

POLITECNICO DI TORINO

Corso di Laurea Magistrale in INGEGNERIA AEROSPAZIALE



Tesi di Laurea Magistrale

Ottimizzazione di Traiettorie di discesa sulla Luna con metodi diretti

Relatore

Prof. Lorenzo CASALINO

Candidato

Dennis GHISOLFO

Anno Accademico 2024/2025

Ottimizzazione di Traiettorie di discesa sulla Luna con metodi diretti

Dennis Ghisolfo

Abstract

Questa tesi affronta il problema dell'ottimizzazione di traiettorie di discesa sulla superficie lunare mediante l'utilizzo di metodi diretti. L'obiettivo principale è la minimizzazione del consumo di carburante durante la fase finale della missione, a partire da un'orbita lunare prestabilita. La metodologia adottata prevede la formulazione del problema come un'ottimizzazione delle traiettorie, risolto numericamente attraverso algoritmi di programmazione quadratica sequenziale (SQP), implementati tramite il solver `fmincon` in ambiente MATLAB.

In una prima fase, si è condotta un'ottimizzazione senza imporre vincoli sulla coordinata x della posizione finale di atterraggio, ottenendo una traiettoria ottimale in termini di spinta e consumi. Successivamente, sono state introdotte variazioni nella posizione di atterraggio attraverso perturbazioni *along-track* e *cross-track*, per analizzare la sensibilità della traiettoria ottimizzata rispetto a cambiamenti del punto di atterraggio. In ogni configurazione, l'algoritmo ha restituito le variabili di controllo ottimali, rappresentate dagli angoli sull'orizzonte e fuori dal piano, che definiscono l'orientamento della spinta nel tempo.

I risultati numerici ottenuti dimostrano l'efficacia dei metodi diretti nel risolvere problemi di ottimizzazione complessi in ambito spaziale, fornendo traiettorie dinamicamente consistenti e realistiche. Inoltre, l'analisi ha evidenziato come piccole variazioni nella posizione finale influenzino significativamente il profilo di volo e il consumo complessivo. Questo studio rappresenta un contributo utile per la pianificazione di missioni lunari, in particolare in scenari in cui è richiesta elevata precisione nell'atterraggio e massima efficienza propulsiva.

Alla memoria di mio nonno Milo, che mi ha insegnato il valore della curiosità.

“Se la conoscenza può creare dei problemi, non è tramite l’ignoranza che possiamo
risolverli.”

— Isaac Asimov

Indice

1 Missioni Lunari	1
1.1 Introduzione	1
1.2 L'allunaggio	2
1.2.1 Il programma Surveyor	2
1.2.2 Il programma Apollo	4
1.2.3 Il programma Artemis	7
2 Introduzione ai problemi di ottimizzazione	10
2.1 Ottimizzazione vincolata con metodi diretti	12
2.1.1 Formulazione generale del problema	12
2.1.2 Strategia dei metodi diretti	13
2.1.3 Principali algoritmi numerici utilizzati nei metodi diretti . . .	14
2.2 Metodi SQP (Sequential Quadratic Programming)	15
2.2.1 Discretizzazione del Problema	17
2.2.2 Struttura e Sparsità nei Metodi SQP	19
2.2.3 Derivate e Accuratezza Numerica	19
3 Sistema di riferimento	21
3.1 Introduzione ai sistemi di riferimento	21
3.1.1 Scelta del sistema di riferimento	21
3.1.2 Posizione iniziale e finale del veicolo	22
3.2 Orientamento del veicolo e angoli di assetto	22
3.3 Vantaggi della scelta del sistema	23
4 Modello dinamico	24
4.1 Ipotesi semplificative	24
4.2 Sistema di riferimento	25
4.3 Equazioni del moto	26
4.3.1 Fasi della traiettoria	28
4.3.2 Osservazioni	29
5 Strategia di ottimizzazione	30
5.1 Introduzione	30
5.2 Parametri iniziali e definizione delle variabili	31
5.3 Funzione obiettivo	32

5.4	Vincoli non lineari	32
5.5	Equazioni del moto e integrazione numerica	33
5.6	Struttura dell'algoritmo	33
5.7	Funzionamento iterativo di <code>fmincon</code>	34
5.8	Considerazioni finali	35
6	Risultati	36
6.1	Ottimizzazione traiettoria di discesa a fissato tempo di discesa verticale	39
6.2	Ottimizzazione traiettoria con variazione del punto di 'landing' 'along-track' e 'cross-track'	43
6.2.1	Variazione 'along-track' del punto di 'landing'	43
6.2.1.1	Δx negativo	43
6.2.1.2	Δx positivo	46
6.2.2	Variazione 'cross-track' del punto di 'landing'	49
6.3	Ottimizzazione traiettoria con variazione punto di 'landing' 'along-track' durante la discesa	53
6.3.1	Variazione al 10% della traiettoria di discesa originale	54
6.3.2	Variazione al 20% della traiettoria di discesa originale	57
6.3.3	Variazione al 30% della traiettoria di discesa originale	59
7	Conclusioni	61
A	Ottimizzazione traiettoria di discesa con spinta variabile nella fase di discesa verticale	64
	Bibliografia	69

Elenco delle figure

1.1	Surveyor 1	3
1.2	Piano di volo Apollo 1	4
1.3	Saturn V dell'Apollo 15	6
1.4	Piano di Volo Artemis 1	9
3.1	Sistema di riferimento adottato	22
6.1	Evoluzione della massa	40
6.2	Quota Z in funzione di X	41
6.3	Evoluzione della velocità lungo l'asse X	41
6.4	Evoluzione della velocità lungo l'asse Z	42
6.5	Evoluzione dell' angolo PSI	42
6.6	Quota Z in funzione di X	44
6.7	Evoluzione della velocità lungo l'asse X	44
6.8	Evoluzione della velocità lungo l'asse Z	45
6.9	Evoluzione dell' angolo PSI	45
6.10	Quota Z in funzione di X	46
6.11	Evoluzione della velocità lungo l'asse X	47
6.12	Evoluzione della velocità lungo l'asse Z	47
6.13	Evoluzione dell' angolo PSI	48
6.14	Traiettoria 3D	49
6.15	Evoluzione della velocità lungo l'asse X	50
6.16	Evoluzione della velocità lungo l'asse Y	50
6.17	Evoluzione della velocità lungo l'asse Z	51
6.18	Evoluzione dell' angolo PSI	51
6.19	Evoluzione dell' angolo PHI	52
6.20	Quota Z in funzione di X	54
6.21	Evoluzione della velocità lungo l'asse X	55
6.22	Evoluzione della velocità lungo l'asse Z	55
6.23	Evoluzione dell'angolo PSI	56
6.24	Quota Z in funzione di X	57
6.25	Evoluzione della velocità lungo l'asse X	57
6.26	Evoluzione della velocità lungo l'asse Z	58
6.27	Evoluzione dell'angolo PSI	58

ELENCO DELLE FIGURE

6.28	Quota Z in funzione di X	59
6.29	Evoluzione della velocità lungo l'asse X	59
6.30	Evoluzione della velocità lungo l'asse Z	60
6.31	Evoluzione dell'angolo PSI	60
A.1	Massa	65
A.2	traiettoria	66
A.3	Zoom fase finale traiettoria	66
A.4	Velocità lungo l'asse Z	67
A.5	Velocità lungo l'asse X	67
A.6	Angolo Psi	68

Elenco delle tabelle

6.1	Risultati variazione 'along-track' con Δx positivo	46
6.2	Risultati variazione 'cross-track'	49
6.3	Risultati variazione al 10% della discesa	54
6.4	Risultati variazione al 20% della discesa	57
6.5	Risultati variazione al 30% della discesa	59

Capitolo 1

Missioni Lunari

1.1 Introduzione

L'esplorazione della Luna ha sempre rappresentato un tema di grande interesse nell'ambito dell'ingegneria aerospaziale, configurandosi come una delle tappe più significative nella storia dell'esplorazione spaziale. A partire dalla fine degli anni '50, la Luna ha attratto l'attenzione delle principali agenzie spaziali internazionali, grazie alla sua relativa prossimità alla Terra e alle sue peculiari caratteristiche geologiche, che la rendono un banco di prova ideale per lo sviluppo e la validazione di nuove tecnologie spaziali.

Le prime missioni robotiche, tra cui i programmi sovietici *Luna* e statunitensi *Ranger*, hanno permesso di raccogliere dati fondamentali sull'ambiente lunare, costituendo la base per lo sviluppo di missioni più complesse, culminate con le missioni con equipaggio del programma *Apollo*. In tempi più recenti, l'interesse verso l'esplorazione lunare ha conosciuto una forte rinascita, alimentata sia da nuove ambizioni scientifiche e tecnologiche, sia da un crescente coinvolgimento del settore privato. L'obiettivo attuale non è solo il ritorno sulla superficie lunare, ma la realizzazione di basi permanenti che possano fungere da piattaforme operative per l'esplorazione di Marte e dello spazio profondo.

In questo contesto, l'atterraggio controllato su corpi celesti riveste un ruolo centrale nella pianificazione delle missioni. La definizione di traiettorie di discesa ottimizzate rappresenta, infatti, una sfida ingegneristica di primaria importanza, in quanto consente di massimizzare la sicurezza della missione, minimizzare i consumi propulsivi e aumentare l'efficienza complessiva del profilo di volo. Tra le diverse metodologie sviluppate per affrontare tale problematica, i metodi diretti di ottimizzazione offrono un approccio efficace e flessibile per la determinazione delle traiettorie ottimali, grazie alla loro capacità di gestire vincoli complessi e modelli dinamici realistici.

Il presente lavoro di tesi si propone di affrontare il problema dell'ottimizzazione delle traiettorie di discesa sulla Luna mediante l'utilizzo di metodi diretti, analizzandone

i principali aspetti teorici e applicativi, e valutandone le prestazioni attraverso l'implementazione di specifici casi studio.

1.2 L'allunaggio

Il problema dell'atterraggio morbido controllato (*soft-landing*) sulla superficie lunare implica la necessità di gestire in modo preciso la traiettoria e la velocità di un veicolo spaziale, tenendo conto della presenza di un campo gravitazionale, dell'assenza di atmosfera e di stringenti vincoli legati al consumo di carburante e alla sicurezza della missione. A differenza dell'atterraggio su corpi dotati di atmosfera, nel caso lunare non è possibile sfruttare forze aerodinamiche per il rallentamento: il controllo della discesa deve quindi basarsi esclusivamente sull'impiego della propulsione a razzo.

La fase di discesa può essere formalizzata come un problema di ottimizzazione del controllo, in cui l'obiettivo è determinare la sequenza ottimale di comandi ai propulsori che consenta, ad esempio, di minimizzare il consumo di carburante o il tempo totale di discesa, rispettando al contempo i vincoli imposti dalle leggi dinamiche del sistema, dai limiti cinematici e dai requisiti di sicurezza operativa.

In questo contesto, i metodi diretti di ottimizzazione costituiscono uno strumento particolarmente efficace per la risoluzione numerica del problema. Essi consentono di discretizzare il problema continuo, trasformandolo in un problema di programmazione non lineare che può essere risolto mediante l'impiego di algoritmi di ottimizzazione moderni e consolidati, offrendo flessibilità nella gestione di modelli complessi e di vincoli multipli.

1.2.1 Il programma Surveyor

Il programma *Surveyor*, sviluppato dalla NASA durante gli anni '60, ha rappresentato un passo cruciale nello sviluppo delle tecnologie necessarie per la discesa controllata automatica su suolo lunare. Composto da una serie di sette missioni robotiche, il programma era finalizzato alla realizzazione di *Soft Landings* sulla superficie della Luna, costituendo così una fase preparatoria fondamentale per il successivo programma *Apollo*.

Il primo successo operativo fu ottenuto con la missione *Surveyor 1*, lanciata il 30 maggio 1966 e atterrata senza incidenti il 2 giugno 1966 nell'*Oceanus Procellarum*. Questa missione si rivelò essenziale per verificare la fattibilità tecnica del *soft landing*, raccogliere dati diretti sul terreno lunare e validare i sistemi di guida, navigazione e controllo (GNCs). Complessivamente, cinque delle sette missioni programmate riuscirono a raggiungere la superficie lunare in modo controllato.

Il veicolo *Surveyor* era dotato di un motore principale a spinta variabile, la cui regolazione avveniva automaticamente grazie ai dati forniti da un sistema radar Doppler, incaricato di misurare l'altitudine e la velocità di discesa. A circa 3,5 metri dal suolo, il motore principale veniva disattivato e il completamento della fase di atterraggio era affidato a piccoli razzi a combustibile solido, riducendo così il rischio di sollevamento di polveri che avrebbero potuto compromettere il funzionamento dei sensori di bordo.

Tra gli aspetti maggiormente innovativi del programma, particolare rilievo ebbe lo sviluppo di algoritmi per il controllo automatico della discesa. Nonostante le capacità di calcolo estremamente limitate dei computer di bordo rispetto agli standard odierni, il sistema fu in grado di gestire efficacemente le variazioni dei parametri dinamici e l'incertezza associata alle misurazioni di quota e velocità. Le informazioni e i dati acquisiti durante le missioni *Surveyor* si rivelarono determinanti per la definizione delle strategie di discesa del modulo lunare (LM) utilizzato nel programma *Apollo*, che nel 1969 portò al primo allunaggio con equipaggio umano.

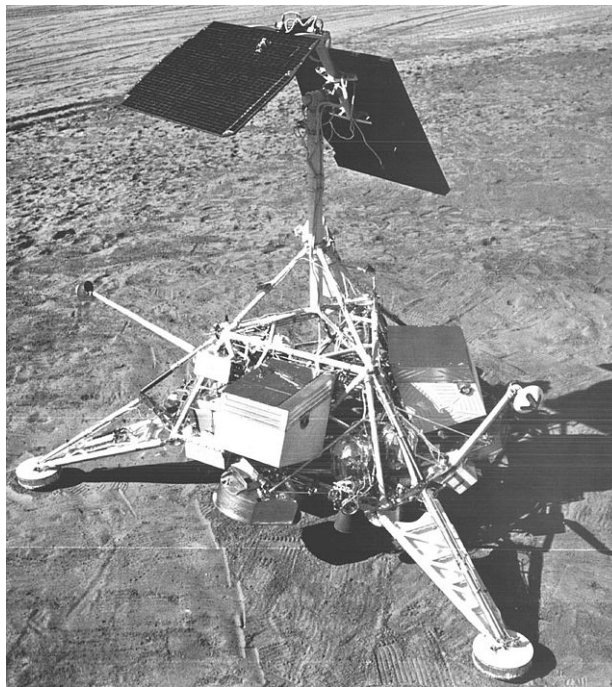


Figura 1.1: Surveyor 1

1.2.2 Il programma Apollo

Il programma *Apollo* rappresenta uno dei capitoli più significativi nella storia dell'esplorazione spaziale e dell'ingegneria aerospaziale. Avviato dalla NASA negli anni '60, l'obiettivo principale era quello di condurre missioni con equipaggio sulla superficie lunare e garantire il sicuro ritorno degli astronauti sulla Terra. Oltre a costituire una straordinaria impresa tecnologica e scientifica, il programma ha stimolato lo sviluppo di nuove tecniche di guida, controllo e ottimizzazione delle traiettorie spaziali, risultate fondamentali per il successo delle operazioni di discesa e rientro.

Il progetto nacque all'interno di un contesto geopolitico dominato dalla competizione tra Stati Uniti e Unione Sovietica durante la Guerra Fredda. Nel 1961, il presidente John F. Kennedy annunciò l'ambizioso obiettivo di «We choose to go to the Moon in this decade»¹, avviando una fase di intensi investimenti in ricerca scientifica, sviluppo tecnologico e infrastrutture industriali senza precedenti.

L'architettura della missione prevedeva l'utilizzo del lanciatore *Saturn V*, uno dei vettori più potenti mai realizzati, in grado di trasportare in orbita sia il modulo di comando (*Command Module, CM*), sia il modulo lunare (*Lunar Module, LM*). La separazione e le successive manovre orbitali attorno alla Luna rappresentavano fasi critiche per il corretto svolgimento della missione. Il modulo lunare, progettato e realizzato dalla *Grumman Aircraft Engineering Corporation*, era costituito da due stadi distinti: uno dedicato alla discesa, dotato del motore principale per il touchdown, e uno per la risalita, finalizzato al rendezvous in orbita lunare con il modulo di comando.

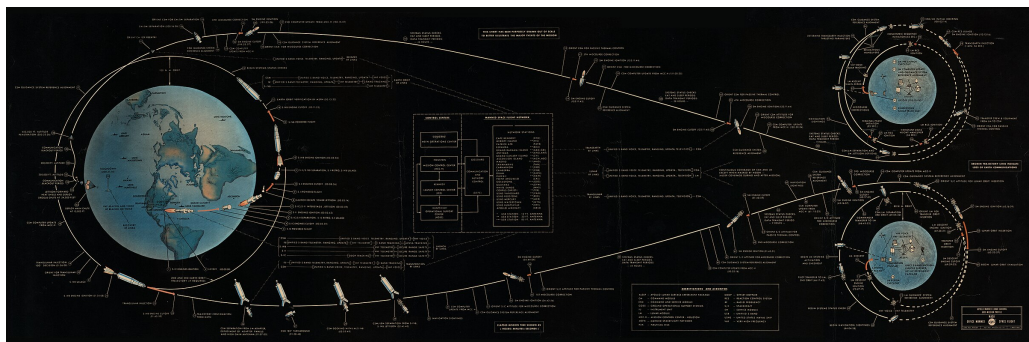


Figura 1.2: Piano di volo Apollo 1

¹Presidential speech, 25 May 1961

La fase di discesa sul suolo lunare presentava sfide ingegneristiche particolarmente complesse, dovute all'assenza di atmosfera, alla ridotta gravità lunare (circa un sesto di quella terrestre) e alla natura irregolare della superficie. Tali condizioni rendevano imprescindibile una pianificazione accurata delle traiettorie e dei profili di discesa.

Con il progredire del programma, vennero sviluppate tecniche sempre più avanzate per il controllo della traiettoria, integrando l'intervento diretto degli astronauti con i sistemi automatici di bordo. Un esempio emblematico fu rappresentato dall'allunaggio di *Apollo 11*, durante il quale Neil Armstrong effettuò una correzione semi-manuale della traiettoria per evitare una zona pericolosa, dimostrando l'importanza della flessibilità operativa durante la fase di touchdown.

Il sistema di navigazione del *Lunar Module* integrava sensori inerziali e dati radar per il calcolo continuo della posizione e della velocità, supportando così il controllo del profilo di discesa tramite l'*Apollo Guidance Computer* (AGC), uno dei primi calcolatori digitali con capacità di elaborazione in tempo reale per missioni spaziali.

Il programma *Apollo* ha costituito un banco di prova eccezionale per lo sviluppo di tecnologie innovative: sistemi di navigazione inerziale avanzata, computer di controllo embedded, algoritmi di guida e controllo in tempo reale, e metodi di ottimizzazione delle traiettorie. L'esperienza maturata ha posto le basi per le missioni spaziali successive e ha contribuito in modo sostanziale all'evoluzione delle tecniche di ottimizzazione numerica applicate alla dinamica dei veicoli spaziali.

In particolare, le esigenze di precisione e sicurezza durante la delicata fase di discesa hanno stimolato l'introduzione di approcci più sistematici per la pianificazione delle traiettorie, anticipando molte delle metodologie di ottimizzazione diretta che costituiscono oggi uno standard nella progettazione delle missioni spaziali.

Il successo del programma *Apollo*, culminato con il primo sbarco umano sulla Luna il 21 luglio 1969, ha segnato una svolta storica nell'esplorazione spaziale, dimostrando la fattibilità di missioni umane complesse e aprendo la strada a nuovi paradigmi di simulazione, progettazione e controllo delle traiettorie, tuttora alla base della ricerca scientifica e ingegneristica moderna.



Figura 1.3: Saturn V dell'Apollo 15

1.2.3 Il programma Artemis

Il programma *Artemis* costituisce la nuova frontiera dell'esplorazione lunare promossa dalla NASA, con l'obiettivo dichiarato di riportare esseri umani sulla superficie lunare e stabilire una presenza stabile e sostenibile. Presentato ufficialmente nel 2017, Artemis non intende soltanto ripetere i successi del programma Apollo, ma aspira a costruire un'infrastruttura scientifica e tecnologica di lungo periodo, che possa fungere da trampolino di lancio per la futura esplorazione di Marte e dello spazio profondo.

Il piano di sviluppo del programma prevede una sequenza di missioni sempre più complesse, che iniziano con voli senza equipaggio e culminano con nuove missioni umane, tra cui lo storico primo allunaggio di una donna e di un astronauta non americano. Diversamente da Apollo, Artemis introduce un'architettura missione completamente nuova. Il sistema di lancio principale è lo *Space Launch System (SLS)*, attualmente il più potente razzo mai realizzato, mentre il trasporto degli astronauti è affidato alla capsula *Orion*, concepita per operazioni prolungate nello spazio profondo.

Un elemento distintivo e innovativo dell'architettura Artemis è rappresentato dalla stazione spaziale *Lunar Gateway*, che orbiterà intorno alla Luna. Questa piattaforma logistica fungerà da punto di transito, supporto e rifornimento, aumentando la flessibilità delle traiettorie e riducendo i rischi delle operazioni dirette Terra-Luna. Gateway consentirà anche di ampliare i margini operativi dei moduli di discesa e risalita offrendo nuovi profili di missione.

Il programma Artemis introduce sostanziali innovazioni nei sistemi di guida, navigazione e controllo (*GNCs - Guidance, Navigation, and Control systems*), facendo leva sull'esperienza maturata con Apollo e sulle più recenti evoluzioni in ambito di sensoristica avanzata, intelligenza artificiale e calcolo ad alte prestazioni. Le crescenti complessità operative delle missioni impongono lo sviluppo di algoritmi di ottimizzazione sempre più avanzati, in grado di pianificare traiettorie complesse che soddisfino molteplici requisiti: minimizzazione dei consumi, massima sicurezza dell'equipaggio, flessibilità nei profili orbitali e rispetto di vincoli ambientali.

La pianificazione delle traiettorie di discesa e risalita deve infatti considerare non solo le dinamiche classiche del volo spaziale, ma anche fattori ambientali specifici della superficie lunare: illuminazione solare, condizioni termiche, topografia locale, vincoli geologici e la posizione relativa del Gateway. Tali condizioni comportano la necessità di risolvere problemi di controllo ottimo caratterizzati da alta dimensionalità e vincoli multipli, per i quali si impiegano oggi tecniche numeriche sofisticate.

Una caratteristica distintiva di Artemis è inoltre l'attenzione alla sostenibilità a lungo termine. Oltre a prevedere un progressivo ampliamento delle infrastrutture permanenti, si promuove l'utilizzo delle risorse lunari in loco (*ISRU - In Situ Resource Utilization*), nonché lo sviluppo di avanzati sistemi di supporto vitale. La definizione ottimale delle traiettorie di volo e atterraggio diventa pertanto cruciale non solo per l'efficienza energetica, ma per l'intera logistica delle future basi permanenti.

Il passaggio dall'approccio manuale e semi-automatico impiegato durante le missioni Apollo all'attuale paradigma di ottimizzazione moderna rappresenta un cambiamento radicale nell'ingegneria dei veicoli spaziali. Le missioni Artemis, per la loro complessità e criticità, richiedono strumenti computazionali avanzati in grado di risolvere problemi di controllo ottimo altamente vincolati e non lineari.

Tra le tecniche oggi maggiormente impiegate vi sono i metodi di ottimizzazione diretta, che trasformano i problemi di controllo continuo in problemi di programmazione non lineare risolvibili tramite algoritmi numerici stabili e affidabili. Tali approcci permettono di determinare profili di discesa ottimali minimizzando il consumo di propellente, garantendo la sicurezza dell'equipaggio e rispettando i vincoli di missione, come le limitazioni dinamiche del veicolo, la variabilità gravitazionale e la morfologia della superficie lunare.

A ciò si aggiungono le crescenti capacità di calcolo a bordo, l'integrazione di intelligenza artificiale e l'impiego di sistemi di navigazione autonomi, che consentono un controllo adattivo e reattivo in tempo reale. Queste tecnologie permettono al veicolo di reagire prontamente a perturbazioni impreviste o a errori di navigazione durante le fasi critiche della discesa, aumentando ulteriormente il margine di sicurezza.

In prospettiva, la convergenza tra teoria del controllo, ottimizzazione numerica e tecnologie digitali avanzate apre nuove opportunità per la pianificazione di missioni spaziali sempre più ambiziose, precise ed efficienti. L'applicazione di questi metodi all'ottimizzazione delle traiettorie lunari rappresenta una tappa fondamentale nello sviluppo dell'esplorazione spaziale umana verso destinazioni sempre più lontane.

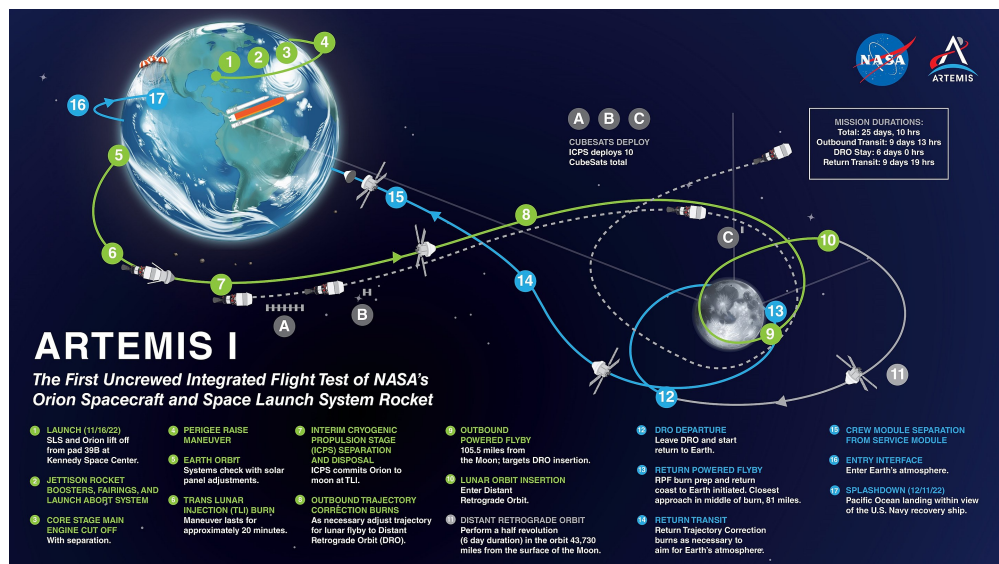


Figura 1.4: Piano di Volo Artemis 1

Capitolo 2

Introduzione ai problemi di ottimizzazione

L'ottimizzazione matematica è una disciplina centrale in molti ambiti, tra cui l'ingegneria, l'economia, la ricerca operativa e, più in generale, nelle scienze applicate. Il suo scopo principale è trovare la soluzione migliore a un problema decisionale, ovvero determinare i valori ottimali di un insieme di variabili che consentano di massimizzare o minimizzare una funzione obiettivo, rispettando al contempo eventuali vincoli imposti al sistema.

In termini generali, un problema di ottimizzazione può essere formalmente espresso come:

$$\begin{array}{ll} \min_{\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n} & f(\mathbf{x}) \\ \text{soggetto a} & \mathbf{g}(\mathbf{x}) \leq \mathbf{0} \\ & \mathbf{h}(\mathbf{x}) = \mathbf{0} \end{array} \quad (2.1)$$

dove:

- $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n$ è il vettore delle variabili decisionali;
- $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ è la funzione obiettivo da minimizzare (o massimizzare);
- $\mathbf{g} : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m$ rappresenta l'insieme dei vincoli disuguaglianza;
- $\mathbf{h} : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^p$ rappresenta l'insieme dei vincoli di uguaglianza.

Il dominio ammissibile del problema, ovvero l'insieme delle soluzioni che rispettano tutti i vincoli, è definito come:

$$\mathcal{F} = \{ \mathbf{x} \in \mathbb{R}^n \mid \mathbf{g}(\mathbf{x}) \leq \mathbf{0}, \mathbf{h}(\mathbf{x}) = \mathbf{0} \}. \quad (2.2)$$

La natura del problema di ottimizzazione può variare considerevolmente in funzione della forma della funzione obiettivo e dei vincoli:

- **Ottimizzazione lineare:** quando sia $f(\mathbf{x})$ che i vincoli $\mathbf{g}(\mathbf{x})$ e $\mathbf{h}(\mathbf{x})$ sono funzioni lineari;
- **Ottimizzazione non lineare:** quando almeno una delle funzioni coinvolte è non lineare;
- **Problemi convessi:** quando la funzione obiettivo è convessa e il dominio ammissibile è un insieme convesso, garantendo così che ogni minimo locale coincida con il minimo globale;
- **Problemi non convessi:** nei quali la presenza di minimi locali rende più complessa la ricerca della soluzione globale ottimale.

In ambito ingegneristico, e in particolare nelle applicazioni aerospaziali e nella dinamica dei veicoli spaziali, i problemi di ottimizzazione sono quasi sempre di natura non lineare e non convessa, a causa della complessità intrinseca dei modelli fisici e dei numerosi vincoli operativi da rispettare.

L'ottimizzazione si articola inoltre in funzione del contesto temporale:

- **Ottimizzazione statica:** il problema è privo di dipendenze temporali esplicite;
- **Ottimizzazione dinamica:** le variabili decisionali evolvono nel tempo e il problema coinvolge sistemi dinamici governati da equazioni differenziali.

In questa tesi, particolare attenzione sarà dedicata ai problemi di ottimizzazione dinamica applicati alla determinazione delle traiettorie ottimali di discesa sulla Luna.

2.1 Ottimizzazione vincolata con metodi diretti

Nei problemi di ottimizzazione dinamica, e in particolare nella pianificazione delle traiettorie di discesa per veicoli spaziali, uno degli approcci impiegati è rappresentato dai *metodi diretti*. Tali metodi permettono di affrontare problemi complessi caratterizzati da dinamiche non lineari, vincoli multipli e obiettivi spesso non convessi, offrendo robustezza e flessibilità nella risoluzione numerica.

2.1.1 Formulazione generale del problema

In generale, un problema di controllo ottimo può essere espresso nella seguente forma:

$$\begin{aligned} \min_{\mathbf{u}(\cdot), \mathbf{x}(\cdot)} \quad & J = \Phi(\mathbf{x}(t_f), t_f) + \int_{t_0}^{t_f} L(\mathbf{x}(t), \mathbf{u}(t), t) dt \\ \text{soggetto a:} \quad & \\ & \dot{\mathbf{x}}(t) = \mathbf{f}(\mathbf{x}(t), \mathbf{u}(t), t), \quad t \in [t_0, t_f] \\ & \mathbf{g}(\mathbf{x}(t), \mathbf{u}(t), t) \leq 0 \\ & \mathbf{h}(\mathbf{x}(t), \mathbf{u}(t), t) = 0 \\ & \mathbf{x}(t_0) = \mathbf{x}_0 \\ & \psi(\mathbf{x}(t_f), t_f) = 0 \end{aligned} \tag{2.3}$$

dove:

- $\mathbf{x}(t) \in \mathbb{R}^n$ è il vettore di stato;
- $\mathbf{u}(t) \in \mathbb{R}^m$ è il vettore di controllo;
- $\mathbf{f}$ rappresenta la dinamica del sistema;
- L è il costo integrale;
- Φ è il costo finale;
- $\mathbf{g}$ e $\mathbf{h}$ rappresentano i vincoli di disuguaglianza e uguaglianza;
- ψ sono i vincoli al tempo finale.

2.1.2 Strategia dei metodi diretti

L'approccio diretto si basa sul principio di discretizzare il problema continuo trasformandolo in un problema di programmazione non lineare (NLP - Nonlinear Programming), che può essere risolto con algoritmi numerici convenzionali. A differenza dei metodi indiretti, nei quali si risolvono le equazioni di condizioni necessarie al primo ordine (equazioni di Eulero-Lagrange o di Pontryagin), i metodi diretti operano numericamente sull'intero problema evitando la necessità di derivare e risolvere sistemi differenziali algebrici.

Il processo generale di un metodo diretto può essere così schematizzato:

1. **Discretizzazione temporale:** l'intervallo $[t_0, t_f]$ viene suddiviso in N sottointervalli: $t_0 < t_1 < \dots < t_N = t_f$.
2. **Parametrizzazione:** sia gli stati $\mathbf{x}(t)$ che i controlli $\mathbf{u}(t)$ vengono approssimati su tale griglia temporale mediante funzioni di interpolazione (es. polinomi a tratti, spline, collocazione polinomiale).
3. **Trascrizione:** le equazioni dinamiche e i vincoli vengono discretizzati, convertendo le equazioni differenziali in relazioni algebriche.
4. **Risoluzione numerica:** il problema risultante è un NLP che può essere risolto con algoritmi di ottimizzazione numerica come SQP o metodi basati su gradienti.

Il problema continuo trascritto assume infine la forma generale di un NLP:

$$\begin{aligned} \min_{\mathbf{z} \in \mathbb{R}^n} \quad & F(\mathbf{z}) \\ \text{soggetto a:} \quad & \mathbf{G}(\mathbf{z}) \leq 0, \quad \mathbf{H}(\mathbf{z}) = 0 \end{aligned} \tag{2.4}$$

dove $\mathbf{z}$ è il vettore contenente tutte le variabili di decisione (stati, controlli, tempi di commutazione, ecc.).

2.1.3 Principali algoritmi numerici utilizzati nei metodi diretti

Una volta trascritto il problema, la risoluzione del NLP viene affidata a solutori numerici robusti. I principali algoritmi utilizzati sono:

- **SQP (Sequential Quadratic Programming):** metodo basato su un'approssimazione locale quadratica della funzione obiettivo e lineare dei vincoli. È particolarmente efficace per problemi di dimensioni moderate e ben condizionati.
- **IPM (Interior Point Methods):** metodi che trasformano i vincoli disuguaglianza in penalità logaritmiche interne. Sono particolarmente adatti per NLP di grandi dimensioni, sfruttando le sparse Jacobian structures.
- **GRG (Generalized Reduced Gradient):** metodo basato sull'eliminazione parziale dei vincoli di uguaglianza, riducendo il problema in uno spazio più piccolo.
- **Active Set Methods:** metodi iterativi che mantengono un sottoinsieme attivo dei vincoli di disuguaglianza, aggiornato a ogni iterazione.

L'efficacia dei metodi diretti dipende fortemente dalla qualità della discretizzazione e dall'accuratezza delle derivate (Jacobiana e Hessiana).

2.2 Metodi SQP (Sequential Quadratic Programming)

L'ottimizzazione numerica dei problemi di controllo ottimo, come la traiettoria di discesa lunare, può essere affrontata in modo efficace attraverso i **metodi diretti**, nei quali il problema continuo viene discretizzato e trasformato in un problema di programmazione non lineare (NLP). Tra i metodi diretti, quelli basati sulla **Sequential Quadratic Programming (SQP)** si sono rivelati particolarmente robusti ed efficienti, soprattutto in presenza di molti vincoli e variabili. In questa sezione si presenta un approfondimento teorico su tali metodi, la loro formulazione matematica e le strategie di discretizzazione più comuni.

Il problema di ottimizzazione non lineare con vincoli può essere espresso nella forma generale:

$$\begin{aligned} \min_{x \in \mathbb{R}^n} \quad & F(x) \\ \text{soggetto a} \quad & b_l \leq x \leq b_u, \\ & Ax \leq b, \\ & c(x) = 0, \end{aligned} \tag{2.5}$$

dove $F(x)$ è la funzione obiettivo, $c(x)$ è un vettore di vincoli non lineari e A rappresenta vincoli lineari.

Il principio alla base dei metodi SQP consiste nel risolvere iterativamente una sequenza di sottoproblemi di programmazione quadratica (QP), ciascuno dei quali rappresenta una *approssimazione locale* del problema di ottimizzazione originale.

Data una funzione obiettivo $F(x)$ da minimizzare, soggetta a vincoli (lineari e non lineari), in corrispondenza di un punto corrente x_k si costruisce un problema QP della forma:

$$\begin{aligned} \min_{d \in \mathbb{R}^n} \quad & \nabla F(x_k)^T d + \frac{1}{2} d^T H_k d \\ \text{soggetto a} \quad & c(x_k) + J(x_k)d = 0, \end{aligned} \tag{2.6}$$

dove:

- d è il vettore di spostamento dalla posizione corrente x_k ,
- $\nabla F(x_k)$ è il gradiente della funzione obiettivo calcolato in x_k ,
- H_k è una matrice che approssima l'Hessiana della *funzione Lagrangiana*:

$$L(x, \lambda) = F(x) - \lambda^T c(x),$$

- $J(x_k)$ è la Jacobiana dei vincoli non lineari $c(x)$ valutata in x_k .

Il sottoproblema così definito rappresenta una versione semplificata del problema originale, in cui:

- La funzione obiettivo $F(x)$ è approssimata mediante un'espansione di Taylor del secondo ordine attorno a x_k .
- I vincoli $c(x)$ sono linearizzati tramite un'espansione di Taylor del primo ordine.

Dal punto di vista geometrico, il metodo SQP può essere visto come un procedimento che, partendo da un punto iniziale x_0 , costruisce una sequenza di iterati $\{x_k\}$ avvicinandosi progressivamente alla soluzione ottimale, muovendosi lungo direzioni d_k ottenute risolvendo i sottoproblemi QP locali.

Una volta determinata la direzione di discesa d_k , il punto viene aggiornato secondo la regola:

$$x_{k+1} = x_k + \alpha_k d_k,$$

dove $\alpha_k \in (0, 1]$ è un parametro scalare (*step size*) scelto tramite una procedura di *line search* (ricerca unidimensionale) che garantisce la convergenza. Tale procedimento mira a trovare un valore di α_k che riduca opportunamente una *funzione merito*, combinazione pesata della funzione obiettivo e delle violazioni dei vincoli, mantenendo una buona progressione verso la soluzione.

Il processo viene ripetuto fino a soddisfare criteri di arresto basati, ad esempio, sulla norma del gradiente della Lagrangiana, sulla soddisfazione dei vincoli e sulla variazione tra iterati successivi.

Questa strategia permette di risolvere problemi di ottimizzazione non lineare vincolata in modo molto efficace, in particolare quando le derivate del problema (gradiente, Jacobiana e, se disponibili, Hessiana) sono note o calcolabili con buona accuratezza. Nei contesti applicativi, come l'ottimizzazione di traiettorie, la scelta accurata della discretizzazione e il calcolo preciso di tali derivate sono fondamentali per il buon funzionamento del metodo SQP.

2.2.1 Discretizzazione del Problema

Nei problemi di controllo ottimo, l'obiettivo è minimizzare una funzione di costo soggetta alla dinamica del sistema, tipicamente descritta da equazioni differenziali ordinarie (ODE):

$$\min_{u,y} \phi(y(t_f)) \quad (2.7)$$

$$\text{soggetto a } \dot{y}(t) = f(y(t), u(t), t), \quad t \in [t_0, t_f], \quad (2.8)$$

$$y(t_0) = y_0, \quad (2.9)$$

$$g(y(t), u(t), t) \leq 0, \quad (2.10)$$

dove $y(t)$ è il vettore degli *stati* del sistema, $u(t)$ è il vettore dei *controlli*, e $g(\cdot)$ rappresenta vincoli di percorso (ad esempio limiti sui controlli o sugli stati durante l'evoluzione temporale). Il problema continuo così definito è generalmente infinito-dimensionale, poiché si cercano funzioni $u(t)$ e $y(t)$.

I **metodi diretti** trasformano questo problema continuo in un problema di ottimizzazione finito-dimensionale attraverso una *discretizzazione temporale*. L'intervallo $[t_0, t_f]$ viene suddiviso in N sottintervalli mediante nodi temporali $t_k = t_0 + k\Delta t$, con $\Delta t = (t_f - t_0)/N$. Le funzioni $y(t)$ e $u(t)$ vengono poi rappresentate tramite funzioni polinomiali (ad es. spline o polinomi a tratti) definite in ciascun sottintervallo.

Di seguito vengono descritte le principali tecniche di discretizzazione per i metodi diretti.

Shooting Singolo

Nel metodo di *single shooting*, utilizzato nelle ottimizzazioni di questa trattazione, si parametrizza soltanto il controllo $u(t)$, mentre lo stato $y(t)$ è determinato integrando numericamente l'equazione differenziale (2.8) a partire dalla condizione iniziale $y(t_0) = y_0$. In questo approccio:

- le uniche variabili decisionali sono i valori dei controlli ai nodi;
- le equazioni di stato non compaiono esplicitamente nei vincoli, ma vengono *incorporate* risolvendo l'ODE come una *black box*;
- i vincoli su $y(t)$ (se presenti) vengono imposti solo sui punti di griglia.

Questo metodo ha il vantaggio di avere poche variabili e un problema di dimensioni ridotte. Tuttavia, può risultare numericamente instabile per sistemi rigidi o sensibili alle condizioni iniziali, poiché eventuali errori nei controlli si propagano attraverso l'integrazione dell'ODE.

Shooting Multiplo

Per migliorare la stabilità numerica, il metodo di *multiple shooting* divide l'intervallo temporale in sottodomini e risolve l'ODE separatamente su ciascun segmento, introducendo come variabili anche i valori iniziali degli stati y_k per ciascun intervallo. Si impongono quindi condizioni di continuità tra i segmenti successivi come vincoli non lineari:

$$y_k(t_{k+1}) - y_{k+1} = 0.$$

Questo approccio:

- aumenta il numero di variabili (inclusi stati intermedi);
- introduce una struttura a blocchi nella Jacobiana del sistema;
- permette di risolvere i segmenti in parallelo, migliorando la scalabilità;
- è più robusto rispetto al single shooting in presenza di vincoli sugli stati o dinamiche non lineari.

Collocazione

Il metodo di *collocazione* consiste nel rappresentare $y(t)$ e $u(t)$ all'interno di ogni sottintervallo tramite polinomi ed imporre che l'equazione differenziale $\dot{y}(t) = f(y, u, t)$ sia soddisfatta in un insieme di *punti di collocazione* interni ad ogni sottintervallo. Un esempio diffuso è lo schema Lobatto IIIA, che utilizza tre punti per ogni intervallo. Il sistema diventa quindi un insieme di equazioni algebriche non lineari che approssimano l'ODE, mentre i vincoli di stato e controllo vengono imposti sui nodi. I principali vantaggi di questo metodo sono:

- la possibilità di calcolare in modo preciso e strutturato le derivate (Jacobian e Hessian);
- la buona stabilità numerica;
- la possibilità di usare strategie multigrid (risolvere prima su griglie più rade e poi raffinare).

Lo svantaggio principale è il maggiore numero di variabili e vincoli rispetto alle altre tecniche, ma questo è in parte compensato dalla forte struttura sparsa e regolare del sistema risultante.

2.2.2 Struttura e Sparsità nei Metodi SQP

Uno dei principali punti di forza dei metodi diretti applicati al controllo ottimo, specialmente in combinazione con algoritmi SQP, è la possibilità di sfruttare la *struttura sparsa* delle derivate del problema.

La Jacobiana J dei vincoli ha, in molti casi, una struttura a banda o a blocchi, ad esempio:

$$J = \begin{bmatrix} U_0 & -I & & \\ Y_1 & U_1 & -I & \\ & \ddots & \ddots & \ddots \end{bmatrix},$$

dove le matrici Y_k e U_k derivano dalla discretizzazione delle equazioni di stato e dalla linearizzazione dei vincoli. L'Hessiana della funzione Lagrangiana conserva a sua volta una struttura compatibile, che può essere sfruttata per ridurre i costi computazionali tramite il metodo del *reduced Hessian*:

$$\tilde{H} = Z^T H Z,$$

dove Z è una base ortonormale del nucleo della Jacobiana attiva. Tale riduzione permette di lavorare in uno spazio di dimensione pari ai gradi di libertà effettivi del problema.

2.2.3 Derivate e Accuratezza Numerica

L'efficacia dei metodi diretti basati su SQP è fortemente condizionata da due fattori chiave:

- **Qualità della discretizzazione:** una griglia temporale troppo grossolana può non catturare dinamiche importanti del sistema, mentre una troppo fine porta a problemi di grandi dimensioni. La scelta ottimale è spesso guidata da compromessi tra precisione e complessità computazionale.
- **Accuratezza delle derivate:** il solutore SQP richiede gradienti e Jacobiane precisi per convergere rapidamente e stabilmente. In particolare, approssimazioni rozze (ad esempio tramite differenze finite) possono causare instabilità o rallentare la convergenza.

In alcuni casi, può essere conveniente *non eliminare* alcune variabili o vincoli (anche se teoricamente sarebbe possibile), al fine di preservare la struttura sparsa e favorire l'efficienza del solutore numerico.

I metodi diretti, abbinati ad algoritmi SQP, rappresentano una soluzione robusta ed efficiente per la risoluzione di problemi di controllo ottimo complessi, come la pianificazione di traiettorie di discesa lunare. La loro forza risiede nella capacità di trattare dinamiche non lineari e vincoli multipli in un quadro numerico flessibile, sfruttando l'efficienza dei solutori NLP moderni.

In particolare:

- *la collocazione* offre accuratezza e stabilità nelle derivate, ed è ben adatta a contesti in cui sono disponibili derivate esatte;
- *lo shooting multiplo* bilancia precisione e stabilità, ed è più adatto quando i vincoli sugli stati sono critici;
- *lo shooting singolo* può essere utile per problemi più semplici o in presenza di controlli regolari.

La scelta tra queste tecniche dipende dal tipo di dinamica, dalla presenza di vincoli, dalla disponibilità di derivate e dalla dimensione del problema. In tutti i casi, un'accurata modellazione della struttura e delle derivate gioca un ruolo centrale per il successo dell'approccio.

Capitolo 3

Sistema di riferimento

3.1 Introduzione ai sistemi di riferimento

L'adozione di un sistema di riferimento coerente e adeguato è un passaggio essenziale nella modellazione di problemi dinamici, specialmente nel contesto dell'atterraggio controllato su corpi celesti. La scelta del sistema influenza sia la formulazione delle equazioni del moto, sia l'implementazione numerica delle tecniche di ottimizzazione.

Nel caso in esame, si assume che il veicolo operi in un'area ristretta (decine di Km) rispetto al raggio lunare. Questo permette l'adozione di un modello semplificato, nel quale la superficie della Luna è approssimata come un piano, e la gravità come una forza costante, uniforme e perpendicolare alla superficie.

3.1.1 Scelta del sistema di riferimento

Si utilizza quindi un sistema di riferimento cartesiano tridimensionale locale, con le seguenti caratteristiche:

- **Origine $(0, 0, 0)$** : un punto arbitrario sulla superficie lunare, fissato per comodità di modellazione;
- **Asse X** : orientato orizzontalmente nella direzione principale del moto iniziale;
- **Asse Y** : orizzontale, ortogonale a X e parallelo alla superficie;
- **Asse Z** : orientato perpendicolarmente alla superficie, positivo verso l'alto.

3.1.2 Posizione iniziale e finale del veicolo

Nel sistema così definito, il veicolo spaziale parte dalla posizione:

$$\vec{x}_0 = \begin{bmatrix} -50\,000 \\ 0 \\ 15\,000 \end{bmatrix} \text{ m}$$

cioè 50 km "a sinistra" dell'origine (negativo in X) e 15 km sopra la superficie lunare. Il punto di atterraggio, invece, non è fissato a priori. È rappresentato dalle coordinate:

$$\vec{x}_f = \begin{bmatrix} x_f \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

dove x_f è una variabile di ottimizzazione. In altri termini, il veicolo è libero di atterrare su qualsiasi punto lungo la direzione X (sulla superficie), e la posizione ottimale verrà determinata dal processo di ottimizzazione.

3.2 Orientamento del veicolo e angoli di assetto

Per rappresentare l'orientamento del veicolo rispetto al sistema di riferimento, vengono introdotti due angoli:

- ψ (**pitch**): angolo tra il vettore di spinta e il piano XZ, ovvero l'inclinazione verticale del veicolo;
- ϕ (**yaw**): angolo tra la proiezione del vettore di spinta sul piano XY e l'asse X.

La configurazione di riferimento è quella in cui il veicolo è diretto esattamente lungo l'asse X in senso positivo: in tal caso, $\psi = 0$ e $\phi = 0$.

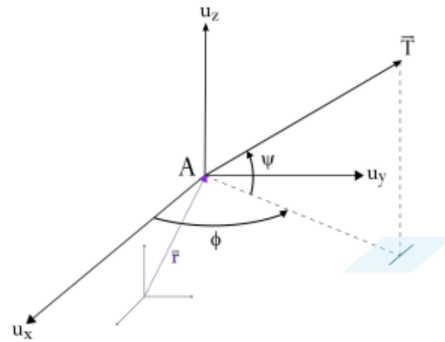


Figura 3.1: Sistema di riferimento adottato

3.3 Vantaggi della scelta del sistema

L'adozione di un sistema cartesiano locale con superficie piana presenta numerosi vantaggi per la modellazione e l'ottimizzazione:

- **Semplificazione geometrica:** evita la necessità di usare coordinate sferiche;
- **Equazioni più semplici:** le equazioni del moto risultano lineari nella gravità e facilmente integrabili;
- **Ottimizzazione flessibile:** la variabile finale x_f può essere ottimizzata direttamente;
- **Intuizione visiva:** la traiettoria è descritta nello spazio 3D cartesiano, rendendo semplice la rappresentazione grafica.

Il sistema di riferimento adottato fornisce un compromesso ottimale tra semplicità e realismo per lo studio della discesa lunare. L'approssimazione della superficie come piano e la fissazione dell'origine in un punto arbitrario sulla superficie permettono di concentrare l'attenzione sull'ottimizzazione del controllo e sulla dinamica del veicolo, senza complicazioni geometriche. La possibilità di lasciare x_f libero rende il problema adatto a tecniche di ottimizzazione diretta.

Capitolo 4

Modello dinamico

Il modello dinamico che descrive la traiettoria di discesa del veicolo spaziale verso la superficie lunare si fonda su un insieme di ipotesi semplificative ma coerenti con il problema ingegneristico dell'atterraggio ottimale. La traiettoria è suddivisa in due fasi distinte, e in questa sezione si fornisce una formulazione completa delle equazioni del moto in forma dimensionale, che saranno successivamente oggetto di adimensionalizzazione.

4.1 Ipotesi semplificative

Le ipotesi principali adottate per la modellazione sono:

- **Superficie lunare piatta:** si assume che la Luna possa essere modellata localmente come un piano orizzontale. Tale ipotesi è giustificata dal fatto che l'area interessata dalla discesa è limitata (decine di km al massimo), rendendo trascurabile la curvatura lunare.
- **Campo gravitazionale uniforme:** si considera l'accelerazione di gravità costante pari a $g = 1.62 \text{ m/s}^2$. Tale assunzione è coerente con il fatto che la variazione dell'altitudine durante la discesa è trascurabile rispetto al raggio lunare ($\sim 1737 \text{ km}$).
- **Sistema di riferimento inerziale:** poiché la velocità di rotazione della Luna è molto bassa ($\sim 2.7 \cdot 10^{-6} \text{ rad/s}$), gli effetti centrifughi e di coriolis sono del tutto trascurabili durante la breve finestra temporale della discesa.
- **Spinta di modulo costante e direzione variabile:** si assume che la spinta erogata dal motore sia sempre pari al valore massimo $T = T_{\max}$, mentre la direzione della spinta può essere variata istantaneamente attraverso due angoli di controllo (ψ, ϕ) . Questa semplificazione evita la necessità di ottimizzare anche il profilo della spinta.

- **Massa variabile nel tempo:** la massa del veicolo decresce nel tempo a causa del consumo di propellente. Si considera il caso in cui l'ugello del motore sia perfettamente espanso, in modo da poter scrivere la variazione di massa in funzione della spinta e della velocità di uscita dei gas.
- **Ugello perfettamente espanso:** si assume che l'ugello del motore sia progettato in modo da massimizzare l'efficienza nell'ambiente lunare privo di atmosfera. In questo caso, la spinta è data dalla componente cinetica del getto senza contributo di pressione residua.
- **discesa è suddivisa in due fasi:**
 1. **Fase 1** – discesa controllata in tre dimensioni da un punto iniziale verso la verticale del target;
 2. **Fase 2** – discesa verticale (durata fissa: 15 secondi).

4.2 Sistema di riferimento

Il sistema di riferimento adottato come spiegato nel capitolo precedente è cartesiano, inerziale, e solidale alla superficie lunare, con:

- Origine: punto arbitrario sulla superficie lunare, $\vec{x} = (0, 0, 0)$;
- Asse X : orizzontale, orientato nella direzione iniziale del moto;
- Asse Y : orizzontale e ortogonale a X ;
- Asse Z : verticale, orientato positivamente verso l'alto.

Il punto iniziale del veicolo è:

$$\vec{x}(0) = [-50\,000, \, 0, \, 15\,000] \text{ m}$$

Il punto finale della Fase 1 è sulla verticale del target, mentre il punto finale della Fase 2 è:

$$\vec{x}(t_f) = [x_f, \, 0, \, 0] \text{ m}$$

con x_f libero da ottimizzare.

4.3 Equazioni del moto

Si denoti con $\vec{T}(t)$ il vettore spinta, con modulo costante T e direzione variabile rappresentata dagli angoli $\phi(t)$ (azimut) e $\psi(t)$ (inclinazione rispetto all'orizzontale):

$$\vec{T}(t) = T \cdot \begin{bmatrix} \cos \psi(t) \cos \phi(t) \\ \cos \psi(t) \sin \phi(t) \\ \sin \psi(t) \end{bmatrix}$$

La variazione della massa del veicolo spaziale nel tempo può essere descritta a partire dal bilancio della quantità di moto applicato al sistema propulsivo. La legge di conservazione della quantità di moto porta all'equazione per il calcolo della spinta:

$$T = -\dot{m} V_e \quad (4.1)$$

dove:

- T è la spinta del motore;
- $\dot{m}$ è il tasso di variazione della massa del veicolo;
- V_e è la velocità di uscita dei gas di scarico rispetto al veicolo.

Assumendo che:

- l'ugello sia perfettamente espanso (ambiente in vuoto);
- la spinta sia costante e pari a $T = T_{\max}$;
- V_e sia costante;

si ottiene:

$$\dot{m}(t) = -\frac{T}{V_e} = \text{costante} \quad (4.2)$$

Integrando nel tempo, si ottiene una legge lineare per la massa:

$$m(t) = m_0 - \frac{T}{V_e} \cdot t \quad (4.3)$$

dove m_0 è la massa iniziale all'istante $t = 0$.

Questa relazione verrà utilizzata in combinazione con le equazioni del moto per descrivere la dinamica del sistema durante la discesa. Essa riflette il fatto che, a spinta costante e ugello efficiente, il consumo di massa avviene in modo uniforme. Applicando la seconda legge della dinamica:

$$m(t)\ddot{\vec{x}}(t) = \vec{T}(t) + \vec{F}_g = \vec{T}(t) + m(t) \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ -g \end{bmatrix}$$

Forma scalare delle equazioni del moto

Le equazioni del moto si scrivono come:

$$\begin{cases} \dot{x}(t) = v_x(t) \\ \dot{y}(t) = v_y(t) \\ \dot{z}(t) = v_z(t) \\ \dot{v}_x(t) = \frac{T}{m(t)} \cos \psi(t) \cos \phi(t) \\ \dot{v}_y(t) = \frac{T}{m(t)} \cos \psi(t) \sin \phi(t) \\ \dot{v}_z(t) = \frac{T}{m(t)} \sin \psi(t) - g \\ \dot{m}(t) = -\frac{T}{V_e} \end{cases} \quad (4.4)$$

4.3.1 Fasi della traiettoria

Fase 1 – discesa obliqua controllata

In questa fase il veicolo effettua una traiettoria tridimensionale ottimizzata per raggiungere la verticale del punto target con condizioni cinematiche favorevoli alla discesa finale.

Le variabili di controllo sono gli angoli $\phi(t)$, $\psi(t)$, mentre lo stato è dato da:

$$\vec{x}(t), \vec{v}(t), m(t)$$

Il tempo finale della prima fase, τ , è una variabile di ottimizzazione.

Fase 2 – discesa verticale controllata

La seconda fase ha durata fissa pari a 15 secondi e si assume che la spinta sia diretta lungo l'asse Z verso l'alto:

$$\psi(t) = \frac{\pi}{2}, \quad \phi(t) = 0$$

Le equazioni del moto si riducono a:

$$\ddot{x}(t) = 0, \quad \ddot{y}(t) = 0, \quad \ddot{z}(t) = \frac{T}{m(t)} - g$$

La massa continua a diminuire secondo la stessa legge lineare. In questa fase l'obiettivo è rallentare il veicolo fino all'arresto a quota zero:

$$\vec{x}(t_f) = [x_f, 0, 0], \quad \vec{v}(t_f) = [0, 0, 0]$$

4.3.2 Osservazioni

- Le equazioni del moto dipendono esplicitamente dalla massa, che varia nel tempo: il sistema è non lineare e a parametri tempo-dipendenti;
- La spinta costante ma direzionabile introduce un controllo continuo sulla traiettoria;
- Il tempo τ della prima fase è una variabile libera che influenza il profilo ottimale;
- La separazione in due fasi permette di semplificare il problema numerico e modellare in modo realistico le strategie di atterraggio adottate nelle missioni reali.

Capitolo 5

Strategia di ottimizzazione

5.1 Introduzione

In questo capitolo viene descritto il funzionamento del codice MATLAB sviluppato per l'ottimizzazione della traiettoria durante la fase finale di discesa sulla Luna. Il problema affrontato consiste nel trovare il profilo ottimale di controllo che minimizzi il consumo di carburante (cioè massimizzi la massa finale), nel rispetto della dinamica del sistema e di eventuali vincoli sul punto di atterraggio.

La soluzione è ottenuta tramite la funzione `fmincon` di MATLAB, che permette la minimizzazione di una funzione obiettivo soggetta a vincoli non lineari e limiti sulle variabili.

La traiettoria è suddivisa in due fasi principali:

- **Fase 1:** una discesa controllata in cui l'orientamento della spinta è variabile nel tempo (gli angoli ψ e ϕ sono funzioni di controllo);
- **Fase 2:** una discesa verticale finale, in cui la spinta è fissa e orientata lungo la verticale ($\psi = \frac{\pi}{2}$, $\phi = 0$), con durata **fissata** a 15 secondi.

Una caratteristica cruciale del problema è che anche la **durata della Fase 1**, indicata con $t_{_f}$, è considerata una variabile decisionale e viene ottimizzata insieme ai profili di controllo. Ciò consente al solver di adattare dinamicamente la durata della prima fase per migliorare l'efficienza complessiva della manovra.

5.2 Parametri iniziali e definizione delle variabili

Il sistema è inizializzato con i seguenti parametri fisici:

- Accelerazione gravitazionale lunare: $g = 1.62 \text{ m/s}^2$;
- Spinta massima: $T = 4000 \text{ N}$;
- Impulso specifico: $I_{sp} = 290 \text{ s}$;
- Massa iniziale: $m_0 = 1600 \text{ kg}$;
- Stato iniziale: $x_0 = [-50000, 0, 15000, 1685, 0, 0, 1600]$;

dove i primi 3 elementi del vettore di stato rappresentano le coordinate iniziali in metri, i 3 elementi successivi la velocità in **m/s** lungo i 3 assi nell'istante iniziale ed il settimo elemento rappresenta la massa iniziale.

Come detto anche nei precedenti capitoli i parametri iniziali sono stati adimensionalizzati per rendere la convergenza più rapida e semplice da ottenere.

Le variabili di controllo da ottimizzare sono:

- t_f : durata della Fase 1;
- ψ_i : inclinazione della spinta per ogni punto discreto i (con $i = 1, \dots, N$)
- ϕ_i : angolo di azimut per ogni punto discreto i (con $i = 1, \dots, N$)

Il vettore delle variabili ottimizzate è: $\mathbf{u} = [t_f, \psi_1, \dots, \psi_N, \phi_1, \dots, \phi_N] \in \mathbb{R}^{2N+1}$

Con N il numero di suddivisioni temporali per l'interpolazione dei controlli. I limiti imposti sulle variabili sono:

- $1 \leq t_f \leq 1000$
- $-\pi \leq \psi_i \leq \pi$
- $-\pi \leq \phi_i \leq \pi$

5.3 Funzione obiettivo

La funzione obiettivo è definita come la massa finale negativa del lander dopo entrambe le fasi:

$$J(\mathbf{u}) = -m_{\text{finale}}$$

Dove m_{finale} è ottenuta integrando le equazioni del moto lungo la Fase 1 (durata variabile) e la Fase 2 (durata fissa pari a 15 secondi), a partire dallo stato iniziale. L'inversione di segno permette a `fmincon` di minimizzare il consumo di carburante.

5.4 Vincoli non lineari

I vincoli sono gestiti tramite una funzione separata che impone condizioni di arrivo fisico e continuità tra le due fasi. In particolare, i vincoli di uguaglianza includono:

- La coordinata z alla fine della Fase 1 deve essere 0 per permettere una discesa perfettamente verticale nella Fase 2, il che significa che anche la coordinata x alla fine della Fase 1 deve essere già pari a quella finale ottimizzata;
- Le velocità V_x e V_y alla fine della Fase 1 devono essere pari a 0 sempre per permettere una discesa verticale nella Fase 2;
- La coordinata z finale deve essere 0 (il lander deve toccare il suolo): $z(t_{\text{end}}) = 0$;
- Le velocità finali devono annullarsi: $V_x(t_{\text{end}}) = V_y(t_{\text{end}}) = V_z(t_{\text{end}}) = 0$;
- Continuità tra le due fasi: lo stato finale della Fase 1 è utilizzato come stato iniziale della Fase 2. Deve essere garantita coerenza in posizione, velocità e massa.

Inoltre, tramite un flag logico (booleano), l'utente può attivare opzionalmente un vincolo di posizione orizzontale all'arrivo. In tal caso, si impongono vincoli aggiuntivi:

- $x(t_{\text{end}}) = x_{\text{finale}} + \Delta x$
- $y(t_{\text{end}}) = y_{\text{finale}} + \Delta y$

dove i valori Δx e Δy sono specificati dall'utente come spostamenti desiderati rispetto alla posizione di atterraggio ottimale. Questi vincoli vengono aggiunti alla struttura `ceq` all'interno della funzione `nonlcon` solo se il flag è impostato a `true`.

5.5 Equazioni del moto e integrazione numerica

Le equazioni dinamiche che governano il moto del lander sono:

$$\begin{cases} \dot{x}(t) = v_x(t) \\ \dot{y}(t) = v_y(t) \\ \dot{z}(t) = v_z(t) \\ \dot{v}_x(t) = \frac{T}{m(t)} \cos \psi(t) \cos \phi(t) \\ \dot{v}_y(t) = \frac{T}{m(t)} \cos \psi(t) \sin \phi(t) \\ \dot{v}_z(t) = \frac{T}{m(t)} \sin \psi(t) - g \\ \dot{m}(t) = -\frac{T}{V_e} \end{cases} \quad (5.1)$$

Dove gli angoli ψ e ϕ sono interpolati linearmente tra i nodi discreti. Per risolvere il sistema di equazioni differenziali, viene utilizzato il solver `ode45`.

5.6 Struttura dell'algoritmo

Il codice MATLAB implementa il seguente flusso operativo:

1. Definizione delle condizioni iniziali e dei parametri fisici.
2. Creazione di un guess iniziale per le variabili di controllo: durata iniziale t_f , angoli ψ_i e ϕ_i .
3. Definizione dei limiti superiori e inferiori per `fmincon`.
4. Implementazione della funzione obiettivo.
5. Definizione della funzione `nonlcon`.
6. Chiamata a `fmincon` con algoritmo SQP:

```
fmincon(@objective, u0, \[], \[], \[], \[], umin, umax, @nonlcon, options)
```

7. Al termine, visualizzazione dei risultati.

5.7 Funzionamento iterativo di `fmincon`

Il solver `fmincon` si basa su un processo iterativo per migliorare progressivamente la soluzione. Alla base del suo funzionamento c'è il metodo SQP (Sequential Quadratic Programming), che risolve a ogni iterazione un problema quadratico approssimato localmente:

- Ad ogni ciclo, viene costruita un'approssimazione quadratica della funzione obiettivo.
- I vincoli (sia di uguaglianza che di disuguaglianza) sono linearizzati.
- Si risolve il problema quadratico risultante per ottenere una direzione di miglioramento.
- La soluzione è aggiornata lungo questa direzione, con passo determinato da una strategia di line search.

Il processo continua finché non sono soddisfatte simultaneamente:

- Le condizioni di ottimalità (gradiente piccolo);
- Il rispetto dei vincoli entro una certa tolleranza;
- Il cambiamento tra iterazioni diventa trascurabile.

Poiché questo problema è altamente non lineare (sia nella dinamica che nei vincoli), `fmincon` impiega tipicamente molte iterazioni (centinaia o migliaia) per:

- Scoprire il compromesso ottimale tra consumo di carburante e rispetto dei vincoli;
- Regolare accuratamente gli angoli ψ_i e ϕ_i lungo la traiettoria;
- Sintonizzare la durata t_f della Fase 1 in modo che la Fase 2 (fissa) completi la manovra correttamente.

La funzione obiettivo e i vincoli vengono quindi valutati ripetutamente, e ogni integrazione numerica dell'intera traiettoria ha un costo computazionale elevato. Tuttavia, solo grazie a questo processo iterativo dettagliato è possibile ottenere una soluzione fisicamente realistica e ottimale.

5.8 Considerazioni finali

L'ottimizzazione della traiettoria mediante `fmincon` permette una gestione flessibile e robusta del problema, anche in presenza di vincoli non lineari e dinamica complessa. Il fatto che anche la durata della Fase 1 sia ottimizzata consente al lander di adattare la strategia di discesa in funzione delle condizioni iniziali, ottimizzando sia la traiettoria che la tempistica.

L'approccio presentato è facilmente estendibile a scenari più complessi, includendo ad esempio vincoli su velocità finale, limiti sul consumo massimo, o traiettorie in ambienti non uniformi. Queste opzioni non sono state esplorate in questa tesi.

Capitolo 6

Risultati

Il seguente capitolo presenta i risultati per il caso in esame di ottimizzazione di una traiettoria di discesa sulla Luna con metodi diretti.

L'obiettivo perseguito è come già detto la minimizzazione del consumo di propellente e l'analisi mira a valutare la sensibilità della traiettoria ottimale rispetto ai vincoli di missione, evidenziando i compromessi tra punto di atterraggio e consumo di carburante.

Si è scelto come caso numerico per la trattazione un 'lander' di tipo 'unmanned' di massa iniziale pari a 1600 Kg.

L'orbita iniziale ha le seguenti caratteristiche :

- Orbita circolare bassa;
- 15000 m di altitudine .

Lo 'spacecraft' ha le seguenti condizioni iniziali:

- Velocità orbitale pari a 1685 m/s;
- Spinta massima pari a 4000 N;
- Impulso specifico pari a 290 s.

Per semplicità si introduce un sistema di riferimento cartesiano centrato nel punto di 'landing' target così come esposto nei capitoli precedenti.

In questo modo le condizioni iniziali dello spacecraft in orbita sono le seguenti:

- Posizione $(-50000, 0, 15000)$ m;
- Velocità $(1685, 0, 0)$ m/s.

I risultati sono stati ottenuti implementando un codice Matlab che integra numericamente le equazioni del moto descritte nei capitoli precedenti risolvendo contestualmente un problema di ottimizzazione come detto, sfruttando il solver 'fmincon' con algoritmo sqp (Sequential Quadratic Programming) e fornendogli la già descritta funzione obiettivo allo scopo di massimizzare la massa finale ed i vincoli non lineari adatti per ogni caso in esame come si vedrà successivamente in questo capitolo.

Per una descrizione dettagliata del sistema di riferimento scelto, della dinamica adottata e delle funzioni implementate nel codice si rimanda il lettore al capitolo dedicato.

Per ognuno dei casi presentati in questo capitolo le variabili e di conseguenza le equazioni della dinamica sono state normalizzate allo scopo di ottenere una più rapida e semplice convergenza così come preannunciato nel capitolo dedicato.

Le variabili sono state normalizzate nel seguente modo:

- $m_0 = m/m_{ref}$; • $x_0 = x/L_{ref}$;
- $y_0 = y/L_{ref}$; • $z_0 = z/L_{ref}$;
- $V_{x_0} = V_x/V_{ref}$; • $V_{y_0} = V_y/V_{ref}$;
- $V_{z_0} = V_z/V_{ref}$; • $V_{e_0} = V_e/V_{ref}$;
- $T_0 = T/T_{ref}$;

dove $m_{ref} = 1600$ Kg, $L_{ref} = 15000$ m, $V_{ref} = 1000$ m/s e $T_{ref} = a_{ref} * m_{ref}$ in cui $a_{ref} = V_{ref}^2/L_{ref}$.

In tutti i risultati presentati di seguito la traiettoria è suddivisa in due fasi: una prima fase ottimizzata mediante gli angoli di assetto Ψ e Φ ed una seconda fase di discesa verticale per garantire un corretto 'touchdown' verticale. In entrambi i casi la spinta è mantenuta costante in modulo pari al valore massimo.

È stata esplorata anche una differente strategia nella quale a differenza di imporre la spinta massima per un tempo stabilito nella fase di discesa verticale, si è definita la spinta come direttamente proporzionale alla massa a partire da una certa altitudine; sono stati ottenuti interessanti risultati riportati in Appendice A.

Tutti i grafici riportati sono da riferirsi a grandezze reali correttamente riscalate in fase di 'plot'.

Definiamo i parametri adimensionali:

$$\alpha = \frac{\tau T_{\text{ref}}}{m_{\text{ref}} V_{\text{ref}}}, \quad g_{\text{adim}} = \frac{g}{a_{\text{ref}}} \quad (6.1)$$

Dove $g = 1.62 \text{ m/s}^2$ è la gravità lunare e τ è la durata della fase di discesa considerata. Le variabili del moto vengono espresse in forma adimensionale rispetto ai parametri sopra descritti.

Sotto queste ipotesi, le equazioni del moto adimensionali risultano essere:

$$\frac{dV_x}{d\tau} = \alpha \cdot \left(\frac{T}{m} \right) \cos \psi \cos \phi \quad (6.2)$$

$$\frac{dV_y}{d\tau} = \alpha \cdot \left(\frac{T}{m} \right) \cos \psi \sin \phi \quad (6.3)$$

$$\frac{dV_z}{d\tau} = \alpha \cdot \left(\left(\frac{T}{m} \right) \sin \psi - g_{\text{adim}} \right) \quad (6.4)$$

$$\frac{dm}{d\tau} = -\alpha \cdot \left(\frac{T}{V_{e0}} \right) \quad (6.5)$$

in cui τ , Ψ e Φ dipenderanno dalla fase di discesa considerata (si ricorda ancora una volta che per fase 1 si intende la discesa ottimizzata e per fase 2 la discesa verticale precedente al *touchdown*).

6.1 Ottimizzazione traiettoria di discesa a fissato tempo di discesa verticale

In questo primo risultato riportato di seguito si è ottenuta la traiettoria ottimizzata in termini di minimi consumi di propellente per effettuare un 'touchdown' verticale nel punto prefissato $(x_f, 0, 0)$ con x_f parametro libero, iniziando la discesa nel punto dell'orbita definito precedentemente.

Siccome la spinta è mantenuta costante durante tutta la durata del volo le variabili di ottimizzazione si riducono agli angoli Φ e Ψ . Questi angoli sono stati ottimizzati in modo discreto lungo la prima fase della discesa; quest'ultima è stata suddivisa in 100 intervalli, in ognuno dei quali sono state calcolate le variabili di stato $(x, y, z, V_x, V_y, V_z, m)$ integrando le equazioni del moto, reiterando il tutto fino al raggiungimento della soluzione ottimale di minimo consumo utilizzando come variabili di ottimizzazione proprio i già citati angoli Φ e Ψ contenuti all'interno delle equazioni del moto.

Come si può vedere anche dai grafici seguenti e come già anticipato gli ultimi 15 s della traiettoria, corrispondenti alla seconda fase della discesa, sono caratterizzati da una traiettoria perfettamente verticale per permettere un corretto atterraggio. È stato scelto un tempo di 15 s poiché soprattutto in assenza di atmosfera è richiesto un controllo preciso sulla velocità verticale per evitare un impatto eccessivamente violento, infatti un tempo troppo breve avrebbe comportato accelerazioni eccessive; al contrario un tempo troppo lungo avrebbe aumentato inutilmente il consumo di carburante, è stato quindi effettuato un 'trade-off' che ha portato alla scelta di un τ pari a 15 s.

Per quanto riguarda i vincoli ne sono stati imposti alla fine della prima fase (discesa ottimizzata) e nella seconda fase; per quanto riguarda i vincoli imposti alla fine della prima fase:

- $V_x = 0 \text{ m/s}$;
- $V_y = 0 \text{ m/s}$;
- $y = 0 \text{ m}$.

In questo modo si permette una seconda fase di discesa verticale poiché solamente la V_z sarà diversa da zero in questa seconda fase; inoltre avendo imposto come posizione finale per questa prima fase $(x_f, 0, z)$ solamente la quota andrà a variare nella seconda fase a conferma del fatto che la fase finale della discesa sarà verticale.

Un appunto deve essere fatto sulla x_f , essa è lasciata libera per osservare quale sia la posizione di atterraggio ottimale che il sistema tende a raggiungere spontaneamente quando l'unico obiettivo è minimizzare il consumo; questa scelta inoltre semplifica la convergenza poiché rimuove un vincolo e lascia maggiore libertà di ricerca al solver all'interno dello spazio delle soluzioni.

Invece per quanto riguarda i vincoli alla fine della seconda fase essi sono:

- $V_x = 0 \text{ m/s}$;
- $V_y = 0 \text{ m/s}$;
- $V_z = 0 \text{ m/s}$;
- $y = 0 \text{ m}$;
- $z = 0 \text{ m}$.

Inoltre gli angoli Ψ e Φ sono stati mantenuti rispettivamente pari a 90° e 0° in questa fase proprio per rispettare la condizione di atterraggio verticale.

Di seguito sono riportati i grafici ottenuti:

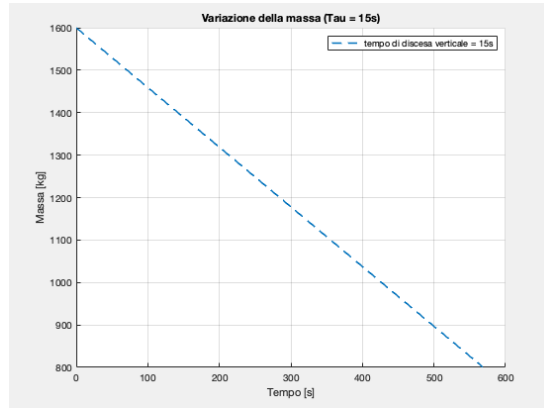


Figura 6.1: Evoluzione della massa

Il risultato ottenuto risulta essere:

$$\mathbf{m_f} = 800.96 \text{ Kg}$$

Con un consumo quindi di circa 799.04 Kg di carburante.

Questa rappresenta la soluzione ottimizzata per questo problema.

Come si può vedere dal grafico, essendo la spinta costante e la portata costanti la massa risulta essere lineare in funzione del tempo.

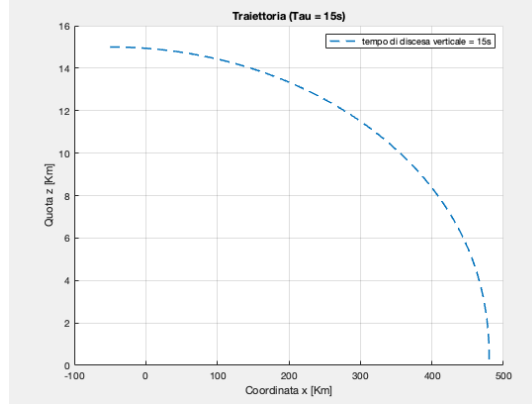


Figura 6.2: Quota Z in funzione di X

Sono riportate di seguito le velocità lungo gli assi X e Z; siccome la traiettoria, come si può vedere anche dalla figura 6.2, è confinata all'interno del piano X-Z, essendo $y_{iniziale}$ ed y_{finale} pari a 0, l'evoluzione della velocità lungo l'asse Y non è riportata essendo sempre nulla.

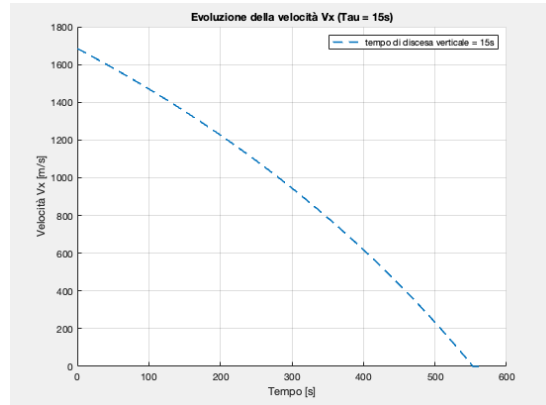


Figura 6.3: Evoluzione della velocità lungo l'asse X

Si può notare dalla figura 6.3 che la velocità V_x si annulla alla fine della prima fase rispettando il vincolo imposto precedentemente.

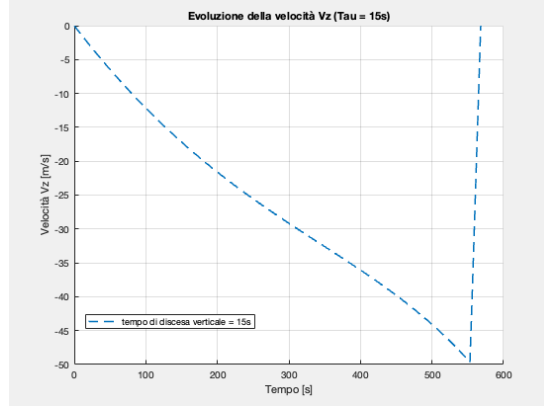


Figura 6.4: Evoluzione della velocità lungo l'asse Z

Siccome la V_z è inizialmente nulla, orbitando attorno alla Luna, essa deve crescere in modulo per poter scendere di quota (i valori sono negativi per come è stato definito il sistema di riferimento); ad un certo punto, ottimizzato dal solver, però per poter raggiungere nuovamente una V_z nulla al terreno il 'lander' dovrà necessariamente rallentare. Questo comportamento è rappresentato in figura 6.4.

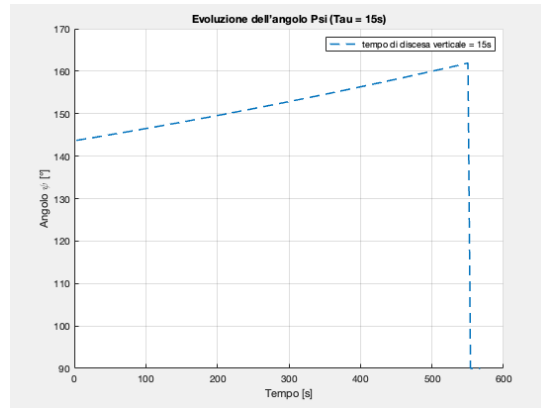


Figura 6.5: Evoluzione dell' angolo PSI

Come si può vedere in figura 6.5 l'angolo Ψ aumenta compatibilmente con la diminuzione della quota, questo indica un aumento della decelerazione lungo X e un'accelerazione lungo Z, come si può riscontrare dalle figure 6.3 e 6.4; questo porta la traiettoria ad essere sempre più verticale in accordo con il vincolo di 'touchdown' verticale.

6.2 Ottimizzazione traiettoria con variazione del punto di 'landing' 'along-track' e 'cross-track'

In questa sezione si vuole studiare l'effetto della variazione 'along-track' e 'cross-track' del punto di 'landing' sul consumo di propellente.

Uno studio di questo tipo è necessario per verificare, nel caso in cui lo 'spacecraft' fosse già in orbita, come un cambiamento del punto di 'landing' vada a variare la traiettoria di discesa e quanto questa evenienza vada ad aumentare il consumo di carburante per verificare che il 'lander' sia comunque in grado di atterrare e compiere la missione.

Siccome la spinta è da considerarsi costante per tutta la trattazione la portata rimarrà anch'essa costante; si omettono quindi i grafici riguardanti il consumo di carburante e si riportano esclusivamente i risultati.

6.2.1 Variazione 'along-track' del punto di 'landing'

Di seguito sono presentati rispettivamente il caso in cui il punto di 'landing' venga variato di un Δx negativo e di un Δx positivo.

6.2.1.1 Δx negativo

Si è deciso di fornire per questo caso un Δx di -1 Km, in quanto per distanze in modulo maggiori il solver non giungeva a convergenza indicando un'impossibilità a trovare una soluzione; in effetti questo era intuibile poiché avendo lasciato "libera" la x_f difficilmente poteva essere ampiamente arretrata in quanto tale posizione è stata ottimizzata dal solver e non imposta a priori.

Il risultato ottenuto risulta essere:

$$\mathbf{m_f} = \mathbf{799,20\ Kg}$$

Con un consumo quindi di circa 800,80 Kg di carburante.

Come era intuibile il consumo è aumentato dello 0.22% andando ad arretrare il punto di 'landing'.

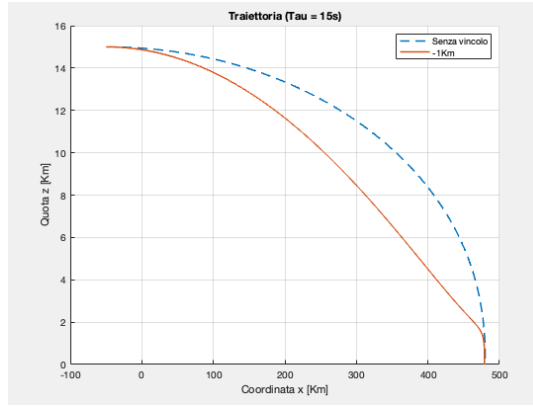


Figura 6.6: Quota Z in funzione di X

Come si può osservare da figura 6.6 la traiettoria ottimale segue un profilo più arcuato e "morbido", raggiungendo l'atterraggio con una discesa più graduale. Al contrario, la traiettoria con vincolo richiede una discesa più pronunciata nella parte finale, evidenziando un maggiore impatto sulle dinamiche verticali e sull'orientamento del modulo. Questo è giustificato dal maggiore consumo di propellente per correggere l'assetto e mantenere la traiettoria forzata.

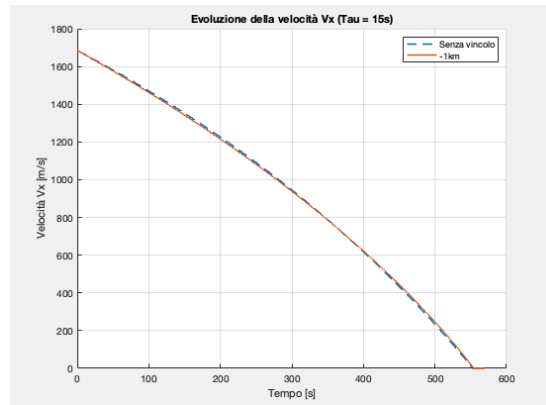


Figura 6.7: Evoluzione della velocità lungo l'asse X

Come si poteva anche notare dalla traiettoria il vincolo impatta maggiormente sulla dinamica lungo Z , infatti come mostrato anche in figura 6.7 la velocità lungo l'asse X non presenta particolari variazioni.

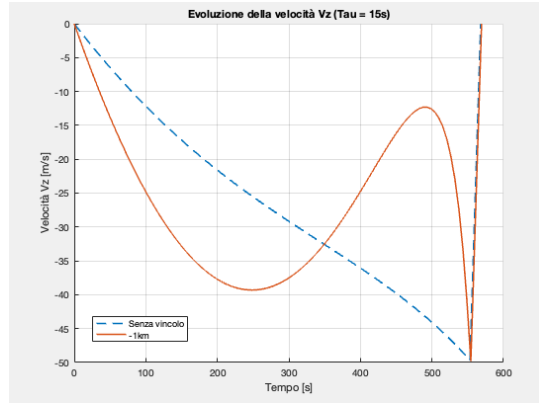


Figura 6.8: Evoluzione della velocità lungo l'asse Z

La traiettoria vincolata evidenzia due comportamenti distintivi:

- Un incremento della velocità lungo l'asse Z e quindi una discesa più veloce nella prima parte;
- Un successivo rallentamento evidenziato dall'inversione di concavità, che indica una manovra di frenata più intensa necessaria per correggere l'eccesso di discesa e centrare il nuovo punto di atterraggio.

Questa dinamica comporta un incremento della richiesta propulsiva e quindi del consumo di carburante.

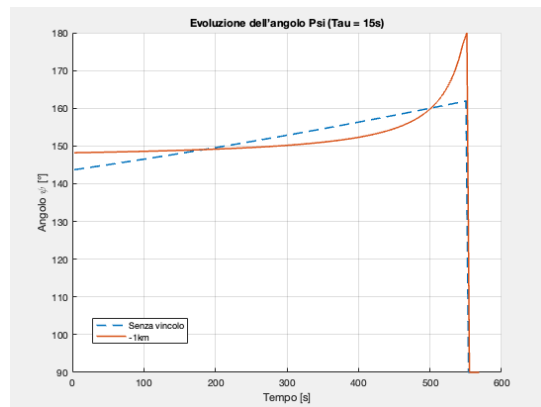


Figura 6.9: Evoluzione dell' angolo PSI

Anche la figura 6.9 indica che il modulo è costretto a una manovra brusca per correggere l'orientamento in funzione del nuovo target, il che può comportare sia uno stress meccanico maggiore, sia ulteriori consumi energetici per effettuare il controllo d'assetto.

6.2.1.2 Δx positivo

Per questo caso sono stati impostati i seguenti Δx :

- +1 Km;
- +10 Km;
- +50 Km.

Ottenendo i seguenti risultati:

	massa finale	propellente consumato	aumento consumo
+1 Km	800.80 Kg	799.20 Kg	0.22%
+10 Km	796.16 Kg	803.84 Kg	0.60%
+50 Km	774.88 Kg	825.12 Kg	3.26%

Tabella 6.1: Risultati variazione 'along-track' con Δx positivo

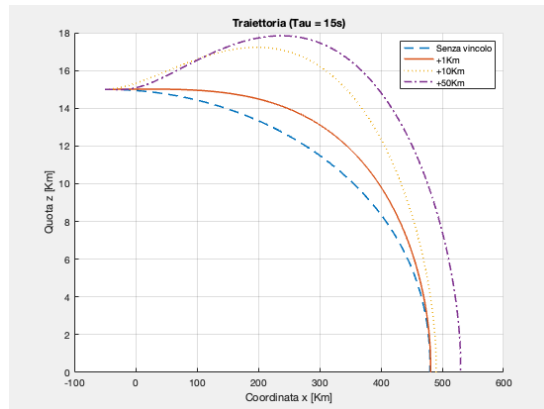


Figura 6.10: Quota Z in funzione di X

Come si può notare in figura 6.10 le traiettorie sono più "morbide" rispetto al caso con Δx negativo, a testimonianza del fatto che il veicolo, possedendo una velocità iniziale positiva lungo l'asse X, abbia più spazio per rallentare allontanando il punto di 'landing' piuttosto che avvicinandolo; ovviamente questo si traduce comunque in un dispendio maggiore di carburante come testimoniato dai risultati ottenuti.

Inoltre si può vedere come mano a mano che si allontana il punto 'target' il veicolo debba aumentare di quota prima di poter iniziare la discesa e questo si traduce in un consumo maggiore di propellente.

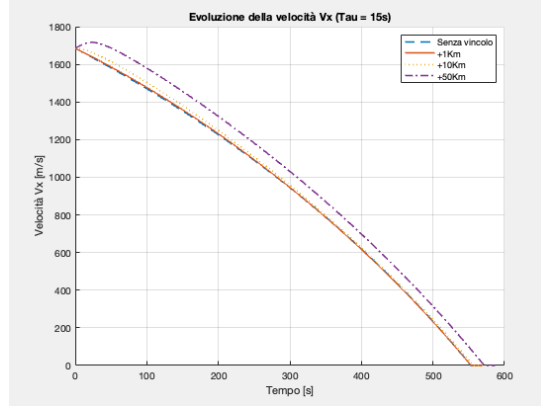


Figura 6.11: Evoluzione della velocità lungo l'asse X

Come si può vedere in figura 6.11 ed in particolare per i casi +10 Km e +50 Km la V_x deve aumentare nella fase iniziale per poter raggiungere il punto target, in seguito la sua evoluzione segue all'incirca quella della traiettoria ottimizzata.

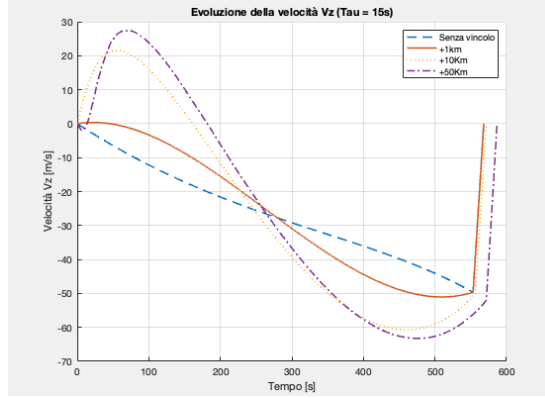


Figura 6.12: Evoluzione della velocità lungo l'asse Z

Il necessario aumento di quota si può cogliere anche dalla figura 6.12 in cui si vede bene come la V_z per i casi +10 Km e +50 Km cresca positivamente per aumentare la quota del veicolo; per il caso +1 Km la strategia di ottimizzazione è invece all'incirca la stessa del caso ottimizzato in quanto il Δx è "piccolo" per le scale del problema.

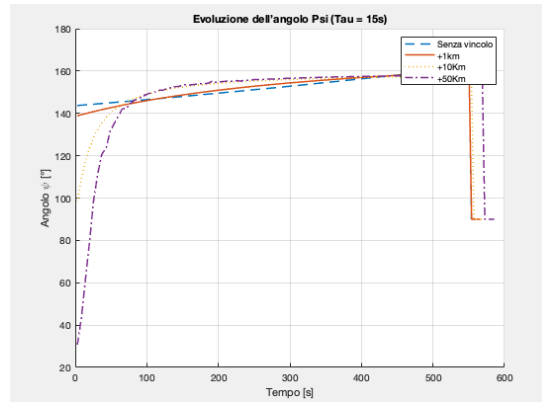


Figura 6.13: Evoluzione dell' angolo PSI

Anche figura 6.13 conferma una manovra verso quote maggiori nella fase iniziale della traiettoria come testimoniano gli angoli compresi tra 30° e 90° nei primi 50 s di volo.

6.2.2 Variazione 'cross-track' del punto di 'landing'

In questo caso si è usciti dal piano X-Z e si è effettuata una variazione 'cross-track' del punto di 'landing' target con i seguenti Δy :

- +1 Km;
- +10 Km;
- +50 Km.

Ottenendo i seguenti risultati:

	massa finale	propellente consumato	aumento consumo
+1 Km	800.96 Kg	799.04 Kg	$\simeq 0\%$
+10 Km	800.64 Kg	799.36 Kg	0.04%
+50 Km	792.16 Kg	807.84 Kg	1.1%

Tabella 6.2: Risultati variazione 'cross-track'

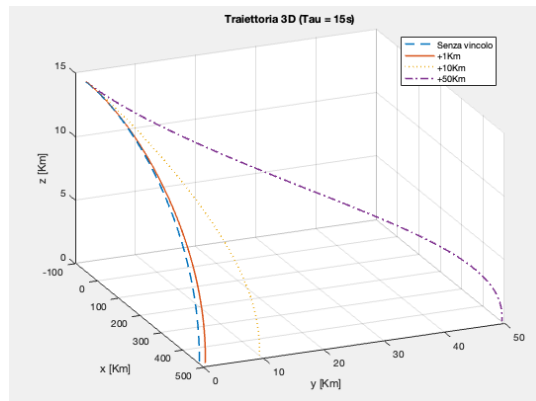


Figura 6.14: Traiettoria 3D

Va sottolineato che la figura 6.14 non risulta essere in scala per mostrare in maniera più chiara gli spostamenti lungo Y.

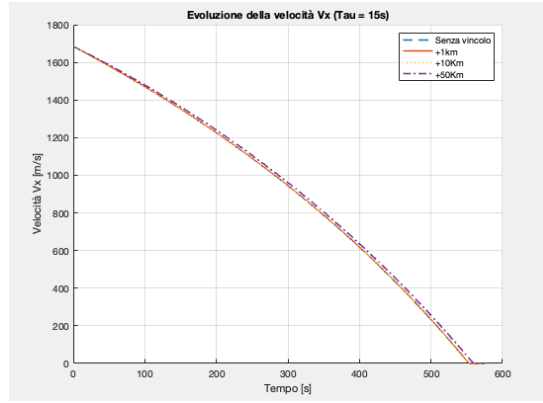


Figura 6.15: Evoluzione della velocità lungo l'asse X

Siccome il punto di 'landing' si trova ad una diversa Y ma ad una stessa X rispetto a quello ottimizzato la V_x risente poco di questa variazione come dimostrano i vari profili in figura 6.15 che rispecchiano quello ottimo.

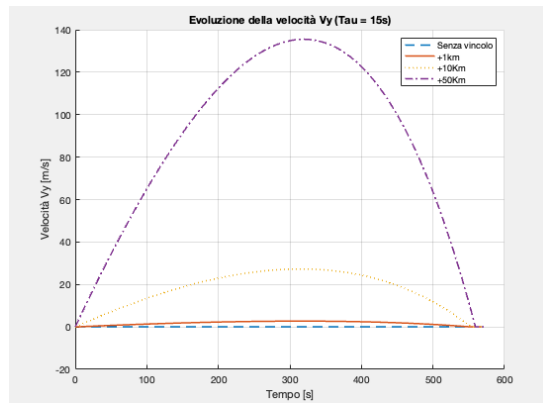


Figura 6.16: Evoluzione della velocità lungo l'asse Y

Avendo fornito un Δy deve nascere un'accelerazione lungo l'asse Y per poter avere una V_y che permetta tale spostamento; essa deve comunque tornare a 0 per poter rispettare i vincoli imposti come mostrato in figura 6.16.

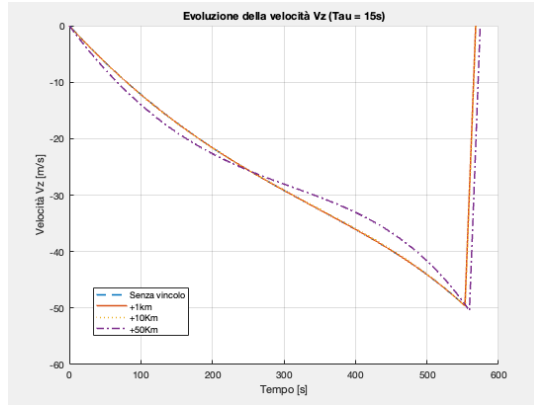


Figura 6.17: Evoluzione della velocità lungo l'asse Z

Per quanto riguarda la V_z essa risente poco della variazione lungo l'asse Y del punto di 'landing' imposto.

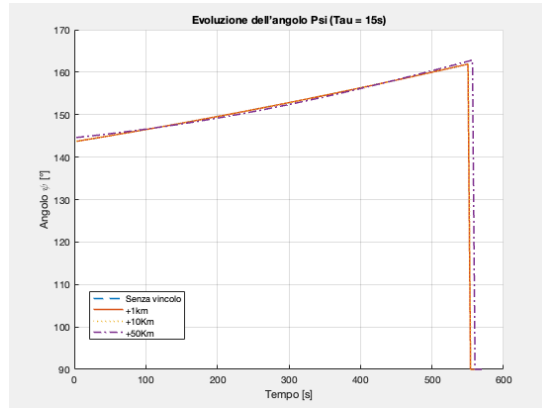


Figura 6.18: Evoluzione dell'angolo PSI

Come si può vedere in figura 6.18 anche l'angolo Ψ risente poco di questa variazione rispecchiando il profilo della traiettoria ottimizzata.

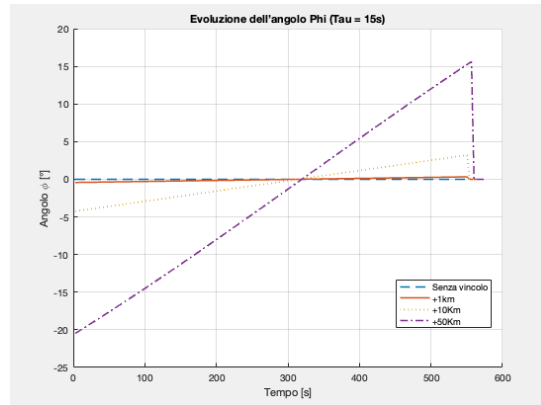


Figura 6.19: Evoluzione dell' angolo PHI

Il comportamento dell'angolo Φ evidenzia la necessità di una rotazione per correggere la traiettoria e raggiungere il nuovo punto di atterraggio.

6.3 Ottimizzazione traiettoria con variazione punto di 'landing' 'along-track' durante la discesa

I casi riportati di seguito presentano l'eventualità di una variazione del punto di 'landing' a discesa già iniziata rispettivamente al:

- 10% della discesa;
- 20% della discesa;
- 30% della discesa.

Una simulazione di questo tipo è utile per verificare come variano il profilo della traiettoria ed il consumo in un caso in cui sia necessario variare il punto di atterraggio a discesa già iniziata.

Per ognuno dei casi sopra riportati si sono imposti i seguenti Δx per verificare se la strategia di ottimizzazione variesse al variare del punto di 'landing':

- +10 Km;
- +20 Km;
- +30 Km;
- +40 Km;
- +50 Km.

Siccome la spinta è da considerarsi costante per tutta la trattazione la portata rimarrà anch'essa costante; si omettono quindi i grafici riguardanti il consumo di carburante e si riportano esclusivamente i risultati.

6.3.1 Variazione al 10% della traiettoria di discesa originale

In questo caso si sono ottenuti i seguenti risultati:

	massa finale	propellente consumato	aumento consumo
+10 Km	795.52 Kg	804.48 Kg	0.68%
+20 Km	789.60 Kg	810.40 Kg	1.42%
+30 Km	783.52 Kg	816.48 Kg	2.18%
+40 Km	777.92 Kg	822.08 Kg	2.88%
+50 Km	772.16 Kg	827.84 Kg	3.60%

Tabella 6.3: Risultati variazione al 10% della discesa

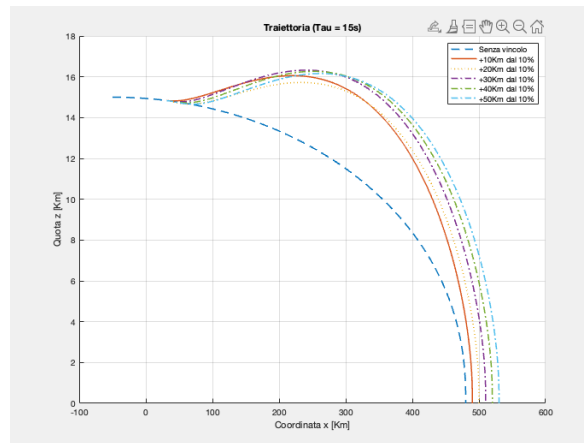


Figura 6.20: Quota Z in funzione di X

Come si può vedere da figura 6.20 la strategia di ottimizzazione è simile a quella riportata nella sezione 6.2.1, in quanto il veicolo deve recuperare una certa quota per poter atterrare nel punto 'target'.

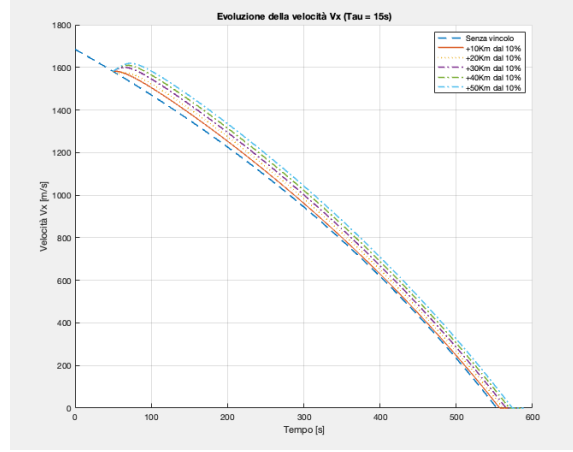


Figura 6.21: Evoluzione della velocità lungo l'asse X

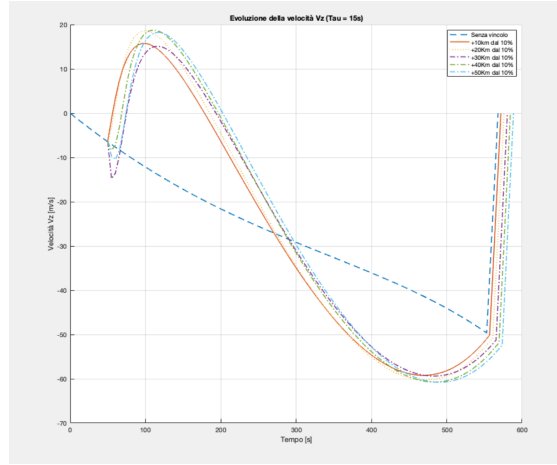


Figura 6.22: Evoluzione della velocità lungo l'asse Z

L'imposizione del vincolo spaziale genera una marcata variazione del profilo di V_z , soprattutto nella parte intermedia e finale della discesa.

Al crescere di Δx , si osserva un aumento della fluttuazione nella velocità verticale e un maggiore anticipo nella variazione di direzione della velocità. Ciò evidenzia la necessità del veicolo di anticipare la manovra di correzione per raggiungere un punto di atterraggio più lontano, aumentando il propellente speso.

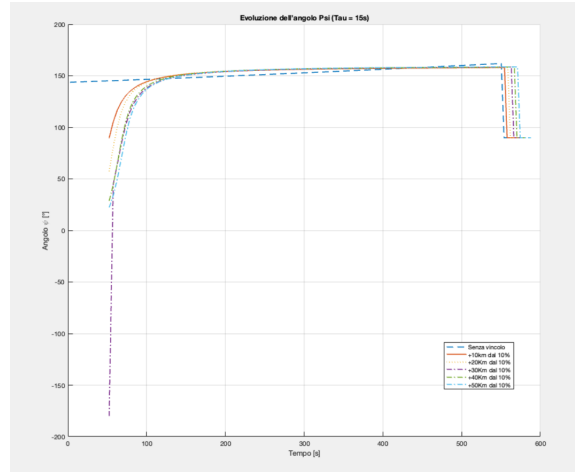


Figura 6.23: Evoluzione dell'angolo PSI

L'andamento dell'angolo Ψ mostrato in figura 6.23 evidenzia una rotazione più rapida per i casi con vincolo, in particolare con l'aumentare di Δx ; questo comportamento indica che, come mostrato anche da figura 6.20, per raggiungere un punto di atterraggio più distante, il veicolo deve inizialmente recuperare una certa quota per poi gradualmente scendere.

6.3.2 Variazione al 20% della traiettoria di discesa originale

Si sono ottenuti i seguenti risultati:

	massa finale	propellente consumato	aumento consumo
+10 Km	794.72 Kg	805.28 Kg	0.78%
+20 Km	788.00 Kg	812.00 Kg	1.62%
+30 Km	781.44 Kg	818.56 Kg	2.44%
+40 Km	775.04 Kg	824.96 Kg	3.24%
+50 Km	768.48 Kg	831.52 Kg	4.06%

Tabella 6.4: Risultati variazione al 20% della discesa

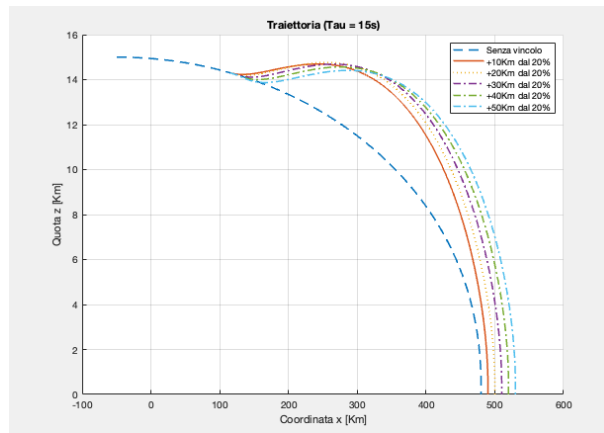


Figura 6.24: Quota Z in funzione di X

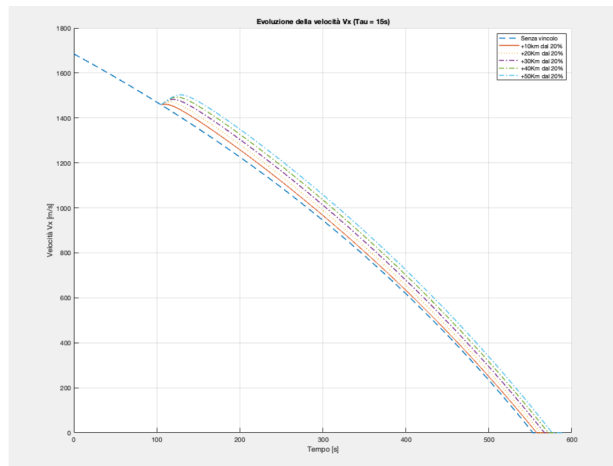


Figura 6.25: Evoluzione della velocità lungo l'asse X

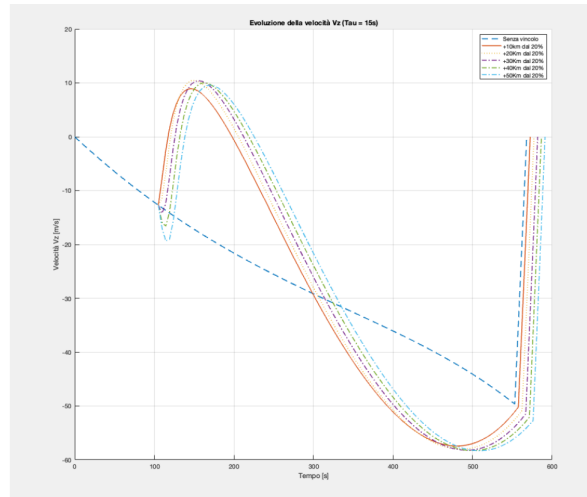


Figura 6.26: Evoluzione della velocità lungo l'asse Z

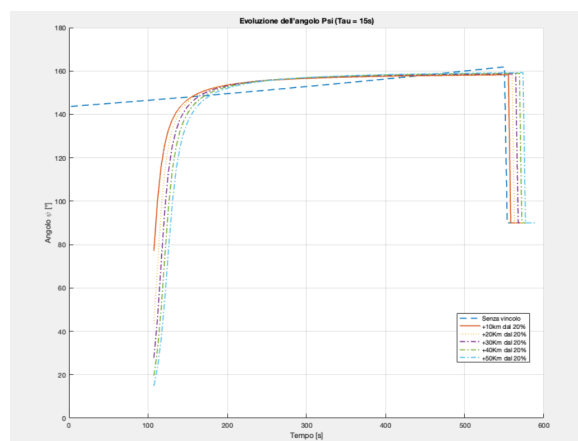


Figura 6.27: Evoluzione dell'angolo PSI

6.3.3 Variazione al 30% della traiettoria di discesa originale

Si sono ottenuti i seguenti risultati:

	massa finale	propellente consumato	aumento consumo
+10 Km	793.60 Kg	806.40 Kg	0.92%
+20 Km	786.08 Kg	813.92 Kg	1.86%
+30 Km	778.72 Kg	821.28 Kg	2.78%
+40 Km	771.36 Kg	828.64 Kg	3.70%
+50 Km	764.00 Kg	836.00 Kg	4.63%

Tabella 6.5: Risultati variazione al 30% della discesa

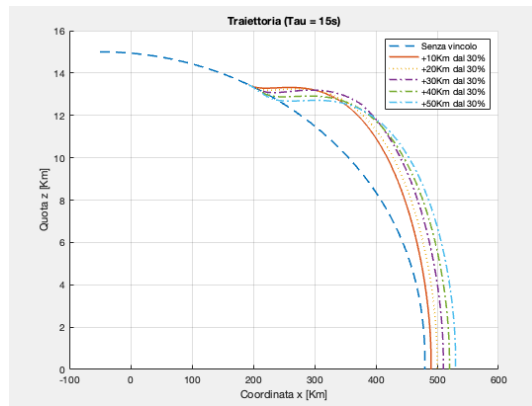


Figura 6.28: Quota Z in funzione di X

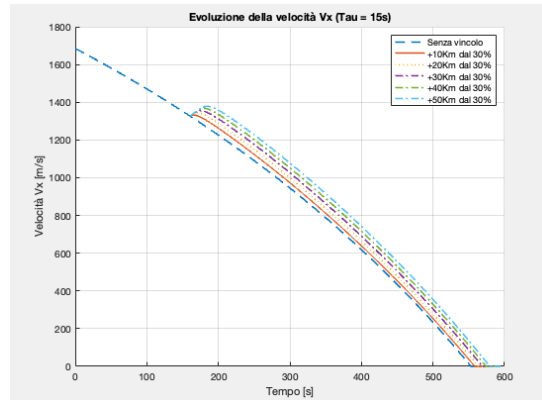


Figura 6.29: Evoluzione della velocità lungo l'asse X

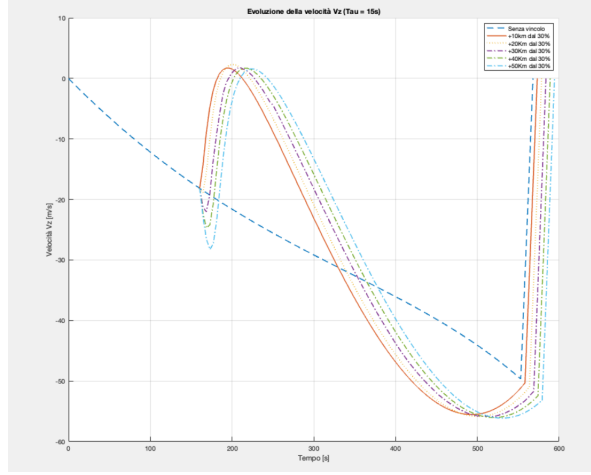


Figura 6.30: Evoluzione della velocità lungo l'asse Z

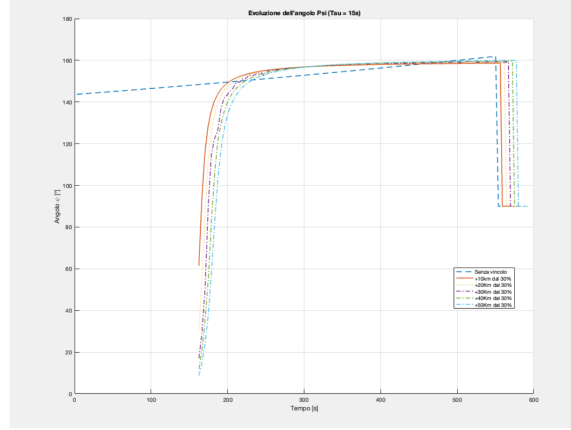


Figura 6.31: Evoluzione dell'angolo PSI

Come si può osservare dalle figure, le considerazioni effettuate per il caso in cui il punto di atterraggio venga modificato al 10% della discesa sono valide anche per le variazioni al 20% e al 30%, poiché la strategia di ottimizzazione adottata rimane invariata. Tuttavia, come riportato nelle tabelle 6.4 e 6.5, a parità di Δx , i consumi aumentano all'aumentare della percentuale di discesa già completata nel momento in cui si effettua la variazione del punto di atterraggio.

Capitolo 7

Conclusioni

L'esplorazione lunare ha sempre rappresentato una delle sfide più affascinanti e complesse nell'ambito dell'ingegneria aerospaziale. Sin dalle missioni Apollo degli anni Sessanta e Settanta, l'allunaggio ha costituito non solo un traguardo tecnologico, ma anche un banco di prova per la capacità dell'umanità di affrontare problemi ingegneristici di enorme difficoltà. Dopo decenni di relativa inattività, il crescente interesse internazionale verso la Luna è tornato in auge grazie ai programmi spaziali di diverse agenzie, come l'*Artemis Program* della NASA, il programma cinese *Chang'e*, e altre iniziative europee e private. L'obiettivo non è più soltanto dimostrare la fattibilità dell'atterraggio, ma sviluppare missioni sostenibili e ripetibili, capaci di gettare le basi per una futura presenza stabile sul nostro satellite naturale.

In tale contesto, l'ottimizzazione delle traiettorie di discesa riveste un ruolo centrale. Ogni chilogrammo di propellente risparmiato può tradursi in un aumento del carico utile trasportato, in una maggiore sicurezza della missione o nella possibilità di compiere manovre correttive non previste. Il problema dell'allunaggio è infatti un classico problema di controllo ottimo, in cui occorre gestire simultaneamente vincoli cinematici, dinamici e propulsivi, garantendo un atterraggio morbido e sicuro. La ricerca di strategie per ridurre al minimo i consumi mantenendo elevati standard di affidabilità rappresenta dunque un tema di grande attualità, sia in campo accademico che industriale.

Il lavoro svolto in questa tesi si inserisce esattamente in questo filone. L'obiettivo principale è stato quello di sviluppare e testare una metodologia per l'ottimizzazione delle traiettorie di discesa lunare basata su **metodi diretti di ottimizzazione**, dimostrando come essi possano rappresentare un'alternativa valida e concreta ai tradizionali metodi indiretti. La letteratura scientifica, infatti, si è storicamente concentrata sui metodi indiretti, che permettono di scrivere e risolvere le condizioni necessarie di ottimalità. Tuttavia, tali approcci risultano spesso poco flessibili e complessi da applicare in presenza di vincoli non lineari o scenari realistici. I metodi diretti, invece, discretizzano direttamente il problema di controllo ottimo e consentono di affrontare casi più complessi con maggiore robustezza numerica.

Attraverso la formulazione del problema e la sua implementazione numerica, si è dimostrato come sia possibile ottenere traiettorie ottimizzate che garantiscano un **consumo minimo di propellente** pur rispettando i vincoli di atterraggio. In particolare, nel caso di discesa verticale con tempo fissato, l'algoritmo ha individuato una traiettoria caratterizzata da una fase iniziale di manovra, seguita da una fase finale completamente verticale della durata di 15 secondi, scelta come compromesso tra precisione dell'atterraggio e contenimento dei consumi. I risultati ottenuti mostrano una riduzione complessiva dei consumi propulsivi e una buona capacità del metodo di adattarsi ai vincoli imposti.

Successivamente, lo studio è stato esteso a scenari più complessi, quali la variazione del punto di atterraggio sia in direzione *along-track* che *cross-track*, e l'eventualità di un cambio di destinazione durante la fase di discesa. In tutti questi casi, i risultati numerici hanno evidenziato la sensibilità del consumo di carburante alla modifica del punto target. Ad esempio, uno spostamento del punto di atterraggio lungo l'asse longitudinale di decine di chilometri ha comportato incrementi di consumo superiori al 3–4%, mentre variazioni trasversali hanno avuto un impatto più contenuto. Inoltre, quando la variazione del target è stata imposta a discesa già iniziata, l'aumento dei consumi è risultato tanto maggiore quanto più avanzata era la fase di volo, confermando l'importanza di strategie di pianificazione anticipata.

Questi risultati dimostrano non solo la validità del metodo diretto utilizzato, ma anche la sua capacità di riprodurre dinamiche realistiche e di quantificare l'effetto dei diversi vincoli operativi sul consumo propulsivo. Naturalmente, affinché il modello possa essere impiegato in scenari mission-critical, sarà necessario affrontare alcune delle **semplificazioni introdotte** in questa prima fase di studio. Tra esse ricordiamo l'ipotesi di spinta costante, la modellizzazione semplificata del campo gravitazionale e l'assenza di perturbazioni esterne. Queste scelte sono state adottate per ridurre la complessità computazionale e permettere una prima validazione del metodo, ma in applicazioni reali andranno sostituite da modelli più sofisticati in grado di tener conto delle effettive caratteristiche del veicolo e dell'ambiente lunare.

Nonostante tali limitazioni, il lavoro rappresenta un **solido punto di partenza** per sviluppi futuri. In prospettiva, l'inclusione di modelli di propulsione più accurati, di vincoli legati alla topografia del sito di atterraggio o di condizioni operative variabili permetterà di ampliare notevolmente il campo di applicabilità del metodo. Inoltre, l'approccio diretto potrebbe essere integrato con tecniche di intelligenza artificiale o con algoritmi di controllo predittivo per migliorare ulteriormente le capacità di adattamento a scenari incerti o imprevisti.

Un aspetto particolarmente rilevante emerso da questa tesi è che i metodi diretti si sono dimostrati non solo praticabili, ma anche **efficaci nell'implementazione numerica**. È stato infatti possibile sviluppare un algoritmo stabile e convergente, capace di trovare soluzioni ottimali anche in presenza di vincoli stringenti e di scenari variabili. Questo risultato assume grande importanza, poiché conferma la possibilità di applicare i metodi diretti a problemi complessi di traiettoria spaziale, superando alcune delle rigidità dei metodi indiretti.

In conclusione, il lavoro svolto ha mostrato come sia possibile affrontare il problema dell'allunaggio da una prospettiva innovativa, coniugando rigore scientifico e attenzione alla fattibilità pratica. L'ottimizzazione delle traiettorie di discesa mediante metodi diretti rappresenta una strada promettente non solo per future missioni lunari, ma anche per l'esplorazione di altri corpi celesti. In un'epoca in cui l'interesse per la Luna e per lo spazio profondo è in rapida crescita, soluzioni di questo tipo contribuiranno a rendere più efficienti e sicure le missioni, aprendo la strada a nuove conquiste tecnologiche e scientifiche.

Appendice A

Ottimizzazione traiettoria di discesa con spinta variabile nella fase di discesa verticale

In questa appendice sono riportati i risultati ottenuti attraverso un approccio differente da quello studiato in questa tesi; in questa trattazione infatti si è deciso di non fissare il tempo della discesa verticale ma di lasciarlo libero diventando così una variabile di ottimizzazione a tutti gli effetti.

Inoltre la spinta in questa seconda fase dell'allunaggio a differenza della trattazione precedente non è più costante e pari al valore massimo erogabile ma è stata definita come:

$$T = m * g \quad (\text{A.1})$$

In questo modo si garantisce nella seconda fase una velocità di discesa costante.

Le condizioni iniziali ed il sistema di riferimento sono i medesimi utilizzati precedentemente e non sono quindi riportati, si rimanda il lettore ad i capitoli dedicati.

La fase di discesa verticale non è più quindi definita nel tempo ma nello spazio poichè viene fissata a 20 metri di altitudine la transizione tra la prima e la seconda fase.

I vincoli imposti alla fine della prima fase sono quindi:

- $y = 0\text{m}$;
- $z = 20\text{m}$;
- $V_x = 0\text{m/s}$;
- $V_y = 0\text{m/s}$;
- $V_z = -2\text{m/s}$.

*APPENDICE A. OTTIMIZZAZIONE TRAIETTORIA DI DISCESA CON
SPINTA VARIABILE NELLA FASE DI DISCESA VERTICALE*

Nella fase di discesa verticale come già accennato la spinta è definita come:

$$T_{fase2} = m * g \quad (A.2)$$

Questo comporta che la spinta sia variabile in questa fase ed inoltre essendo minore dei casi precedenti ne risulta un minor consumo come mostrato in figura A.1.

I vincoli imposti alla fine della fase 2 sono:

- $y = 0\text{m}$;
- $z = 0\text{m}$;
- $V_x = 0\text{m/s}$;
- $V_y = 0\text{m/s}$;
- $V_z = -2\text{m/s}$.

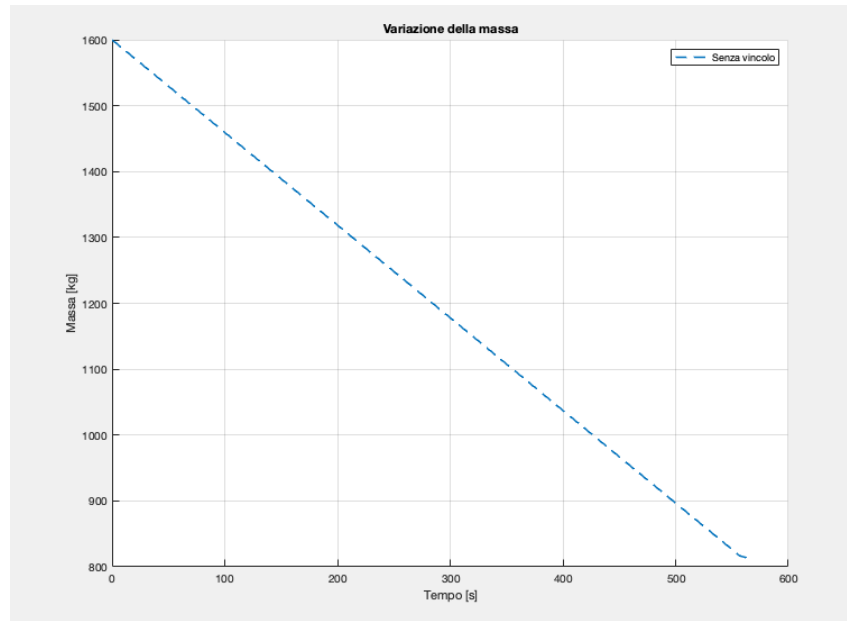


Figura A.1: Massa

Si è ottenuta una massa finale di:

$$811.97 \text{ Kg}$$

che corrisponde ad un consumo di 788.03 Kg.

*APPENDICE A. OTTIMIZZAZIONE TRAIETTORIA DI DISCESA CON
SPINTA VARIABILE NELLA FASE DI DISCESA VERTICALE*

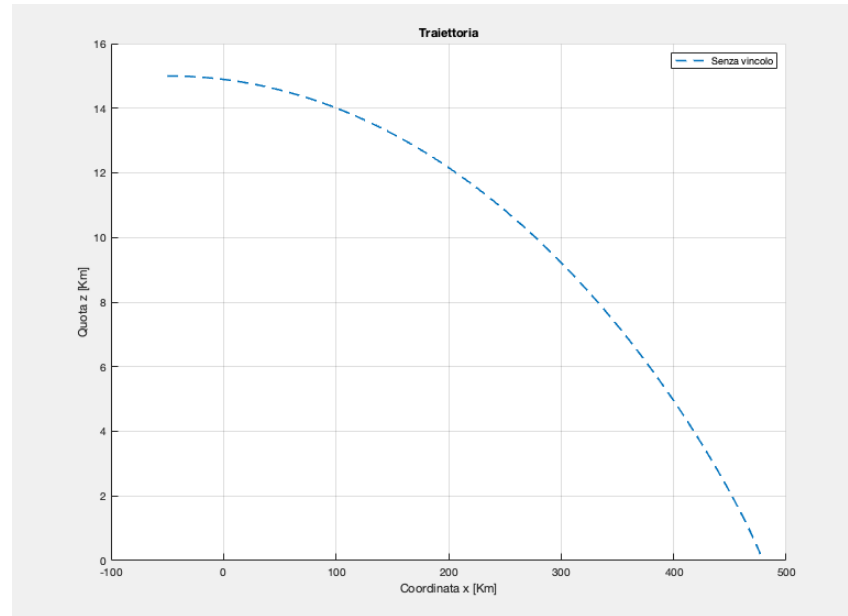


Figura A.2: traiettoria

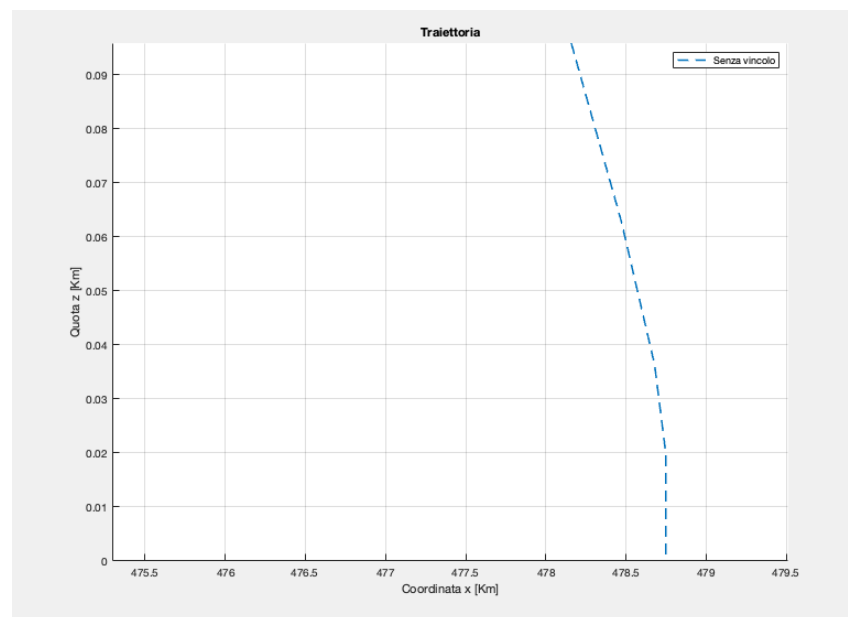


Figura A.3: Zoom fase finale traiettoria

Come si può apprezzare da figura A.3 la discesa è verticale nell'ultimo tratto la cui durata risulta essere ovviamente 10s.

*APPENDICE A. OTTIMIZZAZIONE TRAIETTORIA DI DISCESA CON
SPINTA VARIABILE NELLA FASE DI DISCESA VERTICALE*

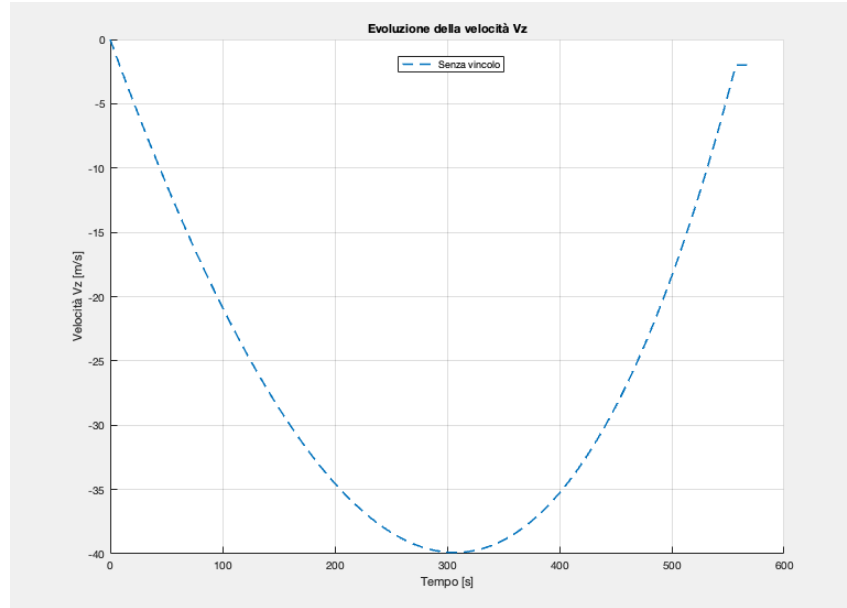


Figura A.4: Velocità lungo l'asse Z

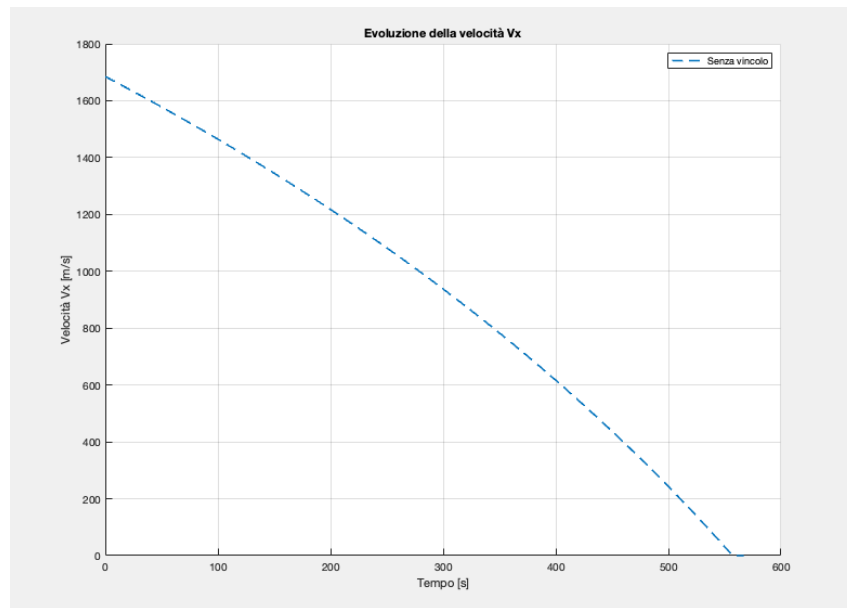


Figura A.5: Velocità lungo l'asse X

La velocità lungo l'asse Z cresce in modulo diminuendo di quota per poi decrescere e permettere il rallentamento necessario per rispettare il vincolo imposto di $V_z = -2\text{m/s}$. Tale velocità risulta essere mantenuta nella seconda fase per via di come è stata definita precedentemente la spinta in questa fase della discesa.

La velocità lungo l'asse X non subisce particolari variazioni in questa trattazione rispetto ai casi precedenti.

*APPENDICE A. OTTIMIZZAZIONE TRAIETTORIA DI DISCESA CON
SPINTA VARIABILE NELLA FASE DI DISCESA VERTICALE*

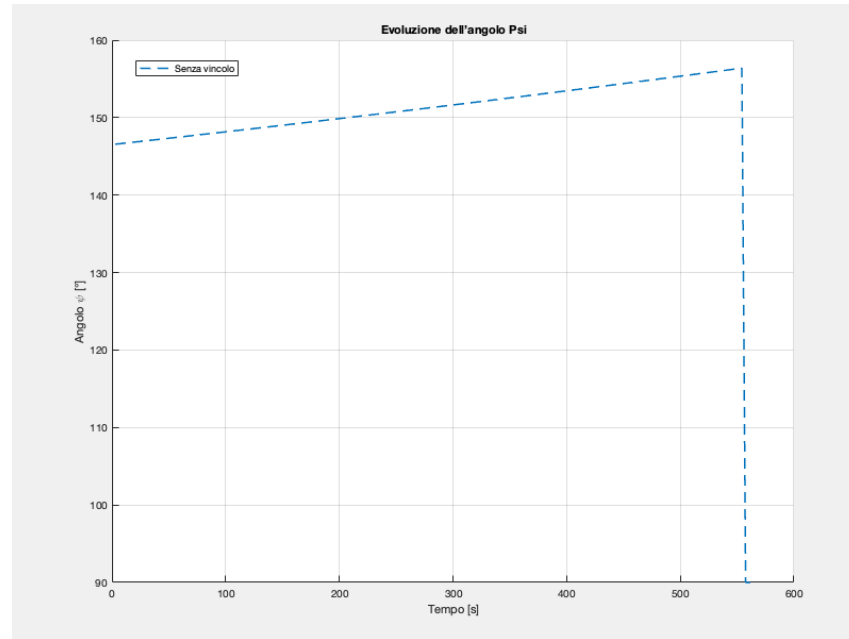


Figura A.6: Angolo Psi

Anche l'angolo Ψ non subisce particolari variazioni rispetto alle trattazioni precedenti.

Considerazioni finali

I risultati ottenuti sono in linea con quelli dei capitoli precedenti e indubbiamente potrebbero essere oggetto di studio in un altro contesto visto il lieve miglioramento delle prestazioni causato dalla spinta variabile nella fase di discesa verticale.

Bibliografia

- [1] NASA. *Surveyor Program Results*. Rapp. tecn. SP-184. NASA, 1969.
- [2] Richard W. Orloff. *Apollo by the Numbers: A Statistical Reference*. NASA SP-2000-4029. NASA, 2001.
- [3] J. T. Betts. *Practical Methods for Optimal Control Using Nonlinear Programming*. SIAM, 2010.
- [4] Arthur E. Bryson e Yu-Chi Ho. *Applied Optimal Control*. Hemisphere Publishing, 1975.
- [5] John F. Kennedy. *Special Message to the Congress on Urgent National Needs*. Speech, 25 May 1961. 1961. URL: <https://www.presidency.ucsb.edu/documents/special-message-the-congress-urgent-national-needs>.
- [6] NASA. *Artemis Program Overview*. Accessed June 2025. 2023. URL: <https://www.nasa.gov/specials/artemis/>.
- [7] Jorge Nocedal e Stephen J. Wright. *Numerical Optimization*. 2nd. Springer, 2006. ISBN: 9780387303031.
- [8] Dimitri P. Bertsekas. *Nonlinear Programming*. Athena Scientific, 1999. ISBN: 9781886529016.
- [9] Dimitri P. Bertsekas. *Dynamic Programming and Optimal Control*. 4th. Athena Scientific, 2016. ISBN: 9781886529443.
- [10] Philip E. Gill, Walter Murray e Margaret H. Wright. *Practical Optimization*. Academic Press, 1981. ISBN: 978-0122839528.
- [11] Alex Barclay, Philip E. Gill e J. Ben Rosen. «SQP Methods and Their Application to Numerical Optimal Control». In: *Control Applications of Optimization*. Vol. 115. International Series of Numerical Mathematics. Presented in SIAM Conference on Control and Optimization. Basel: Birkhäuser Verlag, 1997, pp. 207–222.

Desidero innanzitutto ringraziare il mio relatore, il Prof. Lorenzo Casalino, per la sua preziosa guida, per la disponibilità e per i consigli che mi hanno permesso di affrontare con serenità e competenza il percorso di questa tesi.

Un sentito ringraziamento va ai miei genitori, per avermi sempre supportato e permesso di dedicarmi agli studi con fiducia e affetto. Senza il loro sostegno, questo traguardo non sarebbe stato possibile.

Un grazie speciale va a Greta, la mia fidanzata, per la pazienza, il sostegno emotivo e l'incoraggiamento costante in ogni fase di questo percorso.

Ringrazio anche i miei numerosi coinquilini, che hanno condiviso con me momenti di vita quotidiana e di studio, rendendo l'esperienza universitaria più ricca e piacevole.

Infine, un grazie affettuoso ai miei parenti e agli amici più cari, per l'affetto, la compagnia e i preziosi momenti di leggerezza che hanno reso questo percorso più sereno e motivante.