

# POLITECNICO DI TORINO

Corso di Laurea Magistrale  
in Ingegneria Matematica

Tesi di Laurea Magistrale

**Studio di sistemi vibranti non lineari e di energy harvester con  
non linearità geometriche**



**Relatore**

Prof. Stefano Marchesiello

**Co-relatore**

Prof. Dario Anastasio

**Candidato**

Francesco Gjonej

Anno Accademico 2024-2025

## Sommario

In questo lavoro viene presentato lo studio di energy harvester per la conversione di energia meccanica delle vibrazioni in energia elettrica. Quest'ultima può essere utilizzata per alimentare vari dispositivi laddove non sia possibile – o sia sconveniente – prevedere una fonte esterna di energia; in questo modo si può aumentare l'efficienza del dispositivo, ridurre l'impatto ambientale, minimizzare quindi la frequenza dell'eventuale sostituzione di batterie. L'energia meccanica viene presa da fonti quali il vento o il moto ondoso e può essere applicata ad esempio a dispositivi elettronici per la sensoristica. La presenza di non linearità nella dinamica permette una migliore efficienza nella trasduzione di energia meccanica in energia elettrica. Al fine di studiare la dinamica degli harvester, in questo lavoro viene presentato lo studio dei fenomeni non lineari, come il fenomeno del jump, di sistemi meccanici vibranti con non linearità geometriche. A questo scopo viene presentato il Metodo del Bilanciamento Armonico applicato ad oscillatori armonici non lineari, e parallelamente vengono forniti i risultati numerici ottenuti per l'oscillatore di Duffing.

# Indice

<b>1</b>	<b>Metodo del bilanciamento armonico per l'analisi di sistemi vibranti non lineari</b>	<b>3</b>
1.1	Introduzione . . . . .	3
1.2	Calcolo delle soluzioni periodiche . . . . .	3
1.2.1	Riduzione a sistema algebrico . . . . .	4
1.2.2	Metodo di Newton-Raphson . . . . .	7
1.2.3	Termini non lineari e matrice jacobiana . . . . .	8
1.3	Analisi della stabilità . . . . .	11
1.4	Procedura di continuazione numerica . . . . .	14
1.4.1	Continuazione pseudo arc-length . . . . .	15
1.4.2	Algoritmo di correzione di Moore-Penrose . . . . .	17
<b>2</b>	<b>Oscillatore di Duffing a un grado di libertà</b>	<b>21</b>
2.1	Effetto della non linearità . . . . .	22
<b>3</b>	<b>Harvester con non linearità geometriche</b>	<b>24</b>
3.1	Modello matematico . . . . .	25
3.2	Applicazione del metodo del bilanciamento armonico . . . . .	26
3.3	Risultati numerici . . . . .	27
<b>4</b>	<b>Conclusioni</b>	<b>29</b>

# 1 Metodo del bilanciamento armonico per l'analisi di sistemi vibranti non lineari

## 1.1 Introduzione

Nell'analisi dei sistemi non lineari, un primo passo fondamentale è quello di calcolare le soluzioni periodiche; a questo scopo sono presenti in letteratura diversi metodi. I metodi nel dominio del tempo, che prevedono la risoluzione di problemi con condizioni al contorno, si sono dimostrati efficienti per risolvere problemi che non richiedano un eccessivo sforzo computazionale. Al contrario, quando il costo computazionale risulta rilevante, diventano di interesse metodi nel dominio della frequenza, fra i quali il più utilizzato è il *metodo del bilanciamento armonico*. Questo metodo è anche conosciuto come *metodo di Fourier-Galerkin*, in quanto prevede l'applicazione del metodo di Galerkin ad una base e funzioni test di Fourier. I segnali periodici vengono approssimati dai coefficienti di Fourier fino ad un certo ordine, e questi diventeranno l'incognita del problema. Storicamente l'espressione *bilanciamento armonico* è stata introdotta da Krylov e Bogoliubov [9]; una dimostrazione della convergenza del metodo di Fourier basato sul troncamento ad un certo ordine di armoniche è stata fornita negli anni '60 da Urabe [10]. Il principale vantaggio del metodo del bilanciamento armonico è che si possono ottenere risultati accurati anche con bassi ordini di approssimazione, e ciò accade generalmente per deboli non linearità.

Questo metodo è largamente utilizzato non solo nella meccanica delle vibrazioni; ad esempio trova applicazioni nel campo dell'ingegneria elettrica ed elettronica, in cui Kundert e Sangiovanni-Vincentelli ne hanno mostrato la superiorità rispetto ai metodi nel dominio del tempo nella simulazione di circuiti non lineari [11].

In questo capitolo viene quindi presentato il *metodo del bilanciamento armonico* per il calcolo delle soluzioni periodiche di un sistema meccanico non lineare ad  $n$  gradi di libertà, seguendo quanto svolto da [1]. In prima istanza il metodo viene utilizzato per ottenere una singola soluzione 1.2, successivamente vengono calcolate le curve di risposta in frequenza per un sistema non lineare (NFRC) grazie agli algoritmi di continuazione numerica *pseudo arc-length* 1.4.1 e *Moore-Penrose* 1.4.2. Viene inoltre presentato lo studio della stabilità delle soluzioni per mezzo della teoria degli esponenti di Floquet 1.3.

## 1.2 Calcolo delle soluzioni periodiche

Le equazioni di un generico sistema dinamico non lineare ad  $n$  gradi di libertà si scrivono in forma matriciale nel modo seguente

$$\mathbf{M}\ddot{\mathbf{x}} + \mathbf{C}\dot{\mathbf{x}} + \mathbf{K}\mathbf{x} + \mathbf{f}_{nl}(\mathbf{x}, \dot{\mathbf{x}}) = \mathbf{f}_{est}(\omega, t) \quad (1)$$

dove  $\mathbf{M}$ ,  $\mathbf{C}$  e  $\mathbf{K}$  sono rispettivamente le matrici di massa, smorzamento e rigidezza,  $\mathbf{f}_{nl}(\mathbf{x}, \dot{\mathbf{x}})$  è il vettore dei termini non lineari, infine  $\mathbf{f}_{est}(\omega, t)$  il vettore delle forzanti periodiche di pulsazione  $\omega$ . Il punto sopra le variabili fa riferimento alla derivata temporale.

A fianco di una trattazione del tutto generale, vengono qui riportati i risultati numerici ottenuti in ambiente MATLAB per un oscillatore di Duffing accoppiato a due gradi di libertà, come rappresentato in figura 1. Di seguito sono riportati in tabella 1 i parametri per lo stesso oscillatore.

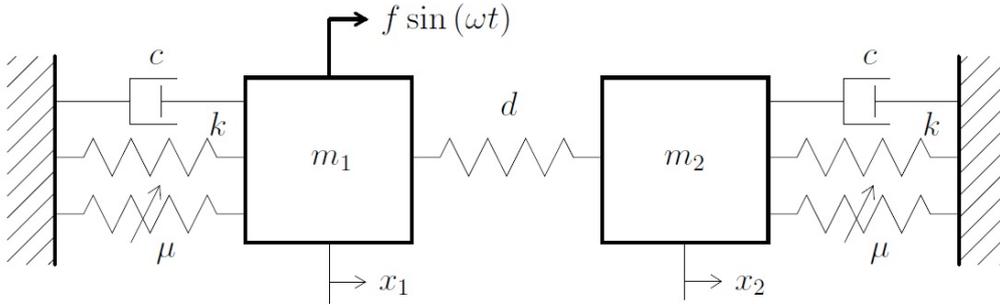


Figura 1: Rappresentazione schematica dell'Oscillatore di Duffing accoppiato.

$m_1$ (kg)	$m_2$ (kg)	$k$ (N/m)	$d$ (N/m)	$c$ (N/ms)	$\mu$ (N/m <sup>3</sup> )
1	1	1	5	0.1	1

Tabella 1: Parametri dell'Oscillatore di Duffing accoppiato.

### 1.2.1 Riduzione a sistema algebrico

Il primo passo da compiere per approdare al metodo numerico è quello di ridurre le equazioni a sistema algebrico, per mezzo di un metodo di *Fourier-Galerkin*. A questo scopo, dal momento che la forzante è periodica, anche le soluzioni verranno assunte tali, e di conseguenza i segnali  $\mathbf{x}(t)$  ed  $\mathbf{f}(\mathbf{x}, \dot{\mathbf{x}}, \omega, t) = \mathbf{f}_{est}(\omega, t) - \mathbf{f}_{nl}(\mathbf{x}, \dot{\mathbf{x}})$  vengono approssimati dalla serie di Fourier troncata alla armonica  $N_H$ :

$$\mathbf{x}(t) = \frac{\mathbf{c}_0^x}{\sqrt{2}} + \sum_{k=1}^{N_H} (\mathbf{s}_k^x \sin(k\omega t) + \mathbf{c}_k^x \cos(k\omega t)) \quad (2)$$

$$\mathbf{f}(t) = \frac{\mathbf{c}_0^f}{\sqrt{2}} + \sum_{k=1}^{N_H} (\mathbf{s}_k^f \sin(k\omega t) + \mathbf{c}_k^f \cos(k\omega t)) \quad (3)$$

in cui  $\mathbf{c}_k$  e  $\mathbf{s}_k$  sono i vettori dei coefficienti di Fourier relativi al coseno e al seno per ciascun grado di libertà; questi vengono inseriti all'interno di un unico vettore di dimensione  $(2N_H + 1)n \times 1$  per la  $\mathbf{x}(t)$  e



Si noti che, come proposto da [4], l'utilizzo dei prodotti di Kronecker con la matrice identità permette di separare i contributi di ciascun grado di libertà, in modo da impostare il bilanciamento armonico secondo un sistema matriciale.

Utilizzando quindi le nuove espressioni trovate nelle equazioni (7)-(10), sostituite nell'equazione del moto (1), si ottiene

$$\mathbf{M}((\mathbf{Q}(t)\nabla^2) \otimes \mathbb{I}_n) \mathbf{z} + \mathbf{C}((\mathbf{Q}(t)\nabla) \otimes \mathbb{I}_n) \mathbf{z} + \mathbf{K}(\mathbf{Q}(t) \otimes \mathbb{I}_n) \mathbf{z} = (\mathbf{Q}(t) \otimes \mathbb{I}_n) \mathbf{b}. \quad (13)$$

Ora si possono manipolare i termini sfruttando la proprietà del prodotto tensoriale di Kronecker per cui  $(\mathbf{A} \otimes \mathbf{B})(\mathbf{C} \otimes \mathbf{D}) = (\mathbf{AC}) \otimes (\mathbf{BD})$

$$\mathbf{M}((\mathbf{Q}(t)\nabla^2) \otimes \mathbb{I}_n) = (1 \otimes \mathbf{M})((\mathbf{Q}(t)\nabla^2) \otimes \mathbb{I}_n) = (\mathbf{Q}(t)\nabla^2) \otimes \mathbf{M} \quad (14)$$

$$\mathbf{C}((\mathbf{Q}(t)\nabla) \otimes \mathbb{I}_n) = (1 \otimes \mathbf{C})((\mathbf{Q}(t)\nabla) \otimes \mathbb{I}_n) = (\mathbf{Q}(t)\nabla) \otimes \mathbf{C} \quad (15)$$

$$\mathbf{K}(\mathbf{Q}(t) \otimes \mathbb{I}_n) = (1 \otimes \mathbf{K})(\mathbf{Q}(t) \otimes \mathbb{I}_n) = \mathbf{Q}(t) \otimes \mathbf{K} \quad (16)$$

i quali, sostituiti nell'equazione (13), danno

$$((\mathbf{Q}(t)\nabla^2) \otimes \mathbf{M}) \mathbf{z} + ((\mathbf{Q}(t)\nabla) \otimes \mathbf{C}) \mathbf{z} + ((\mathbf{Q}(t) \otimes \mathbf{K})) \mathbf{z} = ((\mathbf{Q}(t) \otimes \mathbb{I}_n)) \mathbf{b}. \quad (17)$$

A questo punto, secondo la procedura di Galerkin, si proietta quest'ultima espressione ricavata sulla base ortogonale  $\mathbf{Q}(t)$ , al fine di rimuovere la dipendenza dal tempo per mezzo di un'integrazione:

$$\left( \left( \frac{2}{T} \int_0^T \mathbf{Q}^\top \mathbf{Q}(t) dt \nabla^2 \right) \otimes \mathbf{M} \right) \mathbf{z} + \left( \left( \frac{2}{T} \int_0^T \mathbf{Q}^\top \mathbf{Q}(t) dt \nabla \right) \otimes \mathbf{C} \right) \mathbf{z} + \dots \quad (18)$$

$$\dots + \left( \left( \frac{2}{T} \int_0^T \mathbf{Q}^\top \mathbf{Q}(t) dt \right) \otimes \mathbf{K} \right) \mathbf{z} = \left( \left( \frac{2}{T} \int_0^T \mathbf{Q}^\top \mathbf{Q}(t) dt \right) \otimes \mathbb{I}_n \right) \mathbf{b};$$

infatti

$$\frac{2}{T} \int_0^T \mathbf{Q}^\top \mathbf{Q}(t) dt = \mathbb{I}_{2N_H+1}. \quad (19)$$

Infine si giunge alla forma definitiva dell'equazione:

$$(\nabla^2 \otimes \mathbf{M}) \mathbf{z} + (\nabla \otimes \mathbf{C}) \mathbf{z} + (\mathbb{I}_{2N_H+1} \otimes \mathbf{K}) \mathbf{z} = (\mathbb{I}_{2N_H+1} \otimes \mathbb{I}_n) \mathbf{b}, \quad (20)$$



### 1.2.3 Termini non lineari e matrice jacobiana

Per poter valutare  $\mathbf{h}$  e la matrice jacobiana  $\mathbf{h}_z$  è necessario poter calcolare il vettore dei termini non lineari  $\mathbf{b}(\mathbf{z})$ . A questo scopo verrà utilizzato il metodo della *alternating frequency-time domain* (AFT) come proposto da [5]. Il metodo consiste nel passare dal dominio della frequenza - in cui è calcolata la soluzione - a quello del tempo, in cui calcolare i termini non lineari, per poi tornare al dominio della frequenza. Uno schema dei passaggi viene di seguito riportato

$$\mathbf{z} \xrightarrow{\mathcal{F}^{-1}} \mathbf{x}(t) \rightarrow \mathbf{f}(\mathbf{x}, \dot{\mathbf{x}}, \boldsymbol{\omega}, t) \xrightarrow{\mathcal{F}} \mathbf{b}(\mathbf{z}) \quad (25)$$

dove con  $\mathcal{F}$  e  $\mathcal{F}^{-1}$  si intendono la trasformata e la trasformata inversa di Fourier. Perciò a partire da ogni soluzione calcolata  $\mathbf{z}$  verranno calcolati i termini non lineari attraverso i passaggi descritti. In questo lavoro il passaggio tra i domini del tempo e di Fourier viene svolto attraverso l'uso di operatori costruiti *ad hoc*, che mantengono uniformità con l'impostazione del problema algebrico. Si definiscono innanzitutto i vettori contenenti i campioni temporali, per ciascun grado di libertà, delle variabili  $\mathbf{x}(t)$  ed  $\mathbf{f}(t)$ . Si suddivide quindi il periodo di oscillazione  $T$  in  $N$  suddivisioni di lunghezza  $\Delta T$ , per cui si avranno  $t_1 = 0, t_2 = \Delta T, \dots, t_N = T - \Delta T$  e si ottengono

$$\tilde{\mathbf{x}} = \begin{bmatrix} x_1(t_1) & x_2(t_1) & \dots & x_n(t_1) & \dots & x_1(t_N) & x_2(t_N) & \dots & x_n(t_N) \end{bmatrix}^T \quad (26)$$

$$\tilde{\mathbf{f}} = \begin{bmatrix} f_1(t_1) & f_2(t_1) & \dots & f_n(t_1) & \dots & f_1(t_N) & f_2(t_N) & \dots & f_n(t_N) \end{bmatrix}^T \quad (27)$$

La trasformata inversa di Fourier si ottiene come

$$\tilde{\mathbf{x}} = \boldsymbol{\Gamma} \mathbf{z} \quad (28)$$

avendo definito un operatore lineare  $\boldsymbol{\Gamma} = (\tilde{\boldsymbol{\Gamma}} \otimes \mathbb{I}_n)$  e

$$\tilde{\boldsymbol{\Gamma}} = \begin{bmatrix} 1 & \sin \theta_1 & \cos \theta_1 & \dots & \sin N_H \theta_1 & \cos N_H \theta_1 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \dots & \vdots & \vdots \\ 1 & \sin \theta_N & \cos \theta_N & \dots & \sin N_H \theta_N & \cos N_H \theta_N \end{bmatrix} \quad (29)$$

in cui  $\theta_i = \omega t_i = 2\pi i/N$ .

Analogamente

$$\mathbf{z} = \boldsymbol{\Gamma}^{-1} \tilde{\mathbf{x}} \quad (30)$$

$$\mathbf{b}(\mathbf{z}) = \boldsymbol{\Gamma}^{-1} \tilde{\mathbf{f}} \quad (31)$$

con  $\mathbf{\Gamma}^{-1} = (\tilde{\mathbf{\Gamma}}^{-1} \otimes \mathbb{I}_n)$  e

$$\tilde{\mathbf{\Gamma}}^{-1} = \frac{1}{N} \begin{bmatrix} 1 & \dots & 1 \\ 2 \sin \theta_1 & \dots & 2 \sin \theta_N \\ 2 \cos \theta_1 & \dots & 2 \cos \theta_N \\ \vdots & & \vdots \\ 2 \sin N_H \theta_1 & \dots & 2 \sin N_H \theta_N \\ 2 \cos N_H \theta_1 & \dots & 2 \cos N_H \theta_N \end{bmatrix} \quad (32)$$

Si noti che i termini  $\theta_i$  presenti negli operatori  $\mathbf{\Gamma}$  e  $\mathbf{\Gamma}^{-1}$  non dipendono da  $\omega$ , per cui, una volta scelta la discretizzazione temporale, possono essere calcolati una volta sola per qualunque pulsazione considerata.

Un modo alternativo per calcolare  $\tilde{\mathbf{\Gamma}}^{-1}$  è quello di usare la matrice pseudo-inversa di *Moore-Penrose* definita come  $\tilde{\mathbf{\Gamma}}^{-1} = \mathbf{\Gamma}^\top (\mathbf{\Gamma} \mathbf{\Gamma}^\top)^{-1}$ ; tuttavia in questo lavoro si è preferito l'uso della matrice inversa definita in (32). In figura 2 vengono riportate le rappresentazioni in scala di colori delle matrici  $\tilde{\mathbf{\Gamma}}$ ,  $\tilde{\mathbf{\Gamma}}^{-1}$ ,  $\mathbf{\Gamma}$  e  $\mathbf{\Gamma}^{-1}$  per  $n = 2$ ,  $N = 64$  ed  $N_H = 5$ .

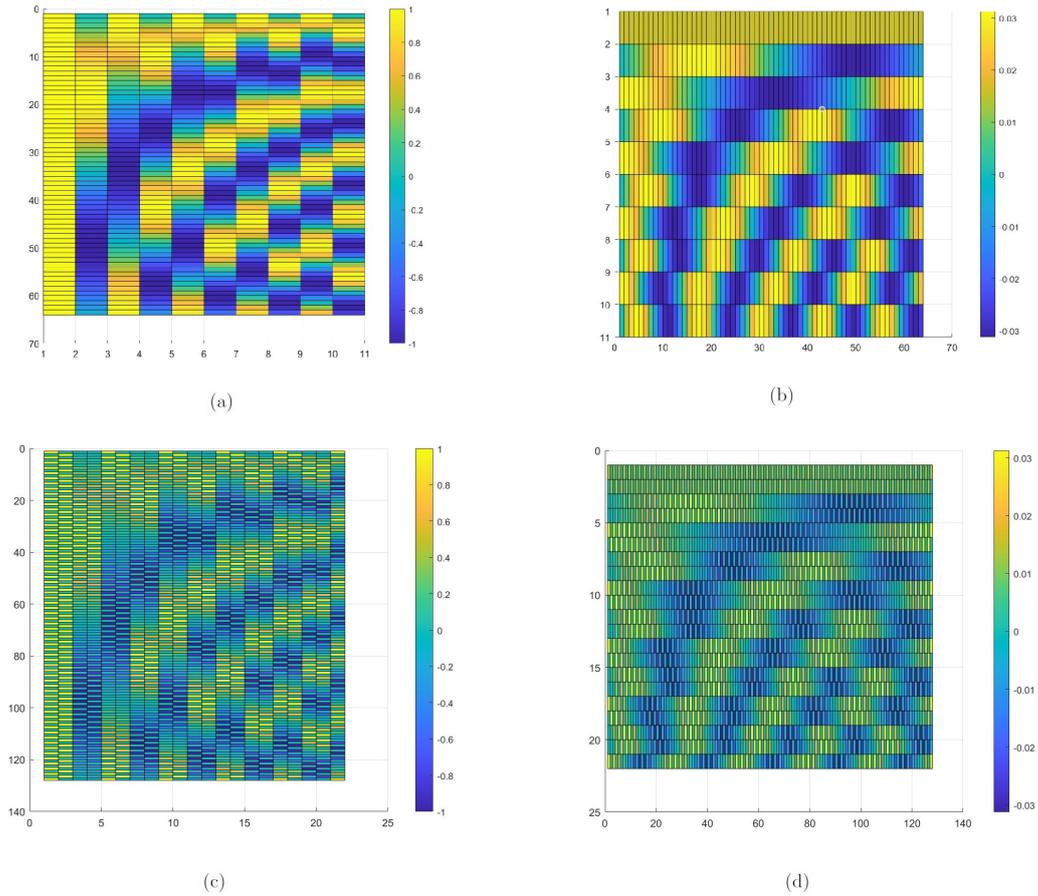


Figura 2: Rappresentazione in scala di colori delle matrici: (a)  $\tilde{\mathbf{\Gamma}}$ , (b)  $\tilde{\mathbf{\Gamma}}^{-1}$ , (c)  $\mathbf{\Gamma}$  e (d)  $\mathbf{\Gamma}^{-1}$  per  $n = 2$ ,  $N = 64$  ed  $N_H = 5$ .

Il calcolo della matrice jacobiana  $\mathbf{h}_z$  può essere svolto mediante le differenze finite. Tuttavia, se come per



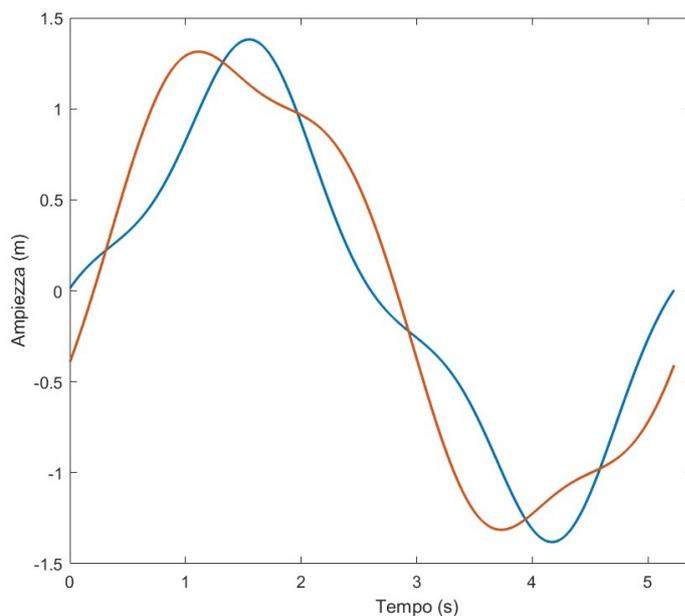


Figura 3: Soluzione periodica dell'Oscillatore di Duffing accoppiato per  $f = 2N$ ,  $\omega = 1.2 \text{ rad/s}$  ed  $N_H = 5$ . La linea rossa si riferisce a  $x_1$ , quella blu a  $x_2$ .

### 1.3 Analisi della stabilità

Per analizzare la stabilità delle soluzioni calcolate verrà in questo capitolo utilizzata la teoria dei *moltiplicatori di Floquet*  $\tilde{\sigma}_i$  o, equivalentemente, degli *esponenti di Floquet*  $\tilde{\lambda}$ :

$$\tilde{\sigma}_i = e^{\tilde{\lambda}_i T}, \quad i = 1, \dots, 2n \quad (41)$$

Una soluzione è definita instabile se esiste almeno un moltiplicatore di Floquet con modulo maggiore di 1, ossia almeno un esponente di Floquet con parte reale maggiore di 0, altrimenti la soluzione è stabile. Per le tecniche nel dominio della frequenza, come in questo caso il metodo del bilanciamento armonico, si può ottenere un'approssimazione degli esponenti di Floquet mediante il *metodo di Hill*, che viene qui presentato.

Seguendo quanto svolto da [7], si perturba la soluzione  $\mathbf{x}^*(t)$  come segue

$$\mathbf{p}(t) = \mathbf{x}^*(t) + e^{\lambda t} \mathbf{s}(t) \quad (42)$$

e quindi si introduce la soluzione perturbata nell'equazione 1 ottenendo

$$\mathbf{M}\ddot{\mathbf{x}} + \mathbf{C}\dot{\mathbf{x}} + \mathbf{K}\mathbf{x} + (\lambda^2 \mathbf{M}\mathbf{s} + \lambda(2\mathbf{M}\dot{\mathbf{s}} + \mathbf{C}\mathbf{s}) + \mathbf{M}\ddot{\mathbf{s}} + \mathbf{C}\dot{\mathbf{s}} + \mathbf{K}\mathbf{s})e^{\lambda t} = \mathbf{f}(\mathbf{p}, \dot{\mathbf{p}}, \boldsymbol{\omega}, t) \quad (43)$$



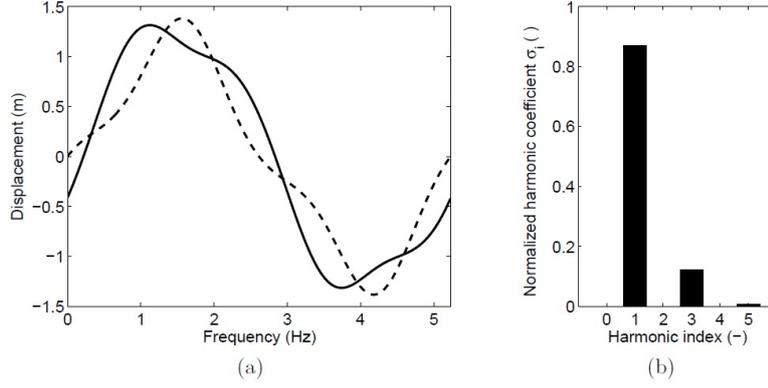


Figura 5: Soluzione periodica dell'Oscillatore di Duffing accoppiato per  $f = 2N$ ,  $\omega = 1.2 \text{ rad/s}$  ed  $N_H = 5$  [1]. (a) Oscillazione nel tempo per  $x_1$  (linea continua) e  $x_2$  (linea tratteggiata); (b) pesi normalizzati delle armoniche di  $x_1$ .

Il termine a secondo membro dell'equazione 46 si può sviluppare in serie di Taylor

$$\mathbf{b}(\mathbf{z}^* + e^{\lambda t} \mathbf{u}) = \mathbf{b}(\mathbf{z}^*) + \left. \frac{\partial \mathbf{b}}{\partial \mathbf{z}} \right|_{\mathbf{z}=\mathbf{z}^*} (e^{\lambda t} \mathbf{u}) \quad (49)$$

e considerando che

$$\mathbf{A}\mathbf{z}^* - \mathbf{b}(\mathbf{z}^*) = 0 \quad (50)$$

$$\mathbf{A} - \left. \frac{\partial \mathbf{b}}{\partial \mathbf{z}} \right|_{\mathbf{z}=\mathbf{z}^*} = \mathbf{h}_z \quad (51)$$

sostituendo lo sviluppo di Taylor ricavato in 49 nella 46, si può scrivere

$$(\Delta_2 \lambda^2 + \Delta_1 \lambda + \mathbf{h}_z) e^{\lambda t} \mathbf{u} = 0 \quad (52)$$

ossia

$$(\Delta_2 \lambda^2 + \Delta_1 \lambda + \mathbf{h}_z) \mathbf{u} = 0 \quad (53)$$

Il problema quadratico in 53 può essere riscritto come il seguente problema agli autovalori

$$(\mathbf{B}_1 - \gamma \mathbf{B}_2) \mathbf{r} = 0 \quad (54)$$

con

$$\mathbf{B}_1 = \begin{bmatrix} \Delta_1 & \mathbf{h}_z \\ -\mathbb{I} & 0 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{B}_2 = - \begin{bmatrix} \Delta_2 & 0 \\ 0 & \mathbb{I} \end{bmatrix} \quad (55)$$

e quindi i coefficienti di Hill si trovano come autovalori della seguente matrice di dimensione  $(2N_H + 1)2n \times (2N_H + 1)2n$

$$\mathbf{B} = \mathbf{B}_2^{-1} \mathbf{B}_1 = \begin{bmatrix} -\Delta_2^{-1} \Delta_1 & -\Delta_2^{-1} \mathbf{h}_z \\ \mathbb{I} & \mathbf{0} \end{bmatrix} \quad (56)$$

G. Moore in [8] dimostra che gli esponenti di Floquet corrispondono solo ai  $2n$  autovalori  $\lambda$  con la la minor parte immaginaria, gli altri invece non hanno significato fisico. In figura ?? vengono riportati i coefficienti di Hill per il sistema studiato precedentemente per diverso numero di armoniche,  $N_H = 1, 3, 5$ .

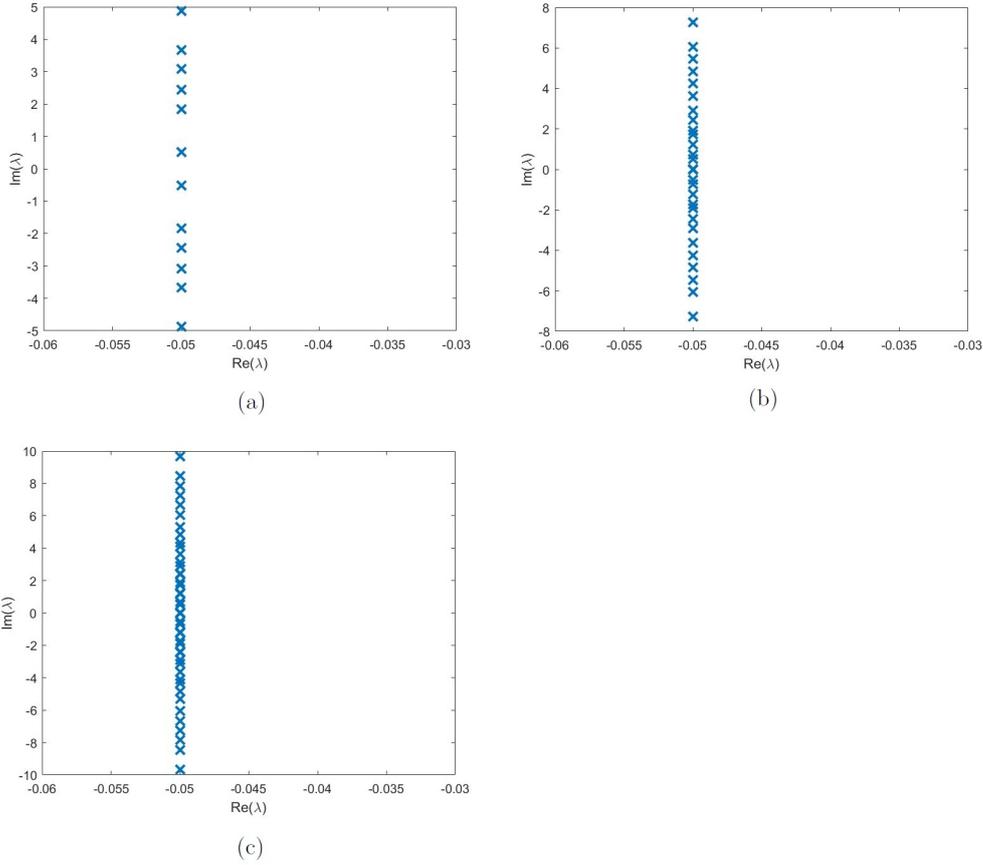


Figura 6: Stabilità dell'Oscillatore di Duffing accoppiato per  $f = 2N$ ,  $\omega = 1.2 \text{ rad/s}$  ed  $N_h = 5$ ; (a)  $N_H = 1$ , (b)  $N_H = 3$ , (c)  $N_H = 5$ .

## 1.4 Procedura di continuazione numerica

In questa sezione si tratterà il calcolo della risposta in frequenza non lineare, ossia le *nonlinear forced response curves* (NFRC). A tale scopo si utilizzano delle tecniche di continuazione numerica [12], che prevedono, dopo aver trovato una soluzione ad una data pulsazione, di trovarne una successiva muovendosi di un passo vicino alla soluzione appena trovata. Delle varie tecniche verranno qui presentati l'algoritmo

*pseudo arc-length* e quello di *Moore-Penrose*.

In altri termini uno schema di continuazione è una procedura che data una funzione liscia

$$\mathbf{p} : \mathbb{R}^{m+1} \rightarrow \mathbb{R}^m \quad (57)$$

permette di costruirne la curva delle soluzioni

$$\mathbf{p}(\mathbf{u}, \lambda) = 0. \quad (58)$$

Nel caso del metodo del bilanciamento armonico si ha l'equazione matriciale data dalla funzione

$$\mathbf{h}(\mathbf{z}, \omega) \in \mathbb{R}^{(2N_H+1)n} \quad (59)$$

con

$$\mathbf{z} \in \mathbb{R}^{(2N_H+1)n}, \quad \omega \in \mathbb{R}^1 \quad (60)$$

che sono rispettivamente il vettore incognito e il parametro.

#### 1.4.1 Continuazione pseudo arc-length

L'algoritmo prevede quindi di muoversi lungo le soluzioni dettate da

$$\mathbf{h}(\mathbf{z}, \omega) = 0 \quad (61)$$

avendo scelto come parametro  $\omega$ . In questo senso, l'algoritmo prevede i seguenti passi

- 1) Partenza da una soluzione nota

- 2) Predizione

Si calcola un vettore tangente alla curva delle soluzioni descritta da [61](#) nel punto corrispondente alla soluzione di cui al passo precedente; ci si sposta di un passo  $s$  lungo tale direzione

- 3) Correzione

Il punto individuato viene corretto mediante iterazioni secondo l'algoritmo di Newton-Raphson

Di seguito in figura [7](#) si riporta un diagramma che riassume i passi previsti dall'algoritmo.

Il passo della predizione della nuova soluzione ha quindi la seguente espressione

$$\mathbf{z}_{(i), pred} = \mathbf{z}_{(i)} + s_{(i)} \mathbf{t}_{(i)} \quad (62)$$

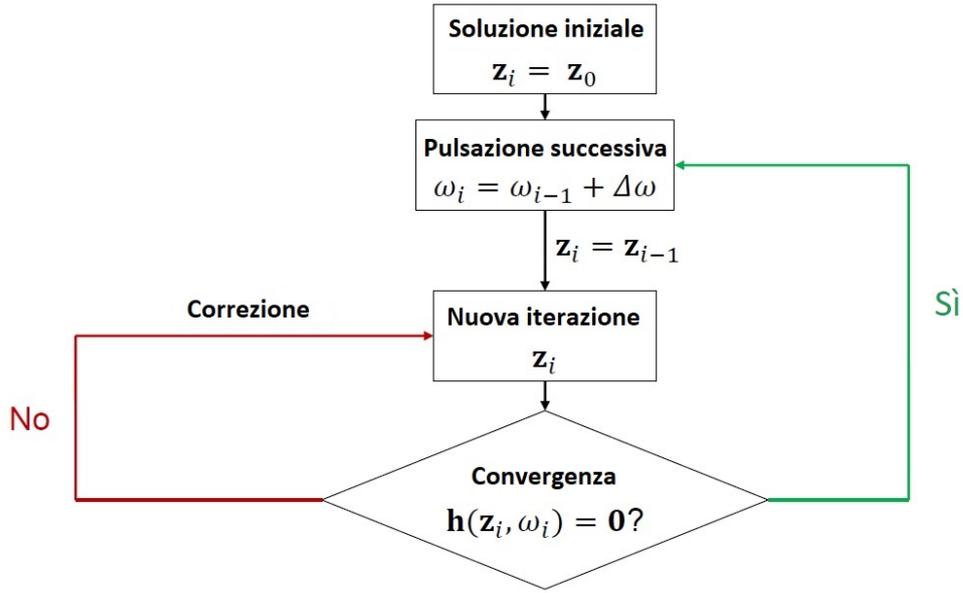


Figura 7: Diagramma di flusso dell'algoritmo *Pseudo arc-length*.

dove  $\mathbf{t}_{(i)}$  è il vettore tangente alla soluzione di cui al passo 1 e viene calcolato risolvendo il seguente sistema

$$\begin{bmatrix} \mathbf{h}_z & \mathbf{h}_\omega \\ \mathbf{t}_{(i-1)}^\top & 1 \end{bmatrix} \mathbf{t}_{(i)} = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} \quad (63)$$

in cui  $\mathbf{h}_\omega$  rappresenta la derivata di  $\mathbf{h}$  rispetto alla pulsazione  $\omega$  ed è pari a

$$\mathbf{h}_\omega = \frac{\partial \mathbf{h}}{\partial \omega} = \frac{\partial \mathbf{A}}{\partial \omega} \mathbf{z} \quad (64)$$

Derivando quindi l'espressione (22) si ottiene

$$\frac{\partial \mathbf{A}}{\partial \omega} = \tilde{\nabla}^2 \otimes \mathbf{M} + \tilde{\nabla} \otimes \mathbf{C} \quad (65)$$

avendo definito

$$\tilde{\nabla} = \begin{bmatrix} 0 & & & & \\ & \ddots & & & \\ & & \tilde{\nabla}_k & & \\ & & & \ddots & \\ & & & & \tilde{\nabla}_{N_H} \end{bmatrix}, \quad \tilde{\nabla}^2 = \begin{bmatrix} 0 & & & & \\ & \ddots & & & \\ & & \tilde{\nabla}_k^2 & & \\ & & & \ddots & \\ & & & & \tilde{\nabla}_{N_H}^2 \end{bmatrix} \quad (66)$$

con

$$\tilde{\nabla}_k = \begin{bmatrix} 0 & -k \\ k & 0 \end{bmatrix}, \quad \tilde{\nabla}_k^2 = \begin{bmatrix} -2(k\omega) & 0 \\ 0 & -2(k\omega) \end{bmatrix}; \quad (67)$$



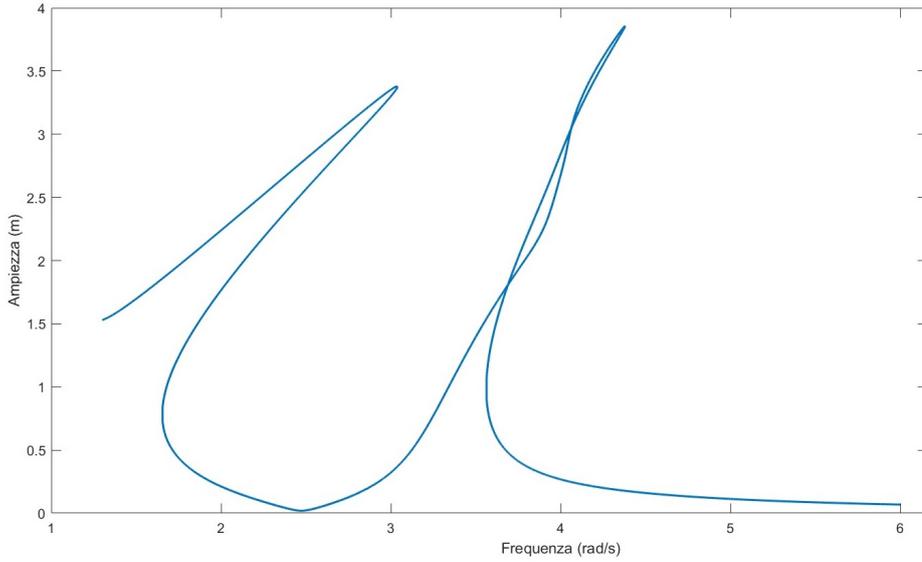


Figura 8: NRFC della variabile  $x_1$  per l'oscillatore di Duffing accoppiato, per  $f = 2N$ , con  $N_H = 5$ ,  $N = 512$ ,  $I_{opt} = 1$

Per cui si risolve

$$\begin{bmatrix} \mathbf{J}(\mathbf{y}^{(j)}) \\ \mathbf{t}_{(i-1)}^\top \end{bmatrix} \mathbf{t}^{(i)} = \begin{bmatrix} \mathbf{0} \\ 1 \end{bmatrix} \quad (72)$$

con

$$\mathbf{J}(\mathbf{y}^{(i)}) = \begin{bmatrix} \mathbf{h}_z(\mathbf{y}^{(i)}) & \mathbf{h}_\omega(\mathbf{y}^{(i)}) \end{bmatrix} \quad (73)$$

in cui, come prima,  $\mathbf{h}_\omega$  rappresenta la derivata di  $\mathbf{h}$  rispetto alla pulsazione  $\omega$ .

Il predittore  $\mathbf{y}_{(i+1)}$  è calcolato

$$\mathbf{y}_{(i+1)}^{(1)} = \mathbf{y}^{(i)} + \mathbf{s}_{(i)} \mathbf{t}^{(i)} \quad (74)$$

La correzione di *Moore-Penrose* prevede i seguenti passaggi:

definito un vettore

$$\mathbf{v}_{(i+1)}^{(j)} \quad (75)$$

inizializzato in questo modo

$$\mathbf{v}_{(i+1)}^{(1)} = \mathbf{t}^{(i)} \quad (76)$$

si aggiornano le variabili secondo il seguente schema

$$\mathbf{y}_{(i+1)}^{(j+1)} = \mathbf{y}_{(i+1)}^{(j)} + \Delta \mathbf{y}_{(i+1)}^{(j)} = \mathbf{y}_{(i+1)}^{(j)} - \mathbf{G}_y^{-1} \left( \mathbf{y}_{(i+1)}^{(j)}, \mathbf{v}_{(i+1)}^{(j)} \right) \mathbf{G} \left( \mathbf{y}_{(i+1)}^{(j)}, \mathbf{v}_{(i+1)}^{(j)} \right) \quad (77)$$

$$\mathbf{v}_{(i+1)}^{(j+1)} = \mathbf{v}_{(i+1)}^{(j)} + \Delta \mathbf{v}_{(i+1)}^{(j)} = \mathbf{v}_{(i+1)}^{(j)} - \mathbf{G}_y^{-1} \left( \mathbf{y}_{(i+1)}^{(j)}, \mathbf{v}_{(i+1)}^{(j)} \right) \mathbf{R} \left( \mathbf{y}_{(i+1)}^{(j)}, \mathbf{v}_{(i+1)}^{(j)} \right) \quad (78)$$

in cui

$$\mathbf{G}(\mathbf{y}, \mathbf{v}) = \begin{bmatrix} \mathbf{h}(\mathbf{y}) \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$\mathbf{G}_y(\mathbf{y}, \mathbf{v}) = \begin{bmatrix} \mathbf{J}(\mathbf{y}) \\ \mathbf{v}^T \end{bmatrix}$$

$$\mathbf{R}(\mathbf{y}, \mathbf{v}) = \begin{bmatrix} \mathbf{J}(\mathbf{y})\mathbf{v} \\ 0 \end{bmatrix}$$

Si osserva che questo algoritmo prevede un aggiornamento anche del vettore tangente, che nel caso *pseudo arc-length* restava invariato. Questa scelta favorisce una migliore convergenza alla soluzione.

Anche in questo caso si può optare per un passo adattivo

$$s^{(i)} = \frac{I_{opt}}{I^{(i-1)}} s^{(i-1)} \quad (79)$$

In figura 10 è riportato il diagramma relativo all'algoritmo di *Moore-Penrose*. Si riportano quindi in figura 9 i risultati ottenuti con questo schema correttivo.

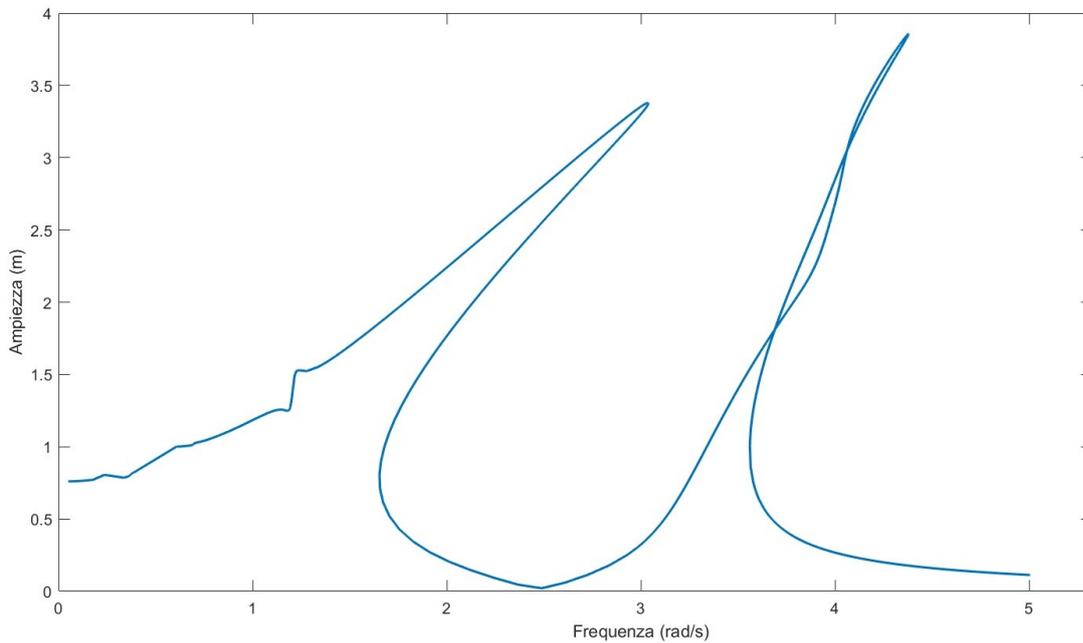


Figura 9: NRFC della variabile  $x_1$  per il sistema di Duffing accoppiato, per  $f = 2N$ , con  $N_H = 5$ ,  $N = 512$ ,  $I_{opt} = 2$ .

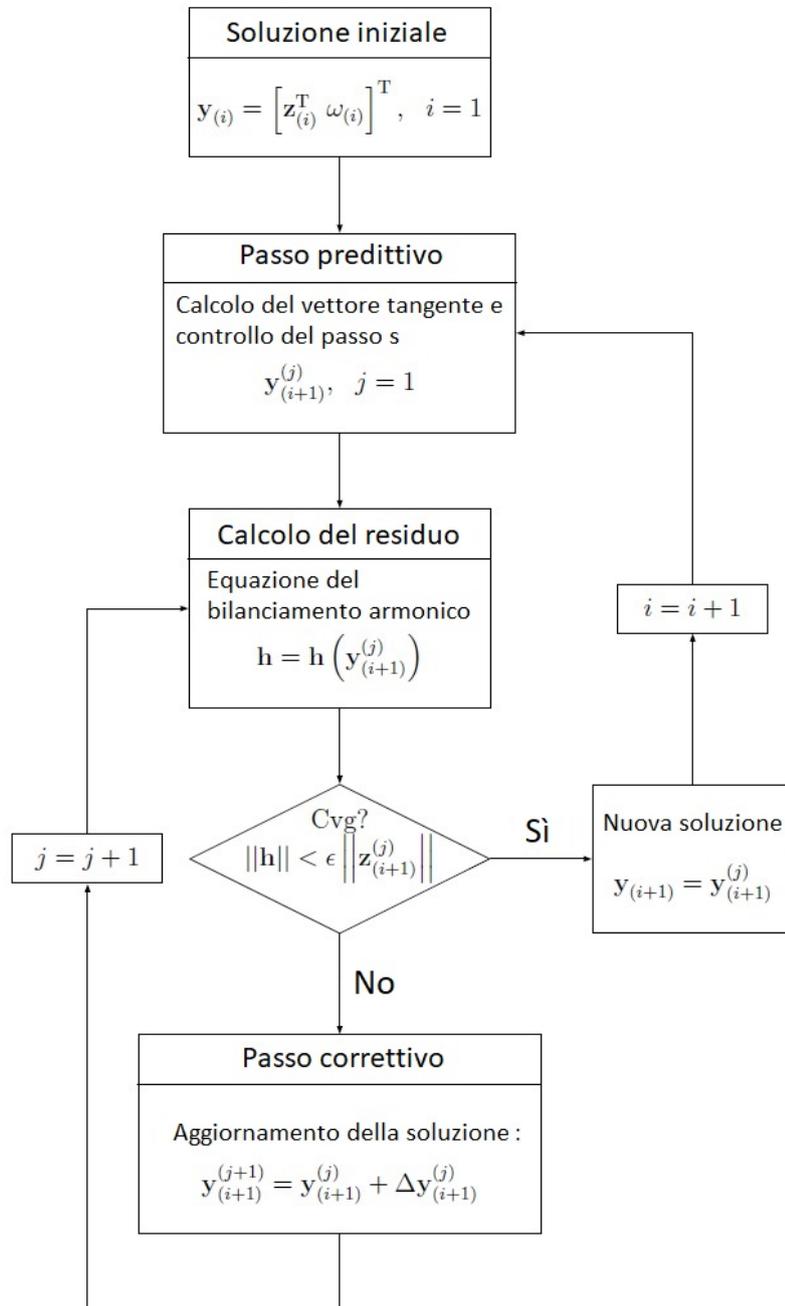


Figura 10: Diagramma dell' algoritmo di continuazione *Moore-Penrose*

## 2 Oscillatore di Duffing a un grado di libertà

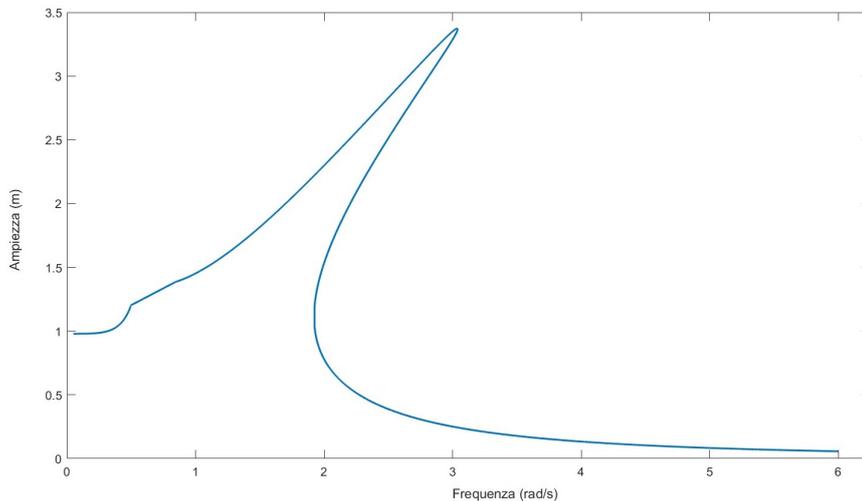
In virtù della generalità con la quale è stato costruito il metodo di cui al capitolo precedente, in particolare i gradi di libertà, in questo capitolo il metodo verrà portato ad un solo grado di libertà, e testato per riprodurre la risposta in frequenza non lineare del singolo oscillatore di Duffing, riproducendo il lavoro di [2].

L'equazione che governa il sistema è la seguente

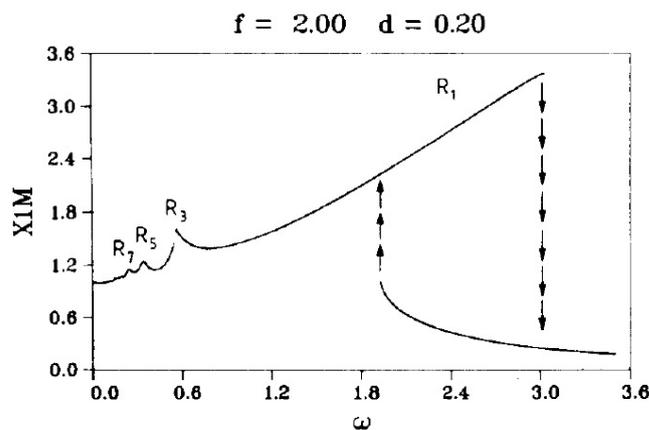
$$\ddot{x} + d\dot{x} + x + \mu x^3 = f \cos(\omega t) \quad (80)$$

con  $d = 0,2$ ,  $f = 2$  e  $\mu = 1$ .

L'applicazione del metodo di *Moore-Penrose* per questa equazione porta alla NFRC mostrata in figura 11a, da confrontarsi con la figura 1 dello stesso articolo [2], che viene qui riportata in figura 11b.



(a) NFRC dell'oscillatore di Duffing a 1 grado di libertà per  $f = 2$ ,  $d = 0,2$  e  $\mu = 1$ , con  $N_H = 4$ ,  $N = 512$ ,  $I_{opt} = 2$ .



(b) NFRC dell'oscillatore di Duffing ottenuto da [2].

## 2.1 Effetto della non linearità

In questa sezione si studia l'effetto della non linearità sulla risposta periodica e in frequenza dell'oscillatore di Duffing ad un grado di libertà.

Per quanto riguarda la soluzione periodica, un primo risultato che si ottiene è quello relativo al peso che ha il numero di armoniche considerato nel metodo di *Newton-Raphson*. In figura 12 vengono mostrate le curve relative alle varie soluzioni temporali per valori di  $N_H = 1, \dots, 7$ , con  $N = 512$  e l'ampiezza del termine non lineare  $\mu = 1$  per una pulsazione  $\omega = 0,3 \text{ rad/s}$ . Si osservi altresì in figura 13, in cui sono

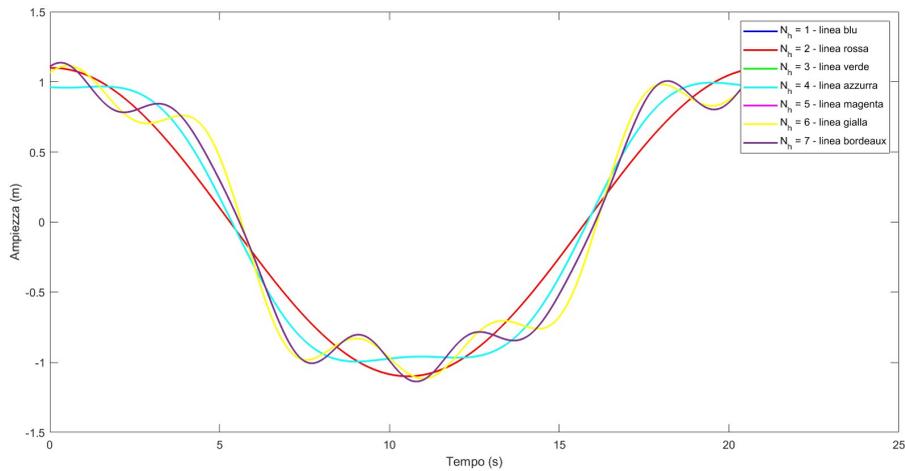


Figura 12: Soluzione periodica dell'oscillatore di Duffing a 1 grado di libertà per  $\omega = 0,3 \text{ rad/s}$ ,  $f = 2$  e  $d = 0,2$ ,  $\mu = 1$ , e per diversi valori di  $N_H$ .

riportati i pesi normalizzati delle armoniche fino ad  $N_H = 11$ , che il contributo significativo alla soluzione resta quello fino alle settima armonica; per questo si può considerare  $N_H = 7$  un troncamento della serie di Fourier accurato per la soluzione coi parametri considerati.

In figura 14 è mostrato invece l'effetto del coefficiente del termine non lineare  $\mu$  sulla soluzione periodica per diversi valori dello stesso. Infine in figura 15 è mostrato l'effetto del coefficiente del termine non lineare sulla risposta in frequenza. Si nota come al crescere di  $\mu$  si ha un'accentuazione della piega del picco di risonanza, quindi il fenomeno del jump risulta sempre più marcato.

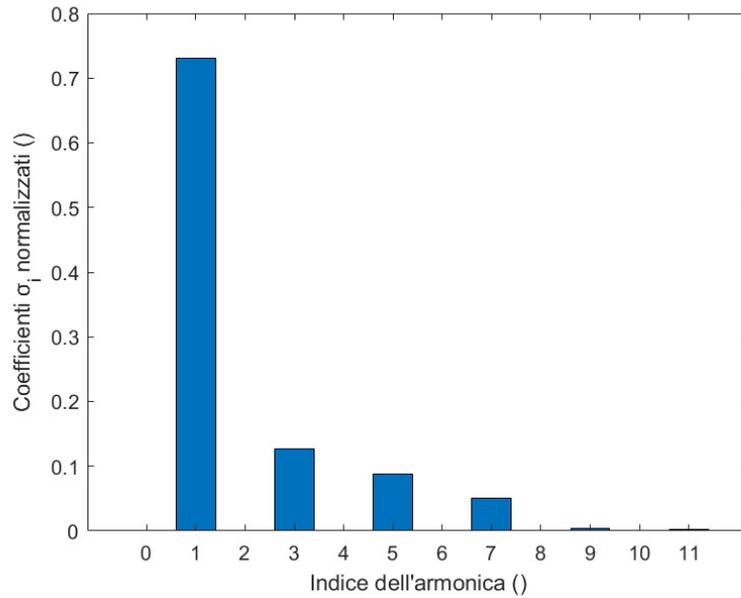


Figura 13: Pesi delle armoniche dell'oscillatore di Duffing a 1 grado di libertà per  $\omega = 0,3 \text{ rad/s}$ ,  $f = 2$ ,  $d = 0,2$ ,  $\mu = 1$  e per diversi valori di  $N_H$ .

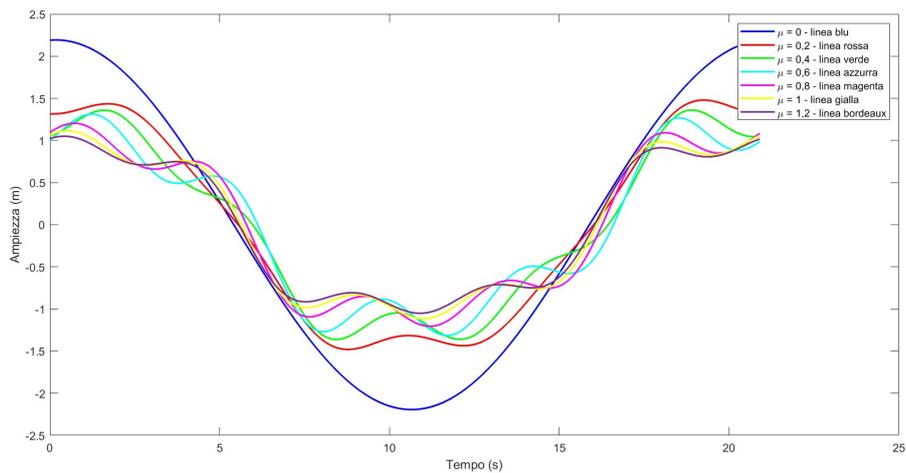


Figura 14: Soluzione periodica dell'oscillatore di Duffing a 1 grado di libertà per  $\omega = 0,3 \text{ rad/s}$ ,  $f = 2$  e  $d = 0,2$ , e per diversi valori di  $\mu$ .

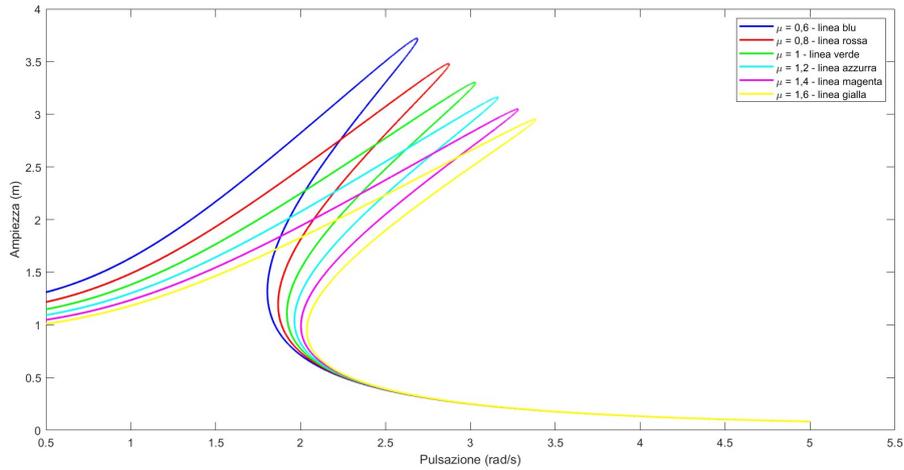
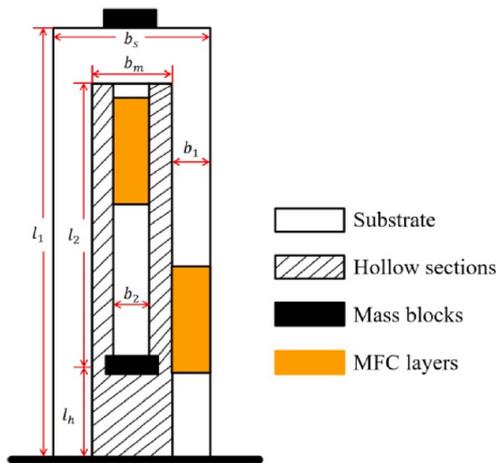
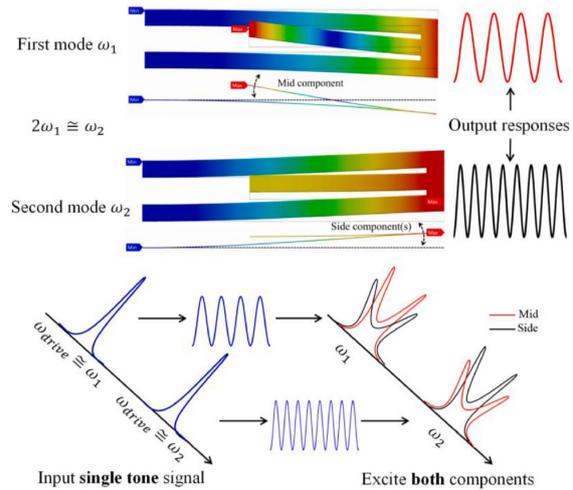


Figura 15: NFRC dell'oscillatore di Duffing a 1 grado di libertà per  $\omega = 0,3 \text{ rad/s}$ ,  $f = 2$ ,  $d = 0,2$ ,  $N_H = 2$ , e per diversi valori di  $\mu$ .

### 3 Harvester con non linearità geometriche



(a) Schema dell'harvester



(b) Meccanismo di funzionamento della risonanza interna del dispositivo

In questo capitolo viene studiato un *energy harvester* basato su una non linearità geometrica, come proposto da [3]. Lo scopo degli harvester è quello di convertire l'energia meccanica delle vibrazioni, da fonti quali il vento o il moto ondoso, in energia elettrica. Questa energia può quindi essere utilizzata per alimentare dispositivi laddove l'uso di batteria sia sconveniente. La ricerca di harvester basati su non linearità geometriche trova spiegazione nella possibilità di ottenere un'ampia banda di frequenze in cui il dispositivo possa operare al fine di ottenere amplificazione del segnale. Accanto a questa possibilità vi è quella di usare sistemi a molti gradi di libertà e multimodali, i quali possono offrire una collezione di picchi di risonanza aggiustabili per varie frequenze e direzioni. Tuttavia il principale svantaggio di

tali sistemi è che richiedono maggiori dimensioni e volumi rispetto alla loro controparte non lineare a singolo modo. Per questo motivo si rendono di interesse dispositivi di ridotte dimensioni basati su travi (lamelle) oscillanti e accoppiate tra loro, geometricamente formate dall'incisione di una porzione di quella maggiore. In figura 16a è mostrato uno schema dell'harvester: il sistema è quello di una trave oscillante (componente esterna) all'interno della quale è ricavata per incisione un'altra sezione oscillante (componente interna); alle estremità sono poste due masse utili a calibrarne le frequenze naturali. Sebbene nei sistemi multimodali siano possibili interazioni lineari fra i modi, queste restituiscono una risposta direttamente proporzionale all'ingresso secondo il principio di sovrapposizione degli effetti, e ciò limita la dinamica e l'efficienza di estrazione di energia da tutto lo spettro possibile di frequenze. Al contrario le interazioni non lineari conducono a fenomeni complessi quali il salto, l'isteresi, le biforcazioni o addirittura il caos. Nei sistemi non lineari è inoltre facilitato l'accoppiamento dei modi che porta al fenomeno della risonanza interna. Una manifestazione della risonanza interna è evidente guardando alle curve di risposta in frequenza quando le interazioni modali non lineari portano ad una evidente piega dei picchi sia per frequenze crescenti sia per frequenze decrescenti. L'harvester sfrutta la risonanza interna grazie alla quale se viene eccitato con un ingresso a singola sinusoide di frequenza vicina a uno dei due modi, esso risponderà con un'amplificazione di ambo i modi. Questo risultato di banda larga, se propriamente sfruttato tramite appositi mezzi di traduzione di energia, può aumentare la potenza in uscita. In figura 16b è mostrato il meccanismo della risonanza interna. La conversione dell'energia meccanica in energia elettrica è ottenuta mediante un accoppiamento piezoelettrico, che rende il dispositivo efficiente anche a basse ampiezze di eccitazione.

### 3.1 Modello matematico

Il modello proposto da [3] presenta 4 gradi di libertà, 2 relativi alle masse oscillanti, altri 2 relativi all'accoppiamento elettromeccanico. Per modellare il comportamento non lineare, si introduce una rigidità non lineare quadratica [3]:

$$\begin{cases} m_1\ddot{x}_1 + k_1x_1 + k_2(x_1 - x_2) + c_1\dot{x}_1 + c_2(\dot{x}_1 - \dot{x}_2) + k_nx_1^2 + \varphi_1V_1 - \varphi_2V_2 = -m_1F \\ m_2\ddot{x}_2 + k_2(x_2 - x_1) + c_2(\dot{x}_2 - \dot{x}_1) - \varphi_1V_1 + \varphi_2V_2 = -m_2F \\ \varphi_1\dot{x}_1 + C_p\dot{V}_1 + \frac{V_1}{R_L} = 0 \\ \varphi_2(\alpha\dot{x}_2 - \beta\dot{x}_1) + C_p\dot{V}_2 + \frac{V_2}{R_L} = 0 \end{cases} \quad (81)$$

in cui  $F = A_b \cos(\omega t)$ ,  $x_{1,2}$ ,  $m_{1,2}$ ,  $c_{1,2}$ ,  $k_{1,2}$  sono rispettivamente le accelerazioni del supporto, gli spostamenti, masse equivalenti, smorzamenti equivalenti e rigidità lineari equivalenti per la componente esterna e quella interna;  $V_{1,2}$  sono le tensioni in uscita dallo strato piezoelettrico della componente esterna e interna rispettivamente; alcuni parametri propri dell'harvester sono riportati in tabella 2:

System parameters and material properties.

Substrate (Stainless steel 304)	
Side component $l_1 \times b_1 \times h_1$ [mm]	$160 \times 12 \times 0.4$
mid component $l_2 \times b_2 \times h_2$ [mm]	$96 \times 12 \times 0.4$
Elastic Modulus $E_b$ [GPa]	200
Mass density $\rho_b$ [kg/m <sup>3</sup> ]	7850
Mid mass block $m_1$ [gram]	12.1
Side mass block $m_2$ [gram]	1.2
Hollow section parameters $b_m, l_h$ [mm]	20, 56
MFC patch	
Elastic Modulus $E_p$ [GPa]	30.33
Capacitance $C_p$ [nF]	15.11
Electromechanical coupling coefficient for side MFC $\varphi_1$ [N/V]	$-5 \times 10^{-5}$
Electromechanical coupling coefficient for mid MFC $\varphi_2$ [N/V]	$-5.8 \times 10^{-5}$
Load resistance $R_L$ [Ohm]	$5.75 \times 10^5$

Tabella 2: Parametri propri dell'harvester

### 3.2 Applicazione del metodo del bilanciamento armonico

In questa sezione viene calcolata la risposta in frequenza non lineare del sistema. L'approccio proposto da [3] è quello di considerare come soluzioni le seguenti funzioni:

$$\begin{aligned}
x_1 &= a_{11} \sin(\omega t) + b_{11} \cos(\omega t) + a_{21} \sin(2\omega t) + b_{21} \cos(2\omega t) \\
x_2 &= a_{12} \sin(\omega t) + b_{12} \cos(\omega t) + a_{22} \sin(2\omega t) + b_{22} \cos(2\omega t) \\
V_1 &= a_{13} \sin(\omega t) + b_{13} \cos(\omega t) + a_{23} \sin(2\omega t) + b_{23} \cos(2\omega t) \\
V_2 &= a_{14} \sin(\omega t) + b_{14} \cos(\omega t) + a_{24} \sin(2\omega t) + b_{24} \cos(2\omega t)
\end{aligned} \tag{82}$$

che equivale a prendere il numero di armoniche  $N_H = 2$  nel metodo del bilanciamento armonico.

Alla luce della scelta della forma delle soluzioni in (82), il modello matematico (81) conduce alle seguenti matrici di massa, smorzamento e rigidezza

$$\mathbf{M} = \begin{bmatrix} m_1 & & & \\ & m_2 & & \\ & & 0 & \\ & & & 0 \end{bmatrix} \tag{83}$$

$$\mathbf{C} = \begin{bmatrix} c_1 + c_2 & -c_2 & 0 & 0 \\ -c_2 & c_2 & 0 & 0 \\ \varphi_1 & 0 & C_p & 0 \\ -\varphi_2\beta & \varphi_2\alpha & 0 & C_p \end{bmatrix} \tag{84}$$

$$\mathbf{K} = \begin{bmatrix} k_1 + k_2 & -k_2 & -\varphi_1 & \varphi_2 \\ -k_2 & k_2 & -\varphi_1 & \varphi_2 \\ 0 & 0 & \frac{1}{R_L} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \frac{1}{R_L} \end{bmatrix} \quad (85)$$

e ai seguenti vettori dei termini non lineari e delle forzanti

$$\mathbf{f}_{nl} = \begin{pmatrix} k_n x_1^2 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \quad (86)$$

$$\mathbf{f}_{ext} = \begin{pmatrix} -m_1 A_b \cos(\omega t) \\ -m_2 A_b \cos(\omega t) \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \quad (87)$$

### 3.3 Risultati numerici

Considerando i seguenti valori dei parametri:  $m_1 = 0.0105 \text{ kg}$ ,  $m_2 = 0.0052 \text{ kg}$ ,  $k_1 = 48 \text{ N/m}$ ,  $k_2 = 10 \text{ N/m}$ ,  $c_1 = 0.005 \text{ N s/m}$ ,  $c_2 = 0.01 \text{ N s/m}$ ,  $\alpha = 0.31$ ,  $\beta = 0.05$ ,  $A_b = 0.748 \text{ m/s}^2$  e l'ampiezza del termine non lineare  $k_n = 3500 \text{ N/m}^2$ , il metodo di continuazione *Moore-Penrose* restituisce una risposta in frequenza per le due masse riportate in figura 17 in cui è ben visibile il fenomeno del jump, in particolare un doppio salto

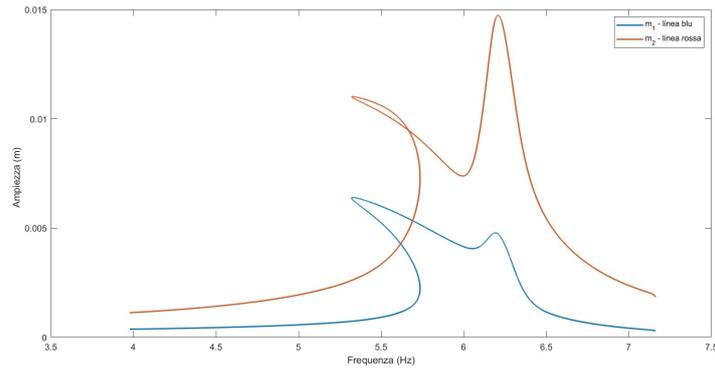


Figura 17: NFRC per  $m_1$  ed  $m_2$ ,  $k_n = 3500 \text{ N/m}^2$ .

asimmetrico, dovuto alla non linearità quadratica presente nel modello.

In figura 18 è riportato l'andamento delle tensioni, quindi la NFRC per il terzo e quarto grado di libertà del modello.

In figure 19 e 20 sono riportate le risposte in frequenza non lineari per uno spettro più ampio rispetti-

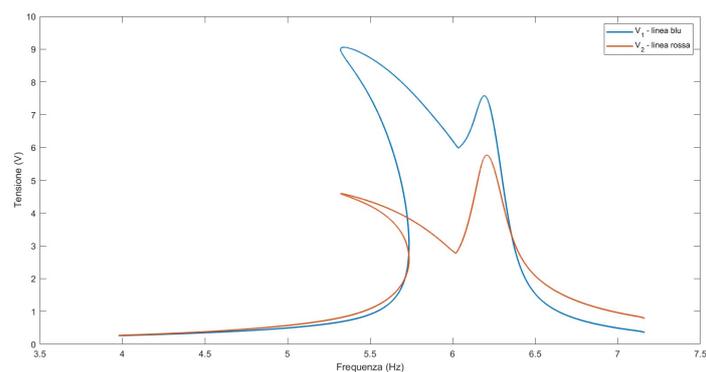


Figura 18: NFRC per  $V_1$  ed  $V_2$ ,  $k_n = 3500 \text{ N/m}^2$ .

vamente per le masse  $m_1$ ,  $m_2$  e le tensioni  $V_1$ ,  $V_2$ ; è quindi possibile osservare i picchi in corrispondenza delle due frequenze di oscillazione  $2\omega_1 \approx \omega_2$  che testimoniano il fenomeno della risonanza interna.

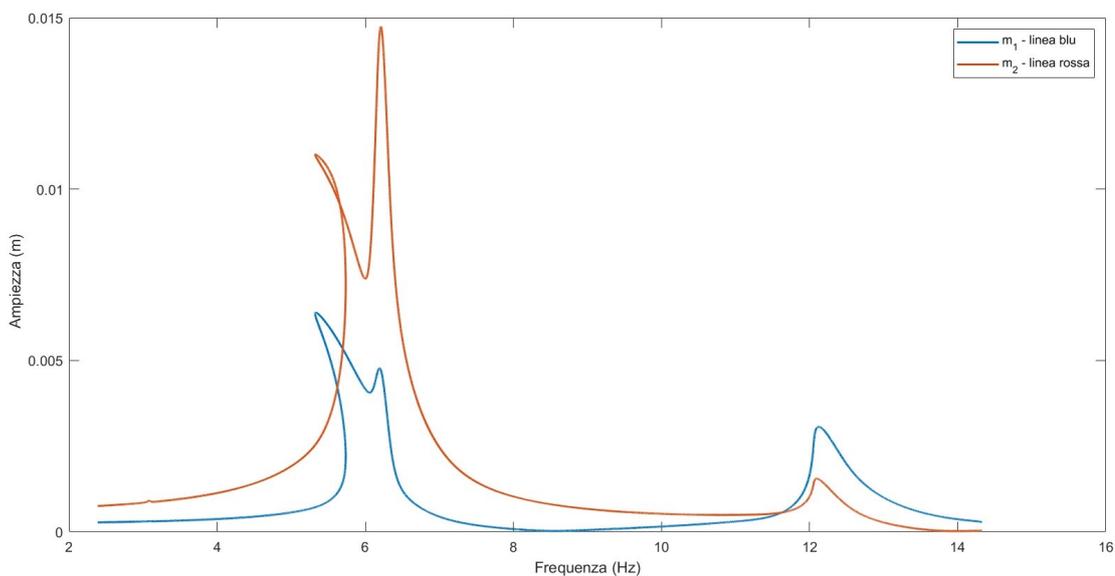


Figura 19: NFRC per  $m_1$  ed  $m_2$ ,  $k_n = 3500 \text{ N/m}^2$ .

In figura 21 si può osservare l'effetto che ha la non linearità sulla curva di risposta in frequenza non lineare per il primo picco di risonanza. Anche in questo caso all'aumentare del coefficiente non lineare  $k_n$  i picchi risultano progressivamente piegati o distorti. Infine in figura 22 sono riportate le NFRC per diversi valori di  $A_b$  con  $k_n = 1500 \text{ N/m}^2$  fissato.

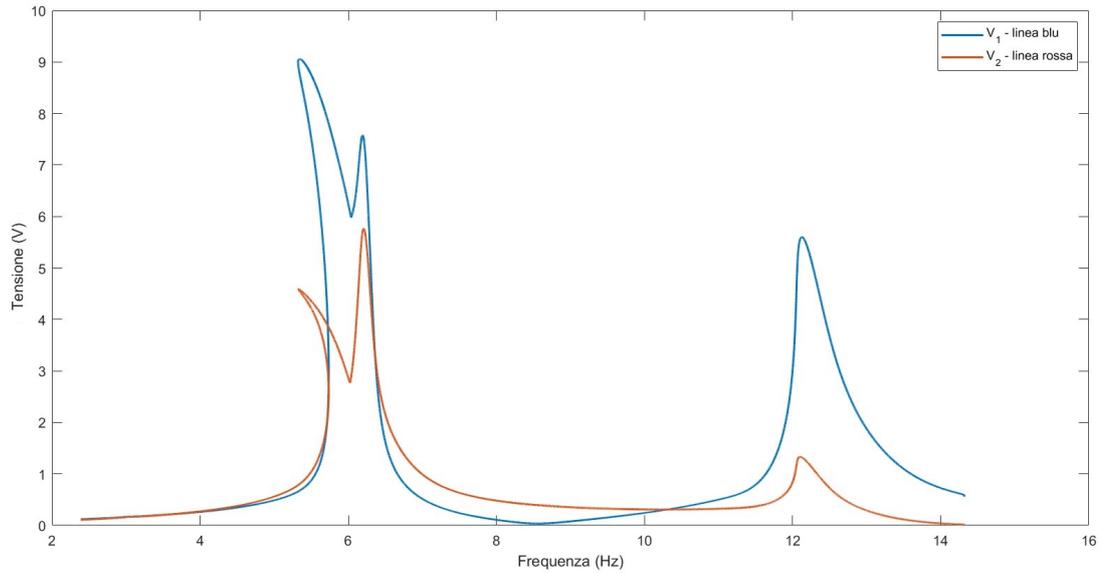


Figura 20: NFRC per  $V_1$  ed  $V_2$ ,  $k_n = 3500 \text{ N/m}^2$ .

## 4 Conclusioni

In questo lavoro si è visto come la presenza di non linearità possa rendere molto efficiente un energy harvester benché di piccole dimensioni. Anche se sottoposto a piccole oscillazioni, l'harvester con non linearità geometriche risponde sotto un'ampia banda di frequenze grazie alla risonanza interna. Si è quindi presentato dapprima il metodo del bilanciamento armonico per lo studio di sistemi meccanici non lineari, per calcolare le soluzioni nel dominio del tempo col metodo di Newton-Raphson e le risposte in frequenza non lineari, grazie a metodi di continuazione numerica pseudo arc-length e Moore-Penrose. Si è inoltre presentata l'analisi della stabilità col metodo degli esponenti di Floquet. Sono forniti risultati numerici per l'energy harvester presentato e per l'oscillatore di Duffing a uno e due gradi di libertà.

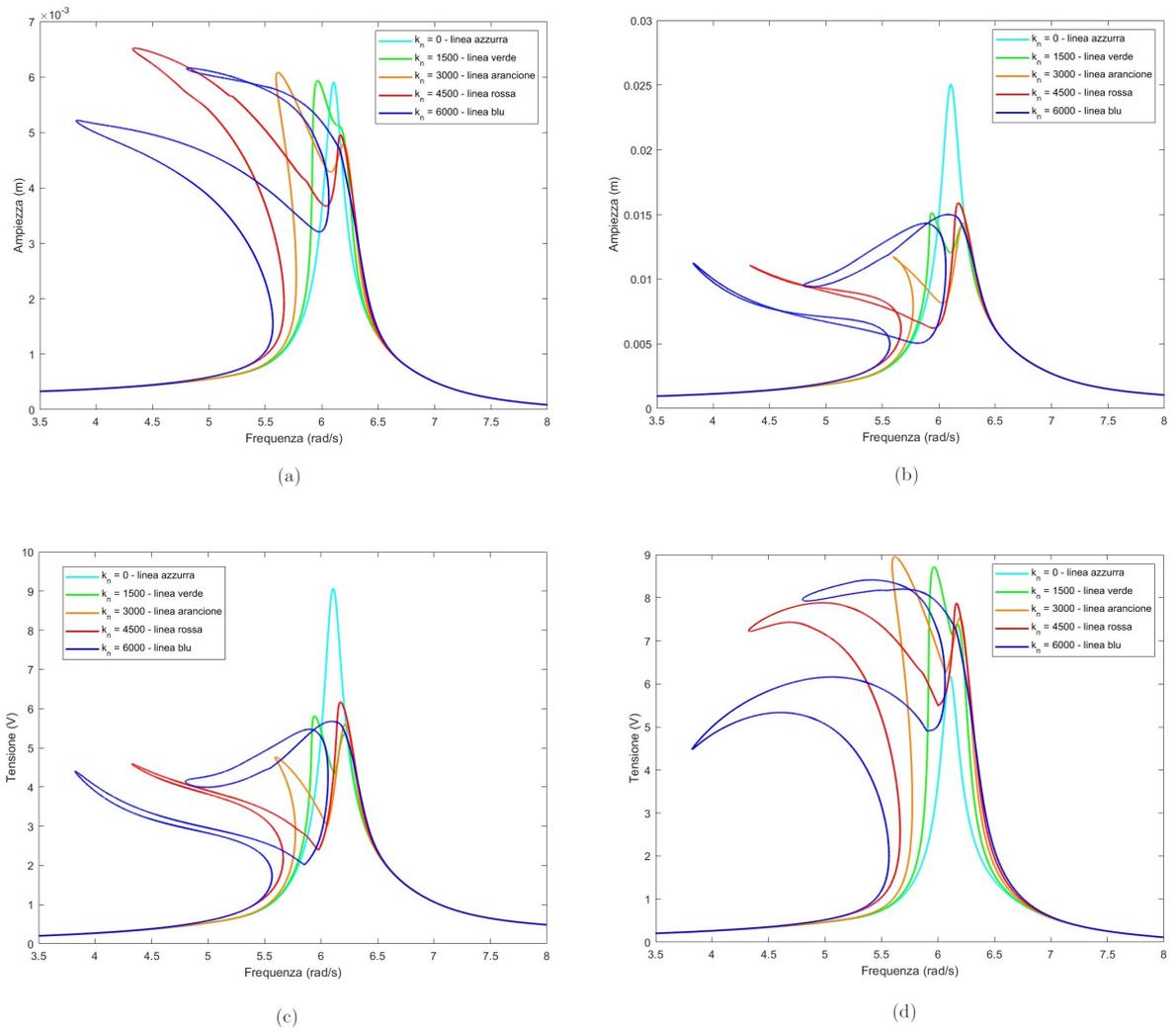
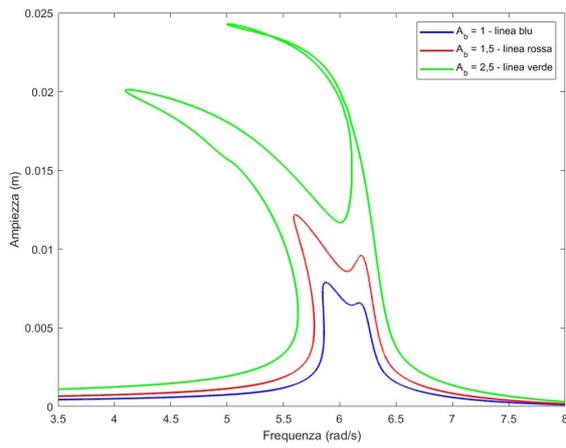
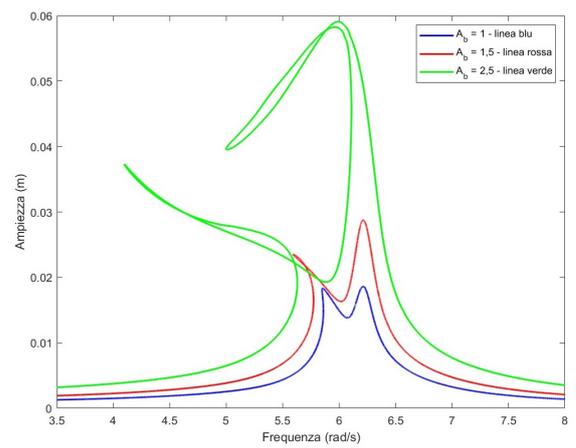


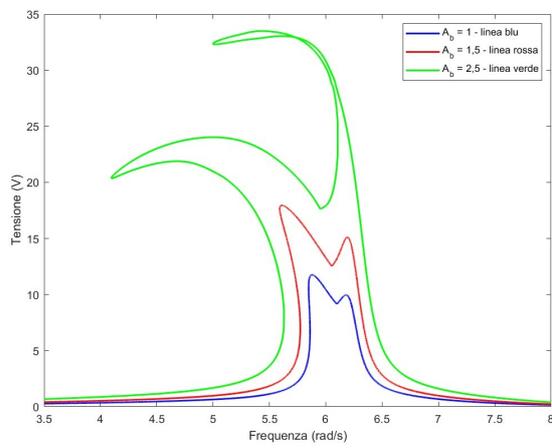
Figura 21: NFRC di (a)  $m_1$ , (b)  $m_2$ , (c)  $V_1$  e (d)  $V_2$  per diversi valori di  $k_n$ .



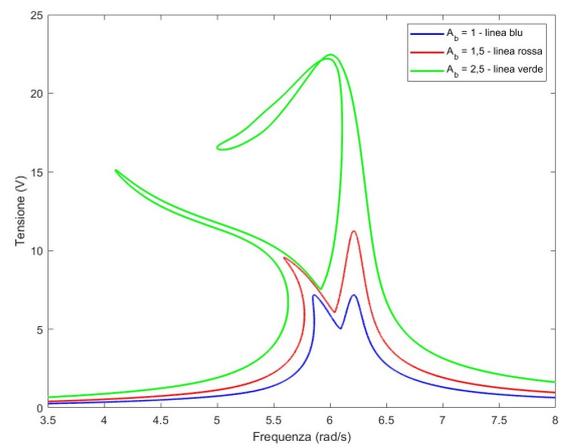
(a)



(b)



(c)



(d)

Figura 22: NFRC di (a)  $m_1$ , (b)  $m_2$ , (c)  $V_1$  e (d)  $V_2$  per diversi valori di  $A_b$ .

## Riferimenti bibliografici

- [1] Thibaut Detroux, PhD Thesis. Université de Liège.
- [2] U. Parlitz, W. Lauterborn (1985) - *Superstructure in bifurcation set of the Duffing equation*. Physics Letters, Vol. 107A, n.8.
- [3] Y. Fan, Y. Zang, M-Q. Niu, L-Q. Chen (2024) - *An internal resonance piezoelectric energy harvester based on geometrical nonlinearities*. Mechanical Systems and Signal Processing, 211, 111176.
- [4] V. Jaumouillé, J-J. Sinou, B. Petitjean (2010) - *An adaptive harmonic balance method for predicting the nonlinear dynamic responses of mechanical systems. Application to bolted structures*. Journal of Sound and Vibration, 2010, 329, pp.4048-4067. 10.1016/j.jsv.2010.04.008. hal-00625097
- [5] T. M. Cameron, J. H. Griffin (1989) - *An Alternating Frequency/Time Domain Method for Calculating the Steady-State Response of Nonlinear Dynamic Systems*. Journal of Applied Mechanics, 1989, 56 (1), pp.149-154.
- [6] L. Xie, S. Baguet, B. Prabel, R. Dufour (2017) - *Bifurcation tracking by Harmonic Balance Method for performance tuning of nonlinear dynamical systems*. Mechanical Systems and Signal Processing 88 (2017) 445–461
- [7] G. von Groll, D. Ewins (2001) - *The Harmonic Balance Method with arc-length continuation in rotor/stator contact problems*. Journal of Sound and Vibration, 2001.
- [8] G. Moore (2005) - *Floquet theory as a computational tool*. SIAM Journal on Numerical Analysis, 42(6):2522–2568, 2005.
- [9] N.M. Krylov, N.N. Bogoliubov (1943) - *Introduction to Non-Linear Mechanics*. Number 11 in Annals of Mathematics Studies. Princeton University Press, Princeton, NJ, 1943.
- [10] M. Urabe (1965) - *Galerkin's procedure for nonlinear periodic systems*. Archive for Rational Mechanics and Analysis, 20(2):120–152, 1965.
- [11] K.S. Kundert, A. Sangiovanni-Vincentelli (1986) - *Simulation of nonlinear circuits in the frequency domain*. IEEE Transactions on Computer-Aided Design of Integrated Circuits and Systems, 5(4):521–535, 1986.
- [12] M. Peeters, R. Vigiúé, G. Sérandour, G. Kerschen, J-C. Golinval (2009) - *Nonlinear normal modes, Part II: Toward a practical computation using numerical continuation techniques*. Mechanical Systems and Signal Processing, 2009, 23 (1), pp.195-216.
- [13] Y. Colaítis, A. Batailly (2021) - *The harmonic balance method with arc-length continuation in blade-tip/casing contact problems*. Journal of Sound and Vibration, 2021, pp.116070.

## **Ringraziamenti**

Ringrazio i miei relatori Stefano Marchesiello e Dario Anastasio per avermi seguito e appassionato nella produzione di questo lavoro.