

POLITECNICO DI TORINO

Corso di Laurea Magistrale
in Ingegneria Matematica

Tesi di Laurea Magistrale

**Modelli di Programmazione Lineare per l'Index
Tracking: Algoritmi e Applicazioni nella Replica
dell'S&P 500 con Analisi Out-of-Sample**



Relatori

prof. Paolo Brandimarte
prof. Edoardo Fadda

Candidato

Salvatore Frattaruolo

Anno Accademico 2024-2025

*A Mamma, Papà ed
Anna, vi voglio bene*

Sommario

L'elaborato propone un approccio per la costruzione di portafogli che vadano a replicare l'indice S&P 500, con l'obiettivo di selezionare un sottoinsieme di titoli che ne riproduca le performance minimizzando i costi di transazione e il rischio. I modelli sviluppati sono formulati come problemi di programmazione lineare misto-intera ed includono vincoli di cardinalità, vincoli settoriali, di buy-in e di turnover. Questi vincoli sono progettati per limitare la deviazione dal portafoglio target, ovvero l'indice, garantendo una diversificazione adeguata tra i vari settori economici.

L'idea alla base dei modelli è quella di partizionare i titoli dell'indice target in cluster disgiunti, in modo che i titoli all'interno di ciascun gruppo siano il più "simili" possibile tra loro, dove la similarità è misurata attraverso la correlazione tra i rendimenti. Successivamente, viene selezionato un "rappresentante" da ciascun gruppo, che andrà a costituire il portafoglio di tracking. L'obiettivo è massimizzare la similarità totale tra i titoli selezionati, mantenendo nel contempo una struttura coerente con l'indice di riferimento.

Il modello viene poi esteso introducendo ulteriori vincoli, tra cui vincoli settoriali per garantire una rappresentanza equilibrata dei diversi comparti economici e vincoli di buy-in per evitare pesi irrealisticamente bassi nei titoli selezionati. Inoltre, vengono imposti vincoli di turnover per controllare i costi di transazione e limitare le variazioni eccessive del portafoglio nel tempo.

Per valutare l'efficacia dei modelli, vengono condotte analisi out-of-sample attraverso due approcci distinti. Analisi out-of-sample statica: testa la performance dei portafogli costruiti su un periodo definito, senza ribilanciamenti o aggiornamenti periodici. Questo metodo permette di analizzare la stabilità e la robustezza della soluzione iniziale. Analisi out-of-sample dinamica (rolling window): estende l'orizzonte temporale includendo ribilanciamenti periodici e la ri-stima dei parametri all'inizio di ogni periodo. Questo approccio consente di adattarsi all'evoluzione dei mercati e valutare la resilienza dei modelli in scenari di mercato mutevoli. I risultati confermano la validità dell'approccio proposto, evidenziando il ruolo dei vincoli settoriali e delle tecniche di clustering nel miglioramento della diversificazione e del controllo del rischio nel portafoglio di replica.

Indice

Elenco delle tabelle	7
Elenco delle figure	8
I Prima Parte	9
1 Problema dell'Index Tracking	11
1.1 Introduzione	11
1.2 Definizione e obiettivi dell'Index Tracking	12
1.3 Metodo del Clustering	13
2 Modelli di Ottimizzazione	15
2.1 Modello base	15
2.2 Modello con soglie di buy-in e vincoli di turnover	16
2.3 Modello base con vincoli settoriali	17
2.4 Modello full	19
3 Analisi dei Risultati In-Sample	21
3.1 Metriche di Performance	21
3.2 Descrizione del dataset e Pre-Processing dei dati	23
3.3 Performance dei portafogli in-sample	25
3.3.1 Norma delle differenze dei pesi	26
3.3.2 Diversificazione settoriale	27
3.3.3 Funzione Obiettivo	28
3.3.4 Rendimento dei Portafogli	28
3.3.5 Varianza dei Portafogli	29
3.3.6 Sharpe Ratios dei Portafogli	29
II Seconda Parte	31
4 Valutazione Statica Out-of-Sample	33
4.1 Premessa	33
4.2 Performance dei Portafogli	34

4.2.1	Rendimento e Varianza dei Portafogli Out-of-Sample	34
4.2.2	Sharpe Ratio dei Portafogli Out-of-Sample	34
4.2.3	Tracking Ratio dei Portafogli Out-of-Sample	35
4.2.4	Tracking Error Variance dei Portafogli Out-of-Sample	35
4.2.5	Confronto Grafico e Analitico In-Sample vs Out-of-Sample	36
5	Valutazione Dinamica Out-of-Sample	43
5.1	Premessa	43
5.2	Performance dei Portafogli	43
5.2.1	Rendimenti Out-of-Sample nel tempo	44
5.2.2	Varianze Out-of-Sample nel tempo	45
5.2.3	Sharpe Ratio Out-of-Sample nel tempo	45
5.2.4	Tracking Ratio Out-of-Sample nel tempo	45
5.2.5	Tracking Error Variance Out-of-Sample nel tempo	46
6	Conclusione	49
	Bibliografia	50

Elenco delle tabelle

3.1	Alcuni titoli dell'indice S&P 500	24
3.2	Titoli, Pesi e Rendimenti Portafoglio Modello Base $q=11$	26
4.1	Tracking Ratios al variare della dimensione q	36
4.2	Rendimenti In-Sample e Out-of-Sample dei modelli	39
4.3	Varianze In-Sample e Out-of-Sample dei modelli	40
4.4	Sharpe Ratio In-Sample e Out-of-Sample dei modelli	41

Elenco delle figure

3.1	Norma delle differenze dei pesi	27
3.2	Confronto Diversificazione Settoriale	27
3.3	Confronto Funzione Obiettivo	28
3.4	Confronto Rendimenti dei Portafogli	29
3.5	Confronto Varianze dei Portafogli	30
3.6	Confronto Sharpe Ratio dei Portafogli	30
4.1	Confronto Rendimenti e Varianze Out-of-Sample Statico	34
4.2	Confronto Sharpe Ratio Out-of-Sample Statico	35
4.3	Confronto Tracking Ratio Out-of-Sample Statico	36
4.4	Confronto Tracking Error Out-of-Sample Statico	37
4.5	Rendimenti In-Sample vs Out-of-Sample	37
4.6	Varianze In-Sample vs Out-of-Sample	37
4.7	Sharpe Ratio In-Sample vs Out-of-Sample	38
5.1	Confronto Rendimenti Rolling Windows al variare di q	44
5.2	Confronto Varianze Rolling Windows al variare di q	45
5.3	Confronto Sharpe Ratio Rolling Windows al variare di q	46
5.4	Confronto Tracking Ratio Rolling Windows al variare di q	46
5.5	Confronto Tracking Error Variance Rolling Windows al variare di q	47

Parte I
Prima Parte

Capitolo 1

Problema dell'Index Tracking

1.1 Introduzione

La gestione di portafoglio rappresenta un pilastro della finanza moderna, influenzando direttamente il raggiungimento degli obiettivi finanziari di individui, aziende e istituzioni. Non si tratta solo di una questione numerica, ma di una vera e propria strategia che bilancia rendimento, rischio e orizzonte temporale. Un'efficace allocazione delle risorse finanziarie richiede, quindi, un'attenta combinazione di teoria e pratica.

Esistono due principali approcci alla gestione del portafoglio: **gestione passiva** e **gestione attiva**.

La **gestione passiva** adotta un approccio di lungo periodo e si basa su una strategia semplice: replicare fedelmente l'andamento di un indice di mercato. Gli strumenti più diffusi per implementare questa strategia sono gli **ETF** (Exchange Traded Funds), che permettono di investire in un indice con costi contenuti e senza la necessità di interventi frequenti. L'obiettivo è minimizzare il turnover del portafoglio e ridurre le commissioni, mantenendo una stretta aderenza all'indice di riferimento.

Dall'altro lato, la **gestione attiva** mira a superare il rendimento di un benchmark attraverso un approccio dinamico. I gestori attivi utilizzano analisi fondamentali e tecniche per identificare titoli sottovalutati o settori emergenti, adottando strategie di trading più frequenti. Sebbene questa modalità di gestione possa offrire rendimenti superiori, comporta costi più elevati e un rischio maggiore legato alle scelte discrezionali del gestore.

L'aumento esponenziale degli Exchange-Traded Funds (ETF) e la crescente domanda di investimenti indicizzati, come l'S&P 500, riflettono un interesse marcato verso strategie che mirano a replicare passivamente le performance del mercato, piuttosto che inseguire attivamente rendimenti superiori. Questa tendenza è supportata da evidenze empiriche, che dimostrano come i fondi a gestione attiva spesso sottoperformino gli indici di riferimento, rendendo l'index tracking una strategia sempre più attraente per gli investitori. In questo contesto si colloca il problema dell'index tracking, o replica di indici, che rappresenta una strategia di investimento passiva che mira a costruire un portafoglio di titoli che emuli fedelmente un determinato indice di mercato, come l'S&P 500. L'obiettivo primario non è superare la performance dell'indice, bensì replicarne il più precisamente possibile il

rischio e il rendimento. Tuttavia, la replica completa di un indice, che prevede l'inclusione di tutti i titoli con le stesse ponderazioni dell'indice di riferimento, si rivela spesso impraticabile a causa degli elevati costi di transazione. Nel caso dell'S&P 500, ad esempio, ciò implicherebbe la detenzione di 500 titoli e un costante ribilanciamento del portafoglio per adeguarsi alle variazioni di capitalizzazione di mercato, generando costi proibitivi.

L'elaborato ha lo scopo di analizzare una delle tecniche per risolvere il problema dell'indice tracking tramite una gestione passiva del portafoglio usando un approccio di clustering vincolato, che mira a raggruppare i titoli in cluster omogenei e a selezionare un titolo "rappresentativo" per ciascun cluster. Questo approccio, combinato con vincoli aggiuntivi per controllare il rischio settoriale, i costi di transazione e la diversificazione, rappresenta un'evoluzione promettente nel campo dell'index tracking. L'obiettivo di questo lavoro è stato quello di sviluppare e analizzare quattro modelli di programmazione lineare mista intera basati su un approccio di clustering vincolato per la costruzione di portafogli di index tracking, con particolare attenzione all'indice S&P 500, minimizzando i costi di transazione e controllando il rischio del portafoglio attraverso vincoli settoriali e di diversificazione.

1.2 Definizione e obiettivi dell'Index Tracking

Nel panorama della gestione di portafoglio, una delle strategie più diffuse è l'**index tracking**, ossia la replica dell'andamento di un indice di mercato attraverso un portafoglio di titoli. Questa strategia, tipicamente associata alla gestione passiva, mira a ottenere rendimenti simili a quelli dell'indice di riferimento, come l'S&P 500 o il FTSE MIB, riducendo al minimo i costi operativi e i rischi associati alla selezione attiva dei titoli. Tuttavia, nonostante la sua apparente semplicità, l'index tracking presenta numerose sfide operative e teoriche.

Il problema principale dell'index tracking riguarda la *difficoltà di replicare perfettamente l'andamento di un indice*, a causa di fattori come i costi di transazione, il ribilanciamento periodico e la liquidità dei titoli sottostanti. Sebbene la strategia passiva si proponga di seguire fedelmente l'indice, diverse criticità rendono complicata una replica esatta.

Uno dei principali ostacoli è rappresentato dai *costi di transazione*. Nonostante la gestione passiva sia generalmente più economica rispetto a quella attiva, il ribilanciamento periodico del portafoglio può generare spese aggiuntive. Ogni volta che un titolo entra o esce dall'indice, l'ETF o il fondo indicizzato deve acquistare o vendere il titolo corrispondente, con un impatto sulla performance complessiva.

Un altro aspetto critico è il **tracking error**, che misura la deviazione tra il rendimento del portafoglio e quello dell'indice di riferimento. Un valore elevato indica un'ampia discrepanza rispetto all'indice, mentre un valore basso suggerisce un'aderenza più fedele. Anche con una strategia passiva, mantenere il tracking error il più basso possibile è una priorità, ma fattori come le differenze nei pesi dei titoli o le imperfezioni nel processo di ribilanciamento possono aumentarlo, riducendo l'efficacia della replica.

Il **ribilanciamento periodico** degli indici di mercato rappresenta un'ulteriore difficoltà. Ogni variazione nella composizione dell'indice richiede un adeguamento del portafoglio,

con costi di transazione e possibili impatti fiscali, specialmente se il ribilanciamento non avviene in sincronia con le modifiche dell'indice.

Un altro elemento che influisce sul tracking riguarda la **gestione dei dividendi**. Quando un indice distribuisce dividendi, questi devono essere reinvestiti nel portafoglio. Se il reinvestimento non è gestito in modo efficiente, si possono generare discrepanze nei rendimenti rispetto all'indice di riferimento, con ulteriori implicazioni fiscali da considerare.

Un problema significativo riguarda anche la **replicabilità dell'indice**. Alcuni indici contengono titoli poco liquidi o difficili da negoziare. Per mantenere una replica efficiente, un ETF potrebbe essere costretto a ridurre il numero di titoli nel portafoglio o a utilizzare strumenti derivati, aumentando il tracking error.

In sintesi, il problema dell'index tracking consiste nel riuscire a replicare l'indice in modo ottimale, minimizzando costi e tracking error, affrontando al contempo le difficoltà legate al ribilanciamento, alla gestione fiscale e alla liquidità dei titoli. La strategia passiva, pur essendo tra le più popolari per la sua semplicità ed efficienza nei costi, presenta quindi sfide concrete che devono essere attentamente gestite per garantire un'efficace replica dell'indice.

1.3 Metodo del Clustering

Uno degli approcci più diffusi per risolvere il problema dell'index tracking è quello della minimizzazione del tracking error, introdotto da [Jorion \[2003\]](#), che mira a replicare le performance dell'indice attraverso un sottoinsieme di titoli selezionati, cercando quindi di trovare un compromesso tra la minimizzazione di tale errore e il contenimento dei costi di transazione.

Molti modelli di minimizzazione del tracking error sono stati sviluppati, ma sono complessi e presentano non linearità, richiedendo l'introduzione di variabili discrete come il vincolo di cardinalità. Inoltre, questi modelli necessitano di stime accurate dei rendimenti attesi degli asset, che sono difficili da ottenere e possono portare a distorsioni nei risultati.

Un possibile approccio per superare queste difficoltà è quello del **clustering** degli asset presentato in questo elaborato e approfondito nel lavoro svolto da [Wu et al. \[2017\]](#). In questo caso, gli asset dell'indice vengono suddivisi in gruppi omogenei (cluster), e per ciascun cluster viene selezionato un asset "rappresentativo". Il portafoglio di tracking è costruito scegliendo questi asset rappresentativi. La creazione dei cluster avviene massimizzando la similarità tra gli asset all'interno di ogni gruppo, che viene misurata mediante le correlazioni tra i rendimenti degli asset.

Uno dei principali vantaggi di questo metodo di risoluzione è che non è necessaria una stima dei rendimenti attesi, ma solo una conoscenza delle similarità tra gli asset. Tuttavia, un possibile limite potrebbe essere la concentrazione degli asset in pochi settori economici. Per evitare questo, si introducono **vincoli settoriali**, che assicurano una rappresentazione adeguata di tutti i settori economici presenti nell'S&P 500, composto da circa 500 titoli a grande capitalizzazione distribuiti su 11 settori.

Inoltre, per controllare i costi di transazione, si introducono vincoli come le **soglie di buy-in**, per evitare che vengano selezionati asset con pesi troppo piccoli, e i **limiti di turnover**, che limitano le modifiche al portafoglio, impedendo che si discosti eccessivamente da un portafoglio esistente.

Per risolvere questo problema vengono presentati quattro modelli di ottimizzazione basati sulla programmazione lineare mista-intera. In particolare, viene presentato un primo modello base che si concentra sulla selezione degli asset che massimizzano la similarità rispetto all'indice target. A partire da questo modello base, vengono proposte estensioni che includono vincoli sui costi di transazione (modello con soglie di buy-in e vincoli di turnover), vincoli per garantire la diversificazione settoriale (modello con limiti settoriali) e una combinazione di tutti i vincoli (modello completo).

I risultati computazionali, come vedremo nel dettaglio nei capitoli successivi, suggeriscono che i modelli che integrano vincoli settoriali non solo migliorano la diversificazione del portafoglio, ma riducono anche il rischio, ottenendo buoni Sharpe Ratio e bassi tracking error in test out-of-sample.

In sintesi, l'approccio proposto combina il clustering vincolato con tecniche di ottimizzazione avanzate per offrire un buon compromesso tra la minimizzazione del tracking error, il controllo dei costi di transazione e la necessaria diversificazione del portafoglio.

Capitolo 2

Modelli di Ottimizzazione

2.1 Modello base

Il primo modello proposto, elaborato da [Cornuejols and Tutuncu \[2007\]](#), prevede la massimizzazione della similarità all'interno di ciascun cluster di titoli in base alla loro correlazione. Supponiamo di avere n assets e di volerli partizionare in q cluster disgiunti tra loro in modo che i titoli appartenenti a ciascun cluster siano simili, dove la similarità viene definita tramite la correlazione ρ_{ij} tra i titoli i e j . Per ogni gruppo viene scelto un titolo di riferimento che sia il rappresentante di tutti gli altri assets in modo che il portafoglio finale di tracking sia definito da q titoli, uno per ciascun cluster.

$$(M1) \quad \max \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n \rho_{ij} x_{ij} \quad (2.1)$$

$$\text{s.t.} \quad \sum_{j=1}^n y_j = q \quad (2.2)$$

$$\sum_{j=1}^n x_{ij} = 1, \quad \forall i = 1 \dots n. \quad (2.3)$$

$$x_{ij} \leq y_j, \quad \forall i = 1 \dots n, j = 1 \dots n \quad (2.4)$$

$$x_{ij}, y_j \in \{0,1\}, \quad \forall i = 1 \dots, n, j = 1, \dots, n. \quad (2.5)$$

Dove:

- ρ_{ij} rappresenta la correlazione (similarità) tra il titolo i e il titolo j ;
- q denota la dimensione del portafoglio di tracciamento desiderato con $q < n$;
- x_{ij} è una variabile binaria che indica se il titolo j è un rappresentante del titolo i . Assume valore 1 se j è scelto come rappresentante per i , altrimenti 0.
- y_j è una variabile binaria che indica se il titolo j è selezionato per far parte del portafoglio. Assume valore 1 se il titolo j è selezionato, altrimenti 0.

Il primo vincolo impone che il portafoglio di tracciamento abbia esattamente q titoli ed è chiamato vincolo di cardinalità. Il secondo assicura che ogni titolo abbia esattamente un rappresentante nel portafoglio; mentre, il terzo vincolo proibisce a un titolo di essere un rappresentante di qualsiasi titolo se non è selezionato per far parte del portafoglio di tracciamento. Una volta identificati i titoli del portafoglio andiamo a calcolare i rispettivi pesi seguendo l'approccio *capitalization-based weighting* che consiste nel calcolare il peso del titolo j come il rapporto tra la somma delle capitalizzazioni di mercato degli assets nel grippo a cui l'assets j appartiene (ne è il referente) e la somma delle capitalizzazioni di mercato di tutti gli assets dell'indice target.

2.2 Modello con soglie di buy-in e vincoli di turnover

Il modello base può essere esteso includendo vincoli di turnover che vadano a limitare i costi di transizione e ad imporre delle soglie sui pesi dei titoli selezionati tramite vincoli di buy-in, in particolare:

$$(M2) \quad \max \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n \rho_{ij} x_{ij} \quad (2.6)$$

$$\text{s.t.} \quad \sum_{j=1}^n x_{ij} = 1, \quad \forall i = 1, \dots, n \quad (2.7)$$

$$x_{ij} \leq y_j, \quad \forall i, j = 1, \dots, n \quad (2.8)$$

$$\sum_{j=1}^n y_j = q \quad (2.9)$$

$$l_j y_j \leq w_j \leq u_j y_j, \quad \forall j = 1, \dots, n \quad (2.10)$$

$$w_j = \sum_{i=1}^n V_i x_{ij} / \sum_{i=1}^n V_i, \quad \forall j = 1, \dots, n \quad (2.11)$$

$$\sum_{j=1}^n |w_j^0 - w_j| \alpha \leq \gamma \quad (2.12)$$

$$x_{ij}, y_j \in \{0, 1\}, \quad \forall i, j = 1, \dots, n \quad (2.13)$$

Questo modello include le variabili decisionali e i parametri del modello base, ma con i seguenti parametri aggiuntivi:

- α è un costo di transazione proporzionale;
- γ è il limite al costo di transazione;
- V_i denota la capitalizzazione di mercato del titolo i al tempo corrente;
- w_j^0 denota la proporzione del titolo j nell'indice target;

- w_j denota la proporzione di ricchezza investita nel titolo j per $j = 1, \dots, n$.

I vincoli aggiuntivi introdotti in questa seconda rappresentazione sono:

- *Vincoli di buy-in*: impostano il peso di un titolo in modo che sia compreso tra i limiti inferiore e superiore prescritti l_j e u_j , rispettivamente, se il titolo j è selezionato. In caso contrario, il peso è impostato a 0.
- *Vincolo sui costi di transazione*: limita il costo totale di turnover proporzionale a γ . Il termine $|w_j^0 - w_j|$ rappresenta il turnover del titolo j derivante dall'acquisto o dalla vendita. Il costo di turnover di un asset j è proporzionale all'ammontare del turnover dato da $|w_j^0 - w_j|\alpha$.

È importante notare che i termini di valore assoluto nel vincolo dei costi di transazione possono essere rimossi e sostituiti con delle variabili ausiliarie z_j così da ottenere una formulazione completa del secondo modello come segue:

$$(M2) \quad \max \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n \rho_{ij} x_{ij} \quad (2.14)$$

$$\text{s.t.} \quad \sum_{j=1}^n x_{ij} = 1, \quad \forall i = 1, \dots, n \quad (2.15)$$

$$x_{ij} \leq y_j, \quad \forall i, j = 1, \dots, n \quad (2.16)$$

$$\sum_{j=1}^n y_j = q \quad (2.17)$$

$$l_j y_j \leq w_j \leq u_j y_j, \quad \forall j = 1, \dots, n \quad (2.18)$$

$$w_j = \sum_{i=1}^n V_i x_{ij} / \sum_{i=1}^n V_i, \quad \forall j = 1, \dots, n \quad (2.19)$$

$$\sum_{j=1}^n z_j \leq \frac{\gamma}{\alpha} \quad (2.20)$$

$$z_j \geq (w_j^0 - w_j) \quad \forall j = 1, \dots, n \quad (2.21)$$

$$z_j \geq -(w_j^0 - w_j) \quad \forall j = 1, \dots, n \quad (2.22)$$

$$z_j \geq 0 \quad \forall j = 1, \dots, n \quad (2.23)$$

$$x_{ij}, y_j \in \{0, 1\}, \quad \forall i, j = 1, \dots, n \quad (2.24)$$

2.3 Modello base con vincoli settoriali

Ogni componente dell'indice target S&P 500 appartiene ad uno degli 11 settori economici che guidano l'economia degli Stati Uniti: *Basic Materials, Communication Services, Consumer Cyclical, Consumer Defensive, Energy, Financial Services, Healthcare, Industrials, Real Estate, Technology, Utilities*. Il modello che viene proposto di seguito sfrutta questa

rappresentazione settoriale in modo che venga ottimizzata la similarità all'interno di ogni settore. Questo permette di avere una diversificazione strategica per settore e quindi che ci siano abbastanza investimenti per ogni settore economico. In particolare:

$$(M3) \quad \max \sum_{k=1}^{|K|} \sum_{i=1}^{n_k} \sum_{j=1}^{n_k} \rho_{ijk} x_{ijk} \quad (2.25)$$

$$\text{s.t.} \quad \sum_{j=1}^{n_k} y_{jk} = q_k \quad \forall k = 1, \dots, |K| \quad (2.26)$$

$$\Delta_k \leq q_k \leq \nabla_k \quad \forall k = 1, \dots, |K| \quad (2.27)$$

$$\sum_{k=1}^{|K|} q_k = q \quad (2.28)$$

$$\sum_{j=1}^{n_k} x_{ijk} = 1 \quad \forall i = 1, \dots, n_k; \forall k = 1, \dots, |K| \quad (2.29)$$

$$x_{ijk} \leq y_{jk} \quad \forall i = 1, \dots, n_k; \forall j = 1, \dots, n_k; \forall k = 1, \dots, |K| \quad (2.30)$$

$$x_{ijk}, y_{jk} \in \{0, 1\} \quad \forall i = 1, \dots, n_k; \forall j = 1, \dots, n_k; \forall k = 1, \dots, |K| \quad (2.31)$$

Dove:

- ρ_{ijk} rappresenta la similarità tra gli asset i e j nel settore k espressa tramite la correlazione;
- x_{ijk} è una variabile binaria che vale 1 se il titolo j rappresenta il titolo i nel settore k , e 0 altrimenti;
- y_{jk} è una variabile binaria che vale 1 se il titolo j del settore k è selezionato nel portafoglio di tracciamento, e 0 altrimenti;
- $|K|$ è il numero di settori;
- n_k denota il numero di asset (titoli) nel settore k ;
- Δ_k e ∇_k denotano i limiti inferiore e superiore sulla cardinalità del sotto-portafoglio del settore k ;
- q_k denota la dimensione del sotto-portafoglio del settore k e q denota la dimensione totale del portafoglio.

I vincoli introdotti in questo problema sono:

- Vincolo sulla somma dei titoli j nel settore k uguale a q_k ;
- Vincolo sulla cardinalità q_k compreso tra un limite inferiore e superiore;
- Vincolo sulla somma di tutti i q_k uguale alla dimensione q del portafoglio;

I restanti vincoli assicurano che ogni titolo abbia esattamente un rappresentante nel portafoglio e proibiscono a un titolo di essere un rappresentante di qualsiasi titolo se non è selezionato per far parte del portafoglio di tracciamento.

L'idea alla base del modello con vincoli settoriali è di garantire un investimento sufficiente in tutti i settori, creando dei sotto-portafogli per ogni settore e cercando di massimizzare la similarità del sotto-portafoglio rispetto al suo settore.

2.4 Modello full

Il problema seguente rappresenta una versione completa del modello cluster-based per l'index tracking, comprensiva di soglie di buy-in, vincoli sui costi di transazione e vincoli di diversificazione settoriale:

$$(M4) \quad \max \sum_{k=1}^{|K|} \sum_{i=1}^{n_k} \sum_{j=1}^{n_k} \rho_{ijk} x_{ijk} \quad (2.32)$$

$$\text{s.t.} \quad \sum_{j=1}^{n_k} x_{ijk} = 1; \quad \forall i = 1, \dots, n_k; \forall k = 1, \dots, |K| \quad (2.33)$$

$$\sum_{j=1}^{n_k} y_{jk} = q_k; \quad \forall k = 1, \dots, |K| \quad (2.34)$$

$$\Delta_k \leq q_k \leq \nabla_k \quad \forall k = 1, \dots, |K| \quad (2.35)$$

$$\sum_{k=1}^{|K|} q_k = q \quad (2.36)$$

$$x_{ijk} \leq y_{jk} \quad \forall i = 1, \dots, n_k; j = 1, \dots, n_k; k = 1, \dots, |K| \quad (2.37)$$

$$l_{jk} y_{jk} \leq w_{jk} \leq u_{jk} y_{jk}; \quad \forall j = 1, \dots, n_k; \forall k = 1, \dots, |K| \quad (2.38)$$

$$w_{jk} = \sum_{i=1}^{n_k} V_{ik} x_{ijk} / \sum_{i=1}^{n_k} V_{ik}; \quad \forall j = 1, \dots, n_k; \forall k = 1, \dots, |K| \quad (2.39)$$

$$\sum_{k=1}^{|K|} \sum_{j=1}^{n_k} |w_{jk}^0 - w_{jk}| \alpha \leq \gamma \quad (2.40)$$

$$x_{ijk}, y_{jk} \in \{0, 1\} \quad \forall i = 1, \dots, n_k; \forall j = 1, \dots, n_k; \forall k = 1, \dots, |K| \quad (2.41)$$

I parametri e le variabili sono simili a quelli definiti nei modelli precedenti, con le seguenti precisazioni:

- w_{jk}^0 denota la proporzione iniziale di ricchezza investita nel titolo j (del settore k) nel benchmark;
- w_{jk} denota la proporzione di ricchezza investita nel titolo j (del settore k);
- α è un costo di transazione proporzionale;

- γ è il limite al costo di transazione;
- V_{ik} denota la capitalizzazione di mercato del titolo i nel settore k al tempo corrente.

Questo modello combina gli aspetti dei modelli precedenti, includendo *Vincoli di assignment*, *Vincoli di cardinalità* e *Vincoli di buy-in*. Inoltre, come visto in precedenza sul secondo modello, anche in questo caso, per gestire i valori assoluti nel vincolo sui costi di transazione, si possono introdurre variabili ausiliarie z_{jk} che rappresentano l'ammontare del turnover per l'asset j nel settore k , e p_k che rappresenta il turnover aggregato degli asset nel settore k , portando alle seguenti constraints per il turnover:

$$(M4) \quad \max \sum_{k=1}^{|K|} \sum_{i=1}^{n_k} \sum_{j=1}^{n_k} \rho_{ijk} x_{ijk} \quad (2.42)$$

$$\text{s.t.} \quad \sum_{j=1}^{n_k} x_{ijk} = 1; \quad \forall i = 1, \dots, n_k; \forall k = 1, \dots, |K| \quad (2.43)$$

$$\sum_{j=1}^{n_k} y_{jk} = q_k; \quad \forall k = 1, \dots, |K| \quad (2.44)$$

$$\Delta_k \leq q_k \leq \nabla_k \quad \forall k = 1, \dots, |K| \quad (2.45)$$

$$\sum_{k=1}^{|K|} q_k = q \quad (2.46)$$

$$x_{ijk} \leq y_{jk} \quad \forall i = 1, \dots, n_k; j = 1, \dots, n_k; k = 1, \dots, |K| \quad (2.47)$$

$$l_{jk} y_{jk} \leq w_{jk} \leq u_{jk} y_{jk}; \quad \forall j = 1, \dots, n_k; \forall k = 1, \dots, |K| \quad (2.48)$$

$$w_{jk} = \sum_{i=1}^{n_k} V_{ik} x_{ijk} / \sum_{i=1}^n V_i; \quad \forall j = 1, \dots, n_k; \forall k = 1, \dots, |K| \quad (2.49)$$

$$\sum_{j=1}^{n_k} z_{jk} = p_k \quad \forall k = 1, \dots, |K| \quad (2.50)$$

$$\sum_{k=1}^{|K|} p_k \leq \frac{\gamma}{\alpha} \quad (2.51)$$

$$z_{jk} \geq w_{jk}^0 - w_{jk}; \quad \forall j = 1, \dots, n_k; \forall k = 1, \dots, |K| \quad (2.52)$$

$$z_{jk} \geq -(w_{jk}^0 - w_{jk}); \quad \forall j = 1, \dots, n_k; \forall k = 1, \dots, |K| \quad (2.53)$$

$$z_{jk} \geq 0; \quad \forall j = 1, \dots, n_k; \forall k = 1, \dots, |K| \quad (2.54)$$

$$x_{ijk}, y_{jk} \in \{0, 1\} \quad \forall i = 1, \dots, n_k; \forall j = 1, \dots, n_k; \forall k = 1, \dots, |K| \quad (2.55)$$

Capitolo 3

Analisi dei Risultati In-Sample

3.1 Metriche di Performance

Le metriche di performance sono strumenti utilizzati per valutare l'efficacia e l'efficienza di una strategia di investimento o di un portafoglio. Questi indicatori permettono agli investitori di misurare i rendimenti, confrontare diverse strategie e comprendere i rischi associati agli investimenti. Un buon sistema di metriche consente non solo di analizzare i risultati passati, ma anche di fare previsioni informate su come una strategia potrebbe comportarsi in futuro. Le metriche di performance sono fondamentali nell'analisi dei portafogli, in quanto forniscono una visione chiara e quantitativa degli obiettivi raggiunti, rispetto sia al rischio assunto che ai benchmark di riferimento.

Tra le principali metriche, quelle più comunemente utilizzate includono il **rendimento**, la **varianza**, lo **Sharpe ratio**, il **tracking ratio** e il **tracking error variance**. Ognuna di queste metriche ha un ruolo specifico nell'analisi della performance di un portafoglio, specialmente in un contesto di index tracking.

Rendimento Il rendimento è la variazione del valore di un investimento durante un periodo di tempo, ed è una delle metriche più dirette per valutare il successo di una strategia. Nelle strategie di index tracking, il rendimento del portafoglio dovrebbe essere confrontato con quello dell'indice di riferimento. L'obiettivo di una gestione passiva, infatti, è ottenere un rendimento simile o identico a quello dell'indice, riducendo al minimo i costi e gli scostamenti. In questa ricerca, dati i prezzi storici dei titoli che costituiscono l'indice S&P 500, il rendimento di ogni titolo *i-esimo* al tempo t viene espresso come $r_{it} = (P_{it} - P_{i,t-1})/P_{i,t-1}$, dove P_{it} , $P_{i,t-1}$ sono i prezzi di chiusura al tempo t e $t - 1$ dell'asset *i-esimo*. Di conseguenza, il rendimento medio su base annuale viene calcolato come:

$$\bar{r}_i = \frac{1}{T} \sum_{t=1}^T r_{it} \quad (3.1)$$

Grazie a questo valore è possibile ricavare il rendimento del portafoglio r_p scelto dal

modello e composto dai titoli selezionati:

$$r_p = \sum_{i=1}^q w_i \bar{r}_i \quad (3.2)$$

dove w_i rappresenta il peso del titolo selezionato $\forall i = 1, \dots, q$ e confrontarlo con quello dell'indice target r_I :

$$r_I = \sum_{i=1}^n w_i^0 \bar{r}_i \quad (3.3)$$

Varianza La varianza misura la dispersione dei rendimenti di un portafoglio rispetto alla sua media. Essa quantifica la volatilità dei ritorni nel tempo, indicando quanto i rendimenti siano soggetti a fluttuazioni. Una varianza alta implica un maggiore rischio, poiché indica che i rendimenti sono meno prevedibili e possono variare notevolmente. Nella gestione di portafoglio, la varianza è spesso utilizzata per calcolare il rischio complessivo di un portafoglio e, per una strategia di index tracking, il controllo della varianza è essenziale, in quanto una varianza troppo elevata potrebbe indicare una deviazione significativa rispetto all'indice di riferimento. Nel dettaglio, sia w_p il vettore dei pesi selezionati nel portafoglio di tracking, la varianza è espressa come

$$\sigma_p^2 = w_p^\top \Sigma_p w_p \quad (3.4)$$

dove Σ_p indica la sotto-matrice di covarianza dei rendimenti dei titoli selezionati, i cui elementi sono calcolati come

$$cov_{ij} = \frac{1}{T} \sum_{t=1}^T (r_{it} - \bar{r}_i)(r_{jt} - \bar{r}_j), \quad \text{con } T = 252. \quad (3.5)$$

E' utile confrontare, quindi, questa misura con la varianza del target

$$\sigma_I^2 = w_I^\top \Sigma_I w_I$$

Sharpe Ratio Lo Sharpe ratio è una misura della performance di un portafoglio che considera sia il rendimento che il rischio, calcolato come il rapporto tra l'eccesso di rendimento (ovvero la differenza tra il rendimento del portafoglio e il tasso privo di rischio) e la deviazione standard dei rendimenti. Come definito in Bacon [2023], lo Sharpe Ratio fornisce una valutazione della "qualità" di un rendimento rispetto al rischio assunto

$$SR_p = \frac{r_p - r_f}{\sqrt{\sigma_p^2}} \quad (3.6)$$

dove r_p , σ_p^2 indicano, rispettivamente, il rendimento e la varianza del portafoglio. Invece, r_f indica il tasso risk-free, ovvero il rendimento che un investitore può ottenere investendo in un'attività senza rischio di default e con volatilità quasi nulla. In questo contesto si è considerato il tasso dei titoli di stato a breve termine USA a 3 mesi. Questo valore viene confrontato con il rispettivo Sharpe Ratio dell'indice di riferimento, ovvero

$$SR_I = \frac{r_I - r_f}{\sqrt{\sigma_I^2}} \quad (3.7)$$

Un valore elevato di Sharpe Ratio indica che un portafoglio ha generato più rendimento per ogni unità di rischio, rendendolo più attraente per gli investitori: se il valore è elevato, significa che la strategia sta generando buoni rendimenti con un rischio controllato, ma un valore basso può indicare una strategia inefficiente, con rendimenti insufficienti rispetto al rischio.

Tracking Ratio Il tracking Ratio è una misura che esprime la capacità di un portafoglio di seguire un indice di riferimento, una metrica fondamentale per valutare l'aderenza del portafoglio all'indice benchmark. La seguente definizione del Tracking Ratio è simile a quella presentata da [Cornuejols and Tutuncu \[2007\]](#). Indicata come TR_{0t} , questa metrica è calcolata attraverso la seguente formula

$$TR_{0t} = \frac{\sum_{i=1}^n V_{it} / \sum_{j=1}^q w_j V_{jt}}{\sum_{i=1}^n V_{i0} / \sum_{j=1}^q w_j V_{j0}} \quad (3.8)$$

dove:

- $(\sum_{i=1}^n V_{it} / \sum_{i=1}^n V_{i0})$ rappresenta il movimento dell'indice target dopo l'investimento del tempo t ;
- $(\sum_{j=1}^q w_j V_{jt} / \sum_{j=1}^q w_j V_{j0})$ denota la performance del portafoglio durante il periodo out-of-sample.

Un tracking ratio ideale è pari a 1, ad indicare una perfetta replica dell'indice; valori superiori a 1 suggeriscono una sottoperformance, mentre valori inferiori a 1 indicano un rendimento superiore.

Tracking Error Variance Il tracking Error, in generale, misura la differenza tra il rendimento del portafoglio e quello dell'indice di riferimento. Più basso è il tracking error, più il portafoglio replica fedelmente l'indice. Un tracking error elevato indica una deviazione significativa e, in generale, una bassa qualità della replica. La sua interpretazione dipende dalla strategia di investimento: una gestione passiva mira a ridurre il tracking error al minimo, idealmente fino a zero, mentre in una strategia attiva un certo livello di tracking error è inevitabile, poiché si cerca di ottenere rendimenti superiori rispetto al benchmark. In questo contesto si è scelto di analizzare il Tracking Error Variance, presentato in [Brandimarte \[2018\]](#), che rappresenta la varianza della differenza tra i rendimenti di un portafoglio e quelli di un indice di riferimento. Se un portafoglio replica perfettamente l'indice, la differenza tra i rendimenti sarà nulla, e quindi la varianza sarà zero.

Per esprimere questa metrica viene usata la seguente rappresentazione

$$TE_p = \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n (w_i - w_i^b) \sigma_{ij} (w_j - w_j^b) \quad (3.9)$$

dove w_i rappresenta il peso del titolo nel portafoglio di tracking e w_i^b il peso dell'asset nel benchmark.

3.2 Descrizione del dataset e Pre-Processing dei dati

Per analizzare i modelli proposti, si è scelto di utilizzare come indice target l'**S&P 500**, uno degli indici azionari più importanti al mondo, che rappresenta le 500 principali società

quotate nelle borse statunitensi, come il NYSE e il Nasdaq. È considerato un indicatore chiave della salute del mercato azionario americano e, più in generale, dell'economia degli Stati Uniti.

Questo indice è costruito in modo da riflettere il valore complessivo delle aziende che lo compongono, dando maggiore peso a quelle con una capitalizzazione di mercato più elevata. In altre parole, le società più grandi hanno un impatto più significativo sull'andamento dell'indice rispetto a quelle più piccole. La sua composizione non è fissa, ma viene aggiornata periodicamente per includere nuove aziende emergenti e rimuovere quelle che non soddisfano più i criteri richiesti.

L'S&P 500 è uno degli indici più utilizzati come benchmark per valutare la performance di fondi d'investimento e strategie di portafoglio, ed è frequentemente replicato tramite strumenti come gli ETF e i fondi indicizzati. Il suo andamento è spesso analizzato per comprendere lo stato del mercato finanziario e la fiducia degli investitori. Nel contesto dell'index tracking, questo indice rappresenta un caso di studio ideale, poiché costituisce un benchmark solido, ampiamente studiato e con una struttura ben definita.

L'elenco delle aziende attualmente incluse nell'indice è stato ottenuto da Wikipedia [3.1](#) e contiene informazioni fondamentali, tra cui il simbolo azionario di ogni società e il settore di appartenenza. Per ciascun titolo di questa lista, sono stati importati i prezzi storici e le capitalizzazioni di mercato degli asset attraverso un processo che consente di accedere direttamente ai dati di mercato da Yahoo Finance. In particolare, si è deciso di utilizzare i dati relativi agli ultimi anni, concentrandosi sull'intervallo temporale 2019 – 2023 con un focus sul prezzo di chiusura giornaliero.

Symbol	Security	GICS Sector	GICS Sub-Industry
MMM	3M	Industrials	Industrial Conglomerates
AOS	A. O. Smith	Industrials	Building Products
ABT	Abbott Laboratories	Health Care	Health Care Equipment
ABBV	AbbVie	Health Care	Biotechnology
ACN	Accenture	Information Technology	IT Consulting & Other Services
ADBE	Adobe Inc.	Information Technology	Application Software
AMD	Advanced Micro Devices	Information Technology	Semiconductors
AES	AES Corporation	Utilities	Independent Power Producers
AFL	Aflac	Financials	Life & Health Insurance
A	Agilent Technologies	Health Care	Life Sciences Tools & Services

Tabella 3.1: Alcuni titoli dell'indice S&P 500

Successivamente, è stata effettuata una prima fase di preprocessing dei dati. Poiché alcuni titoli sono entrati a far parte dell'indice solo recentemente e le analisi stimano i parametri a partire dal 2020, si è deciso di includere esclusivamente i titoli presenti per l'intero periodo analizzato, garantendo così coerenza nei dati. Questo ha portato all'eliminazione di 13 titoli dal database.

Dopo aver raccolto i dati storici, è stato fondamentale il recupero della capitalizzazione di mercato storica di ogni azienda, ovvero il valore totale delle sue azioni in circolazione, calcolato moltiplicando il prezzo di chiusura di ciascun titolo per il numero di azioni in circolazione. Questo dato è essenziale perché consente di pesare ogni titolo in base alla sua dimensione relativa all'interno dell'indice.

Una volta raccolti i dati storici e le capitalizzazioni di mercato, si è proceduto con una fase di pulizia per garantire la qualità delle informazioni, rimuovendo i titoli con dati mancanti e consolidando un database affidabile. Il risultato di questo processo è stato un dataset ben strutturato, contenente una lista di aziende con i rispettivi dati storici di prezzo e capitalizzazioni di mercato aggiornate, pronto per essere utilizzato nelle analisi successive.

Nei quattro modelli di programmazione lineare misto-intera esposti nel capitolo precedente, i dati di input variano a seconda del modello specifico, ma un elemento costante è la correlazione tra i titoli, che misura la loro similarità. Come visto, le metriche di performance sono tutte calcolate a partire dai prezzi di chiusura dei titoli, l'unica informazione necessaria per stimare i parametri del modello. Anche per la stima della correlazione ρ_{ij} tra i titoli i e j , si parte dalla covarianza (3.5) per ottenere

$$\rho_{ij} = \frac{cov_{ij}}{\sqrt{cov_{ii} * cov_{jj}}} \quad (3.10)$$

Nei capitoli successivi verranno analizzati i quattro modelli di ottimizzazione vincolata partendo dall'applicazione ai dati storici dell'indice del 2020, con una riflessione dei risultati in-sample, fino allo studio delle performance in periodi successivi a quelli di training: valutazione statica e dinamica dei dati out-of-sample.

I parametri generali usati per tutti gli esperimenti computazionali che seguono nei prossimi capitoli sono definiti impostando $\alpha = 0.001$, $\gamma = 0.05$, $l_{jk} = 0.001$ e $u_{jk} = 1$, $\lambda_k = 0$, $\nabla_k = \text{massimo numero di titoli nel settore } k\text{-esimo}$.

Tutti i modelli di tracking sono stati risolti tramite *Gurobi 11.0.3* usando *Python 3.8.8* come interfaccia su un PC con 8 GB di RAM. Il progetto su cui si basa questa relazione è possibile visionarlo nella pagina GitHub relativa al link seguente <https://github.com/SalvoFratta/SalvoFratta.git>.

3.3 Performance dei portafogli in-sample

L'analisi in-sample è un tipo di valutazione della performance di un modello di tracking portfolio in cui i risultati vengono valutati sui dati utilizzati per la costruzione del modello stesso, quindi il portafoglio viene creato e testato utilizzando lo stesso insieme di dati storici. Questo tipo di approccio non prevede un ribilanciamento del portafoglio, di conseguenza le ponderazioni degli asset rimangono costanti, il che significa che la performance è influenzata unicamente dalle variazioni di prezzo degli asset selezionati inizialmente. Inoltre, non viene effettuato nessun aggiornamento periodico dei parametri, come le correlazioni tra i rendimenti degli asset che non vengono aggiornati periodicamente durante l'orizzonte temporale out-of-sample. Tuttavia, è importante considerare che la performance in-sample potrebbe non essere indicativa della performance futura del modello, in quanto non tiene conto della variabilità dei mercati finanziari e della possibilità di cambiamenti nelle correlazioni tra gli asset.

In questa prima analisi, i modelli di ottimizzazioni vengono studiati sfruttando i dati storici dell'indice S&P 500 nel periodo che va dal *2019-12-31* al *2020-12-31*, quindi vengono stimati i rendimenti e la matrice di correlazione usando i prezzi di chiusura giornalieri

dei titoli del target di questo periodo specifico. In maniera dinamica, inoltre, si ricavano le capitalizzazioni storiche di mercato del 2020 e i vari settori di appartenenza dei titoli. Di seguito vengono analizzati i risultati ottenuti risolvendo i quattro modelli di ottimizzazione vincolata al variare della dimensione del portafoglio $q = [11, 20, 30, 40, 50, 60, 70, 80, 90, 100]$ e vengono confrontati i portafogli associati ai diversi modelli. Quindi, per ogni problema, è stato calcolato il portafoglio ottimale al variare della dimensione del portafoglio ed è stato storicizzato in una struttura Python facilmente gestibile per analisi successive, con:

- Valore ottimo della funzione obiettivo;
- Titolo, Peso e Rendimento Medio del portafoglio selezionato;
- Norma delle differenze dei pesi tra i titoli selezionati e l'indice;
- Rendimento dell'intero portafoglio di tracking;
- Varianza del portafoglio;
- Sharpe Ratio.

Ad esempio, per il primo modello base, scegliendo di avere $q = 11$ titoli nel portafoglio di tracking, otteniamo:

Stock	Weight	Mean Return
MSFT	0.352213	0.001784
V	0.119185	0.000984
DOV	0.113945	0.000860
PG	0.106410	0.000731
GL	0.088352	0.000186
UNH	0.048623	0.001221
AVGO	0.046495	0.001998
FITB	0.046267	0.000856
SO	0.042477	0.000438
COP	0.021847	-0.000718
RCL	0.014187	0.000318

Tabella 3.2: Titoli, Pesi e Rendimenti Portafoglio Modello Base $q=11$

3.3.1 Norma delle differenze dei pesi

Il grafico seguente [3.1](#) mostra il valore della norma della differenza nei pesi tra i portafogli di tracking e l'S&P 500 target: quando si considera il vincolo del limite settoriale, ovvero i modelli (3) e (4), il peso settoriale dei portafogli costruiti è più vicino all'S&P 500 rispetto al modello senza il vincolo del limite settoriale, ovvero i modelli (1) e (2). Inoltre, all'aumentare della dimensione del portafoglio q si ottengono valori sempre più bassi della norma.

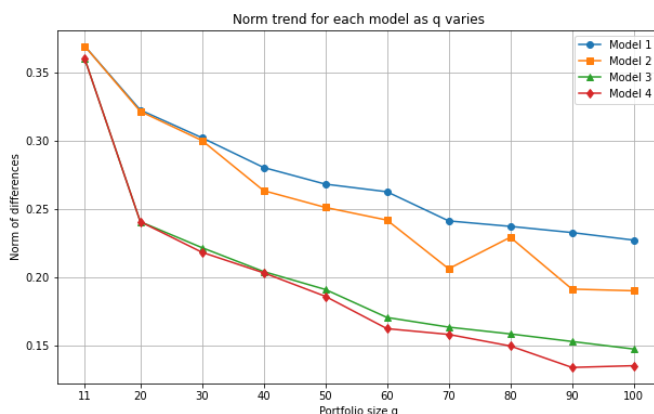


Figura 3.1: Norma delle differenze dei pesi

3.3.2 Diversificazione settoriale

Fondamentale è il ruolo della **diversificazione settoriale** nei modelli di tracking portfolio. In particolare, la figura 3.2 confronta portafogli di diverse dimensioni ($q = 30, 100$) e mostra come l'introduzione di vincoli settoriali influenzi la distribuzione degli investimenti. Senza tali vincoli, un portafoglio più piccolo tende a concentrarsi in pochi settori, mentre

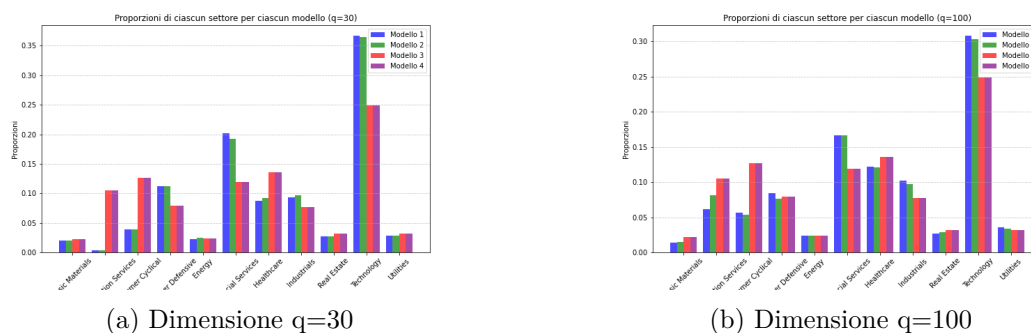


Figura 3.2: Confronto Diversificazione Settoriale

con limiti settoriali il capitale è distribuito in modo più equilibrato tra gli 11 settori. Questo aspetto è cruciale perché una maggiore diversificazione riduce il rischio complessivo del portafoglio. In definitiva, imporre limiti settoriali porta a una distribuzione più equa degli investimenti, evitando la concentrazione in pochi settori e migliorando la stabilità del portafoglio.

3.3.3 Funzione Obiettivo

La Figura 3.3 analizza l'andamento del valore ottimale della funzione obiettivo nei diversi modelli di tracking portfolio, mettendo in evidenza l'impatto delle dimensioni del portafoglio e dei vincoli imposti. All'aumentare della dimensione q , il valore obiettivo cresce, poiché un numero maggiore di asset consente al modello di replicare meglio l'indice di riferimento. Tuttavia, il confronto mostra come il modello (1) raggiunge il valore obiettivo più alto, mentre il modello (4) ottiene il valore più basso, poiché è il più vincolato, includendo sia costi di transazione che limiti settoriali. L'imposizione di vincoli

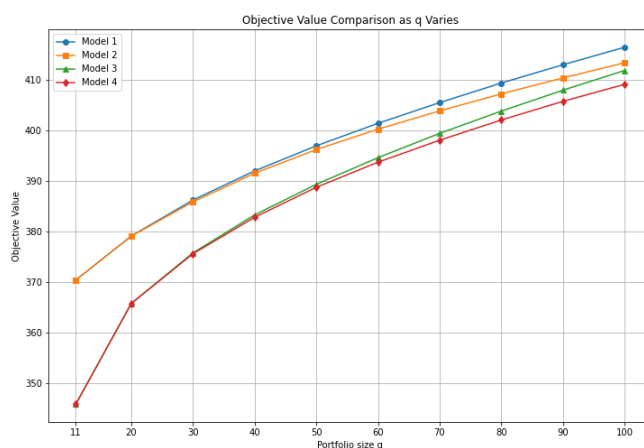


Figura 3.3: Confronto Funzione Obiettivo

settoriali riduce il valore obiettivo rispetto ai modelli senza tali limiti. Questo suggerisce che, sebbene migliorino la diversificazione e riducano il rischio, i vincoli settoriali possono diminuire leggermente la capacità del portafoglio di seguire fedelmente l'indice. Inoltre, il loro impatto risulta più marcato rispetto ai costi di transazione, poiché limitano in modo più rigido la composizione del portafoglio.

3.3.4 Rendimento dei Portafogli

Ora, analizziamo alcune delle metriche di performance espone nel dettaglio precedentemente. In particolare, sfruttando i pesi dei titoli selezionati dai modelli al variare della dimensione del portafoglio q , analizziamo il rendimento come descritto in 3.2. La Figura 3.4 mostra l'andamento dei rendimenti dei portafogli di tracking in relazione alla dimensione del portafoglio, confrontandoli con il rendimento dell'S&P 500.

I risultati indicano che, all'aumentare della dimensione del portafoglio, i rendimenti tendono a convergere verso quelli dell'indice di riferimento, migliorando la replica, soprattutto per cardinalità più grandi $q > 60$.

L'analisi evidenzia inoltre che i vincoli locali, come i costi di transazione, influenzano gradualmente i rendimenti mantenendoli vicini a quelli del modello base (1), mentre i

vincoli globali, come i limiti settoriali, modificano in modo più netto la struttura del portafoglio.

In sintesi, si conferma l'importanza della dimensione del portafoglio e dell'inclusione di vincoli nella costruzione di portafogli di tracking, evidenziando il compromesso tra fedeltà alla performance dell'indice e diversificazione del rischio.

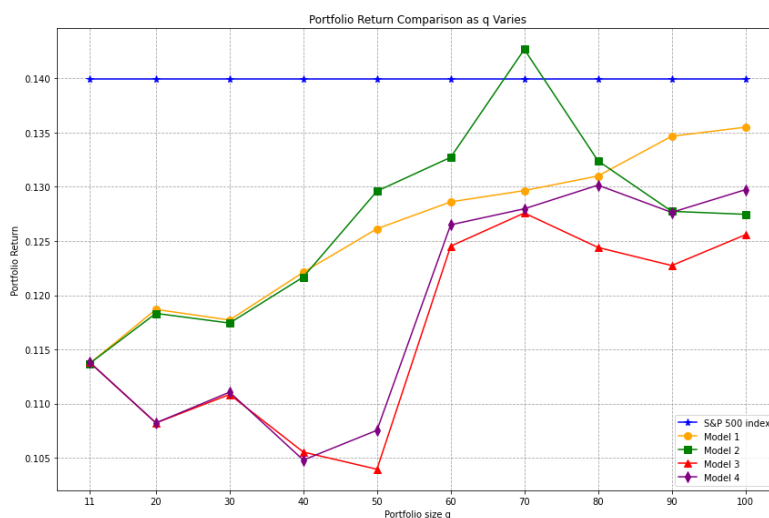


Figura 3.4: Confronto Rendimenti dei Portafogli

3.3.5 Varianza dei Portafogli

La Figura 3.5 mostra come la varianza del portafoglio vari in funzione della dimensione del portafoglio e dei diversi modelli di tracking.

I modelli con limiti settoriali (3 e 4) presentano una varianza inferiore rispetto a quelli senza vincoli, poiché la diversificazione forzata tra settori riduce il rischio complessivo. Al contrario, il modello (1) mostra la varianza più alta. Come il rendimento, anche questa metrica cerca di avvicinarsi maggiormente alla varianza dell'indice di riferimento al crescere della dimensione del portafoglio.

3.3.6 Sharpe Ratios dei Portafogli

La Figura 3.6 confronta lo Sharpe ratio dei portafogli generati dai quattro modelli, utilizzato per misurare il rendimento corretto per il rischio.

Il valore più alto dello Sharpe ratio indica una performance migliore. I modelli con limiti settoriali tendono a sovraperformare rispetto a quelli senza, migliorando il rapporto rischio/rendimento più dei modelli con solo vincoli di costi di transazione. Questo si riflette in un Sharpe ratio più alto per il modello (4) rispetto al modello (1). In sintesi, si evidenzia che l'introduzione di vincoli settoriali tende a migliorare lo Sharpe ratio, suggerendo che la diversificazione settoriale contribuisce a un migliore bilanciamento tra rischio e rendimento.

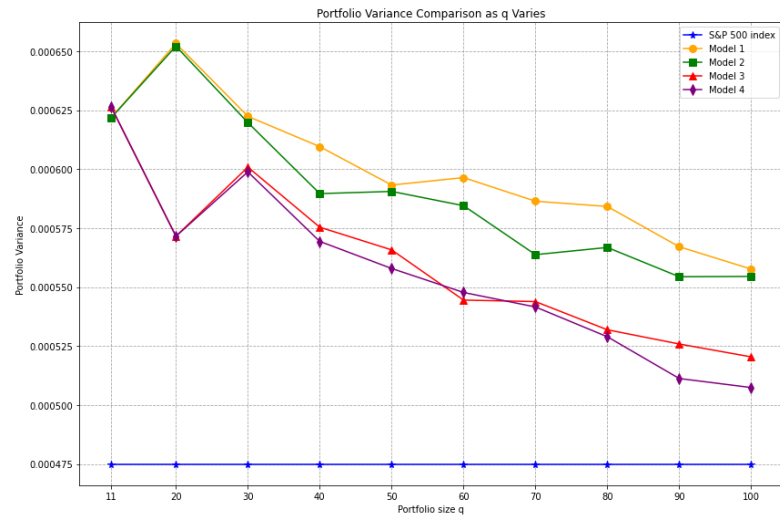


Figura 3.5: Confronto Varianze dei Portafogli

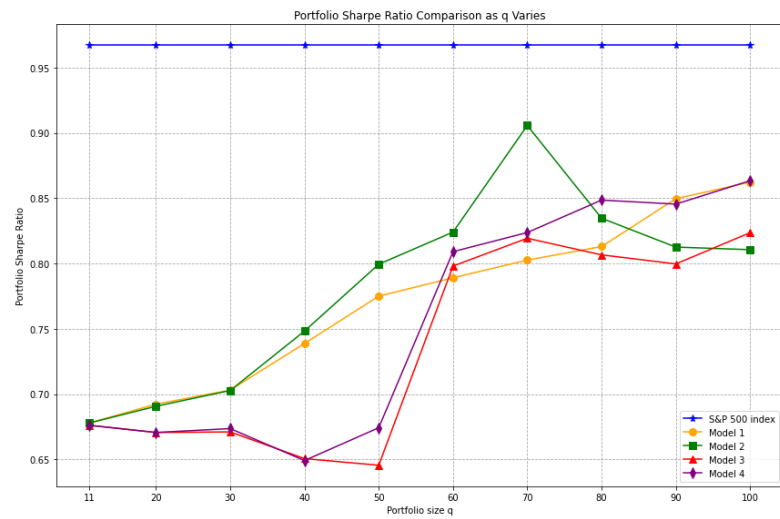


Figura 3.6: Confronto Sharpe Ratio dei Portafogli

Parte II
Seconda Parte

Capitolo 4

Valutazione Statica Out-of-Sample

4.1 Premessa

La valutazione statica del portafoglio out-of-sample consiste in esperimenti condotti utilizzando dati al di fuori del periodo di training (in-sample) per valutare le performance del portafoglio, ma senza ribilanciamento o aggiornamenti periodici dei parametri durante l'orizzonte temporale out-of-sample. Questo tipo di valutazione è rilevante per la costruzione di portafogli che vengono ribilanciati infrequentemente, ad esempio per evitare eccessivi costi di transazione. In questo modo, si simula uno scenario in cui un investitore costruisce un portafoglio e lo lascia "invariato" per un certo periodo, osservando come si comporta rispetto all'indice di riferimento. Quindi, il portafoglio resta fisso durante il periodo di test: le allocazioni degli asset non vengono modificate in tempo reale, ma rimangono quelle stabilite inizialmente. Questo permette di osservare come il portafoglio si comporta in condizioni di mercato non previste. L'obiettivo di questa valutazione è capire quanto il modello sia robusto e affidabile in scenari futuri. Si cerca di verificare se le decisioni prese nel periodo di addestramento siano effettivamente valide in un contesto diverso, dove i dati e le dinamiche del mercato possono essere cambiati. Inoltre, si valuta la performance del portafoglio, osservando parametri come i rendimenti, la volatilità e lo Sharpe ratio, confrontandoli anche con il comportamento di un indice di riferimento o di altre strategie di investimento.

In sostanza, una volta costruito il portafoglio utilizzando i dati storici disponibili fino a un certo punto (periodo in-sample), come fatto nel capitolo precedente con i dati del 2020, si valuta come si comporta questo portafoglio "statico" utilizzando dati successivi non visti durante la costruzione (periodo out-of-sample), nel nostro caso vengono usati i dati del periodo immediatamente successivo, ovvero l'anno 2021, mantenendo gli stessi pesi selezionati nel training.

4.2 Performance dei Portafogli

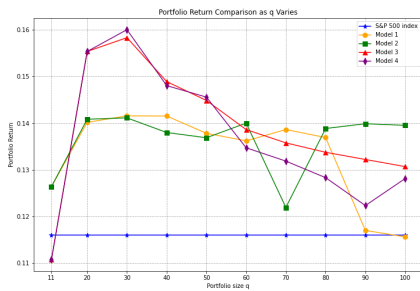
Per valutare la bontà dei modelli di ottimizzazione sull'anno successivo a quello di training si stima la matrice di correlazione come in 3.10, quindi partendo dai prezzi di chiusura storici dell'indice target, e si calcolano le capitalizzazioni di mercato dell'anno 2021. Di conseguenza, si valutano le performance dei portafogli tenendo fissi i titoli e i rispettivi pesi dei portafogli selezionati.

4.2.1 Rendimento e Varianza dei Portafogli Out-of-Sample

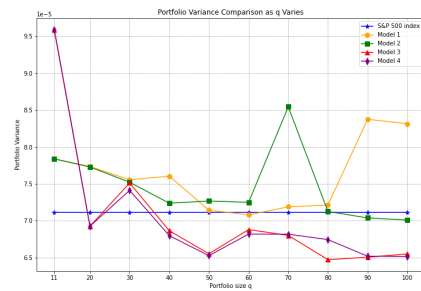
Nella valutazione statica out-of-sample, si osserva che i rendimenti dei portafogli, come si evince da 4.1a, tendono ad allinearsi con quelli dell'indice S&P 500 man mano che aumenta il numero di titoli nel portafoglio. In particolare, i portafogli creati con il modello (3), che considera sia i limiti settoriali che i costi di transazione, mostrano una buona performance. Tuttavia, quando la dimensione del portafoglio supera i 60 titoli, il modello (2), che include solo i costi di transazione, a meno del portafoglio con $q = 70$, tende a generare rendimenti più elevati. In generale, il modello (4) ha la performance migliore in entrambi i test in-sample e out-of-sample.

Per quanto riguarda il rischio, misurato attraverso la varianza del portafoglio, i modelli con limiti settoriali (modelli (3) e (4)) dimostrano di essere più efficaci nel ridurre la volatilità rispetto ai modelli senza tali vincoli. Questo perché i limiti settoriali impongono una maggiore diversificazione tra i vari settori economici.

In sintesi, l'imposizione di limiti settoriali si rivela una strategia efficace per controllare il rischio in un portafoglio di tracking, anche se è importante considerare l'impatto dei costi di transazione. Il modello (4) ha in generale una performance migliore.



(a) Confronto dei Rendimenti



(b) Confronto delle Varianze

Figura 4.1: Confronto Rendimenti e Varianze Out-of-Sample Statico

4.2.2 Sharpe Ratio dei Portafogli Out-of-Sample

In questo contesto, lo Sharpe ratio diventa un indicatore chiave della performance corretta per il rischio.

I risultati mostrano che i portafogli creati con modelli che impongono dei limiti settoriali (modelli 3 e 4) tendono ad avere Sharpe ratio migliori rispetto a quelli senza questi limiti (modelli 1 e 2), seppur non dominante a causa di rumori nei trends che fanno perdere la linearità al variare della dimensione q . Questo suggerisce che diversificare tra i settori aiuta a bilanciare meglio rischio e rendimento. Il modello (4) ha la performance migliore per entrambi i test in-sample e out-of-sample.

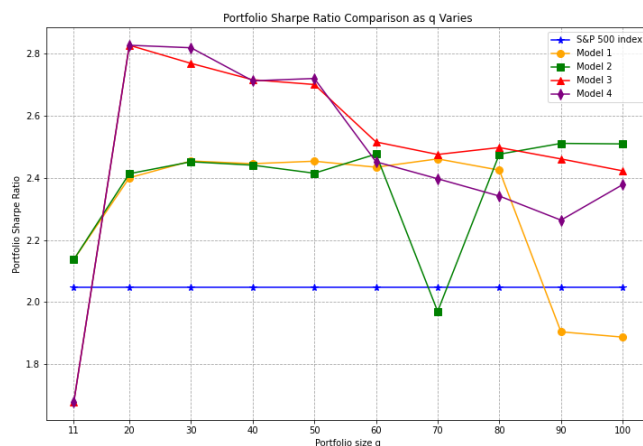


Figura 4.2: Confronto Sharpe Ratio Out-of-Sample Statico

4.2.3 Tracking Ratio dei Portafogli Out-of-Sample

Il tracking ratio potrebbe essere una delle migliori metriche per valutare la performance dei portafogli in periodi successivi a quelli di training, in quanto esprime la corrispondenza con l'indice di riferimento. I risultati ottenuti mostrano che i modelli con limiti settoriali tendono a mostrare una performance di tracking più stabile rispetto a quelli che ne sono privi, seppur di poco. Infatti, come si può notare dalla tabella 4.1 e dal grafico seguenti 4.3, i valori sono tutti vicini al valore ideale di un tracking perfetto 1. Questo suggerisce che la diversificazione settoriale contribuisce a una maggiore coerenza nel replicare l'andamento dell'indice nel tempo.

4.2.4 Tracking Error Variance dei Portafogli Out-of-Sample

Infine, il grafico 4.4 mostra l'andamento dei quattro modelli di ottimizzazione al variare della dimensione del portafoglio in termini di tracking error variance, come in 3.9. Anche in questo caso i modelli con minor tracking error risultano essere quelli con vincoli settoriali e tendono a diminuire al crescere della dimensione del portafoglio.

q	Track Ratio 1	Track Ratio 2	Track Ratio 3	Track Ratio 4
11	0.976717	0.976717	1.034407	1.034407
20	0.971336	0.971248	0.952079	0.952079
30	0.966509	0.966728	0.945726	0.946185
40	0.967726	0.971169	0.957366	0.957467
50	0.964107	0.964448	0.958457	0.959443
60	0.963298	0.963657	0.971272	0.971840
70	0.964131	0.973788	0.970483	0.971785
80	0.963903	0.962189	0.973388	0.973630
90	0.978406	0.953311	0.974434	0.980603
100	0.983447	0.952716	0.974579	0.976672

Tabella 4.1: Tracking Ratios al variare della dimensione q

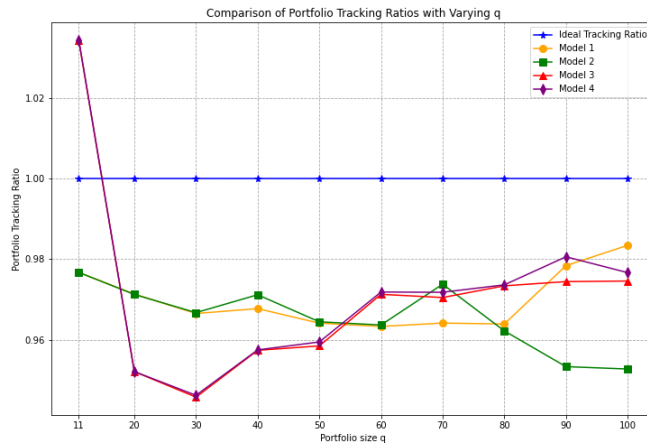


Figura 4.3: Confronto Tracking Ratio Out-of-Sample Statico

4.2.5 Confronto Grafico e Analitico In-Sample vs Out-of-Sample

I grafici 4.5, 4.6 e 4.7 mostrano un confronto dei portafogli ottenuti risolvendo i modelli di programmazione lineare misto-intera al variare della dimensione dei portafogli, sia nel caso di dati di training (in-sample) e sia come performano quando i pesi ottenuti nel training vengono applicati al periodo immediatamente successivo. Invece, i dati presenti in 4.2, 4.3 e 4.4 mostrano rispettivamente i Rendimenti, le Varianze e gli Sharpe Ratio dei portafogli In-Sample e Out-of-Sample per tutti e quattro i modelli e le rispettive differenze.

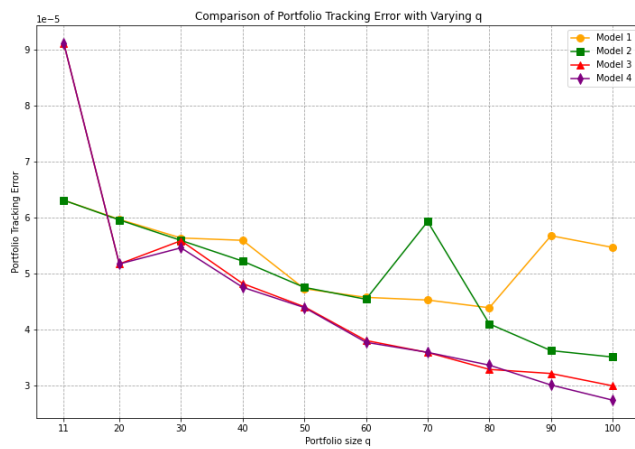


Figura 4.4: Confronto Tracking Error Out-of-Sample Statico

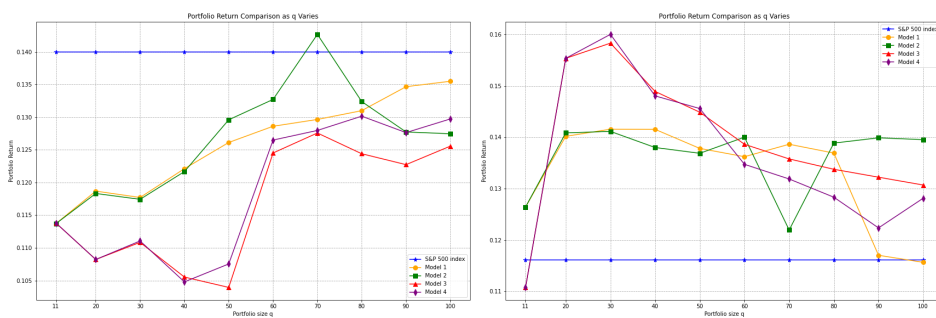


Figura 4.5: Rendimenti In-Sample vs Out-of-Sample

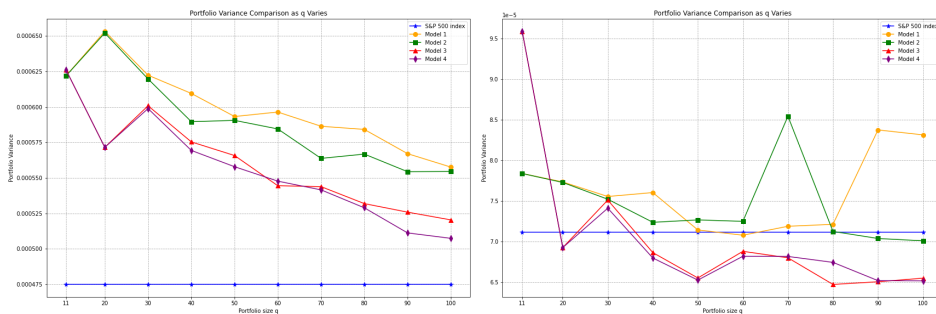


Figura 4.6: Varianze In-Sample vs Out-of-Sample

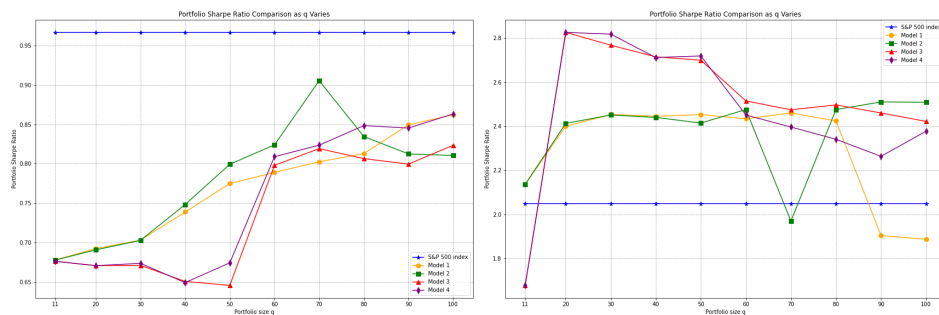


Figura 4.7: Sharpe Ratio In-Sample vs Out-of-Sample

Tabella 4.2: Rendimenti In-Sample e Out-of-Sample dei modelli

q	M1 In	M1 Out	Diff 1	M2 In	M2 Out	Diff 2	M3 In	M3 Out	Diff 3	M4 In	M4 Out	Diff 4
11	0.114	0.126	0.013	0.114	0.126	0.013	0.114	0.111	-0.003	0.114	0.111	-0.003
20	0.119	0.140	0.021	0.118	0.141	0.023	0.108	0.155	0.047	0.108	0.155	0.047
30	0.118	0.142	0.024	0.117	0.141	0.024	0.111	0.158	0.047	0.111	0.160	0.049
40	0.122	0.142	0.019	0.122	0.138	0.016	0.106	0.149	0.043	0.105	0.148	0.043
50	0.126	0.138	0.012	0.130	0.137	0.007	0.104	0.145	0.041	0.108	0.146	0.038
60	0.129	0.136	0.008	0.133	0.140	0.007	0.125	0.139	0.014	0.126	0.135	0.008
70	0.130	0.139	0.009	0.143	0.122	-0.021	0.128	0.136	0.008	0.128	0.132	0.004
80	0.131	0.137	0.006	0.132	0.139	0.006	0.124	0.134	0.009	0.130	0.128	-0.002
90	0.135	0.117	-0.018	0.128	0.140	0.012	0.123	0.132	0.009	0.128	0.122	-0.005
100	0.135	0.116	-0.020	0.127	0.140	0.012	0.126	0.131	0.005	0.130	0.128	-0.002

Tabella 4.3: Varianze In-Sample e Out-of-Sample dei modelli

q	M1 In	M1 Out	Diff 1	M2 In	M2 Out	Diff 2	M3 In	M3 Out	Diff 3	M4 In	M4 Out	Diff 4
11	0.0622	0.0078	-0.0543	0.0622	0.0078	-0.0543	0.0626	0.0096	-0.0530	0.0626	0.0096	-0.0530
20	0.0653	0.0077	-0.0576	0.0652	0.0077	-0.0575	0.0572	0.0069	-0.0502	0.0572	0.0069	-0.0502
30	0.0622	0.0076	-0.0547	0.0620	0.0075	-0.0545	0.0601	0.0075	-0.0526	0.0599	0.0074	-0.0525
40	0.0610	0.0076	-0.0534	0.0590	0.0072	-0.0517	0.0575	0.0069	-0.0507	0.0569	0.0068	-0.0501
50	0.0593	0.0071	-0.0522	0.0591	0.0073	-0.0518	0.0566	0.0066	-0.0500	0.0558	0.0065	-0.0493
60	0.0596	0.0071	-0.0526	0.0585	0.0073	-0.0512	0.0545	0.0069	-0.0476	0.0548	0.0068	-0.0480
70	0.0586	0.0072	-0.0515	0.0564	0.0085	-0.0478	0.0544	0.0068	-0.0476	0.0542	0.0068	-0.0473
80	0.0584	0.0072	-0.0512	0.0567	0.0071	-0.0496	0.0532	0.0065	-0.0467	0.0529	0.0067	-0.0462
90	0.0567	0.0084	-0.0483	0.0554	0.0070	-0.0484	0.0526	0.0065	-0.0461	0.0511	0.0065	-0.0446
100	0.0558	0.0083	-0.0475	0.0555	0.0070	-0.0484	0.0520	0.0066	-0.0455	0.0507	0.0065	-0.0442

Tabella 4.4: Sharpe Ratio In-Sample e Out-of-Sample dei modelli

q	M1 In	M1 Out	Diff 1	M2 In	M2 Out	Diff 2	M3 In	M3 Out	Diff 3	M4 In	M4 Out	Diff 4
11	0.678	2.137	1.459	0.678	2.137	1.459	0.676	1.679	1.002	0.676	1.679	1.002
20	0.692	2.400	1.708	0.691	2.413	1.722	0.671	2.826	2.155	0.671	2.826	2.155
30	0.703	2.454	1.751	0.703	2.451	1.748	0.671	2.767	2.096	0.674	2.818	2.144
40	0.739	2.445	1.706	0.748	2.440	1.692	0.651	2.715	2.064	0.649	2.711	2.062
50	0.775	2.453	1.678	0.799	2.414	1.615	0.646	2.700	2.054	0.674	2.719	2.045
60	0.789	2.434	1.645	0.824	2.476	1.652	0.798	2.515	1.717	0.809	2.451	1.642
70	0.803	2.460	1.658	0.906	1.970	1.065	0.819	2.475	1.655	0.824	2.397	1.573
80	0.813	2.424	1.611	0.835	2.476	1.641	0.807	2.497	1.690	0.849	2.341	1.493
90	0.850	1.905	1.055	0.813	2.510	1.698	0.800	2.460	1.661	0.845	2.264	1.418
100	0.862	1.888	1.025	0.811	2.509	1.698	0.824	2.422	1.598	0.863	2.378	1.514

Capitolo 5

Valutazione Dinamica Out-of-Sample

5.1 Premessa

La valutazione dinamica out-of-sample dei portafogli è un'analisi approfondita e realistica della performance delle strategie di investimento nel tempo. A differenza della valutazione statica, che valuta un portafoglio in un singolo periodo senza ribilanciamenti, la valutazione dinamica considera un arco temporale più ampio e il ribilanciamento periodico del portafoglio, simulando uno scenario di investimento reale.

Questo tipo di valutazione prevede un orizzonte temporale esteso, come ad esempio dal 2020 al 2023. Il portafoglio non è statico, ma viene modificato a intervalli regolari, in questo caso specifico viene ribilanciato trimestralmente, per riflettere le nuove condizioni di mercato. Ad ogni ribilanciamento, vengono ricalcolati i parametri chiave del modello, come le correlazioni tra i titoli, utilizzando i dati storici più recenti, consentendo di adattare il portafoglio alle dinamiche del mercato. Infine, vengono utilizzate diverse metriche, come il rendimento, la volatilità e lo Sharpe ratio, per valutare l'efficacia delle diverse strategie nel tempo.

Questo tipo di valutazione è fondamentale per comprendere come il portafoglio si comporti in condizioni di mercato che non sono state incluse nella costruzione del modello, garantendo così una maggiore robustezza e affidabilità delle strategie di investimento.

5.2 Performance dei Portafogli

Per questa analisi, è stata adottata una finestra temporale di 12 mesi con ribilanciamento dei portafogli che avviene ogni tre mesi, ciò implica che, ad ogni passo del test, vengano utilizzati i dati degli ultimi 12 mesi per il ricalcolo dei parametri e l'ottimizzazione dei pesi del portafoglio. In particolare, si parte dal primo intervallo di 12 mesi (2019-12-31, 2020-12-31) su cui abbiamo calcolato i pesi dei portafogli per tutti i modelli

di ottimizzazione e si applicano tali pesi a dati out-of-sample riferiti ai 12 mesi immediatamente successivi per valutare le metriche di performance conosciute. Poi, ci si sposta di 3 mesi in avanti rispetto all'intervallo di partenza (2020-03-31, 2021-03-31) e si ricalcola nuovamente la matrice di correlazione e i nuovi pesi in quest'intervallo per poi applicare i portafogli ottenuti al nuovo periodo di investimento, ovvero ai 12 mesi successivi al periodo di training. Si va avanti a ribilanciare il portafoglio ogni 3 mesi con una finestra mobile di 12 mesi fino a testare l'ultimo portafoglio nel periodo (2022-12-31, 2023-12-31). Questo processo richiede tempi di esecuzione più lunghi dal momento in cui, per ogni intervallo out-of-sample su cui testiamo i dati, devono essere ricalcolati tutti i parametri e i quattro modelli di ottimizzazione. Per semplificare leggermente i calcoli si è deciso di testare i modelli con pochi valori della dimensione dei portafogli $q = [30, 50, 70]$ e gli intervalli considerati sono 8, quindi per ogni intervallo di training e per ogni valore di q si stima la matrice di correlazione e si risolvono i quattro problemi vincolati per ottenere i pesi da applicare ai periodi d'investimento successivi all'intervallo di training.

Nonostante questa analisi possa essere molto time-consuming, permette di avere risultati migliori e di capire se effettivamente i modelli proposti possano adattarsi continuamente ai cambiamenti del mercato, migliorando la capacità del modello di reagire a eventi economici imprevedibili.

Di seguito vengono analizzate le varie metriche di performance dei portafogli ottenuti in questo tipo di test out-of-sample, osservando come variano i portafogli per ogni periodo di investimento di 12 mesi.

5.2.1 Rendimenti Out-of-Sample nel tempo

Nel grafico seguente 5.1 viene mostrato l'andamento del rendimento per diversi valori di $q = [30, 50, 70]$ nel contesto di una finestra mobile di 12 mesi. Il concetto chiave da notare è che tutti i modelli di ottimizzazione seguono nel tempo l'andamento del rendimento dell'indice target S&P 500. Infatti, i rendimenti diventano negativi in corrispondenza della seconda metà del 2022: questi portafogli sono ottenuti considerando i pesi ricavati dai modelli nei 12 mesi precedenti.

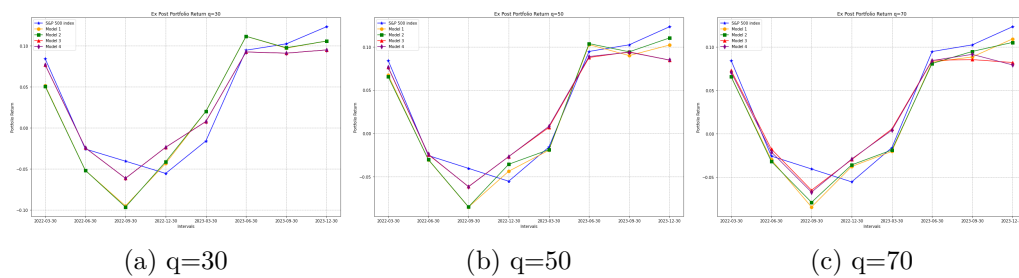


Figura 5.1: Confronto Rendimenti Rolling Windows al variare di q

5.2.2 Varianze Out-of-Sample nel tempo

Il grafico 5.2 mostra, invece, l'andamento della varianza nell'intervallo di tempo considerato, si nota infatti che anche in questo caso i portafogli seguono il trend della varianza dell'indice di riferimento, con picchi sulla seconda metà del 2022 (in corrispondenza di rendimenti negativi).

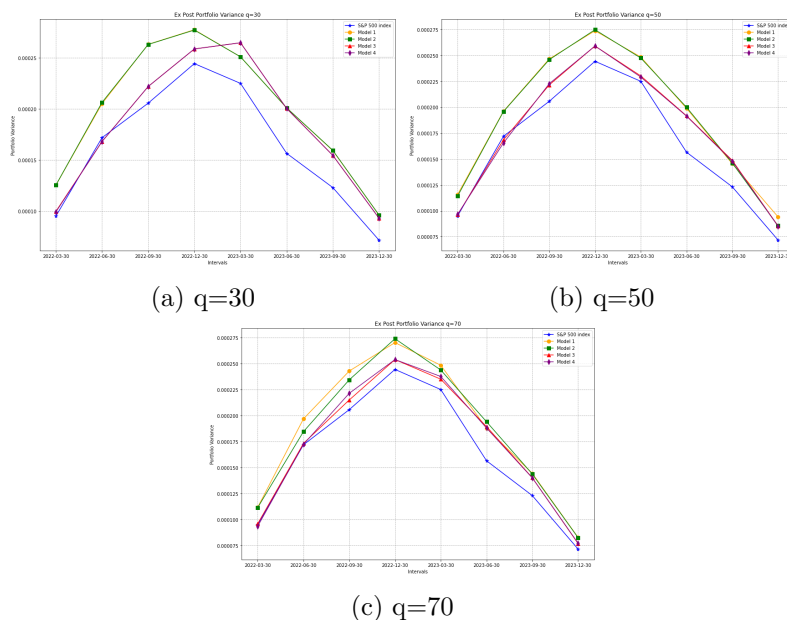


Figura 5.2: Confronto Varianze Rolling Windows al variare di q

5.2.3 Sharpe Ratio Out-of-Sample nel tempo

Mettendo insieme sia il rendimento che la varianza appena visti, si ottiene un andamento dello Sharpe Ratio ragionevolmente simile al trend del rendimento, ottenendo, quindi, valori bassi in corrispondenza della seconda metà del 2022 per poi crescere fino all'ultima data di analisi, seguendo il trend dell'indicatore dell'S&P 500 come si può notare dalla figura 5.3.

5.2.4 Tracking Ratio Out-of-Sample nel tempo

Il tracking Ratio in 5.4 ci consente di capire come i portafogli creati nei periodi di training performino bene anche nei test out-of-sample, infatti, l'indicatore assume valori intorno all'1, valore ideale per questa metrica. Ciò nonostante il trend di questa metrica non è lineare, infatti i primi due modelli hanno fluttuazioni maggiori e assumono valori più distanti da quello ideale, in certi periodi sottoperformano l'indice mentre in altri no. I modelli con vincoli settoriali, invece, restano più vicini al valore ideale, seppur con momenti di rendimenti eccessivi quando assumono valori sotto quello ideale.

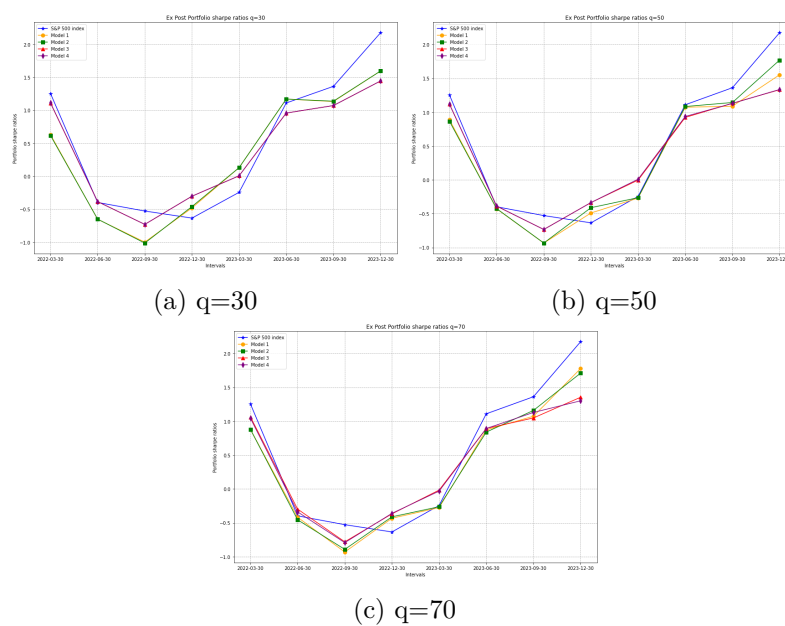


Figura 5.3: Confronto Sharpe Ratio Rolling Windows al variare di q

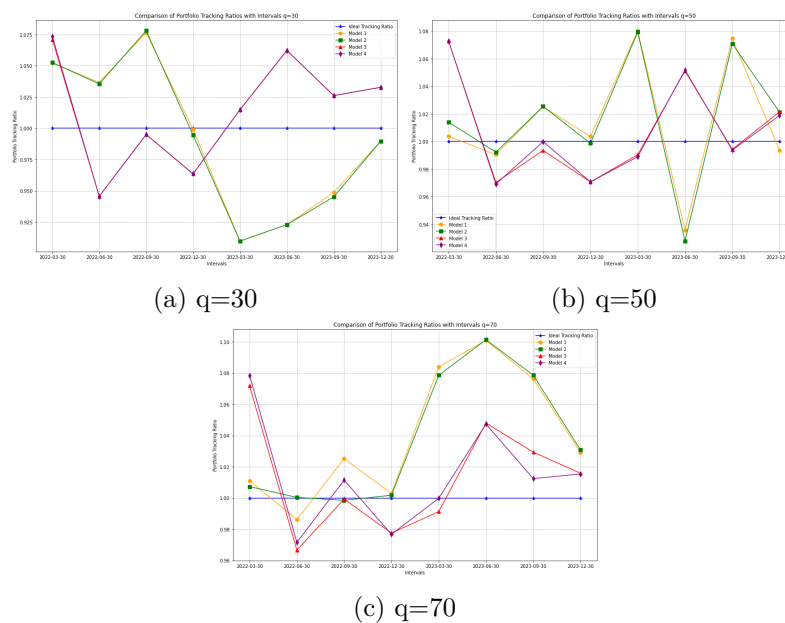


Figura 5.4: Confronto Tracking Ratio Rolling Windows al variare di q

5.2.5 Tracking Error Variance Out-of-Sample nel tempo

Infine, analizziamo il Tracking Error Variance per valutare la bontà dei modelli out-of-sample in condizioni di rolling windows. In questo caso, i risultati suggeriscono valori

molto vicini allo zero, ciò implica che in ogni situazione la differenza con l'indice target è minima, come si può notare dal grafico 5.5.

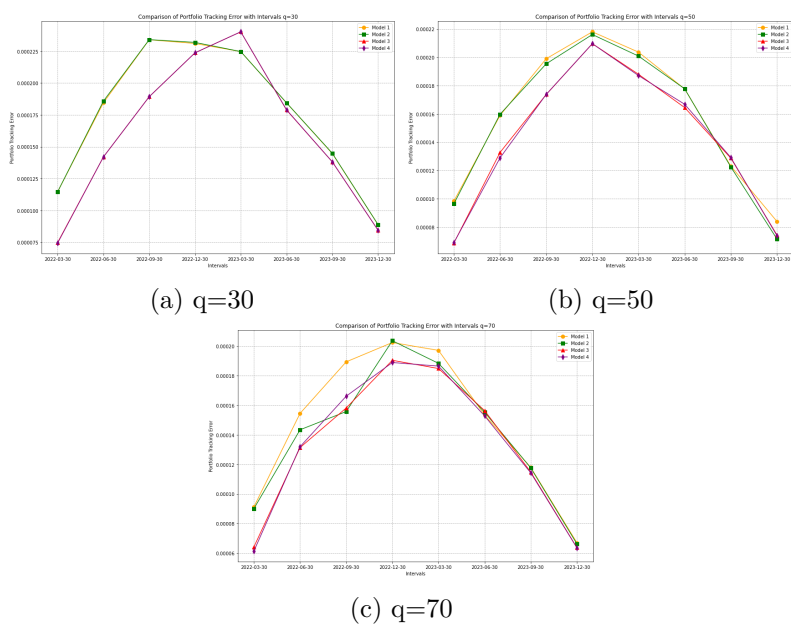


Figura 5.5: Confronto Tracking Error Variance Rolling Windows al variare di q

Capitolo 6

Conclusione

Questo studio ha esaminato diversi modelli di index tracking, che utilizzano tecniche di ottimizzazione per costruire un portafoglio che replica un indice di riferimento come l'S&P 500. L'approccio principale si basa su un metodo di clustering vincolato, che raggruppa i titoli in base alla loro somiglianza e seleziona un rappresentante da ogni gruppo per formare il portafoglio.

Uno dei punti chiave è l'importanza dei limiti settoriali. Lo studio ha dimostrato che imporre dei limiti all'allocazione per settore aumenta la diversificazione del portafoglio. Questo significa che il portafoglio è meno concentrato su pochi settori e più esposto a una varietà di settori economici. Inoltre, quando si utilizzano questi limiti, i pesi dei settori nel portafoglio tendono a riflettere quelli dell'indice di riferimento.

La performance dei modelli è stata valutata sia in-sample che out-of-sample. I risultati indicano che i modelli con limiti settoriali hanno buoni Sharpe ratio out-of-sample e bassi tracking error. In particolare, il modello completo, che combina limiti settoriali e altri vincoli, ha ottenuto i risultati migliori nei test out-of-sample.

È stata anche condotta una valutazione dinamica, simulando un orizzonte di investimento di 4 anni con ribilanciamenti trimestrali. Anche in questo caso, i modelli con limiti settoriali hanno mostrato buone performance nel corso del tempo.

Un'alternativa metodologica che merita di essere menzionata è il rilassamento lagrangiano, una tecnica utile per affrontare problemi di ottimizzazione complessi, in particolare quelli caratterizzati da vincoli stringenti, ad esempio per risolvere i modelli con vincoli di transazione e vincoli sui limiti settoriali.

Il rilassamento lagrangiano consiste nell'allentare alcuni vincoli del problema originale, trasferendoli nella funzione obiettivo tramite moltiplicatori di Lagrange. In questo modo, il problema viene riformulato e suddiviso in sottoproblemi più gestibili, facilitando la risoluzione mediante algoritmi iterativi e tecniche di ottimizzazione numerica.

Nel contesto dell'index tracking, questa metodologia potrebbe essere applicata per gestire in maniera più flessibile vincoli come la cardinalità del portafoglio o i costi di transazione, migliorando così la scalabilità dei modelli di ottimizzazione. Inoltre, per affrontare eventuali problemi di infattibilità delle soluzioni rilassate, potrebbero essere integrate euristiche mirate alla generazione di portafogli ammissibili.

Sebbene il presente studio si sia concentrato su approcci di programmazione lineare e basati su clustering, l'introduzione del rilassamento lagrangiano rappresenta un'interessante direzione futura per affinare ulteriormente le strategie di replica degli indici di mercato.

In conclusione, questo studio suggerisce che l'inclusione di vincoli settoriali nei modelli di index tracking può migliorare la diversificazione del portafoglio e la performance corretta per il rischio, pur mantenendo un buon allineamento con l'indice di riferimento. I modelli proposti possono essere utili per costruire strumenti di supporto decisionale per la gestione di portafogli di tracking.

Bibliografia

- Carl R. Bacon. *Practical Portfolio Performance Measurement and Attribution*. Wiley Finance Series, third edition edition, 2023.
- Konstantinos Benidis, Yiyong Feng, and Daniel Palomar. *Optimization Methods for Financial Index Tracking: From Theory to Practice*. now publishers Inc, 2018.
- Simon Benninga. *Financial Modeling*. The MIT Press, fourth edition edition, 2014.
- Paolo Brandimarte. *An Introduction to Financial Markets - A quantitative Approach*. Wiley, 2018.
- Ludwig B. Chincarini and Daehwan Kim. *Quantitative Equity Portfolio Management*. McGRAW-Hill, 2006.
- G. Cornuejols and R. Tutuncu. *Optimization Methods in Finance*. Cambridge University Press, 2007.
- Nadima El-Hassan. Tracking error and active portfolio management. *School of Finance and Economics*, 2003.
- Jan Frederick Hausner. Portfolio performance under tracking error and benchmark volatility constraints. *School of Economics, University of Cape Town*, pages 94–122, 2020.
- Yves Hilpisch. *Python for Finance*. O’Reilly, second edition edition, 2019.
- Atsushi Inoue and Lutz Kilian. In-sample or out-of-sample tests of predictability: which one should we use? *European Central Bank*, 2002.
- Antoine Jacquier, Johannes Muhle-Karbe, and Joseph Mulligan. In-sample and out-of-sample sharpe ratios for linear predictive models. *Qube Research & Technologies*, 2025.
- P. Jorion. Portfolio optimization with tracking-error constraints. *Financial Analysts Journal*, pages 70–82, 2003.
- E. Kazak and W. Pohlmeier. Testing out-of-sample portfolio performance. *International Journal of Forecasting*, 2018.

- Daniela Kolusheva. Out-of-sample performance of asset allocation strategies. *Department of Economics and International Business School, Brandeis University*, 2010.
- Edward E. Qian, Ronald H. Hua, and Eric H. Sorensen. *Quantitative Equity Portfolio Management*. Chapman & Hall CRC, third edition edition, 2023.
- Robert J. Vanderbei. *Linear Programming - Foundations and Extensions*. Springer, fifth edition edition, 2020.
- H. Paul Williams. *Model Building in Mathematical Programming*. Wiley, fifth edition edition, 2013.
- Dexiang Wu, Roy H. Kwon, and Giorgia Costa. A constrained cluster-based approach for tracking the s&p 500 index. *International Journal of Production Economics*, (193): 222–243, 2017.
- S.A. Zenios. *Practical Financial Optimization: Decision Making for Financial Engineers*. Wiley, 2007.