

# POLITECNICO DI TORINO

Corso di Laurea Magistrale in Ingegneria Aerospaziale



Tesi di Laurea Magistrale

## Simulazione numerica in ugelli spaziali sovraespansi

Relatore

Prof. Emanuele MARTELLI

Candidato

Davide Vincenzo LO RE

Aprile 2025



# Abstract

La presente tesi ha come obiettivo quello di riportare i risultati ottenuti da simulazioni numeriche relative al fenomeno della separazione dello strato limite per ugelli sovraespansi. In particolare si è analizzato come la distanza del bordo orizzontale del dominio, assunto come parete solida, dall'ugello influenzi tale fenomeno.

La separazione dello strato limite è un fenomeno fluidodinamico complesso che può influenzare in modo significativo l'efficienza degli ugelli spaziali e avere un impatto negativo su di essi, causando instabilità del flusso in uscita, oscillazioni sui valori di spinta e sollecitazioni strutturali indesiderate. Questo fenomeno è rilevante negli endoreattori che operano a pressione ambiente o pressioni variabili, come i motori dei primi stadi dei lanciatori, dove il flusso all'interno dell'ugello può raggiungere pressioni inferiori a quelle dell'ambiente esterno e di conseguenza subire separazioni improvvise con ripercussioni su prestazioni e sicurezza.

Per condurre lo studio, è stato impiegato il software di fluidodinamica computazionale *ANSYS FLUENT*, che consente di modellare con precisione situazioni in cui si verifica il fenomeno di separazione in condizioni di alta velocità. Le simulazioni sono state condotte su una geometria bidimensionale assialsimmetrica, rappresentativa di un ugello TIC (Truncated Ideal Contour), adottando un modello di turbolenza *SST - k -  $\omega$*  e una discretizzazione attraverso il *Metodo dei Volumi Finiti* e *Upwind* di secondo ordine. La distanza e la lunghezza della parete sono state variate sistematicamente per valutare il loro impatto sulla posizione del punto di separazione e sulla distribuzione della pressione lungo la parete dell'ugello.

I risultati ottenuti dimostrano come la variazione della geometria del dominio influenzi il comportamento del flusso, modificando la stabilità della vena fluida e alterando la posizione del punto di separazione. Le considerazioni successive, confrontate con i dati presenti in letteratura, permettono di validare le simulazioni e di identificare le grandezze responsabili del fenomeno.

Questo studio offre informazioni utili per l'ottimizzazione futura degli ugelli, suggerendo strategie per monitorare la separazione del flusso. I risultati ottenuti costituiscono una base per ulteriori ricerche volte a migliorare i sistemi di propulsione in condizioni operative variabili.

# Ringraziamenti

Giunto alla fine di questo lungo percorso, sento il bisogno di rivolgere un pensiero a chi, in modi diversi, ha lasciato un segno in questo viaggio.

Alla mia famiglia, e in particolare ai miei genitori, il mio grazie più grande e sincero. Senza di voi, tutto questo non sarebbe stato possibile, indipendentemente da come si è svolto. Il vostro sostegno silenzioso è stato la mia ancora. Vi devo più di quanto riuscirò mai a esprimere con le parole.

Ai miei amici, compagni di vita prima ancora che di avventure, che hanno attraversato con me questi anni difficili: quelli in cui il mondo sembrava essersi fermato e noi ci siamo ritrovati a doverlo rimettere in moto; quelli in cui io sembravo essermi fermato e voi, con delicatezza, mi avete dato le energie per ripartire. Grazie per la pazienza, per la presenza, per avermi ascoltato anche quando le mie parole erano sempre le stesse, anche quando non c'erano parole ma solo silenzi pesanti. Avete saputo esserci, ed esserci davvero, e questa è una delle fortune più grandi che potessi avere.

Desidero, inoltre, ringraziare sentitamente il Professore Martelli per la sua disponibilità, la guida attenta e il costante supporto durante tutto il percorso di stesura della tesi. La sua competenza e la sua pazienza sono state per me un punto di riferimento prezioso, e hanno contribuito in modo fondamentale alla realizzazione di questo lavoro.

Ancora un ringraziamento va ai ragazzi che ho avuto, e ho tuttora, il piacere di seguire con le ripetizioni di matematica e fisica. A loro va la mia gratitudine per avermi dato, inconsapevolmente, la possibilità di rimettermi in gioco, di ricredere un po' di più in me stesso, e di riscoprire la bellezza della conoscenza, del dialogo, della pazienza e della fiducia che nasce quando si cresce insieme, anche solo attraverso un esercizio risolto con fatica. Ognuno di loro mi ha ricordato che saper dare può riaccendere ciò che si pensava spento.

Un pensiero va anche a coloro che, lungo la strada, si sono allontanati o che ho scelto di lasciare andare. A chi ho deciso di non frequentare più, grazie per avermi insegnato a scegliere, a prendermi cura di me stesso e della mia vita, a dire di no senza paura. E a chi ha deciso di non frequentarmi più, grazie anche a voi, perché mi avete insegnato a riconoscere il valore della sincerità e dell'autenticità

nelle persone. A volte, perdere qualcuno è il modo più doloroso ma più vero per capire chi vogliamo davvero accanto a noi.

Un ringraziamento speciale va alla musica, compagna silenziosa e costante, che ha saputo dare voce ai miei pensieri quando io non riuscivo a farlo. In particolare, voglio dedicare un pensiero a Elisa, Levante e La Rappresentante di Lista: tre donne che, senza saperlo, mi hanno accompagnato lungo questo percorso con le loro parole, le loro note, la loro arte. Il loro impatto è stato profondo e mi ha dato forza nei momenti in cui sembrava che tutto vacillasse.

Infine, un ringraziamento va anche alla poesia, con la quale ho avuto accesso a nuove strade di pensiero. Tra un confronto e una riflessione, mi ha aiutato a guardare le cose da un'altra prospettiva, a riformulare dubbi e domande, a trovare nuove vie quando quelle davanti a me sembravano chiudersi.

Ogni incontro, ogni distacco, ogni difficoltà ha lasciato un segno e, nel bene e nel male, mi ha portato qui, oggi. Questo traguardo è anche vostro. Grazie.

*“Un segreto è  
fare tutto come se  
vedessi solo il Sole  
e non qualcosa che non c'è”*

— Elisa, *Qualcosa che non c'è*.



# Indice

Elenco delle tabelle	VIII
Elenco delle figure	IX
Acronimi	XII
<b>1 Introduzione</b>	<b>1</b>
<b>2 Endoreattori e loro utilizzo</b>	<b>3</b>
2.1 Principi di funzionamento degli endoreattori . . . . .	4
2.2 Funzionamento degli ugelli . . . . .	5
2.3 Modello di endoreattore ideale, grandezze e formule fondamentali . . . . .	8
2.3.1 Effetti di $\varepsilon$ , $\frac{p_c}{p_0}$ e $\gamma$ sul coefficiente di spinta $C_F$ . . . . .	12
2.4 Ugello sottoespanso, sovraespanso e adattato . . . . .	16
2.5 Effetti reali . . . . .	23
2.6 Evoluzione della forma degli ugelli . . . . .	24
<b>3 Fenomeno della Separazione del Flusso</b>	<b>31</b>
3.1 Strato limite e condizioni di separazione . . . . .	31
3.2 Separazione del flusso in un ugello spaziale . . . . .	33
3.3 Cause della Separazione del Flusso . . . . .	35
3.4 Effetti della Separazione sulle Prestazioni . . . . .	37
3.5 Free Shock Separation e Restricted Shock Separation . . . . .	38
3.6 Metodi che prevedono la separazione . . . . .	41
<b>4 Introduzione e cenni sulla CFD, <i>Computational Fluid Dynamics</i></b>	<b>42</b>
4.1 Equazioni di governo: equazioni di Navier-Stokes . . . . .	43
4.2 Metodo dei Volumi Finiti . . . . .	45
4.3 Metodo Upwind di secondo ordine . . . . .	46
4.4 Residui . . . . .	47

<b>5</b>	<b>Impostazione della simulazione: Geometria del dominio, mesh e impostazione parametri Fluent</b>	<b>48</b>
5.1	Geometrie . . . . .	49
5.2	Scelta della Mesh . . . . .	51
5.3	Impostazione parametri Fluent . . . . .	54
5.4	Procedimento delle simulazioni . . . . .	58
<b>6</b>	<b>Risultati</b>	<b>60</b>
6.1	Introduzione ai Risultati . . . . .	60
6.2	Configurazione delle Simulazioni . . . . .	60
6.3	Risultati delle Simulazioni . . . . .	61
6.4	Commenti dei risultati . . . . .	74
6.5	Spiegazione del fenomeno osservato . . . . .	75
<b>7</b>	<b>Conclusioni</b>	<b>76</b>
7.1	Limiti dello studio . . . . .	76
7.2	Conclusioni e Sviluppi Futuri . . . . .	76
<b>A</b>	<b>Contour Pressione Totale</b>	<b>78</b>
<b>B</b>	<b>Contour Temperatura Statica</b>	<b>81</b>
<b>C</b>	<b>Contour Temperatura Totale</b>	<b>84</b>
<b>D</b>	<b>Contour Viscosità</b>	<b>87</b>
	<b>Bibliografia</b>	<b>90</b>

# Elenco delle tabelle

5.1	Grandezze relative alla geometria dell'ugello. . . . .	49
5.2	Grandezze relative alla geometria del dominio di calcolo. . . . .	51
5.3	Impostazioni generali Fluent. . . . .	54
5.4	Impostazioni generali Fluent. . . . .	55
5.5	Proprietà chimico-fisiche dell'aria secca. . . . .	55
5.6	Valori di riferimento per la <i>legge di Sutherland</i> . . . . .	55
5.7	Condizioni al contorno del dominio. . . . .	57
5.8	Impostazioni della risoluzione. . . . .	57
6.1	Valori di $L_w$ per ciascun ciclo. . . . .	70

# Elenco delle figure

2.1	Esempi di lanciatori ESA[2]. . . . .	3
2.2	F-1: endoreattore del primo stadio del Saturn V.[3] . . . . .	4
2.3	<i>Ugello de Laval</i> e andamento delle grandezze termodinamiche.[4] . . . . .	5
2.4	Effetto di $\varepsilon$ sul $C_F$ . [6] . . . . .	12
2.5	Effetto di $\frac{p_e}{p_0}$ sul $C_F$ . [6] . . . . .	13
2.6	Effetto della quota $z$ sul $C_F$ per due ugelli con differente $\varepsilon$ . [6] . . . . .	14
2.7	Effetto della quota $z$ sul $C_F$ . [6] . . . . .	15
2.8	Effetto del $\gamma$ sul $C_F$ . [6] . . . . .	16
2.9	Ugello Sottoespanso. [7] . . . . .	17
2.10	Fenomeno di sottoespansione. [8] . . . . .	18
2.11	Flusso sottoespanso in uscita dall'ugello. [9] . . . . .	18
2.12	Ugello Adattato. [7] . . . . .	19
2.13	Ugello sovraespanso. [7] . . . . .	20
2.14	Fenomeno di sovraespansione. [8] . . . . .	21
2.15	Flusso sovraespanso con formazione di urti e separazione. [7] . . . . .	22
2.16	Ugello conico. [6] . . . . .	24
2.17	Confronto tra ugello a campana e conico. . . . .	26
2.18	Confronto dettagliato tra ugello a campana e ugello conico. [10] . . . . .	27
2.19	Ugello Ideale. [11] . . . . .	28
2.20	Ugello TIC (a destra) e ugello TOP (a sinistra) per un dato $\varepsilon$ . [12] . . . . .	29
2.21	Assenza di onde d'urto all'interno dell'ugello TIC. [11] . . . . .	30
3.1	Profilo di velocità nello strato limite con condizione di separazione. [13] . . . . .	32
3.2	Separazione dello strato limite in ugello fortemente sovraespanso. [14] . . . . .	33
3.3	[15] Carichi laterali su ugello fortemente sovraespanso con separazione. . . . .	34
3.4	Analisi FEM su ugello con separazione dello strato limite. [14] . . . . .	34
3.5	Ispezzimento Strato Limite. [11] . . . . .	35
3.6	Separazione completa dello Strato Limite. [11] . . . . .	36
3.7	Coefficiente di spinta in funzione della quota. [6] . . . . .	37
3.8	Free Shock Separation, <i>FSS</i> . [11] . . . . .	38
3.9	<i>RSS</i> , Restricted Shock Separation. [11] . . . . .	39

3.10	<i>FSS</i> , in basso, e <i>RSS</i> , in alto.[16]	40
4.1	Schema CFD.[18]	43
5.1	Dimensioni e geometria dell'ugello TIC.	49
5.2	Geometria del dominio di calcolo.	50
5.3	Mesh strutturata del dominio di calcolo.	53
5.4	Dettaglio mesh: ugello e strato limite.	53
5.5	Dettaglio mesh: bordo d'uscita ugello.	54
5.6	Bordi del dominio.	56
5.7	Posizione sonda nel dominio di calcolo.	59
6.1	Schema della separazione del flusso.[25]	61
6.2	Campo di <i>Pressione Statica</i> per diverse configurazioni di $H_w$ .	64
6.3	Campo di <i>Pressione Statica</i> con range di valori modificato.	66
6.4	Andamento di $\frac{p_{wn}}{p_0}$ lungo la parete dell'ugello.	67
6.5	Misurazioni di pressione statica tramite sonda.	68
6.6	Pressione statica in prossimità della parete orizzontale.	69
6.7	<i>Mappa Ugello-Parete</i> .	70
6.8	Profilo del <i>Mach</i> .	73
6.9	Profilo del Mach per diverse configurazioni di distanza della parete.	74



# Acronimi

CAD	Computer-Aided Design
CFD	Computational Fluid Dynamics
ESA	European Space Agency
FEM	Finite Element Method
FSS	Free Shock Separation
FVM	Finite Volume Method
NPR	Nozzle Pressure Ratio
RSS	Restricted Shock Separation
SST	Shear Stress Transport
TIC	Truncated Ideal Contour
TOC	Thrust Optimized Contoured
TOP	Thrust Optimized Parabolic

# Capitolo 1

## Introduzione

L'ottimizzazione delle prestazioni degli ugelli spaziali rappresenta una sfida cruciale nell'ingegneria aerospaziale, poiché questi componenti influenzano direttamente l'efficienza e l'affidabilità dei motori a razzo. Gli ugelli hanno il compito di espandere i gas di scarico in uscita dalla camera di combustione, convertendo l'energia termica in energia cinetica e generando la spinta necessaria alla propulsione. Tuttavia, in condizioni operative reali, la pressione ambiente varia significativamente lungo la traiettoria del razzo, causando fenomeni di sovraespansione o sottoespansione del flusso. In particolare, la sovraespansione può portare alla separazione del flusso, fenomeno che altera il funzionamento dell'ugello, riducendo l'efficienza della propulsione e generando forze asimmetriche e non assiali potenzialmente dannose per la stabilità e integrità del motore.

Questa tesi si concentra sull'analisi numerica del comportamento degli ugelli spaziali in condizioni di sovraespansione, con particolare attenzione alla separazione del flusso. L'obiettivo è studiare, mediante simulazioni CFD condotte con **ANSYS FLUENT**[1], l'influenza di una parete orizzontale, di lunghezza variabile, posta a diverse distanze rispetto all'ugello, per simulare il comportamento all'interno di una camera del vento. Questo permetterà di comprendere in che modo la presenza di una superficie confinante possa alterare le caratteristiche della separazione del flusso e, di conseguenza, le prestazioni dell'ugello.

La tesi è organizzata in sette capitoli.

Nel Capitolo 2 verranno esposti i principi fondamentali degli endoreattori. Si analizzano le equazioni alla base del loro funzionamento, le differenze tra sovraespansione e sottoespansione e l'evoluzione delle geometrie adottate. In particolare, si discuteranno configurazioni come quella conica, TOP e TIC, evidenziando le caratteristiche che le rendono più o meno adatte a specifici scenari di utilizzo. Verranno inoltre presentate le principali formule utilizzate per il calcolo della portata, del coefficiente di spinta e di altri parametri fondamentali per la valutazione delle prestazioni dell'ugello.

Il Capitolo 3 è dedicato allo studio del fenomeno della separazione del flusso. Dopo una definizione del fenomeno e delle condizioni che ne favoriscono l'insorgenza, verranno analizzati gli effetti che esso ha sulle prestazioni dei motori a razzo, in particolare in termini di efficienza e di instabilità strutturali.

Nel Capitolo 4 si introduce la **Fluidodinamica Computazionale, CFD**, un potente strumento di analisi utilizzato per studiare il comportamento dei fluidi in scenari complessi. Verranno descritte le equazioni di **Navier-Stokes**, fondamentali per la modellizzazione del flusso, e i principi alla base del **Metodo dei Volumi Finiti**. Saranno inoltre accennati i concetti chiave relativi alla discretizzazione delle equazioni differenziali e alle tecniche numeriche più utilizzate, tra cui il **Metodo Upwind**. Infine, verrà presentato il software **ANSYS FLUENT**, illustrandone brevemente le funzionalità principali e la sua applicazione nel contesto della presente ricerca.

Il Capitolo 5 descrive in dettaglio la simulazione numerica sviluppata nell'ambito di questa tesi. Dopo una panoramica sulla geometria dell'ugello in oggetto e del dominio di calcolo, si passerà alla definizione della mesh utilizzata, spiegandone le caratteristiche e i criteri di qualità adottati. Verranno poi illustrate le condizioni al contorno imposte, i parametri di simulazione selezionati all'interno di Fluent e i motivi alla base di tali scelte. L'obiettivo di questo capitolo è fornire una visione chiara e dettagliata del processo seguito per condurre le simulazioni e garantire risultati attendibili.

Nel Capitolo 6 si analizzano i risultati ottenuti, presentando immagini del flusso generate con Fluent, grafici e dati numerici. L'attenzione sarà posta sulla valutazione dell'influenza della parete orizzontale sulla separazione del flusso e sui campi di pressione e velocità dell'ugello.

Infine, nel Capitolo 7, verranno tratte le conclusioni dello studio, sintetizzando i principali risultati ottenuti. Saranno inoltre suggerite possibili prospettive per futuri studi e sviluppi della ricerca.

## Capitolo 2

# Endoreattori e loro utilizzo

La curiosità di esplorare luoghi ancora inesplorati, di comprendere meglio l'universo, unita alla ricerca scientifica e alla progressiva necessità di disporre di strumenti e macchine sempre più potenti, precise e performanti, ha spinto l'uomo ad adattarsi a sfide sempre più complesse.

Soprattutto nell'ultimo secolo, il progresso ingegneristico e tecnologico nel settore aerospaziale ha visto l'evoluzione di veicoli in grado di oltrepassare l'atmosfera, raggiungendo luoghi remoti o considerati inaccessibili fino a poco tempo fa, con la possibilità di stabilizzarsi in orbita attorno ad un corpo celeste.

In questo contesto, il veicolo che permette di affrontare queste sfide, in particolare l'attraversamento e superamento dell'atmosfera terrestre e l'inserimento in ben precise orbite, è conosciuto come "*lanciatore*".

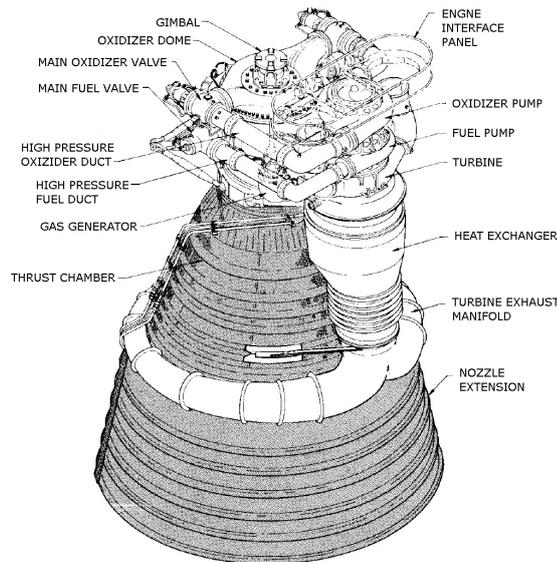
Tale veicolo è una macchina molto sofisticata, dotata principalmente di motori (con annessi serbatoi contenenti il propellente), chiamati endoreattori, che generano la spinta e di una struttura che protegge i serbatoi e il payload, il mezzo principale con il quale si effettuerà il cuore della missione. Un lanciatore può inoltre essere con o senza equipaggio. Esempi di lanciatori sono riportati in Figura 2.1.



**Figura 2.1:** Esempi di lanciatori ESA[2].

## 2.1 Principi di funzionamento degli endoreattori

Un endoreattore, o motore a razzo, è un motore utilizzato principalmente in ambito aerospaziale, grazie al suo funzionamento totalmente indipendente dall'atmosfera terrestre, a differenza degli esoreattori, motori utilizzati per i velivoli convenzionali. Per questo motivo, gli endoreattori trovano applicazioni in differenti tipologie di missioni spaziali: dal lancio alle missioni interplanetarie, dallo station-keeping alle manovre orbitali. In Figura 2.2 è mostrato un esempio di endoreattore.



**Figura 2.2:** F-1: endoreattore del primo stadio del Saturn V.[3]

Gli endoreattori sfruttano l'energia termica generata dalla combustione di un propellente per convertirla in energia propulsiva attraverso l'espansione e la successiva espulsione di gas ad alta temperatura e pressione, ottenuti da tale combustione, all'interno di ugelli convergenti-divergenti. Questo meccanismo, grazie al *terzo principio della dinamica* noto anche come *terza legge di Newton* o *principio di azione e reazione*, permette di generare la spinta, cioè la forza richiesta al veicolo per compiere la missione.

L'ugello convergente-divergente, o "*ugello de Laval*", è il componente essenziale di un endoreattore, in quanto determina l'efficienza con cui l'energia termodinamica del gas viene convertita in energia cinetica, influenzando direttamente la spinta generata. Per questo motivo, una corretta e precisa progettazione degli ugelli spaziali deve essere adeguatamente adatta al contesto in cui si opererà e tenere conto di vari parametri, soprattutto:

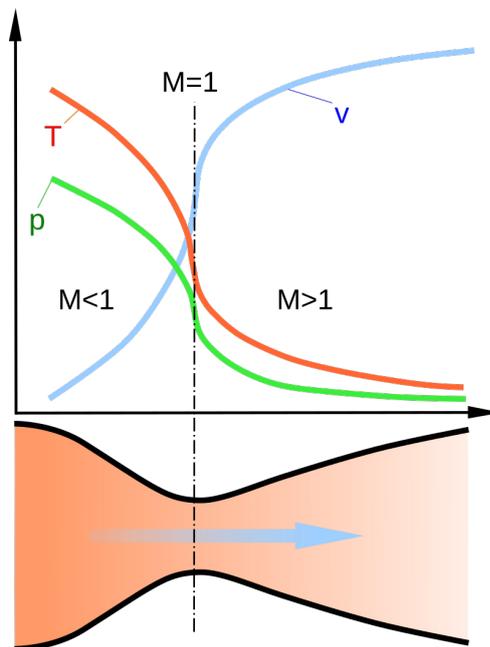
1. **Parametri geometrici:** lunghezza totale, diametri delle sezioni significative, rapporti di aree, forma geometrica e angolo di uscita.
2. **Parametri termodinamici:** pressione e temperatura in camera, pressione ambiente, tipo di fluido.

Come sarà approfondito nei capitoli successivi, la pressione ambiente, confrontata con quella del flusso in uscita dall'ugello, giocherà un ruolo fondamentale nel capire il fenomeno della separazione dello strato limite, che può indurre a problematiche di funzionamento.

## 2.2 Funzionamento degli ugelli

Come già anticipato, gli ugelli convergenti-divergenti hanno il compito di accelerare i gas di scarico fino a velocità supersoniche nella sezione divergente, con l'obiettivo di generare la spinta necessaria alla propulsione.

In Figura 2.3 è riportato l'andamento, lungo l'asse dell'ugello, di tre grandezze principali: numero di Mach, pressione statica e temperatura statica. Oltrepassata la sezione di gola, il flusso accelera fino a superare la velocità del suono, determinando una conseguente riduzione della pressione e della temperatura statica.



**Figura 2.3:** Ugello de Laval e andamento delle grandezze termodinamiche.[4]

## Leggi di conservazione

Le *leggi di conservazione* sono un concetto fondamentale alla base delle equazioni della meccanica dei fluidi. Conservazione implica che la variazione di una proprietà intensiva del fluido, cioè associata alle singole particelle, all'interno di un volume specificato è dovuta al contributo di sorgenti della quantità, interne al volume di controllo e superficiali, ed al bilancio netto tra il flusso in ingresso e quello in uscita della quantità, imputabili al movimento del fluido stesso[5]. Una legge di conservazione definisce il tasso di variazione di una quantità durante l'evoluzione della corrente.

In meccanica dei fluidi, le leggi di conservazione, che esprimono il moto e l'evoluzione di un fluido, sono espresse dalla conservazione della massa, della quantità di moto e dell'energia.

In particolare, le equazioni del moto per un fluido viscoso si ottengono applicando i seguenti principi:

1. **Conservazione della massa** o equazione di continuità: assicura la conservazione della massa durante il fenomeno, cioè la massa non si crea e non si distrugge. La si può scrivere in forma integrale,

$$\frac{d}{dt} \int_{\Omega} \rho d\Omega = - \oint_{\sigma} \rho \mathbf{V} \cdot \mathbf{n} d\sigma , \quad (2.1)$$

o in forma differenziale,

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \nabla \cdot (\rho \mathbf{V}) = 0 , \quad (2.2)$$

dove  $\rho$  e  $\mathbf{V}$  rappresentano rispettivamente la densità e la velocità del fluido. Essa è una legge di natura cinematica che non riguarda le forze applicate al fluido nel volume di controllo.

2. **Conservazione della quantità di moto**, che descrive le forze agenti sul fluido e dimostra che la variazione di quantità di moto è uguale alle forze applicate. Anche questa legge è possibile esprimerla in forma integrale,

$$\frac{d}{dt} \int_{\Omega} \rho \mathbf{V} d\Omega = - \oint_{\sigma} \rho \mathbf{V} (\mathbf{V} \cdot \mathbf{n}) d\sigma + \oint_{\sigma} \mathbf{\Pi} \cdot \mathbf{n} d\sigma + \int_{\Omega} \rho \mathbf{f} d\Omega , \quad (2.3)$$

o in forma differenziale,

$$\rho \frac{\partial \mathbf{V}}{\partial t} + \rho \mathbf{V} \cdot \nabla \mathbf{V} = -\nabla p + \nabla \cdot \boldsymbol{\tau} + \rho \mathbf{f} , \quad (2.4)$$

dove  $\boldsymbol{\Pi}$ ,  $\rho \mathbf{f}$  e  $p$  rappresentano rispettivamente il tensore degli sforzi, le forze di campo per unità di volume e la pressione. Tale legge rappresenta una forma generalizzata della *legge di Newton*.

3. **Conservazione dell'energia**, ovvero che l'energia non si crea e non si distrugge. Nella formulazione integrale appare come

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} \int_{\Omega} \rho E d\Omega = & - \oint_{\sigma} \rho E \mathbf{V} \cdot \mathbf{n} d\sigma + \oint_{\sigma} (\boldsymbol{\Pi} \cdot \mathbf{V}) \cdot \mathbf{n} d\sigma + \\ & + \int_{\Omega} \rho \mathbf{f} \cdot \mathbf{V} d\Omega - \oint_{\sigma} \mathbf{q} \cdot \mathbf{n} d\sigma + \int_{\Omega} Q_v d\Omega , \end{aligned} \quad (2.5)$$

mentre nella formulazione differenziale si scrive

$$\rho \frac{\partial E}{\partial t} + \rho \mathbf{V} \cdot \nabla E = -\nabla \cdot (p\mathbf{V}) + \nabla \cdot (\boldsymbol{\tau} \cdot \mathbf{V}) + \rho \mathbf{f} \cdot \mathbf{V} - \nabla \cdot \mathbf{q} + Q_v , \quad (2.6)$$

dove  $E$ ,  $\mathbf{q} \cdot \mathbf{n}$  e  $Q_v$  rappresentano rispettivamente l'energia totale per unità di massa, il flusso superficiale di calore e le sorgenti di calore volumiche. Il principio di conservazione dell'energia è una formulazione del *primo principio della Termodinamica*.

Tramite opportuni passaggi e assunzioni, si ottengono le *equazioni di Navier-Stokes*<sup>1</sup>, che permettono di esprimere il campo vettoriale  $\mathbf{V}$  e le due variabili scalari  $\rho$  ed  $E$ :

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x_i} (\rho u_i) = 0 \quad (2.7)$$

---

<sup>1</sup>Vengono riportate le equazioni di *Navier-Stokes* in coordinate cartesiane con la notazione indiciale.

$$\rho \left( \frac{\partial u_i}{\partial t} + u_j \frac{\partial u_i}{\partial x_j} \right) = - \frac{\partial p}{\partial x_i} + \frac{\partial}{\partial x_j} \left[ \mu \left( \frac{\partial u_i}{\partial x_j} + \frac{\partial u_j}{\partial x_i} \right) - \frac{2}{3} \mu \delta_{ij} \frac{\partial u_k}{\partial x_k} \right] + \rho f_i \quad (2.8)$$

$$\begin{aligned} \rho \left( \frac{\partial E}{\partial t} + u_i \frac{\partial E}{\partial x_i} \right) = & - \frac{\partial}{\partial x_i} (p u_i) + \frac{\partial}{\partial x_j} \left\{ \left[ \mu \left( \frac{\partial u_i}{\partial x_j} + \frac{\partial u_j}{\partial x_i} \right) - \frac{2}{3} \mu \delta_{ij} \frac{\partial u_k}{\partial x_k} \right] u_i \right\} \\ & + \rho f_i u_i + \frac{\partial}{\partial x_i} \left( \kappa \frac{\partial T}{\partial x_i} \right) + Q_v . \end{aligned} \quad (2.9)$$

## 2.3 Modello di endoreattore ideale, grandezze e formule fondamentali

### Prestazioni e grandezze fondamentali

Quando si parla delle grandezze principali nel settore spaziale, si fa sostanzialmente riferimento alle prestazioni dell'endoreattore. Si parte sempre dalla definizione di una prestazione per poi inserirla in un ben preciso contesto, ovvero il modello, per il calcolo approssimato di questa grandezza[6]. Vengono quindi riportate le definizioni delle grandezze principali:

- **Spinta:**

$$F = \dot{m} w_e + A_e (p_e - p_0) ; \quad (2.10)$$

- **Impulso totale:** prestazione importante per definire l'effetto della spinta nel tempo, espresso come

$$I_t = \int_0^t F dt, \quad (2.11)$$

ed è proporzionale alla variazione totale di quantità di moto, e quindi anche all'energia rilasciata, impressa nel tempo al motore;

- **Impulso specifico:** rappresenta la spinta per unità di portata in peso del propellente, espresso come

$$I_s = \frac{\int_0^t F dt}{g_0 \int_0^t \dot{m} dt}. \quad (2.12)$$

È una prestazione importante del sistema propulsivo. Per spinte e portate costanti nel tempo, l'impulso specifico si può riscrivere come

$$I_s = \frac{F}{g_0 \dot{m}} = \frac{c}{g_0}. \quad (2.13)$$

- **Velocità efficace di scarico:** rappresenta la velocità dei gas alla sezione di uscita nel caso di un ugello adattato.

Tale prestazione si esprime come

$$c = \frac{F}{\dot{m}} \quad (2.14)$$

ed è un indice della bontà della camera di spinta, ovvero l'unione di camera di combustione e ugello.

- **Velocità caratteristica:** prestazione definita come

$$c^* = \frac{p_c A_t}{\dot{m}} . \quad (2.15)$$

Non rappresenta una vera e propria velocità fisica, bensì è strettamente legata all'efficienza del processo di combustione, quindi è un indice della bontà della camera di combustione.

- **Coefficiente di spinta:** prestazione definita come

$$C_F = \frac{F}{p_c A_t} . \quad (2.16)$$

È una grandezza adimensionale e indica la bontà dell'ugello, cioè la spinta che si ottiene riferendosi ad una spinta fittizia generata all'istante iniziale.

Si nota che

$$c = C_F c^* . \quad (2.17)$$

- **Mixture ratio:** non è una prestazione ma è importante nella progettazione di un endoreattore.

È definito come il rapporto tra portata di ossidante e portata di combustibile

$$r_m = \frac{\dot{m}_{ox}}{\dot{m}_f} . \quad (2.18)$$

- **Densità media di propellente,** definita come

$$\rho = \frac{\rho_{ox}\rho_f(1 + r_m)}{r_m\rho_f + \rho_{ox}} , \quad (2.19)$$

tiene in conto delle densità di ossidante e combustibile, dipendendo da  $r_m$ .

- **Impulso specifico per densità:** definito come

$$I_\rho = I_s \rho , \quad (2.20)$$

è una prestazione molto importante nella scelta dei propellenti dei primi stadi che necessitano di volumi non troppo grandi e stabilità strutturale.

## Modello di endoreattore ideale

Sotto opportune ipotesi, le prestazioni appena elencate possono essere utilizzare in un modello di endoreattore ideale, utilizzando i principi della termodinamica in una forma relativamente semplificata, con il fine di ottenere in prima approssimazione risultati e stime necessarie ad una progettazione preliminare. Sperimentalmente si nota che le prestazioni calcolate dal modello si discostano dai valori reali con un errore relativo di circa il 5%. Il modello dovrà essere quindi modificato applicando dei ben precisi fattori correttivi dovuti agli effetti reali[6].

Le ipotesi appena accennate sono:

1. **Fluido omogeneo**, ovvero stesse proprietà e stessa fase in ogni punto e getti ben miscelati;
2. **Equilibrio chimico in camera di combustione**, ovvero *shifting equilibrium*, ad indicare che ogni reazione raggiunge l'equilibrio chimico grazie ai tempi di permanenza in camera di combustione sufficientemente lunghi;
3. **Gas perfetto** con  $\gamma = \text{cost}$  e per cui vale la legge dei gas perfetti

$$p = \rho RT ; \quad (2.21)$$

4. **Fluido con composizione costante**, ovvero *frozen equilibrium*, in cui si assume che la composizione rimanga costante ("congelata") a causa dei tempi di permanenza delle particelle fluide dentro l'ugello molto brevi, che non permettono il raggiungimento di un nuovo equilibrio chimico;
5. **Espansione adiabatica**, per cui non si verificano scambi di calore tra gas e pareti;
6. **Non sono presenti onde d'urto o altre discontinuità**;
7. **Non sono presenti gli effetti dello strato limite**, per cui insieme alle due ipotesi precedente, l'evoluzione del flusso sarà isentropica;
8. **Flusso 1D in uscita**, ovvero non sono presenti perdite per divergenza;
9. **Velocità assiale**;
10. **Flusso stazionario**, senza quindi variazioni o fluttuazioni di prestazioni o instabilità di combustione

Sotto queste ipotesi, si evince che l'entalpia totale si conserva secondo la legge

$$h_c = h_e + \frac{w_e^2}{2} , \quad (2.22)$$

da cui si può ricavare la velocità di uscita del gas

$$w_e = \sqrt{2c_p T_c \left(1 - \frac{1}{\beta^{\frac{\gamma-1}{\gamma}}}\right)} \quad (2.23)$$

con

$$\beta = \frac{p_c}{p_e}. \quad (2.24)$$

Sapendo, inoltre, che è possibile scrivere la portata attraverso la sezione di gola come

$$\dot{m}_t = \frac{p_c A_t}{\sqrt{\frac{\mathcal{R}}{\mathcal{M}} T_c}} \Gamma, \quad (2.25)$$

con

$$\Gamma = \sqrt{\gamma} \left(\frac{2}{\gamma+1}\right)^{\frac{\gamma+1}{2(\gamma-1)}}, \quad (2.26)$$

e quella attraverso la sezione d'uscita come

$$\dot{m}_e = \frac{p_c A_e}{\sqrt{\frac{\mathcal{R}}{\mathcal{M}} T_c}} \sqrt{2 \frac{\gamma}{\gamma-1} \left[ \left(\frac{p_e}{p_c}\right)^{\frac{2}{\gamma}} - \left(\frac{p_e}{p_c}\right)^{\frac{\gamma+1}{\gamma}} \right]}, \quad (2.27)$$

uguagliandole, si ottiene la relazione che esprime il rapporto di espansione

$$\varepsilon = \frac{A_e}{A_t} = \frac{\Gamma}{\sqrt{2 \frac{\gamma}{\gamma-1} \left[ \left(\frac{p_e}{p_c}\right)^{\frac{2}{\gamma}} - \left(\frac{p_e}{p_c}\right)^{\frac{\gamma+1}{\gamma}} \right]}} \quad (2.28)$$

Pertanto, fissate  $\varepsilon$  e  $\gamma$ , ovvero fissata la geometria e scelta la composizione del propellente, il rapporto

$$\frac{p_c}{p_e} = \text{cost}.$$

Il rapporto di espansione rappresenta uno dei parametri più importanti nello studio e nel calcolo delle prestazioni degli ugelli spaziali.

Sostituendo la definizione di coefficiente di spinta (2.16) nella definizione di spinta (2.10), tramite opportuni passaggi, si ottiene il coefficiente di spinta:

$$C_F = \Gamma \sqrt{2 \frac{\gamma}{\gamma-1} \left[ 1 - \left(\frac{p_e}{p_c}\right)^{\frac{\gamma-1}{\gamma}} \right]} + \varepsilon \left(\frac{p_e}{p_c} - \frac{p_0}{p_c}\right), \quad (2.29)$$

espresso come funzione di

$$C_F = C_F \left( \gamma, \varepsilon, \frac{p_0}{p_c} \right) . \quad (2.30)$$

Come accennato precedentemente, tra i tre parametri  $\varepsilon$ ,  $\gamma$  e  $\frac{p_e}{p_c}$ , basta fissarne due di questi, per determinare univocamente il terzo. Per questo motivo si ha la dipendenza espressa nella relazione (2.30).

### 2.3.1 Effetti di $\varepsilon$ , $\frac{p_c}{p_0}$ e $\gamma$ sul coefficiente di spinta $C_F$

#### Effetto di $\varepsilon$

Fissato un valore del rapporto dei calori specifici  $\gamma$  e fissato il rapporto  $\frac{p_c}{p_0}$ , è possibile diagrammare il coefficiente di spinta  $C_F$  in funzione del rapporto di espansione  $\varepsilon$ . Fissando ad esempio:

$$\gamma = 1.2 \quad \text{e} \quad \frac{p_c}{p_0} = 200$$

si ottiene il grafico mostrato in Figura 2.4, che riporta l'andamento del  $C_F$ .

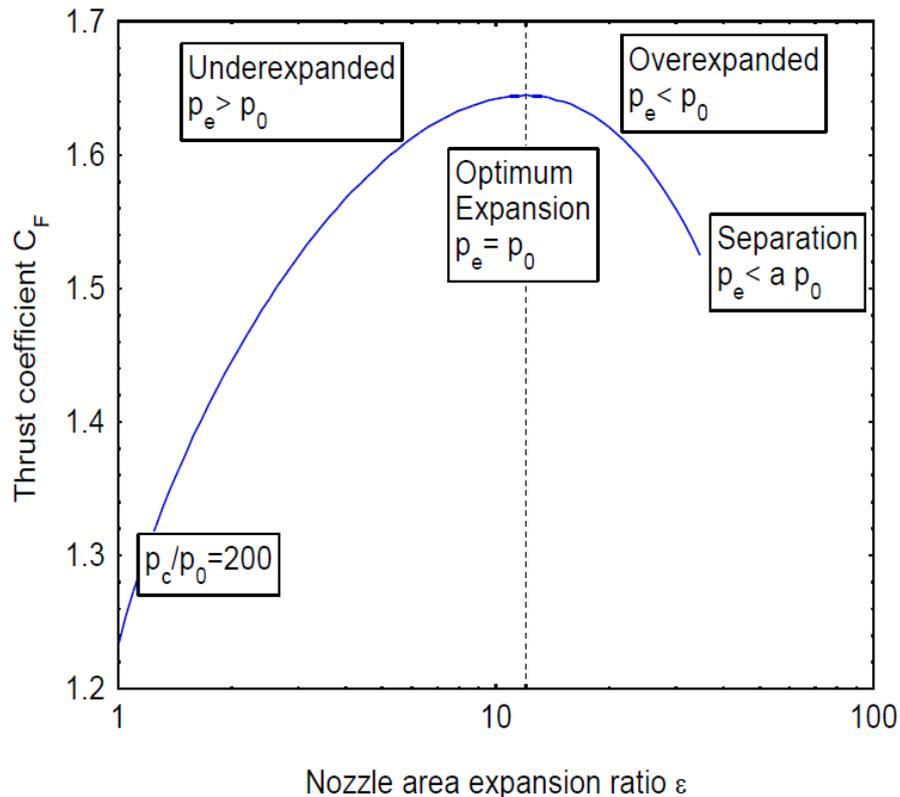
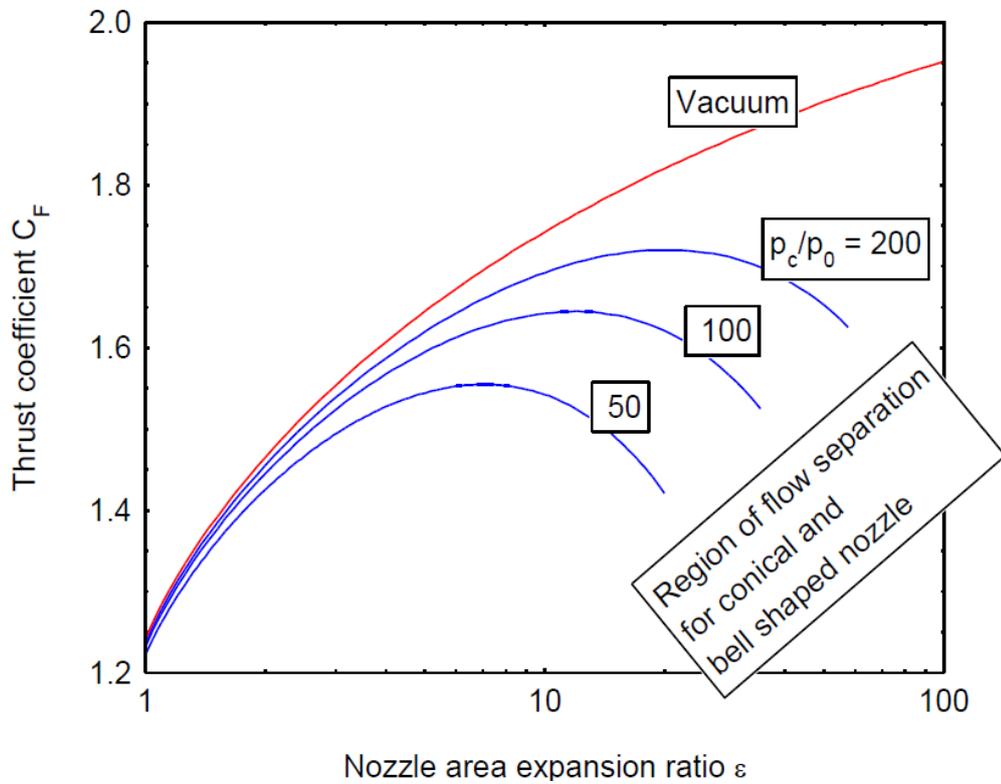


Figura 2.4: Effetto di  $\varepsilon$  sul  $C_F$ . [6]

Si può notare che il massimo del coefficiente di spinta lo si ottiene per condizioni di adattamento, ovvero quando  $p_e = p_0$ . Nella regione a sinistra, si avrà una condizione di sottoespansione, mentre nella regione a destra si avrà una condizione di sovraespansione, zona in cui può avvenire la separazione. Esiste, inoltre, un limite del rapporto di espansione per evitare la separazione del getto.

**Effetto di  $\frac{p_c}{p_0}$**

Nel grafico mostrato in Figura 2.5 si visualizza l'andamento del coefficiente di spinta al variare del rapporto tra pressione in camera e pressione ambiente,  $\frac{p_c}{p_0}$ .



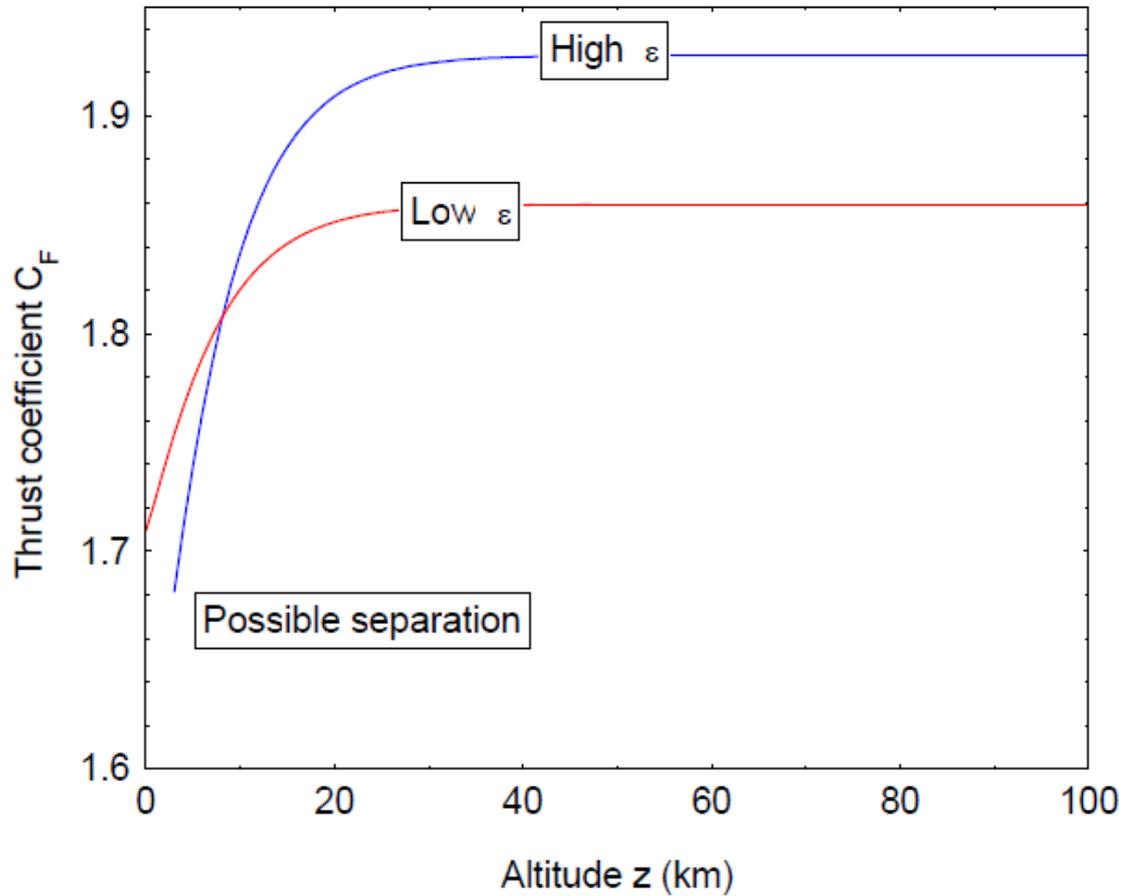
**Figura 2.5:** Effetto di  $\frac{p_c}{p_0}$  sul  $C_F$ . [6]

A parità di  $\gamma$  ed  $\epsilon$ , il  $C_F$  cresce con l'aumentare di  $\frac{p_c}{p_0}$  e presenta un massimo nel vuoto. Il massimo teorico si raggiungerebbe quindi con l'adattamento nel vuoto, ovvero

$$p_e = p_0 = 0 .$$

**Effetto della quota  $z$** 

Il grafico in Figura 2.6 mostra l'effetto della quota sul coefficiente di spinta a dato rapporto  $\varepsilon = \frac{A_e}{A_t}$ , fissata la pressione in camera  $p_c$ .



**Figura 2.6:** Effetto della quota  $z$  sul  $C_F$  per due ugelli con differente  $\varepsilon$ . [6]

Un rapporto di pressioni più alto risulta favorevole per un  $C_F$  maggiore per quote più elevate, ma sconsigliato per quote basse, presentando anche il problema della separazione.

Se si fissa un valore della pressione in camera  $p_c$ , si può riguardare il grafico in Figura 2.5 capendo come influisce la quota sul coefficiente di spinta. Tale influenza è mostrata nel grafico in Figura 2.7.

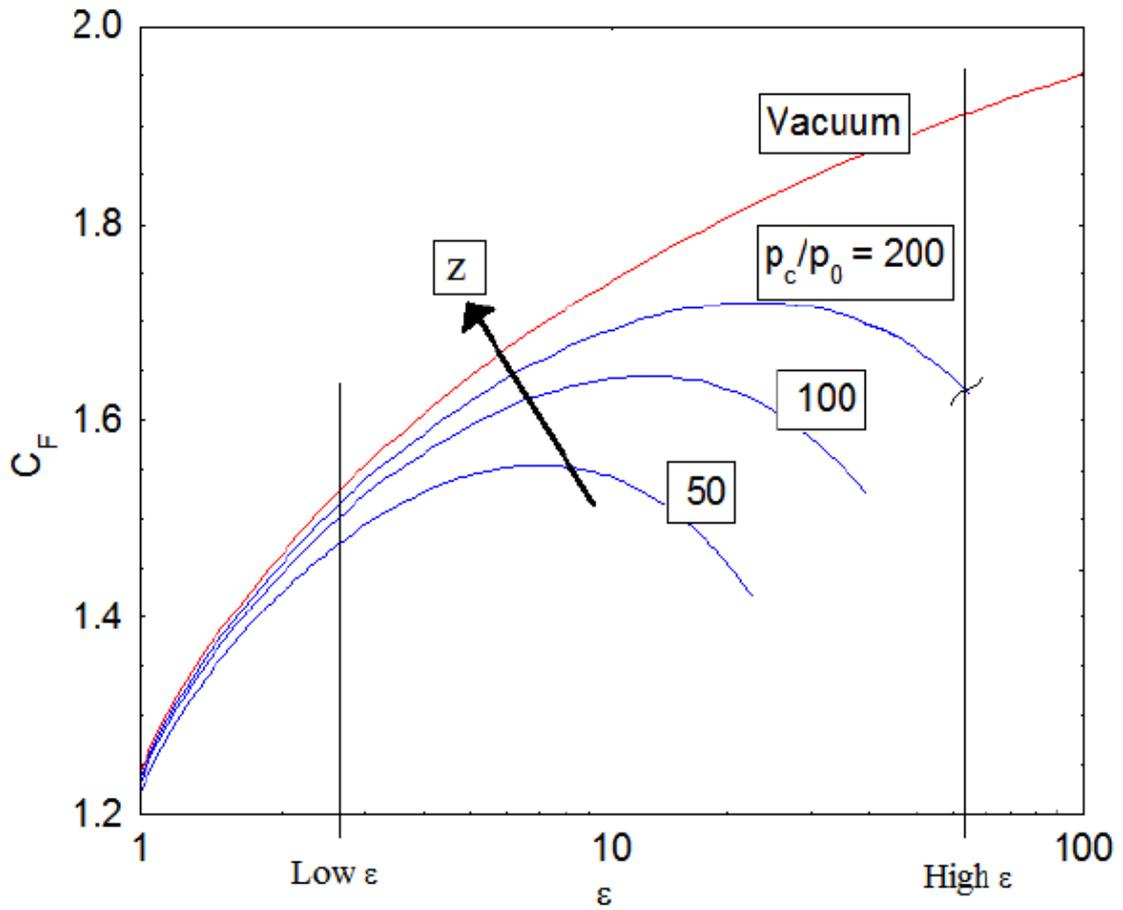
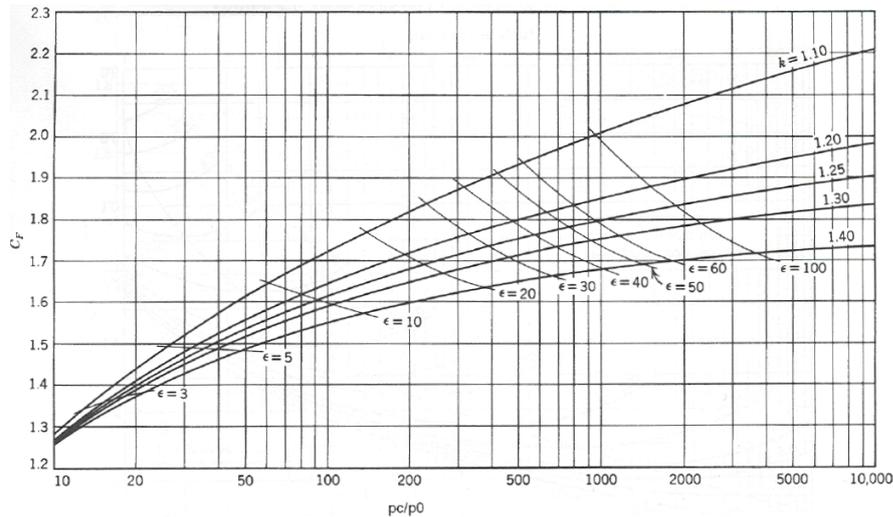


Figura 2.7: Effetto della quota  $z$  sul  $C_F$ . [6]

### Effetto del $\gamma$

Fissato un valore per  $\frac{p_c}{p_e}$ , è possibile diagrammare l'andamento del coefficiente di spinta in funzione di  $\gamma$  per il caso adattato, come riportato in Figura 2.8.



**Figura 2.8:** Effetto del  $\gamma$  sul  $C_F$ . [6]

Il  $C_F$  cresce al diminuire di  $\gamma$  (indicato come  $k$  nella figura) e cresce anche il corrispondente rapporto  $\frac{A_e}{A_t}$  necessario per avere un ben preciso valore di espansione in termini di pressione. Con valori di  $\gamma$  più piccoli, infatti, la molecola ha più gradi di libertà e occupa più spazio. Per questo motivo, a parità di rapporto di pressioni, c'è bisogno di una sezione più grande. Di conseguenza il coefficiente di spinta aumenta perché si ha una parete più estesa su cui esercitare la pressione.

## 2.4 Ugello sottoespanso, sovraespanso e adattato

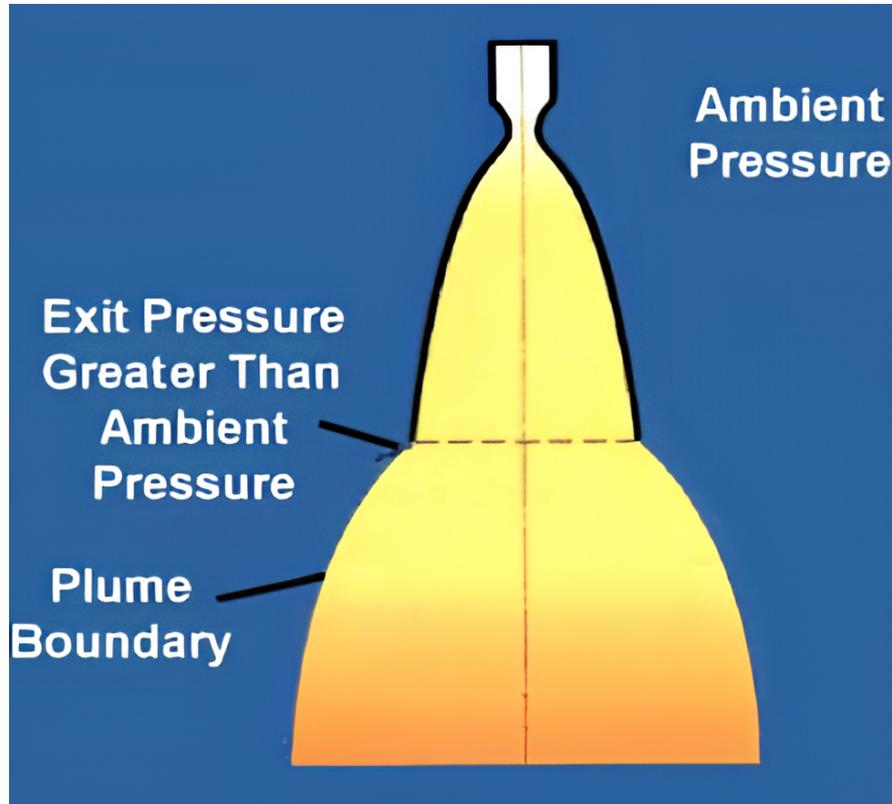
Come si è visto nei paragrafi precedenti, una possibile criticità nel funzionamento degli ugelli spaziali è la possibilità di operare in ambienti in cui si registra una sostanziale e rapida variazione della pressione ambiente, come ad esempio gli ugelli installati nel primo stadio di un lanciatore che devono funzionare a pressioni che variano da quota zero (livello del mare) e quindi una pressione pari a  $p = 1 \text{ atm} = 101325 \text{ Pa}$  fino a pressioni dell'ordine di qualche migliaio di Pascal.

A seconda delle condizioni operative, un ugello può trovarsi in regime di:

- **Sottoespansione:** condizione che si verifica quando la pressione del gas in uscita dall'ugello è maggiore della pressione ambiente, per cui si ha

$$p_e > p_0 ,$$

generando un'espansione ulteriore del flusso al di fuori dell'ugello. In questo caso, il flusso continua a espandersi verso l'esterno dopo essere uscito dall'ugello, come mostrato in Figura 2.9.



**Figura 2.9:** Ugello Sottoespanso.[7]

Questo comportamento riduce l'efficienza perché quell'espansione esterna non esercita alcuna forza sulla parete dell'ugello. Di conseguenza, questa energia non può quindi essere convertita in spinta e viene persa. Idealmente, per sfruttare in termini vantaggiosi l'ulteriore espansione e convertirla in spinta utile, l'ugello dovrebbe essere più lungo, ma ugello più lungo significa anche ugello più pesante.

La sottoespansione si può schematizzare come in Figura 2.10. Mentre ciò che si visualizza fisicamente è osservabile nella Figura 2.11.

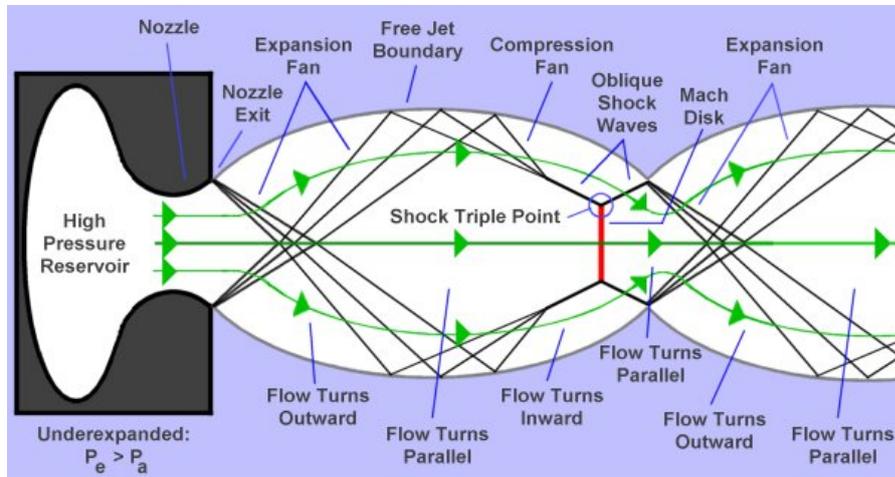


Figura 2.10: Fenomeno di sottoespansione.[8]

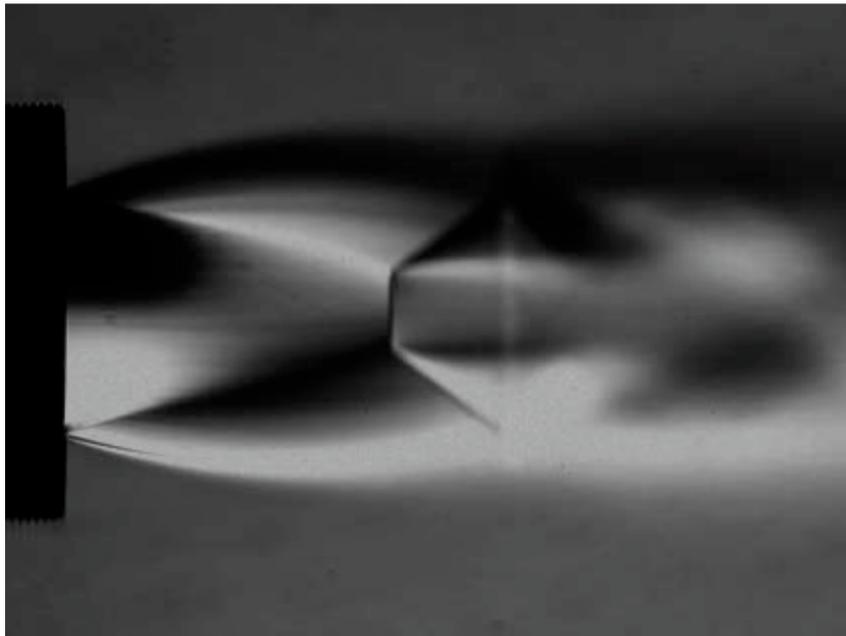


Figura 2.11: Flusso sottoespanso in uscita dall'ugello.[9]

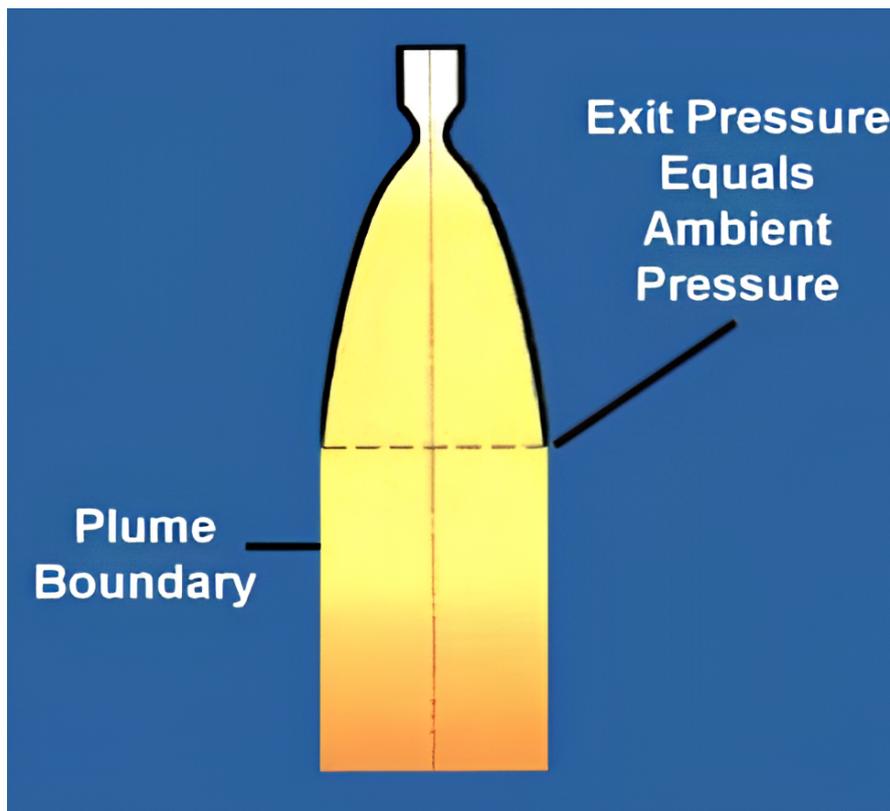
È la tipica condizione di ugelli ad alta quota o in *outer space*: la scia di gas esausti continua ad espandersi una volta fuori dall'ugello, riducendo l'efficienza.

- **Adattamento:** condizione che si verifica quando la pressione del gas nella sezione di uscita dall'ugello è uguale a quella ambiente, per cui

$$p_e = p_0 .$$

Questa condizione rappresenta il caso ottimale in cui l'ugello sta operando in condizioni di massimo coefficiente di spinta.

In Figura 2.12 è possibile vedere la configurazione del flusso in uscita nella condizione di adattamento.



**Figura 2.12:** Ugello Adattato.[7]

Questa condizione mostra una scia del flusso a "colonna", perfettamente allineata con l'asse dell'ugello, producendo il massimo dell'efficienza.

- **Sovraespansione:** condizione che si verifica quando la pressione del gas in uscita è inferiore alla pressione ambiente, ovvero

$$p_e < p_0 ,$$

il che può portare alla separazione del flusso e a fenomeni di instabilità aerodinamica. Quando un flusso sovraespanso evolve all'interno di un ugello, la pressione atmosferica, più elevata, fa sì che il flusso in uscita devii verso l'interno e si separi dalle pareti dell'ugello, come mostrato in Figura 2.13.

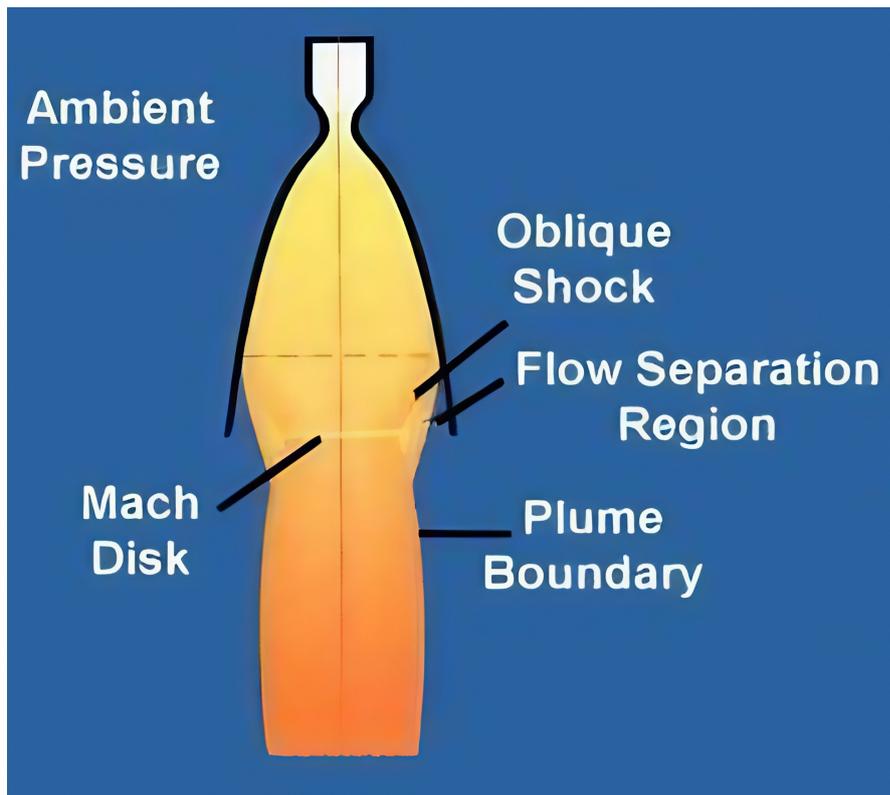


Figura 2.13: Ugello sovraespanso.[7]

Come si approfondirà in seguito, questo distacco del flusso in linea teorica non comporterebbe un'ulteriore riduzione di efficienza dell'ugello perché farebbe tendere il coefficiente di spinta verso un valore circa costante, senza diminuire ulteriormente. Rimane comunque un fenomeno da evitare per ragioni strutturali e, quindi, anche di sicurezza.[6]

La sovraespansione si può schematizzare come mostra la Figura 2.14.

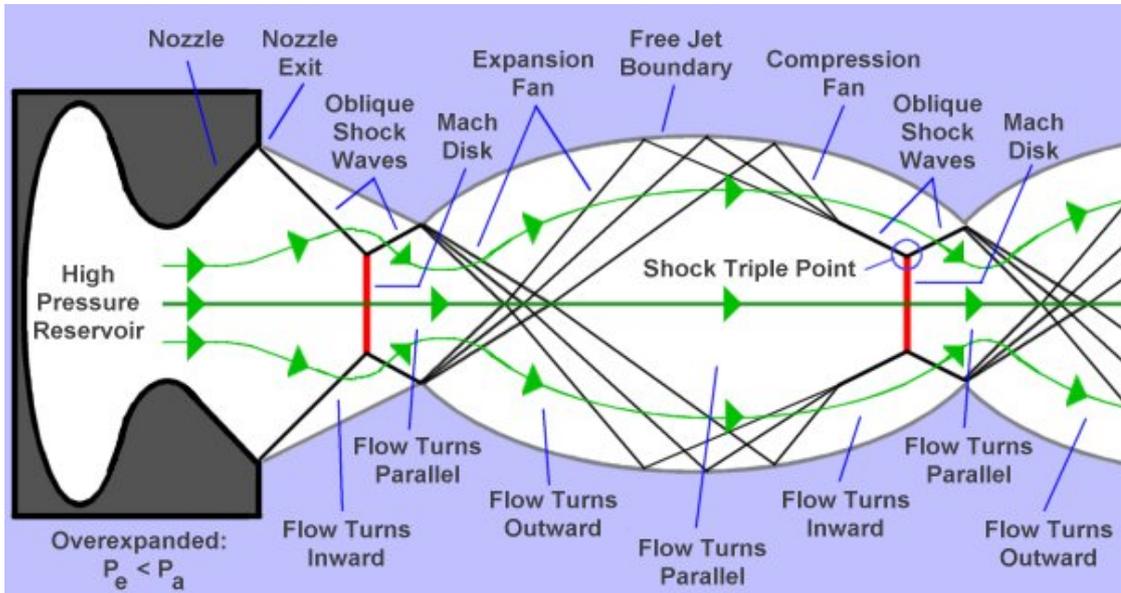
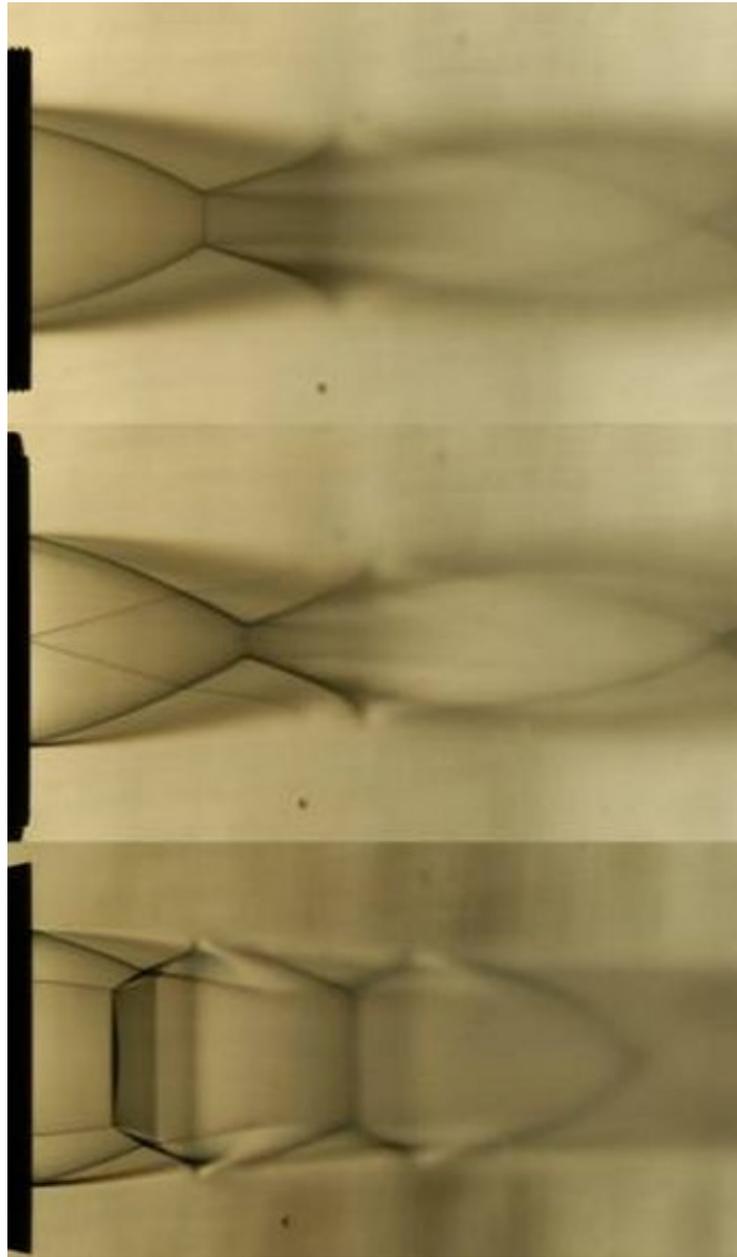


Figura 2.14: Fenomeno di sovraespansione.[8]

La Figura 2.15 nella pagina seguente, mostra i risultati osservabili e visualizzabili degli esperimenti reali.



**Figura 2.15:** Flusso sovraespanso con formazione di urti e separazione.[7]

La condizione di sovraespansione è tipica di ugello che sta operando in ambiente a livello del mare, dove la pressione atmosferica è massima. La scia risulta schiacciata in prossimità dell'uscita, riducendo l'efficienza dell'ugello, rispetto all'adattamento, dando vita alla formazione del cosiddetto *disco di Mach* e delle strutture a diamante.

## 2.5 Effetti reali

Come accennato nei paragrafi precedenti, il modello di endoreattore ideale si basa su delle ipotesi semplificative che possono discostarsi relativamente poco dalla realtà ma che potrebbero non tenere in conto di alcuni fenomeni.

Per questo motivo è importante capire quali siano gli effetti reali che influenzano e discostano il modello dalla realtà, dando un'idea sulle perdite di prestazioni<sup>2</sup> che ci sono negli endoreattori.

Tra questi si considerano prima quelli in camera di combustione:

- **Mixing:** riguarda il miscelamento non completo e/o la presenza di vapori;
- **Combustione incompleta:** la reazione di combustione potrebbe non completarsi o addirittura potrebbero non verificarsi le reazioni che erano previste dal modello.

Si considerano successivamente gli effetti reali all'interno dell'ugello, tra cui:

- **Perdite dovute alla cinetica chimica:** la reazione chimica necessita di tempi precisi per avvenire e raggiungere l'equilibrio.

Tali perdite possono comportare una riduzione delle prestazioni fino al 10%;

- **Perdite per flusso multi-fase:** dovute alla non omogeneità del flusso;
- **Perdite per flusso diabatico:** si verificano scambi termici che dissipano energia.

Queste perdite possono determinare un calo delle prestazioni che può raggiungere il 5%;

- **Perdite per divergenza del flusso in uscita:** nella realtà non si ha un flusso 1D e quindi una velocità unidimensionale.

La presenza di tali perdite può ridurre le prestazioni fino al 3%;

- **Perdite per flusso non uniforme:** queste perdite possono influenzare negativamente le prestazioni, con una riduzione che può toccare il 5%;
- **Perdite dovute allo strato limite e attrito:** riguardano anche il fenomeno della separazione, in cui il fluido che scorre sulla parete dell'ugello, perde aderenza alla superficie stessa.

A causa di tali perdite, le prestazioni possono subire una riduzione fino al 5%.

---

<sup>2</sup>Tipicamente si fa riferimento all'impulso specifico nel vuoto,  $I_{s_{vac}}$ .

Alcune perdite, come quelle per divergenza, possono essere sensibilmente ridotte scegliendo la forma più opportuna per l'ugello. Altre, invece, come le perdite cinetiche, non possono essere attenuate. Le perdite dipendono dalle condizioni operative e dalle dimensioni del motore, e possono interagire tra loro, come le perdite dovute allo strato limite e gli scambi termici in quella regione, creando effetti sinergici.

## 2.6 Evoluzione della forma degli ugelli

Come appena accennato, la divergenza del flusso in uscita dà origine a perdite sulle prestazioni dell'endoreattore. Tali perdite sono dovute sostanzialmente alla forma del tratto divergente. Sotto le ipotesi del modello di endoreattore ideale, si considera la velocità unidimensionale e assiale.

In realtà, queste assunzioni non si verificano in generale e la divergenza del flusso porta a una riduzione della spinta reale rispetto a quella ideale, attraverso un fattore moltiplicativo  $\lambda$ . Per questo motivo, la geometria dell'ugello gioca un ruolo cruciale nell'ottimizzazione delle prestazioni.

La sezione convergente dell'ugello può essere molto corta e con angoli elevati, poiché in questa regione il flusso è subsonico e i gradienti di pressione sono favorevoli. Questa scelta consente di ridurre il peso, limitando l'estensione della superficie convergente.

### Ugello Conico.

Supponendo di avere un ugello conico con angolo di semiapertura  $\alpha$  come in Figura 2.16, il flusso non risulta uniforme, unidimensionale e assiale sullo stesso piano, bensì risulta uniforme su una calotta sferica. Il collegamento tra la sezione convergente e quella divergente avviene nella gola dell'ugello, dove vengono impiegati due raggi di raccordo distinti.

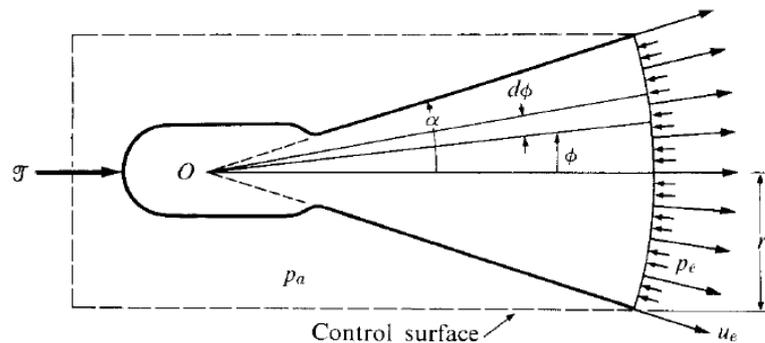


Figura 2.16: Ugello conico.[6]

Lungo la calotta sferica, il flusso mantiene velocità e pressione costanti, ma con direzioni differenti, per l'esattezza radiali. Di conseguenza, solo la componente assiale della velocità contribuisce alla spinta, mentre le componenti assialsimmetriche, dovute alla simmetria assiale del flusso, si annullano tra loro.

Applicando il teorema della quantità di moto all'interno della superficie di controllo indicata, si ottiene una formulazione per la spinta pari a

$$F = \lambda [\dot{m}w_e + (p_e - p_a)A_e] \quad (2.31)$$

dove  $\lambda$  è proprio il fattore citato precedentemente che tiene conto della divergenza del flusso:

$$\lambda = \frac{1 + \cos(\alpha)}{2} \quad (2.32)$$

In passato, gli ugelli conici erano largamente utilizzati grazie alla loro semplicità costruttiva e ai costi contenuti e tuttora vengono utilizzati in alcuni contesti per la loro semplicità. Tuttavia, come si può dedurre dalla relazione (2.31), grandi valori di  $\alpha$  determinano grandi perdite e d'altro canto, ridurre troppo  $\alpha$ , per avere valori di spinta maggiori, determinerebbe divergenti troppo lunghi (e quindi anche pesanti, ingombranti e più difficili da refrigerare) a parità di rapporto di espansione  $\varepsilon$  fissato.

Per questo motivo, gli ugelli conici sono caratterizzati da angoli di semiapertura con valori all'interno del range

$$\alpha = 12^\circ \div 18^\circ.$$

Nel corso degli anni, l'industria aerospaziale ha sviluppato diverse configurazioni di ugelli per ottimizzare le prestazioni e ad allineare efficacemente il flusso, realizzando lunghezze contenute.

### Ugello a Campana TOC: Thrust Optimized Contoured

Una delle alternative all'ugello conico è stata ideata dall'ingegnere aerospaziale americano *G. V. R. Rao*. L'idea è quella di costruire un ugello che, rispetto alla lunghezza dell'ugello conico, sia più corto e che abbia anche degli angoli in uscita che siano minori.

La forma che viene proposta è quella in cui il flusso subisce una rapida espansione subito dopo la sezione di gola, per poi essere riallineato verso direzioni assiali fino all'uscita. Tale forma viene detta "*a Campana*". In questo modo si ottengono angoli in uscita e lunghezze ridotte rispetto al conico. ugelli di questo tipo possono avere spinte migliori, con lunghezze inferiori.

A causa della rapida espansione a valle della gola, si genereranno delle onde di espansione che interferiranno con delle onde di ricomprensione lungo la parete

dell'ugello. Sarà presente, inoltre, un urto che determinerà delle dissipazioni e che potrebbe essere tanto indebolito quanto le onde di espansione interagiranno con quelle di compressione.

Con questa forma, quindi, si ottengono alla fine angoli in uscita molto piccoli, minimizzando le perdite per divergenza.

Tuttavia il flusso non sarà uniforme, infatti si avrà un "cuore"<sup>3</sup> più veloce rispetto al flusso a parete:

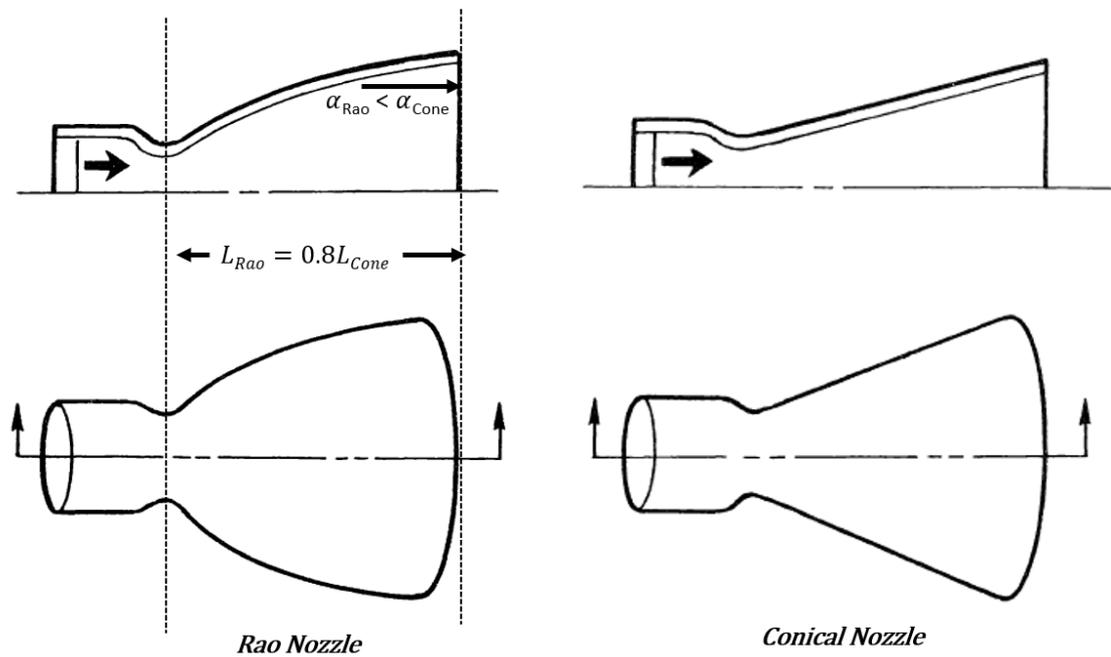
$$w_{wall} < w_{core} .$$

Questo comporta pressioni a parete maggiori di quelle in prossimità dell'asse di simmetria:

$$p_{wall} > p_{core} ,$$

rendendo l'ugello meno soggetto a separazione e quindi una forma geometrica più vantaggiosa.

In Figura 2.17 e 2.18 si osservano le principali differenze tra un ugello a campana e uno conico.



**Figura 2.17:** Confronto tra ugello a campana e conico.

<sup>3</sup>Regione del flusso più interna nell'ugello.

In Figura 2.17, in particolare, si nota come nell'ugello a campana si riescano ad ottenere lunghezze e angoli di uscita ridotti a parità di rapporto di espansione  $\varepsilon$ . Nella Figura 2.18, invece, viene mostrata una differenza più dettagliata, prestando attenzione anche agli angoli di inizio divergente e i raggi di curvatura.

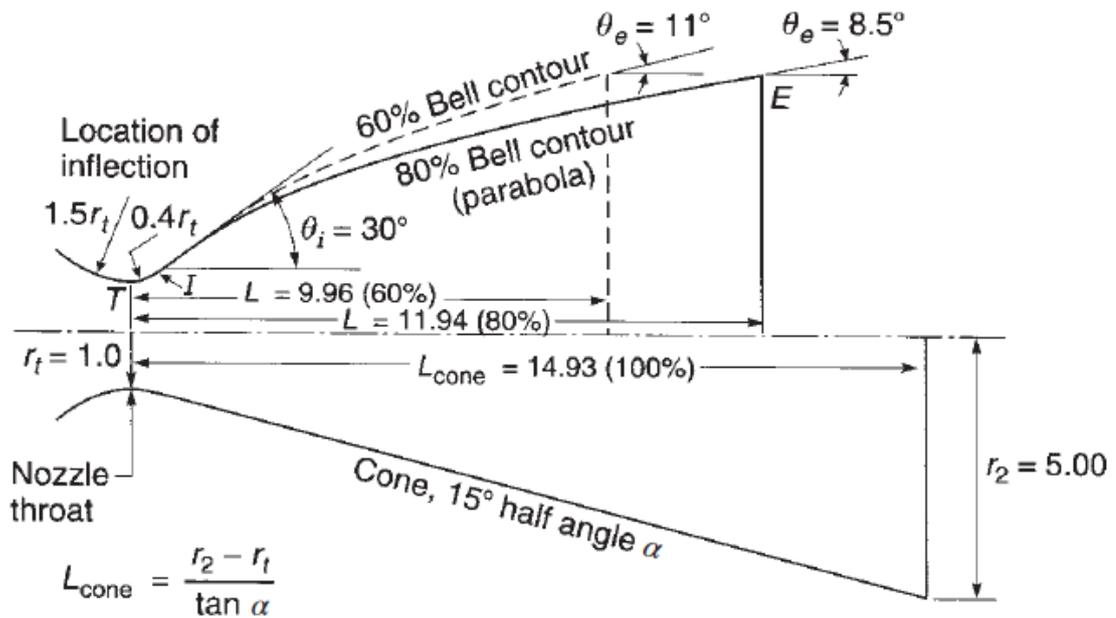


Figura 2.18: Confronto dettagliato tra ugello a campana e ugello conico.[10]

### Ugello Parabolico TOP: Thrust Optimized Parabolic

Il profilo dell'ugello ottimizzato TOC è approssimata molto bene da una parabola per cui è più semplice definirne i parametri geometrici. La progettazione avviene in modo parametrico, dando i punti di raccordo, la lunghezza e gli angoli iniziale  $\theta_i$  e finale  $\theta_e$  di uscita.

La problematica di questi ugelli è legata alla formazione di onde d'urto all'interno della sezione divergente a causa della brusca e rapida variazione di direzione del flusso verso l'uscita.

### Ugello TIC: Truncated Ideal Contour

Negli ugelli precedentemente descritti, la direzione della velocità del flusso in uscita non è esclusivamente assiale. Se si vuole passare ad una forma geometrica in accordo con il modello di endoreattore ideale, che presenti quindi una velocità del flusso in uscita unidimensionale, uniforme e assiale, bisogna passare ad un nuovo concetto: l'Ideal Contour. Questa soluzione rappresenta la forma dell'ugello che permette di ottenere nelle condizioni di uscita una velocità unidimensionale e assiale come mostrato in Figura 2.19.

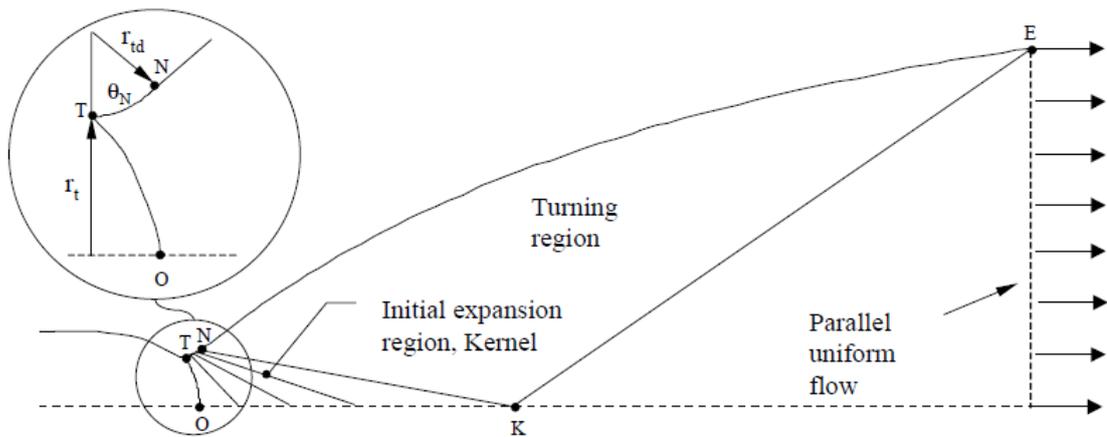


Figura 2.19: Ugello Ideale.[11]

Questo è possibile attraverso il metodo delle caratteristiche, che permette di disegnare un profilo in grado di espandere e successivamente ruotare il flusso nel tratto divergente in modo dolce, così da non creare onde di compressione che, coalescendo, formerebbero un'onda d'urto.

Il metodo delle caratteristiche è una tecnica matematica usata per risolvere equazioni alle derivate parziali iperboliche, applicato anche a studi di questo tipo.

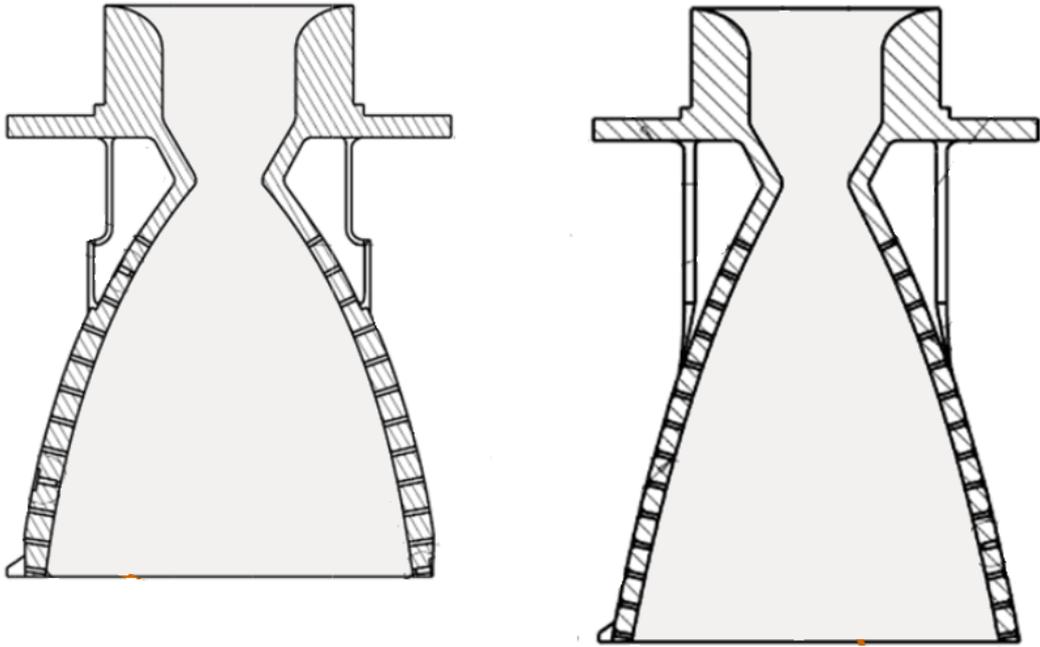
Vantaggi del metodo delle caratteristiche per lo studio del tratto divergente degli ugelli:

- È molto utile per calcolare la forma ottimale per garantire un'espansione e una ricompansione graduale e uniforme.;
- Consente di evitare la formazione di onde d'urto all'interno dell'ugello, migliorando le prestazioni.

Il problema di questo ugello ideale è che, per avere velocità assiali, si otterrebbero lunghezze esageratamente alte, non accettabili per un endoreattore.

Tuttavia, si può decider di accorciare la lunghezza, troncando la parte finale dell'ugello, sacrificando qualche grado per l'angolo  $\theta_e$  del flusso in uscita.

Così facendo, si ottiene finalmente l'ugello TIC, mostrato in Figura 2.20 e confrontato con un ugello TOC.



**Figura 2.20:** Ugello TIC (a destra) e ugello TOP (a sinistra) per un dato  $\varepsilon$ . [12]

Questo ugello non presenta onde d'urto e discontinuità all'interno del divergente, come mostrato in Figura 2.21. Le onde d'urto sono rappresentate dalle linee spezzate di colore nero.

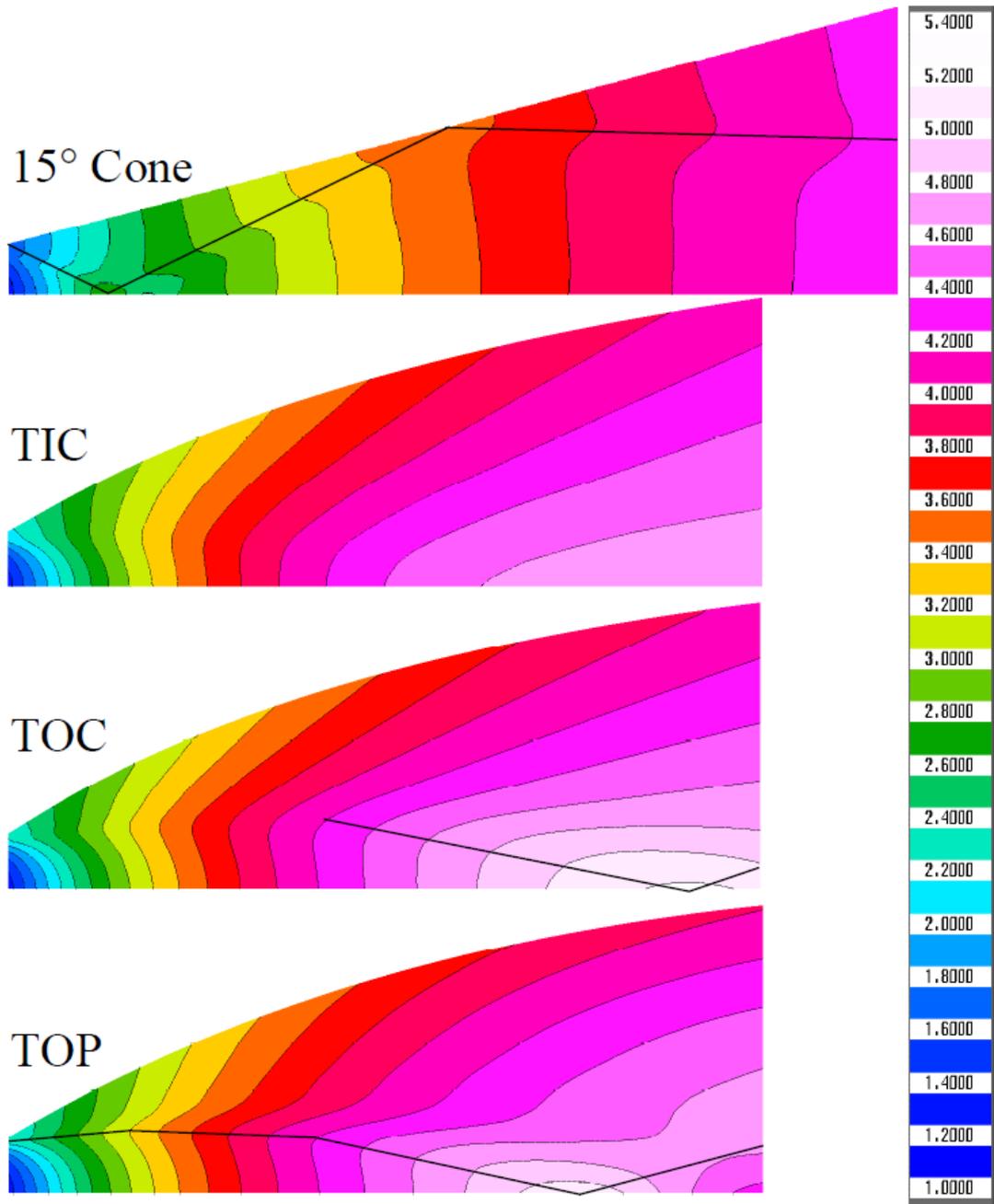


Figura 2.21: Assenza di onde d'urto all'interno dell'ugello TIC.[11]

## Capitolo 3

# Fenomeno della Separazione del Flusso

### 3.1 Strato limite e condizioni di separazione

I diversi studi, effettuati sui fenomeni fluidodinamici, hanno portato alla formulazione della teoria dello strato limite, distinguendo tra *flusso potenziale* e *strato limite*. Lo strato limite è la regione adiacente alla superficie di un corpo immerso in un fluido, in cui gli effetti viscosi sono significativi e il gradiente di velocità è significativo. Al di fuori di questa regione, il fluido si comporta in modo quasi indisturbato, seguendo le equazioni del moto di un fluido inviscido.

In presenza di un gradiente di pressione avverso, cioè quando la pressione aumenta nella direzione del flusso, le particelle fluide rallentano e possono separarsi dalla superficie, formando una zona di ricircolo.

In condizioni di separazione, lo sforzo tangenziale sulla parete si annulla:

$$\tau_w = \mu \left( \frac{\partial u}{\partial y} \right)_w = 0 \quad (3.1)$$

dove:

- $\tau_w$  è lo sforzo di taglio a parete;
- $\mu$  è la viscosità dinamica del fluido;
- $\left( \frac{\partial u}{\partial y} \right)_w$  rappresenta il gradiente di velocità in direzione normale alla parete.

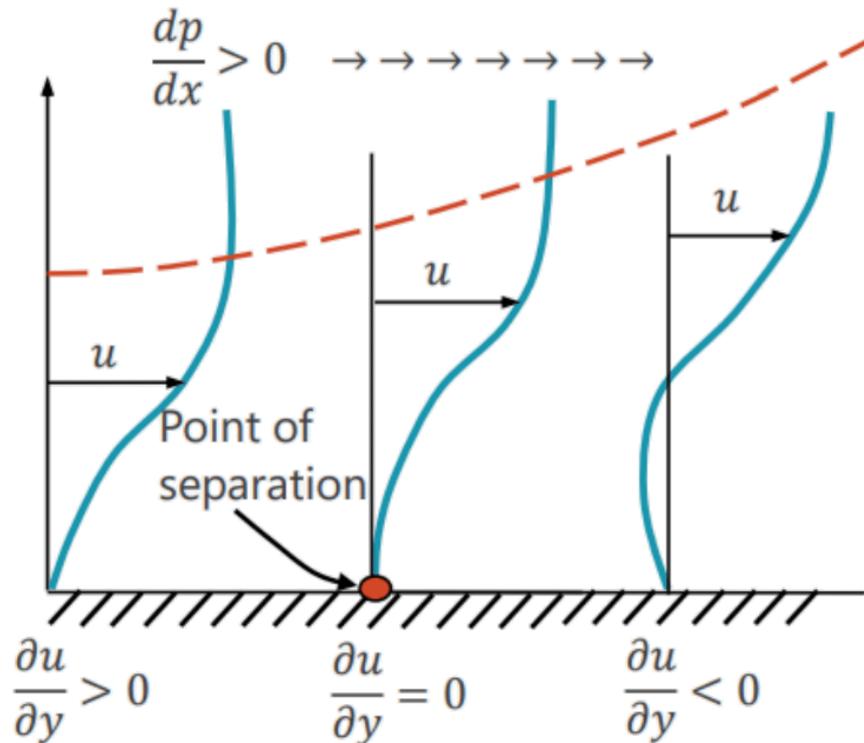
Attraverso l'equazione (3.1), si può dimostrare che nel punto di separazione la derivata seconda della velocità rispetto alla normale alla parete è positiva:

$$\frac{\partial^2 u}{\partial y^2} > 0 \quad (3.2)$$

Poiché la viscosità dinamica è sempre positiva, affinché avvenga la separazione è necessario che il gradiente di pressione sulla parete sia avverso:

$$\left( \frac{\partial p_w}{\partial x} \right)_{x, \text{sep}} > 0 \quad (3.3)$$

La Figura 3.1 illustra un profilo di velocità tipico nello strato limite con evidenza della separazione del flusso e della formazione della regione di ricircolo.



**Figura 3.1:** Profilo di velocità nello strato limite con condizione di separazione.[13]

Il fenomeno della separazione è rilevante nel caso degli ugelli sovraespansi, dove l'interazione tra flusso e parete può condurre alla formazione di onde d'urto e distacchi dello strato limite.

Lo studio di tali effetti è cruciale per migliorare il funzionamento dei motori a razzo e mitigare fenomeni indesiderati.

## 3.2 Separazione del flusso in un ugello spaziale

All'interno del tratto divergente, man mano che avviene l'espansione del flusso, la pressione scende. Dal momento in cui la differenza tra pressione del flusso e quella ambiente diventa negativa, ovvero

$$p - p_0 < 0$$

il flusso risulta sovraespanso. Quando si verifica una sovraespansione particolarmente elevata<sup>1</sup>, può avvenire il cosiddetto fenomeno della *separazione*.

Tale fenomeno avviene quando il fluido incontra la pressione esterna generando un gradiente di pressione avverso all'espansione del flusso, che può essere eccessivo per lo strato limite a parete. Quest'ultimo non avendo abbastanza energia per affrontare il gradiente di pressione, si rifiuta di seguire il profilo della parete e si ha un vero e proprio distacco della vena fluida, cioè una separazione del flusso. Di conseguenza, la condizione di tangenza della velocità del fluido alla parete non è più soddisfatta in modo continuo lungo la parete. Dal punto di separazione sulla parete verso l'interno dell'ugello si genera un urto obliquo e a valle di questo si crea una zona di flusso turbolento, di recircolazione, in cui si ha un ristagno che porta la pressione di quella regione a valori leggermente inferiori della pressione ambiente  $p_0$ . È possibile osservare la Figura 3.2 per comprendere in maniera preliminare come si manifesta la separazione.



**Figura 3.2:** Separazione dello strato limite in ugello fortemente sovraespanso.[14]

Come si vedrà più avanti in modo dettagliato, un parametro prestazionale fondamentale da tenere in considerazione in questa trattazione è sicuramente il coefficiente di spinta,  $C_F$ . Esso risente, naturalmente, di questo fenomeno e a differenza di come si potrebbe diversamente intuire, andando verso la sezione di uscita dell'ugello, esso tende a un valore maggiore rispetto all'andamento decrescente previsto dal modello di endoreattore ideale.

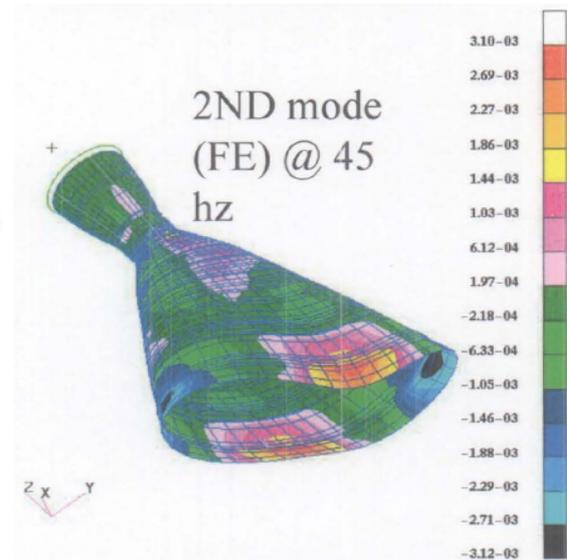
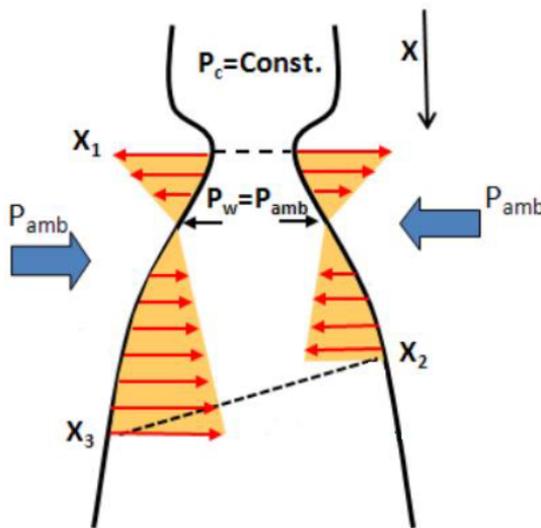
<sup>1</sup>Si vedrà più avanti quali sono i valori di riferimento.

La separazione, quindi è un fenomeno che permette di ottenere un migliore coefficiente di spinta rispetto alla previsione fatta dal modello, per cui sembrerebbe un effetto benefico dal punto di vista delle prestazioni, ma nella praticità si cerca di evitarlo.

Questo perché il punto esatto in cui si crea l'urto obliquo è difficile da predire, risulta instabile e quindi propenso a oscillare, generando delle forti oscillazioni con sollecitazioni a fatica molto elevate in una zona ristretta della parete dell'ugello.

Un'altra problematica legata alla separazione è dovuta all'asimmetria della separazione su tutta la superficie interna del tratto divergente. Ciò comporterebbe dei carichi non assiali e non simmetrici, come mostrato in Figura 3.3, che causerebbero problemi di natura strutturale.

Questi carichi laterali possono compromettere la stabilità strutturale dell'ugello e causare danni agli attuatori e ai giunti cardanici del sistema propulsivo, oltre che a deformazioni, come dimostra l'immagine in Figura 3.4 che mette in risalto un modo di vibrare di un ugello soggetto ad analisi FEM.



**Figura 3.3:** [15]Carichi laterali su ugello fortemente sovraespanso con separazione. **Figura 3.4:** Analisi FEM su ugello con separazione dello strato limite.[14]

### 3.3 Cause della Separazione del Flusso

#### Interazione tra onde d'urto e strato limite

Nei flussi supersonici turbolenti caratterizzati da un forte gradiente di pressione avverso, si manifesta la separazione dello strato limite. Quando il flusso supersonico entra in contatto con un gradiente di pressione avverso, si generano onde d'urto che possono portare alla separazione del flusso stesso. Questo fenomeno coinvolge complesse interazioni tra le onde d'urto e lo strato limite.

La separazione del flusso negli ugelli sovraespansi avviene a seguito dell'interazione tra le onde d'urto e lo strato limite che si sviluppa lungo la parete dell'ugello. Questo fenomeno ha un impatto significativo sulle prestazioni dell'ugello, influenzando l'efficienza della spinta e inducendo instabilità nel flusso.

Quando un'onda d'urto colpisce lo strato limite, genera un brusco aumento della pressione locale. Se il gradiente di pressione imposto dall'onda d'urto non è eccessivamente elevato, il flusso nello strato limite subisce un rallentamento, ma riesce ancora a restare attaccato alla parete dell'ugello. In questa fase, lo strato limite si ispessisce notevolmente a causa della decelerazione del flusso vicino alla parete, ma la separazione completa non si verifica.

La crescita dello strato limite in prossimità della zona di impatto dell'onda d'urto può determinare una riduzione della sezione efficace dell'ugello, alterando il regime di flusso a valle della discontinuità. Inoltre, l'interazione tra l'onda d'urto e lo strato limite può generare fenomeni di distorsione della struttura d'urto, dando origine a onde riflesse che si propagano nel flusso principale. Quanto appena descritto, si può osservare nello schema rappresentato in Figura 3.5.

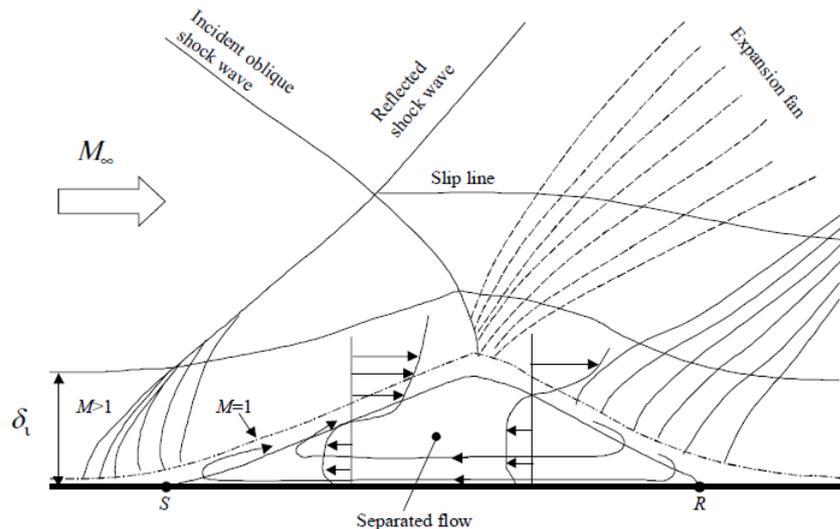
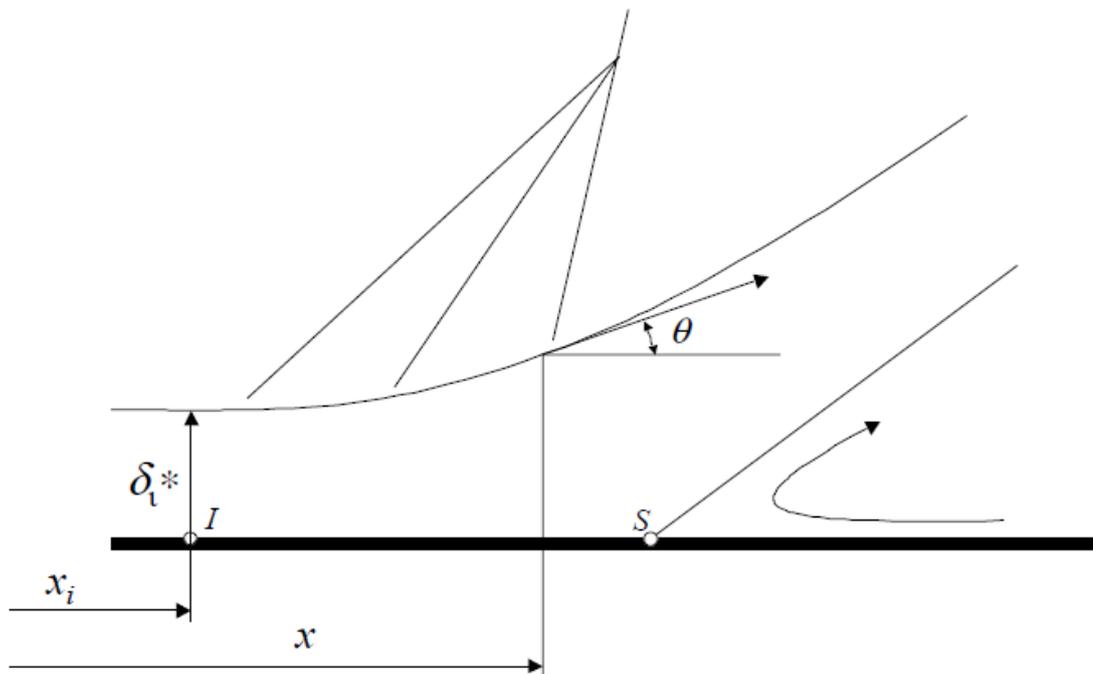


Figura 3.5: Ispessimento Strato Limite.[11]

Se l'onda d'urto impone un gradiente di pressione particolarmente elevato, il flusso nello strato limite non ha più energia sufficiente per contrastarlo, e si verifica la separazione completa. In questo caso, la parete dell'ugello diventa sede di un punto di separazione oltre il quale il flusso si distacca, dando origine a una regione di ricircolo adiacente alla parete.

La separazione è caratterizzata dalla formazione di una superficie di separazione che separa il flusso principale dalla regione recircolante. A monte del punto di separazione, si forma un'onda d'urto di separazione, che ha il compito di aumentare la pressione del fluido per consentire un migliore adattamento con la pressione ambiente. A valle, il flusso separato può interagire con il flusso principale, dando origine a una serie di onde d'urto riflesse e onde di espansione che complicano ulteriormente la struttura del flusso all'interno dell'ugello.[11]

La separazione completa è schematizzata in Figura 3.6.



**Figura 3.6:** Separazione completa dello Strato Limite.[11]

L'entità della separazione dipende da vari fattori, tra cui il numero di Mach del flusso, il grado di sovraespansione e le proprietà dello strato limite, come il suo spessore e il regime turbolento. La completa separazione dello strato limite può compromettere il corretto funzionamento dell'ugello e causare instabilità strutturali a causa delle fluttuazioni sia di pressione, associate all'interazione tra le onde d'urto e il flusso separato, che del punto stesso di separazione.

### 3.4 Effetti della Separazione sulle Prestazioni

Come si è anticipato precedentemente nel paragrafo 2.5, le perdite per strato limite possono comportare un funzionamento indesiderato dell'ugello e generare fenomeni fluidodinamici complessi, problematici e non indifferenti.

In particolare quando lo strato limite interagisce con urti, generati all'interno dell'ugello, si può avere la separazione. Per l'analisi dei fenomeni che avvengono all'interno dello strato limite e avere una stima numerica di ciò che avviene in questa regione, solitamente si considera un coefficiente di attrito  $c_f$  comprimibile per il tratto divergente dell'ugello, in cui il flusso è supersonico, dato dalla relazione

$$c_f = c_{f_i} \left[ 1 + 0.72 \left( \frac{\gamma - 1}{2} \right) M^2 \right]^{-0.578} \quad (3.4)$$

con  $c_{f_i}$  coefficiente d'attrito incomprimibile, pari a

$$c_{f_i} = 0.003 ,$$

ottenendo quindi una variazione del  $c_f$  lungo la parete, grazie alla dipendenza dal numero di Mach.

Per capire meglio l'effetto della separazione sulla spinta, si riporta l'immagine di Figura 3.7.

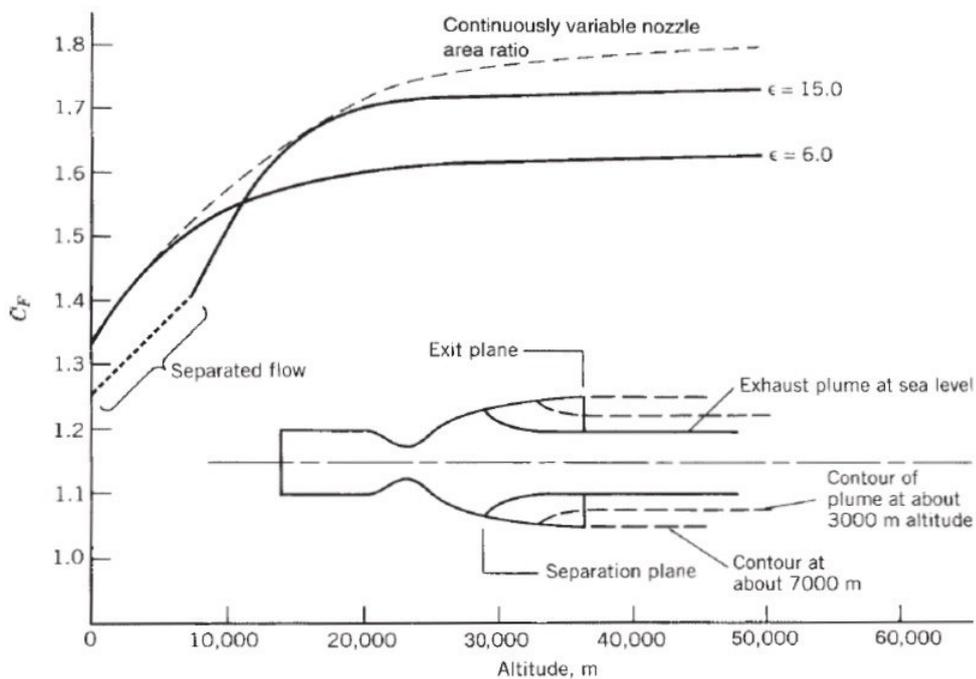


Figura 3.7: Coefficiente di spinta in funzione della quota.[6]

Il diagramma, già incontrato precedentemente, mette in risalto come ugelli con rapporto di espansione minori, non presenteranno il fenomeno della separazione a quote basse ma di contro avranno prestazioni inferiori nel vuoto, rispetto ad un ugello con un rapporto di espansione più elevato che presenterà un migliore coefficiente di spinta nel vuoto ma manifesterà il fenomeno della separazione a quote basse, soprattutto durante l'accensione.

### 3.5 Free Shock Separation e Restricted Shock Separation

#### FSS: Free Shock Separation

Quando avviene la separazione, il flusso che si separa, generalmente lascia per sempre la parete proseguendo verso valle. In questo tipo di separazione, denominata *Free Shock Separation*, *FSS* per semplicità, l'andamento della pressione lungo la parete, riportato in Figura 3.8, segue la direzione principale del flusso mentre viene influenzato dalle interazioni tra lo strato limite e le onde d'urto, fenomeno tipico dei flussi supersonici separati.

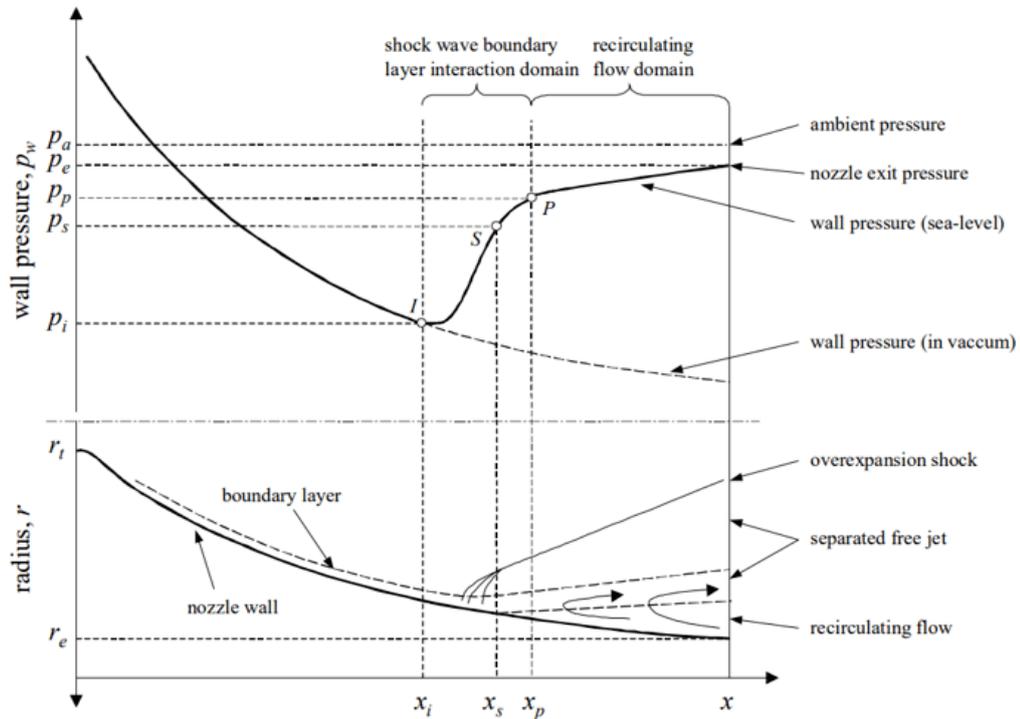


Figura 3.8: Free Shock Separation, *FSS*. [11]

Nei flussi di questo tipo, la pressione nel punto da cui parte la separazione, e il conseguente aumento del valore di pressione a parete, è definita "*pressione di separazione incipiente*", indicata con  $p_i$ . Dopo questo punto iniziale, la pressione cresce rapidamente fino a raggiungere un valore di plateau  $p_p$ , che risulta leggermente inferiore alla pressione ambiente  $p_0$ . Questo incremento è dovuto alle fluttuazioni del fronte dell'onda d'urto, la cui oscillazione genera oscillazioni a bassa frequenza.

Lo strato limite si distacca in modo netto dalla parete dell'ugello.

Nella regione di ricircolo a valle del punto di separazione, la pressione lungo la parete continua ad aumentare gradualmente, passando dalla pressione di plateau,  $p_p$ , alla pressione di uscita,  $p_e$ .

All'interno dell'ugello, la pressione cresce progressivamente a causa dell'afflusso e dell'accelerazione del gas proveniente dall'ambiente esterno verso la zona di ricircolo.

### RSS: Restricted Shock Separation

Può capitare che per alcune geometrie, come ad esempio per l'ugello parabolico, e per ben precise condizioni di espansione, il flusso che inizialmente ha separato, seguendo una *Free Shock Separation*, tenda a riattaccarsi alla parete e la separazione appare limitata, ristretta. Il fenomeno appena descritto prende appunto il nome di "*Restricted Shock Separation*", *RSS*, e può essere osservato in Figura 3.9.

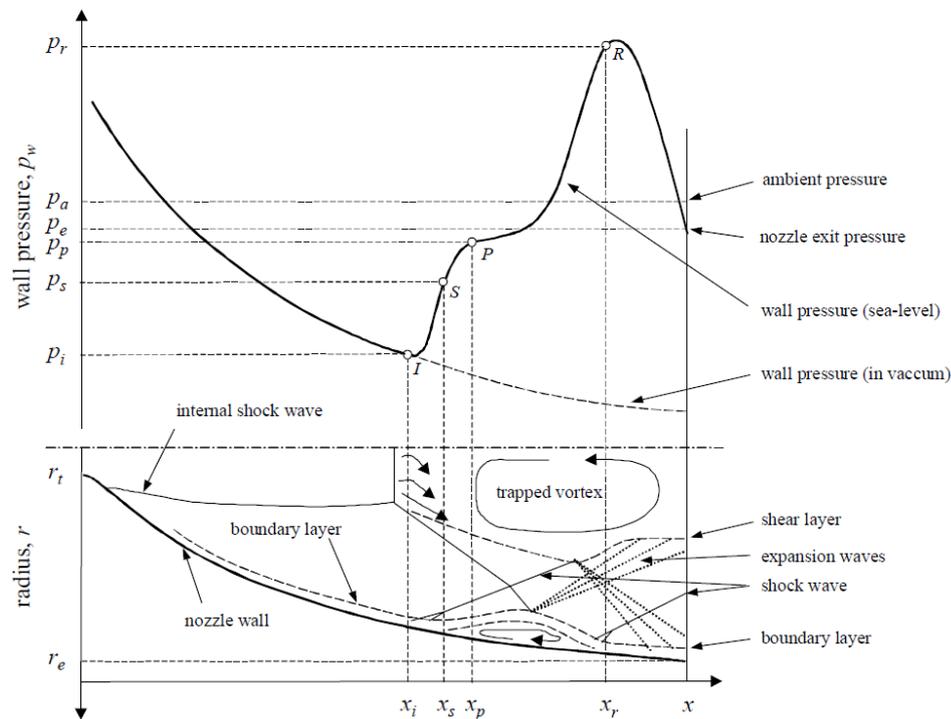


Figura 3.9: *RSS*, Restricted Shock Separation.[11]

Nel caso della *RSS*, il flusso separato si riattacca alla parete dell'ugello, generando un andamento irregolare della pressione a valle del punto di separazione, con valori che possono persino superare la pressione ambiente. L'origine di questo comportamento risiede nella formazione di strutture alternate di onde d'urto e di espansione lungo la parete, dovute alla brevità della regione separata.

Il riattacco della vena fluida in generale avviene all'aumentare del *NPR*, *Nozzle Pressure Ratio*, cioè dal numero dato dal rapporto tra pressione in camera  $p_c$  e pressione atmosferica  $p_0$ :

$$NPR = \frac{p_c}{p_0}. \quad (3.5)$$

Quando si verifica il fenomeno di *RSS*, varieranno le velocità e quindi le pressioni su tutta la parete e di conseguenza anche i carichi non assiali. All'aumentare del *NPR*, il flusso che si è riattaccato, alla fine separerà nuovamente a causa del trascinamento del flusso non a parete. Si passerà ancora una volta alla condizione di *FSS*.

Nella Figura 3.10 è possibile confrontare il fenomeno della *Free Shock Separation* e quello della *Restricted Shock Separation* dal punto di vista fluidodinamico.

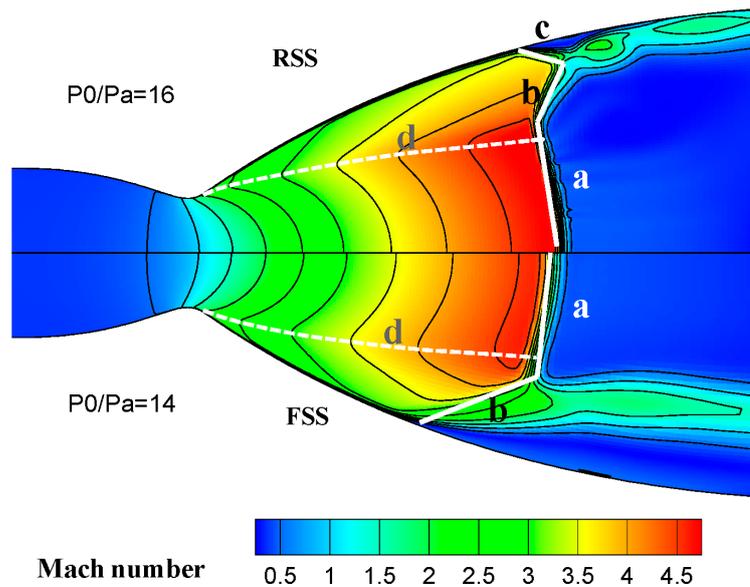


Figura 3.10: *FSS*, in basso, e *RSS*, in alto.[16]

Come accennato precedentemente, la *RSS* non si manifesta su tutte le forme geometriche. Ad esempio, al variare dell'*NPR*:

- **Ugello TOP:** manifesta la transizione da *FSS* a *RSS*, e nuovamente a *FSS* ;
- **Ugello TIC:** per ogni *NPR*, la separazione avviene esclusivamente in *FSS*.

### 3.6 Metodi che prevedono la separazione

Ad oggi, la separazione rimane un fenomeno molto difficile da predire e preferibilmente da evitare. Per questo motivo, si sono determinati alcuni criteri, relativamente conservativi, che permettono di stimare il punto di separazione e per complementarità, quindi, anche di progettare un ugello che non separi nelle condizioni operative più critiche come quelle al suolo.

Esistono differenti criteri semiempirici, tra quelli più classici e utilizzati si menzionano[17]:

- **Criterio di Summerfield:** secondo questo criterio la condizione limite per avere separazione avviene quando

$$\frac{p_w}{p_0} = 0.4 \quad (3.6)$$

dove con  $p_w$  si indica la pressione a parete e  $p_0$  la pressione ambiente. Per rapporti con valore inferiore a questo riferimento fissato dal criterio, la separazione avviene certamente.

- **Criterio di Schmucker:** questo criterio correla la pressione di parete  $p_w$  al numero di Mach  $M$  ed è espresso dalla relazione

$$\frac{p_w}{p_0} = (1.88M - 1)^{-0.64} \quad (3.7)$$

Tra i due criteri, quello di Summerfield è generalmente più conservativo perché impone un rapporto di espansione più elevato rispetto a quello che suggerirebbe il criterio di Schmucker.

## Capitolo 4

# Introduzione e cenni sulla CFD, *Computational Fluid Dynamics*

La fluidodinamica computazionale (**CFD**) è la scienza che usa calcolatori per prevedere il moto e il comportamento di flussi di liquidi e gas in base alle equazioni di conservazione di massa, quantità di moto ed energia, già descritte nel Capitolo 2.

I fluidi ci circondano quotidianamente in qualsiasi contesto. La CFD viene utilizzata ovunque ci sia la necessità di analizzare, comprendere e prevedere il flusso di fluidi e il trasferimento di calore, o di comprendere gli effetti del flusso di fluidi su un corpo o un sistema. La CFD analizza diverse proprietà dei fluidi, come temperatura, pressione, velocità e densità, e può essere applicata a un'ampia gamma di problemi ingegneristici nei più svariati settori, come ad esempio in campo aerospaziale, nell'automotive, in campo medico/sanitario, meteorologico, ecc.

Per il lavoro di questa tesi si effettuano simulazioni di fluidodinamica computazionale per lo studio della separazione dello strato limite, attraverso il software ***Ansys Fluent***.

Quando si affronta un problema di fluidodinamica tramite software CFD, sostanzialmente si segue lo schema in Figura 4.1.

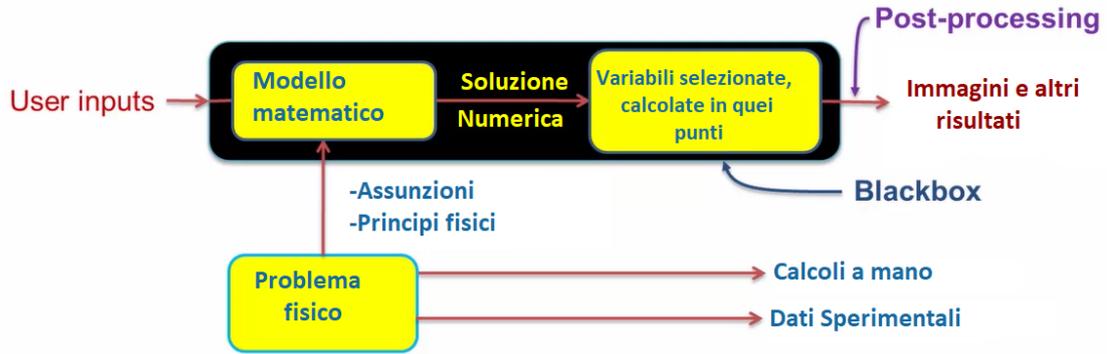


Figura 4.1: Schema CFD.[18]

Si parte dalla definizione del problema fisico da risolvere, stabilendo le assunzioni e i principi fisici che lo governano. Il software utilizzato in questo studio è schematizzato come una "blackbox". Questa scatola riceve gli input dall'utente e, una volta completata correttamente la simulazione, restituisce i risultati sia numerici, che tramite immagini a colori del fenomeno. Tuttavia, il software non è solo un'interfaccia tra input e output, ma esegue operazioni complesse basate su modelli fisici e numerici, risolvendo le equazioni di governo attraverso metodi di discretizzazione e algoritmi di calcolo.

Il risolutore si basa, quindi, sul modello matematico costituito dalle equazioni di governo, che in questa tesi corrispondono alle equazioni di Navier-Stokes, e dalle condizioni al contorno. Successivamente, attraverso un metodo numerico, che in Fluent è rappresentato dal metodo dei volumi finiti insieme al metodo Upwind, si ottengono delle stime, di precisione variabile, delle grandezze di interesse selezionate nei diversi punti del dominio.

## 4.1 Equazioni di governo: equazioni di Navier-Stokes

Il modello matematico, quindi, è dato dall'unione delle equazioni di governo e dalle condizioni al contorno. Tali equazioni di governo consistono, come già anticipato nel Capitolo 2, dalle equazioni di Navier-Stokes, scritte in forma integrale:

### 1. Conservazione della massa

$$\frac{d}{dt} \int_{\Omega} \rho d\Omega = - \oint_{\sigma} \rho \mathbf{V} \cdot \mathbf{n} d\sigma \quad (4.1)$$

### 2. Conservazione della quantità di moto

$$\frac{d}{dt} \int_{\Omega} \rho \mathbf{V} d\Omega = - \oint_{\sigma} \rho \mathbf{V} (\mathbf{V} \cdot \mathbf{n}) d\sigma + \oint_{\sigma} \mathbf{\Pi} \cdot \mathbf{n} d\sigma + \int_{\Omega} \rho \mathbf{f} d\Omega \quad (4.2)$$

### 3. Conservazione dell'energia

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} \int_{\Omega} \rho E d\Omega = & - \oint_{\sigma} \rho E \mathbf{V} \cdot \mathbf{n} d\sigma + \oint_{\sigma} (\mathbf{\Pi} \cdot \mathbf{V}) \cdot \mathbf{n} d\sigma + \\ & + \int_{\Omega} \rho \mathbf{f} \cdot \mathbf{V} d\Omega - \oint_{\sigma} \mathbf{q} \cdot \mathbf{n} d\sigma + \int_{\Omega} Q_v d\Omega \end{aligned} \quad (4.3)$$

In generale, le equazioni governative del flusso del fluido possono essere scritte sia in forma differenziale che integrale. Queste due forme sono complementari, e si può passare dall'una all'altra:

1. Nella **forma differenziale**, si applicano le leggi fondamentali a una particella fluida infinitesimale. Questa particella è un'astrazione e può essere pensata come un piccolo elemento infinitesimale di fluido. "Infinitesimale" significa che la sua dimensione tende a zero, ma non può mai essere esattamente zero, altrimenti l'intero modello matematico crollerebbe. Applicando la conservazione della massa e della quantità di moto a questa particella infinitesimale, otteniamo la forma differenziale delle equazioni governative.
2. Nella **forma integrale**, invece, applichiamo le leggi fondamentali a un volume finito all'interno del dominio di flusso. Per esempio si può definire un volume di controllo che racchiuda una porzione del flusso. Il volume di controllo è scelto dall'utente e può avere una forma arbitraria.

Se si conoscesse la soluzione esatta delle equazioni governative, questa soddisferebbe sia la forma integrale per ogni volume di controllo nel dominio di flusso, sia la forma differenziale.

È possibile inoltre descrivere il flusso del fluido in due sistemi di riferimento:

1. **Sistema di riferimento lagrangiano**, in cui seguiamo le particelle di fluido nel loro movimento.
2. **Sistema di riferimento euleriano**, in cui osserviamo il flusso in punti fissi dello spazio.

Le equazioni governative del flusso del fluido sono solitamente scritte nel sistema euleriano, perché nei problemi di fluidodinamica si ha un numero infinito di particelle di fluido infinitesimali, il che rende impossibile seguirle tutte. Per questo motivo, con il sistema euleriano, si riesce a studiare punti fissi nello spazio osservando il fluido che li attraversa.

Le equazioni di Navier-Stokes risultano non lineari, il che rende difficile la soluzione analitica. Solo in pochi casi particolari è possibile risolverle esattamente.

Utilizzando **ANSYS Fluent**, è possibile risolvere queste equazioni numericamente, tramite il metodo dei volumi finiti, basato sulla forma integrale delle equazioni di conservazione, che permetterà di trasformare le equazioni differenziali in sistemi algebrici più semplici da far risolvere al calcolatore.[18]

## 4.2 Metodo dei Volumi Finiti

Il Metodo dei Volumi Finiti (FVM - Finite Volume Method) è un metodo numerico che permette di risolvere problemi matematici e fisici complessi, molto usato nei casi di studio ingegneristici, in particolare quelli che coinvolgono equazioni differenziali alle derivate parziali. È ampiamente usato in campi come la fluidodinamica computazionale (CFD).[19]

**ANSYS Fluent** utilizza questo metodo numerico. I passi fondamentali di questo metodo sono:

1. **Discretizzazione del dominio:** Il dominio continuo del problema viene suddiviso in un numero finito di celle, o volumi di controllo, che compongono la mesh.
2. **Approssimazione delle soluzioni:** All'interno di ogni cella, la soluzione viene approssimata sul centro di ogni cella, applicando le leggi di conservazione. I valori nei centri delle celle sono, quindi, approssimazioni dei valori medi delle celle. Questa approssimazione genererà un errore.
3. **Trasformazione delle equazioni differenziali:** Le equazioni differenziali vengono riformulate in un sistema di equazioni algebriche lineari. Nel metodo dei volumi finiti, questo viene fatto utilizzando la forma integrale delle equazioni governanti, piuttosto che la forma differenziale.
4. **Risoluzione del sistema:** Si ottiene un grande sistema di equazioni lineari, che viene risolto numericamente per ottenere la soluzione nel centro di cella.

Questo metodo è spesso preferito al metodo degli elementi finiti per diversi motivi:

1. Garantisce la conservazione delle quantità fisiche in ogni volume di controllo;
2. Permette di studiare in maniera accurata fenomeni di turbolenza, cavitazione, combustione e altri fenomeni complessi.
3. Si adatta bene alla mesh, migliorando la simulazione anche per geometrie complesse.

### 4.3 Metodo Upwind di secondo ordine

Il metodo Upwind è una tecnica numerica utilizzata per la discretizzazione dei termini convettivi nelle equazioni di trasporto, ed è direttamente collegato al metodo ai volumi finiti (FVM), metodo principale usato da ANSYS Fluent.

Nel metodo ai volumi finiti, le equazioni differenziali vengono integrate su ogni volume di controllo, e i flussi di grandezze fisiche vengono calcolati sui bordi delle celle. Il problema principale nella discretizzazione dei termini convettivi è scegliere come valutare i valori delle variabili ai bordi delle celle. Il metodo Upwind è una delle strategie per farlo, ed è molto usato nel FVM perché aiuta a mantenere stabilità e accuratezza nella soluzione.

Il concetto base è che il valore della grandezza trasportata in un dato punto deve essere preso dalla direzione da cui proviene il flusso (cioè a monte, in inglese Upwind). Questo evita oscillazioni nella soluzione e migliora la stabilità numerica.

Il metodo Upwind di secondo ordine usa un'interpolazione molto accurata per calcolare il valore ai bordi, migliorando la precisione. È più accurato del primo ordine perché riduce la diffusione numerica ma può introdurre instabilità se la mesh è troppo grezza.[20]

Matematicamente, il valore della variabile al bordo della cella  $\phi_{face}$  è calcolato come:

$$\phi_{face} = \phi_{upwind} + \left( \frac{\partial \phi}{\partial x} \right)_{upwind} \cdot \Delta x \quad (4.4)$$

dove:

- $\phi_{face}$  rappresenta il valore interpolato sul bordo di cella;
- $\phi_{upwind}$  è il valore della cella a monte da cui proviene il flusso;
- $\frac{\partial \phi}{\partial x}$  è il gradiente della variabile nella cella "Upwind" a monte;
- $\Delta x$  è la distanza tra il centro della cella a monte e il punto di interfaccia.

Un altro parametro importante nello studio della stabilità numerica è il *numero di Courant*:

$$Cour = |a|\lambda = |a| \frac{\Delta t}{\Delta x}, \quad (4.5)$$

dove:

- $a$  è la velocità caratteristica della propagazione dell'informazione nel dominio, in questo studio rappresentata dalla velocità del flusso.
- $\Delta t$  è il passo temporale della simulazione, espresso in secondi.
- $\Delta x$  è la dimensione spaziale della cella di calcolo, espressa in metri.

Il numero di Courant, quindi, rappresenta il rapporto tra il tempo impiegato da un'informazione per attraversare una cella di calcolo e il passo temporale della simulazione, moltiplicato per il modulo di  $a$ .

La soluzione numerica è stabile se e solo se è verificata la seguente *condizione CFL* (Courant, Friedrichs e Lewy):

$$Cour \leq 1 \quad \text{ovvero} \quad \Delta t \leq \frac{\Delta x}{|a|} .$$

In questo modo l'informazione non supera più di una cella per ogni passo temporale, assicurando stabilità.

## 4.4 Residui

I residui rappresentano l'errore numerico tra un'iterazione e la successiva durante la simulazione e indicano se quest'ultima si sta dirigendo verso la convergenza.

Matematicamente, sono definiti come la differenza tra il valore teorico e il valore calcolato della grandezza fisica in ogni cella. Di conseguenza, residui relativamente bassi, dell'ordine di  $10^{-3}$  o meno, indicano che la simulazione sta commettendo errori di quell'ordine di grandezza e il sistema è vicino alla soluzione finale.

Fluent ripete il ciclo di calcolo fino a raggiungere la convergenza, che si verifica quando i residui delle equazioni diventano molto piccoli, ovvero i valori delle grandezze fisiche non cambiano più significativamente tra le iterazioni. Per questo studio in particolare, si accettano valori dei residui inferiori a  $10^{-3}$ . Nelle simulazioni riportate in questa tesi, si monitorano i residui per diverse grandezze:

- **Continuità:** verifica se la massa è conservata;
- **Velocità:** controlla la convergenza della velocità in tutte le sue componenti;
- **Energia:** controlla il bilancio energetico;
- **Turbolenza:** controlla le equazioni del modello turbolento.

Per ogni simulazione e per ogni grandezza, si otterrà un residuo  $R_i$ . Il residuo globale si scrive matematicamente come:

$$R = \frac{\sum |R_i|}{Scaling Factor} , \quad (4.6)$$

dove lo *Scaling Factor* è un fattore dipendente dal contesto del fenomeno studiato<sup>1</sup>. [18]

---

<sup>1</sup>Ad esempio può variare se si sta studiando un fenomeno di natura subsonica o se ci si trova in campo supersonico.

## Capitolo 5

# Impostazione della simulazione: Geometria del dominio, mesh e impostazione parametri Fluent

Come anticipato nell'abstract, l'obiettivo di questa tesi è riportare i risultati ottenuti attraverso simulazioni numeriche basate sul software CFD, *ANSYS Fluent*. In particolare si analizza l'influenza che ha la distanza di una parete, schematizzata orizzontale nel dominio di calcolo, rispetto alla sezione di uscita di un ugello, sul fenomeno della separazione e sulla posizione in cui essa si manifesta.

Per lo studio della separazione dello strato limite, quest'analisi si concentra su un ugello con geometria TIC [21], attualmente molto utilizzata in ambito aerospaziale.

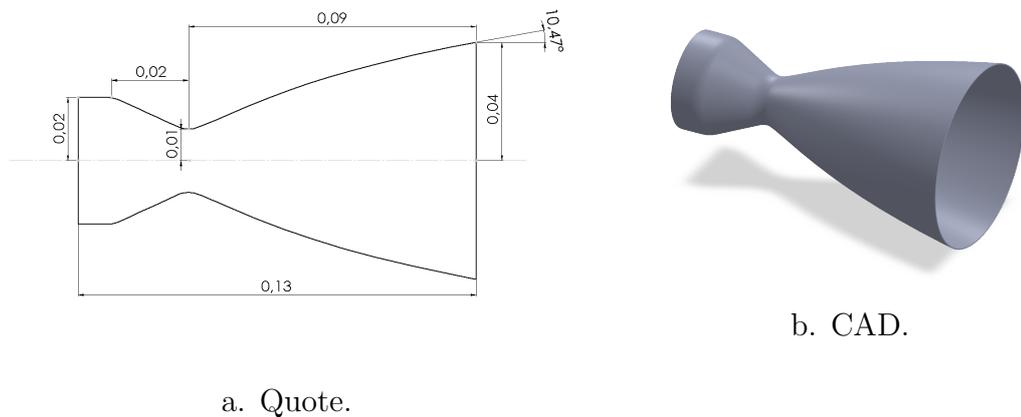
Come si vedrà più avanti, la variazione della distanza della parete orizzontale comporta necessariamente una modifica della dimensione e della forma del dominio di calcolo. Per questo motivo, non verranno mostrate tutte le immagini per ogni dominio di calcolo costruito, bensì solo una di riferimento: quella più rappresentativa, che permette di comprendere al meglio l'impostazione della simulazione.

Le geometrie del dominio computazionale utilizzate in tutte le simulazioni saranno riportate in termini di valori numerici all'interno di apposite tabelle.

## 5.1 Geometrie

### Geometria dell'ugello

In Figura 5.1 sono riportate le dimensioni dell'ugello TIC, con le relative quote espresse in metri, con a fianco il modello CAD, generato con il software *Solid Works*[22].



**Figura 5.1:** Dimensioni e geometria dell'ugello TIC.

In maniera più dettagliata, in Tabella 5.1 sono riportate tutte le grandezze geometriche relative all'ugello, fondamentali per le simulazioni.

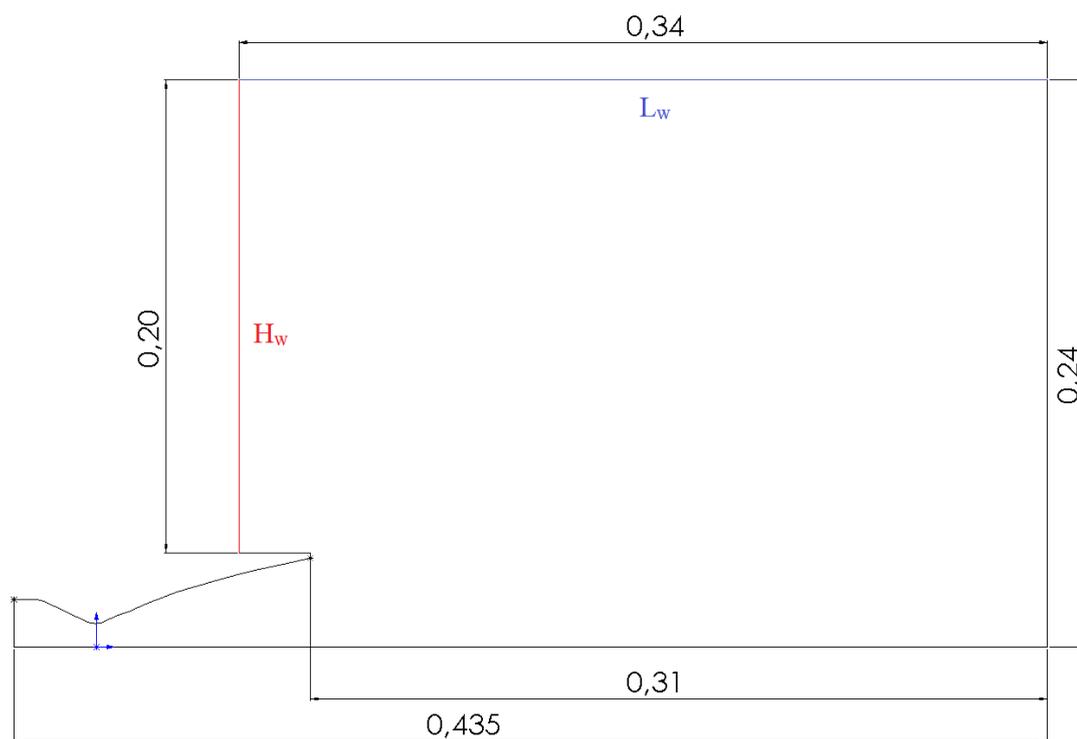
Parametro	Simbolo	Valore	Unità di misura
Area di ingresso	$A_i$	$12.57 \cdot 10^{-4}$	$[m^2]$
Area di gola	$A_t$	$3.14 \cdot 10^{-4}$	$[m^2]$
Area di uscita	$A_e$	$44.05 \cdot 10^{-4}$	$[m^2]$
Rapporto di espansione	$\varepsilon = \frac{A_e}{A_t}$	14.02	$[-]$
Lunghezza divergente	$L_d$	$9 \cdot 10^{-2}$	$[m]$
Lunghezza totale	$L_{nozzle}$	$13 \cdot 10^{-2}$	$[m]$
Angolo di uscita	$\theta_e$	10.47	$[^\circ]$

**Tabella 5.1:** Grandezze relative alla geometria dell'ugello.

## Geometria del dominio di calcolo

Per simulare le condizioni di sovraespansione per un ugello, è necessario utilizzare un dominio esteso che comprenda una parte di "ambiente esterno" per l'ugello. Per questo motivo si disegna una regione di ambiente di scarico per l'ugello.

In Figura 5.2 sono riportate le dimensioni, del dominio di calcolo, con le relative quote espresse in metri. L'origine del sistema di riferimento cartesiano è rappresentato dalla terna cartesiana, posizionata nel centro della sezione di gola. Il piano di riferimento selezionato è quello  $(x, y)$ .



**Figura 5.2:** Geometria del dominio di calcolo.

Il tratto orizzontale colorato in blu rappresenta la parete solida della quale verrà modificata la posizione verticale per visualizzare il suo effetto sul flusso in uscita dell'ugello. Essa avrà lunghezza  $L_w$  e una distanza dalla sezione di uscita dell'ugello pari ad  $H_w$ , grandezza di cui verrà modificato il valore da una simulazione all'altra.

In Tabella 5.2 sono riportate in dettaglio tutte le grandezze geometriche relative al dominio di calcolo.

Parametro	Simbolo	Valore	Unità di misura
Lunghezza parete	$L_w$	$34 \cdot 10^{-2}$	[m]
Distanza parete-ugello	$H_w$	$20 \cdot 10^{-2}$	[m]
Lunghezza del dominio	$L_{tot}$	$43.5 \cdot 10^{-2}$	[m]
Altezza del dominio	$H_{tot}$	24	[m]

**Tabella 5.2:** Grandezze relative alla geometria del dominio di calcolo.

Fissata  $L_w$ , il parametro  $H_w$ , in particolare, assumerà i seguenti valori in funzione del parametro  $n$ , che rappresenta il numero della simulazione che si sta effettuando:

$$H_w^1 = \begin{cases} 21 \cdot 10^{-2} m, & n = 1, (cond. farfield) \\ (23 - n) \cdot 10^{-2} m, & n \in [2, 22] \\ 0.5 \cdot 10^{-2} m, & n = 23 \end{cases}$$

## 5.2 Scelta della Mesh

In questo studio, le simulazioni effettuate si basano su un dominio costituito da una mesh strutturata. Con il termine "*mesh strutturata*" si indica un tipo di griglia in cui gli elementi sono rappresentati da forme semplici, sono disposti in modo ordinato e seguono una struttura regolare. In particolare questa mesh adotta forme esclusivamente rettangolari. Una mesh strutturata consente di avere:

- **Topologia regolare:** i nodi e gli elementi seguono un pattern ordinato e prevedibile.
- **Minore consumo di memoria:** la connessione tra gli elementi della griglia è già definita in anticipo, cioè gli elementi sono organizzati in un modo regolare e prevedibile, per questo motivo l'algoritmo di calcolo è più veloce.

Per osservare meglio i fenomeni che si sviluppano e l'evoluzione del flusso all'interno dello strato limite, nonché per ottenere con buona precisione i valori numerici

---

<sup>1</sup>La prima simulazione, corrispondente ad  $n = 1$ , si effettua con la condizione al contorno "*farfield*" impostata per il segmento orizzontale in alto, che successivamente assume il ruolo di parete solida.

delle grandezze fluidodinamiche in questa zona, sarà necessario utilizzare una mesh particolarmente fine.

Per ottenere un infittimento "ad hoc" della mesh, si utilizza l'opzione "*Bias Factor*" di cui il software dispone. Questo parametro consente di modificare la densità della mesh in modo che la divisione delle celle diventi progressivamente più fitta vicino a una superficie o in una regione di interesse, secondo una legge ben precisa, come nel caso dello strato limite. In particolare, il *Bias Factor* applica un fattore di compressione delle celle lungo la direzione di infittimento, permettendo di ottenere una distribuzione non uniforme ma controllata della mesh, che si adatta meglio alle caratteristiche fisiche del flusso.

In pratica, il *Bias Factor* permette di influenzare la distribuzione della mesh in modo non lineare, concentrando un numero maggiore di celle in determinate regioni senza aumentare eccessivamente il numero totale di celle nel dominio.

Quando si suddivide una lunghezza totale  $L$  in  $N$  celle con un Bias Factor  $r$ , il lato delle celle segue una progressione geometrica controllata, tale che il rapporto tra la lunghezza dell'ultima e della prima cella sia pari a  $r$ . La lunghezza della  $i$ -esima cella è data da:

$$\Delta x_i = \Delta x_1 \times \left( \frac{\Delta x_N}{\Delta x_1} \right)^{\frac{i-1}{N-1}} \quad (5.1)$$

Dove:

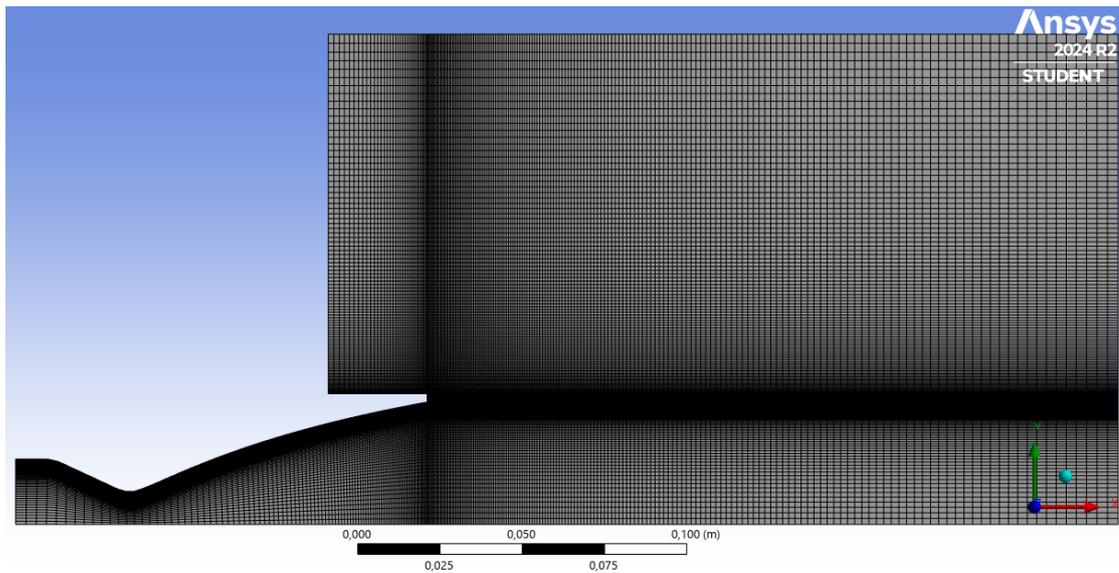
$$\Delta x_N = r \cdot \Delta x_1 . \quad (5.2)$$

Per garantire che la somma di tutte le celle sia uguale a  $L$ , la lunghezza della prima cella è:

$$\Delta x_1 = L \times \frac{1 - r^{\frac{1}{N-1}}}{1 - r} \quad (5.3)$$

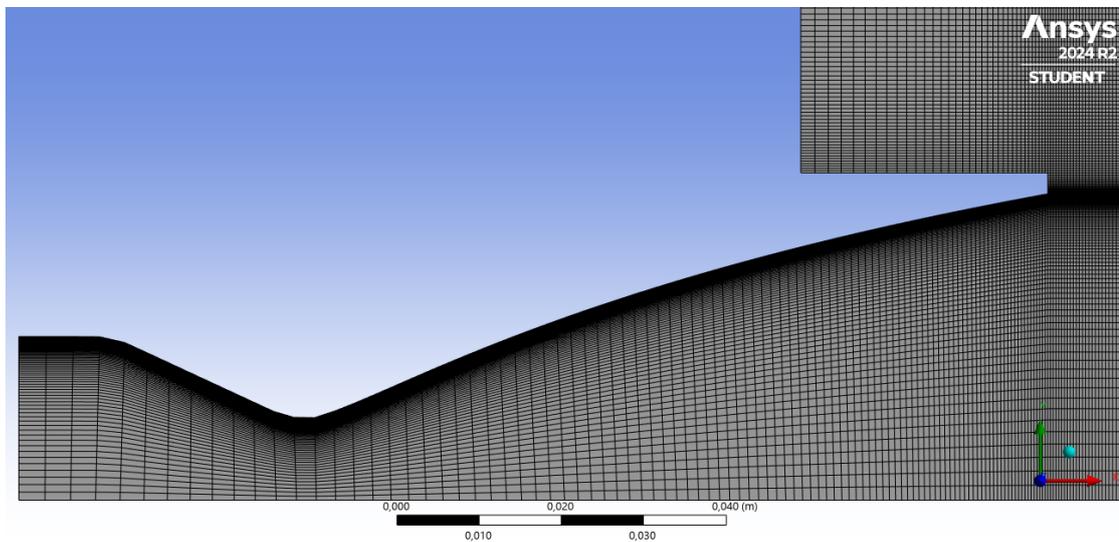
Una volta calcolata  $\Delta x_1$ , è possibile determinare tutti i lati delle celle utilizzando la formula della progressione.[23]

Di seguito, in Figura 5.3, è possibile osservare la mesh realizzata per una simulazione campione, rappresentativa dell'intero dominio di calcolo.



**Figura 5.3:** Mesh strutturata del dominio di calcolo.

In Figura 5.4 è mostrata, invece, la mesh dettagliata dell'ugello, che, come si può notare dalla Figura 5.5, presenta un infittimento nella regione in cui si svilupperà lo strato limite e si manifesterà la separazione del fluido.



**Figura 5.4:** Dettaglio mesh: ugello e strato limite.

Sempre tramite la Figura 5.5, viene posta particolare attenzione alla modellazione della mesh nella zona più critica del dominio di simulazione.

In questa regione, infatti, è fondamentale garantire una corretta transizione e l'accoppiamento tra celle provenienti da aree differenti del dominio.

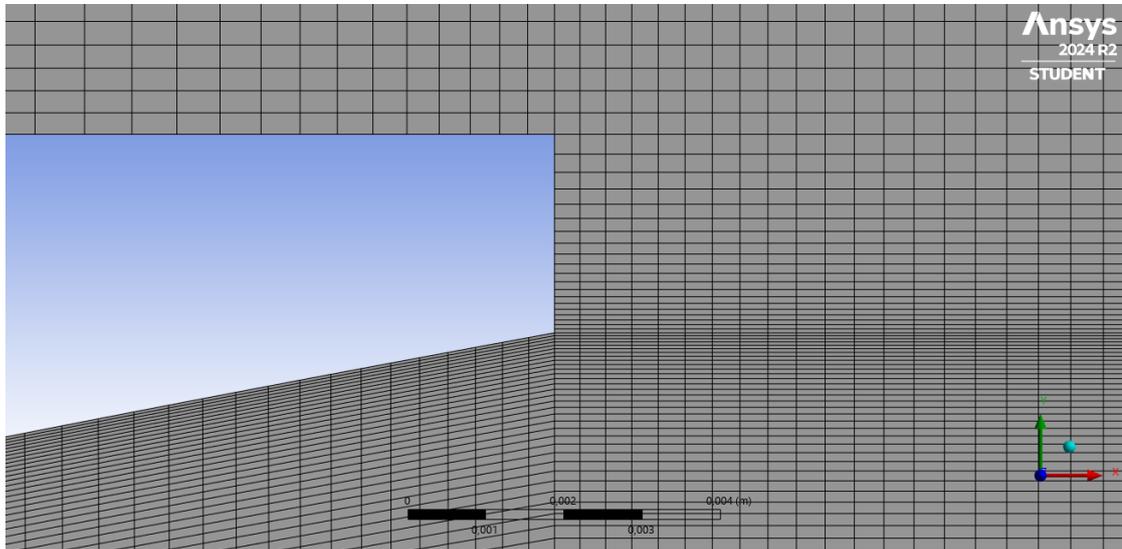


Figura 5.5: Dettaglio mesh: bordo d'uscita ugello.

### 5.3 Impostazione parametri Fluent

Si procede con l'analisi della configurazione dei parametri selezionati in Fluent.

#### Impostazioni generali

In Tabella 5.3 sono mostrati i parametri iniziali impostati su Fluent.

Solver	
Type	<i>Density-Based</i>
Velocity Formulation	<i>Absolute</i>
Time	<i>Steady</i>
2D Space	<i>Axisymmetric</i>

Tabella 5.3: Impostazioni generali Fluent.

## Modelli

I modelli utilizzati per le simulazioni sono riportati in Tabella 5.4.

Models	
Energy	On
Viscous	SST- $k-\omega$

**Tabella 5.4:** Impostazioni generali Fluent.

Il modello di turbolenza  $SST-k-\omega$  permette di visualizzare in maniera più accurata i fenomeni che si manifestano a parete, quindi onde d'urto e separazione dello strato limite. Tale modello è indicato per simulazioni in cui sono presenti forti gradienti di pressioni in regimi supersonici.[24]

## Fluido

Si sceglie l'*Aria Secca* come fluido, assunto come gas ideale. Le proprietà sono riportate in Tabella 6.1.

Proprietà	
Calore specifico	1006.43 $\frac{J}{kg K}$
Conducibilità termica	0.0242 $\frac{W}{m K}$
Viscosità	<i>Sutherland</i>
Peso molecolare	28.97 $\frac{kg}{kmol}$
$\gamma$	1.4

**Tabella 5.5:** Proprietà chimico-fisiche dell'aria secca.

La viscosità segue la *legge di Sutherland*:

$$\frac{\mu}{\mu_0} = \left(\frac{T}{T_0}\right)^{\frac{3}{2}} \frac{T_0 + S}{T + S}, \quad (5.4)$$

con i valori di riferimento riportati in Tabella<sup>2</sup> 5.6.[5]

$\mu_0$	$1.716 \cdot 10^{-5} \frac{kg}{m \cdot s}$
$T_0$	273.11 K
$S$	110.56 K

**Tabella 5.6:** Valori di riferimento per la *legge di Sutherland*.

<sup>2</sup> $S$  rappresenta la *costante di Sutherland*.

## Condizioni di riferimento

Il valore della pressione di riferimento definisce un valore numerico per il calcolo delle pressioni relative. Tale valore è stato impostato a

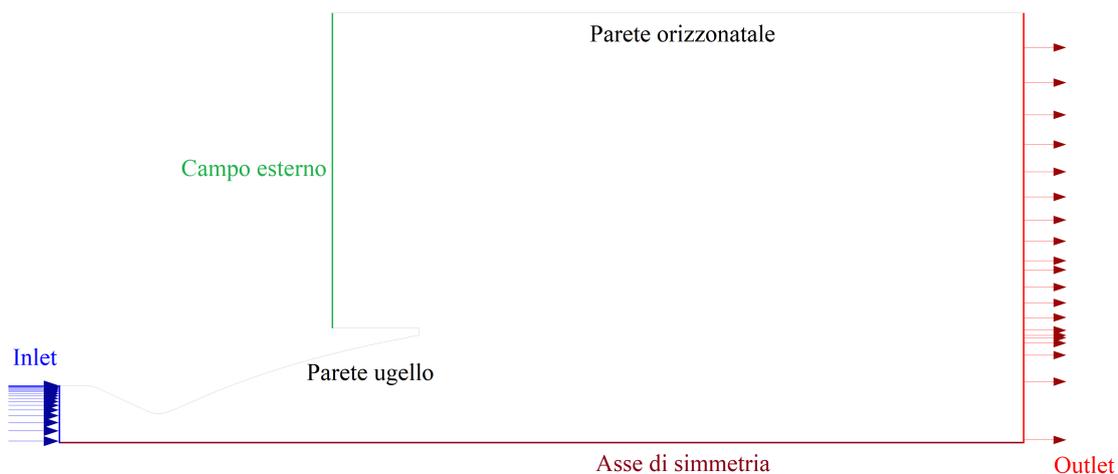
$$p = 0 \text{ Pa}.$$

## Condizioni al contorno

Per tutte le simulazioni si considera un *NPR*, *Nozzle Pressure Ratio*, cioè il rapporto tra la pressione in camera dell'ugello e la pressione ambiente, pari a

$$NPR = \frac{p_c}{p_0} = 25.$$

In Figura 5.6 sono mostrati i bordi del dominio di calcolo con i relativi nomi assegnati per contraddistinguerli.



**Figura 5.6:** Bordi del dominio.

In Tabella<sup>3</sup> 5.7 sono mostrate le condizioni al contorno assegnate per tutti i bordi del dominio di calcolo.

---

<sup>3</sup>Con " $p^o$ " si intende la pressione totale, con " $M$ " si intende il numero di Mach. La parete orizzontale nella prima simulazione ha condizione "*pressure-far-field*".

Condizioni al contorno		
Zona	Tipologia	Valore
Inlet	Pressure-inlet	$p^\circ = 2533125 Pa$ $p = 2495408 Pa$ $T = 300 K$
Asse di simmetria	Axis	-
Outlet	Pressure-outlet	$p = 101325 Pa$ $T = 300 K$
Campo esterno	Pressure-far-field	$p = 101325 Pa$ $T = 300 K$ $M = 0.01$
Pareti	Wall	-

**Tabella 5.7:** Condizioni al contorno del dominio.

### Valori di riferimento

Nel pannello "Reference Values" di Fluent è stata utilizzata l'opzione 'Compute From Inlet' per definire i valori di riferimento, garantendo così una corretta normalizzazione delle grandezze adimensionali in riferimento alle condizioni termodinamiche assegnate in ingresso.

### Metodo numerico per la risoluzione della simulazione

Per il calcolo della soluzione si imposta il problema seguendo la Tabella 5.8.

Risoluzione	
Formulazione	Implicita
Metodo numerico	Upwind 2° ordine

**Tabella 5.8:** Impostazioni della risoluzione.

Si attivano inoltre le seguenti opzioni:

1. *High Order Term Relaxation;*
2. *Convergence Acceleration For Stretched Meshes;*

le quali consentono di aiutare il simulatore a raggiungere la convergenza in tempi relativamente ridotti.

### **Controllo della soluzione**

Per assicurare la stabilità della simulazione, si sceglie un *numero di Courant* pari a:

$$C = 0.9 .$$

### **Monitoraggio residui**

Si configura il raggiungimento della convergenza della soluzione della simulazione quando il valore dei *residui* diventa

$$res \leq 10^{-3} .$$

Questo perché, nonostante l'utilizzo di metodi numerici sofisticati e una mesh regolare, strutturata e semplice, per problemi fluidodinamici di questo tipo, in cui si studiano fenomeni di separazione, onde d'urto e strato limite, non è affatto semplice ottenere residui che scendano al di sotto di  $10^{-4}$ .

Tuttavia, le simulazioni hanno restituito fenomenologie e risultati coerenti con la realtà, per questo motivo si reputano accettabili residui compresi tra

$$10^{-4} \leq res \leq 10^{-3} .$$

### **Inizializzazione**

Si configura un metodo di *Inizializzazione Ibrida*.

### **Numero di iterazioni**

Di base si è fissato un numero di iterazioni pari a

$$N = 50000 .$$

Tuttavia, per alcuni casi, si è raggiunta la convergenza della soluzione per un numero di iterazioni compreso tra

$$10000 \leq N \leq 20000 .$$

## **5.4 Procedimento delle simulazioni**

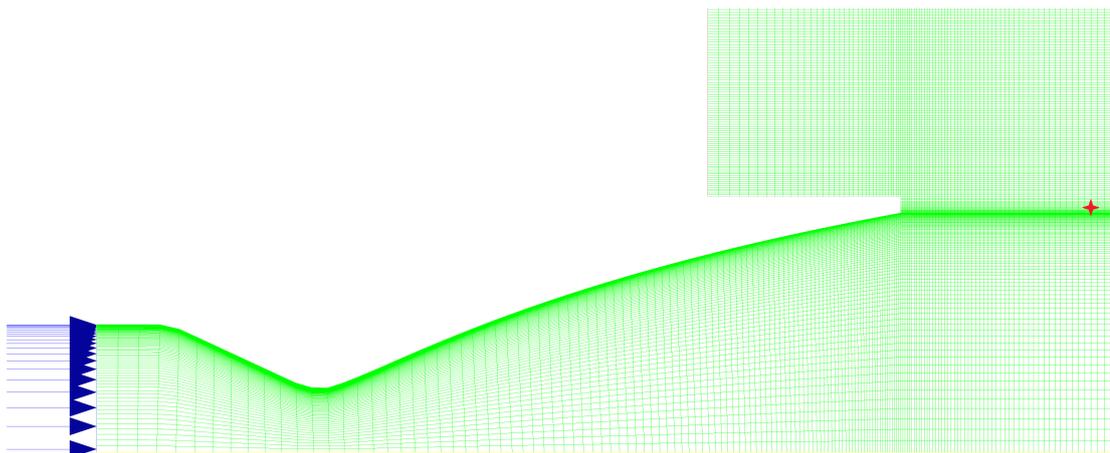
Per un dato valore di  $L_w$ , la prima simulazione è l'unica che prevede l'utilizzo della tipologia di condizione al contorno "*pressure-far-field*" per il tratto orizzontale blu in alto, permettendo di simulare il flusso, in uscita dall'ugello, non influenzato da altre condizioni al contorno. Successivamente, in tutte le simulazioni successive, lo stesso tratto orizzontale è stato trattato come parete, quindi imponendo la condizione

"*wall*", al fine di analizzare l'effetto della sua posizione sul comportamento del flusso in uscita e sullo strato limite.

Le simulazioni sono state eseguite variando progressivamente la distanza della parete e, di conseguenza, la qualità della mesh, per mantenere una buona uniformità. In particolare, per ogni simulazione è stato modificato il numero di suddivisioni in celle, al fine di migliorare la risoluzione del flusso vicino alla parete. Inoltre, è stato applicato un *Bias Factor* che ha incrementato la densità della mesh in prossimità della parete, per ottenere una migliore rappresentazione dello strato limite. Questo approccio ha permesso di valutare come il flusso si comporta in zone di forte gradiente di velocità.

Un altro aspetto fondamentale delle simulazioni è l'inserimento di una sonda di misura della pressione statica in un punto preciso del dominio, scelto in funzione delle regioni di interesse per l'analisi. La sonda è stata utilizzata per monitorare l'andamento della pressione statica del campo subito a valle della sezione di uscita dell'ugello.

In Figura 5.7 si osserva la posizione esatta della sonda, segnata in rosso, all'interno del dominio di calcolo.



**Figura 5.7:** Posizione sonda nel dominio di calcolo.

Alla fine di ogni simulazione, sono stati salvati i grafici che riportano l'andamento delle pressioni nelle varie zone del dominio e i *contour*, ovvero i profili colorati, delle seguenti grandezze: *Mach*, *pressione statica*, *pressione totale*, *temperatura statica*, *temperatura totale* e *viscosità dinamica*.

# Capitolo 6

## Risultati

All'interno di questo capitolo sono presentati e analizzati i risultati delle simulazioni numeriche, con particolare attenzione all'influenza della vicinanza e lunghezza della parete esterna sul fenomeno di separazione, nonché sui campi di velocità e pressione.

Bisogna specificare che, trattandosi di simulazioni di tipo *2D-Assialsimmetrico*, non si riesce a visualizzare il fenomeno della separazione come avverrebbe nella realtà, ovvero in modo asimmetrico, pertanto si ipotizza che sull'intera parete 3D dell'ugello, il punto di separazione sia perfettamente assialsimmetrico.

### 6.1 Introduzione ai Risultati

Una volta disegnata accuratamente la geometria del dominio di calcolo, costruita la mesh, impostati tutti i parametri di inizializzazione per le simulazioni e scelte le condizioni al contorno, si sono effettuate un numero di iterazioni pari a 50000 per ogni simulazione inerente ad ogni posizione e lunghezza diversa della parete.

Per brevità e per focalizzare l'attenzione sull'obiettivo dello studio, in questo capitolo non verranno mostrate tutte le immagini di tutte le simulazioni effettuate, bensì quelle più significative. Inoltre, nella sezione Appendice, sarà possibile visualizzare anche le immagini per i profili di *Pressione Totale*, *Temperatura Statica*, *Temperatura Totale* e *Viscosità*.

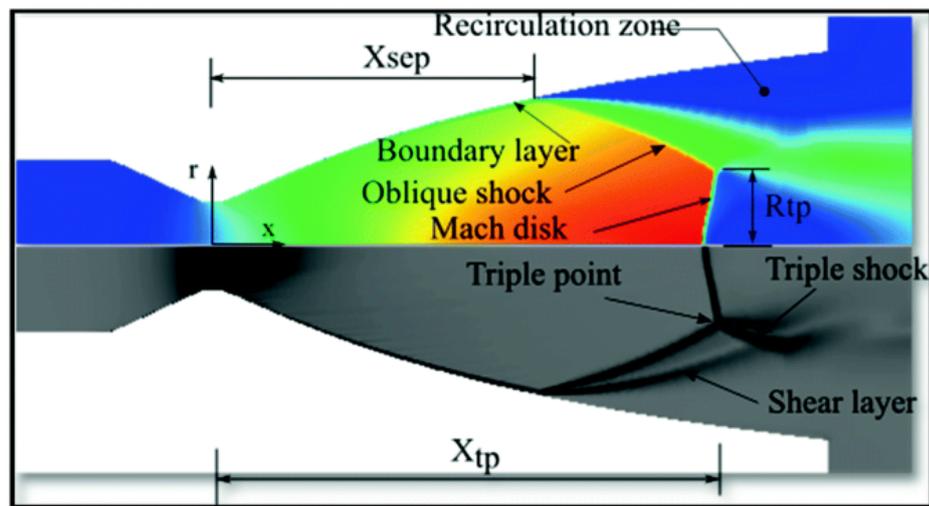
### 6.2 Configurazione delle Simulazioni

Da una simulazione all'altra, per una data lunghezza  $L_w$ , la parete orizzontale è stata progressivamente avvicinata all'ugello, diminuendo la distanza del tratto verticale rispetto alla sezione d'uscita. Finito di variare la distanza  $H_w$ , si modifica la lunghezza  $L_w$  e si ricomincia il ciclo di simulazioni.

### 6.3 Risultati delle Simulazioni

Come accennato nei precedenti capitoli, la prima simulazione riguarda quella in cui la parte superiore del dominio di calcolo possiede la condizione al contorno "pressure-far-field". Questo è importante per capire oltre quale distanza dall'ugello, la parete solida non influisce più sul fenomeno della separazione.

Per introdurre e comprendere meglio le immagini che seguiranno, è necessario spiegare lo schema della struttura fluidodinamica che si manifesta a causa del fenomeno della separazione, come mostra la Figura 6.1.



**Figura 6.1:** Schema della separazione del flusso.[25]

Durante il fenomeno della separazione, si crea una struttura complessa caratterizzata da onde d'urto e piccole zone di espansione.

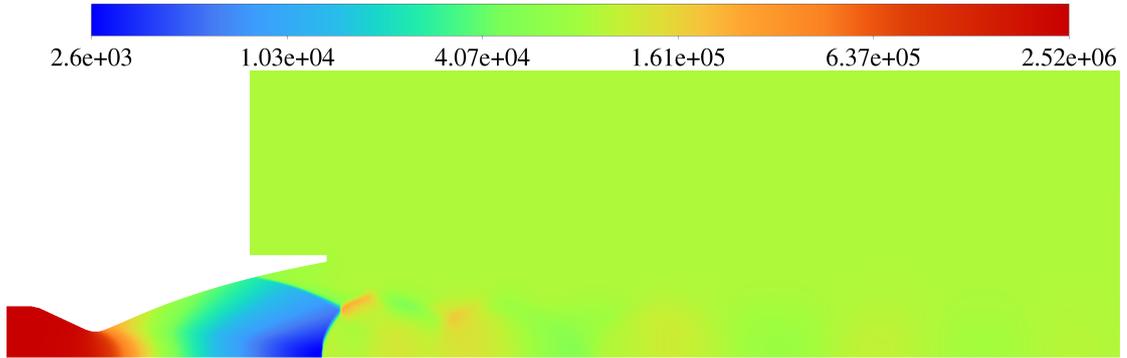
Sulla parete interna dell'ugello, il flusso, separando, dà origine ad un'onda d'urto obliqua che modifica le condizioni del gas, aumentandone la pressione e riducendone la velocità. Man mano che il flusso procede verso valle, l'interazione tra le onde d'urto e le zone di espansione genera una struttura più complessa. Al centro del getto compare il disco di Mach, una forte onda d'urto normale che riduce drasticamente la velocità del gas, trasformandolo in un flusso subsonico.

Si genererà un *punto triplo*, ovvero un punto in cui l'onda d'urto obliqua, il disco di Mach e una *slip line* si incontrano. L'interazione tra queste strutture porta alla formazione della triple shock, visibile nella parte inferiore dell'immagine. Tra il getto separato e il flusso circostante si sviluppa uno strato di taglio, una regione turbolenta che delimita il confine tra le due zone, mentre la *slip line* separa due campi a pressione uguale e con velocità uguale in direzione e verso, ma diversa in modulo.

### Campo di Pressione Statica del dominio

In questa sezione si mostrano le immagini ottenute per il campo di *Pressione Statica* al variare della distanza di parete, per  $L_w = 0.34 m$ .

Static Pressure  
[ Pa ]



Condizione *farfield*

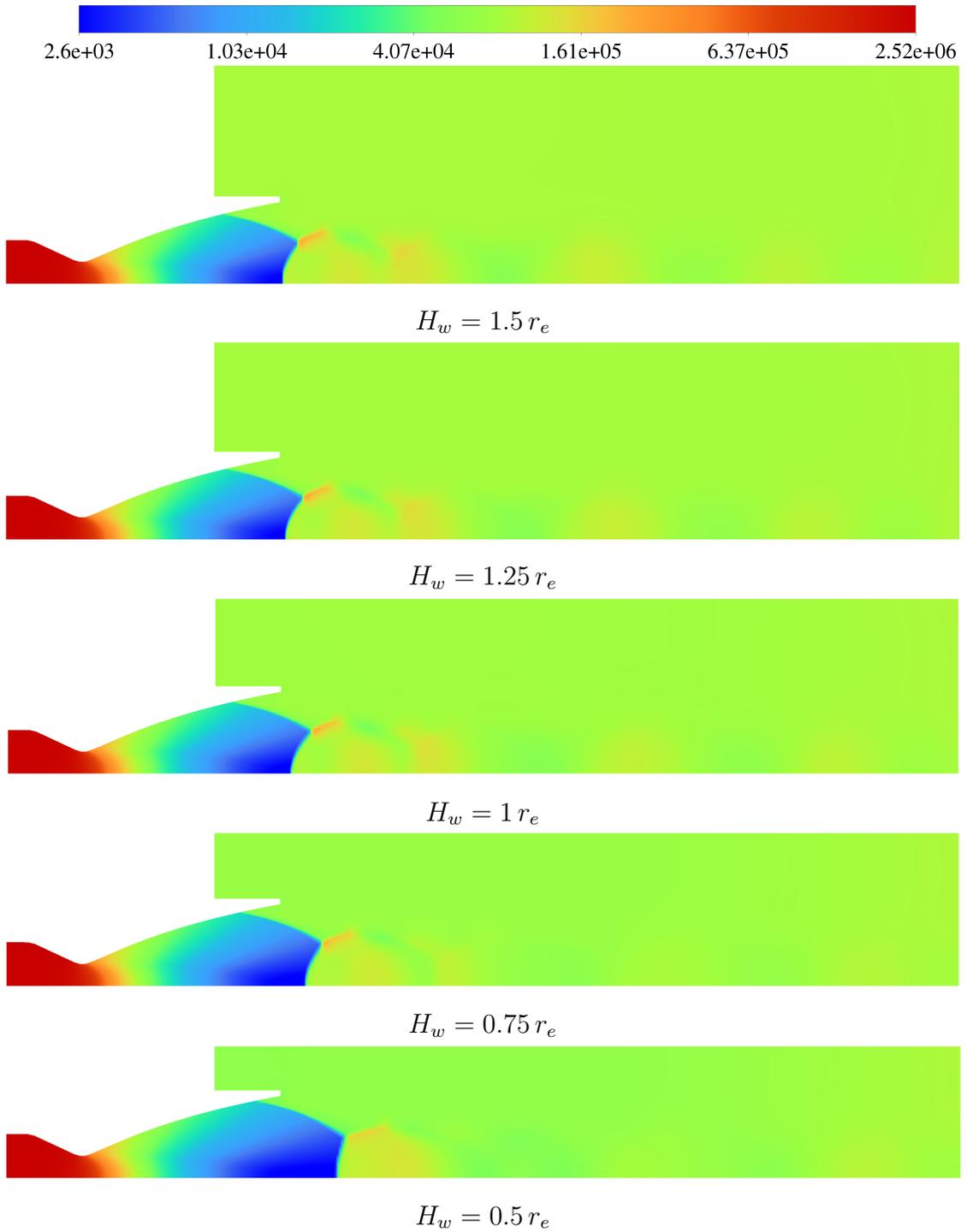


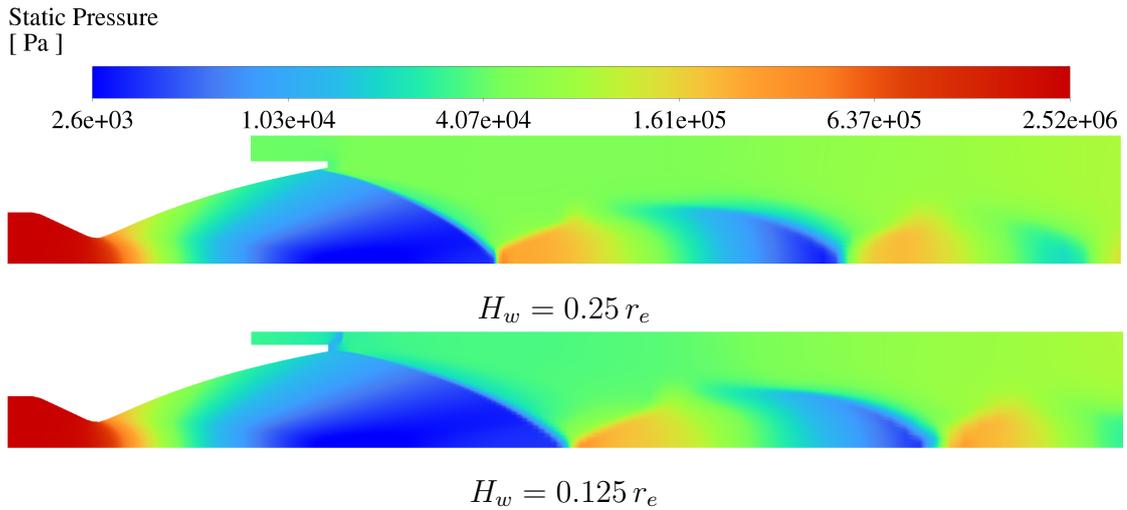
$$H_w = 2.5 r_e$$



$$H_w = 1.75 r_e$$

Static Pressure  
[ Pa ]





**Figura 6.2:** Campo di *Pressione Statica* per diverse configurazioni di  $H_w$ .

Bisogna però precisare che, per visualizzare meglio la differenza dei valori numerici e la sottile variazione di colore nel campo di pressione, è stato necessario reimpostare gli estremi del range di valori nei *contour*, per la visualizzazione delle immagini mostrate in Figura 6.3.

In particolare si è impostato:

$$p_{min} = 4 \cdot 10^4 Pa \quad e \quad p_{max} = 10^5 Pa.$$

Pertanto:

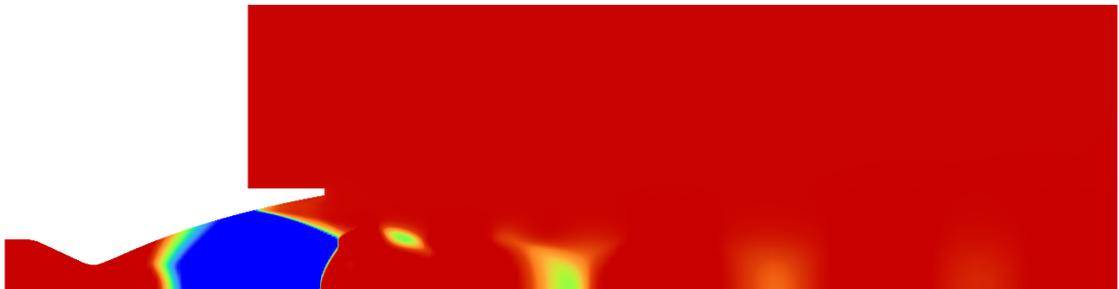
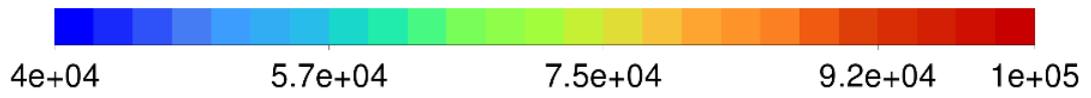
- Le regioni del dominio con colore **BLU** rappresentano zone dove la pressione è

$$p \leq 4 \cdot 10^4 Pa;$$

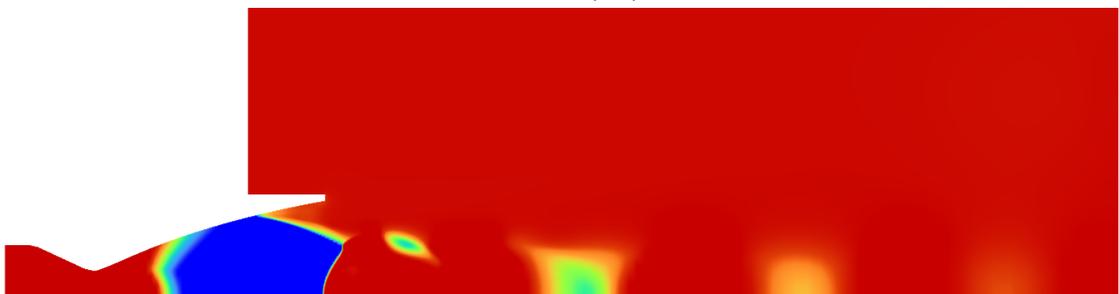
- Le regioni del dominio con colore **ROSSO** rappresentano zone dove

$$p \geq 10^5 Pa.$$

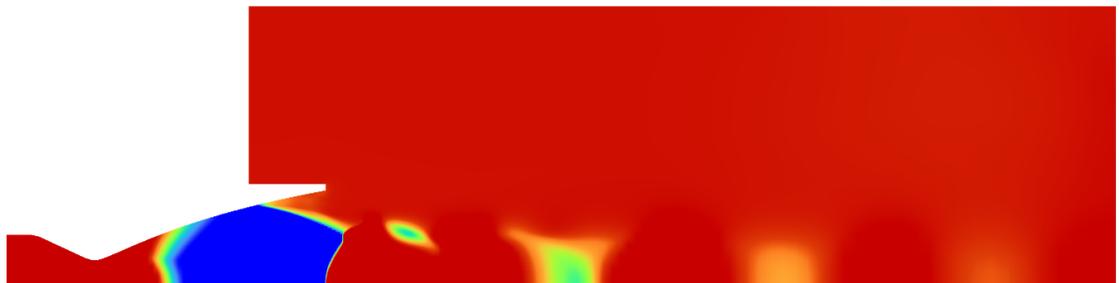
Static Pressure  
[ Pa ]



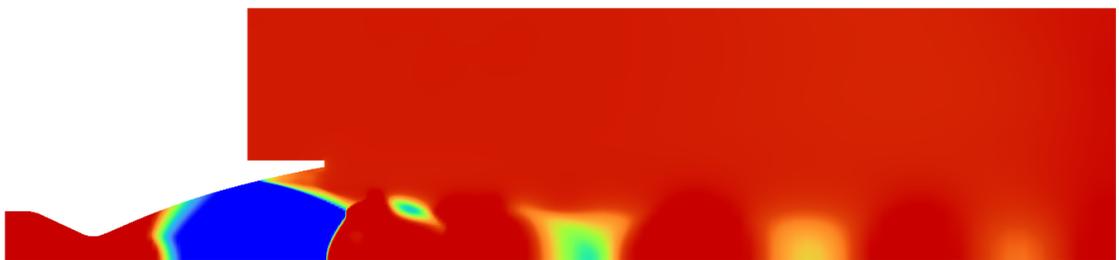
Condizione *farfield*



$H_w = 2.5 r_e$



$H_w = 1.75 r_e$



$H_w = 1.5 r_e$

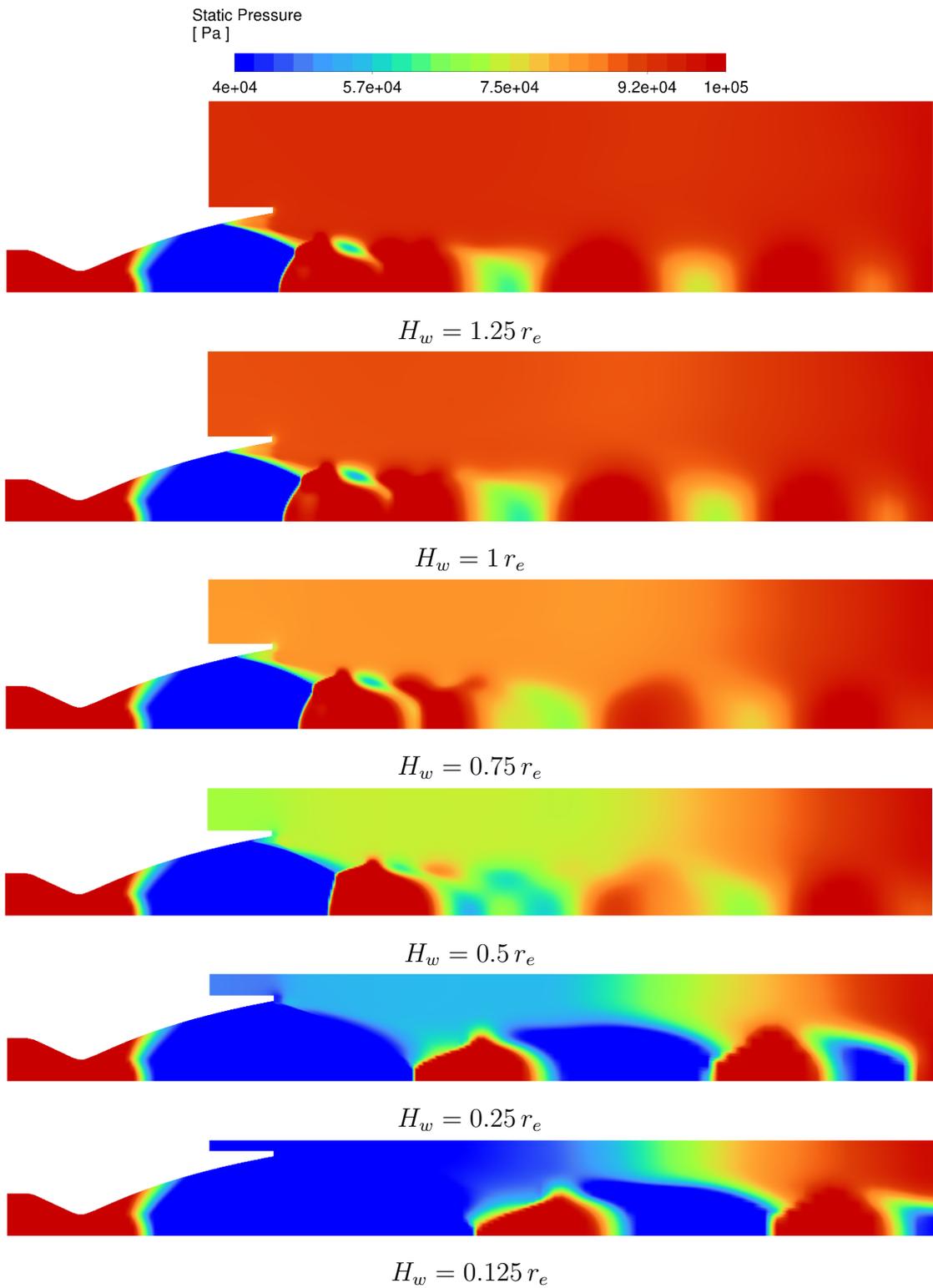


Figura 6.3: Campo di *Pressione Statica* con range di valori modificato.

### Distribuzioni di pressione sulla parete interna dell'ugello

Dalle immagini ottenute si evince che l'avvicinamento della parete orizzontale verso l'ugello comporta due risultati fondamentali:

1. Il **punto di separazione** viene progressivamente spostato verso valle;
2. Il valore della **pressione statica ambiente**, fuori dall'ugello, diminuisce.

Quanto detto è osservabile nel grafico in Figura 6.4 che riporta l'andamento del rapporto  $\frac{p_w}{p_0}$  lungo la parete dell'ugello, per valori differenti di  $H_w$ , dove:

- $p_{wn}$  è la pressione a parete dell'ugello;
- $p_0 = 101325 Pa$  è la pressione atmosferica a livello del mare;
- $H_w$  è la distanza della parete orizzontale, espressa in funzione di  $r_e$ , raggio della sezione di uscita dell'ugello;
- $x$  è la coordinata della posizione lungo la parete dell'ugello, normalizzata per la lunghezza del divergente  $L_d$ .

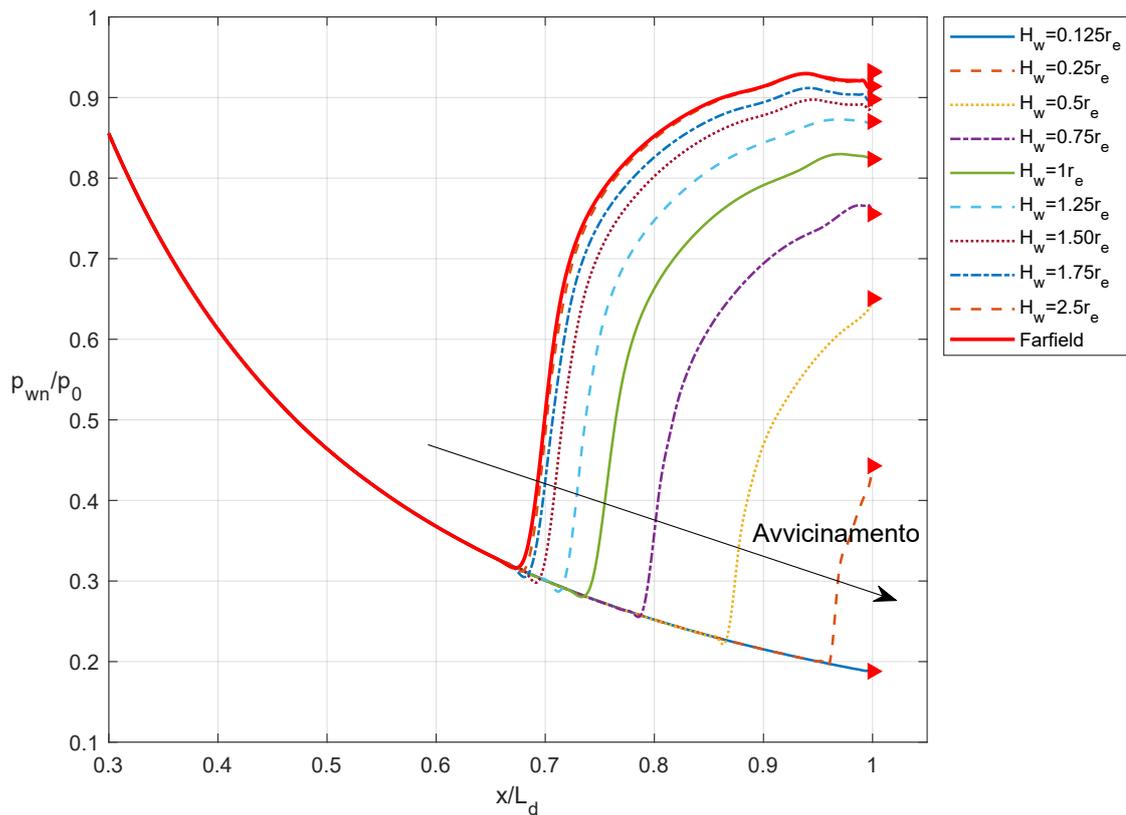
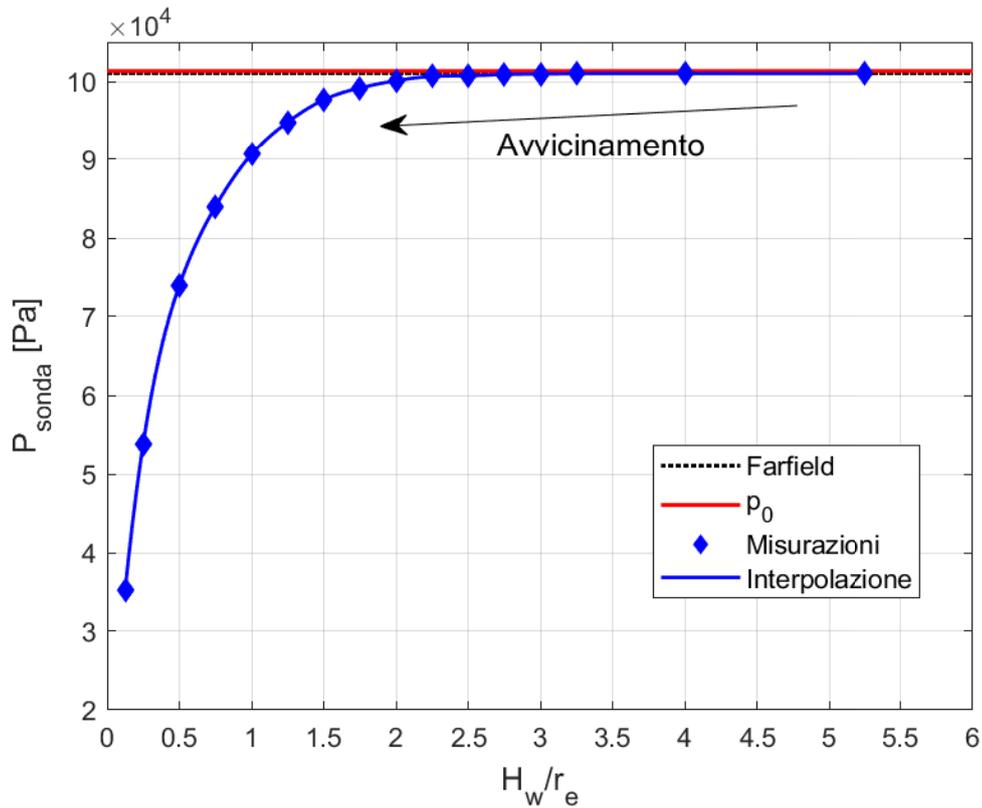


Figura 6.4: Andamento di  $\frac{p_{wn}}{p_0}$  lungo la parete dell'ugello.

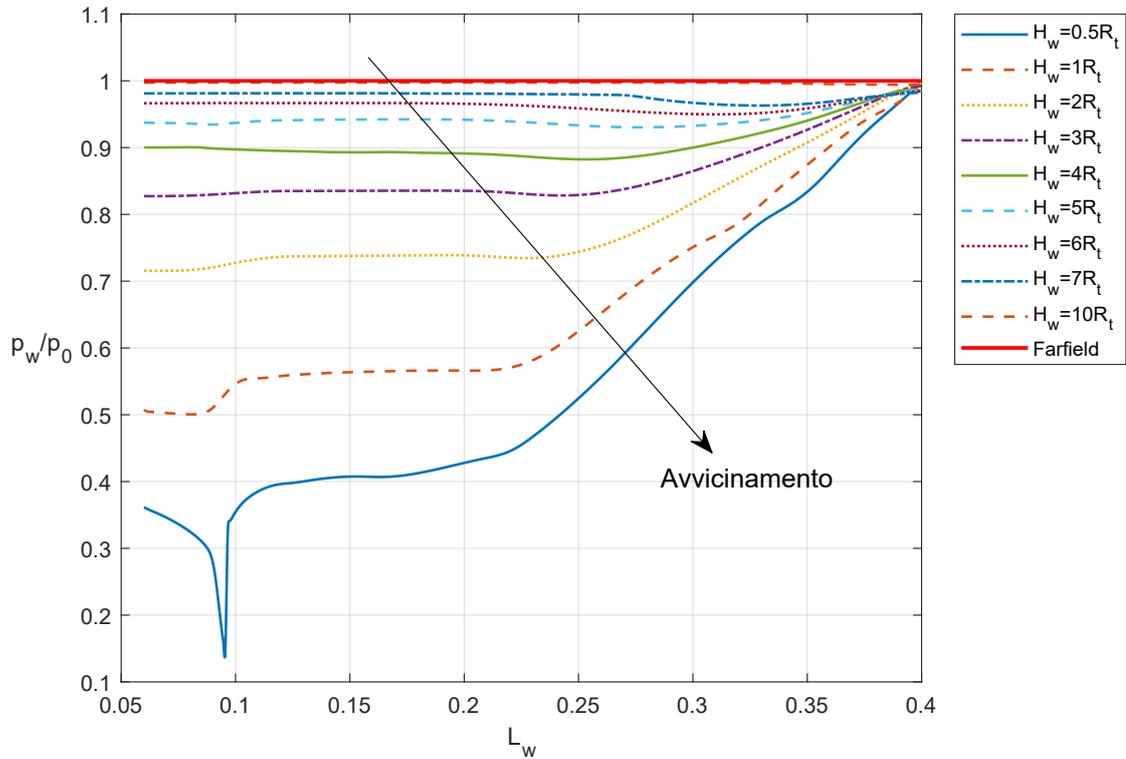
Nel grafico appena mostrato, si nota anche il progressivo abbassamento della pressione fuori dall'ugello che nella Figura 6.5 viene mostrato in dettaglio, riportando i valori della pressione statica registrata da una sonda posizionata nei pressi del bordo di uscita dell'ugello, come precedentemente illustrato.



**Figura 6.5:** Misurazioni di pressione statica tramite sonda.

Leggendo il grafico da sinistra verso destra, quindi andando verso distanze maggiori della parete orizzontale, si nota che la pressione registrata in quella regione del dominio, tende rapidamente al valore asintotico rappresentato dalla pressione atmosferica.

Un altro grafico in accordo con i risultati descritti è quello di Figura 6.6 nella pagina seguente, che mostra l'andamento del rapporto  $\frac{p_w}{p_0}$ , ovvero della pressione in prossimità della parete orizzontale normalizzata per quella atmosferica, lungo l'estensione della parete stessa.



**Figura 6.6:** Pressione statica in prossimità della parete orizzontale.

Questo grafico, oltre a confermare quanto enunciato prima, mostra come la pressione statica tenda al valore di  $1 \text{ atm}$  man mano che ci si sposta verso l'estremità destra del dominio.

I risultati finora ottenuti, si riferiscono ad una lunghezza della parete  $L_w$  fissata. Per curiosità di studio, si è voluto provare ad effettuare nuovamente le simulazioni precedenti, modificando il valore di  $L_w$ .

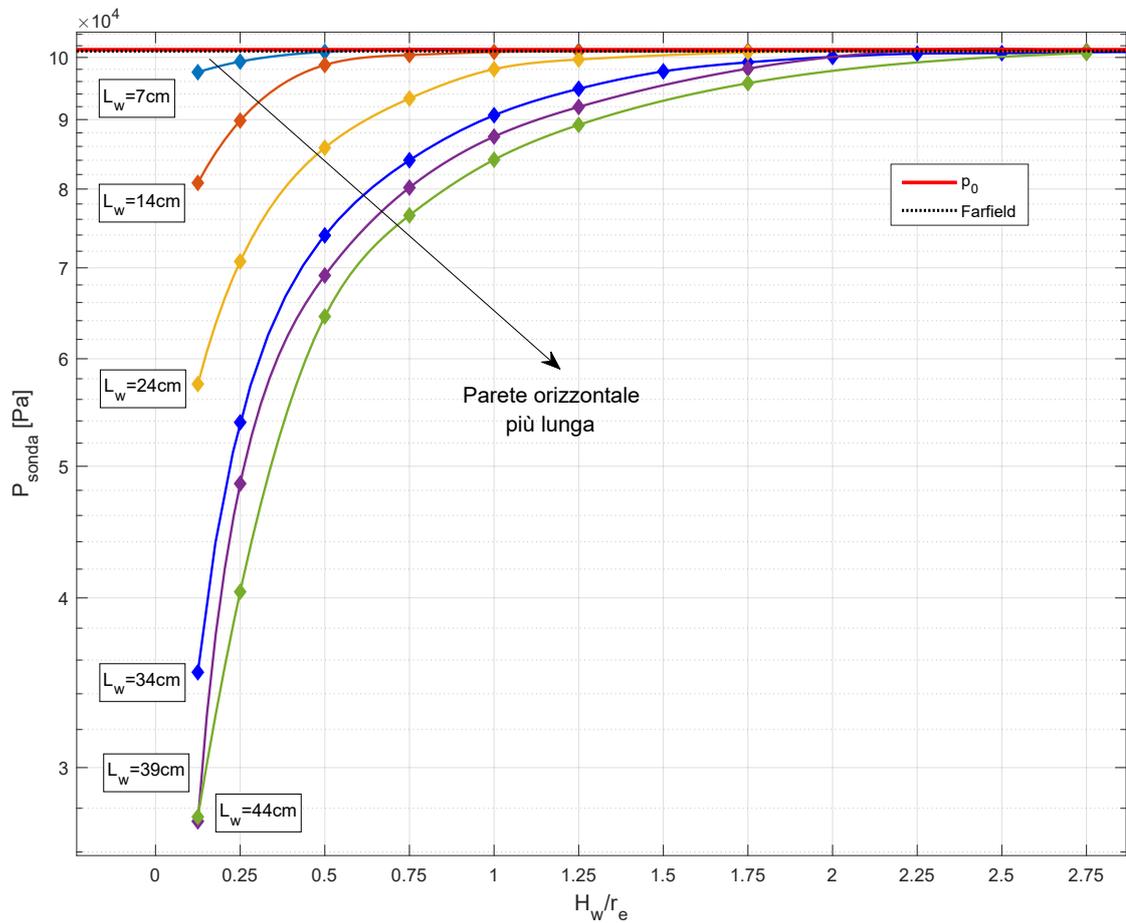
I risultati ottenuti mostrano che a parità di distanza  $H_w$ , una parete più lunga riduce il valore della pressione statica nella regione che circonda l'ugello, spostando il punto di separazione più a valle.

In particolare si sono scelti i seguenti valori per  $L_w$ :

$L_w$	1° ciclo	2° ciclo	3° ciclo	4° ciclo	5° ciclo	6° ciclo
[m]	0.34	0.24	0.14	0.07	0.39	0.44

**Tabella 6.1:** Valori di  $L_w$  per ciascun ciclo.

Se si riuniscono tutti i risultati ottenuti per tutti i valori di  $H_w$  e  $L_w$ , si può costruire una sorta di *Mappa Ugello-Parete* che riporta i valori di pressione statica registrati dalla sonda. Tale *Mappa* è rappresentata in Figura 6.7 e mostra quanto discusso precedentemente, sintetizzando globalmente i risultati.

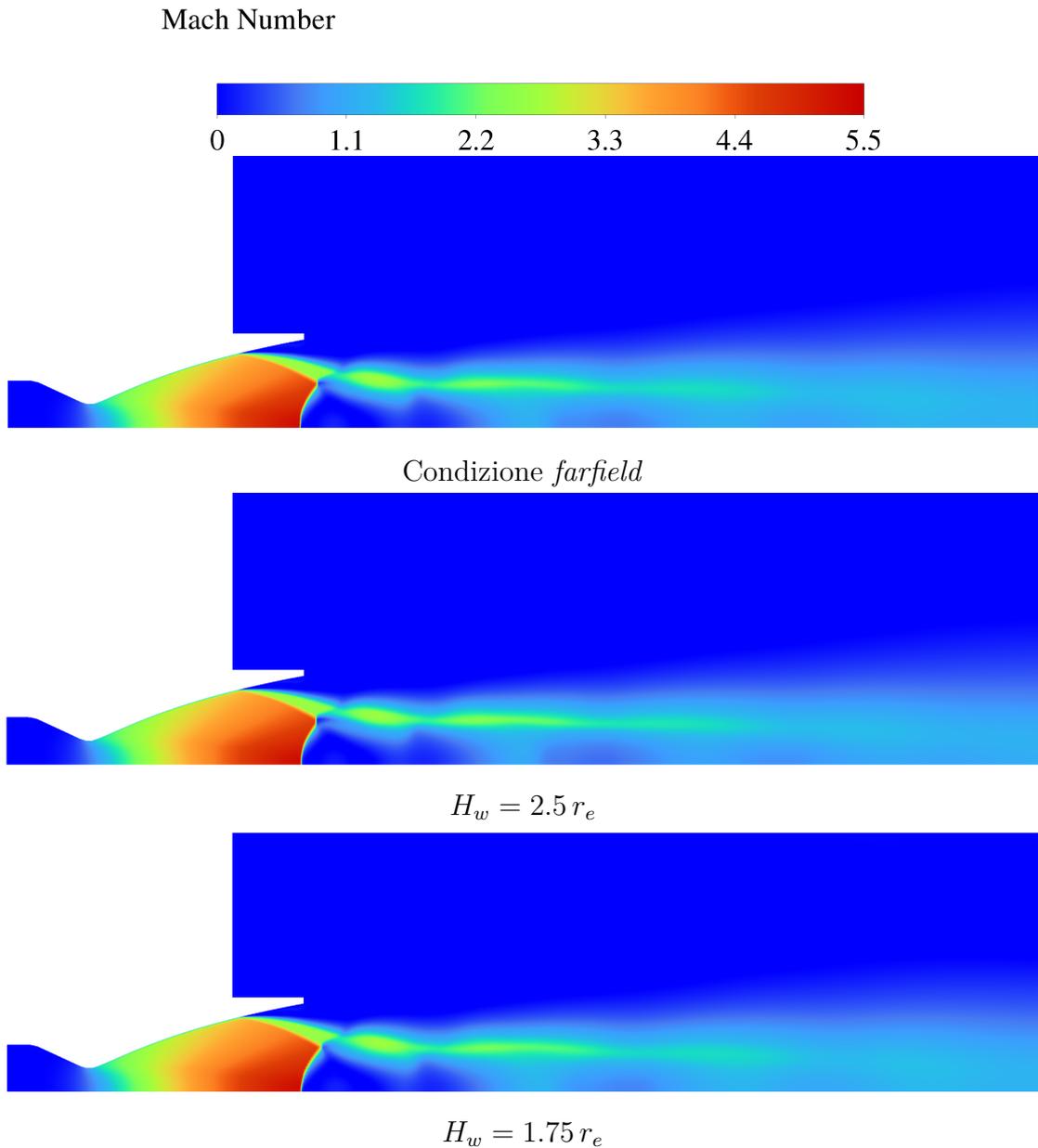


**Figura 6.7:** *Mappa Ugello-Parete.*

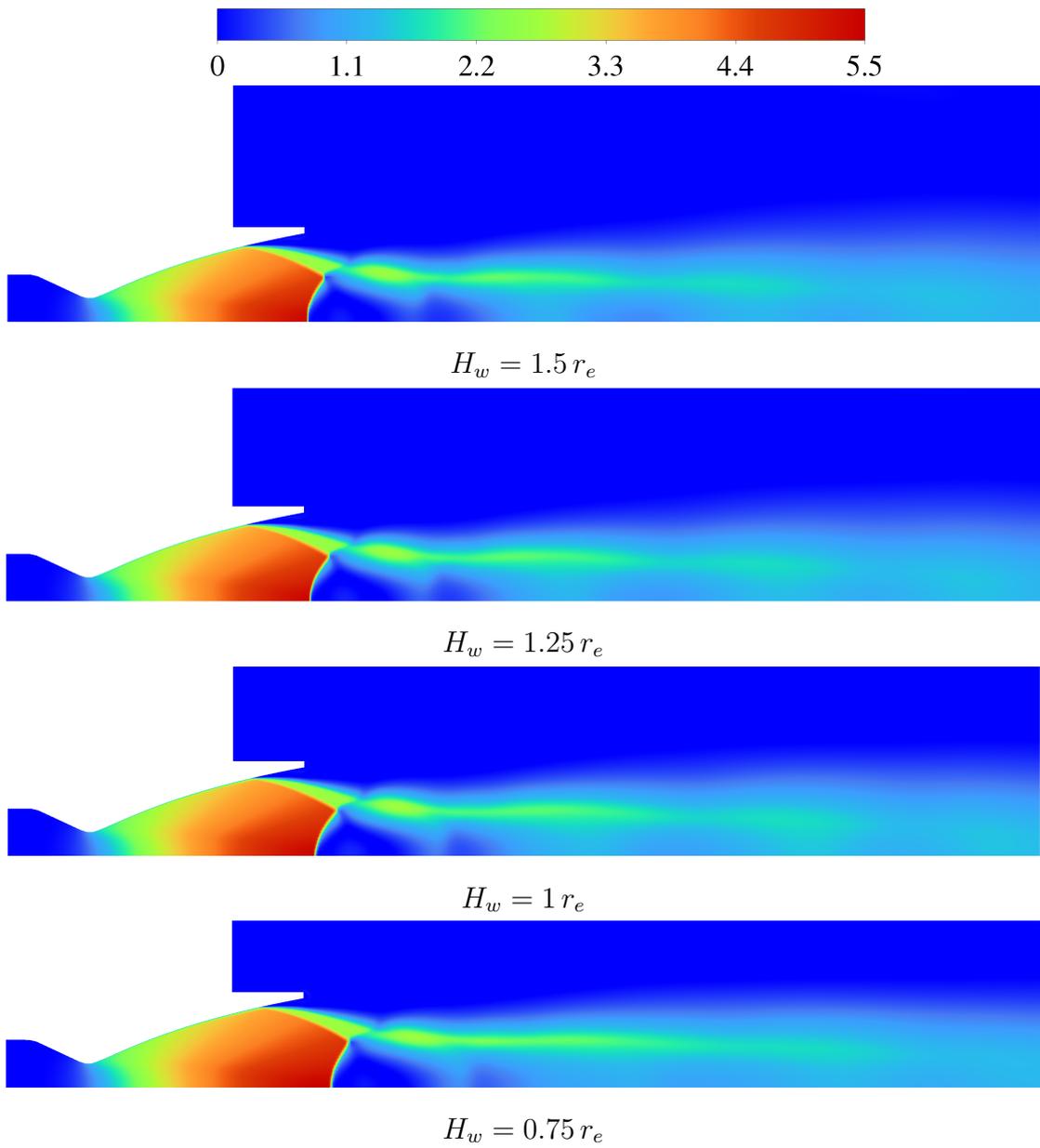
## Profili del numero di Mach

In questa sezione si mostrano le immagini dei profili del *Numero di Mach* al variare della distanza di parete, per  $L_w = 0.34 m$ .

Si può notare come, man mano che la parete si avvicina, il flusso all'interno dell'ugello tende ad accelerare ulteriormente a causa del punto di separazione che si sposta più a valle.



Mach Number



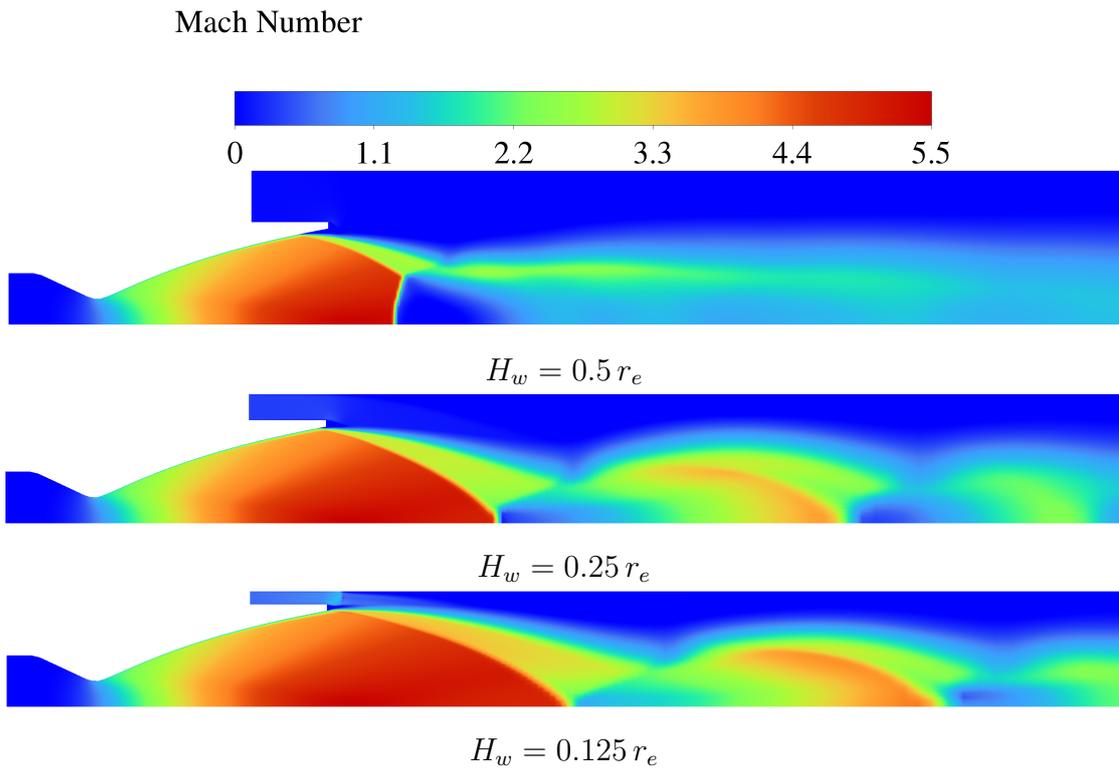


Figura 6.8: Profilo del *Mach*.

### Andamento del numero di Mach sulla parete interna dell'ugello

L'andamento del numero di Mach sulla parete dell'ugello per ogni simulazione è in accordo con i risultati precedentemente descritti e viene mostrato nel grafico in Figura 6.9, in funzione della lunghezza della parete dell'ugello.

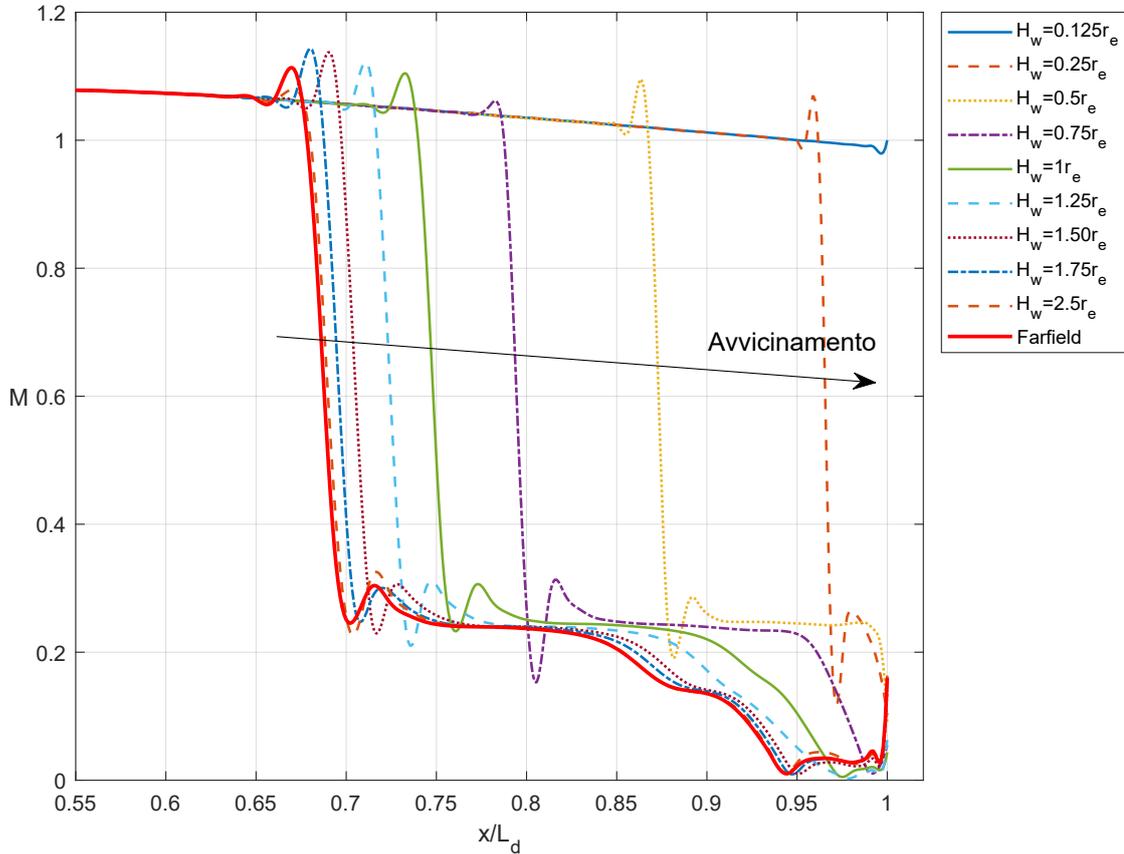


Figura 6.9: Profilo del Mach per diverse configurazioni di distanza della parete.

## 6.4 Commenti dei risultati

I risultati portano ad affermare che, man mano che la parete orizzontale si avvicina al bordo della sezione d'uscita dell'ugello o aumenta la sua lunghezza, si verifica una riduzione del valore della pressione statica del campo esterno, con conseguente riduzione del gradiente di pressione avverso lungo la parete dell'ugello e slittamento a valle del punto di separazione dello strato limite. In particolare, quando la distanza della parete orizzontale risulta molto ridotta, ma non a contatto con l'ugello, lo strato limite non ha subito separazione all'interno dell'ugello. In sostanza è come se tutto l'ugello lavorasse ad un  $NPR^*$ , *Nozzle Pressure Ratio* "fittizio", maggiore.

Un altro risultato significativo è che, per una lunghezza fissata della parete orizzontale, esiste una distanza limite al di sopra della quale il fenomeno di separazione si verifica senza alcuna sostanziale interferenza da parte della parete stessa.

## 6.5 Spiegazione del fenomeno osservato

Ciò che accade, si può interpretare in diversi modi:

1. **Riduzione della pressione nel campo circostante l'ugello:** quando la parete si avvicina, il campo di pressione nella zona circostante raggiunge valori più bassi rispetto a quando la parete è più lontana. È come se la vicinanza della parete orizzontale avesse un ruolo di depressurizzazione sull'ambiente in prossimità dell'ugello. Naturalmente, questo abbassamento della pressione circostante contribuisce a ridurre il gradiente di pressione avverso lungo la superficie interna dell'ugello ed è come se l'ugello operasse ad un NPR maggiore, attenuando così il fenomeno di separazione;
2. **Interazione tra flusso espanso e flusso proveniente dal campo farfield:** man mano che la parete orizzontale si avvicina, il flusso espanso all'uscita dell'ugello interagisce in modo più marcato con il flusso proveniente dal bordo con condizione "*pressure-far-field*"<sup>1</sup>. Questo impatto costringe il flusso "*farfield*" ad espandersi a sua volta, generando un'espansione che aumenta la velocità del flusso proveniente dal *farfield* e abbassa ulteriormente la pressione nel campo circostante;
3. **Bilancio delle portate:** nel dominio, si verifica il bilancio delle portate:

$$\dot{m}_{inlet} + \dot{m}_{farfield} = \dot{m}_{outlet} . \quad (6.1)$$

Con l'avvicinarsi della parete, la portata proveniente dalla condizione di ingresso  $\dot{m}_{inlet}$  predomina rispetto a  $\dot{m}_{farfield}$ . Questo predominio impone una sorta di obbligo al flusso proveniente dal bordo con condizione *farfield* di espandersi, contribuendo al calo di pressione attorno all'ugello.

In sintesi, lo spostamento del punto di separazione dello strato limite può essere attribuito a un concatenarsi e una combinazione di effetti.

---

<sup>1</sup> $p = 1 atm$  e  $M = 0.01$ .

# Capitolo 7

## Conclusioni

Questa tesi ha presentato lo studio del fenomeno della separazione dello strato limite in un ugello spaziale sovraespanso e di come tale fenomeno venga influenzato dalla presenza di una parete solida posta a differenti distanze.

I risultati ottenuti evidenziano come tale parete influenzi non solo la struttura del flusso, ma anche la stabilità della regione di separazione, con implicazioni dirette sul funzionamento dell'ugello in condizioni di sovraespansione.

### 7.1 Limiti dello studio

Nonostante i risultati ottenuti dalle simulazioni siano coerenti e attendibili rispetto alla realtà fisica, sono emerse limitazioni sostanzialmente legate alla qualità della mesh, caratterizzata da un elevato *Aspect Ratio* delle celle, e alla lenta diminuzione dei residui, dovuta all'utilizzo di uno schema *Upwind di secondo ordine*, che hanno richiesto al simulatore un numero elevato di iterazioni per raggiungere la convergenza.

### 7.2 Conclusioni e Sviluppi Futuri

In conclusione, i risultati ottenuti indicano che, per questa geometria di ugello, per le condizioni operative e le condizioni al contorno precedentemente elencate, all'avvicinarsi della parete all'ugello e all'aumentare della sua lunghezza, il punto di separazione, e di conseguenza tutto il fenomeno correlato, si sposta progressivamente a valle, cioè verso la sezione di uscita dell'ugello.

Lo studio condotto, quindi, mette in risalto due aspetti principali:

- 1. Studio del comportamento della separazione in camera del vento:**  
Se, ad esempio, si desidera analizzare esclusivamente il manifestarsi della separazione dello strato limite durante una prova in camera del vento di lunghezza fissata e individuare con buona approssimazione il punto in cui il flusso separa in un ambiente a pressione atmosferica, sarà necessario costruire una camera del vento con pareti poste ad una distanza minima<sup>1</sup> dalla sezione di uscita. Per futuri sviluppi, si potrebbe pensare di effettuare questi test anche su ugelli di dimensioni maggiori, per verificare come la posizione del punto di separazione vari in funzione della distanza della parete.
- 2. Separazione dell'ugello mitigata grazie alla presenza di una parete esterna vicina:**  
Si è osservato come la vicinanza della parete permetta al punto di separazione di spostarsi a valle. Pertanto, calibrando adeguatamente la lunghezza della parete e la sua distanza dall'ugello, in prima approssimazione si potrebbe mitigare il fenomeno della separazione con un  $NPR^*$  fittizio maggiore. Quest'idea potrebbe essere il punto di partenza per futuri studi e/o sviluppi<sup>2</sup>.

L'obiettivo di questa tesi è stato quello di gettare le basi per ulteriori futuri studi basati sull'influenza delle pareti nella separazione, magari esplorando altre geometrie di ugello e condizioni al contorno differenti. In prospettiva futura, sarebbe interessante effettuare ulteriori analisi per progettare ugelli spaziali più efficienti e mitigare il problema della separazione negli endoreattori operanti in condizione di sovraespansione, sia per geometrie semplici che più complesse.

---

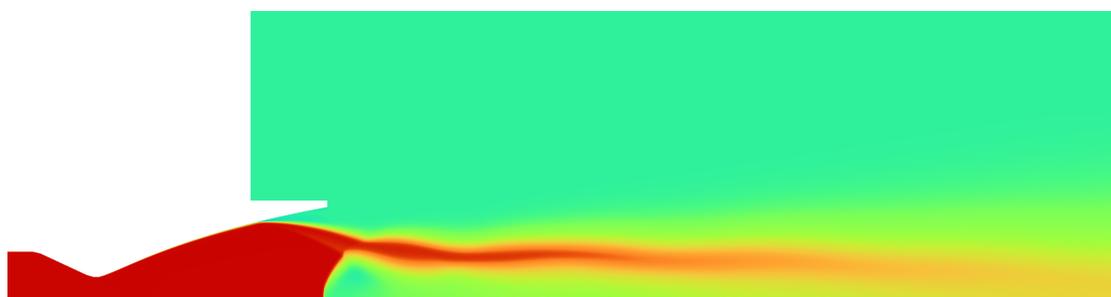
<sup>1</sup>Un'unica parete cilindrica con una distanza radiale minima, se si considera una camera del vento cilindrica.

<sup>2</sup>Ad esempio dispositivi che disinibiscono la separazione in un ugello spaziale al livello del mare.

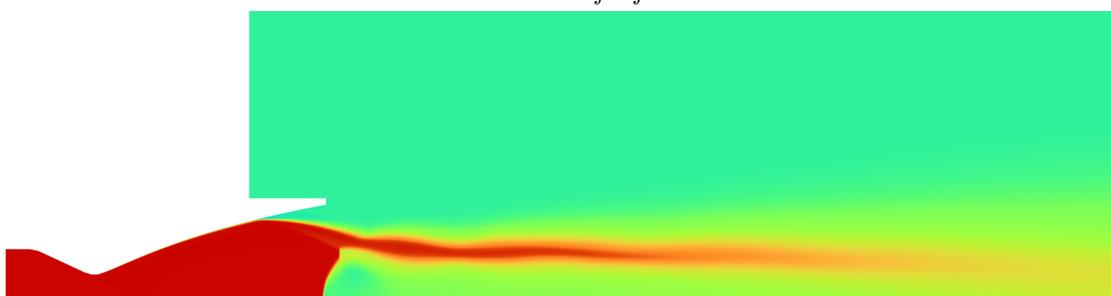
# Appendice A

## Contour Pressione Totale

Total Pressure  
[ Pa ]



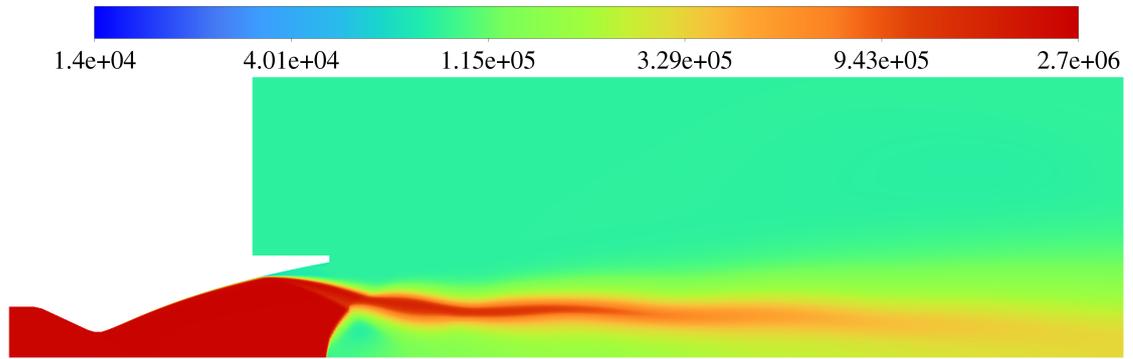
Condizione *farfield*



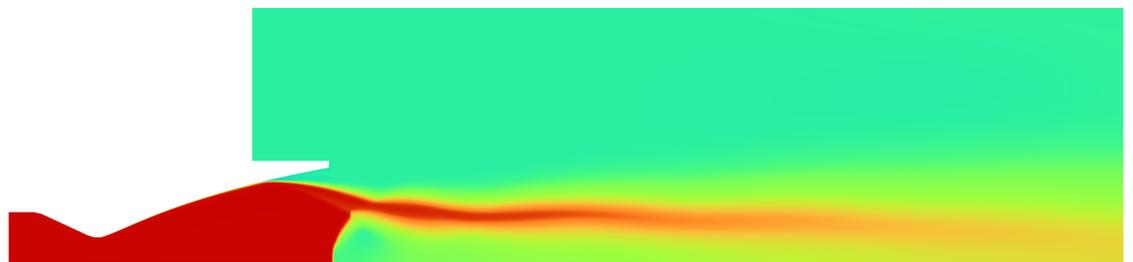
$$H_w = 2.5 r_e$$

Contour Pressione Totale

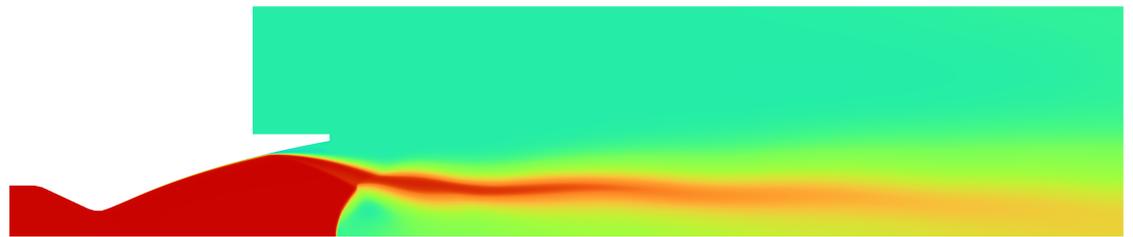
Total Pressure  
[ Pa ]



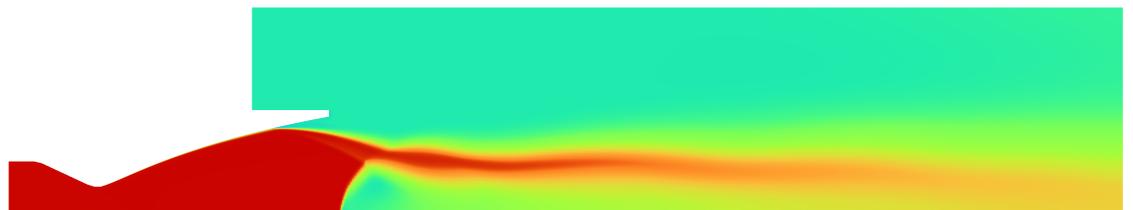
$$H_w = 1.75 r_e$$



$$H_w = 1.5 r_e$$



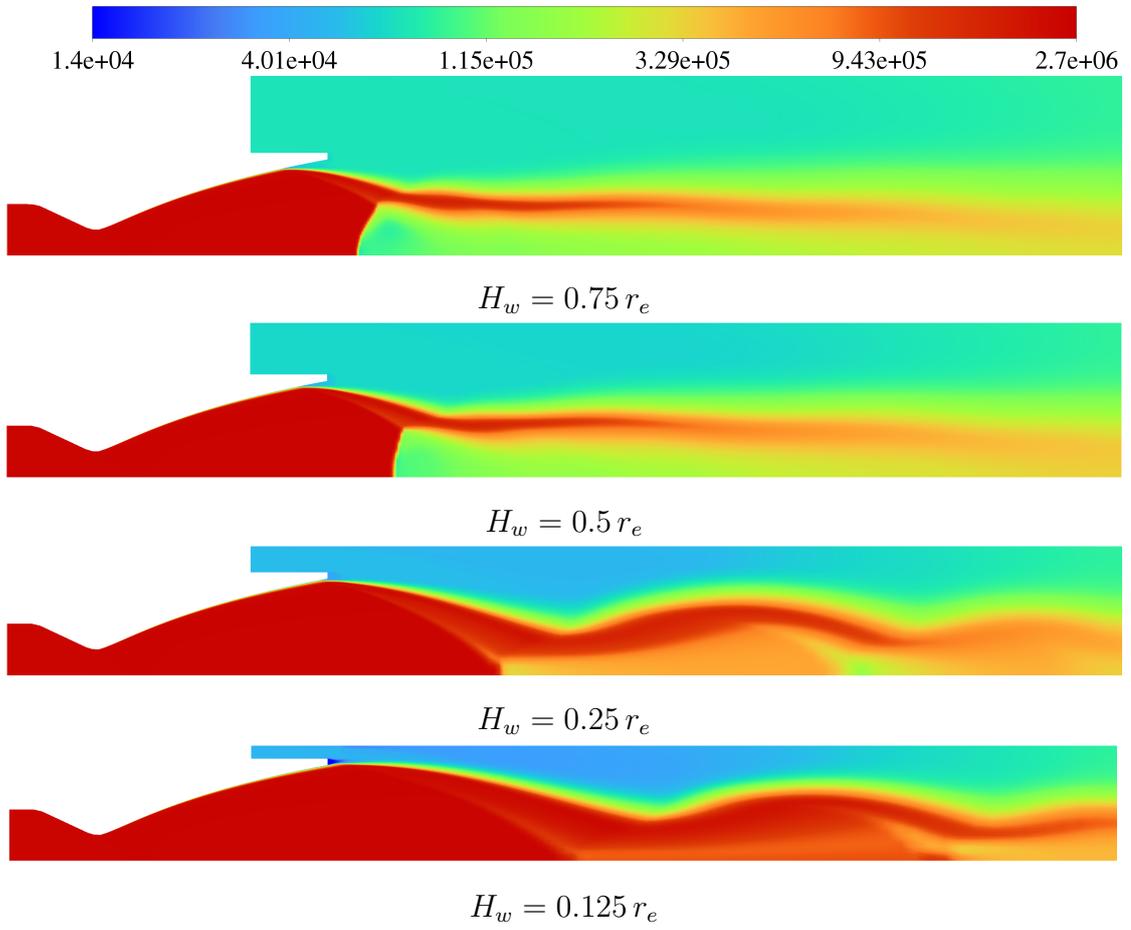
$$H_w = 1.25 r_e$$



$$H_w = 1 r_e$$

Contour Pressione Totale

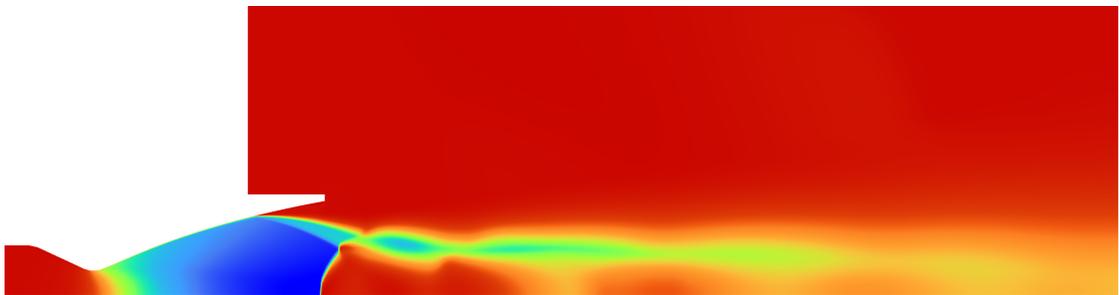
Total Pressure  
[ Pa ]



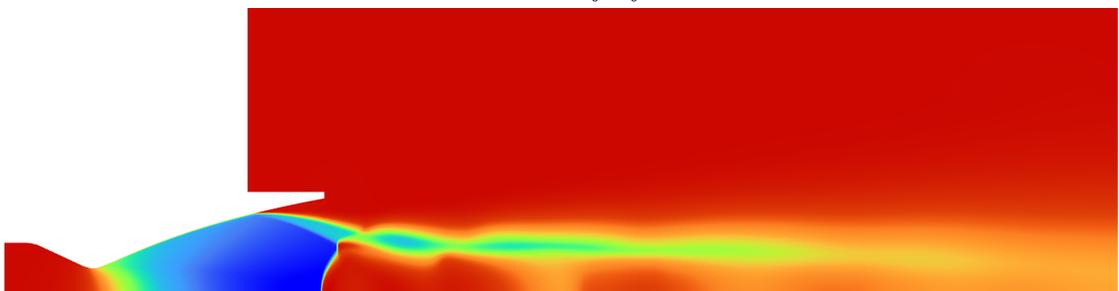
## Appendice B

# Contour Temperatura Statica

Static Temperature  
[ K ]

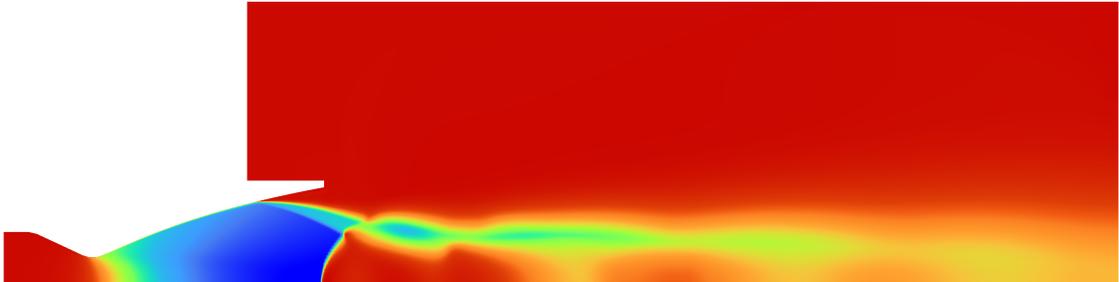
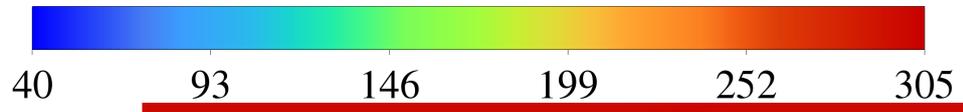


Condizione *farfield*

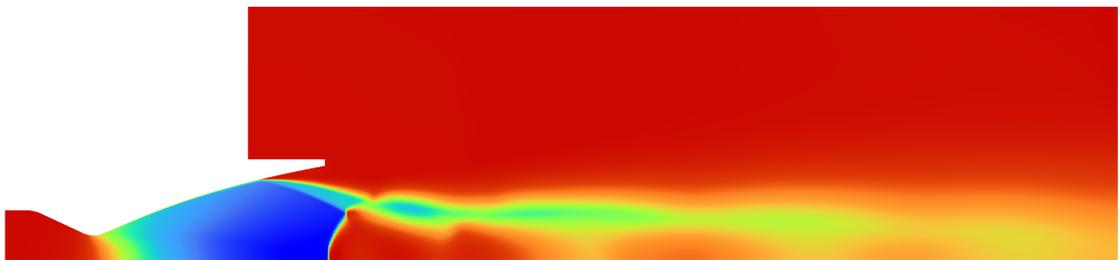


$$H_w = 2.5 r_e$$

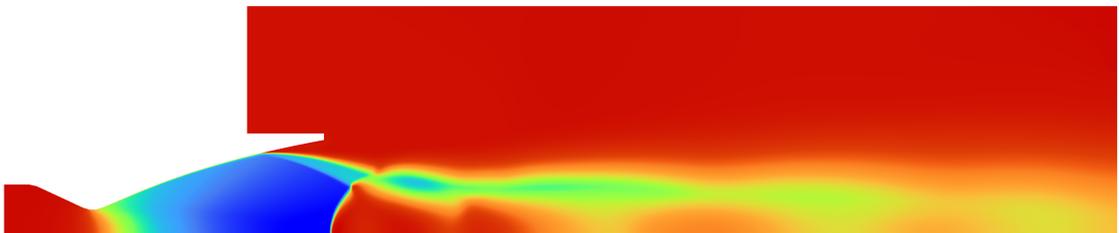
Static Temperature  
[ K ]



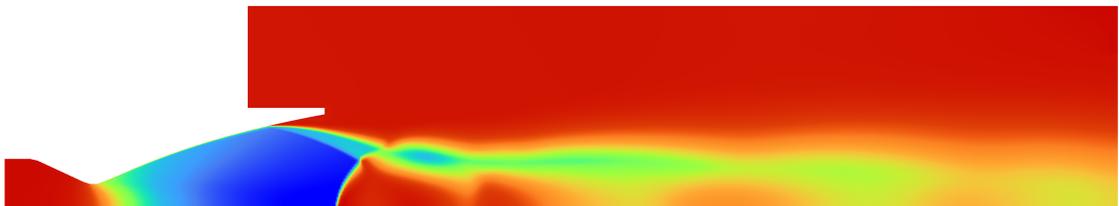
$$H_w = 1.75 r_e$$



$$H_w = 1.5 r_e$$

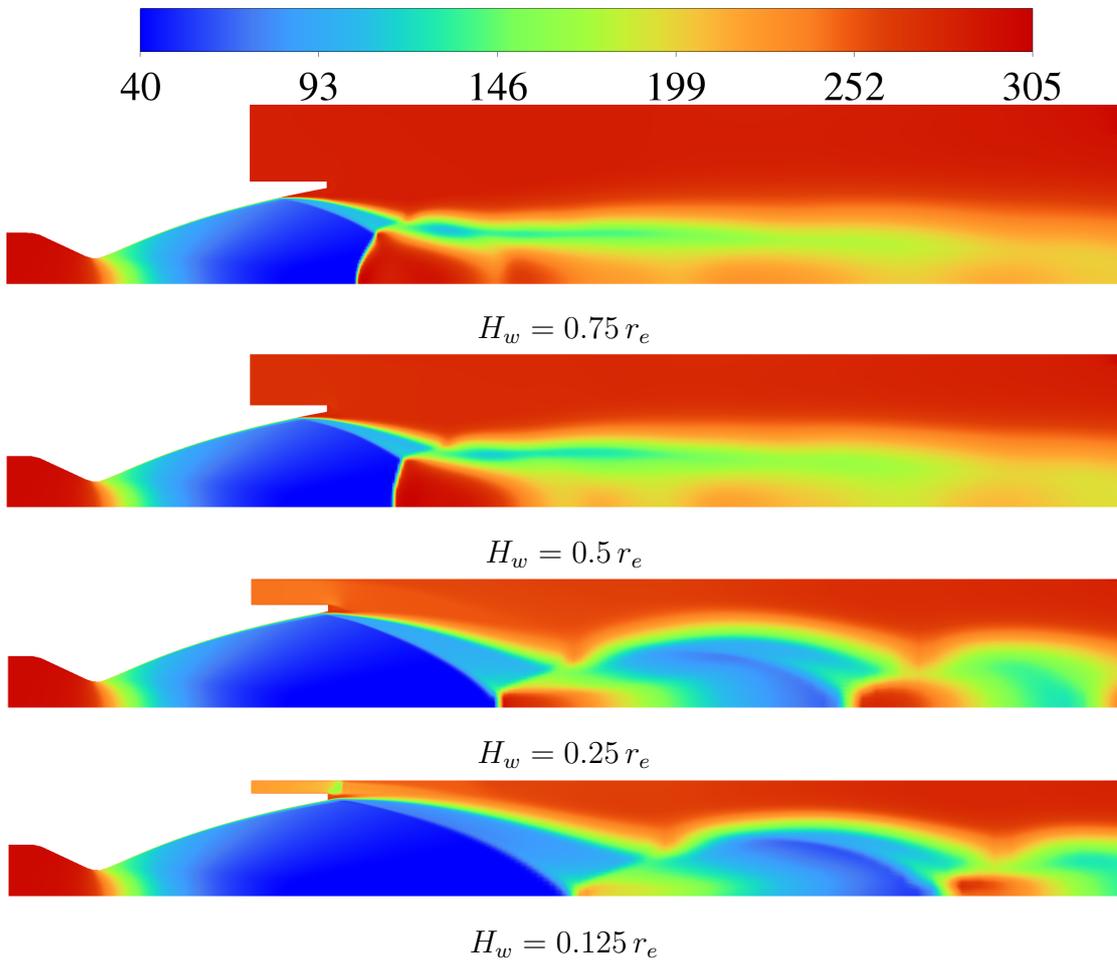


$$H_w = 1.25 r_e$$



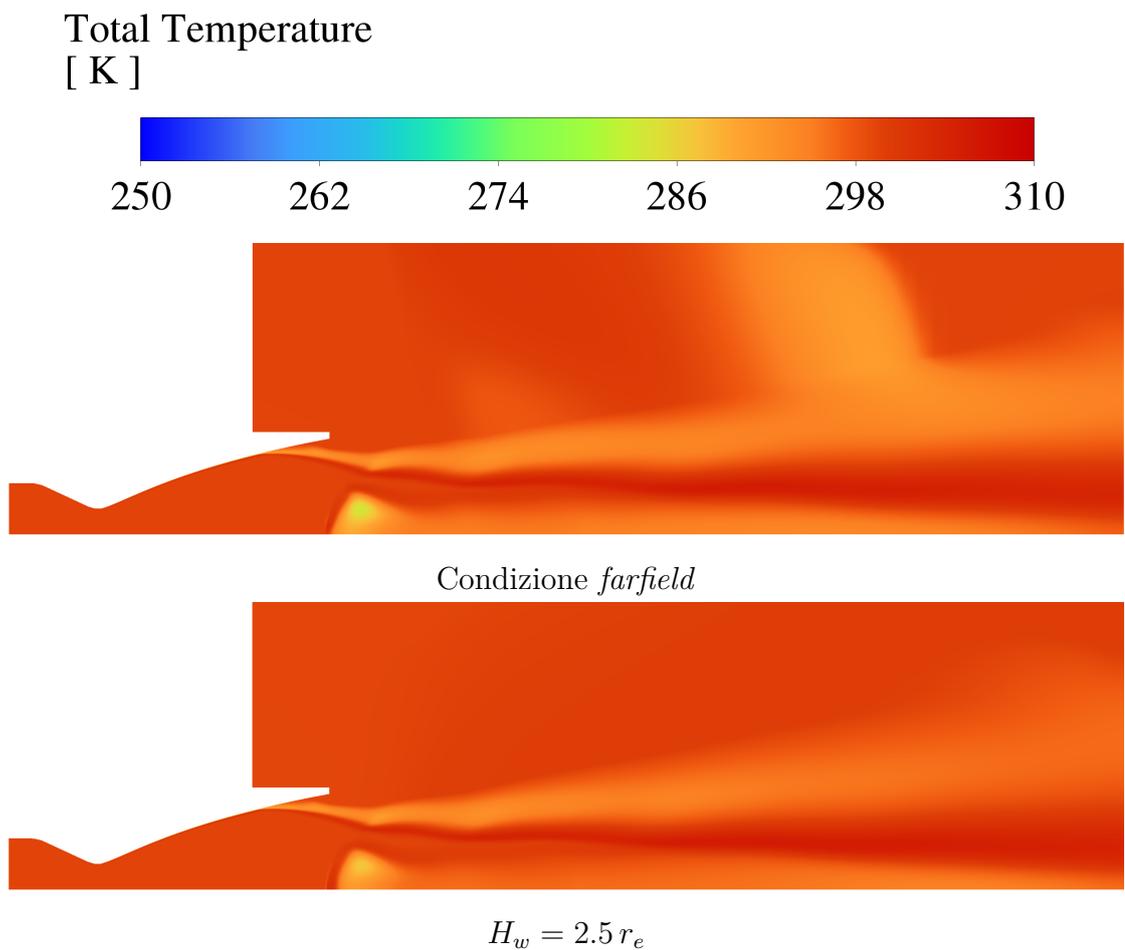
$$H_w = 1 r_e$$

Static Temperature  
[ K ]



## Appendice C

# Contour Temperatura Totale



Total Temperature  
[ K ]



$$H_w = 1.75 r_e$$



$$H_w = 1.5 r_e$$

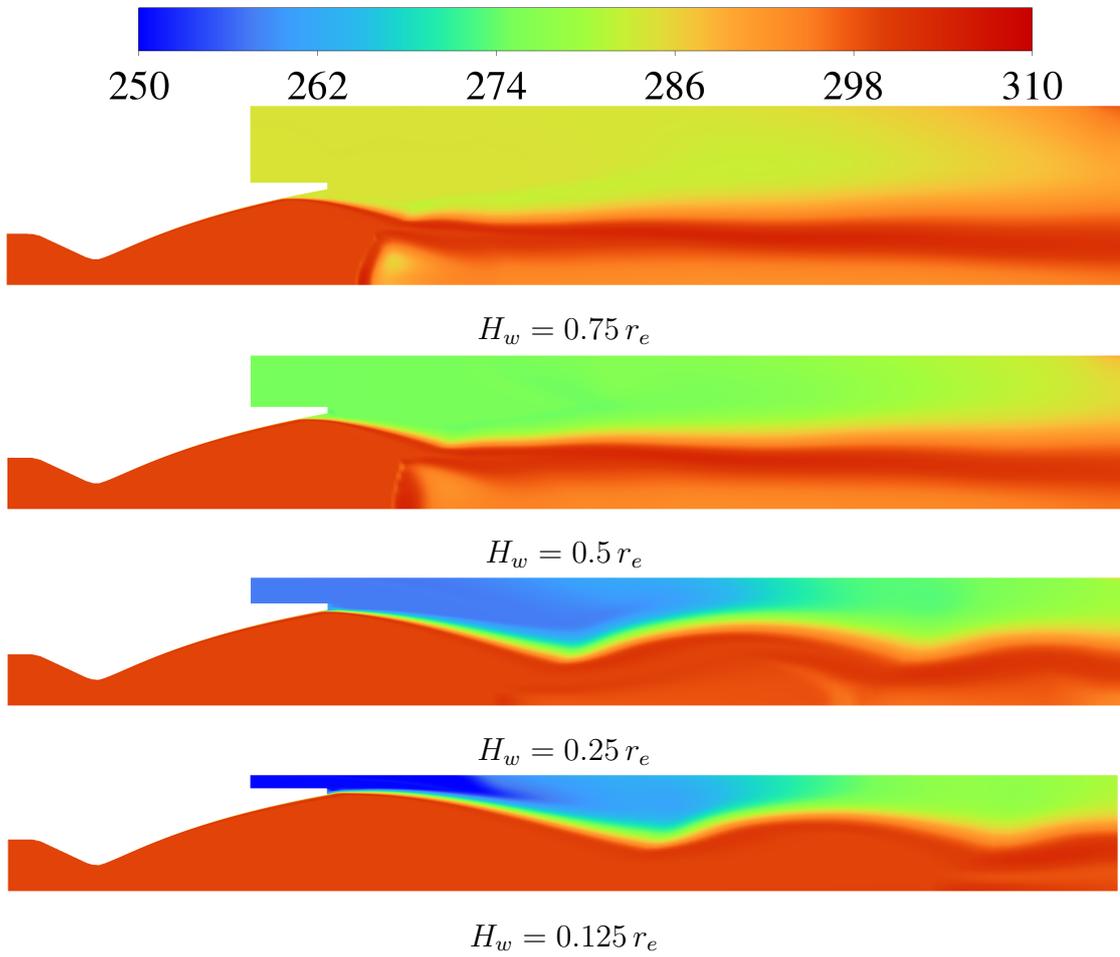


$$H_w = 1.25 r_e$$



$$H_w = 1 r_e$$

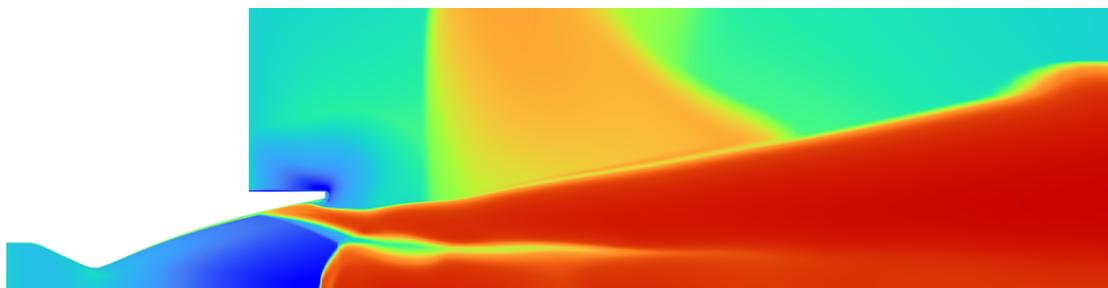
Total Temperature  
[ K ]



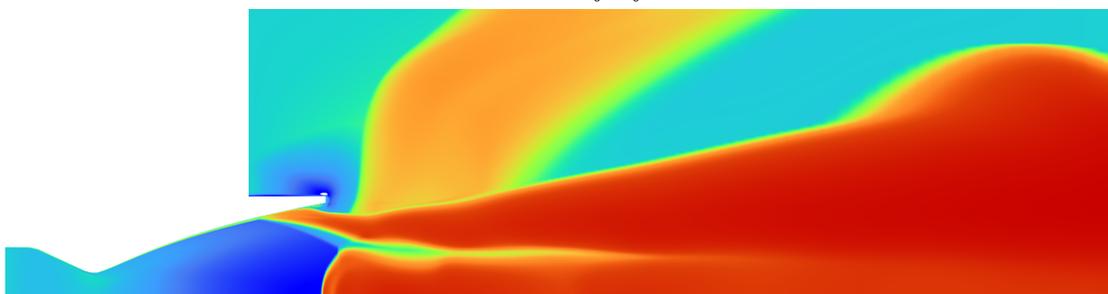
# Appendice D

## Contour Viscosità

Turbulent Viscosity  
[ kg/(m s) ]

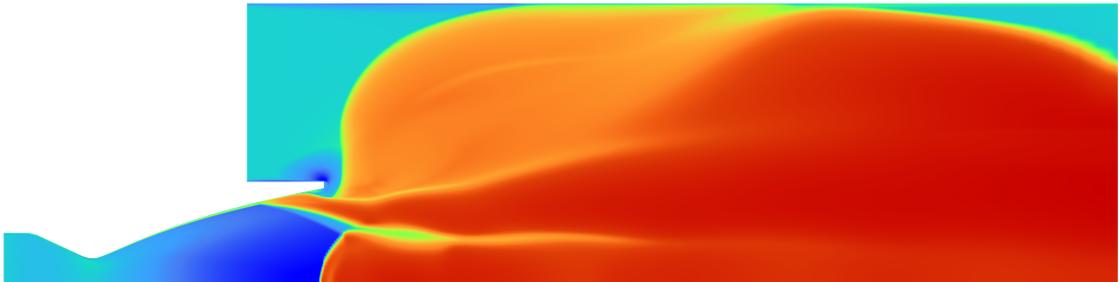


Condizione *farfield*

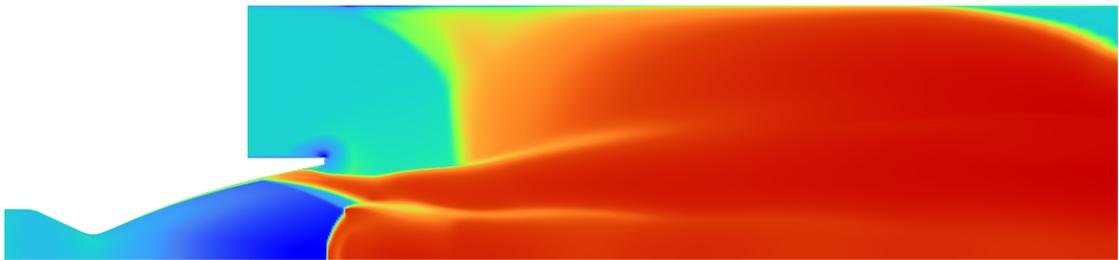


$$H_w = 2.5 r_e$$

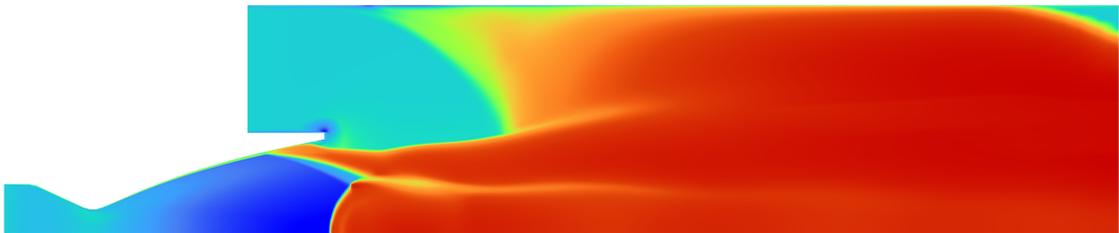
Turbulent Viscosity  
[ kg/(m s) ]



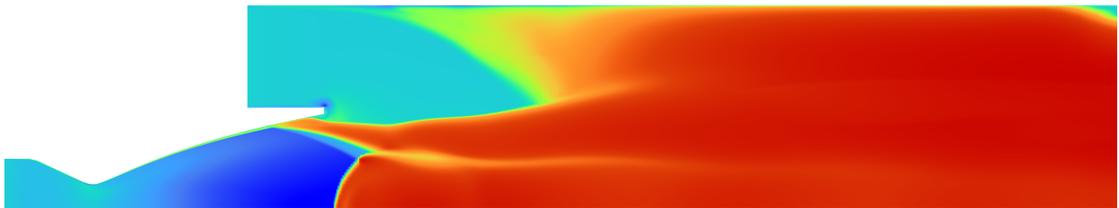
$H_w = 1.75 r_e$



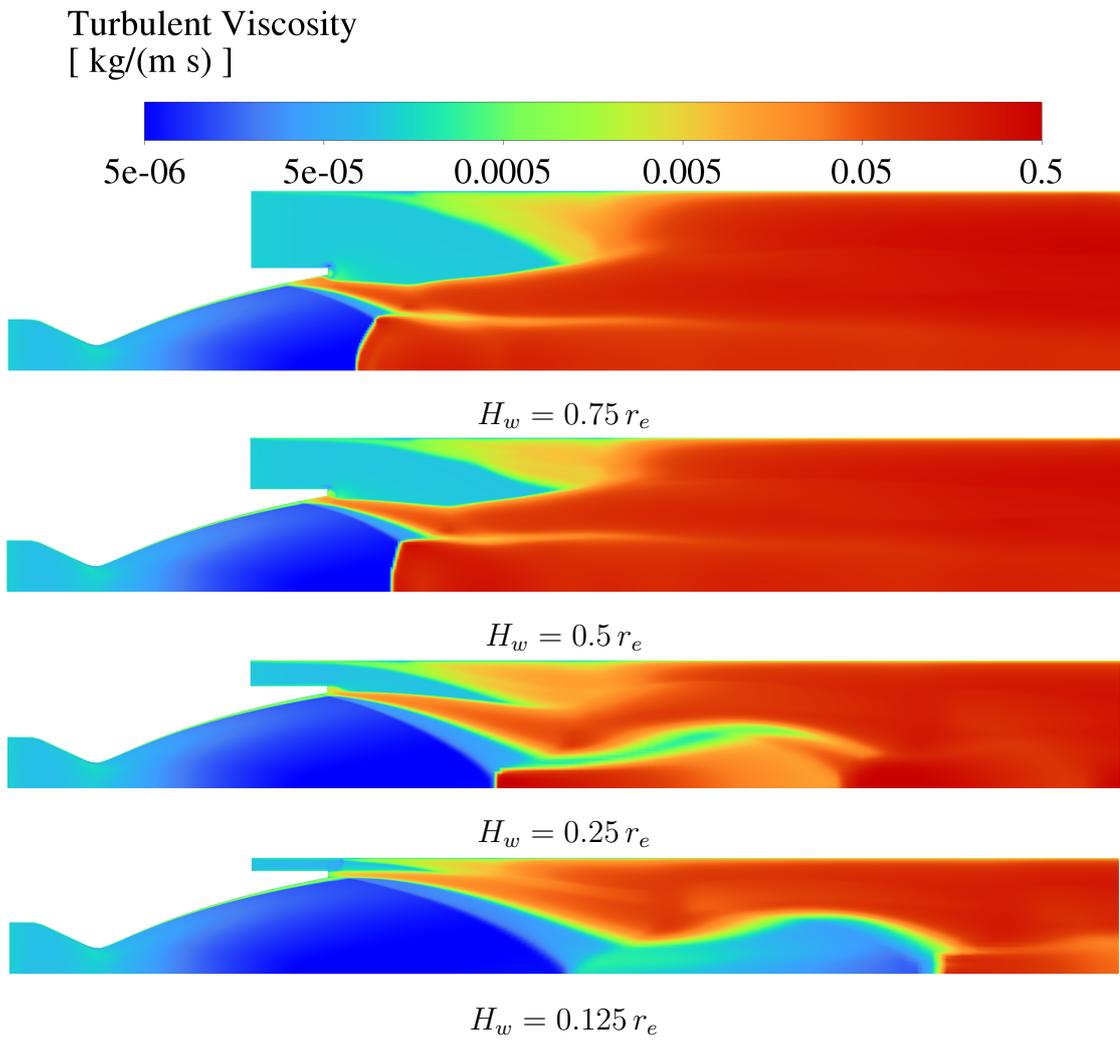
$H_w = 1.5 r_e$



$H_w = 1.25 r_e$



$H_w = 1 r_e$



# Bibliografia

- [1] ANSYS Inc. *ANSYS FLUENT*. 2024. URL: <https://www.ansys.com/products/fluids/ansys-fluent> (cit. a p. 1).
- [2] European Space Agency. *Europe's launchers*. Accessed: 2025-03-21. 2023. URL: [https://www.esa.int/Enabling\\_Support/Space\\_Transportation/Launch\\_vehicles/Europe\\_s\\_launchers](https://www.esa.int/Enabling_Support/Space_Transportation/Launch_vehicles/Europe_s_launchers) (cit. a p. 3).
- [3] NASA Marshall Space Flight Center. *F-1 Engine Documents*. Accesso al sito non disponibile al momento della stesura della tesi. n.d. URL: [https://history.msfc.nasa.gov/saturn\\_apollo/documents/F-1\\_Engine.pdf](https://history.msfc.nasa.gov/saturn_apollo/documents/F-1_Engine.pdf) (cit. a p. 4).
- [4] YUK. *Diagramma del funzionamento di un ugello di Laval*. Nome originale in cirillico. Pubblico dominio, consultato il 21 marzo 2025. 2008. URL: [https://commons.wikimedia.org/wiki/File:Laval\\_nozzle\\_diagram.svg](https://commons.wikimedia.org/wiki/File:Laval_nozzle_diagram.svg) (cit. a p. 5).
- [5] Renzo Arina. *Fondamenti di Aerodinamica*. Seconda edizione. Torino: Levrotto & Bella, 2018. ISBN: 978-88-8218-187-1 (cit. alle pp. 6, 55).
- [6] Dario Pastrone. *Endoreattori*. Lezione del corso "Endoreattori", Anno Accademico 2021/2022. 2022 (cit. alle pp. 8, 10, 12–16, 20, 24, 37).
- [7] Aerospaceweb.org. *Rocket Nozzle Expansion and Flow Separation*. Accessed: 2025-03-21. 2005. URL: <https://aerospaceweb.org/question/propulsion/q0220.shtml> (cit. alle pp. 17, 19, 20, 22).
- [8] Gaetano Iuso. *Parte B3: Getto sottoespanso e sovraespanso*. Lezione di Gasdinamica, Politecnico di Torino, DIMEAS. Slide del corso. Anno accademico 2019/2020, disponibile sul portale dell'università. 2020 (cit. alle pp. 18, 21).
- [9] Valery Zapryagaev, Nikolay Kiselev e Dmitry Gubanov. «Shock-Wave Structure of Supersonic Jet Flows». In: *Aerospace* 5.2 (2018), p. 60. DOI: 10.3390/aerospace5020060. URL: <https://www.mdpi.com/2226-4310/5/2/60> (cit. a p. 18).
- [10] George P. Sutton e Oscar Biblarz. *Rocket Propulsion Elements*. Seventh. New York: John Wiley & Sons, 2001. ISBN: 0-471-32642-9 (cit. a p. 27).

- [11] Jan Östlund. *Flow Processes in Rocket Engine Nozzles with Focus on Flow Separation and Side-Loads*. Rapp. tecn. TRITA-MEK 2002:09. Stockholm, Sweden: Royal Institute of Technology, Department of Mechanics, 2002 (cit. alle pp. 28, 30, 35, 36, 38, 39).
- [12] Joseph H. Ruf, David M. McDaniels e Andrew M. Brown. «Details of Side Load Test Data and Analysis for a Truncated Ideal Contour Nozzle and a Parabolic Contour Nozzle». In: *AIAA Joint Propulsion Conference*. Nashville, TN, United States: American Institute of Aeronautics e Astronautics, lug. 2010 (cit. a p. 29).
- [13] Aerospace CUE. *Come fa a volare un aereo? Portanza e aerodinamica*. Accessed: 2025-03-22. Giu. 2022. URL: <https://www.aerospacecue.it/2022/06/25/come-fa-a-volare-un-aereo-portanza-aerodinamica/> (cit. a p. 32).
- [14] Kurt B. Smalley, Andrew Brown, Joseph Ruf e John Gilbert. *Flow Separation Side Loads Excitation of Rocket Nozzle FEM*. Rapp. tecn. MSFC-033. MSFC Side Loads Research Program during FASTRAC. Huntsville, AL, United States: NASA Marshall Space Flight Center (MSFC), 1998. URL: <https://ntrs.nasa.gov/citations/20070001384> (cit. alle pp. 33, 34).
- [15] Joseph H. Ruf, David M. McDaniels e Andrew M. Brown. *Nozzle Side Load Testing and Analysis at Marshall Space Flight Center*. Rapp. tecn. 20100017649. A Cold Flow Nozzle Test Article in MSFC's Nozzle Test Facility. Huntsville, Alabama 35812, United States: NASA Marshall Space Flight Center, 2010. URL: <https://ntrs.nasa.gov/citations/20100017649> (cit. a p. 34).
- [16] Haifeng Hu, Xinni Gao, Yushan Gao e Jianwen Yang. «Shock Wave and Aeroelastic Coupling in Overexpanded Nozzle». In: *Aerospace* 11.10 (2024), p. 818. DOI: 10.3390/aerospace11100818. URL: <https://doi.org/10.3390/aerospace11100818> (cit. a p. 40).
- [17] Ralf H. Stark. «Flow Separation in Rocket Nozzles, a Simple Criteria». In: *Proceedings of the American Institute of Aeronautics and Astronautics (AIAA)*. Head of Nozzle Group, Department of Technology. D-74239 Lampoldshausen, Germany, 2005 (cit. a p. 41).
- [18] Cornell University. *CFD Tutorials Using ANSYS Fluent – ENGR2000X*. Videolezioni online. Corso online "A Hands-on Introduction to Engineering Simulations", edX, CornellX, ENGR2000X, disponibile al link: <https://learning.edx.org/course/course-v1: CornellX+ENGR2000X+1T2018.2018>. URL: <https://learning.edx.org/course/course-v1: CornellX+ENGR2000X+1T2018> (cit. alle pp. 43, 45, 47).
- [19] Sandra Pieraccini. *Lezioni del corso "Metodi Numerici e Calcolo Scientifico"*. Slide del corso. Politecnico di Torino, DIMEAS, Ingegneria Aerospaziale, Anno Accademico 2020-2021. 2021 (cit. a p. 45).

- [20] ENEA. *Fluent 6.3 User's Guide – 7.16.7 Pressure Inlet Boundary Conditions*. <https://www.afs.enea.it/project/neptunius/docs/fluent/html/th/node366.htm>. Accessed: 2025-03-24. 2006 (cit. a p. 46).
- [21] R. Stark e G. Hagemann. «Current Status of Numerical Flow Prediction for Separated Nozzle Flows». In: *2nd European Conference for Aerospace Sciences (EUCASS)*. Published with permission of the EUCASS association. Brussels, Belgium: EUCASS, 2007 (cit. a p. 48).
- [22] Dassault Systèmes. *SolidWorks 2023*. Computer-aided design (CAD) software. 2023. URL: <https://www.solidworks.com/> (cit. a p. 49).
- [23] CFD Ninja. *ANSYS Meshing: Bias Factor*. Accessed: 2025-03-22. Mar. 2020. URL: <https://cfd.ninja/ansys-meshing/ansys-meshing-bias-factor/> (cit. a p. 52).
- [24] F. R. Menter. «Two-Equation Eddy-Viscosity Turbulence Models for Engineering Applications». In: *AIAA Journal* 32.8 (ago. 1994), pp. 1598–1605. DOI: 10.2514/3.12149 (cit. a p. 55).
- [25] Kiran Kumar, Abhilash Suryan, V. Lijo e Heuy Dong Kim. «Numerical Investigation on Flow Separation Characteristics of Truncated Ideal Contour Nozzles». In: *Recent Asian Research on Thermal and Fluid Sciences*. A cura di Abhilash Suryan, Deog Hee Doh, Minoru Yaga e Guang Zhang. Singapore: Springer Singapore, 2020, pp. 365–377. ISBN: 978-981-15-1892-8 (cit. a p. 61).