

POLITECNICO DI TORINO

Laurea magistrale in Ingegneria Aerospaziale



Tesi di Laurea Magistrale

Analisi aeroelastica di strutture aeronautiche mediante teorie strutturali avanzate e CFD

Relatori

Prof. Marco PETROLO

Prof. Matteo FILIPPI

Dott. Rodolfo AZZARA

Candidato

Giacomo ZECCHIN

Aprile 2025

Summary

Nel campo della progettazione aeronautica, l'aeroelasticità sta assumendo un ruolo sempre più significativo nella definizione dei vincoli e dei requisiti di progettazione. In questo contesto, il presente lavoro di tesi mira a sviluppare un modello numerico che combina tramite interpolazione le forze aerodinamiche ottenute da simulazioni CFD utilizzando il software SU2 e le forze elastiche calcolate tramite l'approccio FEM+CUF. Il modello risultante è in grado di calcolare con precisione il comportamento statico, in termini di spostamenti e forze risultanti, di una struttura portante con sezione arbitraria. Inizialmente sono descritti i modelli strutturali e aerodinamici adottati nella metodologia numerica proposta. Successivamente, i solutori CFD e FEM+CUF sono stati validati singolarmente prima di essere accoppiati tramite un algoritmo di interpolazione basato sulle Infinite Plate Splines. Al fine di validare il modello aeroelastico proposto, i risultati ottenuti per una lamina piana sono stati confrontati con quelli riportati in letteratura da studi simili, seguiti da ulteriori analisi aeroelastiche basate su teorie strutturali più avanzate e geometrie più complesse. La tesi si conclude fornendo anche una panoramica sui possibili sviluppi futuri del presente lavoro.

Contents

List of Tables	VI
List of Figures	VIII
1 Introduzione	1
1.1 Lo sviluppo dell'aviazione	1
1.1.1 Nuove architetture	2
1.2 L'aeroelasticità	6
1.2.1 Introduzione	6
1.2.2 Cenni storici sull'aeroelasticità	8
1.3 Stato dell'arte	8
1.3.1 Modelli fluidodinamici	9
1.3.2 Modelli strutturali	14
1.3.3 Metodi di interfacciamento tra mesh di diversa natura	18
2 Modello strutturale	20
2.1 Equazioni fondamentali dell'elasticità	21
2.2 Carrera Unified Formulation (CUF)	23
2.2.1 Il modello di espansione Taylor (TE)	23
2.2.2 Il modello di espansione di Lagrange (LE)	26
2.3 Formulazione FEM+CUF	29
2.4 Equazioni di governo	31
2.4.1 δL_{int}	31
2.4.2 δL_{ine}	34
2.4.3 δL_{ext}	34
2.5 Tipologia di analisi	35
2.5.1 Analisi statica	35
2.5.2 Analisi modale	35
2.5.3 Analisi dinamica	36
2.6 Materiali compositi	36

3	Modello fluidodinamico	39
3.1	Le equazioni di Navier-Stokes	39
3.1.1	Equazione di conservazione della massa	40
3.1.2	Equazione di conservazione della quantità di moto	41
3.1.3	Equazione di conservazione dell'energia	43
3.2	Applicazioni numeriche	46
3.2.1	Reynolds Averaged Navier Stokes comprimibili	46
3.2.2	Condizioni al contorno e condizioni iniziali	48
3.2.3	Software SU2	48
3.2.4	Mesh	50
3.2.5	Modelli di turbolenza	55
4	Interazione Fluido Struttura	58
4.1	Infinite Plate Splines (IPS)	58
4.1.1	Derivazione matematica	59
4.2	Deformazione della mesh con SU2_DEF	63
4.3	Schema di risoluzione del problema aeroelastico	63
5	Risultati numerici	66
5.1	Analisi strutturale	66
5.1.1	Analisi di convergenza su una struttura trave	66
5.1.2	Analisi modale	69
5.1.3	Analisi su sezioni trasversali di forme complesse	72
5.1.4	Analisi di convergenza su una struttura piastra in materiale isotropo	74
5.1.5	Analisi su strutture in composito	76
5.2	Analisi fluidodinamica	78
5.2.1	Effetto dell'angolo di attacco sui coefficienti aerodinamici di una lamina piana a $Re = 80000$	80
5.2.2	Effetti aeroelastici sui coefficienti aerodinamici	84
5.2.3	Indipendenza dei risultati dall'estensione del <i>farfield</i>	85
5.3	Analisi aeroelastica	87
5.4	Analisi aeroelastica statica su una struttura di sezione arbitraria	89
5.4.1	Analisi su lamine curve	89
5.4.2	Analisi aeroelastica statica su un ala con profilo NACA2415	91
6	Conclusioni e Sviluppi futuri	97

List of Tables

2.1	Tabella dei nodi con i valori di α_τ e β_τ per un'elemento LE4.	27
2.2	Tabella dei nodi con i valori di α_τ e β_τ per un elemento LE9.	29
2.3	Tabella riassuntiva sui tipi di analisi FEM.	35
5.1	Parametri fisici della trave.	67
5.2	Effetto del numero di elementi sullo spostamento per differenti modelli trave.	68
5.3	Effetto del numero di elementi LE4 sullo spostamento verticale dell'estremità libera di una trave isotropa incastrata a sezione quadrata, in parantesi il confronto con i risultati ottenuti da Petrolo <i>et al.</i> [60].	69
5.4	Effetto dell'espansione CUF utilizzata su f_1, f_2, f_3, f_4 e f_5 [Hz] di una trave a sezione quadrata semplicemente appoggiata discretizzata lungo l'asse trave con 10B4.	71
5.5	Effetto della discretizzazione lungo l'asse trave con elementi beam di ordine diverso su f_1, f_2, f_3, f_4 e f_5 [Hz] della trave semplicemente appoggiata a sezione quadrata.	72
5.6	Effetto della geometria della sezione della trave sullo spostamento verticale u_z all'estremità libera.	74
5.7	Dati della trave isotropa incastrata ad un'estremità.	74
5.8	Effetto dell'espansione CUF utilizzata sugli spostamenti di una trave a sezione quadrata discretizzata con un numero variabile di elementi quad sulla superficie di riferimento.	75
5.9	Dati geometrici della trave in composito.	76
5.10	Proprietà del materiale composito in fibra di carbonio e resina epossidica.	76
5.11	Prime sei frequenze naturali [Hz] della trave in materiale composito incastrata ad un'estremità.	77
5.12	Parametri geometrici della lamina piana.	79
5.13	Parametri fluidodinamici del flusso del problema.	80

5.14	Risultati dell'analisi di convergenza al variare dell'estensione del <i>farfield</i>	86
5.15	Risultati dell'analisi aeroelastica statica per la lamina piana.	88
5.16	Risultati dell'analisi parametrica su spostamento e rotazione per le lamine investite ad $\alpha = 0^\circ$	90
5.17	Risultati dell'analisi parametrica sul C_L per le lamine investite ad $\alpha = 0^\circ$	91
5.18	Risultati dell'analisi parametrica sulla velocità per spostamento e torsione dell'ala con profilo NACA 2415.	94
5.19	Coefficienti aerodinamici risultanti dalle analisi aeroelastica statica (SAA) e statica (SSA) dell'ala con profilo NACA 2415.	94

List of Figures

1.1	Evoluzione in numero totale di chilometri percorsi da passeggeri paganti dell'aviazione civile dagli anni'50 al 2012 [1].	1
1.2	Previsione di sviluppo dell'aviazione civile fino al 2050 in migliaia di miliardi di chilometri percorsi da passeggeri paganti [2].	2
1.3	Rendering della configurazione Blended Wing-Body [12].	4
1.4	Rendering del Subsonic Ultra Green Aircraft Research (SUGAR) [19].	5
1.5	Rendering di un aereo commerciale ad ala chiusa [26].	6
1.6	Il triangolo di Collar [28].	7
1.7	Elenco dei modelli fluidodinamici e strutturali e metodi di interfacciamento tra i due [35].	9
1.8	Schematizzazione del j -esimo pannello utilizzato nel VLM [40]. . . .	11
1.9	Riduzione di una semiala al modello trave equivalente incluse le proprietà geometriche [52].	17
2.1	Schema generico di una trave.	20
2.2	Differenza tra le ipotesi cinematiche e la configurazione deformata per la EBBT (a) e la TBT (b) [39].	26
2.3	Elemento L4 nelle coordinate fisiche e naturali.	27
2.4	Sezione trasversale con espansione L4.	28
2.5	Elemento L9 nelle coordinate fisiche e naturali.	28
2.6	Elementi B2, B3 e B4.	30
2.7	Assemblaggio della matrice di rigidezza della struttura \mathbf{K} [39]. . . .	33
2.8	Differenza tra sistema di riferimento delle fibre e sistema di riferimento globale della struttura.	38
3.1	Schematizzazione dell'elemento fluido infinitesimo attraversato da flussi di massa [63].	40
3.2	Schematizzazione dell'elemento fluido infinitesimo attraversato da flussi di quantità di moto in direzione x [63]	41
3.3	Schematizzazione dell'elemento fluido infinitesimo attraversato da flussi di energia in direzione x [63].	44

3.4	Esempio bidimensionale di una porzione di mesh, gli elementi numerati nel quadratino sono nodi mentre quelli nei rombi sono gli elementi formati dai nodi contigui [66].	50
3.5	Mesh non strutturata.	51
3.6	Mesh cartesiana	51
3.7	Il flusso di lavoro per la generazione della mesh, la simulazione e il post-processing.	52
3.8	Profilo di velocità adimensionale dello strato limite turbolento [71].	54
3.9	Particolare della mesh in prossimità dello strato limite.	55
4.1	Schema di risoluzione del problema aeroelastico.	65
5.1	Schema del problema strutturale di analisi di convergenza.	67
5.2	Schema strutturale della trave semplicemente appoggiata di sezione quadrata.	69
5.3	Visualizzazione del modo 1.	71
5.4	Visualizzazione del modo 3.	71
5.5	Geometria della sezione "a doppio T".	73
5.6	Geometria della sezione a C.	73
5.7	Geometria della sezione cava.	73
5.8	Estremo libero trave "a doppio T".	73
5.9	Estremo libero trave a C.	73
5.10	Estremo libero trave cava.	73
5.11	Vista di lato trave a "doppio T".	73
5.12	Vista di lato trave a C.	73
5.13	Vista di lato trave cava.	73
5.14	Geometria della trave incastrata ad un'estremità di sezione quadrata.	75
5.15	3×3Q4.	76
5.16	10×1Q4.	76
5.17	Schema della trave in materiale composito a sezione rettangolare. .	77
5.18	Schema della lamina piana usata come caso test per la validazione aerodinamica.	78
5.19	Particolare del bordo d'attacco triangolare con mesh.	79
5.20	Schema del dominio computazionale con le condizioni al contorno imposte.	81
5.21	Andamento del coefficiente di portanza C_L al variare dell'angolo di attacco α	82
5.22	Andamento del coefficiente di resistenza C_D al variare dell'angolo di attacco α	83

5.23	Linee di corrente in corrispondenza della bolla di ricircolo che evidenziano la sua presenza. La colorazione è determinata in funzione del modulo della velocità del flusso.	84
5.24	Effetto aeroelastico sul C_L	85
5.25	Effetto aeroelastico sul C_D	85
5.26	Andamento dei coefficienti aerodinamici al variare dell'estensione del campo di moto della mesh non strutturata con rispettivo numero di iterazioni per giungere a convergenza.	87
5.27	Deformata della struttura risultante dall'analisi aeroelastica confrontata con la sua indeformata.	88
5.28	Profilo delle due lamine oggetto dell'analisi con la relativa mesh strutturale della sezione.	90
5.29	Sezione strutturale dell'ala con profilo NACA 2415 con i relativi longheroni.	92
5.30	Mesh CFD dell'ala.	92
5.31	Mesh FEM dell'ala.	92
5.32	Risultati di spostamento del <i>tip</i> per i modelli di espansione EBBM, TBM, TE1, TE3 e TE5 approssimati dall'andamento quadratico $u_z = 0.00358 \times V_\infty^2$	93
5.33	Dipendenza dell'angolo di torsione θ_y con la velocità V_∞	93
5.34	Andamento del C_L ad $\alpha = 3^\circ$ al variare della velocità per l'ala deformabile e indeformabile.	95
5.35	Andamento del C_D ad $\alpha = 3^\circ$ al variare della velocità per l'ala deformabile e indeformabile.	95
5.36	Distribuzione del coefficiente di portanza locale lungo l'apertura alare dell'ala con profilo NACA 2415 risultante dalle analisi SAA e SSA.	96
5.37	Differenza tra le due distribuzioni del C_L locale per l'ala con profilo NACA 2415 indeformata e deformata utilizzando la SAA.	96

Chapter 1

Introduzione

1.1 Lo sviluppo dell'aviazione

Fin dai primi sviluppi dell'aviazione in ambito civile si è subito capito il suo grande potenziale per la connessione di popoli, informazioni, idee e prosperità. Da quando i primi servizi commerciali di trasporto passeggeri e merci sono cominciati negli anni '50 l'aviazione civile è sempre stata in crescita nonostante numerose crisi economiche e sanitarie come dimostrato in Fig. 1.1 Nonostante la recente crisi di COVID-19

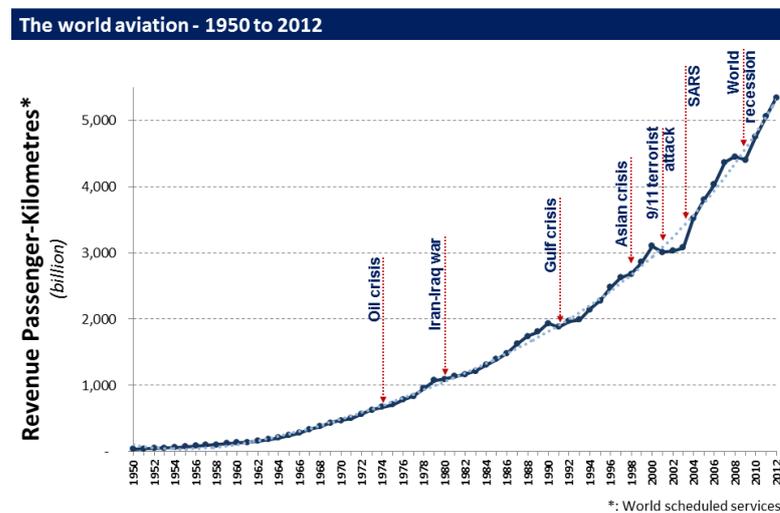


Figure 1.1: Evoluzione in numero totale di chilometri percorsi da passeggeri paganti dell'aviazione civile dagli anni'50 al 2012 [1].

che ha fatto subire all'aviazione un brusco rallentamento al suo sviluppo, anche le

previsioni più conservative di Eurocontrol sullo sviluppo dell'aviazione prevedono un aumento del 19 % fino ad un aumento del 76% sul numero di chilometri percorsi da passeggeri paganti come mostrato in Fig. 1.2. Tutto il progresso ha un suo

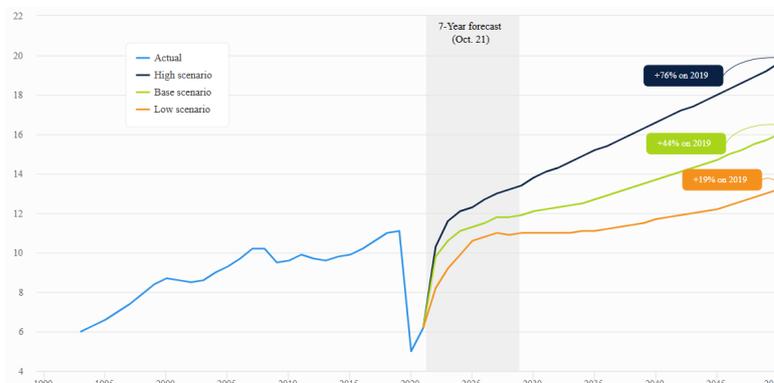


Figure 1.2: Previsione di sviluppo dell'aviazione civile fino al 2050 in migliaia di miliardi di chilometri percorsi da passeggeri paganti [2].

costo in quanto da report dell' International Civil Aviation Organisation (ICAO) [3] viene messo in evidenza come l'incremento di traffico aereo, oltre ad essere già responsabile per il 4% di emissioni di CO_2 nel 2020 è destinato ad incidere sempre di più in percentuale nella produzione di inquinanti come CO_2 , NO_x [4] e inquinamento acustico [5]. Le strade che possono esser intraprese sono molteplici e si fondano su due filoni principali [6]:

- L'introduzione di carburanti *green* come *SAF*, *biofuel* e idrogeno;
- Il miglioramento della performance aerodinamica, al fine di massimizzare l'efficienza $E = \frac{C_L}{C_D}$ dei velivoli con il miglioramento delle architetture correnti e lo sviluppo di nuove.

Per quanto riguarda le architetture correnti, le nuove scoperte in campo aerodinamico con lo sviluppo di profili alari avanzati, l'introduzione di superfici aerodinamiche come i *winglets*, atti a ridurre la resistenza indotta e in campo della scienza dei materiali il grande utilizzo di materiali compositi consentono solo di ottenere dei miglioramenti marginali rispetto a quelli ottenibili con l'adozione di nuove architetture.

1.1.1 Nuove architetture

Allo scopo di migliorare l'efficienza aerodinamica, la ricerca in campo aeronautico si è concentrata sullo studio di architetture completamente rivoluzionarie come descritto in Abbas *et al.* [7] piuttosto che cercare di migliorare ulteriormente

l'architettura classica con il risultato di ottenere solo guadagni marginali. Alcune delle architetture rivoluzionarie più promettenti sono:

- La configurazione Blended Wing-Body (*BWB*);
- Il velivolo ad ala controventata (*strut/truss braced wing*);
- La configurazione ad ala chiusa (*box-wing plane*).

La configurazione Blended Wing-Body

La configurazione BWB prevede la totale integrazione di cabina dei passeggeri, stiva, superfici mobili della coda, ala e motori in un'unica superficie portante. Questa configurazione consente di minimizzare l'area frontale del velivolo migliorandone l'efficienza aerodinamica [8]. Questa configurazione fu teorizzata per la prima volta negli anni '20 del Novecento. Non trovò mai largo uso in quanto a causa di problemi di stabilità e controllo il concept fu abbandonato. Con le conoscenze tecniche degli anni '90 il design venne ripreso in ambito militare con l'introduzione in servizio del Northrop-Grumman B2 e più tardi da Boeing e NASA con l'*Unmanned Aerial Vehicle* (UAV) X-48. In ambito civile, diversi studi hanno evidenziato come questa geometria sia molto efficiente per velivoli a lungo raggio per il trasporto di 300-500 passeggeri [9, 10, 11]. Recentemente Boeing e Airbus hanno cominciato a lavorare su prototipi commerciali come quello presentato in Fig. 1.3, il quale sviluppo avrebbe il vantaggio di possedere un volume interno della cabina superiore a vantaggio del numero di passeggeri e del volume della stiva bagagli. Uno stravolgimento così radicale della forma presenterebbe alcune sfide alla realizzazione come ad esempio l'adattamento delle infrastrutture aeroportuali per ospitare le operazioni a terra e la pressurizzazione della cabina che avendo una forma irregolare porrebbe alcuni problemi nel mantenimento di una pressione regolare e costante.

Velivolo ad ala controventata

Un modo di diminuire la resistenza indotta prodotta dalla generazione di portanza da parte dell'ala consiste nell'incrementare l'Aspect Ratio (AR). Infatti, con un AR elevato, la distribuzione della portanza lungo l'apertura alare si avvicina a quella ideale cioè ellittica, riducendo l'intensità dei vortici di estremità. Di conseguenza, il downwash indotto è meno pronunciato. L'AR è definito come:

$$AR = \frac{b^2}{S} \quad (1.1)$$

oppure, in modo equivalente, il rapporto tra l'apertura alare e la corda media per un'ala rettangolare. Una diminuzione della resistenza indotta va ad incidere



Figure 1.3: Rendering della configurazione Blended Wing-Body [12].

direttamente sull'efficienza, aumentandola. Nella formula di Breguet per l'autonomia chilometrica, l'efficienza appare come termine lineare quindi incrementando l'efficienza incrementa linearmente l'autonomia chilometrica a parità di combustibile consumato.

$$R = E \frac{V_{TAS}}{g} \frac{1}{SFC} \ln \frac{W_{mtow}}{W_{mtow} - W_{fuel}} \quad (1.2)$$

Incrementando l'apertura alare b il momento flettente alla radice dell'ala risulterebbe troppo elevato sebbene sulle semiali siano presenti i motori e i serbatoi di carburante che agiscono da carico alleviante. La soluzione è quindi l'inserimento di un montante o asta di controvento per supportare le semiali. La geometria risultante è come quella raffigurata in Fig 1.4, in cui si possono notare i due montanti, uno obliquo e uno verticale per sostenere l'ala ad alto AR. Queste architetture sono già presenti in molti aerei di aviazione generale in quanto permettono di costruire un'ala meno rinforzata alla radice e quindi meno pesante. Un design simile a quello presente negli studi concettuali odierni fu proposto negli anni '50 [13], anche se successivi studi di fattibilità misero in luce problemi strutturali e di natura aeroelastica. In epoca recente, con l'avvento dei materiali compositi e delle moderne tecniche di analisi, studi aeroelastici che prevedono l'utilizzo di materiali compositi per la realizzazione del sistema ala-montante [14] mettono in luce la fattibilità di tale geometria, così come analisi multidisciplinari che evidenziano la maggiore efficienza in termini di consumi per un aeromobile così costruito [15, 16]. Tra i progetti più promettenti troviamo il progetto ALBATROS europeo [17] e il progetto americano Subsonic Ultra Green Aircraft Research (SUGAR) [18]



Figure 1.4: Rendering del Subsonic Ultra Green Aircraft Research (SUGAR) [19].

Velivolo ad ala chiusa

Il concetto di ala chiusa (*box wing*) fu teorizzato da Prandtl nel 1924, in cui dimostrò come tale geometria fosse quella che generava la minor quantità di resistenza indotta a parità di portanza generata [20]. La geometria *box wing* non trovò applicazione nel secolo passato a causa della complessa realizzazione della struttura, della sua meccanica di volo complessa e dell'insorgenza di fenomeni aeroelastici come il flutter a velocità relativamente basse [21]. Recentemente con l'avvento delle tecnologie di manifattura moderne che includono la possibilità di realizzare le ali in materiale composito scongiurando il presentarsi di fenomeni aeroelastici a bassa velocità [22], nuove analisi sulla meccanica del volo di tale configurazione sono state svolte evidenziandone la fattibilità [23]. La geometria su cui si concentrano gli studi risulta essere analoga a quella mostrata in Fig. 1.5. Questa geometria, inoltre è stata oggetto di studi di ottimizzazione mediante il *machine learning* [24]. La comunità europea sta finanziando il progetto PARSIFAL [25], il quale prevede di progettare un velivolo della stessa categoria dimensionale degli aerei di medio raggio come B737 e A320 incrementando però la capacità di passeggeri di un centinaio di passeggeri proprio grazie alla trovata efficienza aerodinamica.



Figure 1.5: Rendering di un aereo commerciale ad ala chiusa [26].

1.2 L'aeroelasticità

1.2.1 Introduzione

L'aeroelasticità è la disciplina della scienza che studia la mutua interazione tra la deformazione di una struttura elastica lambita da un fluido e le forze aerodinamiche

generate da essa. L'aeroelasticità è una scienza interdisciplinare e in particolare interfaccia:

- L'*elasticità* per ricavare la forma di un corpo elastico sottoposto a forze;
- L'*aerodinamica* per ricavare le forze generate su di un corpo immerso in una corrente;
- La *dinamica* per introdurre gli effetti delle forze di inerzia sul moto del corpo all'interno del fluido.

L'interdisciplinarietà dell'aeroelasticità è messa in evidenza dal *triangolo di Collar* [27] in Fig. 1.6, in esso si nota come l'accoppiamento tra due fenomeni generino altre discipline contenute nell'aeroelasticità dinamica che è il risultato dell'accoppiamento di tutte e tre. Infatti, accoppiando:

- Forze elastiche e aerodinamiche si ottiene l'aeroelasticità statica;
- Forze d'inerzia e aerodinamiche si ottiene la disciplina della meccanica del volo;
- Forze elastiche e inerziali si ottiene la branca della dinamica delle strutture.

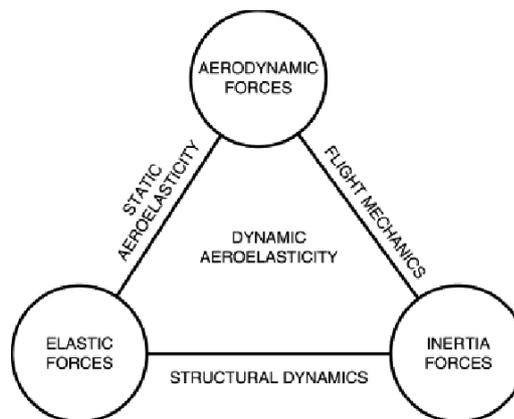


Figure 1.6: Il triangolo di Collar [28].

I fenomeni aeroelastici si distinguono in problemi di stabilità e problemi di risposta. Nella prima categoria possiamo trovare:

- Flutter;
- Divergenza torsionale.

Mentre, nella seconda, invece troviamo l'inversione dei comandi e tutti gli altri fenomeni studiati dall' aeroservoelasticità.

1.2.2 Cenni storici sull'aeroelasticità

L'aeroelasticità è una disciplina della scienza relativamente nuova essendosi sviluppata nel XX° secolo con l'avvento dell'aeronautica anche se fenomeni di natura aeroelastica avvengono in contesti diversi come le palette degli stadi di compressori/turbine e costruzioni civili come grattacieli o ponti. Particolarmente famoso è il ponte di Tacoma Narrows che a causa del fenomeno del *flutter* instauratosi tra il vento che spirava e il ponte crollò in condizioni di sollecitazione ben inferiori a quelle per cui era progettato [29].

In aeronautica uno dei primi episodi che segnarono la necessità dell'introduzione dell'aeroelasticità in fase di progettazione avvenne negli anni '10, quando i primi aerei costruiti con strutture leggere e flessibili iniziarono a mostrare fenomeni di instabilità come il flutter. Un caso emblematico si verificò nel 1916, quando il biplano Handley Page HP42 subì una perdita di controllo a causa dell'insorgenza del flutter su un ala [30].

Negli anni '40, con lo sviluppo di aerei militari ad alte prestazioni, i fenomeni di natura aeroelastica divennero più comuni e pericolosi, specialmente con l'incremento delle velocità di volo. In questo periodo, vennero istituiti gruppi di ricerca specifici, come quello presso il NACA negli Stati Uniti, che intraprese studi pionieristici su flutter e divergenza. Tra i maggiori studiosi di quell'epoca troviamo Theodorsen [31, 32, 33] che fu fondamentale in questo senso, con modelli matematici che permisero la previsione e l'analisi del flutter.

Dopo la Seconda Guerra Mondiale, con il progredire della tecnologia degli aerei operanti nell'alto subsonico e supersonico, l'aeroelasticità assunse un'importanza ancora maggiore: infatti il fenomeno dell'instabilità aeroelastica transonica e supersonica richiese nuovi approcci. Negli anni '60 e '70, l'avvento del calcolo numerico aprì nuove possibilità per lo studio dell'aeroelasticità, permettendo simulazioni più grandi, complesse e l'introduzione di modelli più accurati.

Al giorno d'oggi con l'emergere di nuove geometrie e l'impiego di materiali compositi il cui comportamento aeroelastico è in fase di studio è quanto più necessario lo studio aeroelastico e lo sviluppo di modelli sempre più sofisticati per prevedere al meglio i fenomeni che li governano.

1.3 Stato dell'arte

Da una ricerca bibliografica si può vedere come allo stato dell'arte si utilizzino più modelli e metodi per discretizzare e risolvere il problema strutturale e quello fluidodinamico. Le due soluzioni vengono poi fatte interagire attraverso dei metodi di interfacciamento. I metodi si possono dividere in due grandi categorie:

- metodi *high-fidelity* come l'accoppiamento tra metodo agli elementi finiti accoppiato con la soluzione numerica delle equazioni di Navier-Stokes/Eulero.

Hanno la caratteristica di essere di complessa soluzione numerica utilizzando modelli di ordine elevato e quindi rendere il processo di accoppiamento del problema strutturale e fluidodinamico più complesso. Sono inoltre più costosi computazionalmente e vengono in generale utilizzati dopo una preliminare analisi *low-fidelity*; [34]

- metodi *low-fidelity* come l'utilizzo delle equazioni di Eulero linearizzate accoppiate con le equazioni modali della struttura. Essi a scapito di una minor precisione risolutiva utilizzano modelli strutturali e fluidodinamici più semplici da implementare e risolvere oltre che introdurre un numero di gradi di libertà da determinare inferiore comportando un minor costo computazionale

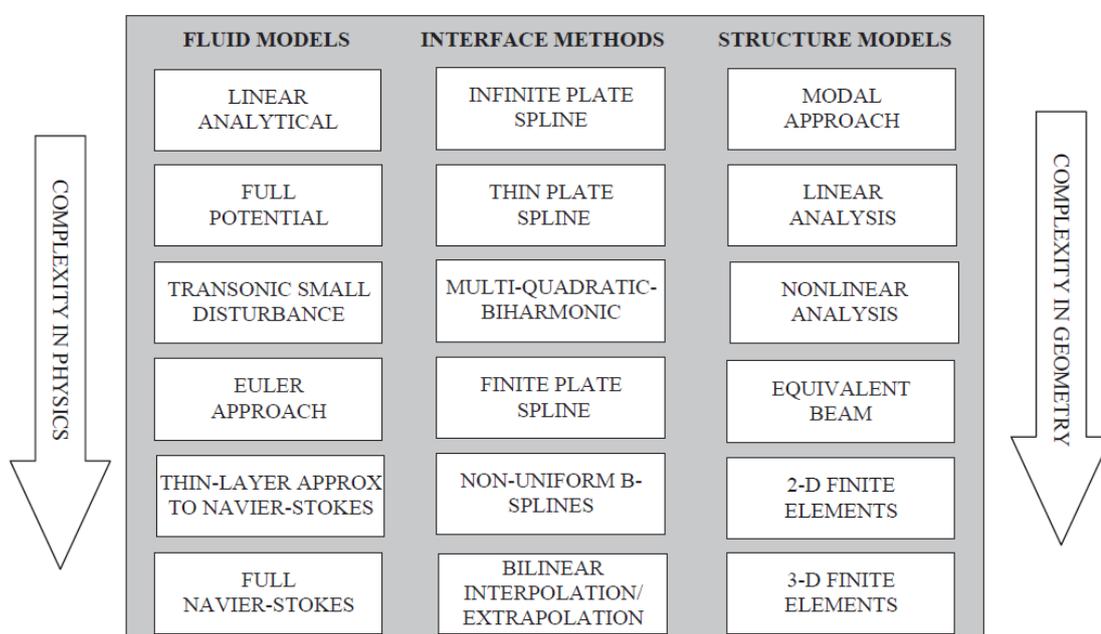


Figure 1.7: Elenco dei modelli fluidodinamici e strutturali e metodi di interfacciamento tra i due [35].

La scelta di una combinazione di due modelli piuttosto che un'altra, è dettata oltre che dal livello di fedeltà che si vuole ottenere dal risultato, anche dalle esigenze di geometria e di caratteristiche del flusso.

1.3.1 Modelli fluidodinamici

Frequente è l'utilizzo del Vortex Lattice Method (VLM) [36] o del Doublet Lattice Method (DLM) [37]. Questi metodi sono definiti metodi a pannelli e si basano sul

principio della linearizzazione dell'equazione del flusso a potenziale quindi basandosi sul principio della sovrapposizione lineare di pozzi/sorgenti, vortici e/o doppiette sulla superficie portante, in modo che le condizioni al contorno siano soddisfatte sul corpo, attraverso la scia e all'infinito [38].

II VLM

Nel metodo VLM la superficie di riferimento dell'ala è suddivisa in una griglia di pannelli quadrilateri di dimensioni Δx e $2e_j$, come mostrato Fig. 1.8. Per eseguire l'analisi aerodinamica della superficie portante, su ciascun pannello viene posizionato un vortice a ferro di cavallo. Questo elemento consiste in un segmento di vortice vincolato rettilineo **BC** posto nel punto $(e_j, \Delta x/4)$ detto *Load Point*, che modella le proprietà portanti, e in due linee di vortici di scia semi-infinite **AB** e **CD**, che modellano la scia. Le condizioni di tangenza della velocità rispetto alla parete sono scritte per un punto situato a $(e_j, 3/4\Delta x)$ detto *Control Point*. La procedura utilizzata per calcolare la velocità (u, v, w) indotta in un punto $P(x, y, z)$ da un segmento rettilineo di vortice con circolazione Γ si basa sulla Legge di Biot-Savart. I passaggi dettagliati sono elencati in [39]. Il VLM risulta un buon compromesso tra accuratezza e costo computazionale per determinare carichi aerodinamici stazionari. Esso trova grande utilizzo in letteratura come in Varello *et al.* [40], in cui si unisce il VLM al paradigma FEM+CUF schematizzando l'ala come una struttura traviforme per lo studio di strutture alari rastremate e con angolo di freccia confrontando poi i risultati con NASTRAN che utilizza elementi solidi.

In Carrera *et al.* [41] vengono accoppiati ancora una volta FEM+CUF con VLM per analizzare i fenomeni aeroelastici statici per ali metalliche e in materiale composito confrontando sempre i risultati con il software NASTRAN. In entrambi gli studi si denota una piccola imprecisione dello schema strutturale utilizzato con il vantaggio di introdurre un numero molto inferiore di gradi di libertà.

In Jovanov *et al.* [42] invece si utilizzano modelli *low-fidelity* (VLM) per la fluidodinamica accoppiati con elementi solidi di NASTRAN per eseguire un'analisi aeroelastica statica, introducendo una correzione derivata da metodi CFD *high-fidelity* solo qualora necessario, ottenendo una rapida convergenza e un costo computazionale relativamente ridotto.

II DLM

Il metodo DLM invece prevede discretizzazione della superficie portante analoga a quella utilizzata per il VLM. Nei *Load Points* viene posto invece che un vortice, una doppietta, cioè un pozzo e una sorgente separati da una distanza infinitesima. La principale differenza con il VLM è che nel DLM si introducono le forze aerodinamiche come quantità variabili armonicamente nel tempo con una certa frequenza ω e questo permette al DLM di essere sfruttato per la determinazione di carichi

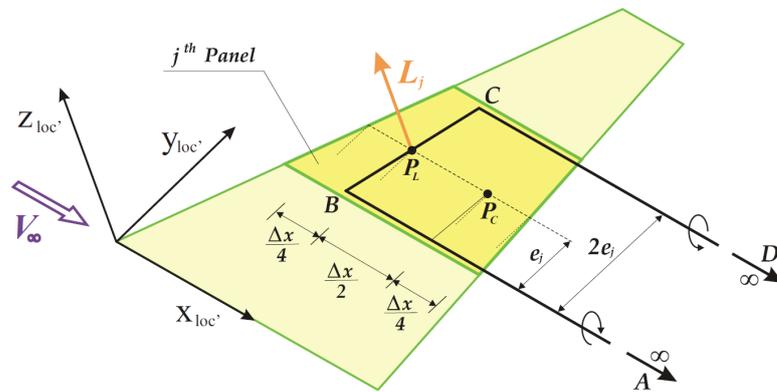


Figure 1.8: Schematizzazione del j -esimo pannello utilizzato nel VLM [40].

instazionari e perciò essere usato per la trattazione di fenomeni dell'aeroelasticità dinamica come il flutter. La matrice di influenza aerodinamica infatti ora è funzione della frequenza caratteristica delle perturbazioni nel flusso. Maggiori dettagli sull'implementazione dei due metodi e sulle differenze tra i due sono riportati in [43]. In modo simile al VLM il DLM rappresenta un buon compromesso tra fedeltà e costo computazionale per rilevare carichi aerodinamici instazionari. Infatti, in [44] si utilizza il DLM accoppiato con il modello di piastra equivalente dell'ala per ottenere informazioni sulla stabilità dinamica di ali composte di materiale isotropo o composito. L'accoppiamento del DLM viene effettuato anche con modelli strutturali semplici per risolvere problemi di ottimizzazione aeroelastica in [45], si utilizzano un numero relativamente basso (40) di elementi trave schematizzati con la teoria trave classica di Timoshenko accoppiati con il metodo DLM per ottimizzare la posizione dei longheroni di un'ala con angolo di freccia.

Transonic Small Disturbance

Il modello *Transonic Small Disturbance (TSD)*, introdotto e studiato da molti studiosi come Von Karman [46], è un modello fluidodinamico semplificato utilizzato per descrivere il flusso transonico intorno a corpi aerodinamicamente sottili, come ali a moderato spessore e inarcamento in condizioni in cui le velocità locali del fluido possono essere sia subsoniche sia supersoniche. È un modello particolarmente utile in aerodinamica per analisi preliminari, poiché cattura gli effetti chiave del regime transonico senza ricorrere alla complessità delle equazioni di Navier-Stokes complete. Il modello si applica ai flussi transonici, dove il numero di Mach del flusso libero è vicino a 1 (tipicamente tra 0.7 e 1.2). Il corpo dev'essere sottile, in modo che le perturbazioni indotte sul flusso siano piccole rispetto alla velocità della corrente a monte V_∞ ed il flusso irrotazionale. A differenza dei modelli per il flusso subsonico o supersonico, il TSD include termini non lineari per tenere conto degli effetti della compressibilità che diventano significativi nel regime transonico e che vengono trascurati nelle soluzioni di flusso potenziale puramente subsonico. L'equazione fondamentale del modello è l'equazione del potenziale linearizzata scritta per un flusso comprimibile. È un modello fluidodinamico usato per stimare carichi aerodinamici e distribuzioni di pressione su ali o fusoliere in regime transonico in quanto fornisce risultati rapidi e utili senza la necessità di simulazioni CFD ad alta fedeltà permettendo lo stesso di comprendere la formazione e l'interazione delle onde d'urto in regime transonico. Le limitazioni dovute alla semplicità comportano il fatto che il modello TSD funzioni bene solo per geometrie sottili o debolmente curvate. Vengono inoltre trascurati effetti viscosi o turbolenza, tipici delle equazioni di Navier-Stokes.

Equazioni di Eulero

Le equazioni di Eulero sono una semplificazione delle più complesse equazioni di Navier-Stokes e vengono utilizzate in fluidodinamica per descrivere il comportamento di un fluido ideale, ossia privo di viscosità e conducibilità termica. Si basano sui principi di conservazione della massa, della quantità di moto e dell'energia. La loro formulazione generale si adatta a flussi comprimibili e incomprimibili, rendendole utili in molte applicazioni aerodinamiche. La prima equazione esprime la conservazione della massa e descrive come la densità del fluido varia in funzione del tempo e dello spazio. La seconda equazione, relativa alla conservazione della quantità di moto, descrive come le forze agiscono sul fluido, determinando variazioni nella sua velocità, la terza infine impone la conservazione dell'energia. Le equazioni di Eulero trovano ampia applicazione nella fluidodinamica, specialmente per lo studio di flussi in cui gli effetti viscosi sono trascurabili rispetto alle forze di pressione e inerzia. Sono utilizzate per analizzare flussi aerodinamici esterni, come quelli intorno a corpi sottili in regime transonico o supersonico, e per studiare onde d'urto e fenomeni compressibili. Grazie alla loro relativa semplicità, esse vengono spesso impiegate nelle fasi successive alle fasi preliminari della progettazione aerodinamica. Nonostante la loro utilità, le equazioni di Eulero presentano alcune limitazioni significative. L'assenza di termini viscosi le rende inadatte a descrivere fenomeni dominati da effetti di viscosità, come strati limite, separazione del flusso o turbolenza. Inoltre, non considerano la conducibilità termica, limitando la loro applicabilità in scenari dove la dissipazione termica è rilevante. In prossimità di superfici solide o in interazioni fluido-struttura, le equazioni di Eulero risultano insufficienti senza l'aggiunta di correzioni o modelli complementari.

Navier-Stokes

Considerando gli effetti di viscosità e conducibilità termica per le equazioni di Eulero si ottengono le più complete equazioni di Navier-Stokes. Esse descrivono il moto di un fluido considerando la conservazione della massa, della quantità di moto e dell'energia e rappresentano il modello completo per la fluidodinamica. Sebbene queste equazioni descrivano accuratamente il comportamento di un fluido, risolverle direttamente per ogni particella del fluido, tramite il metodo noto come Direct Numerical Simulation (DNS). Esso richiede di catturare tutte le scale di turbolenza, dalle più grandi alle più piccole. Questo rende la risoluzione delle DNS un metodo inapplicabile per scopi aeronautici in cui il numero di Reynolds è dell'ordine di $\approx 10^6$. Infatti, secondo Vescovini [47], essendo il numero totale di operazioni da effettuare in una simulazione:

$$N \approx Re^{\frac{11}{4}} \tag{1.3}$$

Per ridurre il costo computazionale, si introducono modelli di turbolenza ottenendo equazioni mediate come le Reynolds-Averaged Navier-Stokes (RANS) e le Large Eddy Simulations (LES).

Le RANS separano le variabili del flusso in componenti mediate e fluttuanti, risolvendo solo le componenti mediate e modellando gli effetti delle fluttuazioni turbolente tramite approcci empirici, come il modello $k-\varepsilon$. Questo metodo è efficiente e ampiamente utilizzato nelle applicazioni industriali, sebbene sacrifichi parte della fedeltà.

Le LES, invece, risolvono direttamente le strutture turbolente di grande scala, modellando solo le piccole scale. Questo approccio offre una maggiore accuratezza rispetto ai RANS, specialmente in flussi complessi, ma a un costo computazionale più elevato. In Cavagna *et al.* [48], si utilizzano, mediante il software per l'analisi CFD FLUENT, le equazioni di Eulero e le RANS con elementi solidi 3D del software NASTRAN per progettare un sistema di soppressione del fenomeno noto come *flutter transonico*, mettendo in evidenza il fatto che quando si analizzano problemi in particolare dinamici in cui sono presenti fenomeni nonlineari, i metodi che accoppiano soluzioni *high-fidelity* siano da preferire.

In Escudero *et al.* [49] viene eseguita una comparazione tra metodi fluidodinamici instazionari di fedeltà crescente come Theodorsen, UVLM, Eulero and URANS in cui dove la "U" in UVLM e URANS sta per *unsteady*. I metodi fluidodinamici vengono accoppiati a due modelli strutturali molto semplici a 2 o 3 gradi di libertà. La ricerca mette in evidenza come per problemi strutturali semplici anche modelli fluidodinamici *low-fidelity* catturino gli stessi fenomeni della loro controparte *high-fidelity* con dettaglio ovviamente minore.

1.3.2 Modelli strutturali

Approccio modale

L'analisi modale è una tecnica fondamentale utilizzata nell'ingegneria strutturale per studiare le proprietà dinamiche di una struttura, come le frequenze naturali, le forme modali e i fattori di smorzamento. Questo approccio si basa sull'idea che la risposta dinamica di un sistema continuo possa essere descritta come una combinazione lineare di modi vibrazionali, ciascuno caratterizzato da una frequenza naturale e da una forma propria.

Per eseguire l'analisi modale, si individuano inizialmente le forme modali della struttura che oscilla liberamente senza carichi applicato e le relative frequenze associate. Una caratteristica fondamentale dell'approccio modale è la possibilità di costruire modelli ridotti (Reduced Order Models, ROM). Considerando solo i modi dominanti, si ottiene una descrizione dinamica del sistema che cattura gli effetti più significativi con un costo computazionale ridotto. Questo consente di descrivere la risposta dinamica globale in termini di modi dominanti, riducendo

significativamente la complessità computazionale rispetto a una simulazione diretta. L'approccio modale è ampiamente utilizzato in applicazioni ingegneristiche per analizzare il comportamento dinamico di strutture come ponti, edifici, aeromobili e pale di turbine. Tra i suoi vantaggi principali vi sono l'efficienza computazionale, la possibilità di interpretare intuitivamente le proprietà dinamiche del sistema e la capacità di identificare modi critici che possono causare instabilità o fenomeni di risonanza. Tuttavia, il metodo presuppone linearità e si limita a descrivere il comportamento vibratorio nelle vicinanze dello stato non deformato, rendendolo meno adatto per analizzare fenomeni non lineari o carichi dinamici complessi.

In Chen *et al.* [50], ad esempio, si propone un approccio mediante un modello ad ordine ridotto dell'interazione fluido struttura utilizzando per la fluidodinamica le equazioni di Navier-Stokes non stazionarie linearizzate ridotte tramite la decomposizione ortogonale propria (POD). Per l'analisi strutturale, si impiega un modello dinamico agli elementi finiti con rappresentazione modale per descrivere le deformazioni. L'accoppiamento fluido-struttura avviene mediante un trasferimento iterativo di carichi aerodinamici e spostamenti strutturali usando spline a piastra infinita (IPS).

Analisi lineare e nonlineare

L'analisi strutturale dinamica si divide in due categorie principali: lineare e non lineare. L'analisi lineare si basa sull'assunzione che le deformazioni siano piccole e che il materiale segua un comportamento elastico lineare, cioè con una relazione proporzionale tra tensioni e deformazioni. La formulazione generale dell'analisi lineare dinamica è governata dall'equazione:

$$\mathbf{M}\ddot{\mathbf{u}}(t) + \mathbf{C}\dot{\mathbf{u}}(t) + \mathbf{K}\mathbf{u}(t) = \mathbf{f}(t) \quad (1.4)$$

Questa equazione si risolve direttamente per determinare la risposta statica della struttura. L'analisi lineare è adatta per progetti preliminari o situazioni in cui le deformazioni sono contenute.

L'analisi non lineare si occupa invece di fenomeni più complessi, come grandi deformazioni, non linearità geometriche (ad esempio, effetti di instabilità come il buckling) e non linearità del materiale (comportamenti plastici, viscoelastici o danneggiamento). In questi casi, il rapporto tra gli spostamenti e i carichi applicati non è più lineare ma è funzione degli spostamenti stessi

$$\mathbf{M}(\mathbf{u})\ddot{\mathbf{u}}(t) + \mathbf{C}(\mathbf{u})\dot{\mathbf{u}}(t) + \mathbf{K}(\mathbf{u})\mathbf{u}(t) = \mathbf{f}(t) \quad (1.5)$$

L'analisi non lineare è essenziale per studiare il comportamento di strutture sotto carichi estremi o condizioni operative avanzate, ma è computazionalmente più onerosa. Allo scopo di utilizzare l'analisi strutturale lineare in [51] si accoppia

il modello trave di Eulero-Bernoulli per modellare l'ala di un *small unmanned aerial system (sUAS)* al metodo VLM per eseguire un'analisi aeroelastica statica ottenendo una differenza da schematizzazioni *high-fidelity* molto più complesse di meno del 13%.

Equivalent Beam Model

Il modello di trave equivalente (Equivalent Beam Model) è un approccio semplificato utilizzato nell'ingegneria strutturale per rappresentare il comportamento globale di strutture complesse come ali di aeromobili, pale di turbine o travi composte, attraverso un sistema equivalente a una trave continua. Questo modello riduce la complessità analitica mantenendo una buona accuratezza in determinate applicazioni. L'equazione generale per descrivere il comportamento di una trave caricata trasversalmente è:

$$EI \frac{\partial^4 w(x)}{\partial x^4} = q(x) \quad (1.6)$$

dove $w(x)$ è la deflessione trasversale della trave, E è il modulo di elasticità del materiale, I è il momento d'inerzia della sezione trasversale e $q(x)$ è il carico distribuito lungo la trave. Per rappresentare strutture tridimensionali in termini di un modello unidimensionale, si calcolano proprietà equivalenti come rigidità flessionale EI e torsionale GJ così come proprietà geometriche come sezione equivalente e momenti di inerzia come presentato in Fig. 1.9 nell'esempio di una semiala.

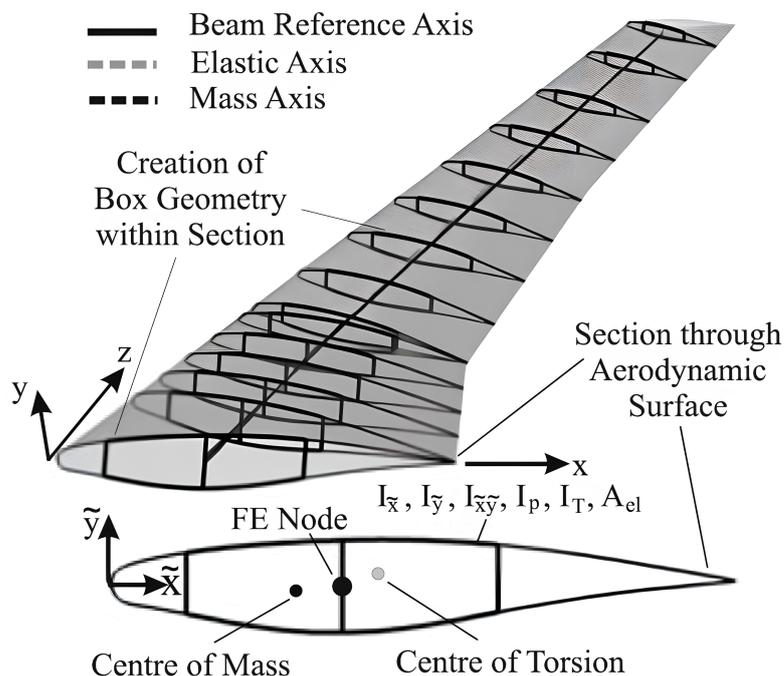


Figure 1.9: Riduzione di una semiala al modello trave equivalente incluse le proprietà geometriche [52].

Il modello può essere esteso a problemi non lineari, come quelli che coinvolgono grandi deformazioni o materiali non lineari. In questi casi, le equazioni diventano dipendenti dalla deformazione, richiedendo soluzioni iterative tramite metodi numerici. Un importante vantaggio del modello di trave equivalente è la possibilità di costruire modelli ridotti. Considerando solo i modi dominanti, ad esempio quelli flessionali e torsionali principali, si possono ridurre significativamente i gradi di libertà del sistema, mantenendo un buon livello di accuratezza.

In Reimer *et al.* [52] vengono accoppiate le soluzioni delle RANS con la generazione di modelli trave equivalente di Timoshenko per analizzare la dinamica strutturale di un aeroplano di tipo commerciale completo. Grazie al modello trave equivalente si riesce ad alleggerire molto l'analisi strutturale dinamica permettendo di mantenere un basso costo computazionale.

FEM 2D & 3D

Il metodo degli elementi finiti (FEM) in 2D è comunemente utilizzato nelle applicazioni aeroelastiche per modellare strutture piane, come pannelli o sezioni di ali, offrendo una buona accuratezza a costi computazionali relativamente contenuti grazie alla ridotta dimensionalità del problema. In 3D, il FEM viene impiegato per

analizzare strutture complete e complesse, come intere ali o velivoli, considerando dettagli geometrici e carichi spaziali, ma il costo computazionale aumenta significativamente a causa del numero elevato di gradi di libertà richiesti per una discretizzazione accurata. Maggiori sviluppi sui metodi FEM verranno forniti nel capitolo 2. Questo incremento è particolarmente rilevante nelle simulazioni aeroelastiche accoppiate con flussi aerodinamici, dove i modelli 3D richiedono una maggiore potenza di calcolo e tempi più lunghi rispetto alle configurazioni 2D.

In quest'ottica Crovato [53] opera un confronto di vari solutori CFD come SU2, Panair e Flow e del loro accoppiamento con solutori strutturali come NASTRAN utilizzando elementi solidi 3D FEM. In Grifò *et al.* [54, 55] si effettuano analisi esclusivamente con il software SU2 accoppiando il calcolo delle soluzioni delle equazioni di Eulero e le RANS e il paradigma FEM+CUF.

1.3.3 Metodi di interfacciamento tra mesh di diversa natura

L'interfaccia tra le mesh strutturali e aerodinamiche è un aspetto cruciale nell'analisi aeroelastica di una struttura. Le mesh strutturali e aerodinamiche spesso non coincidono, quindi si rendono necessari metodi di interpolazione per trasferire correttamente le informazioni tra le due mesh. Questi metodi consentono di trasferire i risultati di un'analisi come la distribuzione di pressione dalla mesh aerodinamica a quella strutturale e viceversa. Esistono diversi approcci per affrontare questo problema, ciascuno con caratteristiche specifiche che lo rendono più o meno adatto a diversi tipi di analisi. Un elenco di metodi di interfacciamento tra mesh è presente nel report di Smith *et al.* [56]

Di seguito sono elencate alcune delle principali tecniche di interpolazione usate per il trasferimento dei dati tra mesh strutturale e aerodinamica:

- Infinite Plate Spline: Introdotto da Harder e Desmarais [57], questo metodo si basa sull'interpolazione di una funzione che minimizza la curvatura su una superficie. Nella pratica questo metodo si basa sul risolvere l'equazione di equilibrio di una piastra supposta infinita per lo spostamento trasversale $w(x, y)$, permettendo di ottenere per la deformazione una soluzione in forma chiusa che soddisfi le deflessioni nei punti strutturali. Dopo aver risolto le equazioni lineari è possibile determinare la deflessione nei punti aerodinamici e calcolare le pendenze nei punti di controllo;
- Thin Plate Spline: Il metodo di interpolazione thin plate spline (TPS), descritto in [58], modella la distribuzione di dati sparsi utilizzando il principio di minima energia di flessione di un guscio elastico. Questo principio meccanico prevede che la superficie interpolata minimizzi l'energia complessiva, combinando la distanza dai dati osservati e la curvatura della superficie, ottenendo in questo modo una soluzione liscia che minimizza le distorsioni tra le mesh;

- Multi-Quadratic-Biharmonic Spline (MQ-B): Questo metodo di interpolazione è una generalizzazione delle spline di tipo quadratico, in cui viene utilizzata una funzione biarmonica per modellare la superficie. Descritto da Hardy [59], viene utilizzato per interpolare superfici continue a partire da dati sparsi, garantendo un adattamento esatto ai punti dati tramite una combinazione di funzioni quadriche. Si basa sul principio della teoria del potenziale, sfruttando funzioni bi-armoniche per garantire un'elevata regolarità e continuità della superficie interpolata;
- Finite Plate Spline: A differenza delle IPS, questo metodo tiene conto di un dominio finito. È particolarmente utile quando le superfici di interfaccia sono limitate o ben definite, riducendo così l'effetto di bordi e discontinuità, che nel metodo IPS non vengono considerate;

Chapter 2

Modello strutturale

In questo capitolo viene delineato quello che sarà il modello strutturale considerato e implementato con il FEM. Per sviluppare il modello si utilizza la Carrera Unified Formulation (CUF), un nuovo approccio alla definizione di elementi strutturali 3D FEM che permette l'espansione lungo un piano ortogonale (nel caso di un' elemento 1D) o lungo la direzione normale (nel caso di un' elemento 2D) per rendere questi ultimi degli elementi tridimensionali [60]. In questo modo si possono svolgere analisi FEM tridimensionali senza dover utilizzare degli elementi 3D che incrementerebbero il costo computazionale del problema. L'ordine dell'espansione CUF è un parametro libero del sistema e può essere cambiato analisi per analisi senza dover ricorrere alla modifica di tutto il modello della struttura.

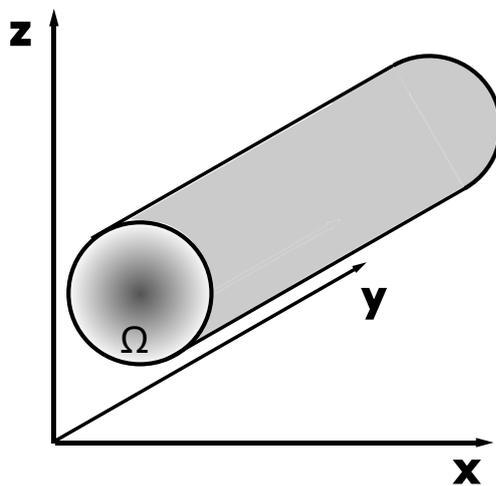


Figure 2.1: Schema generico di una trave.

2.1 Equazioni fondamentali dell'elasticità

Una trave come quella di Fig. 2.1 è una struttura tridimensionale di dimensioni $L \times b \times h$ con rispettivamente

- L la lunghezza
- b la dimensione della base della sezione trasversale
- h l'altezza della sezione trasversale

in cui in genere la dimensione " L " è predominante rispetto alle altre due. Parallelamente alla dimensione dominante è possibile definire l'asse trave (in genere l'asse y). Intersecando l'asse trave con un piano perpendicolare è possibile individuare la sezione trasversale Ω (che è in genere un piano xz). Si introduce il vettore degli spostamenti

$$\mathbf{u}(x, y, z) = \{u_x, u_y, u_z\}^T \quad (2.1)$$

in cui u_x, u_y e u_z sono rispettivamente gli spostamenti nella direzione x, y e z e in cui l'apice "T" indica la trasposizione del vettore. Per una struttura le deformazioni e le tensioni vengono definite come

$$\boldsymbol{\varepsilon} = \{\varepsilon_{xx}, \varepsilon_{yy}, \varepsilon_{zz}, \gamma_{xz}, \gamma_{yz}, \gamma_{xy}\} \quad (2.2)$$

$$\boldsymbol{\sigma} = \{\sigma_{xx}, \sigma_{yy}, \sigma_{zz}, \tau_{xz}, \tau_{yz}, \tau_{xy}\} \quad (2.3)$$

Se la trave è sottoposta a piccoli spostamenti è possibile definire le deformazioni come derivare degli spostamenti :

$$\begin{aligned} \varepsilon_{xx} &= \frac{\partial}{\partial x} u_x = u_{x,x} \\ \varepsilon_{yy} &= \frac{\partial}{\partial y} u_y = u_{y,y} \\ \varepsilon_{zz} &= \frac{\partial}{\partial z} u_z = u_{z,z} \\ \gamma_{xz} &= \frac{\partial}{\partial z} u_x + \frac{\partial}{\partial x} u_z = u_{x,z} + u_{z,x} \\ \gamma_{yz} &= \frac{\partial}{\partial z} u_y + \frac{\partial}{\partial y} u_z = u_{y,z} + u_{z,y} \\ \gamma_{xy} &= \frac{\partial}{\partial y} u_x + \frac{\partial}{\partial x} u_y = u_{x,y} + u_{y,x} \end{aligned} \quad (2.4)$$

scrivibili in formato vettoriale come :

$$\boldsymbol{\varepsilon} = \mathbf{b}\mathbf{u} \quad (2.5)$$

in cui la matrice \mathbf{b} è la matrice contenente gli operatori differenziali :

$$\mathbf{b} = \begin{bmatrix} \frac{\partial}{\partial x} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{\partial}{\partial y} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{\partial}{\partial z} \\ \frac{\partial}{\partial z} & 0 & \frac{\partial}{\partial x} \\ 0 & \frac{\partial}{\partial z} & \frac{\partial}{\partial y} \\ \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial x} & 0 \end{bmatrix} \quad (2.6)$$

In ipotesi di essere entro il limite elastico lineare del materiale di cui è composta la struttura si possono legare deformazioni $\boldsymbol{\varepsilon}$ e tensioni $\boldsymbol{\sigma}$ attraverso la legge di Hooke:

$$\boldsymbol{\sigma} = \mathbf{C}\boldsymbol{\varepsilon} \quad (2.7)$$

in cui \mathbf{C} è la matrice dei coefficienti di rigidezza, essa per un materiale *anisotropo* è composta da:

$$\mathbf{C} = \begin{bmatrix} C_{11} & C_{12} & C_{13} & C_{14} & C_{15} & C_{16} \\ C_{21} & C_{22} & C_{23} & C_{24} & C_{25} & C_{26} \\ C_{31} & C_{32} & C_{33} & C_{34} & C_{35} & C_{36} \\ C_{41} & C_{42} & C_{43} & C_{44} & C_{45} & C_{46} \\ C_{51} & C_{52} & C_{53} & C_{54} & C_{55} & C_{56} \\ C_{61} & C_{62} & C_{63} & C_{64} & C_{65} & C_{66} \end{bmatrix} \quad (2.8)$$

per materiali *ortotropi* lungo gli assi di ortotropia :

$$\mathbf{C} = \begin{bmatrix} C_{11} & C_{12} & C_{13} & 0 & 0 & 0 \\ C_{12} & C_{22} & C_{23} & 0 & 0 & 0 \\ C_{13} & C_{23} & C_{33} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & C_{44} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & C_{55} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & C_{66} \end{bmatrix} \quad (2.9)$$

e per uno *isotropo* :

$$\mathbf{C} = \begin{bmatrix} C_{11} & C_{12} & C_{12} & 0 & 0 & 0 \\ C_{12} & C_{11} & C_{12} & 0 & 0 & 0 \\ C_{12} & C_{12} & C_{11} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & C_{44} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & C_{44} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & C_{44} \end{bmatrix} \quad (2.10)$$

con

$$C_{11} = 2G + \lambda \quad C_{12} = \lambda \quad C_{44} = G \quad (2.11)$$

con G modulo di taglio che nel caso di un materiale isotropo è una combinazione delle altre due caratteristiche del materiale E e ν :

$$G = \frac{E}{2 \cdot (1 + \nu)} \quad \lambda = \frac{\nu E}{(1 + \nu)(1 - 2\nu)} \quad (2.12)$$

2.2 Carrera Unified Formulation (CUF)

La Carrera Unified Formulation (CUF) è una formulazione gerarchica che considera l'ordine di una teoria come un input dell'analisi. Questo permette di affrontare una vasta gamma di problemi strutturali senza l'utilizzo di formulazioni ad-hoc [60]. Il campo di spostamenti è scrivibile nella forma:

$$\mathbf{u} = F_\tau(x, z)\mathbf{u}_\tau \quad \tau \in [1, N] \quad (2.13)$$

con F_τ detta funzione di espansione e in base alla teoria adottata (Lagrange o Taylor) e all'ordine di espansione N l'espressione matematica dello spostamento e l'accuratezza della determinazione di esso cambia. Il vettore \mathbf{u}_τ è il vettore di spostamento e secondo la notazione di Einstein la ripetizione del pedice (τ) significa eseguire una sommatoria su quell'indice. Considerando strutture alari anche ad allungamento moderato l'utilizzo di un modello trave 1D per il suo studio è accurato. Le funzioni di espansione varieranno quindi nel dominio trasversale Ω . La scelta delle funzioni e dell'ordine di espansione è arbitraria e nell'ambito di questo capitolo si introducono i modelli di espansione di Taylor (TE) introdotta in [61] e di Lagrange (LE) introdotti in [62].

2.2.1 Il modello di espansione Taylor (TE)

I modelli di tipo TE sono basati su espansioni di tipo polinomiale del campo di spostamento calcolato sui nodi presenti nel vettore \mathbf{u} . Essendo un modello monodimensionale le funzioni polinomiali prenderanno valori in x^i e y^j con $i, j \in [1, N]$. In generale un campo di spostamenti di ordine N è espresso da:

$$\begin{aligned} u_x &= \sum_{N_i=0}^N \left(\sum_{M=0}^{N_i} x^{N-M} z^M u_{x \frac{N(N+1)+M+1}{2}} \right) \\ u_y &= \sum_{N_i=0}^N \left(\sum_{M=0}^{N_i} x^{N-M} z^M u_{y \frac{N(N+1)+M+1}{2}} \right) \\ u_z &= \sum_{N_i=0}^N \left(\sum_{M=0}^{N_i} x^{N-M} z^M u_{z \frac{N(N+1)+M+1}{2}} \right) \end{aligned} \quad (2.14)$$

L'ordine di espansione N viene scelto in base alle esigenze del problema strutturale e viene determinato dopo un'analisi di convergenza. A titolo di esempio vengono riportati i campi di spostamento di ordine $N=1$:

$$\begin{aligned}
 u_x &= u_{x1} + x \cdot u_{x2} + z \cdot u_{x3} \\
 u_y &= u_{y1} + x \cdot u_{y2} + z \cdot u_{y3} \\
 u_z &= \underbrace{u_{z1}}_{N=0} + x \cdot u_{z2} + z \cdot u_{z3}
 \end{aligned} \tag{2.15}$$

e di N=2:

$$\begin{aligned}
 u_x &= u_{x1} + x \cdot u_{x2} + z \cdot u_{x3} + x^2 \cdot u_{x4} + xz \cdot u_{x5} + z^2 u_{x6} \\
 u_y &= u_{y1} + x \cdot u_{y2} + z \cdot u_{y3} + x^2 \cdot u_{y4} + xz \cdot u_{y5} + z^2 u_{y6} \\
 u_z &= \underbrace{u_{z1} + x \cdot u_{z2} + z \cdot u_{z3}}_{N=1} + x^2 \cdot u_{z4} + xz \cdot u_{z5} + z^2 u_{z6}
 \end{aligned} \tag{2.16}$$

Essi introducono rispettivamente 9 e 18 variabili di spostamento generalizzate. Esse infatti non indicano una per una lo spostamento fisico di un punto della struttura ma sono solamente dei coefficienti di un polinomio di N-esimo grado. L'utilizzo di espansioni TE ha delle limitazioni intrinseche:

- Le variabili introdotte per N=1 hanno un significato matematico (derivate dello spostamento lungo gli assi) ma non quelle per N>1;
- Le variabili devono descrivere proprietà della sezione trasversale e non possono essere quindi poste secondo le necessità dell'analisi;
- L'estensione del problema per grandi rotazioni della sezioni è problematica [60].

I modelli di Eulero-Bernoulli e Timoshenko come casi particolari di espansioni di Taylor

A partire dall'espansione TE1 enunciata in Eq. 2.15 è possibile ricavare le teorie trave classiche di Eulero-Bernoulli (EBBT) e di Timoshenko (TBT). La teoria di Bernoulli si basa su alcune assunzioni fondamentali:

1. La sezione trasversale della trave rimane rigida sul suo piano;
2. La sezione trasversale ruota attorno ad una superficie neutra restando piana;
3. La sezione trasversale rimane perpendicolare alla superficie neutra durante la deformazione.

In base all'ipotesi 1) non sono ammesse deformazioni del piano trasversale e quindi

$$\begin{cases} \epsilon_{xx} = 0 \\ \epsilon_{zz} = 0 \\ \gamma_{xz} = 0 \end{cases} \implies \begin{cases} u_x(x, y, z) = u_{x1}(y) \\ u_z(x, y, z) = u_{z1}(y) \end{cases} \quad (2.17)$$

Per l'ipotesi 2) lo spostamento lungo l'asse principale della trave è una funzione lineare delle coordinate del piano che contiene la sezione trasversale

$$u_y(x, y, z) = u_{y1}(y) + \phi_z(y)x + \phi_x(y)z \quad (2.18)$$

ed infine per l'ipotesi 3) la deformazione a taglio è nulla:

$$\gamma_{yz} = \gamma_{yz} = 0 \implies \begin{cases} \phi_z = -u_{x1,y} \\ \phi_x = -u_{z1,y} \end{cases} \quad (2.19)$$

Sostituendo le Eq. 2.17, 2.18 e 2.19 nel campo di spostamento 2.15 si ottiene il campo di spostamento per la teoria di Eulero-Bernoulli

$$\begin{cases} u_x = u_{x1} \\ u_y = u_{y1} - u_{x1,y}x - u_{z1,y}z \\ u_z = u_{z1} \end{cases} \quad (2.20)$$

Esso introduce tre incognite cinematiche: u_{x1} , u_{y1} e u_{z1} . Nella teoria di Timoshenko invece la sezione trasversale rimane ancora indeformabile nel suo piano e ruota attorno ad una superficie neutra ma non è più vincolata a rimanere perpendicolare a quest'ultima. Questo implica

$$\begin{cases} \gamma_{xy} \neq 0 \\ \gamma_{yz} \neq 0 \end{cases} \quad (2.21)$$

Il campo di spostamento della teoria trave di Timoshenko è perciò

$$\begin{cases} u_x = u_{x1} \\ u_y = u_{y1} + \phi_z x + \phi_x z \\ u_z = u_{z1} \end{cases} \quad (2.22)$$

In cui le incognite cinematiche sono cinque : u_{x1} , u_{y1} , u_{z1} , ϕ_z , e ϕ_x . La differenza tra i due modelli così come la differenza tra i due insiemi di ipotesi cinematiche sono descritte in Fig. 2.2.

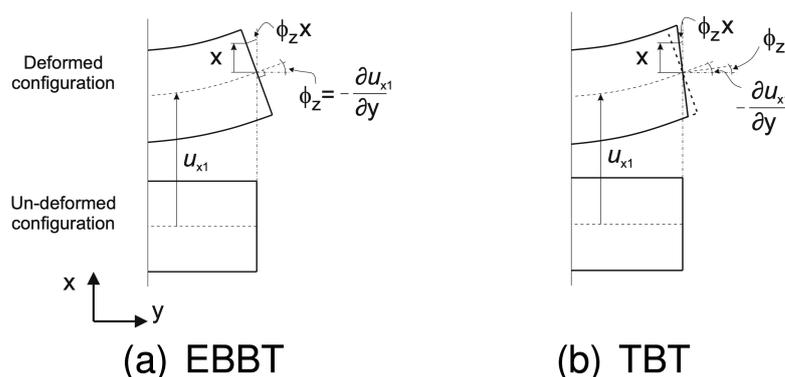


Figure 2.2: Differenza tra le ipotesi cinematiche e la configurazione deformata per la EBBT (a) e la TBT (b) [39].

2.2.2 Il modello di espansione di Lagrange (LE)

Le funzioni F_τ sono ora dei polinomi di Lagrange. I vantaggi di avere un'espansione LE sono:

- Ogni variabile di spostamento generalizzata indica lo spostamento fisico di un punto nella sezione trasversale;
- Le variabili di spostamento possono essere poste in punti di interesse della sezione Ω per calcolare lo spostamento direttamente invece di essere interpolato a posteriori dal campo di spostamento calcolato su altri punti;
- Le condizioni al contorno di tipo geometrico possono essere poste in sotto-domini della sezione trasversale e non su tutta essa in quanto per bloccare lo spostamento di un punto (x^*, y^*, z^*) basta porre $\mathbf{u}^* = 0$ invece di dover bloccare tutto il piano su cui giace quel punto;
- Per aumentare la precisione dell'analisi si possono aumentare il numero di elementi lungo la sezione Ω invece di aumentare l'ordine N di espansione.

I polinomi di Lagrange verranno usati nella loro formulazione isoparametrica (le funzioni di espansione che definiscono il dominio geometrico sono le stesse che descrivono poi il campo di spostamento).

Elementi L4

In questa trattazione verranno usati principalmente elementi a 4 e 9 nodi (L4 e L9) di cui si riportano geometria in Fig. 2.3, funzioni F_τ di espansione e coordinate normalizzate in Tab. 2.1.

$$F_\tau(\alpha, \beta) = \frac{1}{4} \cdot (1 + \alpha\alpha_\tau)(1 + \beta\beta_\tau) \quad \tau \in [1,4] \quad (2.23)$$

in cui α e β sono le coordinate normalizzate cioè hanno valori $\in [-1,1]$ e α_τ e β_τ sono le coordinate naturali dei nodi.

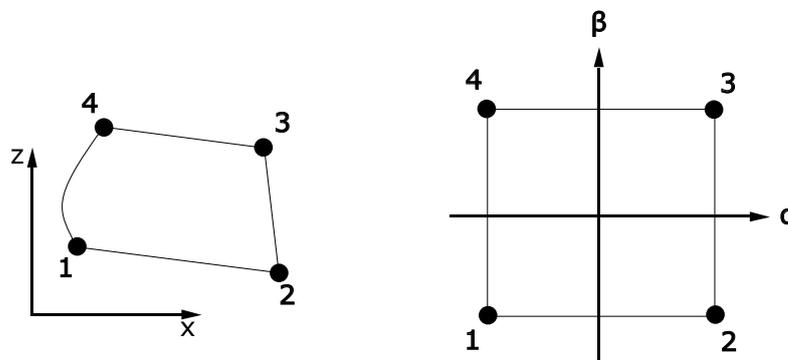


Figure 2.3: Elemento L4 nelle coordinate fisiche e naturali.

Nodo	α_τ	β_τ
1	-1	-1
2	1	-1
3	1	1
4	-1	1

Table 2.1: Tabella dei nodi con i valori di α_τ e β_τ per un'elemento LE4.

Il campo di spostamento ottenuto è:

$$\begin{cases} u_x &= F_1 \cdot u_{x1} + F_2 \cdot u_{x2} + F_3 \cdot u_{x3} + F_4 \cdot u_{x4} \\ u_y &= F_1 \cdot u_{y1} + F_2 \cdot u_{y2} + F_3 \cdot u_{y3} + F_4 \cdot u_{y4} \\ u_z &= F_1 \cdot u_{z1} + F_2 \cdot u_{z2} + F_3 \cdot u_{z3} + F_4 \cdot u_{z4} \end{cases} \quad (2.24)$$

A differenza della TE di ordine N in cui si ottiene un polinomio di ordine N scritto su un singolo nodo per LE si ottiene un polinomio di grado più basso (bilineare nel caso LE4) in le variabili generalizzate di spostamento rappresentano lo spostamento fisico dei noi con cui si esegue la discretizzazione come spiegato in Fig. 2.4.

Elementi L9

Volendo un elemento più raffinato si può aumentare il numero di nodi dell' elemento LE ponendo un nodo al centro e quattro nodi sulla mezzeria dei lati del quadrilatero. Si ottiene così un elemento a nove nodi la cui geometria è esposta in Fig. 2.5 le e coordinate normalizzate in Tab. 2.2: I polinomi di Lagrange utilizzati sono:

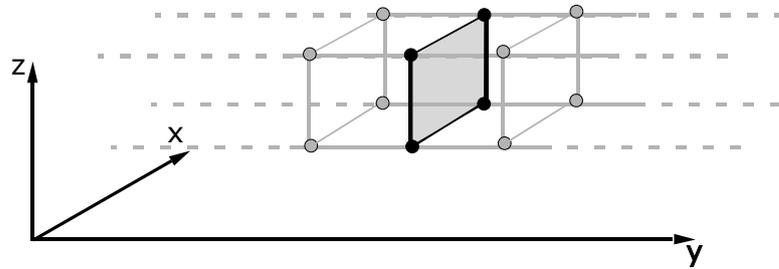


Figure 2.4: Sezione trasversale con espansione L4.

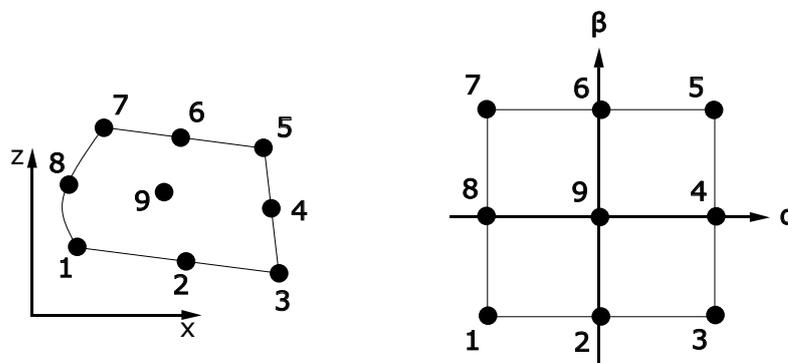


Figure 2.5: Elemento L9 nelle coordinate fisiche e naturali.

$$\begin{cases} F_\tau = \frac{1}{4} \cdot (\alpha^2 + \alpha\alpha_\tau)(\beta^2 + \beta\beta_\tau) & \tau = 1,3,4,7 \\ F_\tau = \frac{1}{2} \cdot \beta_\tau(\beta^2 + \beta\beta_\tau)(1 - \alpha^2) + \frac{1}{2} \cdot \alpha_\tau^2(\alpha^2 + \alpha\alpha_\tau)(1 - \beta^2) & \tau = 2,4,6,8 \\ F_\tau = (1 - \alpha^2)(1 - \beta^2) & \tau = 9 \end{cases} \quad (2.25)$$

Il campo di spostamento ottenuto risulta:

$$\begin{aligned} u_x &= F_1u_{x_1} + F_2u_{x_2} + F_3u_{x_3} + F_4u_{x_4} + F_5u_{x_5} + F_6u_{x_6} + F_7u_{x_7} + F_8u_{x_8} + F_9u_{x_9} \\ u_y &= F_1u_{y_1} + F_2u_{y_2} + F_3u_{y_3} + F_4u_{y_4} + F_5u_{y_5} + F_6u_{y_6} + F_7u_{y_7} + F_8u_{y_8} + F_9u_{y_9} \\ u_z &= F_1u_{z_1} + F_2u_{z_2} + F_3u_{z_3} + F_4u_{z_4} + F_5u_{z_5} + F_6u_{z_6} + F_7u_{z_7} + F_8u_{z_8} + F_9u_{z_9} \end{aligned} \quad (2.26)$$

Nodo	α_τ	β_τ
1	-1	-1
2	0	-1
3	1	-1
4	1	0
5	1	1
6	0	1
7	-1	1
8	-1	0
9	0	0

Table 2.2: Tabella dei nodi con i valori di α_τ e β_τ per un elemento LE9.

2.3 Formulazione FEM+CUF

Il campo di spostamento ottenuto con la formulazione CUF appena trattata viene combinato con la formulazione FEM nella quale lo spostamento risulta:

$$\mathbf{u} = N_i \mathbf{u}_i \quad (2.27)$$

in cui N_i è detta funzione di forma. Combinando i due paradigmi (2.13 e 2.27) si ottiene:

$$\mathbf{u} = N_i F_\tau \mathbf{u}_{\tau i} \quad i \in [1, \dots, N_{nodi}] \quad \tau \in [1, \dots, M] \quad (2.28)$$

Gli elementi monodimensionali beam comunemente utilizzati e che verranno utilizzati in questa trattazione sono gli elementi a 2 (B2), 3 (B3) e 4 (B4) nodi di cui si riporta la schematizzazione in Fig. 2.6

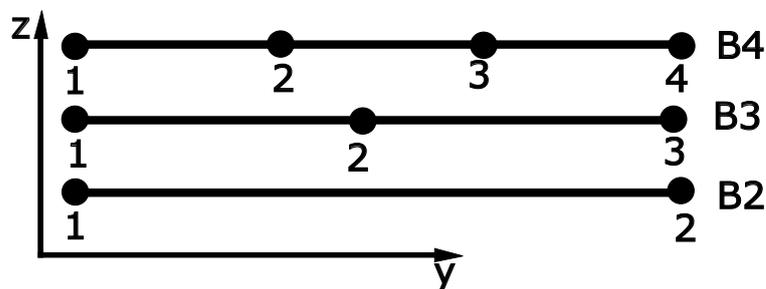


Figure 2.6: Elementi B2, B3 e B4.

Le funzioni di forma utilizzate per gli elementi beam sono in formulazione isoparametrica:

$$N_1 = \frac{1}{2}(1 - r), \quad N_2 = \frac{1}{2}(1 + r) \quad (2.29)$$

$$\begin{cases} r_1 = -1 \\ r_2 = 1 \end{cases}$$

$$N_1 = \frac{1}{2}(r - 1), \quad N_2 = \frac{1}{2}(r + 1), \quad N_3 = -(1 + r)(1 - r) \quad (2.30)$$

$$\begin{cases} r_1 = -1 \\ r_2 = 1 \\ r_3 = 0 \end{cases}$$

$$N_1 = -\frac{9}{16}\left(r + \frac{1}{3}\right)(r - 1), \quad N_2 = \frac{9}{16}\left(r - \frac{1}{3}\right)(r + 1) \quad (2.31)$$

$$N_3 = \frac{27}{16}(r + 1)\left(r - \frac{1}{3}\right)(r - 1), \quad N_4 = \frac{27}{16}\left(r + \frac{1}{3}\right)\left(r - \frac{1}{3}\right)(r - 1)$$

$$\begin{cases} r_1 = -1 \\ r_2 = 1 \\ r_3 = -\frac{1}{3} \\ r_4 = \frac{1}{3} \end{cases}$$

in cui r è la coordinata generalizzata nel sistema di riferimento naturale dell'elemento e r_j sono le coordinate naturali dei nodi. Le funzioni di forma sono formulate in

modo che

$$\begin{cases} N_i(r_i) = 1 \\ N_i(r_j) = 0 \end{cases}$$

Una volta quindi definito il problema strutturale trave da risolvere, scelto il numero di nodi in direzione trave con cui discretizzare la struttura, scelto il tipo di elemento FEM da utilizzare si può scegliere l'ordine e il tipo di espansione CUF da utilizzare, tenendo presente che la scelta del tipo di elemento FEM e CUF sono assolutamente indipendenti uno dall'altro. La struttura così discretizzata possiede un numero di gradi di libertà calcolabili con :

$$\#DOFs = \underbrace{3 \times M}_{\text{DOFs introdotti dalla CUF}} \times \left[\left(\underbrace{N_{\text{nod}} \text{ elemento} - 1}_{\text{DOFs dell' elemento FEM}} \right) \times N_{\text{elementiFEM}} + 1 \right] \quad (2.32)$$

2.4 Equazioni di governo

Per scrivere le equazioni della struttura discretizzata che il calcolatore andrà a risolvere si usa il principio dei lavori virtuali (PLV). Esso afferma:

$$\delta L_{int} = \delta L_{ext} - \delta L_{ine} \quad (2.33)$$

In cui

- L_{int} è il lavoro delle forze elastiche interne alla struttura;
- L_{ext} è il lavoro dei carichi e dei vincoli applicati;
- L_{ine} è il lavoro svolto dalle forze di inerzia.

ciascuno di questi contributi si può riferire a spostamenti, deformazioni o tensioni scrivendo un sistema di equazioni lineari negli spostamenti del tipo:

$$\mathcal{L}(\mathbf{u}) = 0 \quad (2.34)$$

2.4.1 δL_{int}

Il lavoro delle forze interne è per definizione quello delle forze elastiche che agiscono al suo interno:

$$L_{int} = \int_V \boldsymbol{\varepsilon}^T \boldsymbol{\sigma} dV \quad (2.35)$$

e la sua variazione:

$$\delta L_{int} = \int_V \delta \boldsymbol{\varepsilon}^T \boldsymbol{\sigma} dV \quad (2.36)$$

scrivendo $\boldsymbol{\varepsilon}$ secondo la 2.5 e $\boldsymbol{\sigma}$ come 2.7 si ottiene:

$$\delta L_{int} = \int_V \delta(\mathbf{bu})^T \mathbf{Cb} u dV \quad (2.37)$$

e scrivendo il campo di spostamenti secondo il paradigma FEM+CUF con la 2.28

$$\delta L_{int} = \delta \mathbf{u}_{sj}^T \underbrace{\int_V N_j F_s \mathbf{b}^T \mathbf{Cb} N_i F_\tau dV}_{\mathbf{k}^{\tau sij}} \mathbf{u}_{\tau i} \quad (2.38)$$

si ottiene la forma finale:

$$\delta L_{int} = \delta \mathbf{u}_{sj}^T \mathbf{k}^{\tau sij} \mathbf{u}_{\tau i} \quad (2.39)$$

in cui:

$$\mathbf{k}^{\tau sij} = \int_V N_j F_s \mathbf{b}^T \mathbf{Cb} N_i F_\tau dV \quad (2.40)$$

è detto nucleo e dipende solo dal tipo di elemento FEM+CUF (funzioni di forma N_i e di espansione F_τ) e dal materiale (matrice \mathbf{C}) utilizzato e non dalla dimensione della struttura o dal numero di nodi o elementi con cui è stata discretizzata. Essa per ogni quartetto di indici τsij è una matrice 3×3 in quanto 3 sono i DOFs di un singolo nodo di un elemento FEM+CUF (spostamenti u_x, u_y e u_z)

Assemblaggio della matrice di rigidezza \mathbf{K}

In Fig. 2.7 si illustra come assemblare la matrice di rigidezza globale della struttura \mathbf{K} :

1. Si parte dai nuclei fondamentali $\mathbf{k}^{\tau sij}$;
2. Si esegue un ciclo sugli indici τ e s ovvero sul numero di elementi presenti nella cross section dati dall'ordine dell'espansione (LE o TE) CUF;
3. Si esegue un altro ciclo sugli indici i e j ovvero il numero di nodi FEM presenti sull'asse trave. Si ottiene così la matrice di rigidezza del singolo elemento FEM+CUF;
4. Si esegue un ciclo per tutti gli elementi FEM+CUF presenti nella struttura ottenendo così la matrice di rigidezza globale \mathbf{K} della struttura.

Il processo è spiegato graficamente in Fig. 2.7.

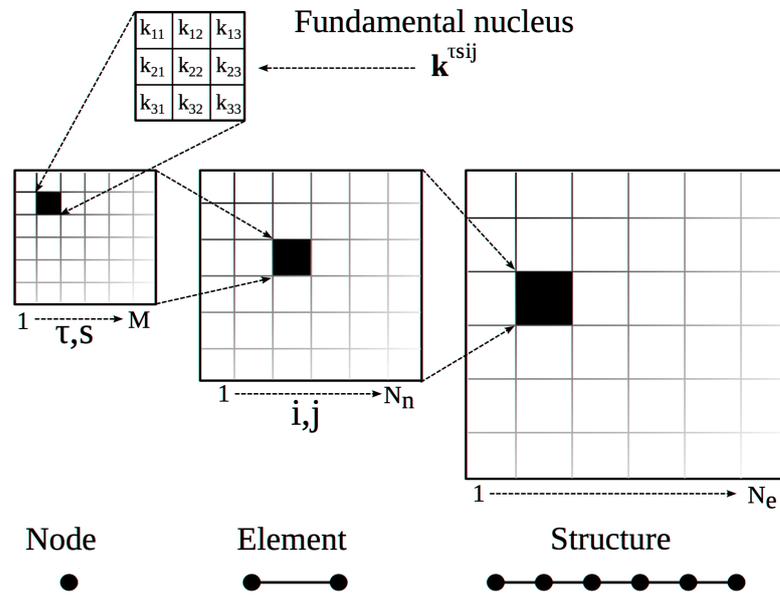


Figure 2.7: Assemblaggio della matrice di rigidezza della struttura \mathbf{K} [39].

2.4.2 δL_{ine}

Il lavoro delle forze di inerzia è per definizione:

$$L_{ine} = \int_V \mathbf{u}^T \rho \ddot{\mathbf{u}} dV \quad (2.41)$$

in cui ρ è la densità del materiale che compone la struttura e $\ddot{\mathbf{u}}$ l'accelerazione a cui è sottoposta la struttura. La variazione del lavoro delle forze inerziali vale:

$$\delta L_{ine} = \int_V \delta \mathbf{u}^T \rho \ddot{\mathbf{u}} dV \quad (2.42)$$

e scrivendo il campo di spostamenti secondo la 2.28 si ottiene:

$$\delta L_{ine} = \delta \mathbf{u}_{sj}^T \underbrace{\int_V N_j F_s \rho N_i F_\tau dV}_{\mathbf{m}^{\tau sij}} \ddot{\mathbf{u}}_{\tau i} \quad (2.43)$$

ottenendo la forma finale:

$$\delta L_{ine} = \delta \mathbf{u}_{sj}^T \mathbf{m}^{\tau sij} \ddot{\mathbf{u}}_{\tau i} \quad (2.44)$$

in cui la matrice $\mathbf{m}^{\tau sij}$ è il nucleo fondamentale della matrice di massa \mathbf{M} della struttura che si assembla analogamente a quanto spiegato sopra per la matrice \mathbf{K} .

2.4.3 δL_{ext}

Il lavoro virtuale delle forze esterne nel caso di un carico concentrato $\mathbf{P}(x_p, y_p, z_p) = \{P_x, P_y, P_z\}^T$ vale:

$$L_{ext} = \mathbf{u}_s^T \mathbf{P} \quad (2.45)$$

mentre nel caso di un carico distribuito su una superficie Γ di intensità $\mathbf{p}(x, y)$:

$$L_{ext} = \int_\Gamma \mathbf{u}_s^T \mathbf{p}(x, y) d\Gamma \quad (2.46)$$

ottenendo delle variazioni:

$$\begin{aligned} \delta L_{ext} &= \delta \mathbf{u}_s^T \mathbf{P} \\ \delta L_{ext} &= \int_\Gamma \delta \mathbf{u}_s^T \mathbf{p}(\mathbf{y}) d\Gamma \end{aligned} \quad (2.47)$$

scrivendo il campo di spostamenti secondo la 2.28 si ottiene per il caso del carico distribuito:

$$\delta L_{ext} = \delta \mathbf{u}_{sj}^T \int_\Gamma F_s N_j p(x, y) d\Gamma \quad (2.48)$$

in cui nell'integrale appaiono tutte quantità note. Nel caso del carico concentrato:

$$\delta L_{ext} = \delta \mathbf{u}_{sj}^T F_s(x_p, z_p) N_j(y_p) \mathbf{P} \quad (2.49)$$

2.5 Tipologia di analisi

A seconda del tipo di analisi che si vuole eseguire sulla struttura si va a considerare o meno l'effetto della variazione del lavoro virtuale di un tipo di forze. In Tab. 2.3 si riassumono le quantità coinvolte nello specifico tipo di analisi.

	Analisi statica	Analisi modale	Analisi dinamica
δL_{ext}	✓	×	✓
δL_{ine}	×	✓	✓
δL_{int}	✓	✓	✓

Table 2.3: Tabella riassuntiva sui tipi di analisi FEM.

2.5.1 Analisi statica

Nell'analisi statica si pone:

$$\delta L_{ext} = \delta L_{int} \quad (2.50)$$

e scrivendo le variazioni come nelle Eq. 2.49 oppure 2.48 e 2.39 si ottiene:

$$\mathbf{K}\mathbf{u} = \mathbf{P} \implies \mathbf{u} = \mathbf{K}^{-1}\mathbf{P} \quad (2.51)$$

Per risolvere il problema di statica è necessario che la matrice \mathbf{K} sia invertibile cioè

$$\det(K) \neq 0$$

Perché sia vero ciò è sufficiente che la struttura abbia dei vincoli che la rendono almeno isostatica. Nella pratica il codice non va ad invertire la matrice essendo una pratica molto costosa computazionalmente ma viene trovata l'inversa con delle fattorizzazioni.

2.5.2 Analisi modale

Per eseguire l'analisi modale cioè quella delle vibrazioni libere si risolve la seguente equazione:

$$\delta L_{ine} + \delta L_{int} = 0 \quad (2.52)$$

e una volta scritti i contributi nelle loro forme discretizzate secondo le Eq. 2.44 e 2.39 si ottiene:

$$\mathbf{M}\ddot{\mathbf{u}} + \mathbf{K}\mathbf{u} = 0 \quad (2.53)$$

L'equazione viene risolta imponendo che la soluzione sia armonica [39]

$$\begin{aligned}\mathbf{u} &= \hat{\mathbf{u}}e^{i\omega t} \\ \dot{\mathbf{u}} &= i\omega\hat{\mathbf{u}}e^{i\omega t} \\ \ddot{\mathbf{u}} &= -\omega^2\hat{\mathbf{u}}e^{i\omega t}\end{aligned}\tag{2.54}$$

e sostituendo la 2.54 nella 2.53 si ottiene un problema agli autovalori in cui questi ultimi sono le pulsazioni proprie della struttura:

$$-\mathbf{M}\omega^2\hat{\mathbf{u}}e^{i\omega t} + \mathbf{K}\mathbf{u}e^{i\omega t} = 0\tag{2.55}$$

$$\hat{\mathbf{u}}e^{i\omega t}(-\mathbf{M}\omega^2 + \mathbf{K}) = 0\tag{2.56}$$

$$-\mathbf{M}\omega^2 + \mathbf{K} = 0\tag{2.57}$$

$$\omega^2 = \mathbf{M}^{-1}\mathbf{K}\tag{2.58}$$

ottenendo:

$$f_i = \frac{\omega_i}{2\pi} \quad i \in [1, \dots, N_{modi}]\tag{2.59}$$

2.5.3 Analisi dinamica

Per l'analisi dinamica si risolve l'equazione data del PLV completo

$$\delta L_{ine} + \delta L_{int} = \delta L_{ext}\tag{2.60}$$

da cui sostituendo le espressioni date dalle Eq. 2.39, 2.44 e 2.48 si ottiene:

$$\mathbf{M}\ddot{\mathbf{u}} + \mathbf{K}\mathbf{u} = \mathbf{P}\tag{2.61}$$

cioè un'equazione differenziale di secondo ordine nel tempo risolvibile con tecniche numeriche. La più comunemente utilizzata è il metodo di Newmark. [39]

2.6 Materiali compositi

Le moderne strutture aeronautiche sono sempre più frequentemente in materiale composito. I vantaggi di utilizzare materiali compositi stanno nel fatto di poter personalizzare il comportamento della struttura o di una sezione di essa a proprio piacimento andando ad agire sulla disposizione delle fibre del materiale composito (*tayloring*) e di avere un'elevata rigidità e robustezza specifiche. Un composito è per sua natura un materiale ortotropo ovvero possiede delle direzioni preferenziali lungo le quali se sollecitato da carichi risponde diversamente. I materiali compositi si compongono di due elementi:

1. Le fibre che costituiscono l'elemento resistente alle sollecitazioni. Sono in genere degli elementi filiformi e sono fatte di un materiale con un modulo di Young E_{fibre} molto elevato e sopportano molto bene carichi di trazione. Le fibre di loro natura non restano incollate l'una con l'altra e perciò un elemento strutturale composto solo di fibre sarebbe inadatto a sopportare qualsiasi carico a taglio
2. La matrice che è fatta solitamente di un materiale isotropo come resina epossidica. Generalmente il materiale di cui è composta la matrice possiede un modulo di Young E_{matrice} che può essere di ordini di grandezza inferiore a quello delle fibre. Il compito della matrice è tenere incollate una con l'altra le fibre.

I coefficienti di rigidezza $E_1, E_2, E_3, G_{12}, G_{13}, G_{23}, \nu_{12}, \nu_{13}, \nu_{23}$ saranno poi una combinazione dipendente dalla frazione in volume di fibre e matrice delle caratteristiche di rigidezza delle une e dell'altra.

I compositi che si andranno ad utilizzare in queste analisi sono tutti compositi le cui fibre sono disposte unidirezionalmente su un piano. Si può quindi individuare un sistema di riferimento della lamina composita e si definiscono gli assi 1, 2 e 3. L'asse 1 è parallelo alla direzione di orientamento delle fibre. L'asse 2 è perpendicolare all'asse 1 e giace nel piano sul quale giacciono le fibre. L'asse 3 completa la terna cartesiana. Si definisce per la laminazione k -esima la matrice delle rigidezze:

$$\mathbf{C}_{123}^{(k)} = \begin{pmatrix} C_{11}^{(k)} & C_{12}^{(k)} & C_{16}^{(k)} \\ Q_{12}^{(k)} & Q_{22}^{(k)} & C_{26}^{(k)} \\ C_{16}^{(k)} & C_{26}^{(k)} & Q_{66}^{(k)} \end{pmatrix} \quad (2.62)$$

scritta nel sistema di riferimento 1, 2, 3. Esso può non essere allineato con quello globale della struttura x, y, z ma essere ruotato di due angoli θ_y attorno all'asse \hat{y} della struttura e θ_z attorno all'asse z . La Fig. 2.8 illustra un caso in cui è presente la sola rotazione attorno all'asse z : ruotando la matrice $\mathbf{C}_{123}^{(k)}$ degli angoli $\theta_y^{(k)}$ e $\theta_z^{(k)}$ con l'apposita matrice di rotazione $\mathbf{R}_{123 \rightarrow xyz}^{(k)}(\theta_y^{(k)}, \theta_z^{(k)})$ si ottengono le rigidezze della laminazione k -esima scritte nel sistema di riferimento della struttura

$$\mathbf{C}_{xyz}^{(k)} = \mathbf{R}^{(k)T} \mathbf{C}_{123}^{(k)} \mathbf{R}^{(k)} \quad (2.63)$$

Grazie all'espansione CUF è possibile analizzare strutture in composito specificando come un nuovo elemento dell'espansione CUF ogni strato di diversa laminazione specificando gli angoli θ_z e θ_y e le caratteristiche del materiale composito.

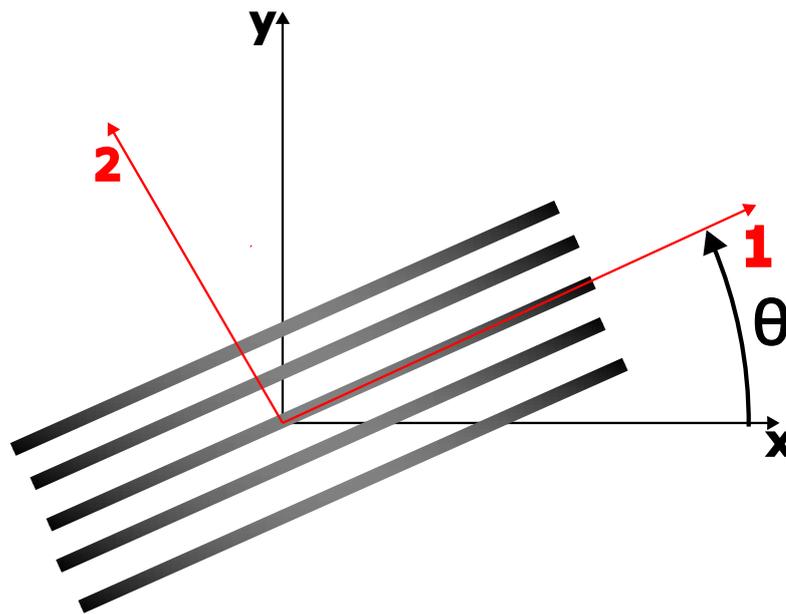


Figure 2.8: Differenza tra sistema di riferimento delle fibre e sistema di riferimento globale della struttura.

Chapter 3

Modello fluidodinamico

In questo capitolo si illustra il modello aerodinamico che verrà utilizzato per risolvere la parte fluidodinamica del problema di accoppiamento fluido struttura. Esso si basa sulla soluzione numerica delle equazioni di Navier-Stokes discretizzate nel senso dei volumi finiti.

3.1 Le equazioni di Navier-Stokes

La fluidodinamica computazionale si basa sulle equazioni di Navier-Stokes discretizzate che traducono i tre principi fisici su cui si basa la fluidodinamica:

- La conservazione della massa;
- La conservazione della quantità di moto;
- La conservazione dell'energia.

Esse nella loro forma matematica possono essere scritte in forma Euleriana o Lagrangiana, integrale o differenziale ed è possibile passare da una forma all'altra manipolandole algebricamente. Per fare ciò si introduce l'operatore *derivata sostanziale* per la generica proprietà del flusso ψ :

$$\frac{D(\psi)}{Dt} = \frac{\partial \psi}{\partial t} + \nabla \psi \cdot \mathbf{v} \quad (3.1)$$

Essa rappresenta dal punto di vista fisico la variazione nel tempo di una grandezza fisica posseduta da una particella che si muove nel flusso sia dovuta alla variazione nel tempo della grandezza fisica nel sistema di riferimento solidale alla particella sia al fatto che essendo in movimento essa attraversa regioni del flusso con proprietà variabili. Nell'implementazione computazionale invece la discretizzazione di una forma piuttosto che l'altra è fondamentale dal punto di vista della stabilità. Nella

fluidodinamica computazionale la stragrande maggioranza dei codici commerciali risolvono le equazioni scritte nella loro formulazione integrale euleriana e si descriveranno pertanto le equazioni ottenute secondo tale approccio. Il dominio computazionale è suddiviso in un numero arbitrario di volumi di dimensione ridotta ma abbastanza grande da far rimanere valida l'*ipotesi del continuo*. Tale ipotesi consente di considerare, in un volume di solido riempito di particelle, le grandezze termodinamiche e fluidodinamiche come ad esempio pressione, temperatura, velocità e densità variabili nel mezzo con continuità e quindi derivabili.

3.1.1 Equazione di conservazione della massa

Si considera un volume $dV = dx \cdot dy \cdot dz$ fisso nello spazio e si esplicitano i flussi di massa entranti e uscenti dalla superficie S che lo contorna come mostrato in Fig. 3.1 Il principio di conservazione della massa afferma che: Applicando questo

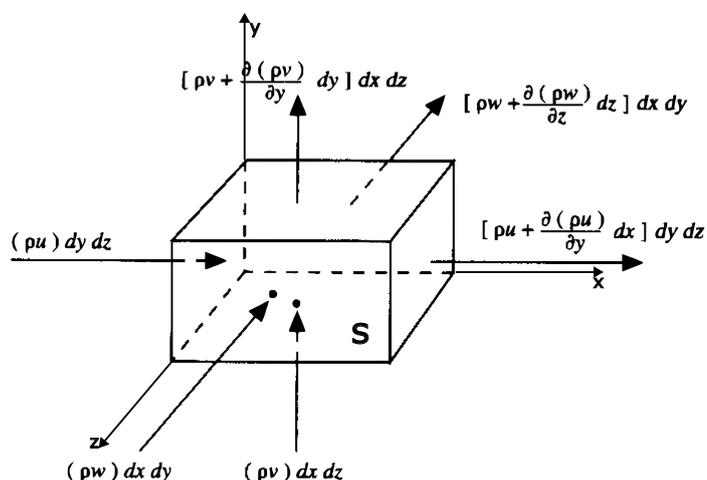


Figure 3.1: Schematizzazione dell'elemento fluido infinitesimo attraversato da flussi di massa [63].

Flusso netto di massa uscente dal volume dV delimitato da S	=	Variazione temporale della massa contenuta all'interno del volume dV
---	---	--

principio al volume in Fig. 3.1 si ottiene:

$$\underbrace{\frac{\partial(\rho u)}{\partial x} + \frac{\partial(\rho v)}{\partial y} + \frac{\partial(\rho w)}{\partial z}}_{\text{Flusso di massa}} = \underbrace{-\frac{\partial \rho}{\partial t}}_{\text{Variazione temporale della massa}} \quad (3.2)$$

e riordinando i termini si ottiene l'equazione di continuità:

$$\frac{\partial}{\partial t} \rho + \nabla \cdot \mathbf{v} = 0 \quad (3.3)$$

3.1.2 Equazione di conservazione della quantità di moto

Si considera un volume $dV = dx \cdot dy \cdot dz$ contornato dalla superficie S che si muove solidalmente col flusso. Applicando la terza legge di Newton:

$$\mathbf{F} = m\mathbf{a} \quad (3.4)$$

in cui \mathbf{F} è la sommatoria di tutte le forze agenti sul volume, esse possono essere di due tipi: forze di volume o di superficie. Le forze di volume agiscono a distanza e si generano dall'interazione di varia natura tra due corpi come la forza gravitazionale o le forze elettriche. Le forze di superficie sono gli sforzi di attrito e la pressione, agiscono sulle pareti della superficie S e si generano esclusivamente tra elementi contigui di fluido. In Fig. 3.2 sono riportate le forze agenti in direzione x sul volume dV .

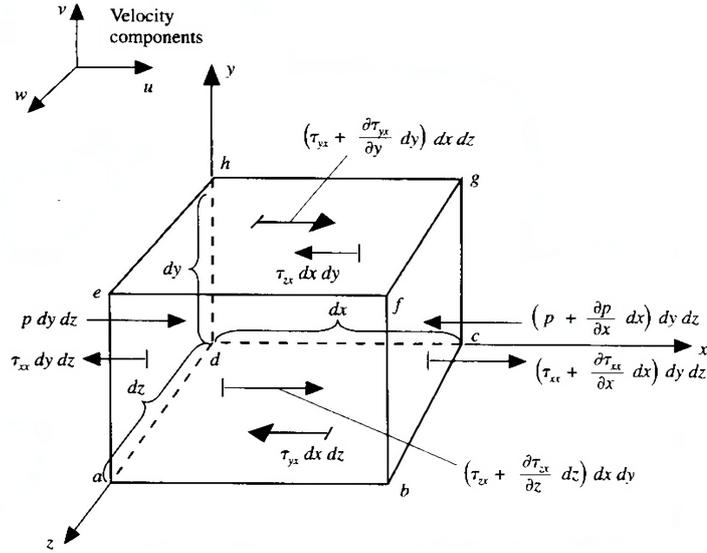


Figure 3.2: Schematizzazione dell'elemento fluido infinitesimo attraversato da flussi di quantità di moto in direzione x [63]

La risultante delle forze di superficie in direzione x risulta:

$$F_x = \left[-\frac{\partial p}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{xx}}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{yx}}{\partial y} + \frac{\partial \tau_{zx}}{\partial z} \right] dx dy dz + \rho f_x dx dy dz \quad (3.5)$$

Riscrivendo l' Eq. 3.5 nell' Eq. 3.4, riscrivendo l'accelerazione in direzione x a_x come

$$a_x = \frac{D}{Dt}u \quad (3.6)$$

si ottiene:

$$\rho \frac{Du}{Dt} = -\frac{\partial p}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{xx}}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{yx}}{\partial y} + \frac{\partial \tau_{zx}}{\partial z} + \rho f_x \quad (3.7)$$

per la direzione x e in maniera simile si ricavano l'equazione di bilancio della quantità di moto per le direzioni y e z . Per ottenere la forma conservativa si riscrive il primo membro di Eq. 3.7 esplicitando la derivata sostanziale:

$$\rho \frac{Du}{Dt} = \rho \frac{\partial}{\partial t} \rho + \rho \mathbf{v} \cdot \nabla \quad (3.8)$$

espandendo il termine

$$\frac{\partial}{\partial t}(\rho u) = \rho \frac{\partial}{\partial t} u + u \frac{\partial}{\partial t} \rho \quad (3.9)$$

e sostituendo Eq. 3.8 in 3.9 si ottiene

$$\rho \frac{\partial u}{\partial t} = \frac{\partial(\rho u)}{\partial t} + u \frac{\partial \rho}{\partial t} \quad (3.10)$$

Scrivendo l'identità vettoriale

$$\nabla \cdot (\rho u \mathbf{v}) = u \nabla \cdot (\rho \mathbf{v}) + (\rho \mathbf{v}) \cdot \nabla u \implies \rho \mathbf{v} \cdot \nabla u = \nabla \cdot (\rho u \mathbf{v}) - u \nabla \cdot (\rho \mathbf{v}) \quad (3.11)$$

Sostituendo si ottiene:

$$\rho \frac{D}{Dt} u = \frac{\partial(\rho u)}{\partial t} - u \frac{\partial \rho}{\partial t} - u \nabla \cdot (\rho \mathbf{v}) + \nabla \cdot (\rho u \mathbf{v}) = \frac{\partial(\rho u)}{\partial t} - u \underbrace{\left[\frac{\partial \rho}{\partial t} + \nabla \cdot (\rho \mathbf{v}) \right]}_{=0} + \nabla \cdot (\rho u \mathbf{v}) \quad (3.12)$$

in cui il termine tra parentesi quadre è nullo essendo il primo membro dell'equazione di continuità (Eq. 3.3). Si ottiene infine:

$$\rho \frac{Du}{Dt} = \frac{\partial(\rho u)}{\partial t} + \nabla \cdot (\rho u \mathbf{v}) \quad (3.13)$$

Sostituendo l'Eq. 3.13 in 3.7 si ottiene:

$$\frac{\partial(\rho u)}{\partial t} + \nabla \cdot (\rho u \mathbf{v}) = -\frac{\partial p}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{xx}}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{xy}}{\partial y} + \frac{\partial \tau_{xz}}{\partial z} + \rho f_x \quad (3.14)$$

e procedendo in maniera analoga si ottengono le equazioni per le direzioni y e z . Per fluidi *newtoniani*, in cui lo sforzo di taglio sono proporzionali al gradiente di velocità è valida l'ipotesi di Stokes per cui

$$\tau_{xx} = \lambda(\nabla \cdot \mathbf{v}) + 2\mu \frac{\partial u}{\partial x} \quad (3.15)$$

in cui μ è la viscosità dinamica e λ il coefficiente di viscosità. Sempre per l'ipotesi di Stokes si ha che λ è funzione di μ ed in particolare:

$$\lambda = -\frac{2}{3}\mu \quad (3.16)$$

Applicando quest'ultima definizione a Eq. 3.15 si ottiene:

$$\tau_{xx} = -\frac{2}{3}\mu(\nabla \cdot \mathbf{v}) + 2\mu \frac{\partial u}{\partial x} \quad (3.17)$$

$$\tau_{xy} = \mu \left[\frac{\partial v}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial y} \right] \quad (3.18)$$

$$\tau_{zx} = \mu \left[\frac{\partial u}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial x} \right] \quad (3.19)$$

Sostituendo le definizioni di τ in Eq. 3.14 si ottiene l'equazione di conservazione della quantità di moto in forma conservativa in direzione x :

$$\frac{\partial(\rho u)}{\partial t} + \nabla \cdot (\rho u \mathbf{v}) = -\frac{\partial p}{\partial x} + \frac{\partial}{\partial x} \left(\lambda \nabla \cdot \mathbf{v} + 2\mu \frac{\partial u}{\partial x} \right) + \frac{\partial}{\partial y} \left[\mu \left(\frac{\partial v}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial y} \right) \right] + \frac{\partial}{\partial z} \left[\mu \left(\frac{\partial u}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial x} \right) \right] + \rho f_x \quad (3.20)$$

3.1.3 Equazione di conservazione dell'energia

Visualizzando un volumetto $dV = dx \cdot dy \cdot dz$ in moto assieme al fluido vale il principio di conservazione dell'energia. Esso afferma che:

Variazione temporale di energia all'interno dell' elemento	=	Flusso netto di calore entrante nell'elemento	+	Potenza trasmessa all'elemento dalle forze di volume e di superficie
--	---	---	---	--

I flussi di calore e i lavori delle forze di superficie e volume in direzione x sono esposti in Fig. 3.3. La potenza netta si ottiene sommando tutti i prodotti di forze di superficie/volume con la velocità del fluido a loro associata e vale:

$$\begin{aligned} & \left[\frac{\partial(u p)}{\partial x} + \frac{\partial(v p)}{\partial y} + \frac{\partial(w p)}{\partial z} + \frac{\partial(u \tau_{xx})}{\partial x} + \frac{\partial(u \tau_{xy})}{\partial y} + \frac{\partial(u \tau_{xz})}{\partial z} \right. \\ & \left. + \frac{\partial(v \tau_{xy})}{\partial x} + \frac{\partial(v \tau_{yy})}{\partial y} + \frac{\partial(u \tau_{zy})}{\partial z} + \frac{\partial(w \tau_{xz})}{\partial x} + \frac{\partial(w \tau_{yz})}{\partial y} + \frac{\partial(w \tau_{zz})}{\partial z} \right] dx dy dz \\ & + \rho \mathbf{f} \cdot \mathbf{v} dx dy dz \end{aligned} \quad (3.21)$$

Il flusso di calore riguardante il volumetto può provenire da generazione interna nel volumetto o dal trasferimento di calore per conduzione da un volumetto contiguo a

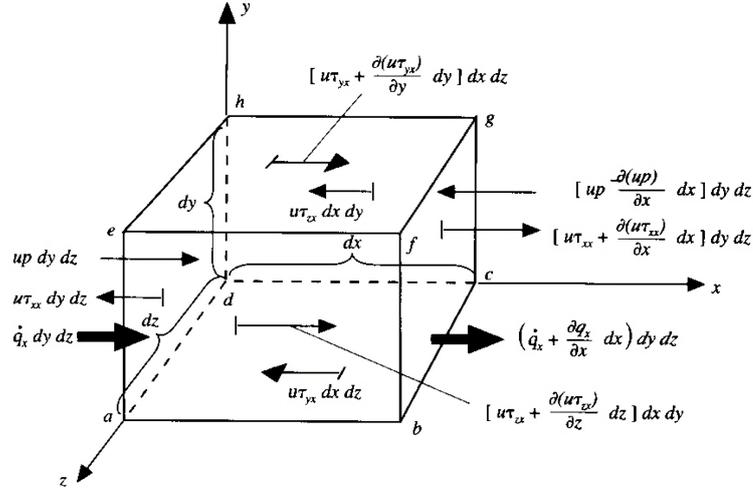


Figure 3.3: Schematizzazione dell'elemento fluido infinitesimo attraversato da flussi di energia in direzione x [63].

causa di un gradiente di temperatura. Denotando la generazione di calore interna al volume con

$$q_{\text{int}} = \rho \dot{q} dx dy dz \quad (3.22)$$

mentre denotando con \dot{q}_ξ il calore trasmesso nella direzione generica ξ facendo riferimento alla Fig. 3.3 si ottiene che il flusso di calore netto trasmesso per conduzione vale :

$$q_{\text{cond}} = - \left(\frac{\partial \dot{q}_x}{\partial x} + \frac{\partial \dot{q}_y}{\partial y} + \frac{\partial \dot{q}_z}{\partial z} \right) dx dy dz \quad (3.23)$$

Il trasferimento per conduzione è dovuto, come detto in precedenza, alla presenza di un gradiente di temperatura per cui, per la legge di Fourier si può scrivere :

$$\dot{q}_\xi = k \frac{\partial T}{\partial \xi} \quad (3.24)$$

e sostituendo questa definizione nell'Eq. 3.23 si ottiene:

$$\left[\rho \dot{q} + \frac{\partial}{\partial x} \left(k \frac{\partial T}{\partial x} \right) + \frac{\partial}{\partial y} \left(k \frac{\partial T}{\partial y} \right) + \frac{\partial}{\partial z} \left(k \frac{\partial T}{\partial z} \right) \right] dx dy dz \quad (3.25)$$

L'energia all'interno dell'elementino di fluido è definita come la somma dell'energia cinetica traslazionale di tutte le molecole che compongono il volume dV , $\rho \frac{V^2}{2}$ e dell'energia interna e del gas contenuto all'interno del volume, definita come la somma su tutto il volume dV dell'energia cinetica posseduta da ogni molecola di fluido, si ottiene quindi che la variazione temporale di energia all'interno del

volume vale:

$$\rho \frac{D}{Dt} \left(e + \frac{V^2}{2} \right) \quad (3.26)$$

Accoppiando le Eq. 3.26, Eq. 3.25 e Eq. 3.21 si ottiene la forma non conservativa dell'equazione dell'energia :

$$\begin{aligned} \rho \frac{D}{Dt} \left(e + \frac{V^2}{2} \right) = & \rho \dot{q} + \frac{\partial}{\partial x} \left(k \frac{\partial T}{\partial x} \right) + \frac{\partial}{\partial y} \left(k \frac{\partial T}{\partial y} \right) + \frac{\partial}{\partial z} \left(k \frac{\partial T}{\partial z} \right) - \frac{\partial (up)}{\partial x} \\ & - \frac{\partial (vp)}{\partial y} - \frac{\partial (wp)}{\partial z} + \frac{\partial (u\tau_{xx})}{\partial x} + \frac{\partial (u\tau_{xy})}{\partial y} + \frac{\partial (u\tau_{xz})}{\partial z} + \frac{\partial (v\tau_{yx})}{\partial x} \\ & + \frac{\partial (v\tau_{yy})}{\partial y} + \frac{\partial (v\tau_{yz})}{\partial z} + \frac{\partial (w\tau_{zx})}{\partial x} + \frac{\partial (w\tau_{zy})}{\partial y} + \frac{\partial (w\tau_{zz})}{\partial z} + \rho \mathbf{f} \cdot \mathbf{v} \end{aligned} \quad (3.27)$$

Si riscrive ora il primo membro aggiungendo l'energia cinetica del volume dV , esplicitando la definizione di derivata sostanziale:

$$\rho \frac{D(e + \frac{V^2}{2})}{Dt} = \rho \frac{\partial(e + \frac{V^2}{2})}{\partial t} + \rho \mathbf{V} \cdot \nabla(e + \frac{V^2}{2}) \quad (3.28)$$

Essendo che:

$$\frac{\partial(\rho(e + \frac{V^2}{2}))}{\partial t} = \rho \frac{\partial(e + \frac{V^2}{2})}{\partial t} + (e + \frac{V^2}{2}) \frac{\partial \rho}{\partial t} \quad (3.29)$$

ovvero:

$$\rho \frac{\partial(e + \frac{V^2}{2})}{\partial t} = \frac{\partial(\rho(e + \frac{V^2}{2}))}{\partial t} - (e + \frac{V^2}{2}) \frac{\partial \rho}{\partial t} \quad (3.30)$$

Si scrive l'identità vettoriale che consente di esplicitare la divergenza di un prodotto di funzioni:

$$\nabla \cdot (\rho(e + \frac{V^2}{2}) \mathbf{V}) = (e + \frac{V^2}{2}) \nabla \cdot (\rho \mathbf{V}) + \rho \mathbf{V} \cdot \nabla(e + \frac{V^2}{2}) \quad (3.31)$$

ovvero:

$$\rho \mathbf{V} \cdot \nabla(e + \frac{V^2}{2}) = \nabla \cdot (\rho(e + \frac{V^2}{2}) \mathbf{V}) - (e + \frac{V^2}{2}) \nabla \cdot (\rho \mathbf{V}) \quad (3.32)$$

Sostituendo Eq. 3.30 e Eq. 3.32 in 3.28 si ottiene:

$$\rho \frac{D(e + \frac{V^2}{2})}{Dt} = \frac{\partial(\rho(e + \frac{V^2}{2}))}{\partial t} - (e + \frac{V^2}{2}) \underbrace{\left[\frac{\partial \rho}{\partial t} + \nabla \cdot (\rho \mathbf{V}) \right]}_{=0} + \nabla \cdot (\rho(e + \frac{V^2}{2}) \mathbf{V}) \quad (3.33)$$

In cui il termine tra parentesi quadre è nullo essendo la scrittura dell'equazione di continuità (Eq. 3.3). Si ottiene così il primo membro dell'equazione dell'energia in forma conservativa:

$$\rho \frac{D(e + \frac{V^2}{2})}{Dt} = \frac{\partial(\rho(e + \frac{V^2}{2}))}{\partial t} + \nabla \cdot (\rho(e + \frac{V^2}{2}) \mathbf{V}) \quad (3.34)$$

Eguagliando Eq. 3.34 al secondo membro di Eq. 3.27, si ottiene la scrittura dell'equazione dell'energia in forma conservativa:

$$\begin{aligned}
 \frac{\partial}{\partial t} \left[\rho \left(e + \frac{V^2}{2} \right) \right] + \nabla \cdot \left[\rho \left(e + \frac{V^2}{2} \right) \mathbf{V} \right] &= \rho \dot{q} + \frac{\partial}{\partial x} \left(k \frac{\partial T}{\partial x} \right) + \frac{\partial}{\partial y} \left(k \frac{\partial T}{\partial y} \right) \\
 &+ \frac{\partial}{\partial z} \left(k \frac{\partial T}{\partial z} \right) - \frac{\partial(up)}{\partial x} - \frac{\partial(vp)}{\partial y} - \frac{\partial(wp)}{\partial z} + \frac{\partial(u\tau_{xx})}{\partial x} \\
 &+ \frac{\partial(u\tau_{xy})}{\partial y} + \frac{\partial(u\tau_{xz})}{\partial z} + \frac{\partial(v\tau_{xy})}{\partial x} + \frac{\partial(v\tau_{yy})}{\partial y} + \frac{\partial(v\tau_{yz})}{\partial z} \\
 &+ \frac{\partial(w\tau_{xz})}{\partial x} + \frac{\partial(w\tau_{yz})}{\partial y} + \frac{\partial(w\tau_{zz})}{\partial z} + \rho \mathbf{f} \cdot \mathbf{V} \quad (3.35)
 \end{aligned}$$

3.2 Applicazioni numeriche

Le equazioni di Navier-Stokes che modellano il comportamento di un fluido instazionario, comprimibile, tridimensionale e viscoso sono il sistema formato dall'unione di Eq. 3.3, Eq. 3.20 ed Eq. 3.35. L'insieme così formato possiede 5 equazioni in 7 incognite (pressione p , tre componenti di velocità u, v, w , densità ρ , energia interna e e temperatura T) quindi si aggiunge le equazione di stato del gas e la relazione di stato per completare il sistema. Nel caso di un gas perfetto le equazione sono:

$$\begin{aligned}
 \frac{p}{\rho} &= R \cdot T \quad (3.36) \\
 e &= c_v \cdot T
 \end{aligned}$$

In cui R è la costante specifica del gas mentre c_v il calore specifico a volume costante.

3.2.1 Reynolds Averaged Navier Stokes comprimibili

Come introdotto nel capitolo di introduzione 1.3.1, nelle applicazioni numeriche aeronautiche non vengono mai risolte le equazioni complete di Navier-Stokes a causa dell'enorme costo computazionale che tale operazione richiederebbe. Si ricorre quindi all'utilizzo delle RANS o delle LES. Entrambi gli approcci sono stati introdotti sempre in 1.3.1 e ci si focalizzerà ora sulle RANS essendo che troveranno largo impiego in questa trattazione. Tale approccio si basa sulla scomposizione introdotta da Reynolds [64] in cui si trattano le variabili fluidodinamiche e termodinamiche come la somma di una parte media e di una fluttuante con un periodo T_{fl}

$$\psi = \bar{\psi} + \psi' \quad (3.37)$$

L'operatore media è definito come:

$$\bar{\psi} = \frac{1}{T_{fl}} \cdot \int_t^{t+T_{fl}} \psi(t) \quad (3.38)$$

in questo modo per definizione la media delle quantità fluttuanti è nulla. Per problemi in cui il fluido è definito comprimibile si applica la scomposizione alla Reynolds a densità ρ e pressione p mentre si applica la scomposizione alla Favre a tutte le altre variabili [65]. La scomposizione alla Favre per una grandezza generica è definita come:

$$\psi = \tilde{\psi} + \psi'' \quad (3.39)$$

in cui $\tilde{\psi}$ è la grandezza mediata alla Favre. La media alla Favre è definita come:

$$\tilde{v}_i = \frac{1}{\rho} \lim_{T_{fl} \rightarrow \infty} \frac{1}{T_{fl}} \int_t^{t+T_{fl}} \rho v_i dt \quad (3.40)$$

Applicando le definizioni 3.39 e 3.37 alle equazioni di Navier Stokes si ottengono le equazioni di Navier-Stokes mediate alla Reynolds e alla Favre qui scritte con la notazione indiciale di Einstein:

$$\begin{cases} \frac{\partial \bar{p}}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x_i} (\bar{\rho} \tilde{v}_i) = 0 \\ \frac{\partial}{\partial t} (\bar{\rho} \tilde{v}_i) + \frac{\partial}{\partial x_j} (\bar{\rho} \tilde{v}_i \tilde{v}_j) = -\frac{\partial \bar{p}}{\partial x_i} + \frac{\partial}{\partial x_j} (-\bar{\tau}_{ij} + \bar{\rho} \widetilde{u'_i u'_j}) \\ \frac{\partial}{\partial t} (\bar{\rho} \tilde{E}) + \frac{\partial}{\partial x_j} (\bar{\rho} \tilde{H} \tilde{v}_j) = \frac{\partial}{\partial x_j} \left(k \frac{\partial \bar{T}}{\partial x_j} - \bar{\rho} \widetilde{u'_j h'} + \bar{\tau}_{ij} u'_i - \bar{\rho} \widetilde{u'_j \frac{u'_i u'_i}{2}} \right) + \frac{\partial}{\partial x_j} [\tilde{v}_i (-\bar{\tau}_{ij} + \bar{\rho} \widetilde{v''_i v''_j})] \end{cases} \quad (3.41)$$

in cui $E = e + \frac{V^2}{2}$ è l'energia totale del fluido ed $H = h + \frac{p}{\rho}$ l'entalpia specifica totale. Il termine $\bar{\rho} \widetilde{v''_i v''_j}$ è invece un termine di sforzi fittizio che quantifica il flusso di quantità di moto dovuto alle fluttuazioni turbolente della velocità. Nel caso di flusso tridimensionale questo termine ha nove componenti di cui sei linearmente indipendenti introducendo quindi sei nuove incognite. Questo rende necessario l'utilizzo di modelli di turbolenza e ipotesi aggiuntive per aggiungere equazioni e "chiudere" il sistema. I modelli più utilizzati partono tutti dall'approssimazione di Boussinesq che ipotizza che nel flusso tridimensionale composto da più scale dimensionali di vortici, le scale più grandi siano quelle che incidono di più nel trasferimento di quantità di moto nel flusso turbolento. E' possibile scrivere:

$$-\bar{\rho} \widetilde{v''_i v''_j} = \bar{\tau}^F = 2\mu_T \bar{S}^F - \frac{2}{3} \rho \kappa \bar{I} \quad (3.42)$$

in cui

$$\bar{S}^F = \frac{1}{2} (\nabla \tilde{\mathbf{v}} + \nabla \tilde{\mathbf{v}}^T) \quad (3.43)$$

è il tensore velocità di deformazione mediato alla Favre e $\kappa = \frac{1}{2} \widetilde{\mathbf{v}''\mathbf{v}''}$ l'energia cinetica turbolenta. L'unica incognita dell'ultimo membro di Eq. 3.42 è μ_T ovvero la viscosità dinamica turbolenta. Essa non è una proprietà fisica del fluido come la viscosità dinamica μ ma è una funzione scalare del campo di moto che cambia da punto a punto. Per determinarla si introduce quindi un modello di turbolenza di cui si parlerà approfonditamente nel paragrafo 3.2.5.

3.2.2 Condizioni al contorno e condizioni iniziali

Nella risoluzione numerica di qualsiasi equazione differenziale sono di fondamentale importanza le condizioni al contorno e le condizioni iniziali. L'imposizione delle condizioni al contorno consente di riprodurre il dominio fluidodinamico nel quale si sviluppa il campo di moto. Se il fluido è viscoso, sulla parete dell'oggetto, si impone la condizione di aderenza ovvero l'annullamento della velocità $\mathbf{v} = \{u, v, w\}^T = 0$ relativa esistente tra parete e lo strato di gas immediatamente a contatto con essa. Nella fluidodinamica si simula l'interazione tra un flusso indisturbato e l'oggetto in esame immerso in un dominio fluido infinito, per ovvie ragioni computazionali non si può discretizzare un dominio infinito ma esso deve terminare ad una certa distanza dall'oggetto in esame. Per simulare l'estensione infinita del campo di moto si pongono sulle pareti esterne della galleria del vento fittizia le condizioni di *farfield*. In generale le onde di pressione, che si generano per effetto della perturbazione del campo di moto ad effetto dell'oggetto in esame, quando incontrano una parete solida si riflettono ritornando potenzialmente ad influenzare nuovamente il campo di moto generato dal corpo che le ha create. Questo introduce degli effetti spuri sul risultato finale della simulazione. Per evitare ciò si impone sulle pareti limitanti il dominio la condizione di campo lontano che rende le pareti trasparenti al flusso permettendo di estendere virtualmente il campo di moto all'infinito. L'imposizione di questa condizione comporta in ogni caso degli errori numerici di dipendenza del risultato finale dall'estensione fisica del dominio per cui si rendono necessarie delle analisi di convergenza sull'esperimento per valutarne l'efficacia.

3.2.3 Software SU2

Il software SU2 [66] è un pacchetto software open-source sviluppato dall'università di Stanford per la soluzione di sistemi di equazioni differenziali e l'ottimizzazione di problemi fisici multidisciplinari. Il pacchetto si compone di molti tool ma ai fini di questa tesi verranno utilizzati SU2_CFD e SU2_DEF. Il tool SU2_CFD risolve le equazioni della fluidodinamica scritte nella forma:

$$R(\mathbf{U}) = \frac{\partial \mathbf{U}}{\partial t} + \nabla \cdot \mathbf{F}^c(\mathbf{U}) - \nabla \cdot \mathbf{F}^v(\mathbf{U}, \nabla \mathbf{U}) - S = 0 \quad (3.44)$$

In cui \mathbf{U} è il vettore delle variabili conservative:

$$\mathbf{U} = \begin{Bmatrix} \rho \\ \rho \mathbf{v} \\ \rho E \end{Bmatrix} \quad (3.45)$$

S è un generico termine sorgente mentre \mathbf{F}^c è il termine dei flussi convettivi

$$\mathbf{F}^v = \begin{Bmatrix} \rho \mathbf{v} \\ \rho \mathbf{v} \mathbf{v} + pI \\ \rho E \mathbf{v} + p \mathbf{v} \end{Bmatrix} \quad (3.46)$$

e \mathbf{F}^v il termine dei flussi viscosi

$$\mathbf{F}^v = \begin{Bmatrix} 0 \\ \tau \\ \tau \cdot \mathbf{v} + k \nabla T \end{Bmatrix} \quad (3.47)$$

con

$$\tau = \mu \left[\nabla \mathbf{v} + (\nabla \mathbf{v})^T \right] - \frac{2}{3} \mu (\nabla \cdot \mathbf{v}) I \quad (3.48)$$

già ricavato in precedenza nel paragrafo 3.1.2. Per flussi turbolenti e comprimibili, si implementano le equazioni di Navier-Stokes mediate alla Reynolds e alla Favre (RANS). In accordo con l'approccio standard alla modellazione della turbolenza basato sull'ipotesi di Boussinesq, che afferma che l'effetto della turbolenza può essere rappresentato come un aumento della viscosità, essa è divisa in una componente dinamica e una turbolenta, ovvero μ_d e μ_t rispettivamente

$$\mu = \mu_d + \mu_t \quad (3.49)$$

Per flussi laminari, la viscosità dinamica μ è semplicemente μ_d , che può essere costante o supposta soddisfare la legge di Sutherland in funzione della temperatura. Similmente, la conducibilità termica nell'equazione dell'energia diventa una conducibilità termica effettiva scritta come:

$$\kappa = \frac{\mu_d C_p + \mu_t C_p}{Pr_d + Pr_t} \quad (3.50)$$

dove si introduce un numero di Prandtl turbolento Pr_t . La viscosità turbolenta μ_t è ottenuta da modelli di turbolenza appropriati introdotti nel paragrafo 3.2.5 che coinvolge il flusso medio V e un insieme di nuove variabili per la turbolenza introdotte dai modelli. Il tool `SU2_DEF` invece permette di deformare la mesh tramite input scritti in un apposito file di configurazione. Si possono rendere deformabili delle regioni di mesh definendo dei "contenitori" denominati *Free Form Deformation Boxes* (FFD boxes) a forma di parallelepipedo di cui si possono imporre

gli spostamenti dei vertici e così deformare quella regione linearmente. Questo tool è fondamentale per mettere in comunicazione parte strutturale del problema e parte fluidodinamica essendo che il cambio di geometria frutto dell'elasticità della struttura che cambia le forze che si generano su quest'ultima viene imposto deformando la mesh fluidodinamica.

3.2.4 Mesh

Il formato mesh di SU2 ha un'estensione `.su2` e i file sono in formato ASCII leggibile. Essendo un formato di mesh non strutturato, SU2 richiede informazioni sia sulle posizioni dei nodi che compongono le singole celle che sulla loro *connectivity*. La descrizione della *connectivity* fornisce informazioni sui tipi di elementi (triangolo, rettangolo, tetraedro, esaedro, ecc.) che compongono i volumi nella mesh e anche quali nodi costituiscono ciascuno di questi elementi. Un' esempio della numerazione dei nodi e degli elementi che compongono fornito in Fig. 3.4 in cui gli elementi numerati nel quadratino sono nodi mentre quelli nei rombi sono gli elementi formati dai nodi contigui. I confini fisici del dominio computazionale vengono specificati in

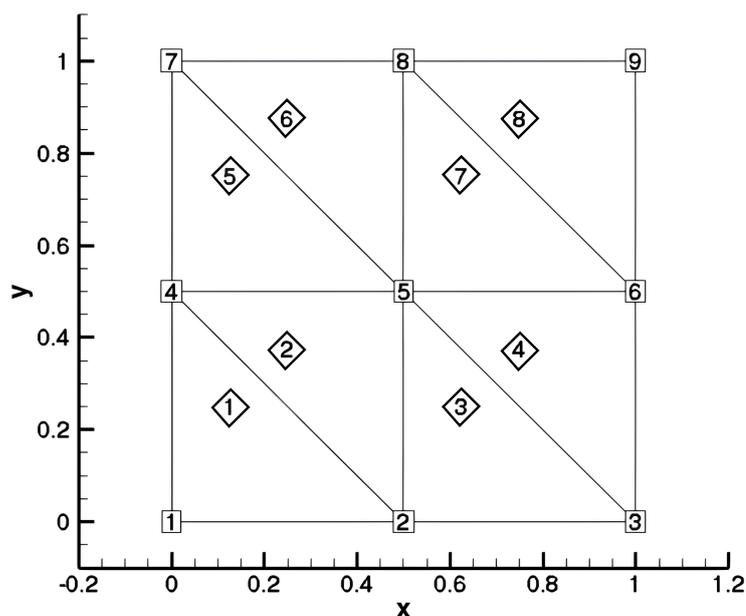


Figure 3.4: Esempio bidimensionale di una porzione di mesh, gli elementi numerati nel quadratino sono nodi mentre quelli nei rombi sono gli elementi formati dai nodi contigui [66].

una sezione specifica del file di mesh scrivendo la serie di punti che li compongono, la loro *connectivity* e il loro nominativo denominato *marker_tag*. Essi sono di una

dimensione inferiore rispetto alla dimensione del flusso. Risulta così possibile porre le condizioni al contorno della natura giusta facendo corrispondere il nominativo di ogni confine con il tipo di condizione al contorno implementata in SU2.

Qualità e tipologia della mesh

La qualità del risultato di una simulazione CFD dipende fortemente dalla bontà della mesh. La qualità della mesh dipende da molti fattori tra cui:

- Costruzione della geometria
- Dimensione del dominio computazionale
- Tipologia di elementi con cui è discretizzato il dominio computazionale
- Raffinamento della mesh nelle zone opportune
- Imposizione delle condizioni al contorno
- Impostazione dei parametri dei solutori
- Determinazione dello spessore della prima cella a parete

Per ognuno di questi fattori non esiste una regola generale per la loro determinazione ma è fondamentale l'esperienza dell'utilizzatore. Tuttavia esistono delle pratiche generalmente corrette, riassunte in Götten *et al.* [67]. Il software Cadence Fidelity permette di generare due tipologie di mesh di volume: non strutturata mostrata in Fig. 3.5 e *Voxel* (cartesiana) illustrata in Fig. 3.6.

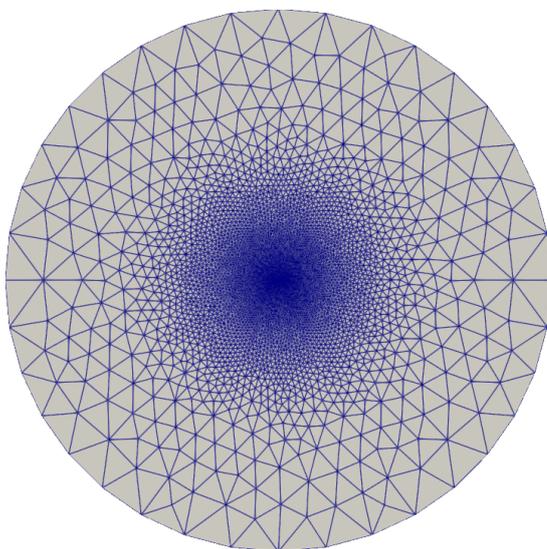


Figure 3.5: Mesh non strutturata.

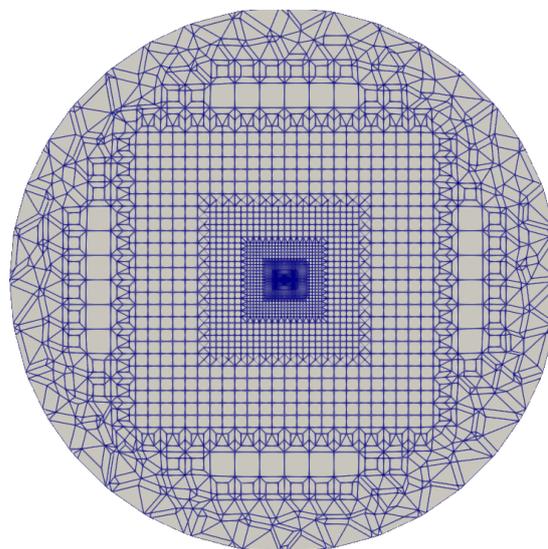


Figure 3.6: Mesh cartesiana

La scelta di adottare una soluzione o l'altra dipende dalla geometria del dominio da analizzare. Le mesh cartesiane tridimensionali sono composte da elementi cubici allineati lungo gli assi x,y e z del dominio, posseggono il vantaggio di essere di semplice generazione e la loro regolarità facilita l'implementazione al solutore con il guadagno di una maggiore efficienza in termini di tempo necessario alla simulazione per arrivare a convergenza. Per domini con forme non rigorosamente regolari è difficile creare una mesh cartesiana che si adatti perfettamente alla geometria, creando una rappresentazione approssimativa o dovendo creare un numero eccessivo di elementi di volume dovendo avvolgere tutta la geometria con elementi piccoli. Inoltre in presenza di angoli acuti gli elementi della mesh possono diventare molto sottili compromettendo l'accuratezza della soluzione. Le mesh non strutturate tridimensionali invece sono composte da elementi di forma arbitraria, tipicamente tetraedri o esaedri, che possono essere flessibilmente collegati tra loro. Posseggono il vantaggio di una maggiore flessibilità per utilizzo su geometrie complesse richiedendo però algoritmi più sofisticati per la generazione di queste ultime oltre ad una maggior difficoltà di implementazione.

Workflow di generazione della mesh

Per la generazione della mesh si è fatto uso del software Cadence Fidelity [68] nel quale è possibile importare un file contenente la geometria dell'oggetto da analizzare, per la quale generazione si è utilizzato il software SolidWorks [69]. La fase di analisi dei risultati è invece fatta utilizzando il software ParaView [70] per la visualizzazione dei risultati in formato grafico. In Fig. 3.7 è illustrato il *workflow* riguardante la generazione della geometria, la creazione della mesh, l'analisi CFD e la fase di post-processing.

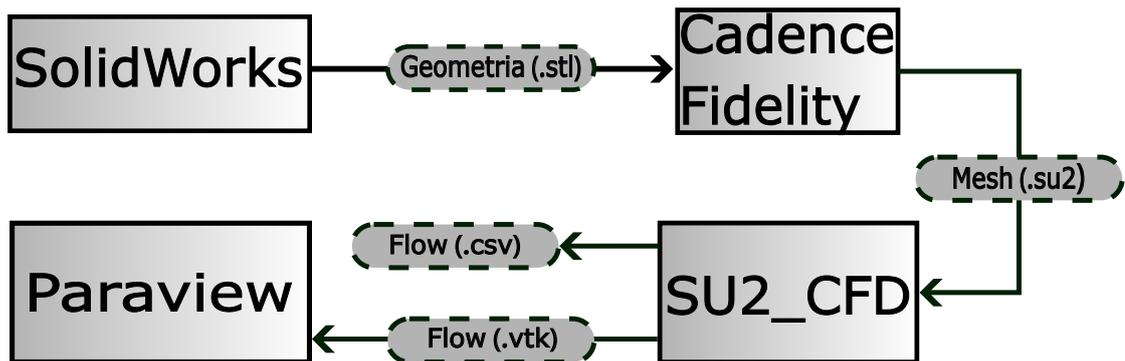


Figure 3.7: Il flusso di lavoro per la generazione della mesh, la simulazione e il post-processing.

Determinazione dello spessore della prima cella di calcolo

Un parametro importante per la corretta simulazione di un flusso viscoso che lambisce una parete è la corretta risoluzione dello strato limite. Lo strato limite è la regione geometrica definita come la fascia di flusso compresa tra la parete di un corpo e il punto in cui la velocità è il 99% della velocità indisturbata V_∞ . L'estensione di questa regione non è fissa ma dipende dai parametri del flusso. In Fig. 3.8 è riportato in scala logaritmica l'andamento della velocità adimensionale u^+ in funzione della distanza da parete adimensionale y^+ . Esse sono definite come:

$$y^+ = \frac{yu_\tau}{\nu} \quad u^+ = \frac{V_\infty}{u_\tau(y^+)} = f(y^+) \quad (3.51)$$

In base alla dipendenza della velocità u^+ dalla coordinata adimensionalizzata y^+ è possibile definire tre zone, ognuna di queste zone è caratterizzata dall'interazione di sforzi viscosi e turbolenti che variano di intensità da regione a regione:

- il sottostrato viscoso compreso tra la parete e $y^+ < 5$ dominato dagli sforzi viscosi;
- il *buffer layer* compreso tra $y^+ > 5$ e $y^+ < 30$ in cui sforzi viscosi e turbolenti sono dello stesso ordine di grandezza;
- lo strato logaritmico compreso tra $y^+ > 30$ e $y^+ > 500$ dominato dagli sforzi turbolenti.

Risulta necessario quindi discretizzare accuratamente queste regioni per poter ricavare fedelmente le forze che lambiscono la parete essendo queste zone molto limitate e caratterizzate da gradienti intensi che risultano in grandi variazioni delle quantità da determinare in uno spazio ridottissimo. Risulta fondamentale quindi la corretta determinazione dello spessore delle celle vicino a parete operando il compromesso tra precisione e leggerezza della simulazione: una griglia di calcolo finissima consente di ricavare i risultati con grande fedeltà risultando tuttavia computazionalmente troppo onerosa e viceversa. Per poter determinare correttamente quindi l'estensione della griglia di calcolo la regola generale prevede che l'altezza della prima cella posta sulla parete abbia una dimensione che si traduca in un'estensione $\Delta y^+ < 1$. Essendo che la precisa estensione dello strato limite, e quindi il valore effettivo di y^+ , è determinata solo una volta che la simulazione è arrivata a convergenza occorre effettuare delle stime basandosi sulla teoria dello strato limite della lamina piana. Si calcola

$$Re_L = \frac{\rho V_\infty L}{\mu} \quad (3.52)$$

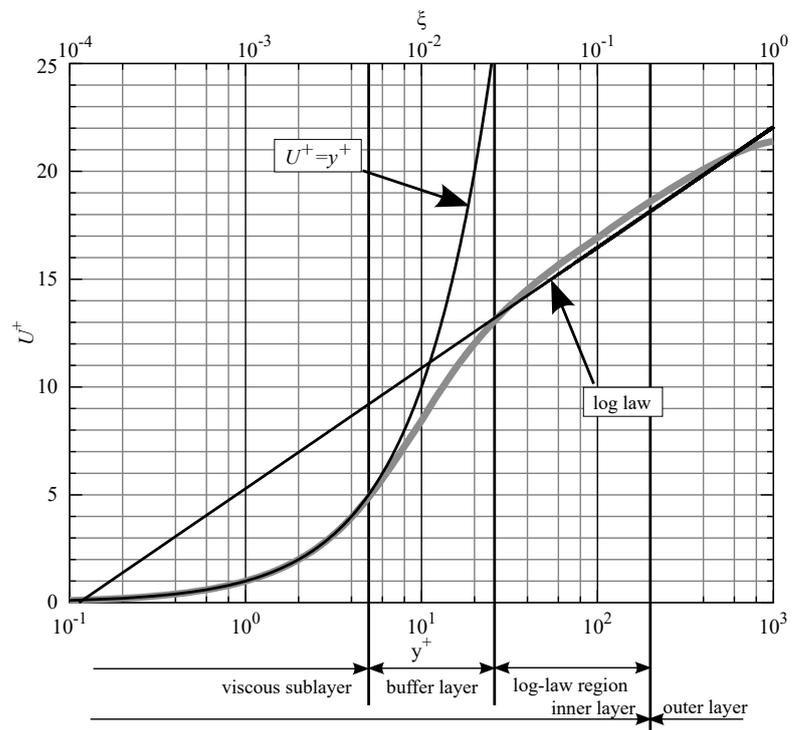


Figure 3.8: Profilo di velocità adimensionale dello strato limite turbolento [71].

successivamente

$$C_f = \frac{0.026}{\sqrt[3]{Re_L}} \quad (3.53)$$

si può stimare quindi lo sforzo di attrito a parete

$$\tau_w = \frac{C_f \cdot \rho V_\infty^2}{2} \quad (3.54)$$

essendo u_τ :

$$u_\tau = \sqrt{\frac{\tau_w}{\rho}} \quad (3.55)$$

si può calcolare lo spessore della prima cella come:

$$\Delta s_1 = \frac{y^+ \mu}{u_\tau \rho} \quad (3.56)$$

sostituendo al valore di y^+ in Eq .3.56 il valore desiderato. Si può poi impostare questo numero come parametro di input in software atti alla generazione di mesh con strato limite come Cadence Fidelity. Un esempio del risultato che si ottiene è mostrato in Fig. 3.9.

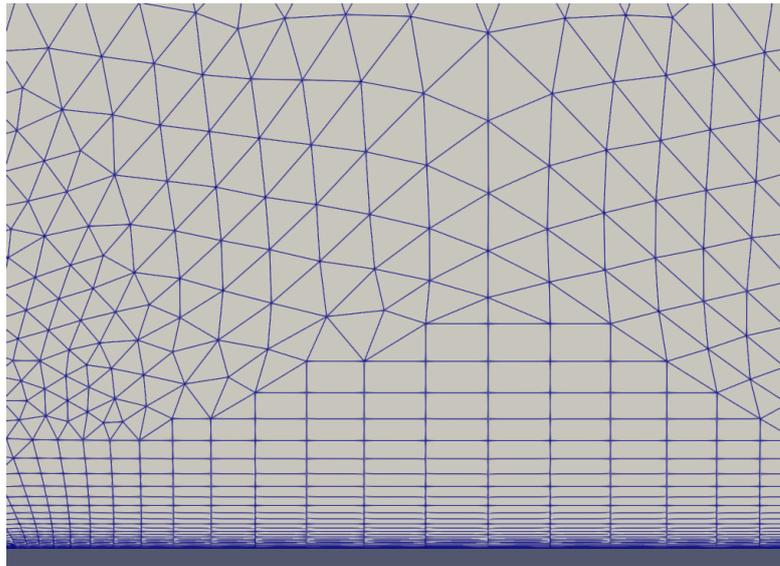


Figure 3.9: Particolare della mesh in prossimità dello strato limite.

3.2.5 Modelli di turbolenza

Nello studio di flussi turbolenti bidimensionali e tridimensionali nonostante gli sforzi manca ancora una modellazione analitica per qualsiasi tipo di flusso arbitrariamente

complesso. Si rende necessaria allora l'introduzione di un modello di turbolenza per chiudere il sistema di equazioni mediate alla Reynolds e alla Favre. Nella sezione seguente si trattano i modelli di turbolenza che fanno uso dell'ipotesi della viscosità turbolenta di Boussinesq ovvero i modelli Spalart-Allmaras (SA), $\kappa - \varepsilon$, $\kappa - \omega$ e Menter Shear-Stress Transport (SST) descritti in Pope [72]. Essi si distinguono tra le altre cose per il numero di equazioni di cui si compongono: una o due equazioni. Un modello ad una equazione è computazionalmente più economico e veloce da implementare peccando però di accuratezza in presenza di separazioni dello strato limite o presenza di forti gradienti.

Modello Spalart-Allmaras

Il modello SA introdotto nel 1992 da Spalart e Allmaras [73] è un modello ad una equazione che prevede di risolvere l'equazione di trasporto per la viscosità turbolenta:

$$\frac{D \nu_T}{Dt} = \nabla \cdot \left(\frac{\nu_T}{\sigma_\nu} \nabla \nu_T \right) + S_\nu \quad (3.57)$$

esso fornisce risultati accurati per flussi a bassi Re e quasi 2D a fronte di un costo computazionale ridotto

Modello $\kappa - \varepsilon$

Il modello $\kappa - \varepsilon$ è un modello a *due* equazioni e introduce due variabili aggiuntive: κ che rappresenta l'energia cinetica turbolenta ed ε che rappresenta il rateo di dissipazione di quest'ultima dalle scale turbolente più grandi a quelle via via più piccole. Il modello $\kappa - \varepsilon$ è un modello grandemente utilizzato in fluidodinamica computazionale rendendolo quindi ampiamente validato per un'ampia gamma di flussi bidimensionali, tridimensionali, interni ed esterni in un range di numeri di Re esteso. Presenta degli svantaggi in particolare esso necessita di cinque parametri di determinazione empirica dipendenti dalla tipologia di flusso che si vuole risolvere ed i risultati sono fortemente dipendenti dalla scelta di questi parametri.

Modello $\kappa - \omega$

Esso è un modello a *due* equazioni che introducono la già nota energia cinetica turbolenta κ e la frequenza specifica di dissipazione ω delle scale turbolente. Questo modello è particolarmente adatto per descrivere la turbolenza in regioni del flusso in cui ci sono forti gradienti di velocità.

Modello Menter Shear-Stress Transport (SST)

Il modello di trasporto dello sforzo di taglio di Menter, introdotto da Menter in [74] combina i due modelli $\kappa - \varepsilon$ e $\kappa - \omega$ sopra descritti tramite una funzione di *blending* $B(x, y)$. Vicino a parete la funzione tende ad annullarsi lasciando attivo solo il modello $\kappa - \omega$ per sfruttarne l'efficacia vicino a parete mentre in campo lontano la funzione tende all'unità per lasciar agire esclusivamente il modello $\kappa - \varepsilon$ essendo il comportamento asintotico della turbolenza lontano da parete ben descritto da quest'ultimo.

Chapter 4

Interazione Fluido Struttura

Per poter svolgere un'analisi aeroelastica è necessario interpolare efficacemente, mediante un'algoritmo, forze aerodinamiche e deformazioni elastiche calcolate sulla mesh di superficie mediante CFD alla struttura elastica discretizzata secondo il paradigma FEM e viceversa. Le due griglie di calcolo sono in generale diverse tra loro con gli elementi CFD posti sulla superficie della struttura in modo molto più fitto dei punti FEM che inoltre sono posti all'interno della struttura, come ad esempio il piano medio nel caso di una trave. L'algoritmo di interazione deve quindi svolgere due funzioni principali:

- trasferire le forze fluidodinamiche dai punti aerodinamici a quelli strutturali;
- deformare la mesh aerodinamica secondo gli spostamenti calcolati dall'analisi strutturale.

Entrambi i trasferimenti di informazione devono avvenire in modo energeticamente per quanto riguarda energia elastica di deformazione e quantità di moto. Per sopperire alla prima funzione esistono numerosi matematici già introdotti brevemente in 1.3.3. Allo scopo di questo lavoro si è scelta di usare la tecnica di interpolazione delle Infinite Plate Splines (IPS).

4.1 Infinite Plate Splines (IPS)

Il metodo Infinite Plate Splines (IPS), si propone di interpolare i valori di una funzione W su tutti i punti (x, y) in un dominio Ω di una superficie nella quale W è nota in un sottoinsieme finito di punti (x_i, y_i) . Questo metodo si basa sulla sovrapposizione delle soluzioni dell'equazione differenziale parziale di equilibrio per una piastra infinita fittizia.

Consideriamo un insieme di N punti griglia discreti (x_i, y_i) , con $i = 1, 2, \dots, N$, che giacciono all'interno di un dominio bidimensionale con coordinate cartesiane

x e y . A ciascun punto griglia è associata una deflessione $W_i(x_i, y_i)$ che definisce la coordinata verticale della superficie sulla quale si presume che i punti griglia strutturali e aerodinamici si trovino.

Utilizzando le soluzioni dell'equazione di equilibrio per una piastra infinita, si calcolano i valori di un insieme di *carichi concentrati*, tutti presunti agenti nei punti dati noti, che generano le deflessioni richieste $W_i(x_i, y_i)$. Queste forze concentrate vengono quindi sostituite nella soluzione, producendo una superficie liscia che passa attraverso i punti dati.

Pertanto, note le deflessioni dei punti griglia strutturali, è possibile interpolare i risultati su un insieme di punti griglia aerodinamici che, in generale, non coincidono con quelli strutturali.

4.1.1 Derivazione matematica

Come riportato in Smith *et al.* [75], l'equazione differenziale per lo spostamento $W(x,y)$ di una piastra di rigidità flessionale D , sottoposta ad un carico q vale:

$$D\nabla^4 W = q \quad (4.1)$$

Si introducono le coordinate polari:

$$\begin{cases} x = r \cos \theta \\ y = r \sin \theta \end{cases} \quad (4.2)$$

L'operatore biarmonico ∇^4 in coordinate polari vale:

$$\nabla^4 = \nabla^2 \nabla^2 = \left(\frac{\partial^2}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2}{\partial \theta^2} \right) \left(\frac{\partial^2}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2}{\partial \theta^2} \right) \quad (4.3)$$

Sostituendo la definizione 4.3 in Eq.4.1 e integrando 4 volte quest'ultima, si ottiene:

$$W(r) = A + B \cdot r^2 + \left(\frac{P}{16\pi D} \right) \cdot r^2 \ln r^2 \quad (4.4)$$

con A e B coefficienti da determinare successivamente. Lo spostamento appena ottenuto è quello relativo ad una singola forza applicata, per considerare l'effetto di N forze sugli N punti di griglia e ottenere la funzione di spostamento complessiva si considera la sovrapposizione degli spostamenti generata dall'applicazione delle N forze. Per ottenere questo risultato, è necessaria una semplice traslazione del sistema di coordinate. Di conseguenza, lo spostamento dovuto ai carichi concentrati nei punti, valutato in un punto qualsiasi (x, y) nello spazio bidimensionale, può essere determinata semplicemente sostituendo r^2 nell'Eq.4.4 con:

$$r^2 = (x - x_i)^2 + (y - y_i)^2 \quad (4.5)$$

e sommando sui punti. Pertanto:

$$W(x, y) = \sum_{i=1}^N (A_i + B_i r^2 + F_i \ln(r^2)) \quad (4.6)$$

dove A_i , B_i e

$$F_i = -\frac{P}{16\pi D}$$

sono coefficienti indeterminati. Per determinarli è necessario utilizzare alcune informazioni sulla soluzione. Harder e Desmarais hanno dimostrato che espandendo l'Eq.4.6 per valori grandi di r , si ottengono termini di ordine r^2 , r , 1 , $1/r$, $1/r^2$ insieme a termini di ordine $r^2 \ln(r^2)$, $r \ln(r^2)$, $\ln(r^2)$,

$$\begin{aligned} W(r, \theta) = & r^2 \ln(r^2) \sum_{i=1}^N F_i + r^2 \sum_{i=1}^N B_i - 2r \ln(r^2) \sum_{i=1}^N (x_i \cos \theta + y_i \sin \theta) F_i - \\ & - 2r \sum_{i=1}^N (x_i \cos \theta + y_i \sin \theta) (F_i + B_i) + \ln(r^2) \sum_{i=1}^N (x_i^2 + y_i^2) F_i + \dots \end{aligned} \quad (4.7)$$

Per garantire l'esistenza per $r \rightarrow \infty$ di una soluzione in forma chiusa è necessario quindi che i coefficienti di tali termini siano zero. Si possono quindi scrivere le equazioni:

$$\begin{cases} \sum_{i=1}^N F_i = 0 \\ \sum_{i=1}^N x_i F_i = 0 \\ \sum_{i=1}^N y_i F_i = 0 \\ \sum_{i=1}^N B_i = 0 \end{cases} \quad (4.8)$$

In cui si possono riconoscere nelle prime 3 equazioni le condizioni di equilibrio di forze e momenti mentre la quarta non ha un chiaro significato fisico. Imponendo le condizioni 4.8 in 4.6 si ottiene:

$$W(x, y) = a_0 + a_1 \cdot x + a_2 \cdot y + \sum_{i=1}^N F_i \cdot r_i^2 \ln r_i^2 \quad (4.9)$$

in cui i coefficienti a_0 , a_1 e a_2 sono dati da:

$$\begin{cases} a_0 = \sum_{i=1}^N [A_i + B_i(x_i^2 + y_i^2)] \\ a_1 = -2 \sum_{i=1}^N B_i \cdot x_i \\ a_2 = -2 \sum_{i=1}^N B_i \cdot y_i \end{cases} \quad (4.10)$$

Per brevità si chiamerà il termine $Z_{ki} = r_{ki}^2 \cdot \ln r_{ki}^2$. Le $N + 3$ incognite nell'Eq.4.9 possono essere determinate applicando le condizioni al contorno trovate nelle

equazioni Eq.4.8 e imponendo che lo spostamento nell' i -esimo punto sia pari al valore noto $W_i = W(x_i, y_i)$. Vale a dire,

$$W_i = a_0 + a_1 x_i + a_2 y_i + \sum r_j \ln r_j^2 F_j \quad (4.11)$$

dove

$$r_j = (x_i - x_j)^2 + (y_i - y_j)^2 \quad (4.12)$$

è il quadrato della distanza tra i punti noti (x_i, y_i) e (x_j, y_j) . L'equazione precedente e le condizioni ai bordi nelle Eq.4.8 possono ora essere espresse in forma matriciale come:

$$\mathbf{W} = [R]\mathbf{a} + [Z]\mathbf{F} \quad (4.13)$$

e

$$[R]^T \mathbf{F} = 0 \quad (4.14)$$

in cui:

$$\mathbf{W} = \{W_1, W_2, \dots, W_N\}^T \quad (4.15)$$

$$\mathbf{F} = \{F_1, F_2, \dots, F_N\}^T \quad (4.16)$$

$$\mathbf{a} = \{a_0, a_1, a_2\}^T \quad (4.17)$$

$$[R] = \begin{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ \vdots \\ 1 \end{bmatrix} & \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_N \end{bmatrix} & \begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \\ \vdots \\ y_N \end{bmatrix} \end{bmatrix} \quad (4.18)$$

e gli elementi in $[Z]$ sono dati da:

$$Z_{ij} = r_{ij}^2 \cdot \ln r_{ij}^2 \quad (4.19)$$

Risulta possibile scrivere le Eqs.4.13 e 4.14 in notazione matriciale come:

$$\begin{Bmatrix} \mathbf{0} \\ \mathbf{w} \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} [0] & [R]^T \\ [R] & [Z] \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \mathbf{a} \\ \mathbf{F} \end{Bmatrix} = [G] \begin{Bmatrix} \mathbf{a} \\ \mathbf{F} \end{Bmatrix} \quad (4.20)$$

in cui $[G]$ è una matrice quadrata di dimensione $(N + 3) \times (N + 3)$. Invertendo l'Eq.4.20 è possibile calcolare le $N+3$ incognite composte dalle componenti dei vettori \mathbf{a} e \mathbf{F} . Essi rappresentano i coefficienti incogniti della funzione rappresentata in Eq.4.9. Calcolando l'Eq.4.9 nel k -esimo punto aerodinamico di coordinate (x_k, y_k) si ottiene:

$$\tilde{W}(x_k, y_k) = a_0 + a_1 \cdot x_k + a_2 \cdot y_k + \sum_{i=1}^N F_i Z_{ki} \quad (4.21)$$

o in notazione matriciale, utilizzando le relazioni che derivano da Eq.4.20:

$$\begin{aligned}\tilde{W}(x_k, y_k) &= \{1, x_k, y_k, Z_{k1}, Z_{k2}, \dots, Z_{kN}\} \cdot \begin{Bmatrix} \mathbf{a} \\ \mathbf{F} \end{Bmatrix} \\ &= \{1, x_k, y_k, Z_{k1}, Z_{k2}, \dots, Z_{kN}\} \cdot [G]^{-1} \begin{Bmatrix} \mathbf{0} \\ \mathbf{W} \end{Bmatrix}\end{aligned}\quad (4.22)$$

Scrivendo questa relazione per tutti i punti aerodinamici si ottiene:

$$\tilde{\mathbf{W}} = \begin{Bmatrix} \tilde{W}_{1A} \\ \tilde{W}_{2A} \\ \tilde{W}_{3A} \\ \tilde{W}_{4A} \\ \vdots \\ \tilde{W}_{MA} \end{Bmatrix} = \underbrace{\begin{bmatrix} 1 & x_{1AP} & y_{1AP} & Z_{1AP,1} & Z_{1AP,2} & \dots & Z_{1AP,N} \\ 1 & x_{2AP} & y_{2AP} & Z_{2AP,1} & Z_{2AP,2} & \dots & Z_{2AP,N} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \dots & \vdots \\ 1 & x_{NAP} & y_{NAP} & Z_{NAP,1} & Z_{NAP,2} & \dots & Z_{NAP,N} \end{bmatrix}}_{[\tilde{D}]} [G]^{-1} \begin{Bmatrix} \mathbf{0} \\ \mathbf{W} \end{Bmatrix}\quad (4.23)$$

Essendo le prime tre colonne della matrice $[G]^{-1}$ moltiplicate per zero si definisce la matrice

$$[\tilde{G}]^{-1} = [G]^{-1} \quad (4.24)$$

come la matrice $[G]$ a cui si tolgono le prime tre colonne. Sviluppando l'Eq.4.23 si ottiene la relazione:

$$\tilde{\mathbf{W}} = \underbrace{[\tilde{D}][\tilde{G}]^{-1}}_{[T]} \mathbf{W} \quad (4.25)$$

$$\mathbf{W}_{\text{str}} = [T] \mathbf{W}_{\text{aero}} \quad (4.26)$$

Per le forze, si impone che i due sistemi aerodinamico e strutturale siano energeticamente equivalenti ovvero il lavoro virtuale del sistema aerodinamico deve essere uguale di quello composto da spostamenti virtuali e forze strutturali. La condizione è perciò:

$$(\delta \mathbf{W}_{\text{aero}}^T) \mathbf{F}_{\text{aero}} = (\delta \mathbf{W}_{\text{str}}^T) \mathbf{F}_{\text{str}} \quad (4.27)$$

Sostituendo la relazione di Eq.4.26 in 4.27 si ottiene:

$$(\delta \mathbf{W}_{\text{str}}) ([T]^T \mathbf{F}_{\text{aero}} - \mathbf{F}_{\text{str}}) = 0 \quad (4.28)$$

Essendo il sistema di spostamenti virtuali strutturali arbitrario deve valere:

$$\mathbf{F}_{\text{str}} = [T]^T \mathbf{F}_{\text{aero}} \quad (4.29)$$

Utilizzando quindi l'Eq.4.29 è possibile trasferire in modo energeticamente equivalente le forze calcolate dal solutore CFD sui punti aerodinamici alla struttura discretizzata secondo il paradigma FEM.

4.2 Deformazione della mesh con SU2_DEF

Per poter rendere effettivo l'accoppiamento fluido struttura, una volta calcolate le forze e i relativi spostamenti della struttura è necessario deformare la geometria del dominio computazionale CFD in modo che le nuove forze aerodinamiche calcolate assecondino gli spostamenti subiti dalla struttura a causa di queste ultime. Per fare ciò si rende necessario il tool SU2_DEF. Esso calcola la deformazione geometrica di una superficie aerodinamica e della griglia volumetrica circostante. Una volta definito il tipo di deformazione, SU2_DEF esegue la deformazione della griglia risolvendo le equazioni dell'elasticità lineare sulla griglia volumetrica. :

- le coordinate $(x_1, y_1, z_1), \dots, (x_8, y_8, z_8)$ dei vertici dell'esaedro che la contiene;
- il numero di sotto-domini in direzione x, y e z in cui si vuole dividere la regione deformabile definite *FFD boxes*;
- La deformazione della mesh può essere controllata scegliendo il livello di continuità geometrica, definito come C^0 (continuità della funzione spostamento), C^1 (continuità della derivata prima dello spostamento) o C^2 (continuità della curvatura).

Ogni vertice di ciascuna FFD box possiede coordinate locali (i, j, k) all'interno dell'esaedro, con $i, j, k \in \mathbb{Z}$ (ad esempio, il primo vertice della prima FFD box avrà coordinate locali $(i = 0, j = 0, k = 0)$) e coordinate globali (x, y, z) , ottenute convertendo le coordinate locali in funzione della posizione della FFD box nella griglia globale. È possibile controllare la deformazione della geometria specificando le coordinate locali di un vertice e scrivendo gli spostamenti di quel vertice che corrisponde ad un nodo della struttura discretizzata FEM+CUF (u, v, w) . In questo modo, la posizione globale di ogni vertice specificato viene cambiata dello spostamento impostato deformando di conseguenza la mesh aerodinamica.

4.3 Schema di risoluzione del problema aeroelastico

Si rende necessario lo sviluppo di un codice che consenta lo scambio di dati e risultati tra il software CFD (SU2) e il codice FEM+CUF e viceversa. Il codice è scritto in linguaggio Python ed implementa, con un processo iterativo, l'input/output dei dati scritti in formato ASCII dai software, il trasferimento delle forze dalle mesh aerodinamica e strutturale, la scrittura del file di configurazione tramite il quale si deforma la mesh. Il *workflow*, illustrato in Fig.4.1, è riassunto in fasi:

1. L'analisi inizia con la prima iterazione in cui la viene effettuata l'analisi CFD dell'ala indeformata mediante il software SU2. Si utilizza come parametro

di convergenza ε_t descritto nel paragrafo 5.2.1 il valore $\varepsilon_t = 10^{-4}$. L'output dell'analisi sono due file: `surface_flow.csv` e `restart_flow.dat`. Il primo contiene per tutti i punti delle superfici aerodinamiche le loro coordinate e il valore delle variabili fluidodinamiche e termodinamiche attraverso il quale è possibile ricavare le forze aerodinamiche agenti sul profilo. Il file `restart_flow.dat` contiene invece per ogni elemento di volume del dominio computazione, il valore di tutte le variabili fluidodinamiche e termodinamiche ricavate all'ultima iterazione. La suite SU2 consente di utilizzare questo file per riprendere la simulazione in un secondo momento ripartendo dal campo di moto scritto in `restart_flow.dat`.

2. Il file `surface_flow.csv` viene letto dallo script `coupling.py` il quale esegue l'interpolazione delle forze e scrive in file di input delle forze e di postprocessing per il solutore FEM+CUF.
3. Il solutore FEM+CUF calcola gli spostamenti di tutta la struttura sotto effetto delle forze strutturali scritte nel file `BC.dat` ed in particolare esegue l'output dei punti specificati dal file `POSTPROCESSING.dat`
4. Gli spostamenti scritti nel file `POSTPROCESSING.dat` vengono applicati alla mesh indeformata mediante il tool `SU2_DEF` il quale fornisce in output un nuovo file mesh in formato `.su2` al quale sono stati applicati gli spostamenti.
5. Lo schema aeroelastico entra nella seconda iterazione partendo dall'analisi CFD della mesh deformata partendo dalla soluzione fluidodinamica precedente, riducendo così di molto il tempo impiegato per raggiungere la convergenza. Una volta conclusasi la simulazione CFD il processo continua in modo simile a quanto descritto nei punti precedenti. Al termine di ogni iterazione si valuta lo spostamento del punto situato sul bordo d'attacco in corrispondenza del tip dell'ala. Se il rapporto tra lo spostamento all'iterazione k e $k - 1$ di quest'ultimo risulta essere inferiore ad una soglia impostata dall'utente la simulazione si arresta, altrimenti prosegue fino al raggiungimento di tale condizione

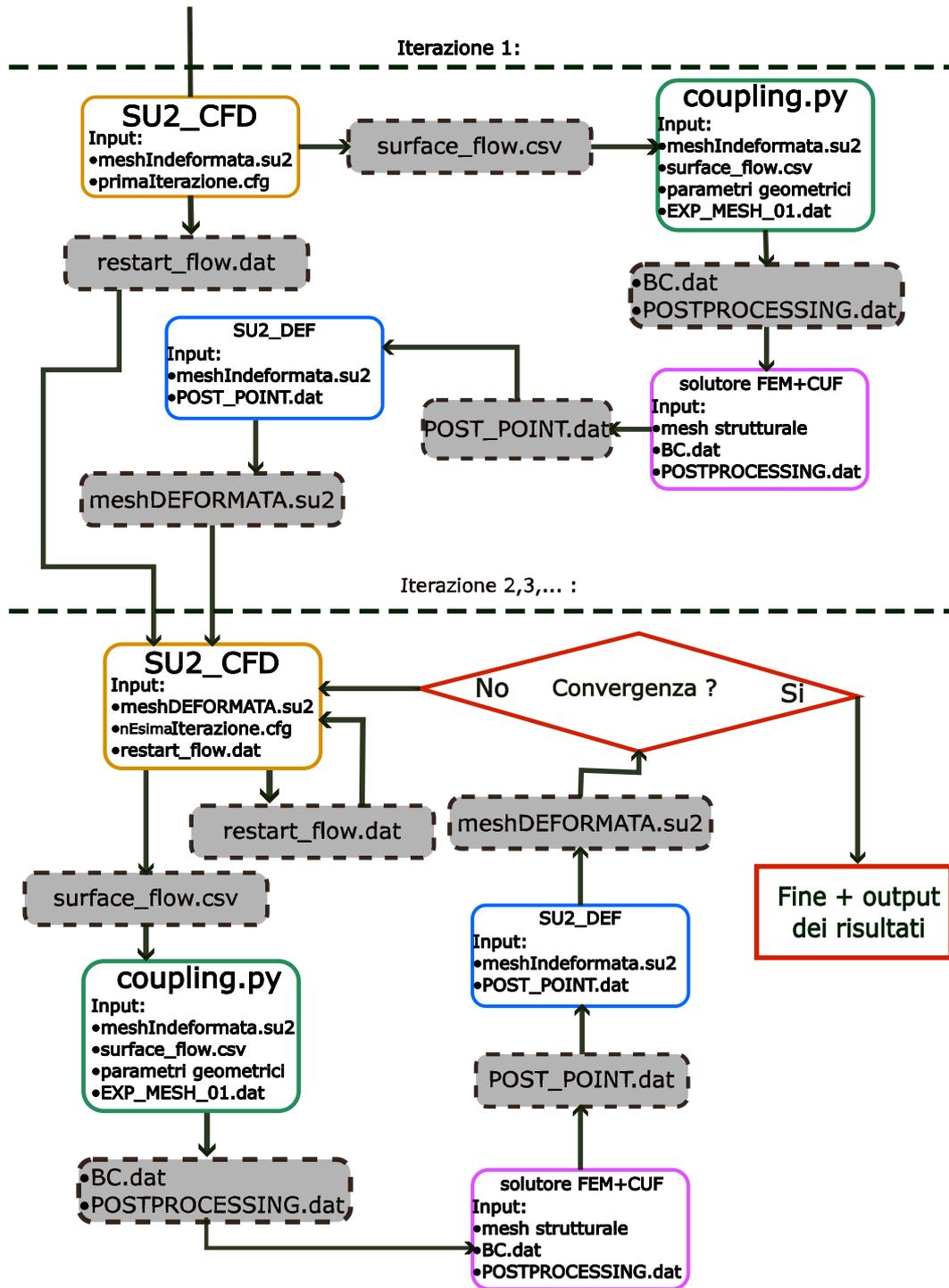


Figure 4.1: Schema di risoluzione del problema aeroelastico.

Chapter 5

Risultati numerici

5.1 Analisi strutturale

Per risolvere la parte strutturale si utilizza la formulazione FEM+CUF che permette di eseguire analisi strutturali statiche e modali. Il campo di spostamento tridimensionale viene diviso in due:

- per travature
 - lungo la direzione dell'asse trave (FEM);
 - lungo la direzione trasversale (CUF);
- per piastre
 - lungo la superficie di riferimento (FEM);
 - lungo il segmento di spessore (CUF).

5.1.1 Analisi di convergenza su una struttura trave

Il comportamento tridimensionale della trave ad esempio viene prima catturato dalle funzioni di espansione della sezione trasversale e poi interpolato dalle funzioni di forma nodali dell'elemento beam. Questa caratteristica di risoluzione rende possibile adottare tipi differenti di discretizzazione della sezione trasversale in base alle esigenze raffinando il modello introducendo più o meno DOFs dove necessario ottenendo così una soluzione precisa nei punti di interesse e diminuendo il costo computazionale non dovendo introdurre lo stesso numero di DOFs nelle zone di scarso interesse o dove gli spostamenti sono ben catturati da teorie di ordine più basso [61]. Per validare questo approccio, il software e il criterio di scelta delle teorie viene eseguita un'analisi di convergenza su una trave a sezione rettangolare di cui si riportano le caratteristiche principali in Tab. 5.1. La trave è sottoposta

ad un incastro ad un'estremo e libera all'altro. Sull'estremo libero è applicata una forza concentrata $\mathbf{F} = -\{0, 0, 50\}^T [N]$ alla coordinata $\mathbf{u}_F = \{0, L, 0\}^T [m]$. Si fa riferimento alla Fig. 5.1:

Grandezza fisica	Simbolo	Valore	Unità di misura
Lunghezza	L	2	[m]
Base della sezione trasversale Ω	b	0.2	[m]
Altezza della sezione trasversale Ω	h	0.2	[m]
Carico applicato	F	50	[N]
Modulo di Young	E	75	[GPa]
Coefficiente di Poisson	ν	0.33	[-]
Densità	ρ	2700	$[\frac{kg}{m^3}]$

Table 5.1: Parametri fisici della trave.

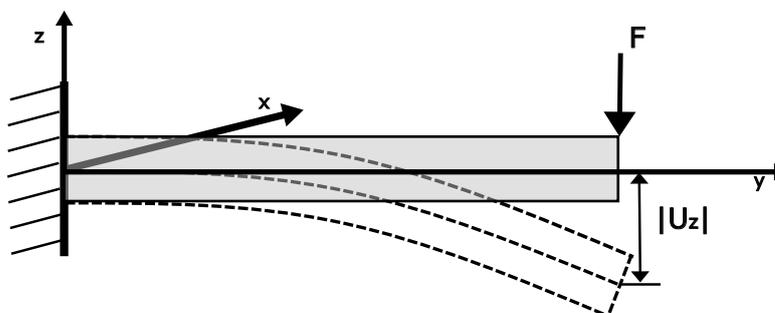


Figure 5.1: Schema del problema strutturale di analisi di convergenza.

Analisi statica

Si svolge inizialmente un'analisi statica, in altre parole si risolve il problema:

$$\mathbf{K}\mathbf{u} = \mathbf{P} \quad (5.1)$$

Per l'analisi di convergenza si confronterà il massimo spostamento $|u_z|$ della trave ovvero lo spostamento in direzione \hat{z} di un punto della trave indeformata che giace sul piano $y = L$. I risultati numerici verranno confrontati con quelli teorici forniti dal modello di trave di Eulero-Bernoulli (EBBT) e Timoshenko (TBT). La funzione di spostamento in direzione \hat{z} per EBBT vale: [61]

$$u_z(y) = -\frac{Py^3}{3EI_z} \implies u_z \Big|_{y=L} = -\frac{PL^3}{3EI_z} \quad (5.2)$$

mentre per TBT

$$u_z(y) = -\frac{Py}{\kappa GA} - \frac{Py^3}{3EI_z} \implies u_z \Big|_{y=L} = -\frac{PL}{\kappa GA} - \underbrace{\frac{PL^3}{3EI_z}}_{\text{EBBT}} \quad (5.3)$$

dove $\kappa = \frac{5}{6}$ è un fattore di correzione a taglio introdotto dalla teoria di Timoshenko per sezioni rettangolari.

Raffinamento lungo l'asse trave Si è discretizzata la struttura con elementi B4 utilizzando 5, 10 e 40 elementi per poi confrontare i risultati tra di loro e con i modelli EBBT e TBT. Si è discretizza la sezione trasversale tramite espansioni CUF EBBM, TBM (che sono un caso particolare di espansione di Taylor), TE1, TE2, TE3 e TE4 ed espansioni di Lagrange 1L4 e 1L9. Si confrontano i risultati di spostamento all'estremo libero $u_z(L)$ con quelli ottenuti da Carrera e Petrolo in [60] e con i risultati teorici di spostamento all'estremità utilizzando i modelli trave classici di Eulero-Bernoulli ($u_{z,E}$) e di Timoshenko ($u_{z,T}$).

	$u_z \times 10^5 [m]$ $u_{z,E} = -1.333$ $u_{z,T} = -1.344$		
Numero elementi B4	5	10	40
EBBM	-1.342(-1.333)	-1.333(-1.333)	-1.333(-1.333)
TBM	-1.342(-1.343)	-1.342(-1.343)	-1.342(-1.343)
TE1	-1.342(-1.343)	-1.342(-1.343)	-1.342(-1.343)
TE2	-1.319(-1.320)	-1.326(-1.327)	-1.328(-1.330)
TE3	-1.321(-1.322)	-1.328(-1.329)	-1.332(-1.332)
TE4	-1.321(-1.323)	-1.328(-1.330)	-1.331(-1.333)
1LE4	-1.113(-1.112)	-1.115(-1.115)	-1.116(-1.116)
1LE9	-1.319(-1.320)	-1.326(-1.327)	-1.329(-1.329)

(...) = Risultati di Carrera e Petrolo [60]

Table 5.2: Effetto del numero di elementi sullo spostamento per differenti modelli trave.

Dai risultati si nota che già con un numero esiguo di elementi B4 lungo l'asse ed un ordine di espansione TE relativamente basso i risultati tendono a convergere a quelli teorici. Diverso risultato si ottiene con gli elementi LE i quali risultati di spostamento differiscono dalla teoria, nel paragrafo successivo verrà affrontata un'analisi più approfondita.

Raffinamento sulla sezione trasversale Si discretizza la struttura in direzione trave con elementi B4 e si esegue un'analisi di convergenza sullo spostamento all'estremità libera $u_z(L)$ aumentando il numero di elementi LE presenti nella sezione trasversale. Nella seconda colonna i risultati son relativi alla discretizzazione con un'elemento L4. Nella terza il pedice x indica che si sono posizionati due elementi L4 nella direzione x . Nella quarta si sono posti due elementi L4 in direzione \hat{z} mentre nell'ultima colonna si è discretizzata la sezione trasversale con 4 LE4. Si confrontano i risultati ottenuti con il lavoro di Carrera e Petrolo [60] e con i risultati ottenuti secondo i modelli analitici di Eulero-Bernoulli ($u_{z,E}$) e di Timoshenko ($u_{z,T}$)

	$u_z \times 10^5 [m]$		$u_{z,E} = -1.333$		$u_{z,T} = -1.344$	
	1LE4	2LE4 _x	2LE4 _z	4LE4		
5 B4	-1.108 (-1.107)	-1.158 (-1.155)	-1.222 (-1.222)	-1.259 (-1.254)		
10 B4	-1.112 (-1.111)	-1.161 (-1.160)	-1.233 (-1.229)	-1.264 (-1.262)		
40 B4	-1.116 (-1.115)	-1.161 (-1.164)	-1.235 (-1.234)	-1.266 (-1.268)		

(...) = Risultati di Petrolo *et al.* [60]

Table 5.3: Effetto del numero di elementi LE4 sullo spostamento verticale dell'estremità libera di una trave isotropa incastrata a sezione quadrata, in parantesi il confronto con i risultati ottenuti da Petrolo *et al.* [60].

Come si nota in Tab. 5.3 e Tab. 5.2 gli elementi LE4 hanno una velocità di convergenza inferiore ma la suddivisione della sezione trasversale in più elementi LE4 è molto efficace per la convergenza dei risultati di questi ultimi.

5.1.2 Analisi modale

Si effettua ora una validazione del codice e della discretizzazione per fenomeni dinamici come le vibrazioni libere. Si calcolano numericamente le prime 6 frequenze proprie della trave descritta in precedenza in Tab. 5.1 con la differenza che essa non è più incastrata all'estremità ma semplicemente appoggiata nei due estremi. Si riporta la geometria in Fig. 5.2.

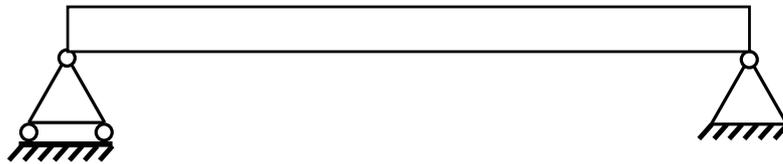


Figure 5.2: Schema strutturale della trave semplicemente appoggiata di sezione quadrata.

Si confrontano con i risultati teorici che vengono ricavati dalla risoluzione dell'equazione differenziale di Eulero-Bernoulli per le vibrazioni trasversali di una trave, la cui derivazione e soluzione è ricavabile dalla letteratura e di cui si riportano i passaggi salienti. L'equazione differenziale che descrive le vibrazioni trasversali libere di una trave è

$$EI \frac{\partial^4}{\partial x^4} u_z(y, t) + \rho A \frac{\partial^2}{\partial t^2} u_z(y, t) = 0 \quad (5.4)$$

assumendo che la soluzione $u_z(y, t)$ abbia la forma cosiddetta "a variabili separate" e che abbia una dipendenza armonica dal tempo si scrive

$$u_z(y, t) = \psi(y) \sin(\omega t) \quad (5.5)$$

in cui $\psi(x)$ è una funzione che descrive la forma nello spazio della vibrazione ed è detta *forma modale*. Inserendo la 5.5 nella 5.4 si ottiene una ODE di quarto ordine a cui si aggiungono le condizioni al contorno di una trave a semplicemente appoggiata

$$\begin{cases} EI\psi(y)^{(iv)} - \rho A\omega^2\psi(y) & = 0 \\ \psi(0) & = 0 \\ \psi^{(ii)}(0) & = 0 \\ \psi(L) & = 0 \\ \psi^{(ii)}(L) & = 0 \end{cases} \quad (5.6)$$

Definendo il parametro β che ha dimensioni $1/m^4$ come

$$\beta^4 = \frac{\rho A \omega^2}{EI} \quad (5.7)$$

La soluzione dell'ODE è la funzione

$$\psi(y) = A \cdot \cos(\beta y) + B \cdot \sin(\beta y) + C \cosh(\beta y) + D \sinh(\beta y) \quad (5.8)$$

con le costanti A, B, C e D che vengono ricavate imponendo le condizioni al contorno di 5.6. Ricavando queste ultime si ricavano anche i valori di β e invertendo la definizione di β si ottengono le frequenze proprie riportate nella seconda colonna di Tab. 5.4.

Raffinamento sulla sezione trasversale

Si è discretizzata l'asse trave con 10 B4 e la sezione trasversale con varie espansioni CUF per replicare un caso di Carrera *et al.* [76] i cui risultati si riportano in

Tab. 5.4 tra parentesi. Si confrontano inoltre le frequenze con la soluzione di Eulero-Bernoulli per travi semplicemente appoggiate:

$$f_{kb} = \frac{\pi}{2} \left(\frac{k^2}{L^2} \right) \sqrt{\frac{EI}{\rho A}} \quad k \in [1, N_{modi}] \quad (5.9)$$

	f_{kb}	$f_j[Hz]$						
		EBBM	TBT	TE1	TE2	TE3	TE4	1L9
f_1	119.495	119.005 (118.968)	117.745 (117.701)	117.745 (117.701)	117.626 (117.728)	117.447 (117.526)	117.289 (117.525)	117.58
f_2	477.978	470.285 (470.143)	452.084 (451.838)	452.084 (451.838)	450.407 (452.194)	447.993 (449.438)	445.807 (449.419)	449.794
f_3	1075.451	1037.649 (1037.348)	958.343 (957.608)	948.408 (957.608)	951.246 (959.022)	941.602 (947.888)	932.390 (947.722)	948.665
f_4	1911.912	1797.150 (1796.656)	1587.89 (1586.309)	1587.897 (1586.309)	1615.76 (1589.676)	1546.243 (1562.537)	1522.052 (1561.831)	1562.725
f_5	2987.363	2635.231 (2719.990)	2301.140 (2298.327)	2283.280 (2298.327)	2263.875 (2304.409)	2322.461 (2253.932)	2171.495 (2251.911)	2250.347

(...) = Risultati di Carrera *et al.* [76]

Table 5.4: Effetto dell'espansione CUF utilizzata su f_1, f_2, f_3, f_4 e f_5 [Hz] di una trave a sezione quadrata semplicemente appoggiata discretizzata lungo l'asse trave con 10B4.



Figure 5.3: Visualizzazione del modo 1.



Figure 5.4: Visualizzazione del modo 3.

Dai risultati si nota un buon accordo con i risultati di Carrera *et al.* oltre a quelli teorici derivanti dalla soluzione di Eulero-Bernoulli. Si può notare come incrementando l'ordine di espansione e quindi introducendo più gradi di libertà le frequenze proprie risultino via via minori. Questo è dovuto al fatto che più l'ordine di discretizzazione è basso più la trave risulta rigida agli spostamenti mancando i gradi di libertà per descrivere questi ultimi. Tale mancanza induce una rigidità al modello ed essendo le frequenze proprie proporzionali a $\sqrt{\frac{K}{m}}$ in cui K è la rigidità della trave, le frequenze proprie dei modelli di ordine inferiore risultano più alte.

Raffinamento lungo l'asse trave

Si fissa ora la discretizzazione della sezione trasversale ad una TE4 variando l'ordine dell'elemento beam con cui si discretizza l'asse trave. Si confrontano, in Tab. 5.5 i risultati con quelli ottenuti da Carrera *et al.* [76] indicati fra parentesi e con quelli ottenuti con il modello trave di Eulero-Bernoulli f_{kb} .

	f_{kb}	$f_j [Hz]$			
		10B2	10B3	10B4	40B4
f_1	119.495	119.060 (119.188)	117.347 (117.528)	117.289 (117.525)	117.250
f_2	477.978	471.660 (474.061)	446.706 (449.558)	445.807 (449.419)	445.230
f_3	1075.451	1047.470 (1059.585)	936.899 (949.064)	932.390 (947.722)	929.976
f_4	1911.912	1835.310 (1873.035)	1536.340 (1568.098)	1522.052 (1561.831)	1515.642
f_5	2978.363	2820.660 (2911.758)	2230.110 (2271.579)	2171.496 (2251.911)	2164.860

(...) = Risultati di Carrera *et al.* [76]

Table 5.5: Effetto della discretizzazione lungo l'asse trave con elementi beam di ordine diverso su f_1 , f_2 , f_3 , f_4 e f_5 [Hz] della trave semplicemente appoggiata a sezione quadrata.

5.1.3 Analisi su sezioni trasversali di forme complesse

Una delle versatilità della CUF sta nel fatto di poter modellare strutture con sezioni di varia forma semplicemente esplicitando la sezione come espansione della sezione trasversale. Grazie a ciò si possono creare *cross-section* come di seguito. Si è eseguita l'analisi su delle travi incastrate ad un'estremità e caricate all'estremità libera con una forza verticale verso il basso di 50 N, di lunghezza 2 m e dimensioni trasversali $b = 0.2$ m e $h = 0.2$ m di sezione cava, a "doppio T" e a "C". Ogni trave è stata discretizzata con 10B4 lungo l'asse trave. Si comparano i risultati di spostamento all'estremità libera con quelli di una sezione quadrata semplice di dimensioni analoghe. Le geometrie sono riportate nelle Fig. 5.5, 5.6 e 5.7. Nelle Fig. 5.8, 5.9, 5.10, 5.11, 5.12 e 5.13 sono riportate le deformate delle travi. Per le sezioni a "doppio T" e cava si può notare che avviene una flessione semplice della struttura mentre nella trave a "C", essendo il carico non applicato nel centro di taglio, avviene una torsione della sezione.

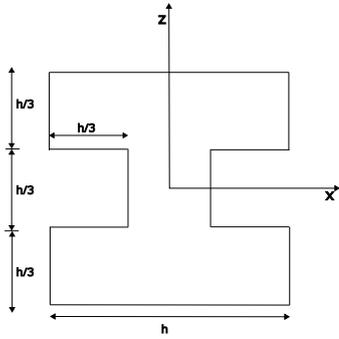


Figure 5.5: Geometria della sezione "a doppio T".

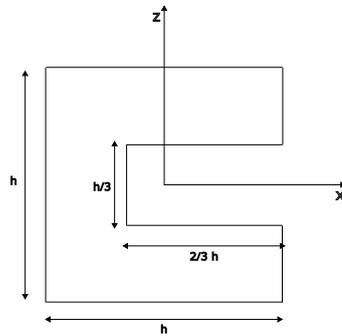


Figure 5.6: Geometria della sezione a C.

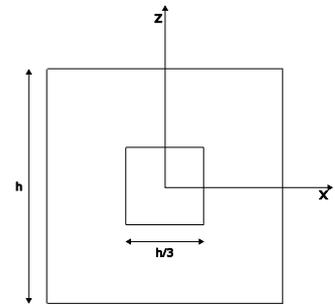


Figure 5.7: Geometria della sezione cava.

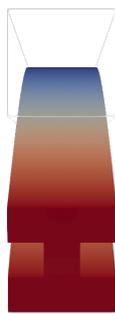


Figure 5.8: Estremo libero trave "a doppio T".

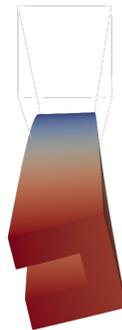


Figure 5.9: Estremo libero trave a C.



Figure 5.10: Estremo libero trave cava.

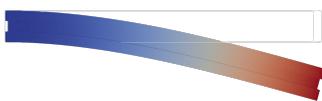


Figure 5.11: Vista di lato trave a "doppio T".



Figure 5.12: Vista di lato trave a C.

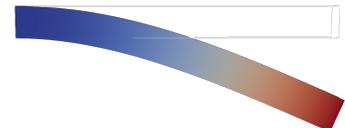


Figure 5.13: Vista di lato trave cava.

	$u_{z,E}$	$u_z \times 10^5 [m]$			
		TE1	TE4	7LE9	EBBT
Cava	-1.350	-1.360	-1.350	-1.352*	-1.350
C	-1.367	-1.379	-1.375	-1.482	-1.346
Doppio T	-1.367	-1.379	-1.379	-1.385	-1.375
Quadrata	-1.333	-1.342	-1.333	-1.329**	-1.343

* = per espandere la cross-section si sono utilizzati 8LE9

** = per espandere la cross-section si sono utilizzati 9LE9

Table 5.6: Effetto della geometria della sezione della trave sullo spostamento verticale u_z all'estremità libera.

In Tab. 5.6 sono riportati i risultati di spostamento all'estremità libera ottenuti con le espansioni EBBT, TE1, TE4 e LE9 e confrontati con la soluzione analitica ottenuta mediante il modello trave di Eulero-Bernoulli $u_{z,E}$. Si può notare una convergenza generale dei risultati ottenuti con i diversi modelli tranne per il caso della trave a "C". Nella trave a "C" oltre che la flessione è presente la torsione della sezione e le espansioni TE sembrano non catturare in maniera adeguata questo fenomeno.

5.1.4 Analisi di convergenza su una struttura piastra in materiale isotropo

Per analizzare il comportamento tridimensionale di una struttura piastra si usano elementi bidimensionali FEM Q4 o Q9 per discretizzare la superficie di riferimento Γ che si estende nel piano xy ed espansioni CUF TE o LE per il segmento di spessore h . Per validare questo approccio si esegue un'analisi di convergenza analoga a quella effettuata nella sezione precedente su una struttura traviforme a sezione quadrata le cui proprietà sono elencate in Tab. 5.7.

Grandezza fisica	Simbolo	Valore	Unità di misura
Lato 1	L	2	m
Lato 2	b	0.2	m
Spessore	h	0.2	m
Carico applicato	F	50	N
Modulo di Young	E	75	GPa
Coefficiente di Poisson	ν	0.33	[-]
Densità	ρ	2700	$\frac{kg}{m^3}$

Table 5.7: Dati della trave isotropa incastrata ad un'estremità.

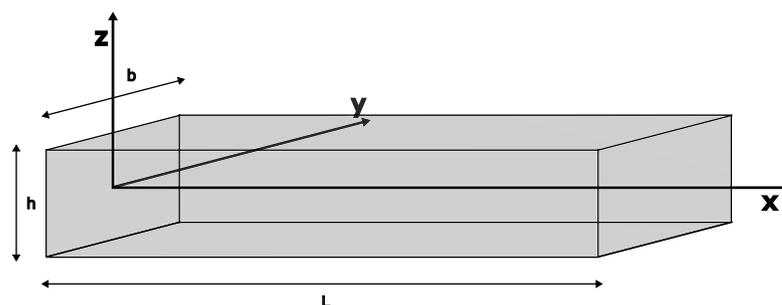


Figure 5.14: Geometria della trave incastrata ad un'estremità di sezione quadrata.

Analisi statica

Si discretizza la superficie di riferimento con elementi Q4 e Q9 mentre si utilizzano delle espansioni CUF TE e LE di ordine diverso per valutare la convergenza sullo spostamento u_z dell'estremità libera della trave. I risultati sono riportati in Tab. 5.8. Per discretizzare la superficie di riferimento si sono utilizzati 2 diversi approcci. Il primo i cui risultati sono riportati nelle colonne 2, 3, 4 e 5 consiste nel porre tanti elementi quad lungo l'asse trave quanti lungo la direzione perpendicolare ad esso come mostrato in Fig. 5.15. Le altre colonne contengono i risultati di spostamento per la struttura discretizzata ponendo gli elementi in linea lungo l'asse trave come in Fig. 5.16.

	$u_z \times 10^5 [m]$								$u_{z,E} = -1.333$
	3×3Q4	4×4Q4	3×3Q9	4×4Q9	10Q4	20Q4	20Q9	40Q9	Petrolo 10B4 [60]
EBBM	0.000*	0.000*	-0.900	-0.900	-0.898	-1.295	-0.900	-0.900	-1.333
TBM	0.000*	-0.009	-0.910	-0.900	-0.907	-0.909	-0.891	-0.838	-1.333
TE1	0.000*	-1.112	-1.158	-1.168	-1.163	-1.177	-1.165	-1.110	-1.333
TE4	0.000*	-1.112	-1.286	-1.301	-1.295	-1.318	-1.310	-1.256	[-]
LE2	-1.080	-1.112	-1.158	-1.168	-1.325	-1.177	-1.165	-1.333	[-]
LE3	-1.173	-1.217	-1.283	-1.299	-1.293	-1.316	-1.308	-1.334	[-]
LE4	-1.175	-1.219	-1.285	-1.301	-1.295	-1.318	-1.309	-1.329	[-]

* = più di cinque ordini di grandezza inferiore

[-] = risultato non presente

Table 5.8: Effetto dell'espansione CUF utilizzata sugli spostamenti di una trave a sezione quadrata discretizzata con un numero variabile di elementi quad sulla superficie di riferimento.

Dai risultati in Tab. 5.8 si notano i seguenti fatti:

- Le espansioni TBM ed EBBM non producono risultati affidabili neanche quando sono accoppiati con una raffinata discretizzazione della superficie di riferimento. Essi infatti accoppiati ad una discretizzazione grezza della

superficie di riferimento producono risultati di spostamento che sono ordini di grandezza inferiori rispetto a quelli teorici, mentre accoppiati a discretizzazioni raffinate non tendono comunque a convergenza.

- Le espansioni TE1 e TE4 per la superficie di riferimento discretizzata con gli elementi posti in linea tendono a convergere con i risultati presenti in letteratura e con la teoria.
- Le espansioni di Lagrange LE2 hanno una velocità di convergenza pressochè simile alle espansioni di Taylor citate prima mentre le espansioni LE3 e LE4 già per pochi elementi che discretizzano la superficie di riferimento si avvicinano ai risultati teorici e a quelli presenti in letteratura.

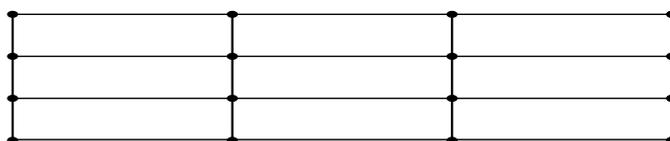


Figure 5.15: 3×3Q4.

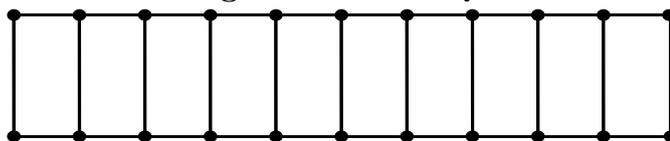


Figure 5.16: 10×1Q4.

5.1.5 Analisi su strutture in composito

Per l'analisi si è creata una trave in composito di fibra di carbonio e resina epossidica le cui caratteristiche sono espote in Tab. 5.9.

L	b	h
190.5×10^{-3}	12.7×10^{-3}	3.175×10^{-3} [m]

Table 5.9: Dati geometrici della trave in composito.

Le caratteristiche del materiale sono elencate in Tab. 5.10:

E_1	$E_2 = E_3$	$\nu_{12} = \nu_{13} = \nu_{23}$	G_{12}	G_{13}	G_{23}	ρ
129.138 [GPa]	9.404 [GPa]	0.3 [-]	5.157 [GPa]	4.304 [GPa]	2.541 [GPa]	1550.07 [$\frac{kg}{m^3}$]

Table 5.10: Proprietà del materiale composito in fibra di carbonio e resina epossidica.

La trave è composta da quattro lamine impilate in direzione \hat{z} tutte orientate a $+15^\circ$ ($[15^\circ]_4$) rispetto all'asse \hat{y} . Si riporta la geometria in Fig. 5.17. Essa è incastrata ad un'estremità e libera all'altra. Si discretizza lungo l'asse con 10 elementi B4 e con un'espansione CUF di ordine variabile nella sezione trasversale. Si effettua un'analisi modale per catturare i primi 6 modi ed eseguire un'analisi di convergenza sulle frequenze ottenute. Si confrontano i risultati ottenuti con il lavoro di Pagani *et al.* [77]

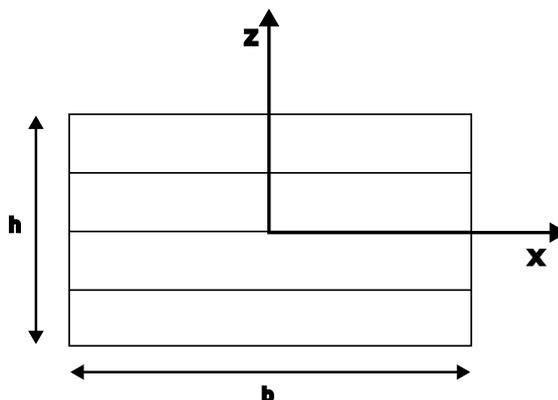


Figure 5.17: Schema della trave in materiale composito a sezione rettangolare.

	2L9	4L9	TBM	TE3	TE7	Pagani <i>et al.</i> [77] TE7
f_1^a	85.427	85.316	116.044	84.817	84.596	85.295
f_2^b	339.147	336.697	440.457	325.433	324.331	335.008
f_3^a	527.391	526.637	717.992	523.872	522.421	528.497
f_4^a	1449.346	1434.081	1970.722	1442.653	1431.250	1460.747
f_5^c	1526.100	1470.515	[-]	1580.085	1478.083	1514.886
f_6^b	2017.347	2003.790	2535.715	1944.809	1938.116	1994.300

a = modo flessionale sul piano yz

b = modo flessionale sul piano xy

c = modo torsionale

[-] = modo non catturato

Table 5.11: Prime sei frequenze naturali [Hz] della trave in materiale composito incastrata ad un'estremità.

Dai risultati si nota una buona convergenza tra i vari ordini di discretizzazione meno che l'espansione TBM la quale cattura modi a frequenze molto più alte e inoltre mancando la torsione nel modello trave di Timoshenko il modo 5 che

corrisponde ad una torsione della trave attorno all'asse \hat{y} non viene individuato. Come in precedenza si nota che all'aumentare dell'ordine di discretizzazione le frequenze proprie tendono ad abbassarsi.

5.2 Analisi fluidodinamica

Prima effettuare le analisi aeroelastiche complete è necessario essere certi di aver impostato correttamente i parametri fluidodinamici per le simulazioni CFD. Per fare ciò si eseguono delle analisi preliminari per validare il codice, i parametri impostati per la simulazione, il processo di generazione della mesh e i parametri di qualità di quest'ultima.

Parametri geometrici

Per tutte le simulazioni si utilizzerà come caso di test una lamina piana i cui parametri sono riassunti in Tab. 5.12 e uno schizzo presentato in Fig. 5.18. Questo modello è stato preso in considerazione essendo stato caso studio di studi numerici e sperimentali. I bordi di attacco e di fuga sono triangolari e affilati per meglio gestire l'avvolgimento del flusso attorno alla lamina per angoli di attacco diversi da zero come visibile in Fig. 5.19 in cui si visualizza il bordo d'attacco a cui è stata applicata la mesh.

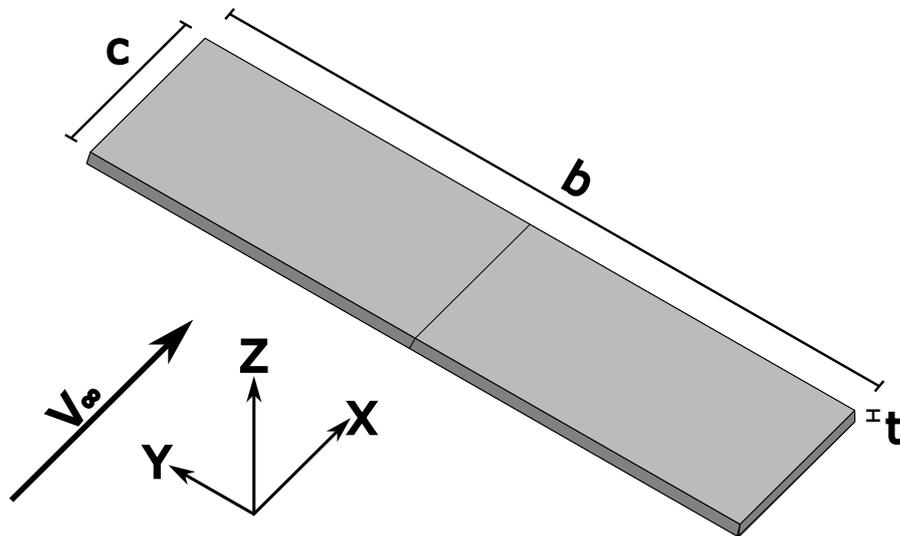


Figure 5.18: Schema della lamina piana usata come caso test per la validazione aerodinamica.

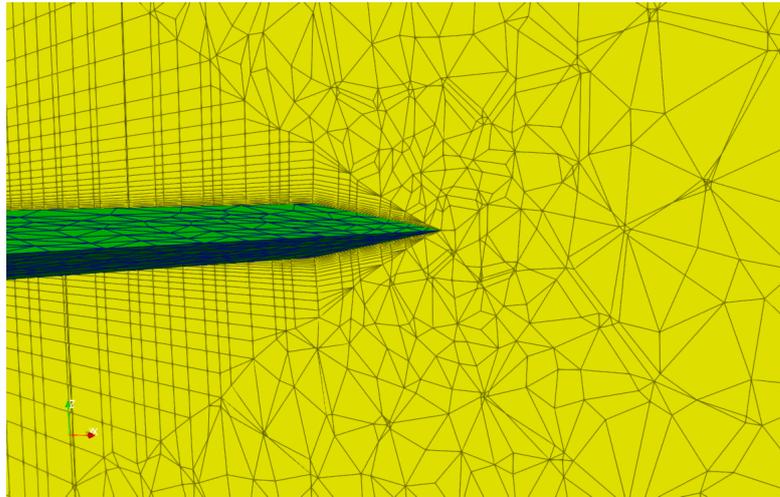


Figure 5.19: Particolare del bordo d'attacco triangolare con mesh.

Parametri geometrici			
Corda	c	[m]	0.264
Apertura alare	b	[m]	0.804
Spessore	t	[m]	6×10^{-3}
Aspect ratio	AR	[-]	3
Area	S	[m ²]	0.2122
Taper ratio	λ	[-]	1

Table 5.12: Parametri geometrici della lamina piana.

Parametri fluidodinamici del problema

Il problema è tridimensionale ed il numero di Reynolds è 80000. Essendo il numero di Reynolds relativamente basso rispetto a problemi aeronautici tipici in cui si attesta sul milione, gli effetti viscosi acquistano una relativa importanza sulla determinazione delle forze, sulla stabilità dello strato limite, sulla transizione di questu'ultimo e la formazione di bolle di ricircolo. In Tab. 5.13 sono riassunte le caratteristiche del problema e i parametri del flusso indisturbato denotati col pedice " ∞ ".

Parametri fluidodinamici		
Re	[-]	80000
μ_∞	[Pa/s]	$1.7988 \cdot 10^{-5}$
T_∞	[K]	288.15
p_∞	[Pa]	101359
ρ_∞	[kg/m ³]	1.225
V_∞	[m/s]	4.4498
M_∞	[-]	0.013

Table 5.13: Parametri fluidodinamici del flusso del problema.

Griglia di calcolo e parametri della simulazione

Si utilizza il software Cadence Fidelity introdotto in precedenza per generare la mesh. Per alleggerire il carico computazionale, vista la simmetria del problema si decide di simulare solo una semiala immersa in un dominio fluido emisferico. Sul piano di simmetria dell'ala si impongono delle condizioni al contorno di tipo *symmetry* che consentono di specchiare simmetricamente il dominio di calcolo virtualmente potendo simulare il flusso solo su porzioni del dominio risparmiando in tempo di simulazione. Sulla superficie emisferica che delimita il dominio vengono poste le condizioni al contorno di tipo *farfield* già introdotte in precedenza nel paragrafo 3.2.2. L'estensione del dominio è un parametro di studio e un'analisi di convergenza per determinare l'estensione appropriata del dominio in termini di multipli di corde dell'ala è presentata nel paragrafo 5.2.3. Sulle pareti della semiala sono poste oltre alle condizioni di aderenza la condizione di parete adiabatica essendo una buona pratica illustrata nella guida utenti [78] del software SU2. La schematizzazione del dominio di calcolo così come il tipo di condizioni al contorno imposte è illustrato in Fig. 5.20. Dopo alcune simulazioni preliminari si è optato generare le griglie di calcolo utilizzando come spessore della prima cella a parete il valore di $y^+ = 0.5$ corrispondente ad uno spessore fisico di 0.03405 mm. Per tutte le simulazioni si è utilizzato il modello Spalart-Allmaras (SA) in accordo con quello utilizzato da Malik *et al.* [79], introdotto nel paragrafo 3.2.5.

5.2.1 Effetto dell'angolo di attacco sui coefficienti aerodinamici di una lamina piana a $Re = 80000$

Si effettuano varie simulazioni variando l'angolo di attacco α confrontando i risultati dei coefficienti di portanza C_L e resistenza C_D con i risultati numerici ottenuti da Malik *et al.* [79] e sperimentali ottenuti da Ananda *et al.* [80], Pelletier *et al.* [81] e Shields *et al.* [82]. Ai fini del confronto tra due metodi diversi si sono svolte le stesse analisi utilizzando il metodo VLM introdotto nel paragrafo 1.3.1 mediante il

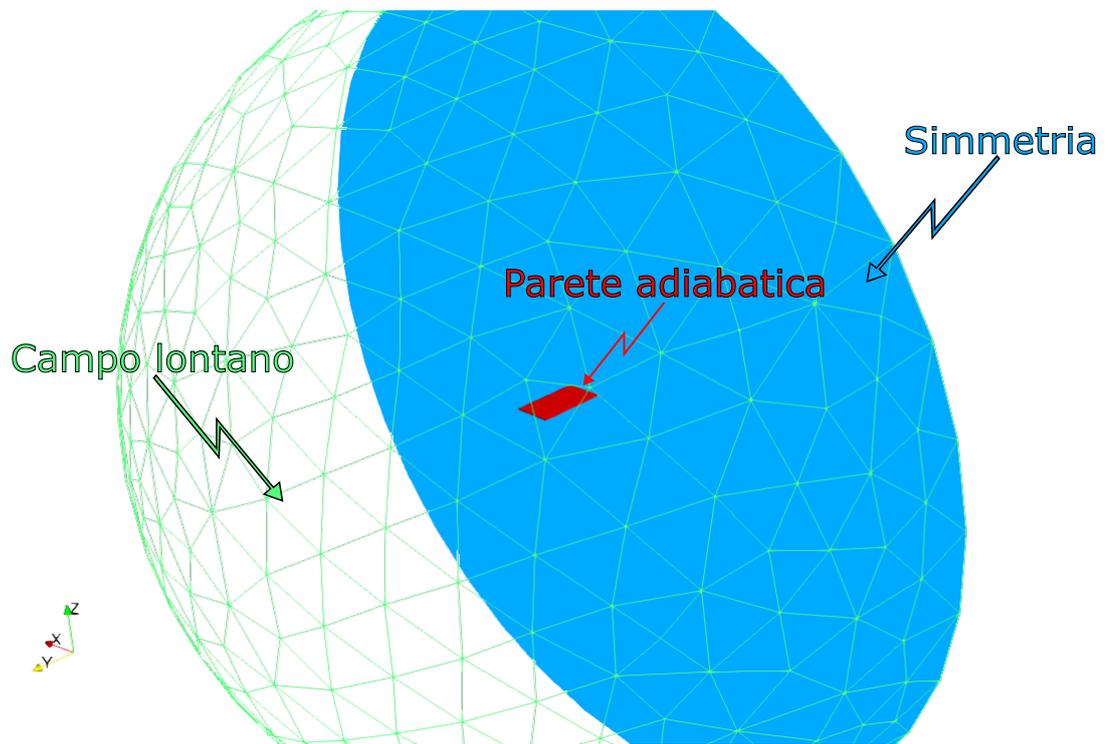


Figure 5.20: Schema del dominio computazionale con le condizioni al contorno imposte.

software Athena Vortex Lattice (AVL)[83]. Per considerare la simulazione giunta a convergenza si utilizza il criterio di Cauchy applicato al C_L su due iterazioni successive.

$$|C_{L_j} - C_{L_{j-1}}| < \varepsilon_c \quad (5.10)$$

Utilizzando come valore del parametro $\varepsilon_c = 10^{-5}$. I risultati per il C_L sono presentati in Fig. 5.21, per il C_D in Fig. 5.22.

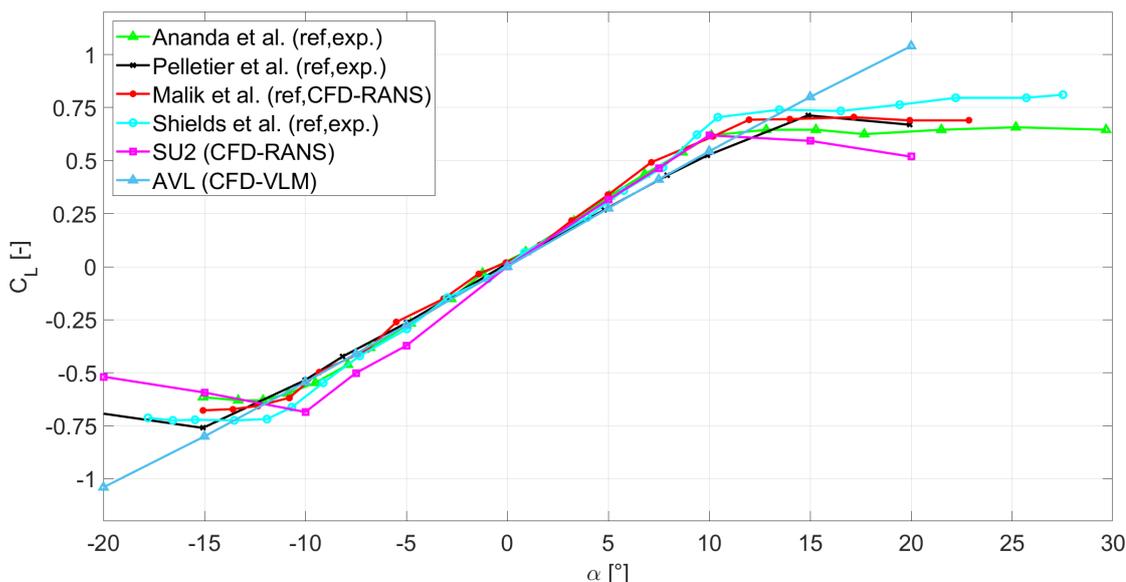


Figure 5.21: Andamento del coefficiente di portanza C_L al variare dell'angolo di attacco α .

Dai risultati si nota un'ottima corrispondenza dei risultati numerici con quelli di riferimento per $|\alpha| \leq 10^\circ$ e una progressiva divergenza per angolo di incidenza maggiori. Questo è spiegabile dal fatto che per $\alpha > 10^\circ$ comincia a svilupparsi una bolla di ricircolo lunga circa un quarto di corda causata dalla separazione dello strato limite sul dorso, visibile in Fig. 5.23. L'entità degli effetti di questa bolla sui coefficienti aerodinamici è fortemente dipendente dalle condizioni di ingresso dell'aria come ad esempio il livello di turbolenza del flusso indisturbato. Si notano infatti anche delle incongruenze tra uno studio sperimentale e l'altro. La presenza della bolla di separazione causa inoltre difficoltà a giungere a convergenza per le simulazioni numeriche infatti il tempo di simulazione per alti angoli di attacco è stato circa il doppio del loro corrispettivo a basso angolo di attacco. Infine per le simulazioni svolte utilizzando il metodo VLM si può notare sempre una ottima corrispondenza per lo stesso *range* di angoli di attacco e un progressivo allontanamento per angoli maggiori. Questo è dovuto al fatto che, come introdotto in precedenza, il metodo VLM si basa sulla linearizzazione dell'equazione del

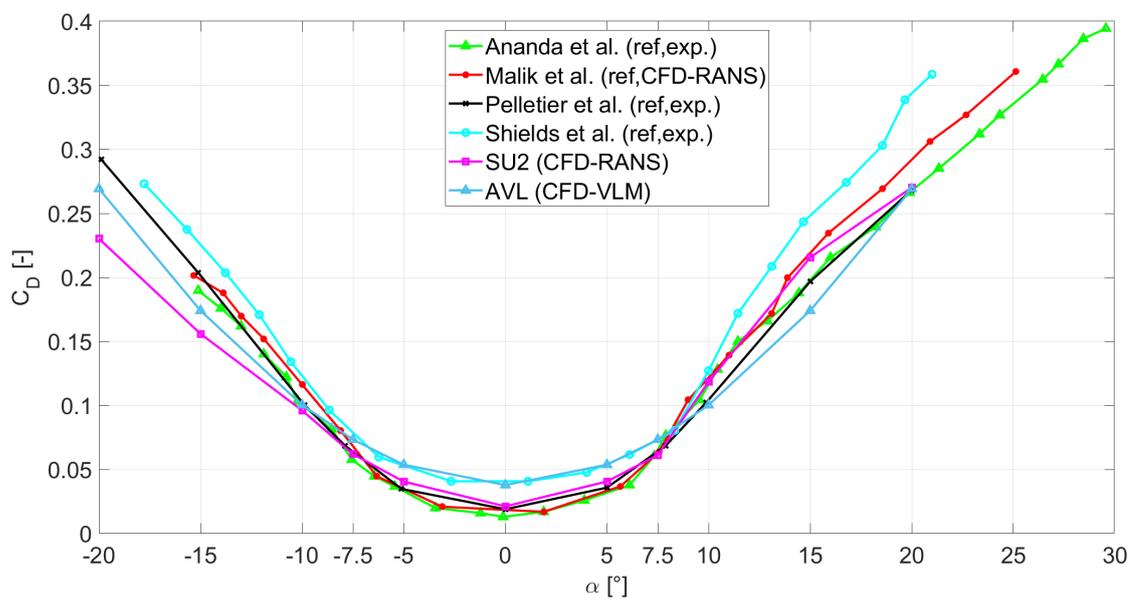


Figure 5.22: Andamento del coefficiente di resistenza C_D al variare dell'angolo di attacco α .

potenziale. Essa non prevede la presenza degli effetti viscosi che portano lo strato limite ad alti angoli di attacco alla separazione e perciò questo effetto è trascurato con conseguente perdita di validità dei risultati quando gli effetti della viscosità divengono importanti.

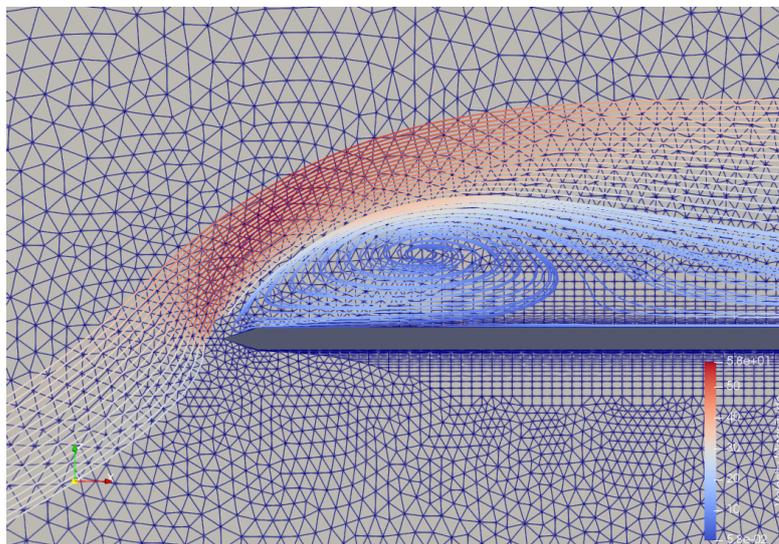


Figure 5.23: Linee di corrente in corrispondenza della bolla di ricircolo che evidenziano la sua presenza. La colorazione è determinata in funzione del modulo della velocità del flusso.

5.2.2 Effetti aeroelastici sui coefficienti aerodinamici

Si indagano gli effetti aeroelastici sui coefficienti aerodinamici della lamina piana con i bordi triangolari analizzata nella sezione 5.2.1 per un sottoinsieme di angoli di incidenza: $\alpha = 5, 7.5$ e 10° . Per ogni angolo α è stata discretizzata la struttura con diversi modelli di espansione CUF e come si può notare nelle Fig.5.24 e 5.25 si ottiene un buon accordo dei risultati tra le diverse teorie. Per $\alpha = 10^\circ$ le simulazioni aeroelastiche predicono un'aumento del C_L probabilmente a causa dell'angolo di torsione θ_y positivo di cui l'ala si torce andando ad incrementare l'angolo α effettivo di incidenza. La diminuzione del C_D è probabilmente causata dall'effetto combinato di torsione e flessione della lamina che porta a ridistribuire i carichi di pressione più efficacemente lungo l'apertura diminuendo così il coefficiente di pressione dovuto alla pressione C_{Dp} .

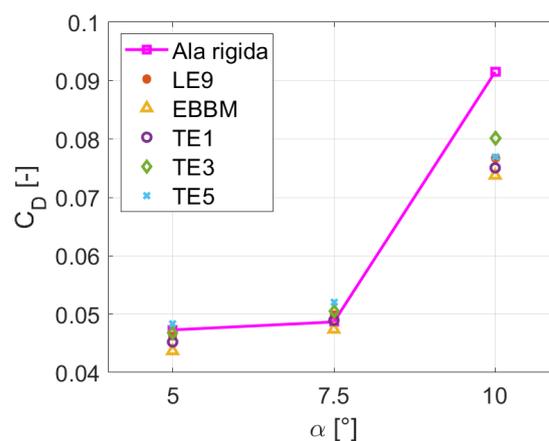
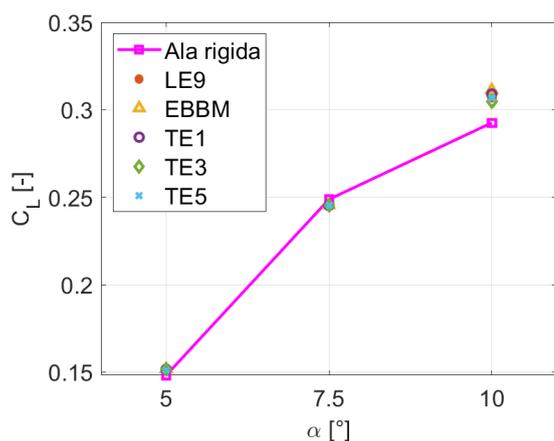


Figure 5.24: Effetto aeroelastico sul C_L **Figure 5.25:** Effetto aeroelastico sul C_D

5.2.3 Indipendenza dei risultati dall'estensione del *farfield*

Si vogliono determinare tipologia e dimensione ottimale in termini di estensione del farfield della mesh. La scelta di questi fattori è frutto di un compromesso tra accuratezza del risultato e tempo totale necessario alla simulazione per giungere a convergenza secondo i parametri impostati. Si eseguono simulazioni con $\alpha = 5^\circ$ e parametro di arresto $\varepsilon_c = 10^{-5}$ su mesh cartesiane e non strutturate con dimensione del farfield rispettivamente di dieci, venti, cinquanta, cento e duecento corde. I risultati sono riportati in Tab. 5.14. Dai risultati si nota una grande differenza tra il numero di celle introdotte dall'adozione di mesh cartesiane rispetto a quelle non strutturate:

- A parità di estensione del dominio, le celle introdotte dalla mesh cartesiana sono più del doppio rispetto a quella non strutturata;
- Risulta necessario un 40% in media di iterazioni in più utilizzando una mesh cartesiana per giungere a convergenza;
- Il tempo necessario a compiere una singola iterazione utilizzando una mesh cartesiana è circa il triplo rispetto ad una non strutturata.

Per tutti i motivi elencati sopra, sebbene ci sia la tendenza alla convergenza verso un valore costante dei coefficienti C_L e C_D si abbandona definitivamente l'utilizzo delle mesh cartesiane a causa dell'elevato costo computazionale.

Per quanto riguarda i risultati relativi all'utilizzo di mesh non strutturate, si nota che i valori di C_L e C_D tendono ad un valore costante all'aumentare della dimensione del farfield. Il numero di iterazioni necessarie all'ottenimento della convergenza

Dimensione farfield	Mesh non strutturata				Mesh cartesiana			
	C_L	C_D	Numero iterazioni	Numero celle	C_L	C_D	Numero iterazioni	Numero celle
10c	0.3041	0.0957	1667	692000	0.2970	0.1041	2256	1431728
20c	0.3027	0.0960	2053	709480	0.3020	0.0981	2642	1449208
50c	0.2993	0.0957	2064	733720	0.3124	0.0832	2653	1473448
100c	0.2994	0.0956	2082	746700	0.3069	0.0736	2671	1486428
200c	0.2997	0.0955	2301	763917	0.3119	0.0720	2888	1503645

Table 5.14: Risultati dell'analisi di convergenza al variare dell'estensione del *farfield*.

aumenta costantemente e anche il tempo per eseguire una singola iterazione tra una dimensione di mesh e l'altra, si può quindi individuare il valore di estensione del farfield a 50 corde come valore di miglior compromesso tra costo computazionale e accuratezza. In Fig. 5.26 è presentato l'andamento dei coefficienti aerodinamici ottenuti usando la mesh non strutturata variando la dimensione del farfield così come le relative iterazioni necessarie al raggiungimento della convergenza.

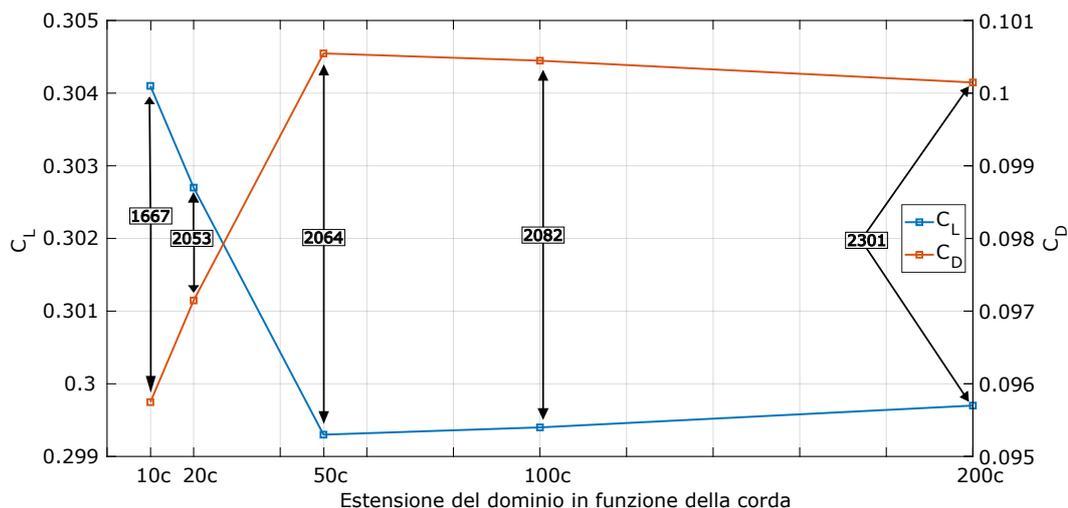


Figure 5.26: Andamento dei coefficienti aerodinamici al variare dell'estensione del campo di moto della mesh non strutturata con rispettivo numero di iterazioni per giungere a convergenza.

5.3 Analisi aeroelastica

Una volta validati i codici agli elementi finiti e CFD singolarmente, viene effettuato l'accoppiamento dei due come descritto nel capitolo 4. Per validare il processo di analisi aeroelastica così costruito si analizza il caso di una lamina piana di corda $c = 1\text{ m}$, apertura alare $b = 5\text{ m}$ e spessore $t = 20 \times 10^{-3}\text{ m}$ costruita in materiale isotropo con $E = 69\text{ GPa}$ e coefficiente di Poisson $\nu = 0.33$. La lamina viene investita da una corrente di aria standard ($\rho_\infty = 1.225\text{ kg/m}^3$ $T_\infty = 288.15\text{ K}$) con velocità $V_\infty = 10, 30, 50\text{ m/s}$. La struttura è stata discretizzata con 20 elementi B4 lungo l'asse trave. In Tab. 5.15 sono riportati i risultati ottenuti per lo spostamento verticale di un punto posto sul bordo d'attacco dell'ala all'estremità confrontati con quelli riportati da Carrera *et al.* [41] per lo stesso problema aeroelastico. Per l'analisi si sono utilizzate diversi ordini di espansione di Taylor e Lagrange per confrontare i due modelli. Il confronto tra la struttura iniziale indeformata con la

sua deformata finale è presentato in Fig. 5.27.

	$u_{z,LE,tip} \times 10^3 [m]$					
	10 m/s	Carrera <i>et al.</i>	30 m/s	Carrera <i>et al.</i>	50 m/s	Carrera <i>et al.</i>
1 EBBM	8.2103	7.6272	71.9227	68.611	197.7935	190.40
1 TBM	8.2217	7.6272	71.9257	68.611	197.8003	190.40
1 TE1	8.2220	7.6275	71.9400	68.622	197.8979	190.48
1 TE2	7.5912	7.0244	72.5196	68.236	239.6208	224.45
1 TE3	8.1028	7.4966	77.7678	73.241	259.4845	243.94
1 TE4	8.3222	7.5126	78.5436	73.397	266.9401	244.46
1 LE9	8.1204	[-]	78.4615	[-]	267.1027	[-]
4 LE9 _x	8.1272	[-]	78.0061	[-]	260.3388	[-]

[-] = Non fornito

Table 5.15: Risultati dell'analisi aeroelastica statica per la lamina piana.

In questa analisi preliminare solo spostamenti u_z e torsioni θ_y vengono considerati mentre tutti gli altri vengono posti arbitrariamente a zero. Questa approssimazione per una lamina piana è accettabile mentre per una struttura di sezione arbitraria rischia di non catturare fenomeni tipici della statica.

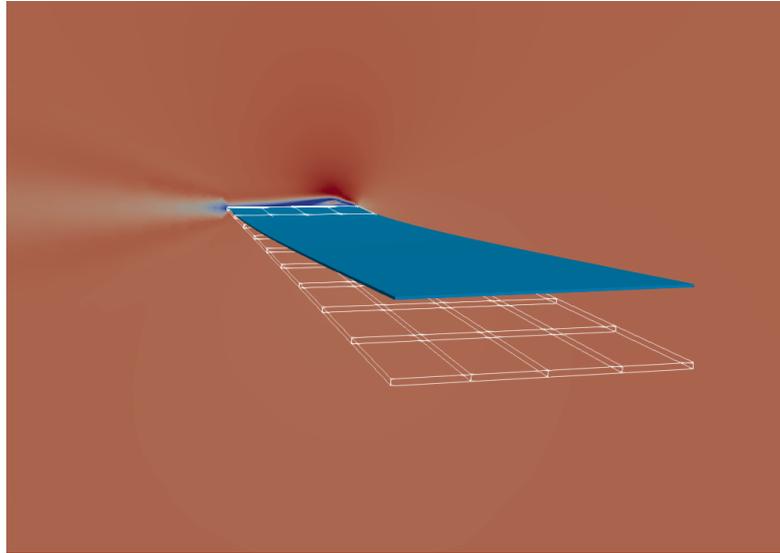


Figure 5.27: Deformata della struttura risultante dall'analisi aeroelastica confrontata con la sua indeformata.

5.4 Analisi aeroelastica statica su una struttura di sezione arbitraria

Una volta validato il codice aeroelastico per la risposta statica di una struttura bidimensionale in cui solo gli spostamenti verticali sono considerati, si modifica il codice per rendere possibile analisi tridimensionali su strutture di sezione trasversale arbitraria come ad esempio profili NACA. Si otterranno perciò non solo spostamenti lungo la direzione z , u_z e torsioni attorno l'asse y , θ_y ma anche spostamenti e torsioni nelle altre direzioni.

5.4.1 Analisi su lamine curve

Dapprima si verifica la correttezza del codice così modificato su due lamine curve e la lamina piana analizzata nella sezione 5.3 mediante un'analisi parametrica variando la velocità $V_\infty = 5, 10, 30, 50 \text{ m/s}$. Esse sono costituite in alluminio ($E = 69 \text{ Gpa}$, $\nu = 0.33$). Entrambe hanno una lunghezza $b = 5 \text{ m}$, corda $c = 1 \text{ m}$ e spessore $t = 20 \times 10^{-3} \text{ m}$. Una lamina presenta una curvatura dell' 1% mentre la seconda del 10% le cui sezioni si possono vedere in Fig. 5.28. La struttura è stata discretizzata con 20 elementi B4 lungo l'asse dell'ala e 10 elementi LE9 in direzione x per l'espansione CUF. La corrente investe la struttura ad un angolo $\alpha = 0^\circ$. Si registra lo spostamento al *tip* del bordo d'attacco in direzione z e in direzione x . Si calcolano inoltre gli angoli di torsione θ_y e rotazione attorno all'asse z , θ_z definiti come:

$$\begin{cases} \theta_y = \arctan\left(\frac{u_{z,LE,tip} - u_{z,TE,tip}}{c}\right) \\ \theta_z = \arctan\left(\frac{u_{x,TE,tip}}{b}\right) \end{cases} \quad (5.11)$$

I risultati sono forniti in Tab. 5.16.

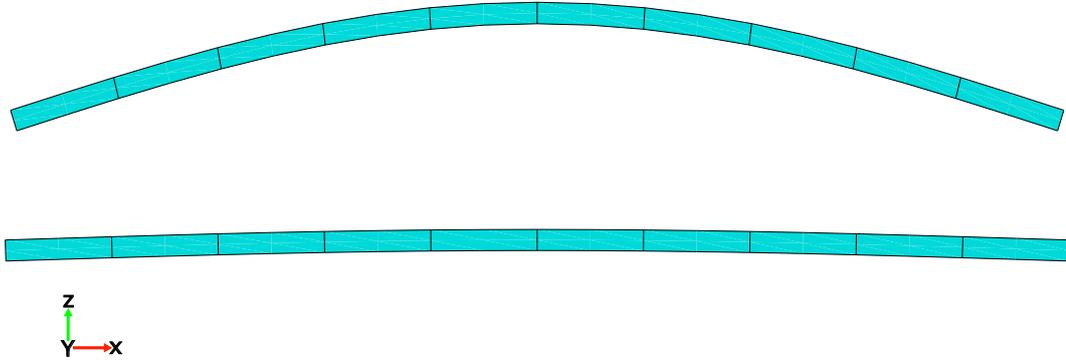


Figure 5.28: Profilo delle due lamine oggetto dell'analisi con la relativa mesh strutturale della sezione.

		$u_x, u_z [m], \theta_y, \theta_z [^\circ]$			
		5 m/s	10 m/s	30 m/s	50 m/s
Lamina piana	$u_x \times 10^7$	0.2588×10^{-4}	0.3512×10^{-4}	0.5732×10^{-4}	0.4732×10^{-4}
	$u_z \times 10^3$	0.0122	0.0345	0.0654	0.0712
	$\theta_y \times 10^3$	[-]	[-]	[-]	[-]
	$\theta_z \times 10^4$	[-]	[-]	[-]	[-]
1%	$u_x \times 10^7$	1.2655	6.3241	58.0444	212.1546
	$u_z \times 10^3$	1.3294	6.1411	52.7354	126.5848
	$\theta_y \times 10^3$	-0.6610	-3.3416	-30.9801	-119.2323
	$\theta_z \times 10^4$	-0.0145	-0.0725	-0.6651	-2.4311
10%	$u_x \times 10^7$	5.8028	23.1775	119.740	312.4065
	$u_z \times 10^3$	0.6582	2.6543	18.4969	44.4885
	$\theta_y \times 10^3$	-0.3634	-1.4566	-7.5877	-19.6705
	$\theta_z \times 10^4$	-0.0664	-0.2655	-1.3721	-3.5799

[-] = valori trascurabili

Table 5.16: Risultati dell'analisi parametrica su spostamento e rotazione per le lamine investite ad $\alpha = 0^\circ$.

I risultati dell'analisi aeroelastica sul C_L , presentati in Tab. 5.17, vengono distinti tra l'approccio SSA (*Static Structural Analysis*) nel quale il campo di spostamenti viene calcolato dall'applicazione diretta dei carichi aerodinamici sulla struttura e l'approccio SAA (*Static Aeroelastic Analysis*) nel quale, mediante il processo iterativo descritto nel capitolo 4, si tiene conto dell'interazione tra i due campi

fino al raggiungimento di una condizione di bilancio tra forze aerodinamiche e deformazioni strutturali.

		$C_L [-]$			
		5 m/s	10 m/s	30 m/s	50 m/s
Lamina piana	SSA	0.2052×10^{-2}	0.2065×10^{-2}	0.2016×10^{-2}	0.2063×10^{-2}
	SAA	0.2096×10^{-2}	0.2096×10^{-2}	0.2107×10^{-2}	0.21254×10^{-2}
1%	SSA	0.0928	0.0939	0.0937	0.0942
	SAA	0.0857	0.0945	0.0914	0.0811
10%	SSA	0.8662	0.8805	0.8844	0.8746
	SAA	0.8714	0.8831	0.7041	0.6320

Table 5.17: Risultati dell'analisi parametrica sul C_L per le lamine investite ad $\alpha = 0^\circ$.

5.4.2 Analisi aeroelastica statica su un ala con profilo NACA2415

In questa sezione un'ala dritta e non rastremata costituita di alluminio con modulo di Young $E = 69 \text{ GPa}$ e coefficiente di Poisson $\nu = 0.33$ viene analizzata. Viene investita da un flusso con velocità variabile $V_\infty = 5, 10, 30, 50 \text{ m/s}$ con un angolo di attacco $\alpha = 3^\circ$. La semiala ha una lunghezza $b = 5 \text{ m}$ e una corda $c = 1 \text{ m}$. La sezione trasversale adottata è un profilo alare NACA 2415 a pareti sottili, suddiviso in tre celle da due longheroni disposti lungo la direzione dell'apertura alare, posizionati rispettivamente al 25% e al 75% della corda come illustrata in Fig. 5.29. Gli spessori dei longheroni anteriore e posteriore sono rispettivamente pari a $0.015 \times c$ e $0.0105 \times c$, mentre lo spessore del rivestimento è pari a $0.006 \times c$. La struttura viene discretizzata con 20 elementi B4 nella direzione y e un ordine variabile di espansione per la sezione trasversale.

Spostamento e rotazione dell'ala

Si analizza lo spostamento u_z del *tip* sul bordo di attacco e la torsione θ_y della sezione risultanti dall'analisi aeroelastica per diverse teorie di espansione i cui risultati sono riportati in Tab. 5.18. Tutte le teorie di espansione convergono ad un valore univoco di spostamento u_z mentre solo le espansioni TE5 e LE9 convergono ad un valore singolo di spostamento mentre le altre faticano a descrivere il fenomeno della torsione, come riportato in Fig.5.33. Per quanto riguarda lo spostamento al tip, incrementando la velocità, esso ha una dipendenza quadratica con la velocità essendo la portanza una forza proporzionale al quadrato della velocità come evidenziato in Fig. 5.32.

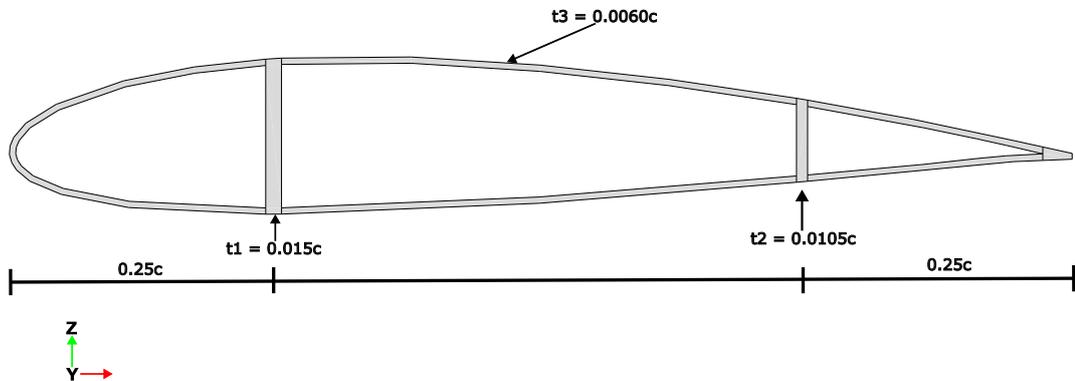


Figure 5.29: Sezione strutturale dell'ala con profilo NACA 2415 con i relativi longheroni.

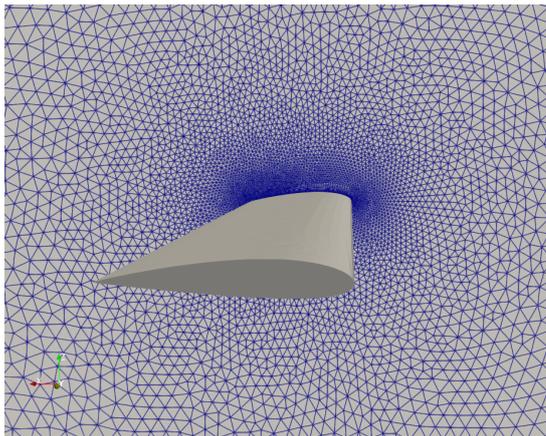


Figure 5.30: Mesh CFD dell'ala.

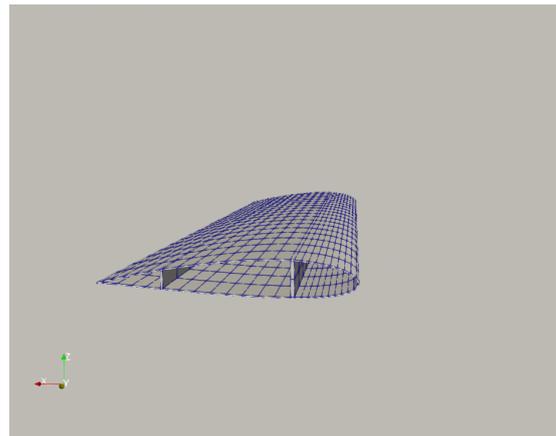


Figure 5.31: Mesh FEM dell'ala.

Coefficienti aerodinamici

Si analizza l'andamento dei coefficienti aerodinamici C_L e C_D nei casi SAA e SSA, riportati in Tab. 5.19. Come predetto dalla teoria, si verifica una diminuzione con la velocità V_∞ del C_D come descritto in Fig. 5.35 e una tendenza a crescere del C_L con la velocità V_∞ per quanto riguarda la SSA. Per quanto concerne la SAA si verifica un lieve decremento del C_L come riportato in Fig. 5.34 dovuta probabilmente separazioni locali premature del flusso sul profilo alare a causa dell'incremento

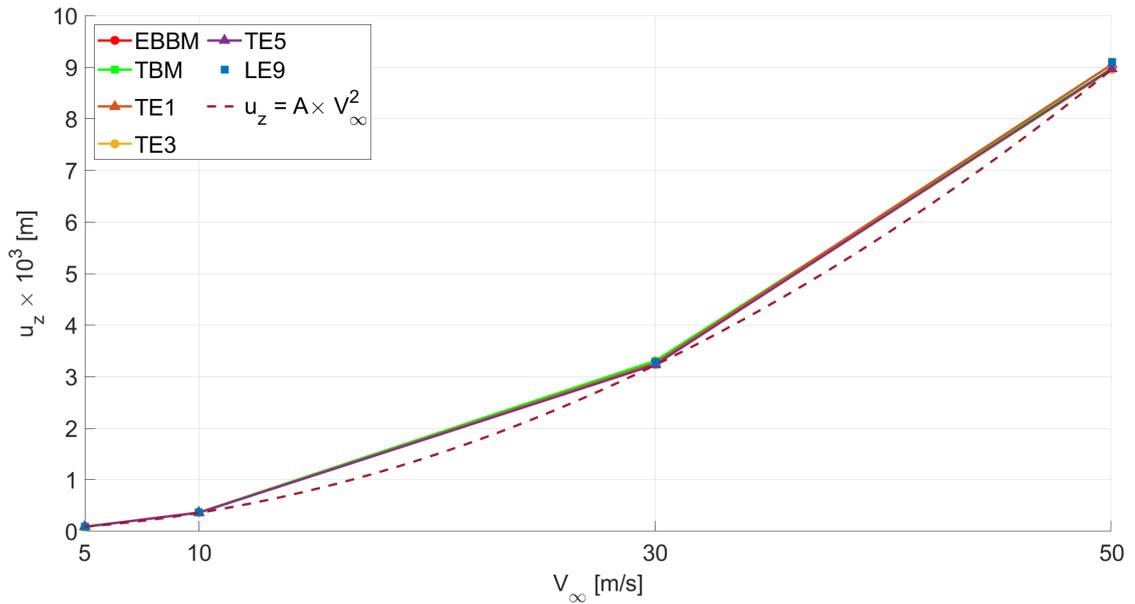


Figure 5.32: Risultati di spostamento del *tip* per i modelli di espansione EBBM, TBM, TE1, TE3 e TE5 approssimati dall'andamento quadratico $u_z = 0.00358 \times V_\infty^2$.

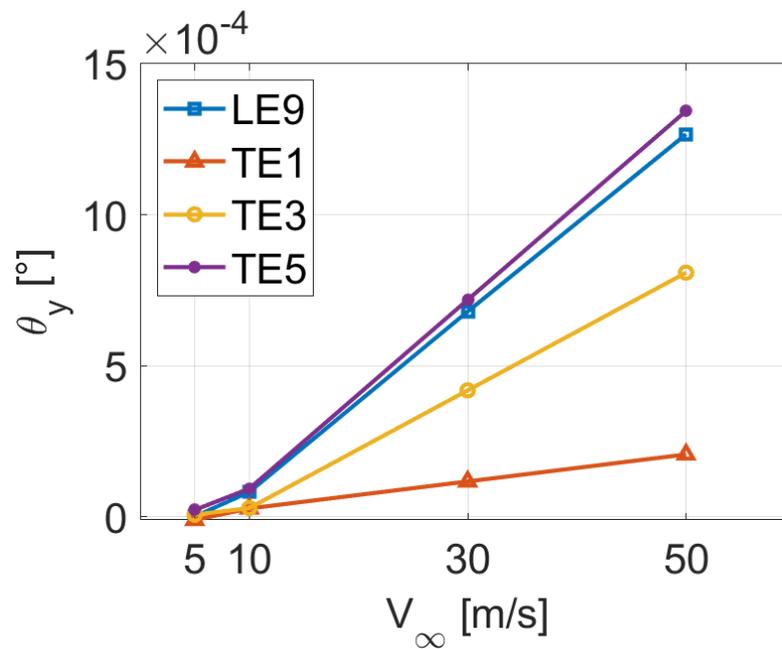


Figure 5.33: Dipendenza dell'angolo di torsione θ_y con la velocità V_∞ .

dell'angolo di incidenza locale definito come:

$$\alpha_{loc} = \alpha_r + \theta_y(y) \quad (5.12)$$

		$u_z \times 10^3 [m]$ $\theta_y [^\circ]$				50 m/s
		5 m/s	10 m/s	30 m/s	50 m/s	Carrera <i>et al.</i> [41] VLM + 20B4
EBBM	$u_z \times 10^3$	8.7244×10^{-2}	0.3661	3.2964	8.9719	8.9407
	$\theta_y \times 10^4$	0[*]	0[*]	0[*]	0[*]	[-]
TBM	$u_z \times 10^3$	8.1214×10^{-2}	0.3664	3.3054	8.9812	8.9506
	$\theta_y \times 10^4$	0[*]	0[*]	0[*]	0[*]	[-]
TE1	$u_z \times 10^3$	8.9682×10^{-2}	0.3627	3.2605	9.0522	8.9603
	$\theta_y \times 10^4$	0.1058	0.2753	1.1696	2.0638	[-]
TE3	$u_z \times 10^3$	8.8561×10^{-2}	0.3585	3.2297	8.9506	8.8015
	$\theta_y \times 10^4$	0.0691	0.2869	4.1851	8.0832	[-]
TE5	$u_z \times 10^3$	8.8544×10^{-2}	0.3596	3.2302	8.9687	[-]
	$\theta_y \times 10^4$	0.2243	0.9320	7.1833	13.4346	[-]
LE9	$u_z \times 10^3$	9.0180×10^{-2}	0.3649	3.2842	9.1002	[-]
	$\theta_y \times 10^4$	0.0067	0.8209	6.7961	12.6625	[-]

[-]= Non fornito

[*]= La torsione non è contemplata per i modelli EBBM e TBM

Table 5.18: Risultati dell'analisi parametrica sulla velocità per spostamento e torsione dell'ala con profilo NACA 2415.

con α_r l'angolo di incidenza imposto dall'analisi e $\theta_y(y)$ l'angolo di torsione dovuto all'interazione fluido struttura.

		C_L e C_D [-]			
		5 m/s	10 m/s	30 m/s	50 m/s
C_L	SSA	0.4410	0.4581	0.48311	0.4911
	SAA	0.4377	0.4580	0.474593	0.4630
C_D	SSA	0.0990	0.0605	0.029638	0.0225
	SAA	0.0100	0.0627	0.029338	0.0232

Table 5.19: Coefficienti aerodinamici risultanti dalle analisi aeroelastica statica (SAA) e statica (SSA) dell'ala con profilo NACA 2415.

Distribuzione della portanza per il caso di ala rigida e deformabile

Si considera la distribuzione del C_L locale definito per un tratto di apertura alare Δy come:

$$C_l = C_p \cdot \sin \alpha_{loc} \Delta y \quad (5.13)$$

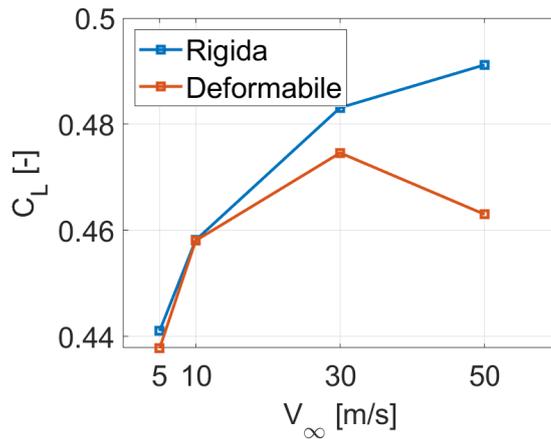


Figure 5.34: Andamento del C_L ad $\alpha = 3^\circ$ al variare della velocità per l'ala deformabile e indeformabile.

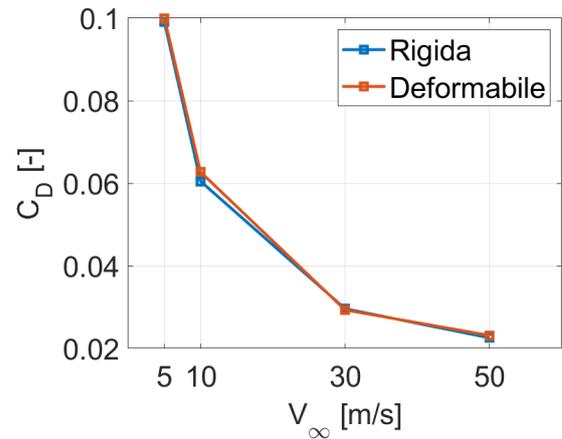


Figure 5.35: Andamento del C_D ad $\alpha = 3^\circ$ al variare della velocità per l'ala deformabile e indeformabile.

rapportato al C_L di una sezione ad una coordinata $x = \text{cost.} = \bar{x}$ definito come:

$$C_L = \int_0^b C_p(y) \cdot \sin \alpha_r dy \quad (5.14)$$

come prescritto dalla teoria si verifica una differenza tra la distribuzione statica del C_L e aeroelastica di quest'ultimo dovuto all'incremento locale dell'angolo di incidenza α_{loc} dovuto alla torsione della struttura a causa degli effetti aeroelastici. L'andamento è riportato in Fig. 5.36. Per evidenziare le differenze tra il caso rigido e deformabile si diagramma ΔC_L definito come:

$$\Delta C_L = \frac{C_{L,\text{def}} - C_{L,\text{rig}}}{C_{L,\text{def}}} \quad (5.15)$$

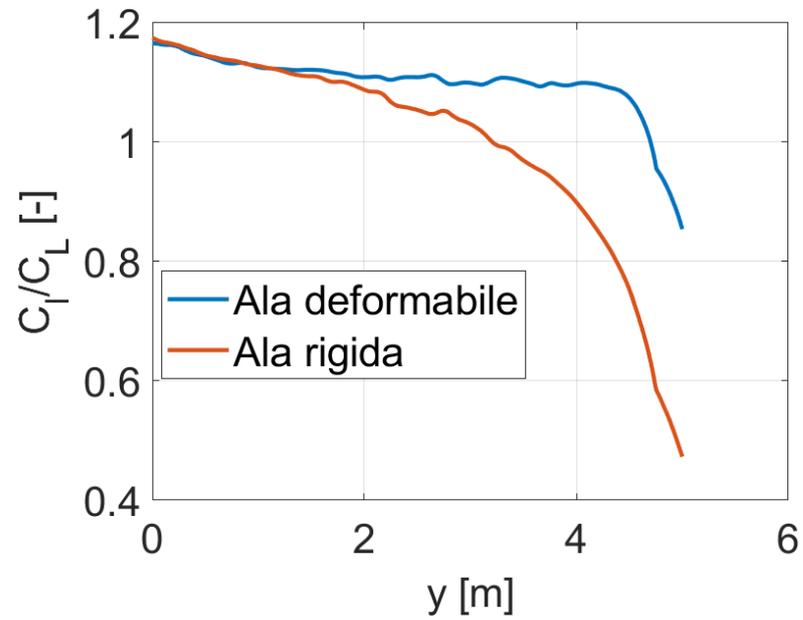


Figure 5.36: Distribuzione del coefficiente di portanza locale lungo l'apertura alare dell'ala con profilo NACA 2415 risultante dalle analisi SAA e SSA.

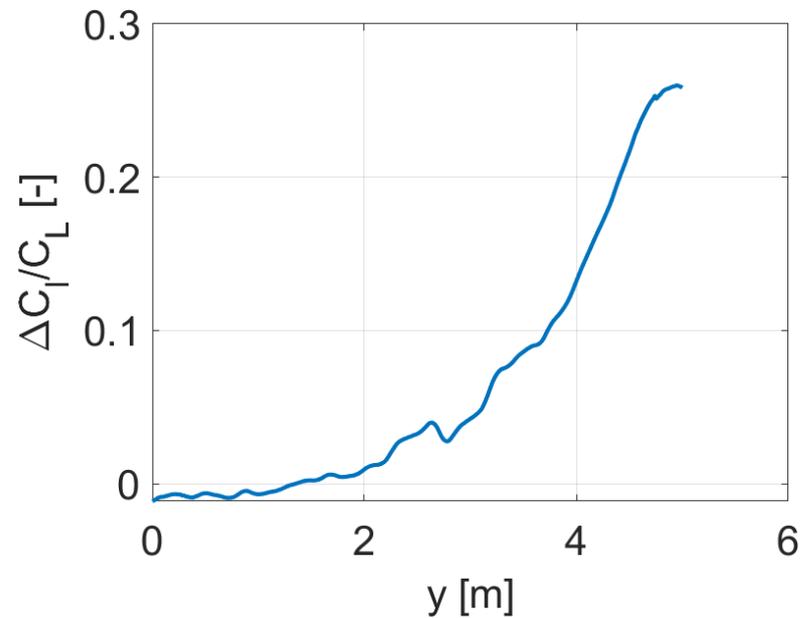


Figure 5.37: Differenza tra le due distribuzioni del C_L locale per l'ala con profilo NACA 2415 indeformata e deformata utilizzando la SAA.

Chapter 6

Conclusioni e Sviluppi futuri

In questa tesi è stato ampliato un *framework* per l'analisi aeroelastica di strutture aeronautiche, che combina le teorie strutturali avanzate della Carrera Unified Formulation (CUF) con i risultati delle simulazioni fluidodinamiche ottenute tramite il software SU2. L'obiettivo era rendere possibile l'analisi di strutture di sezione arbitraria che ammettessero deformazioni in tutte e tre le dimensioni e non solo in direzione trasversale. L'implementazione di un'interpolazione basata sulle Infinite Plate Splines (IPS) ha consentito di accoppiare efficacemente i due solutori, garantendo un trasferimento accurato delle forze aerodinamiche alla struttura e viceversa. La validazione del modello è stata effettuata attraverso il confronto con dati presenti in letteratura, ottenendo una buona corrispondenza tra i risultati numerici e quelli presenti in letteratura. Dalle analisi condotte, si è osservato come l'approccio FEM+CUF consenta una modellazione accurata delle strutture con sezioni arbitrarie, offrendo un'alternativa efficace ai modelli classici FEM basati su elementi tridimensionali che richiedono costo computazionale più elevato. Le analisi aeroelastiche su un'ala con profilo NACA 2415 e su una lamina piana hanno evidenziato il ruolo della deformazione elastica sulla distribuzione dei carichi risultanti e l'effetto sui coefficienti aerodinamici, confermando l'importanza di considerare gli effetti aeroelastici già nelle fasi preliminari di progettazione.

I risultati ottenuti suggeriscono diversi possibili sviluppi:

- La modifica dell'algoritmo di interpolazione superando le IPS e utilizzando un metodo più avanzato che consenta di analizzare ali tridimensionali con angoli di freccia Λ , diedro Γ e svergolamento ϵ che in questa trattazione non sono stati considerati data la limitata capacità delle IPS di gestire interpolazioni tra geometrie con una grande caratteristica tridimensionale;
- L'implementazione di modelli non lineari per analizzare fenomeni che esulano dall'approssimazione di piccole deformazioni.

Bibliography

- [1] URL: https://www.icao.int/sustainability/pages/facts-figures_worlddeconomydata.aspx.
- [2] URL: <https://www.eurocontrol.int/article/aviation-outlook-2050-air-traffic-forecast-shows-aviation-pathway-net-zero-co2-emissions>.
- [3] URL: <https://www.icao.int/environmental-protection/Documents/Forms/AllItems.aspx?RootFolder=%2Fenvironmental%2Dprotection%2FDocuments%2FEnvironmentalReports%2F2022&FolderCTID=0x01200048E70A3021A9504D98DF706482A68A4C&View=%7BB581A199%2DF3F6%2D4B28%2DA7C9%2D46465F7695D7%7D>.
- [4] D. Lee et al. «The contribution of global aviation to anthropogenic climate forcing for 2000 to 2018». In: *Atmospheric environment (Oxford, England : 1994)* 244 (Sept. 2020), p. 117834. DOI: 10.1016/j.atmosenv.2020.117834.
- [5] T. Elliff, M. Cremaschi, and V. Huck. *Impact of aircraft noise pollution on residents of large cities*. Tech. rep. European Union, Jan. 2021. URL: <http://www.europarl.europa.eu/supporting-analyses>.
- [6] URL: https://www.cdp.it/sitointernet/page/it/il_trasporto_aereo_alla_prova_della_decarbonizzazione_sfide_e_opportunit?contentId=TNK45953.
- [7] A. Abbas, J. de Vicente, and E. Valero. «Aerodynamic technologies to improve aircraft performance». In: *Aerospace Science and Technology* 28.1 (2013), pp. 100–132. ISSN: 1270-9638. DOI: <https://doi.org/10.1016/j.ast.2012.10.008>. URL: <https://www.sciencedirect.com/science/article/pii/S1270963812001587>.
- [8] P. Mahamuni, A. Kulkarni, and Y. Parikh. «Aerodynamic study of blended wing body». In: 9 (Jan. 2014), pp. 29247–29255.
- [9] R. Liebeck. «Design of the Blended Wing Body Subsonic Transport». In: *Journal of Aircraft - J AIRCRAFT* 41 (Jan. 2004), pp. 10–25. DOI: 10.2514/1.9084.

- [10] P. Okonkwo and H. Smith. «Review of evolving trends in blended wing body aircraft design». In: *Progress in Aerospace Sciences* 82 (Feb. 2016). DOI: 10.1016/j.paerosci.2015.12.002.
- [11] D. Paulus, T. Salmon, B. Mohr, Christian Roessler, Ö. Petersson, Felix Stroscher, Horst Baier, and Mirko Hornung. «Configuration selection for a 450-passenger ultraefficient 2020 aircraft». In: *EUCASS Proceedings Series* (Dec. 2013). DOI: 10.1051/eucass/201306601.
- [12] URL: <https://www.nasa.gov/aeronautics/new-ideas-sharpen-focus-for-greener-aircraft/>.
- [13] W. Pfenninger and C. S. Vemuru. «Design Philosophy of Long Range LFC Transports with Advanced Supercritical LFC Airfoils». In: *Natural Laminar Flow and Laminar Flow Control*. Ed. by R. W. Barnwell and M. Y. Hussaini. New York, NY: Springer New York, 1992, pp. 177–221. ISBN: 978-1-4612-2872-1. DOI: 10.1007/978-1-4612-2872-1_5.
- [14] H. Almarzooqi, R. Ajaj, and W. Cantwell. «On the aeroelasticity of high aspect ratio strut-braced wings: a parametric study». In: June 2024.
- [15] E. Ting, K. Reynolds, N. Nguyen, and J. Totah. «Aerodynamic Analysis of the Truss-Braced Wing Aircraft Using Vortex-Lattice Superposition Approach». In: June 2014. DOI: 10.2514/6.2014-2597.
- [16] G. Carrier, G. Arnoult, N. Fabbiane, J.S. Schotte, C. David, S. Defoort, E. Benard, and M. Delavenne. «Multidisciplinary analysis and design of strut-braced wing concept for medium range aircraft». In: Jan. 2022. DOI: 10.2514/6.2022-0726.
- [17] G. Carrier, O. Atinault, S. Dequand, J. Hantrais-Gervois, C. Liauzun, and B. Paluch. «Investigation Of A Strut-Braced Wing Configuration For Future Commercial Transport». In: vol. 1. Jan. 2012.
- [18] D. Maldonado, J. A. Housman, J. C. Duensing, J. C. Jensen, C. C. Kiris, S. A. Viken, C. A. Hunter, N. T. Frink, and S. N. McMillin. «Computational Simulations of a Mach 0.745 Transonic Truss-Braced Wing Design». In: *AIAA SciTech Forum*. American Institute of Aeronautics and Astronautics (AIAA). Orlando, FL, United States: NASA Technical Reports Server, Jan. 2020. URL: <https://ntrs.nasa.gov/citations/20200000705>.
- [19] URL: <https://www1.grc.nasa.gov/aeronautics/hep/airplane-concepts/>.
- [20] L. Prandtl. *Induced drag of multiplanes*. Tech. rep. NACA-TN-182. NACA, 1924. URL: <https://ntrs.nasa.gov/citations/19930080964>.

- [21] R. H. Lange, J. F. Cahill, E. S. Bradley, R. R. Eudaily, C. M. Jenness, and D. G. Macwilkinson. «Feasibility study of the transonic biplane concept for transport aircraft application». In: 1974. URL: <https://api.semanticscholar.org/CorpusID:106959677>.
- [22] O. Stodieck, J. Cooper, P. Weaver, and P. Kealy. «Aeroelastic Tailoring of a Representative Wing Box Using Tow-Steered Composites». In: *AIAA Journal* 55 (Dec. 2016), pp. 1–15. DOI: 10.2514/1.J055364.
- [23] K. Abu Salem, G. Palaia, A. A. Quarta, and M. R. Chiarelli. «Preliminary Analysis of the Stability and Controllability of a Box-Wing Aircraft Configuration». In: *Aerospace* 10.10 (2023). ISSN: 2226-4310. DOI: 10.3390/aerospace10100874. URL: <https://www.mdpi.com/2226-4310/10/10/874>.
- [24] M. Hasan and A. Khandoker. «Enhancing box-wing design efficiency through machine learning based optimization». In: *Chinese Journal of Aeronautics* (2024). ISSN: 1000-9361. DOI: <https://doi.org/10.1016/j.cja.2024.08.047>.
- [25] A. Karim Salem, V. Binante, V. Cipolla, and M. Maganzi. «PARSIFAL Project: a Breakthrough Innovation in Air Transport». In: *Aerotecnica Missili & Spazio* 97 (Jan. 2018), pp. 40–46. DOI: 10.1007/BF03404764.
- [26] M. Hasan, S. Redonnet, and A. Hernadi. «Computational Investigation of a Novel Box-Wing Aircraft Concept». In: *Applied Sciences* 12.2 (2022). ISSN: 2076-3417. DOI: 10.3390/app12020752.
- [27] A. R. Collar. «The Expanding Domain of Aeroelasticity». In: *The Journal of the Royal Aeronautical Society* 50.428 (1946), pp. 613–636. DOI: 10.1017/S0368393100120358.
- [28] R. Latif, S. T. Rizvi, A. Javed, and S. Shah. «Semi-Analytical Flutter Analysis of a Light UAV Wing». In: Jan. 2020, pp. 88–98. DOI: 10.1109/IBCAST47879.2020.9044521.
- [29] G. Arioli and F. Gazzola. «A new mathematical explanation of what triggered the catastrophic torsional mode of the Tacoma Narrows Bridge». In: *Applied Mathematical Modelling* 39.2 (2015), pp. 901–912. ISSN: 0307-904X. DOI: <https://doi.org/10.1016/j.apm.2014.06.022>.
- [30] M. W. Kehoe. «A historical overview of flight flutter testing». In: 1995. URL: <https://ntrs.nasa.gov/citations/19960004074>.
- [31] «General Theory of Aerodynamic Instability and the Mechanism of Flutter». In: 1934. URL: <https://ntrs.nasa.gov/citations/19930090935>.
- [32] T. Theodorsen and I. E. Garrick. «Mechanism Of Flutter: A Theoretical And Experimental Investigation Of The Flutter Problem». In: 1940. URL: <https://ntrs.nasa.gov/citations/19930091762>.

- [33] T. Theodorsen and I. E. Garrick. «Flutter Calculations In Three Degree Of Freedom». In: 1942. URL: <https://ntrs.nasa.gov/citations/19930090938>.
- [34] G. Guruswamy. «A review of numerical fluids/structures interface methods for computations using high-fidelity equations». In: *Computer & Structures* 80 (Jan. 2002), pp. 31–41. DOI: 10.1016/S0045-7949(01)00164-X.
- [35] R. Kamakoti and W. Shyy. «Fluid–structure interaction for aeroelastic applications». In: *Progress in Aerospace Sciences* 40 (Nov. 2004), pp. 535–558. DOI: 10.1016/j.paerosci.2005.01.001.
- [36] V. Falkner. «The Calculation of Aerodynamic Loading on Surfaces of Any Shape». In: (Aug. 1943), p. 23.
- [37] E. Albano and W. P. Rodden. «A doublet-lattice method for calculating lift distributions on oscillating surfaces in subsonic flows.» In: *AIAA Journal* 7.2 (1969), pp. 279–285. DOI: 10.2514/3.5086.
- [38] L. L. Erickson. «Panel Methods: An introduction». In: 1990. URL: <https://ntrs.nasa.gov/citations/19910009745>.
- [39] E. Carrera, M. Filippi, A. Pagani, M. Petrolo, and E. Zappino. *Notes on Finite Elements for Aeroelastic Problems Aeroelasticity Course 2022-2023*. 2022.
- [40] A. Varello, E. Carrera, and L. Demasi. «Vortex Lattice Method coupled with advanced one-dimensional structural models». In: *Journal of Aeroelasticity and Structural Dynamics* 2 (Aug. 2011), pp. 53–78. DOI: 10.3293/asdj.2011.10.
- [41] E. Carrera, A. Varello, and L. Demasi. «A refined structural model for static aeroelastic response and divergence of metallic and composite wings». In: *CEAS Aeronautical Journal* 4 (Feb. 2014). DOI: 10.1007/s13272-013-0063-2.
- [42] K. Jovanov, R. De Breuker, M. Abdalla, and J. Dillinger. «Accelerated convergence of static aeroelasticity using low-fidelity aerodynamics». In: *56th AIAA/ASCE/AHS/ASC Structures, Structural Dynamics, and Materials Conference* (Jan. 2015).
- [43] A. Voß. *An Implementation of the Vortex Lattice and the Doublet Lattice Method*. Tech. rep. Oct. 2020. URL: <https://elib.dlr.de/136536/>.
- [44] R. Vepa. «Aeroelastic Analysis of Wing Structures Using Equivalent Plate Models». In: *Aiaa Journal - AIAA J* 46 (May 2008), pp. 1216–1225. DOI: 10.2514/1.34928.

- [45] C. Conlan-Smith and C. Schousboe Andreasen. «Aeroelastic Optimization of Aircraft Wings Using a Coupled Three-Dimensional Panel-Beam Model». In: *AIAA Journal* 59.4 (2021), pp. 1374–1386. DOI: [10.2514/1.J059911](https://doi.org/10.2514/1.J059911).
- [46] T. von Karman. «The Similarity Law of Transonic Flow». In: *Journal of Mathematics and Physics* 26.1-4 (1947), pp. 182–190. DOI: <https://doi.org/10.1002/sapm1947261182>.
- [47] A. Vescovini. «A fully implicit formulation for Navier-Stokes/Darcy coupling». Supervisors: Prof. Luca Formaggia, Dr. Anna Scotti, Prof. Dr.-Ing. Rainer Helmig. Master Degree Thesis. Milano, Italy: Politecnico di Milano, 2018.
- [48] L. Cavagna, Quaranta G., and Scotti A. Ricci S. and. «Computational Aeroelasticity with CFD models». In: *Bollettino del CILEA* (Jan. 2007).
- [49] C. Fernandez Escudero, M. Gagnon, E. Laurendeau, S. Prothin, G. Michon, and A. Ross. «Comparison of low, medium and high fidelity numerical methods for unsteady aerodynamics and nonlinear aeroelasticity». In: *Journal of Fluids and Structures* 91 (Nov. 2019), p. 102744. DOI: [10.1016/j.jfluidstructs.2019.102744](https://doi.org/10.1016/j.jfluidstructs.2019.102744).
- [50] G. Chen, D. Li, Q. Zhou, A. Da Ronch, and Y. Li. «Efficient aeroelastic reduced order model with global structural modifications». In: *Aerospace Science and Technology* 76 (2018), pp. 1–13. ISSN: 1270-9638. DOI: <https://doi.org/10.1016/j.ast.2018.01.023>.
- [51] A. Ramos, V. Alulema, E. Valencia Torres, and D. Rodríguez. «Static aeroelastic approach based on Vortex lattice Method and Euler-Bernoulli beam theory for structural analysis of fixed wing sUAS». In: *Journal of Mechanical Engineering Research and Developments* 43 (Sept. 2020), pp. 349–360.
- [52] L. Reimer, G. Wellmer, C. Braun, and J. Ballmann. «Computational Methods for Aero-Structural Analysis and Optimisation of Aircrafts Based on Reduced-Order Structural Models». In: vol. 107. Nov. 2009, pp. 135–150. ISBN: 978-3-642-04092-4. DOI: [10.1007/978-3-642-04093-1_10](https://doi.org/10.1007/978-3-642-04093-1_10).
- [53] A. Crovato. «Steady Transonic Aerodynamic and Aeroelastic Modeling for Preliminary Aircraft Design». PhD thesis. Cambridge: University of Liège, Oct. 2020. URL: https://orbi.uliege.be/bitstream/2268/251906/1/202010_Crovato_PhDmanuscript.pdf.
- [54] M. Grifò, A. Da Ronch, and I. Benedetti. «A computational aeroelastic framework based on high-order structural models and high-fidelity aerodynamics». In: *Aerospace Science and Technology* 132 (2023), p. 108069. ISSN: 1270-9638. DOI: <https://doi.org/10.1016/j.ast.2022.108069>.

- [55] M. Grifò, M. Gulizzi, A. Milazzo, A. Da Ronch, and I. Benedetti. «High-fidelity aeroelastic transonic analysis using higher-order structural models». In: *Composite Structures* 321 (2023), p. 117315. ISSN: 0263-8223. DOI: <https://doi.org/10.1016/j.compstruct.2023.117315>.
- [56] M. J. Smith, D. H. Hodges, and C. E. S. Cesnik. *An Evaluation of Computational Algorithms to Interface Between CFD and CSD Methodologies*. Tech. rep. WL-TR-96-3055. Wright-Patterson Air Force Base, OH: Georgia Tech Research Institute and School of Aerospace Engineering, Georgia Institute of Technology, Nov. 1995.
- [57] R. L. Harder and R. N. Desmarais. «Interpolation using surface splines.» In: *Journal of Aircraft* 9 (1972), pp. 189–191. URL: <https://api.semanticscholar.org/CorpusID:119719484>.
- [58] W. Keller and A. Borkowski. «Thin plate spline interpolation». In: *Journal of Geodesy* 93 (Feb. 2019). DOI: 10.1007/s00190-019-01240-2.
- [59] R.L. Hardy. «Theory and applications of the multiquadric-biharmonic method 20 years of discovery 1968–1988». In: *Computers & Mathematics with Applications* 19.8 (1990), pp. 163–208. ISSN: 0898-1221. DOI: [https://doi.org/10.1016/0898-1221\(90\)90272-L](https://doi.org/10.1016/0898-1221(90)90272-L). URL: <https://www.sciencedirect.com/science/article/pii/089812219090272L>.
- [60] E. Carrera and M. Petrolo. «Refined beam elements with only displacement variables and plate/shell capabilities». In: *Meccanica* 47 (2012), pp. 537–556. DOI: 10.1007/s11012-011-9466-5.
- [61] E. Carrera, E. Zappino, and G. Li. «Finite element models with node-dependent kinematics for the analysis of composite beam structures». In: *Composites* 132 (Jan. 2018), pp. 35–48. ISSN: 1359-8368.
- [62] E. Carrera, M Petrolo, and E. Zappino. «Performance of CUF Approach to Analyze the Structural Behavior of Slender Bodies». In: *Journal of Structural Engineering* 138.2 (2012), pp. 285–297. DOI: 10.1061/(ASCE)ST.1943-541X.0000402.
- [63] J. D. Anderson Jr. *Computational Fluid Dynamics: The Basics with Applications*. McGraw-Hill, 1995. ISBN: 978-0070016859.
- [64] O. Reynolds. «On the Dynamical Theory of Incompressible Viscous Fluids and the Determination of the Criterion». In: *Philosophical Transactions of the Royal Society of London* 186 (1895), pp. 123–164. URL: http://www.homepages.ucl.ac.uk/~uceseug/Fluids3/Extra_Reading/Reynolds_1895.pdf.
- [65] D. C. Wilcox. *Turbulence Modeling for CFD*. 3rd ed. DCW Industries, Inc., 2006. ISBN: 978-1-928729-08-2.

- [66] URL: <https://su2code.github.io/>.
- [67] F. Göttgen, D. Finger, M. Marino, C. Bil, M. Havermann, and C. Braun. «A review of guidelines and best practices for subsonic aerodynamic simulations using RANS CFD». In: Dec. 2019.
- [68] URL: https://www.cadence.com/en_US/home/tools/system-analysis/computational-fluid-dynamics/fidelity.html.
- [69] URL: <https://www.solidworks.com/>.
- [70] URL: <https://www.paraview.org/>.
- [71] URL: [https://commons.wikimedia.org/wiki/File:Law_of_the_wall_\(English\).svg](https://commons.wikimedia.org/wiki/File:Law_of_the_wall_(English).svg).
- [72] S. B. Pope. *Turbulent Flows*. Cambridge University Press, 2000. ISBN: 9780521598866
- [73] P. Spalart and S. Allmaras. «A One-Equation Turbulence Model for Aerodynamic Flows». In: *AIAA* 439 (Jan. 1992). DOI: 10.2514/6.1992-439.
- [74] F. R. Menter. «Two-equation eddy-viscosity turbulence models for engineering applications». In: *AIAA Journal* 32.8 (1994), pp. 1598–1605. DOI: 10.2514/3.12149.
- [75] M. Smith, C. Cesnik, D. Hodges, and K. Moran. «An evaluation of computational algorithms to interface between CFD and CSD methodologies». In: *37th Structure, Structural Dynamics and Materials Conference*. DOI: 10.2514/6.1996-1400. URL: <https://arc.aiaa.org/doi/abs/10.2514/6.1996-1400>.
- [76] E. Carrera, M. Petrolo, and P. Nali. «Unified Formulation Applied to Free Vibrations Finite Element Analysis of Beams with Arbitrary Section». In: *Shock and Vibration* 18.3 (2011), p. 706541. DOI: <https://doi.org/10.3233/SAV-2010-0528>.
- [77] A. Pagani, E. Carrera, M. Boscolo, and J.R. Banerjee. «Refined dynamic stiffness elements applied to free vibration analysis of generally laminated composite beams with arbitrary boundary conditions». In: *Composite Structures* 110 (2014), pp. 305–316. DOI: <https://doi.org/10.1016/j.compstruct.2013.12.010>.
- [78] URL: https://su2code.github.io/docs_v7/Markers-and-BC/.
- [79] K. Malik, W. Asrar, and E. Sulaeman. «Low Reynolds Number Numerical Simulation of the Aerodynamic Coefficients of a 3D Wing». In: *International Journal of Aviation, Aeronautics, and Aerospace* (Jan. 2018). DOI: 10.15394/ijaaa.2018.1209.
- [80] G. Ananda, P.P. Sukumar, and M. Selig. «Measured aerodynamic characteristics of wings at low Reynolds numbers». In: *Aerospace Science and Technology* 42 (May 2015). DOI: 10.1016/j.ast.2014.11.016.

BIBLIOGRAPHY

- [81] A. Pelletier and T. Mueller. «Low Reynolds Number Aerodynamics of Low-Aspect-Ratio, Thin/Flat/Cambered-Plate Wings». In: *Journal of Aircraft - J AIRCRAFT* 37 (Sept. 2000), pp. 825–832. DOI: 10.2514/2.2676.
- [82] M. Shields and K. Mohseni. «Effects of Sideslip on the Aerodynamics of Low-Aspect-Ratio Low-Reynolds-Number Wings». In: *AIAA Journal* 50 (Aug. 2012), pp. 85–99. DOI: 10.2514/1.J051151.
- [83] URL: <https://web.mit.edu/drela/Public/web/avl/>.