



**Politecnico  
di Torino**

**Politecnico di Torino**

**Corso di Laurea Magistrale in Ingegneria  
Aerospaziale**

Analisi di gusci laminati in composito a  
rigidezza variabile tramite modelli  
strutturali avanzati

Relatore:

**Prof. Alfonso Pagani**

Candidata:

**Annalisa Di Vito**

**316362**

Correlatori:

**Phd. Alberto Racionero  
Sanchez-Majano**

**Phd. Dario Zamani Roud  
Pushti**

Dicembre 2024

# Summary

Nell'ambito della manifattura dei materiali compositi, la possibilità di applicare le fibre seguendo dei percorsi curvi e non strettamente rettilinei porta a innumerevoli vantaggi dal punto di vista dell'efficienza strutturale. I materiali compositi che presentano questa peculiarità vengono detti Variable Angle Tow (VAT) e la loro applicazione ha recentemente ricevuto un rinnovato interesse a causa di significativi miglioramenti tecnologici riguardanti la produzione automatica. Tra gli innumerevoli benefici, essi permettono la fabbricazione di materiali compositi a rigidità variabile senza l'introduzione di discontinuità massimizzando il rapporto rigidità-peso e sono in grado di reindirizzare i carichi verso le aree del materiale strutturalmente più rigide, andando a migliorare le performance strutturali. Il fine di questo lavoro è la caratterizzazione di strutture a guscio laminate realizzate in materiale composito a fibre curve, studiando la risposta statica e dinamica di quest'ultime. Le analisi sono state svolte utilizzando il codice agli elementi finiti basato sulla Carrera Unified Formulation, analizzando come i risultati relativi al comportamento delle strutture in esame possano essere influenzati dalla variazione della mesh per la discretizzazione nel piano e dal tipo di teoria strutturale applicata lungo lo spessore. Sono stati implementati modelli strutturali avanzati Equivalent Single Layer e Layer Wise, facendo uso di espansioni dal primo ordine fino ad arrivare ad ordini superiori, per l'ottenimento di risultati accurati riguardanti il comportamento dinamico e statico di strutture sottili che presentano curvatura. È stata, inoltre, investigata l'importanza dell'applicazione della teoria MITC per contrastare il fenomeno del locking presente nella formulazione agli elementi finiti di piastre e gusci, che porta alla sovrastima della rigidità strutturale a taglio e di membrana. In questo lavoro, è stata indagata, in primo luogo, la risposta statica di piastre in materiale composito sia a fibre dritte che curve per poter successivamente procedere all'analisi di pannelli curvi realizzati con fibre curve. In seguito, è stata analizzata la risposta dinamica di gusci VAT per poter poi arrivare a studiare la risposta dinamica di strutture cilindriche. Le strutture a guscio cilindriche mostrano dei vantaggi dal punto di vista del rapporto rigidità-peso e sono convenienti nel campo della manifattura. Essi ricoprono un ruolo fondamentale nel settore aerospaziale e sono sfruttati all'interno di motori a getto, separatori centri-

fughi, razzi, missili e strutture satellitari rotanti. Per l'analisi modale, sono stati confrontati cilindri in materiale composito a fibre dritte e a fibre curve. Infine, è stato svolto uno studio sull'influenza dell'applicazione di rinforzi longitudinali e radiali sulla risposta modale delle strutture cilindriche stesse.

# Indice

Elenco delle figure	V
Elenco delle tabelle	VIII
<b>1 Introduzione ai compositi VAT</b>	<b>1</b>
1.1 Tecniche di manifattura dei VAT	1
1.2 Difetti nei compositi VAT	4
1.2.1 Difetti indotti dai processi di manifattura	6
1.3 Metodi innovativi di manifattura	8
1.4 Tipologie di laminazione	9
<b>2 Metodi numerici di riferimento</b>	<b>12</b>
2.1 Richiami di meccanica dei solidi	12
2.1.1 Problema dei continui deformabili	12
2.1.2 Relazioni geometriche	13
2.1.3 Relazioni costitutive	14
2.1.4 Formulazione agli elementi finiti e matrice di rigidezza	15
2.2 Modelli Plate high-order	16
2.3 Modelli Shell high-order	20
<b>3 Analisi statica di piastre in materiale composito</b>	<b>23</b>
3.1 Piastra in materiale composito a fibre dritte	23
3.2 Piastra in materiale composito a fibre curve	31
<b>4 Analisi statica di gusci VAT</b>	<b>38</b>
4.1 Pannello curvo incastrato su due lati	38
<b>5 Analisi dinamica di gusci VAT</b>	<b>47</b>
5.1 Pannello curvo incernierato su due lati	47
5.1.1 Effetto del rapporto $\frac{h}{L}$	51

<b>6</b>	<b>Analisi dinamica di cilindri in materiale composito</b>	<b>59</b>
6.1	Fenomeno del locking . . . . .	59
6.2	Cilindro in materiale composito a fibre dritte . . . . .	61
6.3	Cilindro in materiale composito a fibre curve . . . . .	68
<b>7</b>	<b>Analisi dinamica di cilindri irrigiditi in materiale composito</b>	<b>74</b>
7.1	Cilindri irrigiditi in materiale composito a fibre dritte . . . . .	74
7.1.1	Applicazione di irrigidimenti longitudinali . . . . .	75
7.1.2	Applicazione di irrigidimenti circonferenziali . . . . .	81
7.2	Cilindri irrigiditi in materiale composito a fibre curve . . . . .	86
7.2.1	Applicazione di irrigidimenti longitudinali . . . . .	86
7.2.2	Applicazione di irrigidimenti circonferenziali . . . . .	92
<b>8</b>	<b>Conclusioni</b>	<b>98</b>
	<b>Bibliografia</b>	<b>100</b>

# Elenco delle figure

1.1	Tecnica filament winding . . . . .	2
1.2	Tecnica ATL . . . . .	3
1.3	Tecnica AFP . . . . .	3
1.4	Tecnica CTS . . . . .	4
1.5	Deformazione dei fasci di fibre [5] . . . . .	5
1.6	Sovrapposizione e spazi vuoti tra fasci di fibre adiacenti [5] . . . . .	6
1.7	(a) Tow Drop (b) Tow Overlap [5] . . . . .	6
1.8	Deformazione ideale delle fibre durante il processo di ricamo [5] . . . . .	7
1.9	Deformazione reale delle fibre durante il processo di ricamo [5] . . . . .	8
1.10	(a) Deformazione a taglio delle fibre (b) Deformazione flessionale delle fibre [5] . . . . .	8
1.11	Piastra VAT con variazione lineare [6] . . . . .	10
1.12	Guscio VAT con variazione lineare [2] . . . . .	11
1.13	Piastra VAT con curvatura costante . . . . .	11
2.1	Corpo solido nello stato indeformato e deformato [7] . . . . .	13
2.2	Elemento finito cubico [7] . . . . .	15
2.3	Modellazione tramite il metodo ESL e LW [2] . . . . .	18
2.4	Sistema di riferimento curvilineo [2] . . . . .	20
3.1	Modello geometrico della piastra in esame [1] . . . . .	24
3.2	Laminazione presente nei due strati della piastra [1] . . . . .	24
3.3	Andamenti degli spostamenti al variare della mesh nel piano . . . . .	25
3.4	Andamenti delle tensioni al variare della mesh nel piano . . . . .	27
3.5	Andamenti degli spostamenti al variare della funzione di espansione lungo lo spessore . . . . .	29
3.6	Andamenti delle tensioni al variare della funzione di espansione lungo lo spessore . . . . .	30
3.7	Laminazione presente nei due strati della piastra [1] . . . . .	31
3.8	Andamenti degli spostamenti al variare della mesh nel piano . . . . .	32
3.9	Andamenti delle tensioni al variare della mesh nel piano . . . . .	34

3.10	Andamenti degli spostamenti al variare della funzione di espansione lungo lo spessore . . . . .	36
3.11	Andamenti delle tensioni al variare della funzione di espansione lungo lo spessore . . . . .	37
4.1	Modello geometrico del pannello curvo in esame [2] . . . . .	39
4.2	Andamenti degli spostamenti al variare della mesh nel piano . . . . .	40
4.3	Andamenti delle tensioni al variare della mesh nel piano . . . . .	42
4.4	Andamenti degli spostamenti al variare della funzione di espansione lungo lo spessore . . . . .	43
4.5	Andamenti delle tensioni al variare della funzione di espansione lungo lo spessore . . . . .	45
5.1	Modello geometrico del pannello curvo in esame [9] . . . . .	48
5.2	Forme modali utilizzando l'espansione di Lagrange del secondo ordine lungo lo spessore . . . . .	50
5.3	Forme modali utilizzando l'espansione di Taylor del primo ordine lungo lo spessore . . . . .	51
5.4	Forme modali utilizzando l'espansione di Lagrange del secondo ordine lungo lo spessore . . . . .	53
5.5	Forme modali utilizzando l'espansione di Taylor del primo ordine lungo lo spessore . . . . .	54
5.6	Forme modali utilizzando l'espansione di Lagrange del secondo ordine lungo lo spessore . . . . .	56
5.7	Forme modali utilizzando l'espansione di Taylor del primo ordine lungo lo spessore . . . . .	57
6.1	Tying points per l'elemento MITC9 di un guscio [11] . . . . .	60
6.2	Modello geometrico del cilindro in esame [10] . . . . .	61
6.3	Forme modali utilizzando l'espansione di Taylor del primo ordine lungo lo spessore senza l'applicazione della tecnica MITC . . . . .	64
6.4	Forme modali utilizzando l'espansione di Taylor del primo ordine lungo lo spessore con l'applicazione della tecnica MITC . . . . .	65
6.5	Forme modali utilizzando l'espansione di Lagrange del primo ordine lungo lo spessore senza l'applicazione della tecnica MITC . . . . .	66
6.6	Forme modali utilizzando l'espansione di Lagrange del primo ordine lungo lo spessore con l'applicazione della tecnica MITC . . . . .	67
6.7	Forme modali utilizzando l'espansione di Taylor del primo ordine lungo lo spessore senza l'applicazione della tecnica MITC . . . . .	70
6.8	Forme modali utilizzando l'espansione di Taylor del primo ordine lungo lo spessore con l'applicazione della tecnica MITC . . . . .	71

6.9	Forme modali utilizzando l'espansione di Lagrange del primo ordine lungo lo spessore senza l'applicazione della tecnica MITC . . . . .	72
6.10	Forme modali utilizzando l'espansione di Lagrange del primo ordine lungo lo spessore con l'applicazione della tecnica MITC . . . . .	73
7.1	Irrigidimenti longitudinali e circonferenziali . . . . .	75
7.2	Forme modali utilizzando l'espansione di Taylor del primo ordine lungo lo spessore senza l'applicazione della tecnica MITC . . . . .	77
7.3	Forme modali utilizzando l'espansione di Taylor del primo ordine lungo lo spessore con l'applicazione della tecnica MITC . . . . .	78
7.4	Forme modali utilizzando l'espansione di Lagrange del primo ordine lungo lo spessore senza l'applicazione della tecnica MITC . . . . .	79
7.5	Forme modali utilizzando l'espansione di Lagrange del primo ordine lungo lo spessore con l'applicazione della tecnica MITC . . . . .	80
7.6	Forme modali utilizzando l'espansione di Taylor del primo ordine lungo lo spessore senza l'applicazione della tecnica MITC . . . . .	82
7.7	Forme modali utilizzando l'espansione di Taylor del primo ordine lungo lo spessore con l'applicazione della tecnica MITC . . . . .	83
7.8	Forme modali utilizzando l'espansione di Lagrange del primo ordine lungo lo spessore senza l'applicazione della tecnica MITC . . . . .	84
7.9	Forme modali utilizzando l'espansione di Lagrange del primo ordine lungo lo spessore con l'applicazione della tecnica MITC . . . . .	85
7.10	Forme modali utilizzando l'espansione di Taylor del primo ordine lungo lo spessore senza l'applicazione della tecnica MITC . . . . .	88
7.11	Forme modali utilizzando l'espansione di Taylor del primo ordine lungo lo spessore con l'applicazione della tecnica MITC . . . . .	89
7.12	Forme modali utilizzando l'espansione di Lagrange del primo ordine lungo lo spessore senza l'applicazione della tecnica MITC . . . . .	90
7.13	Forme modali utilizzando l'espansione di Lagrange del primo ordine lungo lo spessore con l'applicazione della tecnica MITC . . . . .	91
7.14	Forme modali utilizzando l'espansione di Taylor del primo ordine lungo lo spessore senza l'applicazione della tecnica MITC . . . . .	93
7.15	Forme modali utilizzando l'espansione di Taylor del primo ordine lungo lo spessore con l'applicazione della tecnica MITC . . . . .	94
7.16	Forme modali utilizzando l'espansione di Lagrange del primo ordine lungo lo spessore senza l'applicazione della tecnica MITC . . . . .	95
7.17	Forme modali utilizzando l'espansione di Lagrange del primo ordine lungo lo spessore con l'applicazione della tecnica MITC . . . . .	96



# Elenco delle tabelle

3.1	Proprietà elastiche della piastra . . . . .	23
3.2	Analisi di convergenza della mesh nel piano della piastra, lo spostamento è valutato nel punto $(-\frac{a}{4}, -\frac{b}{4}, 0)$ . . . . .	25
3.3	Valori delle tensioni nel punto $(-\frac{a}{4}, -\frac{b}{4}, 0)$ al variare della mesh nel piano della piastra . . . . .	26
3.4	Valori dello spostamento nel punto $(-\frac{a}{4}, -\frac{b}{4}, 0)$ al variare della teoria strutturale, si utilizza una mesh nel piano $10 \times 10$ . . . . .	28
3.5	Valori delle tensioni nel punto $(-\frac{a}{4}, -\frac{b}{4}, 0)$ al variare della teoria strutturale, si utilizza una mesh nel piano $10 \times 10$ . . . . .	29
3.6	Analisi di convergenza della mesh nel piano della piastra, lo spostamento è valutato nel punto $(-\frac{a}{4}, -\frac{b}{4}, 0)$ . . . . .	32
3.7	Valori delle tensioni nel punto $(-\frac{a}{4}, -\frac{b}{4}, 0)$ al variare della mesh nel piano della piastra . . . . .	33
3.8	Valori dello spostamento nel punto $(-\frac{a}{4}, -\frac{b}{4}, 0)$ al variare della teoria strutturale, si utilizza una mesh nel piano $10 \times 10$ . . . . .	35
3.9	Valori delle tensioni nel punto $(-\frac{a}{4}, -\frac{b}{4}, 0)$ al variare della teoria strutturale, si utilizza una mesh nel piano $10 \times 10$ . . . . .	36
4.1	Proprietà elastiche del pannello curvo . . . . .	39
4.2	Analisi di convergenza della mesh nel piano del guscio, lo spostamento è valutato nel punto $(0.25, 0.5, 0.025)$ m . . . . .	39
4.3	Valori delle tensioni nel punto $(0.375, 0.75, 0.025)$ m al variare della mesh nel piano del guscio . . . . .	41
4.4	Valori dello spostamento nel punto $(0.25, 0.5, 0.025)$ m al variare della teoria strutturale, si utilizza una mesh nel piano $20 \times 10$ . . . . .	43
4.5	Valori delle tensioni nel punto $(0.375, 0.75, 0.025)$ m al variare della teoria strutturale, si utilizza una mesh nel piano $20 \times 10$ . . . . .	44
5.1	Proprietà elastiche del pannello curvo . . . . .	48

5.2	Prime cinque frequenze naturali adimensionalizzate utilizzando le espansioni di Lagrange e di Taylor dal primo al terzo ordine lungo lo spessore . . . . .	48
5.3	Prime cinque frequenze naturali adimensionalizzate utilizzando le espansioni di Lagrange e di Taylor dal primo al terzo ordine lungo lo spessore . . . . .	52
5.4	Prime cinque frequenze naturali adimensionalizzate utilizzando le espansioni di Lagrange e di Taylor dal primo al terzo ordine lungo lo spessore . . . . .	55
6.1	Proprietà elastiche del cilindro . . . . .	61
6.2	Prime sei frequenze naturali utilizzando le espansioni di Lagrange e di Taylor dal primo al terzo ordine lungo lo spessore senza l'applicazione della tecnica MITC . . . . .	62
6.3	Prime sei frequenze naturali utilizzando le espansioni di Lagrange e di Taylor dal primo al terzo ordine lungo lo spessore con l'applicazione della tecnica MITC . . . . .	62
6.4	Risultati ottenuti in letteratura [10] . . . . .	63
6.5	Prime sei frequenze naturali utilizzando le espansioni di Lagrange e di Taylor dal primo al terzo ordine lungo lo spessore senza l'applicazione della tecnica MITC . . . . .	68
6.6	Prime sei frequenze naturali utilizzando le espansioni di Lagrange e di Taylor dal primo al terzo ordine lungo lo spessore con l'applicazione della tecnica MITC . . . . .	68
6.7	Risultati ottenuti in letteratura [10] . . . . .	69
7.1	Prime sei frequenze naturali utilizzando le espansioni di Lagrange e di Taylor dal primo al terzo ordine lungo lo spessore senza l'applicazione della tecnica MITC . . . . .	75
7.2	Prime sei frequenze naturali utilizzando le espansioni di Lagrange e di Taylor dal primo al terzo ordine lungo lo spessore con l'applicazione della tecnica MITC . . . . .	76
7.3	Prime sei frequenze naturali utilizzando le espansioni di Lagrange e di Taylor dal primo al terzo ordine lungo lo spessore senza l'applicazione della tecnica MITC . . . . .	81
7.4	Prime sei frequenze naturali utilizzando le espansioni di Lagrange e di Taylor dal primo al terzo ordine lungo lo spessore con l'applicazione della tecnica MITC . . . . .	81
7.5	Prime sei frequenze naturali utilizzando le espansioni di Lagrange e di Taylor dal primo al terzo ordine lungo lo spessore senza l'applicazione della tecnica MITC . . . . .	86

7.6	Prime sei frequenze naturali utilizzando le espansioni di Lagrange e di Taylor dal primo al terzo ordine lungo lo spessore con l'applicazione della tecnica MITC . . . . .	87
7.7	Prime sei frequenze naturali utilizzando le espansioni di Lagrange e di Taylor dal primo al terzo ordine lungo lo spessore senza l'applicazione della tecnica MITC . . . . .	92
7.8	Prime sei frequenze naturali utilizzando le espansioni di Lagrange e di Taylor dal primo al terzo ordine lungo lo spessore con l'applicazione della tecnica MITC . . . . .	92
8.1	Valori delle tensioni nel punto $(-\frac{a}{4}, -\frac{b}{4}, 0)$ della piastra a fibre dritte e curve. Si riportano i valori ottenuti con una mesh nel piano $10 \times 10$ e la teoria LE3 . . . . .	98
8.2	Valori dello spostamento nel punto $(-\frac{a}{4}, -\frac{b}{4}, 0)$ della piastra a fibre dritte e curve. Si riportano i valori ottenuti con una mesh nel piano $10 \times 10$ e la teoria LE3 . . . . .	99
8.3	Confronto tra le prime cinque frequenze naturali al variare dello spessore del guscio. I risultati riportati sono ottenuti con l'impiego della teoria LE3 . . . . .	99
8.4	Confronto delle frequenze del cilindro a fibre dritte e curve. I risultati riportati sono stati ottenuti con la teoria LE3 e l'applicazione della tecnica MITC . . . . .	100
8.5	Confronto delle frequenze del cilindro a fibre dritte non irrigidito e irrigidito. I risultati riportati sono stati ottenuti con la teoria LE3 e l'applicazione della tecnica MITC . . . . .	100
8.6	Confronto delle frequenze del cilindro a fibre curve non irrigidito e irrigidito. I risultati riportati sono stati ottenuti con la teoria LE3 e l'applicazione della tecnica MITC . . . . .	100

# Capitolo 1

## Introduzione ai compositi VAT

Le discipline ingegneristiche tipicamente adottano materiali compositi caratterizzati da una struttura multistrato per le proprie applicazioni. Solitamente ogni strato del materiale presenta delle fibre che seguono un andamento rettilineo e la variabilità nelle proprietà, la quale è l'obiettivo principale dell'applicazione dei materiali compositi, è ottenuta grazie ad un design appropriato della sequenza di impilamento dei diversi strati. L'angolo con la quale le fibre sono disposte permette di contrastare problemi strutturali come il buckling, che il sistema potrebbe presentare [1]. In particolare, nell'industria aerospaziale, i materiali compositi rappresentano una valida soluzione a causa della notevole resistenza alla corrosione, dell'alto rapporto resistenza-peso, della spiccata malleabilità e dell'eccellente resistenza a fatica [2]. Con l'introduzione di un'altra tipologia di materiali compositi, i cosiddetti Variable Angle Tow composites (VAT), le fibre assumono un andamento non necessariamente lineare ma possono presentare una caratteristica curvilinea all'interno di ciascuno strato. I VAT permettono la manifattura di laminati compositi a rigidità variabile senza l'introduzione di discontinuità nel materiale e massimizzando il rapporto resistenza-peso. L'adozione di compositi a fibre curve comporta notevoli vantaggi rispetto ai materiali compositi tradizionali, tra cui la riduzione della concentrazione degli stress in presenza di fori, e la possibilità di reindirizzare i carichi dalle zone centrali ai bordi rinforzati della struttura, in modo da avere un carico di buckling più grande [1].

### 1.1 Tecniche di manifattura dei VAT

I progressi fatti nell'ambito dei processi della manifattura automatica hanno riportato in luce l'interesse nei confronti dei materiali compositi a fibra curva, la cui introduzione non risulta essere recente [2]. Sono stati introdotti nuovi processi tecnologici come il filament winding, l'Automated Tape Laying (ATL) e l'Automa-

ted Fibre Placement (AFP). Nel filament winding, i fasci di fibre sono impregnati all'interno della resina prima di essere avvolti attorno ad un mandrino rotante. Questo processo è adatto per parti tubulari ma non può essere usato per la manifattura di strutture che presentano delle aperture. Inoltre, questa tecnica non permette l'ottenimento di una distribuzione uniforme delle fibre e del contenuto di resina attraverso lo spessore del laminato. Nonostante ciò, questo metodo è in grado di produrre componenti con una resistenza relativamente alta mantenendo una frazione volumica relativa alle fibre del 60%.

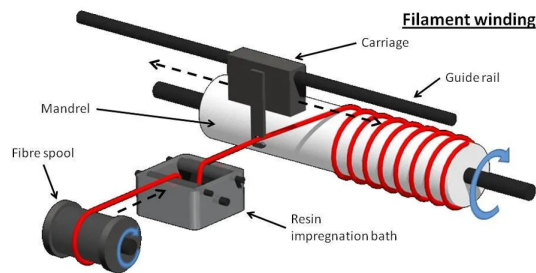


Figura 1.1: Tecnica filament winding

L'ATL è il metodo più efficace di posizionamento di fasci più ampi rispetto alla tecnica precedente, muniti di una larghezza al di sopra dei 304.8 mm, su lastre relativamente estese o superfici che presentano una curvatura minima. Prima degli anni '80, una delle principali limitazioni era la bassa velocità del processo di lay-up e dunque la produttività limitata. Successivamente parte di queste problematiche furono risolte, portando la tecnica ATL ad essere più diffusa anche per la realizzazione di geometrie più complesse. Alla fine degli anni '80 emerse il problema dell'allineamento degli strati, superato negli anni '90 tramite l'introduzione di un sistema di riscaldamento dei nastri di fibre. Dalla metà degli anni '90 ad oggi, l'uso della tecnologia ATL risulta limitata a causa delle elevate richieste di produzione; tuttavia questo processo, seppur più lento, risulta ottimale per la realizzazione di parti con contorni complessi.

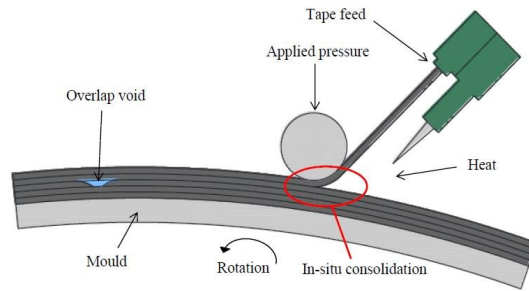


Figura 1.2: Tecnica ATL

L'AFP è un processo ibrido che mostra i vantaggi delle tecnologie del filament winding e dell'ATL. Questa tecnica è usata per la produzione sia di strutture piatte che cilindriche. La lunghezza dei percorsi delle fibre può essere più corta, si ha dunque una maggiore facilità di manipolazione soprattutto per la produzione di superfici sagomate o curve. Le macchine AFP sono costituite da una testa di posizionamento e un braccio robotico controllati tramite un computer. Diverse fasi di produzione come la laminazione, polimerizzazione o fusione e il consolidamento sono svolte nella testa di posizionamento, aumentando la produttività di questo metodo. Durante il processo di laminazione, la testa di posizionamento unisce le superfici di nastro pre-impregnato tramite l'uso di calore e applicando una pressione tramite un rullo di consolidamento che espelle l'aria dalla struttura composta [3].

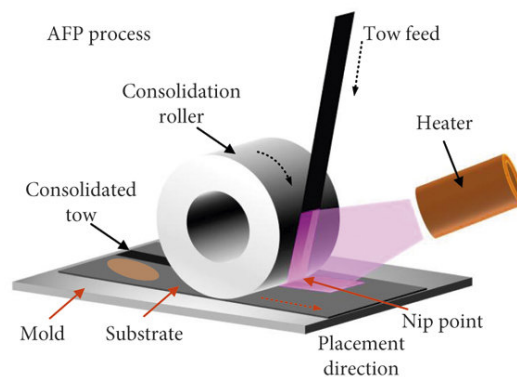


Figura 1.3: Tecnica AFP

Come alternativa al processo convenzionale AFP, è stata sviluppata di recente la tecnica CTS (Continuous Tow Shearing). Essa mostra notevoli vantaggi tra cui la riduzione dei difetti indotti dal processo di manifattura, come il fibre wrinkling, la discontinuità delle fibre e la sovrapposizione di tow disposti consecutivamente.

La CTS sfrutta la capacità dei fasci di fibre non pre-impregnati di deformarsi nel piano grazie all'applicazione di un carico di taglio, ciò permette di orientare le fibre secondo angoli variabili. In alternativa ai metodi classici del tow drop e tow overlap, che verranno approfonditi di seguito, la tecnica CTS sposta i percorsi di riferimento lungo una direzione specifica, mantenendo la continuità delle fibre e riducendo i difetti indotti dal processo [4].

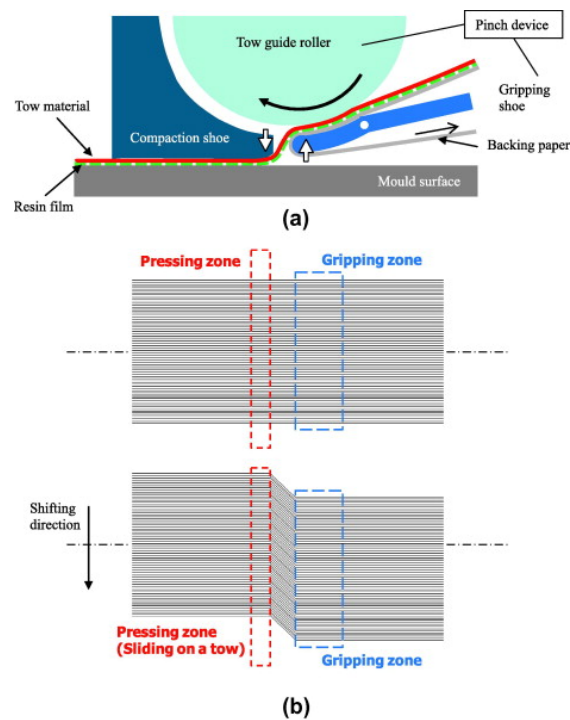


Figura 1.4: Tecnica CTS

## 1.2 Difetti nei compositi VAT

La tecnica convenzionale AFP solitamente sfrutta fasci di fibre pre-impregnati. Recentemente, alcune ricerche sono state svolte nel tentativo di utilizzare fibre non pre-impregnate per limitare le problematiche che insorgono durante il posizionamento di esse e migliorare la flessibilità di design dei VAT. Entrambe le tecniche sfruttano la deformazione flessionale dei fasci di fibre per ottenere dei percorsi curvi. Anche se il fascio presenta una geometria perfettamente rettangolare, il bordo interno del percorso curvilineo subisce necessariamente un buckling locale. Se sono presenti delle imperfezioni aggiuntive, come quelle riportate nella Tabella 1.5, la distorsione del fascio di fibre diventa maggiore. I difetti indotti dalla flessione nel piano, come l'instabilità locale e la variazione di spessore, sono inevitabili. Si

raccomanda, dunque, di mantenere il raggio di curvatura il più piccolo possibile per ridurre l'insorgenza di queste problematiche.


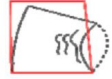


Case	Deformed shape	Defects
Perfect condition		Local buckling Thickening Thinning
Width variation		Local buckling Thickening Thinning
Tension variation		Local buckling Thinning
Feed length variation		Local buckling Thickening Thinning

Figura 1.5: Deformazione dei fasci di fibre [5]

Per la definizione dei percorsi dei fasci di fibre sono utilizzati due metodi: il parallel method e lo shifted method. Il primo implicherebbe nessuno spazio vuoto tra i vari fasci, che assumerebbero uno spessore costante. Esso non è ampiamente utilizzato, in quanto non facilmente applicabile nel caso di realizzazione di piastre VAT che necessitano di essere caratterizzate da una grande rigidità. Lo shifted method, in quest'ultimo ambito, risulta più efficiente. Tuttavia, in quest'ultimo caso, la larghezza di un fascio dipende dalla testa dell'applicatore che ha larghezza finita. Inoltre, la rotazione di essa, porta a un riallineamento delle fibre all'interno di un fascio con la linea centrale che delinea il percorso di curvatura, causando la presenza di regioni sovrapposte oppure di spazi vuoti tra due fasci adiacenti. Lo shifting method è dunque un metodo misto, dal momento che le singole fibre all'interno di un fascio sono parallele tra loro, rispecchiando il principio alla base del parallel method. La rotazione della testa di posizionamento provoca vuoti o regioni di sovrapposizione tra due course successivi della macchina AFP.



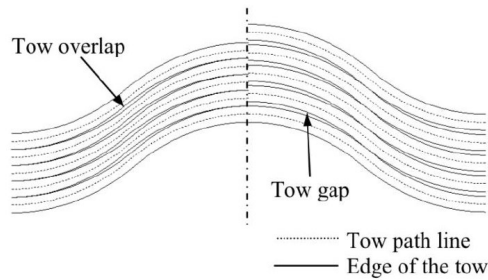


Figura 1.6: Sovrapposizione e spazi vuoti tra fasci di fibre adiacenti [5]

### 1.2.1 Difetti indotti dai processi di manifattura

Nella tecnica dell'Automatic Fibre Placement (AFP) vengono sfruttati fasci di fibre pre-impregnati chiamati towpreg o slittape. Nel caso di posizionamento dei fasci tramite tapes, dal momento che il fascio pre-impregnato possiede uno spessore che non può essere cambiato, devono essere applicate tecniche come il tow drop e l'overlap per prevenire grandi cambiamenti di spessore e coprire le aree ricche di resina. Il tow drop introduce molte discontinuità nelle fibre e ciò può penalizzare le performance meccaniche. Lo svantaggio principale di questa tecnica è che la discrepanza tra i percorsi di fibre progettati e quelli reali aumenta all'aumentare della larghezza del singolo fascio e del numero dei fasci depositati contemporaneamente. Si è dimostrato che l'applicazione del tow drop rende i pannelli a rigidità variabile meno resistenti rispetto al caso di applicazione del tow overlap. L'insorgere di difetti come la disuniformità dell'orientamento delle fibre, l'overlap, il gap tra i fasci e l'irregolarità dello spessore causano una discrepanza con eventuali soluzioni analitiche. Le problematiche del gap e dell'overlap sono causate dallo shifted method.

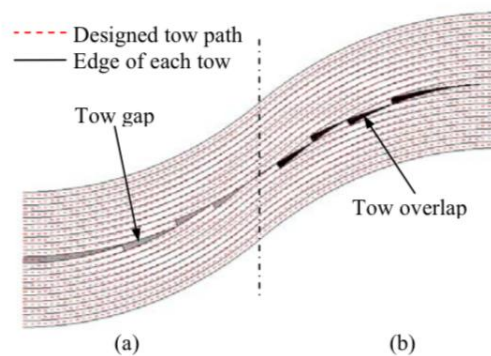


Figura 1.7: (a) Tow Drop (b) Tow Overlap [5]

Recentemente alcuni ricercatori hanno tentato di superare gli svantaggi precedentemente esposti utilizzando dei fasci di fibre non pre-impregnati, i cosiddetti "dry tow". Essi risultano molto più facili da modellare e il preformato può essere conservato a temperatura ambiente. Il posizionamento dei dry tow può indurre sovrapposizioni e spazi vuoti ma si può rimediare a ciò riposizionando in modo ottimale le fibre all'interno del fascio. Tuttavia, la maggiore flessibilità nel design introduce altri difetti: le fibre non sono collose e dunque si necessita di un opportuno metodo di fissaggio sul substrato, solitamente basato su tecniche di ricamo. Anche nel caso in cui il fissaggio del fascio sia perfetto, si verificano fenomeni di buckling locali delle fibre a causa della deformazione flessionale nel piano. Inoltre, potrebbe succedere che i fasci non siano posizionati correttamente sul substrato e che la macchina di posizionamento debba esercitare una tensione sul fascio. Questa forza di tensione fa sì che il tow si muova verso l'origine della curvatura sotto l'influenza dell'allentamento del filo di cucitura.

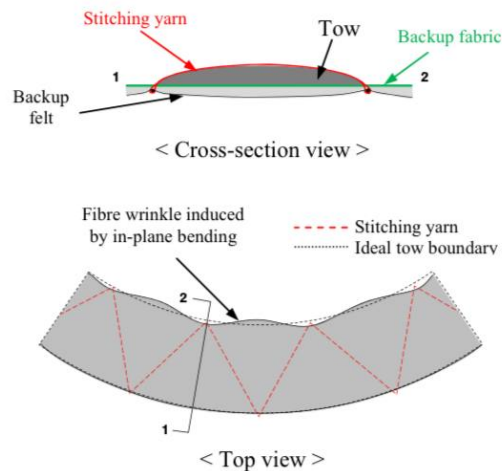


Figura 1.8: Deformazione ideale delle fibre durante il processo di ricamo [5]

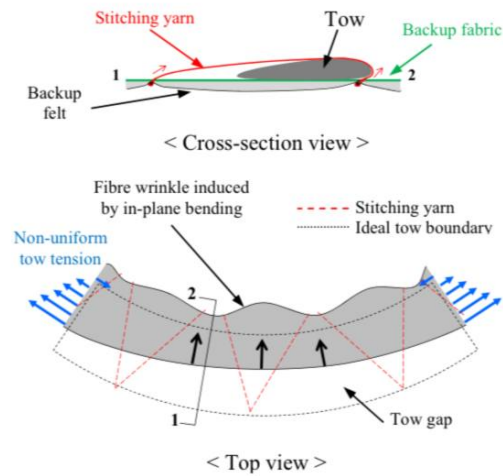


Figura 1.9: Deformazione reale delle fibre durante il processo di ricamo [5]

### 1.3 Metodi innovativi di manifattura

Nelle tecniche convenzionali, i difetti erano principalmente causati dalla deformazione flessionale nel piano dei fasci. Di recente è stato sviluppato un nuovo metodo che sfrutta la deformazione a taglio dei fasci.

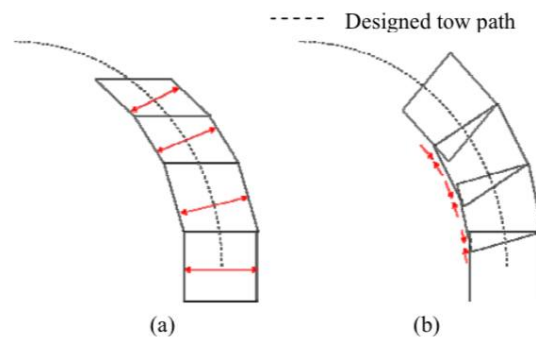


Figura 1.10: (a) Deformazione a taglio delle fibre (b) Deformazione flessionale delle fibre [5]

Il buckling locale delle fibre può essere prevenuto applicando un taglio continuo al fascio. Vi sono dei notevoli vantaggi:

- tutte le fibre vengono spostate lungo una direzione e seguono il percorso progettato evitando i difetti di gap e overlap;
- non c'è limitazione nella curvatura del percorso;

- la maggior parte dei difetti delle tecniche convenzionali viene rimossa.

Con questo metodo il cambiamento di spessore risulta inevitabile ma comunque di minore impatto rispetto ai metodi convenzionali che sfruttano il tow drop e l'overlap [5].

## 1.4 Tipologie di laminazione

In un composito VAT l'orientamento delle fibre può variare con continuità lungo un percorso curvilineo in ogni strato del materiale. Principalmente possono essere utilizzate due tipologie di leggi di variazione dell'angolo della fibra nel piano: a curvatura costante e a variazione lineare. Nei VAT con legge di variazione lineare dell'angolo, considerando un sistema di riferimento cartesiano con assi  $x$  e  $y$ , la variazione del percorso delle fibre può avvenire rispetto ad uno dei due assi o entrambi. La variazione dell'angolo formato dalle fibre può essere modellata con una formulazione matematica che coinvolge pochi parametri, essa assume la seguente forma:

$$\theta(y) = 2(T_1 - T_0) \frac{|y|}{a} + T_0 \quad (1.1)$$

I parametri di interesse sono:

- $T_0$  e  $T_1$ , i quali rappresentano gli angoli di laminazione al centro e al bordo del laminato composito rispettivamente;
- $a$ , larghezza del pannello;
- $\theta(y)$ , variazione dell'angolo delle fibre lungo l'asse  $y$  [6].

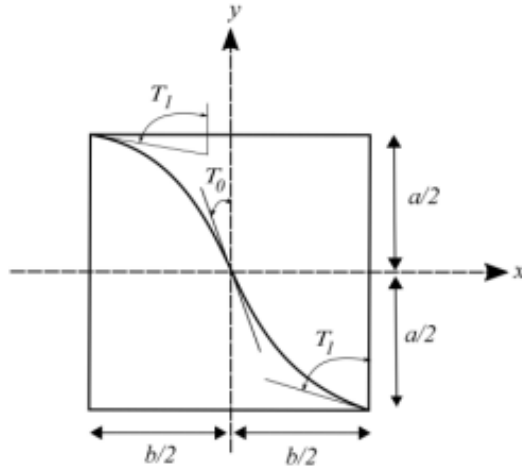


Figura 1.11: Piastra VAT con variazione lineare [6]

Ciò può essere esteso al caso di un guscio utilizzando la seguente formulazione:

$$\theta(\alpha') = \phi + T_0 + \frac{T_1 - T_0}{d} |\alpha'| \quad (1.2)$$

I parametri di interesse, oltre quelli già citati precedentemente, sono i seguenti:

- $\phi$ , possibile angolo di rotazione del percorso delle fibre rispetto ad una specifica direzione di riferimento;
- $\alpha'$ , direzione di variazione delle fibre, orientata dell'angolo  $\phi$  rispetto all'asse  $\alpha$  del sistema di riferimento curvilineo. Questo parametro può essere calcolato con la formula  $\alpha' = \alpha \cos \phi + \beta \sin \phi$ ;
- $d$ , distanza caratteristica tra il punto di riferimento del materiale e il punto dove l'orientamento delle fibre raggiunge il valore  $T_1$ . Essa è pari a  $\frac{a}{2}$  quando  $\phi = 0^\circ$  o  $\frac{b}{2}$  quando  $\phi = 90^\circ$ ;
- $\theta(\alpha')$ , orientamento delle fibre [2].

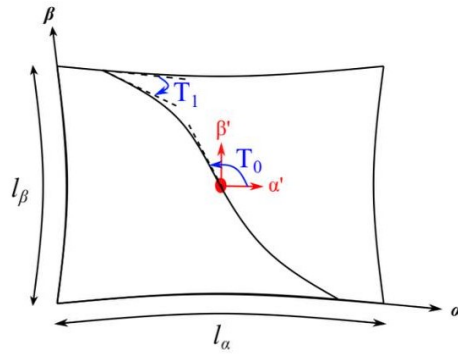


Figura 1.12: Guscio VAT con variazione lineare [2]

Nei VAT a curvatura costante l'angolo  $\phi$  caratterizza localmente l'orientamento delle fibre nel piano. La variazione di curvatura può essere descritta tramite la seguente formula:

$$\begin{cases} \sin\phi = \sin T_0 + k|x| \\ \cos\phi = \cos T_0 - k|y| \end{cases} \quad (1.3)$$

Il parametro  $k$  rappresenta la curvatura del percorso della fibra, pari al reciproco del raggio di curvatura del braccio robotico della macchina per la disposizione delle fibre nello strato del materiale.

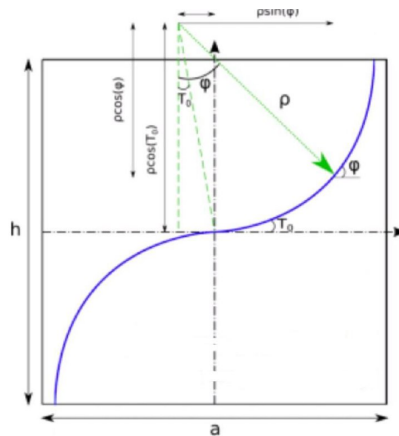


Figura 1.13: Piastra VAT con curvatura costante

# Capitolo 2

## Metodi numerici di riferimento

Per l'analisi di strutture composite multistrato è possibile l'applicazione della Carrera Unified Formulation (CUF). Quest'ultima permette la gestione in un modo unificato di diverse teorie strutturali relative a piastre e gusci, nonché di teorie agli elementi finiti, sulla base di *nuclei fondamentali*.

### 2.1 Richiami di meccanica dei solidi

#### 2.1.1 Problema dei continui deformabili

Un corpo continuo è definito tale in quanto non presenta vuoti o compenetrazioni. Ciascuna quantità fondamentale associata ad esso, come il campo di spostamenti, è funzione delle coordinate del solido e può essere descritta tramite delle funzioni continue. Considerato un corpo continuo deformabile, è possibile associare a ciascun punto di esso un vettore spostamento che determina una condizione deformata dello stesso: un corpo solido deformabile soggetto all'azione di carichi esterni subirà una deformazione. Date le caratteristiche geomeccaniche del corpo e note le condizioni al contorno e i carichi applicati, risolvere il problema elastico vuol dire ricavare le componenti di spostamento, deformazione e tensione in ogni punto dell'oggetto in esame. Se si considerano i tensori di deformazione e tensione come tensori simmetrici, le incognite del problema elastico sono 15 e dunque si necessitano di 15 equazioni per la sua risoluzione. Le incognite sono le seguenti:

$$\begin{aligned} u^T &= \{u_x, u_y, u_z\} \\ \epsilon^T &= \{\epsilon_{xx}, \epsilon_{yy}, \epsilon_{zz}, \epsilon_{xz}, \epsilon_{yz}, \epsilon_{xy}\} \\ \sigma^T &= \{\sigma_{xx}, \sigma_{yy}, \sigma_{zz}, \gamma_{xz}, \gamma_{yz}, \gamma_{xy}\} \end{aligned} \tag{2.1}$$

$u^T$  indica il campo di spostamenti,  $\epsilon^T$  il campo di deformazioni e  $\sigma^T$  il campo di tensioni.

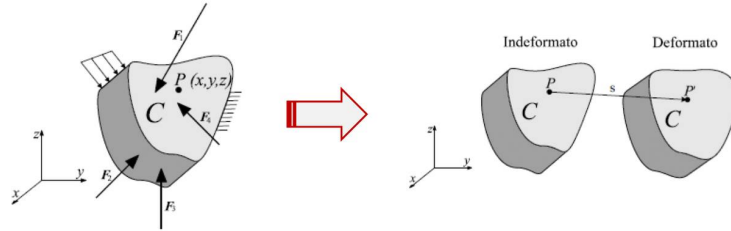


Figura 2.1: Corpo solido nello stato indeformato e deformato [7]

### 2.1.2 Relazioni geometriche

Le relazioni geometriche definiscono il legame tra il campo delle deformazioni e il campo degli spostamenti. Il campo di deformazione include le deformazioni lineari  $\epsilon_{xx}$ ,  $\epsilon_{yy}$  e  $\epsilon_{zz}$ , responsabili del cambiamento di volume dell'oggetto, e le deformazioni a taglio  $\gamma_{xy}$ ,  $\gamma_{zx}$  e  $\gamma_{zy}$ , responsabili della distorsione del corpo. Le relazioni geometriche sono le seguenti:

$$\begin{aligned}
 \epsilon_{xx} &= \frac{\delta u_x}{\delta x} \\
 \epsilon_{yy} &= \frac{\delta u_y}{\delta y} \\
 \epsilon_{zz} &= \frac{\delta u_z}{\delta z} \\
 \gamma_{xy} &= \frac{\delta u_x}{\delta y} + \frac{\delta u_y}{\delta x} \\
 \gamma_{zx} &= \frac{\delta u_x}{\delta z} + \frac{\delta u_z}{\delta x} \\
 \gamma_{zy} &= \frac{\delta u_y}{\delta z} + \frac{\delta u_z}{\delta y}
 \end{aligned} \tag{2.2}$$

Le relazioni così scritte sono valide quando la condizione deformata del corpo non è molto diversa da quella indeformata. Esse possono essere riassunte con la seguente espressione:

$$\epsilon = bu \tag{2.3}$$



dove  $b$  è l'operatore differenziale lineare che assume la forma

$$b = \begin{bmatrix} \frac{\delta}{\delta x} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{\delta}{\delta y} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{\delta}{\delta z} \\ \frac{\delta}{\delta z} & 0 & \frac{\delta}{\delta x} \\ 0 & \frac{\delta}{\delta z} & \frac{\delta}{\delta y} \\ \frac{\delta}{\delta y} & \frac{\delta}{\delta x} & 0 \end{bmatrix} \quad (2.4)$$

### 2.1.3 Relazioni costitutive

Le relazioni costitutive stabiliscono il comportamento meccanico del materiale e legano le tensioni con le deformazioni. Per i materiali lineari elastici, che se studiati in laboratorio presentano un andamento lineare nel legame tra sforzo e deformazione, la matrice  $C$  che mette in relazione il vettore delle deformazioni e delle tensioni è costituita da valori numerici costanti. La legge costitutiva per materiali lineari elastici, anche detta legge di Hooke, può essere scritta come segue:

$$\sigma = C\epsilon \quad (2.5)$$

Dove la matrice  $C$  è una matrice  $6 \times 6$  essendo 6 le componenti di tensione e deformazione. Per un materiale isotropo, essa può essere scritta come:

$$C = \begin{bmatrix} C_{11} & C_{12} & C_{12} & 0 & 0 & 0 \\ C_{21} & C_{11} & C_{12} & 0 & 0 & 0 \\ C_{21} & C_{21} & C_{11} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & C_{44} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & C_{44} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & C_{44} \end{bmatrix} \quad (2.6)$$

I parametri riportati nella matrice assumono i valori di seguito:

$$\begin{aligned} C_{11} &= 2G + \lambda \\ C_{12} &= C_{21} = \lambda \\ C_{44} &= G \\ G &= \frac{E}{2(1 + \nu)} \\ \lambda &= \frac{\nu E}{(1 + \nu)(1 - 2\nu)} \end{aligned} \quad (2.7)$$

dove  $G$  e  $\lambda$  sono le costanti di Lamè,  $E$  è il modulo di Young,  $\nu$  è il coefficiente di Poisson e  $G$  è il modulo elastico a taglio.

### 2.1.4 Formulazione agli elementi finiti e matrice di rigidezza

Dato un corpo solido tridimensionale, è possibile dividere il dominio di interesse in una serie di elementi di dimensione finita, definendo in questo modo una griglia computazionale. Considerando un generico punto all'interno di un determinato elemento finito, lo spostamento in corrispondenza di quel punto può essere scritto come combinazione lineare degli spostamenti ai vertici dell'elemento e di funzioni note a priori: si passa da un campo di spostamenti continuo ad un campo discreto e, dunque, da un numero infinito di incognite ad un numero finito, corrispondenti agli spostamenti nodali. Il campo di spostamenti potrà essere scritto come segue:

$$s = LS \quad (2.8)$$

$$s = \{u_x(x, y, z), u_y(x, y, z), u_z(x, y, z)\}$$

Dove  $s$  rappresenta il campo di spostamento e  $S$  gli spostamenti nei nodi dell'elemento. Quest'ultimi vengono interpolati tramite funzioni di forma contenute all'interno della matrice  $L$ . Le funzioni di forma sono polinomi di Lagrange, i quali assumono valore unitario nel vertice considerato dell'elemento finito e valore nullo nei restanti nodi. Gli spostamenti nodali e la matrice  $L$ , prendendo in considerazione l'elemento finito riportato in Figura 2.2, possono essere scritti come:

$$S = \{S_{x1}, S_{y1}, S_{z1}, S_{x2}, S_{y2}, S_{z2}, \dots, S_{x8}, S_{y8}, S_{z8}\} \quad (2.9)$$

$$L = \begin{bmatrix} L_1 & 0 & 0 & L_2 & 0 & 0 & \dots & L_{Nn} & 0 & 0 \\ 0 & L_1 & 0 & 0 & L_2 & 0 & \dots & 0 & L_{Nn} & 0 \\ 0 & 0 & L_1 & 0 & 0 & L_2 & \dots & 0 & 0 & L_{Nn} \end{bmatrix} \quad (2.10)$$

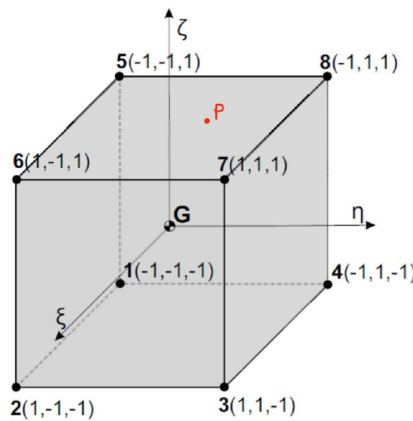


Figura 2.2: Elemento finito cubico [7]

Applicando il Principio dei Lavori Virtuali, è possibile ricavare la matrice di rigidezza  $K$  per elementi tridimensionali. Si scrive prima di tutto il lavoro virtuale interno:

$$\delta L_i = \int_v \delta \epsilon^T \sigma dV \quad (2.11)$$

Applicando le equazioni costitutive si ottiene:

$$\delta L_i = \int_v \delta \epsilon^T C \epsilon dV \quad (2.12)$$

Sfruttando le relazioni geometriche e la formulazione agli elementi finiti, si può ricavare la matrice  $B$ :

$$\begin{aligned} \epsilon &= b s \\ s &= L S \\ \epsilon &= b L S = B S \end{aligned} \quad (2.13)$$

Si ottiene infine la matrice di rigidezza  $K$ :

$$\delta L_i = \int_v \delta S^T B^T C B S dV = \delta S^T \left( \int_v B^T C B dV \right) S = \delta S^T K S \quad (2.14)$$

Scrivendo il lavoro esterno come prodotto del vettore degli spostamenti nodali e delle sollecitazioni meccaniche applicate nei nodi, è possibile uguagliare il lavoro virtuale interno con quello esterno: [7]

$$\begin{aligned} \delta L_e &= \delta S^T F \\ S &= \{S_{x1}, S_{y1}, S_{z1}, S_{x2}, S_{y2}, S_{z2}, \dots, S_{x8}, S_{y8}, S_{z8}\} \\ F &= \{F_{x1}, F_{y1}, F_{z1}, F_{x2}, F_{y2}, F_{z2}, \dots, F_{x8}, F_{y8}, F_{z8}\} \\ \delta S^T K S &= \delta S^T F \\ K S &= F \end{aligned} \quad (2.15)$$

## 2.2 Modelli Plate high-order

La Carrera Unified Formulation permette l'applicazione di diversi modelli bi-dimensionali in modo unificato. Le equazioni di governo sono scritte tramite *nuclei fondamentali* che non dipendono dall'ordine di espansione  $N$  usata nella direzione trasversale  $z$  e dalla descrizione delle variabili. Nel caso della piastra,

le variabili non note possono essere espresse tramite delle funzioni dello spessore, dipendenti solo dalla coordinata  $z$ , e dalle stesse incognite dipendenti dalle coordinate nel piano  $x$  e  $y$ . Una generica incognita, come ad esempio lo spostamento, assume la seguente forma:

$$u(x, y, z) = F_\tau(z)u_\tau(x, y) \quad \tau = 0, \dots, N \quad (2.16)$$

Dove  $\tau$  indica l'ordine di espansione lungo lo spessore, che può variare considerando espansioni dal primo ordine fino a espansioni di ordine superiore  $N$ . In base alla funzione di spessore applicata, possono distinguersi due modelli: Equivalent Single Layer (ESL) e Layer Wise (LW). Nel modello ESL, la variabile è rappresentativa dell'intera struttura multistrato ed è implementata un'espansione di Taylor come funzione di spessore  $F_\tau(z)$ :

$$u(x, y, z) = F_0u_0 + F_1u_1 + \dots + F_Nu_N = F_\tau u_\tau \quad \tau = 0, \dots, N \quad (2.17)$$

$$F_0 = z^0 = 1, F_1 = z^1 = z, \dots, F_N = z^N$$

Nel modello LW, la variabile non è rappresentativa dell'intero materiale ma è indipendente per ogni strato  $k$ :

$$u(x, y, z)^k = F_t u_t^k + F_b u_b^k + F_l u_l^k \quad l = 2, \dots, N \quad (2.18)$$

dove  $t$  e  $b$  indicano la parte superiore e inferiore della piastra e le funzioni di espansione lungo lo spessore sono dei polinomi di Lagrange, esprimibili come segue:

$$P_0 = 0, \quad P_1 = \zeta_k, \quad P_2 = \frac{(3\zeta_k^2 - 1)}{2}, \quad P_3 = \frac{5\zeta_k^3}{2} - \frac{3\zeta_k}{2}, \quad P_4 = \frac{35\zeta_k^4}{8} - \frac{15\zeta_k^2}{4} + \frac{3}{8}$$

$$F_t = \frac{P_0 + P_1}{2}, \quad F_b = \frac{P_0 - P_1}{2}, \quad F_l = P_l - P_{l-2} \quad \text{con } l = 2, \dots, N \quad (2.19)$$

Le funzioni di spessore godono delle seguenti proprietà:

$$\begin{aligned} \zeta_k = 1 : F_t = 1; F_b = 0; F_l = 0 & \quad \text{sulla parte superiore} \\ \zeta_k = -1 : F_t = 0; F_b = 1; F_l = 0 & \quad \text{sulla parte inferiore} \end{aligned} \quad (2.20)$$

Tramite la CUF è possibile ottenere la matrice di rigidezza globale della struttura attraverso l'assemblaggio dei *nuclei fondamentali* [8]. Nel modello ESL, la matrice di rigidezza è valutata considerando la tecnica di omogenizzazione delle proprietà

di ogni strato del laminato, sommando i contributi di ciascuno di essi. Il risultato è la modellizzazione della struttura multistrato come se fosse formata da un unico strato equivalente, alla quale viene associato un set di variabili valide per l'intera sezione trasversale. Al contrario, la teoria LW divide ed espande il campo di spostamento all'interno di ogni strato. In questo modo l'omogenizzazione avviene in corrispondenza delle interfacce tra gli strati. La teoria LW rispetto alla teoria ESL, inoltre, garantisce continuità degli spostamenti ed equilibrio delle tensioni di taglio, nel rispetto dei  $C_z^0$  requirements. La teoria ESL fornisce risultati accurati sulla risposta globale del sistema ma mostra delle inaccurately sul calcolo della distribuzione tridimensionale dello stress rispetto alla teoria LW [2].

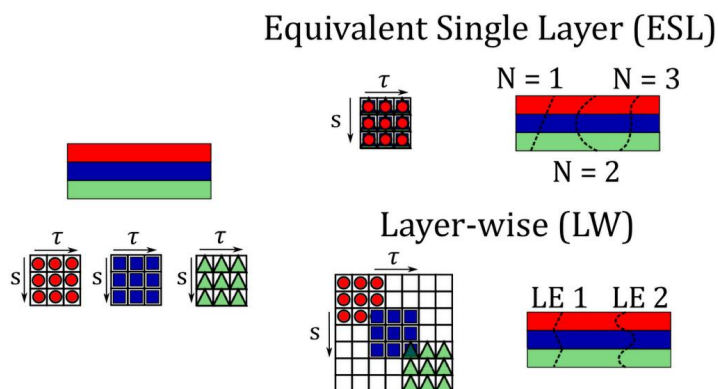


Figura 2.3: Modellizzazione tramite il metodo ESL e LW [2]

In entrambi i casi, si procede applicando il Principio dei Lavori Virtuali alla piastra con  $N_l$  strati sottoposta a dei carichi meccanici:

$$\sum_{k=1}^{N_l} \int_{\Omega_k} \int_{A_k} (\delta \epsilon_{pG}^{kT} \sigma_{pC}^k + \delta \epsilon_{nG}^{kT} \sigma_{nC}^k) d\Omega_k dz = \sum_{k=1}^{N_l} \delta L_e^k \quad (2.21)$$

Dove  $\Omega_k$  e  $A_k$  sono i domini di integrazione nel piano  $x - y$  e nella direzione  $z$ ,  $k$  indica lo strato, T il trasposto di un vettore, G indica una relazione geometrica e C una costitutiva. Il primo membro dell'equazione rappresenta la variazione del lavoro interno mentre il secondo membro la variazione del lavoro esterno, entrambi riferiti allo strato  $k$ -esimo. Per ricavare la matrice di rigidezza bisogna sostituire le equazioni costitutive e le relazioni geometriche nel PLV:

$$\begin{aligned}
\sigma_{pC}^k &= C_{pp}^k \epsilon_{pG}^k + C_{pn}^k \epsilon_{nG}^k \\
\sigma_{nC}^k &= C_{np}^k \epsilon_{pG}^k + C_{nn}^k \epsilon_{nG}^k \\
\epsilon_{pG}^k &= D_p^k u^k \\
\epsilon_{nG}^k &= (D_{n\Omega}^k + D_{nZ}^k) u^k
\end{aligned} \tag{2.22}$$

con

$$\begin{aligned}
C_{pp}^k &= \begin{bmatrix} C_{11} & C_{12} & C_{16} \\ C_{12} & C_{22} & C_{26} \\ C_{16} & C_{26} & C_{66} \end{bmatrix} & C_{pn}^k &= \begin{bmatrix} 0 & 0 & C_{13} \\ 0 & 0 & C_{23} \\ 0 & 0 & C_{36} \end{bmatrix} \\
C_{np}^k &= \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ C_{13} & C_{23} & C_{36} \end{bmatrix} & C_{nn}^k &= \begin{bmatrix} C_{55} & C_{45} & 0 \\ C_{45} & C_{44} & 0 \\ 0 & 0 & C_{33} \end{bmatrix} \\
D_p^k &= \begin{bmatrix} \delta x & 0 & 0 \\ 0 & \delta y & 0 \\ \delta y & \delta x & 0 \end{bmatrix} & D_{n\Omega}^k &= \begin{bmatrix} 0 & 0 & \delta x \\ 0 & 0 & \delta y \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} & D_{nZ}^k &= \begin{bmatrix} \delta z & 0 & 0 \\ 0 & \delta z & 0 \\ 0 & 0 & \delta z \end{bmatrix}
\end{aligned} \tag{2.23}$$

dove  $\sigma_{pC}^k$  e  $\epsilon_{pG}^k$  sono le tensioni e le deformazioni nel piano, mentre  $\sigma_{nC}^k$  e  $\epsilon_{nG}^k$  sono le tensioni e deformazioni fuori dal piano. Introducendo la formulazione unificata per gli spostamenti, si ottiene:

$$\begin{aligned}
\epsilon_{pG}^k &= D_p^k (F_\tau u_\tau^k) \\
\epsilon_{nG}^k &= (D_{n\Omega}^k + D_{nZ}^k) (F_\tau u_\tau^k)
\end{aligned} \tag{2.24}$$

Infine, è possibile esprimere gli spostamenti come funzione degli spostamenti nodali  $q_{\tau i}^k$  degli  $N_n$  nodi mediante funzioni di forma, in accordo con il metodo agli elementi finiti:

$$u_\tau^k = N_i q_{\tau i}^k \quad i = 1, \dots, N_n \tag{2.25}$$

Si può dunque arrivare ad un'espressione per la variazione del lavoro interno:

$$\delta L_{int}^k = \delta q_{sj}^{kT} K^{k\tau sij} q_{\tau i}^k \tag{2.26}$$

dove  $K^{\tau sij}$  rappresenta il nucleo fondamentale per il calcolo della matrice di rigidità completa [8].

## 2.3 Modelli Shell high-order

Quanto esposto per la piastra può essere applicato al guscio. A differenza della piastra, in cui la geometria è descritta sfruttando un sistema di riferimento lineare  $x - y - z$ , nel caso del guscio la geometria viene descritta tramite un sistema di riferimento curvilineo  $\alpha - \beta - z$ , dove  $\alpha$  e  $\beta$  identificano la superficie nel piano e  $z$  la direzione parallela allo spessore.

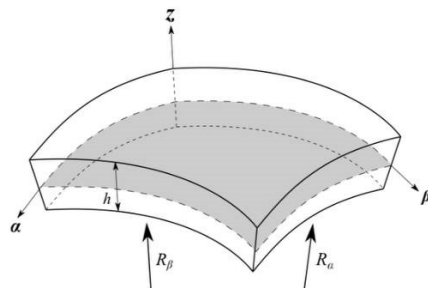


Figura 2.4: Sistema di riferimento curvilineo [2]

Quanto descritto nella Sezione 2.1 può essere esteso al caso del guscio, tenendo conto dell'uso di coordinate curvilinee e non più lineari. I vettori degli spostamenti, delle deformazioni e delle tensioni, per ogni strato  $k$  del materiale composito, possono essere scritti nel modo seguente:

$$\begin{aligned}
 u^k &= \{u_\alpha^k, u_\beta^k, u_z^k\} \\
 \epsilon^k &= \{\epsilon_{\alpha\alpha}^k, \epsilon_{\beta\beta}^k, \epsilon_{zz}^k, \epsilon_{\alpha z}^k, \epsilon_{\beta z}^k, \epsilon_{\alpha\beta}^k\} \\
 \sigma^k &= \{\sigma_{\alpha\alpha}^k, \sigma_{\beta\beta}^k, \sigma_{zz}^k, \sigma_{\alpha z}^k, \sigma_{\beta z}^k, \sigma_{\alpha\beta}^k\}
 \end{aligned} \tag{2.27}$$

La relazione geometrica assume la seguente forma:

$$\epsilon^k = Du^k \tag{2.28}$$

Dove  $D$  è l'operatore differenziale:

$$D = \begin{bmatrix} \frac{\delta_\alpha}{H_\alpha} & 0 & \frac{1}{H_\alpha R_\alpha} \\ 0 & \frac{\delta_\beta}{H_\beta} & \frac{1}{H_\beta R_\beta} \\ 0 & 0 & \delta_z \\ \delta_z - \frac{1}{H_\alpha R_\alpha} & 0 & \frac{\delta_\alpha}{H_\alpha} \\ 0 & \delta_z - \frac{1}{H_\beta R_\beta} & \frac{\delta_\beta}{H_\beta} \\ \frac{\delta_\beta}{H_\beta} & \frac{\delta_\alpha}{H_\alpha} & 0 \end{bmatrix} \tag{2.29}$$

Le quantità  $H_\alpha$  e  $H_\beta$  valgono rispettivamente:

$$\begin{aligned} H_\alpha^k &= A^k \left(1 + \frac{z_k}{R_\alpha^k}\right) \\ H_\beta^k &= B^k \left(1 + \frac{z_k}{R_\beta^k}\right) \end{aligned} \quad (2.30)$$

dove  $R_\alpha^k$  e  $R_\beta^k$  sono i raggi di curvatura della superficie media dello strato  $k$  mentre  $A^k$  e  $B^k$  indicano i parametri di Lamè. La relazione costitutiva può essere scritta come:

$$\sigma^k = C^k \epsilon^k \quad (2.31)$$

dove  $C^k$  è la matrice elastica. Nei compositi VAT, in cui le fibre hanno un orientamento variabile descritto dal parametro  $\theta(\alpha, \beta)$ , la matrice  $C$  assume una modifica:

$$\tilde{C}^k = T^T C^k T \quad (2.32)$$

dove  $T$  rappresenta la matrice di rotazione e la matrice  $\tilde{C}^k$  varia punto per punto in una struttura VAT. Come per la piastra, ipotizzando un modello LW, il campo di spostamenti tridimensionale può essere scritto come un'espansione attraverso lo spessore delle variabili definite nel piano:

$$u(\alpha, \beta, z)^k = F_\tau(z)^k u_\tau^k(\alpha, \beta) \quad \tau = 1, \dots, M \quad (2.33)$$

Anche in quest'ambito, i vettori degli spostamenti generalizzati nel piano possono essere scritti sfruttando delle funzioni di forma  $N_i(\alpha, \beta)$  e gli spostamenti nodali incogniti  $q_{\tau i}^k$ , in accordo con il metodo agli elementi finiti:

$$u_\tau^k(\alpha, \beta) = N_i(\alpha, \beta) q_{\tau i}^k \quad i = 1, \dots, N_n \quad (2.34)$$

Come mostrato nella Sezione 2.2, tramite il Principio dei Lavori Virtuali, è possibile derivare l'espressione della matrice di rigidezza. Si scrivono il lavoro virtuale interno ed esterno come segue:

$$\begin{aligned} \delta L_{int} &= \int_V \delta \epsilon^T \sigma dV \\ \delta L_{ext} &= \delta q_{sj}^T p_{sj} + \int_S \delta q_{sj}^T f_{sj} dS \end{aligned} \quad (2.35)$$



dove  $p_{sj}$  e  $f_{sj}$  sono la componente di carico puntuale e la forza superficiale rispettivamente. Si possono ricavare i nuclei fondamentali da cui derivare la matrice di rigidezza tramite i passaggi esposti nella Sezione 2.2, scrivendo il lavoro virtuale interno nella forma seguente:

$$\delta L_{int} = \delta q_{sj}^T K^{ij\tau s} q_{\tau i} \quad (2.36)$$

dove  $K^{ij\tau s}$  è il nucleo fondamentale [2].

# Capitolo 3

## Analisi statica di piastre in materiale composito

Nel seguente capitolo si indaga la risposta statica di una piastra a due strati sotto effetto di un carico di pressione esercitato sulla superficie superiore. In primo luogo si studia il caso in cui le fibre abbiano andamento rettilineo in ogni singolo strato, passando poi all'introduzione di fibre curve. In entrambi i casi sarà sviluppata un'analisi di convergenza degli spostamenti e delle tensioni in un punto variando la mesh nel piano. Successivamente si procede con l'applicazione di diverse teorie strutturali lungo lo spessore della piastra, ottenendo gli andamenti delle componenti di tensione e di spostamento. Di seguito sono riportati i risultati delle analisi svolte mediante l'utilizzo del codice agli elementi finiti basato sulla CUF, in cui trovano applicazione le teorie strutturali esposte nel Capitolo 2. I risultati delle analisi sono stati confrontati con quelli presenti nel Riferimento [1].

### 3.1 Piastra in materiale composito a fibre dritte

Il primo caso che si vuole analizzare è quello di una piastra a due strati in materiale composito a fibre dritte. Essa è soggetta ad un carico di pressione di 0.01 MPa, applicato sulla parte superiore della struttura. La piastra è incastrata su tutti e quattro i lati di uguale lunghezza pari a 1 m e lo spessore della piastra è di 0.1 m. Le proprietà elastiche sono riassunte nella seguente tabella:

$E_{11}$ [GPa]	$E_{22}$ [GPa]	$E_{33}$ [GPa]	$G_{12}$ [GPa]	$G_{13}$ [GPa]	$G_{23}$ [GPa]	$\nu_{12}$	$\nu_{13}$	$\nu_{23}$
147.9	8.96	8.96	7.1	7.1	6.21	0.3	0.3	0.49

Tabella 3.1: Proprietà elastiche della piastra

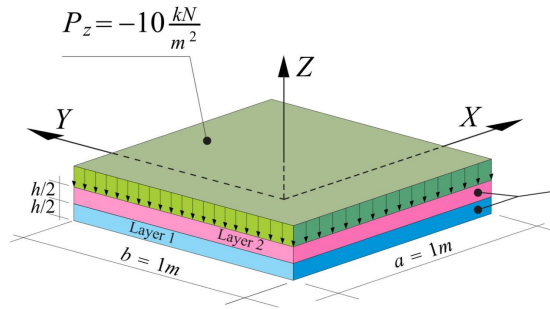


Figura 3.1: Modello geometrico della piastra in esame [1]

La laminazione nei due strati è del tipo  $\langle(90|90)\rangle\langle(0|0)\rangle$ , come mostrato in Figura 3.2.

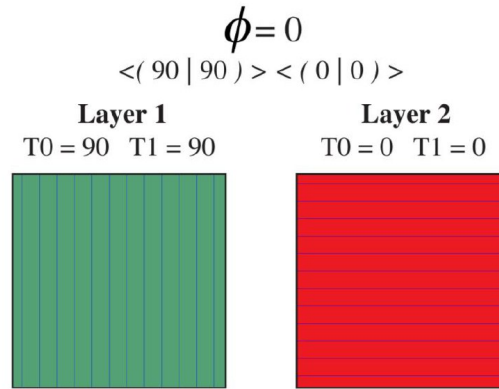


Figura 3.2: Laminazione presente nei due strati della piastra [1]

Per l'analisi sono stati utilizzati elementi finiti biquadratici a 9 nodi (Q9), procedendo prima di tutto con uno studio di convergenza dello spostamento valutato lungo lo spessore nel punto di coordinate  $(-\frac{a}{4}, -\frac{b}{4})$ . Per fare ciò è stata variata la mesh nel piano, utilizzando una discretizzazione man mano più fitta; in particolare è stato valutato lo spostamento risultante dall'applicazione di una mesh  $6 \times 6$ ,  $8 \times 8$  ed infine  $10 \times 10$ . Durante la variazione della mesh, sullo spessore sono stati utilizzati elementi B2 con cinematica lagrangiana LE1. In Tabella 3.2 si riportano gli andamenti lungo lo spessore degli spostamenti nelle 3 direzioni, trovati al variare del numero di elementi finiti nel piano. Gli andamenti sono confrontati con i risultati relativi al modello 3D in Nastran riportati in letteratura [1].

Modello	$u_x \times 10^{-6}$ [m]	$u_y \times 10^{-6}$ [m]	$u_z \times 10^{-5}$ [m]
6×6 Q9-LE1	-0.200	0.199	-0.264
8×8 Q9-LE1	-0.201	0.201	-0.268
10×10 Q9-LE1	-0.202	0.201	-0.269

Tabella 3.2: Analisi di convergenza della mesh nel piano della piastra, lo spostamento è valutato nel punto  $(-\frac{a}{4}, -\frac{b}{4}, 0)$

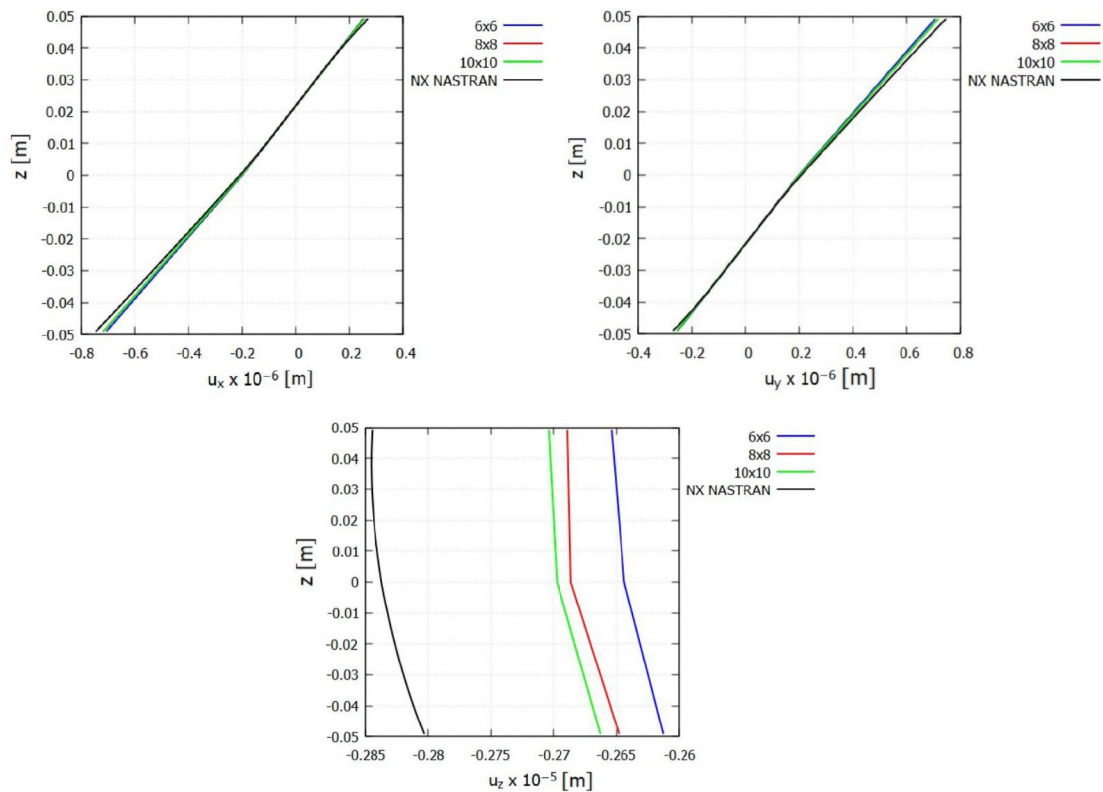


Figura 3.3: Andamenti degli spostamenti al variare della mesh nel piano

Si può notare come gli spostamenti nel piano  $u_x$  e  $u_y$  non risentano molto della variazione del numero di elementi finiti con i quali è stata discretizzata la piastra. Essi sono coerenti con i risultati riportati in letteratura. Al contrario, si può notare una differenza, seppur minima, tra l'applicazione delle tre differenti mesh negli andamenti dello spostamento trasversale  $u_z$ : all'aumentare del numero di elementi finiti lo spostamento tende a valori più piccoli e si avvicina sempre più ai valori trovati in letteratura. Si riportano di seguito gli andamenti delle tensioni nel

punto  $(-\frac{a}{4}, -\frac{b}{4})$  al variare della mesh e si confrontano essi con i risultati riportati in letteratura.

Modello	$\sigma_{xx}$ [kPa]	$\sigma_{yy}$ [kPa]	$\sigma_{zz}$ [kPa]	$\sigma_{xz}$ [kPa]	$\sigma_{yz}$ [kPa]	$\sigma_{xy}$ [kPa]
6×6 Q9-LE1	-1.73	-44.9	-7.39	-3.99	-10.4	-0.00294
8×8 Q9-LE1	-1.92	-58.7	-9.08	-9.08	-15.7	-0.00182
10×10 Q9-LE1	-1.94	-49.1	-8.22	-4.99	-11.7	-0.00227

Tabella 3.3: Valori delle tensioni nel punto  $(-\frac{a}{4}, -\frac{b}{4}, 0)$  al variare della mesh nel piano della piastra

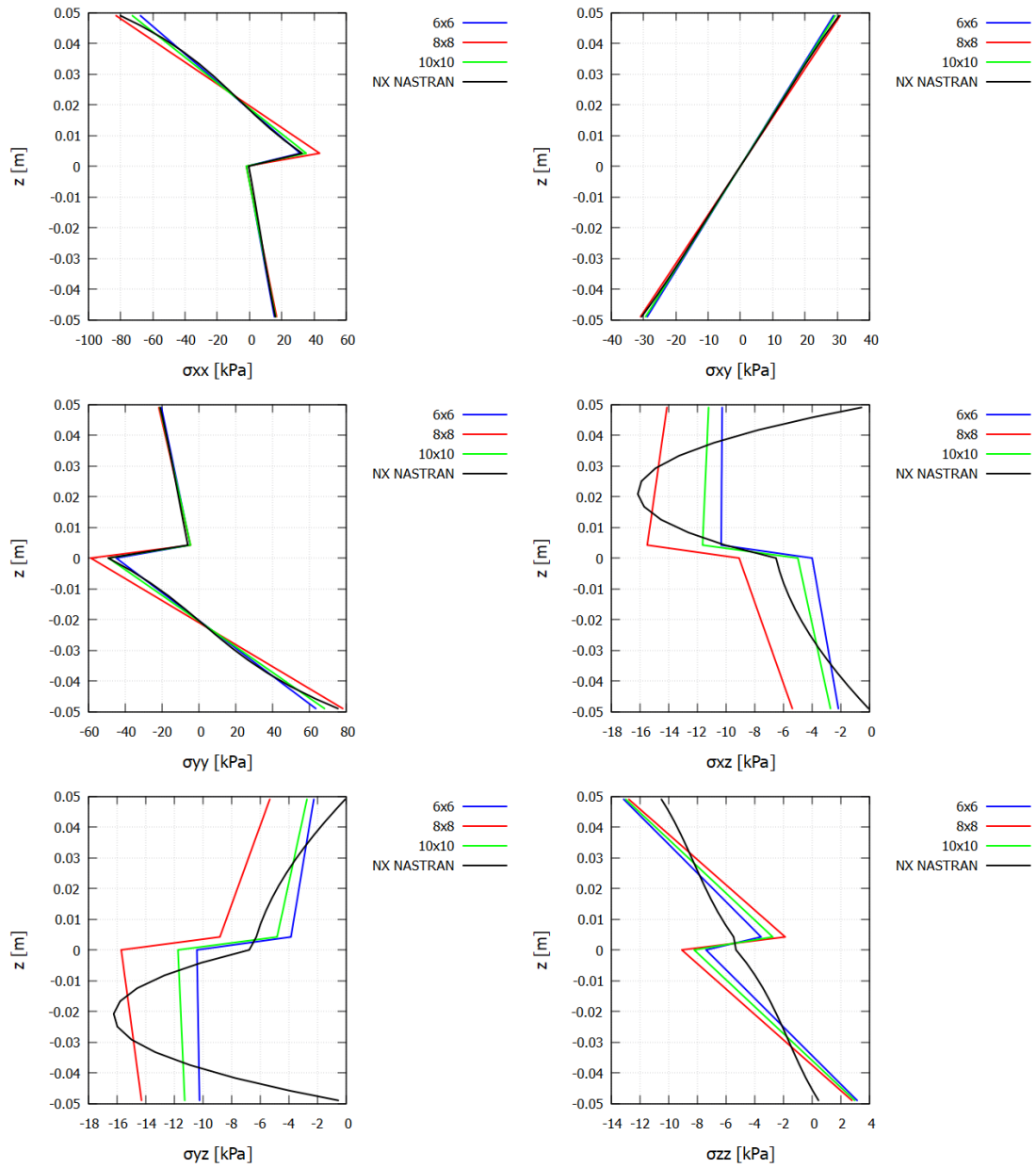


Figura 3.4: Andamenti delle tensioni al variare della mesh nel piano

Si nota che per le tensioni nel piano, all'aumentare del numero di elementi finiti, si ha convergenza verso il risultato di riferimento. Ciò non può essere affermato per le componenti di tensione fuori dal piano che si discostano molto dalla soluzione di confronto, dal momento che è stato utilizzato il modello LE1 lungo lo spessore ed, in particolare, un solo elemento B2 per ogni strato della piastra. Di conseguenza, le tensioni potranno assumere un andamento al più lineare a tratti. La coinci-

denza delle tensioni fuori dal piano con i risultati di riferimento si otterrà con la variazione della teoria di espansione sullo spessore, come si vedrà di seguito. Si sceglie di fissare la mesh  $10 \times 10$  nel piano per poter procedere con lo studio della variazione della teoria di espansione applicata sullo spessore. Sono stati trovati gli andamenti degli spostamenti e delle componenti di tensione lungo lo spessore nel punto  $(-\frac{a}{4}, -\frac{b}{4})$ , utilizzando modelli di espansione di Lagrange e di Taylor dal primo al terzo ordine.

Modello	$u_x \times 10^{-6}$ [m]	$u_y \times 10^{-6}$ [m]	$u_z \times 10^{-5}$ [m]
Q9-LE1	-0.202	0.201	-0.269
Q9-LE2	-0.205	0.204	-0.278
Q9-LE3	-0.208	0.208	-0.283
Q9-TE1	-0.197	0.196	-0.246
Q9-TE2	-0.212	0.212	-0.270
Q9-TE3	-0.212	0.211	-0.276

Tabella 3.4: Valori dello spostamento nel punto  $(-\frac{a}{4}, -\frac{b}{4}, 0)$  al variare della teoria strutturale, si utilizza una mesh nel piano  $10 \times 10$

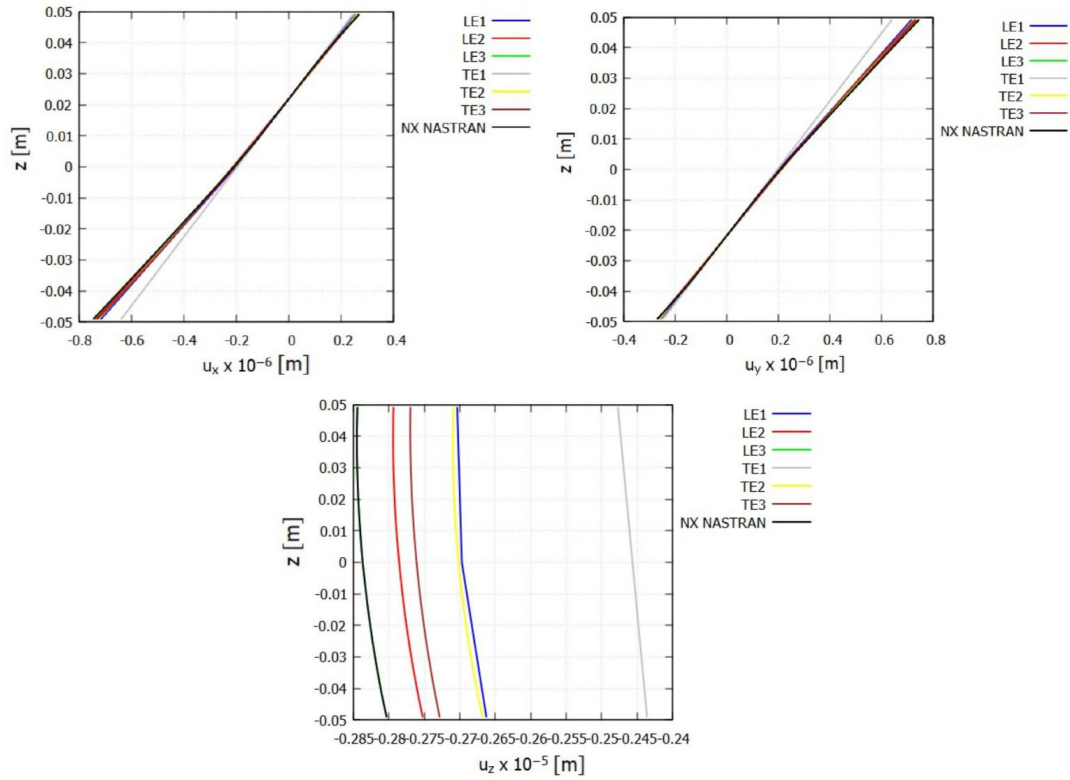


Figura 3.5: Andamenti degli spostamenti al variare della funzione di espansione lungo lo spessore

Per gli spostamenti, l'espansione che meglio approssima la soluzione di riferimento è quella di Lagrange del terzo ordine, portando a risultati talvolta totalmente coincidenti.

Modello	$\sigma_{xx}$ [kPa]	$\sigma_{yy}$ [kPa]	$\sigma_{zz}$ [kPa]	$\sigma_{xz}$ [kPa]	$\sigma_{yz}$ [kPa]	$\sigma_{xy}$ [kPa]
Q9-LE1	-1.94	-49.1	-8.22	-4.99	-11.7	-0.00227
Q9-LE2	-0.178	-46.1	-4.56	-7.04	-15.0	-0.00202
Q9-LE3	-0.424	-49.2	-5.30	-6.51	-6.76	-0.00211
Q9-TE1	0.0167	-53.1	-4.77	-8.11	-7.14	-0.00216
Q9-TE2	0.0595	-53.8	-4.77	-8.81	-7.74	-0.00198
Q9-TE3	-0.00125	-52.5	-4.78	-11.2	-9.84	-0.00189

Tabella 3.5: Valori delle tensioni nel punto  $(-\frac{a}{4}, -\frac{b}{4}, 0)$  al variare della teoria strutturale, si utilizza una mesh nel piano  $10 \times 10$



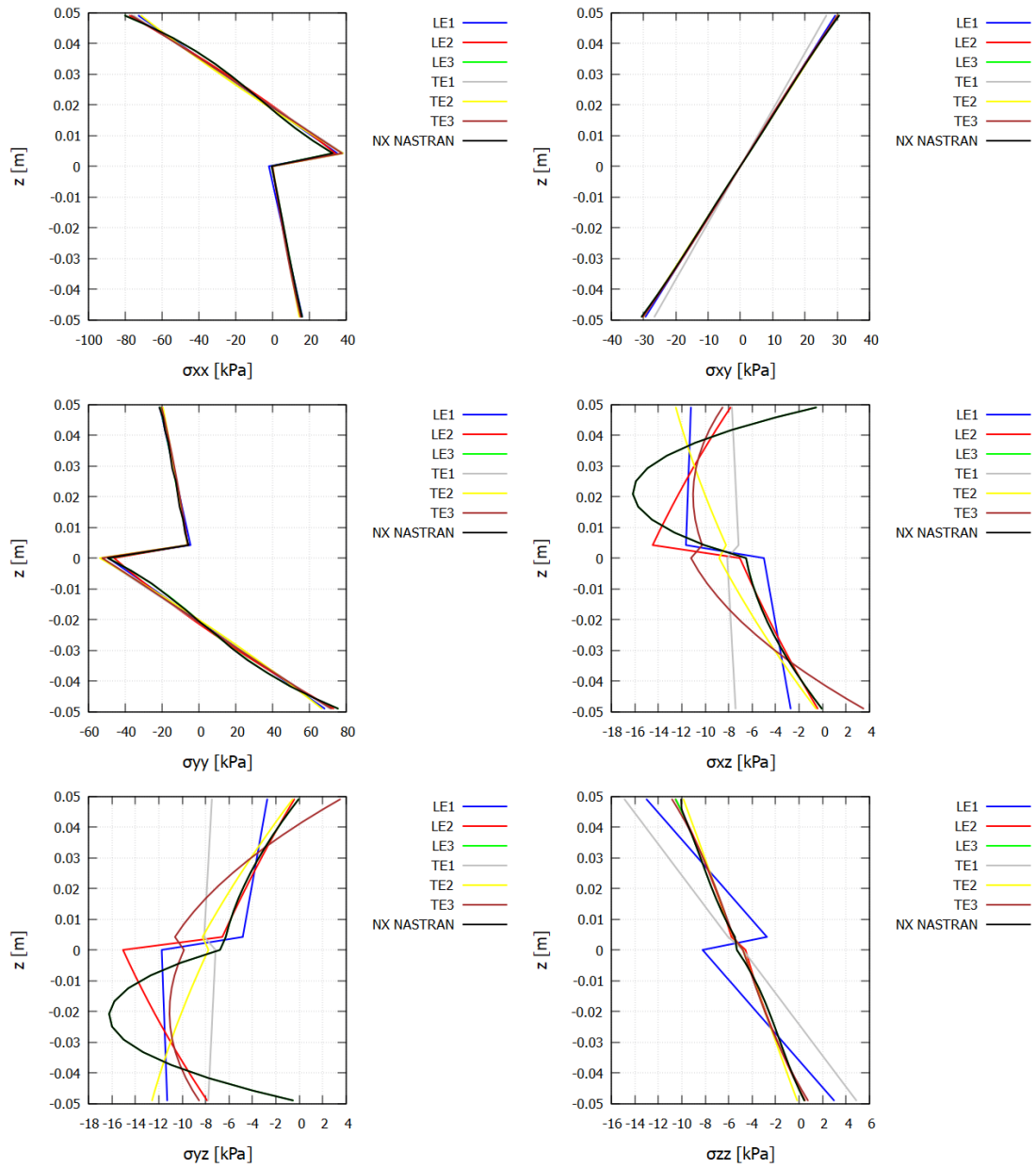


Figura 3.6: Andamenti delle tensioni al variare della funzione di espansione lungo lo spessore

Per quanto riguarda le tensioni, si può notare che gli andamenti di quest'ultime nel piano non differiscono molto al variare della teoria di espansione utilizzata lungo lo spessore. Al contrario, per le tensioni fuori dal piano, la variazione della teoria di espansione comporta una grande variabilità negli andamenti. Si osserva che l'uso dell'espansione di Lagrange del terzo ordine implica la quasi totale coincidenza dei

risultati trovati con i risultati del riferimento. Ciò può essere dedotto dal fatto che l'uso di un modello Layer Wise permette l'ottenimento di risultati più accurati, dal momento che si ha l'imposizione della continuità degli spostamenti e quindi l'equilibrio delle tensioni di taglio tra gli strati.

### 3.2 Piastra in materiale composito a fibre curve

Il secondo caso che si vuole analizzare è quello di una piastra a due strati in materiale composito a fibre curve. Essa presenta la stessa geometria, le stesse condizioni di carico e di vincolo e le stesse proprietà elastiche della piastra studiata in Sezione 3.1. La laminazione nei due strati è del tipo  $\langle\langle 90|45 \rangle\rangle\langle\langle 0|45 \rangle\rangle$ , come mostrato in Figura 3.7.

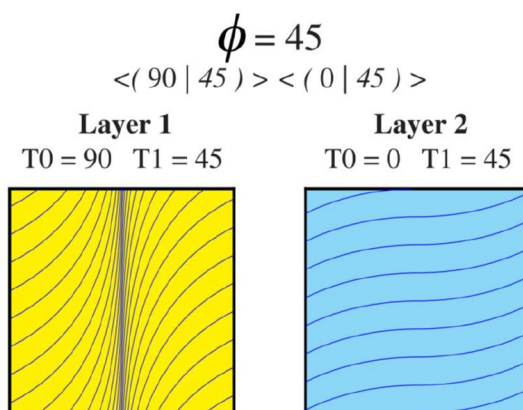


Figura 3.7: Laminazione presente nei due strati della piastra [1]

Anche in questo caso, per l'analisi sono stati utilizzati elementi finiti di tipo Q9, ricavando gli andamenti di spostamento e tensione lungo lo spessore nel punto di coordinate  $(-\frac{a}{4}, -\frac{b}{4})$ . Come fatto precedentemente, in primo luogo è stata svolta un'analisi di convergenza dello spostamento al variare della mesh nel piano, utilizzando elementi B2 con cinematica lagrangiana LE1 sullo spessore. Sono stati ricavati anche gli andamenti delle tensioni al variare della discretizzazione nel piano. Successivamente, fissata una mesh  $10 \times 10$ , si procede con lo studio delle grandezze di interesse al variare della legge di espansione applicata sullo spessore. Gli andamenti sono confrontati con i risultati relativi al modello 3D in Nastran riportati in letteratura [1]. Di seguito si riporta l'analisi di convergenza nel piano svolta per lo spostamento.

Modello		$u_x \times 10^{-6}$ [m]	$u_y \times 10^{-6}$ [m]	$u_z \times 10^{-5}$ [m]
6×6	Q9-LE1	-0.228	0.244	-0.263
8×8	Q9-LE1	-0.229	0.246	-0.267
10×10	Q9-LE1	-0.230	0.247	-0.268

Tabella 3.6: Analisi di convergenza della mesh nel piano della piastra, lo spostamento è valutato nel punto  $(-\frac{a}{4}, -\frac{b}{4}, 0)$

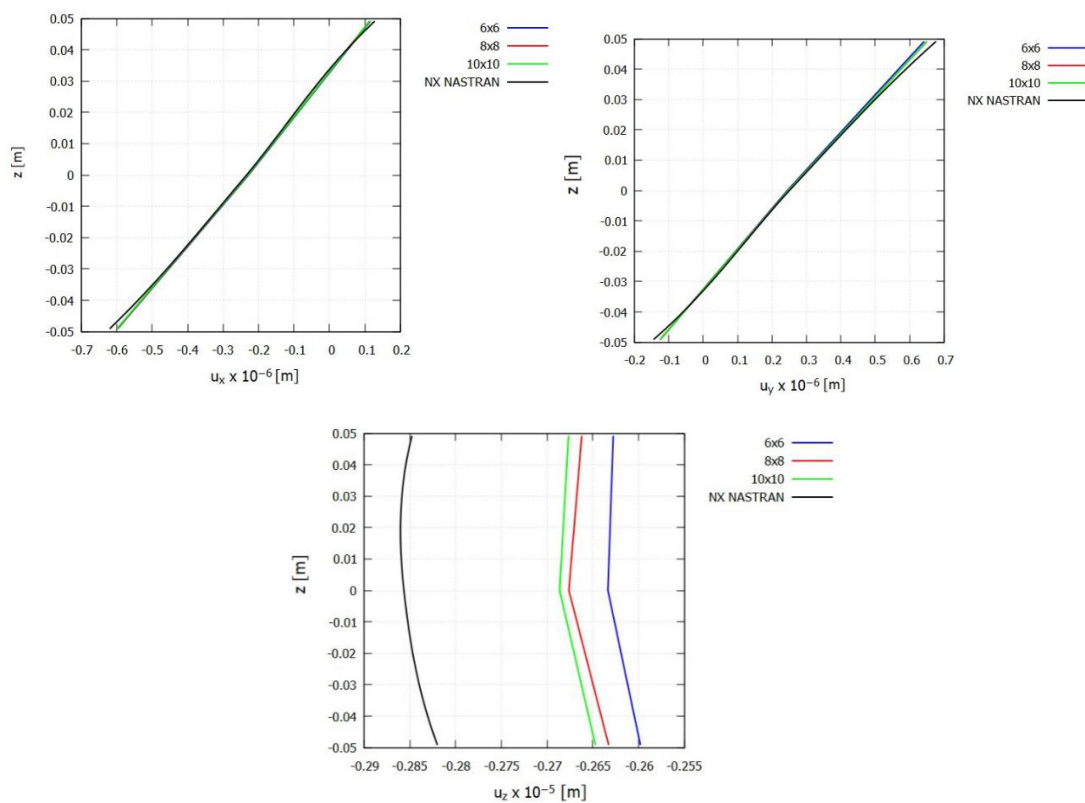


Figura 3.8: Andamenti degli spostamenti al variare della mesh nel piano

Anche nel caso di applicazione di fibre curve, le componenti di spostamento nel piano non risentono molto della variazione della mesh. Ciò non accade per lo spostamento trasversale, il quale presenta una leggera variabilità. Si riportano ora gli andamenti delle tensioni nel punto  $(-\frac{a}{4}, -\frac{b}{4})$  al variare della mesh.

Modello	$\sigma_{xx}$ [kPa]	$\sigma_{yy}$ [kPa]	$\sigma_{zz}$ [kPa]	$\sigma_{xz}$ [kPa]	$\sigma_{yz}$ [kPa]	$\sigma_{xy}$ [kPa]
6×6 Q9-LE1	-6.07	1.18	-10.1	-9.02	-12.2	3.64
8×8 Q9-LE1	-7.61	-7.01	-12.2	-11.8	-16.9	1.47
10×10 Q9-LE1	-6.54	-0.940	-11.0	-9.66	-13.4	3.21

Tabella 3.7: Valori delle tensioni nel punto  $(-\frac{a}{4}, -\frac{b}{4}, 0)$  al variare della mesh nel piano della piastra

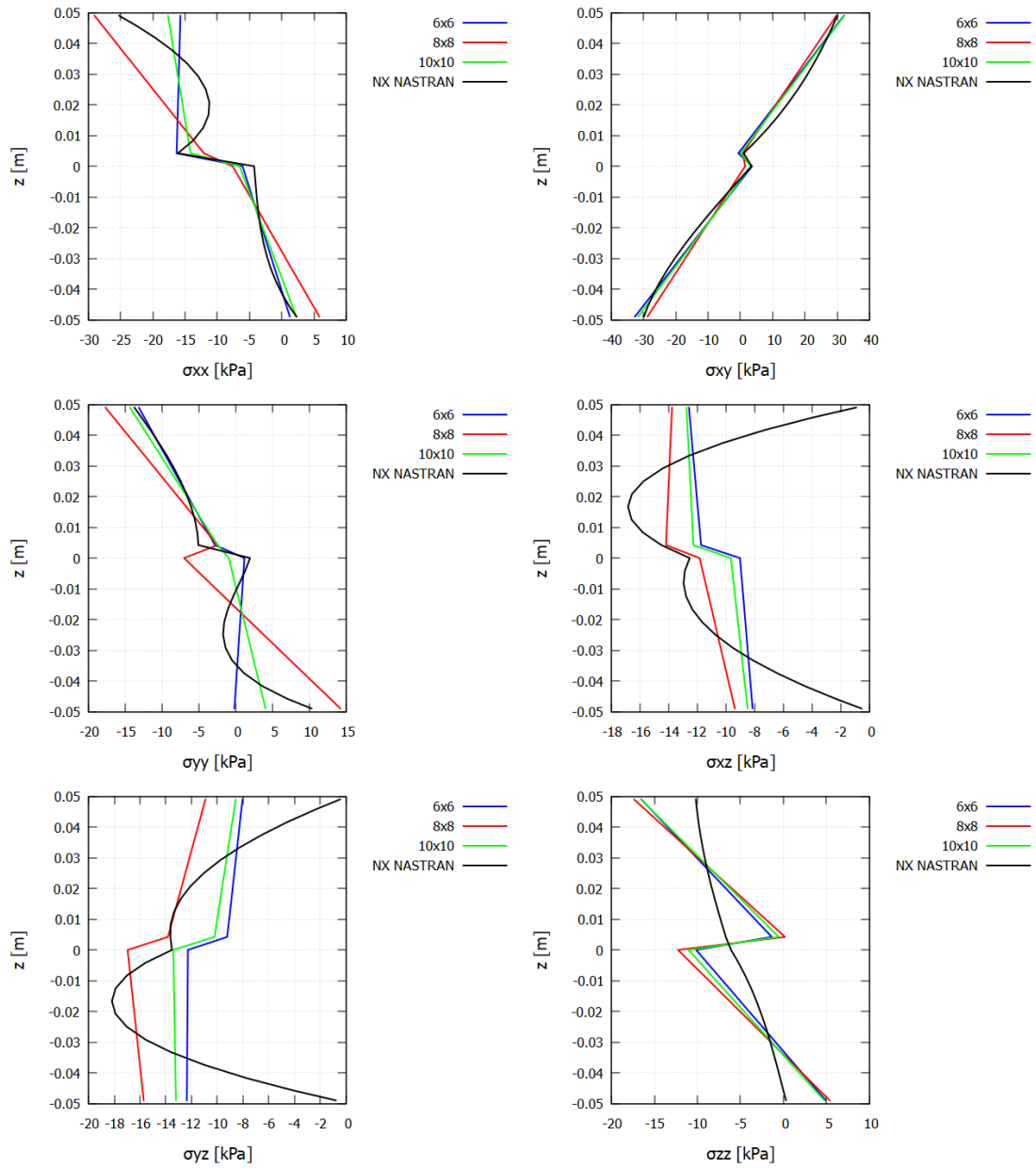


Figura 3.9: Andamenti delle tensioni al variare della mesh nel piano

A differenza del caso precedente, in cui le tensioni nel piano tendevano ad assumere gli stessi andamenti riportati in letteratura aumentando il numero di elementi finiti per la discretizzazione, con l'applicazione di fibre curve la  $\sigma_{xx}$  e la  $\sigma_{yy}$  assumono valori che non rispecchiano la soluzione di riferimento. Ciò succede anche per le tensioni fuori dal piano, i cui andamenti si discostavano da quelli riportati in letteratura anche nel caso di fibre dritte. La differenza tra gli andamenti delle

tensioni ottenuti e quelli riportati in letteratura è dovuta all'uso dell'espansione di Lagrange del primo ordine sullo spessore e l'utilizzo di un solo elemento B2 per strato, ciò implica al massimo un andamento lineare delle tensioni per ogni strato. La coincidenza di queste grandezze con i valori di riferimento si otterrà al variare della teoria di espansione lungo lo spessore. Fissata la mesh  $10 \times 10$  nel piano, si procede con lo studio della variazione della teoria di espansione lungo lo spessore, ottenendo gli andamenti di spostamento e tensioni nel punto  $(-\frac{a}{4}, -\frac{b}{4})$ , con modelli di Lagrange e di Taylor dal primo al terzo ordine.

Modello	$u_x \times 10^{-6}$ [m]	$u_y \times 10^{-6}$ [m]	$u_z \times 10^{-5}$ [m]
Q9-LE1	-0.230	0.247	-0.268
Q9-LE2	-0.230	0.247	-0.282
Q9-LE3	-0.233	0.250	-0.285
Q9-TE1	-0.219	0.237	-0.251
Q9-TE2	-0.236	0.255	-0.271
Q9-TE3	-0.233	0.252	-0.283

Tabella 3.8: Valori dello spostamento nel punto  $(-\frac{a}{4}, -\frac{b}{4}, 0)$  al variare della teoria strutturale, si utilizza una mesh nel piano  $10 \times 10$

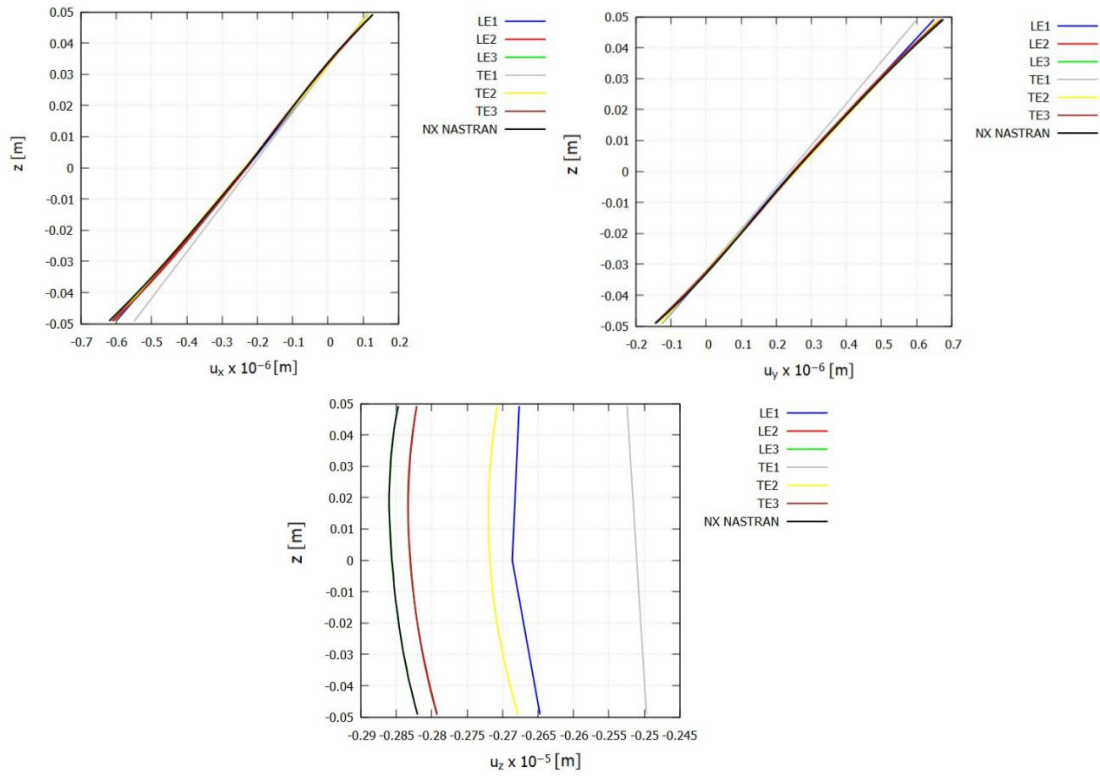


Figura 3.10: Andamenti degli spostamenti al variare della funzione di espansione lungo lo spessore

Anche con l'applicazione di fibre curve, l'espansione che meglio approssima i risultati di riferimento per gli spostamenti è quella di Lagrange del terzo ordine.

Modello	$\sigma_{xx}$ [kPa]	$\sigma_{yy}$ [kPa]	$\sigma_{zz}$ [kPa]	$\sigma_{xz}$ [kPa]	$\sigma_{yz}$ [kPa]	$\sigma_{xy}$ [kPa]
Q9-LE1	-6.54	-0.940	-11.0	-9.66	-13.4	3.21
Q9-LE2	-3.51	3.13	-4.90	-15.4	-20.2	3.67
Q9-LE3	-4.27	1.95	-6.08	-12.5	-13.5	3.47
Q9-TE1	-4.23	-2.26	-4.99	-10.9	-10.7	1.57
Q9-TE2	-4.21	-1.23	-5.28	-11.4	-11.2	2.17
Q9-TE3	-4.39	-0.850	-5.67	-16.0	-15.6	2.48

Tabella 3.9: Valori delle tensioni nel punto  $(-\frac{a}{4}, -\frac{b}{4}, 0)$  al variare della teoria strutturale, si utilizza una mesh nel piano  $10 \times 10$

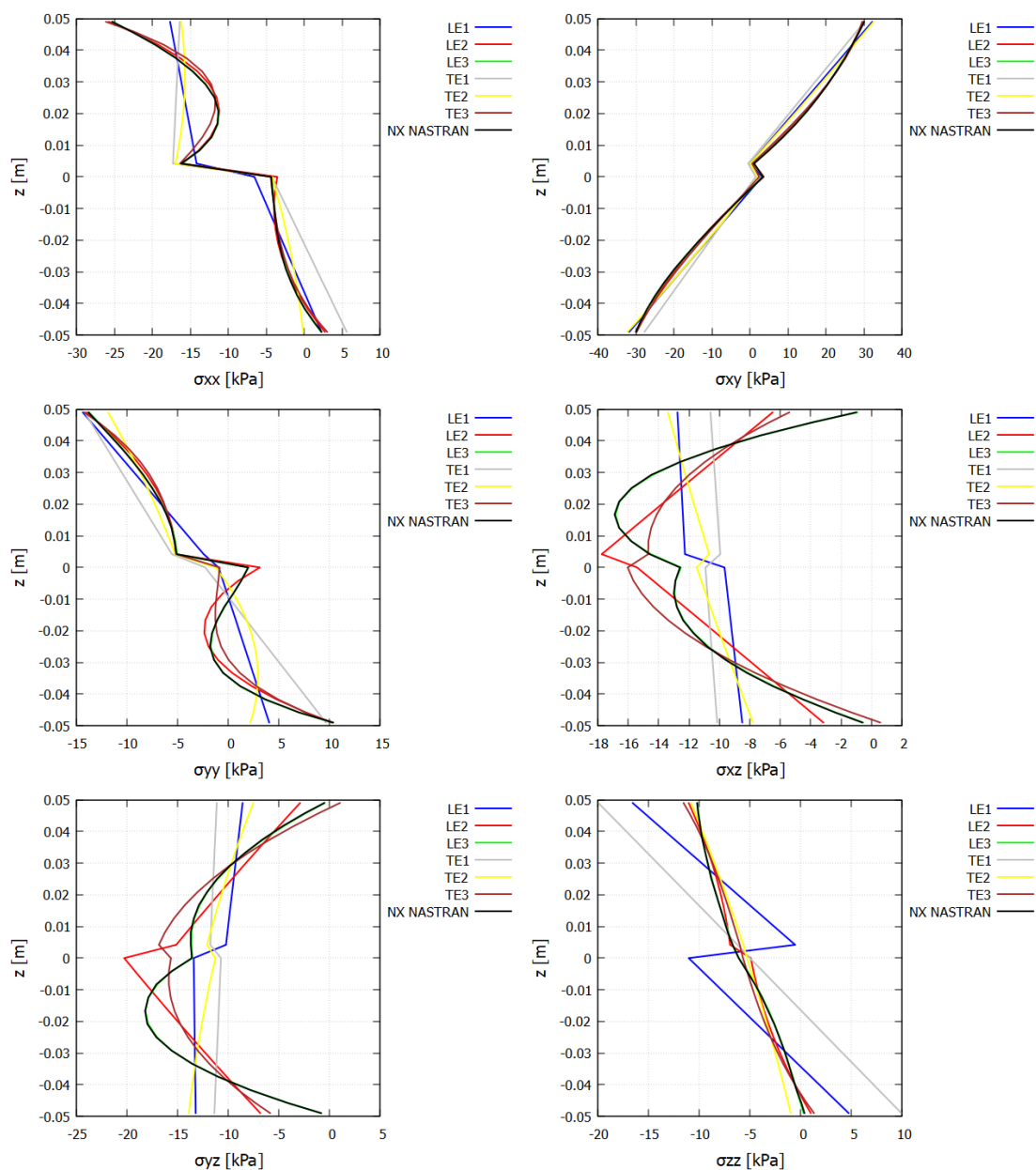


Figura 3.11: Andamenti delle tensioni al variare della funzione di espansione lungo lo spessore

A differenza del caso di piastra a fibre dritte, anche gli andamenti delle tensioni nel piano, ad eccezione della  $\sigma_{xy}$ , mostrano una grande variabilità con l'applicazione di diverse teorie di espansione sullo spessore. Ad ogni modo, l'uso di un modello Layer Wise di ordine 3 permette l'ottenimento di risultati analoghi a quelli riportati in letteratura per tutte e sei le componenti di tensione.



# Capitolo 4

## Analisi statica di gusci VAT

Nel seguente capitolo si indaga la risposta statica di un pannello curvo a sei strati soggetto ad un carico di pressione sulla superficie superiore. Come fatto nel Capitolo 3, per l'analisi statica di una piastra in materiale composito, si procede in primo luogo con un'analisi di convergenza, ottenendo le componenti di spostamento e di tensione al variare della mesh applicata nel piano. Successivamente, fissata la discretizzazione nel piano, viene studiato l'effetto della variazione della teoria strutturale applicata sullo spessore. I risultati ottenuti tramite il codice agli elementi finiti basato sulla CUF sono confrontati con quanto riportato nel Riferimento [2], in modo da validare il processo.

### 4.1 Pannello curvo incastrato su due lati

Il caso in esame è quello di un pannello curvo a sei strati in materiale composito a fibre curve. Esso è soggetto ad un carico di pressione di 10 kPa sulla superficie superiore ed ha le due facce laterali incastrate, come mostrato in Figura 4.1. Il pannello presenta una curvatura costante sul lato corto, con un raggio di curvatura  $R_\alpha$  di 1.25 m e un angolo di semiapertura  $\phi$  di 0.2 rad. Il lato di lunghezza maggiore non presenta curvatura e assume una lunghezza di 1 m. Lo spessore è di 0.05 m. Le caratteristiche geometriche sono riassunte in Figura 4.1.

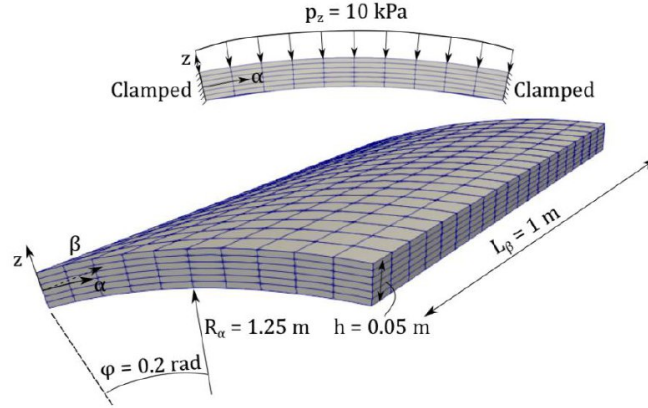


Figura 4.1: Modello geometrico del pannello curvo in esame [2]

Le proprietà elastiche sono riassunte nella seguente tabella:

$E_{11}$ [GPa]	$E_{22}$ [GPa]	$E_{33}$ [GPa]	$G_{12}$ [GPa]	$G_{13}$ [GPa]	$G_{23}$ [GPa]	$\nu_{12}$	$\nu_{13}$	$\nu_{23}$
165	9	9	5.60	5.60	2.80	0.34	0.34	0.50

Tabella 4.1: Proprietà elastiche del pannello curvo

La laminazione presente è del tipo  $[0\langle 0.50 \rangle, 90\langle 0, 75 \rangle, 45\langle 0, 15 \rangle]_s$ , quindi i sei strati presentano una laminazione simmetrica. Per l'analisi sono stati sfruttati elementi biquadratici a 9 nodi (Q9), procedendo prima di tutto con un'analisi di convergenza dello spostamento lungo lo spessore valutato nel punto di coordinate  $(0.25, 0.5)\text{m}$ . Per fare ciò è stata variata la mesh nel piano, passando dall'applicazione di una discretizzazione con 6 elementi finiti su ogni lato fino ad una discretizzazione  $20 \times 10$ , grazie alla quale nel documento di riferimento [2] si afferma di raggiungere convergenza. Lungo lo spessore sono stati utilizzati elementi B2 con cinematica lagrangiana LE1. Di seguito si riportano gli andamenti dello spostamento nelle tre direzioni lungo lo spessore al variare del numero di elementi finiti nel piano.

Modello	$u_\alpha \times 10^{-14}$ [m]	$u_\beta \times 10^{-14}$ [m]	$u_z \times 10^{-5}$ [m]
6×6 Q9-LE1	0.710	0.828	-0.295
8×8 Q9-LE1	0.545	0.676	-0.297
10×10 Q9-LE1	0.443	0.574	-0.298
20×10 Q9-LE1	0.243	0.367	-0.300

Tabella 4.2: Analisi di convergenza della mesh nel piano del guscio, lo spostamento è valutato nel punto  $(0.25, 0.5, 0.025)\text{m}$

Nel documento di riferimento [2] è stato valutato lo spostamento  $u_z$  nel punto  $(0.25, 0.5, 0.025)$ m al variare della mesh, raggiungendo un valore di convergenza di  $-3 \times 10^{-6}$  m, concordamente con quanto riportato in Tabella 4.2.

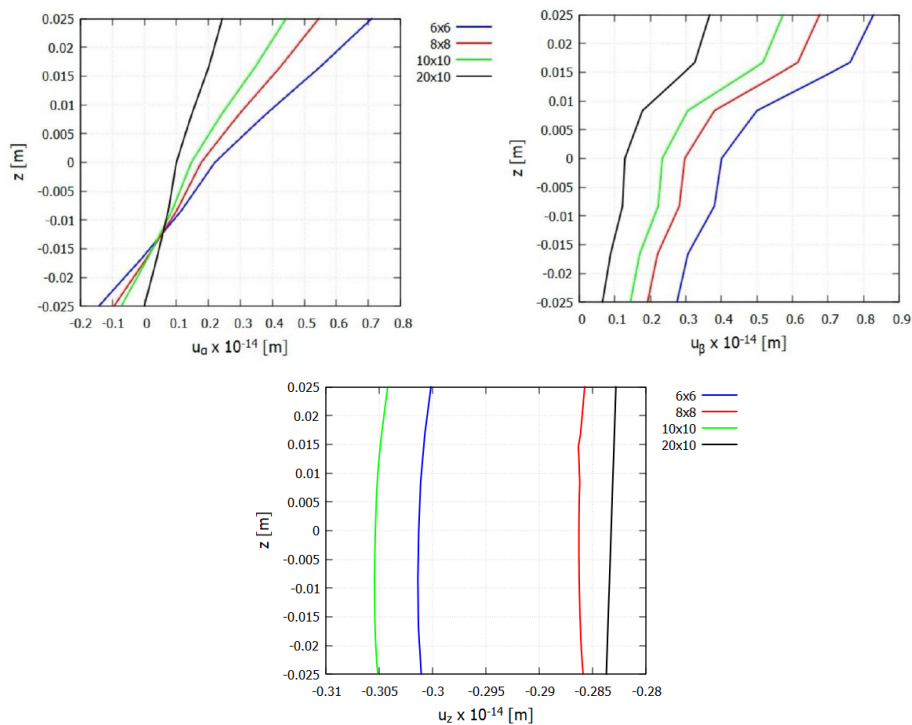


Figura 4.2: Andamenti degli spostamenti al variare della mesh nel piano

Gli spostamenti  $u_\alpha$  e  $u_\beta$  risentono molto della variazione della mesh nel piano, in entrambi i casi le grandezze assumono andamenti simili ma valori distanti al variare della discretizzazione. Al contrario, lo spostamento trasversale non è molto influenzato dalla discretizzazione nel piano applicata. Esso assume già con una mesh  $6 \times 6$  un valore molto vicino a quello ottenuto utilizzando una discretizzazione più fitta, come quella  $20 \times 10$ . Si riportano di seguito gli andamenti delle tensioni lungo lo spessore al variare della mesh. Esse sono valutate nel punto di coordinate  $(0.375, 0.75)$ m e gli andamenti ottenuti vengono confrontati con i risultati riportati in letteratura [2]. In particolare, le tensioni nel piano sono confrontate con quelle ricavate tramite il software *Abaqus*, mentre le tensioni trasversali sono confrontate con quelle ottenute applicando una discretizzazione  $20 \times 10$  nel piano e un'espansione 1LD3 per i 6 strati del laminato lungo lo spessore.

Modello	$\sigma_{\alpha\alpha}$ [MPa]	$\sigma_{\beta\beta}$ [MPa]	$\sigma_{zz}$ [MPa]	$\sigma_{\alpha z}$ [MPa]	$\sigma_{\beta z}$ [MPa]	$\sigma_{\alpha\beta}$ [MPa]
6×6 Q9-LE1	-0.268	-0.0553	-0.0114	0.0104	0.00182	-0.101
8×8 Q9-LE1	-0.267	-0.0542	-0.0101	0.0106	0.00137	-0.100
10×10 Q9-LE1	-0.274	-0.0556	-0.0108	0.0104	0.00161	-0.104
20×10 Q9-LE1	-0.275	-0.0557	-0.0107	0.0104	0.00158	-0.104

Tabella 4.3: Valori delle tensioni nel punto (0.375, 0.75, 0.025)m al variare della mesh nel piano del guscio

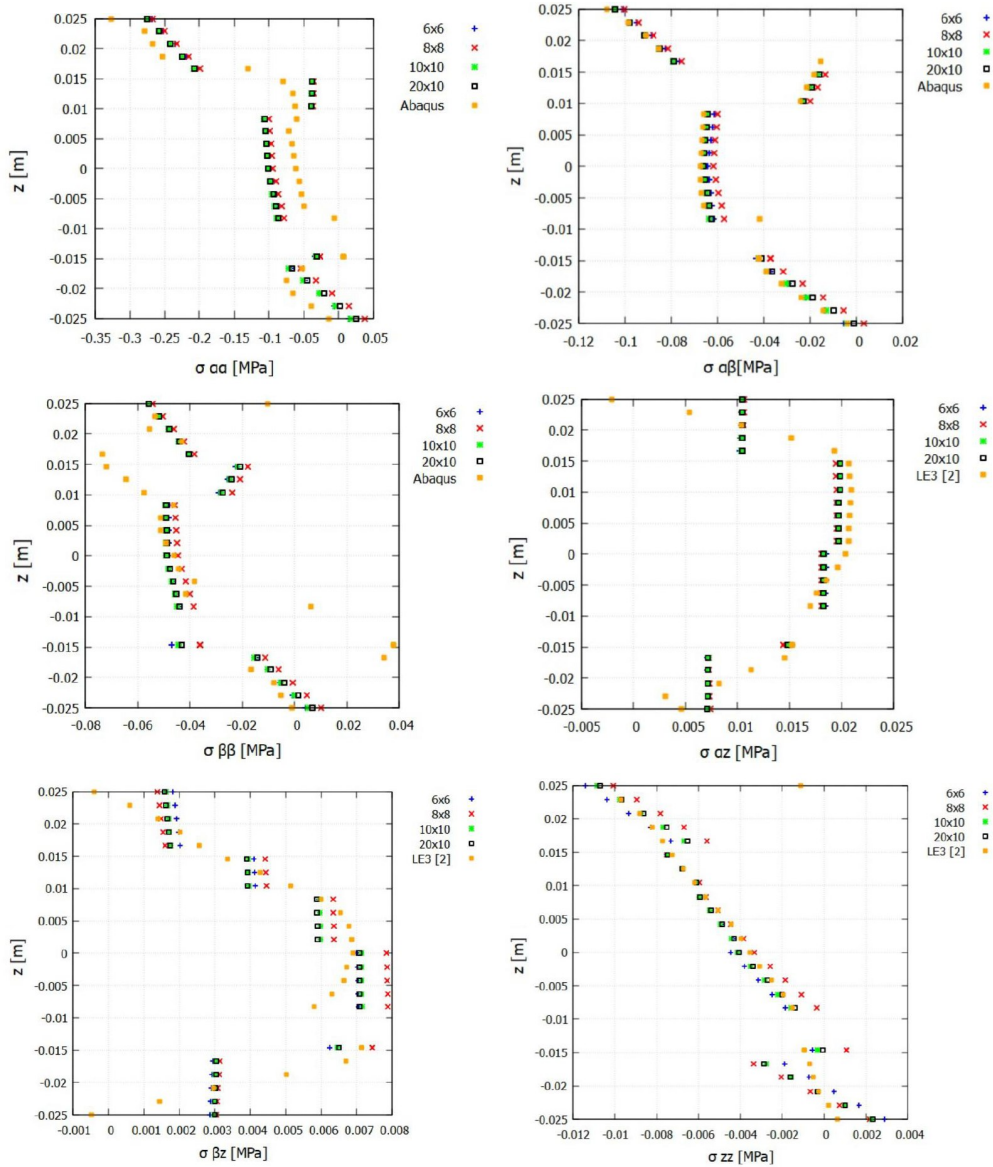


Figura 4.3: Andamenti delle tensioni al variare della mesh nel piano

Si può notare che tutte le componenti di tensione non presentano una grande variabilità al variare della mesh nel piano. Le tensioni presentano andamenti simili a quelli di riferimento riportati in letteratura fatta eccezione per la  $\sigma_{\beta\beta}$ , la quale assume valori talvolta specchiati in confronto a quelli ottenuti con *Abaqus*. Fissata la mesh  $20 \times 10$  nel piano, si procede con lo studio della variazione della teoria di espansione applicata sullo spessore. Sono stati trovati gli andamenti degli spostamenti nel punto  $(0.25, 0.5)$ m e delle tensioni nel punto  $(0.375, 0.75)$ m lungo lo

spessore, utilizzando modelli di espansione di Lagrange e di Taylor dal primo al terzo ordine.

Modello	$u_\alpha \times 10^{-14}[\text{m}]$	$u_\beta \times 10^{-14}[\text{m}]$	$u_z \times 10^{-5}[\text{m}]$
Q9-LE1	0.243	0.367	-0.300
Q9-LE2	0.186	0.358	-0.285
Q9-LE3	0.249	0.366	-0.304
Q9-TE1	0.226	0.281	-0.282
Q9-TE2	0.241	0.348	-0.290
Q9-TE3	0.248	0.338	-0.298

Tabella 4.4: Valori dello spostamento nel punto  $(0.25, 0.5, 0.025)\text{m}$  al variare della teoria strutturale, si utilizza una mesh nel piano  $20 \times 10$

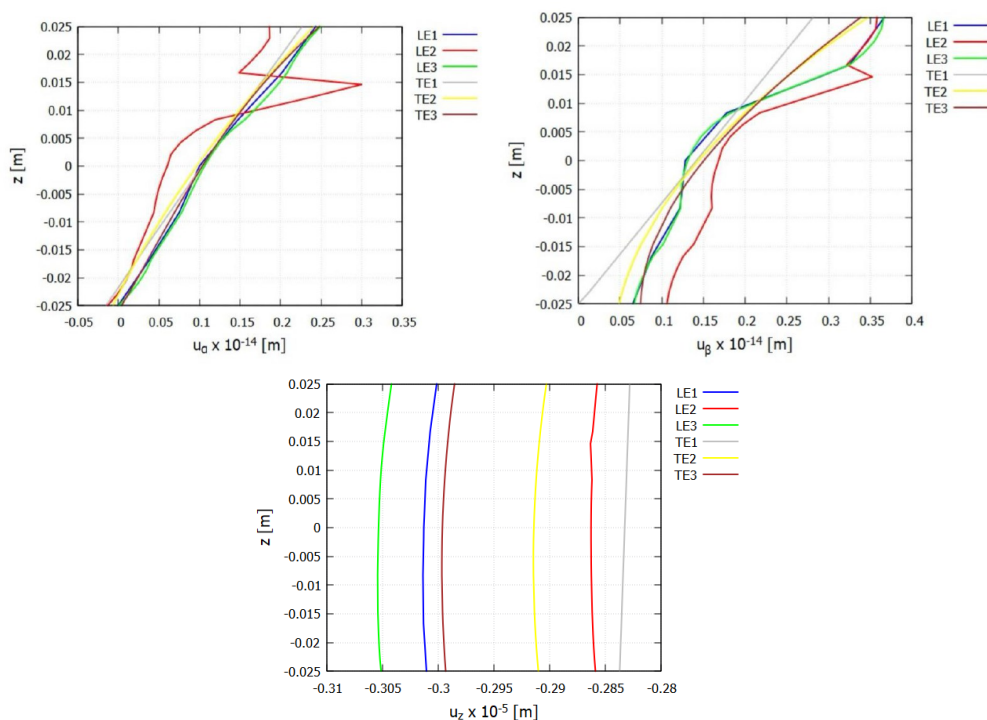


Figura 4.4: Andamenti degli spostamenti al variare della funzione di espansione lungo lo spessore

Le componenti di spostamento assumono valori che non differiscono molto in base alla teoria strutturale, perciò l'uso di teorie Layer Wise o Equivalent Single Layer portano, in questo caso, a risultati simili tra loro.

Modello	$\sigma_{\alpha\alpha}$ [MPa]	$\sigma_{\beta\beta}$ [MPa]	$\sigma_{zz}$ [MPa]	$\sigma_{\alpha z}$ [MPa]	$\sigma_{\beta z}$ [MPa]	$\sigma_{\alpha\beta}$ [MPa]
Q9-LE1	-0.276	-0.0560	-0.0109	0.0105	0.00175	-0.105
Q9-LE2	-0.283	-0.0572	-0.0104	0.000688	0.000113	-0.107
Q9-LE3	-0.282	-0.0570	-0.0103	0.00121	0.000225	-0.107
Q9-TE1	-0.250	-0.0517	-0.0130	0.0130	0.00767	-0.0944
Q9-TE2	-0.243	-0.0478	-0.00820	0.0153	0.00648	-0.0910
Q9-TE3	-0.278	-0.0567	-0.0112	0.00683	-0.00150	-0.105

Tabella 4.5: Valori delle tensioni nel punto  $(0.375, 0.75, 0.025)$ m al variare della teoria strutturale, si utilizza una mesh nel piano  $20 \times 10$

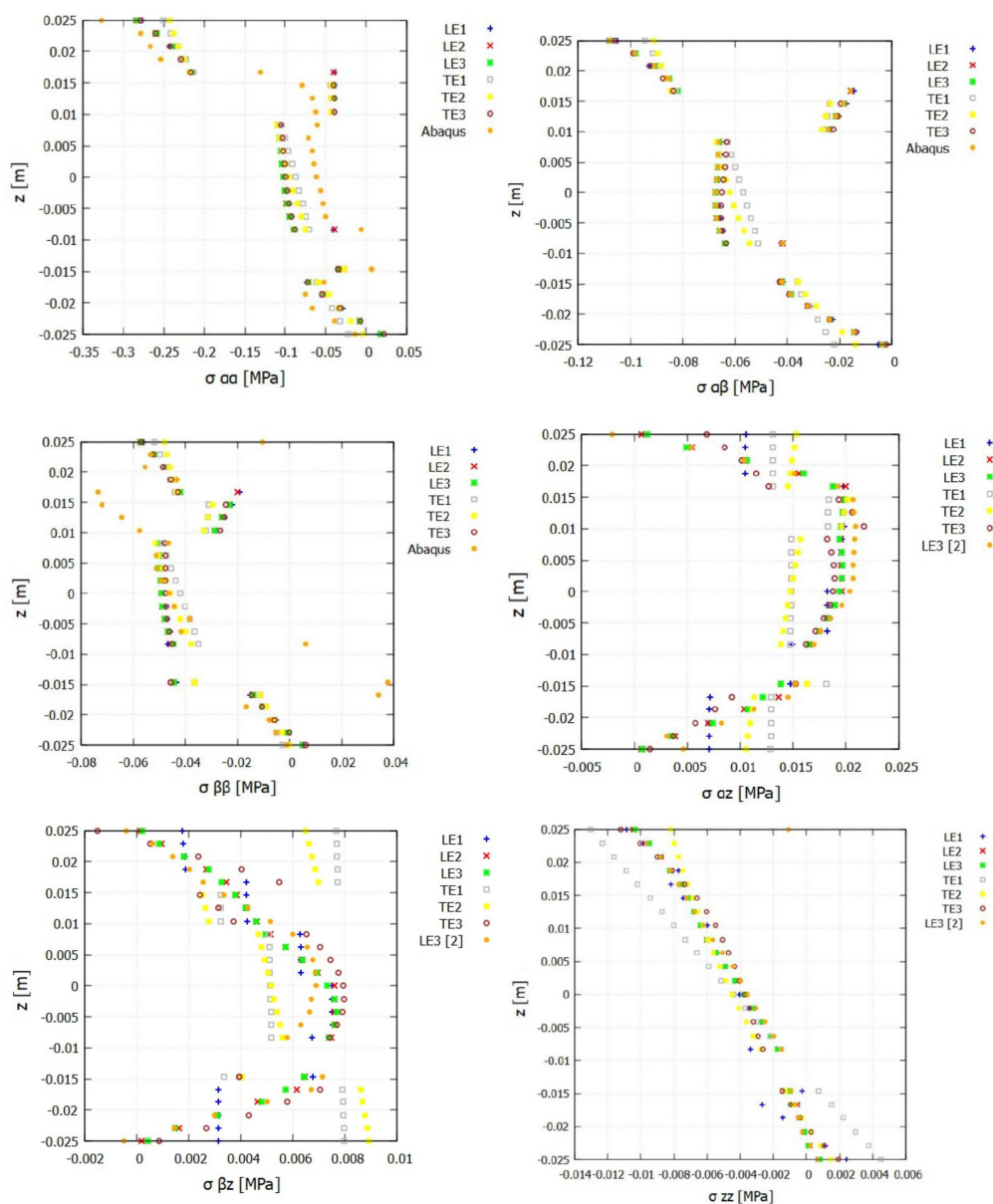


Figura 4.5: Andamenti delle tensioni al variare della funzione di espansione lungo lo spessore

La variazione della teoria strutturale non comporta notevoli differenze negli andamenti delle tensioni, ad eccezione delle due tensioni trasversali  $\sigma_{\alpha z}$  e  $\sigma_{\beta z}$ . In quest'ultimi due casi, i risultati trovati con l'espansione di Lagrange del terzo ordine approssimano meglio quelli riportati in letteratura applicando la stessa teoria. Le tensioni  $\sigma_{\alpha\alpha}$ ,  $\sigma_{\alpha\beta}$  e  $\sigma_{zz}$  presentano andamenti conformi a quelli ottenuti tramite



il software *Abaqus*. La tensione  $\sigma_{\beta\beta}$ , anche cambiando la teoria strutturale lungo lo spessore, continua a presentare valori distanti da quelli di confronto.

# Capitolo 5

## Analisi dinamica di gusci VAT

Nel seguente capitolo si indaga la risposta dinamica di un pannello curvo a tre strati utilizzando elementi finiti high-order. In particolare, si pone l'attenzione sui primi 5 modi di vibrare della struttura, riportando nello specifico le forme modali e le relative frequenze naturali. Per lo studio sono state applicate diverse teorie di espansione lungo lo spessore, considerando espansioni di Lagrange e di Taylor dal primo al terzo ordine. I risultati riportati sono stati ottenuti tramite il codice agli elementi finiti basato sulla CUF.

### 5.1 Pannello curvo incernierato su due lati

Il caso in esame è quello di un pannello curvo a tre strati in materiale composito a fibre curve, che presenta due lati incernierati come mostrato in Figura 5.1. Il lato parallelo alla direzione  $\alpha$  ( $L_\alpha$ ) possiede una curvatura costante, con un raggio di curvatura  $R_\alpha$  di 2540 mm e un angolo di semiapertura  $\phi$  di 0.1 rad. Il lato parallelo alla direzione  $\beta$  ( $L_\beta$ ) non presenta curvatura e assume una lunghezza di 508 mm. Lo spessore del guscio  $h$  è di 12.7 mm. Le caratteristiche geometriche sono riassunte in Figura 5.1.

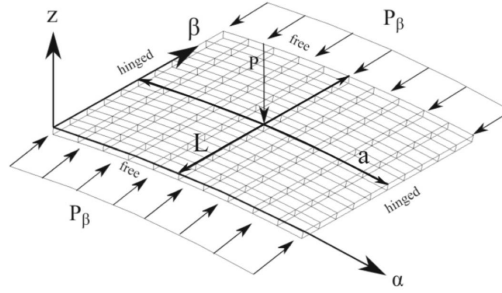


Figura 5.1: Modello geometrico del pannello curvo in esame [9]

Le proprietà elastiche della struttura sono riportate nella seguente tabella:

$E_{11}$ [MPa]	$E_{22}$ [MPa]	$E_{33}$ [MPa]	$G_{12}$ [MPa]	$G_{13}$ [MPa]	$G_{23}$ [MPa]	$\nu_{12}$	$\nu_{13}$	$\nu_{23}$
3300	1100	1100	660	660	660	0.25	0.25	0.25

Tabella 5.1: Proprietà elastiche del pannello curvo

Il guscio presenta una sequenza di laminazione del tipo  $[90 + \langle 0/45 \rangle, 0 + \langle 0/45 \rangle, 90 + \langle 0/45 \rangle]$ . Per l'analisi sono stati utilizzati elementi biquadratici a 9 nodi (Q9) e una mesh nel piano  $10 \times 10$  ed è stato svolto uno studio di variazione della teoria di espansione applicata lungo lo spessore, ricavando le prime cinque frequenze naturali usando funzioni di espansione di Taylor e Lagrange lungo lo spessore. Di seguito si riassumono i risultati ottenuti.

Modello	$\tilde{f}_1$	$\tilde{f}_2$	$\tilde{f}_3$	$\tilde{f}_4$	$\tilde{f}_5$
Q9-LE1	1.537	1.780	2.385	2.590	3.038
Q9-LE2	1.538	1.782	2.377	2.586	3.032
Q9-LE3	1.535	1.778	2.377	2.586	3.032
Q9-TE1	1.557	1.801	2.439	2.637	3.088
Q9-TE2	1.547	1.789	2.381	2.592	3.039
Q9-TE3	1.546	1.789	2.377	2.590	3.034

Tabella 5.2: Prime cinque frequenze naturali adimensionalizzate utilizzando le espansioni di Lagrange e di Taylor dal primo al terzo ordine lungo lo spessore

In Tabella 5.2 sono riportate le frequenze adimensionalizzate, ricavate a partire dalle frequenze naturali della struttura come segue:

$$\tilde{f} = f \frac{a^2}{h} \sqrt{\frac{\rho}{E_2}} \quad (5.1)$$

dove  $a$  indica la lunghezza del lato del pannello,  $h$  lo spessore,  $\rho$  la densità (pari a  $1 \frac{kg}{mm^3}$ ) ed  $E_2$  il modulo di Young in direzione  $y$ . Si può notare che le frequenze ottenute per i diversi modi, impiegando le espansioni di Taylor e di Lagrange, sono quasi del tutto coincidenti tra loro e, di conseguenza, l'applicazione di diverse teorie strutturali lungo lo spessore non influisce molto sui risultati dell'analisi. Le frequenze ottenute con il modello TE1 presentano, infatti, una differenza massima del 2.61% rispetto alle frequenze ottenute con il modello LE3. Le frequenze ottenute con la teoria TE1 sono più alte rispetto a quelle ottenute con l'applicazione delle altre espansioni lungo lo spessore. L'utilizzo di un modello ESL del primo ordine implica l'assunzione di un campo di spostamenti lineare lungo tutto lo spessore, ciò risulta troppo semplificato e non rappresentativo della modalità con cui la struttura si deforma, portando ad una sovrastima della rigidità strutturale e di conseguenza delle frequenze proprie. Di seguito si riportano le forme modali ottenute nel caso di applicazione lungo lo spessore delle espansioni TE1 e LE2.

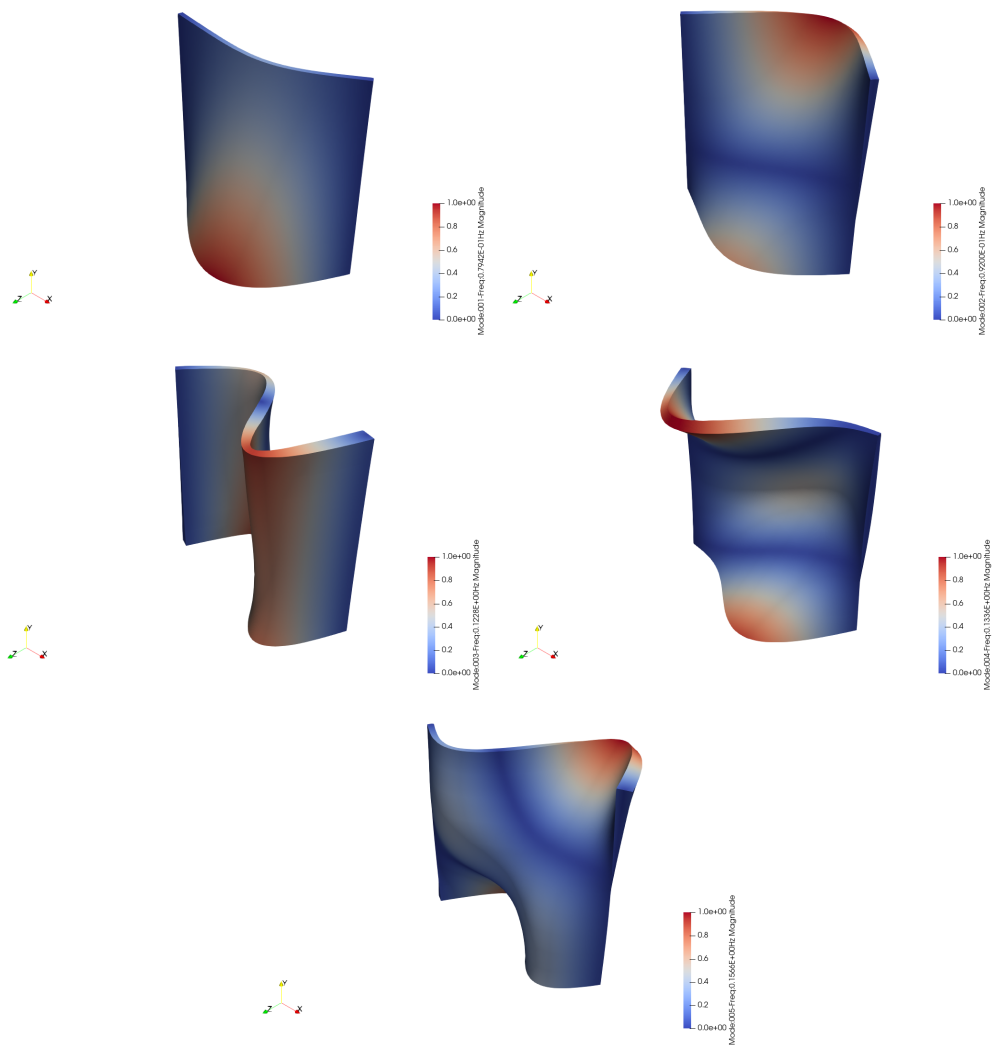


Figura 5.2: Forme modali utilizzando l'espansione di Lagrange del secondo ordine lungo lo spessore

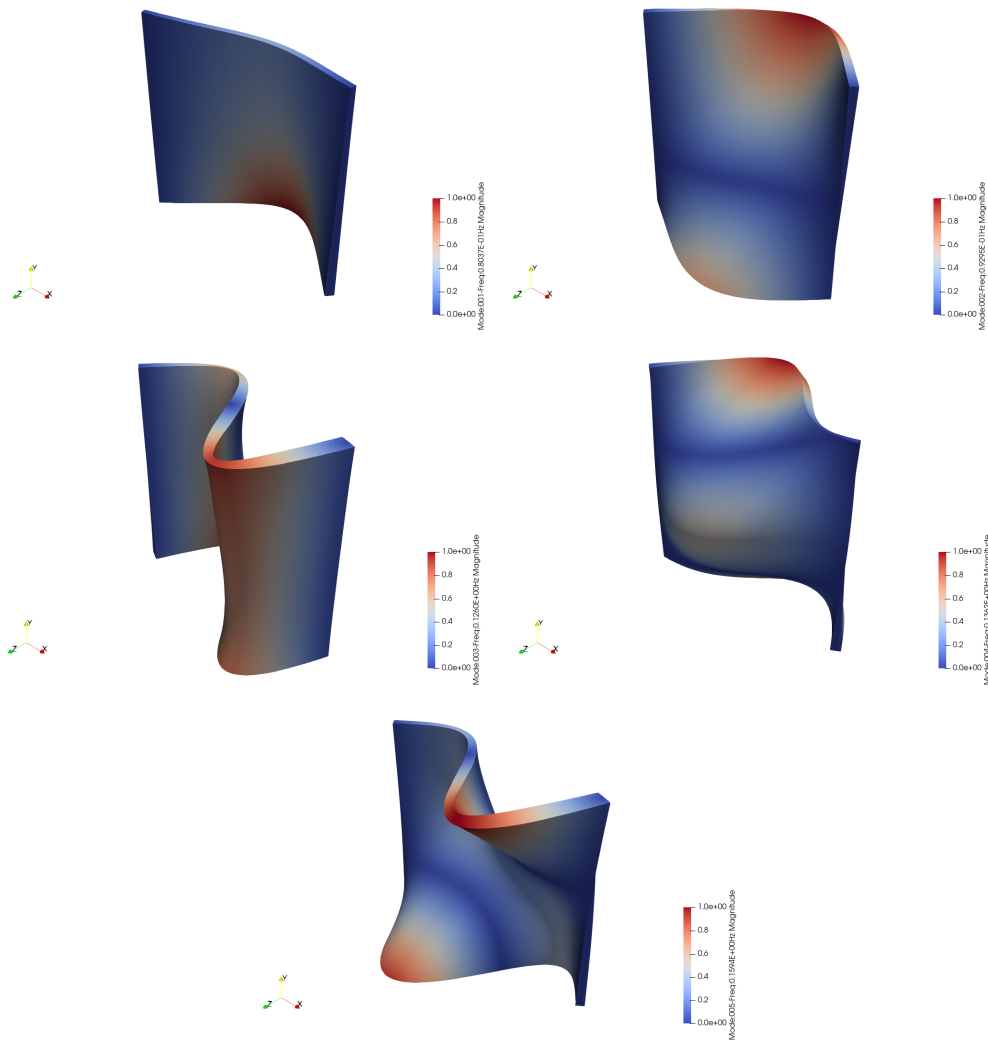


Figura 5.3: Forme modali utilizzando l'espansione di Taylor del primo ordine lungo lo spessore

Le forme modali ottenute con l'applicazione delle teorie di espansione TE1 e LE2 sono le stesse, ciò che cambia in alcuni casi è solamente la posizione delle semionde caratteristiche di ciascun modo di deformazione.

### 5.1.1 Effetto del rapporto $\frac{h}{L}$

Di seguito si indaga la risposta dinamica di un pannello curvo con le stesse proprietà elastiche, stessa laminazione e stessa geometria nel piano di quello analizzato in

Sezione 5.1, ma con spessore differente. In particolare, sono stati presi in esame due casi:

- rapporto tra lo spessore e la lunghezza del lato  $\frac{h}{L} = 0.02$ , lo spessore assume dunque un valore di 10.16 mm;
- rapporto tra lo spessore e la lunghezza del lato  $\frac{h}{L} = 0.1$ , lo spessore assume dunque un valore di 50.8 mm.

**Rapporto  $\frac{h}{L} = 0.02$**

Come fatto in precedenza, è stato svolto uno studio di variazione della teoria di espansione applicata lungo lo spessore, ricavando le prime cinque frequenze naturali del pannello curvo facendo uso di espansioni di Taylor e di Lagrange dal primo al terzo ordine. Di seguito vengono riassunti i risultati ottenuti.

Modello	$\tilde{f}_1$	$\tilde{f}_2$	$\tilde{f}_3$	$\tilde{f}_4$	$\tilde{f}_5$
Q9-LE1	1.463	1.747	1.937	2.251	2.530
Q9-LE2	1.485	1.690	1.921	2.226	2.513
Q9-LE3	1.462	1.745	1.935	2.249	2.526
Q9-TE1	1.498	1.704	1.968	2.268	2.551
Q9-TE2	1.490	1.695	1.923	2.229	2.519
Q9-TE3	1.490	1.694	1.922	2.228	2.515

Tabella 5.3: Prime cinque frequenze naturali adimensionalizzate utilizzando le espansioni di Lagrange e di Taylor dal primo al terzo ordine lungo lo spessore

Le frequenze naturali ottenute tramite l'applicazione di tutte e sei le teorie strutturali considerate risultano, per ogni modo, molto simili tra loro. Di conseguenza, la variazione dell'espansione adottata lungo lo spessore non influenza sensibilmente l'analisi dinamica, come è stato osservato in Sezione 5.1. Le frequenze ottenute con il modello TE1 presentano, infatti, una differenza massima del 2.46% rispetto alle frequenze ottenute con il modello LE3. Di seguito si riportano le forme modali ottenute tramite l'applicazione delle espansioni TE1 e LE2.

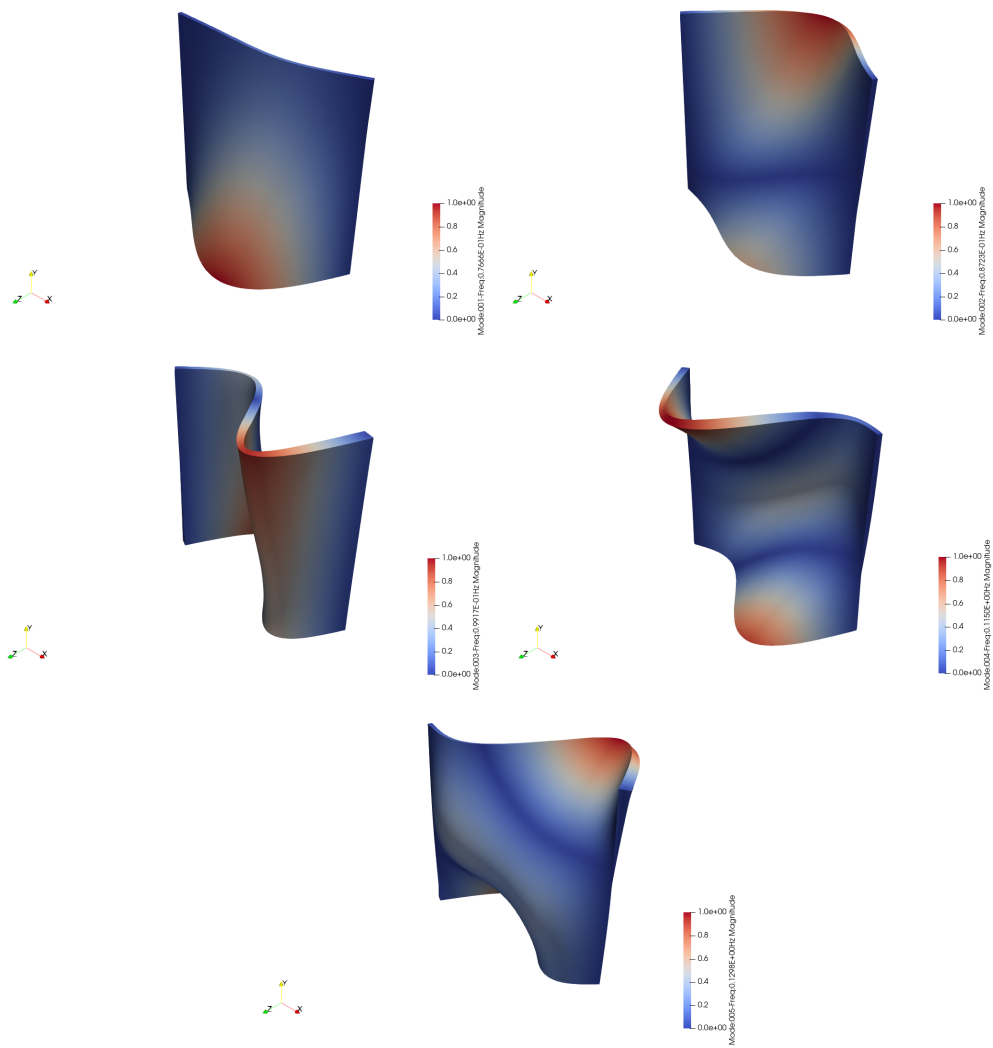


Figura 5.4: Forme modali utilizzando l'espansione di Lagrange del secondo ordine lungo lo spessore



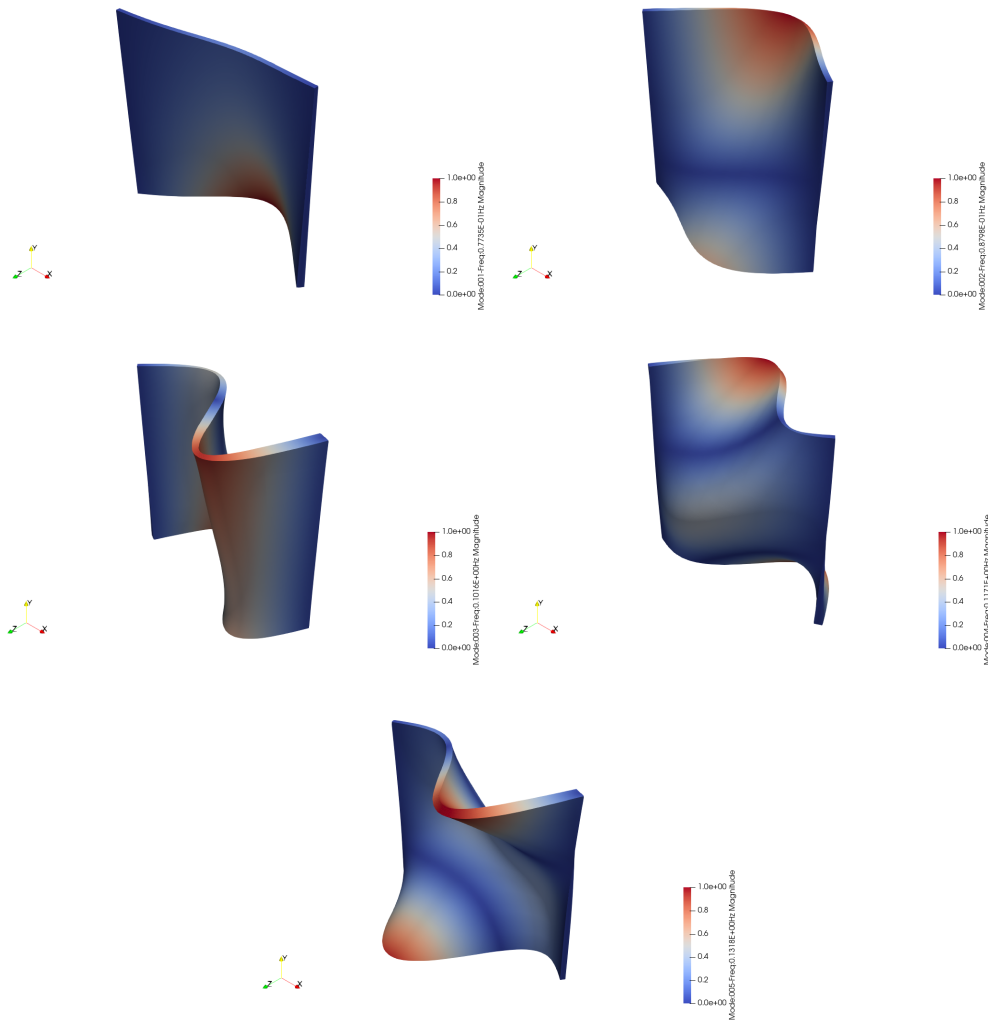


Figura 5.5: Forme modali utilizzando l'espansione di Taylor del primo ordine lungo lo spessore

Come mostrato in Sezione 5.1, le forme modali ottenute con l'applicazione delle espansioni TE1 e LE2 sono le stesse e si riscontra solamente, in alcuni casi, una variazione nella posizione delle semionde.

**Rapporto**  $\frac{h}{L} = 0.1$

Procedendo come fatto precedentemente, di seguito sono riassunte le prime cinque frequenze naturali del pannello curvo facendo uso di espansioni di Taylor e di Lagrange dal primo al terzo ordine.

Modello	$\tilde{f}_1$	$\tilde{f}_2$	$\tilde{f}_3$	$\tilde{f}_4$	$\tilde{f}_5$
Q9-LE1	2.637	3.842	7.920	8.852	10.57
Q9-LE2	2.621	3.813	7.885	8.786	10.48
Q9-LE3	2.619	3.819	7.883	8.813	10.53
Q9-TE1	2.728	3.929	8.151	9.075	10.81
Q9-TE2	2.660	3.869	7.969	8.862	10.62
Q9-TE3	2.654	3.844	7.912	8.806	10.52

Tabella 5.4: Prime cinque frequenze naturali adimensionalizzate utilizzando le espansioni di Lagrange e di Taylor dal primo al terzo ordine lungo lo spessore

Le frequenze naturali ottenute tramite l'applicazione delle sei teorie strutturali considerate mostrano, per ogni modo, delle lievi differenze. Le frequenze ottenute con il modello TE1 presentano, infatti, una differenza massima del 4.16% rispetto alle frequenze ottenute con il modello LE3. Di seguito si riportano le forme modali ottenute tramite l'applicazione delle espansioni TE1 e LE2.

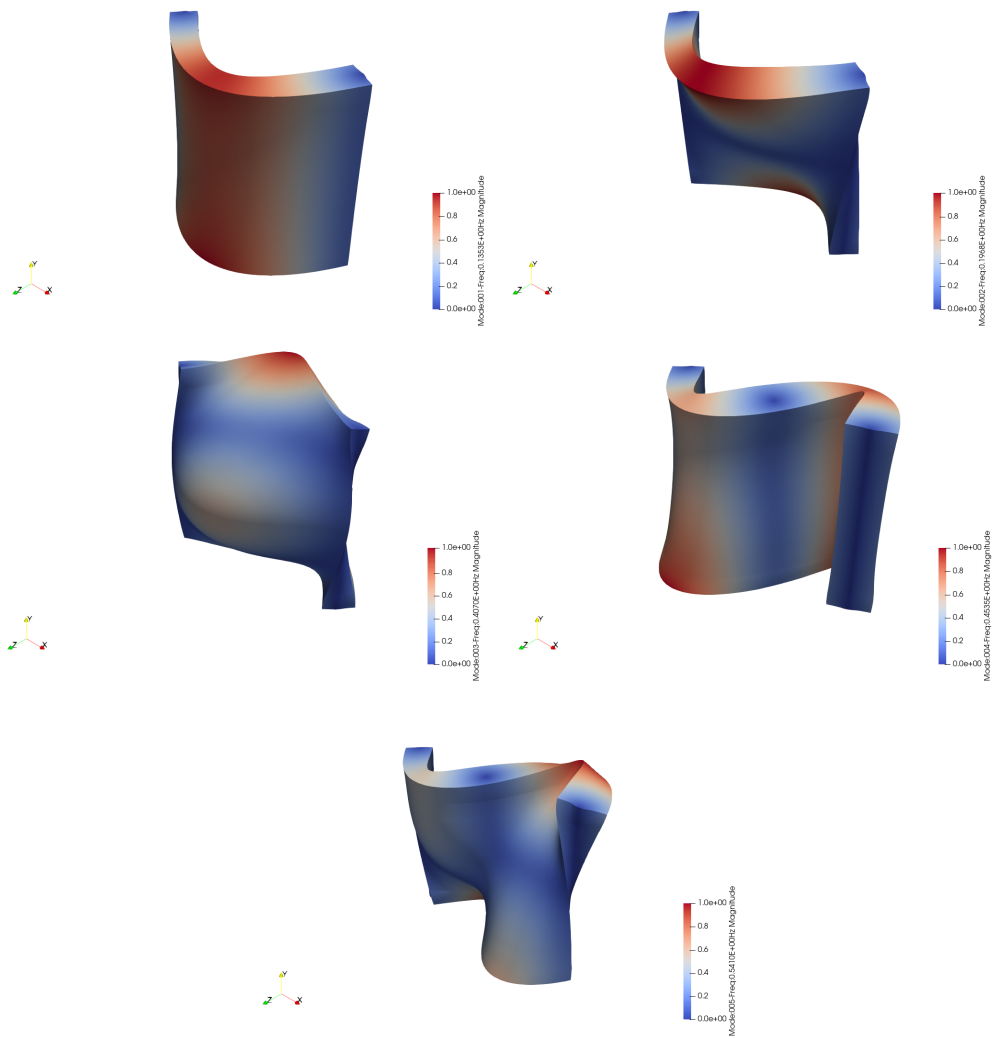


Figura 5.6: Forme modali utilizzando l'espansione di Lagrange del secondo ordine lungo lo spessore

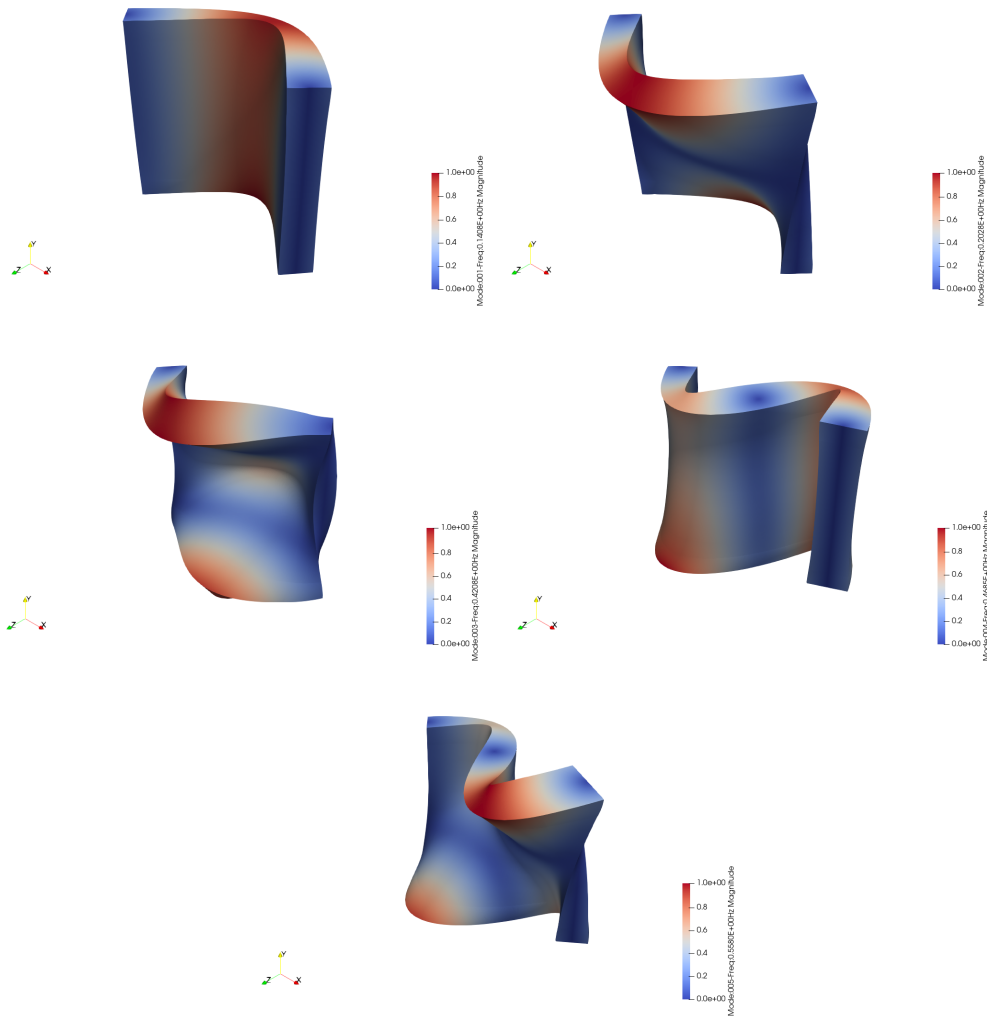


Figura 5.7: Forme modali utilizzando l'espansione di Taylor del primo ordine lungo lo spessore

Le forme modali ottenute con l'applicazione delle espansioni TE1 e LE2 coincidono, come osservato nei due casi precedentemente analizzati.

### Confronto delle frequenze e delle forme modali al variare dello spessore del guscio

Le frequenze ottenute adottando un rapporto  $\frac{h}{L}$  di 0.02 sono minori rispetto a quelle ottenute in Sezione 5.1, in cui il rapporto  $\frac{h}{L}$  della struttura è di 0.025. Le frequenze ottenute nel caso in cui il pannello presenti un rapporto  $\frac{h}{L}$  di 0.1 risultano, al contrario, maggiori rispetto a quelle relative al guscio analizzato in Sezione 5.1.

Si può concludere, dunque, che all'aumentare del rapporto tra lo spessore e la lunghezza del lato della struttura le frequenze relative ai modi propri di vibrare tendono ad incrementare. Le forme modali trovate per i casi con  $\frac{h}{L}$  di 0.02 e 0.025 presentano delle notevoli somiglianze. Al contrario, i modi di vibrare relativi al caso in cui il guscio ha uno spessore maggiore mostrano delle differenze rispetto agli altri due casi: il modo 3 presenta una somiglianza con il modo 4 dei casi in cui il pannello è più sottile, stessa cosa si può notare per il modo 4 dell'ultimo caso e il modo 3 dei primi due analizzati.

# Capitolo 6

## Analisi dinamica di cilindri in materiale composito

Nel seguente capitolo si indaga la risposta dinamica di un cilindro a quattro strati, nel caso di utilizzo di materiale composito sia a fibre dritte che a fibre curve. Durante le analisi è stata studiata l'influenza della teoria strutturale, considerando espansioni di Taylor e di Lagrange dal primo al terzo ordine. Successivamente, è stato effettuato uno studio sull'effetto dell'applicazione della tecnica del MITC sui risultati, utilizzata per mitigare la problematica dello shear locking. I risultati riportati sono stati ottenuti tramite il codice agli elementi finiti basato sulla CUF e sono stati confrontati con quanto presente nel Riferimento [10].

### 6.1 Fenomeno del locking

Il fenomeno dello shear locking in elementi finiti di tipo Reissner-Mindlin è una problematica che si riscontra nel FEM. Esso consiste in una difficoltà dal punto di vista numerico, ed in particolare della velocità di convergenza, nel ridurre gli elementi piastra o guscio di tipo Reissner-Mindlin a soluzioni esatte o di Kirchhoff-Love nel caso di analisi di piastre o gusci sottili. L'inclusione della rigidità flessionale e di taglio in un unico grado di libertà rotazionale rende difficile l'ottenimento dell'energia di taglio trasversale nulla in strutture sottili, come nella fisica. A causa di questo fenomeno, la velocità di convergenza della mesh nel piano, con la quale si discretizza la struttura in esame, diventa molto piccola e sarebbe necessario un numero elevato di elementi per soddisfare il vincolo di energia di taglio trasversale nulla [8]. La formulazione agli elementi finiti di piastre e gusci tende complessivamente a sovrastimare le rigidità strutturali di taglio e/o di membrana e questo fenomeno è definito più generalmente locking. Per poter porre un limite a queste problematiche, sono presenti due possibili tecniche: l'integrazione selettiva

ridotta e la tecnica della componente tensoriale di interpolazione mista (MITC). Considerando un elemento finito a 9 nodi per la discretizzazione di un guscio, è possibile scrivere le componenti di spostamento e le relative variazioni virtuali tramite funzioni di Lagrange  $N_i$ , in accordo con il metodo agli elementi finiti:

$$\delta u_\tau = N_i \delta u_{\tau i} \quad u_s = N_j u_{sj} \quad (6.1)$$

Sostituendo le relazioni 6.1 all'interno delle relazioni geometriche si ottiene:

$$\epsilon_p = F_\tau (D_p + A_p) (N_i I) u_{\tau i} \quad \epsilon_n = F_\tau (D_{n\Omega} - A_n) (N_i I) u_{\tau i} + F_{\tau,z} (N_i I) u_{\tau i} \quad (6.2)$$

dove

$$D_p = \begin{bmatrix} \frac{\delta_\alpha}{H_\alpha} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{\delta_\beta}{H_\beta} & 0 \\ \frac{\delta_\beta}{H_\beta} & \frac{\delta_\alpha}{H_\alpha} & 0 \end{bmatrix} \quad (6.3)$$

$$D_{n\Omega} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & \frac{\delta_\alpha}{H_\alpha} \\ 0 & 0 & \frac{\delta_\beta}{H_\beta} \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \quad (6.4)$$

Considerando un sistema di riferimento locale  $(\xi, \eta)$ , tramite la formulazione MITC, le componenti della deformazione non sono calcolate direttamente dagli spostamenti ma viene implementata una specifica interpolazione strategica per ogni componente. I punti utili per l'interpolazione vengono detti *tying points* e sono mostrati nella figura seguente.

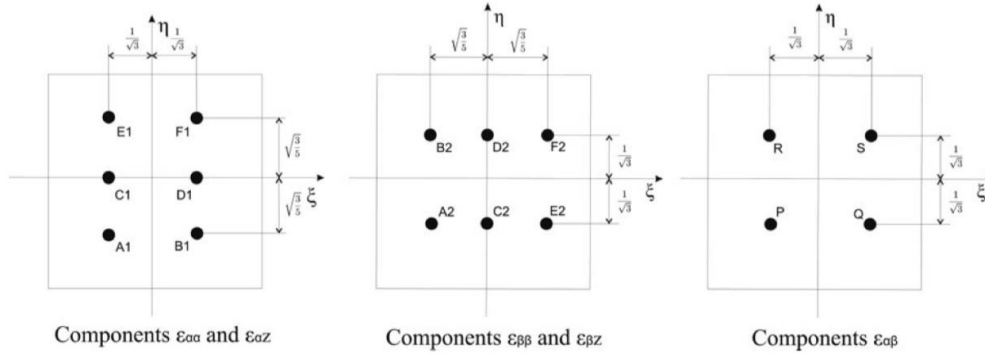


Figura 6.1: Tying points per l'elemento MITC9 di un guscio [11]

Le funzioni di interpolazione sono funzioni di Lagrange ed assumono la forma

$$\begin{aligned} N_{m1} &= [N_{A1}, N_{B1}, N_{C1}, N_{D1}, N_{E1}, N_{F1}] \\ N_{m2} &= [N_{A2}, N_{B2}, N_{C2}, N_{D2}, N_{E2}, N_{F2}] \\ N_{m3} &= [N_P, N_Q, N_R, N_S] \end{aligned} \quad (6.5)$$

Dove  $m1$ ,  $m2$  e  $m3$  indicano quantità calcolate nei punti (A1, B1, C1, D1, E1, F1), (A2, B2, C2, D2, E2, F2) e (P, Q, R, S) rispettivamente. Le componenti di deformazione possono essere calcolate come segue:

$$\epsilon_p = \begin{bmatrix} N_{m1} & 0 & 0 \\ 0 & N_{m2} & 0 \\ 0 & 0 & N_{m3} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \epsilon_{\alpha\alpha,m1} \\ \epsilon_{\beta\beta,m2} \\ \epsilon_{\alpha\beta,m3} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \epsilon_{\alpha\alpha} \\ \epsilon_{\beta\beta} \\ \epsilon_{\alpha\beta} \end{bmatrix} \quad (6.6)$$

$$\epsilon_n = \begin{bmatrix} N_{m1} & 0 & 0 \\ 0 & N_{m2} & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \epsilon_{\alpha z,m1} \\ \epsilon_{\beta z,m2} \\ \epsilon_{zz} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \epsilon_{\alpha z} \\ \epsilon_{\beta z} \\ \epsilon_{zz} \end{bmatrix} \quad (6.7)$$

dove  $\epsilon_{\alpha\alpha,m1}$ ,  $\epsilon_{\beta\beta,m2}$ ,  $\epsilon_{\alpha\beta,m3}$ ,  $\epsilon_{\alpha z,m1}$ ,  $\epsilon_{\beta z,m2}$  possono essere ricavate dall'equazione 6.2. [11]

## 6.2 Cilindro in materiale composito a fibre dritte

Il caso in esame è quello di un cilindro a quattro strati in materiale composito a fibre dritte, che presenta un vincolo di incastro sulle due estremità. Esso possiede una lunghezza di 5 m, uno spessore di 0.02 m e un diametro di 1 m. Le caratteristiche geometriche sono riassunte nella Figura 6.2.

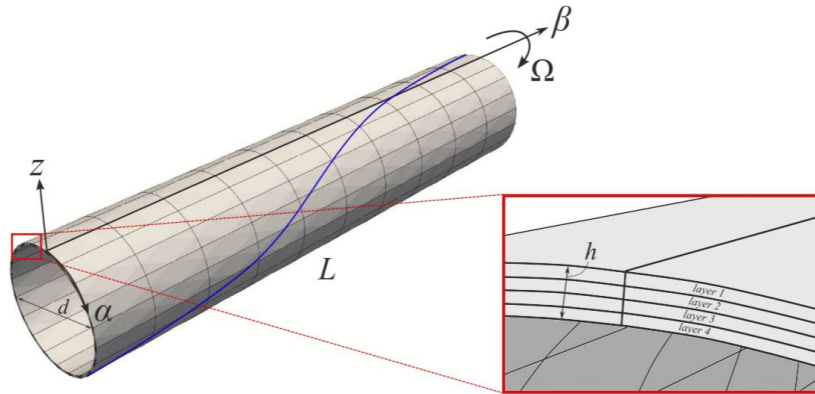


Figura 6.2: Modello geometrico del cilindro in esame [10]

Le proprietà elastiche della struttura sono indicate nella tabella riportata di seguito:

$E_{11}$ [GPa]	$E_{22}$ [GPa]	$E_{33}$ [GPa]	$G_{12}$ [GPa]	$G_{13}$ [GPa]	$G_{23}$ [GPa]	$\nu_{12}$	$\nu_{13}$	$\nu_{23}$
224	12.7	12.7	4.42	4.42	4.42	0.256	0.256	0.256

Tabella 6.1: Proprietà elastiche del cilindro



Il cilindro presenta una sequenza di laminazione  $[90^\circ/0^\circ]_s$ . Per l'analisi sono stati utilizzati elementi biquadratici a 9 nodi (Q9) e una mesh nel piano  $20 \times 10$ . Sono state ricavate le prime 6 frequenze naturali facendo uso di espansioni di Taylor e di Lagrange dal primo al terzo ordine. L'analisi modale è stata poi replicata con l'aggiunta dell'applicazione della tecnica del MITC per mitigare l'effetto dello shear locking, per poterne osservare l'influenza sui risultati. Quest'ultimi sono riassunti di seguito.

Modello	$f_1$ [Hz]	$f_2$ [Hz]	$f_3$ [Hz]	$f_4$ [Hz]	$f_5$ [Hz]	$f_6$ [Hz]
Q9-LE1	69.56	91.72	119.56	132.25	125.24	142.56
Q9-LE2	69.52	91.72	119.53	132.25	125.02	142.35
Q9-LE3	69.52	91.72	132.25	119.53	125.01	142.35
Q9-TE1	69.21	91.43	118.15	132.25	125.47	141.74
Q9-TE2	69.61	91.72	119.59	132.25	125.69	142.96
Q9-TE3	69.54	91.72	119.55	132.25	125.17	142.49

Tabella 6.2: Prime sei frequenze naturali utilizzando le espansioni di Lagrange e di Taylor dal primo al terzo ordine lungo lo spessore senza l'applicazione della tecnica MITC

Modello	$f_{1,M}$ [Hz]	$f_{2,M}$ [Hz]	$f_{3,M}$ [Hz]	$f_{4,M}$ [Hz]	$f_{5,M}$ [Hz]	$f_{6,M}$ [Hz]
Q9-LE1	66.21	91.18	114.69	116.65	132.25	132.92
Q9-LE2	66.17	91.17	114.48	116.61	132.25	132.72
Q9-LE3	66.17	91.17	114.47	116.61	132.25	132.72
Q9-TE1	65.57	90.64	114.39	114.67	132.25	131.50
Q9-TE2	66.23	91.19	114.95	116.67	132.25	133.14
Q9-TE3	66.18	91.17	114.60	116.62	132.25	132.83

Tabella 6.3: Prime sei frequenze naturali utilizzando le espansioni di Lagrange e di Taylor dal primo al terzo ordine lungo lo spessore con l'applicazione della tecnica MITC

Le frequenze associate ad ogni modo al variare della teoria applicata sullo spessore non mostrano delle differenze significative, sia nel caso di applicazione della tecnica MITC che nel caso di non utilizzo di essa. Un caso particolare è quello in cui si fa uso dell'espansione di Lagrange del terzo ordine senza il MITC: le frequenze associate ai modi 3 e 4 assumono gli stessi valori di quelle associate rispettivamente ai modi 4 e 3 utilizzando le altre teorie di espansione. Nel caso di applicazione della

tecnica del MITC, le frequenze ottenute con il modello TE1 presentano una differenza massima dell'1.66% rispetto alle frequenze ottenute con il modello LE3. Le frequenze ottenute con e senza l'applicazione del MITC mostrano delle differenze che risultano massime per il modo 4 e minime per il modo 2. Le frequenze ottenute applicando l'espansione di Lagrange del primo ordine sono state confrontate con quanto presente in letteratura [10]. Si riportano di seguito i risultati mostrati nel paper di riferimento, ottenuti con l'applicazione della CUF e con il software *FEMAP*.

MODO	20×10 Q9+LE1		FEMAP
	$f_{MITC}$ [Hz]	$f_{NOMITC}$ [Hz]	f [Hz]
1	66.21	72.71	66.18
2	91.19	92.01	91.10
3	114.78	121.92	114.55
4	116.66	132.25	116.58
5	132.25	135.33	132.17

Tabella 6.4: Risultati ottenuti in letteratura [10]

Le frequenze risultanti dall'applicazione dell'espansione LE1 e della tecnica del MITC sono simili con quanto riportato in letteratura. Si riscontrano maggiori differenze confrontando i risultati ottenuti senza il MITC. Di seguito si riportano le forme modali dei primi 6 modi di vibrare, ottenute con le teorie di espansione di Taylor e Lagrange del primo ordine, con e senza l'applicazione del MITC.

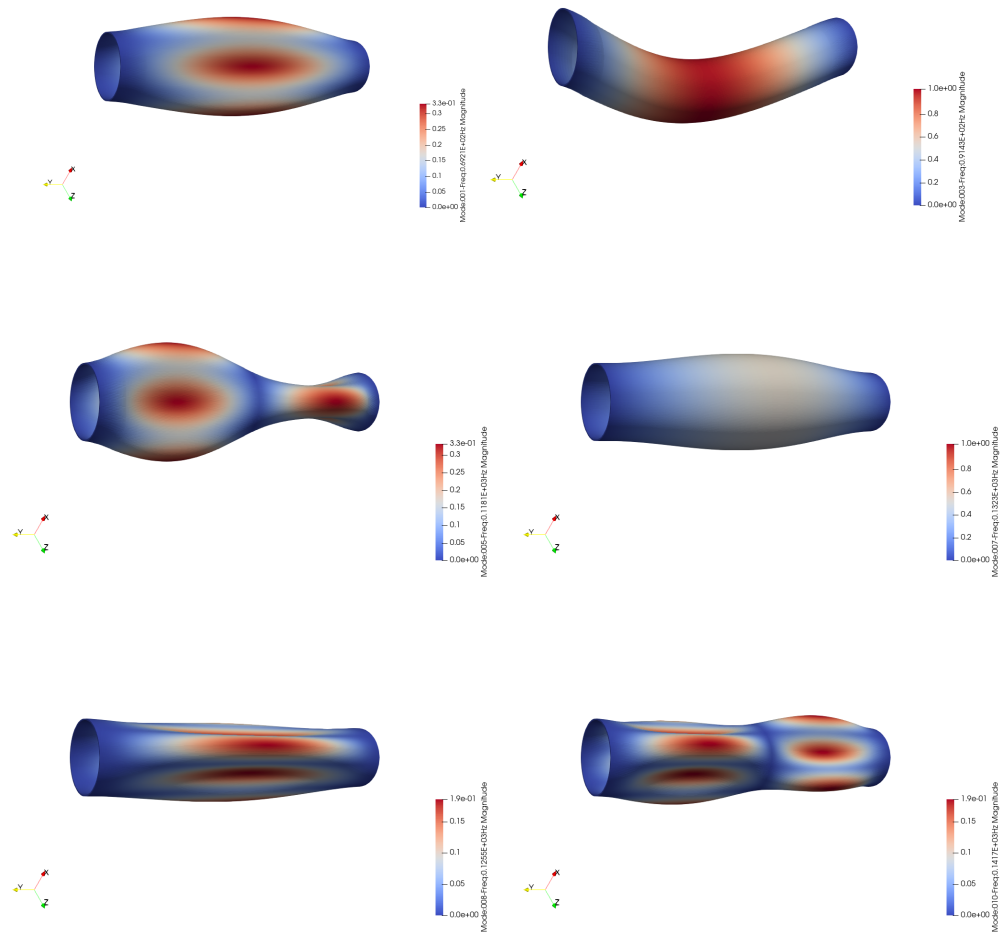


Figura 6.3: Forme modali utilizzando l'espansione di Taylor del primo ordine lungo lo spessore senza l'applicazione della tecnica MITC

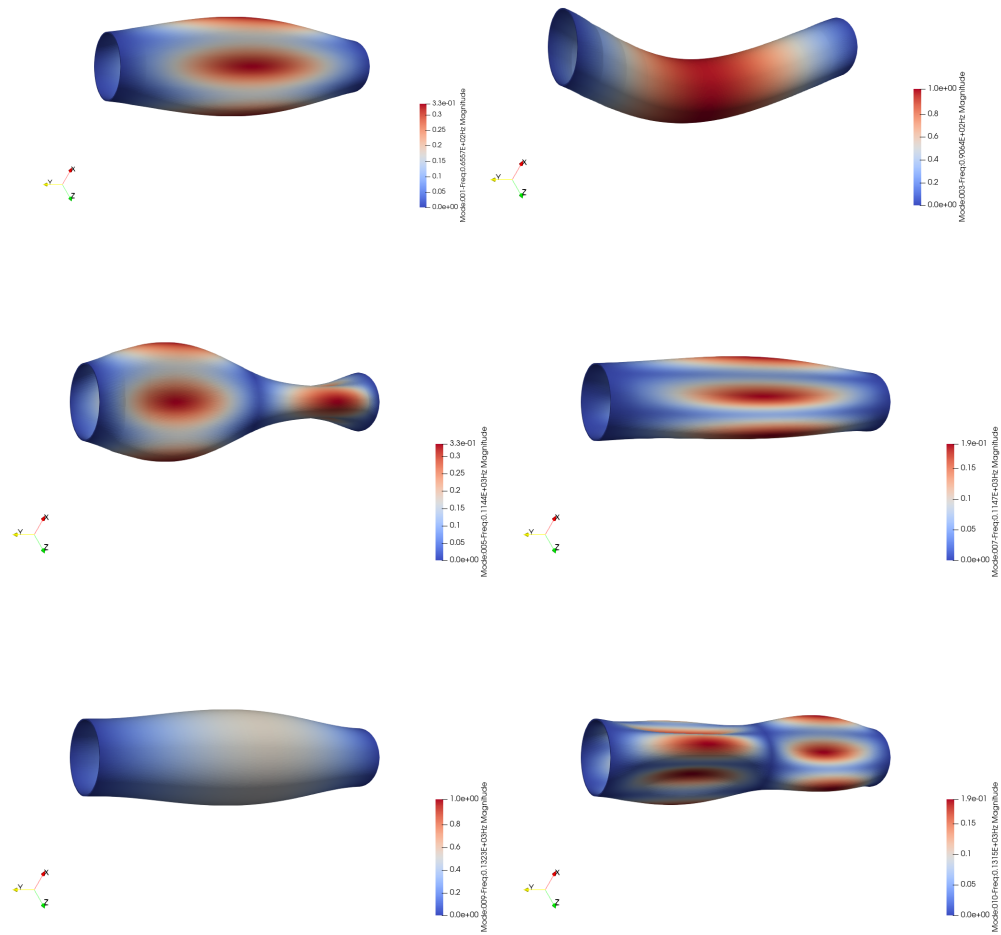


Figura 6.4: Forme modali utilizzando l'espansione di Taylor del primo ordine lungo lo spessore con l'applicazione della tecnica MITC

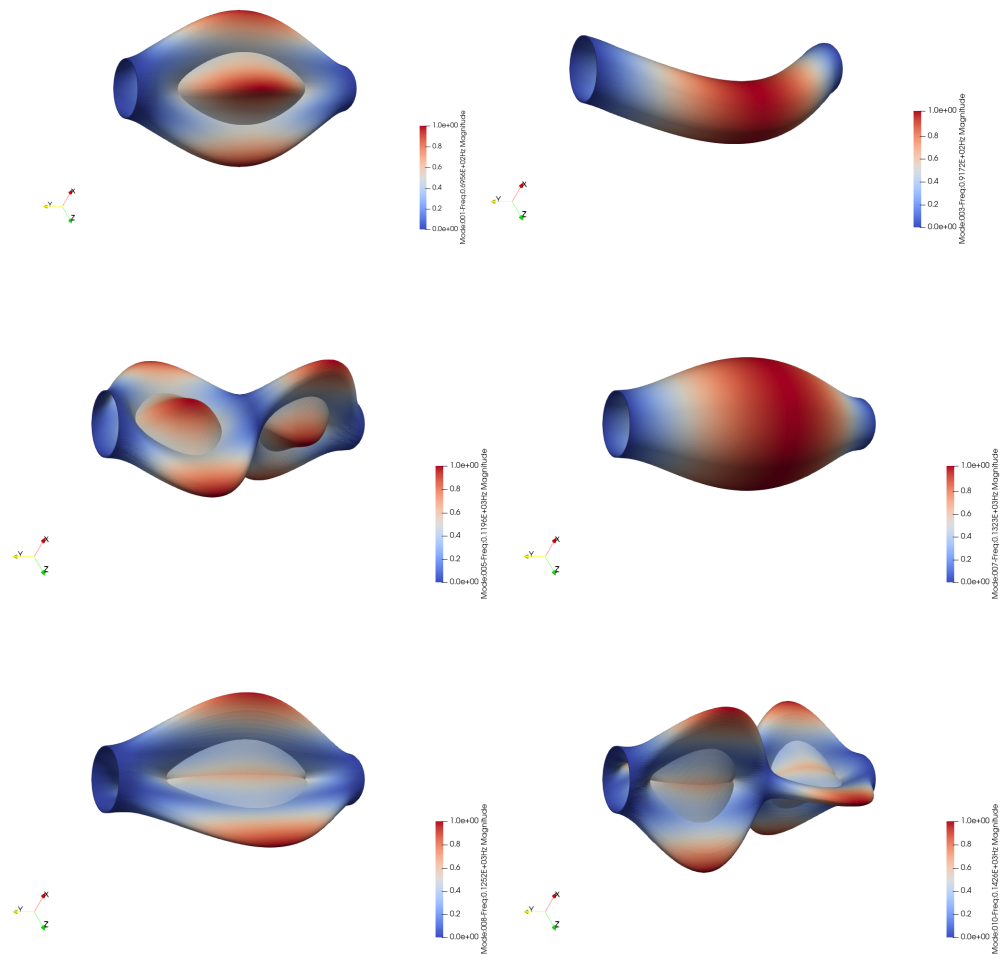


Figura 6.5: Forme modali utilizzando l'espansione di Lagrange del primo ordine lungo lo spessore senza l'applicazione della tecnica MITC

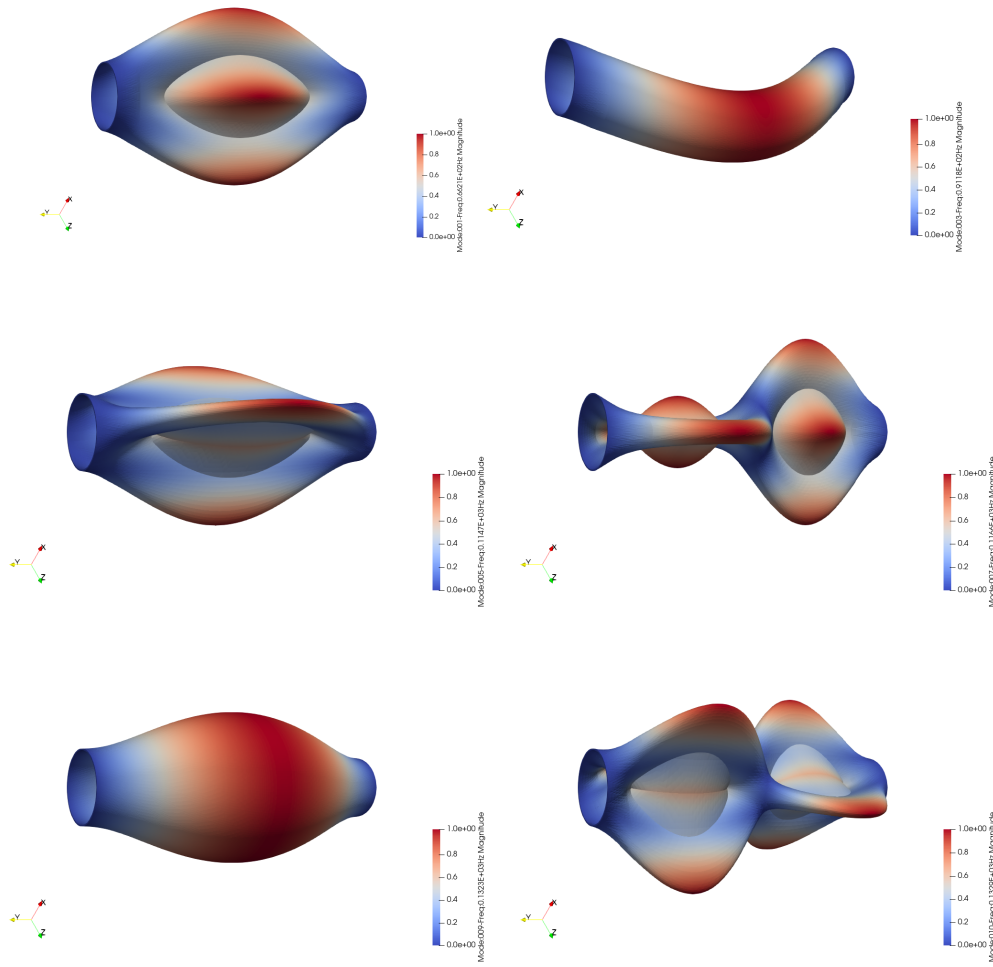


Figura 6.6: Forme modali utilizzando l'espansione di Lagrange del primo ordine lungo lo spessore con l'applicazione della tecnica MITC

Le forme modali ottenute con l'applicazione dell'espansione TE1, con e senza MITC, sono simili tranne per i modi 4 e 5. Infatti, i modi 4 e 5 in Figura 6.3 assumono le stesse forme modali dei modi 5 e 4 in Figura 6.4 rispettivamente, risultando dunque invertite. Le forme modali ottenute con l'espansione LE1 riportano maggiori differenze tra il caso di applicazione della tecnica MITC e il caso in cui essa viene trascurata. Gli unici modi a cui sono associate forme modali simili sono il modo 1, 2 e 6. I modi 3, 4 e 5 di Figura 6.5 hanno forme modali simili ai modi 4, 5 e 3 di Figura 6.6 rispettivamente.

### 6.3 Cilindro in materiale composito a fibre curve

In questa sezione si analizza un cilindro a quattro strati in materiale composito a fibre curve. Esso presenta gli stessi vincoli, la stessa geometria e le stesse proprietà elastiche del cilindro a fibre dritte analizzato in Sezione 6.2. Il cilindro presenta una sequenza di laminazione  $[90^\circ + \langle 0^\circ/15^\circ \rangle / 0^\circ + \langle 0^\circ/15^\circ \rangle]_s$ . Per l'analisi sono stati utilizzati elementi biquadratici a 9 nodi (Q9) e una mesh nel piano  $20 \times 10$ . Anche in questo caso sono state ricavate le prime 6 frequenze naturali facendo uso di espansioni di Taylor e di Lagrange dal primo al terzo ordine, svolgendo le analisi senza e con l'applicazione della tecnica del MITC per la mitigazione dello shear locking. I risultati sono riassunti di seguito.

Modello	$f_1$ [Hz]	$f_2$ [Hz]	$f_3$ [Hz]	$f_4$ [Hz]	$f_5$ [Hz]	$f_6$ [Hz]
Q9-LE1	71.74	71.90	99.61	100.40	124.73	124.73
Q9-LE2	71.86	71.70	99.61	100.40	124.52	124.52
Q9-LE3	71.86	71.70	99.61	100.40	124.51	124.51
Q9-TE1	71.49	71.44	99.57	100.31	124.80	124.80
Q9-TE2	71.78	71.95	99.62	100.40	125.12	125.12
Q9-TE3	71.72	71.88	100.40	99.61	124.66	124.65

Tabella 6.5: Prime sei frequenze naturali utilizzando le espansioni di Lagrange e di Taylor dal primo al terzo ordine lungo lo spessore senza l'applicazione della tecnica MITC

Modello	$f_{1,M}$ [Hz]	$f_{2,M}$ [Hz]	$f_{3,M}$ [Hz]	$f_{4,M}$ [Hz]	$f_{5,M}$ [Hz]	$f_{6,M}$ [Hz]
Q9-LE1	68.55	68.72	99.04	99.81	114.60	114.60
Q9-LE2	68.68	68.51	99.03	99.80	114.40	114.39
Q9-LE3	68.68	68.51	99.03	99.80	114.39	114.39
Q9-TE1	68.07	68.02	98.71	99.40	114.53	114.52
Q9-TE2	68.57	68.74	99.06	99.82	114.85	114.85
Q9-TE3	68.52	68.69	99.80	99.04	114.52	114.51

Tabella 6.6: Prime sei frequenze naturali utilizzando le espansioni di Lagrange e di Taylor dal primo al terzo ordine lungo lo spessore con l'applicazione della tecnica MITC

Si può osservare che le frequenze naturali ottenute per i primi 6 modi propri di vibrare, sia con l'utilizzo del MITC che senza, mostrano delle variazioni minime

passando dall'applicazione di una teoria strutturale all'altra. Di conseguenza, i risultati ottenuti con metodi di ordine inferiore approssimano in modo ottimale quelli ottenuti con metodi di ordine superiore. Nel caso di non applicazione della tecnica del MITC, le frequenze ottenute con il modello TE1 presentano una differenza massima dello 0.51% rispetto alle frequenze ottenute con il modello LE3. Nel caso di applicazione della tecnica del MITC, invece, questa differenza è dello 0.88%. Le frequenze risultanti dall'applicazione della tecnica del MITC differiscono da quelle ricavate senza l'applicazione del metodo e la differenza tra i risultati ottenuti è massima per i modi 5 e 6 e minima per i modi 3 e 4. Confrontando le frequenze risultanti nel caso di applicazione della tecnica MITC, l'utilizzo di compositi VAT comporta una riduzione delle frequenze naturali rispetto al caso in cui il cilindro venga realizzato in composito a fibre dritte, come si può osservare confrontando le Tabelle 6.3 e 6.6. Le frequenze ottenute applicando l'espansione di Lagrange del primo ordine sono state confrontate con quanto presente in letteratura [10]. I risultati riportati nel paper di riferimento mostrano un confronto tra le frequenze ottenute con l'applicazione della CUF e con il software *FEMAP*.

MODO	20×10 Q9+LE1		FEMAP
	$f_{MITC}$ [Hz]	$f_{NOMITC}$ [Hz]	f [Hz]
1	68.61	74.80	66.42
2	68.78	74.96	66.43
3	99.19	100.01	91.41
4	99.96	100.82	91.95
5	114.71	131.03	113.73
6	114.71	131.11	113.75

Tabella 6.7: Risultati ottenuti in letteratura [10]

Le frequenze ottenute con l'espansione LE1 e la tecnica del MITC sono simili con quanto esposto in letteratura. Si possono invece riscontrare delle differenze maggiori tra i risultati ottenuti senza l'applicazione del MITC e quelli di riferimento. Di seguito si riportano le forme modali relative ai primi 6 modi propri di vibrare ottenute con l'utilizzo delle teorie di Taylor e di Lagrange del primo ordine, con e senza l'applicazione del MITC.



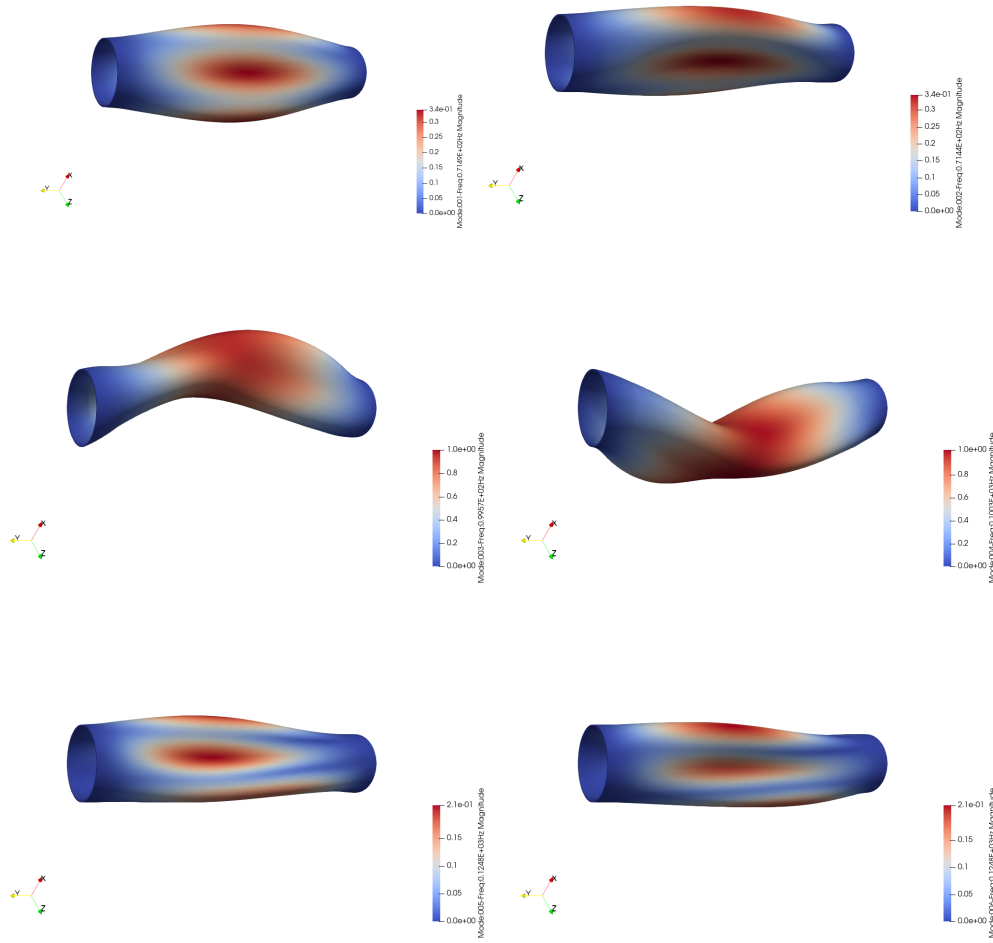


Figura 6.7: Forme modali utilizzando l'espansione di Taylor del primo ordine lungo lo spessore senza l'applicazione della tecnica MITC

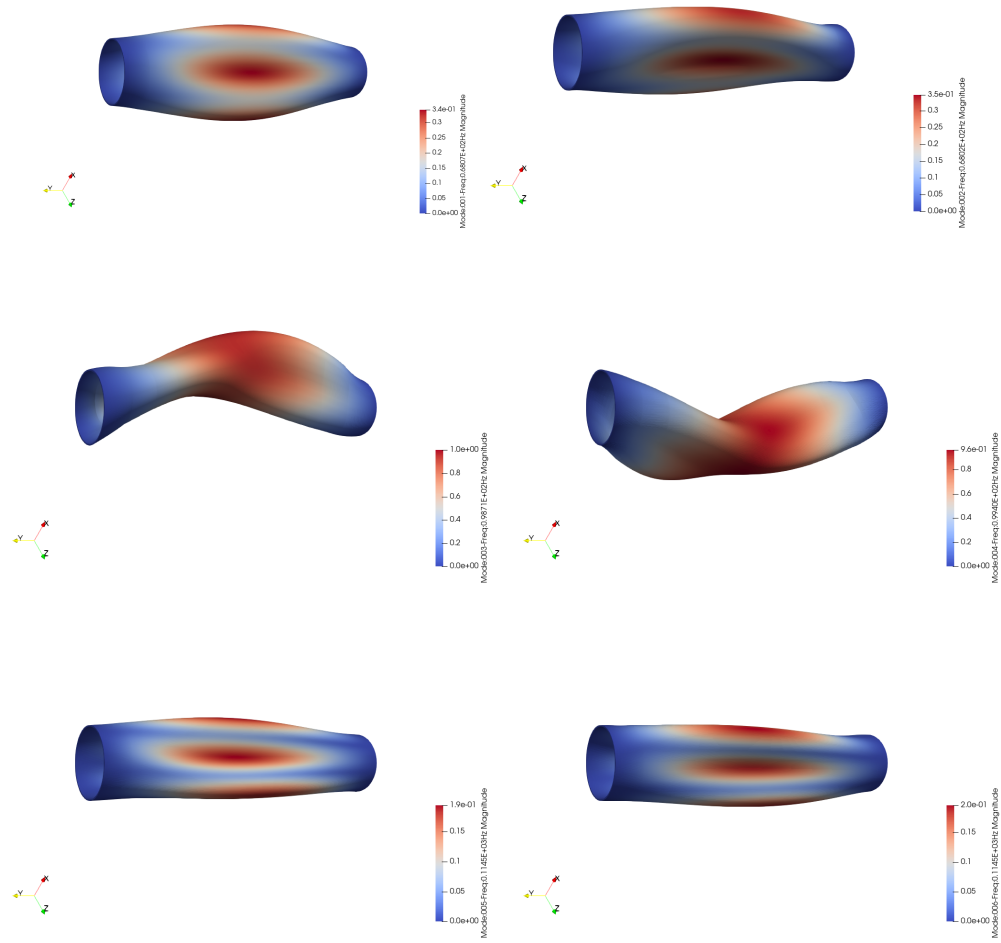


Figura 6.8: Forme modali utilizzando l'espansione di Taylor del primo ordine lungo lo spessore con l'applicazione della tecnica MITC

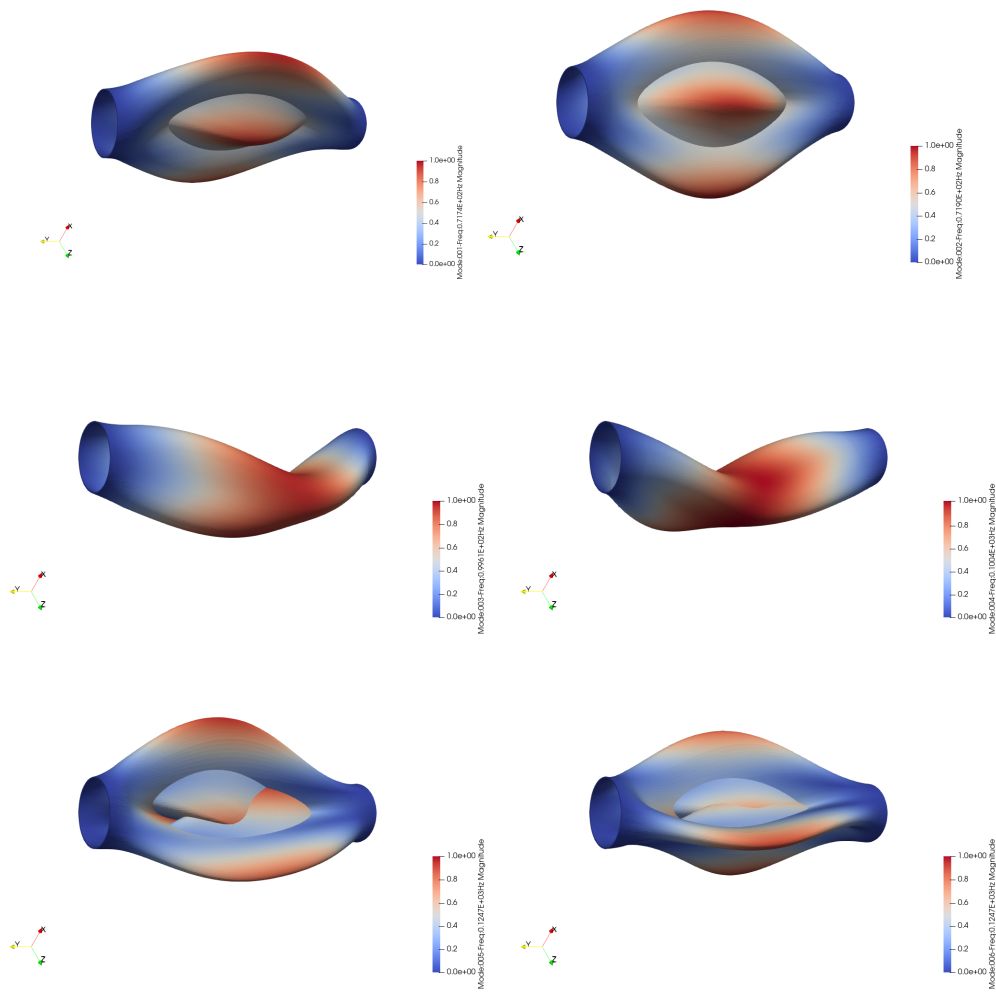


Figura 6.9: Forme modali utilizzando l'espansione di Lagrange del primo ordine lungo lo spessore senza l'applicazione della tecnica MITC

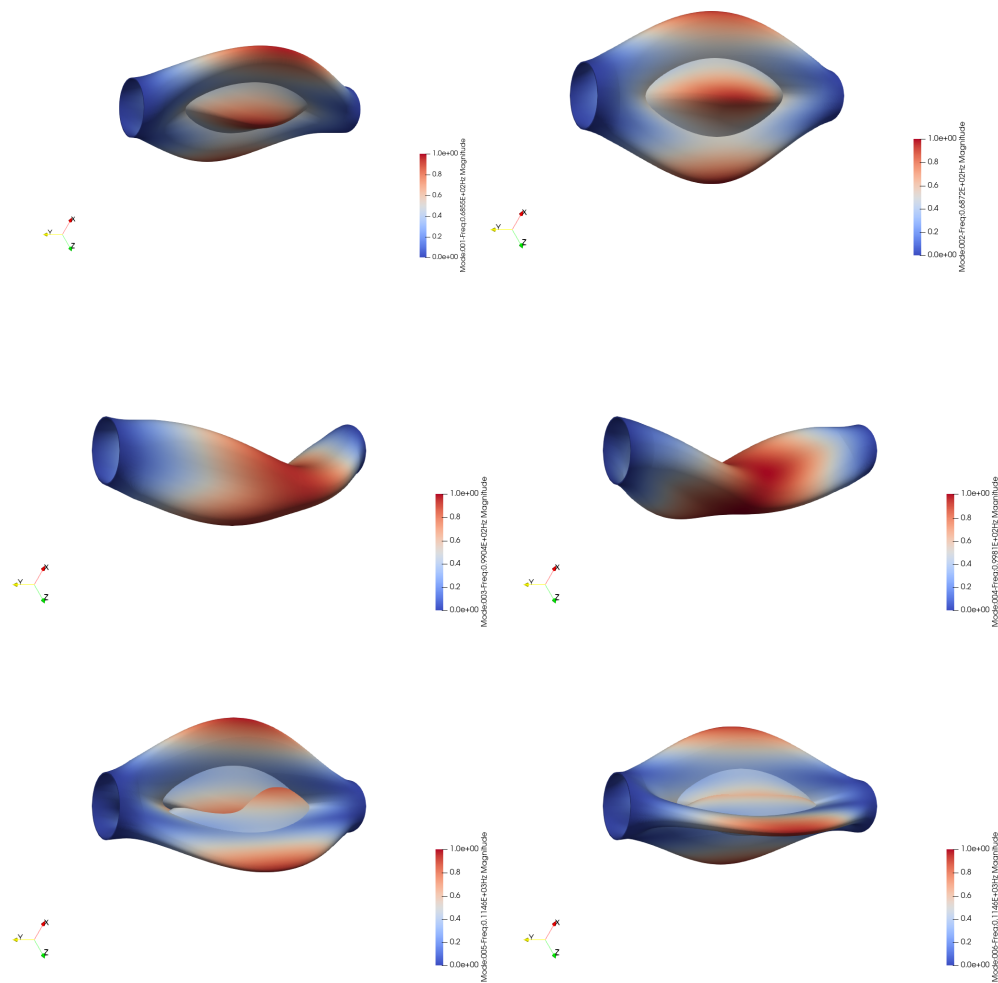


Figura 6.10: Forme modali utilizzando l'espansione di Lagrange del primo ordine lungo lo spessore con l'applicazione della tecnica MITC

Le forme modali ottenute con e senza l'applicazione della tecnica MITC applicando l'espansione di Taylor lungo lo spessore risultano simili tra loro. Ciò può essere concluso anche nel caso di applicazione dell'espansione di Lagrange.

# Capitolo 7

## Analisi dinamica di cilindri irrigiditi in materiale composito

In questo capitolo si indaga la risposta dinamica del cilindro analizzato nel capitolo precedente, nel caso di realizzazione sia in materiale composito a fibre dritte che curve, con l'applicazione di irrigidimenti. Come fatto precedentemente, durante le analisi è stata studiata l'influenza della teoria strutturale, considerando espansioni di Taylor e di Lagrange dal primo al terzo ordine. Successivamente, le analisi sono state ripetute applicando la tecnica del MITC, per poter osservare come essa influisca sui risultati ottenuti. Anche in questo caso, le analisi sono state svolte con il codice agli elementi finiti basato sulla CUF, utilizzando una mesh nel piano  $20 \times 10$  ed elementi Q9.

### 7.1 Cilindri irrigiditi in materiale composito a fibre dritte

Il caso in esame è lo stesso presentato in Sezione 6.2, con l'aggiunta di irrigidimenti longitudinali e circonferenziali. In entrambi i casi, sono stati applicati quattro irrigidimenti in acciaio alla struttura cilindrica, come mostrato di seguito.

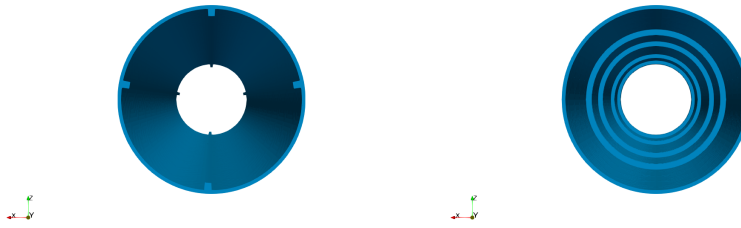


Figura 7.1: Irrigidimenti longitudinali e circonferenziali

### 7.1.1 Applicazione di irrigidimenti longitudinali

Di seguito sono riportate le prime sei frequenze naturali, nel caso di applicazione di irrigidimenti longitudinali, ottenute con l'applicazione delle espansioni di Taylor e di Lagrange dal primo al terzo ordine, senza l'implementazione della tecnica del MITC e con l'utilizzo di essa.

Modello	$f_1$ [Hz]	$f_2$ [Hz]	$f_3$ [Hz]	$f_4$ [Hz]	$f_5$ [Hz]	$f_6$ [Hz]
Q9-LE1	65.64	74.18	83.42	82.77	105.59	120.78
Q9-LE2	65.52	74.19	83.39	82.76	105.53	120.75
Q9-LE3	65.55	74.13	82.76	83.38	105.54	120.76
Q9-TE1	66.72	74.33	83.65	82.97	105.85	121.33
Q9-TE2	66.73	74.49	83.01	83.68	106.54	121.08
Q9-TE3	66.10	74.35	82.94	83.62	105.98	121.04

Tabella 7.1: Prime sei frequenze naturali utilizzando le espansioni di Lagrange e di Taylor dal primo al terzo ordine lungo lo spessore senza l'applicazione della tecnica MITC

Modello	$f_{1,M}$ [Hz]	$f_{2,M}$ [Hz]	$f_{3,M}$ [Hz]	$f_{4,M}$ [Hz]	$f_{5,M}$ [Hz]	$f_{6,M}$ [Hz]
Q9-LE1	55.68	63.70	81.21	81.64	99.01	101.14
Q9-LE2	55.65	63.69	81.19	81.61	98.97	100.92
Q9-LE3	55.66	63.63	81.19	81.61	98.97	100.87
Q9-TE1	56.22	63.68	81.73	81.29	98.63	103.57
Q9-TE2	56.50	64.01	81.52	81.95	99.83	103.53
Q9-TE3	56.23	63.87	81.87	81.43	99.51	102.52

Tabella 7.2: Prime sei frequenze naturali utilizzando le espansioni di Lagrange e di Taylor dal primo al terzo ordine lungo lo spessore con l'applicazione della tecnica MITC

Le frequenze associate ad ogni modo al variare della teoria applicata lungo lo spessore non mostrano, anche in questo caso, delle differenze significative, sia nel caso di applicazione della tecnica MITC sia in assenza di essa. Di conseguenza, l'uso di espansioni di ordine inferiore, sia nell'ambito della teoria strutturale di Taylor che di Lagrange, restituisce risultati che si avvicinano a quelli ottenuti tramite l'utilizzo di espansioni di ordine superiore. Nel caso di non applicazione della tecnica del MITC, le frequenze ottenute con il modello TE1 presentano una differenza massima dell'1.78% rispetto alle frequenze ottenute con il modello LE3. Nel caso di applicazione della tecnica del MITC, invece, questa differenza è del 2.68%. L'applicazione della tecnica del MITC, per la mitigazione del fenomeno del locking, porta ad ottenere delle frequenze che si discostano da quelle ottenute senza l'utilizzo di essa. I modi che presentano maggiori differenze sono i modi 2 e 6 mentre quelli che mostrano delle differenze minori sono i modi 3 e 4. Di seguito si riportano le forme modali relative ai primi 6 modi propri di vibrare ottenute con l'utilizzo delle teorie di Taylor e di Lagrange del primo ordine, con e senza l'applicazione del MITC.

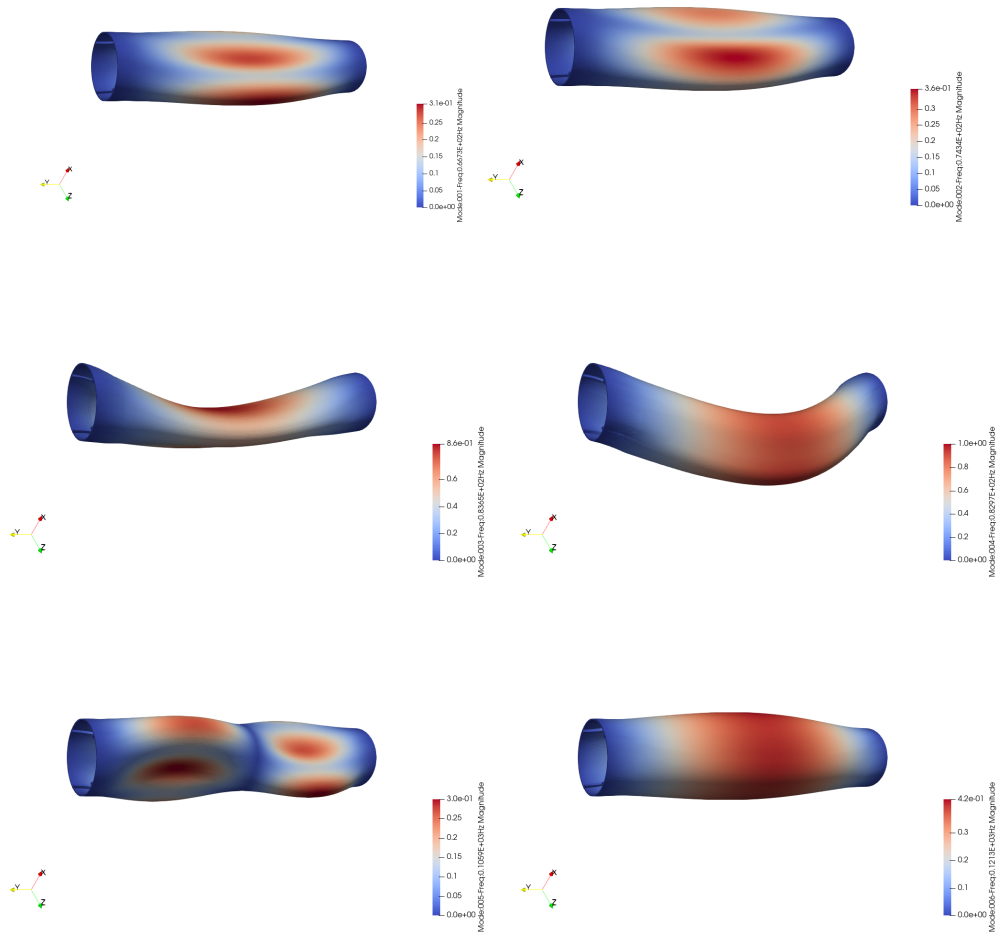


Figura 7.2: Forme modali utilizzando l'espansione di Taylor del primo ordine lungo lo spessore senza l'applicazione della tecnica MITC



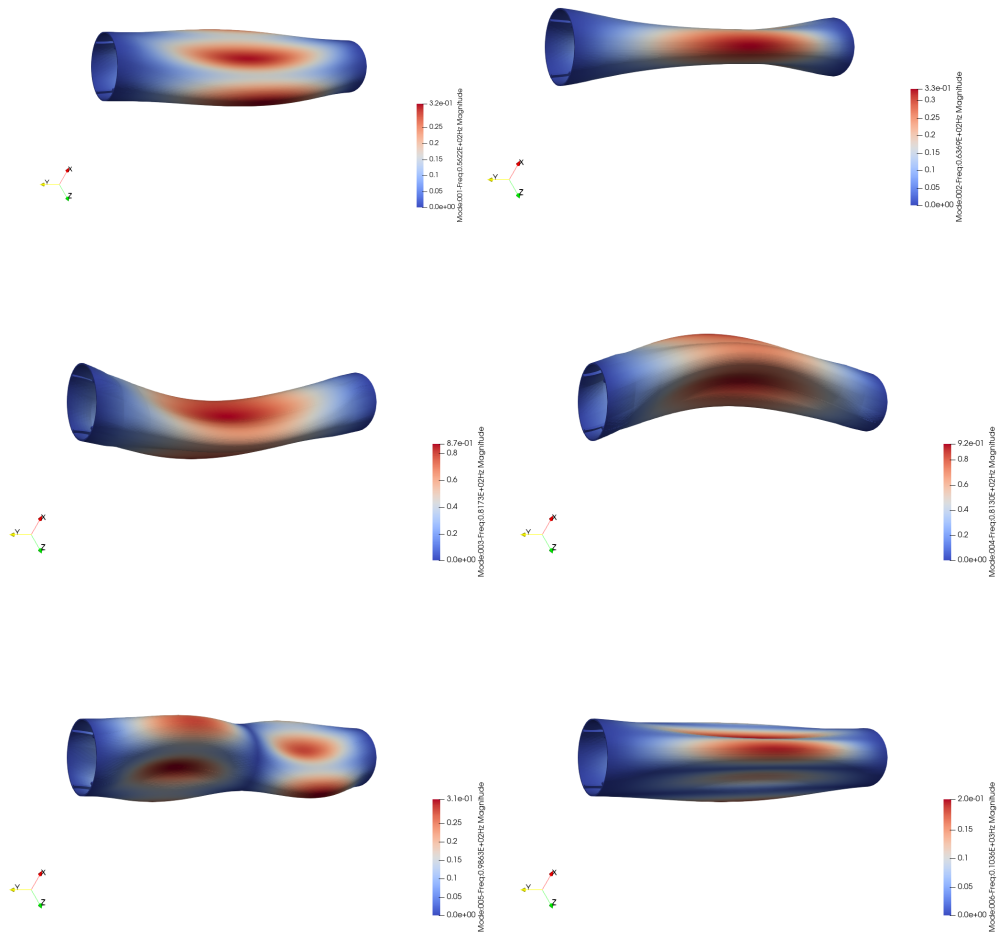


Figura 7.3: Forme modali utilizzando l'espansione di Taylor del primo ordine lungo lo spessore con l'applicazione della tecnica MITC

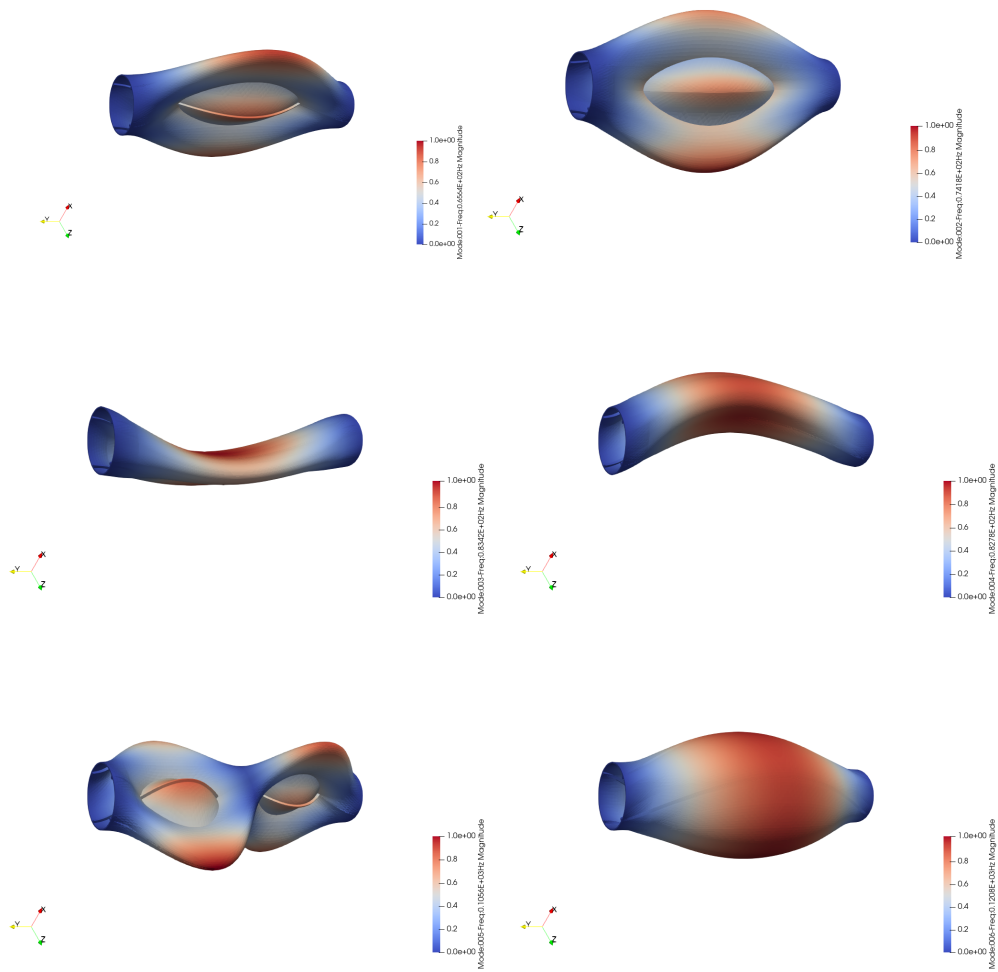


Figura 7.4: Forme modali utilizzando l'espansione di Lagrange del primo ordine lungo lo spessore senza l'applicazione della tecnica MITC

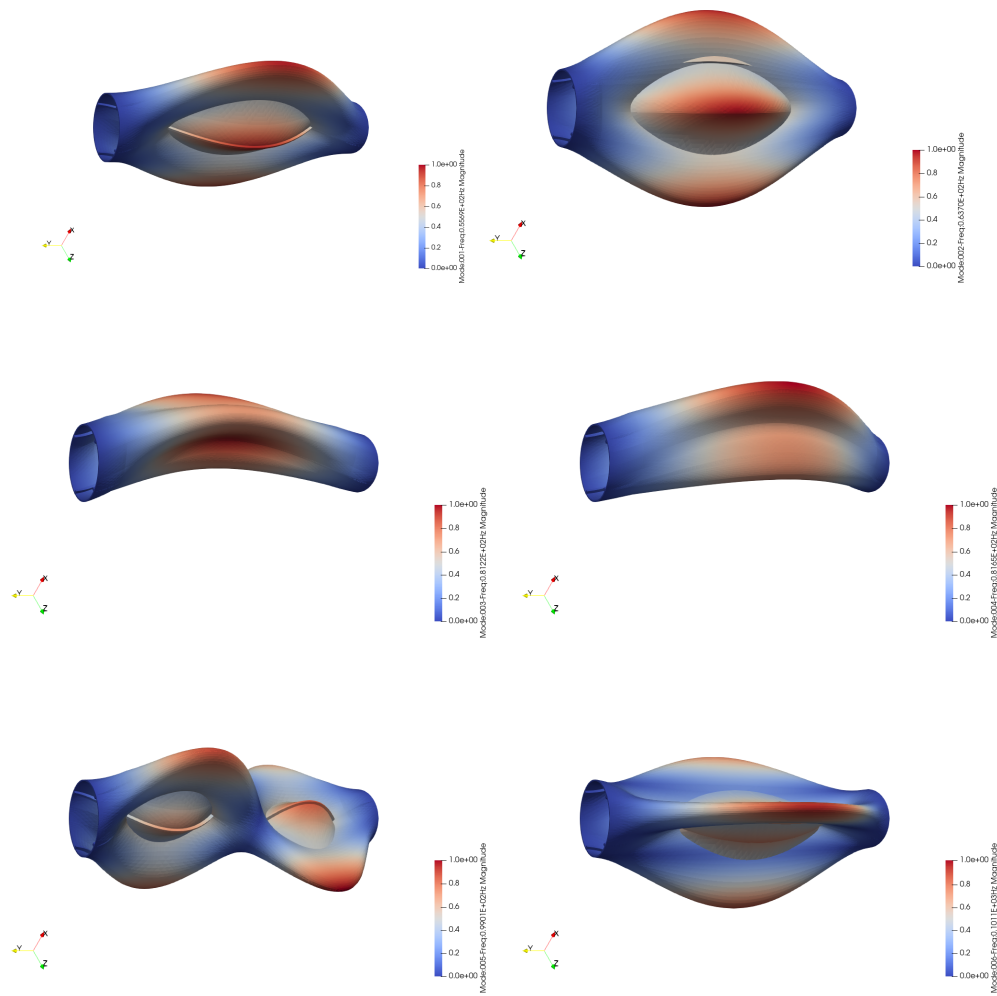


Figura 7.5: Forme modali utilizzando l'espansione di Lagrange del primo ordine lungo lo spessore con l'applicazione della tecnica MITC

Le forme modali ottenute nel caso di applicazione dell'espansione di Taylor del primo ordine, con e senza l'applicazione della tecnica del MITC, risultano simili tranne per i modi 2 e 6. Nel caso di applicazione dell'espansione di Lagrange del primo ordine, la forma modale relativa alla sesta frequenza naturale risulta diversa adottando o meno la tecnica del MITC.

## 7.1.2 Applicazione di irrigidimenti circolarziali

Di seguito sono riportate le prime sei frequenze naturali al variare della teoria strutturale nel caso di applicazione di irrigidimenti circolarziali, sia nel caso di mancata implementazione della tecnica del MITC sia in presenza di essa.

Modello	$f_1$ [Hz]	$f_2$ [Hz]	$f_3$ [Hz]	$f_4$ [Hz]	$f_5$ [Hz]	$f_6$ [Hz]
Q9-LE1	85.30	122.64	132.73	163.27	163.42	202.77
Q9-LE2	85.32	122.68	132.33	163.03	163.35	202.52
Q9-LE3	85.33	122.70	132.29	162.97	163.36	202.45
Q9-TE1	85.07	122.94	132.49	162.67	162.62	200.43
Q9-TE2	85.44	122.80	133.17	164.03	163.51	203.67
Q9-TE3	85.42	122.80	132.99	163.48	163.82	203.27

Tabella 7.3: Prime sei frequenze naturali utilizzando le espansioni di Lagrange e di Taylor dal primo al terzo ordine lungo lo spessore senza l'applicazione della tecnica MITC

Modello	$f_{1,M}$ [Hz]	$f_{2,M}$ [Hz]	$f_{3,M}$ [Hz]	$f_{4,M}$ [Hz]	$f_{5,M}$ [Hz]	$f_{6,M}$ [Hz]
Q9-LE1	83.93	122.64	107.13	143.11	162.41	186.43
Q9-LE2	83.94	122.68	106.63	142.62	162.47	186.11
Q9-LE3	83.95	122.70	106.59	142.59	162.49	187.57
Q9-TE1	83.55	122.94	106.53	141.50	161.52	182.68
Q9-TE2	84.07	107.40	122.80	143.52	162.65	189.84
Q9-TE3	84.04	122.80	107.19	143.26	162.60	186.73

Tabella 7.4: Prime sei frequenze naturali utilizzando le espansioni di Lagrange e di Taylor dal primo al terzo ordine lungo lo spessore con l'applicazione della tecnica MITC

Anche in questo caso, la variazione della teoria strutturale applicata lungo lo spessore non comporta notevoli differenze nelle frequenze proprie ottenute dalle analisi. Nel caso di non applicazione della tecnica del MITC, le frequenze ottenute con il modello TE1 presentano una differenza massima dell'1% rispetto alle frequenze ottenute con il modello LE3. Nel caso di applicazione della tecnica del MITC, invece, questa differenza è del 2.61%. Un caso particolare è quello di applicazione dell'espansione di Taylor del secondo ordine assieme alla tecnica del MITC: il modo 2 e il modo 3 assumono le frequenze dei modi 3 e 2 ottenute con le restanti teorie strutturali. L'implementazione della tecnica del MITC per la mitigazione

del locking influisce molto sulle frequenze naturali, con risultati che presentano delle differenze rispetto al caso in cui il MITC non venga preso in considerazione. Le differenze maggiori si riscontrano nei modi 3 e 4, quelle minori nei modi 2 e 5. Di seguito, si riportano le forme modali ottenute con le espansioni di Taylor e di Lagrange del primo ordine, con e senza l'applicazione del MITC.

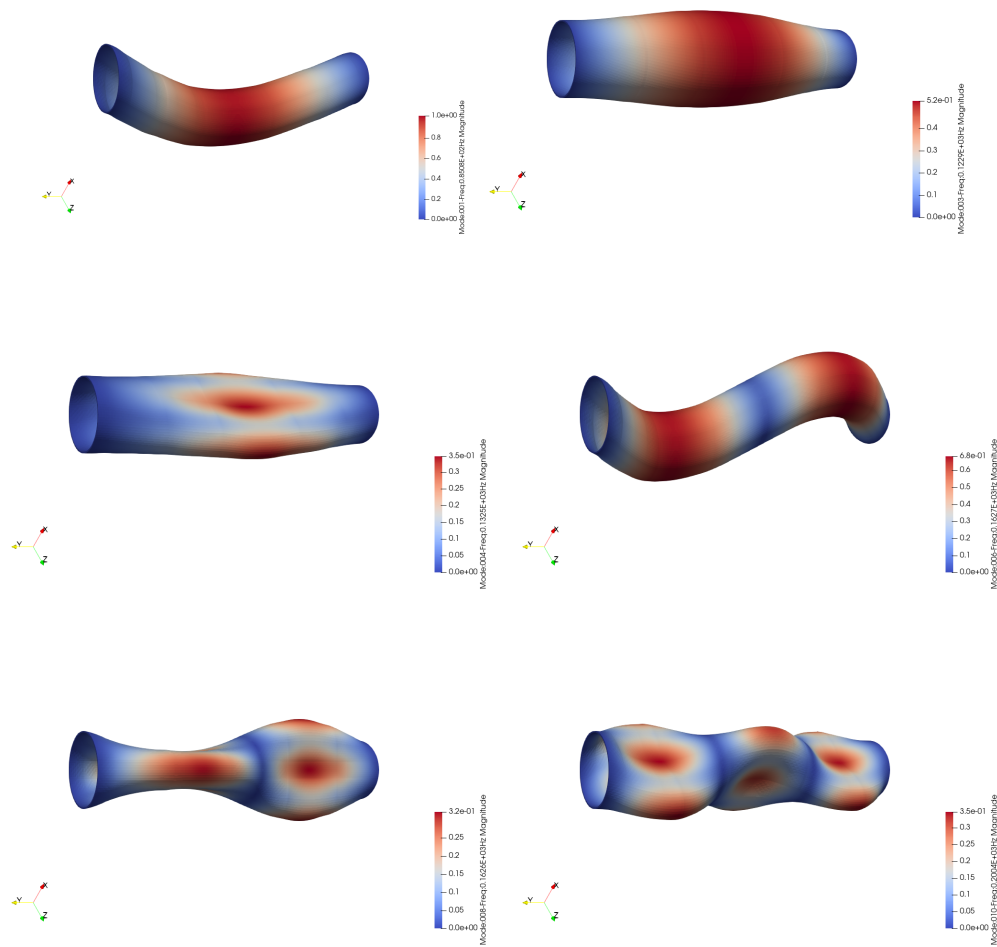


Figura 7.6: Forme modali utilizzando l'espansione di Taylor del primo ordine lungo lo spessore senza l'applicazione della tecnica MITC

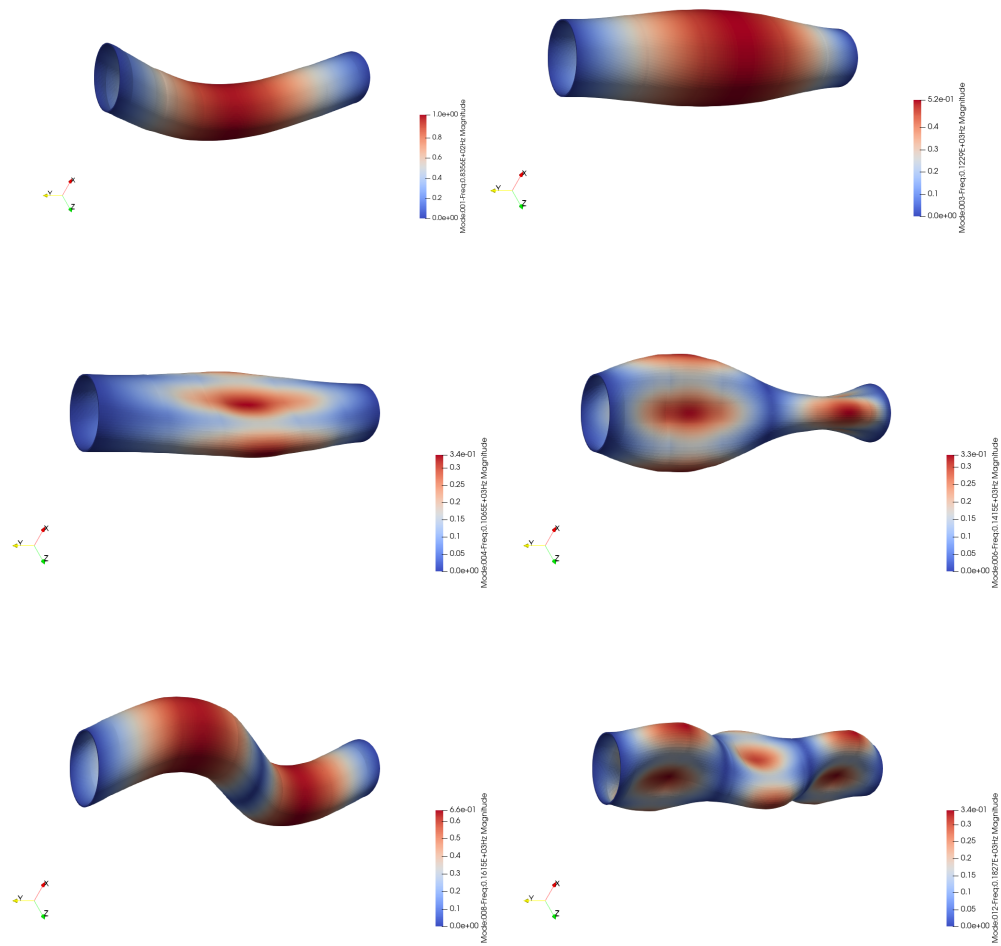


Figura 7.7: Forme modali utilizzando l'espansione di Taylor del primo ordine lungo lo spessore con l'applicazione della tecnica MITC

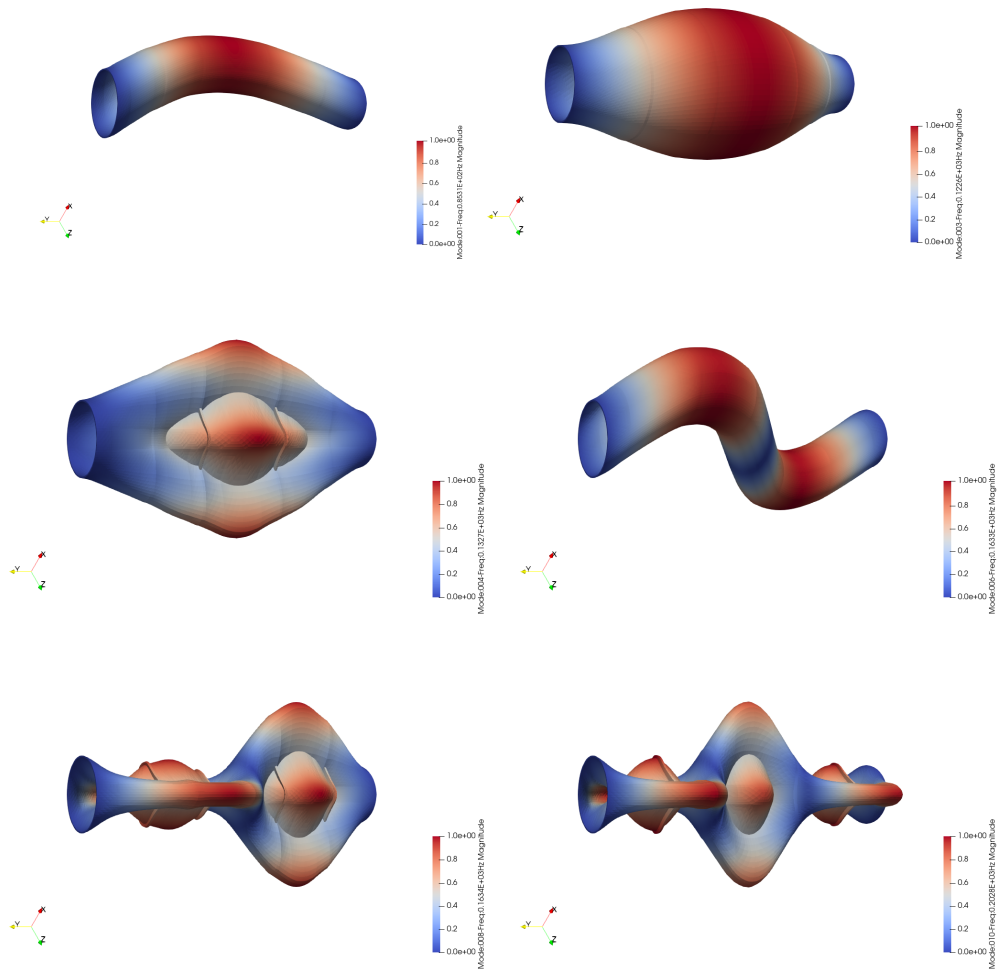


Figura 7.8: Forme modali utilizzando l'espansione di Lagrange del primo ordine lungo lo spessore senza l'applicazione della tecnica MITC

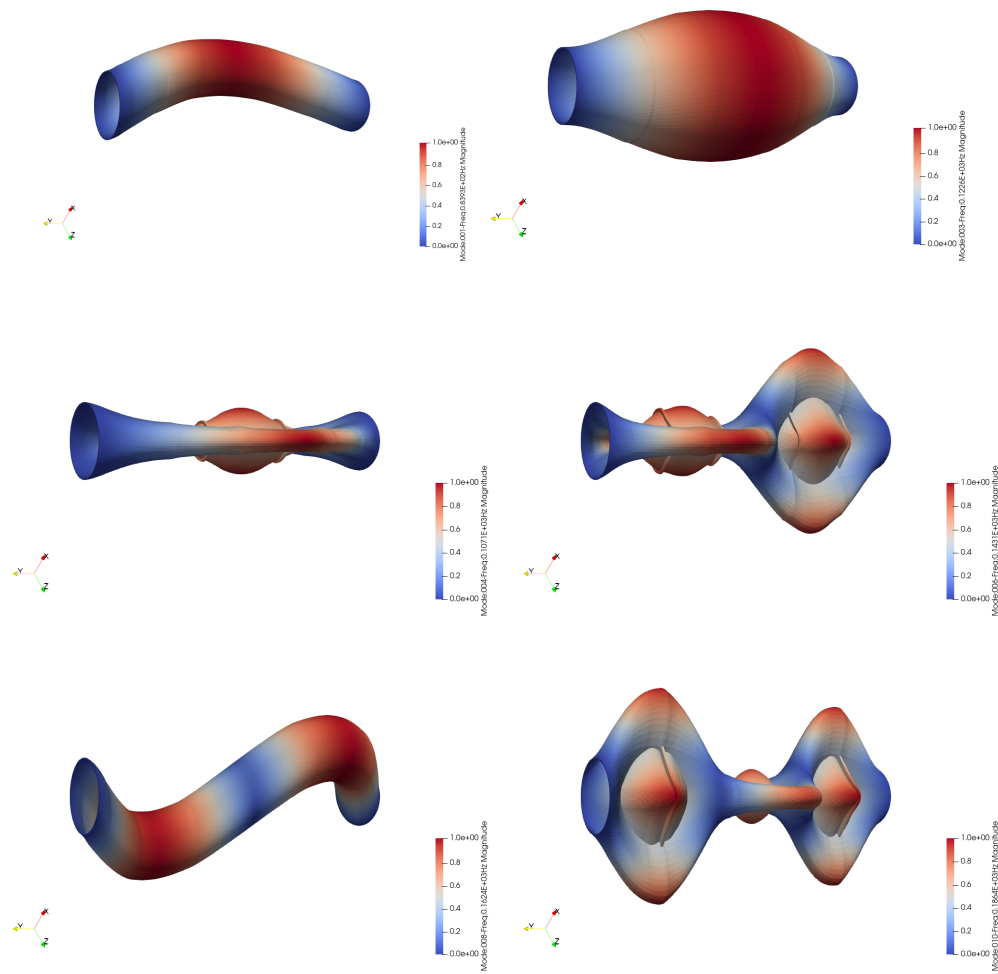


Figura 7.9: Forme modali utilizzando l'espansione di Lagrange del primo ordine lungo lo spessore con l'applicazione della tecnica MITC

Le forme modali ottenute con e senza l'applicazione della tecnica MITC utilizzando l'espansione di Taylor del primo ordine sono molto simili, solamente i modi 4 e 5 risultano invertiti, come si può notare confrontando le Figure 7.6 e 7.7. Nel caso di applicazione dell'espansione di Lagrange del primo ordine, le forme modali con e senza il MITC sono simili ma i modi 3 e 6 presentano le semionde in posizioni diverse. Inoltre, confrontando le Figure 7.8 e 7.9, si può notare un'inversione tra le forme modali dei modi 4 e 5.



## Confronto con il caso di cilindro in materiale composito a fibre dritte non rinforzato

In questa sezione si vogliono confrontare le frequenze ottenute con l'applicazione della tecnica MITC nel caso di cilindro a fibre dritte non irrigidito e irrigidito. Irrigidendo la struttura longitudinalmente si riscontra un abbassamento delle frequenze naturali relative ai primi sei modi di vibrare della struttura. Al contrario, l'applicazione di irrigidimenti circonferenziali comporta delle frequenze maggiori.

## 7.2 Cilindri irrigiditi in materiale composito a fibre curve

Il caso in esame è lo stesso presentato in Sezione 6.3, con l'aggiunta di irrigidimenti in acciaio longitudinali e circonferenziali disposti come mostrato in Figura 7.1.

### 7.2.1 Applicazione di irrigidimenti longitudinali

Di seguito sono riportate le prime sei frequenze naturali ottenute con l'applicazione delle espansioni di Taylor e di Lagrange dal primo al terzo ordine sullo spessore nel caso di applicazione di irrigidimenti longitudinali. I risultati riportati sono stati ottenuti sia senza l'implementazione della tecnica del MITC sia con l'applicazione di essa.

Modello	$f_1$ [Hz]	$f_2$ [Hz]	$f_3$ [Hz]	$f_4$ [Hz]	$f_5$ [Hz]	$f_6$ [Hz]
Q9-LE1	68.10	76.11	96.49	96.71	117.30	128.30
Q9-LE2	68.01	76.11	96.44	96.66	117.24	127.94
Q9-LE3	68.03	76.05	96.44	96.66	117.26	127.93
Q9-TE1	67.70	74.14	94.58	94.99	115.68	129.09
Q9-TE2	69.06	76.43	96.83	97.06	118.27	130.60
Q9-TE3	68.51	76.29	96.71	96.94	117.73	129.23

Tabella 7.5: Prime sei frequenze naturali utilizzando le espansioni di Lagrange e di Taylor dal primo al terzo ordine lungo lo spessore senza l'applicazione della tecnica MITC

Modello	$f_{1,M}$ [Hz]	$f_{2,M}$ [Hz]	$f_{3,M}$ [Hz]	$f_{4,M}$ [Hz]	$f_{5,M}$ [Hz]	$f_{6,M}$ [Hz]
Q9-LE1	59.51	66.74	92.24	93.23	100.33	101.62
Q9-LE2	59.48	66.71	92.13	93.18	100.17	101.47
Q9-LE3	59.48	66.65	92.12	93.17	100.13	101.39
Q9-TE1	58.40	64.18	91.72	91.67	99.89	101.49
Q9-TE2	60.26	67.05	93.38	93.97	101.62	102.96
Q9-TE3	60.01	66.91	92.93	93.67	101.07	102.34

Tabella 7.6: Prime sei frequenze naturali utilizzando le espansioni di Lagrange e di Taylor dal primo al terzo ordine lungo lo spessore con l'applicazione della tecnica MITC

Le frequenze ottenute riportate nelle Tabelle 7.5 e 7.6 non mostrano, ancora una volta, notevoli differenze applicando teorie strutturali lungo lo spessore differenti. Nel caso di non applicazione della tecnica del MITC, le frequenze ottenute con il modello TE1 presentano una differenza massima del 2.51% rispetto alle frequenze ottenute con il modello LE3. Nel caso di applicazione della tecnica del MITC, invece, questa differenza è del 3.70%. Anche in questo caso, però, l'applicazione della tecnica del MITC causa una variazione importante nei risultati rispetto al caso in cui essa non venga implementata. Differenze importanti possono essere riscontrate confrontando, ad esempio, le frequenze relative ai modi 5 e 6. Di seguito, sono riportate le forme modali ottenute con le teorie di espansione di Taylor e di Lagrange del primo ordine, sia nel caso di implementazione del MITC sia nel caso di assenza di questa tecnica.

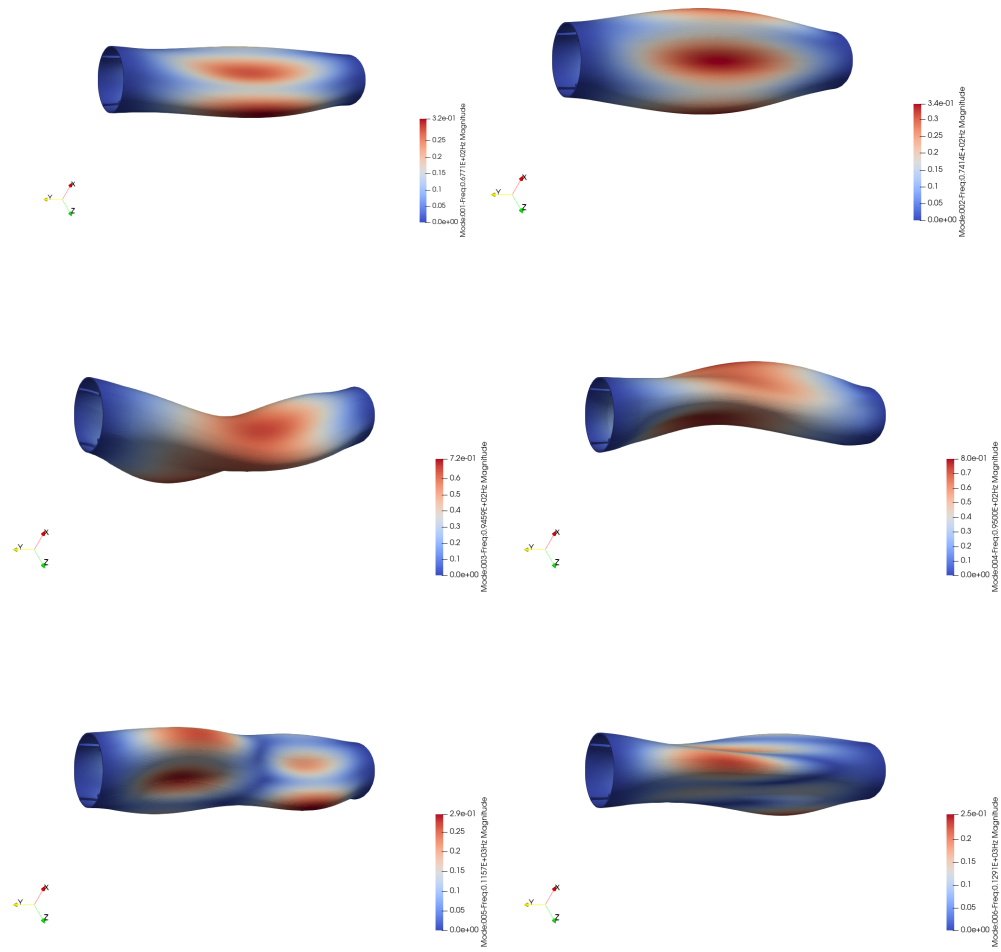


Figura 7.10: Forme modali utilizzando l'espansione di Taylor del primo ordine lungo lo spessore senza l'applicazione della tecnica MITC

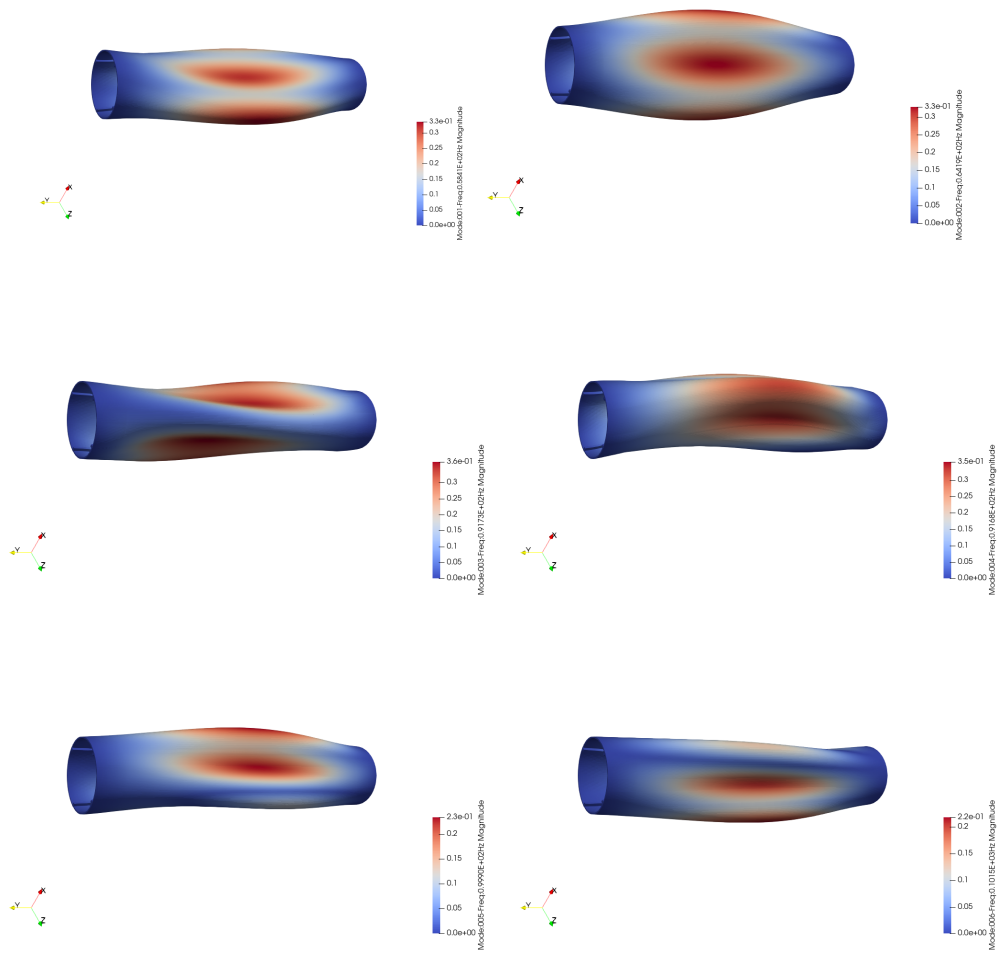


Figura 7.11: Forme modali utilizzando l'espansione di Taylor del primo ordine lungo lo spessore con l'applicazione della tecnica MITC

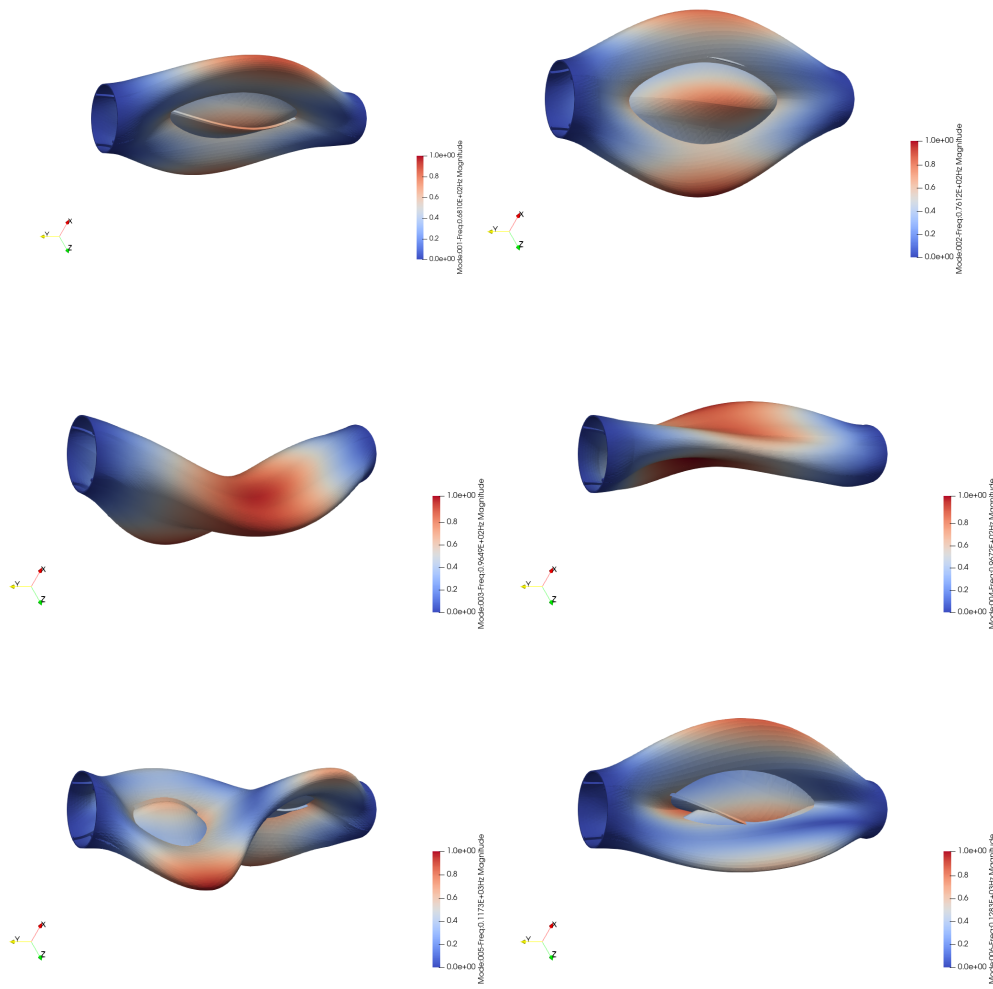


Figura 7.12: Forme modali utilizzando l'espansione di Lagrange del primo ordine lungo lo spessore senza l'applicazione della tecnica MITC

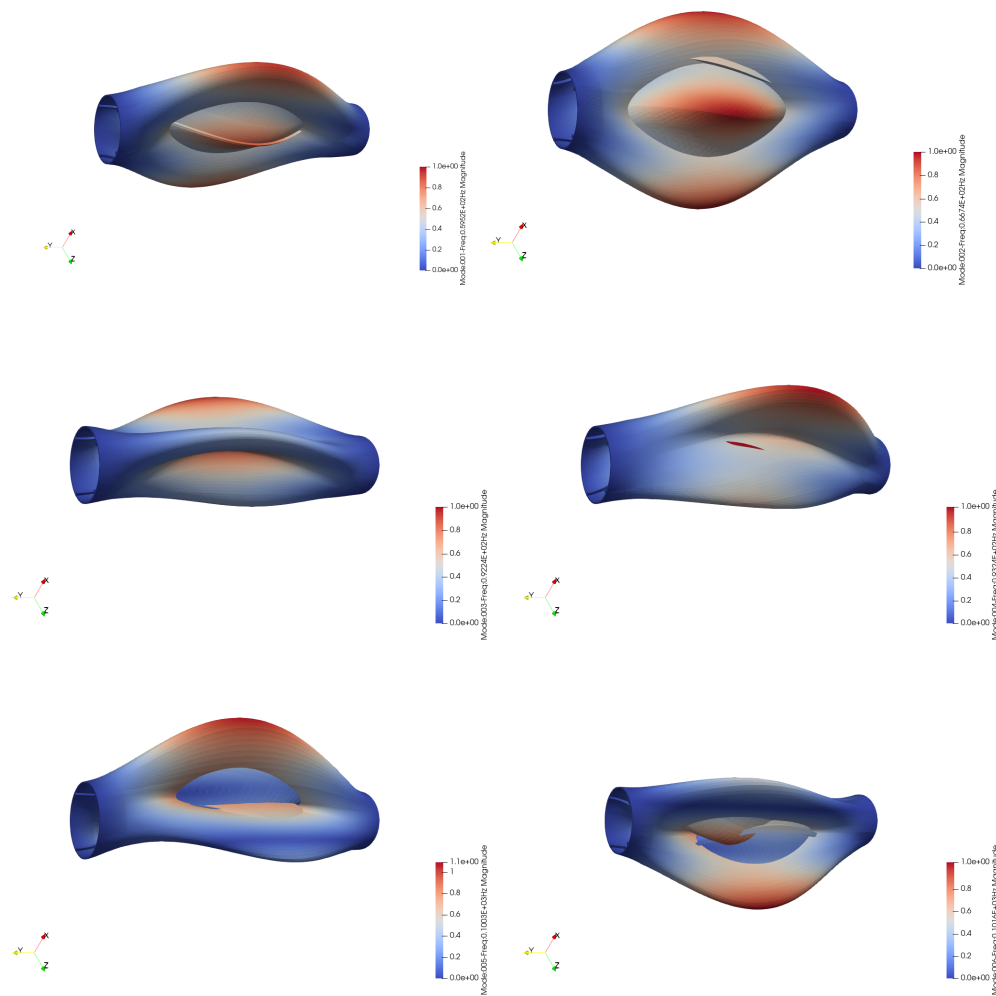


Figura 7.13: Forme modali utilizzando l'espansione di Lagrange del primo ordine lungo lo spessore con l'applicazione della tecnica MITC

Confrontando le Figure 7.10 e 7.11, riportanti i risultati ottenuti con la teoria di espansione TE1, si può notare che le forme modali nel caso di implementazione della tecnica del MITC e nel caso di mancata applicazione di essa mostrano delle differenze. Fanno eccezione i primi due modi di vibrare a cui sono associati dei modi di deformazione della struttura praticamente coincidenti. Lo stesso può essere concluso nel caso di applicazione della teoria LE1 in quanto, confrontando le Figure 7.12 e 7.13, risulta evidente come le prime due forme modali siano uguali. In aggiunta, in quest'ultimo caso, anche le forme modali relative alla sesta frequenza naturale risultano simili, con una variazione solamente della posizione

delle semionde.

## 7.2.2 Applicazione di irrigidimenti circonferenziali

Di seguito sono riportate le frequenze relative ai primi sei modi di vibrare nel caso di presenza di irrigidimenti circonferenziali, ottenute con l'applicazione delle espansioni di Taylor e di Lagrange dal primo al terzo ordine, nel caso di applicazione o meno della tecnica del MITC.

Modello	$f_1$ [Hz]	$f_2$ [Hz]	$f_3$ [Hz]	$f_4$ [Hz]	$f_5$ [Hz]	$f_6$ [Hz]
Q9-LE1	99.89	100.81	130.57	130.77	146.23	170.05
Q9-LE2	99.88	100.80	130.16	130.36	146.24	169.67
Q9-LE3	100.82	99.89	130.10	130.30	146.27	169.40
Q9-TE1	97.69	96.53	129.21	129.04	143.11	167.52
Q9-TE2	100.13	101.06	131.21	131.41	146.63	170.66
Q9-TE3	100.06	100.99	130.93	131.13	146.51	170.34

Tabella 7.7: Prime sei frequenze naturali utilizzando le espansioni di Lagrange e di Taylor dal primo al terzo ordine lungo lo spessore senza l'applicazione della tecnica MITC

Modello	$f_{1,M}$ [Hz]	$f_{2,M}$ [Hz]	$f_{3,M}$ [Hz]	$f_{4,M}$ [Hz]	$f_{5,M}$ [Hz]	$f_{6,M}$ [Hz]
Q9-LE1	98.37	99.20	106.73	107.03	145.87	152.04
Q9-LE2	98.33	99.15	106.19	106.50	145.86	151.53
Q9-LE3	99.16	98.34	106.14	106.45	145.88	151.26
Q9-TE1	95.50	94.39	104.07	103.84	141.77	147.50
Q9-TE2	98.63	99.47	107.21	107.51	146.27	152.45
Q9-TE3	98.54	99.37	106.89	107.20	146.13	152.07

Tabella 7.8: Prime sei frequenze naturali utilizzando le espansioni di Lagrange e di Taylor dal primo al terzo ordine lungo lo spessore con l'applicazione della tecnica MITC

Come riscontrano nei casi analizzati precedentemente, la variazione della teoria strutturale applicata lungo lo spessore, sia in presenza della tecnica MITC sia in assenza di essa, non comporta notevoli differenze nelle frequenze naturali ottenute. Nel caso di non applicazione della tecnica del MITC, le frequenze ottenute con il modello TE1 presentano una differenza massima del 3.36% rispetto alle frequenze ottenute con il modello LE3. Nel caso di applicazione della tecnica del MITC,

invece, questa differenza è del 4%. Ancora una volta, la tecnica MITC porta alla generazione di frequenze naturali differenti da quelle riportate in Tabella 7.7, con delle differenze importanti per alcuni modi di vibrare, come i modi 3, 4 e 6. Di seguito si riportano le forme modali ottenute con le espansioni di Taylor e di Lagrange del primo ordine, con e senza il MITC.

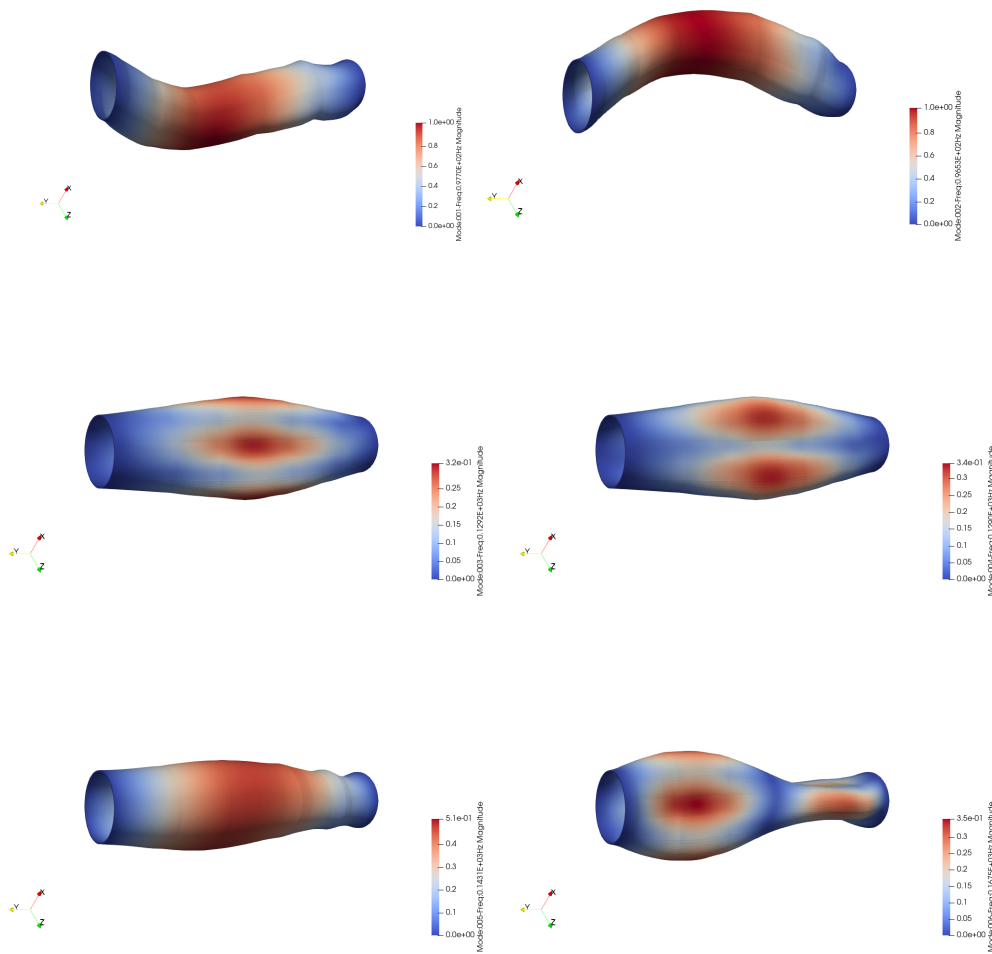


Figura 7.14: Forme modali utilizzando l'espansione di Taylor del primo ordine lungo lo spessore senza l'applicazione della tecnica MITC



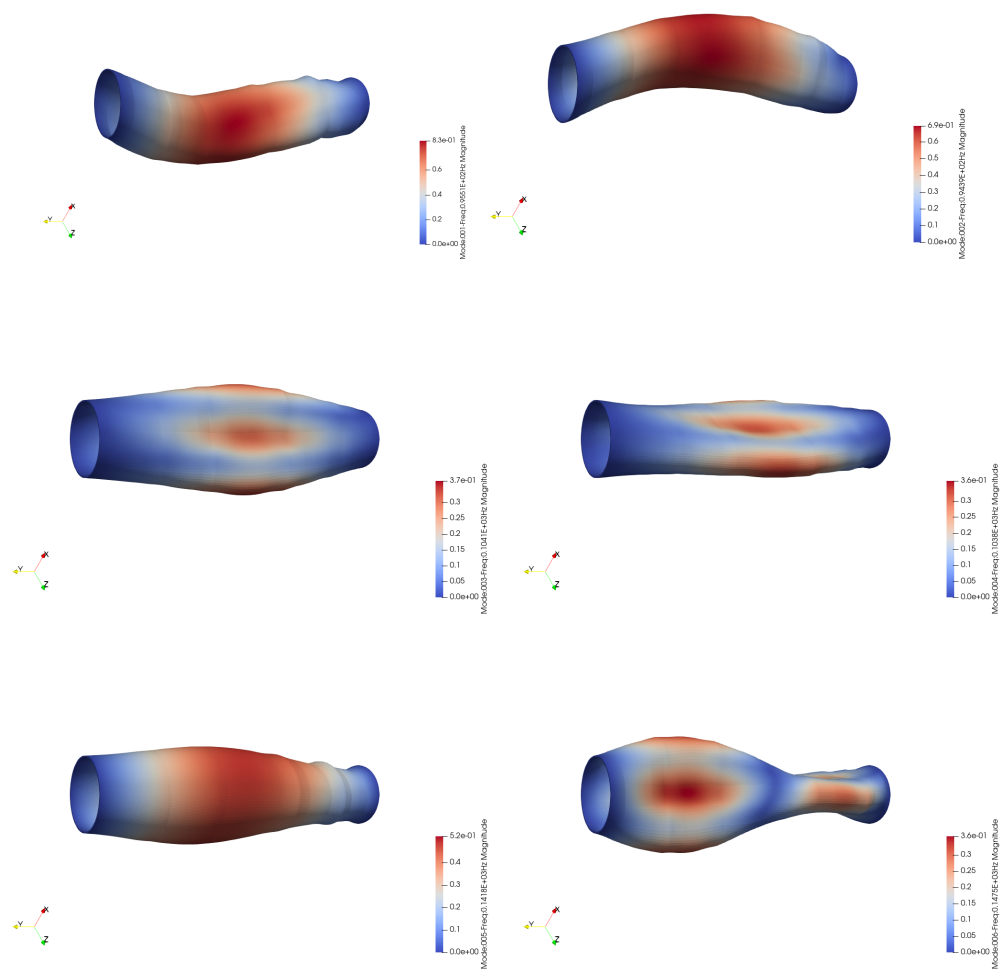


Figura 7.15: Forme modali utilizzando l'espansione di Taylor del primo ordine lungo lo spessore con l'applicazione della tecnica MITC

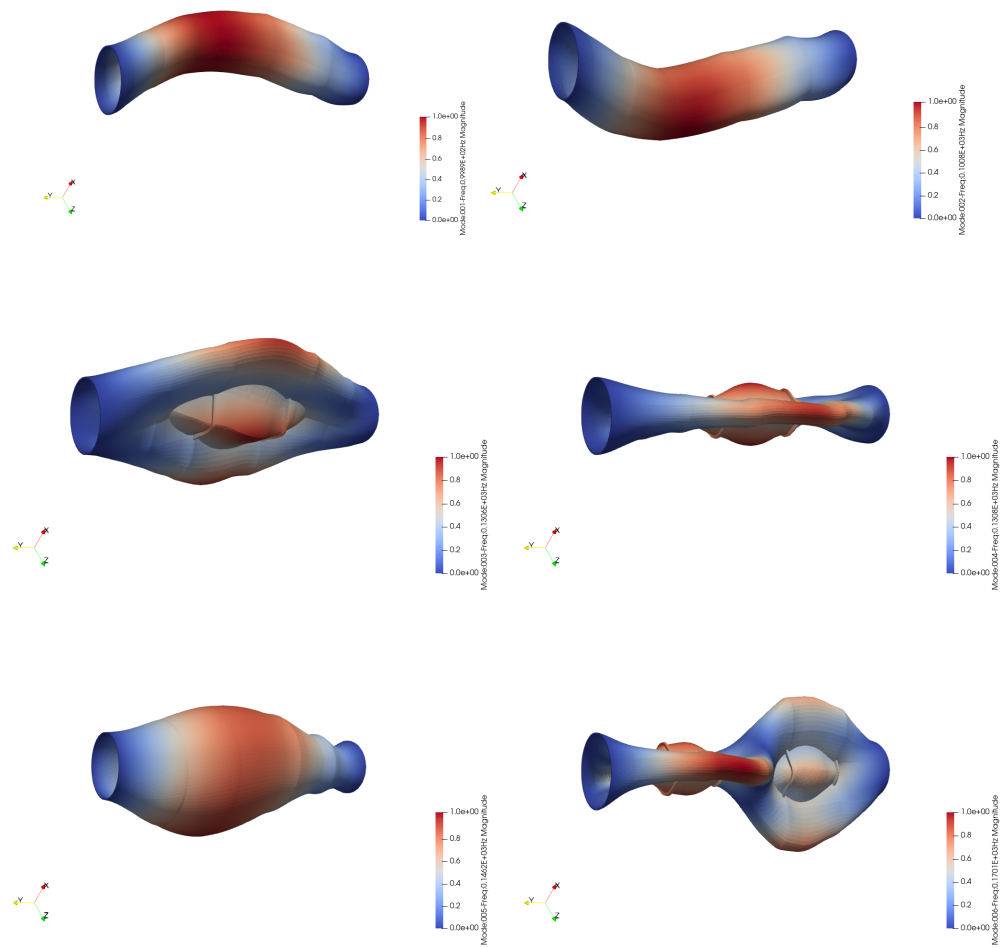


Figura 7.16: Forme modali utilizzando l'espansione di Lagrange del primo ordine lungo lo spessore senza l'applicazione della tecnica MITC

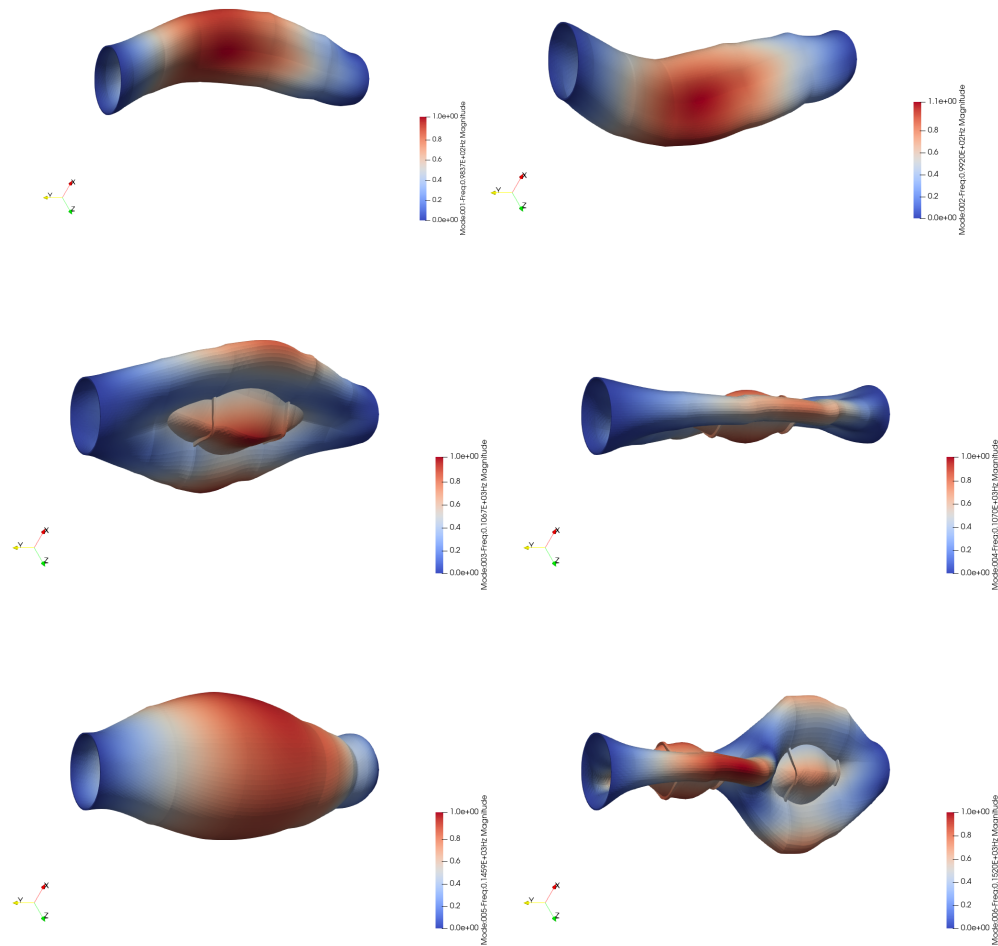


Figura 7.17: Forme modali utilizzando l'espansione di Lagrange del primo ordine lungo lo spessore con l'applicazione della tecnica MITC

Confrontando le forme modali ottenute con l'applicazione dell'espansione TE1, riportate in Figura 7.14 e 7.15, l'applicazione della tecnica MITC non comporta notevoli differenze, fatta eccezione per il modo 4. Le forme modali ottenute con l'espansione LE1, con e senza la tecnica MITC, risultano molto simili.

### Confronto con il caso di cilindro in materiale composito a fibre curve non rinforzato

In questa sezione si vogliono confrontare le frequenze relative alla struttura cilindrica a fibre curve analizzata in Sezione 6.3 e alla struttura cilindrica a fibre curve

con irrigidimenti, ottenute con l'applicazione della tecnica MITC. Si può notare un lieve abbassamento delle frequenze relative ai primi sei modi di vibrare irrigidendo la struttura longitudinalmente. L'applicazione di irrigidimenti circonferenziali comporta, al contrario, un aumento delle frequenze. Lo stesso cambiamento nelle frequenze è stato riscontrato nel caso di cilindro a fibre dritte.

### **Confronto tra cilindri rinforzati a fibre dritte e a fibre curve**

Confrontando ora i cilindri in materiale composito a fibre dritte e a fibre curve, nel caso di applicazione di irrigidimenti longitudinali, si può notare che le frequenze risultano maggiori applicando fibre curve. In presenza di irrigidimenti circonferenziali, invece, le frequenze relative al cilindro a fibre curve risultano minori rispetto a quelle ottenute per il caso a fibre dritte.

# Capitolo 8

## Conclusioni

I materiali compositi Variable Angle Tow sono materiali compositi innovativi in cui l'orientamento delle fibre nel piano non segue strettamente un percorso rettilineo ma può assumere una caratteristica curvilinea. Questa peculiarità permette di espandere ulteriormente i vantaggi riscontrati dall'utilizzo di materiali compositi classici in alternativa ai metalli, con un ulteriore miglioramento dei rapporti rigidezza-peso e resistenza-peso [12]. I compositi a fibre curve rappresentano la frontiera dell'ingegneria aerospaziale, offrendo soluzioni innovative per superare i limiti delle configurazioni tradizionali. Diversi sono gli studi volti ad esplorare i significativi vantaggi che l'applicazione di materiali compositi VAT può portare, sia in ambito aeronautico, con la concezione di configurazioni alternative di ali e fusoliere, sia in ambito spaziale, con la concezione di nuove configurazioni di lanciatori e serbatoi di propellente. A tal proposito, in questo lavoro, sono state analizzate strutture di largo impiego nel settore dell'aerospazio, studiando la risposta statica e dinamica di quest'ultime. Nel Capitolo 3 è stata analizzata la risposta statica di una piastra incastrata su tutti i lati, nel caso di applicazione di materiali compositi classici e di materiali compositi VAT. In entrambi i casi, sono state considerate delle laminazioni fissate, procedendo con le analisi tramite modelli high-order. Quest'ultimi hanno permesso di catturare con precisione il comportamento statico dei casi in esame.

Tipologia di piastra	$\sigma_{xx}$ [kPa]	$\sigma_{yy}$ [kPa]	$\sigma_{zz}$ [kPa]	$\sigma_{xz}$ [kPa]	$\sigma_{yz}$ [kPa]	$\sigma_{xy}$ [kPa]
Fibre dritte	-0.424	-49.2	-5.30	-6.51	-6.76	-0.00211
Fibre curve	-4.27	1.95	-6.08	-12.5	-13.5	3.47

Tabella 8.1: Valori delle tensioni nel punto  $(-\frac{a}{4}, -\frac{b}{4}, 0)$  della piastra a fibre dritte e curve. Si riportano i valori ottenuti con una mesh nel piano  $10 \times 10$  e la teoria LE3

Tipologia di piastra	$u_x \times 10^{-6}$ [m]	$u_y \times 10^{-6}$ [m]	$u_z \times 10^{-5}$ [m]
Fibre dritte	-0.208	0.208	-0.283
Fibre curve	-0.233	0.250	-0.285

Tabella 8.2: Valori dello spostamento nel punto  $(-\frac{a}{4}, -\frac{b}{4}, 0)$  della piastra a fibre dritte e curve. Si riportano i valori ottenuti con una mesh nel piano  $10 \times 10$  e la teoria LE3

L'analisi statica di un pannello curvo a sei strati realizzato in VAT e incastrato su due lati, svolta nel Capitolo 4, ha mostrato come i valori dello spostamento e delle tensioni tendano, nella maggior parte dei casi, a non subire notevoli modifiche al variare della teoria strutturale. La non influenza della teoria applicata lungo lo spessore sui risultati può essere riscontrata anche nelle analisi dinamiche svolte nei Capitoli 5, 6 e 7: in tutti i casi esaminati, le frequenze naturali mostrano omogeneità passando da un modello all'altro. Dall'analisi dinamica di un pannello curvo incernierato su due lati a tre strati, affrontata nel Capitolo 5, risulta che l'aumento dello spessore della struttura provoca un aumento delle frequenze proprie, come mostrato nella Tabella 8.3.

Caso	$f_1$ [Hz]	$f_2$ [Hz]	$f_3$ [Hz]	$f_4$ [Hz]	$f_5$ [Hz]
$\frac{h}{L} = 0.02$	0.07545	0.09008	0.09990	0.1161	0.1304
$\frac{h}{L} = 0.025$	0.07922	0.09177	0.1227	0.1335	0.1565
$\frac{h}{L} = 0.1$	0.1352	0.1971	0.4069	0.4549	0.5437

Tabella 8.3: Confronto tra le prime cinque frequenze naturali al variare dello spessore del guscio. I risultati riportati sono ottenuti con l'impiego della teoria LE3

Nei Capitoli 6 e 7 è stata investigata l'importanza dell'adozione della tecnica del MITC per la mitigazione del fenomeno del locking. In tutti i casi analizzati in questi capitoli, si può notare come alle frequenze naturali ottenute siano associati dei valori differenti adottando o meno la tecnica della componente tensoriale di integrazione mista. Le analisi dinamiche del cilindro incastrato sulle due estremità a quattro strati non irrigidito mostrano che le frequenze naturali nel caso di applicazione di fibre curve sono minori rispetto a quelle ottenute con fibre dritte, come è possibile osservare dalla Tabella 8.4.

Caso	$f_{1,M}$ [Hz]	$f_{2,M}$ [Hz]	$f_{3,M}$ [Hz]	$f_{4,M}$ [Hz]	$f_{5,M}$ [Hz]	$f_{6,M}$ [Hz]
Fibre dritte	66.17	91.17	114.47	116.61	132.25	132.72
Fibre curve	68.68	68.51	99.03	99.80	114.39	114.39

Tabella 8.4: Confronto delle frequenze del cilindro a fibre dritte e curve. I risultati riportati sono stati ottenuti con la teoria LE3 e l'applicazione della tecnica MITC

Nel caso di cilindro in materiale composito a fibre dritte rinforzato, si può notare un abbassamento delle frequenze naturali applicando irrigidimenti longitudinali. Al contrario, l'applicazione di irrigidimenti circonferenziali implica delle frequenze maggiori. Questo comportamento è riscontrato anche nel caso di cilindro a fibre curve irrigidito, come è possibile osservare dalle seguenti tabelle. Si precisa che tramite l'utilizzo di modelli Layer Wise, il cilindro e gli irrigidimenti vengono modellati in modo indipendente. Questo approccio consente di catturare in modo dettagliato il comportamento locale degli irrigidimenti, evidenziando i modi locali ad essi associato.

Cilindro a fibre dritte	$f_{1,M}$ [Hz]	$f_{2,M}$ [Hz]	$f_{3,M}$ [Hz]	$f_{4,M}$ [Hz]	$f_{5,M}$ [Hz]	$f_{6,M}$ [Hz]
Non irrigidito	66.17	91.17	114.47	116.61	132.25	132.72
Irrigidimenti longitudinali	55.66	63.63	81.19	81.61	98.97	100.87
Irrigidimenti circonferenziali	83.95	122.70	106.59	142.59	162.49	187.57

Tabella 8.5: Confronto delle frequenze del cilindro a fibre dritte non irrigidito e irrigidito. I risultati riportati sono stati ottenuti con la teoria LE3 e l'applicazione della tecnica MITC

Cilindro a fibre curve	$f_{1,M}$ [Hz]	$f_{2,M}$ [Hz]	$f_{3,M}$ [Hz]	$f_{4,M}$ [Hz]	$f_{5,M}$ [Hz]	$f_{6,M}$ [Hz]
Fibre curve	68.68	68.51	99.03	99.80	114.39	114.39
Irrigidimenti longitudinali	59.48	66.65	92.12	93.17	100.13	101.39
Irrigidimenti circonferenziali	99.16	98.34	106.14	106.45	145.88	151.26

Tabella 8.6: Confronto delle frequenze del cilindro a fibre curve non irrigidito e irrigidito. I risultati riportati sono stati ottenuti con la teoria LE3 e l'applicazione della tecnica MITC

Dalle Tabelle 8.5 e 8.6, si può ancora notare che al cilindro a fibre curve dotato di irrigidimenti longitudinali sono associate delle frequenze maggiori rispetto al cilindro a fibre dritte con irrigidimenti longitudinali. Al contrario, il cilindro in VAT irrigidito circonferenzialmente mostra delle frequenze naturali minori rispetto al cilindro in materiale composito classico dotato degli stessi elementi di rinforzo.

# Bibliografia

- [1] F. Vannucci E. Santarpia R. Cavallaro L. Demasi G. Biagini. *Equivalent Single Layer, Zig-Zag, and Layer Wise theories for variable angle tow composites based on Generalized Unified Formulation*. 2017.
- [2] A. Pagani E. Carrera A. R. Sanchez-Majano R. Azzara. *Accurate stress analysis of variable angle tow shells by high order equivalent single layer wise finite element models*. 2021.
- [3] J. Halbritter R. Wehbe R. Harik A. Brasington C. Sacco. *Automated fiber placement: A review of history, current technologies, and future paths forward*. 2021.
- [4] K. Potter B. Chul Kim P. M. Weaver. *Manufacturing characteristics of the continuous tow shearing method for manufacturing of variable angle tow composites*. 2014.
- [5] P. Weaver K. Potter B.C. Kim K. Hazra. *Limitations of fibre placement techniques for variable angle tow composites and their process-induced defects*. 2011.
- [6] E. Carrera A. Pagani E. Zappino N. Fallahi A. Viglietti. *Effect of fiber orientation path on the buckling, free vibration and static analyses of variable angle tow panels*. 2020.
- [7] A. Pagani. *Dal discreto al continuo: richiami di meccanica dei solidi, dispense del corso "Strutture per Veicoli Spaziali"*. 2023.
- [8] P. Nali E. Carrera M. Cinefra. *MITC technique extended to variable kinematic multilayered plate elements*. 2010.
- [9] E. Carrera A. Pagani R. Azzara. *Geometrically nonlinear analysis and vibration of in-plane-loaded variable angle tow composite plates and shells*. 2022.
- [10] E. Carrera R. Azzara M. Filippi. *Vibration analysis of rotating variable-angle-tow composite cylindrical structures via high-fidelity shell models*. 2024.



- [11] E. Carrera M. Cinefra S. Valvano S. Keshava Kumar D. Harursampath. *Modal analysis of delaminated plates and shells using Carrera Unified Formulation-MITC9 shell element.* 2017.
- [12] Graeme J. Kennedy Timothy R. Brooks Joaquim R. R. A. Martins. *High-fidelity Aerostructural Optimization of Tow-steered Composite Wings.* 2019.