

POLITECNICO DI TORINO

Corso di Laurea Magistrale in
INGEGNERIA AEROSPAZIALE



**Politecnico
di Torino**

Tesi di Laurea Magistrale

Ottimizzazione delle missioni di Rimozione Attiva
dei Detriti Spaziali con propulsione elettrica

Relatore

Prof. Lorenzo CASALINO

Candidato

Andrea DI LONARDO

Aprile 2025

*Ai miei nonni Pino e Arnaldo,
senza i vostri insegnamenti non sarei mai arrivato fin qui,
siete e sarete sempre le mie stelle fisse in questo spazio infinito.*

Abstract

Recenti studi condotti dall'Agenzia Spaziale Europea stimano la presenza di oltre 35000 oggetti in orbita terrestre, il 75% dei quali riguarda detriti spaziali con un diametro superiore ai 10 *cm*. Inoltre, la continua espansione del settore aerospaziale ha portato a un incremento del numero di satelliti lanciati ogni anno, aumentando il rischio di collisioni tra detriti e satelliti attivi. Per prevenire scenari catastrofici come la Sindrome di Kessler, nell'ultimo decennio si è adottata una politica di mitigazione dei detriti spaziali; tuttavia, risulta necessario pianificare anche delle missioni di Active Debris Removal (ADR) con l'obiettivo di rimuovere il maggior numero possibile di detriti dalle orbite più affollate, minimizzando al contempo il costo della missione stessa. Il presente elaborato ha l'obiettivo di implementare un algoritmo metaeuristico, basato sull'Ant Colony Optimization (ACO), per l'ottimizzazione delle sequenze di rimozione dei detriti spaziali in missioni ADR con propulsione elettrica. Il problema di ottimizzazione viene convertito in un Travelling Salesman Problem (TSP), in cui le distanze tra i nodi sono calcolate attraverso un modello analitico per trasferte elettriche a bassa spinta, che sfrutta l'effetto perturbativo di J_2 per minimizzare i costi propulsivi. Il modello ricavato viene infine confrontato con la soluzione vincitrice della nona Global Trajectory Optimization Competition (GTOC9) al fine di dimostrarne la validità. L'implementazione di questo algoritmo si rivela particolarmente utile nelle fasi di progettazione preliminare di una missione ADR, in cui si valuta la fattibilità della missione stessa e si effettuano eventuali analisi di trade-off.

Indice

1	Contesto di ricerca	1
1.1	Detriti spaziali	1
1.2	Sindrome di Kessler	2
1.3	Missioni ADR	3
1.3.1	Propulsione elettrica per missioni ADR	4
1.3.2	Iniziative attuali	4
1.4	Algoritmi metaeuristici	4
1.4.1	Ant Colony Optimization	5
1.4.2	Algoritmi genetici	5
1.4.3	Particle Swarm Optimization	6
2	Fondamenti di astrodinamica	7
2.1	Meccanica orbitale	7
2.1.1	Problema degli n-corpi	8
2.1.2	Problema dei due corpi	9
2.1.3	Conservazione dell'energia meccanica	10
2.1.4	Conservazione del momento angolare	10
2.1.5	Integrazione dell'equazione del moto	11
2.1.6	Equazione polare di una sezione conica	12
2.1.7	Relazione tra l'energia meccanica e la geometria dell'orbita	14
2.1.8	Orbite chiuse	14
2.2	Sistemi di riferimento	16
2.2.1	Sistema di riferimento eliocentrico	16
2.2.2	Sistema di riferimento geocentrico	17
2.2.3	Sistema di riferimento perifocale	17
2.3	Parametri orbitali kepleriani	18
2.4	Perturbazioni orbitali	20
2.4.1	Equazioni planetarie di Gauss	21
2.4.2	Non sfericità della Terra	22
3	Fondamenti di propulsione spaziale	25
3.1	Introduzione alla propulsione spaziale	25
3.2	Prestazioni di un sistema propulsivo	27
3.3	Differenze tra propulsione chimica ed elettrica	29

3.4	Manovre con propulsione elettrica	32
3.4.1	Approssimazione di Edelbaum	32
3.4.2	Manovra di Edelbaum	35
4	Modello analitico per l'ottimizzazione di trasferite a bassa spinta	37
4.1	Approssimazioni per manovre con propulsione elettrica	37
4.1.1	Manovre combinate (a, i)	38
4.1.2	Manovre combinate (a, i, Ω)	38
4.2	Ottimizzazione delle trasferite mediante l'effetto perturbativo di J_2 .	39
4.2.1	Soluzione analitica per trasferite con variazione di (a, i)	40
4.2.2	Soluzione analitica per trasferite con variazione di (a, i, Ω) . .	41
4.2.3	Trasferite ad un impulso	42
4.3	Estensione per trasferite a bassa spinta	43
4.3.1	Durate degli archi di spinta	44
4.3.2	Algoritmo di calcolo iterativo	44
4.4	Validazione dei modelli analitici	45
4.4.1	Trasferita da orbita retrograda	45
4.4.2	Trasferita da orbita prograda	47
4.4.3	Considerazioni sui modelli analitici	49
4.5	Variazione della spinta	49
4.6	Vincolo sulla quota minima	51
4.6.1	Effetti del vincolo sulla quota	52
4.6.2	Influenza dell'inclinazione orbitale	53
5	Algoritmo ACO	56
5.1	Fondamenti e principi dell'algoritmo ACO	56
5.1.1	Meccanismo decisionale delle formiche	56
5.1.2	Applicazione al problema del commesso viaggiatore	57
5.1.3	Architettura dell'algoritmo	58
5.1.4	State transition rule	58
5.1.5	Global pheromone updating rule	58
5.1.6	Inizializzazione	59
5.1.7	Punti di forza e caratteristiche distintive	60
5.1.8	Versioni dell'algoritmo ACO	62
5.2	Implementazione per l'ottimizzazione di missioni ADR	63
5.2.1	Strutture dati impiegate	63
5.2.2	Architettura dell'algoritmo	64
5.2.3	Generazione della matrice dei costi	65
5.2.4	Generazione delle missioni	66
5.2.5	Scelta dei parametri dell'algoritmo	67

6	Analisi dei risultati	69
6.1	Global Trajectory Optimization Competition	69
6.1.1	Descrizione del problema	70
6.1.2	Vincoli operativi	70
6.1.3	Soluzione vincitrice	71
6.2	Definizione del problema in esame	72
6.3	Confronto con la soluzione del JPL	73
6.4	Effetti della riduzione della spinta sulla soluzione ottimale	75
6.4.1	Analisi con 5 N di spinta	75
6.4.2	Analisi con 3 N di spinta	76
6.4.3	Analisi con 2 N di spinta	77
6.4.4	Analisi con 2 N di spinta e modifica delle durate	78
6.4.5	Analisi con 1 N di spinta	79
6.5	Estensione della durata della campagna di missioni	80
6.5.1	Analisi con 2 N di spinta e durata estesa	80
6.5.2	Analisi con 1 N di spinta e durata estesa	81
6.6	Esclusione di un detrito	83
7	Conclusioni	84
7.1	Limitazioni e prospettive future	85
7.2	Considerazioni finali	86
	Bibliografia	87

Elenco delle figure

1.1	Estrapolazione del numero di collisioni catastrofiche nell'orbita terrestre	3
2.1	Problema degli n-corpi	8
2.2	Flight path angle	11
2.3	Sezioni coniche	12
2.4	Parametri geometrici dell'ellisse	13
2.5	Sistema di riferimento eliocentrico	16
2.6	Sistema di riferimento geocentrico	17
2.7	Sistema di riferimento perifocale	18
2.8	Elementi orbitali classici	20
2.9	Armoniche sferiche del campo gravitazionale terrestre	23
2.10	Regressione della linea dei nodi	23
4.1	Andamento dei parametri orbitali (Caso 2)	47
4.2	Andamento dei parametri orbitali (Caso 3)	48
4.3	Andamento dei parametri orbitali al variare di T (Caso 2)	50
4.4	Andamento dei parametri orbitali al variare di T (Caso 4)	51
4.5	Andamento dei parametri orbitali (Caso 5)	53
4.6	Costo della trasferta in funzione dell'inclinazione (Casi 6 e 7)	55
5.1	Scenario dimostrativo	57
6.1	Andamento della soluzione durante le iterazioni dell'algorithm ACO	75

Elenco delle tabelle

3.1	Tipici valori di ΔV	29
4.1	Parametri orbitali del primo e secondo caso di studio	46
4.2	Soluzione dettagliata (Caso 1)	46
4.3	Soluzione dettagliata (Caso 2)	46
4.4	Parametri orbitali del terzo e quarto caso di studio	47
4.5	Soluzione dettagliata (Caso 3)	48
4.6	Soluzione dettagliata (Caso 4)	48
4.7	Costo della trasferta al variare della spinta (Caso 2)	49
4.8	Costo della trasferta al variare della spinta (Caso 4)	50
4.9	Parametri orbitali del quinto caso di studio	52
4.10	Soluzione dettagliata (Caso 5)	52
4.11	Parametri orbitali del sesto e settimo caso di studio	53
4.12	Soluzione dettagliata (Caso 6)	54
4.13	Soluzione dettagliata (Caso 7)	54
6.1	Panoramica delle missioni previste dal JPL	72
6.2	Caratteristiche delle prime due missioni del JPL	72
6.3	Panoramica delle missioni ricavate ($T = 100 N$)	73
6.4	Caratteristiche delle missioni ricavate ($T = 100 N$)	74
6.5	Panoramica delle missioni ricavate ($T = 5 N$)	76
6.6	Caratteristiche delle missioni ricavate ($T = 5 N$)	76
6.7	Panoramica delle missioni ricavate ($T = 3 N$)	77
6.8	Caratteristiche delle missioni ricavate ($T = 3 N$)	77
6.9	Caratteristiche delle missioni ricavate ($T = 2 N$)	77
6.10	Panoramica delle missioni ricavate ($T = 2 N$, durate modificate) . .	78
6.11	Caratteristiche delle missioni ricavate ($T = 2 N$, durate modificate) .	79
6.12	Caratteristiche delle missioni ricavate ($T = 1 N$)	79
6.13	Caratteristiche delle missioni ricavate ($T = 1 N$, nuova sequenza) . .	80
6.14	Panoramica delle missioni ricavate ($T = 2 N$, durata estesa)	81
6.15	Caratteristiche delle missioni ricavate ($T = 2 N$, durata estesa) . . .	81
6.16	Caratteristiche delle missioni ricavate ($T = 1 N$, durata estesa) . . .	82
6.17	Caratteristiche delle missioni ricavate ($T = 1 N$, durata estesa di 125 giorni)	82

6.18	Panoramica delle missioni ricavate ($T = 1 N$, detrito 19 escluso) . .	83
6.19	Caratteristiche delle missioni ricavate ($T = 1 N$, detrito 19 escluso) .	83

Acronimi

ACO	Ant Colony Optimization.
ADR	Active Debris Removal.
ESA	European Space Agency.
GTOC9	9 th Global Trajectory Optimization Competition.
JPL	Jet Propulsion Laboratory.
LEO	Low Earth Orbit.
MJD2000	Modified Julian Date 2000.
RAAN	Right Ascension of the Ascending Node.
TSP	Travelling Salesman Problem.
OCT	Optimal Control Theory.

Capitolo 1

Contesto di ricerca

Il 4 ottobre 1957 avviene il lancio in orbita del satellite artificiale Sputnik 1, segnando l'inizio dell'era spaziale. A partire da quel momento, l'interesse dell'uomo verso l'esplorazione dello spazio è aumentato esponenzialmente, portando a notevoli progressi tecnologici. Tuttavia, le attività spaziali hanno anche generato una problematica crescente: l'accumulo di detriti spaziali, la cui gestione si è affermata come una delle sfide più urgenti per garantire la sostenibilità a lungo termine delle operazioni in orbita terrestre.

1.1 Detriti spaziali

Secondo la definizione dell'IADC (Inter-Agency Space Debris Coordination Committee), i detriti spaziali rappresentano l'insieme di tutti gli oggetti artificiali non funzionanti che orbitano attorno alla Terra. Questi includono satelliti non più operativi, stadi esausti di lanciatori, frammenti derivanti da collisioni o esplosioni.

L'ambiente spaziale è diventato progressivamente più congestionato dall'inizio dell'era spaziale. Secondo il rapporto annuale dell'Agenzia Spaziale Europea (ESA) del 2024 [1], si stima che in orbita siano presenti circa 35000 detriti con un diametro superiore ai 10 *cm*, valore che sale fino a 128 milioni se si considerano anche i detriti con dimensioni dell'ordine dei millimetri. I detriti di dimensioni superiori a 10 *cm* sono generalmente tracciabili dai sistemi radar di sorveglianza spaziale, mentre quelli più piccoli rappresentano una minaccia "invisibile", ma potenzialmente letale per i satelliti operativi a causa delle elevate velocità orbitali (circa 8 *km/s* in orbita bassa).

Inoltre, la distribuzione dei detriti non risulta uniforme: particolari regioni orbitali presentano una densità significativamente più elevata di altre. Le regioni più congestionate includono la fascia LEO (Low Earth Orbit), con un'altitudine compresa tra 200 e 2000 *km*, e le orbite geostazionarie (Geostationary Earth Orbit - GEO), a circa 35786 *km* di altitudine. In particolare, la regione LEO mostra picchi di densità di detriti attorno agli 800 – 1000 *km* di altitudine, in corrispondenza di orbite con inclinazioni di 82° e 98°, ovvero le orbite eliosincrone.

Le fonti principali di detriti spaziali includono: frammentazioni, ovvero esplosioni accidentali di satelliti o stadi di lanciatori, spesso dovute a delle fonti residue di energia immagazzinata, come carburante o batterie; collisioni tra oggetti in orbita che generano numerosi frammenti; oggetti rilasciati durante le fasi operative delle missioni spaziali, come coperchi di protezione, componenti di separazione e altri elementi funzionali; test anti-satellite, ovvero distruzioni deliberate di satelliti che producono nuvole di detriti. In particolare, gli eventi significativi che negli scorsi decenni hanno contribuito maggiormente all'attuale popolazione di detriti sono:

- Il test anti-satellite cinese su Fengyun-1C nel 2007, che ha generato oltre 3.000 frammenti tracciabili.
- La collisione accidentale tra il satellite operativo Iridium 33 e quello inattivo Cosmos 2251 nel 2009, che ha prodotto più di 2.000 frammenti tracciabili.
- Il test anti-satellite russo su Cosmos-1408 nel 2021, che ha creato una nuvola di detriti in orbita bassa.

1.2 Sindrome di Kessler

Nel 1978, l'astrofisico della NASA Donald J. Kessler teorizzò uno scenario in cui la densità di oggetti in orbita LEO potrebbe diventare sufficientemente elevata da innescare una cascata di collisioni. Questo fenomeno, noto come "Sindrome di Kessler", descrive una situazione in cui ogni collisione genera nuovi frammenti che aumentano a loro volta la probabilità di ulteriori collisioni, creando un effetto a catena autoalimentante.

La Sindrome di Kessler costituisce un rischio sistemico per l'esplorazione spaziale, in quanto potrebbe rendere alcune regioni orbitali inutilizzabili per generazioni. La crescente consapevolezza di tale minaccia ha portato la comunità internazionale a sviluppare strategie per mitigare l'accumulo dei detriti spaziali. Un passo significativo in questa direzione è stato compiuto nel 2002, quando l'IADC ha pubblicato le prime linee guida per la mitigazione dei detriti spaziali. Successivamente, queste linee guida sono state il punto di partenza per lo sviluppo delle normative attuali, che includono: norme per la progettazione di veicoli spaziali volte a minimizzare il rilascio di detriti, procedure per lo smaltimento di satelliti e stadi di lanciatori a fine missione e strategie per ridurre il rischio di collisioni tra i satelliti operativi.

Secondo i dati presentati nel rapporto annuale sull'ambiente spaziale dell'ESA del 2024, anche in assenza di ulteriori lanci, le collisioni tra i detriti attualmente presenti porterebbero a diversi eventi di collisione a cascata nei prossimi secoli, e conseguentemente a una crescita critica della popolazione di detriti in orbita bassa terrestre. Pertanto, le linee guida attuali sulla mitigazione dei detriti spaziali non sono sufficienti per prevenire questo scenario. Risulta quindi necessario implementare

delle normative più rigorose e, al contempo, pianificare delle missioni di rimozione attiva dei detriti spaziali per ripulire le orbite più congestionate.

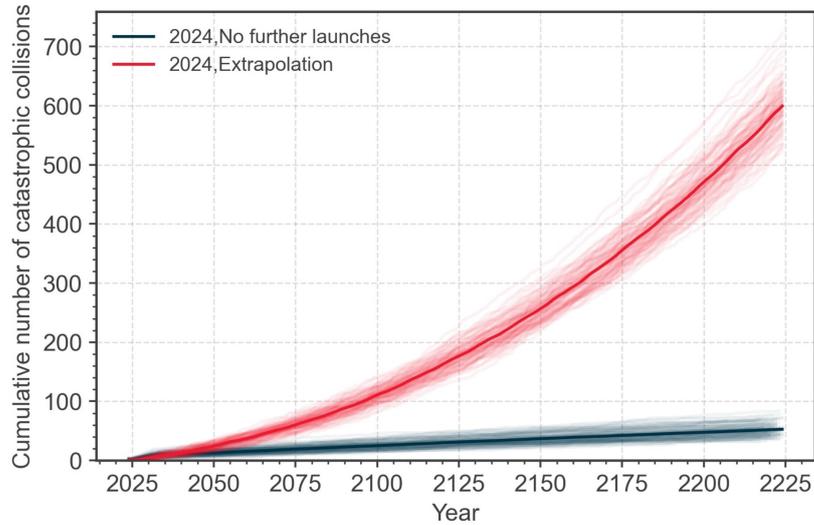


Figura 1.1: Estrapolazione del numero di collisioni catastrofiche nell’orbita terrestre

1.3 Missioni ADR

Le missioni di rimozione attiva dei detriti rappresentano un approccio interventistico alla problematica dei detriti spaziali, finalizzato alla rimozione mirata di oggetti non funzionanti dall’ambiente spaziale. Queste missioni si differenziano dalle strategie di mitigazione, che mirano a prevenire la creazione di nuovi detriti, concentrandosi invece sulla riduzione della popolazione esistente. Gli studi indicano che la rimozione mirata di 5 – 10 detriti di grandi dimensioni all’anno dalle regioni orbitali più congestionate potrebbe stabilizzare la crescita della popolazione di detriti. In particolare, i candidati ideali per la rimozione riguardano tutti quegli oggetti caratterizzati da un elevato rischio di collisione.

Le missioni ADR presentano numerose sfide tecniche, tra cui l’identificazione e il tracciamento dei detriti da rimuovere, operazioni di rendezvous con oggetti in rotazione non controllata, la cattura di detriti con geometrie complesse e l’ottimizzazione della sequenza di rimozione per missioni *multi-target*. Diverse tecnologie sono state proposte e sviluppate per affrontare queste sfide, raggruppabili principalmente in due categorie: tecnologie di cattura e tecnologie di *de-orbiting*. Le prime riguardano tutti i sistemi progettati per afferrare e manipolare i detriti, come bracci robotici con meccanismi di aggancio meccanico oppure reti per la cattura di oggetti in rotazione. Le seconde, invece, rappresentano tecnologie che vengono installate direttamente sul detrito per permetterne il rientro controllato in atmosfera, come piccoli sistemi propulsivi chimici o elettrici, *drag sails* che aumentano la resistenza atmosferica o *theter* che generano forze frenanti attraverso l’interazione col campo magnetico

terrestre. Queste soluzioni sono generalmente supportate da sensori e sistemi di controllo, come radar di prossimità e LIDAR, e algoritmi di navigazione autonoma per consentire le operazioni di rendezvous con oggetti non collaborativi.

1.3.1 Propulsione elettrica per missioni ADR

La propulsione elettrica rappresenta una tecnologia particolarmente promettente per le missioni ADR, soprattutto quando si considera la rimozione sequenziale di molteplici detriti con una singola missione. I sistemi di propulsione elettrica utilizzano energia elettrica (tipicamente fornita da pannelli solari) per accelerare un propellente a velocità decisamente più elevate rispetto ai sistemi chimici tradizionali.

I vantaggi della propulsione elettrica per le missioni ADR riguardano l'elevato impulso specifico e il controllo preciso della spinta. Il primo consente un notevole risparmio di propellente consumato, permettendo di trasportare un maggiore carico utile, mentre il secondo risulta particolarmente vantaggioso per le manovre di rendezvous. Di contro, la propulsione elettrica è caratterizzata da un basso livello di spinta, che richiede manovre di lunga durata e comporta differenti criticità legate alla pianificazione delle trasferte orbitali tra detriti.

1.3.2 Iniziative attuali

Diverse agenzie spaziali e aziende private stanno sviluppando tecnologie e missioni dimostrative per la rimozione attiva dei detriti. In particolare, si sottolineano:

- **ESA ClearSpace-1** La prima missione commerciale di rimozione dei detriti, con l'obiettivo di rimuovere uno stadio superiore del lanciatore Vega dall'orbita terrestre, pianificata per il 2026.
- **JAXA ADRAS-J** Una missione dimostrativa per l'individuazione e l'osservazione di un detrito spaziale giapponese.
- **Astroscale ELSA-d** Una missione dimostrativa per il rendezvous, la cattura e la rimozione di un satellite.
- **Surrey Space Centre RemoveDEBRIS** Una missione dimostrativa che ha testato tecnologie come reti, arpioni e sistemi di controllo per la cattura di un detrito.

1.4 Algoritmi metaeuristici

Gli algoritmi metaeuristici rappresentano una classe di metodi computazionali sviluppati per risolvere problemi di ottimizzazione complessi, per i quali i metodi analitici risulterebbero impraticabili a causa delle dimensioni elevate dello spazio di ricerca o della complessità della funzione obiettivo. Questi algoritmi sono particolarmente adatti per problemi combinatori di tipo *NP-hard*, come quello dell'ottimizzazione

delle missioni ADR.

Le caratteristiche principali degli algoritmi metaeuristici includono:

- Ispirazione biologica o fisica, in quanto molti algoritmi metaeuristici traggono ispirazione da processi naturali, comportamenti animali o fenomeni fisici.
- Approccio stocastico, poiché questi algoritmi utilizzano delle metodologie casuali per esplorare lo spazio delle soluzioni.
- Bilanciamento tra esplorazione e sfruttamento, ovvero mirano a equilibrare la ricerca di nuove regioni promettenti dello spazio delle soluzioni (esplorazione) con la focalizzazione sull'intorno di soluzioni ottimali (sfruttamento).
- Convergenza verso soluzioni sub-ottimali, infatti non garantiscono di trovare la soluzione globalmente ottima, ma sono in grado di identificare soluzioni di alta qualità in tempi ragionevoli e con costi computazionali relativamente bassi.
- Versatilità, ovvero possono essere applicati a una vasta gamma di problemi di ottimizzazione con minime modifiche.

L'applicazione degli algoritmi metaeuristici al problema dell'ottimizzazione delle missioni ADR risulta particolarmente vantaggiosa data la natura complessa del problema.

Nei seguenti paragrafi, verranno presentati tre degli algoritmi metaeuristici più rilevanti per l'ottimizzazione del problema in esame: l'algoritmo della colonia di formiche (ACO), gli algoritmi genetici (GA) e l'ottimizzazione con sciame di particelle (PSO).

1.4.1 Ant Colony Optimization

L'algoritmo ACO si basa sul comportamento collettivo delle formiche nella ricerca delle fonti di nutrimento. In particolare, l'algoritmo simula il deposito delle tracce di feromone lungo i percorsi e la tendenza delle formiche a seguire le tracce più intense. Inizialmente, le formiche artificiali costruiscono soluzioni in modo probabilistico combinando informazioni euristiche, specifiche del problema, con la concentrazione di feromone, che rappresenta l'esperienza accumulata. Dopo la costruzione delle soluzioni, il feromone viene aggiornato in base alla qualità dei percorsi trovati, con un meccanismo di evaporazione che previene la convergenza prematura.

1.4.2 Algoritmi genetici

Gli algoritmi genetici traggono ispirazione dai principi dell'evoluzione naturale, simulando processi di selezione, ricombinazione e mutazione in una popolazione di potenziali soluzioni. Ciascuna soluzione è codificata come una stringa di "geni", che rappresentano i parametri del problema, e viene valutata attraverso una funzione di *fitness* che ne misura la qualità. Ad ogni generazione, gli individui con *fitness*

migliore hanno maggiori probabilità di essere selezionati per la riproduzione, garantendo la propagazione delle caratteristiche vantaggiose. Gli operatori di *crossover* combinano il materiale genetico di due individui, mentre la mutazione introduce casualmente variazioni per mantenere la diversità. L'approccio evolutivo permette di esplorare efficacemente ampie regioni dello spazio di ricerca, evitando minimi locali e convergendo verso soluzioni di alta qualità. Gli algoritmi genetici si prestano particolarmente all'ottimizzazione multi-obiettivo, inoltre la loro struttura intrinsecamente parallelizzabile consente implementazioni efficienti per problemi computazionalmente intensivi.

1.4.3 Particle Swarm Optimization

L'ottimizzazione a sciame di particelle si ispira al comportamento sociale degli stormi di uccelli o dei banchi di pesci nella ricerca collettiva di risorse. Nell'algoritmo PSO, un insieme di particelle, rappresentanti potenziali soluzioni, si muove nello spazio di ricerca guidato da tre componenti: l'inerzia, che tende a mantenere la stessa direzione di movimento; l'attrazione cognitiva, che spinge verso la migliore posizione personale; l'attrazione sociale, che orienta verso la migliore posizione trovata dall'intero sciame. Questa semplice interazione genera un comportamento emergente che consente di esplorare efficacemente le regioni promettenti dello spazio delle soluzioni. I suoi principali vantaggi includono la semplicità implementativa, il numero ridotto di parametri da configurare e la rapida convergenza verso soluzioni di buona qualità. Nelle applicazioni reali, la PSO è spesso utilizzata in combinazione con altri algoritmi in approcci ibridi, dove può ottimizzare i parametri continui del problema mentre le tecniche complementari gestiscono gli aspetti discreti.

Capitolo 2

Fondamenti di astrodinamica

Il presente capitolo si propone di fornire al lettore una panoramica dei concetti fondamentali dell'astrodinamica, necessari per una migliore comprensione delle tematiche affrontate nei capitoli successivi di questo elaborato. Per ulteriori approfondimenti, si rimanda a [2] e [3].

2.1 Meccanica orbitale

Tra il 1609 e il 1619, Johannes Kepler pubblicò le tre leggi del moto planetario, marcando un punto di svolta nello studio della meccanica orbitale. Esse sono:

- **Prima legge di Keplero** L'orbita descritta da un pianeta è un'ellisse, con il Sole in uno dei due fuochi.
- **Seconda legge di Keplero** Il segmento che unisce il pianeta al Sole spazia aree uguali in tempi uguali.
- **Terza legge di Keplero** Il quadrato del periodo di rivoluzione di un pianeta è proporzionale al cubo della distanza media del pianeta dal Sole.

Nonostante queste leggi fossero il risultato di osservazioni e rappresentassero solamente una descrizione del moto planetario, esse gettarono le basi per le scoperte rivoluzionarie di Isaac Newton. Nel primo libro di *Philosophiae Naturalis Principia Mathematica* (1687), Newton introdusse le tre leggi del moto:

- **Prima legge di Newton** Ogni corpo permane nel suo stato di quiete o di moto rettilineo uniforme, a meno che non sia costretto a mutare tale stato da forze applicate ad esso.
- **Seconda legge di Newton** La variazione della quantità di moto è proporzionale alla forza impressa ed è nella stessa direzione della forza.
- **Terza legge di Newton** Ad ogni azione corrisponde sempre una reazione uguale e contraria.

Per un sistema a massa costante, la seconda legge può essere espressa secondo la relazione

$$\sum \mathbf{F} = m\ddot{\mathbf{r}} \quad (2.1)$$

dove $\sum \mathbf{F}$ è la sommatoria delle forze agenti sulla massa m e $\ddot{\mathbf{r}}$ è il vettore accelerazione valutato rispetto ad un sistema di riferimento inerziale.

Nella medesima trattazione, Newton enunciò anche la legge di gravitazione universale, la quale stabilisce che due corpi qualsiasi si attraggono con una forza proporzionale al prodotto delle loro masse e inversamente proporzionale al quadrato della distanza tra essi:

$$\mathbf{F}_g = -G \frac{M \cdot m}{r^2} \frac{\mathbf{r}}{r} \quad (2.2)$$

dove M e m sono le masse dei due corpi, \mathbf{r} è il vettore da M verso m , \mathbf{F}_g è la forza agente sulla massa m e G è la costante gravitazionale universale pari a $6.67 \cdot 10^{-11} \text{ Nm}^2/\text{kg}^2$.

2.1.1 Problema degli n-corpi

In un generico istante di tempo, un corpo qualsiasi (ad esempio un pianeta o un satellite) subisce l'effetto di ulteriori corpi e di diverse forze esterne, quali la resistenza atmosferica, la spinta o la radiazione solare.

Per ipotesi si supponga che le forze agenti siano solamente di natura gravitazionale e che i corpi abbiano una simmetria sferica. Considerando il sistema di n-corpi in figura 2.1, l'obiettivo del problema è ricavare la legge del moto del corpo m_i .

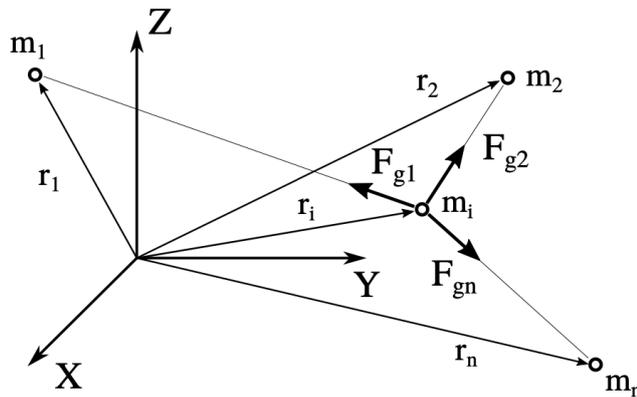


Figura 2.1: Problema degli n-corpi

Applicando la legge di gravitazione universale, la forza \mathbf{F}_{gj} agente su m_i a causa di un generico corpo m_j risulta

$$\mathbf{F}_{gj} = -G \frac{m_i \cdot m_j}{r_{ij}^3} \mathbf{r}_{ij} \quad (2.3)$$

La sommatoria vettoriale di tutte le forze gravitazionali agenti su m_i può essere espressa come

$$\mathbf{F}_g = -Gm_i \sum_{\substack{j=1 \\ j \neq i}}^n \frac{m_j}{r_{ij}^3} \mathbf{r}_{ij} \quad (2.4)$$

Applicando la seconda legge di Newton e assumendo che la massa del corpo i -esimo rimanga costante, l'equazione 2.4 può essere riscritta come

$$\ddot{\mathbf{r}}_i = -G \sum_{\substack{j=1 \\ j \neq i}}^n \frac{m_j}{r_{ij}^3} \mathbf{r}_{ij} \quad (2.5)$$

Tale equazione può essere estesa a tutti i corpi del sistema; tuttavia, il sistema di equazioni differenziali così ricavato non presenta una soluzione analitica.

2.1.2 Problema dei due corpi

Si consideri una semplificazione del problema precedente limitandosi al caso di due corpi, pur mantenendo invariate le ipotesi adottate. L'accelerazione del corpo m_2 rispetto al corpo m_1 risulta

$$\ddot{\mathbf{r}}_{12} = \ddot{\mathbf{r}}_2 - \ddot{\mathbf{r}}_1 \quad (2.6)$$

Sostituendo l'equazione 2.5 in 2.6, si ricava

$$\ddot{\mathbf{r}}_{12} = -G \frac{m_1}{r_{12}^3} \mathbf{r}_{12} + G \frac{m_2}{r_{21}^3} \mathbf{r}_{21} \quad (2.7)$$

Poiché $\mathbf{r}_{21} = -\mathbf{r}_{12}$, allora

$$\ddot{\mathbf{r}}_{12} = -G \frac{m_1 + m_2}{r_{12}^3} \mathbf{r}_{12} \quad (2.8)$$

Per semplicità di notazione si sostituisce \mathbf{r}_{12} con \mathbf{r} , m_1 con M e m_2 con m , ottenendo quindi

$$\ddot{\mathbf{r}} = -G \frac{M + m}{r^3} \mathbf{r} \quad (2.9)$$

Se la massa del corpo primario M risulta significativamente superiore a quella del corpo secondario m , si consideri ad esempio il caso di un satellite artificiale o di un detrito spaziale in orbita attorno alla Terra, allora si può ragionevolmente assumere che $G(M + m) \approx GM$. Pertanto, risulta conveniente introdurre il parametro gravitazionale:

$$\mu = GM \quad (2.10)$$

Di conseguenza, l'equazione 2.9 si semplifica in

$$\ddot{\mathbf{r}} = -\frac{\mu}{r^3} \mathbf{r} \quad (2.11)$$

La relazione appena ricavata rappresenta l'equazione del moto relativo nel problema dei due corpi.

2.1.3 Conservazione dell'energia meccanica

Si consideri il prodotto scalare dell'equazione del moto con il vettore velocità

$$\dot{\mathbf{r}} \cdot \ddot{\mathbf{r}} + \dot{\mathbf{r}} \cdot \frac{\mu}{r^3} \mathbf{r} = 0 \quad (2.12)$$

Poiché $\mathbf{a} \cdot \dot{\mathbf{a}} = a\dot{a}$, $\mathbf{v} = \dot{\mathbf{r}}$ e $\dot{\mathbf{v}} = \ddot{\mathbf{r}}$, si ricava

$$v\dot{v} + \frac{\mu}{r^3} r\dot{r} = 0 \quad (2.13)$$

che corrisponde a

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{v^2}{2} - \frac{\mu}{r} \right) = 0 \quad (2.14)$$

Il termine racchiuso tra parentesi è l'energia meccanica specifica:

$$\varepsilon = \frac{v^2}{2} - \frac{\mu}{r} + c \quad (2.15)$$

dove il primo contributo rappresenta l'energia cinetica per unità di massa, il secondo corrisponde all'energia potenziale per unità di massa, mentre c è una costante arbitraria il cui valore dipende dall'energia potenziale di punto zero. Per convenzione si assume $c = 0$, fissando in questo modo l'energia potenziale di riferimento pari a zero all'infinito. Di conseguenza

$$\varepsilon = \frac{v^2}{2} - \frac{\mu}{r} \quad (2.16)$$

Si può, dunque, affermare che un corpo che si muove sotto l'influenza della sola forza gravitazionale non varia la sua energia meccanica complessiva; l'energia può, infatti, solamente trasformarsi, passando da energia cinetica a potenziale e viceversa.

2.1.4 Conservazione del momento angolare

Si consideri adesso il prodotto vettoriale dell'equazione del moto con il vettore \mathbf{r}

$$\mathbf{r} \times \ddot{\mathbf{r}} + \mathbf{r} \times \frac{\mu}{r^3} \mathbf{r} = 0 \quad (2.17)$$

Poiché $\mathbf{a} \times \mathbf{a} = 0$, il secondo termine scompare. Pertanto, l'equazione precedente si semplifica in

$$\mathbf{r} \times \ddot{\mathbf{r}} = 0 \quad (2.18)$$

che corrisponde a

$$\frac{d}{dt} (\mathbf{r} \times \mathbf{v}) = 0 \quad (2.19)$$

Di conseguenza, il momento angolare specifico

$$\mathbf{h} = \mathbf{r} \times \mathbf{v} \quad (2.20)$$

risulta costante lungo l'orbita e, per definizione, sempre perpendicolare ai vettori \mathbf{r} e \mathbf{v} . Il moto del corpo secondario risulta quindi confinato in un piano fisso nello spazio, che prende il nome di piano orbitale.

Per ricavare il modulo del momento angolare si introduce il *flight path angle* φ , ovvero l'angolo compreso tra il vettore velocità e l'orizzonte locale, come mostrato in figura 2.2. Di conseguenza

$$h = rv \sin\left(\frac{\pi}{2} - \varphi\right) = rv \cos \varphi \quad (2.21)$$

dove l'angolo $\pi/2 - \varphi$ solitamente prende il nome di *zenith angle* γ .

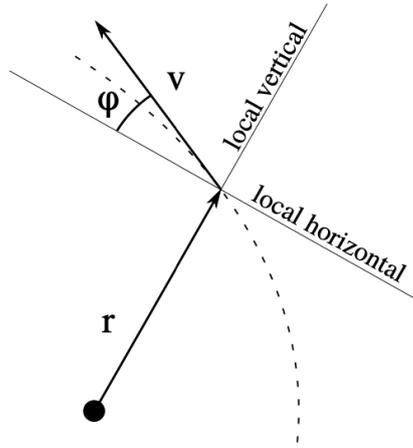


Figura 2.2: Flight path angle

2.1.5 Integrazione dell'equazione del moto

Il prodotto vettoriale dell'equazione del moto con il vettore \mathbf{h} risulta

$$\ddot{\mathbf{r}} \times \mathbf{h} = \frac{\mu}{r^3} (\mathbf{h} \times \mathbf{r}) \quad (2.22)$$

che corrisponde a

$$\frac{d}{dt} (\dot{\mathbf{r}} \times \mathbf{h}) = \mu \frac{d}{dt} \left(\frac{\mathbf{r}}{r} \right) \quad (2.23)$$

Integrando si ricava

$$\dot{\mathbf{r}} \times \mathbf{h} = \mu \left(\frac{\mathbf{r}}{r} \right) + \mathbf{B} \quad (2.24)$$

dove \mathbf{B} è la costante vettoriale di integrazione. Considerando il prodotto scalare della relazione appena ottenuta con \mathbf{r}

$$\mathbf{r} \cdot \dot{\mathbf{r}} \times \mathbf{h} = \mathbf{r} \cdot \mu \left(\frac{\mathbf{r}}{r} \right) + \mathbf{r} \cdot \mathbf{B} \quad (2.25)$$

Poiché $\mathbf{a} \cdot \mathbf{b} \times \mathbf{c} = \mathbf{a} \times \mathbf{b} \cdot \mathbf{c}$ e $\mathbf{a} \cdot \mathbf{a} = a^2$, si ricava

$$h^2 = \mu r + rB \cos \nu \quad (2.26)$$

dove ν è l'angolo compreso tra la costante vettoriale \mathbf{B} e il raggio vettore \mathbf{r} . Esplicitando la variabile r , si ottiene

$$r = \frac{h^2/\mu}{1 + (B/\mu) \cos \nu} \quad (2.27)$$

che rappresenta l'equazione della traiettoria in coordinate polari e descrive il moto del corpo secondario rispetto al primario.

2.1.6 Equazione polare di una sezione conica

Una sezione conica è una curva piana ottenuta dall'intersezione di un piano con la superficie di un cono circolare retto, come mostrato in figura 2.3. Se il piano taglia solamente una falda del cono, la sezione ricavata prende il nome di ellisse. Il cerchio rappresenta un caso particolare di un'ellisse in cui il piano di intersezione è parallelo alla base del cono. Se il piano, invece, è parallelo alla generatrice del cono, allora l'intersezione definisce una parabola. Infine, se il piano attraversa entrambe le falde del cono, allora la sezione è detta iperbole e presenta due rami distinti.

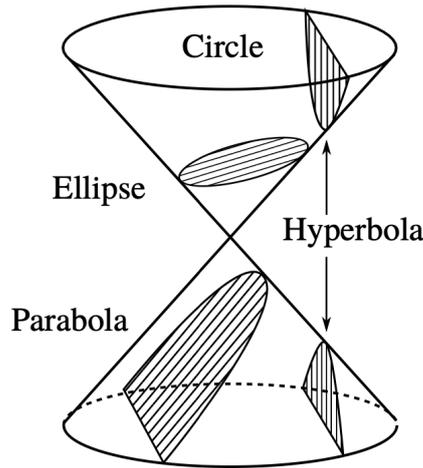


Figura 2.3: Sezioni coniche

Matematicamente la sezione conica rappresenta il luogo geometrico dei punti per i quali il rapporto tra la distanza da un punto fisso, detto fuoco, e la distanza da una retta fissa, detta direttrice, è costante. Tale rapporto, noto come eccentricità, è definito come:

$$e = \frac{r}{d} \quad (2.28)$$

L'equazione di una sezione conica, espressa in coordinate polari con l'origine situata nel fuoco, risulta

$$r = \frac{p}{1 + e \cos \nu} \quad (2.29)$$

dove p è la costante geometrica denominata *semilatus rectum*, mentre ν rappresenta l'anomalia vera, ovvero l'angolo compreso tra il vettore posizione e il punto sulla conica più vicino al fuoco. Questa equazione coincide formalmente con l'equazione della traiettoria e permette di verificare la prima legge di Keplero, estendendo inoltre

il moto orbitale a qualsiasi sezione conica.

Considerando i parametri geometrici dell'ellisse, il fuoco F rappresenta la posizione del corpo primario, mentre il fuoco F' non assume alcun significato fisico. La lunghezza della corda passante per entrambi i fuochi è denominata asse maggiore ed è indicata con $2a$ in figura 2.4; di conseguenza il parametro a prende il nome di semiasse maggiore. La corda perpendicolare all'asse maggiore e passante per un fuoco è denominata *latus rectum* ed è indicata con $2p$. Infine, la distanza tra i due fuochi è rappresentata dal parametro $2c$. Dalla definizione di sezione conica si ricavano

$$e = \frac{c}{a} \quad (2.30)$$

$$p = a(1 - e^2) \quad (2.31)$$

Queste espressioni risultano valide per qualsiasi conica, ad eccezione della parabola.

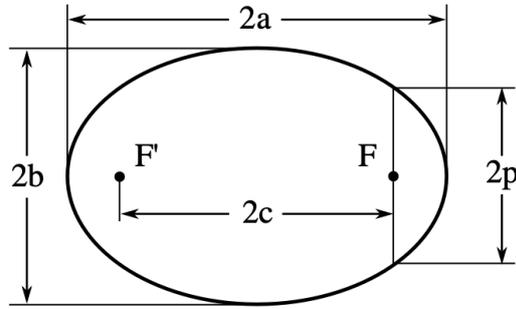


Figura 2.4: Parametri geometrici dell'ellisse

Gli estremi dell'asse maggiore di un'orbita prendono il nome di apside. In particolare, il punto più vicino al corpo primario è denominato periapside, mentre quello più lontano è chiamato apoapside. Si osserva che per un'orbita circolare questi punti non risultano univocamente definiti, invece per le orbite aperte (ovvero parabola ed iperbole) l'apoapside non assume alcun significato fisico. La distanza dal fuoco primario al periapside o all'apoapside si ricava imponendo i valori $\nu = 0$ o $\nu = \pi$ nell'equazione 2.29, ottenendo

$$r_p = \frac{p}{1 + e} = a(1 - e) \quad (2.32)$$

$$r_a = \frac{p}{1 - e} = a(1 + e) \quad (2.33)$$

La convenzione adottata per l'anomalia vera implica che la costante vettoriale \mathbf{B} sia orientata verso il periapside. Confrontando le equazioni 2.27 e 2.29, si ricava il vettore eccentricità:

$$\mathbf{e} = \frac{\mathbf{B}}{\mu} \quad (2.34)$$

che è un vettore costante, anch'esso diretto dal fuoco primario verso il periapside. Inoltre, si osserva che il *semilatus rectum* p dipende solamente dal momento angolare

specifico h :

$$p = \frac{h^2}{\mu} \quad (2.35)$$

2.1.7 Relazione tra l'energia meccanica e la geometria dell'orbita

L'equazione dell'energia 2.16 può essere scritta per qualsiasi punto della traiettoria. In particolare, per il periapside si ricava

$$\varepsilon = \frac{v_p^2}{2} - \frac{\mu}{r_p} \quad (2.36)$$

Il *flight path angle* risulta nullo all'apoapside e al periapside, quindi

$$h = r_p v_p = r_a v_a \quad (2.37)$$

Sostituendo quanto appena ricavato nell'equazione 2.36, si ottiene

$$\varepsilon = \frac{h^2}{2r_p^2} - \frac{\mu}{r_p} \quad (2.38)$$

Combinando le equazioni 2.31 e 2.35 si ricava

$$h^2 = \mu a(1 - e^2) \quad (2.39)$$

Allora

$$\varepsilon = \frac{\mu a(1 - e^2)}{2a^2(1 - e)^2} - \frac{\mu}{a(1 - e)} \quad (2.40)$$

che si semplifica in

$$\varepsilon = -\frac{\mu}{2a} \quad (2.41)$$

Questa espressione, valida per qualsiasi tipo di orbita, esprime il legame tra il semiasse maggiore e l'energia meccanica di un satellite. Dunque, per le orbite chiuse (ovvero cerchio ed ellisse) il semiasse a risulta positivo e l'energia ε è negativa. Nel caso di un'orbita parabolica, il valore di a tende all'infinito e l'energia è nulla. Infine, per un'iperbole a assume un valore negativo, a cui corrisponde una ε positiva. Inoltre, combinando le equazioni 2.39 e 2.41 si ricava

$$e = \sqrt{1 + \frac{2\varepsilon h^2}{\mu^2}} \quad (2.42)$$

che mette in risalto la relazione tra l'eccentricità e l'energia meccanica specifica.

2.1.8 Orbite chiuse

Nella presente trattazione si considereranno esclusivamente orbite ellittiche e, in alcuni casi, si assumerà l'ipotesi di eccentricità nulla. Risulta quindi opportuno ricavare alcune relazioni fondamentali per le orbite chiuse.

Considerando un'orbita circolare, l'energia meccanica risulta

$$\varepsilon = \frac{v^2}{2} - \frac{\mu}{r} = -\frac{\mu}{2r} \quad (2.43)$$

poiché $r = a$. Si ricava quindi la velocità circolare:

$$v_c = \sqrt{\frac{\mu}{r}} \quad (2.44)$$

Si osserva che, all'aumentare del raggio orbitale, la velocità necessaria per mantenere il satellite su tale orbita circolare diminuisce.

Considerando un'orbita ellittica, il momento angolare risulta

$$h = rv \cos \varphi = rv_t \quad (2.45)$$

dove v_t è la componente tangenziale della velocità, esprimibile anche come $r\dot{\nu}$. Di conseguenza

$$h = r^2 \frac{d\nu}{dt} \quad (2.46)$$

L'elemento differenziale di area dA , spazzato dal raggio vettore \mathbf{r} durante una rotazione infinitesima $d\nu$, risulta

$$dA = \frac{1}{2} r^2 d\nu \quad (2.47)$$

Sostituendo questa espressione in 2.46, si ottiene

$$dt = \frac{2}{h} dA \quad (2.48)$$

che dimostra la seconda legge di Keplero, poiché h è costante. Integrando su un periodo si ricava

$$T_E = \frac{2}{h} \int_{A_E} dA = \frac{2\pi ab}{h} \quad (2.49)$$

dove $A_E = \pi ab$ è l'area dell'ellisse, mentre T_E rappresenta il periodo orbitale. Da semplici considerazioni sulla geometria dell'ellisse, si può dimostrare che

$$a^2 = b^2 + c^2 \quad (2.50)$$

Utilizzando questa relazione insieme alle equazioni 2.30, 2.31 e 2.35, si ottiene

$$T_E = 2\pi \sqrt{\frac{a^3}{\mu}} \quad (2.51)$$

Pertanto, si osserva che il periodo di un'orbita ellittica dipende unicamente dal semiasse maggiore. Inoltre, l'equazione 2.51 dimostra la terza legge di Keplero, poiché il semiasse maggiore equivale alla "distanza media" di un satellite dal corpo

primario. Infine, risulta utile introdurre il parametro

$$n = \frac{2\pi}{T_E} = \sqrt{\frac{\mu}{a^3}} \quad (2.52)$$

noto come *mean motion*, ovvero la velocità angolare media del satellite lungo l'orbita.

2.2 Sistemi di riferimento

Per determinare accuratamente la posizione e la velocità di un satellite in un dato istante di tempo risulta essenziale identificare un sistema di riferimento inerziale opportuno. Nell'ambito dell'astrodinamica i sistemi di riferimento ortogonali sono i più utilizzati, sebbene talvolta si preferisca trattare il problema mediante coordinate polari sferiche. Per descrivere correttamente un sistema ortogonale è necessario stabilire la posizione dell'origine, l'orientamento del piano fondamentale, nonché la direzione e il verso degli assi di riferimento. Tuttavia, ogni sistema di riferimento definibile è soggetto a un certo grado di incertezza nelle sue proprietà inerziali, a causa di fenomeni perturbativi. Una strategia pragmatica per definire un sistema di riferimento quasi-inerziale consiste nell'orientare gli assi del sistema verso le stelle fisse.

2.2.1 Sistema di riferimento eliocentrico

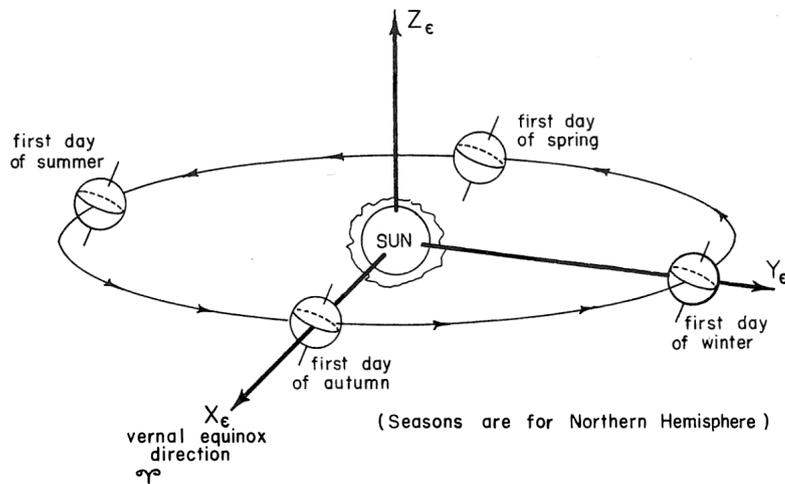


Figura 2.5: Sistema di riferimento eliocentrico

Come indicato dal nome, l'origine del sistema eliocentrico è il centro del Sole. Il piano fondamentale è l'eclittica, ovvero il piano di rivoluzione della Terra. La direzione dell'asse X_e è definita dall'intersezione dell'eclittica con il piano equatoriale durante il primo giorno di Primavera, il verso positivo è definito in direzione della costellazione dell'Ariete (direzione dell'equinozio vernale ♈ in figura 2.5). L'asse Z_e è normale all'eclittica con verso positivo in direzione dell'emisfero che contiene la stella polare. Infine, l'asse Y_e è definito secondo le convenzioni della terna destrorsa. A causa

della differente attrazione del Sole e della Luna, l'asse di rotazione terrestre ruota lentamente la sua direzione nel corso dei secoli. Questo effetto, noto col termine di precessione luni-solare, comporta una variazione dell'intersezione del piano equatoriale con l'eclittica; di conseguenza, il sistema di riferimento eliocentrico risulta, come già anticipato, quasi-inerziale.

2.2.2 Sistema di riferimento geocentrico

L'origine del sistema di riferimento geocentrico è il centro della Terra. Il piano fondamentale corrisponde al piano equatoriale e l'asse X è definito positivo verso l'equinozio vernale. L'asse Z è normale al piano equatoriale e punta verso il Polo Nord. Infine, l'asse Y completa la terna destrorsa. Quindi, questo sistema di riferimento non ruota con la Terra, ma risulta fisso rispetto alle stelle. I versori \mathbf{I} , \mathbf{J} e \mathbf{K} giacciono rispettivamente sugli assi X , Y e Z , come mostrato in figura 2.6.

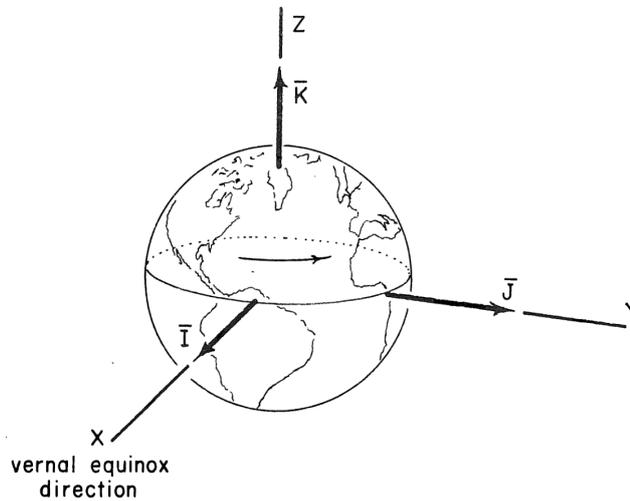


Figura 2.6: Sistema di riferimento geocentrico

2.2.3 Sistema di riferimento perifocale

Come per il sistema geocentrico, l'origine coincide con il centro della Terra, mentre il piano fondamentale corrisponde al piano orbitale del satellite. L'asse x punta in direzione del periapside, mentre l'asse y è ruotato di 90° in direzione del moto del satellite. Infine, l'asse z è normale all'orbita e punta nel verso positivo del vettore del momento angolare specifico \mathbf{h} . I versori nelle direzioni degli assi x , y e z sono identificati rispettivamente con \mathbf{p} , \mathbf{q} e \mathbf{w} .

Considerando la figura 2.7, si determina il vettore posizione:

$$\mathbf{r} = r \cos \nu \mathbf{p} + r \sin \nu \mathbf{q} \quad (2.53)$$

Differenziando si ottiene il vettore velocità:

$$\mathbf{v} = \dot{\mathbf{r}} = (\dot{r} \cos \nu - r\dot{\nu} \sin \nu)\mathbf{p} + (\dot{r} \sin \nu + r\dot{\nu} \cos \nu)\mathbf{q} \quad (2.54)$$

Sostituendo $v_r = \dot{r}$ e $v_t = r\dot{\nu}$ nell'espressione precedente si ricava

$$\mathbf{v} = (v_r \cos \nu - v_t \sin \nu)\mathbf{p} + (v_r \sin \nu + v_t \cos \nu)\mathbf{q} \quad (2.55)$$

e poiché

$$v_r = v_t \tan \varphi = v_t \frac{e \sin \nu}{1 + e \cos \nu} \quad (2.56)$$

$$v_t = \frac{h}{r} \quad \text{con} \quad r = \frac{h^2/\mu}{1 + e \cos \nu} \quad (2.57)$$

si ottiene

$$\mathbf{v} = -\frac{\mu}{h}(\sin \nu)\mathbf{p} + (e + \cos \nu)\mathbf{q} \quad (2.58)$$

Valutando il prodotto scalare

$$\mathbf{r} \cdot \mathbf{v} = rv \sin \varphi = \frac{\mu}{h} r e \sin \nu \quad (2.59)$$

si osserva che

$$\begin{cases} \mathbf{r} \cdot \mathbf{v} > 0 \Rightarrow \varphi > 0 & \text{se } 0 < \nu < \pi \\ \mathbf{r} \cdot \mathbf{v} < 0 \Rightarrow \varphi < 0 & \text{se } \pi < \nu < 2\pi \end{cases} \quad (2.60)$$

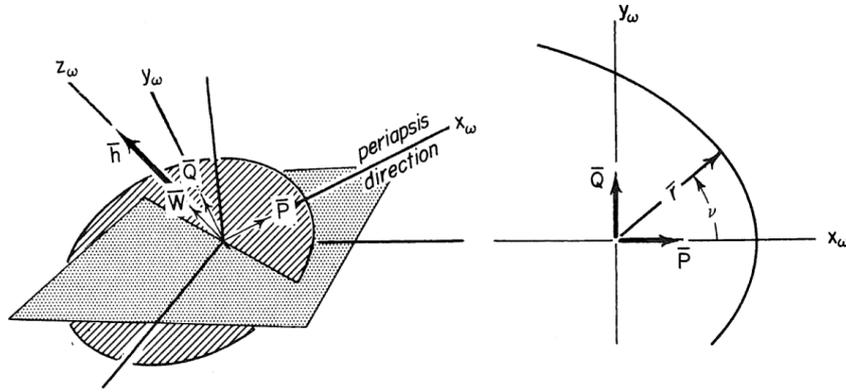


Figura 2.7: Sistema di riferimento perifocale

2.3 Parametri orbitali kepleriani

La forma e l'orientamento di un'orbita nello spazio, insieme alla posizione di un satellite su di essa, sono completamente descritti dai vettori posizione e velocità, variabili nel tempo. Tuttavia, una traiettoria kepleriana può essere unicamente definita da 6 parametri costanti. Nel contesto bidimensionale, sono necessari solamente 4 elementi: 3 dei quali descrivono dimensione, forma e orientamento dell'orbita nel piano orbitale; mentre un quarto parametro è richiesto per localizzare la posizione del satellite lungo l'orbita, in un dato istante temporale. I restanti 2 parametri or-

bitali definiscono, infine, l'orientamento del piano orbitale nello spazio tridimensionale.

Pertanto, l'utilizzo diretto dei vettori posizione e velocità si rivela poco pratico e si preferisce adottare gli elementi orbitali classici:

- **Semiassse maggiore a** Definisce la dimensione dell'orbita.
- **Eccentricità e** Definisce la forma dell'orbita. Un'orbita circolare ha $e = 0$, mentre un'orbita ellittica possiede $0 < e < 1$.
- **Inclinazione i** È definita come l'angolo compreso tra il versore \mathbf{K} e il vettore del momento angolare, quindi

$$i = \arccos \frac{\mathbf{h} \cdot \mathbf{K}}{h} \quad (2.61)$$

Per definizione, l'inclinazione è sempre compresa tra 0 e π radianti. Nello specifico, se $0 < i < \pi/2$ allora l'orbita si definisce prograda (o diretta) poiché il satellite si muove nella stessa direzione di rotazione del Sole, della Terra e della maggior parte dei pianeti, ovvero verso Est. Al contrario, se $\pi/2 < i < \pi$ l'orbita viene definita retrograda, con un moto opposto alla rotazione terrestre.

- **Longitudine del nodo ascendente (RAAN) Ω** È definita come l'angolo, misurato nel piano fondamentale, compreso tra il versore \mathbf{I} e il punto in cui il satellite attraversa il piano fondamentale dirigendosi verso Nord, da cui il termine "nodo ascendente". Matematicamente, la linea dei nodi è definita dal vettore unitario

$$\mathbf{n} = \frac{\mathbf{K} \times \mathbf{h}}{\|\mathbf{K} \times \mathbf{h}\|} \quad (2.62)$$

orientato verso il nodo ascendente. Di conseguenza

$$\begin{cases} \Omega = \arccos(\mathbf{n} \cdot \mathbf{I}) & \text{se } \mathbf{n} \cdot \mathbf{J} \geq 0 \\ \Omega = 2\pi - \arccos(\mathbf{n} \cdot \mathbf{I}) & \text{se } \mathbf{n} \cdot \mathbf{J} < 0 \end{cases} \quad (2.63)$$

- **Argomento del periapside ω** È definito come l'angolo misurato nel piano orbitale tra il nodo ascendente e il periapside, nel verso del moto del satellite. Matematicamente si calcola come

$$\begin{cases} \omega = \arccos \frac{\mathbf{n} \cdot \mathbf{e}}{e} & \text{se } \mathbf{e} \cdot \mathbf{K} \geq 0 \\ \omega = 2\pi - \arccos \frac{\mathbf{n} \cdot \mathbf{e}}{e} & \text{se } \mathbf{e} \cdot \mathbf{K} < 0 \end{cases} \quad (2.64)$$

- **Anomalia vera ν** Corrisponde all'angolo nel piano orbitale compreso tra il periapside e la posizione del satellite in un dato istante di riferimento detto *epoch*. Si valuta come

$$\begin{cases} \nu = \arccos \frac{\mathbf{r} \cdot \mathbf{e}}{re} & \text{se } \mathbf{r} \cdot \mathbf{v} \geq 0 \\ \nu = 2\pi - \arccos \frac{\mathbf{r} \cdot \mathbf{e}}{re} & \text{se } \mathbf{r} \cdot \mathbf{v} < 0 \end{cases} \quad (2.65)$$

I parametri orbitali a ed e definiscono quindi la forma e la dimensione dell'orbita, ovvero la sua geometria. I parametri i , Ω e ω determinano, invece, l'orientamento dell'orbita nel sistema di riferimento. Infine, ν stabilisce la posizione del satellite.

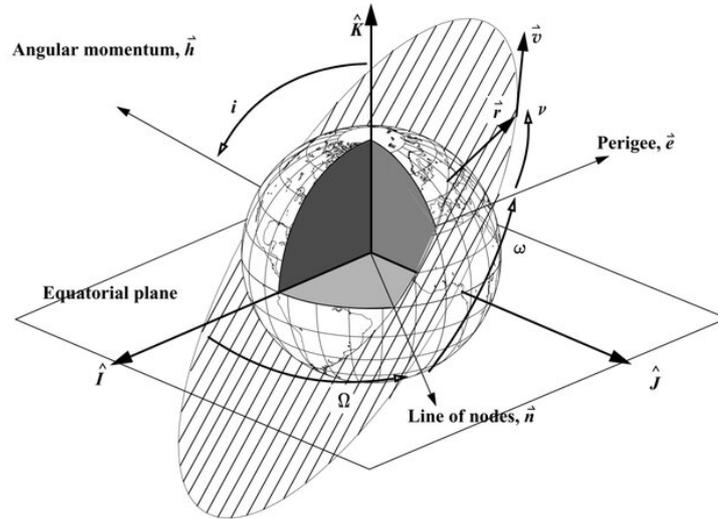


Figura 2.8: Elementi orbitali classici

2.4 Perturbazioni orbitali

Nella trattazione del problema dei due corpi si è ipotizzato che le uniche forze agenti sul sistema fossero di natura gravitazionale. Tuttavia, nella realtà un satellite è soggetto a diversi fenomeni perturbativi che possono influenzare la sua traiettoria orbitale e compromettere il corretto svolgimento di una missione spaziale. Tra le principali fonti di perturbazione si annoverano l'attrazione gravitazionale di un terzo corpo (come la Luna o il Sole), la non sfericità del corpo primario, la resistenza atmosferica, la pressione della radiazione solare, gli effetti dei campi magnetici e la spinta dovuta ai sistemi propulsivi.

Nel breve periodo, tali effetti sono trascurabili e l'orbita del satellite risulta ben approssimata dalla soluzione del problema dei due corpi; si parla dunque di orbita kepleriana o ideale. Tuttavia, su scale temporali maggiori, le perturbazioni comportano delle alterazioni significative negli elementi orbitali, che non risultano più costanti ma variano lentamente nel tempo. In questo scenario, il satellite non segue un'unica orbita kepleriana, ma una successione di orbite kepleriane, caratterizzate da parametri orbitali differenti. Si definisce, pertanto, orbita osculatrice l'orbita kepleriana che, in un determinato istante di riferimento, approssima nel modo più preciso la traiettoria del satellite. Le perturbazioni influenzano l'evoluzione di un parametro orbitale attraverso tre meccanismi principali: gli effetti secolari che determinano variazioni cumulative e tendenzialmente lineari nel tempo; le oscillazioni di lungo periodo dovute all'interazione tra diversi elementi orbitali; le oscillazioni di corto

periodo causate da fenomeni periodici. Generalmente, questi effetti si sovrappongono, determinando l'andamento dei parametri orbitali nel tempo.

L'equazione del moto 2.11 per il problema dei due corpi non perturbato può essere ampliata per includere gli effetti delle perturbazioni:

$$\ddot{\mathbf{r}} = -\frac{\mu}{r^3}\mathbf{r} + \mathbf{a}_p \quad (2.66)$$

dove \mathbf{a}_p è l'accelerazione dovuta alle forze perturbative. L'equazione del moto perturbato non presenta una soluzione in forma chiusa, quindi è necessario adottare dei metodi approssimati per la sua integrazione. Le due metodologie più diffuse sono i *general perturbation methods* e gli *special perturbation methods*. I primi approssimano l'accelerazione \mathbf{a}_p attraverso un'espansione in serie troncata e forniscono, tramite integrazione a tratti, una soluzione analitica approssimata. Questo approccio è stato storicamente impiegato per la determinazione delle orbite planetarie e ha contribuito alla dimostrazione dell'esistenza di Urano e Nettuno. Invece, gli *special perturbation methods* si basano sull'integrazione diretta dell'equazione del moto, a partire da un insieme di condizioni iniziali.

2.4.1 Equazioni planetarie di Gauss

Le equazioni planetarie di Gauss descrivono l'evoluzione dei parametri orbitali in presenza di forze perturbative, mettendo in relazione le componenti della perturbazione con le variazioni degli elementi orbitali. Gauss derivò queste equazioni utilizzando un sistema di riferimento RSW, in cui il versore \mathbf{R} è diretto lungo il raggio vettore, il versore \mathbf{S} giace sul piano orbitale ed è perpendicolare all'asse R nella direzione del moto, mentre il versore \mathbf{W} è normale al piano orbitale e completa la terna destrorsa. In tale sistema di riferimento, la forza perturbativa per unità di massa può essere scomposta nelle tre componenti:

$$\mathbf{F}_p = F_R\mathbf{R} + F_S\mathbf{S} + F_W\mathbf{W} \quad (2.67)$$

Di conseguenza, le derivate dei parametri orbitali assumono la seguente forma:

$$\begin{aligned} \dot{a} &= \frac{2}{n\sqrt{1-e^2}} \left[(e \sin \nu) F_R + \left(\frac{p}{r} \right) F_S \right] \\ \dot{e} &= \frac{\sqrt{1-e^2}}{na} \left[(\sin \nu) F_R + \left(\cos \nu + \frac{e + \cos \nu}{1 + e \cos \nu} \right) F_S \right] \\ \dot{i} &= \frac{r \cos(\omega + \nu)}{na^2\sqrt{1-e^2}} F_W \\ \dot{\Omega} &= \frac{r \sin(\omega + \nu)}{na^2\sqrt{1-e^2} \sin i} F_W \\ \dot{\omega} &= \frac{\sqrt{1-e^2}}{nae} \left[-(\cos \nu) F_R + \sin \nu \left(1 + \frac{r}{p} \right) F_S \right] - \dot{\Omega} \cos i \\ \dot{M} &= n - \frac{2r}{na^2} F_R - \sqrt{1-e^2} (\dot{\omega} + \dot{\Omega} \cos i) \end{aligned} \quad (2.68)$$

dove l'anomalia vera è stata sostituita con l'anomalia media M . Talvolta queste equazioni sono formulate utilizzando un sistema di riferimento VNW, in cui il versore \mathbf{V} è diretto lungo il vettore velocità e \mathbf{N} completa la terna ortogonale.

Un aspetto chiave delle equazioni planetarie di Gauss è la loro dipendenza dal parametro ν , di conseguenza l'effetto di una forza perturbativa varia a seconda della posizione del satellite lungo l'orbita. Inoltre, si osservano altre proprietà caratteristiche: la geometria dell'orbita, determinata da a ed e , è influenzata solamente da azioni perturbative nel piano dell'orbita, mentre l'inclinazione e la RAAN dipendono esclusivamente dalla componente normale al piano. In particolare, data una forza F_W , la variazione di Ω risulta più significativa per basse inclinazioni. Infine, si evidenzia la stretta correlazione tra i parametri Ω , ω e M .

2.4.2 Non sfericità della Terra

La geodesia è la disciplina scientifica che si occupa della misurazione e della rappresentazione della Terra, del suo campo gravitazionale e dei fenomeni geodinamici. Grazie alle scoperte della geodesia, si è dedotto che la Terra non è perfettamente sferica, ma uno sferoide oblato. Il pianeta, infatti, presenta un appiattimento ai poli e un rigonfiamento all'equatore. Inoltre, misurazioni geodetiche di precisione hanno rilevato che la distribuzione della massa terrestre è asimmetrica, a causa della presenza di masse concentrate eterogenee sotto la superficie.

Di conseguenza, l'espressione dell'energia potenziale ricavata nel problema dei due corpi non risulta completamente valida. Considerando il sistema di coordinate geografiche geodetico WGS84, il potenziale gravitazionale risulta

$$\varepsilon_g = -\frac{\mu}{r} \left\{ 1 - \sum_{n=2}^{\infty} J_n \left(\frac{R_{\oplus}}{r} \right)^n \mathcal{P}_n \sin La - \sum_{n=2}^{\infty} \sum_{m=2}^{\infty} \left(\frac{R_{\oplus}}{r} \right)^n J_{n,m} \mathcal{P}_n^m \sin La \cos [m(\text{Lo} - \text{Lo}_{n,m})] \right\} \quad (2.69)$$

Dove $\mathcal{P}_n(x)$ rappresenta il polinomio di Legendre di grado n :

$$\mathcal{P}_n(x) = \frac{1}{2^n n!} \frac{d^n}{dx^n} [(x^2 - 1)^n] \quad (2.70)$$

Invece, $\mathcal{P}_n^m(x)$ rappresenta il polinomio di Legendre associato di grado n e ordine m :

$$\mathcal{P}_n^m(x) = (-1)^m (1 - x^2)^{\frac{m}{2}} \frac{d^m}{dx^m} [\mathcal{P}_n(x)] \quad (2.71)$$

I coefficienti J_n sono definiti armoniche zonali, invece i termini J_n^m sono denominati armoniche tesserali se $n \neq m$ o armoniche settoriali se $n = m$. Le armoniche zonali descrivono la variazione della forza gravitazionale in funzione della sola latitudine e dipendono principalmente dalla distribuzione di massa lungo l'asse polare. In

particolare, le armoniche con pedice pari presentano una simmetria rispetto al piano equatoriale, mentre quelle con pedice dispari ne sono prive. Invece, le armoniche settoriali dipendono esclusivamente dalla longitudine, mentre le tesserali sono funzione sia della latitudine che della longitudine.

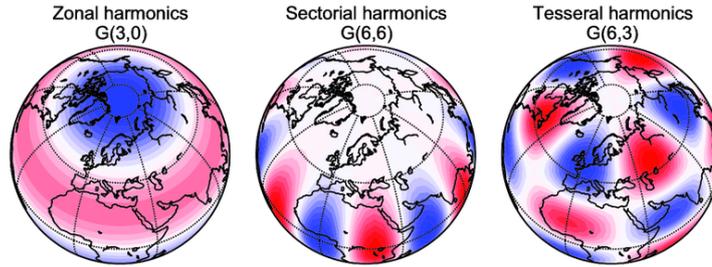


Figura 2.9: Armoniche sferiche del campo gravitazionale terrestre

Il rigonfiamento equatoriale della Terra introduce una componente attrattiva diretta verso il piano equatoriale. Tale componente genera una coppia sull'orbita che tende ad allineare il piano orbitale con l'equatore, producendo un effetto giroscopico che causa la regressione della linea dei nodi, come illustrato in figura 2.10. Questo fenomeno è descritto principalmente dall'armonica zonale J_2 , che costituisce il termine perturbativo più significativo, con un valore di $J_2 = 1.08262668 \cdot 10^{-3}$ (superiore di circa tre ordini di grandezza rispetto alle altre armoniche). Inoltre, per i satelliti in orbite LEO, l'effetto delle armoniche settoriali e tesserali risulta mediamente nullo, a causa della rotazione terrestre rispetto all'orbita del satellite.

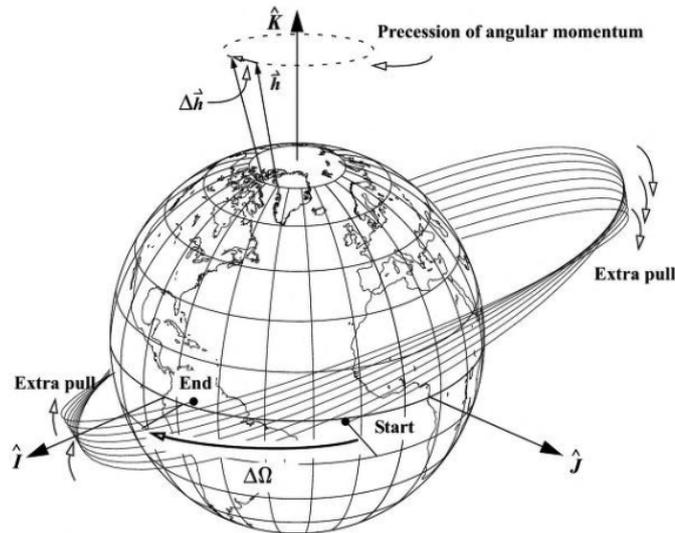


Figura 2.10: Regressione della linea dei nodi

Pertanto, considerando unicamente l'effetto del termine J_2 si possono determinare le variazioni secolari di Ω e ω dopo una singola rivoluzione orbitale:

$$\Delta\Omega = -3\pi J_2 \left(\frac{R_{\oplus}}{p} \right)^2 \cos i \quad (2.72)$$

$$\Delta\omega = \frac{3}{2}\pi J_2 \left(\frac{R_{\oplus}}{p}\right)^2 (5 \cos^2 i - 1) \quad (2.73)$$

Si osserva che la variazione della RAAN aumenta al diminuire dell'inclinazione orbitale, risultando praticamente nulla per orbite polari. Inoltre, $\Delta\Omega < 0$ per orbite dirette, determinando una regressione della linea dei nodi, mentre per orbite retrograde $\Delta\Omega > 0$, causando un fenomeno di precessione. Per quanto riguarda la linea degli apsidi, questa subisce un avanzamento per $i < 63.4^\circ$ o $i > 116.6^\circ$, invece regredisce per inclinazioni comprese tra questi valori.

Il fenomeno della regressione della linea dei nodi può essere sfruttato per la progettazione di orbite eliosincrone, ovvero orbite geocentriche il cui piano orbitale mantiene un angolo costante rispetto al Sole durante la rivoluzione terrestre. I satelliti in orbite eliosincrone sorvolano ogni punto della superficie terrestre alla stessa ora solare locale, caratteristica particolarmente vantaggiosa per missioni di osservazione terrestre, in quanto garantisce condizioni di illuminazione costanti ad ogni passaggio.

Capitolo 3

Fondamenti di propulsione spaziale

Il sistema propulsivo è un elemento cruciale per l'efficacia delle missioni ADR, in quanto consente di effettuare le trasferte orbitali necessarie per l'intercettazione dei detriti spaziali e di attuare le manovre di rendezvous per le operazioni di servicing. Le prestazioni di un sistema propulsivo sono determinate da molteplici parametri, tra cui la spinta generata e l'efficienza nell'uso del propellente. Il presente capitolo si propone di fornire al lettore un quadro concettuale dei principi fondamentali della propulsione elettrica e delle sue differenze rispetto alla propulsione chimica, aspetti essenziali per comprendere alcune scelte di trade-off discusse nei capitoli successivi. Per un approfondimento più dettagliato, si rimanda a [4].

3.1 Introduzione alla propulsione spaziale

Lo scopo di un sistema propulsivo è generare una forza che permetta di mettere in movimento un corpo inizialmente fermo o di variarne la sua velocità. Tale spinta è prodotta attraverso lo scambio della quantità di moto con un corpo esterno, secondo il principio di azione e reazione di Newton. Tuttavia, nello spazio non è presente un mezzo su cui esercitare una forza; di conseguenza, un satellite risulta un sistema isolato e, per generare una spinta, deve portare con sé un mezzo con cui scambiare quantità di moto, ovvero il propellente.

I sistemi propulsivi possono essere classificati in base alla fonte di energia utilizzata per espellere il propellente; le principali fonti attualmente in uso risultano chimiche o elettriche. La propulsione chimica sfrutta l'energia rilasciata da una reazione chimica per espellere il propellente, generando spinte considerevoli. Per questo motivo, è impiegata principalmente nei lanciatori e nelle manovre di ascesa in orbita. Al contrario, la propulsione elettrica utilizza l'energia fornita da un generatore di potenza (tipicamente pannelli solari) per accelerare il propellente mediante effetti elettrostatici o elettromagnetici. Questi sistemi producono spinte relativamente basse, tuttavia risultano più efficienti in termini di consumo di propellente, rendendoli ideali

per la propulsione di satelliti in orbita terrestre.

Si consideri un sistema isolato, lontano da qualsiasi altra massa che potrebbe generare una forza gravitazionale, con una massa m e una velocità V all'istante t . Dopo un tempo infinitesimale dt , il sistema espelle una massa dm_p variando la sua velocità in $V + dV$. La massa infinitesimale possiede una velocità relativa c rispetto al sistema. Considerando per semplicità un modello unidimensionale e applicando la conservazione della quantità di moto, si ricava

$$mv = (m - dm_p)(V + dV) - dm_p(c - V) \quad (3.1)$$

ovvero

$$m dV = dm_p c \quad (3.2)$$

Estendendo questo ragionamento all'emissione del propellente dal satellite, si introduce il concetto di portata in massa di propellente:

$$\dot{m}_p = \frac{dm_p}{dt} \quad (3.3)$$

Il differenziale dm_p può essere sostituito con il prodotto tra la portata e dt , di conseguenza

$$m \frac{dV}{dt} = \dot{m}_p c \quad (3.4)$$

dove il termine a sinistra dell'uguale corrisponde alla spinta del satellite, in quanto è il prodotto tra la massa del sistema e la sua accelerazione. Quindi

$$T = \dot{m}_p c \quad (3.5)$$

Come accennato in precedenza, per accelerare il propellente è necessaria un'energia. Pertanto, risulta conveniente definire la potenza propulsiva:

$$P_T = \frac{1}{2} \dot{m}_p c^2 = \frac{1}{2} T c \quad (3.6)$$

che rappresenta la potenza necessaria per accelerare il propellente da 0 a c .

In un sistema reale, il flusso di propellente è caratterizzato da interazioni fluidodinamiche complesse all'interno della camera di combustione e dell'ugello, che influenzano sia la velocità di uscita che la distribuzione di pressione. Di conseguenza, definendo con u_e la velocità di uscita del propellente, la spinta totale generata dal sistema propulsivo risulta

$$T = \dot{m}_p u_e + A_e (p_e - p_0) \quad (3.7)$$

dove A_e è l'area della sezione di uscita dell'ugello, p_e rappresenta la pressione del propellente nella medesima sezione e p_0 è la pressione atmosferica esterna, che risulta

nulla nel vuoto. Nella presente trattazione, si è interessati principalmente all'effetto netto della spinta sul satellite, trascurando i dettagli dei processi termofluidodinamici del propulsore. Per questo motivo, risulta conveniente definire la velocità efficace di scarico:

$$c = \frac{T}{\dot{m}_p} = u_e + A_e \frac{p_e}{\dot{m}_p} \quad (3.8)$$

Questa grandezza integra in un unico parametro sia gli effetti della velocità di efflusso dei gas di scarico che della pressione all'uscita dell'ugello, semplificando l'analisi delle prestazioni di un sistema propulsivo.

3.2 Prestazioni di un sistema propulsivo

Risulta utile definire una grandezza che descriva l'effetto complessivo della spinta durante un intervallo di tempo, come la durata di una trasferta orbitale o dell'intera missione. Integrando la spinta nel tempo, si definisce l'impulso totale:

$$I_t = \int_{t_0}^{t_f} T dt \quad (3.9)$$

L'impulso totale rappresenta la quantità di moto trasferita al satellite e fornisce una misura dell'effetto utile di un sistema propulsivo. Se la spinta è costante, l'equazione precedente si semplifica in

$$I_t = T \cdot \Delta t \quad (3.10)$$

dove Δt è la durata di funzionamento del propulsore. La massa totale di propellente consumata risulta

$$m_p = \int_{t_0}^{t_f} \dot{m}_p dt \quad (3.11)$$

Si definisce l'impulso specifico come il rapporto tra l'impulso totale e il peso del propellente consumato sulla superficie terrestre:

$$I_{sp} = \frac{I_t}{m_p g_0} \quad (3.12)$$

Se sia la spinta che la portata di propellente sono costanti, l'impulso specifico si semplifica in

$$I_{sp} = \frac{I_t}{m_p g_0} = \frac{T}{\dot{m}_p g_0} = \frac{c}{g_0} \quad (3.13)$$

Si osserva dunque che l'impulso specifico e la velocità efficace di scarico sono proporzionali e rappresentano entrambi una misura dell'efficienza con cui il propellente viene espulso.

Per comprendere meglio il significato fisico dell'impulso specifico, si consideri un endoreattore ideale e si supponga che la spinta generata sia pari al peso del

propellente disponibile. Dalla definizione dell'impulso totale si ricava

$$\Delta t = \frac{I_t}{T} = \frac{I_{sp} m_p g_0}{T} \quad (3.14)$$

Sostituendo la relazione $T = m_p g_0$, si ottiene

$$\Delta t = I_{sp} \quad (3.15)$$

Questo risultato dimostra che l'impulso specifico rappresenta il tempo per cui una certa quantità di propellente può fornire una spinta pari al proprio peso. Di conseguenza, per un dato quantitativo di propellente, un propulsore con un impulso specifico più elevato può funzionare per un tempo maggiore oppure, a parità di tempo, fornire una spinta maggiore. Pertanto, per ottimizzare un sistema propulsivo, è fondamentale massimizzare l'impulso specifico nei limiti imposti dai requisiti della missione.

Come precedentemente discusso, la funzione primaria di un sistema propulsivo è modificare la velocità del satellite. A tal fine, risulta utile definire la variazione della velocità, ottenuta integrando l'accelerazione del satellite nel tempo:

$$\Delta V = \int_{t_0}^{t_f} \frac{T}{m} dt \quad (3.16)$$

Questa grandezza, denominata "delta-V", rappresenta la variazione di velocità che il satellite subirebbe se l'unica forza agente fosse la spinta del propulsore, applicata in direzione parallela alla velocità. Tuttavia, nella realtà, la variazione effettiva della velocità dipende anche da altre forze esterne e dalla direzione della spinta rispetto alla traiettoria, che non necessariamente coincide col vettore velocità. Nonostante queste considerazioni, il ΔV costituisce comunque una misura dell'effetto utile della spinta propulsiva sul satellite. Sostituendo l'equazione 3.8, si ricava

$$\Delta V = \int_{t_0}^{t_f} \frac{c \dot{m}_p}{m} dt \quad (3.17)$$

Durante il funzionamento del propulsore, il consumo di propellente comporta una progressiva riduzione della massa del satellite, pertanto la portata in massa di propellente risulta

$$\dot{m}_p = -\frac{dm}{dt} \quad (3.18)$$

dove m è la massa istantanea del satellite. Di conseguenza

$$\Delta V = \int_{m_0}^{m_f} -c \frac{dm}{m} \quad (3.19)$$

Assumendo che c sia costante durante l'intera manovra, l'equazione precedente si semplifica in

$$\Delta V = c \ln \left(\frac{m_0}{m_f} \right) \quad (3.20)$$

Questa relazione è nota in letteratura come equazione del razzo di Tsiolkovsky e può essere riformulata come

$$m_f = m_0 e^{-\frac{\Delta V}{c}} \quad (3.21)$$

L'equazione del razzo costituisce una delle leggi fondamentali della propulsione spaziale, in quanto stabilisce una relazione diretta tra il bilancio di massa del satellite, le prestazioni di un sistema propulsivo e il ΔV richiesto dalla manovra o missione. La massa di propellente consumata risulta quindi

$$m_p = m_0 - m_f = m_0 \left(1 - e^{-\frac{\Delta V}{c}}\right) \quad (3.22)$$

Da questa relazione si evince che, a parità di ΔV , un aumento della velocità di scarico (o, equivalentemente, dell'impulso specifico) comporta una riduzione del consumo di propellente. Nella tabella 3.1 sono riportati i valori tipici di ΔV richiesti per diverse tipologie di missioni spaziali.

Missione	ΔV [km/s]
Inserimento in LEO	10
Station-keeping per 1 anno	0.5
LEO-GEO (impulsivo)	3.5
LEO-GEO (bassa spinta)	6
Escape dalla Terra (impulsiva)	3.2
Escape dalla Terra (bassa spinta)	8
Terra-Marte (impulsivo)	5.5
Terra-Marte (bassa spinta)	6
Terra-Giove (bassa spinta)	16.7
Terra-Alfa Centauri	30000

Tabella 3.1: Tipici valori di ΔV

In prima approssimazione, l'impulso totale dipende solamente dal tipo di missione, ovvero dal ΔV :

$$I_t \approx m_{avg} \Delta V \quad (3.23)$$

dove m_{avg} rappresenta la massa media del satellite durante la manovra. Inoltre, dalla definizione dell'impulso specifico, si ricava

$$m_p \approx \frac{m_{avg} \Delta V}{I_{sp} g_0} \quad (3.24)$$

Si osserva che, fissata la missione, la massa di propellente risulta inversamente proporzionale all'impulso specifico del sistema propulsivo. Di conseguenza, raddoppiando I_{sp} , il consumo di propellente si dimezza.

3.3 Differenze tra propulsione chimica ed elettrica

Nella propulsione chimica il propellente, generalmente suddiviso in combustibile e ossidante, reagisce rilasciando energia chimica, la quale viene successivamente

convertita in energia cinetica attraverso l'espansione e l'accelerazione dei prodotti di reazione (gas caldi) nell'ugello, generando la spinta. Applicando il bilancio dell'energia nella camera di reazione si ricava

$$\dot{m}_p \left(h_e + \frac{u_e^2}{2} - h_0 \right) = \eta \dot{m}_p E_{ch} \quad (3.25)$$

dove E_{ch} è l'energia chimica per unità di massa rilasciata dalla reazione, mentre h_0 e h_e rappresentano, rispettivamente, le entalpie specifiche del propellente all'ingresso e all'uscita della camera di combustione. Il rendimento η esprime la frazione di energia chimica effettivamente convertita in energia entalpica. Trascurando le entalpie specifiche e assumendo rendimento unitario, si ottiene

$$c \approx u_e \approx \sqrt{2E_{ch}} \quad (3.26)$$

In un propulsore chimico, quindi, la velocità efficace di scarico risulta intrinsecamente limitata dall'energia liberata dalla reazione. Questo risultato è intuitivo, poiché la fonte di energia impiegata per accelerare il propellente è contenuta nel propellente stesso. D'altro canto, tale caratteristica rende i propulsori chimici altamente scalabili: è infatti possibile variare la portata di propellente, e quindi la spinta generata, senza alterare la velocità efficace di scarico. Di conseguenza, si possono teoricamente ottenere propulsori con spinte arbitrariamente elevate, a fronte di un consumo maggiore di propellente. La combinazione di reagenti con le migliori prestazioni è costituita da idrogeno e ossigeno liquidi, per i quali si ottengono valori tipici di $c = 4.5 \text{ km/s}$ e $I_{sp} = 450 \text{ s}$.

Invece, nei propulsori elettrici la portata di propellente \dot{m}_p riceve una certa potenza elettrica P_E . Il propulsore è in grado di convertire questa potenza in energia cinetica:

$$\eta P_e \approx \dot{m}_p \frac{c^2}{2} \quad (3.27)$$

A differenza dei propulsori chimici, in quelli elettrici il rendimento è spesso sensibilmente minore di 1, poiché la conversione di energia elettrica in cinetica presenta perdite notevoli. Si ricava

$$c \approx \sqrt{\frac{2\eta P_E}{\dot{m}_p}} \quad (3.28)$$

Pertanto, si possono ottenere, almeno a livello teorico, elevati valori della velocità efficace di scarico incrementando la potenza elettrica o riducendo la portata di propellente. Inoltre, diversamente dalla propulsione chimica in cui la potenza fornita e quella richiesta sono strettamente legate dalla massa di propellente, nella propulsione elettrica tali grandezze risultano scorrelate. Di conseguenza, la propulsione elettrica consente di ottenere impulsi specifici superiori rispetto alla chimica; tuttavia è necessario avere a bordo un generatore di potenza, con un conseguente aumento del

peso e dei costi. Sostituendo l'equazione 3.8 in 3.28, si ricava

$$c \approx \frac{2\eta P_E}{T} \quad (3.29)$$

La propulsione elettrica è caratterizzata da prolungati tempi di spinta, che influenzano significativamente la traiettoria ottimale della trasferta. Inoltre, ogni missione è caratterizzata da un valore ottimale di impulso specifico. Entrambi questi aspetti sono dovuti al peso del generatore. La massa complessiva di un satellite risulta infatti

$$m = m_u + m_p + m_s \quad (3.30)$$

dove m_u rappresenta il carico utile, m_p la massa di propellente, m_s la massa del generatore. Tali masse influenzano l'accelerazione del satellite:

$$a = \frac{T}{m} \quad (3.31)$$

L'accelerazione del sistema complessivo risulta sicuramente minore dell'accelerazione che si avrebbe, a parità di spinta, se ci fosse solamente il generatore:

$$a = \frac{T}{m} < \frac{T}{m_s} \quad (3.32)$$

La massa del generatore è considerata proporzionale alla potenza elettrica, quindi

$$m_s = \alpha P_E = \frac{\alpha T c}{\eta} \quad (3.33)$$

dove α è la massa specifica del generatore. Migliore è la tecnologia del sistema propulsivo e minore sarà il valore di α . Di conseguenza

$$a < \frac{2\eta}{\alpha c} \quad (3.34)$$

Considerando dei valori tipici di un propulsore elettrico, $\eta = 0.5$, $c = 10 \text{ km/s}$ e $\alpha = 10^{-3} \text{ Kg/W}$ (valore ottimistico), si ricava

$$a < 0.1 \text{ m/s}^2 \approx \frac{g_0}{100} \quad (3.35)$$

Pertanto, la propulsione elettrica non risulta adatta all'ascesa dalla superficie terrestre. Invece, essa può essere impiegata in orbita, dove la forza di gravità è equilibrata dalle forze centrifughe.

In sintesi, la propulsione chimica permette di generare spinte molto elevate, ma il suo impulso specifico risulta limitato dalla scelta del propellente. Al contrario, la propulsione elettrica è capace di generare impulsi specifici più elevati, ma richiede una sorgente di energia elettrica a bordo e produce spinte ridotte. La scelta tra le due tipologie di propulsione dipende dai requisiti della missione. Ad esempio, l'inserimento in orbita richiede spinte elevate, pertanto la propulsione chimica rappresenta l'unica

opzione praticabile. Invece, le missioni interplanetarie traggono vantaggio dalla propulsione elettrica, riducendo il consumo di propellente, a scapito di tempi di trasferta più lunghi.

3.4 Manovre con propulsione elettrica

La propulsione elettrica è caratterizzata da spinte di modesta entità, con conseguenti accelerazioni ridotte e tempi di manovra prolungati. Di conseguenza, le manovre eseguite con questo tipo di propulsione non possono essere considerate impulsive, bensì si parla di manovre a spinta continua.

3.4.1 Approssimazione di Edelbaum

Un metodo ampiamente utilizzato per l'analisi delle trasferte a bassa spinta è l'approssimazione di Edelbaum, che consente una stima efficace del ΔV necessario. Tale approccio assume che le orbite siano quasi circolari, ossia $e \approx 0$, quindi

$$r \approx a \approx p \quad (3.36)$$

e la velocità orbitale risulta

$$V^2 = \frac{\mu}{r} \quad (3.37)$$

Inoltre, si assume che la variazione dell'inclinazione sia piccola, di conseguenza

$$\begin{aligned} \sin i &\approx 0 \\ \cos i &\approx 1 \end{aligned} \quad (3.38)$$

Tuttavia, il metodo di Edelbaum può essere esteso anche a variazioni significative dell'inclinazione, a condizione che la variazione tra due orbite consecutive sia contenuta. Si introduce, inoltre, l'ipotesi che l'anomalia vera sia approssimativamente uguale all'anomalia eccentrica e all'anomalia media:

$$\nu \approx E \approx M \quad (3.39)$$

Di conseguenza, la velocità angolare risulta costante e pari a

$$n = \sqrt{\frac{\mu}{a^3}} \quad (3.40)$$

Infine, si assume che la velocità sia sempre tangente all'orbita e che l'accelerazione dovuta alla spinta sia significativamente inferiore rispetto all'accelerazione gravitazionale, pertanto

$$\begin{aligned} a_V &\approx a_T \ll \frac{\mu}{r^2} \\ a_R &\ll \frac{\mu}{r^2} \\ a_W &\ll \frac{\mu}{r^2} \end{aligned} \quad (3.41)$$

La posizione del satellite lungo l'orbita è definita dall'angolo

$$\theta = \Omega + \omega + \nu \quad (3.42)$$

noto in letteratura come "longitudine vera al tempo t ". Sotto queste ipotesi, si semplificano le equazioni planetarie di Gauss (Eq. 2.68):

$$\begin{aligned} \dot{a} &= 2a_T \frac{a}{V} \\ \dot{e} &= \frac{1}{V} (2a_T \cos \nu + a_R \sin \nu) \\ \dot{i} &= \frac{1}{V} a_W \cos(\omega + \nu) \\ \dot{\Omega} &= \frac{1}{i \cdot V} a_W \sin(\omega + \nu) \\ \dot{\omega} &= -\dot{\Omega} + \frac{1}{e \cdot V} (2a_T \sin \nu - a_R \cos \nu) \\ \dot{\theta} &= n = \sqrt{\frac{\mu}{a^3}} \end{aligned} \quad (3.43)$$

Si osserva la presenza di una singolarità per $e, i = 0$, poiché in tali condizioni il periastro e il nodo ascendente non risultano univocamente definiti. Edelbaum risolse tali singolarità trascurando le equazioni che presentavano queste criticità. Inoltre, si evidenziano le seguenti relazioni tra la direzione della spinta e le variazioni dei parametri orbitali:

- Una spinta lungo la direzione della velocità comporta una variazione del semiasse maggiore.
- Una spinta tangenziale o radiale modifica l'eccentricità in funzione della posizione sull'orbita.
- Una spinta normale al piano orbitale provoca una variazione dell'inclinazione orbitale o della RAAN, a seconda della posizione sull'orbita.
- L'argomento del periapside varia a seguito di modifiche della RAAN oppure per effetto di una spinta nel piano orbitale.

Il problema di Edelbaum consiste nel comprendere in quale direzione conviene applicare la spinta per massimizzare la variazione dei parametri orbitali a , e ed i durante una rivoluzione. A tale scopo, si introducono due angoli: l'angolo α , compreso tra la proiezione della spinta nel piano orbitale e il vettore velocità, e β , definito come l'angolo tra il vettore spinta e il piano orbitale. Le componenti dell'accelerazione lungo le direzioni tangenziale, radiale e normale risultano quindi

$$\begin{cases} a_T = A \cos \alpha \cos \beta \\ a_R = A \sin \alpha \cos \beta \\ a_W = A \sin \beta \end{cases} \quad (3.44)$$

dove A è il rapporto tra la spinta e la massa del satellite. Sostituendo le relazioni precedenti nelle equazioni 3.43 ed integrando, si ricava

$$\Delta a = \frac{2aA}{nV} \int_0^{2\pi} \cos \alpha \cos \beta d\nu \quad (3.45)$$

$$\Delta e = \frac{A}{nV} \int_0^{2\pi} (2 \cos \nu \cos \alpha + \sin \nu \sin \alpha) \cos \beta d\nu \quad (3.46)$$

$$\Delta i = \frac{A}{nV} \int_0^{2\pi} \cos(\omega + \nu) \sin \beta d\nu \quad (3.47)$$

Di seguito si riportano i risultati del problema di ottimizzazione, omettendo i passaggi intermedi per il loro ottenimento.

Variazione di a Poiché nell'equazione della derivata di a compare unicamente la componente tangenziale dell'accelerazione, per massimizzare la variazione di semiasse maggiore risulta intuitivo imporre $\alpha = \beta = 0$, in modo da mantenere la spinta parallela alla velocità.

Variazione di e D'altra parte, poiché la variazione dell'eccentricità dipende dalla posizione del satellite lungo l'orbita, per massimizzare Δe l'angolo α deve variare in funzione di ν . In particolare, si ricava

$$\tan \alpha = \frac{1}{2} \tan \nu \quad (3.48)$$

mentre l'angolo β risulta nullo. In prima approssimazione, si può assumere $\alpha \approx \nu$, dunque per massimizzare la variazione di e la spinta deve essere applicata in direzione perpendicolare alla linea degli apsi.

Variazione di a, i Nel caso in cui si desideri ottenere una variazione simultanea del semiasse maggiore e dell'inclinazione, è necessario massimizzare una combinazione lineare delle derivate \dot{a} e \dot{i} . Si può dimostrare che la soluzione ottimale prevede una spinta con α nullo e β tale che

$$\tan \beta = k \cos(\omega + \nu) \quad (3.49)$$

dove k è una costante e dipende dalle variazioni desiderate di a e i . Pertanto, l'angolo β risulterà massimo al nodo ascendente e minimo al nodo discendente. L'integrazione delle equazioni 3.43 su una rivoluzione richiede il calcolo di integrali ellittici, il che impedisce di ottenere una soluzione in forma chiusa. Tuttavia, è possibile ottenere una soluzione approssimata ipotizzando β costante:

$$\begin{cases} \beta = |\bar{\beta}| & \text{se } \cos(\omega + \nu) > 0 \\ \beta = -|\bar{\beta}| & \text{se } \cos(\omega + \nu) < 0 \end{cases} \quad (3.50)$$

3.4.2 Manovra di Edelbaum

Solitamente le manovre orbitali richiedono variazioni significative dei parametri orbitali, che non possono essere realizzate con una singola rivoluzione. Di conseguenza, è necessario eseguire diverse rivoluzioni e ottimizzare l'angolo β per ciascuna di esse. La manovra di Edelbaum permette di ottenere grandi variazioni di inclinazione e semiasse, mantenendo tuttavia l'eccentricità costante.

Si ipotizzi che la traiettoria sia sempre quasi circolare e che β sia costante durante ogni singola rivoluzione. L'ottimizzazione della manovra di Edelbaum richiede:

$$\frac{\partial}{\partial \beta} \left(\frac{di}{dV} + k \frac{dt}{dV} \right) = 0 \quad (3.51)$$

Che fornisce la soluzione ottimale:

$$V \sin \beta = \text{cost} = V_0 \sin \beta_0 \quad (3.52)$$

dove V_0 è la velocità circolare al raggio di partenza e β_0 è l'angolo di spinta adottato all'inizio della manovra. Da questa relazione, si evince che conviene avere valori di β elevati per raggi grandi, ovvero dove le velocità sono piccole. Viceversa, per raggi piccoli e quindi velocità elevate, è preferibile avere valori di β più contenuti. La componente normale della spinta deve quindi incrementare progressivamente man mano che ci si allontana dal corpo principale.

Supponendo un'accelerazione costante, si ricava

$$\Delta V = A(t_f - t_0) \quad (3.53)$$

Differenziando questa equazione, si ottiene

$$d(\Delta V) = A dt = A \left(-\frac{dV}{A \cos \beta} \right) = \frac{-dV}{\sqrt{1 - \sin^2 \beta}} = \frac{-V dV}{\sqrt{V^2 - V_0^2 \sin^2 \beta_0}} \quad (3.54)$$

Sostituendo la relazione 3.52 nella derivata di i rispetto alla velocità, si ricava

$$\frac{di}{dV} = -\frac{2 \tan \beta}{\pi V} = -\frac{2}{\pi V} \frac{\sin \beta_0 \frac{V_0}{V}}{\sqrt{1 - \frac{V_0^2}{V^2} \sin^2 \beta_0}} = \frac{-2V_0 \sin \beta_0}{\pi V \sqrt{V^2 - V_0^2 \sin^2 \beta_0}} \quad (3.55)$$

Integrando tra il raggio r_0 dell'orbita di partenza, caratterizzata da velocità V_0 , e il raggio r_1 dell'orbita di arrivo, con velocità V_1 , si ottiene

$$\Delta V = V_0 \cos \beta_0 - \sqrt{V_1^2 - V_0^2 \sin^2 \beta_0} = V_0 \cos \beta_0 - V_1 \cos \beta_1 \quad (3.56)$$

$$\Delta i = \frac{2}{\pi} \left(\arcsin \frac{V_0 \sin \beta_0}{V_1} - \beta_0 \right) = \frac{2}{\pi} (\beta_1 - \beta_0) \quad (3.57)$$

Pertanto il costo della manovra di Edelbaum può essere espresso come

$$\Delta V = \sqrt{V_0^2 + V_1^2 - 2V_0V_1 \cos \left(\frac{\pi}{2} \Delta i \right)} \quad (3.58)$$

È importante sottolineare che questa relazione risulta valida solamente per trasferite orbitali con variazioni di inclinazione inferiori a 2 radianti.

Capitolo 4

Modello analitico per l'ottimizzazione di trasferte a bassa spinta

Nel presente capitolo viene presentato un metodo approssimato per stimare rapidamente i costi delle trasferte a bassa spinta tra orbite quasi circolari. Tale modello permette di migliorare l'efficienza degli algoritmi di ottimizzazione combinatoria impiegati nella selezione delle sequenze di rimozione dei detriti spaziali. Il metodo si basa sulle approssimazioni di Edelbaum e sfrutta l'effetto della perturbazione J_2 per minimizzare i costi propulsivi. Per ulteriori dettagli, si rimanda a [5].

4.1 Approssimazioni per manovre con propulsione elettrica

Si consideri un satellite soggetto unicamente alla perturbazione orbitale derivante dall'armonica zonale J_2 . In questo contesto, i parametri orbitali a , e ed i possono essere assunti costanti. Invece, riprendendo l'equazione 2.72, la derivata nel tempo della RAAN risulta

$$\frac{d\Omega}{dt} = -\frac{3}{2}\sqrt{\frac{\mu}{a^3}}\frac{J_2 \cos i}{(1-e^2)^2}\left(\frac{R_\oplus}{a}\right) \quad (4.1)$$

Per orbite quasi circolari, la variazione della RAAN dipende esclusivamente dal semiasse maggiore e dall'inclinazione dell'orbita. Considerando piccole variazioni di a ed i , la variazione relativa di $\dot{\Omega}$ può essere espressa come

$$\frac{\Delta\dot{\Omega}}{\dot{\Omega}} = -\frac{7}{2}\frac{\Delta a}{a} - \tan i \Delta i \quad (4.2)$$

Questa relazione descrive la variazione del rateo di regressione della linea dei nodi in funzione delle variazioni del semiasse maggiore e dell'inclinazione.

4.1.1 Manovre combinate (a, i)

(a,i) Per orbite quasi circolari, la manovra di Edelbaum rappresenta una soluzione per effettuare trasferite orbitali con grandi variazioni di inclinazione e semiasse. Riprendendo la relazione

$$\Delta V = \sqrt{V_i^2 + V_f^2 - 2V_iV_f \cos\left(\frac{\pi}{2}\Delta i\right)} \quad (4.3)$$

ricavata in precedenza e sostituendo

$$\theta = \frac{\pi}{2}\Delta i \quad (4.4)$$

si ottiene

$$\Delta V = \sqrt{V_i^2 \sin^2 \theta + V_i^2 \cos^2 \theta - 2V_iV_f \cos \theta + V_f^2} \quad (4.5)$$

Questa espressione può essere riformulata come:

$$\Delta V = \sqrt{V_i^2 \sin^2 \theta + (V_i \cos \theta - V_f)^2} \quad (4.6)$$

dove V_i e V_f rappresentano rispettivamente le velocità circolari dell'orbita iniziale e finale. Per piccole variazioni relative di inclinazione e semiasse, applicando le approssimazioni $\sin \theta \approx \theta$ e $\cos \theta \approx 1$, si ricava

$$\Delta V = V_0 \sqrt{\left(\frac{\pi}{2}\Delta i\right)^2 + \left(\frac{\Delta a}{2a_0}\right)^2} \quad (4.7)$$

dove a_0 rappresenta il semiasse maggiore medio tra le orbite di partenza e di arrivo, mentre V_0 è la velocità circolare corrispondente.

4.1.2 Manovre combinate (a, i, Ω)

In presenza di vincoli temporali stringenti, in aggiunta al controllo passivo derivante dalla perturbazione naturale, un controllo attivo della RAAN risulta generalmente necessario. Integrando le equazioni planetarie di Gauss sotto le ipotesi di Edelbaum (Eq. 3.43) e risolvendo il problema di ottimizzazione, si ricava

$$\Delta V = \left[V_i^2 - 2V_iV_f \cos\left(\frac{\pi}{2}\sqrt{\Delta i^2 + (\sin i_0 \Delta \Omega)^2}\right) + V_f^2 \right]^{1/2} \quad (4.8)$$

Sostituendo

$$\theta = \frac{\pi}{2}\sqrt{\Delta i^2 + (\sin i_0 \Delta \Omega)^2} \quad (4.9)$$

si ottiene

$$\Delta V = \sqrt{V_i^2 \sin^2 \theta + V_i^2 \cos^2 \theta - 2V_iV_f \cos \theta + V_f^2} \quad (4.10)$$

Applicando nuovamente le approssimazioni per piccoli valori di θ si ricava

$$\Delta V = V_0 \sqrt{\left(\frac{\pi}{2} \Delta i\right)^2 + \left(\frac{\pi}{2} \sin i_0 \Delta \Omega\right)^2 + \left(\frac{\Delta a}{2a_0}\right)^2} \quad (4.11)$$

Questa relazione rappresenta l'estensione dell'equazione 4.7 per una manovra combinata che modifica contemporaneamente il semiasse maggiore, l'inclinazione e la RAAN.

4.2 Ottimizzazione delle trasferte mediante l'effetto perturbativo di J_2

Nella presente trattazione, l'attenzione è rivolta all'ottimizzazione delle missioni ADR, il cui obiettivo è la rimozione di una sequenza di detriti spaziali. In questo contesto specifico, anziché esaminare una generica trasferta tra due orbite arbitrarie, risulta più consono analizzare la manovra orbitale dal detrito k al detrito $k + 1$ all'interno della sequenza di rimozione. Per chiarezza espositiva, si definisce il detrito di destinazione con il termine "target", mentre il termine "chaser" indica il veicolo spaziale che, dopo aver completato le operazioni sul detrito k -esimo, intraprende la trasferta verso il successivo.

Quando la differenza della RAAN tra chaser e target è particolarmente significativa, il conseguente cambio di piano orbitale può risultare molto costoso. In tali circostanze, risulta utile sfruttare l'effetto perturbativo di J_2 per ottimizzare i costi della trasferta. Fissata la durata $\Delta t = t_f - t_0$ della trasferta dal detrito k al detrito $k+1$ e riprendendo l'equazione 4.11, le componenti della variazione di velocità necessaria risultano

$$x = \frac{\pi}{2} (\Omega_{k+1}(t_f) - \Omega_k(t_f)) \sin i_0 V_0 \quad (4.12)$$

$$y = \frac{a_{k+1} - a_k}{2a_0} V_0 \quad (4.13)$$

$$z = \frac{\pi}{2} (i_{k+1} - i_k) V_0 \quad (4.14)$$

dove i parametri con pedice 0 si riferiscono all'orbita media tra quella di partenza e di arrivo:

$$a_0 = \frac{a_{k+1} + a_k}{2} \quad (4.15)$$

$$i_0 = \frac{i_{k+1} + i_k}{2} \quad (4.16)$$

$$V_0 = \sqrt{\frac{\mu}{a_0}} \quad (4.17)$$

Si osserva che y e z dipendono esclusivamente dai parametri orbitali iniziali e finali $(a_k, i_k, a_{k+1}, i_{k+1})$, mentre x dipende anche dal tempo della trasferta Δt , a causa dell'effetto di J_2 .

4.2.1 Soluzione analitica per trasferte con variazione di (a, i)

Si consideri una trasferta del tipo *thrust-coast-thrust* in cui le fasi di spinta vengono modellate come variazioni impulsive di velocità, ottenendo pertanto una trasferta a due impulsi. Il primo impulso fornisce una variazione parziale di y e z , mentre il secondo impulso completa la manovra. Si ipotizzi che la variazione necessaria della RAAN venga completamente compensata durante la fase di coasting dalla precessione indotta da J_2 . Pertanto, questa strategia risulta implementabile soltanto se i vincoli temporali della missione sono sufficientemente ampi.

Il primo impulso risulta

$$\Delta V_a = \sqrt{(s_y y)^2 + (s_z z)^2} \quad (4.18)$$

dove s_y e s_z rappresentano le frazioni delle variazioni totali di y e z necessarie per completare la manovra. Si osserva che non sono stati imposti limiti ai valori di questi coefficienti, consentendo quindi variazioni dei parametri orbitali superiori a quelle strettamente necessarie per raggiungere il detrito target, per trarre vantaggio dall'effetto di J_2 . Tali variazioni inducono una modifica del $\Delta\Omega$ durante la trasferta pari a

$$\Delta x = m s_y y + n s_z z \quad (4.19)$$

dove

$$m = \frac{7\pi}{2} \dot{\Omega}_0 \sin i_0 \cdot \Delta t \quad (4.20)$$

$$n = \dot{\Omega}_0 \tan i_0 \sin i_0 \cdot \Delta t \quad (4.21)$$

in cui $\dot{\Omega}_0$ è la variazione media della precessione nodale:

$$\dot{\Omega}_0 = \frac{\dot{\Omega}_k + \dot{\Omega}_{k+1}}{2} \quad (4.22)$$

Il secondo impulso completa la manovra, pertanto risulta

$$\Delta V_b = \sqrt{(y - s_y y)^2 + (z - s_z z)^2} \quad (4.23)$$

La variazione di velocità totale, ricavata sommando i due impulsi, si esprime come:

$$\Delta V = \Delta V_a + \Delta V_b = \sqrt{(s_y y)^2 + (s_z z)^2} + \sqrt{(y - s_y y)^2 + (z - s_z z)^2} \quad (4.24)$$

soggetta al vincolo $x + \Delta x = 0$, che impone il raggiungimento della RAAN del target.

Risulta difficile ricavare il minimo del ΔV in forma chiusa. Pertanto, si introduce un'approssimazione analitica per rimuovere le radici quadrate:

$$\Delta V^2 \approx \Delta V_a^2 + \Delta V_b^2 = (s_y y)^2 + (s_z z)^2 + (y - s_y y)^2 + (z - s_z z)^2 \quad (4.25)$$

Si osserva che questa approssimazione ignora il doppio prodotto $2\Delta V_a \Delta V_b$, ma risulta sufficientemente accurata per applicazioni pratiche. Di conseguenza, la funzione lagrangiana associata al problema di ottimizzazione vincolata risulta

$$L = (s_y y)^2 + (s_z z)^2 + (y - s_y y)^2 + (z - s_z z)^2 + \rho(x + m s_y y + n s_z z) \quad (4.26)$$

dove ρ rappresenta il moltiplicatore di Lagrange. La trasferta ottimale si ricava imponendo le derivate di questa espressione pari a zero:

$$\begin{cases} \frac{\partial L}{\partial s_y} = (4s_y y - 2y + \rho m) y = 0 \\ \frac{\partial L}{\partial s_z} = (4s_z z - 2z + \rho n) z = 0 \\ \frac{\partial L}{\partial \rho} = x + m s_y y + n s_z z = 0 \end{cases} \quad (4.27)$$

La soluzione del sistema fornisce i coefficienti ottimali:

$$s_y = -\frac{2mx - n^2 y + mnz}{2(m^2 + n^2)y} \quad (4.28)$$

$$s_z = -\frac{2nx + mny - m^2 z}{2(m^2 + n^2)z} \quad (4.29)$$

Si nota che questo modello approssimato non considera esplicitamente il fasamento dell'anomalia vera tra il target e il chaser. Infatti, si può presumibilmente assumere che per trasferte multi-rivoluzione il fasamento ottimale sia sempre garantito o possa essere ottenuto con costi propulsivi trascurabili.

4.2.2 Soluzione analitica per trasferte con variazione di (a, i, Ω)

Le missioni ADR possono prevedere dei requisiti temporali stringenti per la rimozione di due detriti consecutivi; pertanto, non è sempre possibile sfruttare la perturbazione di J_2 per compensare completamente la differenza della RAAN. Di conseguenza, gli impulsi devono fornire anche un controllo attivo su Ω :

$$\Delta V_a = \sqrt{(s_x x)^2 + (s_y y)^2 + (s_z z)^2} \quad (4.30)$$

$$\Delta V_b = \sqrt{(x - s_x x + \Delta x)^2 + (y - s_y y)^2 + (z - s_z z)^2} \quad (4.31)$$

Pertanto, la variazione di velocità totale risulta

$$\begin{aligned} \Delta V = & \sqrt{(s_x x)^2 + (s_y y)^2 + (s_z z)^2} \\ & + \sqrt{(x - s_x x + \Delta x)^2 + (y - s_y y)^2 + (z - s_z z)^2} \end{aligned} \quad (4.32)$$

La variazione della RAAN indotta dalla modifica dell'effetto di J_2 in seguito al primo impulso rimane la stessa dell'equazione 4.19.

A differenza di quanto trattato precedentemente, l'ottimizzazione dei coefficienti s_x , s_y e s_z si ricava annullando le derivate parziali della somma $\Delta V_a^2 + \Delta V_b^2$, in quanto non è presente alcun vincolo esplicito:

$$\begin{cases} \frac{\partial (\Delta V_a^2 + \Delta V_b^2)}{\partial s_x} = 2x(2xs_x - mys_y - nzs_z - x) = 0 \\ \frac{\partial (\Delta V_a^2 + \Delta V_b^2)}{\partial s_y} = 2y(-mxs_x + 2ys_y + m^2ys_y + mnzs_z - y + mx) = 0 \\ \frac{\partial (\Delta V_a^2 + \Delta V_b^2)}{\partial s_z} = 2z(-nxs_x + mnys_y + 2zs_z + n^2zs_z - z + nx) = 0 \end{cases} \quad (4.33)$$

Risolvendo il sistema, si ricavano

$$s_x = \frac{2x + my + nz}{(4 + m^2 + n^2)x} \quad (4.34)$$

$$s_y = -\frac{2mx - (4 + n^2)y + mnz}{(8 + 2m^2 + 2n^2)y} \quad (4.35)$$

$$s_z = -\frac{2nx + mny - (4 + m^2)z}{(8 + 2m^2 + 2n^2)z} \quad (4.36)$$

Sostituendo questi coefficienti nell'equazione 4.32 si ottiene il costo minimo, espresso in termini di ΔV , per una trasferta a due impulsi tra due detriti spaziali, ricavato bilanciando efficacemente la variazione attiva dei parametri orbitali e lo sfruttamento dell'effetto perturbativo di J_2 .

4.2.3 Trasferte ad un impulso

Al fine di valutare correttamente la trasferta ottimale tra due detriti, risulta opportuno confrontare la strategia *thrust-coast-thrust* appena analizzata con due approcci alternativi basati su trasferte a singolo impulso.

La prima strategia alternativa, comunemente definita "soluzione attendista", è del tipo *coast-thrust*. In questo scenario, il chaser rimane sull'orbita del detrito k per tutta la durata della trasferta, effettuando un'unica manovra impulsiva all'istante finale per raggiungere direttamente il detrito $k + 1$. Di conseguenza, si ricava

$$\Delta V_b = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2} \quad (4.37)$$

mentre ΔV_a risulta nullo.

La seconda strategia, concettualmente opposta alla prima, è del tipo *thrust-coast*. In questo caso, il chaser esegue all'istante iniziale della trasferta l'intera manovra necessaria per intercettare il detrito $k + 1$. Pertanto

$$\Delta V_a = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2} \quad (4.38)$$

dove

$$x = \frac{\pi}{2}(\Omega_{k+1}(t_0) - \Omega_k(t_0)) \sin i_0 V_0 \quad (4.39)$$

a differenza delle strategie precedenti, in cui si considera la RAAN al tempo di arrivo. In questo scenario ΔV_b risulta nullo.

L'identificazione della strategia di trasferimento ottimale richiede quindi il confronto tra i costi propulsivi, ricavati dalle equazioni 4.32, 4.37, 4.38, selezionando la soluzione che minimizza il ΔV totale della trasferta.

4.3 Estensione per trasferte a bassa spinta

La propulsione elettrica è caratterizzata da archi di spinta di durata considerevole. Di conseguenza, il modello "impulsivo" precedentemente descritto non risulta propriamente adeguato per descrivere le trasferte a bassa spinta. Questo paragrafo estende tale modello analitico per includere la presenza degli archi di spinta e la variazione della massa del chaser durante la trasferta.

Riconsiderando la strategia di manovra del modello precedente, le due fasi di spinta vengono ora caratterizzate da archi di spinta di durata Δt_a e Δt_b . Si ipotizza di approssimare ciascuna manovra a bassa spinta con un impulso equivalente, applicato a metà dell'arco di spinta, ovvero:

$$t_a = t_0 + \frac{\Delta t_a}{2} \quad (4.40)$$

$$t_b = t_f - \frac{\Delta t_b}{2} \quad (4.41)$$

dove t_0 e t_f rappresentano rispettivamente il tempo di inizio e fine della trasferta, mentre t_a e t_b indicano gli istanti in cui si assume avvengano gli impulsi del primo e del secondo arco. Di conseguenza, la durata effettiva della trasferta risulta

$$\Delta t = t_b - t_a = t_f - t_0 - \frac{\Delta t_a}{2} - \frac{\Delta t_b}{2} \quad (4.42)$$

Tale durata è inferiore rispetto a quella del modello impulsivo, per il quale si assumeva semplicemente $\Delta t = t_f - t_0$. Inoltre, la presenza degli archi di spinta modifica anche i parametri orbitali del chaser e del target. Infatti, per tener conto del tempo trascorso tra l'inizio della trasferta e l'istante in cui avviene il primo impulso, è necessario aggiornare le RAAN di partenza:

$$\Omega(t_0) \rightarrow \Omega(t_a) = \Omega(t_0) + \dot{\Omega} \cdot \frac{\Delta t_a}{2} \quad (4.43)$$

Un ragionamento analogo si applica alle RAAN di arrivo:

$$\Omega(t_f) \rightarrow \Omega(t_b) = \Omega(t_a) + \dot{\Omega} \cdot \Delta t \quad (4.44)$$

Di conseguenza, l'equazione 4.12 si modifica in

$$x = \frac{\pi}{2}(\Omega_{k+1}(t_b) - \Omega_k(t_b)) \sin i_0 V_0 \quad (4.45)$$

Pertanto, risulta possibile ricondursi al modello analitico precedentemente trattato, integrando opportunamente le differenze appena illustrate.

4.3.1 Durate degli archi di spinta

Per valutare la durata di ciascun arco di spinta, si considera l'accelerazione media del satellite durante la fase propulsiva:

$$\tilde{a} = \frac{T}{\tilde{m}} \quad (4.46)$$

dove \tilde{m} rappresenta la massa media del chaser durante l'arco di spinta. Valutando mediante l'equazione del razzo (Eq. 3.21) le masse finali del primo e del secondo arco, definite rispettivamente m_a e m_b , si ricavano le seguenti espressioni per la massa media:

$$\tilde{m}_a = \frac{m_0 + m_a}{2} \quad (4.47)$$

$$\tilde{m}_b = \frac{m_a + m_b}{2} \quad (4.48)$$

dove m_0 rappresenta la massa del satellite all'inizio della trasferta. Di conseguenza, le durate degli archi di spinta risultano

$$\Delta t_a = \frac{\Delta V_a}{T} \tilde{m}_a \quad (4.49)$$

$$\Delta t_b = \frac{\Delta V_b}{T} \tilde{m}_b \quad (4.50)$$

Queste relazioni mostrano che la durata di una manovra a bassa spinta è inversamente proporzionale alla spinta disponibile e direttamente proporzionale alla massa del satellite.

4.3.2 Algoritmo di calcolo iterativo

Il modello per le trasferte a bassa spinta appena illustrato richiede la conoscenza delle durate Δt_a e Δt_b , che a loro volta dipendono da ΔV_a e ΔV_b , ovvero i risultati ricavati dal modello stesso. Questa interdipendenza rende necessaria l'implementazione di un processo iterativo. L'algoritmo di calcolo adottato è il seguente:

1. Stima iniziale di ΔV_a e ΔV_b utilizzando il modello impulsivo
2. Calcolo degli istanti t_a e t_b
3. Ricalcolo di ΔV_a e ΔV_b utilizzando il modello a bassa spinta

4. Calcolo dell'errore relativo tra iterazioni successive

$$\epsilon = \frac{|\Delta V_i - \Delta V_{i-1}|}{\Delta V_{i-1}} \quad (4.51)$$

5. Se ϵ supera una tolleranza prefissata, si ritorna al passo 2

Il processo iterativo prosegue fino al raggiungimento della convergenza sul costo propulsivo della trasferta, quantificato in termini di ΔV .

Ad ogni iterazione, risulta opportuno verificare la seguente condizione temporale:

$$\Delta t_a + \Delta t_b \leq t_f - t_0 \quad (4.52)$$

Infatti, se questa disuguaglianza non fosse soddisfatta, la soluzione ricavata risulterebbe non fattibile, poiché il tempo disponibile per la trasferta orbitale non sarebbe sufficiente a completare le manovre previste. In tal caso, sarebbe necessario riconsiderare la durata complessiva della trasferta. Questa considerazione verrà ripresa nel capitolo successivo, dove si discuteranno le soluzioni ottenute tramite l'algoritmo di ottimizzazione delle missioni ADR.

4.4 Validazione dei modelli analitici

Di seguito si riporta il confronto tra i risultati ottenuti con i modelli approssimati precedentemente descritti e quelli più accurati ricavati dalla Teoria del Controllo Ottimale (OCT), attraverso un metodo indiretto di *shooting* finalizzato a minimizzare il consumo di propellente. Si sottolinea che i risultati del modello analitico a bassa spinta sono stati ricavati adottando una tolleranza per il criterio di convergenza di 10^{-5} , il che implica una differenza massima di 0.01 m/s per una manovra dell'ordine dei 1000 m/s . Questo valore è ritenuto ampiamente accettabile per un'analisi preliminare delle trasferte a bassa spinta.

4.4.1 Trasferta da orbita retrograda

Si consideri un satellite con una massa iniziale di 2000 kg , un impulso specifico del sistema propulsivo di 3000 s ed un'accelerazione iniziale pari a $3.5 \cdot 10^{-3} \text{ m/s}^2$. Facendo riferimento ai due casi analizzati in [5], in tabella 4.1 si riportano i parametri delle orbite di partenza e di destinazione, mentre le durate delle trasferte risultano rispettivamente fissate a 100 per il primo caso e 24.86 giorni per il secondo.

Nelle tabelle 4.2 e 4.3 si riportano le soluzioni dettagliate, in particolare i costi espressi in termini di ΔV delle due manovre e della trasferta completa, l'errore relativo rispetto alla soluzione di riferimento e l'andamento dei parametri orbitali (a, i, Ω) in quattro istanti temporali distinti: inizio della trasferta (t_0), conclusione del primo arco (t_1), inizio del secondo arco (t_2) e termine della trasferta (t_f).

Parametri	Caso 1		Caso 2	
	Orbita iniziale	Orbita finale	Orbita iniziale	Orbita finale
Altitudine [km]	800	900	779.26	733.82
i [deg]	98.0	99.0	98.64	97.45
$\dot{\Omega}$ [deg/day]	0.917	0.982	1.001	0.883
Ω_0 [deg]	0.0	10.0	137.64	138.06
Ω_f [deg]	91.7	108.2	162.52	160.0

Tabella 4.1: Parametri orbitali del primo e secondo caso di studio

Soluzione	Data	a	i	Ω	ΔV_i	ΔV_{tot}	Errore
		[km]	[deg]	[deg]	[m/s]	[m/s]	
OCT	t_0	0	7178.1	98.0	0.0	313.2	-
	t_1	0.64	7055.7	98.90	-		
	t_2	99.61	7055.7	98.90	-		
	t_f	100	7278.1	99.0	108.20		
Impulsiva	t_1	0	7019.6	98.82	0.06	324.42	+3.58%
	t_2	100	7019.6	98.82	108.14		
Bassa spinta	t_1	0.62	7018.5	98.82	0.67	325.49	+3.92%
	t_2	99.54	7018.5	98.82	107.67		

Tabella 4.2: Soluzione dettagliata (Caso 1)

Soluzione	Data	a	i	Ω	ΔV_i	ΔV_{tot}	Errore
		[km]	[deg]	[deg]	[m/s]	[m/s]	
OCT	t_0	0	7157.4	98.64	137.64	245.0	-
	t_1	0.69	7119.5	97.63	-		
	t_2	24.74	7119.5	97.63	-		
	t_f	24.86	7112.0	97.45	160.0		
Impulsiva	t_1	0	7191.3	97.95	137.57	254.91	+4.04%
	t_2	24.86	7191.3	97.95	160.07		
Bassa spinta	t_1	0.47	7192.2	97.95	138.02	255.26	+4.19%
	t_2	24.49	7192.2	97.95	159.74		

Tabella 4.3: Soluzione dettagliata (Caso 2)

Si osserva che, sebbene nel secondo caso entrambe le strategie di manovra dei modelli analitici differiscano dalla soluzione ottimale, come mostrato in figura 4.1, le stime dei costi risultano in buon accordo con la soluzione esatta, presentando errori dell'ordine del 4%. Inoltre, la soluzione a bassa spinta presenta costi leggermente maggiori rispetto al modello impulsivo; tale differenza è attribuibile alla presenza degli archi di spinta, che comportano una fase di coasting di durata ridotta.

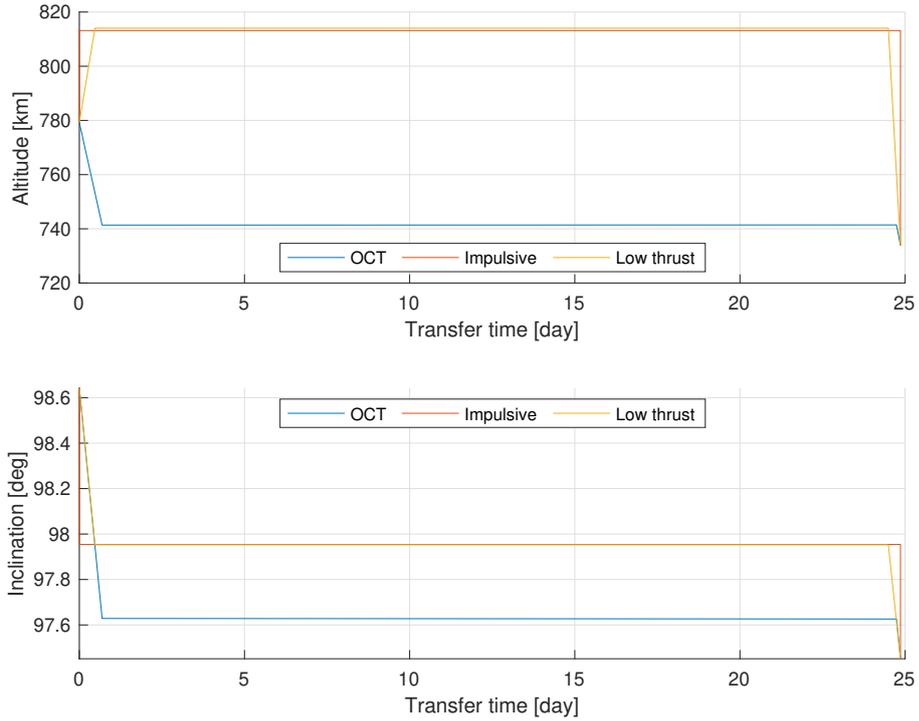


Figura 4.1: Andamento dei parametri orbitali (Caso 2)

4.4.2 Trasferta da orbita prograda

Si consideri un piccolo satellite di 15 kg , su un'orbita iniziale simile a quella della Stazione Spaziale Internazionale, equipaggiato con un propulsore elettrico capace di fornire 10 mN di spinta con un impulso specifico di 2500 s . I due casi considerati riguardano una riduzione e un aumento del semiasse maggiore di 200 km in, rispettivamente, 19 e 100 giorni. Le soluzioni del metodo indiretto utilizzate per il confronto sono state tratte da [6].

Parametri Orbitali	Caso 3		Caso 4	
	Orbita iniziale	Orbita finale	Orbita iniziale	Orbita finale
Altitudine [km]	400	200	400	600
i [deg]	51.0	51.0	51.0	51.0
$\dot{\Omega}$ [deg/day]	-5.068	-5.628	-5.068	-4.578
Ω_0 [deg]	0.0	10.0	0.0	10.0
Ω_f [deg]	263.71	263.06	213.19	272.23

Tabella 4.4: Parametri orbitali del terzo e quarto caso di studio

Nel terzo caso, la soluzione impulsiva presenta una strategia di manovra differente rispetto alla soluzione esatta, ciò comporta un incremento dell'errore che però rimane contenuto, risultando inferiore al 6%. Invece, il modello a bassa spinta approssima correttamente la soluzione reale considerando un unico arco di spinta alla fine della trasferta, come illustrato in figura 4.2.

Soluzione	Data	a	i	Ω	ΔV_i	ΔV_{tot}	Errore
	[day]	[km]	[deg]	[deg]	[m/s]	[m/s]	
OCT	t_0	0	6778.1	51.0	0.0	0.0	-
	t_2	16.92	6778.1	51.0	-	113.04	
	t_f	19	6578.1	51.0	263.06		
Impulsiva	t_1	0	6763.5	51.03	0.04	12.03	+5.81%
	t_2	19	6763.5	51.03	263.02	107.57	
Bassa spinta	t_1	0	6778.1	51.0	0.0	0.0	+2.97%
	t_2	16.98	6778.1	51.0	273.92	116.39	

Tabella 4.5: Soluzione dettagliata (Caso 3)

Soluzione	Data	a	i	Ω	ΔV_i	ΔV_{tot}	Errore
	[day]	[km]	[deg]	[deg]	[m/s]	[m/s]	
OCT	t_0	0	6778.1	51.0	0.0	161.14	-
	t_1	2.51	7024.3	51.02	-		
	t_2	99.49	7024.3	51.02	-		
	t_f	100	6978.1	51.0	272.23		
Impulsiva	t_1	0	7016.9	51.04	0.01	132.41	-3.43%
	t_2	100	7016.9	51.04	272.22	23.20	
Bassa spinta	t_1	2.32	7019.7	51.04	348.95	134.01	-1.48%
	t_2	99.57	7019.7	51.04	274.15	24.75	

Tabella 4.6: Soluzione dettagliata (Caso 4)

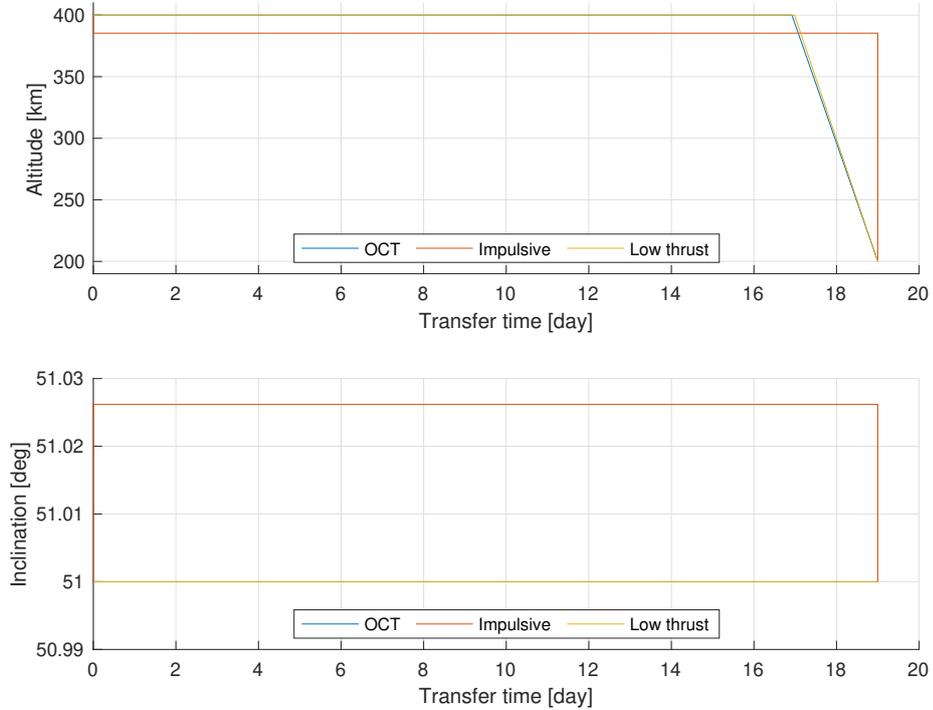


Figura 4.2: Andamento dei parametri orbitali (Caso 3)

Nel quarto caso, invece, entrambi i modelli analitici adottano la medesima strategia della soluzione esatta, pur stimando un costo leggermente inferiore. È interessante notare che, a differenza dei primi due casi, il costo maggiore della soluzione a bassa spinta rispetto a quella impulsiva consente di ridurre il modulo dell'errore, garantendo una stima più accurata della soluzione reale.

4.4.3 Considerazioni sui modelli analitici

I risultati presentati confermano la validità dei metodi approssimati, sia nella versione impulsiva che a bassa spinta, per la stima preliminare dei costi di una trasferta orbitale con propulsione elettrica. In particolare, il modello a bassa spinta, che tiene conto degli archi di spinta e della variazione della massa del satellite durante le manovre, fornisce generalmente stime più accurate rispetto al modello impulsivo. Inoltre, le approssimazioni adottate determinano errori contenuti (tipicamente inferiori al 5%) rispetto alle soluzioni ricavate con la teoria del controllo ottimale.

Di conseguenza, l'adozione del modello a bassa spinta nella fase di progettazione preliminare di una missione ADR risulta pienamente giustificata, contribuendo a migliorare l'efficienza degli algoritmi di ottimizzazione combinatoria delle sequenze di rimozione dei detriti spaziali.

4.5 Variazione della spinta

Si analizza ora come varia la trasferta ottimale del modello a bassa spinta in funzione della spinta disponibile. Prendendo come riferimento il secondo caso di studio, nella tabella seguente si riportano, per tre differenti valori di spinta, il tempo di applicazione della spinta, la durata delle due manovre, i costi associati alle singole manovre e alla trasferta complessiva, nonché la massa di propellente consumato.

Spinta	t_s [day]	Δt_i [day]	ΔV_i [m/s]	ΔV_{tot} [m/s]	m_p [kg]
T	0.840	0.473 0.368	143.37 111.89	255.26	17.278
T/5	4.228	2.393 1.835	145.11 111.75	256.86	17.386
T/10	8.542	4.8723 3.6702	147.72 111.76	259.48	17.562

Tabella 4.7: Costo della trasferta al variare della spinta (Caso 2)

Si osserva che, al diminuire della spinta disponibile, il tempo totale di spinta incrementa, confermando la relazione approssimativamente inversa discussa in precedenza. In particolare, si riscontrano archi di spinta della durata di diversi giorni, che determinano una conseguente riduzione della fase di coasting. Di conseguenza, per garantire lo stesso $\Delta\Omega$ indotto dall'effetto di J_2 , l'altitudine ottimale dell'orbita intermedia deve aumentare, come mostrato in figura 4.3. A causa di questi effetti,

una spinta inferiore, o analogamente una massa maggiore del satellite, determina un incremento del costo complessivo della trasferta e un maggior consumo di propellente.

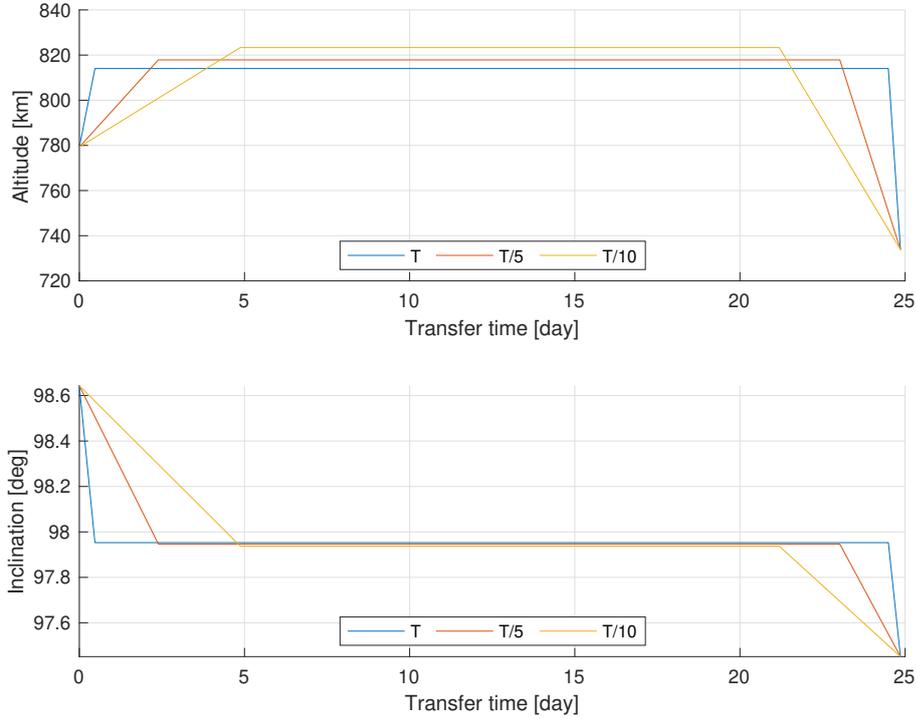


Figura 4.3: Andamento dei parametri orbitali al variare di T (Caso 2)

Analizzando in maniera analoga il quarto caso, si riscontrano gli stessi effetti evidenziati in precedenza, come riportato nella tabella 4.8. Tuttavia, l'incremento dei tempi di spinta, rispetto al caso precedente, incide in modo più significativo sul costo propulsivo della trasferta. Inoltre, si osserva che, oltre al semiasse maggiore, anche l'inclinazione dell'orbita di coasting ottimale risulta influenzata dalla spinta disponibile, come illustrato nel grafico in figura 4.4.

Spinta	t_s [day]	Δt_i [day]	ΔV_i [m/s]	ΔV_{tot} [m/s]	m_p [kg]
T	2.747	2.320 0.427	134.01 24.75	158.76	0.097
T/5	15.010	12.246 2.764	141.48 32.04	173.53	0.106
T/10	34.598	26.799 7.799	154.85 45.25	200.10	0.122

Tabella 4.8: Costo della trasferta al variare della spinta (Caso 4)

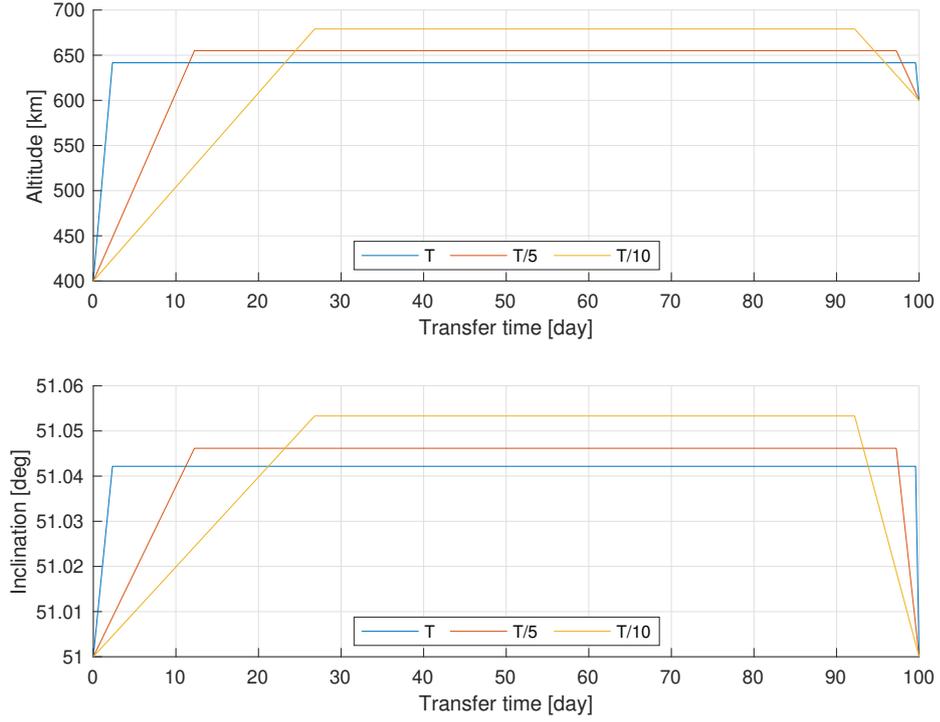


Figura 4.4: Andamento dei parametri orbitali al variare di T (Caso 4)

4.6 Vincolo sulla quota minima

La variazione di semiasse maggiore dovuta al primo arco di spinta può essere espressa come

$$\Delta a = 2a_0 \frac{s_y y}{V_0} \quad (4.53)$$

Dato che nel modello illustrato non sono stati imposti limiti sul coefficiente s_y , tale variazione può comportare che il chaser raggiunga quote eccessivamente basse, rischiando persino di entrare all'interno dell'atmosfera terrestre durante la fase di coasting. Pertanto, per garantire la fattibilità della missione, risulta necessario imporre un vincolo sulla quota minima ammissibile a_{lim} . Per rispettare tale vincolo operativo, il coefficiente s_y non viene determinato dal processo di ottimizzazione, ma risulta fissato dalla relazione:

$$s_y = \frac{a_{lim} - a_k}{2a_0 y} V_0 \quad (4.54)$$

Invece, i coefficienti ottimali s_x e s_z si ricavano annullando le derivate parziali di $\Delta V_a^2 + \Delta V_b^2$:

$$\begin{cases} \frac{\partial (\Delta V_a^2 + \Delta V_b^2)}{\partial s_x} = 2x(2xs_x - mys_y - nzs_z - x) = 0 \\ \frac{\partial (\Delta V_a^2 + \Delta V_b^2)}{\partial s_z} = 2z(-nxs_x + mnys_y + 2zs_z + n^2zs_z - z + nx) = 0 \end{cases} \quad (4.55)$$

in cui il termine s_y ora è un parametro noto. Risolvendo questo sistema si ottengono le espressioni

$$s_x = \frac{2x + nz + 2ms_y y}{n^2 + 4} \quad (4.56)$$

$$s_z = -\frac{nx - 2z + mns_y y}{n^2 + 4} \quad (4.57)$$

Sostituendo questi coefficienti nell'equazione 4.32 si ricava il costo minimo, espresso in termini di ΔV , per una trasferta orbitale vincolata dal requisito sulla quota minima.

4.6.1 Effetti del vincolo sulla quota

Si esamina ora un caso simile al primo, ma con altitudini differenti (Tab. 4.9). Come vincolo, si sceglie una quota minima di 200 km, ovvero

$$a_{lim} = R_{\oplus} + 200 = 6578.1 \text{ km} \quad (4.58)$$

In tabella 4.10 vengono presentati i risultati ottenuti dall'applicazione del modello a bassa spinta originale e di quello modificato per tenere conto del vincolo stabilito. Inoltre, si riportano i risultati dei modelli impulsivi, che possono essere utilizzati come riferimento per ulteriori confronti e analisi.

Parametri Orbitali	Caso 5	
	Orbita iniziale	Orbita finale
Altitudine [km]	300	400
i [deg]	98.0	99.0
$\dot{\Omega}$ [deg/day]	1.181	1.260
Ω_0 [deg]	0.0	15.0
Ω_f [deg]	118.07	140.98

Tabella 4.9: Parametri orbitali del quinto caso di studio

Soluzione	Data [day]	a [km]	i [deg]	Ω [deg]	ΔV_i [m/s]	ΔV_{tot} [m/s]	m_p [kg]
Bassa spinta	t_0	0	6678.1	98.0	0.0	205.66	362.25
	t_1	0.68	6510.0	98.86	0.93		
	t_2	99.49	6510.0	98.86	140.25	156.59	
	t_f	100	6778.1	99.0	140.98		
Bassa spinta con vincolo	t_1	0.83	6578.1	99.16	1.17	251.76	372.56
	t_2	99.60	6578.1	99.16	140.36	120.80	
Impulsiva	t_1	0	6511.3	98.86	0.05	204.89	360.82
	t_2	100	6511.3	98.86	140.93	155.93	
Impulsiva con vincolo	t_1	0	6578.1	99.15	0.09	250.0	370.26
	t_2	100	6578.1	99.15	140.89	120.26	

Tabella 4.10: Soluzione dettagliata (Caso 5)

La trasferta ottimale prevista dal modello iniziale prevede un'orbita di coasting che non rispetta il vincolo imposto sulla quota minima. Per rispettare tale vincolo, il

nuovo modello propone una strategia di manovra alternativa: il primo impulso riduce il semiasse maggiore fino a raggiungere l'altitudine minima consentita e, al contempo, incrementa l'inclinazione orbitale del satellite oltre quella del target, come illustrato in figura 4.5. Questa manovra si rivela essenziale per compensare l'effetto ridotto della variazione di a e garantire lo stesso rateo $\dot{\Omega}_{coast}$ del modello senza vincolo. Tuttavia, tale approccio comporta un aumento del costo propulsivo dell'ordine del 2.86%. Questo incremento è attribuibile all'elevato costo delle manovre di cambio di piano orbitale, che implicano un maggiore consumo di propellente. Si nota, infine, che i due modelli a bassa spinta presentano tempi di spinta comparabili.

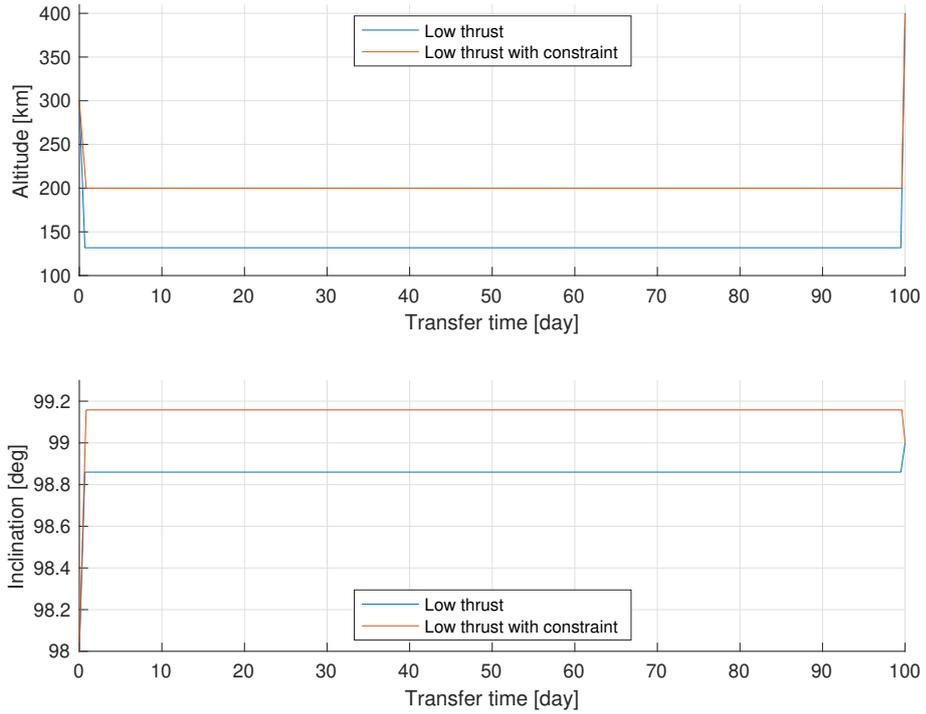


Figura 4.5: Andamento dei parametri orbitali (Caso 5)

4.6.2 Influenza dell'inclinazione orbitale

Parametri Orbitali	Caso 6		Caso 7	
	Orbita iniziale	Orbita finale	Orbita iniziale	Orbita finale
Altitudine [km]	300	400	300	400
i [deg]	30.0	30.0	60.0	60.0
$\dot{\Omega}$ [deg/day]	-7.347	-6.974	-4.242	-4.027
Ω_0 [deg]	0.0	340.0	0.0	340.0
Ω_f [deg]	176.33	165.64	253.96	239.33

Tabella 4.11: Parametri orbitali del sesto e settimo caso di studio

Al fine di analizzare la variazione del costo propulsivo in funzione dell'inclinazione orbitale, si modificano i parametri orbitali del caso precedente, come riportato nella

tabella 4.11, riducendo la durata delle trasferte a 25 giorni.

Analogamente al caso precedente, il nuovo modello analitico propone un primo impulso per ridurre l'altitudine fino a 200 km e diminuire l'inclinazione orbitale, al fine di incrementare il modulo di $\dot{\Omega}_{coast}$ e compensare il $\Delta\Omega$ iniziale. Inoltre, è previsto un secondo impulso per compensare la variazione residua dell'inclinazione e raggiungere l'orbita finale. Tuttavia, a differenza del caso precedente, i due archi di spinta producono un Δi globalmente nullo, risultando poco efficaci e impattando fortemente sul costo totale della trasferta. L'analisi dei dati riportati nelle tabelle 4.12 e 4.13 evidenzia un incremento dei costi propulsivi, rispettivamente del 23.55% e 206.43%, rispetto alle soluzioni senza vincoli, a fronte di una variazione complessiva dell'inclinazione pari a 0.30° e 4.15°.

Soluzione	Data	a	i	Ω	ΔV_i	ΔV_{tot}	m_p
	[day]	[km]	[deg]	[deg]	[m/s]	[m/s]	[kg]
Bassa spinta	t_0	0	6678.1	30.0	0.0	66.51	12.85
	t_1	0.22	6563.8	29.98	358.23		
	t_2	24.59	6563.8	29.98	168.74	123.19	
	t_f	25	6778.1	30.0	165.64		
Bassa spinta con vincolo	t_1	0.32	6578.1	29.85	356.93	96.24	15.87
	t_2	24.55	6578.1	29.85	169.65	138.13	
Impulsiva	t_1	0	6566.0	29.98	359.9	65.23	12.68
	t_2	25	6566.0	29.98	165.74	121.92	
Impulsiva con vincolo	t_1	0	6578.1	29.87	359.43	87.51	14.88
	t_2	25	6578.1	29.87	166.21	132.18	

Tabella 4.12: Soluzione dettagliata (Caso 6)

Soluzione	Data	a	i	Ω	ΔV_i	ΔV_{tot}	m_p
	[day]	[km]	[deg]	[deg]	[m/s]	[m/s]	[kg]
Bassa spinta	t_0	0	6678.1	60.0	0.0	157.35	25.05
	t_1	0.52	6410.3	59.86	357.53		
	t_2	24.3	6410.3	59.86	242.55	213.44	
	t_f	25	6778.1	60.0	239.33		
Bassa spinta con vincolo	t_1	1.85	6578.1	57.92	349.81	563.83	75.80
	t_2	23.16	6578.1	57.92	249.29	572.47	
Impulsiva	t_1	0	6418.0	59.87	359.89	152.79	24.44
	t_2	25	6418.0	59.87	239.45	208.89	
Impulsiva con vincolo	t_1	0	6578.1	58.09	358.37	505.53	68.20
	t_2	25	6578.1	58.09	240.97	515.14	

Tabella 4.13: Soluzione dettagliata (Caso 7)

Si può quindi affermare che il costo, espresso in termini di ΔV , della trasferta con vincolo incrementa in modo significativo all'aumentare dell'inclinazione orbitale, come illustrato nella figura 4.6. Nel grafico sono stati omessi i risultati con inclinazioni superiori a 60°, poiché la trasferta non vincolata risulta irrealizzabile a causa di

un'altitudine dell'orbita di coasting negativa. Inoltre si osserva che, per inclinazioni al di sotto dei 25° , le soluzioni risultano praticamente indistinguibili; questo risultato è tuttavia una conseguenza dei parametri orbitali delle orbite considerate, del tempo di trasferta e delle caratteristiche del sistema propulsivo. Infine, considerando una trasferta da un'orbita retrograda, si ricava un andamento opposto: il costo della trasferta vincolata si riduce significativamente all'aumentare dell'inclinazione orbitale (da 90° a 180°).

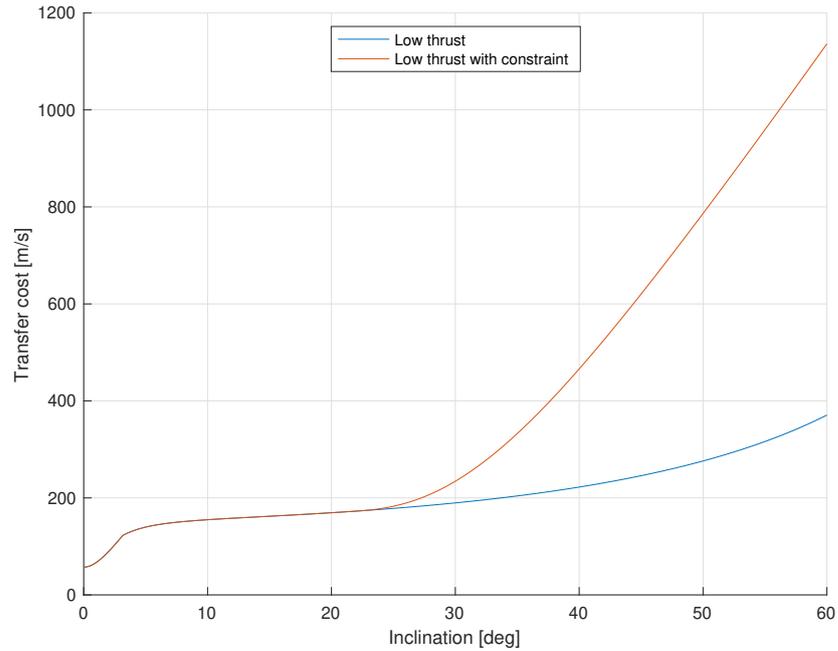


Figura 4.6: Costo della trasferta in funzione dell'inclinazione (Casi 6 e 7)

Capitolo 5

Algoritmo ACO

Il presente capitolo si propone di illustrare al lettore i principi operativi e le caratteristiche dell'algoritmo della colonia di formiche (Ant Colony Optimization - ACO), una metaeuristica sviluppata negli anni '90 da Marco Dorigo per la risoluzione del problema del commesso viaggiatore (Travelling Salesman Problem - TSP). L'algoritmo riprende il comportamento collettivo delle formiche nella ricerca del percorso ottimale tra il nido e le fonti di nutrimento, sfruttando un sistema di comunicazione indiretta basato sulle tracce di feromone. Nel corso degli anni, questo algoritmo è stato esteso a diverse classi di problemi di ottimizzazione combinatoria. La presente trattazione si focalizza in particolare sull'applicazione dell'algoritmo ACO per l'ottimizzazione delle missioni di rimozione attiva dei detriti spaziali. Per approfondimenti ulteriori sui fondamenti teorici dell'ACO e delle sue varianti, si rimanda a [7] e [8].

5.1 Fondamenti e principi dell'algoritmo ACO

L'Ant Colony Optimization trae ispirazione dal comportamento delle colonie di formiche in natura. Questi insetti possiedono la notevole capacità di individuare il percorso migliore tra il loro nido e le fonti di cibo attraverso un sistema di comunicazione indiretto basato sul feromone. Durante il loro spostamento, le formiche rilasciano tracce di questa sostanza chimica e, contestualmente, seguono le tracce depositate dai loro simili. Questo meccanismo genera un comportamento collettivo "autocatalitico", in cui un percorso diventa più attraente in base al numero di formiche che lo percorrono. Di conseguenza, il processo è caratterizzato da un ciclo a retroazione positiva: la probabilità con cui una formica sceglie un determinato tragitto cresce in funzione del numero di formiche che precedentemente hanno optato per lo stesso itinerario.

5.1.1 Meccanismo decisionale delle formiche

Per illustrare il principio alla base dell'algoritmo, si consideri lo scenario in figura 5.1 in cui un gruppo di formiche si muove lungo un percorso che collega, ad esempio, la fonte di cibo A al nido E, e viceversa. Si ipotizzi che improvvisamente compaia un ostacolo che interrompe questo tragitto, costringendo le formiche nel punto B a

scegliere tra due percorsi alternativi.

Inizialmente, in assenza di feromone, una formica ha la stessa probabilità di procedere verso destra o sinistra. Si supponga, dunque, che due formiche si trovino simultaneamente nel punto B e che scelgano due percorsi differenti. Poiché il percorso a destra (BCD) risulta più breve rispetto a quello di sinistra (BHD), la formica che ha scelto il primo tratto giungerà nel punto D più rapidamente. Pertanto, una formica proveniente dal nido E che raggiunge il punto D rileverà una concentrazione di feromone maggiore sul percorso DCB, preferendolo quindi al tratto DHB.

Come conseguenza, il tratto più breve sarà selezionato da un numero maggiore di formiche, causando un incremento più rapido della concentrazione di feromone su tale tragitto rispetto all'alternativa più lunga. Pertanto, la probabilità con cui una singola formica sceglie il tragitto da seguire risulta progressivamente sbilanciata verso quello più breve. Il risultato finale è che molto rapidamente tutte le formiche sceglieranno il percorso ottimale.

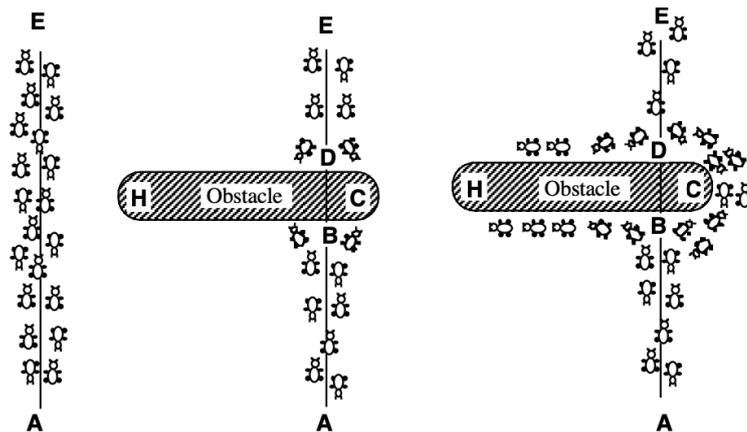


Figura 5.1: Scenario dimostrativo

5.1.2 Applicazione al problema del commesso viaggiatore

Lo scenario precedente può essere efficacemente esteso alla risoluzione del problema del commesso viaggiatore, un noto problema di ottimizzazione combinatoria. Dato un insieme finito di città, il TSP consiste nell'individuazione del percorso chiuso di lunghezza minima che consenta di visitare ciascuna città esattamente una volta.

Ai fini dell'implementazione dell'algoritmo, risulta vantaggioso formalizzare il TSP mediante una rappresentazione a grafo, dove ogni spigolo (r, s) è caratterizzato da un costo $\delta(r, s)$, ovvero la distanza tra le città r e s , e da un parametro di desiderabilità $\tau(r, s)$, denominato feromone o traccia, che viene dinamicamente aggiornato dalle formiche artificiali durante le iterazioni dell'algoritmo.

5.1.3 Architettura dell'algoritmo

Formalmente, l'algoritmo opera secondo il seguente schema procedurale. Ogni formica artificiale viene rilasciata su un nodo di partenza e costruisce un percorso completo, selezionando le città successive secondo una regola probabilistica, denominata *state transition rule*. Dopo che tutte le formiche hanno completato i rispettivi tour, si applica la *global pheromone updating rule*: una frazione del feromone evapora dagli spigoli del grafo e, successivamente, ciascuna formica deposita una quantità di feromone sugli spigoli del proprio percorso inversamente proporzionale alla lunghezza dell'itinerario individuato. Infine, questo procedimento viene reiterato per un numero prestabilito di iterazioni o fino al soddisfacimento di specifici criteri di convergenza.

5.1.4 State transition rule

La *state transition rule* determina il meccanismo decisionale con cui una formica k situata nella città r si sposta verso la città s . Matematicamente, è data dalla probabilità

$$p_k(r, s) = \begin{cases} \frac{[\tau(r, s)]^\alpha \cdot [\eta(r, s)]^\beta}{\sum_{u \in J_k(r)} [\tau(r, u)]^\alpha \cdot [\eta(r, u)]^\beta} & \text{se } s \in J_k(r) \\ 0 & \text{altrimenti} \end{cases} \quad (5.1)$$

dove $\tau(r, s)$ rappresenta la concentrazione di feromone sullo spigolo (r, s) , $\eta(r, s)$ è l'informazione euristica e rappresenta l'inverso delle distanze, $J_k(r)$ denota l'insieme delle città non ancora visitate dalla formica k , mentre α e β sono i parametri che regolano l'importanza relativa del feromone rispetto alla componente euristica.

Di conseguenza, le formiche prediligono spostarsi verso città connesse da spigoli caratterizzati da distanze minori e concentrazioni elevate di feromone. La componente euristica, o "visibilità", rappresenta un elemento fondamentale dell'algoritmo poiché fornisce un'informazione immediata su quale strada potrebbe essere la migliore, mentre il feromone rappresenta l'esperienza accumulata dalle formiche precedenti. Questa combinazione consente di bilanciare efficacemente l'esplorazione di nuovi percorsi con lo sfruttamento delle soluzioni già identificate.

5.1.5 Global pheromone updating rule

La *global updating rule* modifica la concentrazione di feromone sugli spigoli del grafo dopo che tutte le formiche hanno completato i loro percorsi. L'equazione che descrive questo processo è:

$$\tau(r, s) \leftarrow (1 - \rho) \cdot \tau(r, s) + \sum_{k=1}^m \Delta\tau_k(r, s) \quad (5.2)$$

dove il feromone depositato risulta

$$\Delta\tau_k(r, s) = \begin{cases} \frac{1}{L_k} & \text{se } (r, s) \in \text{al percorso della formica } k \\ 0 & \text{altrimenti} \end{cases} \quad (5.3)$$

In queste equazioni, ρ rappresenta il tasso di evaporazione del feromone ed è solitamente compreso tra 0 e 1, L_k indica la lunghezza complessiva del percorso tracciato dalla formica k , mentre m denota il numero di formiche artificiali. Pertanto, questo meccanismo di aggiornamento privilegia i percorsi più corti, depositando su di essi una maggiore quantità di feromone. Parallelamente, l'evaporazione del feromone impedisce che l'algoritmo converga prematuramente verso soluzioni sub-ottimali, promuovendo l'esplorazione di nuove soluzioni.

Il bilanciamento tra questi due meccanismi costituisce un elemento cruciale per l'efficacia computazionale dell'algoritmo ACO. In questo contesto, infatti, il feromone artificiale assume la funzione di una memoria collettiva a lungo termine, permettendo una forma di comunicazione indiretta tra gli agenti denominata "stigmergia". Tale processo comunicativo consente il miglioramento progressivo della qualità dei percorsi ricavati, permettendo la convergenza verso soluzioni prossime all'ottimo globale.

5.1.6 Inizializzazione

L'inizializzazione, ovvero la scelta dei parametri iniziali, costituisce una fase critica dell'implementazione dell'algoritmo per il problema in esame. Essa, infatti, stabilisce le condizioni di partenza del sistema su cui le formiche operano, influenzando significativamente la qualità delle soluzioni ottenibili. Questa fase preliminare comprende la definizione di diversi parametri: il numero di formiche m , il coefficiente di evaporazione del feromone ρ , i pesi relativi del feromone α e dell'informazione euristica β , il numero massimo di iterazioni consentite e la concentrazione iniziale di feromone τ_0 .

Nella configurazione iniziale, le tracce di feromone risultano uniformemente distribuite su ciascuno spigolo del grafo, rispecchiando l'assenza di conoscenze a priori sul percorso ottimale. Per problemi di ottimizzazione come il TSP, la determinazione di τ_0 riveste particolare importanza. In letteratura sono state proposte diverse metodologie per l'inizializzazione del feromone. Un approccio ampiamente diffuso consiste in:

$$\tau_0 = \frac{1}{nL} \quad (5.4)$$

dove n è il numero di nodi (città nel TSP), mentre L rappresenta la lunghezza di una soluzione approssimativa, tipicamente ottenuta mediante un algoritmo euristico come il *nearest neighbour*, o una qualsiasi stima grezza della soluzione ottimale.

Formulazioni alternative prevedono:

$$\tau_0 = \frac{1}{\rho L} \quad (5.5)$$

oppure, considerando anche il numero di formiche:

$$\tau_0 = \frac{n + m}{\rho L} \quad (5.6)$$

Nel caso non sia possibile determinare una stima preliminare del percorso ottimale, si può adottare la seguente formulazione:

$$\tau_0 = \frac{1}{n\tilde{\delta}} \quad (5.7)$$

dove $\tilde{\delta}$ rappresenta la distanza media tra due nodi qualsiasi del problema considerato.

Anche la distribuzione iniziale delle formiche artificiali sui nodi costituisce un ulteriore aspetto critico della fase di inizializzazione. Nella maggior parte delle implementazioni, le formiche vengono allocate casualmente sui nodi, garantendo così una diversificazione iniziale nell'esplorazione delle soluzioni. Questa strategia favorisce la scoperta parallela di diversi percorsi ottimali nello spazio di ricerca.

Inoltre, per un'implementazione efficiente dell'algoritmo, risulta opportuno organizzare le informazioni relative alle tracce di feromone e all'euristica in strutture matriciali dedicate. Si definiscono pertanto:

- La matrice del feromone τ , in cui l'elemento τ_{ij} rappresenta la concentrazione di feromone sullo spigolo che connette i nodi i e j .
- La matrice euristica η , dove l'elemento η_{ij} corrisponde all'inverso del costo associato allo spigolo (i, j) .

Queste strutture di dati, particolarmente rilevanti in problemi di notevole complessità, consentono un accesso immediato alle informazioni necessarie durante le fasi di costruzione delle soluzioni e di aggiornamento del feromone, ottimizzando le prestazioni computazionali dell'algoritmo.

5.1.7 Punti di forza e caratteristiche distintive

L'algoritmo ACO, grazie alla sua ispirazione dal mondo animale, presenta delle caratteristiche distintive che lo rendono particolarmente efficace nella risoluzione di complessi problemi di ottimizzazione combinatoria. Inoltre, le sue peculiarità costituiscono dei vantaggi significativi rispetto ad altre metodologie, conferendogli versatilità e robustezza in diversi contesti applicativi.

Uno dei principali punti di forza dell'ACO risiede nel bilanciamento efficiente tra l'esplorazione e lo sfruttamento, ovvero i due aspetti fondamentali di qualsiasi

algoritmo di ottimizzazione. Questo equilibrio viene raggiunto attraverso il sofisticato meccanismo di aggiornamento del feromone, che modula dinamicamente l'evaporazione e il deposito del feromone durante le iterazioni. Tale caratteristica consente all'algoritmo di esplorare adeguatamente lo spazio delle soluzioni nelle fasi iniziali e di convergere progressivamente verso configurazioni promettenti nelle fasi avanzate.

L'ACO presenta inoltre una notevole robustezza intrinseca, in quanto possiede la capacità di trovare soluzioni pseudo-ottimali anche in condizioni di incertezza, disturbi o variazioni dinamiche dei dati del problema. Questa caratteristica lo rende particolarmente adatto per problemi dinamici, in cui le variabili e i vincoli del problema variano nel tempo, richiedendo un adattamento continuo della strategia di ottimizzazione.

La struttura distribuita dell'algoritmo, dovuta all'impiego simultaneo di molteplici agenti che operano in parallelo, gli conferisce una notevole scalabilità, rendendolo applicabile anche a problemi di dimensioni considerevoli. Tale caratteristica facilita inoltre l'implementazione di architetture parallele o distribuite dell'algoritmo, con significativi benefici in termini di prestazioni computazionali.

Un ulteriore vantaggio dell'ACO consiste nella sua naturale predisposizione all'integrazione con altre tecniche di ottimizzazione. L'algoritmo può essere facilmente combinato con metodologie differenti, come gli algoritmi genetici o di *simulated annealing*, per sfruttare i punti di forza di ciascuna tecnica di ottimizzazione.

Infine, nonostante la sua natura metaeuristica, si è dimostrato matematicamente che, per un numero sufficientemente elevato di iterazioni, l'ACO converge verso soluzioni ottimali o sub-ottimali. Questa proprietà di convergenza rende l'algoritmo particolarmente efficace in una vasta gamma di contesti applicativi.

In sintesi, sebbene per alcune applicazioni l'ACO possa essere superato da algoritmi più specializzati, la sua rilevanza risiede nella capacità di adattamento a problemi che, pur essendo riconducibili a formulazioni standard, presentano peculiarità che ne alterano la struttura. L'algoritmo ACO, infatti, può essere facilmente adattato a diverse tipologie di problemi, modificando alcuni parametri chiave come la funzione euristica, il meccanismo di aggiornamento del feromone o la funzione obiettivo, consentendo una personalizzazione mirata alle esigenze del contesto applicativo. È proprio questa flessibilità implementativa, unitamente alle proprietà di robustezza e convergenza, che ha motivato la scelta di questo approccio metaeuristico per affrontare l'intricato problema dell'ottimizzazione delle missioni di rimozione attiva dei detriti spaziali.

5.1.8 Versioni dell'algoritmo ACO

La versione dell'algoritmo appena descritta rappresenta la prima versione sviluppata, denominata Ant System. Nel corso degli anni, la comunità scientifica ha sviluppato diverse varianti dell'algoritmo ACO, ciascuna caratterizzata da modifiche volte a migliorarne le prestazioni in determinati contesti applicativi. Le principali versioni, ampiamente utilizzate nel campo scientifico, sono:

- **Ant Colony System (ACS)** Questa versione introduce tre modifiche significative rispetto all'algoritmo originale. Innanzitutto, la costruzione del percorso è governata dalla *pseudo-random-proportional rule*, che orienta il processo decisionale verso lo sfruttamento delle soluzioni, favorendo gli spigoli più corti e con concentrazioni elevate di feromone. In secondo luogo, durante la costruzione delle soluzioni, le formiche applicano una regola di aggiornamento locale del feromone, riducendo la desiderabilità degli spigoli visitati e incentivando l'esplorazione di ulteriori soluzioni. Infine, l'aggiornamento globale del feromone viene effettuato esclusivamente dalla formica che ha identificato il percorso migliore nell'iterazione corrente.
- **Elitist Ant System (EAS)** In questa implementazione, oltre all'applicazione della *global updating rule*, viene depositato del feromone supplementare sul percorso della migliore soluzione identificata fino a quel momento (anche se tale soluzione non è stata rivisitata nell'iterazione corrente). Questo meccanismo elitario indirizza le formiche verso l'intorno della migliore soluzione attuale, intensificando lo sfruttamento delle regioni promettenti all'interno dello spazio di ricerca.
- **Max-Min Ant System (MMAS)** Questo algoritmo introduce un controllo sulla concentrazione di feromone, limitandola in un intervallo $[\tau_{min}, \tau_{max}]$. Nella fase di inizializzazione, tutti gli spigoli vengono impostati al valore massimo τ_{max} , promuovendo una vasta esplorazione iniziale delle soluzioni. L'aggiornamento del feromone viene applicato esclusivamente al percorso della soluzione migliore. Inoltre, in prossimità della stagnazione dell'algoritmo (condizione in cui le soluzioni non migliorano per un certo numero di iterazioni consecutive) il feromone viene reinizializzato al valore τ_{max} per esplorare nuove regioni.
- **Parallel Ant Colony Optimization (PACO)** Questa versione riprende l'ACS introducendo, tuttavia, delle strategie di comunicazione avanzate. Le formiche vengono suddivise in colonie distinte e si introducono sette differenti protocolli di comunicazione per la condivisione e l'aggiornamento delle tracce di feromone. Inoltre, questa architettura parallela consente di sfruttare efficacemente le moderne infrastrutture di calcolo multiprocessore, incrementando la velocità di convergenza alla soluzione ottimale.

5.2 Implementazione per l'ottimizzazione di missioni ADR

Il problema dell'ottimizzazione delle missioni ADR può essere formulato come una variante del problema del commesso viaggiatore con l'introduzione di vincoli aggiuntivi. L'obiettivo consiste nell'identificare la sequenza ottimale di detriti da visitare e, conseguentemente, rimuovere che minimizzi il costo totale della missione, espresso principalmente in termini di consumo di propellente o costo propulsivo delle trasferte orbitali (ΔV). Inoltre, a differenza del TSP classico, il problema in esame presenta le seguenti peculiarità:

- I costi delle trasferte tra due detriti non sono fissi, ma dipendono dall'istante di partenza e dalla durata della trasferta stessa.
- La rimozione dei detriti può avvenire attraverso più missioni, comportando una suddivisione della sequenza ottimale.
- Sono presenti dei vincoli temporali legati sia alle durate delle trasferte che dell'intera campagna di missioni, in aggiunta alle operazioni di servicing sui detriti.
- La soluzione ottimale deve includere non solo la sequenza di rimozione, ma anche la pianificazione temporale delle trasferte.

La flessibilità e la robustezza dell'algoritmo ACO lo rendono particolarmente adatto per affrontare questa tipologia di problema, caratterizzato da uno spazio di ricerca complesso e da vincoli dinamici.

5.2.1 Strutture dati impiegate

L'implementazione dell'algoritmo si basa su diverse strutture dati specificamente progettate per rappresentare il problema delle missioni ADR:

- Matrice dei costi a quattro dimensioni $d(i, j, t_p, \Delta t)$, che quantifica il costo propulsivo, in termini di ΔV , necessario per compiere una trasferta orbitale dal detrito i al detrito j , con partenza al tempo t_p e durata della trasferta Δt .
- Matrice euristica a quattro dimensioni $\eta(i, j, t_p, \Delta t)$, la quale contiene l'inverso dei costi e fornisce un indice di convenienza per ciascuna trasferta possibile.
- Matrice del feromone a tre dimensioni $\tau(i, j, l)$, essa memorizza la concentrazione di feromone per la trasferta dal detrito i al detrito j durante la missione l , fornendo una misura della desiderabilità di ciascun trasferimento.
- Vettore delle durate delle trasferte $slot_l$, che definisce la durata temporale di ciascuna trasferta tra detriti consecutivi, costituendo la pianificazione temporale della campagna di missioni.

- Vettore dei tempi di partenza *slotp*, il quale specifica l'istante iniziale di ciascuna manovra orbitale.

5.2.2 Architettura dell'algoritmo

L'implementazione dell'algoritmo ACO per l'ottimizzazione delle missioni ADR segue una struttura procedurale basata su due cicli annidati, che consente un'esplorazione completa dello spazio delle soluzioni. L'architettura dell'algoritmo si articola nelle seguenti fasi principali:

- **Generazione della matrice dei costi e della matrice euristica** Costruzione delle strutture dati che quantificano i costi propulsivi delle trasferte tra i detriti e la loro convenienza relativa. Questa fase preliminare prevede il calcolo del ΔV richiesto per ciascuna possibile manovra orbitale. Per ridurre il costo computazionale, risulta opportuno salvare queste strutture all'interno di un database permanente.
- **Generazione delle missioni** Pianificazione temporale delle trasferte e suddivisione della sequenza di rimozione in missioni distinte, utilizzando un approccio stocastico vincolato.
- **Inizializzazione della matrice del feromone** Assegnazione di un valore iniziale uniforme di feromone τ_0 a ciascuno spigolo del grafo.
- **Generazione delle soluzioni** Ciascuna formica artificiale costruisce un percorso attraverso un meccanismo decisionale regolato dalla *state transition rule*, che bilancia l'informazione euristica con la concentrazione di feromone.
- **Valutazione delle soluzioni** Calcolo del costo totale, espresso in termini di ΔV complessivo, per ogni percorso generato, considerando i tempi di partenza e le durate definite nella pianificazione temporale.
- **Aggiornamento del feromone** Applicazione della *global pheromone updating rule*, che prevede la parziale evaporazione del feromone esistente e la deposizione di nuove tracce di feromone in proporzione al costo delle soluzioni trovate.
- **Identificazione della soluzione migliore** Individuazione del percorso con il costo minimo nell'iterazione corrente e confronto con la soluzione migliore delle iterazioni precedenti.

Al termine delle iterazioni interne, l'algoritmo riparte dal processo di generazione delle missioni, esplorando configurazioni alternative di suddivisione e pianificazione. Questo schema a doppio ciclo consente di ottimizzare simultaneamente sia la sequenza di rimozione dei detriti (ciclo interno) sia la pianificazione temporale delle fasi di missione (ciclo esterno), identificando la soluzione che minimizza il costo propulsivo complessivo della campagna ADR.

5.2.3 Generazione della matrice dei costi

Un aspetto cruciale dell'implementazione riguarda la costruzione della matrice dei costi delle trasferte. Tale processo richiede la conoscenza accurata dei parametri orbitali dei detriti e il calcolo dei ΔV richiesti per ogni possibile manovra orbitale. Per ciascuna coppia di detriti (i, j) , per ogni possibile istante di partenza t_p e per diverse durate Δt , il costo propulsivo viene determinato attraverso una funzione che implementa il modello analitico a bassa spinta illustrato nel capitolo precedente.

Il calcolo dei costi viene effettuato considerando la massa a vuoto del satellite, anziché la sua massa effettiva durante ciascuna fase della missione. Idealmente, sarebbe più accurato utilizzare la massa del veicolo spaziale all'istante di partenza di ciascuna manovra. Tuttavia, tale valore dipende dal propellente consumato nelle trasferte precedenti e, di conseguenza, dalla sequenza di rimozione, che rappresenta la soluzione del problema. Questo approccio richiederebbe quindi un processo iterativo computazionalmente complesso e poco compatibile con l'architettura probabilistica dell'algoritmo ACO.

La scelta della massa a vuoto, oltre a semplificare la trattazione, consente di stimare correttamente tutte le possibili trasferte verso l'ultimo detrito. Infatti, considerando masse maggiori, ad esempio quella iniziale, alcune trasferte risulterebbero erroneamente classificate come non fattibili, poiché il tempo di spinta necessario (direttamente proporzionale alla massa del veicolo) eccederebbe il tempo disponibile per la manovra (Eq. 4.52). In realtà, queste trasferte diventano progressivamente realizzabili nelle fasi avanzate della missione, quando la massa del satellite diminuisce a seguito del propellente consumato.

Sebbene questa approssimazione comporti una sottostima dei costi propulsivi per le trasferte iniziali, l'errore introdotto risulta contenuto grazie all'elevato impulso specifico caratteristico della propulsione elettrica, che riduce significativamente il consumo di propellente. L'approccio adottato, pertanto, garantisce una maggiore robustezza dell'algoritmo, permettendo di esplorare uno spazio più ampio di soluzioni potenzialmente valide.

Infine, per gestire i casi di trasferte non fattibili, il corrispondente elemento della matrice dei costi viene fissato a un valore estremamente elevato ($10^{10} m/s$). Questa scelta implementativa riduce drasticamente la probabilità che l'algoritmo selezioni sequenze di detriti contenenti manovre fisicamente non realizzabili, orientando la ricerca verso regioni più promettenti dello spazio delle soluzioni.

La matrice dei costi così generata costituisce la base per la costruzione della matrice euristica, ottenuta calcolando l'inverso di ciascun costo. Quest'ultima, assieme alla matrice del feromone, guida il processo decisionale delle formiche artificiali nella

costruzione delle soluzioni durante le iterazioni dell'algoritmo.

5.2.4 Generazione delle missioni

L'ottimizzazione delle missioni ADR non si limita esclusivamente all'identificazione della sequenza ottimale di rimozione dei detriti, ma comprende anche la suddivisione del problema in missioni differenti e la pianificazione temporale delle trasferte orbitali. A tal fine, l'algoritmo implementa una metodologia di generazione delle missioni basata su un approccio stocastico vincolato.

Inizialmente, viene definito il vettore *slotl* attraverso la generazione casuale delle durate delle trasferte, espresse in valori temporali discreti per semplificare la trattazione numerica del problema. Successivamente, si stabilisce il numero di missioni n_m da effettuare, parametro che dipende dai vincoli operativi della campagna di rimozione. La suddivisione della sequenza in missioni distinte avviene mediante un processo aleatorio controllato: per ciascuna missione, eccetto l'ultima, si genera un valore casuale nell'intervallo $[-2, 2]$ che, sommato al numero medio di detriti per missione, determina il punto di suddivisione nella sequenza. Formalmente, se χ_i rappresenta l'indice dell'ultimo detrito della missione i , si ricava

$$\chi_i = \delta_i + i \cdot \lfloor n/n_m \rfloor \quad (5.8)$$

dove $\delta_i \in [-2, 2]$ rappresenta l'offset aleatorio, mentre n è il numero totale di detriti da rimuovere. Tale strategia assicura una distribuzione bilanciata del carico operativo tra le diverse missioni della campagna di rimozione, introducendo al contempo una variabilità che permette all'algoritmo di esplorare diverse configurazioni di suddivisione.

Inoltre, per garantire il rispetto del vincolo sulla durata complessiva della campagna di missioni, si implementa un meccanismo di bilanciamento iterativo. Qualora la somma delle durate delle trasferte ecceda o non raggiunga il valore desiderato, le singole durate vengono incrementate o ridotte iterativamente, rispettando i vincoli di durata minima e massima imposti dalle caratteristiche della propulsione e dai requisiti operativi.

Il vettore degli istanti di partenza *slotp* viene, invece, costruito ricorsivamente a partire da un tempo iniziale t_0 , secondo la relazione

$$\text{slotp}_i = \begin{cases} t_0 & \text{se } i = 1 \\ \text{slotp}_{i-1} + \text{slotl}_{i-1} & \text{se } i > 1 \end{cases} \quad (5.9)$$

dove i indica l'indice del vettore *slotp*.

Tale approccio assicura che la pianificazione temporale generata soddisfi i requisiti operativi della missione, mentre l'algoritmo ACO provvede all'ottimizzazione della sequenza di rimozione per minimizzare il costo propulsivo totale della campagna. La combinazione di questi due aspetti rappresenta un elemento distintivo dell'implementazione proposta rispetto alle applicazioni standard dell'algoritmo ACO. Inoltre, la metodologia descritta introduce un elemento di esplorazione stocastica nello spazio delle soluzioni, consentendo all'algoritmo di valutare diverse configurazioni di suddivisione e pianificazione temporale, risultando particolarmente efficace per problemi di ottimizzazione complessi come la pianificazione di missioni ADR.

5.2.5 Scelta dei parametri dell'algoritmo

La corretta configurazione dei parametri dell'algoritmo ACO risulta fondamentale per garantire l'efficacia nella risoluzione del problema di ottimizzazione delle missioni ADR. Per ottenere i risultati presentati nel capitolo successivo, sono stati adottati i seguenti parametri:

- Il numero di formiche è stato fissato pari al numero di detriti da rimuovere. Questa scelta garantisce un'adeguata esplorazione dello spazio delle soluzioni, consentendo a ciascuna formica di iniziare il proprio percorso da un nodo diverso. Un numero maggiore di formiche incrementerebbe eccessivamente il costo computazionale senza apportare miglioramenti sostanziali nella qualità delle soluzioni.
- Il coefficiente di evaporazione del feromone ρ è stato impostato a 0.05. Questo valore relativamente basso permette una lenta dissipazione del feromone, favorendo una memoria a lungo termine dell'algoritmo e facilitando la convergenza verso soluzioni di qualità.
- Il peso dell'informazione euristica β e del feromone α sono stati fissati rispettivamente a 4 e 1. Questi valori enfatizzano l'esplorazione di percorsi che appaiono vantaggiosi nell'immediato, anche se non sono ancora stati rinforzati dal feromone. Di conseguenza, l'algoritmo assume un comportamento "greedy", caratterizzato da una convergenza più rapida verso soluzioni promettenti, ma con una capacità ridotta di esplorare alternative potenzialmente migliori nel lungo periodo.
- Il valore iniziale del feromone τ_0 è stato impostato a 0.0001, un valore sufficientemente basso da consentire all'algoritmo di sviluppare rapidamente preferenze verso percorsi promettenti sin dalle prime iterazioni. Questa scelta è motivata dall'impossibilità di applicare un algoritmo euristico al problema in esame, rendendo inapplicabili le metodologie classiche illustrate in precedenza.
- Il numero massimo di iterazioni è stato fissato a 100 per ciascun ciclo dell'algoritmo ACO. Questo valore rappresenta un compromesso tra la qualità

delle soluzioni ottenute e il tempo di calcolo richiesto. Analisi empiriche hanno mostrato che incrementi ulteriori raramente conducono a miglioramenti significativi nelle soluzioni.

È importante sottolineare che, sebbene questi valori siano risultati efficaci per il caso di studio trattato, la configurazione ottimale dei parametri può variare in funzione delle specifiche caratteristiche del problema, come il numero di detriti da rimuovere o la struttura della matrice dei costi. Per applicazioni che richiedono prestazioni particolarmente elevate, potrebbe risultare vantaggioso implementare tecniche di ottimizzazione automatica dei parametri durante l'esecuzione dell'algoritmo.

Capitolo 6

Analisi dei risultati

Nel presente capitolo vengono presentati i risultati ottenuti dall'applicazione dell'algoritmo ACO, illustrato nel capitolo precedente, per l'ottimizzazione delle missioni di rimozione attiva dei detriti spaziali. L'analisi si sviluppa in più fasi. Inizialmente, l'algoritmo viene validato attraverso il confronto diretto con la soluzione vincitrice della competizione GTOC9 [9], confermando l'efficacia dell'approccio proposto. Successivamente, si esaminano gli effetti della riduzione della spinta disponibile sulle prestazioni delle missioni, con particolare attenzione alle implicazioni della propulsione elettrica e alle criticità che ne derivano. Infine, vengono presentate differenti strategie risolutive, basate sulla riconsiderazione dei requisiti di missione, con l'obiettivo di individuare una soluzione tecnicamente attuabile con un livello di spinta di $1 N$. I risultati ottenuti non solo dimostrano la fattibilità delle missioni previste, ma evidenziano anche la flessibilità dell'approccio metodologico illustrato, offrendo un contributo originale alla pianificazione di missioni ADR con propulsione elettrica.

6.1 Global Trajectory Optimization Competition

Il tema su cui si basano i risultati di questa trattazione è la nona edizione del Global Trajectory Optimization Competition (GTOC9), svoltasi tra i mesi di Aprile e Maggio 2016. La GTOC è una competizione organizzata dall'Agenzia Spaziale Europea a cui prendono parte diversi istituti di ricerca e università per risolvere problemi molto complessi legati alla progettazione di traiettorie interplanetarie.

L'Advanced Concepts Team dell'ESTEC (European Space Research and Technology Centre), vincitore dell'ottava edizione, ha avuto l'onore di ideare il tema della nona edizione. Questa edizione, denominata "The Kessler Run", verte sul tema della rimozione attiva dei detriti spaziali. La competizione si sviluppa in un contesto futuristico, ambientato nel 2060, in cui l'esplosione di un satellite ha innescato un effetto a catena, noto come sindrome di Kessler, compromettendo severamente l'ambiente LEO eliosincrono. Fortunatamente, gli scienziati hanno individuato un gruppo di 123 detriti spaziali che, se opportunamente rimossi, consentirebbero di ripristinare l'operatività di quelle orbite.

6.1.1 Descrizione del problema

Il problema di ottimizzazione si focalizza sulla pianificazione di n missioni spaziali finalizzate alla rimozione dei 123 detriti identificati. Tali detriti seguono delle traiettorie kepleriane soggette unicamente all'effetto della perturbazione J_2 . Ogni missione è composta da un veicolo spaziale che, attraverso una traiettoria multi-rendezvous, permette la rimozione di una sequenza di N detriti, facenti parte degli M totali. La rimozione di un detrito avviene grazie all'installazione e all'attivazione di un dispositivo di *de-orbiting* sul detrito stesso. La dinamica dei veicoli spaziali è anch'essa kepleriana e soggetta unicamente all'effetto di J_2 .

Considerando questi aspetti, la funzione costo da minimizzare risulta

$$J = \sum_{i=1}^n C_i = \sum_{i=1}^n [c_i + \alpha(m_{0,i} - m_{dry})^2] \quad (6.1)$$

dove C_i è il costo associato alla i -esima missione, composto da un costo fisso c_i e un termine proporzionale alla massa iniziale m_0 del satellite che favorisce i veicoli spaziali più leggeri. Pertanto, l'obiettivo della competizione consiste nel minimizzare il numero di missioni, riducendo al contempo il consumo di propellente, e quindi il ΔV , per ciascuna missione. Il problema presentato, dunque, combina diverse sfide di ottimizzazione, tra le quali:

- Problema di clustering per determinare come suddividere i 123 detriti nelle diverse missioni.
- Problema del commesso viaggiatore per determinare la sequenza ottimale di rimozione dei detriti.
- Problema di ottimizzazione delle traiettorie orbitali per minimizzare le manovre propulsive e il consumo di propellente nelle trasferte tra due detriti.

Queste caratteristiche rendono il problema particolarmente adatto all'applicazione di metodi metaeuristici, come l'algoritmo ACO presentato in questa trattazione.

6.1.2 Vincoli operativi

Si definiscono t_i^s e t_i^f rispettivamente l'istante iniziale e finale della generica missione i . Dal punto di vista operativo, ogni missione della campagna comincia con il rilascio di un veicolo spaziale in prossimità di un detrito designato e termina quando tutti gli N dispositivi di deorbitaggio, di 30 *kg* l'uno, sono stati installati e attivati. In particolare, un detrito viene considerato correttamente rimosso se la sua posizione e il suo vettore velocità ad un istante t coincidono con quelli del veicolo spaziale e se quest'ultimo permane in prossimità del detrito per almeno 5 giorni, intervallo necessario per effettuare le operazioni di servizio sul detrito. Dopodiché, il satellite è libero di attivare il suo sistema propulsivo e procedere verso il detrito successivo. Di

conseguenza, la massa iniziale di ogni satellite risulta

$$m_0 = m_{dry} + Nm_{de} + m_p \quad (6.2)$$

dove m_{dry} è la massa a vuoto, m_p rappresenta la massa di propellente, mentre m_{de} è la massa di un singolo dispositivo di deorbitaggio, che costituisce il payload trasportato. I veicoli spaziali considerati hanno una massa a vuoto di 2000 *kg* e possono trasportare al massimo 5000 *kg* di propellente.

Le operazioni di rimozione dei detriti spaziali sono particolarmente complesse e richiedono un controllo accurato della pianificazione delle tempistiche. In particolare, il tempo che intercorre tra due rendezvous consecutivi della medesima missione non deve eccedere i 30 giorni. Pertanto, definendo t_a il tempo di arrivo al detrito a e t_b il tempo di arrivo al detrito b , risulta

$$t_b - t_a \leq 30 \text{ d} \quad (6.3)$$

Il rispetto di questo limite temporale è fondamentale per ottimizzare l'efficienza delle missioni. Inoltre, tra la conclusione di una missione e l'inizio della successiva devono intercorrere almeno 30 giorni, ovvero

$$t_i^f + 30 \leq t_{i+1}^s \quad (6.4)$$

Questo vincolo è imposto per impedire che due missioni avvengano in parallelo, semplificando così le operazioni di controllo da terra. Infine, tutti gli eventi delle missioni devono avvenire all'interno di una finestra temporale predefinita. Questa finestra è compresa tra il 23467 e il 26419 MJD2000 (Modified Julian Date 2000), corrispondente a un periodo di 8 anni.

Infine, per garantire la sicurezza operativa della missione, il periapside dell'orbita osculatrice non deve essere inferiore a 6600 *km*, al fine di evitare che il satellite si avvicini troppo alla zona atmosferica terrestre. Per semplicità, questo vincolo viene solamente verificato alla partenza e all'arrivo su un detrito e nei punti in cui avvengono le manovre propulsive.

6.1.3 Soluzione vincitrice

Durante il mese di competizione, 32 squadre provenienti da tutto il mondo hanno proposto diverse strategie per risolvere il problema di ottimizzazione presentato. Tra queste, il team del Jet Propulsion Laboratory (JPL) si è aggiudicato la vittoria della competizione. La soluzione proposta prevede la pianificazione di 10 missioni spaziali per la rimozione dei 123 detriti in esame [10].

La strategia risolutiva implementata dalla squadra vincitrice include metodi *branch-and-bound* che sfruttano la precessione nodale per calcolare lunghe sequenze

di rendezvous con i detriti, algoritmi ACO e un algoritmo genetico. In particolare, il problema è stato formulato come una lista di nodi da visitare sequenzialmente e separati da un tempo di manovra, riconducendolo quindi a un Time-Dependent TSP (in cui la distanza tra due nodi dipende dall'ordine con cui si visitano) ma con una dimensione aggiuntiva, legata alla durata delle trasferte orbitali.

La campagna di missioni prevista dal JPL è riportata nella tabella seguente. Inoltre, in tabella 6.2 si riportano le specifiche delle prime due missioni, che saranno utilizzate per successivi confronti con i risultati di questo elaborato.

Missione	Inizio [MJD2000]	Fine [MJD2000]	Massa [kg]	Numero di detriti	ID Detriti
1	23557.18	23821.03	5665.38	14	23,55,79,113,25,20,27,117,121,50,95,102,38,97
2	23851.08	24024.53	4666.15	12	19,115,41,26,45,82,47,85,7,2,11,77
3	24057.47	24561.49	6589.58	21	72,107,61,10,28,3,64,66,31,90,73,87,57,35,69,65,8,43,71,4,29
4	24637.26	24916.44	5679.10	11	108,24,104,119,22,75,63,112,37,32,114
5	24946.47	25232.94	4906.59	14	84,59,98,1,40,51,36,67,62,99,54,122,76,15
6	25262.95	25455.15	5062.74	10	101,48,53,5,12,39,58,13,60,74
7	25485.20	25682.33	4082.33	10	49,9,70,93,105,46,88,118,18,91
8	25712.38	25915.53	3725.73	9	86,34,100,30,92,6,110,96,81
9	25946.06	26237.29	4897.35	12	33,68,116,106,14,52,120,80,16,94,83,89
10	26267.80	26416.00	3438.62	10	44,111,56,78,0,17,109,103,42,21

Tabella 6.1: Panoramica delle missioni previste dal JPL

Missione	Durata rendezvous [day]
1	5.00,5.00,5.04,5.01,5.01,5.03,5.00,5.00,5.00,5.03,5.03,5.04,5.04,5.00
2	5.00,5.02,5.02,5.00,5.04,5.00,5.05,5.02,5.07,5.03,5.02,5.00
Missione	Durata trasferta [day]
1	24.86,24.98,22.42,24.99,0.29,10.63,25.00,2.70,1.51,1.41,24.67,24.31,5.86
2	24.93,0.28,0.73,0.39,17.07,1.61,22.42,2.39,15.88,24.97,2.49
Missione	ΔV [m/s]
1	161.8,139.2,65.8,208.2,115.2,300.1,564.9,78.3,105.0,233.3,453.5,340.4,300.8
2	659.0,301.1,252.1,143.8,146.8,68.6,40.6,84.2,105.3,448.5,148.0

Tabella 6.2: Caratteristiche delle prime due missioni del JPL

6.2 Definizione del problema in esame

Focalizzandosi solamente sulle prime due missioni della tabella 6.1, si pone l'obiettivo di ottimizzare la sequenza di rimozione dei medesimi 26 detriti spaziali mediante l'impiego della propulsione elettrica. Mantenendo i vincoli imposti nella competizione, si introducono alcune ipotesi aggiuntive per semplificare il problema:

- La durata del rendezvous tra il veicolo spaziale e il detrito da rimuovere viene fissata a 5 giorni.
- Le durate delle trasferte possibili sono solamente multipli di 5 giorni; inoltre, poiché la propulsione elettrica è caratterizzata da fasi di spinta continua, la durata minima possibile per una trasferta è fissata a 5 giorni.

- Tra la conclusione della prima missione e l'inizio della seconda intercorrono esattamente 30 giorni.
- La prima missione ha inizio esattamente nello stesso giorno della prima missione del JPL, ovvero 23557.18 MJD2000.
- La durata complessiva delle due missioni è fissata a 450 giorni, valore ottenuto arrotondando la durata delle singole trasferte delle due missioni del JPL al multiplo di 5 più vicino.
- Le trasferte avvengono tra orbite quasi circolari, un'approssimazione plausibile considerando le eccentricità dei detriti in esame, con un vincolo sulla quota minima dell'orbita di coasting di 220 *km*.

A completamento della definizione del problema, si ipotizza un sistema propulsivo caratterizzato da un impulso specifico di 3000 *s* e si considera un veicolo spaziale con una massa a vuoto di 2000 *kg*, in accordo con i dati della competizione. Le specifiche relative alla spinta disponibile saranno invece discusse dettagliatamente nei paragrafi successivi.

6.3 Confronto con la soluzione del JPL

Al fine di validare l'algoritmo illustrato nel capitolo precedente, si confronta la soluzione del problema in esame con quella proposta dal JPL per la competizione GTOC9. Il problema della competizione, tuttavia, prevede l'utilizzo della propulsione chimica, modellando le trasferte come manovre impulsive. Pertanto, per garantire un confronto fisicamente coerente, si ipotizza inizialmente un sistema propulsivo capace di generare 100 *N* di spinta, in modo da trascurare la durata delle manovre orbitali.

Missione	Inizio [MJD2000]	Fine [MJD2000]	Massa [<i>kg</i>]	ΔV_{tot} [<i>m/s</i>]	Numero di detriti
1	23557.18	23817.18	2755.90	4567.4	14
2	23847.18	24007.20	2623.72	3644.0	12
Totale	23557.18	24007.20	—	8211.4	26

Tabella 6.3: Panoramica delle missioni ricavate ($T = 100\ N$)

La soluzione ottenuta è riportata nella tabella 6.3. La massa iniziale indicata è stata stimata applicando l'equazione del razzo e aggiungendo un payload di 30 *kg* per ogni detrito rimosso dalla missione. Tale valore, sebbene approssimativo, risulta particolarmente utile nelle fasi di progettazione preliminare di una missione ADR. Si osserva inoltre che la seconda missione termina circa due settimane prima rispetto alla corrispondente prevista dal JPL. Questa discrepanza potrebbe quindi suggerire un approccio conservativo, poiché una maggiore durata delle missioni consente delle trasferte più lunghe, permettendo di sfruttare maggiormente l'effetto benefico di J_2 per ridurre i costi propulsivi. Tuttavia, tale approccio viene compensato dalle

assunzioni adottate per il calcolo della matrice dei costi. Si ribadisce infatti che le trasferte orbitali tra due detriti sono valutate considerando la massa a vuoto del satellite, così da garantire la fattibilità di tutte le possibili trasferte, incluse quelle che avverrebbero nelle fasi finali della missione. Tuttavia, tale approccio riduce il ΔV richiesto per le manovre, poiché, come evidenziato precedentemente, i costi propulsivi risultano proporzionali alla massa del veicolo spaziale in esame.

Missione	ID Detriti
1	23,55,79,113,25,20,27,117,121,50,95,102,38,97
2	19,115,2,41,45,82,47,85,7,26,11,77
Missione	Durata trasferta con rendezvous [day]
1	30.0,25.0,25.0,30.0,10.0,15.0,25.0,10.0,10.0,10.0,30.0,25.0,10.0
2	30.0,10.0,10.0,10.0,15.0,10.0,10.0,10.0,10.0,25.0,15.0
Missione	Durata archi di spinta [day]
1	0.06,0.05,0.01,0.07,0.04,0.09,0.19,0.03,0.03,0.08,0.16,0.13,0.11
2	0.17,0.06,0.06,0.10,0.06,0.03,0.02,0.03,0.04,0.14,0.13
Missione	ΔV [m/s]
1	255.0,225.1,37.5,305.2,174.9,411.3,826.2,109.6,121.6,328.8,721.0,565.1,486.1
2	730.6,277.0,258.1,421.7,247.9,114.4,89.2,148.8,183.6,595.0,577.6

Tabella 6.4: Caratteristiche delle missioni ricavate ($T = 100 N$)

La tabella 6.4 illustra nel dettaglio le due missioni ricavate, presentando la sequenza di rimozione dei detriti e le caratteristiche delle trasferte. Le differenze rispetto alla sequenza prevista dal JPL sono evidenziate in rosso: mentre la prima missione risulta identica, la seconda presenta una sequenza leggermente differente. Tale discrepanza deriva dal vincolo sulla durata minima delle trasferte, che comporta una redistribuzione dei tempi al fine di rispettare il limite imposto sulla durata complessiva delle due missioni.

Nonostante questa variazione, la sequenza ottenuta rappresenta la soluzione ottimale, con un costo propulsivo di $8211.4 m/s$, significativamente inferiore rispetto agli $8472.0 m/s$ richiesti per implementare la sequenza di rimozione del JPL. Questo risultato dimostra la validità dell'algoritmo ACO sviluppato in questa trattazione nell'identificazione della sequenza di rimozione ottimale. Inoltre, si osserva che le durate degli archi di spinta risultano trascurabili rispetto ai tempi delle trasferte, confermando la validità della spinta adottata e garantendo un confronto coerente con la soluzione impulsiva del JPL. Si precisa infine che le durate delle trasferte riportate includono, per praticità, anche i tempi di rendezvous, essendo questi ultimi prefissati.

La figura 6.1 raffigura l'evoluzione delle soluzioni durante l'esecuzione dell'algoritmo ACO. La curva blu rappresenta l'andamento della soluzione minima ad ogni iterazione (o minimo locale) e tende a stabilizzarsi nell'intorno della soluzione ottimale. La curva arancione, caratterizzata da oscillazioni più marcate, mostra invece la media delle distanze dei percorsi tracciati dalla colonia di formiche per ciascuna iterazione. Si osserva che la soluzione ottimale (o minimo globale) viene

ricavata poco dopo l'iterazione 80. Questa rappresentazione consente di visualizzare chiaramente sia il processo di convergenza verso la soluzione ottimale che la capacità dell'algoritmo di esplorare differenti soluzioni, incluse quelle meno convenienti.

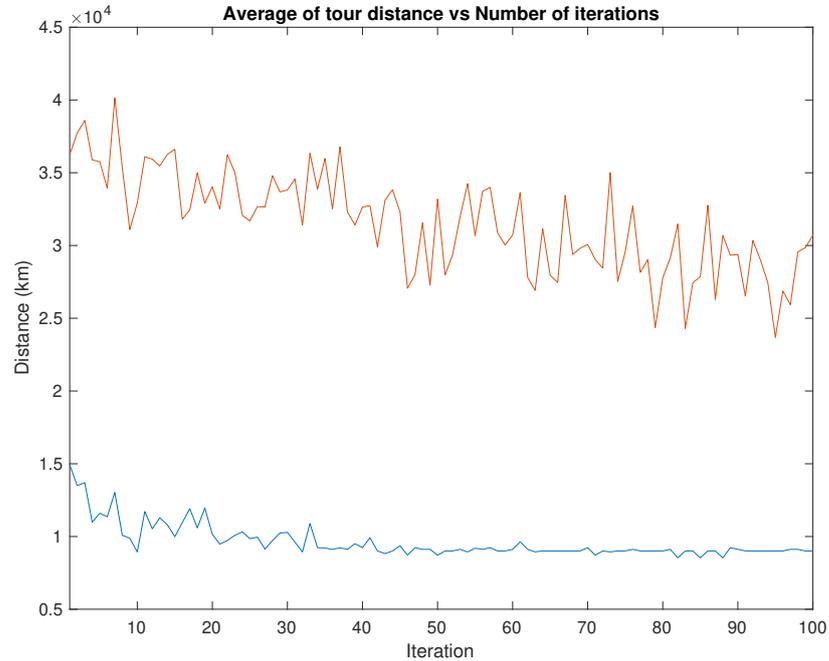


Figura 6.1: Andamento della soluzione durante le iterazioni dell'algoritmo ACO

6.4 Effetti della riduzione della spinta sulla soluzione ottimale

I propulsori elettrici, tuttavia, non sono in grado di sviluppare livelli di spinta così elevati. Attualmente, i propulsori a ioni più avanzati possono generare spinte dell'ordine di $1 - 2 N$, come nel caso del propulsore NEXT della NASA [11], impiegato nella missione DART del 2021. Prima di procedere direttamente all'analisi della configurazione con un $1 N$ di spinta, che rappresenta il fine ultimo di questa trattazione, risulta appropriato adottare un approccio di riduzione graduale, che permette di comprendere l'influenza del livello di spinta sulla soluzione ottimale.

6.4.1 Analisi con $5 N$ di spinta

Riducendo la spinta a $5 N$, la sequenza ottimale di rimozione rimane invariata. Tuttavia, si osserva un incremento dei tempi di spinta e conseguentemente del costo propulsivo totale e della massa iniziale dei satelliti, come riportato nella tabella riassuntiva 6.5.

È interessante notare che, nonostante la riduzione della spinta di un fattore 20, l'aumento del ΔV complessivo rimane contenuto (circa il 5%). Inoltre, analizzando

le caratteristiche delle missioni riportate in tabella 6.6, si osserva che le trasferte che contribuiscono maggiormente a questo incremento sono quelle caratterizzate dagli archi di spinta di maggiore durata, come osservato precedentemente nel paragrafo 4.5. In particolare, le trasferte più impegnative sono quelle tra i detriti 27 e 117 nella prima missione, con un tempo di spinta di 4.16 giorni, e tra i detriti 19 e 115 nella seconda missione, con un tempo di spinta di 3.55 giorni. Questi valori, pur rappresentando un incremento significativo rispetto al caso con 100 N di spinta, rimangono comunque ben al di sotto delle durate delle rispettive trasferte.

Missione	Inizio [MJD2000]	Fine [MJD2000]	Massa [kg]	ΔV_{tot} [m/s]	Incremento ΔV_{tot}
1	23557.18	23817.18	2774.89	4805.6	+5.22%
2	23847.18	24007.20	2636.57	3810.6	+4.57%
Totale	23557.18	24007.20	—	8616.2	+4.93%

Tabella 6.5: Panoramica delle missioni ricavate ($T = 5 N$)

Missione	ID Detriti
1	23,55,79,113,25,20,27,117,121,50,95,102,38,97
2	19,115,2,41,45,82,47,85,7,26,11,77
Missione	Durata trasferta con rendezvous [day]
1	30.0,25.0,25.0,30.0,10.0,15.0,25.0,10.0,10.0,10.0,30.0,25.0,10.0
2	30.0,10.0,10.0,10.0,15.0,10.0,10.0,10.0,10.0,10.0,25.0,15.0
Missione	Durata archi di spinta [day]
1	1.18,0.96,0.17,1.43,0.83,1.98,4.10,0.51,0.58,1.95,3.34,2.77,2.32
2	3.55,1.28,1.24,2.01,1.18,0.54,0.41,0.70,0.87,2.87,2.84
Missione	ΔV [m/s]
1	255.5,225.7,37.6,311.4,179.0,429.9,912.8,110.8,124.8,337.6,708.7,603.5,504.4
2	777.0,277.3,269.2,436.7,255.2,116.3,89.7,152.4,189.2,627.2,620.3

Tabella 6.6: Caratteristiche delle missioni ricavate ($T = 5 N$)

6.4.2 Analisi con 3 N di spinta

La riduzione della spinta fino a 3 N determina un ulteriore incremento dei tempi di spinta e del costo propulsivo delle trasferte, come riportato in tabella 6.7. Dall'analisi dei risultati, emerge chiaramente una relazione non lineare tra la riduzione della spinta e l'aumento del costo propulsivo totale. Infatti, abbassando la spinta da 5 N a 3 N , ovvero di un fattore 1.67, l'incremento complessivo del ΔV risulta quasi raddoppiato, passando dal 5% a oltre il 9% rispetto alla soluzione con 100 N .

Inoltre, esaminando in dettaglio la tabella 6.8, si osserva che alcune trasferte della durata di 10 giorni (evidenziate in giallo) iniziano a manifestare delle criticità: i tempi di spinta aumentano significativamente avvicinandosi alle durate complessive delle rispettive trasferte. Questa tendenza evidenzia come, per valori di spinta inferiori,

alcune trasferte potrebbero diventare non realizzabili a causa dell'eccessiva durata degli archi di spinta.

Missione	Inizio [MJD2000]	Fine [MJD2000]	Massa [kg]	ΔV_{tot} [m/s]	Incremento ΔV_{tot}
1	23557.18	23817.18	2793.45	5036.6	+10.27%
2	23817.18	24007.20	2647.24	3948.1	+8.35%
Totale	23557.18	24007.20	—	8984.7	+9.42%

Tabella 6.7: Panoramica delle missioni ricavate ($T = 3 N$)

Missione	ID Detriti
1	23,55,79,113,25,20,27,117,121,50,95,102,38,97
2	19,115,2,41,45,82,47,85,7,26,11,77
Missione	Durata trasferta con rendezvous [day]
1	30.0,25.0,25.0,30.0,10.0,15.0,25.0,10.0,10.0,10.0,30.0,25.0,10.0
2	30.0,10.0,10.0,10.0,15.0,10.0,10.0,10.0,10.0,25.0,15.0
Missione	Durata archi di spinta [day]
1	1.97,1.79,0.29,2.43,1.40,3.41,7.58,0.86,0.98,2.64,6.29,4.91,3.95
2	6.22,2.14,2.13,3.42,2.00,0.91,0.69,1.19,1.49,4.99,5.01
Missione	ΔV [m/s]
1	255.8,233.2,37.7,316.2,182.0,444.9,998.5,111.7,127.3,343.5,826.6,643.0,516.1
2	812.7,278.5,277.7,446.7,260.8,117.8,90.0,155.1,193.5,654.4,666.0

Tabella 6.8: Caratteristiche delle missioni ricavate ($T = 3 N$)

6.4.3 Analisi con 2 N di spinta

Riducendo ulteriormente la spinta a 2 N, si raggiunge un punto critico per la fattibilità delle missioni: alcune trasferte non risultano più realizzabili coi vincoli temporali imposti.

Missione	ID Detriti
1	23,55,79,113,25,20,27,117,121,50,95,102,38,97
2	19,115,2,41,45,82,47,85,7,26,11,77
Missione	Durata trasferta con rendezvous [day]
1	30.0,25.0,25.0,30.0,10.0,15.0,25.0,10.0,10.0,10.0,30.0,25.0,10.0
2	30.0,10.0,10.0,10.0,15.0,10.0,10.0,10.0,10.0,25.0,15.0
Missione	Durata archi di spinta [day]
1	2.89,2.74,0.44,3.71,2.15,5.35,13.19,1.30,1.51,4.03,9.98,7.81,5.57
2	10.08,3.24,3.33,5.23,3.09,1.38,1.04,1.83,2.30,7.96,8.09
Missione	ΔV [m/s]
1	250.7,237.9,37.7,322.5,185.9,466.3,1162.5,112.9,130.7,350.4,875.6,682.5,—
2	883.8,281.2,289.2,—,268.2,119.7,90.4,158.7,199.2,696.3,707.5

Tabella 6.9: Caratteristiche delle missioni ricavate ($T = 2 N$)

L'analisi dettagliata della soluzione rivela infatti che, in determinati casi, il tempo richiesto per la fase di spinta supera la durata disponibile per la trasferta stessa. In

particolare, questa criticità si manifesta nella prima missione per la trasferta tra i detriti 38 e 97, dove il tempo di spinta necessario ammonta a 5.57 giorni a fronte dei soli 10 giorni allocati per la trasferta, di cui 5 sono dedicati alle operazioni di rendezvous e servicing. Una situazione analoga si verifica nella seconda missione per la trasferta tra i detriti 41 e 45, in cui il tempo di spinta richiesto è pari a 5.23 giorni, eccedendo i limiti temporali stabiliti.

La tabella 6.9 riporta nel dettaglio le caratteristiche delle missioni ricavate. Le trasferte non realizzabili sono evidenziate in rosso, indicando l'impossibilità di completare la sequenza di rimozione con l'attuale pianificazione temporale delle missioni.

6.4.4 Analisi con 2 N di spinta e modifica delle durate

Per risolvere questa problematica, è necessario ridistribuire strategicamente le durate delle trasferte. Attraverso un processo iterativo integrato con l'algoritmo ACO, sono state esplorate diverse configurazioni temporali, incrementando i tempi delle trasferte critiche e compensando con la riduzione di alcune delle restanti, al fine di rispettare il vincolo di 450 giorni per l'intera campagna di missioni.

Missione	Inizio [MJD2000]	Fine [MJD2000]	Massa [kg]	ΔV_{tot} [m/s]	Incremento ΔV_{tot}
1	23557.18	23817.18	2817.41	5332.1	+16.74%
2	23817.18	24007.20	2661.95	4136.7	+13.52%
Totale	23557.18	24007.20	–	9468.8	+15.31%

Tabella 6.10: Panoramica delle missioni ricavate ($T = 2 N$, durate modificate)

Questo approccio ha permesso di individuare, tra le molteplici combinazioni esplorate, la soluzione ottimale che minimizza il costo propulsivo garantendo al contempo la fattibilità di tutte le trasferte. La tabella 6.11 riporta le caratteristiche della nuova soluzione, evidenziando in verde le trasferte con durata incrementata e in rosso quelle con durata ridotta.

Si osserva che la sequenza ottimale di rimozione dei detriti rimane invariata, ma si riscontra un lieve incremento del costo propulsivo (osservabile analizzando la soluzione per 3 N che passa da 8984.7 m/s a 8995.9 m/s con la nuova configurazione temporale). Tale aumento è attribuibile alla riduzione del tempo allocato per le trasferte tra i detriti 102 e 38 nella prima missione e tra i detriti 45 e 82 nella seconda missione.

Questa soluzione, pur considerando una configurazione temporale non più ottimale, dimostra la fattibilità operativa delle missioni con un livello di spinta coerente con lo stato dell'arte della propulsione elettrica.

Missione	ID Detriti
1	23,55,79,113,25,20,27,117,121,50,95,102,38,97
2	19,115,2,41,45,82,47,85,7,26,11,77
Missione	Durata trasferta con rendezvous [day]
1	30.0,25.0,25.0,30.0,10.0,15.0,25.0,10.0,10.0,10.0,25.0,25.0,15.0
2	30.0,10.0,10.0,15.0,10.0,10.0,10.0,10.0,25.0,15.0
Missione	Durata archi di spinta [day]
1	2.89,2.74,0.44,3.71,2.15,5.35,13.19,1.30,1.51,4.03,9.48,8.91,5.33
2	10.08,3.24,3.33,4.29,3.89,1.38,1.04,1.83,2.30,7.96,8.09
Missione	ΔV [m/s]
1	250.7,237.9,37.7,322.5,185.9,466.3,1162.5,112.9,130.7,350.4,830.8,780.1,463.7
2	883.8,281.2,289.2,372.8,338.1,119.7,90.4,158.7,199.2,696.3,707.5

Tabella 6.11: Caratteristiche delle missioni ricavate ($T = 2 N$, durate modificate)

6.4.5 Analisi con 1 N di spinta

Mantenendo la stessa sequenza di rimozione del caso precedente e riducendo ulteriormente il livello di spinta fino a 1 N , si riscontrano criticità ancora più marcate: oltre la metà delle 24 trasferte orbitali risultano non realizzabili.

Missione	ID Detriti
1	23,55,79,113,25,20,27,117,121,50,95,102,38,97
2	19,115,2,41,45,82,47,85,7,26,11,77
Missione	Durata trasferta con rendezvous [day]
1	30.0,25.0,25.0,30.0,10.0,15.0,25.0,10.0,10.0,10.0,25.0,25.0,15.0
2	30.0,10.0,10.0,15.0,10.0,10.0,10.0,10.0,10.0,25.0,15.0
Missione	Durata archi di spinta [day]
1	5.67,5.86,0.88,7.96,4.59,11.77,30.59,2.70,3.32,7.56,24.03,20.37,11.59
2	27.22,6.38,5.94,9.61,7.24,2.91,2.11,3.94,5.05,20.95,13.20
Missione	ΔV [m/s]
1	246.1,254.4,38.0,345.9,198.8,—,—,116.8,143.7,—,—,—,—
2	—,—,—,418.1,—,126.2,91.5,170.6,—,—,—,—

Tabella 6.12: Caratteristiche delle missioni ricavate ($T = 1 N$)

In particolare, si osserva che i tempi di spinta necessari aumentano drasticamente, diventando incompatibili con i vincoli temporali imposti. Ad esempio, la trasferta tra i detriti 27 e 117 nella prima missione richiederebbe una fase propulsiva di oltre 30 giorni. Pertanto, l'adozione della strategia di ridistribuzione temporale precedentemente utilizzata risulta impraticabile.

Un approccio alternativo consiste nel ricavare una nuova sequenza di rimozione mediante l'algoritmo ACO. La tabella 6.13 riporta il risultato di questa ottimizzazione, evidenziando in rosso le differenze rispetto alla sequenza precedente. Si osserva che l'algoritmo tende a riorganizzare l'ordine di rimozione dei detriti minimizzando il numero delle trasferte critiche.

Missione	ID Detriti
1	55,113,79,121,117,45,19,41,11,27,25,20,95,50
2	38,97,102,23,77,82,47,26,7,85,2,115
Missione	Durata trasferta con rendezvous [day]
1	30.0,25.0,25.0,30.0,10.0,15.0,25.0,10.0,10.0,10.0,25.0,25.0,15.0
2	30.0,10.0,10.0,15.0,10.0,10.0,10.0,10.0,10.0,25.0,15.0
Missione	Durata archi di spinta [day]
1	5.54,0.63,3.25,7.29,380.59,7.18,6.74,2.49,394.92,3.38,9.62,7.55,5.49
2	4.82,117.54,134.36,438.70,100.03,2.91,3.93,3.27,2.15,3.70,64.74
Missione	ΔV [m/s]
1	240.2,27.1,140.8,316.8,-,311.7,292.7,107.9,-,146.3,418.4,328.1,238.3
2	209.2,-,-,-,-,126.2,170.1,141.8,93.0,160.2,-

Tabella 6.13: Caratteristiche delle missioni ricavate ($T = 1 N$, nuova sequenza)

Nonostante questa ottimizzazione, permangono numerose criticità: diverse trasferte richiedono ancora tempi di spinta estremamente elevati, con valori che in alcuni casi sono prossimi alla durata complessiva dell'intera campagna di missioni. Di conseguenza, per implementare efficacemente delle missioni ADR con una spinta di un $1 N$ risulta necessario adottare strategie alternative, come:

- L'estensione della durata complessiva della campagna di missioni.
- La modifica dei vincoli temporali relativi alle trasferte e ai rendezvous.
- La suddivisione dei 26 detriti in un numero maggiore di missioni.

6.5 Estensione della durata della campagna di missioni

Nel presente studio si considera la propulsione elettrica, caratterizzata da manovre a bassa spinta di lunga durata. Pertanto, una possibile strategia per superare le criticità evidenziate nel paragrafo precedente consiste nell'estendere la durata complessiva della campagna di missioni. Questo approccio permette di incrementare le durate delle trasferte, garantendo così un margine maggiore per le fasi propulsive.

Si sceglie dunque di incrementare di 100 giorni il vincolo temporale precedentemente imposto, portando la durata totale a 550 giorni. Inoltre, analizzando la matrice dei costi si riscontra che, con $1 N$ di spinta, solamente una percentuale limitata delle trasferte teoriche tra i detriti in esame risulta fattibile con una durata di 5 giorni. Di conseguenza, si estende anche il vincolo sulla durata minima delle trasferte, incrementandolo da 5 a 10 giorni.

6.5.1 Analisi con $2 N$ di spinta e durata estesa

La tabella 6.14 riporta le caratteristiche principali della soluzione ottimale ricavata con un livello di spinta di $2 N$ e i nuovi vincoli temporali adottati. Si osserva che

l'estensione della durata complessiva comporta una riduzione dei costi propulsivi. Le manovre con una durata maggiore permettono infatti di sfruttare per più tempo l'effetto perturbativo di J_2 , riducendo i tempi di spinta e, conseguentemente, i costi propulsivi delle trasferte. Confrontando questa soluzione con quella del paragrafo 6.4.4, si evidenzia una riduzione del ΔV complessivo di circa il 7% (da 9468.8 m/s a 8863.2 m/s), a fronte di un incremento del tempo totale del 22%.

Missione	Inizio [MJD2000]	Fine [MJD2000]	Massa [kg]	ΔV_{tot} [m/s]	Numero di detriti
1	23557.18	23817.18	2785.22	4934.5	14
2	23817.18	24007.20	2845.73	3928.7	12
Totale	23557.18	24007.20	—	8863.2	26

Tabella 6.14: Panoramica delle missioni ricavate ($T = 2 N$, durata estesa)

Analizzando la tabella 6.15, si nota che la soluzione ottimale prevede la rimozione di 14 detriti nella prima missione e 12 nella seconda, in linea con la soluzione del JPL. Inoltre, è interessante osservare come l'insieme dei detriti coinvolti nella prima missione corrisponda esattamente a quello identificato dal JPL nella propria soluzione, ma con una sequenza di rimozione differente. Infine, a conferma di quanto descritto precedentemente, si evidenzia che la durata massima degli archi di spinta è ridotta a 6.56 giorni per la prima missione e 10.39 giorni per la seconda, valori sensibilmente inferiori rispetto a quelli riscontrati nelle soluzioni con durata standard.

Missione	ID Detriti
1	27,20,117,25,113,79,55,121,50,95,23,102,38,97
2	19,115,41,45,82,7,47,85,77,26,2,11
Missione	Durata trasferta con rendezvous [day]
1	20.0,15.0,20.0,25.0,20.0,15.0,30.0,20.0,15.0,30.0,25.0,20.0,15.0
2	30.0,25.0,15.0,20.0,20.0,30.0,20.0,25.0,20.0,15.0,20.0
Missione	Durata archi di spinta [day]
1	4.45,2.12,4.10,6.56,1.06,0.70,6.14,3.90,4.42,6.89,6.30,6.09,3.94
2	10.39,4.32,4.32,2.15,3.57,2.05,1.09,6.37,5.39,1.35,4.09
Missione	ΔV [m/s]
1	387.0,183.5,356.7,572.3,91.7,60.7,535.4,338.9,384.7,601.3,549.0,530.6,342.6
2	811.5,375.4,376.0,185.9,310.3,177.4,94.7,555.3,469.6,116.6,355.9

Tabella 6.15: Caratteristiche delle missioni ricavate ($T = 2 N$, durata estesa)

6.5.2 Analisi con 1 N di spinta e durata estesa

Riducendo la spinta a 1 N , si ottengono risultati migliori rispetto alle analisi precedenti. Per la prima volta con questo livello di spinta, la prima missione risulta infatti completamente realizzabile, con un costo propulsivo di 5671.2 m/s . Tuttavia, analizzando in dettaglio la tabella 6.16, si riscontra che la seconda missione presenta una singola criticità: la trasferta tra i detriti 19 e 115 richiede un tempo di spinta di 28.44 giorni a fronte di una durata effettiva della trasferta di 25 giorni.

Missione	ID Detriti
1	27,20,117,25,113,79,55,121,50,95,23,102,38,97
2	19,115,41,45,82,7,47,85,77,26,2,11
Missione	Durata trasferita con rendezvous [day]
1	20.0,15.0,20.0,25.0,20.0,15.0,30.0,20.0,15.0,30.0,25.0,20.0,15.0
2	30.0,25.0,15.0,20.0,20.0,30.0,20.0,25.0,20.0,15.0,20.0
Missione	Durata archi di spinta [day]
1	10.11,4.40,9.51,16.54,2.18,1.41,14.52,8.97,9.96,16.81,15.00,12.17,8.51
2	28.44,9.52,9.70,4.55,7.94,4.29,2.23,16.00,12.66,2.79,9.11
Missione	ΔV [m/s]
1	439.8,190.8,413.6,723.2,94.2,61.1,634.2,389.9,433.7,735.1,655.2,530.7,369.9
2	-,414.3,422.2,197.2,345.0,186.1,96.5,699.3,552.1,120.9,396.3

Tabella 6.16: Caratteristiche delle missioni ricavate ($T = 1 N$, durata estesa)

Per ovviare a questa problematica, si potrebbero adottare diverse strategie, tra cui un'ulteriore estensione della durata complessiva della campagna, la modifica del vincolo temporale massimo tra due rendezvous consecutivi (aumentandolo da 30 a 35 giorni) o, in alternativa, l'esclusione del detrito critico dalla sequenza in esame.

I risultati ottenuti estendendo ulteriormente di 25 giorni la durata totale, riportati nella tabella 6.17, rivelano che, contrariamente alle aspettative, la criticità della trasferita tra i detriti 19 e 115 non solo permane, ma si accentua. Questo comportamento, apparentemente controintuitivo, deriva dalla complessa interdipendenza tra i molteplici parametri del problema. Pertanto, la pianificazione di missioni ADR con propulsione elettrica richiede ulteriori analisi di trade-off tra i diversi vincoli operativi.

Missione	ID Detriti
1	27,20,117,25,113,55,79,121,50,95,23,102,38,97
2	19,115,41,45,82,7,85,47,77,26,2,11
Missione	Durata trasferita con rendezvous [day]
1	20.0,15.0,20.0,25.0,20.0,15.0,30.0,20.0,15.0,30.0,25.0,25.0,15.0
2	30.0,25.0,15.0,20.0,20.0,30.0,25.0,30.0,30.0,15.0,20.0
Missione	Durata archi di spinta [day]
1	10.11,4.40,9.51,16.54,3.69,1.41,10.72,8.97,9.96,16.81,15.00,12.31,7.53
2	28.86,10.46,9.73,4.46,7.65,4.55,2.12,6.25,16.61,5.11,5.52
Missione	ΔV [m/s]
1	439.8,190.8,413.6,723.2,159.7,61.1,466.8,389.9,433.7,735.1,655.2,536.8,327.0
2	-,455.3,423.3,193.5,332.3,197.2,91.6,271.1,726.3,221.7,239.4

Tabella 6.17: Caratteristiche delle missioni ricavate ($T = 1 N$, durata estesa di 125 giorni)

6.6 Esclusione di un detrito

Poiché la competizione GTOC9 prevede la rimozione di 123 detriti nell'arco di 8 anni attraverso molteplici missioni, un approccio strategico consiste nell'escludere il detrito 19 dal problema in esame, destinandolo alle successive missioni non trattate nel presente elaborato. Questa scelta consente di risolvere la criticità precedentemente evidenziata senza modificare ulteriormente i vincoli operativi delle missioni.

Inoltre, per mantenere la coerenza coi tempi previsti da JPL, si sceglie di modificare nuovamente la durata complessiva della campagna portandola a 520 giorni, ovvero rimuovendo i 30 giorni originariamente pianificati dal JPL per la trasferta dal detrito 19 verso il successivo. La tabella 6.18 fornisce una panoramica della soluzione ricavata con queste nuove ipotesi.

Missione	Inizio [MJD2000]	Fine [MJD2000]	Massa [kg]	ΔV_{tot} [m/s]	Numero di detriti
1	23557.18	23817.18	2849.59	5724.4	14
2	23847.18	24107.18	2591.74	3618.3	11
Totale	23557.18	24107.18	–	9342.7	25

Tabella 6.18: Panoramica delle missioni ricavate ($T = 1 N$, detrito 19 escluso)

Analizzando la tabella 6.19, si osserva che l'algoritmo ACO ha individuato una sequenza ottimale di rimozione differente rispetto ai casi precedenti. In particolare, la seconda missione comincia direttamente dal detrito 115, invece che dal detrito 19, comportando un riordinamento della sequenza a valle.

Missione	ID Detriti
1	27,20,117,25,113,55,79,121,50,95,23,102,38,97
2	115,2,41,45,82,47,85,7,26,77,11
Missione	Durata trasferta con rendezvous [day]
1	20.0,15.0,20.0,25.0,15.0,15.0,25.0,20.0,20.0,25.0,30.0,30.0,20.0
2	20.0,15.0,15.0,25.0,15.0,15.0,15.0,30.0,20.0,30.0
Missione	Durata archi di spinta [day]
1	10.11,4.40,9.51,16.54,5.09,1.40,11.81,14.14,8.91,19.50,11.53,12.17,6.20
2	6.47,2.89,9.66,3.63,9.69,1.28,7.30,12.94,12.56,16.67
Missione	ΔV [m/s]
1	439.8,190.8,413.6,723.2,220.7,60.4,514.8,617.5,387.3,854.8,502.2,530.6,269.0
2	281.0,125.2,420.2,157.2,421.5,55.2,317.3,564.2,547.6,729.0

Tabella 6.19: Caratteristiche delle missioni ricavate ($T = 1 N$, detrito 19 escluso)

Questa strategia di esclusione mirata del detrito critico evidenzia l'importanza di un approccio flessibile nella pianificazione delle missioni di rimozione attiva dei detriti con propulsione elettrica. In particolare, la possibilità di redistribuire strategicamente specifici detriti tra diverse missioni, combinata con l'ottimizzazione della sequenza di rimozione, consente di superare le limitazioni imposte dai vincoli operativi, garantendo la fattibilità dell'intera campagna.

Capitolo 7

Conclusioni

Il presente elaborato ha affrontato il complesso problema dell'ottimizzazione delle missioni di rimozione attiva dei detriti spaziali mediante propulsione elettrica, sviluppando e integrando degli strumenti metodologici innovativi per affrontare questa sfida. In particolare, il lavoro ha riguardato tre aspetti principali: lo sviluppo di un modello analitico per le trasferte con propulsione elettrica, l'implementazione di un algoritmo metaeuristico per l'ottimizzazione combinatoria delle sequenze di rimozione dei detriti e l'applicazione di questi metodi per la pianificazione di missioni ADR. I risultati ottenuti evidenziano notevoli implicazioni pratiche.

Il modello analitico per le trasferte a bassa spinta consente di stimare rapidamente i costi propulsivi delle manovre orbitali, sfruttando l'effetto perturbativo di J_2 per ridurre il consumo di propellente. La validazione del modello, condotta attraverso il confronto con le soluzioni derivate dalla teoria del controllo ottimale, ha mostrato errori contenuti (tipicamente inferiori al 5%), confermandone l'adeguatezza per la progettazione preliminare di missioni spaziali. Inoltre, le analisi condotte sugli effetti della spinta disponibile e dei vincoli sulla quota minima forniscono indicazioni preziose per la definizione dei requisiti operativi delle missioni spaziali con propulsione elettrica.

Le modifiche all'algoritmo ACO, descritte nel capitolo 5, si sono rivelate particolarmente efficaci per affrontare il problema dell'ottimizzazione combinatoria delle sequenze di rimozione. In particolare, la natura flessibile dell'algoritmo, assieme alla sua capacità intrinseca di bilanciare l'esplorazione e lo sfruttamento dello spazio delle soluzioni, ha permesso di identificare le sequenze ottimali in un contesto caratterizzato da costi dinamici. Inoltre, l'architettura a doppio ciclo ha consentito di ottimizzare simultaneamente sia la sequenza di rimozione che la pianificazione temporale delle missioni, offrendo un approccio onnicomprensivo al problema affrontato.

Il confronto diretto con la soluzione vincitrice della competizione GTOC9 ha confermato la validità della metodologia sviluppata. Inoltre, le analisi condotte con diverse configurazioni di spinta disponibile hanno evidenziato la capacità dell'approccio di adattarsi a differenti scenari operativi, identificando le criticità associate

all'impiego della propulsione elettrica. In particolare, le soluzioni ottenute con bassi livelli di spinta ($1 - 2 N$) hanno dimostrato che, attraverso opportune strategie di pianificazione, è possibile garantire la fattibilità operativa delle missioni ADR con la tecnologia attuale. L'estensione della durata complessiva della campagna e una pianificazione ottimizzata dei tempi delle singole trasferte costituiscono le strategie principali per ridurre i costi propulsivi e gestire i limiti intrinseci della propulsione elettrica. Sebbene l'incremento dei tempi operativi rappresenti uno svantaggio, l'impiego della propulsione elettrica comporta un'elevata efficienza e un notevole risparmio di propellente.

Un ulteriore contributo emerso dalle analisi condotte riguarda l'importanza di adottare un approccio flessibile nella distribuzione dei detriti tra le differenti missioni. I risultati ottenuti dimostrano come una visione d'insieme della campagna ADR consenta di massimizzare l'efficienza complessiva, non solo identificando la sequenza di rimozione più efficiente per un insieme predefinito di detriti, ma anche selezionando strategicamente quali detriti includere nella campagna di rimozione. Questo aspetto risulta particolarmente rilevante per la gestione di operazioni complesse che prevedono la rimozione di numerosi detriti nell'arco di anni, consentendo di superare le limitazioni imposte dai vincoli operativi stringenti.

7.1 Limitazioni e prospettive future

Nonostante i risultati promettenti, questo lavoro presenta alcune limitazioni che potrebbero essere affrontate in studi futuri. In primo luogo, il modello analitico per le trasferte a bassa spinta si basa su approssimazioni che potrebbero non catturare pienamente la complessità del problema reale. L'integrazione con modelli indiretti più accurati, capaci di considerare anche la variazione dell'eccentricità e il problema del fasamento, potrebbe migliorare la precisione delle stime dei costi propulsivi.

In secondo luogo, l'algoritmo ACO potrebbe beneficiare di ulteriori raffinamenti, come l'implementazione di tecniche adattative per l'ottimizzazione dei parametri o l'integrazione con altre metaeuristiche in un approccio ibrido, in particolare con algoritmi genetici, approccio già utilizzato nella comunità scientifica per risolvere il problema del Time-Dependent TSP. Questi miglioramenti potrebbero garantire un'esplorazione più efficiente dello spazio delle soluzioni, riducendo l'incidenza dell'attuale componente aleatoria e migliorando la convergenza verso soluzioni ottimali.

Infine, l'analisi potrebbe essere estesa a una più ampia gamma di scenari operativi, considerando parametri orbitali differenti e strategie di rimozione alternative. Il problema analizzato considerava detriti su orbite LEO eliosincrone, pertanto risulta opportuno valutare anche altre tipologie di orbite, come quelle equatoriali o geosincrone, per trarre importanti considerazioni aggiuntive.

7.2 Considerazioni finali

La rimozione attiva dei detriti spaziali rappresenta una sfida tecnologica e operativa sempre più cruciale per garantire la sostenibilità delle future attività spaziali. La propulsione elettrica, con i suoi elevati valori di impulso specifico, offre potenzialità significative per ridurre i costi operativi di tali missioni. Tuttavia, le limitazioni in termini di spinta comportano diverse criticità e richiedono approcci innovativi per sormontarle.

Il presente lavoro ha dimostrato come l'integrazione di modelli analitici accurati e algoritmi di ottimizzazione avanzati possa fornire soluzioni efficaci a questo problema complesso. La metodologia sviluppata non solo contribuisce alla pianificazione di missioni ADR con propulsione elettrica, ma offre anche spunti per l'ottimizzazione di altre tipologie di missioni spaziali caratterizzate da vincoli operativi stringenti.

I risultati ottenuti suggeriscono che, con un'adeguata pianificazione e ottimizzazione, la propulsione elettrica rappresenta una soluzione tecnicamente valida per le missioni di rimozione attiva dei detriti spaziali. Le strategie identificate, basate sull'estensione della durata delle missioni e sulla redistribuzione strategica dei detriti, offrono un punto di partenza promettente per lo sviluppo di campagne ADR sostenibili ed efficaci, contribuendo così alla mitigazione di uno dei problemi più critici dell'esplorazione spaziale contemporanea.

Bibliografia

- [1] ESA Space Debris Office. *ESA's Annual Space Environment Report*. Technical Report GEN-DB-LOG-00288-OPS-SD. European Space Agency, lug. 2024 (cit. a p. 1).
- [2] R.R. Bate, D.D. Mueller e J.E. White. *Fundamentals of Astrodynamics*. Dover Books on Aeronautical Engineering Series. Dover Publications, 1971. ISBN: 9780486600611 (cit. a p. 7).
- [3] W.D. McClain e D.A. Vallado. *Fundamentals of Astrodynamics and Applications*. Space Technology Library. Springer Netherlands, 2001. ISBN: 9780792369035 (cit. a p. 7).
- [4] G.P. Sutton e O. Biblarz. *Rocket Propulsion Elements*. John Wiley & Sons, 2010. ISBN: 9780470080245 (cit. a p. 25).
- [5] Hong-Xin Shen e Lorenzo Casalino. «Explicit Approximation for J2-Perturbed Low-Thrust Transfers Between Circular Orbits». In: *Journal of Guidance, Control, and Dynamics* 44 (giu. 2021). DOI: 10.2514/1.G005415 (cit. alle pp. 37, 45).
- [6] Andrea Forestieri. «Optimal low Earth orbit transfers with drag sails». Tesi di laurea mag. Politecnico di Torino, apr. 2021 (cit. a p. 47).
- [7] Marco Dorigo, Vittorio Maniezzo e Alberto Colorni. «Ant System: Optimization by a colony of cooperating agents». In: *IEEE transactions on systems, man, and cybernetics. Part B, Cybernetics : a publication of the IEEE Systems, Man, and Cybernetics Society* 26 (feb. 1996), pp. 29–41. DOI: 10.1109/3477.484436 (cit. a p. 56).
- [8] M. Dorigo e L.M. Gambardella. «Ant colony system: a cooperative learning approach to the traveling salesman problem». In: *IEEE Transactions on Evolutionary Computation* 1 (1997), pp. 53–66. DOI: 10.1109/4235.585892 (cit. a p. 56).
- [9] D. Izzo e M. Maertens. «The Kessler Run: On the Design of the GTOC9 Challenge». In: *Acta Futura* 11 (gen. 2018), pp. 11–24. DOI: 10.5281/zenodo.1139022 (cit. a p. 69).
- [10] Anastassios Petropoulos et al. «GTOC9: Results from the Jet Propulsion Laboratory (team JPL)». In: *Acta Futura* 11 (gen. 2018), pp. 25–35. DOI: 10.5281/zenodo.1139152 (cit. a p. 71).

- [11] Daniel A. Herman. *NASA's Evolutionary Xenon Thruster (NEXT) Project Qualification Propellant Throughput Milestone: Performance, Erosion, and Thruster Service Life Prediction After 450 kg*. 2010 (cit. a p. 75).
- [12] Emanuele Russo. «Ottimizzazione di trasferite a bassa spinta tra orbite LEO con perturbazione J2». Tesi di laurea mag. Politecnico di Torino, apr. 2023.
- [13] Hong-Xin Shen, Tian-Jiao Zhang, Lorenzo Casalino e Dario Pastrone. «Optimization of Active Debris Removal Missions with Multiple Targets». In: *Journal of Spacecraft and Rockets* 55.1 (2018), pp. 181–189. DOI: 10.2514/1.A33883.
- [14] Stylianos Tsalas. «Ottimizzazione delle missioni di Rimozione Attiva dei Detriti Spaziali attraverso l'Ottimizzazione basata sulle Colonie di Formiche». Tesi di laurea mag. Politecnico di Torino, ott. 2024.
- [15] Toni Veikkolainen. «Database-wide studies on the validity of the Geocentric Axial Dipole hypothesis in the Precambrian». Tesi di dott. Ott. 2014. DOI: 10.13140/2.1.2891.6001.