

# POLITECNICO DI TORINO

Corso di Laurea Magistrale in  
INGEGNERIA AEROSPAZIALE



**Politecnico  
di Torino**

Tesi di Laurea Magistrale

Ottimizzazione delle missioni di Rimozione Attiva dei  
Detriti Spaziali mediante un algoritmo metaeuristico di  
tipo Ant Colony Optimization

Relatore

Prof. Lorenzo CASALINO

Candidato

Alessia INVERNIZZI

Ottobre 2025



*A Francesco*

*Ciò che facciamo in vita riecheggia nell'eternità*

I detriti spaziali costituiscono una delle sfide più critiche per la sostenibilità a lungo termine delle attività aerospaziali. Il rischio di collisioni correlato all'elevata densità di detriti, specialmente nelle orbite più congestionate, è ulteriormente accentuato dalla continua espansione del settore aerospaziale e dall'incremento annuale del numero di satelliti lanciati. Tale contesto richiede non solo l'applicazione di misure di mitigazione dei detriti spaziali, ma anche la pianificazione di missioni di Active Debris Removal (ADR) finalizzate alla rimozione del maggior numero possibile di detriti. L'obiettivo del presente elaborato è l'analisi di missioni ADR con propulsione chimica per ottimizzare le sequenze di rimozione dei detriti, al fine di minimizzare il consumo di propellente. Il problema di ottimizzazione è ricondotto a un Travelling Salesman Problem (TSP), in cui i costi propulsivi delle trasferte tra i detriti vengono stimati mediante un modello analitico che sfrutta l'effetto perturbativo  $J_2$ . L'analisi è effettuata tramite l'implementazione di un algoritmo metaeuristico basato sull'Ant Colony Optimization (ACO). Al fine di validare il modello proposto, si fa riferimento al problema affrontato durante la nona edizione della Global Trajectory Optimization Competition (GTCO9), relativo alla progettazione di una campagna di missioni per la rimozione di 123 detriti nell'arco di 8 anni. I risultati ottenuti sono stati dunque confrontati con la soluzione vincitrice sviluppata dal Jet Propulsion Laboratory (JPL). Inoltre, sono stati esaminati scenari semplificati, quali l'utilizzo di una matrice dei costi statica e la riduzione del numero di missioni, che consentono di ottenere soluzioni più prossime a quelle di riferimento, pur evidenziando margini di miglioramento rispetto al caso originale.

# Indice

<b>1</b>	<b>Introduzione</b>	<b>1</b>
<b>2</b>	<b>I detriti spaziali</b>	<b>3</b>
2.1	Definizione e classificazione dei detriti spaziali . . . . .	3
2.2	Scenario attuale . . . . .	4
2.2.1	Statistiche . . . . .	4
2.2.2	Evoluzione del settore spaziale . . . . .	7
2.2.3	Decadimento orbitale . . . . .	8
2.3	Rischi dell'inquinamento spaziale: collisioni e Sindrome di Kessler . .	9
2.4	Strategie di mitigazione . . . . .	10
2.4.1	Principali obiettivi delle misure di mitigazione . . . . .	11
2.5	Le missioni di Rimozione Attiva dei Detriti . . . . .	12
2.5.1	Tecnologie di cattura e iniziative avviate . . . . .	13
2.6	Ottimizzazione combinatoria . . . . .	14
2.6.1	Algoritmi metaeuristici . . . . .	14
2.6.2	Algoritmi genetici . . . . .	15
2.6.3	Ant Colony Optimization . . . . .	15
2.6.4	Particle Swarm Optimization . . . . .	16
<b>3</b>	<b>Fondamenti di astrodinamica</b>	<b>17</b>
3.1	Meccanica orbitale . . . . .	17
3.1.1	Problema degli n-corpi . . . . .	18
3.1.2	Problema dei due corpi . . . . .	19
3.1.3	Conservazione dell'energia meccanica . . . . .	20
3.1.4	Conservazione del momento angolare . . . . .	21
3.1.5	Integrazione dell'equazione del moto . . . . .	22
3.1.6	Equazione polare di una sezione conica . . . . .	23
3.1.7	Relazione tra l'energia meccanica e la geometria dell'orbita .	25
3.1.8	Orbite chiuse . . . . .	25
3.2	Sistemi di riferimento . . . . .	26
3.2.1	Sistema di riferimento eliocentrico . . . . .	27
3.2.2	Sistema di riferimento geocentrico . . . . .	27
3.2.3	Sistema di riferimento perifocale . . . . .	28
3.3	Parametri orbitali kepleriani . . . . .	29

3.4	Perturbazioni orbitali . . . . .	31
3.4.1	Equazioni planetarie di Gauss . . . . .	33
3.4.2	Non sfericità della Terra . . . . .	34
<b>4</b>	<b>Fondamenti di propulsione spaziale</b>	<b>38</b>
4.1	Introduzione alla propulsione spaziale . . . . .	38
4.2	Prestazioni di un sistema propulsivo . . . . .	40
4.3	Differenze tra propulsione chimica ed elettrica . . . . .	43
4.4	Manovre orbitali . . . . .	45
<b>5</b>	<b>Ant Colony Optimization</b>	<b>47</b>
5.1	Il problema del commesso viaggiatore . . . . .	47
5.2	Principio biologico e traduzione algoritmica . . . . .	47
5.2.1	Comportamento delle formiche in natura . . . . .	48
5.3	Architettura dell'algoritmo . . . . .	49
5.3.1	Inizializzazione . . . . .	49
5.3.2	State transition rule . . . . .	50
5.3.3	Global pheromone updating rule . . . . .	51
5.3.4	Punti di forza . . . . .	51
5.3.5	Principali varianti dell'algoritmo . . . . .	52
<b>6</b>	<b>Implementazione per missioni ADR</b>	<b>55</b>
6.1	Specificità dell'algoritmo per l'ottimizzazione delle missioni ADR . .	56
6.1.1	Generazione delle matrici dei costi ed euristica . . . . .	57
6.1.2	Inizializzazione della matrice del feromone . . . . .	57
6.1.3	Pianificazione temporale delle missioni . . . . .	58
6.1.4	Ciclo interno . . . . .	58
6.1.5	Identificazione finale della soluzione e della campagna . . . . .	59
6.2	Il modello analitico . . . . .	59
6.3	Caso studio: la GTOC9 . . . . .	64
6.3.1	Definizione del problema . . . . .	64
6.3.2	Soluzione vincitrice . . . . .	66
6.3.3	Variazioni rispetto al problema originale . . . . .	68
<b>7</b>	<b>Analisi dei risultati</b>	<b>69</b>
7.1	Effetto della pianificazione temporale . . . . .	69
7.2	$\Delta V$ al variare del numero di formiche $m$ . . . . .	73
7.3	Analisi parametrica . . . . .	75
7.3.1	Caso A . . . . .	77
7.3.2	Caso B . . . . .	78
7.4	Variazione della formula per il calcolo di $f$ . . . . .	79
7.4.1	Caso A . . . . .	81
7.4.2	Caso B . . . . .	82
7.5	Caso semplificato con 3 missioni . . . . .	83

7.6	Caso statico . . . . .	87
7.6.1	Confronto con la soluzione del JPL . . . . .	89
<b>8</b>	<b>Conclusioni</b>	<b>93</b>
	<b>Bibliografia</b>	<b>95</b>

# Elenco delle figure

2.1	Evoluzione nel tempo di numero, massa, sezione trasversale per categoria di detrito . . . . .	6
2.2	Numero di <i>payload</i> lanciati in orbite LEO . . . . .	7
2.3	Numero di <i>payload</i> lanciati in orbite GEO . . . . .	8
2.4	Simulazioni sul numero cumulativo di collisioni future in LEO . . . .	10
3.1	Problema degli n-corpi . . . . .	19
3.2	Flight path angle . . . . .	22
3.3	Sezioni coniche . . . . .	23
3.4	Parametri geometrici dell'ellisse . . . . .	24
3.5	Sistema di riferimento eliocentrico . . . . .	27
3.6	Sistema di riferimento geocentrico . . . . .	28
3.7	Sistema di riferimento perifocale . . . . .	28
3.8	Elementi orbitali classici . . . . .	31
3.9	Orbita osculatrice . . . . .	32
3.10	Sistema RSW . . . . .	33
3.11	Modello terrestre reale [17] . . . . .	35
3.12	Armoniche sferiche del campo gravitazionale terrestre . . . . .	36
3.13	Regressione della linea dei nodi . . . . .	36
4.1	Variazione di perigeo . . . . .	45
4.2	Cambio di piano . . . . .	46
5.1	Meccanismo decisionale delle formiche [20] . . . . .	48
6.1	Architettura ACO per missioni ADR . . . . .	56
6.2	Visualizzazione delle $M$ orbite dei detriti . . . . .	64
6.3	Parametri orbitali dei detriti . . . . .	66
6.4	Distribuzione RAAN dei detriti . . . . .	66
7.1	Scatter Caso A . . . . .	70
7.2	Scatter Caso B . . . . .	71
7.3	<i>Best case</i> Caso A . . . . .	72
7.4	<i>Worst case</i> Caso A . . . . .	72
7.5	<i>Best case</i> Caso B . . . . .	72

7.6	<i>Worst case</i> Caso B . . . . .	72
7.7	$\Delta V$ al variare del numero di formiche $m$ . . . . .	73
7.8	Caso A $m = n$ . . . . .	74
7.9	Caso B $m = n$ . . . . .	74
7.10	Caso A $m = 4n$ . . . . .	74
7.11	Caso B $m = 4n$ . . . . .	74
7.12	Caso A $m = 8n$ . . . . .	75
7.13	Caso B $m = 8n$ . . . . .	75
7.14	CASO A NOMINALE: $\alpha = 4, \beta = 1, el = 0.98$ . . . . .	77
7.15	$\alpha = 2, \beta = 1, el = 0.98$ . . . . .	77
7.16	$\alpha = 4, \beta = 0.5, el = 0.98$ . . . . .	77
7.17	$\alpha = 4, \beta = 1, el = 0.97$ . . . . .	77
7.18	$\alpha = 4, \beta = 1, el = 0.99$ . . . . .	77
7.19	CASO B NOMINALE: $\alpha = 4, \beta = 1, el = 0.98$ . . . . .	78
7.20	$\alpha = 2, \beta = 1, el = 0.98$ . . . . .	78
7.21	$\alpha = 4, \beta = 0.5, el = 0.98$ . . . . .	78
7.22	$\alpha = 4, \beta = 1, el = 0.97$ . . . . .	78
7.23	$\alpha = 4, \beta = 1, el = 0.99$ . . . . .	78
7.24	$f = f/\min(f) - el, miter = 150$ . . . . .	81
7.25	$f = f - el \cdot \min(f), miter = 150$ . . . . .	81
7.26	$f = f/\min(f) - el, miter = 1200$ . . . . .	81
7.27	$f = f - el \cdot \min(f), miter = 1200$ . . . . .	81
7.28	$f = f/\min(f) - el, miter = 150$ . . . . .	82
7.29	$f = f - el \cdot \min(f), miter = 150$ . . . . .	82
7.30	$f = f/\min(f) - el, miter = 1200$ . . . . .	82
7.31	$f = f - el \cdot \min(f), miter = 1200$ . . . . .	82
7.32	Scatter Caso A con 3 missioni . . . . .	85
7.33	Scatter Caso B con 3 missioni . . . . .	85
7.34	Caso A con 3 missioni . . . . .	86
7.35	Caso B con 3 missioni . . . . .	86
7.36	Caso A statico . . . . .	89
7.37	Caso B statico . . . . .	89
7.38	Caso A statico, 100 ripetizioni . . . . .	90

# Elenco delle tabelle

2.1	Numero, massa, sezione trasversale delle categorie dei detriti nei regimi orbitali . . . . .	5
4.1	Tipici valori di $\Delta V$ . . . . .	42
6.1	Campagna del JPL . . . . .	67
7.1	$\Delta V$ Caso A e Caso B [km/s] . . . . .	70
7.2	$\Delta V$ al variare del numero di formiche $m$ . . . . .	73
7.3	$\Delta V$ al variare del numero di $\alpha, \beta, el$ . . . . .	76
7.4	$\Delta V$ al variare della formulazione di $f$ . . . . .	80
7.5	Prime 3 missioni del JPL . . . . .	83
7.6	$\Delta V$ con 3 missioni . . . . .	84
7.7	$\Delta V$ caso statico . . . . .	88
7.8	Panoramica delle missioni previste dal JPL . . . . .	91
7.9	Panoramica delle missioni con algoritmo ACO . . . . .	91

# Acronimi

ACO	Ant Colony Optimization.
ADR	Active Debris Removal.
AS	Ant System.
ASAT	Anti-Satellite.
EAS	Elitist Ant System.
EGO	Extended Geostationary Orbit.
ESA	European Space Agency.
FCC	Federal Communications Commission.
GA	Genetic Algorithm.
GEO	Geostationary Orbit.
GTO	GEO Transfer Orbit.
GTOC9	9 <sup>th</sup> Global Trajectory Optimization Competition.
HEO	Highly Eccentric Orbit.
IADC	Inter-Agency Space Debris Coordination Committee.
JPL	Jet Propulsion Laboratory.
LEO	Low Earth Orbit.
LEGEND	LEO-to-GEO Environment Debris Model.
LMO	LEO-MEO Crossing Orbits.
MASTER	Meteoroid and Space Debris Terrestrial Environment Reference.
MEO	Medium Earth Orbit.
MGO	MEO-GEO Crossing Orbits.
MJD2000	Modified Julian Date 2000.
MMAS	MAX-MIN Ant System.

NSO	Navigation Satellites Orbit.
PD	Payload Debris.
PF	Payload Fragmentation Debris.
PL	Payloads.
PM	Payload Mission Related Objects.
RAAN	Right Ascension of the Ascending Node.
RB	Rocket Body.
RF	Rocket Fragmentation Debris.
RM	Rocket Mission Related Objects.
RSW	Radial–Along-track–Cross-track system.
SSA	Space Situational Awareness.
TSP	Travelling Salesman Problem.
UI	Unidentified.

# Capitolo 1

## Introduzione

Negli ultimi decenni, la crescente diffusione delle attività spaziali ha determinato un incremento significativo del numero di oggetti artificiali in orbita, comunemente noti come detriti spaziali. La proliferazione di tali oggetti rappresenta oggi una delle principali minacce per la sostenibilità a lungo termine delle operazioni spaziali. Per fronteggiare questa problematica, sono state sviluppate e progressivamente adottate diverse strategie di mitigazione, promosse da agenzie spaziali e organizzazioni internazionali. Tuttavia, anche in uno scenario di piena applicazione delle linee guida vigenti, è ormai ampiamente riconosciuto che sia necessario affiancare a tali misure anche interventi di tipo attivo, ossia missioni di Rimozione Attiva dei Detriti (ADR).

Il presente lavoro di tesi è dedicato all'analisi e all'ottimizzazione di missioni ADR, mediante l'implementazione di un algoritmo di tipo *Ant Colony Optimization* (ACO), adattato a un caso studio di riferimento: la nona edizione della *Global Trajectory Optimization Competition* (GTCO9). La trattazione è articolata secondo la seguente struttura.

Il Capitolo 2 fornisce un inquadramento generale del problema dei detriti spaziali, analizzandone l'origine, la distribuzione orbitale e l'evoluzione nel tempo. Viene introdotto il concetto fondamentale di Space Situational Awareness (SSA) e discussa la Sindrome di Kessler, evidenziandone le implicazioni sulla sicurezza orbitale. È inoltre presentata una panoramica delle principali strategie di mitigazione e delle iniziative internazionali attualmente in corso, con particolare attenzione alle politiche promosse da enti come l'ESA, la NASA e l'IADC.

I Capitoli 3 e 4 introducono rispettivamente i fondamenti teorici dell'astrodinamica e della propulsione spaziale, fornendo gli strumenti necessari alla modellazione delle orbite e alla comprensione dei fenomeni che ne influenzano l'evoluzione. Vengono esaminate le principali perturbazioni che agiscono sul moto dei satelliti, con particolare attenzione agli effetti dovuti al termine  $J_2$  del campo gravitazionale terrestre, che riveste un ruolo centrale nelle manovre considerate in questo elaborato.

Il Capitolo 5 descrive l'algoritmo ACO, illustrandone i principi naturali di riferimento, l'architettura che lo caratterizza, i punti di forza e le principali varianti note in letteratura.

Nel Capitolo 6 vengono presentate le specifiche dell'algoritmo implementato per la pianificazione delle missioni ADR, con la descrizione delle caratteristiche del codice sviluppato e del modello analitico di trasferimento orbitale. È inoltre illustrato il caso studio di riferimento della GTOC9 e i risultati di confronto forniti dal *Jet Propulsion Laboratory* (JPL).

Infine, il Capitolo 7 è dedicato alla presentazione e all'analisi dei principali risultati ottenuti. In particolare, vengono discussi l'effetto della pianificazione temporale, l'analisi parametrica dei coefficienti dell'algoritmo ACO, l'analisi di un caso semplificato e il confronto tra scenari statici e dinamici.

## Capitolo 2

# I detriti spaziali

### 2.1 Definizione e classificazione dei detriti spaziali

Con il termine detriti spaziali si indicano tutti gli oggetti artificiali, inclusi frammenti e loro componenti, che si trovano in orbita attorno alla Terra o in fase di rientro nell'atmosfera e che non svolgono più alcuna funzione utile. Tra le possibili cause di formazione si annoverano principalmente operazioni svolte durante le missioni, incidenti impreveduti e azioni intenzionali.

In generale, i detriti spaziali possono essere classificati in base alla possibilità di ricondurne l'origine a un evento o a un lancio specifico e alla possibilità di determinarne la natura. Se questi criteri non vengono rispettati, il detrito viene classificato come *Unidentified* (UI). Per ulteriori approfondimenti si rimanda a [1]. Tra i detriti identificabili si distinguono le seguenti sottocategorie:

- *Payloads* (PL): oggetti spaziali, come satelliti operativi, sonde scientifiche e strumenti di osservazione, progettati per svolgere una funzione specifica nello spazio, esclusa la funzione di lancio;
- *Payload mission related objects* (PM): oggetti spaziali che hanno svolto una funzione a supporto del funzionamento di un *payload* e che vengono intenzionalmente rilasciati in qualità di detriti, come ad esempio coperture per strumenti ottici, strumenti di calibrazione, elementi dispiegabili.
- *Payload fragmentation debris* (PF): oggetti spaziali frammentati o rilasciati involontariamente da un *payload*, la cui origine può essere ricondotta a un determinato evento. Questa categoria include tutti i detriti provocati dall'esplosione o collisione di un *payload* con un altro oggetto.
- *Payload debris* (PD): oggetti spaziali frammentati o rilasciati involontariamente da un *payload* la cui origine non è chiara. Questi oggetti sono comunque caratterizzati da proprietà orbitali o fisiche che permettono di associarli a una determinata sorgente;

- *Rocket body* (RB): oggetti spaziali progettati per svolgere funzioni legate al lancio. Ne sono un classico esempio gli stadi dei lanciatori, ma non i *payload* che rilasciano a loro volta *payload* più piccoli;
- *Rocket mission related objects* (RM): oggetti spaziali che hanno svolto una funzione a supporto del *Rocket body* e che vengono rilasciati intenzionalmente come detriti spaziali. Esempi comuni includono *fairings* e motori;
- *Rocket fragmentation debris* (RF): oggetti spaziali frammentati o rilasciati involontariamente da un *Rocket body*, la cui origine è riconducibile a un definito evento;
- *Rocket debris* (RD): oggetti spaziali frammentati o rilasciati involontariamente da un *Rocket body*, la cui origine non è chiara, ma le proprietà orbitali o fisiche permettono di correlare l'oggetto a una sorgente.

Infine, con il termine *frammentazione* si intende, in senso lato, qualsiasi evento orbitale che generi detriti spaziali involontariamente, tra cui collisioni, esplosioni e fenomeni di usura.

## 2.2 Scenario attuale

Negli ultimi decenni, il progressivo avanzamento delle tecnologie di identificazione e tracciamento è stato decisivo nell'abbassare la soglia dimensionale minima a partire dalla quale i detriti possono essere rilevati, tracciati e catalogati in modo affidabile. Ad oggi, le attività di tracciamento dei detriti spaziali sono effettuate con misurazioni radar e ottiche da terra, che consentono di individuare oggetti di dimensioni superiori a 5–10 cm in LEO e superiori a 0.3–1.0 m nelle orbite geostazionarie, con alcuni sensori specializzati in grado di effettuare rilevazioni inferiori al centimetro. Tali oggetti, tuttavia, non possono essere stabilmente inseriti nei cataloghi operativi né correlati in maniera univoca a determinati eventi di lancio. Gli oggetti di dimensioni al di sotto del millimetro, invece, possono essere rilevati solo con metodi indiretti, come l'analisi dei crateri da impatto riscontrati su componenti di veicoli spaziali rientrati.[2]

### 2.2.1 Statistiche

Il modello MASTER (Meteoroid and Space Debris Terrestrial Environment Reference) dell'ambiente dei detriti spaziali sviluppato dall'ESA, aggiornato al 1° agosto 2024, riporta le seguenti stime circa il numero di oggetti spaziali in orbita:

- 54000 oggetti più grandi di 10 cm (compresi circa 9300 payload attivi);
- 1.2 milioni di oggetti con dimensione compresa tra 1 cm e 10 cm;
- 130 milioni di oggetti tra 1 mm e 1 cm.

Nella Tabella 2.1 vengono riportate le statistiche estese dell’Agenzia Spaziale Europea [3], relative alle categorie di detriti sopracitate nei diversi regimi orbitali, definite in termini di:

- numero attuale di oggetti orbitanti;
- massa attuale degli oggetti orbitanti [t];
- sezione trasversale attuale degli oggetti orbitanti [ $m^2$ ].

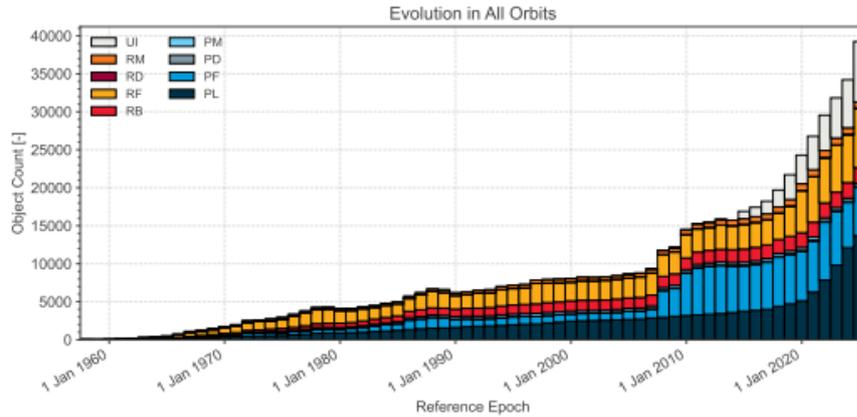
Per ulteriori riferimenti si rimanda a [3].

Regime orbitale		PL	PF	PD	PM	RB	RF	RD	RM	UI	Totale
LEO	Numero	13263	4607	102	208	934	3617	26	507	434	23698
	Massa	6223.4	0.0	0.0	4.1	1437.2	0.0	0.0	5.7	0.0	7670.4
	Area	223171.0	0.0	0.0	35.0	10615.5	1.3	0.0	223.2	0.0	234046.0
GEO	Numero	807	30	3	8	68	0	0	0	52	968
	Massa	2695.6	0.0	0.0	1.0	139.9	0.0	0.0	0.0	0.0	2836.5
	Area	26150.5	0.0	23.6	8.4	1518.2	0.0	0.0	0.0	0.0	27700.7
EGO	Numero	556	851	19	53	201	89	3	5	3293	5070
	Massa	1025.6	0.0	0.0	6.6	387.1	0.0	0.0	0.3	0.0	1419.6
	Area	12910.2	0.0	0.6	45.0	4419.7	0.0	0.0	9.7	0.0	17385.1
GTO	Numero	48	28	1	10	223	195	9	46	726	1286
	Massa	88.4	0.0	0.0	1.0	493.0	0.0	0.0	21.0	0.0	603.4
	Area	740.7	0.0	0.0	8.8	5119.2	0.0	0.0	572.9	0.0	6441.6
NSO	Numero	293	0	0	1	100	0	0	2	52	448
	Massa	384.6	0.0	0.0	0.4	228.6	0.0	0.0	0.0	0.0	613.6
	Area	3212.1	0.0	0.0	0.8	1956.6	0.0	0.0	0.0	0.0	5169.5
MEO	Numero	76	1	5	53	28	188	1	3	836	1191
	Massa	118.5	0.0	0.0	0.4	50.8	0.0	0.0	4.2	0.0	173.8
	Area	1172.0	0.0	0.0	11.2	518.7	0.0	0.0	21.4	0.0	1723.3
LMO	Numero	84	134	2	45	262	608	22	211	959	2327
	Massa	78.6	0.0	0.0	6.9	547.9	0.0	0.0	88.0	4.0	725.4
	Area	726.5	0.0	0.0	22.8	5711.8	0.6	0.0	1556.4	12.1	8030.2
MGO	Numero	72	76	1	3	176	2682	5	0	2498	5513
	Massa	99.6	0.0	0.0	1.9	292.7	0.0	0.0	0.0	0.0	394.3
	Area	931.1	0.0	0.0	14.7	3186.8	0.0	0.0	0.0	0.0	4132.5
HEO	Numero	37	135	0	1	55	124	0	0	1842	2194
	Massa	50.4	0.0	0.0	0.1	141.8	0.0	0.0	0.0	0.0	192.2
	Area	697.2	0.0	0.0	0.1	1384.3	0.0	0.0	0.0	0.0	2081.7
Altri	Numero	46	11	0	4	4	0	0	0	181	246
	Massa	68.6	0.0	0.0	0.1	9.7	0.0	0.0	0.0	0.0	78.3
	Area	515.5	0.0	0.0	0.4	97.2	0.0	0.0	0.0	0.0	613.1
Totale	Numero	15282	5873	133	386	2051	7503	66	774	10873	42941
	Massa	10833.2	0.0	0.0	22.4	3728.7	0.0	0.0	119.3	4.0	14707.6
	Area	270226.9	0.0	24.2	147.2	34527.9	1.9	0.0	2383.5	12.1	307323.8

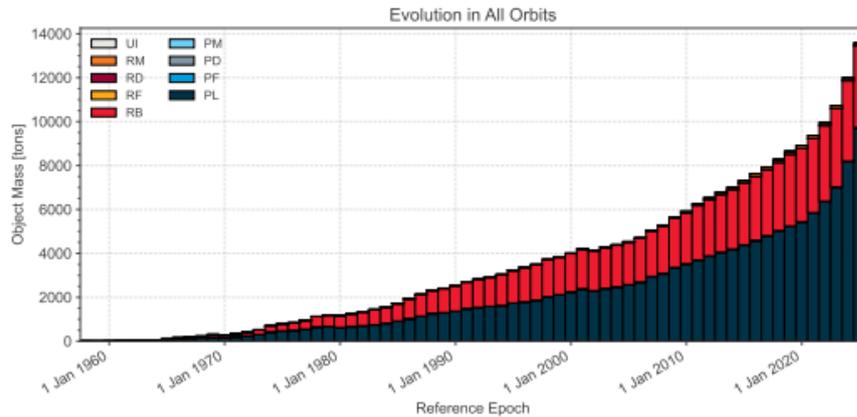
**Tabella 2.1:** Numero, massa, sezione trasversale delle categorie dei detriti nei regimi orbitali

L’analisi dei dati evidenzia che nella regione LEO si concentra la maggior parte dei detriti spaziali, con un contributo pari a circa il 55% del numero complessivo,

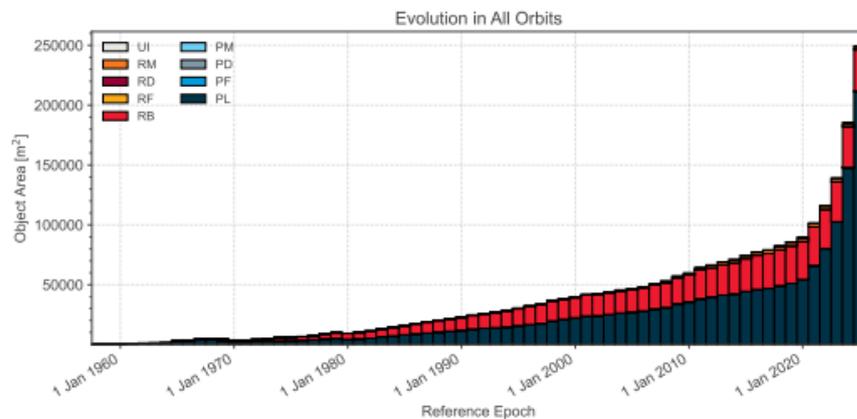
il 52% della massa totale e il 76% della sezione trasversale orbitante. Tali valori, nettamente superiori rispetto a quelli degli altri regimi orbitali, evidenziano come la regione LEO rappresenti la zona maggiormente critica nella gestione dei detriti spaziali.



(a) Evolution of number of objects.



(b) Evolution of mass.



(c) Evolution of area.

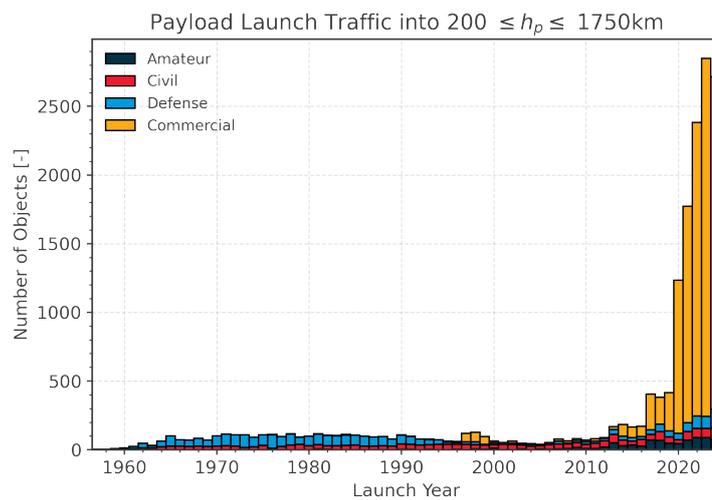
**Figura 2.1:** Evoluzione nel tempo di numero, massa, sezione trasversale per categoria di detrito

La Figura 2.1 mostra l'evoluzione dell'ambiente spaziale in termini di numero di oggetti, massa e sezione trasversale, considerando tutte le orbite geocentriche, suddivisi secondo la classificazione adottata per i detriti spaziali. I dati riportati riguardano esclusivamente oggetti catalogati e, pertanto, sono vincolati dalle capacità dei sistemi di sorveglianza spaziale disponibili al momento della rilevazione.

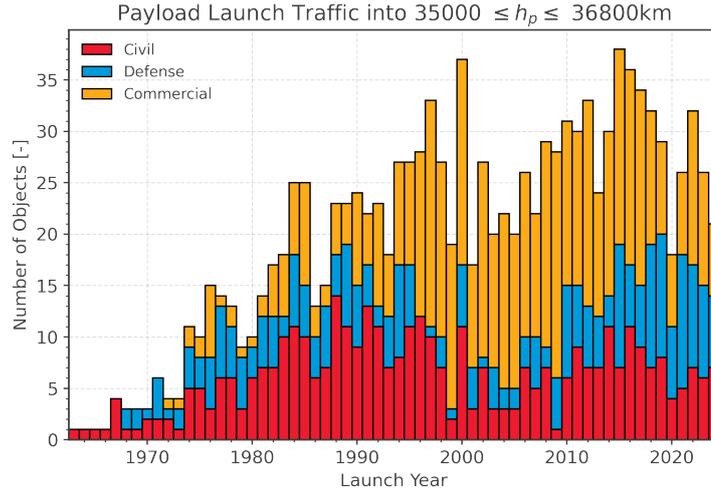
### 2.2.2 Evoluzione del settore spaziale

La continua evoluzione del settore spaziale contribuisce ad aggravare la situazione già di per sé critica. Lo spazio orbitale terrestre deve essere necessariamente inteso come una risorsa finita per la sostenibilità a lungo termine delle attività e operazioni nello spazio. In questa ottica, per valutare lo scenario attuale occorre l'analisi congiunta di più fattori, tra cui il volume del traffico, le tipologie di *spacecraft* e le categorie di operatori coinvolti. In particolare, a partire dal 2015, il traffico spaziale ha mostrato cambiamenti significativi, soprattutto nelle orbite terrestri basse, che il migliorato accesso allo spazio ha reso più economiche per molti paesi e istituzioni. Inoltre, il settore è orientato verso la miniaturizzazione dei sistemi spaziali e il dispiegamento di grandi costellazioni, con un crescente ruolo degli operatori commerciali. [1]

Sebbene nel 2024 la crescita esponenziale del numero di nuovi *payload* abbia mostrato un rallentamento, il numero di lanci è continuato ad aumentare e, in termini di massa e di area totale, il traffico ha raggiunto i livelli più elevati mai registrati. Le Figure 2.2 e 2.3 mostrano l'andamento dei lanci effettuati negli anni, rispettivamente per le orbite LEO e GEO, distinguendo tra i tipi di operatore: amatoriale, civile, difesa e commerciale.



**Figura 2.2:** Numero di *payload* lanciati in orbite LEO



**Figura 2.3:** Numero di *payload* lanciati in orbite GEO

### 2.2.3 Decadimento orbitale

Un altro elemento di grande rilevanza è il tempo di permanenza dei detriti. Dato che la resistenza atmosferica è efficace solo ad altitudini inferiori a 250 km, nelle basse orbite LEO si verifica un decadimento naturale in pochi anni. Al contrario, nelle orbite operative più popolate, che si trovano tra 500 e 1.000 km, la permanenza dei detriti in orbita può essere estremamente lunga, di decenni o addirittura secoli, a causa della bassa densità atmosferica. Oltre all'altitudine, nello stimare la velocità di decadimento è utile fare considerazione delle:

- Caratteristiche intrinseche degli oggetti, quali dimensione, forma e coefficiente balistico (rapporto massa/area corretto per il coefficiente di *drag*): oggetti più piccoli e con superficie ridotta tendono a decadere più lentamente rispetto a veicoli spaziali più grandi o con un'area maggiore;
- Condizioni solari: durante i periodi di massima solare, l'energia irradiata dal Sole aumenta la densità atmosferica, accelerando il decadimento degli oggetti.

Dunque, idealmente occorrerebbe sincronizzare il lancio con uno scenario specifico di attività solare, ma dato che questo non sempre può essere fattibile, un'altra strategia che si può adottare per rispettare i requisiti di vita orbitale consiste nel ridurre il coefficiente balistico del veicolo o il rapporto massa/area, per esempio con tecnologie di *deorbit* come i dispositivi di *drag*. Considerare questi fattori è quindi fondamentale non solo per stimare i tempi di permanenza dei detriti, ma anche per valutare il rischio di collisioni e per progettare efficacemente strategie di mitigazione e rimozione attiva.

## 2.3 Rischi dell'inquinamento spaziale: collisioni e Sindrome di Kessler

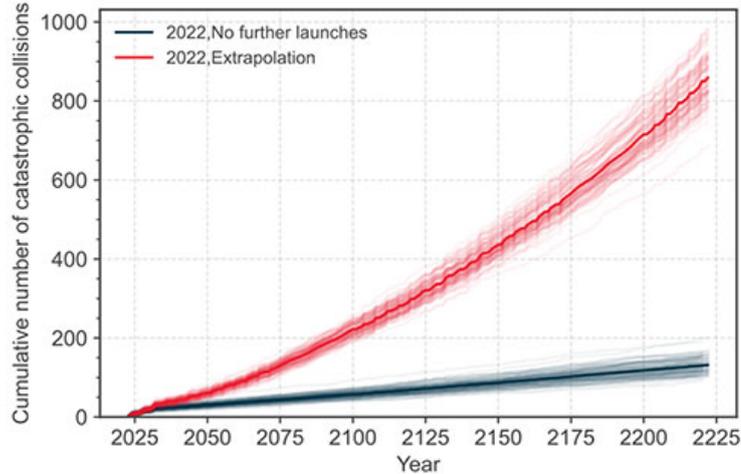
Date le elevate velocità orbitali, anche detriti di piccole dimensioni, come coperture di lenti, frammenti di materiale isolante o schegge derivanti da collisioni ed esplosioni, rappresentano un rischio significativo per l'integrità di satelliti e infrastrutture spaziali. Infatti, in orbite basse le velocità tipiche sono dell'ordine dei 10 *km/s*, per cui:

- l'impatto con oggetti di dimensioni dell'ordine del millimetro può causare danni locali o compromettere un sistema o sottosistema di uno *spacecraft*;
- l'impatto con oggetti di dimensioni dell'ordine del centimetro può disabilitare un satellite operativo o provocare la frammentazione dello stesso o dello stadio del lanciatore associato;
- l'impatto con oggetti di dimensioni dell'ordine delle decine di centimetri può determinare la completa distruzione del veicolo spaziale e la generazione di una nuvola di detriti.

Oltre alla sicurezza e al corretto svolgimento delle operazioni spaziali, è necessario considerare anche il risvolto economico della problematica, dato che il monitoraggio e le manovre di *collision avoidance* comportano costi significativi in termini di propellente e di vita operativa dei satelliti.

Tuttavia, la criticità maggiore associata all'inquinamento da detriti spaziali è la potenziale perdita di orbite utili e conseguente inutilizzabilità di intere regioni dell'orbita terrestre, compromettendo la possibilità di lanciare nuovi satelliti o di mantenere operative le infrastrutture esistenti. Infatti, già nel 1978, è stata formulata dall'astrofisico Donald J. Kessler l'ipotesi secondo cui, oltre un livello critico di densità di oggetti in orbita LEO, potrebbero innescarsi una serie incontrollata di collisioni. Questo fenomeno, noto come "Sindrome di Kessler", descrive uno scenario in cui ogni impatto produce nuovi frammenti, incrementando a loro volta la probabilità di ulteriori collisioni e generando così un effetto a cascata nell'ambiente orbitale.

Secondo le stime più recenti fornite dall'ESA, la densità di oggetti presenti attualmente nelle orbite terrestri basse ha raggiunto un livello tale da poter già costituire la condizione necessaria all'innescarsi di una serie di cascate a catena (Figura 2.4). Ciò implica che l'attuale popolazione di detriti spaziali in LEO non solo rappresenti una criticità per la sicurezza operativa delle missioni in corso, ma possa altresì configurarsi come un potenziale punto di non ritorno.



**Figura 2.4:** Simulazioni sul numero cumulativo di collisioni future in LEO

Ad oggi, un ulteriore fattore di criticità è rappresentato dagli eventi di frammentazione non deliberata, diversi dalle collisioni, che costituiscono la principale sorgente di nuovi detriti. Negli ultimi due decenni se ne è osservata un'occorrenza media di circa 10.5 all'anno, valore che si riduce a circa 1.7 considerando i frammenti con vita orbitale molto breve, e scende ulteriormente a 0.4 qualora vengano esclusi gli eventi non attribuibili a cause identificate. Un dato emblematico è fornito dal 2024, anno in cui si sono verificati diversi episodi di frammentazione di particolare rilievo, responsabili della produzione di oltre 3000 frammenti catalogati. [1]

Per analizzare lo scenario così presentato, negli anni sono stati sviluppati diversi modelli ambientali, con l'obiettivo di analizzare l'evoluzione a lungo termine dell'ambiente dei detriti spaziali, utilizzando come input la popolazione attuale. La maggior parte di questi rientra nella categoria degli approcci semi-deterministici, dove le orbite di un insieme di campioni rappresentativi vengono propagate nel tempo, come i software DAMAGE (United Kingdom Space Agency), DELTA (European Space Agency), LEGEND (National Aeronautics and Space Administration), LUCA (German Aerospace Centre), MEDEE (National Centre for Space Studies), NEODEEM (Kyushu University e JAXA) e SDM (Consiglio Nazionale delle Ricerche). Questo tipo di metodi garantisce una buona flessibilità, a discapito di costi computazionali elevati, soprattutto per modellare la propagazione di nubi di detriti sulla scala del centimetro-millimetro. Sono stati sviluppati anche i modelli Particle-In-a-Box (PIB), che prevedono una discretizzazione dello spazio fisico in gusci o volumi, senza caratterizzare individualmente ogni oggetto in orbita. Se ne ricava una definizione meno accurata del profilo di missione, a fronte di un notevole risparmio computazionale. [4]

## 2.4 Strategie di mitigazione

La presenza dei detriti spaziali ha intrinsecamente accompagnato la storia del settore aerospaziale fin dai suoi albori: è sufficiente pensare al lancio dello Sputnik I, che nel

1957 ha universalmente segnato l'inizio dell'era spaziale, ma contestualmente anche prodotto il primo detrito artificiale, il satellite stesso e il razzo che lo ha messo in orbita.

Nella seguente sezione si ripercorrono i principali eventi che hanno gettato le fondamenta per tutte le moderne attività di *Space Situational Awareness* (SSA) e gestione dei detriti spaziali.

- 1957: lancio di Sputnik 1; contestualmente la *United States Air Force* avvia il *Project Space Track*, il primo grande programma statunitense di sorveglianza spaziale sperimentale e il NORAD (*North American Aerospace Defense Command*) istituisce lo *Space Orbit Catalog*, il primo database centralizzato operativo 24/7;
- Anni Sessanta-Settanta: il progressivo aumento delle attività spaziali, dai lanci in assenza di normative che imponessero disposizioni di fine vita per stadi e satelliti, ai test ASAT, ha contribuito alla formazione di detriti orbitali [5];
- 1979: la NASA fonda l'*Orbital Debris Program Office* (ODPO), che introduce le prime linee guida per la mitigazione, con particolare attenzione sulla prevenzione di esplosioni accidentali e di riduzione della generazione di detriti nelle operazioni di routine;
- 1993: Pubblicazione della NASA RP-1320, che fornisce una panoramica cronologica dello sviluppo della gestione dei detriti dal 1961 e fondazione dell'*Inter-Agency Space Debris Coordination Committee* (IADC) come comitato intergovernativo per coordinare gli sforzi a livello internazionale [6];
- 2002: l'IADC pubblica le linee guida per la mitigazione dei detriti spaziali [7];
- 2008: l'ESA adotta i *Requirements on Space Debris Mitigation for Agency Projects* [8];
- 2017: la NASA emette la NPR 8715.6B, aggiornando le politiche per limitare la generazione di detriti nelle missioni NASA [9];
- 2023: l'ESA pubblica linee guida aggiornate, mirate a ridurre significativamente la generazione di nuovi detriti entro il 2030 [10].

Tra questi eventi chiave, si vuole porre particolare attenzione sulle prime linee guida proposte dall'IADC nel 2002, che sono formalmente state il punto di partenza per ogni *policy* successiva e per l'elaborazione dei relativi standard tecnici. La standardizzazione delle misure di mitigazione rappresenta un passo fondamentale per affrontare efficacemente e globalmente il problema della gestione dei detriti spaziali.

#### **2.4.1 Principali obiettivi delle misure di mitigazione**

In senso lato le misure di mitigazione dei detriti spaziali possono essere ricondotte ai seguenti fondamentali obiettivi:

- Limitazione dei detriti spaziali generati durante le operazioni ordinarie, secondo cui in tutti i regimi orbitali operativi, sia i *payload* che gli stadi dei lanciatori dovrebbero essere progettati in modo da non rilasciare detriti;
- Minimizzazione del potenziale di frammentazione in orbita, sia durante le fasi operative, per esempio incrementando l'affidabilità di sistemi e sottosistemi, sia nelle fasi post-missione, dove le frammentazioni possono essere causate dall'energia immagazzinata. Le frammentazioni intenzionali, come Test esplosivi di armi antisatellite (ASAT), distruzione controllata di satelliti o stadi di razzo, e test di materiali o componenti spaziali che vengono frammentati deliberatamente, devono essere evitate a ogni costo o, se necessarie, condotte a quote sufficientemente basse per garantire un rapido decadimento orbitale;
- Smaltimento post-missione, in particolare sono stati identificati due regimi protetti, nell'orbita terrestre bassa ( $LEO_{IADC}$ ) e nell'orbita geostazionaria ( $GEO_{IADC}$ ), che devono essere liberati dalla presenza di oggetti artificiali non funzionanti;
- Prevenzione delle collisioni in orbita: il progetto di un qualsiasi oggetto spaziale deve valutare e limitare la probabilità di collisione accidentale, considerando, quando disponibili, i dati orbitali per progettare eventuali manovre di *collision avoidance* e pianificare opportunamente le finestre di lancio.

In particolare la nuova *policy* introdotta dall'ESA, cioè il cosiddetto approccio *Zero Debris* e le ultime linee guida adottate a partire dal Novembre 2023 includono la riduzione del periodo massimo di *deorbit* a fine missione in LEO da 25 a 5 anni e l'introduzione di uno *Space Debris Mitigation Assessment Board* per valutare quali missioni potrebbero non soddisfare i requisiti posti. Prevedono inoltre che la probabilità garantita a progetto di successo di deorbitamento sia superiore al 90% per ogni veicolo spaziale o stadio di razzo, con misure ancora più stringenti per le costellazioni di satelliti, e che la probabilità di collisioni a fine missione in LEO sia inferiore a 1 su 1000.

## 2.5 Le missioni di Rimozione Attiva dei Detriti

Oltre all'implementazione di misure di mitigazione più stringenti, lo scenario precedentemente delineato impone la pianificazione di missioni di rimozione attiva dei detriti spaziali. Recenti studi hanno infatti dimostrato che, eliminando 5 detriti all'anno, il rischio associato alla gestione dei detriti possa essere effettivamente mitigato nel futuro. A differenza delle strategie di mitigazione, finalizzate principalmente alla prevenzione della generazione di nuovi detriti, le missioni ADR si propongono come un approccio interventistico per la rimozione mirata di oggetti in orbita, con lo scopo di ridurre la densità mediante il recupero o il trasferimento su traiettorie di rientro controllato.

Le missioni ADR presentano numerose sfide tecniche, tra cui l'identificazione e il tracciamento dei detriti da rimuovere, operazioni di rendezvous con oggetti in rotazione non controllata, la cattura di detriti con geometrie complesse e l'ottimizzazione della sequenza di rimozione per missioni multi-target.

### 2.5.1 Tecnologie di cattura e iniziative avviate

Le principali soluzioni sviluppate negli ultimi anni dalle agenzie spaziali sono tecnologie di cattura e di *de-orbiting*, che vengono installate direttamente sull'oggetto per favorirne il rientro controllato in atmosfera. Questi si possono a loro volta distinguere tra sistemi attivi, che applicano in modo diretto una forza sul detrito per ridurne velocità, e in sistemi passivi, che agiscono indirettamente sul detrito sfruttando forze esterne per modificarne l'orbita. Le principali tecnologie di cattura sono le reti, gli arpioni e i bracci robotici, mentre tra i sistemi di *de-orbiting* figurano oltre a piccoli sistemi propulsivi chimici o elettrici, i tether elettromagnetici, i laser e l'*Ion Beam Shepherd*.

Gli arpioni e le reti presentano una struttura rigido-flessibile accoppiata, un'elevata adattabilità al target e una configurazione relativamente semplice. Entrambe le tecnologie sono state validate con test su target sperimentali nell'ambito della missione *RemoveDEBRIS* avvenuta nel 2018, che ha formalmente rappresentato la prima dimostrazione in orbita di tecniche di rimozione attiva. [11]

I bracci robotici, invece, sono sistemi meccanici progettati per afferrare e manipolare gli oggetti nello spazio, per cui richiedono avanzate capacità di operazioni di *Rendezvous and Proximity*. Possono fare uso di *gripper*, pinze, meccanismi di aggancio o superfici magnetiche. Questa tecnologia è stata già testata nella missione ELSA-d di *Astroscale* nel 2021 e verrà utilizzata nella ClearSpace-1 dell'ESA, la prima vera e propria missione ADR progettata per la rimozione del detrito spaziale VESPA e programmata per il 2026.

Invece, tra i sistemi di deorbitazione attivi in fase di sviluppo si annoverano:

- i tether elettromagnetici, dove un tether conduttivo, muovendosi rispetto al campo magnetico terrestre genera una forza elettromagnetica sul detrito che lo rallenta e ne favorisce il decadimento; [12]
- la tecnologia laser, utilizzata per operare sia a intensità inferiori alla soglia di ablazione, per cui il laser avrebbe il compito di deviare il detrito attraverso la pressione della luce applicatavi, sia a intensità più elevate per riscaldare e vaporizzare il materiale riducendone la dimensione; [13]
- l'*Ion Beam Shepherd*, tecnologia basata sull'emissione controllata di un fascio di plasma di ioni quasi-neutro, il cui impulso trasferisce quantità di moto al detrito, modificandone l'orbita. [14]

Infine, tra i sistemi di deorbitazione passivi si menzionano le *Drag Sails*, membrane sottili e leggere, progettate per aumentare la superficie dell'oggetto esposta alla resistenza atmosferica.

## 2.6 Ottimizzazione combinatoria

La pianificazione di missioni ADR può essere modellata come un problema di ottimizzazione combinatoria, un'ampia categoria di problemi che si pone l'obiettivo di individuare la soluzione ottima all'interno di un insieme discreto e finito di possibili configurazioni. Dal punto di vista computazionale, questi problemi vengono classificati in base alla loro complessità algoritmica. In particolare, i problemi appartenenti alla classe P sono quelli risolvibili in un tempo polinomiale rispetto alla dimensione dell'input, mentre i problemi della classe NP sono quelli per i quali una soluzione proposta può essere solo verificata in tempo polinomiale, ma non è noto se possano essere risolti altrettanto efficientemente. Il tipo di problema in esame ricade in quest'ultima categoria, precisamente negli *NP-hard* e può essere risolto attraverso i cosiddetti metodi metaeuristici.

### 2.6.1 Algoritmi metaeuristici

Gli algoritmi metaeuristici sono una categoria di metodi computazionali che traggono ispirazione dalla biologia, come processi e comportamenti animali, o da fenomeni fisici, e che vengono utilizzati per la risoluzione di molte classi di problemi di ottimizzazione. In particolare, si sostituiscono ai classici modelli analitici che, soprattutto quando il problema prevede dimensioni elevate dello spazio di ricerca o molteplici punti di massimo e minimo locale, sono impraticabili perché o prevedono tempi eccessivi o raggiungono prematuramente la convergenza a soluzioni ottime solo a livello locale, perdendo il focus sul punto di vista globale.

Invece i metodi metaeuristici, che sono di tipo *derivative-free*, e quindi non prevedono la computazione di derivate, al contrario dei metodi *gradient-based*, hanno una struttura più semplice, evitando la convergenza ad ottimi locali, e sono in grado di gestire anche dimensioni elevate dello spazio delle soluzioni, garantendo una ricerca ampia, efficace ma anche veloce. Forniscono più precisamente soluzioni sub-ottimali, ovvero non convergono necessariamente all'ottimo ma a soluzioni di qualità in tempi brevi e costi computazionali contenuti.

Sono algoritmi estremamente versatili, studiati per un ampio range di problemi di ottimizzazione e applicati in disparati campi, in quanto sono facilmente modificabili per adeguarsi al soddisfacimento dei requisiti specifici di un dato problema. In particolare, risultano adatti anche alla risoluzione di problemi di ottimizzazione combinatoria di tipo NP-hard, come il problema del commesso viaggiatore TSP.

A seguire, vengono presentate alcune tra le metaeuristiche più significative per l'applicazione al problema in esame.

### **2.6.2 Algoritmi genetici**

Le metaeuristiche genetiche appartengono alla classe degli algoritmi evolutivisti. Si tratta di una tecnica di ottimizzazione che trova le sue fondamenta nei principi biologici dell'evoluzione e selezione naturale darwiniana, in quanto questi metodi prevedono processi di selezione, ricombinazione e mutazione delle soluzioni per favorire la sopravvivenza dell'individuo più adatto.

Sono algoritmi *population-based* che partono con la generazione casuale di una popolazione iniziale di  $N$  individui che viene successivamente fatta evolvere tramite specifici operatori genetici, come quelli di *crossover*, che consentono di combinare il materiale genetico di due individui, e quelli di mutazione, che garantiscono un certo grado di diversità nelle soluzioni.

Ogni soluzione è codificata con una stringa contenente i parametri del problema, che costituiscono i veri e propri geni dell'individuo, e valutata in termini di qualità con una funzione di *fitness*, che esprime la capacità della soluzione di ottimizzare la funzione obiettivo. Seguendo l'analogia genetica, essa rappresenta il legame tra le caratteristiche che manifesta la soluzione rispetto al "patrimonio genetico" di un individuo, ed esprime quanto un soggetto sia adatto all'ambiente circostante, e conseguentemente adeguato per essere selezionato come "genitore" per la riproduzione. Così facendo si garantisce che ad ogni generazione i soggetti identificati come buoni "genitori", che hanno gli attributi migliori e maggiore possibilità di sopravvivenza, trasmettano le loro qualità agli individui "figli".

Gli algoritmi genetici sono particolarmente vantaggiosi perché la loro struttura evolutiva, basata sul miglioramento iterativo di una popolazione di soluzioni candidate, consente di superare eventuali configurazioni iniziali sub-ottimali ed evitare il rischio di convergere prematuramente verso minimi locali. Inoltre, mantenendo una componente di diversità nella popolazione, questi metodi sono estremamente adattabili e flessibili. Infine, dato che ogni soluzione può essere elaborata in modo indipendente dalle altre, la struttura dell'algoritmo risulta facilmente parallelizzabile, permettendo di ridurre significativamente i tempi di esecuzione.

### **2.6.3 Ant Colony Optimization**

L'Ant Colony Optimization è un tipo di algoritmo basato sul comportamento naturale delle formiche nella ricerca delle fonti di cibo, sfruttando i meccanismi di organizzazione e cooperazione tra gli agenti artificiali (le formiche stesse) nell'identificazione della soluzione migliore. Il metodo prevede un'iniziale costruzione probabilistica delle soluzioni, che combina informazioni euristiche con la concentrazione di feromone. Infatti,

questo metodo simula la deposizione, da parte del singolo agente, di una traccia e la tendenza delle formiche successive a seguire il tratto in cui essa è più intensa e quindi il percorso più breve. Nelle iterazioni successive il feromone viene aggiornato in base alla qualità delle soluzioni precedentemente trovate e contemporaneamente viene applicato un meccanismo di evaporazione per prevenire la convergenza prematura dell'algoritmo. Grazie alla sua ottima capacità di esplorazione del dominio delle soluzioni e la rapida convergenza all'ottimo o sub-ottimo, è uno dei modelli più utilizzati nell'ambito dell'ottimizzazione combinatoria, non solo sul TSP, ma anche in problemi di *routing*, *scheduling* e progettazione di reti. Questa tipologia di algoritmo metaeuristico verrà ampiamente approfondita nel Capitolo 5.

#### **2.6.4 Particle Swarm Optimization**

L'ottimizzazione a sciame di particelle è un metodo euristico che si basa sul comportamento sociale di alcuni gruppi di animali come gli stormi di uccelli. In particolare, getta le sue fondamenta sul concetto di *Swarm Intelligence*, che studia le interazioni dei componenti o individui di un sistema rispetto all'ambiente circostante.

Le potenziali soluzioni dell'algoritmo sono rappresentate da un insieme di particelle, che si muovono nell'esplorazione dello spazio guidate da tre diversi meccanismi: l'inerzia, cioè la tendenza dello stormo a mantenere la stessa direzione, l'attrazione cognitiva, ovvero la propensione del singolo a muoversi verso la propria posizione migliore, e l'attrazione sociale, ossia l'inclinazione a seguire la direzione migliore per tutto il gruppo. Questi tre parametri permettono un'ottima esplorazione dello spazio delle soluzioni e, secondo i medesimi, ad ogni iterazione le posizioni e velocità delle particelle vengono computate combinando la posizione migliore dell'individuo con quella dell'intero sciame. In questo modo l'individuo influenza il gruppo e viceversa verso il raggiungimento dell'ottimo globale.

Questo modello è caratterizzato da una forte semplicità implementativa, in quanto richiede l'impostazione di un numero molto contenuto di parametri: la dimensione dello sciame, i coefficienti di attrazione cognitiva e sociale, e l'inerzia. Inoltre, è un algoritmo parallelizzabile, è flessibile in quanto può essere applicato a problemi continui, discreti, multi-obiettivo e combinatori, e può anche essere ibridato con altre metaeuristiche per migliorarne le prestazioni.

## Capitolo 3

# Fondamenti di astrodinamica

In questo capitolo vengono richiamati i concetti fondamentali dell'astrodinamica, che costituiscono il necessario quadro di riferimento per la comprensione delle tematiche sviluppate e l'interpretazione dei risultati e delle analisi esposte nei capitoli successivi di questo elaborato. Per ulteriori approfondimenti, si rimanda a [15] e [16].

### 3.1 Meccanica orbitale

L'interesse per la descrizione e la comprensione dei moti celesti accompagna la civiltà umana sin dalle sue origini. Le prime interpretazioni sistematiche dell'universo risalgono alla filosofia naturale greca, e in particolare ad Aristotele, che formulò la teoria geocentrica. Secondo tale concezione, la Terra occupava una posizione centrale e immobile, mentre tutti gli altri corpi celesti si muovevano intorno ad essa con moto circolare uniforme. Questo modello, successivamente perfezionato da Tolomeo, rimase il paradigma dominante per oltre un millennio, fino alla rivoluzione scientifica del XVI secolo, quando l'astronomo Mikołaj Kopernik, con la pubblicazione *De Revolutionibus Orbium Coelestium* del 1543, formulò una cosmologia eliocentrica ponendo il Sole al centro dell'universo e la Terra, insieme agli altri pianeti, in orbite circolari attorno ad esso, con il centro dislocato rispetto al centro del Sole.

Il contributo decisivo alla comprensione quantitativa dei moti planetari fu fornito da Johannes Kepler, che, sulla base delle osservazioni di Tycho Brahe, formulò tre leggi empiriche in grado di descrivere con grande accuratezza il moto dei pianeti pubblicate in due trattati, *Astronomia Nova* nel 1609 e *Harmonices Mundi* nel 1619.

- **Prima legge di Keplero** L'orbita descritta da ciascun pianeta è un'ellisse con il Sole situato in uno dei due fuochi.
- **Seconda legge di Keplero** Il segmento che unisce il Sole a un pianeta spazia aree uguali in tempi uguali.
- **Terza legge di Keplero** I quadrati dei periodi orbitali dei pianeti sono proporzionali ai cubi delle loro distanze medie dal Sole.

A partire da tali leggi, nel XVII secolo, Isaac Newton fornì la giustificazione fisica delle leggi puramente descrittive enunciate da Kepler, formulando le leggi del moto e della gravitazione universale, e ponendo le basi della dinamica classica. La sintesi newtoniana permise di unificare la meccanica terrestre e quella celeste in un unico quadro teorico, da cui discende la moderna meccanica orbitale.

In particolare, nel primo libro di *Philosophiae Naturalis Principia Mathematica* nel 1687, Newton introdusse le tre leggi del moto:

- **Prima legge di Newton** Ogni corpo permane nel suo stato di moto rettilineo uniforme o di quiete, a meno che non sia costretto a mutare il proprio stato a causa di forze applicate ad esso.
- **Seconda legge di Newton** La variazione della quantità di moto è proporzionale alla forza impressa ed è nella stessa direzione di tale forza.
- **Terza legge di Newton** Ad ogni azione corrisponde sempre una reazione uguale e contraria.

Per un sistema a massa costante, la seconda legge può essere espressa secondo la relazione

$$\sum \vec{F} = m\vec{a} \quad (3.1)$$

dove  $\sum \vec{F}$  è la sommatoria delle forze che agiscono sulla massa  $m$ , mentre  $\vec{a}$  è il vettore accelerazione valutato rispetto ad un sistema di riferimento inerziale.

Nella medesima trattazione, Newton formulò anche la legge di gravitazione universale, secondo la quale due corpi qualsiasi si attraggono reciprocamente con una forza direttamente proporzionale al prodotto delle loro masse e inversamente proporzionale al quadrato della distanza che li separa:

$$\vec{F}_g = -G \frac{M \cdot m}{r^2} \frac{\vec{r}}{r} \quad (3.2)$$

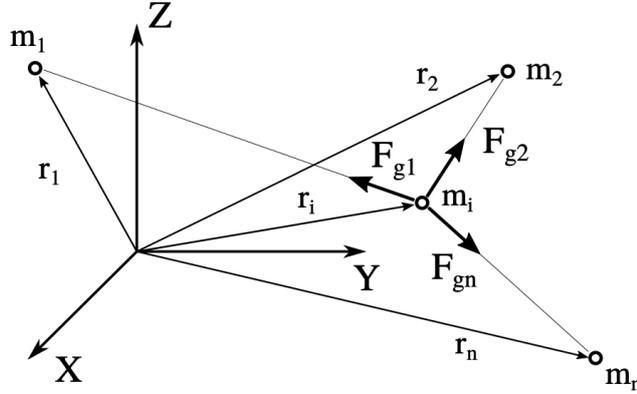
dove  $\vec{F}_g$  è la forza agente sulla massa  $m$ ,  $G$  è la costante gravitazionale universale pari a  $6.673 \cdot 10^{-11} \frac{m^3}{kg \cdot s^2}$ ,  $M$  e  $m$  sono le masse dei due corpi e  $\vec{r}$  è il vettore posizione di  $m$  da  $M$ .

### 3.1.1 Problema degli n-corpi

In un generico istante di tempo, un corpo qualsiasi subisce una generica forza  $\vec{F}$ , che è la somma di tutti i contributi di attrazione gravitazionale degli n-corpi rispetto al corpo considerato e di un termine  $\vec{F}^*$  non gravitazionale. Quest'ultimo comprende l'effetto della non perfetta simmetria dei corpi, la spinta generata dallo *spacecraft* e tutte le altre forze esterne che agiscono su di esso, quali la resistenza atmosferica e la radiazione solare.

$$\vec{F} = \vec{F}^* + \sum_{\substack{j=1 \\ j \neq i}}^n \vec{F}_{gj} \quad (3.3)$$

Se si suppone per ipotesi che gli unici contributi siano di natura gravitazionale e che tutti i corpi siano sfericamente simmetrici, il problema degli n-corpi (visualizzato in Figura 3.1) si traduce nel ricavare la legge del moto del corpo  $m_i$ .



**Figura 3.1:** Problema degli n-corpi

Applicando la legge di gravitazione universale, la forza  $\vec{F}_{gj}$  agente su  $m_i$  per effetto del generico corpo  $m_j$  si valuta come

$$\vec{F}_{gj} = -G \frac{m_i \cdot m_j}{r_{ij}^3} \vec{r}_{ij} \quad (3.4)$$

La sommatoria vettoriale di tutte le forze gravitazionali agenti su  $m_i$  può essere quindi espressa come

$$\vec{F}_g = -G m_i \sum_{\substack{j=1 \\ j \neq i}}^n \frac{m_j}{r_{ij}^3} \vec{r}_{ij} \quad (3.5)$$

Assumendo che la massa del corpo i-esimo sia costante, dall'applicazione della seconda legge di Newton, l'equazione 3.5 può essere riscritta come

$$\vec{r}_i = -G \sum_{\substack{j=1 \\ j \neq i}}^n \frac{m_j}{r_{ij}^3} \vec{r}_{ij} \quad (3.6)$$

L'estensione di tale equazione a tutti i corpi del problema conduce a un sistema di equazioni differenziali non risolubile analiticamente, in quanto caratterizzato da interazioni gravitazionali multiple e accoppiate.

### 3.1.2 Problema dei due corpi

Considerando solo due corpi, il problema precedente presenta diverse semplificazioni. Oltre alle assunzioni di perfetta simmetria sferica dei corpi e di contributi di forza non gravitazionali nulli ( $\vec{F}^* = 0$ ), si ipotizza che il sistema sia composto da due masse  $m_1$  e  $m_2$  dove  $m_1 > m_2$ .

Inoltre, si definiscono:

$$\begin{aligned}\vec{r}_{12} &= \vec{r}_2 - \vec{r}_1 && \text{posizione relativa} \\ \vec{v}_{12} &= \vec{v}_2 - \vec{v}_1 && \text{velocità relativa} \\ \vec{a}_{12} &= \vec{a}_2 - \vec{a}_1 && \text{accelerazione relativa}\end{aligned}\tag{3.7}$$

Sostituendo l'equazione 3.6 nel vettore velocità relativa, si ricava

$$\vec{v}_{12} = -G\frac{m_1}{r_{12}^3}\vec{r}_{12} + G\frac{m_2}{r_{21}^3}\vec{r}_{21}\tag{3.8}$$

Dato che  $\vec{r}_{21} = -\vec{r}_{12}$

$$\vec{v}_{12} = -G\frac{m_1 + m_2}{r_{12}^3}\vec{r}_{12}\tag{3.9}$$

Per semplicità di notazione si sostituisce  $\vec{r}_{12}$  con  $\vec{r}$ ,  $m_1$  con  $M$  e  $m_2$  con  $m$ , da cui si riscrive 3.9 come

$$\vec{v} = -G\frac{M + m}{r^3}\vec{r}\tag{3.10}$$

Introducendo l'ipotesi semplificativa per cui  $M \gg m$ , pienamente giustificata nel caso di un satellite artificiale o di un detrito spaziale in orbita terrestre, si può approssimare  $G(M + m) \approx GM$ . Definendo quindi il parametro gravitazionale  $\mu = GM$ , l'equazione del moto 3.10 si riduce alla forma

$$\vec{v} = -\frac{\mu}{r^3}\vec{r}\tag{3.11}$$

Tale espressione costituisce l'equazione fondamentale del moto relativo nel problema dei due corpi, che descrive il comportamento orbitale di un corpo di massa trascurabile soggetto all'attrazione gravitazionale di un corpo primario.

### 3.1.3 Conservazione dell'energia meccanica

Prima di procedere alla risoluzione dell'equazione del moto per derivare l'espressione che descrive la traiettoria di un satellite, è utile effettuare delle considerazioni preliminari circa la natura del moto orbitale. Nello specifico, il campo gravitazionale è conservativo: ciò implica che un qualsiasi oggetto soggetto unicamente all'effetto della forza di gravità non subisce variazioni della propria energia meccanica totale. In altre parole, la somma tra energia cinetica ed energia potenziale rimane costante nel tempo lungo l'intera traiettoria orbitale.

Si consideri il prodotto scalare dell'equazione del moto con il vettore velocità

$$\vec{r} \cdot \vec{v} + \vec{r} \cdot \frac{\mu}{r^3}\vec{r} = 0\tag{3.12}$$

Poiché  $\vec{a} \cdot \vec{a} = a\dot{a}$ ,  $\vec{v} = \dot{\vec{r}}$  e  $\dot{v} = \dot{\vec{r}}$ , si ricava

$$v\dot{v} + \frac{\mu}{r^3}r\dot{r} = 0\tag{3.13}$$

che si può riscrivere come

$$\frac{d}{dt} \left( \frac{v^2}{2} - \frac{\mu}{r} \right) = 0 \quad (3.14)$$

Il termine tra parentesi rappresenta proprio l'energia meccanica specifica:

$$\varepsilon = \frac{v^2}{2} - \frac{\mu}{r} + c \quad (3.15)$$

dove il primo contributo è l'energia cinetica per unità di massa, il secondo corrisponde all'energia potenziale per unità di massa, e  $c$  è una costante arbitraria. Il valore di tale costante dipende dall'energia potenziale di punto zero, per convenzione fissata all'infinito, da cui  $c = 0$ . Di conseguenza

$$\varepsilon = \frac{v^2}{2} - \frac{\mu}{r} = \text{costante} \quad (3.16)$$

### 3.1.4 Conservazione del momento angolare

In secondo luogo, si consideri il prodotto vettoriale dell'equazione del moto con il vettore  $\vec{r}$

$$\vec{r} \times \vec{\ddot{r}} + \vec{r} \times \frac{\mu}{r^3} \vec{r} = 0 \quad (3.17)$$

Poiché  $\vec{a} \times \vec{a} = 0$ , il secondo termine è nullo e l'equazione precedente si semplifica in

$$\vec{r} \times \vec{\dot{r}} = 0 \quad (3.18)$$

che corrisponde a

$$\frac{d}{dt} (\vec{r} \times \vec{v}) = 0 \quad (3.19)$$

Di conseguenza

$$\vec{r} \times \vec{v} = \vec{h} = \text{costante} \quad (3.20)$$

Il vettore  $\vec{h}$  è il momento angolare specifico e risulta costante lungo l'orbita. Per definizione  $\vec{h}$  è sempre perpendicolare ai vettori  $\vec{r}$  e  $\vec{v}$ , per cui il moto del corpo secondario risulta contenuto in un piano fisso nello spazio, che prende il nome di piano orbitale.

Per ricavare il modulo di tale vettore si introduce il *flight path angle*  $\varphi$ , ovvero l'angolo compreso tra il vettore velocità e l'orizzonte locale che determina la direzione della velocità del corpo (Figura 3.2).

$$h = rv \sin \left( \frac{\pi}{2} - \varphi \right) = rv \cos \varphi \quad (3.21)$$

dove l'angolo  $\pi/2 - \varphi$  è quello della velocità rispetto alla verticale locale, che solitamente prende il nome di *zenith angle*  $\gamma$ .

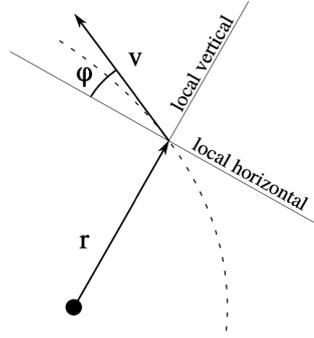


Figura 3.2: Flight path angle

### 3.1.5 Integrazione dell'equazione del moto

Sfruttando le relazioni di conservazione dell'energia e del momento angolare, si può procedere all'integrazione dell'equazione del moto per ricavare la forma generale dell'orbita descritta dal corpo.

A tal fine, si calcola il prodotto vettoriale dell'equazione del moto con il vettore  $\vec{h}$

$$\vec{r} \times \ddot{\vec{r}} = \frac{\mu}{r^3} (\vec{h} \times \vec{r}) \quad (3.22)$$

che corrisponde a

$$\frac{d}{dt} (\vec{r} \times \dot{\vec{r}}) = \mu \frac{d}{dt} \left( \frac{\vec{r}}{r} \right) \quad (3.23)$$

L'integrazione dell'equazione consente di ottenere

$$\vec{r} \times \dot{\vec{r}} = \mu \left( \frac{\vec{r}}{r} \right) + \vec{B} \quad (3.24)$$

dove  $\vec{B}$  è la costante vettoriale di integrazione. Considerando il prodotto scalare di tale relazione con  $\vec{r}$

$$\vec{r} \cdot \vec{r} \times \dot{\vec{r}} = \vec{r} \cdot \mu \left( \frac{\vec{r}}{r} \right) + \vec{r} \cdot \vec{B} \quad (3.25)$$

$\vec{a} \cdot \vec{b} \times \vec{c} = \vec{a} \times \vec{b} \cdot \vec{c}$  e  $\vec{a} \cdot \vec{a} = a^2$ , per cui

$$h^2 = \mu r + r B \cos \nu \quad (3.26)$$

dove  $\nu$  è l'angolo compreso tra la costante vettoriale  $\vec{B}$  e il raggio vettore  $\vec{r}$ . Esplicitandola in funzione di  $r$ , si ottiene l'equazione della traiettoria in coordinate polari, che descrive il moto del corpo secondario attorno al primario:

$$r = \frac{h^2/\mu}{1 + (B/\mu) \cos \nu} \quad (3.27)$$

Si osserva che il raggio  $r$  è minimo se il denominatore è massimo, cioè per  $\cos \nu = 1$  o  $\nu = 0$ , per cui è possibile affermare che  $\vec{B}$  è diretto verso il periastro.

### 3.1.6 Equazione polare di una sezione conica

La sezione conica si definisce come la curva piana ottenuta dall'intersezione di un piano con la superficie di un cono circolare retto, come illustrato in figura 3.3. La forma della curva dipende dall'inclinazione del piano rispetto all'asse del cono:

- se il piano interseca una sola falda del cono, la curva risultante è un'ellisse e se tale piano è parallelo alla base del cono si ottiene un cerchio;
- se il piano è parallelo a una generatrice del cono, l'intersezione definisce una parabola;
- se il piano attraversa entrambe le falde del cono, la sezione ottenuta è un'iperbole, caratterizzata dalla presenza di due rami distinti.

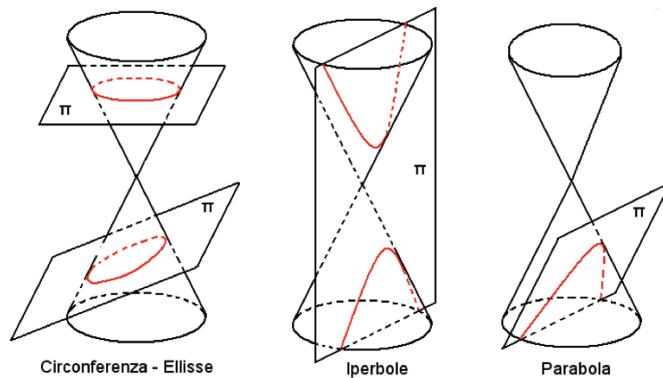


Figura 3.3: Sezioni coniche

Dal punto di vista matematico, la sezione conica viene definita come il luogo dei punti per i quali la distanza da un punto fisso, detto fuoco, è proporzionale alla distanza orizzontale da una retta fissa, detta direttrice. Il rapporto tra queste due distanze è una costante positiva denominata eccentricità, espressa come:

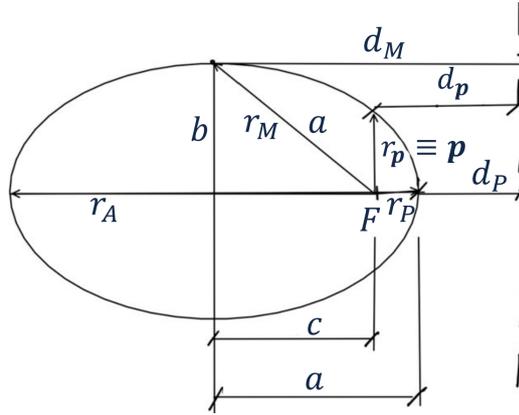
$$e = \frac{r}{d} \quad (3.28)$$

dove  $r$  rappresenta la distanza del punto dal fuoco e  $d$  la distanza dalla direttrice. L'equazione generale di una sezione conica, espressa in coordinate polari con l'origine situata nel fuoco, risulta

$$r = \frac{p}{1 + e \cos \nu} \quad (3.29)$$

dove  $p$  è la costante geometrica *semilatus rectum*, mentre  $\nu$  viene denominato anomalia vera e rappresenta l'angolo compreso tra il vettore posizione e il punto sulla conica più vicino al fuoco. L'equazione così formulata è formalmente identica all'equazione della traiettoria, e tale analogia permette non solo di verificare la prima legge di Keplero, ma anche di affermare che la generica sezione conica rappresenta l'unica soluzione della traiettoria di un satellite nel problema dei due corpi.

In particolare, per quanto riguarda l'ellisse (Figura 3.4), il fuoco  $F$  rappresenta la posizione del corpo primario, la lunghezza della mezza corda passante per entrambi i fuochi  $a$  è denominata semiassse maggiore, la mezza corda perpendicolare all'asse maggiore e passante per un fuoco prende il nome *semilatus rectum* ed è indicata con  $p$ , e la distanza dal centro al fuoco è rappresentata dal parametro  $c$ . Inoltre, gli estremi dell'asse maggiore di un'orbita prendono il nome di apside, con  $r_p$  il punto più vicino al corpo primario denominato periapside, e  $r_a$  il più lontano, detto apoapside. Nel caso di un'orbita circolare, tali punti non sono univocamente definiti poiché la distanza dal corpo centrale rimane costante lungo tutta la traiettoria; viceversa, per le orbite aperte (paraboliche o iperboliche) l'apoapside perde significato fisico.



**Figura 3.4:** Parametri geometrici dell'ellisse

Dalla definizione di sezione conica si ricavano le espressioni

$$e = \frac{c}{a} \quad (3.30)$$

$$p = a(1 - e^2) \quad (3.31)$$

che risultano valide per qualsiasi conica, ad eccezione della parabola.

La distanza dal fuoco primario al periapside o all'apoapside si ricava imponendo i valori  $\nu = 0$  o  $\nu = \pi$  nell'equazione 3.29, da cui

$$r_p = \frac{p}{1 + e} = a(1 - e) \quad (3.32)$$

$$r_a = \frac{p}{1 - e} = a(1 + e) \quad (3.33)$$

Dall'analogia tra l'equazione della traiettoria (3.27) e quella della generica sezione conica (3.29), si ottiene il vettore eccentricità:

$$\vec{e} = \frac{\vec{B}}{\mu} \quad (3.34)$$

che è un vettore costante in modulo e diretto dal fuoco  $F$  al periapside. Inoltre, si osserva che il *semilatus rectum*  $p$  può essere formulato unicamente in funzione del

momento angolare  $\vec{h}$ :

$$p = \frac{h^2}{\mu} \quad (3.35)$$

### 3.1.7 Relazione tra l'energia meccanica e la geometria dell'orbita

Manipolando opportunamente le equazioni del moto e le espressioni dell'energia specifica, è possibile ricavare una relazione che mette in evidenza il legame diretto tra l'energia meccanica totale del sistema e la geometria dell'orbita descritta dal corpo orbitante. L'equazione dell'energia 3.16 valutata al periapside risulta

$$\varepsilon = \frac{v_p^2}{2} - \frac{\mu}{r_p} \quad (3.36)$$

Dato che il *flight path angle* è nullo all'apoapside e al periapside  $h = r_p v_p = r_a v_a$ , si ottiene

$$\varepsilon = \frac{h^2}{2r_p^2} - \frac{\mu}{r_p} \quad (3.37)$$

Combinando le equazioni 3.31 e 3.35 si ricava

$$h^2 = \mu a(1 - e^2) \quad (3.38)$$

Allora

$$\varepsilon = \frac{\mu a(1 - e^2)}{2a^2(1 - e)^2} - \frac{\mu}{a(1 - e)} = -\frac{\mu}{2a} \quad (3.39)$$

Da tale relazione emerge che:

$$\begin{cases} a > 0, \varepsilon < 0 & \text{per orbite chiuse} \\ a \rightarrow \infty, \varepsilon = 0 & \text{per orbite paraboliche} \\ a < 0, \varepsilon > 0 & \text{per orbite iperboliche} \end{cases} \quad (3.40)$$

### 3.1.8 Orbite chiuse

Considerando un'orbita circolare, per cui  $r = a$ , l'energia meccanica risulta

$$\varepsilon = \frac{v^2}{2} - \frac{\mu}{r} = -\frac{\mu}{2r} \quad (3.41)$$

E' possibile ricavare la velocità circolare:

$$v_c = \sqrt{\frac{\mu}{r}} \quad (3.42)$$

da cui si osserva che, al crescere del raggio orbitale, la velocità richiesta per mantenere il moto circolare diminuisce progressivamente, per cui le orbite più lontane dal corpo primario sono caratterizzate da velocità più basse.

Invece, prendendo in esame un'orbita ellittica, il momento angolare è pari

$$h = rv \cos \varphi = rv_t \quad (3.43)$$

dove  $v_t$  è la componente tangenziale della velocità, esprimibile anche come  $r\dot{\nu}$ . Di conseguenza

$$h = r^2 \frac{d\nu}{dt} \quad (3.44)$$

L'elemento differenziale di area  $dA$ , che il raggio vettore  $\vec{r}$  spazza durante una rotazione infinitesima  $d\nu$ , risulta essere

$$dA = \frac{1}{2} r^2 d\nu \quad (3.45)$$

Sostituendo nell'equazione precedente si ottiene

$$dt = \frac{2}{h} dA \quad (3.46)$$

da cui, essendo  $h$  costante per un dato moto orbitale, si deduce che l'area spazzata dal raggio vettore è proporzionale al tempo impiegato, dimostrando formalmente la seconda legge di Keplero. Integrando su un periodo si ricava

$$T_E = \frac{2}{h} \int_{A_E} dA = \frac{2\pi ab}{h} \quad (3.47)$$

dove  $A_E = \pi ab$  è l'area dell'ellisse e  $T_E$  rappresenta il periodo orbitale. Da semplici considerazioni sulla geometria dell'ellisse, si può dimostrare che  $a^2 = b^2 + c^2$ , da cui, insieme alle equazioni 3.30, 3.31 e 3.35, si ottiene

$$T_E = 2\pi \sqrt{\frac{a^3}{\mu}} \quad (3.48)$$

Pertanto, si evince che il periodo di un'orbita ellittica dipende esclusivamente dal semiasse maggiore e viene dimostrata la terza legge di Keplero. Infine, risulta utile introdurre il parametro

$$n = \frac{2\pi}{T_E} = \sqrt{\frac{\mu}{a^3}} \quad (3.49)$$

noto come *mean motion*, che rappresenta la velocità angolare media del satellite lungo l'orbita.

### 3.2 Sistemi di riferimento

Per determinare con precisione la posizione e la velocità di un satellite in un dato istante temporale, è fondamentale definire un sistema di riferimento inerziale adeguato. Nell'ambito dell'astrodinamica, i sistemi di riferimento ortogonali sono quelli di uso più comune, sebbene, in alcune applicazioni, si preferisca adottare una formulazione in coordinate polari sferiche. La corretta definizione di un sistema ortogonale richiede la

specificazione dell'origine, l'identificazione del piano fondamentale e la determinazione della direzione e del verso degli assi di riferimento.

Tuttavia, le proprietà inerziali di ogni sistema di riferimento rimangono inevitabilmente soggette a un certo grado di incertezza, a causa di fenomeni perturbativi di varia natura che introducono approssimazioni. Per ridurre tali incertezze, un approccio pragmatico consiste nel definire un sistema di riferimento quasi-inerziale, orientando gli assi del sistema in direzione delle stelle fisse.

### 3.2.1 Sistema di riferimento eliocentrico

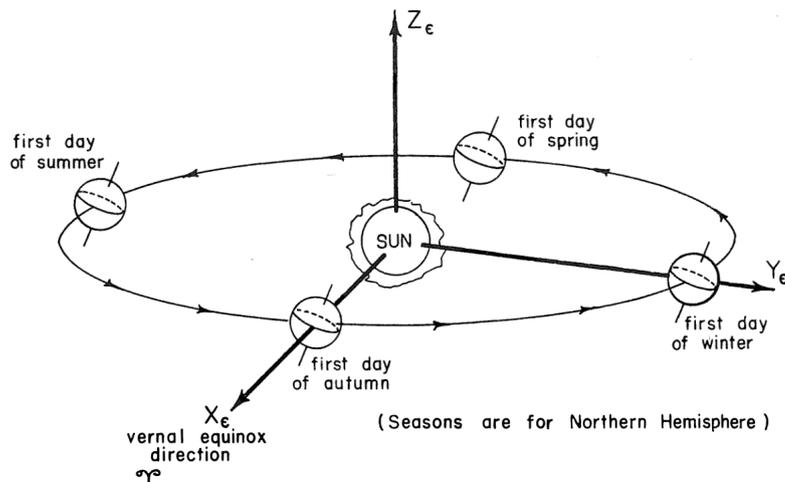


Figura 3.5: Sistema di riferimento eliocentrico

L'origine del sistema eliocentrico coincide con il centro del Sole e il piano fondamentale è rappresentato dall'eclittica, ossia il piano lungo il quale la Terra compie il proprio moto di rivoluzione. La direzione dell'asse  $X_e$  è definita dall'intersezione tra il piano dell'eclittica con quello equatoriale durante l'equinozio vernale, con verso positivo lungo la direzione della costellazione dell'Ariete ( $\Upsilon$  in Figura 3.5). L'asse  $Z_e$  è perpendicolare all'eclittica e ha verso positivo in direzione dell'emisfero che contiene *Polaris*; l'asse  $Y_e$  completa la terna destrorsa.

Nel lungo periodo, l'interazione gravitazionale combinata di Sole e Luna induce una lenta rotazione dell'asse terrestre, fenomeno noto come precessione luni-solare. Tale effetto comporta una graduale variazione della linea di intersezione tra il piano equatoriale e l'eclittica, rendendo il sistema eliocentrico quasi-inerziale.

### 3.2.2 Sistema di riferimento geocentrico

L'origine del sistema di riferimento geocentrico è posta nel centro della Terra. Il piano fondamentale corrisponde al piano equatoriale, mentre l'asse  $X$  è diretto lungo la linea degli equinozi ed è positivamente orientato verso quello vernale. L'asse  $Z$  è normale al piano equatoriale e punta verso il Polo Nord e l'asse  $Y$  completa la terna destrorsa. Questo sistema di riferimento non ruota in modo solidale con la Terra, ma risulta fisso rispetto alle stelle, risultando pertanto anch'esso quasi-inerziale. I

versori  $\hat{I}$ ,  $\hat{J}$  e  $\hat{K}$  giacciono rispettivamente lungo gli assi  $X$ ,  $Y$  e  $Z$ , come illustrato in Figura 3.6.

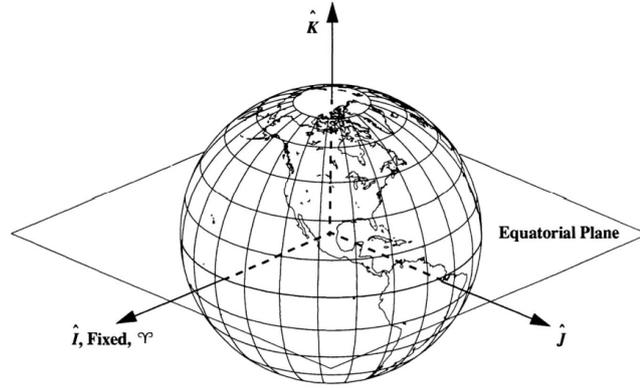


Figura 3.6: Sistema di riferimento geocentrico

### 3.2.3 Sistema di riferimento perifocale

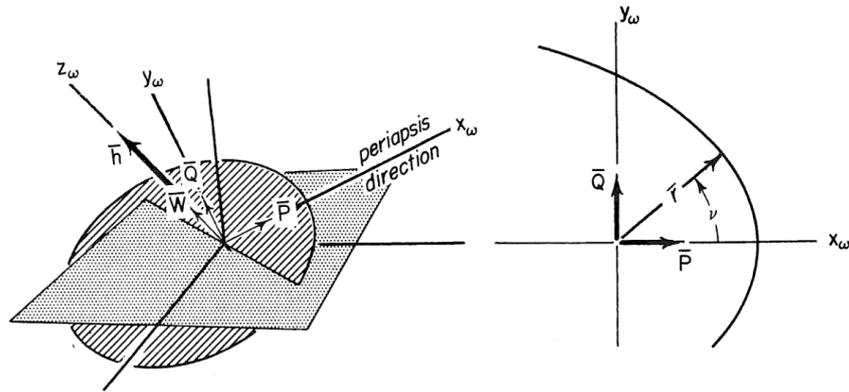


Figura 3.7: Sistema di riferimento perifocale

Analogamente al sistema geocentrico, l'origine del sistema perifocale coincide con il centro della Terra. Il piano fondamentale è definito dal piano orbitale del satellite, sul quale giace la traiettoria del moto. L'asse  $x$  è orientato lungo la linea degli apsidi, positivo verso il periapside, mentre l'asse  $y$  è ruotato di  $90^\circ$  in direzione del moto orbitale. L'asse  $z$ , infine, è perpendicolare al piano orbitale e diretto nel verso positivo del vettore del momento angolare specifico  $\vec{h}$ . I versori associati agli assi  $x$ ,  $y$  e  $z$  vengono convenzionalmente indicati con  $\vec{p}$ ,  $\vec{q}$  e  $\vec{w}$ .

Facendo riferimento alla Figura 3.7, si può determinare il vettore posizione:

$$\vec{r} = r \cos \nu \vec{p} + r \sin \nu \vec{q} \quad (3.50)$$

Differenziando tale equazione si ottiene il vettore velocità:

$$\vec{v} = \dot{\vec{r}} = (\dot{r} \cos \nu - r \dot{\nu} \sin \nu) \vec{p} + (\dot{r} \sin \nu + r \dot{\nu} \cos \nu) \vec{q} \quad (3.51)$$

Sostituendo  $v_r = \dot{r}$  e  $v_t = r\dot{\nu}$  nell'espressione precedente si ricava

$$\vec{v} = (v_r \cos \nu - v_t \sin \nu)\vec{p} + (v_r \sin \nu + v_t \cos \nu)\vec{q} \quad (3.52)$$

e dato che

$$v_r = v_t \tan \varphi = v_t \frac{e \sin \nu}{1 + e \cos \nu} \quad (3.53)$$

$$v_t = \frac{h}{r} \quad \text{con} \quad r = \frac{h^2/\mu}{1 + e \cos \nu} \quad (3.54)$$

si ottiene

$$\vec{v} = -\frac{\mu}{h}(\sin \nu)\vec{p} + (e + \cos \nu)\vec{q} \quad (3.55)$$

Valutando il prodotto scalare

$$\vec{r} \cdot \vec{v} = rv \sin \varphi = \frac{\mu}{h} r e \sin \nu \quad (3.56)$$

si osserva che

$$\begin{cases} \vec{r} \cdot \vec{v} > 0 \Rightarrow \varphi > 0 & \text{se } 0 < \nu < \pi \\ \vec{r} \cdot \vec{v} < 0 \Rightarrow \varphi < 0 & \text{se } \pi < \nu < 2\pi \end{cases} \quad (3.57)$$

### 3.3 Parametri orbitali kepleriani

Nel contesto del problema dei due corpi, la forma, l'orientazione della traiettoria e la posizione dello *spacecraft* in ogni istante temporale sono univocamente determinate da 6 parametri indipendenti. Una possibile scelta consiste nell'utilizzare le tre componenti del vettore posizione e del vettore velocità, ma tali grandezze variano continuamente nel tempo e risultano di interpretazione meno immediata. In alternativa, è possibile descrivere l'orbita mediante i parametri orbitali classici, i quali, nell'ipotesi kepleriana, restano costanti nel tempo e consentono una rappresentazione più intuitiva del moto. Inoltre, anche in presenza di perturbazioni, tali parametri consentono di analizzarne in modo più diretto e intuitivo l'influenza sulla configurazione geometrica e dinamica dell'orbita.

- **Semiassse maggiore  $a$**  Definisce la dimensione dell'orbita. E' legato all'energia, per cui noto  $a$ , o  $p$  ed  $e$  è possibile determinarlo univocamente.
- **Eccentricità  $e$**  Il modulo determina la natura geometrica della curva:

$$\begin{cases} e = 0 & \text{circonferenza} \\ 0 < e < 1 & \text{ellisse} \\ e = 1 & \text{parabola} \\ e > 1 & \text{iperbole} \end{cases}$$

- **Inclinazione  $i$**  Insieme alla RAAN, definisce l'orientamento dell'orbita nello spazio. È definita come l'angolo tra il piano orbitale e quello di riferimento,

quindi come l'angolo compreso tra il versore  $\vec{k}$  e il vettore del momento angolare

$$i = \arccos \frac{\vec{h} \cdot \vec{k}}{h} = \frac{h_k}{h} \quad (3.58)$$

Per definizione, l'inclinazione è sempre compresa tra 0 e  $\pi$  radianti. Nello specifico, se  $0 < i < \pi/2$  allora l'orbita si dice prograd (o diretta) poiché il satellite si muove verso Est, cioè la direzione di rotazione del Sole, della Terra e della maggior parte dei pianeti. Al contrario, se  $\pi/2 < i < \pi$  l'orbita viene definita retrograd, con moto opposto alla rotazione terrestre.

- **Longitudine del nodo ascendente (RAAN)  $\Omega$**  Insieme all'inclinazione, definisce l'orientamento dell'orbita nello spazio. È l'angolo, che giace nel piano fondamentale, compreso tra la linea dei nodi, definita dal vettore unitario  $\vec{n}$ , e il versore  $\vec{I}$ . Definisce il punto in cui il satellite attraversa il piano fondamentale dirigendosi verso Nord, da cui il termine "nodo ascendente".

$$\Omega = \arccos \frac{\vec{i} \cdot \vec{n}}{n} = \frac{n_i}{n} \quad (3.59)$$

$$\begin{cases} \text{se } n_j > 0 \Rightarrow 0^\circ < \Omega < 90^\circ \\ \text{se } n_j < 0 \Rightarrow 180^\circ < \Omega < 360^\circ \end{cases}$$

- **Argomento del periapside  $\omega$**  Viene definito come l'angolo, che giace nel piano orbitale, tra il nodo ascendente e il periapside (indicato dal vettore eccentricità) nel verso del moto del satellite.

$$\omega = \arccos \frac{\vec{n} \cdot \vec{e}}{ne} \quad (3.60)$$

$$\begin{cases} \text{se } e_k > 0 \Rightarrow 0^\circ < \omega < 90^\circ \\ \text{se } e_k < 0 \Rightarrow 180^\circ < \omega < 360^\circ \end{cases}$$

- **Anomalia vera al tempo  $t$   $\nu$**  Determina la posizione dello *spacecraft* in un determinato istante di riferimento detto *epoch*. Corrisponde all'angolo nel piano orbitale compreso tra il periapside e il vettore posizione del satellite alla *epoch*.

$$\nu = \arccos \frac{\vec{e} \cdot \vec{r}}{er} \quad (3.61)$$

$$\begin{cases} \text{se } \vec{r} \cdot \vec{v} > 0 \Rightarrow 0^\circ < \nu < 90^\circ \\ \text{se } \vec{r} \cdot \vec{v} < 0 \Rightarrow 180^\circ < \nu < 360^\circ \end{cases}$$

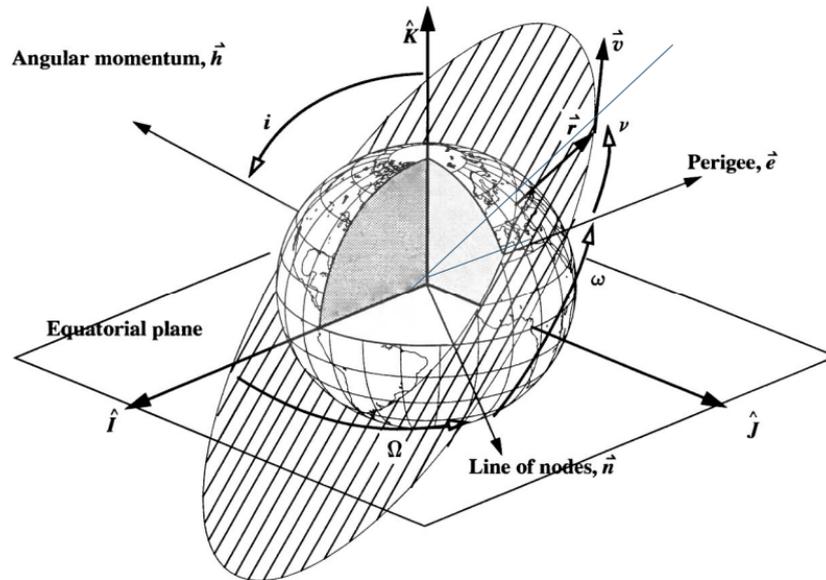
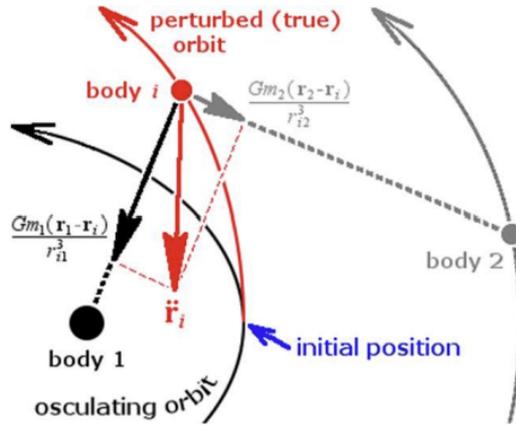


Figura 3.8: Elementi orbitali classici

### 3.4 Perturbazioni orbitali

Nella trattazione del problema dei due corpi si è assunto che le uniche forze agenti sul sistema fossero di natura gravitazionale. Nella realtà, tuttavia, un satellite è soggetto a una molteplicità di perturbazioni, cioè a qualsiasi forza che possa causare la deviazione del corpo dalla sua traiettoria orbitale e compromettere, quindi, il corretto svolgimento di una missione spaziale. Le principali fonti di perturbazione includono l'attrazione gravitazionale di corpi terzi, la non sfericità della Terra, la resistenza aerodinamica negli strati alti dell'atmosfera, la pressione della radiazione solare, gli effetti dei campi magnetici e la spinta generata dai sistemi propulsivi a bordo del veicolo.

Nel breve periodo, gli effetti delle forze perturbatrici risultano trascurabili e l'orbita di un satellite può essere approssimata con buona accuratezza dalla soluzione del problema dei due corpi, detta orbita kepleriana o ideale. Tuttavia, su scale temporali maggiori, l'influenza di tali forze produce variazioni significative negli elementi orbitali, che non rimangono più costanti ma evolvono lentamente nel tempo. In questi casi, il satellite non segue un'unica orbita kepleriana, bensì una successione di orbite kepleriane, ciascuna caratterizzata da parametri differenti. L'orbita osculatrice è definita come quella traiettoria kepleriana che, in un determinato istante, approssima nel modo più accurato la traiettoria reale del satellite.



**Figura 3.9:** Orbita osculatrice

Considerando la loro natura fisica, le perturbazioni orbitali possono essere classificate in due principali categorie: gravitazionali e non gravitazionali.

Un'ulteriore distinzione può essere fatta in base al tipo di forza perturbatrice, per cui si possono definire forze conservative, che dipendono unicamente dalla posizione, o non conservative, che dipendono sia dalla posizione sia dalla velocità del corpo orbitante.

Infine, le perturbazioni possono essere classificate in funzione del modo in cui influenzano gli elementi orbitali nel tempo:

- Effetti secolari, che producono variazioni tendenzialmente lineari nel tempo;
- Oscillazioni di lungo periodo, associate a variazioni periodiche degli elementi orbitali con periodo superiore a quello orbitale;
- Oscillazioni di corto periodo, che rappresentano variazioni periodiche con periodo inferiore rispetto a quello dell'orbita.

Nella pratica, l'evoluzione orbitale della traiettoria di un satellite è il risultato della sovrapposizione simultanea di questi tre effetti, la cui interazione genera una variazione complessa e non lineare dei parametri orbitali nel tempo.

L'equazione del moto 3.11 per il problema dei due corpi ristretto può essere ampliata per includere gli effetti delle perturbazioni:

$$\ddot{\vec{r}} = -\frac{\mu}{r^3}\vec{r} + \vec{a}_p \quad (3.62)$$

dove  $\vec{a}_p$  è l'accelerazione dovuta alle forze perturbative. Quest'espressione non ammette una soluzione analitica in forma chiusa, rendendo necessario l'impiego di metodi approssimati per la sua integrazione. Le due principali categorie di approcci sviluppate a tale scopo sono i *General perturbation methods* e gli *Special perturbation methods*.

I metodi generali delle perturbazioni si basano sull'espansione del termine di accelerazione perturbativa  $\vec{a}_p$  in una serie troncata, ottenendo una soluzione analitica

approssimata valida per intervalli limitati di tempo. Tale approccio, di grande rilevanza storica in astronomia, è stato impiegato per lo studio delle orbite planetarie e ha avuto un ruolo determinante nella previsione dell'esistenza di Urano e Nettuno. Tuttavia, la complessità delle espansioni e l'accumulo di errori rendono questo metodo meno adatto per simulazioni di lunga durata o in presenza di perturbazioni complesse.

I metodi speciali delle perturbazioni, invece, si fondano sull'integrazione numerica diretta delle equazioni del moto, a partire da un insieme di condizioni iniziali note. In questo approccio, le accelerazioni perturbative vengono calcolate a ogni passo di integrazione e sommate al termine gravitazionale principale, senza ricorrere a semplificazioni analitiche. Sebbene più onerosi dal punto di vista computazionale, tali metodi consentono di ottenere una descrizione estremamente accurata del moto orbitale e sono oggi largamente utilizzati nella propagazione numerica delle orbite artificiali e nell'analisi di lungo periodo della dinamica orbitale.

### 3.4.1 Equazioni planetarie di Gauss

Le equazioni planetarie di Gauss rappresentano uno strumento fondamentale per analizzare l'evoluzione temporale degli elementi orbitali in presenza di forze perturbative, stabilendo una relazione diretta tra le componenti della perturbazione e le variazioni dei parametri che descrivono l'orbita. Gauss derivò tali equazioni introducendo un sistema di riferimento locale denominato RSW (*Radial-Along-track-Cross-track*). In riferimento alla Figura 3.10,  $\vec{r}$  è orientato lungo il raggio vettore, il versore  $\vec{t}$  giace sul piano orbitale, perpendicolare a  $\vec{r}$  e diretto lungo la traiettoria del moto (detto anche *along-track*), mentre il versore  $\vec{n}$  è normale al piano orbitale e completa la terna destrorsa.

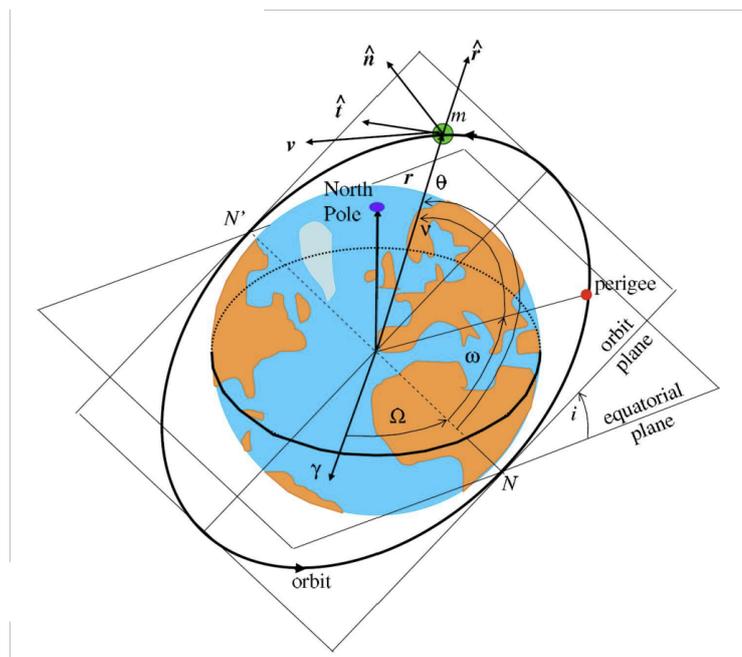


Figura 3.10: Sistema RSW

In tale sistema di riferimento, l'accelerazione perturbativa per unità di massa può essere scomposta nelle tre componenti radiale, trasversa e normale: questa formulazione consente di analizzare separatamente l'influenza di ciascun contributo sul comportamento dinamico dei singoli elementi orbitali.

$$\vec{F}_p = F_r \vec{r} + F_t \vec{t} + F_n \vec{n} \quad (3.63)$$

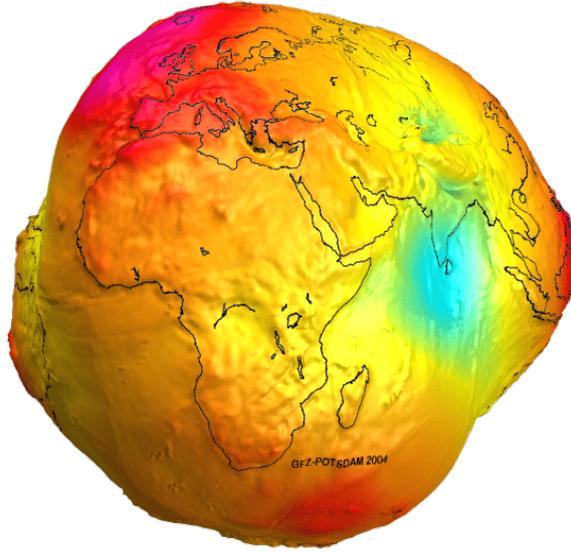
Di conseguenza, le derivate dei parametri orbitali assumono la seguente forma:

$$\begin{aligned} \dot{a} &= \frac{2}{n\sqrt{1-e^2}} \left[ (e \sin \nu) F_r + \left( \frac{p}{r} \right) F_t \right] \\ \dot{e} &= \frac{\sqrt{1-e^2}}{na} \left[ (\sin \nu) F_r + \left( \cos \nu + \frac{e + \cos \nu}{1 + e \cos \nu} \right) F_t \right] \\ \dot{i} &= \frac{r \cos(\omega + \nu)}{na^2 \sqrt{1-e^2}} F_n \\ \dot{\Omega} &= \frac{r \sin(\omega + \nu)}{na^2 \sqrt{1-e^2} \sin i} F_n \\ \dot{\omega} &= \frac{\sqrt{1-e^2}}{nae} \left[ -(\cos \nu) F_r + \sin \nu \left( 1 + \frac{r}{p} \right) F_t \right] - \dot{\Omega} \cos i \\ \dot{M} &= n - \frac{2r}{na^2} F_r - \sqrt{1-e^2} (\dot{\omega} + \dot{\Omega} \cos i) \end{aligned} \quad (3.64)$$

dove l'anomalia vera è stata sostituita con l'anomalia media  $M$ . Si osservano inoltre alcune proprietà di particolare rilievo. La geometria dell'orbita, definita dai parametri  $a$  ed  $e$ , risulta influenzata unicamente dalle perturbazioni che agiscono sul piano orbitale, ossia dalle componenti radiale e trasversale della forza perturbativa. Al contrario, l'inclinazione e l'ascensione retta del nodo ascendente ( $\Omega$ ) dipendono esclusivamente dalla componente normale alla traiettoria. In particolare, a parità di intensità della forza normale  $F_n$ , la variazione di  $\Omega$  risulta tanto più marcata quanto minore è l'inclinazione del piano orbitale. Infine, emerge una stretta interdipendenza tra i parametri angolari  $\Omega$ ,  $\omega$  e  $M$ , la quale determina una complessa dinamica di accoppiamento.

### 3.4.2 Non sfericità della Terra

La geodesia è la disciplina scientifica che studia la forma, le dimensioni e il campo gravitazionale della Terra, nonché le rispettive variazioni dovute ai fenomeni geodinamici. Attraverso tecniche di misurazione e di osservazione sempre più avanzate, è stato possibile determinare che la Terra non presenta una forma perfettamente sferica, ma piuttosto quella di uno sferoide oblato, caratterizzato da un leggero appiattimento ai poli e da un rigonfiamento nella regione equatoriale. Le osservazioni geodetiche di alta precisione hanno inoltre evidenziato che la distribuzione della massa terrestre non è omogenea: irregolarità nella densità interna e nella composizione crostale determinano deviazioni locali rispetto alla forma ideale, influenzando sia il valore che la direzione del campo gravitazionale.



**Figura 3.11:** Modello terrestre reale [17]

Di conseguenza, l'espressione dell'energia potenziale ricavata nel problema dei due corpi non risulta completamente valida. In particolare, considerando il sistema di coordinate geografiche geodetico WGS84, il potenziale gravitazionale risulta

$$\varepsilon_g = -\frac{\mu}{r} \left\{ 1 - \sum_{n=2}^{\infty} J_n \left( \frac{R_{\oplus}}{r} \right)^n \mathcal{P}_n \sin La - \sum_{n=2}^{\infty} \sum_{m=2}^{\infty} \left( \frac{R_{\oplus}}{r} \right)^n J_{n,m} \mathcal{P}_n^m \sin La \cos [m(\text{Lo} - \text{Lo}_{n,m})] \right\} \quad (3.65)$$

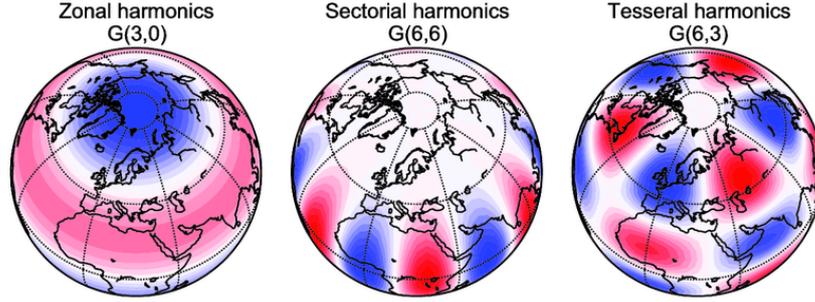
Dove  $\mathcal{P}_n(x)$  rappresenta il polinomio di Legendre di grado  $n$ :

$$\mathcal{P}_n(x) = \frac{1}{2^n n!} \frac{d^n}{dx^n} [(x^2 - 1)^n] \quad (3.66)$$

e  $\mathcal{P}_n^m(x)$  rappresenta il polinomio di Legendre associato di grado  $n$  e ordine  $m$ :

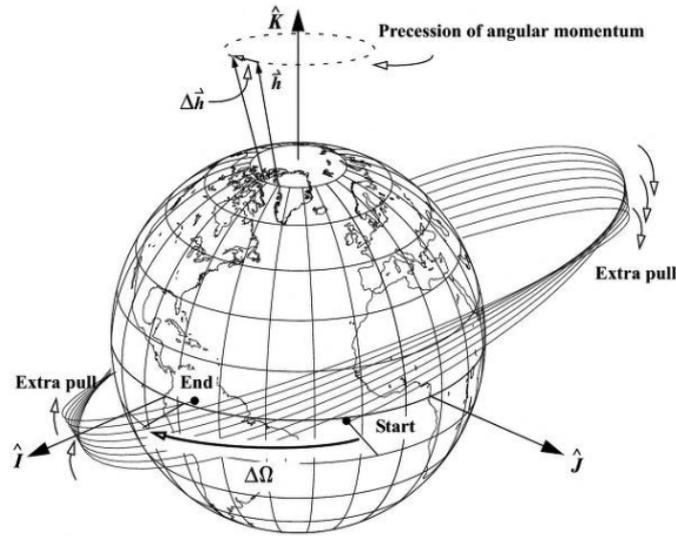
$$\mathcal{P}_n^m(x) = (-1)^m (1 - x^2)^{\frac{m}{2}} \frac{d^m}{dx^m} [\mathcal{P}_n(x)] \quad (3.67)$$

I coefficienti  $J_n$ , definiti armoniche zonali, rappresentano le variazioni del campo gravitazionale terrestre in funzione della latitudine e riflettono principalmente la distribuzione di massa lungo l'asse polare. Le armoniche con indice  $n$  pari sono simmetriche rispetto al piano equatoriale, mentre quelle con indice dispari introducono componenti asimmetriche. Invece, i termini  $J_n^m$  sono denominati armoniche tesserali se  $n \neq m$  o armoniche settoriali se  $n = m$ . Le armoniche settoriali dipendono esclusivamente dalla longitudine, mentre le tesserali sono funzione congiunta di latitudine e longitudine, e descrivono irregolarità locali nella distribuzione di massa terrestre.



**Figura 3.12:** Armoniche sferiche del campo gravitazionale terrestre

Il rigonfiamento equatoriale della Terra genera una componente della forza gravitazionale diretta verso il piano equatoriale. Tale componente introduce una coppia perturbativa sull'orbita, che tende ad allineare il piano orbitale con l'equatore terrestre e produce un effetto giroscopico responsabile della regressione della linea dei nodi, illustrata in Figura 3.13. L'armonica zonale  $J_2$ , con valore pari a  $1.08262668 \cdot 10^{-3}$ , rappresenta la correzione dominante al potenziale gravitazionale terrestre, risultando circa tre ordini di grandezza superiore rispetto ai termini successivi. Per satelliti in orbite basse, gli effetti delle armoniche settoriali e tesserali risultano mediamente trascurabili, in quanto la rotazione terrestre tende ad annullarne mediamente l'influenza.



**Figura 3.13:** Regressione della linea dei nodi

Pertanto, considerando unicamente l'effetto del termine  $J_2$  si possono determinare le variazioni secolari di  $\Omega$ ,  $\omega$  e  $M$ :

$$\frac{d\Omega}{dt} = \dot{\Omega} = -\frac{3}{2} \sqrt{\frac{\mu}{a^3}} \frac{J_2 \cos i}{(1-e^2)^2} \left(\frac{R_{\oplus}}{a}\right)^2 \quad (3.68)$$

$$\frac{d\omega}{dt} = \dot{\omega} = \frac{3}{4} \sqrt{\frac{\mu}{a^3}} \frac{J_2 (5 \cos^2 i - 1)}{(1-e^2)^2} \left(\frac{R_{\oplus}}{a}\right)^2 \quad (3.69)$$

$$\frac{dM}{dt} = \dot{M} = \sqrt{\frac{\mu}{a^3}} + \frac{3}{4} \sqrt{\frac{\mu}{a^3}} \frac{J_2(3 \cos^2 i - 1)}{(1 - e^2)^{3/2}} \left( \frac{R_{\oplus}}{a} \right)^2 \quad (3.70)$$

Si osserva che la variazione di  $\Omega$  aumenta al diminuire dell'inclinazione orbitale, diventando pressoché nulla per orbite polari. Inoltre, per orbite prograde si ha  $\Delta\Omega < 0$ , corrispondente a una regressione della linea dei nodi, mentre per orbite retrograde si ha  $\Delta\Omega > 0$ , che implica una precessione del piano orbitale. Per quanto riguarda la linea degli apsi, questa avanza per inclinazioni  $i < 63.4^\circ$  o  $i > 116.6^\circ$ , mentre regredisce per valori compresi tra tali limiti.

Il fenomeno della regressione dei nodi può essere sfruttato in modo vantaggioso nella progettazione di orbite eliosincrone (*Sun-synchronous orbits*), ovvero orbite geocentriche in cui il piano orbitale mantiene un angolo costante rispetto al Sole durante la rivoluzione terrestre. Tali orbite consentono ai satelliti di sorvolare ogni punto della superficie terrestre sempre alla stessa ora solare locale, garantendo condizioni di illuminazione costanti a ogni passaggio, requisito fondamentale per missioni di osservazione terrestre, monitoraggio ambientale e ricognizione ottica.

## Capitolo 4

# Fondamenti di propulsione spaziale

Il sistema propulsivo rappresenta un elemento fondamentale per l'efficacia operativa delle missioni di Rimozione Attiva dei Detriti, poiché consente l'esecuzione delle trasferte orbitali necessarie all'intercettazione dei detriti e l'attuazione delle manovre di rendezvous finalizzate alle operazioni di *servicing*. Le prestazioni di un sistema di propulsione dipendono da diversi parametri, tra cui la spinta sviluppata, l'impulso specifico e l'efficienza nell'utilizzo del propellente, che insieme definiscono le capacità dinamiche e operative del veicolo spaziale. Per un approfondimento più dettagliato, si rimanda a [18].

### 4.1 Introduzione alla propulsione spaziale

Lo scopo principale di un sistema propulsivo è generare una forza in grado di mettere in movimento un corpo inizialmente fermo o di modificarne lo stato di moto. Il principio di funzionamento della propulsione si fonda sulla seconda legge di Newton, secondo la quale la forza risultante agente su un corpo è pari alla variazione nel tempo della sua quantità di moto. In particolare, nei sistemi propulsivi, l'espulsione di una certa massa a una determinata velocità comporta una variazione della quantità di moto che, in virtù del principio di azione e reazione, si traduce in una forza uguale e contraria esercitata sul sistema stesso, ovvero la spinta. In generale, qualsiasi sistema propulsivo richiede due elementi fondamentali: una massa di reazione, necessaria per lo scambio di quantità di moto, e una sorgente di energia, indispensabile per accelerare tale massa e generare la spinta desiderata. Nello spazio, non essendo presente alcun mezzo esterno su cui esercitare una forza, un satellite deve portare con sé il mezzo con cui scambiare quantità di moto, ossia il propellente.

In base al modo in cui viene fornita l'energia necessaria per accelerare la massa di reazione, i sistemi propulsivi possono essere classificati in differenti categorie. Le principali tecnologie attualmente in uso impiegano sorgenti di natura chimica o elettrica. La propulsione chimica sfrutta l'energia liberata da una reazione chimica

esotermica per espellere rapidamente il propellente attraverso un ugello, fornendo spinte elevate e impulsi di breve durata. Per tale motivo risulta ideale nelle manovre di ascesa in orbita e nelle correzioni impulsive.

Invece, la propulsione elettrica utilizza l'energia elettrica generata a bordo (generalmente tramite pannelli solari) per ionizzare e accelerare il propellente mediante campi elettrostatici o elettromagnetici. Sebbene produca spinte di entità molto inferiore rispetto ai sistemi chimici, garantisce elevata efficienza propulsiva e consumi di propellente notevolmente ridotti, risultando particolarmente adatta per le manovre di *station keeping* e le missioni di lunga durata.

Si consideri ora un sistema isolato, sufficientemente distante da qualsiasi altra massa da poter trascurare gli effetti gravitazionali. All'istante  $t$ , il sistema ha massa  $m$  e velocità  $V$ . Si supponga che, dopo un intervallo infinitesimo di tempo  $dt$ , il sistema espella una massa  $dm_p$  di propellente con una velocità relativa  $c$  rispetto al veicolo, variando così la propria velocità in  $V + dV$ . Applicando il principio di conservazione della quantità di moto in un modello unidimensionale, si ottiene la relazione fondamentale che descrive il comportamento dinamico del sistema propulsivo.

$$mv = (m - dm_p)(V + dV) - dm_p(c - V) \quad (4.1)$$

Semplificando

$$m dV = dm_p c \quad (4.2)$$

Nella realtà, tuttavia, l'espulsione non avviene in modo discreto ma tramite l'emissione di un flusso continuo. Quindi, introducendo il concetto di portata in massa di propellente, si può riscrivere la variazione di massa del sistema come:

$$dm_p = \dot{m}_p dt \quad (4.3)$$

Sostituendo in 4.2 si ottiene

$$m \frac{dV}{dt} = \dot{m}_p c \quad (4.4)$$

dove il membro a sinistra corrisponde alla spinta del satellite, in quanto è il prodotto tra la massa del sistema e la sua accelerazione. Quindi

$$T = \dot{m}_p c \quad (4.5)$$

Come accennato in precedenza, l'accelerazione del propellente richiede un certo apporto energetico, che può essere espresso in termini di potenza propulsiva. Essa rappresenta la potenza necessaria per conferire al propellente la velocità di efflusso desiderata e si definisce come

$$P_T = \frac{1}{2} \dot{m}_p c^2 = \frac{1}{2} T c \quad (4.6)$$

Questa relazione evidenzia che, a parità di spinta, la potenza richiesta cresce linear-

mente con la velocità di efflusso  $e$ , quindi, con l'efficienza del sistema propulsivo.

In condizioni reali il flusso di propellente è soggetto a fenomeni fluidodinamici complessi all'interno della camera di combustione e dell'ugello, che influenzano sia la velocità di uscita, che la distribuzione di pressione lungo la sezione di efflusso. Indicando con  $u_e$  la velocità di uscita dei gas di scarico, la spinta totale generata da un propulsore può essere espressa come

$$T = \dot{m}_p u_e + A_e (p_e - p_0) \quad (4.7)$$

dove  $A_e$  è l'area della sezione di uscita dell'ugello,  $p_e$  rappresenta la pressione del propellente nella medesima sezione e  $p_0$  è la pressione atmosferica esterna.

Poiché in questa trattazione l'interesse è rivolto principalmente all'effetto complessivo della spinta sul veicolo spaziale, e non ai dettagli dei processi fluidodinamici interni al propulsore, è opportuno introdurre il concetto di velocità efficace di scarico:

$$c = \frac{T}{\dot{m}_p} = u_e + A_e \frac{p_e}{\dot{m}_p} \quad (4.8)$$

Questa grandezza sintetizza in un singolo parametro l'effetto combinato della velocità di efflusso dei gas di scarico e della pressione all'uscita dell'ugello, facilitando l'analisi delle prestazioni di un sistema propulsivo.

## 4.2 Prestazioni di un sistema propulsivo

Per caratterizzare l'effetto complessivo della spinta su un intervallo temporale definito, si introduce la grandezza nota come impulso totale, ottenuta integrando la spinta nel tempo:

$$I_t = \int_{t_0}^{t_f} T dt \quad (4.9)$$

L'impulso totale rappresenta la quantità di moto trasferita al satellite e fornisce una misura dell'effetto utile di un sistema propulsivo. Se la spinta è costante, l'equazione precedente si semplifica in

$$I_t = T \cdot \Delta t \quad (4.10)$$

dove  $\Delta t$  è la durata di funzionamento del propulsore. La massa totale di propellente consumata risulta

$$m_p = \int_{t_0}^{t_f} \dot{m}_p dt \quad (4.11)$$

Si definisce impulso specifico la grandezza nota come il rapporto tra l'impulso totale e il peso del propellente consumato rispetto alla superficie terrestre:

$$I_{sp} = \frac{I_t}{m_p g_0} \quad (4.12)$$

Nell'ipotesi di spinta e portata di propellente costanti, l'impulso specifico si semplifica in

$$I_{sp} = \frac{I_t}{m_p g_0} = \frac{T}{\dot{m}_p g_0} = \frac{c}{g_0} \quad (4.13)$$

Si può quindi osservare che l'impulso specifico e la velocità efficace di scarico sono grandezze proporzionali, entrambe rappresentative dell'efficienza con cui il propellente viene espulso. Si può dimostrare che l'impulso specifico rappresenta il tempo durante il quale una determinata quantità di propellente è in grado di generare una spinta pari al proprio peso. Di conseguenza, a parità di massa di propellente, un propulsore con impulso specifico più elevato può operare per un tempo maggiore oppure, a parità di durata, fornire una spinta superiore. Pertanto, nell'ottimizzazione di un sistema propulsivo, risulta fondamentale massimizzare l'impulso specifico, nei limiti imposti dai vincoli progettuali e dai requisiti di missione.

Considerando che la funzione principale di un sistema propulsivo è modificare la velocità del satellite, risulta opportuno introdurre la variazione di velocità  $\Delta V$ , che rappresenta l'incremento netto di velocità conseguente all'azione propulsiva. Essa si ottiene integrando nel tempo l'accelerazione generata dal sistema propulsivo:

$$\Delta V = \int_{t_0}^{t_f} \frac{T}{m} dt \quad (4.14)$$

Tale grandezza rappresenta la variazione di velocità che il satellite subirebbe nel caso in cui l'unica forza agente fosse la spinta del propulsore, applicata in direzione parallela alla velocità. In condizioni reali, invece, la variazione effettiva della velocità dipende anche dall'azione di altre forze esterne e dall'orientamento della spinta rispetto alla traiettoria, che non necessariamente coincide con il vettore velocità. Nonostante queste considerazioni, il  $\Delta V$  costituisce comunque una misura efficace dell'effetto utile della spinta propulsiva sul satellite e rappresenta un parametro fondamentale nella valutazione delle prestazioni di missione. Sostituendo l'equazione 4.8, si ricava

$$\Delta V = \int_{t_0}^{t_f} \frac{c \dot{m}_p}{m} dt \quad (4.15)$$

Durante il funzionamento del propulsore, il consumo di propellente comporta una progressiva riduzione della massa complessiva del satellite, pertanto la portata in massa di propellente risulta

$$\dot{m}_p = -\frac{dm}{dt} \quad (4.16)$$

dove  $m$  è la massa istantanea del satellite. Di conseguenza

$$\Delta V = \int_{m_0}^{m_f} -c \frac{dm}{m} \quad (4.17)$$

Se  $c$  è costante durante l'intera manovra, l'equazione precedente si semplifica in

$$\Delta V = c \ln \left( \frac{m_0}{m_f} \right) \quad (4.18)$$

Questa relazione è nota in letteratura come equazione del razzo di Tsiolkovsky e può essere riformulata come

$$m_f = m_0 e^{-\frac{\Delta V}{c}} \quad (4.19)$$

L'equazione del razzo rappresenta uno dei principi fondamentali della propulsione spaziale, poiché stabilisce una relazione diretta tra la variazione di velocità richiesta a un veicolo spaziale, le caratteristiche del sistema propulsivo e il bilancio di massa del veicolo stesso. La massa di propellente consumata risulta quindi

$$m_p = m_0 - m_f = m_0 \left( 1 - e^{-\frac{\Delta V}{c}} \right) \quad (4.20)$$

Da questa relazione si deduce che, a parità di  $\Delta V$ , un incremento della velocità di scarico comporta una riduzione della quantità di propellente consumato. Nella tabella 4.1 sono riportati i valori tipici di  $\Delta V$  richiesti per diverse tipologie di missioni spaziali.

Missione	$\Delta V$ [km/s]
Inserimento in LEO	10
Station-keeping per 1 anno	0.5
LEO-GEO (impulsivo)	3.5
LEO-GEO (bassa spinta)	6
Escape dalla Terra (impulsiva)	3.2
Escape dalla Terra (bassa spinta)	8
Terra-Marte (impulsivo)	5.5
Terra-Marte (bassa spinta)	6
Terra-Giove (bassa spinta)	16.7
Terra-Alfa Centauri	30000

**Tabella 4.1:** Tipici valori di  $\Delta V$

In prima approssimazione, l'impulso totale necessario per una determinata missione dipende unicamente dal valore di  $\Delta V$  richiesto, secondo la relazione:

$$I_t \approx m_{avg} \Delta V \quad (4.21)$$

dove  $m_{avg}$  rappresenta la massa media del satellite durante la missione. Inoltre, dalla definizione dell'impulso specifico, si ricava

$$m_p \approx \frac{m_{avg} \Delta V}{I_{sp} g_0} \quad (4.22)$$

Da quest'ultima espressione si osserva che, fissato il  $\Delta V$  (e quindi la missione), la

massa di propellente è inversamente proporzionale all'impulso specifico del sistema propulsivo. In altre parole, in prima approssimazione, raddoppiando  $I_{sp}$ , il consumo di propellente si dimezza.

### 4.3 Differenze tra propulsione chimica ed elettrica

Nei sistemi di propulsione chimica, l'energia necessaria alla generazione della spinta è interamente immagazzinata all'interno del propellente. Lo schema più elementare di un propulsore chimico comprende una camera di combustione, nella quale il combustibile e l'ossidante vengono miscelati in proporzioni opportune per innescare una reazione esotermica, e un ugello, in cui i prodotti della combustione vengono espansi e accelerati. In questo modo, l'energia chimica del propellente viene convertita in energia cinetica dei gas di scarico, producendo la spinta. Applicando il bilancio dell'energia nella camera di reazione si ricava

$$\dot{m}_p \left( h_e + \frac{u_e^2}{2} - h_0 \right) = \eta \dot{m}_p E_{ch} \quad (4.23)$$

dove  $E_{ch}$  è l'energia chimica per unità di massa rilasciata dalla reazione.  $h_0$  e  $h_e$  rappresentano le entalpie specifiche del propellente all'ingresso e all'uscita della camera di combustione e il rendimento  $\eta$  esprime la frazione di energia chimica effettivamente convertita in energia entalpica. Trascurando le entalpie specifiche e assumendo rendimento unitario, si ottiene

$$c \approx u_e \approx \sqrt{2E_{ch}} \quad (4.24)$$

In un propulsore chimico, quindi, la velocità efficace di scarico risulta intrinsecamente limitata dall'energia liberata dalla reazione. Questa caratteristica conferisce ai propulsori chimici un'elevata scalabilità, poiché è possibile variare la portata di propellente e, conseguentemente, la spinta generata, senza modificare la velocità efficace di scarico. In linea teorica, aumentando la quantità di propellente bruciato, si possono ottenere spinte molto elevate, a fronte di un maggiore consumo. Tra le combinazioni di reagenti più performanti figura quella costituita da idrogeno e ossigeno liquidi, per la quale si raggiungono valori tipici di  $c = 4.5$  km/s e di impulso specifico  $I_{sp} = 450$  s.

Nei propulsori elettrici, invece, il propellente (generalmente un gas nobile come lo xeno) viene accelerato grazie all'energia fornita da una sorgente elettrica installata a bordo. Indicando con  $P_E$  la potenza elettrica disponibile, una parte di essa viene convertita in energia cinetica del flusso di propellente, secondo la relazione:

$$\eta P_e \approx \dot{m}_p \frac{c^2}{2} \quad (4.25)$$

A differenza dei propulsori chimici, nei sistemi elettrici il rendimento globale  $\eta$  è

spesso significativamente inferiore a 1, a causa delle perdite dovute alla conversione di energia. Da tale relazione si ottiene:

$$c \approx \sqrt{\frac{2\eta P_E}{\dot{m}_p}} \quad (4.26)$$

Ne consegue che, aumentando la potenza elettrica disponibile o riducendo la portata di propellente, è possibile, almeno a livello teorico, ottenere valori elevati di velocità di scarico, e dunque di impulso specifico. Un aspetto fondamentale che distingue la propulsione elettrica da quella chimica è la scorrelazione tra la potenza fornita e la massa di propellente espulso: nei sistemi elettrici, infatti, la fonte di energia è separata dal mezzo di reazione, garantendo impulsi specifici superiori a discapito di un incremento del peso e dei costi, dovuto alla presenza di un generatore di potenza. Sostituendo la definizione generale di velocità efficace di scarico (4.8) nella relazione precedente, si ottiene:

$$c \approx \frac{2\eta P_E}{T} \quad (4.27)$$

La propulsione elettrica è caratterizzata da basse spinte e da tempi di accelerazione prolungati, che influenzano significativamente la determinazione della traiettoria ottimale durante una missione. Inoltre, per ogni missione esiste un impulso specifico ottimale, determinato dal compromesso tra prestazioni propulsive e massa del sistema di generazione di potenza, che tende a rappresentare uno dei principali limiti progettuali di tali tecnologie.

La massa di un satellite si può definire come:

$$m = m_u + m_p + m_s \quad (4.28)$$

dove  $m_u$  rappresenta il carico utile,  $m_p$  la massa di propellente,  $m_s$  la massa del generatore. Tali masse influenzano l'accelerazione del satellite:

$$a = \frac{T}{m} \quad (4.29)$$

E' evidente che l'accelerazione del sistema complessivo risulta minore dell'accelerazione che si avrebbe, a parità di spinta, considerando il solo generatore:

$$a = \frac{T}{m} < \frac{T}{m_s} \quad (4.30)$$

La massa del generatore è considerata proporzionale alla potenza elettrica, quindi

$$m_s = \alpha P_E = \frac{\alpha T c}{\eta} \quad (4.31)$$

dove  $\alpha$  è la massa specifica del generatore. Migliore è la tecnologia del sistema

propulsivo e minore sarà il valore di  $\alpha$ . Di conseguenza

$$a < \frac{2\eta}{\alpha c} \quad (4.32)$$

Considerando dei valori tipici di un propulsore elettrico,  $\eta = 0.5$ ,  $c = 10 \text{ km/s}$  e  $\alpha = 10^{-3} \text{ Kg/W}$  (valore ottimistico), si ricava

$$a < 0.1 \text{ m/s}^2 \approx \frac{g_0}{100} \quad (4.33)$$

Pertanto, la propulsione elettrica non si dimostra idonea per l'ascesa, tuttavia, può essere efficacemente impiegata in orbita, dove la forza gravitazionale viene bilanciata dalle forze centrifughe.

## 4.4 Manovre orbitali

Le manovre orbitali costituiscono un aspetto fondamentale dell'astrodinamica e della propulsione spaziale, in quanto consentono a un satellite di modificare la propria traiettoria, l'energia o l'orientamento del piano orbitale per raggiungere specifici obiettivi di missione. Le manovre orbitali possono avere principalmente due scopi:

- **Variazione di energia**, finalizzata a modificare il semiasse maggiore dell'orbita;
- **Cambio di piano**, impiegato per alterare l'inclinazione o la longitudine del nodo ascendente.

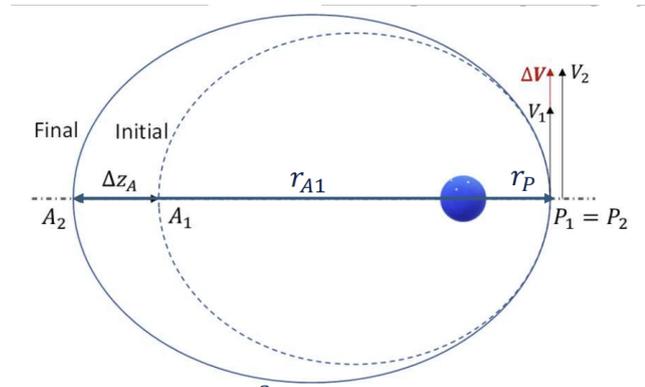
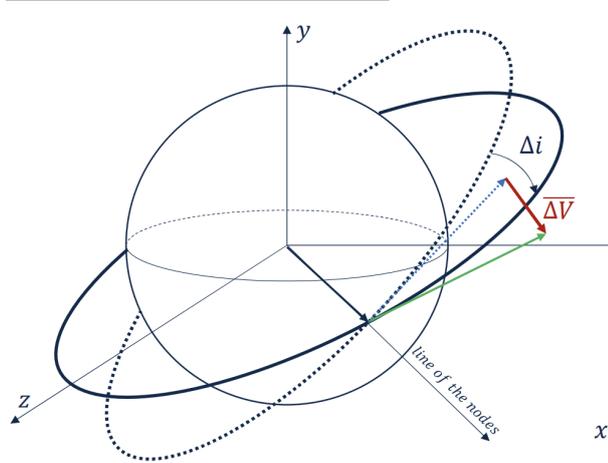


Figura 4.1: Variazione di perigeo

Le manovre di variazione di energia modificano il semiasse maggiore dell'orbita attraverso la relazione 3.39. Una spinta applicata parallelamente alla velocità orbitale incrementa l'energia totale del satellite, mentre una spinta in direzione opposta la riduce. Nel modello impulsivo, adatto per descrivere la propulsione chimica, la variazione di energia per un impulso  $\Delta V$  applicato a raggio costante  $r$  può essere scritta come:

$$\Delta\epsilon = V\Delta V \quad (4.34)$$

da cui si osserva che, a parità di  $\Delta V$ , l'efficacia della manovra cresce con la velocità  $V$ . Poiché la velocità orbitale è massima al perigeo, le manovre di variazione di energia risultano più efficienti se eseguite a quote basse.



**Figura 4.2:** Cambio di piano

Le manovre di cambio di piano sono utilizzate per modificare l'inclinazione orbitale  $i$  e la longitudine del nodo ascendente  $\Omega$ . Esse comportano una variazione della direzione del vettore velocità, senza modificarne l'intensità, e quindi richiedono una spinta perpendicolare al piano orbitale. La relazione che esprime il legame tra la variazione di piano  $\Delta i$  e l'impulso richiesto è:

$$\Delta V = 2V \sin \frac{\Delta i}{2} \quad (4.35)$$

da cui si deduce che il costo propulsivo cresce con la velocità orbitale. Pertanto, al contrario delle manovre energetiche, i cambi di piano sono più efficienti a grandi distanze dal corpo attrattore, dove  $V$  è minore. Quando la manovra viene eseguita a una latitudine diversa dai nodi (cioè fuori dal piano equatoriale), si ottiene una variazione combinata di inclinazione e RAAN, secondo la relazione:

$$\sin \psi = \cos i \cos \delta$$

dove  $\psi$  è l'angolo di azimut e  $\delta$  la latitudine del punto di applicazione dell'impulso.

## Capitolo 5

# Ant Colony Optimization

Il presente capitolo si propone di illustrare le origini e lo sviluppo dell'algoritmo Ant Colony Optimization (ACO), delineando il problema per il quale è stato inizialmente concepito, i meccanismi naturali che ne costituiscono la principale fonte di ispirazione e le fondamentali caratteristiche.

### 5.1 Il problema del commesso viaggiatore

L'algoritmo della colonia di formiche o *Ant Colony Optimization* è una tecnica di ottimizzazione sviluppata negli anni '70 da Marco Dorigo, proposta come applicazione per la risoluzione del *Travelling Salesman Problem*. Tale problema viene formulato come:

*Sia  $V = a, \dots, z$  un set di città,  $A = (r, s) : r, s \in V$  il set degli spigoli e  $\delta(r, s) = \delta(s, r)$  una misura di costo associato allo spigolo  $(r, s) \in A$ . Il problema del commesso viaggiatore si pone l'obiettivo di ricavare il percorso chiuso di costo minimo che visiti ciascuna città una sola volta. [19]*

Nella trattazione, gli elementi  $v \in V$  vengono chiamati vertici o nodi e rappresentano le città da visitare, mentre l'insieme  $A$  contiene i termini  $(r, s)$ , ovvero gli spigoli o archi, a cui corrispondono i collegamenti tra le città. Dunque, il problema può essere formalizzato con una rappresentazione a grafo, dove a ogni spigolo  $(r, s)$  è associato un costo  $\delta(r, s)$  e un parametro di desiderabilità, e la soluzione del TSP corrisponde alla ricerca del ciclo hamiltoniano di minima lunghezza nel grafo associato. In termini più pratici, la soluzione si configura come l'individuazione di una permutazione degli indici delle città visitate.

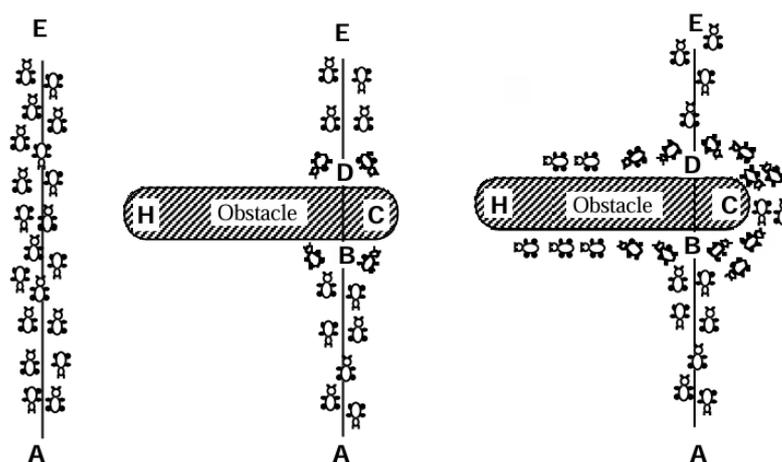
### 5.2 Principio biologico e traduzione algoritmica

L'idea alla base dello sviluppo dell'ACO e della sua applicazione al TSP, così come ad altri problemi di ottimizzazione complessi, risiede nella mimesi del comportamento collettivo e dei principi di auto-organizzazione che consentono alle formiche

di coordinare le proprie attività all'interno della colonia nella ricerca di cibo. Gli operosi insetti, infatti, hanno la capacità straordinaria di trovare i percorsi più brevi tra il nido e le fonti di nutrimento, poiché fanno uso di un raffinato meccanismo di comunicazione chiamato stigmergia. Questa tecnica prevede la modifica dell'ambiente esterno attraverso particolari agenti chimici, detti feromoni, che le formiche sono in grado di rilasciare e rilevare nei loro percorsi. Analogamente, nell'algoritmo viene utilizzata una popolazione di agenti artificiali per esplorare lo spazio delle soluzioni, riprendendo i meccanismi della stigmergia con la traduzione matematica del deposito, aggiornamento ed evaporazione del feromone attraverso appositi parametri e funzioni. Così come è nella realtà, anche nell'ACO, il feromone rappresenta una sorta di memoria distribuita a lungo termine della colonia e contiene l'informazione sulla qualità della soluzione.

### 5.2.1 Comportamento delle formiche in natura

E' utile, al fine di descrivere come il feromone veicoli il contenuto informativo circa la bontà delle soluzioni, fare riferimento al meccanismo decisionale delle formiche nell'individuazione del percorso più vantaggioso.



**Figura 5.1:** Meccanismo decisionale delle formiche [20]

Si consideri a tal proposito lo scenario in Figura 5.1, in cui una popolazione di formiche si muove dal nido A verso una fonte di cibo situata in E, e viceversa. Se compare un ostacolo, in assenza di feromone, le formiche possono inizialmente scegliere di aggirarlo a sinistra (tratto BHD) o a destra (tratto BCD) con la stessa probabilità. Supponendo che due formiche, x e y, scelgano rispettivamente i percorsi BCD e BHD, e ipotizzando che abbiano la stessa velocità, poiché la formica x percorre un percorso più breve, raggiungerà il nido più rapidamente. Entrambe rilasciano feromone lungo il proprio cammino, ma una terza formica z, proveniente dal nido, ne percepirà una concentrazione maggiore sul percorso più breve e conseguentemente lo prediligerà rispetto all'altro. Progressivamente l'itinerario più conveniente verrà selezionato da un numero sempre maggiore di formiche, che a loro volta ne incrementeranno più

rapidamente la concentrazione di feromone innescando un processo auto-catalitico e rafforzando il *feedback* positivo. Quindi, la probabilità con cui una formica sceglie un determinato itinerario aumenta in funzione del numero di formiche che hanno già optato per quello stesso tragitto e il feromone, che indirettamente contiene l'informazione accumulata sull'ambiente, guida rapidamente la scelta collettiva dell'intera colonia verso il percorso ottimale.

### 5.3 Architettura dell'algoritmo

L'algoritmo segue uno schema iterativo strutturato in più fasi. In particolare prevede:

- **Inizializzazione:** scelta dei parametri iniziali;
- **Allocazione iniziale:** ogni agente artificiale viene posizionato su un nodo di partenza;
- **Costruzione della soluzione:** ciascuna formica seleziona progressivamente la successiva città da visitare sulla base della cosiddetta *State transition rule*, generando così un tour completo;
- **Aggiornamento del feromone:** al termine della costruzione di tutti gli itinerari si applica la *Global pheromone updating rule*;
- **Iterazioni e arresto:** il ciclo di costruzione delle soluzioni e aggiornamento del feromone viene ripetuto per un numero prefissato di iterazioni oppure fino al soddisfacimento di criteri di arresto prestabiliti.

Un elemento opzionale nelle implementazioni avanzate dell'*Ant Colony Optimization*, è rappresentato dalle cosiddette *daemon actions*, di cui un comune esempio è il rinforzo selettivo del feromone lungo i percorsi delle soluzioni migliori. Tali azioni costituiscono interventi centralizzati che non possono essere eseguiti autonomamente dalle singole formiche artificiali, ma che vengono applicati all'algoritmo "dall'esterno" per indirizzare o potenziare il processo di ricerca. Attraverso l'applicazione di questi meccanismi di controllo, si privilegiano tipicamente regioni promettenti dello spazio di ricerca, si incrementa la velocità di convergenza e si aumenta la probabilità di ottenere soluzioni di alta qualità.

#### 5.3.1 Inizializzazione

Prima dell'esecuzione vera e propria dell'algoritmo, la definizione dei parametri iniziali rappresenta una fase cruciale dell'implementazione, poiché essi delineano le caratteristiche dell'ambiente e i meccanismi attraverso i quali gli agenti artificiali cooperano, contribuendo significativamente alla generazione di soluzioni di alta qualità. In particolare vengono impostati: il numero di formiche  $m$ , il numero massimo di iterazioni, i coefficienti  $\alpha$  e  $\beta$ , rispettivamente indicativi di euristica e traccia del feromone, il tasso di evaporazione del feromone  $\rho$  e la concentrazione iniziale di

feromone.

In riferimento a quest'ultimo fattore, inizialmente la distribuzione del feromone sugli spigoli del grafo è tipicamente uniforme, a riflettere l'assenza, da parte delle formiche, di conoscenze a priori circa il percorso ottimale. Nei problemi di ottimizzazione combinatoria, come il TSP, la scelta del valore iniziale  $\tau_0$  riveste un ruolo cruciale, poiché influisce direttamente sul bilanciamento tra esplorazione e sfruttamento.

I principali approcci per l'inizializzazione del feromone presenti in letteratura sono:

$$\tau_0 = \frac{1}{nL} \quad (5.1)$$

$$\tau_0 = \frac{1}{\rho L} \quad (5.2)$$

$$\tau_0 = \frac{n + m}{\rho L} \quad (5.3)$$

dove  $n$  è il numero di nodi,  $L$  rappresenta la lunghezza di una soluzione approssimativa,  $\rho$  è il coefficiente di evaporazione del feromone  $m$  il numero di formiche.

Un ultimo aspetto cruciale della fase di inizializzazione riguarda la creazione di apposite strutture dati che diano una rappresentazione matematica delle tracce di feromone e dell'euristica, al fine di promuovere l'immediatezza dell'accesso a queste informazioni durante l'implementazione dell'algoritmo. Si definiscono pertanto:

- la matrice del feromone  $\tau$ , dove  $\tau_{ij}$  rappresenta la concentrazione di feromone sull'arco che connette i nodi  $i$  e  $j$ .
- la matrice euristica  $\eta$ , dove  $\eta_{ij}$  viene valutato come il reciproco del costo associato allo spigolo  $(i, j)$ .

### 5.3.2 State transition rule

La *State transition rule* è una regola probabilistica che modella il meccanismo decisionale con cui una generica formica seleziona, ad ogni passo, il nodo successivo da visitare, generando progressivamente un tour completo che rappresenta una possibile soluzione del problema. E' formulata matematicamente come:

$$p_k(r, s) = \begin{cases} \frac{[\tau(r, s)]^\beta \cdot [\eta(r, s)]^\alpha}{\sum_{u \in J_k(r)} [\tau(r, u)]^\beta \cdot [\eta(r, u)]^\alpha} & \text{se } s \in J_k(r) \\ 0 & \text{altrimenti} \end{cases} \quad (5.4)$$

Considerata cioè, una formica  $k$  che sia inizialmente posizionata su un nodo  $r$  e diretta verso il nodo  $s$ ,  $\tau(r, s)$  descrive la concentrazione di feromone sullo spigolo  $(r, s)$  e viene regolata dal coefficiente  $\beta$ ,  $\eta(r, s)$  rappresenta l'informazione euristica, cioè l'inverso delle distanze, che viene regolata dal parametro  $\alpha$ , mentre  $J_k(r)$  denota l'insieme delle città non ancora visitate.

Dall'espressione matematica è possibile notare, con immediatezza, come vengano privilegiati gli spigoli più corti e con una concentrazione di feromone maggiore.

La *State transition rule* costituisce uno degli elementi cardine dell'*Ant Colony Optimization*, in quanto combina l'informazione contenuta nelle tracce di feromone con l'informazione euristica specifica del problema, modulandone l'influenza tramite i parametri  $\alpha$  e  $\beta$ . Conseguentemente, governa direttamente il bilanciamento tra lo sfruttamento delle soluzioni più promettenti e l'esplorazione di alternative nello spazio di ricerca. Infatti, valori elevati di  $\beta$  tendono a guidare la ricerca sugli archi con concentrazione di feromone maggiore, accelerando la convergenza ma aumentando il rischio di stagnazione su ottimi locali; allo stesso tempo con coefficienti  $\alpha$  troppo elevati, le formiche si orientano verso scelte più "avide" e deterministiche, riducendo l'ampiezza e la diversificazione delle soluzioni esplorate.

### 5.3.3 Global pheromone updating rule

Una volta che il tour viene costruito, il feromone viene aggiornato secondo:

$$\tau(r, s) \leftarrow (1 - \rho) \cdot \tau(r, s) + \sum_{k=1}^m \Delta\tau_k(r, s) \quad (5.5)$$

dove

$$\Delta\tau_k(r, s) = \begin{cases} \frac{1}{L_k} & \text{se } (r, s) \in \text{al percorso della formica } k \\ 0 & \text{altrimenti} \end{cases} \quad (5.6)$$

Nella trattazione,  $\rho$  è il tasso di evaporazione del feromone, tipicamente compreso tra 0 e 1,  $L_k$  indica la lunghezza del tour costruito dalla formica  $k$ .

Lo scopo dell'aggiornamento, che modella i meccanismi propri della stigmergia delle formiche, risiede nell'allocatione di feromone sui percorsi identificati come i migliori. Si tratta di un processo in cui si aumenta la concentrazione di feromone sui tratti più brevi, favorendo la convergenza dell'algoritmo, ma contestualmente si evita, attraverso il coefficiente di evaporazione, che ciò avvenga prematuramente, promuovendo invece l'esplorazione di nuove soluzioni.

### 5.3.4 Punti di forza

L'*Ant Colony Optimization* è particolarmente efficace grazie al distintivo meccanismo di deposito ed evaporazione del feromone, che permette di bilanciare in modo dinamico esplorazione e sfruttamento delle soluzioni. Tra le peculiarità dell'ACO, la natura probabilistica della scelta del nodo successivo, da parte di ciascuna formica, favorisce la diversificazione delle soluzioni, rendendo l'algoritmo relativamente robusto a rumori nei dati ed errori locali.

Le caratteristiche dell'ACO lo rendono estremamente adattabile: infatti, l'algoritmo è stato applicato con successo a vari problemi combinatori, come *Sequential ordering*, *Vehicle Routing* e *Quadratic Assignment*, modificando opportunamente la funzione obiettivo, i parametri iniziali o la strategia di *update*. Esistono anche varianti della tecnica di ottimizzazione che sono progettate ad hoc (come il Dynamic ACO) per la risoluzione di problemi dinamici. La struttura dell'algoritmo facilita di per sé l'adattamento, anche se l'efficacia nei contesti dinamici dipende strettamente dall'adozione di opportune strategie specifiche di aggiornamento del feromone.

Un ulteriore punto di forza è la possibilità di ibridazione: l'ACO può essere agevolmente combinato con altre tecniche di ottimizzazione, ad esempio algoritmi genetici o operatori di ricerca locale, al fine di migliorarne le performance complessive o accelerarne la convergenza.

La presenza di molti agenti artificiali all'interno dell'algoritmo, che agiscono indipendentemente gli uni dagli altri e che comunicano tra di loro indirettamente, solo attraverso la stigmergia e in assenza di coordinatori centralizzati, conferisce all'ACO una struttura distribuita. Questa organizzazione decentralizzata si traduce in un vantaggio operativo, in quanto l'algoritmo può essere eseguito anche in modo parallelo su più processori. In altre parole, la strutturazione distribuita dell'ACO lo predispone naturalmente a un'implementazione parallelizzata. Allo stesso tempo questa caratteristica gli conferisce la proprietà di scalabilità, cioè ne consente l'applicazione anche a problemi di notevoli dimensioni con tempi di calcolo contenuti.

Infine, esistono in letteratura delle dimostrazioni di convergenza per specifiche varianti dell'*Ant Colony Optimization*, che mostrano che almeno teoricamente l'algoritmo è in grado di raggiungere l'ottimo globale. Nella pratica, invece, la convergenza risulta fortemente influenzata dai parametri iniziali, in quanto soprattutto valori troppo elevati di  $\alpha$  o  $\beta$  possono guidare l'algoritmo prematuramente a soluzioni sub-ottimali.

### 5.3.5 Principali varianti dell'algoritmo

Le caratteristiche fin qui descritte si riferiscono alla versione originaria dell'algoritmo, denominata *Ant System* (AS), che rappresenta la base da cui sono state sviluppate nel tempo numerose varianti, ideate con l'obiettivo di migliorarne le prestazioni e affinarne le capacità.

Tra queste, la più nota è l'*Ant Colony System* (ACS), proposta da Dorigo e Gambardella nel 1997 [19]. Questa versione introduce la cosiddetta *Pseudo-random-proportional rule*, una strategia decisionale che orienta le formiche verso lo sfruttamento delle soluzioni più promettenti, in quanto favorisce la probabilità di selezionare i percorsi più corti e caratterizzati da livelli più elevati di feromone. Secondo tale regola, una formica posizionata sul nodo  $r$  sceglie la città  $s$  dove dirigersi

in base a:

$$p_k(r, s) = \begin{cases} \arg \max_{u \in J_k(r)} \{[\tau(r, u)] \cdot [\eta(r, u)]^\alpha\} & \text{se } q \leq q_0 \\ S & \text{altrimenti} \end{cases} \quad (5.7)$$

dove  $q$  è un numero randomico distribuito in  $[0,1]$ ,  $q_0$  è un parametro compreso tra 0 e 1 che determina l'importanza relativa tra esplorazione e sfruttamento, e  $S$  è una variabile random selezionata secondo la distribuzione di probabilità della *State transition rule* in 5.4.

Una delle innovazioni principali dell'ACS riguarda inoltre il meccanismo di aggiornamento del feromone: solo la formica che ha trovato la soluzione migliore contribuisce al suo deposito, rafforzando i percorsi più efficaci secondo una differente versione della *Global updating rule*:

$$\tau(r, s) \leftarrow (1 - \rho) \cdot \tau(r, s) + \rho \cdot \Delta\tau(r, s) \quad (5.8)$$

dove

$$\Delta\tau(r, s) = \begin{cases} (L_{gb})^{-1} & \text{se } (r, s) \in \text{al percorso migliore} \\ 0 & \text{altrimenti} \end{cases} \quad (5.9)$$

e dove  $L_{gb}$  rappresenta la lunghezza del tour migliore individuato.

A questo aggiornamento globale si affianca una regola locale, applicata ogni volta che una formica percorre un arco. Quest'ultima riduce temporaneamente la quantità di feromone sul tratto interessato, scoraggiando le formiche successive dal seguirlo e indirizzandole a prediligere l'esplorazione di percorsi alternativi.

Un'altra versione che ha riscontrato successo in svariate applicazioni è l'EAS (*Elitist Ant System*). La differenza principale rispetto all'AS risiede nella strategia di aggiornamento del feromone. L'espressione che descrive il meccanismo è:

$$\tau_{i,j} \leftarrow (1 - \rho) \cdot \tau_{i,j} + \sum_{k=1}^m \Delta\tau_{i,j}^k + e\Delta\tau_{i,j}^{bs} \quad (5.10)$$

dove  $\Delta\tau_{i,j}^{bs}$  è il valore di una traccia aggiuntiva rispetto al contributo standard delle altre formiche, depositata da un'agente artificiale di "élite", ossia quello che ha individuato la migliore soluzione fin dall'inizio dell'esecuzione. Questo approccio accentua la componente di sfruttamento, indirizzando più rapidamente la colonia verso regioni di alta qualità dello spazio di ricerca [21].

Nel *Rank-Based Ant System*, proposto da Bullnheimer nel 1997 [22], l'aggiornamento del feromone assume una logica gerarchica: le formiche vengono ordinate in base alla qualità delle soluzioni trovate e solo le migliori contribuiscono al deposito del feromone, con un peso proporzionale alla loro posizione in classifica. Tale strategia riduce l'effetto del rumore stocastico, migliora la stabilità del processo di convergenza

e promuove una ricerca più mirata.

Un'ulteriore evoluzione è rappresentata dal *MAX-MIN Ant System* (MMAS), introdotto da Stützle e Hoos nel 2000 [23]. Anche questa soluzione si basa sull'idea di migliorare le performance dell'algoritmo indirizzando il meccanismo decisionale delle formiche allo sfruttamento, impedendo al contempo convergenza prematura a soluzioni di bassa qualità. Per realizzare questo obiettivo il deposito del feromone è delegato ad un'unica formica, o quella che ha trovato la migliore soluzione dall'inizio dell'esecuzione (*global-best*) o nell'iterazione corrente (*iteration-best*). La regola di aggiornamento implementata è:

$$\tau_{i,j}(t+1) = \rho \cdot \tau_{i,j}(t) + \sum_{k=1}^m \Delta\tau_{i,j}^{best} \quad (5.11)$$

dove

$$\Delta\tau_{i,j}^{best} = \frac{1}{f(s^{best})} \quad (5.12)$$

con  $f(s^{best})$  che denota il costo della soluzione migliore. Invece, per evitare fenomeni di stagnazione della ricerca, viene imposto un intervallo di valori ammissibili  $[\tau_{min}, \tau_{max}]$ . In fase iniziale, tutti gli archi vengono impostati al valore massimo di feromone per incoraggiare l'esplorazione, mentre una successiva riduzione controllata favorisce la convergenza. Se il miglioramento della soluzione si arresta per un numero prefissato di iterazioni, la matrice dei feromoni viene re-inizializzata a  $\tau_{max}$ , consentendo all'algoritmo di uscire da eventuali ottimi locali.

## Capitolo 6

# Implementazione per missioni ADR

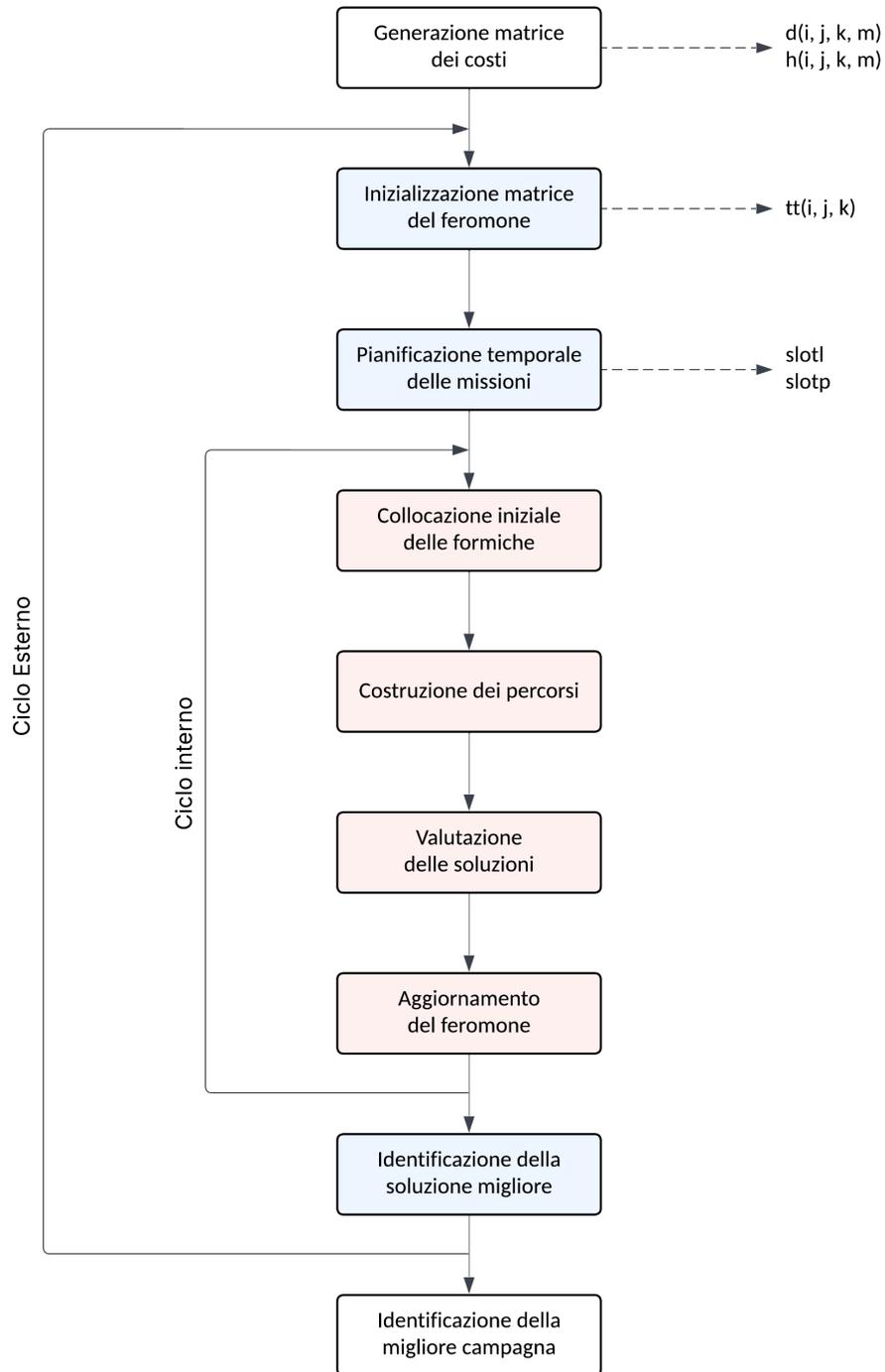
Il problema dell'ottimizzazione delle missioni di Rimozione Attiva dei Detriti può essere formalmente inquadrato come una variante del *Traveling Salesman Problem*, opportunamente estesa per includere specifici vincoli.

Un primo elemento che contribuisce in modo sostanziale alla complessità del problema è il duplice obiettivo che caratterizza le missioni ADR multi-detrito: da un lato, individuare la sequenza ottimale di rimozione che minimizzi i costi propulsivi, e dall'altro, ottimizzare la pianificazione temporale delle trasferte orbitali. La campagna ADR, infatti, può comprendere una serie di missioni successive, ciascuna dedicata alla rimozione di un sottoinsieme di detriti. Ciò comporta un problema di natura gerarchica e interdipendente, in cui occorre coordinare la pianificazione strategica dell'intera campagna e la gestione operativa delle singole missioni.

Rispetto al TSP classico, il problema ADR introduce inoltre una serie di vincoli temporali, che riguardano la durata dei trasferimenti orbitali, la disponibilità delle finestre di lancio e le tempistiche associate alle operazioni di *servicing* sui detriti. Tali vincoli determinano la fattibilità delle soluzioni e incidono in modo diretto sul costo propulsivo complessivo della missione.

Un ulteriore fonte di complessità è legata alla gestione dei costi. Infatti, a differenza del TSP, in cui i costi tra i nodi sono fissi, nel problema ADR, in cui ciascun nodo rappresenta un detrito orbitale e ogni arco descrive un trasferimento, i costi risultano asimmetrici, multi-dimensionali e tempo-dipendenti, poiché variano in funzione della configurazione relativa tra gli oggetti e delle finestre orbitali disponibili. Le caratteristiche dell'algoritmo ACO, tra cui la natura adattiva e auto-organizzante, lo rendono particolarmente efficace in tale contesto operativo.

## 6.1 Specificità dell'algoritmo per l'ottimizzazione delle missioni ADR



**Figura 6.1:** Architettura ACO per missioni ADR

Il codice MATLAB sviluppato per il presente elaborato prevede una struttura procedurale con due cicli annidati. In Figura 6.1, viene illustrato sinteticamente il flusso logico che caratterizza l'algoritmo e le principali strutture dati impiegate, associate

alla fase in cui vengono definite.

### 6.1.1 Generazione delle matrici dei costi ed euristica

La prima fase fondamentale riguarda la generazione della matrice dei costi dinamica 4-D, che quantifica i costi propulsivi associati ai trasferimenti tra i vari detriti. La sua costruzione richiede la conoscenza dei parametri orbitali di ciascun oggetto e prevede il calcolo dei  $\Delta V$  richiesti per ogni manovra orbitale, attraverso una funzione dedicata che implementa il modello analitico descritto nel Capitolo 6.2. In questo modo, la matrice risultante contiene il costo associato al trasferimento tra ogni coppia di detriti, per tutte le possibili epoche di partenza e per tutte le durate considerate.

Ciascun elemento è espresso nella forma:

$$d(i, j, t_p, \Delta t)$$

dove  $i$  è il detrito di partenza,  $j$  quello di arrivo,  $t_p$  è l'epoca di partenza, campionata ogni 5 giorni sull'arco temporale complessivo della campagna, e  $\Delta t$  è la durata del trasferimento, espressa come multiplo di 5 giorni nell'intervallo 0-25.

A partire da questa matrice viene poi derivata la matrice euristica, che definisce la desiderabilità delle trasferte e rappresenta una componente fondamentale per la fase di costruzione delle soluzioni da parte delle formiche. Ciascun elemento della matrice euristica è espresso come:

$$h(i, j, t_p, \Delta t) = 1/d(i, j, t_p, \Delta t)$$

### 6.1.2 Inizializzazione della matrice del feromone

Successivamente, ha inizio il ciclo esterno, che gestisce l'esecuzione di un numero prestabilito di ripetizioni. Tale ciclo comprende l'inizializzazione della matrice del feromone, la definizione della schedulazione temporale delle missioni, il ciclo interno in cui viene implementato l'algoritmo ACO vero e proprio, e, infine, la selezione della soluzione migliore tra quelle ottenute.

In prima istanza, all'interno del ciclo, viene definita la matrice del feromone, indicata come

$$tt(i, k, n\text{lan}ci)$$

che rappresenta la quantità di feromone associata a ciascun arco del grafo in funzione del detrito di partenza  $i$ , quello di arrivo  $j$  e della missione che si sta pianificando.

La matrice viene inizialmente impostata con valori unitari, per garantire una condizione di esplorazione uniforme dello spazio delle soluzioni nella fase iniziale della ricerca.

### 6.1.3 Pianificazione temporale delle missioni

A seguire, nella fase di schedulazione temporale, le missioni vengono generate mediante un approccio stocastico vincolato, finalizzato alla definizione della pianificazione temporale delle trasferte orbitali e alla suddivisione delle sequenze di rimozione in più missioni distinte.

In questa fase viene innanzitutto definito in modo casuale il vettore  $slotl$ , che esprime la durata temporale, espressa in valori discreti, di ciascuna trasferta tra due detriti consecutivi.

Successivamente, la suddivisione della sequenza in missioni a sé stanti avviene attraverso un processo aleatorio controllato. Viene infatti generato un offset casuale nell'intervallo  $[-4, 5]$  che, sommato al numero medio di detriti per missione, determina i punti di separazione tra una missione e la successiva.

Dato  $\chi_i$  indice dell'ultimo detrito della missione  $i$ , si impone

$$\chi_i = \delta_i + i \cdot \lfloor n/nlanci \rfloor \quad (6.1)$$

dove  $\delta_i \in [-5, 5]$  è l'offset aleatorio,  $n$  è il numero totale di detriti da rimuovere,  $nlanci$  il numero complessivo di missioni pianificate. Tale strategia viene implementata per garantire una ripartizione equilibrata del carico operativo tra le diverse missioni, e allo stesso tempo per esplorare in modo controllato differenti configurazioni temporali della campagna.

Per assicurare il rispetto del vincolo della durata totale della campagna, viene inoltre eseguito un processo di bilanciamento iterativo, nel quale le durate dei trasferimenti vengono incrementate o ridotte in funzione del superamento o del mancato raggiungimento del limite temporale prefissato. Infine, in questa fase viene definito il vettore  $slotp$ , che contiene gli istanti discreti di partenza delle trasferte. Esso viene costruito in maniera ricorsiva secondo la relazione:

$$slotp_i = \begin{cases} t_0 & \text{se } i = 1 \\ slotp_{i-1} + slotl_{i-1} & \text{se } i > 1 \end{cases} \quad (6.2)$$

dove  $t_0$  è l'istante iniziale e  $i$  indica l'indice del vettore  $slotp$ .

### 6.1.4 Ciclo interno

Questa fase rappresenta il nucleo operativo dell'algoritmo e prevede l'implementazione del codice ACO di tipo *Ant System*. Dopo l'assegnazione casuale delle città di partenza a ogni agente artificiale, le formiche costruiscono in modo indipendente i propri tour applicando la *State transition rule*, che regola la scelta probabilistica del nodo successivo in funzione della quantità di feromone presente e dell'informazione euristica associata all'arco. Per ogni trasferimento (*leg*), ciascuna formica riceve in

ingresso l'epoca di partenza e quella di arrivo, consentendo così di valutare il costo associato al trasferimento stesso.

Una volta completati i tour, le soluzioni vengono valutate attraverso il calcolo del corrispondente costo propulsivo complessivo, espresso in termini di  $\Delta V$ .

Segue la fase di aggiornamento del feromone con parziale evaporazione e deposizione di nuove tracce, di intensità proporzionale al costo delle soluzioni trovate, attraverso la *Global pheromone update rule*. In particolare, a ciascun arco appartenente al percorso di una formica viene aggiunta una quantità di feromone espressa come:

$$\delta t = \frac{dt}{f_i}$$

$dt$  è un parametro di progetto, mentre  $f_i$ , relativo alla formica  $i$ -esima, risulta

$$f = f - el \cdot \min(f) \tag{6.3}$$

dove  $cost$  è il costo in termini di  $\Delta V$  del tour  $i$ -esimo,  $\min(cost)$  è il minimo costo tra gli  $n$  tour generati ed  $el$  è il *common cost elimination*.

### 6.1.5 Identificazione finale della soluzione e della campagna

Al termine del ciclo interno, eseguito per un numero prefissato di iterazioni, viene individuata la migliore soluzione tra quelle generate nel corso dell'esecuzione, sulla base del valore minimo del costo propulsivo complessivo. Il completamento di questa fase comporta la chiusura del ciclo esterno, che raccoglie i risultati di tutte le ripetizioni eseguite, da cui viene selezionata la campagna di missioni ottimale, ovvero quella che garantisce il miglior compromesso globale in termini di  $\Delta V$  e distribuzione dei detriti tra le missioni.

## 6.2 Il modello analitico

Data l'elevata complessità combinatoria del problema, l'impiego di un modello analitico risulta fondamentale per ottenere una stima accurata del costo propulsivo, e al contempo contenere il carico computazionale. Il modello adottato per la costruzione della matrice dei costi nella fase iniziale del codice trae ispirazione da quello proposto in [24] e [25].

Il modello si fonda sullo sfruttamento delle perturbazioni indotte dal termine  $J_2$  del campo gravitazionale terrestre, che costituisce il principale contributo non kepleriano per gli oggetti in orbita LEO. Pur introducendo variazioni progressive nei parametri orbitali, e quindi una certa complessità nella modellazione del moto, l'effetto  $J_2$  può essere impiegato in modo vantaggioso in molti contesti operativi, tra cui la pianificazione di missioni ADR. Nei casi in cui gli oggetti coinvolti presentano valori di RAAN differenti, la precessione differenziale dei piani orbitali indotta dal

termine J2 può infatti essere sfruttata per ottenere configurazioni più favorevoli. In questo modo, i piani orbitali tendono naturalmente ad allinearsi nel tempo, riducendo significativamente il costo propulsivo rispetto a quello associato a manovre di cambio di piano dirette.

Nel modello impiegato vengono considerati solo gli effetti secolari del termine J2, quindi RAAN, argomento del periapside e anomalia media variano secondo le relazioni 3.68, 3.69 e 3.70, mentre semiasse maggiore, eccentricità ed inclinazione rimangono costanti. In particolare, la variazione della RAAN può essere espressa in funzione di piccole variazioni di  $a$  e  $i$  come:

$$\frac{\delta\dot{\Omega}}{\dot{\Omega}} = \frac{\delta\dot{\Omega}/\delta a + \delta\dot{\Omega}/\delta i}{\dot{\Omega}} \quad (6.4)$$

dove

$$\frac{\delta\dot{\Omega}}{\delta a} = \frac{21}{4} \frac{\sqrt{\mu}}{a^{9/2}} r_E^2 J_2 \frac{\cos i}{(1-e^2)^2} \delta a \quad (6.5)$$

$$\frac{\delta\dot{\Omega}}{\delta i} = \frac{3}{2} \frac{\sqrt{\mu}}{a^{7/2}} r_E^2 J_2 \frac{\sin i}{(1-e^2)^2} \delta i \quad (6.6)$$

da cui

$$\frac{\delta\dot{\Omega}}{\dot{\Omega}} = -\frac{7}{2} \frac{\delta a}{a} - \tan i \delta i \quad (6.7)$$

Questa relazione consente di calcolare la variazione differenziale del nodo ascendente dovuta alle modifiche dei parametri orbitali  $a$  e  $i$ , risultando fondamentale per la valutazione dei costi di manovra.

Per calcolare i costi di trasferimento, il presente modello richiede in input le epoche di inizio e fine trasferta, rispettivamente indicate come  $t_s$  e  $t_a$ , e i parametri orbitali dei detriti di partenza e di arrivo, tipicamente presentati in un opportuno file *.txt*, quali:

- semiasse maggiori  $a_1$  e  $a_2$ ;
- inclinazioni  $i_1$  e  $i_2$ ;
- eccentricità  $e_1$  ed  $e_2$ ;
- RAAN  $\Omega_{ef1}$  e  $\Omega_{ef2}$ ;
- epoche di riferimento  $ep_1$  e  $ep_2$  a cui vengono rispettivamente valutati questi parametri.

Dopo aver valutato le variazioni di RAAN dovute all'effetto J2 attraverso l'espressione 3.68, si può calcolare la differenza:

$$\Delta\dot{\Omega} = \dot{\Omega}_2 - \dot{\Omega}_1 \quad (6.8)$$

Successivamente vengono calcolati i valori di RAAN a inizio e fine trasferimento

$$\Omega_{01} = \dot{\Omega}_1(t_s - ep_1) + \Omega_{ef1} \quad (6.9)$$

$$\Omega_{02} = \dot{\Omega}_2(t_s - ep_2) + \Omega_{ef2} \quad (6.10)$$

da cui si determina la differenza

$$\Delta\Omega = \Omega_{02} - \Omega_{01} \quad (6.11)$$

Note  $\Delta\Omega$  e  $\Delta\dot{\Omega}$ , è possibile quindi calcolare il tempo necessario affinché i due detriti raggiungano lo stesso nodo ascendente grazie alla perturbazione J2:

$$\Delta t = -\frac{\Delta\Omega}{\Delta\dot{\Omega}} \quad (6.12)$$

La relazione consente di calcolare il tempo di arrivo  $t = t_s + \Delta t$ , per cui la variazione complessiva di RAAN tra le due orbite è nulla. In questo caso si può direttamente valutare il costo propulsivo come:

$$\Delta v_a = \Delta v_b = \frac{1}{2}\sqrt{y^2 + z^2} \quad (6.13)$$

con  $x$  e  $y$  componenti del vettore velocità valutate in 6.17 e 6.18.

Al contrario, se la durata del trasferimento deve essere ridotta per rispettare eventuali vincoli operativi ( $t > t_a$ ), la mancata compensazione naturale della differenza di RAAN richiede l'esecuzione di una manovra propulsiva aggiuntiva. In questo scenario è necessario determinare la differenza di RAAN alla fine della trasferta:

$$\Delta\Omega_{ar} = \Omega_2 - \Omega_1 \quad (6.14)$$

dove

$$\Omega_1 = \Omega_{01} + \dot{\Omega}_1(t_a - t_s) \quad (6.15)$$

$$\Omega_2 = \Omega_{02} + \dot{\Omega}_2(t_a - t_s) \quad (6.16)$$

sono i valori di RAAN della coppia di detriti al tempo  $t_a$ .

Il passo successivo prevede il calcolo delle componenti di velocità  $x$ ,  $y$ ,  $z$  necessarie a generare le variazioni dei parametri orbitali  $\Omega$ ,  $a$  e  $i$  richieste per il trasferimento.

$$x = \Delta\Omega_{ar}(\sin i_0)v_0 \quad (6.17)$$

$$y = \frac{a_2 - a_1}{2a_0}v_0 \quad (6.18)$$

$$z = (i_2 - i_1)v_0 \quad (6.19)$$

con  $i_0 = \frac{i_1+i_2}{2}$ ,  $a_0 = \frac{a_1+a_2}{2}$  e  $v_0 = \sqrt{\mu/a_0}$ .

A questo punto, nel modello descritto, ciascun trasferimento orbitale viene

rappresentato secondo tre modalità distinte:

- **Manovra a singolo impulso iniziale:** l'intera variazione di velocità viene applicata all'inizio della trasferta, secondo la relazione

$$\Delta v_a = \sqrt{x_0^2 + y^2 + z^2} \quad \Delta v_b = 0 \quad (6.20)$$

dove  $x_0 = \Delta\Omega \sin i_0 v_0$ .

- **Manovra a singolo impulso finale:** l'impulso viene eseguito esclusivamente al termine del trasferimento, per cui

$$\Delta v_a = 0 \quad \Delta v_b = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2} \quad (6.21)$$

- **Manovra a due impulsi:** prevede un primo impulso in uscita dall'orbita di partenza e un secondo in ingresso in quella di arrivo.

Il modello valuta ciascun trasferimento secondo tutte e tre le configurazioni, selezionando automaticamente quella a costo propulsivo minimo.

Nel caso della manovra a due impulsi, è necessario uno studio più approfondito: infatti, le variazioni di velocità richieste lungo le tre direzioni devono essere opportunamente ripartite tra i due impulsi. In particolare, entrambe le manovre eseguite sono di tipo combinato, approccio che consente di ottenere la configurazione orbitale desiderata minimizzando il consumo di propellente.

Il primo impulso viene calcolato come:

$$\Delta v_a = \sqrt{(s_x x)^2 + (s_y y)^2 + (s_z z)^2} \quad (6.22)$$

dove  $s_x$ ,  $s_y$  e  $s_z$  sono i tre parametri che esprimono la ripartizione della variazione di velocità tra le componenti direzionali della manovra e che, pertanto, devono essere ottimizzati.

Normalmente, l'obiettivo di una manovra sarebbe quello di ottenere esattamente i valori di  $a$  e  $i$  desiderati, tuttavia, il modello ammette che questi parametri possano temporaneamente superare i valori target. Questa scelta, apparentemente controintuitiva, è in realtà strategica: poiché il termine J2 dipende strettamente da  $a$  e  $i$ , la loro variazione può indurre una diversa velocità di precessione del nodo ascendente e favorire, quindi, un allineamento più conveniente tra i piani orbitali, riducendo complessivamente il costo della manovra. Modificare semiasse maggiore e inclinazione produce una differenza di RAAN durante la trasferta ( $\Delta x$ ). Partendo da

$$\delta\dot{\Omega} = -\frac{7}{2} \frac{\delta a}{a_0} \dot{\Omega}_0 - \tan i_0 \delta i \dot{\Omega}_0 \quad (6.23)$$

$$\delta\Omega = \delta\dot{\Omega} \cdot t = -\frac{7}{2} \frac{\delta a}{a_0} \dot{\Omega}_0 t - \tan i_0 \delta i \dot{\Omega}_0 t \quad (6.24)$$

con  $\dot{\Omega}_0 = (\dot{\Omega}_1 + \dot{\Omega}_2)$  rateo di variazione di RAAN medio, si sostituisce in 6.17, da cui:

$$\Delta x = -\frac{7}{2}\dot{\Omega}_0 \frac{\delta a}{a_0} v_0 \sin i_0 t - \dot{\Omega}_0 \tan i_0 \delta i v_0 \sin i_0 t \quad (6.25)$$

Sostituendo ulteriormente le espressioni di 6.18 e 6.19 si ottiene finalmente:

$$\Delta x = 7\dot{\Omega}_0 \sin i_0 t s_y y + \dot{\Omega}_0 \tan i_0 \sin i_0 t s_z z = m s_y y + n s_z z \quad (6.26)$$

E' quindi possibile calcolare il secondo impulso, formulato come:

$$\Delta v_b = \sqrt{(x - s_x x - \Delta x)^2 + (y + s_y y)^2 + (z + s_z z)^2} \quad (6.27)$$

Il  $\Delta V$  complessivo viene espresso attraverso l'equazione:

$$\begin{aligned} \Delta V &= \Delta v_a + \Delta v_b = \\ &= \sqrt{(s_x x)^2 + (s_y y)^2 + (s_z z)^2} + \sqrt{(x - s_x x - \Delta x)^2 + (y + s_y y)^2 + (z + s_z z)^2} \end{aligned}$$

A questo punto, per determinare i valori ottimali dei coefficienti  $s_x$ ,  $s_y$  e  $s_z$ , si ricorre a un'approssimazione che consiste nell'elevare al quadrato l'espressione precedente e nel trascurare i termini di prodotto incrociato, in modo tale da ottenere:

$$\begin{aligned} \Delta v_a^2 + \Delta v_b^2 &= \\ &= (s_x x)^2 + (s_y y)^2 + (s_z z)^2 + (x - s_x x - \Delta x)^2 + (y + s_y y)^2 + (z + s_z z)^2 \end{aligned}$$

Si procede dunque al calcolo delle derivate parziali rispetto ai parametri di interesse, ponendole successivamente uguali a zero per individuare i valori ottimali.

$$\frac{\partial(\Delta v_a^2 + \Delta v_b^2)}{\partial s_x} = 4s_x x^2 - 2x^2 + 2m x s_y y + 2n x s_z z = 0 \quad (6.28)$$

$$\frac{\partial(\Delta v_a^2 + \Delta v_b^2)}{\partial s_y} = 4s_y y^2 + 2m^2 s_y y^2 + 2m x s_y y + 2m n y s_z z + 2y^2 - 2m x y = 0 \quad (6.29)$$

$$\frac{\partial(\Delta v_a^2 + \Delta v_b^2)}{\partial s_z} = 4s_z z^2 + 2n^2 s_z z^2 + 2n x s_z z + 2m n s_y y + 2z^2 - 2n x z = 0 \quad (6.30)$$

In ultima istanza, dalla risoluzione del sistema di equazioni si ottiene:

$$s_x = \frac{2x + m y + n z}{(4 + m^2 + n^2)x} \quad (6.31)$$

$$s_y = \frac{2m x - (4 + n^2)y + m n z}{(8 + 2m^2 + 2n^2)y} \quad (6.32)$$

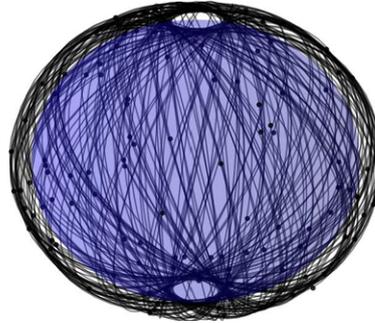
$$s_z = \frac{2n x + m n y - (4 + m^2)z}{(8 + 2m^2 + 2n^2)z} \quad (6.33)$$

## 6.3 Caso studio: la GTOC9

La *Global Trajectory Optimization Competition* è una competizione internazionale organizzata periodicamente a partire dal 2005, che si pone l'obiettivo di proporre problemi realistici di ottimizzazione di traiettorie spaziali, invitando università, centri di ricerca e agenzie spaziali di tutto il mondo a sviluppare soluzioni algoritmiche innovative. In particolare, la nona edizione della competizione è stata dedicata al tema della pianificazione di missioni di *Active Debris Removal* multi-detrito. L'obiettivo proposto dagli organizzatori è stato quello di esplorare le sfide associate alla progettazione di sequenze di rimozione estese, caratterizzate da un'evoluzione complessa delle distribuzioni di RAAN dovuta all'effetto differenziale J2.

### 6.3.1 Definizione del problema

*“Corre l'anno 2060 e lo sfruttamento commerciale delle orbite terrestri basse (LEO) ha superato il valore di mercato di mille miliardi di euro. A seguito dell'esplosione senza precedenti di un satellite in orbita eliosincrona, l'effetto Kessler ha innescato una serie di ulteriori collisioni e l'ambiente LEO eliosincrono risulta gravemente compromesso. Gli scienziati delle principali agenzie spaziali e delle aziende private hanno identificato un insieme di 123 detriti orbitali critici che, se rimossi, permetterebbero di ripristinare la possibilità di operare in questa preziosa regione orbitale e di evitare che l'effetto Kessler la comprometta in modo permanente. Siete quindi chiamati a progettare una serie di missioni in grado di rimuovere tutti i detriti critici, minimizzando al contempo il costo complessivo cumulativo dell'intera operazione.”* [26]



**Figura 6.2:** Visualizzazione delle  $M$  orbite dei detriti

Il problema posto verte sulla progettazione di  $n$  missioni per la rimozione di  $M = 123$  detriti spaziali su orbite kepleriane (Figura 6.2) perturbate dall'effetto J2, dove ciascuna missione deve prevedere una traiettoria a molteplici rendezvous per la rimozione di un sottoinsieme di detriti  $N$  degli  $M$  considerati, e l'attivazione di altrettanti dispositivi di deorbitamento. Nel farlo l'obiettivo è quello di minimizzare la funzione di costo

$$J = \sum_{i=1}^n C_i = \sum_{i=1}^n \left[ c_i + \alpha(m_{0_i} - m_{dry})^2 \right] \quad (6.34)$$

Per ciascuna missione  $i$ -esima, il costo complessivo  $C_i$  corrisponde a quello applicato dal fornitore del vettore di lancio contrattuale. Esso è composto dalla somma di due componenti: un costo base  $c_i$ , che cresce linearmente con l'avanzare dell'intervallo temporale della campagna, e un termine correttivo  $\alpha(m_{0_i} - m_{dry})^2$ , dove  $m_{0_i}$  rappresenta la massa totale del veicolo spaziale, mentre  $m_{dry}$  ne indica la massa a vuoto. I due contributi rispondono a finalità differenti: da un lato, il costo base  $c_i$  incoraggia la presentazione anticipata delle soluzioni da parte dei partecipanti, mentre il termine correttivo incentiva l'impiego di veicoli più leggeri ed efficienti, premiando la riduzione della massa di lancio. In particolare,

$$m_0 = m_{dry} + Nm_{de} + m_p$$

dove si considera che tutti gli *spacecraft* hanno una massa a vuoto  $m_{dry} = 2000 \text{ kg}$ , una massa di propellente massima  $m_p = 5000 \text{ kg}$ , e che ciascun dispositivo di deorbitamento ha una massa fissa  $m_{de} = 30 \text{ kg}$ .

Oltre agli aspetti economici, ogni missione deve rispettare una serie di vincoli operativi e temporali:

- Le uniche manovre consentite devono essere variazioni istantanee di velocità, con un massimo di 5 impulsi per ciascun trasferimento tra detriti consecutivi;
- il tempo tra due successivi rendezvous all'interno della stessa missione non può superare i 30 giorni;
- Le missioni non possono essere condotte in parallelo e deve trascorrere un tempo minimo di 30 giorni tra la fine di una missione e l'inizio della successiva;
- La durata massima della campagna di missioni corrisponde a una finestra temporale predefinita di 8 anni;
- Il periapside dell'orbita osculatrice deve essere uguale o superiore a  $6600 \text{ km}$ , al fine di evitare che il satellite si avvicini troppo all'atmosfera terrestre.

La rimozione di un detrito viene considerata completata quando sono soddisfatte due condizioni fondamentali. In primo luogo, in un determinato istante  $t$ , il vettore posizione e il vettore velocità del detrito devono coincidere con quelli del veicolo spaziale, a indicare l'avvenuto rendezvous orbitale. In secondo luogo, il veicolo deve mantenersi in prossimità del detrito per un intervallo temporale non inferiore a  $t_w = 5$  giorni, durante il quale viene effettuato il rilascio e l'attivazione di un dispositivo di deorbitamento.

Le caratteristiche orbitali dei detriti spaziali selezionati per la competizione presentano inclinazioni comprese tra  $96^\circ$  e  $101^\circ$ , semiasse maggiore tra circa i  $600$  e i  $900 \text{ km}$  ed eccentricità contenute nell'intervallo  $[0, 0.02]$  (Figura 6.3). Invece, la distribuzione dei valori di RAAN (Figura 6.4) risulta quasi uniforme lungo l'intera

circonferenza terrestre, evidenziando la forte dispersione angolare dei piani orbitali e rendendo immediatamente evidente la necessità di sfruttare l'effetto J2 in modo vantaggioso.

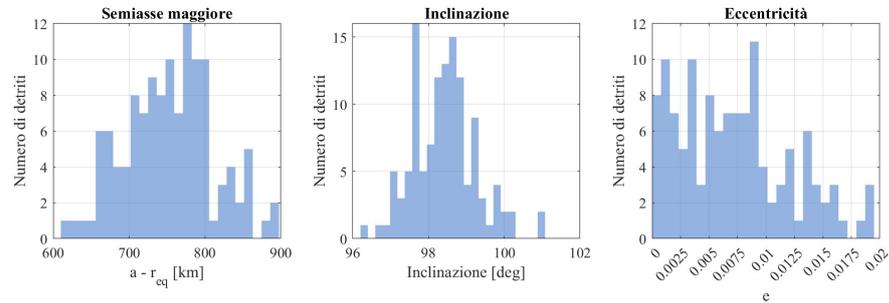


Figura 6.3: Parametri orbitali dei detriti

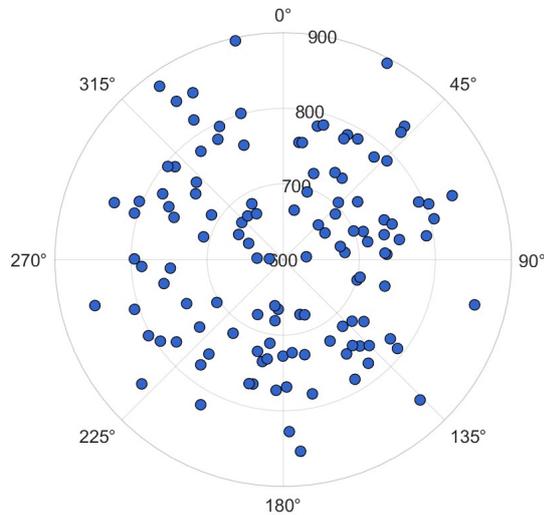


Figura 6.4: Distribuzione RAAN dei detriti

### 6.3.2 Soluzione vincitrice

Durante il periodo della competizione, trentadue squadre provenienti da tutto il mondo hanno proposto diverse strategie per risolvere il problema di ottimizzazione formulato. Tra queste, il team del Jet Propulsion Laboratory si è aggiudicato la vittoria grazie a una complessa strategia di risoluzione articolata in più fasi. Per ulteriori approfondimenti si rimanda a [27].

In prima istanza, per gestire in modo efficiente le migliaia di combinazioni possibili di collegamenti tra i 123 detriti, il JPL ha sviluppato estesi database di trasferimento, contenenti stime analitiche dei costi propulsivi associati a ciascuna coppia di oggetti orbitanti. Il prodotto di tale lavoro è stato il GIGABASE, un archivio contenente circa 290 milioni di voci, che ha permesso di valutare quasi istantaneamente la fattibilità e i costi di ogni possibile trasferta durante le successive fasi del progetto.

Sulla base delle informazioni contenute nel GIGABASE, per ridurre la complessità combinatoria del problema globale, il team ha proceduto alla costruzione di catene di rimozione, ossia sequenze candidate di detriti che risulta conveniente rimuovere all'interno della stessa missione. I metodi implementati comprendono tecniche euristiche e algoritmi di ricerca combinatoria, tra cui il metodo *Branch-and-Bound* per l'individuazione delle catene a basso costo, l'algoritmo *Ant Colony Optimization* e l'*Adaptive Chain Maker*, sviluppato internamente dal JPL.

Successivamente, le catene così ottenute sono state combinate per costruire campagne di missioni complete attraverso un approccio di tipo *Beam Search* probabilistico, in grado di bilanciare la ricerca locale di soluzioni promettenti ed esplorazione globale. In questa fase è stato inoltre introdotto il concetto di *anchor bodies*, ovvero detriti con caratteristiche orbitali particolarmente sfavorevoli, attorno alle quali costruire missioni indipendenti.

Una volta definita la struttura generale delle campagne, il JPL ha sviluppato un algoritmo genetico denominato GIGA (*Genetic Iterative Global Algorithm*). In particolare, il GIGA modella l'intera pianificazione come un problema di tipo TSP dipendente dal tempo, in cui i nodi rappresentano sia i detriti da visitare che gli offset di lancio. L'utilizzo di operatori evolutivi di mutazione e ricombinazione ha consentito una ricerca esplorativa ampia, favorendo al contempo la progressiva riduzione del costo propulsivo e l'ottimizzazione della distribuzione temporale delle missioni.

Infine, le campagne migliori emerse dalle fasi precedenti sono state sottoposte a un processo di ottimizzazione locale basato sul metodo del *multiple shooting*, per garantire la coerenza completa delle soluzioni e verificare il soddisfacimento dei vincoli operativi.

Il processo di ottimizzazione multilivello condotto dal JPL ha portato alla definizione di una campagna composta da 10 missioni, in grado di rimuovere tutti i 123 detriti entro otto anni con un costo complessivo di 731 milioni di euro.

L'intera pianificazione della campagna è riportata in Tabella 6.1.

Missione	Inizio [MJD2000]	Fine [MJD2000]	Massa [kg]	Numero di detriti	ID Detriti
1	23557.18	23821.03	5665.38	14	23,55,79,113,25,20,27,117,121,50,95,102,38,97
2	23851.08	24024.53	4666.15	12	19,115,41,26,45,82,47,85,7,2,11,77
3	24057.47	24561.49	6589.58	21	72,107,61,10,28,3,64,66,31,90,73,87,57,35,69,65,8,43,71,4,29
4	24637.26	24916.44	5679.10	11	108,24,104,119,22,75,63,112,37,32,114
5	24946.47	25232.94	4906.59	14	84,59,98,1,40,51,36,67,62,99,54,122,76,15
6	25262.95	25455.15	5062.74	10	101,48,53,5,12,39,58,13,60,74
7	25485.20	25682.33	4082.33	10	49,9,70,93,105,46,88,118,18,91
8	25712.38	25915.53	3725.73	9	86,34,100,30,92,6,110,96,81
9	25946.06	26237.29	4897.35	12	33,68,116,106,14,52,120,80,16,94,83,89
10	26267.80	26416.00	3438.62	10	44,111,56,78,0,17,109,103,42,21

**Tabella 6.1:** Campagna del JPL

### 6.3.3 Variazioni rispetto al problema originale

Analogamente al problema originale della GTCO, il presente elaborato analizza la campagna completa di 123 detriti. All'interno del codice utilizzato viene imposto lo stesso numero di missioni previsto nella soluzione di riferimento del JPL. Vengono inoltre mantenuti i medesimi vincoli temporali, tuttavia, a differenza della formulazione originaria, la scala temporale è stata discretizzata con un passo di 5 giorni, per cui ogni intervallo considerato risulta essere un multiplo di tale unità, con  $t_w = 5$ .

L'ottimizzazione è stata focalizzata esclusivamente sulla minimizzazione del costo propulsivo  $\Delta V$ , trascurando la funzione obiettivo economica  $C_i$  introdotta nella competizione. Allo stesso modo, non è stato considerato l'aspetto relativo alla massa dei veicoli spaziali e al consumo di propellente.

Un'ulteriore differenza riguarda la modellazione delle manovre orbitali, in quanto nel problema originale sono consentiti fino a cinque impulsi per ogni *leg*, mentre il modello analitico adottato nella presente analisi utilizza esclusivamente manovre a singolo impulso o bi-impulsive (Capitolo 6.2).

Infine, una caratteristica distintiva del presente approccio è rappresentata dall'impiego di una matrice dei costi a quattro dimensioni, tempo-dipendente ( $123 \times 123 \times 600 \times 6$ ), in cui ogni elemento rappresenta il costo propulsivo per una specifica coppia di detriti, in funzione sia dell'epoca di partenza sia della durata del trasferimento (Capitolo 6.1.1). Questa formulazione consente di catturare la variabilità temporale associata alle finestre orbitali, introducendo una maggiore aderenza alla realtà fisica rispetto ai modelli a costi fissi.

# Capitolo 7

## Analisi dei risultati

Il presente capitolo illustra e discute i principali risultati ottenuti applicando l'algoritmo Ant Colony Optimization (ACO) al caso di studio della GTOC9, con l'obiettivo di valutarne le prestazioni rispetto al *benchmark* del *Jet Propulsion Laboratory* e di analizzarne le risposte alle variazioni parametriche e alle scelte di modellazione. A tal proposito si ricorda che la campagna di missioni progettata dal JPL per la rimozione dei 123 detriti definiti dalla competizione, prevede un  $\Delta V$  complessivo fissato a  $25.326 \text{ km/s}$ .

L'analisi è stata condotta esaminando due configurazioni di riferimento: il Caso A, in cui la pianificazione temporale delle missioni è generata casualmente, e il Caso B, in cui invece la programmazione è fissata tenendo in considerazione le durate della soluzione del JPL.

Tutte le prove effettuate partono da un'impostazione di parametri che è stata opportunamente modificata nei vari test per trarre conclusioni sull'impatto di diversi fattori. In particolare la baseline di partenza è costituita da:

- numero di formiche  $m = 4 \cdot n$ ;
- numero massimo di iterazioni  $miter = 150$ ;
- tasso di evaporazione del feromone  $e = 0.05$ ;
- pesi assegnati all'informazione euristica e al feromone  $\alpha = 4, \beta = 1$ ;
- *common cost elimination*  $el = 0.98$ .

### 7.1 Effetto della pianificazione temporale

In questa sezione viene analizzato l'effetto della schedulazione temporale delle missioni sulle prestazioni dell'algoritmo ACO. A tal fine sono stati testati i due scenari rappresentati da Caso A e Caso B mediante dieci esecuzioni indipendenti, mantenendo invariati i parametri iniziali indicati precedentemente. L'analisi si focalizza su tre indicatori fondamentali: il  $\Delta V$  complessivo associato all'intera campagna di

missioni “*best-of-run*”, la variabilità intra-caso dei  $\Delta V$  valutata mediante diagrammi di dispersione (*scatter*) e l’andamento del  $\Delta V$  medio e minimo nelle iterazioni.

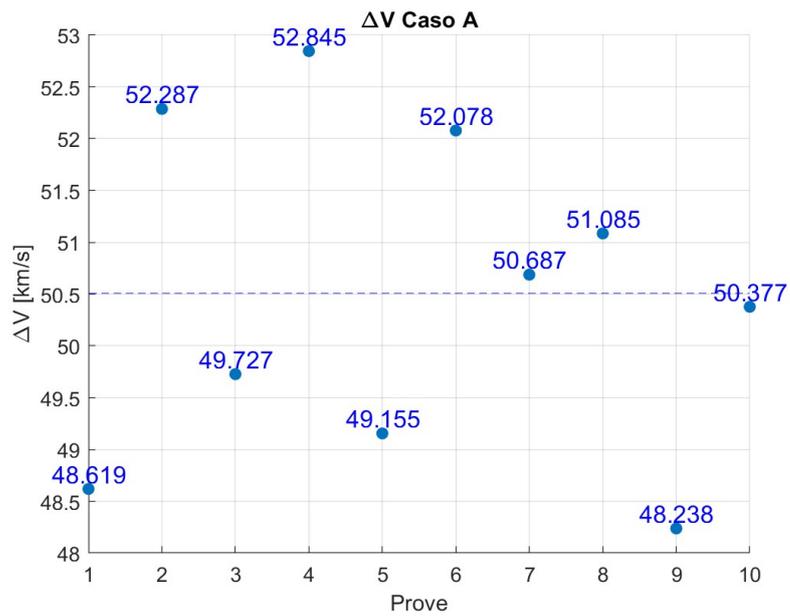
Nella Tabella 7.1 sono riportati i valori del  $\Delta V$  complessivo ottenuti nelle dieci ripetizioni per i due scenari. I corrispondenti grafici a dispersione illustrano visivamente la distribuzione dei risultati.

E’ possibile notare con immediatezza che i valori di  $\Delta V$  per il caso A oscillano tra un minimo di  $48.238 \text{ km/s}$  e un massimo di  $52.845 \text{ km/s}$ . La dispersione è evidente in Figura 7.1: i punti sono distribuiti in modo piuttosto ampio attorno alla linea della media collocata a  $50.5098 \text{ km/s}$ , con un’escursione di  $4.607 \text{ km/s}$ .

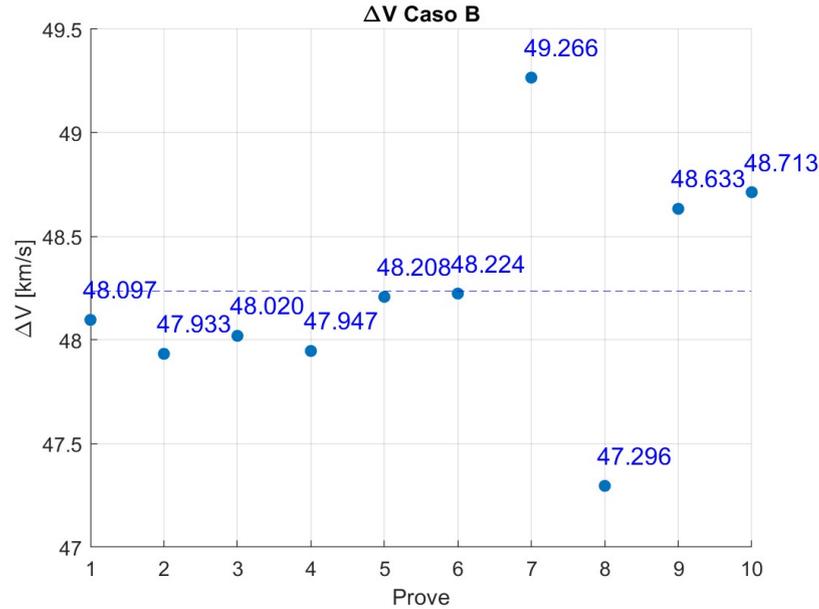
Nel Caso B, invece, i valori di  $\Delta V$  variano tra  $47.296$  e  $49.266 \text{ km/s}$ , in un intervallo di  $1.97 \text{ km/s}$ , più contenuto rispetto al caso precedente, con la maggior parte delle simulazioni nell’intorno della linea media pari a  $48.2337 \text{ km/s}$  (Figura 7.2).

	$\Delta V$ Caso A [km/s]	$\Delta V$ Caso B [km/s]
Ripetizione 1	48.619	48.097
Ripetizione 2	52.287	47.933
Ripetizione 3	49.727	48.020
Ripetizione 4	52.845	47.947
Ripetizione 5	49.155	48.208
Ripetizione 6	52.078	48.224
Ripetizione 7	50.687	49.266
Ripetizione 8	51.085	47.296
Ripetizione 9	48.238	48.633
Ripetizione 10	50.377	48.713

**Tabella 7.1:**  $\Delta V$  Caso A e Caso B [km/s]



**Figura 7.1:** Scatter Caso A



**Figura 7.2:** Scatter Caso B

Confrontando i due casi emergono le seguenti osservazioni:

- Entrambe le versioni del codice, per una determinata configurazione iniziale dei parametri, conducono a  $\Delta V$  medi sensibilmente superiori rispetto alla soluzione di riferimento elaborata dal JPL (circa il doppio);
- Risulta evidente che il Caso A presenta un  $\Delta V$  medio superiore rispetto al Caso B, il che suggerisce che la schedulazione deterministica produca soluzioni mediamente più economiche rispetto a quella randomica;
- La pianificazione casuale del Caso A genera una maggiore dispersione dei risultati rispetto al Caso B, che garantisce un comportamento delle soluzioni tendenzialmente più ripetibile e una variabilità più contenuta;
- Seppur in misura più moderata, anche il Caso B è caratterizzato da fluttuazioni, attribuibili a fattori intrinseci dell'algoritmo, quali le approssimazioni numeriche impiegate nel calcolo dei costi orbitali e la natura stocastica della fase di inizializzazione e aggiornamento feromonico.

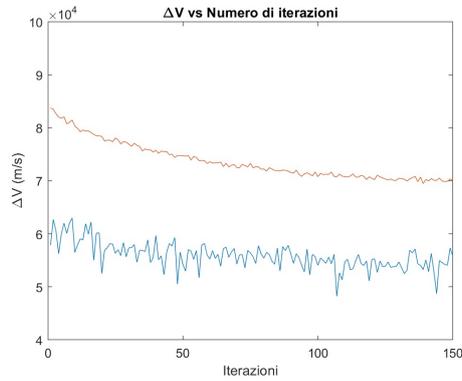
In conclusione, la pianificazione temporale delle missioni è un fattore che incide sulla stabilità e, in parte, sulla qualità delle soluzioni. L'assegnazione casuale degli slot temporali favorisce l'esplorazione di diverse configurazioni, al prezzo di una maggiore incertezza dei risultati; al contrario, una schedulazione predeterminata riduce la variabilità dell'algoritmo e consente di confrontare con maggiore attendibilità l'influenza degli altri parametri dell'ACO.

L'analisi delle curve di convergenza (Figure 7.3-7.6) consente di valutare il comportamento interno dell'algoritmo ACO al variare delle ripetizioni. Vengono riportati in

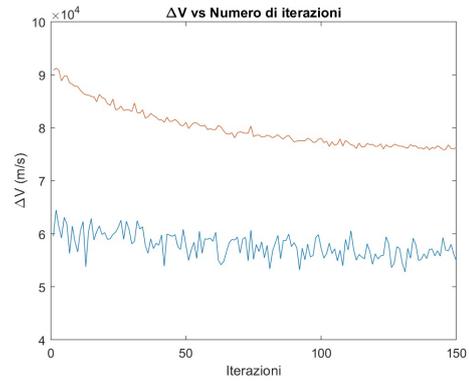
questa sezione gli andamenti di  $\Delta V$  medio e minimo per la prova migliore e peggiore di entrambi gli scenari analizzati.

In ogni figura, la curva che rappresenta il  $\Delta V$  medio (in rosso) segue una traiettoria decrescente, che a partire da valori iniziali elevati, si riduce gradualmente all'aumentare delle iterazioni e tende a stabilizzarsi su un plateau. Al contempo, la curva del  $\Delta V$  minimo (in blu) risulta più irregolare, caratterizzata da oscillazioni più significative ma comunque confinate entro un intervallo limitato.

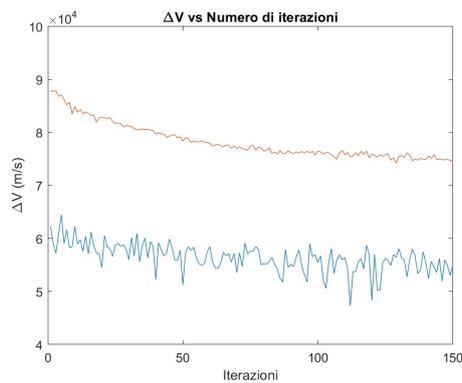
Gli andamenti così presentati risultano analoghi per entrambi i casi di pianificazione temporale. La quasi completa sovrapponibilità delle curve suggerisce che la dinamica di funzionamento ed esplorazione dell'algoritmo rimane sostanzialmente invariata: la generazione casuale delle durate modifica la sequenza temporale dei lanci e altera il valore finale di  $\Delta V$ , ma non influisce sui meccanismi con cui le formiche esplorano e sfruttano lo spazio delle soluzioni.



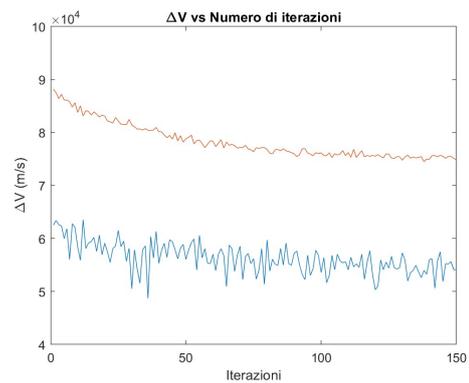
**Figura 7.3:** *Best case* Caso A



**Figura 7.4:** *Worst case* Caso A



**Figura 7.5:** *Best case* Caso B



**Figura 7.6:** *Worst case* Caso B

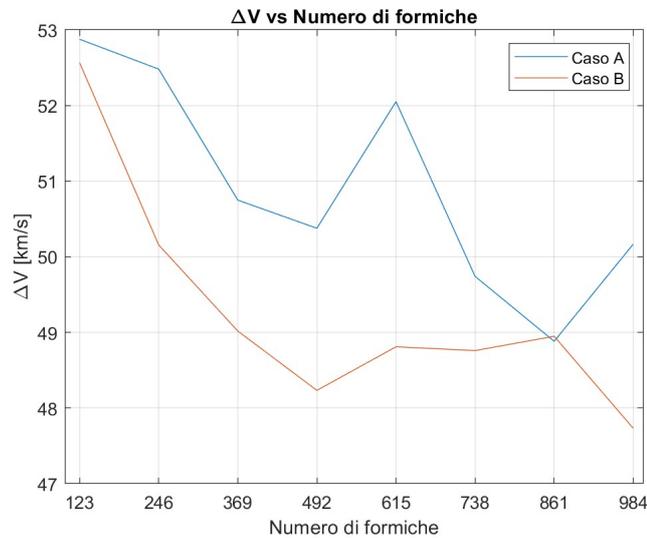
## 7.2 $\Delta V$ al variare del numero di formiche $m$

Nel prosieguo dell'analisi, si esamina come la dimensione della popolazione di formiche  $m$ , valutata come multiplo del numero di detriti  $n = 123$ , influenzi i risultati dell'algoritmo nei due scenari di schedulazione (Caso A e Caso B). In particolare, il numero di agenti viene fatto variare in un range di  $[n; 8 \cdot n]$ , in modo da coprire un ampio spettro di configurazioni.

Per il caso  $m = 4 \cdot n$ , viste le ripetizioni già effettuate in precedenza, è stato assunto come riferimento il valore della prova più vicino alla media calcolata.

$m$	$\Delta V$ Caso A [km/s]	$\Delta V$ Caso B [km/s]
$n$	<b>52.876</b>	<b>52.565</b>
$2 \cdot n$	52.481	50.156
$3 \cdot n$	50.749	49.018
$4 \cdot n$	50.377	48.224
$5 \cdot n$	52.051	48.810
$6 \cdot n$	49.741	48.760
$7 \cdot n$	<b>48.883</b>	48.949
$8 \cdot n$	50.167	<b>47.732</b>

**Tabella 7.2:**  $\Delta V$  al variare del numero di formiche  $m$



**Figura 7.7:**  $\Delta V$  al variare del numero di formiche  $m$

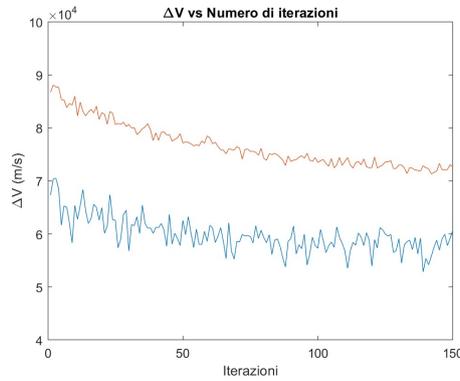
Dalla Figura 7.7 si osserva che l'aumento del numero di formiche produce effetti diversi nei due scenari considerati.

Nel Caso A, i valori di  $\Delta V$  presentano un andamento irregolare, con oscillazioni significative al crescere di  $m$  in un intervallo di  $3.993 \text{ km/s}$ . Tali variazioni risultano comparabili alla dispersione già imputabile alla pianificazione casuale delle missioni, discusse nel paragrafo precedente. Di conseguenza non risulta possibile isolare l'effetto specifico dell'incremento di  $m$  da quello legato alla variabilità introdotta dalla

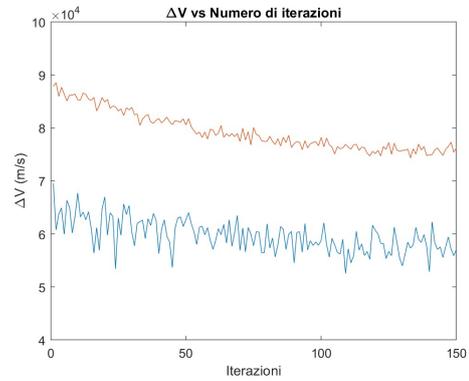
schedulazione randomica.

Nel Caso B, invece, l'escursione di  $\Delta V$  al variare del numero di agenti supera quella precedentemente riscontrata a causa delle caratteristiche intrinseche dell'algoritmo. Tuttavia, anche in questo caso non si osservano miglioramenti significativi: le soluzioni rimangono comunque ben lontane dal *benchmark* di riferimento (JPL).

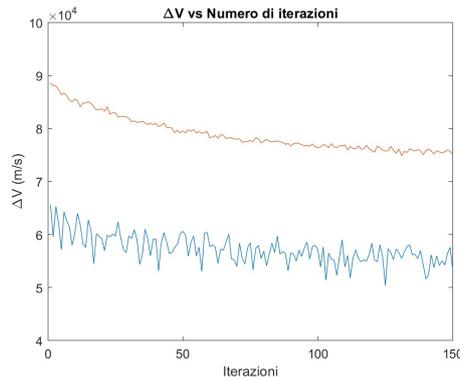
Considerando che nel Caso B è possibile misurare, seppur limitatamente, l'effetto della variazione del parametro  $m$  sui risultati, si ritiene opportuno adottare come riferimento tale scenario: il valore minimo si registra con  $m = 8 \cdot n$  e il secondo valore più basso con  $m = 4 \cdot n$ . Per le analisi successive si è quindi scelto di mantenere  $m = 4 \cdot n$  come caso nominale, che si colloca tra le soluzioni più efficienti riducendo al contempo il costo computazionale rispetto a configurazioni con un numero maggiore di formiche.



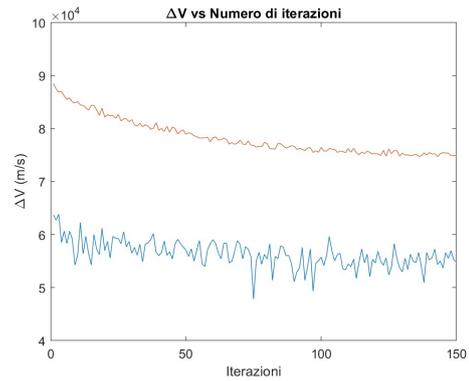
**Figura 7.8:** Caso A  $m = n$



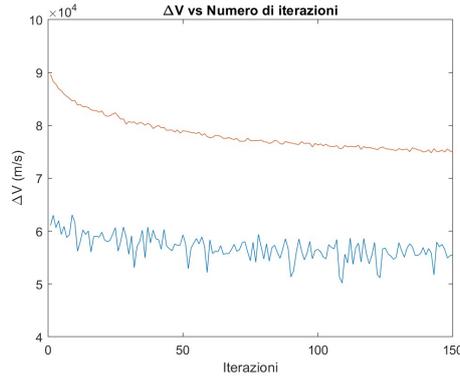
**Figura 7.9:** Caso B  $m = n$



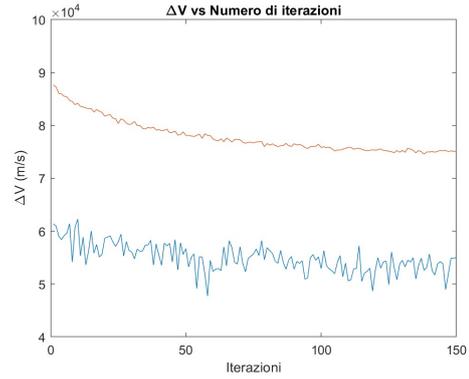
**Figura 7.10:** Caso A  $m = 4n$



**Figura 7.11:** Caso B  $m = 4n$



**Figura 7.12:** Caso A  $m = 8n$



**Figura 7.13:** Caso B  $m = 8n$

Poiché i grafici dell'andamento del  $\Delta V$  medio e minimo risultano pressoché sovrapponibili nei diversi scenari analizzati, ai fini esemplificativi sono stati selezionati i casi con  $m = n$ ,  $m = 4 \cdot n$ ,  $m = 8 \cdot n$  (Figure 7.8-7.13).

Da tali rappresentazioni emerge che l'unica differenza apprezzabile riguarda l'ampiezza delle oscillazioni caratteristiche, che tende a ridursi progressivamente con l'aumentare del numero di agenti, suggerendo una maggiore stabilità statistica delle soluzioni. Tale modifica, tuttavia, non comporta miglioramenti significativi nelle prestazioni globali dell'algoritmo, mentre implica un inevitabile incremento del costo computazionale.

### 7.3 Analisi parametrica

Nell'ottica di individuare una configurazione dell'algoritmo in grado di avvicinarsi maggiormente alla soluzione di riferimento proposta dal JPL, l'analisi è stata successivamente estesa allo studio dell'influenza dei principali parametri dell'ACO. In particolare, l'indagine, condotta sul caso nominale con  $m = 4 \cdot n$ , ha riguardato i coefficienti  $\alpha$ ,  $\beta$ ,  $el$  con l'obiettivo di valutarne l'impatto sia sulla dinamica di convergenza sia sulla qualità delle soluzioni.

I set di parametri scelti per ogni configurazione sono riportati in Tabella 7.3.

La prima configurazione corrisponde al caso nominale di riferimento, sul quale sono state condotte tutte le prove precedenti e che funge da baseline per il confronto con le altre varianti presentate.

Il secondo insieme di parametri prevede il dimezzamento del coefficiente  $\alpha$ , che modula l'influenza dell'informazione euristica. La riduzione di questo parametro dovrebbe indurre le formiche ad affidarsi in minor misura alle caratteristiche locali del problema e maggiormente alla traccia feromonica, favorendo potenzialmente una fase iniziale più esplorativa e garantendo una minore tendenza a convergere prematuramente verso percorsi localmente convenienti.

Il terzo profilo parametrico, invece, comporta la riduzione di  $\beta$ , il coefficiente che regola il peso del feromone. La diminuzione di  $\beta$  attenua l'aggiornamento della traccia sulle traiettorie percorse e, conseguentemente, potrebbe incrementare la diversificazione dei percorsi esplorati, seppur con possibile rallentamento nell'individuazione delle soluzioni più promettenti.

Il quarto e il quinto scenario di test riguardano rispettivamente la riduzione e l'incremento del parametro  $el$ , che interviene nella regola di aggiornamento del feromone attraverso il fattore

$$f = \frac{cost}{min(cost)} - el \quad (7.1)$$

Diminuendo  $el$  ci si attende un aumento di  $f$  e quindi una minore quantità di feromone depositato, con conseguente prolungamento della fase esplorativa; al contrario, incrementando  $el$ , il comportamento atteso è opposto, con convergenza più rapida nelle prime iterazioni, grazie all'immediato rinforzo delle traiettorie migliori, ma con un rischio maggiore di stagnazione su soluzioni sub-ottimali.

	$\alpha$	$\beta$	$el$	$\Delta V$ Caso A [km/s]	$\Delta V$ Caso B [km/s]
Caso Nominale	4	1	0.98	50.377	48.224
Set 1	2	1	0.98	50.669	46.681
Set 2	4	0.5	0.98	49.318	50.637
Set 3	4	1	0.97	49.864	46.671
Set 4	4	1	0.99	51.103	48.866

**Tabella 7.3:**  $\Delta V$  al variare del numero di  $\alpha$ ,  $\beta$ ,  $el$

Dall'analisi dei valori del *best-of-run* di  $\Delta V$  riportati in tabella emerge che nessuna delle configurazioni parametriche testate produce miglioramenti apprezzabili rispetto al caso nominale.

Nel Caso A le variazioni osservate risultano dell'ordine di grandezza di quelle già attribuibili alla pianificazione temporale casuale e nel Caso B, di poco maggiori rispetto a quelle imputabili alle caratteristiche intrinseche dell'algoritmo ACO, con un escursione di 3.966 *km/s* rispetto all'intervallo di variabilità delle ripetizioni precedentemente registrato di 1.97 *km/s*.

I risultati ottenuti in entrambi i casi si mantengono su valori circa doppi rispetto a quelli del JPL, evidenziando che le modifiche parametriche non sono sufficienti ad avvicinare l'ACO alla soluzione di riferimento.

Per completezza sono stati inoltre riportati gli andamenti del  $\Delta V$  medio e minimo per ciascuna configurazione. Anche in questo caso non si riscontrano variazioni significative rispetto a quelle attese, e le oscillazioni delle traiettorie risultano sostanzialmente analoghe al caso nominale.

7.3.1 Caso A

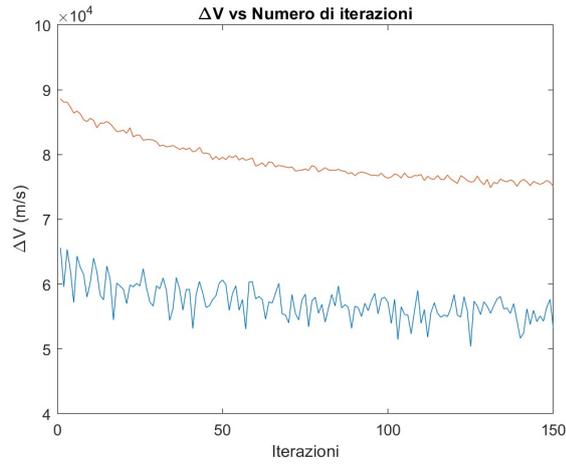


Figura 7.14: CASO A NOMINALE:  $\alpha = 4$ ,  $\beta = 1$ ,  $el = 0.98$

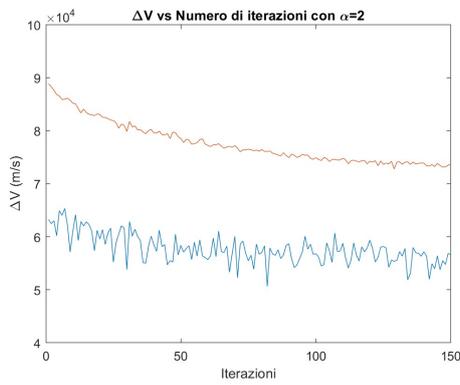


Figura 7.15:  $\alpha = 2$ ,  $\beta = 1$ ,  $el = 0.98$

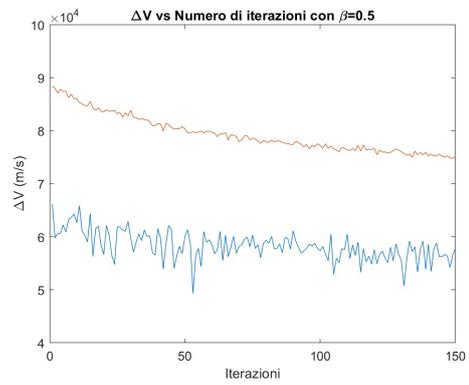


Figura 7.16:  $\alpha = 4$ ,  $\beta = 0.5$ ,  $el = 0.98$

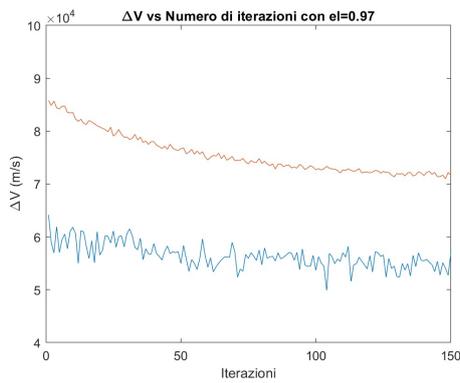


Figura 7.17:  $\alpha = 4$ ,  $\beta = 1$ ,  $el = 0.97$

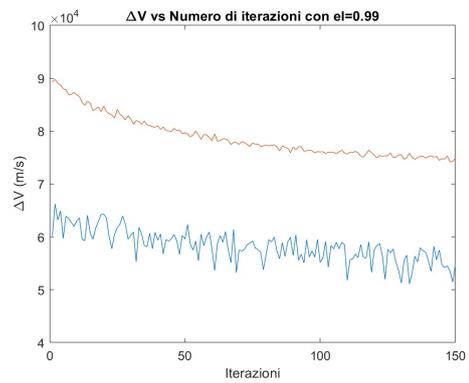
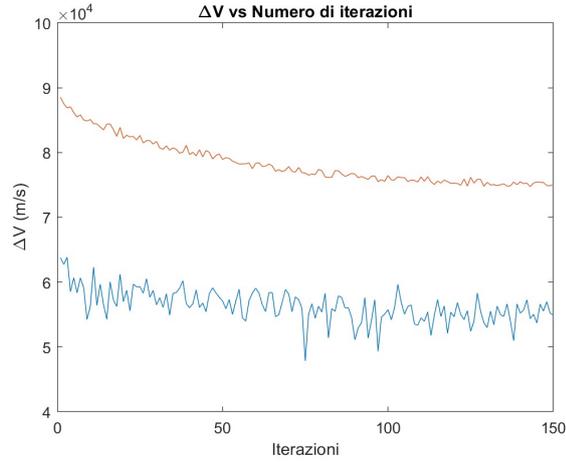
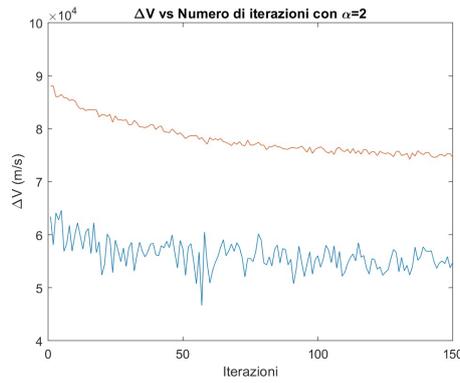


Figura 7.18:  $\alpha = 4$ ,  $\beta = 1$ ,  $el = 0.99$

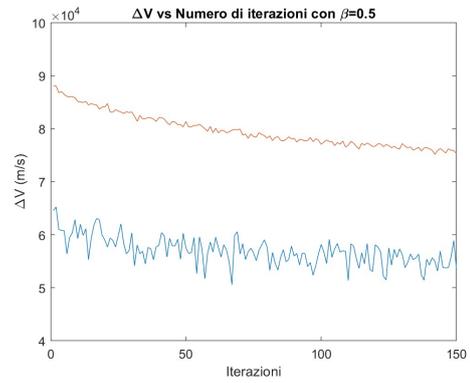
### 7.3.2 Caso B



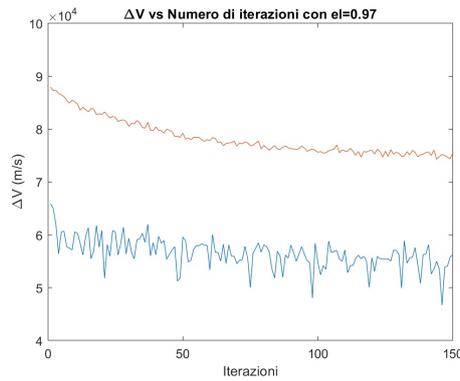
**Figura 7.19:** CASO B NOMINALE:  $\alpha = 4$ ,  $\beta = 1$ ,  $el = 0.98$



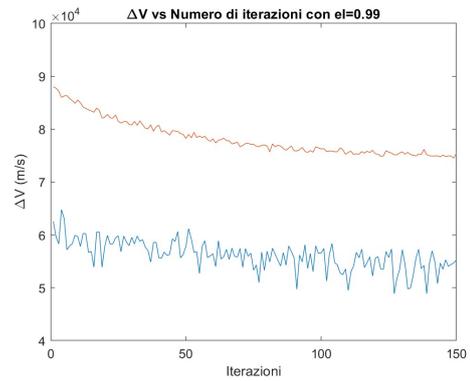
**Figura 7.20:**  $\alpha = 2$ ,  $\beta = 1$ ,  $el = 0.98$



**Figura 7.21:**  $\alpha = 4$ ,  $\beta = 0.5$ ,  $el = 0.98$



**Figura 7.22:**  $\alpha = 4$ ,  $\beta = 1$ ,  $el = 0.97$



**Figura 7.23:**  $\alpha = 4$ ,  $\beta = 1$ ,  $el = 0.99$

La mancata risposta del codice alle modifiche parametriche può essere ricondotta a differenti cause. In primo luogo, la scala del problema riveste un ruolo determinante: 123 detriti definiscono uno spazio delle soluzioni estremamente ampio e complesso,

e le variazioni impostate dei parametri potrebbero non essere sufficienti a produrre effetti apprezzabili.

Un ulteriore elemento è costituito dall'interazione tra i coefficienti:  $\alpha$ ,  $\beta$  ed  $el$ , agiscono in maniera interdipendente nella *State transition rule* e nella *Global pheromone updating rule*, e modifiche applicate singolarmente possono essere compensate dagli altri termini, annullando l'effetto atteso sulla dinamica di convergenza.

A ciò si aggiunge il rumore stocastico intrinseco dell'algoritmo, legato alla natura probabilistica delle regole di scelta e di aggiornamento, che può mascherare le differenze nelle configurazioni.

## 7.4 Variazione della formula per il calcolo di $f$

Per valutare l'influenza della funzione di aggiornamento del costo  $f$  sul comportamento dell'algoritmo, sono state condotte ulteriori prove utilizzando entrambe le formulazioni implementate nella funzione `calculate_cost` del codice, che calcola per ogni formica il costo totale del tour generato. Essa restituisce in output proprio il vettore dei costi  $f$ , i cui valori costituiscono il parametro di riferimento per la fase successiva dell'algoritmo, in cui viene aggiornato il feromone secondo la formula

$$\delta t = \frac{dt}{f_i}$$

$dt$  è un parametro,  $f_i$  relativo alla formica  $i$ -esima, può essere valutato secondo le due formulazioni considerate, che sono rispettivamente:

$$f = f - el \cdot \min(f) \tag{7.2}$$

$$f = \frac{f}{\min(f)} - el \tag{7.3}$$

dove  $cost$  è il costo in termini di  $\Delta V$  del tour  $i$ -esimo,  $\min(cost)$  è il minimo costo tra gli  $n$  tour generati ed  $el$  è il *common cost elimination*.

L'analisi è stata eseguita mantenendo invariati tutti gli altri parametri dell'ACO e variando il numero di iterazioni del codice su quattro livelli (150, 300, 600 e 1200), con l'obiettivo di verificare se la normalizzazione dei costi introdotta nella seconda formulazione di  $f$  incidesse sul processo di convergenza e sulle prestazioni delle soluzioni prodotte.

<i>miter</i>	$f$	$\Delta V$ Caso A [km/s]	$\Delta V$ Caso B [km/s]
150	$f = f/\min(f) - el$	50.377	48.224
150	$f = f - el \cdot \min(f)$	52.319	<b>53.055</b>
300	$f = f/\min(f) - el$	50.629	48.330
300	$f = f - el \cdot \min(f)$	<b>52.378</b>	49.619
600	$f = f/\min(f) - el$	51.078	47.127
600	$f = f - el \cdot \min(f)$	50.728	47.514
1200	$f = f/\min(f) - el$	49.638	46.831
1200	$f = f - el \cdot \min(f)$	<b>48.532</b>	<b>46.045</b>

**Tabella 7.4:**  $\Delta V$  al variare della formulazione di  $f$

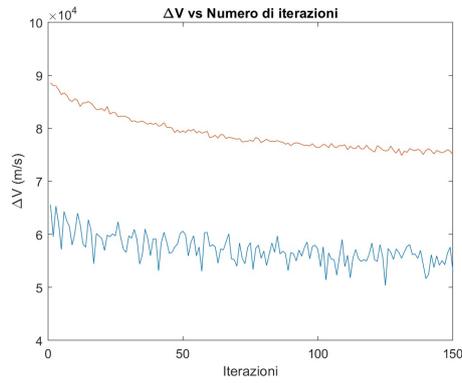
Dalla Tabella 7.4 emerge che l'effetto maggiormente benefico è riconducibile al significativo aumento del numero di iterazioni, piuttosto che alla diversa formulazione del parametro  $f$ . Per il test a  $miter = 1200$  si ottengono valori di  $\Delta V$  mediamente inferiori rispetto a tutte le prove effettuate in precedenza, pur rimanendo molto elevati: nello specifico, pari al 191.63% del riferimento JPL per il Caso A e al 181.81% per il Caso B.

Le Sezioni 7.4.1 e 7.4.2 illustrano gli andamenti di  $\Delta V$  medio e minimo al variare delle iterazioni per le due differenti formulazioni di  $f$ , per entrambi i casi studio.

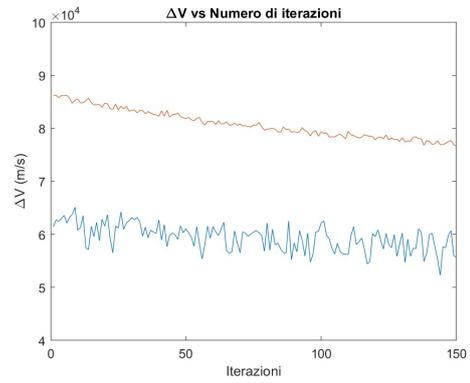
Sebbene entrambe le varianti convergano verso asintoti analoghi, si osserva che con  $f = \frac{f}{\min(f)} - el$ , il decremento del  $\Delta V$  medio risulta più graduale e regolare, segnale di un rafforzamento progressivo delle traiettorie migliori e del mantenimento prolungato della fase esplorativa. Al contrario, con  $f = f - el \cdot \min(f)$ , la discesa iniziale è più marcata e si osserva un vero e proprio “salto” di stabilizzazione intorno alle 300–400 iterazioni, indice di un rinforzo precoce delle soluzioni migliori e di una più rapida concentrazione del feromone.

Successivamente, entrambe le configurazioni tendono a stabilizzarsi su valori comparabili, con oscillazioni progressivamente più contenute, mentre la curva del  $\Delta V$  minimo mantiene un andamento irregolare per l'intera durata del processo iterativo, riflettendo la componente stocastica intrinseca alla costruzione delle soluzioni.

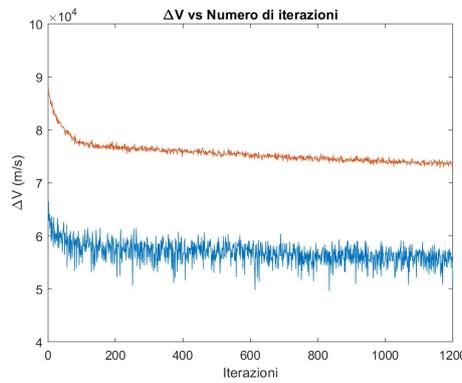
### 7.4.1 Caso A



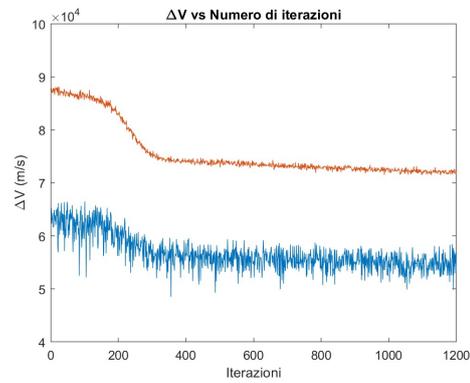
**Figura 7.24:**  $f = f/\min(f) - el$ ,  
 $miter = 150$



**Figura 7.25:**  $f = f - el \cdot \min(f)$ ,  
 $miter = 150$

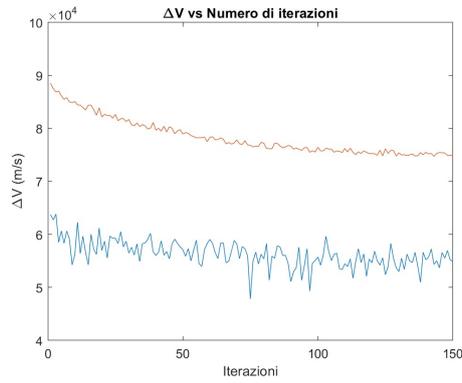


**Figura 7.26:**  $f = f/\min(f) - el$ ,  
 $miter = 1200$

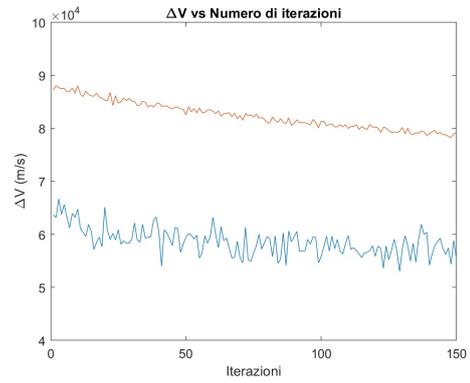


**Figura 7.27:**  $f = f - el \cdot \min(f)$ ,  
 $miter = 1200$

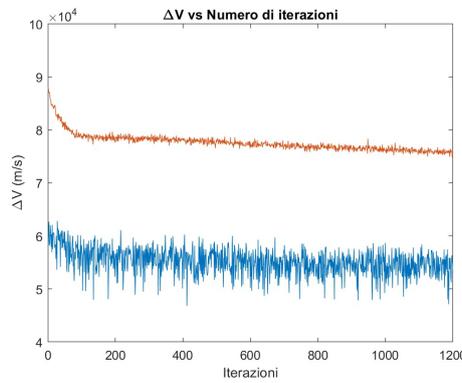
### 7.4.2 Caso B



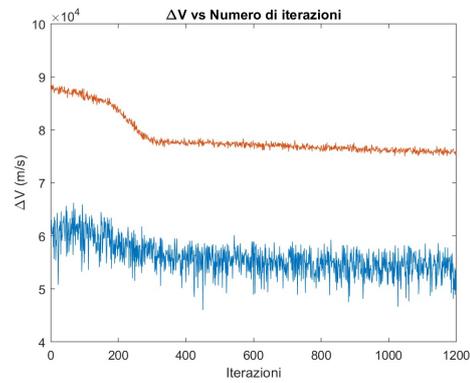
**Figura 7.28:**  $f = f/\min(f) - el$ ,  
 $miter = 150$



**Figura 7.29:**  $f = f - el \cdot \min(f)$ ,  
 $miter = 150$



**Figura 7.30:**  $f = f/\min(f) - el$ ,  
 $miter = 1200$



**Figura 7.31:**  $f = f - el \cdot \min(f)$ ,  
 $miter = 1200$

## 7.5 Caso semplificato con 3 missioni

In questa sezione viene esplorata una strategia volta a migliorare le prestazioni dell'algoritmo, che consiste nella riduzione del numero di missioni, e, conseguentemente, di detriti considerati. L'ipotesi di lavoro è che la diminuzione della scala del problema, e quindi dello spazio di ricerca, possa produrre diversi effetti benefici.

- Nel caso di problemi di tipo TSP, il numero di tour distinti cresce in maniera fattoriale rispetto al numero di nodi (per esempio secondo  $\frac{(n-1)!}{2}$  per un TSP simmetrico [28]). Riducendo il numero di detriti, e quindi i nodi del grafo, le permutazioni possibili diminuiscono di svariati ordini di grandezza, per cui l'algoritmo si trova ad esplorare un numero di combinazioni più contenuto, con una drastica riduzione della complessità combinatoria e delle dimensioni delle strutture dati impiegate.
- Un problema di dimensioni minori implica anche un numero ridotto di archi, per cui, a parità di parametri, la stessa quantità totale di feromone viene distribuita su un insieme più ristretto di possibilità. Questo permette che le differenze di concentrazione emergano più rapidamente, e la maggiore "chiarezza" del segnale feromonico rispetto al rumore stocastico delle prime iterazioni facilita l'identificazione precoce dei percorsi migliori e il consolidamento delle soluzioni di qualità.
- Infine, ridurre il numero di trasferimenti possibili comporta anche una minore propagazione delle incertezze numeriche nella stima dei costi orbitali: con tour più brevi, gli errori su tempi e posizioni si accumulano in misura più limitata.

Sulla base di queste considerazioni è stata condotta un'analisi su uno scenario semplificato, riducendo il numero di missioni da 10 a 3, e quindi il numero di detriti da 123 a 47. Per il sottoinsieme costituito dalle prime tre missioni del JPL (riportate in Tabella 7.5), il valore di riferimento del costo propulsivo risulta pari a  $\Delta V_{JPL} = 9.51679 \text{ km/s}$ .

Missione	ID Detriti
1	23,55,79,113,25,20,27,117,121,50,95,102,38,97
2	19,115,41,26,45,82,47,85,7,2,11,77
3	72,107,61,10,28,3,64,66,31,90,73,87,57,35,69,65,8,43,71,4,29

**Tabella 7.5:** Prime 3 missioni del JPL

E' stata condotta una campagna di dieci simulazioni applicando l'algoritmo nella sua configurazione nominale al caso ridotto, con l'obiettivo di testare le potenzialità del codice in presenza di un numero minore di missioni e valutare se tale riduzione possa effettivamente produrre risultati più vicini a quelli del JPL. Vengono mantenuti dunque i seguenti parametri:

- $m = 4 \cdot n$ ;
- $miter = 150$ ;
- $\alpha = 4$ ;
- $\beta = 1$ ;
- $common\ cost\ elimination\ el = 0.98$ ;
- $f = f / \min(f) - el$ ;

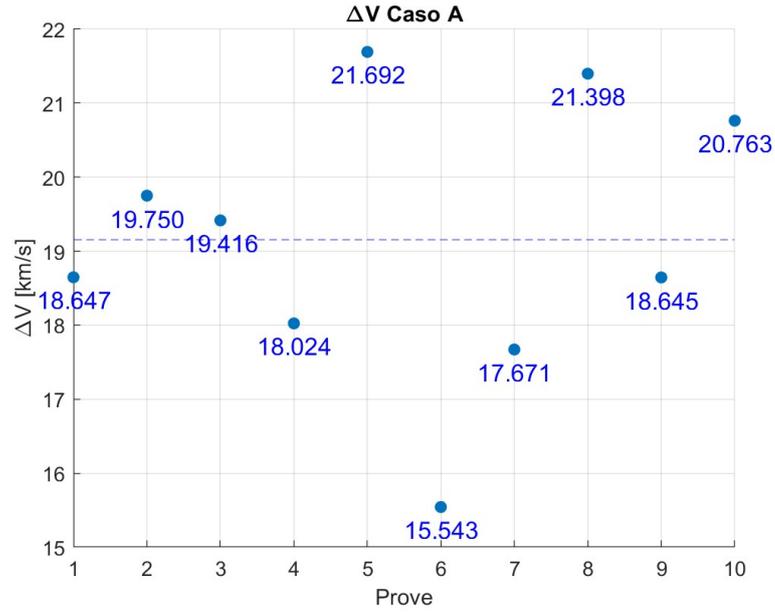
L'analisi dei dati riportati in Tabella 7.6 evidenzia come, limitandosi a questo scenario ridotto, le soluzioni prodotte dall'algoritmo sia nel Caso A che nel Caso B, si avvicinino sensibilmente di più al valore del JPL rispetto a quanto osservato nel caso completo con 123 detriti. In particolare,  $\Delta V_{CasoA}$  presenta uno scostamento della ripetizione migliore di 63.32% dal  $\Delta V_{JPL}$ , mentre  $\Delta V_{CasoB}$  differisce del 53.00%.

	$\Delta V$ Caso A [km/s]	$\Delta V$ Caso B [km/s]
Ripetizione 1	18.647	14.672
Ripetizione 2	19.750	14.659
Ripetizione 3	19.416	15.489
Ripetizione 4	18.024	14.487
Ripetizione 5	21.692	15.303
Ripetizione 6	15.543	14.882
Ripetizione 7	17.671	14.530
Ripetizione 8	21.398	14.474
Ripetizione 9	18.645	14.561
Ripetizione 10	20.763	14.703

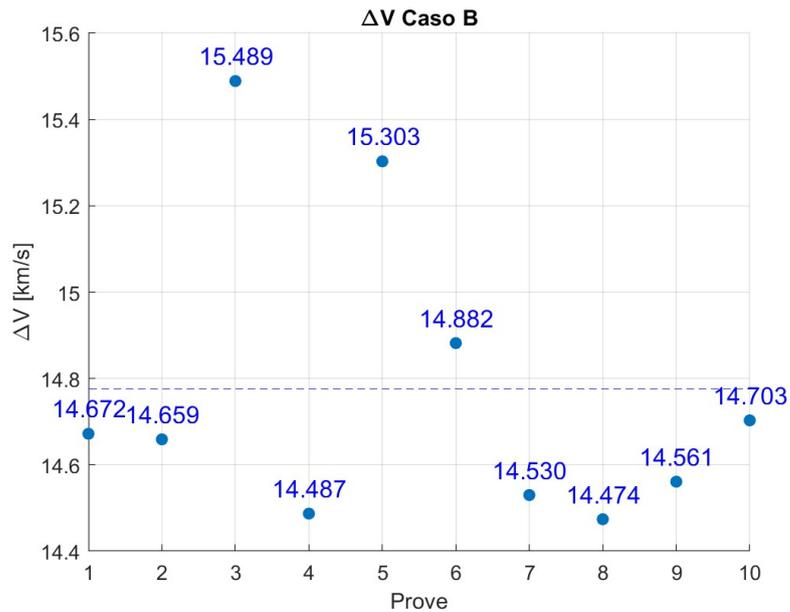
**Tabella 7.6:**  $\Delta V$  con 3 missioni

E' possibile notare con immediatezza che i valori di  $\Delta V$  per il caso A oscillano tra un minimo di 15.543  $km/s$  e un massimo di 21.692  $km/s$ . La dispersione è evidente in Figura 7.32, dove viene rappresentata la distribuzione dei punti attorno alla linea della media collocata a 19.1549  $km/s$ , con un'escursione di 6.149  $km/s$ .

Nel Caso B, invece, i valori di  $\Delta V$  variano tra 14.561 e 15.489  $km/s$ , in un intervallo di 0.928  $km/s$  e la linea media è pari a 14.7760  $km/s$  (Figura 7.33).



**Figura 7.32:** Scatter Caso A con 3 missioni



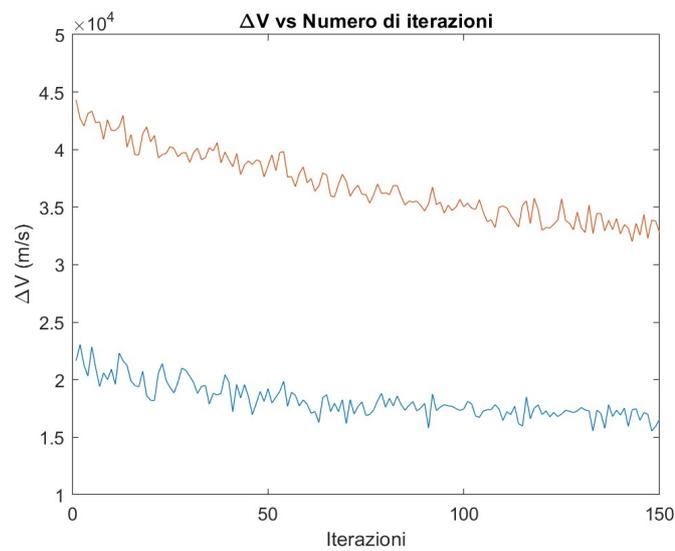
**Figura 7.33:** Scatter Caso B con 3 missioni

Dall'analisi dei risultati relativi al caso semplificato emergono alcune evidenze di interesse.

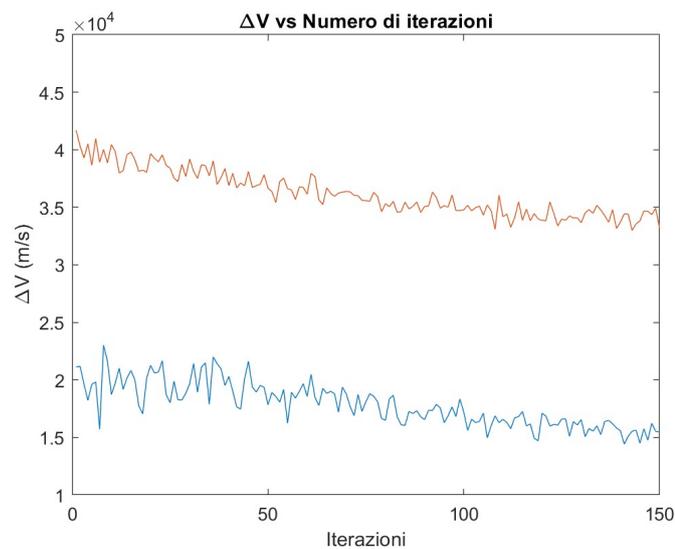
- Analogamente allo scenario completo con 123 detriti, il Caso A presenta valori medi di  $\Delta V$  superiori rispetto al Caso B, confermando che la schedulazione deterministica conduca mediamente a soluzioni più economiche rispetto a quella casuale.
- Come già osservato nel problema completo, la pianificazione casuale del Caso A genera una dispersione dei risultati più elevata rispetto al Caso B, il quale

mostra un comportamento delle soluzioni tendenzialmente più ripetibile e una variabilità più contenuta.

- Tuttavia, rispetto al caso completo, si riscontrano rispettivamente un incremento della dispersione nel Caso A e una riduzione della stessa nel Caso B. Questo fenomeno suggerisce che, in un problema di dimensioni ridotte, le variazioni introdotte dalla schedulazione casuale incidono proporzionalmente di più sull'esito finale, amplificando la variabilità delle soluzioni nel Caso A. Al contrario, la natura deterministica del Caso B combinata con la minore dimensione del problema riduce ulteriormente l'ampiezza dello spazio di ricerca, favorendo una convergenza più stabile e ripetibile.



**Figura 7.34:** Caso A con 3 missioni



**Figura 7.35:** Caso B con 3 missioni

Dalle Figure 7.34 e 7.35, che mostrano gli andamenti di  $\Delta V$  medio e minimo, emerge che nel Caso A il  $\Delta V$  medio parte da valori iniziali più elevati nelle prime iterazioni, ma decresce con maggiore rapidità, tendendo progressivamente ad avvicinarsi alla curva del  $\Delta V$  minimo. Questo comportamento suggerisce una concentrazione più rapida delle scelte verso percorsi ritenuti promettenti, con un rafforzamento precoce delle soluzioni migliori.

Nel caso B, al contrario, il  $\Delta V$  medio risulta sin dall'inizio più basso e decresce in modo più graduale, mantenendo oscillazioni più contenute e riflettendo la maggiore stabilità tipica della schedulazione deterministica.

Per entrambi i casi, le curve del  $\Delta V$  minimo mostrano inizialmente fluttuazioni di ampiezza significativa, la quale tende a ridursi progressivamente con l'avanzare delle iterazioni.

## 7.6 Caso statico

I risultati ottenuti dall'analisi del caso semplificato con 3 missioni hanno evidenziato che la riduzione del numero di detriti comporta effettivamente una diminuzione del  $\Delta V$  complessivo rispetto al problema originario, ma ancora in misura insufficiente per rendere le soluzioni realmente competitive con quelle prodotte dal JPL. Per questo motivo si è deciso di esplorare un'ulteriore strategia volta a spiegare e, se possibile, mitigare le prestazioni sub-ottimali osservate: la modifica della modalità di costruzione della matrice dei costi, adottando un approccio "statico" al posto di quello dinamico finora utilizzato.

Infatti, nel modello originario l'algoritmo ACO fa uso di una matrice dei costi di tipo dinamico:

$$d(i, j, t_p, \Delta t)$$

dove  $i$  è il detrito di partenza,  $j$  quello di arrivo,  $t_p$  è l'epoca di partenza, campionata ogni 5 giorni sull'arco temporale di 8 anni,  $\Delta t$  è la durata del trasferimento, espressa come multiplo di 5 da 0 a 25. Questa formulazione riflette in maniera più realistica il comportamento fisico dei trasferimenti orbitali, poiché il costo propulsivo associato a ciascun arco non è un valore costante, ma varia in funzione dell'epoca di partenza e della durata della manovra. Per ogni arco  $i \rightarrow j$  esistono, infatti, specifici intervalli temporali, le cosiddette finestre orbitali, in cui il trasferimento risulta particolarmente efficiente, mentre al di fuori di tali intervalli lo stesso spostamento può richiedere costi significativamente maggiori.

Tale caratteristica rende il problema intrinsecamente più complesso. Poiché l'algoritmo ACO costruisce le soluzioni in maniera sequenziale, ogni scelta influenza non solo la sequenza dei detriti, ma anche i tempi di arrivo e, di conseguenza, la disponibilità delle finestre ottimali per le tratte successive. Ne deriva che una decisione inizialmente conveniente può, a causa dello "slittamento" delle epoche, compromettere

l'economicità dei trasferimenti successivi, e, di conseguenza, dell'intera missione. In altre parole, la matrice dinamica introduce una componente di variabilità assimilabile a rumore stocastico, che tende a peggiorare le prestazioni dell'algoritmo.

Per ovviare a queste limitazioni, è stata introdotta una matrice dei costi statica, definita in modo che per ogni coppia di detriti il costo del trasferimento sia indipendente dall'epoca di partenza e dalla durata:

$$d(i, j, t_p, \Delta t) = \text{costante} \quad \forall t_p, \Delta t \quad (7.4)$$

L'adozione di costi statici attribuisce a ciascun arco un valore fisso, permettendo all'algoritmo di concentrare l'ottimizzazione combinatoria esclusivamente sulla sequenza, svincolandola da eventuali discontinuità legate alle finestre temporali.

Per costruire la matrice statica si è fatto riferimento ai valori di  $\Delta V$  forniti dal JPL, utilizzandoli come base per definire i costi propulsivi associati a ciascun arco. In questo modo l'algoritmo riceve un'indicazione realistica della convenienza media degli archi, considerando quali dei trasferimenti teoricamente possibili risultino in pratica più efficienti.

L'analisi del caso statico è stata condotta sul problema completo con 123 detriti, mantenendo invariati i parametri nominali dell'algoritmo e confrontando le due consuete modalità di pianificazione. L'obiettivo è duplice: valutare se la rimozione della componente dinamica consenta all'ACO di esprimere appieno le proprie potenzialità e quantificare l'impatto della dipendenza temporale dei costi sulle prestazioni dell'algoritmo. Al fine di ottenere stime statisticamente più robuste sono state eseguite 10 ripetizioni indipendenti per ciascuno dei due scenari.

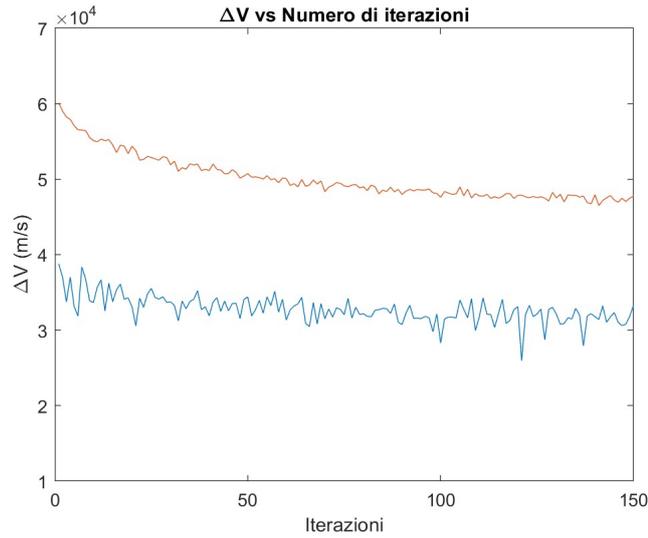
	$\Delta V$ Caso A [km/s]	$\Delta V$ Caso B [km/s]
Ripetizione 1	29.955	28.494
Ripetizione 2	28.243	28.003
Ripetizione 3	29.474	27.850
Ripetizione 4	29.446	29.360
Ripetizione 5	28.871	27.342
Ripetizione 6	27.953	27.617
Ripetizione 7	28.656	28.958
Ripetizione 8	28.887	27.230
Ripetizione 9	29.067	28.115
Ripetizione 10	29.709	27.791

**Tabella 7.7:**  $\Delta V$  caso statico

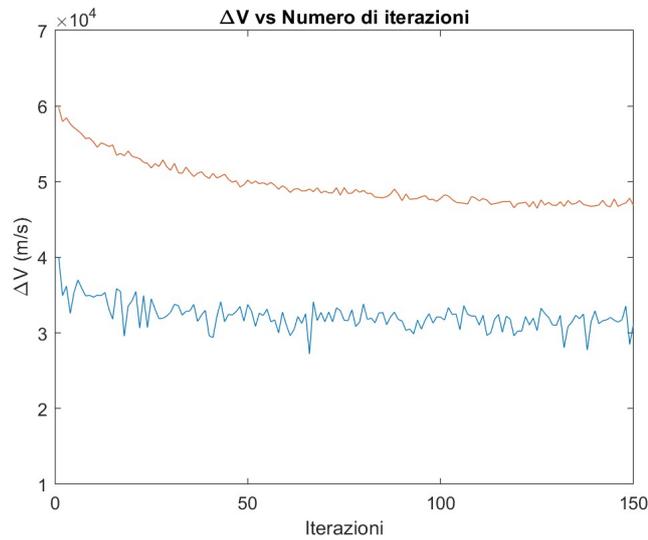
Considerando che, nel caso con 123 detriti, il valore complessivo fornito dal JPL risulta pari a  $\Delta V_{JPL} = 25.326 \text{ km/s}$ , si osserva come le soluzioni prodotte dall'algoritmo, sia per il Caso A che per il Caso B, risultino finalmente allineate

a tale riferimento. In particolare, la migliore ripetizione del Caso A presenta uno scostamento del 10.37% rispetto a  $\Delta V_{JPL}$ , mentre per il Caso B la differenza è pari solo al 7.52%. Questi risultati confermano in maniera significativa la maggiore efficacia della formulazione statica rispetto a quella dinamica nel migliorare le prestazioni dell'algoritmo.

Per completezza, in Figura 7.36 e 7.37 sono riportati anche gli andamenti del  $\Delta V$  medio e minimo, così da fornire un quadro complessivo del comportamento dell'algoritmo nelle diverse ripetizioni.



**Figura 7.36:** Caso A statico



**Figura 7.37:** Caso B statico

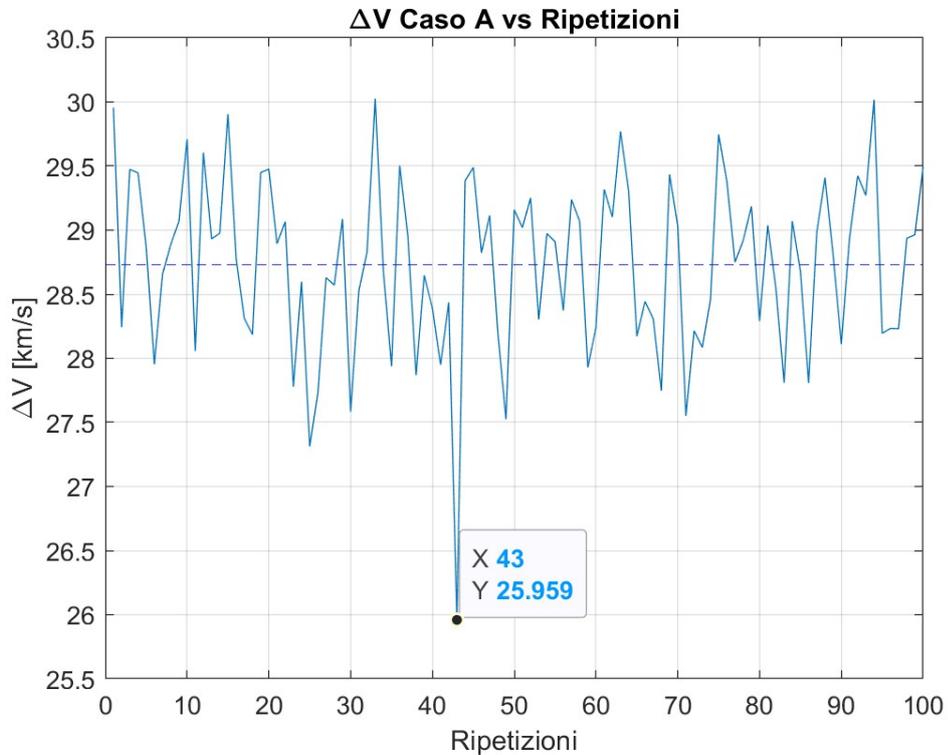
### 7.6.1 Confronto con la soluzione del JPL

Al fine di ottenere una soluzione di riferimento in termini di sequenza dei detriti e pianificazione delle missioni, è stata condotta un'estesa campagna di simulazioni

aggiuntive sul Caso A. In particolare, sono state eseguite ulteriori 90 ripetizioni, per un totale di 100 esecuzioni indipendenti, al fine di esplorare in maniera più esaustiva lo spazio delle possibili soluzioni e individuare quella più performante.

Per il Caso B non si è ritenuto necessario procedere a un'analogia estensione delle prove, in quanto esso adotta la stessa sequenza e pianificazione temporale delle missioni già ottimizzate dal JPL.

La Figura 7.38 riporta i valori di  $\Delta V$  ottenuti nelle 100 ripetizioni del Caso A, evidenziando il minimo registrato pari a  $25.959 \text{ km/s}$ , corrispondente a uno scostamento di soli  $2.49 \%$  rispetto al valore di riferimento del JPL. Per questa migliore ripetizione si riporta di seguito la sequenza di rimozione ottenuta, comprensiva del numero di detriti assegnati a ciascuna missione e degli identificativi dei detriti selezionati.



**Figura 7.38:** Caso A statico, 100 ripetizioni

Missione	Numero di detriti	ID Detriti
1	14	23,55,79,113,25,20,27,117,121,50,95,102,38,97
2	12	19,115,41,26,45,82,47,85,7,2,11,77
3	21	72,107,61,10,28,3,64,66,31,90,73,87,57,35,69,65,8,43,71,4,29
4	11	108,24,104,119,22,75,63,112,37,32,114
5	14	84,59,98,1,40,51,36,67,62,99,54,122,76,15
6	10	101,48,53,5,12,39,58,13,60,74
7	10	49,9,70,93,105,46,88,118,18,91
8	9	86,34,100,30,92,6,110,96,81
9	12	33,68,116,106,14,52,120,80,16,94,83,89
10	10	44,111,56,78,0,17,109,103,42,21

**Tabella 7.8:** Panoramica delle missioni previste dal JPL

Missione	Numero di detriti	ID Detriti
1	11	66,64,69,65,8,4,43,115,2,7,85
2	17	82,45,26,47,41,109,93,70,9,49,105,18,91,99,62,67,36
3	10	98,59,84,1,40,51,119,104,24,108
4	7	37,46,88,118,95,50,121
5	10	117,113,79,55,23,25,20,27,102,96
6	20	81,22,83,94,16,80,120,89,14,38,97,5,57,87,73,90,31,12,5,101
7	6	48,53,39,60,74,13
8	17	58,103,42,29,21,44,111,56,78,17,0,54,122,77,11,63,112
9	11	75,6,110,71,19,30,92,34,100,86,32
10	14	114,15,76,116,68,33,106,52,10,28,3,107,61,72

**Tabella 7.9:** Panoramica delle missioni con algoritmo ACO

Le Tabelle 7.8 e 7.9 riportano rispettivamente la panoramica completa delle missioni prevista dal JPL e quella relativa alla migliore ripetizione del Caso A con matrice statica. Il confronto tra le due pianificazioni, pur a fronte di simili prestazioni globali in termini di  $\Delta V$ , mette in evidenza differenze significative nella distribuzione e nell'organizzazione dei detriti.

Infatti, analizzando nel dettaglio gli ID dei detriti, emerge che l'ACO non riproduce la sequenza del JPL in maniera puntuale, ma tende a conservarne e riorganizzarne alcuni "blocchi" caratteristici. Ad esempio, molti dei detriti assegnati alla prima missione del JPL ricompaiono in gran parte nella missione 5 individuata dall'ACO, sebbene in ordine differente; analogamente, gruppi numerosi come quelli presenti nelle missioni 3 e 6 del JPL risultano ricombinati in più missioni, privilegiando gli archi con costo medio più basso nella matrice statica.

Si osserva inoltre che la pianificazione del JPL privilegia una ripartizione del carico più equilibrata tra le missioni, con un numero di detriti per missione compreso

tra 10 e 21 e valori relativamente omogenei. La soluzione dell'ACO, al contrario, mostra una maggiore variabilità, alternando missioni molto dense (fino a 20 detriti nella missione 6) a missioni più leggere (solo 6–7 detriti nelle missioni 4 e 7). Questo comportamento suggerisce che l'algoritmo, operando su una matrice statica, ottimizza principalmente la struttura combinatoria del tour, a scapito dell'equilibrio operativo tra le missioni che invece caratterizza la pianificazione del JPL.

## Capitolo 8

# Conclusioni

Il presente elaborato ha avuto come obiettivo la valutazione e la validazione di un algoritmo di tipo *Ant Colony Optimization*, sviluppato per la pianificazione multi-missione di Rimozione Attiva dei Detriti spaziali. A tal fine è stato applicato al caso studio GTCO9, considerando la campagna completa di 123 detriti e assumendo come riferimento comparativo la soluzione elaborata dal *Jet Propulsion Laboratory*. Questa scelta ha consentito di testare l'algoritmo su un problema realistico e di elevata complessità, verificandone al tempo stesso le potenzialità e i limiti.

Dopo aver presentato la struttura dell'algoritmo e le caratteristiche del caso studio, l'attività si è concentrata su una serie di analisi mirate a comprendere i limiti dell'approccio adottato e a individuare possibili strategie di miglioramento.

In primo luogo, è stato approfondito l'effetto della pianificazione temporale, da cui si evidenzia che, in tutte le condizioni considerate, la schedulazione deterministica produce costi propulsivi sistematicamente inferiori e più stabili rispetto alla pianificazione randomica. La natura probabilistica di quest'ultima, comporta infatti una dispersione maggiore dei risultati e rende più difficile l'identificazione di un comportamento ripetibile delle soluzioni.

Successivamente, la variazione del numero di formiche ha mostrato un effetto prevalentemente statistico, per cui l'incremento del numero degli agenti artificiali contribuisce perlopiù a stabilizzare le curve medie degli andamenti, senza produrre miglioramenti significativi in termini di prestazioni globali.

Analogamente, l'analisi parametrica sui coefficienti  $\alpha$ ,  $\beta$  ed  $el$  non ha generato gli effetti attesi. Il confronto tra le due diverse formulazioni del parametro  $f$ , invece, ha messo in luce alcune differenze, non tanto in termini di costo complessivo, ma più che altro per quanto concerne il comportamento interno dell'algoritmo. Soprattutto nella fase iniziale di convergenza, è emerso che la versione normalizzata  $f = \frac{f}{\min(f)} - el$  presenta un andamento medio più regolare e graduale rispetto alla formulazione originale.

Per verificare se la riduzione della scala del problema potesse migliorare le prestazioni dell'algoritmo, è stato analizzato un caso semplificato che prevede 3 missioni e 47 detriti. I risultati hanno confermato l'ipotesi iniziale, per cui la diminuzione

del numero di detriti riduce il costo complessivo e migliora la stabilità delle soluzioni, ma comunque non ancora in misura sufficiente a raggiungere le prestazioni del JPL.

L'avanzamento più significativo è stato ottenuto con l'adozione di una matrice dei costi statica, nella quale il costo di ciascun trasferimento è reso indipendente dall'epoca di partenza e dalla durata. Le prestazioni ottenute in questo contesto sono risultate finalmente allineate alle soluzioni di riferimento: nella migliore esecuzione lo scostamento dal valore JPL è sceso fino al 2.49%, confermando la maggiore efficacia della formulazione statica rispetto a quella dinamica.

Infine, l'analisi delle sequenze generate ha evidenziato differenze strutturali interessanti rispetto al JPL. L'ACO non riproduce esattamente la sequenza della soluzione di riferimento, ma conserva e riorganizza gruppi di detriti simili, mostrando che esistono più configurazioni alternative economicamente equivalenti quando si abbandonano i vincoli temporali.

Complessivamente, i risultati ottenuti dimostrano che l'algoritmo implementato è in grado di generare soluzioni competitive per problemi di pianificazione multi-missione di grande complessità. In particolare, la progressiva analisi di differenti test ha portato a un miglioramento sostanziale delle prestazioni rispetto al punto di partenza, raggiungendo l'uniformità con i risultati di riferimento e fornendo al contempo una base solida per futuri sviluppi e ottimizzazioni.

Infatti, alla luce delle analisi perpetrate, possono essere suggerite diverse direzioni di sviluppo. Un primo importante passo consisterebbe nell'applicazione di un *post-processing* dinamico alle soluzioni generate con la matrice statica, ottimizzando separatamente le epoche di partenza e le durate per ricalarle nel dominio dinamico senza alterarne la struttura. Un secondo ambito di intervento è l'esplorazione di variazioni parametriche coordinate di  $\alpha$ ,  $\beta$  ed  $el$  per verificare eventuali effetti sinergici che non emergono nelle variazioni isolate. Infine, ulteriori prospettive di ottimizzazione possono derivare dall'integrazione dell'algoritmo con strategie di *local search* o approcci ibridi come la combinazione con algoritmi genetici.

# Bibliografia

- [1] European Space Agency. *ESA Space Environment Report 2025*. Technical Report GEN-DB-LOG-00288-OPS-SD. European Space Agency, mar. 2025 (cit. alle pp. 3, 7, 10).
- [2] eoPortal.org. *Orbital Debris — Overview of Space Debris*. <https://www.eoportal.org/other-space-activities/orbital-debris#overview-of-space-debris>. 2025 (cit. a p. 4).
- [3] European Space Agency – Space Debris Office. *ESA Space Debris Environment Statistics*. Online; Space Debris User Portal. Last update: 08 September 2025. 2025. URL: <https://sdup.esoc.esa.int/discosweb/statistics/> (cit. a p. 5).
- [4] L. Giudici. «Density-based evolutionary model of the space debris environment». In: *Acta Astronautica* 204 (2024), p. 1279. DOI: 10.1016/j.actaastro.2024.02.014. URL: <https://doi.org/10.1016/j.actaastro.2024.02.014> (cit. a p. 10).
- [5] The Aerospace Corporation. *A Brief History of Space Debris*. 2022. URL: <https://aerospace.org/article/brief-history-space-debris> (cit. a p. 11).
- [6] NASA Orbital Debris Program Office. *Orbital Debris and Near-Earth Environmental Management: A Chronology*. NASA RP-1320. NASA Johnson Space Center, 1993. URL: <https://ntrs.nasa.gov/api/citations/19940020171/downloads/19940020171.pdf> (cit. a p. 11).
- [7] Inter-Agency Space Debris Coordination Committee. *IADC Space Debris Mitigation Guidelines*. 2002. URL: [https://www.unoosa.org/documents/pdf/spacelaw/sd/IADC-2002-01-IADC-Space\\_Debris-Guidelines-Revision1.pdf](https://www.unoosa.org/documents/pdf/spacelaw/sd/IADC-2002-01-IADC-Space_Debris-Guidelines-Revision1.pdf) (cit. a p. 11).
- [8] European Space Agency. *ESA Space Debris Mitigation for Agency Projects*. 2008. URL: [https://www.unoosa.org/documents/pdf/spacelaw/sd/ESA\\_space\\_debris\\_mitigation\\_for\\_agency\\_projects.pdf](https://www.unoosa.org/documents/pdf/spacelaw/sd/ESA_space_debris_mitigation_for_agency_projects.pdf) (cit. a p. 11).
- [9] NASA. *NASA Procedural Requirements for Limiting Orbital Debris and Evaluating the Meteoroid and Orbital Debris Environments*. Rapp. tecn. NASA Safety e Mission Assurance Office, 2017. URL: [https://soma.larc.nasa.gov/SIMPLEx/pdf\\_files/N\\_PR\\_8715\\_006B\\_.pdf](https://soma.larc.nasa.gov/SIMPLEx/pdf_files/N_PR_8715_006B_.pdf) (cit. a p. 11).

- 
- [10] European Space Agency. *ESA Space Debris Mitigation Policy*. 2023. URL: <https://technology.esa.int/upload/media/ESA-ADMIN-IPOL-2023-1-Space-Debris-Mitigation-Policy-Final.pdf> (cit. a p. 11).
- [11] Guglielmo S. Aglietti et al. «The active space debris removal mission RemoveDEBRIS. Part 2: In-orbit operations». In: *Acta Astronautica* 168 (2020), pp. 310–323. DOI: 10.1016/j.actaastro.2019.09.001 (cit. a p. 13).
- [12] NASA. *State of the Art of Small Spacecraft Technology – Deorbit Devices*. Rapp. tecn. Accessed: 2025-09-24. NASA, 2021. URL: [https://www.nasa.gov/wp-content/uploads/2021/10/13.soa\\_deorbit\\_2021\\_1.pdf](https://www.nasa.gov/wp-content/uploads/2021/10/13.soa_deorbit_2021_1.pdf) (cit. a p. 13).
- [13] Claude R. Phipps et al. «A Laser-Optical System to Remove Low Earth Orbit Space Debris». In: *Proceedings of the 6th European Conference on Space Debris*. Vol. SP-723. ESA Special Publication. Darmstadt, Germany: European Space Agency (ESA), apr. 2013 (cit. a p. 13).
- [14] Claudio Bombardelli, Mario Merino e Hodei Urrutxua. «Ion Beam Shepherd for Contactless Space Debris Removal». In: *Acta Astronautica* 162 (2019), pp. 268–279. DOI: 10.1016/j.actaastro.2019.06.037. URL: <https://www.sciencedirect.com/science/article/pii/S0094576519312500> (cit. a p. 13).
- [15] R.R. Bate, D.D. Mueller e J.E. White. *Fundamentals of Astrodynamics*. Dover Books on Aeronautical Engineering Series. Dover Publications, 1971. ISBN: 9780486600611 (cit. a p. 17).
- [16] W.D. McClain e D.A. Vallado. *Fundamentals of Astrodynamics and Applications*. Space Technology Library. Springer Netherlands, 2001. ISBN: 9780792369035 (cit. a p. 17).
- [17] E. S. Ince, F. Barthelmes, S. Reißland, K. Elger, C. Förste, F. Flechtner e H. Schuh. «ICGEM – 15 years of successful collection and distribution of global gravitational models, associated services and future plans». In: *Earth System Science Data* 11 (2019), pp. 647–674. DOI: 10.5194/essd-11-647-2019. URL: <https://doi.org/10.5194/essd-11-647-2019> (cit. a p. 35).
- [18] G.P. Sutton e O. Biblarz. *Rocket Propulsion Elements*. John Wiley & Sons, 2010. ISBN: 9780470080245 (cit. a p. 38).
- [19] M. Dorigo e L.M. Gambardella. «Ant colony system: a cooperative learning approach to the traveling salesman problem». In: *IEEE Transactions on Evolutionary Computation* 1 (1997), pp. 53–66. DOI: 10.1109/4235.585892 (cit. alle pp. 47, 52).
- [20] Marco Dorigo, Vittorio Maniezzo e Alberto Colorni. «Ant System: Optimization by a colony of cooperating agents». In: *IEEE transactions on systems, man, and cybernetics. Part B, Cybernetics : a publication of the IEEE Systems, Man, and Cybernetics Society* 26 (feb. 1996), pp. 29–41. DOI: 10.1109/3477.484436 (cit. a p. 48).

- [21] Goran Martinović e Dražen Bajer. «Elitist Ant System with 2-opt Local Search for the Traveling Salesman Problem». In: *Advances in Electrical and Computer Engineering* 12.1 (2012) (cit. a p. 53).
- [22] Bernd Bullnheimer, Richard F. Hartl e Christine Strauss. «A New Rank Based Version of the Ant System: A Computational Study». In: *Central European Journal of Operations Research and Economics* 7.1 (1999), pp. 25–38. DOI: 10.1007/s10100-006-0016-y (cit. a p. 53).
- [23] Thomas Stützle e Holger H. Hoos. «MAX–MIN Ant System». In: *Future Generation Computer Systems* 16.8 (2000), pp. 889–914. DOI: 10.1016/S0167-739X(00)00043-1 (cit. a p. 54).
- [24] Hong-Xin Shen e Lorenzo Casalino. «Simple  $\Delta V$  Approximation for Optimization of Debris-to-Debris Transfers». In: *Journal of Spacecraft and Rockets* (2020). DOI: 10.2514/1.A34689 (cit. a p. 59).
- [25] Daniele Poma. «Trajectory optimization with chemical propulsion for multiple debris removal missions». Tesi di laurea mag. Politecnico di Torino, dic. 2024 (cit. a p. 59).
- [26] D. Izzo e M. Maertens. «The Kessler Run: On the Design of the GTOC9 Challenge». In: *Acta Futura* 11 (gen. 2018), pp. 11–24. DOI: 10.5281/zenodo.1139022 (cit. a p. 64).
- [27] Anastassios Petropoulos et al. «GTOC9: Results from the Jet Propulsion Laboratory (team JPL)». In: *Acta Futura* 11 (gen. 2018), pp. 25–35. DOI: 10.5281/zenodo.1139152 (cit. a p. 66).
- [28] Eugene L. Lawler, Jan Karel Lenstra, A. H. G. Rinnooy Kan e David B. Shmoys. *The Traveling Salesman Problem: A Guided Tour of Combinatorial Optimization*. New York: John Wiley & Sons, 1985. ISBN: 978-0471904137 (cit. a p. 83).
- [29] Inter-Agency Space Debris Coordination Committee. *Inter-Agency Space Debris Coordination Committee (IADC)*. 1993. URL: [https://www.iadc-home.org/documents\\_public/file\\_down/id/4130](https://www.iadc-home.org/documents_public/file_down/id/4130).
- [30] Hong-Xin Shen, Tian-Jiao Zhang, Lorenzo Casalino e Dario Pastrone. «Optimization of Active Debris Removal Missions with Multiple Targets». In: *Journal of Spacecraft and Rockets* 55.1 (2018), pp. 181–189. DOI: 10.2514/1.A33883.
- [31] Stylianos Tsalas. «Ottimizzazione delle missioni di Rimozione Attiva dei Detriti Spaziali attraverso l’Ottimizzazione basata sulle Colonie di Formiche». Tesi di laurea mag. Politecnico di Torino, ott. 2024.
- [32] Lorenzo Poci. «Ottimizzazione di manovre orbitali per la rimozione di detriti in orbite LEO, tramite l’implementazione di algoritmi genetici». Tesi di laurea mag. Politecnico di Torino, ott. 2022.