L=2500$ mm.

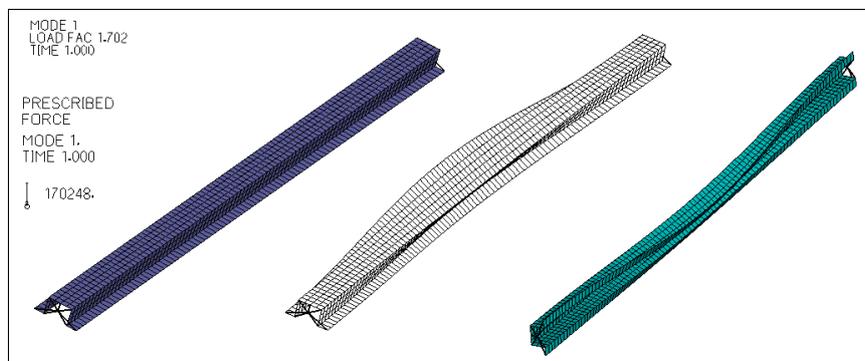


Figura 5-40. Schema e risultato modo 1, modello FEM, profilo 3. $L=3000$ mm.

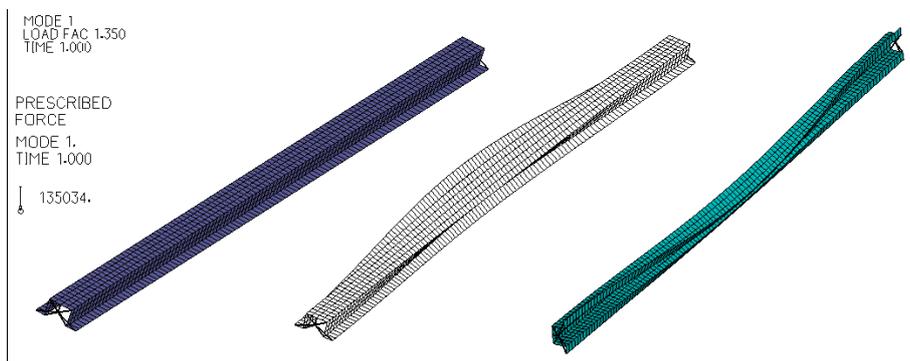


Figura 5-41. Schema e risultato modo 1, modello FEM, profilo 3. L=3500 mm.

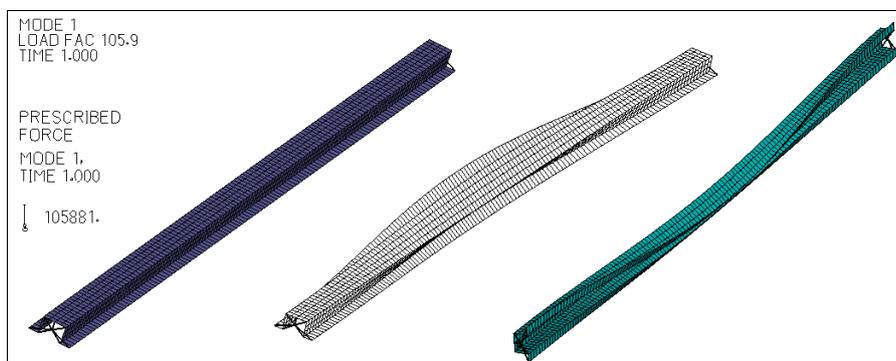


Figura 5-42. Schema e risultato modo 1, modello FEM, profilo 3. L=4000 mm.

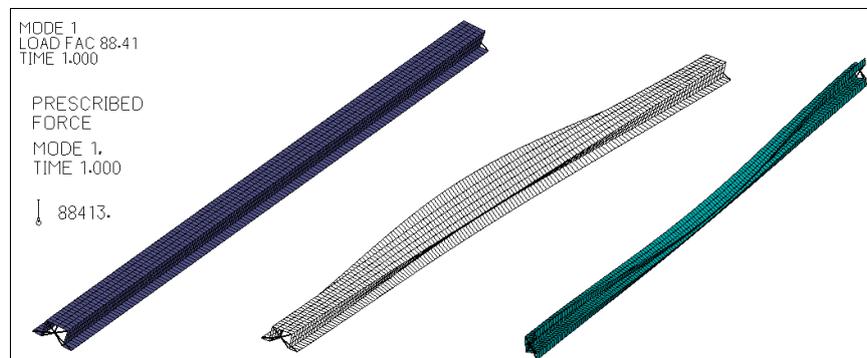


Figura 5-43. Schema e risultato modo 1, modello FEM, profilo 3. L=4500 mm.

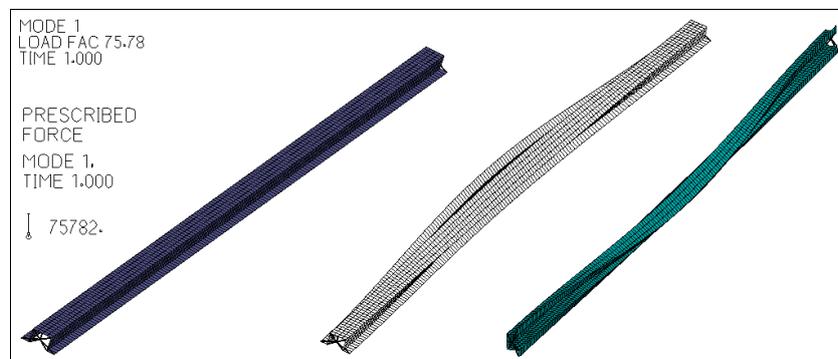


Figura 5-44. Schema e risultato modo 1, modello FEM, profilo 3. L=5000 mm.



Figura 5-45. Schema e risultato modo 1, modello FEM, profilo 3. L=5500 mm.



Figura 5-46. Schema e risultato modo 1, modello FEM, profilo 3. L=6000 mm.

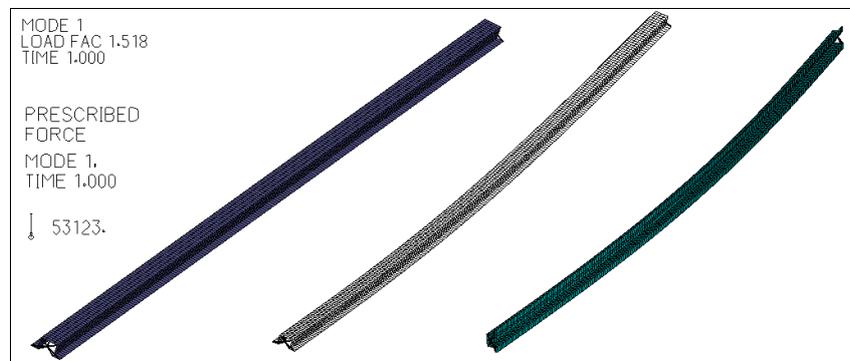


Figura 5-47. Schema e risultato modo 1, modello FEM, profilo 3. L=6500 mm.



Figura 5-48. Schema e risultato modo 1, modello FEM, profilo 3. L=7000 mm.

5.5.2 Carichi di instabilità del profilo 3.

Nella tabella 5-7 sono ripostati i carichi di instabilità del profilo 3 in funzione della sua lunghezza e diagrammati in figura 5-49 .

Tabella 5-7. Carichi di instabilità profilo 3 – modello FEM.

Lunghezza (mm)	carico collasso (kN)	Lunghezza (mm)	carico collasso (kN)
500	706.1	4000	105.9
1000	710.2	4500	88.4
1500	580.3	5000	75.8
2000	346.2	5500	74.1
2500	232.9	6000	59.0
3000	170.2	6500	53.1
3500	135.0	7000	45.7

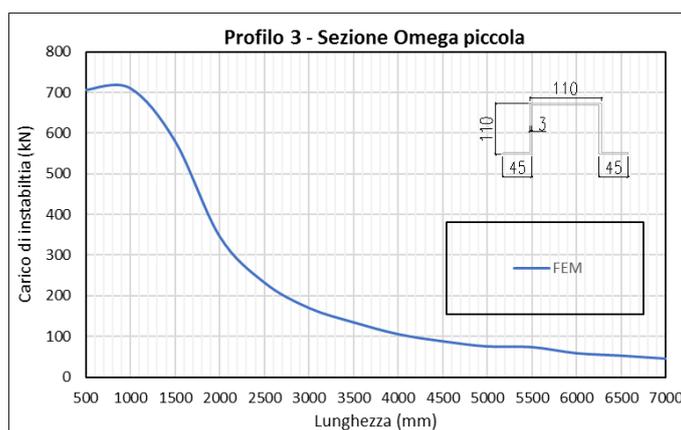


Figura 5-49. Risultati carico instabilità profilo 3 modello FEM.

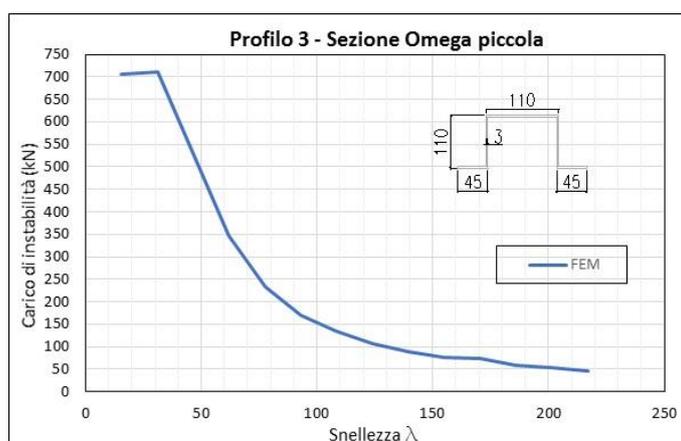


Figura 5-50. Carico instabilità vs snellezza profilo 3 modello FEM.

5.6 Analisi carico instabilità FEM sul profilo 4.

La sezione 4 (vedere figura 5-1), corrispondente ad un profilo tipo omega, è stata modellata in FEM, trovando il suo corrispondente carico di instabilità. Dalla figura 5-51 a la figura 5-64 vengono riportati tutti i modelli, il suo carico e la forma del primo modo di instabilità (L o D o G).

La densità nella mesh, il numero di nodi, il tipo e quantità di elementi finiti, sono riassunti nella Tabella 5-8.

Tabella 5-8. Caratterizzazione modello FEM profilo 4.

Lunghezza (mm)	Numero di nodi	Elemento		Lunghezza (mm)	Numero di nodi	Elemento	
		numero	tipo			numero	tipo
500	291	256	shell-4	4000	2297	2155	shell-4
1000	597	544	shell-4	4500	2596	2400	shell-4
1500	869	800	shell-4	5000	2841	2656	shell-4
2000	1141	1056	shell-4	5500	3147	2944	shell-4
2500	1447	1344	shell-4	6000	3419	3200	shell-4
3000	1719	1600	shell-4	6500	3691	3456	shell-4
3500	1991	1856	shell-4	7000	3997	3744	shell-4

5.6.1 Modelli del profili 4 in elementi finiti ed risposta nel primo modo.

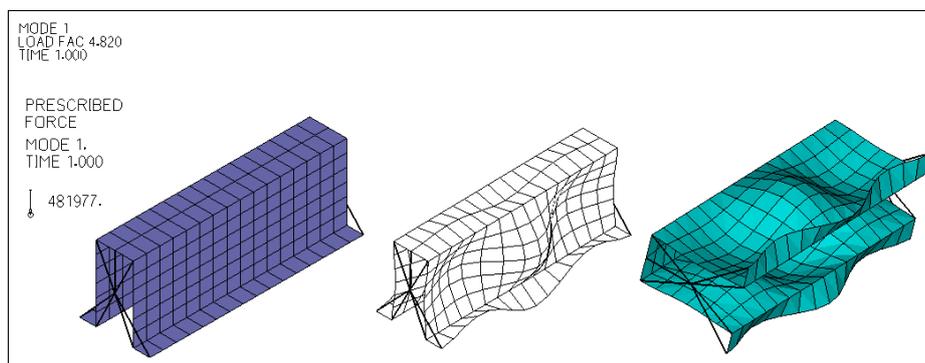


Figura 5-51. Schema e risultato modo 1, modello FEM, profilo 4. L=500 mm.

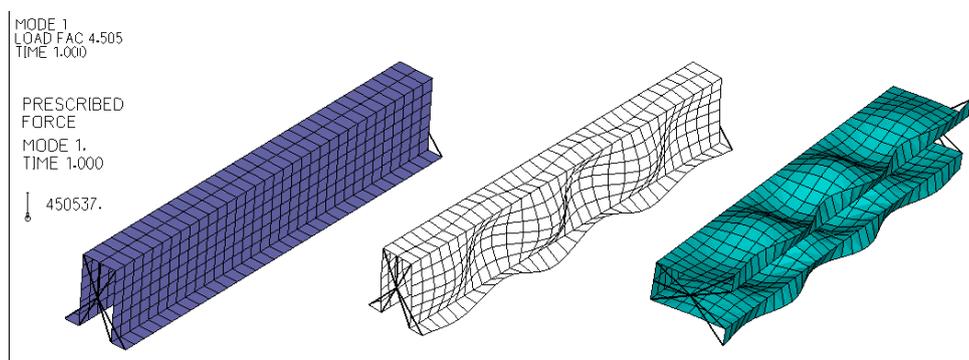


Figura 5-52. Schema e risultato modo 1, modello FEM, profilo 4. L=1000 mm.

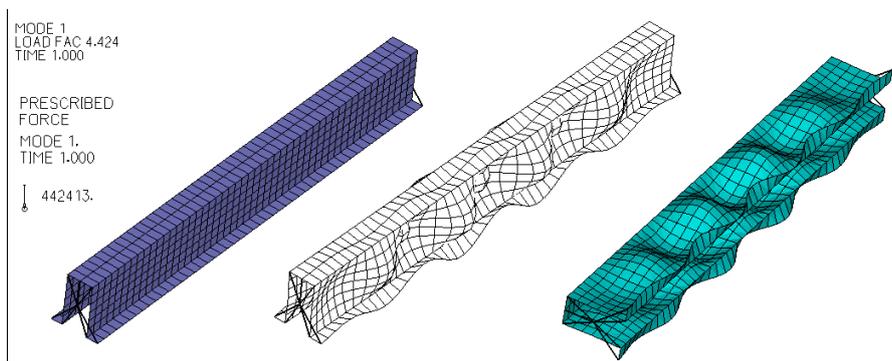


Figura 5-53. Schema e risultato modo 1, modello FEM, profilo 4. L=1500 mm.

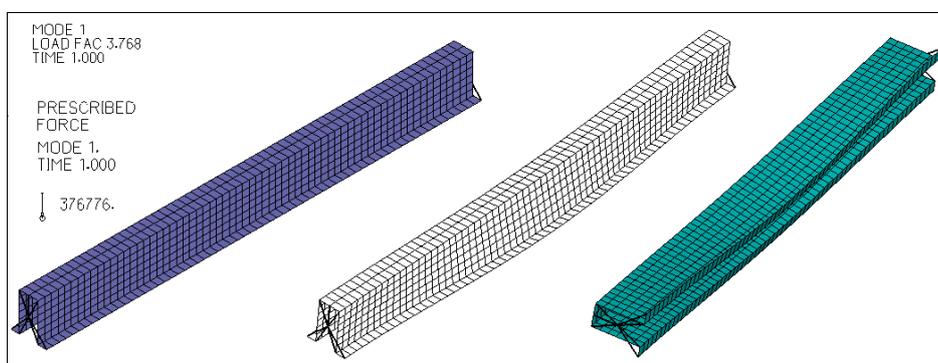


Figura 5-54. Schema e risultato modo 1, modello FEM, profilo 4. L=2000 mm.

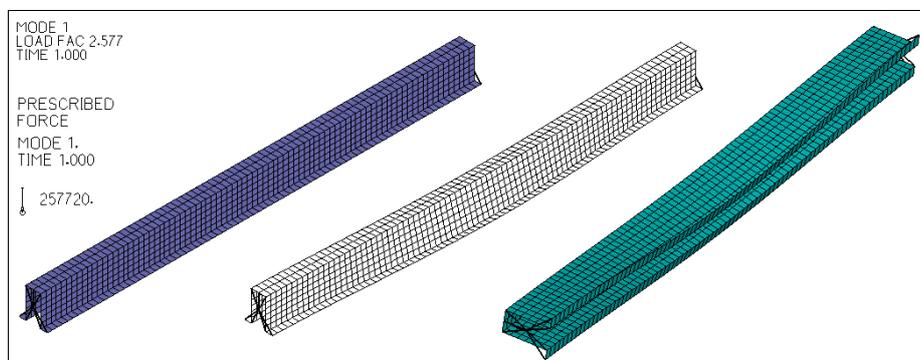


Figura 5-55. Schema e risultato modo 1, modello FEM, profilo 4. L=2500 mm.

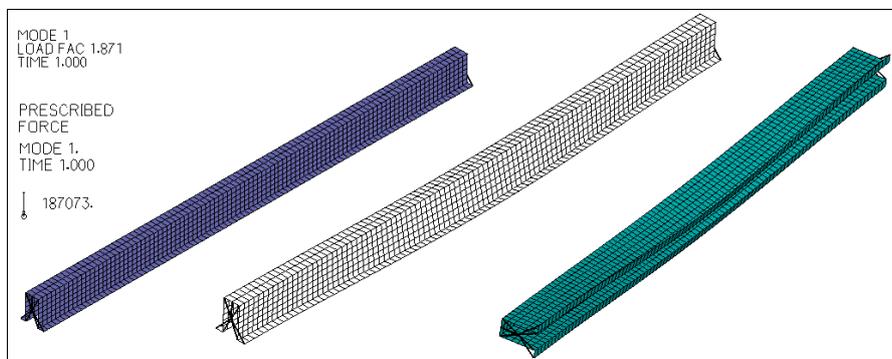


Figura 5-56. Schema e risultato modo 1, modello FEM, profilo 4. L=3000 mm.

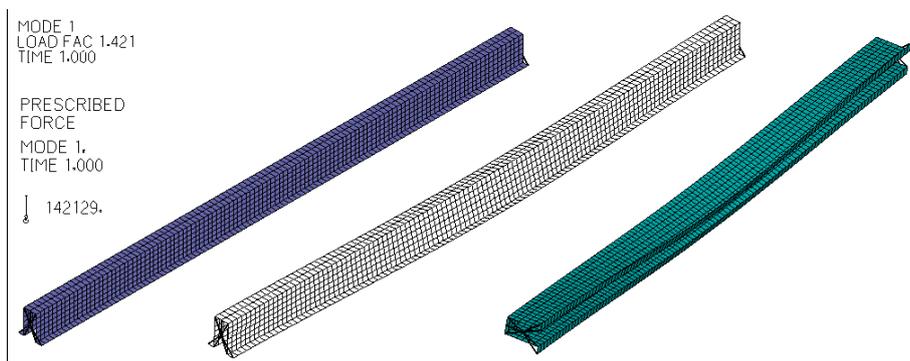


Figura 5-57. Schema e risultato modo 1, modello FEM, profilo 4. L=3500 mm.

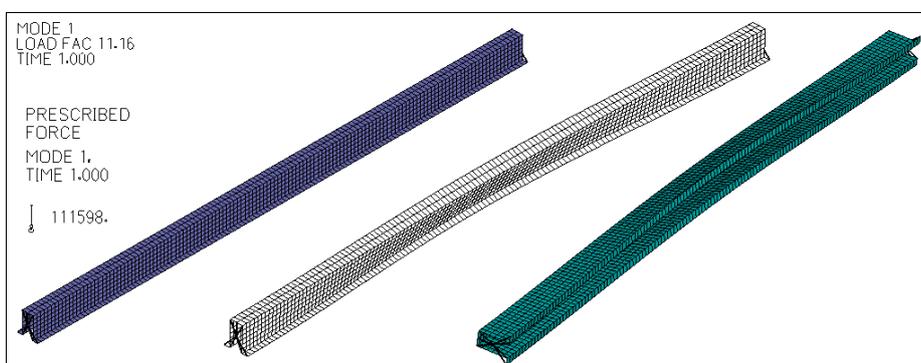


Figura 5-58. Schema e risultato modo 1, modello FEM, profilo 4. L=4000 mm.

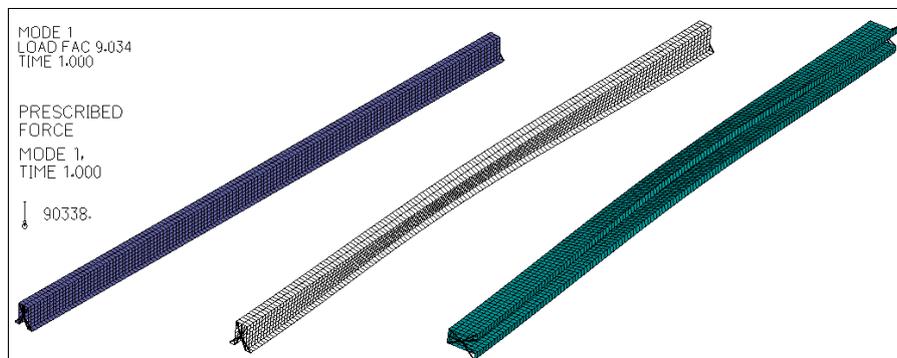


Figura 5-59. Schema e risultato modo 1, modello FEM, profilo 4. L=4500 mm.

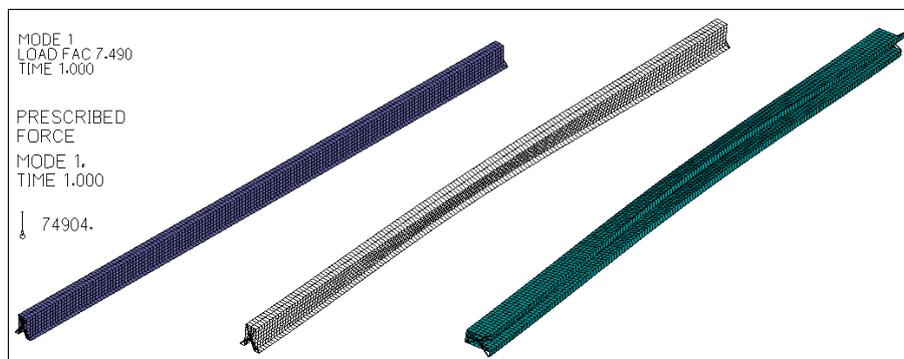


Figura 5-60. Schema e risultato modo 1, modello FEM, profilo 4. L=5000 mm.

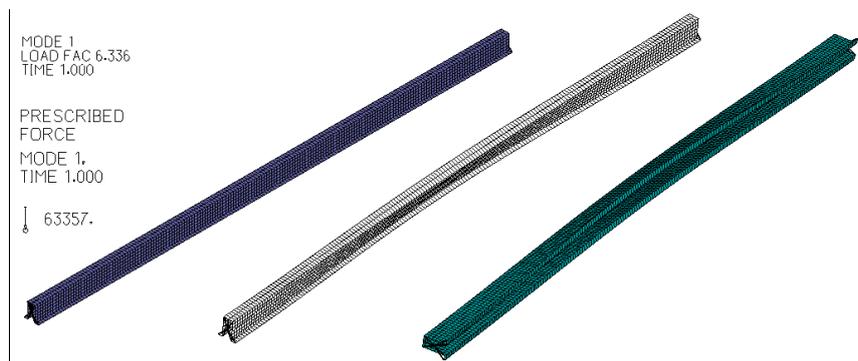


Figura 5-61. Schema e risultato modo 1, modello FEM, profilo 4. L=5500 mm.

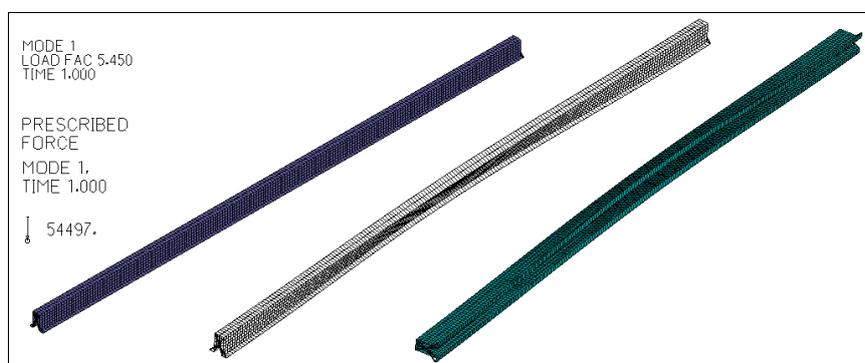


Figura 5-62. Schema e risultato modo 1, modello FEM, profilo 4. L=6000 mm.

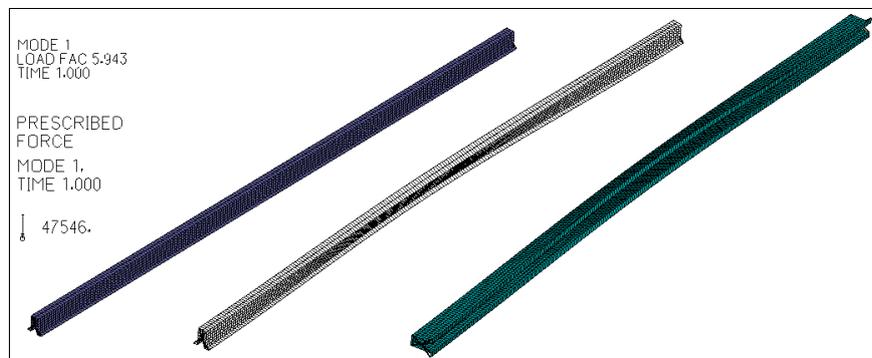


Figura 5-63. Schema e risultato modo 1, modello FEM, profilo 4. L=6500 mm.

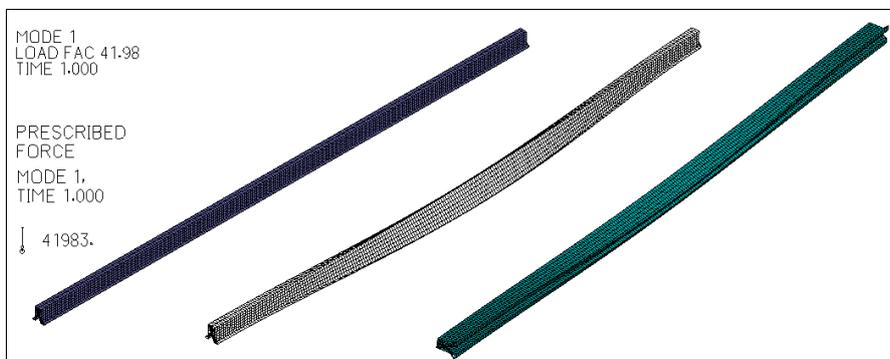


Figura 5-64. Schema e risultato modo 1, modello FEM, profilo 4. L=7000 mm.

5.6.2 Carichi di instabilità del profilo 4.

Nella tabella 5-9 sono ripostati i carichi di instabilità del profilo 4 in funzione della sua lunghezza e diagrammati in figura 5-65.

Tabella 5-9. Carichi di instabilità profilo 4 – modello FEM.

Lunghezza (mm)	carico collasso (kN)	Lunghezza (mm)	carico collasso (kN)
500	482.0	4000	111.6
1000	450.5	4500	90.3
1500	442.4	5000	74.9
2000	376.8	5500	63.4
2500	257.7	6000	54.5
3000	187.1	6500	47.5
3500	142.1	7000	42.0

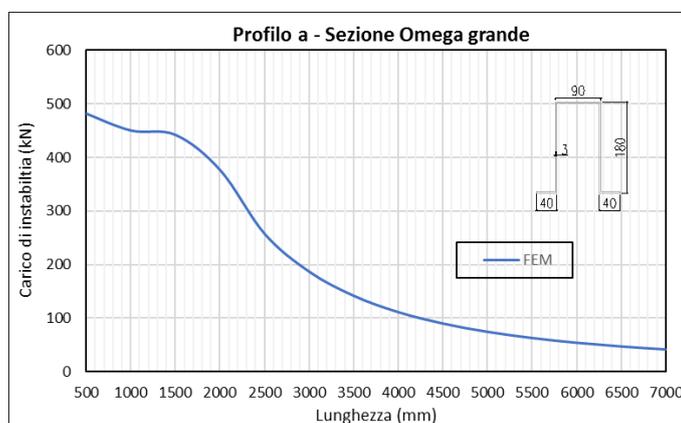


Figura 5-65. Risultati carico instabilità profilo 4 modello FEM.

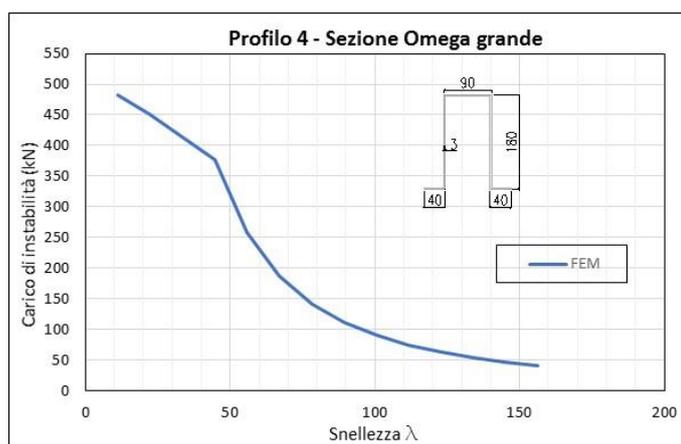


Figura 5-66. Carico instabilità vs snellezza profilo 4 modello FEM.

5.7 Analisi carico instabilità FEM sul profilo 5.

La sezione 5 (vedere figura 5-1), corrispondente a profilo tipo n caratteristico dei arcarecci, è stata modellata in FEM, trovando il suo corrispondente carico di instabilità. Dalla figura 5-67 a figura 5-80 vengono riportati tutti i modelli, il suo carico e la forma del primo modo di instabilità (L o D o G).

La densità nella mesh, il numero di nodi, il tipo e quantità di elemento finito, sono riassunti nella tabella 5-10.

Tabella 5-10. Caratterizzazione modello FEM profilo 5.

Lunghezza (mm)	Numero di nodi	Elemento		Lunghezza (mm)	Numero di nodi	Elemento	
		numero	tipo			numero	tipo
500	291	256	shell-4	4000	2297	2155	shell-4
1000	597	544	shell-4	4500	2596	2400	shell-4
1500	869	800	shell-4	5000	2841	2656	shell-4
2000	1141	1056	shell-4	5500	3147	2944	shell-4
2500	1447	1344	shell-4	6000	3419	3200	shell-4
3000	1719	1600	shell-4	6500	3691	3456	shell-4
3500	1991	1856	shell-4	7000	3997	3744	shell-4

5.7.1 Modelli del profili 5 in elementi finiti ed risposta nel primo modo.

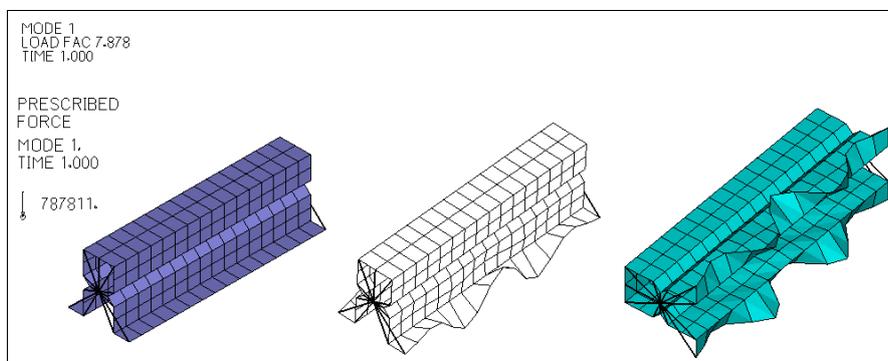


Figura 5-67. Schema e risultato modo 1, modello FEM, profilo 5. L=500 mm.

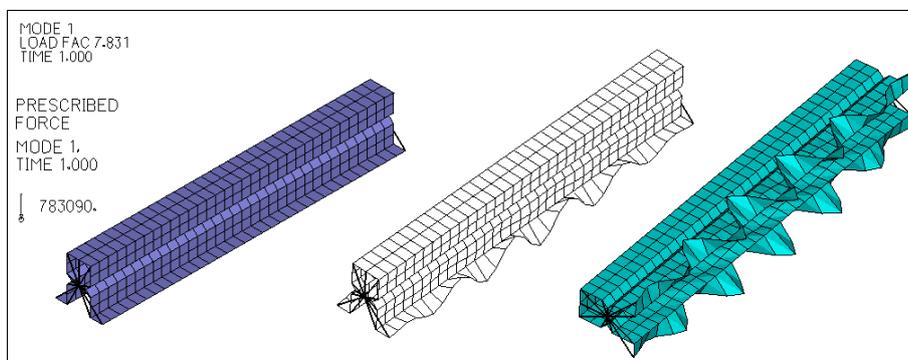


Figura 5-68. Schema e risultato modo 1, modello FEM, profilo 5. L=1000 mm.

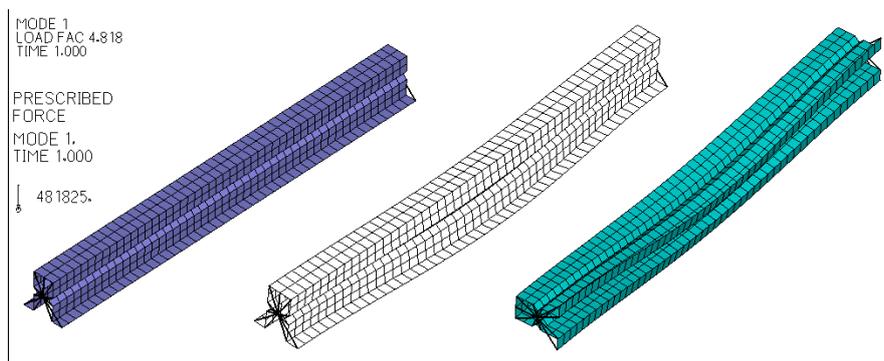


Figura 5-69. Schema e risultato modo 1, modello FEM, profilo 5. $L=1500$ mm.

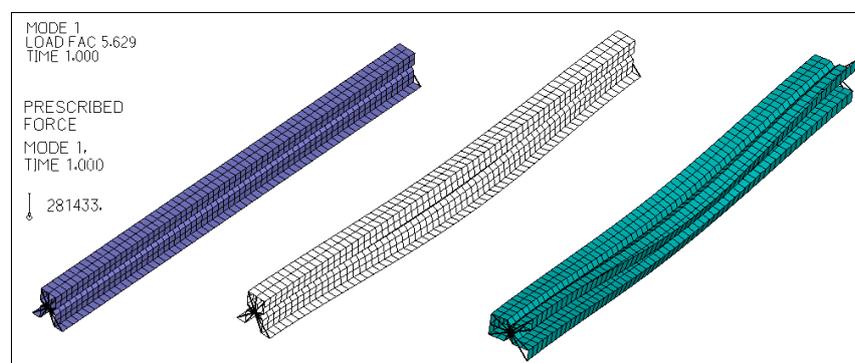


Figura 5-70. Schema e risultato modo 1, modello FEM, profilo 5. $L=2000$ mm.

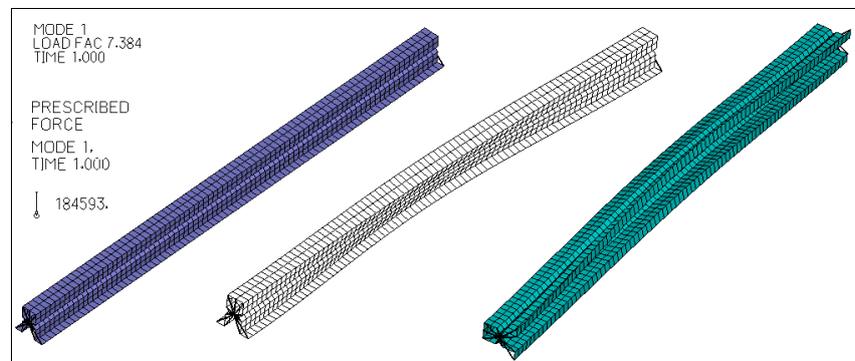


Figura 5-71. Schema e risultato modo 1, modello FEM, profilo 5. $L=2500$ mm.

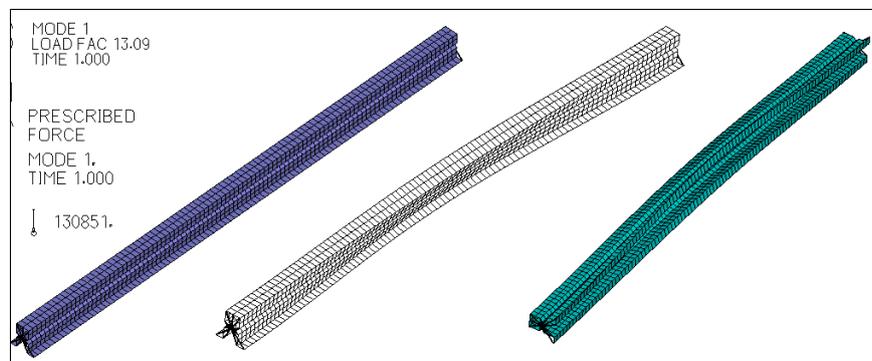


Figura 5-72. Schema e risultato modo 1, modello FEM, profilo 5. $L=3000$ mm.

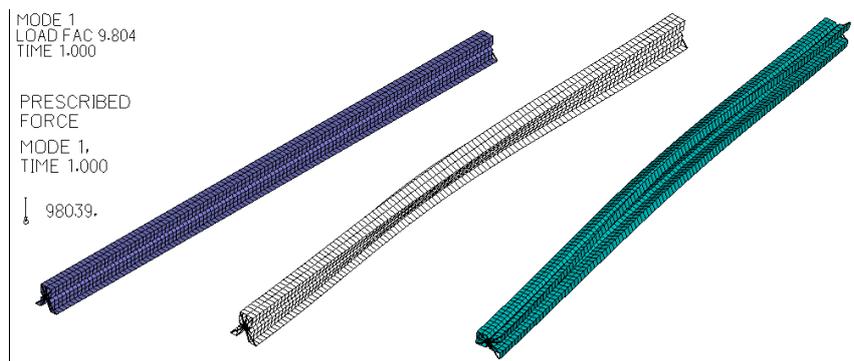


Figura 5-73. Schema e risultato modo 1, modello FEM, profilo 5. $L=3500$ mm.

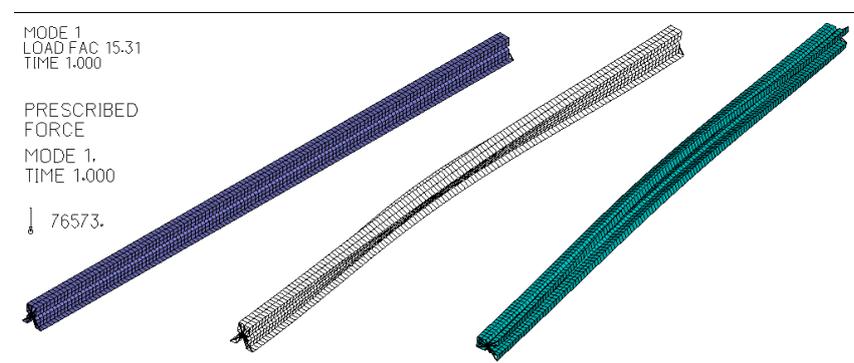


Figura 5-74. Schema e risultato modo 1, modello FEM, profilo 5. $L=4000$ mm.

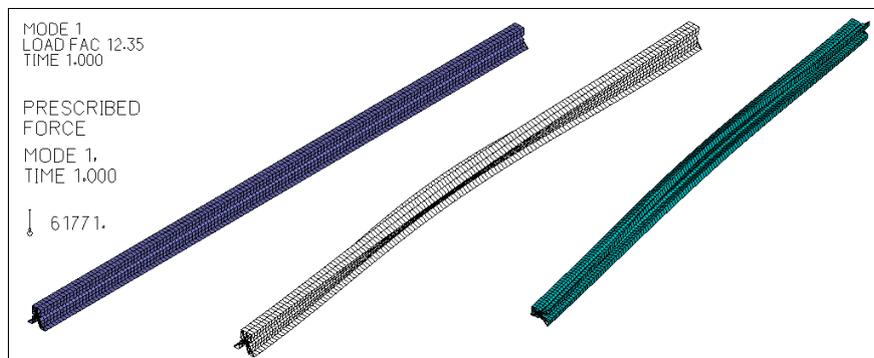


Figura 5-75. Schema e risultato modo 1, modello FEM, profilo 5. $L=4500$ mm.



Figura 5-76. Schema e risultato modo 1, modello FEM, profilo 5. $L=5000$ mm.



Figura 5-77. Schema e risultato modo 1, modello FEM, profilo 5. L=5500 mm.



Figura 5-78. Schema e risultato modo 1, modello FEM, profilo 5. L=6000 mm.

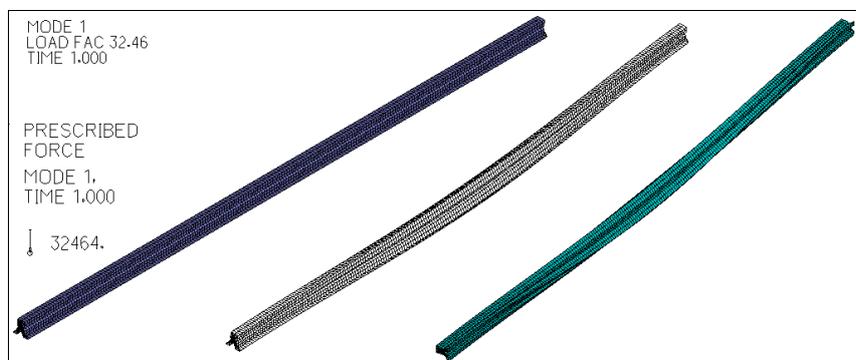


Figura 5-79. Schema e risultato modo 1, modello FEM, profilo 5. L=6500 mm.

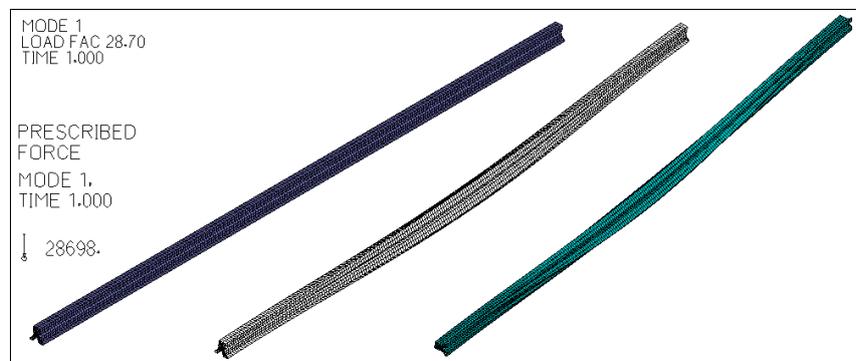


Figura 5-80. Schema e risultato modo 1, modello FEM, profilo 5. L=7000 mm.

5.7.2 Carichi di instabilità del profilo 5.

Nella tabella 5-11 sono ripostati i carichi di instabilità del profilo 5 in funzione della sua lunghezza e diagrammati in Figura 5-81.

Tabella 5-11. Carichi di instabilità profilo 5 – modello FEM.

Lunghezza (mm)	carico collasso (kN)	Lunghezza (mm)	carico collasso (kN)
500	787.8	4000	76.6
1000	783.1	4500	61.8
1500	481.8	5000	51.1
2000	281.4	5500	43.2
2500	184.6	6000	37.2
3000	130.9	6500	32.5
3500	98.0	7000	28.7

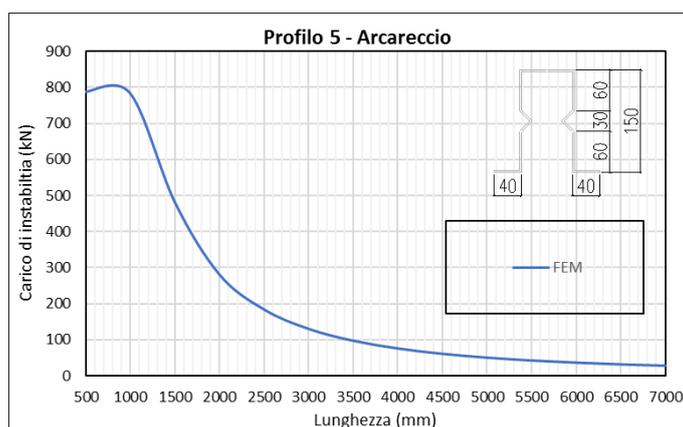


Figura 5-81. Risultati carico instabilità profilo 5 modello FEM.

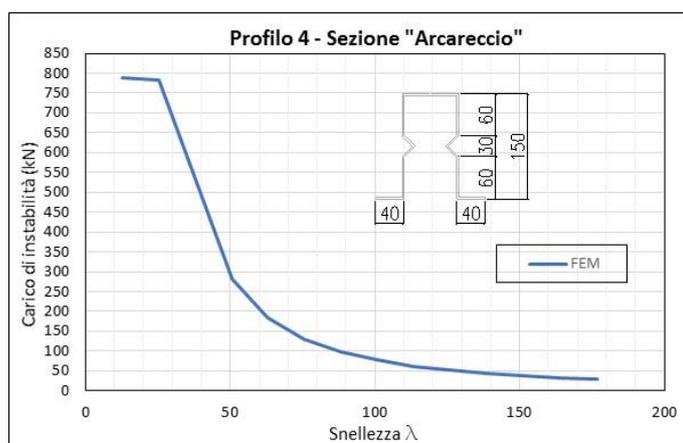


Figura 5-82. Carico instabilità vs snellezza profilo 1 modello FEM.

5.8 Analisi carico instabilità FSM sul profilo 1.

La sezione 1 (vedere figura 5-1), è stata modellata in FSM, trovando il fattore di carico e la percentuale di partecipazione di ogni tipo di instabilità (Globale, Distorsionale, Locale) per ogni lunghezza valutata. Questi valori sono riportati dalla figura 5-83 a la figura 5-90.

5.8.1 Modelli del profili 1 in strisce finite ed risposta nel primo modo.

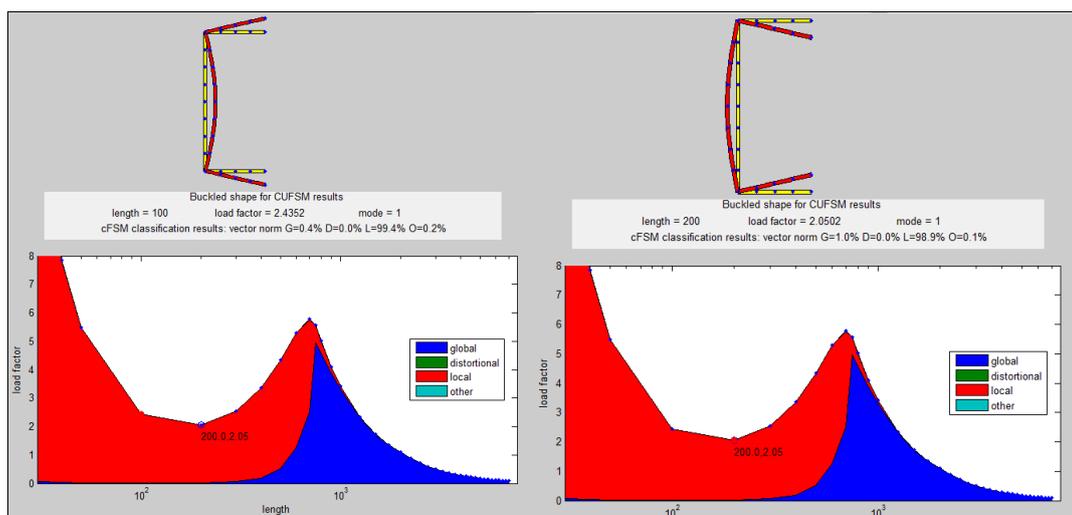


Figura 5-83. Risultati modello FSM, profilo 1. $L=100$ mm, $L=200$ mm.

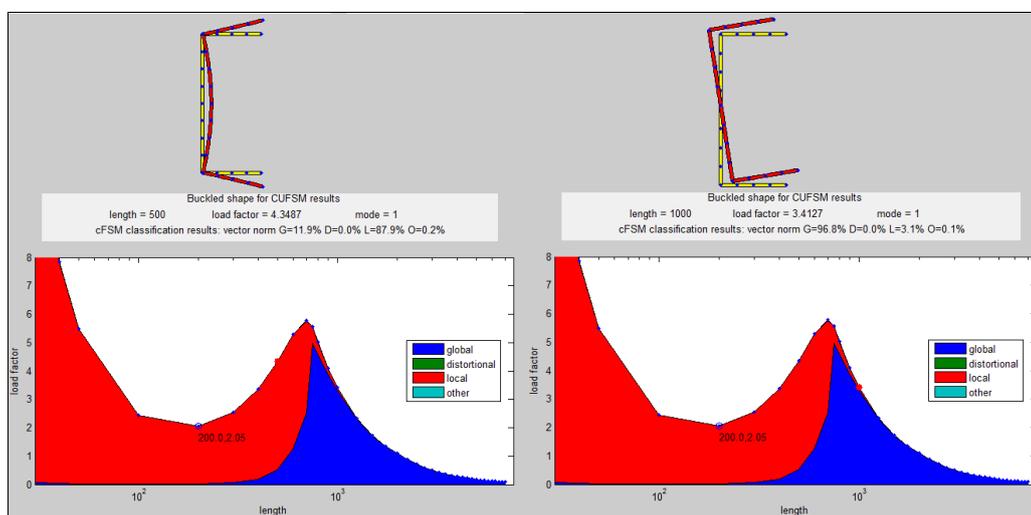


Figura 5-84. Risultati modello FSM, profilo 1. $L=500$ mm, $L=1000$ mm.

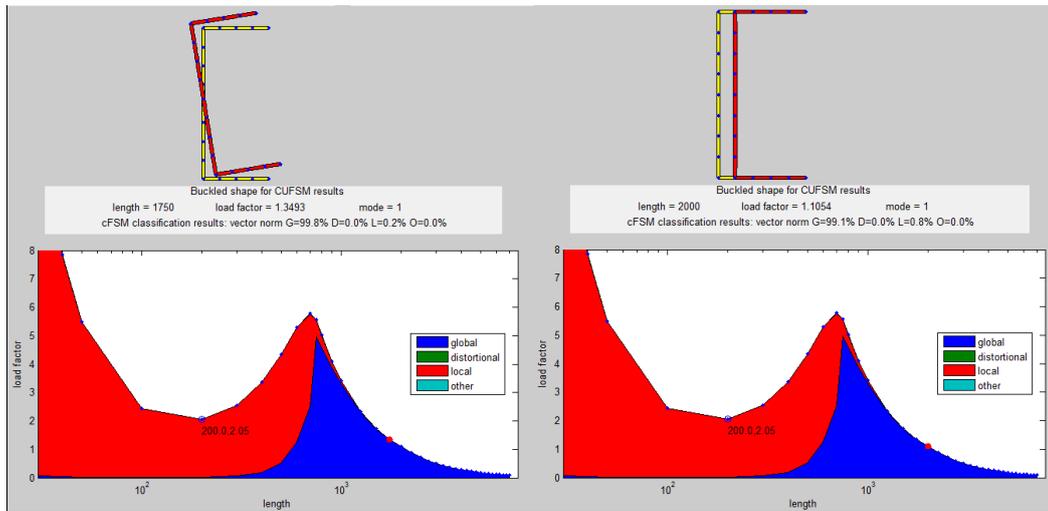


Figura 5-85. Risultati modello FSM, profilo 1. L=1500 mm, L=2000 mm.

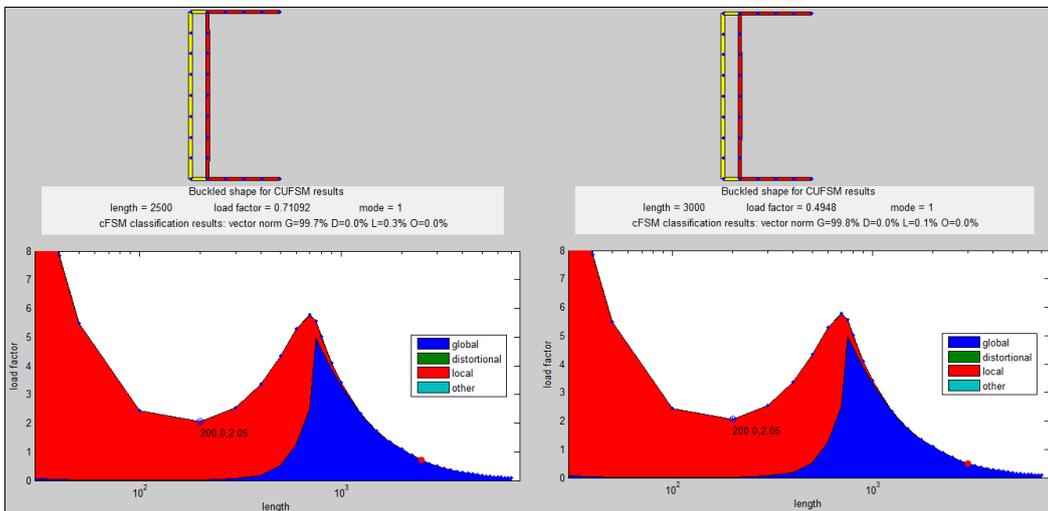


Figura 5-86. Risultati modello FSM, profilo 1. L=2500 mm, L=3000 mm.

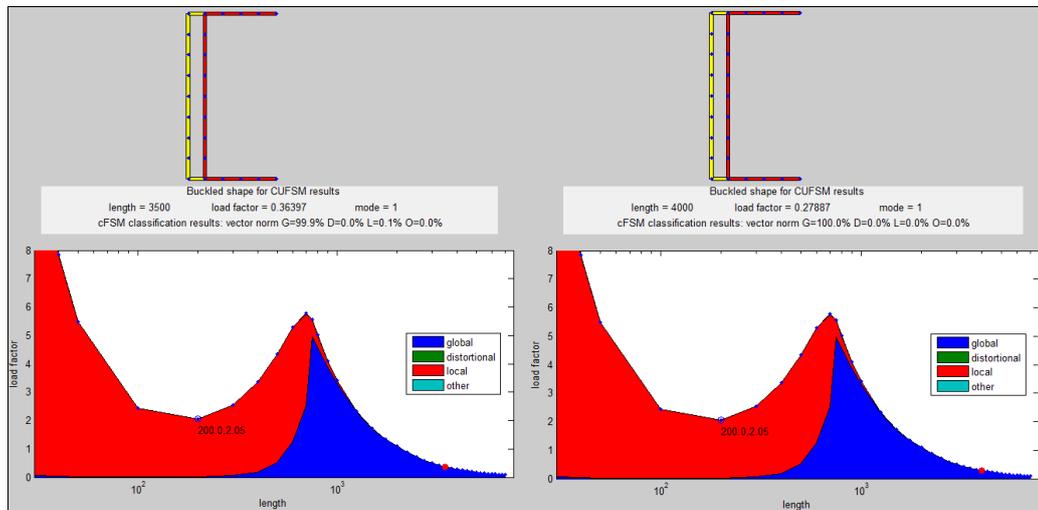


Figura 5-87. Risultati modello FSM, profilo 1. L=3500 mm, L=4000 mm.

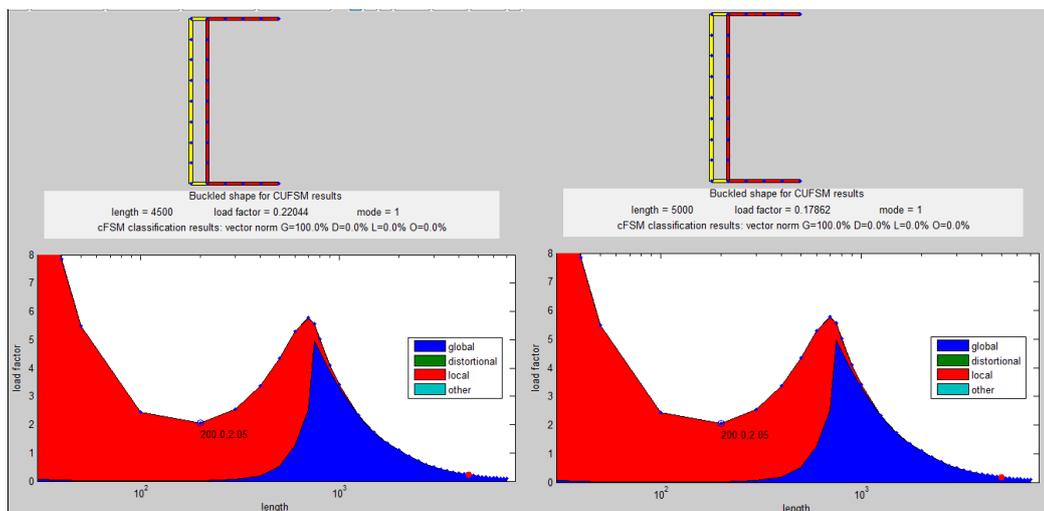


Figura 5-88. Risultati modello FSM, profilo 1. $L=4500$ mm, $L=5000$ mm.

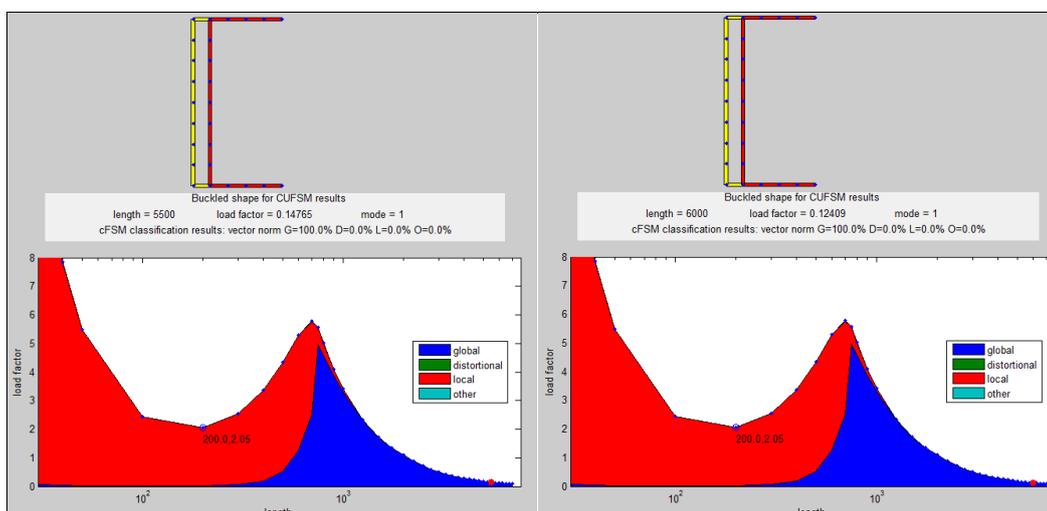


Figura 5-89. Risultati modello FSM, profilo 1. $L=5500$ mm, $L=6000$ mm.

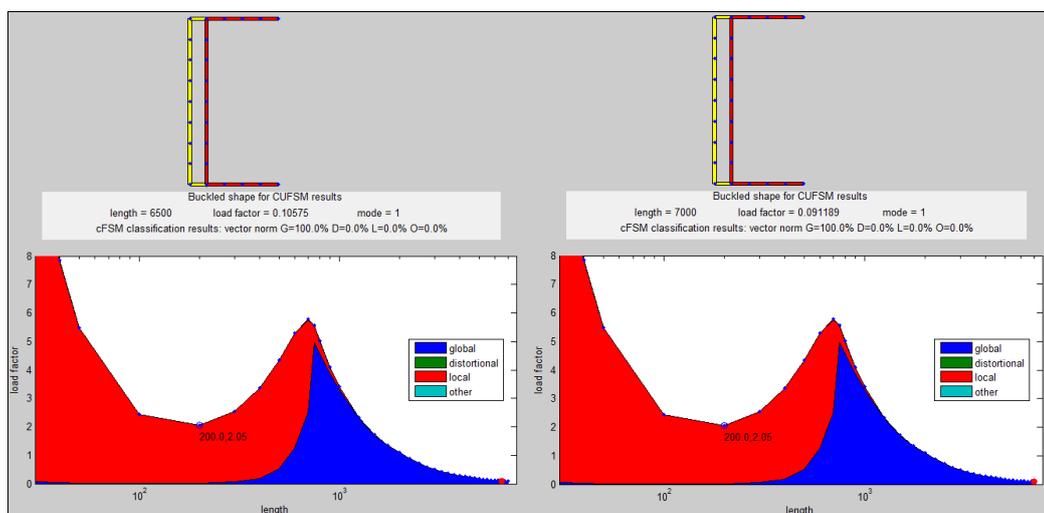


Figura 5-90. Risultati modello FSM, profilo 1. $L=6500$ mm, $L=7000$ mm.

5.8.2 Carico di instabilità del profilo 1.

Nella tabella 5-3 sono riportati i carichi di instabilità del profilo 1 in funzione della sua lunghezza e diagrammati in figura 5-17.

Tabella 5-12. Carichi di instabilità profilo 1 – modello FSM.

Lunghezza (mm)	Fattore di carico	carico collasso (kN)	Lunghezza (mm)	Fattore di carico	carico collasso (kN)
100	2.44	297	3500	0.36	44
200	2.05	250	4000	0.28	34
500	4.35	530	4500	0.22	27
1000	3.41	416	5000	0.18	22
1500	1.72	210	5500	0.15	18
2000	1.11	135	6000	0.12	15
2500	0.71	87	6500	0.11	13
3000	0.49	60	7000	0.09	11

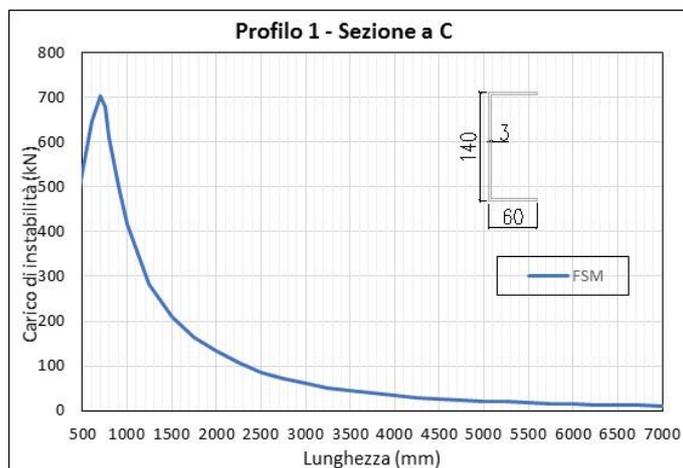


Figura 5-91. Risultati carico instabilità profilo 1 modello FSM.

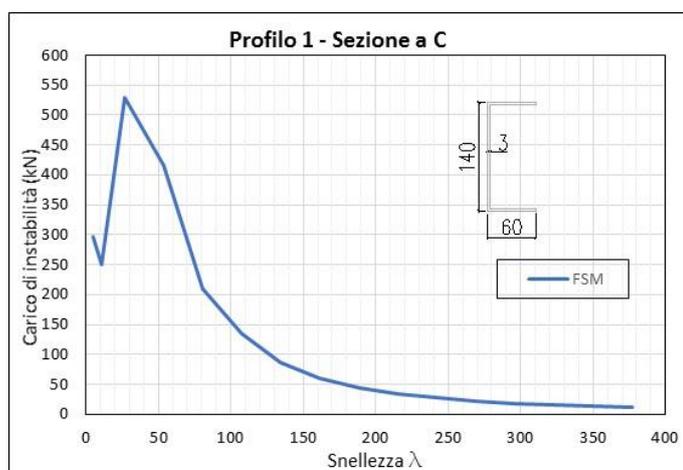


Figura 5-92. Carico instabilità vs snellezza profilo 1 modello FSM.

5.9 Analisi carico instabilità FSM sul profilo 2.

La sezione 2 (vedere figura 5-1), è stata modellata in FSM, trovando il fattore di carico e la percentuale di partecipazione di ogni tipo di instabilità (Globale, Distorsionale, Locale) per ogni lunghezza valutata. Questi valori sono riportati dalla figura 5-93 a la figura 5-100.

5.9.1 Modelli del profili 2 in strisce finite ed risposta nel primo modo.

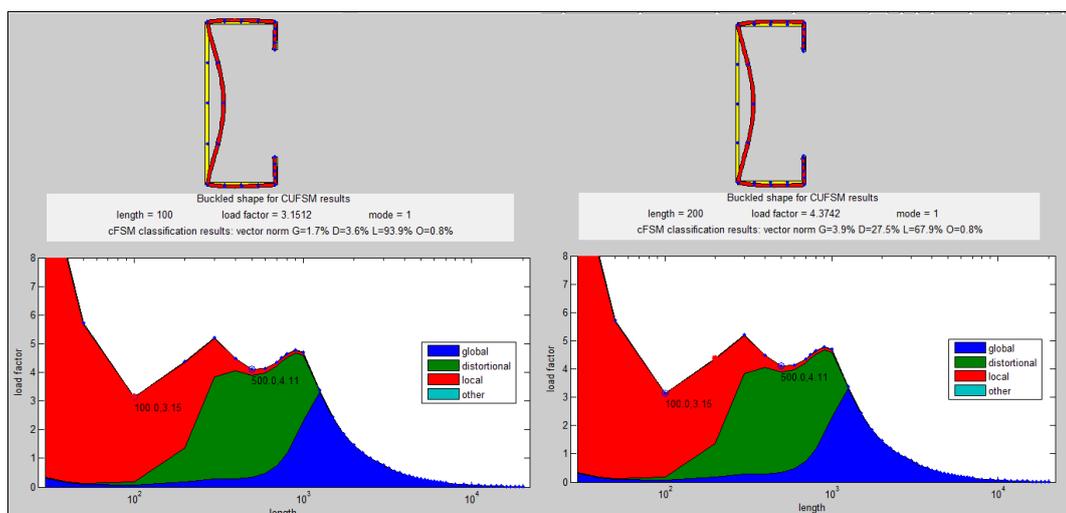


Figura 5-93. Risultati modello FSM, profilo 2. $L=100$ mm, $L=200$ mm.

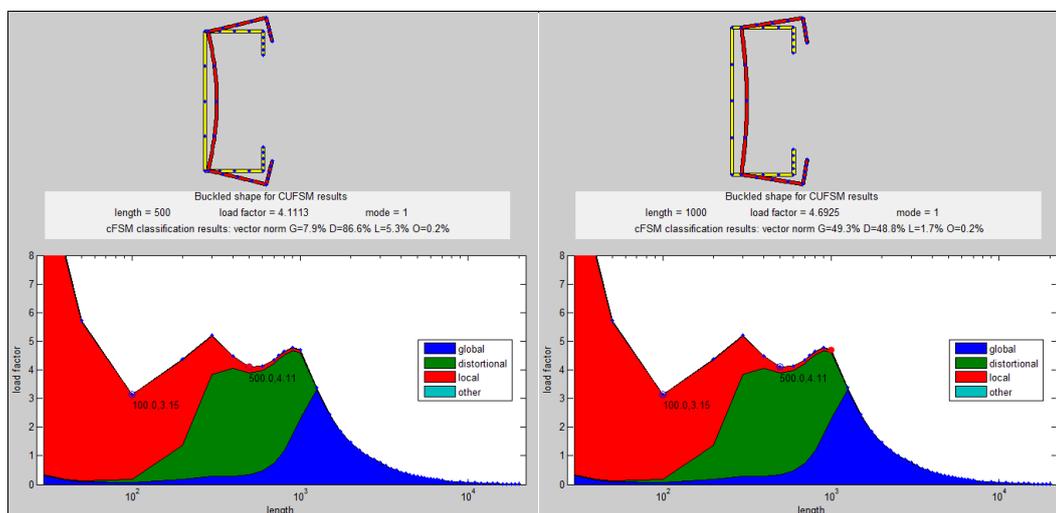


Figura 5-94. Risultati modello FSM, profilo 2. $L=500$ mm, $L=1000$ mm.

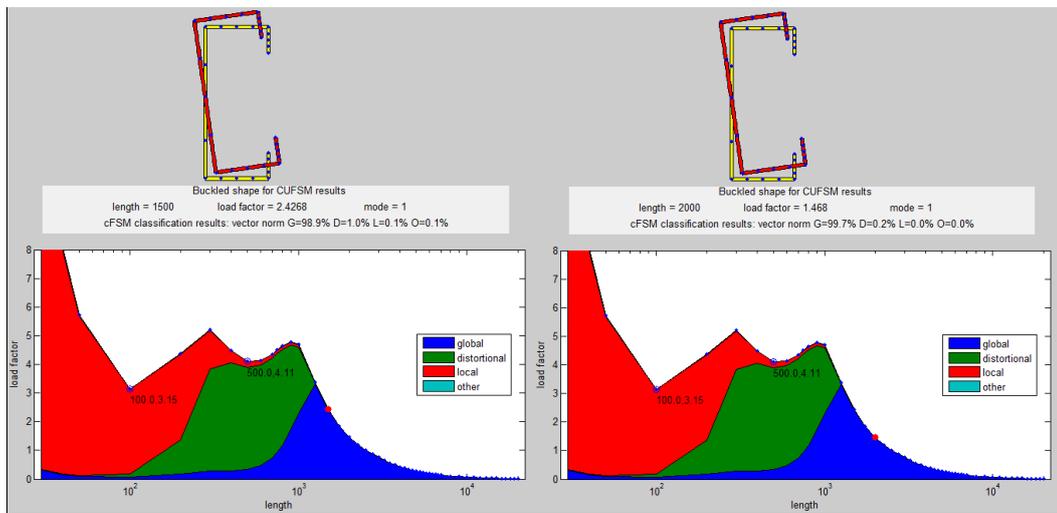


Figura 5-95. Risultati modello FSM, profilo 2. L=1500 mm, L=2000 mm.

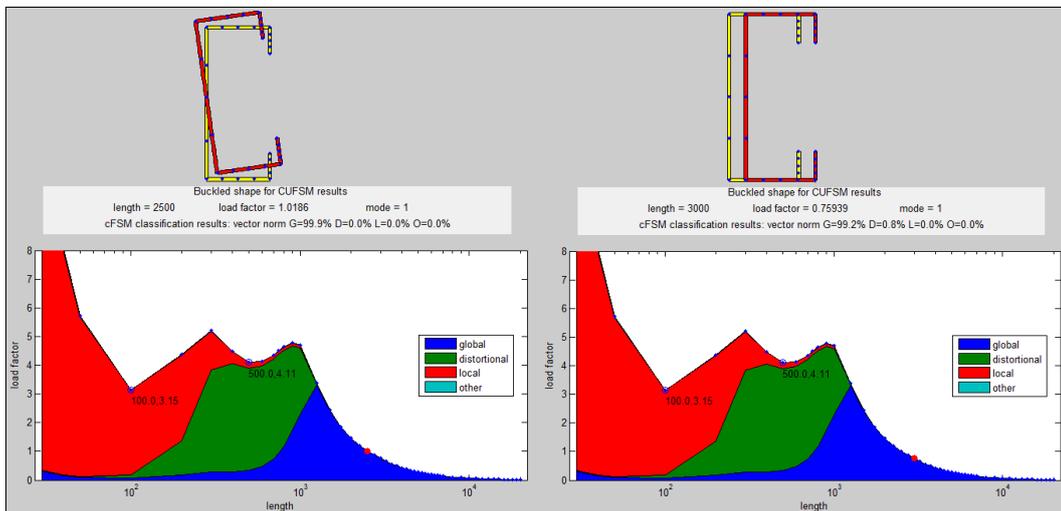


Figura 5-96. Risultati modello FSM, profilo 2. L=2500 mm, L=3000 mm.

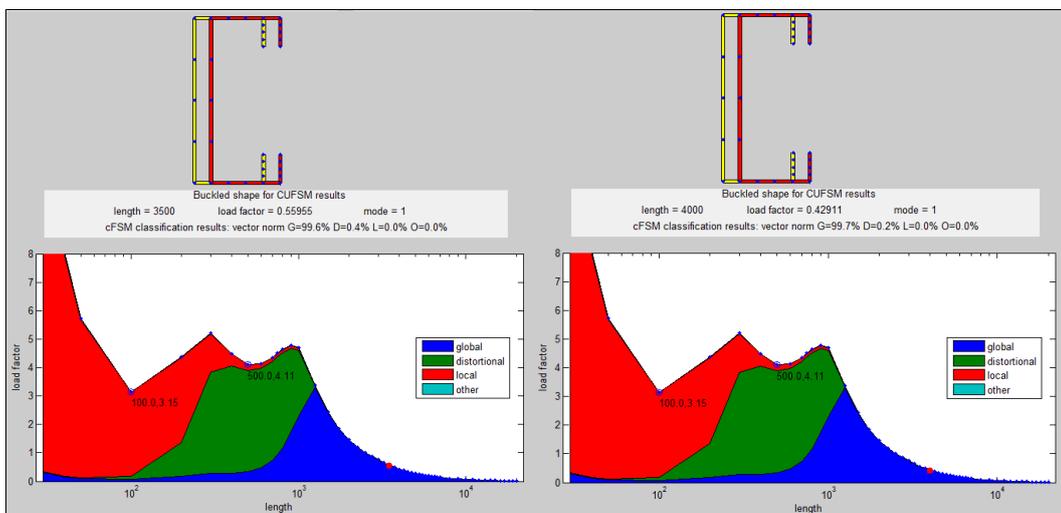


Figura 5-97. Risultati modello FSM, profilo 2. L=3500 mm, L=4000 mm.

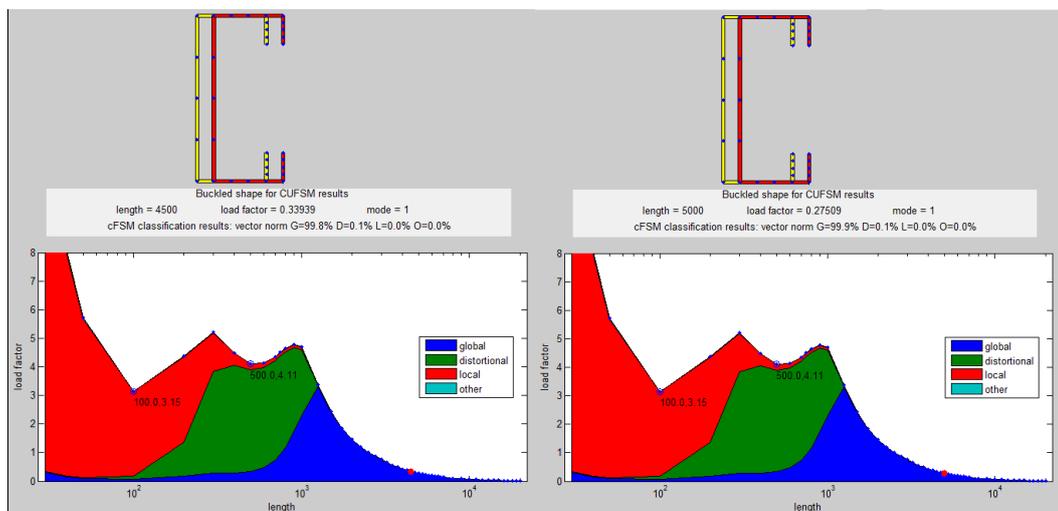


Figura 5-98. Risultati modello FSM, profilo 2. L=4500 mm, L=5000 mm.

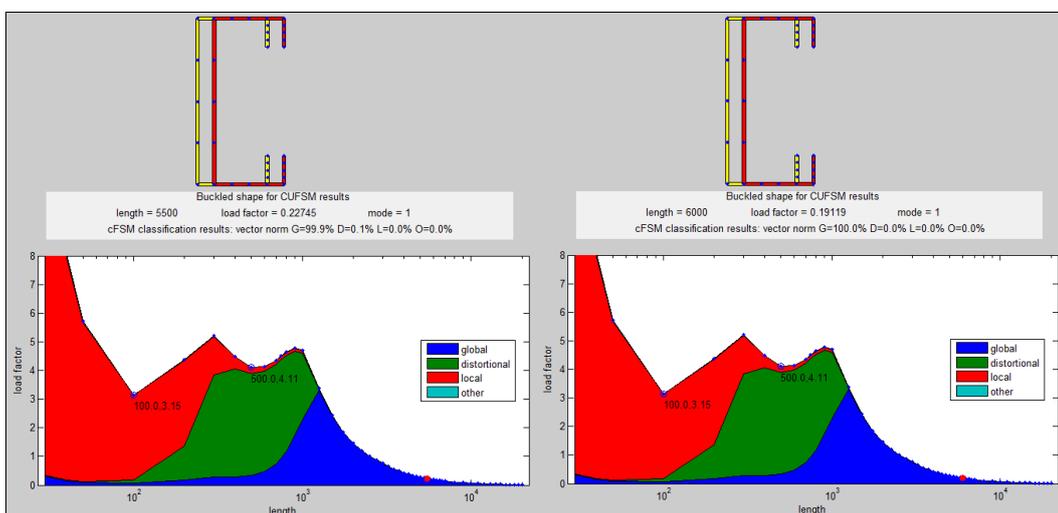


Figura 5-99. Risultati modello FSM, profilo 2. L=5500 mm, L=6000 mm.

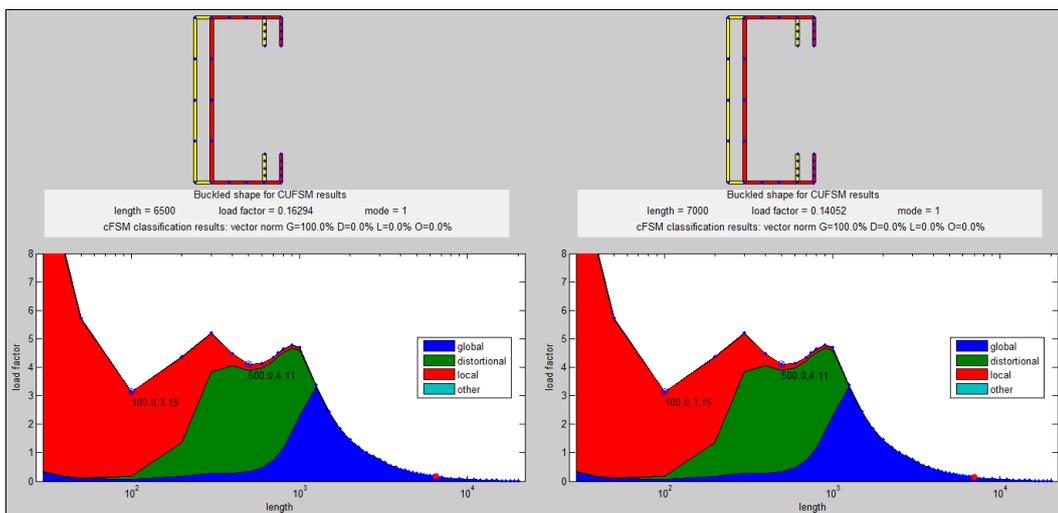


Figura 5-100. Risultati modello FSM, profilo 2. L=6500 mm, L=7000 mm.

5.9.2 Carico di instabilità del profilo 2.

Nella tabella 5-13 sono riportati i carichi di instabilità del profilo 2 in funzione della sua lunghezza e diagrammati in figura 5-101.

Tabella 5-13. Carichi di instabilità profilo 2 – modello FSM.

Lunghezza (mm)	Fattore di carico	carico collasso (kN)	Lunghezza (mm)	Fattore di carico	carico collasso (kN)
100	3.15	451	3500	0.56	80
200	4.37	626	4000	0.43	61
500	4.11	588	4500	0.34	49
1000	4.69	671	5000	0.28	39
1500	2.43	347	5500	0.23	33
2000	1.47	210	6000	0.19	27
2500	1.02	146	6500	0.16	23
3000	0.76	109	7000	0.14	20

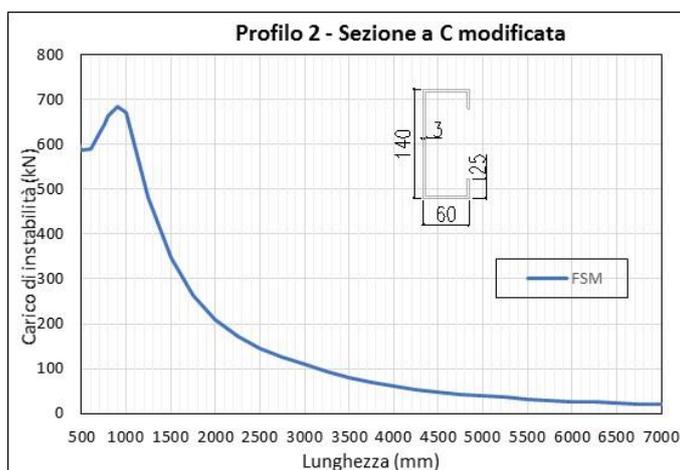


Figura 5-101. Risultati carico instabilità profilo 2- modello FSM.

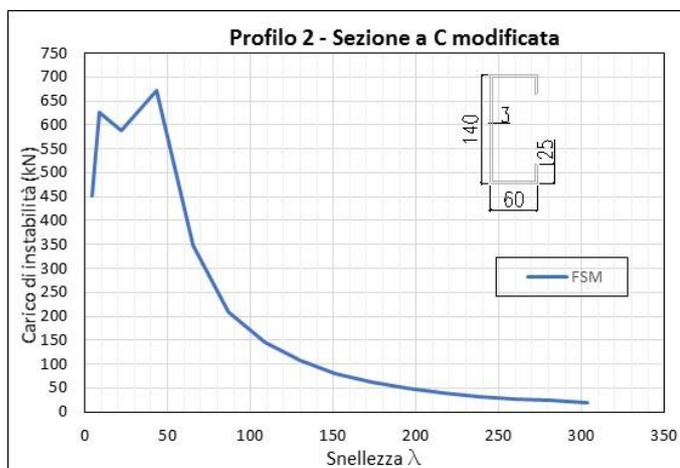


Figura 5-102. Carico instabilità vs snellezza profilo 2 - modello FSM.

5.10 Analisi carico instabilità FSM sul profilo 3.

La sezione 3 (vedere figura 5-1), è stata modellata in FSM, trovando il fattore di carico e la percentuale di partecipazione di ogni tipo di instabilità (Globale, Distorsionale, Locale) per ogni lunghezza valutata. Questi valori sono riportati dalla figura 5-103 a la figura 5-110.

5.10.1 Modelli del profili 3 in strisce finite ed risposta nel primo modo.

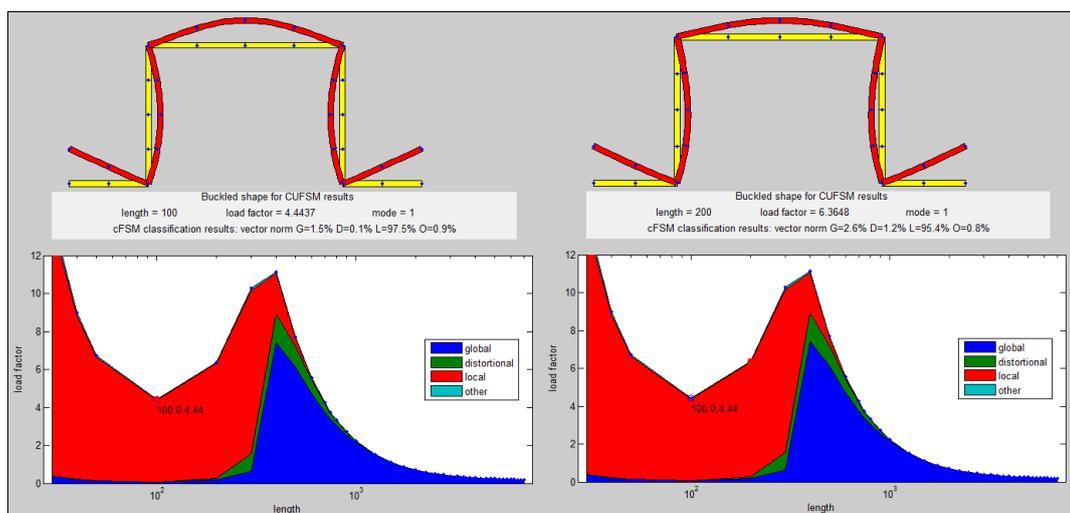


Figura 5-103. Risultati modello FSM, profilo 3. $L=100$ mm, $L=200$ mm.

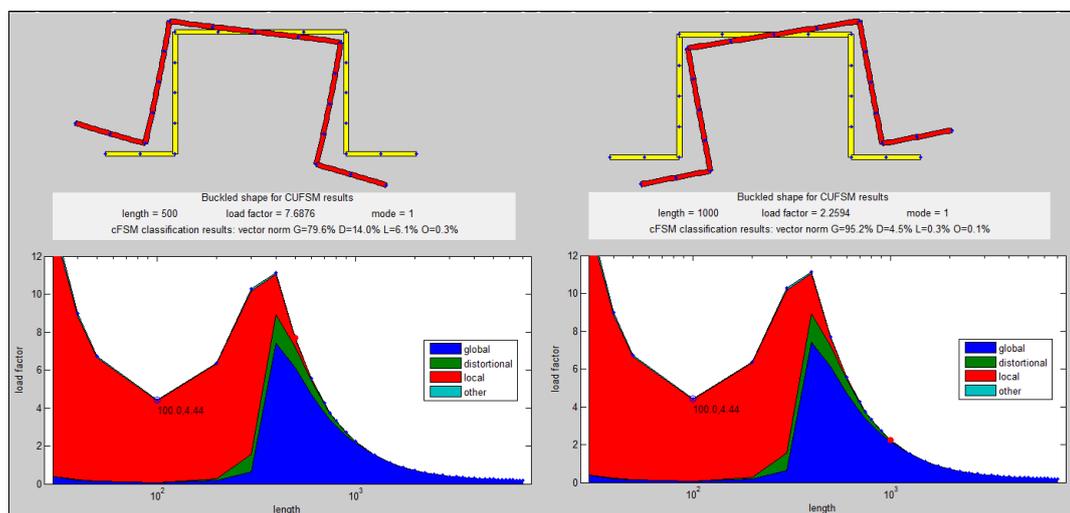


Figura 5-104. Risultati modello FSM, profilo 3. $L=500$ mm, $L=1000$ mm.

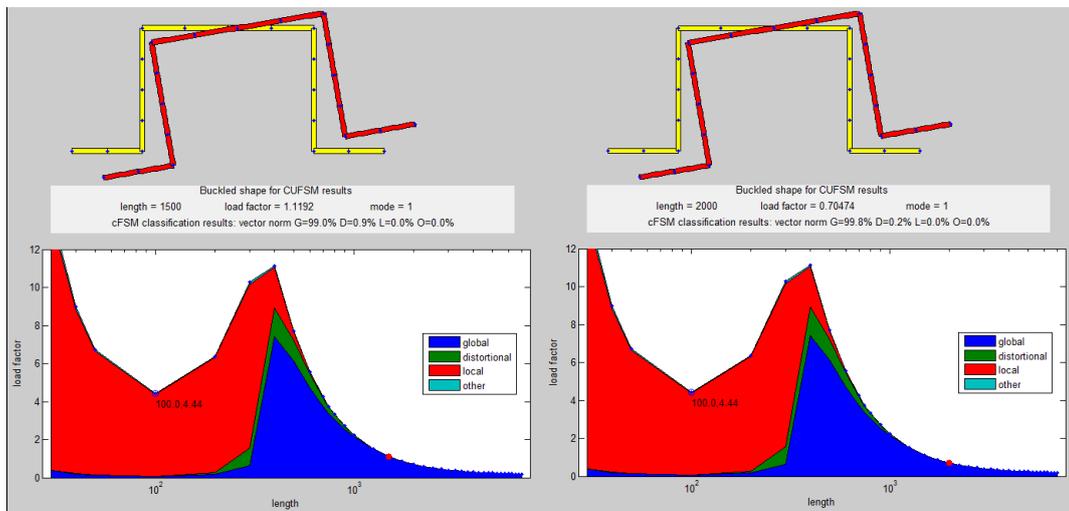


Figura 5-105. Risultati modello FSM, profilo 3. L=1500 mm, L=2000 mm.

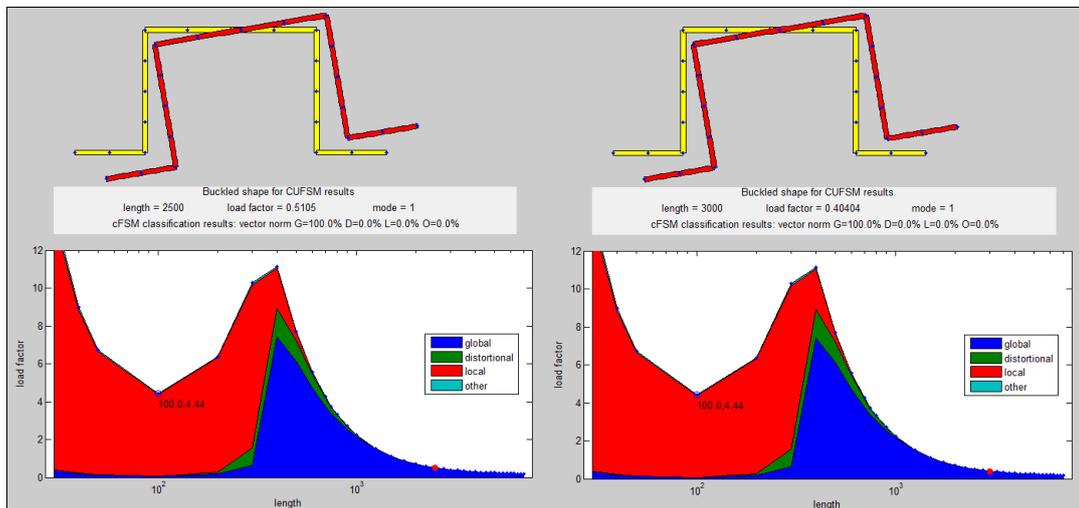


Figura 5-106. Risultati modello FSM, profilo 3. L=2500 mm, L=3000 mm.

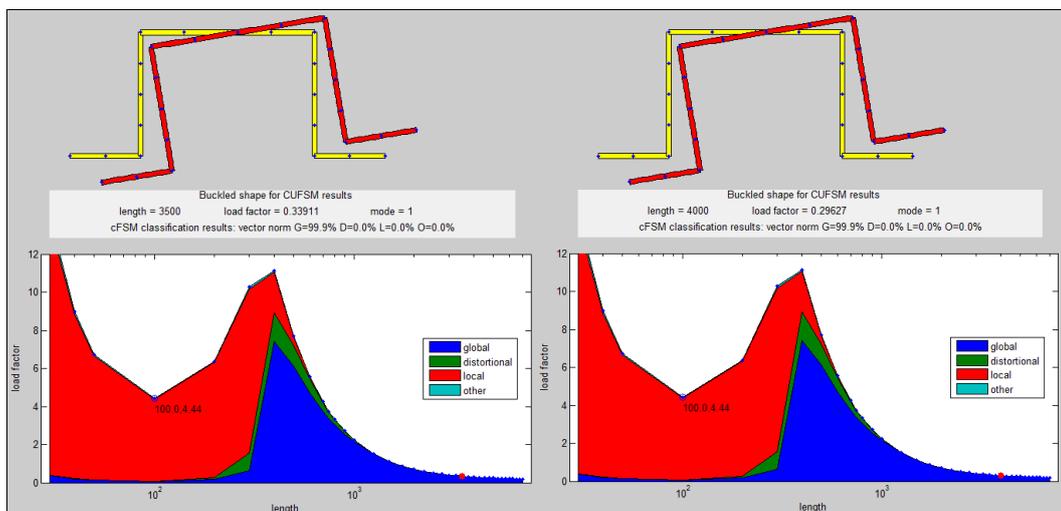


Figura 5-107. Risultati modello FSM, profilo 3. L=3500 mm, L=4000 mm.

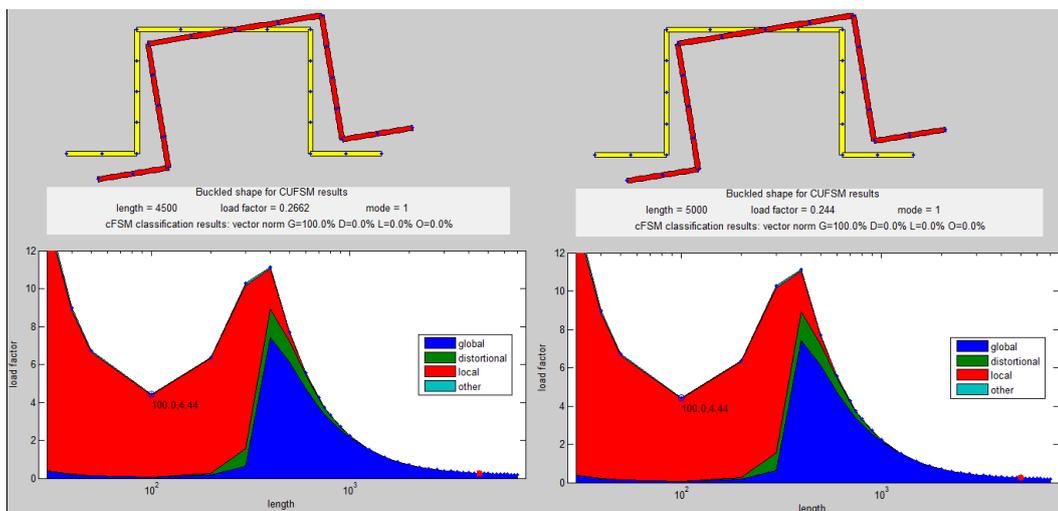


Figura 5-108. Risultati modello FSM, profilo 3. L=4500 mm, L=5000 mm.

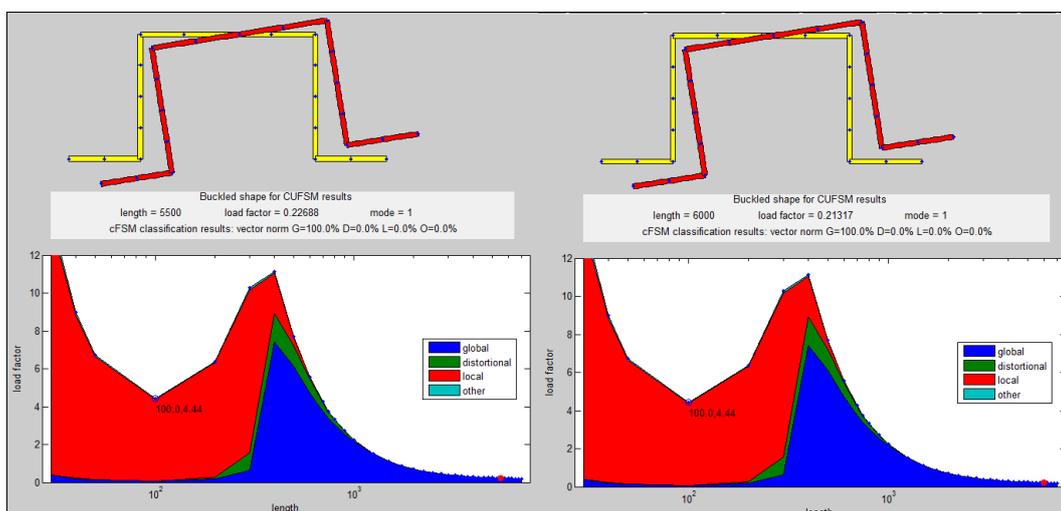


Figura 5-109. Risultati modello FSM, profilo 3. L=5500 mm, L=6000 mm.

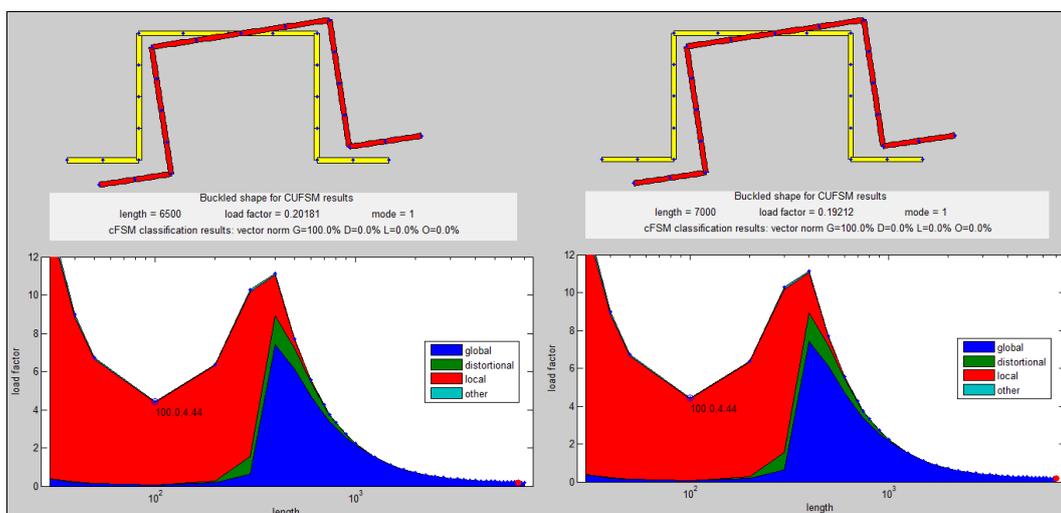


Figura 5-110. Risultati modello FSM, profilo 3. L=6500 mm, L=7000 mm.

5.10.2 Carico di instabilità del profilo 3.

Nella tabella 5-14 sono riportati i carichi di instabilità del profilo 3 in funzione della sua lunghezza e diagrammati nella figura 5-111.

Tabella 5-14. Carichi di instabilità profilo 3 – modello FSM.

Lunghezza (mm)	Fattore di carico	carico collasso (kN)	Lunghezza (mm)	Fattore di carico	carico collasso (kN)
100	4.44	742	3500	0.34	57
200	6.36	1063	4000	0.30	49
500	7.69	1284	4500	0.27	44
1000	2.26	377	5000	0.24	41
1500	1.12	187	5500	0.23	38
2000	0.70	118	6000	0.21	36
2500	0.51	85	6500	0.20	34
3000	0.40	67	7000	0.19	32

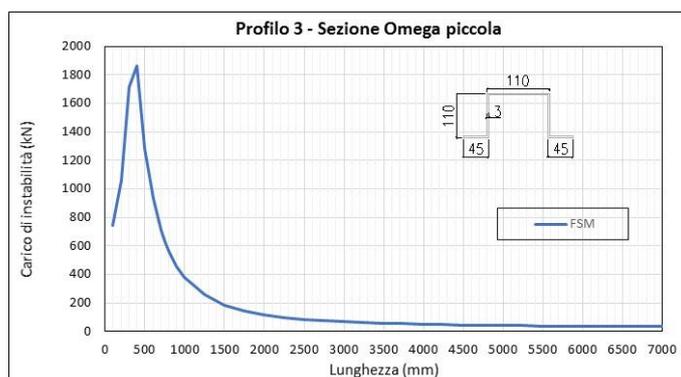


Figura 5-111. Risultati carico instabilità profilo 3- modello FSM.

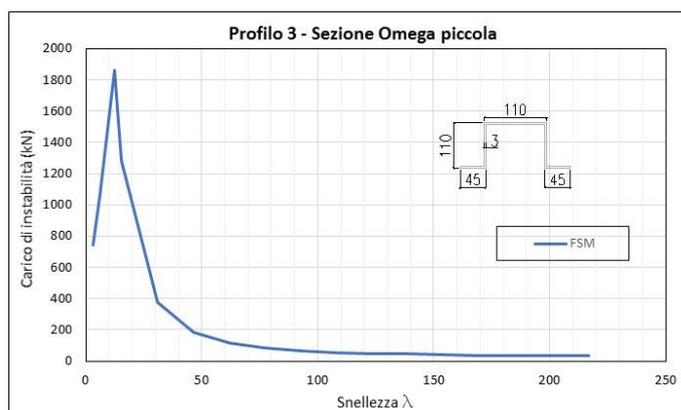


Figura 5-112. Carico instabilità vs snellezza profilo 3 - modello FSM.

5.11 Analisi carico instabilità FSM sul profilo 4.

La sezione 4 (vedere figura 5-1), è stata modellata in FSM, trovando il fattore di carico e la percentuale di partecipazione di ogni tipo di instabilità (Globale, Distorsionale, Locale) per ogni lunghezza valutata. Questi valori sono riportati dalla Figura 5-113a la Figura 5-120.

5.11.1 Modelli del profili 4 in strisce finite ed risposta nel primo modo.

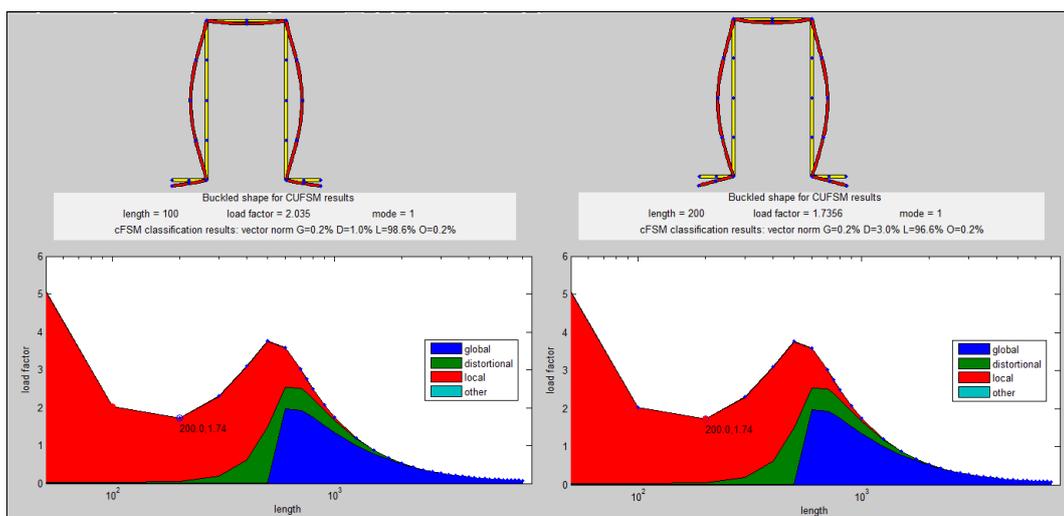


Figura 5-113. Risultati modello FSM, profilo 4. L=100 mm, L=200 mm.

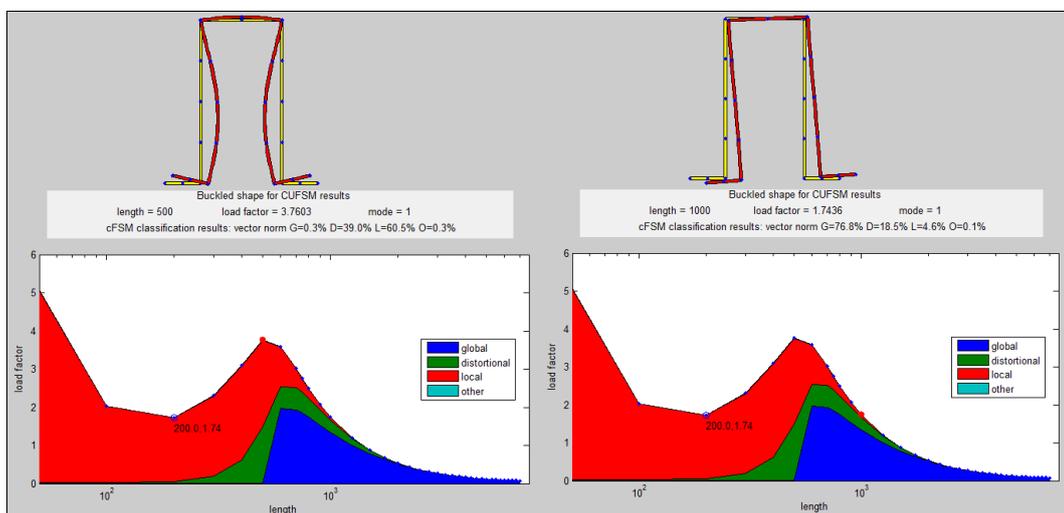


Figura 5-114. Risultati modello FSM, profilo 4. L=500 mm, L=1000 mm.

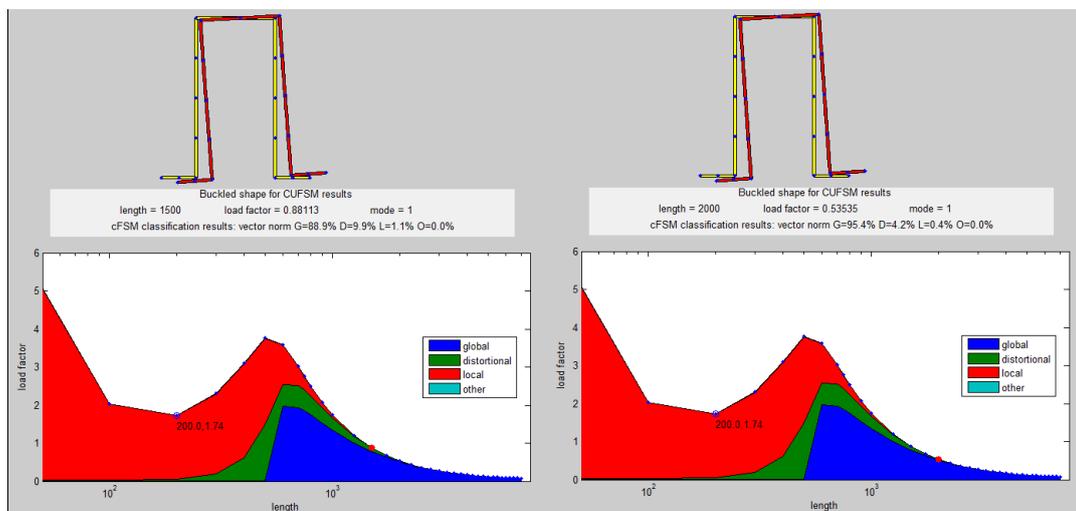


Figura 5-115. Risultati modello FSM, profilo 4. L=1500 mm, L=2000 mm.

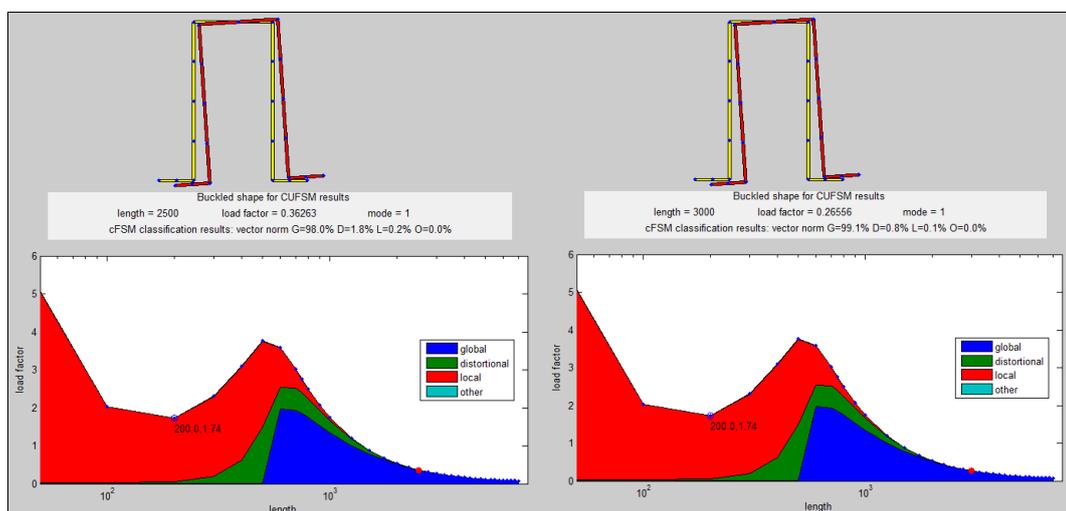


Figura 5-116. Risultati modello FSM, profilo 4. L=2500 mm, L=3000 mm.

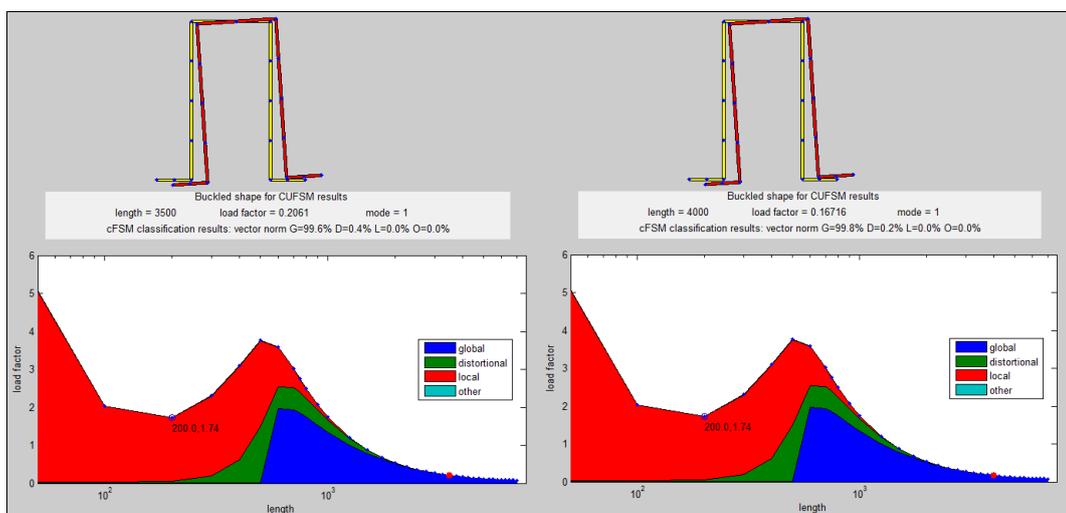


Figura 5-117. Risultati modello FSM, profilo 4. L=3500 mm, L=4000 mm.

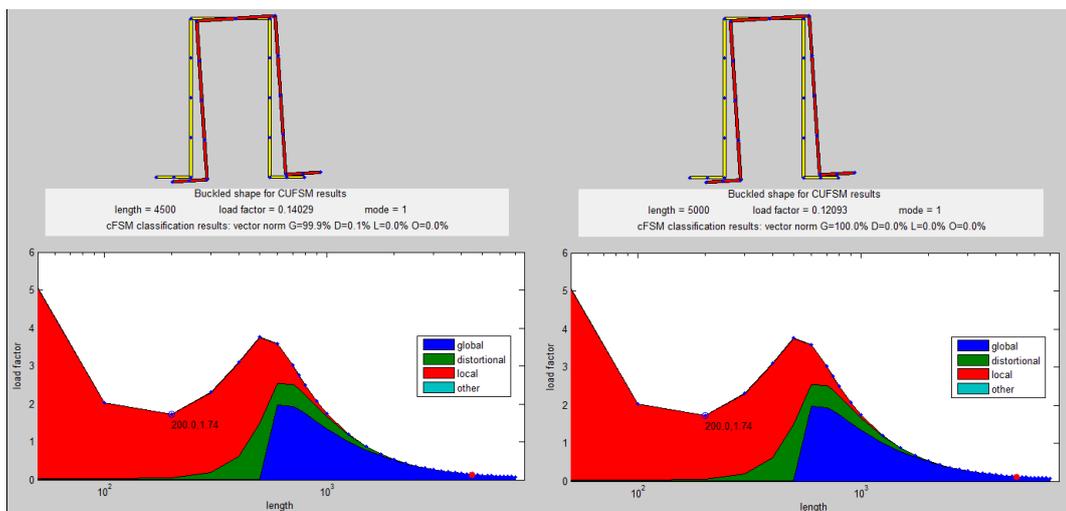


Figura 5-118. Risultati modello FSM, profilo 4. L=4500 mm, L=5000 mm.

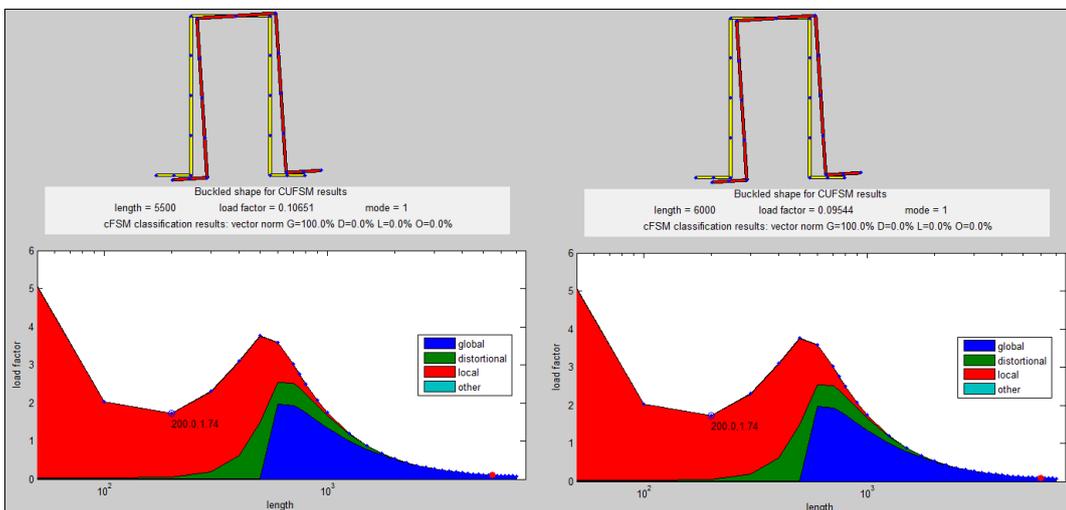


Figura 5-119. Risultati modello FSM, profilo 4. L=5500 mm, L=6000 mm.

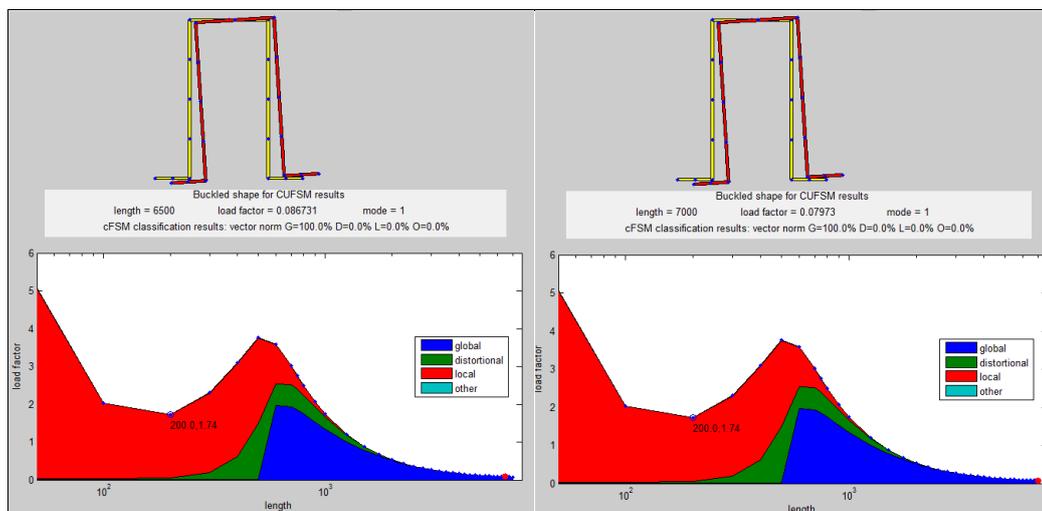


Figura 5-120. Risultati modello FSM, profilo 4. L=6500 mm, L=7000 mm.

5.11.2 Carico di instabilità del profilo 4.

Nella tabella 5-15 sono riportati i carichi di instabilità del profilo 4 in funzione della sua lunghezza e diagrammati nella figura 5-125 .

Tabella 5-15. Carichi di instabilità profilo 4 – modello FSM.

Lunghezza (mm)	Fattore di carico	carico collasso (kN)	Lunghezza (mm)	Fattore di carico	carico collasso (kN)
100	2.04	506	3500	0.21	51
200	1.74	432	4000	0.17	42
500	3.76	935	4500	0.14	35
1000	1.74	434	5000	0.12	30
1500	0.88	219	5500	0.11	26
2000	0.54	133	6000	0.10	24
2500	0.36	90	6500	0.09	22
3000	0.27	66	7000	0.08	20

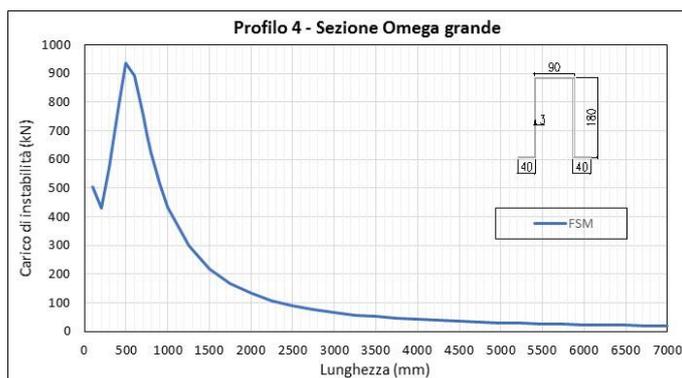


Figura 5-121. Risultati carico instabilità profilo 4- modello FSM.

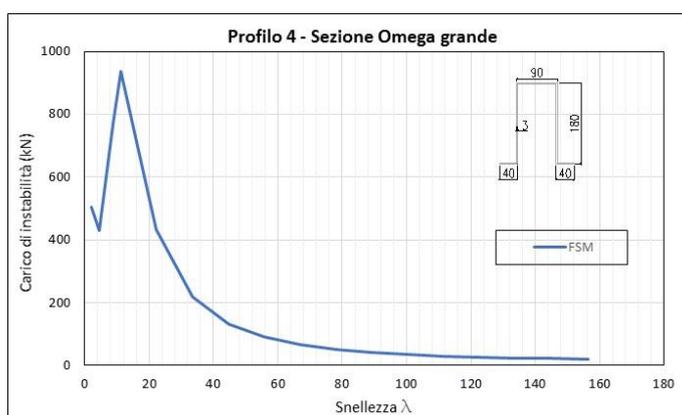


Figura 5-122. Carico instabilità vs snellezza profilo 4 - modello FSM.

5.12 Analisi carico instabilità FSM sul profilo 5.

La sezione 4 (vedere figura 5-1), è stata modellata in FSM, trovando il fattore di carico e la percentuale di partecipazione di ogni tipo di instabilità (Globale, Distorsionale, Locale) per ogni lunghezza valutata. Questi valori sono riportati dalla figura 5-123 a la figura 5-130.

5.12.1 Modelli del profili 4 in strisce finite ed risposta nel primo modo.

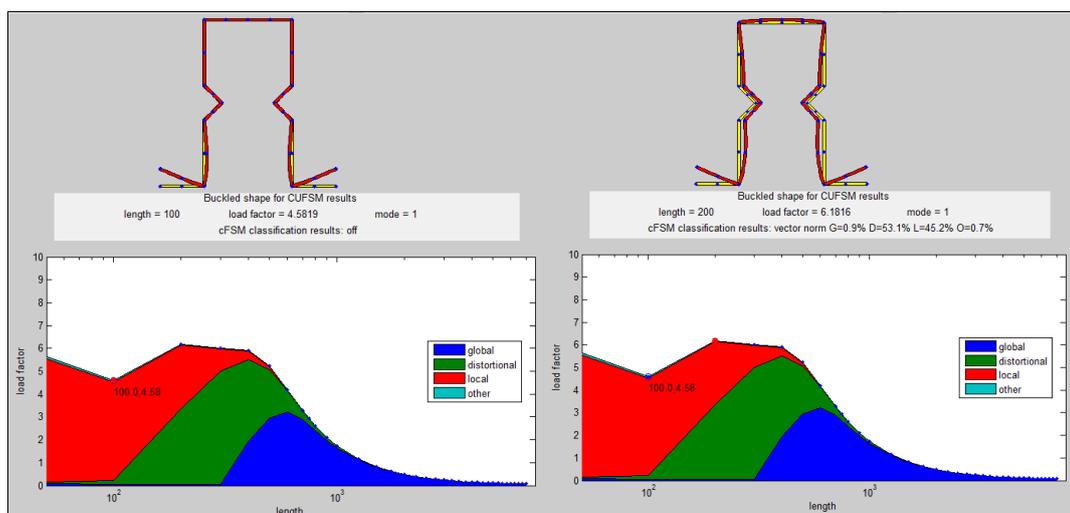


Figura 5-123. Risultati modello FSM, profilo 5. $L=100$ mm, $L=200$ mm.

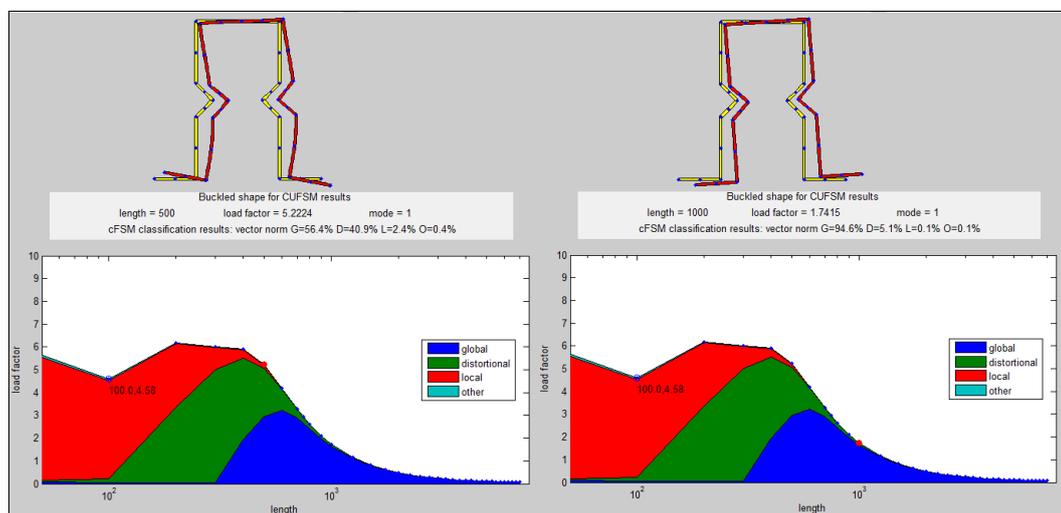


Figura 5-124. Risultati modello FSM, profilo 5. $L=500$ mm, $L=1000$ mm.

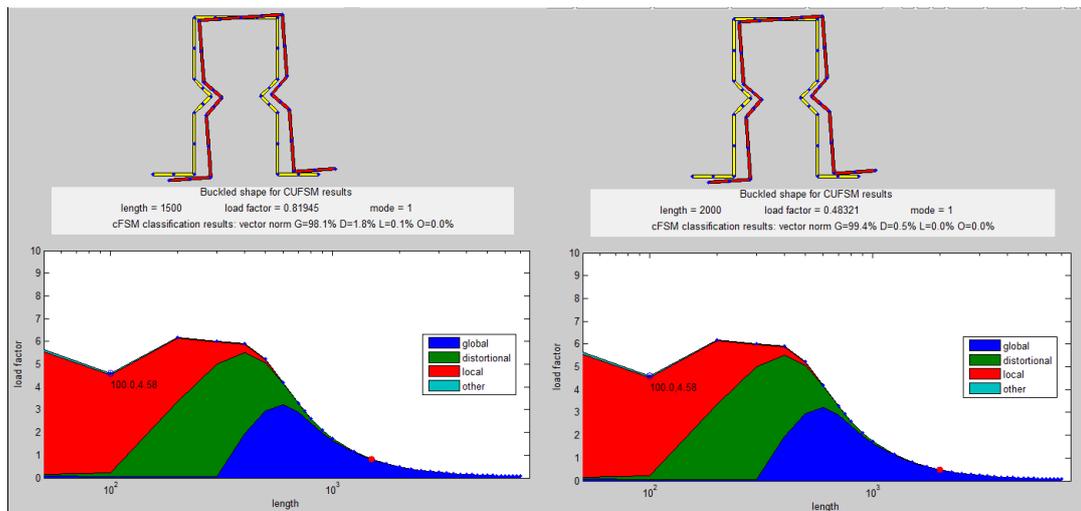


Figura 5-125. Risultati modello FSM, profilo 5. L=1500 mm, L=2000 mm.

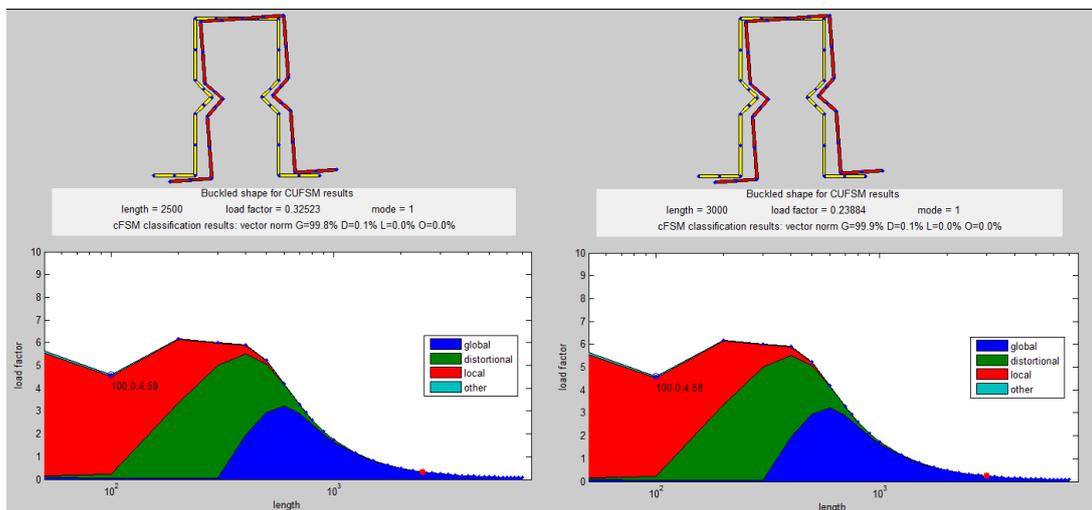


Figura 5-126. Risultati modello FSM, profilo 5. L=2500 mm, L=3000 mm.

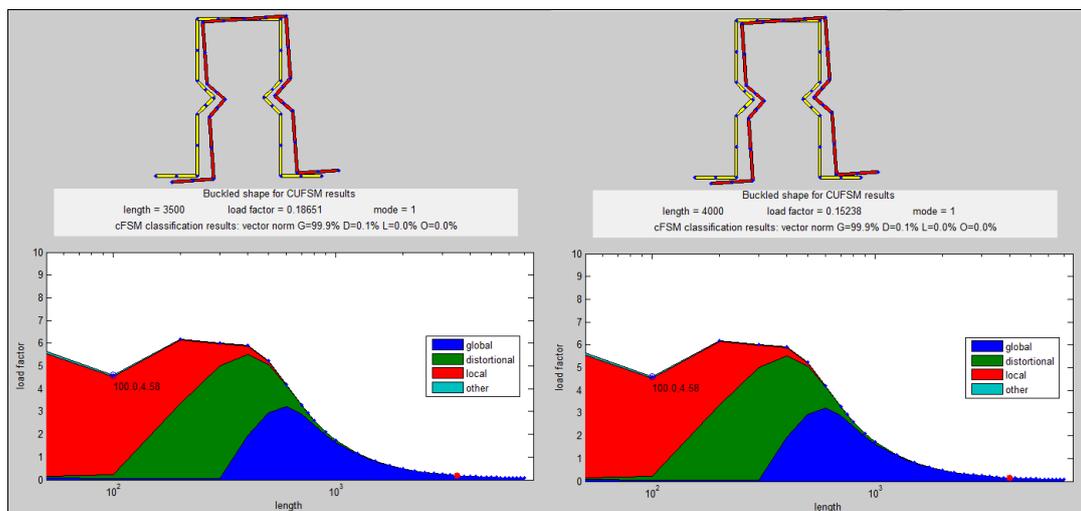


Figura 5-127. Risultati modello FSM, profilo 5. L=3500 mm, L=4000 mm.

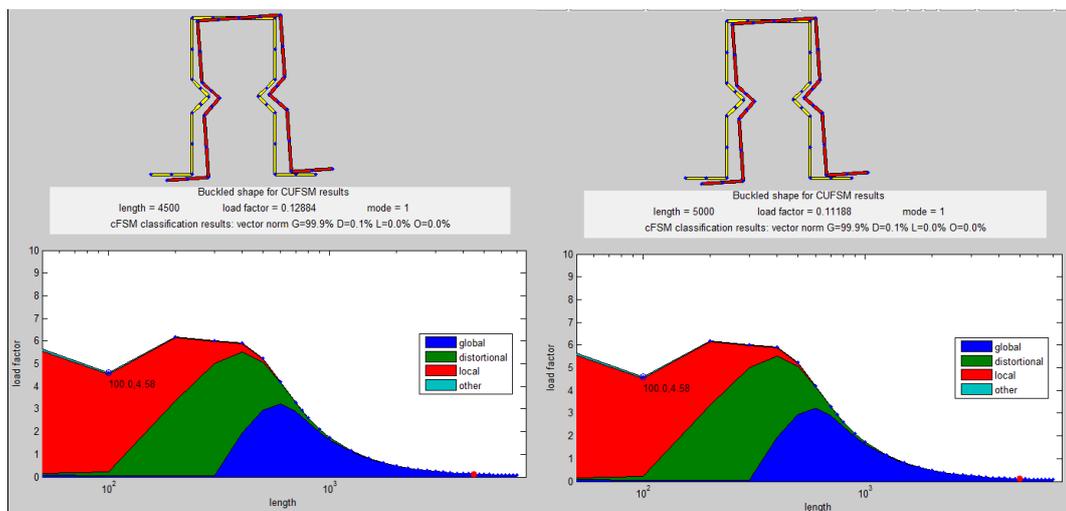


Figura 5-128. Risultati modello FSM, profilo 5. L=4500 mm, L=5000 mm.

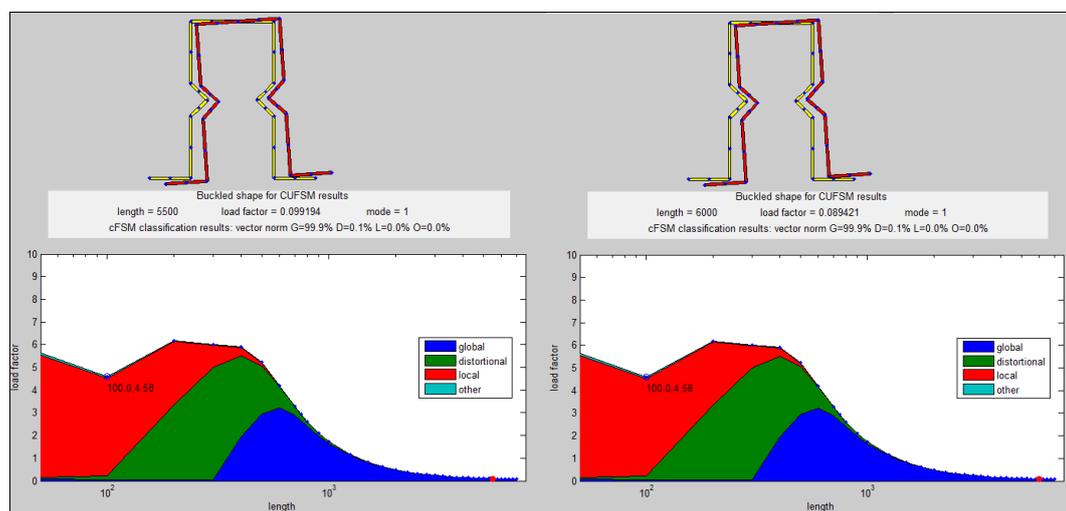


Figura 5-129. Risultati modello FSM, profilo 5. L=5500 mm, L=6000 mm.

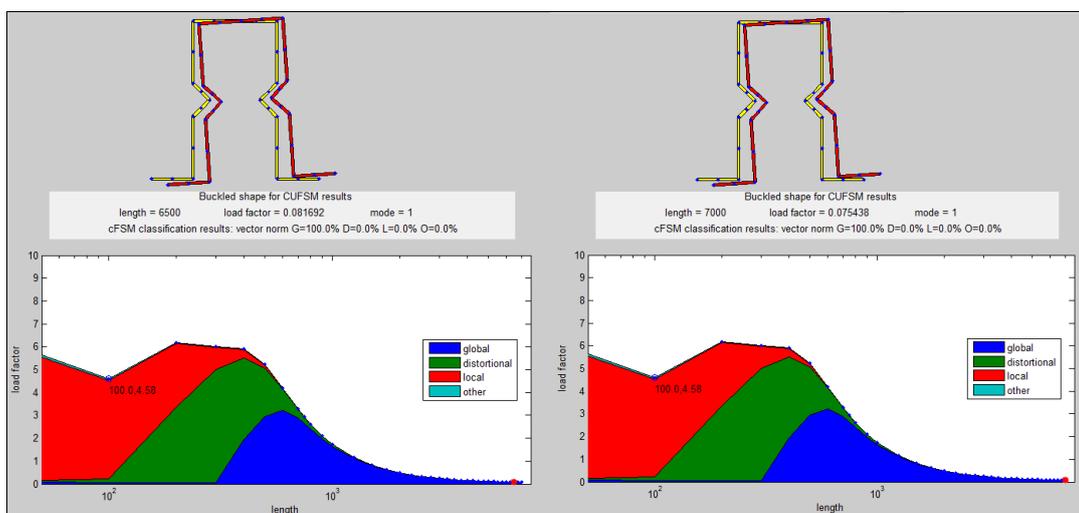


Figura 5-130. Risultati modello FSM, profilo 5. L=6500 mm, L=7000 mm.

5.12.2 Carico di instabilità del profilo 5.

Nella tabella 5-16 sono riportati i carichi di instabilità del profilo 5 in funzione della sua lunghezza e diagrammati nella figura 5-131.

Tabella 5-16. Carichi di instabilità profilo 5 – modello FSM.

Lunghezza (mm)	Fattore di carico	carico collasso (kN)	Lunghezza (mm)	Fattore di carico	carico collasso (kN)
100	4.58	872	3500	0.19	35
200	6.18	1176	4000	0.15	29
500	5.22	994	4500	0.13	25
1000	1.74	331	5000	0.11	21
1500	0.82	156	5500	0.10	19
2000	0.48	92	6000	0.09	17
2500	0.33	62	6500	0.08	16
3000	0.24	45	7000	0.08	14

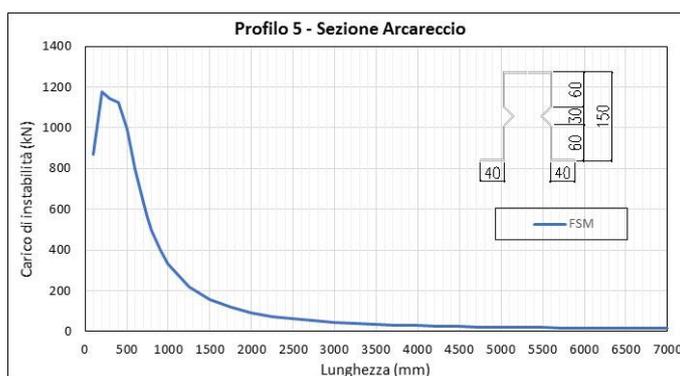


Figura 5-131. Risultati carico instabilità profilo 5- modello FSM.

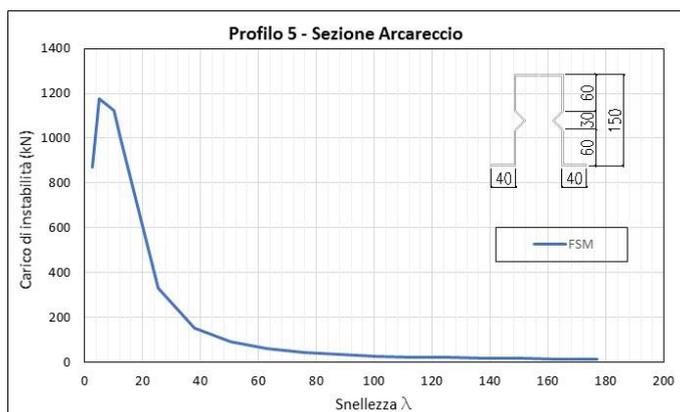


Figura 5-132. Carico instabilità vs snellezza profilo 5 - modello FSM.

5.13 Analisi ed confronto

Nei precedenti paragrafi sono stati presentati i risultati della modellazione fatta a 5 profili sottili in acciaio, mediante i metodi degli elementi finiti e delle strisce finite, sotto una condizione di asta in semplice appoggio e un carico di punta.

5.13.1 Analisi e confronto tra FSM e FEM in profilo 1.

La prima sezione presa in considerazione è stata il profilo C (vedere figura 5-1). Nella figura 5-17 si può osservare il comportamento del carico di instabilità mediante l’uso del software in elementi finiti e analogamente, il comportamento in strisce finite in figura 5-91.

La figura 5-133, mette insieme entrambi le suddette curve, portando al confronto dei risultati di tutti i due metodi.

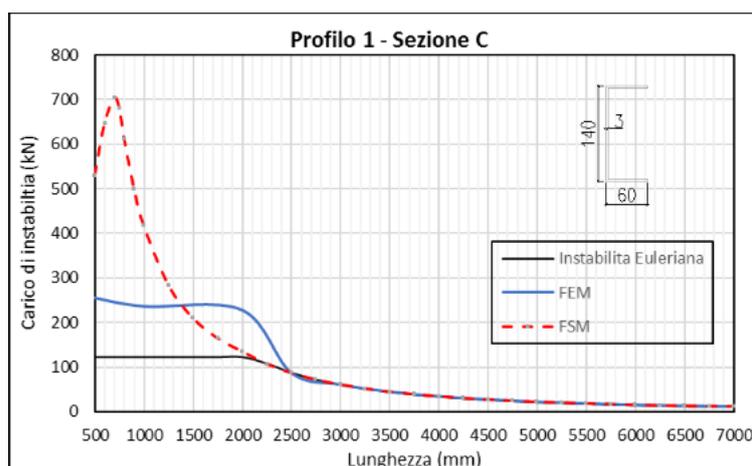


Figura 5-133. Confronto carichi instabilità profilo 1, FEM - FSM.

Per lunghezza dell’asta maggiore a 3000 mm, si osserva come il comportamento delle due curve è simile, praticamente lo stesso. Questo tratto è caratterizzato per considerevoli snellezze. Mediante il FEM, si può distinguere (paragrafo 5.4.1) come la deformata è propria di una struttura con una semionda semplice, caratterizzata per instabilità globale. Nel paragrafo 5.8.1, la classificazione fatta per FSM, mostra che l’instabilità globale ha un coefficiente di partecipazione pari al 99.8 %. È opportuno considerare che il comportamento classico dell’instabilità Euleriana in questo tratto è coincidente con entrambi i metodi.

Nel tratto di lunghezza compreso tra 1300 mm e 2500 mm, i due metodi divergono. Per una snellezza circa a 110, il valore di carico tramite FEM raddoppia il suo omologo e lo stesso il valore limite dell’instabilità euleriana. FSM caratterizza l’instabilità come globale con un coefficiente di partecipazione del 99.1% (locale 0.8%) come può vedersi nella figura 5-85, e il metodo degli elementi finiti caratterizza una forma nel suo primo modo (figura 5-22 a 5-

24) del tipo globale. Cioè, entrambi i metodi sono caratterizzati per lo stesso tipo di instabilità, ma il valore del carico critico non è coincidente.

Un terzo tratto con lunghezza da 500 mm a 1300 mm, distingue il valore del carico critico quasi costante per il metodo FEM ch'è il quale, è parallelo al valore caratteristico della crisi per snervamento. Una particolare attenzione viene considerata con il metodo delle strisce finite che ha un comportamento crescente a media dove la snellezza si avvicina a zero, con un valore vicino al triplo de quello ottenuto tramite FEM.

Il tipo di instabilità che caratterizza a entrambi i metodi, è quello locale, questo può essere visto nelle figure 5-3, 5-4, 5-5 dove gli spigoli rimangono nella sua posizione, ma le lastre interne presentano ingobbamento. Nelle figure 5-84 e 5-85, il coefficiente di partecipazione di instabilità locale è praticamente il 100% in FSM.

Dunque, il comportamento dei entrambi metodi è simili per valori di snellezze alte. Mentre per valori di snellezze intermedie e basse, i valori di carico di instabilità divergono con un fattore circa 2-3.

5.13.2 Analisi e confronto tra FSM e FEM in profilo 2.

Il secondo profilo studiato differisce dal primo, per presentare irrigidimenti di bordo (figura 5-1). Nella figura 5-33 si può osservare il comportamento del carico di instabilità tramite elementi finiti e analogamente, il comportamento in strisce finite in figura 5-101.

La figura 5-134, mette insieme entrambi le suddette curve, comportando il confronto dei risultati di entrambi i metodi.

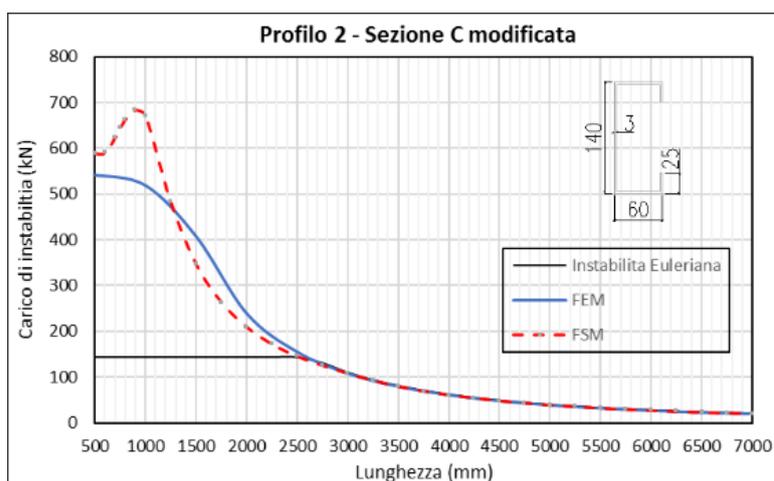


Figura 5-134. Confronto carichi instabilità profilo 2, FEM - FSM.

La curva di carico-lunghezza della sezione C modificata, presenta un comportamento simile per entrambi i metodi in quasi tutta la lunghezza dell'asta.

Un primo tratto tra 2500 mm e 3000mm, snellezze alte, con comportamento instabile globale è caratterizzato per coincidere le curve di instabilità FEM, FSM e anche quella Euleriana.

Dalla figura 5-96 alla 5-100 il comportamento instabile di tipo globale è caratterizzato. Si può anche vedere, come, nel caso dei modelli in elementi finiti (figure 5-24 a 5-32) la instabilità euleriana è evidenziata.

Un secondo tratto, snellezze medie, il comportamento del metodo FEM è maggiore in circa il 15% del FSM. Il tipo di instabilità globale predomina nel caso del metodo EF (figura 5-21 a 5-23) e anche delle strisce. In questo ultimo, una percentuale bassa di instabilità distorsionale si evidenzia, cosa che in EF non può essere vista.

Nel terzo tratto, quelle delle snellezze piccole, il metodo FSM, ha un carico in circa il 25% maggiore. Una caratteristica propria del metodo FSM è quella di evidenziare la presenza di instabilità tipo distorsionale, con un coefficiente pari a 48.8% (figura 5-94) per lunghezza di 1000mm. Questo comportamento non è così notorio o evidente nel metodo FEM (vedere figura 5-21).

La figura 5-19 e 5-20, mostrano la tipologia propria di instabilità locale in questa tipologia di elementi.

Per questa sezione sotto studio, una caratterizzazione tramite FEM o FSM conducono a risultati relativamente simili.

5.13.3 Analisi e confronto tra FSM e FEM in profilo 3.

Il terzo profilo studiato è quello tipo omega di bassa altezza (figura 5-1). Nella figura 5-49 si può osservare il comportamento del carico di instabilità tramite elementi finiti e analogamente, il comportamento in strisce finite in figura 5-111.

La Figura 5-135 mette in confronto entrambi le suddette curve di entrambi i metodi.

Tranne il tratto 500mm – 700mm, tutta la lunghezza scelta per l’analisi è caratterizzata per presentare valori di carico ottenuti per FEM maggiori di quelli tramite FSM.

Il tratto 500mm-700mm, con valori di snellezze tra 15-20, secondo il risultato delle figure 5-103 e 5-104 ha un comportamento instabile locale sotto carichi critici. Stesso comportamento è evidente tramite il metodo degli elementi finiti, d’accordo alle figura 5-51 e 5-52.

Nel tratto di snellezze medie e grandi, le relazioni tra il carico trovato per FEM e quello con FSM sono tra 2 o 3 volte, con la particolarità che FSM caratterizza come tipo di instabilità globale tutto il tratto (figure 5-105 a 5-110), invece, attraverso il metodo degli elementi finiti, non è così evidente e si può condurre a valutare come tipo distorsionale o torsionale (vedere figure 5-38 a 5-44).

Per questo tipo di sezione una scelta del carico di instabilità tramite il metodo delle strisce finite, porta con se una fattore di fiducia rispetto al metodo degli elementi finiti in circa due volte.

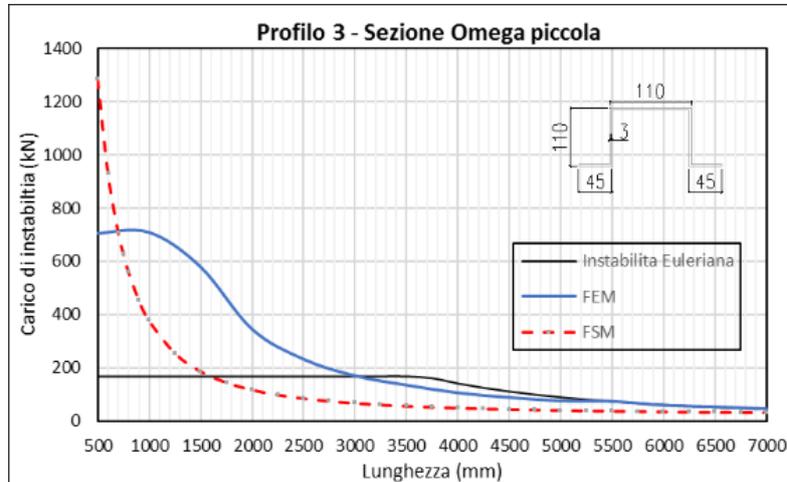


Figura 5-135. Confronto carichi instabilità profilo 3, FEM - FSM.

5.13.4 Analisi e confronto tra FSM e FEM in profilo 4.

Il quarto profilo studiato differisce dal terzo, per presentare una avere un'altezza maggiore (figura 5-1). Nella figura 5-65 si può osservare il comportamento del carico di instabilità tramite elementi finiti e analogamente, il comportamento in strisce finite in figura 5-121.

La figura 5-137 mette in confronto entrambi le suddette curve, cioè, entrambi i metodi.

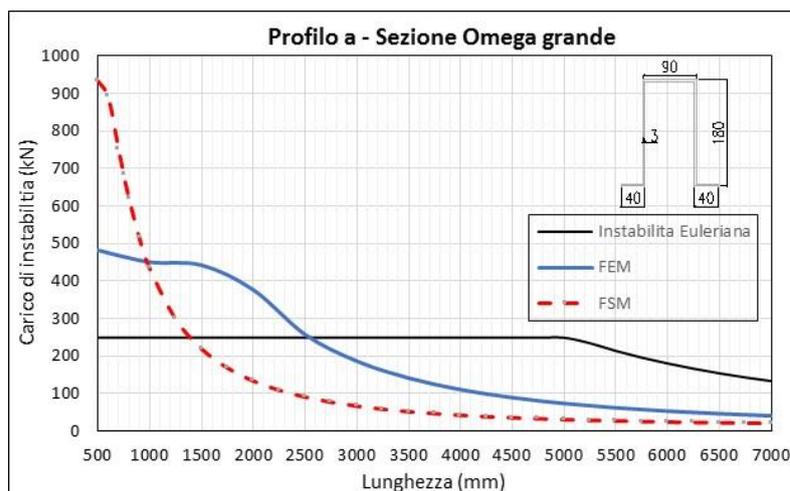


Figura 5-136. Confronto carichi instabilità profilo 4, FEM - FSM.

Il comportamento dell'andamento delle curve carico-snellezza, è molto simile a la presentata per la sezione 3, con il particolare che il punto dove se incrociano le due curve è corrispondente a una lunghezza maggiore circa a 1000mm.

Il tratto 500 mm – 1000 mm è caratterizzato per presentare un massimo all’inizio del tratto pari a 935 kN (tabella 5-15) per la curva il metodo FSM, il cui è circa due volte il valore del metodo FEM (482 kN-tabella 5-9).

Nelle figure 5-51 e 5-52, si può vedere come il comportamento è proprio e caratteristico del tipo di instabilità locale, ragionamento poco confermato per il metodo FSM (figura 5-114) dove il coefficienti de partecipazione del modo locale varia tra 4.6% e 60.5% circa e quello del modo distorsionale del 39% al 18.5%. Relativa attenzione al coefficiente di instabilità globale il cui ha $l=1000\text{mm}$ una partecipazione del 76.8 % (figura 5-114), contrario a quello caratteristico del metodo FSM e osservato in figura 5-52 che presenta un comportamento nettamente locale.

Per lunghezze maggiore di 1000 mm, la risposta del metodo FSM è sempre minore a quella FEM due volte circa. Entrambi metodi presentano un comportamento di instabilità di tipo globale.

Un aspetto importante è quello relativo al confronto con l’instabilità euleriana. Ambedue curve sono al disotto di quella, fino a valori 2500 mm circa, dove salgono fino arrivare a loro valori massimi nella vicinanza di snellezza 10.

Simile al comportamento del profilo 3, per questo tipo di sezione una scelta del carico di instabilità tramite il metodo delle strisce finite, comporta un fattore di riduzione del valore del carico rispetto al metodo degli elementi finiti in circa due volte.

5.13.5 Analisi e confronto tra FSM e FEM in profilo 5.

Il quinto ed ultimo profilo studiato, è quello della sezione “arcareccio” (figura 5-1). Nella si figura 5-81 può osservare il comportamento del carico di instabilità tramite elementi finiti e analogamente, il comportamento in strisce finite in figura 5-131

La figura 5-136 mette in confronto entrambi le suddette curve, cioè, entrambi i metodi.

Questo profilo ha la particolarità che per tutta la lunghezza, tranne i primi 100 mm, il metodo FEM ha una risposta maggiore del FSM. La differenza di valori massimi è circa 20%.

Nelle figure 5-124 a 5-130 come il tipo di instabilità che governa il profilo è globale, secondo il metodo FSM, invece, per il metodo FEM, abbiamo un tratto 500mm-1000mm dove c’è una instabilità locale nell’irrigidimento (figure 5-67 e 5-67), e una instabilità globale con poca presenza di instabilità torsionale per l’altra parte della lunghezza.

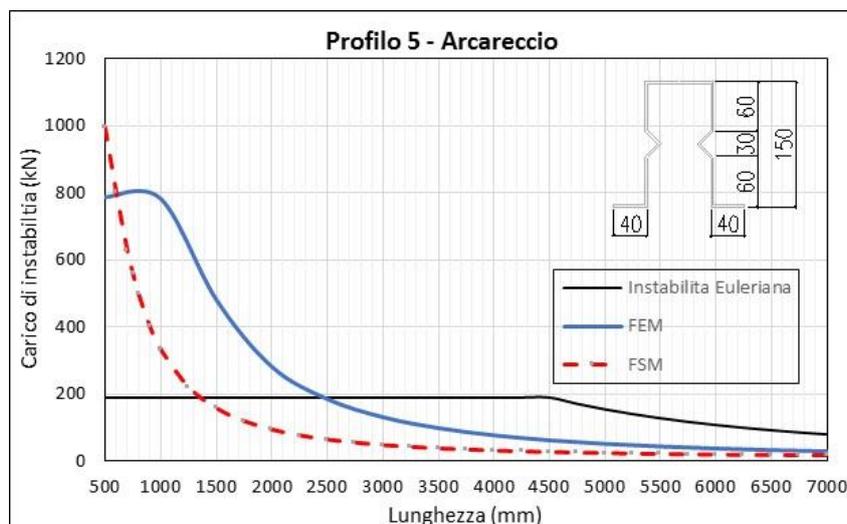


Figura 5-137. Confronto carichi instabilità profilo 5, FEM - FSM.

In questo profilo, il risultato è caratterizzato per la superiorità del carico del metodo FEM. Vuol dire che, per sezione una scelta del carico di instabilità tramite il metodo delle strisce finite, comporta un fattore di riduzione del valore del carico rispetto al metodo degli elementi finiti in circa due volte.

Considerando il tipo di analisi condotto sui cinque profili sottili scelti, ed i risultati ottenuti tramite il metodo degli elementi finiti e il metodo delle strisce finite, ed opportuno sintetizzare che:

Il comportamento dei entrambi metodi è simili per valori di snellezze alte e anche il tipo di instabilità, mai in termini di valori del carico il metodo delle strisce finite presenta un fattore tra 0.5 e 1 rispetto ai valori ottenuti con il metodo degli elementi finiti.

Considerare, la scelta del metodo approssimativo delle strisce finite nel tratto di snellezze intermedie, può condurre a sotto valutare la stima del valore critico di carico instabile.

Per snellezze con valore minore a 50, è evidente che il metodo delle strisce finite tende a sopravvalutare il carico critico di instabilità.

Per profili con irrigidimenti e snellezze maggiore di 100, il metodo delle strisce finite, presenta una affidabilità rispetto al metodo degli elementi finiti, in termini di sicurezza pari a un fattore tra 1 e 2.

Sebbene la forma dell'instabilità euleriana è simili con la forma del comportamento ottenuto per il metodo degli elementi finiti e delle strisce finite, i valori di carico sono minori o al massimo uguali per FEM e FSM.

Capitolo

6

CONCLUSIONI

Al termine dell'attività di tesi svolta, possono essere evidenziati notevoli risultati, l'analisi dei quali, permette anche di definire eventuali strategie future finalizzate all'analisi di profili sottili in acciaio. All'inizio del lavoro di tesi, è stato affrontato un problema molto importante relativo alla definizione del modello, del tipo di elemento finito, vincoli e materiale da utilizzare durante il progetto per poter caratterizzare la configurazione strutturale ad analizzare. Di fatto, per la procedura della modellazione, sono stati analizzati 4 sezioni diversi con elementi shell e frame, e diversi configurazioni di vincoli, confrontando i risultati con la teoria esatta. Questo ha portato alla scelta dell'uso del elemento shell con una configurazione propria baricentrica di vincolo per ogni profilo.

Passando all'analisi dei risultati ottenuti nel confronto del comportamento di instabilità in profili sottili in acciaio, tra il metodo degli elementi finiti e il metodo degli strisce finite, si può dire che tutti i 5 profili presentano un comportamento abbastanza coerente nel tratto di medie e grandi snellezze.

Per snellezze piccole, non è opportuno l'uso del metodo delle strisce finite, dovuto a una sovrastima dei valori critici nella vicinanza della lunghezza o snellezza nulla.

Per quanto riguarda la classificazione del tipo di instabilità, presente nel momento in cui è raggiunto il carico critico, il metodo delle strisce finite presenta il vantaggio di evidenziare la percentuale di partecipazione di ogni tipo di instabilità. Invece, il metodo degli elementi finiti, pone a considerazione e giudizio dell'ingegnere la stima concettuale del tipo di instabilità presente, cioè valutare tra locale, distorsionale o globale.

L'applicazione della instabilità euleriana in campo globale, per questo tipo di profili, non è un riferimento ottimo dovuto alla caratteristica propria delle sezioni sottili aperte, i valori caratteristici di instabilità in queste tratto sono stati sempre al di sotto della curva euleriana.

Il risparmio di tempo e capacità computazionale del modello in strisce finite, rispetto a quello degli elementi finiti, condurre a una sottostima del valore del carico di instabilità incirca due volte per snellezze alte, e una sovrastima tra 2 e tre volte per snellezze medie e piccole.

Considerando la risposta instabile globale per snellezze alte o grandi lunghezze, è opportuno per future confronti, analisi o studi, centrare l'attenzione al campo di snellezze medie e piccole, prendendo modelli più complessi e raffinati, mettendo in interazione non solo software di elementi finiti (FEM e FSM), ma anche software proprio di linguaggio di programmazione e calcolo numerico.

Appendici

Appendice

1

ANALISI SEZIONE CIRCOLARE CAVA

Con lo scopo di assicurare una corretta affidabilità del processo di modellazione tramite il software scelto per svolgere la presente tesi, si esegue un'analisi su una sezione circolare chiusa nel software Adina confrontando i suoi risultati con la teoria esatta.

L'analisi viene eseguito in due parti principali:

Nella prima parte si calcola il valore critico di Eulero dell'asta secondo la teoria esatta (attraverso le formule disponibili nella scienza delle costruzioni), dopodiché tramite Adina si modella la sezione trovando il carico di buckling. I risultati trovati secondo la teoria esatta e l'analisi mediante EF, vengono confrontati ed analizzati. Entrambi le analisi vengono effettuate su un'asta senza imperfezioni nella sua geometria.

Lo scopo della seconda parte è quella di effettuare un confronto tra un'analisi a grandi spostamenti eseguito per Adina e quello realizzato tramite l'incremento di un carico per passi in diversi modelli. In questa parte tutte le analisi vengono effettuate su un'asta con imperfezioni nella sua geometria.

1.1 Sistema statico e sezione trasversale

Per svolgere l'analisi si è scelto un'asta lunga 10.0 metri, avendo la sezione una forma circolare, con diametro esterno di 180 mm e interno di 160 mm, con spessore di 10 mm.

Il materiale scelto è acciaio S235, con modulo di Young (E) pari a 210000 MPa (N/mm²) e tensione di snervamento (fy) di 235 MPa (N/mm²).

La figura a1-1 fa vedere le caratteristiche geometriche principali del profilo cavo e il suo sistema statico sul cui è effettuata l’analisi.

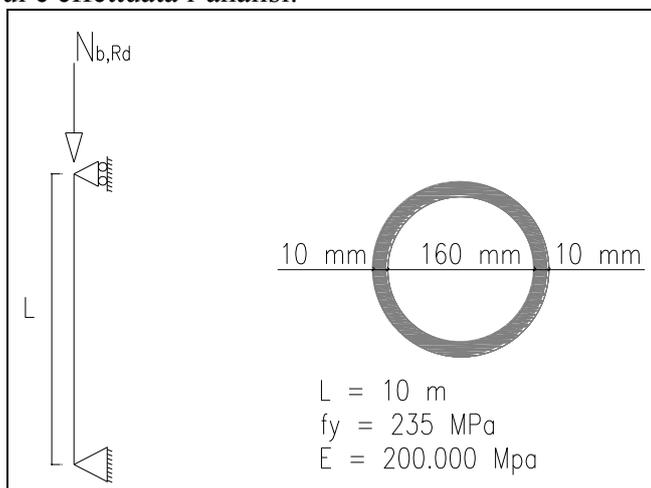


Figura a1-1. Caratteristiche geometriche sezione circolare cava

1.2 Calcolo carico limite in asta senza imperfezioni iniziali.

1.2.1 Calcolo carico limite secondo l’Eurocodice

Si esegue il calcolo del carico limite $N_{b,Rd}$, secondo l’Eurocodice, si calcola l’area, l’inerzia, e il raggio di inerzia della sezione. Si prende anche in considerazione le caratteristiche del materiale.

Lo schema della figura a1-2 mostra la relazione di tutte le formule usate.

I valori corrispondenti ai calcoli vengono riassunti nella tabella a1-1. A questo punto è importante sottolineare, i valori del carico critico di Eulero, N_{cr} , pari a 401.26 kN, e del carico limite secondo l’Eurocodice ($N_{b,Rd}$) di 303.08 kN.

$$N_{b,Rd} = \chi \cdot \frac{A \cdot f_y}{\gamma_{m1}}$$

$$\left\{ \begin{array}{l} f_y \quad E \\ A \quad I \quad \rho \quad l_0=1 \quad \alpha=\text{secondo tabella EN} \end{array} \right.$$

$$\left\{ \begin{array}{l} \chi = \frac{1}{\Phi + \sqrt{\Phi^2 - \bar{\lambda}^2}} \leq 1 \\ \Phi = 0.5 \cdot [1 + \alpha \cdot (\bar{\lambda} - 0.2) + \bar{\lambda}^2] \\ N_{CR} = \frac{\pi^2 \cdot E \cdot I}{l_0^2} \quad \text{carico critico eulero} \\ \bar{\lambda} = \sqrt{\frac{A \cdot f_y}{N_{CR}}} \end{array} \right.$$

Figura a1-2. Relazione formule usate in calcolo del $N_{b,Rd}$

Tabella a1-1. Calcoli riassunti sezione circolari

Lunghezza [m]	10	Raggio d'inerzia [mm]	60.2
Diametro esterno [mm]	180	Lunghezza libera d'inflessione [mm]	10000
Spessore [mm]	10	Carico critico eulero, Ncr [N]	401260
Diametro interno [mm]	160	Snellezza λ	166
Area [mm ²]	5341	Snellezza adimensionalizzata λ	1.77
Momento d'inerzia [mm ⁴]	19360065	α tabella 6.1 e 6.2 EN 1993-1-1	0.49
Modulo di resistenza [mm ³]	215112	Φ	2.45
Acciaio S235		χ	0.24
E (Mpa) [N/mm ²]	210000	γ_{M1}	1.00
fy (Mpa) [N/mm ²]	235	$N_{b,Rd}$ [N]	303076
$\epsilon = (235/f_y)^{1/2}$	1	e_o L/200	0.05
d/t	18		
	clase 1		

1.2.2 Analisi di buckling in Adina

Si esegue un'analisi di buckling (linearized Buckling) in Adina con lo scopo di trovare il carico critico di Eulero. Si usa l'asta senza avere conto imperfezioni nella sua geometria.

Il modello fatto è mostrato nella figura a1-3 in cui è possibile vedere sotto l'interfaccia grafica di ADINA, la geometria iniziale, la discretizzazione, le condizioni proprie di vincolo ed il carico impostato per iniziare la convergenza al suo valore di buckling o instabilità.

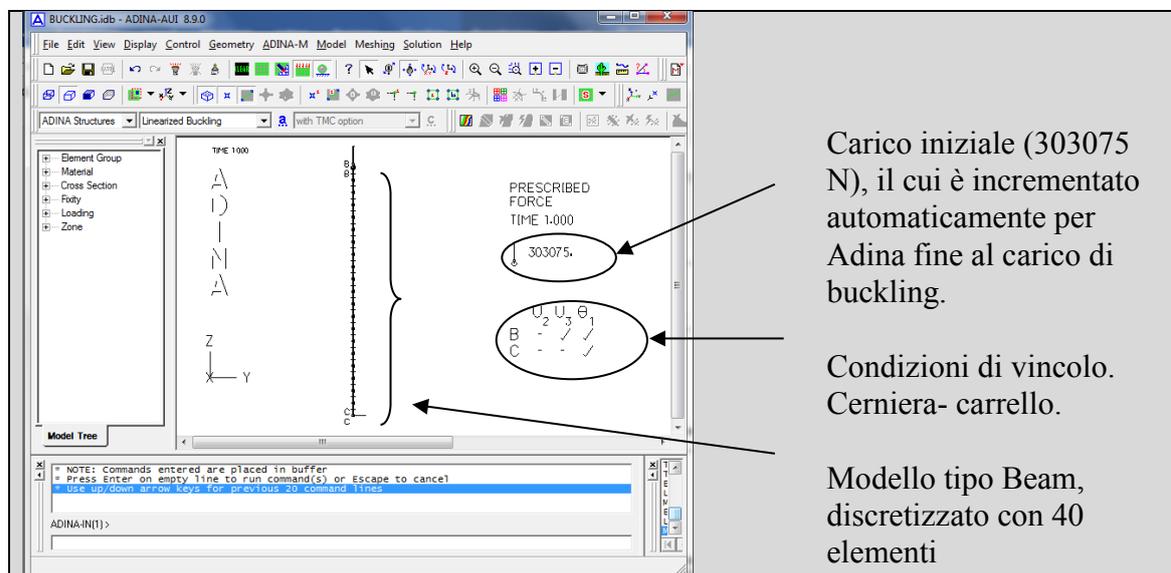


Figura a1-3. Modello sezione cava in EF.

Impostato il modello, tramite il risolutore di Adina si esegue l'analisi di Buckling trovando un fattore moltiplicatore, il cui segna il valore per cui dev'essere moltiplicato il carico iniziale imposto (303075 N) per ottenere il carico di Buckling. In questo modello il valore iniziale impostato è 303076 N (figura a1-3), il cui rappresenta il valore del carico $N_{b,Rd}=303076$ N ottenuto secondo la formula proposta nell'Eurocodice (tabella a1-1).

Il fattore moltiplicatore trovato mediante Adina, è pari a 1.324, perciò il carico di buckling per la configurazione strutturale imposta e sezione scelta, è:

$$\begin{aligned} \text{Carico di buckling} &= \text{Fattore moltiplicatore} * \text{Carico iniziale imposto} \\ \text{Carico di buckling} &= 1.324 * 303075 \text{ N} \\ \text{Carico di buckling} &= 401225 \text{ N} \end{aligned}$$

I risultati del modello realizzato sono presentati nella figura a1-4, in cui come prima sostanza, è possibile vedere la forma particolare del primo modo per questo tipo di struttura, anche il fattore moltiplicatore (LOAD FAC), inoltre il carico di Buckling, pari a 401225 (N).

Riassunti i valori del carico critico tramite la teoria esatta, $N_{CR} = \frac{\pi^2 \cdot E \cdot I}{l_0^2} = 401260 \text{ N}$, e quello con l'analisi lineare secondo Adina, 401225 N, si trova una percentuale d'errore pari a:

$$\text{Errore} = \frac{\text{Carico critico Teoria esatta} - \text{Carico critico Adina}}{\text{Carico critico teoria esatta}} * 100$$

$$\text{Errore} = \frac{401260 \text{ N} - 401225 \text{ N}}{401260 \text{ N}} * 100$$

$$\text{Errore} = 0.0087 \% \quad (0.9913)$$

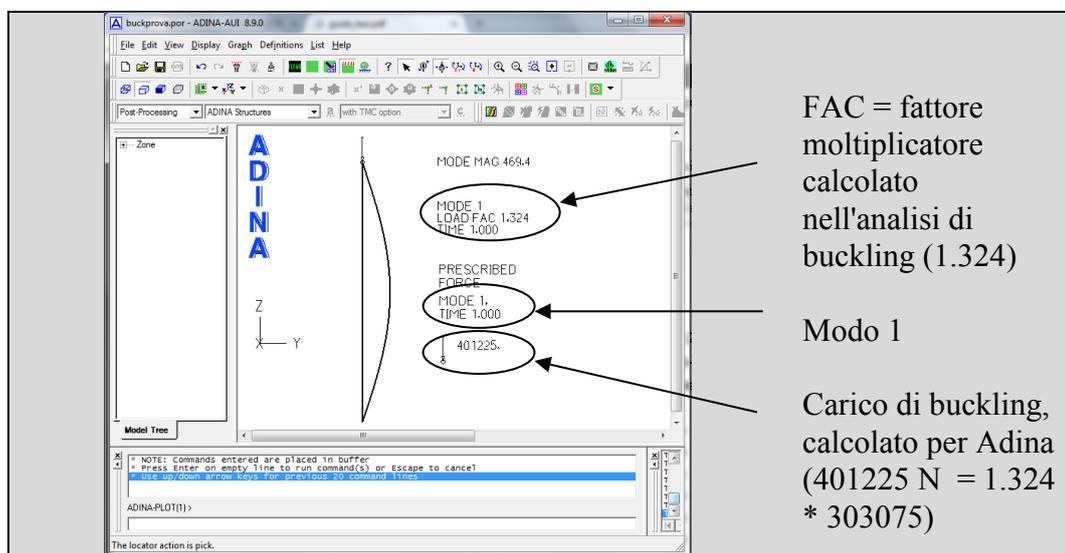


Figura a1-4. Risposta Buckling modello sezione cava in EF.

Considerando il rapporto tra N_{cr}/N_b ($401260 \text{ N} / 303076 \text{ N}$), si trova un valore di 1.324, valore coincidente con il Load FAC (Buckling load multiplier) raggiunto tramite l'analisi con Adina.

1.3 Calcolo carico limite in asta con imperfezioni iniziali.

Nell'analisi dell'asta con imperfezioni, si usano due metodologie diverse per ottenere ed impostare la geometria iniziale imperfetta:

- i) Tramite inserimento di una geometria iniziale corrispondente a una forma tipo sinusoidale.
- ii) Tramite l'applicazione della forma del primo modo trovata sull'asta senza imperfezione.

Tutti i modelli vengono eseguiti in Adina sotto la teoria dei GRANDI SPOSTAMENTI, con elementi tipo BEAM.

1.3.1 Analisi con imperfezioni iniziale con forma sinusoidale.

Per eseguire questa parte dell'analisi si prendono in considerazione due caratteristiche: la geometria e il carico.

La geometria iniziale dell'asta viene definita attraverso una forma tipo sinusoidale, la configurazione rappresenta le imperfezioni iniziali, con valore massimo nella mezzeria, questa è:

$$y_{iniziale} = f \cdot \sin(\alpha \cdot z) , \quad (\text{vedere figura a1-5})$$

dove :

$y_{iniziale}$ = ascissa iniziale dell'asta nella sua corrispondente ordinata z ,

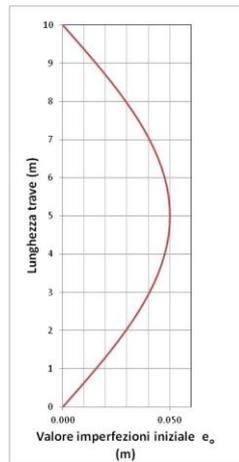
f = funzione relativo alla condizione di massima ascissa;

$$f = \left(\frac{l}{200} \right) \quad \text{con } l = \text{lunghezza dell'asta.}$$

La condizione di massima ascissa, cioè il massimo valore nella mezzeria dell'asta viene impostata pari al valore delle IMPERFEZIONI INIZIALI (1/200) data per l'Eurocodice EN1993-1-1, paragrafo 5.3.

Con l'obiettivo di trovare le curve di risposta della struttura, il carico viene inserito di maniera incrementale in modo tale che ogni incremento (*step*) corrisponda a un modello (file) diverso in Adina. Per tale scopo si prende un carico massimo pari al valore del carico di buckling (N_{Buckling}) trovato attraverso dell'analisi con la teoria esatta, e si divide in 41 step (cioè si avrà 41 modelli diversi).

Ogni step di carico rappresenta un modello differente e il suo corrispondente carico viene detto N_i , dove il pedice “i” rappresenta il numero del step. Il valore di N_i varia di 0 a N_{Buckling} . Ogni valore del carico N_i è mostrato nella tabella a1-2.



$$y_{iniziale} = f \cdot \sin(\alpha \cdot z)$$

$$y_{iniziale} = \left(\frac{l}{200}\right) \cdot \sin\left(\frac{n \cdot \pi}{l} \cdot z\right)$$

$$y_{iniziale} = \left(\frac{10 \text{ m}}{200}\right) \cdot \sin\left(\frac{1 \cdot \pi}{10 \text{ m}} \cdot 5 \text{ m}\right)$$

$$y_{iniziale,mezzeria} = 0.05 \text{ m}$$

Figura a1-5. Funzione per rappresentare la geometria iniziale dell’asta.

A questo punto è importante sottolineare che questo tipo di analisi viene fatta una sola volta, soltanto con lo scopo di confrontarla con la parte automatica di incremento fatta per Adina. Nel seguente paragrafo è eseguita la modellazione del carico incrementale in Adina usando un solo file. Adina consente questo tipo di analisi attraverso la sua funzione “TIME FUNCTION”.

Per ogni modello, cioè per ogni valore di N_i , sono stati trovati i valori di MOMENTO (M_i) e di spostamento δ_i nella mezzeria dell’asta. Alla fine di tutti gli step di carico si avrà tante terne di valori $[N_i, M_i, \delta_i]$ come numero di steps, la figura a1-6 mostra la procedura per trovare le suddette terne di valori.

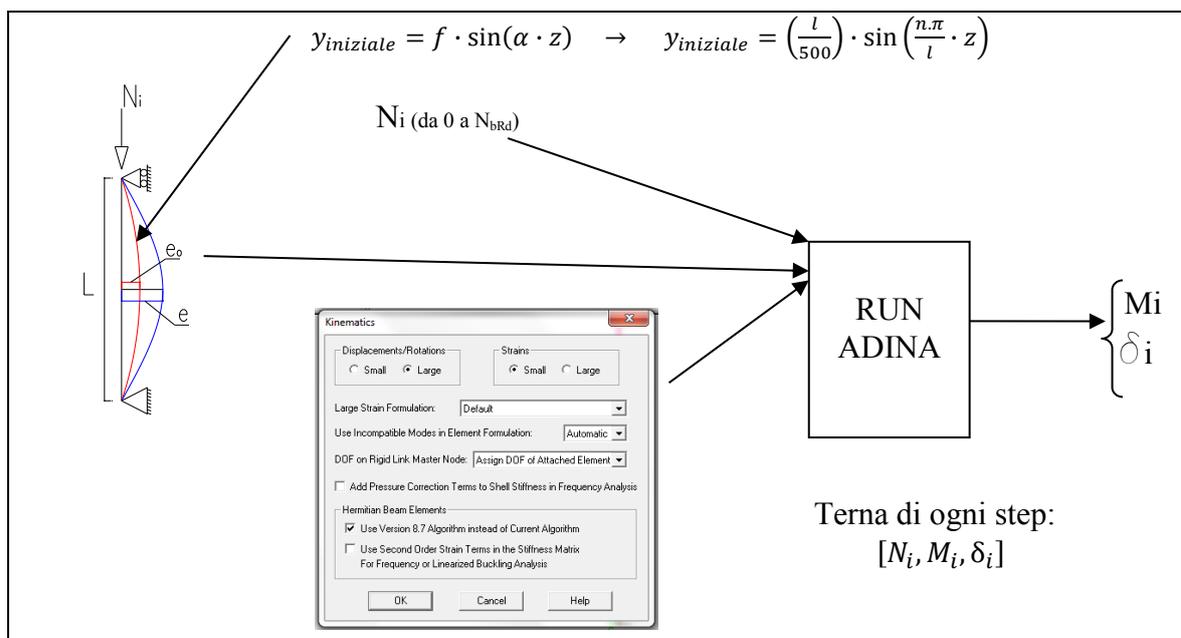


Figura a1-6. Procedura risposta iterativa modello sezione cava in EF.

I singoli valori di carico N_i , sono scelti con i seguenti suggerimenti:

- Si fa variare il carico da 0 N a 394000 N (394 kN),
- L'incremento di ogni step è pari a 10 kN, iniziando in un valore nullo (0 kN) fino al valore di 390 kN. Anche è modellato il valore di 394 kN, ultimo valore di convergenza.
- Si modella un carico di 267 kN, in cui la tensione dell'elemento corrisponde alla tensione di snervamento (f_y) del materiale,
- È usato un carico di 307.075 kN, che corrisponde al rapporto tra lo sforzo nell'elemento e lo sforzo dovuto al carico del Eurocodice pari a l'unità (1.00).
- Dovuto alla non convergenza del modello con un carico pari a $N_{brd} = 401259$ N, esso non viene usato nell'analisi.

Tutti i valori di step di carico (cioè tutti i modelli), sono elencati nella figura a1-2, con i suoi rispettivi valori di momento, spostamento in mezzzeria e tensione.

Per una maggiore comprensione del lavoro svolto, a continuazione, sono sviluppati i calcoli per lo step No. 15, che ha un carico di 150000 N (150 kN), cioè un modello dove il carico imposto è pari a 150 kN.

Step No. 15:, carico $N_{15} = 150000$ N

Il carico limite (N_{brd}) della sezione secondo l'Eurocodice, $N_{brd} = 303075.66$ N (Eurocodice), è stato trovato nel precedente paragrafo (tabella a1-2).

Il rapporto tra il carico proprio dello step e il carico limite secondo l'Eurocodice è:

$$Rapporto: \frac{N_i}{N_{b,Rd}} = \frac{150000 N}{303075.66 N} = 0.49$$

Vedere colonna 3, tabella a1-2.

Il modello fatto in Adina per lo step di sviluppo restituisce un momento in mezzzeria pari a $M_{150000} = 11960$ N.m , e uno spostamento massimo dello stesso punto di 0.0297492 m (29.75 mm). Colonna 4, tabella a1-2.

La risposta del modello-step 15, sono mostrate nella figura a1-7.

Dovuto all'inserimento di una geometria iniziale con la forma sinusoidale la cui rappresenta le imperfezioni iniziali (figura a1-5), allo spostamento trovato con Adina è necessario aggiungere il valori delle imperfezioni, per trovare lo spostamento totale dell'asta, cioè,

$$e = (e - e_0) + e_0$$

dove,

- e = Valore dello spostamento totale dell'asta. Colonna 7, tabella a1-2,
- $e - e_0$ = Valore spostamento ricavato tramite Adina. Colonna 6, tabella a1-2,
- e_0 = Valore dello spostamento dovuto alle imperfezioni iniziali.

quindi,

$$e = (e - e_0) + e_0 = (0.0297492 \text{ m}) + 0.05 \text{ m}$$

$$e = 0.07975 \text{ m} = 79.75 \text{ mm}.$$

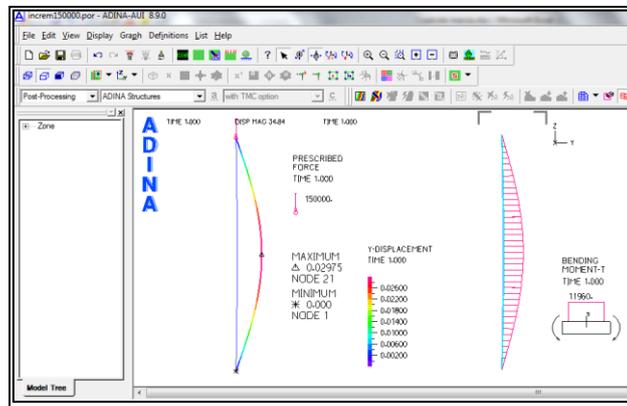


Figura a1-7. Risposta modello step 15. Sezione cava in EF.

Per ricavare la tensione attuante dell'elemento si usa l'espressione della presso-flessione (colonna 8, tabella a1-2):

$$\sigma_{150000} = \frac{N_{15}}{A} + \frac{M_{15}}{w} = \frac{150000 \text{ N}}{5341 \text{ mm}^2} + \frac{11960 * 1000 \text{ N} \cdot \text{mm}}{215112 \text{ mm}^3} = 83.69 \frac{\text{N}}{\text{mm}^2} \text{ (MPa)}$$

La relazione tra la tensione nell'elemento e la tensione limite del materiale, è:

$$\frac{\sigma_{150000}}{f_y} = \frac{83.69 \text{ MPa}}{235 \text{ MPa}} = 0.36$$

Quando sull'asta è applicata una forza pari a 303075 N (step 31), corrispondente alla forza limite secondo l'Eurocodice, $N_{b,Rd}$, si ricava un momento di 61591.30 N ed uno spostamento in mezzeria di 0.153221 m.

Lo spostamento totale (incluso quello delle imperfezioni iniziali), è pari a

$$e = (e - e_0) + e_0 = (0.1532 \text{ m}) + 0.05 \text{ m} = 0.2032 \text{ m}$$

E quindi la tensione nell'asta sarà:

$$\sigma_{N_{b,Rd}} = \frac{N_{31}}{A} + \frac{M_{31}}{w} = \frac{303075 \text{ N}}{5341 \text{ mm}^2} + \frac{61591.30 * 1000 \text{ N} \cdot \text{mm}}{215112 \text{ mm}^3} = 343.07 \frac{\text{N}}{\text{mm}^2} \text{ (MPa)}$$

Il rapporto tra le tensioni quando l'asta è caricata con una forza di 150000N (step 15) e con la forza $N_{b,Rd}$ (step 31) è:

$$\frac{\sigma_{15}}{\sigma_{31}} = \frac{\sigma_{150000}}{\sigma_{N_{b,Rd}}} = \frac{83.69 \text{ MPa}}{343.07 \text{ MPa}} = 0.24$$

Nella tabella a1-2, sono mostrati i calcoli delle tensioni per tutti gli step di carico.

Tabella a1-2. Riassunto analisi asta con imperfezioni iniziali, forma sinusoidale.

Step	Carico Ni [N]	Ni / N _{b,Rd}	Momento [N.m]	Spostamento			Tensione i [N/mm ²]	Tensione i / fy	Tensione i /fdNRb.
				e-eo [m]	e-eo [mm]	e [mm]			
0	0	0.00	0	0	0.00	50.00	0.00	0.00	0.00
1	10000	0.03	512.75	1.27E-03	1.27	51.27	4.26	0.02	0.01
2	20000	0.07	1052.30	2.62E-03	2.62	52.62	8.64	0.04	0.03
3	30000	0.10	1620.91	4.03E-03	4.03	54.03	13.15	0.06	0.04
4	40000	0.13	2220.89	5.52E-03	5.52	55.52	17.81	0.08	0.05
5	50000	0.16	2854.96	7.10E-03	7.10	57.10	22.63	0.10	0.07
6	60000	0.20	3526.10	8.77E-03	8.77	58.77	27.63	0.12	0.08
7	70000	0.23	4237.67	1.05E-02	10.54	60.54	32.81	0.14	0.10
8	80000	0.26	4993.44	1.24E-02	12.42	62.42	38.19	0.16	0.11
9	90000	0.30	5797.65	1.44E-02	14.42	64.42	43.80	0.19	0.13
10	100000	0.33	6655.10	1.66E-02	16.55	66.55	49.66	0.21	0.14
11	110000	0.36	7571.25	1.88E-02	18.83	68.83	55.79	0.24	0.16
12	120000	0.40	8552.27	2.13E-02	21.27	71.27	62.23	0.26	0.18
13	130000	0.43	9605.21	2.39E-02	23.89	73.89	68.99	0.29	0.20
14	140000	0.46	10738.10	2.67E-02	26.71	76.71	76.13	0.32	0.22
15	150000	0.49	11960.00	2.97E-02	29.749	79.75	83.69	0.36	0.24
16	160000	0.53	13289.20	3.31E-02	33.06	83.06	91.74	0.39	0.27
17	170000	0.56	14728.60	3.66E-02	36.64	86.64	100.30	0.43	0.29
18	180000	0.59	16297.90	4.05E-02	40.54	90.54	109.47	0.47	0.32
19	190000	0.63	18015.30	4.48E-02	44.82	94.82	119.32	0.51	0.35
20	200000	0.66	19902.80	4.95E-02	49.51	99.51	129.97	0.55	0.38
21	210000	0.69	21987.00	5.47E-02	54.70	104.70	141.53	0.60	0.41
22	220000	0.73	24299.90	6.05E-02	60.46	110.46	154.16	0.66	0.45
23	230000	0.76	26880.80	6.69E-02	66.88	116.88	168.03	0.72	0.49
24	240000	0.79	29777.80	7.41E-02	74.09	124.09	183.37	0.78	0.53
25	250000	0.82	33069.20	8.23E-02	82.28	132.28	200.54	0.85	0.58
26	260000	0.86	36815.10	9.16E-02	91.60	141.60	219.83	0.94	0.64
26A	267000	0.88	39766.80	9.89E-02	98.94	148.94	234.86	1.00	0.68
27	270000	0.89	41127.10	1.02E-01	102.33	152.33	241.74	1.03	0.70
28	280000	0.92	46140.00	1.15E-01	114.79	164.79	266.92	1.14	0.78
29	290000	0.96	52025.80	1.29E-01	129.43	179.43	296.15	1.26	0.86
30	300000	0.99	59131.80	1.47E-01	147.11	197.11	331.06	1.41	0.96
31	303075	1.00	61591.30	1.53E-01	153.22	203.22	343.07	1.46	1.000
32	310000	1.02	67727.50	1.68E-01	168.48	218.48	372.89	1.59	1.09
33	320000	1.06	78397.20	1.95E-01	194.99	244.99	424.37	1.81	1.24
34	330000	1.09	91987.70	2.29E-01	228.75	278.75	489.42	2.08	1.43
35	340000	1.12	109839.00	2.73E-01	273.06	323.06	574.28	2.44	1.67
36	350000	1.15	134237.00	3.34E-01	333.53	383.53	689.57	2.93	2.01
37	360000	1.19	169252.00	4.20E-01	420.14	470.14	854.22	3.63	2.49
38	370000	1.22	222438.00	5.51E-01	551.19	601.19	1103.34	4.70	3.22
39	380000	1.25	306872.00	7.58E-01	757.56	807.56	1497.72	6.37	4.37
40	390000	1.29	435778.00	1.07E+00	1067.38	1117.38	2098.84	8.93	6.12
41	394000	1.30	498599.00	1.22E+00	1215.48	1265.48	2391.63	10.18	6.97
42	401259.98	1.32							

Con i diversi valori ricavati con Adina e con le espressioni caratteristiche della scienza della costruzione, sono rappresentate graficamente le curve di risposta della struttura, con riferimento alle forze, alle tensioni e agli spostamenti.

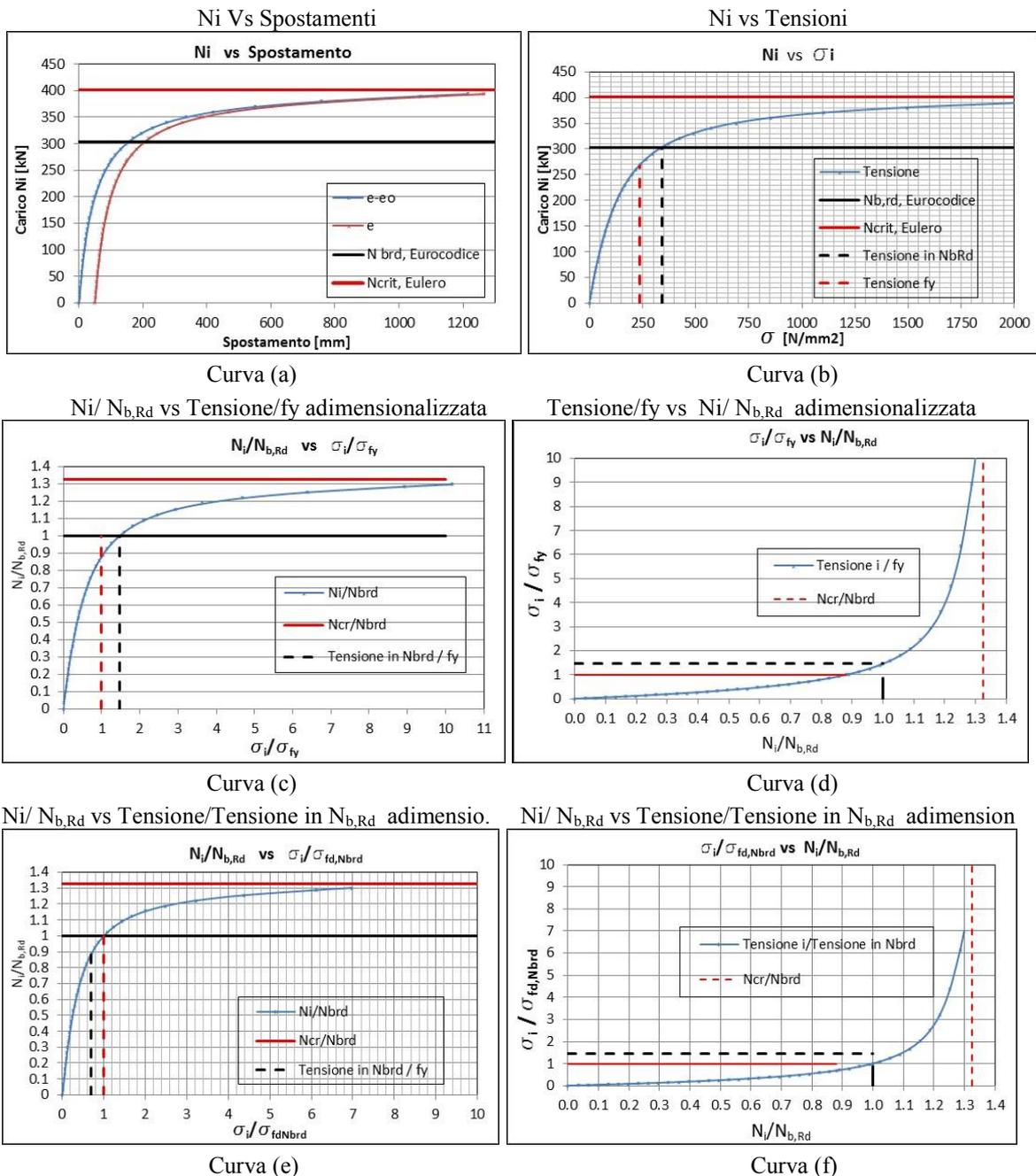


Figura a1-8. Curve di risposta analisi asta con imperfezioni iniziali, forma sinusoidale .

a) Curva sforzo normale vs spostamento in mezzeria, b) Curva sforzo normale vs tensione, c) curva rapporto sforzo normale/ sforzo limite secondo Eurocodice vs tensione adimensionalizzata rispetto alla tensione di snervamento f_y , d) curva rapporto tensione / tensione di snervamento f_y vs sforzo normale adimensionalizzato rispetto allo sforzo limite secondo Eurocodice, , e) curva rapporto sforzo normale/ sforzo limite secondo Eurocodice vs tensione adimensionalizzata rispetto alla tensione nel massimo sforzo limite del Eurocodice, , f) curva rapporto tensione / tensione al massimo sforzo limite del Eurocodice vs sforzo normale adimensionalizzato rispetto allo sforzo limite secondo Eurocodice, ,

Nella figura a1-8.a, è possibile vedere la forma classica del comportamento di un materiale perfettamente elastico, in cui il primo tratto presenta una tendenza lineare, cioè proporzionalità tra carico e spostamento, dopodiché, un tratto dove la proporzionalità è scomparsa, fino a raggiungere il tratto quasi lineare con limite superiore pari al valore del carico di Eulero.

È possibile anche guardare come nella grafica c) e d) (sopra il valore dello sforzo limite del Eurocodice, $\sigma_{N_b,Rd}$) c'è una riserva di almeno 30 percento, propria del tipo di materiale in studio.

Fino a questo momento la caratterizzazione delle curve della struttura in studio soltanto vengono fatte di una maniera *manuale*, cioè fatte attraverso l'incremento per step (uno per ogni file) del carico. Nel seguente paragrafo, la stessa caratterizzazione viene fatta automaticamente attraverso il risolutore di Adina con lo scopo di confrontare le curve trovate in questo paragrafo e quelle gestite per Adina. Inoltre, il tipo di curve gestite per Adina usate nel argomento principale della presente.

1.3.2 Analisi con imperfezioni iniziale con la forma del modo 1.

Il primo passo è un'analisi di frequenze sull'asta senza imperfezioni iniziali, cioè l'asta interamente retta, con lo scopo di trovare la forma del primo modo. Sono usate tutte le caratteristiche e proprietà dei precedenti modelli.

Nella figura a1-9 sono mostrate le deformate del primo e del secondo modo. Nella parte sinistra si può vedere la forma propria del primo modo di vibrazione per il tipo di struttura in modellazione, ossia un'asta con vincoli cerniera-carrello a campata unica. A destra si vede la seconda forma propria della struttura.

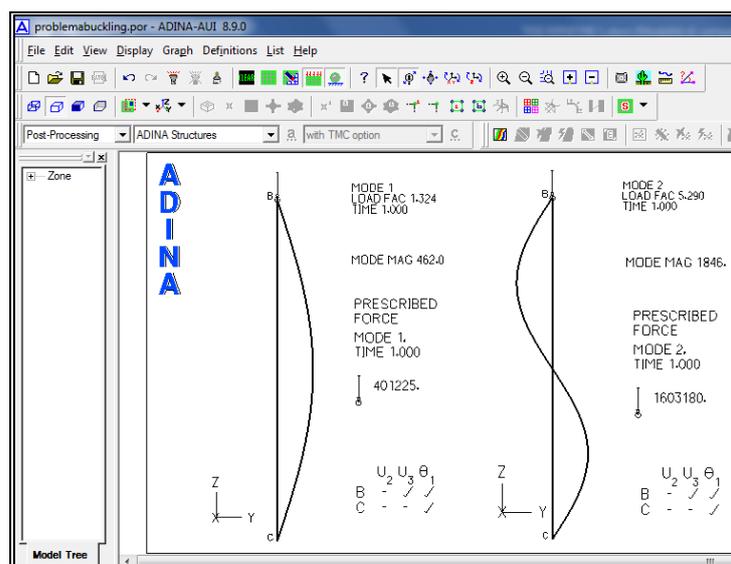


Figura a1-9. Risposta analisi di frequenza asta semplice, 1 e 2 modo, attraverso Adina .

Il carico critico di collasso è stato trovato attraverso la funzione di Adina, “Collapse Analysis”, considerando la forma del primo modo ricavato a priori.

Usando la forma del primo modo, per rappresentare il valore delle imperfezioni iniziali, si stabilisce un valore nella mezzera dell’asta uguale alla massima ammissibile secondo l’Eurocodice, EN1993-1-1, paragrafo 5.3, uguale:

$$\text{Imperfezioni inicial} = \frac{l}{200} = \frac{10.0 \text{ m}}{200} = 0.05 \text{ m}$$

Questo risultato quest’analisi è un carico di collasso pari a : 419.43 KN (419432N). La figura a1-10 mostra il risultato ottenuto dopo dell’analisi. In questo caso nello step 42 il modello converge al carico di collasso.

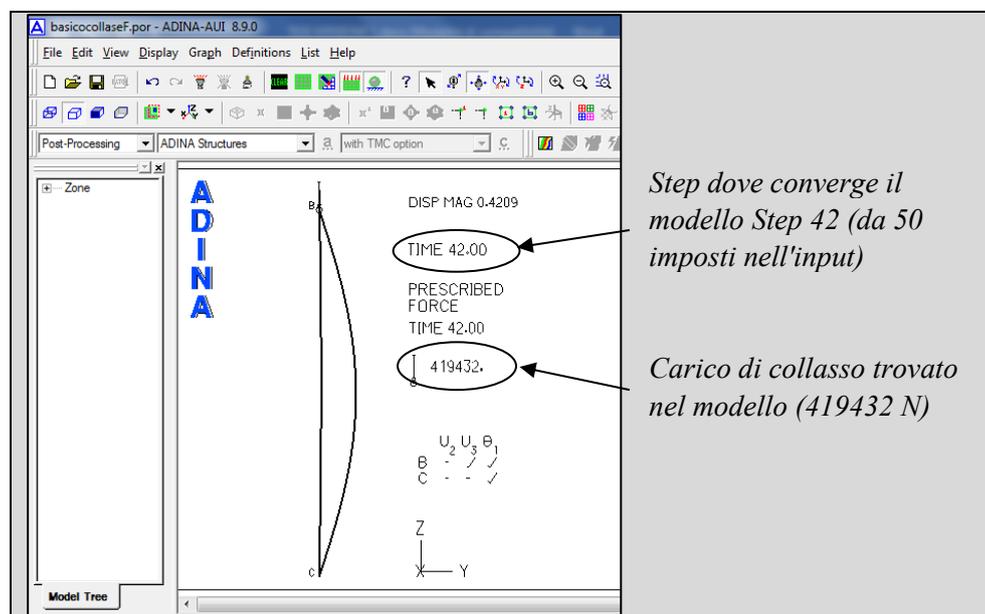


Figura a1-10. Risposta analisi di collasso (Collapse analysis) modo 1, attraverso Adina .

Per iniziare l’analisi di collasso è richiesto fissare uno spostamento massimo ammissibile e un carico iniziale di analisi. Adina incrementa automaticamente il carico iniziale fino a raggiungere uno spostamento uguale (o maggiore nel seguente step) allo spostamento massimo ammissibile. Nel caso particolare che il carico di collasso sia raggiunto per un valore minore dello spostamento inizialmente fissato Adina ferma l’analisi di tale carico di collasso.

La tabella a1-3, mostra il valore del carico imposto in funzione dello spostamento in mezzera generato per Adina. Si può vedere come il carico inizia da 0 kN, fino ad un valore di 419.43 kN, corrispondente a uno spostamenti in mezzera pari a 2.118 m, valore maggiore al valore prefissato inizialmente di 2 metri.

Tabella a1-3. Riassunto Analisi di collasso con imperfezioni iniziali modo I.

Step	Forza imposta (kN)	Spostamento in mezzeria (mm)	Step	Forza imposta (kN)	Spostamento in mezzeria (mm)
0	0.00	0.00	22	385.871	927.94
1	7.87	1.00	23	386.944	962.90
2	15.54	2.01	24	388.858	1027.95
3	29.34	3.94	25	392.193	1148.35
4	53.29	7.65	26	396.928	1328.70
5	92.09	14.88	27	396.999	1331.41
6	147.55	29.04	28	397.13	1336.50
7	213.09	56.50	29	397.376	1345.99
8	275.19	108.74	30	397.834	1363.72
9	323.69	206.80	31	398.689	1396.76
10	356.84	389.68	32	400.279	1458.11
11	357.16	392.65	33	403.249	1571.21
12	357.75	398.21	34	407.832	1739.58
13	358.81	408.62	35	407.903	1742.11
14	360.69	428.07	36	408.036	1746.84
15	363.83	464.41	37	408.284	1755.67
16	368.75	532.21	38	408.75	1772.14
17	375.71	658.29	39	409.626	1802.81
18	384.69	890.94	40	411.279	1859.65
19	384.79	893.81	41	414.434	1964.07
20	384.96	899.17	42	419.432	2118.66
21	385.28	909.20			

La figura a1-11, generata da Adina, fornisce la risposta o il comportamento dell'andamento del carico imposto vs. spostamento dell'asta in mezzeria. L'andamento della curva inizia a un valore pari a zero, cioè valore nullo di spostamento corrispondente a un valore nullo di carico, fino a un valore massimo di 419.43 kN con spostamento di 2118.66 mm.

È fondamentale sottolineare che una volta definito un punto di controllo nella struttura, è possibile ottenere le curve e/o andamenti delle diverse caratteristiche rispetto a tensione, sforzi ed spostamenti.

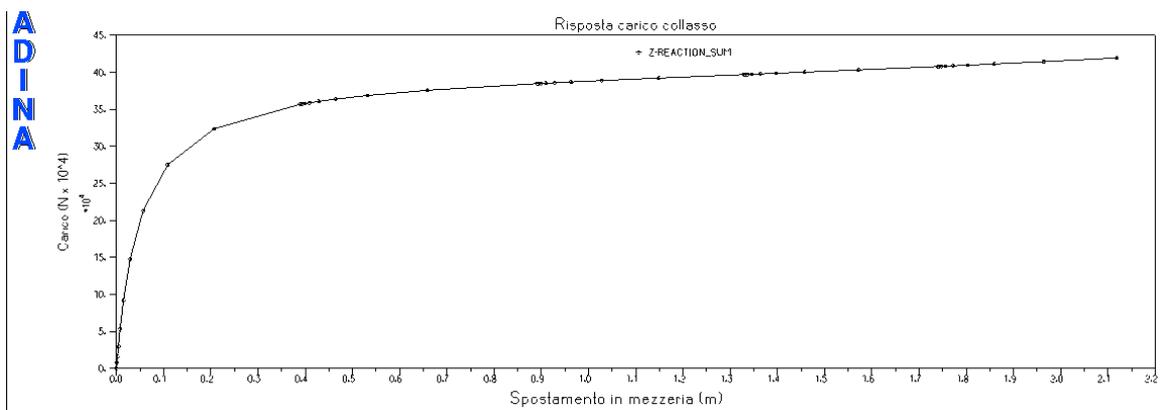


Figura a1-11. Andamento della risposta modo 1, attraverso Adina .

1.3.3 Confronto tra analisi forma sinusoidale e forma del modo 1

Una volta effettuata l’analisi dell’asta imperfetta con la forma sinusoidale e con la forma del primo modo, si mette in confronto entrambi i risultati.

Bisogna sottolineare che l’analisi incrementale per step è fatto fino a un valore minore del carico di buckling (dovuto alla convergenza del modello), invece l’analisi di collasso fino al proprio crollo della struttura per lo spostamento ammissibile imposto.

Entrambi le risposte dello spostamento rispetto al carico sono mostrate nella figura a1-12. La risposta dell’analisi con forma sinusoidale, cioè quella fatta per l’incremento manuale del carico in diversi file è rappresentata in colore blue, sotto la legenda “e-eo, incremento steps”, invece la risposta dell’analisi fatto attraverso l’incremento automatico del carico di Adina e con la geometria imperfetta attraverso del primo modo di vibrare della struttura è mostrata in linea tratteggiata rossa, sotto la legenda “collasso, incremento Adina”.

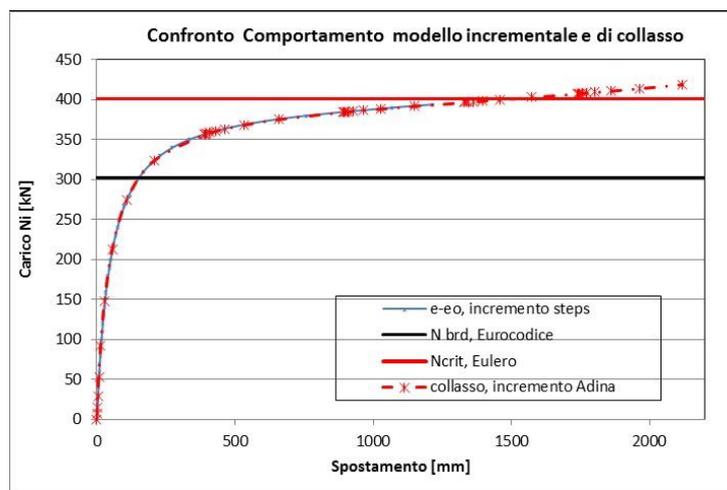


Figura a1-12. Confronto risposta metodologia geometrica e modo I-Adina.

La figura a1-12 presenta ambedue le curve sovrapposte, che vuol dire entrambi le metodologie di analisi corrispondenti, cioè possiamo verificare la affidabilità di Adina nella modellazione dell'asta sotto carico incrementale in grandi spostamenti.

Nella figura a1-12 e tabella a1-4 sono riassunti i risultati trovati dell'analisi dell'asta imperfetta e del confronto grafico e numerico tra entrambi i risultati.

Tabella a1-4. Confronto risultati modellazione asta sezione circolare cava con imperfezioni iniziali.

Metodo impostazione Geometria	Carico Buckling (kN)	Carico Collasso (kN)	Spostamento in mezzeria per carico collasso (m)	CARICO N = 394 kN*			
				Spostamento in mezzeria (m)	Errore spostamento (%)	Momento in mezzeria (kN.m)	Errore momento (%)
Secondo forma sinusoidale	401225	NA	NA	1.27	4.1%	498.6	-0.2%
Secondo forma modo 1	401225	419.43	2.19	1.22		499.5	

* massimo valore di analisi in forma sinusoidale dovuto alla convergenza del modello.

Nella tabella a1-4, si può vedere come il carico di buckling è lo stesso per entrambe le analisi. Il carico di collasso non è applicabile nel metodo de la forma sinusoidale dovuto alla convergenza del modello. Il massimo spostamento trovato per un carico di collasso è pari a 419.43 kN è 2.19 metri.

L'analisi nel carico massimo di convergenza del modello di forma sinusoidale (394 kN), restituisce come risultato un errore di 4.1 % tra entrambi le metodologia, ma in termini di sollecitazioni si trova un errore del 0.2 %.

A questo punto si può verificare l'affidabilità del programma di elementi finiti scelto per la modellazione in elementi finiti (FE) delle aste in elementi sottili in acciaio, secondo lo richiesto per EN 1993-1-5 appendice C.5.

Appendice

2

Modellazione in FEM di 4 sezioni

Con lo scopo di assicurare una corretta affidabilità nel processo di modellazione tramite il software FEM scelto per svolgere la tesi, si esegue un'analisi su quattro diversi tipi di sezioni: rettangolare, rettangolare cava, doppia T e sezione a C, figura a2-1. L'analisi viene eseguita con due diversi tipi di elementi finiti, cioè ogni sezione viene modellata con elementi tipo frame e successivamente con elementi tipo shell.

L'obiettivo è quello di confrontare il risultato della modellazione tra elementi tipo shell e quelli con elementi tipo frame. Si inizia con una sezione basilare rettangolare, continuando con una sezione rettangolare cava, dopodiché una sezione a doppia T è modellata, per poi finire con la sezione C sottile particolare delle sezioni aperte.

L'analisi viene individuata a tutelare la caratterizzazione e il comportamento dei seguenti punti:

- tipo di sezione, sottile – aperte, con elementi tipo shell.
- Tipo di vincoli, cerniera – carrello, in sezione sottile aperte sotto elementi tipo shell.
- Inserimento delle condizioni di carico in sezioni sottili.
- Analisi del carico critico e di collasso di sezione sottili in FEM.

Con un elemento tipo frame e shell, si svolge la seguente analisi:

- Analisi di carico critico (Eulero) con carico di **punta**,
- Analisi di collasso con imperfezioni iniziali (secondo l'Eurocodice) attraverso l'uso della forma del primo modo di vibrare dell'asta, per una condizione di carico di **punta**.
- Analisi di carico critico con carico in **mezzeria**.
- Analisi di collasso con imperfezioni iniziali (secondo l'Eurocodice) attraverso l'uso della forma del primo modo di vibrare dell'asta, per una condizione di carico in **mezzeria**.

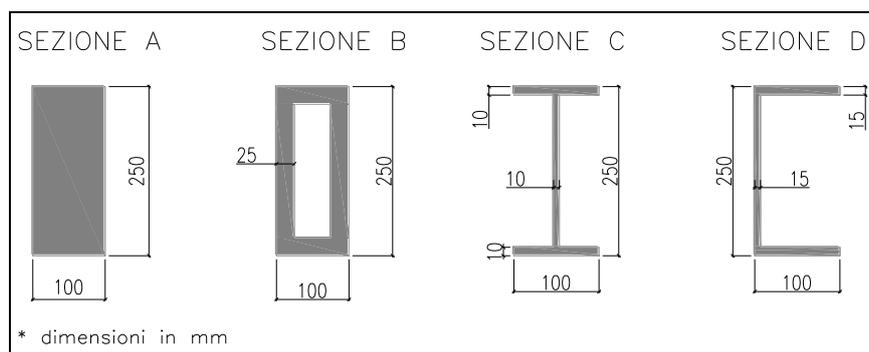


Figura a2-1. Sezione trasversale per studio di Adina.

2.1 Limiti nella modellazione

Per svolgere tutte le modellazione in ADINA è richiesto imporre delle condizioni iniziali, con lo scopo di confrontare tutti i modelli rispetto allo stesso livello di approssimazione e di accuratezza presenti in questo capitolo.

Ci sono sette principali condizioni iniziali:

- Tipo di elementi finiti.
- Sezione trasversale
- Materiale
- Vincoli
- Carico iniziale imposto, time-step e time function
- Imperfezioni iniziale
- Spostamenti iniziali e massimi per la iterazione.

2.1.1 Tipo di elementi finiti.

Nella modellazione di tutti gli schemi strutturali sono scelti due tipi di elementi finiti, il frame e il shell. Il primo è usato con lo scopo di fare un confronto iniziale tra il risultato della teoria esatta e quello dell'elemento tipo shell in modo di ottenere l'accuratezza della modellazione delle sezioni.

2.1.2 Sezione trasversale

Nel presente appendice si modellano quattro tipi di sezioni trasversale (rettangolare, rettangolare cava, doppia T e sezione a C), nel tipo di elementi frame si prendono le sezioni parametrici di Adina, invece nel modello con elementi tipo Shell si modella la sezione attraverso gli elementi finiti.

2.1.3 Materiale

Il materiale scelto per la modellazione corrisponde a una legge lineale perfettamente elastica.

2.1.4 Vincoli

L’asta scelta per la modellazione ha la stessa lunghezza per tutti i modelli. Ci sono due tipi di configurazioni nel rispetto ai vincoli, cerniera – carrello e incastro – incastro.

2.1.5 Carico iniziale, funzione di paso temporale, funzione temporale di carico.

Nell’analisi di buckling come nell’analisi di collasso sono richiesti tre condizioni, il carico iniziale di approssimazione, la funzione di paso temporale (time step) e la funzione temporale di carico (time Function).

Carico iniziale di approssimazione: Nel tipo di configurazione strutturale cerniera-carrello ci sono due modelli diversi, uno con il carico di punta applicato nell’estremo del carrello e un altro con il carico imposto in mezzeria. Nella configurazione incastro-incastro il carico è definito in mezzeria. Il carico iniziale per l’iterazione stabilita per tutti i modelli é pari a 1 (1 N).

Funzione di paso temporale – Time step: il carico scelto può essere imposto in un solo step o in una sequenza di timestep che controllano l’incremento del tempo e del carico durante l’analisi. L’accuratezza e l’approssimazione del valore carico di buckling e di collasso sono condizionati in qualche caso al numero di step fissati.

Funzione temporale di carico – Time Function: definisce una funzione per imporre il carico nel tempo, considerando che il tempo viene definito in intervalli pari al timestep e il valore della funzione sarà quello per cui il carico iniziale di approssimazione verrà incrementato.

La figura a2-2, fa vedere la configurazione del carico e dei vincoli, e mentre nella tabella a2-1, sono presentati i valori scelti per le modellazioni.

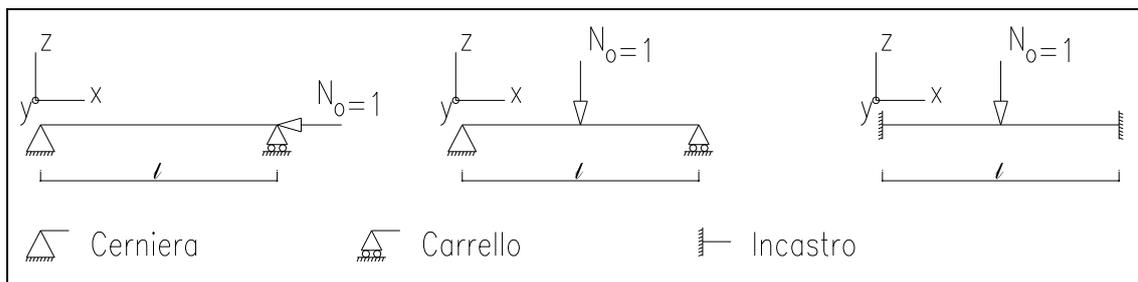


Figura a2-2. Configurazione strutturale per studio in Adina.

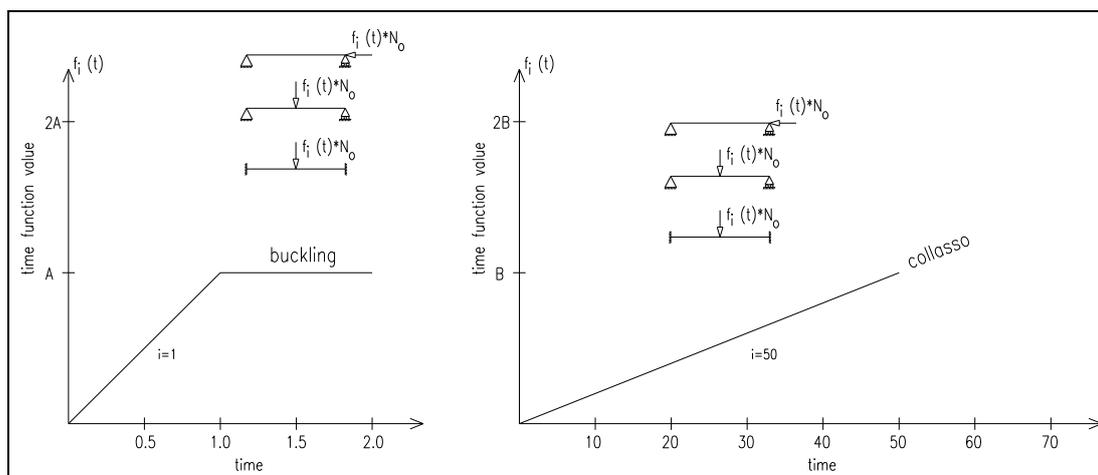


Figura a2-3. Sequenza temporale di applicazione dei carichi per buckling e collasso

Tabella a2-1. Valori costanti funzioni temporali.

Tipo di analisi	Define time Step		Define time function			
	Number of steps	Constant magnitude	TIME	VALUE	VALUE	VALUE
Buckling	1	1.0	0	1 *	2 *	
			0	A	A	
Collasso	50	1.0	0	50 *		
			0	B		

* = valori multipli del numero di step

A = costante per incrementare il carico iniziale, fissato per modello di buckling

B = costante per incrementare il carico iniziale, fissato per modello di collasso

2.1.6 Imperfezione iniziale

Nell’analisi di collasso le imperfezioni iniziali sono inserite d’accordo alla prima forma modale della struttura interamente retta. Come valore rappresentativo di queste imperfezioni nel piano x-y (piano dove si trovano i due primi modi di vibrare e anche il minore valore di momento di inerzia y-z) si prende un valore pari a $L/200$ in mezzeria (secondo EC), che in questo caso è pari a 0.05 m (10 m/200).

Si prende anche un valore di imperfezioni pari a $L/100000$ per fare il confronto con il valore di carico di instabilità ottenuto tramite l’analisi di buckling.

2.1.7 Spostamenti iniziali e massimi per la iterazione.

Per svolgere l’analisi di collasso tramite Adina, è richiesto fissare o impostare due tipi di spostamenti:

- Spostamento per la prima soluzione o step,
- Massimo spostamento nell’analisi.

Spostamento per la prima soluzione (*displacement for the first solution step*): è richiesto fissare il punto (nodo), il grado di libertà (UX, UY, UZ, RX, RY, RZ) e il valore dello spostamento per il primo step o approssimazione.

Il carico è stato imposto in due diverse maniere: punta e mezzeria. Nel caso di carico di punta lo spostamento è fissato, nel punto di mezzeria nella direzione della minore inerzia, corrispondente anche con la forma del primo modo di vibrare. Nel caso di carico di mezzeria, lo spostamento è impostato in mezzeria ma con la direzione uguale al carico applicato. Per entrambi i tipi di carico lo spostamento fissato è di traslazione in 0.005 metri.

Lo spostamento fissato deve essere sempre minore al valore della imperfezione iniziale con lo scopo di trovare convergenza nel modello.

Massimo spostamento nell’analisi: è il relativo valore di spostamento in cui l’analisi di collasso è interrotto. Nel caso in cui, il carico di collasso sia raggiunto prima dello spostamento massimo fissato l’analisi è interrotto, oppure nello step immediatamente seguente al valore dello spostamento massimo fissato. Il suddetto valore è fissato come il maggiore tra:

- Il carico di punta: due volte il valore delle imperfezioni iniziali, cioè $L/100$
- Il carico in mezzeria: $L/200$ nella stessa direzione del carico.
- Due volte il massimo spostamento trovato per il carico di buckling.

La figura a2-4, mostra diversi tipi di comportamento del carico di instabilità in funzione dello spostamento, e anche fa vedere anche come Adina calcola il carico di collasso (N_{col}) in funzione del massimo spostamento (δ_{max}) fissato nel modello FEM.

2.1.8 Schemi e riassunto risultati.

Con lo scopo di fare chiarezza riguardo alle configurazioni o allo schema strutturale, al carico imposto, al tipo di sezione, alla tipologia di elemento finiti usato, e il tipo di analisi fatto. In figura a2-5 si mostra un riassunto di tutte le analisi fatte.

Per riassumere i dati input e anche i risultati, per ogni schema viene fatta una figura sintetica, nella cui sono mostrati (figura a2-6):

- *In riga 1:* schema dell’input in Adina per modello. Si fa vedere il sistema di riferimento, (x,y,z), la tipologia di vincoli, una sezione trasversale della sezione, il carico iniziale ed il suo valore. Nel caso del modello shell, una vista degli estremi vincolati, ed una vista della mesh in un punto generico dell’asta. A destra il modello frame, ed a sinistra il modello shell.
- *In riga 2:* valori e caratteristiche del modello usato e della sua impostazione iniziale (dati input). A destra il modello frame, ed a sinistra il modello shell.
- *In riga 3:* risultati dell’analisi di instabilità senza imperfezioni. Si mostra la forma del primo e del secondo modo. Vengono forniti i valori di carico di collasso per ogni modo. Nel caso di carico di punta il valore del carico di primo modo corrisponde al carico critico di Eulero. A destra il modello frame, ed a sinistra il modello shell.
- *In riga 4:* risultati dell’analisi a grandi spostamenti con l’asta imperfetta (1/200). Si mostra la deformata ed il carico di collasso dovuto allo spostamento massimo iniziale, il valore massimo e minimo degli spostamenti. A destra il modello frame, ed a sinistra il modello shell.
- *In riga 5:* la risposta del carico e dello spostamento in mezzeria. Quando il carico è di punta, la deformazione è in Y, invece, quando è in mezzeria lo spostamento in Z. A destra il modello frame, ed a sinistra il modello shell.
- *In riga 6:* confronto tra i modelli frame e shell in termini di spostamento in mezzeria, per l’analisi dell’asta con imperfezioni iniziale. Schema configurazione di analisi.

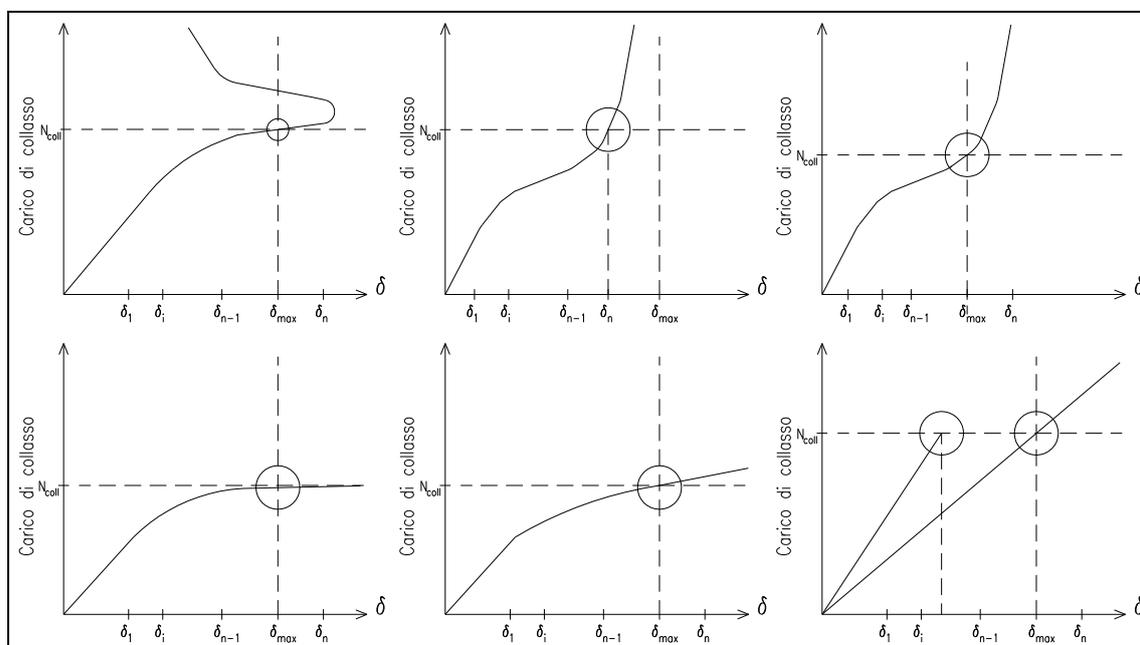


Figura a2-4. Comportamento del carico di collasso in funzione dello spostamento massimo iniziale

SCHEMA E CARICO	SEZIONE	TIPO ELEMENTO FINITI	TIPO ANALISI
		FRAME	BUCKLING ANALYSIS COLLAPSE ANALYSIS- imperfezioni
		SHELL	BUCKLING ANALYSIS COLLAPSE ANALYSIS- imperfezioni
		FRAME	BUCKLING ANALYSIS COLLAPSE ANALYSIS- imperfezioni
		SHELL	BUCKLING ANALYSIS COLLAPSE ANALYSIS- imperfezioni
		FRAME	BUCKLING ANALYSIS COLLAPSE ANALYSIS- imperfezioni
		SHELL	BUCKLING ANALYSIS COLLAPSE ANALYSIS- imperfezioni
	FRAME	BUCKLING ANALYSIS COLLAPSE ANALYSIS- imperfezioni	
	SHELL	BUCKLING ANALYSIS COLLAPSE ANALYSIS- imperfezioni	

Figura a2-5. Schemi di calcolo 4 sezioni.

SEZIONE: TIPO . VINCOLI: TIPO. CARICO: TIPO																																															
FEM TIPO FRAME	FEM TIPO SHELL																																														
<p>Riga 1, schema input- modello frame</p> <table border="1"> <thead> <tr> <th>Caratteristica</th> <th>Tipo</th> <th>Impostazioni iniziali</th> </tr> </thead> <tbody> <tr> <td>Numero di nodi</td> <td>3</td> <td>Schema numerale: Rettangolare</td> </tr> <tr> <td>Numero di linee</td> <td>2</td> <td>Materiale: Acciaio E=210000 Mpa, nu=0.3</td> </tr> <tr> <td>Element Group</td> <td>Beam</td> <td>Vincolo: Cerniera- carrello</td> </tr> <tr> <td>Line Mesh density</td> <td>20</td> <td>Carico iniziale imposto (kN): 1</td> </tr> <tr> <td>Numero di nodi</td> <td>41</td> <td>Imperfezioni iniziale (mm): 0.025 * Y</td> </tr> <tr> <td>Time-step</td> <td>50 / 1.0</td> <td>Spostamento massimo (mm): 0.20</td> </tr> <tr> <td>Time function back (A)</td> <td>1-2 / 1725</td> <td>Time function crollo (B)</td> <td>50 / 2000</td> </tr> </tbody> </table> <p>Riga 2, dati input- modello frame</p>	Caratteristica	Tipo	Impostazioni iniziali	Numero di nodi	3	Schema numerale: Rettangolare	Numero di linee	2	Materiale: Acciaio E=210000 Mpa, nu=0.3	Element Group	Beam	Vincolo: Cerniera- carrello	Line Mesh density	20	Carico iniziale imposto (kN): 1	Numero di nodi	41	Imperfezioni iniziale (mm): 0.025 * Y	Time-step	50 / 1.0	Spostamento massimo (mm): 0.20	Time function back (A)	1-2 / 1725	Time function crollo (B)	50 / 2000	<p>Riga 1, schema input- modello shell</p> <table border="1"> <thead> <tr> <th>Caratteristica</th> <th>Tipo</th> <th>Impostazioni iniziali</th> </tr> </thead> <tbody> <tr> <td>Numero di nodi</td> <td>9085</td> <td>Schema numerale: FEM</td> </tr> <tr> <td>Numero di elementi</td> <td>800</td> <td>Materiale: Acciaio E=210000 Mpa, nu=0.3</td> </tr> <tr> <td>Element Group</td> <td>3D solid element</td> <td>Vincolo: Cerniera- carrello</td> </tr> <tr> <td>Time-step</td> <td>50 / 1.0</td> <td>Carico iniziale imposto (kN): 1</td> </tr> <tr> <td>Time function back (A)</td> <td>1-2 / 1725</td> <td>Imperfezioni iniziale (mm): 0.025 * Y</td> </tr> <tr> <td>Time function crollo (B)</td> <td>50 / 2000</td> <td>Spostamento massimo (mm): 0.20</td> </tr> </tbody> </table> <p>Riga 2, dati- modello shell</p>	Caratteristica	Tipo	Impostazioni iniziali	Numero di nodi	9085	Schema numerale: FEM	Numero di elementi	800	Materiale: Acciaio E=210000 Mpa, nu=0.3	Element Group	3D solid element	Vincolo: Cerniera- carrello	Time-step	50 / 1.0	Carico iniziale imposto (kN): 1	Time function back (A)	1-2 / 1725	Imperfezioni iniziale (mm): 0.025 * Y	Time function crollo (B)	50 / 2000	Spostamento massimo (mm): 0.20
Caratteristica	Tipo	Impostazioni iniziali																																													
Numero di nodi	3	Schema numerale: Rettangolare																																													
Numero di linee	2	Materiale: Acciaio E=210000 Mpa, nu=0.3																																													
Element Group	Beam	Vincolo: Cerniera- carrello																																													
Line Mesh density	20	Carico iniziale imposto (kN): 1																																													
Numero di nodi	41	Imperfezioni iniziale (mm): 0.025 * Y																																													
Time-step	50 / 1.0	Spostamento massimo (mm): 0.20																																													
Time function back (A)	1-2 / 1725	Time function crollo (B)	50 / 2000																																												
Caratteristica	Tipo	Impostazioni iniziali																																													
Numero di nodi	9085	Schema numerale: FEM																																													
Numero di elementi	800	Materiale: Acciaio E=210000 Mpa, nu=0.3																																													
Element Group	3D solid element	Vincolo: Cerniera- carrello																																													
Time-step	50 / 1.0	Carico iniziale imposto (kN): 1																																													
Time function back (A)	1-2 / 1725	Imperfezioni iniziale (mm): 0.025 * Y																																													
Time function crollo (B)	50 / 2000	Spostamento massimo (mm): 0.20																																													
<p>Riga 3, modo 1 e 2 – carico Instabilità</p> <p>Riga 4, deformata e carico collasso</p> <p>Riga 5, risposta carico collasso-spostamento</p>	<p>Riga 3, modo 1 e 2 – carico instabilità</p> <p>Riga 4, deformata e carico collasso</p> <p>Riga 5, risposta carico collasso-spostamento</p>																																														
<p>Riga 6, confronto frame-shell.</p>	<p>Riga 6, configurazione analisi.</p>																																														

Figura a2-6. Schema figura riassuntiva dati input, risultati e confronto.

2.2 Sezione rettangolare

Per svolgere l'analisi delle diverse sezioni, figura a2-2, si considera lo schema strutturale di un'asta ad unica campata lunga 5 m, le condizioni di vincoli negli estremi tipo cerniera – carrello e materiale acciaio con modulo di elasticità pari a $E=210000$ MPa e il coefficiente di Poisson $\nu=0.30$.

Per quanto riguarda il carico, sono usati tre schemi di carico, il primo corrispondente a un carico di punta nel lato del carrello, il secondo con carico in mezzzeria, entrambi i due schemi sul uno schema cerniera-carrello ed un terzo schema con un carico in mezzzeria sull'asta con vincoli incastro-incastro. Ogni configurazione di carico è modellata con elementi tipo frame e tipo shell.

Le dimensioni della sezione rettangolare scelta per l'analisi sono 100 mm di larghezza e 250 mm di altezza. La figura a2-7 mostra gli schemi strutturale e la geometria della sezione rettangolare.

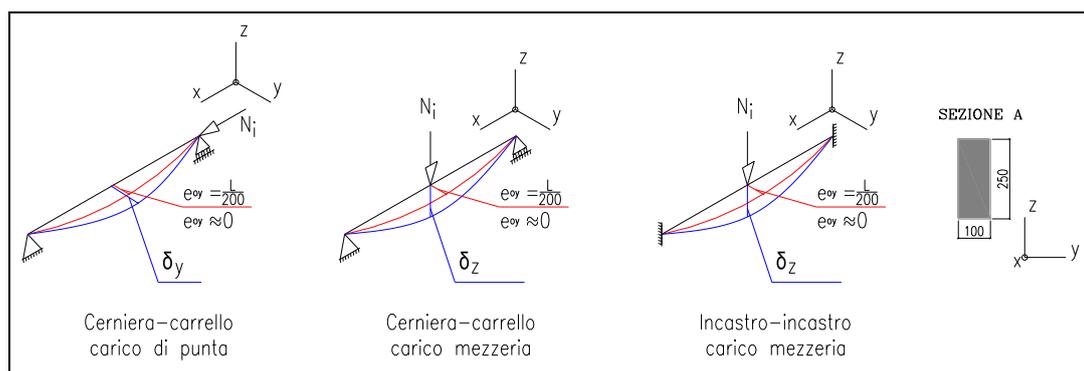


Figura a2-7. Sezione rettangolare: schemi strutturale e sezione.

2.2.1 Analisi schema semplice appoggio: carico di punta

L'analisi viene svolto in elementi finiti tipo *frame* e *3D elements*. Tutte le caratteristiche proprie dei modelli, la sua densità nella mesh, numero di nodi, linee ed elementi sono riassunte nella prima parte della figura a2-8.

2.2.1.1 Analisi carico di instabilità

Per ottenere il carico di punta critico (Eulero), si prende un carico unitario (1kN), con una funzione di tempo pari a 1725 per elementi frame e di 1720 per elementi tipo 3D. La figura a2-8 mostra l'impostazione della funzione temporale di carico, il carico iniziale dell'analisi e il carico applicato con la sua funzione temporale.

Stabilito il modello riguardo alle loro caratteristiche geometriche, sezionali, prestazionali e di carico, si svolge un'analisi di buckling (Linearized Buckling), trovando il carico di instabilità (carico di buckling) per elementi tipo frame pari a 1727 kN e per elementi tipo shell pari a 1725 kN. È anche possibile vedere il primo e secondo modo di vibrare dell'asta (figura a2-8).

Si può vedere come i valori del carico di buckling trovati attraverso elementi frame e *3D-elements* sono corrispondenti ed anche le corrispondenti forme modali.

2.2.1.2 Analisi di collasso con imperfezioni iniziali-modo I.

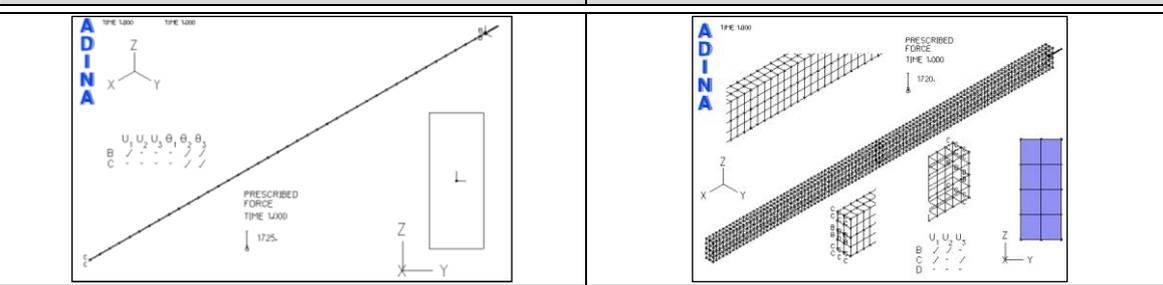
L'analisi di buckling è seguito per un'analisi di collasso in cui si trova il carico di crollo dell'asta. Si fa l'analisi con uno spostamento massimo ammissibile pari a 0.20m.

Si usa la prima forma modale come valore significativo delle imperfezioni iniziali nel piano x-y (piano dove si trovano i due primi modi, con il minore valore di raggio di inerzia), con un valore di $L/200$ in mezzeria (secondo EC) che nel caso di studio è pari a 0.025 m (5 m/200). Il carico è imposto a 50 steps con una funzione temporale lineale da 0 a 2000 in 50 step.

In figura a2-8 sono riportati la risposta del carico di collasso vs il comportamento dello spostamento nel piano x-y (piano con minore momento di inerzia) nel punto de mezzeria.

Nell'ultima parte della figura a2-8 si può vedere l'analisi di confronto tra modelli frame ed *3D-elements*. La risposta della sezione modellata sia con frame che con *3D-elements* è uguale.

SEZIONE RETTANGOLARE. VINCOLI: CERNIERA-CARRELLO. CARICO: PUNTA



Caratteristica	Tipo	Impostazioni iniziali	
Numero di punti	3	Sezione trasversale: Rettangolare	
Numero di linee	2	Materiale: Acciaio E=210000 Mpa, u=0.3	
Element Group	Beam	Vincoli: Cerniera- carrello	
Line Mesh density	20	Carico iniziale imposto (kN): 1	
Numero di nodi	41	Imperfezioni iniziali (m):	0.025 / Y
Time-step :	50 / 1.0	Spostamento massimo (m):	0.20
Time function buck (A):	1-2 : 1725	Time function crollo (B):	50 / 2000

Caratteristica	Tipo	Impostazioni iniziali	
Numero di nodi	9045	Sezione trasversale: FEM	
Numero di elementi	800	Materiale: Acciaio E=210000 Mpa, u=0.3	
Element Group	3D solid element	Vincoli: Cerniera- carrello	
Time-step :	50 / 1.0	Carico iniziale imposto (kN):	1
Time function buck (A):	1-2 : 1720	Imperfezioni iniziale (m):	0.025 / Y
Time function crollo (B):	50 / 2000	Spostamento massimo (m):	0.20

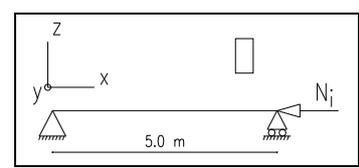
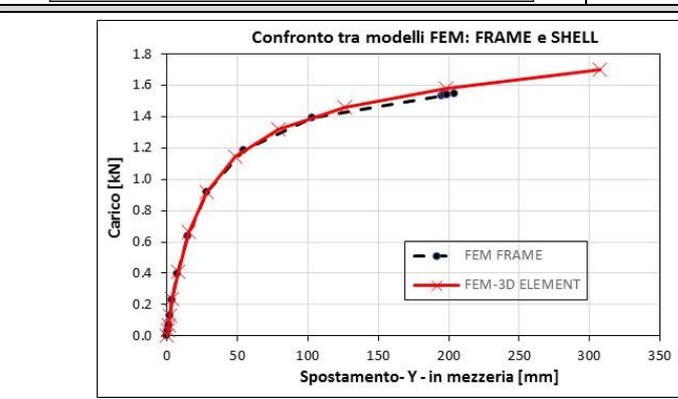
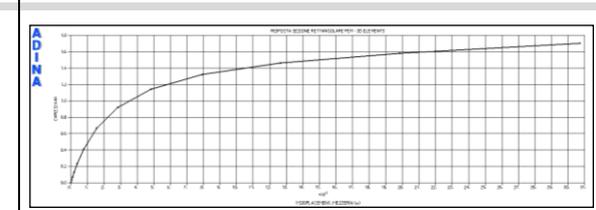
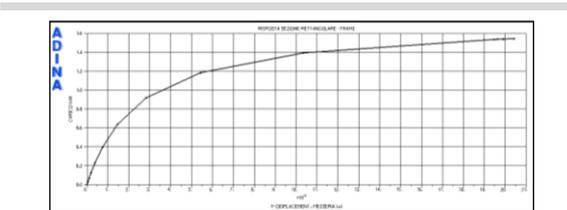
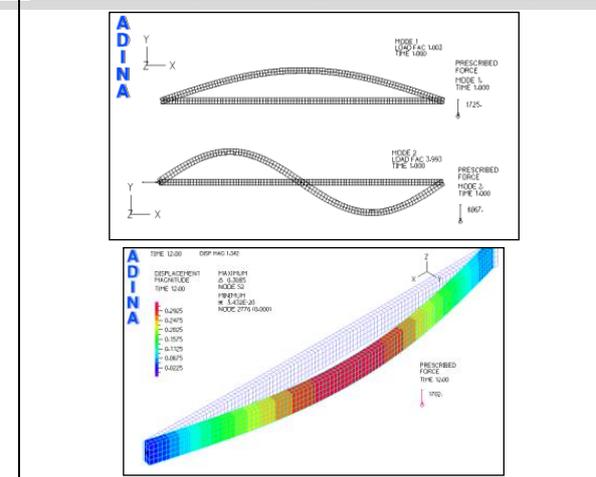
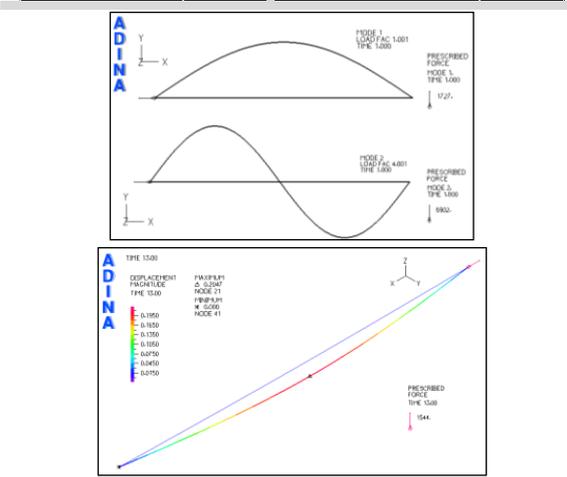


Figura a2-8. Sezione rettangolare: schemi strutturale 1.

2.2.2 Analisi schema semplice appoggio: carico in mezzeria.

L'analisi viene svolta in elementi finiti tipo *frame* e *3D elements*. Tutte le caratteristiche proprie dei modelli, la sua densità nella mesh, il numero di nodi, le linee e gli elementi sono riassunte nella prima parte della figura a2-9.

2.2.2.1 Analisi carico di instabilità

Per ottenere il carico di instabilità, si prende un carico unitario (1kN), con una funzione di tempo pari a 2500 per elementi *frame* e di 3980 per tipo 3D. La figura a2-9 mostra l'impostazione della funzione temporale di carico, il carico iniziale dell'analisi e il carico applicato con la sua funzione temporale.

Stabilito il modello riguardo alle loro caratteristiche geometriche, sezionale, prestazionali e di carico, si svolge un'analisi di buckling (Linearized Buckling), trovando il carico di instabilità (carico di buckling) per elementi tipo *frame* pari a 3276 kN e per elementi tipo *shell* pari a 3950 kN. Anche è possibile vedere il primo e secondo modo di vibrare dell'asta (figura a2-9).

Si può vedere come i valori del carico di buckling trovato attraverso elementi *frame* e *3D-elements* sono corrispondenti in un 83.4%, invece le relative forme modali sono simili.

2.2.2.2 Analisi di collasso con imperfezioni iniziali-modo I.

L'analisi di buckling è seguito per un'analisi di collasso in cui si trova il carico di crollo dell'asta. Si fa l'analisi con uno spostamento massimo ammissibile pari a 0.50m per elementi *frame* e 0.80 m per elementi 3D.

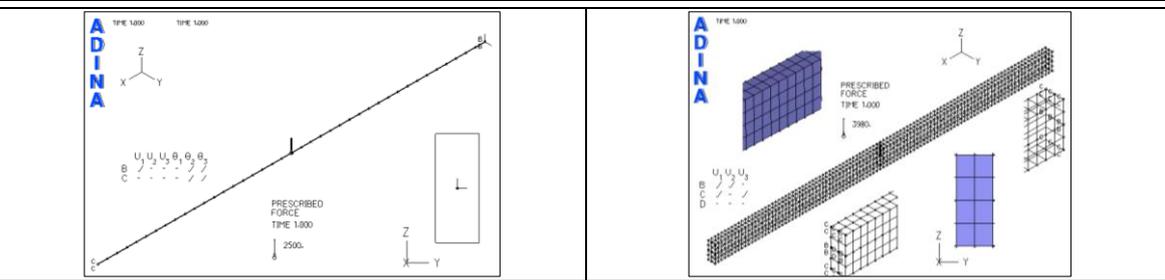
Si usa la prima forma modale come valore rappresentativo delle imperfezioni iniziali nel piano x-y (piano dove si trovano i due primi modi, con il minore valore di raggio di inerzia), con un valore di $L/200$ in mezzeria (secondo EC) che nel caso di studio è pari a 0.025 m (5 m/200). Il carico è imposto a 50 steps con una funzione temporale lineale da 0 a 1500 per elementi *frame* e da 0 a 2500 per elementi 3D, entrambi applicati in 50 step.

In figura a2-9 sono riportati la risposta del carico di collasso vs il comportamento dello spostamento nel piano x-z (piano della direzione del carico) nel punto di mezzeria.

Nell'ultima parte della figura a2-9 si può vedere l'analisi di confronto tra modelli *frame* ed *3D-elements*. La risposta della sezione modellata sia con *frame* che con *3D-elements* è uguale nel primo tratto di 320 mm, dopodiché il modello *frame* si irrigidisce e le curve iniziano a divergere.

SEZIONE RETTANGOLARE. VINCOLI: CERNIERA-CARRELLO. CARICO: MEZZE

FEM TIPO FRAME FEM TIPO SHELL



Caratteristica	Tipo	Impostazioni iniziali	
Numero di punti	3	Sezione trasversale: Rettangolare	
Numero di linee	2	Materiale: Acciaio E=210000 Mpa, u=0.3	
Element Group	Beam	Vincoli: Cerniera- carrello	
Line Mesh density	20	Carico iniziale imposto (kN):	1
Numero di nodi	41	Imperfezioni iniziali (m):	0.025 / Y
Time-step :	50 / 1.0	Spostamento massimo (m):	0.50
Time function buck (A):	1-2 : 2500	Time function crollo (B):	50 / 1500

Caratteristica	Tipo	Impostazioni iniziali	
Numero di nodi	9045	Sezione trasversale: FEM	
Numero di elementi	800	Materiale: Acciaio E=210000 Mpa, u=0.3	
Element Group	3D solid element	Vincoli: Cerniera- carrello	
Time-step :	50 / 1.0	Carico iniziale imposto (kN):	1
Time function buck (A):	1-2 : 3980	Imperfezioni iniziale (m):	0.025 / Y
Time function crollo (B):	50 / 2500	Spostamento massimo (m):	0.80

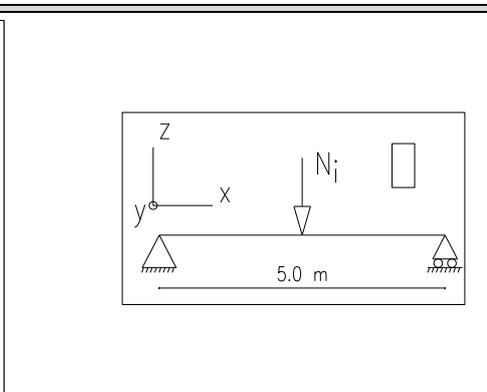
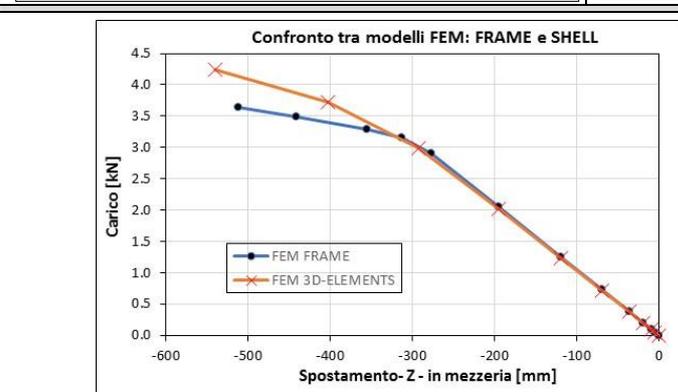
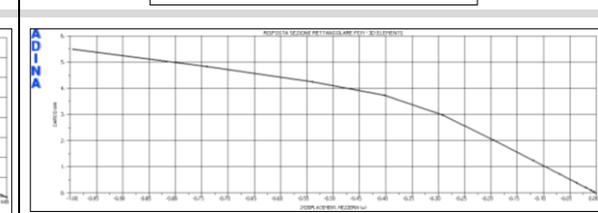
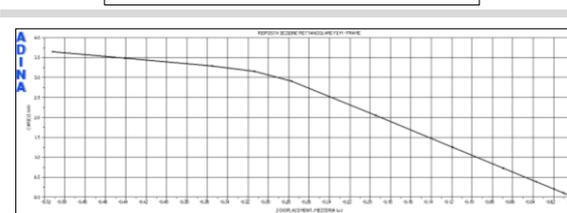
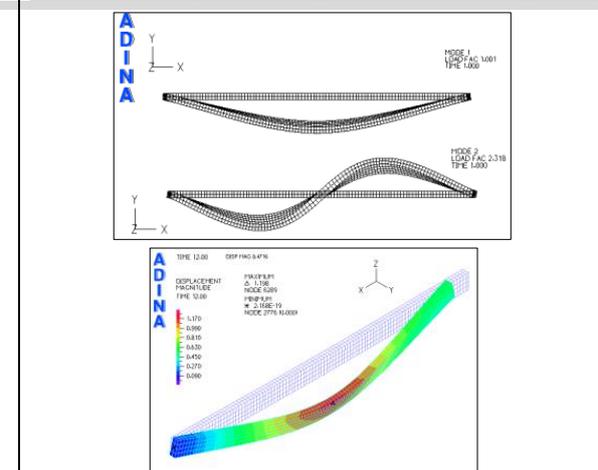
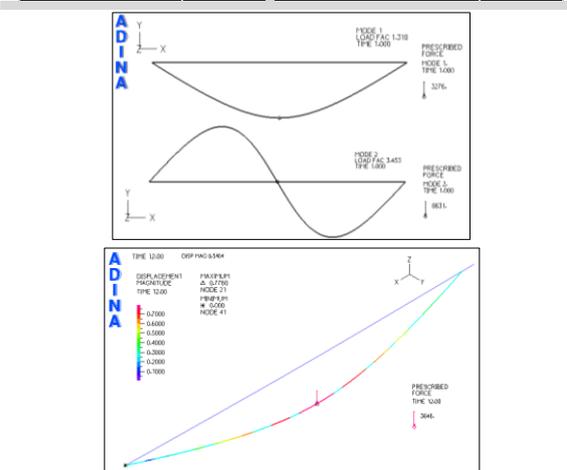


Figura a2-9. Sezione rettangolare: schemi strutturale 2.

2.2.3 Analisi schema doppio incastro: carico in mezzzeria.

L'analisi viene svolta in elementi finiti tipo *frame* e *3D elements*. Tutte le caratteristiche proprie dei modelli, la sua densità nella mesh, il numero di nodi, le linee e gli elementi sono riassunte nella prima parte della figura a2-10.

2.2.3.1 Analisi carico di instabilità

Per ottenere il carico di instabilità, si prende un carico unitario (1kN), con una funzione di tempo pari a 13780 per modello *frame* e 10000 per modello 3D. La figura a2-10 mostra l'impostazione della funzione temporale di carico, del carico iniziale e del carico applicato con la sua funzione temporale.

Impostato il modello nel riguardo alle loro caratteristiche geometriche, sezionali, prestazionali e di carico, si svolge un'analisi di buckling (Linearized Buckling), trovando il carico di instabilità (carico di buckling) per elementi tipo *frame* pari a 27487 kN e per elementi tipo *shell* pari a 26464 kN. È anche possibile vedere il primo e secondo modo di vibrare dell'asta (vedere figura a2-10).

Si può vedere come i valori del carico di buckling trovato attraverso elementi *frame* e *3D-elements* sono corrispondenti in un 96.1%, invece le corrispondenti forme modali sono simili.

2.2.3.2 Analisi di collasso con imperfezioni iniziali-modo I.

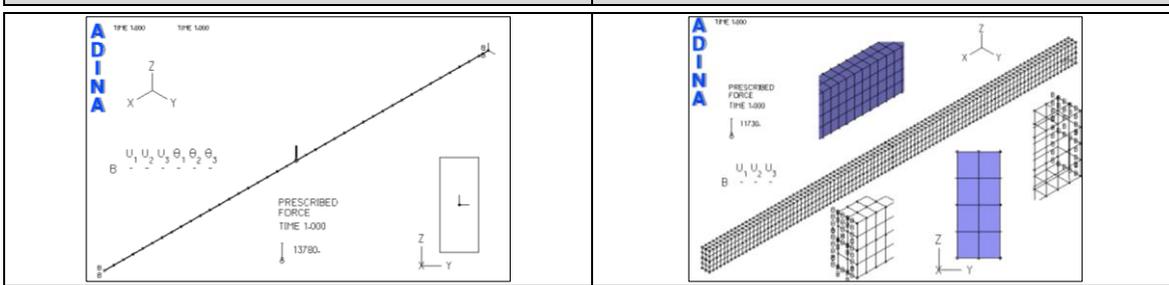
L'analisi di buckling è seguito per un'analisi di collasso in cui si trova il carico di crollo dell'asta. Si fa l'analisi con uno spostamento massimo ammissibile pari 0.50m per elementi *frame* come per elementi 3D.

Si usa la prima forma modale come valore rappresentativo delle imperfezioni iniziali nel piano x-y (piano dove si trovano i due primi modi, con il minore valore di raggio di inerzia), con un valore di $L/200$ in mezzzeria (secondo EC) il quale è pari a 0.025 m (5 m/200). Il carico è imposto a 50 steps con una funzione temporale lineale da 0 a 1500 per elementi *frame* e da 0 a 10000 per elementi 3D, entrambi applicati in 50 step.

In figura a2-10 sono riportati la risposta del carico di collasso vs il comportamento dello spostamento nel piano x-z (piano nella direzione del carico) nel punto de mezzzeria.

Nell'ultima parte della figura a2-10 si può vedere l'analisi di confronto tra modelli *frame* ed *3D-elements*. La risposta della sezione modellata sia con *frame* che con *3D-elements* è corrispondente in forma ma con una differenza all'incirca del 15% in termini di carico.

SEZIONE RETTANGOLARE. VINCOLI: INCASTRO-INCASTRO. CARICO: MEZZE



Caratteristica	Tipo	Impostazioni iniziali
Numero di punti	3	Sezione trasversale: Rettangolare
Numero di linee	2	Materiale: Acciaio E=210000 Mpa, nu=0.3
Element Group	Beam	Vincoli: Cerniera- carrello
Line Mesh density	20	Carico iniziale imposto (kN): 1
Numero di nodi	41	Imperfezioni iniziali (m): 0.025 / Y
Time-step :	50 / 1.0	Spostamento massimo (m): 0.50
Time function buck (A):	1-2 : 13780	Time function crollo (B): 50 / 1500

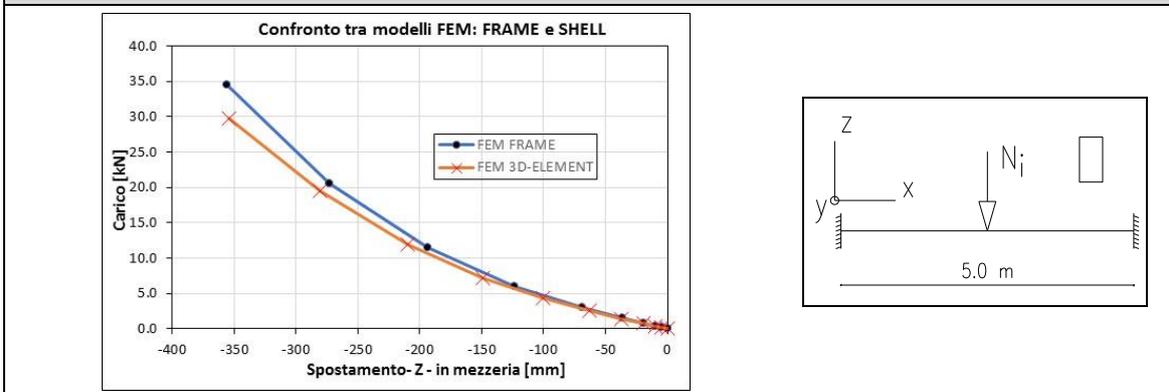
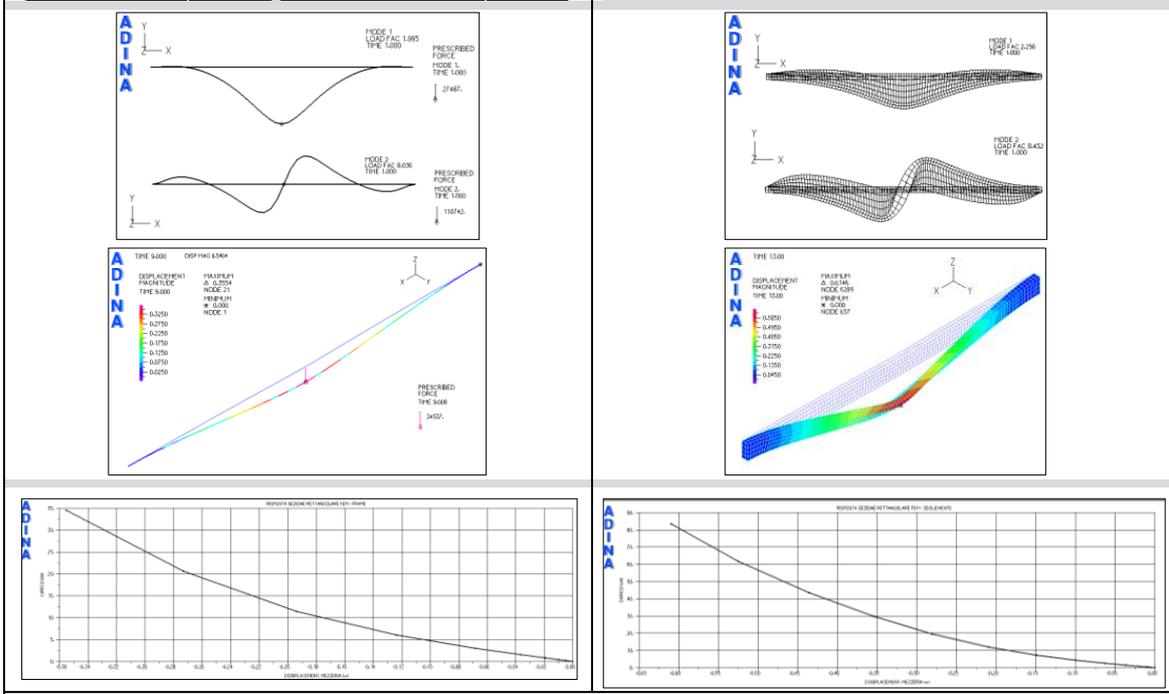


Figura a2-10. Sezione rettangolare: schemi strutturale 3.

2.3 Sezione rettangolare cava

Per svolgere l'analisi delle diverse sezioni, figura a2-2, si considera uno schema strutturale di un'asta ad unica campata lunga 5 m, le condizioni di vincoli negli estremi tipo cerniera – carrello e il materiale acciaio con modulo di elasticità pari a $E=210000$ MPa e il coefficiente di Poisson $\nu=0.30$.

Per quanto riguarda il carico, sono usati tre schemi di carico, il primo corrispondente a un carico di punta nel lato del carrello, il secondo con carico in mezzzeria, entrambi i due schemi sul uno schema cerniera-carrello ed un terzo schema con un carico in mezzzeria sull'asta con vincoli incastro-incastro. Ogni configurazione di carico è modellata con elementi tipo frame e tipo shell.

Le dimensioni della sezione rettangolare cava scelta per l'analisi sono 100 mm di larghezza e 250 mm di altezza rispetto all'esterno, e 25 mm di spessore. La figura a2-11 mostra gli schemi strutturale e la geometria della sezione rettangolare.

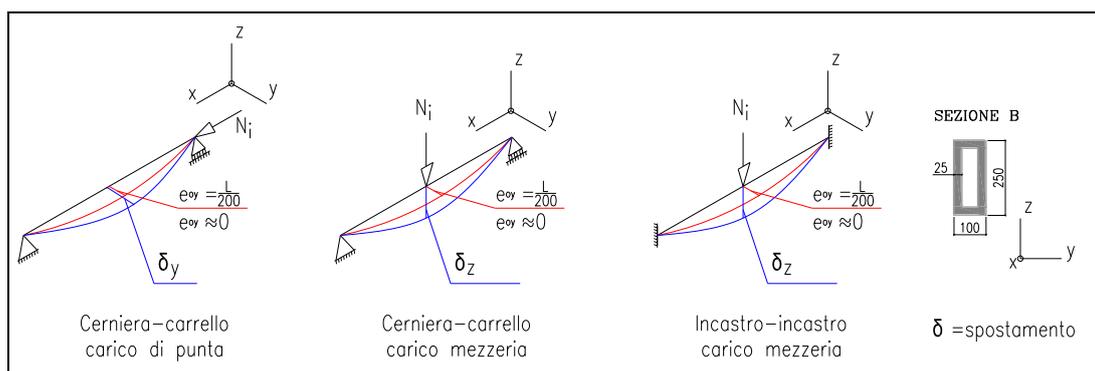


Figura a2-11. Sezione rettangolare cava: schemi strutturale e sezione.

2.3.1 Analisi schema semplice appoggio: carico di punta

L'analisi viene svolto in elementi finiti tipo *frame* e *3D elements*. Tutte le caratteristiche proprie dei modelli, la sua densità nella mesh, il numero di nodi, le linee e gli elementi sono riassunte nella prima parte della figura a2-12.

2.3.1.1 Analisi carico di instabilità

Per ottenere il carico di punta critico (Eulero), si prende un carico unitario (1kN), con una funzione di tempo pari a 1550 per elementi frame e 1755 per tipo 3D. La figura a2-12 mostra l'impostazione della funzione temporale di carico, il carico iniziale dell'analisi e il carico applicato con la sua funzione temporale.

Impostato il modello nel riguardo alle loro caratteristiche geometriche, sezionali, prestazionali e di carico, si svolge un'analisi di buckling (Linearized Buckling), trovando il carico di instabilità (carico di buckling) per elementi tipo frame pari a 1554 kN e per elementi tipo 3D pari a 1755 kN. È anche possibile vedere il primo e secondo modo di vibrare dell'asta (figura a2-12).

Si può vedere come i valori del carico di buckling trovato attraverso elementi frame e *3D-elements* sono corrispondenti in un 88%; la forma modale del tipo frame è corrispondente alla forma teorica invece in elementi 3D coincide a una forma media tra semplice appoggio e doppio incastro.

2.3.1.2 Analisi di collasso con imperfezioni iniziali-modo I.

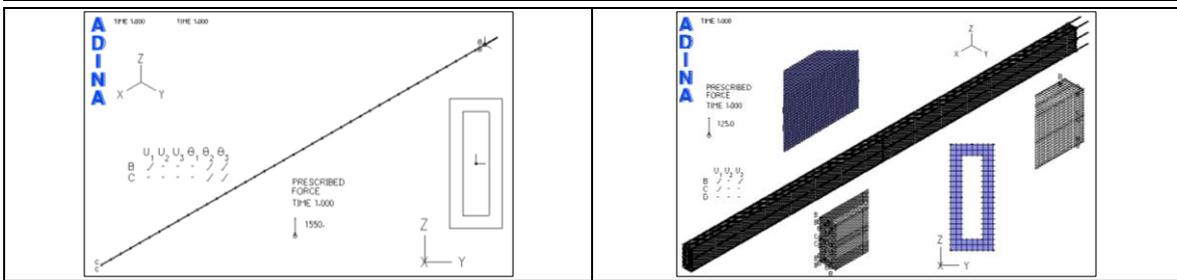
L'analisi di buckling è seguito per un'analisi di collasso in cui si trova il carico di crollo dell'asta. Si fa l'analisi con uno spostamento massimo ammissibile pari a 0.20m.

Si usa la prima forma modale come valore rappresentativo delle imperfezioni iniziali nel piano x-y (piano dove si trovano i due primi modi, con il minore valore di raggio di inerzia), con un valore di $L/200$ in mezzeria (secondo EC) il quale è pari a 0.025 m (5 m/200). Il carico è imposto a 50 steps con una funzione temporale lineale da 0 a 1500 per elementi frame e da 0 a 120 per elementi 3D, entrambi applicati in 50 step. (figura a2-12).

In figura a2-12 sono riportati la risposta del carico di collasso vs il comportamento dello spostamento nel piano x-y (piano con minore momento di inerzia) nel punto de mezzeria.

Nell'ultima parte della figura a2-12 si può vedere l'analisi di confronto tra modelli frame ed *3D-elements*. La risposta della sezione modellata sia con frame che con *3D-elements* è corrispondente in forma ma con una differenza di circa il 10% in termini di carico.

SEZIONE RETTANG. CAVA. VINCOLI: CERNIERA-CARRELLO. CARICO: PUNTA
FEM TIPO FRAME **FEM TIPO SHELL**



Caratteristica	Tipo	Impostazioni iniziali	Caratteristica	Tipo	Impostazioni iniziali
Numero di punti	3	Sezione trasversale: Rettangolare cava	Numero di nodi	57744	Sezione trasversale: FEM
Numero di linee	2	Materiale: Acciaio E=210000 Mpa, u=0.3	Numero di elementi	38400	Materiale: Acciaio E=210000 Mpa, u=0.3
Element Group	Beam	Vincoli: Cerniera- carrello	Element Group	3D solid element	Vincoli: Cerniera- carrello
Line Mesh density	20	Carico iniziale imposto (kN): 1	Time-step :	50 / 1.0	Carico iniziale imposto (kN): 1
Numero di nodi	41	Imperfezioni iniziale (m): 0.025 / Y	Time function buck (A):	1-2 : 125	Imperfezioni iniziale (m): 0.025 / Y
Time-step :	50 / 1.0	Spostamento massimo (m): 0.20	Time function crollo (B):	50 / 120	Spostamento massimo (m): 0.20
Time function buck (A):	1-2 : 1550	Time function crollo (B): 50 / 1500			

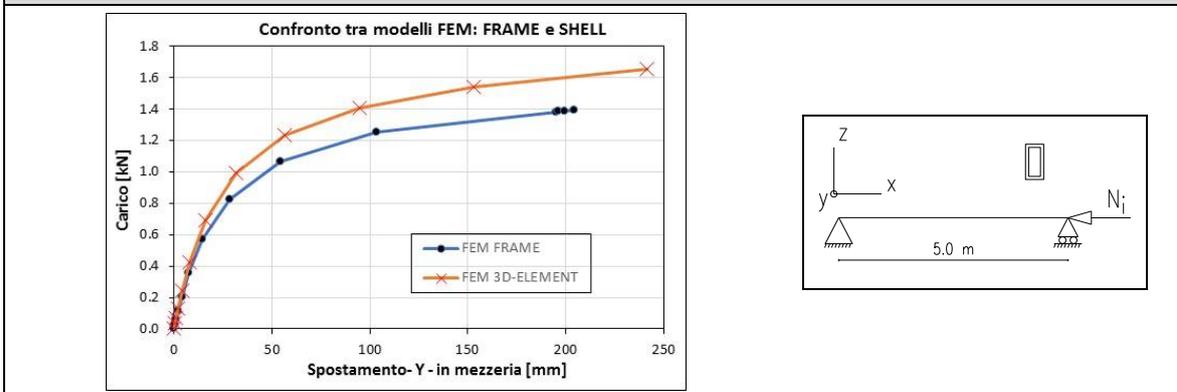
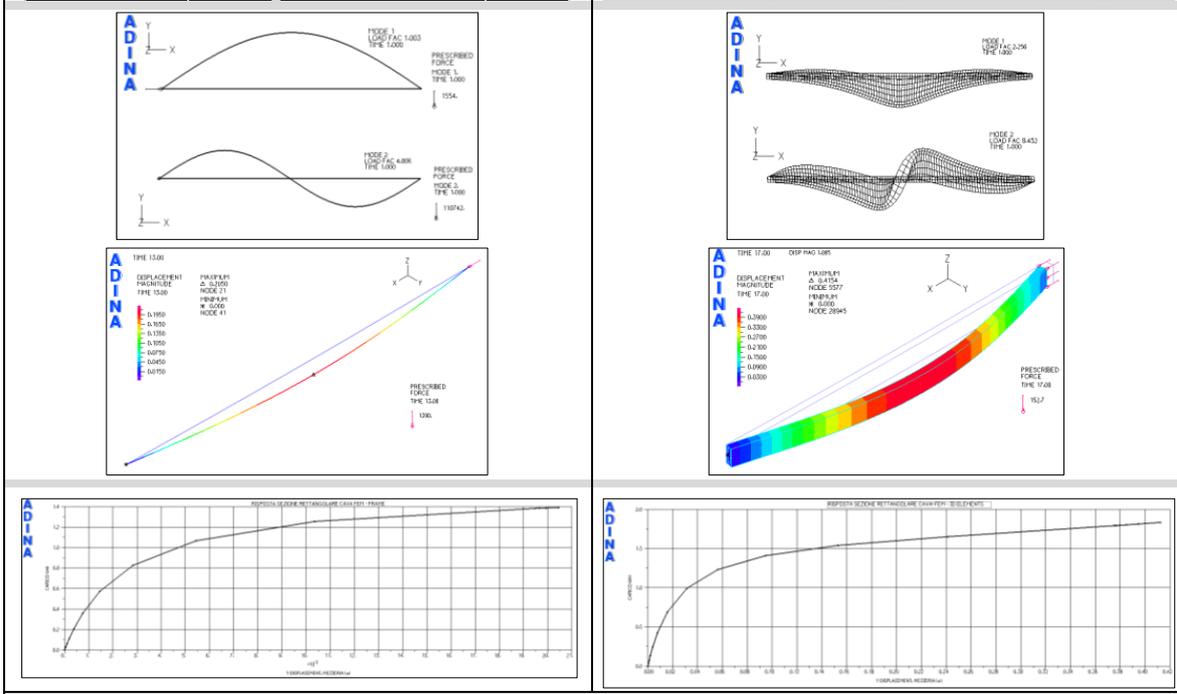


Figura a2-12. Sezione rettangolare cava: schemi strutturale 1.

2.3.2 Analisi schema semplice appoggio: carico in mezzeria.

L'analisi viene svolta in elementi finiti tipo *frame* e *3D elements*. Tutte le caratteristiche proprie dei modelli, la sua densità nella mesh, il numero di nodi, le linee e gli elementi sono riassunte nella prima parte della figura a2-13.

2.3.2.1 Analisi carico di instabilità

Per ottenere il carico di instabilità, si prende un carico unitario (1kN), con una funzione di tempo pari a 2665 per elementi *frame* e di 3140 per tipo 3D. La figura a2-13 mostra l'impostazione della funzione temporale di carico, il carico iniziale dell'analisi e il carico applicato con la sua funzione temporale.

Impostato il modello nel riguardo alle loro caratteristiche geometriche, sezionali, prestazionali e di carico, si svolge un'analisi di buckling (Linearized Buckling), trovando il carico di instabilità (carico di buckling) per elementi tipo *frame* pari a 2777 kN e per elementi tipo *shell* pari a 3148 kN. È anche possibile vedere il primo e secondo modo di vibrare dell'asta (figura a2-13).

Si può vedere come i valori del carico di buckling trovati attraverso elementi *frame* e *3D-elements* sono corrispondenti in un 88%, invece le corrispondenti forme modali sono simili.

2.3.2.2 Analisi di collasso con imperfezioni iniziali-modo I.

L'analisi di buckling è seguito per un'analisi di collasso in cui si trova il carico di crollo dell'asta. Si fa l'analisi con uno spostamento massimo ammissibile pari a 0.50m per elementi *frame* e 0.80 m per elementi 3D.

Si usa la prima forma modale come valore rappresentativo delle imperfezioni iniziali nel piano x-y (piano dove si trovano i due primi modi, con il minore valore di raggio di inerzia), con un valore di $L/200$ in mezzeria (secondo EC) il quale è pari a 0.025 m (5 m/200). Il carico è imposto a 50 steps con una funzione temporale lineale da 0 a 2500 per elementi *frame* e da 0 a 1000 per elementi 3D, entrambi applicati in 50 step.

In figura a2-13 sono riportati la risposta del carico di collasso vs il comportamento dello spostamento nel piano x-z (piano nella direzione del carico) nel punto di mezzeria.

Nell'ultima parte della figura a2-13 si può vedere l'analisi di confronto tra modelli *frame* ed *3D-elements*. La risposta della sezione modellata sia con *frame* che con *3D-elements* è corrispondente nel primo tratto di 320 mm, dopodiché il modello *frame* si irrigidisce e le curve iniziano a divergere.

SEZIONE RETTANG. CAVA. VINCOLI: CERNIERA-CARRELLO. CARICO: MEZZE

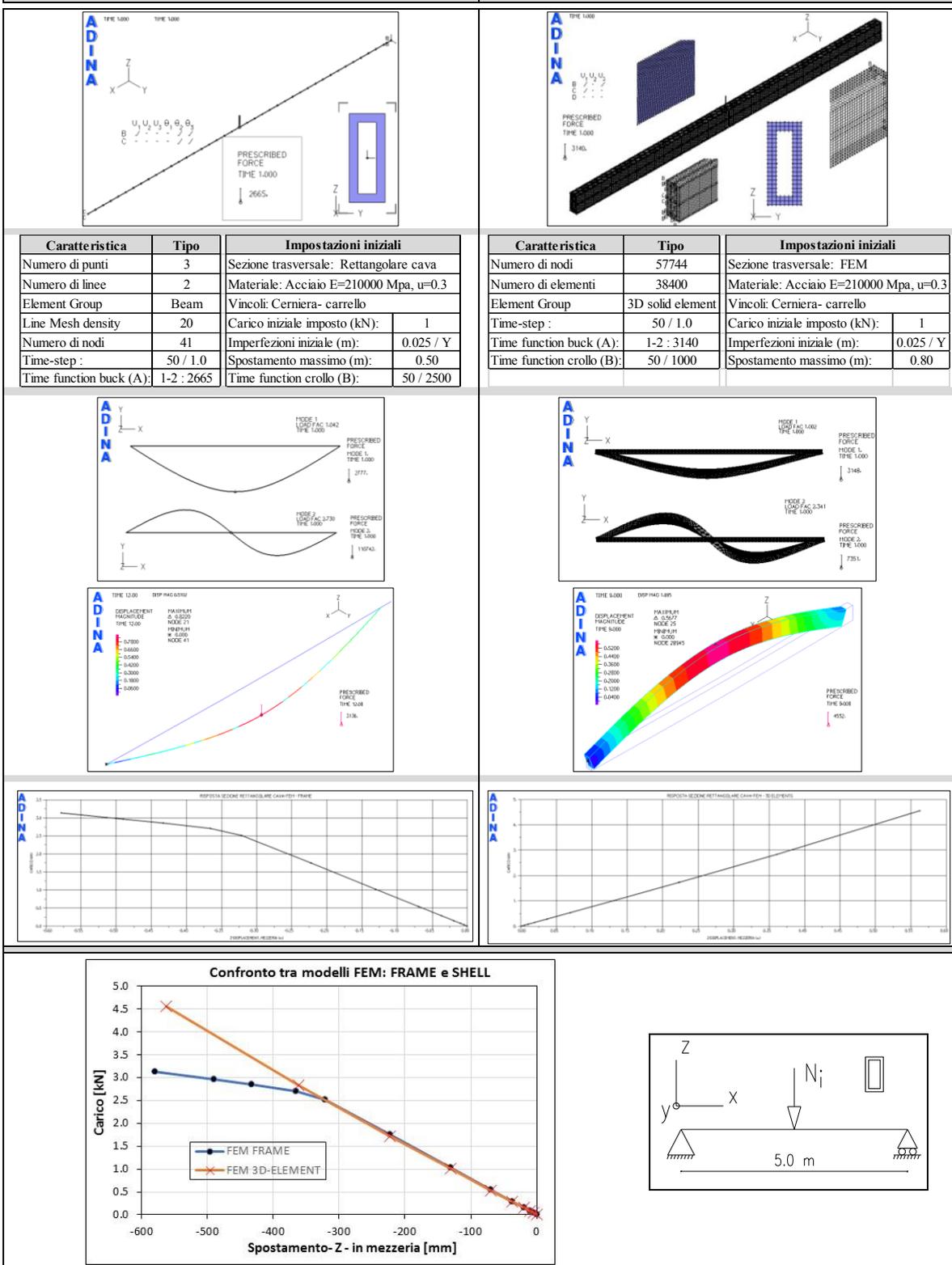


Figura a2-13. Sezione rettangolare cava: schemi strutturale 2.

2.3.3 Analisi schema doppio incastro: carico in mezzeria.

L'analisi viene svolta in elementi finiti tipo *frame* e *3D elements*. Tutte le caratteristiche proprie dei modelli, la sua densità nella mesh, il numero di nodi, le linee e gli elementi sono riassunte nella prima parte della figura a2-14.

2.3.3.1 Analisi carico di instabilità

Per ottenere il carico di instabilità, si prende un carico unitario (1kN), con una funzione di tempo pari a 10600 per modello *frame* e 15100 per modello 3D. La figura a2-14 mostra l'impostazione della funzione temporale di carico, il carico iniziale dell'analisi e il carico applicato con la sua funzione temporale.

Impostato il modello riguardo alle loro caratteristiche geometriche, sezionali, prestazionali e di carico, si svolge un'analisi di buckling (Linearized Buckling), trovando il carico di instabilità (carico di buckling) per elementi tipo *frame* pari a 19672 kN e per elementi tipo *shell* pari a 15137 kN. È anche possibile vedere il primo e secondo modo di vibrare dell'asta (figura a2-14).

Si può vedere come i valori del carico di buckling trovati attraverso elementi *frame* e *3D-elements* sono corrispondenti in un 77%, invece le corrispondenti forme modali sono simili.

2.3.3.2 Analisi di collasso con imperfezioni iniziali-modo I.

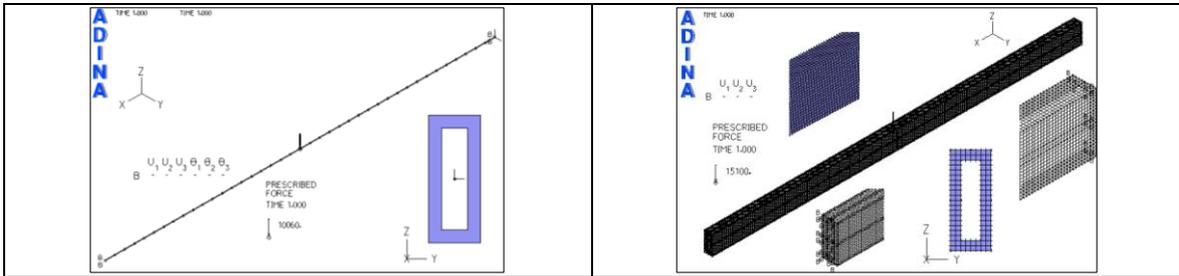
L'analisi di buckling è seguito per un'analisi di collasso nella cui si trova il carico di crollo dell'asta. Si fa l'analisi con uno spostamento massimo ammissibile pari 0.50m per elementi *frame* come per elementi 3D.

Si usa la prima forma modale come valore rappresentativo delle imperfezioni iniziali nel piano x-y (piano dove si trovano i due primi modi, con il minore valore di raggio di inerzia), con un valore di $L/200$ nella mezzeria (secondo EC) il quale è e pari a 0.025 m (5 m/200). Il carico è imposto a 50 steps con una funzione temporale lineale da 0 a 10000 per elementi *frame* e da 0 a 4000 per elementi 3D, entrambi applicati in 50 step. (figura a2-14).

In figura a2-14 sono riportati la risposta del carico di collasso vs il comportamento dello spostamento nel piano x-z (piano nella direzione del carico) nel punto di mezzeria.

Nell'ultima parte della figura a2-14 si può vedere l'analisi di confronto tra modelli *frame* ed *3D-elements*. La risposta della sezione modellata sia con *frame* che con *3D-elements* è corrispondente in forma ma con una differenza di circa il 10% in termini di carico.

SEZIONE RETTANG. CAVA. VINCOLI: INCASTRO-INCASTRO. CARICO: MEZZ



Caratteristica	Tipo	Impostazioni iniziali
Numero di punti	3	Sezione trasversale: Rettangolare cava
Numero di linee	2	Materiale: Acciaio E=210000 Mpa, u=0.3
Element Group	Beam	Vincoli: Cerniera- carrello
Line Mesh density	20	Carico iniziale imposto (kN): 1
Numero di nodi	41	Imperfezioni iniziale (m): 0.025 / Y
Time-step :	50 / 1.0	Spostamento massimo (m): 0.50
Time function buck (A):	1-2 : 10600	Time function crollo (B): 50 / 10000

Caratte ristica	Tipo	Impostazioni iniziali
Numero di nodi	57744	Sezione trasversale: FEM
Numero di elementi	38400	Materiale: Acciaio E=210000 Mpa, u=0.3
Element Group	3D solid element	Vincoli: Cerniera- carrello
Time-step :	50 / 1.0	Carico iniziale imposto (kN): 1
Time function buck (A):	1-2 : 15100	Imperfezioni iniziale (m): 0.025 / Y
Time function crollo (B):	50 / 4000	Spostamento massimo (m): 0.50

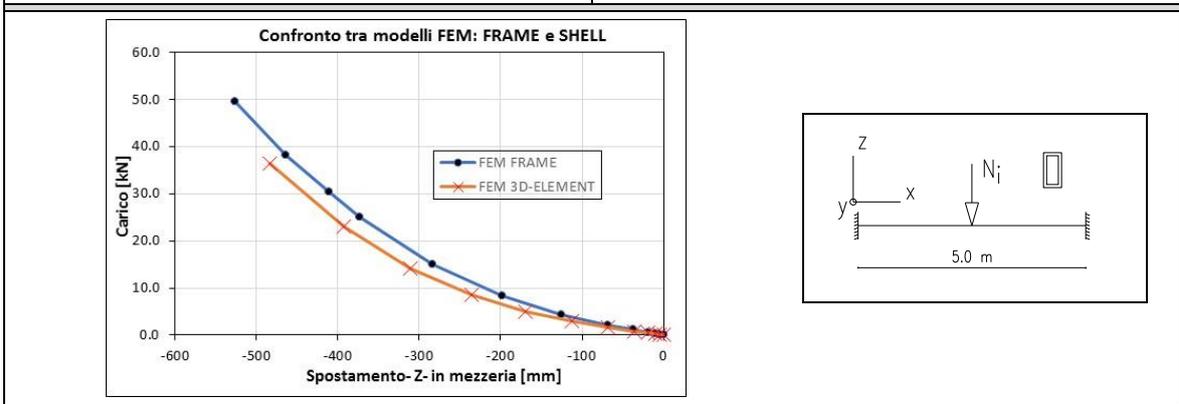
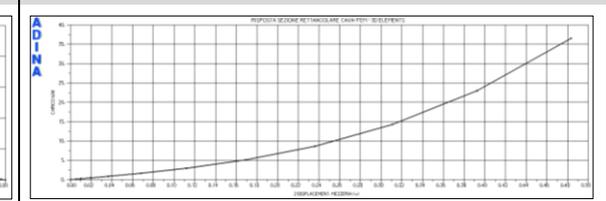
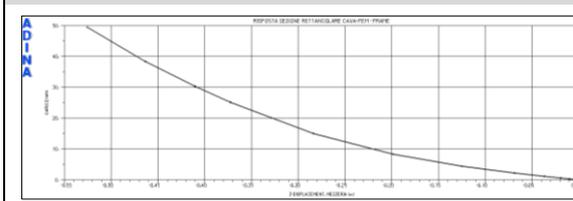
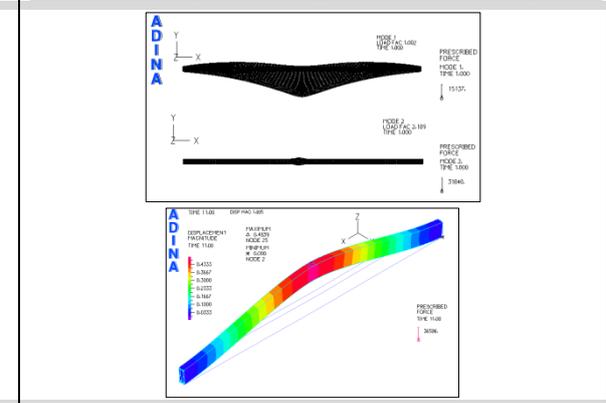
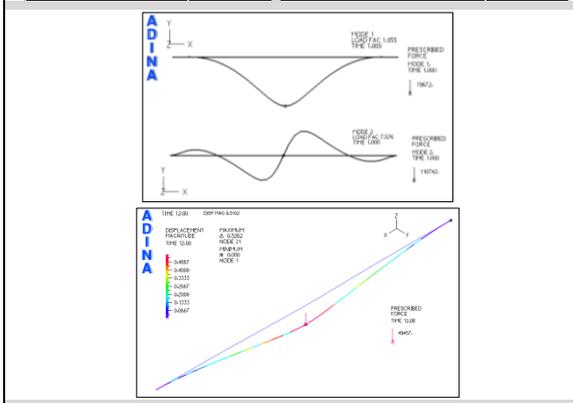


Figura a2-14. Sezione rettangolare cava: schemi strutturale 3.

2.4 Sezione a doppia T

Per svolgere l'analisi delle diverse sezioni, figura a2-2, si considera uno schema strutturale di un'asta ad unica campata lunga 5 m, le condizioni di vincoli negli estremi tipo cerniera – carrello e materiale acciaio con modulo di elasticità pari a $E=210000$ MPa e il coefficiente di Poisson $\nu=0.30$.

Per quanto riguarda il carico, sono usati tre schemi di carico, il primo corrispondente a un carico di punta nel lato del carrello, il secondo con carico in mezzzeria, entrambi i due schemi sul uno schema cerniera-carrello ed un terzo schema con un carico in mezzzeria sull'asta con vincoli incastro-incastro. Ogni configurazione di carico è modellata con elementi tipo frame e tipo shell.

Le dimensioni della sezione a doppia T scelta per l'analisi sono 100 mm di larghezza nella flangia con spessore di 10mm, 250 mm di altezza totale con spessore di 10mm nell'anima. La figura a2-15 mostra gli schemi strutturale e la geometria della sezione a doppia T.

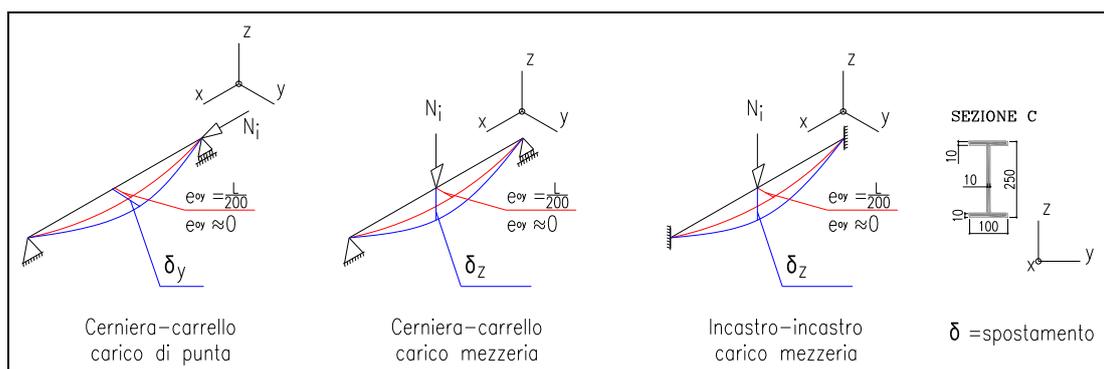


Figura a2-15. Sezione a doppia T: schemi strutturale e sezione.

2.4.1 Analisi schema semplice appoggio: carico di punta

L'analisi viene svolta in elementi finiti tipo *frame* e *shell*. Tutte le caratteristiche proprie dei modelli, la sua densità nella mesh, il numero di nodi, le linee e gli elementi sono riassunte nella prima parte della figura a2-16.

2.4.1.1 Analisi carico di instabilità

Per ottenere il carico di punta critico (Eulero), si prende un carico unitario (1kN), con una funzione di tempo pari a 135 per elementi *frame* e 139 per tipo *shell*. La figura a2-16 mostra l'impostazione della funzione temporale di carico, il carico iniziale e il carico applicato con la sua funzione temporale.

Impostato il modello nel riguardo alle loro caratteristiche geometriche, sezionali, prestazionali e di carico, si svolge un'analisi di buckling (Linearized Buckling), trovando il carico di instabilità (carico di buckling) per elementi tipo frame pari a 139.8 kN e per elementi tipo shell pari a 139.8 kN. È anche possibile vedere il primo e secondo modo di vibrare dell'asta (figura a2-16).

Si può vedere come i valori del carico di buckling trovati attraverso elementi frame e *3D-elements* sono totalmente corrispondenti, ed anche le prime due forme modali.

2.4.1.2 Analisi di collasso con imperfezioni iniziali-modo I.

L'analisi di buckling è seguito per un'analisi di collasso in cui si trova il carico di crollo dell'asta. Si fa l'analisi con uno spostamento massimo ammissibile pari a 0.15m per elementi frame e 0.40m per tipo shell.

Si usa la prima forma modale come valore rappresentativo delle imperfezioni iniziali nel piano x-y (piano dove si trovano i due primi modi, con il minore valore di raggio di inerzia), con un valore di $L/200$ nella mezzeria (secondo EC)) il qual'è pari a 0.025 m (5 m/200). Il carico è imposto a 50 steps con una funzione temporale lineale da 0 a 1500 per elementi frame e da 0 a 120 per elementi 3D, entrambi applicati in 50 step. (figura a2-16).

In figura a2-16 sono riportati la risposta del carico di collasso vs il comportamento dello spostamento nel piano x-y (piano con minore momento di inerzia) nel punto di mezzeria.

Nell'ultima parte della figura a2-16 si può vedere il confronto tra l'analisi fatto tra modelli frame e shell. La risposta della sezione modellata sia con frame che shell è corrispondente in forma. In termini di carico c'è una corrispondenza nei modelli nel primo tratto di spostamento fino a 50mm, dopodiché una differenza media di circa il 10%.

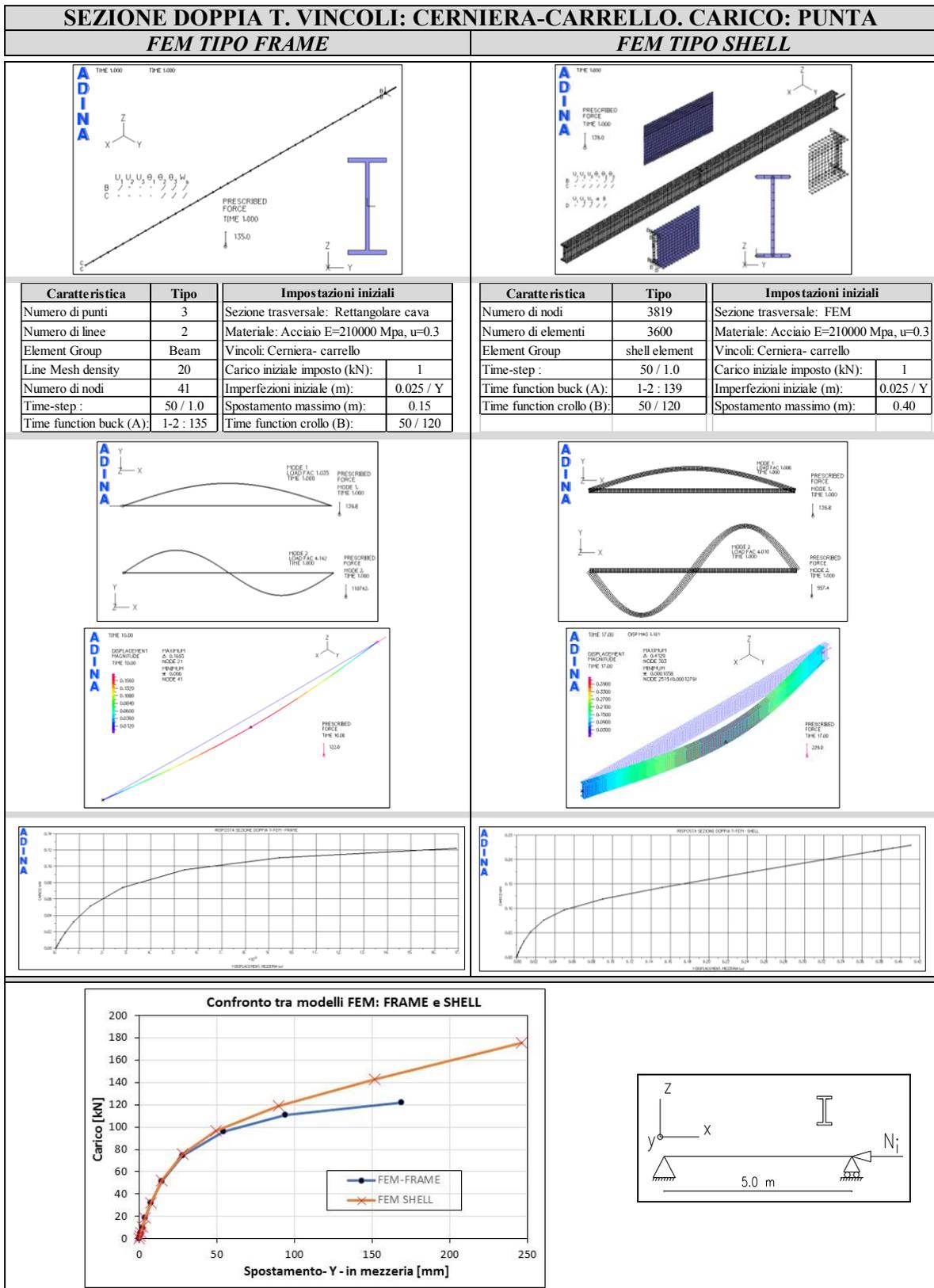


Figura a2-16. Sezione a doppia t: schemi strutturale 1.

2.4.2 Analisi schema semplice appoggio: carico in mezzeria.

L'analisi viene svolta in elementi finiti tipo frame e shell. Tutte le caratteristiche proprie dei modelli, la sua densità nella mesh, il numero di nodi, le linee e gli elementi sono riassunte nella prima parte della figura a2-17.

2.4.2.1 Analisi carico di instabilità

Per ottenere il carico di instabilità, si prende un carico unitario (1kN), con una funzione di tempo pari a 45 per entrambi i tipi di elementi. La figura a2-17 mostra l'impostazione della funzione temporale di carico, il carico iniziale dell'analisi e il carico applicato con la sua funzione temporale.

Impostato il modello riguardo alle loro caratteristiche geometriche, sezionale, prestazionali e di carico, si svolge un'analisi di buckling (Linearized Buckling), trovando il carico di instabilità (carico di buckling) per elementi tipo frame pari a 48.3 kN e per elementi tipo shell pari a 48.3 kN. E' anche possibile vedere il primo e secondo modo di vibrare dell'asta (figura a2-17).

Si può vedere come i valori del carico di buckling trovati attraverso elementi frame e shell sono corrispondenti ed inoltre anche le corrispondenti forme modali sono simili.

2.4.2.2 Analisi di collasso con imperfezioni iniziali-modo I.

L'analisi di buckling è seguito per un'analisi di collasso in cui si trova il carico di crollo dell'asta. Si fa l'analisi con uno spostamento massimo ammissibile pari a 0.30m per elementi frame e 0.40 per elementi shell.

Si usa la prima forma modale come valore rappresentativo delle imperfezioni iniziali nel piano x-y (piano dove si trovano i due primi modi, con il minore valore di raggio di inerzia), con un valore di $L/200$ in mezzeria (secondo EC) il quale è pari a 0.025 m (5 m/200). Il carico è imposto a 50 steps con una funzione temporale lineale da 0 a 40 per entrambi i tipi di elementi ed applicata in 50 step.

In figura a2-17 sono riportati la risposta del carico di collasso vs il comportamento dello spostamento nel piano x-z (piano nella direzione del carico) nel punto di mezzeria.

Nell'ultima parte della figura a2-17 si può vedere l'analisi di confronto tra modelli frame ed shell. La risposta della sezione modellata sia con frame che con shell è corrispondente nel primo tratto di 100 mm, dopodiché il modello frame si irrigidisce e le curve iniziano a divergere.

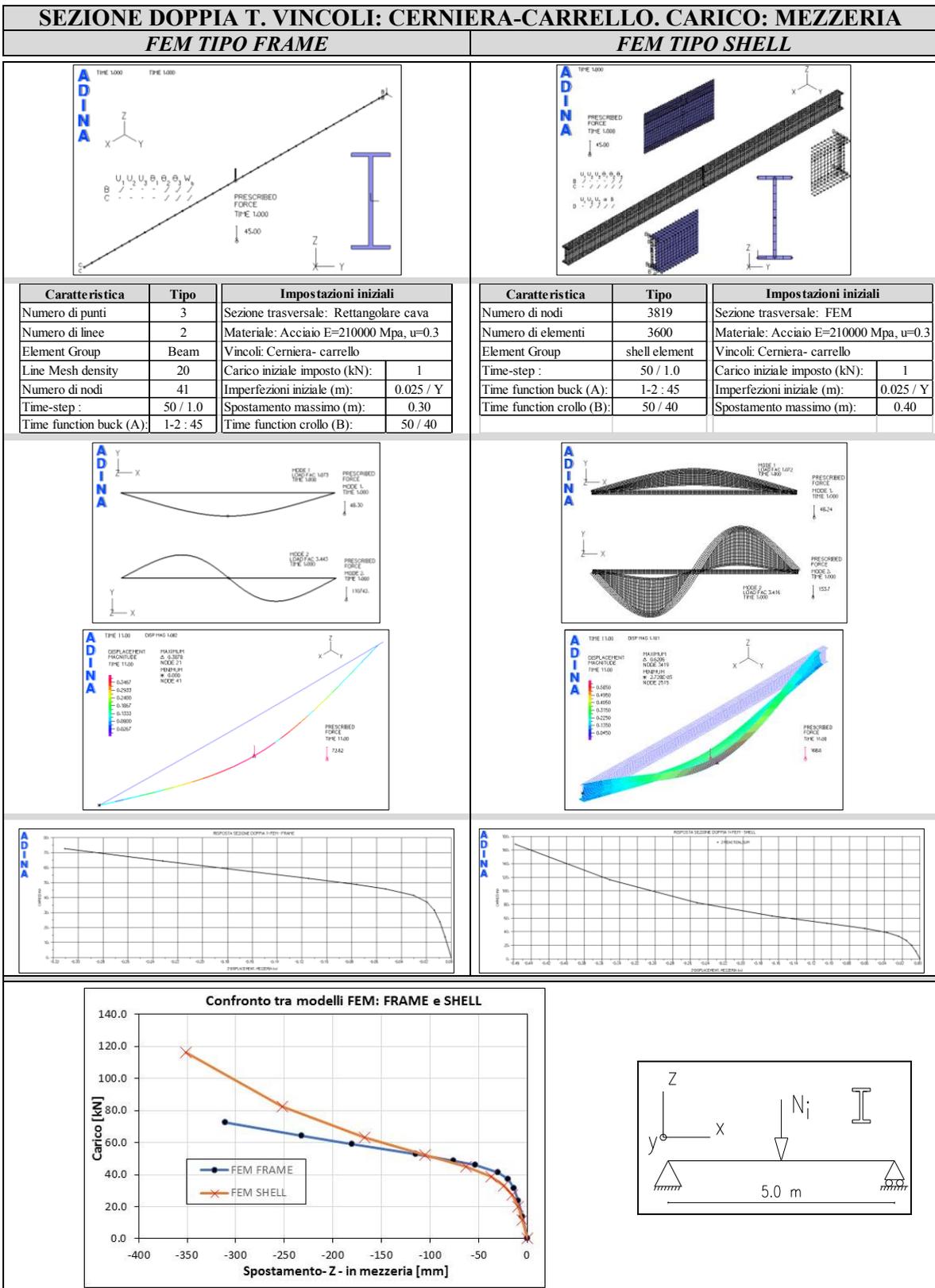


Figura a2-17. Sezione a doppia t: schemi strutturale 2.

2.4.3 Analisi schema doppio incastro: carico in mezzeria.

L'analisi viene svolta in elementi finiti tipo frame e shell. Tutte le caratteristiche proprie dei modelli, la sua densità nella mesh, il numero di nodi, le linee e gli elementi sono riassunte nella prima parte della figura a2-18.

2.4.3.1 Analisi carico di instabilità

Per ottenere il carico di instabilità, si prende un carico unitario (1kN), con una funzione di tempo pari a 135 per modello frame e 150 per modello shell. La figura a2-18 mostra l'impostazione della funzione temporale di carico, il carico iniziale dell'analisi e il carico applicato con la sua funzione temporale.

Stabilito il modello nel riguardo alle loro caratteristiche geometriche, sezionali, prestazionali e di carico, si svolge un'analisi di buckling (Linearized Buckling), trovando il carico di instabilità (carico di buckling) per elementi tipo frame pari a 137 kN e per elementi tipo shell pari a 175 kN. È anche possibile vedere il primo e secondo modo di vibrare dell'asta (figura a2-18).

Si può vedere come i valori del carico di buckling trovato attraverso elementi frame e shell sono corrispondenti in un 78%, invece le relative forme modali sono simili.

2.4.3.2 Analisi di collasso con imperfezioni iniziali-modo I.

L'analisi di buckling è seguito per un'analisi di collasso in cui si trova il carico di crollo dell'asta. Si fa l'analisi con uno spostamento massimo ammissibile pari 0.20m per elementi frame e 0.40m per elementi shell.

Si usa la prima forma modale come valore rappresentativo delle imperfezioni iniziali nel piano x-y (piano dove si trovano i due primi modi, con il minore valore di raggio di inerzia), con un valore di $L/200$ nella mezzeria (secondo EC) il quale è pari a 0.025 m (5 m/200). Il carico è imposto a 50 steps con una funzione temporale lineale da 0 a 100 per elementi frame e da 0 a 150 per elementi shell, entrambi applicati in 50 step (figura a2-18).

In figura a2-18 sono riportati la risposta del carico di collasso vs il comportamento dello spostamento nel piano x-z (piano nella direzione del carico) nel punto di mezzeria.

Nell'ultima parte della figura a2-18 si può vedere l'analisi di confronto tra l'analisi fatto tra modelli frame e shell. La risposta della sezione modellata sia con frame che con shell è corrispondente in forma ma con una differenza di circa il 10% in termini di carico dopo di uno spostamento di 100 mm.

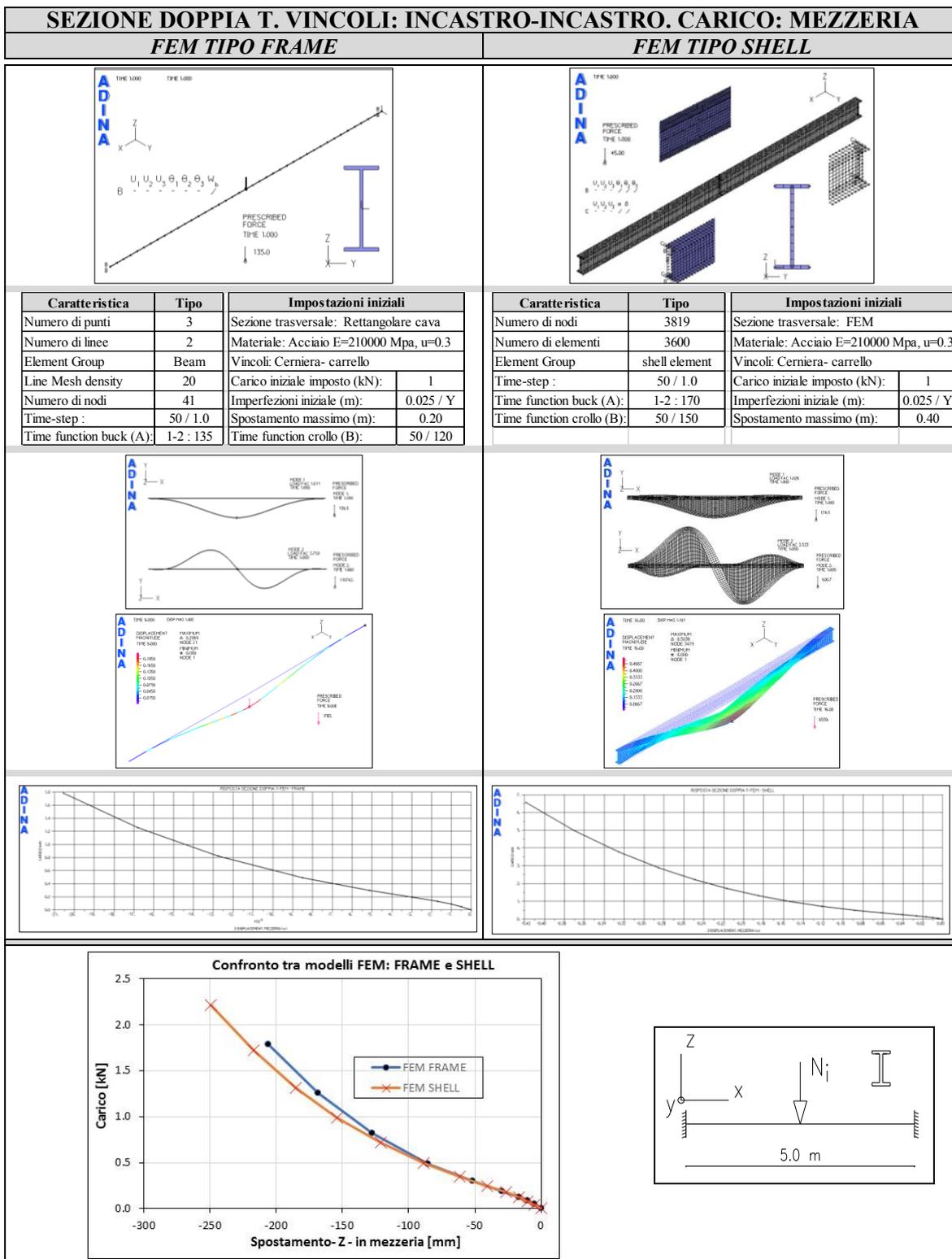


Figura a2-18. Sezione a doppia t: schemi strutturale 3.

2.5 Sezione a C

Per svolgere l'analisi delle diverse sezioni, figura a2-2, si considera uno schema strutturale di un'asta ad unica campata lunga 5 m, le condizioni di vincoli negli estremi tipo cerniera – carrello e il materiale acciaio con modulo di elasticità pari a $E=210000$ MPa e il coefficiente di Poisson $\nu=0.30$.

Per quanto riguarda il carico, sono usati tre schemi di carico, il primo corrispondente a un carico di punta nel lato del carrello, il secondo con carico in mezzzeria, entrambi i due schemi sul uno schema cerniera-carrello ed un terzo schema con un carico in mezzzeria sull'asta con vincoli incastro-incastro. Ogni configurazione di carico è modellata con elementi tipo frame e tipo shell.

Le dimensioni della sezione a C scelte per l'analisi sono 100 mm di larghezza e 250mm di altezza, con spessore di 15 mm. La figura a2-19 mostra gli schemi strutturale e la geometria della sezione a C.

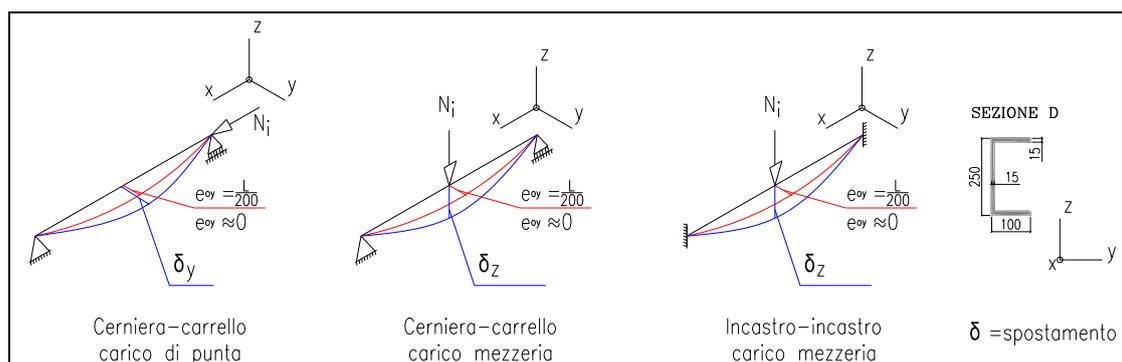


Figura a2-19. Sezione a C: schemi strutturale e sezione.

2.5.1 Analisi schema semplice appoggio: carico di punta

L'analisi viene svolto in elementi finiti tipo *frame* e *shell*. Tutte le caratteristiche proprie dei modelli, la sua densità nella mesh, il numero di nodi, le linee e gli elementi sono riassunte nella prima parte della figura a2-20.

2.5.1.1 Analisi carico di instabilità

Per ottenere il carico di punta critico (Eulero), si prende un carico unitario (1kN), con una funzione di tempo pari a 445 per elementi *frame* e 330 per tipo *shell*. La figura a2-20 mostra l'impostazione della funzione temporale di carico, il carico iniziale dell'analisi e il carico applicato con la sua funzione temporale.

Impostato il modello nel riguardo alle loro caratteristiche geometriche, sezionale, prestazionali e di carico, si svolge un'analisi di buckling (Linearized Buckling), trovando il carico di instabilità (carico di buckling) per elementi tipo frame pari a 448 kN e per elementi tipo shell pari a 451 kN. Anche è possibile vedere il primo e secondo modo di vibrare dell'asta (figura a2-20).

Si può vedere come i valori del carico di buckling trovato attraverso elementi frame e *shell* sono totalmente corrispondenti (99%) anche le sue prime due forme modali.

2.5.1.2 Analisi di collasso con imperfezioni iniziali-modo I.

L'analisi di buckling è seguito per un'analisi di collasso nella cui si trova il carico di crollo dell'asta. Si fa l'analisi con uno spostamento massimo ammissibile pari a 0.20m per entrambi i tipi di elementi.

Si usa la prima forma modale come valore rappresentativo delle imperfezioni iniziali nel piano x-y (piano dove si trovano i due primi modi, con il minore valore di raggio di inerzia), con un valore di $L/200$ in mezzeria (secondo EC) il quale è pari a 0.025 m (5 m/200). Il carico è imposto a 50 steps con una funzione temporale lineare da 0 a 400 per elementi frame e da 0 a 300 per elementi shell, entrambi applicati in 50 step (figura a2-20).

In figura a2-20 sono riportati la risposta del carico di collasso vs il comportamento dello spostamento nel piano x-y (piano con minore momento di inerzia) nel punto di mezzeria.

Nell'ultima parte della figura a2-20 si può vedere l'analisi di confronto modelli frame e shell. La risposta della sezione modellata sia con frame che shell è corrispondente in forma. In termini di carico c'è una corrispondenza nei modelli nel primo tratto di spostamento fino a 50mm, dopodiché una differenza media all'incirca del 10%.

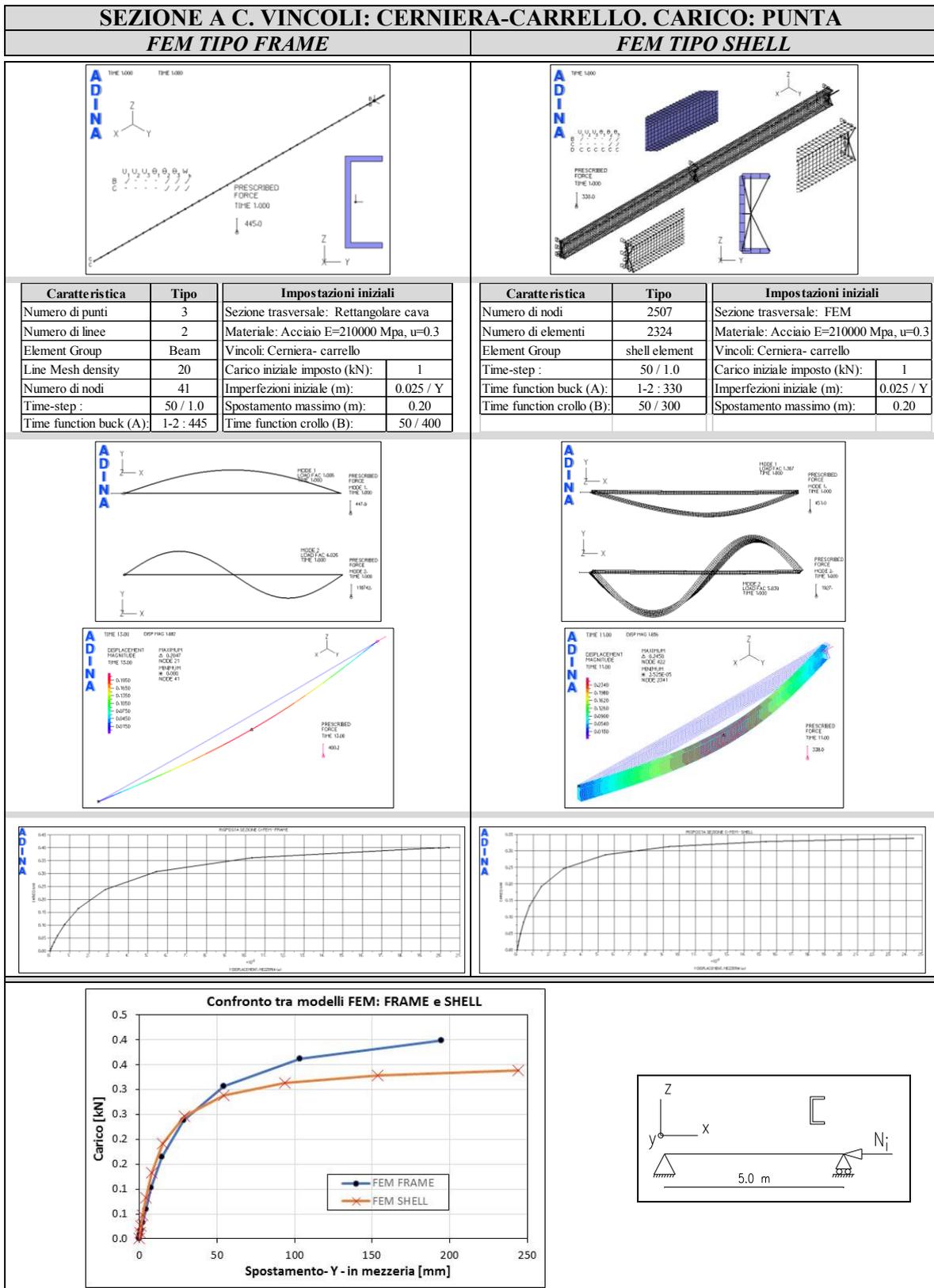


Figura a2-20. Sezione a C: schemi strutturale 1.

2.5.2 Analisi schema semplice appoggio: carico in mezzeria.

L'analisi viene svolta in elementi finiti tipo frame e shell. Tutte le caratteristiche proprie dei modelli, la sua densità nella mesh, il numero di nodi, le linee e gli elementi sono riassunte nella prima parte della figura a2-21.

2.5.2.1 Analisi carico di instabilità

Per ottenere il carico di instabilità, si prende un carico unitario (1kN), con una funzione di tempo pari a 80 per entrambi i tipi di elementi. La figura a2-21 mostra l'impostazione della funzione temporale di carico, il carico iniziale dell'analisi e il carico applicato con la sua funzione temporale.

Impostato il modello nel riguardo alle loro caratteristiche geometriche, sezionali, prestazionali e di carico, si svolge un'analisi di buckling (Linearized Buckling), trovando il carico di instabilità (carico di buckling) per elementi tipo frame pari a 175 kN e per elementi tipo shell pari a 176 kN. E' anche possibile vedere il primo e secondo modo di vibrare dell'asta (figura a2-21).

Si può vedere come i valori del carico di buckling trovato attraverso elementi frame e shell sono corrispondenti ed anche le corrispondenti forme modali sono uguali.

2.5.2.2 Analisi di collasso con imperfezioni iniziali-modo I.

L'analisi di buckling è seguito per un'analisi di collasso in cui si trova il carico di crollo dell'asta. Si fa l'analisi con uno spostamento massimo ammissibile pari a 0.30 m per elementi frame e 0.20 m per elementi shell.

Si usa la prima forma modale come valore rappresentativo delle imperfezioni iniziali nel piano x-y (piano dove si trovano i due primi modi, con il minore valore di raggio di inerzia), con un valore di $L/200$ in mezzeria (secondo EC) il quale è pari a 0.025 m (5 m/200). Il carico è imposto a 50 steps con una funzione temporale lineale da 0 a 70 per entrambi i tipi di elementi ed applicata in 50 step.

In figura a2-21 sono riportati la risposta del carico di collasso vs il comportamento dello spostamento nel piano x-z (piano nella direzione del carico) nel punto di mezzeria.

Nell'ultima parte della figura a2-21 si può vedere l'analisi di confronto tra modelli frame ed shell. La risposta della sezione modellata sia con frame che con shell è corrispondente ma con una differenza di carico incirca al 8%.

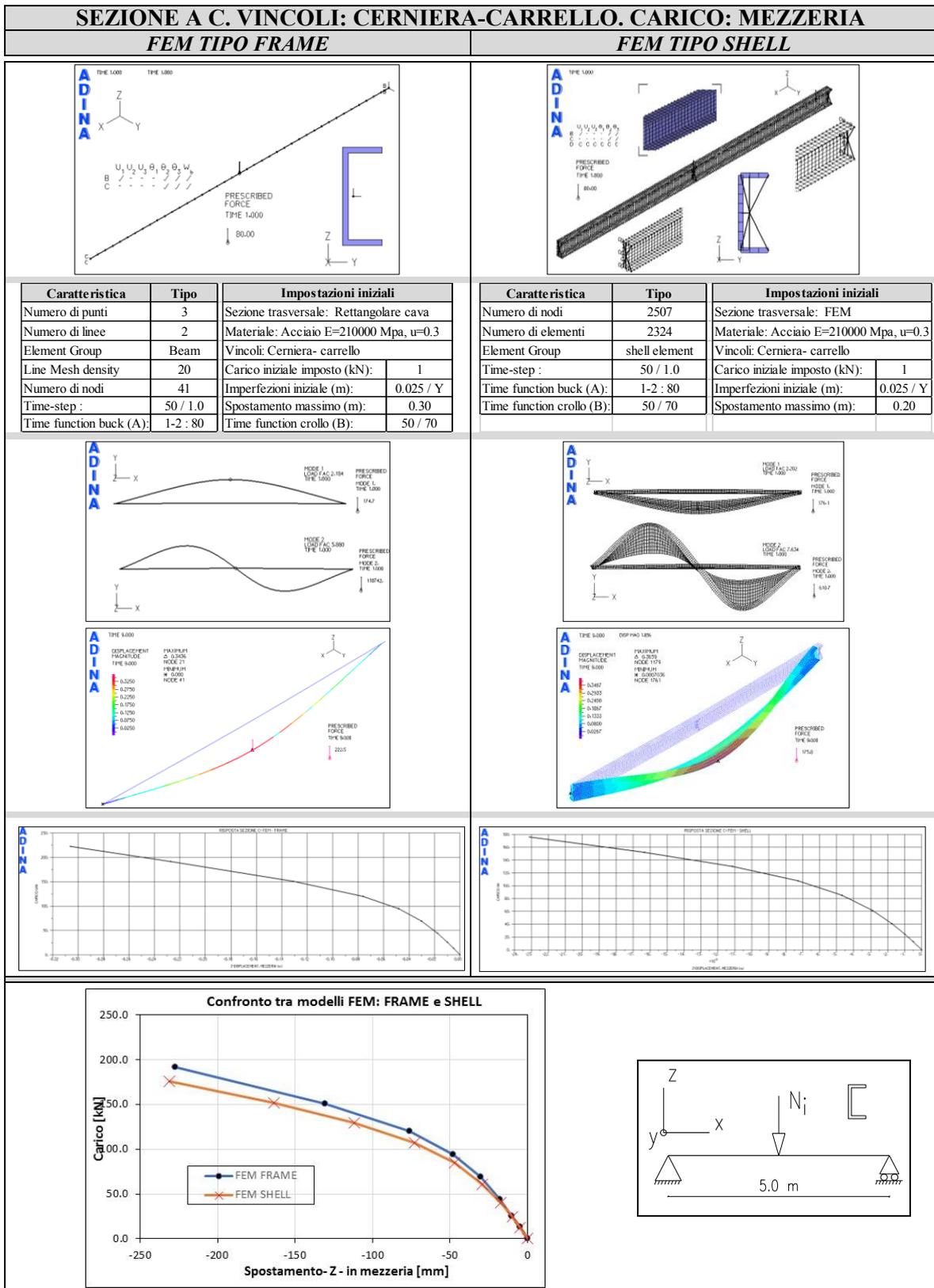


Figura a2-21. Sezione a C: schemi strutturale 2.

2.5.3 Analisi schema doppio incastro: carico in mezzeria.

L'analisi viene svolta in elementi finiti tipo frame e shell. Tutte le caratteristiche proprie dei modelli, la sua densità nella mesh, il numero di nodi, le linee e gli elementi sono riassunte nella prima parte della figura a2-22.

2.5.3.1 Analisi carico di instabilità

Per ottenere il carico di instabilità, si prende un carico unitario (1kN), con una funzione di tempo pari a 200 per modello frame e 400 per modello shell. La figura a2-22 mostra l'impostazione della funzione temporale di carico, il carico iniziale dell'analisi e il carico applicato con la sua funzione temporale.

Impostato il modello nel riguardo alle loro caratteristiche geometriche, sezionale, prestazionali e di carico, si svolge un'analisi di buckling (Linearized Buckling), trovando il carico di instabilità (carico di buckling) per elementi tipo frame pari a 568 kN e per elementi tipo shell pari a 5868 kN. E' anche possibile vedere il primo e secondo modo di vibrare dell'asta (figura a2-22).

Il valore del carico di buckling per i due modelli diverge incirca una grandezza. Mentre le relative forme modali sono simili.

2.5.3.2 Analisi di collasso con imperfezioni iniziali-modo I.

L'analisi di buckling è seguito per un'analisi di collasso in cui si trova il carico di crollo dell'asta. Si fa l'analisi con uno spostamento massimo ammissibile pari 0.30m per elementi frame e 0.20m per elementi shell.

Si usa la prima forma modale come valore rappresentativo delle imperfezioni iniziali nel piano x-y (piano dove si trovano i due primi modi, con il minore valore di raggio di inerzia), con un valore di $L/200$ in mezzeria (secondo EC) il quale è pari a 0.025 m (5 m/200). Il carico è imposto a 50 steps con una funzione temporale lineale da 0 a 200 per elementi frame e da 0 a 350 per elementi shell, entrambi applicati in 50 step (figura a2-22).

In figura a2-22 sono riportati la risposta del carico di collasso vs il comportamento dello spostamento nel piano x-z (piano nella direzione del carico) nel punto di mezzeria.

Nell'ultima parte della figura a2-22 si può vedere l'analisi di confronto tra modelli frame e shell. La risposta della sezione modellata sia con frame che con shell è corrispondente in forma ma con una differenza all'incirca del 10%.

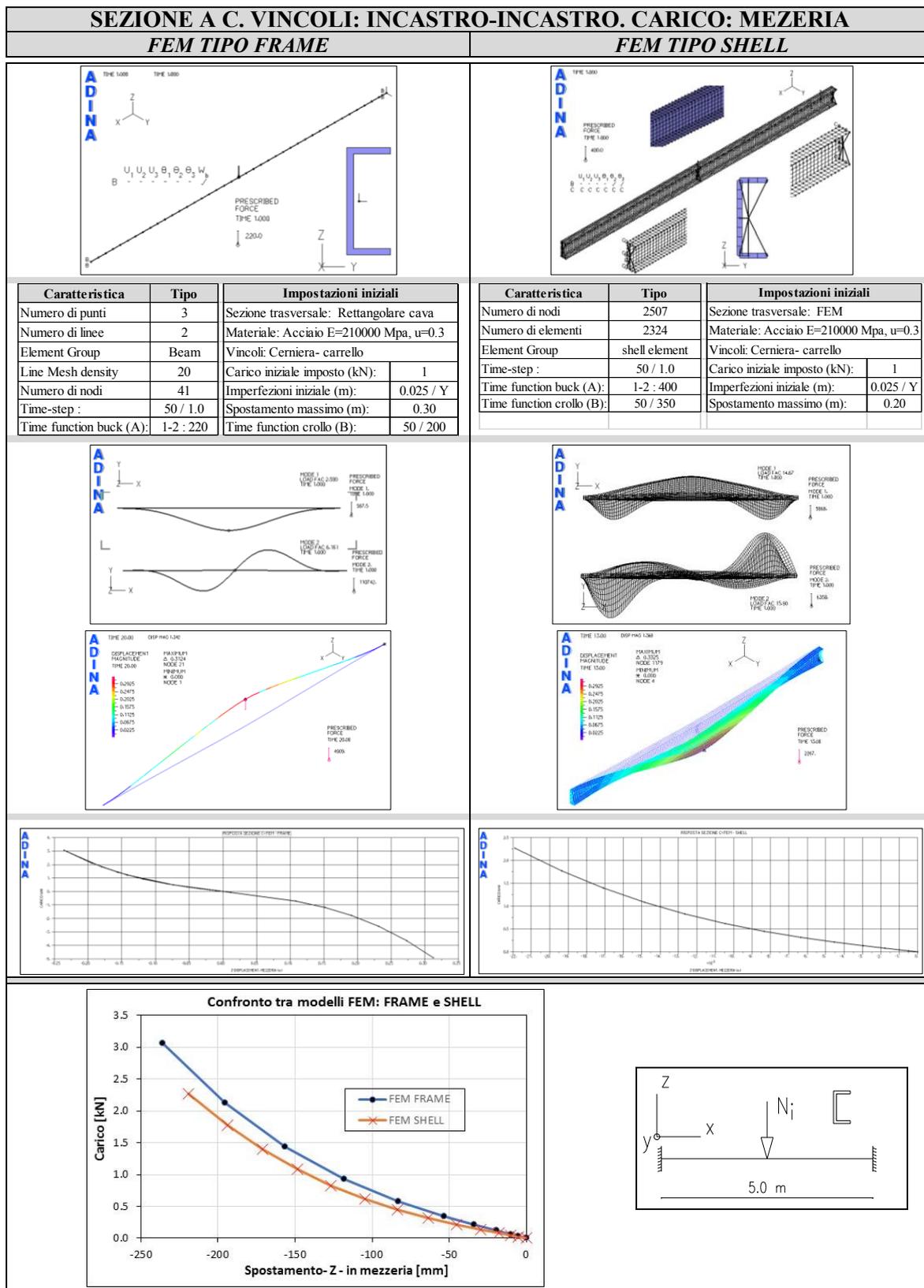


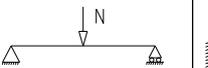
Figura a2-22. Sezione a C: schemi strutturale 3.

2.6 Confronti risultati

Lo scopo della modellazione con elementi tipo frame e con elemento tipo shell (e 3D) è di verificare soprattutto l’affidabilità dell’applicazione del metodo degli elementi finiti nel calcolo del carico di instabilità. Inoltre, verificare la corretta modellazione ed utilizzo del software applicato nella presente tesi.

Il risultato del carico di buckling per le quattro sezioni scelte fornisce i dati riportati nella tabella a2-2.

Tabella a2-2. Confronto carico instabilità 4 sezioni.

Tipo sezione									
	Frame	Shell	Errore	Frame	Shell	Errore	Frame	Shell	Errore
Rettangolare	1727	1720	0.4%	3294	3950	16.6%	27487	26464	3.9%
Rettangolare cava	1554	1755	11.5%	2777	3148	11.8%	19672	15137	30.0%
Doppia T	140	140	0.0%	48	48	0.1%	137	175	21.8%
C	447.9	451	0.7%	175	176	0.8%	568	5868	90.3%

Nella tabella precedente, si può vedere, come per carichi di punta, la modellazione in elementi rettangolare, a doppia T ed a C, forniscono risultati simili. Invece nel caso della sezione rettangolare cava, il risultato diverge incirca del dodici per cento.

Per carico in mezzzeria, con asta in semplice appoggio, le sezioni a doppia T e a C, forniscono risultati simili. Queste due sezioni sono stati modellate con un elemento finito tipo shell, invece le altre due con elementi tipo 3D.

Nella configurazione a doppio incastro, i risultati non sono affidabili. La differenza tra la modellazione in shell e quella scelta di tipo frame diverge tra 20-30 %.

Tutte le modellazioni sono stati effettuate considerando gli effetti di secondo ordine a grandi spostamenti e piccole deformazioni. In termini di spostamenti il modello con elemento tipo frame ha una rigidezza maggiore.

Si deve avere attenzione nella modellazione del tipo di vincoli, per cercare la coincidenza con il baricentro della sezione nei modelli tipo shell-3D. Il modello tipo frame, per defletto, li inserisce nel baricentro.

L'andamento della grafica dello spostamento vs il carico in entrambi i modelli presentano una correlazione simile, cioè la curva caratteristica è quasi la stessa e le forme modali sono uguali in entrambi i modelli.

Rispetto al modello con carico di punta, si trova un carico uguale al carico fornito per la teoria esatta di Eulero.

Appendice

3

ELABORATI SEZIONI

Bibliografia

- [1] Ungureanu V, Dubina D. Recent research advances on ECBL approach. Part I: Plastic–elastic interactive buckling of cold-formed steel sections. *Thin-Walled Structures* 2004;42(2):177–94.
- [2] Szabo IF, Ungureanu V, Dubina D. Recent research advances on ECBL approach. Part II: Interactive buckling of perforated sections. *Thin-Walled Structures* 2004;42(2):195–210.
- [3] American Iron and Steel Institute. AISI specification for the design of cold-formed steel structural members. Washington (DC): American Iron and Steel Institute; 1996.
- [4] North American Specification. Appendix 1: Design of cold-formed steel structural members using the Direct Strength Method. In: 2004 supplement to the north American specification for the design of coldformed steel structures. Washington (DC): American Iron and Steel Institute; 2004.
- [5] Schafer BW. Review: the direct strength method of cold-formed steel member design. *Journal of Constructional Steel Research* 2008;64:766_78.
- [6] Schafer BW, Ádány S. Buckling analysis of cold-formed steel members using CUFSM: conventional and constrained finite strip methods. In: Eighteenth international specialty conference on cold-formed steel structures. 2006. p. 39_54.
- [7] Schafer BW, Z. Li. Application of the finite strip method in cold-formed steel member design. *Journal of Constructional Steel Research* 2010. 66: 971-980.
- [8] SCHARDT R. Verallgemeinerte Technische biegetheorie. Berli Heidelberg: Springer; 1989.
- [9] Schafer BW, Peköz T. Computational modeling of cold-formed steel: Characterizing geometric imperfections and residual stresses. *Journal of Constructional Steel Research* 1998;47(3):193–210.
- [10] Sarawit AT, Kim Y, Bakker MCM, Peköz T. The finite element method for thin-walled members-applications. *Thin-Walled Structures* 2003;41(2–3):191–206.
- [11] ADINA, Automatic Dynamic Incremental Nonlinear Analysis.

- [12] Piero Pozzati e Claudio Ceccoli (1987) :Teoria e Tecnica delle Strutture – Volume III: Sistemi di Travi –Interpretazione del collasso. UTET.
- [13] Alberto Carpinteri (1998): Analisi non lineare delle Strutture- Pitagora Editrice Bologna
- [14] Stephen P. Timoshenko and James M. Gere –II Edition: Theory of Elastic Stability. Dover Publications Inc. Mineola New York.
- [15] Nunziata, Vincenzo: Teoria e pratica delle strutture in acciaio : Vincenzo Nunziata
- [16] Landolfo, Raffaele: Acciaio e sostenibilità : progetto, ricerca e sperimentazione per l'housing in cold-formed steel.
- [17] Y.K. Cheung. Finite strip method in structural analysis. Pergamon Press. 1976
- [18] Boasso, Davide, Fenomeni di instabilità dell'anima di travi da ponte a struttura mista acciaio-calcestruzzo.
- [19] UNI EN 1993-1-3: Design of steel structures. Part 1-3: General rules - Supplementary rules for cold- formed members and sheeting
- [20] UNI EN 1993-1-5: Design of steel structures. Part 1-5: Plated structural elements
- [21] Ghersi A, Landolfo R, Mazzolani FM. Design of metallic cold-formed.