

POLITECNICO DI TORINO
Dipartimento di Ingegneria Meccanica ed Aerospaziale
Corso di Laurea Magistrale in Ingegneria Aerospaziale

Anno accademico 2024/2025



**Politecnico
di Torino**

**Ottimizzazione di traiettorie per manovre di Rendezvous e
Formation Flying mediante metodi indiretti**

Relatore: Prof. Lorenzo Casalino
Candidato: Turi Cuscunà

Abstract

L'ottimizzazione delle manovre da effettuare per portare a termine una missione con il minor consumo possibile di propellente è un'aspetto fondamentale durante il desing di una missione; ciò permette non solo di diminuirne i costi ma parallelamente di aumentarne la durata. Nel caso in cui la missione preveda più di un singolo corpo orbitante, come ad esempio le manovre di rendezvous e docking, la manutenzione di satelliti in orbita, o la gestione di costellazioni complesse, il processo deve tener conto non solo della dinamica orbitale del corpo controllato, d'ora in poi nominato *deputy*, ma si deve tenere in considerazione anche il moto del corpo targhet, d'ora in poi nominato *chief*. Nelle seguenti pagine verranno presentati dei metodi di ottimizzazione di manovre effettuate mediante propulsione elettrica, basati sul principio del calcolo variazionale, per definire una teoria del controllo ottimale.

La propulsione elettrica, che offre basse spinte ed elevati valori di impulso specifico, contrariamente alla propulsione chimica, è caratterizzata per delle strategie di attuazione sostenuta nel tempo, ideali per manovre ottimizzate dal punto di vista del risparmio energetico. Proprio per questa peculiare caratteristica, si rende necessaria l'implementazione di modelli dinamici che, considerando spinte continue nel tempo e variazioni lente dei parametri orbitali, vadano ad ottimizzare la strategia di controllo.

Dopo una presentazione della meccanica orbitale generale verrà approfondita la dinamica relativa tra due corpi orbitanti, al fine di ottenere un set di equazioni che ci permetta di descrivere il moto di *chief* e *deputy*. Una volta descritti i moti relativi in funzione dei parametri di controllo della spinta, vengono presentati ed implementati i metodi indiretti per l'ottimizzazione delle strategie di manovra. Successivamente, mediante l'implementazione di simulazioni numeriche, vengono presentati i risultati, effettuando anche un confronto con soluzioni basate su spinte impulsive.

I risultati mostrano come i metodi indiretti, sebbene molto sensibili alle condizioni iniziali in termini di convergenza del metodo, presentano soluzioni molto precise sia per manovre tra orbite complanari che per manovre tridimensionali, garantendo un significativo miglioramento delle prestazioni.

Indice

1	Introduzione	5
1.1	Manovre di Rendezvous e Formation Flying	5
1.2	Propulsione Spaziale	6
1.3	Ottimizzazione di traiettorie spaziali	8
2	Meccanica Orbitale	10
2.1	Richiami generali di meccanica orbitale	10
2.1.1	Leggi di Keplero	10
2.1.2	Legge di gravitazione universale di Newton	10
2.1.3	Il problema a n-corpi	11
2.1.4	Problema dei due corpi	12
2.1.5	Caratteristiche comuni alle traiettorie coniche	16
2.1.6	Problema tempo	19
2.2	Sistemi di riferimento	21
2.2.1	Sistema Eliocentrico-Eclittica	21
2.2.2	Sistema Geocentrico-Equatoriale	22
2.2.3	Sistema Perifocale	23
2.2.4	Sistema Local Vertical Local Horizontal (LVLH)	23
2.3	Parametri Orbitali Classici	24
2.3.1	Equazioni Planetarie di Gauss	25
2.4	Manovre Orbitali	26
2.4.1	Perdite di velocità	26
2.4.2	Manovre con spinta parallela alla velocità	27
2.4.3	Manovre a spinta radiale	29
2.4.4	Manovre a spinta normale al piano orbitale	30
2.4.5	Trasferta tra orbite circolari complanari	31
3	Propulsione Spaziale	33
3.1	Grandezze di riferimento	34
3.1.1	Equazione di Tsiolkowky	34
3.2	Propulsione chimica	35
3.2.1	Prestazioni	36
3.3	Propulsione elettrica	37
3.3.1	Impulso specifico ottimale	38
3.4	Propulsori Elettrotermici	39

3.4.1	Resistogetti	39
3.4.2	Arcogetti	40
3.5	Propulsori Elettrostatici	41
3.5.1	Gridded Ion Thrusters (GIT)	41
3.5.2	Field Emission Electric Propulsion (FEEP)	42
3.5.3	Propulsori ad effetto Hall	42
3.6	Propulsori Elettromagnetici	44
3.6.1	Magneto Plasma Dynamic thrusters (MPD)	44
3.6.2	Pulsed Plasma Thrusters (PPT)	45
3.7	Manovre con propulsione elettrica	46
3.7.1	Edelbaum's Approximation	46
4	Presentazione del Problema	49
4.1	Dinamica Relativa	49
4.1.1	Relative Orbital Elements (ROE)	49
4.1.2	Equazioni della dinamica relativa	50
4.2	Ottimizzazione con metodi indiretti	50
4.2.1	Teoria del controllo ottimale	51
4.2.2	Equazioni del controllo ottimale	53
4.2.3	Problema differenziale ai limiti	55
5	Ottimizzazione di manovre	59
5.1	Manovra di Rifasamento	59
5.1.1	Caso di riferimento $\Delta\delta\lambda = 1000 m$	59
5.1.2	Valutazione dei consumi al variare del $\Delta\delta\lambda$, parametrizzati per δa	61
5.2	Confronto con manovra impulsiva	63
5.2.1	Manovra Bidimensionale	64
5.2.2	Manovra Tridimensionale	67
6	Conclusioni	72

1 Introduzione

In questo capitolo introduttivo verranno descritti gli aspetti fondamentali del problema, presentando inizialmente le manovre di riferimento e le principali caratteristiche della propulsione spaziale con particolare attenzione per la propulsione elettrica, per poi andare ad introdurre l'ottimizzazione delle traiettorie spaziali.

1.1 Manovre di Rendezvous e Formation Flying

Iniziando dal descrivere il Rendezvous, esso consiste in una serie di manovre a traiettoria controllata, atte a portare un velivolo attivo (deputy) in prossimità o eventualmente, se prevista una manovra di docking, in contatto con un velivolo passivo (chief). Questa tipologia di manovre è fondamentale nel momento in cui non è possibile mettere in orbita spacecraft di dimensioni considerevoli in un solo lancio come, ad esempio, la costruzione di grandi strutture orbitanti quale la Stazione Spaziale Internazionale (ISS). Le principali sfide da superare sono legate alla sicurezza e alla robustezza delle traiettorie, dovendo saper gestire problematiche che potrebbero verificarsi a causa di varie incertezze, evitare eventuali ostacoli lungo il tragitto e assicurare la robustezza del software di volo, in quanto, se pur le prime manovre di rendezvous venivano eseguite manualmente, nel tempo sono stati sviluppati diversi algoritmi di Guida Navigazione e Controllo (GNC) per la gestione autonoma delle stesse. Si cita in fine la prima manovre di Rendezvous compiuta con successo il 15 dicembre del 1965 tra i due spacecraft Gemini 6 e Gemini 7 della NASA.

Il Formation Flying invece consiste nel coordinamento delle traiettorie di più satelliti al fine di raggiungere un obiettivo che solitamente può essere raggiunto mediante l'utilizzo di un unico satellite più grande e più costoso. L'utilizzo di più satelliti più semplici dal punto di vista progettuale e di dimensione contenuta ha diversi vantaggi, come tempi di costruzione ridotti, sostituzioni più economiche e maggiori ridondanze. Le varie architetture gestite mediante il Global Navigation Satellite System (GNSS) seguono due diversi approcci per il controllo, come riportato in [ESA11]: controllo gestito da terra, in cui le varie misure del GNSS vengono inviate da ciascun satellite della formazione alla ground station che comunicherà a sua volta la posizione in cui ogni

satellite dovrà manovrare; e controllo autonomo, in cui le misure del GNSS vengono condivise tra i vari satelliti che, dopo aver valutato la loro posizione relativa, mediante l'Attitude and Orbit Control System (AOCS) la sfruttano per definire la manovra da eseguire per portarsi nella configurazione desiderata, questo approccio, se pur permetta un controllo più frequente ed autonomo, introduce maggiori difficoltà e rischi legati all'algoritmo di guida e controllo.

A seconda delle applicazioni le formazioni possibili sono tre, formazione a coda, a grappolo e le costellazioni.

- **Formazioni a Coda:** esse presentano diversi satelliti che percorrono la medesima orbita, sfasati ciascuno di un determinato angolo di anomalia vera, in modo da poter effettuare delle misurazioni sulla stessa porzione di terra in tempi differenti o con diversi angoli di visualizzazione; particolarmente utilizzate in ambito meteorologico e ambientale, un esempio di formazione a coda sono i satelliti Terra e Aqua di NASA
- **Formazione a Grappolo:** in questa formazione i satelliti sono disposti relativamente vicini l'uno all'altro in una determinata configurazione, ad esempio la proposta per il progetto Laser Interferometer Space Antenna (LISA) prevede una formazione a grappolo ad altissima precisione.
- **Formazione a Costellazione:** per questa configurazione i satelliti vengono opportunamente suddivisi in differenti piani orbitali per poter coprire l'intera superficie terrestre, o una grande parte di essa, con i requisiti di copertura richiesti dalla missione, il GPS è l'esempio più celebre di formazione a costellazione.

1.2 Propulsione Spaziale

La propulsione di un velivolo spaziale è definita come una forza che agisce sul sistema allo scopo di cambiarne lo stato di moto, essa può essere suddivisa come propulsione primaria, necessaria per variare l'orbita e la traiettoria del velivolo, e propulsione secondaria, generata al fine di mantenere l'orbita e l'assetto costanti a fronte di disturbi esterni. I propulsori destinati all'uso in orbita si suddividono in propulsori chimici, bipropellente (ossidante e combustibile) o monopropellente, come i motori alimentati ad idrazina, e propulsori elettrici; trascuran-

do i propulsori alimentati ad energia nucleare, che ancora non trovano possibilità applicative.

La propulsione spaziale, come molte altre, si basa sul principio di azione e reazione, ma con la complicazione, rispetto alla propulsione aeronautica, ad esempio, che il propellente che verrà accelerato dal sistema propulsivo non può essere prelevato dall'ambiente esterno, in cui troviamo praticamente il vuoto; è dunque necessario portarlo a bordo mediante relativi serbatoi e strumentazioni necessarie alla gestione dello stesso, come ad esempio l'impianto di pressurizzazione. Per queste motivazioni il peso del propellente e dei sistemi di stoccaggio può raggiungere anche percentuali considerevoli dell'intero sistema e spesso rappresenta un limite sulla fattibilità di una missione.

Le prestazioni di un propulsore vengono definite, oltre che dalla spinta erogata e dalla potenza, da una grandezza definita come *velocità efficace di scarico* $= c = \frac{T}{\dot{m}}$ che rappresenta la velocità alla quale verrebbe accelerato il propellente se venisse espanso fino ad un valore di pressione pari a quello dell'ambiente esterno, per un propulsore elettrico questo valore è molto vicino all'effettiva velocità di scarico del propulsore. Dalla definizione della velocità efficace di scarico si può facilmente dedurre come all'aumentare di essa diminuisca la portata di propellente consumata per erogare uno stesso valore di spinta; infatti, diversamente da come succede per i motori aeronautici, in cui si preferisce accelerare poco una grande quantità di propellente, per i motori spaziali, avendone una disponibilità limitata e dovendolo portare a bordo, lo si cerca di sfruttare al meglio, preferendo accelerare molto la minor quantità di propellente possibile, ciò ci porta a preferire velocità efficaci di scarico alte.

I propulsori elettrici presentano valori di velocità efficace di scarico più elevati rispetto ai propulsori chimici, se pur si limitino a basse spinte. Essi per funzionare necessitano di un generatore di potenza elettrica e la quantità di potenza erogata del generatore andrà ad influire sulla velocità efficace di scarico, per questa motivazione con la propulsione elettrica non si ricerca l'impulso specifico maggiore possibile, in quanto comporterebbe generatori eccessivamente grandi e pesanti, ma si ricerca il valore di ottimo tra consumi di propellente e pesi del generatore. La propulsione elettrica si suddivide in:

- **Propulsione Elettrotermica:** in cui la potenza elettrica viene

utilizzata per riscaldare il propellente, mediante una resistenza ad esempio.

- **Propulsione Elettrostatica:** in cui viene generato un campo elettrico che accelera il propellente ionizzato.
- **Propulsione Elettromagnetica:** in cui un campo elettromagnetico generato da una corrente accelera delle particelle cariche presenti nel propellente.

1.3 Ottimizzazione di traiettorie spaziali

Una volta descritta la dinamica del corpo, l'ottimizzazione delle traiettorie consiste nella definizione dell'andamento dei parametri di controllo (cicli di accensione del motore e angoli di spinta) durante l'intera manovra che massimizzino o minimizzino un determinato *indice di prestazione*, come ad esempio il tempo di percorrenza o il consumo di propellente. Data la grande influenza della massa di propellente necessaria a portare a compimento una missione nello studio di fattibilità della stessa, risulta particolarmente rilevante andare a definire i profili di spinta che minimizzino i consumi. Ciò ci porta alla definizione di un problema di ottimizzazione in cui bisogna determinare per ogni istante di tempo i valori di stato del motore (ON/OFF) e gli angoli di spinta dello stesso, che per una determinata trasferta massimizzano la massa finale del sistema. Per il problema preso in considerazione le soluzioni analitiche ricavabili sono limitate a manovre semplici e di poco interesse, a causa delle semplificazioni da introdurre nel problema, ciò ci spinge alla ricerca di metodi numerici approssimati per la ricerca delle soluzioni di ottimo.

Tra i vari metodi di ottimizzazione nelle prossime pagine vengono approfonditi i metodi indiretti, che sfruttano il principio del massimo di Pontryagin per ricondurre il problema ad un sistema di equazioni differenziali, alle quali vanno imposte delle condizioni al contorno, questi metodi sono particolarmente precisi per l'ottimizzazione di traiettorie a spinta continua, ma soffrono di instabilità della convergenza numerica al variare delle condizioni al contorno.

Tra le altre metodologie di ottimizzazione troviamo i metodi diretti, che sfruttano una discretizzazione del problema in segmenti più piccoli di cui è più semplice ricavare l'ottimo, esse sono più robuste

rispetto ai metodi indiretti, ma possono essere computazionalmente onerose da implementare, visto il gran numero di parametri introdotti nei nodi della discretizzazione. Un'ultima tipologia sono gli algoritmi di ottimizzazione evolutiva, metodi che sfruttano processi iterativi che tendono a simulare l'evoluzione mediante selezione naturale, andando a selezionare, tra una "generazione" di molte possibili soluzioni, alcune tra quelle che meglio soddisfano le condizioni imposte ad una funzione di costo. Esse verranno a loro volta utilizzate per valutare una nuova generazione di soluzioni "figlie", mescolando i parametri delle soluzioni generatrici, successivamente si procede con una nuova iterazione. Questi metodi sono particolarmente efficaci nell'identificare soluzioni di ottimo per problemi con funzioni di costo complesse, anche se richiedono numerose valutazioni di esse.

2 Meccanica Orbitale

Nel prossimo capitolo verranno presentati i fondamenti della meccanica orbitale, dalle leggi di Keplero e di gravitazione universale di Newton, fino alle principali manovre impulsive, introducendo i principali sistemi di riferimento utilizzati per descrivere il moto di corpi orbitanti.

Tutto al fine ultimo di riuscire a caratterizzare le equazioni che governano la dinamica relativa tra due spacecraft, in orbita bassa terrestre, primo passaggio fondamentale per descrivere manovre quali il rendezvous e il volo in formazione.

2.1 Richiami generali di meccanica orbitale

2.1.1 Leggi di Keplero

- **Prima Legge:** *I pianeti descrivono orbite ellittiche, di cui il Sole occupa uno dei due fuochi*
- **Seconda Legge:** *Il raggio vettore che unisce il centro del Sole al centro del pianeta spazza aree uguali in tempi uguali (ergo per raggi minori i pianeti avranno velocità maggiori e viceversa)*
- **Terza legge:** *Il quadrato del periodo di rivoluzione di un pianeta è proporzionale al cubo della sua distanza media dal Sole, ovvero il semiasse maggiore dell'ellisse che descrive l'orbita*

2.1.2 Legge di gravitazione universale di Newton

Mediante la legge di gravitazione universale enunciata da Newton è possibile andare a descrivere il problema di n corpi sottoposti alla mutua azione dei rispettivi campi gravitazionali.

Essa enuncia che : *Due corpi A e B, di massa m_A ed m_B , esercitano l'uno sull'altro una forza attrattiva F , diretta lungo la congiungente \overline{AB} , proporzionale al prodotto delle masse e inversamente proporzionale al quadrato della loro distanza r .*

$$\vec{F}_g = -G \frac{m_A m_B}{r^2} \frac{\vec{r}}{r} \quad (1)$$

Con $G = 6.670 \cdot 10^{-11} \text{ Nm}^2/\text{Kg}^2 = \text{Costante di gravitazione universale}$

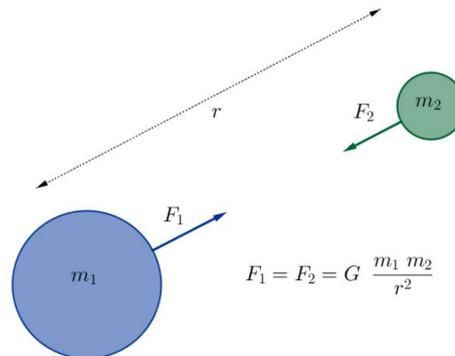


Figura 1: Legge di gravitazione universale [WeS]

2.1.3 Il problema a n-corpi

Per la trattazione del problema del moto assoluto dei corpi celesti si effettuano le seguenti ipotesi:

- Il sistema di riferimento viene considerato inerziale, ovvero fermo rispetto alle stelle fisse.
- Le masse vengono considerate puntiformi e concentrate nel centro di massa del corpo.
- Si considera il solo effetto della forza gravitazionale, si trascurano quindi forze quali quelle magnetiche ad esempio.

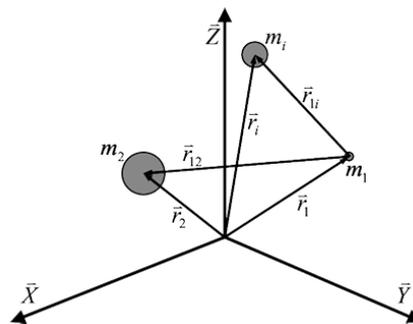


Figura 2: Problema degli n-corpi

Sotto queste ipotesi è possibile scrivere:

$$m_i \ddot{r}_i = F_1 + F_2 + \dots + F_j + \dots F_n \quad (2)$$

In cui la generica forza F_j può essere espressa secondo la legge di gravitazione universale:

$$F_j = -G \frac{m_i m_j}{\|\vec{r}_i - \vec{r}_j\|^2} \cdot \frac{\vec{r}_i - \vec{r}_j}{\|\vec{r}_i - \vec{r}_j\|} \quad (3)$$

Sostituendo nell'equazione (2) si ricava:

$$F_g = m_i \ddot{\vec{r}}_i = -G m_i \sum_{j=1, j \neq i}^n \frac{m_j}{r_{ij}^3} \cdot \vec{r}_{ij} \quad (4)$$

In questo modo è possibile scrivere un sistema di n equazioni differenziali accoppiate che definiscono la dinamica dei corpi celesti. Il sistema però, nel caso più generale non è analiticamente risolvibile, e si necessitano metodi numerici per la risoluzione.

In alcuni casi in cui è possibile andare ad introdurre alcune ipotesi semplificative, quali trascurare gli effetti gravitazionali di corpi molto meno massivi rispetto agli altri (si pensi ad un satellite in confronto a Terra e Luna ad esempio), in questi casi si parla di *Problema a n-corpi ristretto*.

2.1.4 Problema dei due corpi

Di particolare interesse e di facile trattazione risulta essere il problema circoscritto a due corpi, per il quale si introducono le seguenti ipotesi:

- Il sistema di riferimento viene considerato inerziale, ovvero fermo rispetto alle stelle fisse.
- Le masse vengono considerate puntiformi e concentrate nel centro di massa del corpo.
- Si considera il solo effetto della forza gravitazionale, si trascurano quindi forze quali quelle magnetiche ad esempio.
- La massa di uno dei due corpi, detto principale, è molto maggiore rispetto al corpo secondario

Questo problema è, in prima approssimazione, utile per descrivere casistiche di nostro interesse, come il moto di un satellite (corpo secondario) attorno alla Terra (corpo principale).

Definendo:

- M = massa del corpo principale

- m = massa del corpo secondario $\ll M$
- r_1 = vettore posizione del corpo principale
- r_2 = vettore posizione del corpo secondario
- $r = r_2 - r_1$ = distanza tra i due corpi

Mediante la legge di gravitazione universale si può scrivere:

$$\ddot{r}_1 = G \frac{m}{r^2} \cdot \frac{\vec{r}}{r} \quad ; \quad \ddot{r}_2 = -G \frac{M}{r^2} \cdot \frac{\vec{r}}{r} \quad (5)$$

Dalle quali ponendo $M + m \approx M$, $\ddot{r} = \ddot{r}_2 - \ddot{r}_1$ e definendo il parametro gravitazionale $\mu = GM$, si ricava:

$$\ddot{r} + \frac{\mu}{r^2} \cdot \frac{\vec{r}}{r} = 0 \quad (6)$$

Dalla quale è possibile notare come l'accelerazione abbia esclusivamente componenti radiali.

A questo punto introducendo due sistemi di riferimento, un primo $[p q]$ centrato sul corpo principale ed un secondo $[i j]$ centrato sul corpo secondario, con gli assi che identificano rispettivamente la direzione radiale e tangenziale rispetto al vettore congiungente i due corpi.

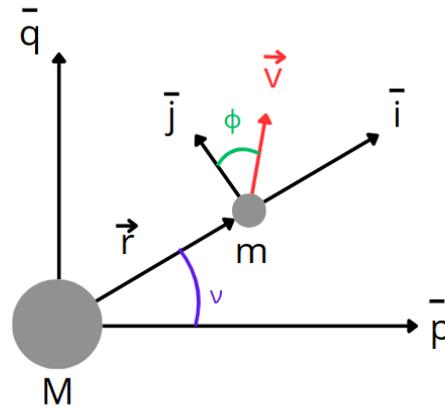


Figura 3: Cinematica dei due corpi

Si definiscono in oltre due angoli

- ν = anomalia vera
- ϕ = flight path angle

Mediante i quali si possono legare i versori:

$$\begin{cases} \bar{i} = \bar{p} \cos(\nu) + \bar{q} \sin(\nu) \\ \bar{j} = -\bar{p} \sin(\nu) + \bar{q} \cos(\nu) \end{cases} \quad (7)$$

e le rispettive derivate

$$\begin{cases} \dot{\bar{i}} = -\dot{\nu} \bar{p} \sin(\nu) + \dot{\nu} \bar{q} \cos(\nu) = \dot{\nu} \bar{j} \\ \dot{\bar{j}} = -\dot{\nu} \bar{p} \cos(\nu) - \dot{\nu} \bar{q} \sin(\nu) = -\dot{\nu} \bar{i} \end{cases} \quad (8)$$

Definendo il raggio come $\vec{r} = r \cdot \bar{i} + 0 \cdot \bar{j}$ è possibile ricavare la velocità \vec{v}

$$\vec{v} = \frac{d\vec{r}}{dt} = \dot{r} \bar{i} + r \dot{\bar{i}} = \dot{r} \bar{i} + r \dot{\nu} \bar{j} \quad (9)$$

- $v_r = \dot{r} \bar{i}$ velocità radiale
- $v_t = r \dot{\nu} \bar{j}$ velocità tangenziale

$$\tan(\phi) = \frac{\dot{r}}{r \dot{\nu}} \quad (10)$$

Ultimo passo per descrivere la cinematica dei due corpi è quello di ricavare l'accelerazione:

$$\vec{a} = \dot{\vec{v}} = \ddot{\vec{r}} = \ddot{r} \bar{i} + \dot{r} \dot{\bar{i}} + \dot{r} \dot{\nu} \bar{j} + r \ddot{\nu} \bar{j} + r \dot{\nu} \dot{\bar{j}} \quad (11)$$

Sostituendo $\dot{\bar{i}} = \dot{\nu} \bar{j}$; $\dot{\bar{j}} = -\dot{\nu} \bar{i}$ si ricava:

$$\vec{a} = (\ddot{r} - r \dot{\nu}^2) \bar{i} + (2\dot{r} \dot{\nu} + r \ddot{\nu}) \bar{j} \quad (12)$$

Con:

- $a_r = (\ddot{r} - r \dot{\nu}^2)$ accelerazione radiale
- $a_t = (2\dot{r} \dot{\nu} + r \ddot{\nu})$ accelerazione tangenziale

Riprendendo l'equazione del moto $\ddot{\vec{r}} + \frac{\mu}{r^3} \vec{r} = 0$ si vede come l'accelerazione risultante abbia solo componente radiale, è dunque possibile scrivere:

$$\begin{cases} a_r = (\ddot{r} - r \dot{\nu}^2) = -\frac{\mu}{r^2} \\ a_t = (2\dot{r} \dot{\nu} + r \ddot{\nu}) = 0 \end{cases} \quad (13)$$

- Momento della quantità di moto specifico

Moltiplicando vettorialmente l'equazione del moto per il vettore \vec{r} e applicando le regole di derivazione del prodotto vettoriale:

$$\frac{d}{dt}(\vec{r} \times \dot{\vec{r}}) = \underbrace{(\dot{\vec{r}} \times \dot{\vec{r}})}_{=0} + (\vec{r} \times \ddot{\vec{r}}) = \frac{d}{dt}(\vec{r} \times \vec{v}) \quad (14)$$

Si ricava:

$$(\vec{r} \times \ddot{\vec{r}}) + \underbrace{\frac{\mu}{r^3}(\vec{r} \times \vec{r})}_{=0} = \frac{d}{dt}(\vec{r} \times \vec{v}) = 0 \quad (15)$$

Dalla (15) è possibile dedurre come il momento della quantità di moto per unità di massa di un corpo secondario che orbita nei pressi di un corpo principale sia costante nel tempo

$$\vec{h} = \vec{r} \times \vec{v} = cost \quad (16)$$

Il chè ha come principale conseguenza che la suddetta orbita avrà una traiettoria che si sviluppa su un unico piano, detto piano orbitale.

- Energia meccanica specifica

Partendo sempre dall'equazione del moto e moltiplicandola scalarmente per il vettore velocità $\dot{\vec{r}}$ si ricava:

$$\dot{\vec{r}} \cdot \ddot{\vec{r}} = -\frac{\mu}{r^3}(\dot{\vec{r}} \cdot \vec{r}) = -\frac{\mu}{r^2}\dot{r} = \frac{d}{dt}\left(\frac{\mu}{r}\right) \quad (17)$$

sviluppando il prodotto a primo membro e ricordando le relazioni di velocità ed accelerazioni radiali e tangenziali [equazioni (9) e (13)]

$$\dot{\vec{r}} \cdot \ddot{\vec{r}} = v_r \cdot a_r + v_t \cdot a_t = \dot{r}\ddot{r} + \dot{r}r\dot{v}^2 + 2\dot{r}r\dot{v}^2 + r^2\dot{v}\ddot{v} = \frac{1}{2}\frac{d}{dt}[\dot{r}^2 + (r\dot{v})^2] \quad (18)$$

Sostituendo nella (17) è possibile ricavare:

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{v^2}{2} - \frac{\mu}{r}\right) = 0 \quad (19)$$

Ovvero che l'energia meccanica per unità di massa, data dai contributi di energia cinetica ed energia potenziale, si conserva lungo la traiettoria.

$$E_g = \frac{v^2}{2} - \frac{\mu}{r} = cost \quad (20)$$

-Integrazione equazione del moto

Prendendo come punto di partenza sempre l'equazione del moto e moltiplicandola vettorialmente per il momento della quantità di moto specifico si ricava

$$\ddot{\vec{r}} \times \vec{h} = \frac{\mu}{r^3}(\vec{r} \times \vec{h}) \quad (21)$$

Espandendo separatamente i due membri troviamo, per il primo membro:

$$\frac{d}{dt}(\dot{\vec{r}} \times \vec{h}) = \ddot{\vec{r}} \times \vec{h} + \dot{\vec{r}} \times \underbrace{\dot{\vec{h}}}_{=0} = \ddot{\vec{r}} \times \vec{h} \quad (22)$$

Mentre per il secondo:

$$\frac{\mu}{r^3}(\vec{r} \times \underbrace{(\vec{r} \times \dot{\vec{r}})}_{\vec{h}}) = \frac{\mu}{r^3}((\vec{r} \cdot \dot{\vec{r}})\dot{\vec{r}} - (\dot{\vec{r}} \cdot \dot{\vec{r}})\vec{r}) = \frac{\mu}{r}\dot{\vec{r}} - \frac{\mu}{r^2}\vec{r} = \mu \frac{d}{dt}\left(\frac{\vec{r}}{r}\right) \quad (23)$$

Sostituendo nella (21) ed integrando si ricava:

$$\dot{\vec{r}} \times \vec{h} = \mu \frac{\vec{r}}{r} + \underbrace{B}_{\text{Cost. di integrazione}} \quad (24)$$

Che, moltiplicando scalarmente per il vettore \vec{r} , ci porta a:

$$\underbrace{\vec{r} \cdot \dot{\vec{r}} \times \vec{h}}_{=h^2} = \underbrace{\mu \frac{\vec{r} \cdot \vec{r}}{r}}_{\mu r} + \vec{r} \cdot B \rightarrow h^2 = \mu r + rB \cos(\nu) \quad (25)$$

Esplicitando r

$$r = \frac{h^2/\mu}{1 + \frac{B}{\mu} \cos(\nu)} \quad (26)$$

Che ricalca esattamente l'equazione di una conica: $r = \frac{a(1-e^2)}{1+e \cos(\nu)} = \frac{p}{1+e \cos(\nu)}$, così come enunciato dalla prima legge di Keplero

2.1.5 Caratteristiche comuni alle traiettorie coniche

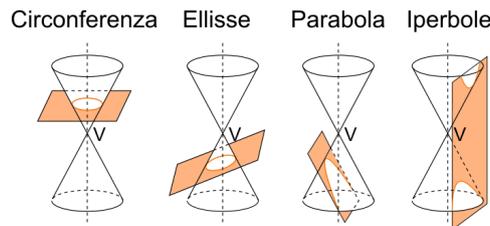


Figura 4: Coniche non degeneri [You]

Definizione di conica: luogo dei punti per cui il rapporto tra la distanza da un punto, detto fuoco, e da una retta, definita direttrice, è costante e pari all'eccentricità della conica.

$$\frac{r}{dr} = \frac{p}{dp} = e \quad (27)$$

Si definiscono dunque

- f = Fuoco della conica
- a = Semiasse maggiore

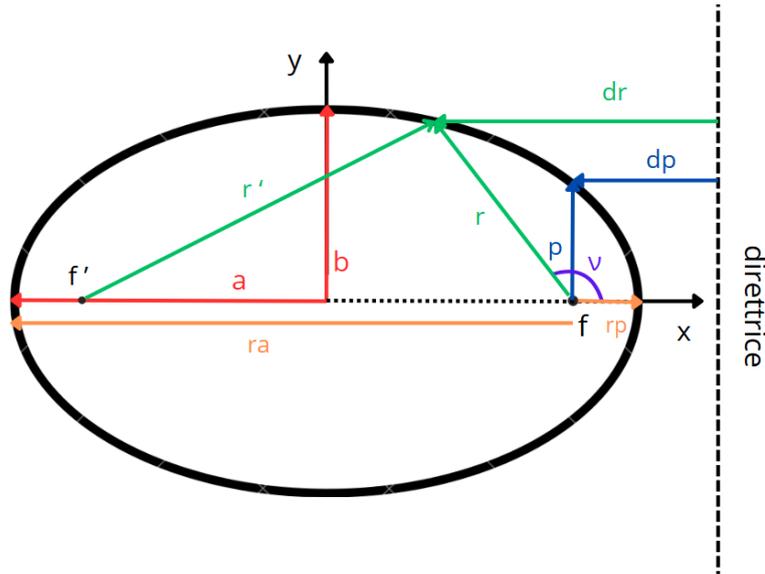


Figura 5: Esempio di conica: Ellisse

- $b = \text{Semiasse minore}$
- $e = \text{Eccentricità}$
- $p = a(1 - e^2) = \text{Semilatus rectum}$
- $r_a = a(1 + e) = \text{Raggio di Apoastro}$
- $r_p = a(1 - e) = \text{Raggio di Periastro}$
- $\nu = \text{Anomalia vera}$

Un'altra caratteristica delle coniche è che la somma delle distanze di un punto appartenente alla conica dai due fuochi, è costante e pari al doppio del semiasse maggiore.

$$r + r' = a - ex + a + ex = 2a \quad (28)$$

Dall'integrazione dell'equazione del moto si nota che

$$\begin{cases} p = h^2/\mu \\ e = B/\mu \end{cases} \quad (29)$$

-Legame tra energia meccanica specifica e geometria della conica

Prendendo in considerazione l'equazione dell'energia meccanica specifica dell'orbita nel punto corrispondente al periastro, in cui i vettori \vec{v}_p e \vec{r}_p sono perpendicolari tra loro, è possibile scrivere $v_p^2 = h^2/r_p^2$. Per questa condizione l'equazione diventa:

$$E_g = \frac{h^2}{2r_p^2} - \frac{\mu}{r_p} = \frac{h^2 - 2r_p\mu}{2r_p^2} \quad (30)$$

Ricordando che

$$\begin{cases} r_p = a(1 - e) \\ h^2 = \mu p = \mu a(1 - e^2) \end{cases} \quad (31)$$

Si ricava che:

$$E_g = \frac{\mu a(1 - e^2) - 2\mu a(1 - e)}{2a^2(1 - e^2)} = \frac{\mu}{2a} \frac{(-1 - e^2 + 2e)}{1 - e^2} = -\frac{\mu}{2a} \quad (32)$$

Mediante questa relazione è possibile dunque legare velocità e distanza del corpo orbitante dal fuoco con la dimensione media dell'orbita.

$$E_g = \frac{v^2}{2} - \frac{\mu}{r} = -\frac{\mu}{2a} \quad (33)$$

Di seguito verranno riportate le caratteristiche generali delle diverse tipologie di traiettorie coniche, ovvero traiettoria circolare, ellissoidale, parabolica ed iperbolica.

Traiettoria Circolare

Traiettoria chiusa con due fuochi coincidenti

- $r_a = r_p = r = a$
- $e = 0$
- $a > 0 \rightarrow E_g < 0$

In questo tipo di traiettoria la velocità è costante, così come il raggio, ed i due vettori sono sempre perpendicolari.

$$V_c = \sqrt{\frac{\mu}{r_c}} \quad (34)$$

Traiettoria Ellissoidale

Traiettoria chiusa con due fuochi distinti

- $r_a \neq r_p$
- $e = \frac{r_a - r_p}{r_a + r_p}$; $0 < e < 1$
- $a > 0 \rightarrow E_g < 0$

In questo caso velocità e distanza dal corpo centrale variano lungo l'orbita, ricordando la conservazione dell'energia meccanica specifica:

$$\frac{V^2}{2} - \frac{\mu}{r} = -\frac{\mu}{2a} \quad (35)$$

si evince come a raggi bassi si ottengano le massime velocità e viceversa.

Per ogni orbita chiusa è possibile calcolare il periodo che impiega il corpo secondario a percorrere un'intera orbita come segue:

$$T = 2\pi \sqrt{\frac{a^3}{\mu}} \quad (36)$$

Traiettoria Parabolica

Traiettoria aperta per la quale si raggiunge $r \rightarrow \infty$ con $v \rightarrow 0$

- $e = 1$
- $a \rightarrow \infty$
- $E_g = 0$

Essa rappresenta un caso limite in quanto orbita aperta con il minor contenuto di energia meccanica specifica. Per questa casistica è possibile calcolare la velocità di *escape*, ovvero la velocità minima che un corpo secondario, che orbita ad un determinato raggio, deve raggiungere per uscire dalla sfera d'influenza del corpo principale.

$$V_{esc} = \sqrt{\frac{2\mu}{r}} \quad (37)$$

Traiettoria Iperbolica

Traiettoria aperta per la quale si raggiunge $r \rightarrow \infty$ con $v > 0$

- $e > 1$
- $a < 0$
- $E_g > 0$

2.1.6 Problema tempo

Una volta descritte le proprietà delle principali orbite per un sistema a due corpi, il passo successivo è quello di determinare una relazione mediante la quale, definita una posizione ed una velocità iniziale del corpo secondario, si riesca a valutarne l'evoluzione nel tempo.

Ricordando la seconda legge di Keplero si dimostra che:

$$\frac{dA}{dt} \approx \frac{r^2 d\nu}{2} \frac{1}{dt} = \frac{r^2}{2} \dot{\nu} = \frac{r^2}{2} \frac{h}{r^2} = \frac{h}{2} = cost \quad (38)$$

Ponendoci nel caso generale di orbita ellittica

Si può ricavare il tempo di volo a finché il corpo orbitante raggiunga il generico punto 1 partendo dal periastro (punto P):

$$\frac{dA}{dt} = \frac{A_e}{T} = \frac{A_{FP1}}{t_{P1}} = h/2 \quad (39)$$

$$t_{P1} = \frac{A_{FP1} T}{A_e} \quad (40)$$

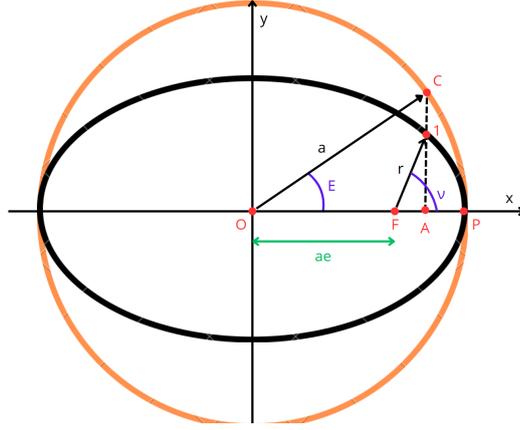


Figura 6: Cerchio ausiliario e Anomalia eccentrica

con $T = \text{periodo}$

A questo punto per ricavarsi l'area spazzata:

$$A_{FPC} = A_{OPC} - A_{OFC} = \frac{a^2 E}{2} - \frac{ea^2 \sin(E)}{2} = \frac{a^2}{2} [E - e \sin(E)] \quad (41)$$

$$A_{FP1} = A_{FPC} \frac{b}{a} = \frac{ab}{2} [E - e \sin(E)] \quad (42)$$

Essendo $E = \text{Anomalia eccentrica}$

$$t_{P1} = \frac{ab[E - e \sin(E)]}{2\pi ab} 2\pi \sqrt{\frac{a^3}{\mu}} = [E - e \sin(E)] \sqrt{\frac{a^3}{\mu}} \quad (43)$$

Si definisce dunque $M = [E - e \sin(E)] = \text{Anomalia media}$

A questo punto non rimane altro che legare il valore di anomalia eccentrica a quello dell'anomalia vera.

Problema tempo diretto

Dato il $d\nu$ spazzato dal corpo, si vuole ricavare il tempo necessario a percorrerlo.

Ricordando l'equazione della traiettoria:

$$r = \frac{a(1 - e^2)}{1 + e \cos(\nu)} \quad (44)$$

Si può scrivere:

$$AO = ae + r \cos(\nu) = a \cos(E) \quad (45)$$

Che conduce all'equazione per calcolare l'anomalia eccentrica:

$$\cos(E) = \frac{e + \cos(\nu)}{1 + e \cos(\nu)} \quad (46)$$

In questo modo, nota l'orbita, dunque nota la sua eccentricità, e noto l'angolo spazzato dal periastro posso in primis calcolare l'anomalia eccentrica mediante la (46) e successivamente ricavarmi il tempo di volo con la (43).

Se volessi valutare il tempo necessario a percorrere un arco di orbita che non parte dal periastro, posso banalmente calcolarlo come il tempo necessario al corpo

per raggiungere la posizione finale dal periastro, meno il tempo che il corpo impiega a raggiungere il punto iniziale dell'arco, sempre dal periastro.

Problema tempo inverso

In questo caso, noto il tempo, si vuole calcolare l'angolo spazzato dal corpo.

In questo caso noto il tempo, posso calcolare l'anomalia media

$$M = t_{P1} \sqrt{\frac{\mu}{a^3}} \quad (47)$$

nota essa si calcola numericamente l'anomalia eccentrica risolvendo l'equazione:

$$M - E + e \sin(E) = 0 \quad (48)$$

A questo punto noto il valore di E , invertendo la (46), si può calcolare l'anomalia vera come:

$$\cos(\nu) = \frac{e - \cos(E)}{1 - e \cos(E)} \quad (49)$$

2.2 Sistemi di riferimento

Nel prossimo paragrafo verranno descritti i principali sistemi di riferimento utilizzati per orientarsi nel sistema solare, essi risultano fondamentali per poter descrivere i moti di velivoli e corpi celesti nello spazio. Per descrivere Adeguatamente un sistema di riferimento vanno definite le seguenti grandezze:

- L'origine
- l'orientamento del piano fondamentale x-y
- il verso dell'asse z
- direzione e verso dell'asse x

Direzione e verso dell'asse y rimanente verrà determinata completando la terna destrorsa.

2.2.1 Sistema Eliocentrico-Eclittica

Per questo sistema di Coordinate troviamo i seguenti parametri:

- Origine: centro di massa del Sole oppure centro di massa dell'intero sistema solare
- Piano fondamentale: Piano dell'eclittica
- Asse g3 (z) positivo verso l'emisfero che contiene Polaris
- Asse g1 (x) definito dall'intersezione del piano fondamentale con il piano equatoriale (il quale risulta inclinato di $23,5^\circ$ rispetto all'eclittica) il giorno dell'equinozio vernale o di primavera, mentre il verso è definito in modo che l'asse punti in direzione della costellazione dell'Ariete

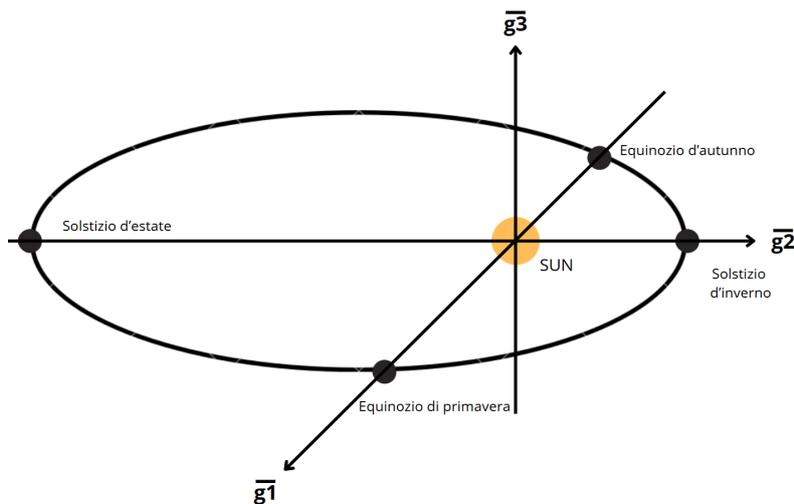


Figura 7: Sistema Eliocentrico-Eclittica

2.2.2 Sistema Geocentrico-Equatoriale

Che presenta le seguenti caratteristiche:

- Origine: centro di massa della Terra
- Piano fondamentale: Piano equatoriale
- Asse K positivo verso l'emisfero che contiene Polaris
- Asse I che punta in direzione della costellazione dell'Ariete, è quindi parallelo all'asse g_1 del sistema Eliocentrico-Eclittica

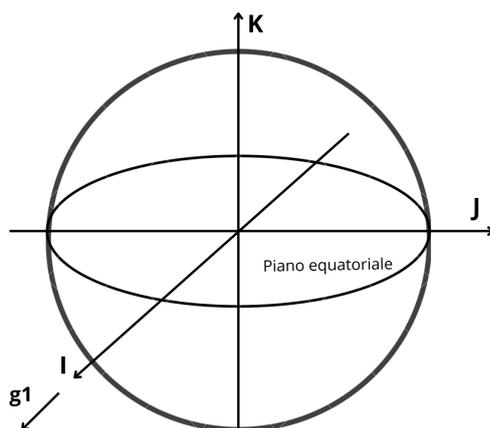


Figura 8: Sistema Geocentrico-Equatoriale

Una caratteristica del sistema Geocentrico-Equatoriale è che non ruota con la Terra, ma trasla solamente.

2.2.3 Sistema Perifocale

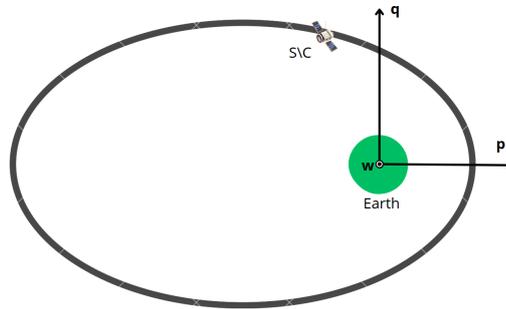


Figura 9: Sistema Perifocale

con le seguenti caratteristiche:

- Origine: centro di massa della Terra
- Piano fondamentale: piano orbitale
- Asse w diretto come il vettore momento della quantità di moto \vec{h}
- Asse p che punta verso il periastro dell'orbita

2.2.4 Sistema Local Vertical Local Horizontal (LVLH)

Sistema di riferimento locale, utile per definire manovre relative tra due spacecraft.

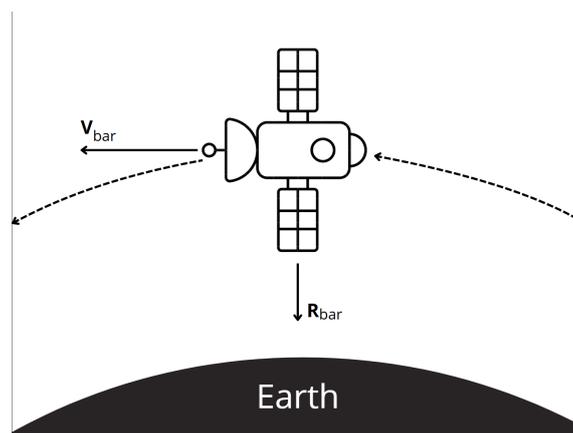


Figura 10: Sistema LVLH

- Origine: centro di massa del velivolo
- Piano fondamentale: piano perpendicolare al raggio vettore che congiunge il velivolo al centro di massa della Terra
- Asse R_{bar} diretta secondo il medesimo raggio e punta in direzione della Terra

- Asse V_{bar} parallelo all'orizzonte locale e tangente alla traiettoria, risulta diretto come il vettore velocità del velivolo
- L'asse H_{bar} completa la terna

2.3 Parametri Orbitali Classici

Al fine di determinare univocamente la posizione e la traiettoria di un corpo secondario in orbita attorno ad un corpo primario si abbandona l'utilizzo delle coordinate cartesiane in favore di quelli che vengono definiti come Parametri Orbitali Classici, essi permettono di identificare la forma e l'orientamento dell'orbita nello spazio e, mediante l'introduzione del sesto parametro, la posizione del corpo secondario lungo la traiettoria.

Poneendosi per semplicità nel caso di un generico velivolo in orbita attorno al pianeta Terra, prima di elencare i parametri orbitali si ricorda il vettore momento della quantità di moto $\vec{h} = \vec{r} \times \vec{V}$, parallelo e diretto come il versore \bar{w} del sistema di riferimento perifocale. Si definisce, in oltre, il vettore \vec{n} che identifica la linea dei nodi, orientato secondo la retta costruita dall'intersezione del piano equatoriale con il piano orbitale, esso è diretto dal centro di massa della Terra verso il nodo ascendente, ovvero il punto nel quale lo spacecraft attraversa il piano equatoriale dall'emisfero Austarale, verso quello Boreale. Si definiscono i Parametri Orbitali

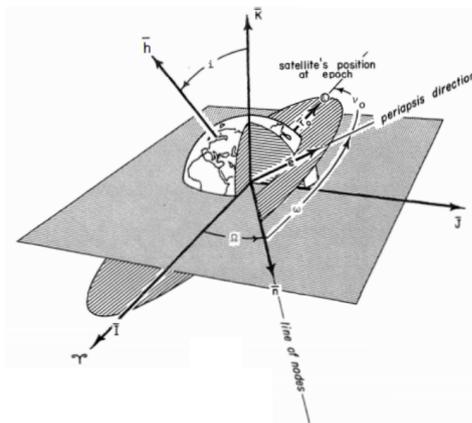


Figura 11: Parametri Orbitali Classici

Classici come:

- **Semiassa Maggiore dell'orbita** a
- **Eccentricità dell'orbita** e
- **Inclinazione dell'orbita** i : definita come l'angolo compreso tra l'asse \bar{K} del sistema di riferimento Geocentrico-Equatoriale ed il vettore \vec{h}
- **Longitudine del nodo ascendente** Ω : definita come l'angolo compreso tra l'asse \bar{I} del sistema di riferimento Geocentrico-Equatoriale ed il vettore \vec{n}

- **Argomento del periastro** ω : definito come l'angolo compreso tra il vettore \vec{n} e la direzione che identifica il periastro dell'orbita, ovvero il versore \bar{p} del sistema di riferimento Perifocale.
- **Anomalia vera** ν : definita come l'angolo compreso tra il versore \bar{p} del sistema di riferimento perifocale e il raggio vettore che identifica la posizione del velivolo nell'orbita

Si noti come semiasse ed eccentricità definiscano la forma della conica relativa all'orbita, inclinazione, longitudine del nodo ascendente ed argomento del periastro indichino l'orientamento nello spazio della conica, mentre l'anomalia vera definisca la posizione dello spacecraft lungo essa.

Possono presentarsi casistiche in cui alcuni parametri non siano univocamente distinguibili, ad esempio:

- Se l'inclinazione dell'orbita è nulla, non si può identificare il vettore \vec{n} , dunque non è possibile definire gli angoli Ω e ω , ma solo la loro somma. Si definisce dunque la **Longitudine del Periastro**, pari all'angolo compreso tra l'asse \bar{I} del sistema di riferimento Geocentrico-Equatoriale il versore \bar{p} del sistema di riferimento perifocale,
- Nel caso di orbita circolare (ad eccentricità nulla), analogamente, non è possibile definire il versore \bar{p} , dunque non si possono identificare gli angoli ω e ν , ma solo la loro somma che viene chiamata **Argomento della Latitudine**
- Per il caso di orbita equatoriale circolare (inclinazione ed eccentricità nulle), non è possibile identificare univocamente nessuno tra Ω , ω e ν , ma anche in questo caso solo la loro somma, che viene definita come **Longitudine Vera**

2.3.1 Equazioni Planetarie di Gauss

Per il caso di moto perturbato si riportano le equazioni perturbate di Gauss, valide per un corpo orbitante sottoposto all'azione di un'accelerazione anche di natura non conservativa.

Scomponendo il vettore accelerazione:

$$\vec{a} = a_r \bar{i}_r + a_t \bar{i}_t + a_n \bar{i}_n \quad (50)$$

con:

- a_r : componente di accelerazione radiale rispetto alla traiettoria
- a_t : componente di accelerazione tangenziale alla traiettoria
- a_n : componente di accelerazione normale al piano orbitale

Si possono ricavare le derivate temporali dei parametri orbitali:

$$\begin{cases} \frac{da}{dt} = \frac{2}{n\sqrt{1-e^2}} [e \sin(\nu)a_r + (1 + e \cos(\nu))a_t] \\ \frac{de}{dt} = \frac{\sqrt{1-e^2}}{na} \left[\sin(\nu)a_r + \left(\frac{e+\cos(\nu)}{1+e \cos(\nu)} + \cos(\nu) \right) a_t \right] \\ \frac{di}{dt} = \frac{1}{na\sqrt{1-e^2}} \frac{r}{a} \cos(\nu + \omega) a_n \\ \frac{d\Omega}{dt} = \frac{1}{na\sqrt{1-e^2}} \frac{r}{a} \frac{\sin(\nu+\omega)}{\sin(i)} a_n \\ \frac{d\omega}{dt} = \frac{\sqrt{1-e^2}}{nae} \left[-\cos(\nu)a_r + \left(1 + \frac{1}{1+e \cos(\nu)} \right) \sin(\nu)a_t - \frac{d\Omega}{dt} \cos(i) \right] \\ \frac{dM}{dt} = n + \frac{1-e^2}{nae} \left[\left(\frac{-2e}{1+e \cos(\nu)} + \cos(\nu) \right) a_r - \left(1 + \frac{1}{1+e \cos(\nu)} \right) \sin(\nu)a_t \right] \end{cases} \quad (51)$$

con $n = \sqrt{\frac{\mu}{a^3}}$ moto medio del corpo

2.4 Manovre Orbitali

Avendo descritto, nei paragrafi precedenti, il moto di uno spacecraft soggetto alla sola azione gravitazionale di un corpo principale, in questa sezione vedremo come influiscono le azioni di forzanti esterne quali la spinta generata da un propulsore. Considereremo per questi casi introduttivi spinte impulsive, ovvero variazioni circa istantanee della velocità, al fine di comprendere meglio come influiscano i controlli lungo le varie direzioni di moto.

Dato che l'obbiettivo principale di una manovra è quello di variare la traiettoria seguita dal velivolo, come ad esempio la forma o l'orientamento dell'orbita, e visti gli stretti legami tra posizione e velocità dello stesso, analizzati nei paragrafi precedenti; è possibile quantificare il costo di una manovra in termini di variazione di velocità che il propulsore deve fornire al sistema per eseguirla.

2.4.1 Perdite di velocità

Per valutare le perdite di velocità a cui è soggetto uno spacecraft durante una manovra, si considera una semplice casistica in cui si vuole aumentare il modulo della velocità. Considerando le forze che agiscono sul sistema esse saranno:

- La spinta T erogata dal propulsore con un relativo angolo di calettamento rispetto alla velocità α .
- La forza di gravità esercitata dalla Terra
- La resistenza aerodinamica D
- la portanza aerodinamica L

Nella direzione di V si può scrivere

$$\frac{dV}{dt} = \frac{T}{m} \cos(\alpha) - \frac{D}{m} - g \sin(\phi) = \frac{T}{m} - \frac{T}{m} (1 - \cos(\alpha)) - \frac{D}{m} - g \sin(\phi) \quad (52)$$

Integrando l'equazione nel tempo di accensione del motore si ricava:

$$\Delta V = \int_0^{\Delta t} \frac{T}{m} dt - \int_0^{\Delta t} \frac{T}{m} (1 - \cos(\alpha)) dt - \int_0^{\Delta t} \frac{D}{m} dt - \int_0^{\Delta t} g \sin(\phi) dt \quad (53)$$

A questo punto analizzando i vari termini troviamo a sinistra dell'uguale l'effetto utile, mentre a destra ciò che viene fornito dal motore meno le perdite:

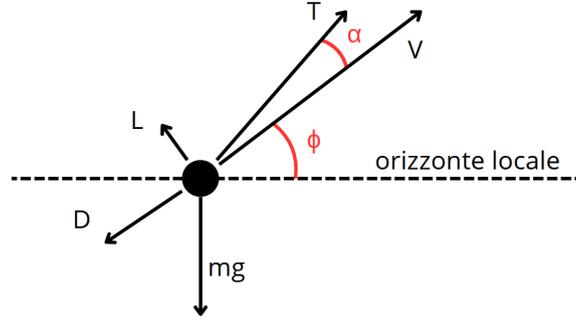


Figura 12: Perdite di velocità

- ΔV : Variazione effettiva del modulo di velocità, ovvero l'effetto utile ricavato.
- $\int_0^{\Delta t} \frac{T}{m} dt$: Rappresenta il ΔV_{prop} ovvero la variazione di velocità equivalente che deve fornire il motore.
- $\int_0^{\Delta t} \frac{T}{m} (1 - \cos(\alpha)) dt$: **Perdite per disallineamento**, che vengono introdotte dall'angolo di calettamento α , possono essere diminuite allineando la spinta al vettore velocità, quando possibile.
- $\int_0^{\Delta t} \frac{D}{m} dt$: **Perdite per resistenza aerodinamica**, esse dipendono dalla quota di volo, dalla velocità e dall'aerodinamica del velivolo.
- $\int_0^{\Delta t} g \sin(\phi) dt$: **Perdite per gravità**, legate al *flight path angle* ϕ , esse vengono dipendono dalla variazione di raggio del velivolo e possono essere mitigate cercando di sviluppare la spinta a raggi costanti.

Per quanto riguarda le perdite per gravità, scrivendo $V \sin(\phi) = u$ la velocità radiale, e sostituendo la relazione si arriva a:

$$\int_0^{\Delta t} g \sin(\phi) dt = \int_0^{\Delta t} \frac{g}{V} \underbrace{u dt}_{dr} \approx \left(\frac{g}{V} \right)_{medio} \Delta r \quad (54)$$

Da quest'ultima relazione si può vedere come nel momento in cui devo variare il raggio per limitare le perdite dovrei cercare di diminuire il rapporto $\left(\frac{g}{V} \right)_{medio}$ ovvero effettuare la manovra ad alte velocità e quindi a raggi bassi.

2.4.2 Manovre con spinta parallela alla velocità

Considerando una manovra in cui il vettore di spinta agisca parallelamente alla direzione del moto, essa, sempre sotto l'ipotesi di spinte impulsive, comporterà l'aumento istantaneo del modulo della velocità, ma ricordando l'equazione della conservazione dell'energia meccanica (33) si nota come, restando costante il raggio durante la manovra circa istantanea, si andrà a modificare il semiasse maggiore dell'orbita e conseguentemente anche l'eccentricità.

$$\frac{V^2}{2} - \frac{\mu}{r} = -\frac{\mu}{2a} \rightarrow \frac{(V + \Delta V)^2}{2} - \frac{\mu}{r} = -\frac{\mu}{2(a + \Delta a)} \quad (55)$$

$$\Delta a = -\frac{\mu}{2\left(\frac{(V+\Delta V)^2}{2} - \frac{\mu}{r}\right)} - a \quad (56)$$

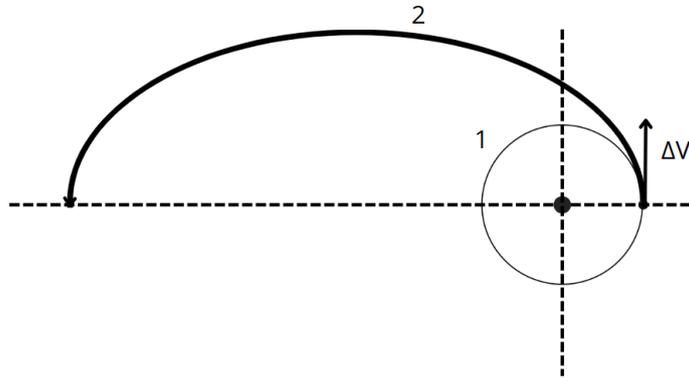


Figura 13: Manovra di aggiustamento degli apsi

Per valutare la convenienza della manovra in funzione della posizione è possibile derivare l'equazione dell'energia meccanica a raggio costante, date le considerazioni già fatte sulle spinte impulsive, per ricavare:

$$dE_g|_{r=cost} = VdV \quad (57)$$

Dalla (57) si vede come a pari dV per velocità maggiori si ottengono maggiori aumenti di energia, ciò ci porta a concludere come la manovra sia più efficiente ad alte velocità e quindi a raggi bassi, in quanto si limitano le perdite per gravità.

2.4.3 Manovre a spinta radiale

Nel caso in cui la spinta sia parallela al raggio vettore ad essere modificati saranno l'eccentricità dell'orbita e l'argomento del periastro

D'interesse è la manovra di **Rotazione degli absidi** in cui si mantiene costante l'eccentricità e si introduce solamente un $\Delta\omega$.

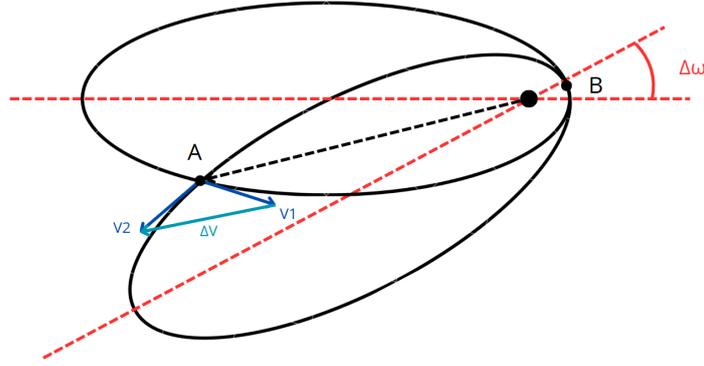


Figura 14: Rotazione degli absidi

In questo caso si mantengono costanti sia l'energia meccanica specifica che il momento della quantità di moto, in quanto non vengono modificate dimensioni e forma dell'orbita, e scrivendo le relazioni:

$$r_2 = r_1 \quad ; \quad \nu_2 = \nu_1 - \Delta\omega \quad (58)$$

In oltre

$$|V| = cost \quad ; \quad V_t = V \cos(\phi) = cost \quad \rightarrow \quad |V_r| = cost \quad \rightarrow \quad V_{r2} = -V_{r1} \quad (59)$$

Dovendosi conservare sia il valore di velocità tangenziale che il modulo, la velocità radiale non potrà che cambiare di segno.

Il ΔV da fornire sarà allora:

$$\Delta V = 2V_r = 2\frac{\mu}{h}e|\sin(\nu)| \quad (60)$$

Imponendo il vincolo che la manovra può essere effettuata solo nei punti di intersezione delle due orbite (punti A e B) si ottiene:

$$\nu = \frac{\Delta\omega}{2} + k\pi \quad (61)$$

che conduce alla relazione finale:

$$\Delta V = 2V_r = 2\frac{\mu}{h}e|\sin(\Delta\omega/2)| \quad (62)$$

che ci permette di valutare il costo di una manovra desiderata o, invertendo l'equazione di valutare la variazione di argomento del periastro per ΔV fissato.

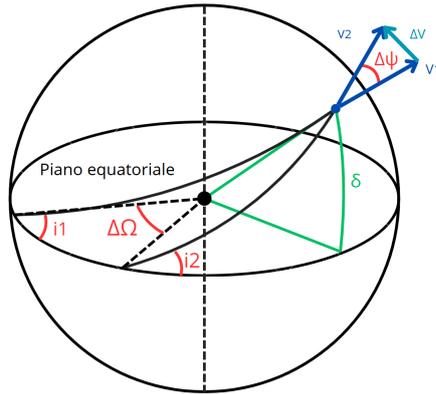


Figura 15: Generica manovra con ΔV normale al piano orbitale

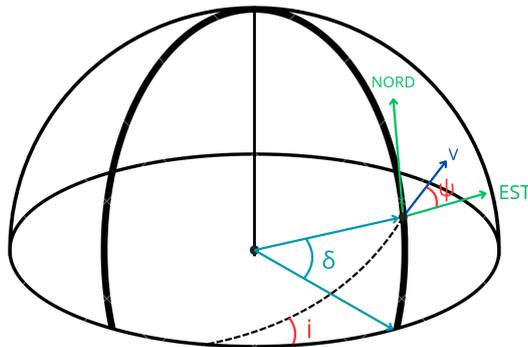
2.4.4 Manovre a spinta normale al piano orbitale

Per l'ultimo caso di manovra con spinta normale al piano orbitale i parametri che risentono di essa sono l'inclinazione e la longitudine del nodo ascendente

Per queste manovre la relativa variazione di inclinazione e di longitudine del nodo ascendente dipendono dalla latitudine δ del punto in cui vengono effettuate, secondo la seguente relazione ricavabile mediante delle considerazioni geometriche sui triangoli sferici:

$$\cos(i) = \cos(\delta)\cos(\psi) \quad (63)$$

Dove ψ è definito *Heading angle*, ovvero l'angolo compreso tra il vettore velocità ed un versore che punta verso Est.



Il costo della manovra sarà in generale:

$$\Delta V = 2V_t \sin\left(\frac{\Delta\psi}{2}\right) \quad (64)$$

Di particolare interesse è la manovra di cambio inclinazione dell'orbita, essa in generale può essere effettuata ad ogni longitudine, ma risulta più efficiente porsi a longitudini nulle in modo da non introdurre $\Delta\Omega$ ed assicurarsi $\Delta i = \Delta\psi$, ovvero che l'intera spesa della manovra venga destinata al cambio di inclinazione.

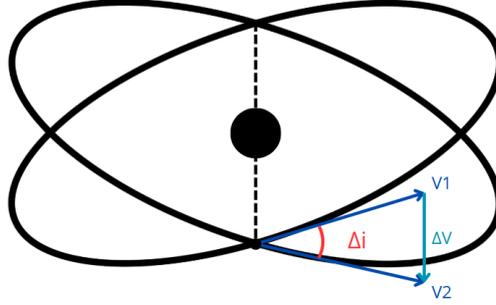


Figura 16: Manovra di cambio di inclinazione in corrispondenza dei nodi

In questo caso il costo della manovra risulta essere pari a :

$$\Delta V = 2V_t \sin\left(\frac{\Delta i}{2}\right) \quad (65)$$

Si nota come esso diminuisca al diminuire della velocità, è infatti più conveniente effettuare i cambi di piano ad alti raggi e basse velocità.

2.4.5 Trasferta tra orbite circolari complanari

Per effettuare il trasferimento tra due orbite circolari complanari con diverso raggio sarà necessario effettuare due manovre, una prima per immettersi in un'orbita di trasferimento ed una seconda per circularizzare la traiettoria ed immettersi nell'orbita di destinazione. Immaginando di voler passare da un raggio r_1 ad un raggio $r_2 > r_1$, l'orbita di trasferimento dovrà intersecare entrambe le orbite in almeno un punto, ciò si traduce nella relazione:

$$\begin{cases} r_p \leq r_1 \\ r_a \geq r_2 \end{cases} \rightarrow \begin{cases} a(1-e) = \frac{p}{1+e} \leq r_1 \\ a(1+e) = \frac{p}{1-e} \geq r_2 \end{cases} \quad (66)$$

Tra tutte le possibili traiettorie quella a minimo ΔV viene chiamata **Trasferta di Hohmann** e coincide con la trasferta con eccentricità minima, in cui

$$\begin{cases} r_{pH} = r_1 \\ r_{aH} = r_2 \end{cases} \quad (67)$$

Per valutare il costo complessivo esso sarà pari a:

$$\Delta V = \Delta V_1 + \Delta V_2 = |V_{H1} - V_1| + |V_2 - V_{H2}| \quad (68)$$

In cui le velocità V_1 e V_2 saranno le velocità circolari delle orbite di partenza e di destinazione, che è possibile calcolare mediante l'equazione dell'energia

$$V_1 = V_{C1} = \sqrt{\frac{\mu}{r_1}} \quad ; \quad V_2 = V_{C2} = \sqrt{\frac{\mu}{r_2}} \quad (69)$$

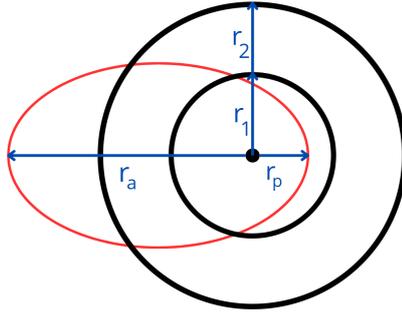


Figura 17: Trasferimento generico tra orbite circolari complanari

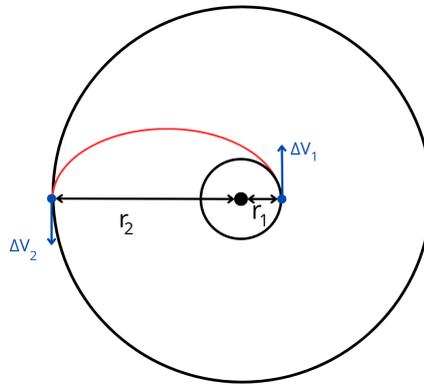


Figura 18: Trasferimento di Hohmann

Mentre le velocità V_{H1} e V_{H2} saranno relative al periastro e all'apostro dell'orbita di trasferimento di Hohmann con $a = \frac{r_1+r_2}{2}$, è possibile calcolarle sempre mediante la conservazione dell'energia:

$$V_{H1} = \sqrt{2 \left(\frac{\mu}{r_1} - \frac{\mu}{r_1 + r_2} \right)} \quad ; \quad V_{H2} = \sqrt{2 \left(\frac{\mu}{r_2} - \frac{\mu}{r_1 + r_2} \right)} \quad (70)$$

3 Propulsione Spaziale

In questo capitolo verranno presentati gli aspetti generali della propulsione spaziale e le principali tecnologie attualmente in uso. Il concetto di generale di propulsione è quello di generare delle forze o dei momenti sul sistema a scopo di variarne il moto, essa si suddivide in:

- **Propulsione primaria:** generata per effettuare le manovre di cambio di orbita.
- **Propulsione secondaria:** generata al fine di mantenere l'orbita costante a fronte di disturbi, o di variare l'assetto del velivolo.

La Propulsione spaziale, come già anticipato nell'introduzione, si basa sul principio di azione e reazione sfruttando un fluido, denominato propellente, con il quale scambiare una forza in modo da accelerarlo e ricevere, secondo la terza legge di Newton una accelerazione uguale e contraria. A differenza della propulsione aeronautica, che utilizza l'aria atmosferica come propellente, negli ambienti spaziali non ci sono a disposizione fluidi prelevabili dall'ambiente esterno, è dunque necessario prevedere di stoccarli a bordo in appositi serbatoi.

Oltre al propellente è necessario generare l'energia da cedere al fluido per accelerarlo ed i meccanismi con cui essa viene erogata caratterizzano i diversi tipi di propulsori:

- **Propulsori Chimici:** Sfruttano l'energia chimica contenuta nel propellente stesso, che viene trasformata inizialmente in energia termica mediante la combustione, in una camera apposita del propulsore, ed in fine in energia cinetica, in un ugello appositamente dimensionato. Questi propulsori sono caratterizzati da elevati valori di spinta, anche se al prezzo di maggiori consumi. Sono gli unici propulsori in commercio a poter effettuare l'ascesa in orbita, in quanto riescono a generare accelerazioni maggiori di quella di gravità.
- **Propulsori Elettrici:** In questo caso l'energia viene erogata da un apposito generatore o stoccata in apposite batterie e ceduta al propellente mediante effetto termico, elettrostatico o elettromagnetico. Queste tipologie di propulsori generano spinte più contenute rispetto alla propulsione chimica, ma generalmente permettono consumi più contenuti.
- **Propulsori Nucleari:** Sono sistemi che sfruttano l'energia generata da una reattore nucleare a bordo, ancora in via di sviluppo essi non sono mai stati utilizzati a causa di alcune difficoltà riscontrate, come ad esempio la miniaturizzazione dei reattori.

Prendendo in considerazione un sistema isolato si può schematizzare l'azione propulsiva come il rilascio, in un breve istante di tempo, di una piccola massa dm_p del sistema stesso che verrà movimentata, in direzione opposta al moto del velivolo, con una velocità relativa u_e , si può scrivere la conservazione della quantità di moto come:

$$mV = (m - dm)(V + dV) - dm_p(u_e - V) \quad (71)$$

Svolgono i prodotti e semplificando si ricava:

$$m dV = dm_p u_e \quad (72)$$

derivando rispetto al tempo e definendo $dm_p/dt = \dot{m}_p$ la portata di propellente si ricava:

$$m \frac{dV}{dt} = T = \dot{m}_p u_e \quad (73)$$

Alla spinta deve però essere aggiunto anche il contributo della pressione nella sezione di uscita dell'ugello:

$$T = \dot{m}_p u_e + A_e(p_e - p_0) \quad (74)$$

essendo A_e = l'area della sezione di uscita dell'ugello, p_e = la pressione nella sezione di uscita e p_0 = la pressione nell'ambiente esterno, che in ambienti spaziali può essere considerata nulla.

3.1 Grandezze di riferimento

Definendo m_p la massa di propellente ed \dot{m}_p la portata, le seguenti grandezze vengono utilizzate per caratterizzare le prestazioni di un propulsore:

- **Velocità efficace di scarico:** Definita come

$$c = \frac{T}{\dot{m}_p} \quad (75)$$

Essa prende in considerazione sia l'effetto della velocità in uscita dall'ugello del propellente che l'effetto della pressione nella sezione di uscita, $c = u_e + A_e \frac{p_e}{\dot{m}_p}$, nel caso in cui p_e sia trascurabile $c \approx u_e$

- **Impulso Totale:** Definito come

$$I_t = \int_{t_0}^{t_f} T dt \quad ; \quad \text{se } T = \text{cost} \rightarrow I_t = T \Delta t = \bar{m} \Delta V \quad (76)$$

con \bar{m} = massa media

- **Impulso Specifico:** definito come il tempo per cui il propulsore riesce a fornire una spinta pari al peso (sulla Terra) del propellente consumato per generarla.

$$I_{sp} = \frac{I_t}{m_p g_0} \quad (77)$$

Se $T = \text{cost}$ e $\dot{m}_p = \text{cost}$

$$I_{sp} = \frac{T \Delta t}{\dot{m}_p \Delta t g_0} = \frac{T}{\dot{m}_p g_0} = \frac{c}{g_0} \quad (78)$$

3.1.1 Equazione di Tsiolkowky

Una volta valutato il ΔV che il propulsore deve fornire, mediante l'analisi della manovra, si vuole ricavare il consumo di propellente risultante. Sotto le seguenti ipotesi:

- Assenza di disturbi esterni
- Spinta parallela alla velocità

Si può scrivere:

$$\Delta V = \int_{t_0}^{t_f} \frac{T}{m} dt = \int_{t_0}^{t_f} \frac{\dot{m}_p c}{m} dt \quad (79)$$

Essendo $\dot{m}_p = -\frac{dm}{dt} = -\dot{m}$

$$\Delta V = - \int_{t_0}^{t_f} \frac{c}{m} \frac{dm}{dt} dt = - \int_{m_0}^{m_f} \frac{c}{m} dm \quad (80)$$

che per il caso $c = \text{cost}$ conduce a

$$\Delta V = c \ln \left(\frac{m_0}{m_f} \right) \quad (81)$$

$$\frac{m_f}{m_0} = e^{-\frac{\Delta V}{c}} \quad (82)$$

In questo modo è possibile ricavare il consumo di propellente $m_p = m_0 - m_f$

3.2 Propulsione chimica

Nelle seguenti pagine verranno presentati brevemente i propulsori chimici che, se pur non rappresentano i motori di riferimento per le missioni prese in considerazione, risulta utile introdurli per effettuare dei confronti con la propulsione elettrica. Come già presentato, i propulsori chimici sfruttano l'energia contenuta nel propellente che, mediante una reazione di combustione, viene prima trasformata in energia termica e successivamente in energia cinetica.

Le principali componenti dei propulsori chimici sono:

- **Serbatoi:** contengono il propellente, se questo viene stoccato a bordo allo stato liquido.
- **Impianto di alimentazione:** preleva il propellente dai serbatoi e lo immette in camera di combustione, è presente solo nel caso vi siano dei serbatoi.
- **Camera di combustione:** zona del motore in cui il propellente reagisce e trasforma l'energia chimica in energia termica.
- **Ugello:** componente finale del propulsore in cui i gas combusti ad alta temperatura, provenienti dalla camera di combustione, vengono accelerati e trasformano l'energia termica che hanno accumulato in energia cinetica.

I propulsori chimici si suddividono in:

- **Liquid Rocket Engine:** che sfruttano propellenti allo stato liquido ed essendo dunque presente un sistema di alimentazione, è possibile regolare il livello di spinta durante l'utilizzo.
- **Solid Rocket Motor:** che sfruttano dei propellenti allo stato solido che vengono stoccati direttamente in camera di combustione, una volta che viene innescata la reazione essa non può essere regolata o interrotta fino a quando il

propellente non si è esaurito. Per questa caratteristica i propulsori a propellente solido vengono solitamente utilizzati nei booster dei lanciatori più che per la propulsione in orbita.

- **Hibrid Rocket Engine:** in cui parte del propellente è liquido e viene stoccato in appositi serbatoi, mentre la restante parte è solida e viene stoccata in camera di combustione.

Essendo i Liquid Rocket Engine i principali propulsori chimici utilizzati per il controllo in orbita, si concentrerà l'attenzione su di essi. Questi ultimi possono a loro volta essere categorizzati in:

- **Propulsori Bipropellente:** In cui sono presenti due diversi propellenti, solitamente un ossidante, come l'ossigeno liquido, ed un combustibile, ad esempio il Rocket Propellant 1 (RP1) o l'idrogeno liquido. Ossidante e combustibile vengono immessi in camera dove avverrà la reazione di combustione.
- **Propulsori Monopropellente:** In cui è presente un singolo propellente, ad esempio l'idrazina (N_2H_4), che una volta immesso in camera entra in contatto con un catalizzatore che innesca una reazione di decomposizione liberando energia.

3.2.1 Prestazioni

Scrivendo un bilancio energetico tra E_{ch} = energia chimica specifica contenuta nel propellente e l'energia cinetica del propellente in uscita dall'ugello

$$\eta \dot{m}_p E_{ch} = \frac{1}{2} \dot{m}_p c^2. \quad (83)$$

Dove η è un rendimento che tiene conto delle perdite. Dalla (83) si arriva a:

$$c = \sqrt{\frac{\eta E_{ch}}{2}} \quad (84)$$

Dalla (84) si vede come la velocità efficace di scarico, dunque l'impulso specifico, sia fissata dal rendimento e dall'energia chimica specifica, quindi, fissati i propellenti, sarà fissato il massimo di impulso specifico raggiungibile, che per ossigeno liquido (LOX) ed idrogeno liquido (LH_2) si aggira intorno ai 450 s.

Da ciò si evince come i propulsori chimici sono molto versatili, in quanto è possibile variare a piacere la spinta T variando la portata \dot{m}_p , ma a causa del limite sull'impulso specifico essi presentano consumi elevati, rendendoli praticamente inutilizzabili per missioni che richiedono elevati ΔV .

Propellant Type	Propellant	I_{sp} [s]	Note
Criogenico	LH2/LOX	400	Ottime prestazioni, serbatoi per l'idrogeno ingombranti e pesanti
Kerosene/criogenico	RP1/LOX	300	serbatoi più contenuti e minori difficoltà di gestione del propellente
Storable	tetrossido d'azoto (NTO)/monometilidrazina (MMH)	290	Hipergolici, tossici
Storable non tossici	RP1/H2O2	270	non tossici
Monopropellente	Idrazina	230	Decomposizione catalitica, un solo serbatoio e sistema di alimentazione

Tabella 1: Impulso specifico valutato assumendo l'equilibrio chimico in camera a circa 68 atm ed un'espansione ottimale ad 1 atm

3.3 Propulsione elettrica

Per quanto riguarda la propulsione elettrica l'energia ceduta al propellente viene generata da un circuito e rispetto alla propulsione chimica i rendimenti di trasmissione in gioco sono solitamente più bassi.

Come fatto per la propulsione chimica è possibile scrivere l'equazione di bilancio energetico tra potenza elettrica fornita P_e ed energia cinetica del propellente in uscita:

$$\eta P_e = \frac{1}{2} \dot{m}_p c^2 = \frac{Tc}{2} \quad (85)$$

che conduce a:

$$c = \sqrt{\frac{2\eta P_e}{\dot{m}_p}} \quad \text{oppure} \quad c = \frac{2\eta P_e}{T} \quad (86)$$

Dalla (84) si evince come per avere elevati valori di velocità efficace di scarico si dovrebbe aumentare la potenza erogata dal generatore, ma in generale questo non è sempre possibile, perchè chiaramente una maggiore potenza implicherebbe maggiori pesi e maggiori dimensioni, che potrebbero compromettere la fattibilità della missione. Come alternativa per aumentare c si potrebbe diminuire la spinta T (o analogamente la portata \dot{m}_p) ciò mi porta a poter ottenere consumi molto bassi ma limitando la spinta a valori bassi, il che comporta dover accettare tempi lunghi per le manovre.

i propulsori elettrici si suddividono in:

- **Propulsori Elettrotermici:** in cui una corrente elettrica cede calore per effetto Joule al propellente che successivamente espande in un ugello.
- **Propulsione Elettrostatica:** in cui il propellente ionizzato viene accelerato da un campo elettrico.
- **Propulsione Elettromagnetica:** in cui si sfrutta l'azione di un campo elettromagnetico generato da una corrente per accelerare le particelle cariche del propellente ionizzato.

3.3.1 Impulso specifico ottimale

Come già visto l'impulso specifico dipende dalla potenza elettrica disponibile e per fornire una potenza maggiore sarà necessario un generatore più pesante, ad esempio dei pannelli solari più grandi. Questa dipendenza dell'impulso specifico dalla potenza non rende più conveniente ricercarne il valore massimo, in quanto se pur diminuirà la massa di propellente necessaria alla missione, aumenteranno le dimensioni del generatore, risulta dunque necessario trovare il valore di ottimo che permette di massimizzare la massa del carico utile a pari massa iniziale.

Scrivendo

$$m_0 = m_p + m_s + m_u = m_f + m_p \quad (87)$$

con

- m_0 massa iniziale
- m_p massa di propellente
- m_s massa del generatore
- m_u massa del carico utile, che comprende anche tutte le masse fisse, come ad esempio quelle delle strutture.
- $m_f = m_s + m_u$ massa finale

e definendo in fine

- $\alpha = \frac{m_s}{P_e}$ massa specifica del generatore
- $\eta_e = \frac{P_e}{\frac{Tc}{2}}$ rendimento elettrico globale

Il problema si riduce a valutare il valore di $c = I_{sp} g_0$ che massimizza m_u fissata m_0 e noti:

- Il ΔV richiesto dalla missione
- Il Δt di durata della missione
- Il livello tecnologico, quindi α e η_e
- m_0

Ricordando le relazioni tra le masse e l'equazione di Tsiolkowky

$$m_u = m_f - m_s \quad ; \quad m_p = m_0 - m_f \quad ; \quad m_f = m_0 e^{-\frac{\Delta V}{c}} \quad ; \quad m_s = \alpha P_e = \frac{\alpha}{\eta_e} \frac{1}{2} \underbrace{\frac{m_p}{\Delta t}}_{= \dot{m}_p} c^2 \quad (88)$$

Si ricava

$$m_p = m_0 - m_f = m_0(1 - e^{-\frac{\Delta V}{c}}) \quad (89)$$

sostituendo nella quarta equazione della (88)

$$m_s = \frac{\alpha}{2\eta_e} m_0 \left(1 - e^{-\frac{\Delta V}{c}}\right) \frac{c^2}{\Delta t} \quad (90)$$

A questo punto si può sostituire tutto nell'equazione per la massa del carico utile della (88) per ricavare:

$$\frac{m_u}{m_0} = \underbrace{e^{-\frac{\Delta V}{c}}}_{=m_f/m_0} - \underbrace{\frac{\alpha \Delta V^2}{2\eta_e \Delta t} \frac{c^2}{\Delta V^2} (1 - e^{-\frac{\Delta V}{c}})}_{=m_s/m_0} \quad (91)$$

Derivando la (91) rispetto a $\frac{c}{\Delta V}$ ed imponendola uguale a zero è possibile trovare il valore di $c/\Delta V$ che massimizza il carico utile, l'equazione risultante non è però risolvibile analiticamente e si deve ricorrere a metodi numerici.

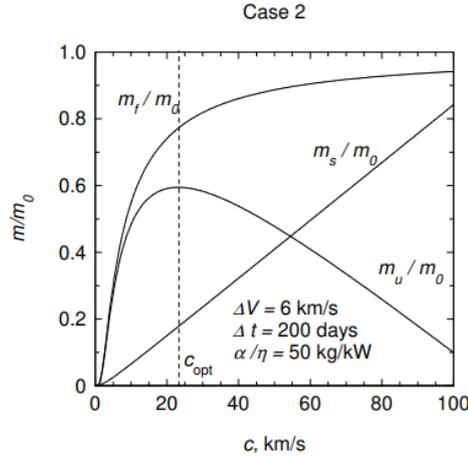


Figura 19: Impulso specifico ottimale [LCa]

Si vede come il valore di $(c/\Delta V)_{ott}$ dipende da un valore $K = \frac{\alpha \Delta V^2}{2\eta_e \Delta t}$ e variando alcuni di questi parametri il valore di ottimo si modifica:

- Migliorando il livello tecnologico (α e η_e) la curva di m_s/m_0 si schiaccia aumentando sia il carico utile che l'impulso specifico ottimale.
- Stesso effetto si ottiene se si aumenta il Δt
- Aumentando la richiesta di ΔV a $T = cost$ aumenterà necessariamente il Δt e con lui anche il valore ottimale di impulso specifico

Si noti che esiste un valore Δt_{min} al di sotto del quale la massa di carico utile risulta negativa, esso rappresenta il tempo minimo per il quale la missione può essere portata a termine, almeno teoricamente. Si calcola imponendo $dm_u/dt = 0$ ed $m_u = 0$

3.4 Propulsori Elettrotermici

Come anticipato i propulsori elettrotermici sfruttano l'effetto Joule per riscaldare un flusso di propellente, principalmente si differenziano in resistogetti e arcogetti.

3.4.1 Resistoggetti

In questa tipologia di motori la corrente scorre in una resistenza elettrica che trasmette il calore al propellente (tipicamente idrazina) che scorre intorno ad essa. La

resistenza può essere immersa direttamente nel propellente o inserita in un'apposita cavità sigillata, il contatto diretto favorisce lo scambio termico, ma potrebbe indurre al deterioramento della stessa, che quindi non può raggiungere temperature troppo elevate.

Le principali problematiche legate a questi tipi di motori sono dovute alla corrosione, al deterioramento o al creep dei materiali, prevalentemente della resistenza, che quindi limitano la temperatura massima raggiungibile in camera.

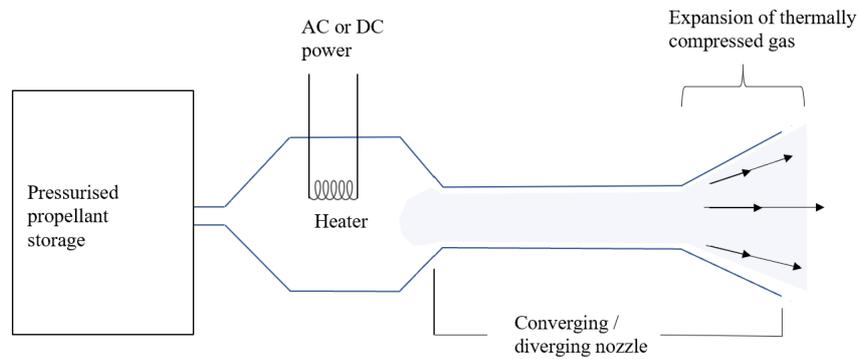


Figura 20: Resistogetto [Dil21]

Le prestazioni non sono eccezionali e l'impulso specifico varia tra i 350 s e i 700 s infatti sono utilizzati per missioni a bassa richiesta di ΔV o per la propulsione secondaria.

3.4.2 Arcogetti

Per superare i limiti sulla fragilità della resistenza dei resistogetti gli arcogetti trasmettono il calore al propellente mediante un arco che si instaura tra un catodo ed un anodo facendo scorrere la corrente nel propellente stesso. Per poter fare ciò il fluido deve essere inizialmente ionizzato da un campo elettrico che, movimentando gli elettroni liberi innesca le collisioni tra essi e gli atomi che si ionizzeranno. Una volta innescato l'arco si verrà a creare dunque una zona centrale calda ed una esterna più fredda, permettendo temperature e quindi potenze più elevate in camera.

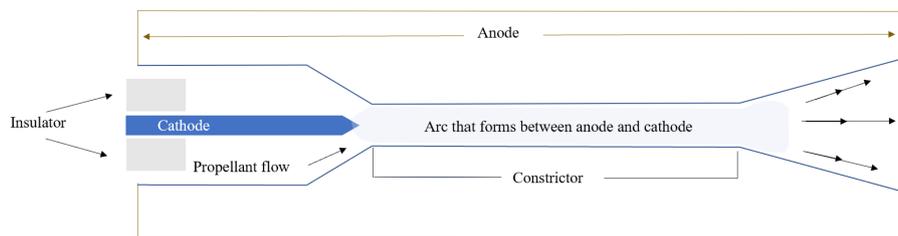


Figura 21: Arcogetto [Dil21]

Le criticità di questa tipologia di motori sono legate a l'introduzione di perdite per flussi congelati e ad alcune instabilità elettromagnetiche dell'arco elettrico che costringono nell'utilizzo di metodi di stabilizzazione di quest'ultimo, ciò porta ad avere rendimenti molto bassi dell'ordine di 0.3 – 0.4 ed impulsi specifici tra i 500 – 800s.

3.5 Propulsori Elettrostatici

Per superare i limiti imposti dai materiali sulla temperatura in camera si sfruttano le forze elettrostatiche per accelerare il propellente. I principali aspetti di cui si deve tener conto nella progettazione di un motore elettrostatico sono :

- **Ionizzazione del propellente:** Prima di poter accelerare le particelle di propellente esse devono essere ionizzate e successivamente gli ioni vanno separati dagli elettroni, in quanto un campo elettrico che agisce su un fluido, se pur ionizzato, ma globalmente neutro, sviluppa una forza nulla.
- **Accelerazione degli ioni:** Il campo elettrico deve accelerare gli ioni per generare la spinta vera e propria.
- **Neutralizzazione:** per evitare che a fronte dell'espulsione degli ioni il motore si carichi negativamente, si deve prevedere di espellere un elettrone per ogni ione.

3.5.1 Gridded Ion Thrusters (GIT)

Questo tipo di propulsore è costituito da una camera in cui viene ionizzato il propellente per bombardamento elettronico, ovvero si sfruttano gli elettroni emessi da un catodo per effetto termoionico per far instaurare delle collisioni con gli atomi al fine di ionizzarli, oppure per radiazione a radiofrequenza, in cui gli elettroni liberi vengono movimentati da un'onda elettromagnetica sempre con lo stesso scopo di urtare gli atomi di propellente.

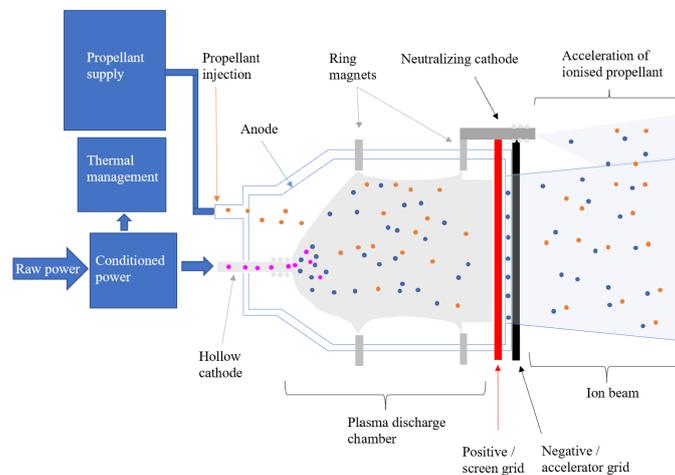


Figura 22: GIT [Dil21]

Al fondo della camera vi sono due griglie forate poste vicina l'una all'altra, la prima, detta *screen grid*, è caricata positivamente al fine di lasciar passare gli ioni, che potranno passare dai fori, e non gli elettroni che verranno attratti dalla griglia. La seconda griglia, detta *Acceleration grid* viene caricata negativamente e viene utilizzata per accelerare gli ioni prima che questi vengano espulsi dal propulsore. L'ultimo componente è un *Neutralizing cathode* che emette del plasma ionizzato al di fuori del fascio di ioni in uscita dal propulsore, in modo che gli elettroni vengano attirati e il flusso venga neutralizzato, mantenendo la neutralità del propulsore.

Il principale problema legato a questo propulsore è dovuto alla corrente di ioni che scorre tra le due griglie, essa risulta limitata dal fatto che essendoci solo cariche positive esse si respingano l'un l'altra, rallentando lo scorrimento indotto dal campo elettrico, ciò porta ad avere densità di spinta limitate.

L'impulso specifico di questi propulsori si attesta tra i 2000 – 4000 s ed il propellente maggiormente utilizzato è lo xeno, rendendolo particolarmente utilizzato per lunghe missioni interplanetarie e per la propulsione primaria di missioni ad alta richiesta di ΔV che permettono tempi lunghi, a causa delle basse spinte erogabili dal motore.

3.5.2 Field Emission Electric Propulsion (FEEP)

I FEEP sono propulsori dalla geometria rettangolare formati da due piastre separate da un sottile spessore disposto lungo tre dei quattro lati, nel lato rimanente viene lasciato uno spessore libero dal quale verrà estratto il propellente, solitamente metallico allo stato liquido. In una delle due piastre viene effettuato un solco nel quale viene inserito il propellente, che in assenza di gravità, si diffonderà per capillarità verso il solco tra le due piastre. Esternamente alle piastre viene inserito un elettrodo che genera una forte differenza di potenziale in grado di strappare gli ioni dalla matrice metallica. A valle dell'elettrodo viene inserito un neutralizzatore che emette elettroni per evitare l'accumulo di carica nel propulsore.

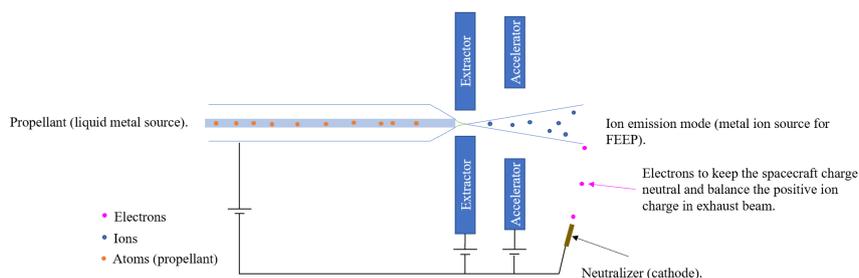


Figura 23: FEEP [Dil21]

Gli impulsi specifici tipici di questi propulsori si aggirano tra i 6000 s, ma essi si limitano a basse spinte e basse potenze, rendendoli adatti a manovre molto fini come il puntamento. La problematica principale è che l'impulso specifico è troppo elevato per rientrare nei range dei valori ottimali per missioni adatte a propulsori con una potenza così limitata.

3.5.3 Propulsori ad effetto Hall

Questi propulsori sono una sorta di ibrido tra propulsori elettromagnetici ed elettrostatici e sono stati ideati per superare il limite sulla densità di spinta legata ai GIT. Per fare ciò si sfrutta appunto l'effetto Hall, in cui l'azione di un campo elettrico ed un campo magnetico sul propellente ionizzato fa in modo che, ricreando delle condizioni per cui si avranno poche collisioni tra le particelle, elettroni e ioni inizieranno a percorrere delle traiettorie dette cicloidi, come indicato in figura 24, con raggi differenti dovuti alla differente massa di elettrone e ione.

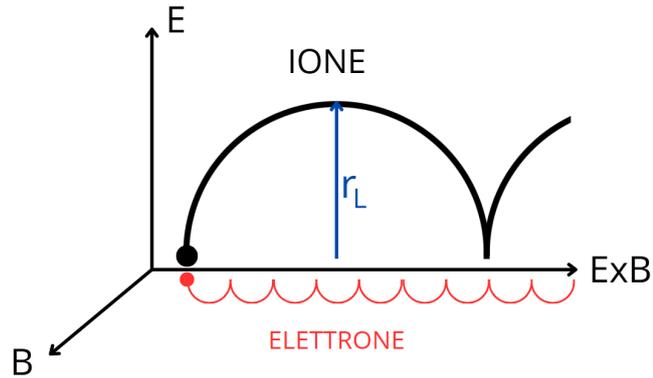


Figura 24: Cicloidi

con $r_L = \text{Raggio di Larmore}$

In queste condizioni la forza media, che tiene conto di effetti elettrici e magnetici, è nulla e non viene sviluppata nessuna spinta. L'idea alla base del funzionamento dei propulsori in questione è quella di ricreare un ambiente di dimensione inferiore rispetto al raggio di Larmore degli ioni, ma superiore a quello degli elettroni. In questo modo le particelle più massive non riuscirebbero a completare una cicloide intera e la forza media sviluppata da campo elettrico e campo magnetico non sarebbe più nulla.

Costruttivamente i motori hanno forma assialsimmetrica con un anodo al fondo della camera ed un catodo all'esterno che generano un campo elettrico in direzione assiale e dei magneti permanenti che invece generano un campo magnetico in direzione radiale. In questo modo gli elettroni presenti nel motore inizieranno a muoversi in direzione tangenziale, compiendo diversi giri attorno al corpo centrale prima di rientrare nell'anodo, durante questo moto le collisioni con gli atomi di propellente, se pur poche, servono a ionizzarle.

Gli ioni invece una volta prodotti in camera vengono espulsi frontalmente generando una zona ad alto potenziale che attrarrà gli elettroni emessi dal catodo frontale che serviranno per la neutralizzazione. In questo modo il disequilibrio tra forze magnetiche ed elettrostatiche di elettroni e ioni genera una forza sul propellente e per la terza legge di Newton, una spinta sul propulsore.

Questi propulsori riescono a superare il limite sulla corrente dei GIT ed in oltre ad ottenere rendimenti accettabili anche ad impulsi specifici minori, che per questo propulsore si aggirano tra i 1500–2500 s, in questo modo essi risultano fruibili anche per missioni con un impulso specifico ottimale minore. Le principali criticità sono legate all'instabilità del plasma che potrebbe portare all'erosione degli elettrodi, alla divergenza del flusso che può raggiungere anche i 40° e ad una componente di velocità

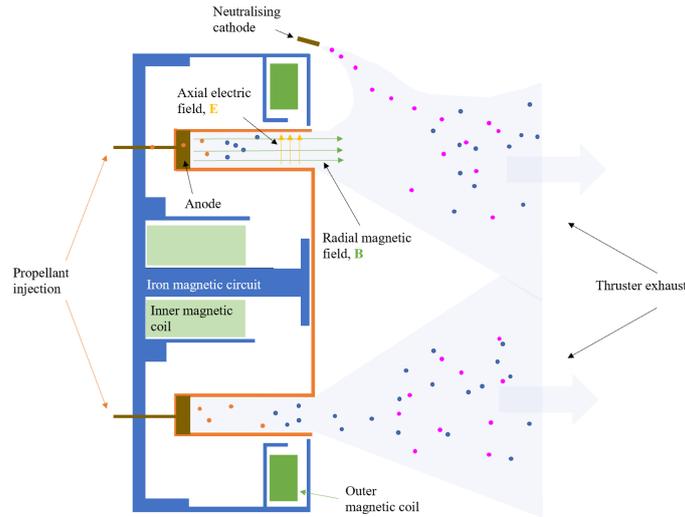


Figura 25: Propulsore ad effetto Hall [Dil21]

tangenziale degli ioni in uscita, che genera una coppia torcente sul propulsore.

3.6 Propulsori Elettromagnetici

I propulsori elettromagnetici si possono suddividere in propulsori stazionari e instazionari in base a quanto rapidamente varia la corrente. Il principio di funzionamento si basa su una corrente che si instaura tra un anodo ed un catodo, come nel caso di un arcogetto, solamente che a fronte della presenza di un campo magnetico gli elettroni sono spinti verso l'uscita e mediante le collisioni, in questo caso numerose, cedono energia cinetica alle altre particelle. La differenza sostanziale tra un propulsore elettromagnetico ed un arcogetto è il numero di collisioni tra le particelle che in questo caso favorisce un'accelerazione del flusso di propellente invece che l'instaurazione di un arco che gli fornisca calore.

3.6.1 Magneto Plasma Dinamic thrusters (MPD)

Essi sono formati da un anodo cavo dentro il quale viene inserito il catodo e grazie alla differenza di potenziale si instaura una corrente di elettroni emessi dal catodo. Il campo magnetico può essere *Self-Field*, ovvero generato dalla corrente che scorre nel catodo e nel propellente, oppure *Applied-Field*, ovvero generato da magneti esterni, in ogni caso esso si sviluppa in direzione tangenziale.

L'iterazione tra la corrente che scorre nel propellente ed il campo magnetico tangenziale sviluppa due forze sul propellente:

- Una prima forza assiale che contribuisce ad accelerare il propellente verso l'uscita ed a generare spinta (**B**lowing)
- Una forza radiale che genera un gradiente di pressione lungo il raggio del motore ed anch'essa contribuisce a generare una percentuale della spinta (**P**umping)

L'impulso specifico di questi motori si aggira tra i 2000–5000 s ed in oltre si riesce ad ottenere un alto livello di spinta per la propulsione elettrica. Le grandi spinte però necessitano di grandi potenze e ciò rappresenta un limite per questa tipologia

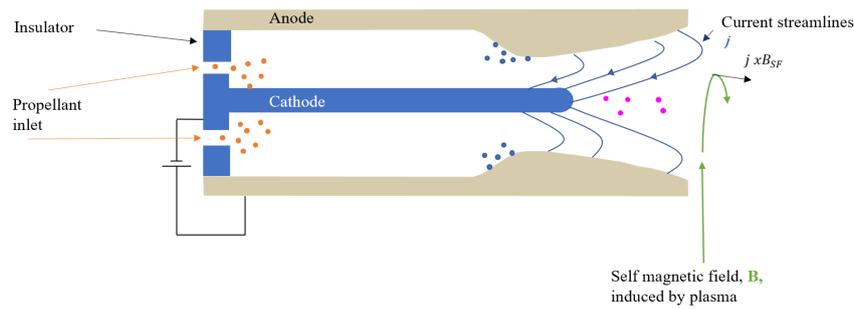


Figura 26: MPD Self-Field [Dil21]

di propulsori in quanto i generatori risulterebbero eccessivamente pesanti. In oltre i rendimenti limitati fanno sì che molta di questa potenza venga dispersa sotto forma di calore che potrebbe compromettere l'integrità strutturale del propulsore.

3.6.2 Pulsed Plasma Thrusters (PPT)

Per risolvere la problematica dell'eccessivo flusso di calore generato dai MPD si è pensato ad un funzionamento pulsato per limitare il flusso medio di calore nel tempo. Il principio di funzionamento dei PPT si basa dunque sulle seguenti fasi. In primis si deve immagazzinare l'energia per poi rilasciarla tutta in pochissimo tempo e per fare ciò si utilizzano dei condensatori. Contemporaneamente si deve innescare la scarica con una candela che attraverso una piccola scintilla ionizza una piccola parte di propellente e dovendo immettere esattamente nell'istante in cui la candela emette la scintilla, per i tempi in gioco, l'immissione di propellenti liquidi o gassosi risulta proibitiva e si utilizza dunque un propellente solido, solitamente teflon. Una volta instaurata la scarica essa deve essere stabilizzata e successivamente il propellente ionizzato deve essere accelerato verso l'uscita.

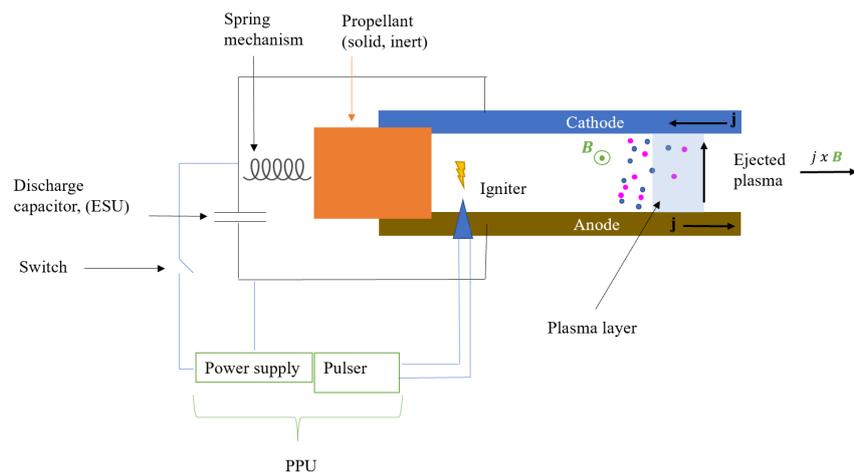


Figura 27: PPT [Dil21]

L'impulso specifico dei PPT si attesta intorno a valori non eccezionali, solitamente tra i 500 – 1000 s, e ciò unito agli elevati pesi dovuti ai condensatori, non rendono il propulsore un'alternativa eccezionale.

Tipo	I_{sp} [s]	η	Criticità
Resistogetto	350 – 700	0.8	Corrosione e limiti di temperatura legati alla resistenza
Arcogetto	500 – 800	0.3-0.4	Rendimenti molto bassi, flussi congelati
GIT	2000 – 4000	0.65	Limite sulla corrente, basse densità di spinta
FEEP	6000	0.8	Basse spinte e basse potenze
Propulsori effetto Hall	1500 – 2500	0.5	corrosione, divergenza del flusso, si genera una coppia torcente
MPD	2000 – 5000	0.3	Potenze richieste elevate, flussi di calore estremi
PPT	500 – 1000	0.1	Pesi elevati

Tabella 2: Tabella riassuntiva propulsori

3.7 Manovre con propulsione elettrica

Le manovre a spinta impulsiva presentate precedentemente non rappresentano una buona approssimazione per le spinte contenute che riescono a fornire i propulsori elettrici.

Il calcolo del profilo di spinta in direzione e verso per una determinata missione può essere molto complesso ed in generale richiede l'applicazione di metodi numerici per essere risolto, nelle prossime pagine però verranno effettuate delle semplificazioni per risolvere un problema approssimato al fine di comprendere al meglio il fenomeno.

3.7.1 Edelbaum's Approximation

Per la soluzione approssimata del problema si effettuano le seguenti ipotesi:

- Orbite quasi circolari
- inclinazione dell'orbita circa nulla $i \approx 0^\circ$
- variazioni lente dei parametri orbitali

Sotto queste ipotesi è possibile scrivere:

$$V \approx V_C = \sqrt{\frac{\mu}{r}} \quad ; \quad \sin(i) \approx i \quad ; \quad \cos(i) \approx 1 \quad ; \quad \dot{\nu} \approx n = \sqrt{\frac{\mu}{a^3}} = \text{cost} \quad (92)$$

Definendo le accelerazioni fornite dal motore nelle tre direzioni radiale, tangenziale e normale, esse per ipotesi saranno piccole.

$$a_r = \underbrace{T/m}_{=A} \cos(\beta) \sin(\alpha) \ll \frac{\mu}{r^2} \quad ; \quad a_t = \underbrace{T/m}_{=A} \cos(\beta) \cos(\alpha) \ll \frac{\mu}{r^2} \quad ; \quad a_n = \underbrace{T/m}_{=A} \sin(\beta) \ll \frac{\mu}{r^2} \quad (93)$$

Dato il caso ad orbita circolare equatoriale si definisce la longitudine vera come:

$$\theta = \Omega + \omega + \nu \quad (94)$$

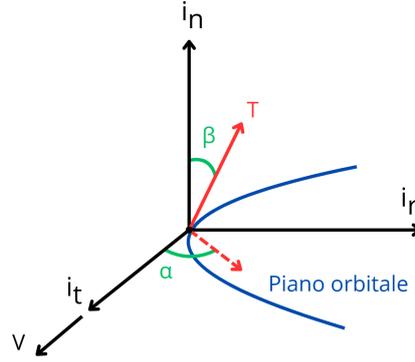


Figura 28: Angoli di spinta

Grazie alle semplificazioni fatte ed alle equazioni scritte precedentemente è riscrivere le equazioni planetarie di Gauss come segue:

$$\begin{cases} V\dot{a} = 2a_t \\ V\dot{e} = 2\cos(\nu)a_t + \sin(\nu)a_r \\ V\dot{i} = \cos(\omega + \nu)a_n \\ iV\dot{\Omega} = \sin(\omega + \nu)a_n \\ V\dot{\omega} = -V\dot{\Omega} + (2\sin(\nu)a_t - \cos(\nu)a_r)/e \\ \dot{\theta} = \sqrt{\frac{\mu}{a^3}} \end{cases} \quad (95)$$

Integrando le equazioni lungo una rivoluzione tra $t_0 = 0$ e $t_f = 2\pi\sqrt{\frac{a^3}{\mu}}$ ed effettuando un cambio di variabile da dt a $d\theta \approx d\nu = \sqrt{\frac{\mu}{a^3}} dt$, per l'ipotesi di variazione lenta di ω ed Ω , si ricava :

$$\begin{cases} \Delta a = \frac{2aA}{nV} \int_0^{2\pi} \cos(\alpha)\cos(\beta) d\nu \\ \Delta e = \frac{A}{nV} \int_0^{2\pi} (2\cos(\nu)\cos(\alpha) + \sin(\nu)\sin(\alpha))\cos(\beta) d\nu \\ \Delta i = \frac{A}{nV} \int_0^{2\pi} \cos(\omega + \nu)\sin(\beta) d\nu \end{cases} \quad (96)$$

In questa integrazione sono state considerate costanti sia A che a , V e n , secondo l'ipotesi di variazione lenta dei parametri orbitali, che è valida se A è molto piccola.

A questo punto si può valutare come variare gli angoli di spinta per massimizzare il delta del parametro desiderato.

- Cambio di solo semiasse

In questo caso per massimizzare il Δa dovrei mantenere

$$\begin{cases} \cos(\alpha) = 1 \\ \cos(\beta) = 1 \end{cases} \rightarrow \begin{cases} \alpha = 0^\circ \\ \beta = 0^\circ \end{cases} \quad (97)$$

ed in un giro si ottiene

$$\frac{\Delta a}{a} = 2\frac{A}{nV}2\pi \quad (98)$$

Mantenendo $\Delta e = 0$ e $\Delta i = 0$

- Cambio di sola eccentricità

Per massimizzare il Δe devo assicurare che

$$\begin{cases} \cos(\beta) = 1 \rightarrow \beta = 0^\circ \\ \tan(\alpha) = \frac{\tan(\nu)}{2} \end{cases} \quad (99)$$

Si vede graficando l'andamento di $\tan(\alpha) = \frac{\tan(\nu)}{2}$ che la curva è molto vicina alla curva $\alpha = \nu$, si sceglie allora come strategia di controllo questa seconda relazione per semplicità. Infatti, in questo modo si ottiene un profilo di spinta a direzione fissa lungo l'orbita, rispetto ad un riferimento inerziale, che accelera il velivolo in prossimità del periastro dell'orbita finale e lo frena in prossimità dell'apoaastro.

In tutto ciò si mantengono $\Delta a = 0$ e $\Delta i = 0$

- Cambio di sola inclinazione

In questo caso la strategia di controllo ottimale risulta:

$$\begin{cases} \sin(\beta) = 1 \rightarrow \beta = \pi/2 & \text{se } \cos(\omega + \nu) > 0 \\ \sin(\beta) = -1 \rightarrow \beta = -\pi/2 & \text{se } \cos(\omega + \nu) < 0 \end{cases} \quad (100)$$

In questo modo si ottiene

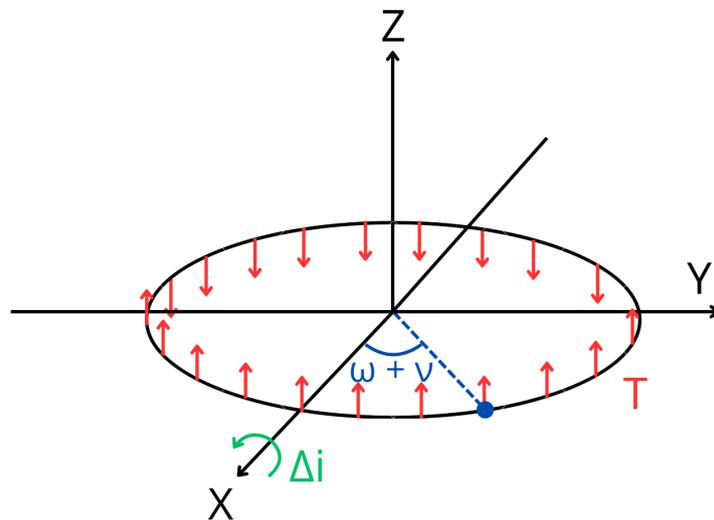


Figura 29: Cambio di inclinazione con propulsore elettrico

$$\Delta i = 4 \frac{A}{nV} \quad (101)$$

4 Presentazione del Problema

Una volta presentati gli strumenti necessari a descrivere il problema preso in considerazione in questa sezione verrà presentato il metodo operativo con cui è stato affrontato, dalla definizione della dinamica relativa, essenziale per descrivere le manovre in considerazione, all'applicazione dei metodi numerici di risoluzione.

4.1 Dinamica Relativa

Definita la dinamica e le principali manovre di uno spacecraft sottoposto al capo gravitazionale di un corpo principale, si procede con la trattazione della dinamica relativa tra due velivoli in orbita, la determinazione di essa risulta fondamentale per descrivere le manovre di rendezvous e formation flying.

Il Problema trattato, infatti, prende in considerazione il moto relativo tra due velivoli spaziali, uno dei quali, chiamato "chief", che definisce un'orbita di riferimento e ha il solo compito di mantenere la traiettoria, ed un secondo, denominato "deputy", che viene controllato attivamente mediante l'azione di un motore a propulsione elettrica. L'obiettivo è proprio quello di definire una legge di controllo al fine di ottimizzare il profilo di spinta (dunque la traiettoria) che sarà necessario seguire per raggiungere una determinata posizione e velocità relativa tra i due velivoli, minimizzando il consumo di combustibile.

Per descrivere la dinamica relativa vengono inizialmente definiti i Relative Orbital Elements

4.1.1 Relative Orbital Elements (ROE)

Ricordando il vettore degli Elementi Orbitali Classici (OE)

$$\mathbf{x}_{\text{OE}} = \begin{bmatrix} a \\ e \\ i \\ \Omega \\ \omega \\ M \end{bmatrix}$$

è possibile definire i Relative Orbital Elements (ROE) che, introducendo i pedici x_c per una grandezza relativa al *chief* e x_d per una grandezza relativa al *deputy*, vengono ricavati come segue:

$$\mathbf{x}_{\text{ROE}} = \begin{bmatrix} \delta a \\ \delta \lambda \\ \delta e_x \\ \delta e_y \\ \delta i_x \\ \delta i_y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} (a_d - a_c)/a_c \\ (\theta_d - \theta_c) + (\Omega_d - \Omega_c) \cdot \cos(i_c) \\ e_d \cdot \cos(\omega_d) - e_c \cdot \cos(\omega_c) \\ e_d \cdot \sin(\omega_d) - e_c \cdot \sin(\omega_c) \\ i_d - i_c \\ (\Omega_d - \Omega_c) \cdot \sin(i_c) \end{bmatrix}$$

$$\text{con : } \theta = \omega + M \quad (102)$$

In oltre è possibile esprimere δe_x e δe_y in funzione di un modulo ed un angolo Φ che identifica il perigeo dell'orbita relativa. Stessa cosa è possibile fare per δi_x e δi_y

mediante un secondo angolo Ψ che invece si riferisce al nodo ascendente dell'orbita relativa.

$$\delta e = \delta e_x + \delta e_y = \delta e(\cos\Phi + \sin\Phi) \quad ; \quad \delta i = \delta i_x + \delta i_y = \delta i(\cos\Psi + \sin\Psi) \quad (103)$$

4.1.2 Equazioni della dinamica relativa

Introducendo il vettore dei controlli u definito dalle componenti di spinta radiale, tangenziale e normale alla traiettoria:

$$u = u_r \hat{i}_r + u_t \hat{i}_t + u_n \hat{i}_n = \frac{T}{m_d} (\cos\beta \sin\alpha \hat{i}_r + \cos\beta \cos\alpha \hat{i}_t + \sin\beta \hat{i}_n) \quad (104)$$

Essendo

- T il modulo della spinta erogabile dal motore
- m_d la massa del *deputy*
- α e β gli angoli di spinta (vedi Figura 28)

Esprimendo la dinamica relativa tra *chief* e *deputy* mediante i ROE è possibile andare a ricavare le seguenti equazioni:

$$\dot{x} = Ax + Bu = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -\frac{2}{3}n & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} x + \begin{bmatrix} 0 & 2 & 0 \\ -2 & 0 & 0 \\ \sin\theta & 2\cos\theta & 0 \\ -\cos\theta & 2\sin\theta & 0 \\ 0 & 0 & \cos\theta \\ 0 & 0 & \sin\theta \end{bmatrix} u \quad (105)$$

Con $n = \sqrt{\frac{a^3}{\mu}}$: velocità angolare media del *chief*

Al sistema di equazioni si aggiunge l'equazione per la variazione della massa del *deputy* dovuta al consumo di propellente:

$$\dot{m}_d = -\frac{T}{c} \quad \text{Con } c = \text{velocità efficace di scarico} \quad (106)$$

in questo modo si è ricavato il set di equazioni differenziali che descrive la traiettoria relativa tra *chief* e *deputy*

4.2 Ottimizzazione con metodi indiretti

Una volta definita la dinamica dei corpi è necessario identificare dei metodi per l'ottimizzazione della legge di controllo, questi metodi, come anticipato nell'introduzione, ricercano una condizione per cui sia minimo o massimo un determinato *indice di prestazione* e vista la grande influenza che i consumi hanno sul costo complessivo della missione, si ritiene opportuno minimizzare la quantità di propellente richiesta per una determinata manovra, o equivalentemente, massimizzare la massa finale del velivolo.

Sono già stati affrontati nei capitoli precedenti alcuni casi semplici e risolvibili analiticamente di manovre con spinta continua, ma per casi di maggior interesse e complessità si richiede l'implementazione di metodi numerici per la risoluzione del problema. Tra tutti i metodi di ottimizzazione verranno approfonditi ed utilizzati i metodi indiretti, che permettono di ottenere un'elevata precisione numerica utilizzando un numero un numero limitato di parametri.

4.2.1 Teoria del controllo ottimale

Prendendo in considerazione la generica equazione della dinamica relativa:

$$\dot{x} = f(x, u, t) \quad (107)$$

l'obbiettivo è quello di trovare l'andamento temporale del vettore dei controlli $\vec{u}(t)$ tale per cui, definite le condizioni al contorno $\vec{\psi}(\vec{x}_j, t_j) = 0$, la massa finale del sistema sia massima.

A tal scopo viene definita una funzione Lagrangiana aumentata:

$$\hat{J} = \left[\phi + \vec{\nu}^T \psi \right]_{t_f} + \int_{t_0}^{t_f} \vec{\lambda}^T(t) \left[\vec{f}(\vec{x}(t), \vec{u}(t)) - \dot{\vec{x}} \right] dt \quad (108)$$

Nella quale vengono introdotti i **moltiplicatori di Lagrange** per le condizioni al contorno $\vec{\nu}$, costanti nel tempo, e quelli legati alle equazioni della dinamica $\vec{\lambda}$, che invece variano nel tempo e rappresentano delle incognite aggiuntive del problema.

Si continua la trattazione introducendo una funzione **Hamiltoniano**:

$$H = \vec{\lambda}^T \vec{f}(\vec{x}(t), \vec{u}(t)) \quad (109)$$

e definendo una funzione ausiliaria

$$\Phi = \phi + \vec{\nu}^T \vec{\psi} \quad (110)$$

Si può riscrivere la finzione di Lagrange come

$$\hat{J} = \Phi_{t_f} + \int_{t_0}^{t_f} \left[H(\vec{x}(t), \vec{u}(t), t) - \vec{\lambda}^T(t) \dot{\vec{x}} \right] dt \quad (111)$$

Integrando per parti il secondo termine dell'equazione, per eliminare le derivate del vettore di stato \vec{x}

$$\hat{J} = \Phi_{t_f} + \int_{t_0}^{t_f} H(\vec{x}(t), \vec{u}(t), t) dt - \left[\vec{\lambda}^T \vec{x} \right]_{t_0}^{t_f} + \int_{t_0}^{t_f} \dot{\vec{\lambda}}^T(t) \vec{x} dt \quad (112)$$

Condizione necessaria all'identificazione del punto di ottimo è che la derivata del funzionale aumentato sia nulla, andando quindi a differenziare l'equazione e suddividere il tempo in intervalli discreti $[t_{j-1}, t_j]$, indicando per convenzione t_{j+} l'istante di tempo immediatamente successivo a t_j e t_{j-} l'istante di tempo immediatamente precedente si trova:

$$\begin{aligned}
\delta\hat{J} = & \left(-H_{(j-1)+} + \frac{\partial\Phi}{\partial t_{(j-1)+}} \right) \delta t_{(j-1)+} + \left(H_{j-} + \frac{\partial\Phi}{\partial t_{j-}} \right) \delta t_{j-} + \\
& + \left(\vec{\lambda}_{(j-1)+}^T + \frac{\partial\Phi}{\partial \vec{x}_{(j-1)+}} \right) \delta \vec{x}_{(j-1)+} + \left(-\vec{\lambda}_{j-}^T + \frac{\partial\Phi}{\partial \vec{x}_{j-}} \right) \delta \vec{x}_{j-} + \\
& + \sum_j \int_{t_{(j-1)+}}^{t_{j-}} \left[\left(\frac{\partial H}{\partial \vec{x}} + \dot{\vec{\lambda}}^T \right) \delta \vec{x} + \frac{\partial H}{\partial \vec{u}} \delta \vec{u} \right] dt \quad (113)
\end{aligned}$$

L'annullamento del differenziale per qualunque valore di $\delta \vec{x}$, $\delta \vec{u}$, $\delta \vec{x}_{(j-1)+}$, $\delta \vec{x}_{j-}$, $\delta t_{(j-1)+}$ e δt_{j-} compatibile con le equazioni differenziali e le condizioni al contorno, ci permette di ricavare delle relazioni utili alla definizione dei parametri che caratterizzano il problema. In particolare, imponendo l'annullamento dell'integrale si ottengono, omettendo d'ora in poi il segno di vettore:

Le equazioni del controllo:

$$\frac{\partial H}{\partial u} = 0 \quad (114)$$

E le equazioni delle variabili aggiunte:

$$\frac{\partial H}{\partial x} + \dot{\lambda} = 0 \quad (115)$$

Alle quali vanno aggiunte le condizioni al contorno legate sia alle equazioni differenziali della dinamica che ai valori iniziali del vettore λ

Si deve prestare attenzione ad eventuali vincoli che possono essere imposti ai controlli, come ad esempio il modulo di spinta che deve essere compreso tra 0 ed il valore massimo T_{max} ; questi ultimi possono in generale dipendere dal tempo o dalle variabili di stato, ma ai fini del problema essi saranno considerati costanti ed espliciti. In questo modo il problema si modifica nel ricercare il profilo di spinta che appartiene ad un dominio di ammissibilità e che massimizza/minimizza \hat{J} e quindi massimizza/minimizza l'Hamiltoniano. Ci si ritrova così con due possibili soluzioni:

- Controllo non Vincolato: in cui le soluzioni per il controllo ricavate dall'equazione (114) appartengono al dominio senza far intervenire i vincoli
- Controllo Vincolato: in cui le soluzioni per il controllo appartengono agli estremi del dominio in quanto le soluzioni della (114) non vi rientrano ed entrano in gioco i vincoli.

Una casistica particolare che si vuole evidenziare è la condizione in cui l'Hamiltoniano sia lineare rispetto ad una grandezza di controllo, in questo caso mediante la (114) essa non può essere determinata in modo univoco. Allora le casistiche che possono presentarsi sono due, immaginando di voler massimizzare H :

- Il moltiplicatore di Lagrange λ_i associato all'equazione (tra quelle del sistema (108)) del parametro di controllo considerato è non nullo, allora per massimizzare il valore dell'Hamiltoniano impongo il parametro di controllo al limite massimo se $\lambda_i > 0$ ed al limite minimo se $\lambda_i < 0$.

- Se il valore di λ_i è nullo per un arco di tempo finito, per ricavare il valore del parametro di controllo si impongono nulle le derivate di ordine superiore al primo del moltiplicatore rispetto al tempo (che dalla (113) si riportano $\frac{\partial^n \lambda}{\partial t^n} = \frac{\partial^{(n-1)}}{\partial t^{(n-1)}} (\dot{\lambda}) = \frac{\partial^{(n-1)}}{\partial t^{(n-1)}} \left(-\frac{\partial H}{\partial x}\right)$) sino a quando non compare esplicitamente il parametro stesso. Il controllo ottimale viene dunque determinato dall'annullamento di quest'ultima derivata.

Annullando invece i coefficienti dei vettori di stato valutati agli estremi degli intervalli di discretizzazione temporale (δx_{j-} , $\delta x_{(j-1)+}$, δt_{j-} , $\delta t_{(j-1)+}$) dell'equazione (112) si ricavano le equazioni per le condizioni al contorno, ricordando la definizione della funzione ausiliaria (110)

$$-H_{(j-1)+} + \frac{\partial \phi}{\partial t_{(j-1)+}} + \nu^T \frac{\partial \psi}{\partial t_{(j-1)+}} = 0 \quad j = 1, \dots, n \quad (116)$$

$$H_{j-} + \frac{\partial \phi}{\partial t_{j-}} + \nu^T \frac{\partial \psi}{\partial t_{j-}} = 0 \quad j = 1, \dots, n \quad (117)$$

$$\lambda_{(j-1)+}^T + \frac{\partial \phi}{\partial x_{(j-1)+}} + \nu^T \frac{\partial \psi}{\partial x_{(j-1)+}} = 0 \quad j = 1, \dots, n \quad (118)$$

$$\lambda_{j-}^T + \frac{\partial \phi}{\partial x_{j-}} + \nu^T \frac{\partial \psi}{\partial x_{j-}} = 0 \quad j = 1, \dots, n \quad (119)$$

Eliminando la dipendenza dai moltiplicatori aggiuntivi ν effettuando i rapporti (116)/(118) ci si riconduce ad espressioni per le condizioni al contorno di ottimo del tipo :

$$\sigma(x_{(j-1)+}, x_{j-}, \lambda_{(j-1)+}, \lambda_{j-}, t_{(j-1)+}, t_{j-}) = 0 \quad (120)$$

Che grazie alle condizioni aggiuntive $\psi(x_{(j-1)+}, x_{j-}, t_{(j-1)+}, t_{j-}) = 0$ completano il sistema dato dall'equazioni (107) e (115)

Le equazioni (118) e (119), fornita una condizione al contorno su una variabile di stato x , riescono a fornire delle condizioni di ottimo per la variabile associata λ_x , ad esempio se una variabile di stato è continua, ma non assegnata in un punto interno (ψ contiene l'equazione $x_{(j-1)+} = x_{j-}$) anche la variabile associata risulterà continua ($\lambda_{(j-1)+} = \lambda_{j-}$).

Analogamente se H non è una funzione esplicita del tempo la (114) e la (115) possono fornire particolari condizioni al contorno, ad esempio se il tempo generico t_j non compare esplicitamente in ϕ , l'Hamiltoniano risulta continuo in j ($H_{(j-1)+} = H_{j-}$).

4.2.2 Equazioni del controllo ottimale

Specificando le (114) e (115) per le equazioni della dinamica relativa si riescono a ricavare le equazioni per il controllo ottimale.

Mediante il set di equazioni delle variabili aggiunte è possibile calcolare i moltiplicatori di Lagrange per ogni istante di tempo, note le condizioni iniziali.

$$\frac{\partial H}{\partial x} + \dot{\lambda} = 0 \rightarrow \dot{\lambda} = -\frac{\partial H}{\partial x} \rightarrow \begin{cases} \dot{\lambda}_a = \frac{3}{2}\lambda_\lambda n \\ \dot{\lambda}_\lambda = 0 \\ \dot{\lambda}_{ex} = 0 \\ \dot{\lambda}_{ey} = 0 \\ \dot{\lambda}_{ix} = 0 \\ \dot{\lambda}_{iy} = 0 \\ \dot{\lambda}_m = \frac{T}{m^2} [2\lambda_a \cos\alpha \cos\beta - 2\lambda_\lambda \sin\alpha \cos\beta + \lambda_{ex} \sin\alpha \cos\beta \sin\theta + \\ + 2\lambda_{ex} \cos\alpha \cos\beta \cos\theta - \lambda_{ey} \sin\alpha \cos\beta \cos\theta \\ + 2\lambda_{ey} \cos\alpha \cos\beta \sin\theta + \lambda_{ix} \sin\beta \cos\theta + \lambda_{iy} \sin\beta \sin\theta] \end{cases} \quad (121)$$

Imponendo invece le equazioni del controllo $\frac{dH}{du} = 0$ è possibile ricavare le leggi di spinta ottimali: T , α e β

$$\begin{cases} \frac{dH}{d\alpha} = 0 \\ \frac{dH}{d\beta} = 0 \\ \frac{dH}{dT} = 0 \end{cases}$$

Dalle quali è possibile ricavare delle relazioni per T , α e β in particolare si ottiene:

1) Prima equazione

$$B \cos(\alpha) - A \sin(\alpha) = 0 \rightarrow \cos(\alpha) = \frac{A}{\sqrt{A^2 + B^2}} = \frac{A}{L_p}; \sin(\alpha) = \frac{B}{L_p} \quad (122)$$

$$\text{Con : } A = [2\lambda_a + 2\lambda_e \cos(\theta - \Phi)], B = [-2\lambda_\lambda + \lambda_e \sin(\theta - \Phi)]$$

2) Seconda equazione

$$L_p \sin(\beta) - C \cos(\beta) = 0 \rightarrow \cos(\beta) = \frac{L_p}{\sqrt{L_p^2 + C^2}} = \frac{L_p}{L}; \sin(\beta) = \frac{C}{L} \quad (123)$$

$$\text{Con : } C = \lambda_i \cos(\theta - \Psi)$$

3) Terza equazione

$$\frac{L}{m} - \frac{\lambda_m}{c} = \text{Switching function} = 0 \quad (124)$$

Che però non fornisce alcuna condizione da imporre per T , in quanto l'Hamiltoniano ha un andamento lineare con il modulo di spinta. Come è stato precedentemente enunciato, il principio di Pontryagin prevede la massimizzazione di $H = \text{switching function} \cdot T$, si ricava dunque come relazione per il parametro di controllo:

- $T = T_{max}$ se $\frac{L}{m} - \frac{\lambda_m}{c} > 0$
- $T = 0$ se $\frac{L}{m} - \frac{\lambda_m}{c} < 0$

In questo modo sono state ricavate le leggi di controllo per il profilo di spinta, che inserite nell'equazioni della dinamica relativa, permettono di ricostruire la traiettoria ottimale per la manovra, fornite le condizioni iniziali e le condizioni finali desiderate.

4.2.3 Problema differenziale ai limiti

Si è visto come applicando la teoria del controllo ottimale all'equazione di stato $\dot{x} = f(x, u, t)$ si riesca a formulare un problema che comprende un nuovo set di equazioni differenziali ai limiti o Boundary Value Problem (BVP) in cui alcuni dei valori iniziali sono incogniti. Per risolvere il suddetto problema è necessario identificare quelli che, integrando numericamente il sistema, conducano ad una soluzione che soddisfi le condizioni al contorno, sia imposte dalla manovra che dalla condizione di ricerca dell'ottimo.

Come già introdotto nel paragrafo precedente il BVP è formulato mediante:

- Le equazioni differenziali che valutano l'andamento delle variabili di stato e di quelle aggiunte

$$\dot{x} = f(x, u, t) \quad (125)$$

$$\dot{\lambda} = -\frac{\partial H}{\partial x} \quad (126)$$

- Le equazioni algebriche che valutano i parametri di controllo

$$\frac{\partial H}{\partial u} = 0 \quad (127)$$

- Le condizioni al contorno imposte dal problema di partenza

$$\psi(x_{(j-1)+}, x_{j-}, t_{(j-1)+}, t_{j-}) = 0 \quad (128)$$

- e quelle imposte dalla ricerca della condizione ottimale

$$\sigma(x_{(j-1)+}, x_{j-}, \lambda_{(j-1)+}, \lambda_{j-}, t_{(j-1)+}, t_{j-}) = 0 \quad (129)$$

Il problema così formulato presenterà le seguenti caratteristiche:

- L'intervallo di integrazione viene suddiviso in sottointervalli in cui le equazioni differenziali possono avere espressioni differenti.
- L'ampiezza di ogni sottointervallo è incognita
- Le condizioni al contorno non necessariamente sono lineari e possono coinvolgere i valori delle variabili di stato ai contorni interni ed esterni.
- Le variabili possono essere discontinue lungo i contorni ed in generale dopo la discontinuità esse sono incognite.

In questo modo la risoluzione del BVP è determinata dalla successione di problemi ai valori iniziali.

Per svincolarsi dalla durata dei sottointervalli incognita, ai fini dell'integrazione, si sostituisce alla variabile indipendente t una nuova grandezza ϵ definita nel j -esimo intervallo:

$$\epsilon = j - 1 + \frac{t - t_{j-1}}{t_j - t_{j-1}} = j - 1 + \frac{t - t_{j-1}}{\tau_j} \quad (130)$$

con τ_j durata del sottointervallo. In questo modo i contorni interni ed esterni corrispondono a valori interi e consecutivi della nuova variabile ϵ .

Successivamente si introduce un nuovo vettore contenente tutte le variabili sia di stato che aggiunte $y = (x, \lambda)$, attraverso il quale è possibile descrivere le (125) e (126) mediante un solo sistema, sostituendo al vettore dei controlli le relazioni (127) (che sono dipendenti dalle variabili y)

$$\frac{dy}{dt} = f(y, t) \quad (131)$$

Andando ad aggiungere al vettore y i parametri costanti c , come ad esempio la durata dei sottointervalli, si ricava un nuovo vettore $z = (y, c)$ che, applicando il cambio di variabile temporale riconduce al sistema

$$\frac{dz}{d\epsilon} = f(z, \epsilon) \quad (132)$$

Con $\frac{dy}{d\epsilon} = \tau_j \frac{dy}{dt}$

L'accorpamento delle equazioni è possibile farlo anche per le condizioni al contorno, introducendo un vettore che contiene il valore assunto dalle variabili in ogni contorno interno ed esterno ed i parametri incogniti

$$s = (s_1, s_2, \dots, s_n, c) \quad \text{con} \quad s_j = y(\epsilon_j) \quad \text{ed} \quad \epsilon_j = 0, 1, \dots, n \quad (133)$$

in questo caso le condizioni al contorno (128) e (129) si possono esprimere mediante un unico sistema

$$\Psi(s) = 0 \quad (134)$$

Il processo iterativo inizia con l'integrazione delle equazioni (132) in cui, per la r -esima iterazione, i valori iniziali p_r sono stati determinati alla fine dell'iterazione precedente

$$z(0) = p^r \quad (135)$$

ricercando una soluzione che soddisfi le (134) (Per iniziare il processo è necessario disporre dei primi valori di tentativo p^1).

Per ogni iterazione al termine dell'integrazione vengono valutati gli errori sulle condizioni al contorno Ψ^r in ciascun bordo, valutando che una variazione sui parametri Δp produce una variazione sull'errore stesso che, arrestando lo sviluppo in serie al primo ordine, si può esprimere come:

$$\Delta \Psi = \left[\frac{\partial \Psi}{\partial p} \right] \Delta p \quad (136)$$

Si può dunque valutare la correzione da effettuare ai parametri iniziali per annullare l'errore sulle condizioni al contorno ($\Delta \Psi = -\Psi^r$), da iterare fino al raggiungimento

della precisione desiderata.

$$\Delta p = p^{r+1} - p^r = - \left[\frac{\partial \Psi}{\partial p} \right]^{-1} \Psi^r \quad (137)$$

Il primo termine della (137) si può esprimere come il prodotto di altri due termini:

$$\left[\frac{\partial \Psi}{\partial p} \right] = \left[\frac{\partial \Psi}{\partial s} \right] \left[\frac{\partial s}{\partial p} \right] \quad (138)$$

Dove il primo può essere ottenuto facilmente derivando le relazioni delle condizioni al contorno rispetto ad i parametri che le caratterizzano. Mentre il secondo termine contiene le derivate dei valori che assumono le variabili nei contorni, rispetto ai valori iniziali, che si possono esprimere mediante le valutazioni della matrice

$$\left[\frac{\partial z}{\partial p} \right] = g(\epsilon) \quad ; \quad per \quad \epsilon = 1, 2, \dots, n \quad (139)$$

Derivando adesso rispetto alla nuova variabile temporale ϵ si ricava

$$\left[\frac{\partial g}{\partial \epsilon} \right] = [\dot{g}] = \frac{\partial}{\partial \epsilon} \left[\frac{\partial z}{\partial p} \right] = \left[\frac{\partial}{\partial p} \left[\frac{\partial z}{\partial \epsilon} \right] \right] = \left[\frac{\partial f}{\partial p} \right] = \left[\frac{\partial f}{\partial z} \right] \left[\frac{\partial z}{\partial p} \right] = \left[\frac{\partial f}{\partial z} \right] [g] \quad (140)$$

Dei quali, ricordando la (135), i valori iniziali valgono

$$[g(0)] = \left[\frac{\partial z(0)}{\partial p} \right] = [I] \quad (141)$$

In questo modo è possibile ricavare il termine $\left[\frac{\partial s}{\partial p} \right]$ integrando il sistema appena ricavato.

In alcuni casi il termine $\left[\frac{\partial \Psi}{\partial p} \right]$ può essere valutato numericamente, linearizzando il problema e calcolando la j-esima riga della matrice come il rapporto tra il $\Delta \Psi$ ottenuto a fronte di una piccola variazione della j-esima componente del vettore p mantenendo fisse le altre componenti, ed il relativo Δp .

$$\left[\frac{\partial \Psi}{\partial p} \right]_{ij} \approx \frac{\Delta \Psi_i}{\Delta p_j} \quad (142)$$

Questo metodo però potrebbe compromettere la, già delicata, convergenza del metodo.

La linearizzazione effettuata per valutare la correzione Δp però porta ad introdurre degli errori che potrebbero portare l'errore ad aumentare invece che diminuire, sono state introdotte allora alcune modifiche per migliorare la procedura.

- La correzione effettuata sui valori iniziali è una frazione di quella determinata dal metodo

$$p^{r+1} = p^r + K_1 \Delta p \quad con \quad 0.1 < K_1 < 1 \quad (143)$$

il coefficiente K_1 viene determinato empiricamente durante le prove dei codici.

- Ad ogni iterazione si valuta se l'errore massimo ottenuto sulle condizioni al contorno sia inferiore ad un multiplo dell'errore ottenuto al passo precedente, se ciò accade si procede con la nuova iterazione.

$$E_{max}^{r+1} < K_2 E_{max}^r \quad solitamente \quad 2 < K_2 < 3 \quad (144)$$

- Se il l'errore valutato non dovesse rispettare il punto precedente si ricalcola l'iterazione applicando la bisezione alla correzione apportata.

$$p^{r+1} = p^r + \frac{K_1}{2} \Delta p \quad (145)$$

e se necessario il processo viene ripetuto sino a quando non si rispetta la condizione sull'errore o alternativamente non si raggiungono le 5 bisezioni apportate, in questo secondo caso il processo si arresta comunicando che la soluzione di tentativo scelta non porta a convergenza.

5 Ottimizzazione di manovre

Una volta definito il metodo esso è stato applicato per l'ottimizzazione di manovre orbitali mediante l'implementazione di un codice che risolvesse numericamente le equazioni differenziali caratteristiche del problema. Esso è stato applicato in un primo momento a manovre bidimensionali tra orbite complanari, per poi passare al caso generale tridimensionale.

Sono state condotte due diverse analisi:

- Una manovra di rifasamento effettuata con diverse variazioni di $\delta\lambda$ e diversi valori di δa e δe , al fine di valutare la traiettoria ottimale e come cambiano i consumi nelle varie casistiche.
- Una manovra di cui è noto il profilo di spinta ottimale per il caso impulsivo valutato in [DCo] e sono stati calcolati i controlli e le traiettorie ottimali per il caso a spinta continua.

Entrambe considerano un *deputy* di massa iniziale 350 Kg controllato mediante l'utilizzo di propulsori elettrici con impulso specifico $I_{sp} = 762.6568$ s

5.1 Manovra di Rifasamento

Per questa casistica è stato considerato un *chief* che orbita ad una quota di 750 Km tracciando una traiettoria circolare; la manovra considerata ha una durata pari a due rivoluzioni del *deputy* attorno alla Terra e viene richiesto di generare un solo $\Delta\delta\lambda = \delta\lambda_f - \delta\lambda_i$, facendo rimanere invariati gli altri ROE tra condizione finale ed iniziale.

Questa tipologia di manovre è di interesse pratico per tutti quei casi di riaggiustamento delle formazioni, in particolare quelle a coda, e per i casi di avvicinamento per le manovre di rendezvous.

D'ora in avanti ci si riferirà ai vettori contenenti i ROE come questi moltiplicati per il semiasse maggiore dell'orbita del chief, in modo da esprimerli più comodamente in metri.

5.1.1 Caso di riferimento $\Delta\delta\lambda = 1000$ m

Come prima analisi è stata calcolata la soluzione per le seguenti condizioni iniziali e finali:

$$x_i = [100 \ 0 \ 0 \ 0 \ 0 \ 0]^T \text{ m} \quad ; \quad x_f = [100 \ 1000 \ 0 \ 0 \ 0 \ 0]^T \text{ m} \quad (146)$$

Dove ciascuna componente è stata moltiplicata per r_{chief} , ovvero il raggio dell'orbita del *chief*.

La soluzione calcolata prevede una massa finale del *deputy* di 349.990 Kg e l'andamento degli elementi orbitali viene riportato nei seguenti grafici, insieme alla legge di controllo del motore.

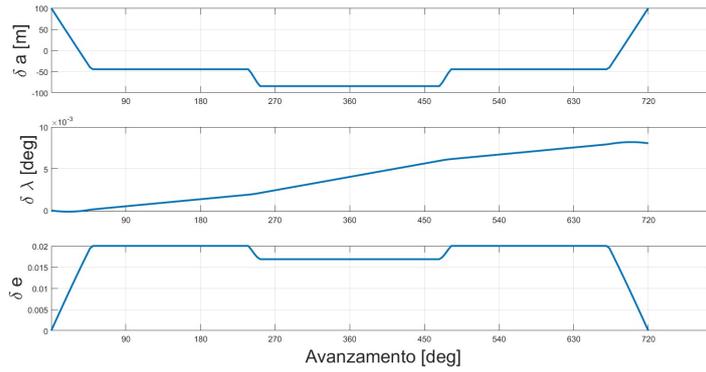


Figura 30: Manovra Rifasamento con $\Delta\delta\lambda = 1000 m$

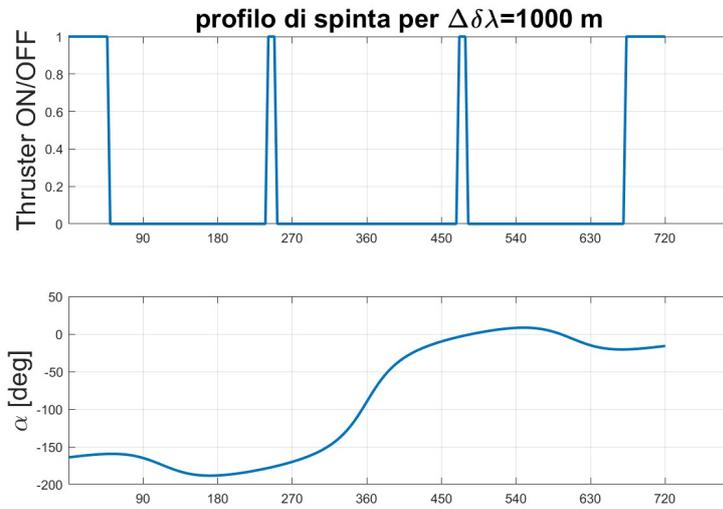


Figura 31: Profilo di Spinta $\Delta\delta\lambda = 1000 m$

Da questi grafici si capisce chiaramente che, dovendo introdurre un angolo di separazione sul piano, il sistema di controllo porta il *deputy* in due orbite a raggi inferiori rispetto al *chief* nelle quali la velocità angolare media è maggiore e dunque si genera la variazione di $\delta\lambda$ ed una volta che si è raggiunto il valore desiderato, lo spacecraft ritorna nell'orbita di partenza. Chiaramente la manovra è del tutto simile ad una manovra di Rifasamento in cui $\delta\lambda_i = -1000 m$ e $\delta\lambda_f = 0 m$. Per effettuare la manovra, il propulsore esercita due primi archi di spinta con $\alpha \approx 180^\circ$, frenando il velivolo e diminuendo il semiasse maggiore dell'orbita, seguiti da altri due archi con $\alpha \approx 0^\circ$ per riportare il semiasse alle condizioni iniziali, le manovre descritte seguono in maniera abbastanza aderente l'approssimazione di Edelbaum, che suggerisce spinte tangenti alla traiettoria per variare il semiasse con la maggiore efficienza. In fine viene presentata la manovra nel sistema di riferimento LVLH per averne una più chiara rappresentazione.

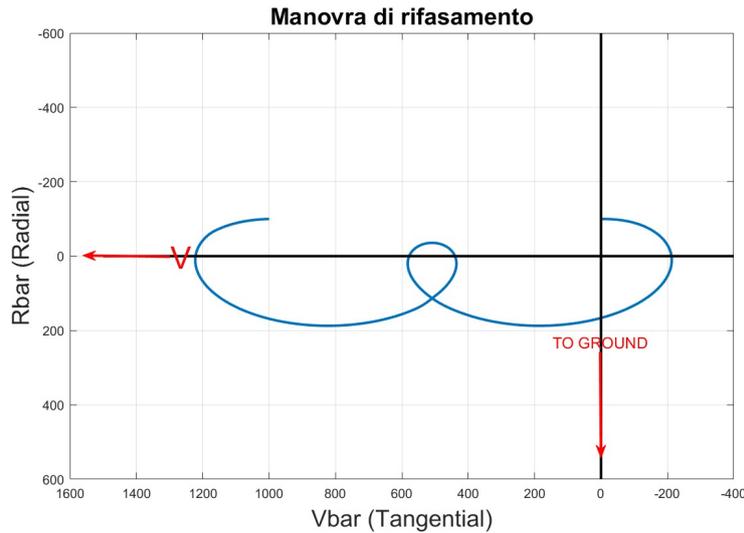
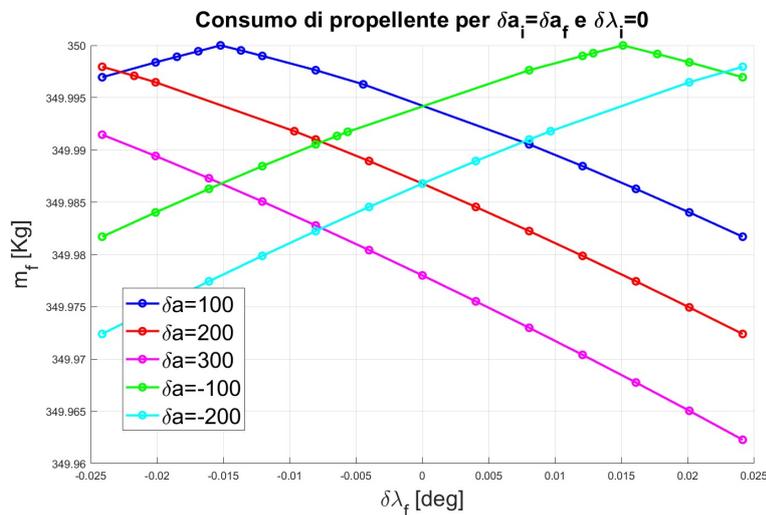


Figura 32: Manovra di rifasamento nel sistema LVLH

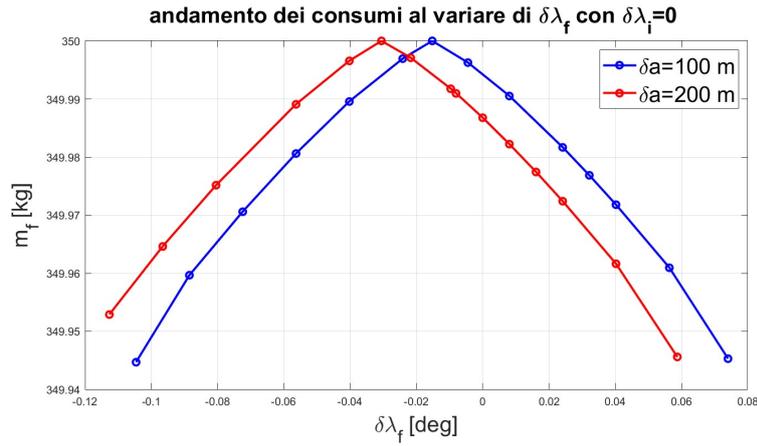
5.1.2 Valutazione dei consumi al variare del $\Delta\delta\lambda$, parametrizzati per δa

Una volta Valutata la traiettoria che viene compiuta dallo spacecraft sono state effettuate diverse simulazioni, per valutare l'andamento dei consumi al variare del $\Delta\delta\lambda$ richiesto. In oltre le simulazioni sono state effettuate anche per diversi valori di δa per valutare l'impatto di quest'ultimo sul costo della manovra.



Dai grafici si evince come ci sia un valore di $\Delta\delta\lambda$ che si ottiene "gratuitamente" senza consumare propellente, si nota in oltre come questo valore dipenda dal δa . Esso infatti è legato alla differente velocità angolare dei due spacecraft che, orbitando a raggi differenti, hanno differenti moti medi e ciò fa sì che il *deputy* a fine manovra abbia compiuto esattamente due rivoluzioni, mentre il *chief*, avendo un differente periodo orbitale, no.

Si noti infatti che per orbite del *deputy* a raggi maggiori di 750 Km(ergo a velocità inferiori rispetto al *chief*) il valore spontaneo di $\Delta\delta\lambda$ sia negativo, ovvero il *chief*



percorre più di due rivoluzioni; viceversa per δa negativi.

Altro aspetto da notare è che chiaramente il costo della manovra aumenta più ci si allontana dal valore spontaneo di $\Delta\delta\lambda$, fino ad arrivare a dei casi limite oltre i quali il motore non riesce a spingersi per questa durata della manovra, e per aumentare i valori raggiungibili sarebbe necessario o aumentare il valore di spinta erogabile dal motore, o alternativamente accettare durate maggiori.

Come esempio viene riportato il caso per $\delta a = 100$ m e $\Delta\delta\lambda = 9200$ m nel quale ci troviamo quasi al limite di manovra ed il motore risulta praticamente costantemente acceso e si raggiunge una differenza nei raggi dei due spacecraft di circa 1 Km prima che il *deputy* inizi praticamente subito a riportarsi nuovamente nell'orbita di partenza.

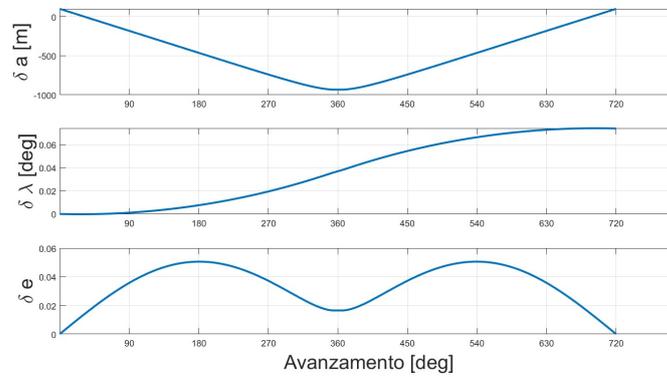


Figura 33: Manovra per $\Delta\delta\lambda = 9200$ m

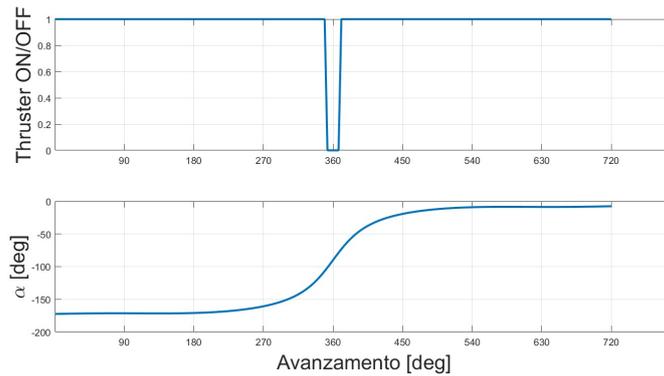


Figura 34: Profilo di spinta per $\Delta\delta\lambda = 9200 m$

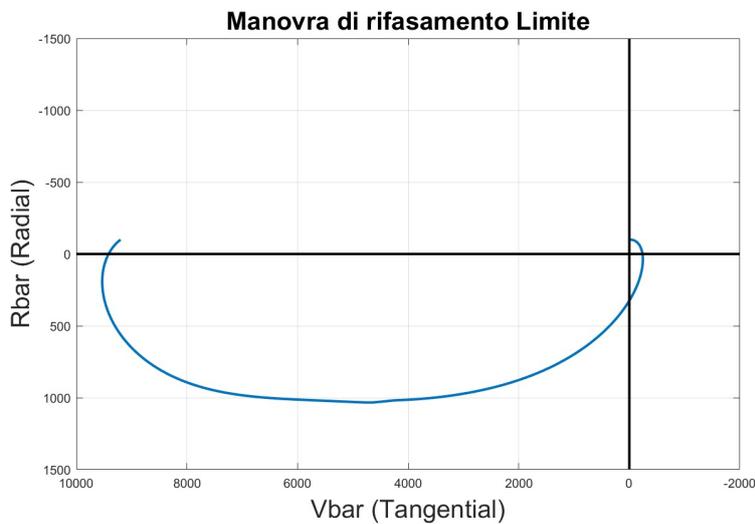


Figura 35: Manovra di rifasamento limite

5.2 Confronto con manovra impulsiva

Come altro caso di ottimizzazione è stato effettuato un confronto con l'ottimizzazione di manovre di rendezvous effettuate con spinta impulsiva, presentate nell'articolo "Simplified Maneuvering Strategies for Rendezvous in Near-Circular Earth Orbits" [DCo]. Nel sopracitato articolo vengono presentati degli schemi di ottimizzazione per una manovra piana ed una manovra tridimensionale, con lo scopo di ricavare il numero di impulsi ottimali e i tempi caratteristici di accensione oltre che le tre componenti di spinta (due nel caso bidimensionale).

Di seguito sono riportati gli schemi e le loro principali caratteristiche:

- **Schema 1:** riconfigurazione planare a tre impulsi con variazione predominante di longitudine media relativa $\delta\lambda$ e componenti di spinta radiali e tangenziali
- **Schema 2:** riconfigurazione tridimensionale a quattro impulsi in cui al caso bidimensionale dello Schema 1 si aggiunge un impulso normale per la variazione di inclinazione.

- **Schema 3 e 4:** effettuano la stessa riconfigurazione dello Schema 2 ma a tre impulsi, in cui la manovra di cambio di piano viene combinata alle precedenti, la differenza tra schema 3 e 4 è dovuta alla tempistica degli impulsi; infatti, se il primo li mantiene negli stessi tempi dello Schema 1, il secondo sposta un impulso in corrispondenza della manovra di cambio di piano dello Schema 2.

Schema	Dimensioni	Numero di Impulsi	Tipo di Manovra
Schema 1	2D	3	RT-RT-RT
Schema 2	3D	4	RT-RT-RT-N
Schema 3	3D	3	RTN-RTN-RTN
Schema 4	3D	3	RTN-RTN-RTN

Tabella 3: Schemi per manovre a spinta impulsiva [DCo]

In cui le sigle per le manovre, rispetto alla traiettoria del velivolo, identificano:

- R: spinta radiale
- T: spinta tangenziale
- N: spinta normale

Come strategia di ottimizzazione l'articolo presenta la minimizzazione di una funzione obiettivo pari alla somma dei quadrati dei ΔV richiesti per ogni impulso.

$$J = \sum_{i=1}^N \sqrt{\delta v_r^2 + \delta v_t^2 + \delta v_n^2} \quad (147)$$

Essa è strettamente legata al consumo di propellente in quanto il ΔV complessivo influisce sulla massa finale del sistema al completamento della manovra secondo l'equazione di Tsiolkowky.

5.2.1 Manovra Bidimensionale

Per quanto riguarda il caso di controllo in piano l'articolo di riferimento si basa su un'orbita di riferimento per il *chief* quasi circolare descritta dai seguenti parametri orbitali

$$[a, e, i, \Omega, \omega, M]_c = [7121 \text{ Km}, 0.001, 80^\circ, 0^\circ, 0^\circ, 0^\circ] \quad (148)$$

Mentre la manovra di riferimento presenta uno scenario di rifasamento veloce entro due rivoluzioni attorno alla terra, in cui la variazione predominante riguarda la longitudine media relativa. Essa è descritta dai seguenti vettori contenenti i ROE iniziali e finali assunti dal *deputy*:

$$a_c[\delta a, \delta \lambda, \delta e_x, \delta e_y]_0 = [50, -10000, 230, -50] \text{ m} \quad (149)$$

$$a_c[\delta a, \delta \lambda, \delta e_x, \delta e_y]_f = [0, -5000, 150, 0] \text{ m} \quad (150)$$

$$a_c[\Delta \delta a, \Delta \delta \lambda, \Delta \delta e_x, \Delta \delta e_y] = [-50, 5000, -80, 50] \text{ m} \quad (151)$$

$$(152)$$

In cui la durata della manovra è pari al tempo impiegato dal *deputy* a compiere due rivoluzioni attorno alla terra.

Lo Schema 1, presentato come soluzione di ottimo per il caso a spinta impulsiva, presenta tre impulsi di cui due circa all'inizio ed alla fine della manovra e prevalentemente tangenziali, mentre un impulso di minore intensità si colloca nella seconda metà di manovra per effettuare dei piccoli aggiustamenti. Di seguito vengono riportati i valori caratteristici dei tre impulsi, dove u rappresenta la posizione angolare dalla condizione iniziale del *deputy*.

u_1 [rad]	0
u_2 [rad]	8.855
u_3 [rad]	12.557
ΔV_1 [m/s]	0.1675
ΔV_2 [m/s]	0.0085
ΔV_3 [m/s]	0.1324
α_1 [deg]	-170.93°
α_2 [deg]	-8.13°
α_3 [deg]	-8.86°
ΔV_{tot} [m/s]	0.3083

Tabella 4: Schema 1

La manovra risultante viene rappresentata nelle coordinate di Hill in cui, a differenza del sistema LVLH, il vettore radiale è diretto dal centro della terra verso lo spacecraft

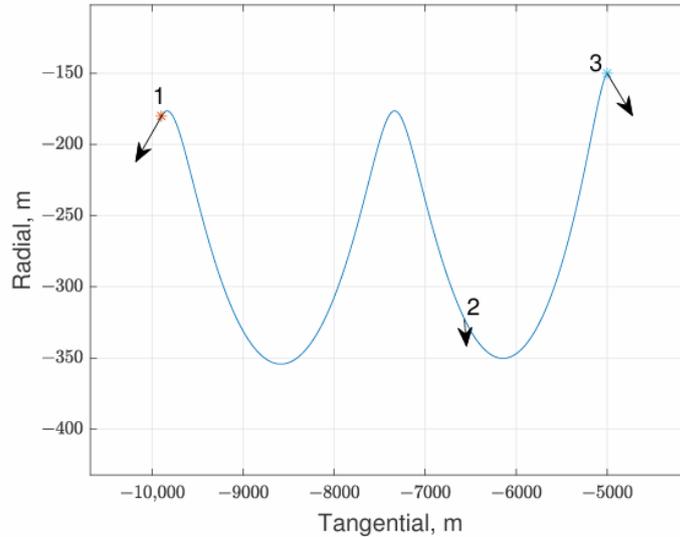


Figura 36: Manovra Schema 1 [DCo]

Si evince dalla figura (36) come la manovra effettui il rifasamento mediante un'orbita di trasferimento con semiasse maggiore diminuito in modo da aumentare il moto medio del *deputy* rispetto al *chief*. Da notare che, se pur l'orbita di destinazione abbia lo stesso semiasse dell'orbita del *chief*, la separazione verticale tra i due velivoli è aumentata a causa della differente eccentricità.

Applicando il metodo di ottimizzazione indiretto sopra descritto sono state valutate tre differenti casistiche modificando il valore di spinta:

- Caso 1: $T = 12.7 \text{ mN}$

- Caso 2: $T = 25.4 \text{ mN}$
- Caso 3: $T = 31.8 \text{ mN}$

In figura (37) viene presentato l'andamento dei ROE lungo la manovra ed in figura (38) il profilo di spinta ricavato mediante l'ottimizzazione.

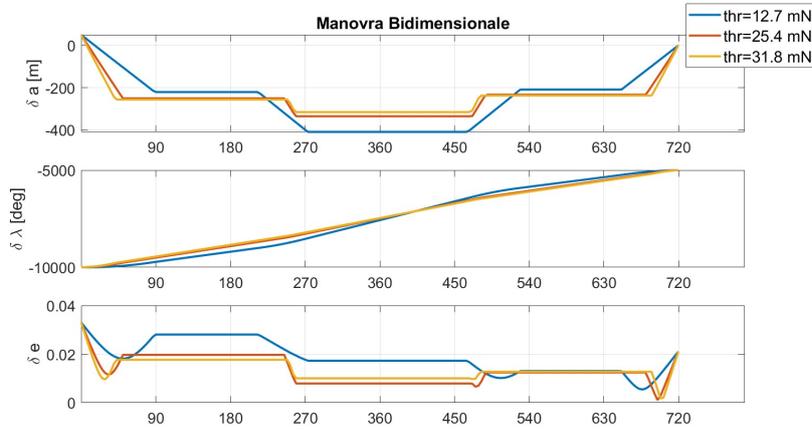


Figura 37: Manovra bidimensionale

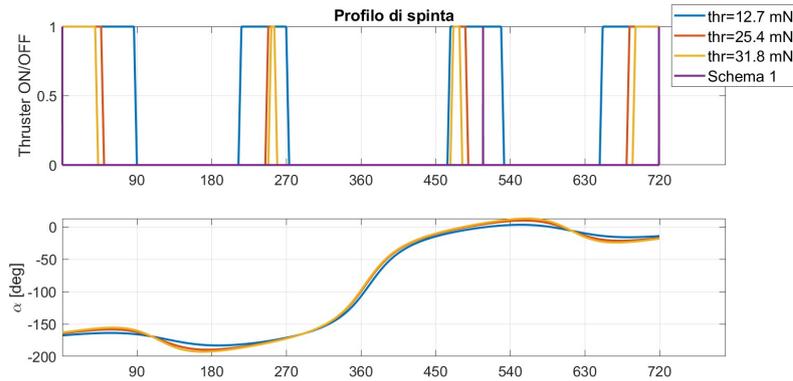


Figura 38: Profilo di spinta per caso bidimensionale

Dai grafici si evince come la manovra effettuata con spinta continua segua la tessa strategia del caso impulsivo con l'introduzione di un arco di spinta aggiuntivo tra i 180° ed i 270° , si noti inoltre come anche l'angolo di spinta α tenda a coincidere. Un' ultima osservazione e che all'aumentare della spinta il profilo tenda ad assomigliare allo Schema 1; infatti, l'arco compreso tra i 180° ed i 270° tende a scomparire, mentre il trezo arco diminuisca di durata.

Spinta	ΔV_{tot} [m/s]	m_p [Kg]
Schema 1	0.3084	0.0367
$T = 12.7 \text{ mN}$	0.4663	0.0218
$T = 25.4 \text{ mN}$	0.3952	0.0185
$T = 31.8 \text{ mN}$	0.3771	0.0176

Tabella 5: Confronto Consumi per manovra 2D

In figura (39) viene presentata la manovra nel sistema di riferimento LVLH, in cui in rosso sono state evidenziate le porzioni di traiettoria in cui il motore è acceso.

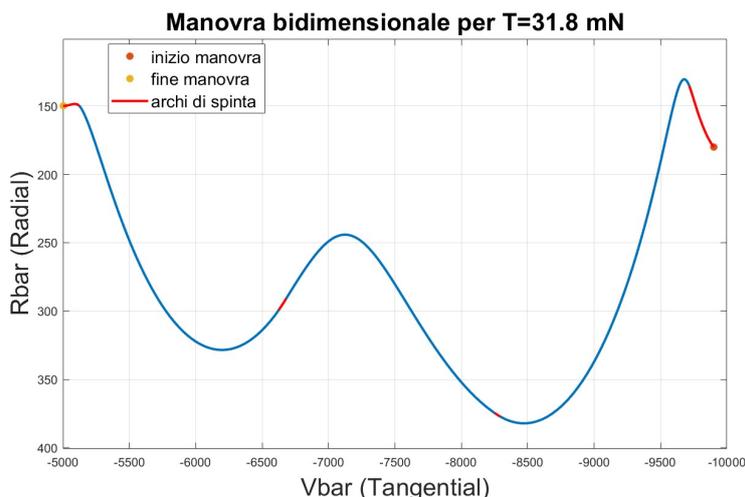


Figura 39: Manovra bidimensionale in LVLH

In fine vengono presentati i consumi in termini di ΔV_{tot} e di propellente, ipotizzando che le manovre a spinta impulsiva vengano effettuate con un propulsore chimico con impulso specifico pari $I_{sp} = 300 \text{ s}$

Dalla tabella (5) si deduce come introducendo archi di spinta continui i ΔV richiesti siano superiori a causa delle maggiori perdite per gravità; infatti, come già visto nel capitolo 2, gli impulsi, prevalentemente tangenziali, vengono effettuati istantaneamente nelle condizioni migliori (si frena alla minima velocità e si accelera alla massima), mentre gli archi continui vedono "peggiore" le condizioni di applicazione durante il loro sviluppo (franando la velocità aumenta a causa della diminuzione del semiasse dell'orbita di trasferimento); non a caso aumentando la spinta (e dunque diminuendo la durata degli archi) il ΔV diminuisca.

Nonostante il maggiore ΔV richiesto dalla manovra, i consumi effettivi di propellente risultano minori rispetto al caso impulsivo, grazie alle migliori prestazioni in termini di consumi dei propulsori elettrici, come già visto nel capitolo 3.

5.2.2 Manovra Tridimensionale

Spostandosi adesso al caso tridimensionale, alla manovra di riferimento per il caso 2D viene aggiunta una variazione di inclinazione che presenta, come caso di riferimento una variazione in modulo pari a $a_c \Delta \delta i = 90 \text{ m}$ ed una longitudine del nodo

ascendente relativo $\Psi = 1^\circ$ che conducono dunque ai seguenti vettori iniziali e finali:

$$a_c[\delta a, \delta \lambda, \delta e_x, \delta e_y, \delta i_x, \delta i_y]_0 = [50, -10000, 230, -50, 0, 0] m \quad (153)$$

$$a_c[\delta a, \delta \lambda, \delta e_x, \delta e_y, \delta i_x, \delta i_y]_f = [0, -5000, 150, 0, 89.986, 1.571] m \quad (154)$$

$$(155)$$

Gli schemi proposti da [DCo] prevedono tre differenti casistiche:

- **Schema 2:** Manovra a quattro impulsi che segue lo Schema 1, per la variazione dei parametri nel piano, aggiungendo un quarto impulso normale effettuato nel nodo per variare l'inclinazione.
- **Schema 3:** Manovra a tre impulsi in cui la variazione di inclinazione viene effettuata introducendo delle componenti normali agli impulsi dello Schema 1.
- **Schema 4:** Manovra a tre impulsi a componenti sia nel piano che normali ad esso, in cui uno dei tre viene spostato in corrispondenza del nodo (come per il quarto impulso aggiuntivo dello Schema 2).

Di questi casi sono state considerate le traiettorie ed i consumi al fine del confronto, di seguito sono riportati i ΔV richiesti per ogni manovra, mentre nelle figure (40) e (41) vengono riportate le traiettorie degli schemi 3 e 4.

Schema	$\Delta V_{tot} [m/s]$
2	0.4029
3	0.3246
4	0.3243

Tabella 6: ΔV per il caso impulsivo tridimensionale

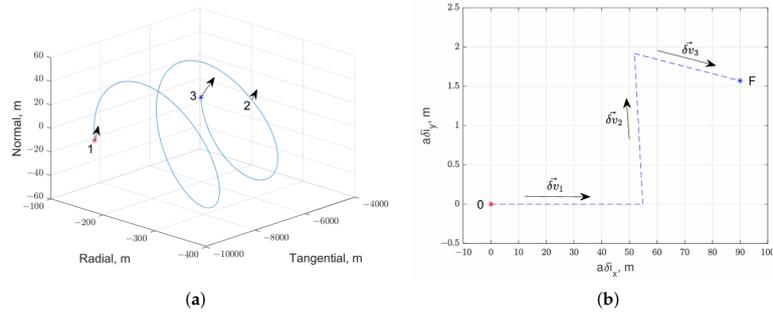


Figura 40: Traiettorie Schema 3

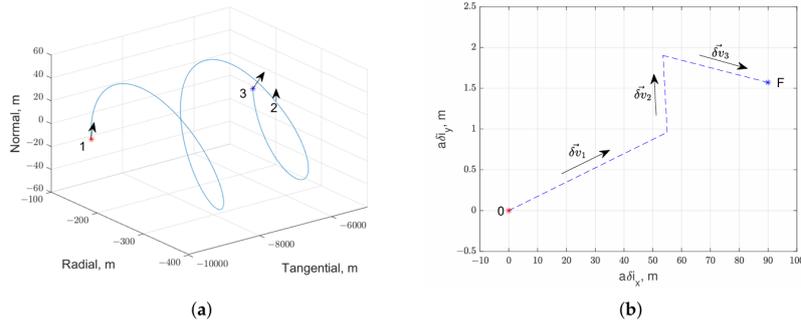


Figura 41: Traiettorie Schema 4

Si nota come in questo caso l'effetto di combinare la manovra di cambio di piano con quelle sul piano risulti vantaggiosa in entrambi i casi, ciò è banalmente dovuto alla somma vettoriale degli impulsi necessari che risulta chiaramente minore della somma algebrica dei moduli. Ultima cosa da riportare sulla manovra è che lo Schema 4 risulta leggermente più efficiente, in quanto spostando l'impulso sul nodo la manovra di cambio di piano risulta più efficiente.

Come per il caso bidimensionale sono state calcolate tre manovre a spinta crescente:

- Caso 1: $T = 12.7 \text{ mN}$
- Caso 2: $T = 25.4 \text{ mN}$
- Caso 3: $T = 50.9 \text{ mN}$

Vengono di seguito presentati l'andamento dei ROE lungo la manovra e il profilo di spinta

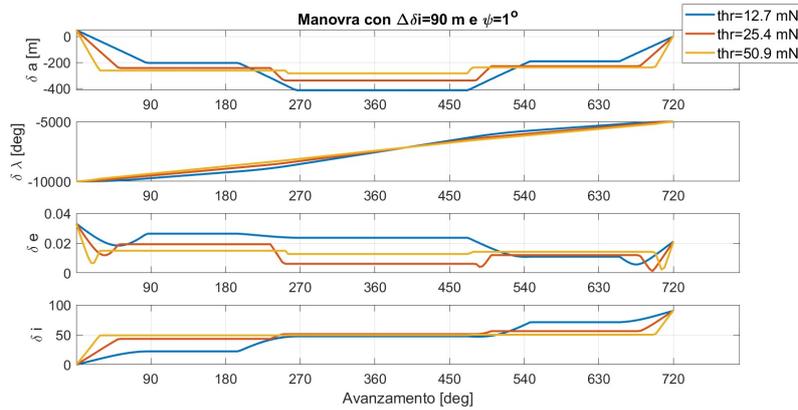


Figura 42: Manovra tridimensionale

Si rende presente che il Caso 3 non converge esattamente al vettore finale richiesto ma introduce un errore dell'ordine della decina di metri

$$a_c x_f = [5, -5016, 147.4, 90.4, 1.004] \text{ m} \quad (156)$$

la soluzione viene comunque ritenuta accettabile in quanto l'errore non è eccessivamente elevato e il valore massimo si riscontra per la longitudine relativa finale, che richiede la variazione più elevata di 5000 m .

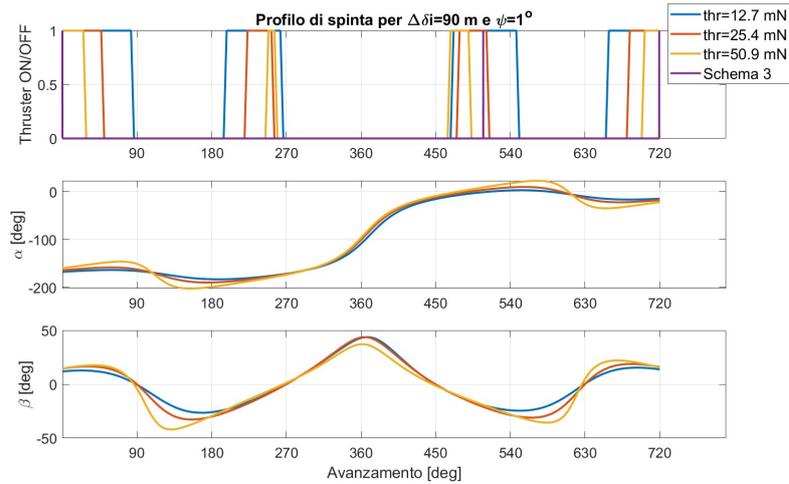


Figura 43: Profilo di spinta per caso tridimensionale

Si nota come la manovra in piano è praticamente rimasta invariata rispetto al caso bidimensionale, mentre l'introduzione dell'angolo di spinta β faccia variare l'inclinazione prevalentemente negli archi iniziale e finale di spinta. Come nel caso bidimensionale all'aumentare della spinta il profilo si avvicini al caso a tre impulsi (il più efficiente in termini di risparmi), infatti anche in questo caso l'arco compreso tra i 180° e i 270° tenda a scomparire. Effettuando un confronto con l'approssimazione di Edelbaum, in cui per il cambio di piano viene richiesto un angolo β concorde in segno a $\cos(\omega + M)$, dalla figura (44) si può vedere come l'ottimizzazione segua abbastanza aderentemente il risultato teorico (ad eccezione del terzo arco), in cui chiaramente la spinta non può essere perpendicolare al piano orbitale, dovendo effettuare una manovra combinata di cambio di semiasse e di inclinazione.

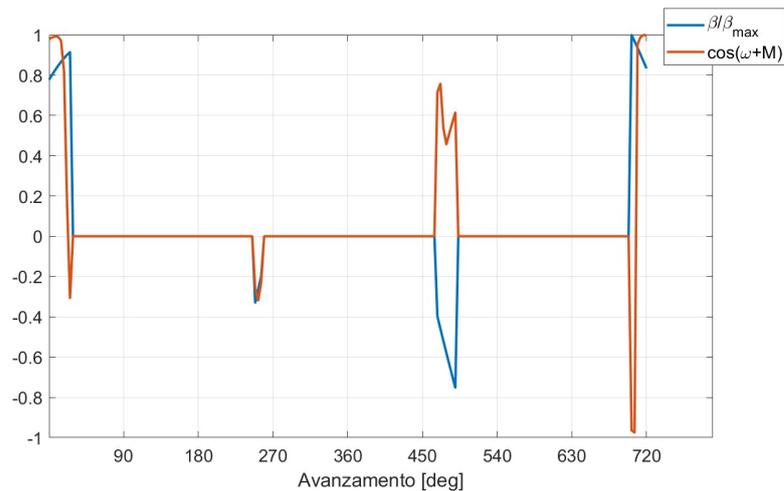


Figura 44: Confronto con approssimazione di Edelbaum

Come ultima considerazione vengono proposti i consumi nei diversi casi e la traiettoria seguita nel caso a spinta massima, valutando il consumo di propellente del caso impulsivo sempre per un motore con $I_{sp} = 300$ s.

Anche in questo caso si vede come introdurre archi di spinta continui faccia

Spinta	ΔV_{tot} [m/s]	m_p [Kg]
Schema 2	0.4029	0.0479
Schema 3	0.3246	0.0386
Schema 4	0.3243	0.0386
$T = 12.7$ mN	0.4884	0.0228
$T = 25.4$ mN	0.4162	0.0195
$T = 50.9$ mN	0.3693	0.0173

Tabella 7: Confronti Consumi per il caso 3D

aumentare le perdite per gravità e che se pur la variazione di velocità richiesta è superiore il consumo, nel caso di propulsione elettrica, risulta minore grazie alle prestazioni migliori del propulsore.

In conclusione, viene presentata la traiettoria nel sistema LVLH del caso a spinta massima in cui si evidenziano gli archi di spinta in rosso.

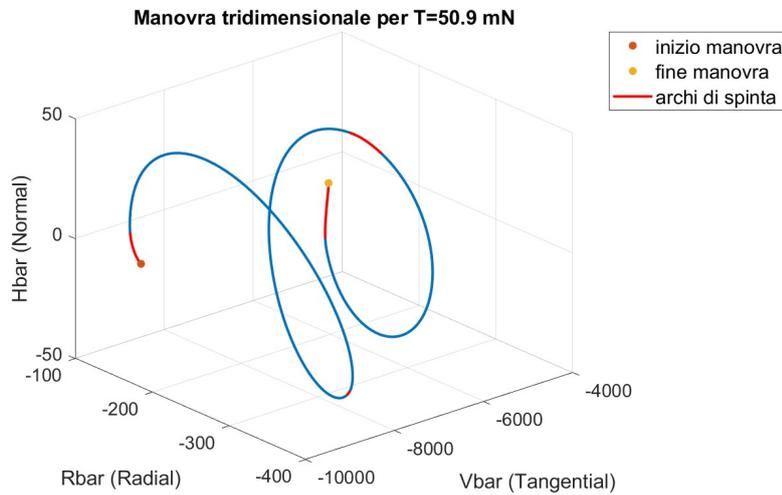


Figura 45: Manovra tridimensionale in LVLH

6 Conclusioni

L'obiettivo principale di questa tesi è stato quello di comprendere e valutare l'utilizzo dei metodi indiretti per l'ottimizzazione delle manovre di rendezvous e formation flying mediante propulsione elettrica a spinta continua, al fine di minimizzare il consumo di propellente; questo scopo, come si è visto, risulta di fondamentale importanza nello studio di missione per valutarne i costi e la fattibilità. Per sviluppare e implementare il metodo sono state inizialmente presentate le equazioni della dinamica relativa tra *chief* e *deputy*, successivamente è stata descritta la teoria del controllo ottimale ed in fine il metodo è stato applicato ad alcune manovre di riferimento sia piane che tridimensionali.

Come manovre di riferimento è stato considerato inizialmente un caso di rifasamento a durata imposta, al fine di valutare i consumi al variare dell'entità della manovra e di come il semiasse dell'orbita relativa li influenzi, oltre che i limiti della manovra. La seconda parte riguarda invece il confronto con l'ottimizzazione di manovre a spinta impulsiva, per un primo caso di manovra in cui il cambiamento di longitudine media relativa fosse comunque il parametro preponderante, al quale successivamente è stata aggiunta una manovra di cambio di inclinazione relativa.

Al netto dei risultati ottenuti è stato possibile valutare come il metodo permetta di trovare soluzioni di ottimo per le manovre considerate con grande precisione, permettendo di ridurre i consumi di propellente, soprattutto se comparato con casi a spinta impulsiva, che, se pur richiedano minori ΔV , sono limitati nei risparmi dagli impulsi specifici tipici dei propulsori chimici. Le soluzioni ottenute per la manovra combinata di cambio di piano e di rifasamento comportano un risparmio di propellente superiore al 40% rispetto allo Schema 4 presentato in [DCo].

La principale difficoltà riscontrata durante il processo di ottimizzazione è legata alla determinazione delle condizioni al contorno, che portino il metodo a convergenza con le tolleranze richieste, facendo emergere l'effettiva fragilità di quest'ultimo, in particolare all'aumento del valore di spinta, che ha richiesto una diminuzione del passo minimo di integrazione, quindi maggiori tempi di calcolo, o un rilassamento delle tolleranze.

Il metodo qui presentato risulta di utile applicazione sia in fase di definizione della missione, per valutare le traiettorie ottimali, in fase di costruzione della formazione ad esempio, ed i consumi ad esse legate; sia per l'implementazione di un algoritmo di guida in grado di fornire al controllore il profilo di spinta ottimale e l'assetto del velivolo lungo ogni arco di spinta, mediante gli angoli α e β . La principale problematica legata a questo secondo utilizzo è sicuramente la delicatezza della convergenza della soluzione, che renderebbe l'algoritmo poco robusto; altro fattore da considerare è il peso sul sistema di controllo di assetto che deve essere in grado di mantenere gli angoli di spinta ottimali, entro una desiderata tolleranza, durante l'intera manovra.

Un possibile sviluppo futuro potrebbe proprio riguardare l'aumento di robustezza del metodo al fine di riuscire ad automatizzare la definizione della traiettoria ottimale per applicarla come algoritmo di guida autonoma del sistema.

Riferimenti bibliografici

- [DCo] L.Casalino D.Costigliola. «Simplified Maneuvering Strategies for Rendezvous in Near-Circular Earth Orbits». MPD journal, 2023.
- [Dil21] Georg Herdrich e Darren F. Kavanagh Dillon O'Reilly. *Electric Propulsion Methods for Small Satellites: A Review*. 2021. URL: <https://www.mdpi.com/2226-4310/8/1/22>.
- [ESA11] ESA. *Satellite Formation Flying*. 2011. URL: https://gssc.esa.int/navipedia/index.php/Satellite_Formation_Flying.
- [LCa] L.Casalino. «Space Propulsion». Slides del corso "Propulsione Spaziale".
- [WeS] WeSchool. *La forza di gravità e la legge di gravitazione universale di Newton*. URL: <https://library.weschool.com/lezione/forza-di-gravit%C3%A0-formula-ed-esercizio-svolto-7585.html#:~:text=La%20legge%20formulata%20da%20Newton,della%20distanza%20che%20li%20separa..>
- [You] YouMath. *Coniche degeneri e non degeneri: costruzione, classificazione ed equazioni*. URL: <https://www.youmath.it/formulari/formulari-di-geometria-analitica/3343-coniche-degeneri-e-non-degeneri.html>.