



Politecnico di Torino

Corso di Laurea Magistrale in Ingegneria
Aerospaziale

**Studio del fenomeno di isteresi in un
Dual-Bell mediante CFD**

Tesi di Laurea

Relatore:

Prof. Emanuele Martelli

Candidato: Bashualdo Bobadilla

Paolo Cesar

Matricola: 308637

Anno accademico 2024/2025

Contents

1	Introduzione	8
1.1	La propulsione	8
1.2	Prestazioni	10
1.2.1	Spinta	11
1.2.2	Impulso totale	11
1.2.3	Impulso specifico	12
1.2.4	Velocità caratteristica	12
1.2.5	Coefficiente di spinta	13
1.2.6	Impulso specifico per densità	13
1.3	Modello di endoreattore ideale	14
1.4	Coefficiente di spinta ideale	17
1.4.1	Effetto di γ	18
1.4.2	Effetto di $\frac{p_c}{p_0}$	19
1.4.3	Effetto della quota	20
1.4.4	Effetto di γ	20
1.5	Effetti reali	21
1.5.1	Perdite cinetiche dovute alla cinetica chimica	21
1.5.2	Perdite per flusso multi-fase	23
1.5.3	Perdite per flusso diabatico	24
1.5.4	Perdite per strato limite	25
1.5.5	Perdite per divergenza	26
1.6	Ugelli reali	26
1.7	Nozzle contour e campo di flusso	28
1.8	Dual-bell	30
2	Fluidodinamica computazionale	32
2.1	Leggi di conservazioni	33
2.1.1	Approccio Lagrangiano	33
2.1.2	Approccio Euleriano	34
2.2	Conservazione della massa	35
2.3	Conservazione della quantità di moto	35
2.4	Conservazione dell'energia	36
2.5	Sistema globale	37
2.5.1	Notazione di Einstein	38
2.6	Turbolenza	39
2.7	RANS	42
2.7.1	Flussi incompressibili	42
2.7.2	Flussi compressibili	44
2.8	Modelli di turbolenza	46
2.8.1	Modello Spalart-Allmars	46
2.8.2	Modello $k - \epsilon$	47
2.8.3	Modello SST $k - \omega$	48
2.8.4	Strato limite	49
2.8.5	Requisiti di risoluzione	53

2.8.6	Wall function	54
3	Separazione del flusso	56
3.1	Condizione di separazione	57
3.2	Interazione strato limite-urto	58
3.3	Flow separation in rocket nozzles	61
3.3.1	Free Shock Separation	62
3.3.2	Restricted Shock Separation	64
4	Carichi laterali	66
4.1	Fenomeni di transizione e ritransizione	66
4.2	Fluttuazioni di pressioni	69
5	Caso sperimentale in esame	73
5.1	Pre-Processing	73
5.1.1	Geometria	73
5.1.2	Mesh	76
5.2	Condizioni di bordo	80
5.3	Fenomeno da modellare	82
5.4	Studio dell'isteresi	83
5.4.1	Modello SST $k - \omega$	83
5.4.2	Modello Spalart-Allmaras	89
5.4.3	Modello $k - \epsilon$	95
5.5	Scelta del modello	101
5.6	Mesh ridotta	102
5.6.1	Up-ramping	102
5.6.2	Down-ramping	104
5.6.3	Confronto tra up-ramping e down-ramping	104
5.6.4	Ciclo di isteresi	105
5.7	Confronto tra i due casi	106
6	Conclusioni	109
7	Appendice A	111
7.1	Caso in esame TIC	111
7.2	Mesh	112
7.2.1	Mesh 1	112
7.2.2	Mesh 2	113
7.2.3	Mesh 3	114
7.2.4	Mesh 4	115
7.3	Modello di turbolenza	116
7.4	Impostazione della simulazione	116
7.5	Condizioni al contorno	116
7.5.1	Pressure inlet	117
7.5.2	Pressure outlet	117
7.5.3	Pressure Farfield	117
7.6	Setting del solver	117
7.7	Andamenti a parete	118
8	Appendice B	119
8.1	Setting del solver	119
8.1.1	Modello di turbolenza	119
8.1.2	Materials	121
8.1.3	Boundary Conditions	121
8.1.4	Methods	124
8.1.5	Controls	125

9	Appendice C	126
9.1	Modello SST $k - \omega$	126
9.1.1	Campi a $NPR = 30$	126
9.1.2	Campi a $NPR = 52$	127
9.1.3	Campi a $NPR = 68$	128
9.2	Modello Spalart-Allmaras	129
9.2.1	Campi a $NPR = 30$	130
9.2.2	Campi a $NPR = 42$	131
9.2.3	Campi a $NPR = 56$	132
9.3	Modello $k - \epsilon$ Realizable	133
9.3.1	Campi a $NPR = 30$	133
9.3.2	Campi a $NPR = 56$	134
9.3.3	Campi a $NPR = 72$	135

List of Figures

1.1	Funzione portata corretta	16
1.2	Effeto del rapporto di espansione sul C_F	18
1.3	Effetto del rapporto di pressioni sul diagramma $C_F - \epsilon$	19
1.4	Effetto della quota sul C_F	20
1.5	Effetto di γ sul C_F nel caso adattato	20
1.6	Regenerative cooling	25
1.7	Profili di velocità e temperatura nello strato limite	25
1.8	Prestazioni reali	27
1.9	Campi di mach per vari contours	28
1.10	Zona interna kernel	29
1.11	Due modalità operative: sea-level mode (sinistra) e altitude mode (destra)	31
2.1	Campo di flusso approccio Langrangiano	33
2.2	Campo di flusso approccio Euleriano	34
2.3	Segnale della velocità turbolenta in funzione del tempo	40
2.4	Profilo di velocità nello strato limite	50
2.5	Sforzo di taglio lungo lo strato limite	51
2.6	Grafico $y^+ - u^+$ nello strato limite	52
2.7	Profilo di velocità	54
3.1	Interazione strato limite urto	59
3.2	Andamento tipico di pressione statica	60
3.3	Free Shock Separation pattern	62
3.4	Restricted Shock Separation	64
3.5	Pressioni a parete e campo di mach del VOLVO S1 in FSS e RSS	65
4.1	FSS e RSS nel S1 nello start-up	67
4.2	Picchi dei carichi laterali nel S1	67
4.3	Spettro di risposta in frequenza di una single square wave	68
4.5	Fluttuazioni di pressione a parete con flusso attaccato	70
4.6	Fluttuazioni di pressione a parete nella zona di separazione	70
4.7	Fluttuazioni di pressione a parete nella zona di ricircolo	71
4.8	Side-loads creati con un pulsazione randomica di pressione	71
5.1	Punti della Dual-Bell con asse di simmetria	74
5.2	Geometria con dominio esterno	75
5.3	Geometria in ambiente Ansys	76
5.4	Mesh della geometria complessiva	77
5.5	Mesh ugello	77
5.6	Confronto con dati sperimentali	78
5.7	Andamenti a parete tra $NPR = 30$ a $NPR = 50.5$	84
5.8	Andamenti a parete tra $NPR = 52$ a $NPR = 62$	84
5.9	Andamenti a parete tra $NPR = 62$ a $NPR = 70$	85
5.10	Andamenti a parete tra $NPR = 70$ a $NPR = 62$	86
5.11	Confronto per $NPR = 68$ tra up-ramping e down-ramping	86

5.12	Confronto per $NPR = 66$ tra up-ramping e down-ramping	87
5.13	Ciclo di isteresi per SST $k - \omega$	88
5.14	Andamenti a parete tra $NPR = 30$ a $NPR = 45.7$	89
5.15	Andamenti a parete tra $NPR = 42$ e $NPR = 50$	90
5.16	Andamenti a parete tra $NPR = 50$ e $NPR = 60$	90
5.17	Andamenti a parete tra $NPR = 60$ e $NPR = 50$	91
5.18	Confronto per $NPR = 56$ tra up-ramping e down-ramping	92
5.19	Confronto per $NPR = 54$ tra up-ramping e down-ramping	92
5.20	Ciclo di isteresi per $S - A$	94
5.21	Andamenti a parete tra $NPR = 30$ e $NPR = 52$	95
5.22	Andamenti a parete tra $NPR = 54$ e $NPR = 64$	96
5.23	Andamenti a parete tra $NPR = 66$ e $NPR = 73$	96
5.24	Andamenti a parete tra $NPR = 73$ e $NPR = 66$	97
5.25	Confronto per $NPR = 72$ tra up-ramping e down-ramping	97
5.26	Confronto per $NPR = 68$ tra up-ramping e down-ramping	98
5.27	Ciclo di isteresi per $k - \epsilon$	100
5.28	Andamenti a parete tra $NPR = 30$ e $NPR = 50$	102
5.29	Andamenti a parete tra $NPR = 52$ e $NPR = 62$	103
5.30	Andamenti a parete tra $NPR = 62$ e $NPR = 70$	103
5.31	Andamenti a parete tra $NPR = 70$ e $NPR = 62$	104
5.32	Confronto tra up-ramping e down-ramping	104
5.33	Confronto tra up-ramping e down-ramping	105
5.34	Ciclo di isteresi	106
5.35	Confronto ciclo di isteresi	108
7.1	Geometria	111
7.2	Mesh 1	112
7.3	Particolare mesh 1	113
7.4	Mesh 2	113
7.5	Particolare mesh 2	114
7.6	Mesh 3	114
7.7	Particolare mesh 3	115
7.8	Mesh 4	115
7.9	Particolare mesh 4	116
7.10	Andamento a parete del TIC per $NPR = 25.5$	118
8.1	Colonna di gestione delle procedure	120
8.2	Setting del modello di turbolenza	120
8.3	Setting del materiale	121
8.4	Sistema di sottosezioni	122
8.5	Condizioni all'inlet	123
8.6	Condizioni al Farfield	123
8.7	Condizioni all'outlet	123
8.8	Setting solver	124
8.9	Setting controls	125
9.1	Campo di Mach a $NPR = 30$	126
9.2	Campo di pressione statica a $NPR = 30$	127
9.3	Campo di temperatura statica a $NPR = 30$	127
9.4	Campo di Mach a $NPR = 52$	127
9.5	Campo di pressione statica a $NPR = 52$	128
9.6	Campo di temperatura statica a $NPR = 52$	128
9.7	Campo di Mach a $NPR = 68$	128
9.8	Campo di pressione statica a $NPR = 68$	129
9.9	Campo di temperatura statica a $NPR = 68$	129
9.10	Campo di Mach a $NPR = 30$	130

9.11	Campo di pressione statica a $NPR = 30$	130
9.12	Campo di temperatura statica a $NPR = 30$	130
9.13	Campo di Mach a $NPR = 42$	131
9.14	Campo di pressione statica a $NPR = 42$	131
9.15	Campo di temperatura statica a $NPR = 42$	131
9.16	Campo di Mach a $NPR = 56$	132
9.17	Campo di pressione statica a $NPR = 56$	132
9.18	Campo di temperatura statica a $NPR = 56$	132
9.19	Campo di Mach a $NPR = 30$	133
9.20	Campo di pressione statica a $NPR = 30$	133
9.21	Campo di temperatura statica a $NPR = 30$	134
9.22	Campo di Mach a $NPR = 56$	134
9.23	Campo di pressione statica a $NPR = 56$	134
9.24	Campo di temperatura statica a $NPR = 56$	135
9.25	Campo di Mach a $NPR = 72$	135
9.26	Campo di pressione statica a $NPR = 72$	135
9.27	Campo di temperatura statica a $NPR = 72$	136

Abstract

Negli ultimi decenni, la ricerca di ugelli innovativi ha portato allo sviluppo di configurazioni di tipo ACN (Adaptive Contour Nozzle), capaci di adattarsi alle variazioni delle condizioni di pressione in quota.

Tra queste, il Dual-Bell nozzle, originariamente proposto da Foster and Cowles nel 1949, è una doppia campana capace di adattarsi a due quote diverse, in modo da avere un rapporto di espansione ottimale sia per basse che per alte altitudini.

I primi test sperimentali su questa configurazione sono stati condotti da Fisher e Horn nel 1994, confermandone le potenzialità.

L'adozione di questa configurazione risulta particolarmente vantaggiosa per i razzi a più stadi, dove l'ottimizzazione della spinta in diverse fasi dell'ascesa può migliorare significativamente l'efficienza complessiva.

Rispetto agli ugelli convenzionali, la doppia campana offre una soluzione che non comporta un aggravio di costi e di complessità del sistema.

In questa tesi, l'hysteresis behavior del Dual-Bell nozzle viene studiato attraverso la computational fluid dynamics (CFD) condotta con il software ANSYS Fluent, utilizzando i turbulence models: Spalart-Allmaras, SST K-omega e K-epsilon.

L'analisi si concentra sulla valutazione dell'efficacia di tali modelli nella risoluzione di geometrie non classiche e sullo studio della transition e della retransition tra le due modalità operative. Un'accurata previsione di questi fenomeni è essenziale per studiare il comportamento isteretico e valutarne la sicurezza nel sea-level transitioning, garantendo che l'ugello funzioni in modo stabile ed efficiente durante il lancio e il volo attraverso diverse altitudini.

In conclusione, uno dei modelli utilizzati si è rivelato particolarmente adatto a rappresentare il comportamento isteretico, mostrando una transition e una retransition ben definite.

Keywords Computational Fluid Dynamics, ANSYS Fluent, Turbulence models, Spalart-Allmaras, SST K-omega, K-epsilon, Dual-Bell nozzle, Transition, Retransition, Hysteresis Behavior

Chapter 1

Introduzione

1.1 La propulsione

La propulsione si basa sulla variazione della quantità di moto di un corpo generico rispetto ad un sistema di riferimento inerziale. Esistono due famiglie:

- *Reciprocating Engines*, ovvero i motori in cui la spinta è generata dalla conversione della potenza su un albero (motori ad elica e alternativi).
- *Jet Propulsion*, ovvero i motori che si basano direttamente sul principio di azione-reazione, in cui una massa viene accelerata ed espulsa in modo da generare una forza di reazione che coincide con la spinta.

Nell'ambito di questa tesi si studierà la seconda categoria nel quale rientra la cosiddetta *propulsione a razzo*.

A differenza dei motori *air-breathing* (ramjet, scramjet, turbofan, turbojet etc.) che utilizzano l'aria esterna, nella propulsione spaziale la massa accelerata ed espulsa definita come *propellente*, è immagazzinata all'interno di serbatoi.

Per questo motivo all'interno della famiglia dei *jet propulsion* è possibile fare un'ulteriore distinzione:

- *Esoreattori*;
- *Endoreattori*;

Gli endoreattori a loro volta possono essere classificati in base alla fonte di energia:

- *chimica*, si sfrutta l'energia liberata dalle reazioni chimiche;
- *nucleare*, si genera energia tramite reazioni nucleari, accelerando i prodotti di fissione o energizzando la massa propulsiva;

- *solare*, si sfrutta l'energia solare per riscaldare il propellente;
- *elettrici*, si sfrutta l'energia elettrica per accelerare il propellente tramite campi elettromagnetici;

Gli endoreattori chimici fanno parte della famiglia dei razzi a propulsione termica, permettono di raggiungere le velocità necessarie per l'ascesa in orbita.

Si definisce *propellente*, la massa immagazzinata all'interno dei serbatoi utile per la generazione di spinta. Il termine viene utilizzato in modo non univoco, può rappresentare sia il combustibile, che l'ossidante o entrambi. I propellenti possono essere di varia natura:

- *Monopropellenti*, la combustione avviene tramite un fuel ed un eventuale catalizzatore;
- *Bipropellenti*, la combustione avviene unendo fuel e ossidante;
- *cold gas* e *heated gas*, la spinta è generata dall'accelerazione di gas che non varia la sua composizione chimica;

In base allo stato del propellente gli endoreattori chimici possono essere suddivisi in:

- *Liquid Rocket Engine* (LRE), il propellente o i propellenti sono allo stato liquido;
- *Solid Rocket Motor* (SRM), il propellente è allo stato solido;
- *Hybrid Rocket Engine* (HRE), il fuel è solido e l'ossidante è liquido;

Indipendentemente dal tipo o tipi di propellenti impiegati, tutti gli endoreattori sono caratterizzati da avere dei componenti fondamentali tra i quali:

- *Serbatoio*;
- *Sistema di alimentazione* (assente nei SRM);
- *Camera di combustione*;
- *Ugello*;

La camera di combustione è uno dei principali componenti del lanciatore nel quale fuel ed ossidante vengono fatti reagire, dando vita al processo di combustione.

Questo componente può essere diviso in zone che rispettivamente si susseguono in:

- *Zone di iniezione/atomizzazione* dove avvengono i processi di atomizzazione, evaporazione e mixing;
- *Zona di rapida combustione* dove vi è il maggior rilascio di energia, caratterizzata dall'essere estremamente turbolenta;
- *Zona di combustione a tubi di flusso* dove avviene il completamento delle reazioni chimiche ed il campo di moto è contraddistinto dalla suddivisione in tubi di flusso;

Il processo di combustione avviene nel campo del subsonico, motivo per il quale è stato ideato l'ultimo componente del lanciatore.

L'ugello è un componente dotato di pareti, che hanno lo scopo di accelerare il flusso uscente dalla camera di combustione fino a velocità supersoniche. Per questo motivo nella propulsione spaziale si adottano ugelli convergenti-divergenti, i quali hanno la capacità di accelerare nel tratto convergente il flusso subsonico, raggiunta la gola e raggiunto le condizioni soniche, poter dar inizio all'espansione nel tratto divergente accelerando ulteriormente il flusso.

1.2 Prestazioni

Le prestazioni di un motore possono essere calcolate o verificate sperimentalmente, in particolare possono riferirsi a:

- *prestazioni reali*, quella effettivamente misurata durante il funzionamento;
- *prestazioni teoriche*, calcolate con fattori correttivi;
- *prestazioni in condizioni standard*, calcolate sotto condizioni standard;
- *prestazioni minime garantite* indicate dal progettista, tenendo conto di fattori di sicurezza e tolleranze;
- *prestazioni richieste* per soddisfare le specifiche della missione;

Inoltre, dipendono anche dalle condizioni operative come per esempio:

- *Tipi di propellente*, composizione chimiche e condizioni di pressione e temperatura;
- *Ugello*, forma e dimensioni;

- *Pressioni* in camera ed ambiente;
- *Ipotesi chiave* del modello teorico adottato, come per esempio shifting o frozen equilibrium in camera di combustione;

Quindi si evidenzia come sia importante distinguere le condizioni ideali da quelle reali, le diverse tipologie di prestazioni e l'importanza delle condizioni operative e dei fattori correttivi utilizzati.

Nel caso della propulsione spaziale si definiscono dei parametri importanti ben definiti.

1.2.1 Spinta

La spinta di un propulsore è forza generata dall'espulsione di massa (in generale gas combusti) attraverso un ugello. Considerando un caso unidimensionale e considerando il principio della conservazione della quantità di moto, può essere definito come:

$$F = \dot{m}w_e + A_e (p_e - p_0) \quad (1.1)$$

dove i termini:

- w_e è la velocità effettiva del flusso in uscita dall'ugello;
- A_e è l'area di uscita dell'ugello;
- p_e è la pressione statica all'uscita dall'ugello;
- p_0 è la pressione atmosferica;

1.2.2 Impulso totale

La spinta F essendo variabile nel tempo, ci permette di definire *impulso totale*

$$I_t = \int_0^{\Delta t} F(t) dt \quad (1.2)$$

che misura la variazione complessiva della quantità di moto, e quindi anche dell'energia rilasciata, impressa nel tempo al motore.

1.2.3 Impulso specifico

Questo parametro è rappresentato come il rapporto tra l'effetto utile (espresso in termini di impulso totale) ed il costo della spinta (espresso in termini di massa utilizzata, vista come peso che avrebbe sulla superficie terrestre)

$$I_s = \frac{I_t}{g_0 \int_0^{\Delta t} \dot{m}_p dt} \quad (1.3)$$

La massa utilizzata in fase d'ascesa, che varia nel tempo è la massa del propellente che può essere riscritta come:

$$m_p = \int_0^{\Delta t} \dot{m}_p dt \quad (1.4)$$

Nel ipotesi di F e \dot{m}_p costanti nel tempo si può formalmente riscrivere:

$$I_s = \frac{F}{g_0 \dot{m}_p} = \frac{c}{g_0} \quad (1.5)$$

dove c rappresenta la *velocità efficace di scarico*:

$$c = \frac{F}{\dot{m}_p} \quad (1.6)$$

notando come *impulso specifico* e *velocità di scarico* sono proporzionali per mezzo di g_0 .

Invece, l'introduzione del concetto di *impulso totale* è stato utile per definire l'*impulso specifico*.

1.2.4 Velocità caratteristica

Un altro parametro prestazionale importante è definito come:

$$c^* = \frac{p_c A_t}{\dot{m}} \quad (1.7)$$

dove p_c è la pressione di camera e A_t è l'area di gola, si nota subito come essa sia indipendente dalle caratteristiche dell'ugello e non rappresenta una velocità fisica, infatti è collegata all'efficienza di combustione e quindi al propellente.

Propellenti efficienti presenteranno un numero alto di c^* , indicando come a data A_t e portata massica si instaurano pressione di camera più alte.

1.2.5 Coefficiente di spinta

Questo coefficiente è definito come:

$$C_F = \frac{F}{p_c A_t} \quad (1.8)$$

ed è un metro di misura dell'effetto benefico dell'ugello sulla spinta ottenuta, in quanto il denominatore rappresenta la spinta che si otterrebbe in un istante nell'ipotesi di applicare un foro di area A_t in una camera in pressione p_c .

Inoltre vi è un legame tra questo parametro e la velocità caratteristica precedentemente introdotta:

$$c = \frac{F}{\dot{m}} = \frac{F}{p_c A_t} \frac{p_c A_t}{\dot{m}} = C_F c^*$$

1.2.6 Impulso specifico per densità

Per introdurre l'ultimo parametro prestazionale dobbiamo definire un parametro di progetto (non prestazionale), ovvero il *mixture ratio*:

$$r_m = \frac{\dot{m}_{ox}}{\dot{m}_f} \quad (1.9)$$

Esso può cambiare durante la missione per variare le prestazioni, dal momento che varia è possibile definire il rapporto di miscela medio tenendo conto non più delle portate, ma delle masse.

$$\overline{r_m} = \frac{m_{ox}}{m_f} \quad (1.10)$$

In conclusione definendo la *densità media* di propellente come:

$$\rho = \frac{m_f + m_{ox}}{V_f + V_{ox}} = \frac{m_f + m_{ox}}{\frac{m_f}{\rho_f} + \frac{m_{ox}}{\rho_{ox}}} = \frac{m_f \left(1 + \frac{m_{ox}}{m_f}\right)}{m_f \left(\frac{1}{\rho_f} + \frac{1}{\rho_{ox}} \frac{m_{ox}}{m_f}\right)} = \frac{1 + r_m}{\frac{1}{\rho_f} + \frac{r_m}{\rho_{ox}}} \quad (1.11)$$

dove ρ_{ox} e ρ_f sono rispettivamente le densità del propellente e del combustibile.

Avendo quindi definito la densità media di propellente, si introduce l'ultima prestazione detta *impulso specifico per densità*

$$I_\rho = I_s \rho \quad (1.12)$$

rappresenta l'effetto combinato dell'impulso specifico e della densità media del propellente, parametro importante per la scelta del combustibile degli

stadi.

Riassumendo i parametri prestazionali sono:

- Spinta F ;
- Coefficiente di spinta C_F ;
- Velocità di scarico c e velocità caratteristica c^* ;
- Impulso totale I_t ;
- Impulso specifico I_s ;
- Impulso specifico per densità I_ρ

1.3 Modello di endoreattore ideale

Le prestazioni appena definite possono essere utilizzate in un modello di endoreattore ideale, per il quale i principi della termodinamica sono in forma relativamente semplice.

Affinchè questo modello abbiamo validità devo sottostare a determinate ipotesi:

- *Flusso omogeneo*;
- *Equilibrio chimico in camera di combustione*;
- *Gas perfetto con γ costante*;
- *Fluido con composizione costante*;
- *Espansione adiabatica*;
- *Non sono presenti discontinuità*;
- *Non sono presenti effetti dello strato limite*;
- *Flusso 1D in uscita*;
- *Velocità assiale*;
- *Flusso stazionario*

Sotto queste ipotesi dal primo principio della termodinamica

$$Q + L = \Delta h^\circ$$

Non essendoci scambio di calore, né lavoro sul fluido, si ottiene che la variazione dell'entalpia totale si conserva tra camera (punto c) e uscita (punto e).

Considerando la velocità di camera nulla (u_c), si riscrive ingresso ed uscita all'ugello in modo da esplicitare la velocità di uscita w_e

$$c_p T_c = c_p T_e + \frac{w_e^2}{2} \quad (1.13)$$

Esplicitando la velocità di uscita e considerando le relazioni isentropiche, in quanto nell'ugello vige una condizione di adiabaticità e di reversibilità (no perdite per urti e strato limite).

$$w_e = \sqrt{2 c_P T_c \left(1 - \frac{T_e}{T_c}\right)} = \sqrt{2 c_p T_c \left(1 - \frac{1}{\beta_e^{\frac{\gamma-1}{\gamma}}}\right)} \quad (1.14)$$

in cui $\beta_e = \frac{p_c}{p_e}$ è il rapporto di pressioni.

Al fine di esprimere un parametro ϵ , ovvero il rapporto di espansione dell'ugello, lavoriamo con le portate.

La portata di uscita è generalmente considerata come

$$\dot{m} = \frac{pA}{\sqrt{RT}} f(M) \quad (1.15)$$

dove la $f(M)$ rappresenta una funzione del mach, il cui andamento è quello di figura 1.1.

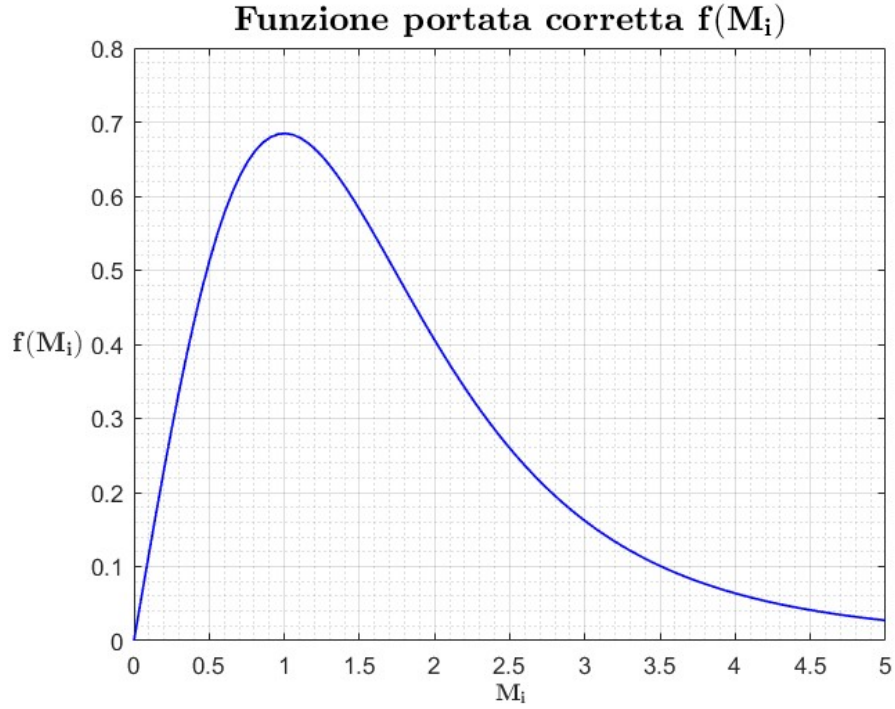


Figure 1.1: Funzione portata corretta

Inoltre l'ipotesi di unidimensionalità del flusso all'uscita ci permette di scrivere la portata come

$$\dot{m}_e = \rho_e w_e A_e \quad (1.16)$$

In conseguenza dell'ipotesi di flusso stazionario, la conservazione della portata tra gola (si suppone mach sonico) ed uscita si ottiene

$$\frac{p_c A_t}{\sqrt{RT_c}} \Gamma = \rho_e w_e A_e \quad (1.17)$$

$$\text{dove } \Gamma = \sqrt{\gamma} \left(\frac{2}{\gamma+1} \right)^{\frac{\gamma+1}{2(\gamma-1)}}$$

Dall'ipotesi di gas perfetto $\frac{\rho_e}{\rho_c} = \left(\frac{p_e}{p_c} \right)^{\frac{1}{\gamma}}$ si arriva a scrivere una relazione per rapporto di espansione

$$\epsilon = \frac{A_e}{A_t} = \frac{\Gamma}{\sqrt{2^{\frac{\gamma}{\gamma-1}} \left[\left(\frac{p_e}{p_c} \right)^{\frac{2}{\gamma}} - \left(\frac{p_e}{p_c} \right)^{\frac{\gamma+1}{\gamma}} \right]}} \quad (1.18)$$

1.4 Coefficiente di spinta ideale

Data la definizione generica

$$C_F = \frac{F}{p_c A_t} \quad (1.19)$$

si sostituisce la definizione di spinta $T = \dot{m}w_e + A_e(p_e - p_0)$

$$C_F = \frac{\dot{m}}{p_c A_t} w_e + \epsilon \left(\frac{p_e}{p_c} - \frac{p_0}{p_c} \right) \quad (1.20)$$

esprimendo la portata come

$$\dot{m}_t = \frac{p_c A_t}{\sqrt{\frac{R}{M} T_c}} \Gamma \quad (1.21)$$

e la velocità di uscita come

$$w_e = \sqrt{2 \frac{\gamma}{\gamma - 1} \frac{R}{M} T_c \left[1 - \left(\frac{p_e}{p_c} \right)^{\frac{\gamma-1}{\gamma}} \right]} \quad (1.22)$$

in conclusione la relazione diventa

$$C_F = \Gamma \sqrt{2 \frac{\gamma}{\gamma - 1} \left[1 - \left(\frac{p_e}{p_c} \right)^{\frac{\gamma-1}{\gamma}} \right]} + \epsilon \left(\frac{p_e}{p_c} - \frac{p_0}{p_c} \right) \quad (1.23)$$

quindi nel modello ideale il coefficiente di spinta risulta essere dipendente da

$$C_F = C_F \left(\gamma, \epsilon, \frac{p_0}{p_e} \right)$$

non è definito da $\frac{p_e}{p_c}$ poichè è definito solamente da γ e ϵ , è quindi possibile definire il coefficiente di spinta in due termini

$$C_F = C_{F_{vac}} - \epsilon \frac{p_0}{p_e}$$

dove il coefficiente di spinta del vuoto risulta essere

$$C_{F_{vac}} = \Gamma \sqrt{2 \frac{\gamma}{\gamma - 1} \left[1 - \left(\frac{p_e}{p_c} \right)^{\frac{\gamma-1}{\gamma}} \right]} + \epsilon \frac{p_e}{p_c}$$

1.4.1 Effetto di γ

Per un dato valore γ e di $\frac{p_0}{p_c}$, quindi

- fissata la composizione del propellente;
- fissata la quota;

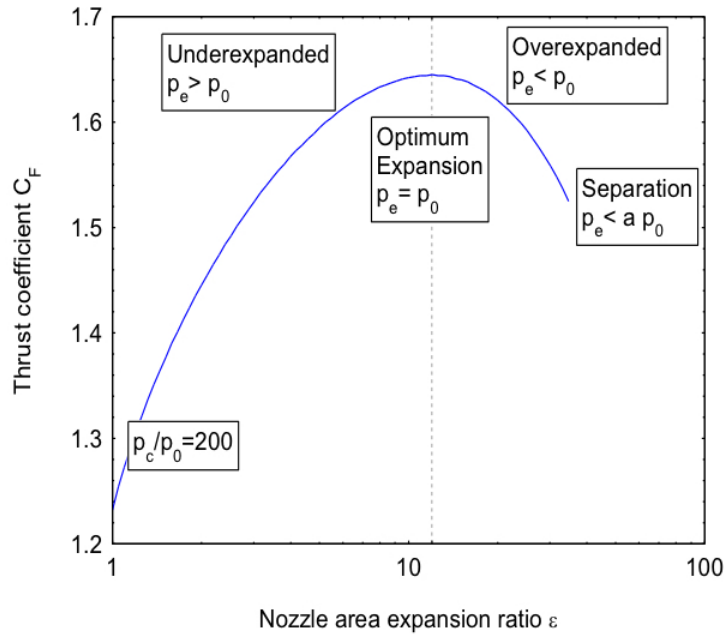


Figure 1.2: Effeto del rapporto di espansione sul C_F

Il massimo di C_F si ottiene per le condizioni di adattamento ($p_e = p_0$).

Le altre due condizioni:

- *sottoespanso*: per cui vale $p_e > p_0$;
- *sovraespanso*: per cui vale $p_e < p_0$ è la condizione più critica nella quale l'ultima parte dell'ugello non contribuisce più alla spinta, dovuto alla formazione di onde d'urto oblique all'interno dell'ugello, staccando il flusso dalla parete e causando quella condizione detta di *separazione* con la conseguente nascita di una bolla di ricircolo a valle di essa.

1.4.2 Effetto di $\frac{p_c}{p_0}$

Il diagramma sottostante rappresenta come al variare del rapporto di pressione $\frac{p_c}{p_0}$ il coefficiente di spinta e il rapporto di espansione variano.

Si osserva come i massimi delle curve si spostano verso ϵ maggiori indicando come all'aumentare della quota, la pressione $p_0 \rightarrow 0$, questo causerebbe nel vuoto un rapporto di espansione troppo elevato nella condizione di adattamento ovvero di spinta massima.

Questo implica che nelle varie fasi durante l'ascesa, la scelta di un rapporto di espansione ottimale sarà complessa e dipendente dalla quota di adattamento.

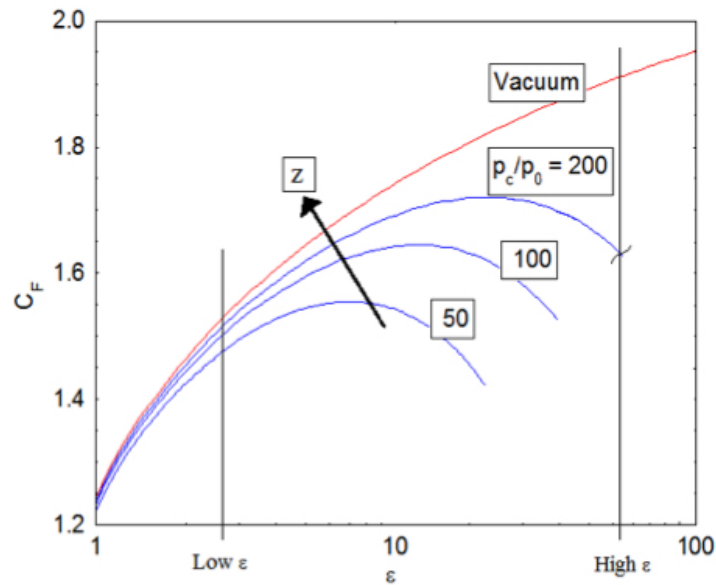
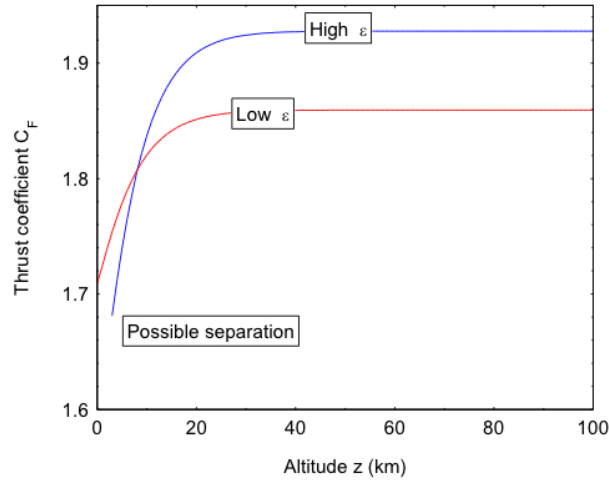


Figure 1.3: Effetto del rapporto di pressioni sul diagramma $C_F - \epsilon$

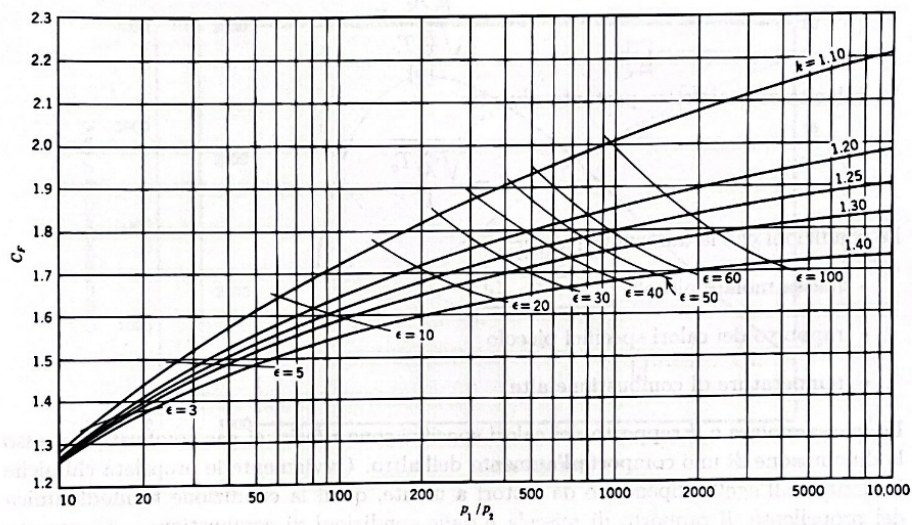
1.4.3 Effetto della quota

Figure 1.4: Effetto della quota sul C_F

Da cui si osserva come risulti ottimale la scelta:

- A quote alte di un ϵ alto;
- A quote basse di un ϵ basso;

La scelta di un utilizzare ϵ alto anche a quote basse presenta la problematica della *separazione*.

1.4.4 Effetto di γ Figure 1.5: Effetto di γ sul C_F nel caso adattato

Nella figura viene riportato γ come k e il rapporto di pressioni $\frac{p_1}{p_2}$ coinciderebbe con $\frac{p_c}{p_e}$.

Si osserva come a dato $\frac{p_c}{p_e}$, il coefficiente di spinta C_F cresce al diminuire di γ .

Inoltre, fissato il rapporto di pressione, il rapporto di espansione ϵ cresce al diminuire di γ .

1.5 Effetti reali

Gli effetti reali si discostano molto dal modello di endoreattore ideale causando delle perdite di prestazioni.

Trascurando gli effetti reali in camera di combustione legate:

- mixing;
- combustione incompleta;

i restanti sono legati all'ugello, in quanto nel modello ideale non si tengono conto di:

- *perdite cinetiche dovute alla cinetica chimica;*
- *flusso multi-fase;*
- *flusso diabatico;*
- *perdite per strato limite;*
- *perdite per divergenza;*

Nell'ambito di questa tesi non si tratteranno le formulazioni matematiche di questi effetti, ma soltanto dei brevi cenni.

1.5.1 Perdite cinetiche dovute alla cinetica chimica

Durante la permanenza nell'ugello, i gas combusti sono sottoposti ad una trasformazione pressochè *adiabatica*, questo implica che durante l'espansione i gas combusti saranno sottoposti ad una drastica diminuzione di pressione e temperatura.

La repentina variazione di queste grandezze termodinamiche durante l'espansione causa una variazione dell'equilibrio chimico del fluido propulsivo in ogni sezione del profilo.

La composizione chimica però non è detto che cambi, infatti è fortemente dipendente dai:

- *tempi di residenza*: ovvero i tempi di permanenza τ del gas combusti all'interno dell'ugello;
- *tempi della cinetica chimica*: ovvero i tempi della chimica t_{ch}

Dal confronto di questi due tempi caratteristici si definiscono due modelli:

- *Frozen equilibrium*, per il quale si assume che la composizione resti invariata tra camera ed uscita in quanto si descrive il caso in cui i tempi di permanenza in camera sono infinitamente più piccoli rispetto ai tempi della chimica $\tau \ll t_{ch}$;
- *Shifting equilibrium*, per il quale si assume che ogni sezione dell'ugello sia caratterizzata da equilibrio chimico, perciò si descrive il caso in cui i tempi della cinetica chimica siano infinitamente più piccoli rispetto ai tempi di permanenza in camera $t_{ch} \ll \tau$;

Definiti questi due modelli allora sarà utile capire quale utilizzare, ipotizzando un ugello convergente-divergente critico e combustione subsonica, sarà ovvio che le velocità maggiori saranno nel divergente (τ piccolo) e quindi la scelta cadrà nell'utilizzare lo *shifting equilibrium* nel convergente e il *frozen equilibrium* nel divergente.

Inoltre se si considerasse un flusso reale, esso sarebbe anche tridimensionale, quindi bisognerà considerare variazione della composizione chimica anche in una stessa sezione, in quanto vicino allo strato limite le temperature sono più alte e la composizione varierebbe, come se non bastasse il flusso non è stazionario e anche turbolento quindi aggravio di complessità del modello, risolvibile solamente mediante CFD (*Computational fluid dynamics*).

1.5.2 Perdite per flusso multi-fase

All'interno di un ugello, il flusso risulta di fasi diverse, più precisamente è *bifasico*, dovuto alla presenza di gocce liquide e particelle solide.

Come detto prima, nell'ugello avviene un'espansione che porta a cali drastici di pressione e temperatura ed è quindi possibile che localmente la pressione scenda sotto la pressione di saturazione del liquido in stato vapore, formando goccioline di condensazione.

Essendo un fenomeno brusco, si visualizza una struttura molto simile ad un urto (anche se non lo è) detta *urto di condensazione*.

Il processo può avvenire in due modi:

- *condensazione eterogenea*: le polveri presenti nel flusso abbassano la temperatura causando localmente la condensazione;
- *condensazione omogenea*: le gocce si formano indistintamente in tutto il flusso, in maniera rapida ed uniforme;

Lo studio di questo fenomeno all'interno dell'ugello è molto importante in quanto le particelle solide o liquide scambiando calore e quantità di moto con il flusso in espansione variandone velocità, pressione e temperatura.

Per esempio, nel caso di particelle solide grandi, esse avranno un'inerzia ed una resistenza dipendente dalle dimensioni, tanto più sono grandi tanto meno forniscono energia termica e assorbono più energia cinetica dal fluido propulsivo.

Per valutare le perdite dovute ad un flusso bifase si possono descrivere quattro casi diversi:

- *scambi efficaci di quantità di moto e di calore*;
- *solo scambi efficaci di quantità di moto*;
- *solo scambi efficaci di calore*;
- *nessuno scambio efficace*;

1.5.3 Perdite per flusso diabatico

Il flusso all'interno dell'ugello non subisce una trasformazione effettivamente adiabatica, al contrario durante l'espansione viene sottratto calore al fluido propulsivo perché la parete è limitata dalla temperatura limite del materiale.

Per affrontare questo problema si utilizza due metodi: *refrigerazione* della parete e *isolamento termico* del gas. Ipotizzando che il flusso sia adiabatico, varrebbe:

$$T_{wall} = T_{rec} \quad (1.24)$$

dove sono rispettivamente la temperatura a parete e la temperatura di recupero. Infatti, in condizioni di adiabaticità, attraverso lo strato limite si conserva l'entalpia di recupero

$$H_{rec} = h + R \frac{w^2}{2} \quad (1.25)$$

dove R è il fattore di recupero ($R < 1$ per i gas), di conseguenza

$$T_{rec} = T + R \frac{w^2}{2c_p} \quad (1.26)$$

che è più bassa della temperatura totale T_c a causa del fattore di recupero, pertanto a parete dove vale $w = 0$ avremo $T_{wall} = T_{rec}$. Allora la T_{wall} si porta in corrispondenza di un valore più basso di quello di arresto perché:

- per effetto della *viscosità* viene dissipata energia cinetica sotto forma di energia termica;
- per effetto della *conducibilità* questa energia termica diffonde in tutte le direzioni dello strato limite;

A parete quindi solo una parte dell'energia cinetica si ritrova sotto forma di energia termica, la parte di energia mancante che porterebbe la T_{wall} a essere uguale a quella di arresto, si ritrova negli strati più distanti dalla parete. Infatti, essa viene trasportata per effetto della conducibilità termica a causa della diffusione.

Nella realtà la parete è refrigerata, la sua temperatura sarà inferiore a quella di recupero, il calore sottratto dalla parete può essere dissipato nell'ambiente esterno o può essere riutilizzato in camera di combustione con un processo di *rigenerazione* portando a miglioramenti prestazionali del 1% di impulso specifico.

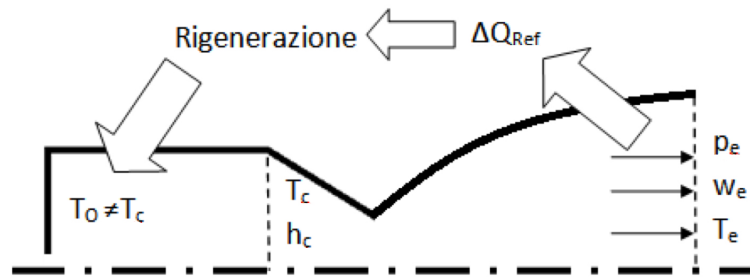


Figure 1.6: Regenerative cooling

1.5.4 Perdite per strato limite

Gli ugelli reali sviluppano un sottile strato viscoso aderente alle pareti interne definito come *strato limite*, in cui l'evoluzione di velocità non è costante, ma a parete per condizione di aderenza avremo velocità nulla. La presenza quindi a parete di andamenti di velocità e temperatura non costanti causano perdite:

- *per attrito;*
- *per scambio termico;*
- *per separazione;*
- *per spessore dello strato limite;*

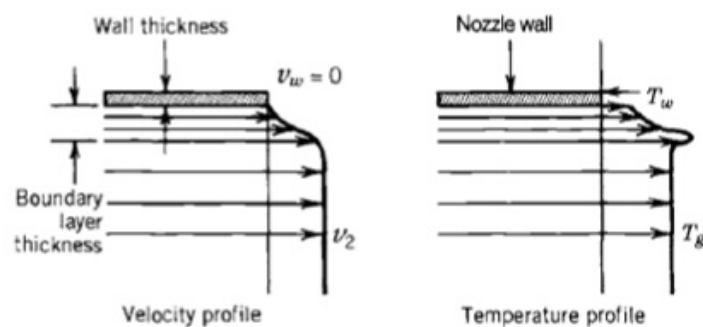


Figure 1.7: Profili di velocità e temperatura nello strato limite

1.5.5 Perdite per divergenza

Nel modello ideale quello che si utilizza è un modello unidimensionale che ipotizza il flusso di uscita con componente solo assiale, quindi seguendo questa ipotesi tutta la velocità contribuirà alla generazione della spinta.

In un caso reale dove si considera la tridimensionalità del flusso e della struttura non è sufficiente, dal momento che la peculiarità degli ugelli reali è quello di essere dotati di un profilo che guiderà il flusso in uscita formando una *calotta sferica*, pertanto il flusso sarà radiale e divergente e non più assiale e unidimensionale.

Ricordandoci che soltanto la componente assiale della velocità contribuisce alla spinta, allora la spinta reale sentirà questo fenomeno come una perdita, avremo un coefficiente di perdita dovuto alla tridimensionalità del fenomeno. Dal punto di vista delle dimensioni assiali, un ugello convergente-divergente ha tipicamente il convergente con dimensioni assiali piccoli e grandi angoli di apertura, questo perché i gradienti di pressioni sono favorevoli in un flusso subsonico.

L'unico vincolo nella progettazione del divergente e del punto raccordo è quello di avere abbastanza spazio per permettere il passaggio di un sistema tubolare di refrigerazione.

Nel divergente invece essendo in un campo supersonico, abbiamo bisogno di un condotto molto lungo questo perché gli eccessivi angoli di apertura potrebbero facilitare la *separazione* dovuto ai forti gradienti avversi.

1.6 Ugelli reali

Nel considerare un propulsore reale, dobbiamo ricordarci che un buon design dell'ugello può migliorare le prestazioni.

I vincoli che però legano la scelta del design di questo componente sono gli effetti della quota, del rapporto di espansione e del rapporto di pressione tra camera ed uscita.

Considerando questi vincoli è evidente come la scelta cardine verta sull'utilizzare un adeguato rapporto di espansione.

In quanto nella fase di ascesa la condizione di adattamento sarà una soltanto a fissato rapporto di espansione, questo causa la perdita di prestazione sia in condizioni di sottoespansione che sovraespansione di circa un 15% paragonato a ugelli con la capacità di adattarsi continuamente.

Per esempio, si potrebbe scegliere un rapporto di espansione alto che sia adeguato per le condizioni di vuoto, il problema risulterebbe però nelle condizioni a bassa quota, infatti il flusso separerebbe con conseguente perdita di prestazioni e incremento dei carichi laterali.

Ipoteticamente parlando le massime prestazioni possibili sarebbero possibili se si avesse un ugello con un rapporto di espansione variabile che si adatti continuamente nella fase di ascesa assicurando la condizione di adattamento ed evitando che la condizione di sovraespansione a basse quote e la condizione di sottoespansione ad alte quote si verifichino.

Nella figura 1.8 è possibile confrontare le prestazioni (impulso specifico) durante il volo di un ugello reale e di quello ideale, entrambi con rapporto di espansione fissato a 45, in funzione dell'altitudine.

Si osserva come è possibile migliorare le prestazioni, si vi fosse la capacità di evitare gli effetti negativa dovuti alla separazione del flusso.

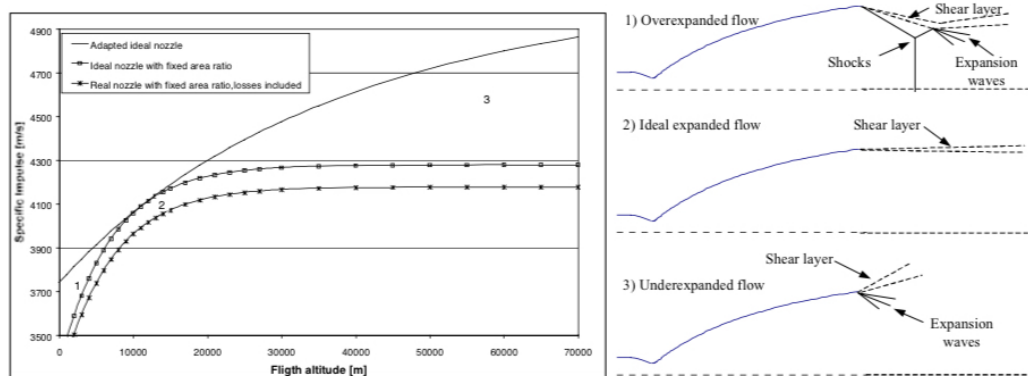


Figure 1.8: Prestazioni reali

1.7 Nozzle contour e campo di flusso

Per far fronte a questi vincoli sono stati progettati diversi contours di convergente-divergenti tra i quali:

- *Conical nozzle*;
- *Ideal nozzle*;
- *TIC* (truncated ideal contoured nozzles);
- *TOC* (thrust optimized contoured nozzles);
- *TOP* (thrust optimized parabola nozzles);

Prima di analizzare la separazione ed i carichi laterali negli ugelli dei razzi, è essenziale capire le caratteristiche dei diversi tipi di contours in quanto il campo di flusso interno ne determina le modalità di separazione. Nella figura sottostante vengono presentati i campi di mach per vari contours.

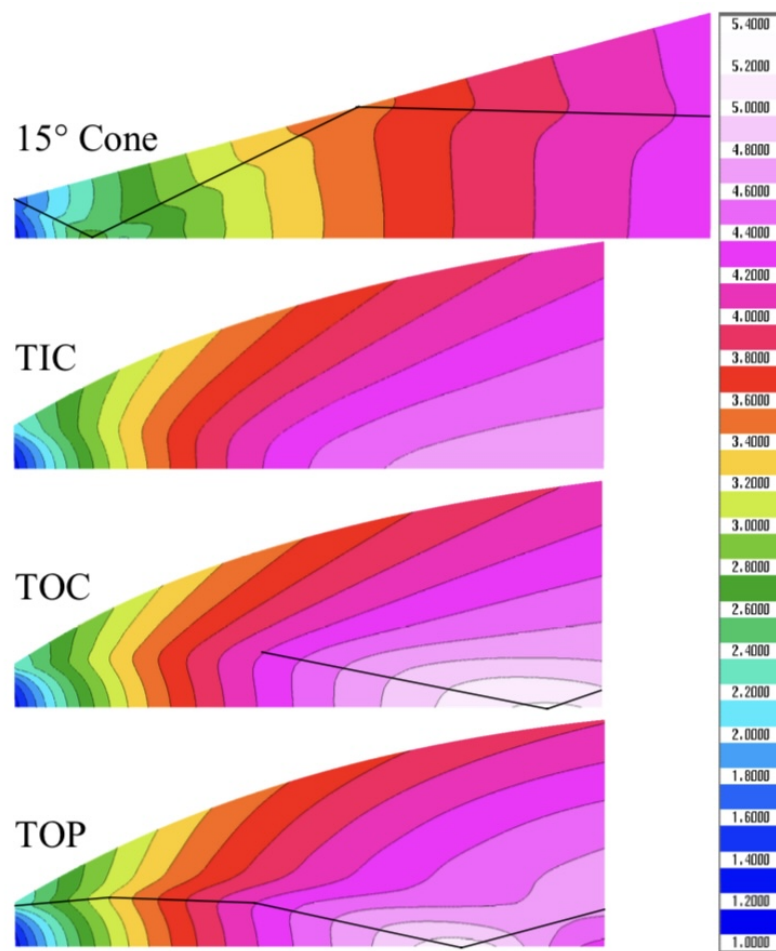


Figure 1.9: Campi di mach per vari contours

Si può notare come nei vari campi, con la linea nera si evidenzia la posizione approssimativa dell'urto interno.

L'iperbolicità delle equazioni di Eulero nei flussi supersonici, porta a concludere che il flusso è univocamente determinato dalle condizioni al contorno di monte.[29]

In questo caso il metodo delle caratteristiche (MOC) può essere utilizzato per calcolare il campo di flusso dell'ugello, è un metodo ampiamente utilizzato per generare i contours dei vari ugelli, determinando carichi e performance.[29]

La base del metodo delle caratteristiche rappresenta la determinazione della zona interna (kernel) TNKO.

Dalla figura sottostante che rappresenta la regione di inizio espansione possiamo determinare dei punti e dei tratti caratteristici.

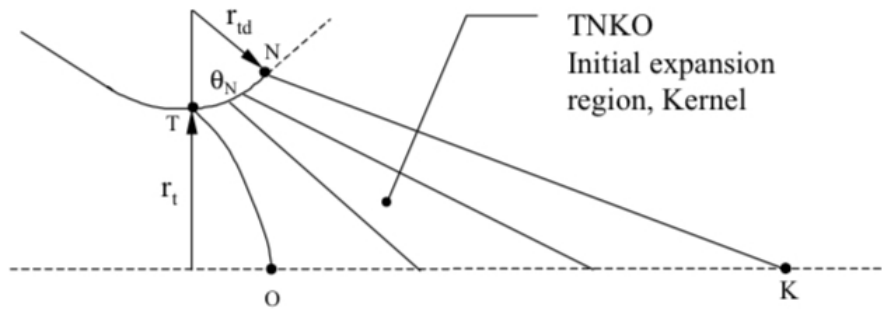


Figure 1.10: Zona interna kernel

Si evidenzia come la regione di espansione avviene lungo il tratto TN, che determina le caratteristiche del flusso a valle.

Scegliendo un angolo di espansione θ_N come quello interposto tra il punto T e N, si otterrebbe un'espansione più breve di quella che si otterrebbe con una curvatura a valle del punto di gola, per ogni rapporto di espansione dato.

Tuttavia, nelle applicazioni spaziali una variazione di curvatura troppo brusca viene evitata in quanto porterebbe problemi di cinetica chimica dei gas combusti, per questo in fase di progettazione uno dei criteri cardini utilizzati è quello di avere $r_{td} = 0.5r_t$. [29]

Considerando un flusso transonico, si evidenzia una linea a mach costante che evolve dalla gola T fino al punto O.

Date quindi le condizioni lungo il tratto TO e la condizione di parete solida lungo TN, è possibile definire un campo di flusso *kernel* TNKO mediante il metodo delle caratteristiche.

All'interno di questa zona il flusso sarà interamente definito dalla condizioni di gola e costituisce la *zona di espansione* alla base della MOC. [29]

In questo elaborato di tesi non si entrerà nel dettaglio dei contours sopracitati, in quanto l'ugello che si andrà a studiare è il Dual-Bell, un ugello avanzato che sarà progettato mediante metodo delle caratteristiche.

1.8 Dual-bell

La riduzione dei costi operativi dei lanciatori è un tema importante a causa dell'aumento dei lanci commerciali e dalle presenza di vari competitors.

Le performance del sistema propulsivo e dell'ugello influenzano fortemente i costi operativi di conseguenza la ricerca e la sperimentazione vertono molto nel migliorare lo stato dell'arte continuamente. [7]

Ai giorni nostri, gli ugelli convenzionali utilizzati nei lanciatori sono di tipologia *bell-shaped*, il lato negativo di utilizzare questa geometria è nella loro capacità di adattamento, in quanto per una sola altitudine ad un dato rapporto di espansione avrò le massime prestazioni, ciò implica che in tutte le altre fasi di volo avrò una condizione non adattata con conseguente perdite di prestazioni.

Per far fronte a questo problema si è deciso di progettare ugelli avanzati che abbiano la capacità di auto-adattarsi durante l'ascesa, una delle possibili soluzioni è proprio il *Dual-Bell*.

Il primo concept di ugello fu proposto da Foster e Cowles nel 1949 [11], l'idea di base era avere un ugello capace di operare in condizioni di adattamento a due differenti quote, senza avere drastici incrementi di complessità e costi.

La capacità di adattamento è ottenuta mediante una discontinuità geometrica (inflection point) nel profilo dell'ugello. A sea level e basse altitudini, il flusso separa nell'inflection zone permettendo l'utilizzo completa della prima campana. Ad alte altitudini, il flusso si riattacca alla parete della seconda campana e il motore funziona con un rapporto di espansione superiore migliorando le prestazioni.

La zona di inflessione dovrebbe forzare la separazione durante il primo modo operativo, così da evitare pericolosi carichi laterali. La seconda campana è caratterizzata da un gradiente di pressione nullo o positivo in modo da forzare la transizione tra i due modi operativi. [26] I primi test sperimentali su questo profilo furono svolti da Horn and Fisher studiando le

perdite di performance.

A *sea-level mode* (basse altitudini) si genera un *aspiration drag* dovuta al fatto che la pressione nell'ugello con separazione risulta minore della pressione ambiente. In *altitude mode* le perdite sono causate dalla non ottimizzazione del profilo della seconda campana. Ulteriori perdite sono emerse nella transizione in altitude mode, in quanto si verificava a pressioni di camera più basse rispetto a quelle di transizione ottimale.

Nonostante queste perdite di performance, il Dual-Bell genera più spinta rispetto agli ugelli convenzionali. [19]

In figura sottostante vengono presentati le due modalità operative.

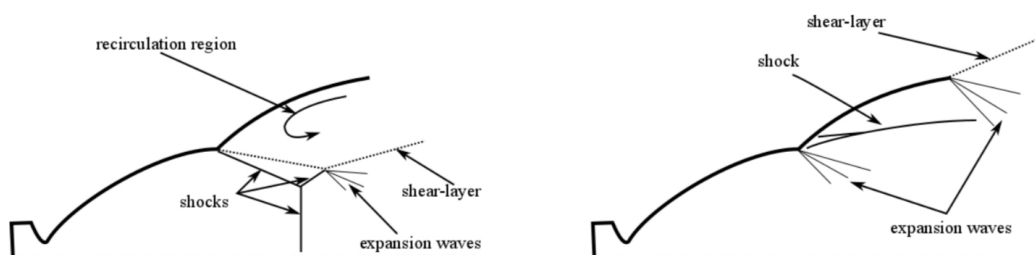


Figure 1.11: Due modalità operative: sea-level mode (sinistra) e altitude mode (destra)

Chapter 2

Fluidodinamica computazionale

La fluidodinamica computazionale o CFD è l'analisi dei sistemi che coinvolgono il flusso dei fluidi, il trasferimento di calore ed altri fenomeni correlati come le reazioni chimiche, mediante simulazioni al computer.

Questa tecnica è molto potente e copre un'ampia gamma di applicazioni industriali e non industriali.[41]

Dal 1960 ad oggi, l'industria aerospaziale ha integrato le tecniche di CFD nel design, R&D e nella produzione di velivoli e jet engines.

Più recentemente i metodi sono stati applicati al design interno di motori a combustione, camere di combustione di turbine a gas e fornaci. [41]

Inoltre, anche nella produzione di autoveicoli è possibile utilizzare la CFD per predire le drag forces migliorando quelle che sono le superfici aerodinamiche.

Con il passare degli anni, la possibilità di avere high-performance hardware a costi sempre più ridotti e l'introduzioni di interfacce user-friendly, hanno portato alla diffusione di queste tecniche, le quali hanno il vantaggio di:

- Ridurre tempi e costi di nuovi design;
- Studiare sistemi la cui sperimentazione è difficoltosa;
- Illimitato livello di dettaglio dei risultati;

I codici CFD sono strutturati attorno agli algoritmi numerici ed il processo di risoluzione dei problemi fluidodinamici si basa su tre fasi principali:

- *Pre-processing*: definizione della geometria, generazione della mesh e selezione dei fenomeni fisici e chimici da modellare;
- *Solver*: setting del solver;
- *Post-processing*: valutazione dei risultati ottenuti;

2.1 Leggi di conservazioni

Nel fluidodinamica computazione sono fondamentali le cosiddette *leggi di conservazioni*, in quanto descrivono i principi fisici che governano il comportamento dei fluidi.

Le principali sono:

- *Legge di conservazione della massa;*
- *Legge di conservazione della quantità di moto;*
- *Legge di conservazione dell'energia;*

In letteratura, si possono trovare le leggi sopracitate in due formulazioni: *integrale* e *differenziale*.

La prima considera un volume di controllo finito, la seconda invece un volume di controllo infinitesimo, risultando intercambiabili. Ciò che invece può variare è il punto di vista con cui si studiano queste leggi.

2.1.1 Approccio Lagrangiano

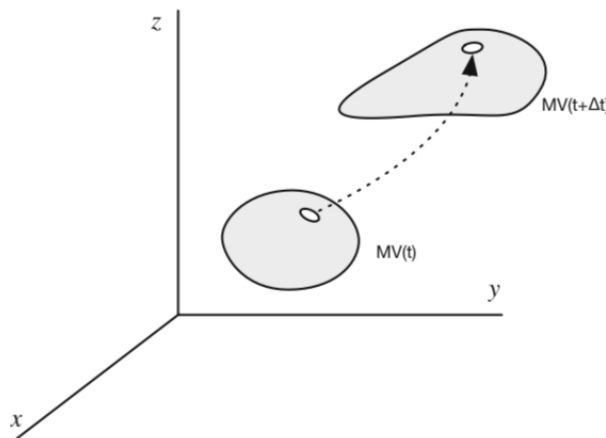


Figure 2.1: Campo di flusso approccio Lagrangiano

Il fluido viene suddiviso in particelle fluide ed ogni elemento è seguito nello spazio e nel tempo.

Queste particelle sono seguite usando un vettore di posizione x_0 (indipendente dal tempo), solitamente scelte come centro di massa ad un istante iniziale t_0 , allora il flusso è descritto da una funzione $x(t, x_0)$. [27]

Infine, la traiettoria descritta dalla particella fluida è ottenuta dall'insieme delle posizioni occupate a tempi diversi.

2.1.2 Approccio Euleriano

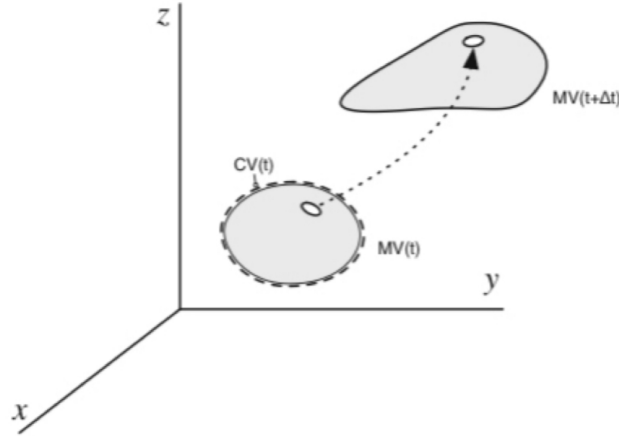


Figure 2.2: Campo di flusso approccio Euleriano

In questo approccio si esegue un volume di controllo fisso e finito o infinitesimo, in modo che le variabili sono funzioni della posizione x ed il tempo t e la velocità è rappresentata come $v(t, x)$.

Dal momento che la derivata della posizione della particella fluida x_0 rispetto al tempo è la velocità, si possono legare come:

$$v(t, x(x_0, t)) = \frac{\partial}{\partial t} x(t, x_0)$$

In conclusione, nell'approccio di tipo Lagrangiano si è quindi interessati a definire un volume di controllo e come osservatore seguire l'evoluzione delle particelle rimanendo sul volume di controllo.

Dall'altro canto, nell'approccio Euleriano quello che semplicemente si esegue è definire un volume di controllo, come osservatore rimanere sul volume di controllo e valutare le particelle fluide che lo attraversano.

Nella scelta della descrizione delle leggi di conservazioni si utilizzerà un approccio di tipo Euleriano, in modo da focalizzarsi su una specifica regione dello spazio, in modo da abbandonare quel compito tedioso di seguire le particelle per l'intera evoluzione.[27]

2.2 Conservazione della massa

Per questa legge di conservazione si partirà dalle legge in forma integrale:

$$\frac{\partial}{\partial t} \int_V \rho \, dV = - \int_S \rho \, \bar{q} \cdot \bar{n} \, dS \quad (2.1)$$

Utilizzando il teorema di Gauss si passa da un integrale di superficie ad un integrale di volume passando dall'operatore di divergenza

$$\frac{\partial}{\partial t} \int_V \rho \, dV = - \int_V \nabla \cdot (\rho \, \bar{q}) \, dV$$

Se il volume risulta fisso nel tempo è possibile portare la derivate dentro l'integrale

$$\int_V \left(\frac{\partial \rho}{\partial t} + \nabla \cdot (\rho \bar{q}) \right) \, dV = 0$$

In conclusione otteniamo la *forma di divergenza* o *forma differenziale conservativa*:

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \nabla \cdot (\rho \bar{q}) = 0 \quad (2.2)$$

Per ottenere la forma *non conservativa*, basterà procedere con la derivazione a catena di:

$$\begin{aligned} \frac{\partial \rho}{\partial t} &= \frac{\partial(\rho u)}{\partial x} + \frac{\partial(\rho v)}{\partial y} + \frac{\partial(\rho w)}{\partial z} = 0 \\ \frac{\partial \rho}{\partial t} + \rho \left(\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} + \frac{\partial w}{\partial z} \right) + u \frac{\partial \rho}{\partial x} + v \frac{\partial \rho}{\partial y} + w \frac{\partial \rho}{\partial z} &= 0 \end{aligned} \quad (2.3)$$

Da cui si ottiene anche la derivata Lagrangiana $\frac{D\rho}{Dt} = \frac{\partial \rho}{\partial t} + \rho \nabla \cdot \bar{q}$

$$\frac{D\rho}{Dt} + \bar{q} \cdot \nabla \rho = 0 \quad (2.4)$$

che è la *forma differenziale non conservativa*.

2.3 Conservazione della quantità di moto

Data la forma integrale:

$$\frac{\partial}{\partial t} \int_V \rho \, \bar{q} \, dV = - \int_S (\rho \, \bar{q} \cdot \bar{n}) \bar{q} \, dS + S_s + S_v \quad (2.5)$$

dove S_s è il termine di superficie e S_v è il termine di volume rispettivamente definiti come

$$S_s = \int_S [\sigma] \cdot \bar{n} \, dS$$

$$S_v = \int_V \rho \bar{f}_e dV$$

Il primo termine di sorgente relativo al tensore degli sforzi viscosi è composto nel caso di *fluido reale viscoso* di una parte anisotropa e isotropa

$$\bar{\sigma}_n = -P \cdot \bar{n} + \bar{\tau}_n \quad (2.6)$$

Riprendendo quindi la forma integrale di partenza è possibile di nuovo applicare il teorema di Gauss in modo da ottenere

$$\frac{\partial}{\partial t} \int_V \rho \bar{q} dV = - \int_V \nabla \cdot \rho(\bar{q} \bar{q}) dV + \int_V \nabla \cdot \bar{\sigma}_n dV + \int_V \rho \bar{f}_e dV \quad (2.7)$$

se il volume risulta fisso otterremo

$$\frac{\partial \rho \bar{q}}{\partial t} + \nabla \cdot \rho \bar{q} \bar{q} = \nabla \cdot \bar{\sigma}_n + \rho \bar{f}_e \quad (2.8)$$

che è *forma di divergenza* o *forma differenziale conservativa*.

Per la forma non conservativa basterà sviluppare il primo membro con la tecnica della derivazione a catena e ricordandosi la forma conservativa della massa otterremo

$$\rho \frac{D\bar{q}}{Dt} = \nabla \cdot \bar{\sigma}_n + \rho \bar{f}_e \quad (2.9)$$

che è la *forma differenziale non conservativa*.

2.4 Conservazione dell'energia

Come nelle precedenti leggi di conservazione si parte dalla forma integrale

$$\frac{\partial}{\partial t} \int_V \rho E dV = - \int_S \rho E \bar{q} \cdot \bar{n} dS + \dot{L}_s + \dot{L}_v + \dot{Q}_s + \dot{Q}_v \quad (2.10)$$

dove

- il termine \dot{L}_s che rappresenta il lavoro per unità di tempo, ovvero la potenza che si scambia sulla superficie

$$\dot{L}_s = \int_S \bar{\sigma}_n \cdot \bar{q} dS$$

- il termine \dot{L}_v che rappresenta la potenza che si scambia sul volume

$$\dot{L}_v = \int_V \rho \bar{f}_e \bar{q} dV$$

- il termine \dot{Q}_s che rappresenta la sorgente termica su superficie

$$\dot{Q}_s = - \int_S \bar{q}_T \cdot \bar{n} dS$$

- il termine \dot{Q}_v che rappresenta la sorgente termica volumetrica

Usando il teorema di Gauss e ipotizzando volume di controllo fisso si ottiene

$$\frac{\partial(\rho E)}{\partial t} + \nabla \cdot (\rho E \bar{q}) = \nabla \cdot ([\sigma] \cdot \bar{q}) + \rho \bar{f}_e \bar{q} - \nabla \cdot (\bar{q}_T) \quad (2.11)$$

che è la *forma di divergenza* o *forma differenziale conservativa*.

Come nei casi precedenti l'altra forma con la derivata lagrangiana si ottiene sviluppando il primo membro con la tecnica della derivazione a catena ottenendo

$$\rho \frac{DE}{Dt} = \nabla \cdot ([\sigma] \bar{q}) + \rho \bar{f}_e \bar{q} - \nabla \cdot (\bar{q}_T) \quad (2.12)$$

che è la *forma differenziale non conservativa*.

2.5 Sistema globale

Si può scrivere un sistema globale in questa forma:

$$\frac{\partial}{\partial t} \int_V U dV = - \int_V F \cdot \bar{n} dS + \int_V Q dV \quad (2.13)$$

dove per F saranno i flussi e Q le sorgenti mentre U è il vettore delle grandezze conservative:

$$U = \begin{Bmatrix} \rho \\ \rho u \\ \rho v \\ \rho w \\ \rho E \end{Bmatrix} \quad (2.14)$$

Si ottiene un sistema di 5 equazioni con 14 incognite:

- ρ ovvero la densità;
- u, v, w componenti della velocità;
- $\sigma_{xx}, \sigma_{xy}, \sigma_{xz}, \sigma_{yy}, \sigma_{yz}, \sigma_{zz}$ componenti del tensore degli sforzi viscosi;

- e energia interna;
- $q_{T_x}, q_{T_y}, q_{T_z}$ componenti del flusso termico;

Dato l'elevato numero di incognite è necessario definire delle ipotesi chiavi:

- Ipotizzare un *flusso newtoniano*, vi è una relazione chiara tra gradiente \bar{q} e $[\sigma]$;
- Ipotizzare un *flusso termico* definito dalla legge di *Fourier*

$$\bar{q}_T = -k \nabla T \quad (2.15)$$

- Ipotizzare *gas perfetti* che seguono le seguenti relazioni

$$\begin{aligned} p &= \rho R T \\ e &= c_v T \\ c_v &= \frac{R}{\gamma - 1} \\ \gamma &= \frac{c_p}{c_v} \end{aligned}$$

Fatte queste ipotesi abbiamo 16 equazioni in 16 incognite, quindi vi è la possibilità di risolvere quelle che sono le *Navier-Stokes comprimibili*, in forma compatta

$$\frac{\partial}{\partial t} \begin{Bmatrix} \rho \\ \rho \bar{q} \\ \rho E \end{Bmatrix} + \nabla \cdot \begin{Bmatrix} \rho \bar{q} \\ \rho \bar{q} \bar{q} + P[I] - [\tau] \\ (\rho E + P)\bar{q} - [\tau]\bar{q} - k \nabla T \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 0 \\ \rho \bar{f}_e \\ \rho \bar{f}_e \cdot \bar{q} \end{Bmatrix} \quad (2.16)$$

2.5.1 Notazione di Einstein

In modo da riscrivere le equazioni di Navier-Stokes esprimendo divergenza e gradiente con la notazione ad indici ripetuti.

Il gradiente della grandezza vettoriale ϕ sarà rappresentato come:

$$\frac{\partial \phi}{\partial x_i} = \frac{\partial \phi}{\partial x_1} + \frac{\partial \phi}{\partial x_2} + \frac{\partial \phi}{\partial x_3}$$

Con la notazione di Einstein sarà equivalente a

$$\frac{\partial \phi}{\partial x_i} = \nabla \phi$$

Nel caso della divergenza della grandezza scalare u sarà rappresentato come:

$$\frac{\partial u}{\partial x_i} = \frac{\partial u_1}{\partial x_1} + \frac{\partial u_2}{\partial x_2} + \frac{\partial u_3}{\partial x_3}$$

Con notazione ad indici ripetuti sarà equivalente a

$$\frac{\partial u_i}{\partial x_i} = \nabla \cdot u$$

Quindi le Navier-Stokes comprimibili potranno essere riscritte come:

$$\begin{cases} \frac{\partial \rho}{\partial t} + \frac{\partial(\rho u_i)}{\partial x_i} = 0 \\ \frac{\partial(\rho u_i)}{\partial t} + \frac{\partial(\rho u_i u_j)}{\partial x_j} = -\frac{\partial p}{\partial x_i} + \frac{\partial \tau_{ij}}{\partial x_j} \\ \frac{\partial(\rho E)}{\partial t} + \frac{\partial(\rho u_j H)}{\partial x_j} = \frac{\partial u_i \tau_{ij}}{\partial x_j} + \frac{\partial}{\partial x_j} \left(k \frac{\partial T}{\partial x_j} \right) \end{cases} \quad (2.17)$$

dove

- $\tau_{ij} = 2\mu \cdot \left[\frac{1}{2} \left(\frac{\partial u_i}{\partial x_j} + \frac{\partial u_j}{\partial x_i} \right) \right] - \frac{2}{3}\mu \frac{\partial u_k}{\partial x_k} \delta_{ij}$
- $E = e + \frac{1}{2} u_i u_i$
- $H = h + \frac{1}{2} u_i u_i$
- ipotizzando nessuna forza esterna \bar{f}_e

2.6 Turbolenza

Il numero di Reynolds di un flusso ci dà una misura dell'importanza delle forze inerzia (associate agli effetti convettivi) e delle forze viscosi.

Sperimentalmente nei sistemi di fluidi è stato osservato come esista un numero $Re_{critico}$ per il quale si ha il passaggio tra i regimi.

Nel caso di un valore al di sotto del Re_{crit} il flusso è regolare ed i layers adiacenti di fluido si muovono in modo ordinato.

Nel caso in cui le condizioni al contorno non cambiassero nel tempo, il flusso è definito come *stazionario* e questo regime è detto *laminare*.

A valori superiori al Re_{crit} una serie di complicati eventi prendono parte all'evoluzione del flusso portando a radicali cambiamenti nel moto del fluido.

Nello stato finale il comportamento del flusso è caotico e randomico, il moto diventa intrinsecamente *instazionario* portando la velocità e le altre proprietà del flusso a variare continuamente.

Questo regime viene detto *turbolento*. [41] Per esempio una misurazione di velocità di un punto risulta essere in questa forma:

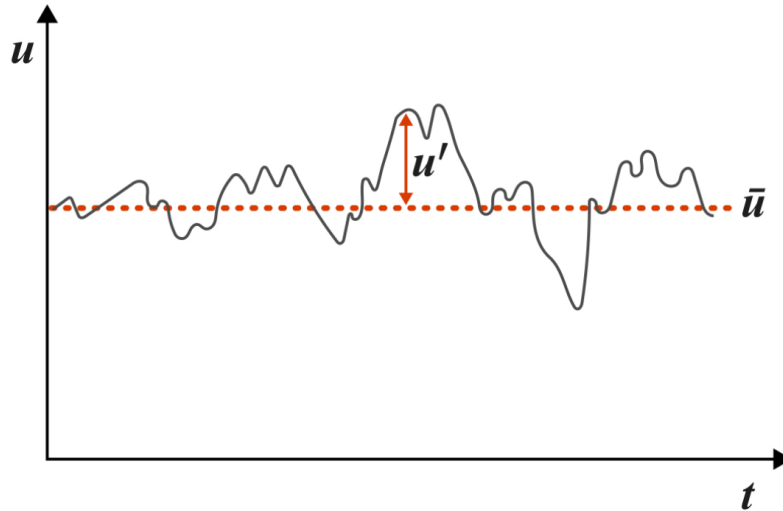


Figure 2.3: Segnale della velocità turbolenta in funzione del tempo

Data la natura randomica di questo regime la risoluzione delle equazioni di governo $N-S$, rappresenta un problema complesso e computazionalmente oneroso.

Sono state introdotte diverse tecniche di modellazione:

- **Direct Numerical Simulations (DNS)** si procede con l'integrazione delle $N-S$ con una griglia fine nello spazio e nel tempo in modo da risolvere anche i vortici turbolenti più piccoli e le fluttuazioni più veloci. Le potenzialità di questa tecnica possono essere riassunte in:
 - Precisione dei parametri turbolenti, il loro trasporto ed il costo in ogni punto può essere calcolato; [41]
 - Risultati possono essere generati in modo istantaneo e le strutture turbolente possono essere visualizzate meglio; [41]
 - Avanzate e sperimentali tecniche possono essere validate mediante i risultati delle DNS; [41]

le problematiche possono essere riassunte in:

- Costo computazionale proporzionale al Re^3 , infatti secondo Speziale (1991) una simulazione di questo tipo applicata ad un problema di turbulent pipe con un $Re = 500000$ avrebbe richiesto un computer 10 milioni di volte più veloce dei supercomputer dell'epoca. [36]

- Difficoltà nell'applicazione a geometria complesse;
- Problemi nella discretizzazione temporale;
- Problemi nella risoluzione temporale e spaziale;

- **Large Eddy Simulations (LES)**, questa tecnica di modellazione ha l'obiettivo di risolvere solo le scale più grandi.

I vortici più piccoli sono quasi isotropi ed hanno un comportamento universale, mentre i vortici più grandi, interagendo con l'energia estratta dal flusso medio, sono più anisotropi e dipendenti dalla geometria, dalle condizioni di bordo e dalle forze sul corpo.

LES utilizza un operatore di filtro spaziale per separare i grandi, dai piccoli vortici. Il metodo LES inizia dalla scelta della funzione di filtro ed un certo *cutoff width* con lo scopo di risolvere tutti i vortici più grandi. Nel prossimo passo, l'operatore di filtro è utilizzato nelle equazioni del flusso, le informazioni dei vortici più piccoli vengono persi e gli effetti dovuti alle interazioni tra i vortici più grandi portano alla nascita di termini di sottogriglia. [41]

In conclusione, vengono introdotti degli effetti delle scale non risolte sulle scale risolte ed il costo computazionale è proporzionale al Re^5 .

- **Reynolds Average Navier-Stokes (RANS)**, questa tecnica di modellazione permette di mediare le equazioni di Navier-Stokes, si utilizza un operatore di media che approssimi gli effetti delle fluttuazioni turbolente.

Per esempio dalla figura 2.3, si osserva come la fluttuazioni del segnale velocità siano randomiche, si procede quindi con una decomposizione in:

$$u_i = \bar{u}_i + u'_i$$

dove il primo parametro \bar{u}_i è il *valor medio* della grandezza, il secondo u'_i rappresenta la *fluttuazione* ovvero lo scostamento dal valore medio.

In base al tipo di problema si possono descrivere medie diverse:

1. Per problemi *staticamente stazionari*, posso usare una *media temporale* definendo la grandezza media come

$$\bar{u}_i(x) = \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{T} \int_t^{t+T} u_i(x, t) dt$$

si denota che la grandezza dipende solo dalla variabile spaziale.

2. Per problemi con *turbolenza omogenea*, posso usare una *media spaziale*

$$\bar{u}_i(t) = \lim_{\Omega \rightarrow \infty} \int_{\Omega} u_i(x, t) d\Omega$$

3. Per un problema *generico*, posso usare una *media d'insieme* o *media alla Reynolds*, ripetendo le misurazioni N volte.

$$\bar{u}_i(x) = \lim_{N \rightarrow \infty} \frac{1}{N} \sum_{i=1}^N u_i(x, t)$$

Questa media è utilizzata nelle RANS in quanto affrontando un problema turbolento di natura randomica, allora ripetendo le misurazioni N volte non avrò risultati uguali.

4. Per un problema con *flussi compressibili*, posso usare una *media alla Favre*

$$\tilde{u}_i(x) = \frac{1}{\rho} \lim_{T \rightarrow \infty} \int_t^{t+T} \rho u_i(x, t) dt$$

dove $u_i(x, t) = \tilde{u}_i(x) + u_i''(x, t)$ è la decomposizione alla Favre rispettivamente avrà il contributo del valor medio e della fluttuazione.

2.7 RANS

2.7.1 Flussi incompressibili

L'operatore di media applicato alle N-S porta a svolgere quella che è definita come *decomposizione alla Reynolds*, le equazioni descriveranno solo le caratteristiche del campo medio.

Per semplicità ora si considereranno delle RANS per flussi incompressibili per cui valgono queste proprietà:

$$\overline{\bar{u}_i} = \bar{u}_i \quad (2.18)$$

L'operatore di media applicato alla grandezza già mediata risulta essere la grandezza media.

$$\overline{u_i'} = 0 \quad (2.19)$$

La media delle fluttuazioni è nulla.

Considero la media d'insieme e parto dalle N-S incompressibili, se ρ è costante allora l'equazione della massa in forma di divergenza:

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \nabla \cdot (\rho \bar{q}) = 0$$

diventa

$$\rho \nabla \cdot \bar{q} + \bar{q} \nabla$$

ottenendo infine

$$\nabla \cdot \bar{q} = 0$$

Utilizzando la notazione di Einstein:

$$\begin{cases} \frac{\partial q_i}{\partial x_i} = 0 \\ \rho \frac{\partial q_i}{\partial t} + \rho q_j \frac{\partial q_i}{\partial x_j} = -\frac{\partial p}{\partial x_i} + \frac{\partial \tau_{ij}}{\partial x_j} \end{cases} \quad (2.20)$$

Nel caso incompressibile l'equazione dell'energia non viene impiegata in quanto bastano per chiudere il problema quella della massa e della quantità di moto.

Decomponendo le grandezze $q_i = \bar{q}_i + q'_i$ e $p = \bar{p} + p'$ ottengo

$$\begin{cases} \frac{\partial (\bar{q}_i + q'_i)}{\partial x_i} = 0 \\ \rho \frac{\partial (\bar{q}_i + q'_i)}{\partial t} + \rho (\bar{q}_j + q'_j) \frac{\partial (\bar{q}_i + q'_i)}{\partial x_j} = -\frac{\partial (\bar{p} + p')}{\partial x_i} + \frac{\partial \tau_{ij}}{\partial x_j} \end{cases} \quad (2.21)$$

applicando l'operatore di media al sistema e tenendo a mente le proprietà 2.18 e 2.19

$$\begin{cases} \frac{\partial}{\partial x_i} (\overline{\bar{q}_i + q'_i}) = 0 \\ \rho \frac{\partial (\overline{\bar{q}_i + q'_i})}{\partial t} + \rho \left(\overline{\bar{q}_j \frac{\partial \bar{q}_i}{\partial x_j}} + \overline{\bar{q}_j \frac{\partial q'_i}{\partial x_j}} + \overline{q'_j \frac{\partial \bar{q}_i}{\partial x_j}} + \overline{q'_j \frac{\partial q'_i}{\partial x_j}} \right) = -\frac{\partial (\overline{\bar{p} + p'})}{\partial x_i} + \frac{\partial \tau_{ij}}{\partial x_j} \end{cases} \quad (2.22)$$

Osservando la parentesi:

- il primo termine rappresenta il prodotto tra una costante ed un'altra costante, non può essere trascurata;
- il secondo termine rappresenta il prodotto tra una costante ed una fluttuazione mediata, quindi risulta nullo;
- il terzo termine è il prodotto tra una costante e una fluttuazione mediata, quindi risulta nullo;

- il quarto termine rappresenta il prodotto tra due fluttuazioni mediate, non è detto che il prodotto valga zero. In quanto se la fluttuazione è sinusoidale, la media sarà zero, ma se considero il prodotto tra due fluttuazioni, la loro media non sarà più nulla.

Si riscrivono le equazioni come

$$\begin{cases} \frac{\partial \bar{q}_i}{\partial x_i} = 0 \\ \rho \frac{\partial \bar{q}_i}{\partial t} + \rho \bar{q}_j \frac{\partial \bar{q}_i}{\partial x_j} = -\frac{\partial \bar{p}}{\partial x_i} + \overline{\frac{\partial \tau_{ij}}{\partial x_j}} - \overline{q'_j \frac{\partial \bar{q}_i}{\partial x_j}} + \rho \overline{q'_j \frac{\partial q'_i}{\partial x_j}} \end{cases} \quad (2.23)$$

Mi interessa riscrivere l'ultimo termine del secondo membro dell'equazione della quantità di moto in modo da ottenere lo *stress di Reynolds*, si considera la derivazione a catena di:

$$\frac{\partial q'_i q'_j}{\partial x_j} = q'_i \frac{\partial q'_j}{\partial x_j} + q'_j \frac{\partial q'_i}{\partial x_j}$$

In cui il secondo membro è quello che mi interessa, inverto la relazione considerando che in flusso incompressibile la divergenza delle fluttuazioni di velocità è nulla, ottengo quindi il sistema:

$$\begin{cases} \frac{\partial \bar{q}_i}{\partial x_i} = 0 \\ \rho \frac{\partial \bar{q}_i}{\partial t} + \rho \bar{q}_j \frac{\partial \bar{q}_i}{\partial x_j} = -\frac{\partial \bar{p}}{\partial x_i} + \frac{\partial (\tau_{ij} - \rho \overline{q'_i q'_j})}{\partial x_j} \end{cases} \quad (2.24)$$

e quindi definiamo come *stress di Reynolds*

$$\tau_{ij}^R = -\rho \overline{q'_i q'_j} \quad (2.25)$$

Questo stress rappresenta l'effetto delle fluttuazioni che non stiamo risolvendo sul campo medio, dal momento che non risolviamo delle scale, lo stress di Reynolds non lo abbiamo e quindi avremo introdotto una nuova incognita.

2.7.2 Flussi compressibili

In questa sezione verranno accennate quelle che sono chiamate le equazioni di N-S mediate alla *Favre*.

Dal momento che le ipotesi di flusso incompressibile decadono per via dei regimi supersonici, bisognerà tener conto della compressibilità del fluido.

Si procederà con:

- *Media alla Reynolds* per densità e pressione;
- *Media alla Favre* per le altre variabili;

si propongono le equazioni finali

$$\begin{cases} \frac{\partial \bar{\rho}}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x_i}(\bar{\rho} \tilde{q}_i) = 0 \\ \frac{\partial}{\partial t}(\bar{\rho} \tilde{q}_i) + \frac{\partial}{\partial x_j}(\bar{\rho} \tilde{q}_i \tilde{q}_j) = -\frac{\partial \bar{p}}{\partial x_i} + \frac{\partial}{\partial x_j}(\bar{\tau}_{ij} - \rho \widetilde{q_i'' q_j''}) \end{cases} \quad (2.26)$$

a queste si aggiungerà un'equazione per l'energia che per la trattazione non viene specificata.

Per calcolare la nuova incognita

$$\tau_{ij}^F = -\bar{\rho} \widetilde{q_i'' q_j''} \quad (2.27)$$

è necessario utilizzare un modello, in questa trattazione viene utilizzato un *modello lineare di Boussinesq* per cui lo stress sarà descritto dalla somma di una parte anisotropa (primo termine) e una parte isotropa (secondo e terzo termine):

$$\tau_{ij}^F = 2\mu_t \tilde{S}_{ij} - \frac{2}{3} \frac{\partial \tilde{q}_k}{\partial x_k} \delta_{ij} - \frac{2}{3} \bar{\rho} k \delta_{ij} \quad (2.28)$$

Nel modello compaiono:

- \tilde{S}_{ij} che è il tensore delle velocità di deformazioni

$$\tilde{S}_{ij} = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial \tilde{q}_i}{\partial x_j} + \frac{\partial \tilde{q}_j}{\partial x_i} \right)$$

- δ_{ij} , delta di Kronecker che è una matrice di zeri che ha valore unitario solo per $i = j$;
- k , l'energia cinetica turbolenta;
- μ_t , la *viscosità turbolenta*.

In conclusione, nelle RANS io applico l'operatore di media al termine convettivo, nel momento in cui lo faccio comparire lo *stress di Reynolds* che rappresenta l'effetto delle fluttuazioni sul campo medio che rinuncio a risolvere. Per chiudere il problema bisogna introdurre un'analogia detta di *Boussinesq*, secondo la quale se le fluttuazioni molecolari vengono modellizzate con l'introduzione di una *viscosità molecolare* del fluido, allora le fluttuazioni turbolente saranno modellizzate da una viscosità detta *viscosità turbolenta*.

2.8 Modelli di turbolenza

Per calcolare la *viscosità turbolenta* si procede con l'utilizzo di vari modelli tra i quali:

- *Modelli algebrici* (Baldwin-Lomax);
- *Modelli a 1 equazione*;
- *Modelli a 2 equazioni*;

In questo elaborato di tesi si sono svolte delle simulazioni RANS con 1 e 2 equazioni pertanto nelle pagine seguenti si tratteranno dei brevi cenni su:

- Spalart-Allmars (1 equazione);
- $k - \epsilon$ (2 equazioni);
- SST $k - \omega$ (2 equazioni);

2.8.1 Modello Spalart-Allmars

Il modello a una equazione creato nel 1992 da P. Spalart e S. Allmaras è stato ampiamente utilizzato per applicazioni aerospaziali e turbomacchine. Pensato per flussi ad alto numero di Reynolds, utilizza un'equazione di trasporto per il calcolo della *viscosità turbolenta modificata* da aggiungere alle RANS classiche.

Si scrive l'equazione di trasporto per il caso di flusso compressibile:

$$\frac{\partial \rho \tilde{\nu}}{\partial t} + \frac{\partial \rho q_i \tilde{\nu}}{\partial x_i} = \rho(P-D) + \frac{1}{\sigma} \frac{\partial}{\partial x_i} \left[\rho(\nu + \tilde{\nu}) \frac{\partial \tilde{\nu}}{\partial x_i} \right] + \frac{C_{b2}}{\sigma} \rho \frac{\partial \tilde{\nu}}{\partial x_i} \frac{\partial \tilde{\nu}}{\partial x_i} - \frac{1}{\sigma} (\nu + \tilde{\nu}) \frac{\partial \rho}{\partial x_i} \frac{\partial \tilde{\nu}}{\partial x_i}$$

Rispettivamente avremo:

- primo termine del primo membro, il termine non stazionario;
- secondo termine del primo membro, quello convettivo in quanto ρq_i è il flusso di massa per la grandezza che trasporta $\tilde{\nu}$;
- primo termine del secondo membro, tiene conto dei termini di distruzione D e di produzione P , la loro forma è

$$P = C_{b1} \tilde{S} \tilde{\nu}$$

$$D = C_{W1} f_w \left(\frac{\tilde{\nu}}{d} \right)^2$$

in cui d è la distanza da parete, C_{b1} e C_{W1} sono costanti, f_w è il termine di smorzamento.

- il secondo termine del secondo membro, è il termine di diffusione, vi è una divergenza di un gradiente;
- il terzo termine del secondo membro è termine che sente il gradiente della viscosità turbolenta modificata, C_{b_2} e σ sono costanti;
- l'ultimo termine del secondo membro è il termine di cross produzione, prodotto scalare tra i gradienti di densità e di viscosità turbolenta modificata.

Una volta risolta questa equazione di trasporto ed ottenuto la viscosità turbolenta cinematica modificata $\tilde{\nu}$, posso calcolare la viscosità turbolenta μ_t che dovremo inserire nell'equazione di *Boussinesq* per risolvere gli *stress di Reynolds*

$$\mu_t = \rho \tilde{\nu} f_{v_1} \quad (2.29)$$

dove f_{v_1} è un fattore di correzione.

2.8.2 Modello $k - \epsilon$

Nel modello a due equazioni vi sono varie tipologie tra le quali:

- *Standard*;
- *RNG*;
- *Realizable*;

però la base di questo modelli è quello *Standard* che prevede:

- un equazione di trasporto per k , energia cinetica turbolenta;
- un equazione di trasporto per ϵ , che rappresenta la dissipazione dell'energia turbolenta;

Per l'energia cinetica turbolenta abbiamo

$$\frac{\partial \bar{\rho} k}{\partial t} + \frac{\partial (\bar{\rho} \tilde{q}_i k)}{\partial x_i} = \frac{\partial}{\partial x_j} \left[\left(\mu + \frac{\mu_t}{\sigma_k} \right) \frac{\partial k}{\partial x_j} \right] + G_k + G_b - \bar{\rho} \epsilon - Y_m + S_k \quad (2.30)$$

Il termine di produzione G_k rappresenta la generazione di energia cinetica turbolenta dovuta ai gradienti di velocità medi [3], è definito come

$$G_k = -\bar{\rho} \widetilde{q_i'' q_j''} \frac{\tilde{q}_j}{\partial x_i} = \tau_{ij}^F \frac{\tilde{q}_j}{\partial x_i}$$

il termine G_b è la generazione di energia cinetica turbolenta dovuta alla buoyancy [3], il termine Y_m è legato alla compressibilità

$$Y_m = 2\bar{\rho}\epsilon M_t^2 \quad (2.31)$$

ed $M_t = \frac{\sqrt{k}}{a}$ dove a è la velocità del suono.

La seconda equazione di trasporto per ϵ è definita come

$$\frac{\partial \bar{\rho}\epsilon}{\partial t} + \frac{\partial (\bar{\rho}\tilde{q}_i\epsilon)}{\partial x_i} = \frac{\partial}{\partial x_j} \left[\left(\mu + \frac{\mu_t}{\sigma_\epsilon} \right) \frac{\partial \epsilon}{\partial x_j} \right] + C_{1\epsilon} \frac{\epsilon}{k} G_k - C_{2\epsilon} \bar{\rho} \frac{\epsilon^2}{k} \quad (2.32)$$

in cui gli ultimi due termini del secondo membro sono rispettivamente produzione e distruzione. Dopo aver calcolato i termini k e ϵ , è possibile calcolare la *viscosità turbolenta* come

$$\mu_t = \rho C_\mu \frac{k^2}{\epsilon} \quad (2.33)$$

2.8.3 Modello SST $k - \omega$

Il modello Shear-Stress Transport (SST) rappresenta un ibrido tra le potenzialità del $k - \omega$ *standard* di Wilcox [44] e $k - \epsilon$, il primo ci permette di studiare meglio i fenomeni di parete in presenza anche di separazioni, il secondo invece presenta valori più affidabili nel farfield.

Le due equazioni di trasporto utilizzate sono k l'energia cinetica turbolenta e ω la dissipazione specifica.

La prima equazione di trasporto per k è definita come

$$\frac{\partial}{\partial t}(\bar{\rho}k) + \frac{\partial}{\partial x_i}(\bar{\rho}kq_i) = \frac{\partial}{\partial x_j} \left(\Gamma_k \frac{\partial k}{\partial x_j} \right) + G_k - Y_k + S_k + G_b \quad (2.34)$$

la seconda come

$$\frac{\partial}{\partial t}(\bar{\rho}\omega) + \frac{\partial}{\partial x_i}(\bar{\rho}\omega q_i) = \frac{\partial}{\partial x_j} \left(\Gamma_\omega \frac{\partial \omega}{\partial x_j} \right) + G_\omega - Y_\omega + S_\omega + G_{\omega b} \quad (2.35)$$

dove i termini

- G_k rappresenta la generazione di energia cinetica dovuto ai gradienti di velocità medi, G_ω rappresenta invece la generazione di ω ;
- Γ_k e Γ_ω rappresentano l'effettiva diffusività di k e ω ;
- Y_k e Y_ω sono le dissipazioni turbolente di k e ω ;
- S_k e S_ω sono termini sorgenti;

- G_b e G_{bw} sono termini che tengono degli effetti di buoyancy;

La viscosità turbolenta viene modellata come:

$$\mu_t = \rho \frac{k}{\omega} \cdot \frac{1}{\max \left[\frac{1}{\alpha^*}, \frac{SF_2}{\alpha_1 \omega} \right]} \quad (2.36)$$

In cui:

- S è lo strain rate magnitude;
- α^* è un coefficiente correttivo che aiuta a descrivere flussi a bassi Re;
- F_2 è una funzione di blending che garantisce una maggiore accuratezza del modello in corrispondenza della parete e del farfield;
- α_1 è una costante;

2.8.4 Strato limite

Per flussi ad alto numero di Reynolds l'influenza della viscosità attorno a un corpo è confinata in uno strato molto sottile nei pressi della parete solida: lo *strato limite*.

In questa zona le particelle saranno soggette ad una distribuzione di velocità normale alla superficie, passando dalla condizione di aderenza (velocità nulla) a parete ad un valore dell'ordine della velocità indisturbata.

Per questo motivo in questa zona gli effetti viscosi non sono trascurabili per la presenza del gradiente di velocità, al di fuori di questa zona gli effetti viscosi diventano trascurabili.

Considerando un modello di *strato limite* universale, tipicamente lo si associa al problema di lamina piana in cui non vi è presenza di gradienti di pressione (streamwise).

Il profilo di velocità tipico dello strato limite è come in figura 2.4.

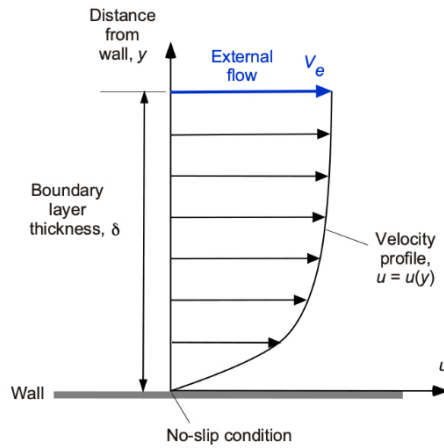


Figure 2.4: Profilo di velocità nello strato limite

Allora considero uno strato limite descritto da una legge universale di questo tipo

$$u^+ = f(y^+) \quad (2.37)$$

Si definisco quelle che sono delle grandezze adimensionali

$$u^+ = \frac{q}{u_\tau} \quad (2.38)$$

dove q è la velocità, mentre u_τ è la velocità caratteristica viscosa. Per la grandezza adimensionale y^+ si definisce una relazione analoga

$$y^+ = \frac{y}{l_\tau} \quad (2.39)$$

dove y è la distanza a parete e l_τ è la lunghezza caratteristica viscosa.

Nel caso di strato limite in una lamina piana, ho un certo profilo di velocità, da cui è possibile calcolarsi uno sforzo di taglio descritto dalla relazione:

$$\tau = \mu \left(\frac{du}{dy} \right) \quad (2.40)$$

e raffigurato in questo modo

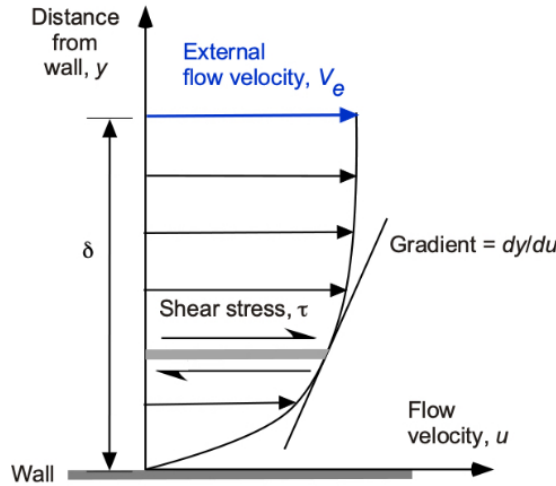


Figure 2.5: Sforzo di taglio lungo lo strato limite

posizionandomi a parete è possibile calcolare lo sforzo viscoso a parete:

$$\tau_w = \rho u_\tau^2 \quad (2.41)$$

e volendo riscrivere lo sforzo viscoso a parete sottoforma di velocità caratteristica viscosa associata alla parete si ottiene:

$$u_\tau = \sqrt{\frac{\tau_w}{\rho}} \quad (2.42)$$

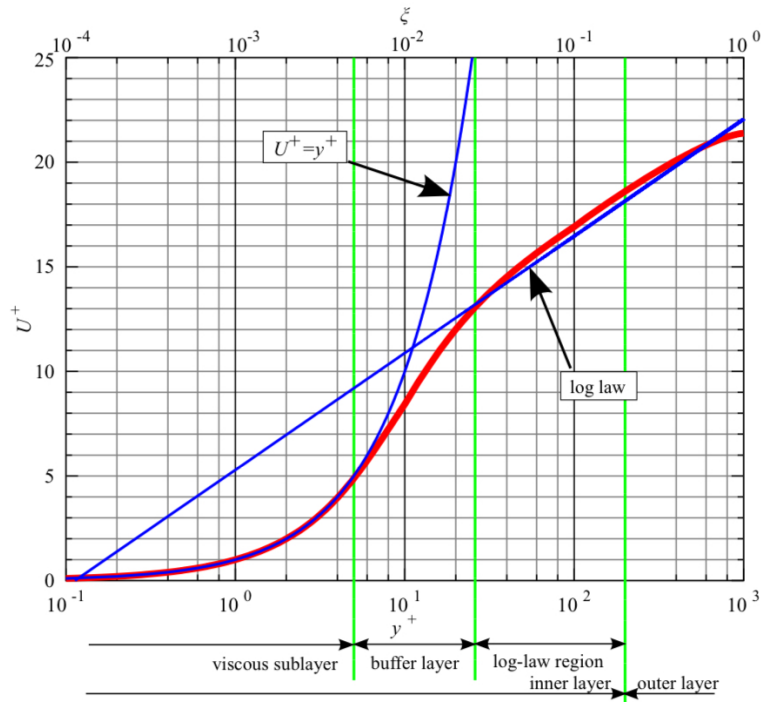
Allo stesso modo, dal momento che dimensionalmente la viscosità molecolare del fluido è una velocità per una lunghezza, si *assume* che sia uguale per u_τ e l_τ .

$$l_\tau = \frac{\nu}{\mu_\tau} \quad (2.43)$$

In questo modo supponendo che vi sia una legge universale che possa descrivere lo strato limite, mi aspetto che sia scritta in termini adimensionali (u^+ e y^+), al fine di slegarmi dalla scala del problema.

Questa legge viene raffigurata dalla *law of the wall* o anche detta *logarithmic law of the wall*, in cui ritroviamo le nostre grandezze adimensionali.

Questa legge è stata pubblicata nel 1930 da Theodore von Kàrmàn ed è applicabile a flussi che sono nei pressi della parete entro il 20% dell'altezza del flusso. [22]

Figure 2.6: Grafico y^+-u^+ nello strato limite

Come si nota dalla figura, sono individuate 3 regioni differenti:

- Il *substrato viscoso*, valida per $y^+ < 5$: qui il flusso è dominato dagli effetti viscosi e si riscontra una relazione lineare:

$$u^+ = y^+ \quad (2.44)$$

- il *buffer layer*, valida per $5 < y^+ < 30$: qui ci troviamo in zona di transizione in cui gli effetti viscosi e quelli legati alla turbolenza si equivalgono, creando una zona di raccordo tra le regioni.
- la *zona logaritmica*, valida per $y^+ > 30$: qui il profilo di velocità è governato da una legge di tipo logaritmica

$$u^+ = \frac{1}{k} \ln(y^+) + c^+ \quad (2.45)$$

dove $k = 0.41$ detto *costante di von Kàrmàn* e $c^+ = 5$

2.8.5 Requisiti di risoluzione

Nel momento in cui vado a risolvere il dominio, devo scegliere una griglia di calcolo (mesh) in grado di soddisfare dei requisiti.

In particolare, se prendessi la prima cella a parete, il valore di y^+ calcolato come la distanza a parete del baricentro rapportato alla lunghezza caratteristica viscosa, dovrà soddisfare dei limiti in base al modello di turbolenza che si sta utilizzando.

Per esempio nel caso di modelli di turbolenza come:

- *Spalart-Allmaras*, il limite è $y^+ < 5$;
- SST $k - \omega$, il limite è $y^+ < 1$;

La problematica principale è proprio nel rientrare in questi limiti, in quanto il costo computazionale necessario a svolgere le simulazioni è proporzionale alla qualità della mesh, maggiore sarà la *mesh refinement* maggiore sarà il tempo necessario a raggiungere la *convergenza*.

Per esempio nel caso di flussi ad altissimo Reynolds (decina di milioni), dove lo spessore dello strato limite diminuisce con l'aumentare del Re, allora avrei uno strato molto sottile nel quale dovrò inserire centinaia di punti e la risoluzione della mesh diventerebbe molto costosa.

Per alcune applicazioni quindi si rinuncia a risolvere interamente lo strato limite, introducendo delle *wall function*.

2.8.6 Wall function

Le *wall function* sono delle leggi analitiche necessarie nel momento in cui io decido di non risolvere completamente lo strato limite.

Se avessi lo strato limite completamente risolto, le prime celle sarebbero nello *sottostrato viscoso*, ciò implica un andamento di velocità lineare.

Tenendo a mente che lo sforzo viscoso in generale è definito come:

$$\tau = \mu \left(\frac{du}{dy} \right) \quad (2.46)$$

e l'andamento del profilo di velocità nella figura 2.7.

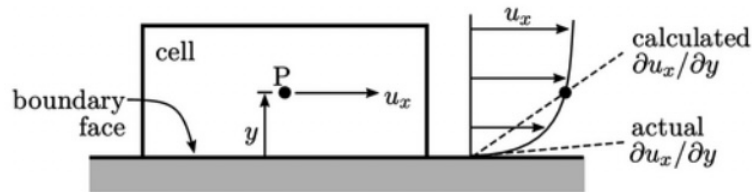


Figure 2.7: Profilo di velocità

Si osserva come lo sforzo viscoso a parete calcolato nel punto P è dato da:

$$\tau_w = \mu \frac{u_p}{d} \quad (2.47)$$

Se invece avessi un strato limite sotto-risolto, lo sforzo viscoso a parete non sarà più la relazione 2.47, dato che il profilo di velocità non è più lineare il gradiente effettivo di velocità sarà la tangente al profilo di velocità.

Si osserva da 2.7 come sia differente la pendenza tra le rette *calculated* e *actual*.

Dal momento che per alti valori di Reynolds avere uno strato completamente risolto è oneroso, bisognerà introdurre delle leggi analitiche capaci di mettere in relazione la velocità al centro cella con la velocità a parete che è nulla.

Si procede iterativamente:

1. Stimo una τ_w usando un approccio lineare oppure il valore del precedente passo temporale;

2. Calcolo di u_τ come

$$u_\tau = \sqrt{\frac{\tau_w}{\rho}} \quad (2.48)$$

3. Calcolo l_τ come

$$l_\tau = \frac{\nu}{u_\tau} \quad (2.49)$$

4. Mi riporto alle grandezze adimensionali, calcolando y^+ come

$$y^+ = \frac{d}{l_\tau} \quad (2.50)$$

5. Entro nella legge di parete conoscendo y^+ per ottenere $u^+ = f(y^+)$

6. Calcolo il nuovo u_τ

$$u_\tau = \frac{u_p}{u^+} \quad (2.51)$$

7. Calcolo la nuova τ_w come

$$\tau_w = \rho u_\tau^2 \quad (2.52)$$

8. Itero fino a convergenza della τ_w

Un esempio tipico di wall function è quello di Kader [21], utilizza una funzione di blending per il substrato viscoso e quello logaritmico.

$$u^+ = e^\Gamma u_{lam}^+ + e^{\frac{1}{\Gamma}} u_{turb}^+ \quad (2.53)$$

dove $\Gamma = -\frac{a(y^+)^4}{1+by^+}$ e $a = 0.01$ e $b = 5$.

In conclusione, le wall function funzionano abbastanza bene su flussi interamente turbolenti con uno strato limite ben sviluppato ad alto numero di Reynolds.

Questo approccio per studiare lo strato limite non deve però essere utilizzato nel caso vi siano transizione di regime tra laminare e turbolento oppure in presenza di separazione in quanto possono portare:

- Significativi errori di calcolo;
- Problemi numerici;

Chapter 3

Separazione del flusso

Nel 1903, Prandtl dimostrò che il fluido viscoso in vicinanza di una superficie, può suddividersi in due regioni:

- Un layer sottile vicino al corpo, definito *boundary layer* o *strato limite*, nel quale predominano le forze viscosi;
- La restante parte del flusso dove le forze viscosi possono essere trascurate;

La condizione di no-slip a parete e la presenza di un fluido accelerato all'esterno dello strato limite, porta il boundary layer a rallentare nei pressi della parete ed accelerare nei dintorni del flusso esterno.

La pressione statica, costante attraverso lo strato limite, è governata dal flusso principale. [29]

Avere un gradiente di pressione a parete favorevole o nullo è la condizione per avere uno strato limite attaccato alla superficie, al contrario se il gradiente di pressione a parete è avverso, questa condizione porta al distacco del boundary layer e una bolla di ricircolo nasce a valle della separazione. In modo più preciso, se la pressione a parete aumenta nella direzione del flusso principale, l'energia cinetica delle particelle si trasforma in energia potenziale.

La problematica principale risulta per le particelle più vicine a parete, le quali sentono l'effetto della condizione no-slip e avranno un'energia cinetica minore, rispetto alle particelle più esterne.

Un aumento della pressione porta a particelle che si arrestano e che possono anche tornare indietro causando un *reverse flow* locale, sotto queste condizioni avviene la *separazione*.

Le condizioni di fluido viscoso e gradiente di pressione avverso devono sussistere contemporaneamente, al contrario la separazione può essere prevenuta. [29]

3.1 Condizione di separazione

Nel punto di separazione di uno strato limite bi-dimensionale, planare o assialsimmetrico, lo sforzo di taglio a parete assume valore nullo:

$$\tau_w = \mu \left(\frac{\partial u}{\partial y} \right)_w = 0 \quad (3.1)$$

Da questa equazione e dal profilo di velocità, il comportamento delle derivate di u nella direzione normale alla parete può essere stimata.

Considerando la legge di conservazione della quantità di moto, trascurando la presenza delle forze di volume e tenendo conto dell'ipotesi di fluido Newtoniano in un sistema di coordinate cartesiane:

$$\rho \left(\frac{\partial u}{\partial t} + u \frac{\partial u}{\partial x} + v \frac{\partial v}{\partial y} + w \frac{\partial w}{\partial z} \right) = \quad (3.2)$$

$$-\frac{\partial p}{\partial x} + \frac{\partial}{\partial x} \left[2\mu \left(\frac{\partial u}{\partial x} - \frac{\nabla \cdot \bar{q}}{3} \right) \right] + \frac{\partial}{\partial y} \left[\mu \left(\frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x} \right) \right] + \frac{\partial}{\partial z} \left[\mu \left(\frac{\partial u}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial x} \right) \right] \quad (3.3)$$

Se si considera un punto arbitrario a parete, la condizione di aderenza fa sì che le componenti della velocità si annullino ($u = v = w = 0$), così come le derivate nella direzione parallela alla parete (direzione x e z).

Sostituendo $\nabla \cdot \bar{q} = \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} + \frac{\partial w}{\partial z}$ e assumendo che la viscosità sia costante all'interno dello strato limite, si semplifica la 3.3 in questo modo:

$$0 = -\frac{\partial p}{\partial x} - \frac{2}{3}\mu \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{\partial v}{\partial y} \right) + \mu \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} \quad (3.4)$$

Si può eliminare il secondo termine del secondo membro poiché $\frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{\partial v}{\partial y} \right) = \frac{\partial}{\partial y} \left(\frac{\partial v}{\partial x} \right) = 0$ e si ottiene:

$$\mu \left(\frac{\partial^2 u}{\partial y^2} \right)_w = \frac{\partial p_w}{\partial x} \quad (3.5)$$

riscritta come:

$$\left(\frac{\partial \tau_w}{\partial y} \right) = \frac{\partial p_w}{\partial x} \quad (3.6)$$

L'equazione appena ottenuta è stata ricavata direttamente dalle legge di conservazione della quantità di moto, pertanto ha validità per ogni punto a parete, incluse zone di separazione e di ricircolo.

Dato l'equazione dello sforzo a taglio viscoso 3.1, può essere utilizzata per mostrare come

$$\left(\frac{\partial^2 u}{\partial y^2} \right) > 0 \quad (3.7)$$

nel punto di separazione poiché la viscosità dinamica è sempre positiva, il gradiente di pressione deve essere avverso nel caso di separazione:

$$\left(\frac{\partial p_w}{\partial x} \right)_{x, separation} > 0 \quad (3.8)$$

3.2 Interazione strato limite-urto

Le relazioni ottenute nel paragrafo precedente sono valide sia per flussi subsonici che supersonici. Nel caso di un Dual-Bell, trattiamo un flusso supersonico turbolento, contraddistinto da un gradiente di pressione avverso tale da provocare una separazione dello strato limite.

Quando un flusso supersonico esposto a un gradiente di pressione avverso, si adatta al livello di pressione maggiore attraverso un sistema di onde d'urto.[29]

L'interazione tra strato limite e urto è stata studiata abbondantemente negli ultimi 50 anni mediante esperimenti di base. [29]

Le configurazioni di base che studiano questa interazione sono tre, in tutti i casi il flusso esterno è uniforme e scorre lungo un piano.

Tra le quali citiamo:

- Flusso attorno ad una rampa;

- Flusso attorno ad un cuneo;
- Flusso attorno ad un gradino;

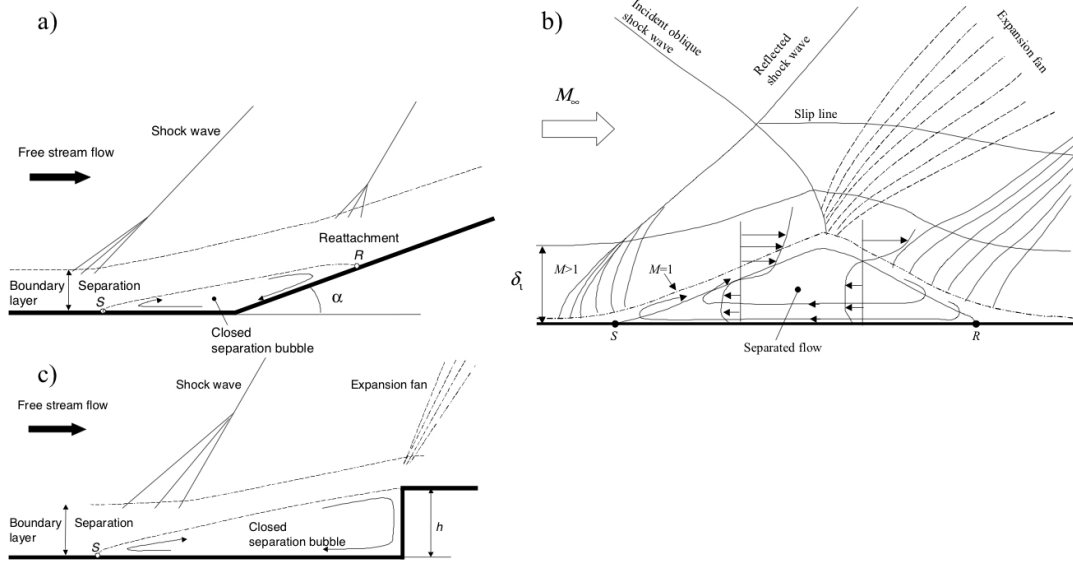


Figure 3.1: Interazione strato limite urto

La prima configurazione (figura 3.1 a) è la più semplice, tratta il flusso che incontra una rampa, la quale porta alla nascita di un'onda d'urto attraverso cui il flusso supersonico deflette di un angolo esattamente pari alla deflessione dalla rampa α .

La seconda configurazione (figura 3.1 b) studia come l'urto obliquo impatta su un cuneo, che provoca una deviazione del flusso in entrata. La condizione di flusso esterno uniforme e parallelo al piano provoca la formazione di un urto riflettente che nasce dal punto di impatto.

La terza configurazione (figura 3.1 c) è indotta dal flusso in entrata che incontra un gradino di altezza h , tale ostacolo provoca la separazione nel punto S. Il ripido aumento di pressione dovuta alla separazione, porta alla nascita di un urto nei pressi del punto S, a valle di questo punto nasce una bolla di ricircolo. [12]

In molti esperimenti è stato dimostrato che la maggior parte delle proprietà di interazione tra strato limite e urto sono quasi indipendenti dalla causa che ha indotto la separazione. [12] [10]

Infatti, l'andamento della pressione della parete per le diverse configurazioni sono le medesime con le seguenti caratteristiche:

- Aumento di pressione dopo il punto I, di inizio interazione;
- Nel punto S, di inizio separazione ad una distanza L_s dal punto I;
- Tra il punto S al punto P, abbiamo l'approccio graduale della pressione verso quella che sarà la zona di plateau;
- Dopo il punto P, l'estensione della zona a p_p costante è rappresentativa delle dimensioni della bolla di ricircolo;
- Aumento della pressione a parete fino al punto R dove avremo il punto di riattacco del flusso.

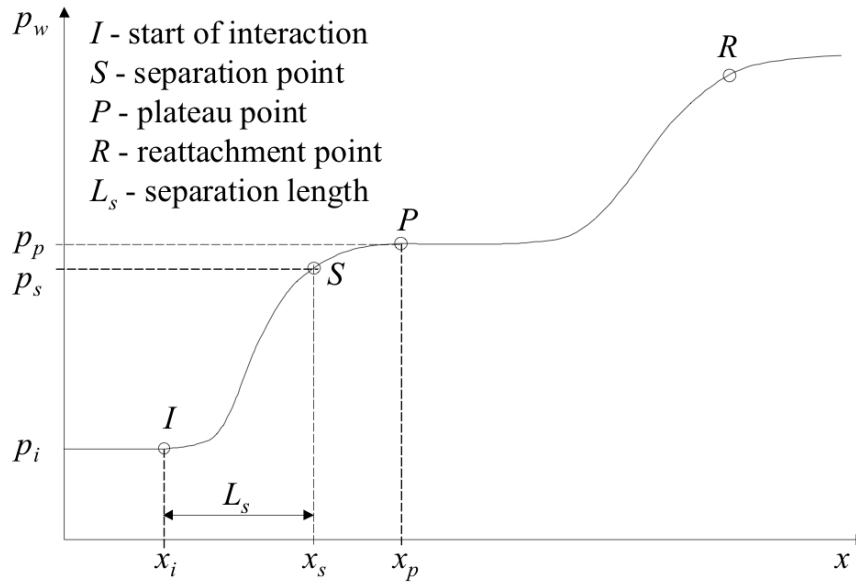


Figure 3.2: Andamento tipico di pressione statica

Queste caratteristiche sono indipendenti dalla geometria a valle, ma solamente dalle proprietà di monte ad inizio interazione. Per questo motivo sono state sviluppati concetti di libera interazione e criteri di separazione. [10]

3.3 Flow separation in rocket nozzles

Nei paragrafi precedenti è stato analizzato un flusso sotto l'influenza di un gradiente di pressione avverso generato da un ostacolo con conseguente separazione.

Una condizione simile avviene negli ugelli che operano in condizioni di sovraespansione, ovvero quando la pressione a parete calcolata all'uscita dell'ugello $p_{e,vac}$ (la pressione a parete ottenuta quando il flusso viene espulso in condizioni di vuoto nell'ambiente esterno) è più piccola della pressione ambiente p_a .

Generalmente viene introdotto il parametro $n = \frac{p_{e,vac}}{p_a}$ del flusso in modo da definire tre modalità:

- $n > 1$ ugello sottoespanso;
- $n = 1$ ugello adattato,
- $n < 1$ ugello sovraespanso;

Nel momento in cui il valore di n diminuisce leggermente sotto 1, si forma un sistema di onde d'urto oblique generato dal bordo di fuga dell'ugello a causa del gradiente di pressione avverso indotto.

Se il valore di n diminuisce attorno a valori tra 0.4 e 0.8, gli strati viscosi non riescono a sostenere il gradiente avverso di pressione imposto dal flusso inviscido e lo strato limite separa dalle pareti.

Questa condizione si verifica quando un motore realizzato per operare ottimamente in condizioni di elevata altitudine viene testato a livello del mare durante il transitorio di accensione e di spegnimento.[29]

Ricerche recenti hanno dimostrato che si sviluppano tipicamente due patterns di separazione:

- *FSS* (Free Shock Separation);
- *RSS* (Restricted Shock Separation);

3.3.1 Free Shock Separation

In questo caso, il flusso separa dalla parete nelle condizioni di sovraespansione ed il risultato di questo fenomeno è avere una pressione a parete che evolve governata dall'interazione tra strato limite ed urto.

Un andamento tipico di questa tipologia di separazione è la seguente

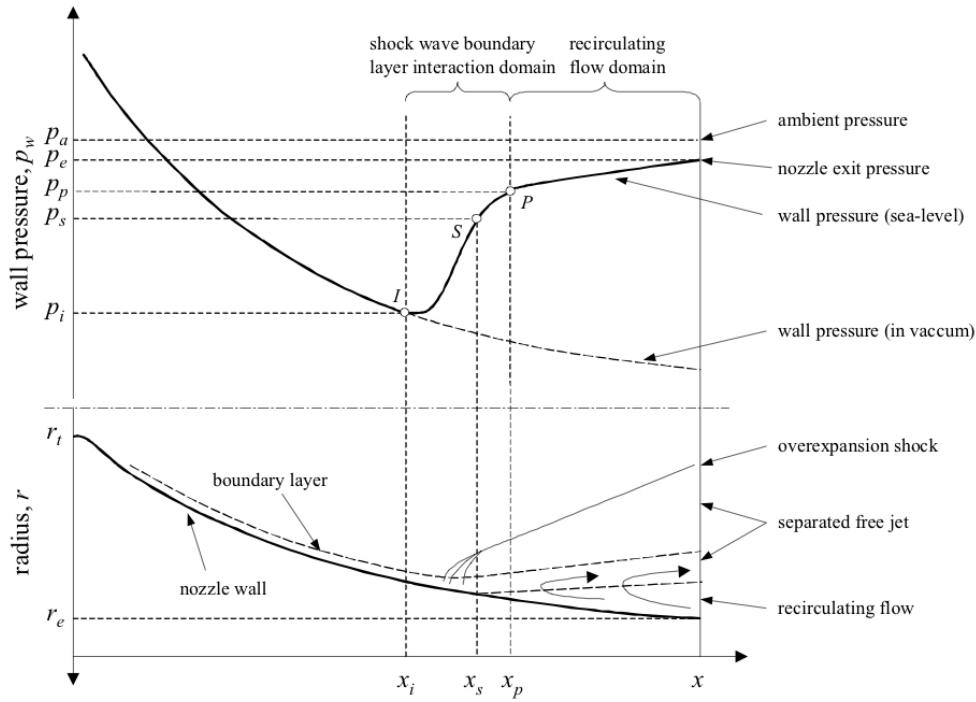


Figure 3.3: Free Shock Separation pattern

Da cui si osserva come la prima deviazione della pressione a parete dal profilo è comunemente chiamata p_i ovvero *incipient separation pressure*.

Inseguito, la pressione a parete aumenta rapidamente da p_i ad un pressione di plateau p_p , che tipicamente risulta poco più bassa della p_a .

Da analisi di test in scala ridotta in ugelli e in flussi con ostacoli [29], si è dimostrato che il rapido aumento di pressione è causato dalle fluttuazioni del fronte d'urto.

Inoltre, da molti test sui gas freddi condotti negli ultimi decenni si è notato che lo strato limite separa efficacemente dalla parete dell'ugello poco prima di raggiungere la pressione di plateau p_p .

Nella zona di ricircolo a valle del punto di separazione, la pressione di parete aumenta poco ed in modo graduale da p_p a p_e . Per predire la separazione assiale all'interno del nozzle, bisogna prima di tutto conoscere il valore di $\frac{p_i}{p_a}$ utilizzando il profilo della pressione a parete calcolato in vuoto.

Ovviamente, il rapporto $\frac{p_i}{p_a}$ tiene conto dell'influenza sia dell'aumento di pressione nel punto di separazione sia del graduale aumento nella zona di ricircolo. Per semplificare l'interpretazione è possibile suddividere il rapporto in due contributi:

$$\frac{p_i}{p_a} = \frac{p_i}{p_p} \frac{p_p}{p_a} \quad (3.9)$$

Già dagli anni 50' si era notato che il rapporto di pressione diminuiva durante l'accensione, con lo spostamento verso l'uscita del punto di separazione all'aumentare del $\frac{p_c}{p_a}$. [11][4]

Successivamente attribuito all'influenza del numero di Mach, in quanto mediante esperimenti in galleria del vento mostrarono come il rapporto di pressione di separazione diminuiva all'aumentare del mach.

Secondo gli studi di [4] e [39] si notò come il punto di separazione in una regione prossima all'uscita non seguiva il trend sopracitato.

Infatti, quando il rapporto di espansione raggiunge l'80% del suo valore finale, la $\frac{p_i}{p_a}$ inverte il suo tipico trend e aumenta all'aumentare di $\frac{p_c}{p_a}$.

Una prima spiegazione fu data da [39], secondo i quali nelle vicinanze dell'uscita la pressione di plateau aumentasse per raggiungere il valore della pressione ambiente, tuttavia per un $\frac{p_i}{p_a}$ costante, questo aumento di pressione causa un effettivo aumento della pressione di separazione p_i nella parte terminale dell'ugello, con conseguente aumento di $\frac{p_i}{p_a}$.

In conclusione, risulta un flusso effettivamente attaccato fino all'uscita, anche se i sensori rilevano un evidente aumento di pressione. Questo fenomeno è chiamato *incipient separation* all'uscita.

3.3.2 Restricted Shock Separation

Durante alcuni test freddi in sottoscala nei primi anni 70' del motore J-2S, è stato osservato un fenomeno di separazione diverso. Questo regime di flusso, che si sviluppava solo da alcuni rapporti di pressione in poi, la pressione a valle del punto di separazione mostrava un andamento irregolare fino a raggiungere valori anche superiori alla pressione ambiente.

Questo andamento è attribuito al riattacco del flusso a parete, inducendo un sistema di onde d'urto e di espansione lungo la parete.

La regione di separazione risulta essere molto ristretta, per questo motivo il regime di flusso è stato chiamato *Restricted Shock Separation*. [29]

Nella figura sottostante viene mostrato un tipico andamento di pressione misurata a parete per questa modalità

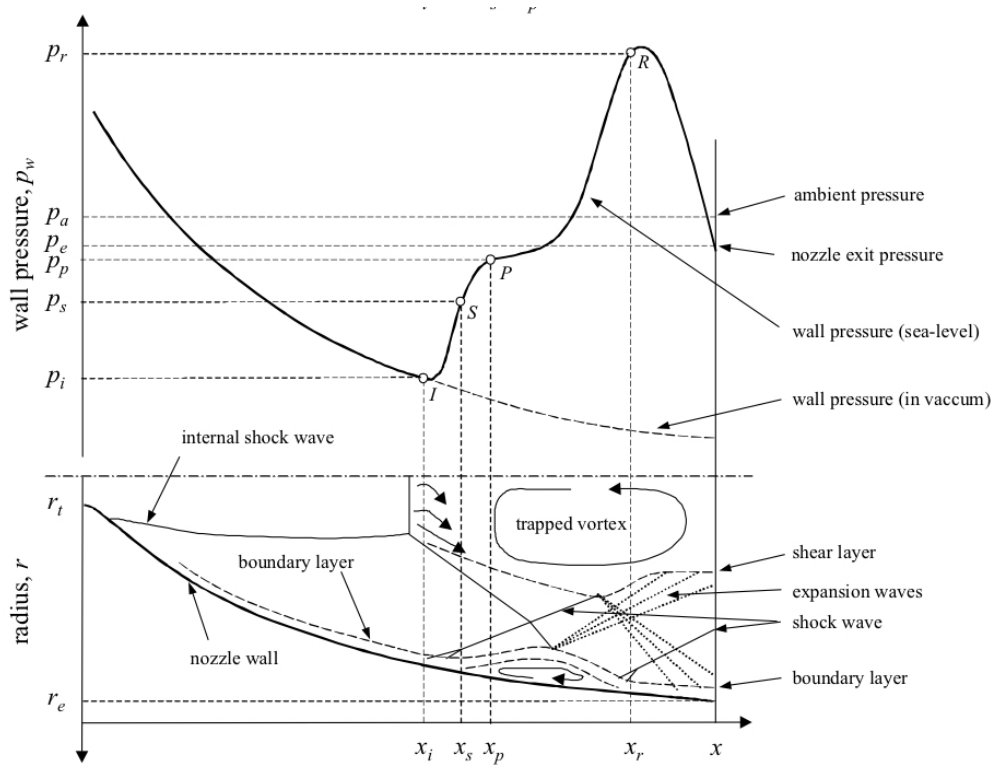


Figure 3.4: Restricted Shock Separation

Durante la fase di accensione, l'ugello evolve con una FSS, ad un valore di rapporto di pressione ben definito, avviene una transizione al RSS. [25] [20]

La transizione è collegata allo spostamento verso valle del punto di separazione, a valle del punto di riattacco nel modello RSS caratterizzato da un flusso supersonico che porta alla formazione del sistema di urti vi è un

aumento della pressione a parete sopra la pressione ambiente.

Aumentando la pressione di camera, la zona di ricircolo si sposta a valle verso l'uscita.

Una volta che il punto di riattacco raggiunge l'uscita dell'ugello, la zona di ricircolo si apre all'ambiente esterno. Si crea così un aumento di pressione a valle dell'urto di separazione, che spinge il punto di separazione verso monte e ricreando la zona di ricircolo.

La zona di ricircolo si chiude nuovamente, con una pressione statica che cala perciò si ricreano le condizioni per i quali il punto di separazione si sposta a valle.

Questo è un fenomeno pulsato legata all'apertura e chiusura della bolla di ricircolo, passando da una transizione da FSS a RSS a una ri-transizione da RSS a FSS.[25][20]

Gli stessi fenomeni possono essere osservati durante il transitorio di spegnimento, tuttavia il rapporto di pressione a cui avviene la ri-transizione è più basso del rapporto di pressione a cui avviene la transizione nel transitorio di accensione.[23] [25] [20]

In figura sottostante vengono presentati andamenti delle pressioni e del campo di mach nel caso dell' ugello parabolico Volvo S1

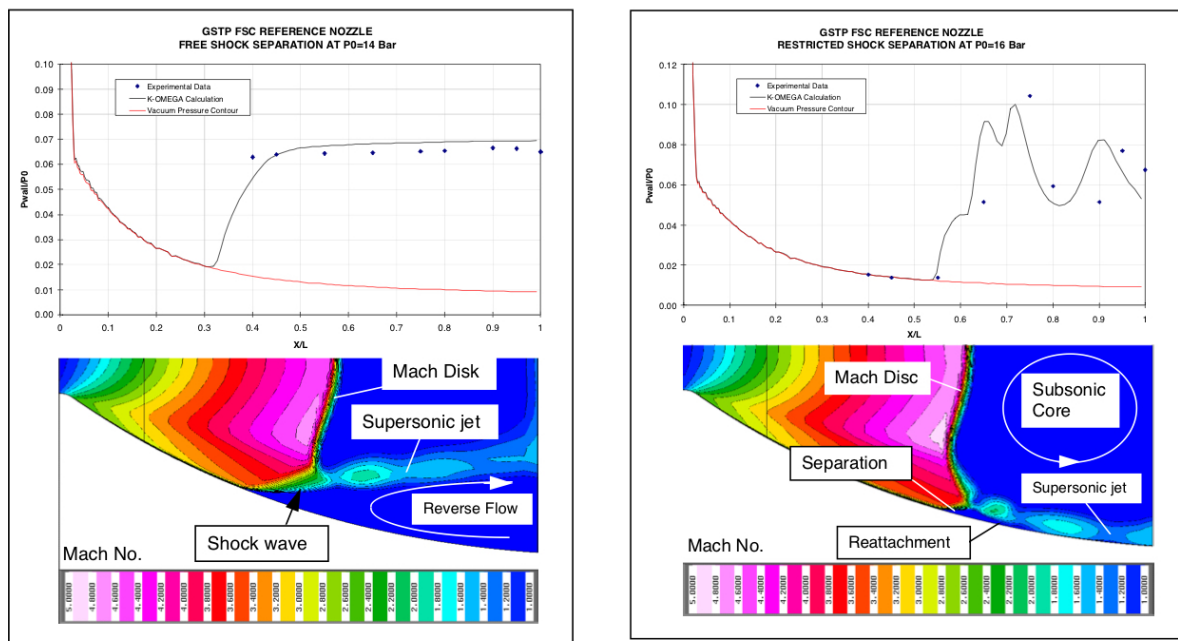


Figure 3.5: Pressioni a parete e campo di mach del VOLVO S1 in FSS e RSS

Chapter 4

Carichi laterali

I *side-loads* sono stati osservati nei test sui rocket in sub-scale che full-scale durante le fasi di accensione, spegnimento e in fasi stazionarie con flusso separato all'interno dell'ugello.

Come dice il nome, queste forze agiscono in modo trasversale alla direzione della spinta (assiale), sono degli effetti indesiderati e causano vincoli significativi per la fase di design.

Nel 1970 fu pubblicato un primo report [18], il cui obiettivo principale fu studiare gli effetti dei carichi laterali all'interno del J-2S.

Secondo Östlund [29], la generazione di carichi laterali dovuta a una evoluzione asimmetrica della pressione a parete all'interno dell'ugello, è causata da diversi fenomeni tra i quali:

1. Fenomeni di transizione e di ritransizione tra i modelli FSS e RSS;
2. Una linea di separazione inclinata;
3. Pulsazione della pressione nella regione di separazione e di ricircolo;
4. Accoppiamento aeroelastico;

Inoltre, le pulsazioni di pressioni agiscono dall'esterno sul guscio dell'ugello, l'iniezione asimmetrica di propellente o/e gas per il film cooling posso generare queste forze.

In questa trattazione si trascurano le cause appena elencate e si valuteranno solo il punto 1 e 3.

4.1 Fenomeni di transizione e ritransizione

Dai paragrafi precedenti sappiamo come all'interno di ugello si passa passare da un modello FSS a RSS al variare della pressione di camera.

Il pattern definito come *cap-shock* tipico degli ugelli TIC, parabolici e dei direct optimised nozzles durante la transizione sviluppano due distinti picchi di carichi laterali.

Nella figura sottostante si osserva il campo di mach e le strutture che si formano nella transizione del S1

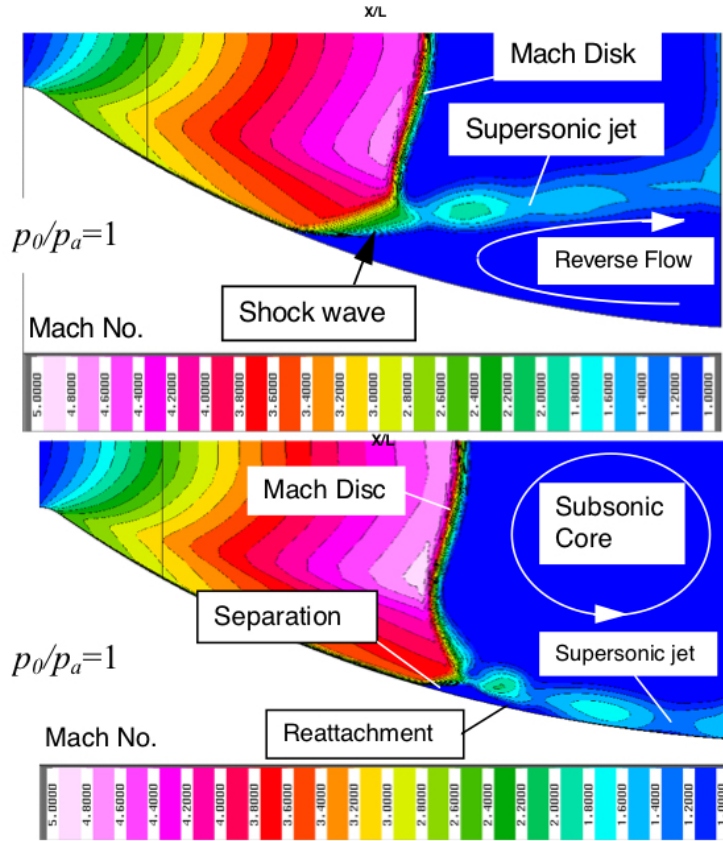


Figure 4.1: FSS e RSS nel S1 nello start-up

I picchi ottenuti nella fase di transizione sono i seguenti

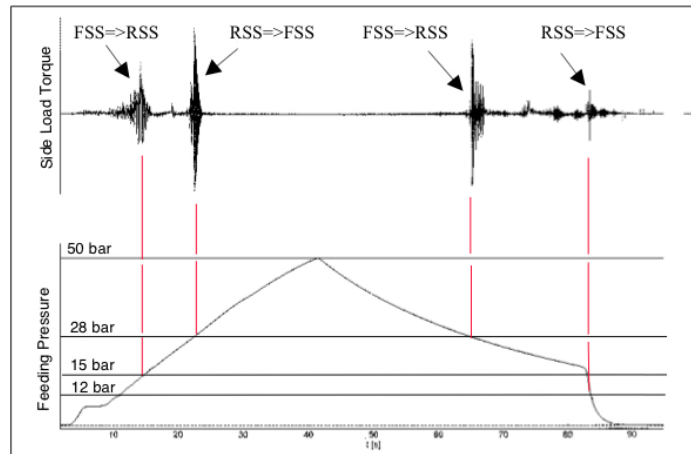


Figure 4.2: Picchi dei carichi laterali nel S1

Studi sono stati fatti su due full-scale ugelli parabolici (Vulcain e SSME nozzle) e si osservò come durante la rapida e asimmetrica transizione si genera un carico laterale agente sulla struttura.

La durata ridotta del carico laterale aerodinamico permette di utilizzare la teoria *pulse excitation theory* per valutare il carico meccanico. [24] In base alla teoria, il fattore di risposta dinamica (l'amplificazione del carico applicato generato dal sistema dinamico) è minore di due per ciascun singolo impulso. L'impulso più critico, di cui viene mostrato lo spettro di risposta in figura , è l'impulso a singola onda più energetica.

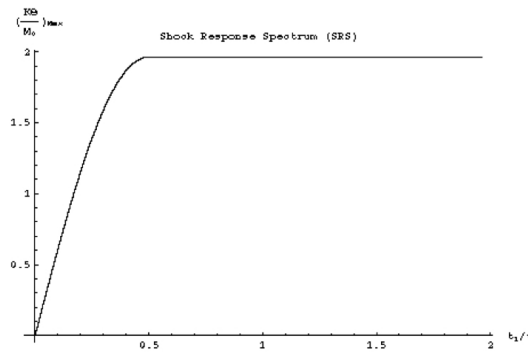
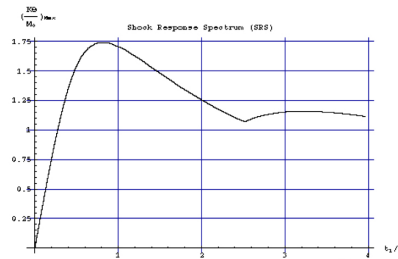
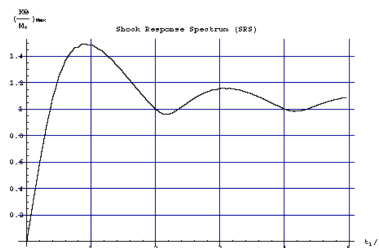


Figure 4.3: Spettro di risposta in frequenza di una single square wave

Ulteriori esempi di onde possono essere le onde semi-sinusoidali e quelle triangoli mostrate nelle figure 4.4a e 4.4b



(a) Half sine wave



(b) Triangular wave

Sono entrambe buone approssimazioni della forma dell'impulso che crea il picco di carico laterale durante la transizione FSS e RSS.

Il secondo picco di carichi laterali è dovuto alla transizione da RSS a FSS, dato che il rapporto di pressione aumenta, il punto di riattacco raggiunge l'uscita dell'ugello ed il flusso diventa altamente instabile.

La bolla di ricircolo si apre e il punto di separazione si muove a monte, ritrovandosi nelle condizioni iniziali che lo hanno portato a valle, si forma questa condizione ciclica fino a quando la pressione di camera non raggiunge valori tali per cui il punto di separazione esce completamente dall'ugello. Rispetto alla formazione del primo picco dei side-loads, il secondo è tipico di uno fenomeno stazionario e se la frequenza del sistema si avvicina alla frequenza di eccitazione del carico laterale, avviene una forte amplificazione del carico che incide sulle pareti dell'ugello.

La natura ciclica di questo fenomeno porta a failure per fatica, come avvenne nella SSME fuel feed. [43]

4.2 Fluttuazioni di pressioni

La separazione nei flussi supersonici è chiaramente non limitato nella zona dell'ugello. Quando un flusso supersonico incontra un ostacolo, una rampa o un urto la pressione aumenta nello strato limite, questo aumento può portare alla separazione.

Dagli esperimenti su queste casistiche è stato scoperto come la separazione nello strato limite turbolento non è un processo stazionario, anche se il flusso è stazionario. [2] [9]

Inoltre, la linea di separazione e l'urto che risultano dalla deflessione del flusso mostrano un comportamento altamente instazionario, le grandi scale turbolente ne innescano il fenomeno, il quale influenza la regione a valle della zona di ricircolo. [1]

Nello studio [28] di un Volvo S6 (TIC), sono stati studiati i carichi laterali e le cause per le quali si sono generati.

In relazione alla risposta dinamica della pressione a parete sono state fatte alcune osservazioni:

1. Nella regione di flusso attaccato, solo piccole fluttuazioni nascono e rappresentano le pulsazioni dello strato limite turbolento attaccato. Nel caso del Volvo S6 è stata riportata la pressione a parete normalizzata sulla pressione ambiente in funzione del tempo a fissato $\frac{p_0}{p_a} = 75$ (pressione di camera normalizzata sulla pressione ambiente).

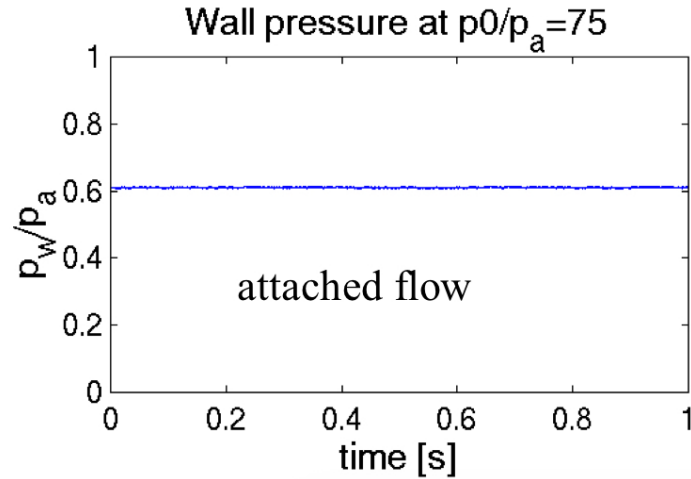


Figure 4.5: Fluttuazioni di pressione a parete con flusso attaccato

2. Nella regione di separazione le fluttuazioni di pressioni risultano maggiori. Dalla figura sottostante si nota come la misurazione di pressione oscilla su due livelli, il primo coincidente con la p_{sep} ovvero la pressione a monte della separazione e la seconda coincidente con la p_p ovvero la pressione di plateau all'inizio della zona di ricircolo.

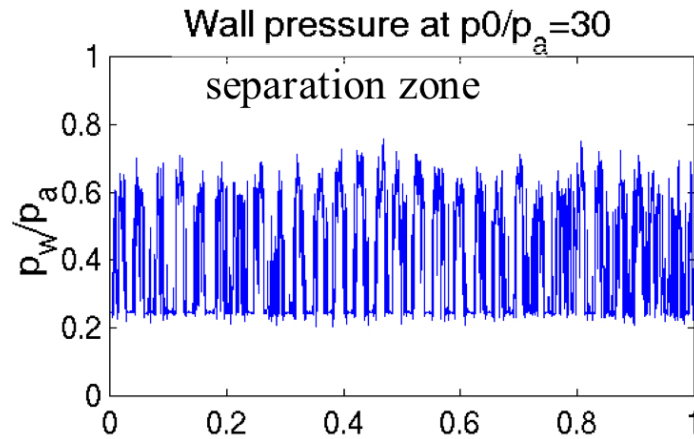


Figure 4.6: Fluttuazioni di pressione a parete nella zona di separazione

3. Nella regione a valle della separazione le fluttuazioni decrescono in modo significativo, ma risultano essere maggiori del caso di flusso attaccato. Il comportamento instazionario della pressione è dovuta dalla generazione di rumore dello shear layer del flusso libero già separato e anche dalle oscillazioni del punto di separazione.

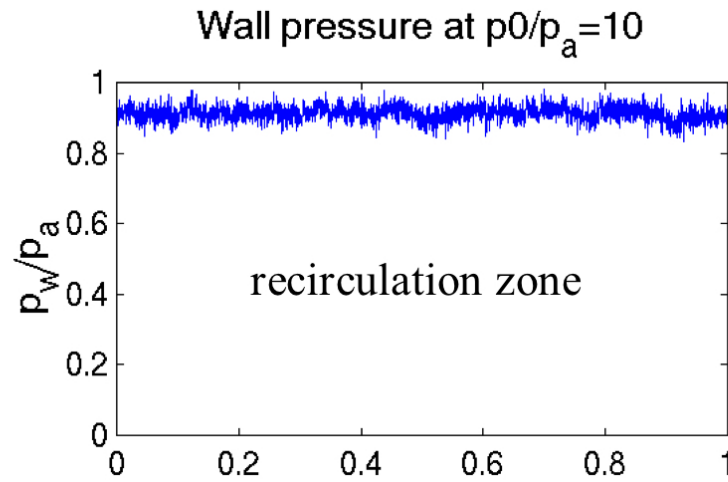


Figure 4.7: Fluttuazioni di pressione a parete nella zona di ricircolo

Le fluttuazioni di pressioni hanno un comportamento randomico, però mostrano una chiara correlazione sia in spazio che in tempo. Causando una deviazione del flusso assialsimmetrico, producendo forze perpendicolari all'asse.

Nel caso test di Volvo S6, Dumnov [13] presentò un metodologia utile a calcolare le dimensioni di queste forze correlate allo spazio e tempo. In figura 4.8 si mostrano come le "side-load Torque" ed il rapporto di pressione sono in funzione di un tempo test.

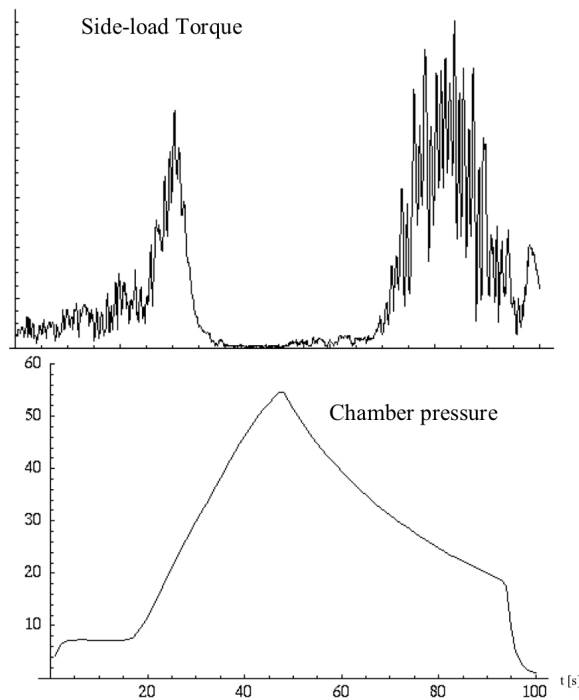


Figure 4.8: Side-loads creati con un pulsazione randomica di pressione

I carichi laterali che derivano dalle randomiche fluttazioni di pressioni sono delle forze aerodinamiche che agiscono sul sistema dinamico (ugello o engine).

Per calcolare la risposta del problema in termini di sollecitazioni, deformazioni e spostamenti è necessario risolvere il problema di risposta con forzante.

Il medesimo ragionamento è utile se il carico laterale aerodinamico deve essere calcolato dalle misurazioni, dal momento che solo la risposta del sistema può essere misurata, è necessario effettuare un ricalcolo del carico laterale che richiede la precisa conoscenza del comportamento del sistema dinamico.

Un modo per fare questo è calcolarsi la funzione di trasferimento. [24]

In questa sezione sono stati trattati solo due fenomenologie che causano la generazione dei carichi laterali, per quelli restanti si consigliano:

- Linea di separazione inclinata [29];
- Accoppiamento aeroelastico [28].

Chapter 5

Caso sperimentale in esame

In questo elaborato di tesi, l'obiettivo è di svolgere un'analisi critica di 3 modelli di turbolenza e nella loro previsione dell'isteresi, fenomenologia tipica di un ugello Dual-Bell.

Questo profilo di nozzle, come abbiamo visto nel capitolo 1, rappresenta un ugello non convenzionale e che ha la capacità di adattarsi in quota.

5.1 Pre-Processing

5.1.1 Geometria

La geometria è stata ricreata partendo dalle coordinate fornite per il paper "Unsteady Flow Conditions During Dual-Bell Sneak Transition" [40].

Nel seguente paper è stato costruito in sub-scale Dual-Bell in modo da studiare le instazionarietà delle condizioni durante la fase di *Sneak Transition*, la fase a cavallo tra le due modalità operative.

Inizialmente le coordinate erano state presentate nel formato x - y - z dimensionalmente in metri, normalizzando e ottenendo le coordinate come x/R^* - R/R^* .

In figura sottostante si mostrano i punti forniti dal paper del profilo

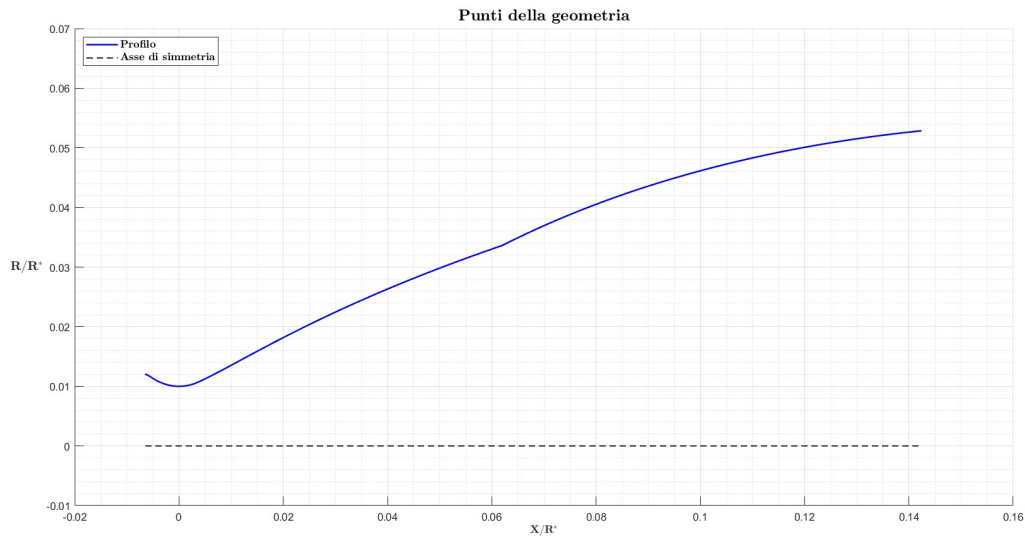


Figure 5.1: Punti della Dual-Bell con asse di simmetria

Dalla figura si osserva il profilo aperto, per poter fare le analisi CFD quello che bisognerebbe avere è una geometria chiusa in modo da poter adeguatamente scegliere le condizioni di bordo e poter studiare i campi. Mediante una manipolazione dei punti con uno script Matlab si è scelto di chiudere la geometria ed inseguito per studiare quella che è l'evoluzione del flusso in uscita inserire un *dominio esterno*.

Dal momento che il software Ansys Fluent è stato utilizzato per sviluppare le analisi CFD, bisogna sottostare ad un formato ben preciso per l'inserimento dei punti della geometria:

$$\text{N}^\circ \text{ Linea} \mid \text{N}^\circ \text{ Punto} \mid x \mid y \mid z$$

Table 5.1: Formato per l'inserimento dei punti

Quindi nella fase di manipolazione dei punti sono stati aggiunti la prima e la seconda colonna, le quali fanno rispettivamente riferimento a:

- Il numero della linea alla quale si sta facendo riferimento;
- Rappresenta il numero del punto al quale vengo associate le coordinate;

Per l'inserimento del dominio esterno inoltre è stato rispettato questo orientamento:

- Linee orizzontali: da sinistra verso destra;
- Linee verticali: dal basso verso l'alto;

Per fare un esempio, i valori inseriti per aggiungere il dominio esterno al profilo sono stati:

N° Linea	N° Punto	x	y	z
2	1	-0.0065	0	0
2	2	-0.0065	0.0120759	0
3	1	-0.0065	0	0
3	2	0.442411	0	0
4	1	0.442411	0	0
4	2	0.442411	0.253856	0
5	1	0.122411	0.253856	0
5	2	0.442411	0.253856	0
6	1	0.122411	0.053856	0
6	2	0.122411	0.253856	0
7	1	0.122411	0.053856	0
7	2	0.142411	0.053856	0
8	1	0.142411	0.052856	0
8	2	0.142411	0.053856	0

Table 5.2: Punti per il dominio esterno

Ottenendo in ambiente Matlab, la seguente geometria

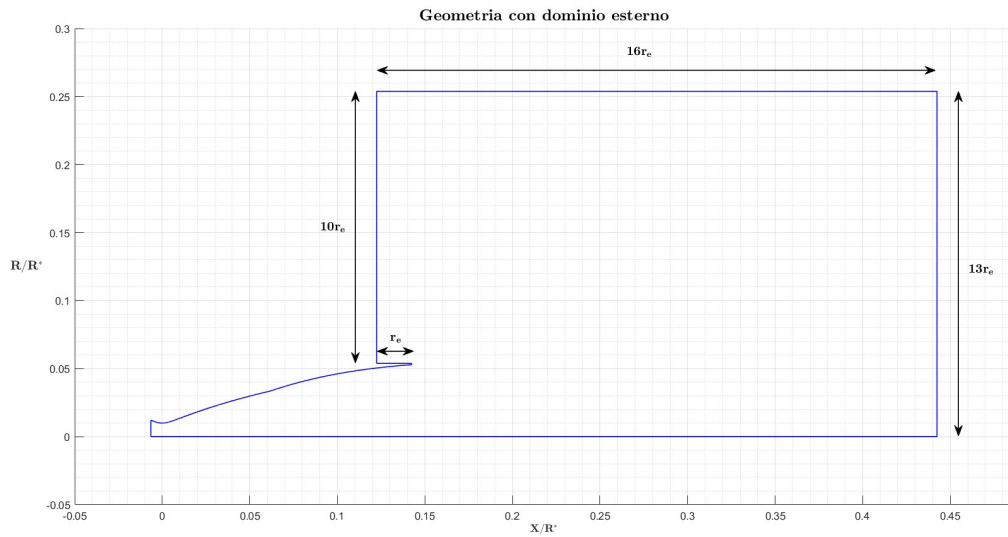


Figure 5.2: Geometria con dominio esterno

Il dominio esterno è stato costruito in funzione di una distanza di valore $r_e = 2r_t$ con r_t raggio di gola.

Dopo aver inserito la geometria all'interno del *DesignModeler* di Fluent, bisogna creare la superficie con proprietà di *fluid* e mediante l'utilizzo di ulteriori schizzi suddividere la superficie in più quadranti.

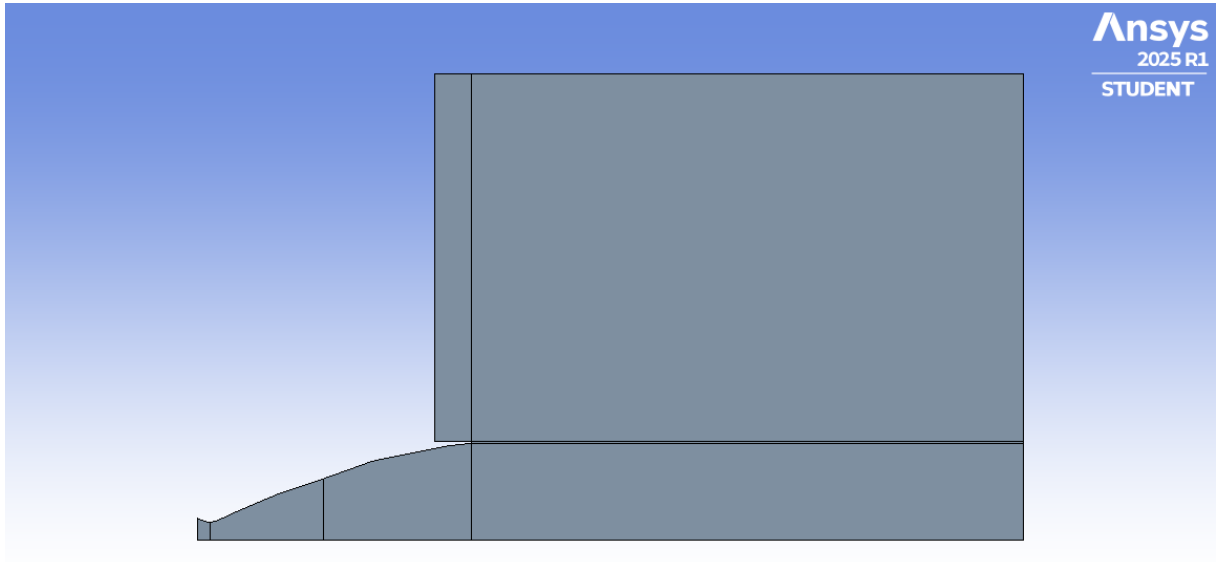


Figure 5.3: Geometria in ambiente Ansys

In figura si mostra la superficie inserita in Fluent con le varie divisioni, procedura che vedremo sarà molto utile per la fase successiva di *mesh*.

5.1.2 Mesh

Una delle fasi più importanti nell'utilizzo della CFD, è quello della scelta della griglia computazionale.

La scelta ottimale di un mesh permette di catturare i fenomeni importanti all'interno dell'ugello come:

- Interazione urto e strato limite;
- Disco di mach;
- La scia a valle;

Per questi motivi e tenendo conto di domini di calcolo utilizzati in letteratura come [6] [45], in figura 5.4 è mostrata la mesh scelta per l'analisi.

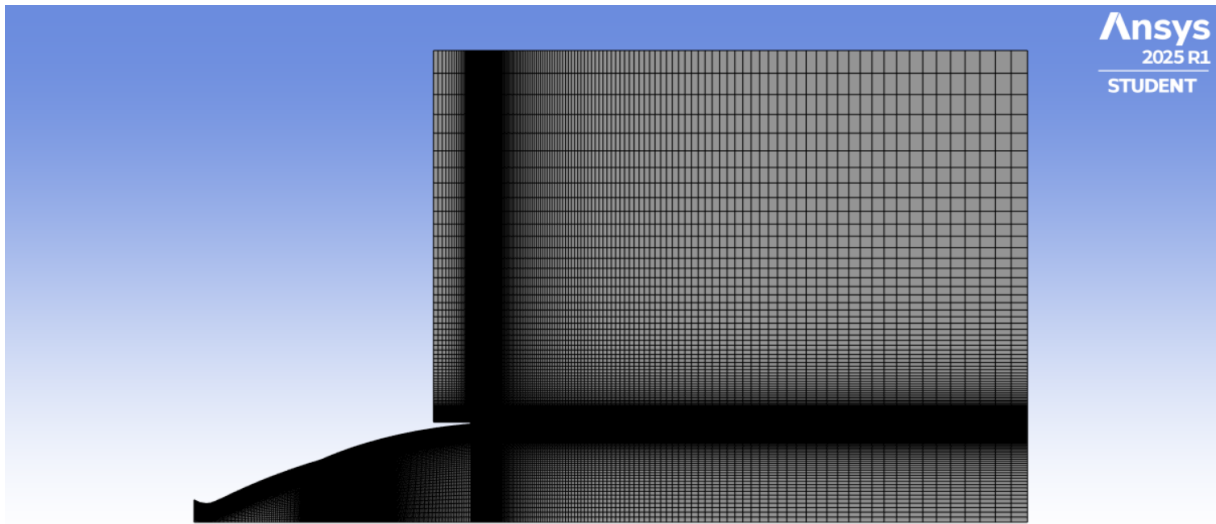


Figure 5.4: Mesh della geometria complessiva

In dettaglio si mostra la zona interna dell'ugello.

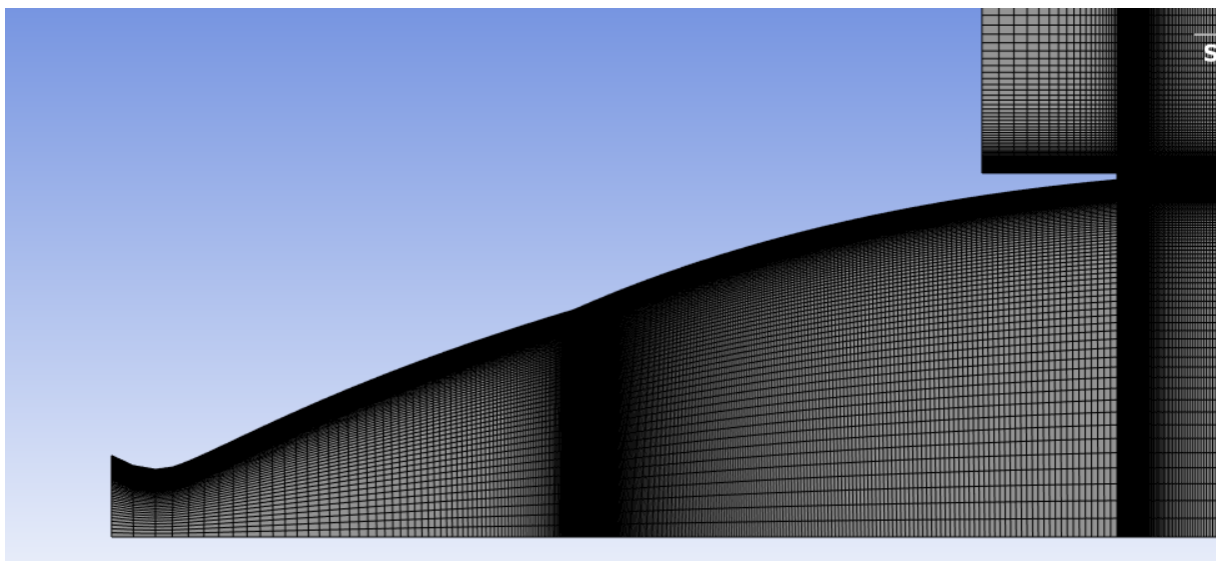


Figure 5.5: Mesh ugello

Come si può osservare le zone infittite maggiormente sono state:

- *Inflection zone*, una buona risoluzione di questa zona permette nella fase di up-ramping di osservare come la separazione rimane vincolata per molti valori di NPR;
- *A parete*, una buona risoluzione a parete permette di studiare al meglio lo strato limite e di catturare al meglio la separazione ed avere dei valori di y^+ adeguati al modello di turbolenza utilizzato;

- *Uscita ugello e scia*, all'aumentare del valore di NPR la separazione si sposta a valle come la formazione del disco di mach;

Nel dettaglio le caratteristiche della griglia dell'ugello sono:

1. *Lungo y* sono stati disposti 100 suddivisioni con un fattore di stretching (bias) di 200, in modo da avere una buona risoluzione della parete;
2. *Lungo x* nel convergente sono state disposte solo 2 suddivisioni, il criterio era quello di poter avere un passaggio in gola più uniforme possibile;
3. *Lungo x* nella prima campana divergente sono state disposte 80 suddivisioni con un bias di 22 direzionato verso l'inflessione;
4. *Lungo x* nella seconda campana divergente sono state disposte 200 suddivisioni con bias di 8 direzionato verso l'inflessione.

Nel caso del dominio esterno abbiamo una griglia costruita da una suddivisione 200 x 100, per la zona della scia invece la griglia è stata suddivisa in 180x80.

Per un numero di celle o *elements* complessivo pari a 73400.

Inoltre, si è provato a validare la mesh con i dati sperimentali del paper [40]

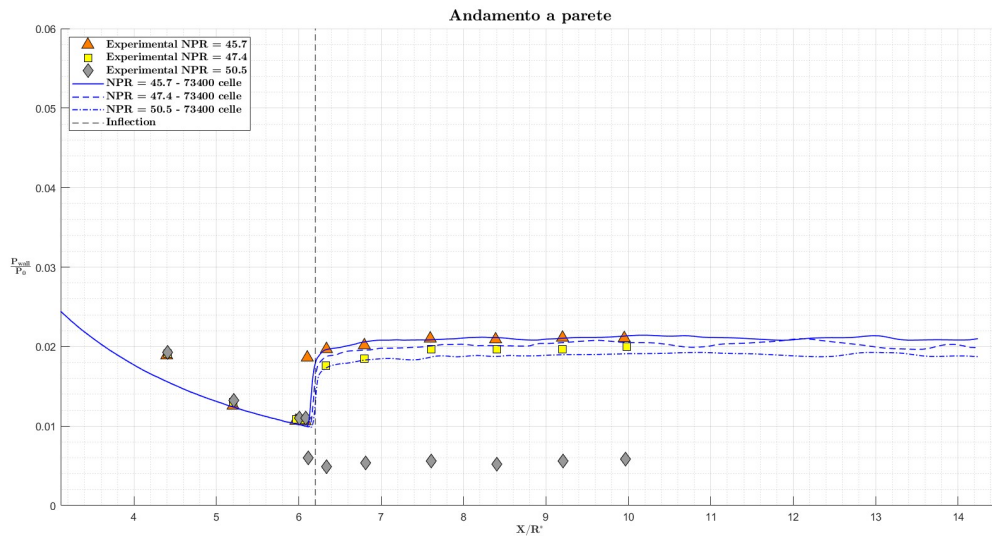


Figure 5.6: Confronto con dati sperimentali

Mostrando la difficoltà della CFD a prevedere l'andamento a parete per i casi di NPR 47.4 e 50.5.

Le motivazioni sono legate:

- Interazione urto-strato limite ad alto Reynolds, causando separazione e fenomeni non stazionari difficili da modellare;
- Modelli di turbolenza non calibrati per queste geometrie;
- Shear layer altamente instabile;
- Una bolla di ricircolo che nasce a valle della separazione altamente instazionaria nel tempo;
- Fenomeni di transizione e ritransizione;

Il fattore più importante però è la geometria, la presenza di una zona di inflessione porta ad una difficile previsione del comportamento del flusso. In appendice A 7, viene mostrata come nel caso di modelli più convenzionali come il TIC, il matching tra i dati sperimentali e numerici coincidono.

Una critica che si può avanzare alla griglia è la poca uniformità nella bocca d'uscita dell'ugello, questa scelta è stata presa a posteriori nella fase di simulazione in cui si denotava che un bias uniformemente diretto sia a monte che a valle portava ad avere una bassa risoluzione dell'interazione tra strato limite ed urti, che avveniva nella parte centrale della seconda campana per NPR bassi.

5.2 Condizioni di bordo

L'ugello del caso studio è progettato per avere un flusso subsonico nel tratto convergente e nel tratto dei due divergenti dei flussi supersonici. Dalla teoria delle linee caratteristiche [14], si potrà definire opportunamente il problema con le seguenti condizioni di bordo:

- 2 condizioni al contorno per l'ingresso subsonico: p° e T° ;
- 1 condizione al contorno per uscita supersonica: p_e ;

Nei capitoli precedenti si è introdotto quello che è l'NPR o *nozzle pressure ratio*, parametro che indica:

$$NPR = \frac{p^\circ}{p_a} \quad (5.1)$$

tale per cui mantenendo la pressione ambiente p_a costante l'unico parametro modificabile nelle fasi di simulazioni di up-ramping e down-ramping è la pressione totale a monte o di camera.

Variare quindi l'NPR implicherà variare ad ogni simulazione la pressione totale, che verrà calcolata di volta in volta.

La procedura utilizza per calcolare la pressione totale è stata:

1. Conoscendo i punti della geometria, calcolo le aree di ingresso A_i , l'area di gola A_t e l'area di uscita A_e come circonferenze ed in rapporti con l'area di gola;
2. Utilizzando la conservazione della portata da monte verso valle si potranno calcolare i valori di M_i e M_e . Nello specifico si scrive la conservazione della portata tra ingresso e gola

$$\frac{p_i^\circ A_i}{\sqrt{RT_i^\circ}} f(M_i) = \frac{p_t^\circ A_t}{\sqrt{RT_t^\circ}} f(M_t) \quad (5.2)$$

dove $f(M)$ è la funzione di portata corretta.

Ipotizzando un'evoluzione isentropica la pressione totale e la temperatura totale sono costanti e si possono elidere, la relazione risultante rimane quella che è definita *regola delle aree*:

$$\frac{A_i}{A_t} = \frac{f(1)}{f(M_i)} \quad (5.3)$$

Invertendo la relazione e conoscendo i rapporti di aree si potrà calcolare il M_i e allo stesso modo M_e .

3. Calcolati i mach di ingresso ed uscita, si potranno calcolare le condizioni al contorno di p_i° , p_i e le temperature totali. Ipotizzando un NPR e una pressione ambiente pari a 101325 [Pa], si calcoleranno le condizioni al contorno inserite su Fluent come:

$$p_{inlet}^\circ = NPR \cdot p_a \quad (5.4)$$

$$p_{inlet} = \frac{p_{inlet}^\circ}{\left(1 + \frac{\gamma-1}{2} M_{inlet}^2\right)^{\frac{\gamma}{\gamma-1}}} \quad (5.5)$$

Per le temperature totali si *assumono* costanti e pari a 300 [K] e la pressione statica in uscita $p_{outlet} = p_a$.

Per esempio nel caso di $NPR = 30$ le condizioni di bordo da inserire saranno:

- Per l'inlet:

Gauge Total Pressure	3039750	[Pa]
Supersonic/Initial Gauge Pressure	2651543.4225	[Pa]
Total Temperature	300	[K]

Table 5.3: Condizioni al contorno per l'inlet

- Per l'outlet:

Gauge Pressure	101325	[Pa]
Total Temperature	300	[K]

Table 5.4: Condizioni al contorno per l'outlet

- Per il Farfield:

Gauge Pressure	101325	[Pa]
Mach Number	0.01	
Temperature	300	[K]

Table 5.5: Condizioni al contorno per il Farfield

5.3 Fenomeno da modellare

Come detto nei capitoli precedenti il Dual-Bell è caratterizzato dalla capacità di adattarsi in quota in quanto presenta due campane divergenti. La possibilità di operare in due modalità diverse porta questo profilo ad avere delle buone prestazioni sia a basse che alte quote ed il fenomeno che ne caratterizza questo passaggio è detto *transizione*.

La capacità di far avvenire il *sea-level transitioning* può potenzialmente portare, nel caso di applicazioni SSTO con target orbite LEO, ad un aumento del payload, una separazione controllata nella zona dell'inflessione causa un picco momentaneo di side-load con un'amplificazione in funzione dell'estensione del Dual-Bell [16], ma è stato dimostrato come non siano superiori alle geometrie convenzionali. [37]

Inoltre, in questo elaborato di tesi si studierà il fenomeno dell'*isteresi*, procedendo con up-ramping ed un down-ramping del valore di NPR (nozzle pressure ratio) e trovando i valori di NPR per i quali avremo *transizione* e *ritransizione*.

Un range di NPR adeguato tra la transizione e la ritransizione è essenziale per avere la stabilità della modalità operativa.

Una percentuale grande di isteresi garantisce che una piccola variazione di NPR, per esempio, dovuta all'instabilità di combustione o dagli effetti di *buffeting* sul rocket non portino ad oscillazioni tra una modalità e l'altra. [16]

La percentuale di isteresi viene definita nel seguente modo:

$$hysteresis = \frac{NPR_{tr} - NPR_{retr}}{NPR_{tr}} \cdot 100\% \quad (5.6)$$

5.4 Studio dell'isteresi

L'obiettivo di questo elaborato è di svolgere un'analisi critica dei vari modelli di turbolenza e di come essi si comportano nella previsione della separazione e del fenomeno di isteresi.

La scelta dei modelli di turbolenza è stata fatta basandosi sui diversi paper in circolazione in merito al Dual-Bell e al fenomeni di isteresi [6] [32] [45] e quelli proposti sono stati:

- *Spalart-Allmaras* ad un'equazione;
- SST $k - \omega$ a due equazioni;
- $k - \epsilon$ a due equazioni;

I tre modelli si differenziano in base al numero di equazioni ed ai loro tipici utilizzi in campo numerico.

5.4.1 Modello SST $k - \omega$

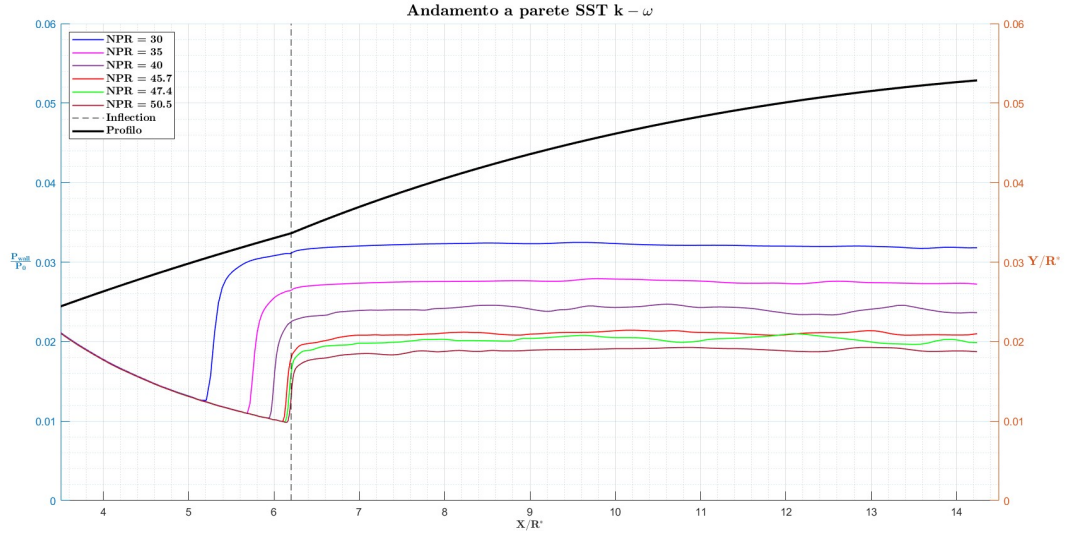
Nell'ambito della previsione della separazione questo modello di turbolenza è risultato il più affidabile mostrando come al variare delle condizioni di bordo in ingresso (NPR), ha mostrato andamenti di pressioni a parete e una *transizione* e *ritransizione* netta.

Nella fase di up-ramping, l'obiettivo era aumentare il valore del NPR fino ad incontrare la condizione di *transizione*, invece nella fase down-ramping si ricerca la condizione di *ritransizione* coincidenti con un valore NPR ben preciso.

Up-ramping

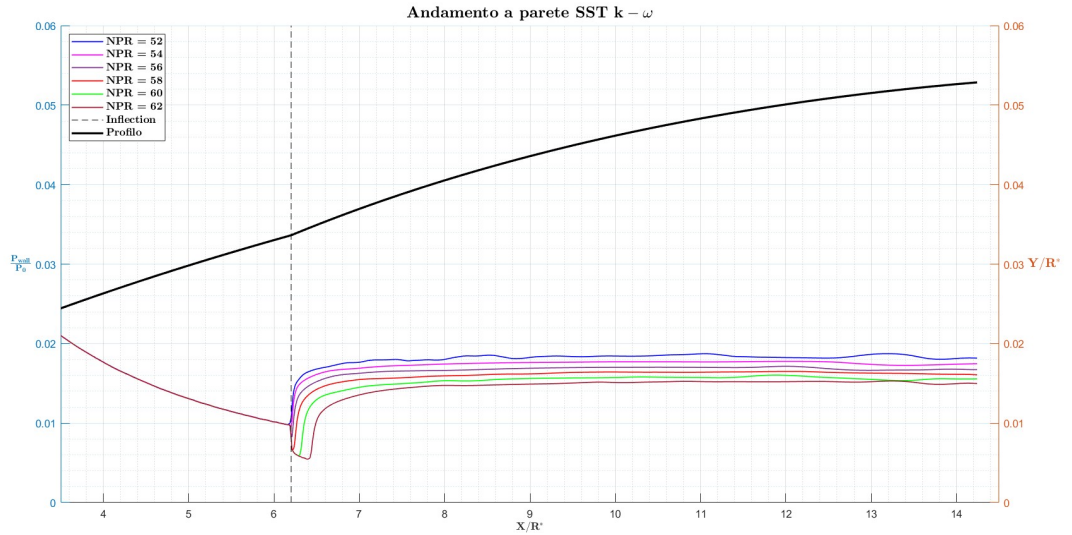
Procedendo con la ricerca del NPR di transizione, si è deciso di partire dalla condizione di $NPR = 30$ ed inizialmente variare di 5 il valore dell'NPR.

In figura 5.7 sottostante viene presentato l'andamento di pressione a parete normalizzato sulla pressione di camera

Figure 5.7: Andamenti a parete tra $NPR = 30$ a $NPR = 50.5$

In questo range di NPR si denota come la separazione che avviene nella prima campana per i primi NPR, si sposta verso valle nella zona di inflessione.

Una delle caratteristiche proprio del Dual-Bell è avere questa disuniformità geometrica, il punto di inflessione permette di intrappolare la separazione in quella zona per varie condizione di NPR come si può osservare nella figura 5.8.

Figure 5.8: Andamenti a parete tra $NPR = 52$ a $NPR = 62$

Un punto di separazione vincolato per diverse condizioni di NPR, ci permette di controllare e prevedere la posizione del punto di separazione. Come però si osserva in figura 5.9 sottostante.

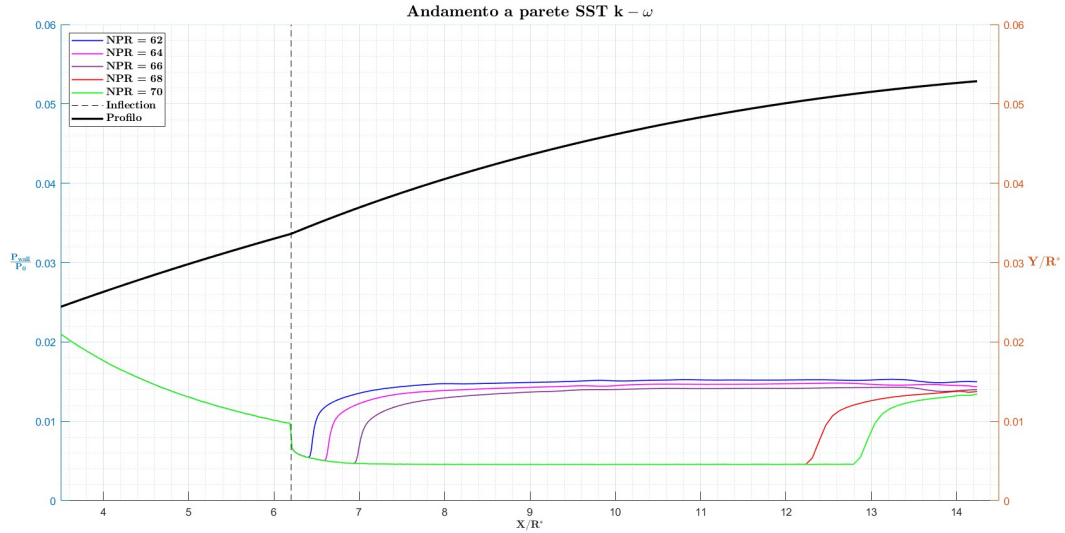


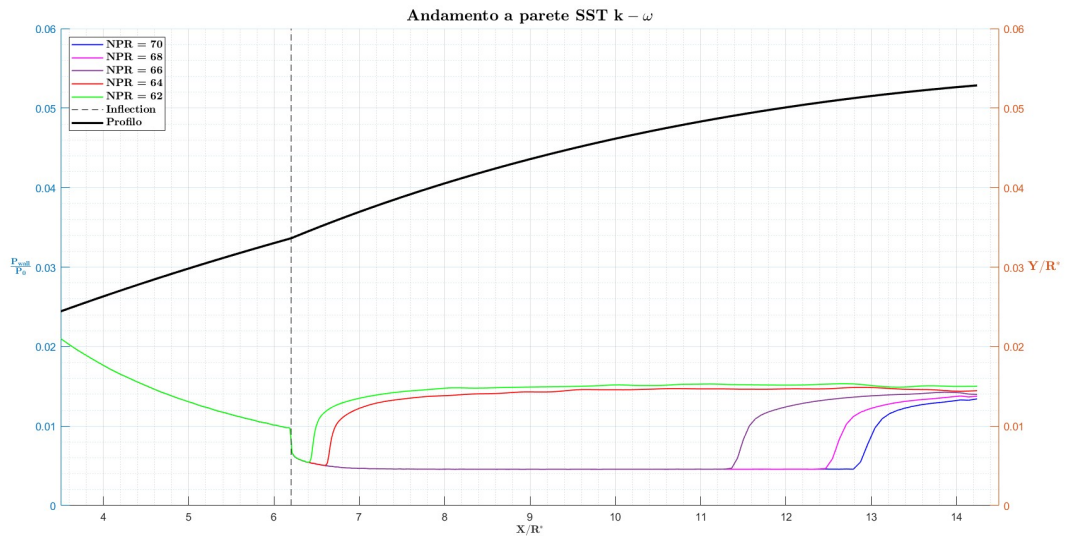
Figure 5.9: Andamenti a parete tra $NPR = 62$ a $NPR = 70$

All'aumentare del NPR si incontra il fenomeno della *transizione*, ovvero il rapido spostamento del punto di separazione verso valle sinonimo del passaggio alla modalità operativa di *High altitude*. In altre parole, nella condizione di $NPR = 68$ si ha il passaggio effettivo nella seconda campana divergente del Dual-Bell.

Down-ramping

Arrivati alla condizione di $NPR = 70$ era necessario fare il cosiddetto *down-ramping*.

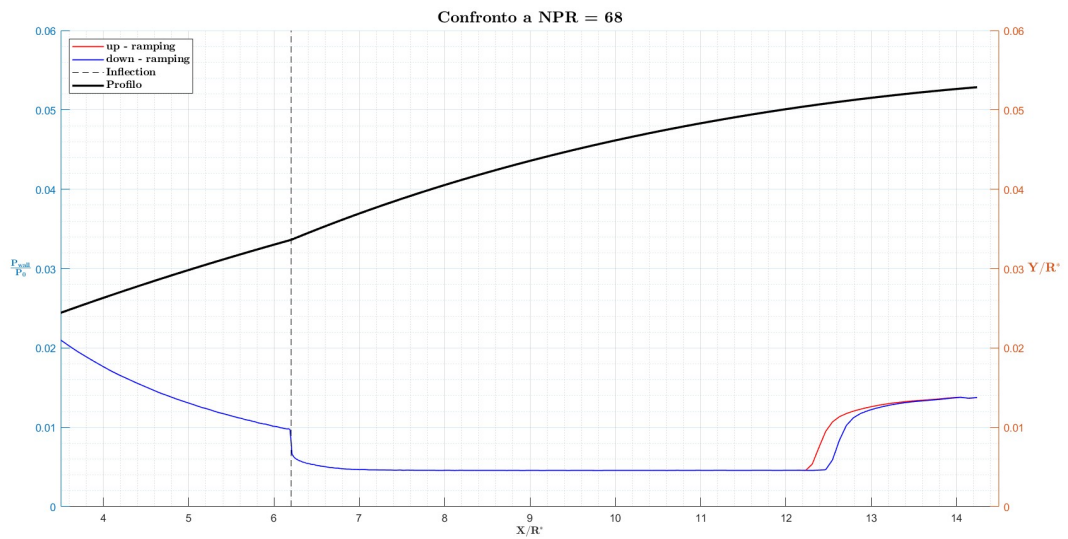
Cambiando le condizione al contorno di monte, tradotto in una variazione dell' NPR , si è simulato un abbassamento del valore di *nozzle pressure ratio* a passi 2 come per l'*up-ramping*.

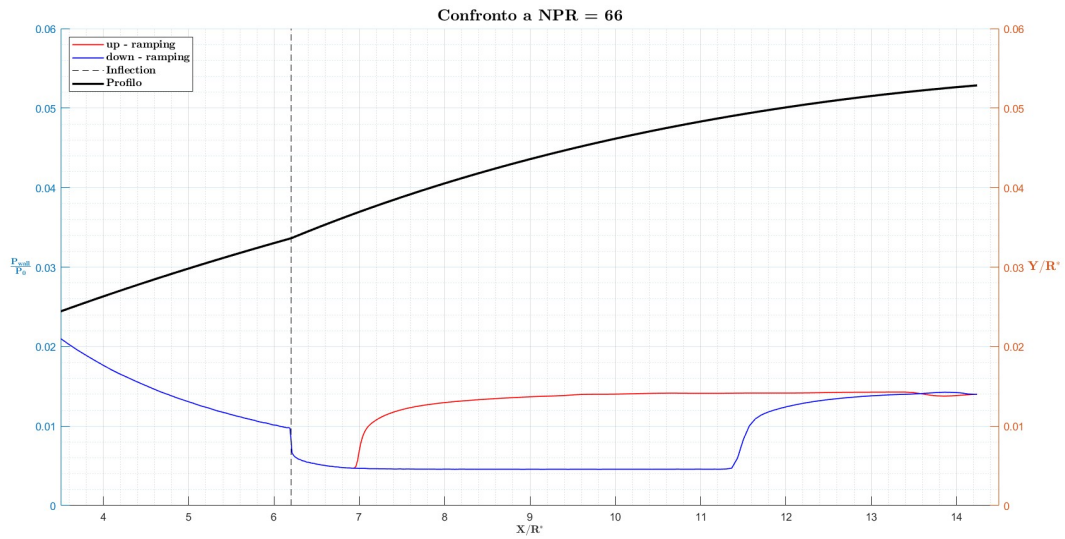
Figure 5.10: Andamenti a parete tra $NPR = 70$ a $NPR = 62$

In figura 5.10, nella fase di down-ramping si denotano già comportamenti diversi dei punti di separazione al variare delle condizioni di monte, in particolare rispetto ai risultati dell'up-ramping per $NPR = 68$ e $NPR = 66$.

Confronto tra up-ramping e down-ramping

Si propongono due grafici 5.11 5.12 di confronto tra la condizione trovata in up-ramping e down-ramping.

Figure 5.11: Confronto per $NPR = 68$ tra up-ramping e down-ramping

Figure 5.12: Confronto per $NPR = 66$ tra up-ramping e down-ramping

Nella prima figura 5.11 nel caso di up-ramping si è trovato l'effettivo NPR di *transizione*, ma il comportamento nella fase di down-ramping è totalmente diverso, in quanto il punto di separazione è più a valle di quanto dovrebbe essere.

Allo stesso modo dalla figura 5.12 si osserva come il comportamento tra le due fasi è totalmente diverso, nella prima condizione di up-ramping siamo ancora vincolati nel punto di inflessione, nel caso invece del down-ramping siamo molto più a valle.

Il flusso quindi sta operando ancora nella seconda campana, questa resistenza nel riattacarsi nella zona più a monte è tipico del fenomeno di isteresi e le cause principali sono dovute a:

- *Strato limite* che si sviluppa lungo la parete influisce sulla separazione e sul riattacco del flusso. Dopo la separazione nasce una bolla di ricircolo a valle che porta il punto di separazione a parità di NPR ad essere diverso tra up-ramping e down-ramping.
- *Inerzia del flusso*: il flusso ad alta velocità ha una certa inerzia, la quale resiste al cambiamento delle condizioni di monte e quindi sarà necessaria una variazione di pressione significativa per vincere questa inerzia e riportare il punto di separazione verso monte.
- *Stabilità del flusso*: raggiunta la stabilità a quel dato NPR, il flusso tende a mantenere questa configurazione fino a quando le condizioni di monte non cambiano in modo significativo.

Ciclo di isteresi

Dopo aver svolto l'up-ramping e il down-ramping è possibile definire il *loop di isteresi* che mostra come effettivamente il flusso resiste a tornare nella modalità operativa di *sea-level* raggiunto $NPR = 70$.

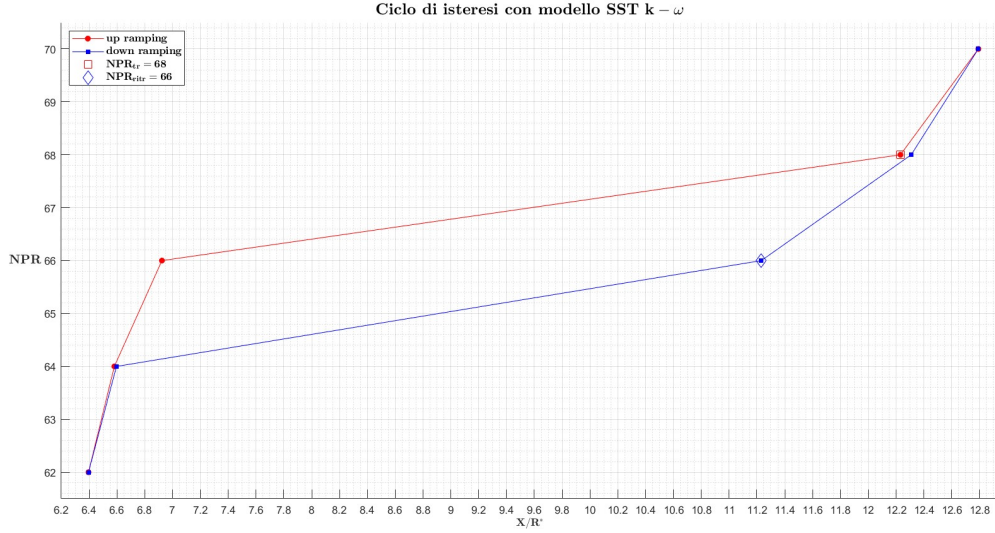


Figure 5.13: Ciclo di isteresi per SST $k - \omega$

In evidenza si pongono il valore di NPR_{tr} e NPR_{retr} , rispettivamente di valore 68 e 66. Si osserva come i valori per cui si ha transizione e ritransizione sono ben definiti, questo ci permette di calcolare:

- il *range* di isteresi;
- la *percentuale* di isteresi;

$$Range = NPR_{tr} - NPR_{retr} = 2 \quad (5.7)$$

$$hysteresis = \frac{NPR_{tr} - NPR_{retr}}{NPR_{tr}} \cdot 100\% = 2.94\% \quad (5.8)$$

5.4.2 Modello Spalart-Allmaras

Il successivo modello di turbolenza utilizzato per lo studio dell'isteresi è quello ad una equazione. [35]

La scelta di utilizzare questo modello è stata fatta perché è stato ideato per applicazioni aerospaziali per flussi *wall-bounded* ottenendo buoni risultati per strati limiti soggetti a gradienti di pressione avversi. Inoltre, anche nei paper [6] [5] è stato utilizzato per questi studi.

Up-ramping

Nella fase di aumento del NPR, siamo partiti dalla condizione di $NPR = 30$ fino a quando non è stata trovata una possibile *transizione*.

Nel caso in esame, si è partiti a passi di 5 fino a trovarsi nella zona d'inflessione, dove sono stati fatti passi da 2.

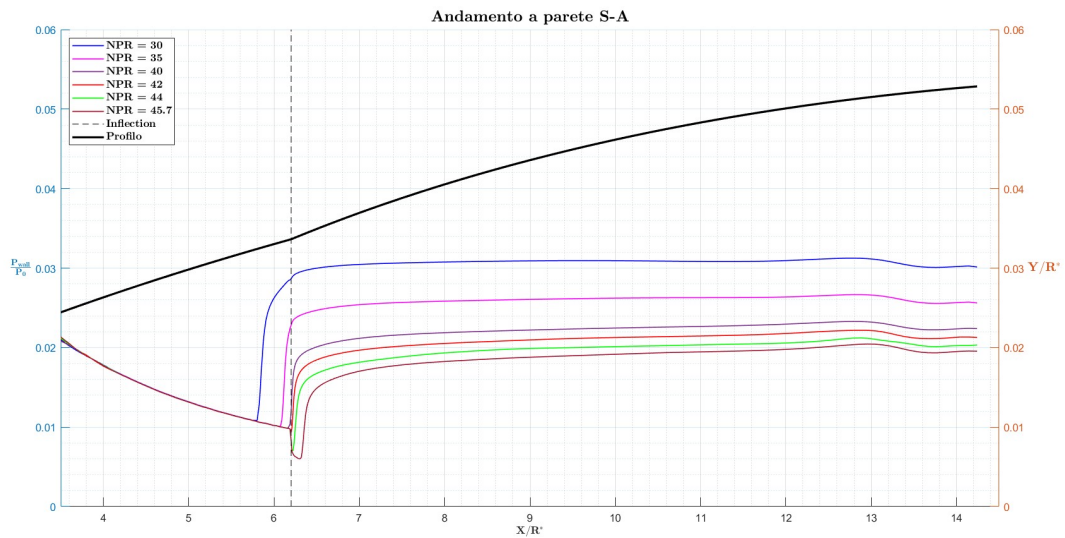
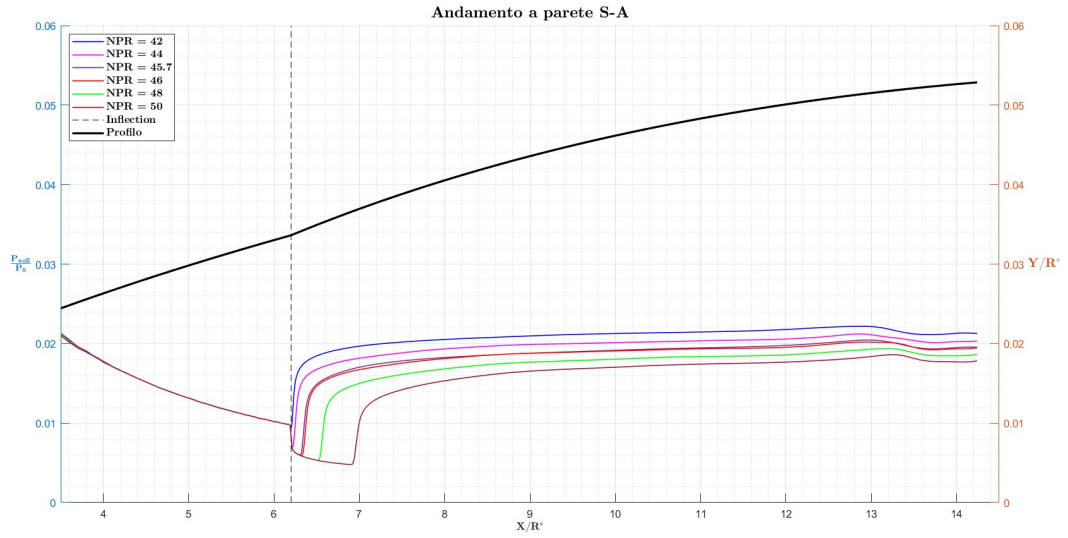


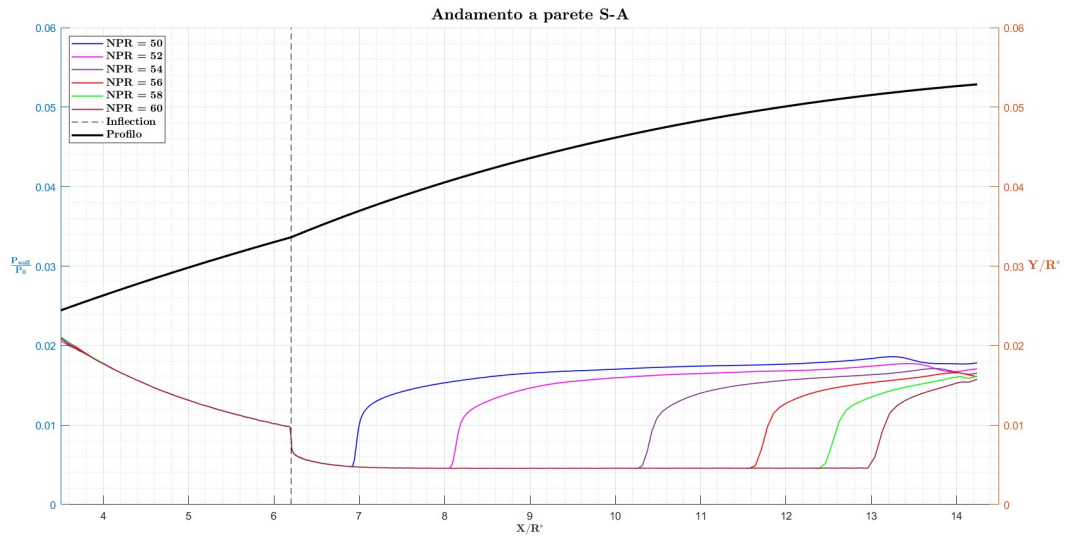
Figure 5.14: Andamenti a parete tra $NPR = 30$ a $NPR = 45.7$

In figura 5.14, si mostra come si raggiunge la zona di inflessione per valori fino a $NPR = 45.7$. L'obiettivo di questa zona è bloccare la separazione per significative variazioni delle condizioni a monte.

Quello che si osserva dalla figura 5.15 è che la separazione rimane in questa zona per valori fino a $NPR = 50$.

Figure 5.15: Andamenti a parete tra $NPR = 42$ e $NPR = 50$

Per studiare la *transizione*, abbiamo bisogno di variare ulteriormente le condizioni di monte portandoci a valori superiori.

Figure 5.16: Andamenti a parete tra $NPR = 50$ e $NPR = 60$

In figura 5.16, si può già notare come il punto di separazione non ha un vero e proprio salto tra la configurazione localizzata sulla zona di inflessione e la seconda campana. Lo spostamento graduale del punto di separazione porta a scegliere come NPR di transizione il valore a $NPR_{tr} = 56$, dove il flusso sta pienamente utilizzando il secondo divergente.

Down-ramping

Procedendo con il *down-ramping*, si vuole trovare la condizione al contorno per la quale il punto di separazione mostra un tipico comportamento della *ritransizione*.

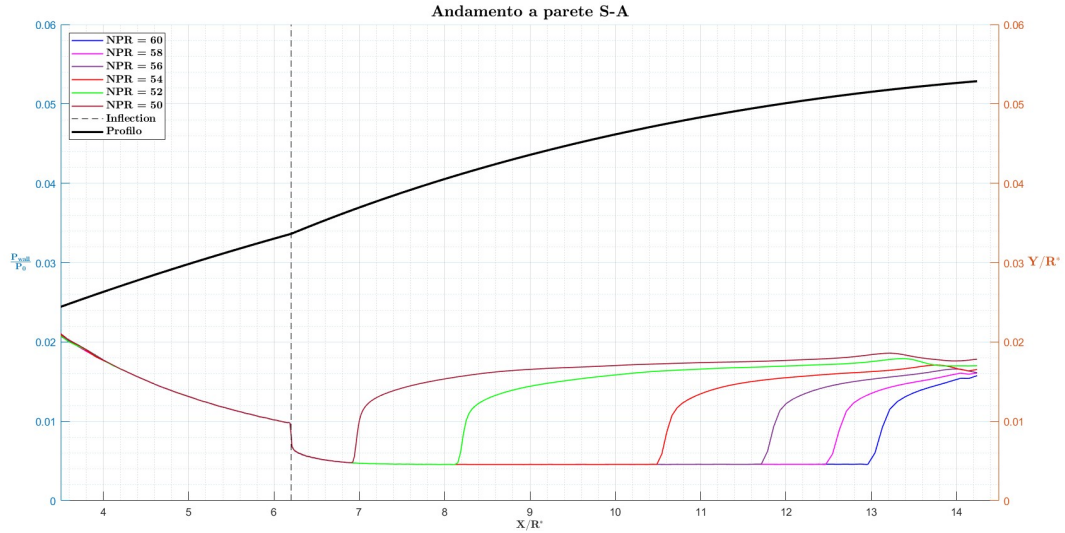


Figure 5.17: Andamenti a parete tra $NPR = 60$ e $NPR = 50$

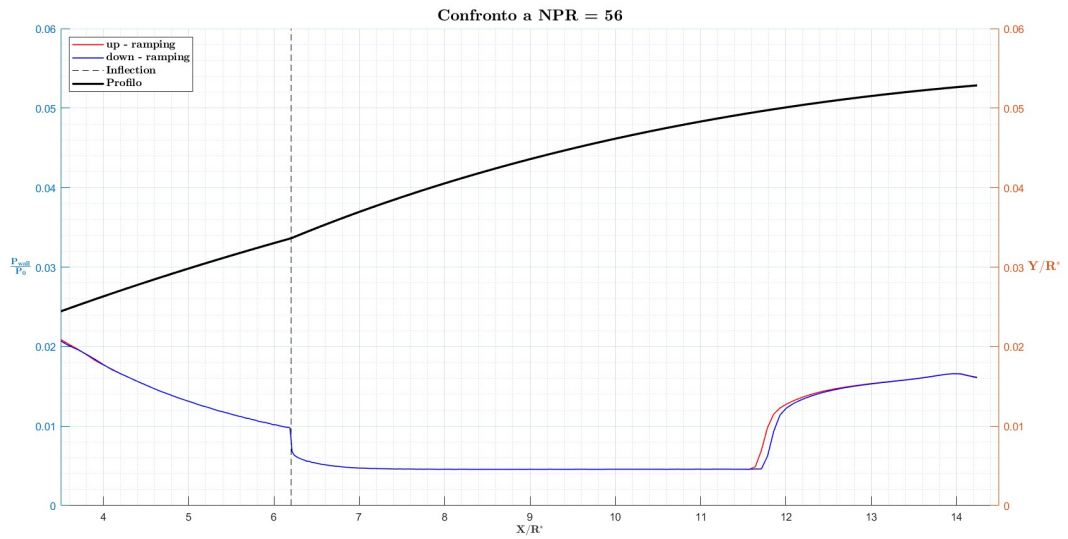
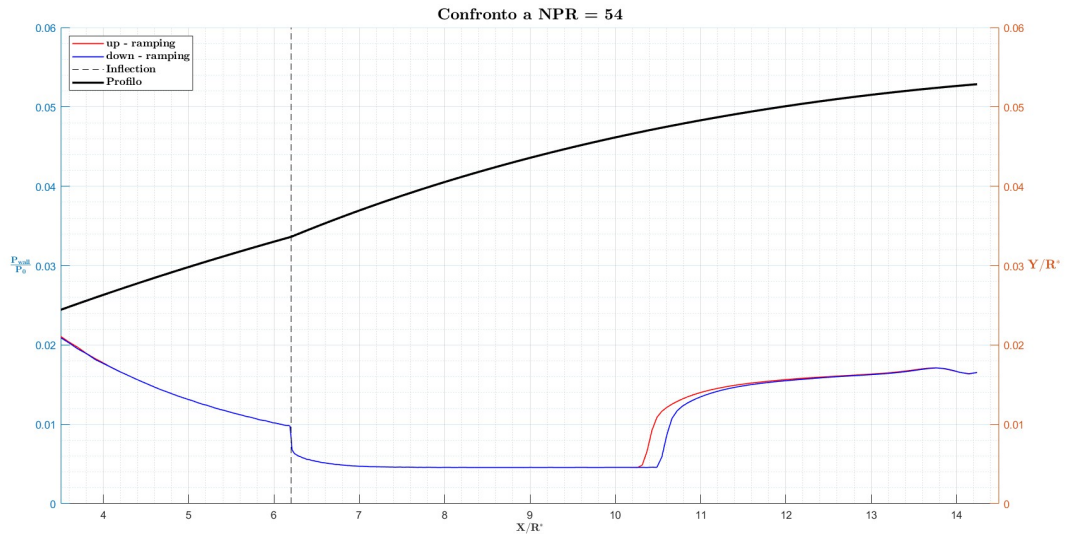
Si osserva come anche nella ricerca di un NPR_{retr} si ottengono degli andamenti che gradualmente si modificano con la variazione del condizione a monte, ma non vi è un proprio salto come si poteva osservare nel caso del modello SST $k - \omega$.

Il valore di NPR coincidente con la ritransizione del flusso scelto è $NPR_{retr} = 54$.

Confronto tra up-ramping e down-ramping

Per fare un confronto tra i valori ottenuti, si propongono due figure 5.18 5.19 per l'NPR di *transizione* e *ritransizione*.

Si può osservare, come la differenza tra up e down ramping a quei dati NPR non è così significativa, comportamento coincidente con gli andamenti di pressione a parete che denotavano un avanzamento graduale verso valle del punto di separazione.

Figure 5.18: Confronto per $NPR = 56$ tra up-ramping e down-rampingFigure 5.19: Confronto per $NPR = 54$ tra up-ramping e down-ramping

Le cause principali di questo comportamento potrebbero essere:

- *Modello di turbolenza scelto*, lo *Spalart-Allmaras* [35] è una equazione aggiuntiva alle RANS. A confronto con modelli a 2 equazioni in cui l'equazione energia cinetica turbolenta è modificata con l'aggiunta di un termine dissipativo funzione del numero di Mach, l' *S-A* non dispone di questa equazione. [30]

- *Effetti di compressibilità*, un fluido compressibile può in modo significativo modificare il comportamento della turbolenza rispetto ai casi incompressibili. Nel caso del Dual-Bell a valle della separazione si forma una bolla di ricircolo a mach inferiori rispetto al getto principale, il *mixing-layer* turbolento che si forma è oggetto di studi [8][31][33][42][15] in quanto presenta queste caratteristiche:
 1. il *thickness growth rate* è ridotto rispetto ad un analogo caso incompressibile;
 2. l'intensità del *turbulent shear-stress* è ridotto;
 3. il parametro che governa gli effetti di compressibilità è il *Mach convettivo*.

Ciclo di isteresi

Il *loop di isteresi* che si ottiene mostra come il modello di turbolenza ad un equazione non è in grado di studiare il fenomeno dell'isteresi, non visualizzando adeguatamente un NPR_{tr} e NPR_{retr} .

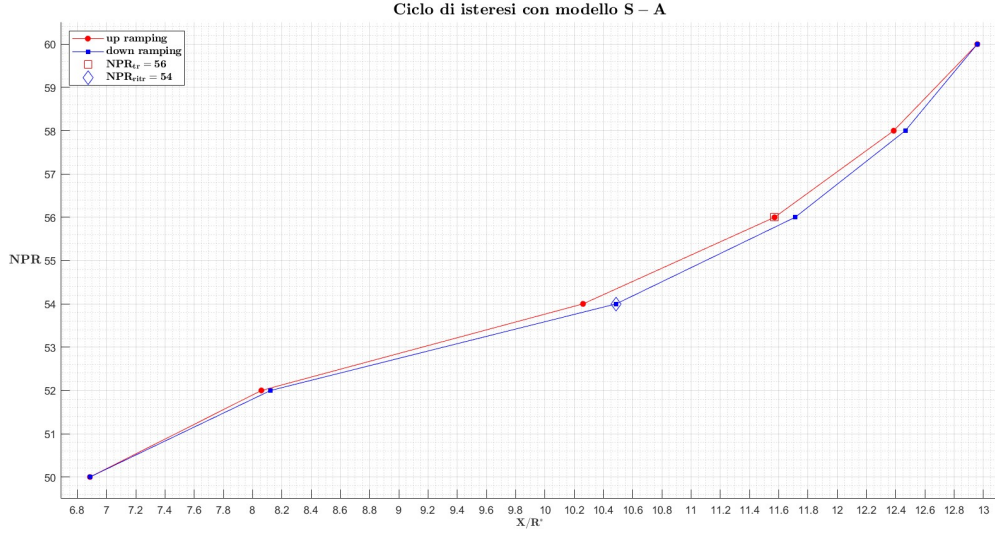


Figure 5.20: Ciclo di isteresi per $S - A$

Dalla figura 5.20 si osserva come il loop isteretico non è ben definito, al contrario tra l'up-ramping ed il down-ramping non sono ben definite la transizione e la ritransizione, come con conseguenza di ciò si osserva un area interna molto piccola.

Nonostante questo sono scelti un $NPR_{tr} = 56$ e un $NPR_{retr} = 54$ in base ai risultati ottenuti dall'up-ramping e dal down-ramping.

I valori di *range di isteresi* e *percentuale di isteresi* sono stati calcolati come:

$$Range = NPR_{tr} - NPR_{retr} = 2 \quad (5.9)$$

$$hysteresis = \frac{NPR_{tr} - NPR_{retr}}{NPR_{tr}} \cdot 100\% = 3.57 \% \quad (5.10)$$

5.4.3 Modello $k - \epsilon$

Un'analisi aggiuntiva per lo studio del comportamento isteretico è stata svolta con un altro modello a 2 equazioni, in modo da tener conto degli *effetti di compressibilità*.

Notoriamente in letteratura $k - \epsilon$ *standard* non è in grado di studiare adeguatamente la fenomenologia, in quanto funziona mediamente peggio a parete quando ci sono separazioni. [14]

Per questo motivo negli anni sono stati proposti diverse tipologie di modifiche tra le quali il *realizable* $k - \epsilon$.

Questo modello si pone l'obiettivo di superare le debolezze del modello standard, mostrando miglioramenti sui flussi che includono: strong stream-line curvatures, vortici, rotazioni e separazioni. [3]

Le seguenti analisi sono state svolte con il *realizable* $k - \epsilon$.

Up-ramping

Nella fase di up-ramping, la metodologia è stata la medesima come per gli altri modelli di turbolenza utilizzati.

I passi dell'up-ramping sono stati di 5 nella zona del primo divergente e arrivati nella zona d'inflessione i passi sono stati ridotti a 2.

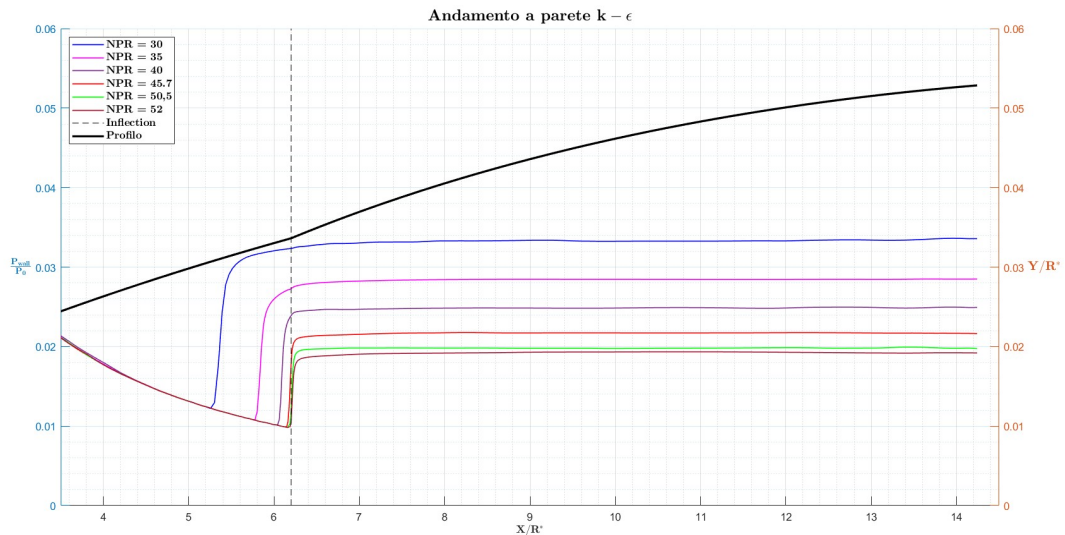


Figure 5.21: Andamenti a parete tra $NPR = 30$ e $NPR = 52$

In figura 5.21, si nota come si raggiunge l'inflection per i valori tra $NPR = 40$ e $NPR = 45.7$.

Nella figura 5.22 si vede come la separazione rimane vincolata nella zona di inflessione per vari valori di NPR .

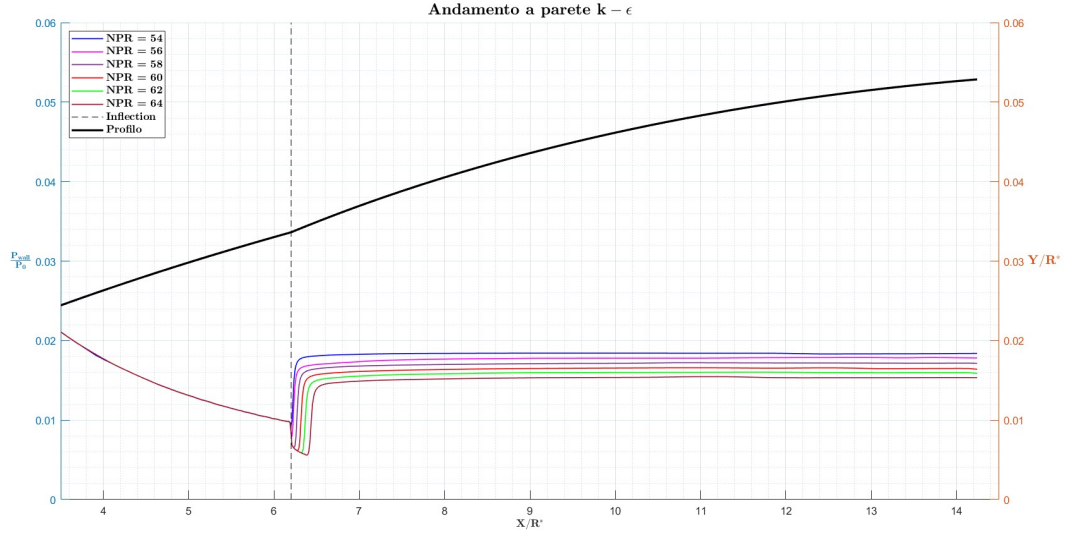


Figure 5.22: Andamenti a parete tra $NPR = 54$ e $NPR = 64$

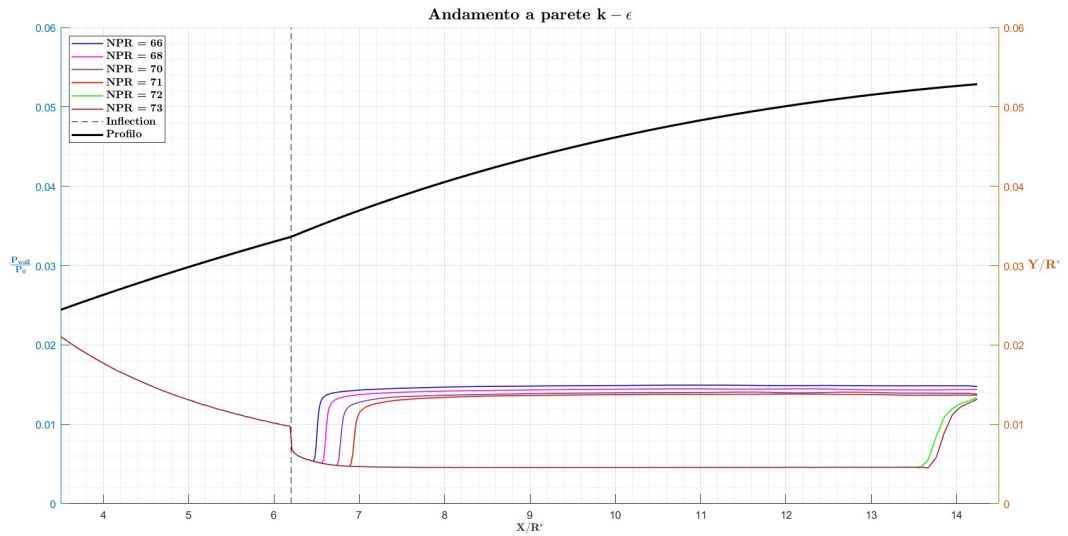


Figure 5.23: Andamenti a parete tra $NPR = 66$ e $NPR = 73$

In figura 5.23 si può notare come la *transizione* prende luogo all'interno dell'ugello, il punto di separazione vincolato nella zona inflessione si sposta in modo significativo nel secondo divergente.

La modalità passa a quella di *high altitude* per valori di $NPR_{tr} = 72$.

Down-ramping

Procedendo con il *down-ramping*, si vuole trovare il valore di NPR per avere la *ritransizione*.

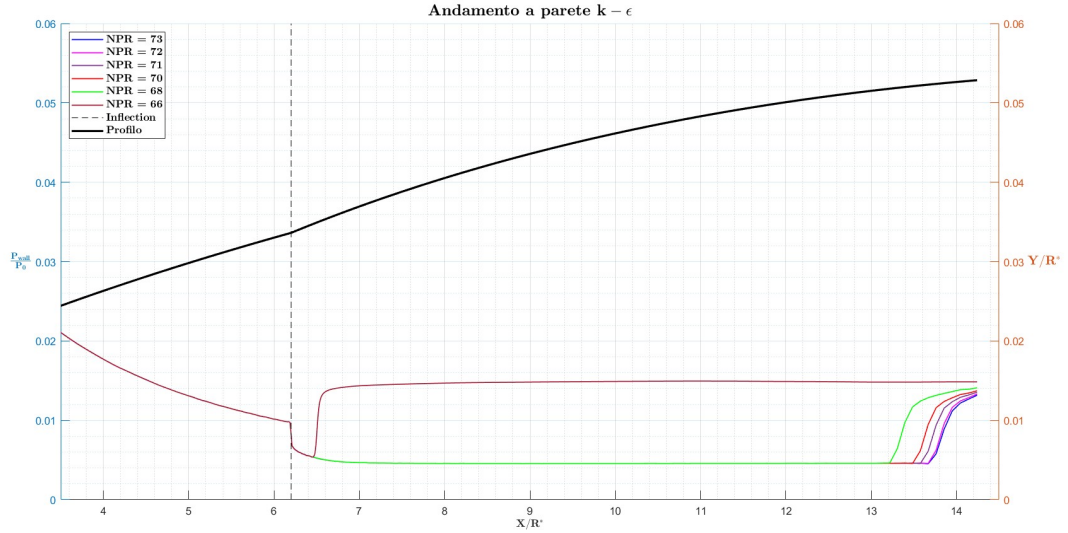


Figure 5.24: Andamenti a parete tra $NPR = 73$ e $NPR = 66$

Si osserva come nella ricerca della condizione di monte per cui abbiamo la *ritransizione*, come nel caso della *transizione* abbiamo un salto netto di pressione a parete coincidente con il valore di $NPR_{retr} = 68$.

Confronto tra up-ramping e down-ramping

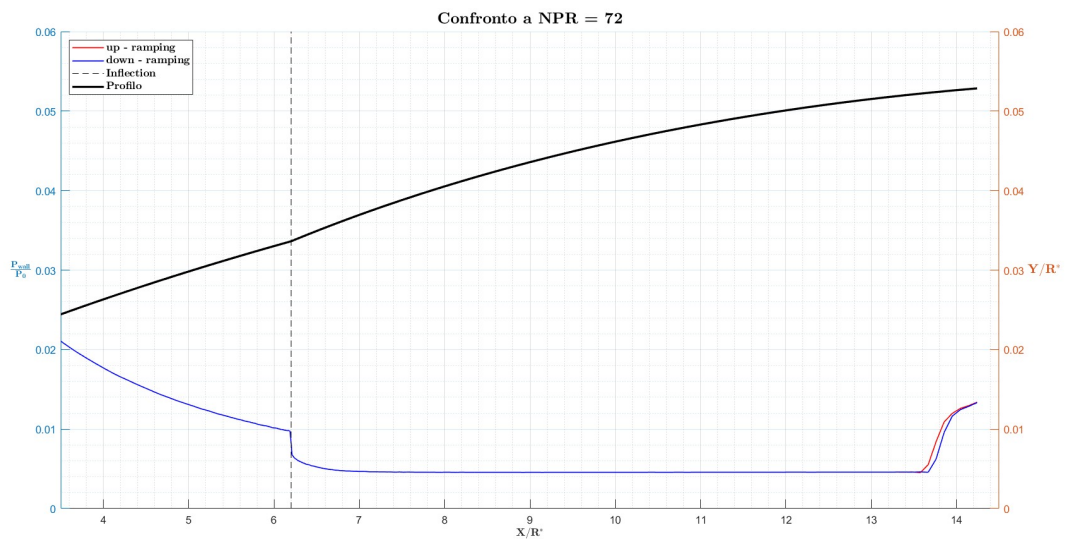


Figure 5.25: Confronto per $NPR = 72$ tra up-ramping e down-ramping

In figura 5.25 si osserva come a quel dato NPR ormai ci si trova nella parte finale dell'ugello, la posizione del punto di separazione varia molto poco tra up-ramping e down-ramping.

Una caratteristica che si mantiene è che il punto di separazione nel down-ramping sarà più a valle del corrispondente in up-ramping.

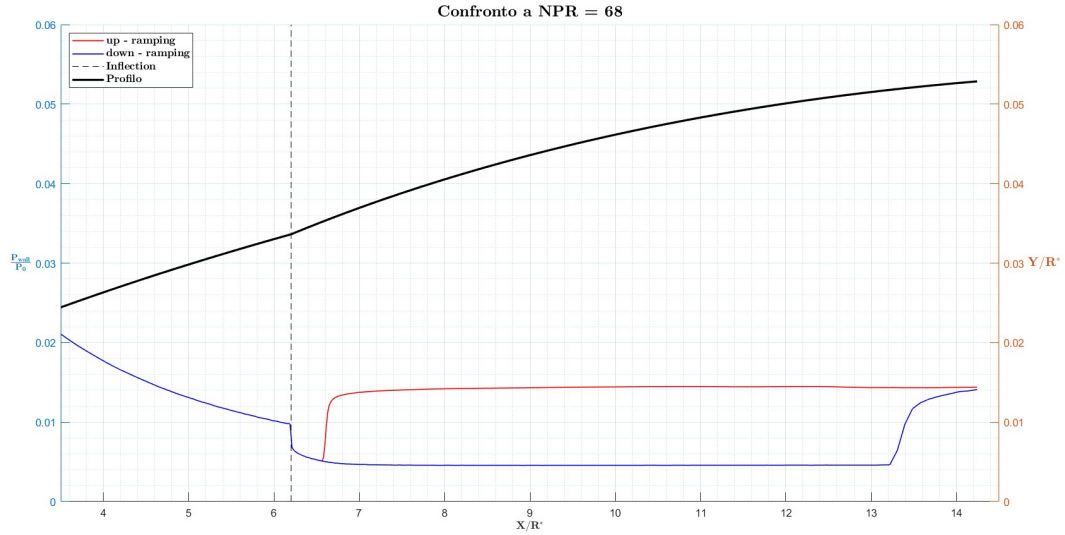


Figure 5.26: Confronto per $NPR = 68$ tra up-ramping e down-ramping

Prendendo a confronto il caso per cui abbiamo ritransizione coincidente con $NPR_{retr} = 68$ si osserva la differenza che abbiamo nel caso di up-ramping e down-ramping.

Nel primo caso il punto di separazione è ancora vincolato nella zona di inflessione, al contrario nel down-ramping abbiamo il tipico comportamento secondo il quale il punto di separazione si trova più a valle del corrispondente in up-ramping.

Anche nel confronto tra i due NPR, si denota come il modello di turbolenza scelto rispecchi più fedelmente il comportamento isteretico atteso.

Le motivazioni sono dovute:

- *Modello di turbolenza*, il modello scelto è a due equazioni con la possibilità nella tipologia *realizable* di poter prevedere più efficacemente rispetto allo *standard* il punto di separazione dovuto al gradiente di pressione avverso. [3]
- *Effetti di compressibilità*, i quali influenzano la turbolenza mediante la cosiddetta *dilatation dissipation*, che normalmente è trascurata nei modelli incompressibili. L'introduzione di questo parametro Y_M è in-

clusa nell'equazione di trasporto dell'energia cinetica turbolenta k con la forma di Sarkar. [34]

- *Near-wall Treatment*, la scelta del trattamento a parete permetterebbe di ottenere sicuramente dei risultati più affidabili. Nell'ambito di questo modello la scelta era tra un trattamento Menter-Lechner ed Enhanced Wall Treatment entrambi con le capacità di sopportare un flusso che separa. Le motivazioni che mi hanno portato alla scelta del *Enhanced Wall Treatment* erano legate alla griglia computazionale. Questo trattamento a parete combina un modello *two-layer*, in modo tale che se il primo nodo vicino a parete è collocato all'interno del sottostato viscoso ($y^+ < 1$) allora l'EWT utilizza il tradizionale *two-layer zonal model*. Se la mesh risulta essere più grossolana allora l'EWT deve comunque funzionare con l'utilizzo delle *wall functions*. [3]

In sostanza, l'EWT cerca di funzionare in mesh che siano fini e grossolane allo stesso tempo, come nel nostro caso dove abbiamo infittito localmente nelle zone di nostro interesse.

Ciclo di isteresi

Il *loop* isteretico che si ottiene utilizzando come modello di turbolenza il *realizable k - ϵ* è mostrato in figura 5.27

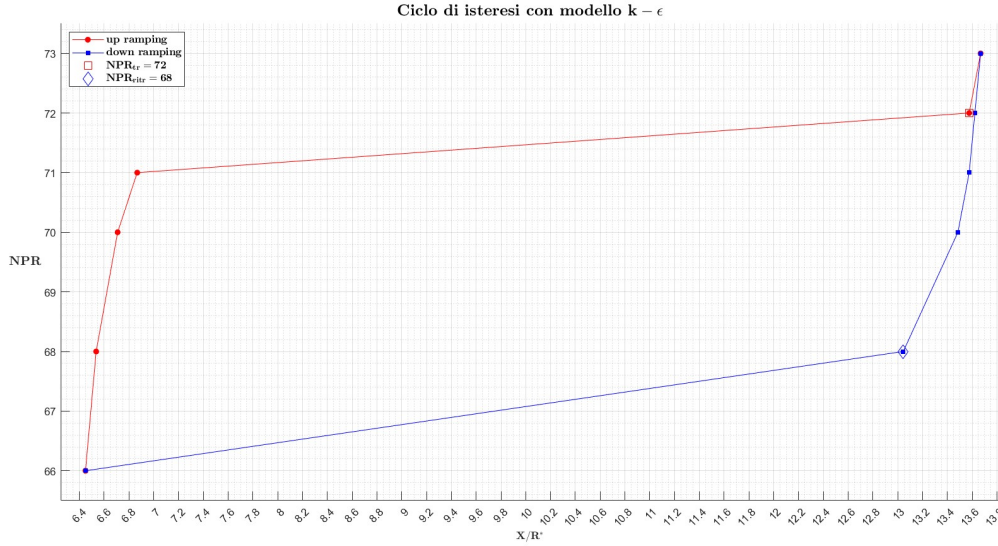


Figure 5.27: Ciclo di isteresi per $k - \epsilon$

Si osserva come l'area del ciclo è molto ampia tipica degli andamenti di pressione a parete che all'aumentare o al diminuire del NPR presentano degli spostamenti del punto di separazione netti.

Gli NPR di transizione e ritransizione scelti sono $NPR_{tr} = 72$ e $NPR_{retr} = 68$.

I valori di *range di isteresi* e *percentuale di isteresi* sono stati calcolati come:

$$Range = NPR_{tr} - NPR_{retr} = 4 \quad (5.11)$$

$$hysteresis = \frac{NPR_{tr} - NPR_{retr}}{NPR_{tr}} \cdot 100\% = 5.55 \% \quad (5.12)$$

5.5 Scelta del modello

Nei paragrafi precedenti è stato possibile studiare il fenomeno dell'isteresi utilizzando tre diversi modelli di turbolenza.

Dal punto di vista puramente grafico i modelli che mostrano nettamente il *sea-level transitioning* sono quelli a due equazioni, questo dovuto alla capacità di tener conto degli effetti di compressibilità.

Valutando la percentuale di isteresi:

Modello	Isteresi [%]
SST $k - \omega$	2.94
S-A	3.57
Realizable $k - \epsilon$	5.55

Table 5.6: Tabella riassuntiva

Si osserva da tabella 5.6 come la percentuale di isteresi sia $< 6\%$.

Dagli studi parametrici proposto da G  nin e Stark [17] si    concluso come la transizione    pi   stabile se la percentuale di isteresi    pi   alta e oltretutto    un fenomeno fortemente legato alla lunghezza dell'estensione dell'ugello (secondo divergente).

Se l'estensione dell'ugello diventa pi   piccola, la zona di ricircolo nel secondo divergente nel *sea-level mode* diventa sempre pi   piccola e lenta con un aumento della pressione interna.

Se la pressione interna aumenta, ma il rapporto di pressione necessario per la transizione rimane costante allora la pressione totale deve aumentare per cambiare la modalit   operativa del Dual-Bell.

Questo    il motivo per cui l'isteresi dipende fortemente dalle dimensioni della zona di estensione. [17]

Utilizzando come riferimento le geometrie utilizzate e la percentuale di isteresi ottenuta da G  nin e Stark, si nota come un isteresi $< 6\%$ sia possibile con un estensione pari $L' = 0.3$. Nel caso in esame l'estensione    pari:

$$L' = \frac{L_{exit}}{L_{tot}} = 0.54 \quad (5.13)$$

che coinciderebbe con un isteresi dell'ordine del $\sim 20\%$, numeri che non coincidono con il nostro studio. Dal momento che il comportamento isteretico non    cos   facile da prevedere con esattezza, soprattutto utilizzando software commerciali non calibrati per studi con geometrie non convenzionali, si    optato per un altro criterio di scelta.

Si potrebbe scegliere il modello di turbolenza più adeguato basandosi sulla letteratura, in quanto la previsione più affidabile del punto di separazione viene certamente data dal modello SST $k - \omega$, in quanto modello ibrido che unisce i modelli *standard* di $k - \omega$ e $k - \epsilon$. [14]

Scelto quindi come risultato più attendibile ciò che si è ottenuto dal modello SST $k - \omega$, si vuole presentare un nuovo studio dell'isteresi con lo stesso modello di turbolenza, ma con una mesh meno fitta.

Le potenzialità di ciò risiede nella possibilità di ottenere un risultato attendibile con un costo computazionale minore, in quanto i tempi per raggiungere la convergenza saranno sicuramente minori.

5.6 Mesh ridotta

In questo paragrafo si propone una nuova mesh per lo studio dell'isteresi, la quale avrà circa il 20% in meno di elementi, passando da un mesh con 73400 celle a 59680 celle.

5.6.1 Up-ramping

Come nei paragrafi precedenti variamo il valore di NPR a monte per variare le condizioni di bordo. Si svolge l'up-ramping ottenendo gli andamenti di pressione a parete di figura 5.28.

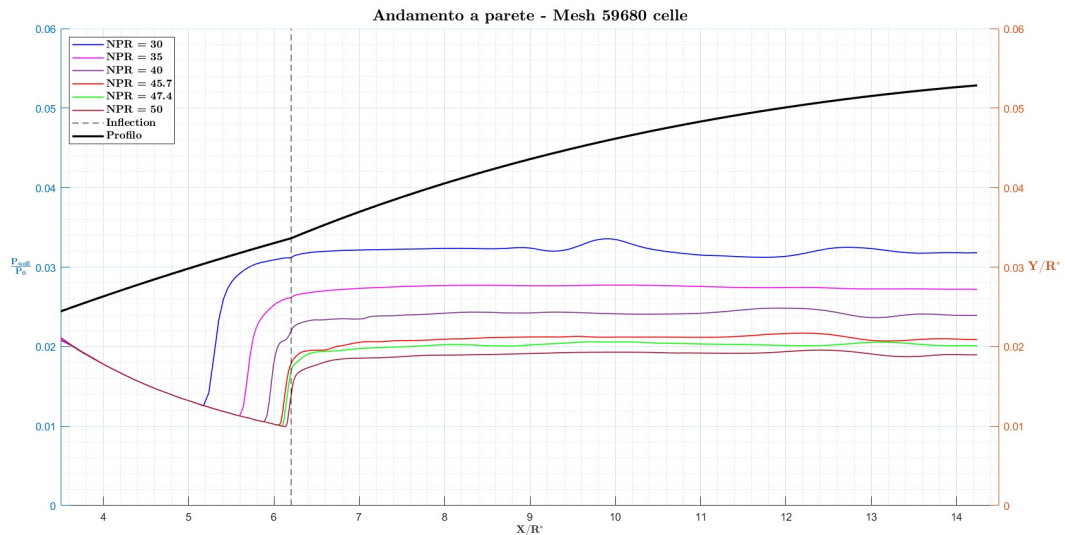


Figure 5.28: Andamenti a parete tra $NPR = 30$ e $NPR = 50$

Si osserva che il punto di separazione avanza verso la zona di inflessione.

In figura 5.29 si mostra come questa zona sia altamente stabile, intrapolando il punto di separazione per molti valori di NPR.

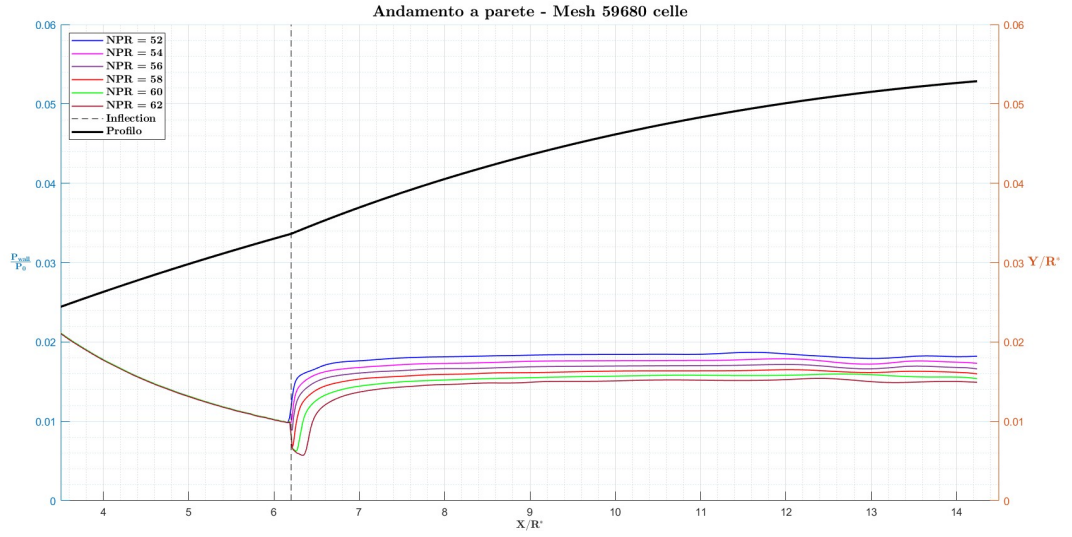


Figure 5.29: Andamenti a parete tra $NPR = 52$ e $NPR = 62$

Nella ricerca del NPR_{tr} si modificano le condizioni di monte fino a trovare uno spostamento netto del punto di separazione per il valore di $NPR = 68$.

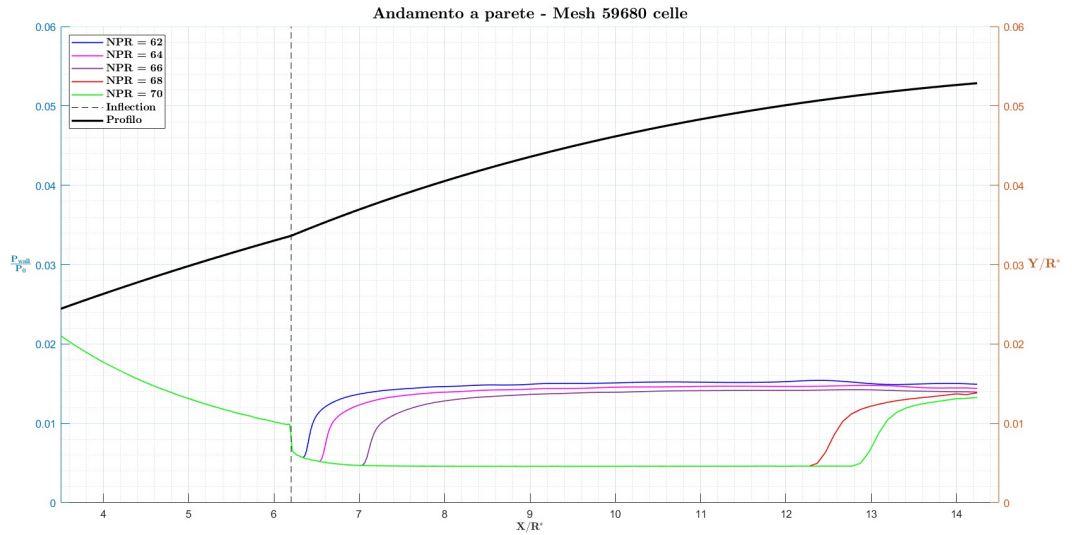


Figure 5.30: Andamenti a parete tra $NPR = 62$ e $NPR = 70$

5.6.2 Down-ramping

Nel fase di down-ramping, si procede riducendo il valore di NPR e quindi dei valori di pressione totale e statica corrispondenti alla ricerca valore di nozzle pressure ratio caratteristico del fenomeno di ritransizione.

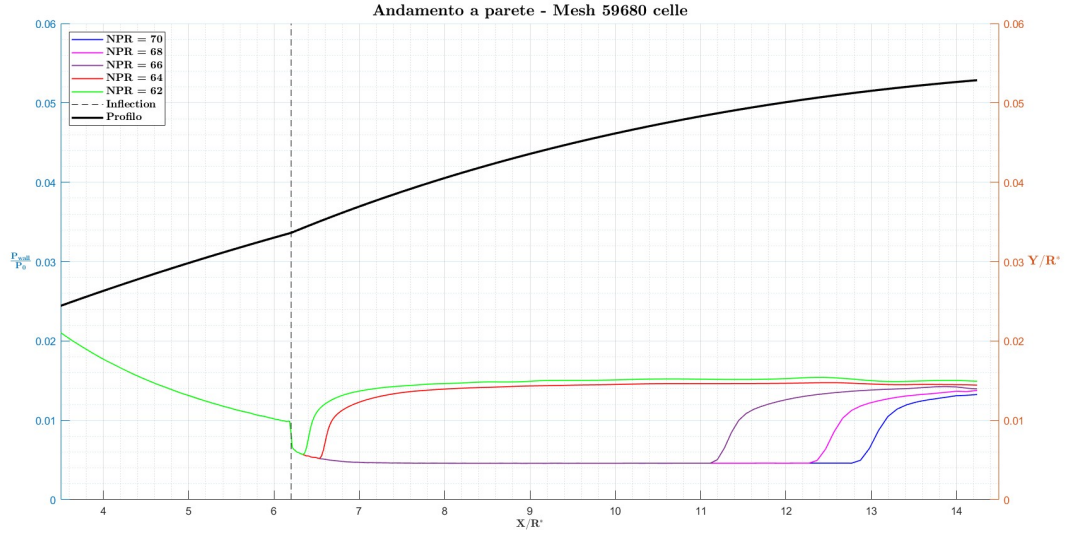


Figure 5.31: Andamenti a parete tra $NPR = 70$ e $NPR = 62$

In figura è ben evidente che il valore di NPR_{retr} ottenuto dalle analisi numeriche coincide con nozzle pressure ratio pari a 66.

5.6.3 Confronto tra up-ramping e down-ramping

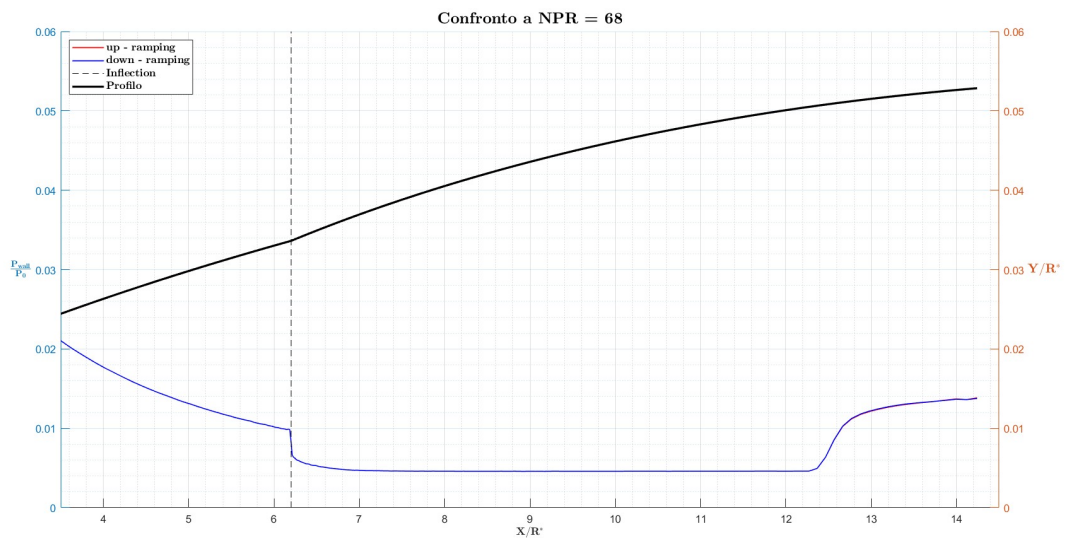


Figure 5.32: Confronto tra up-ramping e down-ramping

In figura 5.11, si vuole evidenziare come a questo dato NPR la posizione del punto di separazione è lo stesso sia nella fase di up-ramping che down-ramping. Non presenta quindi il tipico spostamento osservato con gli altri modelli di turbolenza con una mesh più fitta, in cui la posizione nel down-ramping era più a valle del corrispettivo in up-ramping.

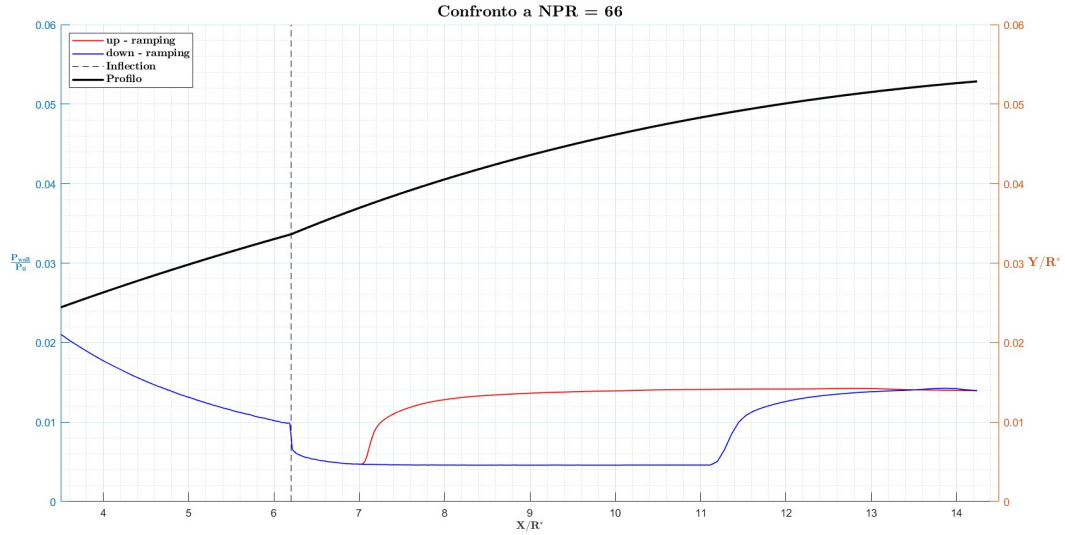


Figure 5.33: Confronto tra up-ramping e down-ramping

Infine, nel confronto a $NPR = 66$ si osserva in modo evidente come il punto di separazione nella fase di down-ramping si ritrova ancora pienamente nella seconda campana e non nelle vicinanze del punto di inflessione.

Questo comportamento ci permette di scegliere come $NPR_{retr} = 66$.

5.6.4 Ciclo di isteresi

Il *loop di isteresi* che si ottiene con una griglia computazionale meno fitta e utilizzando il modello di turbolenza SST $k - \omega$ è mostrato nella figura 5.34.

L'area del ciclo risulta essere ampia e la mesh è capace di visualizzare gli NPR_{tr} e NPR_{retr} .

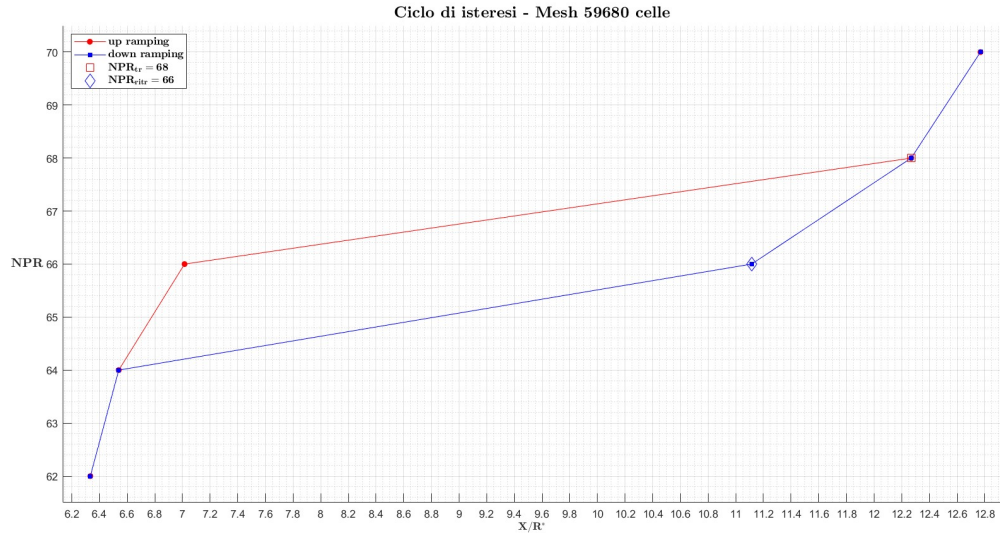


Figure 5.34: Ciclo di isteresi

Essendo valori ben definiti, è possibile calcolare:

- il *range* di isteresi;
- la *percentuale* di isteresi;

$$Range = NPR_{tr} - NPR_{retr} = 2 \quad (5.14)$$

$$hysteresis = \frac{NPR_{tr} - NPR_{retr}}{NPR_{tr}} \cdot 100\% = 2.94 \% \quad (5.15)$$

5.7 Confronto tra i due casi

In questo paragrafo si vogliono analizzare i risultati ottenuti dalle due mesh. Si definisce come:

- *Caso 1* corrispondente alla griglia computazionale di 73400 celle;
- *Caso 2*, corrispondente alla griglia computazionale di 59680 celle;

Confrontando le posizioni del punto di separazione al variare del NPR (da tabella 5.7), si osserva come anche riducendo di quasi il 20% il numero di celle la posizione del punto di separazione non differisce molto rispetto al *caso 1*.

Nella quarta colonna si calcolano gli errori percentuali del *caso 2* rispetto al *caso 1*.

$$Err_{\%} = \frac{x_1 - x_2}{x_1} \cdot 100\% \quad (5.16)$$

dove x_1 coincidente al *caso 1* e x_2 con il *caso 2*.

NPR	Caso 1 [X/R^*]	Caso 2 [X/R^*]	Err [%]
30	5.17348	5.15622	0.335
35	5.68687	5.65885	0.492
40	5.87563	5.85682	0.320
45.7	6.07716	6.06156	0.256
47.4	6.10831	6.08197	0.431
50.5	6.15069	6.13754	0.213
52	6.16374	6.15431	0.152
54	6.2	6.2	0
56	6.21407	6.21125	0.004
58	6.22265	6.21407	0.137
60	6.28143	6.25744	0.381
62	6.39553	6.33372	0.966
64	6.58125	6.53926	0.638
66	6.92324	7.01486	-1.32
68	12.2313	12.2684	-0.303
70	12.7911	12.7692	0.171

Table 5.7: Tabella di confronto up-ramping

NPR	Caso 1 [X/R^*]	Caso 2 [X/R^*]	Err [%]
70	12.7911	12.7692	0.171
68	12.3087	12.2684	0.327
66	11.2314	11.1148	1.038
64	6.59667	6.53926	0.870
62	6.39553	6.33372	0.966

Table 5.8: Tabella di confronto down-ramping

Si possono ottenere dei trend molto simili per la maggior parte dei valori di NPR, quindi in altre parole i valori ottenuti con il *caso 2* sono molto simili al *caso 1*.

Si osserva come:

- Otteniamo dei valori negativi nel caso della tabella 5.7 nel caso $NPR = 66$ e $NPR = 68$;
- Otteniamo dei valori intorno a 1 nel caso della tabella 5.8 nel caso $NPR = 66$;

Questo implica che nelle condizioni interessate dalla transizione e dalla ritransizione i punti di separazione divergono tra di loro, portando ad avere errori percentuali negativi nel up-ramping o superiori a 1 nel down-ramping.

Inoltre, viene riportato un confronto tra i cicli di isteresi ottenuti con il *caso 1* e il *caso 2*.



Figure 5.35: Confronto ciclo di isteresi

Si osserva come per i valori di NPR compresi da 62 a 68 ci sono dei visibili scostamenti tra un caso e l'altro, in quanto:

- Nella fase di up-ramping nel caso di $NPR = 62$, di $NPR = 64$, di $NPR = 66$ e di $NPR = 68$ abbiamo errori percentuali alti e anche negativi negli ultimi due casi;
- Nella fase di down-ramping nel caso di $NPR = 66$, $NPR = 64$ e di $NPR = 62$ abbiamo errori percentuali alti;

Chapter 6

Conclusioni

Nel presente elaborato di tesi è stato studiato il fenomeno dell'isteresi in una geometria Dual-Bell tramite analisi CFD. I modelli di turbolenza impiegati sono stati SST $k - \omega$, $k - \epsilon$ e Spalart-Allmaras, i prime due a due equazioni e l'ultimo a un'equazione.

Le simulazioni, eseguite attraverso le procedure di up-ramping e down-ramping, hanno mostrato una percentuale di isteresi inferiore al 6%. Tuttavia, confrontando tali risultati con gli studi parametrici condotti da Gènin e Stark [17], risulta che, a parità di geometria, la percentuale d'isteresi avrebbe dovuto essere almeno del 20%.

Questo scostamento evidenzia una discrepanza significativa rispetto ai dati presenti in letteratura.

Dato che i modelli di turbolenza utilizzati non sono stati calibrati specificamente per geometrie non convenzionali come il Dual-Bell, si è fatto riferimento alla letteratura per selezionare il modello più adeguato.

Tra quelli utilizzati, l' SST $k - \omega$ è risultato il più attendibile.

Per verificare l'accuratezza e la robustezza dei risultati ottenuti con modello SST $k - \omega$, è stata eseguita un' ulteriore analisi con una griglia computazionale più grossolana, al fine di valutare se fosse possibile ottenere risultati affidabili con un costo computazionale ridotto.

I risultati ottenuti con la griglia più grossolana hanno mostrato che il range e la percentuale di isteresi sono identici a quelli calcolati con la mesh più fine.

Tuttavia, confrontando le posizioni dei punti di separazione, si è osservato che gli errori percentuali aumentano significativamente o diventano negativi nelle condizioni di nozzle pressure ratio (NPR) corrispondenti ai fenomeni di transizione e ritransizione. Al di fuori di tali condizioni, gli errori risultano più contenuti.

Si può quindi concludere che l' utilizzo di una griglia più grossolana non è consigliabile durante le fasi di transizione e ritransizione, poiché i punti di separazione risultano significativamente differenti rispetto a quelli ottenuti con la griglia fine.

Guardando al futuro, si potrebbero eseguire simulazioni con griglie computazionali ancora più raffinate, aumentando progressivamente il numero di celle del 20% e successivamente del 40%.

L'analisi degli errori percentuali relativi consentirebbe di identificare la mesh più adatta.

Infine, sarebbe interessante svolgere dei test in scala reale per appurare i risultati ottenuti e calibrare adeguatamente i modelli di turbolenza utilizzati.

Chapter 7

Appendice A

7.1 Caso in esame TIC

In questo paragrafo si intende studiare mediante simulazioni numeriche l'ugello TIC *truncated ideal contour* utilizzato nello studio di Stark e Hagemann. [38]

L'obiettivo dello studio era simulare un flusso all'interno di ugello TIC in condizione di sovraespansione e confrontare i dati numerici con quelli sperimentali di un *sub-scale nozzle*.

La geometria è stata ricreata in ambiente Ansys mediante l'introduzione dei punti di un file txt.

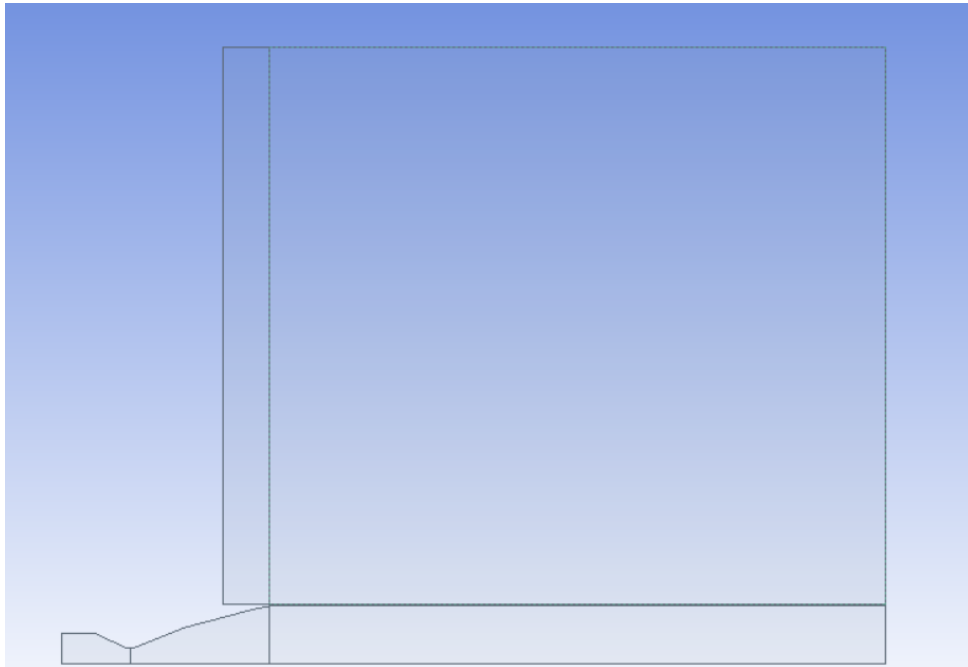


Figure 7.1: Geometria

7.2 Mesh

Per la mesh abbiamo considerato 4 diversi gradi di infittimento:

- 59600 celle;
- 35800 celle;
- 86400 celle;
- 68800 celle;

7.2.1 Mesh 1

Le caratteristiche della mesh sono:

- **Ugello:** 180×80 , bias 2000 nella direzione verticale;
- **Dominio:** 200×80 , bias 5 nella direzione orizzontale;

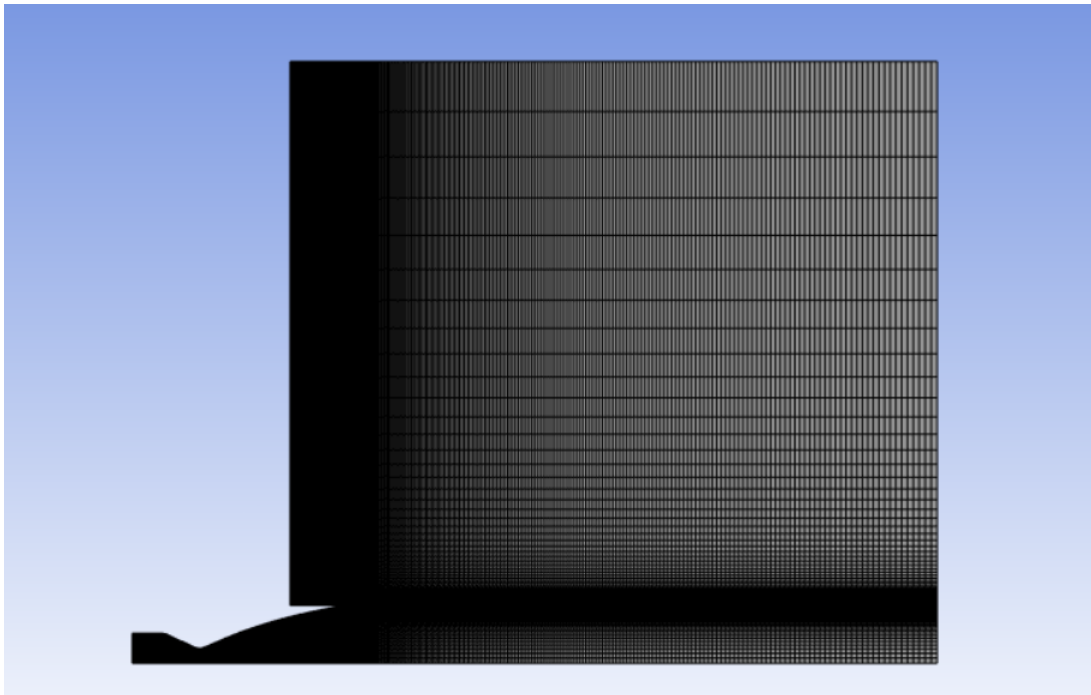


Figure 7.2: Mesh 1

Facendo un ingrandimento della parete dell'ugello:

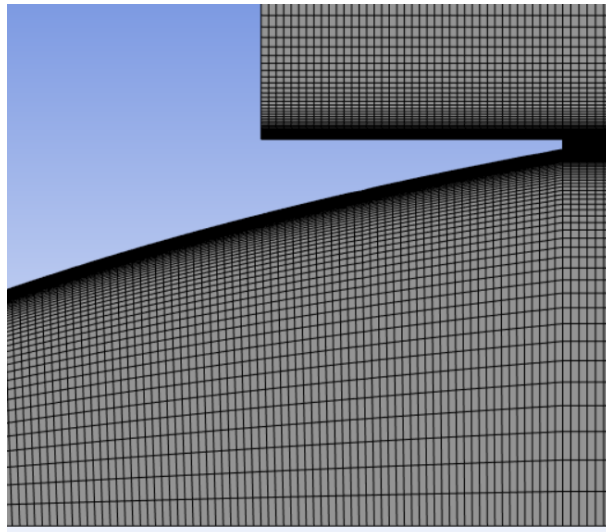


Figure 7.3: Particolare mesh 1

7.2.2 Mesh 2

Le caratteristiche della mesh sono:

- **Ugello:** 160×60 , bias 2000 nella direzione verticale;
- **Dominio:** 140×60 , bias 10 nella direzione orizzontale;

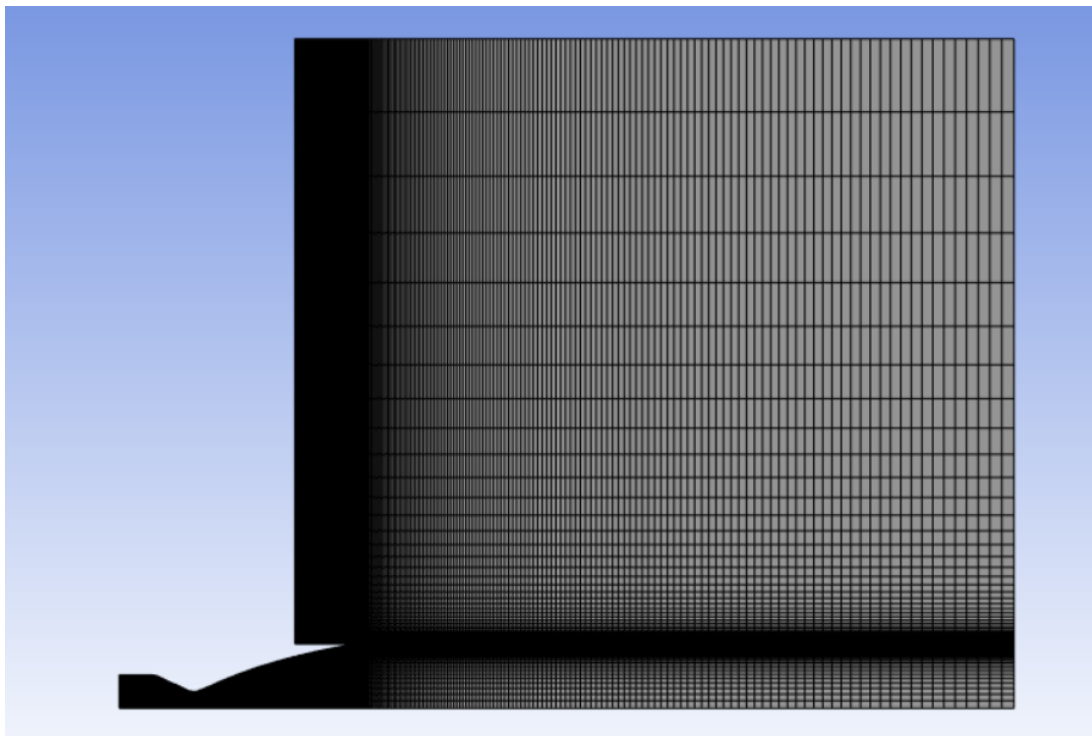


Figure 7.4: Mesh 2

Facendo un ingrandimento della parete dell'ugello per questa mesh:

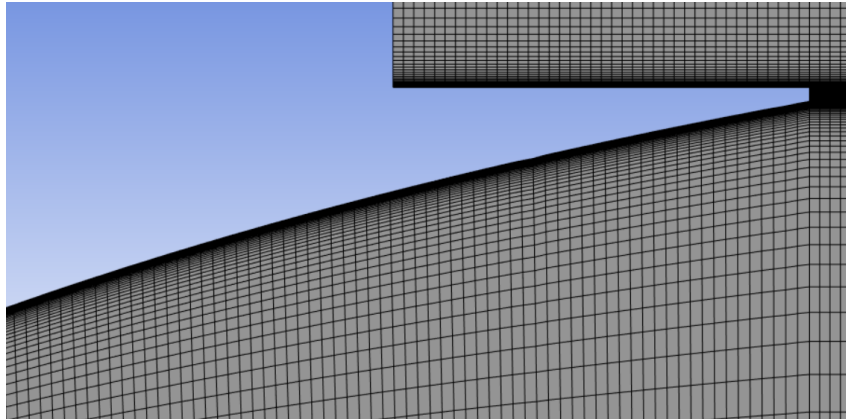


Figure 7.5: Particolare mesh 2

7.2.3 Mesh 3

Le caratteristiche della mesh sono:

- **Ugello:** 200×100 , bias 1000 nella direzione verticale;
- **Dominio:** 260×60 , bias 4 nella direzione orizzontale;

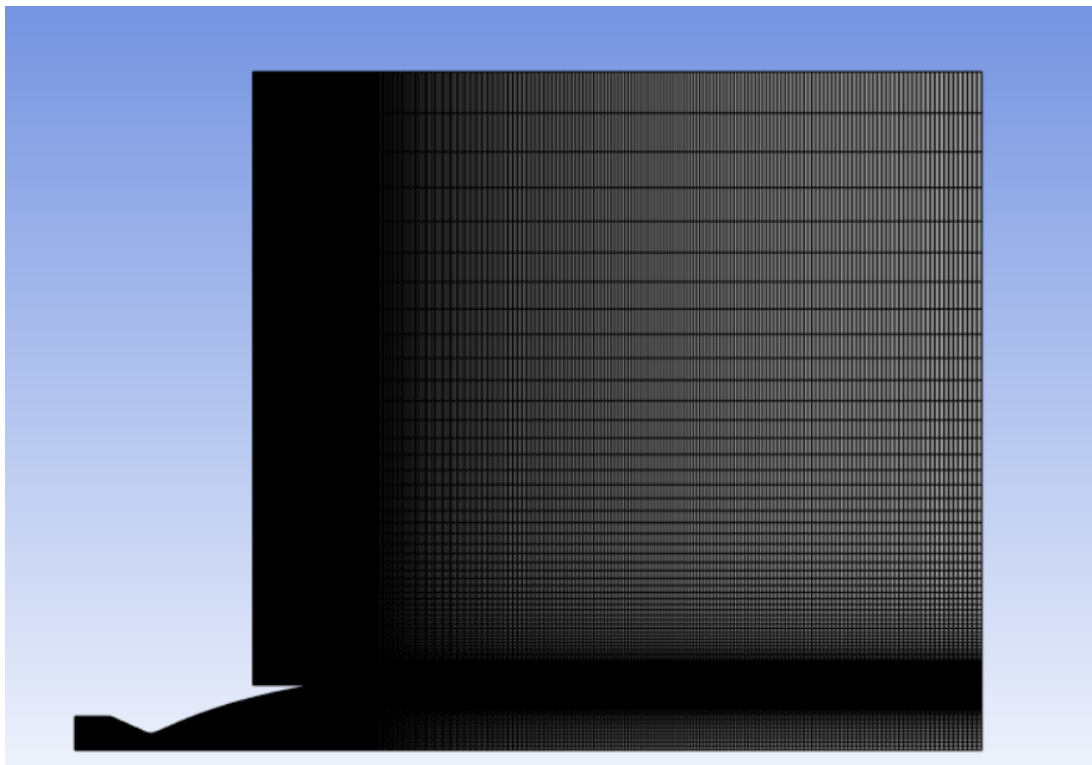


Figure 7.6: Mesh 3

Facendo un ingrandimento della parete dell'ugello:

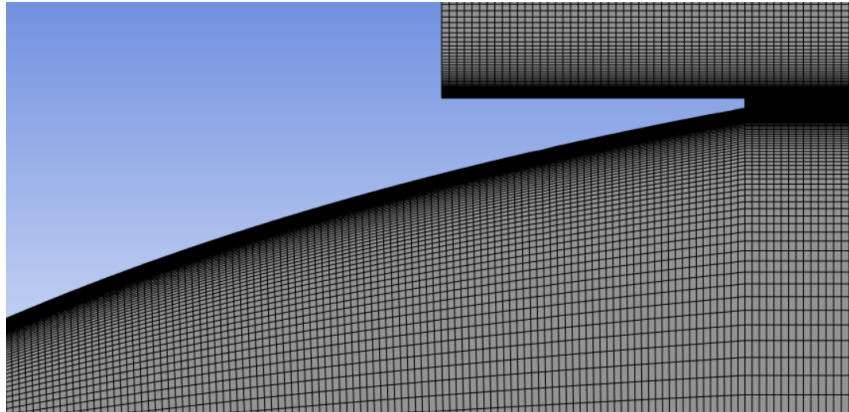


Figure 7.7: Particolare mesh 3

7.2.4 Mesh 4

Le caratteristiche della mesh sono:

- **Ugello:** 180×80 , bias 500 nella direzione verticale;
- **Dominio:** 220×80 , bias 200 nella direzione orizzontale;

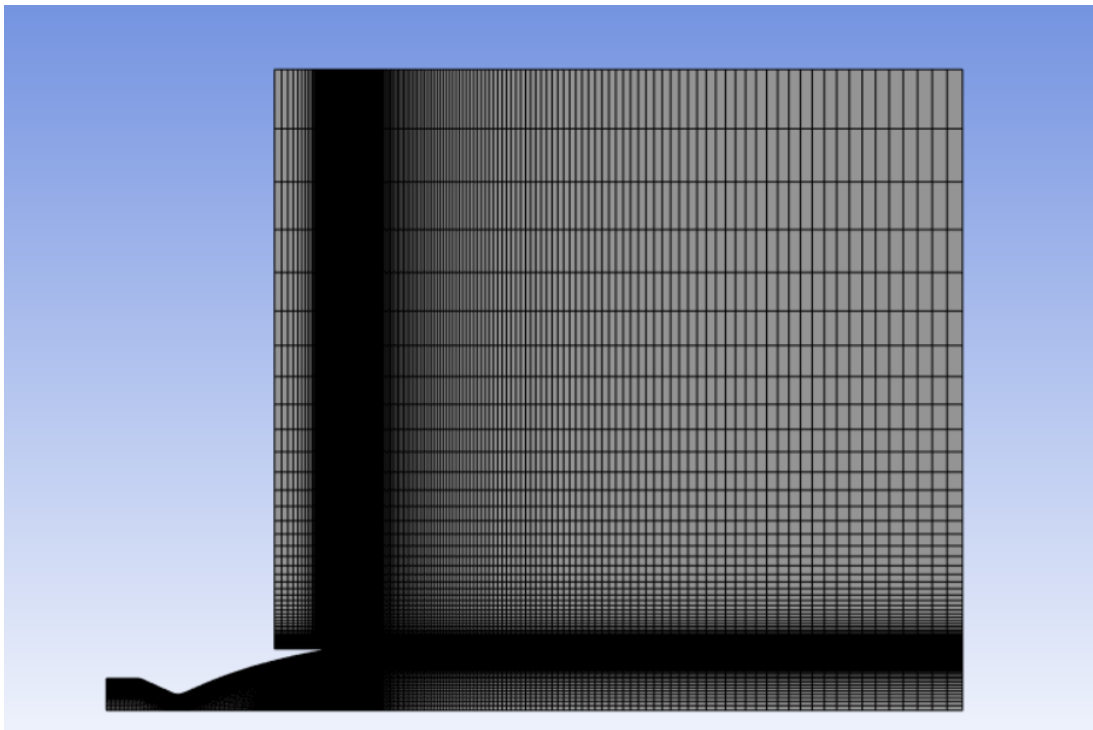


Figure 7.8: Mesh 4

Facendo un ingrandimento a parete dell'ugello:

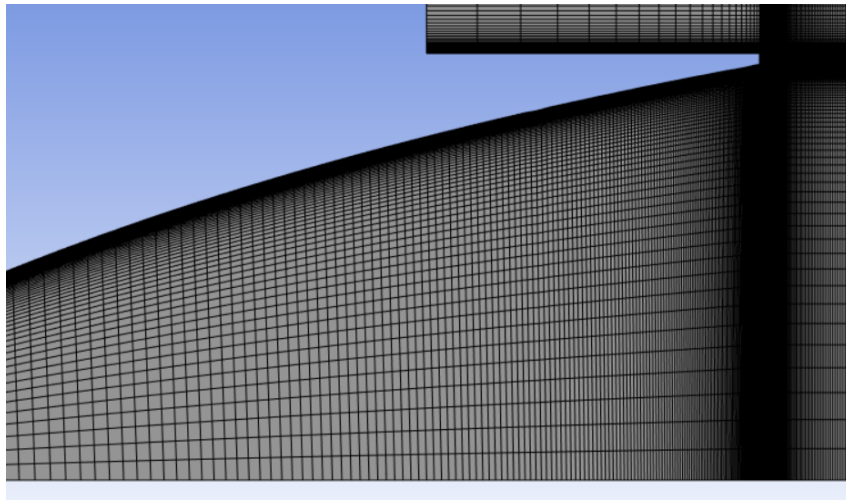


Figure 7.9: Particolare mesh 4

7.3 Modello di turbolenza

Il modello di turbolenza utilizzato è SST $k - \omega$ con equazione dell'energia attiva.

La simulazione è density-based.

7.4 Impostazione della simulazione

- Density: si considera **ideal-gas**;
- Viscosity: si considera **Sutherland model**;

7.5 Condizioni al contorno

Per impostarle si considera un *nozzle pressure ratio* (NPR) operativo definito come

$$NPR = \frac{p^\circ}{p_a} \quad (7.1)$$

dove p° è la pressione totale a monte e la p_a è quella ambiente.

7.5.1 Pressure inlet

Di conseguenza verranno impostate:

- **Gauge Total Pressure [Pa]** $\rightarrow 2.5 \text{ e} + 06$;
- **Supersonic/Initial Gauge Pressure [Pa]** $\rightarrow 2.4628 \text{ e} + 06$;

7.5.2 Pressure outlet

- **Gauge Pressure [Pa]** $\rightarrow 99010$;

7.5.3 Pressure Farfield

- **Gauge Pressure [Pa]** $\rightarrow 99010$;
- **Mach number** $\rightarrow 0.01$;

7.6 Setting del solver

- Implicit;
- Flux-Type: ROE-FDS;
- Discretizzazione spaziale:
 - Gradient: Least Squares Cell Based;
 - Flow: First Order Upwind;
 - Turbolent kinetic Energy: Second Order Upwind;
 - Specific Dissipation Rate: Second Order Upwind;

7.7 Andamenti a parete

Gli andamenti a parete ottenuti utilizzando questo modello di turbolenza e le varie mesh sono mostrati in figura sottostante.

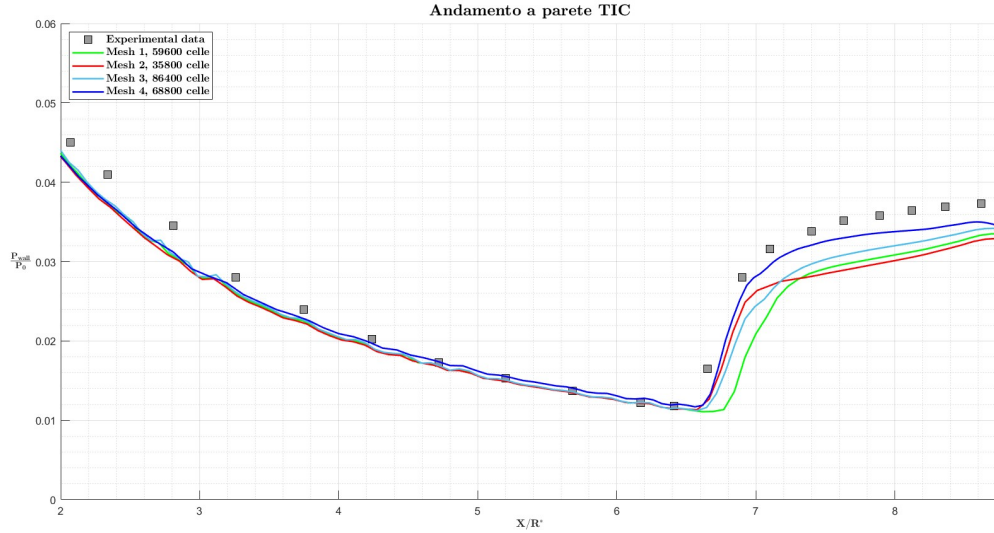


Figure 7.10: Andamento a parete del TIC per $NPR = 25.5$

Si evince come a differenza del Dual-Bell, la geometria TIC risulta essere adeguatamente risolta scegliendo quasi qualsiasi griglia computazionale proposta.

Ricordando che questa analisi preliminare è stata fatta risolvendo i flussi con un primo ordine Upwind, per sperimentazioni future si consiglia di utilizzare un secondo ordine, in modo da poter prevedere il punto di separazione più efficacemente.

Un'altra accortezza sarebbe evitare di utilizzare un bias verticale così alto, in quanto più le prime celle diventano sottili, più teoricamente dovrei avere una risoluzione maggiore del punto di separazione, ma avere celle di quella tipologia porterebbero ad avere forti fluttuazioni della soluzione calcolata al centro cella e quindi incremento dell'errore complessivo.

Chapter 8

Appendice B

In questo paragrafo, l'obiettivo sarà dare delle linee guida per l'utilizzo del software Ansys Fluent.

I modelli di turbolenza utilizzati per lo studio dell'isteresi sono stati:

- *Spalart-Allmaras*, un equazione;
- SST $k - \omega$, due equazioni;
- $k - \epsilon$, due equazioni;

Nei seguenti paragrafi si utilizzeranno le impostazioni utilizzate per il calcolo con SST $k - \omega$.

8.1 Setting del solver

Prima di tutto, vediamo come impostare il solver di ANSYS Fluent per l'analisi numerica per lo studio del Dual-Bell.

8.1.1 Modello di turbolenza

La prima scelta è stata quella di impostare le equazioni ed il modello di turbolenza necessari a risolvere il caso 2D.

L'interfaccia utente è organizzata in modo tale da facilitare la configurazione della propria analisi, seguendo gli step procedurali riportati sulla colonna in figura 8.1.

Per prima cosa impostiamo l'equazione dell'energia, selezionata in modo da tener conto degli scambi energetici dovuti all'alto Reynolds.

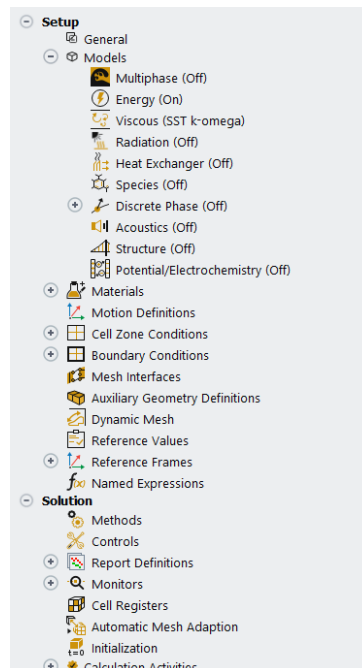


Figure 8.1: Colonna di gestione delle procedure

Per fare il setting del modello di turbolenza si apre la sezione sotto *Energy* e si aprirà una tenda come in figura 8.2.

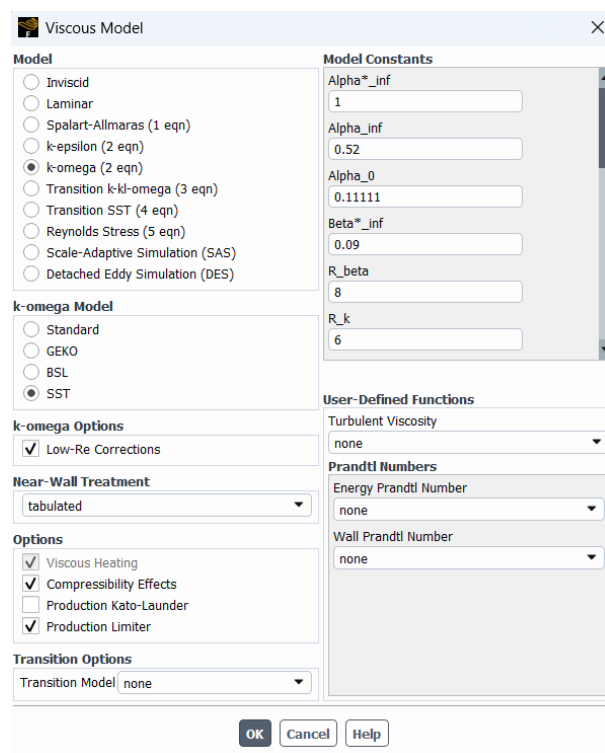


Figure 8.2: Setting del modello di turbolenza

Scelto il modello di turbolenza, bisogna inserire anche il trattamento a

parete e le *options*.

Per l'inserimento del trattamento a parete, è stato scelto il *tabulated*, invece per tener conto degli effetti di compressibilità è stata attivata l'opzione *compressibility Effects*.

Si ricorda che l'opzione non apparirà, se non sono stati settati prima i *materials*.

8.1.2 Materials

Per la scelta del materiale, si ricorda che il test sperimentale è fatto a freddo, quindi non avremo gli effetti di una vera combustione.

Inoltre, il fluido utilizzato nella sperimentazione era N_2 , quindi nel setting del materiale dovremo tener conto di questo.

Di default sarà inserito come fluido *air*, dovremo prima di tutto inserire il *nitrogen* direttamente scelto dal *Fluent database*, quindi ci ritroveremo con la sezione *Fluid* che avrà sia aria che azoto, prima di poter cancellare l'aria dobbiamo andare su *Cell Zone Conditions*, *Fluid* e *surface body*, cliccare e scegliere come *Material Name* il nitrogeno.

Fatto questo sarà possibile eliminare dalla tenda *material* l'aria e lasciare il nitrogeno.

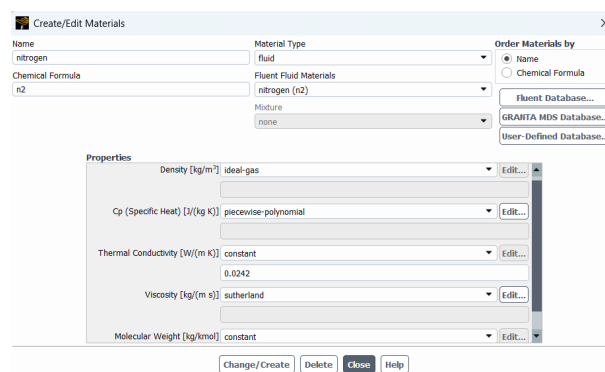


Figure 8.3: Setting del materiale

8.1.3 Boundary Conditions

Le condizioni al contorno sono fondamentali per la buona riuscita delle simulazioni, prima di tutto bisogna chiedersi quali e quante siano necessarie a definire il problema. Si rimanda alla teoria delle linee caratteristiche [14].

Per questo studio aprendo la tendina della BC ritroveremo:

- Axis;
- Inlet;
- Internal;
- Outlet;
- Wall;

In base a come sono stati definiti le *named selections* nella fase di meshing il software cercherà di inserirle in uno di queste sezioni, molto volte però sarà necessario modificarle.

Prima di tutto, si mostra la sezione ed il sistema di sottosezioni delle condizioni di bordo.

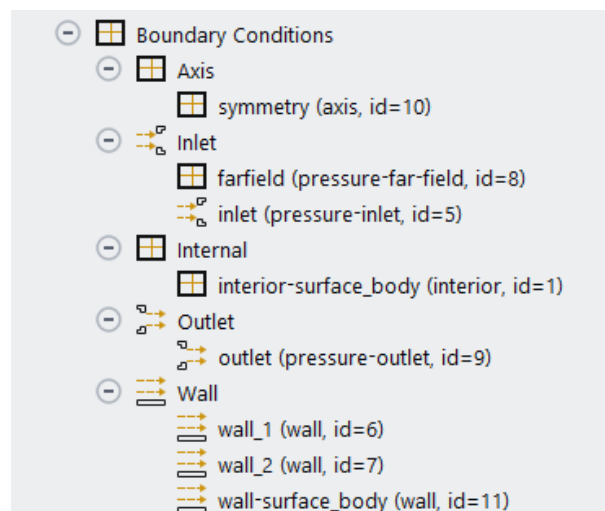


Figure 8.4: Sistema di sottosezioni

Questa è la suddivisione fatta, si osserva come le boundary conditions sono definite da condizioni di pressioni, di default sono rispetto a condizioni di velocità.

Cambiando quindi manualmente ogni singola sottosezione d'interesse (inlet, outlet, farfield) con il tasto destro, avremo condizioni in funzione di pressioni.

Partendo dal setting dell'inlet, si rimanda per il calcolo delle condizioni al capitolo 5, in figura 8.5 si mostrano le condizioni per il caso di $NPR = 70$.

The screenshot shows the 'Pressure Inlet' dialog box with the following settings:

- Zone Name: inlet
- Reference Frame: Absolute
- Gauge Total Pressure [Pa]: 7092750
- Supersonic/Initial Gauge Pressure [Pa]: 6186934.6525
- Direction Specification Method: Normal to Boundary
- ☐ Prevent Reverse Flow
- Turbulence:
 - Specification Method: Intensity and Viscosity Ratio
 - Turbulent Intensity [%]: 5
 - Turbulent Viscosity Ratio: 10

Buttons at the bottom: Apply, Close, Help.

Figure 8.5: Condizioni all'inlet

Per le condizioni di Farfield:

The screenshot shows the 'Pressure Far-Field' dialog box with the following settings:

- Zone Name: farfield
- Gauge Pressure [Pa]: 101325
- Mach Number: 0.01
- Axial-Component of Flow Direction: 1
- Radial-Component of Flow Direction: 0
- Turbulence:
 - Specification Method: Intensity and Viscosity Ratio
 - Turbulent Intensity [%]: 5
 - Turbulent Viscosity Ratio: 10

Buttons at the bottom: Apply, Close, Help.

Figure 8.6: Condizioni al Farfield

e per le condizioni di outlet:

The screenshot shows the 'Pressure Outlet' dialog box with the following settings:

- Zone Name: outlet
- Backflow Reference Frame: Absolute
- Gauge Pressure [Pa]: 101325
- Pressure Profile Multiplier: 1
- Backflow Direction Specification Method: Normal to Boundary
- Backflow Pressure Specification: Total Pressure
- ☐ Prevent Reverse Flow
- ☐ Average Pressure Specification
- ☐ Target Mass Flow Rate
- Turbulence:
 - Specification Method: Intensity and Viscosity Ratio
 - Backflow Turbulent Intensity [%]: 5
 - Backflow Turbulent Viscosity Ratio: 10
- Acoustic Wave Model:
 - ☒ Off
 - ☐ Non Reflecting

Buttons at the bottom: Apply, Close, Help.

Figure 8.7: Condizioni all'outlet

Si ricorda che per la finestra *Thermal* sono stati mantenuti sempre 300 [K].

8.1.4 Methods

Per la definizione della soluzioni, bisogna scegliere quali formulazioni utilizzare per la discretizzazione dello spazio e del tempo.

Dalla figura si mostrano le scelte fatte per lo svolgimento della simulazioni.

The image shows a software interface titled "Task Page" with a back arrow. It contains a "Solution Methods" section with a help icon. Under "Formulation", a dropdown menu shows "Implicit". Under "Flux Type", a dropdown menu shows "Roe-FDS". The "Spatial Discretization" section has four dropdown menus: "Gradient" (Least Squares Cell Based), "Flow" (Second Order Upwind), "Turbulent Kinetic Energy" (Second Order Upwind), and "Specific Dissipation Rate" (Second Order Upwind). Below this is the "Pseudo Time Method" dropdown set to "Off". The "Transient Formulation" section has a dropdown menu and six unchecked checkboxes: "Non-Iterative Time Advancement", "Frozen Flux Formulation", "Warped-Face Gradient Correction", "High Order Term Relaxation", "Convergence Acceleration For Stretched Meshes", and "High Speed Numerics". At the bottom is a "Default" button.

Figure 8.8: Setting solver

Un modello implicito è stato scelto in quanto rappresentava un ottima soluzione per tempi di convergenza e stabilità numerica a patto che si scelga un CFL adeguato. I flussi sono stati calcolati con ROE con metodologia *flux difference splitting*, in quanto in presenza di discontinuità come onde d'urto portava ad essere la scelta migliore [3]. La discretizzazione spaziale viene calcolata con Upwind al secondo ordine in modo da ottenere soluzioni più precise e accurate [3].

8.1.5 Controls

Per controllare la stabilità della soluzione è necessario variare il CFL o *Courant Number*, il software di default lo predispone a 5.

La problematica di ciò è che per flussi compressibili ad alto Reynolds e con la presenza di onde d'urto con l'aggiunta di una griglia computazionale raffinata localmente nelle zone d'interesse, l'unione di questi fattori porterebbero la soluzione a divergere.

Per evitare ciò, si decide di abbassare il CFL a 0.8 nella fase di up-ramping, mentre nella fase di down-ramping a 0.5.

Essendo la fase di down-ramping molto instazionaria, è necessario abbassare di molto di CFL in modo da evitare che la soluzione diverga.

In figura 8.9 si mostra il setting di questa sezione

The image shows a software interface titled "Task Page". Inside, there is a section labeled "Solution Controls" with a help icon (question mark in a circle). Below this section, the "Courant Number" is set to 0.8. Under the "Under-Relaxation Factors" section, four parameters are listed: "Turbulent Kinetic Energy" (0.8), "Specific Dissipation Rate" (0.8), "Turbulent Viscosity" (1), and "Solid" (1). At the bottom of the window, there are four buttons: "Default", "Equations...", "Limits...", and "Advanced...".

Figure 8.9: Setting controls

Chapter 9

Appendice C

In questa appendice verranno inseriti i contours per:

- Campo di mach;
- Campo di pressione statica;
- Campo di temperatura statica;

9.1 Modello SST $k - \omega$

Per questo modello di turbolenza vengono proposti i casi di:

- $NPR = 30$;
- $NPR = 52$;
- $NPR = 68$;

9.1.1 Campi a $NPR = 30$

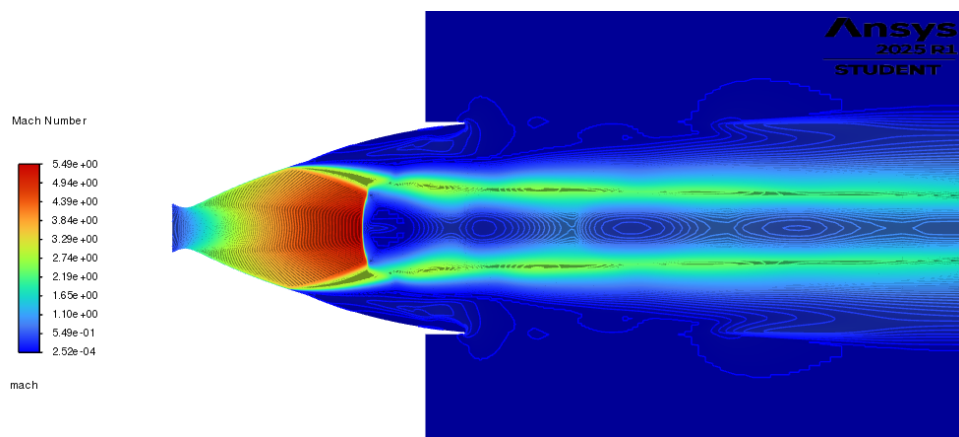
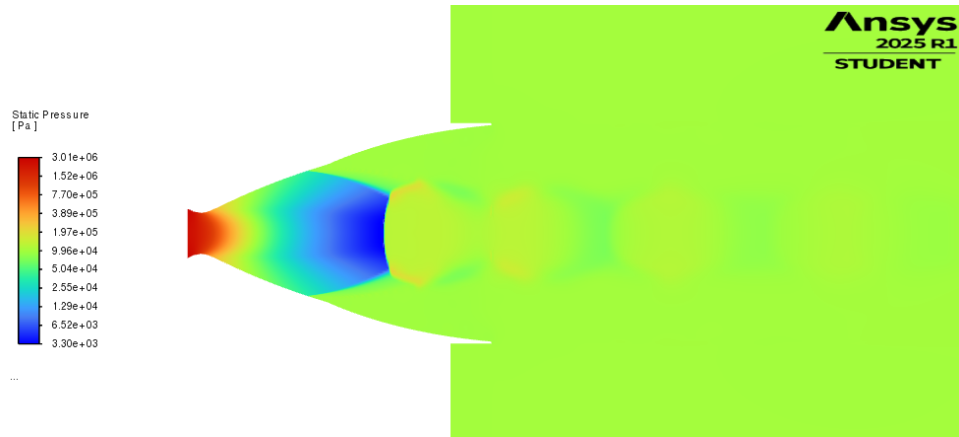
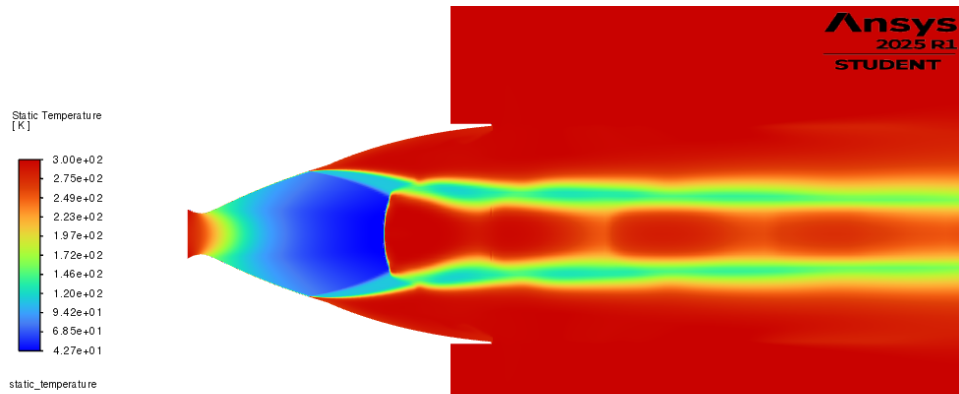
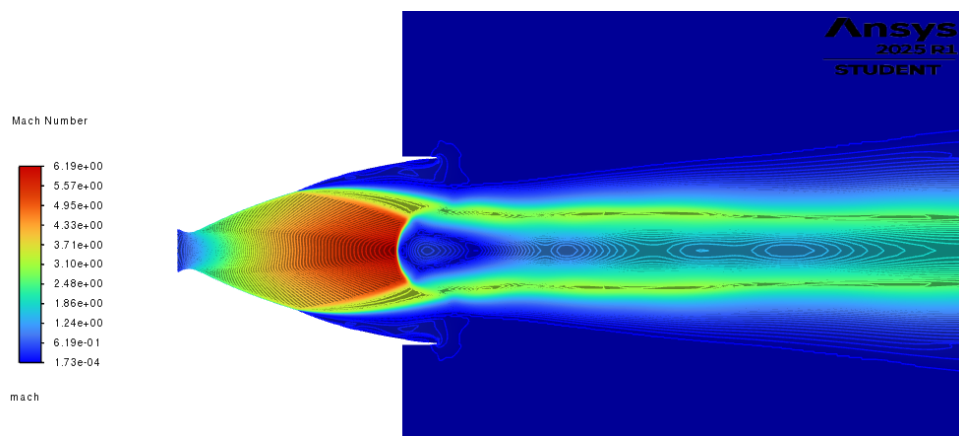
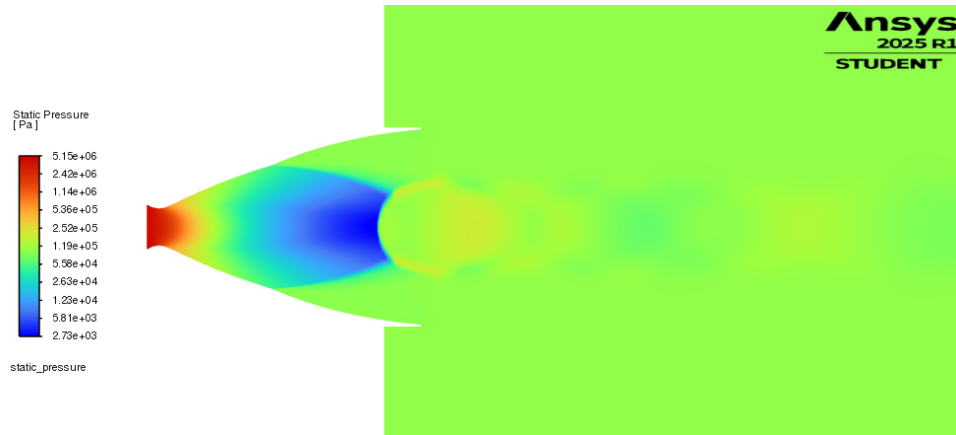
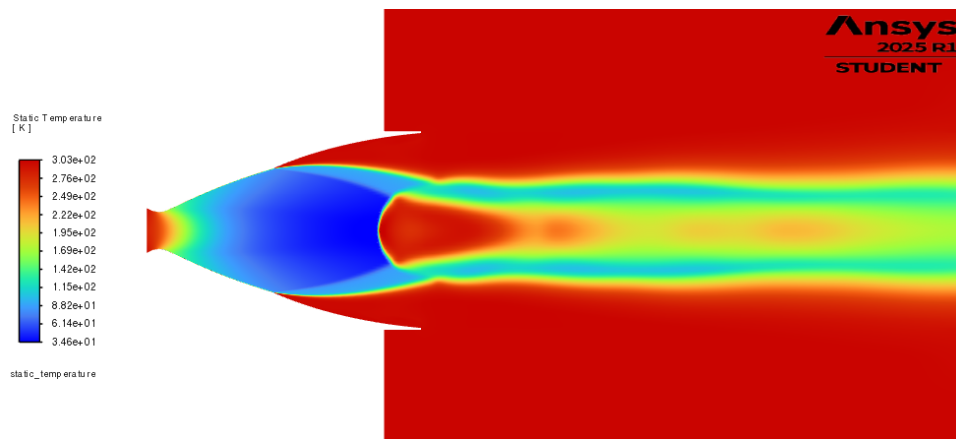


Figure 9.1: Campo di Mach a $NPR = 30$

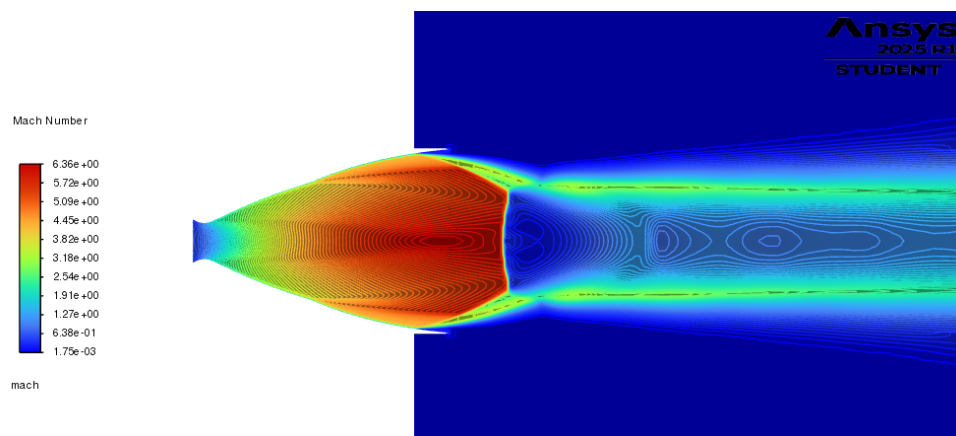
Figure 9.2: Campo di pressione statica a $NPR = 30$ Figure 9.3: Campo di temperatura statica a $NPR = 30$

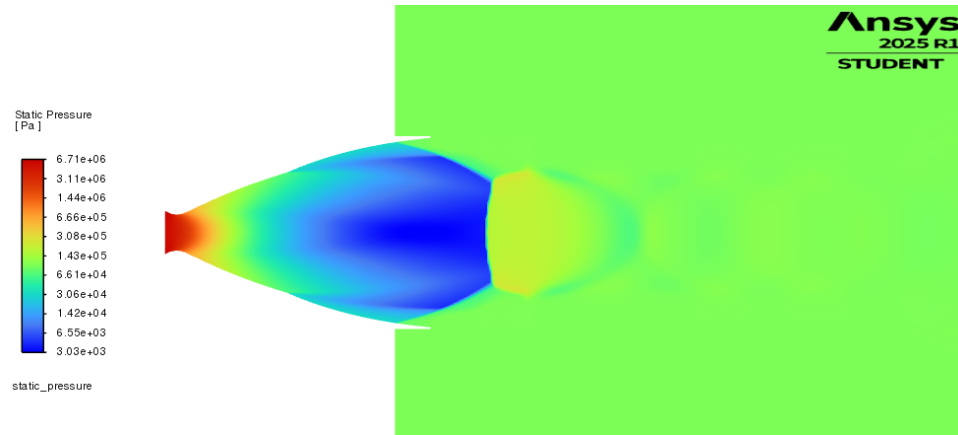
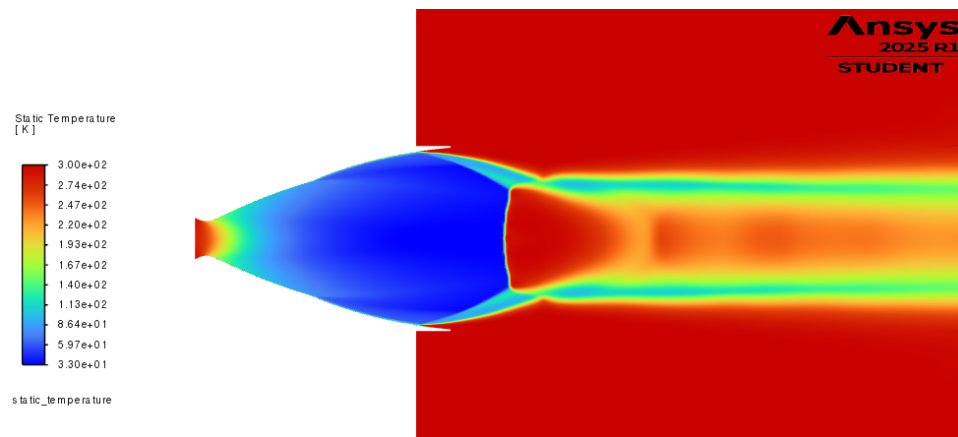
9.1.2 Campi a $NPR = 52$

Figure 9.4: Campo di Mach a $NPR = 52$

Figure 9.5: Campo di pressione statica a $NPR = 52$ Figure 9.6: Campo di temperatura statica a $NPR = 52$

9.1.3 Campi a $NPR = 68$

Figure 9.7: Campo di Mach a $NPR = 68$

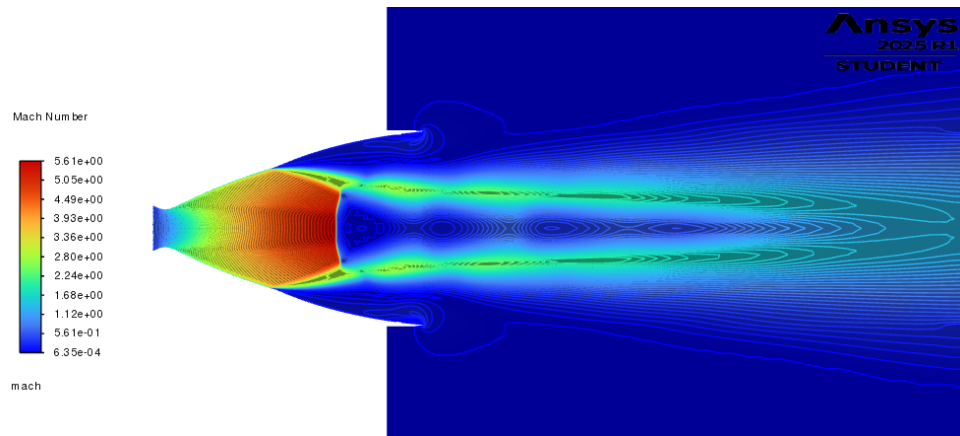
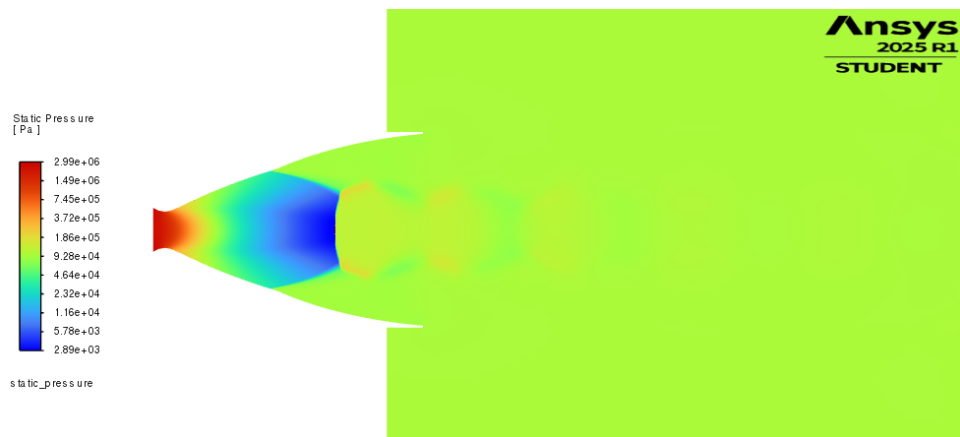
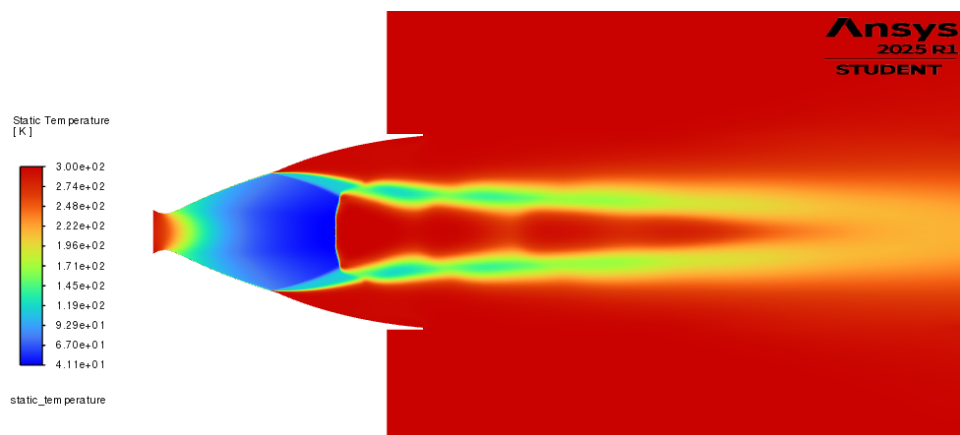
Figure 9.8: Campo di pressione statica a $NPR = 68$ Figure 9.9: Campo di temperatura statica a $NPR = 68$

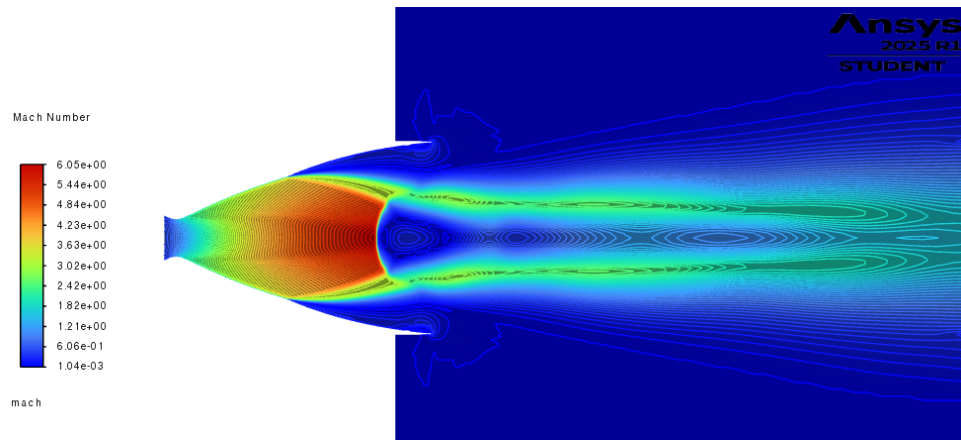
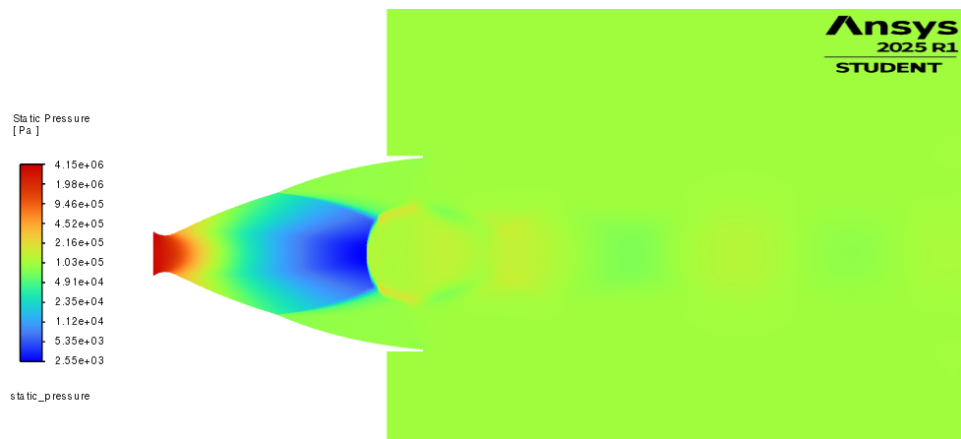
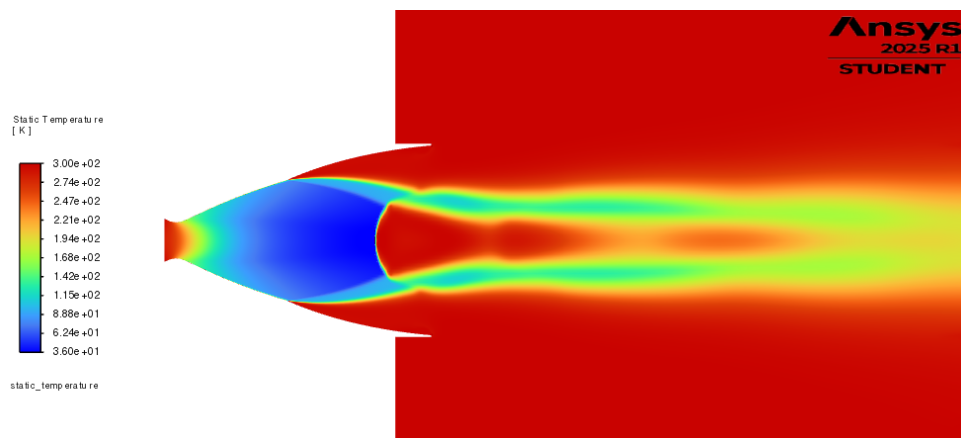
9.2 Modello Spalart-Allmaras

Per questo modello di turbolenza vengono proposti i casi di:

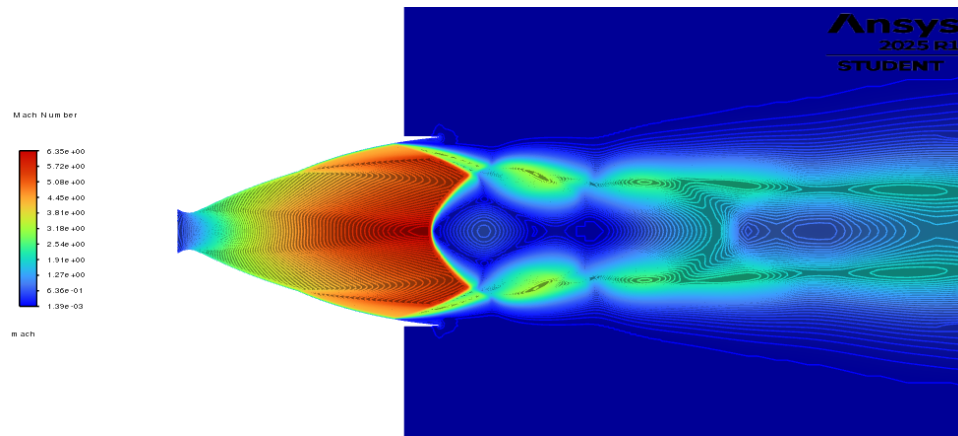
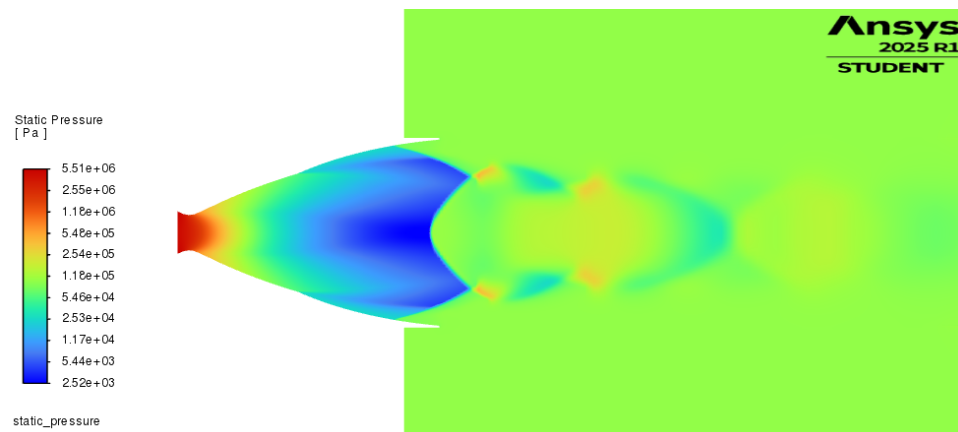
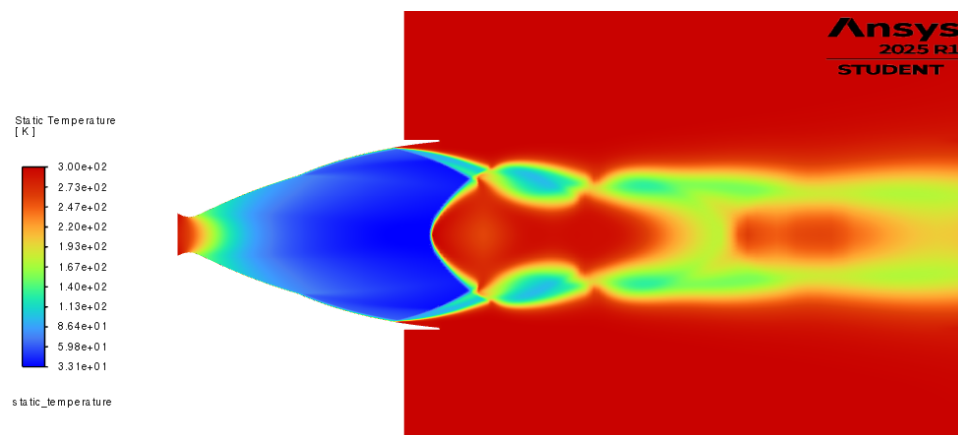
- $NPR = 30$;
- $NPR = 42$;
- $NPR = 56$;

9.2.1 Campi a $NPR = 30$

Figure 9.10: Campo di Mach a $NPR = 30$ Figure 9.11: Campo di pressione statica a $NPR = 30$ Figure 9.12: Campo di temperatura statica a $NPR = 30$

9.2.2 Campi a $NPR = 42$ Figure 9.13: Campo di Mach a $NPR = 42$ Figure 9.14: Campo di pressione statica a $NPR = 42$ Figure 9.15: Campo di temperatura statica a $NPR = 42$

9.2.3 Campi a $NPR = 56$

Figure 9.16: Campo di Mach a $NPR = 56$ Figure 9.17: Campo di pressione statica a $NPR = 56$ Figure 9.18: Campo di temperatura statica a $NPR = 56$

9.3 Modello $k - \epsilon$ Realizable

Per questo modello di turbolenza vengono proposti i casi di:

- $NPR = 30$;
- $NPR = 56$;
- $NPR = 72$;

9.3.1 Campi a $NPR = 30$

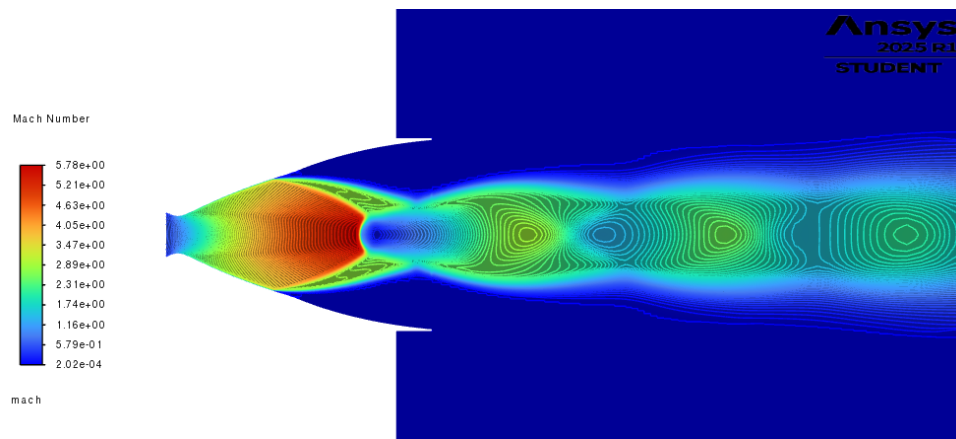


Figure 9.19: Campo di Mach a $NPR = 30$

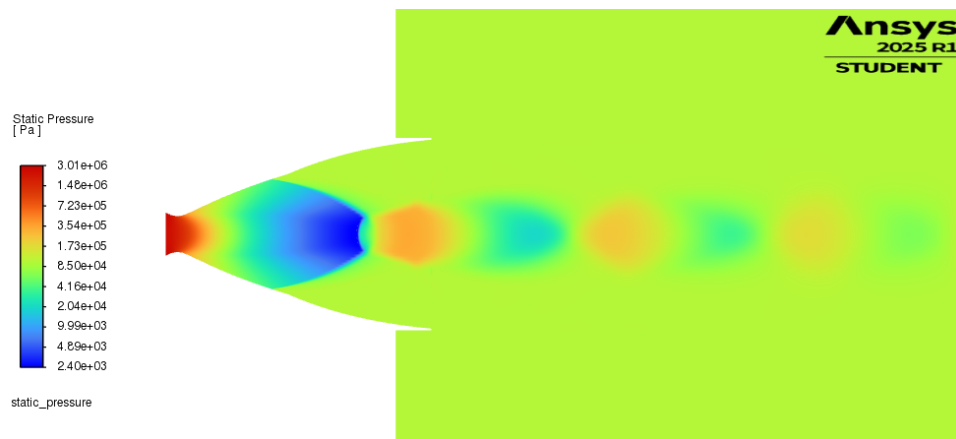
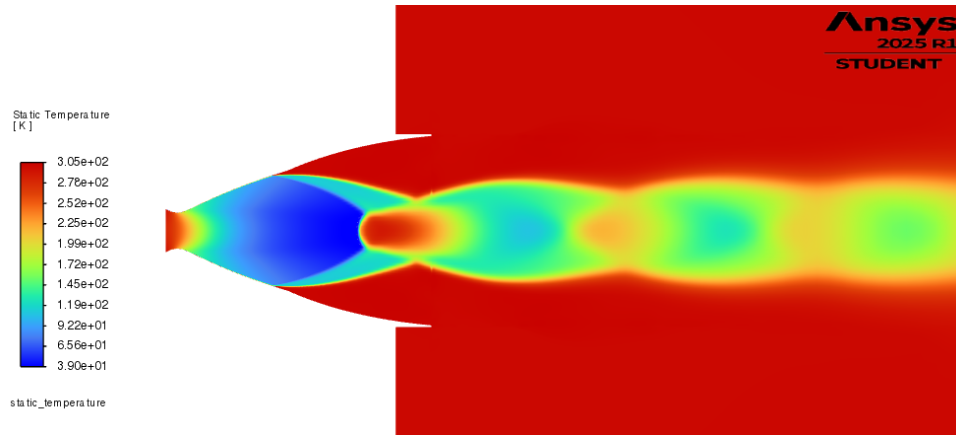
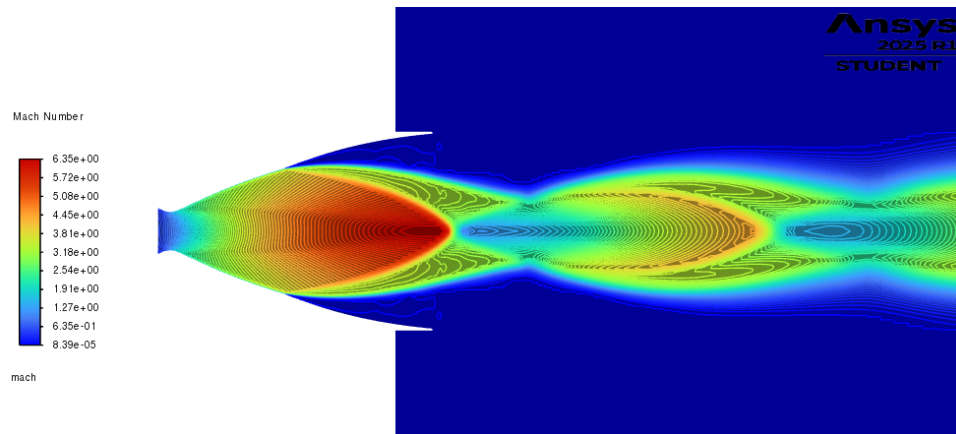
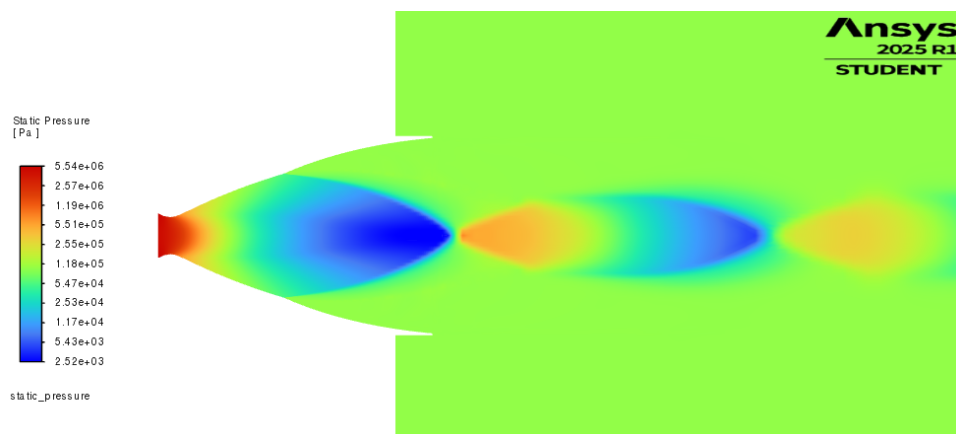
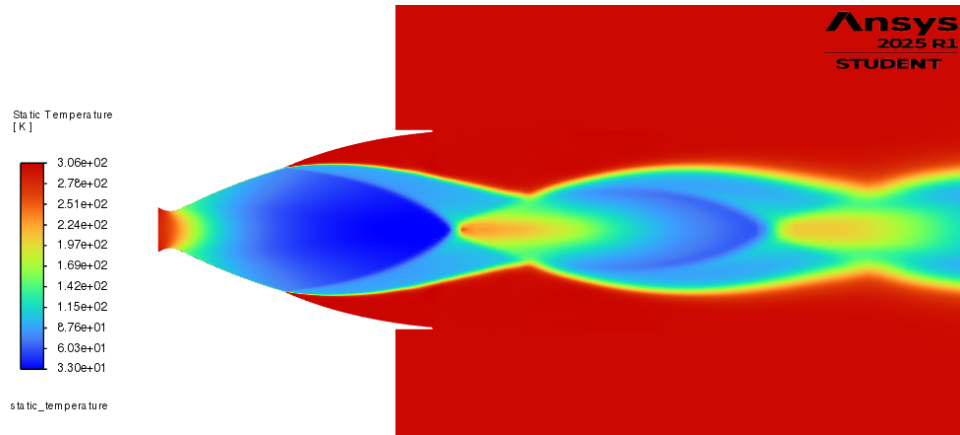


Figure 9.20: Campo di pressione statica a $NPR = 30$

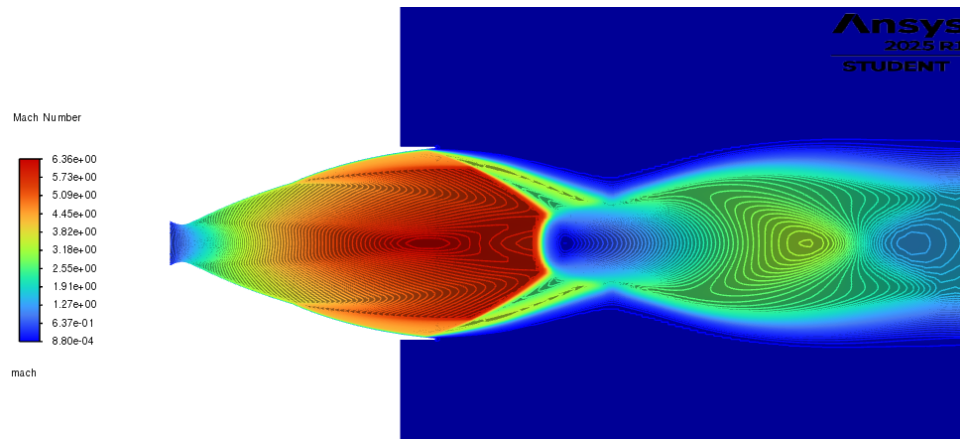
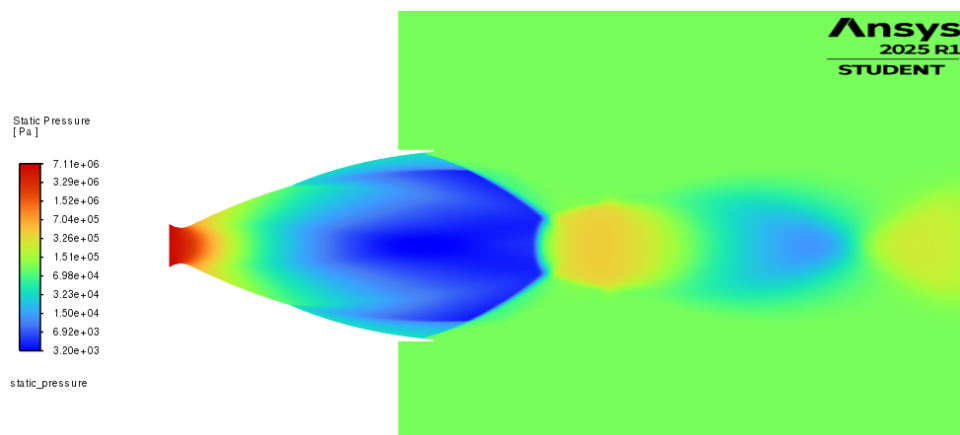
Figure 9.21: Campo di temperatura statica a $NPR = 30$

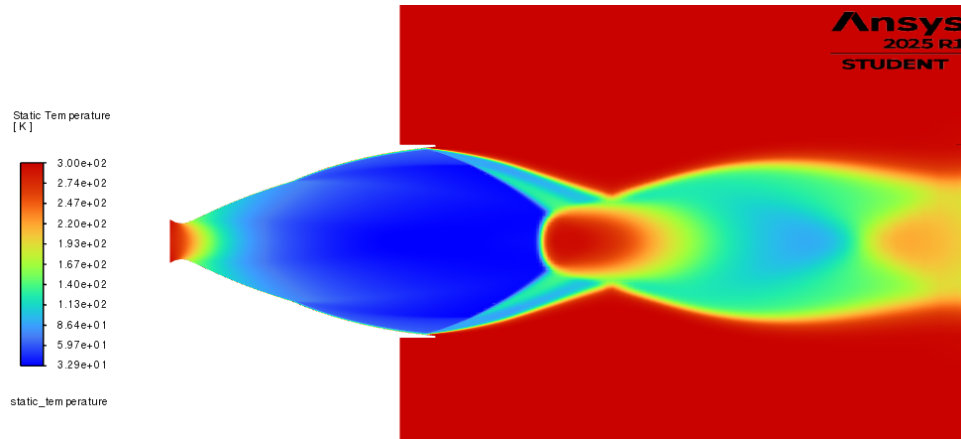
9.3.2 Campi a $NPR = 56$

Figure 9.22: Campo di Mach a $NPR = 56$ Figure 9.23: Campo di pressione statica a $NPR = 56$

Figure 9.24: Campo di temperatura statica a $NPR = 56$

9.3.3 Campi a $NPR = 72$

Figure 9.25: Campo di Mach a $NPR = 72$ Figure 9.26: Campo di pressione statica a $NPR = 72$

Figure 9.27: Campo di temperatura statica a $NPR = 72$

Bibliography

- [1] Adams N. A. Direct simulation of the turbulent boundary layer along a compression ramp at $m=3$ and $re = 1685$. *J. Fluid Mech* 420:47-83, 2000. 69
- [2] Kistler A. Fluctuating wall pressure under a separated supersonic flow. *Journal of the acoustical Society of America*, 1964. 69
- [3] inc ANSYS. *Ansys Fluent Theory Guide*. ANSYS, 2021. 47, 48, 95, 98, 99, 124
- [4] M. Arens and E. Spiegler. Shock-induced boundary layer separation in overexpanded conical exhaust nozzles. *AIAA Journal*, Vol.1, No. 3, 1963. 63
- [5] A. Barklage and R. Radespiel. Influence of the boundary layer state on the transition of a dual-bell nozzle. *Deutscher Luft- und Raumfahrtkongress*, 2018. 89
- [6] A. Barklage, W. Schröder, S. Loosen, and R. Radespiel. Reynolds number influence on the hysteresis behavior of a dual-bell nozzle. *8th european conference for aeronautics and aerospace sciences (EUCASS)*, 2019. 76, 83, 89
- [7] Alexander Barklage, Simon Loosen, Wolfgang Schröder, and Rolf Radespiel. Reynolds number influence on the hysteresis behavior of a dual-bell nozzle. *8TH European conference for aeronautics and aerospace sciences (EUCASS)*, 2019. 30
- [8] D. W. Bogdanoff. Compressibility effects in turbulent shear layer. *AIAA Journal*, Vol. 21, No. 6, 1983. 93
- [9] Coe C., Chyu W., and Dods J. Pressure fluctuations underlying attached and separated supersonic turbulent boundary layers and shock waves. *AIAA 73-996*, 1973. 69

- [10] D. Chapman., D. Huehn, and H. Larson. Investigation of separated flows in supersonic and subsonic streams with emphasis on the effect of transition. *NACA Report 1536*, 1958. 59, 60
- [11] F.B. Cowles and C.R. Foster. Experimental study of gas-flow separation in overexpanded exhaust nozzles for rocket motors. *JPL Progress report, pages 4-103*, 1949. 30, 63
- [12] J. Delery and J.G. Marvin. Shock-wave boundary layer interactions. *AGARD No. 280*, 1986. 59
- [13] Dumnov G. E. Unsteady side-loads acting on the nozzle with developed separation zone. *AIAA 96-3320*, 1996. 71
- [14] A. Ferrero. Dispense del corso di "fluidodinamica computazionale dei sistemi propulsivi". Politecnico di Torino, a.a. 2023/2024. 80, 95, 102, 121
- [15] S. G. Goebel and J. C. Dutton. Experimental study of compressible turbulent mixing layers. *AIAA Journal, Vol. 29, No. 4*, 1991. 93
- [16] C. N. Génin and R. Stark. Experimental study on flow transition in dual bell nozzles. *Journal of Propulsion and Power Vol.26, No 3*, 2010. 82
- [17] C.N. Génin and R.Stark. Flow transition in dual bell nozzles. *Springer-Verlag*, 2008. 101, 109
- [18] Nave L. H. and Coeffey G. A. Sea-level side-loads in high area ratio rocket engines. *AIAA 73-1284*, 1973. 66
- [19] M. Horn and S. Fisher. Dual-bell altitude compensating nozzles. Technical report, NASA, 1994. 31
- [20] Mattsson J., HÖman U., and Torngren L. A sub-scale test programme on investigation of flow separation and side-loads in rocket nozzles. *Proceedings of the 3rd European Symposium On Aerothermodynamics of Space Vehicles, ESA-ESTEC*, 1998. 64, 65
- [21] B. Kader. Temperature and concentration profiles in fully turbulent boundary layers. Technical report, Moscow Institute of Chemical Engineering, 1979. 55

- [22] Th. V. Kàrmàn. Mechanical similitude and turbulence. Technical report, Nachrichten von der Gesellschaft der Wissenschaften zu Göttingen, 1930. 51
- [23] Frey M. and Hagemann G. Status of flow separation prediction in rocket nozzles. *AIAA 98-3619*, 1998. 65
- [24] Harris C. M. and Crede C. E. Shock and vibration handbook. *McGraw-Hill, Inc*, 1976. 68, 72
- [25] Terhardt M., Hagemann G., and Frey M. Flow separation and side-load behaviour of the vulcain engine. *AIAA 99-2762*, 1999. 64, 65
- [26] E. Martelli, B. Betti, and F. Nasuti. Flow separation response to unsteady external disturbances in dual bell nozzles. *American Insititute of Aeronautics and Astronautics*, 2014. 30
- [27] F. Moukalled, L. Mangani, and M. Darwish. *The Finite Volume Method in Computational Fluid Dynamics - An Adanced Introduction with OpenFOAM and Matlab*. Springer, 2016. 33, 34
- [28] J. Östlund, T. Damgaard, and M. Frey. Side-load phenomena in highly overexpanded rocket nozzles. *Journal of Propulsion and Power*, 2004. 69, 72
- [29] Jan Östlund. Flow processes in rocket engine nozzles with focus on flow separation and side-loads. Master's thesis, Stockholm, 2002. 29, 30, 56, 58, 61, 62, 64, 66, 72
- [30] R. Paciorri and F. Sabetta. Compressibility correction for the spalart-allmaras model in free-shear flows. *Journal of Spacecraft and Rockets*, 2003. 92
- [31] D. Papamoschou and A. Roshko. The compressible turbulent shear layer: an experimental study. *Journal of Fluid Mechanics, Vol. 197*, 1988. 93
- [32] P. Reijasse, D. Coponet, and J.M. Luyssen. Wall pressure and thrust of a dual bell nozzle in a cold gas facility. *3rd EUropean Conference for AeroSpace Sciences*, 2009. 83
- [33] M. Samimy and G. S. Elliott. Effects of compressibility on the characteristics of free shear layers. *AIAA Journal, Vol. 28, No. 3*, 1990. 93

- [34] S. Sarkar and L. Balakrishnan. Application of a reynolds-stress turbulence model to the compressible shear layer. Technical report, ICASE Report 90-18NASA CR 182002, 1990. 99
- [35] P. R. Spalart and S. R. Allmaras. A one-equation turbulence model for aerodynamic flows. *30th Aerospace Sciences Meeting and Exhibit, (AIAA Paper 92-0439)*, 1992. 89, 92
- [36] C. G Speziale. *Analytical Methods for the Development of Reynolds-stress Closures In Turbulence*. Ann. Rev. Fluid Mech Vol, 23, 1991. 40
- [37] R. Stark and C. Génin. Sea-level transitioning dual bell nozzles. *Springer*, 2017. 82
- [38] R. Stark and G. Hagemann. Current status of numerical flow prediction for separated nozzle flows. *2nd European Conference for Aerospace Sciences EUCASS*, 2007. 111
- [39] H. Sulley and D. Ferriman. Jet separation in conical nozzles. *Journal of the Royal Aeronautical Society, Vol. 68*, 1964. 63
- [40] S.B. Verma, A. Hadjadj, and O. Haidn. Unsteady flow conditions during dual-bell sneak transition. *Journal of Propulsion and Power*, 2015. 73, 78
- [41] H.K. Versteeg and W. Malalasekera. *An introduction to computational fluid dynamics - The finite volume method*. Pearson, 2007. 32, 40, 41
- [42] J. R. Viegas and M.W. Rubesin. Assessment of compressibility corrections to the k- ϵ model in high-speed shear layers. *Journal, Vol. 30, No. 10*, 1992. 93
- [43] Larson E. W. Structural response of the ssme fuel feedline to unsteady shock oscillations. *52nd Shock and Vibration Symposium*, 1981. 69
- [44] D. C. Wilcox. Turbulence modelling for cfd. *DCW Industries, Inc*, 1998. 48
- [45] K. Wu, G.C. Sohn, R. Deng, H. Jia, H.D. Kim, and X. Su. Study on wall pressure and hysteresis behaviors of a novel dual-bell nozzle. *Journal of Mechanical Science and Technology 37(9)*, 2023. 76, 83