

**POLITECNICO DI TORINO**

**Laurea magistrale in INGEGNERIA AEROSPAZIALE**



**Tesi di Laurea Magistrale**

**Ottimizzazione di traiettorie verso  
Asteroidi Near Earth tramite metodi  
indiretti**

**Relatore**

**Prof. Lorenzo CASALINO**

**Candidata**

**Lina DE LISIO**

**Ottobre 2024**



# Sommario

Lo studio dei *Near Earth Asteroids (NEAs)* è di particolare rilevanza nel mondo scientifico per diverse ragioni, prima tra tutte il fatto che la loro composizione chimica possa in parte descrivere il processo di formazione del sistema solare così come lo conosciamo oggi.

Un altro aspetto importante da considerare, è che lo studio degli asteroidi e delle loro orbite, può essere utile qualora si volessero evitare collisioni con la superficie terrestre, evento effettivamente molto raro, ma che avrebbe delle conseguenze catastrofiche.

Inoltre, si annovera anche la possibilità futura di poter sfruttare i materiali presenti sugli asteroidi Near Earth come risorse utili all'esplorazione spaziale, ad esempio come per la produzione di propellente alternativo. [1], [2]

Per questo motivo, la seguente tesi si prepone come obiettivo quello di andare ad analizzare la fattibilità di traiettorie verso *NEAs* tramite la *Teoria del Controllo Ottimale*, volendo andare ad analizzare le traiettorie dirette che permettano il minimo consumo di propellente per i seguenti *NEAs* : 2009 HC, 2007 CS5 e 2021 UL7, che sono stati considerati come alternativa a quelli individuati dalla missione *Asteroid Nodal Intersection Multiple Encounters, ANIME* promossa dall'*Agenzia Spaziale Italiana*. Per questi asteroidi si è andati ad individuare delle finestre di lancio dal 2027 in poi al variare della durata della missione.

# Ringraziamenti

In primo luogo, desidero ringraziare il mio relatore Lorenzo Casalino, che mi ha dato l'opportunità di approfondire un argomento estremamente interessante, guidandomi sempre con pazienza e disponibilità nella realizzazione di questo lavoro di tesi.

Vorrei dire grazie ai miei genitori e a mio fratello Giuseppe, che mi hanno sostenuto dal primo istante nella mia scelta universitaria, anche se magari l'hanno ritenuta inizialmente bizzarra o inaspettata, sono sempre stati al mio fianco, facendomi ridere, riflettere e soprattutto riportandomi con i piedi per terra nei momenti di scoraggiamento. Un grazie di cuore va anche a Fabrizio, ci siamo conosciuti quando tutto questo era ancora solo un'idea, ma mi ha accompagnato in ogni momento e ha fatto del mio sogno anche un poco il suo.

Sono grata di poter condividere questo giorno anche con i miei amici del gruppo Dieci, conosciuti dal primo anno di Politecnico per la maggior parte e che hanno decisamente arricchito e resi indimenticabili questi anni a Torino. Vorrei anche ringraziare i miei colleghi di magistrale, in particolare Aurora, Dorian, Federica, Leonardo e Riccardo, senza di loro l'università sarebbe stata solamente banche e nozioni.

Non posso dimenticare Elisa, Erica e Roberta, con cui siamo diventate amiche a prima vista appena fuori dall'Aula 1, con loro ho condiviso tra le giornate più belle e spensierate di sempre, e ormai per me sono una presenza sicura, senza la quale non riuscire ad immaginarmi.

Infine vorrei concludere con un pensiero speciale per tutti gli amici, coinquiline e in generale tutte le persone che hanno fatto parte di questo mio percorso, grazie infinite.





# Indice

<b>Elenco delle tabelle</b>	VII
<b>Elenco delle figure</b>	VIII
<b>1 Introduzione</b>	1
1.1 Ottimizzazione di traiettorie spaziali . . . . .	1
1.2 Caratteristiche tecniche della missione . . . . .	3
1.3 Overview della tesi . . . . .	4
<b>2 Asteroidi</b>	5
2.1 Caratteristiche generali . . . . .	5
2.2 Dove sono concentrati: Fascia Principale, Fascia di Kuiper, Greci e Troiani . . . . .	5
2.3 Classificazione degli asteroidi . . . . .	6
2.4 Near Earth Asteroids . . . . .	7
2.4.1 Suddivisione dei NEAs . . . . .	8
2.4.2 NEAs di interesse . . . . .	10
2.4.3 Perché si vogliono studiare i NEAs . . . . .	14
<b>3 Propulsione spaziale</b>	15
3.1 Nozioni generali sulla propulsione spaziale . . . . .	15
3.2 Propulsione elettrica . . . . .	17
3.3 Propulsore a ioni . . . . .	20
<b>4 Richiami di meccanica orbitale</b>	25
4.1 Leggi di Keplero . . . . .	25
4.2 Sistemi di riferimento . . . . .	26
4.3 Elementi orbitali classici . . . . .	30
4.4 Legge di gravitazione universale, problema degli N corpi . . . . .	31
4.5 Problema dei due corpi ed equazione del moto . . . . .	32
4.6 Equazione della Traiettoria . . . . .	34

4.6.1	Velocità caratteristiche . . . . .	35
4.7	Missioni interplanetarie: metodo delle Patched-Conics . . . . .	36
4.8	Manovre orbitali . . . . .	37
4.8.1	Cambio di piano semplice . . . . .	38
4.8.2	Aggiustamento degli apsidi . . . . .	39
4.8.3	Rotazione della linea degli apsidi . . . . .	40
4.8.4	Trasferta tra orbite circolari e complanari e trasferta di Hohmann . . . . .	41
<b>5</b>	<b>Teoria del controllo ottimale</b>	<b>43</b>
5.1	Problema differenziale ai limiti . . . . .	47
5.2	Modello matematico utilizzato . . . . .	52
5.2.1	Equazioni di stato e variabili aggiunte . . . . .	53
5.2.2	Metodo di multiple shooting . . . . .	57
5.2.3	Condizioni al contorno . . . . .	57
5.2.4	Condizioni intermedie e condizioni di ottimo . . . . .	58
5.2.5	Condizioni iniziali . . . . .	59
<b>6</b>	<b>Analisi delle traiettorie</b>	<b>60</b>
6.1	Variabili adimensionalizzate . . . . .	60
6.1.1	Distanza adimensionale . . . . .	60
6.1.2	Velocità adimensionale . . . . .	61
6.1.3	Accelerazione adimensionale . . . . .	61
6.1.4	Riferimento temporale . . . . .	61
6.1.5	Altri parametri da considerare . . . . .	61
6.2	Algoritmo di funzionamento del codice . . . . .	62
6.3	Risultati . . . . .	65
6.3.1	Calcolo degli angoli di fasamento . . . . .	66
6.3.2	Calcolo della massa finale al variare della durata di missione . . . . .	69
6.3.3	Grafici dei raggi di perielio ed afelio . . . . .	79
6.3.4	Grafici delle traiettorie . . . . .	83
6.3.5	Ricerca di altre date di partenza . . . . .	85
<b>7</b>	<b>Conclusioni</b>	<b>88</b>
<b>A</b>	<b>Altre traiettorie</b>	<b>91</b>
	<b>Bibliografia</b>	<b>100</b>

# Elenco delle tabelle

2.1	Elementi orbitali classici per 2009 HC [sito JPL] . . . . .	10
2.2	Elementi orbitali classici per 2007 CS5 . . . . .	11
2.3	Elementi orbitali classici per 2021 UL7 . . . . .	13
6.1	Masse finali e consumi per 2009 HC al variare della durata di missione	70
6.2	Aumento della massa iniziale del satellite per i t0 corrispondenti al fasamento ottimale per 2009 HC . . . . .	72
6.3	Masse finali e consumi per 2007 CS5 al variare della durata di missione	73
6.4	Aumento della massa iniziale del satellite per il t0 corrispondenti al fasamento ottimale per 2007 CS5 . . . . .	75
6.5	Masse finali e consumi per 2021 UL7 al variare della durata di missione	76
6.6	Aumento della massa iniziale del satellite per il t0 corrispondenti al fasamento ottimale per 2021 UL7 . . . . .	77
6.7	Nuova data di partenza per 2009 HC . . . . .	86
6.8	Nuova data di partenza per 2021 UL7 . . . . .	87

# Elenco delle figure

2.1	Fascia Principale, Greci e Troiani, fascia di Kuiper: credit NASA . . . . .	6
2.2	NEAs types [11] . . . . .	8
2.3	2009 HC orbita ad Agosto 2024 [15] . . . . .	11
2.4	2007 CS5 orbita ad Agosto 2024 [16] . . . . .	12
2.5	2021 UL7 orbita ad Agosto 2024 [17] . . . . .	14
3.1	Propulsore a ioni [19] . . . . .	20
4.1	Leggi di Keplero [20] . . . . .	26
4.2	Sistema Eliocentrico, [21] . . . . .	27
4.3	Sistema Geocentrico [22] . . . . .	28
4.4	Sistema perifocale [23] . . . . .	29
4.5	Elementi orbitali classici, [24] . . . . .	30
4.6	Problema degli N-corpi [25] . . . . .	31
4.7	Problema dei due corpi [26] . . . . .	32
4.8	Sezioni di conica [27] . . . . .	34
4.9	Missione interplanetaria [29] . . . . .	37
4.10	Triangolo di velocità per un cambio di piano [30] . . . . .	38
4.11	Aggiustamento degli apsi [31] . . . . .	39
4.12	Rotazione della linea degli apsi [32] . . . . .	40
4.13	Trasferta di Hohmann [33] . . . . .	41
5.1	Sistema di riferimento adottato, [36] . . . . .	54
6.1	Diagramma di flusso del processo . . . . .	64
6.2	Deltatheta-data di partenza per l'asteroide 2009 HC . . . . .	66
6.3	Deltatheta-data di partenza per l'asteroide 2007 CS5 . . . . .	67
6.4	Deltatheta-data di partenza per l'asteroide 2021 UL7 . . . . .	67
6.5	Masse finali e consumi per 2009 HC al variare della durata di missione	69
6.6	Massa finale del satellite, DV e consumi per 2009 HC per $t_0=170 \div 176$	71
6.7	Massa finale del satellite, DV e consumi per 2009 HC per $t_0=224 \div 230$	71

6.8	Influenza dell'aumento della massa finale del satellite sul DV e sui consumi per 2009 HC . . . . .	72
6.9	Masse finali e consumi per 2007 CS5 al variare della durata di missione	73
6.10	Massa finale del satellite, DV e consumi per 2007 CS5 per $t_0=226 \div 229$	74
6.11	Influenza dell'aumento della massa finale del satellite sul DV e sui consumi per 2007 CS5 . . . . .	75
6.12	Masse finali e consumi per 2021 UL7 al variare della durata di missione	76
6.13	Massa finale del satellite, DV e consumi per 2021 UL7 per $t_0=190 \div 198$	77
6.14	Influenza dell'aumento della massa finale del satellite sul DV e sui consumi per 2021 UL7 . . . . .	78
6.15	Raggi di perielio e afelio asteroide 2009 HC con $t_0=176$ durata 25 e durata 22 . . . . .	79
6.16	Raggi di perielio e afelio asteroide 2009 HC con $t_0=229$ durata 25 e durata 22 . . . . .	80
6.17	Raggi di perielio e afelio asteroide 2007 CS5 con $t_0=228$ durata 20 e durata 15 . . . . .	81
6.18	Raggi di perielio e afelio asteroide 2021 UL7 con $t_0=198$ durata 25 e durata 20 . . . . .	81
6.19	Triaiettoria per 2009 HC con $t_0=173$ e durata 22 . . . . .	83
6.20	Triaiettoria per 2009 HC con $t_0=229$ e durata 25 . . . . .	83
6.21	Triaiettoria per 2007 CS5 con $t_0=228$ e durata 20 . . . . .	84
6.22	Triaiettoria per 2021 UL7 con $t_0=198$ e durata 25 . . . . .	84



# Capitolo 1

## Introduzione

Il lavoro sviluppato per questa tesi si basa sull'interesse crescente nell'esplorazione spaziale verso corpi celesti vicino alla Terra, grazie allo sviluppo e l'utilizzo di satelliti miniaturizzati, chiamati *CubeSats* o nanosatelliti, che permettono di realizzare delle missioni a budget ridotto, senza però penalizzare il ritorno scientifico ed economico che deriva dalle suddette missioni.

In questo primo capitolo introduttivo, si vuole dare una spiegazione generale su cosa sia l'ottimizzazione spaziale, dopo di che si vanno a descrivere le caratteristiche tecniche delle missioni sviluppate ed infine si descrive brevemente la struttura della tesi.

### 1.1 Ottimizzazione di traiettorie spaziali

Il problema di Ottimizzazione di una traiettoria spaziale sta a significare la ricerca di una traiettoria che riesca a soddisfare alcuni criteri scelti, detti *indici di performance*, rispettando determinati vincoli come possono essere le condizioni a contorno iniziali e finali della missione, [3], [4]. Per esempio, in questo lavoro, si è operata un'ottimizzazione sulla massa finale del satellite considerato, di conseguenza sono stati analizzati anche i consumi della missione.

Il progetto di ogni traiettoria spaziale, è caratterizzato da quattro aspetti fondamentali:

- **Il modello matematico:** per poter risolvere un qualsiasi problema di meccanica orbitale, bisogna individuare il sistema dinamico che lo descrive, e quindi far riferimento al modello matematico con le sue equazioni di stato e le derivate dell'equazioni del moto del satellite.



- **L'obiettivo della missione:** individuare quali e quanti sono gli obiettivi di missione, in termini di *indici di prestazione* da voler massimizzare o minimizzare, come meglio spiegato nel capitolo 5.
- **Il metodo utilizzato:** definire l'approccio che si vuole andare ad utilizzare, che può essere sia un *approccio analitico*, sia un *approccio numerico*.
- **La soluzione:** trovare la soluzione al problema definito precedentemente tramite il modello matematico, con il metodo scelto.

Poichè, a causa della difficoltà del modello matematico per la definizione di una traiettoria spaziale, non esistono soluzioni analitiche se non per casi semplici e riduttivi, l'approccio analitico è stato facilmente rimpiazzato da metodi numerici, più adatti ad affrontare il problema. I metodi numerici possono essere a loro volta suddivisi in due categorie, [3]:

- **Metodi diretti:** queste tecniche si basano sulla parametrizzazione delle variabili di stato  $\mathbf{x}(t)$  e dei controlli  $\mathbf{u}(t)$ , e quindi la discretizzazione delle equazioni che descrivono il problema. Questo permette di trovare delle soluzioni approssimate in quasi tutti i casi, tuttavia queste non sono necessariamente quelle ottimali ricercate.
- **Metodi indiretti:** questo tipo di metodi sono simili per tecnica risolutiva a quelli diretti, tuttavia dipendono fortemente dalle condizioni analitiche necessarie per l'ottimizzazione. Infatti, si servono di parametri e variabili *aggiunte*, detti *moltiplicatori di Lagrange*, che devono rispettare delle condizioni a contorno, iniziali e finali, per poter consentire di trovare la soluzione ottimale. Le variabili aggiunte sono anche dette di *co-stato*, dato che evolvono nell'integrazione del problema in maniera coerente con le equazioni di stato che descrivono il sistema. Le soluzioni individuate tramite metodi indiretti sono sicuramente soluzioni ottimali, grazie all'elevata precisione numerica, tuttavia il loro problema principale è la difficoltà di arrivare a convergenza e la loro forte dipendenza dalle condizioni iniziali (che non sono note a priori).

Il lavoro sviluppato si basa sul *metodo di multiple shooting*, che fa parte dei metodi indiretti di ottimizzazione, e che viene analizzato nel Capitolo 5.

## 1.2 Caratteristiche tecniche della missione

L'analisi sviluppata è ispirata da un progetto condotto dall'*Agenzia Spaziale Italiana*, (*ASI*) chiamato *ANIME*, ossia *Asteroid Nodal Intersection Multiple Encounters*, che prevede di esplorare tre asteroidi *Near Earth* di interesse scientifico e per la protezione planetaria. Questa missione prevede il lancio nel 2026, dei *flyby* con gli asteroidi 2006 HZ51 (Giugno 2027) e 2004 QD14 (Dicembre 2027), per poi raggiungere l'asteroide 2000 SG344 nel Settembre 2028.

Basandosi sullo stesso concetto di missione, si è pensato che potesse essere interessante analizzare delle traiettorie dirette verso asteroidi diversi, quali 2009 HC, 2007 CS5 e 2021 UL7, tutti e tre ritenuti di alto interesse scientifico a causa della loro composizione chimica e delle loro proprietà fisiche che potrebbero contenere residui rocciosi e gassosi della formazione del Sistema Solare. Tuttavia, per le missioni analizzate, si è fatto riferimento ad una data di partenza tardiva rispetto alla missione ANIME, con una finestra dal 2027 al 2036 circa. Anche la durata della missione è stata variata rispetto a quella di riferimento, che ha come vincolo che gli strumenti ottici a bordo del satellite abbiano una vita massima di 2 anni nello spazio, condizione che non è stata presa in considerazione per questo lavoro. Invece, sono state considerate le stesse caratteristiche generali del satellite che sarà impiegato per la missione ANIME, ossia un Cubesat di 12 *U* con:

- **Massa iniziale:** 21 kg;
- **Tipo di propulsore:** propulsione elettrica assicurata da un solo propulsore a ioni, modello *Busek RIT-3*;
- **Massa di propellente a bordo:** 1.5 kg;
- **Impulso specifico:** 2100 s;
- **Potenza del propulsore:** tra 60 e 70 W;
- **Duty Cycle:** generalmente si fa riferimento ad un duty cycle del 90%, tranne che nei 15 giorni precedenti ad un flyby o al rendez vous, in cui scende al 70%.

Tuttavia, la massa iniziale del satellite è stata talvolta variata. I dati e le informazioni tenute in considerazione sono stati presi dal report di missione.

## **1.3 Overview della tesi**

In quest'ultima sezione, si vuole spiegare la struttura della tesi: nel primo capitolo si sono volute presentare le basi di riferimento per il lavoro eseguito, nel Capitolo 2 è stata data una descrizione generale degli asteroidi come oggetto di interesse per le missioni, il Capitolo 3 tratta di richiami generali sulla propulsione elettrica. I capitoli 4 e 5 rappresentano il cuore della tesi, perchè descrivono in maniera teorica il primo i concetti fondamentali per la meccanica orbitale, ed il secondo il metodo di ottimizzazione indiretta basata sulla teoria del controllo ottimale adoperato effettivamente per sviluppare le analisi. Nel Capitolo 6 viene spiegata la metodologia con cui sono state svolte le analisi ed i risultati ottenuti, ed infine nel Capitolo 7 sono riportate le conclusioni. Nell'appendice A si possono vedere i raggi di perielio e afelio e le relative traiettorie di tutte le missioni sviluppate che non state prese come riferimento nei risultati.

# Capitolo 2

## Asteroidi

In questa sezione, si vuole andare a fare una panoramica generale sugli asteroidi, che rappresentano i corpi celesti di interesse scientifico per i quali si è andata a sviluppare l'ottimizzazione delle traiettorie.

### 2.1 Caratteristiche generali

Si definisce *asteroide* un corpo celeste di dimensioni relativamente contenute, generalmente con un diametro inferiore al chilometro, di composizione chimico-fisica diversificata, ma comunque simile a quella di un pianeta.

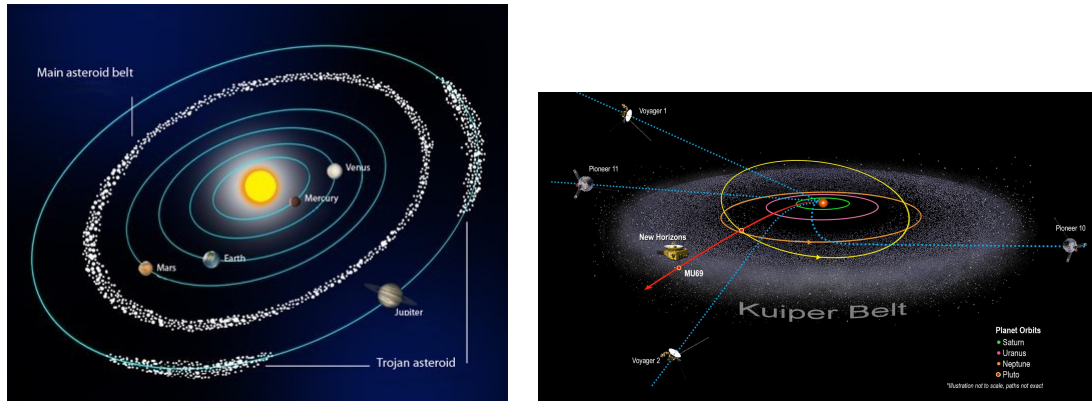
Inoltre, sono oggetti privi di atmosfera e hanno raramente una forma sferica monolitica, soprattutto se sono di grandi dimensioni, che sono considerati piuttosto degli aggregati di frammenti rocciosi più piccoli al seguito di impatti. [5]

### 2.2 Dove sono concentrati: Fascia Principale, Fascia di Kuiper, Greci e Troiani

Si è osservato che la maggioranza degli asteroidi scoperti finora si trova in una regione compresa tra 2 e 4 UA dal Sole, chiamata *Fascia Principale*, su un'orbita tra Marte e Giove. Gli asteroidi presenti in questa fascia registrano una composizione chimica simile a quella della nebulosa primordiale, responsabile della formazione del Sistema Solare. A causa delle perturbazioni dovute alla forza di gravità di Giove, circa 1.1 – 1.9 milioni i corpi celesti con diametro al di sopra di 1 km all'interno della fascia non sono riusciti ad aggregarsi per formare ulteriori pianeti, rimanendo come asteroidi in questa regione.

Esistono anche altre zone dello spazio occupate da un elevato numero di asteroidi,

al pari circa della fascia principale, e queste sono le orbite in corrispondenza dei punti lagrangiani stabili L4 e L5 del sistema Sole Giove, chiamate *Greci e Troiani*. In aggiunta, esiste anche un'ulteriore fascia, chiamata *Fascia di Edgeworth-Kuiper*, situata dall'orbita di Nettuno (30 UA) fino a 50 UA dal Sole, che ha una struttura molto simile a quella della fascia principale, ma a differenza di questa è abitata da asteroidi non più di composizione rocciosa, ma da frammenti del disco protoplanetario fatti di sostanze volatili congelate.[6],[7]



**Figura 2.1:** Fascia Principale, Greci e Troiani, fascia di Kuiper: credit NASA

## 2.3 Classificazione degli asteroidi

Per classificare il tipo di asteroide, si fa riferimento alla sua composizione chimica in base alle diverse classi spettrali, al loro colore e talvolta al loro albedo:

- **Asteroidi di tipo C:** è il tipo di asteroidi più diffuso, circa il 75% della fascia Principale, sono costituiti soprattutto da carbonio, sono molto scuri (albedo 0.03) e hanno colori relativi allo spettro del blu. Sono gli asteroidi con la composizione chimica più vicina a quella della nebulosa primitiva del Sistema Solare.
- **Asteroidi di tipo S:** circa il 17% degli asteroidi sono di questo tipo, a differenza dei precedenti sono corpi luminosi (albedo 0.1-0.22), con colore relativo allo spettro del rosso, e composizione metallica tipica dei silicati di nichel, ferro e magnesio.
- **Asteroidi di tipo M:** La restante parte degli asteroidi è di tipo M, ossia con composizione metallica tipica del nichel-ferro, e superficie brillante (albedo 0.1-0.18).

Questo tipo di classificazione può essere utile per trarre informazioni chimico-fisiche importanti per approfondire lo studio del nostro Sistema Solare, dato che le superfici degli asteroidi si pensa siano costituite dagli stessi materiali presenti durante la sua formazione. [7]

## 2.4 Near Earth Asteroids

Tra gli asteroidi presenti nel Sistema Solare, si è sviluppata una particolare attenzione a quelli detti *Near Earth*, (*NEAs*), ossia che si trovano in prossimità della Terra, più specificatamente il loro *perielio* si trova a circa 1.3 UA da questa, con un periodo orbitale  $P < 200$  anni.[6]

I NEAs fanno parte dei *Near Earth Objects*, che oltre agli asteroidi, comprendono anche altri tipi di corpi celesti come comete e meteroidi.

Questi asteroidi hanno composizioni chimiche differenti tra loro ed anche la loro forma non è quasi mai sferica, ma piuttosto irregolare, come se fossero oggetti creati grazie alla collisione di più frammenti tra loro, per questo esistono anche diverse scuole di pensiero riguardo la loro origine:

- Alcuni scienziati ipotizzano che i NEAs derivino da nuclei di comete che abbiano perso la loro componente volatile, creando uno strato superficiale inerte, lasciando di sé la sola parte rocciosa. La traiettoria di queste comete è stata fortemente influenzata dalle perturbazioni gravitazionali di Giove, che hanno fatto sì che dalla regione della fascia principale siano arrivate ad orbite Near Earth.
- Un'altra teoria suppone che i NEAs si siano formati grazie alle collisioni tra frammenti provenienti dagli asteroidi della fascia principale, la cui traiettoria ed orbita altamente eccentrica sia stata influenzata dalla forza di risonanza dovuta alla differenza tra i loro periodi orbitali e quello di Giove.[8],[6]

Gli asteroidi Near Earth scoperti fino ad Agosto 2024 sono 35286 di ogni dimensione, in particolare, con diametro  $> 1km$  si stima ne siano stati osservati 864, siano ancora circa 50 quelli ancora da osservare. Al contrario, sono presenti molti più NEAs con diametro  $> 140m$ , per un totale di 10935 già scoperti, ed altri 14000 circa ancora da osservare.[9]

### 2.4.1 Suddivisione dei NEAs

Gli asteroidi Near Earth vengono suddivisi in quattro categorie in base alla loro orbita e se questa interseca o meno l'orbita terrestre:[10],[6]

- **Atiras:** sono quegli asteroidi la cui orbita è completamente interna all'orbita terrestre, ed hanno semiasse maggiore  $a < 1.0UA$  e raggio di afelio  $r_a < 0.983UA$ .
- **Atens:** sono gli asteroidi con orbita che interseca quella terrestre attorno al suo afelio, con semiasse maggiore inferiore a quello terrestre  $a < 1UA$ , e raggio di afelio  $r_a > 0.983UA$ .
- **Apollos:** sono gli asteroidi con orbita che interseca quella terrestre vicino al suo perielio, con semiasse maggiore più grande rispetto a quello terrestre  $a > 1UA$  e raggio di perielio inferiore rispetto all'afelio terrestre  $r_p < 1.017UA$ .
- **Amors:** sono gli asteroidi la cui orbita non interseca quella terrestre, ma si trova tra l'orbita terrestre e quella marziana, con la quale spesso si intersecano. Hanno semiasse maggiore  $a > 1UA$  e raggio di perielio  $1.017 < r_p < 1.3UA$ .

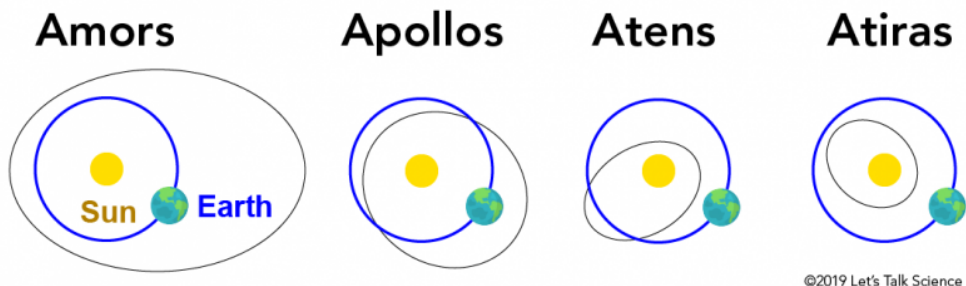


Figura 2.2: NEAs types [11]

Esiste anche una categoria di asteroidi ritenuti potenzialmente pericolosi a causa del loro potenziale avvicinamento alla Terra, detti *Potentially Hazardous Asteroids (PHAs)*. Questi corpi celesti sono caratterizzati da una *minima distanza all'intersezione orbitale (MOID)* pari a  $0.05UA$ , questa è una misura astronomica della distanza tra i due punti più vicini delle orbite osculanti dei due oggetti, e descrive il livello di potenziale collisione tra questi. Inoltre, i PHAs hanno anche *Magnitudine assoluta  $H$*  minore o uguale a 22.0, dove questa rappresenta la luminosità intrinseca di un oggetto senza tener conto delle sue variazioni di luminosità dovute a condizioni reali, ed è definita dalla NASA [12] come la magnitudine registrata da

un osservatore, se l'oggetto celeste preso in considerazione fosse alla distanza di 1 UA dal Sole ed ad 1 UA da se stesso, con angolo di fase nullo. Questo parametro adimensionale è strettamente legato al diametro dell'oggetto celeste tramite la relazione:

$$D = \frac{1329}{\sqrt{p}} 10^{-0.2H}$$

dove  $p$  è l'albedo geometrica dell'oggetto (rapporto tra la luminosità effettiva vista dall'oggetto con angolo di fase nullo, e quella ideale se l'oggetto fosse una superficie piatta e completamente riflettente), ed  $H$  è la magnitudine assoluta. Per cui, tramite questa relazione, è stato determinato che tutti i corpi celesti con diametro inferiore ai 140m non vengano classificati come pericolosi.[6],[13]



## 2.4.2 NEAs di interesse

Per questo lavoro di tesi, sono stati presi come riferimento tre asteroidi Near Earth specifici per una possibile missione di osservazione. Tutti e tre gli asteroidi fanno parte del gruppo *Unnumbered*, cioè di oggetti celesti che a causa dei pochi dati registrati, non hanno orbite dettagliatamente determinate, e che quindi hanno bisogno di ulteriori osservazioni. Le caratteristiche ed orbite dei NEAs presi in considerazione vengono di seguito riportate:

### Asteroide 2009 HC:

Elemento	Valore medio	Unità di misura
semiasse maggiore a	1.039354092113798	UA
eccentricità e	0.1256836245641837	-
inclinazione i	3.77914233264397	deg
argomento del periastro $\omega$	269.9815786468479	deg
RAAN $\Omega$	203.7603862135886	deg
Anomalia media M	305.7572236286006	deg
Periodo sidereo T	387.0291911250572	days

**Tabella 2.1:** Elementi orbitali classici per 2009 HC [sito JPL]

Questo asteroide fa parte degli asteroidi Apollos, presenta i seguenti valori significativi:

magnitudine assoluta

$$H = 24.8$$

massa

$$m = 7.1e + 7kg$$

diametro

$$d = 0.038km$$

MOID

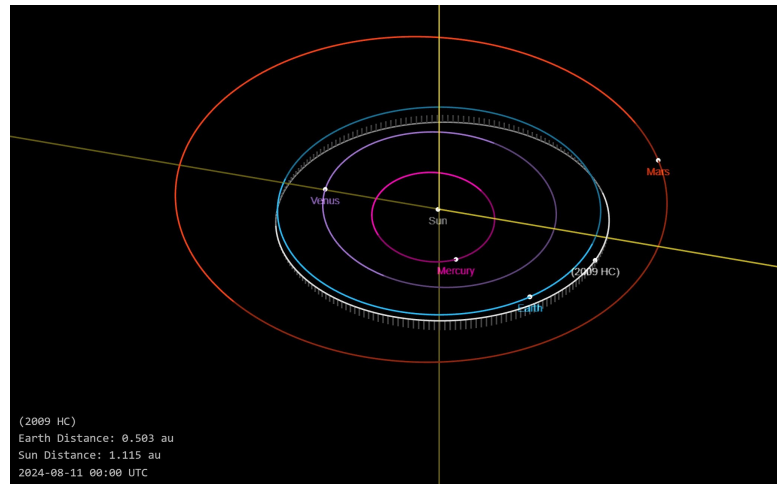
$$MOID = 0.01136 UA$$

distanze di perielio e di afelio

$$r_p = 0.9087 UA \quad r_a = 1.17 UA$$

e non si ritiene possa essere pericoloso per collisioni sulla Terra.[14]

Si può osservare l'orbita dell'asteroide rispetto al sistema solare grazie alla ricostruzione presente sul sito della *Jet Propulsion Laboratory*, (*JPL*) in Agosto 2024 [15]:



**Figura 2.3:** 2009 HC orbita ad Agosto 2024 [15]

**Asteroide 2007 CS5:**

Elemento	Valore medio	Unità di misura
semiasse maggiore a	0.9803157201885664	UA
eccentricità e	0.1725382740899296	-
inclinazione i	0.7520684439198396	deg
argomento del periastro $\omega$	261.3822583424937	deg
RAAN $\Omega$	125.3678667844649	deg
Anomalia media M	169.6054877607024	deg
Periodo sidereo T	354.525417659324	days

**Tabella 2.2:** Elementi orbitali classici per 2007 CS5

Questo asteroide fa parte degli asteroidi Atens, di cui si riportano i seguenti valori

significativi:

magnitudine assoluta

$$H = 24.5$$

MOID

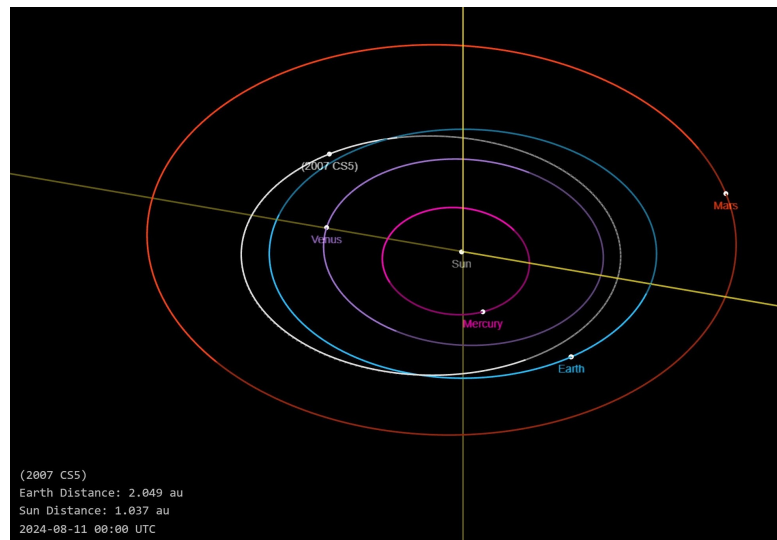
$$MOID = 0.00062 \text{ UA}$$

distanze di perielio e di afelio

$$r_p = 0.8112 \text{ UA} \quad r_a = 1.1495 \text{ UA}$$

Non è considerato potenzialmente pericoloso per l'impatto con la Terra. [14]

Si può osservare l'orbita dell'asteroide rispetto al sistema solare grazie alla ricostruzione presente sul sito della JPL in Agosto 2024 [16]:



**Figura 2.4:** 2007 CS5 orbita ad Agosto 2024 [16]

**Asteroide 2021 UL7:**

Elemento	Valore medio	Unità di misura
semiasse maggiore a	1.077507890095529	UA
eccentricità e	0.1138315199637971	-
inclinazione i	0.6773054714065853	deg
argomento del periastro $\omega$	118.1683437162659	deg
RAAN $\Omega$	19.62440535228214	deg
Anomalia media M	144.8294513632151	deg
Periodo sidereo T	408.5348551514391	days

**Tabella 2.3:** Elementi orbitali classici per 2021 UL7

Questo asteroide fa parte degli asteroidi Apollos, presenta i seguenti valori significativi:

magnitudine assoluta

$$H = 25.8$$

massa

$$m = 1.7e + 7kg$$

diametro

$$d = 0.024km$$

MOID

$$MOID = 0.00146 UA$$

distanze di perielio e di afelio

$$r_p = 0.9549 UA \quad r_a = 1.2002 UA$$

e non si ritiene possa essere pericoloso per collisioni sulla Terra.[14]

Si può osservare l'orbita dell'asteroide rispetto al sistema solare grazie alla ricostruzione presente sul sito della JPL in Agosto 2024 [17]:

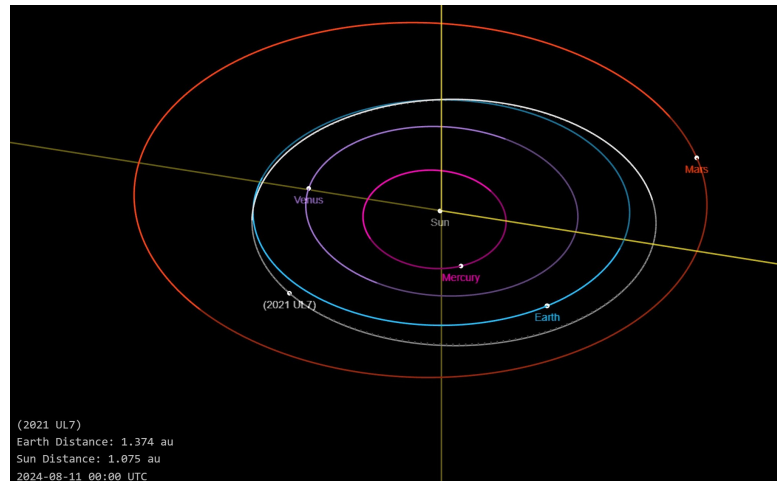


Figura 2.5: 2021 UL7 orbita ad Agosto 2024 [17]

### 2.4.3 Perché si vogliono studiare i NEAs

Dal primo asteroide Near Earth, *Eros 433*, osservato nel 1898 dall'astronomo Gustav Witt, si è subito capito che questi oggetti astronomici abbiano un alto ritorno scientifico, ma anche potenzialmente economico. [6], [1]

Come specificato precedentemente, l'osservazione della superficie degli asteroidi presenta una composizione chimica peculiare, sia di componenti volatili che carboniosi e metallici, riconducibile agli elementi presenti durante la formazione del Sistema Solare, così come del nostro pianeta e della Luna, fatto avvalorato dai crateri presenti sulle superfici planetarie che corrispondono a collisioni con comete o asteroidi.[8]

Inoltre, le collisioni con questi corpi celesti hanno già contribuito significativamente alle modifiche della biosfera terrestre, ed sono stati più ricorrenti di quanto si possa credere, basti ricordare l'impatto dell'asteroide 2008 TC3 in Sudan nell'ottobre del 2008, previsto e studiato dagli enti che tengono sotto controllo le traiettorie degli asteroidi a scopi di difesa come *Lincoln Near-Earth Asteroid Research (LINEAR)*, *Near Earth Asteroid Tracking* oppure *Spacewatch* così come tanti altri [18]. Quindi si nota anche l'importanza di studiare le traiettorie degli asteroidi e più in generale degli oggetti near earth considerati potenzialmente pericolosi (*PHOs*) con lo scopo di difesa planetaria in caso di avvicinamento eccessivo o impatto.

Infine, si reputa che la presenza di minerali, elementi volatili ed altri elementi chimici rari, possa essere sfruttata come risorsa per l'esplorazione spaziale futura tramite tecnologie avanguardistiche per la loro estrazione.[1],[2]

## Capitolo 3

# Propulsione spaziale

Si vuole dare una breve panoramica sulla propulsione elettrica, poichè, allo stato dell'arte, è quella più utilizzata nella maggior parte delle missioni di ottimizzazione di traiettorie, per manovre come ad esempio quelle di station keeping o di cambio di assetto.

Inoltre, per questa missione, si è presupposto che a bordo del satellite sia presente un propulsore a ioni, per cui seguirà anche un paragrafo in cui si vuole dare una breve descrizione sul funzionamento di questo tipo di propulsori.

### 3.1 Nozioni generali sulla propulsione spaziale

La propulsione nasce per l'esigenza di dover modificare la traiettoria di un oggetto come ad esempio un satellite, tramite la generazione di una spinta. La spinta è una forza che produce un'accelerazione sul corpo che va ad agire sulla sua velocità, in maniera da poterne modificare il moto.

Per la generazione della spinta, si fa riferimento al *Principio di azione e reazione*: "Se un corpo A esercita una forza su un corpo B, allora B esercita su A una forza uguale e contraria".

Nel caso in cui si prenda come riferimento uno spacecraft nello spazio, il corpo con il quale questo possa scambiare quantità di moto e di conseguenza esercitare una spinta, è rappresentato dal propellente a bordo. Per poter accelerare è necessario che il propellente a bordo fornisca una certa energia, che può essere di natura *chimica o elettrica*. In base al tipo di energia impiegata, la propulsione si divide in *Propulsione chimica* e *Propulsione elettrica*.

Se si prende ad esempio un sistema isolato unidimensionale, uno spacecraft inizialmente ad una velocità  $v$  al tempo  $t$ , espellendo del propellente di massa  $dm_p$  in un tempo  $dt$ , passa ad avere velocità  $v + dv$ . La massa di propellente è stata espulsa

con velocità  $c$  rispetto al satellite, detta *velocità efficace di scarico*. Per il principio di conservazione della quantità di moto:

$$mv = (m - dm_p)(v + dv) - dm_p(c - v)$$

$$mdv = dm_p c$$

Poichè il propellente viene espulso in maniera continua, si introduce la portata di propellente:

$$\dot{m}_p = \frac{dm_p}{dt}$$

Quindi sostituendo questa nell'equazione precedente e facendo comparire l'accelerazione:

$$m \frac{dv}{dt} = \dot{m}_p c$$

Si può definire la *spinta* fornita dal propulsore:

$$T = \dot{m}_p c \tag{3.1}$$

Da questa, si può esprimere la *potenza della spinta*, che è la potenza necessaria al propulsore per produrre la spinta:

$$P_T = \frac{1}{2} \dot{m}_p c^2 = \frac{1}{2} T c \tag{3.2}$$

Si può esprimere la velocità efficace di scarico, come il rapporto tra la Spinta e la portata di propellente:

$$c = \frac{T}{\dot{m}_p}$$

Si definisce *Impulso totale*, l'integrale della spinta nel tempo, tra l'istante iniziale e finale di manovra:

$$I_t = \int_{t_0}^{t_f} T dt$$

e se la spinta rimane costante durante il tempo di manovra, può essere espresso come:

$$I_t = T \Delta t$$

Mentre l'*Impulso specifico*, che è una grandezza che esprime quanto efficacemente è stata utilizzata la massa di propellente espulsa, è dato dal rapporto tra l'impulso totale e il peso della massa di propellente sulla Terra:

$$I_{sp} = \frac{I_t}{m_p g_0} = \frac{T \Delta t}{\dot{m}_p \Delta t g_0} = \frac{T}{\dot{m}_p g_0} = \frac{c}{g_0}$$

A parità di propellente, se si ha un  $I_{sp}$  più grande, si avrà la stessa spinta per un tempo maggiore, oppure una spinta maggiore per lo stesso tempo.

Inoltre, per la propulsione spaziale, interessa anche il cambiamento di velocità dello spacecraft. Per cui, si introduce la velocità caratteristica  $\Delta V$ , espressa tramite l'integrale dell'accelerazione che il propulsore fornisce attraverso la spinta, durante il tempo di manovra, assumendo che questa sia l'unica forza agente e sia parallela alla velocità:

$$\Delta V = \int_{t_0}^{t_f} \frac{T}{m} dt = \int_{t_0}^{t_f} \frac{c \dot{m}_p}{m} dt$$

Assumendo che  $c$  sia costante, e osservando che la portata espulsa di propellente è la derivata della massa nel tempo del satellite:

$$\Delta V = -c \int_{t_0}^{t_f} \frac{dm}{m}$$

Si arriva a scrivere l'*equazione di Tsiolkowski* o semplicemente detta *equazione del razzo*:

$$\Delta V = c \ln \left( \frac{m_0}{m_f} \right) \quad (3.3)$$

oppure scritta per esprimere la massa finale:

$$m_f = m_0 e^{-\frac{\Delta V}{c}} \quad (3.4)$$

Questa equazione è di fondamentale importanza nella propulsione spaziale, poichè lega la massa finale del satellite alla massa iniziale in funzione del rapporto tra la velocità caratteristica e quella efficace di scarico. Più  $c$  è elevato, meno propellente sarà richiesto per una data missione o manovra.

## 3.2 Propulsione elettrica

Nel caso della propulsione elettrica, la fonte di energia non dipende dal propellente, ma è fornita da un generatore di potenza, che può essere di varia natura: pannelli solari, radioisotopi, energia derivante dalla fissione nucleare. Il propulsore, poi converte la potenza elettrica fornita dal generatore in energia cinetica del propellente:

$$\eta P_E \approx \dot{m}_p \frac{c^2}{2} = T \frac{c}{2} = P_T \quad (3.5)$$

Dove:

- $\eta$  è il rendimento del propulsore, che per quelli di tipo elettrico non è molto elevato
- $\dot{m}_p$  è la portata di propellente



- $\frac{c^2}{2}$  è l'energia cinetica, in cui  $c$  è velocità efficace di scarico, che nella trattazione può essere confusa con  $u_e$  che è la velocità dei gas all'uscita dell'ugello.
- $T$  è la spinta pari a  $T = \dot{m}_p u_e \approx \dot{m}_p c$
- $P_T$  è la potenza della spinta, ossia la potenza necessaria ad accelerare la portata di propellente da 0 a  $c$ .

Si usa l'approssimazione nell'equazione 3.5 perchè sono state trascurate le perdite elettriche.

Dall'equazione 3.5 si può derivare che:

$$c = \sqrt{2\eta \frac{P_E}{\dot{m}_p}} = 2\eta \frac{P_E}{T} \quad (3.6)$$

e quindi un Impulso specifico:

$$I_{sp} = \frac{c}{g_0} \quad (3.7)$$

Da queste ultime due equazioni si nota che, con la propulsione elettrica, si possono avere delle velocità di scarico e quindi degli impulsi specifici grandi a patto di accettare dei generatori di potenza elettrica più pesanti, per aumentare le  $P_E$ , e spinte piccole, al massimo di qualche N.

A causa della limitazione sulla spinta, è chiaro che non si riescono a fare delle manovre di inserimento in orbita con propulsori elettrici, mentre per le trasferte interplanetarie, si possono ottenere gli stessi  $\Delta V$  della propulsione chimica ma con consumi di propellente molto minori, a patto che i tempi di missione siano più lunghi, e la traiettoria da seguire sarà caratterizzata da più archi con spostamenti graduali.

Quindi, l'accelerazione che si ottiene con la propulsione elettrica è molto minore di quella che si può ottenere con la propulsione chimica, ed è influenzata fortemente dal generatore di potenza a bordo:

$$m = m_u + m_p + m_s > m_s \quad (3.8)$$

dove:

- $m$  è la massa dello spacecraft in un certo istante di tempo
- $m_u$  è la massa del carico utile
- $m_p$  è la massa di propellente
- $m_s$  è la massa del solo generatore

Inoltre, la massa del generatore di potenza è proporzionale alla potenza elettrica che fornisce:

$$m_s = \alpha P_E = \frac{\alpha T c}{2\eta} \quad (3.9)$$

Da cui, si calcola l'accelerazione che si può ottenere, che è sicuramente minore di quella che si otterrebbe se si avesse il solo generatore a bordo:

$$a = \frac{T}{m} < \frac{T}{m_s} = \frac{T}{\alpha P_E} = \frac{2\eta}{\alpha c} \quad (3.10)$$

$\alpha$  è un parametro che dipende dal sistema elettrico a bordo, due esempi possono essere:

$\alpha = 15 \frac{kg}{kW}$  per un sistema di pannelli solari;

$\alpha = 1 \frac{kg}{kW}$  per un sistema a propulsione nucleare.

I propulsori elettrici si dividono in:

- **Propulsori elettrotermici:** il propellente viene fatto riscaldare elettricamente e poi viene fatto espandere in ugello;
- **Propulsori elettrostatici:** Il propellente viene ionizzato e poi viene fatto accelerare grazie a delle forze elettrostatiche;
- **Propulsori elettromagnetici:** Il propellente viene ionizzato e poi viene accelerato grazie a delle forze elettromagnetiche create dall'interazione tra la corrente elettrica ed un campo magnetico che può essere o indotto dalla stessa corrente oppure generato esternamente.

### 3.3 Propulsore a ioni

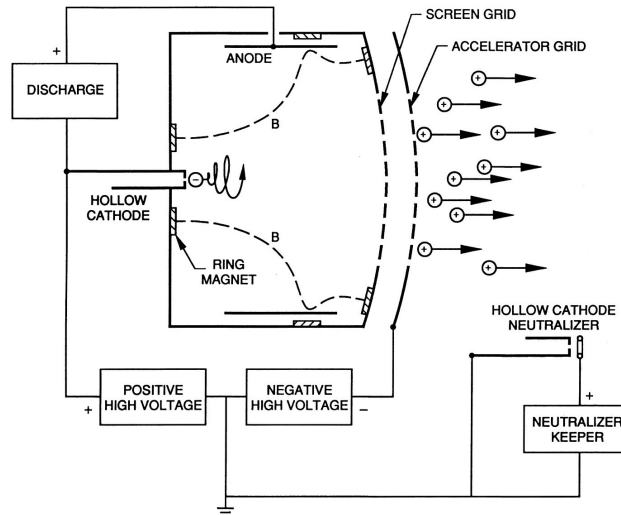


Figura 3.1: Propulsore a ioni [19]

Il propulsore a ioni è uno tra i tipi di propulsori elettrici più utilizzati in ambito spaziale, poichè garantisce un alto impulso specifico  $I_{sp}$ , in genere non inferiore a  $2500s$ , il che lo rende adatto a missioni con elevato  $\Delta v$ , o di elevata durata, come possono essere missioni interplanetarie oppure per lo *station keeping* in orbite geostazionarie. [19]

Il propulsore a ioni è caratterizzato da una camera cilindrica all'interno della quale viene fatto fluire il propellente affinché questo venga ionizzato, dopo di che, il fascio di ioni viene accelerato da un campo elettrostatico esterno per poter fornire la spinta, ed infine deve essere neutralizzato prima di uscire dal propulsore da un fascio di elettroni.

Per cui, il funzionamento di questo propulsore si può dividere in tre fasi principali:

- **Ionizzazione**
- **Accelerazione**
- **Neutralizzazione**

In questo paragrafo si vogliono descrivere in breve queste tre fasi per esporne il funzionamento generale, senza voler fornire una spiegazione dettagliata.

**Fase di Ionizzazione:**

Il propellente viene immesso in camera tramite dei fori presenti all'ingresso, mentre la parte opposta della camera è chiusa da una griglia detta *screen grid*, necessaria per fare da schermo. All'ingresso della camera è presente un catodo, mentre le pareti stesse rappresentano l'anodo.

Il propellente, una volta all'interno del propulsore, deve essere ionizzato, e per far ciò, esistono due metodi noti:

- bombardamento elettronico: tra il catodo all'ingresso della camera e l'anodo, viene creata una differenza di potenziale che fa nascere un campo elettrostatico. Il catodo, inoltre, emette degli elettroni, che accelerati dal campo elettrico verso l'anodo, andranno ad impattare con gli atomi del propellente ionizzandoli. In questo modo, all'interno del propulsore si creerà un plasma quasi neutro.
- radiazione in radiofrequenza: in questo caso, attorno alla camera è posto un solenoide, attraverso il quale verrà fatta scorrere una corrente in grado di creare un'onda elettromagnetica in radiofrequenza che permetterà l'accelerazione degli elettroni. Dopo di che, gli elettroni accelerati, impattando con gli atomi del propellente andranno a ionizzarlo.

Il metodo più diffuso per la ionizzazione è quello per bombardamento elettronico. Per cui, il catodo e la griglia di schermo verranno posti ad un potenziale  $V_C$ , mentre l'anodo sarà posto ad un potenziale maggiore  $V_C + V_D$ , tuttavia si vuole evitare che gli elettroni emessi dal catodo vengano attratti direttamente verso l'anodo, poichè aumentando il loro tempo di permanenza in camera si aumenta la probabilità di ionizzazione del propellente:

$$dP = n_0 Q^{ion} dx \quad (3.11)$$

dove  $n_0$  è la densità atomica e  $Q^{ion}$  è la sezione d'urto per la ionizzazione. Come si può notare da 3.11, la probabilità di ionizzazione aumenta con l'aumentare del cammino  $dx$ , per cui si decide introdurre un campo magnetico nelle vicinanze dell'anodo per fare assumere agli elettroni un *moto di Hall*, ossia una traiettoria cicloidale, in direzione  $\mathbf{E} \times \mathbf{B}$ . Si definisce quindi il *parametro di Hall*:

$$\Omega = \frac{qB}{m\nu_c} \quad (3.12)$$

Se  $\Omega \gg 1$ , allora c'è un buon confinamento degli elettroni all'interno della camera, il che può essere assicurato da un alto campo magnetico  $B$ , ed un basso numero di collisioni  $\nu_c$ .

Alla fine della fase di ionizzazione, ci sarà all'interno della camera un plasma quasi neutro, ossia lo stesso numero di ioni ed elettroni  $n_+ \approx n_e$ , posti ad un potenziale

simile a quello dell'anodo. Infine, avverrà la separazione delle cariche, in quanto gli ioni verranno attratti dalla screen grid, mentre gli elettroni andranno verso l'anodo.

**Fase di Accelerazione:**

Gli ioni vengono attratti dalla screen grid grazie alla presenza del campo elettrico, ma a questa giungono con velocità nulla e potenziale pari a  $V_C$ , per cui viene posta ad una distanza  $x_a$  da questa, una seconda griglia detta *griglia acceleratrice*, con potenziale negativo pari a  $-V_A$ , in maniera da creare una differenza di potenziale  $\Delta V = V_C + V_A$  responsabile dell'accelerazione degli ioni. Tuttavia, quando uno ione entra nello spazio attraverso le due griglie, è soggetto alla forza repulsiva esercitata dagli altri ioni che vede davanti a sé, perciò nessuno ione riesce ad entrare tra le griglie finché un altro non uscirà da queste e verrà neutralizzato. Questo fenomeno dipende dalla distanza tra le due griglie ed impone un limite sulla massima corrente che si può generare, che viene descritta dalla *Legge di Child*:

$$j_{max} = \frac{4\epsilon_0}{9} \left( \frac{2q}{m_+} \right)^{\frac{1}{2}} \frac{\Delta V^{\frac{3}{2}}}{x_a^2} \quad (3.13)$$

Poichè la densità di corrente è direttamente correlata alla spinta, si può anche ricavare la massima densità di spinta che si può ottenere in un propulsore a ioni in condizioni di massima corrente generata. Considerando, in prima approssimazione, che la portata di propellente sia pari alla portata degli ioni generati:

$$\dot{m}_p \approx \dot{m}_+$$

la portata degli ioni è legata alla corrente generata da questi:

$$\dot{m}_+ = j_+ A \frac{m_+}{q}$$

in ultimo, la spinta massima per unità di area si esprime come:

$$\left( \frac{T}{A} \right)_{max} = \frac{\dot{m}c}{A} \approx \frac{j_{max}m_+}{q} c = \frac{4\epsilon_0}{9} \left( \frac{2m_+}{q} \right)^{\frac{1}{2}} \frac{\Delta V^{\frac{3}{2}}}{x_a^2} c \quad (3.14)$$

Pertanto, considerando il fatto che la velocità efficace di scarico  $c$  dipende fortemente dalla missione, e quindi non è un parametro che si possa andare a variare arbitrariamente, per poter andare ad aumentare la densità di spinta del propulsore si può agire:

- accelerando ioni con masse elevate, cosa che si può controllare andando a scegliere il propellente più adatto;

- riducendo la distanza tra la screen grid e la griglia acceleratrice  $x_a$ ;
- andando ad aumentare la differenza di potenziale  $V_N$ , in maniera da accelerare maggiormente gli ioni. Per far ciò, ci si basa sul concetto di *accelerazione-decelerazione*, andando a porre un'ulteriore griglia deceleratrice a potenziale nullo dopo la griglia acceleratrice. La velocità finale degli ioni sarà legata alla differenza di potenziale tra la screen grid e la griglia deceleratrice  $V_N$ :

$$v = \sqrt{\frac{2qV_N}{m_+}} \approx c$$

e questa sarà compatibile con l'impulso specifico e quindi la velocità efficace di scarico imposta dalla missione, ma si potrà porre la griglia acceleratrice intermedia alle due ad un potenziale  $V_A$  minore, in maniera da accelerare maggiormente gli ioni e quindi a fornire più corrente massima e di conseguenza una spinta maggiore.

#### Fase di Neutralizzazione:

Se, a valle del propulsore, non venisse neutralizzata la corrente generata dagli ioni positivi, il propulsore acquisirebbe un potenziale negativo che andrebbe ad impattare il suo normale funzionamento. Quindi, la neutralizzazione deve essere effettuata ad una distanza massima non troppo elevata dall'uscita degli ioni, che risulta essere pari a  $2\sqrt{2}x_a$  dall'ultimo elettrodo.

Per far avvenire questo processo, all'uscita del propulsore è presente un *catodo cavo* ad alta emissività elettronica che emette elettroni per effetto termoionico. All'interno del catodo, viene fatta passare una piccola portata di propellente, gli elettroni emessi andranno a creare delle coppie elettrone-ione a seguito degli impatti. Infine, al di fuori, sarà presente un *elettrodo estrattore* responsabile dell'uscita del fascio di elettroni che creerà una corrente uguale ed opposta a quella prodotta dagli ioni provenienti dal propulsore e che quindi andrà a bilanciarla.

#### Prestazioni

Si divide la portata di propellente nella portata degli ioni che vengono poi accelerati, in una portata che comprende una frazione di propellente non ionizzato e un'altra frazione di propellente mandata all'interno del catodo cavo:

$$\dot{m}_p = \dot{m}_+ + \dot{m}_a$$

e si introduce l'*efficienza di utilizzazione* del propellente, tenendo in considerazione solamente la portata degli ioni effettivamente accelerati:

$$\eta_u = \frac{\dot{m}_+}{\dot{m}_p} \quad (3.15)$$

Poichè la spinta si può definire come:

$$T = \dot{m}_+ u_+$$

Allora si può esprimere la velocità efficace di scarico in funzione dell'efficienza del propellente:

$$c = \frac{T}{\dot{m}_p} = \frac{\dot{m}_+ u_+}{\dot{m}_p} = \eta_u u_+ \quad (3.16)$$

Si può definire anche un'efficienza elettrica, che tenga conto dell'energia elettrica dissipata per effetto Joule, quella persa per la ionizzazione  $\epsilon_B$ , quella utilizzata per riscaldare i catodi, quella utilizzata per l'elettrodo estrattore, quella persa sulle griglie e altre perdite:

$$\eta_{el} P_E = \frac{1}{2} \dot{m}_+ u_+^2$$

$$\eta_{el} = \frac{\frac{1}{2} \dot{m}_+ u_+^2}{P_E} = \frac{\frac{1}{2} \dot{m}_+ u_+^2}{\frac{1}{2} \dot{m}_+ u_+^2 + \epsilon_B \frac{\dot{m}_+}{m_+} + \sum P_{perdite}} \quad (3.17)$$

Infine, si può definire un *rendimento globale* del propulsore:

$$\eta_g = \frac{Tc}{2P_E} = \frac{\dot{m}_+ u_+}{2P_E} \eta_u u_+ = \eta_{el} \eta_u \quad (3.18)$$

Da queste efficienze, si denota che per avere buone prestazioni si vuole avere un basso costo di ionizzazione del propellente, poche perdite elettriche e un'alta probabilità di ionizzazione. Tuttavia, si nota come i rendimenti di utilizzazione e l'efficienza elettrica siano contrapposte tra loro, poichè aumentando la densità di propellente in camera si aumenta la probabilità di ionizzazione, quindi si riduce il costo di ionizzazione, cosa positiva per l'efficienza elettrica, ma al contempo, questo porta ad avere un numero più elevato di atomi che non vengono ionizzati, aspetto negativo per l'utilizzazione del propellente. Contrariamente, avere in camera una grande corrente elettronica riduce la densità atomica migliorando  $\eta_u$ , ma aumenta il costo di ionizzazione  $\epsilon_B$ . Per cui, bisogna arrivare ad un compromesso ottimale.

# Capitolo 4

## Richiami di meccanica orbitale

In questo capitolo si vogliono illustrare le nozioni principali dell'astrodinamica, utili alla comprensione delle missioni sviluppate verso i NEAs di interesse.

### 4.1 Leggi di Keplero

Le tre leggi di Keplero sono state formulate da Johannes Keplero tra il 1608 e il 1619, per descrivere quantitativamente il moto dei pianeti attorno al Sole.

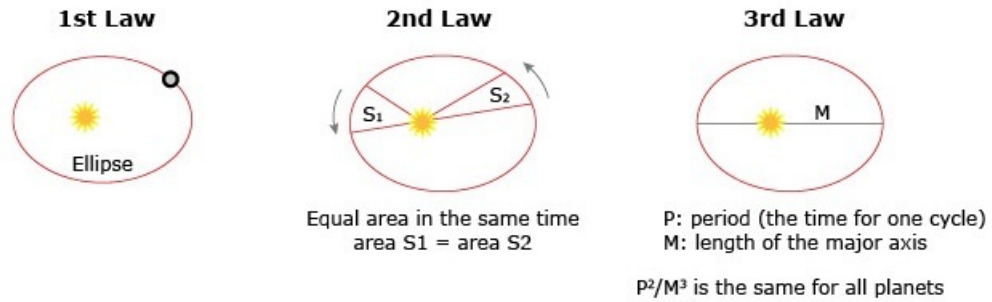
Le tre leggi sono:

- **Prima Legge o legge delle orbite ellittiche:** L'orbita descritta da un pianeta è un'ellisse, di cui il Sole occupa uno dei due fuochi.
- **Seconda Legge o legge delle aree:** Il segmento (raggio vettore) che unisce il centro del Sole con il centro del pianeta descrive aree uguali in tempi uguali.
- **Terza Legge o legge dei periodi:** I quadrati dei tempi che i pianeti impiegano a percorrere le loro orbite sono proporzionali al cubo del semiasse maggiore:

$$\frac{a^3}{T^2} = K$$

dove  $a$  è il semiasse maggiore dell'orbita,  $T$  è il periodo orbitale, e  $K$  è una costante che dipende dal corpo celeste che si sta prendendo in considerazione.





© Copyright. 2013. University of Waikato. All rights reserved.

Figura 4.1: Leggi di Keplero [20]

## 4.2 Sistemi di riferimento

Per poter determinare la posizione e la velocità di uno spacecraft in un determinato istante di tempo lungo la sua orbita, è necessario definire un appropriato *Sistema di coordinate*. I sistemi di riferimento sono definiti da:

- Un'origine;
- Un piano fondamentale  $\mathbf{X} - \mathbf{Y}$ ;
- Verso del terzo asse  $\mathbf{Z}$ , perpendicolare al piano fondamentale;
- Direzione positiva dell'asse  $\mathbf{X}$

Solitamente, si utilizzano sistemi di riferimento destrorsi, e possono essere inerziali o non inerziali se subiscono o meno delle accelerazioni rispetto ad un altro sistema considerato. Durante lo sviluppo del lavoro di tesi, si è fatto riferimento ai seguenti sistemi di coordinate:

Sistema di riferimento eliocentrico

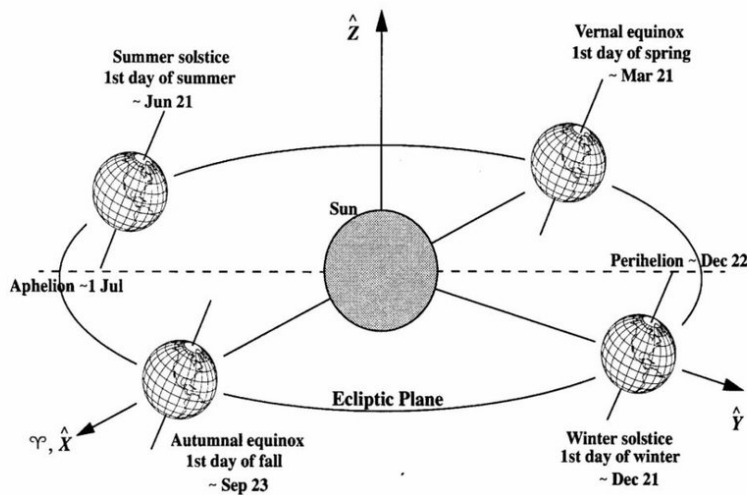
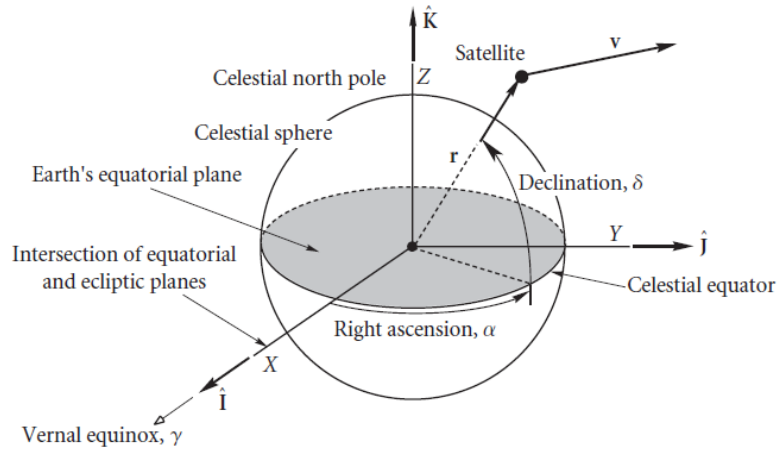


Figura 4.2: Sistema Eliocentrico, [21]

Ha l'origine nel centro del Sole, il piano fondamentale di chiama *piano dell'eclittica* che è il piano dell'orbita terrestre attorno al Sole, e asse  $\mathbf{Z}$  perpendicolare all'eclittica con verso positivo verso l'emisfero che contiene Polaris. L'asse  $\mathbf{X}$  è definito dall'intersezione del piano dell'eclittica con il piano equatoriale durante l'equinozio di primavera, detto anche *equinozio Vernale*, ed il suo verso è positivo in direzione della costellazione dell'Ariete. Infine, l'asse  $\mathbf{Y}$  completa la terna destrorsa. Il sistema di riferimento eliocentrico non è inerziale, a causa dei movimenti di precessione e di nutazione, tuttavia, questi possono essere trascurati per missioni con breve durata.

### Sistema di riferimento geocentrico



**Figura 4.3:** Sistema Geocentrico [22]

Ha come origine il centro della Terra, il piano fondamentale è il *piano equatoriale*, identificato dagli assi  $\mathbf{I} - \mathbf{J}$ , e il terzo asse  $\mathbf{K}$  è perpendicolare al piano equatoriale con direzione positiva verso l'emisfero che contiene Polaris. L'asse  $\mathbf{I}$  è sempre parallelo all'asse  $\mathbf{X}$  del sistema di riferimento eliocentrico, mentre  $\mathbf{J}$  completa la terna destrorsa. Questo sistema di riferimento è chiamato anche *Earth-Centred Inertial system, ECI*, e non segue il moto di rotazione della Terra attorno al suo asse, rimanendo fermo rispetto a questa, mentre segue il moto di rotazione attorno al Sole. Il sistema di coordinate geocentrico-equatoriale è utile per descrivere l'orbita di oggetti vicini alla Terra.

Sistema di riferimento perifocale

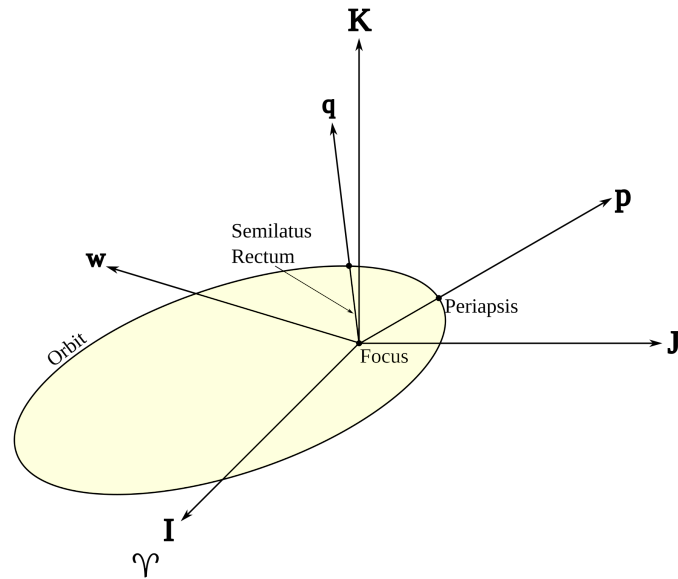


Figura 4.4: Sistema perifocale [23]

Questo sistema di coordinate è utilizzato per studiare il moto generico di un satellite o di un corpo celeste lungo la sua orbita. Ha origine nel centro della Terra, piano fondamentale identificato dagli assi  $\mathbf{p}$  e  $\mathbf{q}$ , dove  $\mathbf{p}$  è l'asse che punta verso il perigeo dell'orbita e  $\mathbf{q}$  forma un angolo di  $90\text{ deg}$  rispetto a  $\mathbf{p}$  e punta nella direzione del moto del satellite, identificando il *semilato retto p* dell'orbita. Infine, il terzo asse  $\mathbf{w}$  che chiude la terna destrorsa è perpendicolare al piano dell'orbita.

### 4.3 Elementi orbitali classici

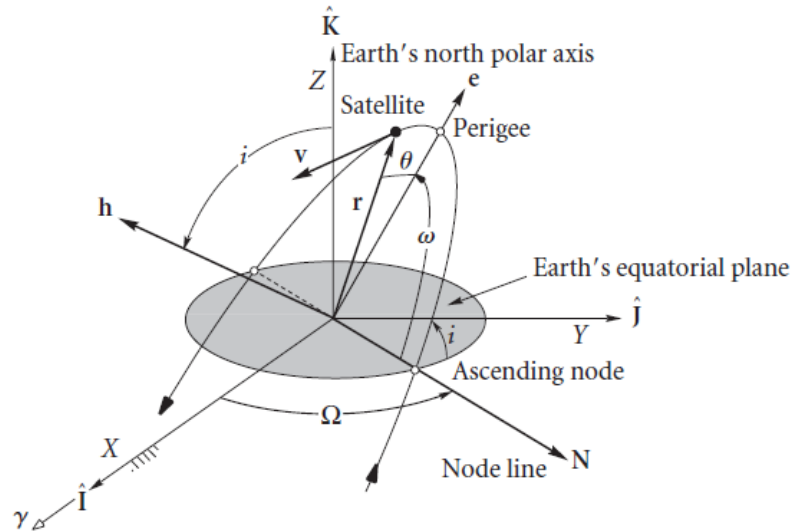


Figura 4.5: Elementi orbitali classici, [24]

Gli elementi orbitali classici sono un set di sei parametri utilizzati comunemente per poter individuare in maniera univoca la traiettoria o l'orbita di un corpo:

- **eccentricità**  $e$ : l'eccentricità dell'orbita descrive la sua forma;
- **semiasse maggiore**  $a$ : il semiasse maggiore definisce la grandezza dell'orbita;
- **inclinazione**  $i$ : è l'angolo tra l'asse  $\mathbf{K}$  e il vettore *momento angolare*  $h$ , e descrive di quanto è inclinato il piano orbitale rispetto al piano fondamentale;
- **longitudine del nodo ascendente o RAAN**  $\Omega$ : è l'angolo misurato sul piano fondamentale, dall'asse  $\mathbf{I}$  verso est, fino al nodo ascendente, ovvero fino alla linea dei nodi;
- **argomento del periastro**  $\omega$ : è l'angolo misurato sul piano orbitale, che va dal nodo ascendente al periastro, nel verso del moto del satellite;
- **anomalia vera**  $\nu$ : è l'angolo misurato sul piano orbitale che va dal periastro alla posizione del satellite sull'orbita, in un tempo specifico detto *epoca*  $t_0$ .

Di questi parametri, i primi due definiscono la forma e la dimensione dell'orbita, inclinazione e RAAN definiscono il piano orbitale,  $\omega$  definisce l'orientazione dell'orbita, ed infine l'anomalia vera descrive la posizione del satellite lungo l'orbita ed è l'unico parametro a variare nel tempo.

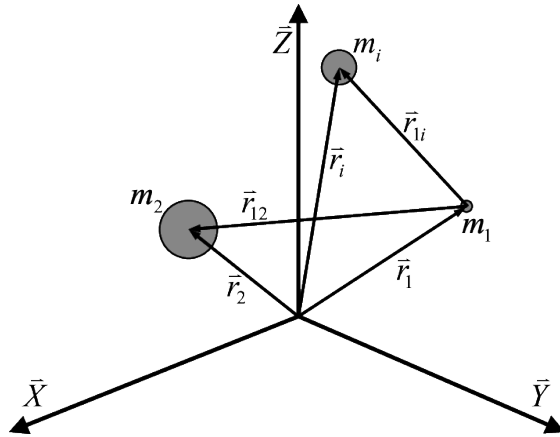
## 4.4 Legge di gravitazione universale, problema degli N corpi

La *Legge di gravitazione universale*, enunciata da Isaac Newton nel suo libro *Philosophiæ Naturalis Principia Mathematica* del 1687, spiega l'interazione tra due corpi celesti posti ad una certa distanza tra loro, in presenza della sola *forza di gravità*:

$$\vec{F}_g = -G \frac{Mm}{r^2} \frac{\vec{r}}{r} \quad (4.1)$$

Nell'universo, due corpi si attraggono con una forza direttamente proporzionale al prodotto delle loro masse e inversamente proporzionale al quadrato della loro distanza. Dove  $G = 6.673 * 10^{-11} \frac{m^3}{kg s^2}$  è la *costante di gravitazione universale*,  $M$  e  $m$  sono le masse dei due corpi e  $r$  è la loro distanza.

Attraverso l'utilizzo della legge di gravitazione universale, si è potuto formulare il cosiddetto *Problema degli N corpi*, utilizzato nella meccanica celeste per conoscere il moto di un oggetto, quale può essere un satellite o un asteroide di massa  $m_i$ , quando questo si trova in presenza di altri N corpi di masse  $m_1, m_2, \dots, m_N$ , in un sistema di riferimento inerziale:



**Figura 4.6:** Problema degli N-corpi [25]

$$\vec{F} = \vec{F}^* - Gm_i \sum_{j=1, j \neq i}^N \frac{m_j}{r_{ij}^3} \vec{r}_{ij} \quad (4.2)$$

Dove  $\vec{F}^*$  rappresenta la risultante di tutte le forze che non sono gravitazionali che agiscono sui corpi, dati dalla loro non perfetta simmetria sferica, dalla spinta prodotta dai satelliti come la resistenza atmosferica, la pressione solare ed altre

forze che agiscono sul satellite.  $\vec{r}_{ij}$  rappresenta la distanza tra due masse generiche  $\vec{r}_{ij} = \vec{r}_i - \vec{r}_j$ .

Poichè per la seconda legge della dinamica si può esprimere la forza agente sulla massa i-esima come:

$$\vec{F} = m_i \ddot{\vec{r}}_i \quad (4.3)$$

Andando a trascurare la risultante delle forze non gravitazionali agenti sul corpo, si può esprimere l'equazione del moto del corpo i-esimo nel problema degli N-corpi come:

$$\ddot{\vec{r}}_i = -G \sum_{j=1, j \neq i}^N \frac{m_j}{r_{ij}^3} \vec{r}_{ij} \quad (4.4)$$

## 4.5 Problema dei due corpi ed equazione del moto

Dal problema degli N-corpi, se si considerano solo due masse  $m_1$  ed  $m_2$ , con  $m_1 > m_2$ , e si fa l'ipotesi che queste due masse siano perfettamente sferiche, e che non agisca su di esse nessun'altra forza se non quella di gravità ( $\vec{F}^* = 0$ ), come rappresentato in figura 4.7: Le forze agenti sui due corpi saranno:

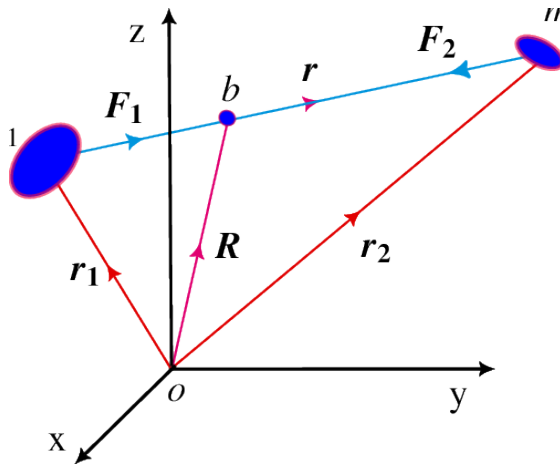


Figura 4.7: Problema dei due corpi [26]

$$\vec{F}_1 = G \frac{m_1 m_2}{r^3} \vec{r} \quad (4.5)$$

$$\vec{F}_2 = -G \frac{m_1 m_2}{r^3} \vec{r} \quad (4.6)$$

essendo  $\vec{r} = \vec{r}_2 - \vec{r}_1$  la posizione relativa tra le due masse. Di conseguenza, esplicitando la forza tramite la seconda legge della dinamica e sottraendo la prima

equazione alla seconda, si ricava l'equazione del moto:

$$\ddot{\vec{r}} = -G \frac{m_1 + m_2}{r^3} \vec{r} \quad (4.7)$$

Con  $\ddot{\vec{r}} = \ddot{\vec{r}}_2 - \ddot{\vec{r}}_1$  accelerazione relativa.

Poichè solitamente si vuole studiare il moto di un corpo piccolo  $m$  quale può essere il satellite preso in considerazione per questo lavoro di tesi, rispetto ad uno con massa molto maggiore  $M$ , quale può essere un asteroide o un altro corpo celeste, si può fare la seguente considerazione:

$$M + m \approx M$$

Si può definire *parametro gravitazionale*:

$$\mu = G(M + m) \approx GM \quad (4.8)$$

Ed infine si può esprimere l'*equazione del moto generalizzata*:

$$\ddot{\vec{r}} + \frac{\mu}{r^3} \vec{r} = 0 \quad (4.9)$$



## 4.6 Equazione della Traiettoria

L'equazione del moto generalizzata 4.9 è un'equazione differenziale relativa al moto di due corpi e la sua risoluzione porta all'espressione generica dell'*equazione della traiettoria*, di cui si omette la dimostrazione matematica poichè esula dallo scopo di questa tesi:

$$r = \frac{\frac{h^2}{\mu}}{1 + e \cos(\nu)} \quad (4.10)$$

questa equazione è espressa in coordinate polari ed è confrontabile con l'equazione generica di una *conica*, ossia una curva piana che rappresenta il luogo dei punti ottenibili intersecando la superficie di un cono circolare con un piano:

$$r = \frac{p}{1 + e \cos(\nu)} \quad (4.11)$$

Nell'equazione generica della traiettoria 4.10:

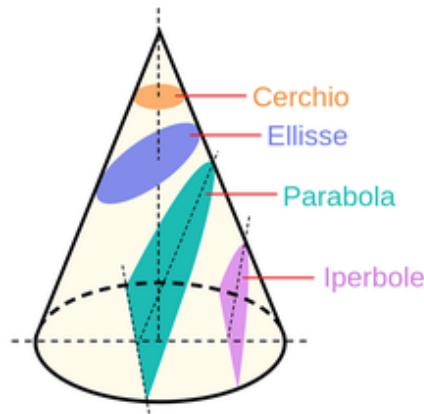


Figura 4.8: Sezioni di conica [27]

- $h$  è il modulo del *momento angolare specifico*, definito come

$$\vec{h} = \vec{r} \times \vec{v}$$

che è un vettore costante lungo l'orbita e perpendicolare al piano che contiene  $\vec{r}$  e  $\vec{v}$ , implicando che il moto del satellite sia su un piano detto *piano orbitale*;

- $\mu$  è la costante gravitazionale;
- $e$  è l'eccentricità dell'orbita;
- $\nu$  è l'anomalia vera.

Confrontando con l'equazione di una generica conica, si definisce:

$$p = \frac{h^2}{\mu} = a(1 - e^2)$$

il *semilatus rectum*. Si nota quindi, che la traiettoria del satellite è rappresentata da una conica, che può assumere forma diversa a seconda della sua eccentricità, ed anche una diversa *Energia meccanica specifica* che dipende dal semiasse:

$$E = \frac{v^2}{2} - \frac{\mu}{r} = -\frac{\mu}{2a} \quad (4.12)$$

L'equazione dell'energia meccanica si ottiene osservando che il campo gravitazionale è un campo conservativo.

- **Circonferenza:**  $e = 0$ , semiasse pari al raggio della circonferenza  $a = r > 0$ , energia  $E < 0$  ed è un'orbita chiusa;
- **Ellisse:**  $0 < e < 1$ , semiasse  $a > 0$ , energia  $E < 0$  ed è un'orbita chiusa;
- **Parabola:**  $e = 1$ , semiasse  $a \rightarrow \infty$ , energia  $E = 0$  ed è un'orbita aperta;
- **Iperbole:**  $e > 1$ , semiasse  $a < 0$ , energia  $E > 0$  ed è un'orbita aperta.

#### 4.6.1 Velocità caratteristiche

Dalla conservazione dell'energia meccanica, si possono ricavare tre velocità caratteristiche:

##### Velocità circolare

è la velocità necessaria a mantenere un satellite su un'orbita circolare

$$\begin{aligned} \frac{v^2}{2} - \frac{\mu}{r} &= -\frac{\mu}{2r} \\ v_c &= \sqrt{\frac{\mu}{r}} \end{aligned} \quad (4.13)$$

Tanto più l'orbita circolare è ampia, meno sarà la velocità necessaria a mantenere lo spacecraft su questa.

##### Velocità di escape

è la velocità necessaria a vincere la forza di gravità di un oggetto celeste o di un pianeta, ed è la velocità minima per immettere un satellite su un'orbita aperta ( $a \rightarrow \infty$ ,  $v_\infty \rightarrow 0$ )

$$\frac{v_e^2}{2} - \frac{\mu}{r} = \frac{v_\infty^2}{2} - \frac{\mu}{r_\infty} = 0$$

$$v_e = \sqrt{\frac{2\mu}{r}} = \sqrt{2}v_c \quad (4.14)$$

### Velocità di eccesso iperbolico

se il satellite, una volta eseguita la manovra di escape dal corpo principale, ha ancora della velocità residua, questa si chiama velocità di eccesso iperbolico ( $r \rightarrow \infty$ )

$$-\frac{\mu}{2a} = \frac{v^2}{2} - \frac{\mu}{r} = \frac{v_\infty^2}{2}$$

$$v_\infty = \sqrt{-\frac{\mu}{a}} \quad (4.15)$$

dove  $a < 0$  poichè la traiettoria iperbolica.

## 4.7 Missioni interplanetarie: metodo delle Patched Conics

Per l'ottimizzazione di traiettorie verso i Near Earth Asteroids presi in considerazione in questa tesi, è utile spiegare in breve come si suddivide una missione interplanetaria. Studiare la traiettoria di una missione interplanetaria richiede delle integrazioni numeriche molto complesse delle equazioni del moto che tengano conto di tutti gli effetti perturbativi che agiscono sullo spacecraft, per cui è stato inventato il metodo delle *Patched Conics* per poter ricondurre ogni step della missione ad un problema dei due corpi di più immediata risoluzione. Questo rappresenta una prima approssimazione della missione, particolarmente utile per la sua analisi preliminare, poichè restituisce una prima stima dei costi di missione in termini di  $\Delta V$  e di tempo di missione.

Deve essere introdotto il concetto di *sfera di influenza*, (*SOI*) di un corpo celeste: è la regione sferica di spazio attorno ad un corpo celeste, all'interno della quale la sua attrazione gravitazionale è predominante rispetto a quella di tutti gli altri corpi celesti circostanti. Il raggio della SOI di un pianeta varia a seconda della sua distanza dal Sole  $R$ , e dipende dal rapporto tra le masse del corpo celeste  $m_p$  e del Sole  $m_s$ , secondo la legge [28]:

$$r_{SOI} = R \left( \frac{m_p}{m_s} \right)^{\frac{2}{5}} \quad (4.16)$$

In particolar modo, tramite il metodo delle *Patched Conics*, una missione interplanetaria può essere suddivisa in tre fasi principali:

- **Fase Planetocentrica di partenza:** si considera che il satellite debba eseguire una manovra di escape iperbolica dalla sfera di influenza del pianeta di partenza;

- **Fase Eliocentrica:** è la fase principale di una missione interplanetaria, e prevede una traiettoria ellittica, in cui il satellite risente della sola sfera di influenza del Sole;
- **Fase Planetocentrica di arrivo:** il satellite si trova su una traiettoria iperbolica di arrivo sul corpo celeste finale.

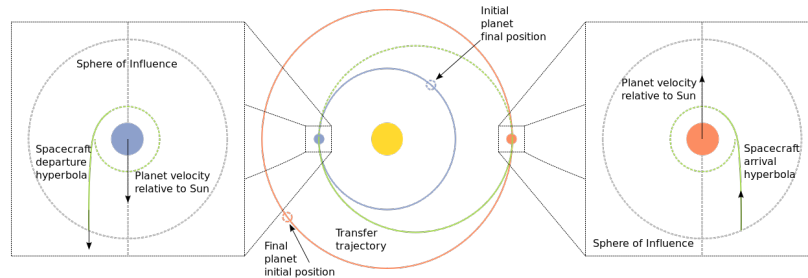


Figura 4.9: Missione interplanetaria [29]

Quando il satellite si trova in ognuna di queste tre fasi, poichè risente della sola sfera di influenza del corpo celeste maggiore, le traiettorie che assume sono Kepleroiane, cioè delle coniche. Per garantire la continuità tra le varie coniche, alla loro interfaccia dovranno essere raccordate in termini di velocità e posizione.

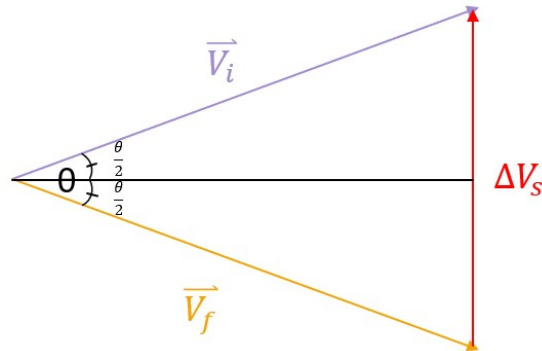
Nel lavoro di ottimizzazione delle traiettorie verso i NEAs, si è presa in considerazione la sola fase eliocentrica, assumendo che il satellite in partenza si trovi già su un'orbita di parcheggio attorno alla Terra e che quindi sia già stata eseguita un'escape. Con la stessa logica, non si è affrontata nemmeno la discesa sull'asteroide di arrivo.

## 4.8 Manovre orbitali

Le *manovre orbitali* sono delle operazioni eseguite dal sistema propulsivo di uno spacecraft per potergli permettere di cambiare i propri parametri orbitali al fine di variare o correggere la propria traiettoria. Dal momento che si è andata ad analizzare solamente la fase centrale di una missione interplanetaria, come espresso precedentemente, in questa sezione si vogliono descrivere solamente le manovre utili in questa fase, quali:

- **manovre ad un impulso:** cambio di piano, aggiustamento degli apside e rotazione della linea degli apside;
- **manovre a due impulsi:** trasferta tra orbite circolari e complanari e trasferta di Hohmann

### 4.8.1 Cambio di piano semplice



**Figura 4.10:** Triangolo di velocità per un cambio di piano [30]

Questa manovra è utilizzata per poter variare solamente l'inclinazione del piano orbitale:

$$\Delta V = 2V \sin \frac{\Delta\psi}{2}$$

dove  $\psi$  è l'angolo di heading, che è legato all'inclinazione  $i$  e alla latitudine  $\delta$  dell'orbita:

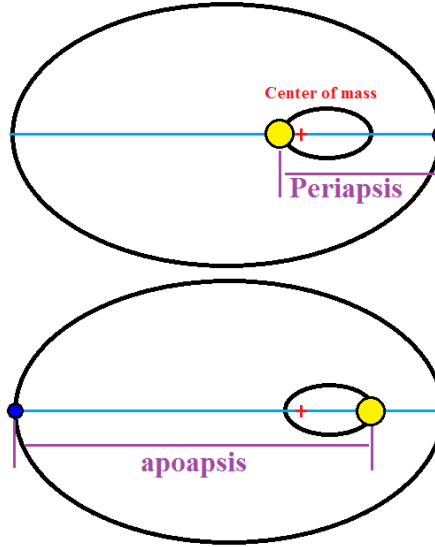
$$\cos i = \cos \delta \cos \psi$$

si dimostra che il costo della manovra è minimo se questa viene eseguita in uno dei due nodi ( $\delta = 0$ ), in quanto in questo caso il cambio di inclinazione non prevede anche una rotazione  $\Delta\Omega$  e il  $\Delta\psi = \Delta i$ :

$$\Delta V = 2V \sin \frac{\Delta i}{2} \quad (4.17)$$

Il cambio di piano è una manovra generalmente costosa, ed il costo è tanto maggiore quanto più grande è la velocità del satellite, per cui generalmente si preferisce combinarla con altre manovre come potrebbe essere una manovra biellittica.

## 4.8.2 Aggiustamento degli apsi



**Figura 4.11:** Aggiustamento degli apsi [31]

Questa manovra serve per incrementare la lunghezza del semiasse dell'orbita, e l'impulso  $\Delta V$  deve essere dato all'apside opposto rispetto a quello che si vuole incrementare:

Ad esempio, per incrementare l'apogeo di  $\Delta z$ , si da un impulso al perigeo, per cui:

$$\begin{cases} r_{P2} = r_{P1} = r_P \\ r_{A2} = r_{A1} + \Delta z \end{cases}$$

$$\begin{cases} 2a_1 = r_P + r_{A1} \\ 2a_2 = r_P + r_{A2} = r_P + r_{A1} + \Delta z \end{cases}$$

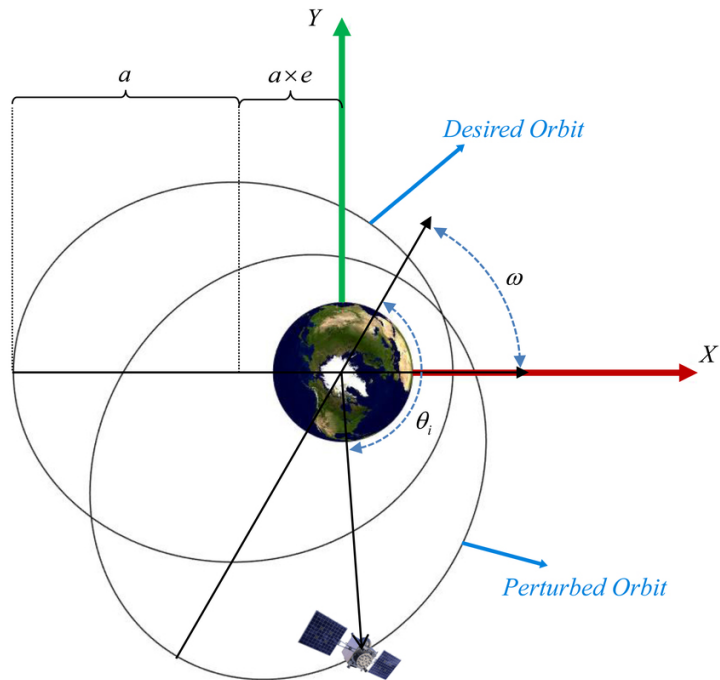
Dalla conservazione dell'energia meccanica:

$$\begin{cases} E_{g1} = \frac{V_1^2}{2} - \frac{\mu}{r_P} = -\frac{\mu}{2a_1} \rightarrow V_1 = \sqrt{2 \left( \frac{\mu}{r_P} - \frac{\mu}{r_P - r_{A1}} \right)} \\ E_{g2} = \frac{V_2^2}{2} - \frac{\mu}{r_P} = -\frac{\mu}{2a_2} \rightarrow V_2 = \sqrt{2 \left( \frac{\mu}{r_P} - \frac{\mu}{r_P - r_{A2}} \right)} \end{cases}$$

Si deriva il  $\Delta V$ :

$$\Delta V = V_2 - V_1 = \sqrt{2 \left( \frac{\mu}{r_P} - \frac{\mu}{r_P - r_{A2}} \right)} - \sqrt{2 \left( \frac{\mu}{r_P} - \frac{\mu}{r_P - r_{A1}} \right)} \quad (4.18)$$

### 4.8.3 Rotazione della linea degli apsi



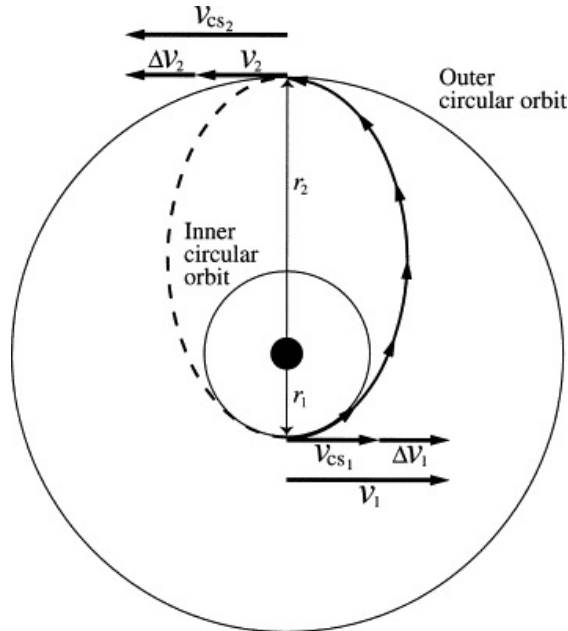
**Figura 4.12:** Rotazione della linea degli apsi [32]

Questa manovra è volta a ruotare di  $\Delta\omega$  la linea degli apsi, senza alterare la geometria e la dimensione dell'orbita e di conseguenza il suo contenuto energetico. In questo caso, l'impulso  $\Delta V$  va dato in uno dei due punti in cui la bisettrice di  $\Delta\omega$  interseca le orbite iniziale e finale, con velocità tangente all'orbita finale.

Il costo della manovra è pari a:

$$\Delta V = 2\frac{\mu}{h}e \left| \sin\left(\frac{\Delta\omega}{2}\right) \right| \quad (4.19)$$

#### 4.8.4 Trasferta tra orbite circolari e complanari e trasferta di Hohmann



**Figura 4.13:** Trasferta di Hohmann [33]

In generale, per passare da un'orbita di raggio  $r_1$  ed una di raggio  $r_2$ , circolari e complanari, con  $r_2 > r_1$ , si usa come orbita di trasferimento un'orbita ellittica generica che intersechi entrambe le orbite di partenza e di arrivo. Per cui, devono essere soddisfatte contemporaneamente queste due condizioni per i raggi di periastro e apoastro:

$$\begin{cases} r_p = \frac{p_t}{1+e_t} \leq r_1 \\ r_a = \frac{p_t}{1-e_t} \geq r_2 \end{cases} \quad (4.20)$$

Nel caso della trasferta di Hohmann, come anche rappresentato in figura 4.13, si nota che l'orbita di trasferimento è un'orbita ellittica tangente alle orbite di partenza ed arrivo, per cui vale l'uguaglianza:

$$\begin{cases} r_p = r_1 \\ r_a = r_2 \end{cases} \quad (4.21)$$

Da cui, si ricava il semiasse maggiore:

$$a_H = \frac{r_1 + r_2}{2}$$



E dalla conservazione dell'energia, si ricavano le velocità:

$$\begin{cases} E_H = \frac{V_1^2}{2} - \frac{\mu}{r_1} = -\frac{\mu}{r_1+r_2} \rightarrow V_1 = \sqrt{2\mu \left( \frac{1}{r_1} - \frac{1}{r_1+r_2} \right)} \\ E_H = \frac{V_2^2}{2} - \frac{\mu}{r_2} = -\frac{\mu}{r_1+r_2} \rightarrow V_2 = \sqrt{2\mu \left( \frac{1}{r_2} - \frac{1}{r_1+r_2} \right)} \end{cases}$$

Ed essemndo le velocità circolari delle due orbite:

$$\begin{cases} V_{c1} = \sqrt{\frac{\mu}{r_1}} \\ V_{c2} = \sqrt{\frac{\mu}{r_2}} \end{cases}$$

Allora:

$$\begin{cases} \Delta V_1 = V_1 - V_{c1} = V_{c1} \left( \sqrt{\frac{2r_2}{r_1+r_2}} - 1 \right) \\ \Delta V_2 = V_2 - V_{c2} = V_{c2} \left( 1 - \sqrt{\frac{2r_2}{r_1+r_2}} \right) \end{cases} \quad (4.22)$$

Il costo totale per la manovra è:

$$\Delta V = \Delta V_1 + \Delta V_2 \quad (4.23)$$

Nella trasferta di Hohmann, il primo impulso  $\Delta V_1$  serve ad alzare l'apoastro dell'orbita, ed il secondo impulso  $\Delta V_2$  viene dato per circularizzare l'orbita finale, ed entrambi sono dati parallelamente alla valocità della traiettoria. In termini di costi di propellente è la trasferta che permette di avere il minore  $\Delta V$  totale.

Per quanto riguarda, invece il tempo di manovra, questo è pari alla metà del periodo per percorrere l'orbita ellittica:

$$\Delta t_H = \frac{T_E}{2} = \pi \sqrt{\frac{a_t^3}{\mu}} \quad (4.24)$$

## Capitolo 5

# Teoria del controllo ottimale

L'ottimizzazione di una traiettoria spaziale consiste nel voler ricercare una legge di controllo che vada a massimizzare o minimizzare un certo indice di prestazione. Tra questi, ad esempio, si prende in esame la massa del satellite per poterla massimizzare alla fine della missione, in quanto questo comporta il consumo minimo di propellente, e quindi anche la possibilità di poter affrontare tale missione avendo a bordo un carico utile maggiore.

Questo tipo di problemi ha risoluzione analitica per scarsi casi di trasferte orbitali, per cui è necessario adottare delle risoluzioni numeriche. In particolar modo, tra i vari metodi numerici esistenti, per lo svolgimento di questo lavoro di tesi si è adottato l'utilizzo del *metodo indiretto* che si basa sulla *Teoria del controllo ottimale*. Questo metodo si basa sul principio del calcolo variazionale, ed i controlli utilizzati vengono determinati grazie alla soluzione di un *problema differenziale ai limiti*.

Tra le caratteristiche dei metodi indiretti si annoverano: un'elevata precisione numerica con tempi di calcolo contenuti ed un limitato numero di parametri. Tuttavia, è anche un metodo che presenta una scarsa robustezza e difficoltà di convergenza rispetto ai metodi diretti, che invece hanno il vantaggio di riuscire a trovare in ogni caso una soluzione almeno sub-ottimale. [4]

Un sistema generico è descritto da un vettore di variabili di stato  $\mathbf{x}$ , dal vettore di controlli  $\mathbf{u}$  e dalla variabile tempo  $t$ , che è indipendente. Le equazioni differenziali che descrivono l'evoluzione temporale del sistema tra gli istanti iniziale e finale (detti anche *contorni esterni*) sono del tipo:

$$\frac{d\mathbf{x}}{dt} = \mathbf{f}(\mathbf{x}, \mathbf{u}, t) \quad (5.1)$$

Per poter analizzare la traiettoria, questa viene suddivisa in  $n$  sotto intervalli in cui le variabili sono continue, detti *archi*. L'intervallo  $j$ -esimo ha estremi  $t_{(j-1)+}$  e  $t_{j-}$ , dove le variabili assumono i valori  $x_{(j-1)+}$  e  $x_{j-}$  dove i segni  $+$  e  $-$  indicano i

valori assunti immediatamente prima ed immediatamente dopo il punto considerato. Questi punti di giunzione tra i vari archi sono detti anche *contorni interni*, e permettono di individuare delle discontinuità delle variabili ed anche eventualmente del tempo.

Sono imposte delle condizioni al contorno di tipo misto, cioè che coinvolgono i valori delle variabili indipendenti e del tempo sia ai contorni esterni che a quelli interni, e sono in genere non lineari:

$$\chi(\mathbf{x}_{(j-1)+}, \mathbf{x}_{j-}, t_{(j-1)+}, t_{j-}) = 0 \quad j = 1, \dots, n \quad (5.2)$$

Il problema di ottimizzazione si pone l'obiettivo di cercare i valori di massimo o di minimo di un funzionale  $J$ , che si esprime nella sua forma completa:

$$J = \phi(\mathbf{x}_{(j-1)+}, \mathbf{x}_{j-}, t_{(j-1)+}, t_{j-}) + \sum_j \int_{t_{(j-1)+}}^{t_{j-}} \Phi(\mathbf{x}(\mathbf{t}), \mathbf{u}(\mathbf{t}), t) dt \quad j = 1, \dots, n \quad (5.3)$$

Dove il primo termine del funzionale è il contributo di *Meyer*, in cui la funzione  $\phi$  dipende solo dai valori assunti ai contorni esterni, mentre il secondo termine è il contributo di *Lagrange*, che in cui si ricercano i valori assunti in ogni punto durante tutto il percorso. A volte, grazie all'introduzione di opportune variabili ausiliarie, ci si può ricondurre alla *formulazione di Lagrange*, caso  $\phi = 0$ , oppure alla *formulazione di Mayer*, nel caso in cui  $\Phi = 0$ .

Ai fini della risoluzione del sistema, è utile riscrivere il funzionale introducendo i moltiplicatori di Lagrange:

- $\boldsymbol{\mu}$  sono costanti associate alle condizioni al contorno e non sono funzioni del tempo;
- $\boldsymbol{\lambda}$  sono variabili associate alle equazioni di stato, essendo dipendenti dal tempo sono delle vere e proprie variabili aggiuntive.

In questo modo, si riscrive:

$$J^* = \phi + \boldsymbol{\mu}^T \boldsymbol{\chi} + \sum_j \int_{t_{(j-1)+}}^{t_{j-}} (\Phi + \boldsymbol{\lambda}^T (\mathbf{f} - \dot{\mathbf{x}})) \quad j = 1, \dots, n \quad (5.4)$$

I due funzionali  $J$  e  $J^*$  sono dipendenti dal tempo  $t$ , dalle variabili di stato  $\mathbf{x}$  e dalle loro derivate  $\dot{\mathbf{x}}$ , e dai controlli  $\mathbf{u}$ . Se sono rispettate sia le equazioni di stato, che le condizioni al contorno, vale che  $J = J^*$ .

Si definisce una funzione detta *Hamiltoniana*:

$$H = \Phi + \boldsymbol{\lambda}^T \mathbf{f} \quad (5.5)$$

Si va ad integrare per parti la 5.4 per far scomparire la dipendenza da  $\dot{\mathbf{x}}$ , e poi a differenziare, introducendo l'Hamiltoniana:

$$\begin{aligned}
 \delta J^* = & \left( -H_{(j-1)+} + \frac{\partial \phi}{\partial t_{(j-1)+}} + \boldsymbol{\mu}^T \frac{\partial \boldsymbol{\chi}}{\partial t_{(j-1)+}} \right) \\
 & + \left( H_{j+} + \frac{\partial \phi}{\partial t_{j-}} + \boldsymbol{\mu}^T \frac{\partial \boldsymbol{\chi}}{\partial t_{j-}} \right) \delta t_{j-} \\
 & + \left( -\boldsymbol{\lambda}_{(j-1)+}^T + \frac{\partial \phi}{\partial \mathbf{x}_{(j-1)+}} + \boldsymbol{\mu}^T \left[ \frac{\partial \boldsymbol{\chi}}{\partial \mathbf{x}_{(j-1)+}} \right] \right) \delta \mathbf{x}_{(j-1)+} \\
 & + \left( -\boldsymbol{\lambda}_{j-}^T + \frac{\partial \phi}{\partial \mathbf{x}_{j-}} + \boldsymbol{\mu}^T \left[ \frac{\partial \boldsymbol{\chi}}{\partial \mathbf{x}_{j-}} \right] \right) \delta \mathbf{x}_{j-} \\
 & + \sum_j \int_{t_{(j-1)+}}^{t_{j-}} \left( \left( \frac{\partial H}{\partial \mathbf{x}} + \boldsymbol{\lambda}^T \right) + \frac{\partial H}{\partial \mathbf{u}} \delta \mathbf{u} \right) dt \quad j = 1, \dots, n
 \end{aligned} \tag{5.6}$$

La condizione necessaria di ottimo implica la stazionarietà del funzionale, ossia la condizione  $\delta J^* = 0$  per qualsiasi scelta di  $\delta \mathbf{x}$ ,  $\delta \mathbf{u}$ ,  $\delta \mathbf{x}_{(j-1)+}$ ,  $\delta \mathbf{x}_{j-}$ ,  $\delta t_{(j-1)+}$ ,  $\delta t_{j-}$  compatibile con le equazioni differenziali e le condizioni al contorno. Scegliendo in maniera oculata le variabili e le costanti aggiunte, si riescono ad annullare contemporaneamente i coefficienti di tutte le variazioni presenti nella 5.6, in maniera che sia verificato  $\delta J^* = 0$ .

Quindi, si ottengono in questo modo le *Equazioni di Eulero-Lagrange*, per le variabili aggiunte, annullando i coefficienti di  $\delta \mathbf{x}$ :

$$\frac{d\boldsymbol{\lambda}}{dt} = - \left( \frac{\partial H}{\partial \mathbf{x}} \right)^T \tag{5.7}$$

e per i controlli, annullando i coefficienti di  $\delta \mathbf{u}$ :

$$\left( \frac{\partial H}{\partial \mathbf{u}} \right)^T = 0 \tag{5.8}$$

Le equazioni 5.7 sono dette *equazioni aggiunte* perchè riguardano le variabili aggiunte, mentre le 5.8 sono dette *equazioni di controllo*.

Si può notare che le leggi di controllo non dipendono dalla ricerca del massimo o del minimo di  $J$ . Se uno dei controlli è soggetto ad un vincolo, questo deve appartenere ad un certo *dominio di ammissibilità* (come può avvenire per esempio sulla spinta

fornita dal propulsore, che può variare da un valore minimo 0 ad uno massimo ammissibile  $T_{max}$ ). Si esprime allora il *Principio di Pontryagin*, che dice che in caso di un vincolo, il valore ottimale del controllo in ogni punto della traiettoria, è quello che rende massimo il valore dell'Hamiltoniano 5.5, all'interno del dominio di ammissibilità. Per cui, esistono due alternative:

- Il valore ottimale del controllo è fornito dall'equazione 5.8 se rientra nel dominio di ammissibilità e quindi non c'è vincolo in quel punto;
- Il valore ottimale del controllo è agli estremi del dominio, se il valore fornito dall'equazione 5.8 non rientra nel dominio di ammissibilità.

Riferendosi al caso particolare che si presenta qualora l'Hamiltoniana è lineare rispetto a uno dei controlli soggetto a vincoli, poichè il controllo non compare esplicitamente in 5.8 e quindi non può essere determinato, si hanno altre due possibilità:

- Se in 5.5 il coefficiente del controllo è non nullo, allora  $H$  è massimizzato per il valore massimo di controllo se il coefficiente è positivo, ed è minimizzato se è negativo, in accordo con il Principio di Pontryagin;
- Se invece in 5.5 il coefficiente di controllo è nullo durante un arco, chiamato in questo caso *arco singolare*, allora per poter determinare il controllo ottimale è necessario imporre a zero tutte le derivate successive del coefficiente rispetto al tempo, finchè in una di esse non compare esplicitamente il controllo. Quando si raggiunge quest'ultima derivata, la si deve annullare per trovare il controllo ottimale.

Per riscrivere le condizioni al contorno attraverso l'utilizzo dei moltiplicatori di lagrange, riferendosi al  $j$ -esimo contorno, si considera come estremo finale del sotto intervallo  $(j-1)$ -esimo, oppure come estremo iniziale del sotto intervallo  $j$ -esimo. Si pongono uguali a zero i coefficienti di  $\delta \mathbf{x}_{j-}$ ,  $\delta \mathbf{x}_{j+}$ ,  $\delta t_{j-}$ ,  $\delta t_{j+}$ , nell'equazione 5.6 e si ottengono:

$$-\lambda_{j-}^T + \frac{\partial \phi}{\partial \mathbf{x}_{j-}} + \boldsymbol{\mu}^T \left[ \frac{\partial \chi}{\partial \mathbf{x}_{j-}} \right] = 0 \quad j = 1, \dots, n \quad (5.9)$$

$$-\lambda_{j+}^T + \frac{\partial \phi}{\partial \mathbf{x}_{j+}} + \boldsymbol{\mu}^T \left[ \frac{\partial \chi}{\partial \mathbf{x}_{j+}} \right] = 0 \quad j = 0, \dots, n-1 \quad (5.10)$$

$$H_{j-} + \frac{\partial \phi}{\partial t_{j-}} + \boldsymbol{\mu}^T \left[ \frac{\partial \chi}{\partial t_{j-}} \right] = 0 \quad j = 1, \dots, n \quad (5.11)$$

$$-H_{j+} + \frac{\partial \phi}{\partial t_{j+}} + \boldsymbol{\mu}^T \left[ \frac{\partial \chi}{\partial t_{j+}} \right] = 0 \quad j = 0, \dots, n-1 \quad (5.12)$$

Dove i pedici  $j_-$ ,  $j_+$  indicano i momenti subito prima e subito dopo il punto  $j$ . Le equazioni 5.9 e 5.11 non hanno significato all'inizio della traiettoria ( $j = 0$ ), mentre le equazioni 5.10 e 5.12 non hanno significato al termine di essa ( $j = n$ ).

Se da queste equazioni si vanno ad eliminare le costanti aggiunte  $\mu$ , si possono riscrivere le condizioni al contorno di ottimo nel seguente modo:

$$\sigma((\mathbf{x}_{(j-1)+}, \mathbf{x}_{j-}, \boldsymbol{\lambda}_{(j-1)+}, \boldsymbol{\lambda}_{j-}, t_{(j-1)+}, t_{j-})) = 0 \quad (5.13)$$

Il problema di ottimo quindi, si riduce ad un sistema di equazioni differenziali dati dalle equazioni 5.1, 5.2, 5.7 e 5.13.

## 5.1 Problema differenziale ai limiti

La teoria del controllo ottimale, prevede l'utilizzo di un nuovo sistema di equazioni differenziali ai limiti, detto *Boundary Values Problem, (BVP)*, dal quale si vuole ricavare numericamente quali valori iniziali consentono di soddisfare tutte le condizioni al contorno, sia quelle imposte, sia quelle di ottimo. Il problema di ricerca dell'ottimo si riconduce ad un problema differenziale ai limiti, poichè alcuni valori delle variabili aggiunte e di quelle di stato sono incogniti. Le equazioni differenziali che caratterizzano il sistema sono 5.1 e la 5.7, mentre i controlli si determinano dalle equazioni algebriche 5.8, ed infine le equazioni al contorno per chiudere il sistema sono la 5.2 e la 5.13. La soluzione di questo sistema permette di trovare le traiettorie ottimali, che vanno poi analizzate per constatare se rispettano i vincoli e le condizioni al contorno, ed infine vengono prese quelle che presentano i costi di missione minori (ad esempio minimo consumo di carburante e massima massa finale del satellite, considerando che la durata di una missione è solitamente vincolata come anche l' $I_{sp}$  del propulsore).

Il BVP ha diverse caratteristiche:

- l'intervallo di integrazione è diviso in vari archi, in cui le equazioni differenziali possono avere delle espressioni diverse;
- la durata di ogni sotto intervallo è solitamente incognita;
- le condizioni al contorno possono coinvolgere sia i valori delle variabili ai contorni interni che a quelli esterni, ed inoltre possono anche essere non lineari;
- le variabili possono avere delle discontinuità nei contorni interni ed il loro valore dopo la discontinuità può non essere noto.

La risoluzione del problema differenziale ai limiti rappresenta la difficoltà principale del metodo di ottimizzazione indiretta, per cui lo si vuole suddividere in successivi

problemi ai valori iniziali che vengono analizzati tramite il metodo di Newton e portati a convergenza.

Per poter semplificare l'integrazione, poichè la durata dei sotto intervalli è sconosciuta, si ricorre ad un cambio di variabile, introducendo  $\epsilon$  al posto della variabile indipendente tempo  $t$ , definita nel  $j$ -esimo intervallo come segue:

$$\epsilon = j - 1 + \frac{t - t_{j-1}}{t_j - t_{j-1}} = j - 1 + \frac{t - t_{j-1}}{\tau_j} \quad (5.14)$$

essendo  $\tau_j$  la durata incognita. Così facendo, sono stati fissati gli estremi di integrazione, che ora corrispondono ai valori interi e consecutivi della nuova variabile indipendente  $\epsilon$ .

Per definire il problema differenziale, si usa adesso un nuovo vettore contenente sia le variabili di stato che quelle aggiunte:

$$\mathbf{y}(t) = (\mathbf{x}(t), \boldsymbol{\lambda}(t)) \quad (5.15)$$

Quindi il problema differenziale si riformula:

$$\frac{d\mathbf{y}}{dt} = \mathbf{f}^*(\mathbf{y}, t) \quad (5.16)$$

Poichè in questa nuova formulazione del problema compaiono anche dei parametri costanti, come le durate dei sottointervalli o i valori delle variabili dopo una discontinuità, è utile definire un altro vettore che oltre alle variabili di stato ed aggiunte contiene anche le costanti  $\mathbf{c}$ :

$$\mathbf{z} = (\mathbf{y}, \mathbf{c})$$

Dopo aver fatto il cambio di variabile, il nuovo sistema di equazioni differenziali è:

$$\frac{d\mathbf{z}}{d\epsilon} = \mathbf{f}^*(\mathbf{z}, \epsilon) \quad (5.17)$$

Si esprimono le condizioni al contorno, anche in questo caso senza distinguere tra quelle imposte e quelle di ottimo, nella forma:

$$\boldsymbol{\Psi}(\mathbf{s}) = 0 \quad (5.18)$$

in cui  $\mathbf{s} = (\mathbf{y}_0, \mathbf{y}_1, \dots, \mathbf{y}_n, \mathbf{c})$  è un vettore che comprende i valori delle variabili a ogni contorno  $\epsilon = 0, \dots, n$ , ma anche i parametri incogniti. La risoluzione del sistema consiste in un procedimento iterativo per poter trovare alcuni parametri incogniti, in maniera che soddisfino le condizioni al contorno 5.18.

Il metodo prevede che nessuno dei valori iniziali sia noto, tuttavia si scelgono dei valori iniziali di tentativo per la prima iterazione, e l'iterazione successiva  $r$ -esima

inizierà l'integrazione delle 5.17 a partire dal valore trovato al termine di quella precedente  $\mathbf{p}^r$ . Si fissa cioè:

$$\mathbf{z}(0) = \mathbf{p}^r \quad (5.19)$$

e si va avanti nelle integrazioni successive lungo tutta la traiettoria, tenendo presente la possibile presenza di discontinuità nei contorni interni. In ogni contorno, infatti, si determina il valore delle variabili di stato e alla fine dell'integrazione si calcola l'errore sulle condizioni al contorno  $\Psi^r$  all' $r$ -esima iterazione, rispetto alle condizioni  $\Psi(\mathbf{s})$ . Questa procedura rappresenta il *metodo di shooting*, utilizzato per questa tesi. [4]

Una variazione  $\Delta \mathbf{p}$  sui valori iniziali, porta ad una conseguente variazione sull'errore sulle condizioni a contorno:

$$\Delta \Psi = \left[ \frac{\partial \Psi}{\partial \mathbf{p}} \right] \Delta \mathbf{p} \quad (5.20)$$

E poichè l'obiettivo è quello di annullare questo errore, ossia  $\Delta \Psi = -\Psi^r$ , si fa una correzione dei valori iniziali ad ogni iterazione nel seguente modo:

$$\Delta \mathbf{p} = \mathbf{p}^{r+1} - \mathbf{p}^r = \left[ \frac{\partial \Psi}{\partial \mathbf{p}} \right]^{-1} \Psi^r \quad (5.21)$$

si ripete questo procedimento finchè l'errore sulle condizioni al contorno non sia al di sotto della soglia imposta.

La matrice in 5.2 si può esprimere come prodotto di matrici, in cui la prima viene ottenuta derivando le condizioni a contorno rispetto al vettore  $\mathbf{s}$ :

$$\left[ \frac{\partial \Psi}{\partial \mathbf{p}} \right] = \left[ \frac{\partial \Psi}{\partial \mathbf{s}} \right] \left[ \frac{\partial \mathbf{s}}{\partial \mathbf{p}} \right] \quad (5.22)$$

mentre la seconda matrice che contiene i valori ai contorni  $\epsilon = 0, 1, \dots, n$  della matrice delle variabili rispetto ai valori iniziali:

$$\left[ \frac{\partial \mathbf{z}}{\partial \mathbf{p}} \right] = [\mathbf{g}(\epsilon)] \quad (5.23)$$

ed è ottenuta integrando le equazioni del sistema principale 5.17 rispetto ai valori iniziali:

$$[\dot{\mathbf{g}}] = \left[ \frac{\partial \mathbf{f}}{\partial \mathbf{p}} \right] = \left[ \frac{\partial \mathbf{f}}{\partial \mathbf{z}} \right] \left[ \frac{\partial \mathbf{z}}{\partial \mathbf{p}} \right] = \left[ \frac{\partial \mathbf{f}}{\partial \mathbf{z}} \right] [\mathbf{g}] \quad (5.24)$$

Avendo espresso lo Jacobiano dell'equazione del sistema principale 5.17, si è arrivati ad un sistema di equazioni differenziali omogeneo. Per ottenere i valori iniziali di questo nuovo sistema, si deriva l'equazione 5.19, ottenendo la matrice Identità:

$$[\mathbf{g}(0)] = \left[ \frac{\partial \mathbf{z}(0)}{\partial \mathbf{p}} \right] = [\mathbf{I}] \quad (5.25)$$



Con questo metodo, si può tener conto anche delle discontinuità, infatti se ne è presente una locale nel punto  $i$ , si possono aggiornare le variabili  $\mathbf{z}$  e  $\mathbf{g}$  grazie ad una relazione  $\mathbf{h}$  che le lega:

$$\mathbf{z}_{i+} = \mathbf{h}(\mathbf{z}_{i-}) \quad (5.26)$$

$$[\mathbf{g}_{i+}] = \left[ \frac{\partial \mathbf{h}}{\partial \mathbf{z}} \right] [\mathbf{g}_{i-}] \quad (5.27)$$

Attraverso questo meccanismo, si riesce a semplificare il problema, in questo modo all'interno del vettore  $\mathbf{s}$ , i valori  $\mathbf{y}_{i+}$ ,  $\mathbf{y}_{i-}$  sono legati tra loro grazie ad  $\mathbf{h}$  e al vettore delle costanti  $\mathbf{c}$ . Inoltre, se si conoscono alcuni dei valori iniziali delle variabili, il vettore  $\mathbf{p}$  si trova grazie alla semplice stima delle sole componenti incognite di  $\mathbf{z}(0)$ , mentre il vettore delle condizioni al contorno  $\Psi$  alle sole condizioni al contorno non esplicite al tempo iniziale. La matrice presente in 5.21 viene valutata numericamente dalla variazione delle  $\mathbf{p}$  e con l'intergrazione delle equazioni del sistema 5.17, tuttavia il procedimento, anche se di più rapida risoluzione del BVP, non garantisce sempre la convergenza a causa delle approssimazioni numeriche, e risulta meno accurato rispetto al calcolo esplicito del sistema 5.24. Anche per il calcolo dello Jacobiano della matrice  $\left[ \frac{\partial \Psi}{\partial \mathbf{s}} \right]$  si preferisce il calcolo analitico rispetto a quello numerico per lo stesso motivo di sensibilità numerica.

L'integrazione del sistema delle equazioni differenziali si basa su un metodo a passo e ordine variabile basato sulle equazioni di Adams.

Poichè per il calcolo degli errori sulle condizioni al contorno si basa sulla linearizzazione delle condizioni iniziali  $\Delta \mathbf{p}$ , come descritto nell'equazione 5.21, potrebbero comparire degli errori che comprometterebbero la convergenza del metodo. Per questo motivo, il metodo presenta ulteriori accortezze:

- Si utilizza un coefficiente  $K_1 = 0.1 \div 1$  (determinato empiricamente), per mitigare la correzione, in maniera che non ci si allontani troppo dalla soluzione:

$$\mathbf{p}^{r+1} = \mathbf{p}^r + K_1 \Delta \mathbf{p} \quad (5.28)$$

- Ad ogni iterazione, si confronta l'errore massimo sulle condizioni a contorno ottenuto in quella iterazione  $E_{max}^{r+1}$ , rispetto al valore di quella precedente  $E_{max}^r$  e se questo è inferiore ad un multiplo di quella precedente, si può procedere con l'iterazione successiva:  $E_{max}^{r+1} < K_2 E_{max}^r$ . Con  $K_2 = 2 \div 3$ , coefficiente empirico che deve essere maggiore all'unità per garantire buoni risultati;
- Se l'errore alla nuova iterazione è cresciuto invece di diminuire, si dimezza la correzione apportata, ossia si integrano le equazioni differenziali del moto con valori nuovi di tentativo pari a :

$$\mathbf{p}^{r+1} = \mathbf{p}^r + K_1 \frac{\Delta \mathbf{p}}{2} \quad (5.29)$$

questo procedimento di bisezione può essere ripetuto fino ad un massimo di 5 volte per ricalcolare gli errori, dopo di che si arresta se la soluzione non porta a convergenza.

## 5.2 Modello matematico utilizzato

Per poter applicare il metodo della teoria del controllo ottimale è necessario esplicitare le equazioni del modello fisico proiettandole in un sistema di riferimento opportuno. Quindi, si utilizza un sistema di riferimento inerziale e geocentrico, in maniera da non doversi preoccupare delle accelerazioni di trascinamento e di Coriolis, che andrebbero a complicare di molto il problema.[34] [35]

Le equazioni del moto si rifanno al problema dei due corpi, che può essere applicato dato che si è utilizzato il metodo delle Patched-conics per la missione in esame. Essendo:

- $r$  il raggio della traiettoria che individua la posizione del satellite;
- $\mathbf{V}$  il vettore velocità;
- $\mathbf{T}$  la spinta del satellite;
- $m$  la massa del satellite;
- $c$  la velocità efficace di scarico;
- $\mathbf{g}$  è la accelerazione gravitazionale che si può esplicitare come:

$$\mathbf{g} = -\frac{\mu_{sole}}{r^3}\mathbf{r}$$

- $\mu_{sole}$  è il parametro gravitazionale del Sole, dato che siamo su una traiettoria eliocentrica.

si scrivono le equazioni del moto:

$$\frac{dr}{dt} = \mathbf{V} \quad (5.30)$$

$$\frac{d\mathbf{V}}{dt} = \mathbf{g} + \frac{\mathbf{T}}{m} \quad (5.31)$$

$$\frac{dm}{dt} = -\dot{m} = -\frac{T}{c} \quad (5.32)$$

In accordo con la teoria del controllo ottimale, si può esprimere l'Hamiltoniano come:

$$H = \boldsymbol{\lambda}^T \mathbf{f} \quad (5.33)$$

che tenendo conto delle equazioni del moto, si può esprimere come:

$$H = \boldsymbol{\lambda}_r^T \mathbf{v} + \boldsymbol{\lambda}_v^T \mathbf{g} + S_F T \quad (5.34)$$

Solitamente, il valore della spinta e la sua direzione sono delle variabili di controllo, per cui, secondo il principio di massimo di Pontryagin, per massimizzare l'indice di performace  $J$  bisogna massimizzare il valore di  $H$ . Si è dimostrato che questo viene massimizzato quando si allinea la direzione della spinta con quella della velocità, ossia quando la spinta è parallela al vettore delle variabili aggiunte  $\lambda_V$ , chiamato anche *vettore primer*, che contiene le variabili aggiunte della velocità  $(u, v, w)$  secondo le equazioni della dinamica. Inoltre, si introduce la *Switching function*  $S_F$ :

$$S_F = \frac{\lambda_V^T T}{mT} - \frac{\lambda_m}{c} \quad (5.35)$$

Questo parametro permette di controllare il valore della spinta nel seguente modo:

$$T = \begin{cases} T_{max} & \text{per } S_F > 0 \\ 0 & \text{per } S_F < 0 \end{cases} \quad (5.36)$$

ossia, la spinta assume valore massimo quando la switching function è positiva, invece assume valore nullo quando la funzione di controllo è negativa (quindi si considera spento il propulsore). Se la  $S_F$  è nulla, ci si trova invece su un arco singolare, caso non considerato durante l'ottimizzazione di una fase eliocentrica.

### 5.2.1 Equazioni di stato e variabili aggiunte

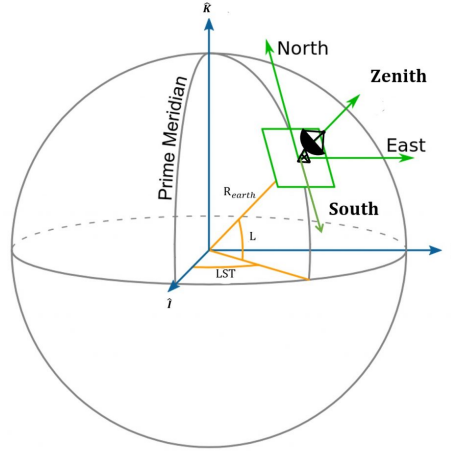
Per esprimere le equazioni di stato, si è deciso di adottare coordinate sferiche, in un sistema di riferimento inerziale basato sul piano equatoriale detto *East, Nord, Up*, (*ENU*), [34]:

la posizione del satellite è descritta da:

- $r$  raggio;
- $\theta$  longitudine;
- $\phi$  latitudine.

mentre la sua velocità viene scomposta nelle componenti:

- $u$  componente radiale, verso lo Zenith;
- $v$  componente verso Est;
- $w$  componente verso Nord.



**Figura 5.1:** Sistema di riferimento adottato, [36]

ed angoli misurati rispetto al piano orizzontale:

- $\gamma$  angolo di elevazione o *flight path angle*, positivo verso l'alto in senso antiorario dal meridiano;
- $\psi$  angolo di *heading*, positivo verso Nord in senso antiorario.

Quindi, si può infine esprimere il vettore delle variabili di stato come:

$$\mathbf{x} = [r, \theta, \phi, u, v, w, m]^T \quad (5.37)$$

Si proiettano le equazioni di stato nel sistema di riferimento appena descritto, ottenendo:

$$\frac{dr}{dt} = u \quad (5.38)$$

$$\frac{d\theta}{dt} = \frac{v}{r \cos \phi} \quad (5.39)$$

$$\frac{d\phi}{dt} = \frac{w}{r} \quad (5.40)$$

$$\frac{du}{dt} = -\frac{1}{r^2} + \frac{v^2}{r} + \frac{w^2}{r} + \frac{T}{m} \sin \gamma_T \quad (5.41)$$

$$\frac{dv}{dt} = -\frac{uv}{r} + \frac{wv}{r} \tan(\phi) + \frac{T}{m} \cos \gamma_T \cos \psi_T \quad (5.42)$$

$$\frac{dw}{dt} = -\frac{uw}{r} - \frac{v^2}{r} \tan(\phi) + \frac{T}{m} \cos \gamma_T \sin \psi_T \quad (5.43)$$

$$\frac{dm}{dt} = -\frac{T}{c} \quad (5.44)$$

In cui il pedice  $T$  nel flight path angle e nell'angolo di heading è usato per riferirsi alla direzione del vettore della spinta  $\mathbf{T}$ .

Si può, dunque riformulare anche l'hamiltoniana nel nuovo sistema di riferimento:

$$\begin{aligned} H = & \lambda_r u + \lambda_\theta \frac{v}{r \cos \phi} + \lambda_\phi \frac{w}{T} + \\ & + \lambda_u \left( -\frac{\mu}{r^2} + \frac{v^2}{T} + \frac{w^2}{T} + \frac{T}{m} \sin \gamma_T \right) + \\ & + \lambda_v \left( -\frac{uv}{r} + \frac{vw}{r} \tan \phi + \frac{T}{m} \cos \gamma_t \cos \psi_T \right) + \\ & + \lambda_w \left( -\frac{uw}{r} - \frac{v^2}{r} \tan \phi + \frac{T}{m} \cos \gamma_t \sin \psi_T \right) - \lambda_m \frac{T}{c} \end{aligned} \quad (5.45)$$

Se si esprime il vettore dei controlli come:

$$\mathbf{u} = [\gamma_T, \psi_T] \quad (5.46)$$

Si riescono a trovare i valori di ottimo per questi due angoli tramite l'equazione dei controlli espressa annullando la derivata dell'Hamiltoniana rispetto al vettore:

$$\left( \frac{\partial H}{\partial \mathbf{u}} \right)^T = 0 \quad (5.47)$$

Così facendo, si trovano i valori ottimali per le variabili di controllo:

$$\sin \gamma_T = \frac{\lambda_u}{\lambda_V} \quad (5.48)$$

$$\cos \gamma_T \cos \psi_T = \frac{\lambda_v}{\lambda_V} \quad (5.49)$$

$$\cos \gamma_T \sin \psi_T = \frac{\lambda_w}{\lambda_V} \quad (5.50)$$

Dove si è espresso il modulo del vettore primer:

$$\lambda_V = \sqrt{\lambda_u^2 + \lambda_v^2 + \lambda_w^2} \quad (5.51)$$

Si devono ora esprimere le equazioni differenziali per le variabili aggiunte:

$$\boldsymbol{\lambda} = [\lambda_r, \lambda_\theta, \lambda_\phi, \lambda_u, \lambda_v, \lambda_w, \lambda_m] \quad (5.52)$$

attraverso le equazioni di Eulero-Lagrange per le variabili aggiunte:

$$\frac{d\boldsymbol{\lambda}}{dt} = - \left( \frac{\partial H}{\partial \mathbf{x}} \right)^T \quad (5.53)$$

il cui risultato porta alle seguenti equazioni:

$$\begin{aligned} \dot{\lambda}_r = \frac{1}{r^2} \left[ \lambda_\theta \frac{v}{\cos \phi} + \lambda_\psi w + \lambda_u \left( -\frac{2}{r} + v^2 + w^2 \right) + \right. \\ \left. + \lambda_v (-uv - vw \tan \phi) + \right. \\ \left. + \lambda_w (-uw - v^2 \tan \phi) \right] \end{aligned} \quad (5.54)$$

$$\dot{\lambda}_\theta = 0 \quad (5.55)$$

$$\dot{\lambda}_\psi = \frac{1}{r \cos^2 \phi} (-\lambda_\theta v \sin \psi - \lambda_v vw + \lambda_w v^2) \quad (5.56)$$

$$\dot{\lambda}_u = \frac{1}{r} (-\lambda_r r + \lambda_v v + \lambda_w w) \quad (5.57)$$

$$\dot{\lambda}_v = \frac{1}{r} \left[ -\lambda_\theta \frac{1}{\cos \phi} - 2\lambda_u v + \lambda_v (u - w \tan \phi) + 2\lambda_w v \tan \phi \right] \quad (5.58)$$

$$\dot{\lambda}_w = \frac{1}{r} (-\lambda_\phi - 2\lambda_u w - \lambda_v v \tan \phi + \lambda_w u) \quad (5.59)$$

$$\dot{\lambda}_m = \frac{T}{m^2} \lambda_V \quad (5.60)$$

Il sistema differenziale da risolvere è composto dalle equazioni di stato e dalle equazioni delle variabili aggiunte sopra esposte.

### 5.2.2 Metodo di multiple shooting

Solitamente, i metodi di shooting si dividono in metodo di *single shooting* e metodo di *multiple shooting*, il quale è quello effettivamente utilizzato dal codice usato per la risoluzione delle analisi di questa tesi. [3]

Per questo approccio risolutivo, l'intervallo di tempo  $[t_0, t_f]$  è diviso in  $N+1$  sottointervalli, per ognuno dei quali  $[t_i, t_{i+1}]$  viene applicato il metodo di single shooting. All'inizio di ogni sottointervallo, si assumono come parametri noti i valori della posizione, velocità e variabili aggiunte dello spacecraft alla ripartenza. Dunque, viene poi imposto all'interfaccia di ogni sottointervallo la continuità sia per le variabili di stato (posizione e velocità dello spacecraft) che per quelle aggiunte ( $\lambda$ ):

$$x(t_{i-}) = x(t_{i+})$$

le condizioni di continuità ad ogni sottointervallo si possono considerare assicurate quando la differenza tra i valori assunti dalle variabili tra arrivo e ripartenza tende a zero  $x(t_{i-}) - x(t_{i+}) = 0$ .

Il metodo di multiple shooting può essere utilizzato sia tramite approccio diretto che indiretto, come ad esempio avviene nell'algoritmo utilizzato per questo lavoro, ed in entrambi i casi il suo punto di forza è quello di riuscire a descrivere efficacemente il problema in esame tramite un numero relativamente piccolo di variabili da ottimizzare.

### 5.2.3 Condizioni al contorno

Si devono adesso imporre delle condizioni al contorno per la definizione del problema. La traiettoria della missione è divisa in  $N$  archi, con  $N$  numero di asteroidi che si vogliono raggiungere, quindi ogni arco avrà le proprie condizioni al contorno. Si ha un tempo iniziale  $t_0$  che è il tempo di partenza da un'orbita di parcheggio attorno alla Terra, ed un tempo di arrivo all'asteroide  $t_f$ .

Con l'arrivo ad un singolo asteroide di interesse, ossia senza *flyby* con asteroidi intermedi, si considera che il satellite abbia inizialmente lo stesso raggio e la stessa velocità della Terra, ed una propria massa iniziale:

al tempo  $t_0$ :

$$\mathbf{r}(t_0) = \mathbf{r}_{Terra}(t_0)$$

$$\mathbf{v}(t_0) = \mathbf{v}_{Terra}(t_0)$$

$$m(t_0) \approx 12.6kg$$

Si può fare questa assunzione poichè le dimensioni della sfera di influenza della Terra sono trascurabili nella fase eliocentrica della missione interplanetaria.

(La massa del satellite è indicativa, poichè nel corso delle analisi è stata modificata.)

Al *Rendez-vous* con l'asteroide di arrivo al tempo finale  $t_f$ , la velocità e la posizione



del satellite dovranno coincidere con quelle del corpo celeste:  
al tempo  $t_f$ :

$$\begin{aligned}\mathbf{r}(t_f) &= \mathbf{r}_{asteroide}(t_f) \\ \mathbf{v}(t_f) &= \mathbf{v}_{asteroide}(t_f)\end{aligned}$$

La massa finale del veicolo spaziale è il parametro che si vuole andare ad ottimizzare, ed è quindi un'incognita.

### 5.2.4 Condizioni intermedie e condizioni di ottimo

Le condizioni intermedie sono necessarie in caso di flyby con altri asteroidi, in questa situazione è sempre necessario che la posizione e la velocità del satellite siano uguali a quelle del corpo celeste attorno al quale si effettua la manovra. Se indichiamo con  $j$  un generico punto della traiettoria nel quale viene effettuato il  $j$ -esimo flyby:

$$\begin{aligned}\mathbf{r}(t_{j-}) &= \mathbf{r}_j(t_{j-}) \\ \mathbf{v}(t_{j-}) &= \mathbf{v}_j(t_{j-})\end{aligned}$$

dove con il  $-$  si vuole indicare l'istante immediatamente prima del flyby. Allo stesso modo, alla ripartenza dall'asteroide intermedio, lo spacecraft deve assumere gli stessi valori di posizione e velocità del corpo dopo il flyby, indicato con  $+$ , tenendo conto del tempo di permanenza attorno a questo:

$$t_{j+} = t_{j-} + t_{stay}$$

Tuttavia, poichè questo tempo di permanenza è molto piccolo rispetto alla durata complessiva della missione, è stato considerato nullo, per cui ne deriva che  $t_{j+} = t_{j-}$ , e alla ripartenza:

$$\begin{aligned}\mathbf{r}(t_{j+}) &= \mathbf{r}_j(t_{j+}) \\ \mathbf{v}(t_{j+}) &= \mathbf{v}_j(t_{j+}) \\ m(t_{j+}) &= m(t_{j-})\end{aligned}$$

Le condizioni di ottimo invece, si assicurano attraverso la continuità delle componenti della velocità nei punti intermedi, imponendo che le variabili aggiunte per la velocità abbiano lo stesso valore all'arrivo e alla ripartenza dell'asteroide:

$$\begin{aligned}\lambda_u(t_{j-}) &= \lambda_u(t_{j+}) \\ \lambda_v(t_{j-}) &= \lambda_v(t_{j+}) \\ \lambda_w(t_{j-}) &= \lambda_w(t_{j+})\end{aligned}$$

### 5.2.5 Condizioni iniziali

Oltre alle condizioni al contorno e a quelle intermedie, come è stato descritto per la teoria del controllo ottimale, è necessario definire anche un vettore contenente i valori iniziali per poter far partire l'integrazione del sistema:

$$\mathbf{p} = [t_0, t_f, r_0, \theta_0, \phi_0, u_0, v_0, w_0, \lambda_{r_0}, \lambda_{\theta_0}, \lambda_{\phi_0}, \lambda_{u_0}, \lambda_{v_0}, \lambda_{w_0}]^T$$

il vettore  $\mathbf{p}$  contiene le informazioni sulla posizione iniziale del satellite  $(r_0, \theta_0, \phi_0)$ , il tempo di partenza e di arrivo all'asteroide considerato  $(t_0, t_f)$ , la velocità iniziale del satellite  $(u_0, v_0, w_0)$ , ed infine le variabili aggiunte iniziali  $(\lambda_{r_0}, \lambda_{\theta_0}, \lambda_{\phi_0}, \lambda_{u_0}, \lambda_{v_0}, \lambda_{w_0})$  e per ogni arco considerato, il vettore delle condizioni iniziali verrà aggiornato.

La risoluzione del problema si basa sul *metodo di multiple shooting*, ossia, viene preso un vettore  $\mathbf{p}^1$  di primo tentativo, si integra il sistema di equazioni differenziali, e le soluzioni vengono confrontate con le condizioni al contorno. Se l'errore rispetta la tolleranza imposta nel codice, allora i valori di tentativo iniziali sono corretti, altrimenti dovranno essere aggiornati con nuovi parametri, finché non si troveranno i parametri che portano alla convergenza del sistema e che descrivono quindi la traiettoria ottimale.

# Capitolo 6

## Analisi delle traiettorie

Il focus principale del lavoro svolto è quello di ottimizzare le traiettorie dirette verso gli asteroidi di interesse 2009 HC, 2007 CS5 e 2021 UL7 introdotti nel capitolo 2, tramite l'utilizzo della Teoria del Controllo Ottimale. Si è fatto uso, a tal proposito, di un codice *fortran* sviluppato e fornito dal Politecnico di Torino, del quale si riporteranno gli aspetti fondamentali nel seguente capitolo per poter comprendere il metodo risolutivo del problema e l'interpretazione dei risultati.

### 6.1 Variabili adimensionalizzate

Per prima cosa, si vogliono evidenziare le adimensionalizzazioni fatte all'interno del codice di alcune variabili coinvolte nel sistema di equazioni differenziali e nei parametri aggiunti.

#### 6.1.1 Distanza adimensionale

Si fa riferimento all'*unità astronomica UA* per poter dimensionalizzare tutte le distanze. L'Unità Astronomica rappresenta la distanza media tra la Terra ed il Sole, pari a

$$r_{conv} = 1 \text{ au} = 149597870707 \text{ m}$$

Questa scelta permette al codice di computare le distanze nell'ordine delle unità anzichè in milioni di chilometri, riducendo i tempi di elaborazione.

### 6.1.2 Velocità adimensionale

Anche per la velocità, si è imposta una adimensionalizzazione di tutte le velocità in gioco rispetto alla velocità circolare della Terra, definita come

$$v_{conv} = \sqrt{\frac{\mu_{sole}}{r_{conv}}}$$

in maniera da avere velocità dell'ordine delle unità.

### 6.1.3 Accelerazione adimensionale

Allo stesso modo delle distanze e delle velocità, anche le accelerazioni sono state riportate rispetto all'accelerazione terrestre attorno al Sole

$$a_{conv} = \frac{\mu_{sole}}{r_{conv}}$$

### 6.1.4 Riferimento temporale

Per quanto riguarda il riferimento temporale, si è preso in considerazione un anno sidereo, ossia che la Terra compia esattamente un giro completo di  $2\pi \text{ rad}$  nella sua orbita attorno al Sole durante l'anno. Detto ciò, il tempo viene adimensionalizzato in questo modo

$$t_{conv} = \frac{365}{2\pi} = 58.13244088 \text{ giorni}$$

Per il conteggio degli anni e per la durata della missione si fa invece riferimento al sistema *J2000*, che è un sistema di riferimento temporale largamente utilizzato in astronomia e nella meccanica orbitale, che prende come epoca di riferimento  $t_0 = 0$  il 1 Gennaio 2000 GMT alle ore 12.00 pm.

### 6.1.5 Altri parametri da considerare

Un'ulteriore grandezza da prendere in considerazione è la massa del satellite di riferimento, che alla partenza è pari a

$$m_{iniziale} = 21 \text{ kg}$$

che in maniera adimensionale è espressa come

$$am0 = 1$$

in modo che si possano utilizzare sue frazioni per le simulazioni effettuate, e che anche la massa finale a fine missione sia espressa tramite una frazione di quella

iniziale.

Si utilizza anche un impulso specifico di riferimento pari a

$$I_{sp} = 2100 \text{ s}$$

una spinta propulsiva

$$T = 1.25 \text{ mN}$$

ed una potenza del propulsore a ioni

$$P = \eta \frac{Tc}{2}$$

data l'efficienza propulsiva  $\eta = 0.625$ . Infine, si fa un'assunzione sul *dutycycle* del motore: si presuppone che il motore sia acceso per il 90% della durata di un arco di traiettoria e per il 70%, in caso di flyby.

## 6.2 Algoritmo di funzionamento del codice

Per poter lanciare l'analisi, è necessario inserire manualmente alcuni parametri di input da terminale, ed è inoltre anche necessario, in accordo con quanto descritto nel capitolo di Teoria del Controllo Ottimale, la presenza di un file di tentativo che contenga le variabili e le costanti del sistema differenziale scelte come prima approssimazione per l'integrazione numerica.

I valori richiesti in input sono:

- **rmin, pbis, jmax**: passo di integrazione, il valore di quanto può aumentare l'errore tra un'iterazione e la successiva (fissato a 2), massimo numero di iterazioni;
- **t0**: tempo di partenza espresso secondo il sistema J2000;
- **durata**: durata della missione;
- **ast**: corpo celeste di partenza, nel nostro caso la Terra;
- **ast**: asteroide di arrivo;
- **am0**: massa iniziale del satellite alla partenza;
- **d, alfa, delta**: distanza di partenza dalla Terra, e due angoli di partenza sul piano e fuori dal piano dell'eclittica;
- **vinf**: velocità di eccesso iperbolico alla partenza, che si è considerata sempre nulla, poichè si considera il satellite già al di fuori della SOI della Terra.

La scelta del passo di integrazione da utilizzare **rmin** è di notevole rilevanza, in quanto è un coefficiente detto di *rilassamento*, che regola la correzione fatta dal codice tra un'iterazione e la successiva. Poichè la correzione adottata si basa sulla linearizzazione, se questa è troppo elevata è difficile arrivare alla convergenza, per cui adottando valori bassi del coefficiente di rilassamento, si impongono delle correzioni piccole che assicurano una maggiore precisione. In particolare, i valori di **rmin** adottati vanno da  $0.0001 \div 0.1$ , per poter assicurare la convergenza dell'analisi. Una volta inseriti questi input, il codice va a leggere il file *ec* che contiene i parametri scelti come tentativo iniziale. Questo file è di fondamentale importanza, in quanto è la stima iniziale che il codice prende come base per l'integrazione numerica del sistema di equazioni differenziali che descrivono il problema, assieme alle condizioni al contorno e a quelle iniziali, come espresso nel Capitolo 5. A partire da queste condizioni iniziali, il codice inizia ad integrare le equazioni di Eulero-Lagrange, e per ogni iterazione, calcola l'errore rispetto alle condizioni al contorno imposte per ogni variabile del problema. Quando gli errori risultano al di sotto della tolleranza richiesta (tipicamente  $\leq 10^{-7}$ ), allora l'algoritmo si stoppa e restituisce la soluzione a convergenza. Se questi errori sono troppo grandi e non diminuiscono a sufficienza durante le iterazioni, potrebbero verificarsi due situazioni:

o si arriva al numero massimo di iterazioni impostate senza arrivare a convergenza, oppure gli errori sono troppo grandi, segno che il sistema è mal condizionato e quindi non è risolvibile.

Nel primo caso descritto, l'analisi va fatta ripartire per poter arrivare a convergenza grazie ad ulteriori iterazioni, mentre nella seconda situazione, il problema risiede proprio nella scelta dei valori di partenza, per cui va modificato il file *ec* di tentativo per poter rieseguire l'analisi.

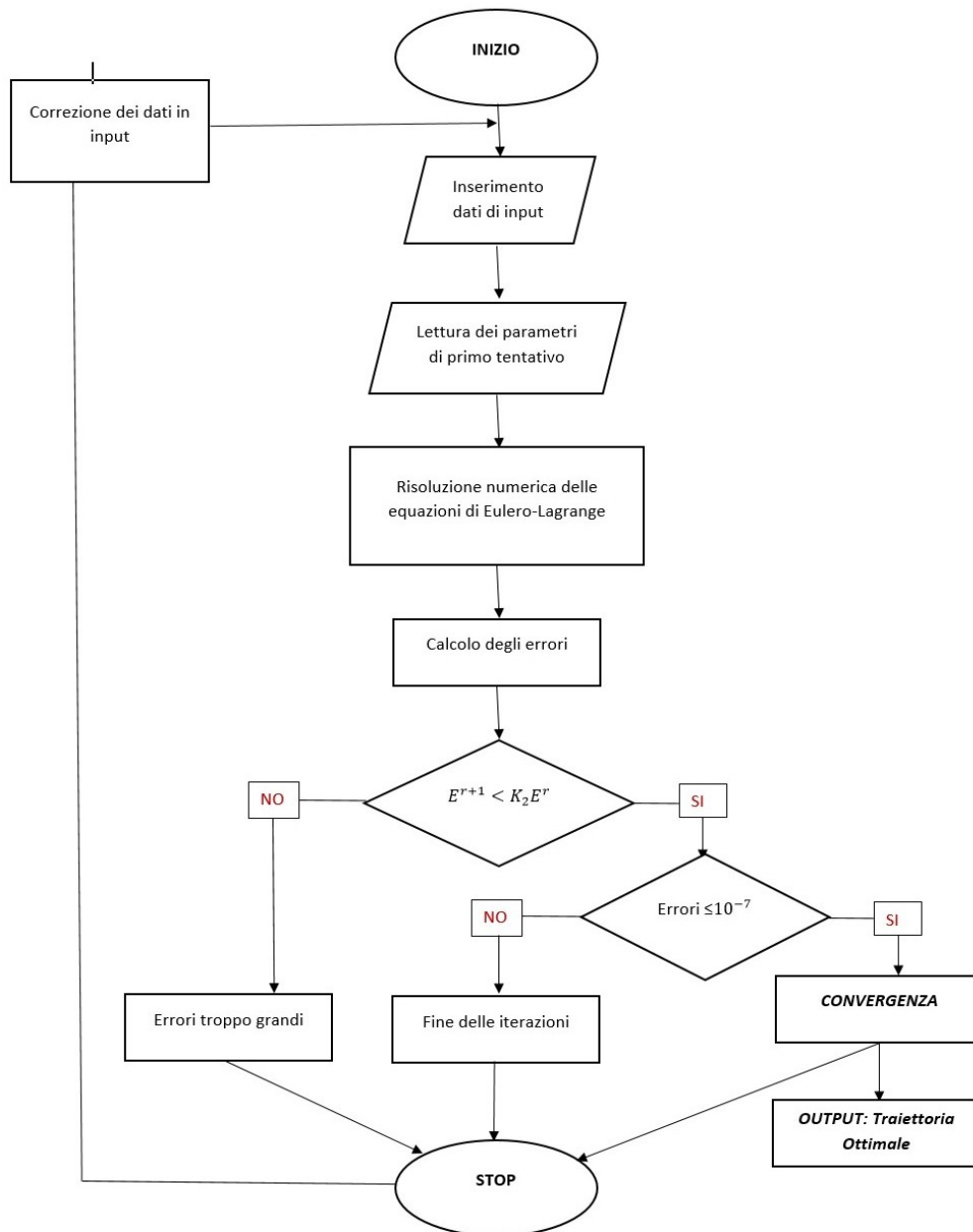


Figura 6.1: Diagramma di flusso del processo

## 6.3 Risultati

Tramite il procedimento presentato nei paragrafi precedenti, sono state svolte delle analisi per l'ottimizzazione di traiettorie verso gli asteroidi 2009 HC, 2007 CS5 e 2021 UL7, considerando missioni di solo rendez-vous con questi asteroidi, andando a variare la data di partenza, per poter individuare il periodo di lancio ottimale, e mantenendo costanti la durata di missione e le condizioni di uscita dello spacecraft dall'orbita di partenza attorno alla Terra.

A tal proposito, per poter individuare il periodo corretto, una volta ottenuta la convergenza per l'analisi si è andato a valutare il  $\Delta\theta$ , ossia il fasamento, tra l'asteroide di arrivo e la Terra al tempo di partenza. Sono state prese in considerazione le analisi in cui questo Delta fosse sufficientemente piccolo (circa  $\Delta\theta < 20 \text{ deg}$ ), oppure sufficientemente vicino a  $360 \text{ deg}$ . Infatti, si può notare come la massa finale del satellite, sotto queste condizioni, sia maggiore, quindi un minore consumo di propellente, cosa che implica che la traiettoria individuata sia quella ottimale. In seguito, una volta individuati questi casi ottimali, sono stati utilizzati come nuovi input per poter variare altri parametri della missione, quali la durata che è stata diminuita e la massa iniziale del satellite, che invece è stata aumentata.

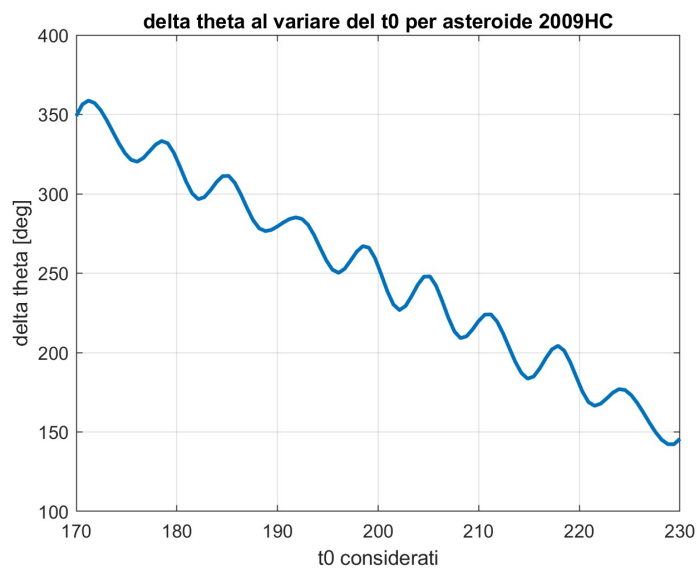


### 6.3.1 Calcolo degli angoli di fasamento

Si sono calcolati e graficati gli andamenti dell'angolo di fasamento tra asteroide e Terra all'istante iniziale della missione, per ogni  $t_0$  analizzato con la durata di missione fissa a  $t_{missione} = 25$ , trovando un comportamento quasi sinusoidale. Le date di partenza interessanti si riscontrano in corrispondenza di  $\Delta\theta$  piccoli, cioè inferiori a 20 *deg* circa, oppure in corrispondenza di  $\Delta\theta$  elevati, ossia vicini a 360 *deg*.

Si riportano i grafici per tutti e tre gli asteroidi analizzati.

#### Asteroide 2009 HC



**Figura 6.2:** Deltatheta-data di partenza per l'asteroide 2009 HC

### Asteroide 2007 CS5

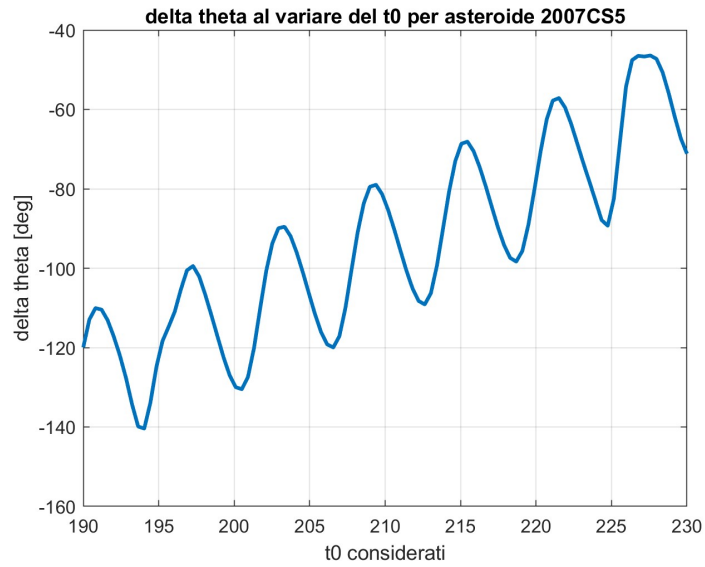


Figura 6.3: Deltatheta-data di partenza per l'asteroide 2007 CS5

### Asteroide 2021 UL7

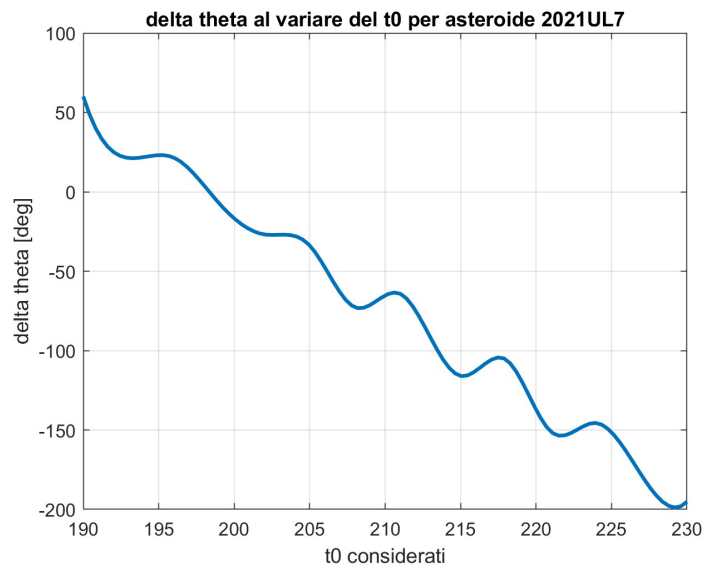


Figura 6.4: Deltatheta-data di partenza per l'asteroide 2021 UL7

Come si può osservare dagli andamenti, si individuano le finestre di lancio per cui si vanno ad approfondire le analisi, che corrispondono agli angoli di fasamento ideali sopra citati. Per i tre asteroidi, queste corrispondono a:

- Asteroide 2009 HC:  $t_0 : 170 \div 176$  e  $224 \div 230$ ;
- Asteroide 2007 CS5:  $t_0 : 224 \div 230$ ;
- Asteroide 2021 UL7:  $t_0 : 190 \div 199$ .

Si vuole porre l'attenzione sulla seconda finestra di lancio individuata per l'asteroide 2009 HC, che non corrisponde al caso ideale di  $\Delta\theta$  sopra esposto, tuttavia è stata considerata in quanto il satellite compie una prima manovra di aggiustamento del perielio che permette l'aggiustamento del fasamento tra Terra e asteroide ed infine una seconda manovra di aggiustamento dell'afelio che porta il satellite al rendezvous con il corpo celeste, come si può osservare anche nei grafici 6.16.

Il satellite deve seguire una traiettoria che abbia come semiasse maggiore la media tra il semiasse dell'orbita della Terra al tempo iniziale e quello dell'asteroide al tempo finale e che si muova con una velocità angolare corrispondente alla media tra quella della Terra e quella dell'asteroide.

Per cui, controllando che il  $\Delta\theta$  finale sia molto piccolo specificatamente per questa finestra temporale, si è andati a verificare che lo spacecraft seguisse correttamente la traiettoria appena descritta e che la sua posizione all'arrivo sia effettivamente corrispondente a quella dell'asteroide di destinazione.

### 6.3.2 Calcolo della massa finale al variare della durata di missione

Successivamente, per le date di lancio individuate, si è andata a variare la durata della missione da  $t_0 = 25 \div 12$ , tenendo fissa la massa iniziale del satellite pari a  $am_0 = 12.6 \text{ kg}$ .

Si riportano i grafici e le tabelle delle soluzioni trovate che mostrano l'andamento della massa finale, dei consumi e del  $\Delta V$  al variare della durata di missione, per tutti e tre gli asteroidi.

#### Asteroide 2009 HC

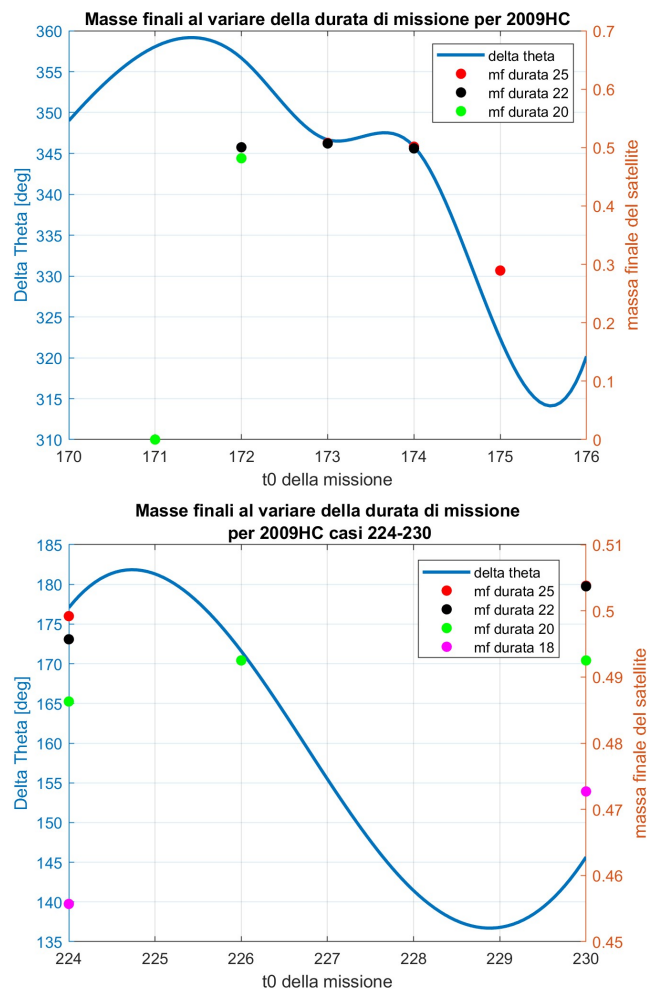


Figura 6.5: Masse finali e consumi per 2009 HC al variare della durata di missione

t0=170-176					
t0	massa finale	consumo	consumo percentuale	dV [km/s]	delta theta [deg]
durata 25					
173	0.508	0.092	15.33333333	3.722537	346.6691
174	0.5015	0.0985	16.41666667	3.694499	345.8414
175	0.2894	0.3106	51.76666667	15.01569	322.3391
durata 22					
172	0.5005	0.0995	16.58333333	3.733041	356.6663
173	0.507	0.093	15.5	3.467812	346.6691
174	0.4986	0.1014	16.9	3.81087	345.8414
durata 20					
172	0.4817	0.1183	19.71666667	4.523369	356.6663
173	0.4909	0.1091	18.18333333	4.133448	346.6691
t0=224-230					
t0	massa finale	consumo	consumo percentuale	dV [km/s]	delta theta [deg]
durata 25					
224	0.4992	0.1008	16.8	3.789113	177.0655
229	0.5061	0.0939	15.65	3.504056	136.7933
230	0.5038	0.0962	16.03333333	3.597476	145.663
durata 22					
224	0.4957	0.1043	17.38333333	3.932145	177.0655
229	0.5041	0.0959	15.98333333	3.58766	136.7933
230	0.5037	0.0963	16.05	3.603947	145.663
durata 20					
224	0.4863	0.1137	18.95	4.326562	177.0655
226	0.4925	0.1075	17.91666667	4.064021	171.5977
230	0.4925	0.1075	17.91666667	4.067386	145.663
durata 18					
224	0.4557	0.1443	24.05	5.66354	177.0655
230	0.4727	0.1273	21.21666667	4.909674	145.663

**Tabella 6.1:** Masse finali e consumi per 2009 HC al variare della durata di missione

Si mettono in evidenza le masse finali, il  $\Delta V$  ed i consumi (adimensionali) per le date di lancio specificate nel paragrafo precedente, in caso di missioni di massima durata.

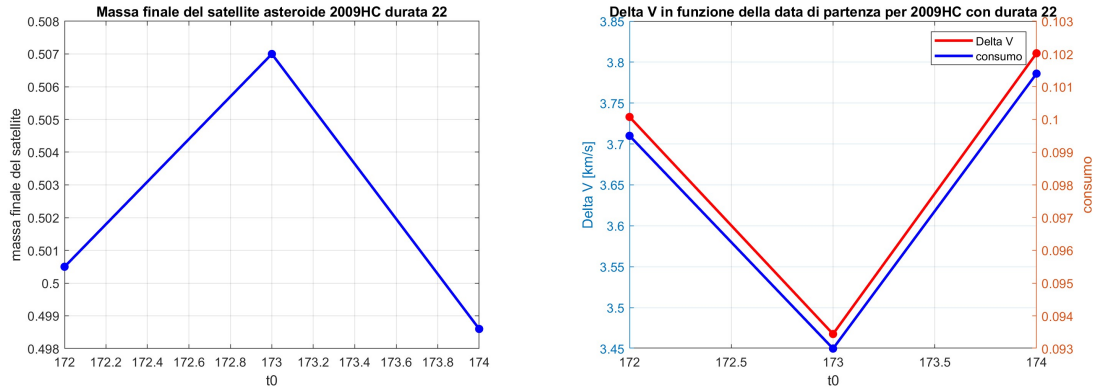


Figura 6.6: Massa finale del satellite, DV e consumi per 2009 HC per  $t_0=170 \div 176$

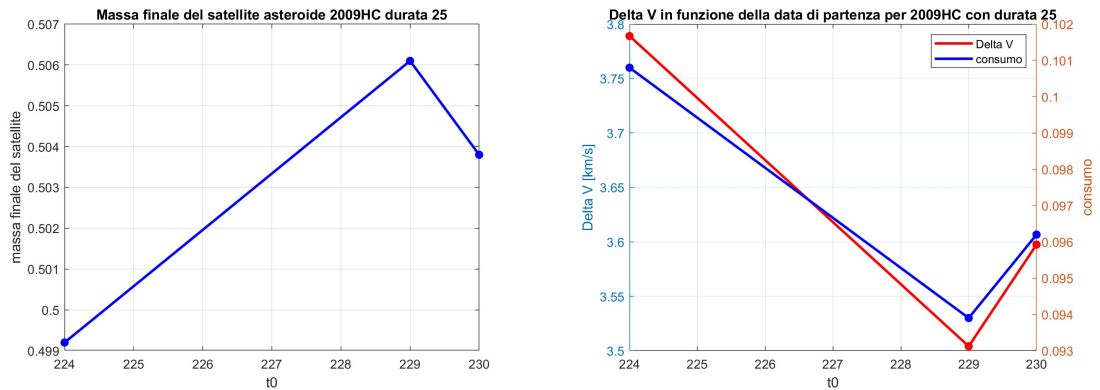


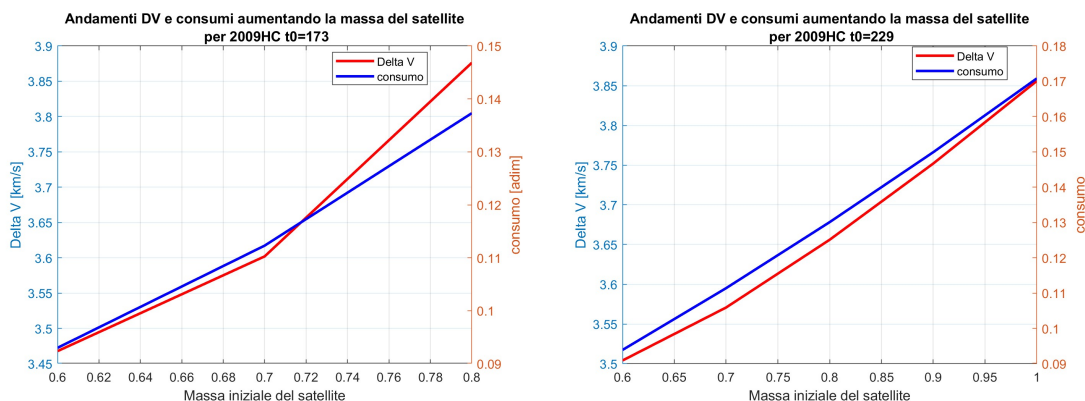
Figura 6.7: Massa finale del satellite, DV e consumi per 2009 HC per  $t_0=224 \div 230$

Infine, prendendo in considerazione il  $t_0$  corrispondente al fasamento ottimale tra Terra e asteroide, si è fatto uno studio aumentando la massa iniziale del satellite, per la missione di durata massima.

In particolar modo, per l'asteroide 2009 HC sono stati considerati  $t_0 = 173$  e  $t_0 = 229$ .

durata 22					
$t_0$	massa iniziale	mf	consumo	consumo percentuale	dV [km/s]
173	<b>0.6</b>	0.507	0.093	15.5	3.467812321
	<b>0.7</b>	0.5877	0.1123	16.04285714	3.60200308
	<b>0.8</b>	0.6627	0.1373	17.1625	3.876123607
durata 25					
229	<b>0.6</b>	0.5061	0.0939	15.65	3.504055723
	<b>0.7</b>	0.5886	0.1114	15.91428571	3.570749928
	<b>0.8</b>	0.6699	0.1301	16.2625	3.656038768
	<b>0.9</b>	0.7501	0.1499	16.65555556	3.751962106
	<b>1</b>	0.8292	0.1708	17.08	3.855896814

**Tabella 6.2:** Aumento della massa iniziale del satellite per i  $t_0$  corrispondenti al fasamento ottimale per 2009 HC



**Figura 6.8:** Influenza dell'aumento della massa finale del satellite sul DV e sui consumi per 2009 HC

Asteroide 2007 CS5

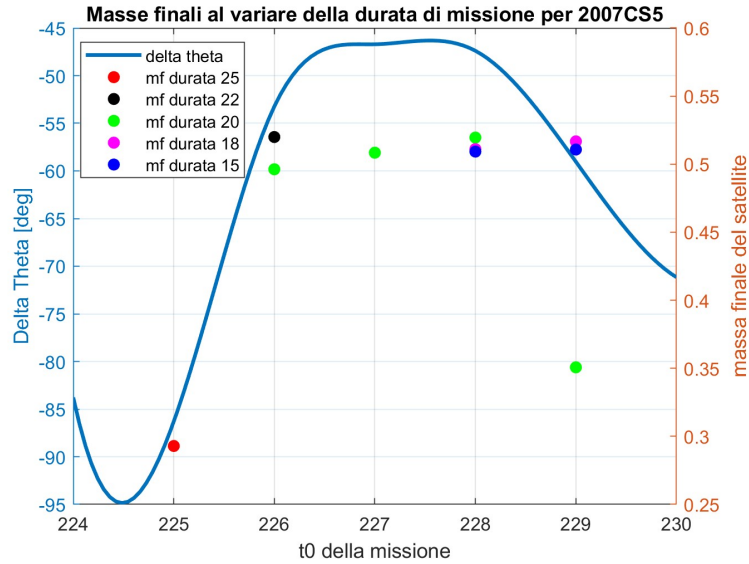


Figura 6.9: Masse finali e consumi per 2007 CS5 al variare della durata di missione

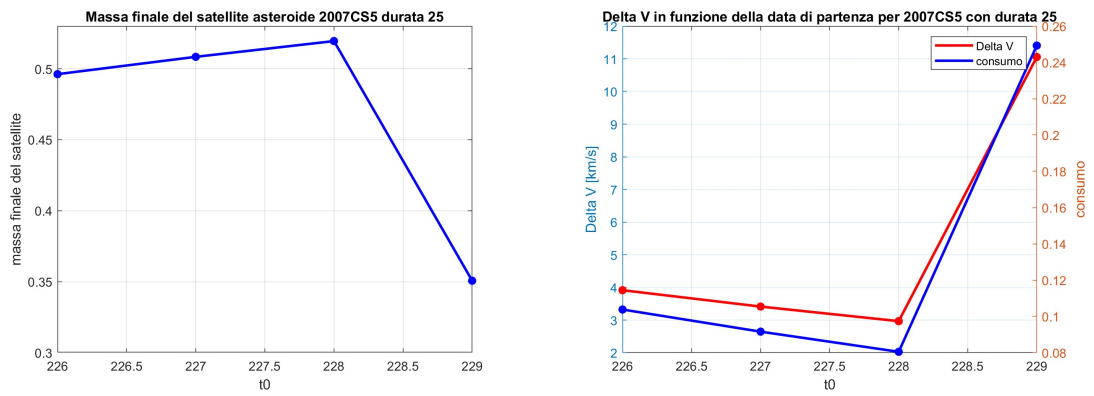
t0=224-230

t0	massa finale	consumo	consumo percentuale	dV [km/s]	delta theta [deg]
durata 25					
225	0.2929	0.3071	51.18333333	14.76618	-86.2933
durata 22					
226	0.5199	0.0801	13.35	2.951731	-53.2342
durata 20					
226	0.4962	0.1038	17.3	3.913837	-53.2342
227	0.5084	0.0916	15.26666667	3.41234	-46.7082
228	0.5195	0.0805	13.41666667	2.966298	-47.392
229	0.3507	0.2493	41.55	11.0568	-59.0371
durata 18					
228	0.511	0.089	14.83333333	3.306238	-47.392
229	0.5167	0.0833	13.88333333	3.076995	-59.0371
durata 15					
228	0.5092	0.0908	15.13333333	3.378902	-47.392
229	0.5107	0.0893	14.88333333	3.316696	-59.0371

Tabella 6.3: Masse finali e consumi per 2007 CS5 al variare della durata di missione

Si mettono in evidenza masse finali,  $\Delta V$  e consumo di propellente per i t0 analizzati.



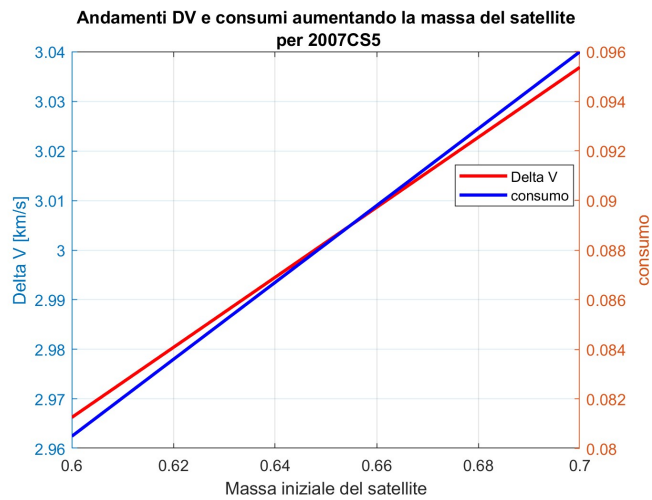


**Figura 6.10:** Massa finale del satellite, DV e consumi per 2007 CS5 per  $t_0=226 \div 229$

Anche per l'asteroide 2007 CS5, si è andata ad aumentare la massa iniziale del satellite per  $t_0 = 228$  che è quello che presenta il  $\Delta\theta$  migliore.

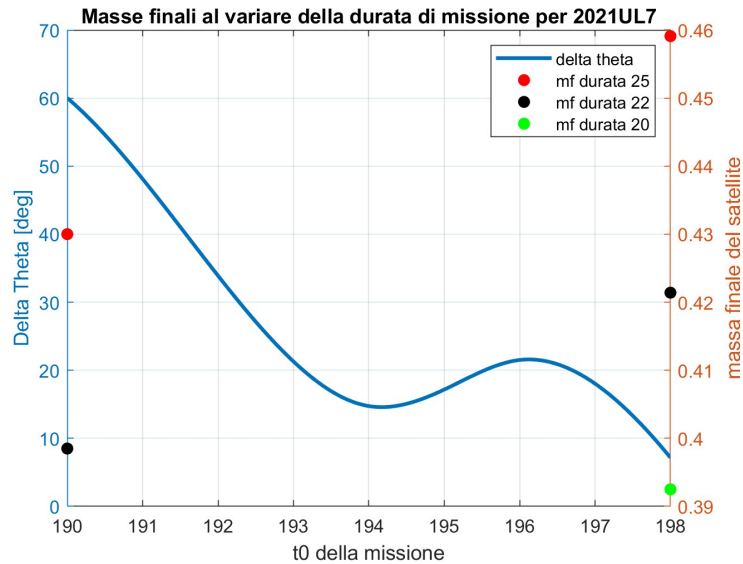
t0	massa iniziale	mf	consumo	consumo percentuale	dV [km/s]
228	<b>0.6</b>	0.5195	0.0805	13.41666667	2.966298
	<b>0.7</b>	0.604	0.096	13.71428571	3.036868

**Tabella 6.4:** Aumento della massa iniziale del satellite per il t0 corrispondenti al fasamento ottimale per 2007 CS5



**Figura 6.11:** Influenza dell'aumento della massa finale del satellite sul DV e sui consumi per 2007 CS5

Asteroide 2021 UL7

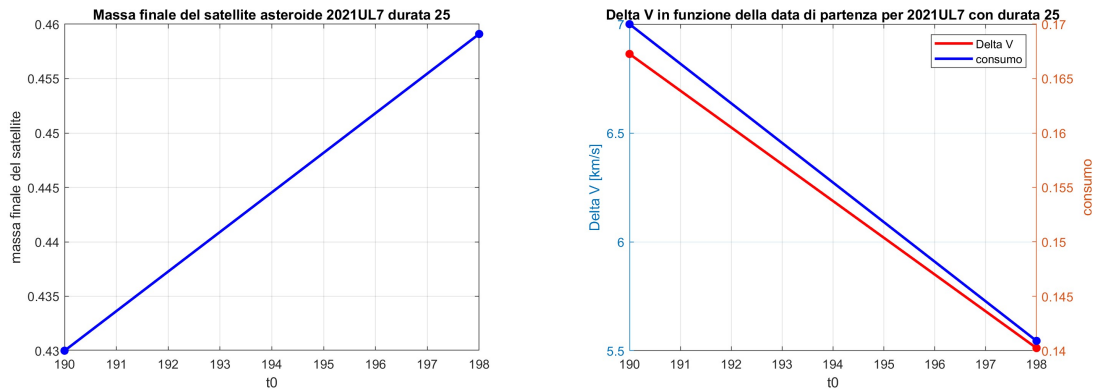


**Figura 6.12:** Masse finali e consumi per 2021 UL7 al variare della durata di missione

t0=190-198					
t0	massa finale	consumo	consumo percentuale	dV [km/s]	delta theta [deg]
durata 25					
190	0.43	0.17	28.33333333	6.86309	60.015
198	0.4591	0.1409	23.48333333	5.512105	7.1629
durata 22					
190	0.3985	0.2015	33.58333333	8.429366	60.015
198	0.4214	0.1786	29.76666667	7.277527	7.1629
durata 20					
198	0.3925	0.2075	34.58333333	8.737882	7.1629

**Tabella 6.5:** Masse finali e consumi per 2021 UL7 al variare della durata di missione

Anche in quest'ultimo caso, vengono mostrati i grafici di massa finale  $\Delta V$  e consumi per le date considerate, in caso di durata massima di missione.

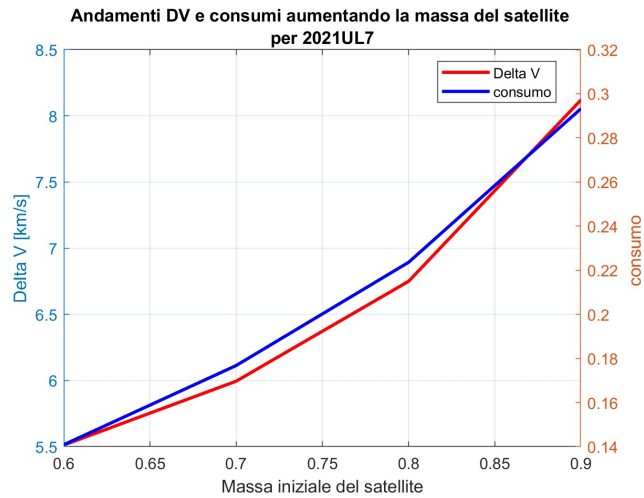


**Figura 6.13:** Massa finale del satellite, DV e consumi per 2021 UL7 per  $t_0=190 \div 198$

In ultimo, si riporta in tabella lo studio sull'aumento della massa del satellite per la data di lancio ottimale e durata di missione massima, ossia  $t_0 = 198$ .

$t_0$	massa iniziale	mf	consumo	consumo percentuale	dV [km/s]
198	<b>0.6</b>	0.4591	0.1409	23.48333333	5.512105
	<b>0.7</b>	0.5232	0.1768	25.25714286	5.99481
	<b>0.8</b>	0.5764	0.2236	27.95	6.749744
	<b>0.9</b>	0.6067	0.2933	32.58888889	8.12075

**Tabella 6.6:** Aumento della massa iniziale del satellite per il  $t_0$  corrispondenti al fasamento ottimale per 2021 UL7



**Figura 6.14:** Influenza dell'aumento della massa finale del satellite sul DV e sui consumi per 2021 UL7

Si evidenzia che le soluzioni al variare della data di partenza della missione, si trovano in corrispondenza dei punti di massimo o di minimo del  $\Delta\theta$ . Quando si ha un fasamento ottimale, ossia con  $\Delta\theta$  contenuti o vicini a  $360\text{ deg}$ , i consumi sono minimi e quindi la traiettoria può considerarsi ottimale. Inoltre, per missioni con durata minore, anche la massa finale del satellite al rendez-vous con l'asteroide è più bassa rispetto a missioni che prevedono durate più lunghe. Per cui, per avere missioni più brevi la fase propulsa è maggiore e ciò implica un  $\Delta V$  più alto che influisce sulla massa finale del satellite e fa salire il consumo di propellente.

Mentre, come mostrato nelle tabelle 6.2, 6.4 e 6.6, per una certa data di partenza, mantenendo fisse le condizioni di uscita dalla SOI terrestre e la durata di missione, all'aumentare della massa iniziale del satellite cresce il  $\Delta V$  e di conseguenza il consumo necessario, però questo permetterebbe anche la presenza di un payload maggiore a bordo.

### 6.3.3 Grafici dei raggi di perielio ed afelio

Una volta calcolate le masse finali ed i consumi per i tre asteroidi, si sono calcolati i raggi di perielio ed afelio corrispondenti alle missioni analizzate e descritte nelle tabelle 6.1, 6.3 e 6.5, tenendo fisse le condizioni di uscita dalla sfera di influenza terrestre pari a  $d = 0.1$   $\alpha = 90$   $\delta = 0$   $deg$ , come anche la massa iniziale del satellite pari a 0.6 ossia 12.6  $kg$ .

In particolar modo, sono stati ricavati il semiasse maggiore dell'orbita del satellite, il raggio di perielio e quello di afelio, in maniera adimensionale, grazie all'energia della traiettoria e la sua eccentricità, fornite in output dal codice fortran utilizzato:

$$a = -\frac{1}{2E}$$

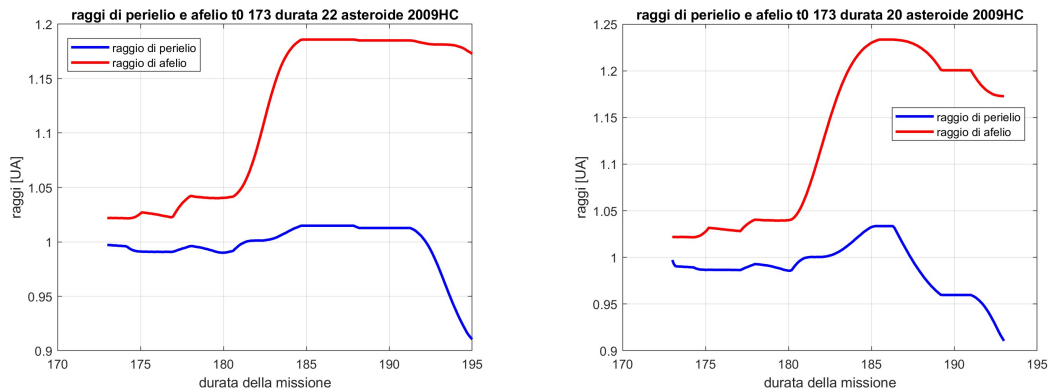
$$r_p = a(1 - e)$$

$$r_a = a(1 + e)$$

Si riportano i grafici dei raggi di perielio ed afelio per gli asteroidi, solamente nei casi più significativi, ossia considerando le date di partenza ottimali in termini di fasamento tra Terra e asteroide all'istante iniziale, e si vuole riportare un confronto tra la missione di durata maggiore e quella di durata minore. Tutti gli altri grafici sono stati inseriti nell'appendice.

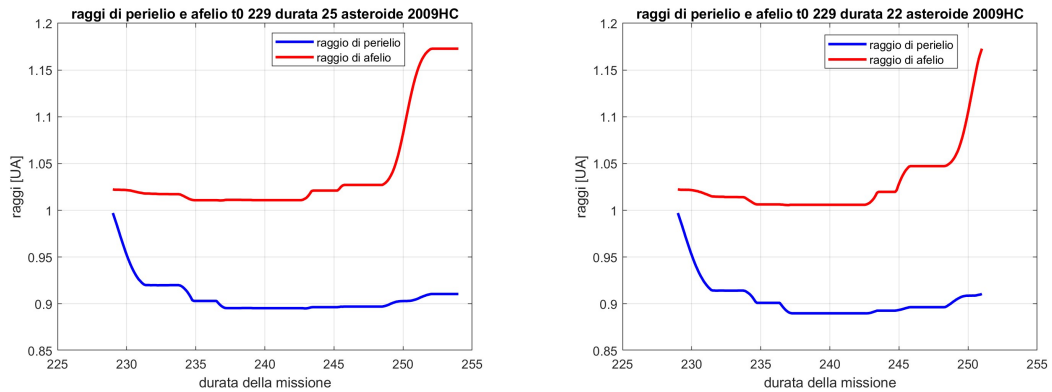
#### Asteroide 2009 HC

La prima data di partenza considerata, corrispondente a  $t_0 = 173$  è il 14/7/2027, per cui sono state due missioni: la prima con durata 22 corrispondente a circa 1273 giorni, e la seconda con durata 20, corrispondente a circa 1163 giorni. Si è deciso di considerare questa data di partenza poichè ha un  $\Delta\theta = 346.6691$   $deg$ , cioè un buon fasamento iniziale come riportato in tabella 6.1.



**Figura 6.15:** Raggi di perielio e afelio asteroide 2009 HC con  $t_0=176$  durata 25 e durata 22

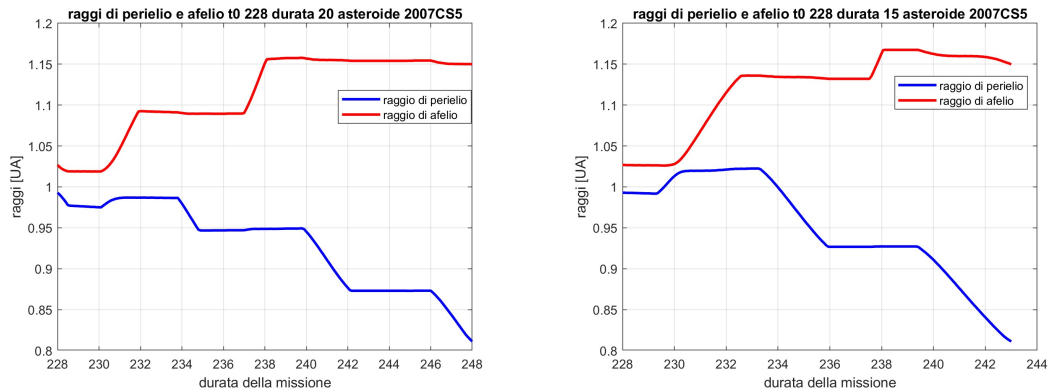
La seconda data di partenza analizzata è 12/6/2036, che corrisponde a  $t_0 = 229$ , con durate di 25, ossia circa 1453 giorni e di 22 ossia di circa 1279 giorni. Anche se questo  $\Delta\theta$  non rientra nel range ottimale definito precedentemente, si è deciso di considerare anche questa soluzione, poichè come si osserva dai raggi di afelio e perielio, questi hanno andamento quasi monotono ed il caso di durata 25 rispetto al caso di durata 22 ha in aggiunta un tempo di coasting dopo l'arrivo all'asteroide (caratterizzato da un tratto costante).



**Figura 6.16:** Raggi di perielio e afelio asteroide 2009 HC con  $t_0=229$  durata 25 e durata 22

### Asteroide 2007 CS5

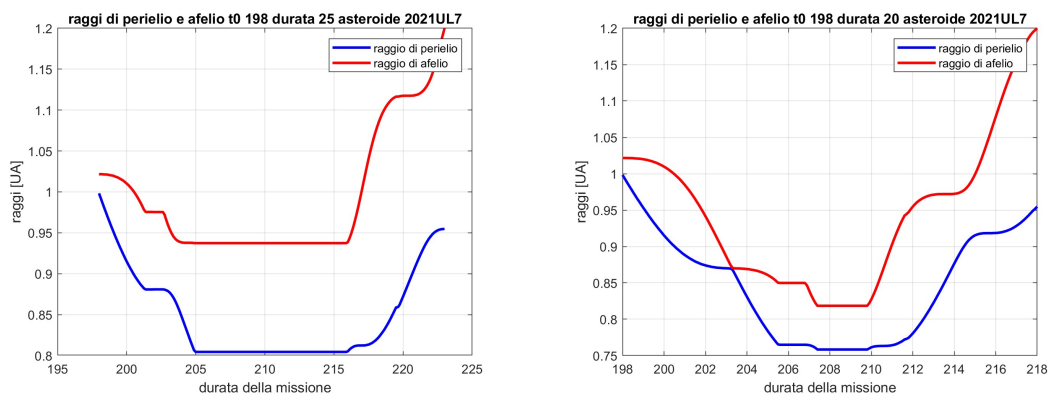
Per questo asteroide, la data presa in considerazione, coincidente con  $t_0 = 228$  è 15/4/2036, e le due missioni che si voglio confrontare hanno durate di 20, ossia 1163 giorni circa, e di 15 ossia 872 giorni circa. Anche in questo caso si è scelta la data di partenza corrispondente al fasamento migliore tra Terra e asteroide alla partenza pari a  $\Delta\theta = -47.392 \text{ deg}$ .



**Figura 6.17:** Raggi di perielio e afelio asteroide 2007 CS5 con  $t_0=228$  durata 20 e durata 15

### Asteroide 2021 UL7

In quest'ultimo caso, la data di partenza considerata corrisponde ad un  $t_0 = 198$ , ed è 7/7/2031, con due durate di 25 e di 20, ossia 1453 e 1163 e giorni. Questa data è stata selezionata poichè corrispondente ad un  $\Delta\theta = 7.1629 \text{ deg}$ .



**Figura 6.18:** Raggi di perielio e afelio asteroide 2021 UL7 con  $t_0=198$  durata 25 e durata 20



I raggi di afelio e perielio sono un primo indice per poter analizzare la fattibilità della missione in quanto un loro andamento *monotono* per entrambi crescente o decrescente, oppure quando uno cresce e l'altro decresce, suggerisce se la missione è ottimizzata in termini di consumi. Come si può chiaramente osservare dai grafici riportati, in tutte le situazioni analizzate, la missione verso i NEAs migliora in caso di durate maggiori, poichè le due curve assumono un andamento più monotono e simile tra loro, poichè si ha il tempo necessario per migliorare il fasamento con l'asteroide. Si vuole osservare anche la particolarità della soluzione a 229 per l'asteroide 2009 HC, infatti, la seconda finestra di lancio considerata per questo asteroide rappresenta un caso peculiare che non ci si aspetterebbe a causa del suo  $\Delta\theta$ , tuttavia, si vede dall'andamento monotono dei due raggi che si riesce a recuperare il fasamento tra Terra e asteroide, il che assicura anche in questo caso una soluzione ottimale. In ultima istanza, accettare dei tempi di missione più lunghi fa sì che il consumo di propellente sia contenuto, e la massa finale del satellite al rendez-vous sia maggiore.

### 6.3.4 Grafici delle traiettorie

Infine, sono state calcolate le traiettorie tenendo fisse le condizioni di uscita dalla sfera di influenza terrestre pari a  $d = 0.1$   $\alpha = 90 \text{ deg}$   $\delta = 0 \text{ deg}$ , di cui vengono riportati i grafici corrispondenti alle date di partenza scelte con la durata maggiore di missione, per tutti e tre gli asteroidi, sia bidimensionali che in 3D in cui l'asse z non è in scala per poter visualizzare meglio la necessità di un cambio di piano.

#### Asteroide 2009 HC: $t_0=173$

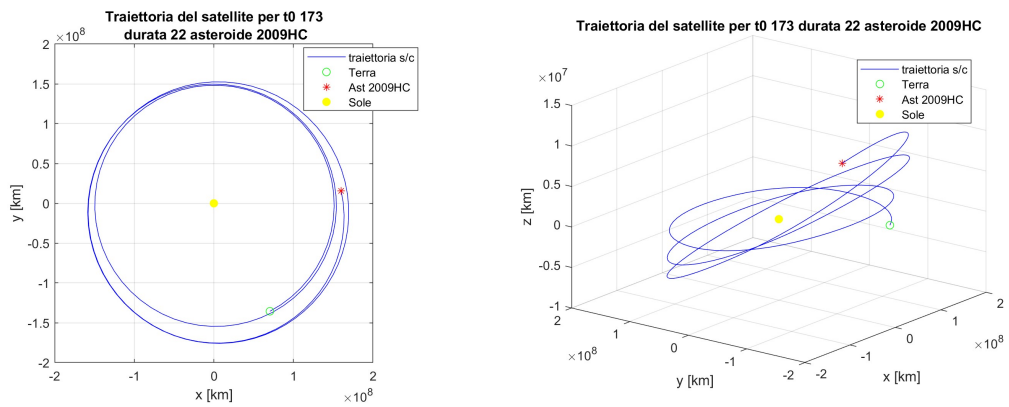


Figura 6.19: Traiettorie per 2009 HC con  $t_0=173$  e durata 22

#### Asteroide 2009 HC: $t_0=229$

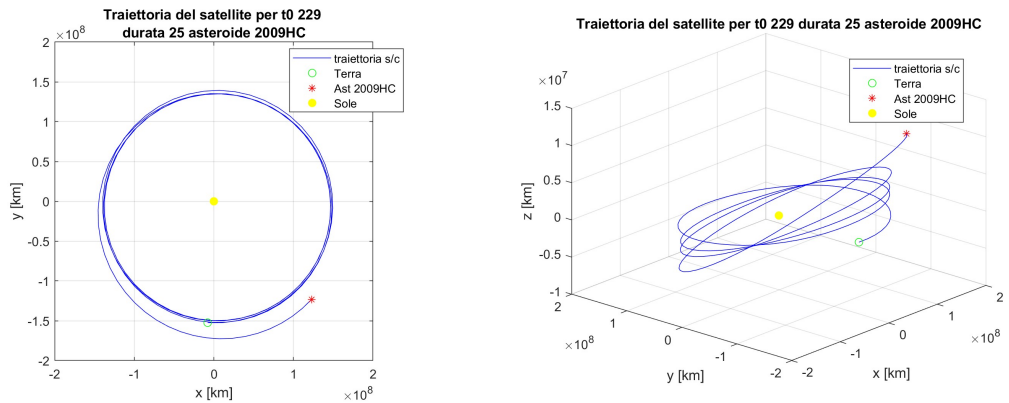


Figura 6.20: Traiettorie per 2009 HC con  $t_0=229$  e durata 25

### Asteroide 2007 CS5

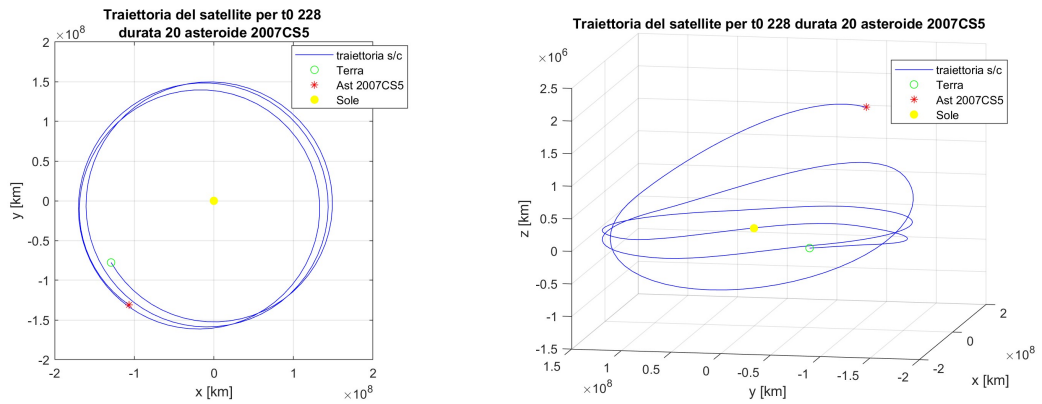


Figura 6.21: Traiettorie per 2007 CS5 con  $t_0=228$  e durata 20

### Asteroide 2021 UL7

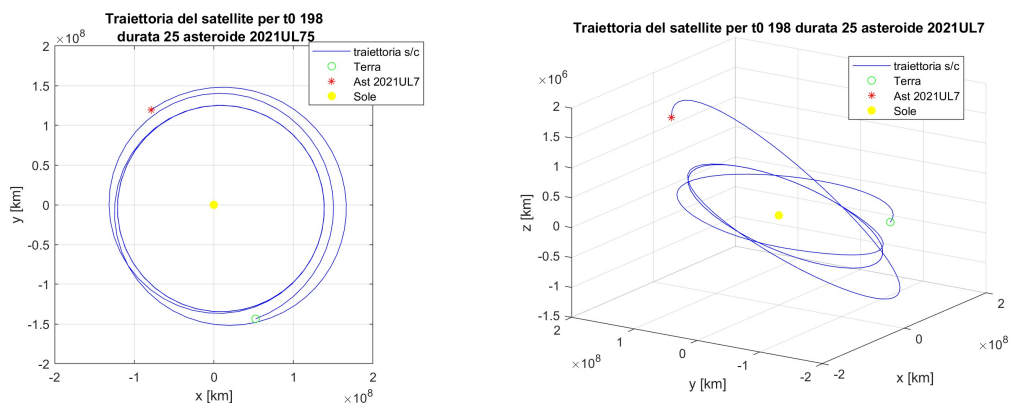


Figura 6.22: Traiettorie per 2021 UL7 con  $t_0=198$  e durata 25

Si evince che quando si ha un fasamento migliore, il satellite fa meno orbite prima di poter arrivare all'asteroide, nei casi ottimizzati si nota che siano pari a 4 o minori, quindi il  $\Delta V$  è minore ed il consumo più basso, come si può notare sia dai grafici della traiettoria, che dalle tabelle 6.1, 6.3 e 6.5.

Anche dal grafico della traiettoria, si nota come si sia trovata una traiettoria ottimale inaspettata per la seconda finestra di lancio per l'asteroide 2009 HC, come è stato spiegato precedentemente tramite i grafici dei raggi di afelio e perielio.

Inoltre, si vede che per durate di missione maggiori, si ha più tempo per migliorare il  $\Delta\theta$ , per cui anche la traiettoria migliora.

### 6.3.5 Ricerca di altre date di partenza

Per ultimare questo studio, si è voluto fare un ultimo approfondimento sulla ricerca delle date di partenza per le trasferte verso gli asteroidi:

il  $\Delta\theta$  è stato valutato come  $\Delta\theta = \theta_{asteroide}(t_0) - \theta_{terra}(t_0)$  quindi prendendo in considerazione i due angoli al tempo iniziale, e facendo l'approssimazione che il satellite abbia la stessa velocità angolare della Terra alla partenza e la stessa velocità angolare dell'asteroide al tempo finale. Tuttavia, se si considera invece il fatto che lo spacecraft viaggi in realtà con una velocità angolare che è la media tra quella alla partenza e quella all'arrivo, si è pensato che potesse essere utile andare a valutare una traiettoria che avesse la condizione di  $\Delta\theta$  vicino allo 0 o 360 *deg* a metà trasferta, invece che a  $t_0$  iniziale.

Quindi, considerando un  $\Delta\theta(t)$  prossimo allo 0, si è calcolata la nuova data di partenza:

$$t_0 = t - \frac{durata}{2}$$

### Asteroide 2009 HC

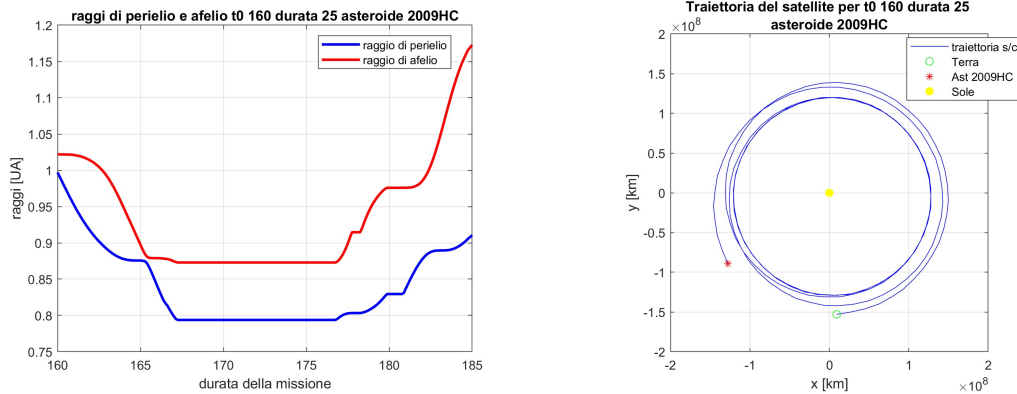
In questo caso, si è osservato da 6.2, che il  $\Delta\theta$  assume valore massimo attorno a  $t = 171$  con  $durata = 22$ , per cui si è analizzata come nuova data di partenza:

$$t_0 = 171 - 11 = 160$$

si riportano i risultati per questa traiettoria:

durata	massa iniziale	t0	mf	consumo	consumo percentuale
25	0.6	160	0.4279	0.1721	28.68333333
22	0.6	160	0.3701	0.2299	38.31666667
20	0.6	160	0.3315	0.2685	44.75

**Tabella 6.7:** Nuova data di partenza per 2009 HC



In questo caso, si evidenzia che le trasferte calcolate presentano dei consumi superiori rispetto a quelle trovate precedentemente come mostrato in tabella 6.1, per cui per l'asteroide 2009 HC questo criterio adottato non risulta particolarmente efficace.

### Asteroide 2021 UL7

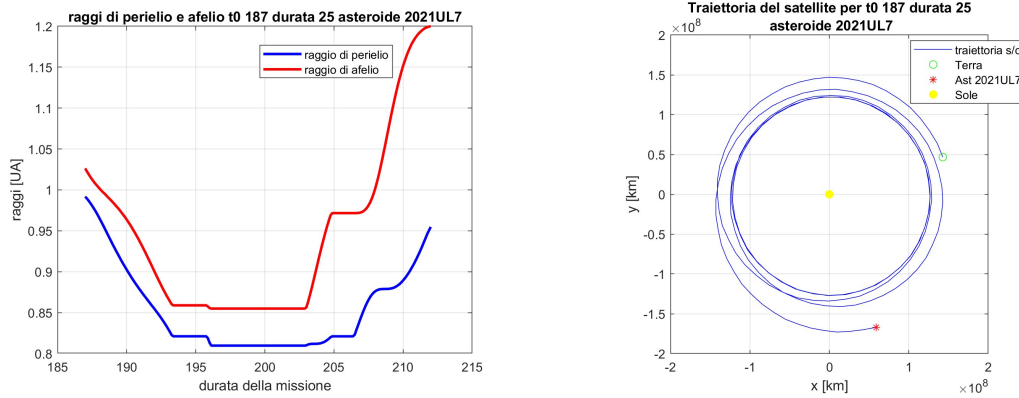
Per questo asteroide, invece, il  $\Delta\theta$  ottimale si ha intorno a  $t = 198$  con durata 22, da cui si è ricavato:

$$t_0 = 198 - 11 = 187$$

si riportano i risultati:

durata	massa iniziale	t0	mf	consumo	consumo percentuale
25	0.6	187	0.4296	0.1704	28.4
22	0.6	187	0.3727	0.2273	37.88333333

**Tabella 6.8:** Nuova data di partenza per 2021 UL7



Per l'asteroide 2021 UL7, i risultati ottenuti sono paragonabili a quelli ottenuti precedentemente prendendo come data di partenza quella relativa ad un  $\Delta\theta(t_0)$  prossimo allo zero al tempo iniziale, come mostrato in tabella 6.5, per cui varrebbe la pena approfondire questo metodo in studi successivi.

# Capitolo 7

## Conclusioni

Il lavoro presentato ha raggiunto l'obiettivo di individuare delle traiettorie dirette verso gli asteroidi Near Earth 2009 HC, 2007 CS5 e 2021 UL7, considerati come alternativa all'asteroide 2000 SG344 preso in considerazione dalla missione *ANIME* per un rendez-vous nel 2028.

L'analisi è stata svolta tramite un algoritmo numerico basato sulla Teoria del Controllo Ottimale, implementata con metodo indiretto che ha permesso di ottimizzare delle traiettorie verso questi asteroidi in una finestra temporale che va dal 21/1/2027 al 9/8/2036.

Delle traiettorie individuate si è andati a fare uno studio sulla durata di missione, partendo da un massimo tempo di volo di 1453 giorni, ad un minimo di 698 giorni, tenendo fisse le condizioni di uscita dalla sfera di influenza terrestre e la massa iniziale del satellite, durante la sola la fase eliocentrica della missione interplanetaria, senza tenere in considerazione le fasi di escape dalla Terra e quella di approccio con l'asteroide di arrivo.

Di tutte le soluzioni trovate, si sono analizzate quelle che permettessero di ottenere la massima massa finale del satellite all'arrivo, corrispondenti ad un buon fasamento iniziale tra la Terra e l'asteroide. Quindi si è fatto riferimento alle traiettorie con durata maggiore, poichè queste permettono un notevole risparmio in termini di  $\Delta V$ , e di conseguenza dei costi di missione, a patto di accettare un tempo di volo più lungo.

In particolar modo:

- **Asteroide 2009 HC:** per questo asteroide sono state individuate due finestre di lancio, che hanno portato a due soluzioni differenti: la prima con data di partenza 14/7/2027, durata di 1273 giorni, e data di arrivo 13/1/2031, che presenta un  $\Delta V = 3.467 \text{ km/s}$ , ed un consumo percentuale del 15.5%. La seconda invece ha data di partenza 12/6/2036, durata di 1453 giorni e data di arrivo 4/6/2040, che presenta un  $\Delta V = 3.50405 \text{ km/s}$  ed un consumo

percentuale del 15.65%, e che si vuole ancora una volta ribadire che sia una soluzione particolare.

- **Asteroide 2007 CS5:** la data di lancio ottimale per questo asteroide corrisponde a 15/4/2036, con una durata di 1163 giorni e data di arrivo il 21/6/2039. A questa traiettoria corrisponde un  $\Delta V = 2.96629 \text{ km/s}$  ed un consumo percentuale del 13.416%.
- **Asteroide 2021 UL7:** in questo caso la data di partenza presa in esame è 7/7/2031, la durata di missione è di 1453 giorni, con arrivo il 29/6/2035. A questa missione corrisponde un  $\Delta V = 5.512105 \text{ km/s}$  ed un consumo percentuale del 23.483%.

In tutti e tre i casi, si può notare come i  $\Delta V$  raggiunti e di conseguenza i consumi, sono perfettamente in linea con lo stato dell'arte per le missioni interplanetarie che utilizzano la propulsione elettrica.

Si denota come la difficoltà di convergenza che caratterizza il metodo indiretto utilizzato, si rispecchi nell'aver individuato poche convergenze ed in corrispondenza di massimi o minimi del  $\Delta\theta$ , il che può rappresentare uno svantaggio per quanto riguarda la numerosità delle soluzioni, tuttavia fa sì che quelle trovate siano in concomitanza ad angoli di fasamento ottimali, il che assicura la massimizzazione della massa finale del satellite.

Inoltre, anche la durata di missione influisce sul consumo di propellente che aumenta per traiettorie più brevi, e poichè non è stato imposto alcun limite di tempo della missione per questo lavoro di tesi, si è pensato che le soluzioni di durata maggiore possano essere le più valide in termini di risparmio, ma anche utili per l'osservazione degli asteroidi considerati, per le ragioni di interesse scientifico e sicurezza planetaria evidenziate nel Capitolo 2.

Infine, si vuole sottolineare la difficoltà nell'individuazione di traiettorie verso quegli asteroidi che presentano un'alta inclinazione e/o eccentricità, come ad esempio il 2009 HC, per il quale infatti il costo maggiore è rappresentato dalle manovre di cambio di piano necessarie.

Si denota anche che si potrebbero trovare traiettorie ancora migliori se si decidesse di ritardare ulteriormente la data di partenza della missione, in quanto come si può osservare dai grafici 6.2 e 6.3, in particolare, il fasamento tra Terra e Asteroide tende a migliorare per finestre di lancio a partire dal 2040. Discorso differente per l'asteroide 2021 UL7, poichè presenta un  $\Delta\theta$  già ottimale dal 2030, e che va invece a peggiorare se si pensi ad una missione più tardiva.

Aspetti che potrebbero essere approfonditi con studi successivi per missioni verso gli asteroidi 2009 HC, 2007 CS5 e 2021 UL7 potrebbero comprendere :

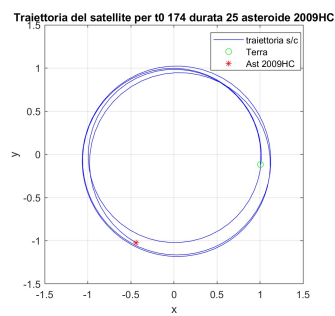
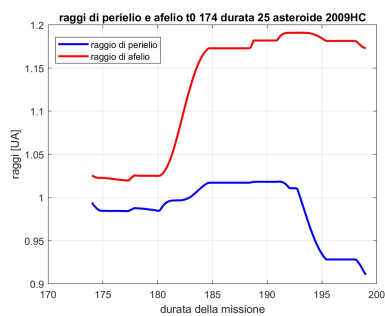
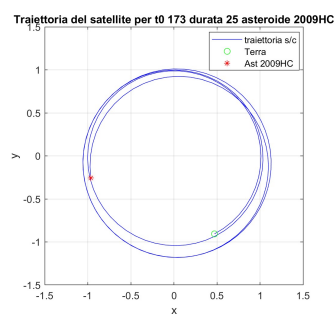
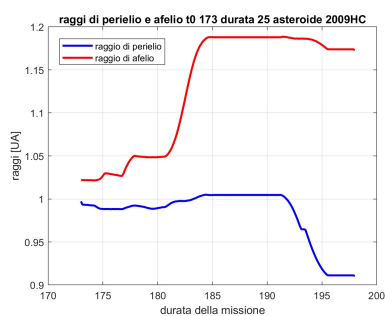


- una successiva iterazione che prenda in considerazione la velocità angolare effettiva del satellite, per la ricerca di nuove date di partenza, similmente a quanto illustrato nella sotto sezione 6.3.5;
- la riduzione ulteriore della durata di missione qualora ci siano requisiti più stringenti;
- considerare anche finestre di lancio successive a quelle individuate;
- la variazione delle condizioni di uscita dalla sfera di influenza terrestre, ad esempio riducendo la distanza dell'orbita di parcheggio di partenza, o cambiando la  $V_{inf}$  alla partenza.

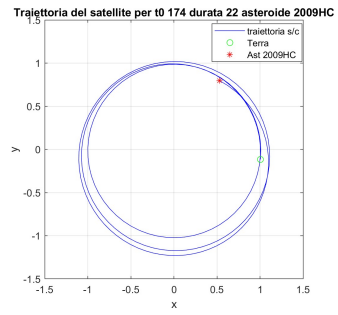
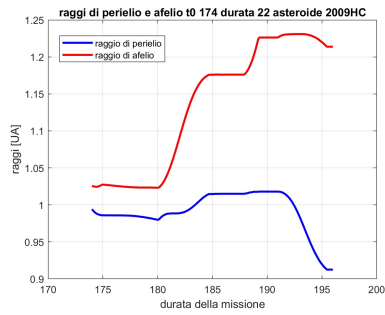
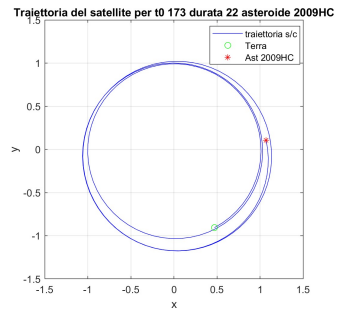
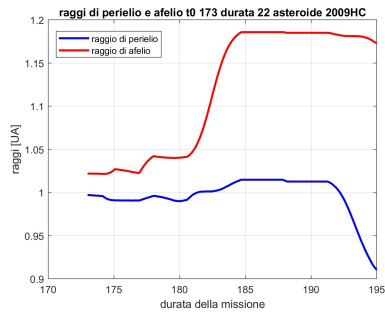
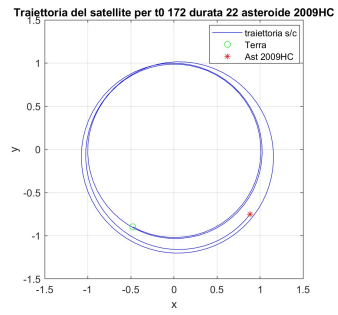
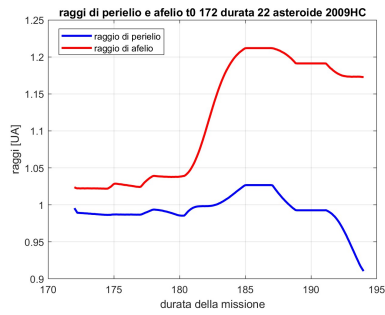
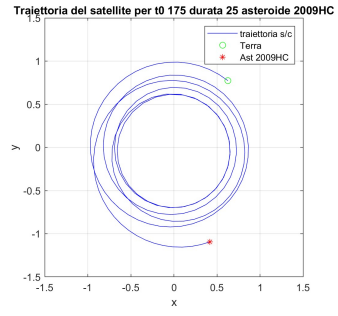
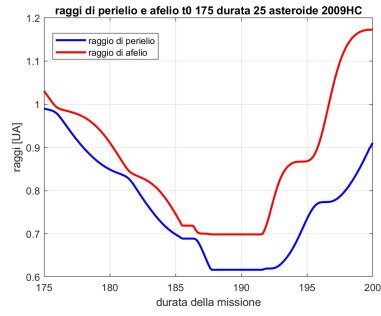
# Appendice A

## Altre traiettorie

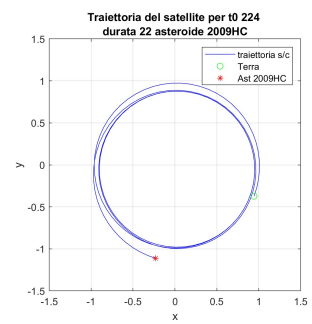
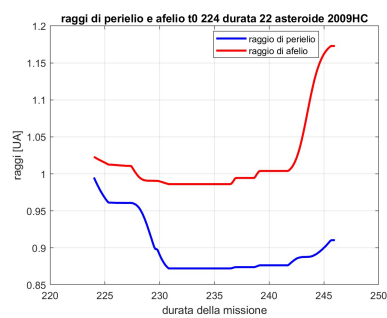
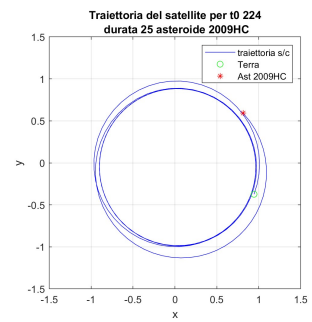
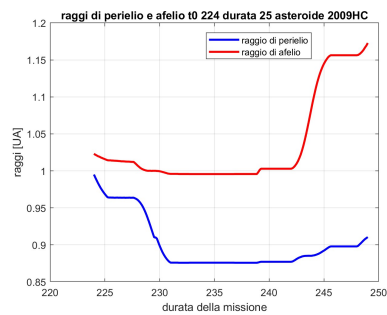
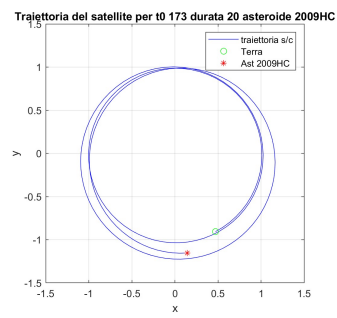
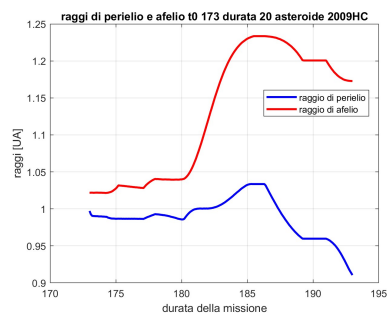
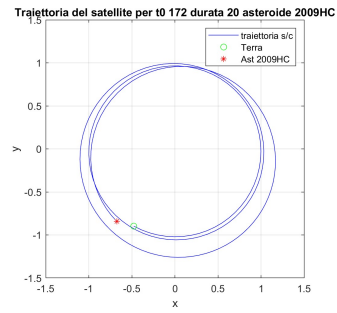
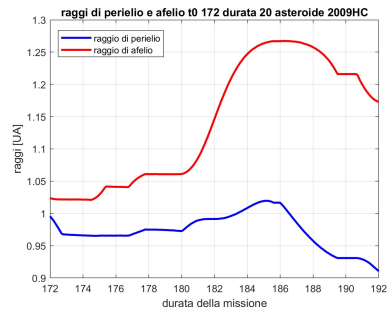
Si vogliono presentare gli ulteriori risultati ottenuti, presentati nelle tabelle 6.1, 6.3, 6.5, tramite i grafici dei raggi di perelio e afelio e e le traiettorie associate.



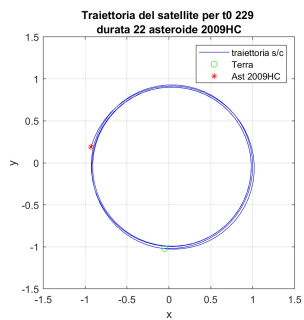
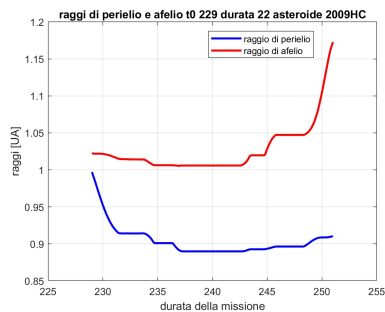
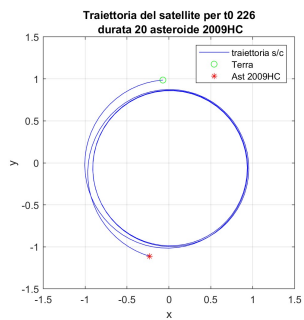
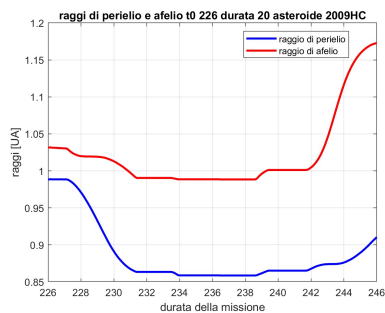
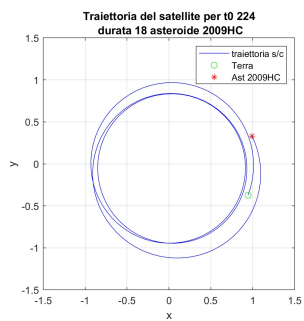
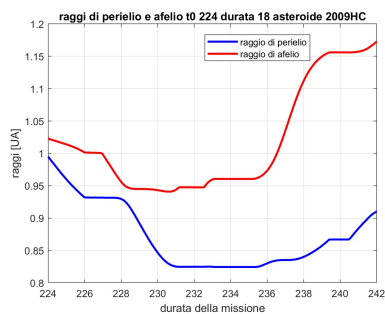
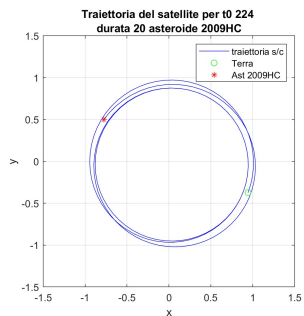
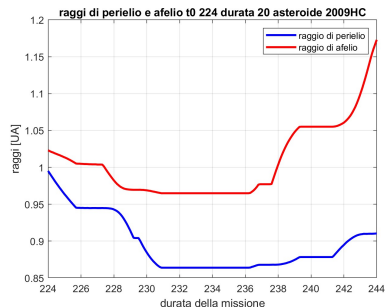
## Altre traiettorie



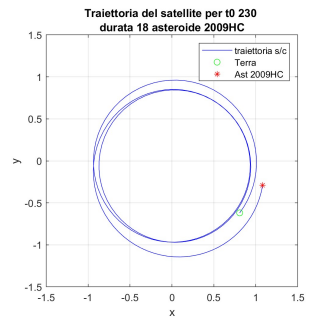
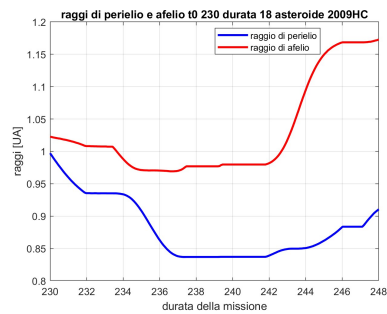
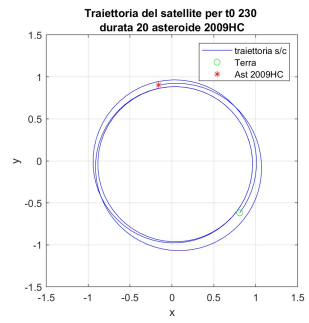
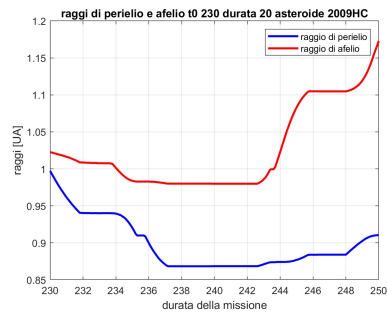
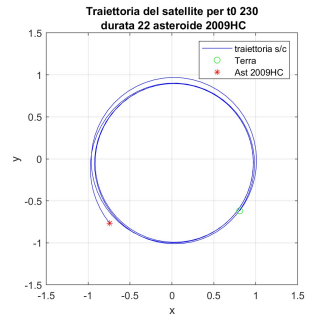
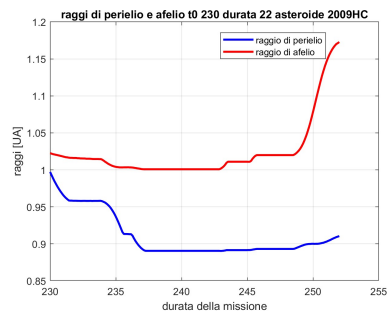
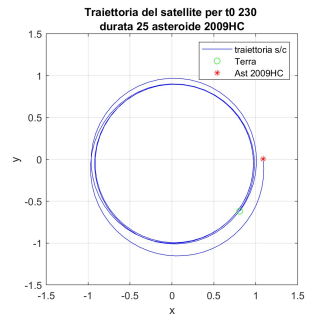
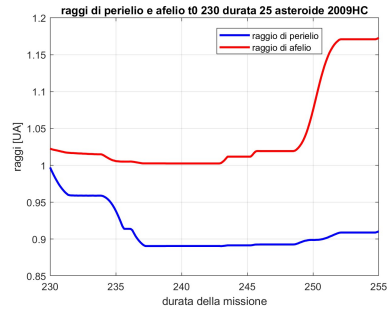
## Altre traiettorie



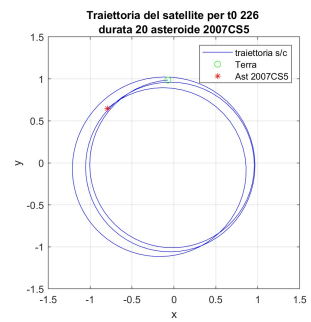
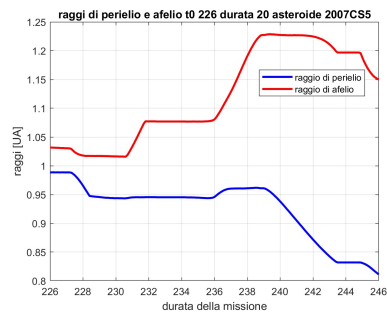
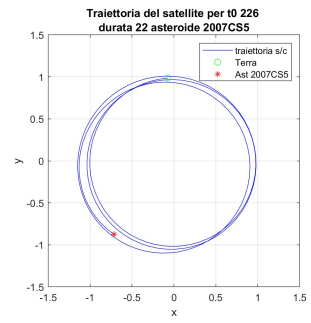
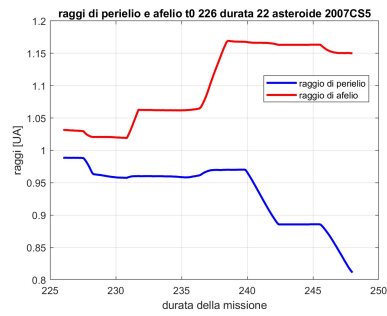
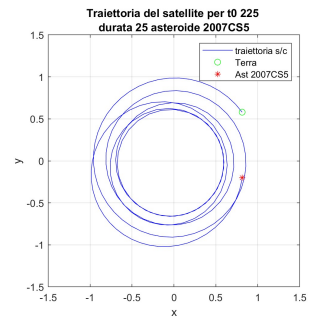
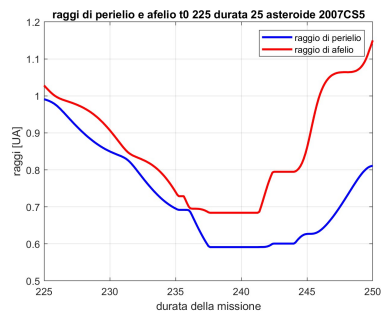
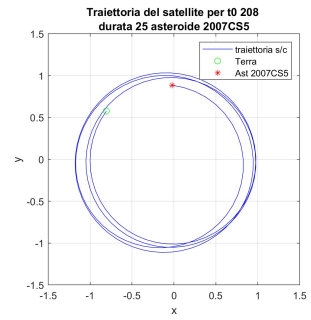
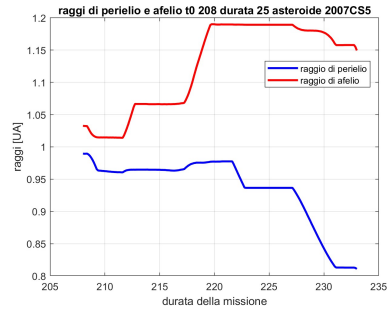
## Altre traiettorie



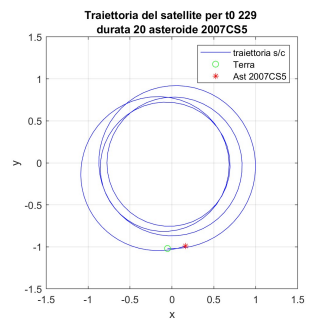
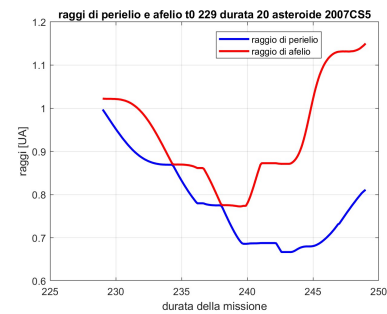
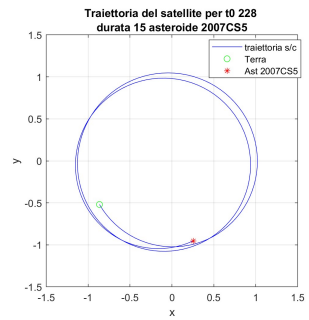
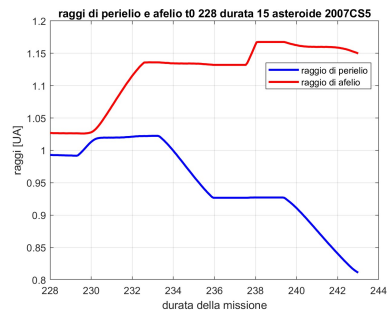
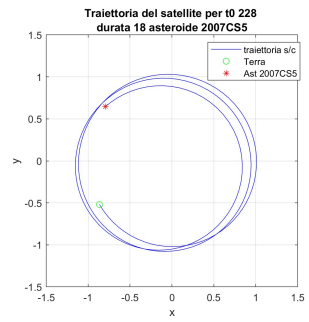
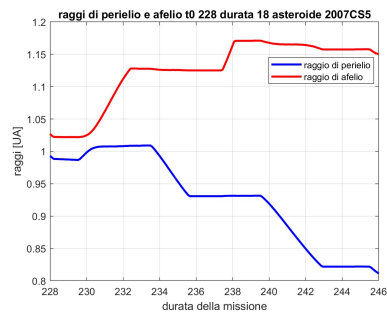
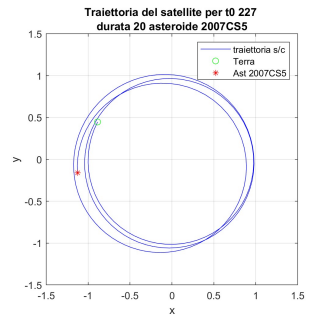
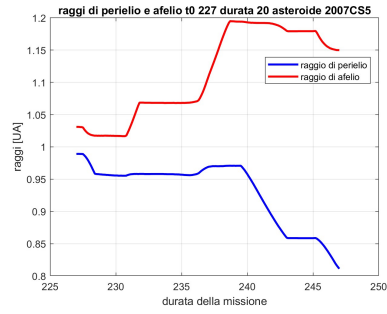
## Altre traiettorie



## Altre traiettorie

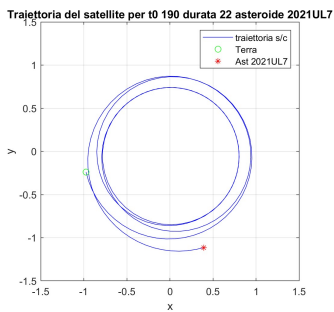
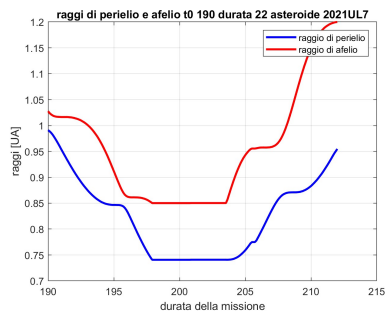
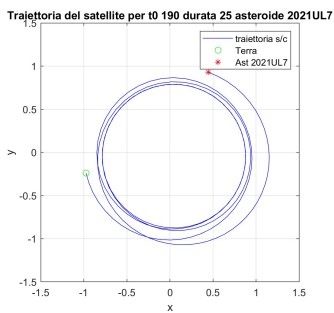
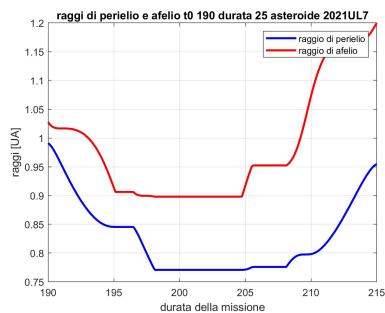
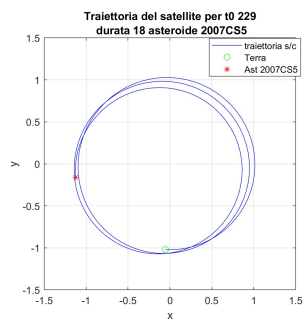
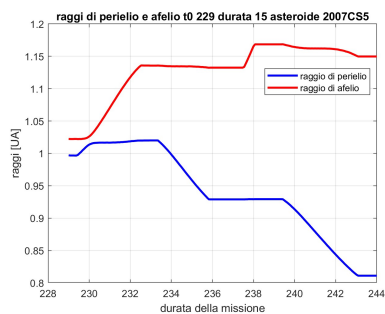
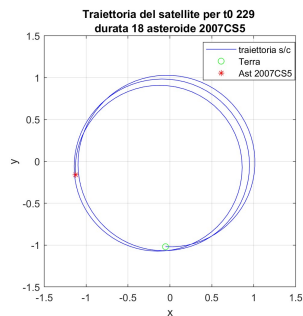
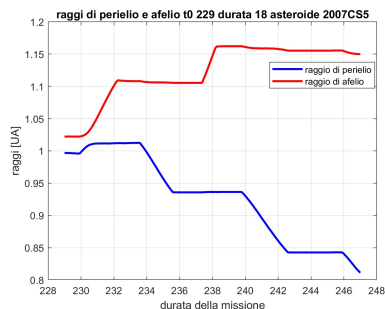


## Altre traiettorie

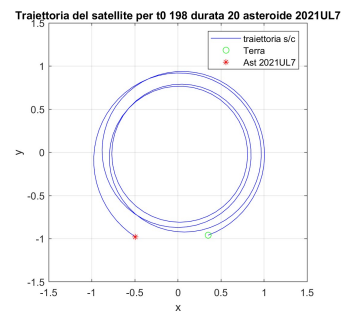
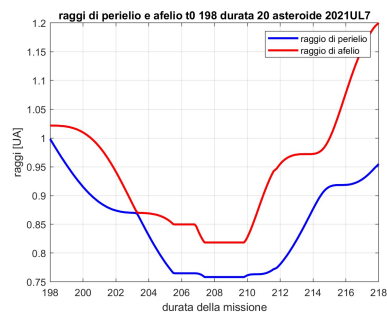
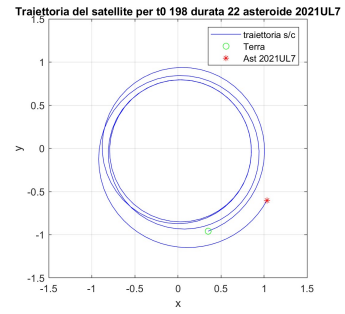
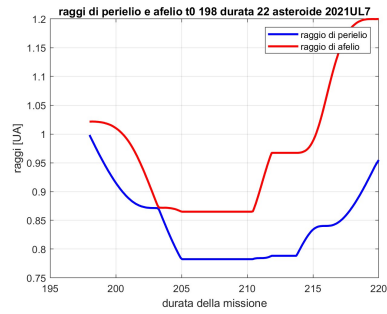




## Altre traiettorie



## Altre traiettorie



# Bibliografia

- [1] *Why Study Asteroids?* URL: [https://ssd.jpl.nasa.gov/sb/why\\_asteroids.html#:~:text=The%20scientific%20interest%20in%20asteroids,Earth's%20biosphere%20in%20the%20past](https://ssd.jpl.nasa.gov/sb/why_asteroids.html#:~:text=The%20scientific%20interest%20in%20asteroids,Earth's%20biosphere%20in%20the%20past). (cit. alle pp. ii, 14).
- [2] *Why asteroids matter - an industrial perspective.* URL: [https://www.esa.int/Space\\_Safety/Hera/Why\\_asteroids\\_matter\\_-\\_an\\_industrial\\_perspective#:~:text=Besides%20protecting%20our%20planet%20Earth,than%20even%20our%20own%20Moon](https://www.esa.int/Space_Safety/Hera/Why_asteroids_matter_-_an_industrial_perspective#:~:text=Besides%20protecting%20our%20planet%20Earth,than%20even%20our%20own%20Moon). (cit. alle pp. ii, 14).
- [3] «Spacecraft trajectory optimization: A review of models, objectives, approaches and solutions.» In: *Progress in Aerospace Sciences* (2018) (cit. alle pp. 1, 2, 57).
- [4] Lorenzo Casalino. «Ottimizzazione Indiretta di Traiettorie Spaziali». In: () (cit. alle pp. 1, 43, 49).
- [5] *Asteroid.* URL: <https://it.wikipedia.org/wiki/Asteroide%20>. (cit. a p. 5).
- [6] Lucy A. McFadden e Richard P. Binzel. «CHAPTER 14 - Near-Earth Objects», *Encyclopedia of the Solar System (Second Edition)*, Academic Press: Lucy-Ann McFadden, Paul R. Weissman, e Torrence V. Johnson. Second Edition. San Diego, 2007 (cit. alle pp. 6–9, 14).
- [7] *solar-system/asteroids/facts.* URL: <https://science.nasa.gov/solar-system/asteroids/facts/%20>. (cit. alle pp. 6, 7).
- [8] Al Morbidelli. *Origin and Evolution of Near Earth Asteroids.* Marov, M.Y., Rickman, H. (eds) Collisional Processes in the Solar System. Astrophysics e Space Science Library, vol 261. Springer, Dordrecht, 2001 (cit. alle pp. 7, 14).
- [9] *NEAs as of August 2024.* URL: <https://science.nasa.gov/science-research/planetary-science/planetary-defense/near-earth-asteroids/%20>. (cit. a p. 7).
- [10] *What are the NEO Groups?* URL: <https://catalina.lpl.arizona.edu/faq/what-are-neo-groups%20>. (cit. a p. 8).

- 
- [11] *Where Can We Find Asteroids and Comets*. URL: <https://letstalkscience.ca/educational-resources/backgrounders/where-can-we-find-asteroids-and-comets%20>. (cit. a p. 8).
- [12] *H (absolute magnitude)*. URL: <https://ssd.jpl.nasa.gov/glossary/h.html%20>. (cit. a p. 8).
- [13] *Keeping an Eye on Space Rocks*. URL: <https://www.jpl.nasa.gov/keeping-an-eye-on-space-rocks%20>. (cit. a p. 9).
- [14] *Near Earth Objects - Dynamic Site*. URL: <https://newton.spacedys.com/index.php?pc=4.1%20>. (cit. alle pp. 11–13).
- [15] *Small-Body Database Lookup*. URL: [https://ssd.jpl.nasa.gov/tools/sbdb\\_lookup.html#/?sstr=2009%20HC%20](https://ssd.jpl.nasa.gov/tools/sbdb_lookup.html#/?sstr=2009%20HC%20). (cit. a p. 11).
- [16] *Small-Body Database Lookup*. URL: [https://ssd.jpl.nasa.gov/tools/sbdb\\_lookup.html#/?sstr=2007%20CS5%20](https://ssd.jpl.nasa.gov/tools/sbdb_lookup.html#/?sstr=2007%20CS5%20). (cit. a p. 12).
- [17] *Small-Body Database Lookup*. URL: [https://ssd.jpl.nasa.gov/tools/sbdb\\_lookup.html#/?sstr=2021%20UL7%20](https://ssd.jpl.nasa.gov/tools/sbdb_lookup.html#/?sstr=2021%20UL7%20). (cit. alle pp. 13, 14).
- [18] *Oggetto near-Earth*. URL: [https://it.wikipedia.org/wiki/Oggetto\\_near-Earth%20](https://it.wikipedia.org/wiki/Oggetto_near-Earth%20). (cit. a p. 14).
- [19] Robert Jahn e Edgar Choueiri. «Electric Propulsion». In: *Encyclopedia of Physical Science and Technology* (pp.125-141) (dic. 2003) (cit. a p. 20).
- [20] *Leggi di Keplero*. URL: <https://www.sciencelearn.org.nz/images/277-kepler-s-laws%20>. (cit. a p. 26).
- [21] *Sistema Eliocentrico*. URL: [https://www.researchgate.net/figure/Fig-5-5-Heliocentric-Coordinate-System-XYZ\\_fig16\\_311486304%20](https://www.researchgate.net/figure/Fig-5-5-Heliocentric-Coordinate-System-XYZ_fig16_311486304%20). (cit. a p. 27).
- [22] *Sistema Geocentrico*. URL: <https://adcsforbeginners.wordpress.com/tag/earth-centred-inertial-frame/%20>. (cit. a p. 28).
- [23] *Sistema Perifocale*. URL: [https://en.wikipedia.org/wiki/Perifocal\\_coordinate\\_system#/media/File:Perifocal\\_coordinates.svg%20](https://en.wikipedia.org/wiki/Perifocal_coordinate_system#/media/File:Perifocal_coordinates.svg%20). (cit. a p. 29).
- [24] *Elementi orbitali classici*. URL: <https://adcsforbeginners.wordpress.com/tag/earth-centred-inertial-frame/%20>. (cit. a p. 30).
- [25] *Problema degli N-corpi*. URL: [https://www.researchgate.net/figure/The-N-body-problem\\_fig1\\_264840302%20](https://www.researchgate.net/figure/The-N-body-problem_fig1_264840302%20). (cit. a p. 31).
- [26] *Problema dei Due corpi*. URL: [https://www.researchgate.net/figure/Configuration-of-coordinates-of-the-two-body-problem\\_fig1\\_290444993%20](https://www.researchgate.net/figure/Configuration-of-coordinates-of-the-two-body-problem_fig1_290444993%20). (cit. a p. 32).

- [27] *Coniche*. URL: [https://theory.labster.com/it/conic\\_sections/](https://theory.labster.com/it/conic_sections/)%20. (cit. a p. 34).
- [28] *Sphere Of Influence*. URL: <https://orbital-mechanics.space/interplanetary-maneuvers/sphere-of-influence.html>%20. (cit. a p. 36).
- [29] *Missione Interplanetaria*. URL: <https://orbital-mechanics.space/interplanetary-maneuvers/sphere-of-influence.html>%20. (cit. a p. 37).
- [30] *Cambio di piano*. URL: <https://oer.pressbooks.pub/lynnanegeorge/chapter/chapter-7-manuvering/>%20. (cit. a p. 38).
- [31] *Aggiustamento degli apsi*. URL: [https://en.wikipedia.org/wiki/Apsis#/media/File:Periapsis\\_apoapsis.png](https://en.wikipedia.org/wiki/Apsis#/media/File:Periapsis_apoapsis.png)%20. (cit. a p. 39).
- [32] *Rotazione della linea degli apsi*. URL: [https://www.researchgate.net/figure/Schematic-view-of-space-orbit-apse-line-rotation\\_fig1\\_318295420](https://www.researchgate.net/figure/Schematic-view-of-space-orbit-apse-line-rotation_fig1_318295420)%20. (cit. a p. 40).
- [33] *Trasferta di Hohmann*. URL: <https://www.sciencedirect.com/topics/engineering/coplanar-circular-orbit>%20. (cit. a p. 41).
- [34] Lorenzo Casalino. «Equazioni in coordinate sferiche». In: () (cit. alle pp. 52, 53).
- [35] «Indirect Optimization of a Satellite Deployment into a Highly Elliptic Orbit». In: *International Journal of Aerospace Engineering* (2012) (cit. a p. 52).
- [36] *Sistema di riferimento ENU*. URL: [https://oer.pressbooks.pub/lynnanegeorge/chapter/copy-of-chapter-4\\_\\_editing/](https://oer.pressbooks.pub/lynnanegeorge/chapter/copy-of-chapter-4__editing/)%20. (cit. a p. 54).