



**Politecnico  
di Torino**

# **Politecnico di Torino**

**Corso di Laurea Magistrale in Ingegneria Aerospaziale  
Sessione di Laurea dicembre 2024**

## **Analisi agli elementi finiti di strutture a spessore variabile gestite tramite la funzione Offset**

Relatore:

Prof. Marco Gherlone

Candidato:

Fabio Alberto Migliori

**Anno Accademico 2023-2024**



## Sommario

L'analisi agli elementi finiti (FEM - Finite Element Method) rappresenta uno degli strumenti più potenti e versatili utilizzati in ingegneria per la simulazione e lo studio del comportamento di strutture aerospaziali.

Per questo motivo è fondamentale comprendere il funzionamento degli strumenti che consentono di operare questo tipo di analisi in modo da poterne sfruttare correttamente le capacità e ridurre il livello d'errore.

Lo scopo di questo documento è indagare le modalità attraverso cui i principali software disponibili in commercio, MSC Patran-Nastran, consentono di creare modelli agli elementi finiti di strutture caratterizzate dalla graduale variazione di spessore e l'effetto che queste tecniche generano nell'ambito delle analisi statiche e dinamiche.

In particolare, si è posta attenzione sulle funzioni CQUAD ZOFFS e PCOMP Z0 utilizzate in Patran, delle quali sono state studiate le fondamentali matematiche per comprenderne le differenze e i relativi vantaggi.

Nello specifico, in questo testo verranno valutate le possibili differenze generate dall'impiego dei due approcci nell'ambito della risoluzione di problemi statici e dinamici.

Al fine di ottenere una visione più chiara e completa del funzionamento di queste funzioni, verrà inoltre presentato un modello di calcolo implementato in Matlab che ricostruisce gli aspetti matematici celati nei codici commerciali. In secondo luogo verranno ricercate le migliori condizioni di impiego di tali funzioni modificando la disposizione dei piani di riferimento. Lo studio è condotto sviluppando in Patran dei modelli che impiegano diversi valori di Offset e confrontando i risultati ottenuti con un modello tridimensionale di riferimento.

Inoltre, saranno presentati come casi studio le analisi condotte su pannelli piani a spessore variabile, costruiti sia in materiale isotropo che composito-laminato, e su un serbatoio cilindrico in composito.

Tra i risultati ottenuti dalle analisi vi è soprattutto la dimostrazione della totale equivalenza delle funzioni PCOMP Z0 e CQUAD ZOFFS in campo statico e dinamico, ottenuta attraverso la perfetta corrispondenza dei valori degli spostamenti e delle frequenze proprie.





# Indice

<b>Elenco delle figure</b>	v
<b>1 Introduzione</b>	13
1.1 Overview sulle costruzioni aerospaziali	13
1.2 I materiali compositi-laminati	16
1.3 Obiettivi	19
<b>2 Elementi finiti bidimensionali basati sulla teoria di Mindlin-Reissner</b>	21
2.1 Reissner-Mindlin plate theory	21
2.2 Equazioni del moto	23
2.3 Il metodo degli elementi finiti	25
2.3.1 Funzioni di forma	25
2.3.2 Calcolo delle matrici di massa e rigidezza	27
2.4 La funzione Plate Offset	29
2.4.1 CQUAD ZOFFS	30
2.4.2 PCOMP Z0	32
<b>3 Analisi di strutture piane</b>	34
3.1 Presentazione dei casi studio	34
3.1.1 Modello 2D shell	36
3.1.2 Modello 3D-HEX8	37
3.2 Validazione del codice Matlab	40
3.3 Confronto tra ZOFFS e Z0	41
3.4 Analisi Nastran	47
3.4.1 Analisi statica	47
3.4.2 Analisi modale	55
3.5 Ricerca del miglior posizionamento del piano nodale	57
3.5.1 Introduzione	57
3.5.2 Modelli 3D-HEX8	59
3.5.3 Modelli 2D - Caso 2	62
3.5.4 Valutazione dei risultati	65

3.5.5	Analisi statica . . . . .	66
3.5.6	Analisi dinamica . . . . .	69
<b>4</b>	<b>Analisi del serbatoio in composito</b>	<b>72</b>
4.1	Serbatoio cilindrico . . . . .	72
4.2	Modello 2D-QUAD4 . . . . .	75
4.3	Modello 3D-HEX8 . . . . .	76
4.4	Confronto tra ZOFFS e Z0 . . . . .	78
4.4.1	Analisi statica . . . . .	78
4.4.2	Analisi modale . . . . .	80
4.5	Posizionamento del piano nodale . . . . .	82
4.5.1	Analisi statica . . . . .	82
4.5.2	Analisi modale . . . . .	85
<b>5</b>	<b>Conclusioni</b>	<b>86</b>
	<b>Bibliografia</b>	<b>88</b>

# Elenco delle figure

1.1	Struttura alare di un velivolo civile [2] . . . . .	14
1.2	Serbatoio criogenico in materiale composito in spessore sottile [5] . . . . .	14
1.3	Struttura alare reale [2] . . . . .	16
1.4	Rappresentazione del principio di funzionamento dei materiali compositi-laminati [2] . . . . .	17
1.5	Materiali in uso sul Boeing 787 [9] . . . . .	17
1.6	Particolare dell'ala in composito del 787 [11] . . . . .	18
1.7	Particolare della fusoliera del 787[12] . . . . .	18
1.8	Serbatoio in composito testato da NASA [5] . . . . .	19
2.1	Trasformazione di un generico elemento nel master element . . . . .	26
2.2	Funzionamento di ZOFFS e Z0 . . . . .	30
2.3	Relazione tra piano nodale e piano di riferimento . . . . .	31
2.4	Formato di definizione dell'elemento QUAD4 in Nastran . . . . .	32
2.5	Formato di definizione dei materiali compositi in Nastran . . . . .	33
3.1	Rappresentazione del pannello in esame . . . . .	34
3.2	Modello 2D Patran . . . . .	36
3.3	Scheda dei materiali <i>laminata</i> del modello 2D . . . . .	36
3.4	Forze agenti nel modello 2D . . . . .	37
3.5	Modello Patran 3D . . . . .	37
3.6	Stacking sequence per il modello 3D . . . . .	38
3.7	Posizionamento del carico . . . . .	39
3.8	Confronto degli spostamenti trasversali dei modelli 2D Matlab e Nastran . . . . .	40
3.9	Confronto degli spostamenti assiali dei modelli 2D Matlab e Nastran . . . . .	40
3.10	Confronto degli spostamenti trasversali nei tre casi . . . . .	42
3.11	Confronto degli spostamenti assiali nei tre casi . . . . .	43
3.12	Matrici di rigidezza membranale nei tre casi . . . . .	43
3.13	Matrici di rigidezza a taglio nei tre casi . . . . .	44
3.14	Matrici di rigidezza di accoppiamento nei tre casi . . . . .	44

3.15	Matrici di rigidezza flessio-torsionali nei tre casi . . . . .	45
3.16	Matrici di rigidezza estratte dal codice Matlab . . . . .	45
3.17	Matrice MAC ottenuta dal confronto delle forme modali dei casi 1 e 2	46
3.18	Matrice MAC ottenuta dal confronto delle forme modali dei casi 2 e 3	46
3.19	Matrici di massa estratte dal codice Matlab . . . . .	47
3.20	Nodi selezionati per il confronto degli spostamenti . . . . .	48
3.21	Posizionamento del piano nodale rispetto al laminato . . . . .	48
3.22	Spostamenti in direzione z e x per il caso ortotropo a spessore 8-4 mm	49
3.23	Confronto dello spostamento trasversale nel caso ZOFFS e Z0 - Modello ortotropo a spessore 8-4 mm . . . . .	50
3.24	Confronto dello spostamento assiale nel caso ZOFFS e Z0 - Modello ortotropo a spessore 8-4 mm . . . . .	50
3.25	Spostamenti in direzione z e x per il caso ortotropo a spessore 2.1 mm	51
3.26	Confronto dello spostamento trasversale nel caso ZOFFS e Z0 - Modello ortotropo a spessore 2-1 mm . . . . .	52
3.27	Confronto dello spostamento assiale nel caso ZOFFS e Z0 - Modello ortotropo a spessore 2-1 mm . . . . .	52
3.28	Spostamenti in direzione z e x per il caso isotropo a spessore 8-4 mm	53
3.29	Confronto dello spostamento trasversale nel caso ZOFFS e Z0 - Modello isotropo a spessore 8-4 mm . . . . .	54
3.30	Confronto dello spostamento assiale nel caso ZOFFS e Z0 - Modello isotropo a spessore 8-4 mm . . . . .	54
3.31	Prime tre forme modali . . . . .	55
3.32	Rappresentazione della disposizione del piano nodale nel caso 2 . . .	57
3.33	Differenze nella modalità di lettura dei nodi . . . . .	58
3.34	Spostamento trasversale - Modello Patran 3D-HEX8 ortotropo a spessore 8-4mm . . . . .	59
3.35	Spostamento assiale - Modello Patran 3D-HEX8 ortotropo a spessore 8-4mm . . . . .	59
3.36	Spostamento trasversale - Modello Patran 3D-HEX8 ortotropo a spessore 2-1mm . . . . .	60
3.37	Spostamento assiale - Modello Patran 3D-HEX8 ortotropo a spessore 2-1mm . . . . .	60
3.38	Spostamento trasversale - Modello Patran 3D-HEX8 isotropo a spessore 8-4mm . . . . .	61
3.39	Spostamento assiale - Modello Patran 3D-HEX8 isotropo a spessore 8-4mm . . . . .	61
3.40	Spostamento trasversale - Modello Patran 2D-QUAD4 ortotropo a spessore 8-4mm - Caso 2 . . . . .	62
3.41	Spostamento assiale - Modello Patran 3D-HEX8 ortotropo a spessore 8-4mm - Caso 2 . . . . .	63

3.42	Spostamento trasversale - Modello Patran 2D-QUAD4 ortotropo a spessore 2-1mm - Caso 2 . . . . .	63
3.43	Spostamento assiale - Modello Patran 3D-HEX8 ortotropo a spessore 2-1mm - Caso 2 . . . . .	64
3.44	Spostamento trasversale - Modello Patran 2D-QUAD4 isotropo a spessore 8-4mm - Caso 2 . . . . .	64
3.45	Spostamento assiale - Modello Patran 3D-HEX8 isotropo a spessore 8-4mm - Caso 2 . . . . .	65
3.46	Errore percentuale sullo spostamento assiale - Modello ortotropo 8-4 mm . . . . .	66
3.47	Errore percentuale sullo spostamento trasversale - Modello ortotropo 8-4 mm . . . . .	66
3.48	Errore percentuale sullo spostamento assiale - Modello ortotropo 2-1 mm . . . . .	67
3.49	Errore percentuale sullo spostamento trasversale - Modello ortotropo 2-1 mm . . . . .	67
3.50	Errore percentuale sullo spostamento assiale - Modello isotropo 8-4 mm . . . . .	68
3.51	Errore percentuale sullo spostamento assiale - Modello isotropo 8-4 mm . . . . .	68
4.1	Rappresentazione del serbatoio studiato . . . . .	72
4.2	Sistema di riferimento utilizzato per il serbatoio cilindrico . . . . .	73
4.3	Rappresentazione della sezione del serbatoio . . . . .	73
4.4	Modello Patran del serbatoio . . . . .	75
4.5	Modello 3D del serbatoio . . . . .	76
4.6	Stratificazione del modello 3D-Serbatoio cilindrico . . . . .	76
4.7	Nodi utilizzati per il confronto nei modelli 2D e 3D . . . . .	77
4.8	Deformazione del serbatoio sotto il carico di pressione . . . . .	78
4.9	Spostamento asse x - Serbatoio cilindrico . . . . .	79
4.10	Spostamento asse y - Serbatoio cilindrico in composito . . . . .	79
4.11	Prime forme modali locali - Serbatoio in composito . . . . .	80
4.12	Prime forme modali globali - Serbatoio in composito . . . . .	81
4.13	Rappresentazione dei due casi analizzati . . . . .	82
4.14	Confronto tra gli spostamenti lungo l'asse x nei modelli 3D e 2D del serbatoio . . . . .	83
4.15	Confronto tra gli spostamenti lungo l'asse y nei modelli 3D e 2D del serbatoio (Nodi a h=0 mm) . . . . .	83
4.16	Errore percentuale spostamento asse x - Serbatoio cilindrico . . . . .	84
4.17	Errore percentuale spostamento asse y - Serbatoio cilindrico . . . . .	84
4.18	Errori percentuali sulle frequenze proprie - Serbatoio cilindrico . . . . .	85



# Capitolo 1

## Introduzione

### 1.1 Overview sulle costruzioni aerospaziali

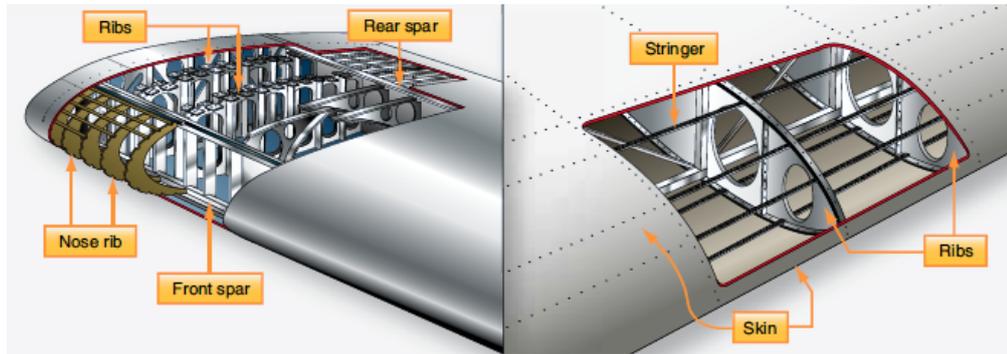
Una delle principali sfide nella progettazione in ambito delle strutture aerospaziali è riuscire a ottenere costruzioni che siano allo stesso tempo in grado di garantire un'adeguata performance in termini di resistenza ai carichi e di contenere il peso della struttura stessa.

Nell'ottica di questo obiettivo, uno dei metodi che tradizionalmente è impiegato per la progettazione di velivoli, e nello specifico della struttura alare, è quello del semiguscio o guscio rinforzato. Questo approccio consente infatti di associare una struttura leggera (appunto il guscio sottile) con degli elementi di rinforzo che garantiscono la resistenza ai carichi e la possibilità di introdurre delle discontinuità nel guscio stesso.

Si osserva quindi la composizione di un classico cassone alare: esso è costituito da varie tipologie di elementi, la cui integrazione consente di sopportare ogni tipologie di carico previsto nella vita operativa dell'ala stessa. In particolare, dalla figura 1.1, si possono identificare tre gruppi di componenti[1]:

- Elementi di irrigidimento trasversale (centine o *ribs*), che hanno il compito di mantenere la forma della struttura stessa;
- Elementi di irrigidimento longitudinale (correnti o *stringers* e le solette dei longheroni o *spar*) che assorbono gli sforzi normali;
- I pannelli di rivestimento, che hanno solo resistenza a taglio;

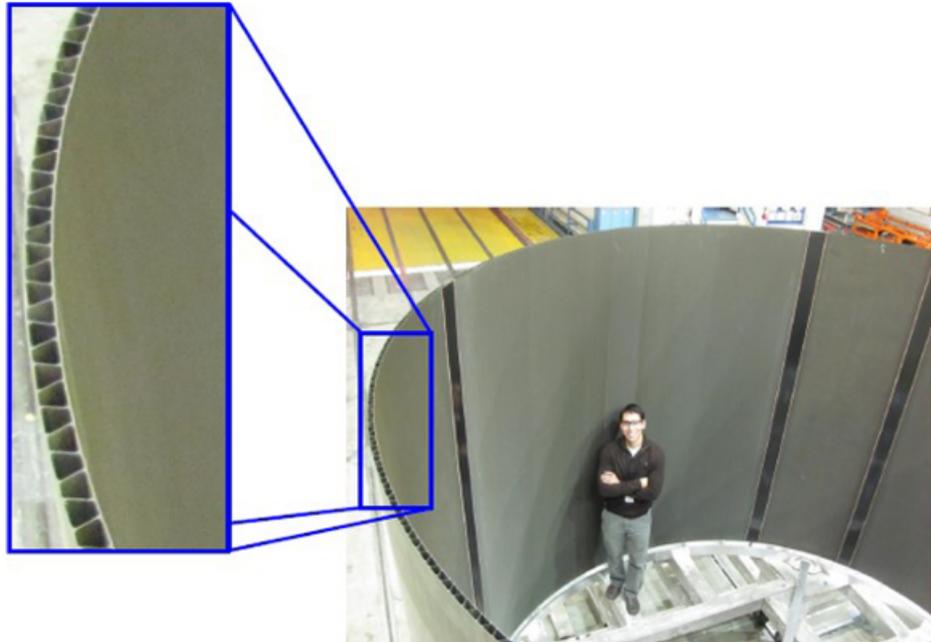
Si può inoltre immediatamente notare che molte delle parti che costituiscono tale struttura, come centine, pannelli e anime dei longheroni, sono caratterizzate dall'aver una delle grandezze, nello specifico lo spessore, di entità fortemente limitata rispetto alle altre due.



**Figura 1.1:** Struttura alare di un velivolo civile [2]

Le costruzioni caratterizzate da una dimensione di grandezza inferiore alle altre due sono generalmente raccolte sotto la definizione di struttura in parete sottile: questo tipo di struttura trova largo uso, come scritto precedentemente, in campo aeronautico proprio grazie alla caratteristica di coniugare le proprietà di resistenza alla possibilità di limitare il peso della struttura stessa.

Le possibilità di applicazione di questo tipo di struttura sono molteplici, sia nell'ambito dei velivoli, dove strutture di questo tipo sono impiegate nella costruzione del cassone alare e della fusoliera [3], sia nell'ambito della costruzione dei velivoli spaziali. [4].



**Figura 1.2:** Serbatoio criogenico in materiale composito in spessore sottile [5]

Dato il ruolo rilevante che esse ricoprono in ambito aeronautico è di fondamentale identificare le corrette modalità attraverso cui questo tipo di costruzioni possono essere analizzate al fine di stabilire la corrispondenza con i requisiti richiesti. In particolare, uno dei mezzi che più comunemente sono utilizzati nell'ambito delle analisi strutturali è il metodo degli elementi finiti (Finite Element Method, FEM o Finite Element Analysis, FEA) .

Esso è un potente strumento nell'ingegneria per la progettazione, l'analisi strutturale e l'ottimizzazione dei componenti. Grazie alla sua capacità di simulare il comportamento meccanico di strutture complesse, la FEA ricopre un ruolo fondamentale nella fase di progettazione, poiché consente di verificare il rispetto dei requisiti di progetto riducendo il numero di prove fisiche necessarie. Questo approccio permette di identificare le criticità e ottimizzare le caratteristiche strutturali fin dalle prime fasi del ciclo di sviluppo.

Uno dei vantaggi che la FEA offre è la possibilità di semplificare e snellire il processo di calcolo di strutture con spessore sottile attraverso l'uso di elementi bidimensionali che simulano le caratteristiche dei corrispettivi tridimensionali.

Nel caso di analisi di strutture complesse, infatti, la modellazione attraverso elementi tridimensionali sarebbe computazionalmente oneroso[6], sia dal punto di vista della gestione dei modelli che dal punto del numero di operazioni da risolvere. La teoria degli elementi 2D, dunque, è compatibile con la trattazione delle strutture in spessore sottile.

Tuttavia, per comprendere a piano il funzionamento degli elementi bidimensionale è necessario definire i riferimenti rispetto a cui avviene lo sviluppo del calcolo[7]:

- Il piano nodale, ovvero il piano definito per ogni elemento dalla posizione dei nodi;
- Il reference plane, cioè il piano rispetto a cui avviene il calcolo delle matrici di massa e rigidezza dell'elemento;
- Il mid-plane, ovvero il piano posto a metà dello spessore;

Facendo riferimento, nello specifico, allo studio della struttura alare, ci si deve confrontare con il problema di creare un modello che tenga conto della variazione di spessore dei pannelli e delle centine lungo l'apertura alare come modalità di riduzione il peso del cassone alare in risposta al fatto che i carichi agenti sulla struttura non sono costanti[4]. Generalmente, i software commerciali per le analisi FEM riportano come impostazione di default che questi tre piani siano coincidenti. Talvolta, però, le caratteristiche di alcune strutture non rispettano questa caratteristica per cui è necessario imporre una traslazione tra i piani.

Ad esempio, se si fa riferimento a una tipica struttura alare, la modellazione del cassone deve essere effettuata considerando due caratteristiche:

- Una diminuzione dello spessore dei pannelli lungo l'apertura in modo da limitare il peso della struttura;
- Una superficie esterna continua per ragioni aerodinamiche;



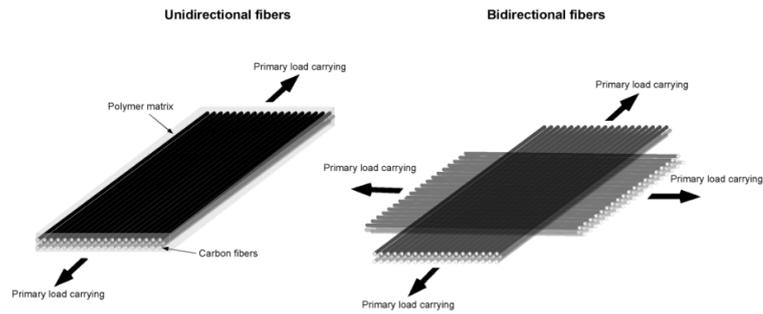
**Figura 1.3:** Struttura alare reale [2]

L'implementazione di queste proprietà nei software commerciali per le analisi FEM, e nello specifico in MSC Nastran, avviene attribuendo il corretto valore al parametro *plate offset*, che permette di definire la distanza tra il piano nodale e il piano di riferimento: sarà oggetto di questa tesi la comprensione del funzionamento e delle migliori condizioni per l'applicazione di questa funzione.

## 1.2 I materiali compositi-laminati

Tra gli argomenti oggetto di questa ricerca vi è anche la comprensione di come la modellazione di strutture a spessore variabile possa essere influenzata dall'utilizzo di materiali compositi-laminati.

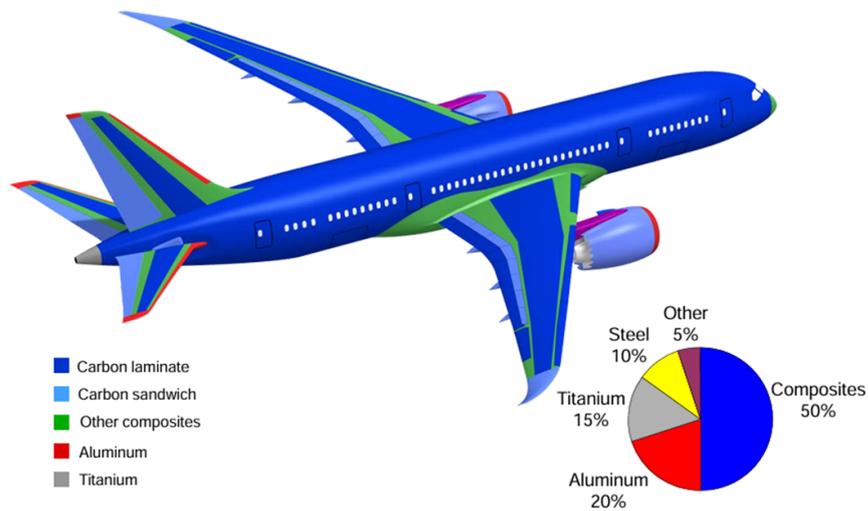
I materiali compositi si caratterizzano per l'uso di una matrice polimerica al cui interno si dispongono delle fibre di rinforzo, le quali possono essere organizzate secondo orientazioni diverse al fine di ottimizzare le prestazioni del materiale stesso.



**Figura 1.4:** Rappresentazione del principio di funzionamento dei materiali compositi-laminati [2]

Le proprietà di questo tipo di materiale fanno sì che essi stiano trovando sempre più spazio nella produzione di velivoli: ad esempio, uno dei principali modelli prodotti da Boeing, il 787-Dreamliner, è composto in larga parte da strutture in composito (fig. 1.5 ). Il successo di questo tipo di materiali è dato dalla possibilità di ottenere proprietà meccaniche paragonabili a quelle dei materiali metallici riducendo in maniera sostanziale il peso delle strutture stesse: prendendo ancora come esempio il Boeing 787, è stimato che l'uso di composti polimerici rinforzati in fibra di carbonio abbia permesso di dimezzare, a parità di volume di materiale, il peso della struttura del velivolo[8].

### Composite Structure Content of the 787



**Figura 1.5:** Materiali in uso sul Boeing 787 [9]

Ad esempio, le figure 1.6 e 1.7 mostrano dei particolari dell'ala e della fusoliera

di questo velivolo, realizzata in CFRP (*Carbon Fiber-Reinforced Plastics*) ed è ottenuta come sovrapposizione di diversi strati di materiale pre-impregnato (i cosiddetti *prepegs*) e curati poi in autoclave. [10].



**Figura 1.6:** Particolare dell'ala in composito del 787 [11]



**Figura 1.7:** Particolare della fusoliera del 787[12]

L'uso di questi materiali è esteso anche all'ambito spaziale: ad esempio, l'uso di materiali compositi per la costruzione dei serbatoi deputati allo stoccaggio del propellente criogenico ( $LH_2$  o  $LOX$ ) permetterebbe, secondo la NASA, una riduzione del peso del 30% rispetto al corrispettivo in alluminio[5].



**Figura 1.8:** Serbatoio in composito testato da NASA [5]

### 1.3 Obiettivi

Questo documento sarà incentrato sullo studio delle modalità che uso dei più popolari software per l'analisi agli elementi finiti, cioè MSC Nastran, offre per la modellazione di strutture a spessore variabile: ciò richiede la definizione di un parametro, l'offset, che consente di traslare il piano di riferimento, ovvero il piano rispetto al quale sono calcolate le proprietà di massa e rigidità delle strutture, rispetto al piano su cui sono definiti i nodi che compongono gli elementi in cui i suddivide la struttura.

Saranno condotte analisi sia di natura statica che dinamica in modo da poter ottenere una visione globale dell'effetto dell'offset nel calcolo strutturale.

Gli obiettivi di questa tesi richiedono innanzitutto la comprensione delle dinamiche di funzionamento insite in Nastran: pertanto è stato sviluppato un codice Matlab che implementa le modalità di calcolo attraverso elementi QUAD4, similmente a quanto avviene nel software sviluppato da MSC, in modo da poter rintracciare eventuali criticità che possono insorgere durante le analisi.

I risultati ottenuti dai diversi modelli bidimensionali saranno confrontati con un modello tridimensionale di riferimento, in modo da stabilirne la correttezza e la coerenza.

Le analisi coinvolgeranno dapprima strutture semplici, come nel caso di un pannello

piani a spessore variabile per poi proseguire con modelli più complessi, come ad esempio un serbatoio in materiale composito.

## Capitolo 2

# Elementi finiti bidimensionali basati sulla teoria di Mindlin-Reissner

### 2.1 Reissner-Mindlin plate theory

Per poter comprendere le modalità di applicazione del metodo degli elementi finiti è utile ripercorrere gli sviluppi matematici alla base del calcolo e stabilire come avviene la risoluzione degli equazioni che definiscono il problema.

Gli elementi QUAD4 utilizzati in questo studio si basano sulla teoria della piastra di Reissner-Mindlin[13].

Tale teoria si basa su due assunzioni:

- i segmenti di spessore, inizialmente rettilinei, rimangono tali a deformazione avvenuta;
- i segmenti di spessore mantengono invariata la loro lunghezza a deformazione avvenuta;

A partire da queste ipotesi è possibile sviluppare il campo di spostamento [14]:

$$u = u^0(x, y) + z\theta(x, y) \quad (2.1)$$

$$v = v^0(x, y) + z\phi(x, y) \quad (2.2)$$

$$w = w^0(x, y) \quad (2.3)$$

dove  $u^0, v^0$  e  $w^0$  sono gli spostamenti individuati rispetto al piano medio della piastra. Ciò consente di individuare cinque variabili che diventeranno i gradi di

libertà associati all'elemento 2D che verrà costruito in seguito:  $u, v, w, \theta$  e  $\phi$ .  
È possibile esprimere le equazioni in forma matriciale:

$$\begin{Bmatrix} u \\ v \\ w \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & z & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & z \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} u^0 \\ v^0 \\ w^0 \\ \theta \\ \phi \end{Bmatrix} \quad (2.4)$$

La 2.4 può essere riscritta come:

$$\{s(x, y, z)\} = [Z_u(z)] \{g_u(x, y, z)\} \quad (2.5)$$

dove  $\{s(x, y, z)\}$  è il campo di spostamento a un generico valore  $z$  dello spessore mentre  $\{g_u(x, y, z)\}$  è racchiude i gradi di libertà relativi al piano di riferimento. Il campo di deformazione può essere ottenuto tramite derivazione, separando le grandezze nel piano da quelle fuori dal piano. Nel caso delle deformazioni membranali si ha:

$$\begin{Bmatrix} \varepsilon_{xx} \\ \varepsilon_{yy} \\ \gamma_{xy} \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & z & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & z & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & z \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} u_{,x}^0 \\ v_{,y}^0 \\ u_{,y}^0 + v_{,x}^0 \\ \theta_{,x} \\ \phi_{,y} \\ \theta_y + \phi_{,x} \end{Bmatrix} \quad (2.6)$$

Oppure

$$\{\varepsilon_p(x, y, z)\} = [Z_{\varepsilon_p}(z)] \{g_{\varepsilon_p}(x, y, z)\} \quad (2.7)$$

Per quanto riguarda il taglio avremo:

$$\begin{Bmatrix} \gamma_{xz} \\ \gamma_{yz} \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} w_{,x}^0 + \theta \\ w_{,y}^0 + \phi \end{Bmatrix} \quad (2.8)$$

Che può essere riformulato come:

$$\{\gamma_T(x, y, z)\} = [Z_{\gamma_T}(z)] \{g_{\gamma_T}(x, y, z)\}$$

A partire dalla legge di Hooke si può ottenere il campo di tensione nella piastra:

$$\begin{Bmatrix} \sigma_{xx} \\ \sigma_{yy} \\ \tau_{xy} \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} Q_{11} & Q_{12} & Q_{16} \\ Q_{12} & Q_{22} & Q_{26} \\ Q_{16} & Q_{26} & Q_{66} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \varepsilon_{xx} \\ \varepsilon_{yy} \\ \gamma_{xy} \end{Bmatrix} \quad (2.9)$$

Oppure

$$\{\sigma_p(x, y, z)\} = [Q_p(z)] \{g_{\varepsilon_p}(x, y, z)\}$$

La definizione dei gradi di libertà incogniti richiede di procedere con il metodo degli elementi finiti e dunque di necessario ottenere e successivamente risolvere le equazioni di equilibrio del sistema in esame.

## 2.2 Equazioni del moto

La scrittura delle equazioni del moto per un sistema continuo può essere effettuata ricorrendo al principio di d'Alembert:

$$\delta E_P = \delta L_e + \delta L_{in} \quad (2.10)$$

Dove  $E_P$  è l'energia potenziale,  $L_e$  è il lavoro delle forze esterne e  $E_{in}$  è il lavoro delle forze d'inerzia.

In particolare, per l'energia potenziale è possibile scrivere:

$$\begin{aligned} \delta E_P &= \int_V \left( \delta \{\varepsilon_P\}^T \{\sigma_P^{(k)}\} + \delta \{\gamma_T\}^T \{\tau_T^k\} \right) = \\ &= \int_{\Omega} \left( \int_{-\frac{h}{2}}^{+\frac{h}{2}} \left( \delta \{\varepsilon_P\}^T \{\sigma_P^{(k)}\} + \delta \{\gamma_T\}^T \{\tau_T^k\} \right) dz \right) d\Omega = \\ &= \int_{\Omega} \left( \int_{-\frac{h}{2}}^{+\frac{h}{2}} \left( \delta \{g_{\varepsilon_P}\}^T [z_{\varepsilon_P}]^T [Q_P^{(k)}] [z_{\varepsilon_P}] \{g_{\varepsilon_P}\} + \{g_{\gamma_T}\}^T [z_{\gamma_T}]^T [Q_T^{(k)}] [z_{\gamma_T}] \{g_{\gamma_T}\} \right) dz \right) d\Omega = \\ &= \int_{\Omega} \delta \{g_{\varepsilon_P}\}^T \left( \int_{-\frac{h}{2}}^{+\frac{h}{2}} [z_{\varepsilon_P}]^T [Q_P^{(k)}] [z_{\varepsilon_P}] dz \right) \{g_{\varepsilon_P}\} d\Omega + \\ &+ \int_{\Omega} \{g_{\gamma_T}\}^T \left( \int_{-\frac{h}{2}}^{+\frac{h}{2}} [z_{\gamma_T}]^T [Q_T^{(k)}] [z_{\gamma_T}] dz \right) \{g_{\gamma_T}\} d\Omega = \end{aligned}$$

Che può essere riscritta come

$$\delta E_P = \int_{\Omega} \{g_{\varepsilon_P}\}^T [K Z I_{mb}] \{g_{\varepsilon_P}\} d\Omega + \int_{\Omega} \{g_{\gamma_T}\}^T [K Z I_s] \{g_{\gamma_T}\} d\Omega \quad (2.11)$$

Nello specifico si ha che

$$[K Z I_{mb}] = \begin{bmatrix} [A] & [B] \\ [B] & [D] \end{bmatrix}$$

e

$$[K Z I_s] = [A_T]$$

dove [15]

$$([A], [B], [D]) = \int_{-\frac{h}{2}}^{+\frac{h}{2}} [Q_P](1, z, z^2) dz \quad (2.12)$$

Le matrici [A], [B] e [D] sono dette rispettivamente matrice di rigidità membranale, di accoppiamento e flesso-torsionali.

La rigidità a taglio è invece definita attraverso la matrice:

$$[A_T] = k^2 \int_{-\frac{h}{2}}^{+\frac{h}{2}} [Q_T] dz \quad (2.13)$$

Per quanto riguarda il lavoro delle forze d'inerzia, l'equazione diventa:

$$\begin{aligned}\delta L_{in} &= \int_V \delta\{s\}^T (-\rho\{\ddot{s}\}) dV = \\ &= - \int_{\Omega} \left( \int_{-\frac{h}{2}}^{\frac{h}{2}} \delta\{g_u\}^T [Z_u]^T \rho [Z_u] \{\ddot{g}_u\} dz \right) d\Omega = \\ &= - \int_{\Omega} \delta\{g_u\}^T \left( \int_{-\frac{h}{2}}^{\frac{h}{2}} [Z_u]^T \rho [Z_u] dz \right) \{\ddot{g}_u\} d\Omega =\end{aligned}$$

Per cui:

$$\delta L_{in} = - \int_{\Omega} \{g_u\}^T [MZI] \{\ddot{g}_u\} d\Omega \quad (2.14)$$

dove la matrice [MZI] è definita come:

$$[MZI] = \begin{bmatrix} \mu & 0 & 0 & m_1 & 0 \\ 0 & \mu & 0 & 0 & m_1 \\ 0 & 0 & \mu & 0 & 0 \\ m_1 & 0 & 0 & m_2 & 0 \\ 0 & m_1 & 0 & 0 & m_2 \end{bmatrix} \quad (2.15)$$

dove

$$(\mu, m_1, m_2) = \int_{-\frac{h}{2}}^{+\frac{h}{2}} \rho(1, z, z^2) dz \quad (2.16)$$

Similmente, scrivendo l'equazione per il lavoro virtuale delle forze esterne si ottiene:

$$\delta L_e = \int_{\Omega} \delta\{g_u\}^T \{\bar{f}\} d\Omega \quad (2.17)$$

dove  $\{\bar{f}\}$  è il vettore che contiene le forze e i momenti esterni agenti sulla piastra, definiti sull'unità di superficie:

$$\{\bar{f}\} = \begin{bmatrix} \bar{p}_x \\ \bar{p}_y \\ \bar{q} \\ \bar{m}_y \\ -\bar{m}_x \end{bmatrix} \quad (2.18)$$

dove  $\bar{p}_x$  e  $\bar{p}_y$  sono le forze contenute nel piano x-y,  $\bar{q}$  è la componente trasversale mentre  $\bar{m}_y$  e  $\bar{m}_x$  sono i momenti agenti intorno all'asse y e x.

## 2.3 Il metodo degli elementi finiti

La risoluzione dell'equazione del moto può essere effettuata utilizzando l'approssimazione attraverso il metodo degli elementi finiti.

In particolare, in questa ricerca sono stati utilizzati due tipologie di elementi QUAD4:

- Uno implementato in Matlab utilizzando delle funzioni di forma di tipo bilineare e da cui è possibile estrarre informazioni dettagliate sugli aspetti legati alle matrici di massa e rigidezza;
- uno utilizzando il software Nastran, che impiega le relative funzioni di forma. Questo tipo di implementazione è necessaria per analizzare strutture con geometrie più complesse rispetto a quelle processabili attraverso Matlab, come ad esempio strutture che richiedono elementi curvi;

### 2.3.1 Funzioni di forma

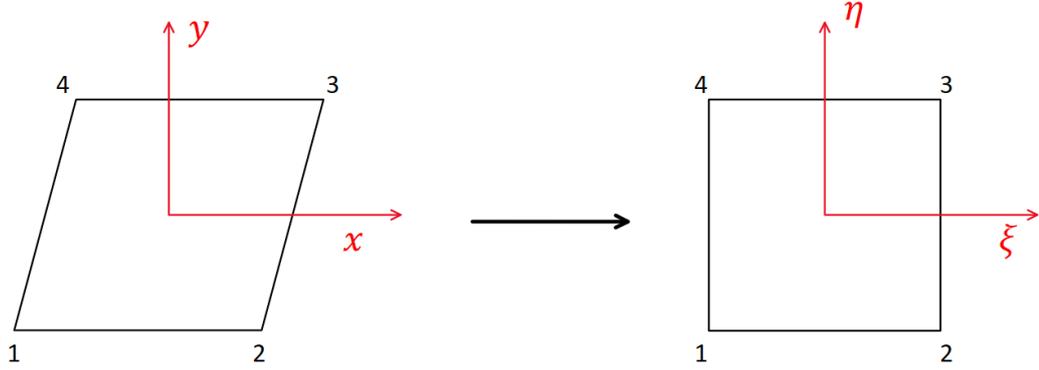
In questo caso, l'insieme delle grandezze incognite che appartengono al problema possono essere approssimate attraverso la combinazione delle incognite nei singoli nodi pesati attraverso le funzioni di forma: Nell'ipotesi della piastra di Reissner-Mindlin, è possibile esplicitare la relazione tra i gradi di libertà dell'elemento QUAD4 e i valori delle incognite nodali attraverso l'uso delle funzioni di forma:

$$\begin{aligned}
 u(x, y) &= \sum_{i=1}^4 N_i(\xi, \eta) u^0 \\
 v(x, y) &= \sum_{i=1}^4 N_i(\xi, \eta) v^0 \\
 w(x, y) &= \sum_{i=1}^4 N_i(\xi, \eta) w^0 \\
 \theta(x, y) &= \sum_{i=1}^4 N_i(\xi, \eta) \theta^0 \\
 \phi(x, y) &= \sum_{i=1}^4 N_i(\xi, \eta) \phi^0
 \end{aligned} \tag{2.19}$$

Che può essere riassunta nella forma

$$\{g_u\} = [N] \{q\} \tag{2.20}$$

dove il vettore  $\{q\}$  contiene tutti i gradi di libertà dei quattro nodi di ciascun elemento QUAD4 e pertanto si configura come un vettore colonna di venti elementi. Per semplificare il calcolo è utile effettuare un cambio del sistema di riferimento dal piano fisico  $(x,y)$  a quello naturale  $(\xi, \eta)$ .



**Figura 2.1:** Trasformazione di un generico elemento nel master element

La relazione tra le coordinate fisiche e naturali è definita come:

$$x = \sum_{i=1}^4 x_i \hat{N}_i(\xi, \eta) \quad (2.21)$$

$$y = \sum_{i=1}^4 y_i \hat{N}_i(\xi, \eta) \quad (2.22)$$

Nello specifico, le funzioni di forma utilizzate per l'implementazione dell'elemento QUAD4 nel codice Matlab presentato nel seguito sono di tipo bilineare:

$$N_i(\xi, \eta) = \frac{1}{4}(1 + \xi_i \xi) + \frac{1}{4}(1 + \eta_i \eta) \quad (2.23)$$

La funzione da integrare sul dominio dell'elemento  $\Omega_e$  deve essere espressa nelle coordinate naturali:

$$\frac{\partial N_i(x(\xi, \eta), y(\xi, \eta))}{\partial \xi} = \frac{\partial N_i}{\partial x} \frac{\partial x}{\partial \xi} + \frac{\partial N_i}{\partial y} \frac{\partial y}{\partial \xi} \quad (2.24)$$

$$\frac{\partial N_i(x(\xi, \eta), y(\xi, \eta))}{\partial \eta} = \frac{\partial N_i}{\partial x} \frac{\partial x}{\partial \eta} + \frac{\partial N_i}{\partial y} \frac{\partial y}{\partial \eta} \quad (2.25)$$

Questa relazione può essere espressa in termini matriciali:

$$\begin{bmatrix} \frac{\partial N_i}{\partial \xi} \\ \frac{\partial N_i}{\partial \eta} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{\partial x}{\partial \xi} & \frac{\partial y}{\partial \xi} \\ \frac{\partial x}{\partial \eta} & \frac{\partial y}{\partial \eta} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \frac{\partial N_i}{\partial x} \\ \frac{\partial N_i}{\partial y} \end{bmatrix} \quad (2.26)$$

dove la matrice

$$J = \begin{bmatrix} \frac{\partial x}{\partial \xi} & \frac{\partial y}{\partial \xi} \\ \frac{\partial x}{\partial \eta} & \frac{\partial y}{\partial \eta} \end{bmatrix}$$

è detta matrice Jacobiana.

Per un elemento rettangolare si ha che

$$J = \begin{bmatrix} \frac{a}{2} & 0 \\ 0 & \frac{a}{2} \end{bmatrix}$$

da cui  $|\det(J)| = \frac{ab}{4}$ .

L'integrazione dei termini energetici può dunque essere espressa in termini generici come:

$$\int_{\Omega_e} f(x, y) dx dy = \int_{-1}^1 \int_{-1}^1 f(\xi, \eta) |\det(J)| d\xi d\eta \quad (2.27)$$

Da cui si ottiene

$$\int_{\Omega_e} f(x, y) dx dy = \frac{ab}{4} \int_{-1}^1 \int_{-1}^1 f(\xi, \eta) d\xi d\eta \quad (2.28)$$

L'integrale può essere risolto per via numerica attraverso le formule di quadratura di Gauss-Legendre:

$$\int_{x_L}^{x_R} f(s) dx \simeq \sum_{i=1}^n f(x) W_i$$

L'uso di questo tipo di nodi consente, con n nodi, di integrare esattamente dei polinomi fino al grado 2n-1.

Si ottiene dunque che

$$\int_{\Omega_e} f(x, y) dx dy \simeq \frac{ab}{4} \sum_{j=1}^{n_y} \sum_{i=1}^{n_x} f(\xi_i, \eta_i) W_i W_j \quad (2.29)$$

### 2.3.2 Calcolo delle matrici di massa e rigidezza

È possibile specializzare l'approssimazione degli elementi finiti per il calcolo delle matrici di massa e rigidezza degli elementi QUAD4 in esame:

$$\{g_u(x, y, t)\} = \sum_{i=1}^N N_i(x, y) q_i(t) = [N(x, y)] \{q(t)\} \quad (2.30)$$

Attraverso la 2.30, a partire dalla relazione tra spostamento e deformazione, si ottiene:

$$\begin{cases} \{g_{\varepsilon_P}(x, y)\} = [B_{mb}]\{q\} \\ \{g_{\gamma_T}(x, y)\} = [B_s]\{q\} \end{cases} \quad (2.31)$$

Dove la matrice  $[B_{mb}]$  è definita come:

$$[B_{mb}] = [[N'_{1,mb}][N'_{2,mb}][N'_{3,mb}][N'_{4,mb}]$$

e nello specifico:

$$[N'_{i,mb}] = \begin{bmatrix} N_{i,x} & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & N_{i,y} & 0 & 0 & 0 \\ N_{i,x} & N_{i,y} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & N_{i,x} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & N_{i,x} \\ 0 & 0 & 0 & N_{i,x} & N_{i,y} \end{bmatrix}$$

Allo stesso modo, per il calcolo del taglio si avrà:

$$[B_s] = [[N'_{1,s}][N'_{2,s}][N'_{3,s}][N'_{4,s}]$$

dove

$$[N'_{i,s}] = \begin{bmatrix} 0 & 0 & N_{i,x} & N_i & 0 \\ 0 & 0 & N_{i,y} & 0 & N_i \end{bmatrix}$$

Pertanto la 2.11 può essere riscritta come

$$\delta E_P = \delta\{q\}^T \int_{\Omega} \{[B_{mb}]^T [KZI_{mb}] [B_{mb}] d\Omega\} \{q\} + \{q\}^T \int_{\Omega} [B_s]^T [KZI_s] [B_s] d\Omega \{q\} \quad (2.32)$$

Utilizzando Gauss-Legendre si:

$$[K_{mb}] \int_{\Omega} \{[B_{mb}]^T [KZI_{mb}] [B_{mb}] d\Omega \simeq \frac{ab}{4} \sum_{j=1}^{n_y} \sum_{i=1}^{n_x} [B_{mb}(\xi_i, \eta_j)]^T [KZI_{mb}] [B_{mb}(\xi_i, \eta_j)] W_j W_i \Big|$$

$$[K_s] \int_{\Omega} \{[B_s]^T [KZI_s] [B_s] d\Omega \simeq \frac{ab}{4} \sum_{j=1}^{n_y} \sum_{i=1}^{n_x} [B_s(\xi_i, \eta_j)]^T [KZI_s] [B_s(\xi_i, \eta_j)] W_j W_i$$

Per ovviare al problema dello *shear locking*, cioè del fenomeno per cui in piastre molto sottili l'uso di un'approssimazione di tipo lineare porta il termine dell'energia legata al taglio a crescere fino all'infinito invece di tendere a zero, con conseguente aumento dell'imprecisione della deformazione ottenuta, è stata impiegata la tecnica dell'integrazione ridotta selettiva: mentre per il calcolo della rigidezza membranale

si è svolta l'integrazione su uno schema 2x2, che è esatto in questo caso, il calcolo della matrice di rigidità a taglio è stato sottointegrato su un solo punto di Gauss in modo da portare il termine di energia di taglio a zero [16].

In conclusione si otterrà:

$$\delta E_P = \{q\}^T ([K_{mb}] + [K_s]) \{q\} = \delta\{q\}^T [K] \{q\} \quad (2.33)$$

Allo stesso modo la 2.14 diventa:

$$\delta L_{in} = \delta\{q\}^T [M] \{\ddot{q}\} \quad (2.34)$$

in cui compare la matrice [M] che si ottiene dall'integrale:

$$[M] = \int_{\Omega} [N]^T [MZI] [N] d\Omega \quad (2.35)$$

E infine per il vettore delle forze esterne dalla 2.17 si ottiene

$$\delta L_e = \delta\{q\}^T \{F\} \quad (2.36)$$

In cui  $\{F\}$  è ricavato da:

$$\{F\} = \int_{\Omega} [N]^T \{\bar{f}\} d\Omega \quad (2.37)$$

Sostituendo le espressioni ottenute per i vari termini energetici nel principio di d'Alembert si ottiene:

$$\{q\}^T [M] \{\ddot{q}\} + \{q\}^T [K] \{q\} = \{q\}^T \{F\} \quad (2.38)$$

Che, semplificata, permette di ottenere l'equazione del moto:

$$[M] \{\ddot{q}\} + [K] \{q\} = \{F\} \quad (2.39)$$

## 2.4 La funzione Plate Offset

Uno dei principali problemi legati alla modellazione di strutture a spessore variabile attraverso elementi 2D è quello di gestire le superfici in modo ottenere che una delle facce sia continua.

Nell'ottica di definire una superficie di questo tipo, si può procedere agendo sulla posizione relativa tra questi piani in diverse modalità. In particolare saranno presentate due funzioni utilizzabili in Nastra:

1. La funzione CQUAD ZOFFS, che permette di decidere la distanza tra il reference plane e il nodal plane;

2. La funzione PCOMP Z0 che consente di imporre la distanza che il bottom del laminato assume rispetto al reference plane;

La figura 2.2 mostra graficamente il funzionamento di queste due funzioni:

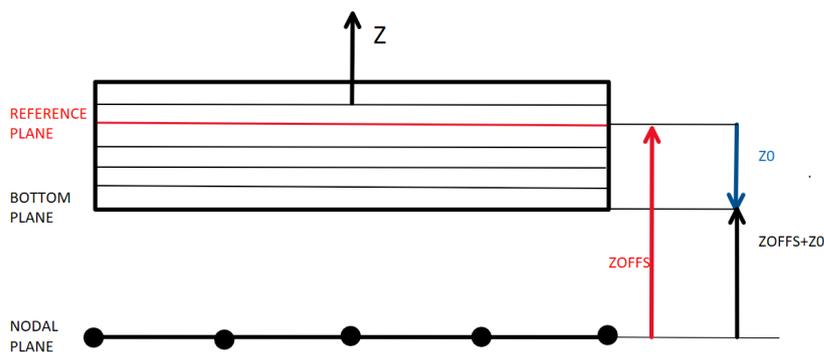
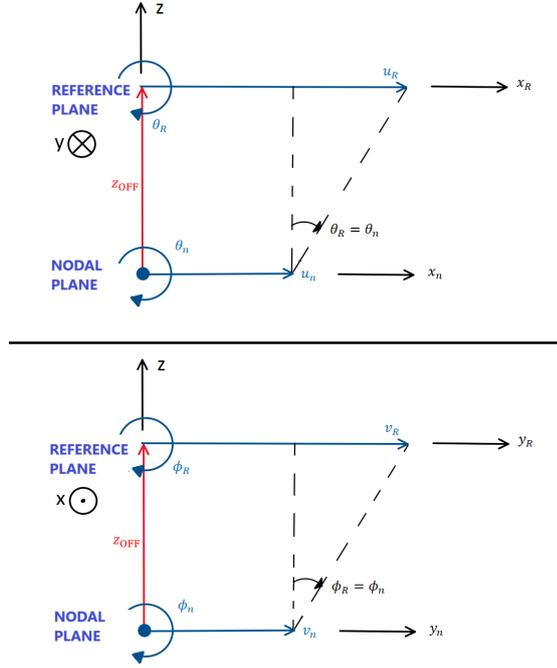


Figura 2.2: Funzionamento di ZOFFS e Z0

Nel seguito sarà presentato il processo matematico alla base di entrambe le funzioni.

### 2.4.1 CQUAD ZOFFS

Il primo modo attraverso cui è possibile definire l'Offset è quella di creare un collegamento rigido tra il piano nodale e il piano di riferimento [7].



**Figura 2.3:** Relazione tra piano nodale e piano di riferimento

Questo genera delle interazioni tra i gradi di libertà delle due entità, che nell'ipotesi di piccoli spostamenti possono essere riassunte attraverso le equazioni [17]:

$$\begin{aligned}
 u_R &= u_n + \theta_R \cdot z_{off} \\
 v_R &= v_n + \varphi_R \cdot z_{off} \\
 w_R &= w_n \\
 \theta_R &= \theta_n \\
 \varphi_R &= \phi_n
 \end{aligned} \tag{2.40}$$

dove le grandezze con pedice "n" sono quelle riferite al piano nodale mentre quelle indicate con "R" sono associate al piano di riferimento.

In altra forma si può scrivere:

$$\{q_R\} = [Z_{R \rightarrow n}] \{q_n\} \tag{2.41}$$

In forma matriciale, l'equazione diventa:

$$\begin{Bmatrix} u_R \\ v_R \\ w_R \\ \theta_R \\ \phi_R \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & z_{off} & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & z_{off} \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} u_n \\ v_n \\ w_n \\ \theta_n \\ \phi_n \end{Bmatrix} \tag{2.42}$$

A questo punto, si considera la 2.38 specificata per il piano di riferimento:

$$\{q_R\}^T [M_R] \{\ddot{q}\} + \{q_R\}^T [K_R] \{q_R\} = \{q_R\}^T \{F_R\} \quad (2.43)$$

Utilizzando la 2.41, si può quindi scrivere:

$$\{q_n\}^T [Z_{R \rightarrow n}]^T [M_R] [Z_{R \rightarrow n}] \{\ddot{q}_n\} + \{q_n\}^T [Z_{R \rightarrow n}]^T [K_R] [Z_{R \rightarrow n}] \{q_n\} = \{q_n\}^T \{F_R\} [Z_{R \rightarrow n}] \quad (2.44)$$

Che può essere riscritta come:

$$\{q_n\}^T [M_n] \{\ddot{q}_n\} + \{q_n\}^T [K_n] \{q_n\} = \{q_n\}^T \{F_b\} \quad (2.45)$$

Dove  $[M_n]$ ,  $[K_n]$  e  $\{F_b\}$  sono rispettivamente la matrice delle masse, la matrice di rigidità e il vettore delle forze riferite al piano nodale. Esse sono rispettivamente definite come:

$$[M_n] = [Z_{R \rightarrow n}]^T [M_R] [Z_{R \rightarrow n}] \quad (2.46)$$

$$[K_n] = [Z_{R \rightarrow n}]^T [K_R] [Z_{R \rightarrow n}] \quad (2.47)$$

$$\{F_b\} = [Z_{R \rightarrow n}]^T \{F_R\} \quad (2.48)$$

Semplificando si ottiene l'equazione del moto riferita al piano nodale:

$$[M_n] \{\ddot{q}_n\} + [K_n] \{q_n\} = \{F_b\} \quad (2.49)$$

In Patran-Nastran l'applicazione di questo approccio avviene attraverso dichiarazione del parametro Plate Offset disponibile nella scheda delle proprietà CQUAD. In particolare, il valore inserito in questo campo corrisponde all'entità della traslazione del piano di riferimento rispetto a piano nodale. L'uso di questa funzione può essere riconosciuto nel file bdf nel nono campo di definizione della proprietà CQUAD4:

<b>1</b>	<b>2</b>	<b>3</b>	<b>4</b>	<b>5</b>	<b>6</b>	<b>7</b>	<b>8</b>	<b>9</b>	<b>10</b>
CQUAD4	EID	PID	G1	G2	G3	G4	THETA or MCID	ZOFFS	
		TFLAG	T1	T2	T3	T4			

**Figura 2.4:** Formato di definizione dell'elemento QUAD4 in Nastran

## 2.4.2 PCOMP Z0

Un secondo approccio per la modellazione dell'offset è possibile in presenza di materiale di tipo laminate e consiste nell'imporre uno spostamento tra il piano di riferimento e la superficie inferiore dell'ultimo ply [7]. Questo metodo consente di modificare il calcolo della matrice di massa e rigidità: in particolare, è stato

visto nella 2.12, 2.13 e 2.16 la formulazione delle matrici di rigidezza e massa dell'elemento nel caso in cui il piano di riferimento sia posto a metà dello spessore. Applicando il concetto di Z0, tuttavia, si modificano le condizioni in cui vengono definite le proprietà di massa e rigidezza del laminato. In particolare, se si ipotizza di attribuire a Z0 un generico valore  $z_0$  e si considera la 2.13, si osserva che le matrici dei coefficienti d'inerzia e di rigidezza del laminato sono ora definiti in un nuovo intervallo:

$$\left(\mu^R, m_1^R, m_2^R\right) = \int_{z_0}^{z_0+h} \rho(1, z, z^2) dz \quad (2.50)$$

$$\left([A^R], [B^R], [D^R]\right) = \int_{z_0}^{z_0+h} [Q_P](1, z, z^2) dz \quad (2.51)$$

E lo stesso accade per la matrici di rigidezza a taglio:

$$[A_T^R] = k^2 \int_{z_0}^{z_0+h} [Q_T] dx \quad (2.52)$$

In Patran questo tipo di funzione è attivata durante la fase di creazione del laminato, attraverso l'apposito campo

1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
PCOMP	PID	Z0	NSM	SB	FT	TREF	GE	LAM	
	MID1	T1	THETA1	SOUT1	MID2	T2	THETA2	SOUT2	
	MID3	T3	THETA3	SOUT3	-etc.-				

**Figura 2.5:** Formato di definizione dei materiali compositi in Nastran

L'uso di questo parametro modifica la posizione del piano di riferimento rispetto al piano "bottom" del laminato.

Pertanto, il calcolo dei coefficienti di massa e rigidezza sono definite come descritto nella 2.50,2.51,2.52, facendo sì che le matrici di massa e rigidezza di ciascun elemento siano ora modificate tenendo conto di questo fattore.

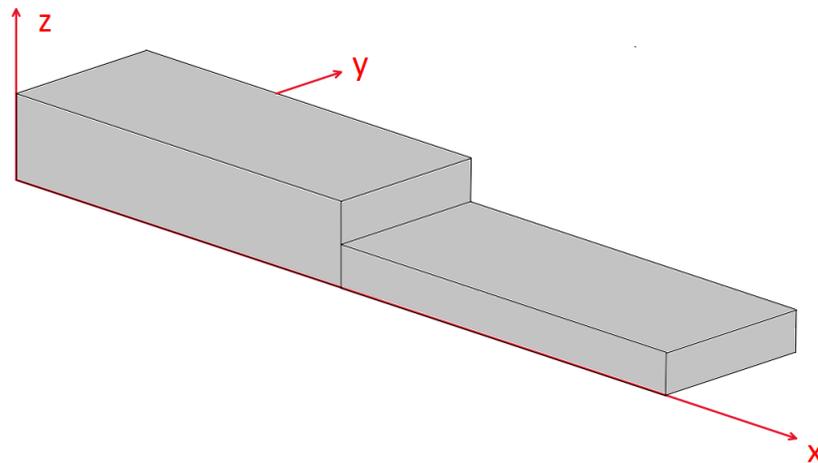
# Capitolo 3

## Analisi di strutture piane

### 3.1 Presentazione dei casi studio

Il primo caso studiato è rappresentato da un pannello piano costituito da due piastre di spessore diverso, lunghe entrambe 100 mm e larghe 50 mm.

In figura 3.1 è presentato un esempio della struttura analizzata con il relativo sistema di riferimento utilizzato in tutti i modelli.



**Figura 3.1:** Rappresentazione del pannello in esame

Il pannello è incastrato nel lato corto libero della piastra più spessa mentre il carico è definito da due forze dirette lungo gli assi  $z$  e  $x$  e distribuite su una striscia di pannello compresa tra  $x=195$  e  $x=200$ .

Per questo tipo di struttura sono stati ipotizzate due tipologie di materiale:

1. Un materiale isotropo;
2. Un materiale laminato costituito da diversi strati di materiale ortotropo;

Le tabelle 3.1 e 3.2 riportano le proprietà adottate per i materiali in uso per i pannelli piani.

Materiale isotropo		
$\rho$	$E$	$\nu$
$2.7 \cdot 10^{-9} kg/mm^3$	73 GPa	0.33

**Tabella 3.1:** Proprietà materiale isotropo

Materiale ortotropo		
$\rho = 1.6e - 9kg/mm^3$		
$E_{11}$	$E_{22}$	$E_{33}$
181 GPa	10.3 GPa	10.3 GPa
$\nu_{12}$	$\nu_{13}$	$\nu_{23}$
0.28	0.05	0.28
$G_{12}$	$G_{13}$	$G_{23}$
5.76 GPa	5.76 GPa	3.38 GPa

**Tabella 3.2:** Proprietà materiale ortotropo

In entrambi i casi è adottato uno spessore di 8 mm per la piastra più spessa e 4 mm per quella più sottile.

Inoltre, al fine di verificare l'influenza dello spessore, è adoperato anche un modello in composito con spessore 2 e 1 mm.

Per ciascuno dei casi presi in esame, inoltre, sono stati proposti tre diversi modelli:

1. Un modello Patran bidimensionale;
2. Un modello Patran tridimensionale;
3. Un modello bidimensionale generato in Matlab utilizzando il codice appositamente sviluppato;

Per tali modelli sarà svolta l'analisi lineare statica (SOL101 di Nastran) al fine di determinare le modalità di deformazione delle piastre, in particolare nelle direzioni trasversale e assiale, e l'analisi modale (SOL103 di Nastran) al fine di verificarne il comportamento in frequenza.

### 3.1.1 Modello 2D shell

Il modello bidimensionale sviluppato impiega elementi di tipo 2D shell: pertanto sono state costruite nell'ambiente Patran due entità *surface*, rappresentative delle due piastre che compongono la struttura in esame, come si osserva in figura 3.2.

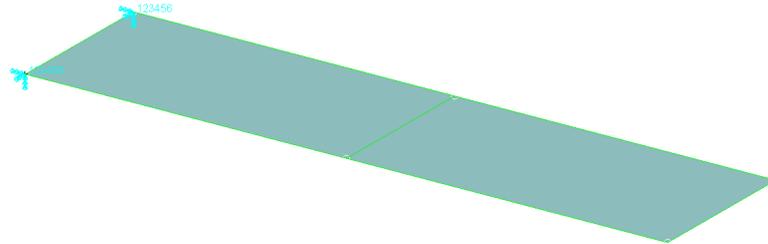


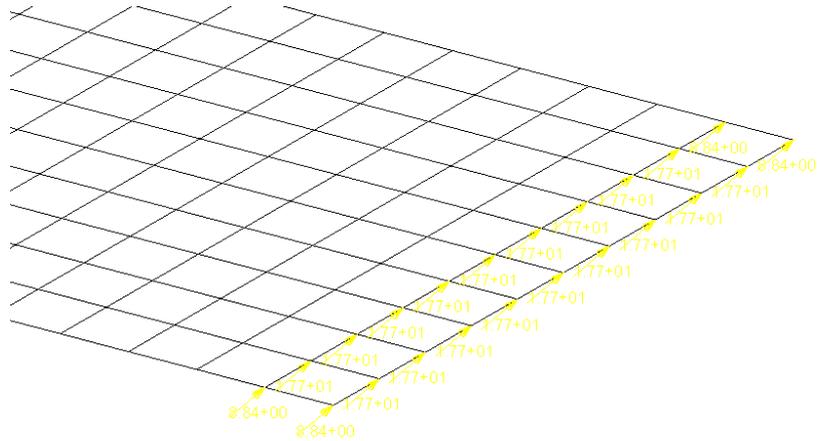
Figura 3.2: Modello 2D Patran

I passi successivi sono stati definire le proprietà del materiale all'interno della scheda 2D orthotropic e successivamente creare due laminati: per il pannello più spesso sono stati impiegati sedici strati secondo l'ordine  $[0/45/-45/90]_{2s}$  mentre la piastra più sottile è composta da otto ply orientati secondo la stacking sequence  $[0/45/-45/90]_s$ . Per i modelli con spessore 8-4 mm ogni strato ha spessore pari a 0.5 mm, nel caso a spessore 2-1 ogni ply è spesso 0.125 mm. ciascuno dei quali caratterizzati da otto strati e con spessore 1 e 0.5 mm (fig. 3.3).

Stacking Sequence Convention: Symmetric				Stacking Sequence Convention: Total				
Stacking Sequence Definition				Stacking Sequence Definition				
Input Data: orto				Input Data: orto				
	Material Name	Thickness	Orientation		Material Name	Thickness	Orientation	Global Ply ID
1	orto	5.000000E-1	0.000000E+0	1	orto	5.000000E-1	0.000000E+0	
2	orto	5.000000E-1	4.500000E+1	2	orto	5.000000E-1	4.500000E+1	
3	orto	5.000000E-1	-4.500000E+1	3	orto	5.000000E-1	-4.500000E+1	
4	orto	5.000000E-1	9.000000E+1	4	orto	5.000000E-1	9.000000E+1	
5	orto	5.000000E-1	9.000000E+1	5	orto	5.000000E-1	9.000000E+1	
6	orto	5.000000E-1	-4.500000E+1	6	orto	5.000000E-1	-4.500000E+1	
7	orto	5.000000E-1	4.500000E+1	7	orto	5.000000E-1	4.500000E+1	
8	orto	5.000000E-1	0.000000E+0	8	orto	5.000000E-1	0.000000E+0	

Figura 3.3: Scheda dei materiali *laminare* del modello 2D

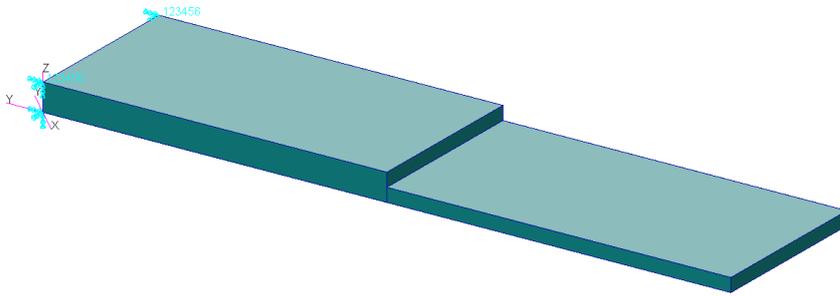
La condizione di vincolo e carico è quella descritta precedentemente, per cui l'estremità libera del lato più spesso è sottoposta a incastro mentre nei nodi dell'ultima fascia di elementi dell'estremità libera della piastra più sottile agiscono dei carichi pari a 6.25 N, come si osserva in figura 3.4.



**Figura 3.4:** Forze agenti nel modello 2D

### 3.1.2 Modello 3D-HEX8

Il modello tridimensionale, visibile in figura 3.5, è stato creato utilizzando il software Patran utilizzando dei corpi solidi di tipo isoMeshable.



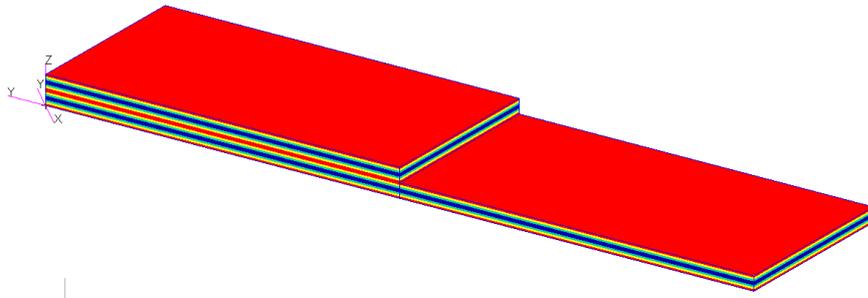
**Figura 3.5:** Modello Patran 3D

Dopo la costruzione del modello solido, il passo successivo consiste creazione delle proprietà in modo da simulare un materiale di tipo laminato. Ciò è stato svolto seguendo diverse fasi:

1. Definizione di un materiale ortotropo 3D con le caratteristiche proprie del materiale scelto;
2. Creazione della mesh attraverso la creazione di elementi HEX8 di dimensione 5x5x0.5 mm (5x5x0.125 nel caso a spessore 2-1 mm) ciascuno. In questo modo

i due solidi saranno suddivisi, lungo il loro spessore, rispettivamente in 16 e 8 strati.

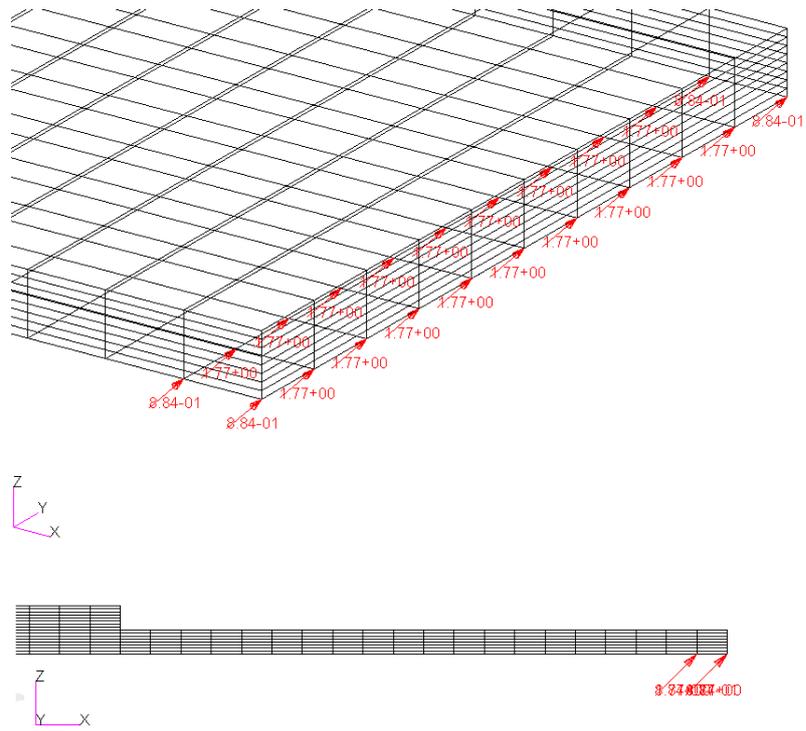
3. Creazione di tre sistemi di riferimento in cui l'asse  $x$  è orientato a 45, -45 e 90 gradi rispetto al sistema di riferimento originario del modello.
4. Definizione delle proprietà degli elementi. In particolare, sono state create quattro proprietà 3D, tante quante il numero di direzioni del materiale ortotropo definite nel laminato, che sono state applicate ai relativi strati di elementi, come si può osservare in figura 3.6.



**Figura 3.6:** Stacking sequence per il modello 3D

Dopo aver completato la costruzione della struttura, sono state impostate le condizioni di vincolo e carico:

- Il vincolo è costituito da un incastro all'estremità libera del solido più spesso;
- la forza è applicata sulla linea media dell'estremità libera del corpo più sottile. In particolare è stato imposto un carico di 12.5 N sia in direzione  $x$  che in direzione  $z$  su tutti i nodi posti a  $x=200$  e  $x=195$  eccetto quelli posti a  $y=0$  e  $y=50$  dove il carico è pari a 6.25 N, come si può osservare in figura 3.7.



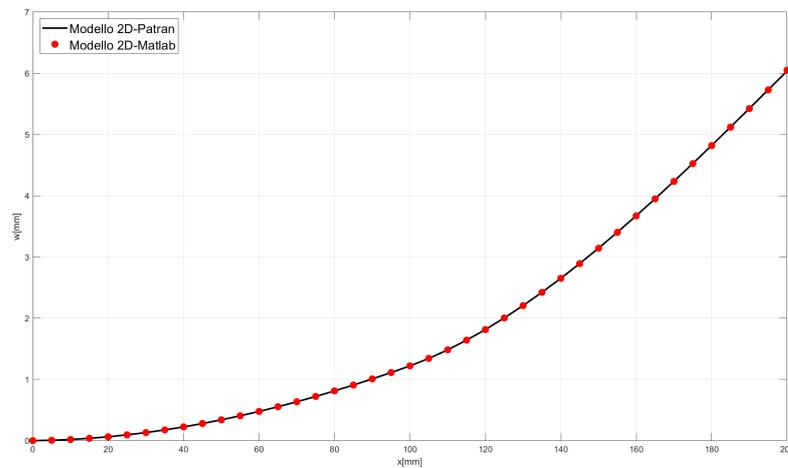
**Figura 3.7:** Posizionamento del carico

## 3.2 Validazione del codice Matlab

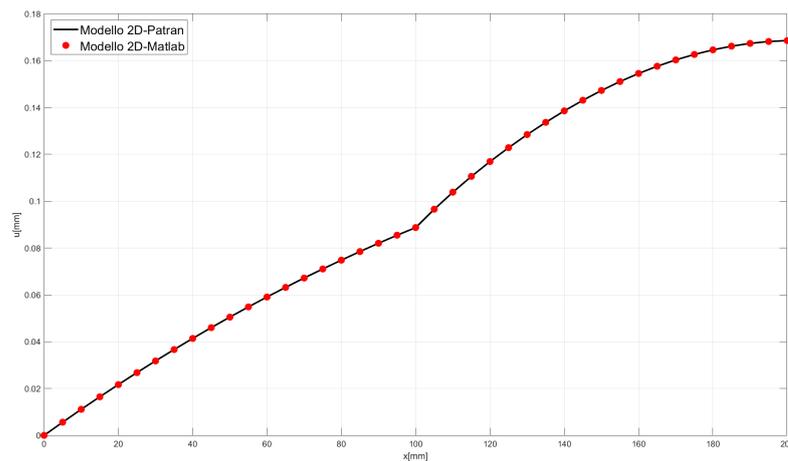
L'attendibilità del codice Matlab che implementa la teoria di Reissner-Mindlin è verificata attraverso il confronto dei risultati ottenuti dall'analisi di uno dei pannelli in esame.

In particolare, si è scelto di effettuare il confronto nel caso ortotropo con spessore maggiore (8-4 mm) e di modellare l'offset attribuendo a ZOFFS e Z0 un valore rispettivamente pari a  $+2h$  e  $-2h$ , dove  $h$  è lo spessore totale della piastra.

Per quanto riguarda l'analisi statica, in figura 3.8 e 3.9 è riportato il confronto tra il modello Patran e quello Matlab:



**Figura 3.8:** Confronto degli spostamenti trasversali dei modelli 2D Matlab e Nastran



**Figura 3.9:** Confronto degli spostamenti assiali dei modelli 2D Matlab e Nastran

I valori di spostamento in entrambe le direzioni studiate sono di fatto coincidenti. In secondo luogo si valuta la precisione dei risultati ottenuti in Matlab nel caso dell'analisi modale. In particolare, la tabella 3.3 riporta le prime dieci frequenze proprie estratte rispettivamente in Matlab e in Nastran:

Freq	Matlab	Nastran	Errore[%]
1	288	287	0.35
2	1069	1065	0.38
3	1308	1270	2.99
4	1673	1699	1.53
5	2935	2873	2.16
6	3018	2983	1.17
7	5159	5041	2.34
8	5310	5191	2.29
9	6526	6584	0.88
10	6990	6985	0.07

**Tabella 3.3:** Frequenze proprie estratte dai modelli Matlab e Nastran

Si nota in particolare che sebbene le frequenze non siano esattamente le stesse, la differenza tra il modello Matlab e Nastran è comunque molto ridotta, tanto che l'errore percentuale è al massimo intorno al 2%.

In conclusione, i risultati ottenuti dal confronto tra il modello Matlab e il modello sviluppato attraverso Patran e Nastran dimostrano che lo script è attendibile e che dunque può essere utilizzato ai fini dell'indagine di cui è oggetto questa tesi.

### 3.3 Confronto tra ZOFFS e Z0

Per comprendere il funzionamento delle funzioni ZOFFS e Z0 si studia il comportamento delle matrici di massa e rigidezza applicando diversi approcci di modellazione. In particolare, è stato utilizzato il codice Matlab per condurre l'analisi statica e modale di tre casi che impiegano tre diverse modalità di modellazione dell'offset:

1. Il primo è costruito ponendo ZOFFS uguale a metà dello spessore e lasciando Z0 al valore di default;
2. Nel secondo, si impostano entrambi i parametri a 0;
3. Nel terzo si pone  $ZOFFS = +2h$  e  $Z0 = -2h$ , come nell'esempio precedentemente analizzato;

Queste tre combinazioni sono state scelte in modo da ottenere in tutti i casi che il piano nodale sia posto in corrispondenza del laminato, in modo da rilevare i diversi effetti generati dai vari approcci sul medesimo modello fisico.

### Analisi statica

Le figure 3.10 e 3.11 riportano l'andamento dei valori di spostamento assiale e trasversale nei tre casi:

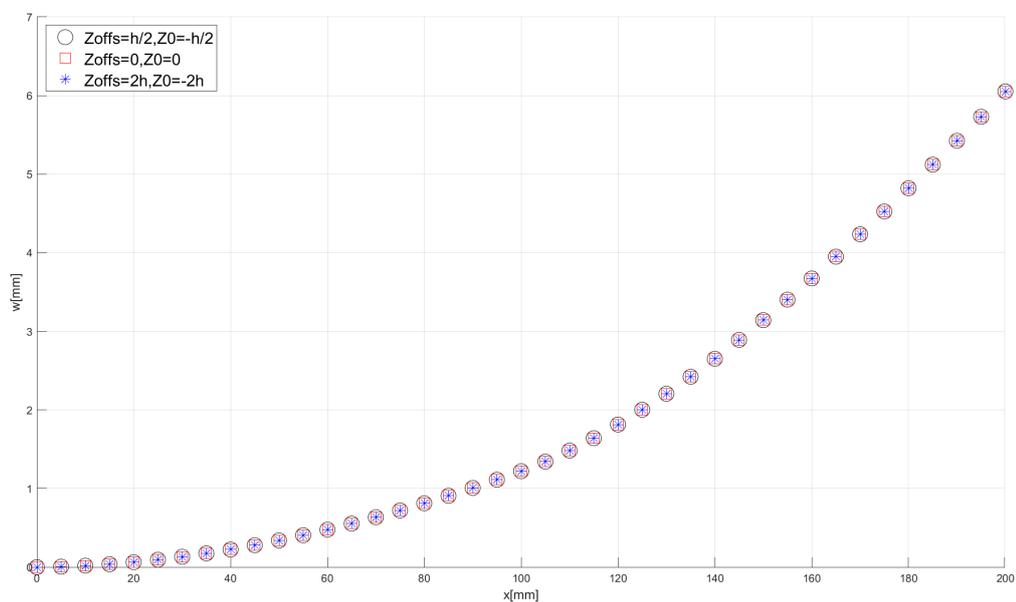
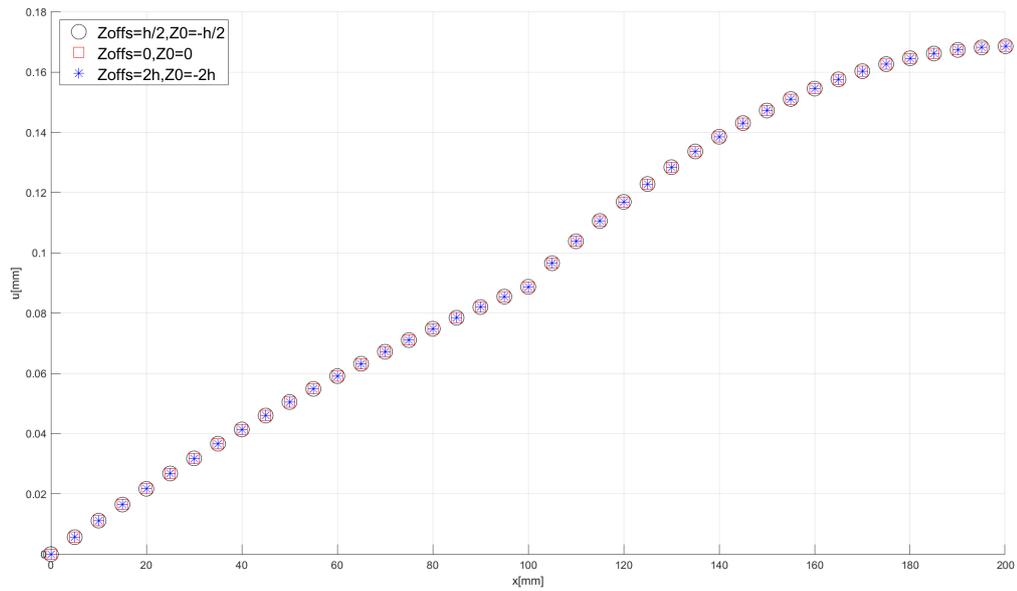


Figura 3.10: Confronto degli spostamenti trasversali nei tre casi



**Figura 3.11:** Confronto degli spostamenti assiali nei tre casi

Si nota immediatamente che le analisi compiute sui tre modelli considerati restituiscono i medesimi valori di spostamento.

Facendo riferimento a quanto descritto nel capitolo 2, si osserva come variano le matrici  $[A]$ ,  $[B]$ ,  $[D]$ ,  $[A_T]$  e i coefficienti d'inerzia per effetto dei diversi approcci di calcolo impiegati.

In particolare, si osserva che la matrice di rigidezza membranale, definita dall'integrale 2.13, sarà sempre calcolata come

$$[A] = [Q_P]h \quad (3.1)$$

e pertanto è invariante alla posizione del piano di riferimento.

A_1 =	A_2 =	A_3 =
1.0e+05 *	1.0e+05 *	1.0e+05 *
6.0487    1.8694    0	6.0487    1.8694    0	6.0487    1.8694    0
1.8694    6.0487    0.0000	1.8694    6.0487    0.0000	1.8694    6.0487    0.0000
0    0.0000    2.0896	0    0.0000    2.0896	0    0.0000    2.0896

**Figura 3.12:** Matrici di rigidezza membranale nei tre casi

Per lo stesso motivo, anche i coefficienti della matrice di rigidezza a taglio sono uguali per tutti e tre i casi:

At_1 =	At_2 =	At_3 =
1.0e+04 *	1.0e+04 *	1.0e+04 *
3.0100    -0.0000	3.0100    -0.0000	3.0100    -0.0000
-0.0000    3.0100	-0.0000    3.0100	-0.0000    3.0100

**Figura 3.13:** Matrici di rigidezza a taglio nei tre casi

Nel caso delle matrici di rigidezza di accoppiamento e di rigidezza flessio-torsionale diventa invece determinante la posizione del piano di riferimento. Riprendendo la 2.13, il calcolo della matrice [B] assume una modalità differente per ciascuno dei casi:

$$[B_1] = \int_{-\frac{h}{2}}^{+\frac{h}{2}} [Q_P] z dz = [Q_P] \left( \frac{h^2}{4} - \frac{h^2}{4} \right) = 0$$

$$[B_2] = \int_0^h [Q_P] z dz = \frac{1}{2} [Q_P] h^2$$

$$[B_3] = \int_{-2h}^{-h} [Q_P] z dz = [Q_P] \left( \frac{h^2}{2} - \frac{4h^2}{2} \right) = -\frac{3}{2} [Q_P] h^2$$

La figura 3.14 riporta le matrici di accoppiamento calcolate per la piastra da 8 mm: si nota immediatamente gli effetti dovuti al differente posizionamento del piano di riferimento, come previsto dallo svolgimento degli integrali. È possibile eseguire un

B_1 =	B_2 =	B_3 =
1.0e+06 *	1.0e+06 *	1.0e+06 *
0.0000    0	2.4195    0.7478	-7.2584    -2.2433    0
0    0.0000	0.7478    2.4195    0.0000	-2.2433    -7.2584    -0.0000
0    0    0.0000	0    0.0000    0.8359	0    -0.0000    -2.5076

**Figura 3.14:** Matrici di rigidezza di accoppiamento nei tre casi

calcolo simile anche per la matrice di rigidezza flessio-torsionale:

$$[D_1] = \int_{-\frac{h}{2}}^{+\frac{h}{2}} [Q_P] z^2 dz = [Q_P] \left( \frac{h^3}{24} + \frac{h^3}{24} \right) = [Q_P] \frac{h^3}{12}$$

$$[D_2] = \int_0^h [Q_P] z dz = \frac{1}{3} [Q_P] h^3$$

$$[D_3] = \int_{-2h}^{-h} [Q_P] z dz = [Q_P] \left( -\frac{h^3}{3} + \frac{8h^3}{3} \right) = \frac{7}{3} [Q_P] h^3$$

Ciò è confermato dalle matrici ottenute in Matlab:

$D_1 =$ $1.0e+06 *$ <table style="margin-left: auto; margin-right: auto;"> <tr><td>3.7813</td><td>0.9561</td><td>0.0857</td></tr> <tr><td>0.9561</td><td>2.7525</td><td>0.0857</td></tr> <tr><td>0.0857</td><td>0.0857</td><td>1.0735</td></tr> </table>	3.7813	0.9561	0.0857	0.9561	2.7525	0.0857	0.0857	0.0857	1.0735	$D_2 =$ $1.0e+07 *$ <table style="margin-left: auto; margin-right: auto;"> <tr><td>1.3459</td><td>0.3947</td><td>0.0086</td></tr> <tr><td>0.3947</td><td>1.2430</td><td>0.0086</td></tr> <tr><td>0.0086</td><td>0.0086</td><td>0.4417</td></tr> </table>	1.3459	0.3947	0.0086	0.3947	1.2430	0.0086	0.0086	0.0086	0.4417	$D_3 =$ $1.0e+07 *$ <table style="margin-left: auto; margin-right: auto;"> <tr><td>9.0882</td><td>2.7875</td><td>0.0086</td></tr> <tr><td>2.7875</td><td>8.9853</td><td>0.0086</td></tr> <tr><td>0.0086</td><td>0.0086</td><td>3.1164</td></tr> </table>	9.0882	2.7875	0.0086	2.7875	8.9853	0.0086	0.0086	0.0086	3.1164
3.7813	0.9561	0.0857																											
0.9561	2.7525	0.0857																											
0.0857	0.0857	1.0735																											
1.3459	0.3947	0.0086																											
0.3947	1.2430	0.0086																											
0.0086	0.0086	0.4417																											
9.0882	2.7875	0.0086																											
2.7875	8.9853	0.0086																											
0.0086	0.0086	3.1164																											

**Figura 3.15:** Matrici di rigidezza flessio-torsionali nei tre casi

L'effetto della posizione del piano medio è tuttavia corretto dall'effetto del parametro ZOFFS: si nota infatti che estraendo la matrice di rigidezza di uno degli elementi in cui è suddivisa la piastra, i valori ottenuti sono gli stessi in ogni caso.

$K_1 =$ $1.0e+06 *$ <table style="margin-left: auto; margin-right: auto;"> <tr><td>0.2713</td><td>0.0990</td><td>0</td><td>1.0851</td><td>0.3959</td></tr> <tr><td>0.0990</td><td>0.2713</td><td>0</td><td>0.3959</td><td>1.0851</td></tr> <tr><td>0</td><td>0</td><td>0.0151</td><td>-0.0188</td><td>-0.0188</td></tr> <tr><td>1.0851</td><td>0.3959</td><td>-0.0188</td><td>6.0486</td><td>2.1482</td></tr> <tr><td>0.3959</td><td>1.0851</td><td>-0.0188</td><td>2.1482</td><td>5.7057</td></tr> </table>	0.2713	0.0990	0	1.0851	0.3959	0.0990	0.2713	0	0.3959	1.0851	0	0	0.0151	-0.0188	-0.0188	1.0851	0.3959	-0.0188	6.0486	2.1482	0.3959	1.0851	-0.0188	2.1482	5.7057	$K_2 =$ $1.0e+06 *$ <table style="margin-left: auto; margin-right: auto;"> <tr><td>0.2713</td><td>0.0990</td><td>0</td><td>1.0851</td><td>0.3959</td></tr> <tr><td>0.0990</td><td>0.2713</td><td>0</td><td>0.3959</td><td>1.0851</td></tr> <tr><td>0</td><td>0</td><td>0.0151</td><td>-0.0188</td><td>-0.0188</td></tr> <tr><td>1.0851</td><td>0.3959</td><td>-0.0188</td><td>6.0486</td><td>2.1482</td></tr> <tr><td>0.3959</td><td>1.0851</td><td>-0.0188</td><td>2.1482</td><td>5.7057</td></tr> </table>	0.2713	0.0990	0	1.0851	0.3959	0.0990	0.2713	0	0.3959	1.0851	0	0	0.0151	-0.0188	-0.0188	1.0851	0.3959	-0.0188	6.0486	2.1482	0.3959	1.0851	-0.0188	2.1482	5.7057	$K_3 =$ $1.0e+06 *$ <table style="margin-left: auto; margin-right: auto;"> <tr><td>0.2713</td><td>0.0990</td><td>0</td><td>1.0851</td><td>0.3959</td></tr> <tr><td>0.0990</td><td>0.2713</td><td>0</td><td>0.3959</td><td>1.0851</td></tr> <tr><td>0</td><td>0</td><td>0.0151</td><td>-0.0188</td><td>-0.0188</td></tr> <tr><td>1.0851</td><td>0.3959</td><td>-0.0188</td><td>6.0486</td><td>2.1482</td></tr> <tr><td>0.3959</td><td>1.0851</td><td>-0.0188</td><td>2.1482</td><td>5.7057</td></tr> </table>	0.2713	0.0990	0	1.0851	0.3959	0.0990	0.2713	0	0.3959	1.0851	0	0	0.0151	-0.0188	-0.0188	1.0851	0.3959	-0.0188	6.0486	2.1482	0.3959	1.0851	-0.0188	2.1482	5.7057
0.2713	0.0990	0	1.0851	0.3959																																																																									
0.0990	0.2713	0	0.3959	1.0851																																																																									
0	0	0.0151	-0.0188	-0.0188																																																																									
1.0851	0.3959	-0.0188	6.0486	2.1482																																																																									
0.3959	1.0851	-0.0188	2.1482	5.7057																																																																									
0.2713	0.0990	0	1.0851	0.3959																																																																									
0.0990	0.2713	0	0.3959	1.0851																																																																									
0	0	0.0151	-0.0188	-0.0188																																																																									
1.0851	0.3959	-0.0188	6.0486	2.1482																																																																									
0.3959	1.0851	-0.0188	2.1482	5.7057																																																																									
0.2713	0.0990	0	1.0851	0.3959																																																																									
0.0990	0.2713	0	0.3959	1.0851																																																																									
0	0	0.0151	-0.0188	-0.0188																																																																									
1.0851	0.3959	-0.0188	6.0486	2.1482																																																																									
0.3959	1.0851	-0.0188	2.1482	5.7057																																																																									

**Figura 3.16:** Matrici di rigidezza estratte dal codice Matlab

### Analisi modale

L'analisi delle frequenze proprie conferma l'equivalenza tra i tre approcci seguiti per la modellazione del pannello. In particolare, la tabella 3.4 riporta le prime dieci frequenze proprie di ognuno dei casi analizzati:

Freq.	Caso 1	Caso 2	Caso 3
1	288	288	288
2	1069	1069	1069
3	1308	1308	1308
4	1673	1673	1673
5	2935	2935	2935
6	3018	3018	3018
7	5159	5159	5159
8	5310	5310	5310
9	6526	6526	6526
10	6990	6990	6990

**Tabella 3.4:** Frequenze proprie nei tre casi

Un'ulteriore conferma dell'equivalenza tra i due metodi si ha utilizzando il MAC o Modal Assurance Criterion.

Questo criterio è definito dalla relazione:

$$MAC \equiv \frac{\left| \left( \{\phi_r^A\}^T \{\phi_s^B\} \right) \right|^2}{\left( \{\phi_r^A\}^T \{\phi_r^A\} \right) \left( \{\phi_s^B\}^T \{\phi_s^B\} \right)} \quad (3.2)$$

e permette di stabilire la somiglianza tra due forme modali. In particolare, se due forme modali sono simili, il MAC presenterà dei termini sulla diagonale prossimi a uno e termini fuori dalla diagonale vicini allo zero. Le figure 3.17 e 3.18 riportano le matrici ottenute confrontando le forme modali dei casi 1 e 2 e poi dei casi 2 e 3.

MAC\_12 =

1.0000	0.0225	0.0000	0.0000	0.0000	0.0007	0.0017	0.0001	0.0002	0.0000
0.0225	1.0000	0.0017	0.0002	0.0251	0.0585	0.0007	0.0002	0.0000	0.0000
0.0000	0.0017	1.0000	0.0133	0.0137	0.0102	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000
0.0000	0.0002	0.0133	1.0000	0.0000	0.0000	0.0001	0.0001	0.0300	0.0000
0.0000	0.0251	0.0137	0.0000	1.0000	0.0002	0.0766	0.0014	0.0121	0.0000
0.0007	0.0585	0.0102	0.0000	0.0002	1.0000	0.0012	0.0619	0.0042	0.0000
0.0017	0.0007	0.0000	0.0001	0.0766	0.0012	1.0000	0.0177	0.0076	0.0000
0.0001	0.0002	0.0000	0.0001	0.0014	0.0619	0.0177	1.0000	0.0032	0.0000
0.0002	0.0000	0.0000	0.0300	0.0121	0.0042	0.0076	0.0032	1.0000	0.0000
0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	1.0000

Figura 3.17: Matrice MAC ottenuta dal confronto delle forme modali dei casi 1 e 2

MAC\_23 =

1.0000	0.0225	0.0000	0.0000	0.0000	0.0007	0.0017	0.0001	0.0002	0.0000
0.0225	1.0000	0.0017	0.0002	0.0251	0.0585	0.0007	0.0002	0.0000	0.0000
0.0000	0.0017	1.0000	0.0133	0.0137	0.0102	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000
0.0000	0.0002	0.0133	1.0000	0.0000	0.0000	0.0001	0.0001	0.0300	0.0000
0.0000	0.0251	0.0137	0.0000	1.0000	0.0002	0.0766	0.0014	0.0121	0.0000
0.0007	0.0585	0.0102	0.0000	0.0002	1.0000	0.0012	0.0619	0.0042	0.0000
0.0017	0.0007	0.0000	0.0001	0.0766	0.0012	1.0000	0.0177	0.0076	0.0000
0.0001	0.0002	0.0000	0.0001	0.0014	0.0619	0.0177	1.0000	0.0032	0.0000
0.0002	0.0000	0.0000	0.0300	0.0121	0.0042	0.0076	0.0032	1.0000	0.0000
0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	1.0000

Figura 3.18: Matrice MAC ottenuta dal confronto delle forme modali dei casi 2 e 3

Come per il caso statico, anche l'analisi modale conferma quindi la totale equivalenza dei tre modelli. In modo simile al calcolo delle matrici di rigidità, anche i coefficienti d'inerzia risultano essere influenzati dal valore di Z0:

Coeff.	Caso 1	Caso 1	Caso 3
$\mu$	0.0128	0.0128	0.0128
$m_1$	0	0.0512	-0.154
$m_2$	0.06827	0.02731	1.911

**Tabella 3.5:** Coefficienti d'inerzia nei tre casi

Anche questa volta l'effetto di Z0 è bilanciato da quello di ZOFFS dato che la matrice di massa dell'elemento è la stessa per ciascun caso:

$M_1 =$ <pre> 1.0e-06 * 0.0356    0    0    0.1422    0 0    0.0356    0    0    0.1422 0    0    0.0356    0    0 0.1422    0    0    0.7585    0 0    0.1422    0    0    0.7585                     </pre>	$M_2 =$ <pre> 1.0e-06 * 0.0356    0    0    0.1422    0 0    0.0356    0    0    0.1422 0    0    0.0356    0    0 0.1422    0    0    0.7585    0 0    0.1422    0    0    0.7585                     </pre>	$M_3 =$ <pre> 1.0e-06 * 0.0356    0    0    0.1422    0 0    0.0356    0    0    0.1422 0    0    0.0356    0    0 0.1422    0    0    0.7585    0 0    0.1422    0    0    0.7585                     </pre>
--	--	--

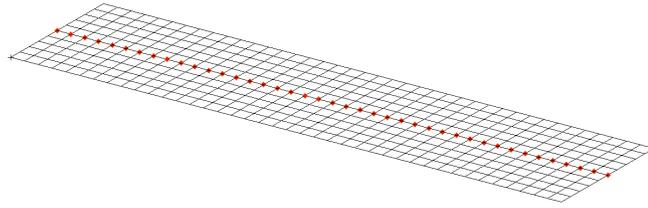
**Figura 3.19:** Matrici di massa estratte dal codice Matlab

Dati i risultati ottenuti in questa sezione, si ipotizza che l'uso di ZOFFS e Z0 per la modellazione di strutture a spessore variabile sia interscambiabile purché sia verificata la condizione che la somma dei due parametri sia zero.

## 3.4 Analisi Nastran

### 3.4.1 Analisi statica

Dove aver determinato il processo matematico alla base di ZOFFS e Z0, si procede con la verifica che quanto ottenuto precedentemente sia valido anche per i modelli analizzati tramite Nastran e inoltre, si intende dimostrare che ciò non è influenzato né da fattori geometrici, nella fattispecie dallo spessore delle piastre, né dalla tipologia di materiale impiegato e pertanto si è utilizzato anche un materiale isotropo in luogo del laminato ortotropo di cui erano composti i pannelli analizzati finora. La verifica del comportamento statico dei pannelli piani avviene attraverso il confronto tra gli spostamenti misurati nei nodi di mezzzeria delle piastre, come mostrato in figura 3.20.



**Figura 3.20:** Nodi selezionati per il confronto degli spostamenti

In particolare, per ciascuno dei tre casi utilizzati sono stati creati due modelli:

- Il primo sfrutta principalmente il parametro CQUAD ZOFFS, al quale viene attribuito il valore di metà dello spessore della piastra mentre Z0 è lasciato nell'impostazione di default, pari a  $-h/2$ ;
- Il secondo valuta principalmente l'effetto di PCOMP Z0, che viene posto pari a zero per tutte le piastre, mentre il valore di ZOFFS è lasciato di default, cioè pari anch'esso a 0.

In questo modo si ottiene che tutti i nodi siano posti in corrispondenza della superficie inferiore del laminato, come mostrato in figura 3.21, in cui è mostrata la posizione del piano nodale, in rosso, rispetto al laminato.

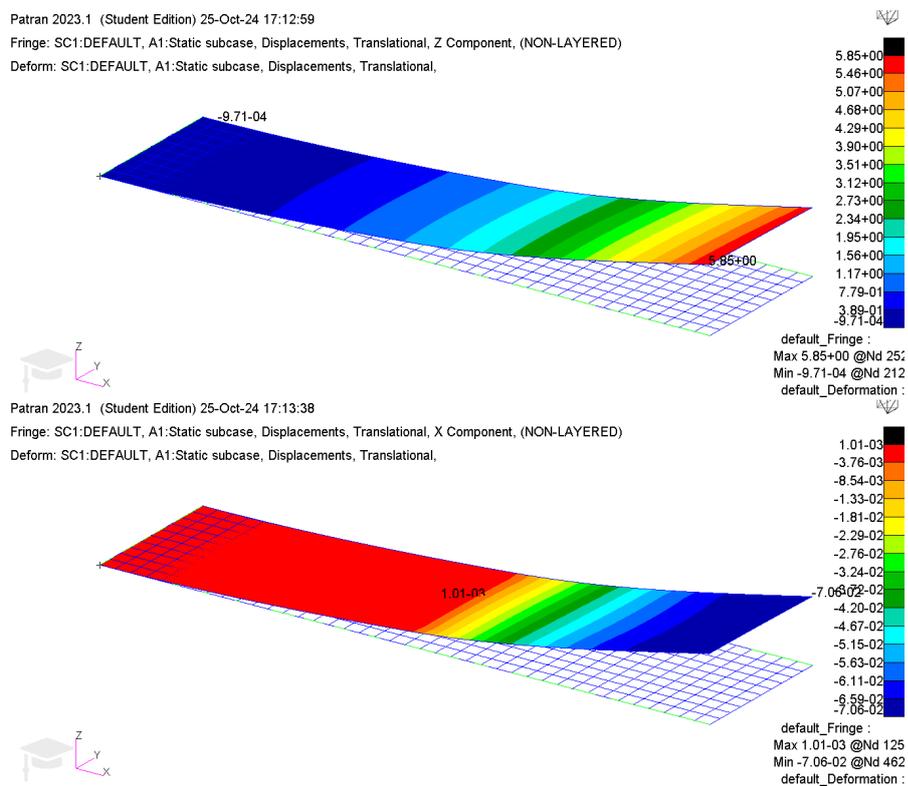


**Figura 3.21:** Posizionamento del piano nodale rispetto al laminato

Di seguito, dunque, sono riportati i risultati ottenuti per i casi considerati.

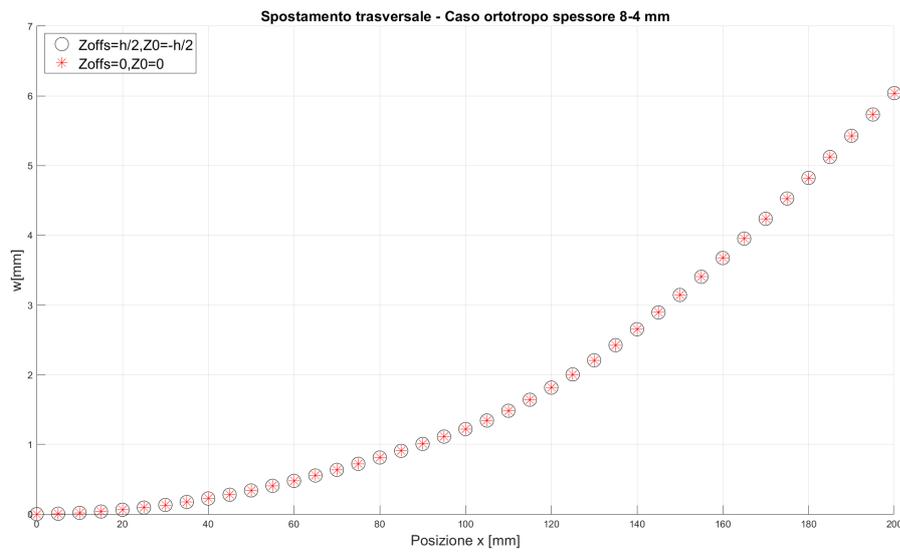
## Modello ortotropo - Spessore 8-4 mm

In figura 3.22 sono rappresentati gli spostamenti in direzione x e y ottenuti dall'analisi statica:

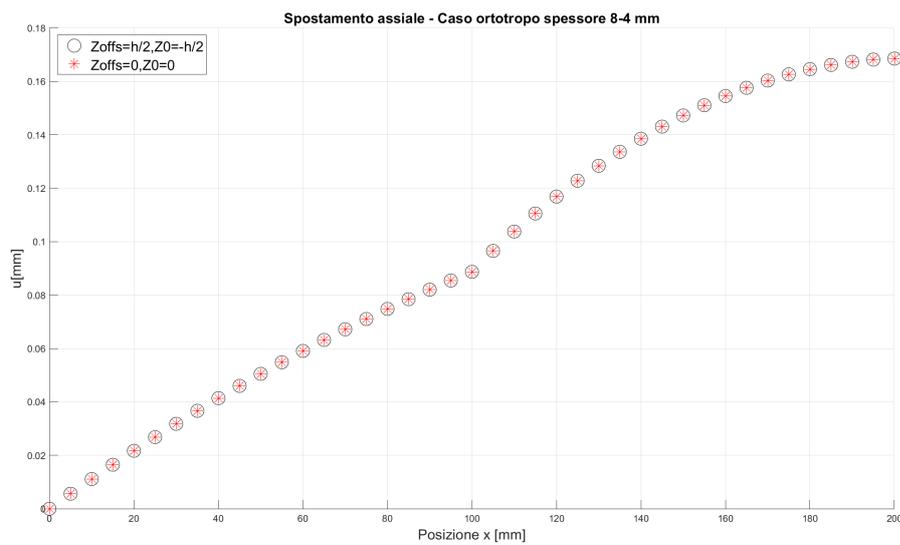


**Figura 3.22:** Spostamenti in direzione z e x per il caso ortotropo a spessore 8-4 mm

Inoltre, le figure 3.23 e 3.24 mostrano il confronto tra i valori di spostamento in mezzeria estratti dai due modelli:



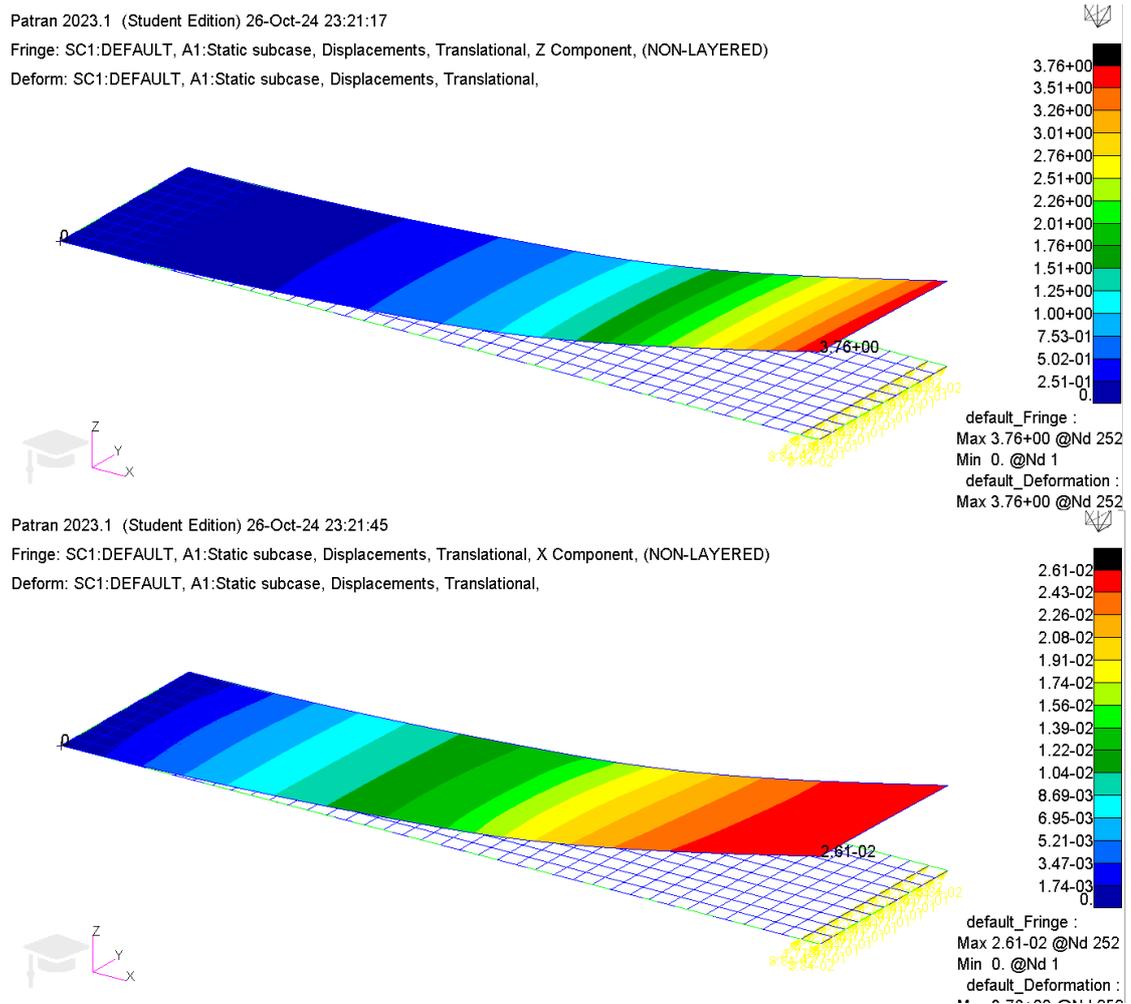
**Figura 3.23:** Confronto dello spostamento trasversale nel caso ZOFFS e Z0 - Modello ortotropo a spessore 8-4 mm



**Figura 3.24:** Confronto dello spostamento assiale nel caso ZOFFS e Z0 - Modello ortotropo a spessore 8-4 mm

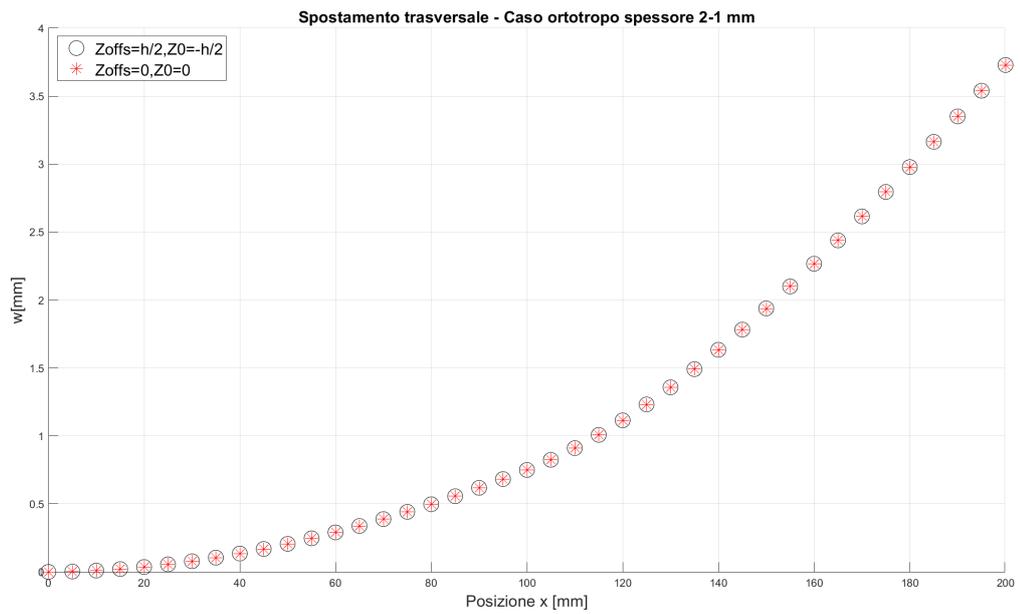
## Modello ortotropo - Spessore 2-1 mm

La figura 3.25 mostra gli spostamenti in direzione x e y ottenuti dall'analisi statica:

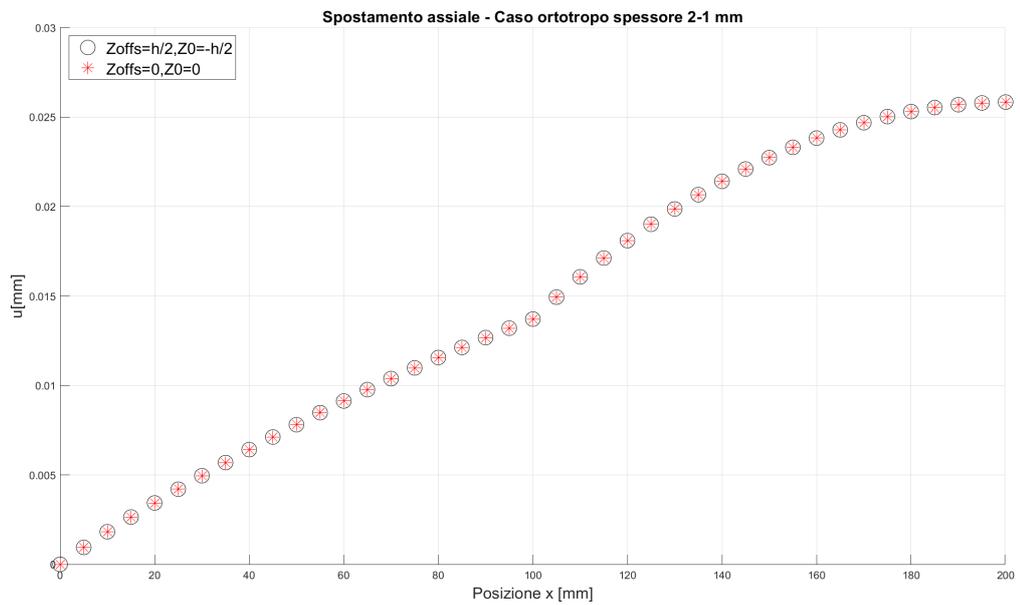


**Figura 3.25:** Spostamenti in direzione z e x per il caso ortotropo a spessore 2.1 mm

Inoltre, sono riportati i grafici di confronto tra i valori di spostamento in mezzeria estratti dai due modelli (fig. 3.26 e 3.27):



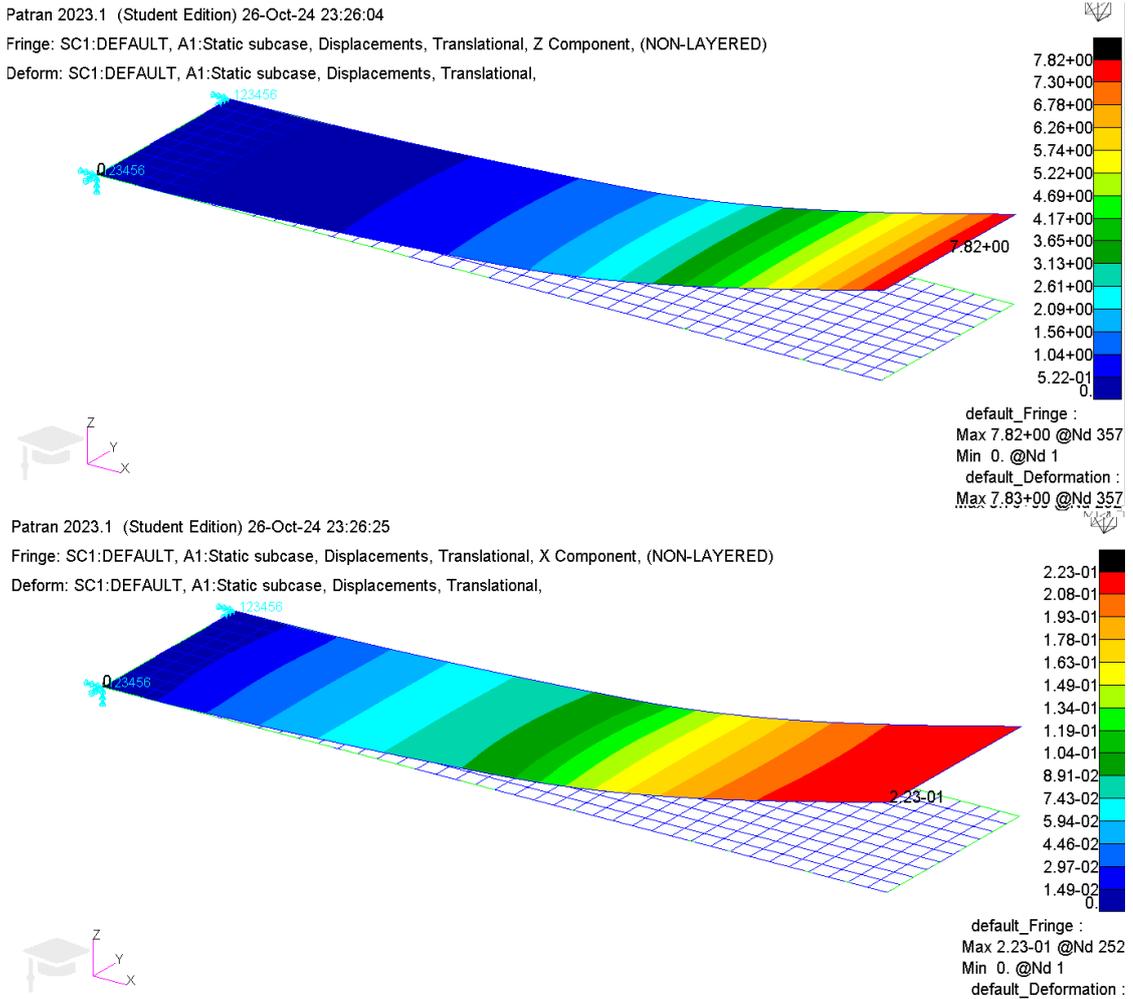
**Figura 3.26:** Confronto dello spostamento trasversale nel caso ZOFFS e Z0 - Modello ortotropo a spessore 2-1 mm



**Figura 3.27:** Confronto dello spostamento assiale nel caso ZOFFS e Z0 - Modello ortotropo a spessore 2-1 mm

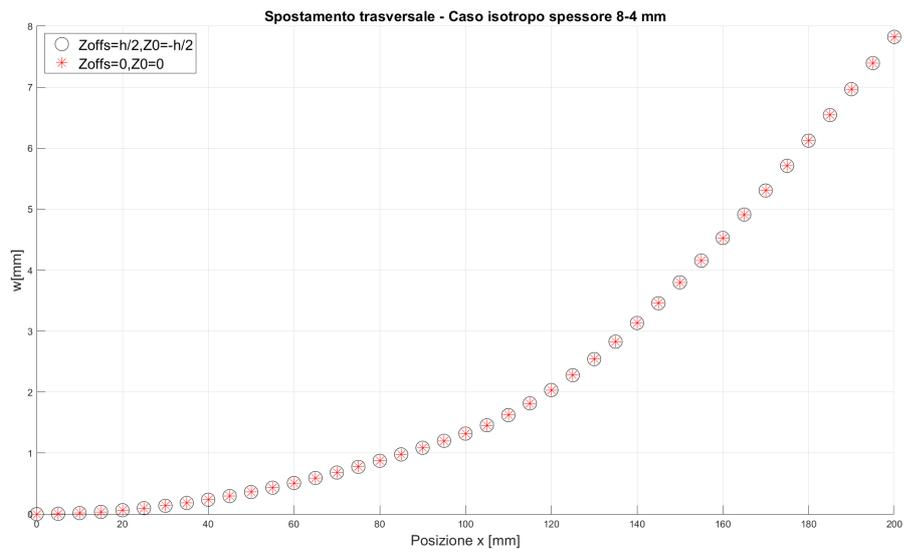
### Modello isotropo - Spessore 8-4 mm

In figura 3.28 sono rappresentati gli spostamenti in direzione x e y ottenuti dall'analisi statica:

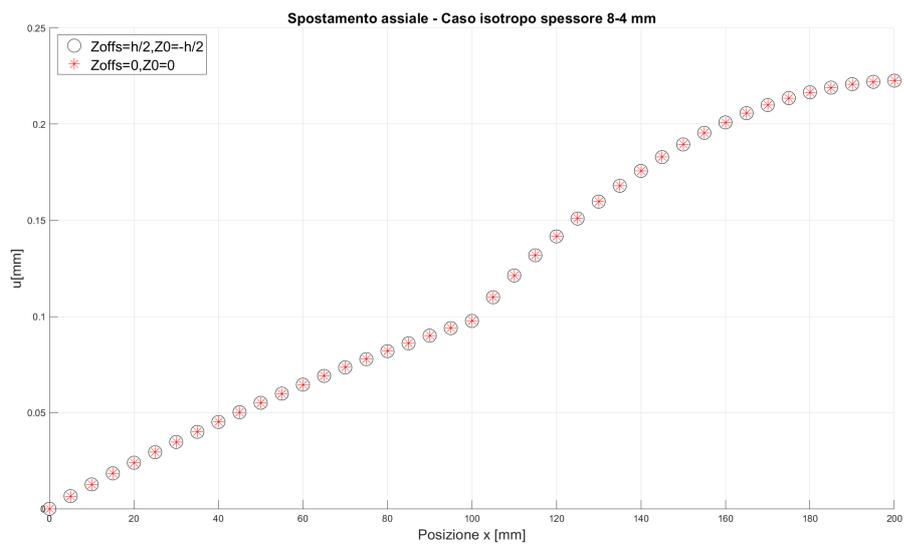


**Figura 3.28:** Spostamenti in direzione z e x per il caso isotropo a spessore 8-4 mm

Inoltre, le figure 3.29 e 3.30 mostrano il confronto tra i valori di spostamento in mezzeria estratti dai due modelli:



**Figura 3.29:** Confronto dello spostamento trasversale nel caso ZOFFS e Z0 - Modello isotropo a spessore 8-4 mm



**Figura 3.30:** Confronto dello spostamento assiale nel caso ZOFFS e Z0 - Modello isotropo a spessore 8-4 mm

### 3.4.2 Analisi modale

I tre diversi modelli mostrano un comportamento vibrazionale relativamente simile. Questo è confermato visivamente attraverso le forme modali ottenute. Pertanto, si riportano, come esempio, le prime tre forme modali ottenute per ciascuno dei pannelli studiati. Si riportano, come esempio, le prime tre forme modali ottenute per ciascuno dei pannelli studiati.

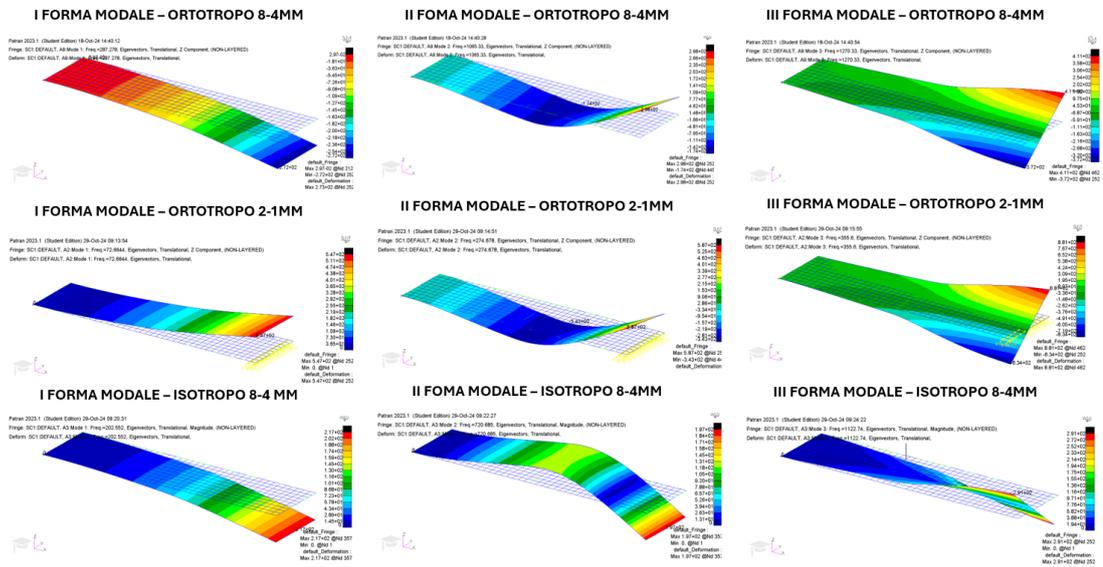


Figura 3.31: Prime tre forme modali

Le tabelle riportate di seguito mostrano le frequenze proprie ottenute per i tre diversi pannelli piani sia nel caso in cui venga utilizzato ZOFFS che nel caso in cui è presente Z0.

Ortotropo 8-4mm			Ortotropo 2-1mm		
Freq.	CASO 1	CASO 2	Freq.	CASO 1	CASO 2
1	287	287	1	73	73
2	1065	1065	2	275	275
3	1270	1270	3	356	356
4	1699	1699	4	800	800
5	2873	2873	5	843	843
6	2982	2982	6	1428	1428
7	5041	5041	7	1472	1472
8	5190	5190	8	1684	1684
9	6584	6584	9	1906	1906
10	6984	6984	10	2427	2427

Isotropo 8-4mm		
Freq.	CASO 1	CASO 2
1	202	202
2	720	720
3	1122	1122
4	1370	1370
5	2106	2106
6	2610	2610
7	3827	3827
8	4514	4514
9	5283	5283
10	6332	6332

**Tabella 3.6:** Risultati delle analisi modali

Si nota immediatamente che in ciascuno dei tre casi analizzati, ciascuna delle frequenze proprie del caso ZOFFS coincide perfettamente con il corrispettivo del caso Z0.

Come nel caso dell'analisi statica, dunque, anche il risultato dell'analisi modale effettuata con Nastran non risulta essere influenzato dalla modalità scelta per la creazione dell'offset in nessuno dei casi analizzati.

## 3.5 Ricerca del miglior posizionamento del piano nodale

### 3.5.1 Introduzione

I risultati ottenuti nel capitolo precedente mostrano una perfetta equivalenza tra la modellazione dell'offset tramite CQUAD ZOFFS e PCOMP Z0.

Tuttavia, nello specifico caso del pannello piano, è stato sempre adottato un approccio che vede i nodi disposti in corrispondenza della faccia inferiore del laminato. Tuttavia, questo tipo di configurazione non è l'unica che può essere adottata per questa tipologia di struttura.

Infatti, si è voluto verificare quali possono essere gli effetti sulla precisione dei risultati ipotizzando che il piano nodale sia posto in una posizione differente rispetto al bottom del pannello.

In particolare, facendo riferimento alla struttura descritta precedentemente, si è ipotizzato di disporre il piano nodale all'altezza della metà della piastra più spessa, in modo tale che i nodi coincidano con il mid-plane della piastra spessa e con la superficie superiore della piastra più sottile.



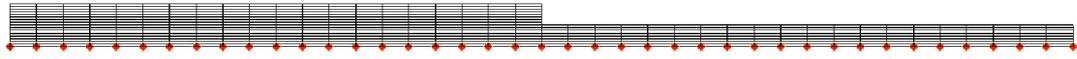
**Figura 3.32:** Rappresentazione della disposizione del piano nodale nel caso 2

Nel seguito si utilizzerà questa nomenclatura:

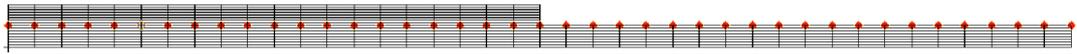
- Caso 1, per i modelli in cui i nodi sono disposti in corrispondenza della faccia inferiore del laminato;
- Caso 2, per i modelli in cui il piano nodale è posto all'altezza di metà dello spessore della piastra più spessa;

Per poter effettuare il confronto tra i due approcci si utilizzato il modello tridimensionale come riferimento per gli spostamenti. Infatti, tale modello garantisce la maggiore fedeltà e allo stesso tempo consente di poter leggere dallo stesso modello gli spostamenti a ogni livello di spessore. In figura 3.33 è riportato la modalità con cui sono stati selezionati i nodi nei due casi-studio:

## CASO 1



## CASO 2

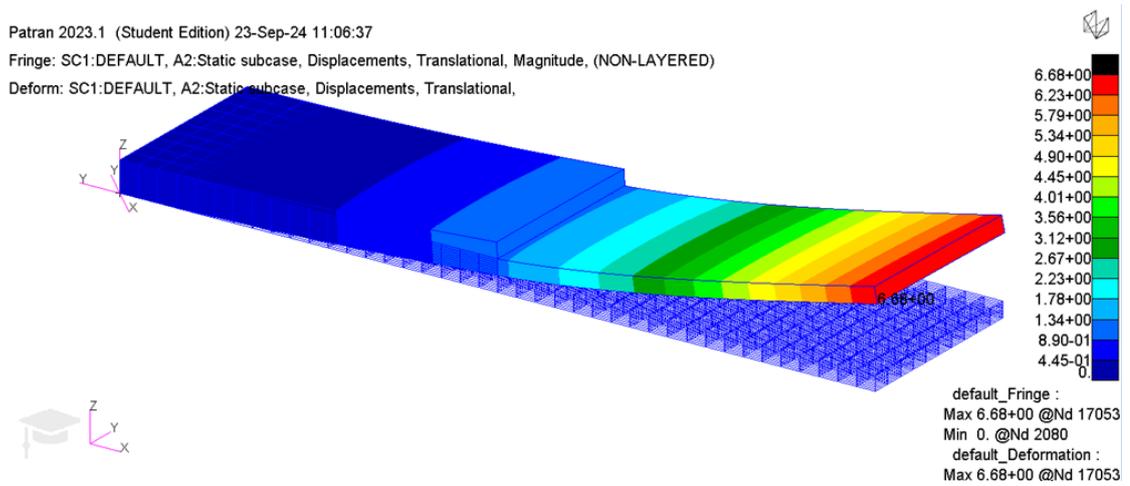


**Figura 3.33:** Differenze nella modalità di lettura dei nodi

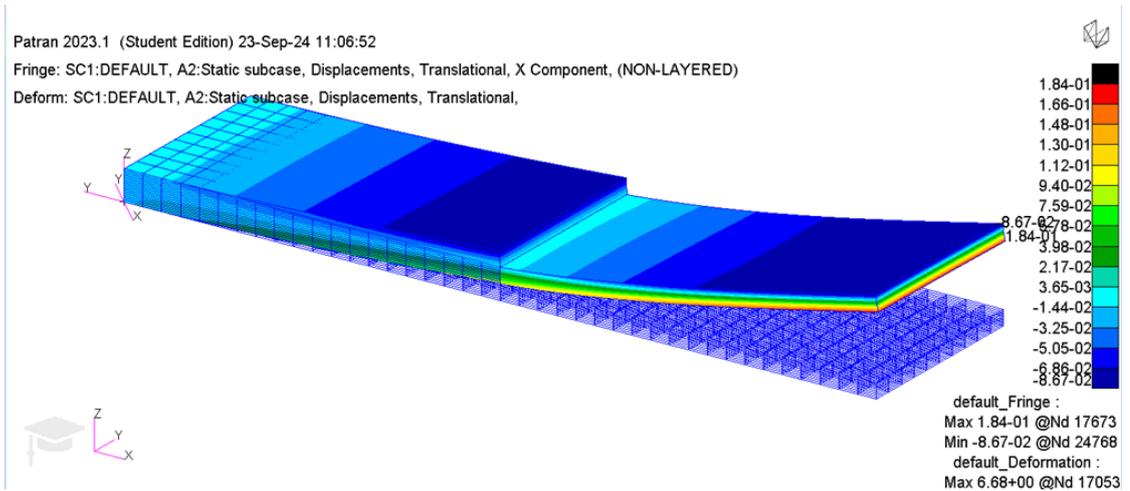
### 3.5.2 Modelli 3D-HEX8

In questo paragrafo sono rappresentati i modi di deformazione ottenuti dall'analisi in Nastran dei modelli 3D che saranno utilizzati come riferimento per il confronto tra i due casi in esame.

#### Modello ortotropo con spessori 8-4mm

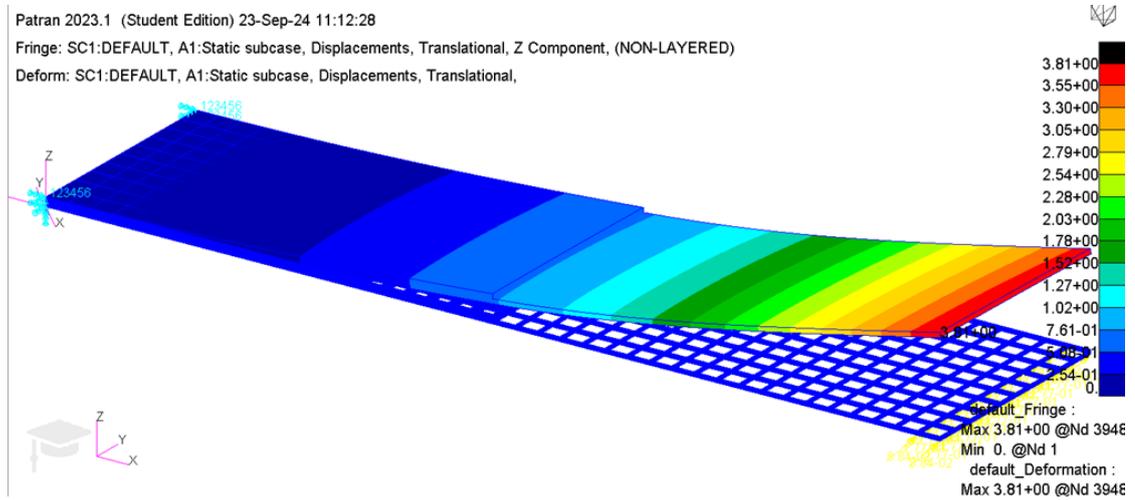


**Figura 3.34:** Spostamento trasversale - Modello Patran 3D-HEX8 ortotropo a spessore 8-4mm

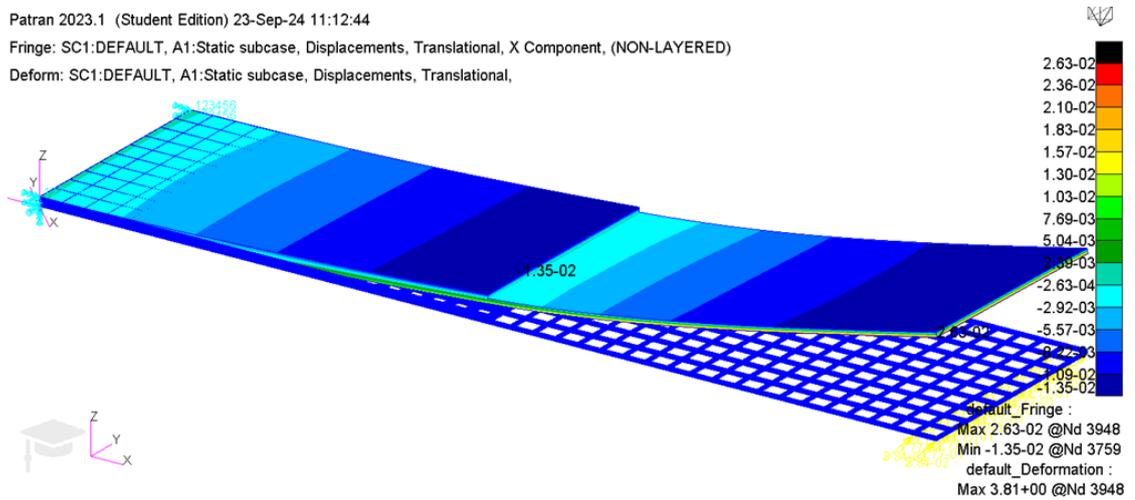


**Figura 3.35:** Spostamento assiale - Modello Patran 3D-HEX8 ortotropo a spessore 8-4mm

### Modello ortotropo con spessori 2-1mm

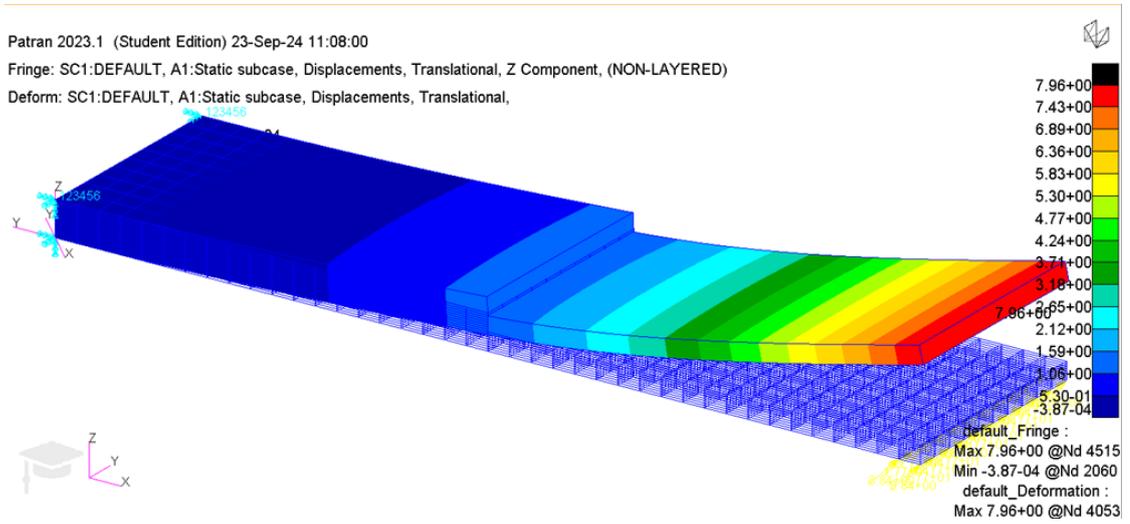


**Figura 3.36:** Spostamento trasversale - Modello Patran 3D-HEX8 ortotropo a spessore 2-1mm

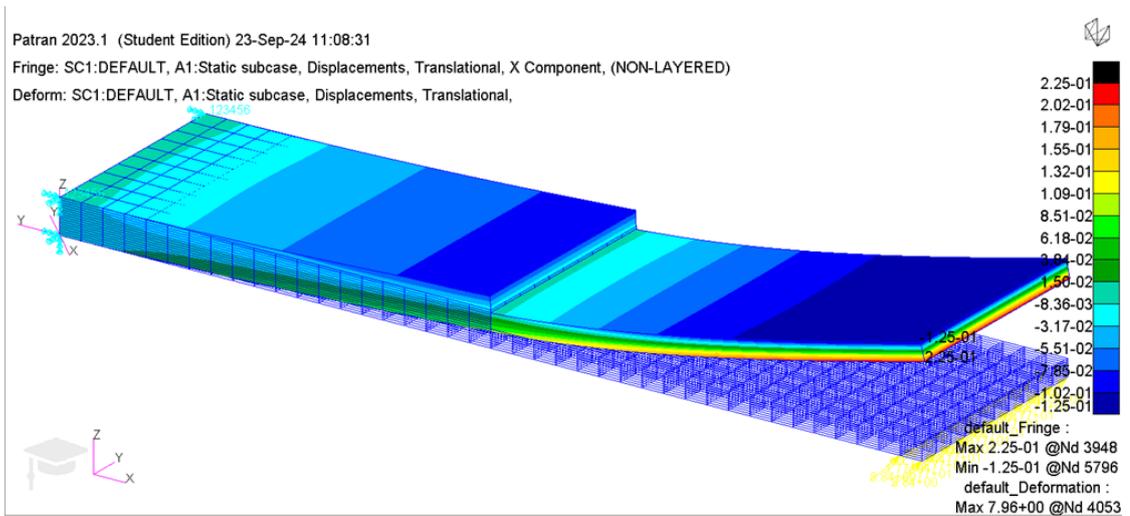


**Figura 3.37:** Spostamento assiale - Modello Patran 3D-HEX8 ortotropo a spessore 2-1mm

### Modello isotropo con spessori 8-4mm



**Figura 3.38:** Spostamento trasversale - Modello Patran 3D-HEX8 isotropo a spessore 8-4mm

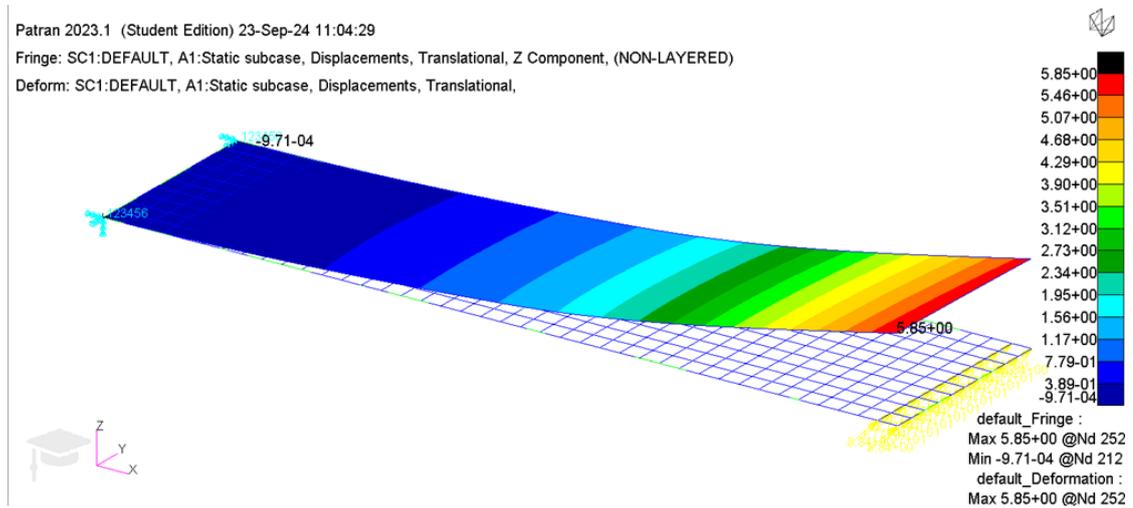


**Figura 3.39:** Spostamento assiale - Modello Patran 3D-HEX8 isotropo a spessore 8-4mm

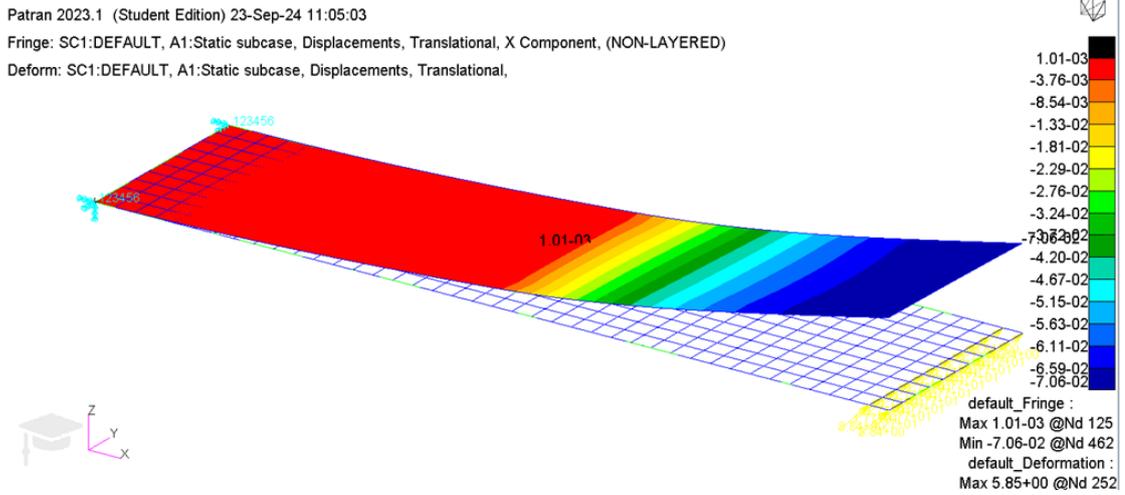
### 3.5.3 Modelli 2D - Caso 2

Di seguito sono riportate le modalità di deformazione ottenute dalla risoluzione della SOL101 per il caso 2. Avendo modificato al posizione del piano medio e del piano di riferimento, è cambiata anche la rappresentazione dei risultati in Patran. Infatti, Nastran restituisce in questo caso i valori di spostamento relativi alla quota di spessore a cui è posizionato il piano nodale: pertanto, seppur in questo caso il piano di riferimento è posto sempre a metà di ciascuna piastra, gli spostamenti saranno riferiti in ordine a metà della piastra più spessa e alla faccia superiore della piastra più sottile.

#### Modello ortotropo con spessori 8-4mm

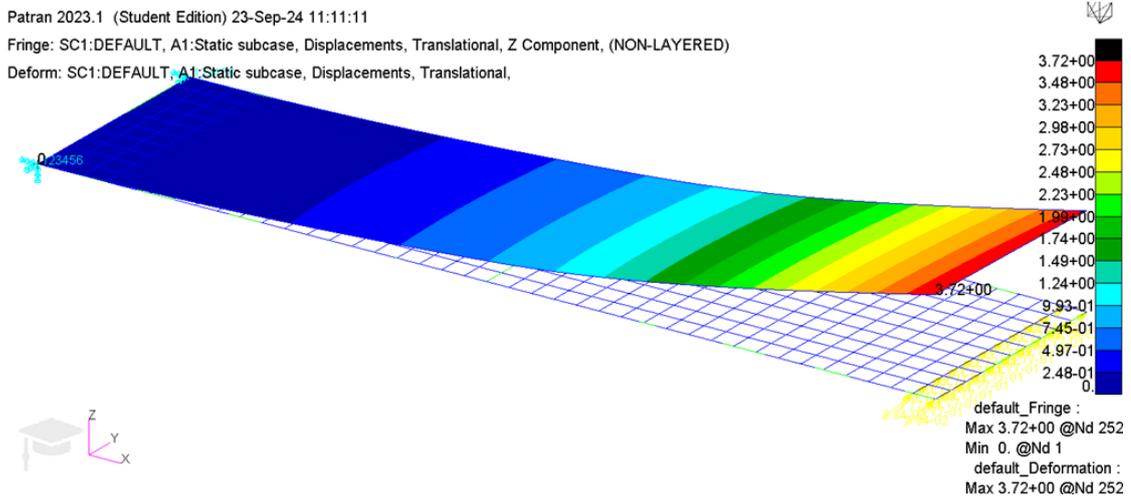


**Figura 3.40:** Spostamento trasversale - Modello Patran 2D-QUAD4 ortotropo a spessore 8-4mm - Caso 2

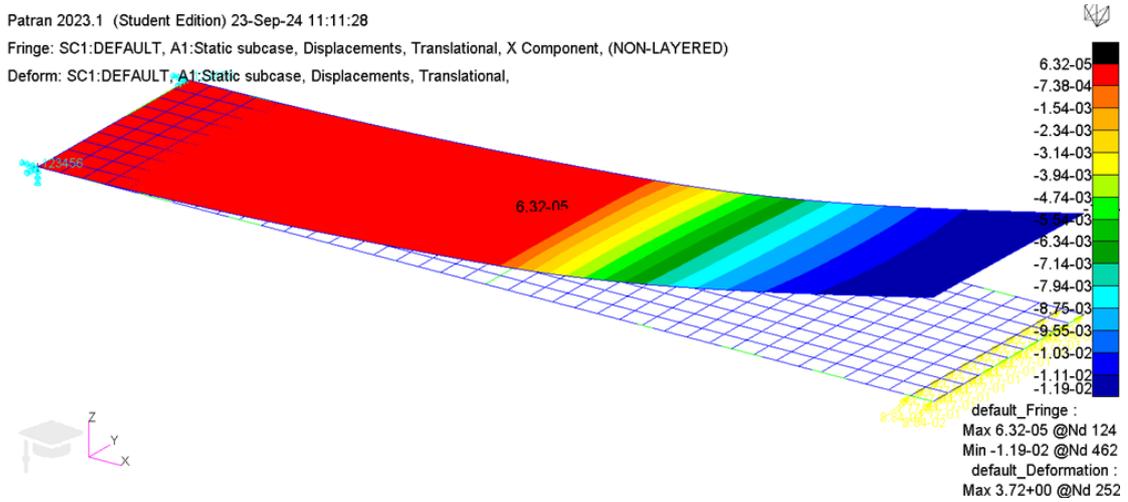


**Figura 3.41:** Spostamento assiale - Modello Patran 3D-HEX8 ortotropo a spessore 8-4mm - Caso 2

### Modello ortotropo con spessori 2-1mm

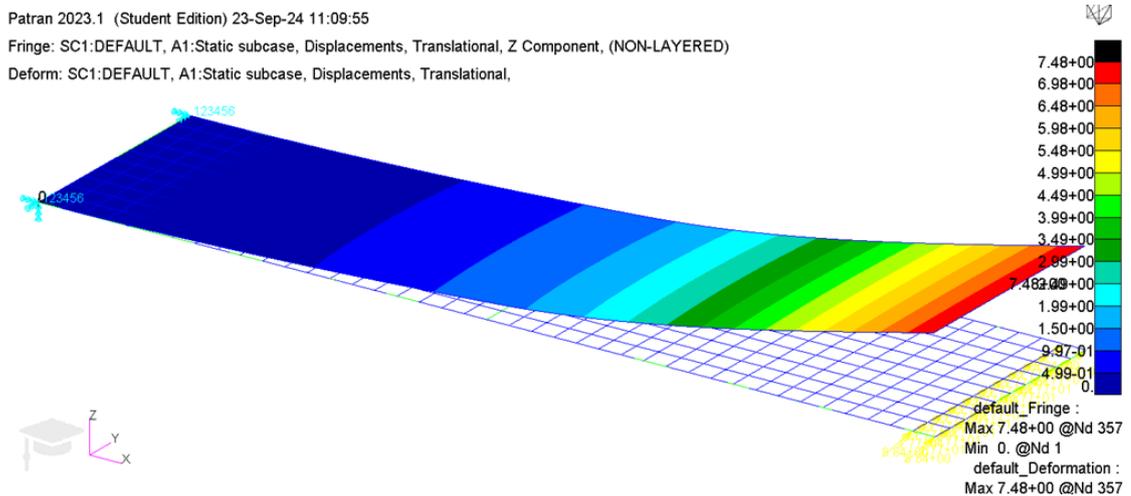


**Figura 3.42:** Spostamento trasversale - Modello Patran 2D-QUAD4 ortotropo a spessore 2-1mm - Caso 2

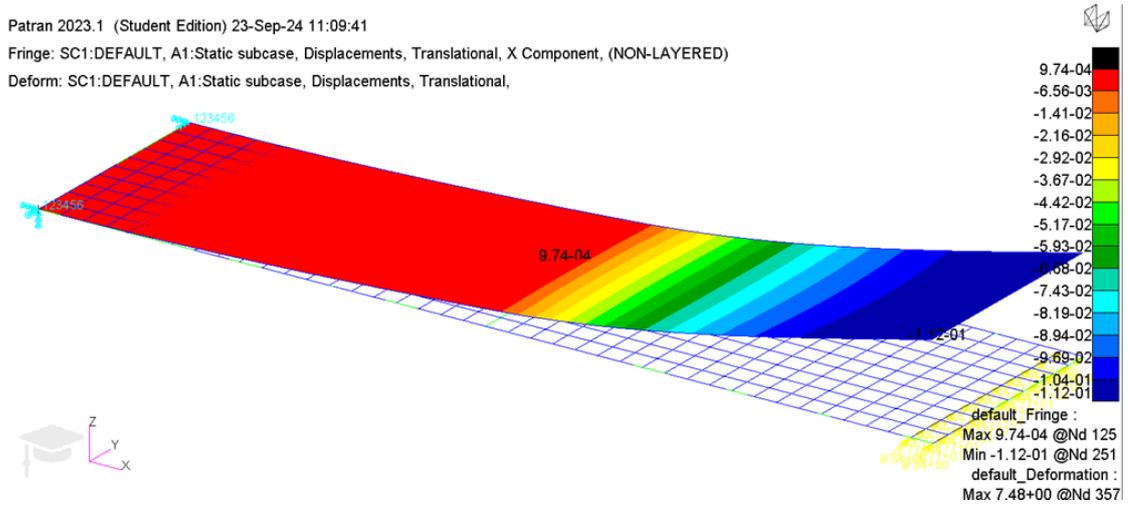


**Figura 3.43:** Spostamento assiale - Modello Patran 3D-HEX8 ortotropo a spessore 2-1mm - Caso 2

Modello isotropo con spessori 8-4mm



**Figura 3.44:** Spostamento trasversale - Modello Patran 2D-QUAD4 isotropo a spessore 8-4mm - Caso 2



**Figura 3.45:** Spostamento assiale - Modello Patran 3D-HEX8 isotropo a spessore 8-4mm - Caso 2

### 3.5.4 Valutazione dei risultati

Dopo aver estratto gli spostamenti del caso 1 e 2 di ciascun modello, si effettua il confronto con il modello tridimensionale di riferimento.

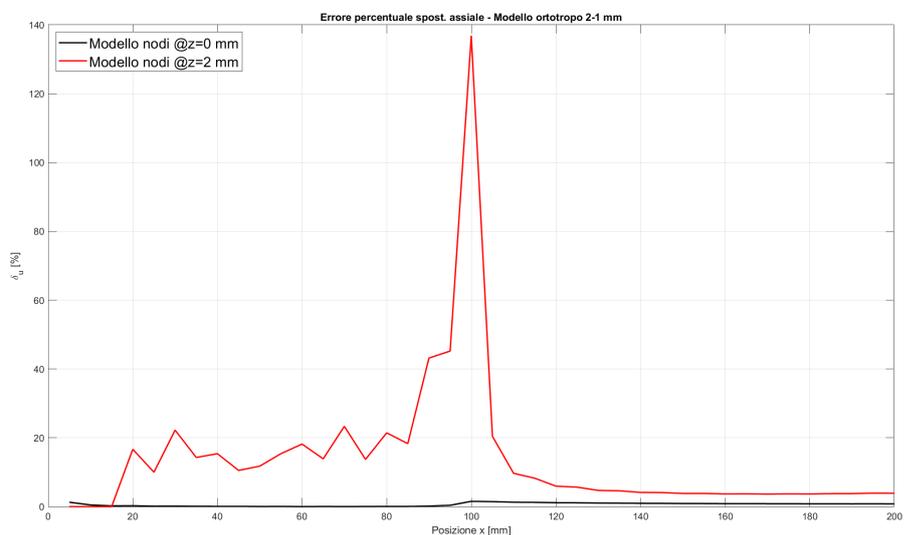
In particolare, i grafici rappresentati nel seguito mostrano l'andamento dell'errore percentuale  $\delta$  genericamente definito come:

$$\delta = \left| \frac{s_{2D} - s_{3D}}{s_{3D}} \right| \cdot 100 \quad (3.3)$$

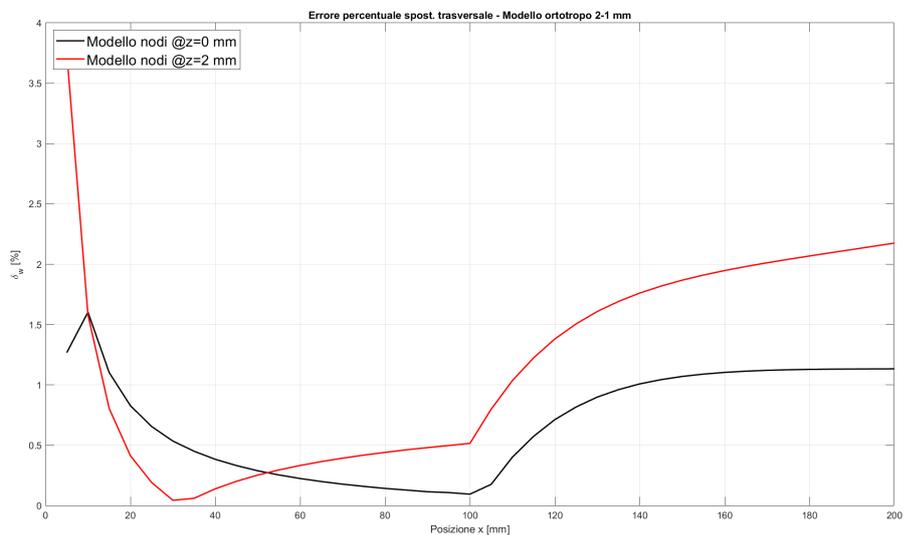
e che verrà valutato sia per gli spostamenti assiali che per quelli trasversali di ciascuno dei modelli studiati

### 3.5.5 Analisi statica

#### Modello ortotropo con spessori 8-4 mm

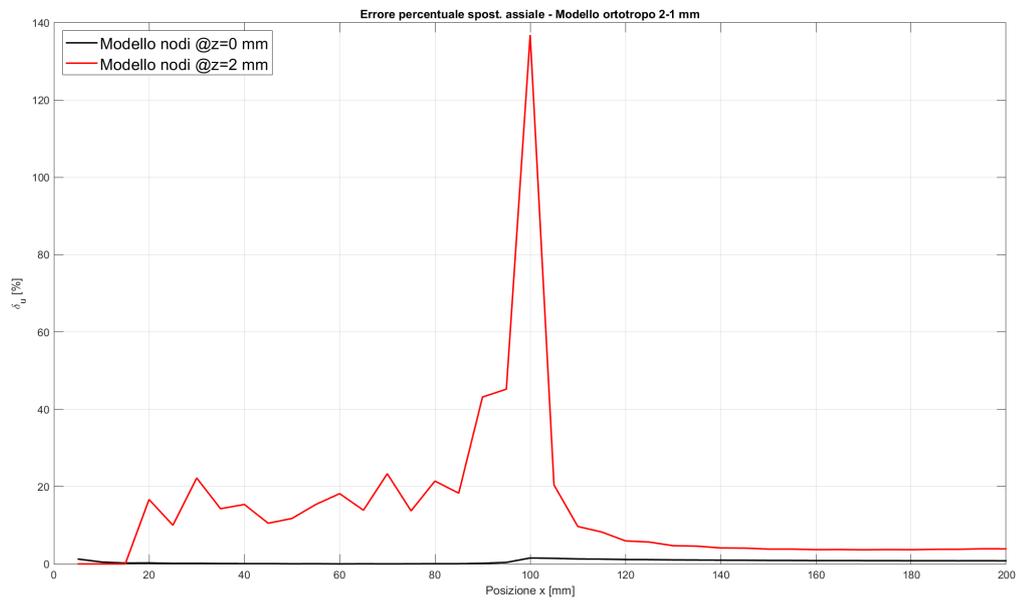


**Figura 3.46:** Errore percentuale sullo spostamento assiale - Modello ortotropo 8-4 mm

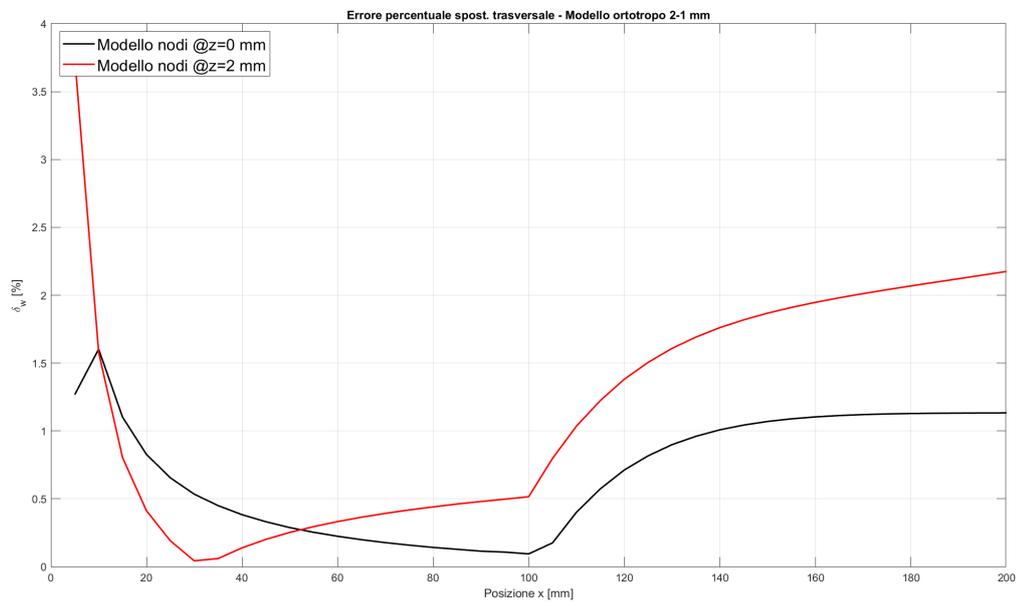


**Figura 3.47:** Errore percentuale sullo spostamento trasversale - Modello ortotropo 8-4 mm

### Modello ortotropo con spessori 2-1 mm



**Figura 3.48:** Errore percentuale sullo spostamento assiale - Modello ortotropo 2-1 mm



**Figura 3.49:** Errore percentuale sullo spostamento trasversale - Modello ortotropo 2-1 mm

### Modello isotropo

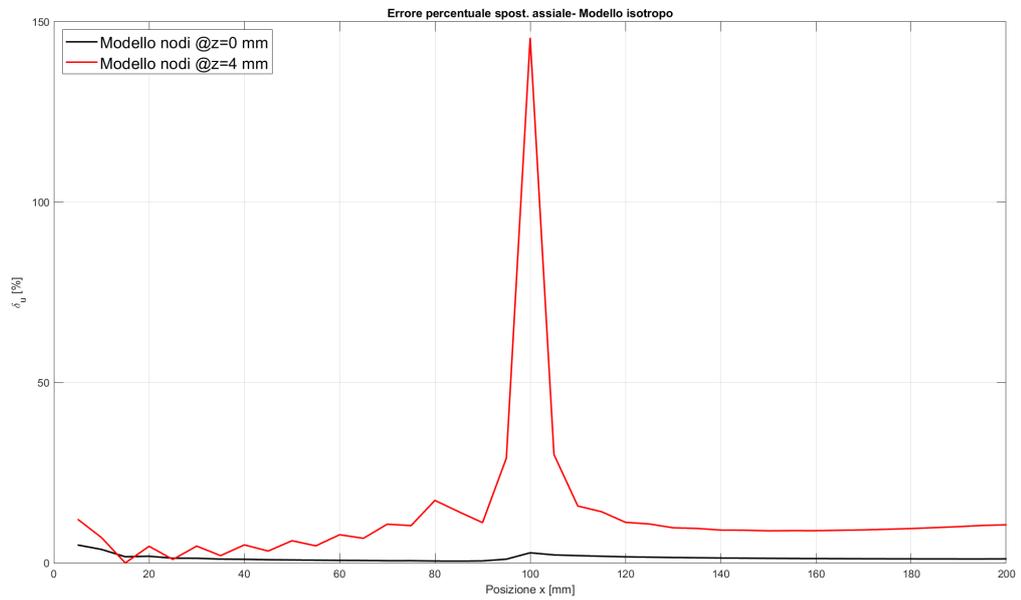


Figura 3.50: Errore percentuale sullo spostamento assiale - Modello isotropo 8-4 mm

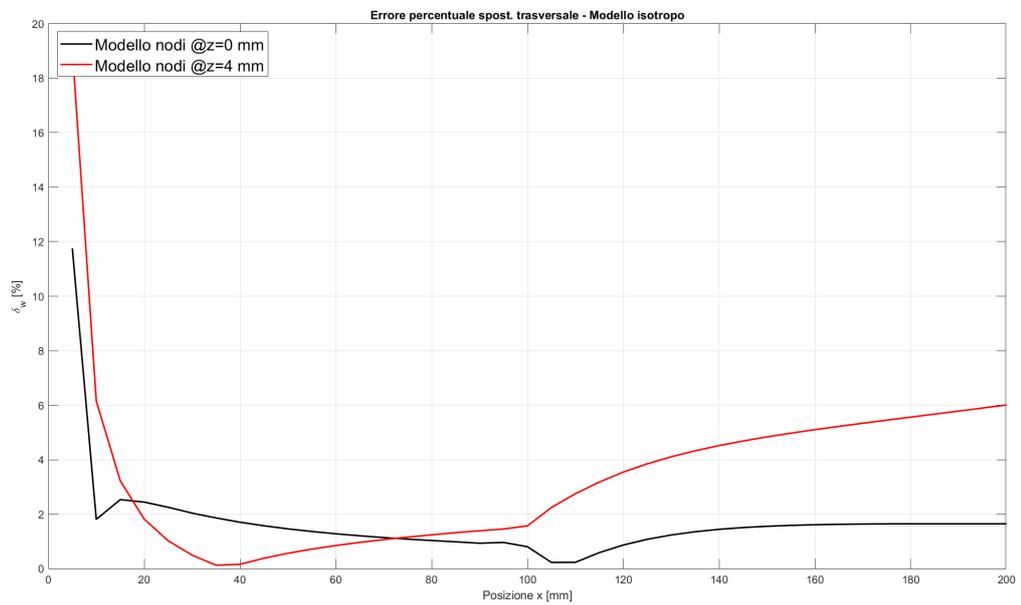


Figura 3.51: Errore percentuale sullo spostamento assiale - Modello isotropo 8-4 mm

## Commenti

I grafici riportati in precedenza mostrano che generalmente è preferibile disporre i nodi in corrispondenza della superficie continua, posta in questo caso a livello di spessore zero.

In particolare, si nota che gli spostamenti ottenuti con il primo approccio offrono una maggiore coerenza e precisione rispetto a quelli letti a metà spessore. Ciò si verifica sia nel caso in cui sono impiegati materiali di tipo isotropo che nel caso di materiali ortotropi e non risultano influenze dovute allo spessore. Infatti, sia nel caso degli spessori 8-4 mm che nel caso degli spessori 2-1 mm la curva dell'errore percentuale nel caso 2 raggiunge valori molto più elevati.

### 3.5.6 Analisi dinamica

Il confronto dei due approcci per il posizionamento del piano di riferimento sono analizzati anche dal punto di vista delle frequenze proprie. Le tabelle che seguono riassumono i risultati ottenuti:

#### Modello ortotropo - spessore 8-4 mm

Freq	3D	2D - Caso 1	Err. %	2D - Caso 2	Err. %
1	281	287	2.14	288	2.49
2	1043	1065	2.11	1067	2.30
3	1263	1270	0.55	1289	2.06
4	1641	1699	3.53	1697	3.41
5	2879	2873	0.21	2948	2.40
6	2961	2982	0.71	3018	1.93
7	4986	5041	1.10	5145	3.19
8	5176	5190	0.27	5294	2.28
9	6380	6584	3.20	6507	1.99
10	7082	6984	1.38	7236	2.17

**Tabella 3.7:** Risultati dell'analisi modale per il modello ortotropo a spessore 8-4 mm

**Modello ortotropo - spessore 2-1 mm**

Freq	3D	2D - Caso 1	Err. %	2D - Caso 2	Err. %
1	72	73	1.39	73	1.39
2	274	275	0.36	274	0.00
3	358	356	0.56	355	0.84
4	804	800	0.50	800	0.50
5	854	843	1.29	844	1.17
6	1449	1428	1.45	1428	1.45
7	1491	1472	1.27	1473	1.21
8	1677	1684	0.42	1683	0.36
9	1988	1906	4.12	1906	4.12
10	2487	2427	2.41	2430	2.29

**Tabella 3.8:** Risultati dell'analisi modale per il modello ortotropo a spessore 2-1 mm

**Modello isotropo - spessore 8-4 mm**

Freq	3D	2D - Caso 1	Err. %	2D - Caso 2	Err. %
1	202	202	0.00	203	0.50
2	720	720	0.00	722	0.28
3	1156	1122	2.94	1140	1.38
4	1333	1370	2.78	1367	2.55
5	2104	2106	0.10	2117	0.62
6	2677	2610	2.50	2711	1.27
7	3899	3827	1.85	3913	0.36
8	4542	4514	0.62	4609	1.48
9	5177	5283	2.05	5178	0.02
10	6391	6332	0.92	6468	1.20

**Tabella 3.9:** Risultati dell'analisi modale per il modello isotropo a spessore 8-4 mm

**Commenti**

L'analisi delle frequenze proprie ha dimostrato che la risposta ottenuta da i due approcci in ciascuno dei casi analizzati è tendenzialmente simile e addirittura, nel caso del pannello a spessore 2-1 mm è praticamente uguale.

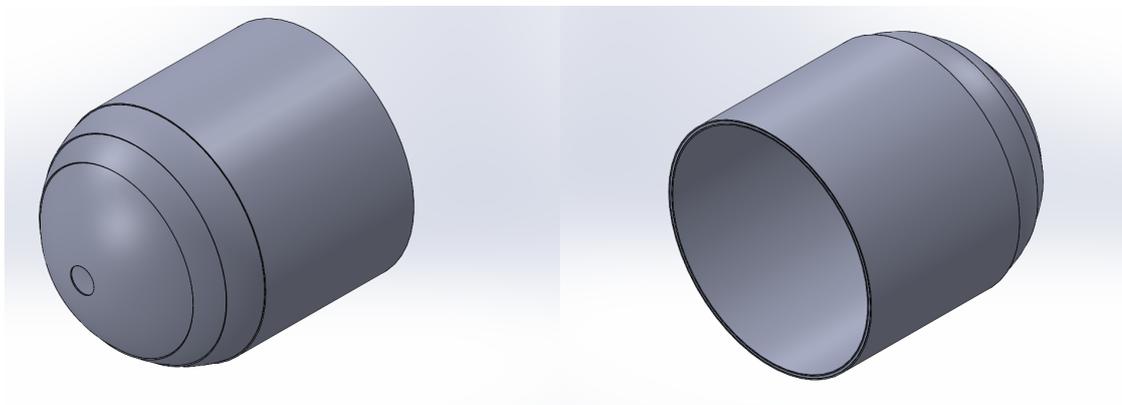
I modelli a spessore maggiore, invece, mostrano per entrambe le posizioni del piano nodale, a differenziarsi dal modello 3D di riferimento, sebbene l'approccio che vede i nodi in corrispondenza della superficie inferiore del laminato sembra essere comunque preferibile in quanto si avvicina maggiormente al modello tridimensionale di riferimento, soprattutto per valori di frequenza relativamente più bassi.

## Capitolo 4

# Analisi del serbatoio in composito

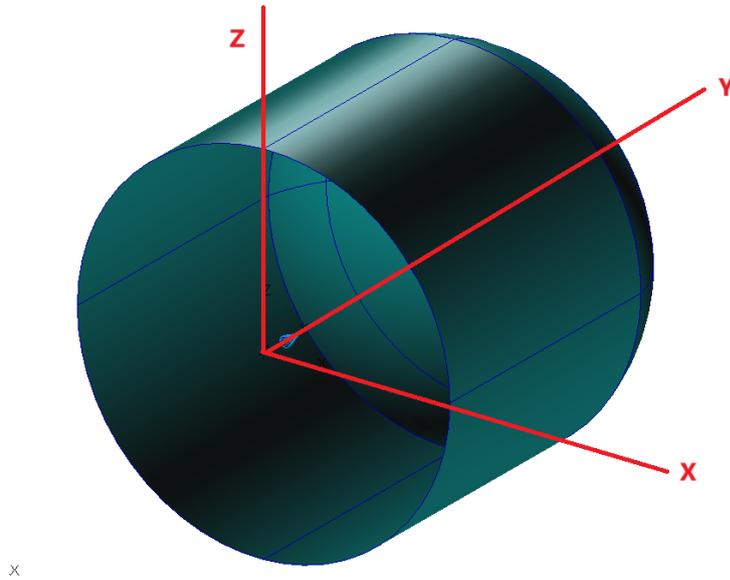
### 4.1 Serbatoio cilindrico

Il secondo caso studiato è reso più complesso dall'uso di superfici curve. In particolare, la scelta è ricaduta su un modello di serbatoio a spessore variabile in materiale composito-laminato, il cui spessore diminuisce lungo la curvatura attraverso la progressiva eliminazione di uno degli strati, come visibile in figura 4.1.



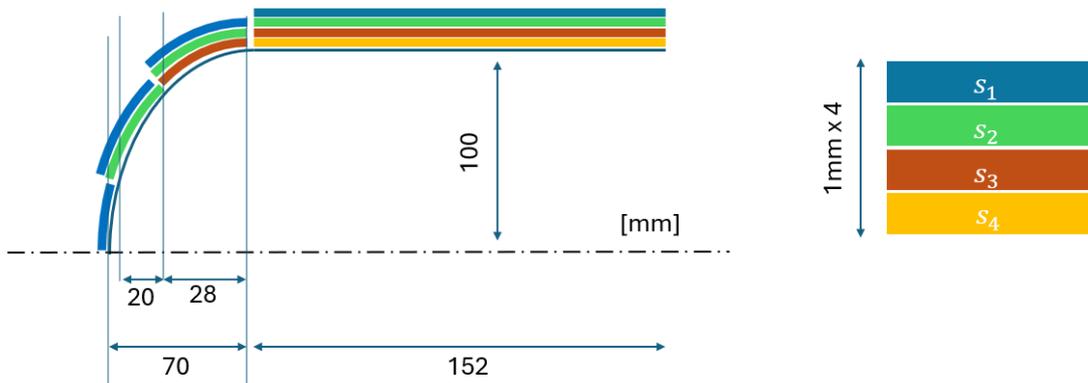
**Figura 4.1:** Rappresentazione del serbatoio studiato

Per la costruzione di ciascuno dei modelli utilizzati in questa sezione è stato seguito lo stesso sistema di riferimento, che è riportato in figure 4.2 e rispetto a cui sono riportati i valori di spostamento.



**Figura 4.2:** Sistema di riferimento utilizzato per il serbatoio cilindrico

Il modello è costruito attraverso la sovrapposizione di diversi strati di materiale isotropo con uno spessore di 4 mm (4 layer da 1 mm) nella parte più spessa e con una riduzione di spessore di 1 mm per ogni strato eliminato, come si osserva in figura 4.3.



**Figura 4.3:** Rappresentazione della sezione del serbatoio

La tabella 4.1 riporta le proprietà del materiale adottato:

$$\rho = 1.4 \cdot 10^{-9} \text{ kg/mm}^3$$

$$\nu = 0.3$$

$$E_{s1} = 33125 \text{ MPa}$$

$$E_{s2} = 66250 \text{ MPa}$$

$$E_{s3} = 99375 \text{ MPa}$$

$$E_{s4} = 132500 \text{ MPa}$$

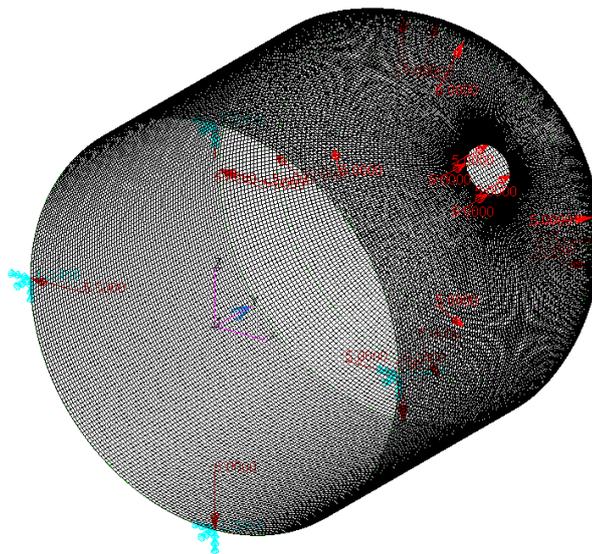
**Tabella 4.1:** Proprietà del materiale laminato

## 4.2 Modello 2D-QUAD4

Il modello è costruito in Patran attraverso elementi shell 2D di tipo QUAD4. In particolare, le superfici sono suddivise in elementi di dimensione 1.97x1.97 mm, per un totale di 44480 elementi, utilizzando quindi una mesh sufficientemente fitta al fine di ottenere dei risultati più accurati.

Per la modellazione delle caratteristiche del serbatoio, vengono creati materiali laminati, uno per ciascuna delle sezioni in cui è diviso il serbatoio. Ciascun materiale è poi associato a una proprietà CQUAD. Pertanto, è possibile scegliere di modellare l'offset attraverso entrambe le tecniche descritte precedentemente, ovvero attribuendo al parametro Plate Offset metà dello spessore della struttura o se porre a zero il valore di Offset Z0 nella PCOMP.

Il modello così ottenuto è mostrato in figura 4.4:



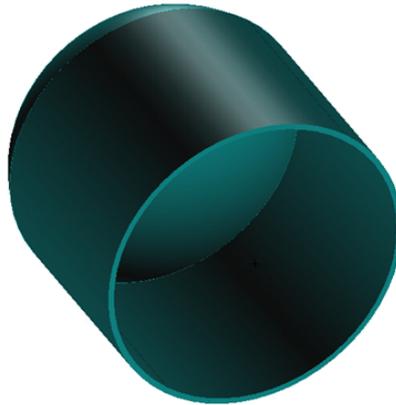
**Figura 4.4:** Modello Patran del serbatoio

Per velocizzare il calcolo, data la simmetria della struttura, si è scelto di operare su metà struttura.

Il serbatoio è vincolato attraverso un incastro sulla metà sezionata mentre la condizione di carico è data da una pressione distribuita su tutta la superficie interna del corpo e di entità pari a 5 MPa.

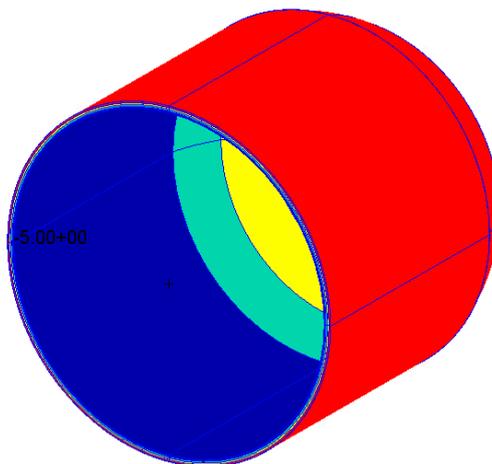
### 4.3 Modello 3D-HEX8

Il modello tridimensionale del serbatoio (fig. 4.5) è costruito utilizzando degli elementi HEX8. In particolare, la mesh è resa fitta attraverso l'uso di elementi solidi di dimensione 1.97x1.97x1 mm, generando in totale 258488 elementi.



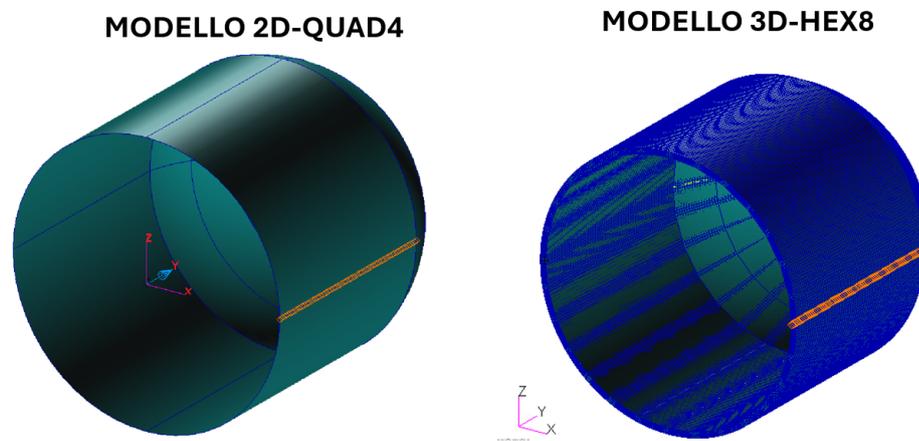
**Figura 4.5:** Modello 3D del serbatoio

In particolare, dopo aver creato ciascuno dei quattro materiali isotropi che costituiscono il serbatoio, si associa a ognuno di essi una proprietà di tipo *solid* in modo da simulare la stratificazione del materiale, come si osserva in figura 4.6.



**Figura 4.6:** Stratificazione del modello 3D-Serbatoio cilindrico

Le condizioni di vincolo e carico sono imposte in modo simile al caso 3D. Si è scelto di confrontare i modelli 3D e 2D sugli spostamenti nei nodi che occupano le coordinate  $(x=100, z=0)$  come si osserva in figura 4.7.



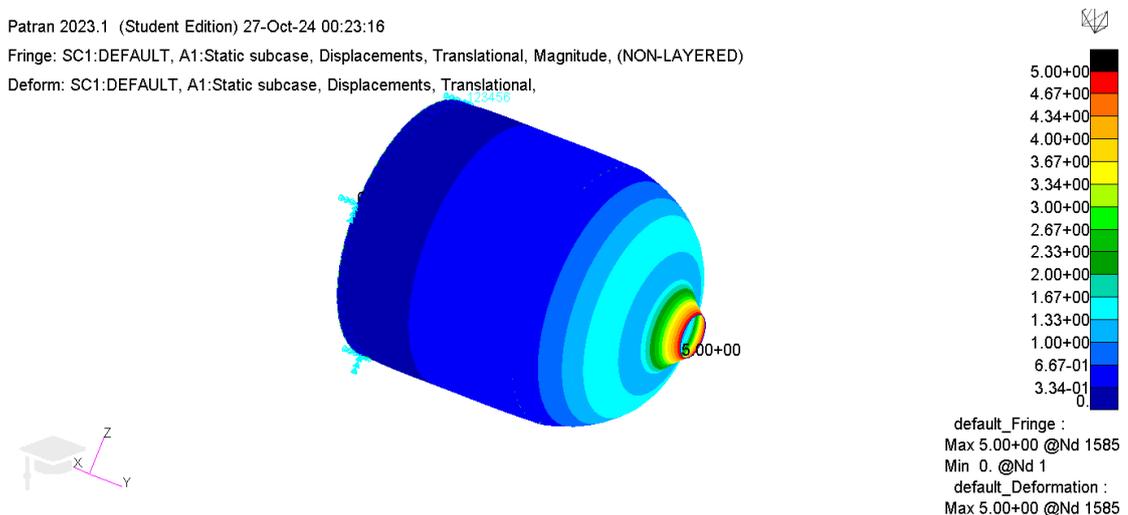
**Figura 4.7:** Nodi utilizzati per il confronto nei modelli 2D e 3D

## 4.4 Confronto tra ZOFFS e Z0

### 4.4.1 Analisi statica

Per l'analisi delle differenze tra ZOFFS e Z0 si è scelto di operare con una mesh meno fitta in modo da velocizzare lo svolgimento dell'analisi: pertanto in questa sezione sono stati utilizzati degli elementi di dimensione 10x00.

La figura 4.8 mostra la modalità di deformazione del serbatoio in esame sotto l'effetto del carico di pressione imposto.



**Figura 4.8:** Deformazione del serbatoio sotto il carico di pressione

Similmente a quanto scritto per i pannelli piani, si estraggono i valori di spostamento dall'analisi statica effettuata sul serbatoio. I grafici in figure 4.9 e 4.10 riportano il confronto tra i due modelli e anche in questo caso si osserva una totale equivalenza tra i due metodi in quanto in ciascuno dei nodi considerati il valore di spostamento è lo stesso.

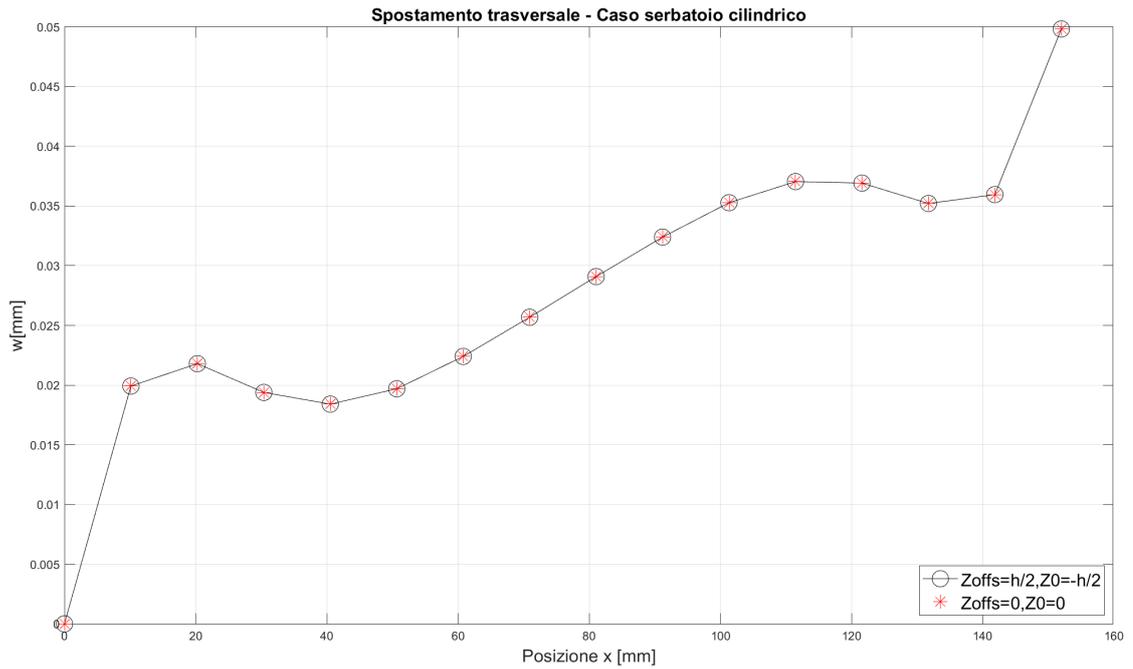


Figura 4.9: Spostamento asse x - Serbatoio cilindrico

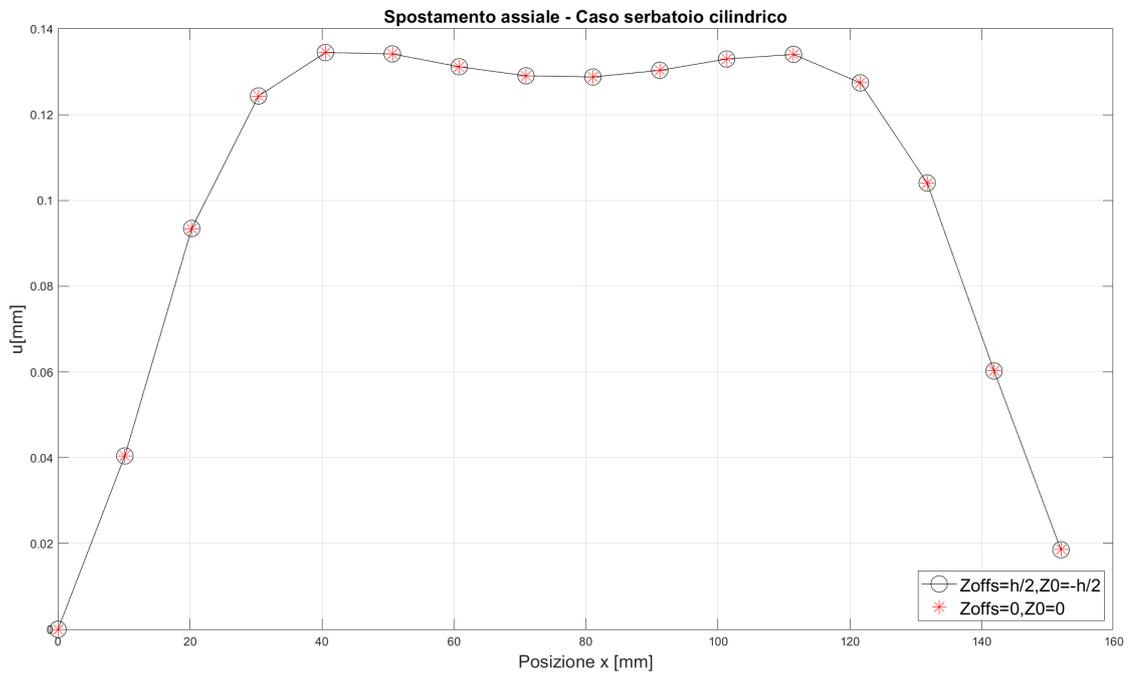


Figura 4.10: Spostamento asse y - Serbatoio cilindrico in composito

## 4.4.2 Analisi modale

Si è voluto verificare la risposta in frequenza all'uso di ZOFFS e Z0 nel caso dei elementi bidimensionali curvi utilizzando la SOL103 di Nastran anche nel caso del serbatoio cilindrico.

La tabella 4.2 mostra i valori di frequenza ottenuti nei due casi:

Freq.	Zoff=h/2,Z0=-h/2	Zoff=0,Z0=-0	TIPO
1	2640	2640	LOCALE
2	2640	2640	LOCALE
3	2681	2681	GLOBALE
4	2681	2681	GLOBALE
5	2863	2863	LOCALE
6	2863	2863	LOCALE
7	2978	2978	LOCALE
8	2978	2978	LOCALE
9	3543	3543	GLOBALE
10	3543	3543	GLOBALE

Tabella 4.2: Frequenze proprie - Serbatoio cilindrico

Come per il pannello piano, anche per il serbatoio cilindrico si è ottenuto l'esatta coincidenza dei risultati.

Per completezza si riportano le prime quattro forme modali globali e le prime due forme locali:

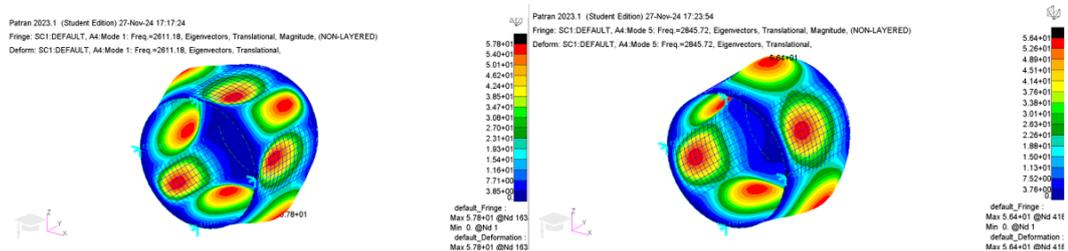


Figura 4.11: Prime forme modali locali - Serbatoio in composito

## Analisi del serbatoio in composito

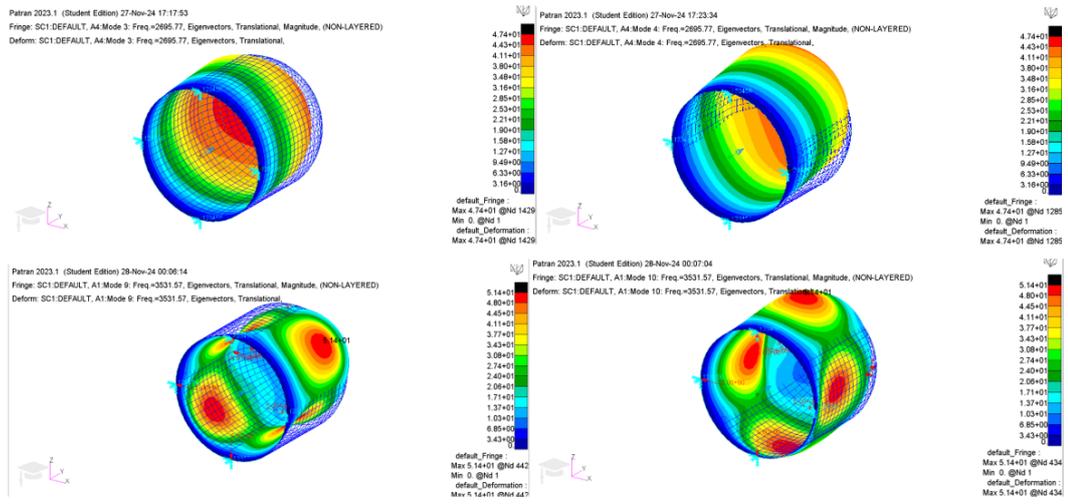


Figura 4.12: Prime forme modali globali - Serbatoio in composito

## 4.5 Posizionamento del piano nodale

Come nel caso del pannello piano, anche per il serbatoio cilindrico si valuta l'impatto della scelta del posizionamento del piano nodale rispetto allo spessore del materiale scelto.

In particolare, per questo secondo caso-studio si è scelto di valutare gli spostamenti e le frequenze proprie in due condizioni:

- Con il piano nodale posto in corrispondenza della superficie interna del serbatoio (e ciò alla quota di spessore  $h = 0$ );
- Ponendo il piano nodale a una quota di spessore  $h = 1$  mm;

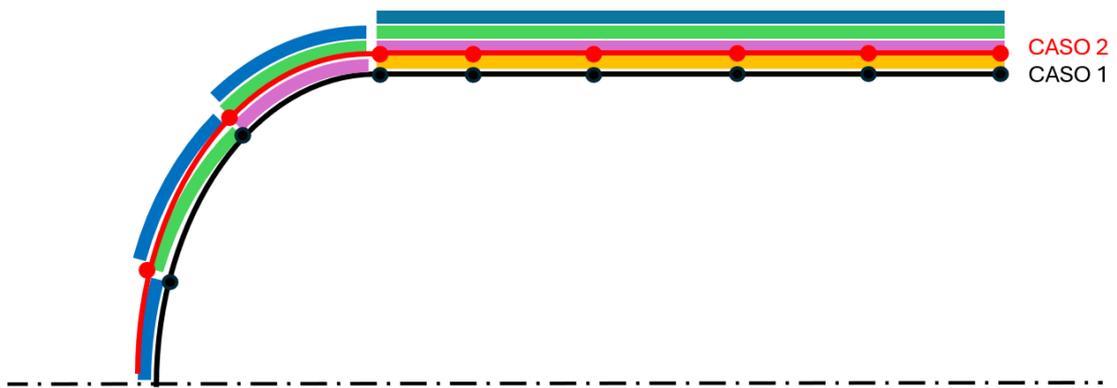
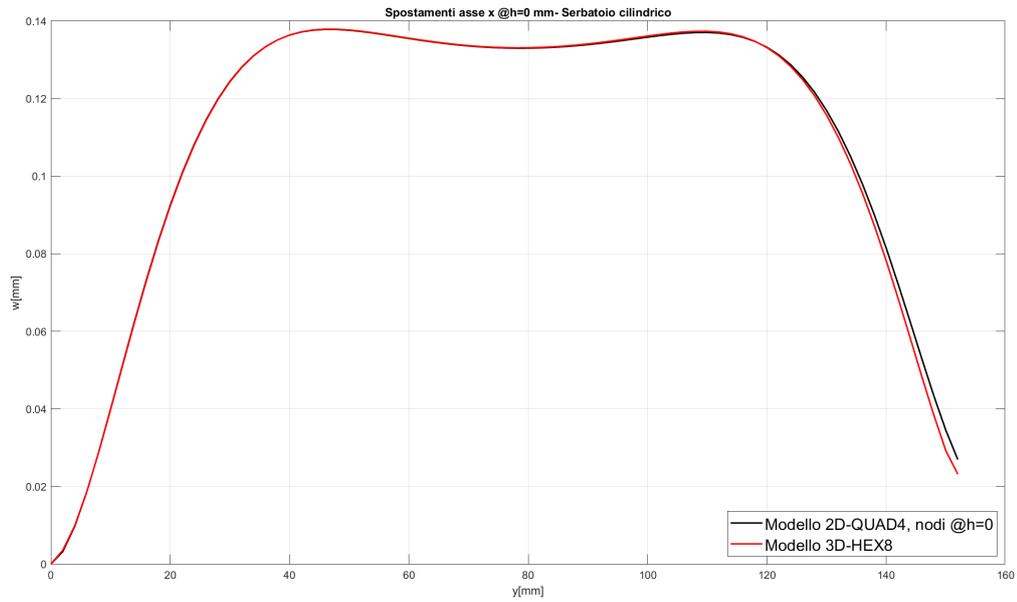


Figura 4.13: Rappresentazione dei due casi analizzati

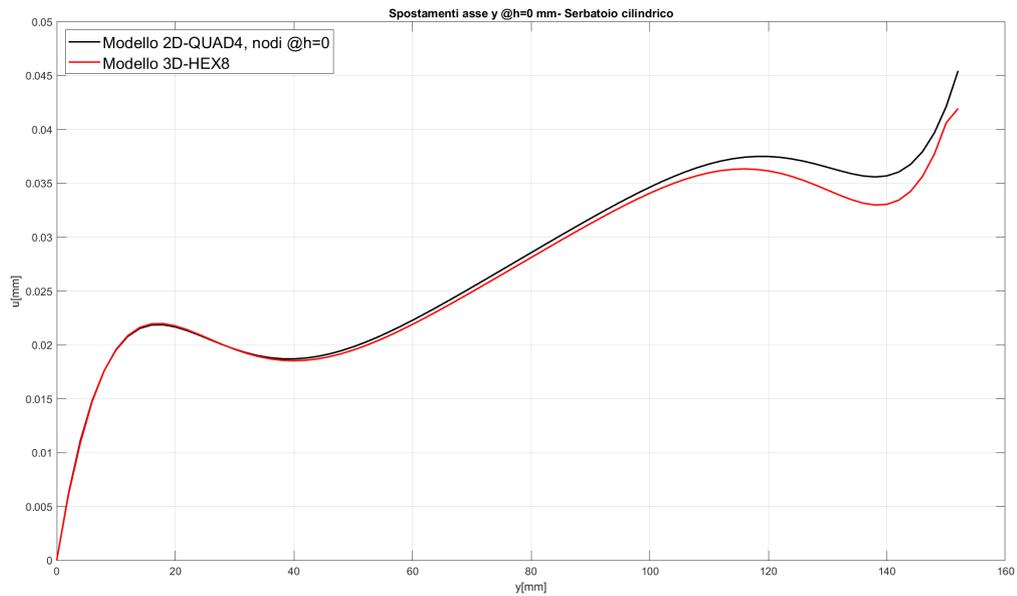
I due modelli saranno confrontati con il modello tridimensionale di riferimento presentato nella sezione 4.3.

### 4.5.1 Analisi statica

In figura 4.14 e 4.15 sono riportati i valori di spostamento lungo l'asse  $x$  misurati sulla superficie interna della sezione cilindrica del modello 3D del serbatoio confrontati con i corrispettivi spostamenti ottenuti dal modello 2D.



**Figura 4.14:** Confronto tra gli spostamenti lungo l'asse x nei modelli 3D e 2D del serbatoio



**Figura 4.15:** Confronto tra gli spostamenti lungo l'asse y nei modelli 3D e 2D del serbatoio (Nodi a h=0 mm)

. A questo punto si valuta l'efficacia dei due diversi posizionamenti del piano nodale: i grafici in figura 4.16 e 4.17 riportano l'andamento dell'errore percentuale

dei modelli 2D rispetto al modello tridimensionale.

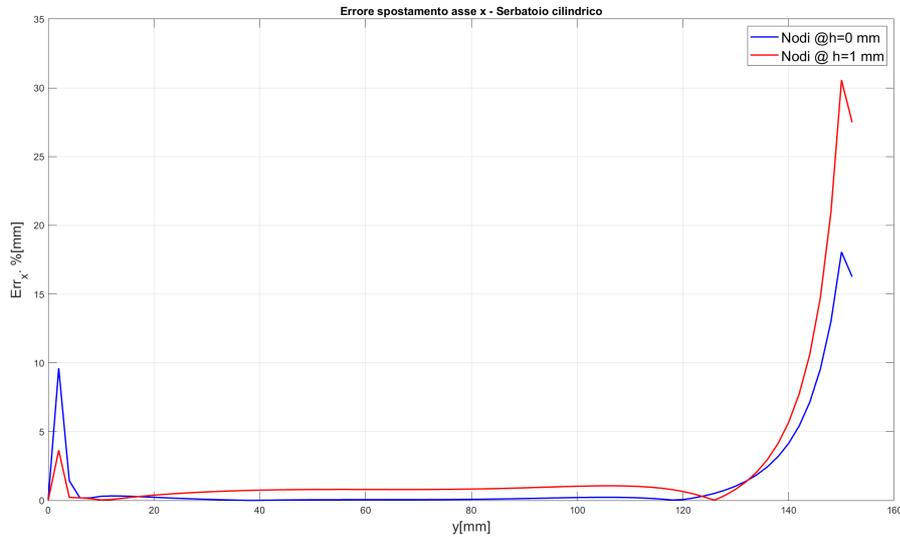


Figura 4.16: Errore percentuale spostamento asse x - Serbatoio cilindrico

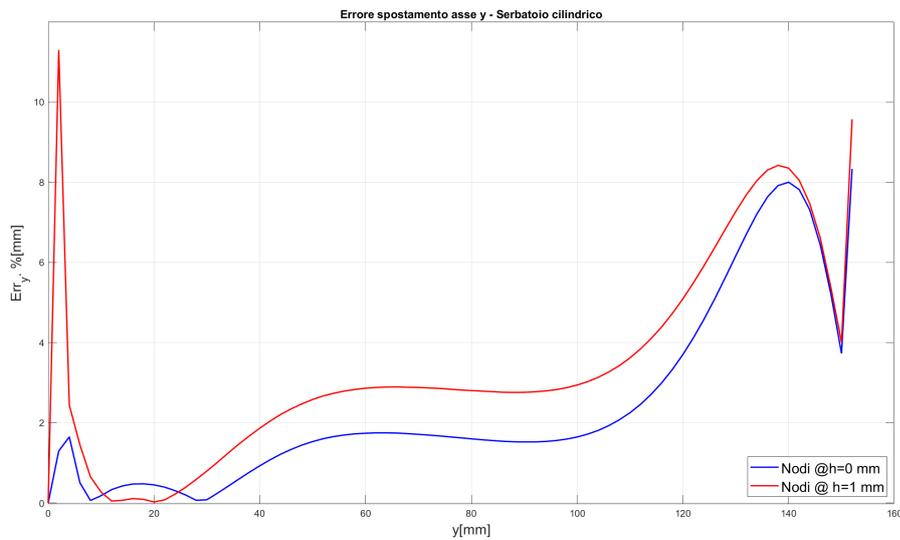


Figura 4.17: Errore percentuale spostamento asse y - Serbatoio cilindrico

I valori ottenuti hanno un andamento simile: tuttavia, in entrambe le direzioni considerate, il primo modello mostra un livello di errore minore, che corrisponde quindi al fatto che il modello 2D con i nodi posti in corrispondenza della superficie inferiore del laminato offre una maggiore precisione e una maggiore coerenza al modello 3D rispetto all'altro caso in esame.

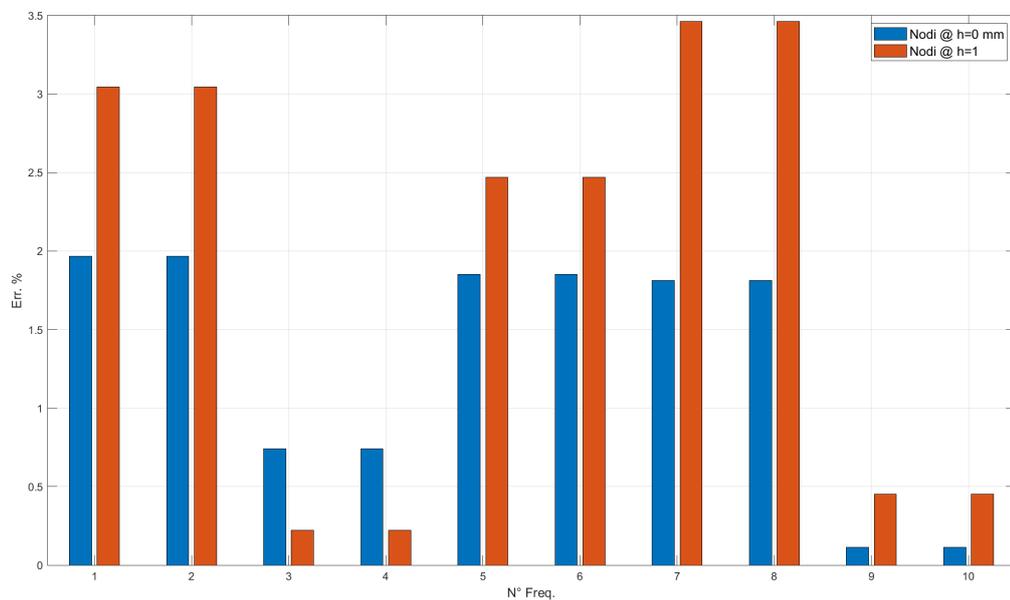
## 4.5.2 Analisi modale

La tabella 4.3 riporta le prime dieci frequenze proprie ottenute dal modello tridimensionale e dai due modelli bidimensionali e il relativo errore percentuale.

Freq	3D	2D - h=0 mm	Err %	2D - h=1 mm	Err %
1	2693	2640	1.97	2611	3.04
2	2693	2640	1.97	2611	3.04
3	2701	2681	0.74	2695	0.22
4	2701	2681	0.74	2695	0.22
5	2917	2863	1.85	2845	2.47
6	2917	2863	1.85	2845	2.47
7	3033	2978	1.81	2928	3.46
8	3033	2978	1.81	2928	3.46
9	3547	3543	0.11	3531	0.45
10	3547	3543	0.11	3531	0.45

**Tabella 4.3:** Frequenze proprie - Serbatoio cilindrico

Come si osserva in figura 4.18, le frequenze del modello con i nodi posti a  $h = 0$  sono generalmente più vicine a quelle del modello tridimensionale, dimostrando quindi che anche nel caso dell'analisi modale questo tipo di modellazione offre maggiori garanzie di precisione e coerenza.



**Figura 4.18:** Errori percentuali sulle frequenze proprie - Serbatoio cilindrico

## Capitolo 5

# Conclusioni

Le analisi condotte attraverso i modelli Patran e Matlab hanno permesso di giungere a diversi conclusioni.

In primo luogo, si è dimostrata l'equivalenza tra la creazione dell'Offset attraverso lo CQUAD ZOFFS e attraverso lo PCOMP Z0.

I risultati ottenuti utilizzando entrambi i metodi sono infatti perfettamente coincidenti: ciò accade tanto per l'analisi statica, da cui si ricavano spostamenti identici in ogni direzione, quanto per l'analisi dinamica, da cui risultano le medesime frequenze proprie e forme modali.

Ciò è oltretutto confermato dai risultati ottenuti in Matlab, che hanno evidenziato come i processi matematici alla base dei due metodi portino ad avere le medesime matrici di massa e rigidezza. Le informazioni estratte mostrano come sebbene diversi approcci di modellazione portino a diversi domini di integrazione per il calcolo delle matrici dei coefficienti di massa e rigidezza, la combinazione con la traslazione del reference plane mediante ZOFFS porta infine ad ottenere in ogni caso per ogni elemento la medesima matrice di massa e rigidezza, nel caso in cui la somma di ZOFFS e Z0 sia la stessa.

Inoltre, l'equivalenza tra le due funzioni non è perturbata neppure dalla tipologia di struttura esaminata: essa infatti è verificata sia nel caso di strutture piane come i pannelli sia nel caso del serbatoio cilindrico. Lo stesso si può dire per il materiale utilizzato in quanto l'uso di un materiale isotropo o di un laminato ortotropo non ha sortito nessun tipo di cambiamento nelle risposte dei modelli.

In secondo luogo, è stata condotto uno studio per cercare il miglior posizionamento del piano nodale rispetto allo spessore del laminato. Il risultato ottenuto è che tale posizione sia quella coincidente con la superficie esterna del laminato, se questa è continua: ciò emerge dalle analisi condotte sulle strutture studiate utilizzando diverse posizioni del piano nodale, che sono state poi confrontate con un modello tridimensionale di riferimento. Da tale confronto emerge che facendo coincidere il reference plane con il nodal plane e con la superficie esterna continua del laminato

si ottengono dei valori di spostamento e delle frequenze proprie di entità più vicina a quelle del modello 3D di riferimento rispetto alle altre posizioni del piano nodale considerate. Ciò è stato verificato sia per il pannello piano che per il serbatoio cilindrico, ottenendo in entrambi i casi il medesimo responso.

# Bibliografia

- [1] E. Carrera e M. Cinefra. *Fondamenti di meccanica strutturale. Per allievi ingegneri aerospaziali*. CLUT, 2017. ISBN: 9788879924122 (cit. a p. 13).
- [2] Embry-Riddle Aeronautical University. *Introduction to Aerospace Flight Vehicles*. Accessed: 2024-11-16. n.d. URL: <https://eaglepubs.erau.edu/introductiontoaerospaceflightvehicles/chapter/aerospace-structures/> (cit. alle pp. 14, 16, 17).
- [3] Irene Del Sol, Asun Rivero, Luis Lacalle e A. Gámez. «Thin-Wall Machining of Light Alloys: A Review of Models and Industrial Approaches». In: *Materials* 12 (giu. 2019), p. 2012. DOI: 10.3390/ma12122012 (cit. a p. 14).
- [4] René Alderliesten. *Introduction to Aerospace Structures and Materials*. eng. TU Delft Open, 2018 (cit. alle pp. 14, 15).
- [5] Douglas A. McCarville, Juan C. Guzman, Alexandra K. Dillon, Justin R. Jackson e Jordan O. Birkland. *Design, Manufacture and Test of Cryotank Components*. Rapp. tecn. NASA Technical Reports Server (NTRS). NASA e Boeing, 2017. URL: <https://ntrs.nasa.gov/citations/20170012407> (cit. alle pp. 14, 18, 19).
- [6] John Muelaner. *Shell or Solid Elements for Thin Walled Parts? Engineering.com*. Set. 2020. URL: <https://www.engineering.com/shell-or-solid-elements-for-thin-walled-parts/> (cit. a p. 15).
- [7] A. V. Rico. *Differences between PCOMP Z0 CQUAD ZOFFS*. 2014. URL: <http://www.aersys.com/AERSYS-7016.pdf> (cit. alle pp. 15, 30, 32).
- [8] Pramodkumar Ramakrishnan. «Composite Materials, Metals, And Ceramics Used in the Boeing 787- Materials Overview». In: *Journal of Research in Science and Engineering* 6 (ago. 2024), pp. 57–62. DOI: 10.53469/jrse.2024.06(08).13 (cit. a p. 17).
- [9] Boeing. *787 Aircraft Rescue & Firefighting: Composite Structure*. Copyright © 2013 Boeing. All rights reserved. Boeing Fire Department. Seattle, WA, USA, apr. 2013. URL: <https://www.boeing.com/airports> (cit. a p. 17).

- 
- [10] Mitsubishi Heavy Industries. *Production Technology of Large-Scale Composite Wings for Commercial Aircraft*. Accessed: 2024-11-16. 2021. URL: <https://www.mhi.co.jp/technology/review/pdf/e514/e514004.pdf> (cit. a p. 18).
- [11] Thomas Ullmann, Thomas Schmidt, Severin Hoffmann e Raouf Jemmali. «In-Line Quality Assurance for the Manufacturing of Carbon Fiber Reinforced Aircraft Structures». In: vol. 124. Nov. 2010. ISBN: 978-3-940283-28-3 (cit. a p. 18).
- [12] Victor Giurgiutiu. *Stress, vibration, and wave analysis in aerospace composites : SHM and NDE applications*. London, England: Academic Press, 2022. ISBN: 0-12-813309-0 (cit. a p. 18).
- [13] *MSC Nastran 2023.4 Reference Guide*. Accessed: October 2024. Hexagon AB. 2023. URL: <https://simcompanion.hexagon.com> (cit. a p. 21).
- [14] Bruce K. Donaldson. «Thin Plate Theory». In: *Analysis of Aircraft Structures: An Introduction*. Cambridge Aerospace Series. Cambridge University Press, 2008, pp. 759–791 (cit. a p. 21).
- [15] MSC Software Corporation. *MSC Nastran 2023.4 - Linear Static Analysis User's Guide*. PDF. 2023. URL: [https://nexus.hexagon.com/documentatio ncenter/it-IT/bundle/MSC\\_Nastran\\_2023.4\\_Linear\\_Static\\_Analysis\\_User\\_Guide/resource/MSC\\_Nastran\\_2023.4\\_Linear\\_Static\\_Analysis\\_User\\_Guide.pdf](https://nexus.hexagon.com/documentatio ncenter/it-IT/bundle/MSC_Nastran_2023.4_Linear_Static_Analysis_User_Guide/resource/MSC_Nastran_2023.4_Linear_Static_Analysis_User_Guide.pdf) (cit. a p. 23).
- [16] Thomas J.R. Hughes, Martin Cohen e Medhat Haroun. «Reduced and selective integration techniques in the finite element analysis of plates». In: *Nuclear Engineering and Design* 46.1 (1978), pp. 203–222. ISSN: 0029-5493. DOI: [https://doi.org/10.1016/0029-5493\(78\)90184-X](https://doi.org/10.1016/0029-5493(78)90184-X). URL: <https://www.sciencedirect.com/science/article/pii/002954937890184X> (cit. a p. 29).
- [17] Richard MacNeal. *The NASTRAN theoretical manual*. Vol. 221. Scientific, Technical Information Office, National Aeronautics e Space . . . , 1981 (cit. a p. 31).

# Ringraziamenti

A conclusione di questo percorso, desidero ringraziare il mio relatore, Professor Marco Gherlone, per la disponibilità e l'attenzione rivolta al mio lavoro di tesi e per i preziosi consigli ricevuti.

Vorrei inoltre ringraziare tutti coloro mi sono stati accanto durante questi anni e che hanno reso possibile questo traguardo.