



**Politecnico
di Torino**

Politecnico di Torino

Corso di Laurea Magistrale in Ingegneria Meccanica

A.a. 2023/2024

Sessione di Laurea Novembre/Dicembre 2024

**Formulazione di elemento piastra per impiego
nella simulazione del contatto tra flangia
cerchione e pneumatico**

Relatori:

Rosso Carlo

Fabbri Daniele

Bruzzone Fabio

Candidato:

Ferraris Gabriele

INDICE

Indice delle figure	ii
1. Introduzione	5
1.1 Contesto	6
1.2 Obiettivi della ricerca	7
1.3 Struttura della tesi	8
2. Revisione della letteratura	9
2.1 Studi precedenti e teorie principali	9
2.2 Studi attuali	20
3. Metodologia	32
3.1 Processo di ricerca	33
3.2 Strumenti e tecniche fondamentali	33
3.3 Analisi dei dati	54
4. Risultati	57
4.1 Presentazione dei risultati	57
4.1.1 Confronto numerico	57
4.1.1.1 Caso 1	57
4.1.1.2 Caso 2	62
4.1.1.3 Caso 3	67
4.1.1.4 Caso 4	71
4.1.1.5 Caso 5	76
4.1.1.6 Caso 6	80
4.1.2 Confronto analitico	84
4.2 Sintesi dei risultati	88
5. Discussione	91
5.1 Analisi dei risultati	91
6. Conclusioni	96
6.1 Implicazioni della ricerca	96
6.2 Limitazioni dello studio	97
6.3 Suggerimenti per future ricerche	97
7. Bibliografia	101
8. Sitografia	103

Indice delle figure

FIGURA 1: ESEMPI DI PNEUMATICO DANNEGGIATO E STALLONAMENTO, "SUNFIRE TIRE SMASHED TO BITS" BY THE DARK THING IS LICENSED UNDER CC BY 2.0.....	7
FIGURA 2: ELEMENTO PIASTRA TRIANGOLARE CON POSIZIONI ARBITRARIE DEI NODI, FONTE MATLAB	10
FIGURA 3: ESEMPI DI PATCH TEST, "PATCH TEST" BY BANERJEE LICENSED UNDER CC BY-SA 2.5.....	13
FIGURA 4: QUADRILATERO ISOPARAMETRICO DI TAIG DESCRITTO DA UN SISTEMA DI COORDINATE NATURALI, FONTE MATLAB	16
FIGURA 5: DOMINIO D'INTEGRAZIONE DA DEL QUADRILATERO DI TAIG CON VISTA IN DETTAGLIO, FONTE MATLAB	18
FIGURA 6: LOGO SOFTWARE MSC NASTRAN, ENGLISH: AS SEEN ON THEIR SOCIAL MEDIA CHANNELS BY TONNY WILLIAMS LICENSED UNDER CC BY-SA 4.0	19
FIGURA 7: CONFIGURAZIONE USATA PER LA PROVA DI SCOPPIO IDROSTATICO, FONTE [14].....	20
FIGURA 8: GRAFICO PRESSIONE VS TEMPO DURANTE PROVA IDROSTATICA, FONTE [14]	21
FIGURA 9: ISPEZIONE AI RAGGI X DELLO PNEUMATICO, FONTE [14]	21
FIGURA 10: SEZIONE DEL MODELLO 3D, FONTE [14].....	22
FIGURA 11: CONDIZIONI AL CONTORNO, FONTE [14]	23
FIGURA 12: MASSIMO STRESS DI VON MISES VS PRESSIONE INTERNA, FONTE [14].....	24
FIGURA 13: DISTRIBUZIONE DELLE TENSIONI DI VON MISES (GPA) E DELLE DEFORMAZIONI PLASTICHE NEL TALLONE A 1,888 MPA (273,83 PSI), FONTE [14]	24
FIGURA 14: SEZIONE DI UNO PNEUMATICO, A SINISTRA: SEZIONE NON DEFORMATA, A DESTRA: SEZIONE DEFORMATA QUANDO VIENE APPLICATA UNA FORZA VERTICALE, FONTE [18].....	25
FIGURA 15: SEZIONE INFINITESIMA DEL FIANCO DELLO PNEUMATICO VISTO COME TRAVE CURVATA, FONTE [18] ...	26
FIGURA 16: DIAGRAMMA DI CORPO LIBERO DI UNA SEZIONE INFINITESIMA DELLA TRAVE CURVATA, FONTE [18]	26
FIGURA 17: INCLINAZIONE DEL PIANO D'AZIONE DELLA FORZA ASSIALE DI PRESSIONE SUL CERCHIO, DEFINITA COME L'INCLINAZIONE DELLA LINEA CHE COLLEGA I PUNTI ESTREMI DELLA PRESSIONE ZONA (ZONA GRIGIO SCURO NELL'AREA DI CONTATTO LATERALE), FONTE [18].....	27
FIGURA 18: FORZE SU UNA SEZIONE DELLO PNEUMATICO QUANDO SI CONSIDERA LA SOLA PRESSIONE INTERNA, FONTE [18]	27
FIGURA 19: SEZIONE TRASVERSALE DEL MODELLO FEM CON DETTAGLIO DELLE COMPONENTI, FONTE [18].....	28
FIGURA 20: SEZIONE TRASVERSALE DEL MODELLO 2D ASSIALSIMMETRICO SOTTOPOSTO A PRESSIONE DI GONFIAGGIO, FONTE [18]	29
FIGURA 21: MODELLO TRIDIMENSIONALE DELLO PNEUMATICO, FONTE [18]	29
FIGURA 22: CONFRONTO TRA I RISULTATI DEL MODELLO FEM E QUELLI SPERIMENTALI DATI PER QUATTRO DIVERSE PRESSIONI DI GONFIAGGIO: 2,1, 2,5, 3 E 4,5 BAR, FONTE [18]	30
FIGURA 23: FORZE DI REAZIONE SUL CERCHIO CALCOLATE DAL MODELLO FEM E DAL MODELLO ANALITICO PER DUE PRESSIONI DI GONFIAGGIO (2,5 E 4,5 BAR) E CARICO VERTICALE DI 8750 N, FONTE [18].....	30
FIGURA 24: FORZE DI REAZIONE SUL CERCHIO CALCOLATE DAL MODELLO FEM E DAL MODELLO ANALITICO A 8750 N (SOPRA) E 12700 N (SOTTO) ALLA STESSA PRESSIONE DI GONFIAGGIO (4,5 BAR), FONTE [18]	31
FIGURA 25: ELEMENTO A TRAVE DESCRITTO DA MACNEAL, FONTE MATLAB	34
FIGURA 26: GEOMETRIA E SISTEMA DI RIFERIMENTO DELL'ELEMENTO CQUAD4, FONTE MATLAB.....	38
FIGURA 27: DIFFERENZA TRA BARICENTRO E INTERSEZIONE DELLE DIAGONALI PER UN CQUAD4 DEFORMATO, FONTE MATLAB	39
FIGURA 28: VISUALIZZAZIONE GRAFICA DI UN ELEMENTO CQUAD4 CON SISTEMA DI RIFERIMENTO NEL PUNTO DI INTERSEZIONE DELLE DIAGONALI, FONTE MATLAB	40
FIGURA 29: MODELLO CAD DEL PROIETTILE, FONTE SOLIDWORKS	41
FIGURA 30: MESH 3D PER MODELLO CAD PROIETTILE, FONTE GMSH	41
FIGURA 31: MODELLO CAD DELLO PNEUMATICO, FONTE SOLIDWORKS	42
FIGURA 32: MESH 3D PER MODELLO CAD PNEUMATICO, FONTE GMSH.....	42
FIGURA 33: PIAZZAMENTO DEI PUNTI PER SOTTOINTEGRAZIONE 2X1 DEL TAGLIO TRASVERSALE, FONTE MATLAB	51
FIGURA 34: ESEMPIO DI FILE .BDF DI INPUT A MSC NASTRAN, FONTE MSC NASTRAN.....	55
FIGURA 35: FILE .BDF DEL CASO 1, FONTE MSC NASTRAN.....	58

FIGURA 36: RISULTATI DEL CASO 1 IN TERMINI DI SPOSTAMENTI, FONTE MSC NASTRAN	58
FIGURA 37: RISULTATI DEL CASO 1 IN TERMINI DI STRESS, FONTE MSC NASTRAN	59
FIGURA 38: RISULTATI DEL CASO 1 IN TERMINI DI SPOSTAMENTI, FONTE COFE	59
FIGURA 39: RISULTATI DEL CASO 1 IN TERMINI DI STRESS, FONTE COFE	59
FIGURA 40: CONFRONTO DEI RISULTATI DEL CASO 1 CON ERRORE MEDIO	59
FIGURA 41: MATRICE DI RIGIDEZZA DEL CASO 1, FONTE MSC NASTRAN.....	60
FIGURA 42: MATRICE DI RIGIDEZZA DEL CASO 1, FONTE COFE	61
FIGURA 43: FILE .BDF DEL CASO 2, FONTE MSC NASTRAN.....	62
FIGURA 44: RISULTATI DEL CASO 2 IN TERMINI DI SPOSTAMENTI, FONTE MSC NASTRAN	63
FIGURA 45: RISULTATI DEL CASO 2 IN TERMINI DI STRESS, FONTE MSC NASTRAN	63
FIGURA 46: RISULTATI DEL CASO 2 IN TERMINI DI SPOSTAMENTI, FONTE COFE	63
FIGURA 47: RISULTATI DEL CASO 2 IN TERMINI DI STRESS, FONTE COFE	63
FIGURA 48: CONFRONTO DEI RISULTATI DEL CASO 2 CON ERRORE MEDIO	64
FIGURA 49: MATRICE DI RIGIDEZZA DEL CASO 2, FONTE MSC NASTRAN.....	65
FIGURA 50: MATRICE DI RIGIDEZZA DEL CASO 2, FONTE COFE	66
FIGURA 51: FILE .BDF DEL CASO 3, FONTE MSC NASTRAN.....	67
FIGURA 52: RISULTATI DEL CASO 3 IN TERMINI DI SPOSTAMENTI, FONTE MSC NASTRAN	67
FIGURA 53: RISULTATI DEL CASO 3 IN TERMINI DI STRESS, FONTE MSC NASTRAN	68
FIGURA 54: RISULTATI DEL CASO 3 IN TERMINI DI SPOSTAMENTI, FONTE COFE	68
FIGURA 55: RISULTATI DEL CASO 3 IN TERMINI DI STRESS, FONTE COFE	68
FIGURA 56: CONFRONTO DEI RISULTATI DEL CASO 3 CON ERRORE MEDIO	68
FIGURA 57: MATRICE DI RIGIDEZZA DEL CASO 3, FONTE MSC NASTRAN.....	69
FIGURA 58: MATRICE DI RIGIDEZZA DEL CASO 3, FONTE COFE	70
FIGURA 59: FILE .BDF DEL CASO 4, FONTE MSC NASTRAN.....	71
FIGURA 60: RISULTATI DEL CASO 4 IN TERMINI DI SPOSTAMENTI, FONTE MSC NASTRAN	72
FIGURA 61: RISULTATI DEL CASO 4 IN TERMINI DI STRESS, FONTE MSC NASTRAN	72
FIGURA 62: RISULTATI DEL CASO 4 IN TERMINI DI SPOSTAMENTI, FONTE COFE	72
FIGURA 63: RISULTATI DEL CASO 4 IN TERMINI DI STRESS, FONTE COFE	72
FIGURA 64: CONFRONTO DEI RISULTATI DEL CASO 4 CON ERRORE MEDIO	73
FIGURA 65: MATRICE DI RIGIDEZZA DEL CASO 4, FONTE MSC NASTRAN.....	74
FIGURA 66: MATRICE DI RIGIDEZZA DEL CASO 4, FONTE COFE	75
FIGURA 67: FILE .BDF DEL CASO 5, FONTE MSC NASTRAN.....	76
FIGURA 68: RISULTATI DEL CASO 5 IN TERMINI DI SPOSTAMENTI, FONTE MSC NASTRAN	77
FIGURA 69: RISULTATI DEL CASO 5 IN TERMINI DI STRESS, FONTE MSC NASTRAN	77
FIGURA 70: RISULTATI DEL CASO 5 IN TERMINI DI SPOSTAMENTI, FONTE COFE.....	77
FIGURA 71: RISULTATI DEL CASO 5 IN TERMINI DI STRESS, FONTE COFE	77
FIGURA 72: CONFRONTO DEI RISULTATI DEL CASO 5 CON ERRORE MEDIO	77
FIGURA 73: MATRICE DI RIGIDEZZA DEL CASO 5, FONTE MSC NASTRAN.....	78
FIGURA 74: MATRICE DI RIGIDEZZA DEL CASO 5, FONTE COFE	79
FIGURA 75: FILE .BDF DEL CASO 6, FONTE MSC NASTRAN.....	80
FIGURA 76: RISULTATI DEL CASO 6 IN TERMINI DI SPOSTAMENTI, FONTE MSC NASTRAN	81
FIGURA 77: RISULTATI DEL CASO 6 IN TERMINI DI STRESS, FONTE MSC NASTRAN	81
FIGURA 78: RISULTATI DEL CASO 6 IN TERMINI DI SPOSTAMENTI, FONTE COFE	81
FIGURA 79: RISULTATI DEL CASO 6 IN TERMINI DI STRESS, FONTE COFE	81
FIGURA 80: CONFRONTO DEI RISULTATI DEL CASO 6 CON ERRORE MEDIO	81
FIGURA 81: MATRICE DI RIGIDEZZA DEL CASO 6, FONTE MSC NASTRAN.....	82
FIGURA 82: MATRICE DI RIGIDEZZA DEL CASO 6, FONTE COFE	83
FIGURA 83: CONDIZIONE SPECIFICA DELLA SOLUZIONE DI TIMOSHENKO, FONTE MATLAB	84
FIGURA 84: VALORI DEI COEFFICIENTI IN FUNZIONE DEL RAPPORTO B/A.....	85
FIGURA 85: CARATTERISTICHE DELLA PIASTRA QUADRATA DI TIMOSHENKO	85
FIGURA 86: FILE .BDF DELLA PIASTRA QUADRATA CON MESH 4x4, FONTE MSC NASTRAN.....	86
FIGURA 87: PIASTRA QUADRATA 4x4 CON CONDIZIONI AL CONTORNO, FONTE HYPERMESH	87

FIGURA 88: CONFRONTO DELLA DEFORMATA TRA TIMOSHENKO, NASTRAN E COFE PER UNA PIASTRA CON MESH 4x4	87
FIGURA 89: CONFRONTO NUMERICO PER UNO SPESSORE DI 0.1 MM.....	88
FIGURA 90: CONFRONTO NUMERICO PER UNO SPESSORE DI 1 MM.....	88
FIGURA 91: CONFRONTO NUMERICO PER UNO SPESSORE DI 2 MM.....	89
FIGURA 92: CONFRONTO NUMERICO PER UNO SPESSORE DI 5 MM.....	89
FIGURA 93: CONFRONTO ANALITICO PER PIASTRA 2x2	89
FIGURA 94: CONFRONTO ANALITICO PER PIASTRA 4x4	90
FIGURA 95: CONFRONTO ANALITICO PER PIASTRA 6x6	90
FIGURA 96: CONFRONTO ANALITICO PER PIASTRA 8x8	90
FIGURA 97: CONFRONTO ANALITICO PER PIASTRA 12x12	90
FIGURA 98: ANDAMENTO DEGLI ERRORI RISPETTO A MSC NASTRAN PER SPESSORE 0.1 MM, FONTE MATLAB ...	91
FIGURA 99: ANDAMENTO DEGLI ERRORI RISPETTO A MSC NASTRAN PER SPESSORE 1 MM, FONTE MATLAB	91
FIGURA 100: ANDAMENTO DEGLI ERRORI RISPETTO A MSC NASTRAN PER SPESSORE 2 MM, FONTE MATLAB	92
FIGURA 101: ANDAMENTO DEGLI ERRORI RISPETTO A MSC NASTRAN PER SPESSORE 5 MM, FONTE MATLAB	92
FIGURA 102: CONFRONTO DEFORMATA TIMOSHENKO VS NASTRAN, FONTE MATLAB	93
FIGURA 103: CONFRONTO DEFORMATA TIMOSHENKO VS COFE, FONTE MATLAB.....	94
FIGURA 104: ESEMPIO DI RAFFINAMENTO LOCALE DELLA MESH DI UNA PIASTRA, FONTE GMSH.....	95

1. Introduzione

L'analisi di contatto non lineare tra la flangia della ruota ed il fianco dello pneumatico è un problema complesso che coinvolge vari aspetti della meccanica del contatto e della deformazione dei materiali. Lo studio si basa su una combinazione di teorie differenti e fondamentali per descrivere correttamente la risposta delle superfici coinvolte.

Il contatto tra la flangia ed il fianco dello pneumatico presenta un comportamento non lineare, che è dovuto anche per via della diversa natura dei materiali coinvolti; generalmente, lo pneumatico viene realizzato in gomma e segue un modello elastico non lineare, che presenta grandi deformazioni se caricato.

Questo tipo di materiale è definito iperelastico e richiede l'uso di teorie avanzate, come quelle di Mooney-Rivlin o Ogden, per descrivere accuratamente la sua risposta sotto sollecitazioni elevate.

La meccanica del contatto risulta spesso descritta, almeno inizialmente, dalla teoria di Hertz, ma in questa situazione deve essere modificata, siccome si registrano significative deformazioni non trascurabili; inoltre, è fondamentale considerare come l'attrito tra le due superfici, che può variare in funzione di numerosi parametri (ad esempio le condizioni di carico e di movimento relativo) e che viene spesso modellato secondo la legge di Coulomb, influisca sulla distribuzione delle forze di contatto e sulle sollecitazioni interne al sistema.

L'analisi risulta ulteriormente complessa se si tiene conto dell'instabilità nel contatto, soprattutto in presenza di carichi dinamici: in queste condizioni, infatti, possono verificarsi scorrimenti parziali tra le superfici o, nei casi più estremi, il contatto può interrompersi, generando una rottura locale, che ha un impatto significativo sulle prestazioni complessive della ruota e sulla sicurezza del sistema.

Al fine di affrontare in modo migliore la complessità del modello, il Metodo degli Elementi Finiti viene spesso utilizzato per simulare il comportamento del sistema in modo dettagliato; grazie a questo approccio, è possibile modellare la geometria complessa e il comportamento non lineare dei materiali, prevedendo con precisione la distribuzione delle forze di contatto, le deformazioni e le sollecitazioni in diverse condizioni di carico.

In sintesi, l'analisi di contatto non lineare tra la flangia della ruota e il fianco dello pneumatico si basa su un intreccio di concetti relativi alla meccanica del contatto, all'iperelasticità dei materiali e all'attrito, con l'obiettivo di descrivere accuratamente il comportamento del sistema e le interazioni tra le sue componenti.

Nel campo dell'ingegneria strutturale e meccanica contemporanea, una delle tecniche di simulazione più efficaci e flessibili è l'analisi agli elementi finiti (FEA, *Finite Element Analysis* in inglese).

Questo approccio si basa su un sofisticato algoritmo di calcolo, noto come metodo agli elementi finiti (FEM, *Finite Element Method* in inglese), che permette di risolvere problemi fisici complessi ed affrontare diverse sfide di progettazione ed ottimizzazione.

Il principale scopo del metodo FEM è fornire una soluzione discreta ed approssimata a sistemi di equazioni alle derivate parziali (PDEs, *Partial Differential Equations* in inglese), utilizzando la discretizzazione di domini continui in elementi più semplici; tale processo mira alla definizione di una mesh, ossia la somma comprensiva di tutti i sottodomini o elementi finiti.

Nel caso di un problema non più lineare, tuttavia, la complessità dell'analisi aumenta in modo significativo: numerosi fattori (proprietà del materiale, condizioni di contorno, comportamento geometrico del sistema ecc.) possono dar origine a delle non linearità e si rende necessario l'impiego di metodologie avanzate al fine di ottenere risultati concreti ed affidabili.

1.1 Contesto

Nell'ambito odierno, esistono molti software adatti all'analisi agli elementi finiti, sia gratuiti sia commerciali, che seguono un processo suddiviso in tre fasi principali: pre-processing, processing e post-processing.

Nel pre-processing, si costruisce il modello, che viene definito sulla base del tipo di analisi (statica, dinamica, termica, lineare o non lineare), degli elementi finiti (piani o tridimensionali, polinomiali lineari o quadratici, ecc.), dei parametri dei materiali, del reticolo di nodi e delle relative condizioni di vincolo e carico.

Durante il processing, si esegue l'analisi vera e propria e si risolve il problema agli elementi finiti.

Infine, il post-processing elabora e rappresenta i risultati, sia nelle grandezze fondamentali ottenute direttamente dal metodo FEM (come spostamenti e tensioni), sia nelle grandezze derivate rilevanti per la fisica del problema. I software commerciali spesso utilizzano interfacce grafiche per facilitare l'interazione con l'utente durante il pre-processing ed il post-processing.

L'analisi agli elementi finiti presenta numerosi vantaggi, tra cui la capacità di gestire problemi su geometrie complesse, che rappresenta il punto di forza dei metodi FEM. Quest'ultimi, infatti, sono utilizzabili per una vasta gamma di questioni ingegneristiche, come la meccanica dei solidi e dei fluidi, il trasferimento di calore, l'elettrostatica ed altro ancora; inoltre, i metodi FEM consentono di affrontare efficacemente condizioni di vincolo complicate e situazioni di carico articolate.

Gli svantaggi dell'analisi comprendono l'impossibilità di ottenere soluzioni esplicite e parametrizzabili, errori derivanti dalla discretizzazione e dall'interpolazione (intrinseci al metodo agli elementi finiti) ed approssimazioni numeriche nei calcoli degli integrali; inoltre, si possono verificare problemi di precisione computazionale e difficoltà nella gestione di numeri molto grandi o molto piccoli, nonché potenziali errori di modellizzazione.

Lo studio del contatto non lineare tra componenti meccaniche è un tema di rilevante interesse in molte applicazioni ingegneristiche, tra cui l'industria automobilistica. In particolare, questo lavoro si sofferma sull'analisi del comportamento di contatto tra la flangia della ruota ed il fianco dello pneumatico.

Il problema del contatto tra questi componenti è intrinsecamente non lineare, a causa della complessità delle geometrie utilizzate, delle proprietà del materiale e delle condizioni di carico variabili.

In primo luogo, è importante considerare la natura non lineare dei materiali coinvolti: il fianco dello pneumatico, solitamente costituito da gomma o materiali compositi, mostra proprietà iperelastiche che variano significativamente con l'applicazione di carichi, mentre la flangia della ruota, generalmente realizzata in acciaio o alluminio, può presentare un comportamento non lineare sotto condizioni di stress intenso; per tale motivo, un'analisi non lineare consente di modellare in modo accurato le sollecitazioni e le deformazioni, tenendo conto delle specifiche caratteristiche meccaniche dei materiali.

Un'altra ragione cruciale riguarda le ampie deformazioni che si registrano durante l'utilizzo, in particolare in situazioni di carichi elevati o dinamiche: durante il contatto tra flangia e fianco, tali deformazioni possono assumere valori notevoli e non proporzionali ai carichi applicati, richiedendo quindi un approccio non lineare al problema.

La complessità dell'interazione flangia-fianco è un ulteriore elemento chiave: il contatto è dinamico, variabile e influenzato da numerosi parametri (attrito, usura, movimenti relativi, ecc.).

Tali fenomeni non possono essere adeguatamente descritti attraverso un'analisi di tipo lineare, poiché il comportamento del contatto stesso può mutare nel tempo e provocare effetti instabili, come il distacco del tallone dello pneumatico (in inglese *bead unseating*).



Figura 1: esempi di pneumatico danneggiato e stallamento, "Sunfire Tire Smashed to Bits" by [TheDarkThing](#) is licensed under [CC BY 2.0](#).

L'analisi di contatto di questo tipo è fondamentale in termini di sicurezza e affidabilità, poiché permette non solo di prevedere e valutare le prestazioni del sistema ruota-pneumatico in condizioni estreme, ma anche di identificare i punti di massimo stress e le potenziali zone di danneggiamento. In conclusione, questo studio rappresenta uno strumento utile per l'ottimizzazione del design: grazie alla sua precisione nel simulare le condizioni reali di contatto, è possibile perfezionare numerosi aspetti (forma della flangia, composizione dei materiali, spessore del fianco dello pneumatico ecc.) e contribuire ad ottenere prestazioni migliori e maggiore sicurezza complessiva.

1.2 Obiettivi della ricerca

L'obiettivo di questo lavoro è quello di sviluppare un modello FEM che, in futuro, consenta di simulare e analizzare le dinamiche di contatto tra la flangia della ruota ed il fianco dello pneumatico, partendo da un codice di calcolo MATLAB precedentemente realizzato [1], a sua volta basato su un elemento finito appartenente alla libreria del software commerciale MSC NASTRAN.

I risultati ottenuti forniranno utili indicazioni per la progettazione di componenti più sicuri e resistenti, contribuendo all'avanzamento delle conoscenze nel campo della dinamica del contatto ruota-pneumatico.

1.3 Struttura della tesi

La presente tesi è suddivisa in sei capitoli, ognuno dei quali approfondisce un aspetto specifico del problema affrontato.

Nel primo capitolo viene presentato l'argomento di ricerca, con una panoramica sul contesto, le motivazioni e gli obiettivi del lavoro.

Il secondo capitolo offre una rassegna del quadro teorico e delle basi concettuali, delineando i principali approcci presenti nella letteratura.

Successivamente, nel terzo capitolo, viene illustrata la metodologia di ricerca adottata, con una descrizione dettagliata degli strumenti utilizzati per la raccolta dei dati e delle tecniche di analisi impiegate.

Il quarto capitolo analizza i risultati, evidenziando i principali trend ed i dati più significativi emersi dallo studio.

Nel quinto capitolo, vengono discussi ed interpretati i risultati della validazione numerica ed analitica e si presta particolare attenzione alle implicazioni teoriche e pratiche.

Infine, l'ultimo capitolo presenta le conclusioni generali, sottolinea le implicazioni sia teoriche sia pratiche della ricerca, descrive le limitazioni dello studio e propone alcuni suggerimenti per futuri sviluppi.

2. Revisione della letteratura

La revisione della letteratura riguardante lo sviluppo e la diffusione del metodo FEM, così come la sua applicazione nelle analisi di contatto non lineari tra flangia e fianco dello pneumatico, mette in luce la rilevanza di questo campo di studio e fornisce una panoramica completa delle ricerche precedenti, utile per inquadrare il lavoro rispetto alle tendenze attuali; inoltre, si sottolinea la necessità di condurre ricerche più approfondite per ottenere simulazioni più precise ed affidabili.

Negli ultimi anni, la tecnica FEM si è imposta come uno strumento indispensabile per affrontare problemi complessi, in particolare nel contesto delle interazioni non lineari, dove, a causa di deformazioni elevate, della plasticità dei materiali e di fenomeni di contatto dinamico, si richiede l'utilizzo di simulazioni avanzate ed esose dal punto di vista computazionale.

Numerosi studi hanno confermato l'efficacia del metodo agli elementi finiti nell'esaminare comportamenti meccanici complessi, soprattutto in situazioni di contatto tra superfici curve o sotto carichi estremi; tuttavia, l'analisi del contatto non lineare presenta difficoltà specifiche, come la modellazione precisa delle superfici irregolari, l'attrito e le deformazioni plastiche e, sebbene la letteratura abbia suggerito varie metodologie per affrontare tali sfide, persistono alcune limitazioni.

In conclusione, si riportano due recenti studi in merito all'analisi dettagliata del contatto tra flangia e fianco dello pneumatico e se ne discutono i risultati principali: in generale, questi lavori suggeriscono una sempre più crescente attenzione allo specifico ambito di ricerca ed offrono molteplici spunti per eventuali sviluppi successivi.

2.1 Studi precedenti e teorie principali

Le origini del metodo FEM risalgono agli anni 1930-35 con le pubblicazioni di A. R. Collar e W. J. Duncan [2], i quali introdussero un primitivo elemento strutturale per risolvere un problema di aeroelasticità [3, 4] e posero delle solide basi a quello che, in seguito, sarebbe stato denominato come calcolo matriciale di strutture (MSA, dall'inglese *Matrix Structural Analysis*); nel 1938, insieme a R. A. Frazer, pubblicarono i risultati dei propri lavori all'interno di una prima opera [5].

Al termine della Seconda Guerra Mondiale, l'attenzione della comunità scientifica virò dalla natura dinamica a quella statica di un problema ed alcuni studi in merito alle sollecitazioni, all'instabilità, alla frattura ed alla fatica divennero molto più frequenti.

Durante il successivo decennio, grazie al lancio sul mercato dei primi computer ed all'introduzione di innovativi modelli matematici, fu possibile attuare una transizione da approccio MSA a metodo FEM.

In merito a tale processo, fu cruciale il contributo fornito da J. J. Argyris, il quale presentò una formulazione in grado di unificare il metodo delle forze ed il metodo degli spostamenti (FDM, dall'inglese *Force and Displacement Method*), sistematizzando il concetto di assemblaggio delle equazioni di sistemi strutturali a partire da quelle dei componenti elementari [6].

Solitamente, il metodo delle forze viene impiegato nel calcolo di strutture isostatiche o iperstatiche in cui le forze interne possono essere ottenute soltanto mediante equazioni di compatibilità, mentre il metodo degli spostamenti risulta utile nell'analisi di strutture complesse (ad esempio travi o griglie) ed è considerato alla base del metodo FEM.

In quest'ultimo, infatti, le incognite principali sono gli spostamenti nodali e si risolvono le equazioni di equilibrio al fine di ricavare le deformazioni e le forze interne.

L'equazione di equilibrio del metodo FDM risulta essere la seguente:

$$[k]\{u\} = \{f\} \quad (1)$$

In cui:

- $[k]$, matrice di rigidezza (di stiffness) del sistema, contiene dati sulla geometria e sulle proprietà del materiale degli elementi;
- $\{u\}$, vettore degli spostamenti nodali (incognite);
- $\{f\}$, vettore delle forze nodali applicate.

Durante gli anni '50 del secolo scorso, parallelamente ad un poderoso sviluppo nel settore dell'aviazione, crebbe l'interesse nei confronti della modellazione di strutture a forma di ali a delta. Questo processo richiedeva l'utilizzo di elementi piastra bidimensionali di forma arbitraria, di cui quella triangolare spiccava per semplicità e versatilità. Tra le numerose pubblicazioni in merito, risultò di fondamentale importanza l'opera di M. J. Turner, R. W. Clough, H. C. Martin e L. J. Topp [7], poiché in essa veniva dimostrata una tecnica che permetteva di derivare direttamente la matrice di rigidezza dell'elemento triangolare, indipendentemente dalla posizione dei nodi.

Triangolo con posizioni arbitrarie dei nodi

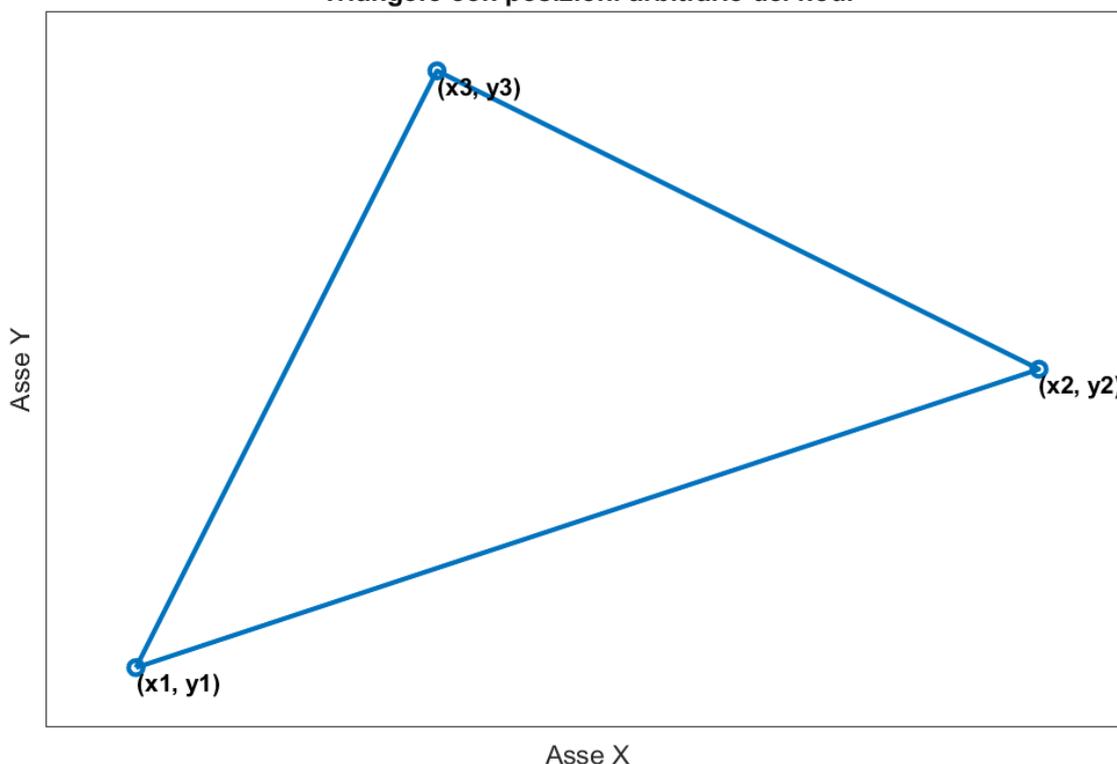


Figura 2: elemento piastra triangolare con posizioni arbitrarie dei nodi, fonte MATLAB

Di seguito, si riporta la matrice di rigidezza $[k]$ per un elemento piastra triangolare con nodi posizionati in modo arbitrario:

$$[k] = \frac{Et}{2} \phi \begin{bmatrix} \lambda_1 x_{23}^2 + y_{23}^2 & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ \lambda_2 x_{32} y_{23} & x_{23}^2 + \lambda_1 y_{23}^2 & \dots & \dots & \dots & \dots \\ \lambda_1 x_{23} x_{31} + y_{23} y_{31} & \lambda_1 x_{13} y_{23} + v x_{32} y_{31} & \lambda_1 x_{31}^2 + y_{31}^2 & \dots & \dots & \dots \\ \lambda_1 x_{32} y_{31} + v x_{13} y_{23} & x_{23} x_{31} + \lambda_1 y_{23} y_{31} & \lambda_2 x_{13} y_{31} & x_{31}^2 + \lambda_1 y_{31}^2 & \dots & \dots \\ \lambda_1 x_{12} x_{23} + y_{12} y_{23} & \lambda_1 x_{21} y_{23} + v x_{32} y_{12} & \lambda_1 x_{12} x_{31} + y_{12} y_{31} & \lambda_1 x_{21} y_{31} + v x_{13} y_{12} & \lambda_1 x_{12}^2 + y_{12}^2 & \dots \\ \lambda_1 x_{32} y_{12} + v x_{21} y_{23} & x_{12} x_{23} + \lambda_1 y_{23} y_{31} & \lambda_1 x_{13} y_{12} + v x_{32} y_{12} & x_{12} x_{31} + \lambda_1 y_{12} y_{31} & \lambda_2 x_{21} y_{12} & x_{12}^2 + \lambda_1 y_{12}^2 \end{bmatrix} \quad (2)$$

Dove:

$$\phi = \frac{1/(1 - \nu^2)}{|x_{21}y_3 + x_{13}y_2 + x_{32}y_1|} \quad (3)$$

$$x_{ij} = x_i - x_j \quad (4)$$

$$\lambda_1 = \frac{1 - \nu}{2} \quad (5)$$

$$\lambda_2 = \frac{1 + \nu}{2} \quad (6)$$

In particolare:

- E , modulo di Young (di elasticità);
- t , spessore della piastra;
- ν , coefficiente di Poisson.

Nel 1959, lo stesso M. J. Turner, brillante matematico ed ingegnere aeronautico statunitense a capo dell'Unità di Dinamica Strutturale presso la Boeing di Seattle, pubblicò il primo articolo riguardante il DSM (dall'inglese *Direct Stiffness Method*), ossia un'implementazione informatica generale ed efficiente del primitivo metodo degli elementi finiti FEM [8].

Tre anni più tardi, insieme a H. C. Martin e R. C. Weikel [9], venne pubblicata un'opera più aggiornata, al cui interno si trova una trattazione completa e chiara della tecnica DSM, che comprende anche modelli strutturali e continui, nonché simulazioni di varia natura (non lineari, di stabilità e dinamiche).

In generale, questo metodo si basa sulla modellazione di strutture complesse come insiemi di elementi collegati tra loro da nodi; ciascun componente gode di una propria matrice di rigidezza, che ne indica il comportamento a fronte di forze o momenti applicati e che, assemblata insieme a quelle di tutti gli altri elementi, restituisce la matrice di rigidezza globale dell'intero sistema.

Tale matrice indica nel dettaglio la relazione tra le forze applicate ai nodi ed i loro spostamenti:

$$\{F_e\} = [k_e]\{u_e\} \quad (7)$$

Dove:

- $\{F_e\}$, vettore delle forze applicate ai nodi dell'elemento e ;
- $[k_e]$, matrice di rigidezza dell'elemento e ;
- $\{u_e\}$, vettore degli spostamenti dei nodi dell'elemento e .

$$[K] = \sum_e [T_e]^T [k_e] [T_e] \quad (8)$$

In cui:

- $[K]$, matrice di rigidezza globale;

- $[T_e]$, matrice di trasformazione che mappa i gradi di libertà dei singoli elementi a quelli del sistema globale.

L'equazione di equilibrio, fondamentale per ottenere gli spostamenti nodali, è equivalente alla (1):

$$[K]\{U\} = \{F\} \quad (9)$$

Dove:

- $\{U\}$, vettore degli spostamenti nodali globali;
- $\{F\}$, vettore delle forze nodali esterne applicate al sistema.

Da sopra, risolvendo il sistema di equazioni lineari, si ricava il vettore $\{U\}$ degli spostamenti nodali del sistema:

$$\{U\} = [K]^{-1}\{F\} \quad (10)$$

Sostituendo tale risultato nell'equazione (7), si ottiene il vettore $\{F_e\}$ delle sollecitazioni interne negli elementi.

In sintesi, il metodo DSM risulta:

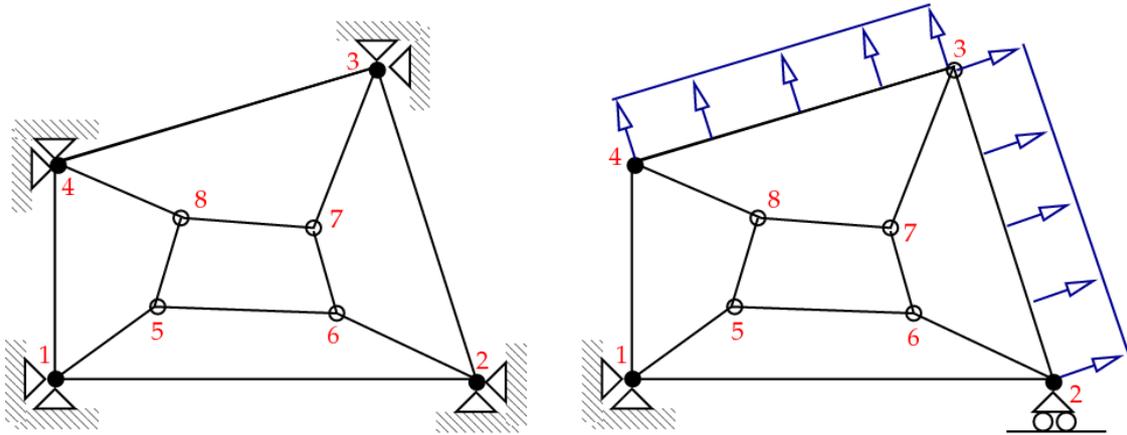
- versatile, poiché applicabile ad una vasta gamma di strutture complesse;
- automatizzabile, siccome è di facile implementazione nei software di calcolo strutturale ed è uno dei metodi più impiegati nella moderna ingegneria;
- efficiente, in quanto fornisce accurate soluzioni per strutture in svariate condizioni di carico e di vincolo.

Negli anni successivi, tale tecnica divenne sempre più popolare e, entro il 1970, sostituì completamente quella classica delle forze CFM (dall'inglese *Classical Force Method*), divenendo la tecnologia d'implementazione favorita nei codici FEM usati per la produzione.

Un altro contributo fondamentale nello sviluppo del metodo FEM è stato dato da B. M. Irons, al quale si attribuisce l'introduzione del patch test, del risolutore frontale e degli elementi isoparametrici [10]. Il patch test è un indicatore di qualità dell'elemento finito e misura la riproducibilità di una soluzione nota in modo esatto e senza errori.

In meccanica, di solito, tale soluzione esatta consiste in spostamenti che variano nello spazio come funzioni lineari a tratti ed è detta soluzione a deformazione costante.

La prova si applica suddividendo l'elemento finito in una patch di diversi sottoelementi di geometria arbitraria; tale griglia viene sottoposta ad uno stato di tensione costante a piacere ed i nodi al contorno sono soggetti a condizioni coerenti con gli stress imposti.



(a) Standard Patch Test

(b) Patch Test with Stability Check.

Figura 3: esempi di patch test, "Patch test" by Banerjee licensed under CC BY-SA 2.5

Il risolutore frontale, la cui nascita viene fatta generalmente risalire ai lavori di B. M. Irons [11], consiste in un approccio di risoluzione di sistemi lineari sparsi attraverso varianti del metodo di eliminazione di Gauss, il quale permette di ridurre notevolmente il numero di operazioni che coinvolgono i termini nulli delle matrici sparse [12].

Proseguendo negli studi intrapresi in precedenza da I. C. Taig, che per primo giunse alla definizione di un elemento isoparametrico, Irons stabilì come fosse possibile rappresentare il dominio fisico di un elemento finito utilizzando una mappatura conforme, ossia un sistema di riferimento in coordinate naturali (ξ, η, ζ) con il quale formulare delle specifiche funzioni di forma; quest'ultime, in genere polinomiali ed adimensionali, vengono scelte in modo tale da assumere contemporaneamente valore massimo unitario nel nodo di riferimento e valore minimo nullo in tutti gli altri.

In generale, potendo descrivere la geometria e gli spostamenti dell'elemento in coordinate naturali mediante le suddette funzioni, si ottiene una formulazione isoparametrica quando si ha lo stesso numero di relazioni n ed m tra i due campi:

$$x = \sum_{i=1}^n N_i(\xi, \eta, \zeta) x_i, \quad u = \sum_{i=1}^m N_i(\xi, \eta, \zeta) u_i \quad (11)$$

$$y = \sum_{i=1}^n N_i(\xi, \eta, \zeta) y_i, \quad v = \sum_{i=1}^m N_i(\xi, \eta, \zeta) v_i \quad (12)$$

$$z = \sum_{i=1}^n N_i(\xi, \eta, \zeta) z_i, \quad w = \sum_{i=1}^m N_i(\xi, \eta, \zeta) w_i \quad (13)$$

Partendo dalla formulazione integrale del principio dei lavori virtuali in condizioni di equilibrio statico, in cui si impone che la somma del lavoro virtuale delle forze esterne e delle forze interne sia nulla:

$$\delta L = \delta L_e + \delta L_i = 0 \quad (14)$$

In cui:

- δL , lavoro virtuale totale;
- δL_e , lavoro virtuale delle forze esterne applicate;
- δL_i , lavoro virtuale delle forze interne.

Esplicitando le componenti di lavoro considerate:

$$\delta L_e = \int \{\delta u\}^T \{\phi\} dV + \int \{\delta u\}^T \{t\} dS \quad (15)$$

$$\delta L_i = \int \{\delta \varepsilon\}^T \{\sigma\} dV \quad (16)$$

Dove:

- $\{\phi\}$, vettore delle forze distribuite nel volume;
- $\{t\}$, vettore delle forze distribuite sulla superficie;
- $\{\delta u\}$, campo degli spostamenti virtuali compatibili coi vincoli del sistema;
- $\{\sigma\}$, tensore degli sforzi interni;
- $\{\delta \varepsilon\}$, vettore delle deformazioni virtuali compatibili coi vincoli del sistema;
- V , volume del corpo;
- S , superficie del corpo.

Sostituendo nell'equazione (14), si ottiene:

$$\int \{\delta u\}^T \{\phi\} dV + \int \{\delta u\}^T \{t\} dS = \int \{\delta \varepsilon\}^T \{\sigma\} dV \quad (17)$$

$$\int \{\delta u\}^T \{t\} dS = \int \{\delta \varepsilon\}^T \{\sigma\} dV - \int \{\delta u\}^T \{\phi\} dV \quad (18)$$

Applicando il principio dei lavori virtuali in termini di spostamento, si afferma che:

$$\{u\} = [N]\{s\} \quad (19)$$

In cui:

- $\{u\}$, vettore degli spostamenti virtuali di un generico punto dell'elemento finito;
- $[N]$, matrice delle funzioni di forma;
- $\{s\}$, vettore degli spostamenti di un nodo.

Considerando le deformazioni virtuali come derivate degli spostamenti virtuali, si ottiene:

$$\{\varepsilon\} = [\partial]\{u\} = [\partial][N]\{s\} = [b]\{s\} \quad (20)$$

Con:

- $[b]$, matrice delle derivate delle funzioni di forma.

Si ottiene inoltre che:

$$\{\sigma\} = [E](\{\varepsilon\} - \{\varepsilon_0\}) + \{\sigma_0\} \quad (21)$$

Dove:

- $\{\varepsilon_0\}$, vettore delle deformazioni iniziali;
- $\{\sigma_0\}$, vettore delle tensioni iniziali.

Tuttavia, dall'equazione (19), se si assegna un campo di spostamenti non è più soddisfatto l'equilibrio in ciascun punto ed è necessario introdurre una forza residua ρ :

$$\sum_{i=1}^3 \frac{\partial \sigma_{ij}}{\partial x_i} + f_j = \rho_j \quad (22)$$

Andando a sostituire le equazioni (19), (20) e (21) nella (18), si ricava:

$$\begin{aligned} \{\delta s\}^T \int [N]^T \{t^*\} dS - \{\delta s\}^T \int [N]^T \{\rho\} dV + \{\delta s\}^T \int [N]^T \{t_0\} dS + \{\delta s\}^T \int [N]^T \{\phi\} dV \\ = \{\delta s\}^T \int [b]^T [E] [b] dV \{s\} \end{aligned} \quad (23)$$

Siccome la formulazione resta valida per qualunque $\{\delta s\}$, si ottiene:

$$\int [N]^T \{t^*\} dS - \int [N]^T \{\rho\} dV + \int [N]^T \{t_0\} dS + \int [N]^T \{\phi\} dV = \int [b]^T [E] [b] dV \{s\} \quad (24)$$

L'equazione (24) può essere riscritta in termini di matrice di rigidezza:

$$\{f\} + \{f_e\}_{t_0} + \{f_e\}_\phi = [k] \{s\} \quad (25)$$

Dove:

- $\{f\}$, carichi nodali;
- $\{f_e\}_{t_0}$, carichi superficiali;
- $\{f_e\}_\phi$, forze di corpo;
- $[k]$, matrice di rigidezza.

In particolare, se si esplicita ciascuna componente:

$$\{f\} = \int [N]^T \{t^*\} dS - \int [N]^T \{\rho\} dV \quad (26)$$

$$\{f_e\}_{t_0} = \int [N]^T \{t_0\} dS \quad (27)$$

$$\{f_e\}_\phi = \int [N]^T \{\phi\} dV \quad (28)$$

$$[k] = \int [b]^T [E] [b] dV \{s\} \quad (29)$$

Considerando il primitivo quadrilatero di Taig, riportato in Fig. 4, si ottengono le seguenti funzioni di forma:

$$N_1 = \frac{1}{4}(1 - \xi)(1 - \eta) \quad (30)$$

$$N_2 = \frac{1}{4}(1 + \xi)(1 - \eta) \quad (31)$$

$$N_3 = \frac{1}{4}(1 + \xi)(1 + \eta) \quad (32)$$

$$N_4 = \frac{1}{4}(1 - \xi)(1 + \eta) \quad (33)$$

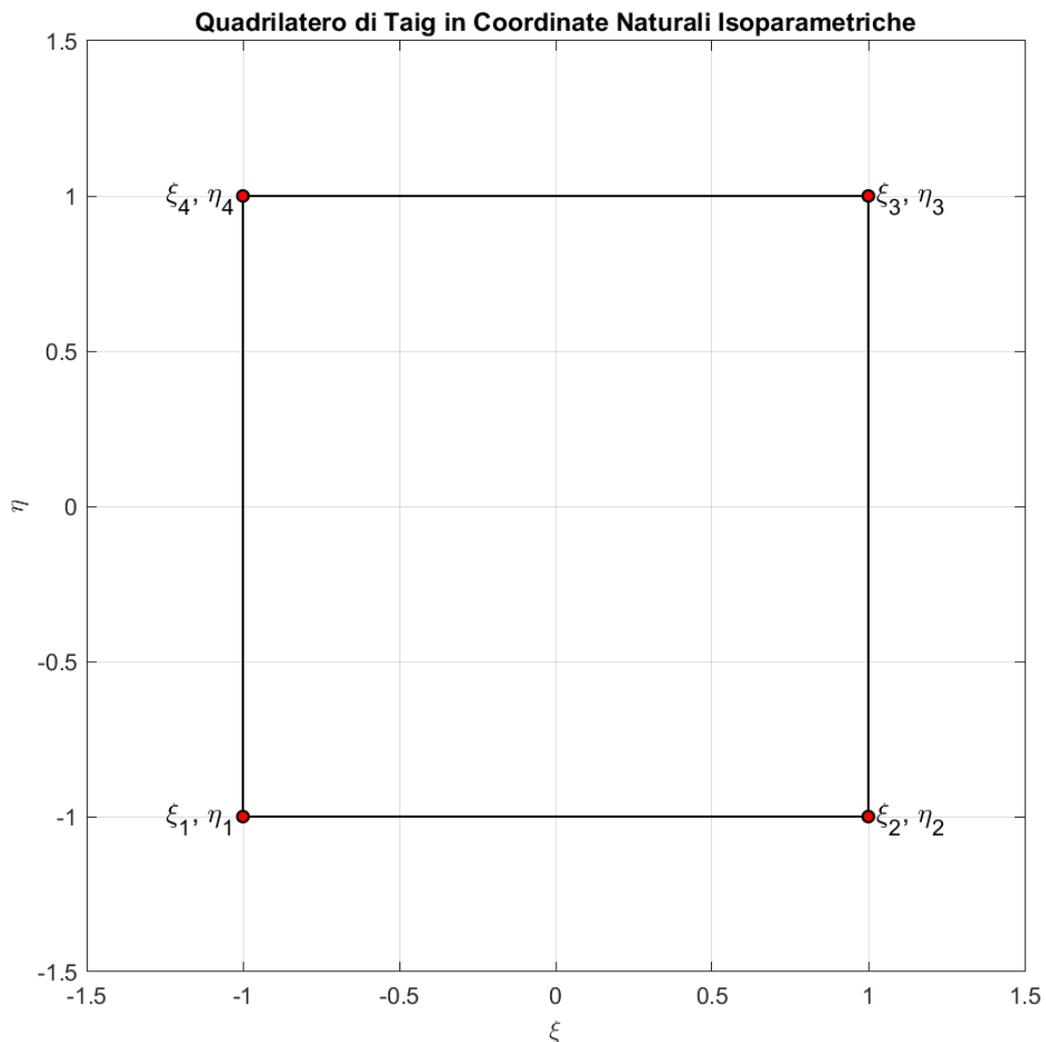


Figura 4: quadrilatero isoparametrico di Taig descritto da un sistema di coordinate naturali, fonte MATLAB

Derivando le equazioni (30-33) rispetto alle coordinate naturali ξ, η , si ottiene la matrice Jacobiana $[J]$, fondamentale per poter ottenere la matrice di rigidezza $[k]$ dell'elemento finito:

$$\begin{pmatrix} \frac{\partial N_i}{\partial \xi} \\ \frac{\partial N_i}{\partial \eta} \end{pmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{\partial x}{\partial \xi} & \frac{\partial y}{\partial \xi} \\ \frac{\partial x}{\partial \eta} & \frac{\partial y}{\partial \eta} \end{bmatrix} \begin{pmatrix} \frac{\partial N_i}{\partial x} \\ \frac{\partial N_i}{\partial y} \end{pmatrix} \quad (34)$$

$$\begin{pmatrix} \frac{\partial N_i}{\partial \xi} \\ \frac{\partial N_i}{\partial \eta} \end{pmatrix} = [J] \begin{pmatrix} \frac{\partial N_i}{\partial x} \\ \frac{\partial N_i}{\partial y} \end{pmatrix} \quad (35)$$

$$[J] = \begin{bmatrix} \frac{\partial x}{\partial \xi} & \frac{\partial y}{\partial \xi} \\ \frac{\partial x}{\partial \eta} & \frac{\partial y}{\partial \eta} \end{bmatrix} \quad (36)$$

Dal principio dei lavori virtuali, applicando l'equazione per un elemento 2D di spessore t , si ottiene:

$$[k] = \int [b]^T [E] [b] t dA \quad (37)$$

Si utilizza una mappatura conforme e diviene necessario definire la corrispondenza del dominio d'integrazione dA in coordinate naturali:

$$dA = \{a\} * \{b\} \quad (38)$$

Dove:

$$\{a\} = \overrightarrow{OA} = \begin{pmatrix} \frac{\partial x}{\partial \xi} \\ \frac{\partial y}{\partial \xi} \end{pmatrix} d\xi \quad (39)$$

$$\{b\} = \overrightarrow{OB} = \begin{pmatrix} \frac{\partial x}{\partial \eta} \\ \frac{\partial y}{\partial \eta} \end{pmatrix} d\eta \quad (40)$$

$$dA = \{a\} * \{b\} = \left(\frac{\partial x \partial y}{\partial \xi \partial \eta} - \frac{\partial y \partial x}{\partial \xi \partial \eta} \right) d\xi d\eta = \det [J] d\xi d\eta \quad (41)$$

Si ottiene che:

$$[k] = \int [b]^T [E] [b] t dA = t \int_{-1}^1 \int_{-1}^1 [b]^T [E] [b] \det [J] d\xi d\eta \quad (42)$$

La grande forza dell'elemento isoparametrico risiede dunque nella possibilità di ottenere la matrice di rigidezza integrandola numericamente in coordinate naturali e collegandola, attraverso trasformazione Jacobiana, al dominio fisico del modello.

Inoltre, al fine di ridurre il peso computazionale, è meglio formulare le funzioni di forma direttamente nel sistema di riferimento in coordinate naturali.

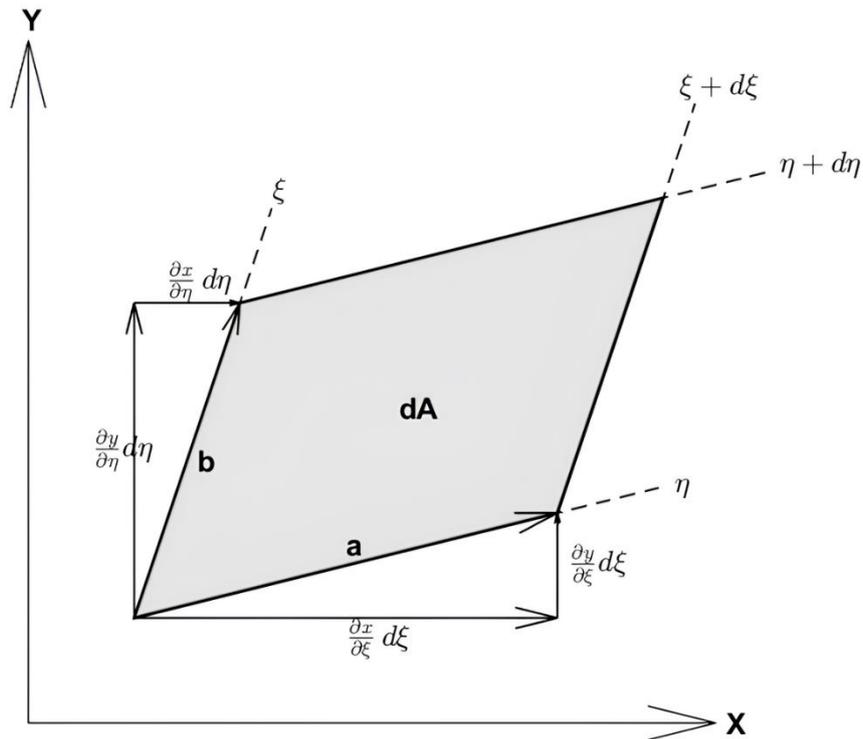


Figura 5: dominio d'integrazione dA del quadrilatero di Taig con vista in dettaglio, fonte MATLAB

A partire dagli anni '70, il metodo FEM si è diffuso come tecnica di modellazione numerica di sistemi fisici per una vasta gamma di applicazioni e, in modo parallelo a tale fenomeno, sono nati i primi codici di calcolo FEM commerciali (NASTRAN, ANSYS, ABAQUS, ADINA, ecc.).

In particolare, ci si sofferma sul software MSC NASTRAN, che viene impiegato nel corso del lavoro come strumento di analisi agli elementi finiti e che fu progettato inizialmente per la NASA, alla fine degli anni '60, grazie a finanziamenti del governo statunitense destinati all'industria aerospaziale.

Nel 1964, una revisione del programma di ricerca della NASA sulle dinamiche strutturali rivelò che i vari centri di ricerca sviluppavano software di analisi strutturale specifici per le proprie esigenze in modo indipendente.

La revisione raccomandò di adottare un unico software generico e, in risposta, venne formato un comitato ad hoc, il quale concluse che nessun software esistente soddisfacesse i requisiti richiesti.

In seguito, venne proposto un progetto collaborativo per sviluppare un nuovo software e si definirono le specifiche delle sue caratteristiche [13].

Il contratto per lo sviluppo fu assegnato alla Computer Sciences Corporation (CSC) e il software prese inizialmente il nome di GPSA (dall'inglese *General Purpose Structural Analysis*). Successivamente, la NASA approvò il nome definitivo "NASTRAN" (acronimo di *NASA STRucture Analysis*) ed il sistema venne rilasciato al pubblico nel 1968.

Negli anni seguenti, la MacNeal-Schwendler Corporation (MSC) iniziò a commercializzare una propria versione, denominata MSC/NASTRAN e poi divenuta MSC.NASTRAN; il progetto originale fu guidato da Joe Mule e Gerald Sandler della NASA, insieme a Stephen Burns dell'Università di Rochester.

MSC NASTRAN è il prodotto commerciale originale NASTRAN ed è stato sviluppato dal prof. Richard MacNeal nel 1963. Da quell'anno, il programma ha continuato a svilupparsi ed espandere le sue funzionalità, includendo analisi dinamiche, roto-dinamiche, non lineari, termiche, ad alto impatto, NVH, strutture fluide e fatica.

Tra il 1971 e il 1984, si stima che NASTRAN abbia generato risparmi per 701 milioni di dollari e, nel 1988, il software è stato inserito nella Space Technology Hall of Fame della US Space Foundation. Attualmente, viene utilizzato principalmente nelle industrie aerospaziale ed automobilistica per effettuare ricerche strutturali di modelli e componenti, con particolare attenzione nei confronti degli sforzi e delle deformazioni; inoltre, si integra con MSC Marc e LS-Dyna per offrire soluzioni di analisi accoppiate non lineari.



Figura 6: logo software MSC Nastran, *English: As seen on their social media channels by Tonnywilliams licensed under CC BY-SA 4.0*

2.2 Studi attuali

Nella presente sezione, al fine di conoscere meglio le tendenze attuali in merito a questo ambito di ricerca, si analizzano in dettaglio due recenti studi che impiegano la metodologia FEM per investigare il comportamento del contatto non lineare tra la flangia della ruota e il fianco dello pneumatico, con particolare attenzione agli effetti dinamici e alle complessità dovute alle deformazioni locali e alle proprietà dei materiali coinvolti.

Nella prima ricerca [14], si analizza il fenomeno dello scoppio degli pneumatici nei camion e si pone particolare attenzione alla rottura del tallone, che risulta un elemento critico in grado di cedere in situazioni di sovrappressione.

Tale fenomeno rappresenta un evento relativamente raro ma estremamente pericoloso, specialmente durante il gonfiaggio, quando la pressione supera i limiti consigliati dal produttore; in queste situazioni, infatti, l'energia rilasciata può causare gravi danni e lesioni a persone nelle vicinanze.

Lo studio combina prove sperimentali, ispezioni ai raggi X e simulazioni agli elementi finiti per comprendere i meccanismi di cedimento del tallone e determinare i limiti di resistenza di un tipico pneumatico da camion.

Il test sperimentale è coinciso con una prova di scoppio idrostatico condotta su uno pneumatico 11R22.5, in cui l'uso dell'acqua come strumento di pressurizzazione, invece dell'aria, ha permesso di ridurre il rischio di esplosioni violente e di ottenere una misurazione precisa della pressione di scoppio.

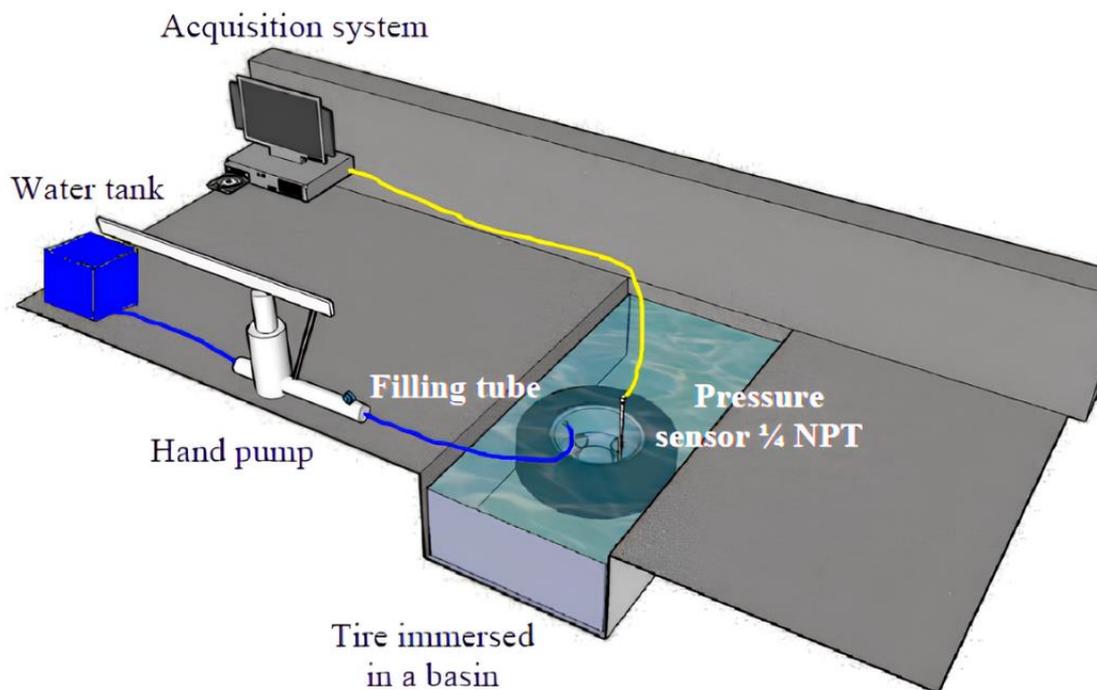


Figura 7: configurazione usata per la prova di scoppio idrostatico, fonte [14]

I risultati hanno mostrato come lo pneumatico si rompa ad una pressione di 1,826 Mpa (18,26 bar o 264,85 psi), circa 2,5 volte superiore alla pressione massima consigliata; la rottura avviene sul lato opposto al disco, con un evidente cedimento dei fili d'acciaio del tallone, che hanno subito una forte tensione circostante fino a fratturarsi.

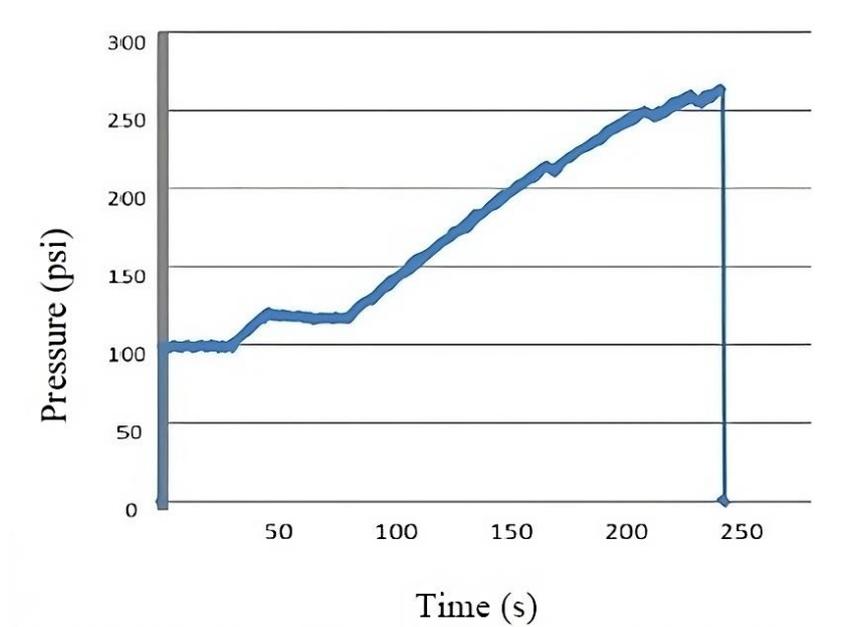


Figura 8: grafico pressione vs tempo durante prova idrostatica, fonte [14]

Dopo il test di scoppio, è stata eseguita un' ispezione ai raggi X che ha rivelato dettagli sulla struttura interna dello pneumatico ed ha evidenziato come i fili d'acciaio del tallone, disposti in sovrapposizione, fossero soggetti a concentrazioni di tensione; inoltre, questa disposizione delle fibre crea una discontinuità nella sezione del tallone, favorendo un accumulo di stress che porta alla rottura iniziale.

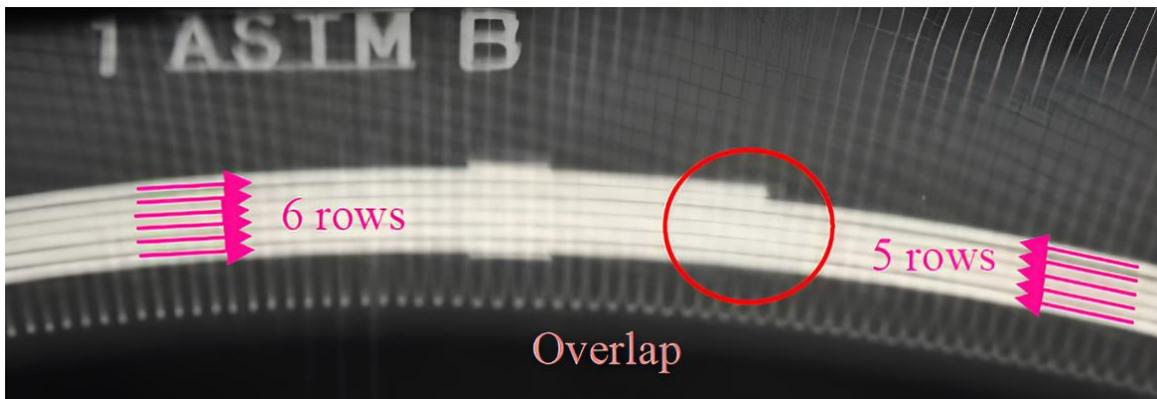


Figura 9: ispezione ai raggi X dello pneumatico, fonte [14]

La simulazione FEM ha ricoperto un ruolo cruciale nella comprensione dei fenomeni che portano al cedimento del tallone: per questioni di riproducibilità, si è sviluppato un modello 3D parziale dello pneumatico e del cerchio utilizzando il software Altair Hypermesh v10.0 con il solver Radioss, nonostante sarebbe stato sufficiente anche un modello 2D assialsimmetrico.

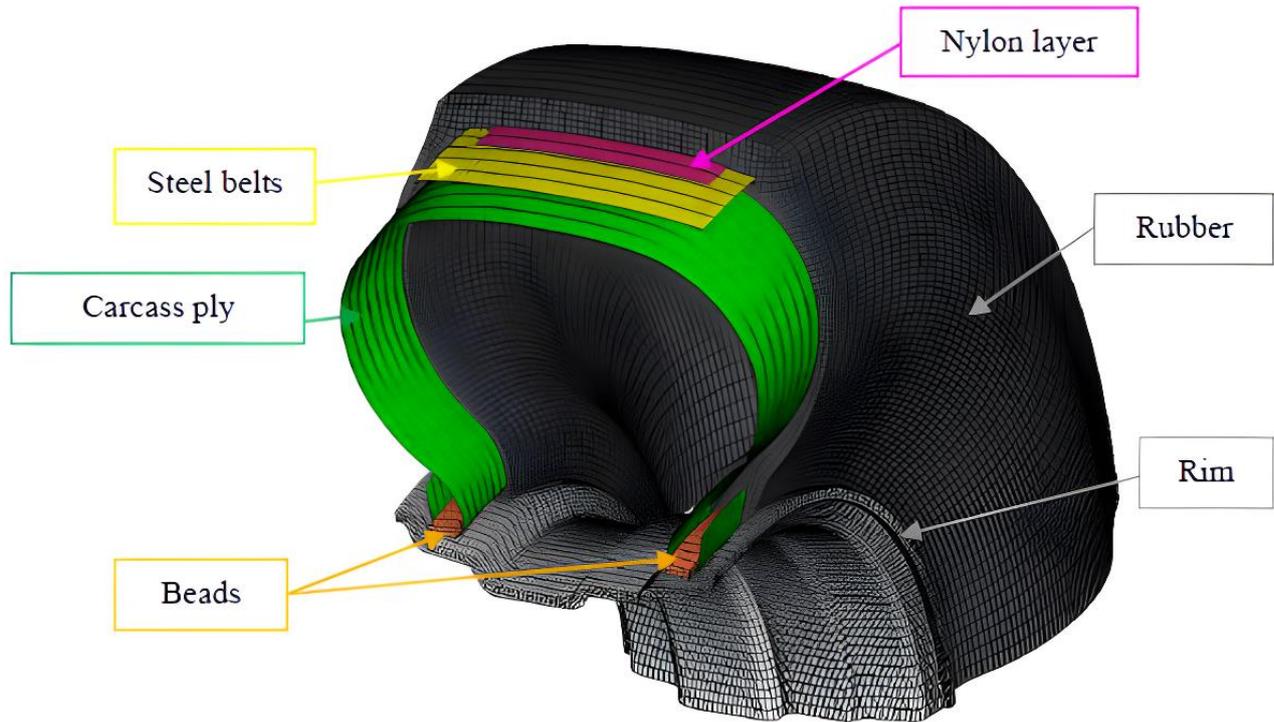


Figura 10: sezione del modello 3D, fonte [14]

Il modello include il cerchio in alluminio, la matrice di gomma, la carcassa dello pneumatico, i fili d'acciaio del tallone e gli strati di rinforzo in nylon e acciaio.

La flangia della ruota, il fianco dello pneumatico, la matrice in gomma e i talloni sono stati modellati come elementi solidi, impiegando il comando SOLID di Radioss; al contrario, i rinforzi sono stati rappresentati come elementi a guscio, utilizzando la funzione SHELL dello stesso software.

Ogni materiale è stato attentamente configurato secondo le sue specifiche proprietà: i fili d'acciaio del tallone, ad esempio, sono stati descritti con il modello plastico di Johnson-Cook [15], che consente di rappresentare la deformazione elastica e plastica del materiale e di cui si riporta l'equazione di sotto:

$$\sigma = (A + B * \epsilon^n) * (1 + C * \ln \dot{\epsilon}) * \left(1 - \left(\frac{T - T_{room}}{T_{melt} - T_{room}}\right)^m\right) \quad (43)$$

In cui:

- σ , tensione di flusso;
- A , limite elastico a temperatura ambiente e velocità di deformazione di riferimento;
- B ed n descrivono l'incrudimento e rappresentano, rispettivamente, il coefficiente e l'esponente di indurimento da deformazione;
- C , parametro che regola l'influenza della velocità di deformazione;
- T , temperatura attuale del materiale;
- T_{room} , temperatura ambiente;
- T_{melt} , temperatura di fusione del materiale;
- m , esponente di softening termico;
- $\dot{\epsilon}$, velocità di deformazione.

Inoltre, i termini dell'equazione rappresentano:

- contributo di strain hardening ($A + B * \epsilon^n$): riproduce l'incremento della resistenza del materiale dovuto alla deformazione plastica;
- componente di velocità di deformazione ($1 + C * \ln \dot{\epsilon}$): considera l'effetto della velocità di deformazione, che generalmente aumenta la resistenza del materiale a deformazioni più rapide;
- contributo di softening termico ($1 - \left(\frac{T - T_{room}}{T_{melt} - T_{room}}\right)^m$): valuta il softening del materiale dovuto all'aumento della temperatura, processo che lo porta ad essere più malleabile e meno resistente alla deformazione.

La gomma è stata trattata come un materiale isotropico e non linearmente elastico e, per gestire le grandi deformazioni, si è fatto ricorso alla legge costitutiva di Mooney-Rivlin [16, 17], di cui si riporta di sotto l'equazione:

$$W = C_{10}(I_1 - 3) + C_{01}(I_2 - 3) \quad (44)$$

Dove:

- W , energia elastica di deformazione per unità di volume;
- C_{10} e C_{01} , costanti del materiale ottenute per via sperimentale;
- I_1 e I_2 , primi due invarianti del tensore di Cauchy-Green,
 - $I_1 = \lambda_1^2 + \lambda_2^2 + \lambda_3^2$, somma dei quadrati dei rapporti di allungamento principali,
 - $I_2 = \lambda_1^2 \lambda_2^2 + \lambda_2^2 \lambda_3^2 + \lambda_3^2 \lambda_1^2$, somma dei prodotti dei quadrati dei rapporti di allungamento principali,
 - λ_1, λ_2 e λ_3 , rapporti di allungamento principali lungo le tre direzioni principali del tensore di deformazione.

I rinforzi, che corrispondono alle cinghie d'acciaio ed agli strati di nylon, sono stati modellati con proprietà elastiche ortotropiche.

Le condizioni al contorno prevedevano un contatto con attrito tra lo pneumatico ed il cerchione e le superfici di simmetria erano vincolate in modo da simulare correttamente il comportamento durante il gonfiaggio. Inoltre, la pressione interna, che è stata l'unica forza applicata, è stata progressivamente aumentata fino alla rottura.

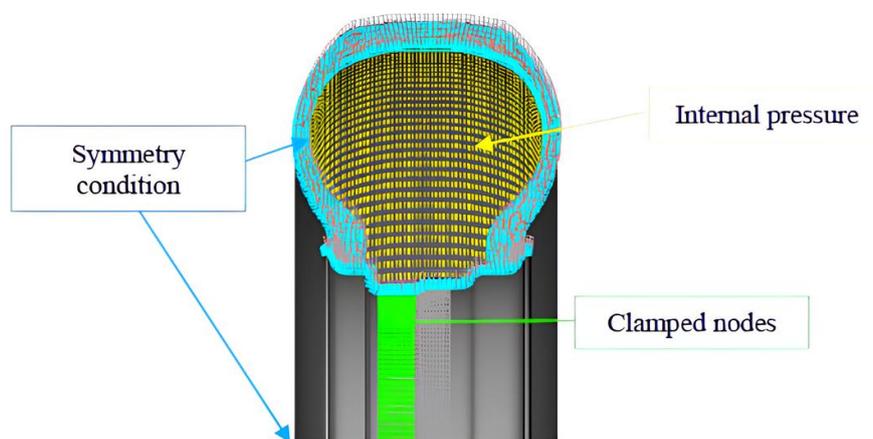


Figura 11: condizioni al contorno, fonte [14]

La simulazione FEM ha fornito risultati coerenti con i dati sperimentali: lo stress di Von Mises nei fili del tallone ha mostrato un andamento esponenziale con l'aumento della pressione, superando il limite elastico a circa 1.26 MPa e, dopo questa soglia, i fili hanno iniziato a deformarsi plasticamente, fino a raggiungere la rottura a una pressione stimata di 1.888 MPa, che risulta molto vicina al valore sperimentale di 1.826 MPa.

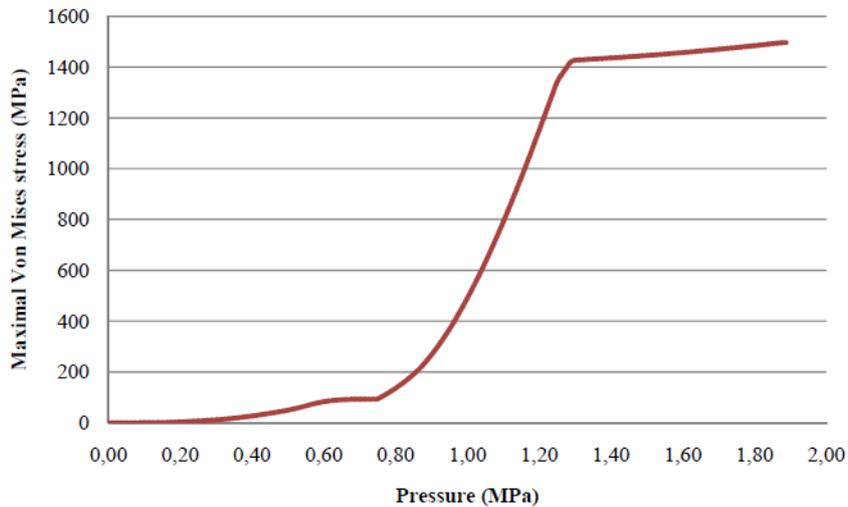


Figura 12: massimo stress di Von Mises vs pressione interna, fonte [14]

La distribuzione delle tensioni ha confermato che la rottura avviene nell'angolo interno inferiore del tallone, dove si concentra lo stress massimo, e che tale punto critico si trova sul lato opposto al disco; i fili d'acciaio, soggetti ad un'alta tensione di trazione, cedono uno dopo l'altro, innescando una reazione a catena che porta al cedimento totale del tallone.

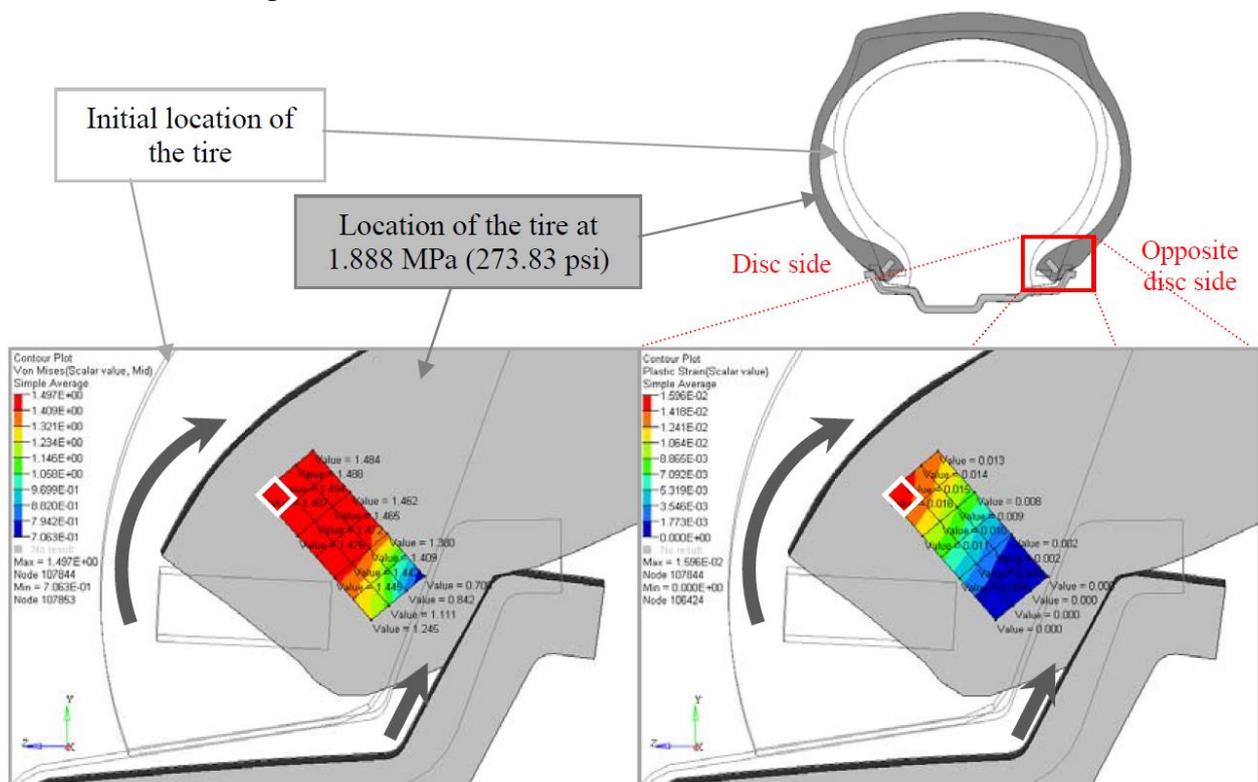


Figura 13: distribuzione delle tensioni di Von Mises (GPa) e delle deformazioni plastiche nel tallone a 1,888 Mpa (273,83 psi), fonte [14]

I risultati della simulazione hanno convalidato la dinamica della rottura osservata sperimentalmente, mostrando come il cambiamento di sezione nei fili d'acciaio agisca come zona di concentrazione degli stress.

In conclusione, lo studio ha chiarito i meccanismi che portano alla rottura di un pneumatico da camion durante il gonfiaggio oltre i limiti di sicurezza, evidenziando come la frattura del tallone, che inizialmente si verifica nei punti di sovrapposizione dei fili d'acciaio, sia il fattore principale che innesca lo scoppio.

La simulazione FEM si è dimostrata uno strumento efficace per prevedere la pressione di scoppio e per comprendere meglio i fattori critici che portano al cedimento; tuttavia, nonostante il modello attuale offra una buona accuratezza, gli autori suggeriscono che ulteriori miglioramenti potrebbero essere ottenuti modellando i fili del tallone individualmente e considerando il contatto tra di essi.

Infine, si evidenzia l'importanza delle misure di sicurezza durante il gonfiaggio degli pneumatici, come l'uso di gabbie di protezione, valvole di controllo e manometri, per ridurre il rischio di incidenti gravi.

Nel secondo studio [18], viene presentato un modello semplificato in grado di analizzare le interazioni tra pneumatico e cerchione e di calcolare con precisione le forze che agiscono sull'interfaccia sotto l'effetto di un carico verticale; tale elemento si rivela uno strumento utile per i produttori di ruote, che sono interessati a soluzioni di design leggero.

Il modello si basa su un approccio semianalitico e richiede un numero limitato di parametri d'ingresso, facilmente reperibili attraverso test sperimentali.

Lo pneumatico viene trattato come se fosse un anello flessibile, rappresentante il battistrada, supportato da una fondazione elastica che simula le pareti laterali.

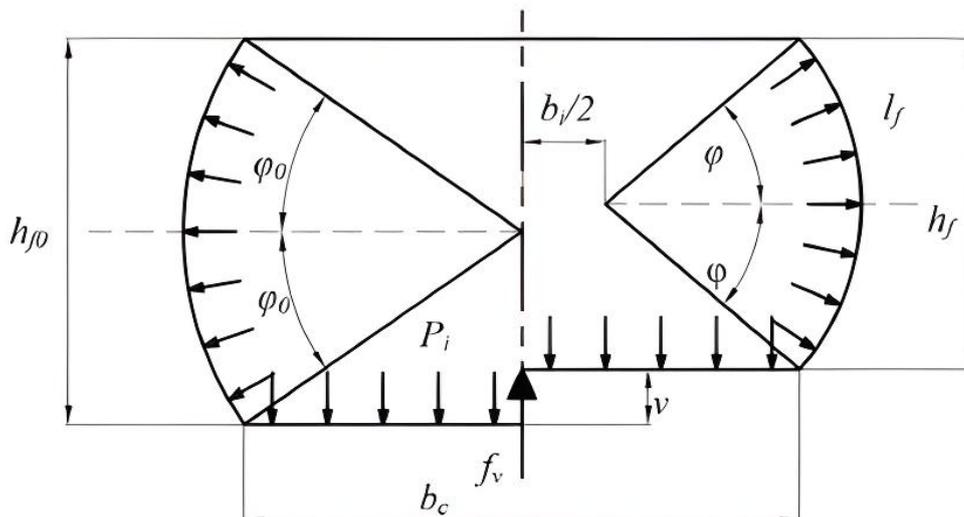


Figura 14: sezione di un pneumatico, a sinistra: sezione non deformata, a destra: sezione deformata quando viene applicata una forza verticale, fonte [18]

Quest'ultime, essendo meno rigide, sono considerate come elementi che reagiscono alla pressione interna ed alla deformazione sotto carico e contribuiscono attivamente alla trasmissione degli stress verso il cerchione.

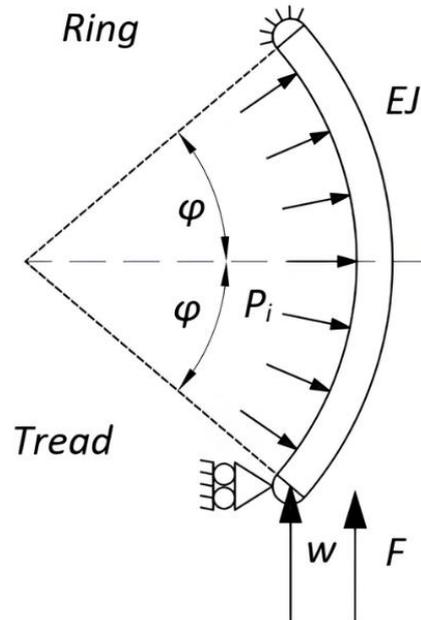


Figura 15: sezione infinitesima del fianco dello pneumatico visto come trave curvata, fonte [18]

Le forze di contatto vengono determinate considerando diversi fattori, tra cui la pressione interna dello pneumatico e la deformazione verticale indotta dal carico.

In generale, si descrive la geometria deformata della gomma e si sviluppano le equazioni per stimare i valori delle forze radiali e assiali che si generano in queste condizioni; mentre le prime sono indotte dalla pressione interna, dalla reazione radiale alle forze lungo l'asse e dalla deformazione dello pneumatico, le seconde derivano dall'inclinazione delle superfici di contatto e dalla resistenza delle pareti laterali.

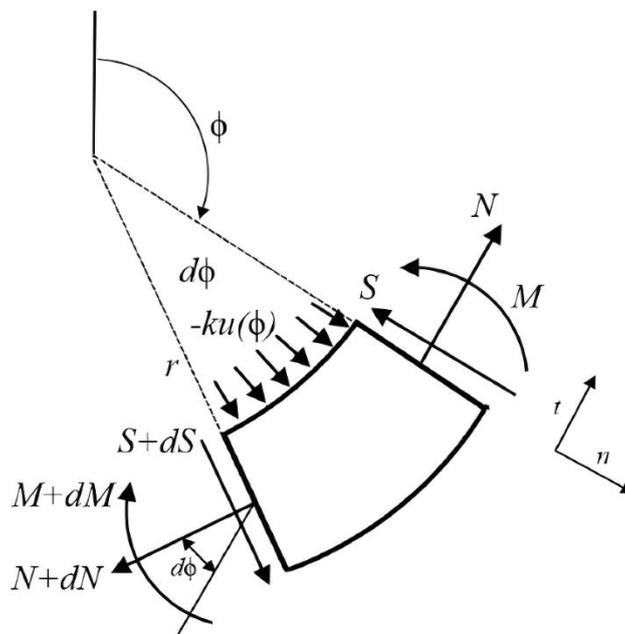


Figura 16: diagramma di corpo libero di una sezione infinitesima della trave curvata, fonte [18]

In particolare, il contributo totale delle forze radiali dT_{rad} può essere espresso come:

$$dT_{rad} = dT_{rad,p} + dT_{rad,a} + dT_{rad,q}$$

(45)

Dove:

- $dT_{rad,p} = S * \sin \phi = \frac{ph_{fv0}}{2}$: componente dovuta alla pressione di gonfiaggio:
 - p , pressione interna dello pneumatico;
 - $h_{fv0} = h_f$, altezza della sezione deformata dello pneumatico.
- $dT_{rad,a} = dT_{ax} * \tan \theta$: reazione radiale del cerchio alla forza assiale:
 - dT_{ax} , contributo totale delle forze assiali calcolato di seguito;
 - θ , angolo di inclinazione del piano di azione della forza assiale (qui circa 25°).
- $dT_{rad,q} = \frac{1}{2}ku(\phi) \frac{r}{r_{rim}}$: forza radiale per unità di lunghezza dovuta alla deformazione dello pneumatico agente sul cerchione:
 - k , rigidezza residua della carcassa;
 - $u(\phi)$, deflessione radiale dello pneumatico in funzione dell'angolo ϕ ;
 - r/r_{rim} , fattore di scala che considera i raggi dello pneumatico e del cerchione.

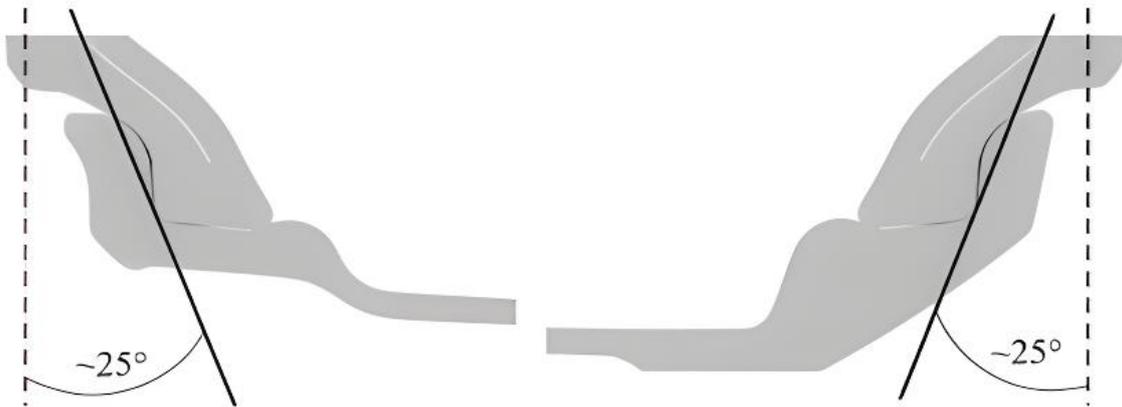


Figura 17: inclinazione del piano d'azione della forza assiale di pressione sul cerchio, definita come l'inclinazione della linea che collega i punti estremi della pressione zona (zona grigio scuro nell'area di contatto laterale), fonte [18]

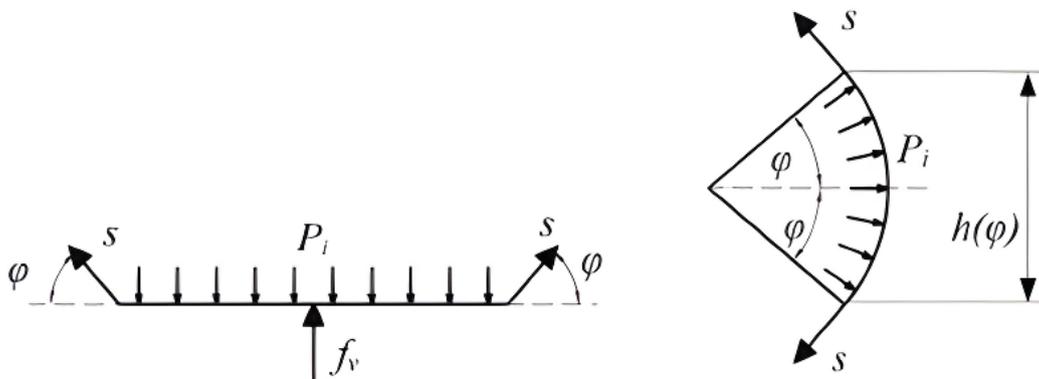


Figura 18: forze su una sezione dello pneumatico quando si considera la sola pressione interna, fonte [18]

Di seguito, si riporta l'espressione del contributo totale delle forze assiali dT_{ax} che agiscono sul cerchione:

$$dT_{ax} = dT_{ax,p} + dT_{ax,q} \quad (46)$$

In cui:

- $dT_{ax,p} \cong \frac{ph(\phi)}{2} = \frac{p(h_{fv0}+u(\phi))}{2}$: pressione in direzione assiale;
- $dT_{ax,q} = k_{ax}dT_{rad,q}$: reazione strutturale delle pareti laterali:
 - k_{ax} , rigidità assiale della parete laterale, pari a $k_{ax} = 0.3k$.

Riassumendo, le forze totali agenti sul cerchione sono date dalla somma delle equazioni (45) e (46):

$$\begin{cases} dT_{rad} = dT_{rad,p} + dT_{rad,a} + dT_{rad,q} \\ dT_{ax} = dT_{ax,p} + dT_{ax,q} \end{cases} \quad (47)$$

Si utilizza un modello agli elementi finiti FEM, che simula in dettaglio la struttura reale dello pneumatico nel tentativo di validare l'efficacia del lavoro semianalitico.

L'analisi condotta non trascura la complessità interna della gomma e tiene in considerazione le diverse componenti (battistrada, pareti laterali e rinforzi metallici) presenti nella carcassa; inoltre, a ciascuno di essi vengono attribuite proprietà meccaniche specifiche di un determinato materiale.

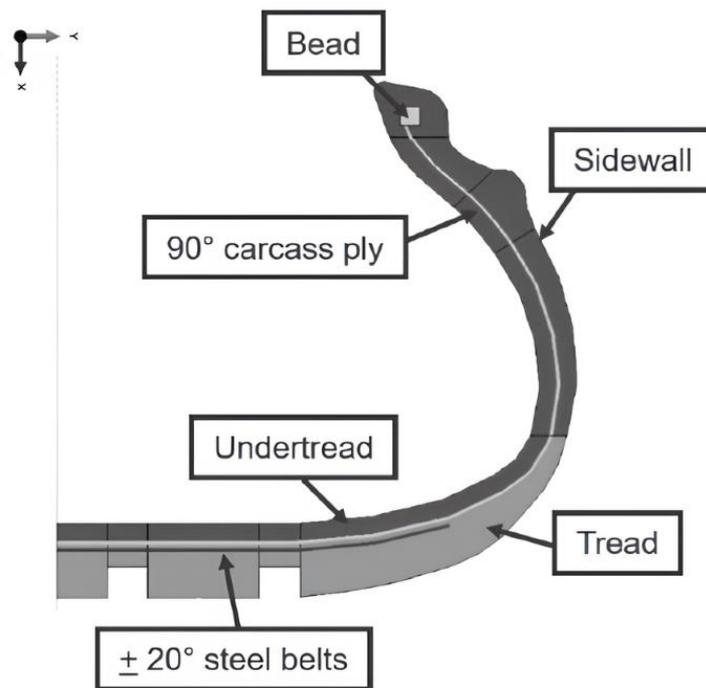


Figura 19: sezione trasversale del modello FEM con dettaglio delle componenti, fonte [18]

Il battistrada e le pareti laterali sono modellati utilizzando la teoria iperelastica di Mooney-Rivlin, che viene descritta in dettaglio dall'equazione (44).

Il tallone dello pneumatico, che fornisce rigidità e stabilità alla struttura, viene realizzato in materiale isotropo ed include gli strati di rinforzo in acciaio e fibre tessili, poiché sono fondamentali per garantire resistenza e controllo della deformazione sotto carico.

L'analisi FEM è condotta in due fasi: inizialmente, viene creato un modello bidimensionale assialsimmetrico, al quale si applica una pressione interna per simulare il gonfiaggio dello pneumatico.

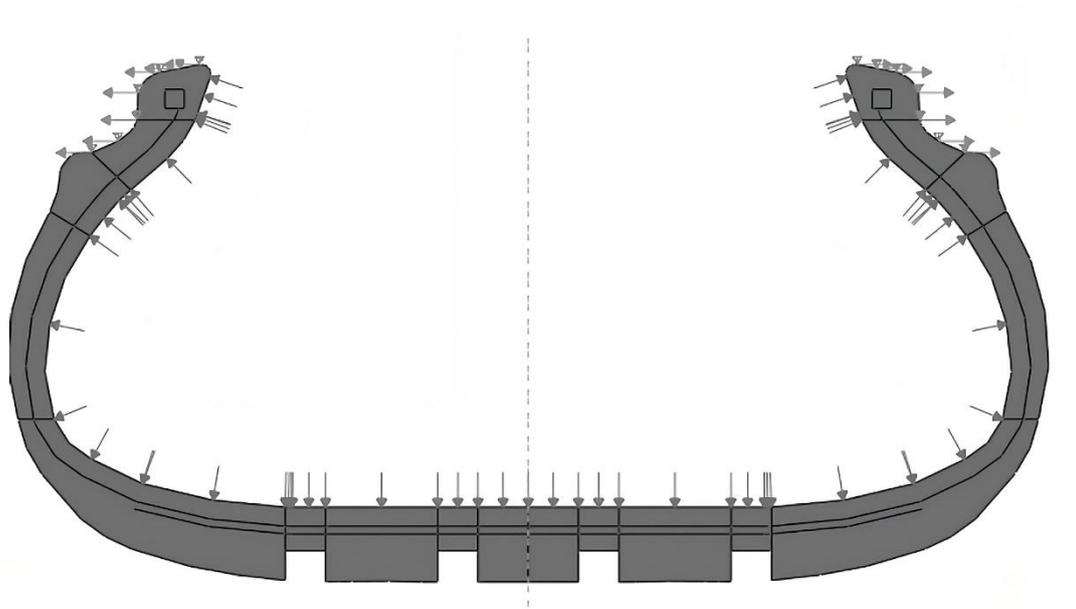


Figura 20: sezione trasversale del modello 2D assialsimmetrico sottoposto a pressione di gonfiaggio, fonte [18]

Successivamente, quest'ultimo viene trasformato in un modello tridimensionale completo, su cui vengono applicati i carichi verticali e ne viene analizzato il comportamento rispetto alla superficie stradale, simulando un'interazione di contatto con attrito.

La mesh del modello FEM è costituita da elementi a 8 nodi a forma di parallelepipedo (in inglese *brick*) con una risoluzione media di 4 mm e permette di catturare dettagli importanti sulla deformazione dello pneumatico.

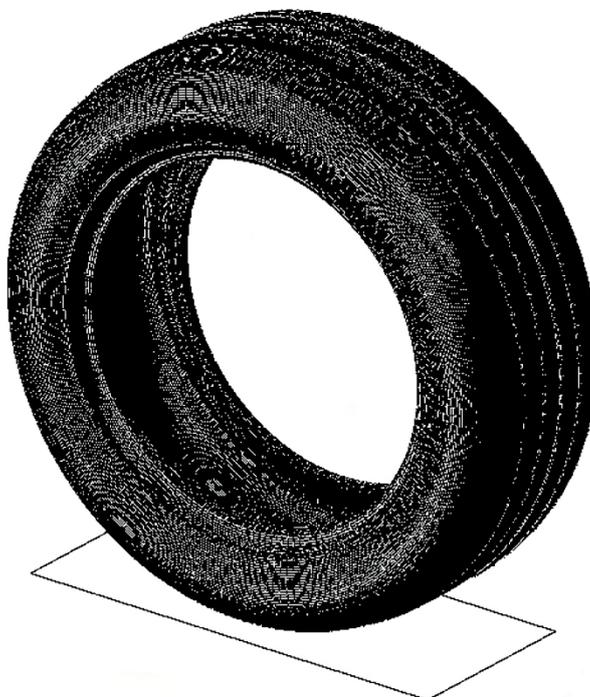


Figura 21: modello tridimensionale dello pneumatico, fonte [18]

La validazione dell'elemento FEM avviene confrontando i risultati ottenuti con i dati sperimentali reali relativi alla rigidità verticale dello pneumatico per diverse pressioni di gonfiaggio.

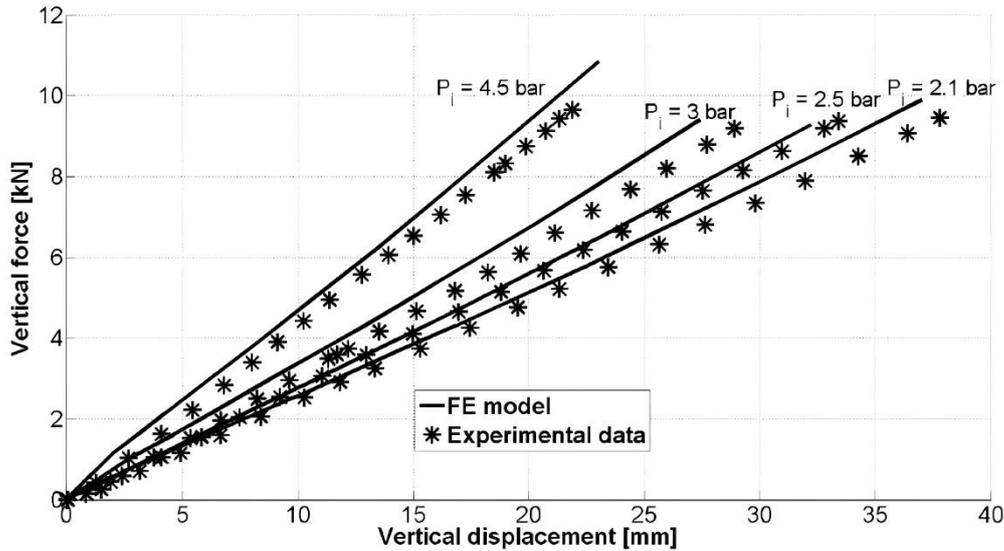


Figura 22: confronto tra i risultati del modello FEM e quelli sperimentali dati per quattro diverse pressioni di gonfiaggio: 2,1, 2,5, 3 e 4,5 bar, fonte [18]

Il confronto mostra una buona corrispondenza tra i dati FEM e i risultati sperimentali e testimonia l'accuratezza del modello nel prevedere la risposta dello pneumatico sotto carico.

Dopo la validazione, il modello FEM viene utilizzato per confrontare le forze di reazione sul cerchione con quelle del calcolo semianalitico: le forze radiali, che si generano dalla deformazione dello pneumatico, e le forze assiali, dovute alla pressione interna e alla deformazione delle pareti laterali, mostrano differenze minime tra i due modelli, con variazioni inferiori al 15-17%.

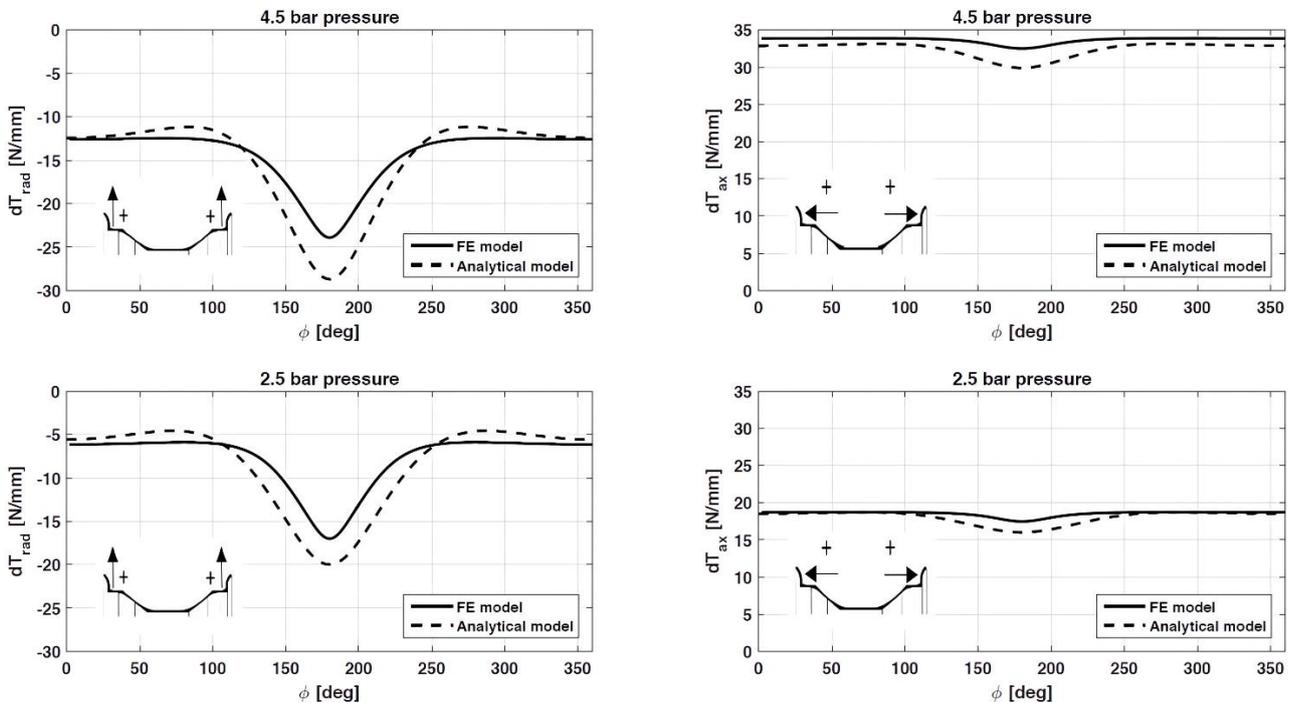


Figura 23: forze di reazione sul cerchio calcolate dal modello FEM e dal modello analitico per due pressioni di gonfiaggio (2,5 e 4,5 bar) e carico verticale di 8750 N, fonte [18]

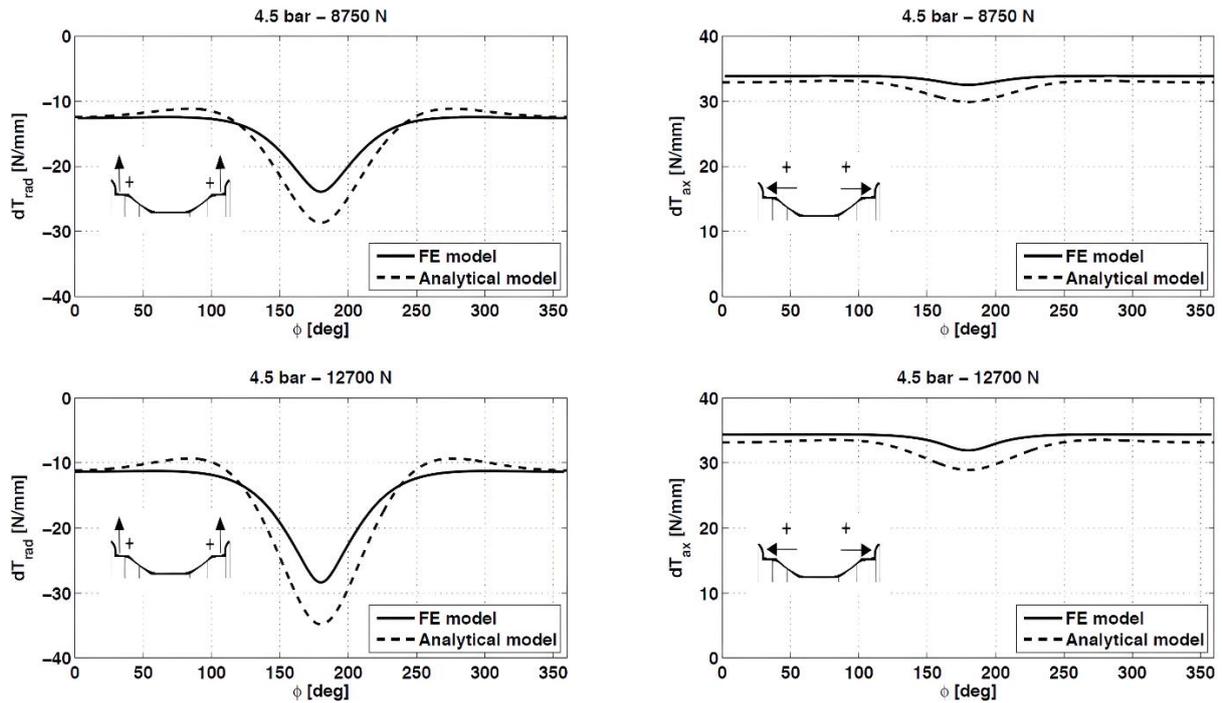


Figura 24: forze di reazione sul cerchio calcolate dal modello FEM e dal modello analitico a 8750 N (sopra) e 12700 N (sotto) alla stessa pressione di gonfiaggio (4,5 bar), fonte [18]

Questi risultati confermano ulteriormente l'efficacia del modello semplificato nel predire accuratamente le forze che agiscono all'interfaccia pneumatico-cerchione, anche senza considerare tutti i dettagli complessi della struttura interna della gomma.

In conclusione, il calcolo semianalitico proposto offre un compromesso efficace tra versatilità e precisione; infatti, nonostante la sua semplicità, è in grado di fornire stime accurate delle forze che agiscono sul cerchione, risultando utile per i produttori di ruote che cercano di ottimizzare il design senza una conoscenza approfondita della complessa struttura dello pneumatico.

Il confronto con il modello FEM dimostra che il modello semplificato possa essere impiegato con successo in applicazioni ingegneristiche e consenta un'elevata efficienza computazionale senza sacrificare l'affidabilità dei risultati.

3. Metodologia

In questo capitolo, si presentano gli approcci e le metodologie che sono state seguite per condurre il lavoro di tesi, con particolare attenzione all'integrazione di studi quantitativi e qualitativi.

L'obiettivo è quello di fornire una descrizione chiara e dettagliata del processo di ricerca, degli strumenti impiegati nella raccolta dei dati e delle motivazioni che hanno guidato la scelta di tali procedimenti.

In conclusione, si discutono le eventuali limitazioni metodologiche riscontrate e le strategie adottate per ridurre al minimo i possibili errori e garantire, in tal modo, la validità e l'affidabilità dei risultati ottenuti.

3.1 Processo di ricerca

La parte iniziale del lavoro di tesi si è concentrata sullo studio dell'elemento finito CQUAD4, appartenente alla libreria di MSC NASTRAN ed attorno al quale è stato sviluppato il codice di calcolo MATLAB per l'elemento finito sperimentale della libreria CoFe.

In seguito, sono state imposte alcune precise condizioni di carico e di vincolo e ne sono stati confrontati tra loro i risultati del codice CoFe e del software NASTRAN: si è riscontrata una significativa differenza in termini di spostamenti, deformazioni e stress.

A tal proposito, si è passati ad analizzare il modello di CoFe sul software MATLAB: basandosi sulla teoria fondamentale dell'elemento finito di partenza, sono state effettuate alcune modifiche al codice, nel tentativo di correggere queste incongruenze ed avvicinarsi il più possibile ai risultati di NASTRAN.

Successivamente, si è reso necessario intervenire sulle modalità di recupero degli spostamenti e delle tensioni, lavorando sui contributi di rigidità dei modelli coinvolti e raffinando ulteriormente la precisione di calcolo.

In ultimo, sono stati condotti 6 casi studio su diverse configurazioni di carico e vincolo, al fine di validare la formulazione dell'elemento finito e presentarne le relative prestazioni.

3.2 Strumenti e tecniche fondamentali

Nel 1978, l'ingegnere statunitense Richard H. MacNeal, co-fondatore della MacNeal-Schwendler Corporation (MSC), introdusse un nuovo elemento quadrilatero a quattro nodi chiamato QUAD4 [19] all'interno di NASTRAN, uno tra i software più rinomati per l'analisi numerica di strutture complesse mediante il metodo FEM.

Il modello è stato progettato con l'obiettivo di migliorare le prestazioni degli elementi precedenti e ridurre i costi computazionali, senza rinunciare ad un elevato livello di precisione.

A tal proposito, l'elemento finito QUAD4 integra diverse proprietà avanzate che lo rendono particolarmente versatile:

- presenta la capacità di assumere una forma quadrilatera deformata e generica, che risulta un aspetto utile nella modellazione di strutture complesse non costituite da superfici regolari;
- consente l'accoppiamento elastico tra flessione e stiramento e, permettendo la combinazione accurata tra i due fenomeni, migliora la precisione nell'analisi delle sollecitazioni;
- gode di flessibilità al taglio trasversale ed è capace di gestire strutture spesse (come nel caso di piastre o gusci), nelle quali l'effetto del taglio trasversale è significativo;
- può lavorare con materiali anisotropi, ovvero materiali (come, ad esempio, i compositi, alcuni cristalli o il legno) con proprietà fisiche che non sono uguali in tutte le direzioni dello spazio e variano in base a dove vengono misurate;
- riconosce contesti strutturali dove lo spessore non è uniforme ed è in grado di restituire risultati accurati;
- permette di considerare la rigidità geometrica, che è una proprietà utilizzata nelle analisi di stabilità elastica per prevedere come una struttura reagirà sotto carichi elevati;
- supporta la distribuzione non uniforme della temperatura e risulta uno strumento di analisi affidabile nei casi di sollecitazioni termiche che si verificano in materiali e strutture soggette a variazioni di temperatura;

- gestisce le proprietà di massa con approccio sia distribuito (in inglese *consistent*) sia concentrato (in inglese *lumped*) ed offre flessibilità per numerose modalità di analisi dinamica.

Il modello si basa su una formulazione isoparametrica, che utilizza funzioni di forma per descrivere gli spostamenti lungo i bordi dell'elemento e, in tal modo, consente un'ampia gamma di geometrie da modellare.

Tale approccio, tuttavia, è stato migliorato da MacNeal, al fine di superare alcune limitazioni degli elementi quadrilateri a quattro nodi precedentemente utilizzati in NASTRAN.

La riduzione dell'ordine di integrazione per i termini di taglio trasversale è tra le modifiche più rilevanti, poiché permette di calcolare con maggiore precisione le deformazioni di taglio e diminuire gli errori associati alla flessione e alle sollecitazioni di taglio trasversale.

Un'altra innovazione importante riguarda la compatibilità della curvatura, che è stata migliorata affinché quelle degli elementi siano conformi e non causino distorsioni quando l'elemento viene piegato o deformato.

Lo sviluppo del QUAD4 è stato possibile attraverso l'analisi di un elemento a trave, dal quale molti principi del modello sono stati derivati.

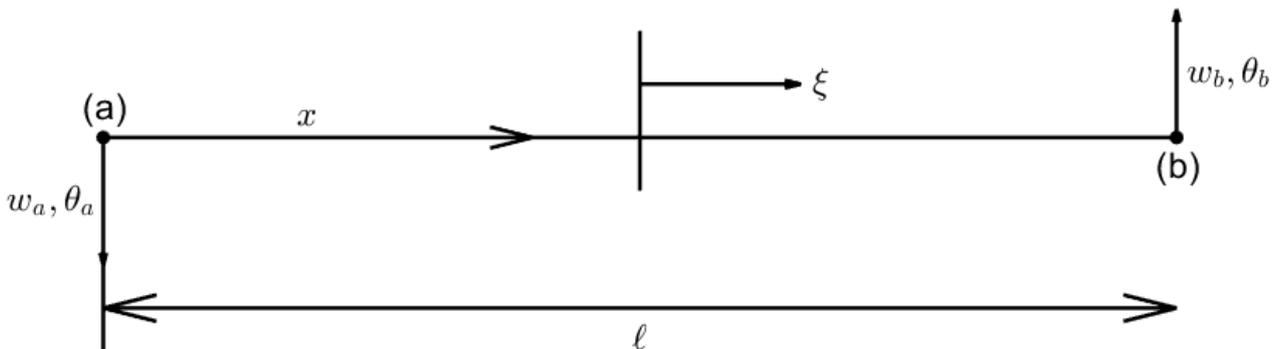


Figura 25: elemento a trave descritto da MacNeal, fonte MATLAB

Si attribuisce una funzione cubica per lo spostamento w della trave:

$$w = w_0 + w_1\xi + w_2\xi^2 + w_3\xi^3 + \gamma_r x \quad (48)$$

In cui:

- γ_r , deformazione di taglio costante;

Dall'analisi esatta si ottiene che:

$$\begin{cases} \chi_e = \frac{8}{l^2}(w_2 + 3w_3\xi) \\ \gamma_e = \gamma_r \\ E_e = \frac{l}{4} \int_{-1}^1 (EI\chi_e^2 + GA\gamma_e^2) d\xi \end{cases} \quad (49)$$

Dove:

- γ , deformazione di taglio trasversale;
- E_e , energia di deformazione esatta dell'elemento;
- l , lunghezza dell'elemento;

- EI , rigidezza flessionale, in cui E è il modulo di elasticità ed I è il momento d'inerzia rispetto all'asse neutro;
- χ_e , curvatura esatta dell'elemento in funzione della coordinata ζ , che, di solito, si riferisce alla deformazione flessionale;
- GA , rigidezza a taglio, in cui G è il modulo di taglio e A è l'area della sezione trasversale;
- γ_e , deformazione di taglio esatta in funzione della coordinata ζ ;
- ζ , coordinata locale, solitamente compresa nell'intervallo $[-1,1]$ per l'integrazione numerica negli elementi finiti.

Nell'approccio isoparametrico standard, si considerano lo spostamento laterale w , la rotazione θ della normale e le funzioni di forma N_a e N_b agli estremi della trave:

$$\theta = \frac{\partial w}{\partial x} - \gamma_r \quad (50)$$

$$N_a = (1 - \xi)/2; \quad N_b = (1 + \xi)/2 \quad (51)$$

Sostituendo tali grandezze nell'equazione (48), si ricava quanto segue:

$$\begin{cases} w_a = w_0 - w_1 + w_2 - w_3; & w_b = w_0 + w_1 + w_2 + w_3 + \gamma_r l \\ \theta_a = \frac{2}{l}(w_1 - 2w_2 + 3w_3); & \theta_b = \frac{2}{l}(w_1 + 2w_2 + 3w_3) \end{cases} \quad (52)$$

$$\begin{cases} \chi_i = \frac{\partial \theta}{\partial x} = \frac{2}{l}(\theta_a N'_a + \theta_b N'_b) = 8w_2/l^2 \\ \gamma_i = \frac{\partial w}{\partial x} - \theta = \frac{2}{l}(w_a N'_a + w_b N'_b) - \theta_a N_a - \theta_b N_b = \gamma_r - \frac{4}{l}(w_3 + w_2 \xi) \end{cases} \quad (53)$$

$$E_i = \frac{l}{4} \int_{-1}^1 (EI \chi_i^2 + GA \gamma_i^2) d\xi \quad (54)$$

Dove:

- w_a e w_b , spostamenti laterali agli estremi dell'elemento;
- θ_a e θ_b , rotazioni della normale agli estremi dell'elemento;
- χ_i , curvatura isoparametrica in funzione della coordinata ζ ;
- γ_i , deformazione di taglio isoparametrica in funzione della coordinata ζ ;
- E_i , energia di deformazione isoparametrica dell'elemento.

Il confronto tra le due metodologie ha rivelato alcune divergenze, tra cui una valutazione errata dei termini energetici della curvatura, che ha portato ad errori nell'energia di flessione.

Se ci si sofferma sul termine quadratico w_2 , il rapporto tra l'energia di deformazione per l'elemento isoparametrico e quella derivante dall'integrazione esatta risulta pari a:

$$\frac{E_i(w_2)}{E_e(w_2)} = 1 + \frac{l^2 GA}{12EI} \quad (55)$$

Nell'equazione (55), il secondo termine si può trascurare soltanto nel caso in cui la lunghezza dell'elemento sia molto inferiore alla sua profondità, aspetto che è intollerabile nell'analisi pratica; tuttavia, questo problema può essere risolto ricorrendo, durante il calcolo dell'energia di deformazione dovuta al taglio trasversale, ad un'integrazione di ordine ridotto (in questo caso un singolo punto di Gauss collocato a $\xi = 0$).

Passando invece al termine cubico w_3 , si nota come la formulazione isoparametrica ne contenga uno nell'equazione (53) per γ_i , mentre quella esatta uno nell'equazione (49) per χ_e : tale anomalia comporta una sottostima dell'energia di deformazione dovuta alla flessione (termine χ_e^2), che può essere bilanciata solo da un aumento dell'energia di deformazione dovuta al taglio.

Nel caso specifico in cui $\gamma_r = 0$, si ottiene:

$$\begin{cases} E_e(w_3) = \frac{96EI}{l^3} w_3^2 \\ E_i(w_3) = \frac{8GA}{l} w_3^2 \end{cases} \quad (56)$$

I due termini di energia sarebbero equivalenti nel caso in cui:

$$GA = 12EI/l^2 \quad (57)$$

Nella situazione in cui $\gamma_r \neq 0$, si può ricorrere all'equilibrio statico per giungere a questa relazione esatta:

$$\gamma_r = -\frac{EI}{GA} \frac{\partial \chi}{\partial x} = -\frac{48EI}{GA l^3} w_3 + (\text{termini ordine superiore}) \quad (58)$$

Si trascurano i termini di ordine superiore e si sostituisce il termine GA nell'equazione (54) con GA^* per ottenere:

$$\begin{cases} E_e(w_3) = \frac{96EI}{l^3} \left(1 + \frac{12EI}{l^2 GA}\right) w_3^2 \\ E_i(w_3) = \frac{8GA^*}{l} \left(1 + \frac{12EI}{l^2 GA}\right)^2 w_3^2 \end{cases} \quad (59)$$

In cui:

- $GA^* = \left(\frac{1}{GA} + \frac{l^2}{12EI}\right)^{-1}$, fattore correttivo che permette di eguagliare i due valori di energia di deformazione.

In particolare, per rimuovere il deficit nell'energia di deformazione associata alla curvatura, è stata introdotta una flessibilità residua pari a $\frac{l^2}{12EI}$.

L'elemento QUAD4 presenta 24 gradi di libertà totali, suddivisi in spostamenti in piano e fuori piano, oltre alle rotazioni ai quattro nodi: ciò lo rende adatto a modellare sia le deformazioni membranali (associate agli spostamenti u , v nel piano) sia quelle flessionali (derivate dagli spostamenti fuori dal piano w e dalle rotazioni α e β).

Relativamente al termine di flessione, QUAD4 utilizza una serie di modifiche che consentono di ottenere un'elevata precisione a un costo computazionale ridotto, grazie a tecniche di integrazione numerica avanzata che trattano le derivate della curvatura in modo accurato.

Al fine di valutare le prestazioni e la stabilità dell'elemento finito, MacNeal ha eseguito numerosi test numerici: è stato condotto un test su piastre rettangolari, in cui si sottoponeva un singolo elemento quadrilatero a carichi torsionali ed i risultati hanno mostrato un'alta precisione anche per piastre dalle proporzioni elevate.

Un secondo test ha riguardato la flessione di una piastra a sbalzo sottile, soggetta a carichi uniformi e concentrati, utilizzata per confrontare QUAD4 con altri elementi strutturali; in maniera analoga alla prova precedente, il modello ha dimostrato di comportarsi accuratamente anche con un numero limitato di elementi finiti.

In ultimo, si è studiato il comportamento di un tetto a guscio cilindrico esposto al solo carico gravitazionale, che rappresenta un test spesso eseguito come criterio di confronto.

I risultati hanno mostrato come QUAD4 presenti un netto miglioramento rispetto agli elementi più vecchi di NASTRAN (ad esempio QUAD2), soprattutto nella gestione delle deformazioni membranali e delle curvature.

Uno degli aspetti più importanti del lavoro di MacNeal è che l'elemento QUAD4 riduce notevolmente i costi computazionali rispetto agli elementi precedenti; tale riduzione diventa essenziale nella fase di assemblaggio della matrice di rigidezza e nel recupero delle sollecitazioni, due delle operazioni più onerose dal punto di vista del calcolo.

Il modello rappresenta un notevole progresso nel campo degli elementi a shell isoparametrici a quattro nodi, poiché, grazie alle numerose innovazioni introdotte (riduzione dell'ordine di integrazione, compatibilità delle curvature e introduzione della flessibilità residua), risulta estremamente versatile, accurato ed efficiente.

Inoltre, QUAD4 è in grado di affrontare un'ampia gamma di applicazioni strutturali complesse ed è un elemento fondamentale nel panorama dell'ingegneria strutturale.

Il contributo di MacNeal non solo ha migliorato la precisione e l'efficienza degli strumenti di analisi strutturale, ma ha anche aperto la strada allo sviluppo di nuovi elementi finiti più potenti, capaci di affrontare sfide ingegneristiche sempre più difficili ed impegnative.

In seguito a tale revisione, si è passati ad analizzare il codice sperimentale CoFe (disponibile al seguente indirizzo: https://github.com/vtpasquale/NASTRAN_CoFe) sul software MATLAB.

Analogamente a quanto descritto sopra, il CQUAD4 corrisponde ad un quadrilatero piano che può essere utilizzato sia come elemento membrana sia come elemento piastra, in quanto gode della capacità di combinare le caratteristiche dei due modelli all'interno di una generica matrice di rigidezza $[K]$, valida per ciascun elemento finito.

Si è considerata una piastra rettangolare composta da 4 nodi e sono state imposte precise condizioni di vincoli e carichi su di essi: si sono riscontrati risultati differenti in termini di spostamenti, deformazioni e stress rispetto alla stessa simulazione eseguita in NASTRAN.

A questo punto, si è deciso di analizzare con attenzione il codice CoFe, alla ricerca di eventuali incongruenze con la teoria dell'elemento finito introdotto da MacNeal.

Lo studio dettagliato del modello CoFe ha evidenziato le seguenti problematiche:

- è presente un differente criterio di selezione del sistema di riferimento per l'elemento finito;
- non esiste un procedimento di sotto-integrazione per la componente di rigidezza dovuta al taglio nel comportamento piastra;

- non si tiene conto, nella fase di assemblaggio della matrice di rigidezza generale $[K]_{CQUAD4}$, del contributo della rigidezza residua $[K]_{add}$.

Il primo problema è stato riscontrato non appena si è aperto il codice MATLAB: il criterio utilizzato per selezionare il sistema di riferimento dell'elemento finito è molto differente da quanto introdotto da MacNeal nei suoi studi [19, 20].

Secondo quest'ultimo, infatti, il sistema di riferimento del QUAD4 va centrato nel punto di intersezione delle diagonali del quadrilatero e non nel suo baricentro; inoltre, l'asse x viene tracciato lungo la bisettrice dell'angolo al vertice, che si ottiene come media degli angoli che le diagonali vanno a formare con il lato che congiunge i primi due nodi.

L'asse z del sistema di riferimento corrisponde al vettore normale uscente dal piano costruito con i tre nodi di partenza, mentre l'asse y si calcola come semplice prodotto vettoriale tra gli assi precedenti.

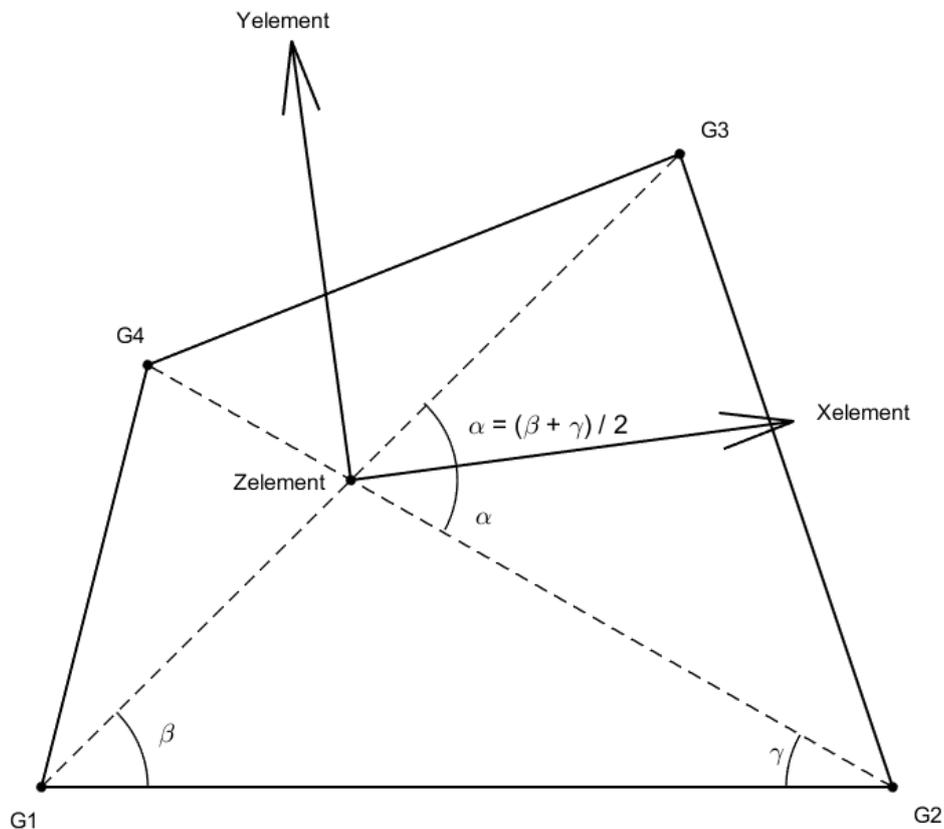


Figura 26: geometria e sistema di riferimento dell'elemento CQUAD4, fonte MATLAB

Si nota immediatamente come, se si considera un elemento finito quadrilatero deformato, il baricentro e l'intersezione delle sue diagonali non siano equivalenti e che questa incongruenza di scelta porti, durante il passaggio nel sistema di coordinate naturali ξ, η , ad ottenere matrici di rigidezza differenti.

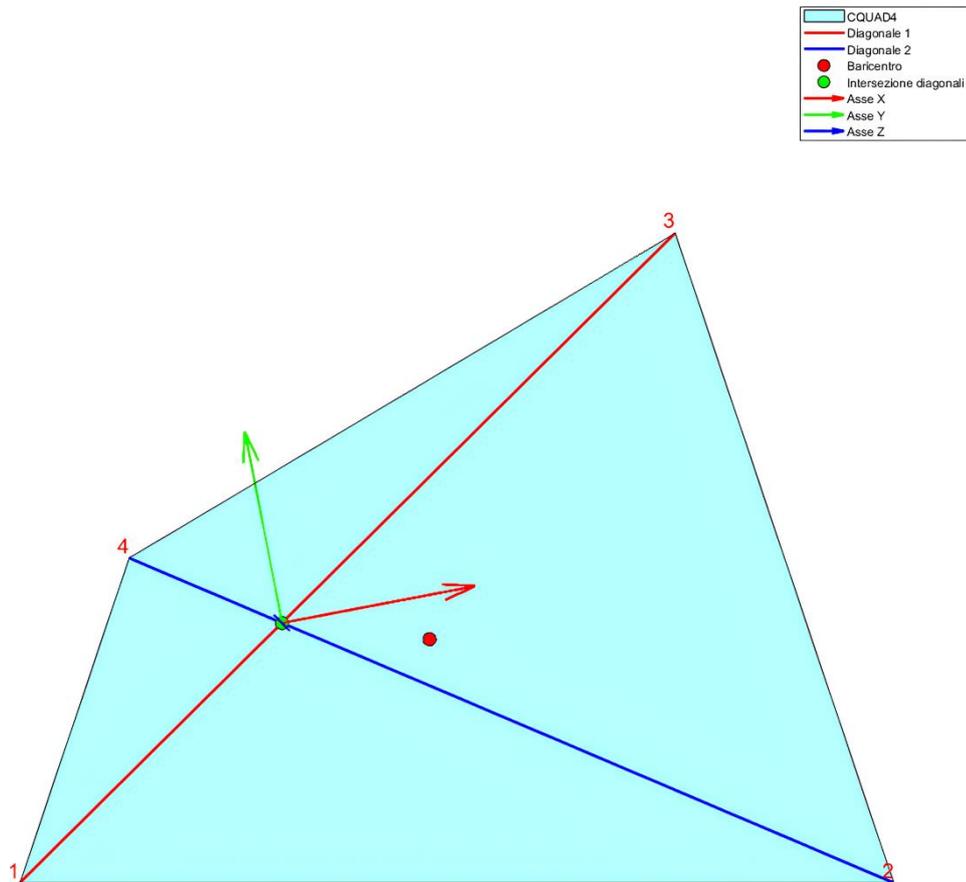


Figura 27: differenza tra baricentro e intersezione delle diagonali per un CQUAD4 deformato, fonte MATLAB

La correzione del sistema di riferimento è stata implementata all'interno di una funzione MATLAB denominata "calcola_cquad4" che, dati 4 nodi spaziali in input (x_1, x_2, x_3 e x_4), esegue le seguenti operazioni:

- calcola il baricentro del quadrilatero come media delle coordinate dei nodi;
- compie una traslazione dei nodi sottraendo le coordinate del baricentro, così da ottenere una rappresentazione centrata nell'origine;
- ricava il vettore normale al piano n definito dai nodi attraverso un prodotto vettoriale e ne confronta l'orientamento rispetto all'asse z:
 - nel caso risulti già allineato ad esso, si procede con il calcolo del punto di intersezione delle diagonali x_0 e della matrice di trasformazione T_{e0} che descrive la rotazione e l'orientamento dell'elemento nel sistema globale;
 - in caso contrario, per poter ottenere x_0 e T_{e0} , si costruisce una matrice di rotazione $[R]$, attraverso la formula di Rodrigues, seguendo tali passaggi:
 - $\theta = \cos^{-1}(n * n_z)$, angolo in radianti tra la normale n del piano e l'asse n_z uguale a $\begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{Bmatrix}$;

- $\{k\} = (n \times n_z)$, vettore dell'asse di rotazione che viene successivamente normalizzato;
- $[K] = \begin{bmatrix} 0 & -k(3) & k(2) \\ k(3) & 0 & -k(1) \\ -k(2) & k(1) & 0 \end{bmatrix}$, matrice di Lie associata all'asse di rotazione;
- $[R] = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} + \sin \theta * [K] + (1 - \cos \theta) * ([K] * [K])$, matrice di rotazione di Rodrigues da applicare ai nodi traslati;
- infine, si riallinea alla disposizione originale dei nodi, andando a compiere una rotazione inversa (solo se necessario) ed una traslazione secondo il baricentro.

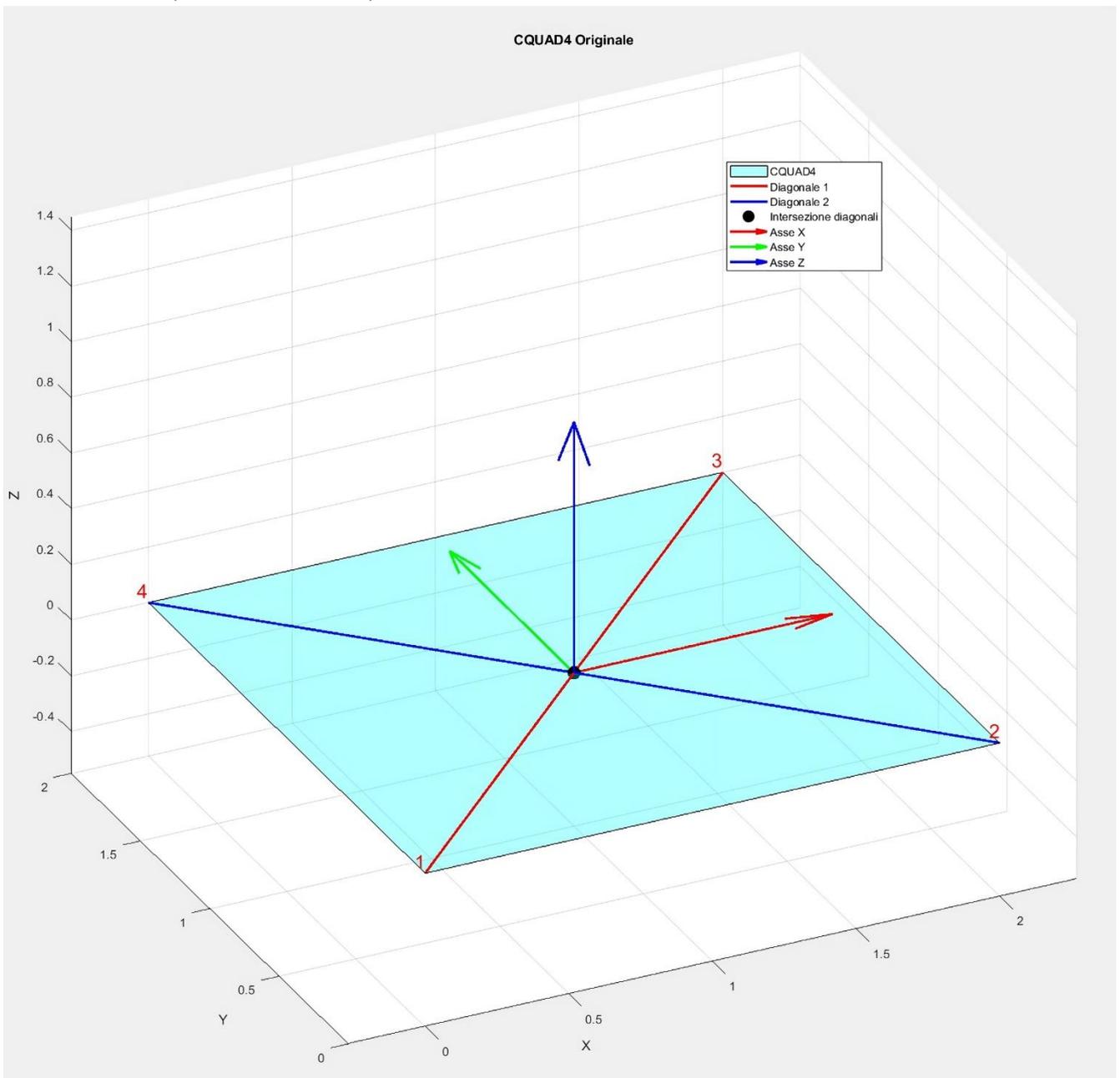


Figura 28: visualizzazione grafica di un elemento CQUAD4 con sistema di riferimento nel punto di intersezione delle diagonali, fonte MATLAB

Dopo aver implementato correttamente questa funzione all'interno del codice MATLAB, ne è stata verificata la correttezza andando a lavorare su differenti modelli CAD: attraverso il software GMSH, che rappresenta un generatore di mesh 3D per elementi finiti ed è open-source (ottenibile al seguente indirizzo: <https://gmsh.info/>), sono state create delle mesh, costituite da un numero molto elevato di elementi CQUAD4, per due modelli CAD precedentemente visualizzati in ambiente SOLIDWORKS. In particolare, la verifica si è concentrata sulle modalità con le quali alcune parti rotonde di tali oggetti venissero suddivise in elementi CQUAD4 non perfettamente piani e, di conseguenza, come venisse ricalcolato il sistema di riferimento in tale situazione.

I modelli CAD analizzati sono stati un proiettile ed uno pneumatico per autoveicoli, rispettivamente suddivisi in mesh da 956 e 7858 elementi CQUAD4, che sono stati definiti all'interno di un file in formato MATLAB e, successivamente, importati in suddetto ambiente per il calcolo tramite la funzione "calcola_cquad4".

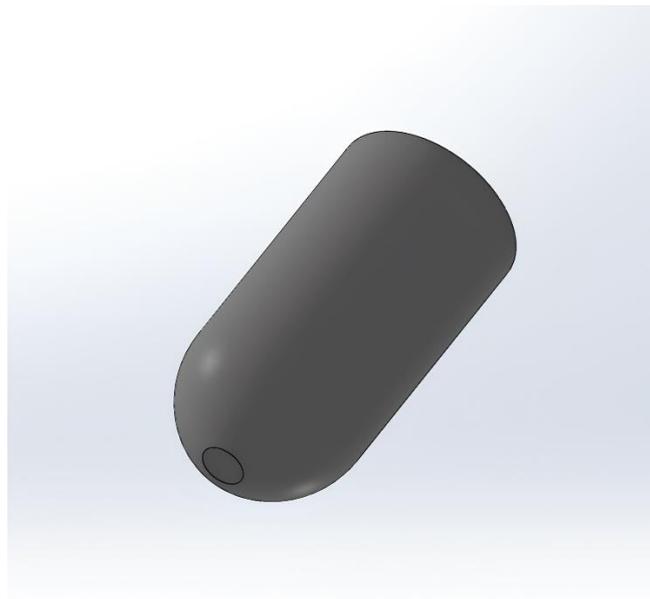


Figura 29: modello CAD del proiettile, fonte SOLIDWORKS

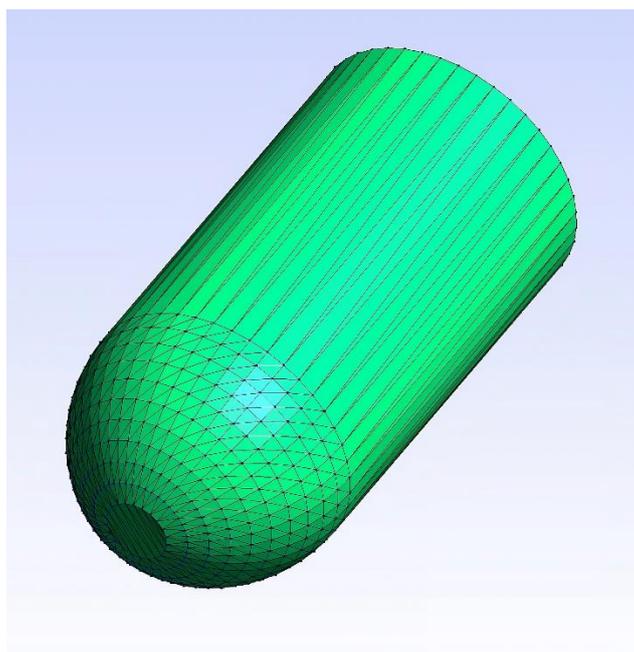


Figura 30: mesh 3D per modello CAD proiettile, fonte GMSH



Figura 31: modello CAD dello pneumatico, fonte SOLIDWORKS

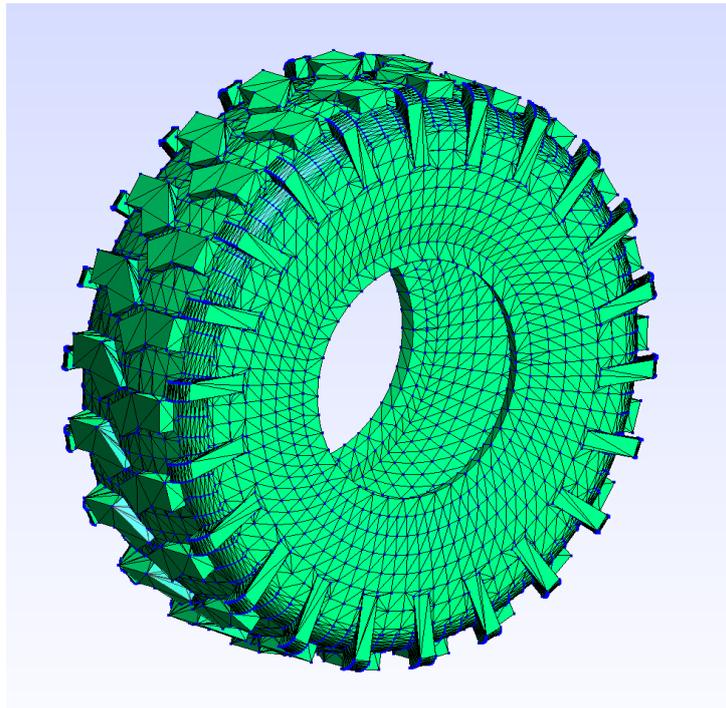


Figura 32: mesh 3D per modello CAD pneumatico, fonte GMSH

L'analisi condotta ha confermato la bontà della funzione implementata in MATLAB, la quale risulta precisa e perfettamente valida in contesti di mesh realizzate su oggetti reali.

In seguito a questa verifica, si è passati a considerare le modalità di recupero delle sollecitazioni (in inglese *stress recovery*), attraverso le quali l'elemento finito, soggetto a condizioni di carico definite dall'utente, è in grado di restituire come output le pressioni in gioco, a partire dai suoi spostamenti nodali.

Nel mondo FEM, l'elemento CQUAD4 corrisponde ad un quadrilatero piano a quattro nodi e viene spesso utilizzato nelle analisi strutturali di piastre sottili o gusci, grazie alla sua semplicità e versatilità. Ciascun nodo dell'elemento finito gode di 6 gradi di libertà, che sono distribuiti in 3 traslazioni lungo gli assi di riferimento (u_x , u_y e u_z) e 3 rotazioni attorno ad essi (θ_x , θ_y e θ_z) e vanno a costituire il vettore $\{s\}$ degli spostamenti nodali:

$$\{s\} = \begin{Bmatrix} u_x \\ u_y \\ u_z \\ \theta_x \\ \theta_y \\ \theta_z \end{Bmatrix} \quad (60)$$

Ogni componente viene attribuita al comportamento di uno specifico modello (membrana o piastra), che il CQUAD4 è in grado di simulare.

In particolare, l'elemento membrana è responsabile delle traslazioni u_x e u_y e delle loro deformazioni $\{\varepsilon\}$ nel piano:

$$\{\varepsilon\} = \begin{Bmatrix} \varepsilon_{xx} \\ \varepsilon_{yy} \\ \gamma_{xy} \end{Bmatrix} \quad (60)$$

$$\varepsilon_{xx} = \frac{\partial u_x}{\partial x} \quad (61)$$

$$\varepsilon_{yy} = \frac{\partial u_y}{\partial y} \quad (62)$$

$$\gamma_{xy} = \frac{\partial u_x}{\partial y} + \frac{\partial u_y}{\partial x} \quad (63)$$

Nell'elemento finito, il modello della piastra si basa sulla teoria di Reissner-Mindlin [21, 22], che tiene conto degli effetti del taglio trasversale per andare a simulare il comportamento a flessione ed a taglio, interessando la traslazione u_z e le rotazioni θ_x e θ_y ; da tali spostamenti, derivano le deformazioni flessionali $\{\kappa\}$ e quelle $\{\gamma\}$ dovute alla sollecitazione al taglio trasversale:

$$\{\kappa\} = \begin{Bmatrix} \kappa_{xx} \\ \kappa_{yy} \\ \kappa_{xy} \end{Bmatrix} \quad (64)$$

$$\kappa_{xx} = -\frac{\partial \theta_x}{\partial x} \quad (65)$$

$$\kappa_{yy} = -\frac{\partial\theta_y}{\partial y} \quad (66)$$

$$\kappa_{xy} = -\frac{\partial\theta_x}{\partial y} - \frac{\partial\theta_y}{\partial x} \quad (67)$$

$$\{\gamma\} = \begin{Bmatrix} \gamma_{xz} \\ \gamma_{yz} \end{Bmatrix} \quad (68)$$

$$\gamma_{xz} = \theta_x - \frac{\partial u_z}{\partial x} \quad (69)$$

$$\gamma_{yz} = \theta_y - \frac{\partial u_z}{\partial y} \quad (70)$$

Inoltre, sempre riferendosi alle equazioni descritte da E. Reissner [21] e D. H. Mindlin [22], si possono esprimere le rotazioni θ_x e θ_y in funzione della traslazione u_z introducendo dei fattori correttivi ψ_x e ψ_y , che tengono conto degli effetti del taglio:

$$\begin{cases} \theta_x = -\frac{\partial u_z}{\partial x} + \psi_x \\ \theta_y = -\frac{\partial u_z}{\partial y} + \psi_y \end{cases} \quad (71)$$

Si procede sostituendo l'equazione (72) nelle (66-68) e (70-71) per ricavare una seconda formulazione delle deformazioni κ e γ :

$$\kappa_{xx} = -\frac{\partial\theta_x}{\partial x} = \frac{\partial^2 u_z}{\partial x^2} - \frac{\partial\psi_x}{\partial x} \quad (72)$$

$$\kappa_{yy} = -\frac{\partial\theta_y}{\partial y} = \frac{\partial^2 u_z}{\partial y^2} - \frac{\partial\psi_y}{\partial y} \quad (73)$$

$$\kappa_{xy} = -\frac{\partial\theta_x}{\partial y} - \frac{\partial\theta_y}{\partial x} = 2\frac{\partial^2 u_z}{\partial x\partial y} - \frac{\partial\psi_x}{\partial y} - \frac{\partial\psi_y}{\partial x} \quad (74)$$

$$\gamma_{xz} = \theta_x - \frac{\partial u_z}{\partial x} = -2\frac{\partial u_z}{\partial x} + \psi_x \quad (75)$$

$$\gamma_{yz} = \theta_y - \frac{\partial u_z}{\partial y} = -2\frac{\partial u_z}{\partial y} + \psi_y \quad (76)$$

La rotazione θ_z attorno all'asse perpendicolare al piano dell'elemento finito viene trattata come grado di libertà di *drilling* e serve per unire i due comportamenti descritti in un unico modello misto membrana-piastra.

In tal modo, è possibile trasferire un contributo di rigidezza aggiuntivo, che, solitamente, risulta piccolo abbastanza da non influenzare i risultati e sufficientemente grande per evitare la singolarità della matrice di rigidezza $[K]_{el}$, aspetto che indicherebbe l'incapacità dell'elemento di sopportare alcuni carichi o deformazioni specifiche.

La matrice di rigidezza globale $[K]_{el}$ di un elemento CQUAD4 corrisponde ad una matrice quadrata simmetrica 24x24 (4 nodi aventi 6 gradi di libertà ciascuno), che si può assemblare sommando gli effetti del comportamento membranale, flessionale, a taglio e di drilling nel seguente modo:

$$[K]_{el} = [K]_{memb} + [K]_{bend} + [K]_{shear} + [K]_{drill} \quad (77)$$

Ogni contributo di rigidezza assume la forma dell'equazione (77), ma esistono alcune differenze nell'assemblaggio delle matrici $[b]$ che collegano gli spostamenti nodali alle deformazioni attraverso le derivate delle funzioni di forma; quest'ultime, trattandosi di un quadrilatero piano a 4 nodi, corrispondono a quelle riportate nelle relazioni (30-33) e la superficie di integrazione dA è correlata al determinante della matrice Jacobiana $[J]$, come evidenziato nell'equazione (41).

Partendo dall'effetto membranale $[K]_{memb}$, si ottiene che:

$$[K]_{memb} = \int [b^m]^T [D^m] [b^m] t dA \quad (78)$$

$$[D^m] = \frac{E}{1 - \nu^2} \begin{bmatrix} 1 & \nu & 0 \\ \nu & 1 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1 - \nu}{2} \end{bmatrix} \quad (79)$$

Dove:

- $[D^m]$, matrice di elasticità membranale relativa alla deformazione piana;
- E , modulo di Young;
- ν , modulo di Poisson.

$$\{\varepsilon\} = [b^m] \begin{Bmatrix} u_x \\ u_y \end{Bmatrix} \quad (80)$$

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{\partial u_x}{\partial x} \\ \frac{\partial u_y}{\partial y} \\ \frac{\partial u_x}{\partial y} + \frac{\partial u_y}{\partial x} \end{array} \right\} = [b^m] \begin{Bmatrix} u_x \\ u_y \end{Bmatrix} \quad (81)$$

$$[b^m] = \begin{bmatrix} \frac{\partial N}{\partial x} & 0 \\ 0 & \frac{\partial N}{\partial y} \\ \frac{\partial N}{\partial y} & \frac{\partial N}{\partial x} \end{bmatrix} \quad (82)$$

L'elemento CQUAD4 è composto da 4 nodi, perciò la struttura della matrice $[b^m]$ assumerà la seguente forma:

$$[b^m] = \begin{bmatrix} \frac{\partial N_1}{\partial x} & 0 & \frac{\partial N_2}{\partial x} & 0 & \frac{\partial N_3}{\partial x} & 0 & \frac{\partial N_4}{\partial x} & 0 \\ 0 & \frac{\partial N_1}{\partial y} & 0 & \frac{\partial N_2}{\partial y} & 0 & \frac{\partial N_3}{\partial y} & 0 & \frac{\partial N_4}{\partial y} \\ \frac{\partial N_1}{\partial y} & \frac{\partial N_1}{\partial x} & \frac{\partial N_2}{\partial y} & \frac{\partial N_2}{\partial x} & \frac{\partial N_3}{\partial y} & \frac{\partial N_3}{\partial x} & \frac{\partial N_4}{\partial y} & \frac{\partial N_4}{\partial x} \end{bmatrix} \quad (83)$$

I contributi di rigidezza derivanti dalla flessione $[K]_{bend}$ e dal taglio trasversale $[K]_{shear}$ appartengono al modello della piastra di Reissner-Mindlin; considerando il primo, si seguono questi passaggi e si ricava:

$$[K]_{bend} = \int [b^b]^T [D^b] [b^b] dA \quad (84)$$

$$[D^b] = \frac{t^3}{12} \begin{bmatrix} 2\mu + \bar{\lambda} & \bar{\lambda} & 0 \\ \bar{\lambda} & 2\mu + \bar{\lambda} & 0 \\ 0 & 0 & \mu \end{bmatrix} \quad (85)$$

Dove:

- $[D^b]$, matrice di elasticità flessionale;
- t , spessore della piastra;
- $\bar{\lambda} = \frac{\nu E}{(1-\nu^2)}$ e $\mu = \frac{E}{2(1+\nu)}$, costanti di Lamé.

La relazione (86), esplicitando $\bar{\lambda}$ e μ , diventa:

$$[D^b] = \frac{Et^3}{12(1-\nu^2)} \begin{bmatrix} 1 & \nu & 0 \\ \nu & 1 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1-\nu}{2} \end{bmatrix} \quad (86)$$

$$\{\kappa\} = [b^b] \begin{Bmatrix} u_z \\ \theta_x \\ \theta_y \end{Bmatrix} \quad (87)$$

$$\{\kappa\} = \left\{ \begin{array}{l} -\frac{\partial \theta_x}{\partial x} \\ \frac{\partial \theta_y}{\partial y} \\ -\frac{\partial \theta_x}{\partial y} - \frac{\partial \theta_y}{\partial x} \end{array} \right\} \quad (88)$$

$$[b^b] = \begin{bmatrix} 0 & -\frac{\partial N}{\partial x} & 0 \\ 0 & 0 & -\frac{\partial N}{\partial y} \\ 0 & -\frac{\partial N}{\partial y} & -\frac{\partial N}{\partial x} \end{bmatrix} \quad (89)$$

Nel caso specifico dell'elemento finito CQUAD4, la struttura della matrice $[b^b]$ diviene:

$$[b^b] = \begin{bmatrix} 0 & -\frac{\partial N_1}{\partial x} & 0 & 0 & -\frac{\partial N_2}{\partial x} & 0 & 0 & -\frac{\partial N_3}{\partial x} & 0 & 0 & -\frac{\partial N_4}{\partial x} & 0 \\ 0 & 0 & -\frac{\partial N_1}{\partial y} & 0 & 0 & -\frac{\partial N_2}{\partial y} & 0 & 0 & -\frac{\partial N_3}{\partial y} & 0 & 0 & -\frac{\partial N_4}{\partial y} \\ 0 & -\frac{\partial N_1}{\partial y} & -\frac{\partial N_1}{\partial x} & 0 & -\frac{\partial N_2}{\partial y} & -\frac{\partial N_2}{\partial x} & 0 & -\frac{\partial N_3}{\partial y} & -\frac{\partial N_3}{\partial x} & 0 & -\frac{\partial N_4}{\partial y} & -\frac{\partial N_4}{\partial x} \end{bmatrix} \quad (90)$$

L'equazione (89), andando ad esprimere le componenti del vettore $\{\kappa\}$ come in (73-75), si riformula nel seguente modo:

$$\{\kappa\} = \left\{ \begin{array}{l} \frac{\partial^2 u_z}{\partial x^2} - \frac{\partial \psi_x}{\partial x} \\ \frac{\partial^2 u_z}{\partial y^2} - \frac{\partial \psi_y}{\partial y} \\ 2 \frac{\partial^2 u_z}{\partial x \partial y} - \frac{\partial \psi_x}{\partial y} - \frac{\partial \psi_y}{\partial x} \end{array} \right\} \quad (91)$$

Nelle analisi effettuate si è lavorato con piastre abbastanza sottili ($h/L \ll 1$), perciò le correzioni al taglio ψ_x e ψ_y sono state poste pari a zero; di conseguenza, la relazione (92) si può esprimere come:

$$\{\kappa\} = \left\{ \begin{array}{l} \frac{\partial^2 u_z}{\partial x^2} \\ \frac{\partial^2 u_z}{\partial y^2} \\ 2 \frac{\partial^2 u_z}{\partial x \partial y} \end{array} \right\} \quad (92)$$

$$[b^b] = \begin{bmatrix} \frac{\partial^2 N}{\partial x^2} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{\partial^2 N}{\partial y^2} & 0 \\ 2 \frac{\partial^2 N}{\partial x \partial y} & 0 & 0 \end{bmatrix} \quad (93)$$

L'elemento CQUAD4 è costituito da una matrice $[b^b]$ che si può presentare anche con tale struttura:

$$[b^b] = \begin{bmatrix} \frac{\partial^2 N_1}{\partial x^2} & 0 & 0 & \frac{\partial^2 N_2}{\partial x^2} & 0 & 0 & \frac{\partial^2 N_3}{\partial x^2} & 0 & 0 & \frac{\partial^2 N_4}{\partial x^2} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{\partial^2 N_1}{\partial y^2} & 0 & 0 & \frac{\partial^2 N_2}{\partial y^2} & 0 & 0 & \frac{\partial^2 N_3}{\partial y^2} & 0 & 0 & \frac{\partial^2 N_4}{\partial y^2} & 0 \\ 2 \frac{\partial^2 N_1}{\partial x \partial y} & 0 & 0 & 2 \frac{\partial^2 N_2}{\partial x \partial y} & 0 & 0 & 2 \frac{\partial^2 N_3}{\partial x \partial y} & 0 & 0 & 2 \frac{\partial^2 N_4}{\partial x \partial y} & 0 & 0 \end{bmatrix} \quad (94)$$

Il contributo di rigidezza dovuto al taglio trasversale $[K]_{shear}$ è stato ricavato attraverso questi passaggi:

$$[K]_{shear} = \int [b^s]^T [Q] [b^s] dA \quad (95)$$

$$[Q] = kt\mu \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \quad (96)$$

Dove:

- $[Q]$, modulo di rigidezza al taglio trasversale;
- k , coefficiente di correzione al taglio che, solitamente, viene posto pari a 5/6.

$$\{\gamma\} = [b^s] \begin{Bmatrix} u_z \\ \theta_x \\ \theta_y \end{Bmatrix} \quad (97)$$

$$\{\gamma\} = \begin{Bmatrix} \theta_x - \frac{\partial u_z}{\partial x} \\ \theta_y - \frac{\partial u_z}{\partial y} \end{Bmatrix} \quad (98)$$

$$[b^s] = \begin{bmatrix} -\frac{\partial N}{\partial x} & N & 0 \\ -\frac{\partial N}{\partial y} & 0 & N \end{bmatrix} \quad (99)$$

Considerando l'elemento finito di interesse, in cui sono presenti 4 nodi, si ottiene che:

$$[b^s] = \begin{bmatrix} -\frac{\partial N_1}{\partial x} & N_1 & 0 & -\frac{\partial N_2}{\partial x} & N_2 & 0 & -\frac{\partial N_3}{\partial x} & N_3 & 0 & -\frac{\partial N_4}{\partial x} & N_4 & 0 \\ -\frac{\partial N_1}{\partial y} & 0 & N_1 & -\frac{\partial N_2}{\partial y} & 0 & N_2 & -\frac{\partial N_3}{\partial y} & 0 & N_3 & -\frac{\partial N_4}{\partial y} & 0 & N_4 \end{bmatrix} \quad (100)$$

L'equazione (99) può essere espressa secondo le relazioni (76-77), ricavando:

$$\{\gamma\} = \begin{Bmatrix} -2 \frac{\partial u_z}{\partial x} + \psi_x \\ -2 \frac{\partial u_z}{\partial y} + \psi_y \end{Bmatrix} \quad (101)$$

Come per il contributo flessionale, anche per il taglio trasversale si considerano nulli i fattori correttivi ψ_x e ψ_y :

$$\{\gamma\} = \begin{Bmatrix} -2 \frac{\partial u_z}{\partial x} \\ -2 \frac{\partial u_z}{\partial y} \end{Bmatrix} \quad (102)$$

$$[b^s] = \begin{bmatrix} -2 \frac{\partial N}{\partial x} & 0 & 0 \\ -2 \frac{\partial N}{\partial y} & 0 & 0 \end{bmatrix} \quad (103)$$

La matrice $[b^s]$ di un elemento finito CQUAD4 si può anche esprimere come:

$$[b^s] = \begin{bmatrix} -2 \frac{\partial N_1}{\partial x} & 0 & 0 & -2 \frac{\partial N_2}{\partial x} & 0 & 0 & -2 \frac{\partial N_3}{\partial x} & 0 & 0 & -2 \frac{\partial N_4}{\partial x} & 0 & 0 \\ -2 \frac{\partial N_1}{\partial y} & 0 & 0 & -2 \frac{\partial N_2}{\partial y} & 0 & 0 & -2 \frac{\partial N_3}{\partial y} & 0 & 0 & -2 \frac{\partial N_4}{\partial y} & 0 & 0 \end{bmatrix} \quad (104)$$

Il modello della piastra presenta una matrice $[b]$ che collega le deformazioni $\{\kappa\}$ e $\{\gamma\}$ agli spostamenti u_z , θ_x e θ_y e che si ottiene assemblando le relazioni (91) e (101):

$$[b]_{piastra} = [b^b] + [b^s] \quad (105)$$

$$\begin{aligned}
& [b]_{piastra} \\
& = \begin{bmatrix} 0 & -\frac{\partial N_1}{\partial x} & 0 & 0 & -\frac{\partial N_2}{\partial x} & 0 & 0 & -\frac{\partial N_3}{\partial x} & 0 & 0 & -\frac{\partial N_4}{\partial x} & 0 \\ 0 & 0 & -\frac{\partial N_1}{\partial y} & 0 & 0 & -\frac{\partial N_2}{\partial y} & 0 & 0 & -\frac{\partial N_3}{\partial y} & 0 & 0 & -\frac{\partial N_4}{\partial y} \\ 0 & -\frac{\partial N_1}{\partial y} & -\frac{\partial N_1}{\partial x} & 0 & -\frac{\partial N_2}{\partial y} & -\frac{\partial N_2}{\partial x} & 0 & -\frac{\partial N_3}{\partial y} & -\frac{\partial N_3}{\partial x} & 0 & -\frac{\partial N_4}{\partial y} & -\frac{\partial N_4}{\partial x} \\ -\frac{\partial N_1}{\partial x} & N_1 & 0 & -\frac{\partial N_2}{\partial x} & N_2 & 0 & -\frac{\partial N_3}{\partial x} & N_3 & 0 & -\frac{\partial N_4}{\partial x} & N_4 & 0 \\ -\frac{\partial N_1}{\partial y} & 0 & N_1 & -\frac{\partial N_2}{\partial y} & 0 & N_2 & -\frac{\partial N_3}{\partial y} & 0 & N_3 & -\frac{\partial N_4}{\partial y} & 0 & N_4 \end{bmatrix} \\
& \hspace{15em} (106)
\end{aligned}$$

L'equazione (107) corrisponde alla forma della matrice impiegata nelle analisi su MATLAB, ma è possibile ottenerne una equivalente sommando insieme la (95) e la (105):

$$\begin{aligned}
& [b]_{piastra} \\
& = \begin{bmatrix} \frac{\partial^2 N_1}{\partial x^2} & 0 & 0 & \frac{\partial^2 N_2}{\partial x^2} & 0 & 0 & \frac{\partial^2 N_3}{\partial x^2} & 0 & 0 & \frac{\partial^2 N_4}{\partial x^2} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{\partial^2 N_1}{\partial y^2} & 0 & 0 & \frac{\partial^2 N_2}{\partial y^2} & 0 & 0 & \frac{\partial^2 N_3}{\partial y^2} & 0 & 0 & \frac{\partial^2 N_4}{\partial y^2} & 0 \\ 2\frac{\partial^2 N_1}{\partial x \partial y} & 0 & 0 & 2\frac{\partial^2 N_2}{\partial x \partial y} & 0 & 0 & 2\frac{\partial^2 N_3}{\partial x \partial y} & 0 & 0 & 2\frac{\partial^2 N_4}{\partial x \partial y} & 0 & 0 \\ -2\frac{\partial N_1}{\partial x} & 0 & 0 & -2\frac{\partial N_2}{\partial x} & 0 & 0 & -2\frac{\partial N_3}{\partial x} & 0 & 0 & -2\frac{\partial N_4}{\partial x} & 0 & 0 \\ -2\frac{\partial N_1}{\partial y} & 0 & N_1 & -2\frac{\partial N_2}{\partial y} & 0 & 0 & -2\frac{\partial N_3}{\partial y} & 0 & 0 & -2\frac{\partial N_4}{\partial y} & 0 & 0 \end{bmatrix} \\
& \hspace{15em} (107)
\end{aligned}$$

Il contributo di rigidità dovuto al drilling $[K]_{drill}$ serve come elemento in grado di unire i modelli elastici della membrana e della piastra; a tal proposito, si segue un approccio simile a quello proposto da O. C. Zienkiewicz [23], il quale consiglia di attribuire a questi termini un valore circa pari a 1/1000 di quello minimo presente sulla diagonale della matrice di rigidità.

All'interno del codice di calcolo MATLAB, si introduce una variabile chiamata "k6rot", posta pari a 100, attraverso la quale si ricavano i valori dei termini della matrice $[K]_{drill}$:

$$Krot = \frac{k6rot}{10^6} * [D_{33}^m] * t \hspace{15em} (108)$$

Tali componenti vanno allocate nelle posizioni relative ai gradi di libertà attribuiti alla θ_z (6, 12, 18 e 24) ed al comportamento membranale u_x e u_y (1, 2, 7, 8, 13, 14, 19 e 20); in particolare, i termini appartenenti alla diagonale principale della matrice di rigidità $[K]_{el}$ dell'elemento finito assumono la seguente forma:

$$[K]_{el}(n, n) = detJ * Krot * \begin{bmatrix} 4 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 4 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 4 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 4 \end{bmatrix}, \text{ con } n = \{6; 12; 18; 24\}$$

(109)

L'interazione tra il comportamento membranale e quello di drilling risiede nei termini che si esprimono in questo modo:

$$[K]_{el}(m, m) = detJ * InvJ_{11} * Krot * \begin{bmatrix} -1 & 1 & 0 & -1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & -1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 & 1 & -1 & 0 & 1 \\ -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 1 & 1 \end{bmatrix},$$

con $m = \{1; 2; 7; 8; 13; 14; 19; 20\}$

(110)

Dopo aver descritto i principali contributi della matrice di rigidezza dell'elemento finito, all'interno del codice CoFe sono state introdotte alcune ulteriori rifiniture al fine di migliorare la precisione di calcolo del modello; a tal proposito, si sottolinea come sia stata implementata una procedura di sottointegrazione di Gauss 2x1 che permette di calcolare la matrice di rigidezza relativa al taglio trasversale $[K]_{shear}$ riducendo l'errore energetico che esiste tra l'integrazione esatta e quella numerica classica 2x2.

Tale procedura risulta coerente con quanto proposto da MacNeal nel suo elemento finito [19] e l'integrazione di ordine ridotto non viene eseguita nei soliti punti di Gauss $\{\pm 1/\sqrt{3}; \pm 1/\sqrt{3}\}$, bensì si considerano i punti che, rispettivamente, giacciono sulla linea $\xi = 0$ alle coordinate $\eta = \pm 1/\sqrt{3}$ e sulla retta $\eta = 0$ alle ascisse $\xi = \pm 1/\sqrt{3}$.

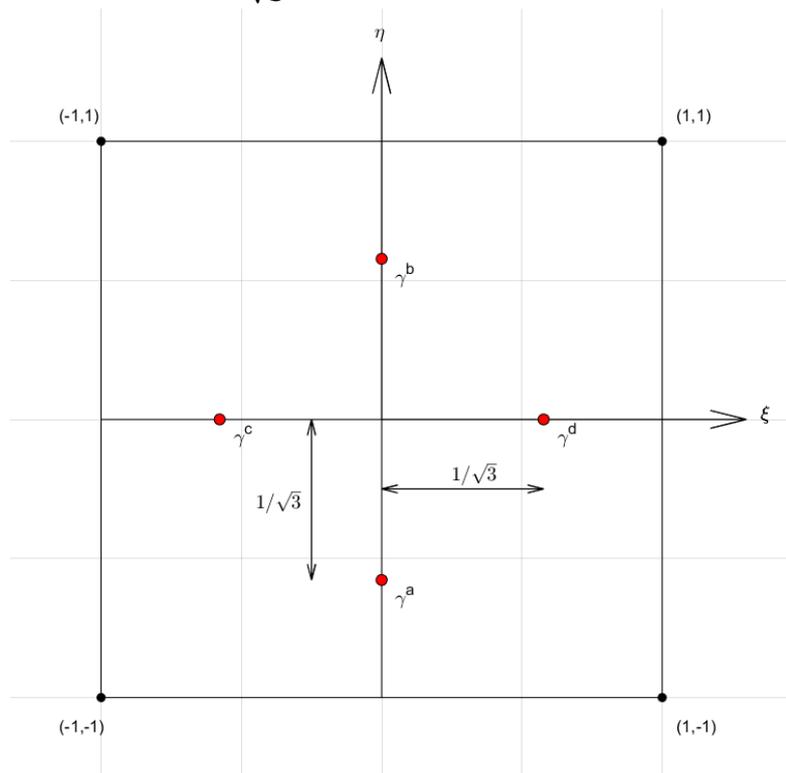


Figura 33: piazzamento dei punti per sottointegrazione 2x1 del taglio trasversale, fonte MATLAB

Nel sistema di riferimento di Fig. 33, si identificano i punti $a = \left\{0; -1/\sqrt{3}\right\}$, $b = \left\{0; 1/\sqrt{3}\right\}$, $c = \left\{-1/\sqrt{3}; 0\right\}$ e $d = \left\{1/\sqrt{3}; 0\right\}$, i quali corrispondono ai riferimenti per la sottointegrazione di Gauss relativa al taglio trasversale.

I contributi di rigidità membranale e flessionale dovuti all'effetto di taglio vengono stimati in modo simile alla componente $[K]_{shear}$: si ricorre ad una sottointegrazione di Gauss 4x1 centrata nell'origine (0;0) degli assi ζ, η e si considera soltanto la parte di elasticità membranale sensibile al taglio $[D_{33}^m]$ oppure di elasticità flessionale soggetta a taglio $[D_{33}^b]$; in tal modo, si va a correggere il fenomeno dello "shear locking", il quale si può spesso verificare per strutture o elementi sottili, che lavorano prevalentemente a flessione e taglio, con un'integrazione di Gauss tradizionale e che comporta un'errata valutazione delle tensioni e degli stress del sistema.

La modifica più significativa che è stata introdotta in CoFe riguarda la costruzione di una matrice di rigidità residua di flessione e taglio trasversale $[K]_{add}$, che si fonda sulle teoria di MacNeal [19] e permette di ridurre ulteriormente l'errore energetico tra i metodi di integrazione.

Questa matrice assume la seguente forma:

$$[K]_{add} = [D]^T [Z^s + Z^b]^{-1} [D] \quad (111)$$

In cui:

- $[D] = \begin{bmatrix} \frac{\partial N_a}{\partial x} & -N_a & 0 \\ \frac{\partial N_b}{\partial x} & N_b & 0 \\ \frac{\partial N_c}{\partial y} & 0 & -N_c \\ \frac{\partial N_d}{\partial y} & 0 & -N_d \end{bmatrix}$, matrice che collega gli spostamenti dei punti a, b, c e d alle

deformazioni dovute al taglio trasversale tramite le funzioni di forma e le loro derivate;

- $[Z^s] = [V^s]^{-1} [G^s]^{-1} [V^s]$, matrice di rigidità residua di taglio trasversale, dove:

- $[V^s] = \begin{bmatrix} \sqrt{2J_a t_a} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \sqrt{2J_b t_b} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \sqrt{2J_c t_c} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \sqrt{2J_d t_d} \end{bmatrix}$, matrice di moltiplicatori pre- e post-

diagonali aventi lo Jacobiano puntuale J e lo spessore t relativo a ciascun punto;

- $[G^s] = \begin{bmatrix} G_{11}^s & 0 & \frac{1}{2}G_{12}^s & \frac{1}{2}G_{12}^s \\ 0 & G_{11}^s & \frac{1}{2}G_{12}^s & \frac{1}{2}G_{12}^s \\ \frac{1}{2}G_{12}^s & \frac{1}{2}G_{12}^s & G_{22}^s & 0 \\ \frac{1}{2}G_{12}^s & \frac{1}{2}G_{12}^s & 0 & G_{22}^s \end{bmatrix}$, matrice relativa al modulo di taglio $G = \frac{E}{2(1+\nu)}$.

- $[Z^b] = \frac{1}{12A I_0} \begin{bmatrix} (1+a)\Delta x^2/D_{11}^m & (1-a)\Delta x^2/D_{11}^m & 0 & 0 \\ (1-a)\Delta x^2/D_{11}^m & (1+a)\Delta x^2/D_{11}^m & 0 & 0 \\ 0 & 0 & (1+b)\Delta y^2/D_{22}^m & (1-b)\Delta y^2/D_{22}^m \\ 0 & 0 & (1-b)\Delta y^2/D_{22}^m & (1+b)\Delta y^2/D_{22}^m \end{bmatrix}$,

matrice di rigidità residua flessionale, in cui:

- A , superficie dell'elemento finito;
- I_0 , momento di inerzia flessionale per unità di lunghezza pari a $\frac{t^3}{12}$;
- $\Delta x = \frac{1}{2}(x_2 + x_3 - x_1 - x_4)$ e $\Delta y = \frac{1}{2}(y_3 + y_4 - y_1 - y_2)$, differenze lungo le direzioni x e y del piano dell'elemento;
- $a = \frac{\epsilon}{\epsilon + (1-\epsilon)\frac{\Delta x^2}{\Delta y^2}}$ e $b = \frac{\epsilon}{\epsilon + (1-\epsilon)\frac{\Delta y^2}{\Delta x^2}}$ sono coefficienti ricavati attraverso sperimentazione numerica e vengono espressi in funzione della variabile libera ϵ , a cui è stato assegnato un valore pari a 0.02502 per caso di piastra Kirchhoff e 0.0264 per caso di piastra Mindlin.

La matrice di rigidezza residua $[K]_{add}$ viene opportunamente sommata a quella dell'elemento finito $[K]_{el}$ in modo da restituire la matrice di rigidezza globale del CQUAD4:

$$[K]_{CQUAD4} = [K]_{el} + [K]_{add}$$

(112)

3.3 Analisi dei dati

Le analisi dei dati sperimentali sono state svolte in ambiente MATLAB tramite il modello “Cquad4” di CoFe comprensivo degli aggiornamenti descritti nelle pagine precedenti.

Al fine di ottenere delle prestazioni migliori e più prossime a quelle dell’elemento finito del software MSC NASTRAN, si è reso necessario correggere la struttura di alcune grandezze impiegate nell’assemblaggio della matrice $[K]_{CQUAD4}$.

In particolare, è stata leggermente alterata la forma della matrice $[b]_{piastra}$ presentata nell’equazione (106) in tal modo:

$$[b]_{piastra} = \begin{bmatrix} 0 & \frac{\partial N_1}{\partial y} & 0 & 0 & \frac{\partial N_2}{\partial y} & 0 & 0 & \frac{\partial N_3}{\partial y} & 0 & 0 & \frac{\partial N_4}{\partial y} & 0 \\ 0 & 0 & -\frac{\partial N_1}{\partial x} & 0 & 0 & -\frac{\partial N_2}{\partial x} & 0 & 0 & -\frac{\partial N_3}{\partial x} & 0 & 0 & -\frac{\partial N_4}{\partial x} \\ 0 & -\frac{\partial N_1}{\partial x} & \frac{\partial N_1}{\partial y} & 0 & -\frac{\partial N_2}{\partial x} & \frac{\partial N_2}{\partial y} & 0 & -\frac{\partial N_3}{\partial x} & \frac{\partial N_3}{\partial y} & 0 & -\frac{\partial N_4}{\partial x} & \frac{\partial N_4}{\partial y} \\ \frac{\partial N_1}{\partial x} & -N_1 & 0 & \frac{\partial N_2}{\partial x} & N_2 & 0 & -\frac{\partial N_3}{\partial x} & N_3 & 0 & -\frac{\partial N_4}{\partial x} & -N_4 & 0 \\ -\frac{\partial N_1}{\partial y} & 0 & -N_1 & \frac{\partial N_2}{\partial y} & 0 & -N_2 & \frac{\partial N_3}{\partial y} & 0 & N_3 & -\frac{\partial N_4}{\partial y} & 0 & N_4 \end{bmatrix} \quad (113)$$

Tale trasformazione è stata fondamentale per vincere una caratteristica del codice di calcolo CoFe che, in pratica, effettuava un’inversione degli assi x e y, con la conseguente stima errata della rigidezza e degli spostamenti ai nodi.

Una seconda modifica ha riguardato l’ordine ed il segno delle componenti della matrice $[D]$, che è stata introdotta nell’equazione (111) e viene cambiata nella seguente struttura:

$$[D] = \begin{bmatrix} -\frac{\partial N_c}{\partial y} * \frac{1}{detJ_c * invJ_{11}^c} & N_c & 0 \\ \frac{\partial N_d}{\partial y} * \frac{1}{detJ_d * invJ_{11}^d} & N_d & 0 \\ \frac{\partial N_a}{\partial x} * \frac{1}{detJ_a * invJ_{11}^a} & 0 & -N_a \\ -\frac{\partial N_b}{\partial x} * \frac{1}{detJ_b * invJ_{11}^b} & 0 & -N_b \end{bmatrix} \quad (114)$$

Dove:

- $detJ * invJ_{11}$, prodotto che permette di considerare le dimensioni fisiche della piastra ed è, di fatto, un fattore di scala.

In ultimo, ai fini del corretto calcolo della matrice di rigidezza dell’elemento finito, si è scelto di non considerare il contributo di $[K]_{shear}$ e di sostituirlo con la $[K]_{add}$ appena modificata; l’assemblaggio della matrice di rigidezza complessiva del modello $[K]_{CQUAD4}$ diventa:

$$[K]_{CQUAD4} = [K]_{memb} + [K]_{bend} + [K]_{drill} + [K]_{add} \quad (115)$$

Dopo aver implementato in CoFe tali cambiamenti, è stato possibile procedere con alcuni test di confronto tra il software benchmark MSC NASTRAN e questo modello open-source.

La reference NASTRAN gode di un proprio linguaggio di programmazione, che viene meticolosamente descritto nel manuale dell'utente del software [24]; le simulazioni sono state eseguite a partire dalla realizzazione di un file di testo in formato .bdf (dall'inglese *Bulk Data File*), all'interno del quale devono essere specificate, riga per riga, tutte le informazioni proprie del modello (ad esempio la geometria, i materiali, i carichi e le condizioni di vincolo, il tipo di analisi da svolgere ecc.).

```

$ MSC.Nastran input file created on September 30, 2024 at 15:15:21 by
$ Patran 2017.0.2
$ Direct Text Input for Nastran System Cell Section
$ Direct Text Input for File Management Section
$ Direct Text Input for Executive Control
$ Linear Static Analysis, Database
SOL 101
CEND
$ Direct Text Input for Global Case Control Data
TITLE = MSC.Nastran job created on 30-Sep-24 at 15:13:57
ECHO = NONE
SUBCASE 1
$ Subcase name : Default
  SUBTITLE=Default
  SPC = 1
  LOAD = 2
  DISPLACEMENT(SORT1,REAL)=ALL
  SPCFORCES(SORT1,REAL)=ALL
  STRESS(SORT1,REAL,VONMISES,BILIN)=ALL
BEGIN BULK
$ Direct Text Input for Bulk Data
PARAM POST 0
PARAM PRTMAXIM YES
$PARAM, EXTOUT, DMIGPCH
$ Elements and Element Properties for region : piastra
PSHELL 1 1 .001 1 1
$ Pset: "piastra" will be imported as: "pshell.1"
CQUAD4 1 1 1 2 3 4
$ Referenced Material Records
$ Material Record : acciaio
$ Description of Material : Date: 30-Sep-24 Time: 15:06:02
MAT1 1 200000. .3 7.8-9
$ Nodes of the Entire Model
GRID 1 0. 0. 0.
GRID 2 2. 0. 0.
GRID 3 2. 2. 0.
GRID 4 0. 2. 0.
$ Loads for Load Case : Default
$SPCADD 2 1
LOAD 2 1. 1. 1
$ Displacement Constraints of Load Set : vincolo
SPC1 1 123456 1 2
$ Nodal Forces of Load Set : forza
$FORCE 1 4 0 1. 0. 0. 1.
MOMENT 1 3 0 1. 0. 1. 0.
MOMENT 1 4 0 1. 0. 1. 0.
$ Referenced Coordinate Frames
$2345678$2345678$2345678$2345678$2345678
$ASET1 123456 1 2 3 4
ENDDATA 6ab2618d

```

Figura 34: esempio di file .bdf di input a MSC NASTRAN, fonte MSC NASTRAN

Successivamente, si procede all'avvio della simulazione selezionando il file di input e, dopo pochi secondi, vengono prodotti due file in estensione .h5 (dall'inglese *Hierarchical Data Format 5*) e .f06; rispettivamente, il primo rappresenta un file binario molto diffuso per la sua capacità di memorizzazione di grandi quantità di dati strutturali, il secondo corrisponde al file di output tipico di

NASTRAN e contiene, in forma testuale, tutti i risultati e gli avvisi di diagnostica della simulazione appena svolta.

Al fine di estrapolare direttamente la matrice di rigidezza di ciascuna simulazione NASTRAN, è stato inoltre richiesto di generare, a valle del test, un file in formato .pch (dall'inglese *Punch File*), il quale risulta più compatto del .f06, in quanto presenta solo alcuni risultati selezionati dall'utente e non vengono più inclusi messaggi diagnostici; a sua volta, questo file viene dato in input ad una funzione MATLAB denominata "DMIGtoMATRsparse", precedentemente realizzata e validata, la quale permette di ottenere direttamente la matrice di rigidezza del caso benchmark NASTRAN.

4. Risultati

Nel quarto capitolo, si presentano e descrivono i risultati di alcuni casi studio che sono stati analizzati, ciascuno con specifiche condizioni teoriche, di vincoli e di carichi.

In particolare, si riportano qui sotto le analisi effettuate:

1. Piastra 2*2 quadrata, tre nodi incastrati e uno libero con il carico, modello Kirchhoff;
2. Piastra 2*2 quadrata, tre nodi incastrati e uno libero con il carico, modello Mindlin;
3. Piastra leggermente distorta, tre nodi incastrati ed uno libero con il carico, modello Kirchhoff;
4. Piastra leggermente distorta, tre nodi incastrati ed uno libero con il carico, modello Mindlin;
5. Trave a lamina incastrata su due nodi e caricata sui due estremi, ma con due forze (trave semplicemente incastrata e carico verticale all'estremità libera), modello Kirchhoff;
6. Trave a lamina incastrata su due nodi e caricata sui due estremi, ma con due forze (trave semplicemente incastrata e carico verticale all'estremità libera), modello Mindlin;

In ciascun caso, sono stati confrontati i risultati di MSC NASTRAN, considerato come benchmark dello studio, con quelli ricavati dalle simulazioni di CoFe in MATLAB.

In seguito a questa comparazione numerica, è stato condotto anche un confronto analitico con una particolare soluzione proposta da Timoshenko [25].

4.1 Presentazione dei risultati

Gli studi sono stati condotti facendo assumere allo spessore t della piastra il valore di 0.1, 1, 2 e 5 mm, in modo da osservare l'influenza di tale parametro sui risultati complessivi.

In generale, poiché CoFe non nasce come sistema in grado di elaborare piastre senza contributo di taglio trasversale (piastre appartenenti alla formulazione di Kirchhoff), nei casi 1, 3 e 5 la matrice Z^s , introdotta nell'equazione (111), non viene inclusa nel processo di assemblaggio della rigidità globale dell'elemento finito.

Nelle presentazioni seguenti, si riportano i risultati relativi soltanto a piastre dallo spessore pari a 0.1 mm, in quanto sarebbe ripetitivo ed inutile prolungare la trattazione soltanto per evidenziare la variazione di valore dell'attributo di PSHELL relativo allo spessore nei vari file .bdf; inoltre, le considerazioni presenti nel paragrafo 5.1 assumono carattere generale indipendentemente dal valore di t .

I risultati comprensivi di variazione dello spessore vengono invece riportati nel paragrafo 4.2, in un contesto di riepilogo generale del processo di calcolo.

4.1.1 Confronto numerico

4.1.1.1 Caso 1

Seguendo la teoria delle piastre di Kirchhoff, si è spento il parametro MID3=0 nel file .bdf e, in tal modo, non si considera il contributo del taglio trasversale; inoltre, sono stati bloccati i primi 3 nodi ed è stata applicata una F_z pari ad 1 N sul nodo 4.

```

$ MSC.Nastran input file created on September 30, 2024 at 15:15:21 by
$ Patran 2017.0.2
$ Direct Text Input for Nastran System Cell Section
$ Direct Text Input for File Management Section
$ Direct Text Input for Executive Control
$ Linear Static Analysis, Database
SOL 101
CEND
$ Direct Text Input for Global Case Control Data
TITLE = MSC.Nastran job created on 30-Sep-24 at 15:13:57
ECHO = NONE
SUBCASE 1
$ Subcase name : Default
  SUBTITLE=Default
  SPC = 1
  LOAD = 2
  DISPLACEMENT(SORT1,REAL)=ALL
  SPCFORCES(SORT1,REAL)=ALL
  STRESS(SORT1,REAL,VONMISES,BILIN)=ALL
BEGIN BULK
$ Direct Text Input for Bulk Data
PARAM POST 0
PARAM PRTMAXIM YES
$PARAM, EXTOUT, DMIGPCH
$ Elements and Element Properties for region : piastra
PSHELL 1 1 .1 1 0
$ Pset: "piastra" will be imported as: "pshell.1"
CQUAD4 1 1 1 2 3 4
$ Referenced Material Records
$ Material Record : acciaio
$ Description of Material : Date: 30-Sep-24 Time: 15:06:02
MAT1 1 200000. .3 7.8-9
$ Nodes of the Entire Model
GRID 1 0. 0. 0.
GRID 2 2. 0. 0.
GRID 3 2. 2. 0.
GRID 4 0. 2. 0.
$ Loads for Load Case : Default
$SPCADD 2 1
LOAD 2 1. 1. 1
$ Displacement Constraints of Load Set : vincolo
SPC1 1 123456 1 2 3
$ Nodal Forces of Load Set : forza
FORCE 1 4 0 1. 0. 0. 1.
$ Referenced Coordinate Frames
$2345678$2345678$2345678$2345678$2345678
$ASET1 123456 1 2 3 4
ENDDATA 6ab2618d

```

Figura 35: file .bdf del caso 1, fonte MSC NASTRAN

Sistemato il file .bdf, è stata eseguita la simulazione su MSC NASTRAN e sono stati ottenuti questi risultati:

DISPLACEMENT VECTOR									
POINT ID.	TYPE	T1	T2	T3	R1	R2	R3		
1	G	0.0	0.0	0.0	0.0	0.0	0.0		
2	G	0.0	0.0	0.0	0.0	0.0	0.0		
3	G	0.0	0.0	0.0	0.0	0.0	0.0		
4	G	0.0	0.0	4.994909E-02	4.740955E-02	4.740955E-02	0.0		

MSC.NASTRAN JOB CREATED ON 30-SEP-24 AT 15:13:57 **STUDENT EDITION* NOVEMBER 20, 2024 MSC Nastran 5/13/24 PAGE 12
 DEFAULT SUBCASE 1

Figura 36: risultati del caso 1 in termini di spostamenti, fonte MSC NASTRAN

STRESSES IN QUADRILATERAL ELEMENTS (QUAD4) OPTION = BILIN

ELEMENT ID	GRID-ID	FIBER DISTANCE	STRESSES IN ELEMENT COORD SYSTEM			PRINCIPAL STRESSES (ZERO SHEAR)			
			NORMAL-X	NORMAL-Y	SHEAR-XY	ANGLE	MAJOR	MINOR	VON MISES
1	CEN/4	-5.000000E-02	1.693198E+02	1.693198E+02	-9.117221E+01	-45.0000	2.604920E+02	7.814761E+01	2.315304E+02
		5.000000E-02	-1.693198E+02	-1.693198E+02	9.117221E+01	45.0000	-7.814761E+01	-2.604920E+02	2.315304E+02
1		-5.000000E-02	5.079595E+01	2.878437E+02	-9.117221E+01	-71.2157	3.188534E+02	1.978628E+01	3.094351E+02
		5.000000E-02	-5.079595E+01	-2.878437E+02	9.117221E+01	18.7843	-1.978628E+01	-3.188534E+02	3.094351E+02
2		-5.000000E-02	5.079595E+01	5.079595E+01	-9.117221E+01	-45.0000	1.419682E+02	-4.037627E+01	1.658835E+02
		5.000000E-02	-5.079595E+01	-5.079595E+01	9.117221E+01	45.0000	4.037627E+01	-1.419682E+02	1.658835E+02
3		-5.000000E-02	2.878437E+02	5.079595E+01	-9.117221E+01	-18.7843	3.188534E+02	1.978628E+01	3.094351E+02
		5.000000E-02	-2.878437E+02	-5.079595E+01	9.117221E+01	71.2157	-1.978628E+01	-3.188534E+02	3.094351E+02
4		-5.000000E-02	2.878437E+02	2.878437E+02	-9.117221E+01	-45.0000	3.790159E+02	1.966715E+02	3.283156E+02
		5.000000E-02	-2.878437E+02	-2.878437E+02	9.117221E+01	45.0000	-1.966715E+02	-3.790159E+02	3.283156E+02

Figura 37: risultati del caso 1 in termini di stress, fonte MSC NASTRAN

In seguito, ci si è spostati su CoFe, nel quale si è obbligati a riportare MID3=1 ed è stato scelto un valore ϵ pari a 0.02502; sono stati ottenuti i seguenti risultati:

TITLE: MSC.Nastran job created on 30-Sep-24 at 15:13:57 SUBCASE: 1
 SUBTITLE: Default ANALYSIS: STATICS
 LABEL: SUPERELEMENT: 0

D I S P L A C E M E N T S

POINT ID.	TYPE	T1	T2	T3	R1	R2	R3
1	G	0.000000E+00	0.000000E+00	0.000000E+00	0.000000E+00	0.000000E+00	0.000000E+00
2	G	0.000000E+00	0.000000E+00	0.000000E+00	0.000000E+00	0.000000E+00	0.000000E+00
3	G	0.000000E+00	0.000000E+00	0.000000E+00	0.000000E+00	0.000000E+00	0.000000E+00
4	G	0.000000E+00	0.000000E+00	4.934142E-02	4.680000E-02	4.680000E-02	0.000000E+00

Figura 38: risultati del caso 1 in termini di spostamenti, fonte CoFe

TITLE: MSC.Nastran job created on 30-Sep-24 at 15:13:57 SUBCASE: 1
 SUBTITLE: Default ANALYSIS: STATICS
 LABEL: SUPERELEMENT: 0

S T R E S S E S I N Q U A D 4 E L E M E N T S (C Q U A D 4)

ELEM ID	Location_Z1	NormalX_Z1	NormalY_Z1	ShearXY_Z1	ShearAngle_Z1	MajorPrin_Z1	MinorPrin_Z1	vonMises_Z1
1	-5.000000E-02	2.636428E+02	2.636428E+02	-1.419615E+02	-4.500000E+01	4.056044E+02	1.216813E+02	3.605090E+02

Figura 39: risultati del caso 1 in termini di stress, fonte CoFe

Il recovery è stato fatto sulla nuova matrice $[b]_{piastra}$, in quanto così anche gli stress si allineano a quelli riportati dal software NASTRAN.

In generale, questo è il confronto tra i risultati NASTRAN e CoFe:

TESTS	MAXIMUM DISPLACEMENTS						ERRORE	T3	R1	R2	MEDIO
	T1	T2	T3	R1	R2	R3					
NASTRAN	0.000000E+00	0.000000E+00	4.994909E-02	4.740955E-02	4.740955E-02	0.000000E+00					
1	0.000000E+00	0.000000E+00	4.934142E-02	4.680000E-02	4.680000E-02	0.000000E+00	1.22%	1.29%	1.29%		1.26%

Figura 40: confronto dei risultati del caso 1 con errore medio

Le matrici di rigidezza sono:

NASTRAN	9084.634	3571.236	0	0	0	-0.7692	-5238.095	-274.533	0	0	0	0	-5750.916	-3571.236	0	0	0	0	1904.377	274.533	0	0	0	0	-0.7692
	3571.236	9084.634	0	0	0	0.7692	274.533	1904.377	0	0	0	0	0.7692	-3571.236	-5750.916	0	0	0	0	-274.533	-5238.095	0	0	0	0
	0	0	393.7728938	196.8864469	-196.8864469	0	0	0	-366.3003663	-169.4139194	-196.886447	0	0	0	338.8278388	-169.4139194	169.4139194	0	0	0	-366.3003663	196.8864469	169.4139194	0	
	0	0	196.8864469	204.4566545	-2.9761905	0	0	0	-169.4139194	-167.8266178	-0.2289377	0	0	0	169.4139194	-174.2063492	2.9761905	0	0	0	-196.8864469	192.5213675	0.2289377	0	
	0	0	-196.8864469	-2.9761905	204.4566545	0	0	0	0	0	196.886447	0.228938	192.521368	0	0	0	-169.4139194	2.9761905	-174.2063492	0	0	169.4139194	-0.2289377	-167.8266178	
	-0.7692	0.7692	0	0	0	3.0769	0	-0.7692	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0.7692	0	0	0	0	0
	-5238.095	274.533	0	0	0	0	9084.634	-3571.236	0	0	0	0	-0.7692	1904.377	-274.533	0	0	0	-0.7692	-5750.916	3571.236	0	0	0	0
	-274.533	1904.377	0	0	0	-0.7692	-3571.236	9084.634	0	0	0	0	-0.7692	274.533	-5238.095	0	0	0	0	3571.236	-5750.916	0	0	0	0
	0	0	-366.3003663	-169.4139194	196.8864469	0	0	0	393.7728938	196.8864469	196.8864469	0	0	0	0	-366.3003663	196.8864469	-169.4139194	0	0	0	338.8278388	-169.4139194	-169.4139194	
	0	0	-169.4139194	-167.8266178	0.2289377	0	0	0	196.8864469	204.4566545	2.9761905	0	0	0	0	-196.8864469	192.5213675	-0.2289377	0	0	0	169.4139194	-174.2063492	-2.9761905	
	0	0	-196.8864469	-0.2289377	192.5213675	0	0	0	196.8864469	2.9761905	204.4566545	0	0	0	0	-169.4139194	0.2289377	-167.8266178	0	0	0	169.4139194	-2.9761905	-174.2063492	
	0	0.7692	0	0	0	0	-0.7692	-0.7692	0	0	0	3.0769	0.7692	0.7692	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
	-5750.916	-3571.236	0	0	0	0	1904.377	274.533	0	0	0	0	0.7692	9084.634	3571.236	0	0	0	0.7692	-5238.095	-274.533	0	0	0	0
	-3571.236	-5750.916	0	0	0	0	-274.533	-5238.095	0	0	0	0	0	3571.236	9084.634	0	0	0	-0.7692	274.533	1904.377	0	0	0	-0.7692
	0	0	338.8278388	169.4139194	-169.4139194	0	0	0	-366.3003663	-196.8864469	-169.4139194	0	0	0	393.7728938	-196.8864469	196.8864469	0	0	0	-366.3003663	169.4139194	196.8864469	0	
	0	0	-169.4139194	-174.2063492	2.9761905	0	0	0	196.8864469	192.5213675	0.2289377	0	0	0	0	-196.8864469	204.4566545	-2.9761905	0	0	0	169.4139194	-167.8266178	-0.2289377	
	0	0	169.4139194	2.9761905	-174.2063492	0	0	0	-169.4139194	-0.2289377	-167.8266178	0	0	0	196.8864469	-2.9761905	204.4566545	0	0	0	-196.8864469	0.2289377	192.5213675	0	
	0	0	0	0	0	0	-0.7692	0	0	0	0	0	0	0.7692	-0.7692	0	0	0	0	3.0769	0	0.7692	0	0	0
	1904.377	-274.533	0	0	0	0.7692	-5750.916	3571.236	0	0	0	0	0	-5238.095	274.533	0	0	0	0	9084.634	-3571.236	0	0	0	0.7692
	274.533	-5238.095	0	0	0	0	3571.236	-5750.916	0	0	0	0	0	-274.533	1904.377	0	0	0	0.7692	-3571.236	9084.634	0	0	0	0.7692
0	0	-366.3003663	-196.8864469	169.4139194	0	0	0	338.8278388	169.4139194	169.4139194	0	0	0	0	-366.3003663	169.4139194	-196.8864469	0	0	0	393.7728938	-196.8864469	-196.8864469		
0	0	196.8864469	192.5213675	-0.2289377	0	0	0	-169.4139194	-174.2063492	-2.9761905	0	0	0	0	169.4139194	-167.8266178	0.2289377	0	0	0	-196.8864469	204.4566545	2.9761905		
0	0	169.4139194	0.2289377	-167.8266178	0	0	0	-169.4139194	-2.9761905	-174.2063492	0	0	0	196.8864469	-0.2289377	192.5213675	0	0	0	-196.8864469	2.9761905	204.4566545	0		
-0.7692	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	-0.7692	0	0	0	0	0.7692	0.7692	0	0	0	3.0769	

Figura 41: matrice di rigidità del caso 1, fonte MSC NASTRAN

4.1.1.2 Caso 2

Nel secondo caso, si è considerata la piastra con gli stessi nodi, carichi e vincoli del caso precedente, però, trattandosi di piastra Mindlin, è stato aggiunto il contributo al taglio trasversale Z^s ; per tale motivo, è stato necessario modificare il file .bdf in input di NASTRAN, imponendo MID3=1.

```
$ MSC.Nastran input file created on September 30, 2024 at 15:15:21 by
$ Patran 2017.0.2
$ Direct Text Input for Nastran System Cell Section
$ Direct Text Input for File Management Section
$ Direct Text Input for Executive Control
$ Linear Static Analysis, Database
SOL 101
CEND
$ Direct Text Input for Global Case Control Data
TITLE = MSC.Nastran job created on 30-Sep-24 at 15:13:57
ECHO = NONE
SUBCASE 1
$ Subcase name : Default
  SUBTITLE=Default
  SPC = 1
  LOAD = 2
  DISPLACEMENT(SORT1,REAL)=ALL
  SPCFORCES(SORT1,REAL)=ALL
  STRESS(SORT1,REAL,VONMISES,BILIN)=ALL
BEGIN BULK
$ Direct Text Input for Bulk Data
PARAM   POST      0
PARAM   PRTMAXIM  YES
$PARAM, EXTOUT, DMIGPCH
$ Elements and Element Properties for region : piastra
PSHELL  1      1      .1      1      1
$ Pset: "piastra" will be imported as: "pshell.1"
CQUAD4  1      1      1      2      3      4
$ Referenced Material Records
$ Material Record : acciaio
$ Description of Material : Date: 30-Sep-24          Time: 15:06:02
MAT1    1      200000.      .3      7.8-9
$ Nodes of the Entire Model
GRID    1      0.      0.      0.
GRID    2      2.      0.      0.
GRID    3      2.      2.      0.
GRID    4      0.      2.      0.
$ Loads for Load Case : Default
$SPCADD  2      1
LOAD     2      1.      1.      1
$ Displacement Constraints of Load Set : vincolo
SPC1    1      123456  1      2      3
$ Nodal Forces of Load Set : forza
FORCE   1      4      0      1.      0.      0.      1.
$ Referenced Coordinate Frames
$2345678$2345678$2345678$2345678$2345678
$ASET1  123456  1      2      3      4
ENDDATA 6ab2618d
```

Figura 43: file .bdf del caso 2, fonte MSC NASTRAN

Dalla simulazione sono stati ricavati i seguenti risultati:

DISPLACEMENT VECTOR								
POINT ID.	TYPE	T1	T2	T3	R1	R2	R3	
1	G	0.0	0.0	0.0	0.0	0.0	0.0	
2	G	0.0	0.0	0.0	0.0	0.0	0.0	
3	G	0.0	0.0	0.0	0.0	0.0	0.0	
4	G	0.0	0.0	5.074271E-02	4.740955E-02	4.740955E-02	0.0	

MSC.NASTRAN JOB CREATED ON 30-SEP-24 AT 15:13:57 **STUDENT EDITION* NOVEMBER 20, 2024 MSC Nastran 5/13/24 PAGE 12
DEFAULT

Figura 44: risultati del caso 2 in termini di spostamenti, fonte MSC NASTRAN

STRESSES IN QUADRILATERAL ELEMENTS (QUAD4) OPTION = BILIN										
ELEMENT ID	GRID-ID	FIBER DISTANCE	STRESSES IN ELEMENT COORD SYSTEM			PRINCIPAL STRESSES (ZERO SHEAR)			VON MISES	
			NORMAL-X	NORMAL-Y	SHEAR-XY	ANGLE	MAJOR	MINOR		
1	CEN/4	-5.000000E-02	1.693198E+02	1.693198E+02	-9.117221E+01	-45.0000	2.604920E+02	7.814761E+01	2.315304E+02	
		5.000000E-02	-1.693198E+02	-1.693198E+02	9.117221E+01	45.0000	-7.814761E+01	-2.604920E+02	2.315304E+02	
1		-5.000000E-02	5.079595E+01	2.878437E+02	-9.117221E+01	-71.2157	3.188534E+02	1.978628E+01	3.094351E+02	
		5.000000E-02	-5.079595E+01	-2.878437E+02	9.117221E+01	18.7843	-1.978628E+01	-3.188534E+02	3.094351E+02	
2		-5.000000E-02	5.079595E+01	5.079595E+01	-9.117221E+01	-45.0000	1.419682E+02	-4.037627E+01	1.658835E+02	
		5.000000E-02	-5.079595E+01	-5.079595E+01	9.117221E+01	45.0000	4.037627E+01	-1.419682E+02	1.658835E+02	
3		-5.000000E-02	2.878437E+02	5.079595E+01	-9.117221E+01	-18.7843	3.188534E+02	1.978628E+01	3.094351E+02	
		5.000000E-02	-2.878437E+02	-5.079595E+01	9.117221E+01	71.2157	-1.978628E+01	-3.188534E+02	3.094351E+02	
4		-5.000000E-02	2.878437E+02	2.878437E+02	-9.117221E+01	-45.0000	3.790159E+02	1.966715E+02	3.283156E+02	
		5.000000E-02	-2.878437E+02	-2.878437E+02	9.117221E+01	45.0000	-1.966715E+02	-3.790159E+02	3.283156E+02	

Figura 45: risultati del caso 2 in termini di stress, fonte MSC NASTRAN

In seguito, ci si è spostati su CoFe, nel quale, come di consueto, si è lavorato con parametro MID3=1 e si è formata una $[K]_{CQUADA}$ costituita dal contributo membranale, a flessione, di drilling e della $[K]_{add}$, che tuttavia presentava parametro ϵ pari a 0.0264, non più uguale a 0.02502 come nel caso Kirchhoff.

Così facendo, sono stati ricavati i seguenti risultati:

TITLE: MSC.Nastran job created on 30-Sep-24 at 15:13:57		SUBCASE: 1					
SUBTITLE: Default		ANALYSIS: STATICS					
LABEL:		SUPERELEMENT: 0					
DISPLACEMENTS							
POINT ID.	TYPE	T1	T2	T3	R1	R2	R3
1	G	0.000000E+00	0.000000E+00	0.000000E+00	0.000000E+00	0.000000E+00	0.000000E+00
2	G	0.000000E+00	0.000000E+00	0.000000E+00	0.000000E+00	0.000000E+00	0.000000E+00
3	G	0.000000E+00	0.000000E+00	0.000000E+00	0.000000E+00	0.000000E+00	0.000000E+00
4	G	0.000000E+00	0.000000E+00	5.013015E-02	4.680000E-02	4.680000E-02	0.000000E+00

Figura 46: risultati del caso 2 in termini di spostamenti, fonte CoFe

TITLE: MSC.Nastran job created on 30-Sep-24 at 15:13:57		SUBCASE: 1						
SUBTITLE: Default		ANALYSIS: STATICS						
LABEL:		SUPERELEMENT: 0						
STRESSES IN QUAD4 ELEMENTS (CQUAD4)								
ELEM ID	Location_Z1	NormalX_Z1	NormalY_Z1	ShearXY_Z1	ShearAngle_Z1	MajorPrin_Z1	MinorPrin_Z1	vonMises_Z1
1	-5.000000E-02	2.636428E+02	2.636428E+02	-1.419615E+02	-4.500000E+01	4.056044E+02	1.216813E+02	3.605090E+02

Figura 47: risultati del caso 2 in termini di stress, fonte CoFe

Analogamente al caso precedente, il processo di stress recovery è stato centrato sui punti di Gauss considerati nella valutazione della rigidità a flessione, in quanto, sebbene sia presente il taglio, così facendo si ottengono i valori corretti di shear angle rispetto al NASTRAN.

Di seguito, si presenta il confronto tra i due modelli:

TESTS	MAXIMUM DISPLACEMENTS						ERRORE			MEDIO
	T1	T2	T3	R1	R2	R3	T3	R1	R2	
NASTRAN	0.000000E+00	0.000000E+00	5.074271E-02	4.740955E-02	4.740955E-02	0.000000E+00				
2	0.000000E+00	0.000000E+00	5.013015E-02	4.680000E-02	4.680000E-02	0.000000E+00	1.21%	1.29%	1.29%	1.26%

Figura 48: confronto dei risultati del caso 2 con errore medio

In dettaglio, si riporta anche la struttura delle matrici di rigidezza di NASTRAN e CoFe:

NASTRAN	9084.634	3571.236	0	0	0	-0.7692	-5238.095	-274.533	0	0	0	0	-5750.916	-3571.236	0	0	0	0	1904.377	274.533	0	0	0	0	-0.7692
	3571.236	9084.634	0	0	0	0.7692	274.533	1904.377	0	0	0	0.7692	-3571.236	-5750.916	0	0	0	0	-274.533	-5238.095	0	0	0	0	0
	0	0	300.0159184	150.0079592	-150.0079592	0	0	0	-272.7768689	-122.7689093	-150.0079592	0	0	0	245.5378186	-122.7689093	122.7689093	0	0	0	-272.7768685	150.0079592	122.7689093	0	0
	0	0	150.0079592	157.5781668	-2.9761905	0	0	0	-122.7689093	-121.1816077	-0.2289377	0	0	0	122.7689093	-127.5613391	2.9761905	0	0	0	-150.0079592	145.6428798	0.2289377	0	0
	0	0	-150.0079592	-2.9761905	157.5781668	0	0	0	150.0079592	0.2289377	145.6428798	0	0	0	-122.7689093	2.9761905	-127.5613391	0	0	0	122.7689093	-0.2289377	-121.1816077	0	0
	-0.7692	0.7692	0	0	0	3.0769	0	-0.7692	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0.7692	0	0	0	0	0
	-5238.095	274.533	0	0	0	0	9084.634	-3571.236	0	0	0	0	-0.7692	1904.377	-274.533	0	0	0	-0.7692	-5750.916	3571.236	0	0	0	0
	-274.533	1904.377	0	0	0	-0.7692	-3571.236	9084.634	0	0	0	0	-0.7692	274.533	-5238.095	0	0	0	0	3571.236	-5750.916	0	0	0	0
	0	0	-272.7768685	-122.7689093	150.0079592	0	0	0	300.0159184	150.0079592	150.0079592	0	0	0	-272.7768685	150.0079592	-122.7689093	0	0	0	245.5378186	-122.7689093	-122.7689093	0	0
	0	0	-122.7689093	-121.1816077	0.2289377	0	0	0	150.0079592	157.5781668	2.9761905	0	0	0	-150.0079592	145.6428798	-0.2289377	0	0	0	122.7689093	-127.5613391	-2.9761905	0	0
	0	0	-150.0079592	-0.2289377	145.6428798	0	0	0	150.0079592	2.9761905	157.5781668	0	0	0	-122.7689093	0.2289377	-121.1816077	0	0	0	122.7689093	-2.9761905	-127.5613391	0	0
	0	0.7692	0	0	0	0	-0.7692	-0.7692	0	0	0	0	3.0769	0.7692	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
	-5750.916	-3571.236	0	0	0	0	1904.377	274.533	0	0	0	0	0.7692	9084.634	3571.236	0	0	0	0.7692	-5238.095	-274.533	0	0	0	0
	-3571.236	-5750.916	0	0	0	0	-274.533	-5238.095	0	0	0	0	0	3571.236	9084.634	0	0	0	0	-0.7692	274.533	1904.377	0	0	0
	0	0	245.5378186	122.7689093	-122.7689093	0	0	0	-272.7768685	-150.0079592	-122.7689093	0	0	0	300.0159184	-150.0079592	150.0079592	0	0	0	-272.7768685	122.7689093	150.0079592	0	0
	0	0	-122.7689093	-127.5613391	2.9761905	0	0	0	150.0079592	145.6428798	0.2289377	0	0	0	-150.0079592	157.5781668	-2.9761905	0	0	0	122.7689093	-121.1816077	-0.2289377	0	0
	0	0	122.7689093	2.9761905	-127.5613391	0	0	0	-122.7689093	-0.2289377	-121.1816077	0	0	0	150.0079592	-2.9761905	157.5781668	0	0	0	-150.0079592	0.2289377	145.6428798	0	0
	0	0	0	0	0	0	-0.7692	0	0	0	0	0	0	0.7692	-0.7692	0	0	0	0	3.0769	0	0.7692	0	0	0
	1904.377	-274.533	0	0	0	0.7692	-5750.916	3571.236	0	0	0	0	0	-5238.095	274.533	0	0	0	0	9084.634	-3571.236	0	0	0	0.7692
	274.533	-5238.095	0	0	0	0	3571.236	-5750.916	0	0	0	0	0	-274.533	1904.377	0	0	0	0.7692	-3571.236	9084.634	0	0	0	0.7692
	0	0	-272.7768685	-150.0079592	122.7689093	0	0	0	245.5378186	122.7689093	122.7689093	0	0	0	-272.7768685	122.7689093	-150.0079592	0	0	0	300.0159184	-150.0079592	-150.0079592	0	0
	0	0	150.0079592	145.6428798	-0.2289377	0	0	0	-122.7689093	-127.5613391	-2.9761905	0	0	0	122.7689093	-121.1816077	0.2289377	0	0	0	-150.0079592	157.5781668	2.9761905	0	0
	0	0	-122.7689093	0.2289377	-121.1816077	0	0	0	-122.7689093	-2.9761905	-127.5613391	0	0	0	150.0079592	-0.2289377	145.6428798	0	0	0	-150.0079592	2.9761905	157.5781668	0	0
	-0.7692	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	-0.7692	0	0	0	0	0.7692	0.7692	0	0	0	3.0769

Figura 49: matrice di rigidità del caso 2, fonte MSC NASTRAN

4.1.1.3 Caso 3

In questa terza analisi, si considera la piastra non più di forma quadrata, ma la si deforma leggermente andando a modificare le coordinate del nodo 3 (2, 2.2, 0).

Inoltre, in analogia al caso 1, si pone MID3=0, poiché si vuole evidenziare la risposta del modello in assenza di taglio trasversale (modello Kirchhoff); la struttura del file .bdf di input al NASTRAN diventa:

```

$ MSC.Nastran input file created on September 30, 2024 at 15:15:21 by
$ Patran 2017.0.2
$ Direct Text Input for Nastran System Cell Section
$ Direct Text Input for File Management Section
$ Direct Text Input for Executive Control
$ Linear Static Analysis, Database
SOL 101
CEND
$ Direct Text Input for Global Case Control Data
TITLE = MSC.Nastran job created on 30-Sep-24 at 15:13:57
ECHO = NONE
SUBCASE 1
$ Subcase name : Default
  SUBTITLE=Default
  SPC = 1
  LOAD = 2
  DISPLACEMENT(SORT1,REAL)=ALL
  SPCFORCES(SORT1,REAL)=ALL
  STRESS(SORT1,REAL,VONMISES,BILIN)=ALL
BEGIN BULK
$ Direct Text Input for Bulk Data
PARAM POST 0
PARAM PRTMAXIM YES
$PARAM, EXTOUT, DMIGPCH
$ Elements and Element Properties for region : piastra
PSHELL 1 1 .1 1 0
$ Pset: "piastra" will be imported as: "pshell.1"
CQUAD4 1 1 1 2 3 4
$ Referenced Material Records
$ Material Record : acciaio
$ Description of Material : Date: 30-Sep-24 Time: 15:06:02
MAT1 1 200000. .3 7.8-9
$ Nodes of the Entire Model
GRID 1 0. 0. 0.
GRID 2 2. 0. 0.
GRID 3 2. 2.2 0.
GRID 4 0. 2. 0.
$ Loads for Load Case : Default
$SPCADD 2 1
LOAD 2 1. 1. 1
$ Displacement Constraints of Load Set : vincolo
SPC1 1 123456 1 2 3
$ Nodal Forces of Load Set : forza
FORCE 1 4 0 1. 0. 0. 1.
$ Referenced Coordinate Frames
$2345678$2345678$2345678$2345678$2345678
$ASET1 123456 1 2 3 4
ENDDATA 6ab2618d

```

Figura 51: file .bdf del caso 3, fonte MSC NASTRAN

I risultati in questa configurazione sono:

DISPLACEMENT VECTOR									
POINT ID.	TYPE	T1	T2	T3	R1	R2	R3		
1	G	0.0	0.0	0.0	0.0	0.0	0.0		
2	G	0.0	0.0	0.0	0.0	0.0	0.0		
3	G	0.0	0.0	0.0	0.0	0.0	0.0		
4	G	0.0	0.0	4.322821E-02	4.090938E-02	4.478747E-02	0.0		

MSC.NASTRAN JOB CREATED ON 30-SEP-24 AT 15:13:57 **STUDENT EDITION* NOVEMBER 20, 2024 MSC Nastran 5/13/24 PAGE 12
 DEFAULT

Figura 52: risultati del caso 3 in termini di spostamenti, fonte MSC NASTRAN

STRESSES IN QUADRILATERAL ELEMENTS (QUAD4) OPTION = BILIN									
ELEMENT ID	GRID-ID	FIBER DISTANCE	STRESSES IN ELEMENT COORD SYSTEM			PRINCIPAL STRESSES (ZERO SHEAR)			
			NORMAL-X	NORMAL-Y	SHEAR-XY	ANGLE	MAJOR	MINOR	VON MISES
1	CEN/4	-5.000000E-02	1.570930E+02	1.496267E+02	-8.249419E+01	-43.7045	2.359385E+02	7.078125E+01	2.097068E+02
		5.000000E-02	-1.570930E+02	-1.496267E+02	8.249419E+01	46.2955	-7.078125E+01	-2.359385E+02	2.097068E+02
	1	-5.000000E-02	4.016186E+01	2.532275E+02	-8.308895E+01	-71.0240	2.817984E+02	1.159096E+01	2.761854E+02
		5.000000E-02	-4.016186E+01	-2.532275E+02	8.308895E+01	18.9760	-1.159096E+01	-2.817984E+02	2.761854E+02
	2	-5.000000E-02	5.068172E+01	4.911293E+01	-8.766789E+01	-44.7437	1.375687E+02	-3.777407E+01	1.598392E+02
		5.000000E-02	-5.068172E+01	-4.911293E+01	8.766789E+01	45.2563	3.777407E+01	-1.375687E+02	1.598392E+02
	3	-5.000000E-02	2.633906E+02	4.925864E+01	-8.210070E+01	-18.7409	2.912455E+02	2.140372E+01	2.811553E+02
		5.000000E-02	-2.633906E+02	-4.925864E+01	8.210070E+01	71.2591	-2.140372E+01	-2.912455E+02	2.811553E+02
	4	-5.000000E-02	2.741416E+02	2.533878E+02	-7.696504E+01	-41.1607	3.414261E+02	1.861033E+02	2.960840E+02
		5.000000E-02	-2.741416E+02	-2.533878E+02	7.696504E+01	48.8393	-1.861033E+02	-3.414261E+02	2.960840E+02

Figura 53: risultati del caso 3 in termini di stress, fonte MSC NASTRAN

In CoFe la matrice di rigidezza è stata ricavata in analogia al caso Kirchhoff della piastra non deformata, con la somma di comportamento membranale, flessionale, di drilling e della rigidezza residua $[K]_{add}$, riportata ad un valore di $\epsilon = 0.02502$.

I risultati si dimostrano, in questo caso, leggermente discostati da quelli dello studio benchmark:

TITLE: MSC.Nastran job created on 30-Sep-24 at 15:13:57		SUBCASE: 1						
SUBTITLE: Default		ANALYSIS: STATICS						
LABEL:		SUPERELEMENT: 0						
D I S P L A C E M E N T S								
POINT ID.	TYPE	T1	T2	T3	R1	R2	R3	
1	G	0.000000E+00	0.000000E+00	0.000000E+00	0.000000E+00	0.000000E+00	0.000000E+00	0.000000E+00
2	G	0.000000E+00	0.000000E+00	0.000000E+00	0.000000E+00	0.000000E+00	0.000000E+00	0.000000E+00
3	G	0.000000E+00	0.000000E+00	0.000000E+00	0.000000E+00	0.000000E+00	0.000000E+00	0.000000E+00
4	G	0.000000E+00	0.000000E+00	4.910779E-02	4.518626E-02	4.533595E-02	0.000000E+00	0.000000E+00

Figura 54: risultati del caso 3 in termini di spostamenti, fonte CoFe

TITLE: MSC.Nastran job created on 30-Sep-24 at 15:13:57		SUBCASE: 1							
SUBTITLE: Default		ANALYSIS: STATICS							
LABEL:		SUPERELEMENT: 0							
S T R E S S E S I N Q U A D 4 E L E M E N T S (C Q U A D 4)									
ELEM ID	Location_Z1	NormalX_Z1	NormalY_Z1	ShearXY_Z1	ShearAngle_Z1	MajorPrin_Z1	MinorPrin_Z1	vonMises_Z1	
1	-5.000000E-02	2.624361E+02	2.619687E+02	-1.413348E+02	-4.495263E+01	4.035373E+02	1.208674E+02	3.587155E+02	

Figura 55: risultati del caso 3 in termini di stress, fonte CoFe

Lo stress recovery viene effettuato, come sempre, nei punti di Gauss usati per l'assemblaggio della matrice $[b]_{piastra}$ e, in tal modo, le tensioni risultano coerenti con quelle presenti nel software MSC NASTRAN.

Di seguito, il confronto dei risultati dei due modelli analizzati:

TESTS	MAXIMUM DISPLACEMENTS						ERRORE	MEDIUM		
	T1	T2	T3	R1	R2	R3		T3	R1	R2
NASTRAN	0.000000E+00	0.000000E+00	4.322821E-02	4.090938E-02	4.478747E-02	0.000000E+00				
3	0.000000E+00	0.000000E+00	4.910779E-02	4.518626E-02	4.533595E-02	0.000000E+00	13.60%	10.45%	1.22%	8.43%

Figura 56: confronto dei risultati del caso 3 con errore medio

In questo caso studio, le matrici di rigidezza diventano:

NASTRAN	8977.262	3496.813	0	0	0	-0.7692	-5663.295	-531.533	0	0	0	0	0	-5325.716	-3314.236	0	0	0	0	2011.749	348.956	0	0	0	0	-0.7692	
	3496.813	8812.942	0	0	0	0.7692	17.533	1628.560	0	0	0	0	0.8462	-3314.236	-5475.098	0	0	0	0	-200.110	-4966.403	0	0	0	0	0	
	0	0	410.3562073	213.2355449	-197.1206624	0	0	0	-351.692308	-170.028811	-197.120662	0	0	0	0	324.2413674	-186.9957827	169.6697214	0	0	0	0	-382.9052663	196.2685728	169.6697214	0	
	0	0	213.2355449	212.5356770	-10.9578029	0	0	0	-169.927701	-176.714989	-8.058418	0	0	0	0	171.3034257	-183.5769934	12.1813961	0	0	0	0	-214.6112699	200.1113084	9.5862751	0	
	0	0	-197.1206624	-10.9578029	196.5577458	0	0	0	181.764608	-7.600543	184.357602	0	0	0	0	-152.9379417	10.7434106	-164.6884452	0	0	0	0	168.2939965	7.6904141	-158.5735708	0	
	-0.7692	0.7692	0	0	0	3.0769	0	-0.7692	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0.7692	0	0	0	0	0	0	0
	-5663.295	17.533	0	0	0	0	9744.204	-3662.257	0	0	0	0	-0.7692	2343.708	-183.512	0	0	0	0	-0.7692	-6424.617	3828.237	0	0	0	0	0
	-531.533	1628.560	0	0	0	-0.7692	-3662.257	8894.155	0	0	0	0	-0.8462	365.554	-4662.963	0	0	0	0	0	3828.237	-5859.752	0	0	0	0	0
	0	0	-351.6923084	-169.9277008	181.7646076	0	0	0	344.0322809	178.4944406	181.7646076	0	0	0	0	-313.9549559	193.6631689	-151.6872827	0	0	0	0	321.6149834	-154.7589725	-151.6872827	0	
	0	0	-170.0288106	-176.7149887	-7.6005430	0	0	0	178.4944406	212.6033551	-4.9915918	0	0	0	0	-177.1187157	200.3641431	9.1145695	0	0	0	0	168.6530856	-183.8975062	6.2290152	0	
	0	0	-197.1206624	-8.0584184	184.3576020	0	0	0	181.7646076	-4.9915918	197.1968936	0	0	0	0	-152.9379417	8.1344594	-158.2969676	0	0	0	0	168.2939965	4.7910296	-165.6041962	0	
	0	0.8462	0	0	0	0	-0.7692	-0.8462	0	0	0	0	3.3846	0.7692	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
	-5325.716	-3314.236	0	0	0	0	2343.708	365.554	0	0	0	0	0.7692	8645.303	3480.215	0	0	0	0	0.7692	-5663.295	-531.533	0	0	0	0	0
	-3314.236	-5475.098	0	0	0	0	-183.512	-4662.963	0	0	0	0	0	3480.215	8509.501	0	0	0	0	-0.7692	17.533	1628.560	0	0	0	0	-0.7692
	0	0	324.2413674	171.3034257	-152.9379417	0	0	0	-313.9549559	-177.1187157	-152.9379417	0	0	0	0	341.4625296	-195.1632672	180.4455154	0	0	0	0	-351.7489410	153.2588741	180.4455154	0	
	0	0	-186.9957827	-183.5769934	10.7434106	0	0	0	193.6631689	200.3641431	8.1344594	0	0	0	0	-195.1632672	212.2890535	-12.3818105	0	0	0	0	188.4958811	-176.7087774	-9.4962562	0	
	0	0	169.6697214	12.1813961	-164.6884452	0	0	0	-151.6872827	9.1145695	-158.2969676	0	0	0	0	180.4455154	-12.3818105	196.2127095	0	0	0	0	-198.4279541	-9.0383807	184.2891688	0	
	0	0	0	0	0	0	-0.7692	0	0	0	0	0	0	0.7692	-0.7692	0	0	0	0	3.3846	0	0.8462	0	0	0	0	0
	2011.749	-200.110	0	0	0	0.7692	-6424.617	3828.237	0	0	0	0	0	-5663.295	17.533	0	0	0	0	0	10076.163	-3645.659	0	0	0	0	0.7692
	348.956	-4966.403	0	0	0	0	3828.237	-5859.752	0	0	0	0	0	-531.533	1628.560	0	0	0	0	0.8462	-3645.659	9197.595	0	0	0	0	0.8462
0	0	-382.9052663	-214.6112699	168.2939965	0	0	0	321.6149834	168.6530856	168.2939965	0	0	0	0	-351.7489410	188.4958811	-198.4279541	0	0	0	0	413.0392240	-194.7684745	-198.4279541	0		
0	0	196.2685728	200.1113084	7.6904141	0	0	0	-154.7589725	-183.8975062	4.7910296	0	0	0	0	153.2588741	-176.7087774	-9.0383807	0	0	0	0	-194.7684745	212.8624011	-6.4432597	0		
0	0	169.6697214	9.5862751	-158.5735708	0	0	0	-151.6872827	6.2290152	-165.6041962	0	0	0	0	180.4455154	-9.4962562	184.2891688	0	0	0	0	-198.4279541	-6.4432597	197.4050635	0		
-0.7692	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	-0.7692	0	0	0	0	0	0.7692	0.8462	0	0	0	0	3.0769	

Figura 57: matrice di rigidezza del caso 3, fonte MSC NASTRAN

4.1.1.4 Caso 4

Il quarto caso è stato trattato in analogia al caso 2, in quanto si riprende la teoria delle piastre di Mindlin applicata ad una forma deformata, sempre attraverso lo spostamento delle coordinate del nodo 3 (2, 2.2, 0).

Nel file di input per NASTRAN si riporta MID3=1, in modo da considerare la componente di taglio trasversale.

```
$ MSC.Nastran input file created on September 30, 2024 at 15:15:21 by
$ Patran 2017.0.2
$ Direct Text Input for Nastran System Cell Section
$ Direct Text Input for File Management Section
$ Direct Text Input for Executive Control
$ Linear Static Analysis, Database
SOL 101
CEND
$ Direct Text Input for Global Case Control Data
TITLE = MSC.Nastran job created on 30-Sep-24 at 15:13:57
ECHO = NONE
SUBCASE 1
$ Subcase name : Default
  SUBTITLE=Default
  SPC = 1
  LOAD = 2
  DISPLACEMENT(SORT1,REAL)=ALL
  SPCFORCES(SORT1,REAL)=ALL
  STRESS(SORT1,REAL,VONMISES,BILIN)=ALL
BEGIN BULK
$ Direct Text Input for Bulk Data
PARAM   POST      0
PARAM   PRTMAXIM  YES
$PARAM, EXTOUT, DMIGPCH
$ Elements and Element Properties for region : piastra
PSHELL  1      1      .1      1      1
$ Pset: "piastra" will be imported as: "pshell.1"
CQUAD4  1      1      1      2      3      4
$ Referenced Material Records
$ Material Record : acciaio
$ Description of Material : Date: 30-Sep-24          Time: 15:06:02
MAT1    1      200000.      .3      7.8-9
$ Nodes of the Entire Model
GRID    1      0.      0.      0.
GRID    2      2.      0.      0.
GRID    3      2.      2.2     0.
GRID    4      0.      2.      0.
$ Loads for Load Case : Default
$SPCADD  2      1
LOAD     2      1.      1.      1
$ Displacement Constraints of Load Set : vincolo
SPC1    1      123456  1      2      3
$ Nodal Forces of Load Set : forza
FORCE   1      4      0      1.      0.      0.      1.
$ Referenced Coordinate Frames
$2345678$2345678$2345678$2345678$2345678$2345678
$ASET1  123456  1      2      3      4
ENDDATA 6ab2618d
```

Figura 59: file .bdf del caso 4, fonte MSC NASTRAN

Di seguito, i risultati della simulazione:

D I S P L A C E M E N T V E C T O R

POINT ID.	TYPE	T1	T2	T3	R1	R2	R3
1	G	0.0	0.0	0.0	0.0	0.0	0.0
2	G	0.0	0.0	0.0	0.0	0.0	0.0
3	G	0.0	0.0	0.0	0.0	0.0	0.0
4	G	0.0	0.0	4.394919E-02	4.090058E-02	4.479537E-02	0.0

MSC.NASTRAN JOB CREATED ON 30-SEP-24 AT 15:13:57 **STUDENT EDITION* NOVEMBER 20, 2024 MSC Nastran 5/13/24 PAGE 12
 DEFAULT

Figura 60: risultati del caso 4 in termini di spostamenti, fonte MSC NASTRAN

S T R E S S E S I N Q U A D R I L A T E R A L E L E M E N T S (Q U A D 4) OPTION = BILIN

ELEMENT ID	GRID-ID	FIBER DISTANCE	STRESSES IN ELEMENT COORD SYSTEM			PRINCIPAL STRESSES (ZERO SHEAR)			VON MISES
			NORMAL-X	NORMAL-Y	SHEAR-XY	ANGLE	MAJOR	MINOR	
1	CEN/4	-5.000000E-02	1.571089E+02	1.496104E+02	-8.249332E+01	-43.6989	2.359381E+02	7.078119E+01	2.097065E+02
		5.000000E-02	-1.571089E+02	-1.496104E+02	8.249332E+01	46.3011	-7.078119E+01	-2.359381E+02	2.097065E+02
1		-5.000000E-02	4.015491E+01	2.531889E+02	-8.308921E+01	-71.0219	2.817633E+02	1.158051E+01	2.761552E+02
		5.000000E-02	-4.015491E+01	-2.531889E+02	8.308921E+01	18.9781	-1.158051E+01	-2.817633E+02	2.761552E+02
2		-5.000000E-02	5.067687E+01	4.911825E+01	-8.766704E+01	-44.7453	1.375681E+02	-3.777294E+01	1.598378E+02
		5.000000E-02	-5.067687E+01	-4.911825E+01	8.766704E+01	45.2547	3.777294E+01	-1.375681E+02	1.598378E+02
3		-5.000000E-02	2.634272E+02	4.926399E+01	-8.209876E+01	-18.7386	2.912777E+02	2.141348E+01	2.811832E+02
		5.000000E-02	-2.634272E+02	-4.926399E+01	8.209876E+01	71.2614	-2.141348E+01	-2.912777E+02	2.811832E+02
4		-5.000000E-02	2.741803E+02	2.533492E+02	-7.696410E+01	-41.1465	3.414304E+02	1.860991E+02	2.960873E+02
		5.000000E-02	-2.741803E+02	-2.533492E+02	7.696410E+01	48.8535	-1.860991E+02	-3.414304E+02	2.960873E+02

Figura 61: risultati del caso 4 in termini di stress, fonte MSC NASTRAN

In seguito, ci si è spostati su CoFe, nel quale, si è lavorato con parametro MID3=1 e si è formata una matrice di rigidezza costituita dal contributo membranale, a flessione, di drilling e della Kadd, che presentava parametro ϵ pari a 0.0264, ormai selezionato in tutti i casi di Mindlin.

Così facendo, sono stati ricavati i seguenti risultati:

TITLE: MSC.Nastran job created on 30-Sep-24 at 15:13:57	SUBCASE: 1
SUBTITLE: Default	ANALYSIS: STATICS
LABEL:	SUPERELEMENT: 0

D I S P L A C E M E N T S

POINT ID.	TYPE	T1	T2	T3	R1	R2	R3
1	G	0.000000E+00	0.000000E+00	0.000000E+00	0.000000E+00	0.000000E+00	0.000000E+00
2	G	0.000000E+00	0.000000E+00	0.000000E+00	0.000000E+00	0.000000E+00	0.000000E+00
3	G	0.000000E+00	0.000000E+00	0.000000E+00	0.000000E+00	0.000000E+00	0.000000E+00
4	G	0.000000E+00	0.000000E+00	4.993749E-02	4.521553E-02	4.533755E-02	0.000000E+00

Figura 62: risultati del caso 4 in termini di spostamenti, fonte CoFe

TITLE: MSC.Nastran job created on 30-Sep-24 at 15:13:57	SUBCASE: 1
SUBTITLE: Default	ANALYSIS: STATICS
LABEL:	SUPERELEMENT: 0

S T R E S S E S I N Q U A D 4 E L E M E N T S (C Q U A D 4)

ELEM ID	Location_Z1	NormalX_Z1	NormalY_Z1	ShearXY_Z1	ShearAngle_Z1	MajorPrin_Z1	MinorPrin_Z1	vonMises_Z1
1	-5.000000E-02	2.624785E+02	2.620975E+02	-1.413830E+02	-4.496140E+01	4.036711E+02	1.209049E+02	3.588349E+02

Figura 63: risultati del caso 4 in termini di stress, fonte CoFe

Analogamente al caso precedente, il processo stress recovery è stato centrato sui punti di Gauss e non quelli considerati nella sottointegrazione 2x1, in quanto, sebbene sia presente il taglio, così facendo si ottengono i valori corretti di shear angle rispetto al NASTRAN.

Si riporta il confronto dei risultati dei due modelli, comprensivo di errore medio rispetto alla reference NASTRAN:

TESTS	MAXIMUM DISPLACEMENTS						ERRORE			
	T1	T2	T3	R1	R2	R3	T3	R1	R2	MEDIO
NASTRAN	0.000000E+00	0.000000E+00	4.394919E-02	4.090058E-02	4.479537E-02	0.000000E+00				
4	0.000000E+00	0.000000E+00	4.993749E-02	4.521553E-02	4.533755E-02	0.000000E+00	13.63%	10.55%	1.21%	8.46%

Figura 64: confronto dei risultati del caso 4 con errore medio

In ultimo, sono riprese le matrici di rigidezza dello stesso elemento trattato in NASTRAN ed in CoFe:

NASTRAN	8977.262	3496.813	0	0	0	-0.7692	-5663.295	-531.533	0	0	0	0	0	0	-5325.716	-3314.236	0	0	0	0	2011.749	348.956	0	0	0	0	-0.7692		
	3496.813	8812.942	0	0	0	0.7692	17.533	1628.560	0	0	0	0	0	0.8462	-3314.236	-5475.098	0	0	0	0	0	-200.110	-4966.403	0	0	0	0	0	
	0	0	315.4535455	162.0498644	-153.4036811	0	0	0	-265.676338	-123.499923	-153.403681	0	0	0	0	238.4562360	-136.1182806	126.1835790	0	0	0	0	0	-288.2334434	149.4315065	126.1835790	0	0	
	0	0	162.0498644	163.4193987	-8.8884007	0	0	0	-123.675760	-128.114197	-5.989016	0	0	0	0	125.0377893	-134.7678915	10.0982980	0	0	0	0	0	-163.4118935	151.2033399	7.5031770	0	0	
	0	0	-153.4036811	-8.8884007	154.9101668	0	0	0	0	142.000578	-5.528639	142.710023	0	0	0	0	-113.4184467	8.6750103	-123.2854010	0	0	0	0	124.8215499	5.6195119	-117.1705265	0	0	
	-0.7692	0.7692	0	0	0	3.0769	0	-0.7692	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0.7692	0	0	0	0	0	0	
	-5663.295	17.533	0	0	0	0	0	9744.204	-3662.257	0	0	0	0	-0.7692	2343.708	-183.512	0	0	0	0	-0.7692	-6424.617	3828.237	0	0	0	0	0	
	-531.533	1628.560	0	0	0	-0.7692	-3662.257	8894.155	0	0	0	0	-0.8462	365.554	-4662.963	0	0	0	0	0	0	3828.237	-5859.752	0	0	0	0	0	
	0	0	-265.6763381	-123.6757603	142.0005778	0	0	0	265.7336206	136.1063471	142.0005778	0	0	0	0	-235.9087377	147.3239166	-112.1756949	0	0	0	0	235.8514552	-112.4581908	-112.1756949	0	0		
	0	0	-123.4999227	-128.1141967	-5.5286388	0	0	0	136.1063471	163.6973576	-2.9196876	0	0	0	0	-134.7393201	151.6662058	7.0339673	0	0	0	0	122.1328957	-135.0886539	4.1484130	0	0		
	0	0	-153.4036811	-5.9890162	142.7100229	0	0	0	142.0005778	-2.9196876	155.5493145	0	0	0	0	-113.4184467	6.0660591	-116.8939233	0	0	0	0	124.8215499	2.7201274	-124.2011519	0	0		
	0	0.8462	0	0	0	0	-0.7692	-0.8462	0	0	0	0	3.3846	0.7692	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
	-5325.716	-3314.236	0	0	0	0	0	2343.708	365.554	0	0	0	0	0.7692	8645.303	3480.215	0	0	0	0	0.7692	-5663.295	-531.533	0	0	0	0	0	
	-3314.236	-5475.098	0	0	0	0	0	-183.512	-4662.963	0	0	0	0	0	-3480.215	8509.501	0	0	0	0	-0.7692	17.533	1628.560	0	0	0	0	-0.7692	
	0	0	238.4562360	125.0377893	-113.4184467	0	0	0	-235.9087377	-134.7393201	-113.4184467	0	0	0	0	263.1802643	-148.8083174	140.6899733	0	0	0	0	-265.7277627	110.9687920	140.6899733	0	0		
	0	0	-136.1182806	-134.7678915	8.6750103	0	0	0	147.3239166	151.6662058	6.0660591	0	0	0	0	-148.8083174	163.3827065	-10.2977128	0	0	0	0	137.6026815	-128.1080854	-7.4121584	0	0		
	0	0	126.1835790	10.0982980	-123.2854010	0	0	0	-112.1756949	7.0339673	-116.8939233	0	0	0	0	140.6899733	-10.2977128	154.5657109	0	0	0	0	-154.6978574	-6.9567790	142.6421703	0	0		
	0	0	0	0	0	0	-0.7692	0	0	0	0	0	0	0.7692	-0.7692	0	0	0	0	3.3846	0	0.8462	0	0	0	0	0	0	
	2011.749	-200.110	0	0	0	0.7692	-6424.617	3828.237	0	0	0	0	0	-5663.295	17.533	0	0	0	0	0	#####	-3645.659	0	0	0	0	0.7692		
	348.956	-4966.403	0	0	0	0	3828.237	-5859.752	0	0	0	0	0	-531.533	1628.560	0	0	0	0	0.8462	-3645.659	9197.595	0	0	0	0	0.8462		
0	0	-288.2334434	-163.4118935	124.8215499	0	0	0	235.8514552	122.1328957	124.8215499	0	0	0	0	-265.7277627	137.6026815	-154.6978574	0	0	0	0	318.1097509	-147.9421077	-154.6978574	0	0			
0	0	149.4315065	151.2033399	5.6195119	0	0	0	-112.4581908	-135.0886539	2.7201274	0	0	0	0	110.9687920	-128.1080854	-6.9567790	0	0	0	0	-147.9421077	163.7462724	-4.3616580	0	0			
0	0	126.1835790	7.5031770	-117.1705265	0	0	0	-112.1756949	4.1484130	-124.2011519	0	0	0	0	140.6899733	-7.4121584	142.6421703	0	0	0	0	-154.6978574	-4.3616580	155.7580650	0	0			
-0.7692	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	-0.7692	0	0	0	0	0	0.7692	0.8462	0	0	0	0	3.0769			

Figura 65: matrice di rigidezza del caso 4, fonte MSC NASTRAN

4.1.1.5 Caso 5

Nel quinto caso, si considera una trave a lamina incastrata nei nodi 1 e 2 e caricata con due forze verticali unitarie applicate ai nodi 3 e 4, sempre sotto le ipotesi proprie della teoria di Kirchhoff (MID3=0).

```
$ MSC.Nastran input file created on September 30, 2024 at 15:15:21 by
$ Patran 2017.0.2
$ Direct Text Input for Nastran System Cell Section
$ Direct Text Input for File Management Section
$ Direct Text Input for Executive Control
$ Linear Static Analysis, Database
SOL 101
CEND
$ Direct Text Input for Global Case Control Data
TITLE = MSC.Nastran job created on 30-Sep-24 at 15:13:57
ECHO = NONE
SUBCASE 1
$ Subcase name : Default
  SUBTITLE=Default
  SPC = 1
  LOAD = 2
  DISPLACEMENT(SORT1,REAL)=ALL
  SPCFORCES(SORT1,REAL)=ALL
  STRESS(SORT1,REAL,VONMISES,BILIN)=ALL
BEGIN BULK
$ Direct Text Input for Bulk Data
PARAM POST 0
PARAM PRTMAXIM YES
$PARAM, EXTOUT, DMIGPCH
$ Elements and Element Properties for region : piastra
PSHELL 1 1 .1 1 0
$ Pset: "piastra" will be imported as: "pshell.1"
CQUAD4 1 1 1 2 3 4
$ Referenced Material Records
$ Material Record : acciaio
$ Description of Material : Date: 30-Sep-24 Time: 15:06:02
MAT1 1 200000. .3 7.8-9
$ Nodes of the Entire Model
GRID 1 0. 0. 0.
GRID 2 2. 0. 0.
GRID 3 2. 2. 0.
GRID 4 0. 2. 0.
$ Loads for Load Case : Default
$SPCADD 2 1
LOAD 2 1. 1. 1
$ Displacement Constraints of Load Set : vincolo
SPC1 1 123456 1 2
$ Nodal Forces of Load Set : forza
FORCE 1 3 0 1. 0. 0. 1.
FORCE 1 4 0 1. 0. 0. 1.
$MOMENT 1 3 0 1. 1. 0. 0.
$MOMENT 1 4 0 1. 1. 0. 0.
$ Referenced Coordinate Frames
$2345678$2345678$2345678$2345678$2345678
$ASET1 123456 1 2 3 4
ENDDATA 6ab2618d
|
```

Figura 67: file .bdf del caso 5, fonte MSC NASTRAN

La simulazione NASTRAN ha prodotto i seguenti valori:

NASTRAN	9084.634	3571.236	0	0	0	-0.7692	-5238.095	-274.533	0	0	0	0	-5750.916	-3571.236	0	0	0	0	1904.377	274.533	0	0	0	-0.7692	
	3571.236	9084.634	0	0	0	0.7692	274.533	1904.377	0	0	0	0.7692	-3571.236	-5750.916	0	0	0	0	-274.533	-5238.095	0	0	0	0	
	0	0	393.7728938	196.8864469	-196.8864469	0	0	0	-366.300366	-169.413919	-196.886447	0	0	0	338.8278388	-169.4139194	169.4139194	0	0	0	-366.3003663	196.8864469	169.4139194	0	
	0	0	196.8864469	204.4566545	-2.9761905	0	0	0	-169.413919	-167.826618	-0.228938	0	0	0	169.4139194	-174.2063492	2.9761905	0	0	0	-196.8864469	192.5213675	0.2289377	0	
	0	0	-196.8864469	-2.9761905	204.4566545	0	0	0	196.886447	0.228938	192.521368	0	0	0	-169.4139194	2.9761905	-174.2063492	0	0	0	169.4139194	-0.2289377	-167.8266178	0	
	-0.7692	0.7692	0	0	0	3.0769	0	-0.7692	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0.7692	0	0	0	0	0	
	-5238.095	274.533	0	0	0	0	9084.634	-3571.236	0	0	0	-0.7692	1904.377	-274.533	0	0	0	-0.7692	-5750.916	3571.236	0	0	0	0	
	-274.533	1904.377	0	0	0	-0.7692	-3571.236	9084.634	0	0	0	-0.7692	274.533	-5238.095	0	0	0	-0.7692	3571.236	-5750.916	0	0	0	0	
	0	0	-366.3003663	-169.4139194	196.8864469	0	0	0	393.7728938	196.8864469	196.8864469	0	0	0	-366.3003663	196.8864469	-169.4139194	0	0	0	338.8278388	-169.4139194	-169.4139194	0	
	0	0	-169.4139194	-167.8266178	0.2289377	0	0	0	196.8864469	204.4566545	2.9761905	0	0	0	-196.8864469	192.5213675	-0.2289377	0	0	0	169.4139194	-174.2063492	-2.9761905	0	
	0	0	196.8864469	-0.2289377	192.5213675	0	0	0	196.8864469	2.9761905	204.4566545	0	0	0	-169.4139194	0.2289377	-167.8266178	0	0	0	169.4139194	-2.9761905	-174.2063492	0	
	0	0.7692	0	0	0	0	-0.7692	-0.7692	0	0	0	3.0769	0.7692	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
	-5750.916	-3571.236	0	0	0	0	1904.377	274.533	0	0	0	0.7692	9084.634	3571.236	0	0	0	0.7692	-5238.095	-274.533	0	0	0	0	
	-3571.236	-5750.916	0	0	0	0	-274.533	-5238.095	0	0	0	0	3571.236	9084.634	0	0	0	-0.7692	274.533	1904.377	0	0	0	-0.7692	
	0	0	338.8278388	169.4139194	-169.4139194	0	0	0	-366.3003663	-196.8864469	-169.4139194	0	0	0	393.7728938	-196.8864469	196.8864469	0	0	0	-366.3003663	169.4139194	196.8864469	0	
	0	0	-169.4139194	-174.2063492	2.9761905	0	0	0	196.8864469	192.5213675	0.2289377	0	0	0	-196.8864469	204.4566545	-2.9761905	0	0	0	169.4139194	-167.8266178	-0.2289377	0	
	0	0	169.4139194	2.9761905	-174.2063492	0	0	0	-169.4139194	-0.2289377	-167.8266178	0	0	0	196.8864469	-2.9761905	204.4566545	0	0	0	-196.8864469	0.2289377	192.5213675	0	
	0	0	0	0	0	0	-0.7692	0	0	0	0	0	0.7692	-0.7692	0	0	0	0	3.0769	0	0.7692	0	0	0	0
	1904.377	-274.533	0	0	0	0.7692	-5750.916	3571.236	0	0	0	0	-5238.095	274.533	0	0	0	0	0	9084.634	-3571.236	0	0	0.7692	
	274.533	-5238.095	0	0	0	0	3571.236	-5750.916	0	0	0	0	-274.533	1904.377	0	0	0	0.7692	-3571.236	9084.634	0	0	0	0.7692	
	0	0	-366.3003663	-196.8864469	169.4139194	0	0	0	338.8278388	169.4139194	169.4139194	0	0	0	-366.3003663	169.4139194	-196.8864469	0	0	0	393.7728938	-196.8864469	-196.8864469	0	
	0	0	196.8864469	192.5213675	-0.2289377	0	0	0	-169.4139194	-174.2063492	-2.9761905	0	0	0	169.4139194	-167.8266178	0.2289377	0	0	0	-196.8864469	204.4566545	2.9761905	0	
	0	0	169.4139194	0.2289377	-167.8266178	0	0	0	-169.4139194	-2.9761905	-174.2063492	0	0	0	196.8864469	-0.2289377	192.5213675	0	0	0	-196.8864469	2.9761905	204.4566545	0	
	-0.7692	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	-0.7692	0	0	0	0	0.7692	0.7692	0	0	0	3.0769	

Figura 73: matrice di rigidezza del caso 5, fonte MSC NASTRAN

4.1.1.6 Caso 6

Nell'ultimo caso studio analizzato, si prende in esame la stessa trave del caso precedente, ma si considera presente anche il contributo del taglio trasversale, coerentemente con le ipotesi delle piastre sottili Mindlin.

Si riporta il parametro MID3=1 nel file input .bdf e si procede con la simulazione del modello:

```
MSC.Nastran input file created on September 30, 2024 at 15:15:21 by
Patran 2017.0.2
Direct Text Input for Nastran System Cell Section
Direct Text Input for File Management Section
Direct Text Input for Executive Control
Linear Static Analysis, Database
SOL 101
CEND
Direct Text Input for Global Case Control Data
TITLE = MSC.Nastran job created on 30-Sep-24 at 15:13:57
ECHO = NONE
SUBCASE 1
Subcase name : Default
  SUBTITLE=Default
  SPC = 1
  LOAD = 2
  DISPLACEMENT(SORT1,REAL)=ALL
  SPCFORCES(SORT1,REAL)=ALL
  STRESS(SORT1,REAL,VONMISES,BILIN)=ALL
BEGIN BULK
Direct Text Input for Bulk Data
PARAM POST 0
PARAM PRTMAXIM YES
$PARAM, EXTOUT, DMIGPCH
$ Elements and Element Properties for region : piastra
PSHELL 1 1 .1 1 1
$ Pset: "piastra" will be imported as: "pshell.1"
CQUAD4 1 1 1 2 3 4
$ Referenced Material Records
$ Material Record : acciaio
$ Description of Material : Date: 30-Sep-24 Time: 15:06:02
MAT1 1 200000. .3 7.8-9
$ Nodes of the Entire Model
GRID 1 0. 0. 0.
GRID 2 2. 0. 0.
GRID 3 2. 2. 0.
GRID 4 0. 2. 0.
$ Loads for Load Case : Default
$SPCADD 2 1
LOAD 2 1. 1. 1
$ Displacement Constraints of Load Set : vincolo
SPC1 1 123456 1 2
$ Nodal Forces of Load Set : forza
FORCE 1 3 0 1. 0. 0. 1.
FORCE 1 4 0 1. 0. 0. 1.
$MOMENT 1 3 0 1. 1. 0. 0.
$MOMENT 1 4 0 1. 1. 0. 0.
$ Referenced Coordinate Frames
$2345678$2345678$2345678$2345678$2345678
$ASET1 123456 1 2 3 4
ENDDATA 6ab2618d
```

Figura 75: file .bdf del caso 6, fonte MSC NASTRAN

NASTRAN	9084.634	3571.236	0	0	0	-0.7692	-5238.095	-274.533	0	0	0	0	-5750.916	-3571.236	0	0	0	0	1904.377	274.533	0	0	0	0	-0.7692
	3571.236	9084.634	0	0	0	0.7692	274.533	1904.377	0	0	0	0.7692	-3571.236	-5750.916	0	0	0	0	0	-274.533	-5238.095	0	0	0	0
	0	0	300.0159184	150.0079592	-150.0079592	0	0	0	0	-272.7768685	-122.7689093	-150.0079592	0	0	0	245.5378186	-122.7689093	122.7689093	0	0	0	-272.7768685	150.0079592	122.7689093	0
	0	0	150.0079592	157.5781668	-2.9761905	0	0	0	0	-122.7689093	-121.1816077	-0.2289377	0	0	0	122.7689093	-127.5613391	2.9761905	0	0	0	-150.0079592	145.6428798	0.2289377	0
	0	0	-150.0079592	-2.9761905	157.5781668	0	0	0	0	150.0079592	0.2289377	145.6428798	0	0	0	-122.7689093	2.9761905	-127.5613391	0	0	0	122.7689093	-0.2289377	-121.1816077	0
	-0.7692	0.7692	0	0	0	0	3.0769	0	-0.7692	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0.7692	0	0	0	0
	-5238.095	274.533	0	0	0	0	0	9084.634	-3571.236	0	0	0	-0.7692	1904.377	-274.533	0	0	0	-0.7692	-5750.916	3571.236	0	0	0	0
	-274.533	1904.377	0	0	0	0	-0.7692	-3571.236	9084.634	0	0	0	-0.7692	274.533	-5238.095	0	0	0	0	3571.236	-5750.916	0	0	0	0
	0	0	-272.7768685	-122.7689093	150.0079592	0	0	0	0	300.0159184	150.0079592	150.0079592	0	0	0	-272.7768685	150.0079592	-122.7689093	0	0	0	245.5378186	-122.7689093	-122.7689093	0
	0	0	-122.7689093	-121.1816077	0.2289377	0	0	0	0	150.0079592	157.5781668	2.9761905	0	0	0	-150.0079592	145.6428798	-0.2289377	0	0	0	122.7689093	-127.5613391	-2.9761905	0
	0	0	-150.0079592	-0.2289377	145.6428798	0	0	0	0	150.0079592	2.9761905	157.5781668	0	0	0	-122.7689093	0.2289377	-121.1816077	0	0	0	122.7689093	-2.9761905	-127.5613391	0
	0	0.7692	0	0	0	0	0	-0.7692	-0.7692	0	0	0	3.0769	0.7692	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
	-5750.916	-3571.236	0	0	0	0	0	1904.377	274.533	0	0	0	0.7692	9084.634	3571.236	0	0	0	0.7692	-5238.095	-274.533	0	0	0	0
	-3571.236	-5750.916	0	0	0	0	0	-274.533	-5238.095	0	0	0	0	3571.236	9084.634	0	0	0	-0.7692	274.533	1904.377	0	0	0	-0.7692
	0	0	245.5378186	122.7689093	-122.7689093	0	0	0	0	-272.7768685	-150.0079592	-122.7689093	0	0	0	300.0159184	-150.0079592	150.0079592	0	0	0	-272.7768685	122.7689093	150.0079592	0
	0	0	-122.7689093	-127.5613391	2.9761905	0	0	0	0	150.0079592	145.6428798	0.2289377	0	0	0	-150.0079592	157.5781668	-2.9761905	0	0	0	122.7689093	-121.1816077	-0.2289377	0
	0	0	122.7689093	2.9761905	-127.5613391	0	0	0	0	-122.7689093	-0.2289377	-121.1816077	0	0	0	150.0079592	-2.9761905	157.5781668	0	0	0	-150.0079592	0.2289377	145.6428798	0
	0	0	0	0	0	0	0	-0.7692	0	0	0	0	0	0.7692	-0.7692	0	0	0	0	3.0769	0	0.7692	0	0	0
	1904.377	-274.533	0	0	0	0	0.7692	-5750.916	3571.236	0	0	0	0	-5238.095	274.533	0	0	0	0	9084.634	-3571.236	0	0	0	0.7692
	274.533	-5238.095	0	0	0	0	0	3571.236	-5750.916	0	0	0	0	-274.533	1904.377	0	0	0	0.7692	-3571.236	9084.634	0	0	0	0.7692
	0	0	-272.7768685	-150.0079592	122.7689093	0	0	0	0	245.5378186	122.7689093	122.7689093	0	0	0	-272.7768685	122.7689093	-150.0079592	0	0	0	300.0159184	-150.0079592	-150.0079592	0
	0	0	150.0079592	145.6428798	-0.2289377	0	0	0	0	-122.7689093	-127.5613391	-2.9761905	0	0	0	122.7689093	-121.1816077	0.2289377	0	0	0	-150.0079592	157.5781668	2.9761905	0
	0	0	122.7689093	0.2289377	-121.1816077	0	0	0	0	-122.7689093	-2.9761905	-127.5613391	0	0	0	150.0079592	-0.2289377	145.6428798	0	0	0	-150.0079592	2.9761905	157.5781668	0
	-0.7692	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	-0.7692	0	0	0	0	0.7692	0.7692	0	0	0	3.0769

Figura 81: matrice di rigidità del caso 6, fonte MSC NASTRAN

4.1.2 Confronto analitico

Al fine di arricchire di significato il presente lavoro, oltre al confronto numerico tra il software benchmark MSC NASTRAN e quello open-source CoFe, è stata calcolata la soluzione analitica di una piastra proposta da S. Timoshenko [25].

Si è considerata una piastra di lati a e b e di spessore uniforme t , ne sono stati incastrati tutti i lati ed è stato imposto un carico verticale P nel suo baricentro; di sotto si riporta la condizione della piastra analizzata:

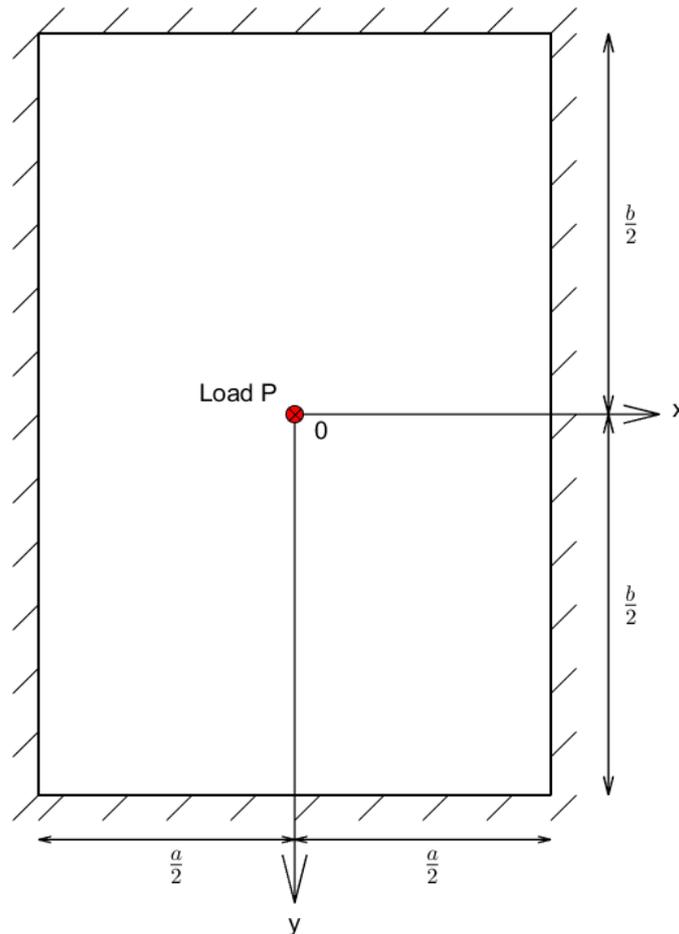


Figura 83: condizione specifica della soluzione di Timoshenko, fonte MATLAB

Secondo Timoshenko, la deformata $w(x,y)$ della piastra in tali condizioni vale:

$$w = \frac{Pa^2}{2\pi^3 D} * \sum_{m=1,3,5,\dots}^{\infty} \frac{1}{m^3} \cos \frac{m\pi x}{a} \left[\left(\tanh \alpha_m - \frac{\alpha_m}{\cosh^2 \alpha_m} \right) + \cosh \frac{m\pi y}{a} - \sinh \frac{m\pi y}{a} - \frac{m\pi y}{a} \tanh \alpha_m \sinh \frac{m\pi y}{a} + \frac{m\pi y}{a} \cosh \frac{m\pi y}{a} \right] \quad (116)$$

Dove:

- $D = \frac{Et^3}{12(1-\nu^2)}$, elasticità flessionale della piastra;
- α_m , variabile dipendente dal rapporto b/a .

L'angolo di rotazione della piastra lungo il bordo $y = b/2$ si ottiene dalla seguente equazione:

$$\left(\frac{\partial w}{\partial y}\right)_{y=b/2} = -\frac{Pa}{2\pi^2 D} \sum_{m=1,3,5,\dots}^{\infty} \frac{1}{m^2} \cos \frac{m\pi x}{a} \frac{\alpha_m \tanh \alpha_m}{\cosh \alpha_m} \quad (117)$$

I momenti flettenti al centro dei lati più lunghi b diventano:

$$(M_y)_{x=0,y=-b/2} = \gamma P \quad (118)$$

In cui:

- γ , parametro in funzione del rapporto b/a .

In ultimo, Timoshenko indica due equazioni per l'ottenimento di momenti flessionali aggiuntivi da collocare nel centro della piastra, dove si applica il carico P :

$$\begin{cases} (m_x)_{x=y=0} = \beta_1 P \\ (m_y)_{x=y=0} = \beta_2 P \end{cases} \quad (119)$$

Dove:

- β_1, β_2 sono anche in questo caso fattori dipendenti da b/a .

La soluzione analitica di Timoshenko per una piastra incastrata su tutti i lati e caricata verticalmente nel suo centro con un carico concentrato dipende dal materiale (E, ν), dalla forza applicata (P) e, soprattutto, dalla geometria (a, b, t).

Le grandezze sopra riportate possono essere facilmente calcolate seguendo questi valori tabulati dei parametri in funzione del rapporto b/a :

b/a	$(w)_{x=y=0} = \alpha \frac{Pa^2}{D}$	$(M_y)_{x=0,y=-b/2} = \gamma P$	$(m_x)_{x=y=0} = \beta_1 P$	$(m_y)_{x=y=0} = \beta_2 P$
	α	γ	β_1	β_2
1	0.00560	-0.1257	-0.0536	-0.0536
1.2	0.00647	-0.1490	-0.0579	-0.0526
1.4	0.00691	-0.1604	-0.0618	-0.0517
1.6	0.00712	-0.1651	-0.0653	-0.0510
1.8	0.00720	-0.1667	-0.0683	-0.0504
2	0.00722	-0.1674	-0.0710	-0.0500
∞	0.00725	-0.168	-0.0742	-0.0484

Figura 84: valori dei coefficienti in funzione del rapporto b/a

Il confronto analitico ha interessato la soluzione di una piastra avente le seguenti caratteristiche:

E=	200000 MPa
ν =	0.3
a=b=	24 mm
t=	1 mm
P=	-10 N

Figura 85: caratteristiche della piastra quadrata di Timoshenko

Sui software MSC NASTRAN e CoFe, si è ricreata la stessa configurazione di carichi e vincoli all'interno di un apposito file .bdf, che considerasse il modello come piastra Kirchhoff (MID3 = 0), in quanto Timoshenko formula le sue soluzioni proprio sulle ipotesi di piastra sottile in assenza di taglio trasversale; attraverso il software Altair HyperMesh, sono state realizzate mesh 2x2, 4x4, 6x6, 8x8 e 12x12 della piastra, al fine di osservare quale fosse il miglior livello di dettaglio della discretizzazione.

```

$ MSC.Nastran input file created on March 04, 2024 at 11:00:45 by
$ Patran 2017.0.2
$ Direct Text Input for Nastran System Cell Section
$ Direct Text Input for File Management Section
$ Direct Text Input for Executive Control
$ Linear Static Analysis, Database
SOL 101
CEND
$ Direct Text Input for Global Case Control Data
TITLE = MSC.Nastran job created on 04-Mar-24 at 11:00:30
ECHO = NONE
SUBCASE 1
$ Subcase name : Default
  SUBTITLE=Default
  SPC = 1
  LOAD = 2
  DISPLACEMENT(SORT1,REAL)=ALL
  SPCFORCES(SORT1,REAL)=ALL
  STRESS(SORT1,REAL,VONMISES,BILIN)=ALL
BEGIN BULK
$ Direct Text Input for Bulk Data
PARAM POST 0
PARAM PRTHMAXIM YES
$ Elements and Element Properties for region : piastra
PSHELL 1 1 1 1 0
$ Pset: "piastra" will be imported as: "pshell.1"
CQUAD4 1 1 18 20 21 17
CQUAD4 2 1 17 21 11 12
CQUAD4 3 1 20 9 10 21
CQUAD4 4 1 21 10 2 11
CQUAD4 5 1 6 7 22 19
CQUAD4 6 1 19 22 20 18
CQUAD4 7 1 7 1 8 22
CQUAD4 8 1 22 8 9 20
CQUAD4 9 1 15 23 24 14
CQUAD4 10 1 14 24 13 3
CQUAD4 11 1 23 18 17 24
CQUAD4 12 1 24 17 12 13
CQUAD4 13 1 4 5 25 16
CQUAD4 14 1 16 25 23 15
CQUAD4 15 1 5 6 19 25
CQUAD4 16 1 25 19 18 23
$ Referenced Material Records
$ Material Record : acciaio
$ Description of Material : Date: 04-Mar-24 Time: 10:54:28
MAT1 1 200000. .3 7.8-9
$ Nodes of the Entire Model
GRID 1 0.0 0.0 0.0
GRID 2 24.0 0.0 0.0
GRID 3 24.0 24.0 0.0
GRID 4 0.0 24.0 0.0
GRID 5 0.0 18.0 0.0
GRID 6 0.0 12.0 0.0
GRID 7 0.0 6.0 0.0
GRID 8 6.0 0.0 0.0
GRID 9 12.0 0.0 0.0
GRID 10 18.0 0.0 0.0
GRID 11 24.0 6.0 0.0
GRID 12 24.0 12.0 0.0
GRID 13 24.0 18.0 0.0
GRID 14 18.0 24.0 0.0
GRID 15 12.0 24.0 0.0
GRID 16 6.0 24.0 0.0
GRID 17 18.0 12.0 0.0
GRID 18 12.0 12.0 0.0
GRID 19 6.0 12.0 0.0
GRID 20 12.0 6.0 0.0
GRID 21 18.0 6.0 0.0
GRID 22 6.0 6.0 0.0
GRID 23 12.0 18.0 0.0
GRID 24 18.0 18.0 0.0
GRID 25 6.0 18.0 0.0
$ Loads for Load Case : Default
LOAD 2 1. 1. 1
$ Displacement Constraints of Load Set : vincoli
SPC 1 1 123456 0.0
SPC 1 2 123456 0.0
SPC 1 3 123456 0.0
SPC 1 4 123456 0.0
SPC 1 5 123456 0.0
SPC 1 6 123456 0.0
SPC 1 7 123456 0.0
SPC 1 8 123456 0.0
SPC 1 9 123456 0.0
SPC 1 10 123456 0.0
SPC 1 11 123456 0.0
SPC 1 12 123456 0.0
SPC 1 13 123456 0.0
SPC 1 14 123456 0.0
SPC 1 15 123456 0.0
SPC 1 16 123456 0.0
$ Nodal Forces of Load Set : forza
FORCE 1 18 0 1.0 0.0 0.0 -10.0
$ Referenced Coordinate Frames

```

Figura 86: file .bdf della piastra quadrata con mesh 4x4, fonte MSC NASTRAN

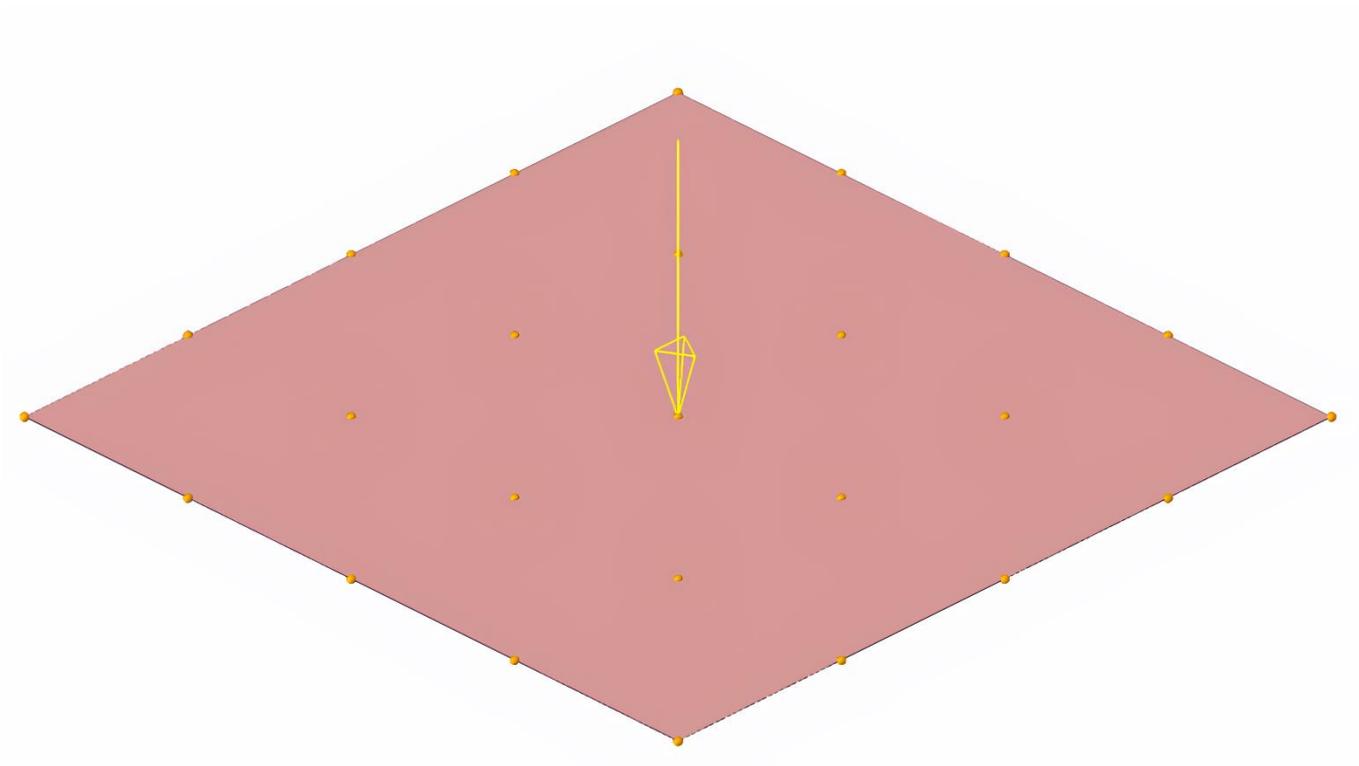


Figura 87: piastra quadrata 4x4 con condizioni al contorno, fonte HyperMesh

Confrontando la deformata nel nodo di applicazione del carico per la mesh 4x4, sono stati ottenuti i seguenti risultati:

4x4	b/a = 1	TESTS	T3		ERRORE
					T3
		Timoshenko		-1.761178E-03	
		NASTRAN		-1.765080E-03	0.22%
		CoFe		-1.757471E-03	0.21%

Figura 88: confronto della deformata tra Timoshenko, NASTRAN e CoFe per una piastra con mesh 4x4

4.2 Sintesi dei risultati

In questa sezione, si presentano tutti i risultati del confronto numerico e di quello analitico, che verranno discussi ed interpretati nel paragrafo successivo.

Di seguito, si riporta il confronto numerico completo:

spessore 0.1 mm										
TESTS	T1	T2	MAXIMUM DISPLACEMENTS T3	R1	R2	R3	ERRORE T3	R1	R2	MEDIO
NASTRAN	0.000000E+00	0.000000E+00	4.994909E-02	4.740955E-02	4.740955E-02	0.000000E+00				
1	0.000000E+00	0.000000E+00	4.934142E-02	4.680000E-02	4.680000E-02	0.000000E+00	1.22%	1.29%	1.29%	1.26%
TESTS	T1	T2	MAXIMUM DISPLACEMENTS T3	R1	R2	R3	ERRORE T3	R1	R2	MEDIO
NASTRAN	0.000000E+00	0.000000E+00	5.074271E-02	4.740955E-02	4.740955E-02	0.000000E+00				
2	0.000000E+00	0.000000E+00	5.013015E-02	4.680000E-02	4.680000E-02	0.000000E+00	1.21%	1.29%	1.29%	1.26%
TESTS	T1	T2	MAXIMUM DISPLACEMENTS T3	R1	R2	R3	ERRORE T3	R1	R2	MEDIO
NASTRAN	0.000000E+00	0.000000E+00	4.322821E-02	4.090938E-02	4.478747E-02	0.000000E+00				
3	0.000000E+00	0.000000E+00	4.910779E-02	4.518626E-02	4.533595E-02	0.000000E+00	13.60%	10.45%	1.22%	8.43%
TESTS	T1	T2	MAXIMUM DISPLACEMENTS T3	R1	R2	R3	ERRORE T3	R1	R2	MEDIO
NASTRAN	0.000000E+00	0.000000E+00	4.394919E-02	4.090058E-02	4.479537E-02	0.000000E+00				
4	0.000000E+00	0.000000E+00	4.993749E-02	4.521553E-02	4.533755E-02	0.000000E+00	13.63%	10.55%	1.21%	8.46%
TESTS	T1	T2	MAXIMUM DISPLACEMENTS T3	R1	R2	R3	ERRORE T3	R1	R2	MEDIO
NASTRAN	0.000000E+00	0.000000E+00	1.537000E-01	1.173000E-01	-2.700000E-02	0.000000E+00				
5	0.000000E+00	0.000000E+00	1.535046E-01	1.171046E-01	-2.634853E-02	0.000000E+00	0.13%	0.17%	2.41%	0.90%
TESTS	T1	T2	MAXIMUM DISPLACEMENTS T3	R1	R2	R3	ERRORE T3	R1	R2	MEDIO
NASTRAN	0.000000E+00	0.000000E+00	1.540120E-01	1.173000E-01	-2.700000E-02	0.000000E+00				
6	0.000000E+00	0.000000E+00	1.537646E-01	1.171046E-01	-2.634853E-02	0.000000E+00	0.16%	0.17%	2.41%	0.91%

Figura 89: confronto numerico per uno spessore di 0.1 mm

spessore 1 mm										
TESTS	T1	T2	MAXIMUM DISPLACEMENTS T3	R1	R2	R3	ERRORE T3	R1	R2	MEDIO
NASTRAN	0.000000E+00	0.000000E+00	4.994909E-05	4.740955E-05	4.740955E-05	0.000000E+00				
1	0.000000E+00	0.000000E+00	4.934142E-05	4.680000E-05	4.680000E-05	0.000000E+00	1.23%	1.30%	1.30%	1.28%
TESTS	T1	T2	MAXIMUM DISPLACEMENTS T3	R1	R2	R3	ERRORE T3	R1	R2	MEDIO
NASTRAN	0.000000E+00	0.000000E+00	8.713326E-05	4.740955E-05	4.740955E-05	0.000000E+00				
2	0.000000E+00	0.000000E+00	8.202467E-05	4.680000E-05	4.680000E-05	0.000000E+00	5.86%	1.29%	1.29%	2.81%
TESTS	T1	T2	MAXIMUM DISPLACEMENTS T3	R1	R2	R3	ERRORE T3	R1	R2	MEDIO
NASTRAN	0.000000E+00	0.000000E+00	4.322821E-05	4.090938E-05	4.478747E-05	0.000000E+00				
3	0.000000E+00	0.000000E+00	4.910779E-05	4.518626E-05	4.533595E-05	0.000000E+00	13.60%	10.45%	1.22%	8.43%
TESTS	T1	T2	MAXIMUM DISPLACEMENTS T3	R1	R2	R3	ERRORE T3	R1	R2	MEDIO
NASTRAN	0.000000E+00	0.000000E+00	7.774806E-05	4.024718E-05	4.538126E-05	0.000000E+00				
4	0.000000E+00	0.000000E+00	8.334491E-05	4.616195E-05	4.511952E-05	0.000000E+00	7.20%	14.70%	0.58%	7.49%
TESTS	T1	T2	MAXIMUM DISPLACEMENTS T3	R1	R2	R3	ERRORE T3	R1	R2	MEDIO
NASTRAN	0.000000E+00	0.000000E+00	1.537000E-04	1.173000E-04	-2.700000E-05	0.000000E+00				
5	0.000000E+00	0.000000E+00	1.535046E-04	1.171046E-04	-2.634853E-05	0.000000E+00	0.13%	0.17%	2.41%	0.90%
TESTS	T1	T2	MAXIMUM DISPLACEMENTS T3	R1	R2	R3	ERRORE T3	R1	R2	MEDIO
NASTRAN	0.000000E+00	0.000000E+00	1.849000E-04	1.173000E-04	2.700000E-05	0.000000E+00				
6	0.000000E+00	0.000000E+00	1.795046E-04	1.171046E-04	-2.634853E-05	0.000000E+00	2.92%	1.29%	1.29%	1.83%

Figura 90: confronto numerico per uno spessore di 1 mm

spessore 2 mm											
TESTS	T1	T2	MAXIMUM DISPLACEMENTS T3	R1	R2	R3	ERRORE T3	R1	R2	MEDIO	
NASTRAN	0.000000E+00	0.000000E+00	6.243636E-06	5.926194E-06	5.926194E-06	0.000000E+00					
1	0.000000E+00	0.000000E+00	6.167678E-06	5.850000E-06	5.850000E-06	0.000000E+00	1.22%	1.29%	1.29%	1.26%	
TESTS	T1	T2	MAXIMUM DISPLACEMENTS T3	R1	R2	R3	ERRORE T3	R1	R2	MEDIO	
NASTRAN	0.000000E+00	0.000000E+00	2.004239E-05	5.926194E-06	5.926194E-06	0.000000E+00					
2	0.000000E+00	0.000000E+00	1.798794E-05	5.850000E-06	5.850000E-06	0.000000E+00	10.25%	1.29%	1.29%	4.27%	
TESTS	T1	T2	MAXIMUM DISPLACEMENTS T3	R1	R2	R3	ERRORE T3	R1	R2	MEDIO	
NASTRAN	0.000000E+00	0.000000E+00	5.403526E-06	5.113673E-06	5.598434E-06	0.000000E+00					
3	0.000000E+00	0.000000E+00	6.138473E-06	5.648282E-06	5.666993E-06	0.000000E+00	13.60%	10.45%	1.22%	8.43%	
TESTS	T1	T2	MAXIMUM DISPLACEMENTS T3	R1	R2	R3	ERRORE T3	R1	R2	MEDIO	
NASTRAN	0.000000E+00	0.000000E+00	1.814798E-05	5.001739E-06	5.698804E-06	0.000000E+00					
4	0.000000E+00	0.000000E+00	1.830919E-05	5.814842E-06	5.621702E-06	0.000000E+00	0.89%	16.26%	1.35%	6.17%	
TESTS	T1	T2	MAXIMUM DISPLACEMENTS T3	R1	R2	R3	ERRORE T3	R1	R2	MEDIO	
NASTRAN	0.000000E+00	0.000000E+00	1.921250E-05	1.466250E-05	-3.375000E-06	0.000000E+00					
5	0.000000E+00	0.000000E+00	1.918807E-05	1.463807E-05	-3.293566E-06	0.000000E+00	0.13%	0.17%	2.41%	0.90%	
TESTS	T1	T2	MAXIMUM DISPLACEMENTS T3	R1	R2	R3	ERRORE T3	R1	R2	MEDIO	
NASTRAN	0.000000E+00	0.000000E+00	3.481250E-05	1.466250E-05	-3.375000E-06	0.000000E+00					
6	0.000000E+00	0.000000E+00	3.218807E-05	1.463807E-05	-3.293566E-06	0.000000E+00	7.54%	0.17%	2.41%	3.37%	

Figura 91: confronto numerico per uno spessore di 2 mm

spessore 5 mm											
TESTS	T1	T2	MAXIMUM DISPLACEMENTS T3	R1	R2	R3	ERRORE T3	R1	R2	MEDIO	
NASTRAN	0.000000E+00	0.000000E+00	3.995927E-07	3.792764E-07	3.792764E-07	0.000000E+00					
1	0.000000E+00	0.000000E+00	3.947314E-07	3.744000E-07	3.744000E-07	0.000000E+00	1.22%	1.29%	1.29%	1.26%	
TESTS	T1	T2	MAXIMUM DISPLACEMENTS T3	R1	R2	R3	ERRORE T3	R1	R2	MEDIO	
NASTRAN	0.000000E+00	0.000000E+00	5.222647E-06	3.792764E-07	3.792764E-07	0.000000E+00					
2	0.000000E+00	0.000000E+00	4.437500E-06	3.744000E-07	3.744000E-07	0.000000E+00	15.03%	1.29%	1.29%	5.87%	
TESTS	T1	T2	MAXIMUM DISPLACEMENTS T3	R1	R2	R3	ERRORE T3	R1	R2	MEDIO	
NASTRAN	0.000000E+00	0.000000E+00	3.458256E-07	3.272750E-07	3.582998E-07	0.000000E+00					
3	0.000000E+00	0.000000E+00	3.942795E-07	3.614901E-07	3.626876E-07	0.000000E+00	14.01%	10.45%	1.22%	8.56%	
TESTS	T1	T2	MAXIMUM DISPLACEMENTS T3	R1	R2	R3	ERRORE T3	R1	R2	MEDIO	
NASTRAN	0.000000E+00	0.000000E+00	4.777707E-06	3.197198E-07	3.650746E-07	0.000000E+00					
4	0.000000E+00	0.000000E+00	4.499460E-06	3.739948E-07	3.586495E-07	0.000000E+00	5.82%	16.98%	1.76%	8.19%	
TESTS	T1	T2	MAXIMUM DISPLACEMENTS T3	R1	R2	R3	ERRORE T3	R1	R2	MEDIO	
NASTRAN	0.000000E+00	0.000000E+00	1.229600E-06	9.384000E-07	-2.160000E-07	0.000000E+00					
5	0.000000E+00	0.000000E+00	1.228036E-06	9.368365E-07	-2.107882E-07	0.000000E+00	0.13%	0.17%	2.41%	0.90%	
TESTS	T1	T2	MAXIMUM DISPLACEMENTS T3	R1	R2	R3	ERRORE T3	R1	R2	MEDIO	
NASTRAN	0.000000E+00	0.000000E+00	7.469600E-06	9.384000E-07	-2.160000E-07	0.000000E+00					
6	0.000000E+00	0.000000E+00	6.428036E-06	9.368365E-07	-2.107882E-07	0.000000E+00	13.94%	0.17%	2.41%	5.51%	

Figura 92: confronto numerico per uno spessore di 5 mm

In conclusione, si presenta il confronto analitico completo:

2x2	b/a = 1	TESTS	T3	ERRORE
		Timoshenko	-1.761178E-03	
		NASTRAN	-2.285581E-04	87.02%
CoFe	-2.287282E-04	87.01%		

Figura 93: confronto analitico per piastra 2x2

4x4	b/a = 1	TESTS		T3	ERRORE	
		Timoshenko		-1.761178E-03		T3
		NASTRAN		-1.765080E-03		0.22%
		CoFe		-1.757471E-03		0.21%

Figura 94: confronto analitico per piastra 4x4

6x6	b/a = 1	TESTS		T3	ERRORE	
		Timoshenko		-1.761178E-03		T3
		NASTRAN		-1.819753E-03		3.33%
		CoFe		-1.815658E-03		3.09%

Figura 95: confronto analitico per piastra 6x6

8x8	b/a = 1	TESTS		T3	ERRORE	
		Timoshenko		-1.761178E-03		T3
		NASTRAN		-1.821920E-03		3.45%
		CoFe		-1.819298E-03		3.30%

Figura 96: confronto analitico per piastra 8x8

12x12	b/a = 1	TESTS		T3	ERRORE	
		Timoshenko		-1.761178E-03		T3
		NASTRAN		-1.805251E-03		2.50%
		CoFe		-1.803933E-03		2.43%

Figura 97: confronto analitico per piastra 12x12

5. Discussione

Nel penultimo capitolo, vengono discussi ed interpretati i risultati sia della validazione numerica sia di quella analitica.

5.1 Analisi dei risultati

Il confronto numerico dei 6 casi studio considerati ha evidenziato come questa formulazione di CQUAD4 sia in grado di produrre risultati molto vicini a quelli del software reference MSC NASTRAN, con errori percentuali medi che oscillano rispettivamente tra l'1-5% nel caso di piastra non deformata (casi 1, 2, 5 e 6) e tra il 6-9% nella configurazione deformata (casi 3 e 4).

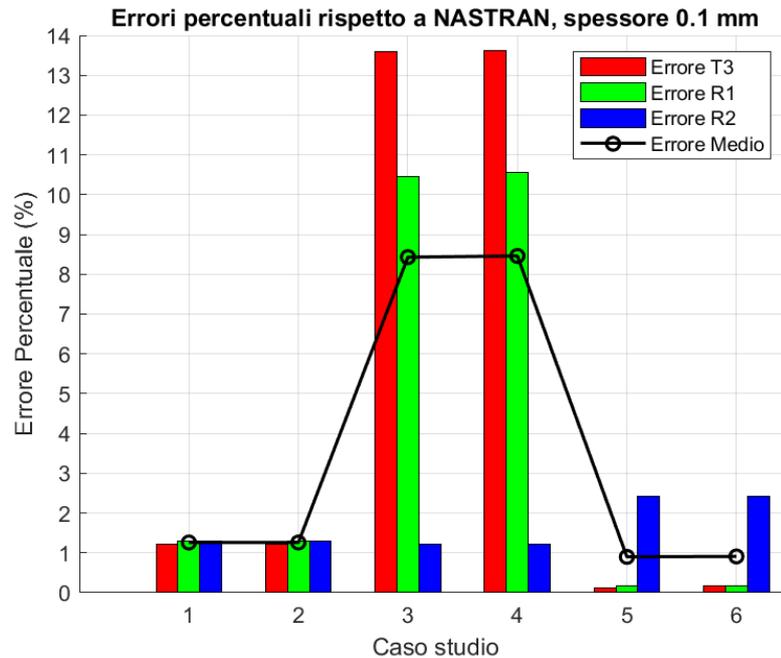


Figura 98: andamento degli errori rispetto a MSC NASTRAN per spessore 0.1 mm, fonte MATLAB

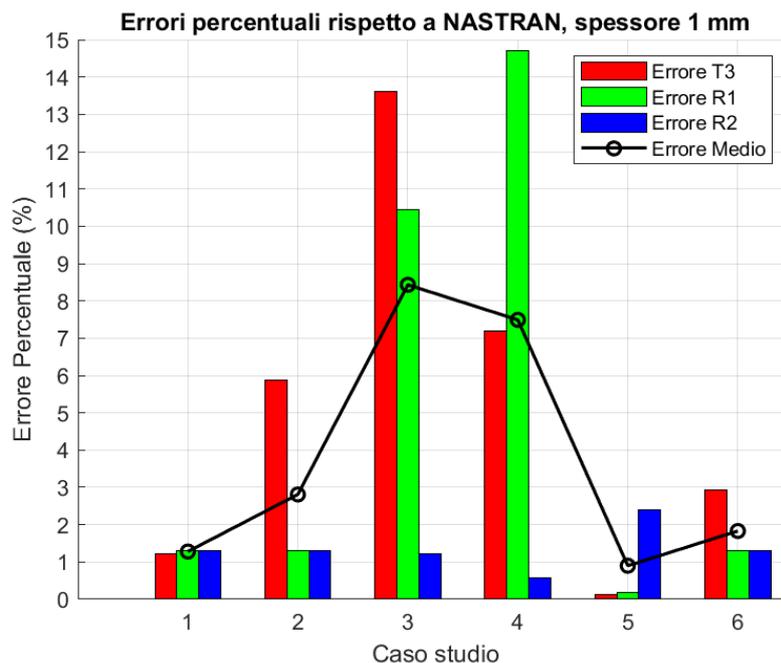


Figura 99: andamento degli errori rispetto a MSC NASTRAN per spessore 1 mm, fonte MATLAB

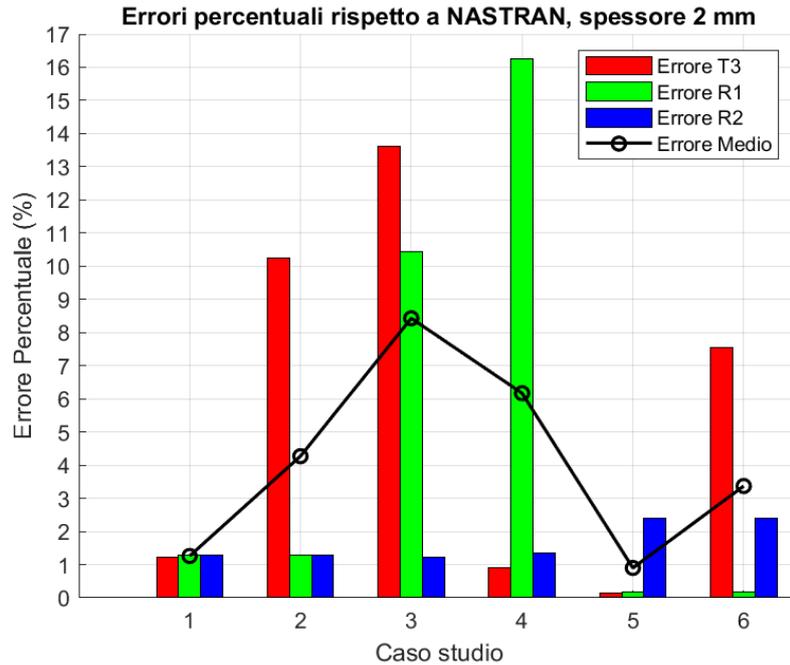


Figura 100: andamento degli errori rispetto a MSC NASTRAN per spessore 2 mm, fonte MATLAB

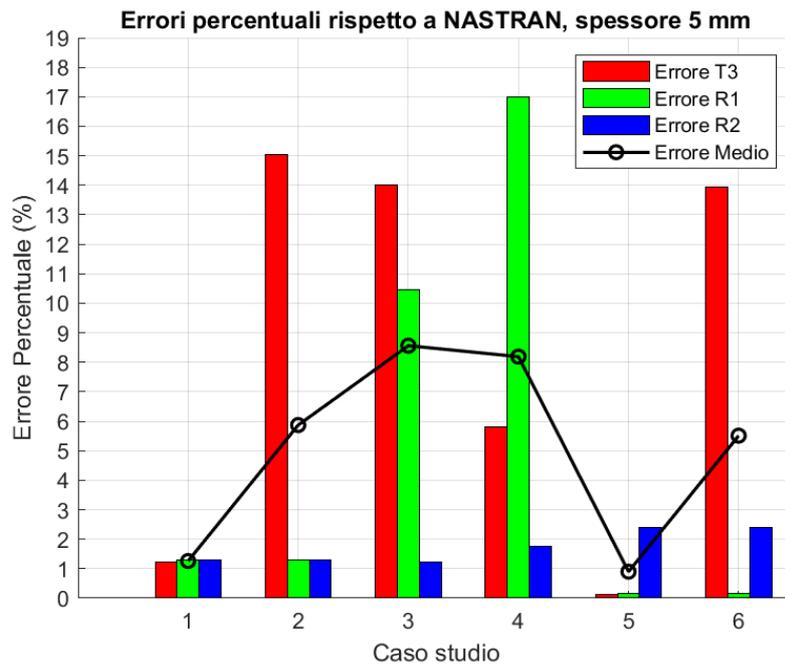


Figura 101: andamento degli errori rispetto a MSC NASTRAN per spessore 5 mm, fonte MATLAB

In particolare, incrementando lo spessore della piastra a parità di caso studio considerato, si denota come gli errori percentuali aumentino, proprio perché iniziano a venire meno le ipotesi di piastra sottile ($t/a < \frac{1}{20}$), sulle quali entrambe le teorie di Kirchhoff e Mindlin sono state costruite.

Gli errori più significativi si rilevano sempre per i casi 3 e 4, ossia le condizioni nelle quali l'elemento finito è soggetto a deformazione e diventa più difficile seguire un processo di stress recovery ottimale. Nelle analisi numeriche di questi casi studio, inoltre, il sistema di riferimento dell'elemento è rimasto quello isoparametrico definito dalle coordinate naturali ζ, η e non è stato riportato a quello distorto:

tale aspetto può essere la causa per la quale, nei casi di piastra deformata, si registra un aumento dell'errore medio rispetto a MSC NASTRAN.

Il CQUAD4, infatti, è un elemento bidimensionale che ipotizza la planarità originale del quadrilatero e, se soggetto a distorsioni geometriche rilevanti, peggiora la sua qualità di calcolo; inoltre, soprattutto in situazioni di deformazioni estreme o comportamenti dominati dal taglio trasversale, possono insorgere situazioni di *shear/membrane locking*, ovvero casi in cui le funzioni di forma si irrigidiscono troppo e non sono più in grado di simulare correttamente le deformazioni dell'elemento finito.

Quest'ultime, infatti, sono state considerate come funzioni polinomiali di primo grado e sono da ritenersi valide nelle analisi lineari di strutture o per piccole deformazioni del sistema; al fine di migliorare la valutazione della rigidità, sarebbe più opportuno ricorrere a modelli di piastra con una maggiore flessibilità delle funzioni di forma e/o un maggior numero di nodi (come l'elemento finito di ordine superiore CQUAD8).

Il confronto analitico con una delle soluzioni proposte da Timoshenko serve come ulteriore strumento di valutazione dell'affidabilità del modello sviluppato e sottolinea la bontà della sua formulazione, in quanto si registra un comportamento convergente della soluzione numerica.

In particolare, quest'ultima segue fedelmente il trend di quella di NASTRAN e, dopo pochi step della mesh, raggiunge la convergenza con un errore, rispetto a quella esatta, di circa il 3%.

Nei grafici seguenti, viene riportato il confronto tra l'andamento delle soluzioni NASTRAN e CoFe, per le dimensioni di mesh trattate, in relazione alla soluzione esatta di Timoshenko.

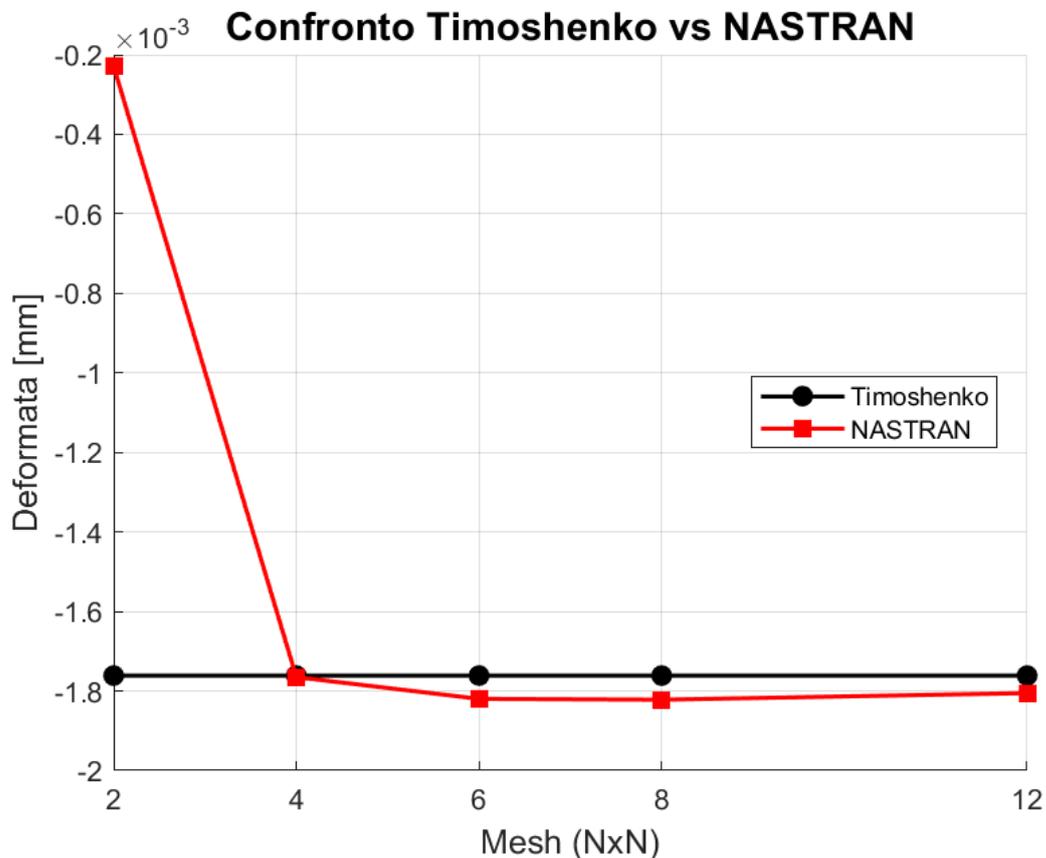


Figura 102: confronto deformata Timoshenko vs NASTRAN, fonte MATLAB

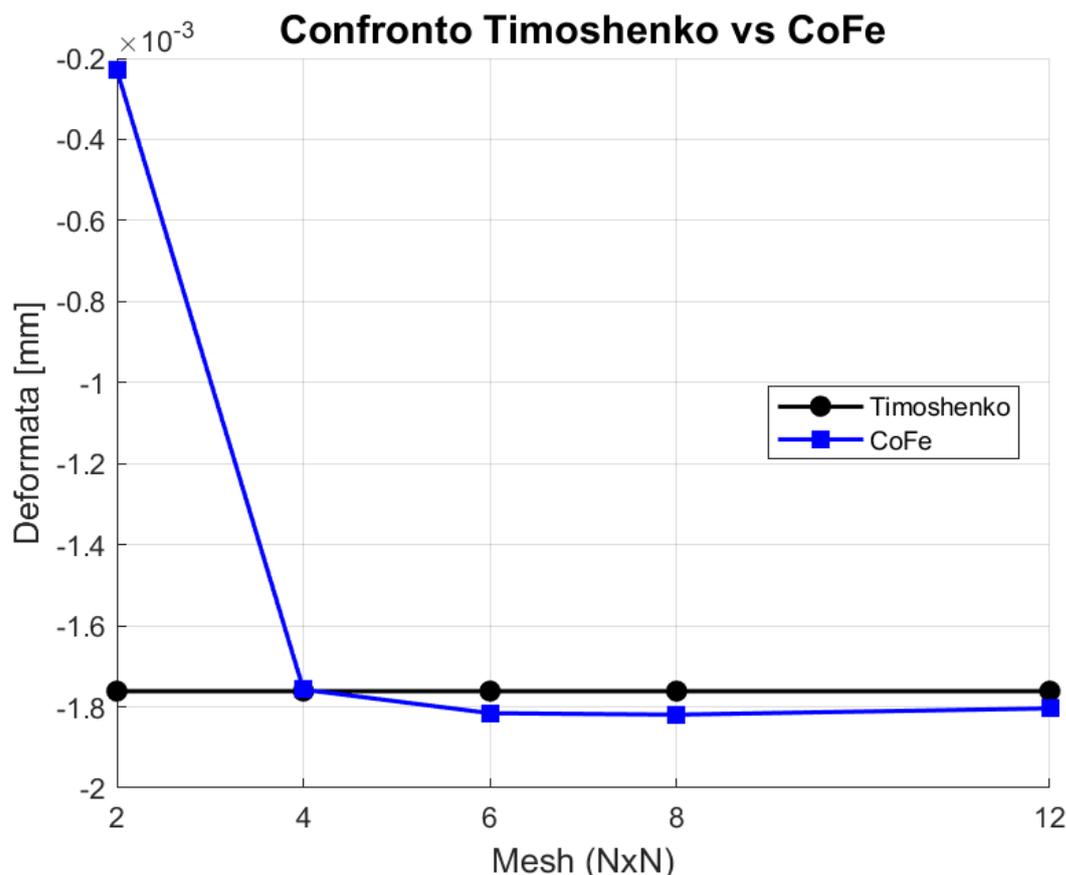


Figura 103: confronto deformata Timoshenko vs CoFe, fonte MATLAB

Coerentemente con gli aspetti principali del metodo FEM, la soluzione numerica dell'elemento finito CQUAD4 tende ad allinearsi verso la soluzione esatta all'aumentare della densità della mesh, poiché in tal modo si riduce l'errore di discretizzazione, di cui si può facilmente osservare l'effetto nel caso di mesh grossolana 2x2.

Tuttavia, un numero maggiore di elementi comporta anche un aumento dei gradi di libertà complessivi del sistema lineare associato e, di conseguenza, la risoluzione del problema diventa più onerosa in termini di costo computazionale.

La validazione analitica suggerisce come la mesh 4x4 fornisca un ottimo compromesso tra tempi di calcolo e precisione dei risultati, in quanto il suo valore della deformata risulta già molto prossimo a quelli delle mesh più fini (6x6 o 12x12) e la differenza con la soluzione stabile, di fatto, è trascurabile. A tal proposito, la mesh 4x4 riduce significativamente il numero degli elementi e, di conseguenza, si hanno meno DOF (dall'inglese *Degrees of freedom*) da risolvere; tale aspetto comporta una minore quantità di memoria necessaria per la soluzione del problema ed un tempo di calcolo molto più rapido. Nei casi di mesh più fini (6x6, 8x8 o 12x12), si riduce ulteriormente l'errore di discretizzazione, ma i miglioramenti in termini di precisione di calcolo sono marginali ed il costo computazionale aumenta inutilmente, soprattutto nel caso in cui non venga richiesta una precisione della soluzione a livello del millesimo del millimetro.

Inoltre, andando a realizzare mesh troppo fitte, in particolare in zone geometricamente complesse, potrebbero verificarsi deformazioni degli elementi, che, a loro volta, andrebbero a peggiorare la qualità della soluzione oppure si potrebbe ottenere un sistema lineare mal condizionato, che esporrebbe i risultati numerici ad una maggiore sensibilità agli errori di calcolo.

Solitamente, si preferisce realizzare un *refinement* localizzato della mesh nelle zone dove si registrano significative variazioni di geometria, come nei punti di concentrazione degli sforzi oppure di discontinuità.

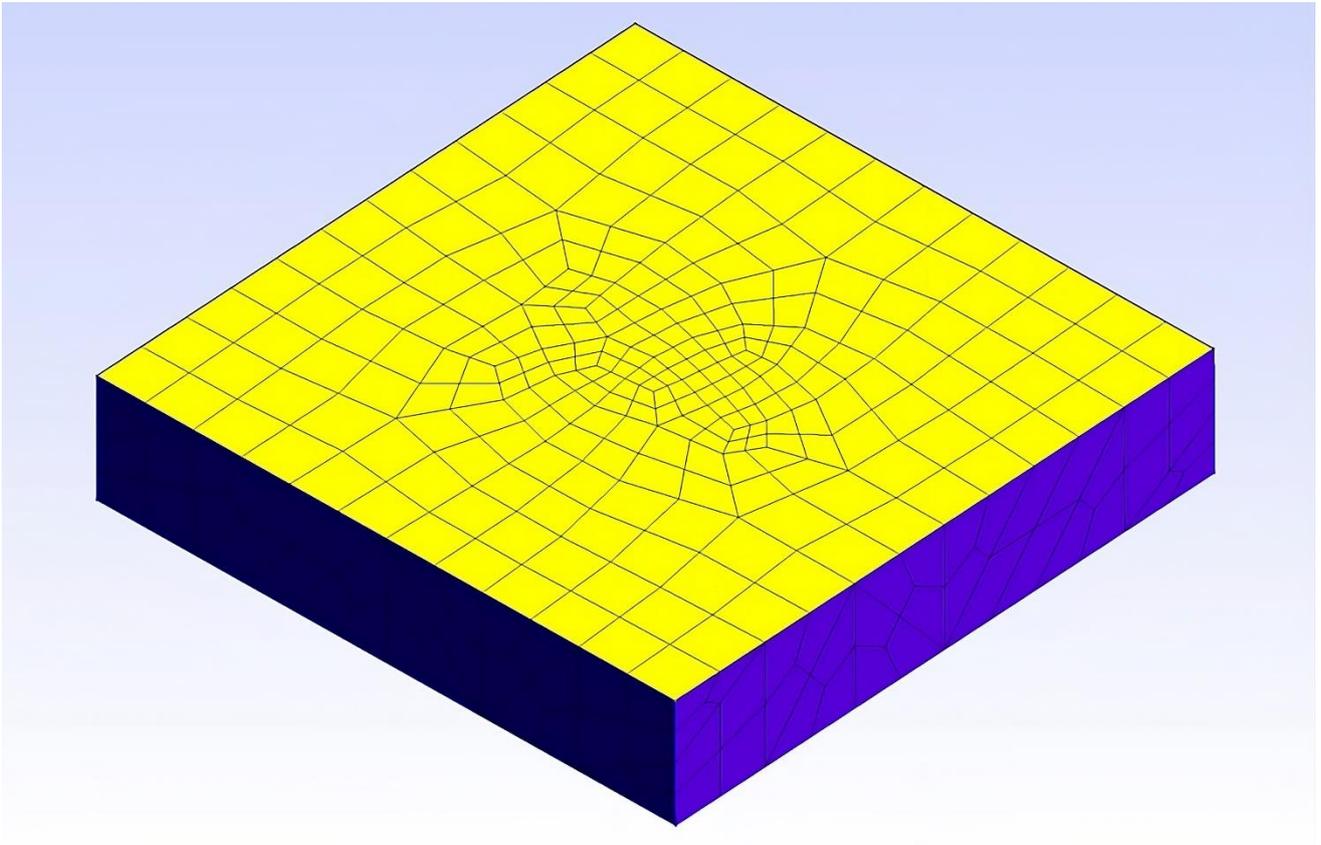


Figura 104: esempio di raffinamento locale della mesh di una piastra, fonte GMSH

6. Conclusioni

Nel capitolo conclusivo, si riportano le considerazioni finali del lavoro di tesi e, oltre a descrivere le sue implicazioni teoriche e pratiche, vengono descritte anche alcune limitazioni dello studio e si presentano dei suggerimenti per eventuali ricerche future.

6.1 Implicazioni della ricerca

Le implicazioni derivanti dalla ricerca riguardano sia aspetti teorici sia pratici e servono ad evidenziare il contributo e l'importanza del presente lavoro di tesi.

L'elemento CQUAD4 che è stato sviluppato si dimostra un esempio valido ed affidabile di modello piastra ed è in grado di fornire risultati soddisfacenti ed in linea con quanto prodotto da MSC NASTRAN.

Inoltre, confrontando le sue prestazioni attuali con quelle della versione originale di CoFe, è evidente come queste siano state indubbiamente migliorate e si sia cercato di modellare l'elemento sulla base di consolidate pubblicazioni scientifiche, al fine di attribuire un adeguato senso di logica ed attinenza teorica a tutto il lavoro di tesi.

Tra i miglioramenti più rilevanti del modello FEM, si riportano le introduzioni di un sistema di riferimento centrato sull'intersezione delle diagonali del quadrilatero, di una matrice di rigidezza residua a flessione e taglio $[K]_{add}$ e di un metodo di sotto-integrazione 2x1 di Gauss centrato nell'origine per la stima delle rigidezze membranali e flessionali legate al taglio trasversale (tutte queste miglorie si fondano su quanto descritto da MacNeal nei suoi studi [19, 20]).

Inoltre, sono state modificate le strutture della matrice di rigidezza legata al drilling $[K]_{drill}$ (fondamentale per evitare che la matrice globale diventi singolare e l'elemento sia incapace di sopportare alcuni carichi o deformazioni specifiche) e quella della matrice $[b]_{piastra}$, che collega le derivate delle funzioni di forma alle curvature flessionali ed alle deformazioni da taglio .

Un significativo apporto fornito da questo elemento CQUAD4 riguarda la possibilità di lavorare non soltanto con piastre che seguono il modello di flessione a taglio formulato da Mindlin, come accadeva precedentemente, ma anche con esempi di piastre che seguono la formulazione di Kirchhoff e registrano l'assenza del taglio trasversale; in tal senso, si fa variare il valore del parametro libero ϵ e si è in grado di scegliere tra i due modelli di flessione, in maniera simile a quanto viene fatto su MSC NASTRAN.

La validazione analitica del modello attraverso il confronto con una soluzione di Timoshenko permette di confermarne la formulazione dell'elemento finito e fornisce una chiara indicazione di quale sia, al netto della risoluzione necessaria e dei tempi di calcolo, il grado di mesh più opportuno. Dal punto di vista pratico, questo elemento piastra può trovare impiego nella simulazione del contatto non lineare presente tra la flangia del cerchione e lo pneumatico, fenomeno che è stato ampiamente descritto nei paragrafi 1 e 1.1 della trattazione; a tal proposito, il CQUAD4 proposto si inserisce come uno strumento di simulazione intuitivo, perché si esegue su un software di larga diffusione e semplice come MATLAB, affidabile, in quanto produce risultati che si avvicinano ragionevolmente a quelli di MSC NASTRAN, open-source, poiché qualunque utente è in grado di accedervi, adattarne le caratteristiche sulla base delle proprie esigenze e ridistribuirlo pubblicamente.

Sulla base dei risultati forniti da questo modello, potrebbe essere possibile realizzare componenti più sicure ed affidabili e perfezionare eventuali interventi predittivi di manutenzione del sistema ruota-pneumatico.

6.2 Limitazioni dello studio

Durante lo studio dell'elemento piastra CQUAD4 sono emerse alcune limitazioni intrinseche legate alla sua formulazione ed alla sua applicazione pratica.

In primo luogo, questo modello FEM si basa su teorie per piastre dalla lamina sottile (Kirchhoff-Love o Reissner-Mindlin, le quali perdono di efficacia se si considerano spessori molto grandi (poiché l'approssimazione bidimensionale in tal modo non è più adeguata) oppure deformazioni fuori piano rilevanti rispetto al piano medio.

In aggiunta, come è emerso durante la validazione numerica, CQUAD4 peggiora le sue capacità di calcolo se è soggetto a distorsione geometrica, specialmente se si allontana dalla sua forma originale di quadrilatero semi-rettangolare; dal confronto analitico, invece, si evince come una discretizzazione non uniforme e/o grossolana rischi di compromettere la convergenza e l'affidabilità dell'elemento finito.

Nel caso di superfici curve o con importanti variazioni geometriche, poiché si tratta di un modello piano a curvatura approssimata, CQUAD4 presenta una scarsa precisione di calcolo e si rende necessario l'impiego di elementi finiti più adeguati (come CQUAD8).

La possibilità di combinare elasticamente il comportamento membranale e quello flessionale può risultare difficoltoso e poco efficace nel caso di mesh troppo grossolane e, soprattutto per piastre Mindlin sottili soggette a flessioni notevoli, si rischia di incorrere nel fenomeno, già citato, dello shear/membrane locking.

In ultimo, trattandosi di un elemento finito che si basa su assunzioni teoriche semplificate, di solito trova applicazione nei soli casi di analisi lineari elastiche e può dimostrarsi inadeguato quando si ha necessità di simulare condizioni di carichi concentrati complessi e vincoli multipli; in tali contesti, infatti, sono necessarie mesh molto più fitte, che andrebbero ad incrementare il costo computazionale ed i tempi di calcolo della simulazione.

6.3 Suggerimenti per future ricerche

La formulazione dell'elemento finito CQUAD4, basato sul codice di calcolo open-source CoFe, si è dimostrata una stimolante sfida ingegneristica, in quanto non ha soltanto richiesto di applicare le competenze in ambito FEM apprese durante la carriera accademica, ma ha anche sicuramente consentito la scoperta di principi e tecniche innovative ed attuali.

Al termine del lavoro di tesi, è possibile suggerire alcuni spunti per eventuali ricerche future che permettano di migliorare ulteriormente le prestazioni di questo modello, in modo da superare le limitazioni esposte in precedenza e favorirne un maggior campo di applicazione.

In primo luogo, come emerso chiaramente durante il confronto numerico, sarebbe opportuno implementare un sistema di riferimento in grado di ottenere prestazioni ottime anche in caso di deformazione dell'elemento finito, in modo da allinearsi ai risultati ottimi che si ottengono attualmente per il caso di piastra non deformata.

Successivamente, sarebbe interessante estendere la sua formulazione nei confronti di modelli che descrivono un comportamento non lineare (come plasticità, viscoelasticità e grandi deformazioni), senza sacrificarne la semplicità e l'efficienza di calcolo e, per esempio, dando vita a metodi di combinazione lineare membrana-piastra più sofisticati e precisi (che potrebbero risultare meno sensibili al locking).

Al fine di sopperire alla scarsa precisione nei casi di superfici curve, sarebbe possibile esplorare potenziali approcci 3D realizzati con CQUAD4, sempre tenendo in considerazione il costo

computazionale del processo; in aggiunta, sfruttando la sempre maggiore potenza di calcolo delle macchine, si potrebbero implementare metodologie di calcolo parallelo e distribuito, che intervengano in aiuto nei casi di grandi mesh fitte e complesse, andando a migliorare la convergenza della soluzione ed a ridurre il numero dei DOF (come metodi PCA, dall'inglese *Principal Component Analysis*, ma anche algoritmi di machine learning).

L'impiego di questo elemento finito CQUAD4 potrebbe essere esteso per affrontare anche problemi di natura dinamica, quali vibrazioni, instabilità ed analisi transitorie, oppure fenomeni di dissipazione energetica e di risposta a sollecitazioni cicliche; quest'ultimi due aspetti sono di notevole importanza nei casi di analisi termiche e vibranti.

La potenza di calcolo di questo modello potrebbe essere aumentata se venisse aggiunta la possibilità della simulazione di materiali avanzati dal comportamento anisotropo, come i compositi, magari indagando su approcci che permettano di derivare la risposta alle sollecitazioni dall'unione di osservazioni microstrutturali e macroscopiche del sistema.

Un ulteriore miglioramento del modello potrebbe riguardare il perfezionamento dei processi di integrazione di ordine ridotto implementati in questo lavoro, che risulta un aspetto importante soprattutto in casi di simulazioni dinamiche complesse.

In ultimo, si potrebbe perfezionare l'interfaccia grafica con la quale ciascun utente interagisce, rendendo più rapido e intuitivo l'approccio alle simulazione e permettendo la visione dei risultati in tempo reale; in tal senso, questo progresso avrebbe notevole rilevanza nei contesti industriali, dove le simulazioni numeriche sono combinate a delle ispezioni visive.

Le direzioni di ricerca che sono state proposte permetterebbero non soltanto di migliorare le prestazioni e l'affidabilità dell'elemento finito, ma garantirebbero una sua maggiore diffusione ed un più ampio range di applicazione.

Il modello CQUAD4 che è stato sviluppato a partire dal codice sperimentale open-source CoFe rappresenta un contributo significativo nei confronti di strumenti di analisi numerica accessibili e personalizzabili e pone le basi per applicazioni future e ricerche negli ambiti della simulazione strutturale e della condivisione di conoscenza scientifica.

Ringraziamenti

Al termine di questo percorso, sento il bisogno di dedicare alcune parole a coloro che, in modi diversi, hanno reso possibile il raggiungimento di questo traguardo, non solo supportandomi nel lavoro accademico, ma anche sostenendomi nei momenti più difficili e condividendo le gioie di questo cammino.

Un sentito ringraziamento va innanzitutto al mio relatore, prof. Carlo Rosso, e ai miei correlatori, prof. Daniele Fabbri e Fabio Bruzzone, per la guida preziosa e i suggerimenti che hanno arricchito e migliorato il mio lavoro.

Il mio pensiero più profondo va poi alle persone che mi sono state vicine, con amore e dedizione, in ogni istante di questo percorso.

Grazie di cuore a voi, mamma e papà, che siete stati il mio continuo punto di riferimento. Grazie per aver creduto in me anche quando io stesso dubitavo, per avermi sostenuto con il vostro amore incondizionato e per i sacrifici che avete fatto per permettermi di arrivare fin qui. Le vostre parole di incoraggiamento e il vostro esempio mi hanno guidato non solo in questo percorso accademico, ma anche nella vita.

Grazie a Valentina e Fabrizio, che per me siete stati come una seconda mamma ed un secondo papà. Il vostro affetto, la vostra presenza costante e la vostra capacità di farmi sentire amato e supportato mi hanno dato una forza inestimabile. Non vi ringrazierò mai abbastanza per quello che avete fatto per me.

Grazie ai miei fratelli e alle mie sorelle, che con il loro amore, il loro sostegno e la loro vicinanza hanno reso la mia vita più ricca e speciale. Siete la mia famiglia, il mio rifugio, ogni vostro gesto mi ha aiutato a raggiungere questo obiettivo.

Un pensiero colmo d'affetto va ai miei nonni, che mi hanno trasmesso valori importanti e mi hanno cresciuto facendomi sentire sempre amato. Dedico un ricordo speciale a mio nonno Silvano, che purtroppo non è più con noi, ma che continua a essere una guida per me. So che sarebbe orgoglioso di questo traguardo.

Grazie, Anna, per essere al mio fianco e per rendere ogni giorno speciale. Condividere la vita insieme e sapere che sei sempre il mio sostegno più grande è qualcosa di davvero inestimabile. Il tuo amore, la tua pazienza e la tua capacità di starmi accanto nei momenti di difficoltà hanno significato tutto per me. Sei il mio porto sicuro, la persona su cui so di poter sempre contare. Questa tappa la condivido con te, più che con chiunque altro.

Un ringraziamento speciale va a mio cugino Francesco e ai miei amici di sempre, Tommaso e Tiziano. Con voi ho vissuto momenti indimenticabili, coltivando amicizie che hanno saputo resistere al passare del tempo e legami che custodisco con affetto nel cuore. La vostra presenza ha arricchito ogni momento di questo viaggio, rendendolo ancora più significativo.

Grazie al gruppo di Castell'Alfero, ho scoperto una delle sorprese più belle e recenti della mia vita. Con voi ho trovato una nuova famiglia, fatta di amicizia sincera, risate contagiose e momenti di condivisione autentica. La vostra energia e spontaneità hanno arricchito la mia quotidianità in modi che non avrei mai potuto immaginare. Siete una gioia inaspettata e sono profondamente grato di potervi avere al mio fianco.

Un grazie di cuore ai miei compagni di università, Massimiliano, Alberto, Nicola e Federico. Insieme abbiamo affrontato tante sfide, condiviso soddisfazioni e trascorso ore di studio e confronto che resteranno nella memoria. Grazie per esserci stati e per aver reso questo cammino ancora più speciale.

Desidero ringraziare anche i colleghi dell'ufficio tecnico di LCM – Precision Technology, presso il quale ho svolto il mio tirocinio curriculare. La vostra accoglienza, la vostra disponibilità e la vostra professionalità mi hanno permesso di crescere e di affrontare questa esperienza con entusiasmo.

Infine, un sincero grazie a tutte le persone che non ho nominato direttamente ma che, in qualsiasi modo, hanno lasciato un segno nel mio percorso. Ogni gesto, ogni parola, ogni momento condiviso ha contribuito a portarmi fin qui.

A tutti voi, che avete reso speciale ogni passo, va la mia più sincera gratitudine. Questo traguardo è anche il vostro. Grazie di cuore.

7. Bibliografia

- [1] Ricciardi A. P., Canfield R. A., Patil M. P., Lindsley N., *Nonlinear Aeroelastic Scaled-Model Design*, doi: 10.2514/1.C033171, *Journal of Aircraft*, Vol. 53, No. 1, pp. 20-32, 2016
- [2] Felippa, Carlos A., *A Historical Outline of Matrix Structural Analysis: A Play in Three Acts*, in *Computers & Structures (Volume 79, Issue 14, June 2001, Pages 1313-1324)*, 2001
- [3] Duncan W. J., Collar A. R., *A method for the solution of oscillations problems by matrices*, 17(7):865, Phil Magn, 1934
- [4] Duncan W. J., Collar A. R., *Matrices applied to the motions of damped systems*, 19(7):197, Phil Magn, 1935
- [5] Frazer R. A., Duncan W. J., Collar A. R., *Elementary matrices and some applications to dynamics and differential equations*, 1st ed. Cambridge: Cambridge University Press, 1938 (7th paperback printing 1963)
- [6] Argyris J. J., Kelsey S., *Energy theorems and structural analysis*, London: Butterworths, 1960 (Part I reprinted from *Aircraft Engrg.* 26 Oct-Nov, 1954 and 27 April-May, 1955)
- [7] Turner M. J., R. W. Clough, H. C. Martin, L. J. Topp, *Stiffness and deflection analysis of complex structures*, *J Aero Sci*, 23:805-24, 1956
- [8] Turner M. J., *The direct stiffness method of structural analysis. Structural and Materials Panel Paper*, AGARD Meeting, Aachen, Germany, 1959
- [9] Turner M. J., Martin H. C., Weikel R. C., *Further development and applications of the stiffness method*, AGARD structures and materials panel, Paris, France, July 1962, In: Fraeijs de Veubeke BM, editor. AGARDograph 72: Matrix Methods of Structural Analysis, Pergamon Press, p.203-66, Oxford, 1964
- [10] Irons, Bruce et al. *Techniques of Finite Elements / Bruce Irons, Sohrab Ahmad*. Chichester New York: Horwood Wiley, 1980. Print.
- [11] Irons, Bruce M., *A frontal solution program for finite element analysis*, *International Journal for Numerical Methods in Engineering*. 2 (January/March): 5–32, 1970
- [12] Kardestuncer, Hayrettin et al., *Finite Element Handbook, Ed. H. Kardestuncer, D.H. Norrie*. New York: McGraw-Hill, 1987. Print.
- [13] MacNeal, Richard H., *The NASTRAN Theoretical Manual*, pagina i., Dicembre 1972
- [14] Michel, L. & Vadean, Aurelian & Benoit, R., *Tire Burst Phenomenon and Rupture of a Typical Truck Tire Bead Design*, in *Tire Science and Technology*, 39. 270-283. 10.2346/1.3672044, 2011
- [15] Johnson G. R., Cook W. H., *A constitutive model and data for metals subjected to large strains, high strain rates and high temperatures*, in *Proceedings of the 7th International Symposium on Ballistics (Vol. 21, No. 1, pp. 541-547)*, 1983
- [16] Mooney M., *A Theory of Large Elastic Deformation*, in *Journal of Applied Physics*, 1940
- [17] Rivlin R. S., *Large Elastic Deformations of Isotropic Materials. IV. Further Developments of the General Theory*, in *Philosophical Transactions of the Royal Society of London A*, 1948
- [18] Ballo, Federico, et al., *Tire-Rim Interaction, a Semi-Analytical Tire Model.*, *Journal of Mechanical Design (1990)*, vol. 140, no. 4, 2018
- [19] Macneal, R. H., *A simple quadrilateral shell element*, *Computers & Structures*, 8(2), 175–183, 1978

- [20] MacNeal, R. H., *The evolution of lower order plate and shell elements in MSC/NASTRAN, Finite Elements in Analysis and Design*, 5(3), 197–222, 1989
- [21] Reissner E., *The Effect of Transverse Shear Deformation on the Bending of Elastic Plates*, *ASME Journal of Applied Mechanics*, Vol. 12, pp. A68–77, 1945
- [22] Mindlin R. D., *Influence of rotatory inertia and shear on flexural motions of isotropic, elastic plates*, *ASME Journal of Applied Mechanics*, Vol. 18 pp. 31–38, 1951
- [23] Zienkiewicz, Olek C., *The Finite Element Method : Its Basis and Fundamentals*, 7th ed., Elsevier, 2013
- [24] *The NASTRAN User's Manual*, 1983
- [25] Timoshenko, Stephen Prokf'yevich, et al., *Theory of Plates and Shells*, 2nd ed., McGraw-Hill, 1959

8. Sitografia

- https://it.wikipedia.org/wiki/Analisi_agli_elementi_finiti
- https://it.wikipedia.org/wiki/Metodo_degli_elementi_finiti
- <https://archive.seattletimes.com/archive/?date=19951018&slug=2147431>
- [https://en.wikipedia.org/wiki/Bruce_Irons_\(engineer\)](https://en.wikipedia.org/wiki/Bruce_Irons_(engineer))
- [https://en.wikipedia.org/wiki/Patch_test_\(finite_elements\)](https://en.wikipedia.org/wiki/Patch_test_(finite_elements))
- https://en.wikipedia.org/wiki/Frontal_solver
- <https://it.wikipedia.org/wiki/Nastran>
- <https://doi.org/10.1115/1.4038927>
- <https://hexagon.com/products/product-groups/computer-aided-engineering-software/msc-nastran>
- [https://doi.org/10.1016/0045-7949\(78\)90020-2,](https://doi.org/10.1016/0045-7949(78)90020-2)
- <https://www.nae.edu/30217/Dr-Richard-H-MacNeal>
- https://github.com/vtpasquale/NASTRAN_CoFE
- [https://doi.org/10.1016/0168-874X\(89\)90044-9](https://doi.org/10.1016/0168-874X(89)90044-9)
- <https://help.autodesk.com/view/NINCAD/2024/ENU/?guid=GUID-1E3BBBCF-AC88-48FA-BC8B-0168C497B31F>
- https://it.wikipedia.org/wiki/Matrice_di_rotazione
- https://it.wikipedia.org/wiki/Formula_di_Rodrigues
- <https://gmsh.info/>
- <https://it.wikipedia.org/wiki/Gmsh>
- <https://www.solidworks.com/it>
- https://en.wikipedia.org/wiki/Reissner-Mindlin_plate_theory
- <https://it.wikipedia.org/wiki/Drilling>
- https://en.wikipedia.org/wiki/Olgierd_Zienkiewicz
- <https://ntrs.nasa.gov/citations/19840013831>
- https://it.wikipedia.org/wiki/Stephen_Timoshenko
- <https://altair.com/hypermesh>