

POLITECNICO DI TORINO

Dipartimento di Ingegneria Meccanica e Aerospaziale

Corso di Laurea in Ingegneria Aerospaziale

Tesi di Laurea Magistrale

**OTTIMIZZAZIONE DI
TRAIETTORIE PER MISSIONI
SPAZIALI VERSO ASTEROIDI
NEAR-EARTH**



Relatore

Prof. Lorenzo Casalino

Candidato

Lorenzo Negri

A.A. 2023/2024

Sommario

Questa tesi si concentra sull'analisi e sull'ottimizzazione di traiettorie per missioni spaziali destinate all'esplorazione di asteroidi Near-Earth (NEAs). L'interesse verso questi corpi celesti è motivato sia dal loro potenziale rischio di collisione con la Terra sia dall'importanza scientifica che rivestono nello studio della formazione del sistema solare. Inoltre, i NEAs rappresentano una risorsa potenziale per l'estrazione di materiali rari e preziosi, e offrono opportunità per lo sviluppo di tecnologie avanzate nel campo della difesa planetaria e delle missioni spaziali commerciali.

Viene presentato quindi il lavoro che ha portato alla selezione e all'analisi di possibili missioni a basso costo propulsivo e di media durata verso una serie di asteroidi Near-Earth selezionati in base a criteri orbitali favorevoli. Dopo una prima fase di ricerca e ottimizzazione delle traiettorie per diversi asteroidi candidati, l'attenzione è stata focalizzata su quelli che presentavano le soluzioni più promettenti in termini di durata della missione e costi propulsivi contenuti. Gli asteroidi con caratteristiche meno favorevoli sono stati esclusi da ulteriori analisi, permettendo di approfondire lo studio delle traiettorie ottimali per i target più interessanti.

La tesi si articola in quattro sezioni principali. La prima sezione offre una panoramica sulla classificazione degli asteroidi con particolare riferimento ai Near-Earth-Asteroids. La seconda sezione è dedicata ai richiami teorici di meccanica del volo orbitale e propulsione spaziale, fondamentali per comprendere le dinamiche delle missioni interplanetarie. La terza sezione descrive la teoria alla base dell'algoritmo di ottimizzazione utilizzato, con particolare attenzione ai metodi indiretti e alla teoria del controllo ottimale. Questo modello è stato implementato utilizzando un codice esistente, fornito come base per l'analisi e l'applicazione ai casi di studio. La quarta e ultima sezione presenta il lavoro pratico svolto, includendo l'analisi delle traiettorie ottimizzate, i risultati ottenuti e la loro interpretazione.

Ringraziamenti

Desidero innanzitutto ringraziare il mio relatore, il Professor Lorenzo Casalino, non soltanto per avermi dato l'opportunità di lavorare a questo argomento, ma anche per la costante disponibilità nel fornirmi materiale, chiarimenti e un supporto prezioso durante tutto il percorso di tesi.

Un ringraziamento sincero va a tutti i miei amici di sempre, che mi sono stati accanto nei momenti belli e in quelli più difficili. Un grazie speciale lo dedico a Irene e Matteo, amici e colleghi incontrati nei primissimi giorni della triennale, con cui ho condiviso l'intero percorso, non solo universitario. I miei ricordi più belli di questi anni sono legati a voi, e non riesco a immaginare come sarebbe stato senza la vostra presenza.

Infine, il ringraziamento più profondo va alla mia famiglia, per avermi sempre sostenuto, e talvolta sopportato, con generosità e pazienza. Grazie per gli sforzi, anche economici, e per aver fatto in modo che potessi vivere questa esperienza nel migliore dei modi, senza mai farmi mancare nulla.

Indice

Elenco delle figure	VII
1 Introduzione	1
1.1 Missioni Spaziali	1
1.2 Obiettivi della Tesi	2
2 Asteroidi	3
2.1 Classificazione Asteroidi	4
2.2 Asteroidi Near-Earth	4
2.2.1 Effetti dell’impatto in base alle dimensioni dell’asteroide	5
2.2.2 Valutazione della pericolosità e scale di rischio	6
2.2.3 PHAs	7
2.2.4 Risk List ESA	8
2.3 Scelta Asteroidi Target	8
2.3.1 Criteri di scelta	8
2.3.2 Asteroidi Target	8
3 Cenni di propulsione spaziale	15
3.1 Principi della propulsione spaziale	15
3.2 Classificazione	17
3.2.1 Propulsori a Ioni	19
4 Richiami di meccanica orbitale	21
4.1 Leggi di Keplero	21
4.2 Problema degli n-corpi	22
4.2.1 Problema dei 2 corpi	22
4.2.2 Equazione della traiettoria	23
4.2.3 Velocità caratteristiche	24
4.3 Sistemi di riferimento	25
4.3.1 Sistema Eliocentrico	25
4.3.2 Sistema Geocentrico Equatoriale	26
4.3.3 Sistema Perifocale	27
4.4 Elementi orbitali classici	27
4.5 Manovre orbitali	29
4.5.1 Manovre impulsive	30
4.5.2 Manovre a bassa spinta	33
4.6 Missioni interplanetarie	36
4.6.1 Metodo Patched Conics	36

4.6.2	Sfera di Influenza (SOI)	37
5	Ottimizzazione indiretta di traiettorie spaziali	39
5.1	Introduzione ai metodi di ottimizzazione	39
5.2	Teoria del controllo ottimale	40
5.2.1	Principio del massimo di Pontryagin	40
5.2.2	Il problema differenziale ai limiti (BVP)	41
5.3	Modello matematico	42
5.3.1	Equazioni del moto	43
5.3.2	Equazioni di stato e variabili aggiunte	44
5.3.3	Condizioni al contorno	47
5.3.4	Inizializzazione	48
6	Descrizione del codice utilizzato	51
6.1	Parametri fisici e Variabili adimensionalizzate	51
6.1.1	Parametri fisici	51
6.1.2	Parametri del sistema di propulsione	52
6.1.3	Variabili adimensionalizzate	53
6.2	Input richiesti dal codice	54
6.3	Output del codice	55
7	Risultati	57
7.1	Analisi preliminare	57
7.1.1	2014 QN266	57
7.1.2	2016 WN55	60
7.1.3	2020 PJ6	63
7.1.4	2007 CS5	65
7.1.5	Confronto soluzioni preliminari	68
7.2	Analisi approfondite	69
7.2.1	2014 QN266	69
7.2.2	2020 PJ6	73
8	Conclusioni	79
A	Appendice	83
	Bibliografia	87

Elenco delle figure

2.1	Principali fasce di asteroidi	3
2.2	orbita di 2014 QN266 [1]	10
2.3	orbita di 2016 WN55 [1]	11
2.4	orbita di 2020 PJ6 [1]	12
2.5	orbita di 2007 CS5 [1]	13
3.1	Schema di un propulsore a Ioni	19
4.1	Sezioni di coniche	23
4.2	Sistema Eliocentrico - eclittica	25
4.3	Sistema Geocentrico equatoriale	26
4.4	Sistema Perifocale	27
4.5	Elementi orbitali classici [2]	28
4.6	Aggiustamento apogeo e perigeo [3]	30
4.7	Rotazione linea degli absidi [3]	30
4.8	Cambio di piano semplice [3]	31
4.9	Trasferta di Hohmann [3]	32
4.10	Manovra combinata	32
4.11	Angoli di spinta	34
4.12	Variazione e - direzione di spinta ottimale	35
4.13	Variazione i - direzione spinta ottimale	35
5.1	Sistema di riferimento	44
5.2	Flow chart semplificato del codice	49
6.1	File astn e astu20	55
7.1	Fasamento Terra-2014 QN266	57
7.2	ΔV al variare dell'istante di partenza	58
7.3	Zoom nell'intorno del t_0 ottimale	58
7.4	ΔV in funzione della durata di missione	59
7.5	Traiettoria missione di durata 12	59
7.6	Traiettoria missione di durata 15	60
7.7	Fasamento Terra-2016 WN55	60
7.8	ΔV al variare dell'istante di partenza	61
7.9	ΔV in funzione della durata di missione	61
7.10	Traiettoria missione di durata 18	62
7.11	Traiettoria missione di durata 25	62
7.12	r_a, r_p ed e per una missione di durata 18	63

7.13	r_a, r_p ed e per una missione di durata 25	63
7.14	$\Delta\theta$ 2020 PJ6 - Terra	63
7.15	ΔV al variare dell'istante di partenza	64
7.16	Zoom nell'intorno della partenza ottimale	64
7.17	ΔV al variare della durata per diversi istanti di partenza	65
7.18	Fasamento Terra-2007 CS5	65
7.19	ΔV al variare dell'istante di partenza	66
7.20	ΔV al variare della durata	66
7.21	Traiettoria missione di durata 19	67
7.22	Traiettoria missione di durata 27	67
7.23	r_a, r_p, e ed i per la missione di durata 19	68
7.24	Confronto missioni verso vari asteroidi	68
7.25	ΔV al variare della durata per diversi istanti di partenza	70
7.26	Andamento raggio di perielio e afelio durante la trasferta	71
7.27	Andamento della Switching Function	71
7.28	Andamento di spinta e massa nel tempo	72
7.29	Variazione dell'eccentricità dell'orbita durante la missione	72
7.30	Variazione dell'inclinazione dell'orbita durante la missione	72
7.31	Traiettoria verso 2014 QN266	73
7.32	ΔV e consumo % al variare della durata	74
7.33	Andamento raggio di perielio e afelio durante la trasferta	75
7.34	Andamento della Switching Function	75
7.35	Andamento di spinta e massa nel tempo	75
7.36	Variazione dell'eccentricità dell'orbita durante la missione	76
7.37	Variazione dell'inclinazione dell'orbita durante la missione	76
7.38	Traiettoria verso 2020 PJ6	76
A.1	Missione di durata 9 con partenza a $t_0 = 170$	83
A.2	Missione di durata 9 con partenza a $t_0 = 172$	84
A.3	Missione di durata 9 con partenza a $t_0 = 226$	84
A.4	Missione di durata 9 con partenza a $t_0 = 228$	85
A.5	Missione di durata 9 con partenza a $t_0 = 227$	85
A.6	Missione di durata 12 con partenza a $t_0 = 219$	85

Capitolo 1

Introduzione

Negli ultimi decenni, l'esplorazione degli asteroidi Near-Earth (NEAs) ha assunto un ruolo di crescente importanza nel panorama delle missioni spaziali. Questi corpi celesti, che orbitano in prossimità della Terra, sono di interesse strategico per molteplici motivi: alcuni di essi possono rappresentare una potenziale minaccia per il nostro pianeta, offrire preziose informazioni scientifiche sulla formazione del sistema solare, oppure costituire una risorsa economica.

Dal punto di vista della **difesa planetaria**, i NEAs sono monitorati costantemente a causa della loro potenziale minaccia per la Terra. Alcuni asteroidi di piccole dimensioni possono entrare nell'atmosfera terrestre, causando esplosioni aeree o danni locali, come accaduto nel caso dell'evento di Čeljabinsk nel 2013, nel quale un asteroide di circa 20 metri di diametro esplose sopra la città russa, generando un'onda d'urto che causò il ferimento di oltre 1000 persone e danni a numerosi edifici. Altri asteroidi passano a distanze ravvicinate rispetto al nostro pianeta, suscitando attenzione per il rischio di impatti futuri. In scenari più estremi, NEAs di dimensioni maggiori potrebbero intersecare l'orbita terrestre e provocare impatti catastrofici su scala globale. Questi rischi hanno stimolato lo sviluppo di progetti e missioni spaziali per la mitigazione del rischio di collisione e un monitoraggio continuo e sempre più accurato di questi corpi celesti.

Dal punto di vista **scientifico**, i NEAs sono considerati veri e propri fossili del sistema solare primordiale. Studiare la loro composizione e struttura consente di comprendere meglio i processi che hanno portato alla formazione dei pianeti e alla distribuzione dei materiali nel sistema solare.

Inoltre, gli asteroidi rappresentano una potenziale **risorsa economica**. Alcuni NEAs contengono elevate concentrazioni di metalli rari come platino, nichel e cobalto. L'estrazione di questi materiali potrebbe rivoluzionare l'industria mineraria terrestre, riducendo l'impatto ambientale e aprendo nuove prospettive per l'economia spaziale.

1.1 Missioni Spaziali

Le missioni spaziali rivolte agli asteroidi Near-Earth hanno avuto un ruolo cruciale nell'ampliare le conoscenze scientifiche e tecnologiche in questo campo. Tra queste, la missione **DART** [4] ha rappresentato un punto di svolta nella difesa planetaria, dimostrando la possibilità di deviare la traiettoria di un asteroide tramite un impatto controllato. La missione **Hera** dell'ESA [5], che seguirà l'impatto di DART, analizzerà gli effetti del test per valutare l'efficacia delle tecniche di deflessione.

Dal punto di vista scientifico, la missione **OSIRIS-REx** [6] ha raccolto campioni dall'asteroide Bennu

per studiarne la composizione, mentre **Hayabusa** [7] e **Hayabusa2** hanno riportato a terra materiale dagli asteroidi Itokawa e Ryugu, rispettivamente, fornendo dati preziosi sulla natura dei NEAs. Il progetto **NEO Surveyor** [8] della NASA si propone di migliorare ulteriormente la rilevazione degli asteroidi potenzialmente pericolosi, contribuendo sia alla sicurezza planetaria sia alla ricerca scientifica.

La missione **ANIME** (Asteroid Nodal Intersection Multiple Encounters) è un'iniziativa italiana dedicata all'esplorazione e allo studio di asteroidi Near-Earth (NEAs) attraverso una missione a rendez-vous multipli con diversi bersagli. Il target principale è stato identificato nell'asteroide 2000 SG344, un NEA di circa 40 metri di diametro, le cui caratteristiche orbitali lo rendono di particolare interesse grazie ai numerosi passaggi ravvicinati al nostro pianeta. Prima del rendez-vous con 2000 SG344, la missione ANIME sarà ottimizzata per effettuare anche il fly-by di due "potentially hazardous asteroids". L'intera missione sarà pianificata in modo da ottimizzare il costo energetico e massimizzare l'efficienza delle manovre. [9]

1.2 Obiettivi della Tesi

Questa tesi si inserisce nel percorso tracciato dall'iniziativa ANIME, con l'obiettivo di esplorare nuovi asteroidi target, alternativi a 2000 SG344, e valutare la fattibilità di missioni future verso di essi. Il focus principale è l'analisi delle soluzioni ottimali in termini di durata della missione e costi propulsivi, attraverso l'ottimizzazione delle traiettorie e la valutazione dell'efficienza energetica. A tal fine, è stato utilizzato un codice scritto in Fortran che implementa algoritmi di ottimizzazione basati su metodi indiretti di controllo ottimale, permettendo di determinare le traiettorie più efficienti per ciascun asteroide selezionato.

Il lavoro si articola in tre fasi principali:

1. **Ricerca Preliminare degli Asteroidi:** È stata condotta un'accurata analisi per identificare NEAs con caratteristiche orbitali favorevoli, come un semiasse maggiore simile a quello terrestre, bassa eccentricità e inclinazione ridotta. Sono stati considerati anche criteri di rilevanza scientifica e la presenza degli asteroidi nelle liste di rischio internazionali.
2. **Selezione dei Migliori Candidati:** Per ciascun asteroide selezionato, sono state analizzate soluzioni per le traiettorie. Quelle con costi propulsivi più bassi e durate di missione ridotte sono state identificate come le più promettenti.
3. **Analisi Approfondita e Raffinamento delle Soluzioni Ottimali:** le soluzioni più soddisfacenti sono state ulteriormente analizzate e perfezionate per ottenere stime più precise. In questa fase, sono stati utilizzati parametri orbitali aggiornati e un codice più accurato per affinare i risultati. Gli asteroidi con soluzioni meno favorevoli sono stati esclusi da ulteriori analisi.

Capitolo 2

Asteroidi

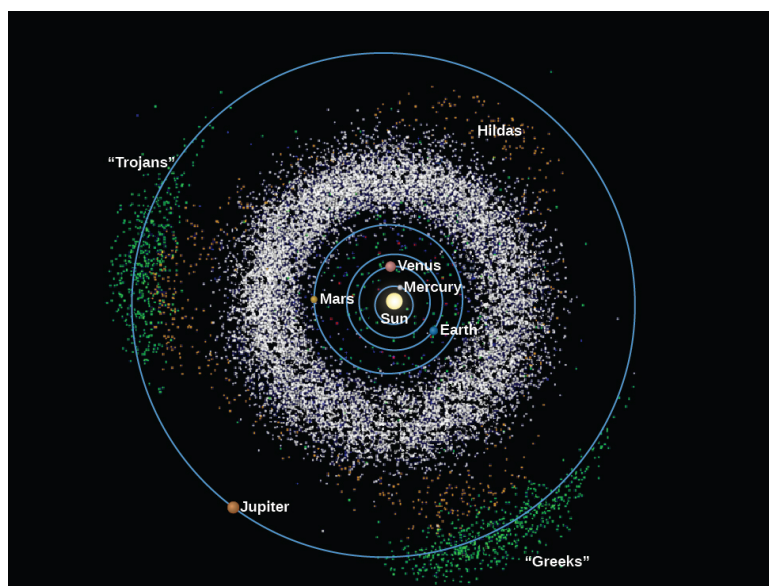


Figura 2.1: Principali fasce di asteroidi

Gli asteroidi sono corpi celesti rocciosi che orbitano attorno al Sole e rappresentano i resti residui della formazione del sistema solare. La maggior parte di essi si trova nella **Fascia principale degli asteroidi**, situata tra le orbite di Marte e Giove. Questa regione ospita centinaia di migliaia di asteroidi di varie dimensioni, dai piccoli frammenti fino a oggetti di massa considerevole come Cerere, il più grande asteroide conosciuto.

Oltre alla fascia principale, esistono altre popolazioni di asteroidi:

- **Asteroidi Troiani:** condividono l'orbita di un pianeta, come Giove, e si trovano Lagrangiani L4 e L5 del sistema Sole-Giove.
- **Asteroidi Centauri:** corpi celesti che hanno orbite comprese tra quelle di Giove e Nettuno, con caratteristiche sia di asteroidi che di comete.[10]
- **Asteroidi della Fascia di Kuiper:** situati oltre l'orbita di Nettuno, sono composti in gran parte da ghiaccio e materiale roccioso.[11]

2.1 Classificazione Asteroidi

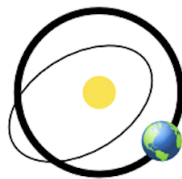
Gli asteroidi possono essere classificati anche in base alla loro composizione chimica e alla riflettività della loro superficie, utilizzando analisi spettroscopiche. Questa classificazione permette di approfondire l'origine, l'evoluzione e il potenziale sfruttamento degli asteroidi. Le principali categorie sono:[12]

- **Tipo C** (Carbonacei): Sono i più comuni e rappresentano circa il 75% degli asteroidi conosciuti. Composti principalmente da materiali primitivi, ovvero quelli che hanno subito minime alterazioni dall'epoca della formazione del sistema solare, essi sono ricchi di carbonio e silicati. Questi asteroidi si trovano prevalentemente nella fascia esterna della fascia principale e forniscono importanti informazioni sulle condizioni chimiche e fisiche esistenti nei primordi del sistema solare.
- **Tipo S** (Silicei): Costituiti principalmente da silicati e metalli, sono più riflettenti e rappresentano circa il 17% degli asteroidi noti. Si trovano prevalentemente nella parte interna della fascia principale.
- **Tipo M** (Metallici): Ricchi di nichel e ferro, si pensa che siano i resti di nuclei differenziati di planetesimi frantumati. Sono meno comuni rispetto ai tipi C e S.
- **Altri tipi**: Esistono anche categorie minori, come i tipi D e P. I tipi D e P si trovano nelle regioni più esterne della fascia principale e sono caratterizzati da superfici molto scure ricche di composti organici ricchi di silicati.

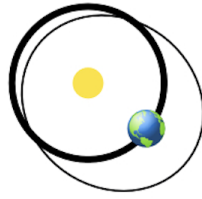
2.2 Asteroidi Near-Earth

Un interesse particolare è riservato a quegli asteroidi che intersecano o si avvicinano all'orbita terrestre, che prendono il nome di asteroidi Near-Earth (NEAs). Essi sono definiti come quei corpi celesti il cui perielio è inferiore a 1.3 unità astronomiche (AU). Questi asteroidi sono suddivisi in diverse categorie basate sulle loro caratteristiche orbitali:

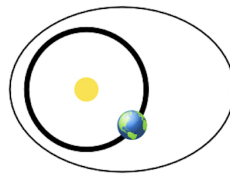
1. Asteroidi di tipo **Aten**: hanno un semiasse maggiore inferiore a 1 AU e intersecano l'orbita terrestre in quanto hanno afelio maggiore del perielio Terrestre.



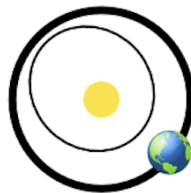
2. Asteroidi di tipo **Apollo**: hanno un semiasse maggiore superiore a 1 AU e un perielio inferiore a 1.017 AU, rendendoli tra i NEAs più numerosi.



3. Asteroidi di tipo **Amor**: non intersecano l'orbita terrestre ma si avvicinano sotto le 1.3 AU al perielio ($1.017AU < r_p < 1.3AU$); hanno raggio orbitale medio compreso tra le orbite di Terra e Marte.



4. Asteroidi di tipo **Atira**: hanno orbite interamente comprese all'interno dell'orbita terrestre, con un afelio inferiore a 1 AU.



Queste categorie sono fondamentali per comprendere il comportamento dinamico dei NEAs e il loro potenziale rischio per la Terra. In particolare, solo gli asteroidi di tipo Aten e Apollo sono considerati pericolosi per un possibile impatto con il nostro pianeta, poiché le loro orbite intersecano quella terrestre. [13]

2.2.1 Effetti dell'impatto in base alle dimensioni dell'asteroide

La dimensione di un asteroide è un fattore determinante per valutare i possibili effetti di un impatto con la Terra. Asteroidi di dimensioni ridotte tendono a bruciarsi completamente nell'atmosfera, mentre corpi più grandi possono causare danni significativi a livello locale o globale. Di seguito sono riportati alcuni ordini di grandezza tipici per gli impatti di asteroidi, sulla base di studi sugli eventi storici e sulle simulazioni di impatto.[12]

- **10 metri**: un asteroide di queste dimensioni impatta la Terra circa una volta ogni 10 anni, generando una brillante palla di fuoco e un forte boato. Gli effetti sono generalmente limitati, ma l'onda d'urto può rompere finestre nelle vicinanze.

- **50 metri:** impatti di questa scala avvengono circa ogni 1.000 anni e possono causare devastazioni locali, con la possibile formazione di un cratere da impatto. Un esempio noto è l'evento di Tunguska del 1908.[14]
- **140 metri:** un asteroide di questa grandezza impatta mediamente ogni 20.000 anni, generando crateri di 1-2 km di diametro. Se l'impatto avvenisse in un'area densamente popolata, potrebbe provocare ingenti perdite umane e danni su scala regionale. Asteroidi di queste dimensioni rientrano nella categoria dei *Potentially Hazardous Asteroids* (PHA).
- **1.000 metri:** un impatto di questo tipo si verifica ogni 700.000 anni e ha conseguenze globali, con possibili sconvolgimenti climatici e impatti significativi sull'ecosistema terrestre.
- **10.000 metri:** asteroidi di questa scala colpiscono la Terra generalmente ogni 100 milioni di anni e sono associati a eventi di estinzione di massa, come quello che ha portato alla scomparsa dei dinosauri.

Questa classificazione permette di comprendere meglio il livello di minaccia rappresentato dai diversi asteroidi Near-Earth ed ha aiutato, insieme ad altri parametri, a guidare la scelta degli asteroidi target.

2.2.2 Valutazione della pericolosità e scale di rischio

Nel contesto della difesa planetaria e della selezione di asteroidi di interesse, è fondamentale disporre di strumenti che permettano di valutare il rischio potenziale associato a un impatto con la Terra. A tale scopo, sono state sviluppate due principali scale di rischio:

La Scala Torino

La Scala Torino è una scala qualitativa e semplificata che valuta la pericolosità di un oggetto Near-Earth (NEO) potenzialmente impattante, combinando la probabilità di collisione con l'energia cinetica che verrebbe rilasciata in caso di impatto. Essa fornisce un punteggio compreso tra 0 (nessun rischio) e 10 (collisione certa con conseguenze globali catastrofiche).

I valori più bassi (0-1) indicano oggetti che, sebbene possano avere un impatto potenziale, presentano probabilità trascurabili o conseguenze minime. Valori superiori (fino a 10) denotano rischi via via crescenti, fino al caso peggiore di impatto certo.

Attualmente, la maggior parte degli oggetti monitorati si colloca al livello 0 della Scala di Torino, indicando che non costituiscono una minaccia concreta. Tuttavia, l'aggiornamento continuo dei dati osservativi può modificare nel tempo la valutazione.[15]

La Scala Palermo

La Scala Palermo è uno strumento più tecnico e quantitativo, utilizzato principalmente dagli esperti per confrontare il rischio di impatto di un NEO con il rischio medio naturale di impatto da parte di oggetti della stessa dimensione o superiori. Il valore P della scala Palermo è definito come il logaritmo

in base 10 del rapporto della probabilità di impatto p_i , con il rischio di fondo nel tempo (in T anni) che intercorre al possibile impatto:

$$P = \log_{10} \left(\frac{p_i}{f_B T} \right) \quad (2.1)$$

Il rischio di fondo annuo, cioè la frequenza annua di un impatto, è definito come:

$$f_B = 0.03 E^{-0.8} \quad (2.2)$$

dove E indica l'energia dell'impatto misurata in *megatoni*.

I valori possono quindi essere positivi, negativi o nulli:

- Valori **positivi** indicano rischi superiori alla media naturale, richiedendo un'attenzione prioritaria.
- Valori **negativi** compresi tra -2 e zero indicano oggetti che devono essere attentamente monitorati.
- Valori inferiori a -2 si riferiscono ad eventi che non porterebbero conseguenze significative anche in caso di avvenimento.
- Un valore **pari a 0** rappresenta un rischio equivalente a quello medio atteso per eventi naturali di impatto nello stesso periodo.

A differenza della Scala Torino, la Scala Palermo consente una valutazione più fine e continua del rischio, utile per confrontare oggetti con probabilità molto diverse.[16]

2.2.3 PHAs

Il numero di asteroidi Near-Earth conosciuti è in costante crescita grazie ai continui sforzi di monitoraggio e scoperta. Attualmente, sono stati identificati oltre 35000 NEAs, di cui circa 2500 sono classificati come Potentially Hazardous Asteroids (PHAs). Questi asteroidi presentano un MOID (Minimum Orbit Intersection Distance) inferiore a 0,05 AU e una magnitudine assoluta inferiore a 22, parametro che indica un diametro superiore ai 140 metri, dimensioni tali da causare danni su scala regionale o globale in caso di impatto. Il monitoraggio costante dei PHAs è quindi essenziale per valutare e mitigare potenziali rischi.[17]

MOID: È la distanza minima tra le orbite di due corpi celesti, ad esempio un asteroide e la Terra. Il MOID è un parametro fondamentale per valutare il rischio di collisione tra un asteroide e un pianeta.

Magnitudine Assoluta (H): È una misura della luminosità intrinseca di un corpo celeste, come un asteroide, calcolata come la magnitudine apparente che l'oggetto avrebbe se si trovasse alla distanza standard di 1 unità astronomica sia dal Sole che dalla Terra, senza alcun effetto di fase (ossia con il Sole e l'osservatore in posizioni opposte rispetto all'oggetto). È un parametro essenziale per stimare le dimensioni di un asteroide, assumendo un valore della sua albedo (p).

$$D = \frac{1329}{\sqrt{p}} \times 10^{-0.2H}$$

2.2.4 Risk List ESA

La Risk List dell'ESA include tutti gli asteroidi che presentano una possibilità non nulla di impatto con la Terra, indipendentemente dalle loro dimensioni. Questa lista viene costantemente aggiornata con osservazioni orbitali per monitorare eventuali rischi futuri e affinare le stime delle traiettorie, tenendo conto anche dell'incertezza orbitale di alcuni asteroidi, che richiede osservazioni aggiuntive per una maggiore precisione.[18]

2.3 Scelta Asteroidi Target

Dopo aver esaminato i criteri di valutazione della pericolosità e le metodologie di classificazione del rischio, si passa ora alla selezione degli asteroidi target utilizzati in questo studio, basata sulle considerazioni precedenti e sui requisiti della missione.

2.3.1 Criteri di scelta

La selezione degli asteroidi target per questa tesi ha seguito un approccio sistematico basato su criteri scientifici e operativi. Il processo è stato suddiviso in più fasi:

1. **Analisi delle Caratteristiche Orbitali:** Sono stati considerati asteroidi con un semiasse maggiore vicino a 1 AU, bassa eccentricità e inclinazione ridotta, in modo da ridurre i costi propulsivi e la complessità della missione.

semiasse minimo	semiasse massimo	eccentricità massima	inclinazione massima
0.9 AU	1.1 AU	0.2	2 deg

Tabella 2.1: Restrizioni sui parametri orbitali

2. **Rilevanza Scientifica e Rischio:** È stata valutata la presenza degli asteroidi nelle liste di rischio internazionali, come la risk list dell'ESA, oltre che il rischio associato alla possibile portata dei danni da impatto, legata alla dimensione del corpo celeste (diametro minimo 40 mt).

2.3.2 Asteroidi Target

Questa metodologia ha permesso di identificare i NEAs più adatti per le analisi dettagliate. [1]

Asteroide	Semiasse (AU)	Eccentricità	Inclinazione (deg)	Diametro (mt)
2014 QN266	1.0527232	0.09236357	0.48905	16-40
2016 WN55	0.9832905	0.01701998	0.49534	21-50
2020 PJ6	0.9614686	0.09914818	0.80904	21-50
2007 CS5	0.9803157	0.17253827	0.75207	30-70

Tabella 2.2: Asteroidi Target

Tutti questi asteroidi rientrano tra i cosiddetti asteroidi *Unnumbered*, ovvero corpi celesti che a causa delle poche osservazioni presentano alcuni dati incompleti o non sufficientemente dettagliati.

2014 QN266

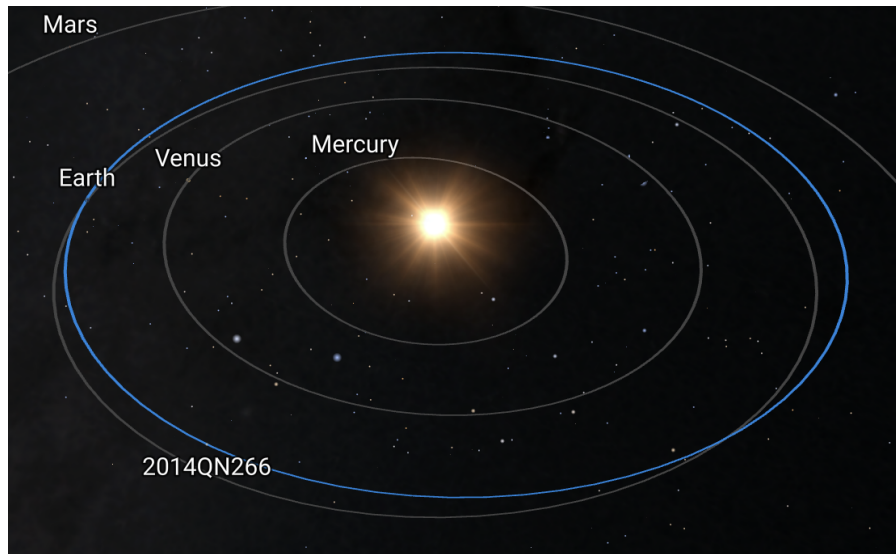


Figura 2.2: orbita di 2014 QN266 [1]

2014 QN266 è un asteroide di tipo **Apollo**, di diametro incerto tra i 16 e i 40 metri, che avrà il suo prossimo passaggio ravvicinato alla Terra nel settembre 2027 secondo le attuali stime.

parametro	simbolo	valore
semiasse maggiore	a	1.052724 AU
eccentricità	e	0.092364
inclinazione	i	0.4890 deg
periodo orbitale	P	394.5208 days
magnitudine assoluta	H	26.1 mag
longitudine del nodo ascendente	Ω	171.1148 °
argomento del perielio	ω	61.6623 °
MOID	-	0.000770 AU
anomalia media	M	231.34698 °

Tabella 2.3: Parametri orbitali di 2014 QN266

2016 WN55

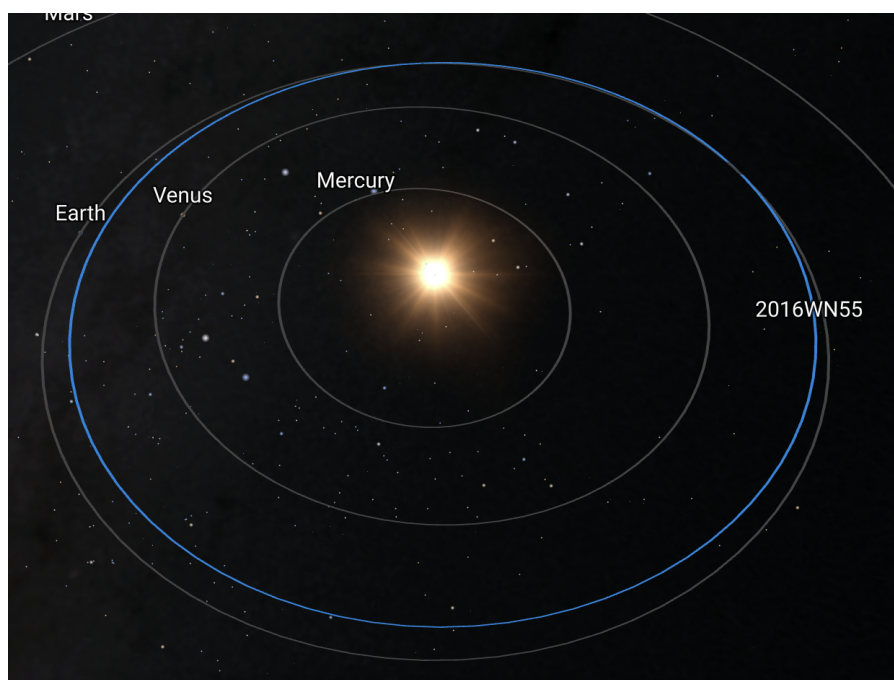


Figura 2.3: orbita di 2016 WN55 [1]

2016 WN55 è un asteroide di tipo **Atira**, di diametro che potrebbe arrivare fino a 50 metri, che avrà il suo prossimo passaggio ravvicinato alla Terra nel marzo 2032, stando alle stime attuali.

parametro	simbolo	valore
semiasse maggiore	a	0.960882 AU
eccentricità	e	0.022800
inclinazione	i	0.8441 °
periodo orbitale	P	344.0358 days
magnitudine assoluta	H	25.5 mag
longitudine del nodo ascendente	Ω	312.9125 °
argomento del perielio	ω	263.0869 °
MOID	-	0.013785 AU
anomalia media	M	345.87584 °

Tabella 2.4: Parametri orbitali di 2016 WN55

2020 PJ6

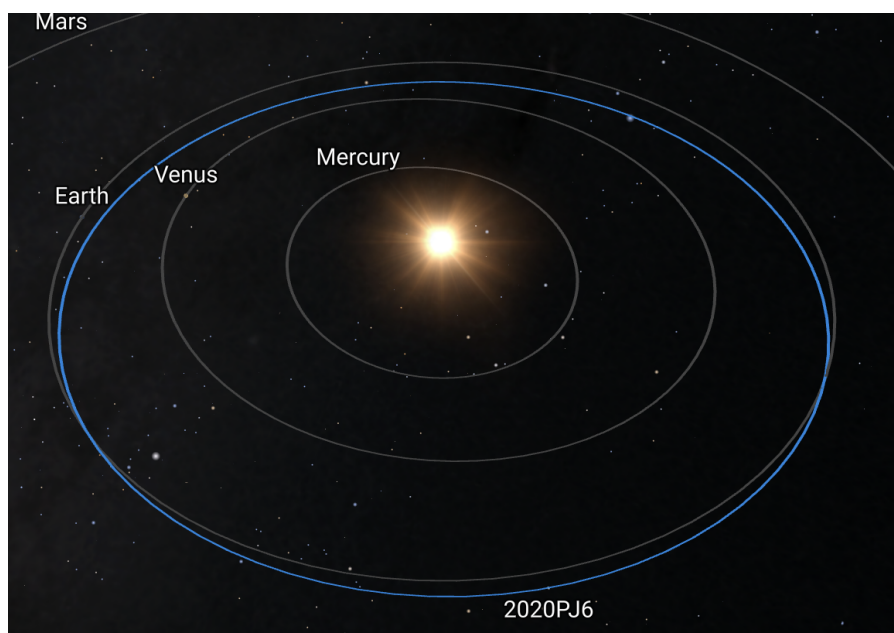


Figura 2.4: orbita di 2020 PJ6 [1]

2020 PJ6 è un asteroide di tipo **Aten**, di diametro tra i 21 e i 50 metri, che avrà il suo prossimo passaggio ravvicinato alla Terra nel febbraio 2036, stando alle stime attuali.

parametro	simbolo	valore
semiasse maggiore	a	0.961471 AU
eccentricità	e	0.099132
inclinazione	i	0.8089 °
periodo orbitale	P	344.3521 days
magnitudine assoluta	H	25.6 mag
longitudine del nodo ascendente	Ω	141.3608 °
argomento del perielio	ω	314.2313 °
MOID	-	0.00205 AU
anomalia media	M	31.10756 °

Tabella 2.5: Parametri orbitali di 2020 PJ6

2007 CS5

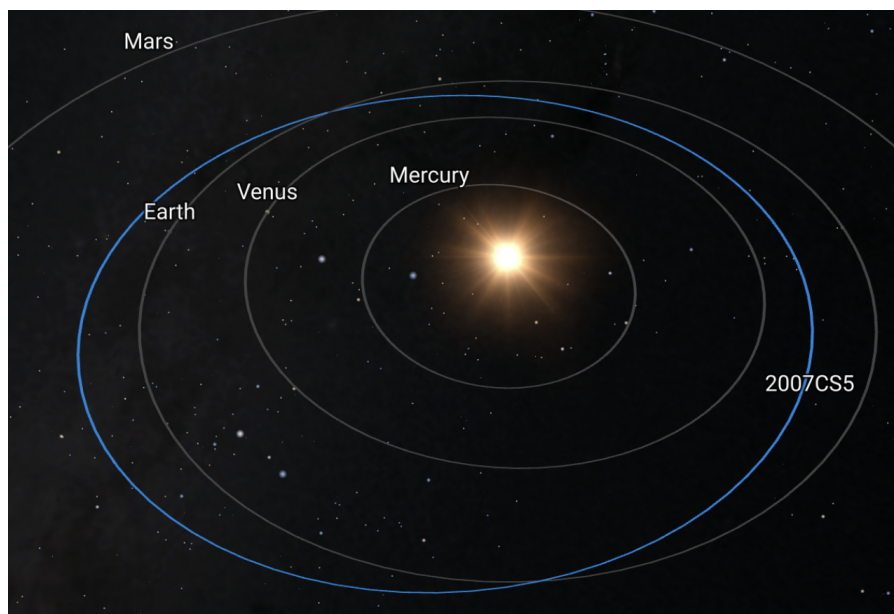


Figura 2.5: orbita di 2007 CS5 [1]

2007 CS5 è un asteroide di tipo **Aten**, di diametro stimato tra i 30 e i 70 metri, che avrà il suo prossimo passaggio ravvicinato alla Terra il 30 gennaio 2040, stando alle attuali stime.

parametro	simbolo	valore
semiasse maggiore	a	0.980313 AU
eccentricità	e	0.172523
inclinazione	i	0.7521 °
periodo orbitale	P	354.5240 days
magnitudine assoluta	H	24.6 mag
longitudine del nodo ascendente	Ω	125.3692 °
argomento del perielio	ω	261.3892 °
MOID	-	0.000738 AU
anomalia media	M	12.68338 °

Tabella 2.6: Parametri orbitali di 2007 CS5

Capitolo 3

Cenni di propulsione spaziale

3.1 Principi della propulsione spaziale

La propulsione spaziale si basa sull'applicazione dei principi fondamentali della meccanica classica, in particolare sul principio di conservazione della quantità di moto. A differenza dei sistemi propulsivi operanti in atmosfera, che sfruttano l'interazione con il fluido circostante (aria), nello spazio il veicolo non può appoggiarsi a un mezzo per generare spinta. Per ottenere un'accelerazione, è necessario espellere massa ad alta velocità in direzione opposta a quella desiderata, generando una reazione che si manifesta come forza propulsiva secondo la terza legge della dinamica di Newton.[19]

Considerando un veicolo spaziale che espelle massa con velocità costante rispetto al suo centro di massa, la conservazione della quantità di moto per un sistema isolato può essere scritta considerando le quantità di moto prima e dopo l'espulsione di una piccola quantità di propellente. Tale bilancio si esprime come:

$$mv = (m - dm_p)(V + dV) + dm_p(V - c) \quad (3.1)$$

Dove:

- m è la massa istantanea del veicolo spaziale;
- V è la velocità del veicolo;
- c è la velocità efficace di scarico dei gas;
- dm_p è la variazione infinitesima della massa dovuta all'espulsione del propellente.

Riordinando i termini ed eliminando i contributi di ordine superiore, si giunge alla forma differenziale:

$$m dV + c dm = 0 \quad (3.2)$$

Definendo la **portata massica** $\dot{m} = -\frac{dm}{dt}$ (positiva, in quanto esprime il flusso di massa espulsa), possiamo scrivere la **spinta** T come:

$$T = \dot{m} c \quad (3.3)$$

Questa rappresenta la relazione fondamentale della propulsione spaziale: la forza generata è proporzionale al prodotto tra la quantità di massa espulsa nell'unità di tempo e la velocità con cui tale massa viene espulsa.

Un altro parametro fondamentale in propulsione spaziale è l'**impulso totale** I , definito come la quantità complessiva di spinta generata durante l'intero funzionamento del propulsore:

$$I = \int T dt \quad (3.4)$$

L'impulso totale rappresenta dunque la quantità di moto trasmessa al veicolo spaziale. A partire da questa grandezza, si può definire l'**impulso specifico** I_{sp} come il rapporto tra l'impulso totale e il peso del propellente consumato:

$$I_{sp} = \frac{I}{m_p g_0} \quad (3.5)$$

dove m_p è la massa totale di propellente espulsa e g_0 è l'accelerazione di gravità standard.

Sviluppando questa relazione e tenendo conto della definizione di spinta, si dimostra che l'impulso specifico coincide con il rapporto tra la velocità efficace di scarico c e g_0 :

$$I_{sp} = \frac{c}{g_0} \quad (3.6)$$

L'impulso specifico rappresenta quindi la quantità di spinta generata per ogni unità di massa di propellente consumata per secondo e misura l'efficienza del sistema propulsivo. Esso costituisce una misura indiretta della velocità di espulsione dei gas, e un valore elevato di impulso specifico indica la capacità di ottenere elevate variazioni di velocità consumando una minore quantità di propellente, rendendo più efficienti le manovre e riducendo significativamente la massa totale necessaria a bordo del veicolo spaziale. Maggiore è l'impulso specifico, minore sarà la massa di propellente richiesta per ottenere una determinata variazione di velocità, rendendolo un parametro fondamentale per la valutazione e il confronto di diverse tecnologie di propulsione spaziale.

Partendo da queste relazioni, è possibile derivare l'incremento di velocità ottenibile a seguito dell'espulsione di una data quantità di propellente. A partire dalla relazione di conservazione della quantità di moto, è possibile ricavare l'incremento di velocità ottenibile nel caso ideale in cui la spinta sia l'unica forza presente e sia applicata parallelamente alla velocità. Integrando la relazione differenziale e considerando che la spinta può essere scritta come $T = \dot{m}c$, si ottiene:

$$\Delta V = \int_{t_0}^{t_f} \frac{T}{m} dt \quad (3.7)$$

Effettuando un cambio di variabile e passando alla massa, si può riscrivere l'integrale come:

$$\Delta V = \int_{m_0}^{m_f} \frac{c}{m} dm \quad (3.8)$$

Integrando, si arriva alla **legge del razzo di Tsiolkovsky**, che esprime la variazione totale di velocità ottenibile a partire dalla massa iniziale m_0 e finale m_f :

$$\Delta V = c \ln \left(\frac{m_0}{m_f} \right) \quad (3.9)$$

Questa relazione è particolarmente importante poiché mostra in maniera esplicita il legame tra la variazione di velocità ottenibile e la quantità di propellente consumata. Essa evidenzia come, a parità di incremento di velocità richiesto, l'impiego di propulsori caratterizzati da elevato impulso specifico permetta di ridurre significativamente la massa di propellente necessaria, aspetto cruciale nelle missioni spaziali per massimizzare il carico utile o ridurre la massa totale del veicolo.

3.2 Classificazione

I sistemi di propulsione spaziale possono essere distinti in due grandi categorie: **propulsione chimica** e **propulsione elettrica**, a seconda della sorgente di energia utilizzata per accelerare il propellente.

Propulsione chimica

La propulsione chimica utilizza l'energia liberata da reazioni chimiche per accelerare i gas di scarico. Tali sistemi sono caratterizzati da spinte elevate, adatte per decolli, inserimenti orbitali e manovre rapide, ma con un basso impulso specifico, il che comporta un elevato consumo di propellente e una limitata durata operativa. Proprio per questo motivo, a causa degli alti consumi, la propulsione chimica non risulta adatta per missioni interplanetarie di lunga durata, dove è necessario ricorrere a sistemi più efficienti come quelli di propulsione elettrica, in particolare i propulsori ionici e a effetto Hall, caratterizzati da impulsi specifici elevati e bassi consumi di propellente.

Propulsione elettrica

La propulsione elettrica sfrutta campi elettrici (e/o magnetici) per accelerare il propellente a velocità molto elevate, garantendo impulsi specifici estremamente superiori rispetto ai sistemi chimici. Questo permette di ridurre drasticamente la quantità di propellente necessario, rendendola ideale per missioni di lunga durata. Tuttavia, le spinte ottenibili sono molto basse, rendendola inadatta a manovre impulsive.

Un aspetto fondamentale della propulsione elettrica è il legame tra la **potenza elettrica fornita** e la spinta generata. Definendo la potenza elettrica disponibile come P_e , il rendimento complessivo del propulsore come η , la spinta T e la velocità di scarico c , la potenza della spinta è data da:

$$P_T = \frac{1}{2} \dot{m} c^2 = \frac{Tc}{2} = \eta P_e \quad (3.10)$$

La potenza richiesta al sistema propulsivo è quindi direttamente proporzionale al prodotto tra la spinta e la velocità efficace di scarico. Questo significa, ad esempio, che per un dato valore di potenza disponibile a bordo (determinata dalla capacità dei pannelli solari o del sistema energetico), se si sceglie di aumentare la velocità di scarico per ottenere un impulso specifico maggiore, la spinta disponibile si ridurrà proporzionalmente. In pratica, a bordo di satelliti con potenze limitate (ad esempio 1 - 2 kW), ottenere elevate velocità di scarico implica avere spinte nell'ordine dei millinewton, rendendo la propulsione elettrica adatta a manovre lente ma molto efficienti dal punto di vista del consumo di propellente. Questo evidenzia il tipico compromesso della propulsione elettrica: ottenere alte efficienze propulsive a scapito della spinta. Tra i sistemi elettrici più diffusi si distinguono:

- **Ion thrusters:** utilizzano campi elettrici per accelerare ioni (Isp: 2000 - 5000 s). Appartengono alla categoria dei propulsori elettrostatici, di cui sono i principali esponenti.
- **Hall thrusters:** basati su campi elettromagnetici per accelerare plasma. In questo caso si parla di propulsione elettromagnetica; questi propulsori sono più compatti e forniscono spinte maggiori rispetto ai propulsori ionici, a fronte di impulsi specifici minori.

- **Resistojets** e **Arcjets** (meno comuni per manovre principali, ma usati per controlli fini): in questo caso si parla di propulsione elettrotermica, dato che la potenza elettrica è utilizzata per scaldare il propellente (gas) tramite resistenze elettriche (resistojets) oppure archi elettrici (arcjets). I primi raggiungono impulsi specifici leggermente superiori ai propulsori chimici monopropellente, mentre i secondi possono raggiungere efficienze maggiori, a fronte di grandi dispendi energetici.

Di seguito è riportata una tabella di confronto tra i principali sistemi propulsivi utilizzati nello spazio, che mette in relazione impulso specifico e spinta:[19]

Sistema	Impulso Specifico (s)	Spinta (N)
Propulsione chimica liquida (monopropellente)	200-250	0.01 - 100
Propulsione chimica liquida (bipropellente)	300-450	0.1 - 10 ⁷
Ion thrusters	2000-5000	< 0.2
Hall thrusters	1500-2000	< 2
Resistojets	200-350	0.2-0.3
Arcjets	400-1000	0.2-1

Tabella 3.1: Confronto tra principali sistemi di propulsione spaziale

Come si evince dalle grandi differenze nelle prestazioni, ogni tecnologia propulsiva occupa una determinata nicchia nell'industria spaziale, a seconda del tipo di missione. Lo stato dell'arte per le missioni interplanetarie, soprattutto per veicoli spaziali di piccole e medie dimensioni, è rappresentato dai propulsori ionici. Questi sistemi, grazie all'elevato impulso specifico e ai ridotti consumi di propellente, si sono affermati come la soluzione più efficiente per affrontare missioni di lunga durata dove la massa di propellente deve essere minimizzata. Nella sezione successiva verrà approfondito il funzionamento di questi propulsori e le loro principali caratteristiche operative.

3.2.1 Propulsori a Ioni

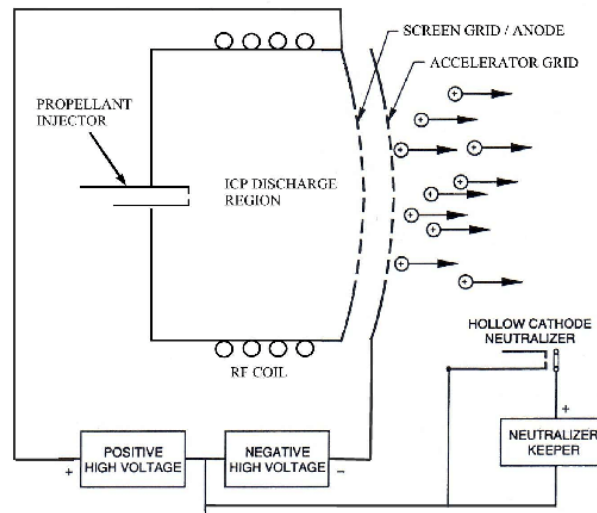


Figura 3.1: Schema di un propulsore a Ioni

I propulsori ionici rappresentano una delle tecnologie di propulsione elettrica più avanzate e consolidate per missioni spaziali che richiedono alte efficienze e lunghi tempi di operatività. Il principio di funzionamento si basa sull'accelerazione elettrostatica di ioni generati a partire da un gas neutro, tipicamente gas nobili come lo xeno, scelto per la sua elevata massa atomica, che consente di ottenere una spinta maggiore a parità di velocità di espulsione, e per la bassa energia di ionizzazione, che rende il processo più efficiente dal punto di vista energetico.[20]

Principio di funzionamento

Il funzionamento di un propulsore ionico può essere suddiviso in tre fasi principali:

1. **Ionizzazione:** Il gas neutro viene ionizzato mediante bombardamento elettronico o altri metodi, generando un plasma costituito da ioni positivi e elettroni.
2. **Accelerazione:** Gli ioni positivi vengono estratti e accelerati tramite un campo elettrico generato da una coppia di griglie (griglia di estrazione e griglia di accelerazione). Il potenziale elettrico applicato tra le griglie conferisce agli ioni un'energia cinetica elevata, facendoli raggiungere velocità comprese tra 30 e 50 km/s. La velocità di scarico v_e può essere determinata dalla relazione:

$$v_e = \sqrt{\frac{2qV}{m_+}} \quad (3.11)$$

dove q è la carica dell'ione, V è il potenziale netto applicato tra le griglie di accelerazione e m_+ è la massa dello ione accelerato. Tale relazione mostra come la velocità di scarico, e dunque l'impulso specifico, dipendano direttamente dal voltaggio applicato e dalla natura del gas utilizzato.

3. **Neutralizzazione:** Un fascio di elettroni viene emesso all'uscita del propulsore per neutralizzare la carica positiva del fascio ionico, evitando che il veicolo accumuli carica elettrica e garantendo la stabilità del propulsore.

La spinta generata da un propulsore ionico può essere espressa come:

$$T = \dot{m}c = \dot{m}v_e \quad (3.12)$$

dove \dot{m} è la portata massica e v_e è la velocità di espulsione degli ioni.

Caratteristiche operative

I propulsori ionici sono caratterizzati da un impulso specifico elevato, tipicamente compreso tra 2000 e 5000 s, che consente di ridurre notevolmente la massa di propellente rispetto ai sistemi chimici. La spinta prodotta è generalmente bassa, tra pochi millinewton e alcune centinaia di millinewton, ma sufficiente per missioni di lunga durata. Inoltre, questi sistemi presentano un'elevata efficienza propulsiva, con efficienze complessive tipicamente comprese tra il 60 e il 70%.

Grazie a queste caratteristiche, i propulsori ionici risultano ideali per missioni interplanetarie, dove è fondamentale ridurre il consumo di propellente, per il mantenimento e controllo orbitale di satelliti geostazionari, che richiedono un'alta precisione con minimi consumi, e per missioni di esplorazione robotica nello spazio profondo, dove le lunghe durate e le limitazioni di massa impongono l'uso di sistemi altamente efficienti.

Si osserva un legame diretto tra il voltaggio operativo del propulsore (e di conseguenza la potenza) e l'impulso specifico: infatti propulsori ionici più energivori saranno anche più efficienti dal punto di vista propulsivo, mentre i propulsori di piccole dimensioni adatti a satelliti con budget energetici ridotti avranno impulsi specifici minori.

Nella tabella seguente si riporta un confronto tra i principali propulsori ionici attualmente in commercio con sufficiente *flight heritage*, ossia sistemi che hanno già volato nello spazio e dimostrato affidabilità operativa in missioni reali. Questo aspetto è strettamente legato al concetto di *Technology Readiness Level* (TRL), che valuta il grado di maturità tecnologica di un sistema: i propulsori presentati nella tabella hanno raggiunto un TRL pari a 9, corrispondente alla piena dimostrazione operativa in ambiente spaziale.[21]

Propulsore	Potenza (kW)	Isp (s)	Spinta (mN)	Efficienza η (%)	Diametro (cm)
Busek BIT-3	0.060	2200	1.1	50	20
Ariane Group RIT-10	0.65	3200	15	65	18
NASA NSTAR	0.5 - 2.3	3100	20 - 95	62	30
Ariane Group RIT-22	up to 5.5	2500 - 6400	40 - 250	69	30

Tabella 3.2: Confronto tra principali propulsori ionici TRL 9

Capitolo 4

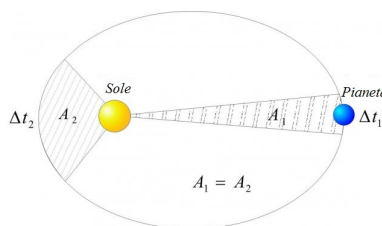
Richiami di meccanica orbitale

In questo capitolo vengono richiamati i principali concetti e le equazioni fondamentali dell'astrodinamica e della meccanica del volo orbitale, al fine di fornire le basi teoriche necessarie per l'analisi e la progettazione delle missioni spaziali. Tali nozioni sono indispensabili per comprendere l'evoluzione orbitale di un corpo celeste o di un veicolo spaziale soggetto all'attrazione gravitazionale.

4.1 Leggi di Keplero

Le leggi di Keplero descrivono il moto dei pianeti e, più in generale, dei corpi che orbitano attorno a un centro di forza attrattiva, come una stella o un pianeta. Tali leggi rappresentano una descrizione empirica del moto orbitale e sono fondamentali per comprendere la dinamica orbitale dei corpi celesti.[22]

- Prima legge (legge delle orbite): Ogni corpo celeste si muove lungo un'orbita ellittica, con il corpo attrattore (ad esempio il Sole per i pianeti, la Terra per i satelliti artificiali) situato in uno dei fuochi dell'ellisse.
- Seconda legge (legge delle aree): Il raggio vettore che congiunge il corpo attrattore al corpo orbitante spazza aree uguali in tempi uguali. Questo implica che la velocità orbitale di un corpo non è costante, ma varia lungo l'orbita: è massima al perielio e minima all'afelio.



- Terza legge (legge dei periodi): Il quadrato del periodo orbitale è proporzionale al cubo del semiasse maggiore dell'orbita:

$$T^2 = \frac{4\pi^2}{\mu} a^3 \quad (4.1)$$

dove $\mu = GM$ è il parametro gravitazionale standard del corpo attrattore. Questa legge stabilisce una relazione fondamentale tra la durata dell'orbita e le dimensioni della stessa, utile per il calcolo dei periodi orbitali dei corpi celesti.

4.2 Problema degli n -corpi

Il problema degli n -corpi riguarda lo studio del moto di un sistema costituito da n corpi che si attraggono reciprocamente secondo la legge di gravitazione universale. La legge di gravitazione di Newton afferma che due masse m_1 e m_2 si attraggono con una forza pari a:

$$\mathbf{F} = G \frac{m_1 m_2}{r^2} \hat{\mathbf{r}} \quad (4.2)$$

dove G è la costante gravitazionale universale, r è la distanza tra i due corpi e $\hat{\mathbf{r}}$ è il versore diretto da uno all'altro.

Nel sistema degli n corpi, l'equazione del moto per il corpo i -esimo è:

$$\ddot{\mathbf{r}}_i = G \sum_{\substack{j=1 \\ j \neq i}}^n m_j \frac{\mathbf{r}_j - \mathbf{r}_i}{|\mathbf{r}_j - \mathbf{r}_i|^3} \quad (4.3)$$

A causa della difficoltà di risolvere questo sistema complesso, spesso si adotta l'approssimazione a due corpi, trascurando l'influenza gravitazionale degli altri corpi. Tuttavia, nelle missioni reali, è necessario tener conto delle perturbazioni di terzi corpi (come Sole, Luna o altri pianeti) per ottenere risultati accurati.

4.2.1 Problema dei 2 corpi

Nel problema dei due corpi, si considera un corpo di massa molto piccola rispetto al corpo attrattore principale (ad esempio, un satellite rispetto alla Terra), trascurando le perturbazioni esterne. L'equazione del moto è:

$$\ddot{\mathbf{r}} = -\frac{\mu}{r^3} \mathbf{r} \quad (4.4)$$

dove μ è il parametro gravitazionale del corpo attrattore e \mathbf{r} è il vettore posizione. Poiché il campo gravitazionale è un campo conservativo, l'energia totale del sistema si conserva durante il moto. Questa energia è costituita dalla somma dell'energia cinetica e dell'energia potenziale gravitazionale. In meccanica orbitale si fa riferimento all'energia specifica, ovvero l'energia per unità di massa, che rimane costante in assenza di perturbazioni esterne:

$$\varepsilon = \frac{v^2}{2} - \frac{\mu}{r} = \text{costante} \quad (4.5)$$

Anche il momento angolare specifico del sistema si conserva:

$$\mathbf{h} = \mathbf{r} \times \mathbf{v} = \text{costante} \quad (4.6)$$

Esso è sempre perpendicolare al piano orbitale e permette di stabilire tale piano una volta fissate le condizioni iniziali. La conservazione del momento angolare implica inoltre che il moto rimane planare.

Equazione vis-viva

Poiché l'energia specifica del sistema si conserva, è possibile derivare un'importante relazione tra la velocità orbitale e la distanza dal centro di forza, nota come equazione vis-viva:

$$v^2 = \mu \left(\frac{2}{r} - \frac{1}{a} \right) \quad (4.7)$$

Questa equazione consente di calcolare la velocità in qualunque punto dell'orbita, una volta noti il semiasse maggiore a e la distanza r . Essa evidenzia come la velocità sia massima al perielio e minima all'afelio, in accordo con la seconda legge di Keplero.

4.2.2 Equazione della traiettoria

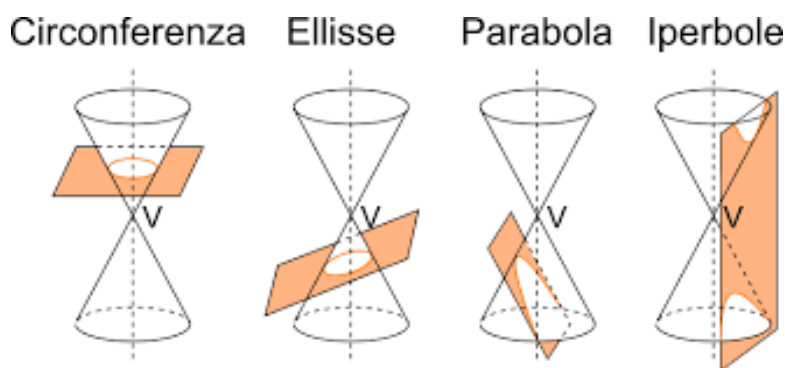


Figura 4.1: Sezioni di coniche

La soluzione generale dell'equazione del moto porta all'equazione della traiettoria, che descrive una conica:

$$r = \frac{h^2/\mu}{1 + e \cos \theta} \quad (4.8)$$

dove h è il modulo del momento angolare specifico, e è l'eccentricità dell'orbita e θ è l'anomalia vera. A seconda del valore di e , la traiettoria sarà:

- $e = 0$: orbita circolare
- $0 < e < 1$: orbita ellittica
- $e = 1$: traiettoria parabolica
- $e > 1$: traiettoria iperbolica

Questa relazione generale permette di descrivere tutte le possibili orbite kepleriane a seconda delle condizioni iniziali del moto e consente di determinare in ogni istante la posizione del corpo lungo la sua orbita, noti i parametri orbitali.

Si definisce quindi il *semilatus rectum*

$$p = \frac{h^2}{\mu} = a(1 - e^2) \quad (4.9)$$

e la relazione che lega il semiasse maggiore a all'energia specifica dell'orbita:

$$\varepsilon = -\frac{\mu}{2a} \quad (4.10)$$

Questa relazione permette di classificare le orbite a seconda dell'energia e dell'eccentricità, dato che il semiasse maggiore è strettamente legato all'eccentricità dell'orbita tramite le relazioni $r_p = a(1 - e)$ e $r_a = a(1 + e)$.

Tipo di orbita	a	e	Energia
Circolare	> 0	0	< 0
Ellittica	> 0	< 1	< 0
Parabolica	∞	1	0
Iperbolica	< 0	> 1	> 0

Tabella 4.1: Classificazione delle orbite in funzione di a , e ed energia.

4.2.3 Velocità caratteristiche

Dalla trattazione precedente derivano alcune velocità fondamentali che caratterizzano il moto orbitale e che rappresentano valori di riferimento per la dinamica orbitale.

Velocità circolare La velocità necessaria per mantenere un'orbita circolare di raggio r attorno a un corpo centrale di massa M è data da:

$$V_c = \sqrt{\frac{\mu}{r}} \quad (4.11)$$

dove $\mu = GM$ è il parametro gravitazionale del corpo centrale.

Velocità di fuga La velocità minima ($V_\infty \rightarrow 0$ e $r_\infty \rightarrow \infty$) necessaria per sfuggire all'attrazione gravitazionale di un corpo, partendo da una distanza r , è la velocità di fuga:

$$\begin{aligned} \frac{V_e^2}{2} - \frac{\mu}{r} &= \frac{V_\infty^2}{2} - \frac{\mu}{r_\infty} = 0 \\ V_e &= \sqrt{\frac{2\mu}{r}} = \sqrt{2}V_c \end{aligned} \quad (4.12)$$

Velocità al perielio e all'afelio Per un'orbita ellittica, la velocità del corpo varia lungo la traiettoria ed è massima al perielio (punto più vicino al corpo centrale) e minima all'afelio (punto più lontano). Tali velocità si determinano mediante l'equazione vis-viva:

$$v_p = \sqrt{\mu \left(\frac{2}{r_p} - \frac{1}{a} \right)}, \quad v_a = \sqrt{\mu \left(\frac{2}{r_a} - \frac{1}{a} \right)} \quad (4.13)$$

dove r_p è la distanza al perielio, r_a la distanza all'afelio e a il semiasse maggiore dell'orbita.

Velocità di eccesso iperbolico Nel caso in cui si effettui un escape da un'orbita chiusa (ellittica o circolare) e la velocità quando $r_\infty \rightarrow \infty$ è diversa da zero, questo *eccesso* prende il nome di velocità di eccesso iperbolico. Il satellite sarà quindi su un'orbita aperta iperbolica con semiasse $a < 0$.

$$-\frac{\mu}{2a} = \frac{V^2}{2} - \frac{\mu}{r} = \frac{V_\infty^2}{2}$$

$$V_\infty = \sqrt{-\frac{\mu}{a}} \quad (4.14)$$

4.3 Sistemi di riferimento

Nello studio del moto orbitale è fondamentale introdurre dei sistemi di riferimento adatti a descrivere con precisione la posizione e il moto dei corpi celesti. Un sistema di riferimento è definito da un'origine, che rappresenta il punto fisso rispetto al quale vengono misurate le posizioni, e da un piano fondamentale, rispetto al quale vengono definiti gli angoli orbitali. La scelta del sistema di riferimento permette di esprimere in modo univoco le grandezze orbitali e di formulare correttamente le equazioni del moto, facilitando la descrizione e l'analisi delle traiettorie.[3]

4.3.1 Sistema Eliocentrico

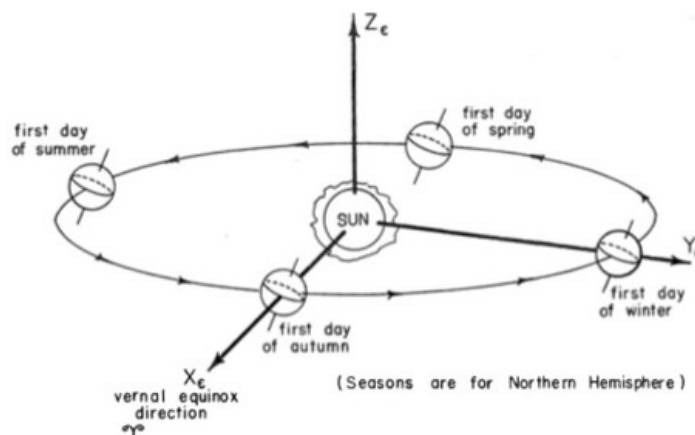


Figura 4.2: Sistema Eliocentrico - eclittica

Il sistema di riferimento eliocentrico è un sistema cartesiano con origine nel centro del Sole. È utilizzato principalmente per descrivere il moto dei pianeti e degli asteroidi all'interno del sistema solare. Il piano fondamentale di questo sistema è il piano dell'eclittica, ovvero il piano dell'orbita terrestre attorno al Sole. L'asse X_e è orientato verso il punto gamma (punto dell'equinozio di primavera), l'asse Z_e è perpendicolare al piano dell'eclittica e punta verso il polo nord dell'eclittica, mentre l'asse Y_e completa la terna destrorsa risultando ortogonale a entrambi. Questo sistema è particolarmente utile per descrivere le orbite planetarie e le missioni interplanetarie. Sebbene non sia perfettamente inerziale a causa dei movimenti di precessione e nutazione del piano dell'eclittica, tali effetti risultano trascurabili per missioni di breve durata. Si osservi che, proprio a causa di questi movimenti, il

piano dell'eclittica si sposta lentamente rispetto alle stelle fisse, dando origine alla differenza tra anno sidereo e anno solare: il primo rappresenta il tempo necessario alla Terra per completare un'orbita rispetto alle stelle fisse (pari a circa 365.256 giorni), mentre il secondo è il tempo che intercorre tra due successivi passaggi del Sole all'equinozio di primavera (pari a circa 365.242 giorni). L'anno sidereo risulta quindi 20 minuti e 24 secondi più lungo dell'anno solare.

4.3.2 Sistema Geocentrico Equatoriale

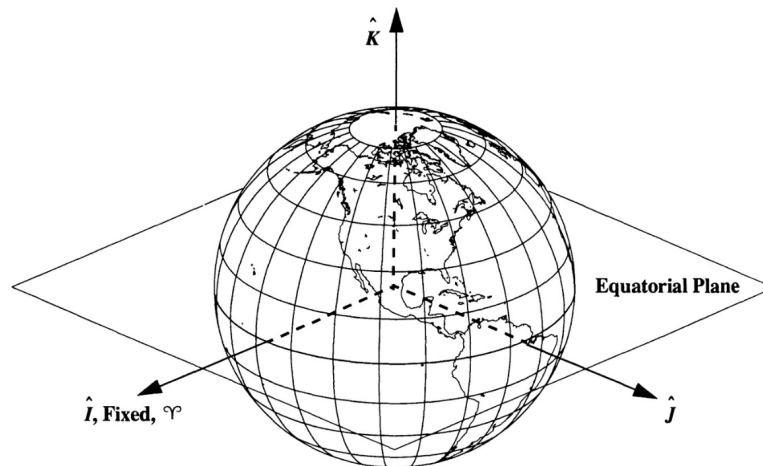


Figura 4.3: Sistema Geocentrico equatoriale

Il sistema geocentrico è un sistema di riferimento cartesiano con origine nel centro della Terra. È il sistema più adatto per descrivere le orbite dei satelliti artificiali terrestri e le missioni in prossimità della Terra. Anche in questo caso, l'asse **I** è orientato verso il punto gamma, mentre l'asse **K** è perpendicolare al piano equatoriale terrestre e diretto verso l'emisfero celeste contenente la stella Polaris (Polo Nord Celeste). L'asse **J** completa la terna destrorsa risultando ortogonale agli altri due. Questo sistema di riferimento, detto anche Earth-Centred Inertial system (ECI), non ruota con la Terra attorno al proprio asse ma rimane fisso rispetto alle stelle lontane, pur seguendo il moto di rivoluzione attorno al Sole. Può quindi essere considerato un sistema inerziale per lo studio del moto orbitale. Risulta particolarmente utile per descrivere le orbite di oggetti in prossimità della Terra e per analizzare con precisione le traiettorie dei satelliti artificiali.

4.3.3 Sistema Perifocale

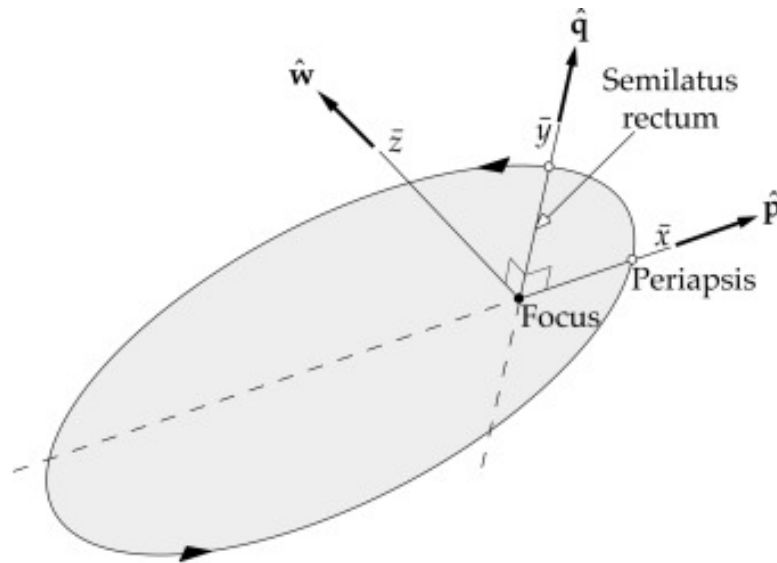


Figura 4.4: Sistema Perifocale

Il sistema perifocale è un sistema di riferimento locale associato al piano orbitale di un corpo. L'origine coincide con il fuoco dell'orbita (dove si trova il corpo centrale, ad esempio il Sole o la Terra). L'asse \hat{p} è orientato verso il periastro, mentre l'asse \hat{q} è perpendicolare al piano orbitale, e l'asse \hat{w} è perpendicolare al piano dell'orbita, risultando parallelo al momento angolare specifico del moto. Questo sistema è particolarmente utile per descrivere l'orbita del corpo in maniera semplice, poiché nel piano orbitale la traiettoria è una semplice conica e le equazioni del moto si semplificano notevolmente.

4.4 Elementi orbitali classici

Per descrivere in maniera completa l'orbita di un corpo attorno a un attrattore centrale, si utilizzano i cosiddetti **elementi orbitali classici**, che definiscono univocamente la traiettoria nello spazio. Questi sei parametri permettono di descrivere la forma, l'orientamento e la posizione del corpo lungo l'orbita in un dato istante.

Essi sono:

- **Semiassse maggiore a** : misura la dimensione dell'orbita ed è la metà della somma tra il perielio e l'afelio. In un'orbita ellittica, rappresenta la distanza media dal corpo attrattore. Per orbite iperboliche, il semiassse maggiore assume valore negativo, mentre nelle orbite paraboliche tende a infinito.
- **Eccentricità e** : descrive la forma dell'orbita, indicando quanto essa sia allungata rispetto a una circonferenza. L'eccentricità misura anche la distanza del centro dell'orbita dal fuoco. I valori

possibili sono:

$$\begin{cases} e = 0 & \text{orbita circolare} \\ 0 < e < 1 & \text{orbita ellittica} \\ e = 1 & \text{orbita parabolica} \\ e > 1 & \text{orbita iperbolica} \end{cases}$$

- **Inclinazione i :** è l'angolo tra il piano orbitale e il piano fondamentale del sistema di riferimento (ad esempio, il piano equatoriale per il sistema geocentrico o il piano dell'eclittica per il sistema eliocentrico).
- **Longitudine del nodo ascendente Ω :** è l'angolo compreso tra l'asse X del sistema di riferimento e la direzione del nodo ascendente, ovvero il punto in cui il corpo attraversa il piano fondamentale andando da sud a nord, misurato nel piano fondamentale rispetto a un punto fisso, come il punto γ (equinozio di primavera).
- **Argomento del periapside ω :** è l'angolo compreso tra il nodo ascendente e il periapside dell'orbita, misurato nel piano orbitale. Specifica la posizione del punto di minima distanza dal corpo centrale rispetto al nodo ascendente.
- **Anomalia vera v :** è l'angolo compreso tra il pericentro e la posizione attuale del corpo lungo l'orbita, misurato nel piano orbitale. Questo parametro varia continuamente con il tempo e permette di localizzare il corpo lungo la sua traiettoria.

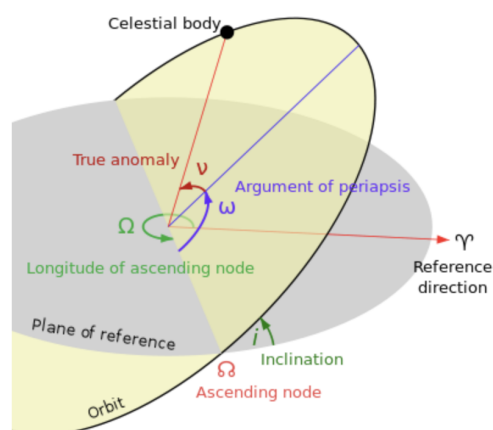


Figura 4.5: Elementi orbitali classici [2]

Simbolo	Nome	Significato
a	Semiassse maggiore	Dimensione dell'orbita.
e	Eccentricità	Forma dell'orbita. Indica quanto è schiacciata rispetto a una circonferenza.
i	Inclinazione	Inclinazione del piano orbitale rispetto al piano fondamentale.
Ω	Longitudine del nodo ascendente	Orientamento della linea dei nodi rispetto all'asse di riferimento.
ω	Argomento del pericentro	Orientamento del pericentro rispetto al nodo ascendente.
v	Anomalia vera	Posizione del corpo lungo l'orbita.

Tabella 4.2: Riepilogo degli elementi orbitali classici.

Questi sei parametri permettono di determinare in ogni istante la posizione e la velocità del corpo lungo la sua traiettoria orbitale.

4.5 Manovre orbitali

Le manovre orbitali permettono di modificare una o più caratteristiche dell'orbita di un corpo, come la forma, la dimensione, l'orientamento o la posizione lungo la traiettoria. A seconda del tipo di propulsione, le manovre si distinguono in:

- **Manovre impulsive:** variazioni istantanee della velocità (ΔV), applicate in tempi trascurabili rispetto alla dinamica orbitale. Sono tipiche della propulsione chimica e caratterizzate da elevata spinta in tempi molto brevi.
- **Manovre a bassa spinta:** manovre in cui una spinta continua e di bassa intensità è applicata per lunghi periodi, tipiche della propulsione elettrica. Queste richiedono un'analisi più complessa in quanto il moto del satellite viene modificato gradualmente.

Nel seguito verranno descritte nel dettaglio le principali manovre impulsive, con relative formule, e verrà introdotta una trattazione semplificata delle manovre a bassa spinta.

4.5.1 Manovre impulsive

Aggiustamento di apoastro e periaastro

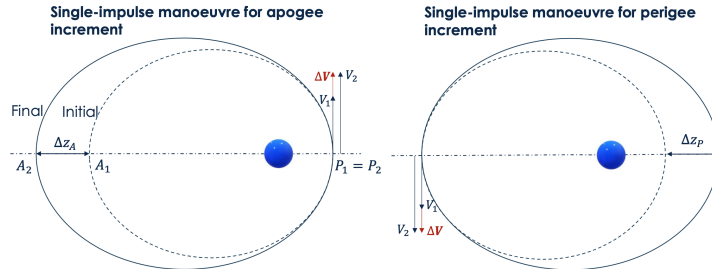


Figura 4.6: Aggiustamento apogeo e perigeo [3]

Queste manovre permettono di variare la quota massima o minima di un'orbita, applicando un impulso tangenziale:

- Caso 1 - innalzamento dell'apoastro: con V_1 velocità di partenza vado a spingere parallelamente ad essa per definire la V_2 e ci si immette in un'orbita con energia maggiore. In questo caso eseguo la manovra al periaastro (nell'abside opposto).
- Caso 2 - innalzamento del periaastro: avrò la situazione opposta, ovvero un ΔV positivo all'apoastro.

Il costo della manovra è quindi:

$$\Delta V = V_2 - V_1 = \sqrt{2 \left(\frac{\mu}{r_P} - \frac{\mu}{r_P - r_{A2}} \right)} - \sqrt{2 \left(\frac{\mu}{r_P} - \frac{\mu}{r_P - r_{A1}} \right)} \quad (4.15)$$

Rotazione della linea degli apsidi

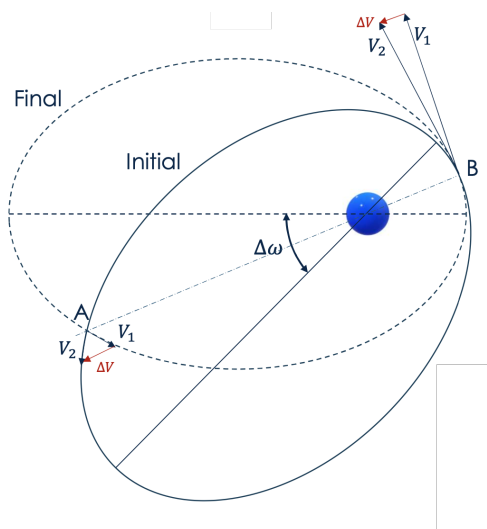


Figura 4.7: Rotazione linea degli apsidi [3]

Questa manovra permette di ruotare l'asse maggiore di un'orbita ellittica. Se applicata in apogeo o perigeo, richiede un impulso trasversale. La variazione di velocità dipende dall'angolo $\Delta\omega$ che si vuole ottenere:

$$\Delta V = 2V \left| \sin\left(\frac{\Delta\omega}{2}\right) \right| = 2\frac{\mu}{h}e \left| \sin\left(\frac{\Delta\omega}{2}\right) \right| \quad (4.16)$$

dove $V = \frac{\mu}{h}e$ è la velocità orbitale nel punto di applicazione della manovra.

Cambio di piano semplice (variazione di inclinazione)

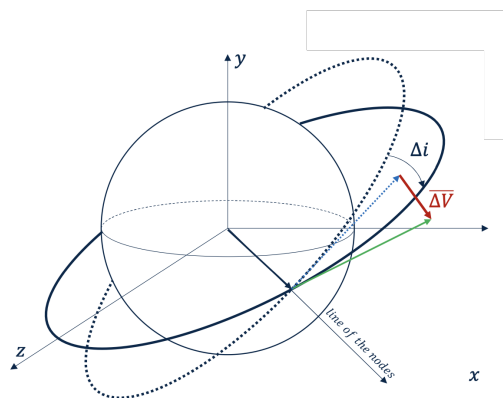


Figura 4.8: Cambio di piano semplice [3]

Per modificare l'inclinazione orbitale di un angolo Δi , si applica un impulso nel nodo ascendente o discendente. La variazione di velocità richiesta è:

$$\Delta V = 2V \sin\left(\frac{\Delta i}{2}\right) \quad (4.17)$$

dove V è la velocità nel nodo.

Trasferimento di Hohmann

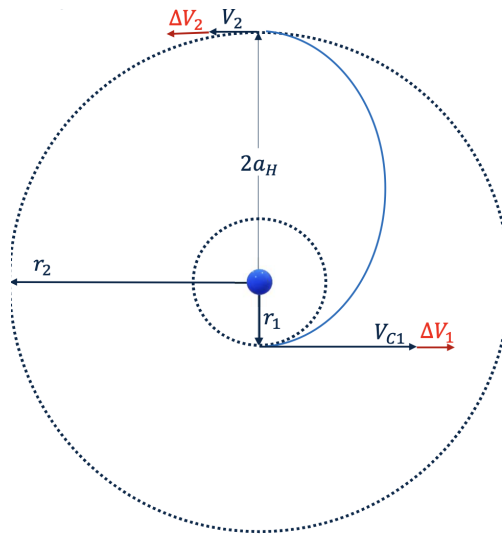


Figura 4.9: Trasferta di Hohmann [3]

È una delle manovre a due impulsi più semplici ed efficienti per il trasferimento tra due orbite circolari complanari. Il primo impulso, applicato tangenzialmente, permette di entrare in un'orbita di trasferimento ellittica che ha come perigeo il raggio dell'orbita di partenza e come apogeo quello dell'orbita finale. Successivamente, un secondo impulso tangenziale nel punto opposto dell'ellisse consente di ricircularizzare l'orbita sulla nuova quota. Il totale richiesto è la somma dei due impulsi:

$$\Delta V_1 = \sqrt{\frac{\mu}{r_1}} \left(\sqrt{\frac{2r_2}{r_1 + r_2}} - 1 \right) \quad (4.18)$$

$$\Delta V_2 = \sqrt{\frac{\mu}{r_2}} \left(1 - \sqrt{\frac{2r_1}{r_1 + r_2}} \right) \quad (4.19)$$

Manovre combinate (cambio di quota e inclinazione)

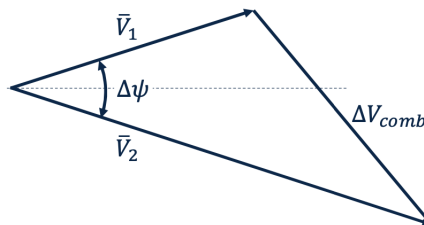


Figura 4.10: Manovra combinata

Nel caso si debbano modificare contemporaneamente quota e inclinazione, è possibile combinare gli impulsi. L'impulso totale richiesto può essere calcolato combinando le componenti:

$$\Delta V_{comb} = \sqrt{V_1^2 + V_2^2 - 2V_1V_2 \cos \Delta\psi} \quad (4.20)$$

dove $\Delta\psi$ rappresenta l'angolo compreso tra le due direzioni di velocità.

4.5.2 Manovre a bassa spinta

Studiare manovre a bassa spinta è più complicato poiché cadono tutte le assunzioni fatte per le manovre impulsive; non si può più pensare di fornire tutto il ΔV in un intervallo di tempo sufficientemente ridotto da poter considerare la manovra effettuata in uno specifico punto dell'orbita. Una delle soluzioni analitiche più note è l'approssimazione di Edelbaum, valida sotto alcune ipotesi semplificative: [19]

- Orbite quasi circolari ($r \approx a \approx p$, $e \approx 0$, $V^2 = \mu/r$);
- Orbite con piccola inclinazione ($i \approx 0 \Rightarrow \cos i \approx 1$, $\sin i \approx 0$);
- Spinte/accelerazioni molto piccole, tali per cui $\frac{T}{m} \ll \frac{\mu}{r^2}$;
- Accelerazioni verso l'esterno trascurabili.

In queste condizioni, si ha una variazione graduale della velocità che conduce a una traiettoria a spirale. La spinta è scomposta in tre componenti:

- T_V : tangente alla traiettoria, varia l'energia orbitale, quindi a , e , ω ;
- T_N : normale al piano orbitale, modifica e , ω ;
- T_W : normale al piano orbitale, varia inclinazione i e longitudine del nodo ascendente Ω .

In ogni punto ci sarà, quindi, una direzione ottimale di spinta per modificare i parametri desiderati. Tali assunzioni fanno sì che si possano riscrivere in forma semplificata le **equazioni planetarie di Gauss**, che permettono di calcolare la variazione temporale degli elementi orbitali in funzione della spinta:

$$\dot{a} = 2 \frac{T_V}{m} \frac{a}{V} \quad (4.21)$$

$$\dot{e} = \left[2 \cos \nu \frac{T_V}{m} - \sin \nu \frac{T_V}{m} \right] \frac{1}{V} \quad (4.22)$$

$$\dot{\omega} = -\dot{\Omega} + \left(2 \sin \nu \frac{T_V}{m} + \cos \nu \frac{T_N}{m} \right) \frac{1}{V \cdot e} \quad (4.23)$$

$$\dot{i} = \cos(\omega + \nu) \frac{T_W}{m} \frac{1}{V} \quad (4.24)$$

$$\dot{\Omega} = \sin(\omega + \nu) \frac{T_W}{m} \frac{1}{i \cdot V} \quad (4.25)$$

$$\dot{M} = \dot{\nu} = \sqrt{\frac{\mu}{a^3}} \quad (4.26)$$

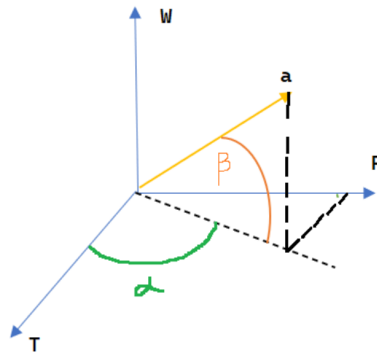


Figura 4.11: Angoli di spinta

Variatione di a

Per ottenere il massimo incremento di a , è necessario applicare la spinta in direzione tangenziale. Pertanto:

$$\alpha = \beta = 0 \Rightarrow T \parallel V \Rightarrow T_V = T, \quad T_R = T_W = 0 \quad (4.27)$$

Appena si applica la spinta, a aumenta, ma se la spinta viene applicata in maniera continua per un giro completo, e torna ad annullarsi ottenendo ancora un'orbita circolare. Quindi:

$$\Delta e = \Delta i = 0, \quad \Delta a = 4\pi \frac{T}{m} a^3 \quad (4.28)$$

Il costo per cambiare il semiasse sarà:

$$\Delta V = 2\pi \sqrt{\frac{a^3 T}{\mu m}} \quad (4.29)$$

Variatione di e

Per ottenere il massimo incremento di e , è necessario:

$$\tan \alpha = \frac{1}{2} \tan \nu, \quad \beta = 0 \quad (4.30)$$

Pertanto:

$$\Delta a = \Delta i = 0 \quad (4.31)$$

Questo risultato può essere dimostrato ponendo a zero la derivata dell'equazione di e , ovvero ponendo $\frac{de}{dt} = 0$ e ricercando il punto di massimo della funzione e .

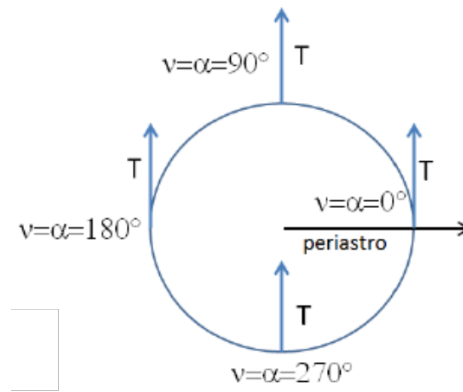


Figura 4.12: Variazione e - direzione di spinta ottimale

Variazione di i ed a

Per ottenere una variazione di inclinazione è necessario applicare una spinta fuori dal piano orbitale, quindi nella direzione W . In particolare, per massimizzare la variazione di i , si deve applicare la spinta nei punti in cui il vettore posizione è ortogonale al vettore velocità, ovvero in corrispondenza dei nodi. Più precisamente, affinché vari solamente l'inclinazione, è necessario applicare una spinta perpendicolare al piano orbitale, secondo:

$$\beta = \pm 90^\circ, \quad \alpha \text{ indeterminato} \quad (4.32)$$

Il segno di β sarà positivo se si sale di latitudine, negativo se si scende.

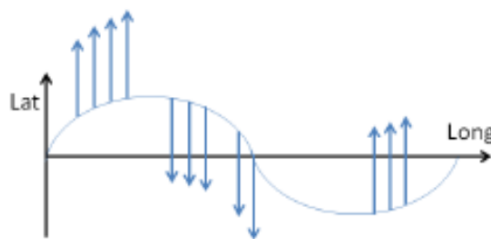


Figura 4.13: Variazione i - direzione spinta ottimale

Molte manovre richiedono comunque la variazione simultanea di a e i su rivoluzioni multiple, la cui variazione massima si ottiene per $\alpha = 0$ e seguendo la seguente relazione:

$$\frac{\sin \beta}{\sqrt{r}} = \frac{\sin \beta_0}{\sqrt{r_0}} = \text{cost} \quad (4.33)$$

Casi particolari

- $\Delta i = 0 \rightarrow \Delta V = |V_1 - V_2|$: rappresenta il costo energetico della trasferta tra due orbite circolari. Le perdite gravitazionali saranno il doppio di ΔV , infatti:

$$V_f - V_i = V_2 - V_1, \quad \Delta V = V_1 - V_2, \quad P_g = \Delta V - (V_f - V_i) = 2\Delta V$$

- $\Delta i = 2 \text{ rad} \rightarrow \Delta V = V_1 + V_2$: poiché si deve evadere due volte.
- Per $V_2 = 0$ e $\Delta i = 0^\circ \rightarrow \text{escape} \rightarrow \Delta V = V_1$: evadere impulsivamente costa circa la metà rispetto a una traiettoria a spinta continua.

4.6 Missioni interplanetarie

Nell'ambito delle missioni interplanetarie, la determinazione accurata della traiettoria di un veicolo spaziale richiede la considerazione delle perturbazioni dovute ai diversi corpi celesti che il veicolo incontra lungo il proprio percorso. Tuttavia, risolvere il problema a molti corpi nella sua interezza è spesso troppo complesso per essere affrontato in fase preliminare. Per questo motivo, si ricorre a una semplificazione classica nota come **metodo delle Patched Conics**.

4.6.1 Metodo Patched Conics

Il metodo delle *Patched Conics* consiste nell'approssimare il moto del veicolo spaziale suddividendolo in tre fasi distinte, ciascuna delle quali è governata dall'influenza gravitazionale di un unico corpo predominante. Le fasi sono:

1. **Fase planetocentrica iniziale:** È la fase in cui il veicolo spaziale si trova nelle vicinanze del pianeta di partenza, e il suo moto è descritto rispetto a quest'ultimo. Tuttavia, nell'ambito di questa tesi, tale fase viene trascurata, assumendo che il veicolo inizi la sua traiettoria interplanetaria già all'uscita dalla Sfera di Influenza (SOI) del pianeta, con velocità iperbolica $V_\infty = 0$. Questa ipotesi consente di semplificare il problema, concentrando l'analisi esclusivamente sulla fase eliocentrica.
2. **Fase eliocentrica:** In questa fase, una volta superata la Sfera di Influenza del pianeta, il moto del veicolo è considerato governato unicamente dalla gravità del Sole. Si risolve dunque un classico problema dei due corpi, descritto da traiettorie kepleriane. Questa rappresenta la fase principale di interesse per lo studio delle traiettorie interplanetarie nel contesto della tesi.
3. **Fase planetocentrica finale:** Quando il veicolo si avvicina al pianeta di destinazione, entra nella sua Sfera di Influenza, e il moto diventa nuovamente planetocentrico. Si assume che il veicolo raggiunga la SOI del corpo target lungo una traiettoria iperbolica, a partire dalla quale possono essere previste eventuali manovre come fly-by, rendez-vous o cattura orbitale.

Le due transizioni tra queste fasi avvengono in corrispondenza della **Sfera di Influenza (SOI)** dei pianeti di partenza e di arrivo. Questo approccio, pur rappresentando una semplificazione rispetto al problema a molti corpi completo, permette di trattare in modo efficace e computazionalmente meno oneroso problemi complessi di trasferimento interplanetario.

4.6.2 Sfera di Influenza (SOI)

La **Sfera di Influenza** di un corpo celeste è definita come la regione dello spazio entro la quale la sua attrazione gravitazionale domina rispetto a quella del Sole (o di un altro corpo più massivo). Oltre questa sfera, il moto del veicolo spaziale è meglio descritto considerando la gravità del Sole.

La formula per il calcolo del raggio della Sfera di Influenza r_{SOI} di un pianeta rispetto al Sole è:

$$r_{SOI} = a \left(\frac{m_p}{M_s} \right)^{2/5} \quad (4.34)$$

dove:

- a : semiasse maggiore dell'orbita del pianeta attorno al Sole,
- m_p : massa del pianeta,
- M_s : massa del Sole.

Questa formula deriva da un'approssimazione del punto in cui le forze gravitazionali del Sole e del pianeta si equivalgono in termini relativi per il moto del satellite, trascurando perturbazioni dovute ad altri corpi celesti o effetti non gravitazionali.

Nella Tabella 4.3 sono riportati i valori tipici della SOI per alcuni pianeti del sistema solare:

Pianeta	Raggio SOI (km)
Terra	924,000
Marte	577,000
Venere	616,000

Tabella 4.3: SOI per alcuni pianeti del Sistema Solare

Questi valori rappresentano la distanza dal pianeta oltre la quale il Sole inizia a dominare il moto del satellite. All'interno di questa regione, la gravità del pianeta è sufficiente a descrivere il moto del veicolo spaziale senza dover considerare in modo dominante quella del Sole.

Nel presente lavoro, si fa una semplificazione ulteriore rispetto al metodo delle Patched Conics classico: la fase planetocentrica iniziale (ovvero il moto del veicolo all'interno della Sfera di Influenza della Terra o di un altro pianeta di partenza) non viene considerata. Si assume che il veicolo spaziale inizi la sua traiettoria direttamente nella fase eliocentrica, con una velocità iperbolica rispetto alla Terra V_∞ nulla.

Questa assunzione è giustificata dalla necessità di focalizzare l'attenzione sulla fase interplanetaria della missione, tralasciando le manovre di partenza dal pianeta, che meriterebbero un'analisi separata. Tale scelta, pur semplificando il modello, non compromette la validità delle analisi effettuate sulla fase di trasferimento tra il pianeta di partenza e quello di destinazione.

Capitolo 5

Ottimizzazione indiretta di traiettorie spaziali

5.1 Introduzione ai metodi di ottimizzazione

L'ottimizzazione delle traiettorie spaziali rappresenta un aspetto cruciale nella progettazione di missioni interplanetarie, poiché consente di determinare il profilo ottimale di volo per soddisfare specifici obiettivi di missione, come la minimizzazione del consumo di propellente, la riduzione del tempo di volo o la massimizzazione della massa utile finale.

La definizione di una traiettoria ottimale si traduce, dal punto di vista matematico, nella risoluzione di un **problema di controllo ottimale**, ovvero nella ricerca di una legge di controllo che ottimizzi un certo indice di prestazione, soggetto a vincoli dinamici e condizioni al contorno: in campo spaziale ciò si traduce, la maggior parte delle volte, nella minimizzazione della massa di propellente utilizzato, al fine di ottenere il massimo payload. Tuttavia, la complessità intrinseca di tali problemi, derivante dalla non linearità delle equazioni del moto e dalla presenza di vincoli, rende spesso necessario l'impiego di **metodi numerici** di ottimizzazione.[23]

I metodi numerici si suddividono principalmente in due grandi categorie:

- **Metodi diretti**: trasformano il problema di controllo ottimale in un problema di programmazione non lineare (NLP) mediante la discretizzazione delle variabili di stato e di controllo. Vengono così risolti con algoritmi di ottimizzazione numerica. Sebbene siano robusti e flessibili, i metodi diretti forniscono una soluzione approssimata e non garantiscono sempre la soddisfazione precisa delle condizioni di ottimalità.
- **Metodi indiretti**: basati sull'applicazione della **teoria del controllo ottimale**, e in particolare sul **Principio del massimo di Pontryagin**, questi metodi derivano le condizioni necessarie di ottimalità e portano alla formulazione di un **problema differenziale ai limiti (BVP)**. Le soluzioni ottenute rispettano esattamente le condizioni di ottimalità, ma la loro risoluzione richiede una stima accurata delle condizioni iniziali per garantire la convergenza.

Nel contesto della tesi, si è scelto un metodo indiretto per ottenere soluzioni precise e controllare accuratamente i parametri dinamici della traiettoria. È stato adottato un approccio di multiple shooting, una tecnica che consiste nel suddividere la traiettoria in più segmenti, risolvendo le equazioni differenziali separatamente su ciascun intervallo. Le soluzioni parziali così ottenute vengono poi raccordate imponendo condizioni di continuità tra i segmenti, migliorando la stabilità numerica del problema e facilitando la convergenza del solutore verso una soluzione ottimale.

A supporto di quanto esposto finora, si introduce la **teoria del controllo ottimale**, strumento matematico fondamentale per formulare e risolvere problemi di traiettoria in modo rigoroso. Essa consente

di determinare la legge di controllo che permette di ottimizzare una prestazione (come il consumo di propellente), rispettando al contempo le equazioni del moto e i vincoli imposti dalla missione.

5.2 Teoria del controllo ottimale

La **teoria del controllo ottimale** costituisce il fondamento dei metodi indiretti per l'ottimizzazione delle traiettorie spaziali. Essa permette di determinare la legge di controllo che ottimizza una funzione obiettivo, garantendo al contempo il rispetto delle equazioni dinamiche del sistema e dei vincoli imposti.[24]

In generale, il problema può essere formulato come la ricerca di una funzione di controllo $u(t)$ e delle corrispondenti variabili di stato $x(t)$, tali da minimizzare (o massimizzare) un funzionale del tipo:

$$J = \int_{t_0}^{t_f} L(x(t), u(t), t) dt + \Phi(x(t_f)) \quad (5.1)$$

dove $L(x, u, t)$ è la funzione costo integranda e $\Phi(x(t_f))$ una funzione costo finale. Il sistema è soggetto alle equazioni del moto:

$$\dot{x}(t) = f(x(t), u(t), t) \quad (5.2)$$

e a condizioni al contorno sui valori iniziali e finali di $x(t)$.

5.2.1 Principio del massimo di Pontryagin

Secondo il **Principio del massimo di Pontryagin**, una soluzione ottimale deve massimizzare (o minimizzare) la cosiddetta Hamiltoniana:

$$\mathcal{H}(x, u, \lambda, t) = \lambda^T f(x, u, t) + L(x, u, t) \quad (5.3)$$

dove $\lambda(t)$ rappresenta il vettore delle **variabili aggiunte** (o moltiplicatori di Lagrange), ovvero funzioni ausiliarie associate ai vincoli dinamici del sistema. Queste variabili esprimono il costo marginale o la sensibilità della funzione obiettivo rispetto a piccole variazioni delle equazioni del moto e svolgono un ruolo fondamentale nella definizione delle condizioni di ottimalità.

Le condizioni necessarie di ottimalità comprendono:

- Le equazioni del moto:

$$\dot{x}(t) = \frac{\partial \mathcal{H}}{\partial \lambda}$$

- Le equazioni delle variabili aggiunte:

$$\dot{\lambda}(t) = -\frac{\partial \mathcal{H}}{\partial x}$$

- La condizione sul controllo (per il caso non vincolato):

$$\frac{\partial \mathcal{H}}{\partial u} = 0$$

- Le condizioni al contorno.

Se il controllo non è vincolato, la legge ottimale si ottiene imponendo l'annullamento della derivata dell'Hamiltoniana rispetto al controllo. In presenza di vincoli, invece, il controllo ottimale si ottiene massimizzando (o minimizzando) l'Hamiltoniana all'interno dell'insieme dei controlli ammissibili. Questo porta a soluzioni di tipo *bang-bang*, in cui il controllo assume valori estremi, oppure ad *archi singolari*, caratterizzati da controlli che variano in modo continuo, determinati da ulteriori condizioni sulla derivata dell'Hamiltoniana.

5.2.2 Il problema differenziale ai limiti (BVP)

La formulazione indiretta del problema di controllo ottimale conduce alla definizione di un **problema differenziale ai limiti (Boundary Value Problem, BVP)**, ovvero un sistema di equazioni differenziali ordinarie in cui le incognite sono rappresentate dalle variabili di stato, dalle variabili aggiunte e dai controlli. La risoluzione del problema consiste nel determinare quei profili temporali delle incognite che soddisfano contemporaneamente le equazioni del moto, le condizioni di ottimalità e le condizioni al contorno imposte dal problema.

Questo tipo di problema presenta alcune peculiarità:

- Le equazioni differenziali possono assumere forme diverse nei sottodomini in cui è suddiviso l'intervallo temporale;
- Ogni sottodominio ha una durata generalmente incognita, che costituisce parte della soluzione del problema;
- Le condizioni al contorno, sia interne che esterne, possono essere non lineari e includere vincoli sui valori delle variabili;
- Le variabili possono presentare discontinuità o valori incogniti nei punti di raccordo tra diversi segmenti della traiettoria.

Per affrontare numericamente il BVP si adotta il **metodo del multiple shooting**, che consiste nel suddividere la traiettoria in più archi. In ciascun arco, il sistema viene risolto come un problema ai valori iniziali, e successivamente le soluzioni locali vengono raccordate imponendo condizioni di continuità ai punti di giunzione.

Formalmente, il problema viene rappresentato da un sistema di equazioni differenziali nella forma:

$$\frac{d\vec{y}}{dt} = \vec{f}(\vec{y}, t) \quad (5.4)$$

dove $\vec{y} = (\vec{x}, \vec{\lambda})$ è il vettore delle variabili di stato e delle variabili aggiunte. Nel caso siano presenti parametri costanti o durate incognite dei segmenti, si definisce un nuovo vettore $\vec{z} = (\vec{y}, \vec{c})$.

Poiché la durata dei segmenti può essere incognita, si introduce una variabile normalizzata ε :

$$\varepsilon = j - 1 + \frac{t - t_{j-1}}{\tau_j} \quad (5.5)$$

Il sistema viene così riscritto nella forma:

$$\frac{d\vec{z}}{d\varepsilon} = \vec{f}(\vec{z}, \varepsilon)$$

Le condizioni al contorno sono espresse come:

$$\vec{\Psi}(\vec{s}) = 0$$

La risoluzione avviene tramite procedura iterativa:

1. Si fissano valori iniziali $\vec{z}(0) = \vec{p}^r$, dove \vec{p}^r contiene i valori dell'iterazione precedente;
2. Si integra il sistema per ogni segmento;
3. Si valuta l'errore $\vec{\Psi}_r$ sulle condizioni al contorno;
4. Si aggiornano i valori iniziali apportando una correzione per diminuire l'errore fino ad annullarlo:

$$\Delta\vec{p} = \vec{p}^{r+1} - \vec{p}^r = - \left[\frac{\partial\vec{\Psi}}{\partial\vec{p}} \right]^{-1} \vec{\Psi}_r \quad (5.6)$$

dove la matrice che compare è ottenuta dal prodotto:

$$\frac{\partial\vec{\Psi}}{\partial\vec{p}} = \left[\frac{\partial\vec{\Psi}}{\partial\vec{s}} \right] \left[\frac{\partial\vec{s}}{\partial\vec{p}} \right]$$

Il processo iterativo continua fino al raggiungimento della tolleranza. Questo approccio garantisce la stabilità numerica e permette di trattare segmenti multipli, durate incognite, discontinuità e vincoli complessi.

5.3 Modello matematico

Per poter applicare la teoria del controllo ottimale al problema di ottimizzazione delle traiettorie interplanetarie, è necessario innanzitutto definire il modello fisico di riferimento.

Si assume che il satellite si muova in un sistema di riferimento inerziale eliocentrico e che sia soggetto esclusivamente all'attrazione gravitazionale del Sole e alla spinta generata dal sistema propulsivo del satellite.

Il moto viene descritto secondo l'approssimazione del problema dei due corpi, con l'aggiunta della forza propulsiva.

Si introducono le seguenti variabili:

- \vec{r} : vettore posizione del veicolo rispetto al Sole;
- \vec{v} : vettore velocità del veicolo;
- m : massa del veicolo;

- T : modulo della spinta fornita dal sistema di propulsione;
- \vec{u} : versore della direzione della spinta (controllo);
- c : velocità efficace di scarico, legata all'impulso specifico I_{sp} dalla relazione $c = I_{sp}g_0$, con g_0 accelerazione di gravità al livello del mare.

La forza gravitazionale del Sole è modellata come:

$$\vec{g} = -\frac{\mu_{\odot}}{r^3}\vec{r} \quad (5.7)$$

dove μ_{\odot} è il parametro gravitazionale del Sole.

5.3.1 Equazioni del moto

Le equazioni del moto che descrivono l'evoluzione del sistema risultano quindi:

$$\frac{d\vec{r}}{dt} = \vec{v} \quad (5.8)$$

$$\frac{d\vec{v}}{dt} = \vec{g} + \frac{T}{m}\vec{u} \quad (5.9)$$

$$\frac{dm}{dt} = -\frac{T}{c} \quad (5.10)$$

Per applicare la teoria del controllo ottimale al problema descritto, si definisce l'Hamiltoniana, che integra le equazioni del moto, le variabili aggiunte (o moltiplicatori di Lagrange) e l'eventuale funzione costo da ottimizzare.

Si introducono quindi le *variabili aggiunte* associate alle equazioni del moto:

$$\vec{\lambda} = [\vec{\lambda}_r, \vec{\lambda}_v, \lambda_m]^T \quad (5.11)$$

dove:

- $\vec{\lambda}_r$: moltiplicatori associati alla posizione \vec{r} ;
- $\vec{\lambda}_v$: moltiplicatori associati alla velocità \vec{v} ;
- λ_m : moltiplicatore associato alla massa m .

L'Hamiltoniana del sistema si può quindi scrivere come:

$$\mathcal{H} = \vec{\lambda}_r^T \vec{v} + \vec{\lambda}_v^T \left(\vec{g} + \frac{T}{m}\vec{u} \right) - \lambda_m \frac{T}{c} \quad (5.12)$$

Per determinare il controllo ottimale, si introduce la *switching function* S_F , che fornisce una condizione utile a stabilire il valore della spinta in ogni istante:

$$S_F = \frac{\vec{\lambda}_v^T \vec{u}}{m} - \frac{\lambda_m}{c} \quad (5.13)$$

Si può quindi riscrivere l'espressione dell'Hamiltoniana nel seguente modo:

$$\mathcal{H} = \vec{\lambda}_r^T \vec{v} + \vec{\lambda}_v^T \vec{g} + S_F T \quad (5.14)$$

La funzione di switching stabilisce il criterio per l'accensione o lo spegnimento del motore secondo la logica del controllo *bang-bang*:

$$T = \begin{cases} T_{\max} & \text{se } S_F > 0 \\ 0 & \text{se } S_F < 0 \end{cases} \quad (5.15)$$

Dalla massimizzazione dell'Hamiltoniana rispetto al controllo direzionale \vec{u} , si ottiene inoltre che la direzione ottimale della spinta è allineata al vettore delle variabili aggiunte associate alla velocità, ovvero:

$$\vec{u} = \frac{\vec{\lambda}_v}{\|\vec{\lambda}_v\|} \quad (5.16)$$

Si osserva dunque che il vettore $\vec{\lambda}_v$ (*vettore primer*), il quale contiene le componenti (u, v, w) delle variabili aggiunte della velocità, determina la direzione della spinta ottimale.

5.3.2 Equazioni di stato e variabili aggiunte

Per descrivere in maniera completa la dinamica del trasferimento interplanetario e per poter applicare correttamente la teoria del controllo ottimale, si adotta un sistema di riferimento inerziale eliocentrico, basato su coordinate sferiche.

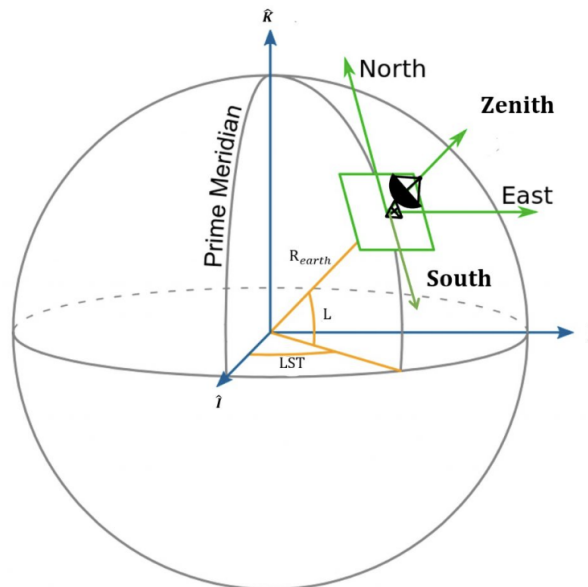


Figura 5.1: Sistema di riferimento

Le coordinate sferiche utilizzate per la posizione del veicolo rispetto al Sole sono:

- r : distanza dal Sole;

- θ : longitudine (angolo azimutale rispetto a un meridiano di riferimento);
- ϕ : latitudine (angolo rispetto al piano equatoriale).

La velocità viene scomposta nelle sue componenti nel sistema locale East-North-Up (ENU):

- u : componente radiale;
- v : componente tangenziale lungo il parallelo (Est);
- w : componente tangenziale lungo il meridiano (Nord).

Infine, la massa m del veicolo, variabile per effetto del consumo di propellente, completa il vettore delle variabili di stato:

$$\vec{x} = [r, \theta, \phi, u, v, w, m]^T \quad (5.17)$$

Le equazioni differenziali del moto nel sistema sferico risultano:

$$\begin{cases} \frac{dr}{dt} = u \\ \frac{d\theta}{dt} = \frac{v}{r \cos \phi} \\ \frac{d\phi}{dt} = \frac{w}{r} \\ \frac{du}{dt} = -\frac{\mu_{\odot}}{r^2} + \frac{v^2}{r} + \frac{w^2}{r} + \frac{T}{m} \sin \gamma_T \\ \frac{dv}{dt} = -\frac{uv}{r} + \frac{r}{wv} \tan \phi + \frac{T}{m} \cos \gamma_T \cos \psi_T \\ \frac{dw}{dt} = -\frac{uw}{r} - \frac{v^2}{r} \tan \phi + \frac{T}{m} \cos \gamma_T \sin \psi_T \\ \frac{dm}{dt} = -\frac{T}{c} \end{cases} \quad (5.18)$$

Alle equazioni di stato sono associate le variabili aggiunte (o moltiplicatori di Lagrange):

$$\vec{\lambda} = [\lambda_r, \lambda_{\theta}, \lambda_{\phi}, \lambda_u, \lambda_v, \lambda_w, \lambda_m]^T \quad (5.19)$$

Per determinare la direzione della spinta ottimale e impostare la Hamiltoniana del problema, si definisce il *vettore primer*:

$$\lambda_V = \begin{bmatrix} \lambda_u \\ \lambda_v \\ \lambda_w \end{bmatrix}, \quad \lambda_V = \sqrt{\lambda_u^2 + \lambda_v^2 + \lambda_w^2} \quad (5.20)$$

Il controllo direzionale \vec{u} , rappresentante il versore della spinta, risulta allineato a λ_V e può essere espresso in funzione degli angoli di controllo γ_T (angolo di elevazione) e ψ_T (angolo di heading), secondo le relazioni:

$$\begin{cases} \sin \gamma_T = \frac{\lambda_u}{\lambda_V} \\ \cos \gamma_T \cos \psi_T = \frac{\lambda_v}{\lambda_V} \\ \cos \gamma_T \sin \psi_T = \frac{\lambda_w}{\lambda_V} \end{cases} \quad (5.21)$$

Da cui si ricavano direttamente:

$$\gamma_T = \arcsin\left(\frac{\lambda_u}{\lambda_v}\right), \quad \psi_T = \arctan 2(\lambda_w, \lambda_v) \quad (5.22)$$

Nel nuovo sistema di riferimento sferico, l'Hamiltoniana del sistema si scrive come:

$$\begin{aligned} \mathcal{H} = & \lambda_r u + \lambda_\theta \frac{v}{r \cos \phi} + \lambda_\phi \frac{w}{r} + \lambda_u \left(-\frac{\mu_\odot}{r^2} + \frac{v^2 + w^2}{r} + \frac{T}{m} \sin \gamma_T \right) \\ & + \lambda_v \left(-\frac{uv}{r} + \frac{wv}{r} \tan \phi + \frac{T}{m} \cos \gamma_T \cos \psi_T \right) \\ & + \lambda_w \left(-\frac{uw}{r} - \frac{v^2}{r} \tan \phi + \frac{T}{m} \cos \gamma_T \sin \psi_T \right) - \lambda_m \frac{T}{c} \end{aligned} \quad (5.23)$$

La Hamiltoniana così espressa permette di derivare successivamente, tramite il principio del massimo di Pontryagin, sia le equazioni per le variabili aggiunte sia le condizioni di ottimalità del controllo.

Le equazioni differenziali per le variabili aggiunte si ricavano dalle equazioni di Eulero-Lagrange, imponendo la stazionarietà della Hamiltoniana rispetto alle variabili di stato. In particolare, valgono le seguenti relazioni:

$$\frac{d\vec{\lambda}}{dt} = -\frac{\partial \mathcal{H}^T}{\partial \vec{x}} \quad (5.24)$$

Pertanto, derivando la Hamiltoniana rispetto a ciascuna delle variabili di stato, si ottengono le equazioni per le variabili aggiunte nel sistema di coordinate sferiche:

$$\left\{ \begin{aligned} \frac{d\lambda_r}{dt} &= \frac{1}{r^2} \left[\lambda_\theta \frac{v}{\cos \phi} + \lambda_\phi w \right] + \lambda_u \left(\frac{2}{r} (u^2 - v^2 - w^2) \right) + \lambda_v \left(\frac{v^2 - w^2}{r} \tan \phi \right) + \lambda_w \left(\frac{2uw}{r} + \frac{v^2}{r} \tan \phi \right) \\ \frac{d\lambda_\theta}{dt} &= 0 \\ \frac{d\lambda_\phi}{dt} &= \frac{1}{r \cos^2 \phi} \left[-\lambda_\theta v \tan \phi + \lambda_v w v + \lambda_w w^2 \right] \\ \frac{d\lambda_u}{dt} &= \frac{1}{r} \left[-\lambda_r + \lambda_u v - \lambda_w w \right] \\ \frac{d\lambda_v}{dt} &= \frac{1}{r} \left[-\lambda_\theta \frac{1}{\cos \phi} - 2\lambda_u v + \lambda_v (u - w \tan \phi) + 2\lambda_w w \tan \phi \right] \\ \frac{d\lambda_w}{dt} &= \frac{1}{r} \left[-\lambda_\phi - 2\lambda_u w - \lambda_v v \tan \phi + \lambda_w u \right] \\ \frac{d\lambda_m}{dt} &= \frac{T}{m^2} \lambda_v \end{aligned} \right. \quad (5.25)$$

Queste equazioni, insieme alle equazioni di stato, costituiscono il sistema completo da risolvere per ottenere la traiettoria ottimale del veicolo spaziale.

Si osserva che:

- La derivata di λ_θ rispetto al tempo è nulla in quanto la Hamiltoniana non dipende esplicitamente da θ (coordinate cicliche).

- Alcune componenti dipendono dalla presenza dei termini $\tan \phi$ e $\cos \phi$, che introducono effetti geometrici legati al sistema sferico.
- L'ultima equazione, relativa a λ_m , mostra la dipendenza diretta dal rapporto spinta/massa e rappresenta la sensibilità della funzione costo rispetto alla massa del veicolo.

Il sistema di equazioni ottenuto sarà successivamente risolto come problema ai limiti (BVP), imponendo condizioni iniziali e finali coerenti con la missione da realizzare.

5.3.3 Condizioni al contorno

Il sistema completo di equazioni differenziali del problema di controllo ottimale, costituito dalle equazioni di stato e dalle equazioni delle variabili aggiunte, deve essere risolto come problema differenziale ai limiti (BVP), imponendo condizioni al contorno che riflettano i requisiti della missione.

In particolare, le condizioni al contorno riguardano:

- I valori iniziali del vettore di stato, corrispondenti ai parametri orbitali del pianeta di partenza;
- I valori finali del vettore di stato, corrispondenti ai parametri orbitali dell'asteroide target (o a condizioni di rendez-vous);
- Condizioni trasversali sui moltiplicatori (variabili aggiunte), che derivano dalla teoria del controllo ottimale e garantiscono il rispetto della funzione obiettivo.

Condizioni iniziali: Al tempo iniziale t_0 , il veicolo si trova lungo l'orbita del pianeta di partenza, pertanto:

$$\vec{x}(t_0) = [r_0, \theta_0, \phi_0, u_0, v_0, w_0, m_0]^T \quad (5.26)$$

dove $r_0, \theta_0, \phi_0, u_0, v_0, w_0$ sono le coordinate e le velocità proiettate nelle coordinate sferiche del pianeta al momento della partenza, e m_0 è la massa iniziale del veicolo, assegnata.

Condizioni finali:

Al tempo finale t_f , il veicolo deve trovarsi lungo l'orbita dell'asteroide target. Si possono specificare condizioni finali complete o parziali, a seconda della missione (ad esempio, intercettazione o rendez-vous). In generale:

$$\vec{x}(t_f) = [r_f, \theta_f, \phi_f, u_f, v_f, w_f, m_f]^T \quad (5.27)$$

dove m_f può essere considerata libera o vincolata, in base alla funzione obiettivo (ad esempio, massimizzazione della massa finale o minimizzazione del propellente).

Condizioni di ottimo:

Dalla teoria del controllo ottimale derivano ulteriori condizioni sui moltiplicatori (variabili aggiunte), note come *condizioni di trasversalità*.

Nel caso in cui la massa finale sia libera, si impone la seguente condizione sulla variabile aggiunta associata alla massa:

$$\lambda_m(t_f) = 0 \quad (5.28)$$

Analogamente, se il tempo finale t_f è libero (problema a tempo libero), la Hamiltoniana deve annullarsi all'istante finale:

$$\mathcal{H}(t_f) = 0 \quad (5.29)$$

Riepilogo:

Le condizioni al contorno complessive richieste per la risoluzione del problema ai limiti sono quindi:

- Stato iniziale assegnato: $\vec{x}(t_0) = \vec{x}_0$;
- Stato finale vincolato: $\vec{x}(t_f) = \vec{x}_f$ (complete o parziali);
- Condizione su $\lambda_m(t_f)$ se massa finale libera;
- Condizione su $\mathcal{H}(t_f)$ se tempo finale libero.

5.3.4 Inizializzazione

Il problema sarà quindi descritto da un vettore di condizioni iniziali, contenente vincoli iniziali e variabili di tentativo, che ne determina la dimensione N . In questo caso $N = 17$, infatti il vettore \mathbf{p} è definito come:

$$\mathbf{p} = [t_0, t_f, V_\infty, r_0, \theta_0, \phi_0, u_0, v_0, w_0, \lambda_r, \lambda_\theta, \lambda_\phi, \lambda_u, \lambda_v, \lambda_w, m, \lambda_m]^T$$

dove (t_0, t_f, V_∞) sono i vincoli del problema, mentre i rimanenti parametri sono le variabili di tentativo.

La soluzione del problema si basa, come già detto, sul metodo del multiple shooting, che consiste nel definire un primo set di valori di tentativo \mathbf{p}^1 e integrare il sistema di equazioni differenziali. I risultati ottenuti vengono poi confrontati con le condizioni al contorno per verificare la loro accuratezza. Se l'errore rientra nella tolleranza predefinita, i valori di tentativo sono considerati corretti; in caso contrario, vengono aggiornati iterativamente fino a trovare una configurazione che garantisca la convergenza del sistema, determinando così la traiettoria ottimale.

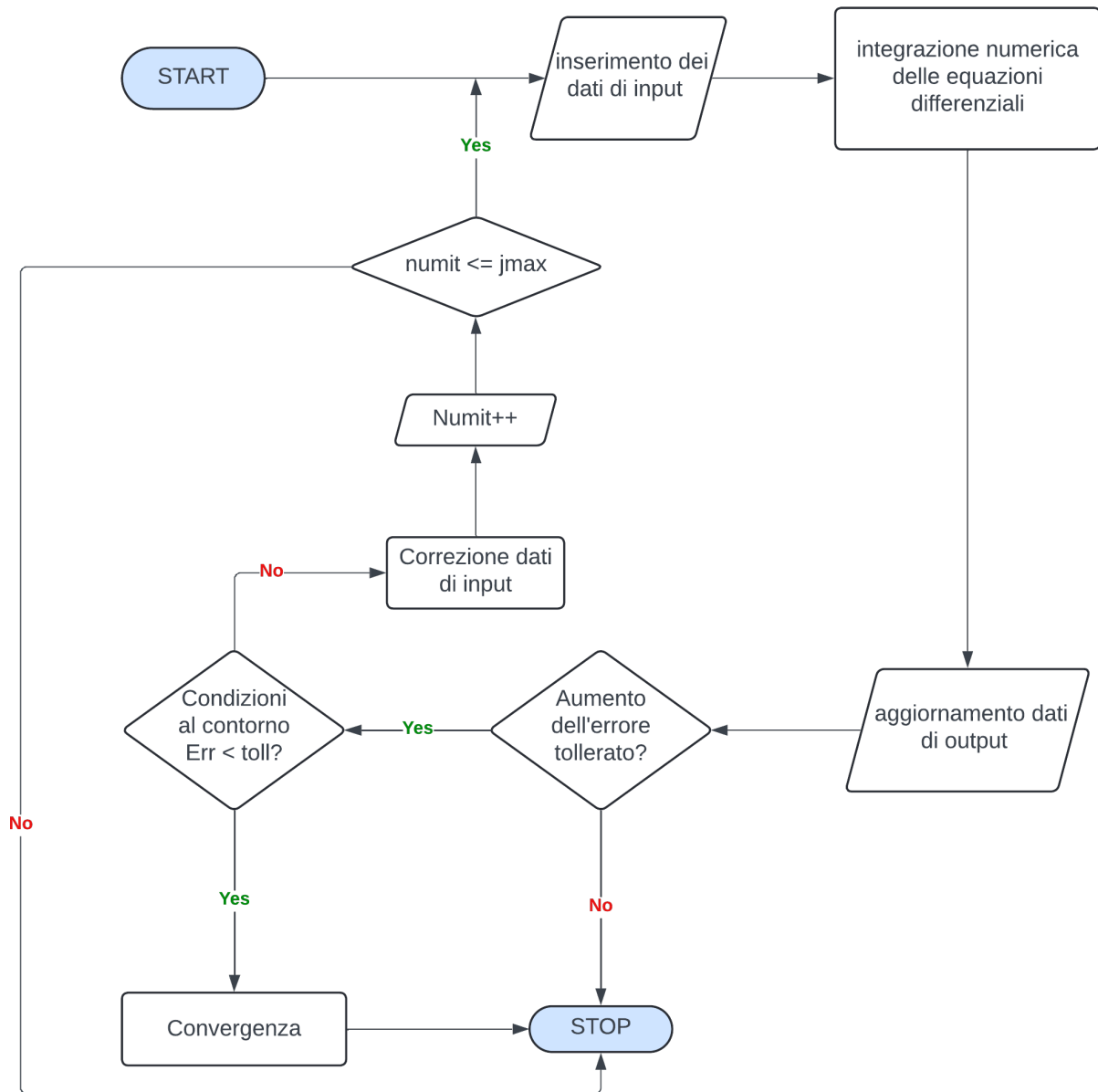


Figura 5.2: Flow chart semplificato del codice

Capitolo 6

Descrizione del codice utilizzato

Il codice numerico utilizzato per la risoluzione del problema di ottimizzazione della traiettoria interplanetaria è un codice sviluppato in linguaggio *Fortran* e fornito dal Politecnico di Torino.

Esso implementa un approccio indiretto, basato sulla risoluzione del problema differenziale ai limiti (BVP) derivante dalla teoria del controllo ottimale, secondo la formulazione illustrata nei capitoli precedenti. La soluzione del problema ai limiti viene ottenuta mediante il *metodo del multiple shooting*, che consente di suddividere la traiettoria in più archi e di garantire la corretta gestione dei vincoli imposti alle condizioni iniziali e finali della missione.

Di seguito si analizzano gli aspetti fondamentali del codice, al fine di comprendere come esso è stato impiegato nell'ambito di questa trattazione.

6.1 Parametri fisici e Variabili adimensionalizzate

Per garantire una gestione numerica stabile e accurata del problema di ottimizzazione, tutte le equazioni implementate nel codice sono formulate in forma *adimensionale*.

L'utilizzo di variabili adimensionalizzate consente di lavorare con numeri di ordine di grandezza confrontabile, riducendo il rischio di errori numerici e migliorando la stabilità e la convergenza degli algoritmi di integrazione. In questa sezione vengono presentati i parametri fisici di riferimento e le relazioni di adimensionalizzazione adottate.

6.1.1 Parametri fisici

I principali parametri fisici utilizzati nel modello sono:

- Costante gravitazionale solare:

$$\mu_{\odot} = 1.32712440018 \times 10^{11} \text{ km}^3/\text{s}^2$$

- Accelerazione gravitazionale terrestre:

$$g_0 = 9.80665 \text{ m/s}^2$$

- Distanza di riferimento (Unità Astronomica):

$$r^* = 1.49597870691 \times 10^8 \text{ km}$$

- Velocità di riferimento:

$$v^* = \sqrt{\frac{\mu_{\odot}}{r^*}} \approx 29.7840 \text{ km/s}$$

- Accelerazione di riferimento:

$$a^* = \frac{\mu_{\odot}}{(r^*)^2} \approx 5.93 \times 10^{-3} \text{ km/s}^2$$

- Tempo di riferimento (espresso in giorni):

$$t^* = \frac{v^*}{a^*} \cdot \frac{1}{86400} \approx 58.13244088 \text{ giorni}$$

Per il calcolo degli anni e della durata della missione, si adotta il sistema temporale *J2000*, un riferimento standard ampiamente usato in astronomia e meccanica orbitale, che fissa come epoca iniziale $t_0 = 0$ il 1° gennaio 2000 alle ore 12:00 (GMT).

6.1.2 Parametri del sistema di propulsione

I parametri del sistema propulsivo adottati sono coerenti con le attuali tecnologie di propulsione elettrica per CubeSat 12U, in linea con missioni come ANIME, ispirazione principale della tesi come già spiegato.[25]

In particolare, i parametri prestazionali del propulsore sono assimilabili a quelli del propulsore ionico Busek BIT-3, ampiamente impiegato come standard per missioni interplanetarie a bassa richiesta energetica destinate a CubeSat e piccoli satelliti.[21]

I propulsori ionici rappresentano una delle soluzioni più consolidate per garantire elevate efficienze propulsive con bassi consumi di potenza. Grazie al loro impulso specifico elevato e a una spinta compatibile con le limitazioni di massa e volume proprie dei CubeSat, questi sistemi si adattano perfettamente a missioni di lunga durata.

La scelta di tali parametri rende il modello proposto realistico e direttamente confrontabile con scenari di missioni operative già studiate o pianificate, fornendo così una base solida per valutazioni di fattibilità reale.

I valori di riferimento utilizzati sono:

- Spinta massima:

$$T_{\max} = 1.25 \times 10^{-3} \text{ N}$$

- Impulso specifico:

$$I_{sp} = 2100 \text{ s}$$

- Velocità efficace di scarico (adimensionale):

$$c = \frac{I_{sp} \cdot g_0}{v^* \times 1000} \approx 0.6915$$

- Massa iniziale di riferimento:

$$m^* = 21 \text{ kg}$$

- Efficienza del propulsore:

$$\eta = 0.625$$

Potenza della spinta

La potenza della spinta è calcolata tramite la relazione:

$$P_t = \frac{T_{\max} \cdot c}{2}$$

Di conseguenza la potenza elettrica richiesta dal propulsore per operare alla massima spinta sarà:

$$P_e = \frac{P_t}{\eta} = \frac{T_{\max} \cdot c}{2 \cdot \eta} \approx 20W$$

6.1.3 Variabili adimensionalizzate

Le principali variabili del problema vengono adimensionalizzate rispetto ai parametri di riferimento sopra definiti, assumendo valori numerici di ordine confrontabile:

- Distanza adimensionale:

$$\tilde{r} = \frac{r}{r^*}$$

- Velocità adimensionale:

$$\tilde{v} = \frac{v}{v^*}$$

- Massa adimensionale:

$$\tilde{m} = \frac{m}{m^*}$$

- Spinta adimensionale:

$$\tilde{T} = \frac{T}{m^* \cdot a^*}$$

- Tempo adimensionale:

$$\tilde{t} = \frac{t}{t^*}$$

Parametro	Descrizione	Valore
μ_{\odot}	Costante gravitazionale solare	$1.32712440018 \times 10^{11} \text{ km}^3/\text{s}^2$
g_0	Accelerazione gravitazionale terrestre	9.80665 m/s^2
r^*	Distanza di riferimento (UA)	$1.49597870691 \times 10^8 \text{ km}$
v^*	Velocità di riferimento	29.78 km/s
a^*	Accelerazione di riferimento	$5.93 \times 10^{-3} \text{ km/s}^2$
t^*	Tempo di riferimento (giorni)	58.13244 giorni
T_{\max}	Spinta massima	$1.25 \times 10^{-3} \text{ N}$
I_{sp}	Impulso specifico	2100 s
m^*	Massa di riferimento (iniziale)	21 kg
η	Efficienza del propulsore	0.625
P_t	Potenza della spinta	$\frac{T_{\max} \cdot c}{2}$

Tabella 6.1: Tabella riassuntiva dei principali parametri utilizzati per l'adimensionalizzazione

6.2 Input richiesti dal codice

L'esecuzione del codice di ottimizzazione richiede in input una serie di parametri fondamentali per l'impostazione corretta del problema e per garantire la convergenza della soluzione, oltre che i vincoli della missione (temporali e di massa). Questi parametri, che vengono richiesti in fase iniziale o letti da file esterni, sono elencati di seguito.

- **rmin, pbis, jmax**: rispettivamente, il passo minimo di integrazione, il parametro di rilassamento dell'algoritmo di shooting (che controlla quanto può aumentare l'errore tra due iterazioni successive, fissato generalmente a 2), e il numero massimo di iterazioni ammesse per il processo iterativo di risoluzione del problema ai limiti.
- **t0**: epoca iniziale della missione, espressa secondo il sistema temporale J2000. Questo parametro definisce il tempo di partenza della traiettoria ottimizzata.
- **durata**: durata complessiva della missione, ovvero il tempo disponibile per il trasferimento dal corpo di partenza all'asteroide target. Può essere fissata o lasciata come variabile libera da ottimizzare.
- **ast**: corpo celeste di partenza, che nel nostro caso corrisponde alla Terra.
- **ast**: asteroide target della missione, selezionabile in fase di input sulla base del database di asteroidi considerati.
- **am0**: massa adimensionale iniziale del satellite alla partenza.

La scelta del passo di integrazione da utilizzare, **rmin**, è di notevole rilevanza, in quanto regola la correzione effettuata dal codice tra un'iterazione e la successiva. Poiché la correzione adottata si basa su una linearizzazione del problema, se tale correzione risulta troppo elevata, è difficile ottenere la convergenza. Per questo motivo, adottando valori bassi del coefficiente di rilassamento, si impongono correzioni piccole che assicurano una maggiore precisione e stabilità numerica. In particolare, i valori di **rmin** adottati variano generalmente tra 0.0001 e 0.1, al fine di garantire la convergenza dell'analisi.

Oltre ai parametri sopra elencati, è necessario fornire in ingresso un **file contenente una soluzione di tentativo**, ovvero una prima approssimazione della soluzione del problema. Tale file include i valori iniziali delle variabili co-stato e dei tempi di partenza e arrivo, e viene caricato all'inizio della simulazione per avviare l'algoritmo di ottimizzazione.

È importante sottolineare che, data la natura del metodo indiretto adottato per la risoluzione del problema, la qualità della soluzione iniziale fornita è cruciale per garantire la convergenza dell'algoritmo. Come previsto dalla teoria dei metodi numerici indiretti, il successo del processo di ottimizzazione dipende fortemente dalla vicinanza della soluzione di tentativo rispetto alla traiettoria ottimale effettiva. Se la stima iniziale è troppo distante dalla soluzione reale, l'algoritmo potrebbe non convergere, oppure convergere verso un minimo locale non significativo. Per questo motivo, nella pratica applicativa,

la generazione della soluzione di tentativo richiede una stima preliminare accurata, spesso ottenuta tramite metodi diretti o analisi a più alto livello di astrazione (ad esempio, simulazioni semplificate o metodi a parametri liberi).

Infine, il codice prevede l'acquisizione automatica dei parametri orbitali dell'asteroide target dai file `astu20` o `astn`, scaricati direttamente dal database JPL [26]. In particolare, per gli asteroidi numerati (contenuti nel file `astn`) è necessario fornire in input il codice numerico dell'asteroide aumentato di 10^6 , mentre per gli asteroidi non numerati (contenuti nel file `astu20`) bisogna fornire il numero di riga corrispondente all'asteroide all'interno del file meno 2, poiché le prime due righe contengono intestazioni. Questo automatismo consente al codice di reperire in modo autonomo i parametri orbitali aggiornati, fondamentali per una corretta definizione della traiettoria di trasferimento. Di seguito viene mostrato come si presentano i file dei parametri orbitali una volta aperti.

Sample Numbered Asteroid File Header

Num	Name	Epoch	a	e	i	w	Node	M	H	G	Ref
1	Ceres	55400	2.7653485	0.07913825	10.58682	72.58981	80.39320	113.4104434	3.34	0.12	JPL 30
2	Pallas	55400	2.7721532	0.23099956	34.84090	310.15094	173.12950	96.1482660	4.13	0.11	JPL 25
3	Juno	55400	2.6700912	0.25498122	12.98211	248.10807	169.91138	32.0960832	5.33	0.32	JPL 86
...											

Sample Unnumbered Asteroid File Header

Designation	Epoch	a	e	i	w	Node	M	H	G	Ref
1927 LA	25051	3.3440715	0.33361827	17.63150	341.10951	191.71742	45.7201727	11.00	0.15	JPL 10
1935 UZ	28097	2.1575113	0.25129007	4.75775	281.18859	134.51847	342.3961099	99.00	0.00	JPL 5
...										
A/2018 V3	58643	121.4442887	0.98897009	164.97713	3.49875	308.65536	359.9324692	15.80	0.15	JPL 22
...										

Figura 6.1: File `astn` e `astu20`

6.3 Output del codice

L'esecuzione del codice fornisce una serie di file di output essenziali per valutare l'esito dell'ottimizzazione e per condurre analisi successive sulla traiettoria ottenuta.

Il principale indicatore della riuscita della simulazione è rappresentato dal risultato della subroutine **BVNGL**, che consente di verificare se la soluzione individuata soddisfa i vincoli del problema e se il processo di integrazione è stato completato correttamente. Questo valore segnala, quindi, l'effettiva convergenza della soluzione, o eventuali problematiche sorte durante simulazione.

Al termine di una simulazione, se decidiamo di salvare i risultati, il codice aggiorna automaticamente il **file delle soluzioni di tentativo**, archiviando i valori ottimizzati delle variabili co-stato e dei tempi di partenza e arrivo. Questo aggiornamento è particolarmente importante perché permette di riutilizzare la soluzione come punto di partenza per nuove ottimizzazioni o per analisi di sensitività.

Al termine dell'esecuzione, il codice restituisce una serie di dati che descrivono in dettaglio i principali parametri della traiettoria ottimizzata e permettono di condurre le analisi successive.

Queste informazioni includono l'andamento della posizione, della velocità e della spinta lungo la traiettoria, oltre ai parametri orbitali e ai principali indicatori legati alla dinamica del trasferimento. Attraverso tali dati è possibile valutare la qualità della soluzione ottenuta, analizzare l'evoluzione orbitale della sonda e verificare la coerenza del fasamento rispetto all'asteroide target.

Capitolo 7

Risultati

7.1 Analisi preliminare

Questo capitolo presenta i risultati dell'applicazione del modello di ottimizzazione indiretta descritto nei capitoli precedenti, illustrando le traiettorie ottimali identificate per missioni verso i NEAs selezionati. Vengono analizzati i parametri di costo propulsivo, durata del trasferimento e vincoli operativi, considerando una finestra di lancio tra il 2026 e il 2036.

L'analisi iniziale si è concentrata sul fasamento angolare $\Delta\theta$ tra Terra e asteroide al momento della partenza, parametro che, sebbene non garantisca sempre la soluzione ottimale, aumenta le probabilità di ridurre i costi propulsivi e facilitare l'ottimizzazione della missione. Questo approccio ha permesso di ottenere rapidamente una prima convergenza, consentendo l'identificazione di soluzioni preliminari.

Una volta raggiunta la prima convergenza, l'analisi è stata ampliata a tutto l'intervallo temporale, variando il tempo di partenza (t_0) con incrementi regolari. Tale metodologia ha reso possibile un confronto sistematico tra diverse finestre di lancio, individuando quelle più promettenti per ulteriori approfondimenti e affinandone progressivamente le soluzioni per garantire stime più precise e affidabili

7.1.1 2014 QN266

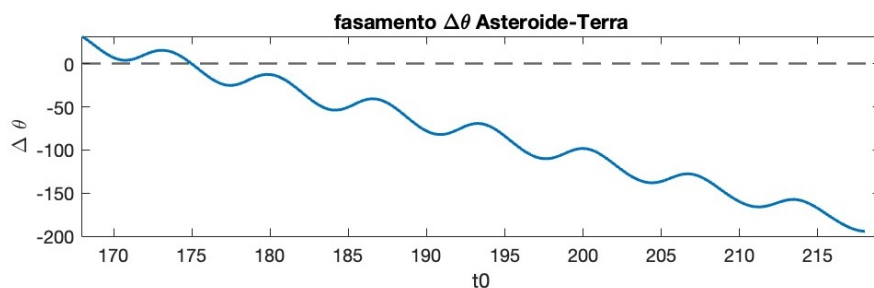


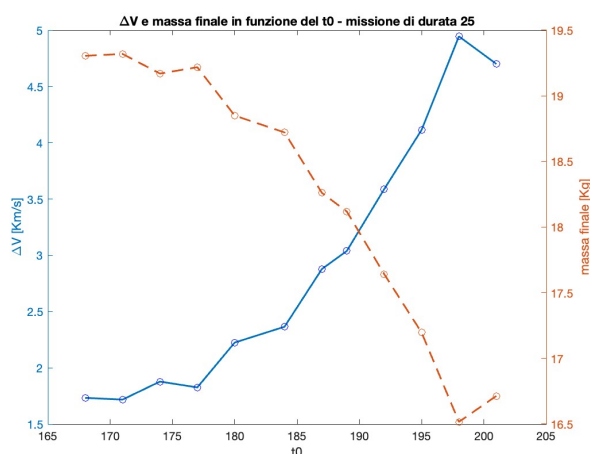
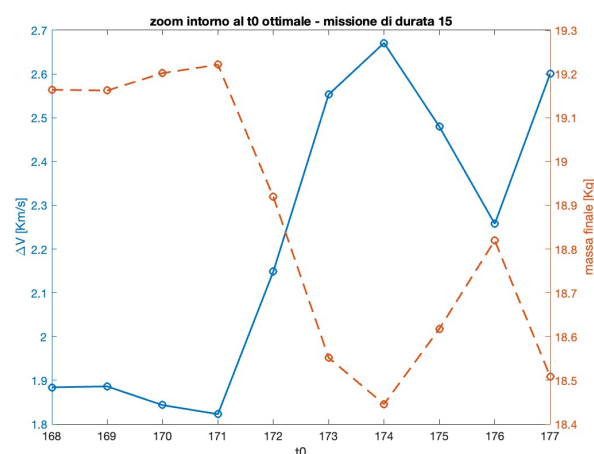
Figura 7.1: Fasamento Terra-2014 QN266

t_0	$\Delta\theta$ [°]
170	7.1117
171	4.3504
172	10.5964
173	15.6604
174	11.692
175	-0.024
176	-14.1894
177	-23.8941

Tabella 7.1: Intervallo migliore di $\Delta\theta$

Una prima analisi del fasamento angolare ha evidenziato la possibilità di individuare soluzioni ottimali nell'intervallo temporale compreso tra $t_0 = 168$ e $t_0 = 176$. Questa osservazione è confermata dal grafico in figura 7.2, che mostra l'andamento del costo propulsivo (ΔV) per una missione con durata pari a 25 (≈ 4 anni).

Successivamente, l'analisi si è focalizzata su una regione più ristretta attorno al valore di t_0 ottimale, con l'obiettivo di ridurre la durata della missione. Il grafico in figura 7.3 mostra il comportamento del ΔV per una missione di durata inferiore (15 unità di tempo).

Figura 7.2: ΔV al variare dell'istante di partenzaFigura 7.3: Zoom nell'intorno del t_0 ottimale

Notiamo come una partenza nel t_0 di minimo di $\Delta\theta$ non corrisponda alla missione di minimo consumo, ma ad una con partenza anticipata di ≈ 8 mesi.

Si è quindi spostato il focus dell'analisi sulla durata della missione, mantenendo costante l'istante di partenza per valutare come varia il ΔV in funzione del tempo di trasferimento.

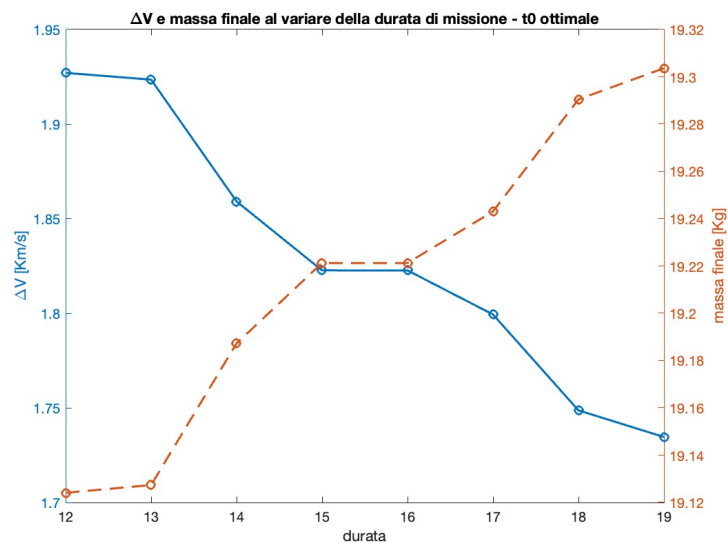


Figura 7.4: ΔV in funzione della durata di missione

L'analisi ha evidenziato che accettare un incremento moderato del consumo propulsivo consente di ridurre significativamente la durata della missione, infatti allungando la missione di 1 anno si ha un risparmio sulla massa finale del satellite solo dello 0.7% (tabella 7.2)

t0	durata	massa iniziale [Kg]	massa finale [Kg]	ΔV [Km/s]	consumo percentuale
171	12	21.0	19.14055	1.90934	8.8545%
171	15	21.0	19.24063	1.80193	8.3779%
171	18	21.0	19.29045	1.74868	8.1407%

Tabella 7.2: Missione Ottimale

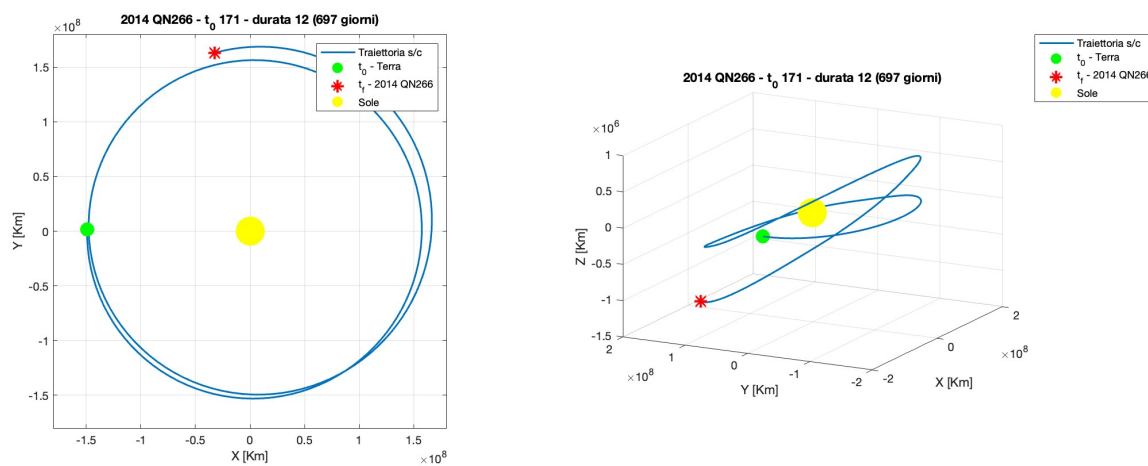


Figura 7.5: Traiettoria missione di durata 12

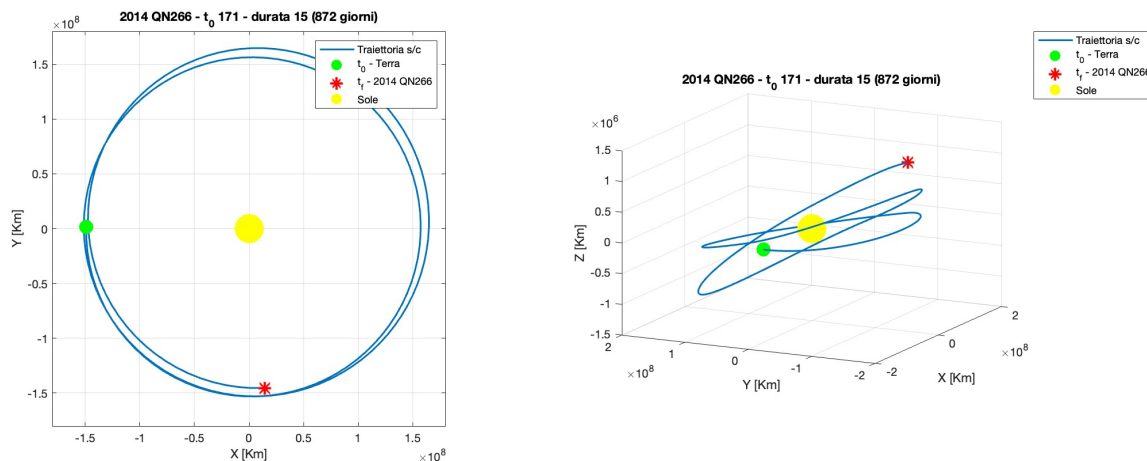


Figura 7.6: Traiettoria missione di durata 15

7.1.2 2016 WN55

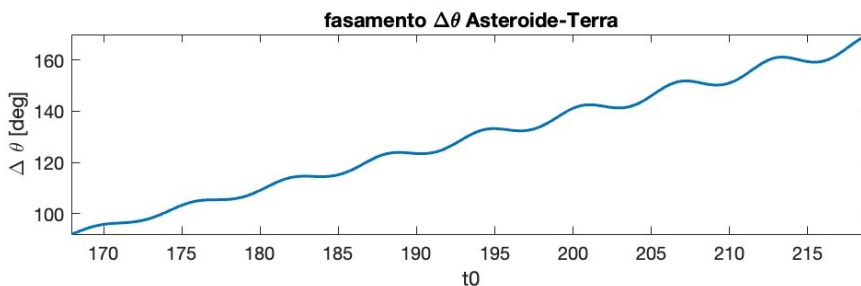


Figura 7.7: Fasamento Terra-2016 WN55

Dall’analisi del fasamento angolare $\Delta\theta$ tra la Terra e l’asteroide 2016 WN55 si osserva che, nell’intervallo di tempo analizzato, il fasamento non risulta mai ottimale e tende progressivamente a peggiorare. Il grafico in figura 7.7 mostra la variazione di $\Delta\theta$ al variare del tempo di partenza t_0 , illustrando l’evoluzione del posizionamento relativo tra i due corpi. L’andamento del costo propulsivo segue una tendenza simile, con valori più favorevoli per i tempi di partenza più ravvicinati, come evidenziato nel grafico in 7.8.

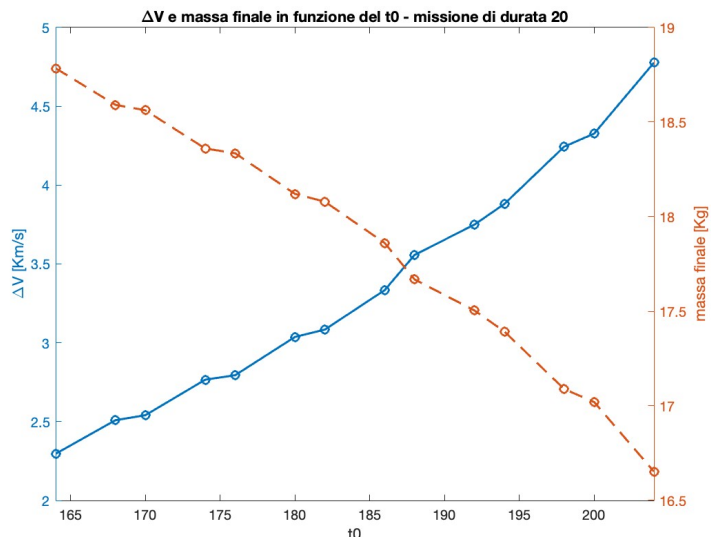


Figura 7.8: ΔV al variare dell’istante di partenza

Fissato il t_0 ottimale, l’analisi si è focalizzata sulla variazione della durata della missione per individuare soluzioni che riducano il tempo di trasferimento o il consumo di propellente. Come mostrato nel grafico in figura 7.9, è possibile ridurre la durata della trasferta fino a 18 unità (≈ 3 anni), a fronte di un incremento significativo del consumo di propellente.

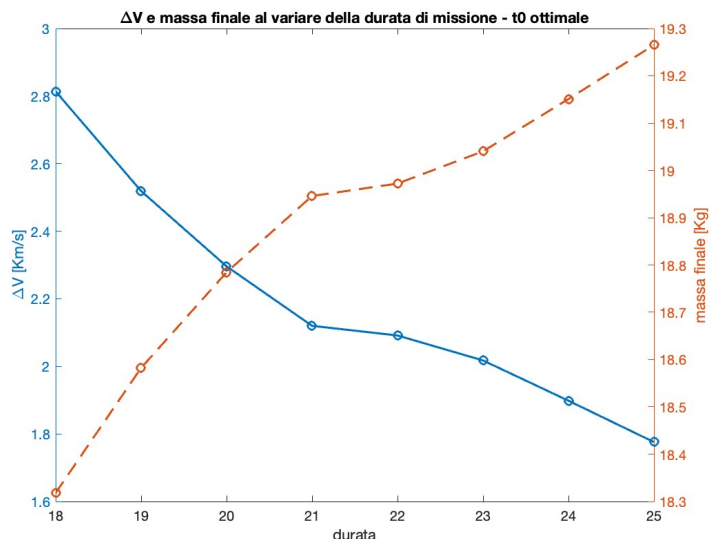


Figura 7.9: ΔV in funzione della durata di missione

Di seguito sono riportati i parametri delle missioni con durata minima e con il minor consumo di propellente.

t_0	durata	massa iniziale [Kg]	massa finale [Kg]	ΔV [Km/s]	consumo percentuale
164	18	21.0	18.31804	2.81387	12.77120 %
164	25	21.0	19.26503	1.77583	8.26182 %

Tabella 7.3: Missioni verso 2016 wn55

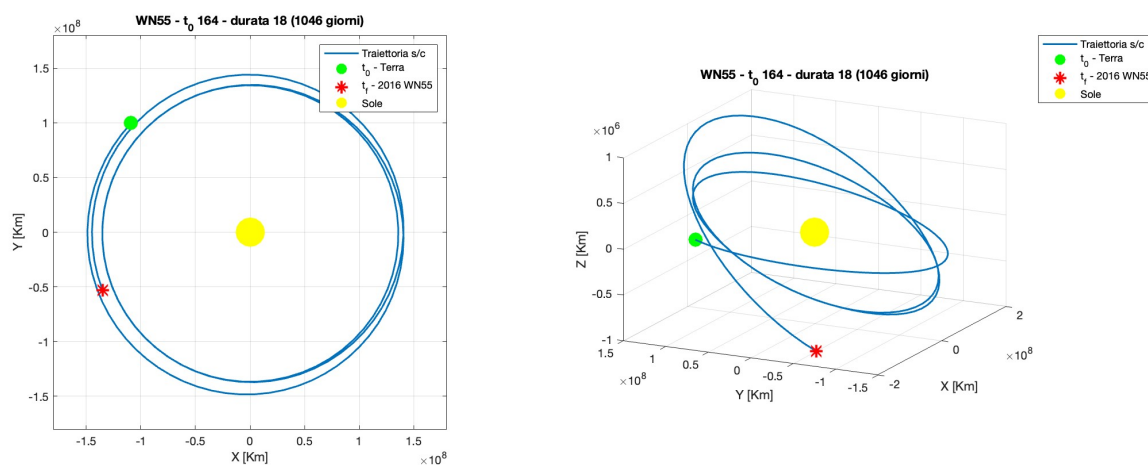


Figura 7.10: Traiettoria missione di durata 18

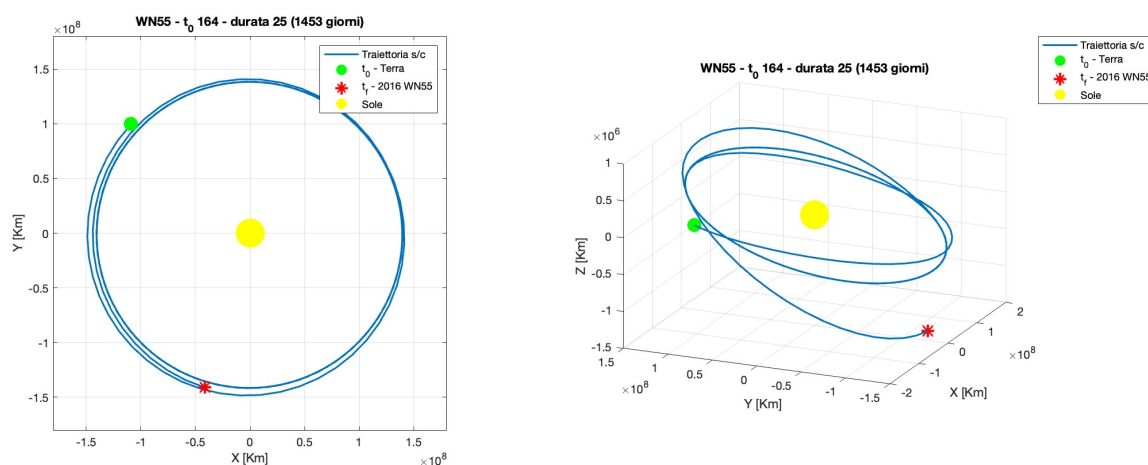


Figura 7.11: Traiettoria missione di durata 25

L'analisi dell'andamento dei raggi di afelio e perielio può fornire un primo indicatore dell'efficienza della traiettoria, poiché un andamento monotono di questi parametri (entrambi crescente/decescenti oppure uno crescente e l'altro decrescente) suggerisce un utilizzo coerente della propulsione. Tuttavia, nelle missioni ottenute, questa tendenza non viene rispettata, suggerendo possibili margini di miglioramento nell'ottimizzazione del trasferimento.

Un discorso analogo vale per la variazione dell'eccentricità: una traiettoria ben ottimizzata tende a mostrare meno oscillazioni rispetto a quelle che si vedono in figura 7.12 e 7.13. Nel caso in esame,

la necessità per il satellite di adottare un'orbita altamente ellittica rispetto a quella di arrivo potrebbe essere dovuta a un fasamento iniziale non favorevole, che ha richiesto manovre correttive più complesse durante il trasferimento. Tutto ciò è coerente con l'analisi del fasamento svolta all'inizio della sezione. Infatti, sebbene la missione risulti fattibile, si può dedurre che una partenza più vicina a una data di fasamento ottimale consentirebbe di ridurre significativamente sia il consumo di propellente che il tempo di trasferimento.

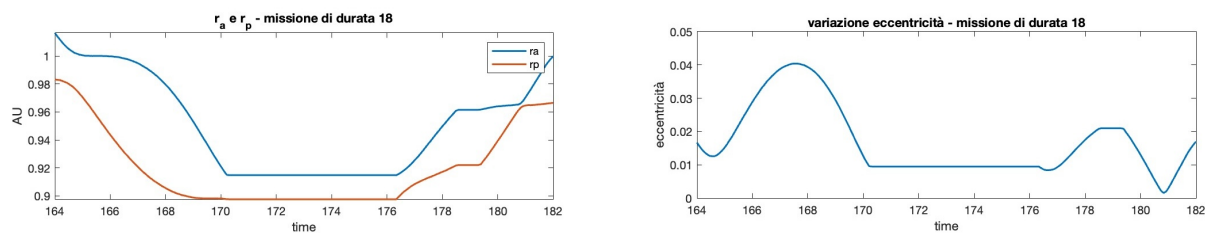


Figura 7.12: r_a , r_p ed e per una missione di durata 18

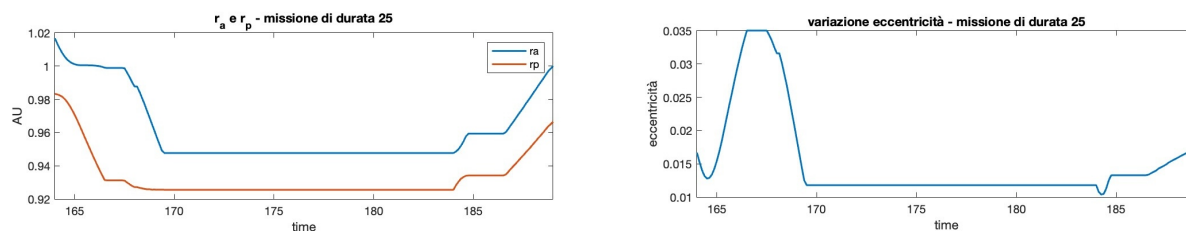


Figura 7.13: r_a , r_p ed e per una missione di durata 25

7.1.3 2020 PJ6

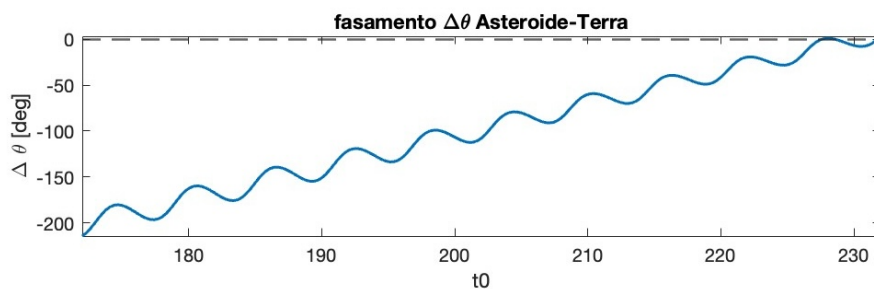


Figura 7.14: $\Delta\theta$ 2020 PJ6 - Terra

t_0	$\Delta\theta$ [°]
218	-47.1849
221	-24.1291
224	-27.1242
227	-2.4451
228	1.3424
230	-7.1539

Tabella 7.4: Intervallo migliore di $\Delta\theta$

Dall'analisi del fasamento è lecito attendersi soluzioni buone per partenze dopo l'istante $t_0 = 218$; infatti dal grafico in figura 7.15 si apprezza in prima analisi un andamento del costo della trasferta quasi monotono decrescente, che ricalca l'andamento del $\Delta\theta$. Per poter effettuare questa prima analisi, generalizzata su tutto l'intervallo di tempo considerato, si è scelta una durata di missione di 22 (≈ 1280 giorni). Si è quindi concentrata l'analisi nell'intervallo di tempo $t_0 = 218 \div 230$ (grafico in figura 7.16), permettendo di ridurre la durata di missione a 12 unità di tempo (≈ 700 giorni) ed effettuare analisi più precise.

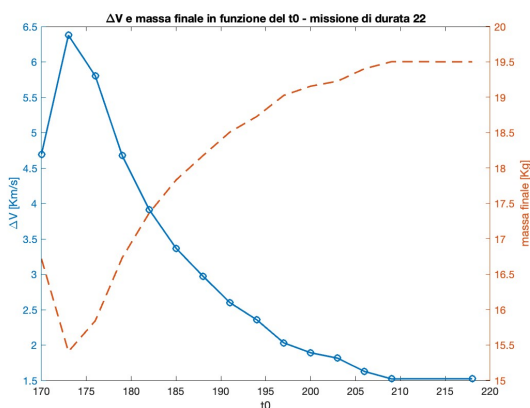
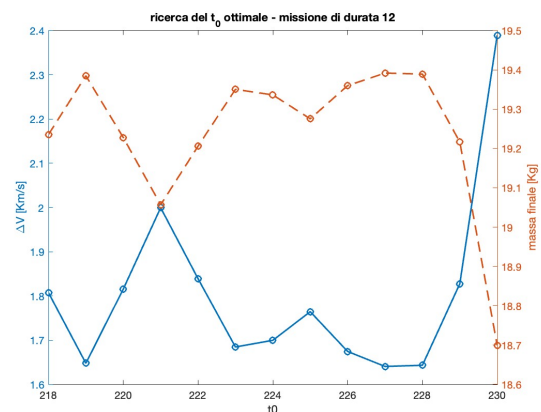
Figura 7.15: ΔV al variare dell'istante di partenza

Figura 7.16: Zoom nell'intorno della partenza ottimale

Notiamo dal grafico in figura 7.16 che ci sono almeno 3 opportunità di missioni di pressochè uguale costo e durata con partenza in 3 istanti diversi:

t_0	durata	massa iniziale [Kg]	massa finale [Kg]	ΔV [Km/s]	consumo percentuale
219	12	21.0	19.38502	1.64797	7.6904%
227	12	21.0	19.39187	1.64070	7.6578%
228	12	21.0	19.38930	1.64342	7.6700%

Tabella 7.5: Possibili partenze - 2020 PJ6

Successivamente si è esplorata la possibilità di aumentare o diminuire la durata della missione per le 3 soluzioni migliori.

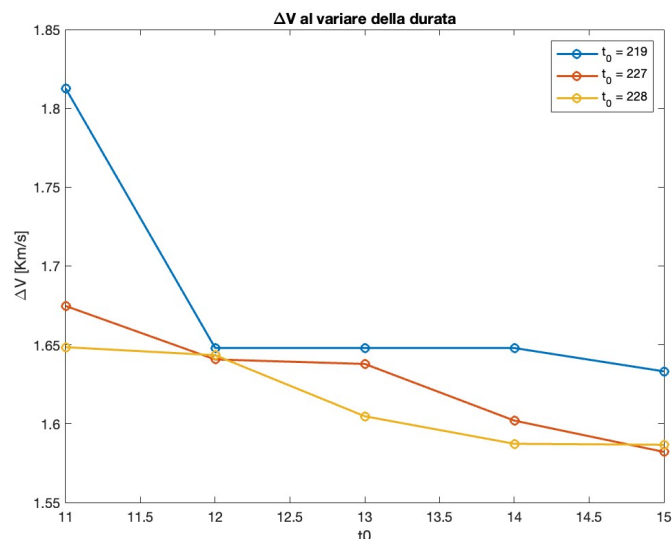


Figura 7.17: ΔV al variare della durata per diversi istanti di partenza

Il grafico 7.17 mostra che per tutte e 3 le traiettorie risulta pressochè inutile aumentare la durata dal punto di vista del risparmio propulsivo, si può invece pensare di ridurla ulteriormente accettando consumi leggermente più elevati: in questo senso la missione con partenza a $t_0 = 219$ risulta meno favorevole ad una diminuzione della durata, subendo una leggera impennata del ΔV richiesto.

7.1.4 2007 CS5

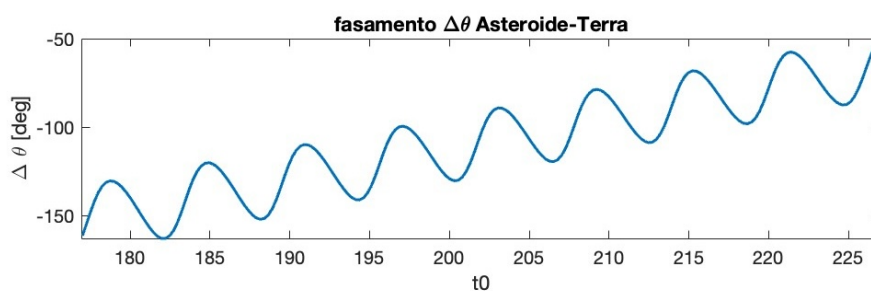


Figura 7.18: Fasamento Terra-2007 CS5

L'analisi del fasamento per 2007 CS5 indica che le date di partenza più favorevoli potrebbero situarsi oltre il limite di tempo considerato. Tuttavia, è stata comunque esplorata la possibilità di individuare soluzioni all'interno dell'intervallo analizzato. Per questo motivo, le soluzioni sono state cercate principalmente nell'intervallo di tempo $t_0 = 210 \div 230$. Si osserva un andamento oscillante delle soluzioni (7.19), con una leggera tendenza migliorativa come lecito attendersi dall'analisi del fasamento.

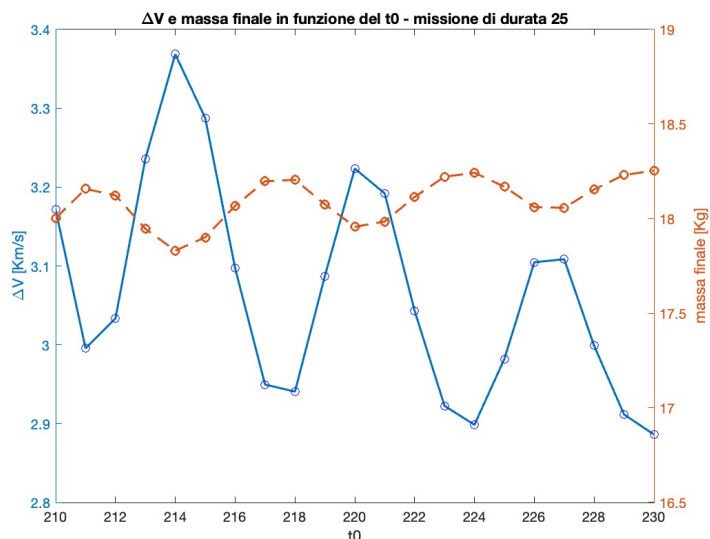


Figura 7.19: ΔV al variare dell'istante di partenza

Analogamente al lavoro svolto sugli altri asteroidi, si è spostato il focus dell'analisi sulla possibilità di ridurre la durata di missione, mantenendo i consumi all'interno di un range accettabile. Per questo studio si sono prese due soluzioni di partenza che avevano costo propulsivo analogo per una durata di 25. Dal grafico in figura 7.20 si osserva come riducendo la durata il ΔV aumenti più repentinamente per la soluzione con partenza a $t_0 = 224$ rispetto a quella con partenza a $t_0 = 230$; si osserva inoltre come aumentando oltre a 25 unità (≈ 4 anni) il costo non scenda ulteriormente.

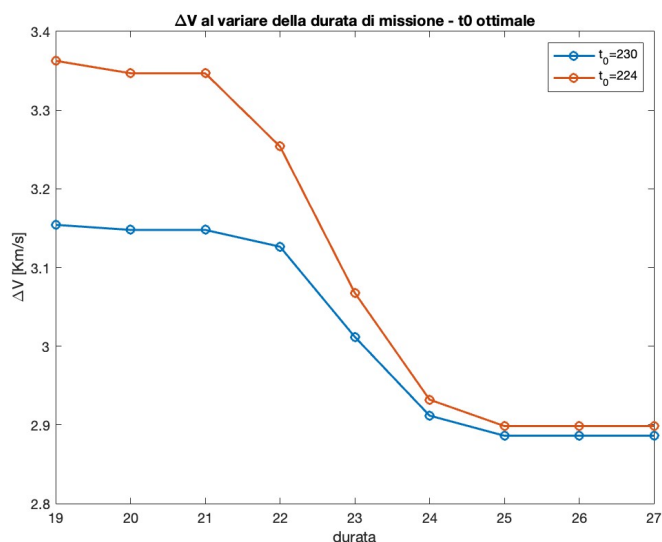


Figura 7.20: ΔV al variare della durata

Si riportano quindi i parametri delle missioni di minimo costo e minima durata per partenze a $t_0 = 230$. Come si può notare l'incremento di durata oltre le 25 unità temporali non comporta un risparmio propulsivo significativo tale da giustificare l'allungamento della missione.

t_0	durata	massa iniziale [Kg]	massa finale [Kg]	ΔV [Km/s]	consumo percentuale
230	19	21.0	18.01779	3.15422	14.20098 %
230	27	21.0	18.25380	2.88622	13.07712 %

Tabella 7.6: Missioni verso 2007 CS5

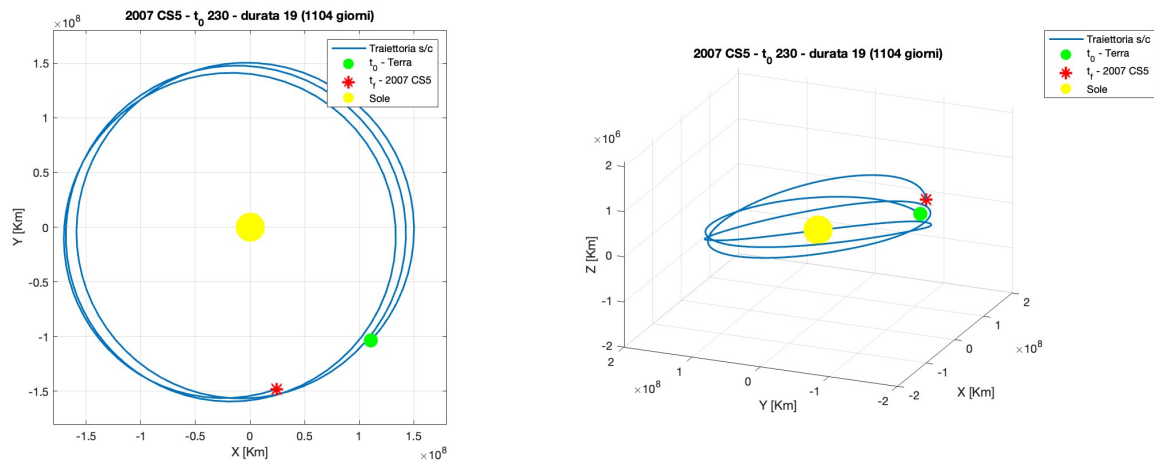


Figura 7.21: Traiettorie missioni di durata 19

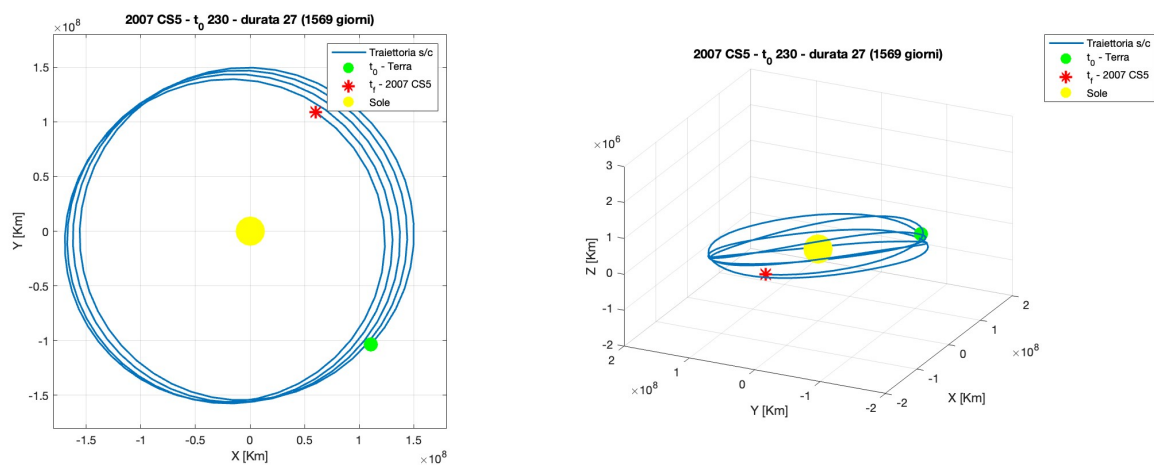


Figura 7.22: Traiettorie missioni di durata 27

Le missioni verso 2007 CS5 risultano meno competitive rispetto a quelle per gli altri asteroidi, principalmente a causa della maggiore durata del trasferimento e dell'elevato costo propulsivo. Sebbene il fasamento non sia particolarmente sfavorevole, l'alta eccentricità dell'asteroide complica il raggiungimento di un'orbita finale ottimale, richiedendo traiettorie con numerose correzioni. Questo porta a un utilizzo meno efficiente della spinta e a un conseguente aumento del consumo di propellente, rendendo la missione meno vantaggiosa rispetto ad altri target analizzati. Tale considerazione è coerente con quanto osservato nei grafici dell'evoluzione di afelio, perielio, eccentricità e inclinazione, che mostrano un comportamento regolare, possibile indice di una buona ottimizzazione, seppur a fronte di costi maggiori.

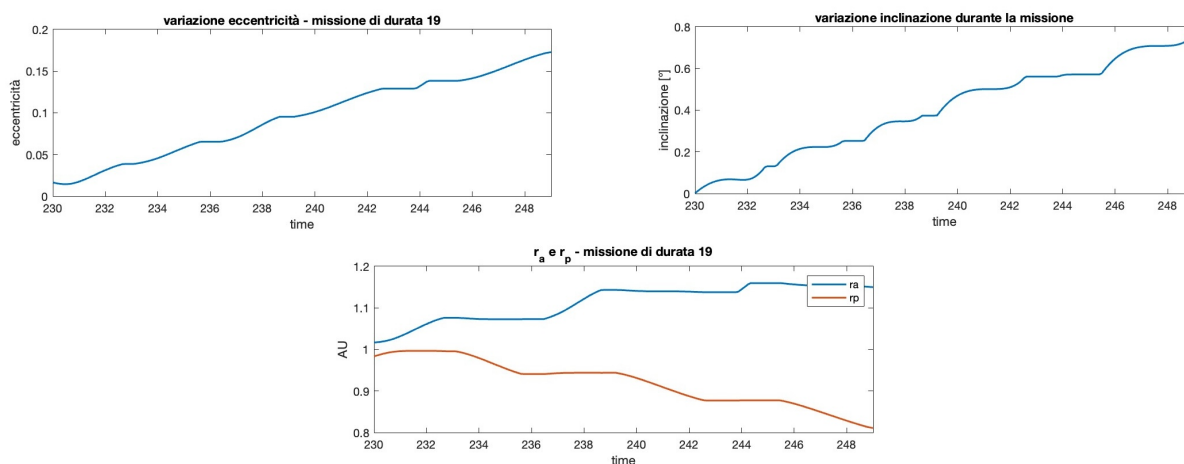


Figura 7.23: r_a , r_p , e ed i per la missione di durata 19

7.1.5 Confronto soluzioni preliminari

In questa parte viene presentato un rapido confronto tra le soluzioni preliminari individuate per i quattro asteroidi analizzati: 2014 QN266, 2020 PJ6, 2016 WN55 e 2007 CS5. L'obiettivo è evidenziare le principali differenze in termini di costo propulsivo, durata della missione e finestre di lancio, mettendo in luce i fattori che hanno portato alla selezione di 2014 QN266 e 2020 PJ6 per l'analisi dettagliata. In particolare, si osserva come le missioni verso 2016 WN55 e 2007 CS5 presentino condizioni meno favorevoli, come si può notare nel grafico in figura 7.24.

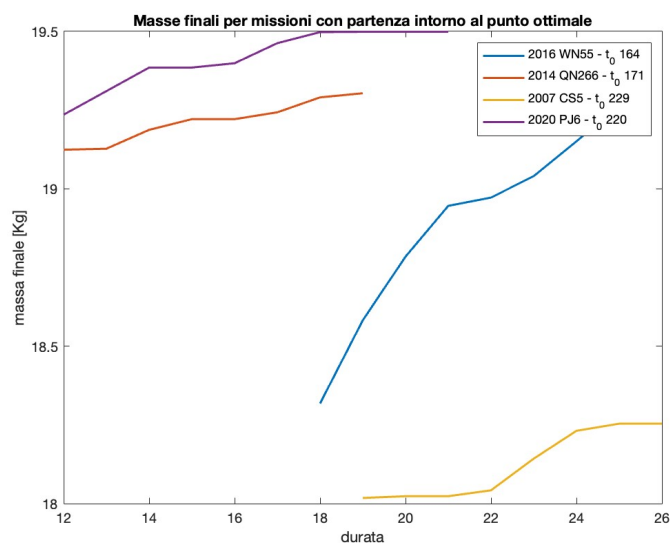


Figura 7.24: Confronto missioni verso vari asteroidi

Asteroide	t0	durata	m_0 [Kg]	m_f [Kg]	ΔV [Km/s]	consumo percentuale
2014 QN266	171	12	21.0	19.14055	1.90934	8.8545%
2106 WN55	164	18	21.0	18.31804	2.81387	12.77120%
2020 PJ6	227	12	21.0	19.39187	1.64070	7.65781%
2007 CS5	230	19	21.0	18.01779	3.15422	14.20098 %

Tabella 7.7: Missioni migliori

L'elevato costo propulsivo, combinato con l'impossibilità di ridurre la durata della missione al di sotto dei 3 anni, ha portato all'esclusione di questi due asteroidi dalla successiva fase di analisi.

7.2 Analisi approfondite

Le analisi approfondite sono state condotte utilizzando una versione avanzata del codice di ottimizzazione, capace di tenere in considerazione l'influenza delle condizioni di uscita dalla SOI terrestre nella prima fase della missione. Questa versione del codice richiede in input 4 ulteriori parametri:

- d : rappresenta la distanza dalla Terra all'istante iniziale t_0 , espresso in AU. il raggio della sfera di influenza terrestre è $r_{SOI} \approx 0.01$ AU. Pertanto si è cercato di raggiungere soluzioni con bassi valori di d (≈ 0.02)
- α : angolo di uscita dalla SOI terrestre nel piano dell'eclittica. Quest'angolo è stato fatto variare tra $\alpha = 90^\circ$ (front door exit) e $\alpha = -90^\circ$ (back door exit) alla ricerca della soluzione ottimale.
- δ : angolo di uscita dalla SOI terrestre fuori dal piano dell'eclittica. Quest'angolo è stato tenuto ad un valore nullo in tutti i tentativi.
- V_∞ : è la velocità di eccesso iperbolico con cui lo s/c esce dalla SOI terrestre; in questa analisi è stata sempre considerata nulla.

Questa modellizzazione più accurata ha permesso di ottenere traiettorie più realistiche e di affinare ulteriormente le soluzioni identificate nella fase preliminare.

7.2.1 2014 QN266

Partendo dalla soluzione trovata nel capitolo 7.1.1, che si riporta per comodità, si è cercata la nuova soluzione ottimale avvicinandosi a step alla condizione desiderata di $d = 0.02$.

t0	durata	massa iniziale [Kg]	massa finale [Kg]	ΔV [Km/s]	consumo percentuale
171	12	21.0	19.14055	1.90934	8.8545%

Tabella 7.8: Missione ottimale - 2014 QN266

L'analisi condotta ha confermato la data di partenza ottimale, consentendo di migliorare ulteriormente i consumi e riducendo la durata della missione fino a un minimo di 9 unità (≈ 18 mesi). Dal

grafico in figura 7.25 si osserva che la soluzione migliore corrisponde a una partenza nell'istante 171. Inoltre, si nota come un prolungamento della durata della missione non porti ad un significativo miglioramento dei consumi, motivo per cui è stata scelta come missione ottimale quella con durata minima.

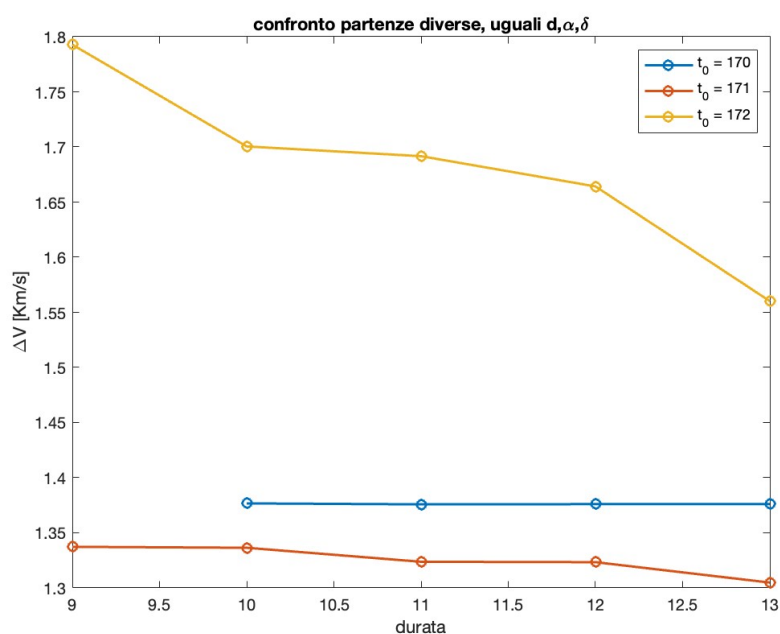


Figura 7.25: ΔV al variare della durata per diversi istanti di partenza

Traiettoria finale

Di seguito vengono riportati i parametri della missione con partenza prevista per marzo 2027 e arrivo all'asteroide target nell'agosto 2028. Inoltre, nella tabella 7.10 sono presentate due possibili missioni alternative, con date di partenza anticipate e posticipate di sei mesi rispetto a quella ottimale. Le traiettorie relative a queste missioni vengono riportate nell'appendice A.

MISSIONE VERSO 2014 QN266	
t0	171
data di partenza	20/03/2027
data di arrivo	24/08/2028
durata	9
d	0.02 AU
α	-90 °
δ	0 °
massa iniziale	21.0 Kg
massa finale	19.67966 Kg
ΔV	1.33731 Km/s
consumo percentuale	6.287342%

Tabella 7.9: Parametri missione ottimale

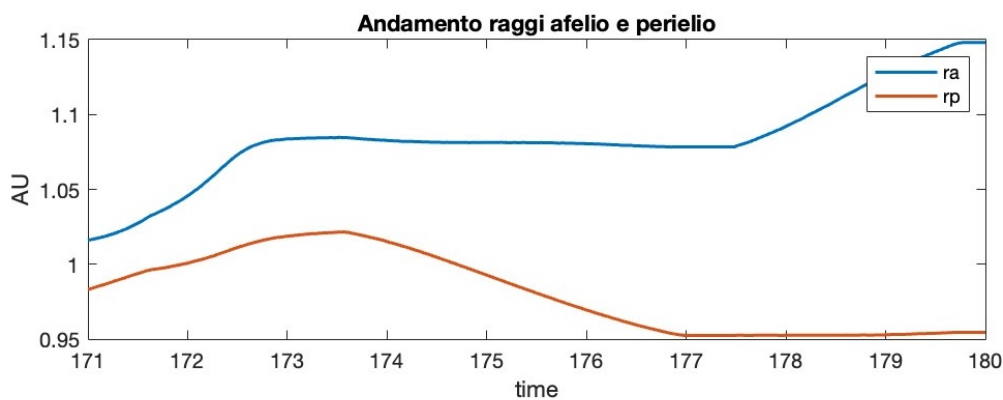


Figura 7.26: Andamento raggio di perielio e afelio durante la trasferta

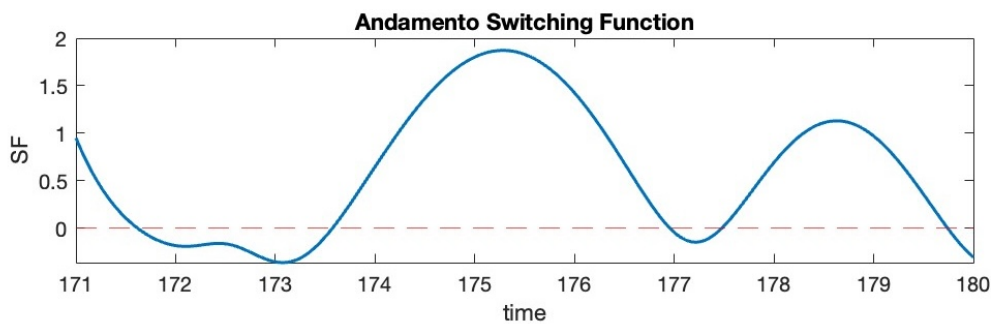


Figura 7.27: Andamento della Switching Function

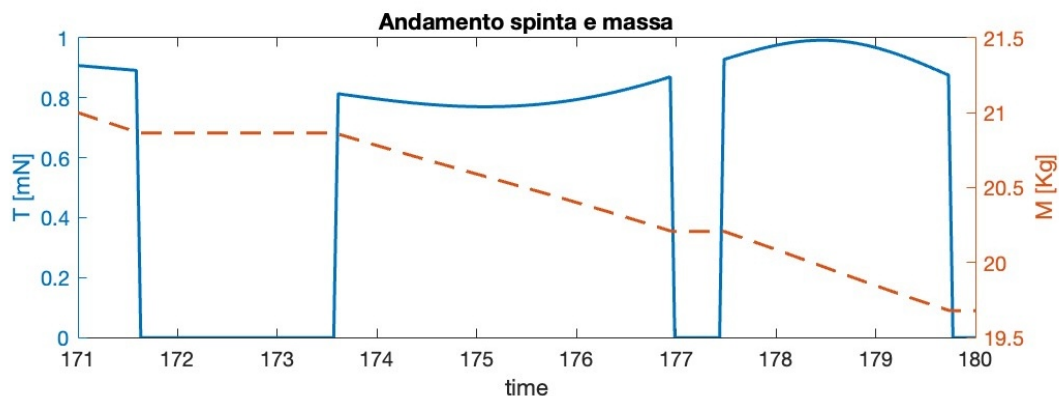


Figura 7.28: Andamento di spinta e massa nel tempo

Nella soluzione ottimale si osservano 3 fasi di spinta, intervallate da altrettanti archi di 'coasting', ossia segmenti della traiettoria in cui non viene applicata spinta. Questi tratti, evidenziati in figura 7.27, corrispondono alle regioni in cui la Switching Function assume valori negativi. La stessa caratteristica è confermata dal grafico in figura 7.28 che mostra l'andamento della spinta nel tempo.

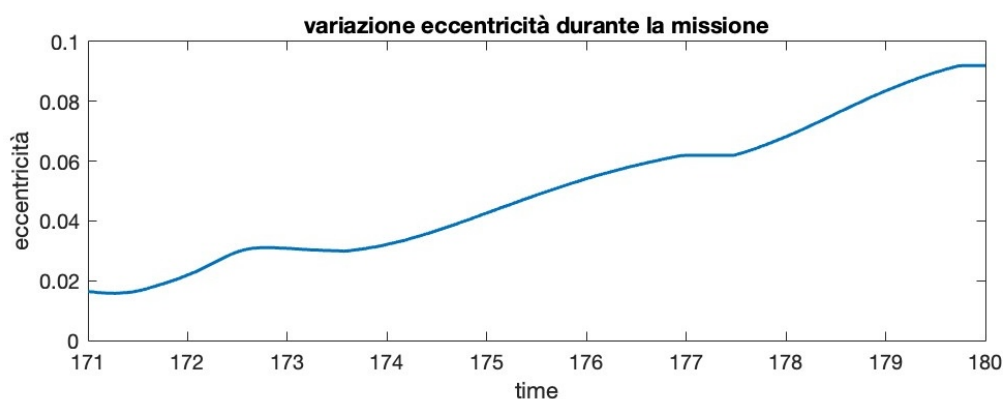


Figura 7.29: Variazione dell'eccentricità dell'orbita durante la missione



Figura 7.30: Variazione dell'inclinazione dell'orbita durante la missione

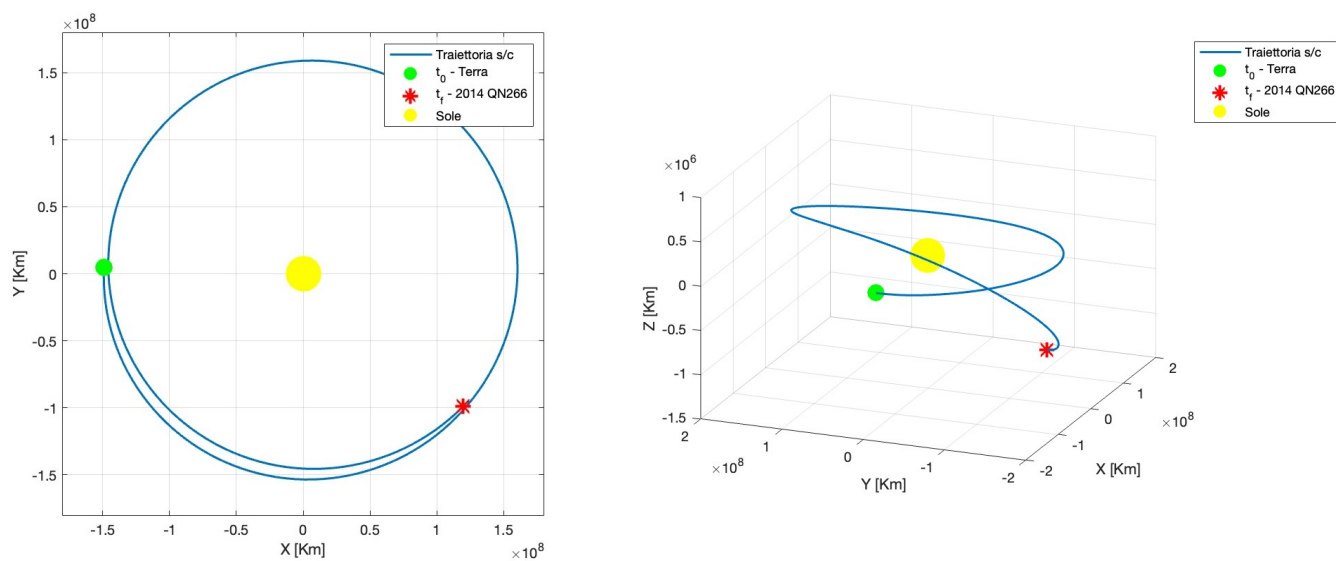


Figura 7.31: Traiettorie verso 2014 QN266

t_0	Durata	Data partenza	Data arrivo	d [AU]	α [°]	δ [°]	ΔV [Km/s]
170	10	20/01/2027	24/08/2028	0.02	-90	0	1.37670
172	9	17/05/2027	21/10/2028	0.02	-90	0	1.79278

Tabella 7.10: Missioni Alternative

7.2.2 2020 PJ6

L'analisi è stata condotta a partire dalla soluzione ottimale preliminare individuata nel capitolo 7.1.3, i cui dati, per comodità, sono riportati nella tabella 7.11. Questa soluzione è stata utilizzata come punto di riferimento per esplorare il suo intorno alla ricerca di una nuova missione ottimale.

t_0	durata	massa iniziale [Kg]	massa finale [Kg]	ΔV [Km/s]	consumo percentuale
227	12	21.0	19.39187	1.64070	7.65781 %

Tabella 7.11: Missione ottimale - 2020 PJ6

Traiettoria finale

L'analisi approfondita al variare dei parametri d ed α ha permesso di limare ulteriormente il costo e la durata della missione, risultando in missioni di durata inferiore a 2 anni senza compromettere i consumi ottimali di propellente. È stata trovata la possibilità di ridurre la durata della trasferta fino ad un minimo di 7 (≈ 14 mesi), accettando un lieve aumento dei consumi di propellente, come si evince dal grafico in figura 7.32; si può inoltre riscontrare come sia poco conveniente aumentare la durata della missione dal punto di vista dei consumi. Di seguito sono quindi riportati i parametri della missione di minima durata, considerata il miglior compromesso tra tempi di missione e costi propulsivi.

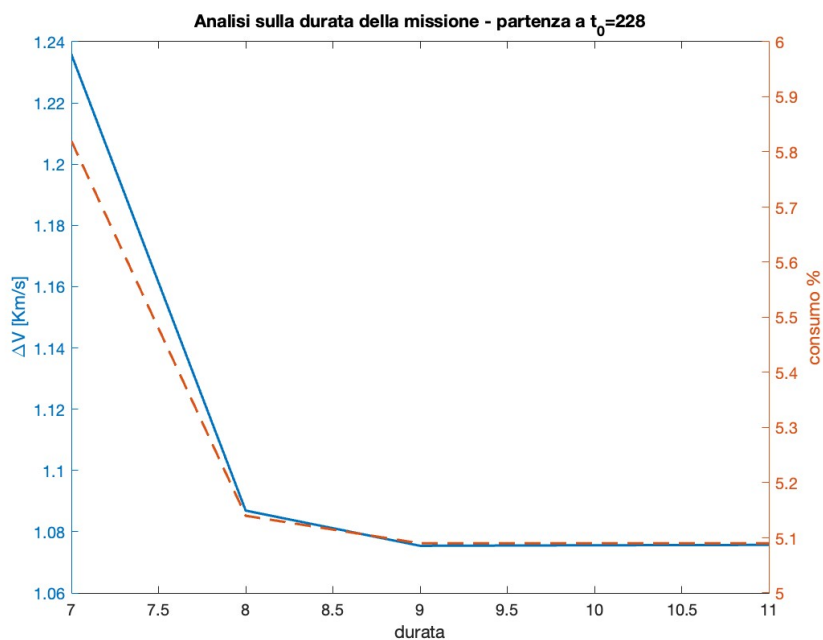


Figura 7.32: ΔV e consumo % al variare della durata

Inoltre vengono fornite in tabella 7.13 alcune soluzioni con partenze alternative di simile costo e durata; tra queste è interessante notare come sia presente una soluzione molto valida con partenza quasi 2 anni prima del fasamento ottimale ($t_0 = 219$) e uscita posteriore dalla sfera di influenza terrestre. Le traiettorie relative a queste missioni vengono riportate nell'appendice A.

MISSIONE VERSO 2020 PJ6	
t_0	228
data di partenza	15/04/2036
data di arrivo	27/05/2037
durata	7
d	0.02 AU
α	90°
δ	0°
massa iniziale	21.0 Kg
massa finale	19.77681 Kg
ΔV	1.23590 Km/s
consumo percentuale	5.82473%

Tabella 7.12: Parametri missione ottimale

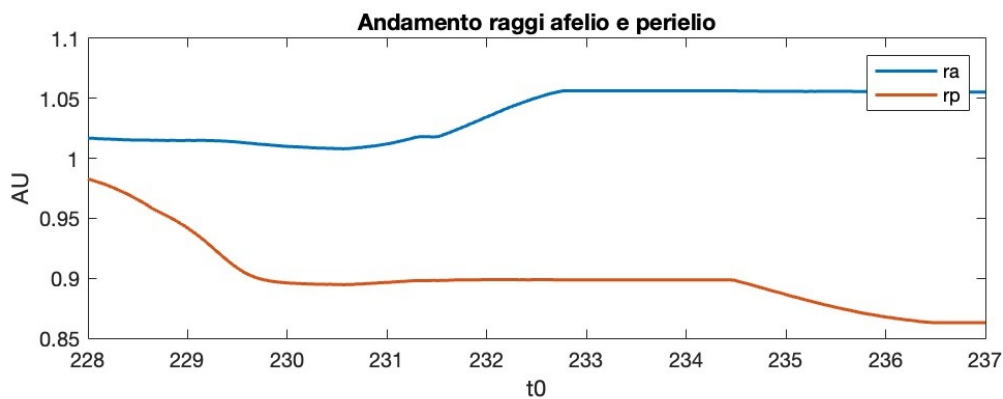


Figura 7.33: Andamento raggio di perielio e afelio durante la trasferta

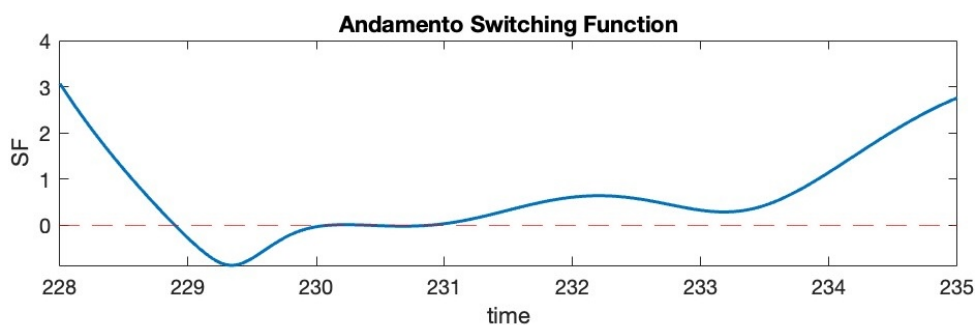


Figura 7.34: Andamento della Switching Function

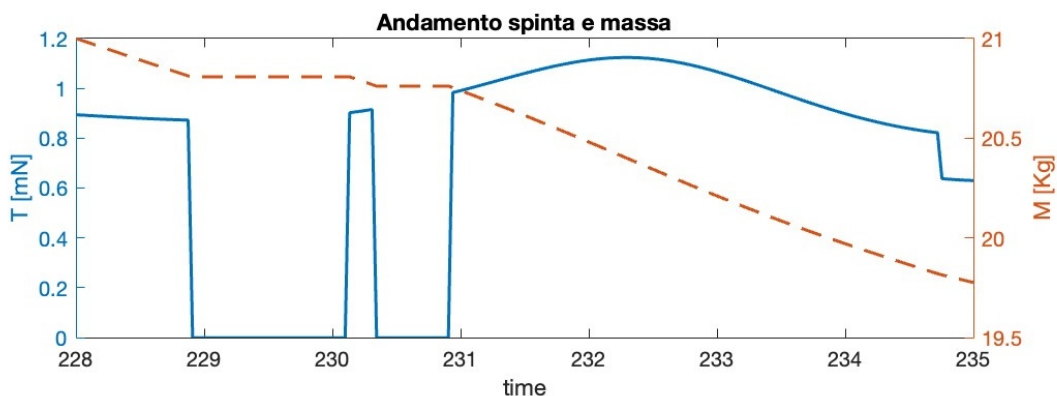


Figura 7.35: Andamento di spinta e massa nel tempo

Come nell'analisi di 2014 QN266, anche in questa soluzione si osservano 3 fasi di spinta, intervalate da 2 archi di 'coasting'. Tuttavia, in questo caso, le fasi non propulse sono minori e più brevi, dato che la durata della missione è inferiore, come si può notare confrontando l'andamento della spinta nel tempo nei grafici in figura 7.35 e 7.28.



Figura 7.36: Variazione dell'eccentricità dell'orbita durante la missione

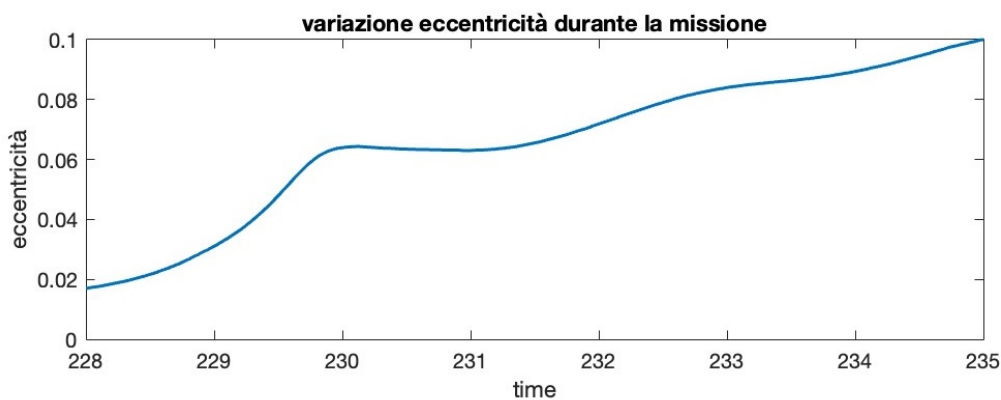


Figura 7.37: Variazione dell'inclinazione dell'orbita durante la missione

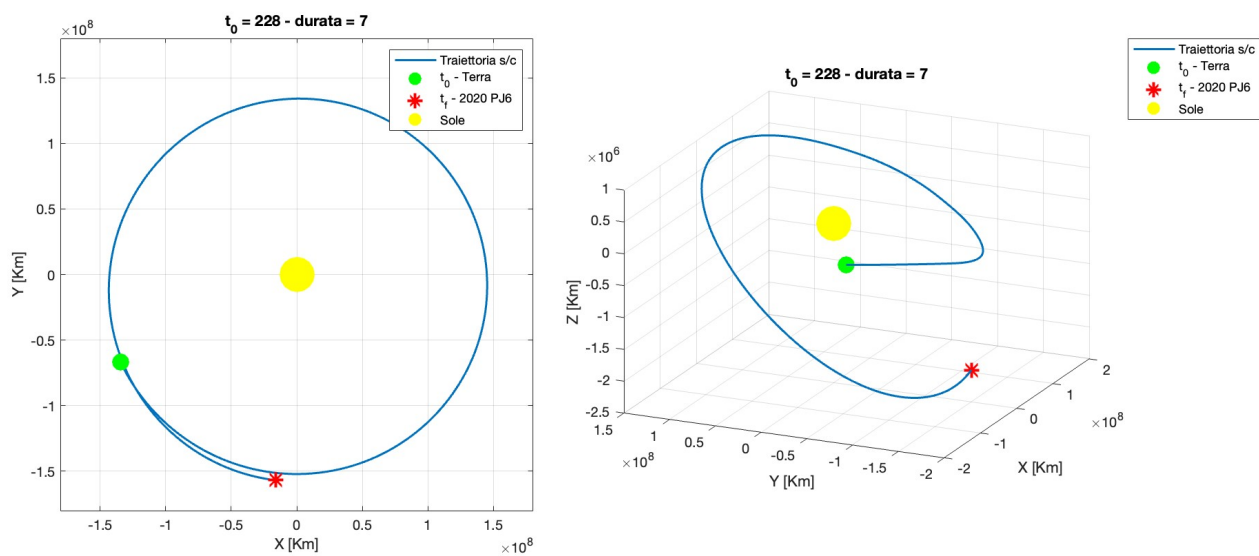


Figura 7.38: Traiettoria verso 2020 PJ6

t0	Durata	Data partenza	Data arrivo	d [AU]	α [°]	δ [°]	ΔV [Km/s]
227	9	17/02/2036	24/07/2037	0.02	90	0	1.19540
226	9	20/12/2035	27/05/2037	0.02	90	0	1.185204
228	9	15/04/2036	20/09/2037	0.02	90	0	1.07539
219	12	9/11/2034	6/10/2036	0.02	-90	0	1.36596

Tabella 7.13: Missioni Alternative

Capitolo 8

Conclusioni

Il lavoro presentato in questa tesi si è concentrato sull'analisi e sull'ottimizzazione tramite metodi indiretti di traiettorie per missioni verso asteroidi Near-Earth (NEAs), in un'ottica di esplorazione scientifica e difesa planetaria, in linea con la missione ANIME promossa dall'Agenzia Spaziale Italiana (ASI). L'obiettivo è stato quello di identificare e studiare target alternativi rispetto a quelli già analizzati nella letteratura e nell'ambito della stessa missione ANIME, prendendo come riferimento proprio l'asteroide obiettivo di questa iniziativa (2000 SG344) per la valutazione della bontà delle soluzioni ottenute.

Gli asteroidi selezionati sono stati scelti sulla base di criteri orbitali, di rilevanza scientifica e di rischio particolarmente favorevoli: in particolare, è stata data priorità a oggetti con orbite simili a quella terrestre, inclusi nella *Risk List* ufficiale dell'ESA, caratterizzati da un rischio di impatto non nullo con la Terra durante futuri passaggi ravvicinati. L'intervallo temporale analizzato copre finestre di lancio comprese tra il 2026 e il 2036.

Struttura operativa del lavoro

Il percorso sviluppato si è articolato in tre fasi operative principali:

1. **Selezione preliminare degli asteroidi:** analisi mirata sugli archivi NEAs per individuare target con parametri orbitali favorevoli e rilevanza sia scientifica che per la difesa planetaria.
2. **Analisi preliminari:** per ciascun asteroide candidato, sono state cercate soluzioni su tutto l'intervallo temporale considerato tramite un'analisi del fasamento iniziale, individuando le finestre più favorevoli.
3. **Analisi approfondite:** per gli asteroidi più promettenti è stata condotta un'ottimizzazione dettagliata, tenendo conto di parametri aggiuntivi legati alle condizioni di uscita dalla SOI terrestre.

Considerazioni finali sui singoli asteroidi

- **2014 QN266:** ha mostrato soluzioni con ΔV contenuti e tempi di volo compatibili con una missione operativa. La miglior soluzione prevede un tempo di volo di circa 18 mesi con ΔV di circa 1.33 km/s, consentendo di portare a destinazione oltre il 93% della massa iniziale della sonda. Tuttavia, la partenza ottimale intorno al 2027 potrebbe risultare troppo ravvicinata rispetto ai tempi necessari per sviluppare la missione.

- **2020 PJ6**: la soluzione migliore prevede una durata di poco più di 1 anno con ΔV di circa 1.2 km/s, con partenza nell'Aprile del 2036. La bontà della soluzione trovata è confermata dall'ampiezza della finestra di lancio: sono infatti state trovate, nell'intorno della missione ottimale, un discreto numero di missioni alternative, permettendo una pianificazione flessibile. Questa combinazione di opportunità favorevoli rendono 2020 PJ6 il target più promettente tra quelli analizzati.
- **2016 WN55**: nonostante parametri orbitali favorevoli, le soluzioni mostrano ΔV elevati (circa 2.8 km/s) e durate superiori a 3 anni. Le migliori soluzioni prevedono partenze a inizio 2026, troppo ravvicinate per una pianificazione realistica. Il fasamento sfavorevole nel periodo considerato suggerisce che possa essere un target interessante per missioni future oltre l'orizzonte temporale analizzato.
- **2007 CS5**: simile a 2016 WN55, ma con fasamento leggermente migliore; gli alti costi propulsivi derivano dalla maggiore eccentricità orbitale. Le migliori soluzioni prevedono partenze intorno al 2036 con ΔV dell'ordine di 3 km/s. Potrebbe rappresentare un target interessante in un orizzonte temporale più ampio, sebbene difficilmente competitivo con 2020 PJ6 e 2014 QN266 in termini di ΔV e durata.

In sintesi, i primi due target, 2014 QN266 e 2020 PJ6, si sono rivelati particolarmente validi e in linea con l'asteroide 2000 SG344, già selezionato dalla missione ANIME, sia per quanto riguarda i bassi costi propulsivi, sia per la durata della missione. Gli altri due, 2016 WN55 e 2007 CS5, rappresentano comunque opzioni interessanti, seppur caratterizzate da missioni leggermente più onerose.

Limitazioni e difficoltà riscontrate

Il lavoro ha evidenziato alcune limitazioni intrinseche ai metodi indiretti:

- Forte dipendenza del metodo dalle condizioni iniziali, che rende necessaria una stima preliminare sufficientemente accurata per garantire la convergenza della soluzione. Le restrizioni imposte sui parametri orbitali sono state dettate dalla necessità di individuare traiettorie a basso ΔV , e hanno consentito di sfruttare, come punto di partenza per l'ottimizzazione, le soluzioni precedentemente calcolate per l'asteroide 2000 SG344 (obiettivo della missione ANIME) la cui orbita, quasi coincidente con quella terrestre, ha agevolato la convergenza iniziale del metodo.
- Complessità computazionale dei metodi indiretti, che richiedono una stima accurata del profilo di missione per garantire la convergenza.

Inoltre, la finestra temporale considerata potrebbe non aver coperto tutte le opportunità disponibili, limitando il numero di traiettorie ottimizzabili.

Possibili sviluppi futuri

- **Estensione della finestra temporale**: analizzare un intervallo temporale più ampio per individuare nuove opportunità di lancio, specialmente per l'asteroide 2016 WN55.

- **Analisi al variare della massa della sonda:** valutare missioni con masse maggiori, accettando un incremento dei consumi propulsivi, per ampliare le soluzioni percorribili.
- **Estensione della durata della missione:** considerare missioni più lunghe per migliorare il compromesso tra durata e consumo.
- **Ottimizzazione delle condizioni di uscita dalla SOI terrestre:** esplorare condizioni alternative di uscita per ottimizzare ulteriormente le traiettorie, ad esempio considerando una velocità di eccesso iperbolico V_∞ non nulla.
- **Missioni multi-target:** utilizzare queste soluzioni per valutare possibili missioni che includano flyby o rendez-vous multipli con diversi NEAs, aumentando l'efficacia scientifica e tecnologica della missione.

Considerazione conclusiva

In sintesi, questo lavoro ha contribuito ad ampliare il ventaglio di opzioni per future missioni verso asteroidi Near-Earth, mettendo in luce come anche corpi di piccole dimensioni possano rappresentare target accessibili, con profili di missione caratterizzati da bassi consumi propulsivi e durate contenute. Pur persistendo alcune limitazioni metodologiche e margini di approfondimento, la tesi si configura come un primo passo concreto verso missioni spaziali coerenti con le attuali capacità tecnologiche e con gli indirizzi promossi a livello nazionale e internazionale.

Capitolo A

Appendice

Questa appendice raccoglie una serie di traiettorie alternative rispetto a quelle presentate nei capitoli principali, con l'obiettivo di esplorare la sensibilità delle soluzioni ottimali rispetto a variazioni nei parametri di missione.

In particolare, l'analisi si concentra su due aspetti principali:

- la possibilità di individuare finestre di lancio multiple, compatibili con lo stesso target, che consentano una maggiore flessibilità nella pianificazione;
- il confronto tra traiettorie diverse, sia in termini di profilo orbitale che di durata complessiva della missione, per evidenziare i compromessi tra consumo propulsivo e tempo di volo.

2014 QN266 - Traiettorie alternative

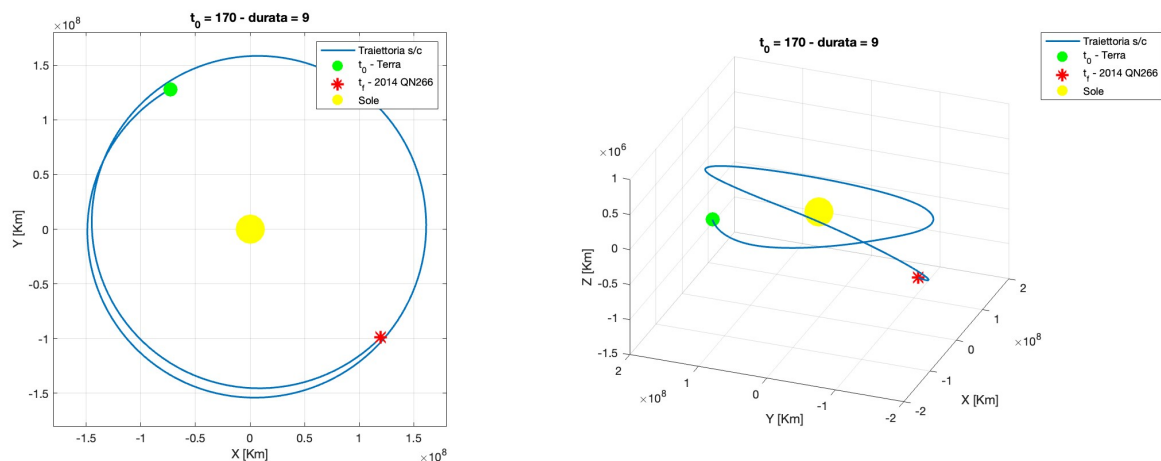


Figura A.1: Missione di durata 9 con partenza a $t_0 = 170$

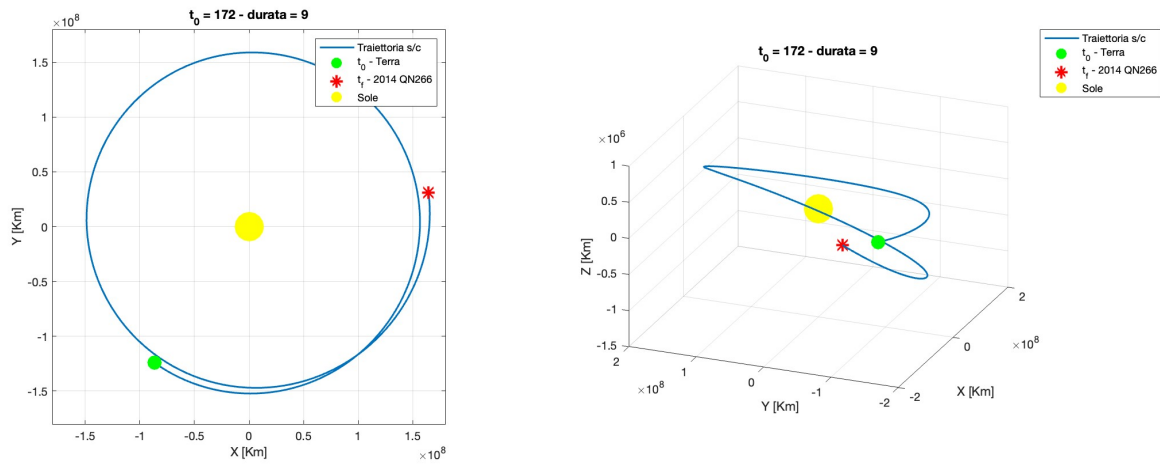


Figura A.2: Missione di durata 9 con partenza a $t_0 = 172$

2020 PJ6 - Traiettorie alternative

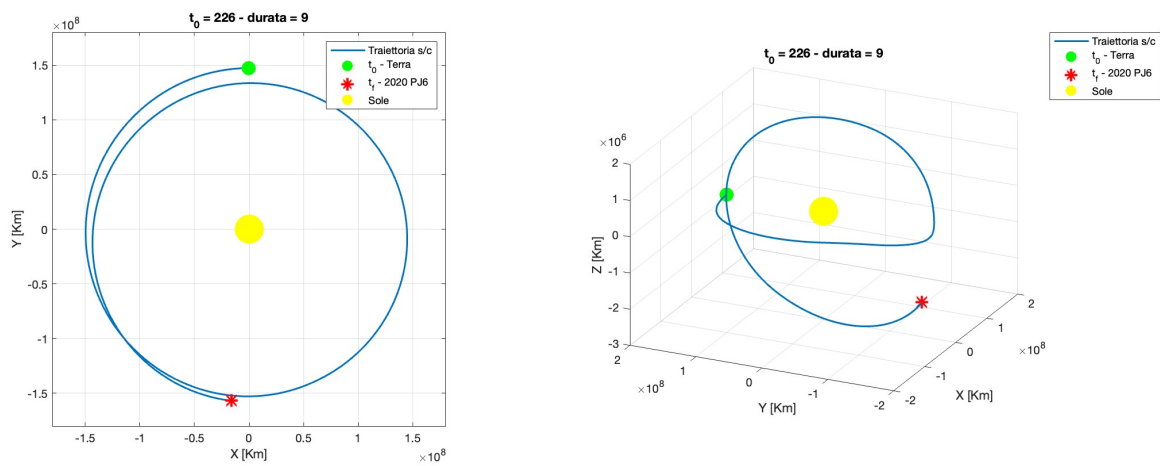


Figura A.3: Missione di durata 9 con partenza a $t_0 = 226$

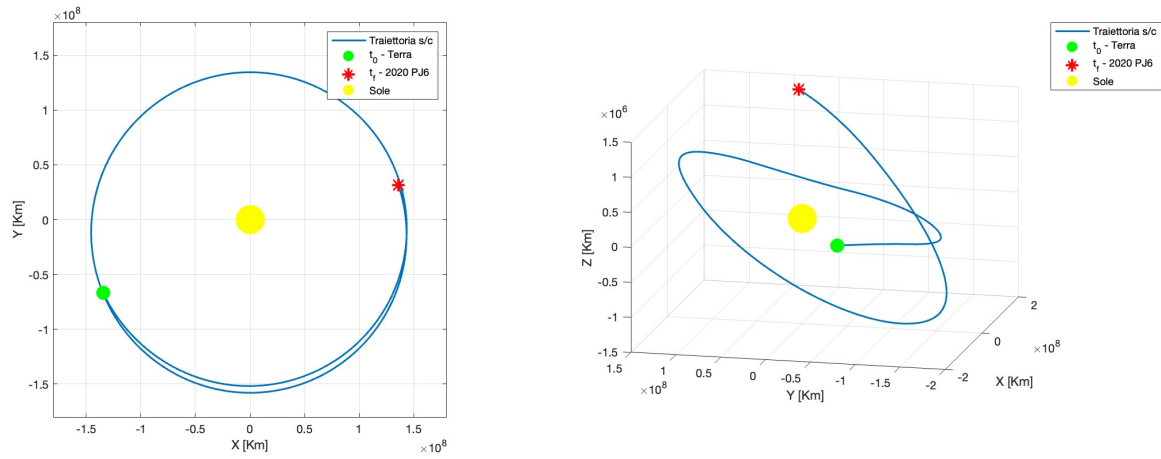


Figura A.4: Missione di durata 9 con partenza a $t_0 = 228$

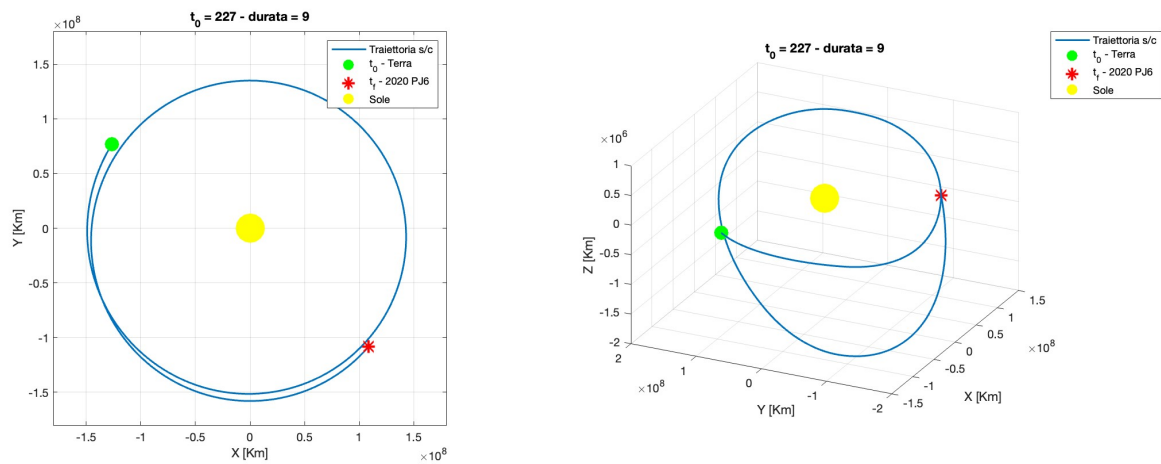


Figura A.5: Missione di durata 9 con partenza a $t_0 = 227$

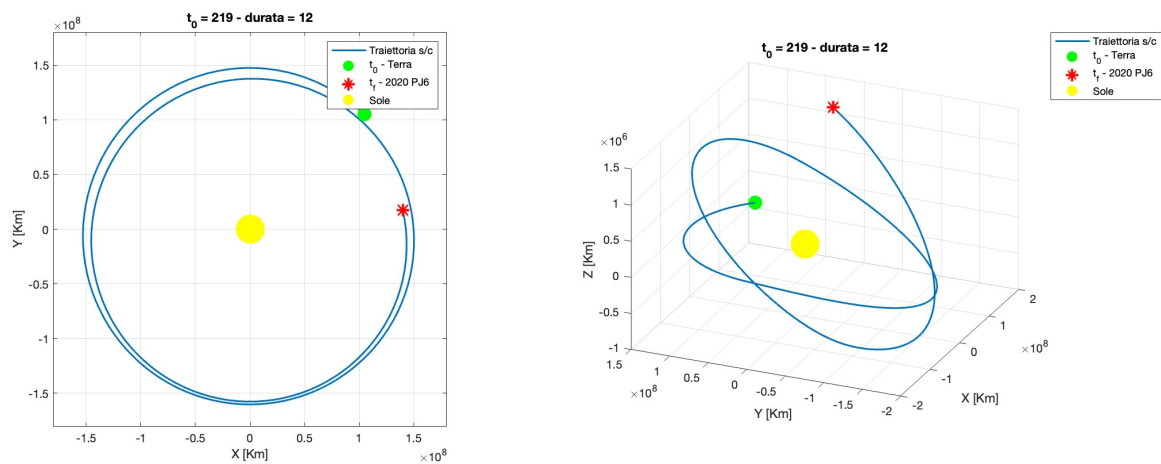


Figura A.6: Missione di durata 12 con partenza a $t_0 = 219$

Bibliografia

- [1] ESA, “near-earth objects coordination centre.” [Online]. Available: <https://neo.ssa.esa.int/search-for-asteroids>
- [2] A. Space, “Introduction of the six basic parameters describing satellite orbits.” [Online]. Available: <https://learn.andoyaspace.no/ebook/student-rocket-pre-study/satellite-orbits/introduction-of-the-six-basic-parameters-describing-satellite-orbits/>
- [3] E. Battipede, *Slides del corso di Meccanica del volo spaziale*. Politecnico di Torino, 2023.
- [4] NASA, “Double asteroid redirection test (dart).” [Online]. Available: <https://science.nasa.gov/mission/dart/>
- [5] ESA, “Hera.” [Online]. Available: https://www.esa.int/Space_Safety/Hera
- [6] NASA, “Osiris-rex.” [Online]. Available: <https://science.nasa.gov/mission/osiris-rex/>
- [7] —, “Hayabusa.” [Online]. Available: <https://science.nasa.gov/mission/hayabusa/>
- [8] —, “Neo-surveyor.” [Online]. Available: <https://science.nasa.gov/mission/neo-surveyor/>
- [9] ASI, “Anime - asteroid nodal intersection multiple encounters,” ASI, 2023.
- [10] S. Spaziali, “Centauri.” [Online]. Available: <https://sorvegliatispaziali.inaf.it/centauri/>
- [11] NASA, “Kuiper belt.” [Online]. Available: <https://science.nasa.gov/solar-system/kuiper-belt/>
- [12] —, “Asteroid facts.” [Online]. Available: <https://science.nasa.gov/solar-system/asteroids/facts/>
- [13] I. A. Unit, “Near earth objects,” 2025. [Online]. Available: <https://www.iau.org/public/themes/neo/#:~:text=Formally%2C%20an%20NEO%20is%20any,radius%20of%20the%20Earth's%20orbit>
- [14] J. Uri, “115 years ago: The tunguska asteroid impact event,” NASA, 2023. [Online]. Available: <https://www.nasa.gov/history/115-years-ago-the-tunguska-asteroid-impact-event/>
- [15] J. P. Laboratory, “Torino impact hazard scale.” [Online]. Available: https://cneos.jpl.nasa.gov/sentry/torino_scale.html
- [16] —, “Palermo technical impact hazard scale.” [Online]. Available: https://cneos.jpl.nasa.gov/sentry/palermo_scale.html
- [17] S. Spaziali, “Potentially hazardous object (pho).” [Online]. Available: <https://sorvegliatispaziali.inaf.it/potentially-hazardous-object-pho/>

- [18] ESA, “Neas risk list.” [Online]. Available: <https://neo.ssa.esa.int/risk-list>
- [19] L. Casalino, *Space Propulsion, Slides lezioni*. Politecnico di Torino, 2023.
- [20] D. M. G. Ira Katz, *Fundamentals of Electric Propulsion: Ion and Hall Thrusters*. Jet Propulsion Laboratory California Institute of Technology, 2008.
- [21] S. V. Weston, *State-of-the-Art Small Spacecraft Technology*. NASA, 2025.
- [22] K. F. Wakker, *Fundamental of Astrodynamics*. Delft University of Technology, 2015.
- [23] A. Chetto, “Analisi e ottimizzazione indiretta di traiettorie per missioni spaziali verso asteroidi near-earth,” Master’s thesis, Politecnico di Torino, 2024, rel. Lorenzo Casalino.
- [24] H. P. Geering, *Optimal Control with Engineering Applications*. Springer, 2007.
- [25] ASI, “La missione anime: esplorazione degli asteroidi vicini alla terra,” 2024. [Online]. Available: https://www.asi.it/wp-content/uploads/2024/07/04.07_2_2_INAF.pdf
- [26] J. P. Laboratory, “Small-body element table.” [Online]. Available: https://ssd.jpl.nasa.gov/sb/elem_tables.html