

POLITECNICO DI TORINO



Corso di Laurea Magistrale in Ingegneria Aerospaziale
Orientamento Spazio

Ottimizzazione di traiettorie di escape dal punto Lagrangiano L_1 del sistema Terra-Sole con propulsione elettrica

Relatore
Prof. Lorenzo Casalino

Candidato
Federica M. G. Carollo

Ottobre 2024

*“Dichiaro solennemente di non saperne nulla, ma dico che la vista delle stelle
mi fa sognare, e mi dico: perché i punti luminosi del firmamento dovrebbero
esserci meno accessibili che i punti neri della carta di Francia?”*
Vincent van Gogh

Ringraziamenti

Vorrei ringraziare il Professor Lorenzo Casalino per la disponibilità e la comprensione dimostrata nel corso di questi mesi di lavoro e soprattutto per aver trasmesso a noi studenti la passione per le sue discipline.

Vorrei poi ringraziare mia madre e mio padre, grazie per il vostro esempio e soprattutto grazie per la fiducia che avete riposto in me.

Un ringraziamento speciale va poi a tutti i miei amici per essere stati sempre presenti, nonostante le distanze.

Sommario

Questa tesi si concentra sull'ottimizzazione delle traiettorie di evasione dal punto lagrangiano L_1 del sistema Terra-Sole (SEL1). I punti lagrangiani sono diventati molto importanti nel contesto delle missioni spaziali, rappresentano la soluzione del problema dei tre corpi e sono delle posizioni di equilibrio in cui due corpi primari, permettono ad un terzo corpo, di massa inferiore, di rimanere in equilibrio rispetto ad essi. Il punto L_1 , si trova sull'asse immaginario che collega i due corpi, ovvero Terra e Sole, ad una distanza di circa 1.5 milioni di km dalla Terra, in direzione del Sole. È un punto che suscita particolare interesse grazie alla sua posizione strategica che permette un monitoraggio continuo del Sole e una stabilità relativa per i satelliti che vi sono posizionati. La caratteristica principale di questi punti è quella di richiedere dei costi minimi in termini di consumi per il mantenimento dell'orbita e, inoltre, fungono da punto di partenza ideale per missioni interplanetarie. In questo contesto, la tesi ha come obiettivo individuare traiettorie ottimali per una manovra di evasione per un satellite a propulsione elettrica, con partenza da questo punto, tramite metodi di ottimizzazione indiretti basati sulla teoria del controllo ottimale, quindi, individuare le traiettorie ottimali in termini di consumi di propellente, considerando la variazione della data di partenza e la variazione della durata della missione. Per condurre l'analisi, è stato utilizzato un codice in Fortran f90 che simula il modello dinamico del sistema, considerando le forze gravitazionali esercitate da quattro corpi principali: la Terra, la Luna, il Sole e il satellite stesso, in particolare si prendono in considerazione gli effetti della perturbazione lunisolare e della perturbazione legata alla pressione di radiazione solare. Le posizioni di questi corpi sono state determinate utilizzando le effemeridi fornite dal Jet Propulsion Laboratory (JPL), garantendo così un'accurata rappresentazione delle condizioni gravitazionali reali.

Indice

Indice	VII
Elenco delle figure	X
Elenco delle tabelle	XIII
1 Introduzione	1
1.1 Missioni spaziali nei punti Lagrangiani	1
1.1.1 Missioni spaziali verso SEL1	2
1.2 Codice Fortran	5
1.3 Overview	7
2 Meccanica del volo spaziale	8
2.1 Sistemi di Riferimento	8
2.1.1 Sistema di riferimento Eliocentrico	9
2.1.2 Sistema di riferimento Geocentrico equatoriale	10
2.1.3 Sistema di riferimento Topocentrico	11
2.1.4 Sistema di riferimento Perifocale	12
2.2 Parametri orbitali	12
2.3 Problema degli N-corpi	14
2.4 Problema dei 2 corpi	15
2.4.1 Costanti del moto	17
2.4.2 Sfera di Influenza	18
2.4.3 Velocità di Escape	19
2.4.4 Eccesso iperbolico di velocità	20

2.5	Problema dei 3 corpi	20
2.5.1	Equazione del moto	22
2.5.2	Punti Lagrangiani	25
2.5.3	Costanti di Jacobi e superfici a zero velocità	29
2.6	Missioni interplanetarie	30
2.6.1	Manovre di Escape	32
3	Generalità della propulsione spaziale	34
3.0.1	Parametri di performance	36
3.1	Equazione del razzo di Tsiolkovsky	37
3.2	Propulsori elettrici	38
3.2.1	Propulsione elettrotermica	38
3.2.2	Propulsione elettrostatica	42
3.2.3	Propulsione elettromagnetica	44
3.3	Differenze tra propulsione chimica ed elettrica	47
4	Ottimizzazione di traiettorie	48
4.1	Metodi di ottimizzazione	49
4.2	Teoria del controllo ottimale	50
4.3	Problema differenziale ai limiti	56
5	Problema dinamico	61
5.1	Modello dinamico	61
5.1.1	Perturbazioni	66
5.2	Applicazione della Teoria del Controllo Ottimale al modello di- namico	73
5.2.1	Condizioni al contorno	74
5.2.2	Condizioni al contorno di ottimo	75
6	Risultati	76
6.1	Presentazione dei casi di studio	76
6.2	Escape con data di partenza t_0 fissata	83
6.3	Escape con durata fissata	89
6.4	Valutazione degli angoli di spinta	90
6.4.1	Angolo fuori dal piano β	91

6.4.2	Direzione di spinta nel piano α	92
6.5	Influenza della Luna	95
7	Conclusioni	97
A	Angoli di spinta	100
A.1	Direzione di spinta nel piano	100
	Bibliografia	103

Elenco delle figure

1.1	Illustrazione dello spacecraft Wind ¹⁹	3
1.2	Illustrazione del telescopio SOHO ¹⁸	3
1.3	Illustrazione dello spacecraft ACE ¹⁶	4
1.4	Illustrazione del Deep Space Climate Observatory ¹⁷	4
1.5	Illustrazione dello spacecraft LISA Pathfinder ⁴	5
2.1	Sistema di riferimento EME2000 $\{\hat{I}, \hat{J}, \hat{K}\}$, Perifocale $\{\hat{p}_{sc}, \hat{q}_{sc}, \hat{w}_{sc}\}$ e Topocentrico $\{\hat{u}, \hat{v}, \hat{w}\}$ 15	9
2.2	Sistema di riferimento Eliocentrico-Eclittica ¹⁰	10
2.3	Sistema di riferimento Geocentrico equatoriale (EME2000) ⁶	11
2.4	Sistema di riferimento Topocentrico ¹⁵	11
2.5	Sistema di riferimento Perifocale ²³	12
2.6	Parametri orbitali ⁶	13
2.7	Rappresentazione della legge di gravitazione universale ⁶	14
2.8	Problema degli N-corpi ⁶	15
2.9	Problema dei 2 corpi ⁶	16
2.10	Parametro μ al variare del corpo ⁶	17
2.11	Andamento dell'energia cinetica, potenziale e totale ⁶	18
2.12	Momento angolare ⁶	18
2.13	Sfere di influenza della Terra e di Marte ⁶	19
2.14	Problema dei 3 corpi ⁶	21
2.15	Orbita Lissajous della missione Artemis ²⁰	25
2.16	Punti collineari ⁶	26
2.17	Punti Lagrangiani nel sistema Terra-Sole ²⁵	28
2.18	Fasi di una missione interplanetaria ⁶	31

2.19	Manovra di Escape ⁶	33
2.20	Confronto tra escape a uno e due impulsi ⁹	33
3.1	Modello generale di un propulsore elettrotermico ⁹	39
3.2	Modello di un resistojet ⁹	40
3.3	Schema di un arcojet ⁹	41
3.4	Instabilità di tipo sausage e di tipo kink ⁹	41
3.5	Schema di un propulsore a ioni ²	42
3.6	Schema di un propulsore ad effetto Hall ²⁴	43
3.7	Schema di un propulsore VASIMR ⁹	44
3.8	Schema di un MPD self-field ¹³	45
3.9	Schema di un MPD applied-field ¹²	46
5.1	Sistemi di riferimento EME2000 e topocentrico ¹¹	63
5.2	Modello di campo gravitazionale EGM2008 ⁷	67
5.3	Rappresentazione delle perturbazioni ¹¹	69
6.1	Andamento dell'arco propulsivo in funzione della durata di missione	79
6.2	Massa finale [kg] all'escape in funzione della durata	80
6.3	Energia finale km^2/s^2 all'escape in funzione della durata	82
6.4	Relazione tra C_3 e posizione della Luna	82
6.5	Escape da SEL1 per $t_0 = 186$	83
6.6	Escape da SEL1 per $t_0 = 186$	83
6.7	Escape da SEL1 per $t_0 = 189$	84
6.8	Escape da SEL1 per $t_0 = 189$	84
6.9	Escape da SEL1 per $t_0 = 192$	84
6.10	Escape da SEL1 per $t_0 = 192$	84
6.11	Zoom escape in 150 giorni	85
6.12	Zoom escape in 180 giorni	85
6.13	Zoom escape in 210 giorni	85
6.14	Zoom escape in 150 giorni	86
6.15	Zoom escape in 180 giorni	86
6.16	Zoom escape in 210 giorni	86
6.17	Zoom escape in 150 giorni	87
6.18	Zoom escape in 180 giorni	87

6.19	Zoom escape in 210 giorni	87
6.20	Durata di 75 giorni	88
6.21	Durata 90 giorni	88
6.22	Durata 105 giorni	88
6.23	Escape con durate inferiori a 120 giorni	89
6.24	Escape con durate superiori a 120 giorni	89
6.25	Escape da SEL1 in 90 giorni	90
6.26	Escape da SEL1 in 150 giorni	90
6.27	Escape da SEL1 in 180 giorni	90
6.28	Escape da SEL1 in 210 giorni	90
6.29	Angolo β per $t_0 = 186$ e durata 75 giorni	91
6.30	Angolo β per $t_0 = 186$ e durata 90 giorni	91
6.31	Angolo β per $t_0 = 186$ e durata 105 giorni	91
6.32	Angolo α (75 giorni)	92
6.33	Angolo α (120 giorni)	92
6.34	Angolo α (165 giorni)	93
6.35	Angolo α (210 giorni)	93
6.36	Angolo $\alpha(t)$ (75 giorni)	93
6.37	Angolo $\alpha(t)$ (120 giorni)	93
6.38	Angolo $\alpha(t)$ (165 giorni)	94
6.39	Angolo $\alpha(t)$ (210 giorni)	94
6.40	Posizione della luna per $t_0 = 186^{22}$	95
6.41	Posizione della luna per $t_0 = 189^{22}$	95
6.42	Posizione della luna per $t_0 = 192^{22}$	96
6.43	Posizione relativa della luna per 75, 90 e 105 giorni	96
A.1	Angolo α per $t_0 = 189$ e durata 75 giorni	100
A.2	Angolo α per $t_0 = 189$ e durata 120 giorni	100
A.3	Angolo α per $t_0 = 189$ e durata 165 giorni	101
A.4	Angolo α per $t_0 = 189$ e durata 210 giorni	101
A.5	Angolo α per $t_0 = 192$ e durata 75 giorni	101
A.6	Angolo α per $t_0 = 192$ e durata 120 giorni	101
A.7	Angolo α per $t_0 = 192$ e durata 165 giorni	102
A.8	Angolo α per $t_0 = 192$ e durata 210 giorni	102

Elenco delle tabelle

2.1	Posizione dei punti Lagrangiani e costanti di Jacobi in un sistema Terra-Sole	30
6.1	Tempo usato per la data di partenza	77
6.2	Durata della fase propulsa in giorni	78
6.3	Date di partenza considerate per i grafici	79
6.4	Masse finali all'escape	80
6.5	Energia finale all'escape	81

Capitolo 1

Introduzione

1.1 Missioni spaziali nei punti Lagrangiani

Le missioni spaziali verso i punti lagrangiani rappresentano un aspetto cruciale dell'esplorazione spaziale e dell'osservazione dell'universo. I punti lagrangiani rappresentano posizioni stabili nello spazio, quindi offrono opportunità uniche per posizionare satelliti e telescopi. Grazie alla stabilità dinamica di questi punti, è possibile mantenere osservatori in posizioni relativamente fisse rispetto alla Terra e al Sole, consentendo missioni a lungo termine. Dal punto di vista scientifico, i punti L_1 e L_2 forniscono delle postazioni di stazionamento perfetti per osservare sia i pianeti che lo spazio profondo, riuscendo, in questo modo, a indagare porzioni dello spazio altrimenti inaccessibili³.

I sistemi che sono di maggior interesse in ambito scientifico sono:

- Sistema Terra-Sole
- Sistema Terra-Luna

I punti L_1 risultano particolarmente interessanti nell'evoluzione di un sistema binario di stelle. Infatti, attraverso L_1 , la materia può fluire da un corpo all'altro. In natura, alcuni dei più violenti fenomeni dell'Universo, come ad esempio le esplosioni delle supernove di tipo I, sono causati proprio da un trasferimento di materia simile¹.

Se si considera, un'orbita intorno a L_1 del sistema Terra-Sole, un satellite stazio-

nato in quella regione sarà costantemente illuminato dal Sole e la sua distanza dalla Terra resterà quasi invariata, favorendo le comunicazioni.

In corrispondenza di SEL1 si trovano, infatti, il telescopio SOHO (*Solar and Heliospheric Observatory*) ed il satellite ACE (*Advanced Composition Explorer*), per lo studio del Sole, della sua corona, del campo magnetico, del vento solare ed altre caratteristiche.

Il punto lagrangiano L_2 nello stesso sistema, invece, è di notevole importanza poichè è in grado di fornire un ambiente termico stabile con regioni di ombra terrestre (o lunare) minime.

Guardando, invece al sistema Terra-Luna, L_1 e L_2 risultano le regioni più favorevoli alle missioni di studio dei campi magnetici ed elettrici. Attorno a questi punti, poi, le orbite che si percorrono, presentano delle importanti componenti fuori dal piano che permettono un'ottima osservazione delle zone polari di entrambi i corpi primari.

Nel seguente studio si porrà l'attenzione verso il punto Lagrangiano L_1 nel sistema Terra-Sole.

1.1.1 Missioni spaziali verso SEL1

Il punto SEL1 si trova a circa 1.5 milioni di km dalla Terra in direzione del Sole. Tra le più importanti missioni verso tale punto si ricordano, in ordine cronologico:

- Wind (1994)
- SOHO (Solar and Heliospheric Observatory) (1995)
- ACE (Advanced Composition Explorer) (1997)
- DSCOVR (Deep Space Climate Observatory) (2015)
- LISA Pathfinder (2015)

Wind Wind faceva parte del *Programma Internazionale di Fisica Solare-Terrestre (ISTP)*, un progetto congiunto tra Stati Uniti, Giappone e l'Agenzia Spaziale Europea per studiare il vento solare e la sua interazione con il campo magnetico terrestre.

La missione originale della sonda era di orbitare intorno al Sole nel punto lagrangiano L1, tuttavia, questa destinazione è stata posticipata per permettere alla sonda di studiare la magnetosfera terrestre e l'ambiente vicino alla Luna, poiché le sonde Solar and Heliospheric Observatory (SOHO) e Advanced Composition Explorer (ACE) erano già state inviate nello stesso punto¹⁹.

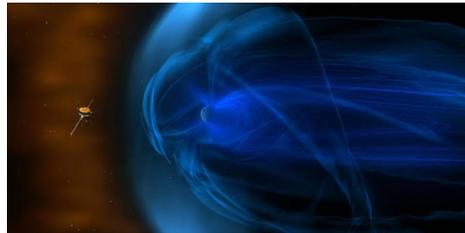


Figura 1.1: Illustrazione dello spacecraft Wind¹⁹

SOHO (Solar and Heliospheric Observatory) SOHO è un telescopio spaziale situato a 1,5 milioni di chilometri dalla Terra e monitora costantemente la turbolenta attività del Sole restituendo immagini e dati significativi delle tempeste solari. SOHO ruota insieme alla Terra intorno al Sole nel punto Lagrangiano L1, dove, appunto, la gravità combinata dei due corpi garantisce una visuale ininterrotta del Sole.

La sonda trasporta 12 strumenti scientifici ognuno di questi in grado di osservare indipendentemente il Sole, dalla struttura e dalla dinamica del suo interno fino al vento solare. In particolare, la missione studia la temperatura della corona, lo strato più esterno dell'atmosfera⁵.



Figura 1.2: Illustrazione del telescopio SOHO¹⁸

ACE È dedicato all'analisi delle particelle provenienti dal Sole e dalla Via Lattea e del campo magnetico interplanetario.

ACE invia sulla Terra in tempo reale i parametri che caratterizzano il vento solare, come la sua velocità e la sua densità, consentendo di rilevare l'arrivo di flussi di particelle energetiche solari (Solar Energetic Particle, SEP) e di eiezioni di massa dalla corona solare (Coronal Mass Ejection, CME).

E' stato affiancato dal satellite DSCOVR (Deep Space Climate Observatory), una missione congiunta tra NASA, NOAA e USAF¹⁶.



Figura 1.3: Illustrazione dello spacecraft ACE¹⁶

DSCOVR (Deep Space Climate Observatory) Originariamente progettato come missione per l'osservazione della Terra, DSCOVR è stato successivamente adattato per monitorare il vento solare in tempo reale. Posizionato in L1, DSCOVR fornisce dati essenziali per la previsione delle tempeste geomagnetiche che possono influenzare la Terra¹⁷.

Aiuta a proteggere le infrastrutture terrestri, come le reti elettriche e i satelliti, dalle conseguenze delle tempeste solari.

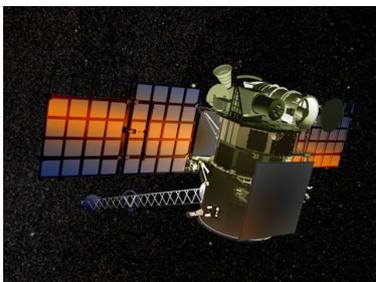


Figura 1.4: Illustrazione del Deep Space Climate Observatory¹⁷

LISA Pathfinder La missione spaziale LISA Pathfinder è il precursore tecnologico dell'osservatorio spaziale di onde gravitazionali pianificato dall'ESA come terza grande missione nel suo programma scientifico Cosmic Vision. Lo scopo di LISA-PF è mettere alla prova il concetto stesso di rivelazione di onde gravitazionali dallo spazio, dimostrando che è possibile controllare e misurare con una precisione altissima il movimento di due masse in condizioni di caduta libera⁴.

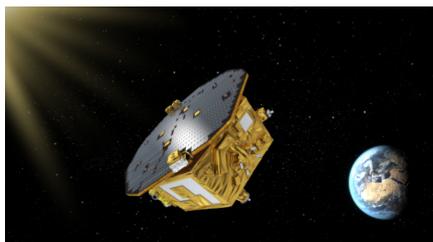


Figura 1.5: Illustrazione dello spacecraft LISA Pathfinder⁴

1.2 Codice Fortran

Il codice utilizzato per effettuare l'ottimizzazione è un codice di calcolo scritto in Fortran eseguibile attraverso il programma F90, chiamato *ell1cube*, il quale permette di risolvere diversi problemi di ottimizzazione mediante l'utilizzo di subroutine e functions, tenendo conto delle perturbazioni luni solari e terrestri, a cui uno spacecraft, stazionato nei punti lagrangiani, può essere soggetto. Si considera come corpo centrale la Terra con 8 tessere armoniche. Le perturbazioni di cui si tiene conto sono quella solare, lunare e quella dovuta alla pressione di radiazione solare e alla non sfericità della Terra. Questo programma ha come punto iniziale dei calcoli il perigeo. La variabile di integrazione non è il tempo, ma θ e in tutto sono considerate 14 variabili, indicate con la sigla NY=14:

- r, θ e φ per la posizione
- u, v e w per la velocità
- $\lambda_r, \lambda_\theta, \lambda_\varphi, \lambda_u, \lambda_v, \lambda_w$ sono le variabili aggiunte per posizione e velocità
- m per la massa
- λ_m è la variabile aggiunta per la massa

Si aggiungono poi altre due variabili:

1. t_1 , il tempo in cui avviene lo spegnimento dei motori
2. t_2 , il tempo finale della traiettoria

Il tempo di inizio è definito dal t_0 , il quale quindi sarà un parametro che indica la data di partenza. Le incognite sono in tutto 8:

- $\lambda_r, \lambda_\theta, \lambda_\phi, \lambda_u, \lambda_v, \lambda_w$
- t_1 e t_2

Vengono assegnati sia il semiasse sia l'eccentricità dell'orbita finale. La posizione del Sole è calcolata dal programma tramite le effemeridi, ottenendo, oltre alle coordinate r , θ e ϕ , anche le corrispettive velocità (tangenziali e radiali), tutto riportato nel sistema geocentrico equatoriale. Analogamente viene fatto per la Luna, a cui si aggiungono anche le valutazioni nel sistema eliocentrico equatoriale, in coordinate eclittiche e nel sistema lagrangiano. Per quanto riguarda lo spacecraft, si procede in modo identico, mentre per la Terra le effemeridi vengono richiamate per riportare posizioni e velocità nel sistema eliocentrico equatoriale e in coordinate eclittiche.

Il programma prevede una traiettoria in 2 fasi, una a motore spento e una a motore acceso.

Si possono definire due subroutines:

1. FUNZ(ICMP,X,S,R), la quale fornisce il sistema di equazioni differenziali
2. BOUND(NYD,S,RHO,ER), la quale, invece, calcola l'errore sulle condizioni al contorno

Attraverso la funzione *BVNGL* viene valutata la convergenza del metodo. Si basa sul metodo di Newton e risolve un problema ai limiti per un sistema di N equazioni differenziali ordinarie del primo ordine.

Tale funzione riceve in input le condizioni iniziali, le integra e restituisce un segnale di ritorno in output. Se questo segnale è pari al valore -4 allora il sistema è andato a convergenza, le condizioni ai limiti sono verificate con la precisione desiderata (EPS4), altrimenti in base al valore restituito, è possibile

risalire al problema riscontrato durante l'integrazione.

I parametri richiesti in input sono:

- r_{min} , il quale rappresenta la frazione di correzione da utilizzare, generalmente è minore di 1, pari a 0.1,
- j_{max} , il numero massimo di iterazioni, di solito tale valore è posto pari a 2000

A questo punto la simulazione può essere avviata inserendo come input la data di partenza t_0 e il valore di C_3 all'escape.

1.3 Overview

In questo paragrafo viene fornita una panoramica generale sull'organizzazione del lavoro.

Dopo un'introduzione generale riguardo l'importanza delle missioni spaziali verso i punti lagrangiani, con un focus su quelle verso il punto d'interesse *SEL1*, viene descritto brevemente il codice su cui si basa il lavoro svolto. Il capitolo successivo 2 si concentra sulla descrizione della meccanica nel volo spaziale, andando a definire nel dettaglio gli aspetti principali della materia. La seguente tesi presenta, inoltre, un breve riepilogo sugli aspetti fondamentali della propulsione elettrica nel capitolo 3. Il capitolo 4 contiene alcuni concetti chiave relativi al metodo di ottimizzazione utilizzato nell'analisi, i cui risultati sono riportati nel capitolo 6. Andando avanti, il capitolo 5 descrive il modello dinamico utilizzato nelle analisi condotte e infine, nel capitolo 7 sono presentate le conclusioni e i risultati raggiunti.

Capitolo 2

Meccanica del volo spaziale

2.1 Sistemi di Riferimento

Per la determinazione della posizione e della velocità di un veicolo spaziale in un certo istante di tempo è necessario adottare un sistema di riferimento rispetto al quale queste vengono descritte.

Un sistema di riferimento è una specificazione inequivocabile di convenzioni, algoritmi e costanti numeriche, solitamente definito da un piano fondamentale, un'origine e una terna destrorsa di assi mutualmente ortogonali.

Possono essere identificati diversi sistemi di riferimento, infatti questi possono avere origine nel Sole, come ad esempio un sistema eliocentrico o baricentrico, al centro della Terra, quindi un sistema geocentrico o topocentrico o basato sull'orbita del satellite, come nel caso di un sistema perifocale.⁶

Si possono poi distinguere due tipi di sistemi di riferimento:

- Inerziale
- Non inerziale

Il primo è caratterizzato da un oggetto che rimane a riposo o che si muove a velocità costante a meno che non venga sottoposto ad una forza esterna, mentre il secondo è caratterizzato dalla presenza di una certa accelerazione o di una rotazione. In quello non inerziale si considerano le forze apparenti, come la forza centrifuga e la forza di Coriolis, dovute al moto relativo del sistema di

riferimento stesso. La scelta tra sistemi di riferimento inerziali e non inerziali dipende dalla natura dell'analisi da condurre, nel caso della rappresentazione di una traiettoria di uno spacecraft rispetto alla Terra, è più comodo utilizzare un sistema di riferimento inerziale.

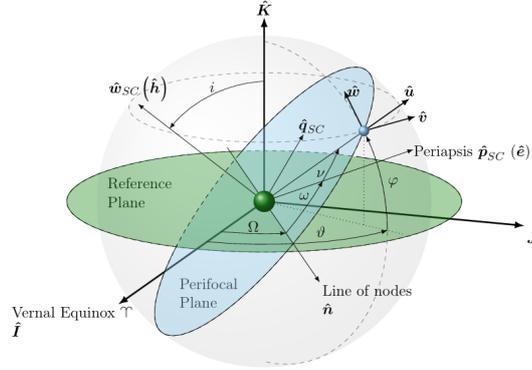


Figura 2.1: Sistema di riferimento EME2000 $\{\hat{I}, \hat{J}, \hat{K}\}$, Perifocale $\{\hat{p}_{sc}, \hat{q}_{sc}, \hat{w}_{sc}\}$ e Topocentrico $\{\hat{u}, \hat{v}, \hat{w}\}$

15

2.1.1 Sistema di riferimento Eliocentrico

In un sistema di riferimento Eliocentrico l'origine è fissa nel nucleo del Sole e il piano fondamentale coincide con l'eclittica, ovvero l'ellissi su cui si svolge il moto di rivoluzione della Terra attorno al Sole.

Tale piano ha un'inclinazione di circa 23.5° rispetto al piano equatoriale terrestre ed è proprio questa inclinazione che determina l'alternanza delle stagioni sulla Terra. Gli assi che identificano il piano dell'eclittica sono X_e ed Y_e .

L'asse X_e è definito dall'intersezione dell'eclittica con il piano equatoriale quando si ha l'equinozio vernale. La direzione è tale che durante l'equinozio vernale la Terra vede il Sole nella costellazione dell'Ariete.

L'asse Z_e è perpendicolare al piano dell'eclittica e la direzione positiva è quella che punta all'emisfero che contiene la stella Polare.

Infine, Y_e risulta univocamente definito poiché completa la terna destrorsa. Questo sistema di riferimento è utile quando si vogliono trattare le missioni interplanetarie oppure quando si fa riferimento all'utilizzo del metodo delle patched conic⁶.

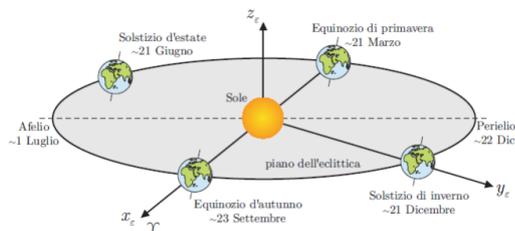


Figura 2.2: Sistema di riferimento Eliocentrico-Eclittica¹⁰

Non è un Sistema di Riferimento inerziale poiché il Sole si muove rispetto alle Stelle fisse, si verificano, infatti, fenomeni di nutazione e di precessione dovuti all'attrazione gravitazionale di Sole e Luna che fanno sì che la linea di intersezione tra eclittica e piano equatoriale vari nel tempo.

2.1.2 Sistema di riferimento Geocentrico equatoriale

In questo caso, l'origine si trova nel centro della Terra e il piano fondamentale è il piano equatoriale, il quale è definito dai versori \hat{I} e \hat{J} . \hat{I} è sempre parallelo a X_e , \hat{K} è perpendicolare al piano equatoriale e punta verso l'emisfero che contiene la stella Polare. Il versore \hat{J} , infine, completa la terna destrorsa.

Solitamente tale sistema di riferimento viene utilizzato per descrivere le orbite di satelliti terrestri e viene anche chiamato ECI (Earth-Centred Inertial system). Non è fisso, poiché ruota insieme alla Terra, ma è inerziale in quanto non ruota rispetto alle Stelle fisse⁶.

In questo studio, il sistema di riferimento geocentrico equatoriale si allinea esattamente con l'Equatore Medio della Terra e l'Equinozio dell'Epoca J2000 (EME2000).

Le effemeridi del JPL, appartenenti alla serie DE400 (come la DE430, utilizzata in questa tesi), sono riferite all'International Celestial Reference Frame (ICRF). L'incorporazione dei moti di librazione e nutazione nell'ICRF porta a caratterizzare EME2000 come quasi-inerziale, le sottili differenze tra EME2000 e ICRF vengono trascurate¹⁴.

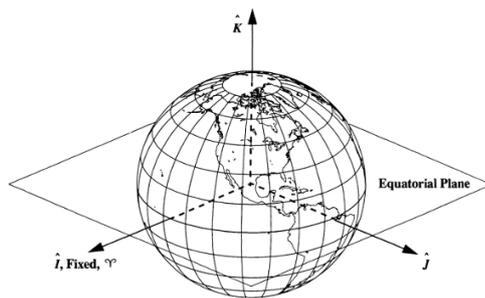


Figura 2.3: Sistema di riferimento Geocentrico equatoriale (EME2000)⁶

2.1.3 Sistema di riferimento Topocentrico

Un sistema di riferimento topocentrico è un sistema individuato rispetto ad un punto (topos) preciso sulla superficie terrestre, come ad esempio può essere la ground station. Tale punto viene definito tramite due parametri: latitudine e longitudine. Il piano fondamentale è il piano dell'orizzonte locale, definito dai vettori \hat{S} ed \hat{E} . In Tale sistema \hat{Z} è definita come la direzione positiva, ovvero quella che punta allo zenith, \hat{S} è definita come l'intersezione tra il piano dell'orizzonte locale e il piano che passa attraverso il meridiano locale, infine \hat{E} è definita dall'intersezione dell'orizzonte locale e del piano che passa attraverso il parallelo locale con direzione positiva quella verso Est. Tale sistema (\hat{S} \hat{E} \hat{Z}) è usato per satelliti che occupano di osservazione terrestre. E' utile andare poi a definire l'azimuth β e l'elevation El. L'azimuth è l'angolo misurato da Nord, in senso orario, dall'orizzonte locale al punto di interesse. L'elevation, invece, è l'angolo misurato dall'orizzonte locale positivo lungo la direzione \hat{Z} dell'oggetto di interesse⁶.

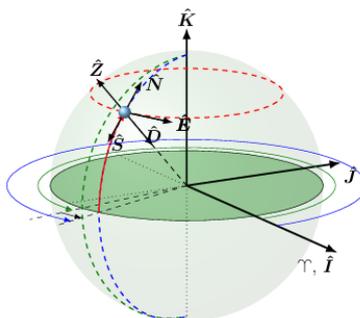


Figura 2.4: Sistema di riferimento Topocentrico¹⁵

2.1.4 Sistema di riferimento Perifocale

Il sistema di coordinate perifocali è un sistema che ha come origine il centro della Terra. Il piano fondamentale è il piano dell'orbita del satellite ed è definito dai versori \hat{p} e \hat{q} . Il versore \hat{p} è quello che punta al perigeo, ovvero il punto più vicino dell'orbita ed è allineato con il vettore eccentricità \hat{e} , \hat{q} è perpendicolare a \hat{p} e punta in direzione del satellite (identifica il semilatus rectum) e infine \hat{w} è quello normale al piano dell'orbita e punta in direzione del vettore momento angolare \hat{h} .

Tale sistema è adatto ad orbite con un'eccentricità ben definita, mantiene un orientamento sempre verso il perigeo. Secondo la prima legge di Keplero, in assenza di perturbazioni esterne, uno spacecraft in questo sistema di riferimento descriverebbe una conica infinita, chiusa.

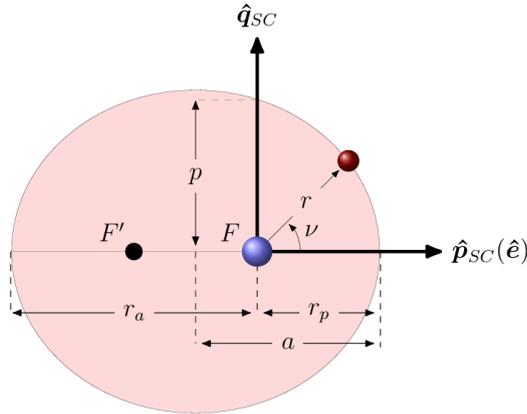


Figura 2.5: Sistema di riferimento Perifocale²³

2.2 Parametri orbitali

Per definire il piano perifocale, o meglio la forma e l'orientamento della conica descritta da tale sistema di riferimento, si usano i parametri orbitali kepleriani: a , e , i , Ω , ω , ν . Se l'orbita da descrivere è chiusa ne sono sufficienti solo tre:

1. Semiasse maggiore, a , il quale definisce la grandezza dell'orbita ed è strettamente legato all'energia.
2. Eccentricità, e , la quale definisce la forma dell'orbita

3. Anomalia vera, ν , che invece definisce la posizione dello spacecraft lungo la traiettoria.

Attraverso questi parametri è possibile esplicitare l'equazione della traiettoria:

$$r = \frac{p}{1 + e \cos(\nu)} \quad (2.1)$$

L'eccentricità e il semiasse maggiore sono legati tra loro dal semilatus rectum p tramite la relazione:

$$p = a(1 - e^2) \quad (2.2)$$

Gli altri parametri orbitali sono:

4. Ascensione retta del nodo ascendente, Ω , ovvero l'angolo tra il versore \hat{I} e il punto in cui il satellite attraversa il piano fondamentale in direzione nord, misurato in senso antiorario
5. Inclinazione, i , la quale esprime l'inclinazione del piano orbitale rispetto a quello equatoriale
6. Argomento del periastro, ω , il quale individua la posizione del periastro, è l'angolo tra il perigeo e la posizione del satellite a un tempo particolare chiamato epoca.

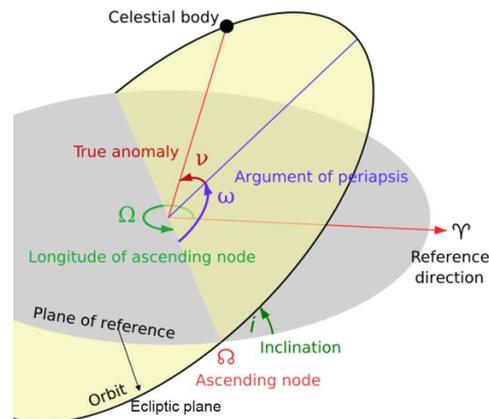


Figura 2.6: Parametri orbitali⁶

2.3 Problema degli N-corpi

La meccanica orbitale si pone l'obiettivo di studiare il moto dei corpi celesti che orbitano attorno ad altri corpi sotto l'influenza della gravità. Nell'opera "*Philosophiae Naturalis Principia Mathematica*" Newton enunciò la legge di gravitazione universale, la quale afferma che due corpi, di massa M ed m rispettivamente, si attraggono lungo la loro congiungente con una forza che è direttamente proporzionale al prodotto delle due masse e inversamente proporzionale al quadrato della loro distanza.

In formule si ha:

$$\vec{F}_g = -G \frac{Mm}{r^2} \frac{\vec{r}}{r} \quad (2.3)$$

Dove G è la costante di gravitazione universale ed è pari a:

$$G = 6.673 \cdot 10^{-11} \frac{m^3}{kg s^2} \quad (2.4)$$

ed \vec{r} è il vettore distanza tra i due corpi.

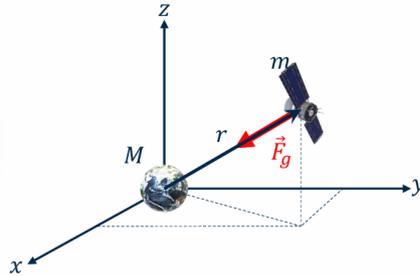


Figura 2.7: Rappresentazione della legge di gravitazione universale⁶

Il caso più generale è espresso dal problema degli N-corpi, in cui si considera l'interazione reciproca di N corpi e si ha:

$$\vec{F} = \vec{F}^* + \sum_{j=1, j \neq i}^n \vec{F}_{ij} = \vec{F}^* - Gm_i \sum_{j=1, j \neq i}^n \frac{m_j}{r_{ij}^3} \vec{r}_{ij} \quad (2.5)$$

In cui F^* è la forza che deriva dalla non sfericità della Terra e altre forze che intervengono e F_{ji} è la forza gravitazionale del j -esimo corpo.

Dalla seconda legge di Newton si ha:

$$\vec{F} = \frac{d}{dt}(m_i \vec{v}_i) \rightarrow -G m_i \sum_{j=1, j \neq i}^n \frac{m_j}{r_{ij}^3} \vec{r}_{ij} = m_i \ddot{\vec{r}}_i \quad (2.6)$$

L'equazione 2.6 è l'equazione relativa al problema degli N-corpi.

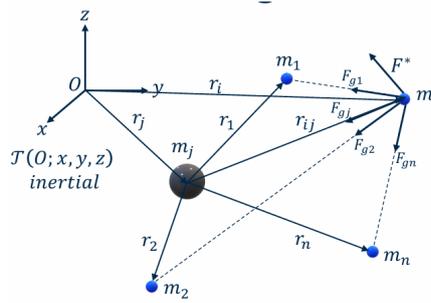


Figura 2.8: Problema degli N-corpi⁶

Tale problema però è particolarmente complesso e non ha una soluzione analitica generale.

Si otterrebbe un problema con n-equazioni le cui incognite sono r_{ij} , inoltre, tali equazioni essendo accoppiate andrebbero risolte contemporaneamente. Per trovare una soluzione in forma chiusa, che rappresenta il punto di partenza per lo studio di problemi più complessi, si possono fare delle ipotesi semplificative che portano alla formulazione del problema dei due corpi.

2.4 Problema dei 2 corpi

Le ipotesi su cui si basa il problema dei 2 corpi sono:

1. Il sistema è composto da 2 masse m_1 e m_2 , con $m_1 > m_2$
2. Non agiscono altre forze sulla massa ($F^* = 0$) oltre quella di gravità
3. I corpi hanno una simmetria sferica e sono puntiformi

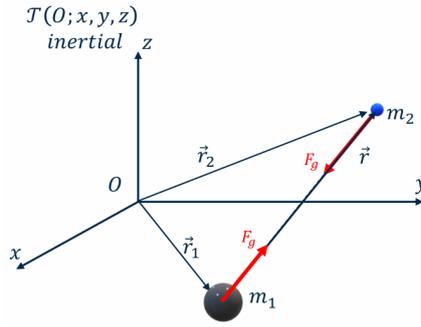


Figura 2.9: Problema dei 2 corpi⁶

La legge di gravitazione universale viene utilizzata per esprimere le forze che agiscono su ciascuna massa, in modo che la seconda legge della dinamica possa essere utilizzata per descrivere separatamente il moto di ognuna di esse:

$$\begin{cases} m_2 \ddot{\vec{r}}_2 = -G \frac{m_1 m_2}{r^3} \vec{r} \\ m_1 \ddot{\vec{r}}_1 = -G \frac{m_1 m_2}{r^3} \vec{r} \end{cases} \quad (2.7)$$

Sottraendo la seconda equazione dalla prima si ottiene:

$$\ddot{\vec{r}} = -G \frac{m_1 + m_2}{r^3} \vec{r} \quad (2.8)$$

Supponendo che M è la massa del corpo primario e m la massa del corpo secondario, si può semplificare il tutto come segue:

$$M + m \sim M \quad (2.9)$$

$$G(M + m) \sim GM \quad (2.10)$$

Si può ora introdurre il parametro di gravitazione universale μ , definito come il prodotto della costante di gravitazione G e M.

$$GM = \mu \quad (2.11)$$

Si ottiene così l'equazione del moto per il problema dei 2 corpi.

$$\ddot{\vec{r}} + \frac{\mu}{r^3} \vec{r} = 0 \quad (2.12)$$

È necessario notare che il parametro μ varia per ogni corpo.

Body		$\mu \text{ (m}^3 \text{ s}^{-2}\text{)}$	$\mu \text{ (km}^3 \text{ s}^{-2}\text{)}$
Sun	μ_{\odot}	$1.32712440018 \times 10^{20}$	132712×10^6
Mercury	μ_{M}	2.2032×10^{13}	
Venus	μ_{V}	3.24859×10^{14}	
Earth	μ_{\oplus}	$3.986004418 \times 10^{14}$	398600
Moon	μ_{L}	4.9048695×10^{12}	$\mu_{\oplus}/81.3$
Mars	μ_{M}	4.282837×10^{13}	
Jupiter	μ_{J}	$1.26686534 \times 10^{17}$	
Saturn	μ_{S}	3.7931187×10^{16}	
Uranus	μ_{U}	5.793939×10^{15}	
Neptune	μ_{N}	6.836529×10^{15}	
Pluto	μ_{P}	8.71×10^{11}	

Figura 2.10: Parametro μ al variare del corpo⁶

2.4.1 Costanti del moto

Il campo gravitazionale è un campo conservativo ed è quindi possibile definire delle grandezze che si conservano, ovvero che rimangono costanti.

In particolare, si ricavano due grandezze relative al moto orbitale che sono definite costanti del moto:

- Energia meccanica specifica \mathcal{E}
- Momento angolare \vec{h}

Un oggetto che si muove sotto l'influenza della sola gravità non perde e non guadagna energia.

L'energia meccanica specifica per ogni orbita è:

$$\mathcal{E} = \frac{v^2}{2} - \frac{\mu}{r} \quad (2.13)$$

Dove il primo termine è l'energia cinetica per unità di massa e il secondo è l'energia potenziale per unità di massa.

All'apogeo l'energia cinetica sarà bassa, poiché è bassa la velocità, mentre sarà alta l'energia potenziale, al contrario, al perigeo, l'energia cinetica è alta, mentre è bassa quella potenziale.

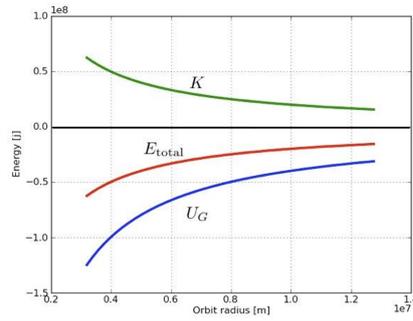


Figura 2.11: Andamento dell'energia cinetica, potenziale e totale⁶

La seconda grandezza considerata come costante del moto è il momento angolare specifico \vec{h} , il quale rimane costante lungo l'orbita ed è sempre perpendicolare al piano che contiene i vettori \vec{r} e \vec{v} .

$$\vec{h} = \vec{r} \times \vec{v} \quad (2.14)$$

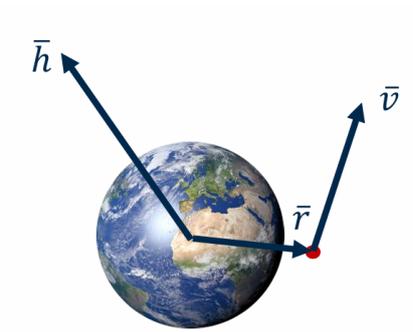


Figura 2.12: Momento angolare⁶

2.4.2 Sfera di Influenza

Il modello matematico dei 2 corpi è poi quello che sta alla base del concetto della Sfera di Influenza (SOI). Il concetto di SOI viene spesso applicato nelle analisi preliminari delle traiettorie interplanetarie per semplificare problemi complessi in sottoproblemi più gestibili, è infatti associato al metodo delle patched-conics. La Sfera di influenza si riferisce ad una regione in cui un corpo piccolo, come

ad esempio uno spacecraft, è influenzato solamente dagli effetti gravitazionali di un singolo corpo celeste, tutti gli altri possono essere trascurati. La formulazione matematica per valutare il raggio della sfera di influenza viene calcolata tenendo conto che lungo i bordi di questa le accelerazioni generate dalle forze gravitazionali dei due corpi primari si equivalgono:

$$r_{SOI} = r_{ij} \cdot \left(\frac{m_j}{m_i} \right)^{\frac{2}{5}} \quad (2.15)$$

In questa tesi, si è ipotizzato che la fuga sia completa quando lo spacecraft raggiunge una distanza dal corpo principale pari a 3 milioni di chilometri.

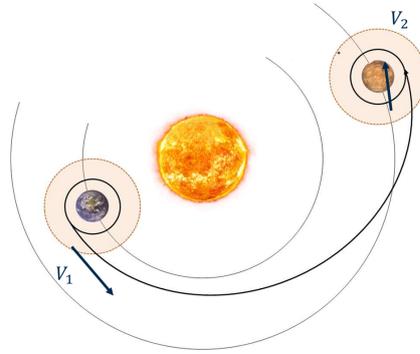


Figura 2.13: Sfere di influenza della Terra e di Marte⁶

2.4.3 Velocità di Escape

La velocità di escape è la velocità necessaria per “fuggire” dalla gravità di un certo corpo, ovvero la velocità minima per evadere dalla sfera di influenza del corpo principale e quindi necessaria per immettersi su una traiettoria aperta, generalmente una parabola. Anche se il campo gravitazionale del Sole o di un altro pianeta si estende teoricamente all’infinito, la sua forza diminuisce con la distanza, quindi è necessaria una quantità finita di energia cinetica per superare gli effetti della gravità e consentire a un oggetto di percorrere una distanza teoricamente infinita.

$$\mathcal{E} = \frac{v_e^2}{2} - \frac{\mu}{r} = \frac{v_\infty^2}{2} - \frac{\mu}{v_\infty} = 0 \quad (2.16)$$

$$v_e = \sqrt{\frac{2\mu}{r}} = \sqrt{2}v_c \quad (2.17)$$

In cui v_c è la velocità circolare, ovvero la velocità necessaria per mantenere uno spacecraft su un'orbita circolare.

$$v_c = \sqrt{\frac{\mu}{r}} \quad (2.18)$$

2.4.4 Eccesso iperbolico di velocità

Se lo spacecraft ha una velocità maggiore della velocità di escape, la velocità residua ad una distanza ipotizzata infinita dal corpo centrale è detta “Velocità di eccesso iperbolico”.

$$\mathcal{E} = \frac{v^2}{2} - \frac{\mu}{r} = \frac{v_\infty^2}{2} - \frac{\mu}{r_\infty} \rightarrow v_\infty = \sqrt{v^2 - \frac{2\mu}{r}} = \sqrt{v^2 - v_e^2} \quad (2.19)$$

Tale velocità può essere misurata tramite l'energia caratteristica C_3 , definita come il doppio dell'energia meccanica specifica:

$$C_3 = 2\mathcal{E} = v^2 - \frac{2\mu}{r} = -\frac{\mu}{a} \quad (2.20)$$

2.5 Problema dei 3 corpi

Il problema dei 2 corpi è alla base di molti lavori relativi all'astrodinamica, ma in alcuni casi è necessario considerare altri corpi per avere un modello accurato dei fenomeni fisici reali. Per questo motivo si fa riferimento ad un modello che considera 3 corpi, si parla quindi del problema dei 3 corpi (3BP), il quale però non ha soluzioni in forma chiusa per le equazioni del moto. Infatti, il modello dinamico che ne deriva dimostra un moto caotico dei corpi per la maggior parte delle condizioni iniziali, rendendo necessario l'uso dell'integrazione numerica per ottenere previsioni accurate. Un sistema noto relativo a tale problema è quello che considera la presenza di Terra, Luna e Sole. In generale, per analizzare il 3BP si considera un generico sistema binario. Si considerano i due corpi principali di massa m_1 e m_2 , con $m_1 > m_2$, i quali ruotano intorno al baricentro

formato dal sistema di questi corpi. Si possono definire un sistema di riferimento inerziale X_f, Y_f, Z_f , il quale è spesso centrato in uno dei corpi principali e un sistema di riferimento rotante non inerziale x_s, y_s, z_s , detto sistema di riferimento sinodico che ruota con il sistema dei due corpi principali ad una velocità angolare ω_s . Questo è centrato nel baricentro del sistema, l'asse x_s coincide con la congiungente dei due corpi, l'asse z_s è perpendicolare al piano in cui giace l'orbita dei due corpi primari e l'asse y_s completa terna destrorsa. Nel 3BP, il terzo corpo è libero di muoversi nello spazio sotto l'influenza gravitazionale dei due corpi principali.

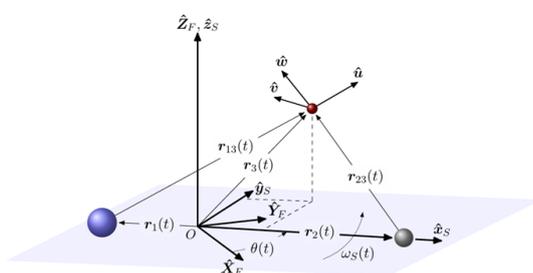


Figura 2.14: Problema dei 3 corpi⁶

Il 3BP può essere semplificato nel problema dei 3 corpi circolare ristretto introducendo opportune assunzioni:

1. Si considerano due corpi principali, di massa m_1 e m_2 , rispettivamente il più grande e il più piccolo, ed un terzo corpo, di massa m che può essere considerato di massa trascurabile dal momento che vale la relazione $m \ll m_2 < m_1$. Quest'ultimo corpo non influenzerà gli altri due corpi con interazioni gravitazionali.
2. I due corpi principali hanno orbite circolari rispetto al centro di massa.

Si considera a questo punto un sistema sinodico che permette di modellizzare un generico sistema binario.

Si definiscono due costanti: M e μ , che sono rispettivamente la massa caratte-

ristica del sistema e il parametro gravitazionale specifico:

$$\begin{aligned} M &= m_1 + m_2 \\ \mu^* &= \frac{m_2}{M} \end{aligned}$$

Avendo definito μ^* è possibile andare a definire il moto medio dimensionale del sistema binario come:

$$n(t) = \sqrt{\frac{\mu^*}{r_{12}(t)^3}} \quad (2.21)$$

A questo punto è possibile ricavare anche l'angolo θ , funzione del tempo, tra il sistema di riferimento fisso e il sistema di riferimento sinodico.

$$\theta(t) = n(t)t \quad (2.22)$$

Essendo nel caso del problema dei tre corpi circolare ristretto, assumendo quindi che le orbite dei corpi primari siano orbite kepleriane circolari, si può affermare che la distanza tra questi corpi rimane costante e quindi è costante anche la variazione dell'angolo θ . Un'altra grandezza che può essere definita è R , ovvero la distanza tra i baricentri dei due corpi primari:

$$R = r_1 + r_2 \quad (2.23)$$

Dalla terza legge di Keplero è inoltre possibile scrivere l'equazione del periodo:

$$T = 2\pi \sqrt{\frac{R^3}{GM}} \quad (2.24)$$

2.5.1 Equazione del moto

A questo punto è possibile scrivere le equazioni del moto del corpo di massa m . Le coordinate dei due corpi principali rispetto al centro di massa del sistema sono:

$$\mathbf{m}_1 = \begin{bmatrix} -\mu R \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$\mathbf{m}_2 = \begin{bmatrix} (1 - \mu)R \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

La posizione del terzo corpo sarà, invece, definita dai vettori r_1 e r_2 :

$$\mathbf{r}_1 = \begin{bmatrix} (x + \mu)R \\ y \\ z \end{bmatrix}$$

$$\mathbf{r}_2 = \begin{bmatrix} x - (1 - \mu)R \\ y \\ z \end{bmatrix}$$

Il sistema di riferimento non inerziale ruota con velocità angolare ω :

$$\vec{\omega} = \sqrt{\frac{GM}{R^3}} \quad (2.25)$$

L'equazione del moto sarà:

$$\ddot{\vec{r}} + \vec{\omega} \times (\vec{\omega} \times \vec{r}) + 2\vec{\omega} \times \dot{\vec{r}} = \frac{1}{m}(F_1 + F_2) \quad (2.26)$$

F_1 e F_2 sono le forze gravitazionali che i due corpi esercitano sul satellite:

$$\vec{F}_1 = -G \frac{m_1 m}{r_1^2} \frac{\vec{r}_1}{|\vec{r}_1|} = -G \frac{(1 - \mu)Mm}{r_1^3} \vec{r}_1 \quad \text{con} \quad r_1 = \sqrt{[x + \mu R]^2 + y^2 + z^2} \quad (2.27)$$

$$\vec{F}_2 = -G \frac{m_2 m}{r_2^2} \frac{\vec{r}_2}{|\vec{r}_2|} = -G \frac{\mu M m}{r_2^3} \vec{r}_2 \quad \text{con} \quad r_2 = \sqrt{[(x - (1 - \mu)R)]^2 + y^2 + z^2} \quad (2.28)$$

L'equazione del moto nelle tre coordinate sarà:

$$\ddot{x} - \omega^2 x - 2\omega \dot{y} = -GM(1 - \mu)(x + \mu R) \frac{1}{r_1^3} - GM\mu [x - (1 - \mu)R] \frac{1}{r_2^3} \quad (2.29)$$

$$\ddot{y} - \omega^2 y + 2\omega \dot{x} = -GM(1 - \mu)y \frac{1}{r_1^3} - GM\mu y \frac{1}{r_2^3} \quad (2.30)$$

$$\ddot{z} = -GM(1 - \mu)z \frac{1}{r_1^3} - GM\mu z \frac{1}{r_2^3} \quad (2.31)$$

Queste equazioni possono essere riscritte nella forma adimensionale facendo le opportune sostituzioni:

$$\vec{\rho} = \frac{\vec{r}}{R} \rightarrow \xi = \frac{x}{R} \quad ; \quad \eta = \frac{y}{R} \quad ; \quad \zeta = \frac{z}{R} \quad (2.32)$$

$$\tau = t\omega \rightarrow t = \frac{\tau}{\omega} \rightarrow \frac{d}{dt} = \omega \cdot \frac{d}{d\tau} \quad (2.33)$$

Sostituendo nelle 2.29, 2.30, 2.31 si ottiene:

$$\xi'' - \xi - 2\eta' = -(1 - \mu) \frac{(\xi + \mu)}{\rho_1^3} - \mu \frac{[\xi - (1 - \mu)]}{\rho_2^3} \quad (2.34)$$

$$\eta'' - \eta + 2\xi' = -(1 - \mu) \frac{\eta}{\rho_1^3} - \mu \frac{\eta}{\rho_2^3} \quad (2.35)$$

$$\zeta'' = -(1 - \mu) \frac{\zeta}{\rho_1^3} - \mu \frac{\zeta}{\rho_2^3} \quad (2.36)$$

Questo è un set di 3 equazioni differenziali del secondo ordine, non lineari e accoppiate tra loro.

Si può ora introdurre il potenziale gravitazionale \mathcal{U} :

$$\mathcal{U} = G \frac{m_1}{r_1} + G \frac{m_2}{r_2} + \frac{1}{2}(x^2 + y^2) \quad (2.37)$$

Che in forma adimensionale diventa:

$$u = \frac{1 - \mu}{\rho_1} + \frac{\mu}{\rho_2} + \frac{1}{2}(\xi^2 + \eta^2) \quad (2.38)$$

Derivando il potenziale rispetto alle coordinate adimensionali e sostituendo nelle equazioni del moto, si ricavano le nuove equazioni:

$$\frac{\partial \mathcal{U}}{\partial \xi} = \xi - \frac{1 - \mu}{\rho_1^2} \frac{\partial \rho_1}{\partial \xi} - \frac{\mu}{\rho_2^2} \frac{\partial \rho_2}{\partial \xi} = \xi - (1 - \mu) \frac{\xi + \mu}{\rho_1^3} - \mu \frac{\xi - (1 - \mu)}{\rho_2^3} \quad (2.39)$$

$$\frac{\partial \mathcal{U}}{\partial \eta} = \eta - \frac{1 - \mu}{\rho_1^2} \frac{\partial \rho_1}{\partial \eta} - \frac{\mu}{\rho_2^2} \frac{\partial \rho_2}{\partial \eta} = \eta - (1 - \mu) \frac{\eta}{\rho_1^3} - \mu \frac{\eta}{\rho_2^3} \quad (2.40)$$

$$\frac{\partial \mathcal{U}}{\partial \zeta} = -\frac{1 - \mu}{\rho_1^2} \frac{\partial \rho_1}{\partial \zeta} - \frac{\mu}{\rho_2^2} \frac{\partial \rho_2}{\partial \zeta} = -(1 - \mu) \frac{\zeta}{\rho_1^3} - \mu \frac{\zeta}{\rho_2^3} \quad (2.41)$$

Riassumendo, diventano:

$$\xi'' - 2\eta' = \frac{\delta u}{\delta \xi} \quad (2.42)$$

$$\eta'' - 2\xi' = \frac{\delta u}{\delta \eta} \quad (2.43)$$

$$\zeta'' = \frac{\delta u}{\delta \zeta} \quad (2.44)$$

2.5.2 Punti Lagrangiani

Quest'ultimo sistema di equazioni (2.39, 2.40, 2.41) conduce a cinque soluzioni di equilibrio, in cui le interazioni gravitazionali e quelle inerziali sono in equilibrio. Poiché si tratta di soluzioni di equilibrio del sistema, è possibile linearizzarlo in modo da ottenere delle soluzioni periodiche centrate su questi particolari punti, ottenendo così delle orbite periodiche che prendono il nome di Orbite Lissajous.

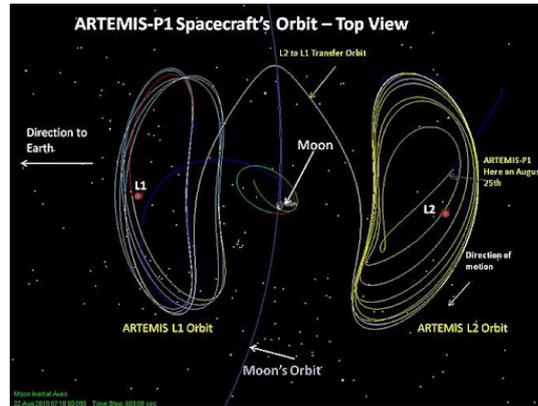


Figura 2.15: Orbita Lissajous della missione Artemis²⁰

Per ottenere queste soluzioni è necessario risolvere le equazioni del moto con la condizione che tutte le derivate siano nulle.

$$\frac{\partial \mathcal{U}}{\partial \xi} = 0 \quad (2.45)$$

$$\frac{\partial \mathcal{U}}{\partial \eta} = 0 \quad (2.46)$$

$$\frac{\partial \mathcal{U}}{\partial \zeta} = 0 \quad (2.47)$$

Si ricavano quindi dei punti di equilibrio, i quali sono noti come *Punti Lagrangiani* e sono caratterizzati dalla seguente uguaglianza:

$$\xi'_0 = \eta'_0 = \zeta'_0 = \xi''_0 = \eta''_0 = \zeta''_0 = 0 \quad (2.48)$$

Tali punti giacciono sul piano (ξ, η) che rappresenta il piano fondamentale. I punti Lagrangiani sono stazionari, cioè fermi rispetto al sistema rotante che comprende i due corpi principali, si muovono concordemente con questo attorno al centro di massa del sistema. Tre di essi sono posizionati lungo l'asse delle ascisse del sistema di riferimento rotante e sono detti collineari (L_1, L_2, L_3) , mentre gli altri due sono detti equilaterali (L_4, L_5) .

I punti collineari si trovano ponendo $\eta = 0$ e $\zeta = 0$, mentre i punti equilaterali si trovano ponendo $\rho_1 = \rho_2 = 1$ e $\zeta = 0$.

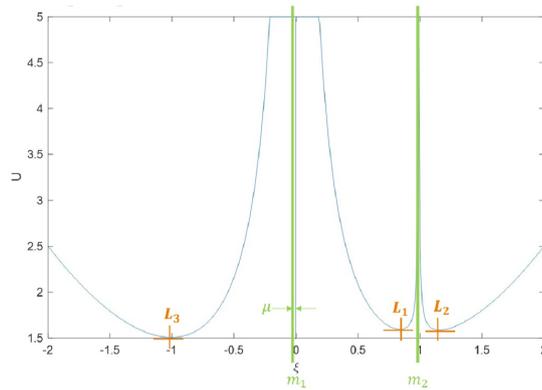


Figura 2.16: Punti collineari⁶

- Punto Lagrangiano L_1

Lo si trova risolvendo il sistema:

$$\begin{cases} \xi - (1 - \mu) \frac{\xi + \mu}{\rho_1^3} - \mu \frac{\xi - (1 - \mu)}{\rho_2^3} = 0 \\ \rho_1 + \rho_2 = 1 \end{cases} \quad (2.49)$$

Si impone poi:

$$-\mu < \xi < (1 - \mu) \quad (2.50)$$

Se vale l'approssimazione $m_2 \ll m_1$, allora $\rho_2 = \sqrt[3]{\frac{\mu}{3}}$ e $\rho_1 = 1 - \rho_2$

- Punto Lagrangiano L_2

Lo si trova risolvendo il sistema:

$$\begin{cases} \xi - (1 - \mu) \frac{\xi + \mu}{\rho_1^3} - \mu \frac{\xi - (1 - \mu)}{\rho_2^3} = 0 \\ \rho_1 - \rho_2 = 1 \end{cases} \quad (2.51)$$

Si impone poi:

$$\xi > (1 - \mu) \quad (2.52)$$

Ancora una volta $\rho_2 = \sqrt[3]{\frac{\mu}{3}}$

- Punto Lagrangiano L_3

Lo si trova risolvendo il sistema:

$$\begin{cases} \xi - (1 - \mu) \frac{\xi + \mu}{\rho_1^3} - \mu \frac{\xi - (1 - \mu)}{\rho_2^3} = 0 \\ \rho_2 - \rho_1 = 1 \end{cases} \quad (2.53)$$

Si impone:

$$\xi > -\mu \quad (2.54)$$

Esso è caratterizzato da: $\rho_1 = 1$ e $\rho_2 = 2$

I punti equilaterali invece si ricavano risolvendo il sistema:

$$\begin{cases} \frac{\partial \mathcal{U}}{\partial \xi} = \xi - (1 - \mu) \frac{\xi + \mu}{\rho_1^3} - \mu \frac{\xi - (1 - \mu)}{\rho_2^3} = 0 \\ \frac{\partial \mathcal{U}}{\partial \eta} = \eta - (1 - \mu) \frac{\eta}{\rho_1^3} - \mu \frac{\eta}{\rho_2^3} = 0 \end{cases} \quad (2.55)$$

Da cui si ottiene quindi che $\rho_1 = \rho_2 = 1$

- Punto Lagrangiano L_4

$$\begin{cases} \xi = \frac{1}{2} - \mu \\ \eta = \frac{\sqrt{3}}{2} \end{cases} \quad (2.56)$$

- Punto Lagrangiano L_5

$$\begin{cases} \xi = \frac{1}{2} - \mu \\ \eta = -\frac{\sqrt{3}}{2} \end{cases} \quad (2.57)$$

I punti equilaterali sono situati ai vertici di due triangoli equilateri, sugli altri due vertici si trovano le due masse principali del sistema. I due punti ruotano sulla stessa orbita della massa m_2 intorno a m_1 , con L_4 che anticipa la seconda massa di 60° mentre L_5 segue m_2 della stessa distanza angolare. I punti equilaterali sono punti di equilibrio stabile, quindi, se una perturbazione agisse su un satellite situato in questi due punti, esso tornerebbe nella sua posizione originaria senza alcun consumo di propellente. Nel sistema reale i punti Lagrangiani non sono puntiformi, ma rappresentano delle zone in cui il terzo corpo è in equilibrio.

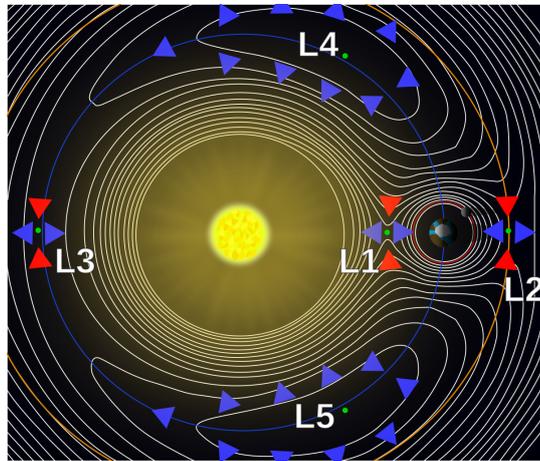


Figura 2.17: Punti Lagrangiani nel sistema Terra-Sole²⁵

2.5.3 Costanti di Jacobi e superfici a zero velocità

Considerando il set di equazioni del moto scritte con la funzione potenziale, moltiplicandole rispettivamente per η' , ζ' , e ξ' e sommandole membro a membro si ottiene:

$$\begin{cases} \xi'' - 2\eta' = \frac{\partial \mathcal{U}}{\partial \xi} \cdot \xi' + \\ \eta'' - 2\xi' = \frac{\partial \mathcal{U}}{\partial \eta} \cdot \eta' + \\ \zeta'' = \frac{\partial \mathcal{U}}{\partial \zeta} \end{cases} \quad (2.58)$$

$$\xi' \xi'' + \eta' \eta'' + \zeta' \zeta'' - 2\eta' \zeta' + 2\eta' \xi' = \frac{\partial \mathcal{U}}{\partial \xi} \xi' + \frac{\partial \mathcal{U}}{\partial \eta} \eta' + \frac{\partial \mathcal{U}}{\partial \zeta} \zeta' \quad (2.59)$$

$$\frac{1}{2} \frac{d}{d\tau} (\xi'^2 + \eta'^2 + \zeta'^2) = \frac{\partial \mathcal{U}}{\partial \xi} \frac{d\xi}{d\tau} + \frac{\partial \mathcal{U}}{\partial \eta} \frac{d\eta}{d\tau} + \frac{\partial \mathcal{U}}{\partial \zeta} \frac{d\zeta}{d\tau} \rightarrow \frac{1}{2} \frac{d}{d\tau} V^2 = \frac{d}{d\tau} (\mathcal{U}) \quad (2.60)$$

Tale equazione, una volta integrata, fornisce l'integrale di Jacobi:

$$V^2 = 2\mathcal{U} - \mathcal{J}_c \quad (2.61)$$

V^2 è il quadrato del modulo delle velocità nel sistema di riferimento sinodico, \mathcal{U} è la funzione potenziale e \mathcal{J}_c è la costante di Jacobi, definita dalle condizioni iniziali. L'integrale di Jacobi è l'unica equazione del moto nel problema dei tre corpi circolare ristretto all'interno di un sistema di riferimento sinodico rotante. È particolarmente importante per studiare la stabilità e le regioni accessibili dal terzo corpo nel sistema binario. Nel momento in cui viene fornito il valore della costante di Jacobi viene fornita anche l'equazione di una superficie che rappresenta i confini entro i quali il terzo corpo, ovvero il satellite, può muoversi. Il moto è possibile solo se $2\mathcal{U} - \mathcal{J}_c > 0$, di conseguenza se $\mathcal{J}_c < 2\mathcal{U}$.

Imponendo la velocità relativa pari a zero nell'integrale di Jacobi, si ottiene:

$$2\mathcal{U} - \mathcal{J}_c = 0 \quad (2.62)$$

Tale equazione è l'equazione di una superficie a zero velocità o superficie di Hill. Nella tabella seguente sono indicate le posizioni dei 5 punti lagrangiani nel sistema Terra-Sole e la rispettiva costante di Jacobi.

	ξ	η	ζ	\mathcal{J}_c
L_1	0.99002661	0.00000000	0.00000000	3.000891
L_2	1.01003433	0.00000000	0.00000000	3.000887
L_3	-1.00000125	0.00000000	0.00000000	3.000003
L_4	0.49999700	0.86602540	0.00000000	2.999997
L_5	0.49999700	-0.86602540	0.00000000	2.999997

Tabella 2.1: Posizione dei punti Lagrangiani e costanti di Jacobi in un sistema Terra-Sole

Aumentando l'energia dello spacecraft, che a sua volta implica una \mathcal{J}_c positiva più bassa, aumenta la possibilità di ottenere delle regioni accessibili maggiori. I punti L_4 ed L_5 mostrano lo stesso valore della \mathcal{J}_c , il quale è il più basso tra tutti, quindi, se uno spacecraft ha abbastanza energia per raggiungere questi punti, allora sono accessibili anche tutte le regioni del problema dei tre corpi.

2.6 Missioni interplanetarie

Il metodo che solitamente viene utilizzato per analizzare le missioni interplanetarie è, come accennato precedentemente, quello delle patched conics (PCM). Tale approssimazione consiste nel considerare lo spacecraft come soggetto alla sola azione gravitazionale di un pianeta quando è dentro la sua sfera di influenza e soggetto alla sola azione del Sole quando ne è fuori. Il tutto viene trattato secondo il problema dei 2 corpi. Dal momento che i pianeti si muovono con una certa velocità attorno al Sole, il problema dei due corpi nella sfera di influenza di un pianeta è studiato in un sistema di riferimento che si muove rispetto al Sole. Tali missioni vengono generalmente divise in tre fasi:

1. Escape dalla SOI del pianeta di partenza
2. Traiettoria eliocentrica
3. Cattura nella SOI del pianeta di arrivo

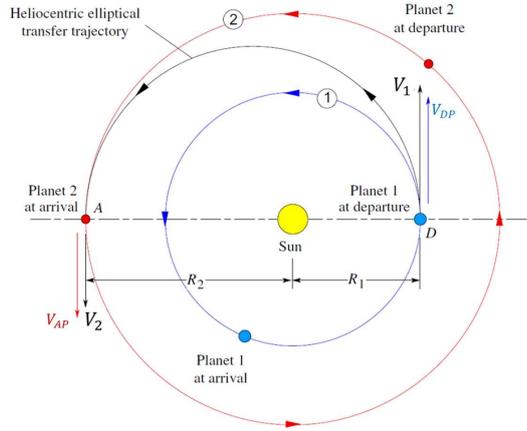


Figura 2.18: Fasi di una missione interplanetaria⁶

Le sfere di influenza (SOI) di pianeti come la Terra o Marte sono grandi circa 1 milione di km, mentre le distanze interplanetarie sono dell'ordine di centinaia di milioni di km, per questo le sfere di influenza sono molto piccole rispetto alle distanze eliocentriche, quindi trascurabili. Inoltre, i pianeti percorrono tutti orbite con eccentricità molto piccole e quasi complanari. Da tutto questo si deduce che la trasferta eliocentrica che garantisce il minor consumo è quella di Hohmann, quindi, la traiettoria sarà un'ellisse bitangente. Lo spacecraft dopo il primo impulso si troverà su un'orbita di parcheggio attorno alla Terra, dovrà poi evadere dalla SOI del primo pianeta con una velocità rispetto ad esso tale per cui la velocità eliocentrica sia proprio quella ricavata per la traiettoria ellittica eliocentrica:

$$\mathcal{E} = -\frac{\mu_{\odot}}{2a_H} = -\frac{\mu_{\odot}}{r_{pianeta1} + r_{pianeta2}} = \frac{V_{H1}^2}{2} - \frac{\mu_{\odot}}{r_{pianeta1}} = \frac{V_{H2}^2}{2} - \frac{\mu_{\odot}}{r_{pianeta2}} \quad (2.63)$$

$$V_{H1} = \sqrt{2\mu_{\odot} \left(\frac{1}{r_{pianeta1}} - \frac{1}{r_{pianeta1} + r_{pianeta2}} \right)} \quad (2.64)$$

Lo spacecraft si troverà su una traiettoria iperbolica che esce dalla SOI con una certa velocità di eccesso iperbolico $V_{\infty1}$. È necessario poi valutare altre due velocità, ovvero quella relativa al pianeta V_{c1} e quella relativa allo spacecraft

dopo il primo impulso, la quale si ottiene a partire dalla vis viva.

$$V_{c\text{pianeta1}} = \sqrt{\frac{\mu_{\odot}}{r_{\text{pianeta1}}}} \quad (2.65)$$

$$\mathcal{E} = \frac{V_{i1}^2}{2} - \frac{\mu_{\oplus}}{r_1} = \frac{V_{\infty 1}^2}{2} \quad (2.66)$$

$$V_{i1} = \sqrt{2\frac{\mu_{\oplus}}{r_1} + V_{\infty 1}^2} = \sqrt{2V_{c1}^2 + V_{\infty 1}^2} \quad (2.67)$$

$$\Delta V = V_{i1} - V_{c1} = \sqrt{2V_{c1}^2 + V_{\infty 1}^2} - V_{c1} \quad (2.68)$$

La manovra di cattura è analoga, ma ci sarà un ΔV a frenare.

2.6.1 Manovre di Escape

Per una manovra di escape è necessario considerare una traiettoria iperbolica, in quanto è necessario avere una velocità di eccesso iperbolico V_{∞} maggiore di zero. È possibile calcolare l'eccesso iperbolico di velocità come:

$$V_{\infty} = \sqrt{\frac{\mu_{\odot}}{r_{\text{pianeta1}}}} \left(\sqrt{\frac{2 r_{\text{pianeta2}}}{r_{\text{pianeta1}} + r_{\text{pianeta2}}}} - 1 \right) \quad (2.69)$$

Il ΔV necessario per la manovra di escape sarà:

$$\Delta V = \sqrt{V_{\infty}^2 + \frac{2\mu}{r_{\text{pianeta1}}}} - \sqrt{\frac{\mu}{r_{\text{pianeta1}}}} = \sqrt{2V_{c1}^2 + V_{\infty 1}^2} - V_{c1} \quad (2.70)$$

Non è sufficiente il modulo di tale grandezza ma è necessario conoscere un parametro che ne identifichi la posizione nel periastro. Tale parametro, β , ci fornisce l'angolo di orientamento tra la linea degli apsi dell'orbita iperbolica e il vettore della velocità eliocentrica del pianeta.

$$\beta = \cos^{-1} \left(\frac{1}{e} \right) = \cos^{-1} \left(\frac{1}{1 + \frac{r_p V_{\infty}^2}{\mu_{\oplus}}} \right) \quad (2.71)$$

La manovra di escape varia a seconda della posizione del pianeta, quindi, se questo è un pianeta interno o esterno rispetto a quello che si considera come pianeta di partenza. Nel caso outer planet è necessario che la V_∞ e la velocità di rotazione del pianeta siano parallele alla direzione del moto del pianeta di partenza. Questo requisito si traduce su un requisito sull'asintoto, il quale impone che la direzione di uscita sarà verso Est (front door exit). Nel caso inner planet, invece, è necessario ridurre la velocità, la velocità richiesta al punto di partenza è più piccola della velocità che compete al moto di rivoluzione del pianeta di partenza, quindi la direzione di uscita sarà verso Ovest (back door exit). Dal momento che le variazioni di energia sono più efficienti a raggi bassi, è conveniente effettuare una manovra di escape a 2 impulsi, in cui il primo diminuisce l'energia dell'orbita e mette lo spacecraft su un'orbita ellittica con semiasse maggiore più piccolo, mentre il secondo impulso, al perigeo, aumenta l'energia dell'orbita fino a quella desiderata. Questa manovra prende il nome di manovra di Hobert.

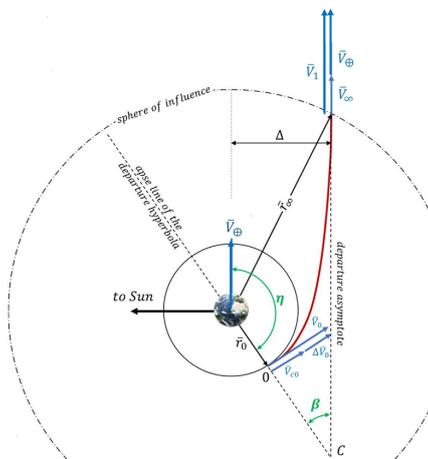


Figura 2.19: Manovra di Escape⁶

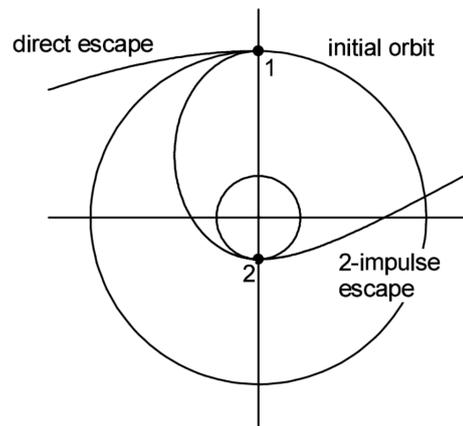


Figura 2.20: Confronto tra escape a uno e due impulsi⁹

Capitolo 3

Generalità della propulsione spaziale

La propulsione spaziale ha come obiettivo la variazione della traiettoria di un oggetto attraverso la spinta, la quale agisce sulla velocità iniziale del corpo, pertanto interessa non tanto la spinta stessa quanto l'effetto che questa ha sul sistema.

La propulsione si basa sul principio di azione e reazione. Lo spacecraft nello spazio può essere considerato come un sistema isolato, per cui si può affermare che la quantità di moto si conservi. Affinchè si generi una spinta è necessario che questo scambi la sua quantità di moto con qualcosa che deve avere a bordo, ovvero il propellente.

Per ottenere una spinta è necessario avere energia ed è proprio la fonte di questa energia che determina i diversi campi di propulsione spaziale:

- Propulsione chimica, in cui l'energia deriva da una reazione chimica tra un combustibile ed un ossidante (caso bipropellente), oppure tramite un catalizzatore che provoca la decomposizione del combustibile, generando gas caldo (caso monopropellente). Il propellente impiegato in questo caso può essere di tipo liquido, solido oppure ibrido. La propulsione chimica sfrutta l'accelerazione dei gas caldi prodotti ed accelerati in un ugello, generando una spinta che, di conseguenza, è proporzionale all'energia cinetica del gas in uscita dall'ugello. L'energia cinetica è legata, a sua volta, all'energia chimica del propellente utilizzato.

- Propulsione elettrica, in cui l'energia deriva da un generatore di potenza elettrica e il propellente è accelerato attraverso fenomeni di natura elettrica (o magnetica). La propulsione elettrica, quindi, a differenza di quella chimica, sfrutta una sorgente di energia indipendente dal propellente, attraverso un sistema di generazione di potenza solare o nucleare, per mezzo di pannelli solari, reattori a fissione nucleare oppure generatori a radioisotopi.
- Propulsione nucleare, nel caso in cui la spinta sia generata attraverso la fissione nucleare

Si consideri un sistema isolato caratterizzato da una velocità v al tempo t . Dopo un tempo dt lo spacecraft avrà espulso una massa di propellente dm_p e la velocità sarà cambiata da v a $v + dv$. La massa di propellente dm_p viene espulsa con una velocità c , detta velocità efficace di scarico, quindi la velocità assoluta sarà $c - v$. Applicando il principio di conservazione della quantità di moto si ha:

$$mv = (m - dm_p)(v + dv) - dm_p(c - v) \quad (3.1)$$

Trascurando i termini di ordine superiore al primo si ottiene:

$$mdv = dm_p c \quad (3.2)$$

Tale relazione è corretta se si considera un'espulsione discreta di propellente, nella realtà questa è continua nel tempo, di conseguenza è opportuno fare delle considerazioni.

In primo luogo si introduce la portata \dot{m}_p :

$$\dot{m}_p = \frac{dm_p}{dt} \quad (3.3)$$

Il differenziale dm_p può essere scritto come portata per dt , mentre il differenziale dv come accelerazione per dt , quindi:

$$m \frac{dv}{dt} = \dot{m}_p c \quad (3.4)$$

Tale espressione rappresenta la definizione di spinta T :

$$T = m \frac{dv}{dt} = \dot{m}_p c \quad (3.5)$$

3.0.1 Parametri di performance

Vengono ora introdotti alcuni parametri che descrivono le caratteristiche dei propulsori. In primo luogo si definisce l'*impulso totale* I_t , il quale valuta l'effetto cumulativo della spinta nel tempo. Questo viene definito come l'integrale della spinta nel tempo tra l'istante iniziale e l'istante finale della manovra:

$$I_t = \int_{t_0}^{t_f} T dt \quad (3.6)$$

In generale maggiore è l'impulso totale di un propulsore, maggiore è la capacità propulsiva, in termini di spinta, del satellite. L'*impulso specifico* I_{sp} , invece, è il rapporto tra l'effetto utile e la spesa del sistema, ovvero tra l'impulso totale e il peso che il propellente consumato avrebbe sulla superficie della Terra.

$$I_{sp} = \frac{I_t}{m_p g_0} \quad (3.7)$$

Se spinta e portata rimangono costanti, l'equazione 3.7 diventa:

$$I_{sp} = \frac{I_t}{m_p g_0} = \frac{T \Delta t}{\dot{m}_p \Delta t g_0} = \frac{T}{\dot{m}_p g_0} = \frac{c}{g_0} \quad (3.8)$$

Il risultato ottenuto mostra come l'impulso specifico e la velocità effettiva di scarico siano lo stesso parametro, a meno di una costante g_0 di accelerazione gravitazionale a Terra. In generale misurano quanto efficacemente viene usata la massa di propellente espulsa. A parità di massa, se aumenta l'impulso specifico, è possibile aumentare la spinta fornita oppure la durata di tempo per il quale questa viene fornita.

3.1 Equazione del razzo di Tsiolkovsky

L'equazione del razzo di Tsiolkovsky è alla base della propulsione spaziale. Essa descrive il moto dei corpi di massa variabile nello spazio ed afferma che, grazie alla conservazione della quantità di moto, un corpo è in grado di accelerare tramite l'espulsione di parte della sua massa nella direzione opposta rispetto a quella per cui si desidera l'aumento di velocità. Questa equazione lega il costo propulsivo dello spacecraft ΔV (che non è altro che l'aumento di velocità) con il rapporto tra la sua massa iniziale e quella finale. Per prima cosa si introduce il concetto di ΔV , il quale è definito come l'integrale dell'accelerazione che il propulsore dà al sistema per mezzo della spinta:

$$\Delta V = \int_{t_0}^{t_f} \frac{T}{m} dt \quad (3.9)$$

Rappresenta la variazione di velocità che il sistema subirebbe nel caso in cui su di esso agisse solo la spinta T e nel caso in cui questa fosse parallela alla velocità. Si può scrivere anche nella forma seguente:

$$\Delta V = \int_{t_0}^{t_f} \frac{c \dot{m}_p}{m} dt \quad (3.10)$$

Si nota che la derivata della massa del sistema nel tempo non è altro che la portata di propellente cambiata di segno:

$$\dot{m} = \frac{dm}{dt} = -\dot{m}_p \quad (3.11)$$

Il ΔV diventa:

$$\Delta V = \int_{m_0}^{m_f} -c \frac{dm}{m} \quad (3.12)$$

Considerando c costante, o comunque un valore medio di questa, e integrando la 3.12 si ottiene:

$$\Delta V = c \ln \left(\frac{m_0}{m_f} \right) \quad (3.13)$$

L'equazione 3.13 rappresenta proprio l'equazione del razzo di Tsiolkowski. Questa può essere riscritta come segue:

$$m_f = m_0 e^{-\frac{\Delta v}{c}} \quad (3.14)$$

Si può inoltre mettere in evidenza il rapporto tra le masse:

$$\frac{m_f}{m_0} = e^{-\frac{\Delta v}{c}} \quad (3.15)$$

L'equazione di Tsiolkowski evidenzia come all'aumentare del costo propulsivo, il rapporto tra la massa finale e quella iniziale decresce esponenzialmente. Ciò significa che all'aumentare dell'entità della manovra, la massa finale del satellite diminuisce, come conseguenza della maggior quantità di propellente consumato e inoltre, al diminuire della velocità efficace di scarico c , la massa finale del satellite diminuisce, a causa della peggior efficienza nell'utilizzo del propellente.

3.2 Propulsori elettrici

La propulsione elettrica rappresenta un'opzione conveniente rispetto a quella chimica, in quanto permette di superare le difficoltà legate allo stoccaggio del propellente a bordo del satellite, riducendo così la massa e il volume occupato. L'energia elettrica utilizzata per ionizzare il propellente permette di generare una spinta attraverso l'applicazione di un campo elettrostatico (o elettromagnetico) nella direzione dell'accelerazione, che espelle gli ioni prodotti. I propulsori relativi alla propulsione elettrica possono essere raggruppati in tre grandi famiglie in base al meccanismo di accelerazione adottato.

3.2.1 Propulsione elettrotermica

Questo tipo di propulsione comprende tutte le tecniche con le quali un gas propellente è scaldato elettricamente e poi è espanso in un ugello per convertire la sua energia termica in energia cinetica. In questa sezione vengono considerati tre modi diversi di riscaldamento del propellente:

- Passandolo sopra una superficie solida scaldata elettricamente nei *resistogetti*
- Passandolo attraverso un arco elettrico negli *arcogetti*
- per eccitazione di alta frequenza

Nella propulsione elettrotermica la velocità di scarico c è determinata sostanzialmente dalla temperatura massima che la superficie di camera e l'ugello possono tollerare e dalle proprietà cinetiche e termodinamiche del gas propellente.

In figura è mostrato un modello generale unidimensionale di un propulsore elettrotermico:

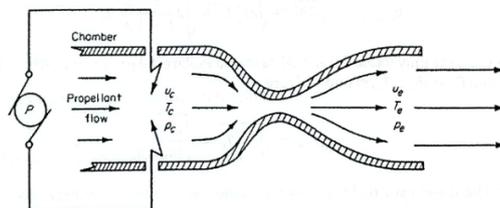


Figura 3.1: Modello generale di un propulsore elettrotermico⁹

Resistogetti

Nei resistogetti il gas è scaldato passando sopra una resistenza scaldata elettricamente. Dopo aver raggiunto la temperatura T_c si espande passando attraverso l'ugello. Esistono due tipologie di design:

- Direct contact, in cui la resistenza è posta a diretto contatto con il propellente e il calore è trasmesso per convezione.
- Sealed cavity, in cui la resistenza è posta in una cavità sigillata, non a contatto con il propellente. La trasmissione di calore avviene per irraggiamento.

A parità di temperatura della resistenza, il modello *direct contact* consente di scaldare il propellente ad una temperatura più alta, tuttavia, non consente di portare la resistenza oltre certe temperature.

Al contrario, l'organo che scambia calore con il propellente se la resistenza è in

cavità sigillata non deve avere forme particolari ed è più robusto.

Pertanto, la resistenza a contatto diretto è tipicamente a temperatura più bassa di una resistenza in cavità sigillata.

In generale si può dire che le due soluzioni sono sullo stesso livello e nessuna delle due dà un netto vantaggio rispetto all'altra.

Questi tipi di propulsori sono caratterizzati dai seguenti punti critici:

- Degradazione della resistenza
- Efficienza termica, infatti le perdite maggiori sono quelle termiche, mentre sono quasi del tutto assenti quelle flusso congelato, poichè la dissociazione non avviene alle temperature di funzionamento tipiche.

La limitazione della temperatura dei materiali limita l'Impulso Specifico (I_{sp}).

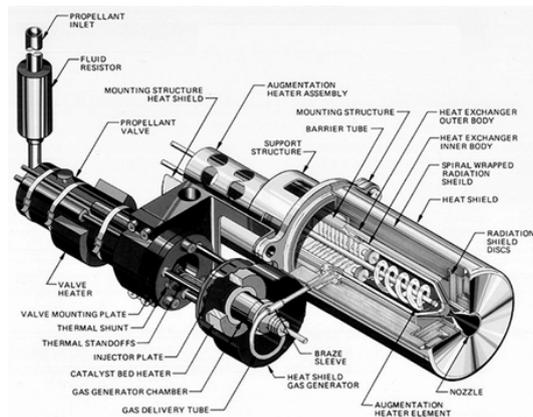


Figura 3.2: Modello di un resistojet⁹

Arcogetti

Sono propulsori elettrotermici nei quali il calore viene depositato attraverso un arco elettrico direttamente nel propellente, il quale è, almeno parzialmente, ionizzato. In questo modo il propellente diventa esso stesso un conduttore e al suo interno fluisce una corrente elettrica.

In questo caso l'impulso specifico non è più limitato dalla temperatura di camera.

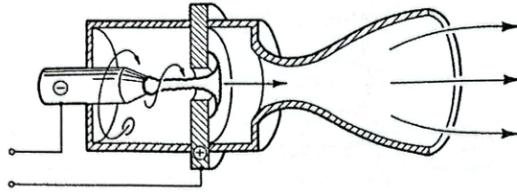


Figura 3.3: Schema di un arcojet⁹

I principali problemi che si riscontrano in questi propulsori sono quelli relativi alla stabilizzazione dell'arco elettrico.

Ci sono due tipi di instabilità:

- Instabilità di tipo sausage: l'arco si stringe e rischia di spezzarsi
- Instabilità di tipo kink: l'arco si deforma lateralmente

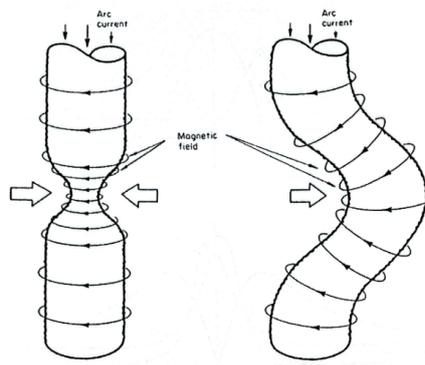


Figura 3.4: Instabilità di tipo sausage e di tipo kink⁹

Per ovviare a questo tipo di problema ci sono essenzialmente tre metodi:

1. Creazione di un campo magnetico opposto a quello generato dalla corrente
2. Utilizzo di una corrente dotata di moto circolare (swirl) che pone il plasma in rotazione
3. Utilizzo di un constrictor, ovvero un tubo lungo e stretto posto tra gli elettrodi attraverso il quale si fa passare l'arco.

3.2.2 Propulsione elettrostatica

In questo caso si abbandona il concetto di propulsione elettrotermica, in favore dell'accelerazione diretta da parte delle forze elettriche. Nel serbatoio il propellente è neutro, e dal momento che il campo elettrico genera forze su particelle cariche, sono necessari tre passi:

- Ionizzazione, in cui gli ioni vengono “generati” a partire da un propellente originariamente neutro e separati dagli elettroni
- Accelerazione degli ioni, attraverso l'applicazione di un campo elettrico
- Neutralizzazione, durante la quale il fascio di ioni viene neutralizzato da un fascio di elettroni

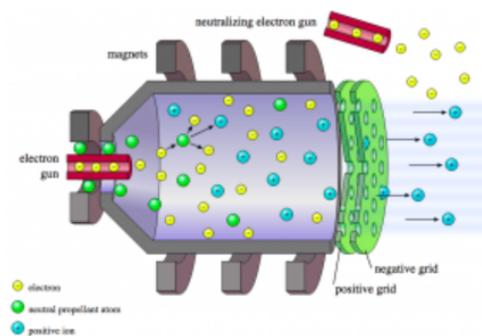


Figura 3.5: Schema di un propulsore a ioni²

Per un propulsore a ioni in generabile è preferibile avere:

- Un basso costo di ionizzazione
- Perdite elettriche più piccole possibile
- Ionizzare quanto più propellente possibile

E' necessario poi tenere conto di alcuni punti critici:

- Design del campo magnetico per il confinamento
- Numero di ioni con carica doppia che possono erodere le griglie
- Scambio di carica tra ioni e atomi tra le griglie

- Tipo di materiale utilizzato

Propulsore ad effetto Hall

I propulsori a ioni possono garantire alti valori di impulso specifico con rendimenti buoni, intorno al 60 %. Tuttavia, il loro difetto più grande deriva dalla limitazione sulla densità di spinta, che li rende grandi e pesanti.

La soluzione al problema è fare in modo che il flusso sia composto anche da elettroni oltre che da ioni.

I propulsori ad effetto Hall sono a rigore propulsori elettromagnetici, in quanto il campo magnetico svolge un ruolo fondamentale, infatti, sono proprio i solenoidi, i quali generano il campo magnetico, a scambiare quantità di moto con il propellente. Tuttavia, possono anche essere visti come particolari propulsori a ioni dove si introducono gli elettroni per non avere la limitazione sulla corrente e un campo magnetico per risolvere il problema dell'interazione tra ioni ed elettroni.

Come nel caso dei propulsori a ioni il propellente maggiormente utilizzato è lo Xenon.

In generale i rendimenti dei propulsori ad effetto Hall sono i più bassi, poichè sono utilizzati per impulsi specifici minori.

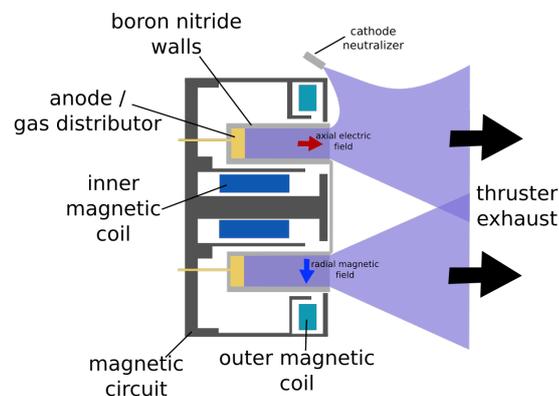


Figura 3.6: Schema di un propulsore ad effetto Hall²⁴

3.2.3 Propulsione elettromagnetica

La propulsione elettromagnetica consiste nell'accelerazione di un propellente a cui viene fornita energia attraverso l'applicazione di un campo magnetico, che può essere autoindotto oppure applicato dall'esterno.

Variable Specific Impulse Magnetoplasma Rocket (VASIMR)

Il VASIMR è un propulsore che può essere visto come un ibrido tra la propulsione elettrotermica ed elettromagnetica, infatti, in questo caso la forza che il propulsore subisce è effettivamente una forza magnetica, ma dal punto di vista del propellente l'accelerazione è termica.

Si distinguono tre stadi di funzionamento:

- Ionizzazione del propellente attraverso onde elettromagnetiche in radiofrequenza
- Riscaldamento attraverso Ion Cyclotron-Resonance Heating
- Espansione con un ugello magnetico

Un propulsore VASIMR è in grado di generare potenze molto elevate, con impulsi specifici compresi tra i 1000 e i 10000 s, offrendo un'alternativa che sia una via di mezzo tra la propulsione elettrica e quella chimica, in termini di prestazioni.

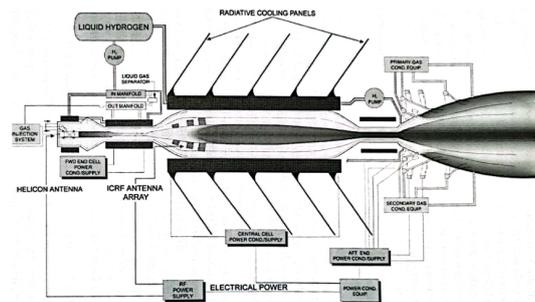


Figura 3.7: Schema di un propulsore VASIMR⁹

Propulsori Magnetoplasmadinamici (MPD)

Questi propulsori si possono suddividere in due sottocategorie, a seconda che il campo magnetico sia autoindotto (self-field) oppure imposto dall'esterno (applied field).

- **Propulsori MPD self-field**

La geometria è del tutto simile a quella di un arcogetto, infatti si ha un catodo centrale e un anodo cilindrico coassiale al catodo, che all'uscita fa anche da ugello.

Il propellente viene immesso dal fondo della camera e tra anodo e catodo c'è un campo elettrico con una corrente parallela ad esso. La differenza sta nel fatto che in questo caso è importante la forza magnetica, infatti, in un propulsore del genere la corrente è così intensa che le forze elettromagnetiche sono preponderanti rispetto a quelle fluidodinamiche.

La forza magnetica genera sostanzialmente due contributi:

- **Blowing**, la quale è la forza responsabile dell'accelerazione del propellente di direzione z
- **Pumping**, la quale genera l'effetto pinch

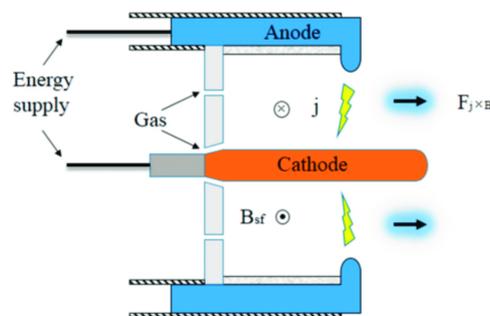


Figura 3.8: Schema di un MPD self-field¹³

- **Propulsori MPD applied-field**

La geometria è la stessa degli MPD self-field, con gran parte della corrente che viene emessa dalla punta del catodo, zona in cui gli elettroni sono costretti dall'effetto pinch a muoversi in direzione assiale. L'alta intensità

del campo magnetico in questa zona comporta un elevato valore del parametro di Hall e la corrente si muove nel verso di $\mathbf{E} \times \mathbf{B}$. Muovendosi verso l'uscita, parte degli elettroni vanno verso l'anodo e il campo magnetico diminuisce, diminuendo così anche il confinamento. Si aggiunge, inoltre, un campo magnetico in direzione assiale. Il moto di un elettrone emesso dal catodo è caratterizzato da un moto assiale a cui si sovrappone uno tangenziale, ovvero il moto di Hall dato dal campo magnetico esterno. Alle componenti di blowing e di pumping si aggiunge una di swirling.

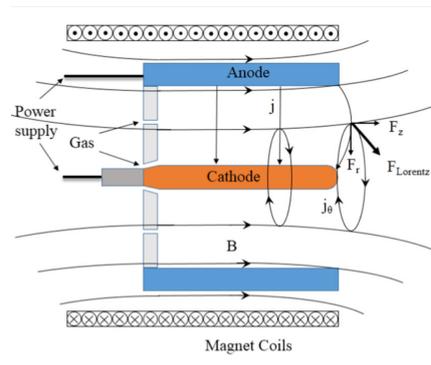


Figura 3.9: Schema di un MPD applied-field¹²

Pulsed Plasma Thruster (PPT)

Sono propulsori nel caso in cui il funzionamento sia pulsato. I PPT sono progettati per tollerare temperature e, di conseguenza, correnti, molto elevate (per brevi periodi), con un rendimento elevato. Inoltre, le accensioni di breve durata determinano una migliore gestione termica, riducendo le perdite per flussi congelati.

Il funzionamento può essere schematizzato in cinque fasi:

1. Immagazzinamento dell'energia
2. Innesco della scarica attraverso una candela
3. Stabilizzazione della scarica
4. Accelerazione della scarica
5. Emissione del propellente

3.3 Differenze tra propulsione chimica ed elettrica

I propulsori elettrici offrono generalmente impulsi specifici superiori rispetto ai propulsori chimici, a scapito però delle spinte e delle accelerazioni generate, che nel caso dei propulsori elettrici risultano essere inferiori a causa delle limitazioni tecnologiche nella generazione di potenza elettrica a bordo dei veicoli spaziali. Inoltre, i propulsori elettrici tendono a richiedere un ΔV effettivo superiore rispetto a quello ideale. Un vantaggio importante dei propulsori elettrici è la capacità di fornire spinta in modo continuativo per lunghi periodi di tempo, anche se potrebbero presentare una diendenza diretta dalla radiazione solare. Una propulsione di tipo elettrico, quindi, è preferibile per applicazioni in cui siano richieste un'elevata precisione, bassi valori di spinta e vita operativa molto lunga, come nel caso della propulsione ausiliaria per manovre di station keeping, controllo di assetto o dismissione, oppure come propulsione primaria per missioni a bassa spinta, come nel caso in esame in questa tesi.

Capitolo 4

Ottimizzazione di traiettorie

Un problema di ottimizzazione della traiettoria di uno spacecraft è un problema astrodinamico che consiste nel trovare la legge di controllo che massimizza o minimizza un certo indice di prestazione⁸. Nelle missioni spaziali tra i requisiti più stringenti che vanno a determinare la fattibilità della missione stessa ci sono il peso del veicolo spaziale e il consumo di propellente, vista l'importante influenza che questo ha sui costi di un trasferimento orbitale. Di conseguenza, il problema di ottimizzazione si traduce nella ricerca di una strategia che permette di eseguire la missione rendendo massima la frazione della massa del satellite destinata ad altri utilizzi, oltre l'immagazzinamento del propellente al termine della manovra oppure, allo stesso modo, la minimizzazione del propellente richiesto. E' importante però che durante il processo si prenda in considerazione un limite di tempo entro cui completare la missione, altrimenti il risultato dell'ottimizzazione sarebbe una traiettoria con una durata lunghissima, a fronte di consumi minimi. Quindi, l'ottimizzazione deve essere un compromesso tra durata e consumi. Colui che aprì la strada all'ottimizzazione delle traiettorie spaziali fu Lawden, con la sua opera *Optimal Trajectories for Space Navigation*. Per soluzioni significative, questo problema deve essere risolto o con metodi numerici o con soluzioni approssimate. Questo problema è molto complesso, per diverse motivazioni:

- Il sistema dinamico è non-lineare

- Le variabili considerate presentano molte discontinuità
- Le condizioni iniziali o finali potrebbero essere implicite
- Alcune delle forze in gioco potrebbero dipendere dal tempo
- L'architettura della missione potrebbe non essere nota a priori

Ci sono diverse tipologie di traiettorie, quelle considerate in questo studio sono di tipo elettrico *low-thrust*, hanno quindi spinte molto contenute ma continue nel tempo ed accelerazioni dell'ordine dei 10^{-5} g.

Tra i metodi numerici, le tecniche di ottimizzazione indiretta offrono un'elevata precisione numerica ed un importante contenuto teorico, e consentono di ottenere la soluzione ottimale con un numero limitato di parametri e tempi di calcolo limitati.

4.1 Metodi di ottimizzazione

Esistono tre tipologie di metodi di ottimizzazione numerica per problemi di controllo ottimale²¹:

1. Metodi diretti

Questi tipi di metodi riducono il problema del controllo ottimale ad uno di ottimizzazione di parametri, utilizzando il gradiente della funzione come guida per la ricerca della soluzione. In questo caso la traiettoria è suddivisa in tanti passi più brevi e le equazioni del sistema sono integrate su ogni passo. Questo rende il calcolo computazionalmente molto lungo.

2. Metodi indiretti

I metodi indiretti descrivono il sistema con un set di equazioni differenziali, con condizioni al contorno assegnate, sfruttando i principi del calcolo variazionale. Introducono un vettore di stato ed ottimizzano le variabili di controllo modificandone i valori iniziali. Il problema così ottenuto è basato sul calcolo delle variazioni e la legge di controllo ottimale viene formulata come problema al contorno nei punti iniziale e finale. In questi tipi di metodo vengono introdotte delle variabili in numero pari alle

variabili di stato che evolvono insieme al vettore di stato, sono chiamate Moltiplicatori di Lagrange.

3. Metodi evolutivisti

I metodi evolutivisti, sono una tipologia di ottimizzatori numerici che permettono di ottenere un set discreto di parametri, che vengono successivamente utilizzati per determinare la soluzione del problema in modo più semplice. Tra questi metodi i più importanti sono i cosiddetti algoritmi genetici, i quali sono metodi euristici ispirati dai processi naturali di evoluzione biologica: ogni soluzione è rappresentata da un cromosoma, una sequenza di geni, dove ogni gene rappresenta un aspetto della soluzione.

In questo studio i metodi utilizzati sono quelli indiretti, i quali riducono il costo computazionale e permettono un'elevata precisione numerica.

4.2 Teoria del controllo ottimale

La teoria del controllo ottimale si basa sull'ottimizzazione indiretta, in particolare sui principi del calcolo variazionale⁸.

Il generico sistema a cui si applica tale teoria è descritto da:

- Vettore delle variabili di stato \mathbf{x}
- Vettore dei controlli \mathbf{u}
- Variabile indipendente t

Le equazioni differenziali che descrivono l'evoluzione del sistema tra gli istanti iniziale e finale (*contorni esterni*) sono quindi funzioni di \mathbf{x} , di \mathbf{u} e della variabile indipendente t . Le generica forma che le descrive è:

$$\frac{d\mathbf{x}}{dt} = \mathbf{f}(\mathbf{x}, \mathbf{u}, t) \quad (4.1)$$

Fatte queste considerazioni si procede dividendo la traiettoria in n sotto-intervalli, o archi, in cui le variabili possono essere considerate continue. Ogni j -esimo intervallo avrà come estremo inferiore il tempo $t = t_{(j-1)+}$ e come estremo superiore il tempo $t = t_{j-}$, mentre i valori che le variabili assumono sono rispet-

tivamente $x_{(j-1)+}$ e x_{j-} , dove i segni $-$ e $+$ indicano rispettivamente i valori assunti subito prima o dopo il punto considerato. Così facendo è possibile tenere in conto le eventuali discontinuità delle variabili, come ad esempio massa e velocità in seguito ad una manovra impulsiva, ed eventualmente anche del tempo, come nel caso di flyby di un pianeta se il tempo di permanenza all'interno della sfera d'influenza non viene trascurato, che si applicano ai punti di giunzione tra i vari archi (*contorni interni*). Successivamente vengono imposte le condizioni al contorno, le quali sono di tipo misto, ovvero coinvolgono i valori delle variabili di stato e della variabile indipendente tempo sia ai contorni esterni che a quelli interni. Generalmente sono non-lineari e vengono espresse come:

$$\chi(\mathbf{x}_{(j-1)+}, \mathbf{x}_{j-}, t_{(j-1)+}, t_{j-}) = 0 \quad \text{con } j = 1, \dots, n \quad (4.2)$$

Lo scopo del problema di ottimo è, quindi, trovare i valori estremali (massimi o minimi) di un certo funzionale \mathbf{J} (4.3) espresso come somma di due termini:

- Funzione φ , la quale dipende dai valori assunti dalle variabili e dal tempo ai contorni interni ed esterni
- Integrale esteso a tutta la traiettoria della funzione Φ , il quale dipende dal tempo e dai valori assunti in ogni punto da variabili e controlli

$$\mathbf{J} = \varphi(\mathbf{x}_{(j-1)+}, \mathbf{x}_{j-}, t_{(j-1)+}, t_{j-}) + \sum_j \int_{t_{(j-1)+}}^{t_{j-}} \Phi(\mathbf{x}(t), \mathbf{u}(t), t) dt \quad (4.3)$$

Introducendo delle specifiche funzioni ausiliarie, ci si può ricondurre a due diversi casi secondo la formulazione adottata:

- $\varphi = 0$: formulazione di Lagrange
- $\Phi = 0$: formulazione di Mayer

Tale espressione può essere riscritta introducendo i moltiplicatori di Lagrange:

- μ , ovvero costanti aggiunte associate alle condizioni al contorno χ
- λ , ovvero variabili aggiunte associate alle equazioni di stato:

$$\mathbf{J}^* = \varphi + \boldsymbol{\mu}^T \boldsymbol{\chi} + \sum_j \int_{t_{(j-1)+}}^{t_{j-}} (\Phi + \boldsymbol{\lambda}^T (\mathbf{f} - \dot{\mathbf{x}})) dt \quad j = 1, \dots, n \quad (4.4)$$

I due funzionali \mathbf{J} e \mathbf{J}^* dipendono dal tempo t , dalle variabili di stato \mathbf{x} e dalle loro derivate $\dot{\mathbf{x}}$ (in particolare dai valori che il tempo e le variabili assumono agli estremi di ogni arco, t_j e x_j) e dai controlli \mathbf{u} . Se condizioni al contorno ed equazioni di stato sono soddisfatte per qualunque scelta dei moltiplicatori di Lagrange, i due funzionali e quindi i loro valori estremali coincidono.

Un ulteriore passaggio può essere fatto nel caso si voglia slegare il funzionale dalla sua dipendenza dalle derivate delle variabili $\dot{\mathbf{x}}$. In questo caso, è sufficiente integrare per parti (4.5) e, differenziando, si ottiene la variazione prima del funzionale $\delta \mathbf{J}^*$ (4.5), assumendo variazioni arbitrarie delle variabili in gioco.

$$\mathbf{J}^* = \varphi + \boldsymbol{\mu}^T \boldsymbol{\chi} + \sum_j (\boldsymbol{\lambda}_{(j-1)+}^T \mathbf{x}_{(j-1)+} - \lambda_{j-}^T \mathbf{x}_{j-}) + \sum_j \int_{t_{(j-1)+}}^{t_{j-}} (\Phi + \boldsymbol{\lambda}^T \mathbf{f} - \dot{\boldsymbol{\lambda}}^T \mathbf{x}) dt \quad (4.5)$$

$$\begin{aligned} \delta \mathbf{J}^* &= \left(-H_{(j-1)+} + \frac{\partial \varphi}{\partial t_{(j-1)+}} + \boldsymbol{\mu}^T \frac{\partial \boldsymbol{\chi}}{\partial t_{(j-1)-}} \right) \delta t_{(j-1)+} + \\ &\quad + \left(H_{j-} + \frac{\partial \varphi}{\partial t_{j-}} + \boldsymbol{\mu}^T \frac{\partial \boldsymbol{\chi}}{\partial t_{j-}} \right) \delta t_{j-} + \\ &\quad + \left(\boldsymbol{\lambda}_{(j-1)+}^T + \frac{\partial \varphi}{\partial \mathbf{x}_{(j-1)+}} + \boldsymbol{\mu}^T \left[\frac{\partial \boldsymbol{\chi}}{\partial \mathbf{x}_{(j-1)+}} \right] \right) \delta \mathbf{x}_{(j-1)+} + \\ &\quad + \left(-\lambda_{j-}^T + \frac{\partial \varphi}{\partial \mathbf{x}_{j-}} + \boldsymbol{\mu}^T \left[\frac{\partial \boldsymbol{\chi}}{\partial \mathbf{x}_{j-}} \right] \right) \delta \mathbf{x}_{j-} + \\ &\quad + \sum_j \int_{t_{(j-1)+}}^{t_j} \left(\left(\frac{\partial H}{\partial \mathbf{x}} + \dot{\boldsymbol{\lambda}}^T \right) \delta \mathbf{x} + \frac{\partial H}{\partial \mathbf{u}} \delta \mathbf{u} \right) dt \end{aligned} \quad (4.6)$$

Le parentesi quadre indicano una matrice.

In questa espressione compare l'Hamiltoniano del sistema (H), ossia una funzione che esprime l'istanteo incremento dell'espressione lagrangiana del problema.

Questa funzione, all'interno della teoria del controllo ottimale, è definita come:

$$H = \phi + \lambda^T f \quad (4.7)$$

Per poter trovare i punti stazionari del funzionale modificato \mathbf{J}^* , quindi la condizione di ottimo, è necessario che la sua derivata prima sia nulla per qualsiasi variazione delle variabili del sistema ∂t , ∂x e ∂u e che le condizioni al contorno siano rispettate. L'introduzione di variabili e costanti aggiunte, permette, con una loro opportuna scelta, di annullare contemporaneamente il coefficiente di ciascuna delle variazioni in 4.6, assicurando quindi la stazionarietà del funzionale espressa dalla condizione $\delta \mathbf{J}^* = 0$.

Facendo queste semplificazioni si ricavano le equazioni di Eulero-Lagrange per le variabili aggiunte e le equazioni algebriche per i controlli:

$$\dot{\lambda} = - \left(\frac{\partial H}{\partial x} \right)^T \quad (4.8)$$

$$\left(\frac{\partial H}{\partial u} \right)^T = 0 \quad (4.9)$$

Da queste espressioni è possibile notare come le leggi di controllo siano formalmente indipendenti dal ricercare i massimi o i minimi. Nel caso in cui uno dei controlli sia soggetto a un vincolo, il valore ottimale soddisferà il **Principio di Pontryagin**, il quale afferma come il controllo ottimale è quello che, tra tutti quelli ammissibili, massimizza (minimizza) l'Hamiltoniano.

Si possono avere due possibilità:

- **Controllo non vincolato:** se il valore ottimale del controllo appartiene al dominio di ammissibilità, allora è quello che viene fornito dall'equazione 4.9 e quindi il vincolo non interviene in quel punto.
- **Controllo vincolato:** se il valore che viene fornito dall'equazione 4.9 non appartiene al dominio di ammissibilità, allora il valore ottimale di controllo

appartiene agli estremi del dominio stesso.

Se l'Hamiltoniano è lineare rispetto ad uno dei controlli soggetto a vincoli si ha un caso particolare, poichè nella corrispondente equazione 4.9 il controllo non compare esplicitamente e non può quindi essere determinato.

Si hanno in questo caso altre due possibilità (ci si riferisce al caso in cui J debba essere massimizzato):

- Se il coefficiente, nella definizione dell'Hamiltoniano (4.7), è diverso da zero, l'Hamiltoniano viene massimizzato per il valore massimo o minimo del controllo, a seconda che il coefficiente sia positivo o negativo.
- Se il coefficiente, nella definizione dell'Hamiltoniano (4.7), è nullo su un sotto intervallo finito, è necessario imporre tutte le derivate successive pari a zero, finché una di esse non conterrà, esplicitamente, il controllo.

Per quanto riguarda le condizioni al contorno mancanti, è conveniente riferirsi al j -esimo contorno, considerandolo come estremo finale del $(j - 1)$ -esimo sottointervallo o come estremo iniziale del j -esimo sottointervallo. Le condizioni ottenute risultano essere:

$$-\lambda_{j-}^T + \frac{\partial \phi}{\partial x_{j-}} + \mu^T \cdot \frac{\partial \chi}{\partial x_{j-}} = 0 \quad (4.10)$$

$$-\lambda_{j+}^T + \frac{\partial \phi}{\partial x_{j+}} + \mu^T \cdot \frac{\partial \chi}{\partial x_{j+}} = 0 \quad (4.11)$$

$$-H_{j-}^T + \frac{\partial \phi}{\partial t_{j-}} + \mu^T \cdot \frac{\partial \chi}{\partial t_{j-}} = 0 \quad (4.12)$$

$$H_{j+}^T + \frac{\partial \phi}{\partial t_{j+}} + \mu^T \cdot \frac{\partial \chi}{\partial t_{j+}} = 0 \quad (4.13)$$

Le equazioni 4.10 e 4.12 non hanno significato all'inizio della traiettoria ($j = 0$), mentre le equazioni 4.11 e 4.13 non ne hanno al suo termine ($j = n$). Le condizioni di ottimo si ricavano eliminando le costanti aggiunte μ^T :

$$\sigma (x_{(j-1)+}, x_{j-}, \lambda_{(j-1)+}, \lambda_{j-}, t_{(j-1)+}, t_{j-}) \quad (4.14)$$

Queste condizioni al contorno di ottimo, insieme alle condizioni assegnate 4.2, completano il sistema differenziale dato dalle equazioni 4.1 e 4.8. Considerando una generica variabile di stato x , se sottoposta a particolari condizioni al contorno, le equazioni 4.10 e 4.11 forniscono particolari condizioni di ottimo per la variabile aggiunta corrispondente λ_x :

- se la variabile di stato x è assegnata esplicitamente all'istante iniziale (il vettore delle condizioni imposte χ contiene l'equazione $x_0 - a = 0$ con a valore assegnato), non ci sono condizioni sulla corrispondente variabile aggiunta
- se il valore iniziale della variabile di stato x_0 non compare nè nella funzione ϕ nè nelle condizioni al contorno, la corrispondente variabile aggiunta è nulla all'istante iniziale (λ_{x_0}); anche in questo caso queste considerazioni si estendono a una analoga situazione al tempo finale
- se una variabile di stato è continua e non assegnata al punto interno i (χ contiene l'equazione $x_{j+} = x_{j-}$), la corrispondente variabile aggiunta è anch'essa continua ($\lambda_{x_{j+}} = \lambda_{x_{j-}}$)
- se una variabile di stato è continua e assegnata esplicitamente a un contorno interno, (χ contiene le equazioni $x_{j+} = x_{j-} = a$), la corrispondente variabile aggiunta ha una discontinuità "libera", cioè il valore di $\lambda_{x_{j+}}$ è indipendente da $\lambda_{x_{j-}}$ e deve essere determinato dalla procedura di ottimizzazione.

Analogamente, se H non dipende esplicitamente dal tempo, anche le equazioni 4.12 e 4.13 forniscono, in alcuni casi, particolari condizioni al contorno:

- se il tempo iniziale t_0 non compare esplicitamente nè nelle condizioni al contorno nè nella funzione ϕ , l'Hamiltoniano è nullo all'istante iniziale ($H_0 = 0$); analogamente l'Hamiltoniano si annulla al tempo finale se questo non interviene esplicitamente in χ e φ .
- se il tempo intermedio t_j non compare esplicitamente nella funzione φ , (l'unica condizione in χ che lo coinvolge è la continuità del tempo $t_{j+} = t_{j-}$) l'Hamiltoniano è continuo in j ($H_{j+} = H_{j-}$);

- se il tempo t_j è esplicitamente assegnato, (in χ compaiono le equazioni $t_{j+} = t_{j-} = a$) l'Hamiltoniano ha in quel punto una discontinuità "libera".

4.3 Problema differenziale ai limiti

I metodi di ottimizzazione indiretti prevedono di applicare la teoria del controllo ottimale sul sistema di equazioni 4.1, le cui condizioni al contorno dipendono dalla tipologia di orbite tra le quali viene effettuato il trasferimento^{8, 21}. Tale teoria definisce un nuovo sistema di equazioni differenziali ai limiti, noto come *Boundary Value Problem - BVP*, nel quale i valori iniziali delle variabili considerate sono incogniti.

Diventa quindi necessario trovare i valori iniziali che soddisfino tutte le condizioni al contorno, sia per quanto riguarda quelle di ottimo, che quelle imposte, tramite un'integrazione di tipo numerico del sistema differenziale. Per questo motivo si considera l'orbita divisa in tanti sottointervalli (archi). Il nuovo problema così definito presenta le seguenti caratteristiche:

- L'intervallo di integrazione è suddiviso in sottointervalli in cui le equazioni differenziali possono avere differente espressione
- La durata di ciascun sotto-intervallo non è nota a priori
- Le condizioni al contorno potrebbero essere non lineari e coinvolgere valori ai contorni interni o esterni
- le variabili possono essere discontinue ai contorni interni e il loro valore dopo la discontinuità può essere incognito

La principale difficoltà che emerge dall'applicazione delle tecniche di ottimizzazione indiretta è la soluzione di tale problema, la quale viene ricercata riducendo quest'ultimo a una successione di problemi ai valori iniziali, portati alla convergenza con l'applicazione del metodo di Newton. Per risolvere l'indeterminatezza della durata di ciascun sottointervallo si effettua un cambio di variabile, infatti la variabile t viene sostituita con una nuova, ε , definita per il

j-esimo sottointervallo:

$$\varepsilon = j - 1 + \frac{t - t_{j-1}}{t_j - t_{j-1}} = j - 1 + \frac{t - t_{j-1}}{\tau_j} \quad (4.15)$$

Il parametro τ_j identifica la durata del sottointervallo, la quale è incognita. Per la formulazione del problema iniziale si introduce un vettore y che contiene sia le variabili di stato x che quelle aggiunte λ , dunque non sono più distinte.

$$y = f(x, \lambda) \quad (4.16)$$

Le equazioni differenziali vengono scritte come:

$$\frac{dy}{dt} = f^*(y, t) \quad (4.17)$$

Il passo successivo è quello di introdurre un altro vettore, il vettore z , il quale include sia le variabili di stato e le variabili aggiunte (contenute in y) sia un vettore c dei parametri costanti:

$$z = f(y, c) \quad (4.18)$$

Si può ora effettuare il passaggio da t ad ε :

$$\frac{dz}{d\varepsilon} = f^*(y, c, \varepsilon) = f(z, \varepsilon) \quad (4.19)$$

Esplicitando il secondo membro della 4.19 si ha:

$$\frac{dy}{d\varepsilon} = \tau_j \frac{dy}{dt} \quad (4.20)$$

La derivata prima dei parametri costanti, in quanto tali, sarà invece nulla:

$$\frac{dc}{d\varepsilon} = 0 \quad (4.21)$$

Le condizioni al contorno saranno:

$$\psi(s) = 0 \quad (4.22)$$

Con s un vettore contenente i valori assunti dalle variabili ad ogni estremità e di parametri costanti incogniti:

$$s = (y_{0+}, y_{1+}, \dots, y_{n-}, c) = (z_{0+}, z_{1+}, \dots, z_{n-}) \quad (4.23)$$

I valori iniziali di alcune delle variabili sono in genere incogniti, e la ricerca della soluzione si traduce nel determinare, attraverso un procedimento iterativo, quali valori devono assumere per soddisfare le equazioni 4.22. Si suppone che nessuno dei valori iniziali sia noto, per cui alla prima iterazione si scelgono dei valori di tentativo p^1 . Alla r -esima iterazione si integrano le equazioni 4.19 con i valori iniziali p^r che risultano dall'iterazione precedente. Si fissa dunque:

$$z(0) = p^r \quad (4.24)$$

A questo punto si integrano le equazioni lungo tutta la traiettoria tenendo però conto delle eventuali discontinuità delle variabili ai contorni interni. In ciascun contorno viene determinato il valore delle variabili di stato e, al termine dell'integrazione, si calcola l'errore sulle condizioni al contorno ψ^r alla r -esima iterazione. Una variazione Δp porta a variare l'errore sulle condizioni al contorno di una quantità che, tenendo in conto solo i termini del primo ordine, è pari a:

$$\Delta \Psi = \left[\frac{\partial \Psi}{\partial p} \right]^{-1} \Delta p \quad (4.25)$$

Si vuole annullare l'errore sulle condizioni al contorno, quindi si vuole ottenere:

$$\Delta \Psi = -\psi^r \quad (4.26)$$

Quindi, ad ogni iterazione i valori iniziali vengono corretti di una quantità:

$$\Delta p = p^{r+1} - p^r = - \left[\frac{\partial \Psi}{\partial p} \right]^{-1} \psi^r \quad (4.27)$$

Si va avanti fino a quando le condizioni al contorno 4.22 non siano verificate con la precisione voluta. La matrice che compare nell'equazione 4.27 è calcolata

come prodotto di due matrici:

$$\begin{bmatrix} \frac{\partial \Psi}{\partial p} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{\partial \Psi}{\partial s} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \frac{\partial s}{\partial p} \end{bmatrix} \quad (4.28)$$

dove la prima può essere immediatamente ottenuta derivando le condizioni al contorno rispetto alle grandezze che vi compaiono, mentre la seconda matrice, che contiene le derivate dei valori delle variabili ai contorni rispetto ai valori iniziali, cioè i valori che vengono assunti ai contorni dalla matrice:

$$\begin{bmatrix} \frac{\partial z}{\partial p} \end{bmatrix} = [g(\varepsilon)] \quad (4.29)$$

è ottenuta integrando il sistema di equazioni differenziali che si ottiene derivando il sistema principale 4.19 rispetto a ciascuno dei valori iniziali:

$$[\dot{g}] = \frac{d}{d\varepsilon} \begin{bmatrix} \frac{\partial z}{\partial p} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{\partial}{\partial p} \left(\frac{dz}{d\varepsilon} \right) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{\partial f}{\partial p} \end{bmatrix} \quad (4.30)$$

La derivata ora si riferisce alla nuova variabile indipendente ε . Esplicitando lo Jacobiano del sistema principale (4.19), l'equazione 4.30 assume la forma:

$$[\dot{g}] = \begin{bmatrix} \frac{\partial f}{\partial z} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \frac{\partial z}{\partial p} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{\partial f}{\partial z} \end{bmatrix} [g] \quad (4.31)$$

Una particolarità dell'applicazione di questo metodo a problemi di ottimizzazione indiretta sono le proprietà di simmetria di alcuni termini dello Jacobiano, qui omesse.

I valori iniziali per il sistema omogeneo 4.31 si hanno derivando la relazione 4.24. Si ottiene quindi la matrice identica:

$$[g(0)] = \begin{bmatrix} \frac{\partial z(0)}{\partial p} \end{bmatrix} = [I] \quad (4.32)$$

Questo metodo consente di trattare anche discontinuità nelle variabili. Per una discontinuità nel punto i , è sufficiente aggiornare sia il vettore delle variabili z che la matrice g attraverso la relazione h che lega i valori delle variabili prima e dopo la discontinuità:

$$z_{i+} = h(z_{i-}) \quad (4.33)$$

$$[g_{i+}] = \left[\frac{\partial h}{\partial z} \right] [g_{i-}] \quad (4.34)$$

Il problema si semplifica se alcuni dei valori iniziali delle variabili sono noti, poichè il vettore p si riduce alla stima delle sole componenti incognite di $z(0)$ e il vettore ψ alle sole condizioni al contorno non esplicite al tempo iniziale. La precisione richiesta è stata impostata pari a 10^{-7} , ossia si ha che:

$$E_{max} = \max(\psi_i) < 10^{-7} \quad (4.35)$$

Infine, il metodo presenta alcuni ulteriori accorgimenti, per evitare il verificarsi di errori e favorire la convergenza. La linearizzazione che è stata introdotta sul calcolo della frazione di correzione Δp , quando applicata ai valori di tentativo iniziali, introduce una serie di errori che potrebbero interferire in negativo sulla convergenza del metodo, causando un aumento dell'errore sulle condizioni al contorno ad ogni iterazione, piuttosto che una diminuzione. In particolare, gli accorgimenti che vengono presi per migliorare tale procedura sono:

- La correzione apportata ad ogni iterazione è soltanto una frazione di quella determinata, in modo da ridurre gli effetti degli errori.

Si ha:

$$p^{r+1} = p^r + K_1 \Delta p \quad \text{con} \quad K_1 = 0.1 \div 1 \quad (4.36)$$

- Dopo ogni iterazione si confronta l'errore massimo sulle condizioni al contorno E_{max}^{r+1} con quello ottenuto all'iterazione precedente E_{max}^r e se è rispettata la condizione 4.37, allora si procede con l'iterazione successiva

$$E_{max}^{r+1} < K_2 E_{max}^r \quad \text{con} \quad K_2 > 1 \quad (4.37)$$

- Se, al contrario, l'errore sulla nuova iterazione è troppo grande rispetto alla precedente, si applica il metodo di bisezione alla correzione apportata, dimezzandola, fino ad un massimo di cinque volte. Oltre la quinta applicazione, infatti, il processo viene stoppato poiché non in grado di convergere per la soluzione di tentativo scelta.

$$p^{r+1} = p^r + K_1 \frac{\Delta p}{2} \quad (4.38)$$

Capitolo 5

Problema dinamico

5.1 Modello dinamico

In questo capitolo vengono presentate le equazioni che descrivono il problema analizzato, al quale si sta applicando la teoria del controllo ottimale. Verrà data una descrizione del modello e delle perturbazioni. Il modello dinamico considera un veicolo spaziale puntiforme con massa variabile. Le variabili di stato del problema sono la posizione r , la velocità V e la massa m :

$$\frac{dr}{dt} = V \quad (5.1)$$

$$\frac{dV}{dt} = -\frac{\mu}{r^3} r + \frac{T}{m} + a_p \quad (5.2)$$

$$\frac{dm}{dt} = -\frac{T}{c} \quad (5.3)$$

Si considerino l'equazione 5.2 e 5.3:

- Il primo termine del secondo membro $\frac{\mu}{r^3} r$ rappresenta il potenziale gravitazionale della Terra con l'assunzione che questa sia perfettamente sferica.
- Il termine a_p si può scrivere come somma di tre contributi:

$$a_p = a_j + a_{lsg} + a_{srp}$$

- a_j è la perturbazione relativa alla non sfericità della Terra, determina un'attrazione non uguale su tutta la superficie terrestre e varia con la posizione del satellite.
- a_{lsg} è l'accelerazione perturbante dovuta alla gravità Lunare e Solare e varia anch'essa con la posizione del satellite.
- a_{srp} è la perturbazione dovuta alla pressione della radiazione solare che esercita una vera e propria pressione, e quindi una spinta, sul satellite.

Tali accelerazioni verranno poi riprese in seguito.

- Il termine T , invece, indica la spinta generata dal propulsore ed assume alternativamente valore nullo (quando il propulsore è spento) e valore massimo T_{max} (quando, invece, è in funzione).
- c rappresenta la velocità efficace di scarico, la quale è assunta costante.

Il passo successivo è quello dell'introduzione dell'Hamiltoniano H , definito precedentemente nell'equazione 4.7, che viene ora applicato al problema dinamico in esame.

$$H = \lambda_r^T v + \lambda_v^T \left(-\frac{\mu^T \mathbf{r}}{r^2} + \frac{\mathbf{T}}{m} + a_p \right) - \lambda_m \frac{\mathbf{T}}{c} \quad (5.4)$$

I valori delle variabili aggiunte, invece, sono derivati dalle equazioni di Eulero-Lagrange:

$$\frac{d\lambda_x}{dt} = -\frac{\partial H}{\partial x} \quad (5.5)$$

Il valore di x nella 5.5 può assumere il valore di $r, \theta, \varphi, u, v, w$ e m .

Si introduce ora il concetto di *switching function*:

$$S_F = \frac{\lambda_v^T}{m} - \frac{\lambda_m}{c} \quad (5.6)$$

Questa è strettamente legata alla spinta T , infatti:

- Se $S_F > 0$, la spinta è massima e vale T_{max}
- Se $S_F < 0$, la spinta è minima, ovvero nulla
- Se $S_F = 0$, l'arco è singolare

Sostituendo la 5.6 nella 5.4 si ha:

$$H = \lambda_r^T v + \lambda_v^T \left(-\frac{\mu^T \mathbf{r}}{r^2} \frac{\mathbf{r}}{r} \right) - TS_F + a_p \quad (5.7)$$

Si deduce che la direzione ottimale della spinta è parallela al vettore velocità aggiunto λ_v , detto *primer vector*.

Le equazioni sono proiettate nel sistema di riferimento *Earth Mean Equator and Mean Equinox alla Epoch J2000*, noto con il nome *EME2000* e già descritto precedentemente. La posizione del satellite è descritta in coordinate polari, con raggio r , ascensione retta θ e declinazione φ :

$$\mathbf{r} = r \cos(\theta) \cos(\varphi) \mathbf{I} + r \sin(\theta) \cos(\varphi) \mathbf{J} + r \sin(\varphi) \mathbf{K} \quad (5.8)$$

Viene poi introdotto un sistema di riferimento topocentrico in cui il versore \mathbf{i} rappresenta il vettore unità in direzione radiale, \mathbf{j} quello verso est e \mathbf{k} verso nord.

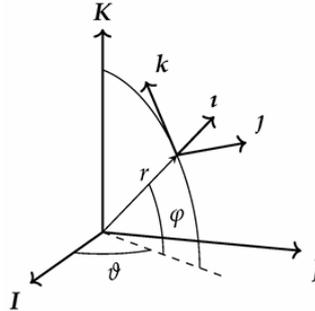


Figura 5.1: Sistemi di riferimento EME2000 e topocentrico¹¹

Il passaggio tra i due sistemi di riferimento avviene tramite la seguente matrice di rotazione:

$$\begin{bmatrix} i \\ j \\ k \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos\theta \cos\varphi & \sin\theta \cos\varphi & \sin\varphi \\ -\sin\theta & \cos\theta & 0 \\ -\cos\theta \sin\varphi & -\sin\theta \sin\varphi & \cos\varphi \end{bmatrix} \begin{bmatrix} I \\ J \\ K \end{bmatrix} \quad (5.9)$$

Nel nuovo sistema di riferimento topocentrico, i vettori posizione e velocità sono descritti da:

$$\mathbf{r} = r\mathbf{i} \quad (5.10)$$

$$\mathbf{v} = \dot{\mathbf{r}} = u\mathbf{i} + v\mathbf{j} + w\mathbf{k} \quad (5.11)$$

con u , v e w che indicano le componenti radiale, verso est e verso nord, rispettivamente.

A questo punto si possono derivare le sette equazioni scalari Di stato:

$$\frac{dr}{dt} = u \quad (5.12)$$

$$\frac{d\theta}{dt} = \frac{v}{r \cos\varphi} \quad (5.13)$$

$$\frac{d\varphi}{dt} = \frac{w}{r} \quad (5.14)$$

$$\frac{du}{dt} = -\frac{\mu}{r^2} + \frac{v^2 + w^2}{r} + \frac{T_u}{m} + (a_J)_u + (a_{lsp})_u + (a_{srp})_u \quad (5.15)$$

$$\frac{dv}{dt} = \frac{-u v + v w \tan\varphi}{r} + \frac{T_v}{m} + (a_J)_v + (a_{lsp})_v + (a_{srp})_v \quad (5.16)$$

$$\frac{dw}{dt} = \frac{-u w - v^2 \tan\varphi}{r} + \frac{T_w}{m} + (a_J)_w + (a_{lsp})_w + (a_{srp})_w \quad (5.17)$$

$$\frac{dm}{dt} = -\frac{T}{c} \quad (5.18)$$

Il vettore di stato per le condizioni iniziali è:

$$x = [r_0, \theta_0, \varphi_0, u_0, v_0, w_0, m_0] \quad (5.19)$$

Si introducono due angoli che permettono di scrivere le tre componenti della spinta T_u , T_v , T_w :

- α_T , l'angolo di spinta nel piano
- β_T , l'angolo di spinta fuori dal piano

$$T_u = T \sin\alpha_T \quad (5.20)$$

$$T_v = T \cos\alpha_T \cos\beta_T \quad (5.21)$$

$$T_w = T \cos\alpha_T \sin\beta_T \quad (5.22)$$

Attraverso queste equazioni è possibile riscrivere l'emiltoniano come segue:

$$\begin{aligned} H = & \lambda_r u + \lambda_\theta \frac{v}{r \cos\varphi} + \lambda_\varphi \frac{w}{r} + \\ & + \lambda_u \left(-\frac{\mu}{r^2} + \frac{v^2 + w^2}{r} + \frac{T}{m} \sin\alpha_T \right) + \\ & + \lambda_v \left(\frac{-u v + v w \tan\varphi}{r} + \frac{T}{m} \cos\alpha_T \cos\beta_T \right) \\ & + \lambda_w \left(\frac{-u w - v^2 \tan\varphi}{r} + \frac{T}{m} \cos\alpha_T \sin\beta_T \right) + \\ & - \lambda_m - \frac{T}{c} \end{aligned} \quad (5.23)$$

Imponendo uguale a zero le sue derivate parziali, si ricavano α_T e β_T , ovvero i valori ottimali cercati, in termini di direzione di spinta fornita dal propulsore:

$$\left(\frac{\partial H}{\partial u} \right)^T = 0 \quad (5.24)$$

con $u = [\alpha_T, \beta_T]$. Le equazioni algebriche di controllo saranno:

$$\sin\alpha_T = \frac{\lambda_u}{\lambda_V} \quad (5.25)$$

$$\cos\beta_T \cos\alpha_T = \frac{\lambda_v}{\lambda_V} \quad (5.26)$$

$$\sin\beta_T \cos\alpha_T = \frac{\lambda_w}{\lambda_V} \quad (5.27)$$

In queste equazioni λ_V rappresenta il modulo della variabile aggiunta riferita

alla velocità e parallela alla direzione ottimale della spinta:

$$\lambda_V = \sqrt{\lambda_u^2 + \lambda_v^2 + \lambda_w^2} \quad (5.28)$$

Per definire il set di equazioni differenziali per la variabile aggiunta (5.29) si sfruttano le equazioni di Eulero-Lagrange.

$$\lambda = [\lambda_r, \lambda_\theta, \lambda_\varphi, \lambda_u, \lambda_v, \lambda_w, \lambda_m] \quad (5.29)$$

$$\begin{aligned} \dot{\lambda}_r = \frac{1}{r^2} \left[\lambda_\theta \frac{v}{\cos \varphi} + \lambda_\varphi w + \lambda_u \left(-\frac{2}{r} + v^2 + w^2 \right) + \right. \\ \left. \lambda_v (-uv + vw \tan \varphi) + \lambda_w (-uw + v^2 \tan \varphi) + \frac{dH}{da_p} \frac{da_p}{dr} \right] \end{aligned} \quad (5.30)$$

$$\dot{\lambda}_\theta = 0 \quad (5.31)$$

$$\dot{\lambda}_\varphi = \frac{1}{r \cos \varphi^2} (\lambda_\theta v \sin \varphi - \lambda_v vw + \lambda_w v^2) + \frac{dH}{da_p} \frac{da_p}{d\varphi} \quad (5.32)$$

$$\dot{\lambda}_u = \frac{1}{r} (-\lambda_r r + \lambda_v v + \lambda_w w) + \frac{dH}{da_p} \frac{da_p}{du} \quad (5.33)$$

$$\dot{\lambda}_v = \frac{1}{r} \left[-\lambda_\theta \frac{1}{\cos \theta} - 2\lambda_u v - \lambda_v (u - w \tan \varphi) + 2\lambda_w v \tan \varphi \right] + \frac{dH}{da_p} \frac{da_p}{dv} \quad (5.34)$$

$$\dot{\lambda}_w = \frac{1}{r} [-\lambda_\varphi - 2\lambda_u w - \lambda_v (v \tan \varphi + \lambda_w u)] + \frac{dH}{da_p} \frac{da_p}{dw} \quad (5.35)$$

$$\dot{\lambda}_m = \frac{T}{m^2} \lambda_V + \frac{dH}{da_p} \frac{da_p}{dm} \quad (5.36)$$

5.1.1 Perturbazioni

Il modello dinamico appena descritto non tiene conto dell'interazione con il Sole e con la Luna, ma solo di quella tra lo spacecraft e la Terra, di conseguenza tale modello non è sufficiente a descrivere quello del problema, il quale è a 4-corpi. Vengono quindi introdotti dei termini correttivi che considerano le perturbazioni in gioco, le quali sono:

- Non perfetta sfericità della Terra
- Effetto lunisolare

- Pressione della radiazione solare

5.1.1.1 Non sfericità della Terra

L'influenza del modello gravitazionale terrestre potrebbe essere trascurato nello scenario preso in esame, a causa della grande distanza dalla Terra alla quale si trovano le traiettorie utilizzate, tuttavia al fine di effettuare un'analisi più completa si è scelto di considerare tali variazioni e dunque di implementare comunque le armoniche asferiche terrestri per avere la possibilità di trattare queste perturbazioni quando necessario.

Queste perturbazioni sono dovute alla non perfetta sfericità della Terra, dalla quale deriva un campo di attrazione gravitazionale non uniforme in tutte le direzioni, ma dipendente dalla posizione in cui ci si trova. La Terra, infatti, non è una sfera, ma un geoide, il quale è più schiacciato ai poli e più gonfio all'equatore. Per questo motivo per descrivere il potenziale terrestre viene usato il modello "Earth Gravitational Model EGM2008", il quale fornisce i coefficienti armonici normalizzati per il potenziale gravitazionale terrestre.

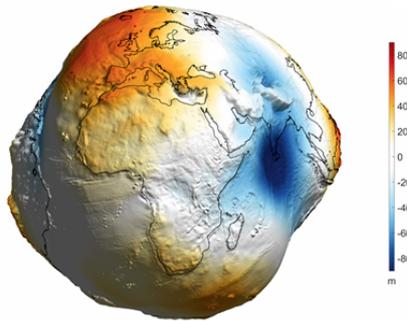


Figura 5.2: Modello di campo gravitazionale EGM2008⁷

Nel caso in esame viene utilizzato il sistema "Tide Free", che permette di esprimere il potenziale come:

$$\mathcal{V} = -\frac{\mu_E}{r} \left\{ 1 + \sum_{n=2}^N \left(\frac{r_E}{r} \right)^n \sum_{m=0}^n [C_{nm} \cos(m\theta_{Lo}) + S_{nm} \sin(m\theta_{Lo})] P_{nm} \sin(\varphi) \right\} \quad (5.37)$$

in cui:

- μ è il parametro gravitazionale della Terra
- r_E è il semiasse maggiore dell'ellissoide terrestre
- θ_{Lo} è la longitudine
- φ è la latitudine
- N ha un valore fissato pari a 8
- C_{nm}, S_{nm} rappresentano i coefficienti armonici
- P_{nm} è la funzione associata di Legendre

Trascurando la nutazione, la latitudine terrestre coinciderà con l'angolo di declinazione.

La longitudine terrestre sarà:

$$\theta_{Lo}(t) = \theta - \theta_G(t) = \theta - [\theta_{G_{ref}} + \omega_E(t - t_{ref})] \quad (5.38)$$

Dove $\theta_{G_{ref}}$ è la posizione dell'ascensione retta di Greenwich al tempo di riferimento t_{ref} e ω_E è la velocità di rotazione della Terra valutata sul giorno siderale. Per calcolare l'accelerazione perturbativa dovuta alla non sfericità della Terra si deve calcolare il gradiente di Φ :

$$\Phi = \mathcal{V} + \frac{\mu_e}{r} \quad (5.39)$$

Le componenti di Φ nel sistema di riferimento topocentrico sono:

$$(a_J)_u = \frac{\partial \Phi}{\partial r} \quad (5.40)$$

$$(a_J)_v = \frac{\partial \Phi}{\partial \theta} \frac{1}{r \cos \varphi} \quad (5.41)$$

$$(a_J)_w = \frac{\partial \Phi}{\partial \varphi} \frac{1}{r} \quad (5.42)$$

5.1.1.2 Effetto lunisolare

La perturbazione luni-solare tiene in considerazione gli effetti di attrazione gravitazionale di Sole e Luna sull'orbita del satellite. Le posizioni della Luna e

del Sole sono valutate tramite le effemeridi DE405 JPL, grazie alle quali viene fornita la posizione del corpo in coordinate rettangolari x_b , y_b e z_b rispetto alla Terra nel sistema di riferimento Celeste Internazionale (ICRF), e quindi, approssimando, nel sistema EME2000. Al pedice 'b', usato per indicare un corpo generico, andrà poi sostituito 's' per il Sole e 'l' per la Luna. Il parametro gravitazionale dei due corpi è μ_b , mentre il vettore posizione rispetto alla Terra:

$$\mathbf{r}_b = x_b \mathbf{I} + y_b \mathbf{J} + z_b \mathbf{K} \quad (5.43)$$

I sistemi EME2000 e ICRF come detto nella sezione 2.1.2 vengono usati indistintamente a causa dell'assenza dei moti di precessione e nutazione. Nel sistema topocentrico le componenti saranno:

$$\mathbf{r}_{ZEN} = \mathbf{R}_{23}(\varphi, \theta) \mathbf{r}_{IJK}$$

$$(r_b)_u = x_b \cos \theta \cos \varphi + y_b \sin \theta \cos \varphi + z_b \sin \varphi \quad (5.44)$$

$$(r_b)_v = -x_b \sin \theta + y_b \cos \theta \quad (5.45)$$

$$(r_b)_w = -x_b \cos \theta \sin \varphi - y_b \sin \theta \sin \varphi + z_b \cos \varphi \quad (5.46)$$

L'accelerazione di perturbazione dovuta a questi due corpi è data dalla differenza delle accelerazioni gravitazionali che il corpo provoca sul veicolo spaziale e sulla Terra:

$$a_{bg} = a_{SC_b} - a_b = - \left(\frac{\mu_b}{R_b^3} \right) \mathbf{R}_b - \left(\frac{m\mu_b}{r_b^3} \right) \mathbf{r}_b \quad (5.47)$$

Con $\mathbf{R}_b = \mathbf{r} - \mathbf{r}_b$ la posizione relativa del satellite rispetto al corpo perturbante.

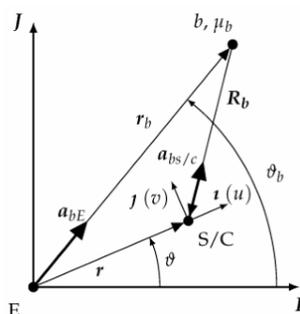


Figura 5.3: Rappresentazione delle perturbazioni¹¹

Procedendo a proiettare l'azione perturbativa nel sistema di riferimento topocentrico, si ottiene:

$$(a_{bg})_u = \frac{\mu_b}{R^3} [(\mathbf{r}_b)_u - \mathbf{r}] - \frac{\mu_b}{r^3} (\mathbf{r}_b)_u \quad (5.48)$$

$$(a_{bg})_v = \frac{\mu_b}{R^3} (\mathbf{r}_b)_v - \frac{\mu_b}{r^3} (\mathbf{r}_b)_v \quad (5.49)$$

$$(a_{bg})_w = \frac{\mu_b}{R^3} (\mathbf{r}_b)_w - \frac{\mu_b}{r^3} (\mathbf{r}_b)_w \quad (5.50)$$

con $\mathbf{R} = \sqrt{[\mathbf{r} - (\mathbf{r}_b)_u]^2 + (\mathbf{r}_b)_v^2 + (\mathbf{r}_b)_w^2}$.

Per determinare l'azione perturbativa lunisolare è necessario calcolare in maniera separata il contributo del Sole e quello della Luna, per poi sommarli:

$$(a_{lsp})_u = (a_{lg})_u + (a_{sg})_u \quad (5.51)$$

$$(a_{lsp})_v = (a_{lg})_v + (a_{sg})_v \quad (5.52)$$

$$(a_{lsp})_w = (a_{lg})_w + (a_{sg})_w \quad (5.53)$$

Quando il corpo perturbante è molto lontano rispetto alla distanza Terra-spacecraft (cioè quando $r_b \gg r$, come accade per il Sole) e assumendo che le orbite siano complanari, si può ricavare un'espressione più semplice delle componenti tangenziali e radiali della perturbazione:

$$\left(a_{s_{s/c}} - a_{s_E} \right)_u = \frac{3 \mu_s}{2 r_s^3} \sin [2 (\theta_s - \theta)] \quad (5.54)$$

$$\left(a_{s_{s/c}} - a_{s_E} \right)_v = \frac{3 \mu_s}{2 r_s^3} \{1 + \cos [2 (\theta_s - \theta)]\} \quad (5.55)$$

Le componenti principali della velocità del satellite sono quella tangenziale e radiale, quindi questi termini possono essere utilizzati per stimare gli effetti positivi o negativi della perturbazione solare durante l'evasione. Si possono quindi introdurre due termini di proporzionalità in cui è possibile racchiudere

la dipendenza dell'effetto della perturbazione sulla posizione Sole-spacecraft:

$$\zeta_v = \sin(2\Delta\theta) \quad (5.56)$$

$$\zeta_u = 1 + \cos(2\Delta\theta) \quad (5.57)$$

$\Delta\theta$ rappresenta è la differenza tra la posizione angolare del Sole e quella del satellite. L'energia aumenta grazie alla componente di accelerazione lungo la direzione tangenziale. Un valore elevato di ζ_v è utile durante la fase iniziale (quando la velocità è tangenziale), mentre un valore elevato di ζ_u è preferibile nelle fasi finali, quando la velocità tende ad essere radiale. Un grande ζ_v si verifica quando il Sole si trova nel primo ($0^\circ < \Delta\theta < 90^\circ$) o nel terzo ($180^\circ < \Delta\theta < 270^\circ$) quadrante nel sistema di riferimento rotante del veicolo spaziale. Altre combinazioni, al contrario, potrebbero avere un'influenza nulla o negativa. L'accelerazione radiale non può produrre un effetto negativo (a meno che il veicolo non si stia muovendo verso la Terra). In generale, l'effetto benefico totale della perturbazione solare sull'energia del satellite si avrà quando il Sole si trova vicino a -157.5° o $+22.5^\circ$ rispetto alla direzione Terra-satellite.

5.1.1.3 Pressione della radiazione solare

L'accelerazione dovuta all'azione perturbante della Radiazione Solare si genera a partire dall'emissione di particelle solari energetiche (fotoni) che vanno ad impattare contro la superficie del satellite, cedendogli la propria quantità di moto e quindi vanno ad aumentare la velocità nella direzione Sole-Spacecraft. La pressione del fotone, ad una certa distanza R dal Sole, è:

$$p = \frac{L_s}{4\pi R^2 c_{luce}} \quad (5.58)$$

dove c_{luce} è la velocità della luce e L_s è un parametro che rappresenta la potenza totale irradiata. In generale, la pressione fotonica, a distanza $R^* = 1AU$, è di $p^* = 4.55682 \cdot 10^{-6} \frac{N}{m^2}$. Assumendo come coefficiente di riflettività $\eta = 0.7$, l'accelerazione di perturbazione su di un corpo di massa m , avente sezione trasversale

S, si calcola come segue:

$$\mathbf{a}_{sp} = (1 + \eta) p^* \left(\frac{R^*}{R} \right)^2 \left(\frac{S}{m} \right) m \frac{\mathbf{R}}{R} = \frac{\Gamma \mathbf{R}}{m R^3} \quad (5.59)$$

Il coefficiente di riflettività η è un parametro che dipende dal materiale e dall'orientazione della superficie del satellite e varia tra 0, per un corpo in grado di assorbire completamente le radiazioni, e 1, per un corpo che riflette completamente la radiazione. Le componenti nel sistema topocentrico saranno:

$$(a_{srp})_u = \left[\frac{\Gamma \mathbf{R}}{m R^3} \right] [(r_s)_u - r] \quad (5.60)$$

$$(a_{srp})_v = \left[\frac{\Gamma \mathbf{R}}{m R^3} \right] (r_s)_v \quad (5.61)$$

$$(a_{srp})_w = \left[\frac{\Gamma \mathbf{R}}{m R^3} \right] (r_s)_w \quad (5.62)$$

Si può notare come sia presente un'analogia tra l'azione perturbatrice della pressione di radiazione solare e l'attrazione gravitazionale esercitata da un corpo (come ad esempio il Sole) sullo spacecraft, infatti entrambe dipendono in maniera inversamente proporzionale dal quadrato della distanza che separa i due corpi. I due effetti, però, pur agendo lungo la stessa direzione, hanno verso opposto, l'attrazione gravitazionale, infatti, attira il satellite verso il Sole, mentre la pressione di radiazione solare tende a spingerlo in direzione opposta. Questa perturbazione, però, non è sempre presente, si ha solo quando il satellite è illuminato dal Sole, poichè altrimenti non si avrebbe nessuna interazione tra fotoni e corpo.

5.2 Applicazione della Teoria del Controllo Ottimale al modello dinamico

In questa tesi l'approccio che viene utilizzato prevede la conoscenza a priori della "struttura" della traiettoria, la quale viene poi modificata solo nel caso in cui viene violato il Principio del Massimo di Pontryagin (PMP). Dividendo la traiettoria in un numero di fasi distinte pari al numero di archi di spinta e di coast si genera un problema ai valori al contorno multipunto (BVP), trasformando il problema di minimizzazione del propellente in un problema di questo tipo. La durata di ogni fase t_j non è nota ed è soggetta all'ottimizzazione. Ulteriori condizioni al contorno stabiliscono che la switching function sia nulla nei punti in cui il motore viene acceso oppure spento. Successivamente le equazioni vengono integrate utilizzando un integratore a ordine e passo variabile, basato sulle formule di Adams-Moulton. In questo modo l'accuratezza numerica raggiunta è paragonabile a quella ottenuta tramite i propagatori orbitali ad alta precisione. Le condizioni iniziali di alcune variabili, invece, sono sconosciute.

Il BVP viene risolto con una procedura iterativa *single-shooting* basata sul metodo di Newton. I metodi di shooting possono essere utilizzati sia per metodi diretti che per metodi indiretti e permettono di valutare l'andamento delle variabili di stato partendo dalla conoscenza dei controlli.

Si assumono dei valori provvisori q per le variabili non note e si calcola l'errore sulle condizioni al contorno dopo l'integrazione. Ogni componente i -esimo q_i viene perturbato di una piccola quantità ($\simeq 10^{-7}$) e dopo ogni integrazione si valuta la variazione dell'errore. Le variabili, quindi, vengono corrette dopo ogni iterazione, con lo scopo di annullare gli errori assumendo un comportamento lineare e valutando numericamente la matrice $\frac{\partial \chi}{\partial q}$, così che:

$$\Delta q = -K \left[\frac{\partial \chi}{\partial q} \right]^{-1} \chi \quad (5.63)$$

dove K è un parametro dai valori compresi tra 0.01 e 1.

5.2.1 Condizioni al contorno

Le condizioni al contorno considerano i valori iniziali di posizione $(r_0, \varphi_0, \theta_0)$, velocità (u_0, v_0, w_0) , massa (m_0) e il valore del raggio finale r_f . Altri vincoli potrebbero essere introdotti sul valore finale di C_3 oppure sul tempo finale t_f . Per quanto riguarda, invece, i valori di latitudine e longitudine terrestri, non viene imposto alcun vincolo. L'obiettivo sarà quello di massimizzare la massa finale. La distanza iniziale dalla Terra è il raggio della sfera di Hill, calcolato considerando che la massa del corpo primario più piccolo (quindi della Terra, essendo in un sistema Terra-Sole) sia molto inferiore a quella del corpo primario più grande. La velocità è ottenuta in modo tale da avere la stessa velocità angolare del moto relativo dei due corpi primari.

Si ha:

$$r_0 = r_{s,0} \left[\frac{1}{3\mu_s} \right]^{\frac{1}{3}} \quad (5.64)$$

$$\theta_0 = \theta_{s,0} \quad (5.65)$$

$$\varphi_0 = \varphi_{s,0} \quad (5.66)$$

$$u_0 = 0 \quad (5.67)$$

$$v_0 = v_{s,0} \left(\frac{r_0}{r_{s,0}} \right) \quad (5.68)$$

$$w_0 = -w_{s,0} \left(\frac{r_0}{r_{s,0}} \right) \quad (5.69)$$

dove $r_{s,0}$ rappresenta la distanza Sole-Terra all'epoca t_0 .

Ogni grandezza viene normalizzata utilizzando il semiasse maggiore dell'ellissoide terrestre.

Il raggio finale r_f è fissato a 3 milioni di km dalla Terra, ovvero oltre la sfera di influenza (SOI) terrestre, dove l'attrazione gravitazionale combinata di Terra e Luna diventa trascurabile rispetto a quella del Sole.

$$r_f = 3 \cdot 10^6 km \quad (5.70)$$

5.2.2 Condizioni al contorno di ottimo

Le condizioni al contorno di ottimo prevedono che tutte le variabili lagrangiane siano nulle al punto finale, escluse λ_r , che è libero, e λ_m , che è fissato pari a 1.

$$\lambda_r = \text{libero} \quad (5.71)$$

$$\lambda_{m_f} = 1 \quad (5.72)$$

$$\lambda_{\theta_f} = \lambda_{\varphi_f} = \lambda_{u_f} = \lambda_{v-f} = \lambda_{w_f} = 0 \quad (5.73)$$

La 5.72 può essere sostituita da:

$$\lambda_{m_i} = 1 \quad (5.74)$$

Inoltre, la switching function si annulla nel momento in cui $t = t_1$.

Se $SF = 0$ allora si ottiene un arco singolare, ovvero un tratto in cui la spinta non è né massima né nulla, ma si trova in una fase intermedia e quindi, probabilmente, è necessario adottare una diversa strategia di ottimizzazione.

E' necessario precisare che nello studio effettuato non sono presenti archi singolari.

Capitolo 6

Risultati

6.1 Presentazione dei casi di studio

L'obiettivo dell'analisi seguente è identificare e comprendere i parametri coinvolti nella manovra di evasione dal punto lagrangiano L_1 nel sistema Terra-Sole ($SEL1$) ed analizzare la loro influenza sulla traiettoria. Inizialmente, lo spacecraft si trova nel punto $SEL1$ e deve arrivare ad una distanza di 3 milioni di km, ovvero la distanza alla quale lo spacecraft risentirà solamente l'attrazione gravitazionale del Sole e non della Terra. In primo luogo viene analizzato il comportamento della traiettoria al variare della data di partenza t_0 e della durata della traiettoria di fuga, lasciando libero il valore di C_3 all'escape. Il tempo iniziale viene espresso attraverso un tempo adimensionale rappresentativo del tempo trascorso a partire dal *01 Gennaio 2000* alle ore 12 : 00.

Si assume:

$$1 \text{ anno} = \Delta T = 2\pi \quad (6.1)$$

$$\text{passo} = 1 = 58.09 \text{ giorni} \quad (6.2)$$

L'escape viene simulato per 3 diverse date di partenza (t_0), mentre il passo di integrazione scelto è pari a 3, in modo da ottenere simulazioni che coprono quasi un intero anno, con una cadenza di circa 6 mesi tra ognuna.

Di seguito sono riportate le diverse date di partenza prese in esame, sia in forma adimensionalizzata sia in formato gg/mm/aaaa:

t_0	Data
186	08/08/2029
189	30/01/2030
192	23/07/2030

Tabella 6.1: Tempo usato per la data di partenza

Per quanto riguarda la durata della missione, invece, si considera un intervallo che ha come estremo inferiore 75 giorni, mentre l'estremo superiore varia per ciascun set di simulazioni, in quanto non è definito a priori. In questo caso si è scelto di utilizzare un passo di 15 giorni.

Nella prima fase dello studio si procede con la creazione di un database di soluzioni al variare della data di partenza e della durata, così da poter classificare e tabulare i risultati in termini di:

- Data di spegnimento dei motori: t_1
- Data di arrivo: t_2
- Massa finale
- Valore di C_3 all'escape

Al codice vengono forniti in input i seguenti dati:

- Data di partenza: t_0
- Durata (giorni)
- C_3 libero: 0

La manovra prevede due fasi:

1. Una fase propulsa
2. Un trasferimento a motori spenti, il quale è favorito dalla perturbazione solare.

La tabella seguente (Tabella 6.2) riporta le date di spegnimento dei motori. Da quest'ultima si può notare come, ad una manovra con $t_0 = 186$ e durata di 225 o 240 giorni, oppure, $t_0 = 192$ e durata 240 giorni, le simulazioni effettuate non sono state in grado di trovare una soluzione.

Per quanto riguarda la durata minima, invece, si è scelto di partire da 75 giorni poichè durate minori prevedevano una durata della fase propulsa maggiore della durata della manovra totale, determinando, quindi, uno scenario impossibile.

Il valore di t_1 , ovvero la durata della fase propulsa, varia in base alla durata della missione, in particolare si mette in evidenza che:

- Per escape lunghi bastano pochi giorni, questo è giustificabile affermando che all'aumentare della durata della missione, lo spacecraft segue una traiettoria meno energetica, che richiede una minor velocità orbitale e, quindi, una minor spinta del motore.
- Per escape brevi, invece, i motori rimangono attivi per diversi giorni, determinando quindi un maggior consumo di propellente.

Durata [giorni]	Durata fase propulsa [giorni]		
	186	189	192
	08/08/2029	30/01/2030	23/07/2030
75	39.03597112	35.98803119	40.64932172
90	16.07687985	18.90742742	16.84506613
105	8.889175984	11.28948449	9.507074927
120	5.579269296	7.870853356	6.150974226
135	4.00385351	6.258290371	4.543590594
150	3.203854545	5.425545958	3.7190416
165	2.810822957	5.008673501	3.308268667
180	2.609323446	4.786421677	3.094345107
195	2.509542092	4.672968503	2.9874715
210	2.458047723	4.611753609	2.931852864
225	-	4.580247922	2.904167027
240	-	4.563192893	-

Tabella 6.2: Durata della fase propulsa in giorni

Dalla tabella, quindi, si nota come all'aumentare della durata della missione diminuisce la durata della fase propulsa.

Il tutto è stato, inoltre, graficato (Figura 6.1), considerando però una porzione di risultati maggiore, la quale prevede un set di 5 iterazioni:

t_0	Data
186	08/08/2029
189	30/01/2030
192	23/07/2030
195	13/01/2031
198	07/07/2031

Tabella 6.3: Date di partenza considerate per i grafici

Si può fare, poi, un'ulteriore considerazione, ovvero che, per durate piuttosto lunghe della missione il costo di questa dipende anche dalla data di partenza, per due motivi principali:

- Per effetto dell'orbita terrestre ellittica
- Per l'influenza della luna

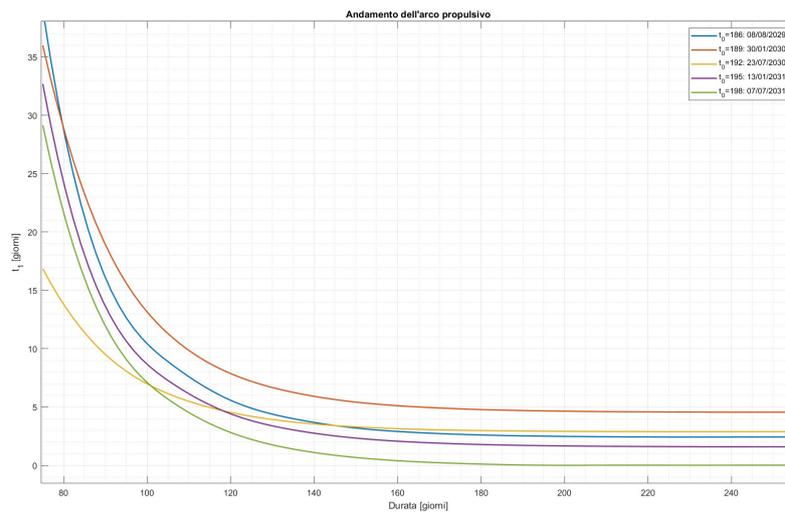


Figura 6.1: Andamento dell'arco propulsivo in funzione della durata di missione

Si procede ora con il confronto delle masse finali, riportati nella tabella seguente. E' ben evidente come i consumi aumentino al diminuire della durata della missione. Manovre lente e lunghe, che prevedono un'accensione dei motori di poche ore, determinano masse finali pressoché identiche a quella iniziale, mentre

manovre più brevi presentano una differenza di circa 0.2 kg rispetto alla massa iniziale.

Durata [giorni]	Massa finale [kg]		
	186 08/08/2029	189 30/01/2030	192 23/07/2030
75	20.83622833	20.80477008	20.82945967
90	20.93255099	20.9206757	20.92932814
105	20.96270632	20.95263605	20.96011398
120	20.97659271	20.96697859	20.97419418
135	20.98320222	20.97374394	20.9809378
150	20.98655854	20.97723764	20.98439712
165	20.98820745	20.97898659	20.98612048
180	20.98905283	20.97991903	20.98701797
195	20.98947146	20.98039501	20.98746635
210	20.9896875	20.98065183	20.98769969
225	-	20.98078401	20.98781585
240	-	20.98085556	-

Tabella 6.4: Masse finali all'escape

Gli andamenti delle masse finali, inoltre, sono riportati in figura 6.2.

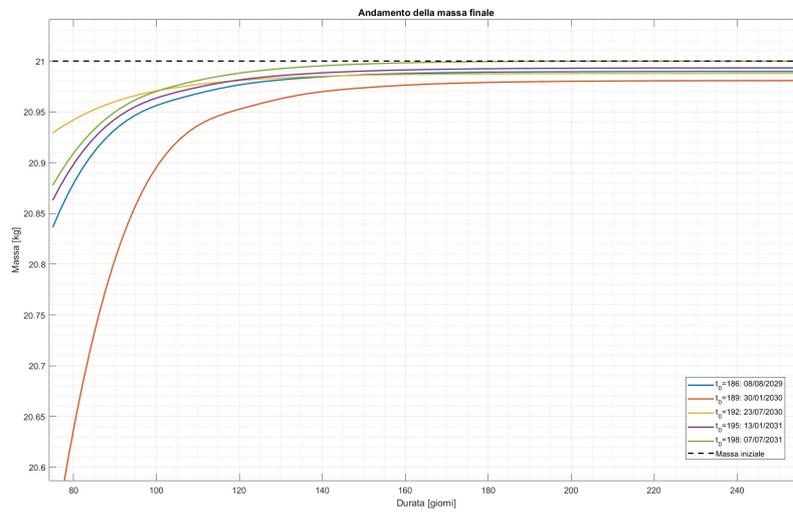


Figura 6.2: Massa finale [kg] all'escape in funzione della durata

Il grafico mette in evidenza come le curve della massa finale tendono a quella della massa iniziale per durate di missione molto lunghe, poiché necessitano di spinte brevi e, di conseguenza, consumi di propellente molto contenuti.

L'ultima classificazione di questa prima fase di analisi riguarda il valore dell'energia residua del satellite al momento dell'escape, espressa in $\left[\frac{km^2}{s^2}\right]$.

Come per il resto dei risultati viene presentata una tabella (Tabella 6.5) e un grafico riassuntivo che mostrano i valori di C_3 alla fine dell'escape.

Durata [giorni]	Energia finale all'escape		
	186	189	192
	08/08/2029	30/01/2030	23/07/2030
75	0.200649066	0.204519542	0.174970308
90	0.192599883	0.185407736	0.190340267
105	0.216200141	0.171893212	0.181743411
120	0.229954326	0.191575288	0.228018314
135	0.242386483	0.175587299	0.213483127
150	0.237689838	0.187221461	0.250380149
165	0.241943577	0.172964074	0.228895252
180	0.228138744	0.18223251	0.257524128
195	0.232696803	0.174243928	0.230576758
210	0.216524514	0.183460759	0.250796423
225	-	0.182657876	0.220253447
240	-	0.192223033	-

Tabella 6.5: Energia finale all'escape

In questo caso si può notare come l'andamento della Figura 6.3 sia sinusoidale, con una serie di oscillazioni, le quali sono legate al moto della Luna e dalla sua azione perturbativa.

Dal grafico si osserva che, nella maggior parte dei casi, la distanza tra due picchi di ciascuna curva è di circa 29 o 30 giorni, valore che coincide con i 29,53058 giorni del mese sinodico. Questo comportamento è giustificabile considerando che la spinta del propulsore, essendo relativamente piccola, risente significativamente delle perturbazioni.

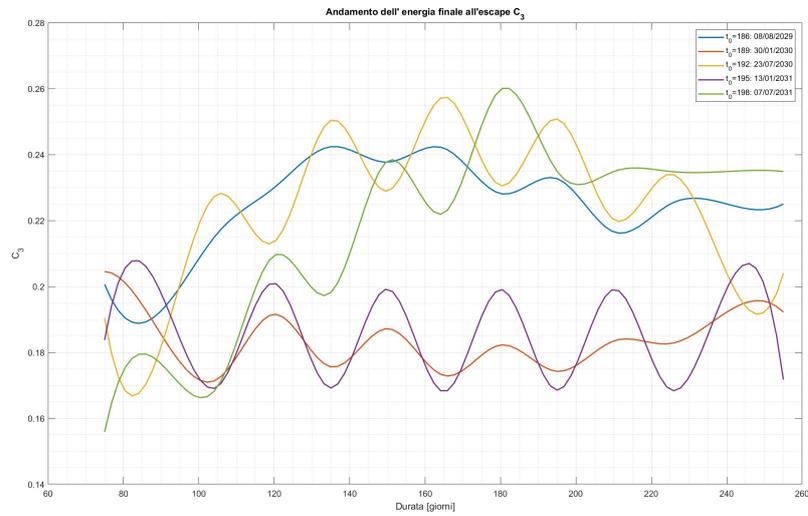


Figura 6.3: Energia finale km^2/s^2 all'escape in funzione della durata

Nella figura seguente (Figura 6.4) viene messo in relazione l'andamento dell'energia finale all'escape C_3 con la posizione della luna nel caso in cui $t_0 = 192$.

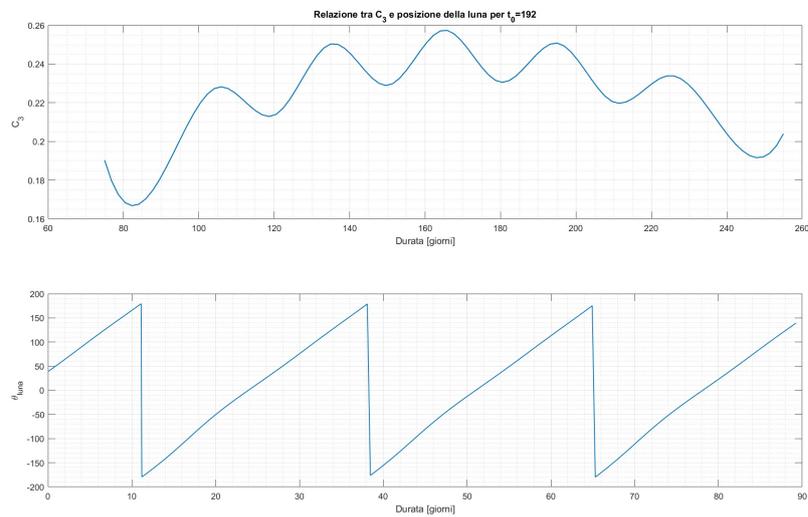


Figura 6.4: Relazione tra C_3 e posizione della Luna

Si deduce che all'aumentare della durata della missione, aumenta anche il periodo durante il quale il satellite è soggetto all'influenza dell'attività solare: per questo motivo, si otterrà un generale aumento della velocità finale (e quindi di C_3). Infine, è necessario fare una precisazione, infatti, si può notare come in tutti i grafici (6.1, 6.2, 6.3, 6.4) sull'asse delle ascisse non è rappresentato il tempo in senso assoluto, ma la durata di missione. Di conseguenza, il grafico non mostra come la grandezza varia nel tempo, bensì i valori che la grandezza assume in corrispondenza delle diverse durate della manovra di escape.

6.2 Escape con data di partenza t_0 fissata

In questo paragrafo vengono analizzati i risultati delle simulazioni effettuate considerando una data di partenza t_0 fissata e la durata della missione variabile. Queste analisi considerano ancora una volta il valore di C_3 libero.

Per prima cosa vengono raffigurate le traiettorie di escape del satellite, al variare della durata, per le tre date di partenze considerate, in funzione dell'angolo θ (con $\theta = \theta_{s/c} - \theta_{sun}$).

Il file a cui si fa riferimento per realizzare tali grafici contiene le posizioni del sole e dello spacecraft sul piano dell'eclittica. Il sistema di riferimento sarà un sistema rotante, in particolare centrato sulla Terra e rotante con il Sole. Per ogni caso sono stati realizzati due grafici: uno contiene le traiettorie complete, mentre l'altro presenta un focus vicino al punto di partenza.

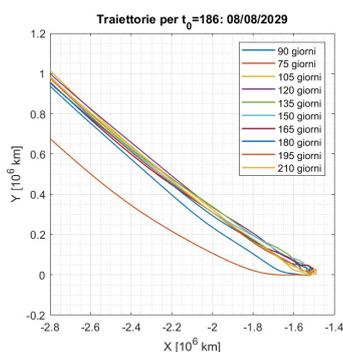


Figura 6.5: Escape da SEL1 per $t_0 = 186$

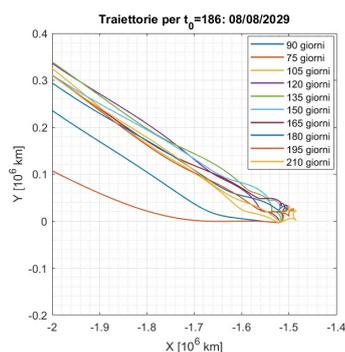


Figura 6.6: Escape da SEL1 per $t_0 = 186$

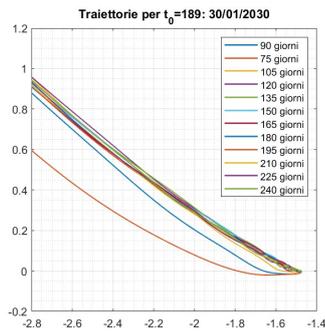


Figura 6.7: Escape da SEL1 per $t_0 = 189$

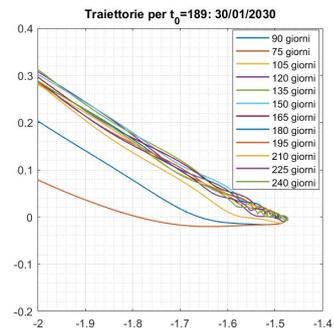


Figura 6.8: Escape da SEL1 per $t_0 = 189$

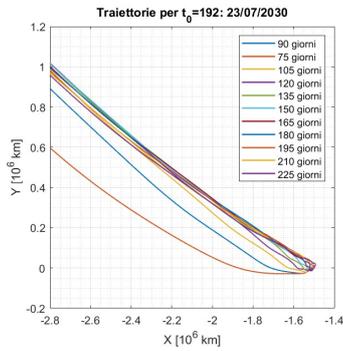


Figura 6.9: Escape da SEL1 per $t_0 = 192$

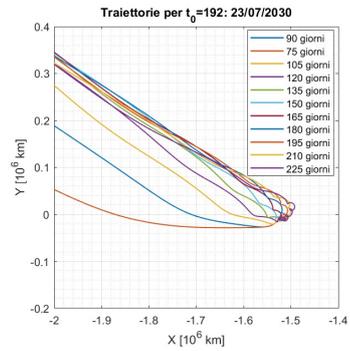


Figura 6.10: Escape da SEL1 per $t_0 = 192$

Si pone ora l'attenzione sulle manovre di evasione a lunga durata, si considerano durate maggiori di 120 giorni, in particolare:

- 150 giorni
- 180 giorni
- 210 giorni

Per la data $t_0 = 186 : 08/08/2029$ si ha:

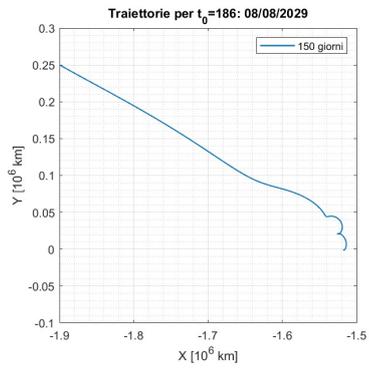


Figura 6.11: Zoom escape in 150 giorni

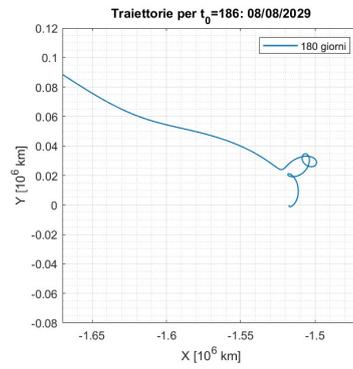


Figura 6.12: Zoom escape in 180 giorni

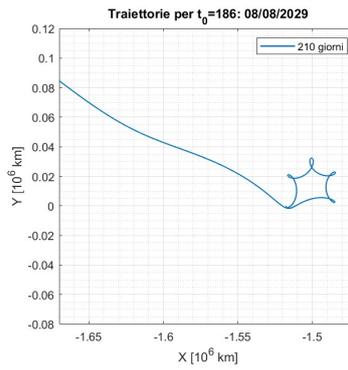


Figura 6.13: Zoom escape in 210 giorni

Mentre per la data $t_0 = 189$: 30/01/2030:

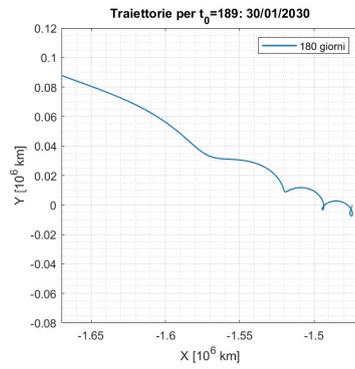
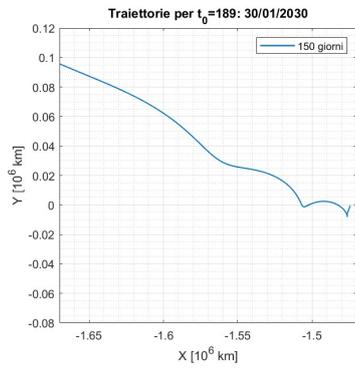


Figura 6.14: Zoom escape in 150 giorni

Figura 6.15: Zoom escape in 180 giorni

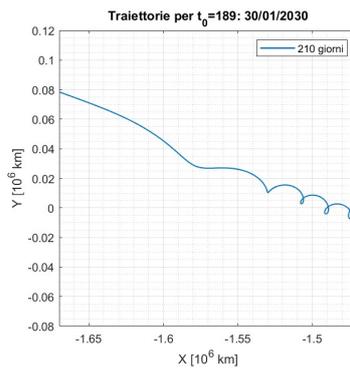


Figura 6.16: Zoom escape in 210 giorni

Infine, per la data $t_0 = 192$: 23/07/2030 :

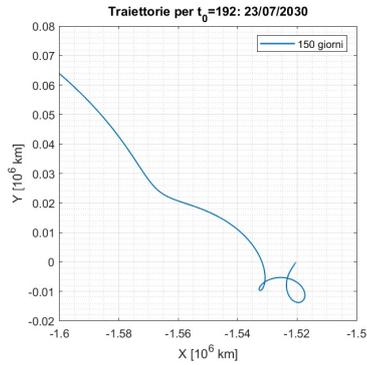


Figura 6.17: Zoom escape in 150 giorni

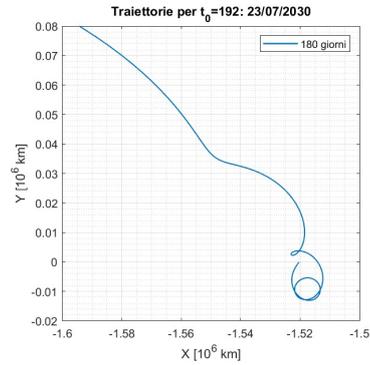


Figura 6.18: Zoom escape in 180 giorni

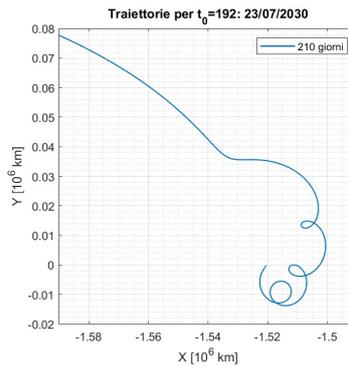


Figura 6.19: Zoom escape in 210 giorni

Si può notare come, soprattutto nella parte iniziale, gli andamenti siano piuttosto caotici. La spiegazione di questo fenomeno risiede nel fatto che, quando i tempi richiesti per la manovra sono troppo lunghi, lo spacecraft tende a rimanere per un certo periodo vicino al punto di partenza, ovvero L_1 , per poi allontanarsi ed avviare l'effettiva evasione. Si può affermare, dunque, che le durate di missioni superiori a 120 giorni in genere non sono convenienti.

Per fare una valutazione più approfondita è necessario valutare la direzione dell'angolo di spinta nel piano, ovvero α , come si vedrà nella sezione 6.4. Al contrario, si osserva che per durate più brevi, in particolare intorno ai 75 giorni, le curve tendono ad assumere una forma simile ai rami di un'iperbole.

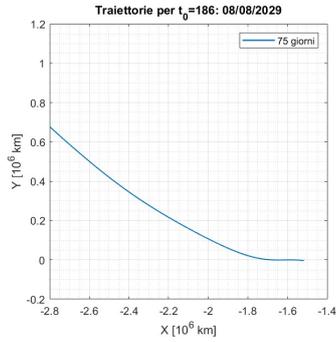


Figura 6.20: Durata di 75 giorni

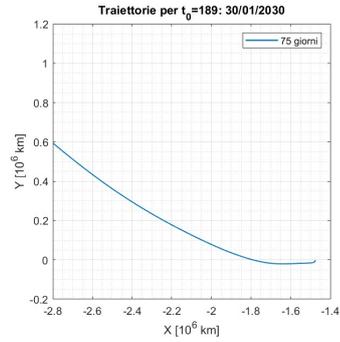


Figura 6.21: Durata 90 giorni

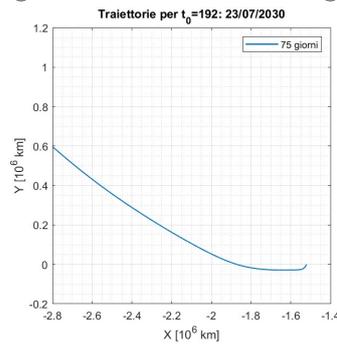


Figura 6.22: Durata 105 giorni

Viene messa, quindi, in evidenza la differenza tra le missioni di durata inferiore a 120 giorni e quelle di durata superiore, al fine di dimostrare come gli andamenti siano meno caotici nel primo caso.

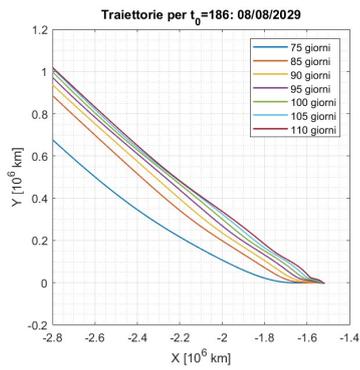


Figura 6.23: Escape con durate inferiori a 120 giorni

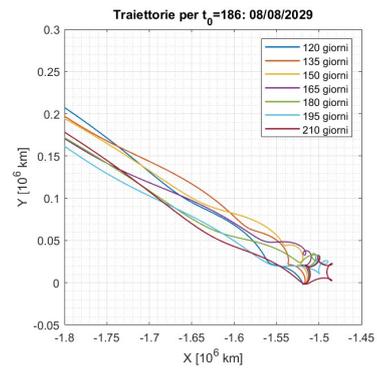


Figura 6.24: Escape con durate superiori a 120 giorni

6.3 Escape con durata fissata

In questo caso, invece, vengono confrontate manovre della stessa durata al variare della data di partenza, in particolare si considerano quattro casi:

- Durata: 90 giorni
- Durata: 150 giorni
- Durata: 180 giorni
- Durata: 210 giorni

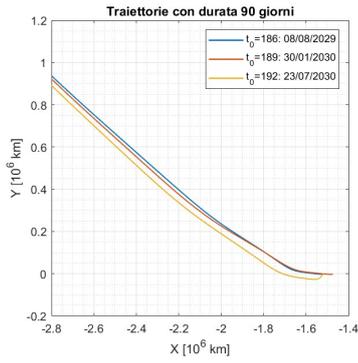


Figura 6.25: Escape da SEL1 in 90 giorni

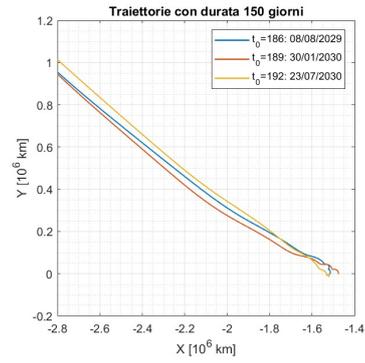


Figura 6.26: Escape da SEL1 in 150 giorni

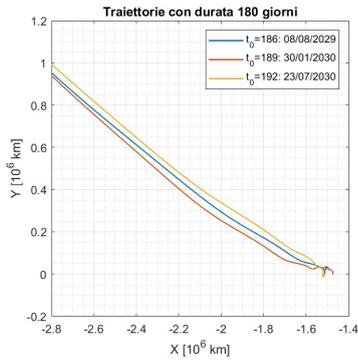


Figura 6.27: Escape da SEL1 in 180 giorni

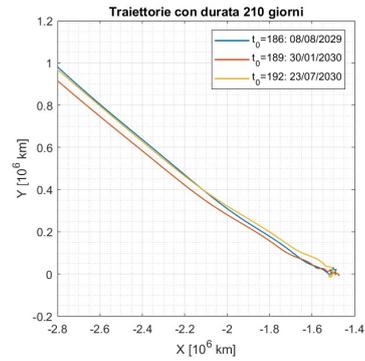


Figura 6.28: Escape da SEL1 in 210 giorni

6.4 Valutazione degli angoli di spinta

In questa sezione si vanno a considerare gli andamenti degli angoli di spinta:

- α , la direzione di spinta nel piano
- β , l'angolo fuori dal piano.

6.4.1 Angolo fuori dal piano β

L'angolo fuori dal piano, β , come si vede nelle figure seguenti, è molto piccolo, circa 0° e quindi può essere considerato nullo. Ciò è coerente con quello che ci si aspetta, in quanto la spinta si ha nel piano. La componente fuori dal piano è però necessaria per contrastare, o assecondare, in base ai casi, l'effetto della Luna.

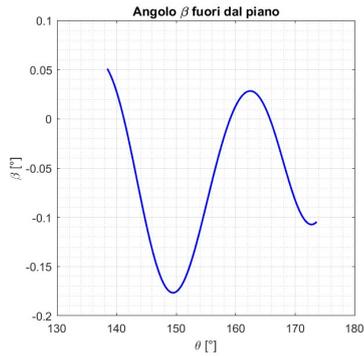


Figura 6.29: Angolo β per $t_0 = 186$ e durata 75 giorni

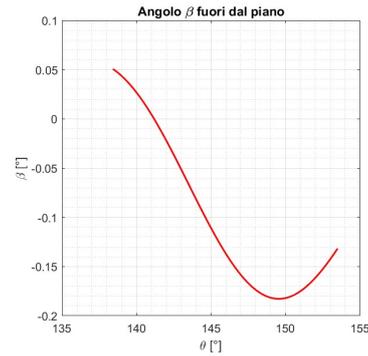


Figura 6.30: Angolo β per $t_0 = 186$ e durata 90 giorni

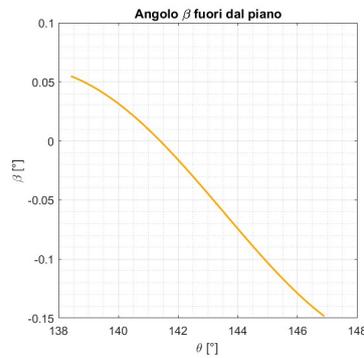


Figura 6.31: Angolo β per $t_0 = 186$ e durata 105 giorni

In questo caso sono stati riportati i risultati relativi solamente alla prima data di partenza, $t_0 = 186 : 08/08/2029$, in quanto l'andamento si ripeteva in maniera uguale anche per le due date successive.

6.4.2 Direzione di spinta nel piano α

Per quanto riguarda la direzione di spinta nel piano le cose sono diverse, infatti, a seconda del valore di α si può dire se lo spacecraft sta accelerando o frenando, in particolare:

- $\alpha = 0^\circ$: lo spacecraft sta accelerando con una spinta parallela alla velocità
- $\alpha = 90^\circ$: lo spacecraft spinge in direzione radiale allontanandosi dalla Terra
- $\alpha = 180^\circ$: lo spacecraft sta frenando, spingendo in direzione opposta alla velocità

Frenando, lo spacecraft, girerà più velocemente, portandosi sempre più avanti lungo la traiettoria e quindi, avvicinandosi sempre di più al Sole fino a quando non sarà solo sotto l'influenza gravitazionale del Sole stesso. In figura sono riportati gli andamenti dell'angolo α , in funzione dell'angolo θ , il quale indica il punto di partenza nel sistema di riferimento considerato, per la data $t_0 = 186 : 08/08/2029$.

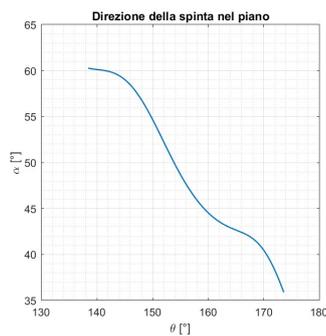


Figura 6.32: Angolo α (75 giorni)

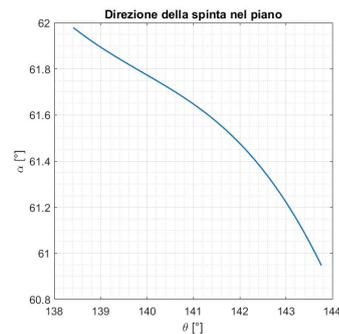


Figura 6.33: Angolo α (120 giorni)

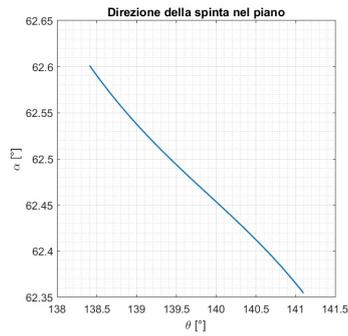


Figura 6.34: Angolo α (165 giorni)

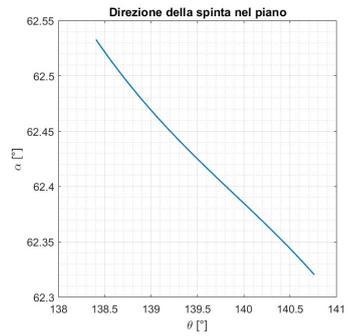


Figura 6.35: Angolo α (210 giorni)

Per capire meglio l'adattamento delle traiettorie mostrate nella sezione 6.2 è preferibile valutare l'angolo α in funzione del tempo. Come prima, per ogni set di simulazioni, si considerano 4 durate diverse:

- 75 giorni
- 120 giorni
- 165 giorni
- 210 giorni

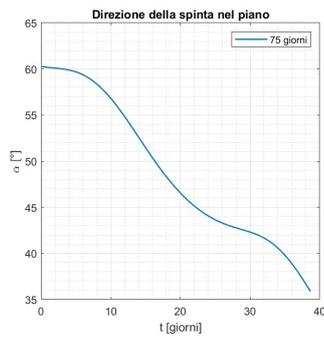


Figura 6.36: Angolo $\alpha(t)$ (75 giorni)

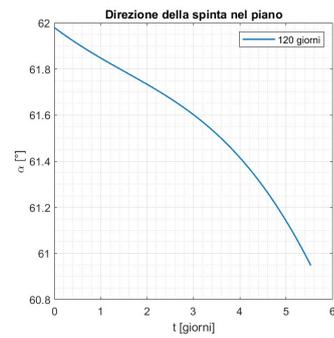


Figura 6.37: Angolo $\alpha(t)$ (120 giorni)

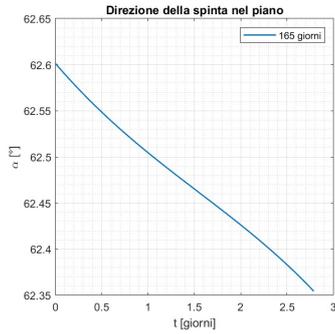


Figura 6.38: Angolo $\alpha(t)$ (165 giorni)

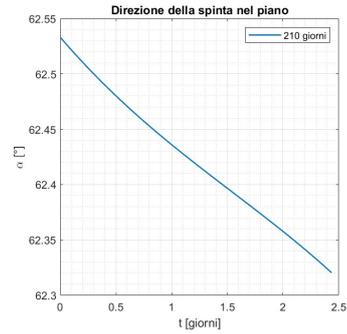


Figura 6.39: Angolo $\alpha(t)$ (210 giorni)

Ancora una volta vengono mostrati i grafici relativi solo alla data 08/08/2028 poichè gli andamenti per le successive sono simili (Appendice A).

Da queste osservazioni si nota una fase di spinta attorno a 60° , che sposta lo spacecraft nella regione dominata dall'attrazione gravitazionale del Sole, corrispondente al secondo quadrante del sistema sinodico.

È importante sottolineare che la spinta non serve per portare direttamente lo spacecraft nel quadrante desiderato, ma per seguirne la perturbazione Sole-Luna che lo guida verso quella regione.

Nel caso di evasioni rapide, come ad esempio quelle in 75 giorni, è necessaria una spinta ad accelerare nella fase finale, quando α assume valori ridotti. Per evasioni più lunghe, invece, lo spacecraft rimane vicino al punto L_1 per un periodo più prolungato, raggiungendo il quadrante desiderato solo dopo un certo intervallo di tempo.

Sia nella rappresentazione di α che in quella di β sono stati considerati i valori relativi alla sola fase propulsa.

6.5 Influenza della Luna

A questo punto si vuole andare a valutare l'influenza della Luna sulla manovra. Il Sole esercita un effetto generalmente benefico sulla manovra di evasione, mentre non si può dire lo stesso della Luna. Infatti, la sua posizione al momento della partenza influisce notevolmente sulla traiettoria del satellite, come già menzionato in precedenza.

Nelle figure successive è rappresentata la posizione della Luna per ogni data di partenza considerata:

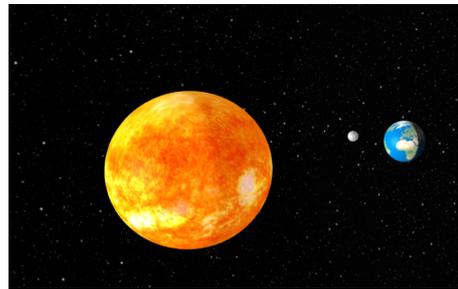
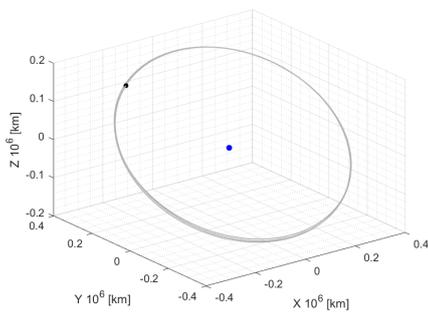


Figura 6.40: Posizione della luna per $t_0 = 186^{22}$

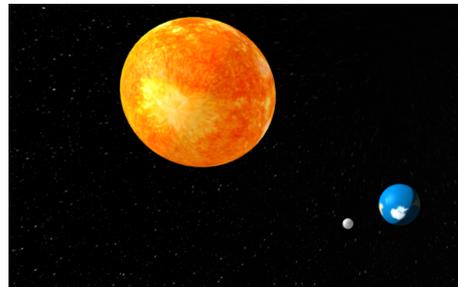
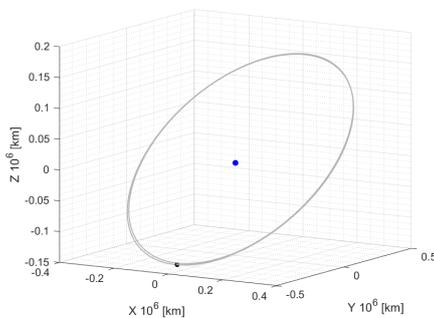


Figura 6.41: Posizione della luna per $t_0 = 189^{22}$

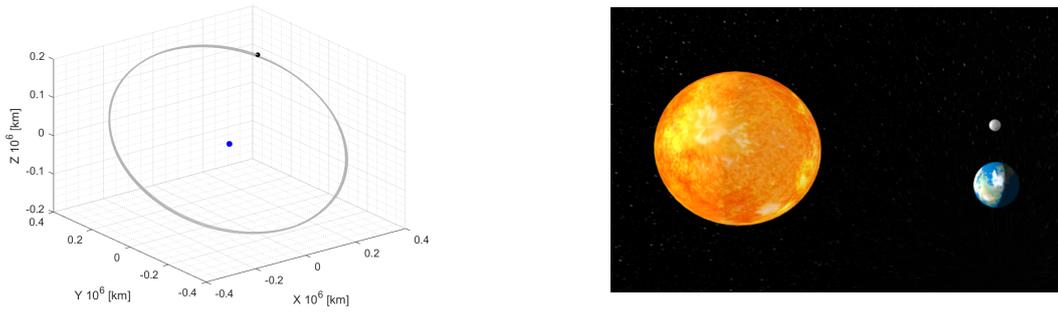


Figura 6.42: Posizione della luna per $t_0 = 192^{22}$

Infine, viene riportata la posizione relativa della Luna al variare della durata della missione (75, 90 e 105 giorni) con data di partenza fissata: $t_0 = 186 : 08/08/2029$.

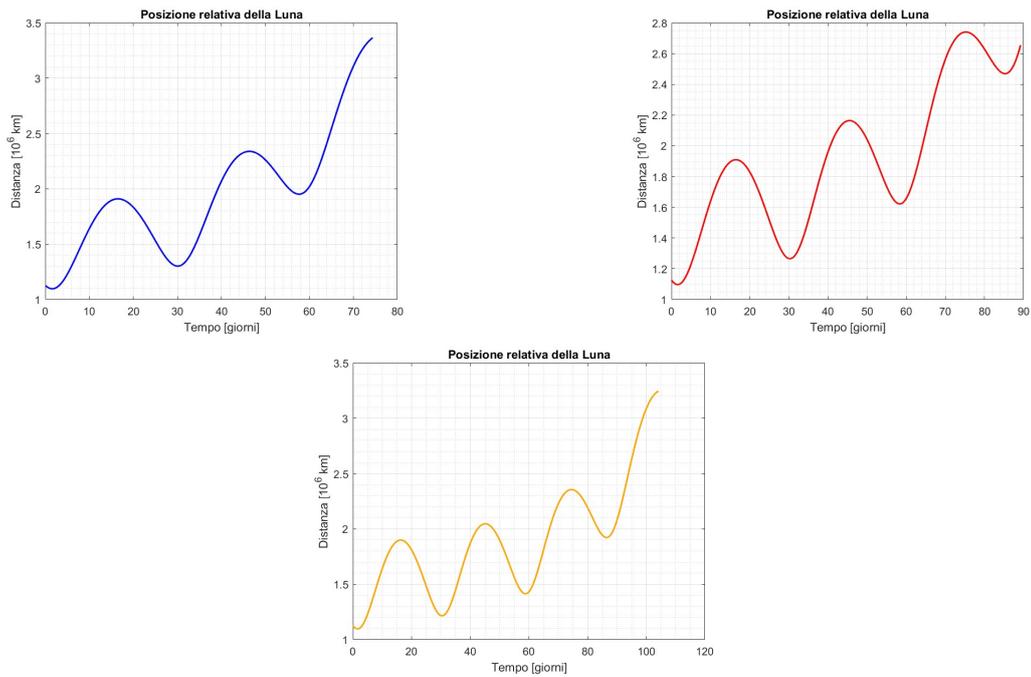


Figura 6.43: Posizione relativa della luna per 75, 90 e 105 giorni

Ancora una volta, per $t_0 = 189 : 30/01/2030$ e $t_0 = 192 : 23/07/2030$ gli andamenti sono pressochè gli stessi.

Capitolo 7

Conclusioni

L'obiettivo di questo capitolo è quello di fornire una visione completa degli aspetti affrontati nel capitolo precedente. Tale studio ha analizzato alcune manovre di evasione di uno spacecraft che hanno come punto di partenza L_1 nel sistema Terra-Sole e come punto di arrivo una distanza fissata pari a 3 milioni di km dalla Terra, così che sia possibile sottrarsi all'influenza gravitazionale terrestre. Partendo da una spiegazione teorica del problema dei tre corpi ristretto e le sue soluzioni è stato affrontato il vero e proprio problema dinamico a cui è stata applicata la teoria del controllo ottimale per trovare una strategia che andasse a massimizzare la massa al termine della manovra. Sono state effettuate diverse simulazioni che hanno permesso di sviluppare un'ampia gamma di configurazioni possibili per le manovre di escape dal punto lagrangiano L_1 . Per prima cosa si è analizzato il comportamento della traiettoria al variare della data di partenza e della durata della manovra di evasione, considerando complessivamente 3 set di simulazioni, successivamente, si è fissata invece la durata. Tra le diverse soluzioni ottenute è stato possibile individuare quelle ottimali a scapito di quelle meno convenienti. La prima parte di analisi ha confrontato tra loro tre diversi aspetti:

- Durata della fase propulsa
- Valore della massa finale
- Valore dell'energia finale all'escape C_3

Per la durata della fase propulsa si è dedotto che all'aumentare della durata della missione sono sufficienti pochi giorni o addirittura ore per completare l'evasione dalla sfera d'influenza terrestre. Di conseguenza, l'energia C_3 risulta inferiore, dimostrando che, con tempi più lunghi, è possibile ottenere un'efficace manovra di escape con un consumo energetico minore e con una spinta meno intensa, poichè lo spacecraft riesce a sfruttare l'attrazione gravitazionale della Terra. Passando poi al valore della massa finale si ha un risultato coerente con quanto detto prima, infatti all'aumentare della durata di missione la massa finale rimane pressochè invariata rispetto a quella iniziale, poichè le spinte sono brevi e quindi i consumi di propellente sono più contenuti. A questo punto è necessario porre l'attenzione sull'ultimo aspetto: l'energia finale all'escape C_3 . Per quest'ultima l'andamento non è lineare, ma sinusoidale e la motivazione principale di questo andamento è dovuta al fatto che l'energia C_3 è fortemente influenzata da diversi fattori che definiscono la traiettoria, in particolare, i più importanti sono quelli relativi alla perturbazione legata all'attrazione del Sole e della Luna. L'attrazione solare fornisce un contributo positivo in termini di energia orbitale e quindi di spinta, poichè permette di ridurre i tempi di accensione dei motori del satellite, riducendo così i consumi di propellente. Se si considera, invece, l'effetto dell'attrazione della Luna non si possono dire le stesse cose. L'attrazione della Luna presenta un'influenza ciclica che alterna periodi di circa 14 giorni, durante i quali si hanno fasi di spinta favorevole seguite da fasi in cui il contributo alla spinta è sfavorevole. Nei momenti in cui la Luna offre un contributo positivo, il satellite beneficia di una spinta che aumenta la sua energia caratteristica C_3 . Al contrario, nei periodi di attrazione negativa, il satellite sperimenta un rallentamento e una diminuzione della sua energia. Per questo motivo è importante scegliere con attenzione la data di partenza della missione. È consigliabile avviare la manovra all'inizio del ciclo favorevole della Luna, poiché con il progredire della missione, il satellite tende ad allontanarsi dalla Luna stessa, riducendo l'impatto della sua attrazione, sia essa positiva che negativa. Di conseguenza, sfruttare la fase benefica dell'attrazione lunare quando il satellite è nelle vicinanze della Luna risulta vantaggioso per ottimizzare le performance della missione. Si considerano poi le perturbazioni legate alla non sfericità della Terra e alla pressione di radiazione solare, la

quale è presente solamente nel momento in cui lo spacecraft è illuminato dal Sole. In generale il contributo di quest'ultima perturbazione può essere anche trascurato poichè causa una variazione di massa molto piccola. La data di partenza è fondamentale, non solo per l'effetto della perturbazione lunare espresso precedentemente, ma anche a causa della forma dell'orbita terrestre, la quale è ellittica e quindi a seconda della posizione della Terra lungo la sua orbita, il satellite può sfruttare meglio o peggio la velocità orbitale terrestre e la distanza dal Sole. Queste variazioni possono alterare la quantità di energia e di propellente necessari per eseguire le manovre di escape, influenzando di conseguenza il costo complessivo della missione. Nell'analisi sono state considerate diverse durate di missioni, da 75 giorni a 240 giorni e si è giunti alla conclusione che missioni con durate superiori a 120 giorni non sono convenienti. Per durate così lunghe le traiettorie assumono un andamento piuttosto caotico, in particolare in prossimità del punto di partenza, poichè il satellite, prima di allontanarsi effettivamente, rimane nei pressi di L_1 per un certo periodo di tempo, quindi per queste durate più lunghe, oltre alla maggiore complessità delle traiettorie, diventa necessario un maggiore controllo propulsivo per evitare che il satellite rimanga intrappolato in una regione instabile vicino a L_1 . Un aspetto che permette di approfondire e comprendere meglio questo comportamento è legato all'analisi degli angoli di spinta, in particolare dell'angolo α , il quale gioca un ruolo fondamentale nell'evasione dall'influenza gravitazionale terrestre. Per evasioni rapide è stato necessario applicare una spinta finale con angoli ridotti di α , permettendo al satellite di accelerare efficacemente nella fase finale e raggiungere rapidamente la regione dominata dall'attrazione solare, ottimizzando così l'energia C_3 . Nelle evasioni più lente, invece, il satellite rimane più vicino alla Terra per un periodo più lungo, sfruttando gradualmente l'influenza gravitazionale di Sole e Luna per raggiungere la regione desiderata senza bisogno di una spinta finale intensa. In generale, i risultati ottenuti da questa analisi permettono di comprendere gli effetti principali che influenzano le traiettorie di escape dal punto lagrangiano L_1 . Un possibile sviluppo futuro potrebbe essere la valutazione di queste traiettorie relative però al sistema Terra-Luna, con partenza sempre dal punto L_1 , in maniera tale da mettere in evidenza le principali differenze nei due diversi sistemi considerati.

Appendice A

Angoli di spinta

A.1 Direzione di spinta nel piano

In questa sezione vengono riportati gli andamenti dell'angolo α in funzione del tempo per le date 31/01/2030 e successivamente 23/07/2030.

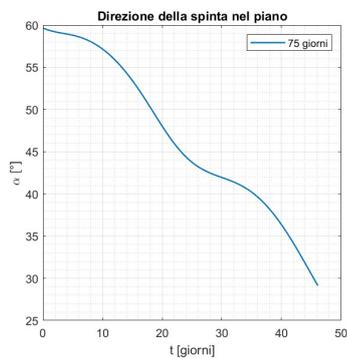


Figura A.1: Angolo α per $t_0 = 189$ e durata 75 giorni

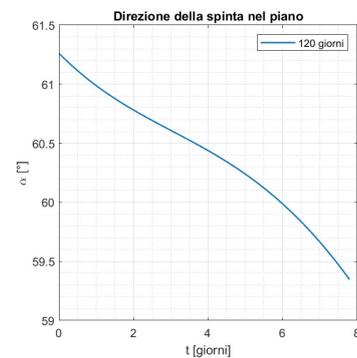


Figura A.2: Angolo α per $t_0 = 189$ e durata 120 giorni

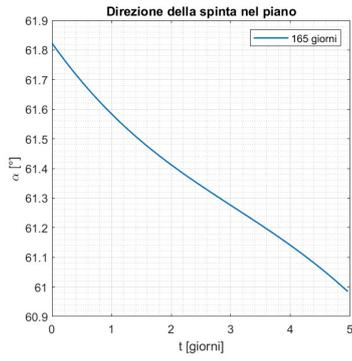


Figura A.3: Angolo α per $t_0 = 189$ e durata 165 giorni

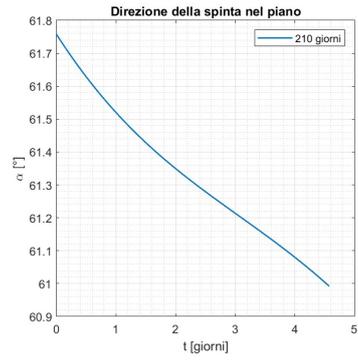


Figura A.4: Angolo α per $t_0 = 189$ e durata 210 giorni

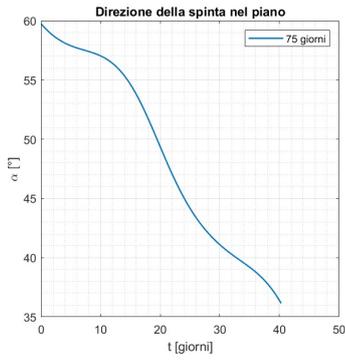


Figura A.5: Angolo α per $t_0 = 192$ e durata 75 giorni

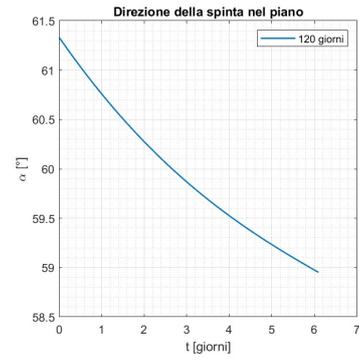


Figura A.6: Angolo α per $t_0 = 192$ e durata 120 giorni

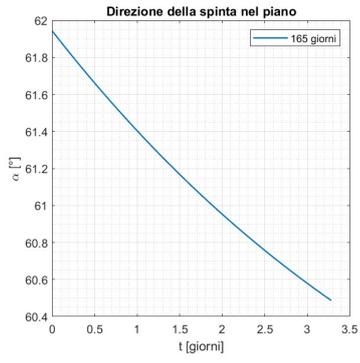


Figura A.7: Angolo α per $t_0 = 192$ e durata 165 giorni

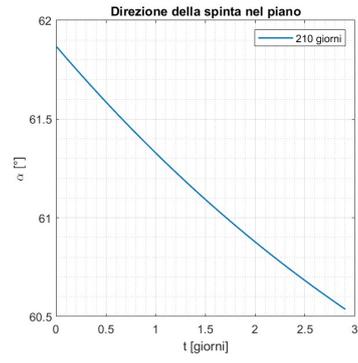


Figura A.8: Angolo α per $t_0 = 192$ e durata 210 giorni

Bibliografia

- [1] European Space Agency. L1, the first lagrangian point. *Science exploration*, 2024.
- [2] M. Agostini. Propulsione e potenza nello spazio. *AerospaceDefence*, 15 Ottobre 2021.
- [3] A. Alliney. Manovre di evasione dai punti lagrangiani. Master's thesis, Politecnico di Torino, 2022.
- [4] ASI. Lisa pathfinder. *Esplorazione, Cosmologia*, 2024.
- [5] ASI. Solar and heliospheric observatory. *Esplorazione, Sistema Solare*, 2024.
- [6] M. Battipede. Appunti di meccanica del volo spaziale, 2024. Politecnico di Torino.
- [7] Ales Bezdek and Josef Sebera. Matlab script for visualizing geoid height and other elevation data on rotating 3d globe. pages 5142–, 04 2013.
- [8] L. Casalino. Ottimizzazione indiretta di traiettorie spaziali. 2021.
- [9] L. Casalino. Corso di propulsione spaziale, 2024. Politecnico di Torino.
- [10] A. A. Quarta G. Mengali. *Fondamenti di meccanica del volo spaziale*. Pisa University, 2013.
- [11] L. Mascolo L. Casalino. Optimal escape from sun-earth and earth-moon l2 with electric propulsion. *Aerospace*, 2022.

- [12] Jian Li, Jianjun Wu, Yu Zhang, Sheng Tan, and Yang Ou. Study of scaling law for particle-in-cell/monte carlo simulation of low-temperature magnetized plasma for electric propulsion. *Journal of Physics D Applied Physics*, 08 2019.
- [13] Jian Li, Yu Zhang, Jianjun Wu, Yuqiang Cheng, and Xinru Du. Particle simulation model for self-field magnetoplasmadynamic thruster. *Energies*, 12, 04 2019.
- [14] L. Mascolo. *Low-Thrust Optimal Escape Trajectories from Lagrangian Points and Quasi-Periodic Orbits in a High-Fidelity Model*. PhD thesis, Politecnico di Torino, 2023.
- [15] L. Mascolo. *Esercizi di meccanica del volo spaziale*, 2024. Politecnico di Torino.
- [16] NASA. Advanced composition explorer. *Sun-Earth Interaction*, 2024.
- [17] NASA. Deep space climate observatory. *Sun-Earth Interaction*, 2024.
- [18] NASA. Solar and heliospheric observatory. *Sun*, 2024.
- [19] NASA. Wind mission. *Sun-Earth Interaction*, 2024.
- [20] Astronauti News. Il primo satellite artemis si immette in orbita lunare, 4 Luglio 2021.
- [21] N. Scolari. Ottimizzazione di traiettorie di escape dal punto lagrangiano l2 del sistema sole-terra con propulsione elettrica. Master's thesis, Politecnico di Torino, 2023.
- [22] Earth Sun and Moon position. Simulatore 3d, 2024.
- [23] M. Vento. Low-thrust optimal escape trajectories from lagrangian point l2 of the earth-moon system. Master's thesis, Politecnico di Torino, 2023.
- [24] Wikipedia. Propulsore effetto hall. 2024.
- [25] Wikipedia. Punti lagrangiani, 2024.