



**Politecnico
di Torino**

POLITECNICO DI TORINO

Corso di Laurea Magistrale in Ingegneria Civile

Gestione e riqualificazione delle costruzioni e delle infrastrutture

STUDIO DELLE FORZE DI IMPATTO TRA CORPI IN CALCESTRUZZO

Relatori

Chiar.mo Prof. Valerio DE BIAGI

Dott. Elahe ZEINALI MIANKOOH

Candidato

Giacomo MARINACI

a.a. 2023/2024

Indice

Elenco Tabelle	IV
Elenco figure	V
Premessa	1
1 Il collasso progressivo degli edifici	3
1.1 Collasso di tipo pancake	3
1.1.1 Caratteristiche che favoriscono il collasso di tipo pancake . .	4
1.1.2 Cenni storici sul collasso di tipo pancake	5
1.2 Scopo dello studio	7
2 Impatto tra due corpi: aspetti teorici	8
2.1 Cinematica di contatto	11
2.2 Forze di contatto	13
2.2.1 Modello elastico lineare	14
2.2.2 Modello elastico non lineare di Hertz	15
2.2.3 Modello plastico per l'impatto	19
2.2.4 Modello dissipativo	20
2.2.5 Modello con smorzamento non lineare di Hunt e Crossley . .	22
3 Dissipazione di energia durante l'impatto	26
3.1 Energia dissipata associata al coefficiente di restituzione	26
3.2 Energia di deformazione elastica immagazzinata durante il contatto	27
3.2.1 Energia dissipata durante l'impatto tra due corpi	28
3.3 Energia dissipata per smorzamento interno	32
4 Impatto verticale con corpo in caduta libera	35
4.1 Impatto su un corpo di massa trascurabile	35
4.1.1 Impatto su un corpo di massa trascurabile a comportamento rigido perfettamente plastico o elasto-plastico	37

4.2	Singolo impatto su un corpo con peso proprio	38
4.3	Caduta di un oggetto che permane su un corpo con peso proprio rilevante	40
4.4	Impatto su un corpo con comportamento rigido perfettamente plastico o elasto-plastico e massa significativa	41
5	Effetti di scala	43
5.1	Fattore di scala	43
5.1.1	Teorema di Buckingham	44
5.1.2	Procedura di correzione	47
5.2	Risposta scalata all'impatto a basse velocità	50
5.2.1	Formulazione del problema	50
5.3	Impatto su struttura di estensione infinita	52
5.4	Impatto quasi-statico	53
6	Analisi sperimentale per la definizione delle forze di contatto	58
6.1	Assetto della prova	58
6.2	Analisi con la videocamera ad alta velocità	63
6.3	Analisi dell'impatto tra campioni e piastra	65
6.4	Analisi dei risultati	66
6.4.1	Analisi di un provino sferico	66
6.4.2	Analisi di un provino semisferico	74
6.4.3	Analisi di un provino cubico	79
6.5	Osservazioni	83
7	Confronto tra i risultati ottenuti	85
7.1	Confronto tra un campione sferico e uno semisferico	85
7.2	Confronto tra un campione cubico e uno semisferico	91
7.3	Confronto tra due campioni sferici caratterizzati da materiale diverso	97
7.4	Confronto tra due campioni cubici con diversa altezza di caduta . .	103
	Tabella dei risultati	109
	Conclusioni	110

Elenco Tabelle

5.1	Fattori di scala per diverse variabili	44
5.2	Matrice adimensionale ridotta	48
6.1	Nomenclatura e peso dei provini prima di ogni test	64
7.1	Tabella riassuntiva dei risultati ottenuti	109

Elenco figure

1.1	Schema di collasso progressivo di tipo pancake [1]	4
1.2	Edificio crollato in Turchia nel terremoto del 2023 [3]	6
1.3	Palazzo crollato in Turchia nel terremoto del 2023 [4]	6
1.4	Struttura crollata in Turchia nel terremoto del 2023 [5]	6
2.1	Contatto tra due corpi [6]	9
2.2	Deformazione durante l'impatto [6]	9
2.3	Collisione centrale tra due sfere [7]: (a) Inizio della fase di compressione; (b) Istante di collisione; (c) Fine della fase di restituzione	10
2.4	Risposta spostamento-tempo delle masse impattanti [7]	10
2.5	Fenomeno di contatto tra due corpi [9]: (a) Corpi in stato di separazione; (b) Corpi in stato di contatto.	11
2.6	Modello elastico lineare [13]	15
2.7	Modello elastico non lineare [13]	16
2.8	Diagramma forza-tempo di tipo simmetrico [8]	18
2.9	Schema di impatto elastico [8]	18
2.10	(a) Diagramma di impatto plastico; (b) Schema di impatto plastico [8]	19
2.11	Modello forza-deformazione di Kelvin-Voigt [13]	21
2.12	Ciclo di isteresi a mezza ellisse [6]	21
2.13	Ciclo di isteresi atteso per effetto del carico di compressione applicato [12]	22
2.14	Modello di Hunt e Crossley [13]	23
3.1	Impatto su un corpo supportato da un palo [13]	29
3.2	Scenari di impatto tra due corpi nello spazio [13]	30
3.3	(a) Modello elastico lineare con massa concentrata collegata a una molla; (b) Diagramma di forza-spostamento per il modello elastico lineare [13]	31
3.4	Modello di impatto molla-smorzatore [7]	32

4.1	Modello di carico rilasciato improvvisamente sulla trave e di carico poggiato sulla trave [13]	36
4.2	Impatto di un corpo in caduta su un corpo privo di massa [13] . . .	37
4.3	(a) Comportamento rigido perfettamente plastico; (b) comportamento elasto-plastico [13]	38
4.4	Impatto di un oggetto in caduta su un corpo di massa significativa [13]	39
4.5	Comportamento lineare elastico di un corpo con massa non trascurabile [13]	39
4.6	Oggetto in caduta che staziona sul corpo impattato [13]	40
4.7	Risposta anelastica di un sistema con massa significativa [13]	41
5.1	Modello dissipatore-molla [24]	52
5.2	Schema di modello quasi-statico [23]	54
5.3	Sistema piastra semplicemente supportata con una molla [24]	55
6.1	A sinistra: schema dell'apparato sperimentale utilizzato; a destra: il dettaglio della piastra impattata	59
6.2	Dettaglio del provino in posizione iniziale sotto l'elettromagnete . .	60
6.3	Provino utilizzato nei test	60
6.4	Campioni di forma diversa analizzati nella prova	62
6.5	Diagramma di forza (in blu) e accelerazione (in nero) nel tempo relativo al provino SP-8-T2-18-1	67
6.6	Trasformata rapida di Fourier dell'accelerazione (in nero) e della forza misurata (in blu) relativa al provino SP-8-T2-18-1	68
6.7	Diagramma della fase di impatto per il provino SP-8-T2-18-1	68
6.8	Decomposizione dell'accelerazione VMD relativa al provino SP-8-T2-18-1	69
6.9	Accuratezza dei risultati ottenuti con il metodo VMD relativi al provino SP-8-T2-18-1	70
6.10	Accelerazione ricostruita con il metodo VMD relativa al provino SP-8-T2-18-1	71
6.11	Diagramma Forza misurata - Inerzia ricostruita relativo al provino SP-8-T2-18-1	71
6.12	Diagramma della forza di contatto ottenuta per il provino SP-8-T2-18-1	72
6.13	Fotogrammi acquisiti con la videocamera ad alta velocità per il provino SP-8-T2-18-1: (a) Istante prima del contatto; (b) Momento del contatto; (c)-(d) Momento dopo il contatto	73
6.14	Diagramma di forza (in blu) e accelerazione (in nero) nel tempo relativo al provino SS-9-T2-18-2	74

6.15	Trasformata rapida di Fourier dell'accelerazione (in nero) e della forza misurata (in blu) relativa al provino SS-9-T2-18-2	75
6.16	(a) Diagramma della fase di impatto per il provino SS-9-T2-18-2; (b) Decomposizione dell'accelerazione VMD del provino SS-9-T2-18-2; (c) Accuratezza dei risultati del metodo VMD per il provino SS-9-T2-18-2; (d) Accelerazione ricostruita con il metodo VMD del provino SS-9-T2-18-2	76
6.17	Diagramma Forza misurata - Inerzia ricostruita relativo al provino SS-9-T2-18-2	77
6.18	Diagramma della forza di contatto ottenuta per il provino SS-9-T2-18-2	77
6.19	Fotogrammi acquisiti con la videocamera ad alta velocità per il provino SS-9-T2-18-2: (a) Istante prima del contatto; (b) Momento del contatto; (c)-(d) Momento dopo il contatto	78
6.20	Diagramma di forza (in blu) e accelerazione (in nero) nel tempo relativo al provino C-7-A	79
6.21	Trasformata rapida di Fourier dell'accelerazione (in nero) e della forza misurata (in blu) relativa al provino C-7-A	80
6.22	(a) Diagramma della fase di impatto per il provino C-7-A; (b) Decomposizione dell'accelerazione VMD del provino C-7-A; (c) Accuratezza dei risultati del metodo VMD per il provino C-7-A; (d) Accelerazione ricostruita con il metodo VMD del provino C-7-A	81
6.23	Diagramma Forza misurata - Inerzia ricostruita relativo al provino C-7-A	82
6.24	Diagramma della forza di contatto ottenuta per il provino C-7-A . .	82
6.25	Fotogrammi acquisiti con la videocamera ad alta velocità per il provino C-7-A: (a) Istante prima del contatto; (b) Primo contatto tra provino e piastra; (c) Secondo contatto tra provino e piastra; (d) Istante dopo il contatto	83
7.1	Confronto dei diagrammi di forza misurata e accelerazione tra i provini SP-8-T2-19-3 e SS-10-T2-19-1	86
7.2	Confronto dei diagrammi della trasformata rapida di Fourier tra i provini SP-8-T2-19-3 e SS-10-T2-19-1	86
7.3	Confronto dei risultati ottenuti con il metodo VMD tra i provini SP-8-T2-19-3 e SS-10-T2-19-1: (a) Decomposizione dell'accelerazione; (b) Accuratezza dei risultati del metodo VMD; (c) Accelerazione ricostruita con il metodo VMD	87
7.4	Confronto dei diagrammi forza misurata - inerzia ricostruita tra i provini SP-8-T2-19-3 e SS-10-T2-19-1	88
7.5	Confronto dei diagrammi della forza di contatto tra i provini SP-8-T2-19-3 e SS-10-T2-19-1	88

7.6	Fotogrammi acquisiti con la videocamera ad alta velocità per il provino SP-8-T2-19-3: (a) Istante prima del contatto; (b) Momento del contatto; (c)-(d) Momento dopo il contatto	89
7.7	Fotogrammi acquisiti con la videocamera ad alta velocità per il provino SS-10-T2-19-1: (a) Istante prima del contatto; (b) Momento del contatto; (c)-(d) Momento dopo il contatto	90
7.8	Confronto dei diagrammi di forza misurata e accelerazione tra i provini C-8-A e SS-10-T2-19-2	91
7.9	Confronto dei diagrammi della trasformata rapida di Fourier tra i provini C-8-A e SS-10-T2-19-2	92
7.10	Confronto dei risultati ottenuti con il metodo VMD tra i provini C-8-A e SS-10-T2-19-2: (a) Decomposizione dell'accelerazione; (b) Accuratezza dei risultati del metodo VMD; (c) Accelerazione ricostruita con il metodo VMD	93
7.11	Confronto dei diagrammi dell'inerzia ricostruita (a) e della forza di contatto (b) tra i provini C-8-A e SS-10-T2-19-2	94
7.12	Fotogrammi acquisiti con la videocamera ad alta velocità per il provino C-8-A: (a) Istante prima del contatto; (b) Primo contatto tra campione e piastra; (c) Secondo contatto tra campione e piastra; (d) Istante dopo il contatto	95
7.13	Fotogrammi acquisiti con la videocamera ad alta velocità per il provino SS-10-T2-19-2: (a) Istante prima del contatto; (b) Momento del contatto; (c)-(d) Istante dopo il contatto	96
7.14	Confronto dei diagrammi di forza misurata e accelerazione tra i provini SS-6-T1-2 e SS-6-T2-1	97
7.15	Confronto dei diagrammi della trasformata rapida di Fourier tra i provini SS-6-T1-2 e SS-6-T2-1	98
7.16	Confronto dei diagrammi della fase di impatto tra i provini SS-6-T1-2 e SS-6-T2-1	98
7.17	Confronto dei risultati ottenuti con il metodo VMD tra i provini SS-6-T1-2 e SS-6-T2-1: (a) Decomposizione dell'accelerazione; (b) Accuratezza dei risultati del metodo VMD; (c) Accelerazione ricostruita con il metodo VMD	99
7.18	Confronto dei diagrammi dell'inerzia ricostruita (a) e della forza di contatto (b) tra i provini SS-6-T1-2 e SS-6-T2-1	100
7.19	Fotogrammi acquisiti con la videocamera ad alta velocità per il provino SS-6-T1-2: (a) Istante prima del contatto; (b) Istante del contatto; (c)-(d) Istante dopo il contatto	101
7.20	Fotogrammi acquisiti con la videocamera ad alta velocità per il provino SS-6-T2-1: (a) Istante prima del contatto; (b) Istante del contatto; (c)-(d) Istante dopo il contatto	102

7.21	Confronto dei diagrammi di forza misurata e accelerazione tra i provini C-8-A e C-8-B	103
7.22	Confronto dei diagrammi della trasformata rapida di Fourier tra i provini C-8-A e C-8-B	104
7.23	Confronto dei diagrammi della fase di impatto tra i provini C-8-A e C-8-B	104
7.24	Confronto dei risultati ottenuti con il metodo VMD tra i provini C-8-A e C-8-B: (a) Decomposizione dell'accelerazione; (b) Accuratezza dei risultati; (c) Ricostruzione dell'accelerazione	105
7.25	Confronto dei diagrammi dell'inerzia ricostruita (sopra) e della forza di contatto (sotto) tra i provini C-8-A e C-8-B	106
7.26	Fotogrammi acquisiti con la videocamera ad alta velocità per il provino C-8-B: (a) Istante prima del contatto; (b) Momento del contatto; (c) Momento dopo il contatto; (d) Momento dopo il contatto con rottura del provino	108

Premessa

Uno dei problemi che ingegneri e progettisti devono affrontare è la definizione delle forze di contatto che si sviluppano in uno scenario di impatto tra due corpi. Tale fenomeno è molto complesso ed è caratterizzato da un elevato sviluppo di forza, con rapida dissipazione di energia in tempi molto brevi.

La prima parte dell'elaborato ha lo scopo di illustrare i meccanismi che entrano in gioco nella definizione delle forze di contatto tra due corpi, presentando gli aspetti teorici e analitici utili alla descrizione del fenomeno.

Nel primo capitolo si affrontano le tipologie di analisi e modelli da adottare, derivanti da osservazioni di carattere sperimentale e utili per la scelta di un'appropriata legge costitutiva in cui la geometria, la cinematica dei corpi e la natura dei materiali giocano un ruolo fondamentale. Sono valutati i parametri di contatto, legati alla rigidità dei materiali e al coefficiente di smorzamento e sono quantificati i meccanismi di trasferimento di energia.

La dissipazione di energia durante l'impatto può essere espressa per mezzo di un coefficiente di restituzione, che dipende da diversi fattori quali la geometria dei corpi a contatto, la velocità di arrivo, le proprietà dei materiali, la durata del contatto e la presenza di attrito. L'energia cinetica iniziale associata al contatto si suddivide in tre componenti: l'energia cinetica dei corpi che si muovono alla stessa velocità, l'energia di deformazione elastica immagazzinata e l'energia dissipata.

Al fine di ridurre al minimo il programma sperimentale, per passare dai modelli reali a quelli teorici, si introducono dei fattori di scala. La tecnica si basa sull'utilizzo di una base adimensionale alternativa che, insieme a un modello matematico, consente il calcolo di un fattore di correzione. La nuova velocità ottenuta, applicata al modello, soddisfa delle leggi di scala.

Lo scenario di impatto tra due oggetti in direzione orizzontale non presenta sostanziali differenze rispetto a quello di un corpo in caduta libera che entra in collisione con un corpo impattato. Tuttavia, la soluzione esatta per tale scenario è complessa. Un approccio di modellazione prevede di trascurare la massa del corpo impattato; mentre, un ulteriore approccio consiste nel considerare l'oggetto caduto come incorporato nella struttura colpita, aumentando il peso proprio dopo che si è verificata la collisione. Pertanto, la massa partecipante dell'elemento strutturale

interessato e la massa del corpo caduto sono considerate come un'unica massa combinata.

Un'analisi sperimentale è stata condotta al fine di determinare le forze di contatto che si sviluppano durante l'impatto tra una serie di provini e una piastra in calcestruzzo fibro-rinforzato. I campioni utilizzati sono caratterizzati da geometria, materiali, forma e peso diversi con lo scopo di confrontare i risultati, evidenziando i cambiamenti nel fenomeno legati alle variazioni di tali parametri. L'apparato sperimentale, descritto nei capitoli dell'elaborato, prevede tre sensori piezoelettrici e un accelerometro disposti al di sotto della piastra. I dati registrati da tali dispositivi sono stati adeguatamente trattati con il software di calcolo MatLab, al fine di ottenere i diagrammi che caratterizzano l'evento di impatto. A seguire è stato effettuato il confronto dei risultati ottenuti per i campioni caratterizzati dagli stessi parametri ad eccezione di uno. Durante le prove sono state, inoltre, effettuate delle registrazioni con una videocamera ad alta velocità così da poter evidenziare i meccanismi che si verificano al momento dell'impatto, associando le immagini catturate con le forze e l'accelerazione misurate.

Capitolo 1

Il collasso progressivo degli edifici

Il termine collasso progressivo è utilizzato in campo ingegneristico per descrivere quel fenomeno a catena originato da un evento di attivazione, che causa fratture di carattere locale e porta al crollo parziale o totale di una struttura [1]. L'evento di attivazione può essere di varia natura: errori legati a una cattiva progettazione o costruzione, incendi, esplosioni, sovraccarichi accidentali, materiali poco performanti, collisione di veicoli o azioni dinamiche indotte da fenomeni di carattere sismico. Uno degli effetti principali causato dai sovraccarichi è il distacco di uno o più elementi principali della struttura, come una trave o parti di un solaio, che impatta sui piani inferiori causandone la rottura, la caduta e un fenomeno a catena che porta progressivamente al collasso dell'intero edificio. In questo caso si parla di *collasso di tipo pancake*.

1.1 Collasso di tipo pancake

Il collasso di tipo pancake è caratterizzato dal distacco delle parti superiori di una struttura, che accumulano energia cinetica durante la caduta e il conseguente impatto con i piani inferiori genera delle forze di contatto ben più grandi rispetto alla capacità della costruzione, causandone il crollo totale in modo quasi verticale [Figura 1.1]. La grandezza e la forma degli elementi strutturali in caduta che impattano sulle superfici sottostanti influenzano significativamente il processo di collasso dell'edificio [2], poiché tali parametri sono direttamente proporzionali alle forze di impatto che si generano all'interfaccia tra le parti strutturali in collisione. Il meccanismo di collasso in esame presenta le seguenti caratteristiche:

- Rottura locale iniziale di elementi portanti;

- Separazione di componenti strutturali con conseguente caduta in moto verticale rigido;
- Trasformazione di energia gravitazionale potenziale in energia cinetica;
- Impatto su elementi integri della struttura;
- Collasso degli elementi impattati, legato alle forze di compressione assiale causate dall'impatto;
- Collasso progressivo dell'intera struttura in direzione verticale.

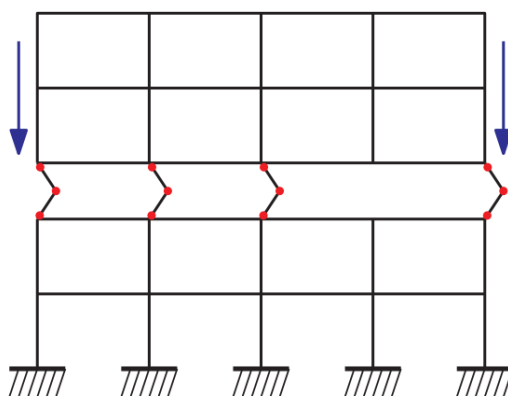


Figura 1.1: Schema di collasso progressivo di tipo pancake [1]

L'energia potenziale rilasciata durante la caduta può superare quella cinetica immagazzinata negli elementi portanti impattati, generando forze interne di importante intensità che consentono la propagazione del collasso.

1.1.1 Caratteristiche che favoriscono il collasso di tipo pancake

Tra le cause che generano un meccanismo di collasso di tipo pancake si annoverano la natura dei materiali da costruzione utilizzati e il conseguente comportamento strutturale. È stato osservato [2] che le azioni dinamiche generate dall'impatto e la concentrazione delle forze diventano decisamente più dannose per gli elementi a comportamento fragile. Se invece la struttura presenta elevate caratteristiche di duttilità vi è un maggiore assorbimento e dissipazione di energia cinetica, permettendo una redistribuzione interna delle forze e riducendone la concentrazione. Un altro aspetto importante da analizzare è la forma degli edifici. Le strutture sono spesso ordinate in una direzione primaria, specialmente quella verticale come nel

caso di palazzi e grattacieli; quindi, l'impatto di componenti separati e in caduta sulla struttura rimanente provocano una reazione a catena fino al crollo totale. La forma, l'altezza e la snellezza di un edificio aumentano la suscettibilità a un collasso di tipo pancake, che si basa sull'entità degli eventi accidentali richieste per il cedimento di un piano e la suscettibilità alla progressione del cedimento. L'altezza dell'edificio influenza significativamente il rapporto tra l'energia potenziale gravitazionale e l'energia elastica potenziale; pertanto, è stato osservato che le strutture che superano i trenta piani sembrano più propense a un collasso di tipo pancake rispetto ad altre che si estendono su pochi livelli. Le motivazioni per cui le dimensioni dell'edificio influenzano questo tipo di collasso sono legate al rapporto tra l'energia potenziale gravitazionale e l'energia elastica potenziale, che aumenta con l'altezza.

1.1.2 Cenni storici sul collasso di tipo pancake

Il collasso progressivo di tipo pancake è uno dei fenomeni più drammatici studiati nell'ingegneria poiché esso avviene inaspettatamente e causa grandi perdite in termini di vite umane e di patrimonio strutturale. L'evento più rinomato di questo tipo di collasso è quello relativo al crollo delle torri del World Trade Center nel 2001. L'impatto di due aeromobili e il conseguente incendio hanno portato a rotture di carattere locale. La conseguente perdita di capacità di carico verticale fu limitata a pochi piani, ma si estese su tutta la sezione trasversale di ciascuna torre. La parte superiore della struttura ha iniziato a cadere e ad accumulare energia cinetica. La successiva collisione con la parte inferiore, che era ancora intatta, ha causato grandi forze d'impatto che erano ben oltre sia la resistenza di progetto che quella effettiva della struttura. Questo impatto strutturale ha quindi portato nuovamente alla perdita di capacità di carico verticale su tutta la sezione trasversale delle torri nell'area di impatto. Il crollo è progredito allo stesso modo e ha condotto al collasso totale. Nel 2023 due forti terremoti hanno colpito la Turchia causando il crollo di 3450 edifici [3]. Molte di queste strutture sono collassate con modalità pancake [Figura 1.2], [Figura 1.3] e [Figura 1.4]. Sebbene l'evento scatenante è da imputare all'azione sismica, sembrerebbe che molte di queste costruzioni sono state realizzate in calcestruzzo senza un adeguato rinforzo sismico.



Figura 1.2: Edificio crollato in Turchia nel terremoto del 2023 [3]

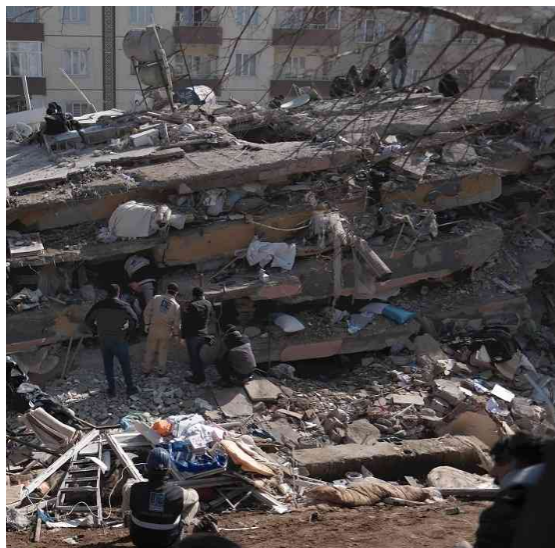


Figura 1.3: Palazzo crollato in Turchia nel terremoto del 2023 [4]



Figura 1.4: Struttura crollata in Turchia nel terremoto del 2023 [5]

1.2 Scopo dello studio

Nell'analisi di un evento di collasso progressivo di tipo pancake è di cruciale importanza la definizione delle forze di contatto che si sviluppano quando gli elementi in caduta impattano sulla struttura ancora integra. Come evidenziato nel presente capitolo, vi sono diversi fattori in gioco che influenzano significativamente l'entità delle forze di contatto. Essi sono: la forma, il materiale, il peso degli elementi strutturali e l'altezza di caduta che essi effettuano prima di colpire la struttura sottostante. L'elaborato in esame ha lo scopo di analizzare quali sono i meccanismi alla base di un evento di contatto tra due corpi in calcestruzzo e i parametri che entrano in gioco. Attraverso lo studio di carattere sperimentale si procede alla variazione di alcuni di questi parametri, al fine di valutarne il loro impatto sulla definizione delle forze di contatto e sulla loro entità.

Capitolo 2

Impatto tra due corpi: aspetti teorici

L'impatto è caratterizzato da grandi forze di reazione e cambiamenti di velocità dei due corpi [6]. Come conseguenza, i due corpi sono soggetti a deformazioni elastiche e/o plastiche, con dissipazione di energia in varia forma. La linea dell'impatto è retta e normale alla superficie di contatto [Figura 2.1]. Quattro tipi di impatto possono essere definiti per un singolo punto di collisione tra due corpi:

- *Centrale o collineare*, se il centro di massa dei due corpi è sulla linea del contatto;
- *Eccentrico*, se il centro di massa di uno dei due corpi non è sulla linea dell'impatto;
- *Diretto*, se le velocità iniziali dei due corpi sono lungo la linea dell'impatto;
- *Obliquo*, se la velocità iniziale di uno dei due corpi non è lungo la linea dell'impatto.

La dinamica dell'impatto è molto complessa e dipende da molte proprietà quali i materiali, la geometria e la velocità dei corpi. Per la descrizione del fenomeno di contatto elastico tra due corpi, si prendono in esame due sfere che entrano in collisione. Possono essere definite due diverse fasi durante tale processo: *compressione* e *restituzione*. La fase di compressione inizia quando le due sfere entrano in contatto all'istante t_0 (punto O) e termina con il raggiungimento della massima deformazione all'istante t_m (punto A) [Figura 2.2]. La velocità relativa al punto di contatto, normale alla superficie dei due corpi è gradualmente ridotta fino al valore nullo. La fine della fase di compressione è indicata come il momento di massimo avvicinamento, che corrisponde alla massima forza di contatto normale se non si

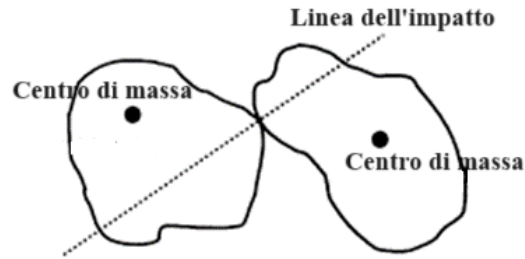


Figura 2.1: Contatto tra due corpi [6]

considera la dissipazione di energia. La fase di restituzione inizia in questo istante di tempo (punto A) e termina quando le due sfere si separano l'una dall'altra. La

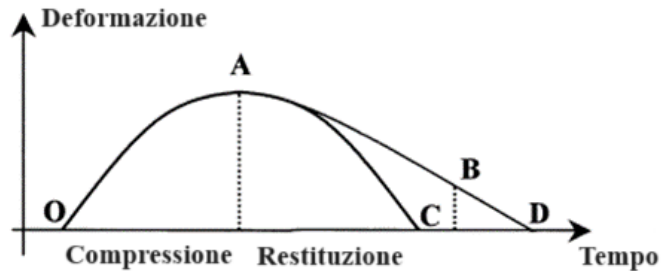


Figura 2.2: Deformazione durante l'impatto [6]

[Figura 2.3] illustra le due diverse fasi di contatto tra due sfere i e j , di massa rispettivamente m_i e m_j . Per gli impatti ad alta velocità, non tutte le deformazioni sono recuperabili a causa dell'ingresso in fase plastica e la conseguente perdita di energia. Per questo l'impatto può anche essere classificato in:

- *Perfettamente elastico*, linea O – A – C, senza perdita di energia;
- *Perfettamente plastico*, linea O – A, in cui vi è la massima perdita di energia e la deformazione è permanente;
- *Parzialmente elastico*, linea O – A – D, con perdita di energia ma senza deformazioni permanenti;
- *Parzialmente plastico*, linea O – A – B, con perdita di energia e deformazioni permanenti.

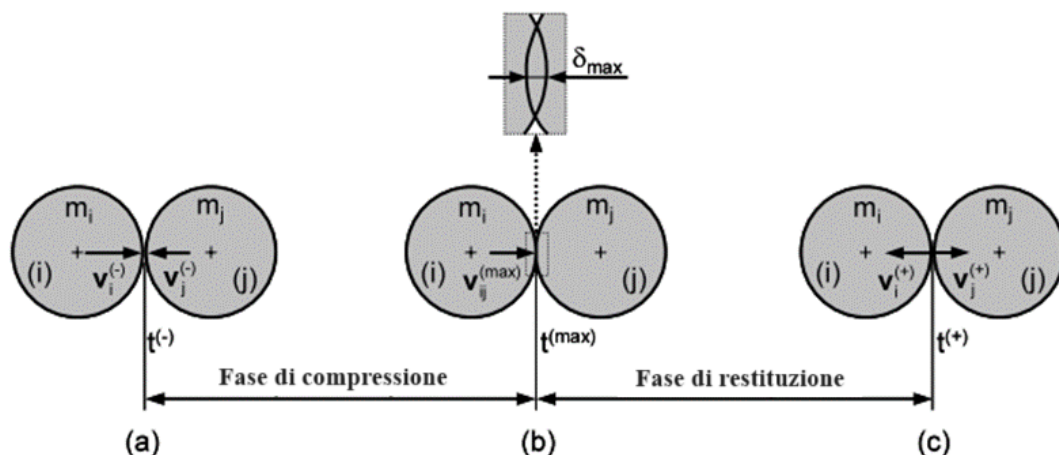


Figura 2.3: Collisione centrale tra due sfere [7]: (a) Inizio della fase di compressione; (b) Istante di collisione; (c) Fine della fase di restituzione

Indipendentemente dalla reale geometria della superficie di contatto, è possibile distinguere tre momenti nella risposta spostamento-tempo delle masse impattanti: una fase di pre-picco, una fase di carico massimo e una restituzione post-picco [Figura 2.4] [8]. Le approssimazioni teoriche per tale comportamento includono modelli elastici, plastici ed elastoplastici.

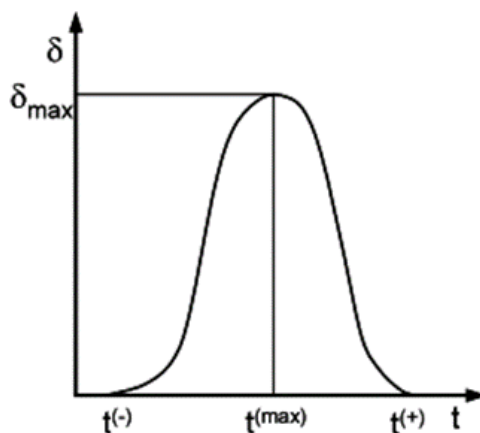


Figura 2.4: Risposta spostamento-tempo delle masse impattanti [7]

2.1 Cinematica di contatto

Per analizzare la cinematica del contatto si considerino due corpi convessi i e j inizialmente separati, che si muovono con velocità assoluta $\dot{\delta}_i$ e $\dot{\delta}_j$ rispettivamente. La valutazione del fenomeno di impatto prevede il calcolo della posizione dei due punti potenziali di contatto, la loro distanza euclidea e la velocità normale alla superficie passante per i punti di contatto [9]. Il possibile movimento di ciascun corpo è vincolato dalla distanza e dalla velocità relativa dei potenziali punti di contatto. I valori positivi di tale distanza rappresentano una separazione, mentre i valori negativi indicano l'indentazione relativa. Questi due scenari sono illustrati in [Figura 2.5]. Il cambio di segno della distanza normale indica una transizione dalla separazione al contatto, o viceversa. A loro volta, valori positivi della velocità normale relativa tra i punti di contatto, cioè la velocità di indentazione o di penetrazione, indicano che i corpi si stanno avvicinando e corrisponde alla fase di compressione, mentre i valori negativi denotano che i corpi si stanno separando e corrisponde alla fase di restituzione. I vettori di interesse nello studio degli eventi di contatto-impatto sono mostrati in [Figura 2.5]. Il vettore che connette i due

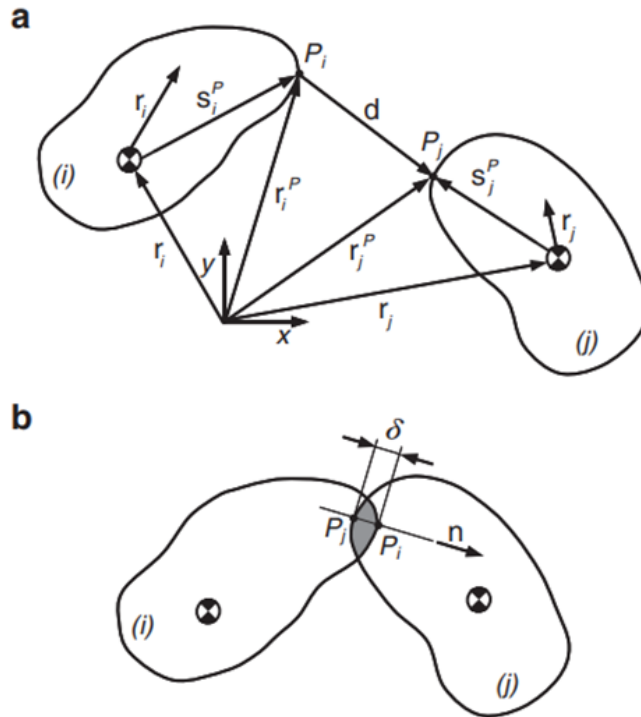


Figura 2.5: Fenomeno di contatto tra due corpi [9]: (a) Corpi in stato di separazione; (b) Corpi in stato di contatto.

potenziali punti di contatto, P_i e P_j , è una funzione che può essere espressa come:

$$\mathbf{d} = \mathbf{r}_j^P - \mathbf{r}_i^P \quad (2.1.1)$$

dove sia \mathbf{r}_j^P che \mathbf{r}_i^P sono descritti in coordinate globali rispetto al sistema di riferimento inerziale:

$$\mathbf{r}_k^P = \mathbf{r}_k + \mathbf{A}_k \mathbf{s}'_k P \quad (2.1.2)$$

con $(k=i,j)$, \mathbf{r}_i e \mathbf{r}_j rappresentano i vettori di posizione globale dei corpi i e j , mentre \mathbf{s}'_i^P e \mathbf{s}'_j^P sono le componenti locali dei punti di contatto rispetto ai sistemi di coordinate locali. Le matrici di rotazione \mathbf{A}_k sono date da:

$$\mathbf{A}_k = \begin{bmatrix} \cos\phi_k & -\sin\phi_k \\ \sin\phi_k & \cos\phi_k \end{bmatrix} \quad (2.1.3)$$

con $(k=i,j)$. Un vettore normale al piano di contatto, illustrato in [Figura 2.5(b)], può essere determinato come:

$$\mathbf{n} = \mathbf{d}/d \quad (2.1.4)$$

in cui l'intensità del vettore \mathbf{d} può essere valutata come:

$$\mathbf{d} = \mathbf{n}^T d \quad (2.1.5)$$

La condizione di distanza minima data dall'equazione non è sufficiente per trovare i possibili punti di impatto tra i due corpi, poiché non copre tutti i possibili scenari che possono verificarsi nel problema di contatto. Pertanto, tali punti sono definiti come quelli che corrispondono alla massima deformazione relativa, misurati lungo la direzione normale. Quindi, possono essere definite tre condizioni geometriche:

1. La distanza tra i potenziali punti di contatto data dal vettore \mathbf{d} corrisponde alla distanza minima;
2. Il vettore \mathbf{d} deve essere collineare con il vettore normale \mathbf{n}_i ;
3. I vettori normali \mathbf{n}_i e \mathbf{n}_j nei potenziali punti di contatto devono essere collineari.

Le condizioni (2) e (3) possono essere scritte come:

$$\mathbf{n}_j \times \mathbf{n}_i = \mathbf{0} \quad (2.1.6)$$

$$\mathbf{d} \times \mathbf{n}_i = \mathbf{0} \quad (2.1.7)$$

Le condizioni geometriche fornite sono due equazioni non lineari con due incognite, che possono essere risolte utilizzando una procedura iterativa di Newton-Raphson [10]. Questo sistema di equazioni fornisce le soluzioni per la localizzazione dei

potenziali punti di contatto. Una volta individuati i potenziali punti di contatto, il passo successivo riguarda la valutazione dell'indentazione relativa tra i corpi di contatto come:

$$\delta = \sqrt{\mathbf{d}^T \mathbf{d}} \quad (2.1.8)$$

Le velocità dei punti di contatto espresse in termini di sistema di coordinate globali sono valutate nella seguente espressione:

$$\dot{\mathbf{r}}_k^P = \dot{\mathbf{r}}_k + \dot{\mathbf{A}}_k \mathbf{s}'_k^P \quad (2.1.9)$$

con ($k=i,j$). La velocità normale relativa è determinata proiettando la velocità di contatto sulla direzione normale al piano di contatto, ottenendo:

$$v_n = \dot{\delta} = \mathbf{n}^T (\dot{\mathbf{r}}_j^P - \dot{\mathbf{r}}_i^P) \quad (2.1.10)$$

L'implementazione computazionale di questa metodologia è abbastanza efficiente. Tuttavia, la descrizione di cui sopra è limitata ai corpi rigidi convessi con una superficie liscia almeno in un intorno ai potenziali punti di contatto in modo tale che l'area di contatto si riduca a un singolo punto che può muoversi rispetto alle superfici dei corpi. Questo approccio può essere esteso a geometrie di contatto più generalizzate, purché sia definito in modo univoco un piano tangente comune dei corpi di contatto.

2.2 Forze di contatto

La collisione tra due corpi può causare danni agli elementi sotto forma di deformazioni, scheggiature o di rottura per punzonamento a seconda del tipo di materiale. L'entità del danno è direttamente proporzionale all'entità della forza che si sviluppa nel punto di contatto. Sono state sviluppate misure sperimentali al fine di convalidare l'accuratezza delle previsioni ottenute mediante modelli analitici o simulazioni numeriche. L'impatto tra due corpi è uno dei fenomeni fisici più difficili da modellare. Esso può essere definito come un improvviso cambiamento nella quantità di moto di ciascun corpo in contatto, senza un corrispondente cambiamento di posizione. L'impatto è inerente ai vincoli unilaterali, cioè un vincolo che agisce in un dato istante solo in una direzione della normale comune delle superfici di contatto [11]. A seconda delle caratteristiche dell'impatto (velocità, materiali, geometria), le ipotesi fatte su un aspetto diventano più predominanti rispetto agli altri. Possono essere individuati quattro approcci risolutivi all'analisi dell'impatto:

- *Meccanica classica*: prevede l'applicazione delle leggi fondamentali della meccanica per prevedere le velocità dopo l'impatto. La dissipazione di energia è determinata per mezzo del coefficiente di restituzione e [12], la cui è fondamentale per ottenere risultati sufficientemente buoni. Sfortunatamente, questo

approccio non è in grado di prevedere la forza di contatto tra i corpi o le sollecitazioni in essi.

- *Propagazione dell'onda di tensioni elastica*: l'impatto è accompagnato da un'onda di tensioni che si propaga nei corpi lontano dalla regione di impatto. Se l'energia così trasformata in vibrazioni diventa una frazione importante di quella totale, allora l'approccio classico diventa insufficiente per esaminare un problema di impatto.
- *Meccanica dei contatti*: si occupa principalmente del contatto statico, sebbene sia estesa a soluzioni approssimative quando è coinvolto l'impatto. Per le superfici sferoidali, la teoria di Hertz viene utilizzata per ottenere la relazione forza-deformazione necessaria per calcolare la durata dell'impatto e l'indentazione massima. Questo approccio è stato esteso ai casi in cui si verifica una deformazione plastica contenuta, generalmente con l'assunzione di un materiale avente un punto di snervamento. I modelli numerici della zona di contatto vengono utilizzati anche quando la teoria di Hertz non è applicabile. L'equazione forza-deformazione è spesso aumentata con un termine di smorzamento per riflettere la dissipazione nell'area di contatto, consentendo di modellare efficacemente l'area di contatto come un sistema molla-smorzatore.
- *Deformazione plastica*: quando le deformazioni plastiche superano la scala di deformazione contenuta, il modello di propagazione delle onde elastiche non può più essere applicato per analizzare i problemi di impatto. Un'equazione di stato per il materiale che mette in relazione la pressione con le variazioni di densità e temperatura, o entropia, viene utilizzata insieme alle leggi di conservazione della quantità di moto, dell'energia e della massa.

La base della formulazione per la dinamica del contatto è quella di tenere conto in modo esplicito della deformazione dei corpi durante l'impatto. La forza normale di contatto F_n è definita come una funzione della deformazione locale δ :

$$F_n = F_n(\dot{\delta}, \delta) = F_{\dot{\delta}} + F_{\delta}(\delta) \quad (2.2.11)$$

2.2.1 Modello elastico lineare

Il modello elastico lineare [Figura 2.6] per prevedere la forza di contatto per una data deformazione è semplice, ma contraddice il fenomeno dell'incremento dell'entità della forza con l'aumentare della deformazione. Tale fenomeno è noto anche come *incrudimento*.

La forza di contatto è definita come:

$$F_n = k\delta \quad (2.2.12)$$

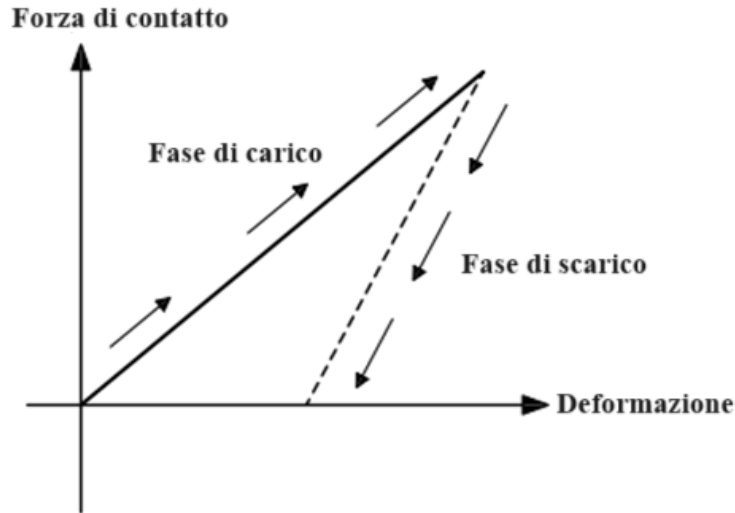


Figura 2.6: Modello elastico lineare [13]

2.2.2 Modello elastico non lineare di Hertz

Il modello di Hertz pone le basi per la risoluzione di problemi legati alla definizione delle forze di contatto. Tuttavia, esso è limitato agli eventi con sole deformazioni elastiche e nella sua forma originale non include lo smorzamento. Il processo di contatto può essere rappresentato come due corpi rigidi interagenti attraverso una molla non lineare lungo la linea dell'impatto. Le ipotesi utilizzate stabiliscono che la deformazione è concentrata nell'intorno dell'area di contatto, le onde elastiche sono trascurate e la massa totale di ogni corpo si muove con la velocità dei rispettivi centri di massa. Il modello presenta un andamento crescente della forza di contatto all'aumentare della deformazione [Figura 2.7]. La forza di impatto totale è definita come [14]:

$$F_n = k\delta^n \quad (2.2.13)$$

In cui k rappresenta un parametro legato alla rigidità e δ è la deformazione in direzione normale alla superficie. Uguagliando l'energia cinetica con l'energia assorbita durante l'impatto è possibile scrivere [13]:

$$\frac{1}{2}m\dot{\delta}_0^2 = \int_0^{\delta_{max}} F_n d\delta \quad (2.2.14)$$

Risolvendo l'integrale:

$$\frac{1}{2}m\dot{\delta}_0^2 = \frac{k}{n+1}\delta_{max}^{n+1} \quad (2.2.15)$$

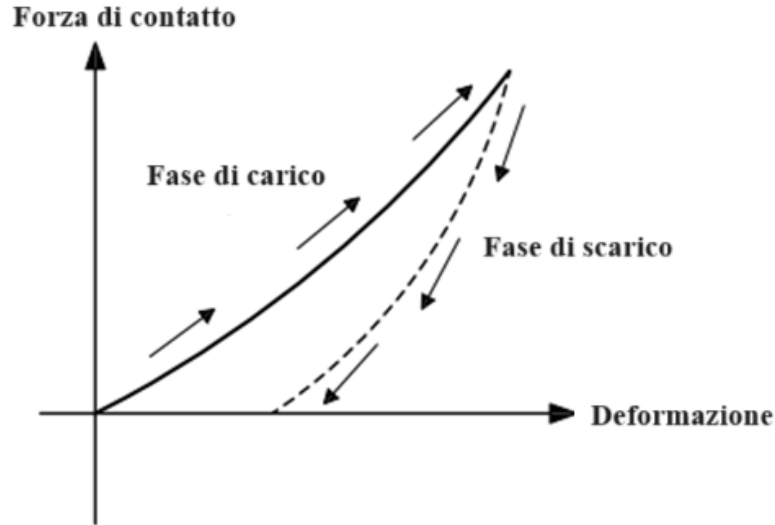


Figura 2.7: Modello elastico non lineare [13]

da cui è possibile ricavare i valori della deformazione massima δ_{max} e della forza di contatto massima $F_{n,max}$:

$$\delta_{max} = \left[\left(\frac{n+1}{2k} \right) m \dot{\delta}_0^2 \right]^{1/(n+1)} \quad (2.2.16)$$

$$F_{n,max} = k \left[\left(\frac{n+1}{2k} \right) m \dot{\delta}_0^2 \right]^{n/(n+1)} \quad (2.2.17)$$

Considerando un corpo sferico che impatta su una superficie indeformabile, il coefficiente di rigidità k può essere definito attraverso la seguente relazione:

$$k = \frac{4}{3} E \sqrt{R} \quad (2.2.18)$$

dove E è il modulo di Young della massa impattata e R è il raggio di curvatura del corpo sferico impattante. In questo caso la deformazione massima e la forza massima sono definite rispettivamente come [7]:

$$\delta_{max} \approx \left(\frac{m \dot{\delta}_0^2}{E \sqrt{R}} \right)^{2/5} \quad (2.2.19)$$

$$F_{n,max} \approx \frac{4}{3} E \sqrt{R} \left(\frac{m \dot{\delta}_0^2}{E \sqrt{R}} \right)^{3/5} \quad (2.2.20)$$

Nel caso di impatto tra due sfere, $n = 3/2$ e k è definita in termini del coefficiente di Poisson ν , modulo di Young E e del raggio delle due sfere R_i e R_j [15].

$$k = \frac{4}{3(\phi_i + \phi_j)} \sqrt{\frac{R_i R_j}{R_i + R_j}} \quad (2.2.21)$$

In cui i parametri dei materiali ϕ_i e ϕ_j sono dati da:

$$\phi_l = \frac{1 - \nu_l^2}{E_l} \quad (2.2.22)$$

con $l = i, j$, dove ν_l è il coefficiente di Poisson e E_l il modulo di Young di ogni sfera. Per il contatto tra una sfera i e un corpo di superficie piana j , il parametro k dipende dal raggio della sfera e dalle proprietà del materiale delle superfici di contatto, espresso come:

$$k = \frac{4}{3(\phi_i + \phi_j)} \sqrt{R_i} \quad (2.2.23)$$

Poiché il modello Hertziano non tiene conto della dissipazione di energia, il relativo coefficiente di restituzione è pari a 1. Pertanto, questo modello può essere utilizzato solo per impatti a basse velocità e materiali resistenti. La legge forza-spostamento per le forze normali localizzate e senza alcun attrito tra due corpi linearmente elastici diventa:

$$F = k\delta^{3/2} \quad (2.2.24)$$

Tale relazione è valida esclusivamente per zone di contatto molto piccole rispetto ai raggi di curvatura dei due corpi impattanti, con distribuzione delle sollecitazioni di contatto di tipo parabolico. La potenza $3/2$ dell'equazione non si applica quando il contatto avviene tra superfici perfettamente piane; allora, almeno idealmente, l'area della zona di contatto non cambia durante il tempo dell'impatto, e probabilmente si applicherebbe una legge lineare di forza-avvicinamento. Quando l'impatto è completamente elastico, si ottiene un andamento del diagramma forza-tempo di tipo simmetrico e si osserva una fase completa di restituzione [Figura 2.8] [8]. In questo caso, l'equazione per definire la forza di contatto di Hertz può essere risolta introducendo delle condizioni al contorno:

$$\frac{d\delta}{dt} = \dot{\delta}_0 \quad (2.2.25)$$

Per $\delta = 0$

$$\frac{d\delta}{dt} = 0 \quad (2.2.26)$$

Per $\delta = \delta_{max}$ Si possono ottenere i valori relativi al massimo valore di carico F_{max} , alla massima deflessione δ_{max} e al tempo di contatto t_{max} dalle seguenti espressioni:

$$F_{max} = (1,25\alpha\dot{\delta}^2 K_e^{2/3})^{3/5} \quad (2.2.27)$$

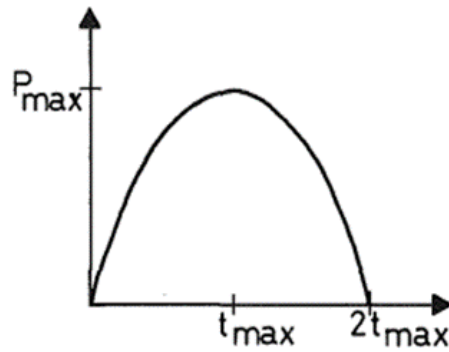


Figura 2.8: Diagramma forza-tempo di tipo simmetrico [8]

$$\delta_{max} = \left(1,25\alpha \frac{\delta^2}{K_e} \right) \quad (2.2.28)$$

$$t_{max} = 1,47 \left[1,25 \frac{\alpha}{\delta^{1/2} K_e} \right]^{2/5} \quad (2.2.29)$$

in cui $\alpha = \frac{m_1 m_2}{m_1 + m_2}$ è la massa effettiva. L'impatto elastico è schematizzato in [Figura 2.9]: Alla fine dell'impatto $t = 2t_{max}$, la velocità vale $-\dot{\delta}_0$ e non vi è

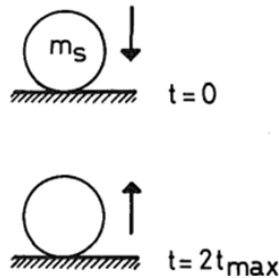


Figura 2.9: Schema di impatto elastico [8]

dissipazione di energia. Come approssimazione, le deformazioni plastiche possono essere incluse nel parametro di contatto k quando il modello di Hertz viene utilizzato anche per gli impatti plastici. Gli esperimenti condotti da Jensen e Hoseith [16] hanno evidenziato che per corpi impattanti in calcestruzzo i valori del parametro k si aggirano tra 2 e 44 $kN/mm^{3/2}$. La legge del contatto elastico di Hertz può essere implementata per tener conto della deformazione plastica introducendo l'isteresi nella legge della forza di contatto. Questo può essere effettuato utilizzando due differenti relazioni forza-deformazione per la fase di scarico del contatto e

generalmente assume la seguente forma:

$$F_n = F_{n,max} \left(\frac{\delta - \delta_p}{\delta_{max} - \delta_p} \right)^n \quad (2.2.30)$$

In cui $F_{n,max}$ è la forza massima normale e δ_{max} è la deformazione massima raggiunte durante la fase di carico, mentre δ_p è la deformazione permanente.

2.2.3 Modello plastico per l'impatto

Una descrizione completa della risposta in una zona di contatto a comportamento plastico tiene conto della legge di Meyer [17]:

$$F = K_p \delta^n \quad (2.2.31)$$

In cui K_p è il parametro di contatto per il modello plastico, espresso in kN/mm. Per un impatto perfettamente plastico tra una sfera infinitamente rigida e un piano deformabile, tale parametro è definibile come:

$$K_p = \pi r^2 \frac{p_m}{\delta} \approx 2\pi R p_m \quad (2.2.32)$$

Dove R è il raggio della sfera e r quello della zona di contatto, mentre p_m è la tensione media di contatto. Le espressioni per la forza massima di impatto F_{max} ,

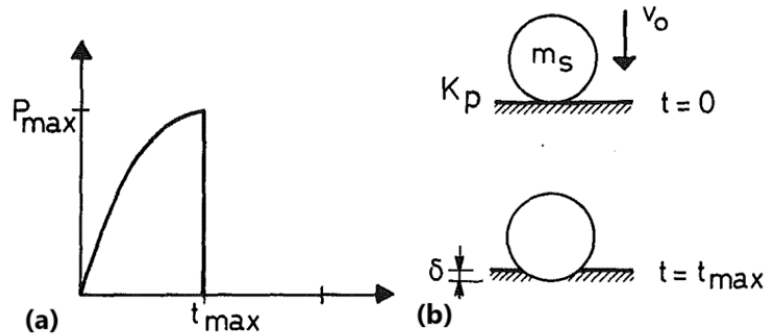


Figura 2.10: (a) Diagramma di impatto plastico; (b) Schema di impatto plastico [8]

per la massima deflessione δ_{max} e per definire il tempo massimo di contatto t_{max} sono riportate di seguito:

$$F_{max} = \dot{\delta}(\alpha K_p)^{1/2} \quad (2.2.33)$$

$$\delta_{max} = \dot{\delta} \left(\frac{\alpha}{K_p} \right)^{1/2} \quad (2.2.34)$$

$$t_{max} = \frac{\pi}{2} \left(\frac{\alpha}{K_p} \right)^{1/2} \quad (2.2.35)$$

Come si evince dal grafico [Figura 2.10 (a)] non vi è alcuna fase di restituzione, la velocità del corpo impattante alla fine del contatto è pari a zero e vi è una deformazione residua pari a δ_{max} . L'energia dissipata durante l'impatto è pari a $0,5m_s\dot{\delta}_0^2$, in cui m_s è la massa della sfera che impatta, mentre $\dot{\delta}_0$ è la velocità al momento del contatto.

- Dalla relazione $F - \dot{\delta}$: $K_p = 10 - 40kN/mm$;
- Dalla relazione $\delta - \dot{\delta}$: $K_p = 27 - 69kN/mm$;
- Dalla relazione $t - \dot{\delta}$: $K_p = 12 - 22kN/mm$;

2.2.4 Modello dissipativo

Sebbene il modello di Hertz sia basato sulla teoria dell'elasticità, numerosi studi hanno cercato di includere anche la dissipazione di energia [7]. Una forma alternativa per esprimere la forza di contatto tenendo conto della dissipazione è quella evidenziata dal modello di Kelvin-Voigt [Figura 2.11].

L'impatto è schematicamente rappresentato con uno smorzatore lineare per la dissipazione dell'energia, in parallelo con una molla lineare per il comportamento elastico. La forza di contatto è definita come [18]:

$$F_n = k\delta + b\dot{\delta} \quad (2.2.36)$$

in cui il primo termine rappresenta la componente elastica, mentre il secondo termine è legato alla dissipazione di energia. Nell'equazione (2.2.36) b è un coefficiente legato all'isteresi e $\dot{\delta}$ è la velocità di contatto. Il modello ha tre difetti:

- La forza di contatto all'inizio dell'impatto [Figura 2.12] (punto A) è discontinua a causa del termine di smorzamento. In un modello realistico, entrambe le forze elastica e di smorzamento dovrebbero essere inizialmente nulle e aumentano nel tempo.
- Appena gli oggetti si separano (punto B), la deformazione tende a zero, la loro velocità relativa tende a essere negativa. Di conseguenza, è presente una forza negativa che trattiene i corpi.

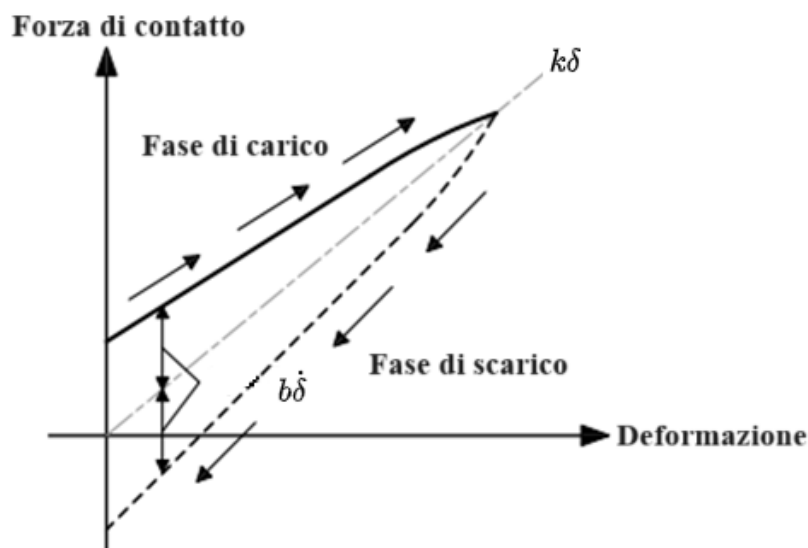


Figura 2.11: Modello forza-deformazione di Kelvin-Voigt [13]

- L'equivalente coefficiente di restituzione definito per questo modello non dipende dalla velocità di impatto.

Il termine di smorzamento e quello elastico possono essere combinati per produrre un ciclo di isteresi mostrato in [Figura 2.12], la cui forma è simile a una mezza ellisse a causa del basso contributo dello smorzamento. Considerando che il modello

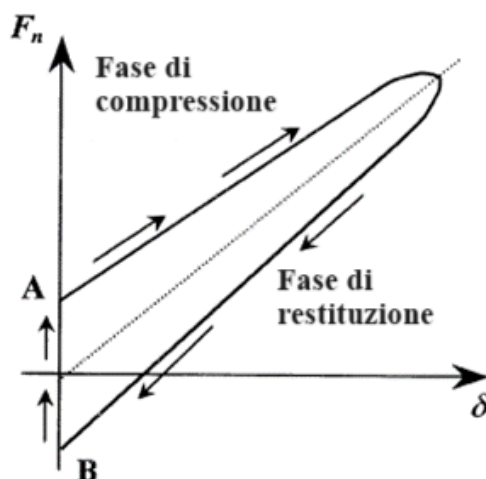


Figura 2.12: Ciclo di isteresi a mezza ellisse [6]

dell'impatto non è lineare, tale forma del ciclo di isteresi è in conflitto con la forma

attesa che nasce dal carico di compressione applicato e rimosso dal corpo in breve tempo nell'intervallo elastico [Figura 2.13]. Il carico è applicato attraverso una coppia di profili che si toccano senza alcuna forza di trazione. Il ciclo di isteresi

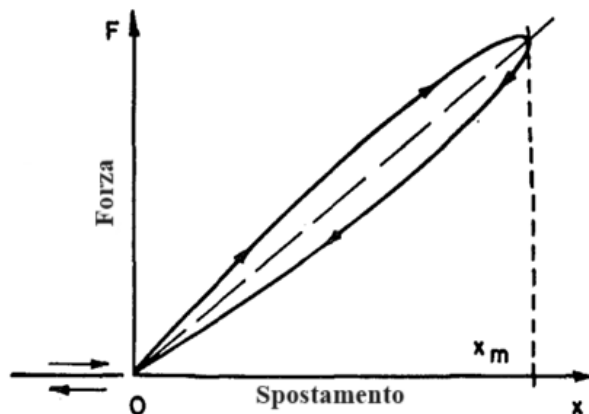


Figura 2.13: Ciclo di isteresi atteso per effetto del carico di compressione applicato [12]

appena analizzato non soddisfa sotto un altro aspetto le condizioni richieste, poiché rimane a tutti gli effetti identico rispetto al resto del diagramma, qualunque sia lo spostamento massimo x_m . L'area dell'anello, che rappresenta la perdita di energia ΔE , sarebbe allora strettamente proporzionale a x_m^2 (per i corpi resilienti):

$$\frac{1}{2}m\dot{\delta}_1 \approx \frac{1}{2}kx_m^2 \quad (2.2.37)$$

quindi, potrebbe essere assunto proporzionale alla velocità finale $\dot{\delta}_1$. Inoltre, l'equazione della perdita di energia cinetica richiede che ΔE sia proporzionale a $\dot{\delta}_1^3$. Sebbene tale modello non sia fisicamente realistico, la sua semplicità lo ha reso molto diffuso e fornisce un metodo ragionevole per determinare la dissipazione di energia associata alle forze normali senza considerare esplicitamente i problemi legati alle deformazioni plastiche.

2.2.5 Modello con smorzamento non lineare di Hunt e Crossley

Per superare i problemi legati ai modelli dissipatore-molla e di Hertz, Hunt e Crossley [12] hanno presentato un modello alternativo per la dissipazione di energia [Figura 2.14].

Tale modello include un termine non lineare di smorzamento e quindi la forza

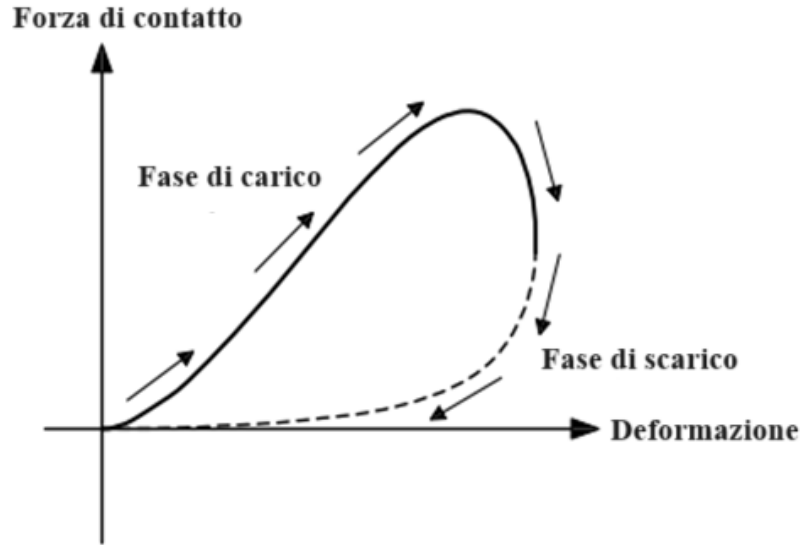


Figura 2.14: Modello di Hunt e Crossley [13]

di impatto è definita come segue:

$$F_n = k\delta^n + \chi\delta^n\dot{\delta} \quad (2.2.38)$$

in cui χ è il *fattore di smorzamento*, dato da:

$$\chi = (0,2n + 1,3) \left(\frac{1-e}{e} \right) \left(\frac{k}{\dot{\delta}_0^2} \right) \quad (2.2.39)$$

dove e è il *coefficiente di restituzione* e $\dot{\delta}_0$ è la velocità iniziale di contatto. Il parametro di smorzamento χ è relazionato al *coefficiente di restituzione* e , poiché sono entrambi legati all'energia dissipata dal processo di impatto. Un aspetto importante del modello è che lo smorzamento dipende dalla deformazione. Questo è fisicamente corretto poiché l'area di contatto aumenta con la deformazione ed è più probabile che si sviluppi una regione plastica per deformazioni più grandi. Un altro aspetto vantaggioso è che la forza di contatto non presenta discontinuità all'inizio dell'impatto e alla separazione dei due corpi, ma inizia e finisce con il corretto valore pari a zero. Per lo sviluppo di espressioni in forma chiusa per stimare la forza massima di contatto F_{nmax} e la deformazione massima δ_{max} , si consideri da derivata rispetto a δ della forza di contatto F_n uguagliata a zero:

$$\frac{\partial F_n}{\partial \delta} = nk\delta^{n-1} + k(0,2n + 1,3) \left(\frac{1-e}{e} \right) \left(\frac{1}{\dot{\delta}_0} \right) \left(n\delta^{n-1}\dot{\delta} + \delta^n \frac{\partial \dot{\delta}}{\partial \delta} \right) = 0 \quad (2.2.40)$$

E' possibile definire:

$$x = \frac{\delta}{\delta_{max}} \quad (2.2.41)$$

$$y = \frac{\dot{\delta}}{\dot{\delta}_0} \quad (2.2.42)$$

Differenziando:

$$(2.2.43)$$

Sostituendo è possibile ottenere:

$$n + (0,2n + 1,3) \left(\frac{1-e}{e} \right) \left(ny + x \frac{\partial y}{\partial x} \right) = 0 \quad (2.2.44)$$

Adottando l'equazione dell'ellittica tra la deformazione e la velocità:

$$\left(\frac{\delta}{\delta_{max}} \right)^2 + \left(\frac{\dot{\delta}}{\dot{\delta}_0} \right)^2 = 1 \quad (2.2.45)$$

$$x^2 + y^2 = 1 \quad (2.2.46)$$

Si ottiene:

$$\frac{\partial y}{\partial x} = -\frac{x}{\sqrt{1-x^2}} \quad (2.2.47)$$

Sostituendo in (2.2.44):

$$ny + (0,2n + 1,3) \left(\frac{1-e}{e} \right) (ny^2 - 1 + y^2) = 0 \quad (2.2.48)$$

Da cui:

$$y^2 + \frac{n}{(n+1)(0,2n+1,3)} \left(\frac{e}{1-e} \right) y - \frac{1}{y+1} = 0 \quad (2.2.49)$$

La radice positiva vale:

$$y^* = \frac{-b + \sqrt{b^2 + 4c}}{2} \quad (2.2.50)$$

in cui:

$$b = \frac{ne}{(n+1)(0,2n+1,3)(1-e)} \quad (2.2.51)$$

$$c = \frac{1}{n+1} \quad (2.2.52)$$

Sostituendo si ottiene:

$$\delta = \delta_{max} \sqrt{1-y^2} \quad (2.2.53)$$

La forza di contatto massima è data da:

$$F_{nmax} = k\delta_{max}^n(1 - y^{*2})^{n/2}[1 + (0,2n + 1,3) \left(\frac{1 - e}{e}\right) y^*] \quad (2.2.54)$$

Dal principio di uguale energia è possibile definire la deformazione massima come:

$$\delta_{max} = \left[\left(\frac{n + 1}{2k} \right) M_c \dot{\delta}_0^2 e \right]^{1/(n+1)} \quad (2.2.55)$$

dove M_c è la massa combinata.

Capitolo 3

Dissipazione di energia durante l'impatto

3.1 Energia dissipata associata al coefficiente di restituzione

La perdita di energia dovuta al movimento in direzione normale può essere espressa attraverso un coefficiente di restituzione e , compreso fra 0 (comportamento perfettamente plastico) e 1 (comportamento perfettamente elastico) [12]. Tale coefficiente dipende da molti elementi, quali la geometria dei corpi a contatto, la velocità di arrivo, le proprietà dei materiali, la durata del contatto e il possibile attrito. Poiché i corpi reali non sono perfettamente rigidi, le loro parti non sono istantaneamente soggette allo stesso cambio di moto a seguito dell'impatto. Il disturbo generato al punto di contatto viaggia nel corpo sottoforma di onde di tensioni (e deformazioni) con una velocità finita. Queste onde producono oscillazioni e una parte dell'energia cinetica è convertita in energia associata alle vibrazioni. Un parametro utile per quantificare questa situazione è il rapporto tra la durata dell'impatto e il periodo del modo di vibrare fondamentale dei corpi impattanti. Più grande è tale rapporto, minore è la dissipazione di energia associata alle onde elastiche poiché possono viaggiare attraverso i corpi più volte prima che l'impatto termini. Se il rapporto è grande abbastanza si raggiunge uno stato di quasi equilibrio. Se i due corpi impattanti sono simili per dimensioni e proprietà dei materiali, la perdita di energia legata alle vibrazioni è trascurabile. La dipendenza del *coefficiente di restituzione* sulla velocità di arrivo può essere spiegata considerando il rapporto introdotto prima nel periodo del modo di vibrare fondamentale. Se tale rapporto è grande abbastanza, allora il coefficiente di restituzione è determinato maggiormente dalle deformazioni plastiche vicino al punto di impatto. La valutazione del coefficiente

può essere effettuata attraverso l'equilibrio di energia tra un istante iniziale di contatto t_0 e quello finale t_1 . Indicando con T_0 e T_1 l'energia cinetica rispettivamente tempo t_0 e t_1 , l'equilibrio energetico può essere scritto come [7]:

$$\Delta E = T_0 - T_1 = \frac{1}{2}m_i[\dot{\delta}_{0,i}^2 - \dot{\delta}_{1,i}^2] + \frac{1}{2}m_j[\dot{\delta}_{0,j}^2 - \dot{\delta}_{1,j}^2] \quad (3.1.1)$$

Il momento lineare associato alle due sfere i e j nella direzione dell'impatto è conservativo perché le forze di contatto sono interne al sistema. Pertanto, è possibile scrivere la seguente equazione:

$$m_i[\dot{\delta}_{0,i}^2 - \dot{\delta}_{1,i}^2] + m_j[\dot{\delta}_{0,j}^2 - \dot{\delta}_{1,j}^2] = 0 \quad (3.1.2)$$

La definizione classica del *coefficiente di restituzione* e è data dal rapporto tra la velocità iniziale dei corpi in pura traslazione $\dot{\delta}_0$ e quella a seguito dell'impatto $\dot{\delta}_1$.

$$\dot{\delta}_1 = e\dot{\delta}_0 \quad (3.1.3)$$

Poiché una porzione di energia elastica è dissipata in calore e attrito microscopico:

$$e = 1 - \alpha \quad (3.1.4)$$

In cui $\alpha = 2b/3k$ per un impatto centrale tra due corpi. Se uno dei due corpi è considerato stazionario, la perdita di energia cinetica per una sequenza di un singolo impatto vale:

$$\Delta E = \frac{1}{2}m(\dot{\delta}_0^2 - \dot{\delta}_1^2) = \frac{1}{2}m\dot{\delta}_0^2[1 - (1 - \alpha)^2] \quad (3.1.5)$$

poiché α è molto più piccolo di 1:

$$\Delta E = \frac{1}{2}m(2\alpha\dot{\delta}_0^2) \quad (3.1.6)$$

Attraverso il coefficiente di restituzione è possibile descrivere il tipo di impatto che avviene tra due corpi. Tale coefficiente, infatti, è pari a zero se il contatto avviene in campo perfettamente elastico.

3.2 Energia di deformazione elastica immagazzinata durante il contatto

Al termine della fase di compressione, i due corpi si muovono a una velocità istantanea $\dot{\delta}_{i,j}$. L'energia cinetica iniziale associata al contatto si suddivide in tre componenti: una parte si trasforma in energia cinetica delle due sfere che

si muovono alla stessa velocità, una seconda parte è convertita in energia di deformazione elastica immagazzinata e una terza parte viene dissipata. Pertanto, l'equilibrio di energia tra l'inizio e la fine della fase di compressione può essere scritto come [7]:

$$T^{compressione} = T^{max} + U^{max} + \Delta E_c \quad (3.2.7)$$

in cui T^{max} è l'energia cinetica del sistema alla fine della fase di compressione, U^{max} è l'energia di deformazione elastica massima immagazzinata e ΔE_c indica l'energia dissipata associata allo smorzamento. L'energia di deformazione immagazzinata è pari al lavoro effettuato dalle forze di contatto che si sviluppano:

$$U^{max} = \int_0^{\delta_{max}} F_n d\delta \quad (3.2.8)$$

La forza di contatto può essere sostituita considerando la legge di Hertz:

$$U^{max} = \int_0^{\delta_{max}} k\delta^{3/2} d\delta \quad (3.2.9)$$

Infine, l'energia di deformazione elastica immagazzinata è data da:

$$U^{max} = \frac{2}{5} k \delta_{max}^{5/2} \quad (3.2.10)$$

3.2.1 Energia dissipata durante l'impatto tra due corpi

Si consideri il corpo impattante di massa m che viaggia a velocità $\dot{\delta}_0$ in linea retta ed entra in contatto con un secondo corpo di massa λm [Figura 3.1] [13]. Immediatamente dopo la collisione [Figura 3.2], nello scenario (1) se la massa del corpo impattato è uguale o superiore a quella del corpo impattante ($\lambda \geq 1$), allora quest'ultimo rimbalza e viaggia a una velocità $\dot{\delta}_1$, opposta alla velocità $\dot{\delta}_2$ del primo. Nello scenario (2) la massa del corpo impattato è più piccola di quello impattante ($\lambda < 1$) ed entrambi viaggeranno alla stessa velocità $\dot{\delta}_2$.

Per i due scenari si avrà:

- *Scenario (1):*

$$m\dot{\delta}_0 = -m\dot{\delta}_1 + \lambda m\dot{\delta}_2 \quad (3.2.11)$$

$$\frac{\dot{\delta}_2}{\dot{\delta}_0} = \frac{1+e}{1+\lambda} \quad (3.2.12)$$

$$e = \frac{\dot{\delta}_1 + \dot{\delta}_2}{\dot{\delta}_0} \quad (3.2.13)$$

- Scenario (2):

$$m\dot{\delta}_0 = (1 + \lambda)m\dot{\delta}_2 \quad (3.2.14)$$

$$\frac{\dot{\delta}_2}{\dot{\delta}_0} = \frac{1}{1 + \lambda} \quad (3.2.15)$$

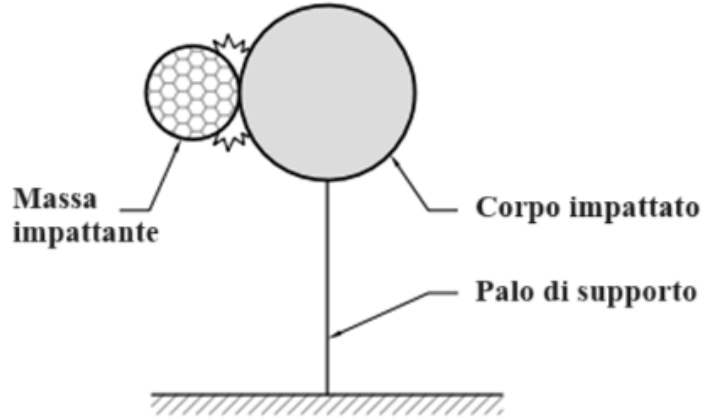


Figura 3.1: Impatto su un corpo supportato da un palo [13]

I termini a destra delle equazioni (3.2.11) e (3.2.14) rappresentano la quantità di moto del corpo impattante prima dell'urto, mentre quelli a sinistra sono rispettivamente le quantità di moto dei due corpi a seguito dell'impatto. I valori del coefficiente di restituzione e variano con le proprietà del materiale dei due corpi, con la velocità di impatto e con le dimensioni della massa impattante. Un valore di e elevato consente di ottenere stime più prudentiali nella risposta della struttura impattata; mentre, un valore di e più basso si traduce in stime prudentiali delle azioni localizzate. Si consideri uno scenario di tipo (1) in cui la struttura impattata è inizialmente ferma, con $e = 1$ e $\lambda = 1$. Al momento del contatto il corpo impattante si arresta ($\dot{\delta}_0 = 0$), mentre quello impattato viene messo in moto con una velocità pari a quella incidente ($\dot{\delta}_2 = \dot{\delta}_0$). La quantità di energia cinetica trasferita al corpo impattato può essere scritta, sostituendo le espressioni viste per la velocità $\dot{\delta}_2$:

- Scenario (1):

$$E_{c2} = \frac{1}{2}\lambda m\dot{\delta}_2^2 \quad (3.2.16)$$

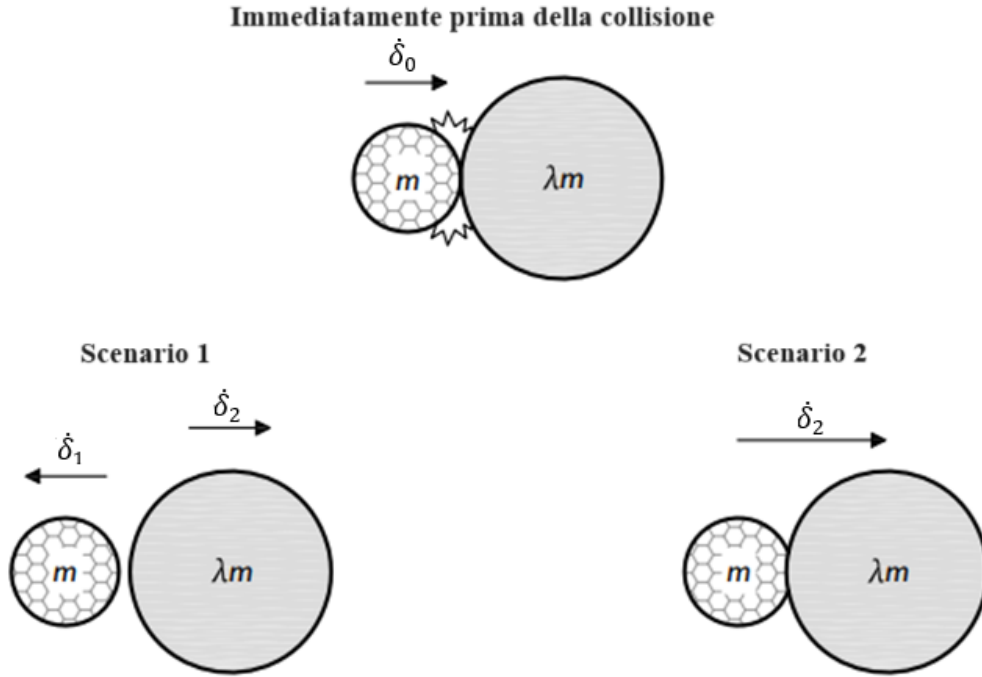


Figura 3.2: Scenari di impatto tra due corpi nello spazio [13]

$$E_{c2} = \frac{1}{2} \lambda m \dot{\delta}_0 \left(\frac{1+e}{1+\lambda} \right)^2 \quad (3.2.17)$$

$$\frac{E_{c2}}{E_{c0}} = \lambda \left(\frac{1+e}{1+\lambda} \right)^2 \quad (3.2.18)$$

- *Scenario (2):*

$$E_{c2} = \frac{1}{2} (1+\lambda) m \dot{\delta}_2^2 \quad (3.2.19)$$

$$E_{c2} = \frac{1}{2} m \dot{\delta}_0 \left(\frac{1}{1+\lambda} \right) \quad (3.2.20)$$

$$\frac{E_{c2}}{E_{c0}} = \lambda \left(\frac{1}{1+\lambda} \right)^2 \quad (3.2.21)$$

dove $E_{c0} = \frac{1}{2} m \dot{\delta}_0^2$.

Il rapporto di energia tende a diminuire all'aumentare del valore di λ . Quando avviene una deflessione del supporto del corpo impattato, parte dell'energia cinetica si trasforma in energia di deformazione U^{max} :

$$E_{c2} = U^{max} \quad (3.2.22)$$

in cui l'assorbimento di energia, assumendo un comportamento elastico lineare, può essere modellato come una massa collegata a una molla [Figura 3.3 (a)] e rappresentato dalla seguente equazione:

$$U^{max} = \frac{1}{2}k\delta^2 \quad (3.2.23)$$

Pertanto:

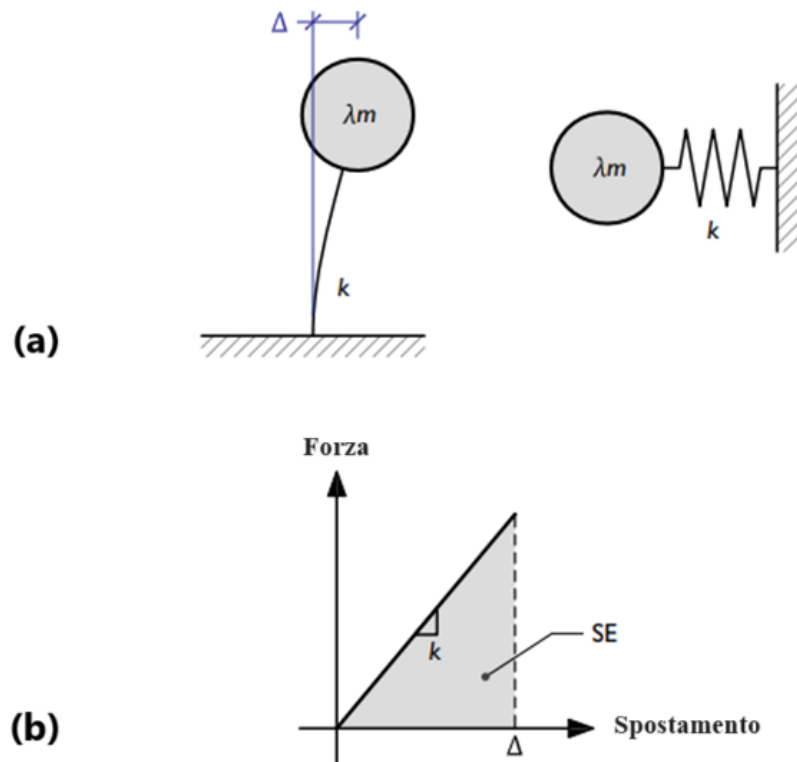


Figura 3.3: (a) Modello elastico lineare con massa concentrata collegata a una molla; (b) Diagramma di forza-spostamento per il modello elastico lineare [13]

$$U^{max} = \frac{1}{2}k\delta^2 \quad (3.2.24)$$

E' possibile definire lo spostamento come:

- Scenario (1):

$$\delta = \frac{m\dot{\delta}_0}{\sqrt{mk}} \sqrt{\lambda \left(\frac{1-e}{1+\lambda} \right)^2} \quad (3.2.25)$$

- Scenario (2):

$$\delta = \frac{m\dot{\delta}_0}{\sqrt{mk}} \sqrt{\left(\frac{1}{1+\lambda} \right)} \quad (3.2.26)$$

La radice quadrata rappresenta il *fattore di riduzione*, che tiene conto delle perdite di energia e dipende dai parametri λ ed e . La richiesta inerziale della struttura impattata è uno dei principali fattori che contribuiscono alla riduzione della richiesta di spostamento. Questo fenomeno si riflette nella diminuzione della radice quadrata con l'aumentare della massa della struttura impattata. Il valore del taglio alla base V_b può essere ottenuto come:

$$V_b = k\Delta \quad (3.2.27)$$

- Scenario (1):

$$V_b = \dot{\delta}_0 \sqrt{mk} \sqrt{\lambda \left(\frac{1-e}{1+\lambda} \right)^2} \quad (3.2.28)$$

- Scenario (2):

$$V_b = \dot{\delta}_0 \sqrt{mk} \sqrt{\lambda \left(\frac{1}{1+\lambda} \right)^2} \quad (3.2.29)$$

3.3 Energia dissipata per smorzamento interno

Per semplicità si considera un sistema equivalente a un grado di libertà composto da uno smorzatore e una molla, come in [Figura 3.4] [7]. L'equazione del moto è



Figura 3.4: Modello di impatto molla-smorzatore [7]

quella che governa il periodo del contatto durante l'impatto:

$$m\ddot{\delta} + c\dot{\delta} + k\delta = 0 \quad (3.3.30)$$

in cui c è una costante di viscosità e k una costante elastica lineare. In accordo con l'equazione della forza viscosa, $c\dot{\delta}$ è massima quando lo è $\dot{\delta}$, cioè quando è pari alla velocità finale $\dot{\delta}_1$. Tale equazione è differenziale del secondo ordine con coefficienti costanti, la cui soluzione è data da:

$$\delta = e^{-\zeta\omega t} \frac{\dot{\delta}_0}{\omega_d} \text{sen}(\omega_d t) \quad (3.3.31)$$

$$\dot{\delta} = e^{-\zeta\omega t} \cos(\omega_d t) - \zeta e^{-\zeta\omega t} \frac{\omega \dot{\delta}_0}{\omega_d} \text{sen}(\omega_d t) \quad (3.3.32)$$

dove ζ è il rapporto di smorzamento, ω è la frequenza e ω_d è la frequenza smorzata. Tali parametri sono espressi come segue:

$$\zeta = \frac{c}{2m\omega} \quad (3.3.33)$$

$$\omega = \sqrt{\frac{k}{m}} \quad (3.3.34)$$

$$\omega_d = \omega \sqrt{1 - \zeta^2} \quad (3.3.35)$$

Nel caso in cui l'effetto di smorzamento sia trascurato, si possono ottenere i valori della deformazione massima al relativo istante di tempo t_{max} :

$$\delta_{max} = \frac{\dot{\delta}_0}{\omega} \quad (3.3.36)$$

$$t_{max} = \frac{\pi}{2\omega} \quad (3.3.37)$$

Sostituendo δ_{max} e t_{max} nelle relazioni di δ e $\dot{\delta}$ si ottiene l'equazione di un'ellisse per la deformazione e la velocità:

$$\left(\frac{\delta}{\delta_{max}} \right)^2 + \left(\frac{\dot{\delta}}{\dot{\delta}_0} \right)^2 = 1 \quad (3.3.38)$$

Inoltre, è possibile esprimere la velocità come funzione della deformazione per la fase di compressione e di restituzione, rispettivamente come:

$$\dot{\delta} = \dot{\delta}_0 \sqrt{1 - \left(\frac{\delta}{\delta_{max}} \right)^2} \quad (3.3.39)$$

$$\dot{\delta} = \dot{\delta}_1 \sqrt{1 - \left(\frac{\delta}{\delta_{max}}\right)^2} \quad (3.3.40)$$

La velocità a seguito dell'impatto $\dot{\delta}_1$ è negativa, poiché i due corpi sono separati. L'energia dissipata è valutata attraverso il lavoro effettuato dalla forza di smorzamento:

$$\Delta E = \oint \chi \delta^{3/2} \dot{\delta} d\delta \quad (3.3.41)$$

dove il simbolo di integrale chiuso si riferisce al ciclo di isteresi per la forza di contatto. L'energia totale dissipata dalla forza di smorzamento associata alla compressione e alla restituzione può essere espressa come:

$$\Delta E = \oint_0^{\delta_{max}} \chi \delta^{3/2} \dot{\delta}_0 \sqrt{1 - \left(\frac{\delta}{\delta_{max}}\right)^2} d\delta \quad (3.3.42)$$

$$\Delta E = \oint_0^{\delta_{max}} \chi \delta^{3/2} |\dot{\delta}_1| \sqrt{1 - \left(\frac{\delta}{\delta_{max}}\right)^2} d\delta \quad (3.3.43)$$

Di conseguenza, l'energia totale dissipata dallo smorzamento vale:

$$\Delta E = \chi (+|\dot{\delta}_1|) \oint_0^{\delta_{max}} \delta^{3/2} \sqrt{1 - \left(\frac{\delta}{\delta_{max}}\right)^2} d\delta \quad (3.3.44)$$

Considerando il coefficiente di restituzione e , l'equazione prende la seguente forma:

$$\Delta E = \frac{1}{4} \chi (1 - e) \dot{\delta}_0 \delta_{max}^{5/2} \quad (3.3.45)$$

Il bilancio di energia tra due sfere, tenendo conto della dissipazione di energia diventa:

$$\frac{1}{2} m_i \dot{\delta}_{0,i}^2 + \frac{1}{2} m_j \dot{\delta}_{0,j}^2 = \frac{1}{2} (m_i + m_j) \delta_{i,k}^{max} + \frac{2}{5} k \delta_{max}^{5/2} + \frac{1}{4} \chi \dot{\delta}_0 \delta_{max}^{5/2} \quad (3.3.46)$$

Il fattore di smorzamento quindi vale:

$$\chi = \frac{8k(1 - e)}{5e\dot{\delta}_0} \quad (3.3.47)$$

e rappresenta il fattore di smorzamento equivalente, generalizzato alla rigidezza, alla velocità iniziale e al coefficiente di restituzione.

Capitolo 4

Impatto verticale con corpo in caduta libera

Nello scenario di collisione tra un oggetto in caduta e un elemento strutturale il contatto avviene solo una volta e il corpo impattante rimbalza se la sua massa è più piccola del peso dell'elemento colpito [13]. Si può dimostrare che la deformazione causata in questo scenario non è diversa rispetto a quella analizzata nel semplice impatto orizzontale tra due corpi. Nella realtà, l'oggetto caduto si deposita sul corpo impattato in seguito a più eventi di impatto e rimbalzo. La soluzione esatta per tale scenario è complessa e un approccio di modellazione consiste nel considerare l'oggetto caduto come incorporato nella struttura colpita, aumentando il peso proprio dopo che si è verificata la collisione. Pertanto, la massa partecipante dell'elemento strutturale interessato e quella del corpo caduto sono considerate come un'unica massa combinata, indipendentemente dal valore del fattore moltiplicativo λ . Questo approccio modellistico fornisce previsioni ragionevoli in termini di deflessione sulla base di esperimenti condotti da Yong [19] e Ali [20] a diverse scale. Negli scenari di collisione in cui il dispositivo d'urto si incastra all'interno dell'elemento impattato, o si disintegra sulla superficie senza subire alcun rimbalzo, può essere adottato lo stesso approccio di modellazione. Poiché l'elemento strutturale devia verticalmente, la perdita di energia potenziale nel sistema (prodotto della massa combinata e della deflessione) si aggiunge a quella cinetica fornita dalla struttura impattata, aumentando l'intensità della collisione. Questo fattore costituisce la differenza tra gli impatti orizzontali e verticali.

4.1 Impatto su un corpo di massa trascurabile

Si consideri una massa concentrata posizionata ad altezza nulla su una trave semplicemente appoggiata a metà campata. Tale massa è inizialmente sospesa da

un filo che viene tagliato in modo che il peso venga trasferito alla trave in modo istantaneo [Figura 4.1]. Uguagliando la perdita di energia potenziale con l'energia

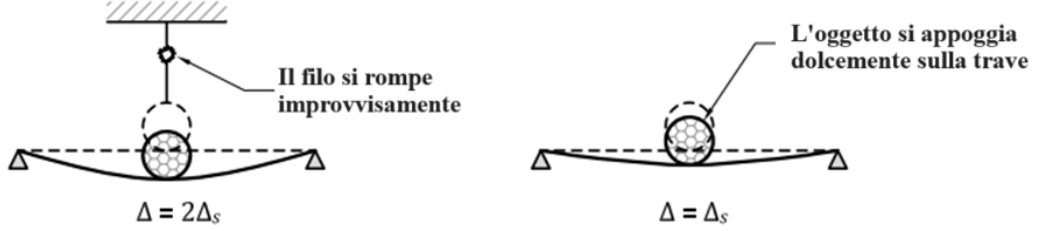


Figura 4.1: Modello di carico rilasciato improvvisamente sulla trave e di carico poggiato sulla trave [13]

elastica di assorbimento, si ottiene:

$$mg\delta = \frac{1}{2}k\delta^2 \quad (4.1.1)$$

da cui si ottiene la deflessione massima subita dalla trave:

$$\delta = 2 \left(\frac{mg}{k} \right) = 2\delta_s \quad (4.1.2)$$

dove δ_s è la deflessione statica, m è la massa concentrata, k è la rigidezza verticale della trave quando viene caricata a metà campata, g è l'accelerazione di gravità ($9,81 \text{ m/s}^2$). Si consideri ora la massa concentrata posta a un'altezza di caduta h_i , mentre la trave è idealizzata come una molla di rigidezza k , uguale alla rigidezza della trave stessa [Figura 4.2].

L'equazione dell'energia subisce una modifica per tenere conto degli effetti dell'altezza di caduta, calcolando l'energia potenziale in base all'altezza di caduta e alla deflessione dinamica.

$$mg(h_i - \delta) = \frac{1}{2}k\delta^2 \quad (4.1.3)$$

La deflessione massima subita dalla trave, invece, è espressa come:

$$\delta = \delta_s \left(1 + \sqrt{1 + \frac{2h_i}{\delta_s}} \right) = \delta_s + \sqrt{\delta_s^2 + \delta_h^2} \quad (4.1.4)$$

in cui δ_h è la deflessione in uno scenario di collisione orizzontale:

$$\delta_h = \frac{m\dot{\delta}_0}{\sqrt{mk}} = \sqrt{2\delta_s h_i} \quad (4.1.5)$$

dove $\lambda = 0$, poiché si sta trascurando la massa della struttura impattata, mentre $\dot{\delta}_0 = \sqrt{2gh_i}$.

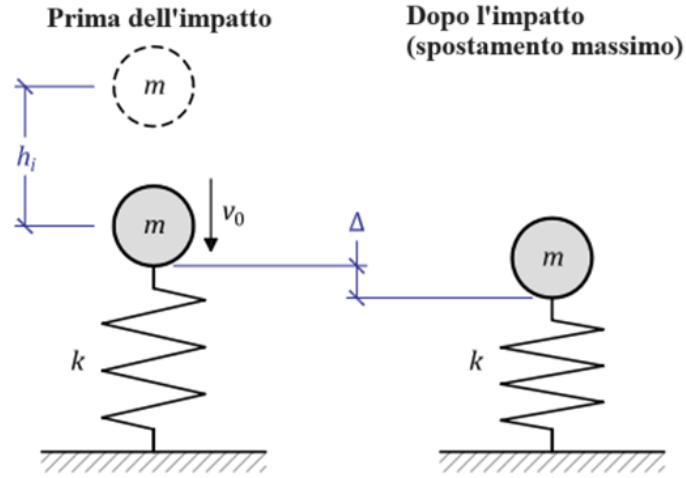


Figura 4.2: Impatto di un corpo in caduta su un corpo privo di massa [13]

4.1.1 Impatto su un corpo di massa trascurabile a comportamento rigido perfettamente plastico o elasto-plastico

Si considerino due relazioni forza-spostamento: un modello di comportamento rigido perfettamente elastico [Figura 4.3 (a)] e un modello di comportamento elasto-plastico [Figura 4.3 (b)]. F_y e δ_y sono rispettivamente la *forza di snervamento* e lo *spostamento di snervamento*.

Il bilancio energetico di un elemento strutturale a comportamento rigido perfettamente plastico in uno scenario di impatto verticale è dato da:

$$\frac{1}{2}m\dot{\delta}_0^2 + mg\delta = F_y\delta \quad (4.1.6)$$

$$\delta = \frac{m\dot{\delta}_0^2}{2(F_y - mg)} \quad (4.1.7)$$

Analogamente per un elemento a comportamento elasto-plastico:

$$\frac{1}{2}m\dot{\delta}_0^2 + mg\delta = \frac{1}{2}F_y\delta_y + F_y(\delta - \delta_y) \quad (4.1.8)$$

$$\delta = \frac{m\dot{\delta}_0^2}{2(F_y - mg)} + \frac{F_y\delta_y}{2(F_y - mg)} \quad (4.1.9)$$

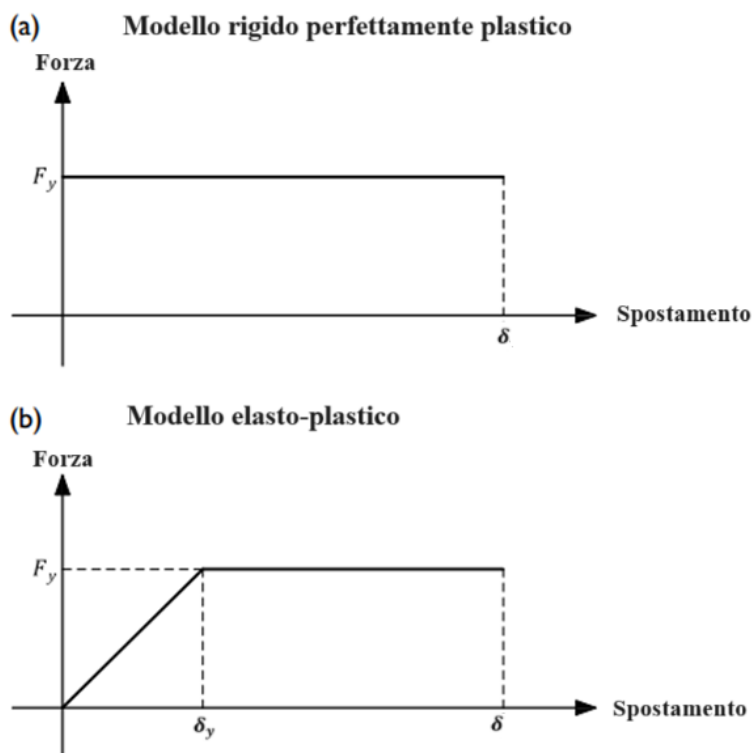


Figura 4.3: (a) Comportamento rigido perfettamente plastico; (b) comportamento elasto-plastico [13]

4.2 Singolo impatto su un corpo con peso proprio

Si consideri lo scenario in [Figura 4.4] in cui un oggetto in caduta colpisce un corpo idealizzato come un sistema a un grado di libertà (SDOF), rimbalza su di esso e atterra senza un secondo contatto al di fuori dell'elemento impattato.

La quantità di *energia cinetica* E_{c_2} trasferita al bersaglio è data dall'equazione (3.2.17). La *perdita di energia potenziale* E_p legata allo spostamento del corpo impattato è definita dalla seguente equazione:

$$E_p = \lambda mg \Delta \quad (4.2.10)$$

La somma di E_{c_2} e di E_p rappresenta la richiesta di energia dell'impatto, che dovrebbe essere assorbita dall'elemento strutturale sotto forma di *energia di deformazione* U^{max} :

$$E_{c_2} + E_p = U^{max} \quad (4.2.11)$$

Assumendo un comportamento elastico lineare, la quantità di energia assorbita equivale all'area di un triangolo [Figura 4.5]. Poiché l'elemento risulta compresso

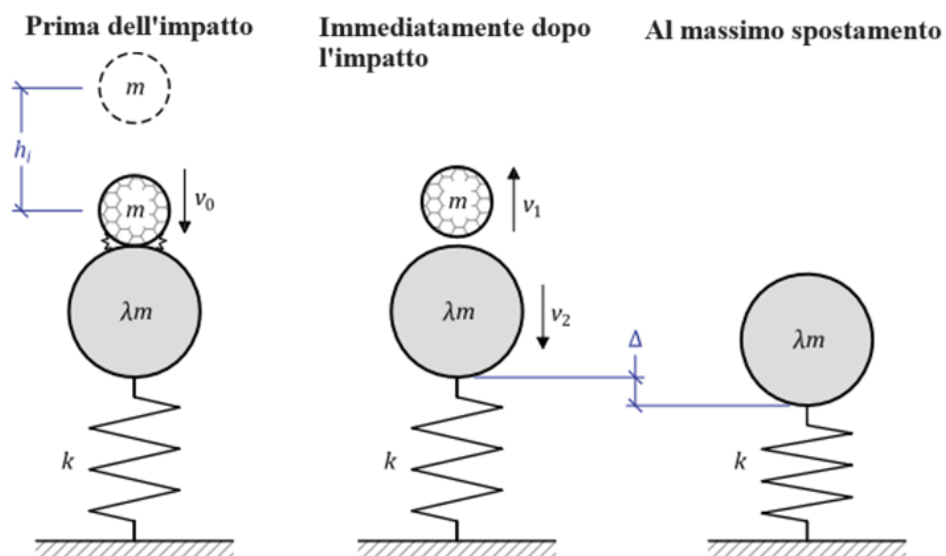


Figura 4.4: Impatto di un oggetto in caduta su un corpo di massa significativa [13]

sotto il suo stesso peso, la quantità di energia assorbita è rappresentata dall'area sottesa al trapezio. Tale area è definita dalla seguente espressione:

$$U^{max} = \lambda mg\Delta + \frac{1}{2}k\Delta^2 \quad (4.2.12)$$

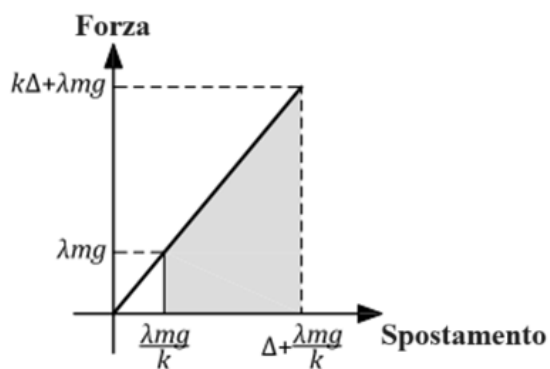


Figura 4.5: Comportamento lineare elastico di un corpo con massa non trascurabile [13]

Riscrivendo in funzione delle equazioni appena introdotte:

$$\frac{1}{2}m\dot{\delta}_0^2\lambda\left(\frac{1+e}{1+\lambda}\right)^2 + \lambda mg\Delta = \lambda mg\Delta + \frac{1}{2}k\delta^2 \quad (4.2.13)$$

$$\delta = \frac{m\dot{\delta}_0}{\sqrt{mk}}\sqrt{\lambda\left(\frac{1+e}{1+\lambda}\right)^2} \quad (4.2.14)$$

La *velocità di impatto* $\dot{\delta}_0$ è uguale a $\sqrt{2gh_i}$ per gli scenari in cui la massa impattante è un oggetto accelerato dalla forza di gravità. Si può notare come la equazione (4.2.14) sia identica all'espressione vista nel Cap. 2. Pertanto, si può concludere che per uno scenario a singolo impatto la richiesta di deflessione nelle direzioni verticale e orizzontale è analoga.

4.3 Caduta di un oggetto che permane su un corpo con peso proprio rilevante

Si consideri lo scenario in cui un oggetto in caduta staziona sul corpo impattato, combinando così le masse a seguito dell'impatto [Figura 4.6].

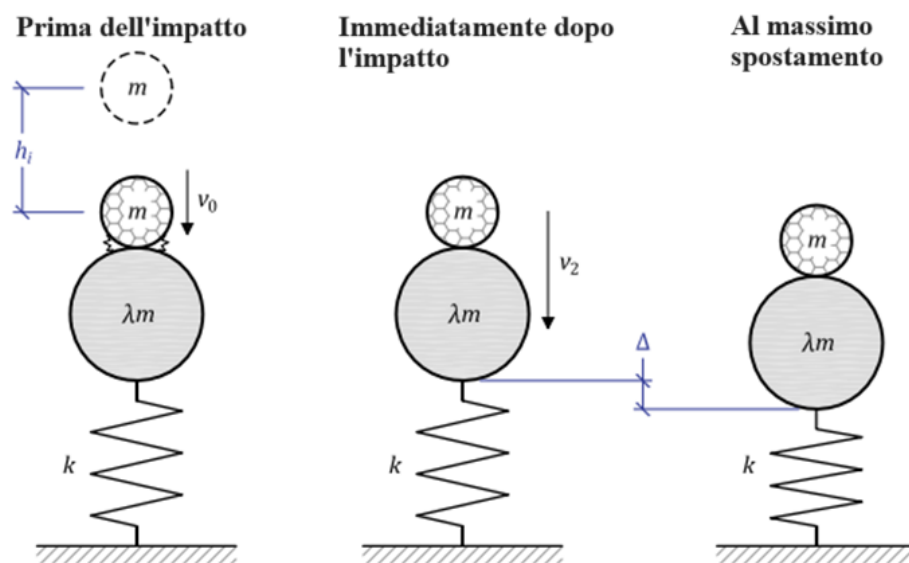


Figura 4.6: Oggetto in caduta che staziona sul corpo impattato [13]

La quantità di *energia cinetica* E_2 è stimata dalla equazione (3.2.17). La *perdita di energia potenziale* in uno scenario in cui le due masse vengono combinate è data da:

$$E_p = (1 + \lambda)mg\delta \quad (4.3.15)$$

La combinazione di E_{c_2} e di E_p fornisce la quantità di energia assorbita U_{max} . Come visto nello scenario precedente, è possibile ottenere:

$$\frac{1}{2}m\dot{\delta}_0^2 \left(\frac{1}{1 + \lambda} \right) + (1 + \lambda)mg\delta = \lambda mg\delta + \frac{1}{2}k\delta^2 \quad (4.3.16)$$

$$\delta = \frac{mg}{k} + \sqrt{\left(\frac{mg}{k} \right)^2 + \frac{m\dot{\delta}_0^2}{k(1 + \lambda)}} \quad (4.3.17)$$

Ponendo $\delta_s = \sqrt{2gh_i}$ e ricordando δ_h introdotto nel Cap. 2 [Equazione 3.2.26]:

$$\delta = \delta_s + \sqrt{\delta_s^2 + \delta_h^2} \quad (4.3.18)$$

La *velocità d'impatto* $\dot{\delta}_0$ è pari a $\sqrt{2gh_i}$ per gli scenari in cui la massa impattante è accelerata dalla gravità.

4.4 Impatto su un corpo con comportamento rigido perfettamente plastico o elasto-plastico e massa significativa

In uno scenario di impatto verticale in cui l'elemento strutturale colpito ha una massa significativa, le leggi per prevedere la domanda in termini di spostamenti devono tener conto della perdita di energia [Figura 4.7].

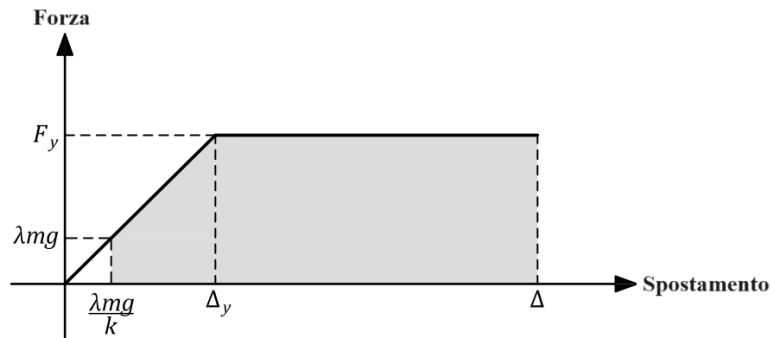


Figura 4.7: Risposta anelastica di un sistema con massa significativa [13]

La quantità di energia richiesta U^{max} è data dalla somma dell'*energia elastica* E_{c_2} [Equazione 3.2.20] e di quella potenziale assorbita E_p :

$$E_p = (1 + \lambda)mg \left(\delta - \frac{\lambda mg}{k} \right) \quad (4.4.19)$$

$$U^{max} = \frac{\lambda mg + F_y}{2} \left(\delta_y - \frac{\lambda mg}{k} \right) + F_y(\delta - \delta_y) \quad (4.4.20)$$

Dall'equazione del bilancio energetico definito nell'equazione (4.2.11) è possibile determinare lo spostamento verticale della collisione come:

$$\delta = \frac{m\dot{\delta}_0^2}{2[F_y - (1 + \lambda)mg]} \left(\frac{1}{1 + \lambda} \right) + \frac{F_y}{F_y - (1 + \lambda)mg} \frac{\delta_y}{2} \quad (4.4.21)$$

Capitolo 5

Effetti di scala

Il problema della non scalabilità delle strutture soggette a carichi d'urto causati dagli effetti della deformazione viene trattato correggendo opportunamente la velocità d'impatto. La tecnica si basa sull'utilizzo di una base adimensionale alternativa che, insieme a un modello matematico, consente il calcolo di un fattore di correzione. La nuova velocità ottenuta, applicata al modello, assicura il soddisfacimento delle leggi di scala [21]. Le strutture sottoposte a grandi carichi dinamici presentano molte caratteristiche la cui comprensione e analisi può risultare piuttosto problematica. A tal proposito è possibile utilizzare i modelli in scala, prestando particolare attenzione nel garantire che le leggi siano valide per la struttura in analisi. Tuttavia, per le strutture sottoposte a carichi d'urto, tali leggi possono diventare distorte. L'influenza della velocità di deformazione sulla risposta del materiale fa sì che un prototipo e un modello scalato di un fattore β e soggetto a carichi d'urto scalati si comportino in modo diverso. Questo ha fortemente limitato l'uso di modelli per dedurre il comportamento di grandi strutture. Pertanto, si descrive una metodologia che consente la correzione della massa d'impatto in modo razionale in modo tale che il modello e il prototipo si comportino quasi allo stesso modo. L'idea di base è quella di utilizzare un'ulteriore base adimensionale basata su massa, velocità di impatto e sollecitazione, piuttosto che quella tradizionale basata su massa, lunghezza e tempo.

5.1 Fattore di scala

Al fine di ridurre al minimo il programma sperimentale, è possibile lavorare con modelli in scala tale che la loro dimensione possa essere meglio adattata alle strutture sperimentali disponibili. Sfortunatamente, i modelli soggetti a carichi d'urto molto spesso non obbediscono alle leggi di scala a causa di alcuni fattori, forse il più importante dei quali è la risposta del materiale alla velocità di deformazione.

Si introduce il *fattore di scala* β espresso come:

$$\beta = \frac{l}{L} \quad (5.1.1)$$

dove l e L corrispondono rispettivamente alle dimensioni del modello e del prototipo. Attraverso la definizione del fattore di scala è possibile relazionare variabili del modello e del prototipo, riportate in [Tabella 5.1].

Variabile	Fattore di scala
Lunghezza (L)	β
Massa (G)	β^3
Tensione (σ)	1
Tempo (t)	β
Velocità (V)	1
Spostamento (δ)	β
Deformazione (ε)	1
Accelerazione (A)	$1/\beta$
Velocità di deformazione ($\dot{\varepsilon}$)	$1/\beta$

Tabella 5.1: Fattori di scala per diverse variabili

A seguito di studi condotti da [21], è stato possibile suggerire una metodologia per correggere gli effetti della velocità di deformazione, in modo che il modello e il prototipo seguano le leggi di scala.

5.1.1 Teorema di Buckingham

Le grandezze fisiche possono avere dimensione, in relazione a un'unità di misura, oppure essere adimensionali. La dimensione di una grandezza indica la sua natura fisica. I simboli generalmente utilizzati per lunghezza, massa e tempo sono L, M e T. Moltiplicando o dividendo tali grandezze tra di loro si ottengono nuove quantità fisiche con dimensioni corrispondenti: il rapporto tra la distanza percorsa (lunghezza) e il tempo fornisce la velocità, la cui dimensione è L/T. L'analisi dimensionale è particolarmente utile nello studio dei nuovi fenomeni per i quali le equazioni e le condizioni al contorno appropriate non sono ancora completamente note. Il *teorema di Buckingham* [22] indica l'enorme importanza dell'analisi dimensionale per comprendere la natura delle grandezze fisiche e le loro relazioni reciproche mostrate dalle leggi fisiche. Sia f una funzione incognita che determina

una grandezza q_1 in funzione di altre $N - 1$ variabili:

$$q_0 = f(q_1, q_2, \dots, q_N) \quad (5.1.2)$$

L'insieme q_1, q_2, \dots, q_n è completo se contiene tutte le grandezze che influenzano q_0 ed è indipendente se nessuna delle grandezze non influenza i valori degli altri elementi. Poiché la relazione è dimensionalmente omogenea, le dimensioni q_0 devono essere le stesse di f e variano dello stesso fattore. Questo si traduce nelle seguenti alle seguenti regole da applicare alla legge fisica:

- entrambi i lati dell'equazione devono avere le stesse dimensioni;
- se in f compare una somma di quantità, tutti i termini nella somma devono avere le stesse dimensioni;
- tutti gli argomenti degli esponenziali, di logaritmi o di qualsiasi altra funzione speciale che compare in f devono essere adimensionali.

Un'importante conseguenza dell'omogeneità dimensionale è che la forma delle leggi fisiche sia indipendente dalla scelta di un sistema di unità di base (e dalle sue dimensioni). Quando il sistema di unità di base è selezionato, è necessario esprimere le dimensioni delle variabili q_0 e q_1, q_2, \dots, q_N . Se si ha a che fare con un processi meccanici, le dimensioni di ogni variabile possono essere scritte nella forma:

$$[q_i] = L^{l_i} M^{m_i} T^{\tau_i} \quad (5.1.3)$$

con $i = 0, 1, \dots, n$. Gli esponenti l_i, m_i e τ_i sono numeri adimensionali. In generale, il numero di unità di misura di base nel sistema è indicato con r . Dall'insieme completo delle grandezze fisicamente indipendenti q_1, q_2, \dots, q_n è più conveniente scegliere un sottoinsieme completo dimensionalmente indipendente di K grandezze q_1, q_2, \dots, q_K ($K \leq n$). Si può esprimere ogni grandezza fisicamente indipendente rimanente $n - K$ e la grandezza q_0 attraverso le dimensioni del sottoinsieme come:

$$[q_j] = [q_1^{N_{j1}} q_2^{N_{j2}} \dots q_K^{N_{jK}}] \quad (5.1.4)$$

dove $j = 0$ e $j = K + 1, \dots, n$. Il sottoinsieme q_1, q_2, \dots, q_K è completo se le dimensioni delle grandezze rimanenti q_{K+1}, \dots, q_n possono essere espresse attraverso le dimensioni delle grandezze q_1, q_2, \dots, q_K ed è dimensionalmente indipendente se le dimensioni di qualsiasi membro non possono essere espresse attraverso quelle delle altre grandezze di quel sottoinsieme. La selezione di un sottoinsieme con queste proprietà non è univoca, ma il numero di quantità dimensionalmente indipendenti che lo compongono non può essere maggiore del numero di dimensioni di base che appaiono nell'insieme iniziale di grandezza, cioè deve essere rispettato $K \leq r$. Si ottiene:

$$q_0 = f(q_1, \dots, q_K, q_{K+1}, \dots, q_n) \quad (5.1.5)$$

Gli esponenti nell'equazione (5.1.4) sono numeri razionali senza dimensione, determinati con metodi algebrici. Siano $q_1, q_2,$ e q_3 un sottoinsieme dimensionalmente indipendente. Sostituendo l'equazione (5.1.3) nella (5.1.4) si ottiene il seguente sistema:

$$\begin{cases} l_j = N_{j1}l_1 + N_{j2}l_2 + N_{j3}l_3 \\ m_j = N_{j1}m_1 + N_{j2}m_2 + N_{j3}m_3 \\ \tau_j = N_{j1}\tau_1 + N_{j2}\tau_2 + N_{j3}\tau_3 \end{cases} \quad (5.1.6)$$

con $j = 0$ e $j = k + 1, \dots, n$. Per ogni valore del pedice j , oppure per ogni grandezza fisica dimensionalmente indipendente q_0, q_{k+1}, \dots, q_n , otteniamo un sistema di tre equazioni algebriche nelle incognite (N_{j1}, N_{j2}, N_{j3}) che può essere facilmente risolto. Poiché entrambi i membri dell'equazione (5.1.4) hanno le stesse dimensioni, per ogni valore del pedice j , dividendo il membro a sinistra per quello a destra si ottengono le seguenti basi adimensionali:

$$\Pi_0 = \frac{q_0}{q_1^{N_{01}} q_2^{N_{02}} \dots q_K^{N_{0K}}} \quad (5.1.7)$$

$$\Pi_1 = \frac{q_{K+1}}{q_1^{N_{(K+1)1}} q_2^{N_{(K+1)2}} \dots q_K^{N_{(K+1)K}}} \quad (5.1.8)$$

$$\Pi_{n-K} = \frac{q_n}{q_1^{N_{n1}} q_2^{N_{n2}} \dots q_K^{N_{nK}}} \quad (5.1.9)$$

Se si ricorre all'equazione (5.1.5), la (5.1.7) diventa:

$$\Pi_0 = \frac{f(q_1, \dots, q_K, q_{k+1}, \dots, q_n)}{q_1^{N_{01}} q_2^{N_{02}} \dots q_K^{N_{0K}}} \quad (5.1.10)$$

Essa contiene le grandezze dimensionalmente dipendenti (q_{k+1}, \dots, q_n) che possono essere espresse attraverso le basi adimensionali espresse nelle equazioni (5.1.8) e (5.1.9):

$$\Pi_0 = \frac{f(q_1, \dots, q_K, \Pi_1 q_1^{N_{(K+1)1}} \dots q_k^{N_{(K+1)K}}, \dots, \Pi_{n-K} q_1^{N_{n1}} \dots q_k^{N_{nk}})}{q_1^{N_{01}} q_2^{N_{02}} \dots q_K^{N_{0K}}} \quad (5.1.11)$$

oppure:

$$\Pi_0 = \phi(q_1, \dots, q_k, \Pi_1, \dots, \Pi_{n-K}) \quad (5.1.12)$$

dove ϕ denota la nuova dipendenza funzionale con l'insieme di grandezze dimensionalmente indipendenti K (q_1, q_2, \dots, q_k) che include anche tutte le combinazioni adimensionali dei rimanenti valori $n - K + 1$ (q_0, q_{k+1}, \dots, q_n). Poiché tutte le quantità che compaiono nell'equazione finale sono adimensionali, fatta eccezione per q_1, \dots, q_k , i loro valori non dipendono dalla scelta del sistema di unità di base. Questo implica che se il sistema cambia, le grandezze Π_0 non lo fanno e quindi:

$$\frac{\partial \Pi_0}{\partial q_1} = 0 \quad (5.1.13)$$

$$\frac{\partial \Pi_0}{\partial q_2} = 0 \quad (5.1.14)$$

$$\frac{\partial \Pi_0}{\partial q_k} = 0 \quad (5.1.15)$$

Possiamo concludere che la grandezza Π_0 non dipende da nessuno dei valori q_1, \dots, q_k , così che la relazione finale prende la forma:

$$\Pi_0 = \Phi(\Pi_1, \dots, \Pi_{n-K}) \quad (5.1.16)$$

L'equazione ottenuta è il risultato finale dell'analisi dimensionale e rappresenta il teorema di Buckingham: si consideri la grandezza fisica q_0 determinata attraverso n grandezze fisiche indipendenti q_1, q_2, \dots, q_n di cui K sono dimensionalmente indipendenti. Le rimanenti grandezze $n - K$ possono essere espresse adimensionalmente e in modo indipendente attraverso l'equazione (5.1.16). Il numero delle grandezze indipendenti che descrivono il problema fisico in questo caso decresce da n a $n - K$. Le relazioni adimensionali da Π_0 a Π_{n-K} sono chiamate *gruppi* Π . Lo studio teorico o sperimentale di un fenomeno fisico viene ridotto a un piccolo numero di grandezze adimensionali indipendenti, i cui valori determinano la grandezza q_0 osservata.

5.1.2 Procedura di correzione

Le strutture sensibili alla velocità non possono essere scalate con le tecniche usuali. Per ovviare a questo problema è stata sviluppata una tecnica [23], in cui si modifica il rapporto tra la velocità d'impatto del modello e del prototipo, affinché entrambi raggiungano la stessa configurazione finale in scala. Tuttavia, tale procedura è valida solo per i materiali duttili, sebbene sia utilizzabile con alcune limitazioni. Un aspetto importante è l'utilizzo di un nuovo insieme di fattori adimensionali basati sulla massa d'impatto G , sulla velocità iniziale dell'impatto V_0 , e sulla tensione di snervamento dinamica σ_d . Questa nuova base è un'alternativa all'approccio tradizionale MLT (massa, lunghezza, tempo). Si arriva quindi alla matrice adimensionale ridotta [Tabella 5.2], formata dall'espressione delle variabili rilevanti dell'impatto, cioè l'accelerazione A , il tempo t , lo spostamento δ , la velocità di deformazione $\dot{\epsilon}$ e la sollecitazione σ , come funzioni della nuova base.

$$\Pi_1 = \left[\frac{A^3 G}{V_0^4 \sigma_d} \right] \quad (5.1.17)$$

$$\Pi_2 = \left[\frac{T^3 \sigma_d V_0}{G} \right] \quad (5.1.18)$$

$$\Pi_3 = \left[\frac{\delta^3 \sigma_d}{G V_0^2} \right] \quad (5.1.19)$$

$$\Pi_4 = \left[\dot{\epsilon} \left(\frac{G}{\sigma_d V_0} \right)^{1/3} \right] \quad (5.1.20)$$

$$\Pi_5 = \left[\frac{\sigma}{\sigma_d} \right] \quad (5.1.21)$$

		Variabili				
		A	T	δ	$\dot{\epsilon}$	σ
Basi	V_0	4/3	-1/3	2/3	1/3	0
	σ_d	1/3	-1/3	-1/3	1/3	1
	G	-1/3	1/3	1/3	-1/3	0

Tabella 5.2: Matrice adimensionale ridotta

Il comportamento di una struttura di dimensioni reali può essere dedotto da questi numeri adimensionali e dalla risposta del modello scalato. Un fattore di scala per la sollecitazione dinamica è definito come:

$$\beta_{\sigma_d} = \frac{\sigma_{d_m}}{\sigma_{d_p}} = \frac{f(\dot{\epsilon}_m)}{f(\dot{\epsilon}_p)} \quad (5.1.22)$$

dove gli indici m e p indicano rispettivamente il valore riferito al modello e al prototipo, mentre f è una funzione generica della legge costitutiva del materiale.

Introducendo la velocità di deformazione corretta per il modello $\dot{\epsilon}_m^c$:

$$\beta_{\sigma_d} = \frac{f(\dot{\epsilon}_m^c)}{f(\dot{\epsilon}_p)} \quad (5.1.23)$$

Supponendo che $\dot{\epsilon} \propto V_0/L$ si può scrivere:

$$\frac{\dot{\epsilon}_m^c}{\dot{\epsilon}_m^{nc}} = \frac{\beta_{V_0} V_0/L}{V_0/L} = \beta_{V_0} \quad (5.1.24)$$

in cui l'apice nc sta per "non corretto", mentre:

$$\beta_{V_0} = \frac{V_{0_m}}{V_{0_p}} \quad (5.1.25)$$

è il *fattore di scala per la velocità d'impatto*, il cui valore dovrebbe essere pari a 1 per un modello non distorto. Tuttavia, per un materiale sensibile alla velocità di deformazione è necessario trovare una velocità d'impatto iniziale per il modello tale che modello e prototipo siano scalati. Questo può essere ottenuto attraverso il numero adimensionale Π_3 :

$$\frac{\Pi_{3_m}}{\Pi_{3_p}} = \frac{\beta_\delta^3 \beta_{\sigma_d}}{\beta_G \beta_{V_0}^2} = \frac{\beta^3 \beta_{\sigma_d}}{\beta \beta_{V_0}^2} = 1 \quad (5.1.26)$$

quindi:

$$\beta_{\sigma_d} = \beta_{V_0}^2 \quad (5.1.27)$$

Introducendo il *fattore di scala per la velocità di deformazione*:

$$\beta_{\dot{\varepsilon}} = \frac{\dot{\varepsilon}_m}{\dot{\varepsilon}_p} = \frac{\dot{\varepsilon}_m^c}{\dot{\varepsilon}_p} \quad (5.1.28)$$

può essere riscritto imponendo $\frac{\Pi_{4_m}}{\Pi_{4_p}} = 1$, come:

$$\beta_{\dot{\varepsilon}} = \frac{\beta_{V_0}}{\beta} \quad (5.1.29)$$

ne consegue che:

$$\beta_{\dot{\varepsilon}} = \frac{\beta_{V_0} \dot{\varepsilon}_m^{nc}}{\dot{\varepsilon}_p} \quad (5.1.30)$$

dove:

$$\dot{\varepsilon}_p = \beta \dot{\varepsilon}_m^{nc} \quad (5.1.31)$$

ottenendo, così, il calcolo del nuovo valore di β_{V_0} corretto:

$$\beta_{V_0} = \sqrt{\beta_{\sigma_d}} = \sqrt{\frac{\sigma_{d_m}}{\sigma_{d_p}}} = \sqrt{\frac{f(\dot{\varepsilon}_m^c)}{f(\dot{\varepsilon}_p)}} = \sqrt{\frac{f(\beta_{V_0} \dot{\varepsilon}_m^{nc})}{f(\beta \dot{\varepsilon}_m^{nc})}} \quad (5.1.32)$$

Tale equazione è la chiave per correggere la distorsione di un modello soggetto a un carico d'urto e richiede di conoscere la velocità di deformazione nel modello non corretto $\dot{\varepsilon}_m^{nc}$ e il fattore di scala dimensionale β da applicare al modello costitutivo, in modo da poter calcolare i livelli di sollecitazione. Viene utilizzata una procedura per estrarre il valore di β_{V_0} e quindi la velocità d'impatto corretta che, applicata al modello, farà sì che non ci siano distorsioni. Ci sono anche altre variabili che entrano in gioco durante un evento di impatto. Dalla tabella 1, il tempo è scalato di un fattore pari a β e a causa della distorsione del modello, deve essere corretto. Utilizzando i numeri adimensionali Π_2 :

$$\frac{\Pi_{2m}}{\Pi_{2p}} = \frac{\beta_T^3 \beta_{\sigma_d} \sigma_{V_0}}{\beta_G} = 1 \quad (5.1.33)$$

si ottiene:

$$\beta_T = \frac{\beta}{\beta_{V_0}} \quad (5.1.34)$$

L'accelerazione invece viene scalata secondo la seguente relazione:

$$\beta_A = \frac{\beta_{V_0}^2}{\beta} \quad (5.1.35)$$

La procedura di correzione quindi si articola nei seguenti passaggi fondamentali:

1. simulare un modello scalato per il fattore di scala β ;
2. ottenere la velocità di deformazione non corretta $\dot{\epsilon}_m^{nc}$;
3. calcolare β_{V_0} ;
4. calcolare la nuova velocità di impatto;
5. eseguire il passaggio (1), ma con la nuova velocità corretta.

Applicando questa procedura, la geometria finale del modello e del prototipo verrà scalata del fattore β .

5.2 Risposta scalata all'impatto a basse velocità

L'impatto tra due corpi è un evento molto complesso e coinvolge diversi parametri e catturarne le dinamiche essenziali risulta difficile. Inoltre, gli studi sperimentali possono richiedere tempo ed essere molto costosi, soprattutto quando sono necessari campioni a grandezza naturale per la caratterizzazione del fenomeno. Per superare questa difficoltà è essenziale identificare parametri adimensionali che raggruppino i numerosi parametri in una forma gestibile, riducendo la matrice di test sperimentale o computazionale associata. Nel presente capitolo si illustra una procedura [24] in cui è introdotto un parametro adimensionale per stabilire le regole di scala per la risposta all'impatto di diverse strutture.

5.2.1 Formulazione del problema

La dinamica dell'impatto di strutture subito da un corpo in caduta può essere descritta attraverso un insieme di equazioni differenziali generali e condizioni al contorno associate.

$$\mathbf{L}[\mathbf{u}(\mathbf{x}, t)] + \mathbf{M}\ddot{\mathbf{u}}(\mathbf{x}, t) = \mathbf{p}(x)F(t) \quad (5.2.36)$$

$$\mathbf{B}_j\mathbf{u}(\mathbf{x}, t) = 0 \quad (5.2.37)$$

con $j = 1, 2, \dots, n$

$$m_i\ddot{\delta}_i(t) = -F(t) \quad (5.2.38)$$

dove \mathbf{L} è la matrice dell'operatore di rigidità differenziale lineare, $\mathbf{u}(\mathbf{x}, t)$ è il vettore spostamento generalizzato, \mathbf{x} è il vettore delle coordinate spaziali, t è il tempo, \mathbf{M} è la matrice dell'operatore di massa, $\mathbf{p}(\mathbf{x})$ è il vettore posizione dell'impatto, $F(t)$ è la forza d'impatto, m_i e δ_i sono rispettivamente la massa e lo spostamento del dispositivo d'urto, mentre \mathbf{B}_j è una matrice di operatori differenziali omogenei. Il corpo impattante ha una velocità iniziale $\dot{\delta}_0$ e si presume che la struttura sia a riposo al momento dell'urto. La forza di contatto si ottiene da una legge del tipo:

$$F(t) = \begin{cases} f(\alpha, t) & \text{se } \alpha \geq 0 \\ 0 & \text{se } \alpha < 0 \end{cases} \quad (5.2.39)$$

dove α è l'indentazione tra il corpo in caduta e la struttura nel punto di impatto:

$$\alpha(t) = \delta_i(t) - \delta_s(t) \quad (5.2.40)$$

in cui δ_s è la deflessione della struttura. Il primo passo è la linearizzazione della legge di contatto che, per una struttura in materiale composito, colpita da una massa sferica, assume la seguente forma:

$$f(\alpha, t) = K_y\alpha(t) \quad (5.2.41)$$

dove K_y è la rigidità. Gli spostamenti del dispositivo d'urto e della piastra sono normalizzati rispetto all'indentazione massima per un semispazio $\alpha^* = v_0/\omega$. Di conseguenza, la forza d'urto è normalizzata rispetto alla forza d'urto massima per semispazio ed è data da:

$$\bar{F}(\tau) = \frac{F(\tau)}{v_0\sqrt{m_iK_y}} \quad (5.2.42)$$

in cui $\tau = \omega t$ è il tempo normalizzato e $\omega = \sqrt{k_y/m_i}$ è la frequenza di contatto. Tale normalizzazione è utile per distinguere tra le varie tipologie di impatto. Un esempio è quello di una massa molto piccola o di una struttura molto rigida, in cui la forza massima normalizzata è prossima all'unità per una risposta all'impatto localizzata. In questo caso la flessibilità della struttura non contribuisce alla dinamica del

problema e la risposta dipende solo dalle proprietà del contatto locale. Quando invece la massa del dispositivo d'urto è grande e/o la struttura è flessibile, la forza d'impatto è normalizzata in parte dall'energia d'impatto, la risposta all'impatto normalizzata sarà invariante all'energia d'impatto e dipenderà solo dal resto dei parametri. In questo caso il valore della forza massima di contatto è inferiore a 1. Un'ulteriore semplificazione della procedura di normalizzazione consiste nell'identificazione dei parametri di impatto adimensionale che isolano i fenomeni fisici coinvolti attraverso casi asintotici. Oltre all'impatto di una soluzione semi spaziale che viene utilizzata per normalizzare la risposta all'impatto di strutture flessibili, sono state identificate altre due approssimazioni (soluzioni asintotiche), vale a dire la struttura infinita e gli impatti quasi-statici.

5.3 Impatto su struttura di estensione infinita

Se la dimensione della struttura impattata è molto grande e la massa impattante è molto piccola, l'impatto può essere modellato come il sistema dissipatore-molla in [Figura 5.1].

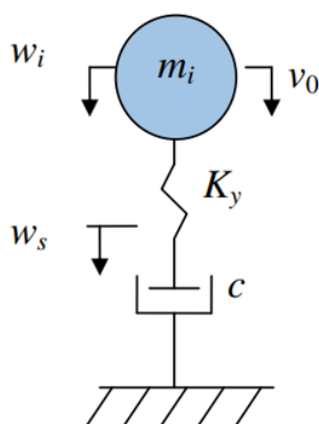


Figura 5.1: Modello dissipatore-molla [24]

In questo modello la forza d'impatto è direttamente proporzionale alla velocità della struttura nel punto di contatto e vale:

$$F(t) = c\dot{w}_s \quad (5.3.43)$$

dove c rappresenta l'impedenza della struttura. Utilizzando la definizione di indentazione locale e la procedura di normalizzazione, si può dimostrare che per questi tipi di impatti la risposta adimensionale è analoga a quella di un sistema a un grado di libertà, in cui la massa impattante è supportata dalla rigidezza di

contatto locale con la struttura che funge da meccanismo di smorzamento. L'equazione normalizzata del moto diventa:

$$\ddot{\bar{\alpha}} + 2\zeta\dot{\bar{\alpha}} + \bar{\alpha} = 0 \quad (5.3.44)$$

che corrisponde a quella di vibrazione smorzata, con ζ rapporto di smorzamento e le seguenti condizioni iniziali:

$$\begin{cases} \bar{\alpha}(0) = 0 \\ \dot{\bar{\alpha}}(0) = 1 \end{cases} \quad (5.3.45)$$

La forza d'impatto normalizzata è pari all'indentazione normalizzata:

$$\bar{F}(\tau) = \bar{\alpha}(\tau) \quad (5.3.46)$$

La soluzione dell'equazione del moto è nota e può essere ottenuta al variare del rapporto di smorzamento ζ . Per il caso asintotico di impatto su struttura di estensione infinita, la forza d'urto normalizzata dipende da ζ ed è data da:

$$\bar{F}(\tau) = f(\zeta, \tau) \quad (5.3.47)$$

In questo caso ζ è un parametro di impatto adimensionale, definito come *fattore di mobilità relativa*:

$$\zeta = \frac{\sqrt{m_i K_y}}{2c} \quad (5.3.48)$$

Elevati valori di ζ indicano un grande trasferimento di energia dalla massa impattante alla struttura, con conseguenti vibrazioni e una bassa forza d'impatto massima normalizzata. Questo può essere realizzato aumentando la massa del corpo impattante e/o diminuendo l'impedenza della struttura. Viceversa, piccoli valori di ζ possono essere ottenuti diminuendo la massa impattante e/o aumentando l'impedenza della struttura, con un piccolo trasferimento di energia, vibrazioni strutturali trascurabili e un'elevata forza d'impatto massima normalizzata. Quando ζ diventa molto piccola, l'equazione del moto assume la forma di vibrazione libera non smorzata.

$$\bar{F}(\tau) = \text{sen}(\tau) \quad (5.3.49)$$

5.4 Impatto quasi-statico

Se la massa del corpo impattante è molto grande e quella della struttura può essere trascurata, la risposta è adeguatamente analizzata attraverso un modello di impatto quasi statico, come nello schema in [Figura 5.2].

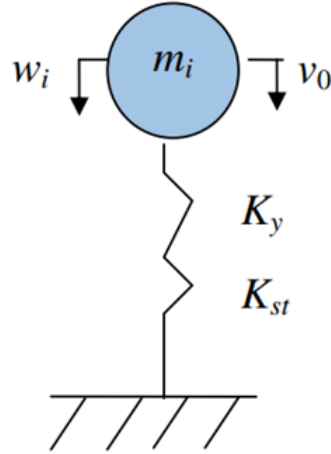


Figura 5.2: Schema di modello quasi-statico [23]

Questo caso asintotico è un sistema semplice a un solo grado di libertà, dove il corpo impattante è supportato da due molle in serie: una con rigidità di contatto locale K_y e l'altra con rigidità statica della struttura K_{st} . Attraverso la procedura di normalizzazione si può ottenere l'equazione normalizzata del moto del corpo impattante:

$$\ddot{\bar{w}}_i + \left(\frac{\lambda}{\lambda + 1}\right)\bar{w}_i = 0 \quad (5.4.50)$$

In questo caso, la risposta all'impatto normalizzata è governata dal solo parametro adimensionale λ , definito *rigidezza relativa* e pari a:

$$\lambda = \frac{k_{st}}{k_y} \quad (5.4.51)$$

Pertanto, la forza d'impatto è data da:

$$\bar{F}(\tau) = f(\lambda, \tau) = \sqrt{\frac{\lambda}{\lambda + 1}} \sin\left(\sqrt{\frac{\lambda}{\lambda + 1}}\tau\right) \quad (5.4.52)$$

La durata dell'impatto è relativamente lunga e la risposta è principalmente governata dalla deflessione statica della struttura che è in fase con lo spostamento del corpo impattante. Da prove sperimentali si evince che la risposta è quasi-statica se il rapporto di massa effettivo è maggiore di un certo valore di soglia. Tale *rapporto di massa efficace* è in realtà la massa relativa del prototipo, data da:

$$\mu = \frac{m_i}{m_{eq}} \quad (5.4.53)$$

dove m_{eq} è la massa concentrata equivalente della struttura, che dipende dal tipo di struttura e dalle condizioni di supporto. La rigidità statica e la massa concentrata equivalente della struttura possono essere ottenute dal bilancio di energia, uguagliando quindi l'energia potenziale e quella cinetica.

$$\frac{1}{2}k_{st}w_s^2 = \frac{1}{2} \int_V \sigma^T \varepsilon dV \quad (5.4.54)$$

$$\frac{1}{2}m_{eq}\dot{w}_s^2 = \frac{1}{2} \int_V \rho[\dot{\mathbf{u}}(\mathbf{x})]^2 dV \quad (5.4.55)$$

In queste relazioni si considerano i valori massimi delle distribuzioni di spostamento e velocità nel punto dell'impatto e gli integrali fanno riferimento all'intera struttura. Si consideri la risposta all'impatto normalizzata in funzione dei tre parametri adimensionali:

$$\bar{F}(\tau) = f(\zeta, \mu, \lambda, \tau) \quad (5.4.56)$$

Tali parametri dipendono dal corpo impattante e dalle caratteristiche della struttura. Nel caso di una piastra semplicemente supportata con una molla [Figura 5.3], le equazioni che governano l'impatto possono essere determinate seguendo le equazioni del moto con le condizioni al contorno.

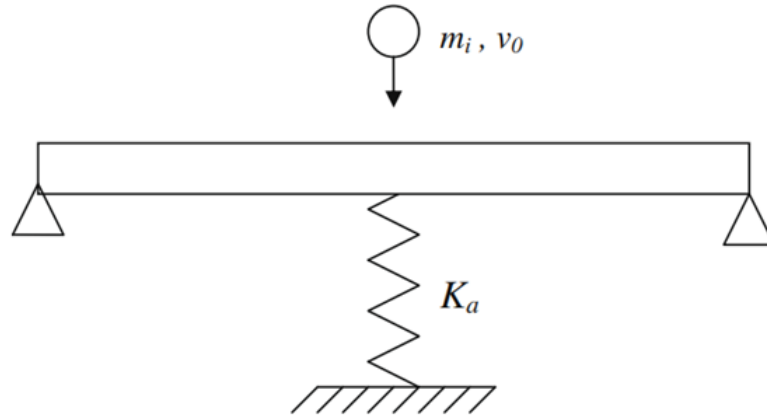


Figura 5.3: Sistema piastra semplicemente supportata con una molla [24]

Il campo degli spostamenti è dato da:

$$\mathbf{u}(\mathbf{x}, t) = \begin{Bmatrix} \Psi_x(x, y, t) \\ \Psi_y(x, w) \\ \Psi_x(x, w) \end{Bmatrix} \quad (5.4.57)$$

in cui Ψ_x e Ψ_y sono le rotazioni e w è lo spostamento trasversale. Le matrici dell'operatore di massa e di rigidezza differenziale lineare sono date rispettivamente come:

$$\mathbf{M} = \begin{bmatrix} \rho h^3/12 & 0 & 0 \\ 0 & \rho h^3/12 & 0 \\ 0 & 0 & \rho h \end{bmatrix} \quad (5.4.58)$$

$$\mathbf{L} = \begin{bmatrix} -D_{11} \frac{\partial^2}{\partial x^2} - D_{11} \frac{\partial^2}{\partial y^2} + kA_{55} & -(D_{12} + D_{66}) \frac{\partial^2}{\partial x \partial y} & kA_{55} \frac{\partial}{\partial x} \\ -(D_{12} + D_{66}) \frac{\partial^2}{\partial x \partial y} & -D_{66} \frac{\partial^2}{\partial x^2} - D_{22} \frac{\partial^2}{\partial y^2} + kA_{44} & kA_{44} \frac{\partial}{\partial x} \\ -kA_{55} \frac{\partial}{\partial x} & -kA_{44} \frac{\partial}{\partial x} & -kA_{55} \frac{\partial^2}{\partial x^2} - kA_{44} \frac{\partial^2}{\partial y^2} - k_a \delta(x - x_c) \delta(y - y_c) \end{bmatrix} \quad (5.4.59)$$

dove D_{ij} e A_{ij} sono coefficienti che rappresentano la rigidezza flessionale e di taglio, h è lo spessore della lastra, k è il fattore di correzione del taglio di Mindlin e K_a è la rigidezza della molla. L'impatto avviene a metà campata, in corrispondenza della molla e il vettore posizione del corpo impattante è dato da:

$$\mathbf{p}(\mathbf{x}) = \begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \\ \delta(x - x_c) \delta(y - y_c) \end{Bmatrix} \quad (5.4.60)$$

Lo spostamento trasversale della piastra vale:

$$w_s(t) = w(x_c, y_c, t) \quad (5.4.61)$$

La matrice dell'operatore lineare per le condizioni al contorno associate ai vincoli di semplice appoggio è data da:

$$\mathbf{B}_1 = \begin{bmatrix} D_{11} \frac{\partial}{\partial x} & D_{12} \frac{\partial}{\partial y} & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad \text{per } x = 0 \quad (5.4.62)$$

$$\mathbf{B}_1 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ D_{12} \frac{\partial}{\partial x} & D_{22} \frac{\partial}{\partial y} & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad \text{per } y = 0 \quad (5.4.63)$$

Per le piastre isotrope, i coefficienti di rigidezza valgono:

$$\begin{cases} D_{11} = D_{22} = D = \frac{Eh^3}{12(1 - \nu^2)} \\ D_{12} = \nu D \\ D_{66} = \left(\frac{1 - \nu}{2}\right) D \\ A_{44} = A_{55} = Gh \end{cases} \quad (5.4.64)$$

dove ν è il coefficiente di Poisson e G è il modulo di taglio. L'*impedenza*, la *rigidezzastatica* e la *massaconcentrataequivalente* di una lastra quadrata possono essere trovate analiticamente, applicando le equazioni (5.3.43), (5.4.54) e (5.4.55):

$$c = 8\sqrt{\rho h D^*} \quad (5.4.65)$$

$$k_{st} = \frac{D^*}{00116a^2} + k_a \quad (5.4.66)$$

$$m_{eq} = 0,203\rho h a^2 = 0,203m_p \quad (5.4.67)$$

in cui m_p è la massa totale della piastra, a è la lunghezza e D^* è la rigidezza effettiva a flessione, data da:

$$D^* = \frac{1}{2}(D_{12} + 2D_{66} + \sqrt{D_{11}D_{22}}) \quad (5.4.68)$$

Capitolo 6

Analisi sperimentale per la definizione delle forze di contatto

Per la definizione delle forze di contatto sono state condotte delle prove di laboratorio basate sulla caduta di provini di calcestruzzo su una piastra in calcestruzzo fibro-rinforzato. I dati registrati sono stati adeguatamente riportati ed elaborati sul software di calcolo Matlab, con lo scopo di ottenere un diagramma che descriva la forza di contatto che si sviluppa in funzione del tempo. La procedura di analisi è descritta nel presente capitolo, in cui si riportano i risultati per tre tipologie di provini, caratterizzati da una forma diversa. Durante le singole prove sono stati registrati dei fotogrammi con una videocamera ad alta velocità al fine di poter fornire un'adeguata descrizione del fenomeno, individuando il punto di contatto tra le due superfici e la perdita eventuale di materiale.

6.1 Assetto della prova

Il sistema concepito per le prove sperimentali è caratterizzato da una piastra orizzontale di spessore 15 cm e con un peso di 35,5 kg, realizzata in calcestruzzo fibro-rinforzato. Tale elemento costituisce il corpo impattato durante l'evento di contatto [Figura 6.1]. La piastra poggia su tre sensori piezoelettrici a forma di anello disposti ai vertici di un triangolo equilatero i cui lati sono lunghi 20 cm. I sensori sono stati posizionati in modo tale che il centro geometrico del triangolo equilatero coincida con quello della piastra. È stata introdotta, inoltre, una rondella a basso attrito sopra la cella di carico al fine di omogeneizzare la forza sul sensore. Un accelerometro piezoelettrico ad alta frequenza è stato installato sul fondo in

corrispondenza del centro geometrico della piastra. A una determinata altezza in corrispondenza del centro della piastra è stato posizionato un elettromagnete che consente di tenere in posizione il provino prima della caduta [Figura 6.2]. Il posizionamento del campione è reso possibile grazie a una rondella metallica posizionata sulla superficie, in questo modo è stato possibile effettuare molteplici prove su provini di geometria e massa diversa, al fine di poter confrontare i risultati ottenuti [Figura 6.3].

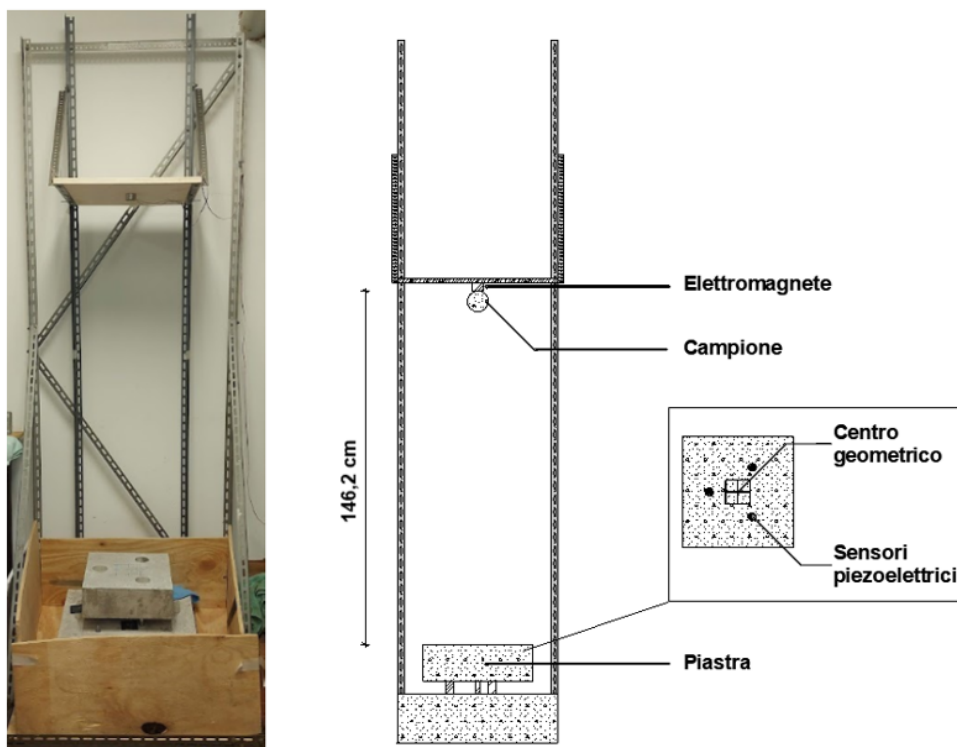


Figura 6.1: A sinistra: schema dell'apparato sperimentale utilizzato; a destra: il dettaglio della piastra impattata



Figura 6.2: Dettaglio del provino in posizione iniziale sotto l'elettromagnete



Figura 6.3: Provino utilizzato nei test

La prova è stata effettuata su campioni di dimensioni, geometria e materiale diverso al fine di poter analizzare l'influenza di tali parametri sul fenomeno in esame. In particolare, i provini utilizzati sono caratterizzati da una forma cubica, sferica o semisferica [Figura 6.4]. Per ogni campione è stata adottata la seguente nomenclatura:

- SP: forma sferica;
- SS: forma semisferica;
- Un numero che indica le dimensioni in termini di diametro o lunghezza del lato;
- T1 e T2 indicano il mix design di calcestruzzo con cui è stato realizzato il campione; mentre con 18 e 19 si indica il giorno in cui i provini sono stati estratti dalle vasche d'acqua.

Per una stessa combinazione di parametri sono stati realizzati più provini, il cui numero è riportato alla fine della nomenclatura. I provini cubici sono classificati nel seguente modo:

- C-7-A indica un provino di forma cubica, i cui lati misurano 5,2 cm;
- C-8-A è un provino a forma di parallelepipedo con lati di 5,2 cm e 10,3 cm. Il termine A indica che la rondella metallica è fissata sul lato di lunghezza 10,3 cm;
- C-8-B è un provino a forma di parallelepipedo con lati di 5,2 cm e 10,3 cm. Il termine A indica che la rondella metallica è fissata sul lato di lunghezza 5,2 cm;
- C-9-A è un provino a forma di parallelepipedo con lati di 5,2 cm e 10,3 cm. Il termine A indica che la rondella metallica è fissata sul lato di lunghezza 5,2 cm.

Ogni campione è stato sottoposto a tre prove di impatto. Prima di ogni test è stata effettuata la pesatura di ogni provino. I valori sono riportati in [Tabella 6.1]

Il mix design indicato con T1 è caratterizzato dalla seguente composizione:

- Contenuto in sabbia pari a 2000 g (s);
- Contenuto in cemento pari a 667 g (c);
- $\frac{s}{c} = 3$;
- Contenuto d'acqua pari a 267 g;



Figura 6.4: Campioni di forma diversa analizzati nella prova

- Contenuto d'acqua aggiuntiva pari a 51 g;
- $\frac{w}{c} = 0,476$;
- Contenuto di superplasticizzante pari a 4,7 g.

La resistenza a compressione esibita dal materiale a 14 giorni di maturazione è pari a 48,47 MPa. I provini *T1* sono stati sottoposti a immersione in acqua in data 7 giugno 2024 con successiva estrazione il 18 giugno 2024.

Il mix design indicato con *T2 – 18* è composto da:

- Contenuto in sabbia pari a 2000 g (*s*);
- Contenuto in cemento pari a 800 g (*c*);
- $\frac{s}{c} = 2,5$;
- Contenuto d'acqua pari a 320 g;
- Contenuto d'acqua aggiuntiva pari a 24,62 g;
- $\frac{w}{c} = 0,4$;
- Contenuto di superplasticizzante pari a 12 g.

La resistenza a compressione esibita dal materiale a 28 giorni di maturazione è pari a 73,28 MPa. I provini *T2 – 18* sono stati sottoposti a immersione in acqua in data 20 giugno 2024 con successiva estrazione il 1 luglio 2024.

Il mix design indicato con *T2 – 19* è caratterizzato da:

- Contenuto in sabbia pari a 2000 g (s);
- Contenuto in cemento pari a 800 g (c);
- $\frac{s}{c} = 2,5$;
- Contenuto d'acqua pari a 344 g;
- Contenuto d'acqua aggiuntiva pari a 0 g;
- $\frac{w}{c} = 0,4$;
- Contenuto di superplasticizzante pari a 8 g.

La resistenza a compressione esibita dal materiale a 28 giorni di maturazione è pari a 71,42 MPa. I provini $T2 - 19$ sono stati sottoposti a immersione in acqua in data 21 giugno 2024 con successiva estrazione il 2 luglio 2024.

6.2 Analisi con la videocamera ad alta velocità

Ogni test è stato registrato e successivamente analizzato con una videocamera ad alta velocità Nova S12 modello 1000K-M-16GB a 20,000 fps. Lo strumento è stato settato in modo tale da poter apprezzare l'evento di contatto, centrando il centro geometrico della piastra in cui dovrebbe avvenire l'impatto del provino. Nei successivi paragrafi verranno illustrati i risultati ottenuti e verrà effettuato un confronto tra la curva che descrive la forza di contatto ottenuta e le immagini catturate, così da fornire un'adeguata spiegazione all'eventuale perdita di residui durante l'impatto, rotolamenti del provino o la registrazione di ulteriori zone di contatto tra campione e piastra.

Nomenclatura	Peso 1 [g]	Peso 2 [g]	Peso 3 [g]
SP-6-T1-1	206,6	206,6	206,8
SP-6-T1-2	214,9	214,9	214,9
SP-6-T1-3	214,2	214,2	214,2
SS-6-T1-1	124,4	124,4	124,4
SS-6-T1-2	251,3	251,3	251,1
SP-6-T2-1	251,3	251,3	251,1
SP-6-T2-19-2	222	222	221,9
SS-6-T2-1	143	143	143
SP-7-T2-1	401,3	401,3	401,3
SP-8-T2-18-1	574,1	573,6	570,3
SP-8-T2-19-1	570,3	570,3	570,3
SP-8-T2-19-3	574,2	571,8	571,8
SS-8-T2-19-1	251,1	250,9	250,8
SP-9-T2-19-2	827,9	827,5	827,5
SS-9-T2-18-1	399,9	399,9	399,9
SS-9-T2-18-2	396,6	396,6	396,6
SS-10-T2-19-2	562,6	562,6	562,5
SS-10-T2-19-1	572,6	572,6	572,6
C-9-A	535,4	534,4	Rottura
C-8-A	541	540,7	540,3
C-8-B	537,8	Rottura	Rottura
C-7-A	275,2	274,7	274,6

Tabella 6.1: Nomenclatura e peso dei provini prima di ogni test

6.3 Analisi dell'impatto tra campioni e piastra

La prova inizia con il rilascio del provino in caduta libera, interrompendo la corrente del magnete. Contestualmente avviene la registrazione dei dati misurando la tensione nei sensori piezoelettrici e nell'accelerometro a una frequenza di campionamento di 38,4 kHz. La durata dell'acquisizione impostata è di 1 s, in cui vengono registrati 38500 campioni.

Al momento dell'impatto il campione ha una velocità pari a:

$$\dot{\delta} = \sqrt{2gh} \quad (6.3.1)$$

in cui h è l'altezza di caduta e g è l'accelerazione di gravità pari a $9,81 \text{ m/s}^2$. Tale velocità è correlata alla perdita di energia cinetica che avviene durante il fenomeno di impatto attraverso la relazione:

$$T = \frac{1}{2}m\dot{\delta}^2 \quad (6.3.2)$$

È di rilevante importanza porre l'attenzione sulle grandezze che entrano in gioco nelle equazioni (6.3.1) e (6.3.2). Le diverse caratteristiche in termini di forma, geometria, peso e materiale dei provini ha consentito di effettuare un'analisi sulla loro influenza nella determinazione delle forze di contatto.

Il corpo impattante non è vincolato e questo può generare delle forze di attrito, smorzamento del materiale e delle fratture che riducono la massa dei provini.

Al fine di ottenere un risultato affidabile è necessario che sia rispettato l'allineamento tra:

- Il punto di partenza e il punto di arrivo del corpo in caduta;
- Il centro di massa della piastra;
- Il baricentro del triangolo formato dai sensori piezoelettrici;
- L'accelerometro.

Se sussiste tale condizione allora il sistema può essere considerato a un grado di libertà. Durante l'impatto vale l'equazione dell'equilibrio dinamico:

$$m\ddot{\delta} + c\dot{\delta} + k\delta = F(t) \quad (6.3.3)$$

in cui:

- $F(t)$ è la forza di contatto tra la massa impattante e la piastra;
- $m\ddot{\delta}$ è la componente di inerzia ottenuta dall'accelerometro;

- $c\dot{\delta}$ è il termine di smorzamento ed è misurato dai tre sensori piezoelettrici;
- $k\delta$ è il termine elastico.

Al momento dell'impatto è possibile trascurare il termine legato allo smorzamento [25]; mentre, dopo il contatto tra i due corpi il sistema entra in una fase di oscillazioni libere smorzate. Pertanto, l'equazione (6.3.3) è pari a zero.

6.4 Analisi dei risultati

Nella presente sezione si riporta la procedura di calcolo attraverso il software MatLab per la definizione dei diagrammi che descrivono le forze di contatto. A scopo illustrativo vengono analizzati tre provini caratterizzati da una forma diversa: sferica, semisferica e cubica.

6.4.1 Analisi di un provino sferico

Attraverso il software di calcolo MatLab è stato possibile ottenere l'andamento delle accelerazioni e della forza nel tempo registrate dai tre sensori di carico e dall'accelerometro durante la prova. Si può notare dalla [Figura 6.5] come queste grandezze siano caratterizzate da una forma sinusoidale che tende a decrescere per effetto dello smorzamento. Di seguito si analizzano i risultati ottenuti per il provino SP-8-T2-18-1.

Il campione in esame è stato rilasciato da un'altezza pari a 138,2 cm, impattando la piastra inferiore con una velocità pari a 5,20 m/s. Si precisa che l'altezza utilizzata per il calcolo è quella relativa alla quota del magnete, depurata dall'altezza del campione di 8 cm. A seguito dell'impatto il provino ha subito una riduzione della massa, passando da 574,1 g a 573,6 g, con una perdita di 0,5 g di materiale a causa della collisione con la piastra.

L'impatto provoca diverse modalità di vibrazione, registrate dall'accelerometro. Attraverso software è possibile analizzare la trasformata rapida di Fourier relativa all'accelerazione e alla forza misurata nella fase di oscillazione libera e smorzata [Figura 6.6]. La trasformata rapida di Fourier (FFT) è un metodo numerico per esprimere il contenuto di frequenza di un insieme di dati misurato nel tempo. Ogni picco dello spettro di accelerazione corrisponde a una modalità di vibrazione. Ci sono dei modi di vibrare che non sono registrati poiché la massa partecipante è piccola oppure non sono modi specifici della piastra.

Le frequenze ottenute nella prova in esame sono le seguenti:

- $f_1 = 660$ Hz;
- $f_2 = 2820$ Hz.

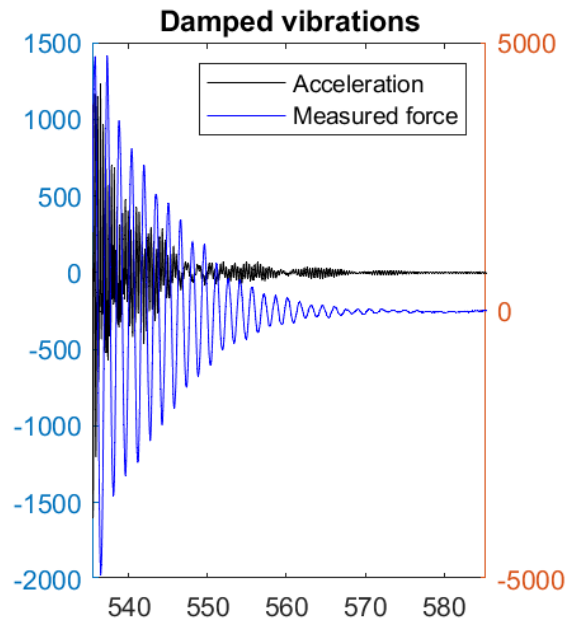


Figura 6.5: Diagramma di forza (in blu) e accelerazione (in nero) nel tempo relativo al provino SP-8-T2-18-1

Per cui si ottengono le masse partecipanti:

- $m_1 = 29,27$ kg;
- $m_2 = 0,32$ kg.

Nel diagramma in [Figura 6.7] sono stati considerati 20 sottocampioni prima del contatto e 100 sottocampioni a seguito dell’impatto per analizzare il fenomeno. Il pallino blu indica il momento dell’impatto, posto pari a 0,5 ms dal momento in cui il provino viene rilasciato dall’elettromagnete. In blu è indicata la forza misurata e in nero le accelerazioni. La forza misurata ha un andamento tipo sinusoidale con un picco più grande iniziale e uno successivo più piccolo poiché tende a smorzare nel tempo.

Se si considera la componente di inerzia come il prodotto della massa totale della piastra per l’accelerazione registrata si commetterebbe un errore, perché le masse partecipanti differiscono in base ai modi di vibrare. Pertanto, diventa necessario scomporre l’accelerazione nel tempo al fine di considerare i vari modi di vibrazione e le rispettive masse partecipanti. Nella letteratura sono riportati diversi approcci, come la *Decomposizione Empirica del Modo* proposta da Huang et al. [26] che scompone il segnale nei *Modi Principali Intrinseci* (IMF). Un *IMF* è un segnale modulato in ampiezza e in frequenza attraverso la relazione:

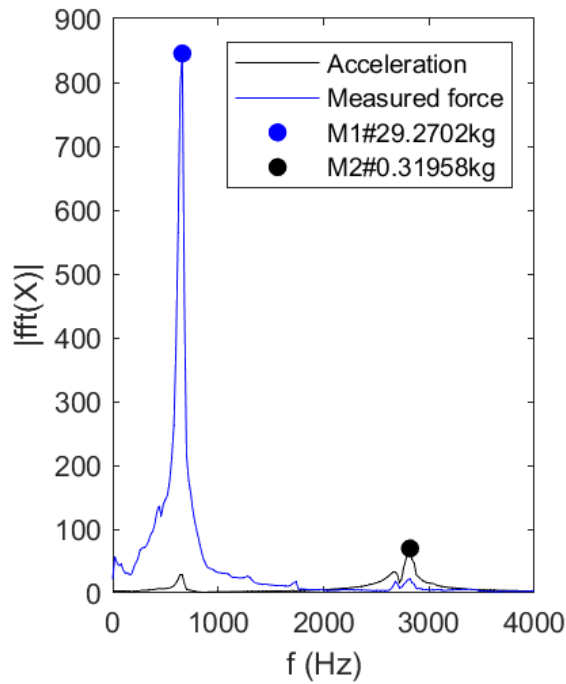


Figura 6.6: Trasformata rapida di Fourier dell'accelerazione (in nero) e della forza misurata (in blu) relativa al provino SP-8-T2-18-1

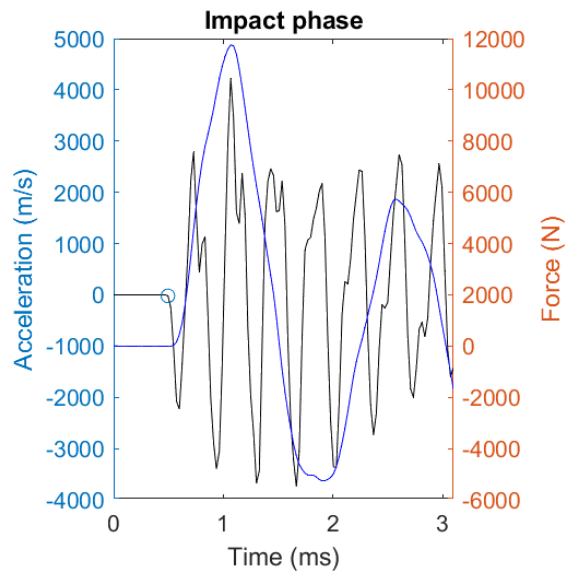


Figura 6.7: Diagramma della fase di impatto per il provino SP-8-T2-18-1

$$\ddot{\delta}(t) = A_i(t)\cos(\Phi_i(t)) \quad (6.4.4)$$

in cui l'ampiezza A_i e la pulsazione istantanea $\omega_i(t) = \dot{\Phi}(t)$ sono maggiori di zero e la loro variazione nel tempo è più piccola della fase $\Phi(t)$ [27]. L'accelerazione viene scritta come:

$$\ddot{\delta}(t) = \sum_{i=1}^N \ddot{\delta}_i(t) + r(t) \quad (6.4.5)$$

dove $r(t)$ è il residuo. Tuttavia, nel metodo della Decomposizione Empirica del Modo la frequenza istantanea è influenzata dalle frequenze osservate nella fase di oscillazioni libere. Pertanto, è stata formulata una nuova procedura nota come Decomposizione Variabile del Modo (VMD), proposta da Dragomiretskiy e Zosso [28]. Ogni segnale è compattato intorno a una pulsazione centrale ω_i che deve essere determinata con la decomposizione, effettuata su un sottocampione dell'intero segnale registrato, fornendo quattro IMF e il residuo. Nell'analisi si tiene conto solo di IMF_1 e di IMF_2 a cui corrispondono le frequenze centrali f_1 e f_2 .

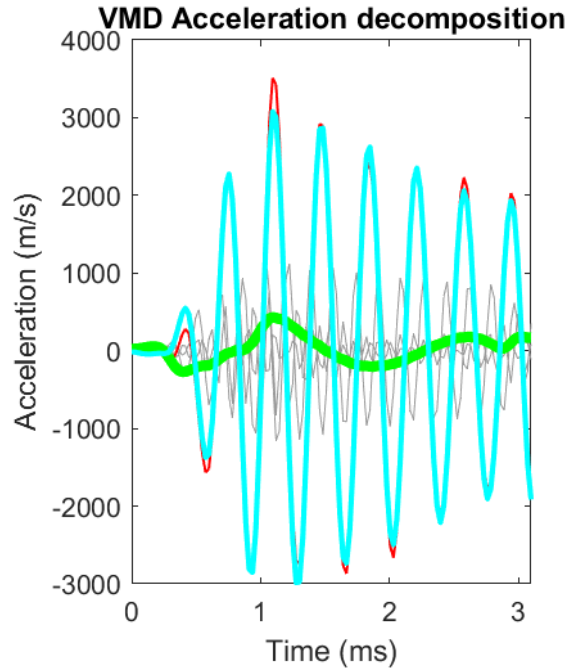


Figura 6.8: Decomposizione dell'accelerazione VMD relativa al provino SP-8-T2-18-1

Nel grafico riportato in [Figura 6.8] è possibile osservare una frequenza centrale di circa 600 Hz (indicata in verde) e una intorno a quella centrale di circa 2700 Hz (in blu) con un errore entro il 5%, soglia limite per la quale i segnali scomposti sono accettabili. Se l'errore è maggiore si deve cambiare il numero dei sottocampioni. L'obiettivo è quello di ottenere la stessa frequenza relativa ai due picchi in [Figura

6.6] e per verificare la qualità della decomposizione è necessario che i due punti plottati nel grafico in [Figura 6.9] abbiano la stessa giacitura sulla linea tratteggiata.

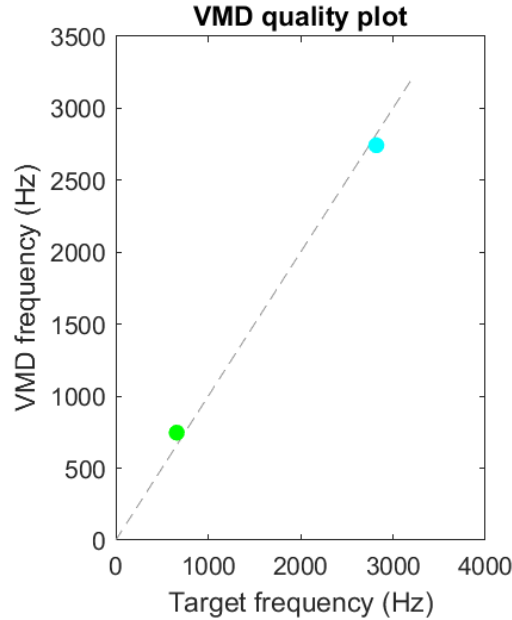


Figura 6.9: Accuratezza dei risultati ottenuti con il metodo VMD relativi al provino SP-8-T2-18-1

Dalla decomposizione con il metodo VMD si ottiene l'accelerazione ricostruita (in rosso) che viene confrontata graficamente con quella originale (in nero) in [Figura 6.10].

Da tale accelerazione, moltiplicando per la rispettiva massa partecipante, è possibile effettuare il calcolo dell'inerzia ricostruita F_I^* :

$$F_I^* = \sum_{i=1}^2 \ddot{\delta}_i(t) m_i \quad (6.4.6)$$

in cui $\ddot{\delta}_i(t)$ è l'accelerazione nel tempo dell'IMF i -esimo dell'accelerazione. Nel grafico riportato in [Figura 6.11] è possibile confrontare la forza misurata (in blu) dai tre sensori piezoelettrici e l'inerzia ricostruita (in rosa) ottenuta con il procedimento appena esaminato.

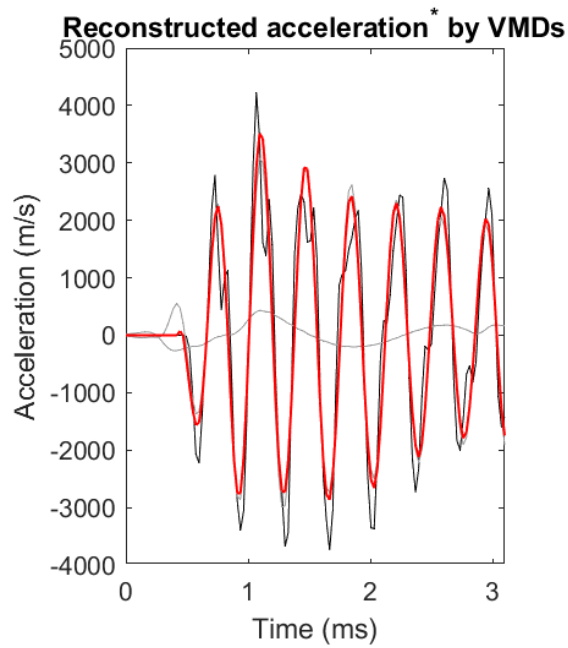


Figura 6.10: Accelerazione ricostruita con il metodo VMD relativa al provino SP-8-T2-18-1

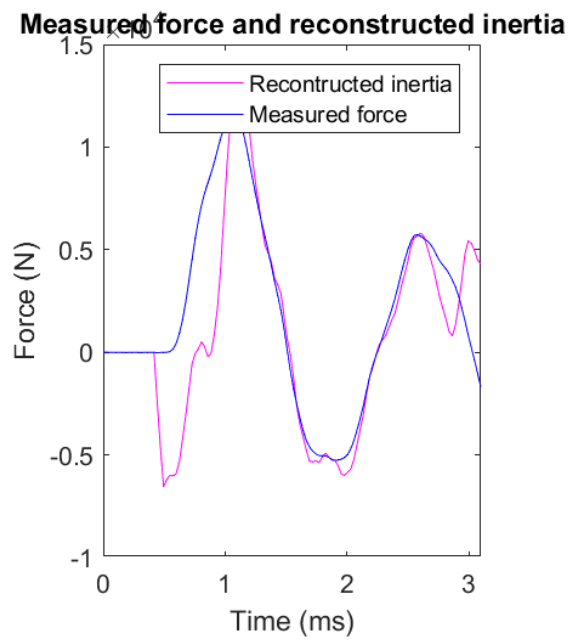


Figura 6.11: Diagramma Forza misurata - Inerzia ricostruita relativo al provino SP-8-T2-18-1

Dalla somma della forza misurata e dell'inerzia ricostruita è possibile risalire alla *forza di contatto*. Si può notare come tale forza sia nulla quando le due componenti risultano essere sovrapposte [Figura 6.12]. Il contatto avviene tra

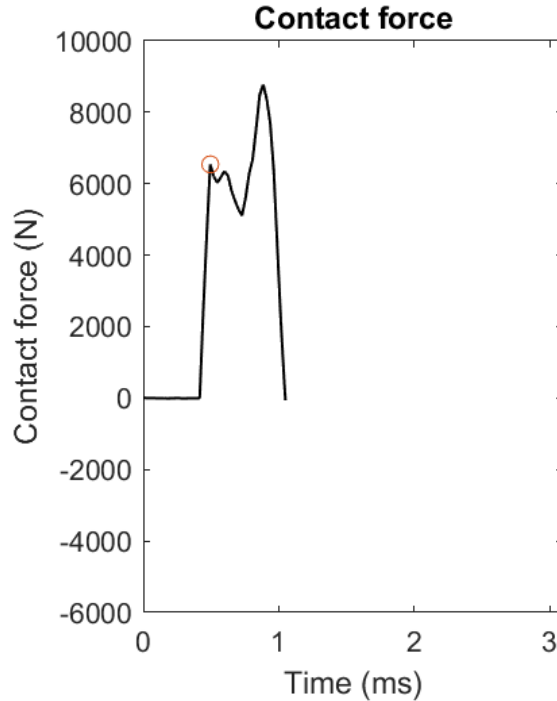


Figura 6.12: Diagramma della forza di contatto ottenuta per il provino SP-8-T2-18-1

una superficie sferica e una piana, sviluppando una forza massima di 8773,82 N a 0,9 ms. Il diagramma delle forze di impatto viene confrontato con i filmati acquisiti durante la prova. Il contatto tra il campione e la piastra avviene quasi perfettamente in un punto molto vicino al centro geometrico della piastra stessa [Figura 6.13]; pertanto, si può affermare che i risultati ottenuti per il test in esame siano caratterizzati da un'elevata accuratezza. Durante il fenomeno di impatto si registra una frammentazione con rilascio di materiale, evidenziata dal riquadro rosso in [Figura 6.13(c)-(d)], provocando una riduzione della massa del provino, confermando i risultati ottenuti dalla pesatura.

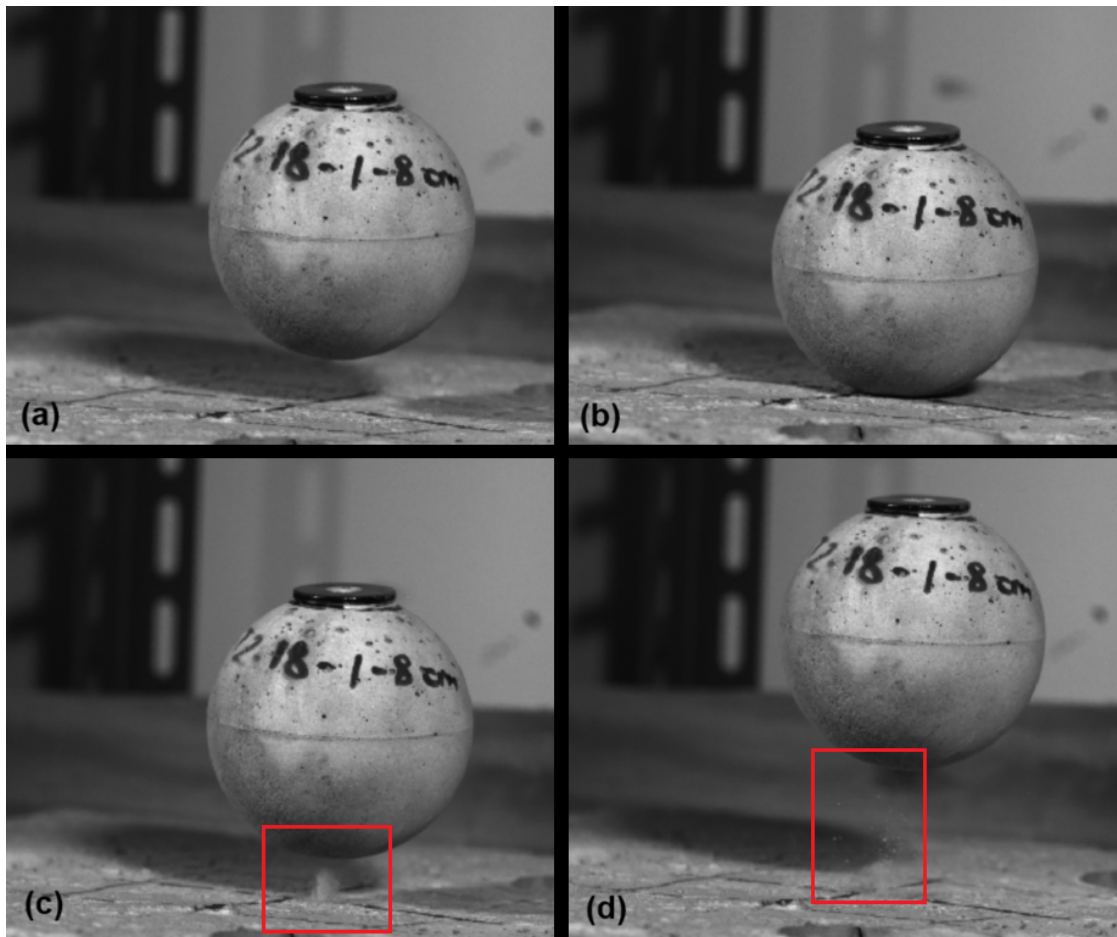


Figura 6.13: Fotogrammi acquisiti con la videocamera ad alta velocità per il provino SP-8-T2-18-1: (a) Istante prima del contatto; (b) Momento del contatto; (c)-(d) Momento dopo il contatto

6.4.2 Analisi di un provino semisferico

L'analisi è effettuata sul provino SS-9-T2-18-2 caratterizzato da una forma semisferica di diametro 9 cm realizzato con mix design 2, riportato nei paragrafi precedenti. L'altezza di caduta in questo caso è pari a 141,7 cm; pertanto; la velocità che raggiunge il campione al momento dell'impatto è di 5,27 m/s. Dal software è stato ottenuto l'andamento delle accelerazioni e della forza nel tempo registrate dai sensori e riportate in [Figura 6.14]. Prima dell'impatto il provino aveva una massa pari a 396,6 g e a seguito della prova non sono state riscontrate riduzioni di peso. Le frequenze ottenute nella prova sono:

- $f_1 = 660$ Hz;
- $f_2 = 2740$ Hz.

Le masse partecipanti sono pari a:

- $m_1 = 27,81$ kg;
- $m_2 = 0,10$ kg.

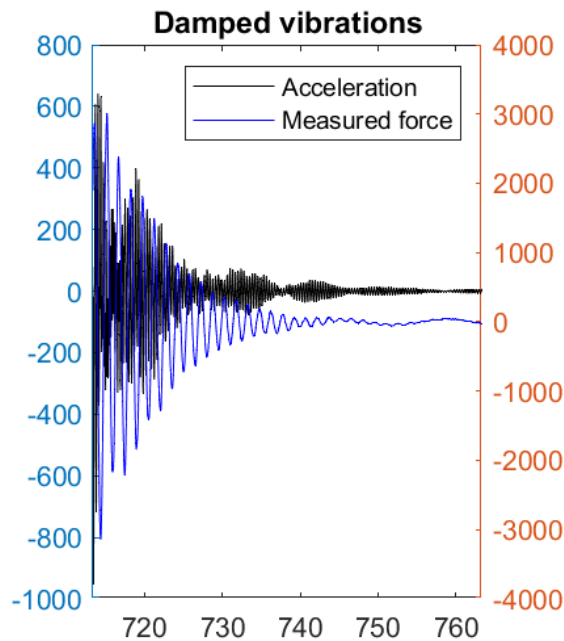


Figura 6.14: Diagramma di forza (in blu) e accelerazione (in nero) nel tempo relativo al provino SS-9-T2-18-2

In [Figura 6.15] è riportata la trasformata rapida di Fourier dell'accelerazione e della forza misurata nella fase di oscillazione libera e smorzata.

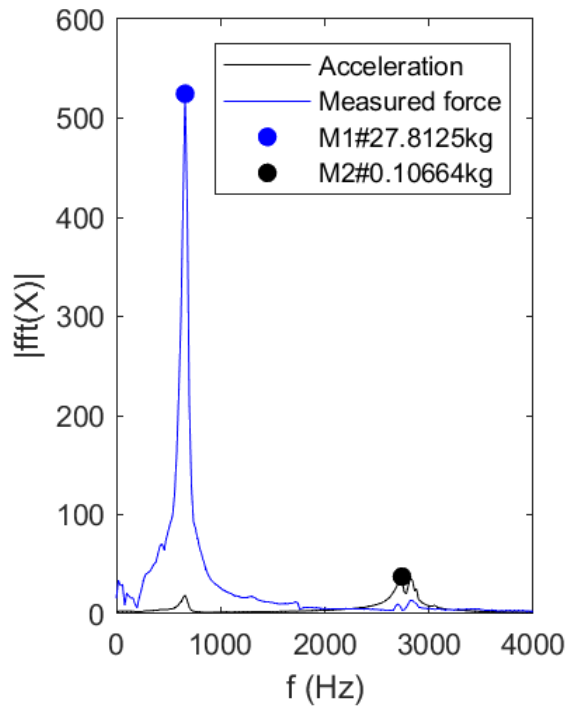


Figura 6.15: Trasformata rapida di Fourier dell'accelerazione (in nero) e della forza misurata (in blu) relativa al provino SS-9-T2-18-2

Il diagramma della fase di impatto [Figura 6.16 (a)] evidenzia un andamento sinusoidale della forza misurata con picco massimo di intensità pari a circa 11500 N; mentre l'accelerazione massima registra un valore di $3822,7 \text{ m/s}^2$ in corrispondenza del picco della forza. Con il metodo della decomposizione empirica del modo si ottiene il grafico in [Figura 6.16 (b)] e dall'analisi dell'accuratezza dei risultati, rappresentata in [Figura 6.16 (c)], si può osservare una buona convergenza delle frequenze iniziali con quelle ottenute. Si procede alla determinazione dell'accelerazione ricostruita, riportata in [Figura 6.16 (d)] e al calcolo dell'inerzia ricostruita [Figura 6.17].

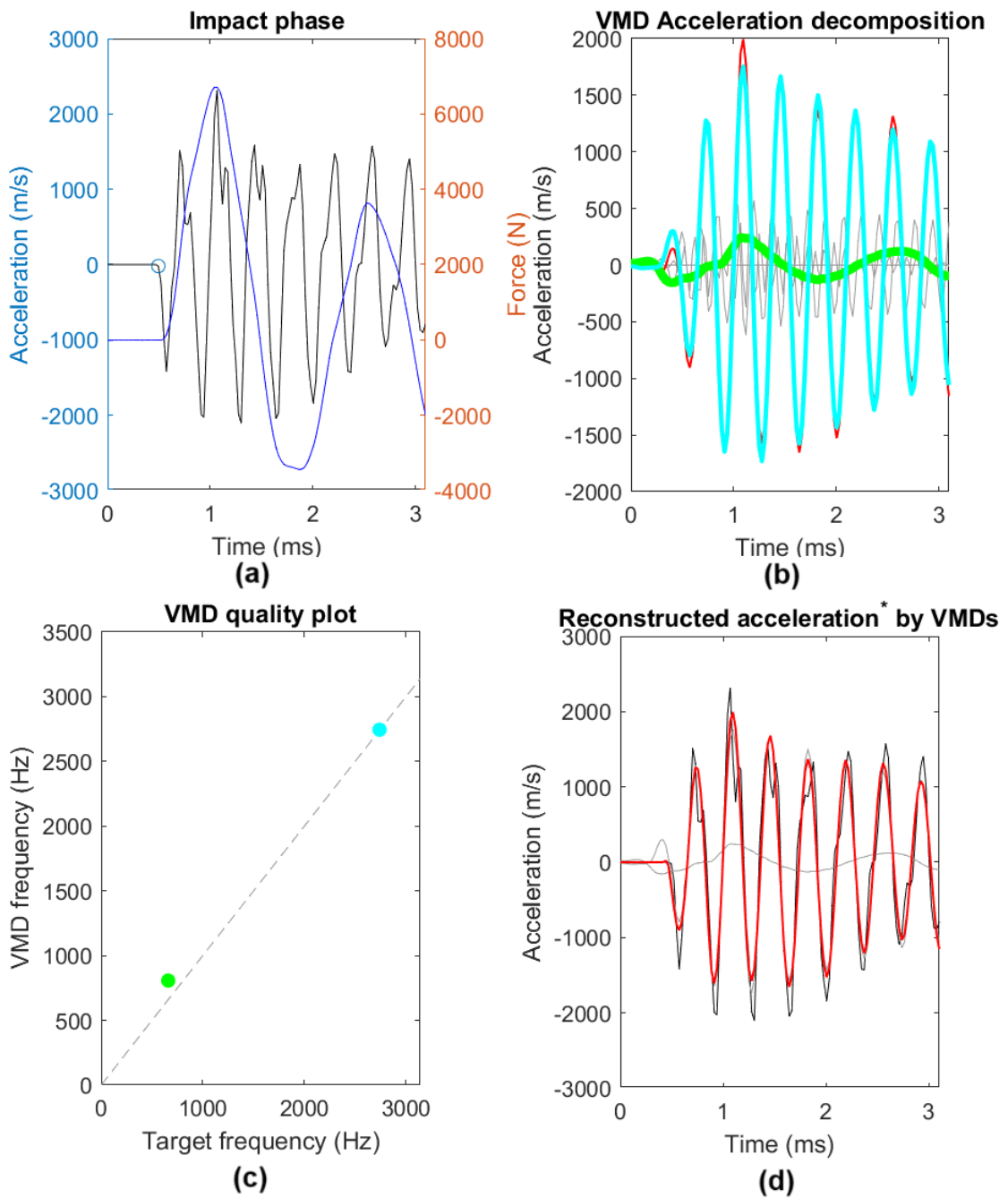


Figura 6.16: (a) Diagramma della fase di impatto per il provino SS-9-T2-18-2; (b) Decomposizione dell'accelerazione VMD del provino SS-9-T2-18-2; (c) Accuratezza dei risultati del metodo VMD per il provino SS-9-T2-18-2; (d) Accelerazione ricostruita con il metodo VMD del provino SS-9-T2-18-2

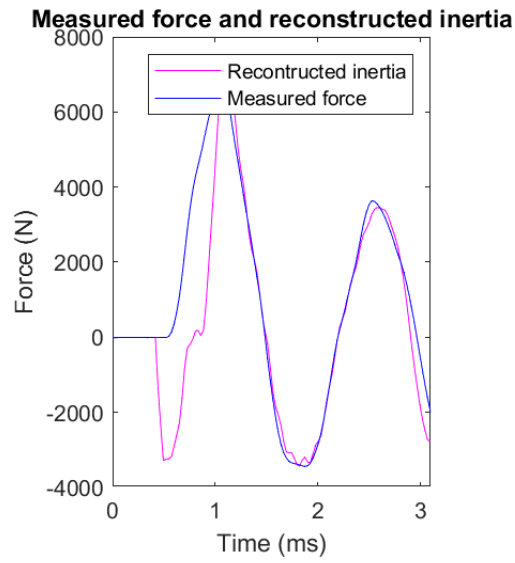


Figura 6.17: Diagramma Forza misurata - Inerzia ricostruita relativo al provino SS-9-T2-18-2

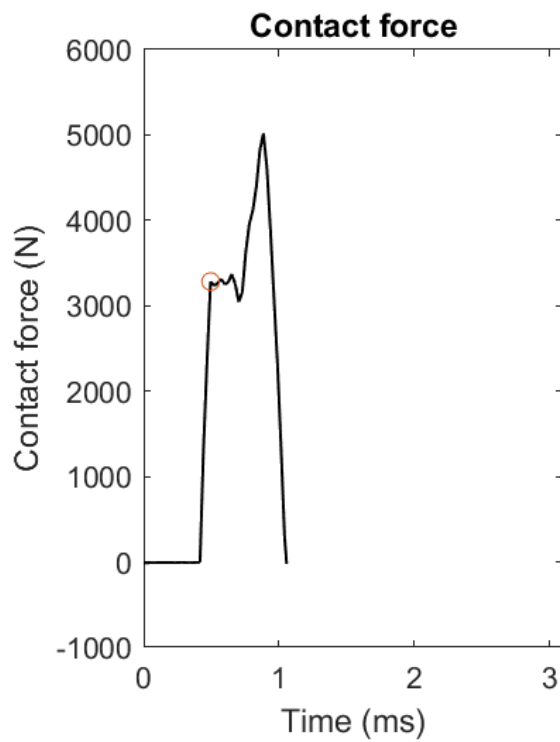


Figura 6.18: Diagramma della forza di contatto ottenuta per il provino SS-9-T2-18-2

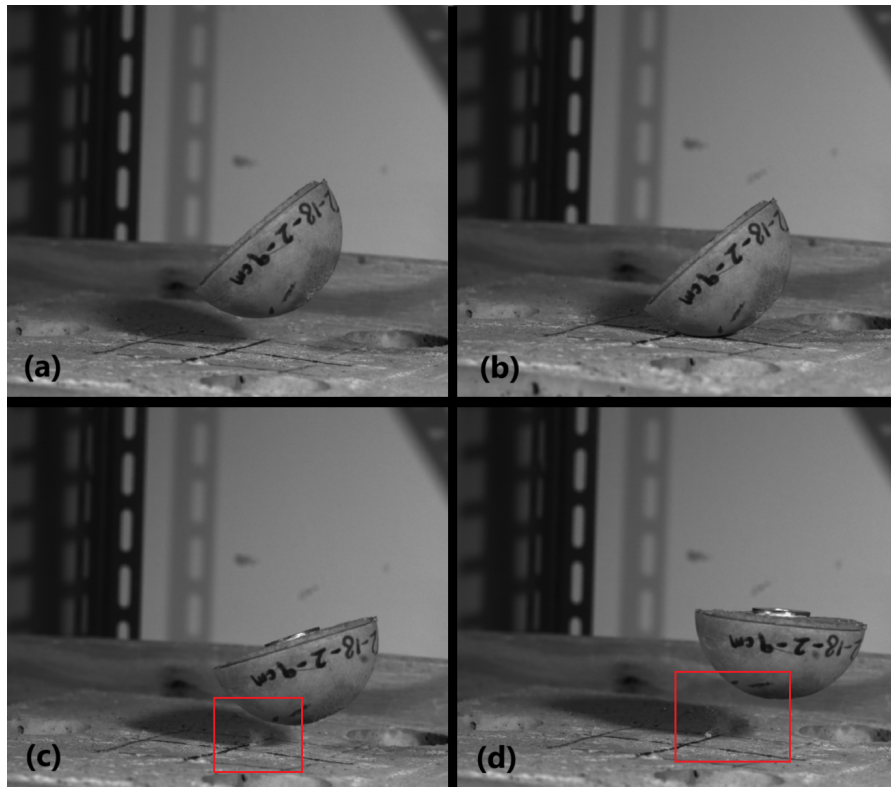


Figura 6.19: Fotogrammi acquisiti con la videocamera ad alta velocità per il provino SS-9-T2-18-2: (a) Istante prima del contatto; (b) Momento del contatto; (c)-(d) Momento dopo il contatto

Dall'andamento del diagramma della forza di contatto sviluppata nel test, si ottiene un valore massimo a 0,9 ms pari a 5018 N [Figura 6.18]. Sebbene il provino subisca una rotazione durante la caduta, il contatto avviene in un solo punto tra una superficie sferica e una piana. Il picco del diagramma della forza di contatto corrisponde al momento dell'impatto [Figura 6.19 (b)]. Avvengono delle fratture locali lato piastra, indicate con il riquadro rosso in [Figura 6.19 (c)-(d)], poiché non si registrano riduzioni di peso a seguito della prova.

6.4.3 Analisi di un provino cubico

Il provino cubico utilizzato nella presente analisi è il C-7-A, i cui lati misurano 5,2 cm. L'altezza di caduta nel test è pari a 141 cm e la velocità raggiunta è di 5,26 m/s. Prima della caduta il campione aveva una massa pari a 275,2 g e dopo l'impatto il provino ha subito una frammentazione, con la perdita di circa 0,5 g. L'accelerazione o la forza misurata dai sensori è illustrata in [Figura 6.20]. Le frequenze ottenute nella prova sono pari a:

- $f_1 = 660$ Hz;
- $f_2 = 2720$ Hz.

Pertanto, le masse partecipanti, riportate nella trasformata rapida di Fourier [Figura 6.21] sono:

- $m_1 = 32,04$ kg;
- $m_2 = 0,13$ kg.

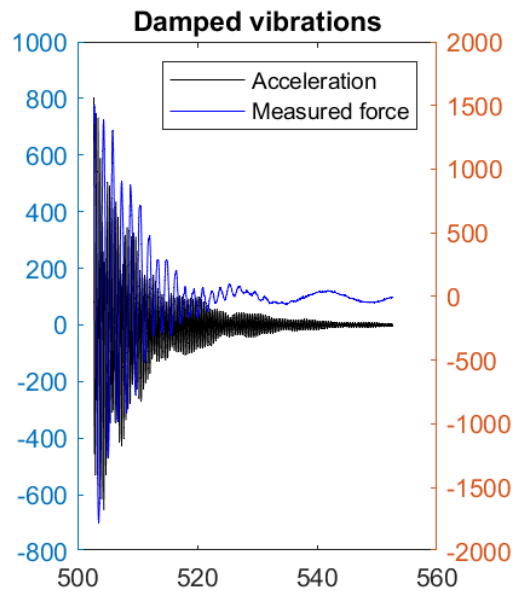


Figura 6.20: Diagramma di forza (in blu) e accelerazione (in nero) nel tempo relativo al provino C-7-A

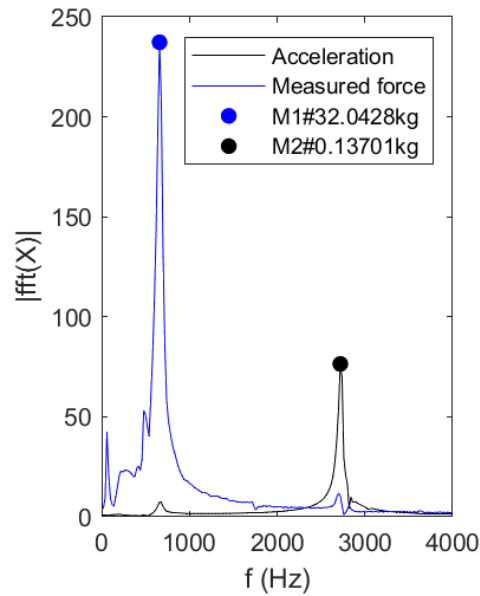


Figura 6.21: Trasformata rapida di Fourier dell'accelerazione (in nero) e della forza misurata (in blu) relativa al provino C-7-A

Il diagramma della fase di impatto [Figura 6.22 (a)] registra un valore massimo della forza misurata a 1,11 ms pari a circa 3003 N, con un'accelerazione massima di 1608 m/s^2 .

In [Figura 6.22] sono riportati i risultati relativi alla decomposizione empirica del modo per il provino in esame, ottenuti con una buona convergenza delle frequenze ottenute con quelle iniziali.

Dal diagramma delle forze di contatto riportato in figura [Figura 6.24] si osserva un valore massimo della forza a 0,9 ms di 2104 N. Al momento del contatto, indicato con il pallino rosso, si registrano più picchi che oscillano intorno al valore massimo, prova che l'impatto non è avvenuto perfettamente in un punto.

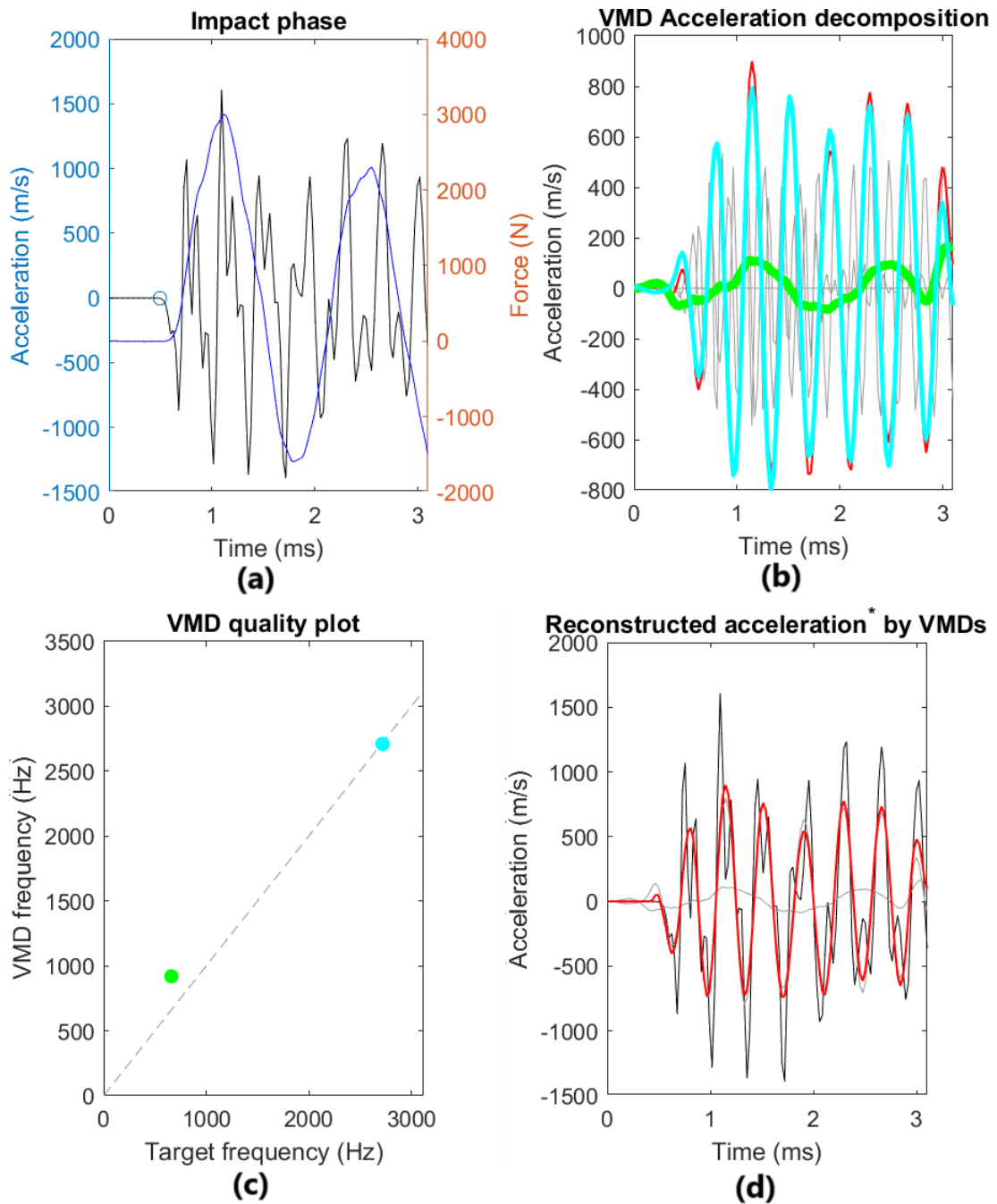


Figura 6.22: (a) Diagramma della fase di impatto per il provino C-7-A; (b) Decomposizione dell'accelerazione VMD del provino C-7-A; (c) Accuratezza dei risultati del metodo VMD per il provino C-7-A; (d) Accelerazione ricostruita con il metodo VMD del provino C-7-A

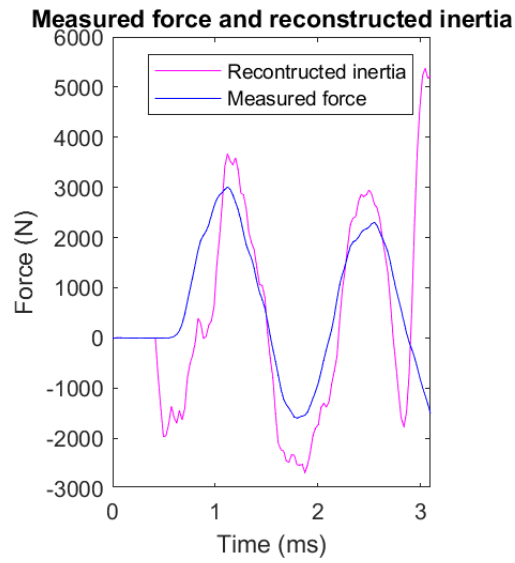


Figura 6.23: Diagramma Forza misurata - Inerzia ricostruita relativo al provino C-7-A

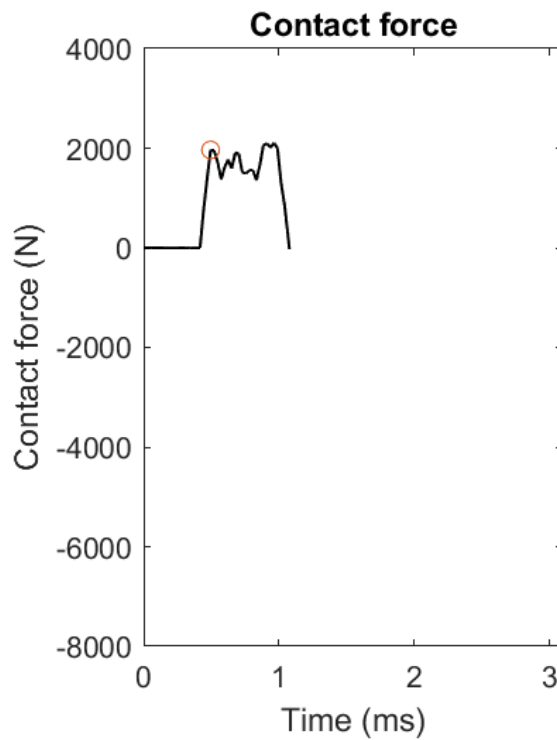


Figura 6.24: Diagramma della forza di contatto ottenuta per il provino C-7-A

Il primo contatto tra il provino e la piastra avviene in più punti lungo lo spigolo del campione [Figura 6.25 (b)]. Dopodiché il provino subisce una rotazione e vi è un secondo contatto tra lo spigolo opposto e la piastra, confermando le ipotesi avanzate nell'interpretazione del diagramma ottenuto. A causa dell'impatto vi è una sostanziale perdita di materiale a seguito per primo contatto [Figura 6.25 (c)] e del secondo [Figura 6.25 (d)]

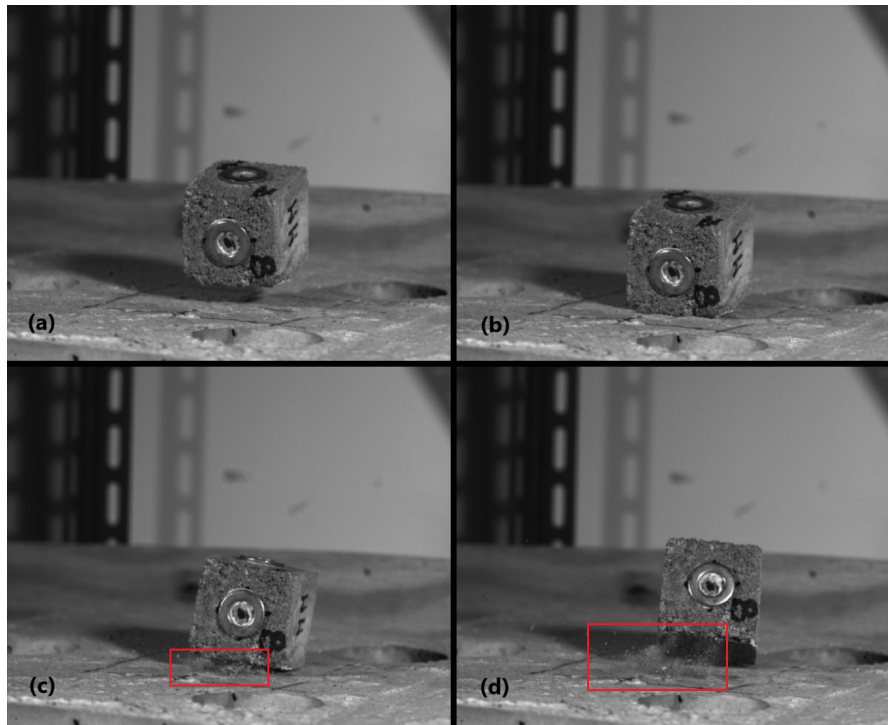


Figura 6.25: Fotogrammi acquisiti con la videocamera ad alta velocità per il provino C-7-A: (a) Istante prima del contatto; (b) Primo contatto tra provino e piastra; (c) Secondo contatto tra provino e piastra; (d) Istante dopo il contatto

6.5 Osservazioni

L'andamento dei diagrammi delle forze di contatto ottenuti per i tre campioni in esame evidenzia una sostanziale differenza legata alla forma dei corpi in caduta. Per i provini caratterizzati da una superficie sferica il grafico presenta un picco massimo con un andamento a campana. Questo fenomeno può essere legato al fatto che il contatto avviene quasi perfettamente in un punto. Nel campione di forma cubica risulta molto difficile ottenere lo stesso risultato, a causa delle rotazioni che esso subisce durante la caduta. Inoltre, il contatto ha luogo tra due superfici piane non

parallele tra di loro. Pertanto, l'impatto avviene più volte e in più punti, generando un diagramma caratterizzato dalla presenza di più picchi posti in successione. In aggiunta, l'intensità delle forze che si sviluppano durante il fenomeno è influenzata dalla massa dei provini in esame.

Capitolo 7

Confronto tra i risultati ottenuti

Nel presente capitolo si effettua un confronto dei risultati ottenuti sui campioni caratterizzati dagli stessi parametri ad eccezione di uno, con l'obiettivo di evidenziare la loro influenza sul fenomeno di impatto tra due corpi.

7.1 Confronto tra un campione sferico e uno semisferico

I campioni SP-8-T2-19-3 e SS-10-T2-19-1 sono caratterizzati dallo stesso peso, dallo stesso materiale in termini di mix design, ma da una forma diversa. Si procede quindi ad analizzare i risultati ottenuti per entrambi i provini al fine di osservare come il parametro forma influenzi il fenomeno di contatto fra i due corpi. Dal diagramma della forza e delle accelerazioni misurate [Figura 7.1] non si evidenziano grosse differenze, poiché queste grandezze oscillano tra valori simili per entrambi i provini. Le frequenze ottenute per entrambi i provini sono uguali e pari a $f_1 = 660$ Hz e $f_2 = 2820$ Hz. I valori delle masse partecipanti sono riportati nella trasformata rapida di Fourier in [Figura 7.2]. Questo si traduce in un metodo della decomposizione empirica del modo che fornisce gli stessi risultati [Figura 7.3] per entrambe le prove e, di conseguenza, l'inerzia ricostruita [Figura 7.4] e la forza di contatto [Figura 7.5] risultano essere molto simili.

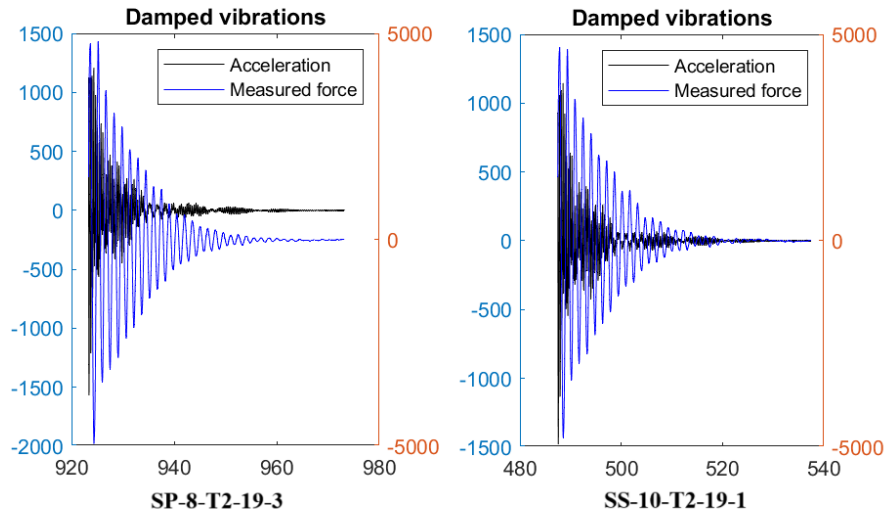


Figura 7.1: Confronto dei diagrammi di forza misurata e accelerazione tra i provini SP-8-T2-19-3 e SS-10-T2-19-1

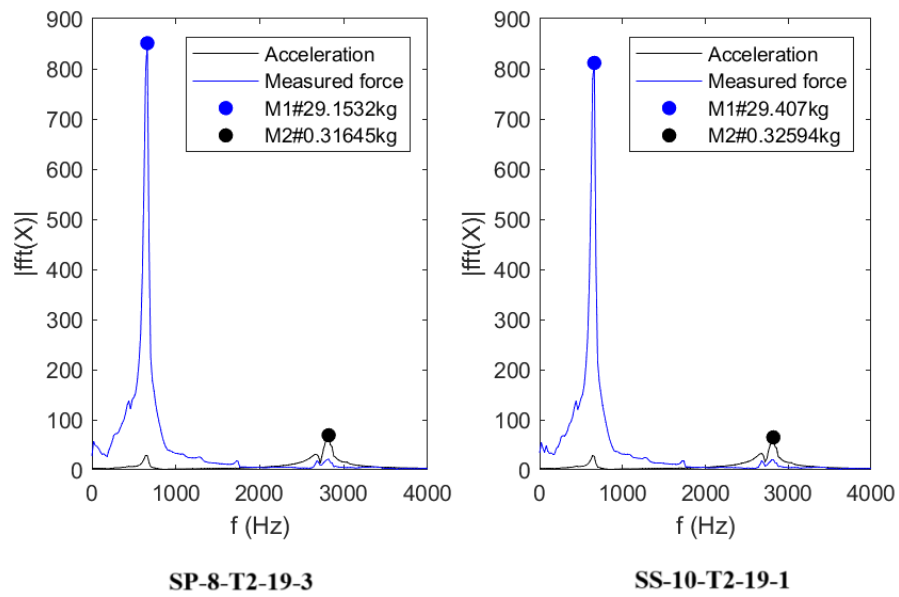


Figura 7.2: Confronto dei diagrammi della trasformata rapida di Fourier tra i provini SP-8-T2-19-3 e SS-10-T2-19-1

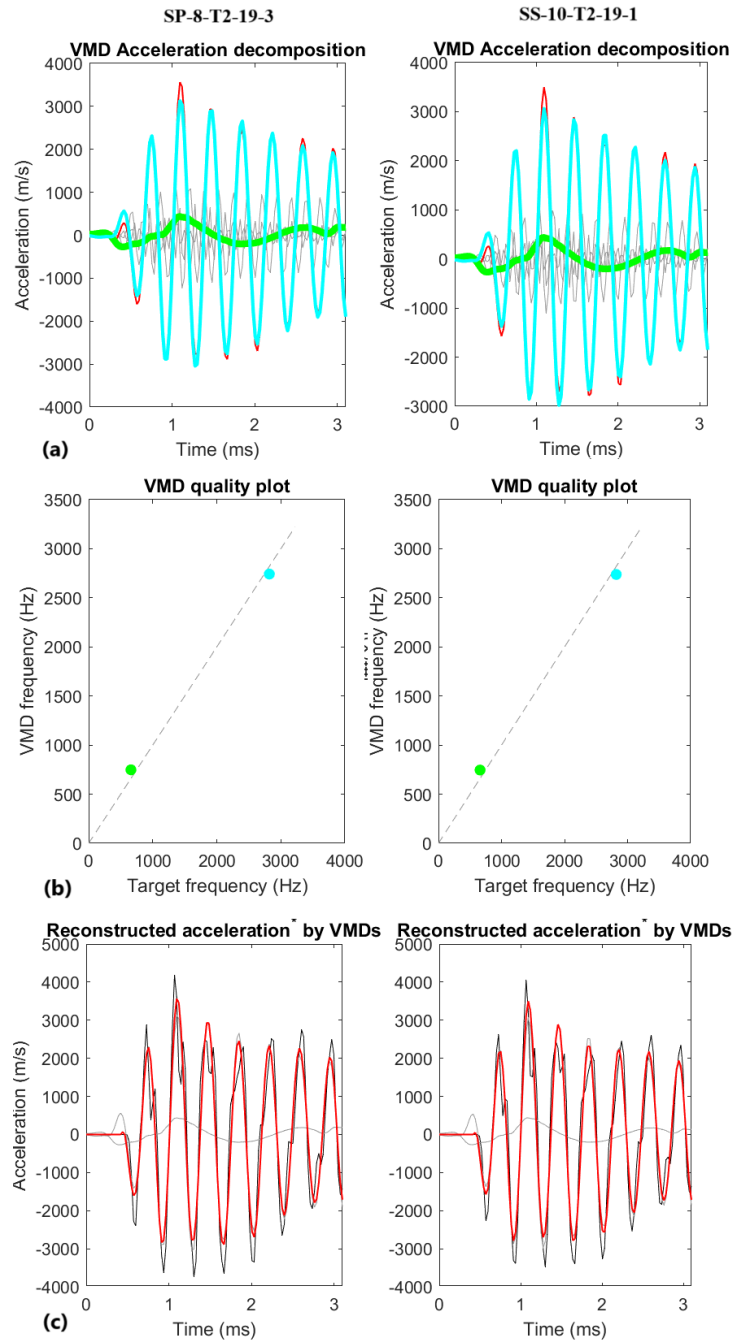


Figura 7.3: Confronto dei risultati ottenuti con il metodo VMD tra i provini SP-8-T2-19-3 e SS-10-T2-19-1: (a) Decomposizione dell'accelerazione; (b) Accuratezza dei risultati del metodo VMD; (c) Accelerazione ricostruita con il metodo VMD

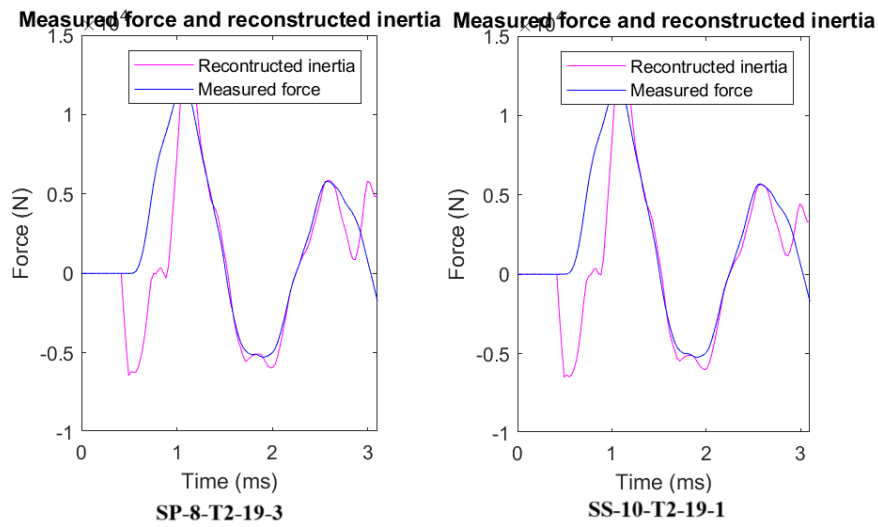


Figura 7.4: Confronto dei diagrammi forza misurata - inerzia ricostruita tra i provini SP-8-T2-19-3 e SS-10-T2-19-1

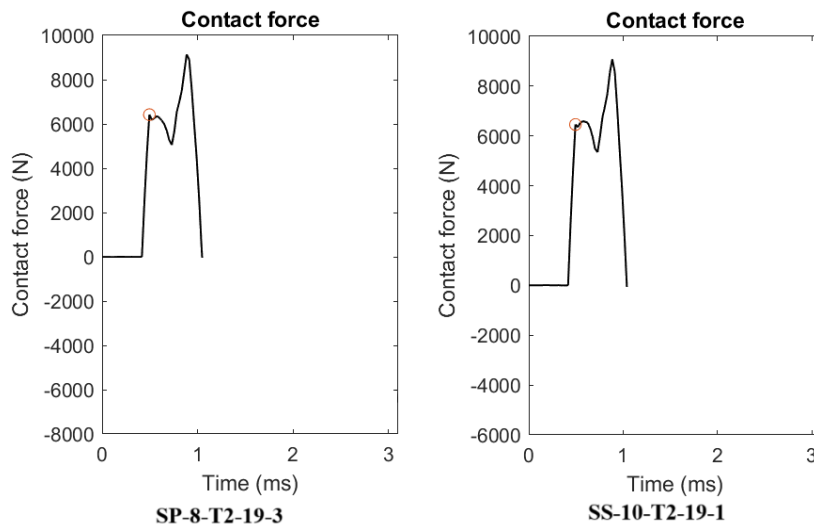


Figura 7.5: Confronto dei diagrammi della forza di contatto tra i provini SP-8-T2-19-3 e SS-10-T2-19-1

L'andamento dei diagrammi evidenzia il momento del contatto caratterizzato da valori di picco molto elevati, pari a 9100 N per entrambi i provini. Non si registrano ulteriori picchi elevati, poiché a seguito dell'impatto i campioni hanno subito un rimbalzo. Il simile andamento dei diagrammi ottenuti può essere legato al fatto che, sebbene i provini abbiano forma diversa, il punto di contatto è quello di una superficie sferica, con raggio di curvatura non molto diverso. Inoltre, entrambi i

corpi sono caratterizzati dallo stesso peso, i cui valori influenzano l'energia cinetica che si sviluppa durante la caduta libera. A differire nelle due prove è l'altezza di caduta, poiché è influenzata dalla dimensione del provino. Per il campione SP-8-T2-19-3 l'altezza di caduta è pari a 138,2 cm; mentre, per il SS-10-T2-19-1 è di 141,2 cm. Pertanto, le due velocità di impatto sono simili tra di loro e rispettivamente pari a 5,20 m/s e 5,26 m/s. Poiché la velocità e la massa sono i due parametri che influenzano maggiormente il fenomeno, poiché condizionano l'energia cinetica accumulata in caduta, il risultato ottenuto è piuttosto ragionevole. L'assenza di ulteriori picchi a seguito dell'impatto indica che il contatto tra i due corpi è avvenuto quasi perfettamente in un solo punto.

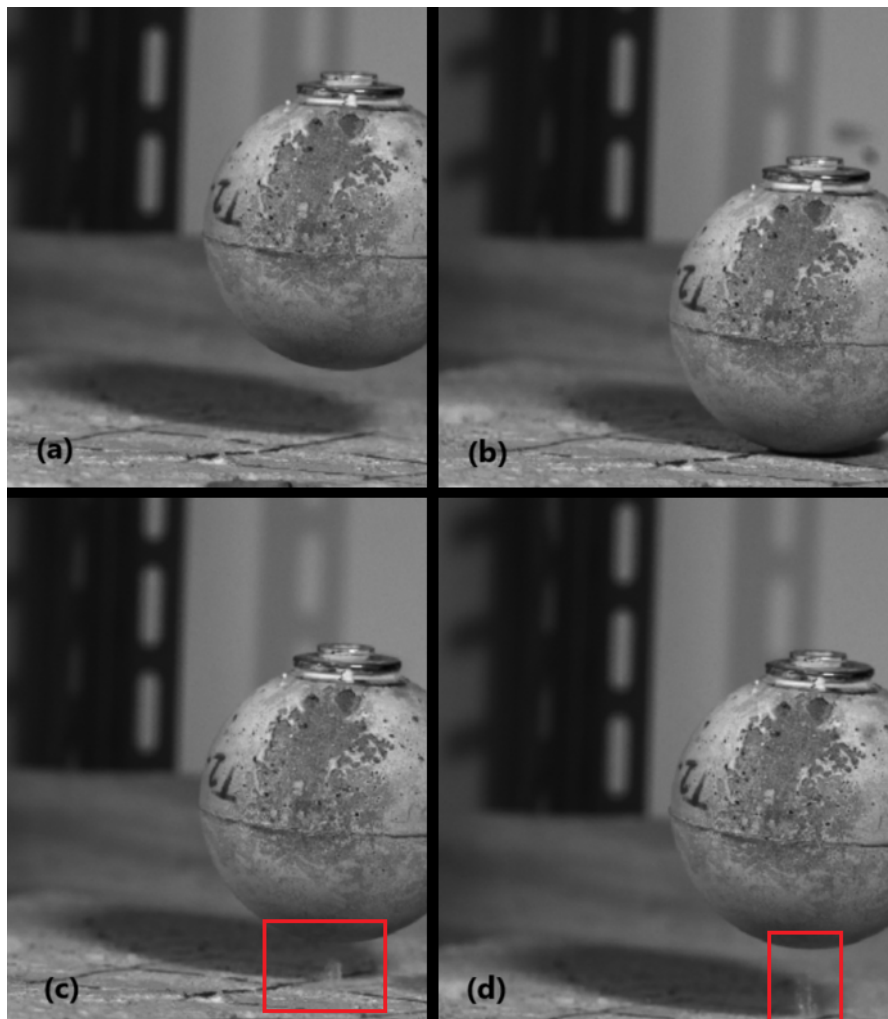


Figura 7.6: Fotogrammi acquisiti con la videocamera ad alta velocità per il provino SP-8-T2-19-3: (a) Istante prima del contatto; (b) Momento del contatto; (c)-(d) Momento dopo il contatto

Tale ipotesi può essere confermata dai fotogrammi acquisiti, riportati in [Figura 7.6] per il provino SP-8-T2-19-3 e in [Figura 7.7] per SS-10-T2-19-1. Il punto di contatto tra piastra e provino è visibile in [Figura 7.6 (b)] e [Figura 7.7 (b)] e tale momento corrisponde ai picchi massimi ottenuti nei diagrammi delle forze di contatto. In entrambi i test si può notare perdita di materiale a seguito dell'impatto, evidenziata dai riquadri rossi in [Figura 7.6 (c)-(d)] e [Figura 7.7 (c)-(d)] .

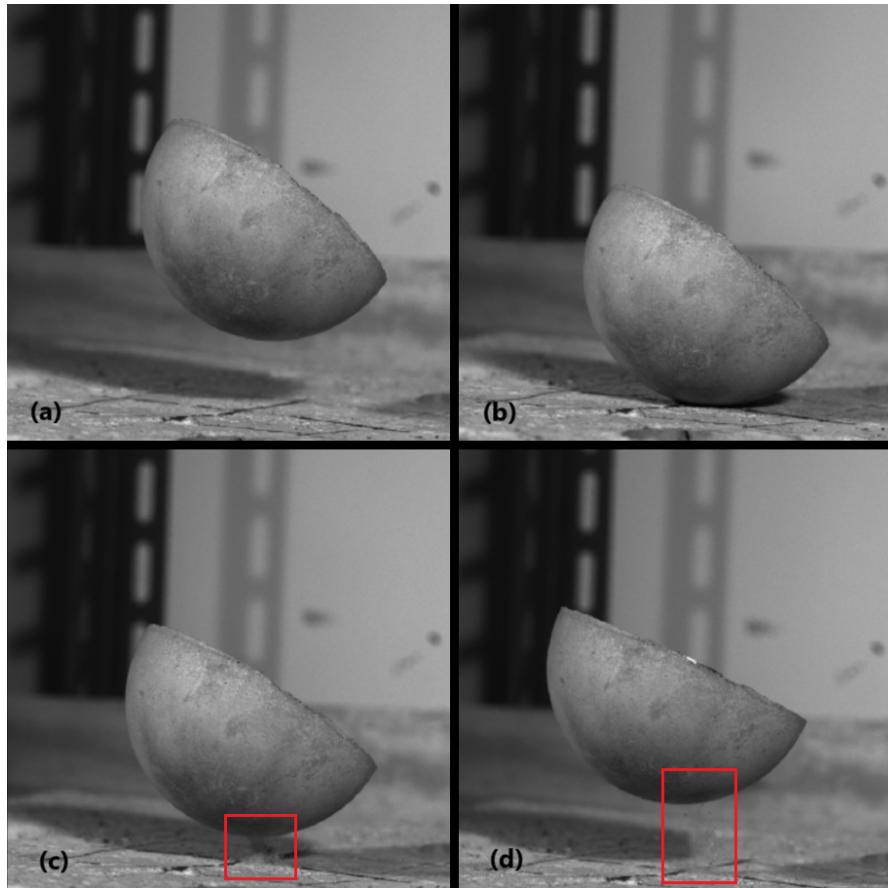


Figura 7.7: Fotogrammi acquisiti con la videocamera ad alta velocità per il provino SS-10-T2-19-1: (a) Istante prima del contatto; (b) Momento del contatto; (c)-(d) Momento dopo il contatto

7.2 Confronto tra un campione cubico e uno semisferico

Nel paragrafo precedente è stato evidenziato come provini caratterizzati da una forma diversa possano fornire gli stessi risultati, poiché il contatto avviene tra una superficie piana e una sferica in entrambi i test. Si analizzano quindi un provino dalla forma cubica C-8-A e uno di forma semisferica SS-10-T2-19-2, caratterizzati da un peso simile. La velocità raggiunta dai due campioni è di 5,26 m/s con un'altezza di caduta pari a 141 cm per il provino cubico e 141,2 cm per quello semisferico. La prima osservazione riguarda le forze e le accelerazioni misurate, che risultano essere molto inferiori nel provino di forma cubica [Figura 7.8].

I valori di frequenza ottenuti per il campione C-8-A sono $f_1 = 660$ Hz e $f_2 = 2720$ Hz con le due masse partecipanti relative rispettivamente alla forza misurata e all'accelerazione pari a $m_1 = 27,85$ kg e $m_2 = 0,14$ kg. Nel secondo provino le frequenze valgono $f_1 = 660$ Hz e $f_2 = 28,99$ Hz e le masse partecipanti $m_1 = 28,99$ kg e $m_2 = 0,32$ kg. Tali dati sono riportati nella trasformata rapida di Fourier in [Figura 7.9]

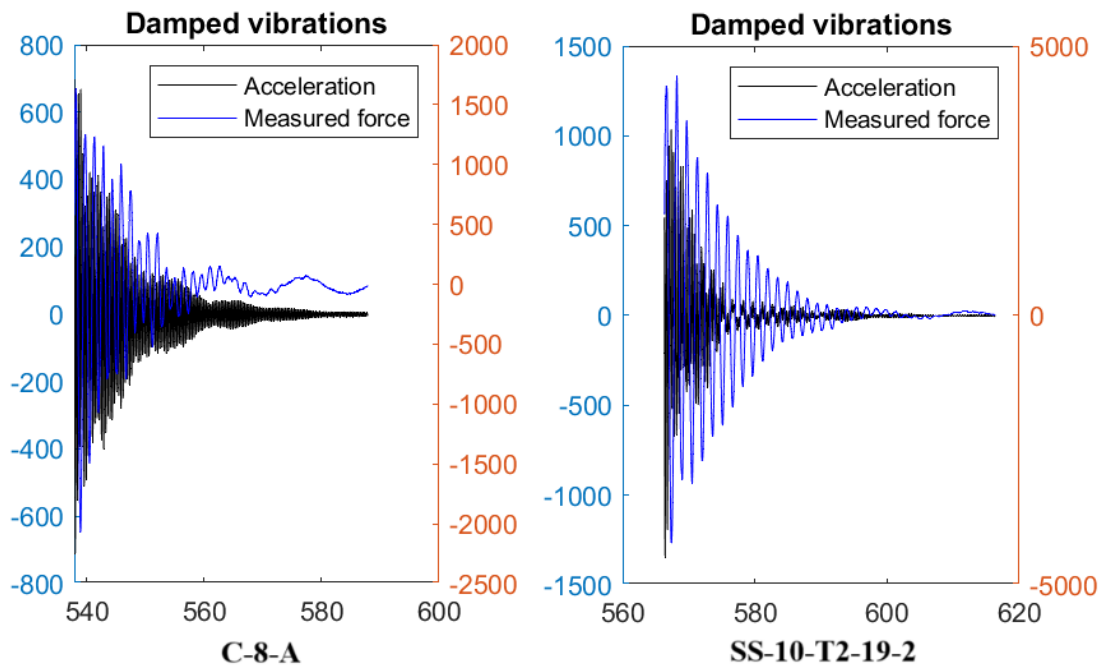


Figura 7.8: Confronto dei diagrammi di forza misurata e accelerazione tra i provini C-8-A e SS-10-T2-19-2

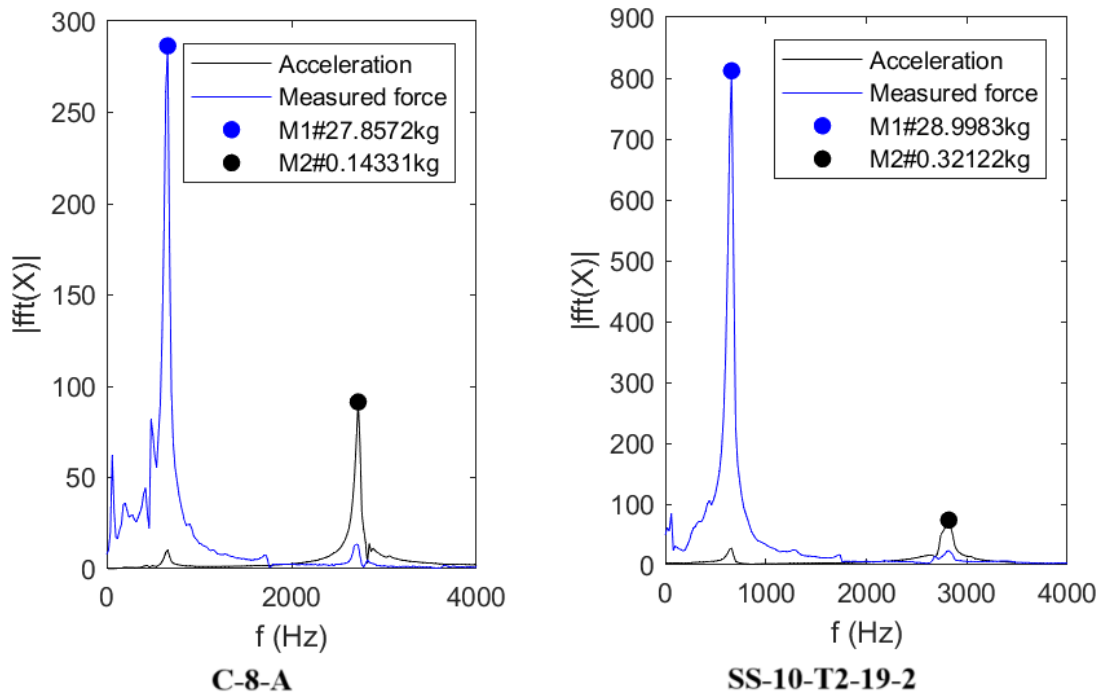


Figura 7.9: Confronto dei diagrammi della trasformata rapida di Fourier tra i provini C-8-A e SS-10-T2-19-2

Dall'applicazione del metodo di decomposizione empirica del modo [Figura 7.10] si ottengono risultati diversi per le due prove in esame, con valori dimezzati per il provino di forma cubica.

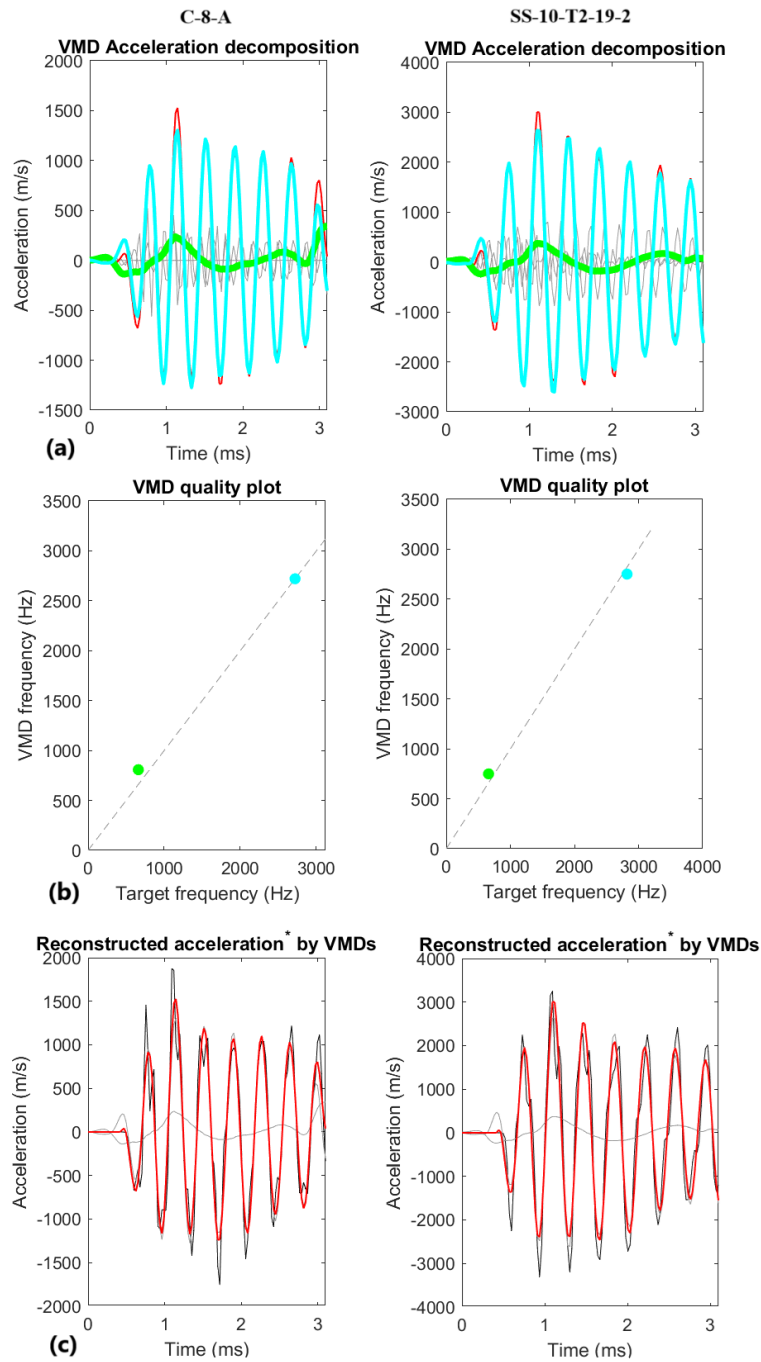


Figura 7.10: Confronto dei risultati ottenuti con il metodo VMD tra i provini C-8-A e SS-10-T2-19-2: (a) Decomposizione dell'accelerazione; (b) Accuratezza dei risultati del metodo VMD; (c) Accelerazione ricostruita con il metodo VMD

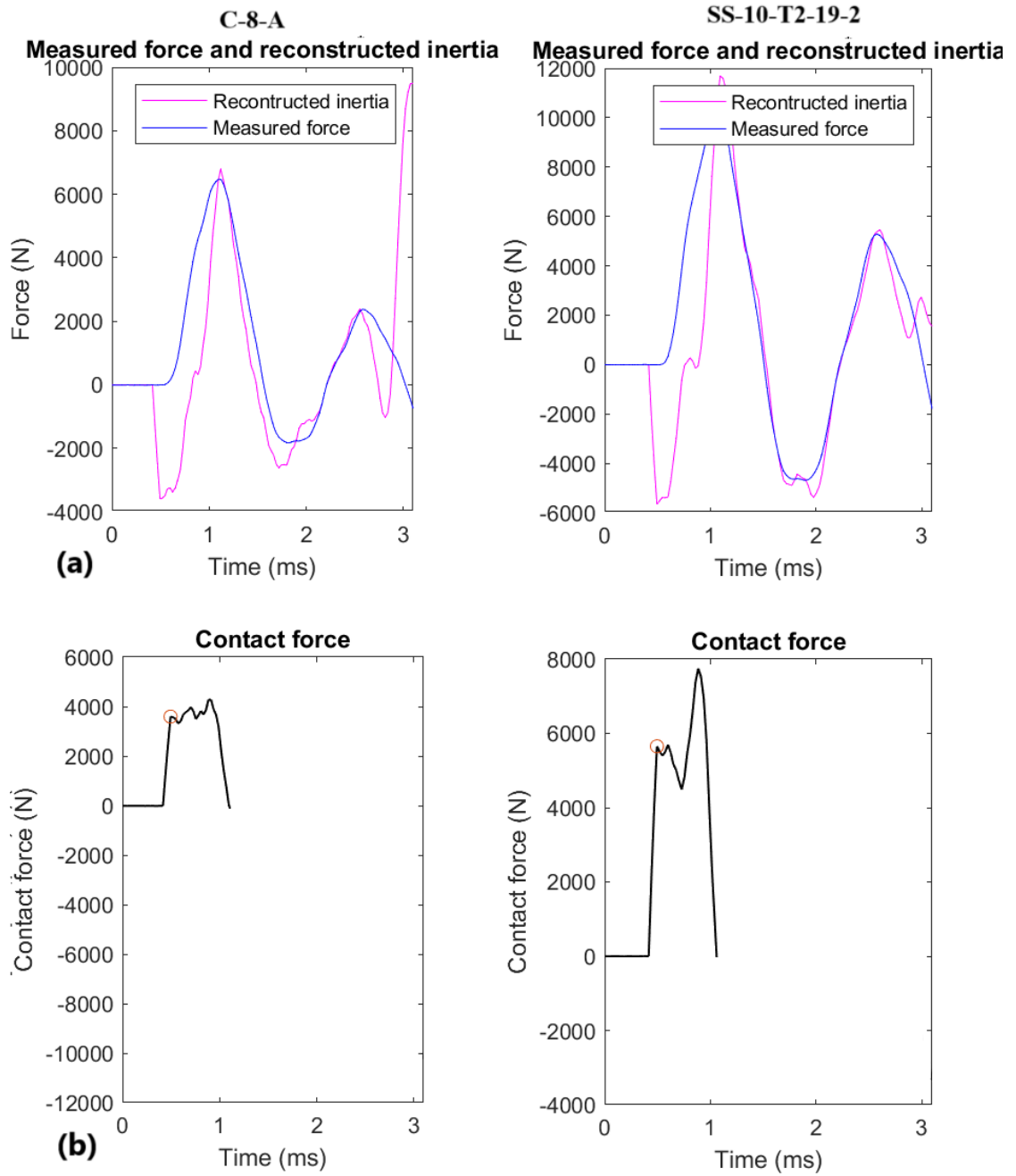


Figura 7.11: Confronto dei diagrammi dell'inerzia ricostruita (a) e della forza di contatto (b) tra i provini C-8-A e SS-10-T2-19-2

L'andamento del diagramma delle forze di contatto [Figura 7.11] in questo caso presenta delle sostanziali differenze. L'intensità massima della forza di contatto nel provino cubico a 0,9 ms è pari a 4277 N contro i 7746 N ottenuti per quello semisferico. Tuttavia, è possibile osservare che nel primo caso il grafico è caratterizzato dalla presenza di più picchi intorno al valore massimo. Questo potrebbe essere provocato da un secondo contatto tra campione e piastra, con possibile riduzione della massa a causa delle fratture subite. Pertanto, si procede con l'analisi delle immagini acquisite per risalire alle cause di tale fenomeno, riportate in [Figura 7.12] per il provino cubico C-8-A-1 e in [Figura 7.13]. Si può notare che a seguito del primo impatto [Figura 7.12 (b)] il campione subisce una perdita di materiale con frammentazione (riquadro rosso) e un rotolamento, provocando un secondo contatto tra provino e piastra [Figura 7.12 (c)]. Inoltre, il contatto in entrambi i casi non avviene perfettamente in un punto, ma in più punti lungo lo spigolo del campione.

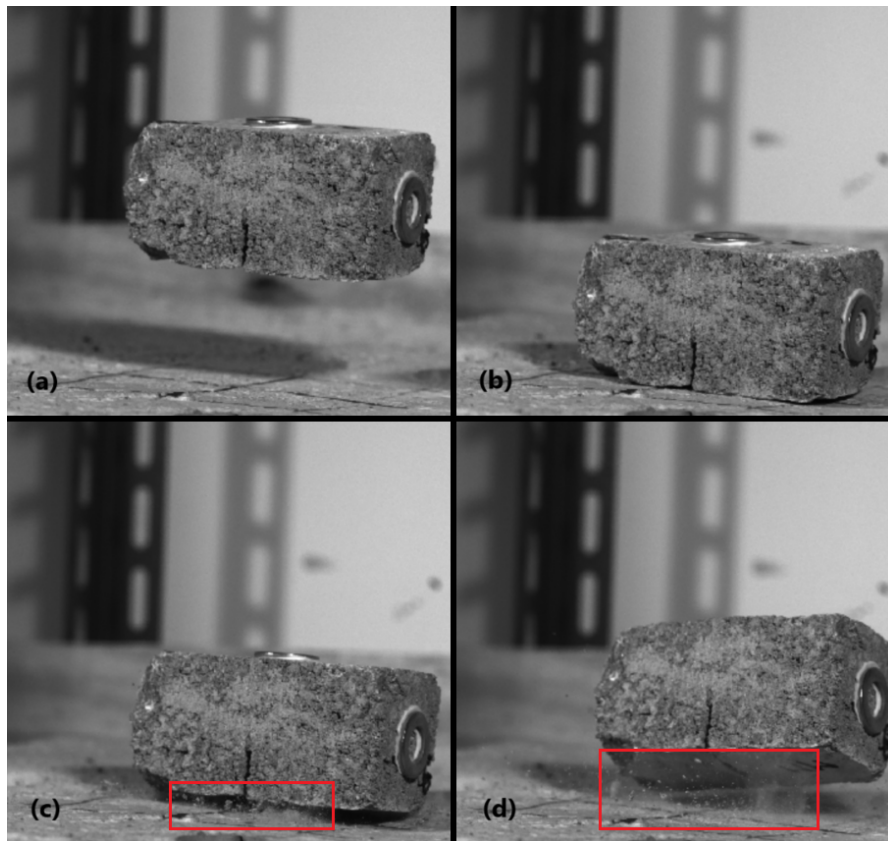


Figura 7.12: Fotogrammi acquisiti con la videocamera ad alta velocità per il provino C-8-A: (a) Istante prima del contatto; (b) Primo contatto tra campione e piastra; (c) Secondo contatto tra campione e piastra; (d) Istante dopo il contatto

L'impatto tra il provino semisferico SS-10-T2-19-2 e la piastra avviene quasi perfettamente in un punto della superficie [Figura 7.13 (c)] con una minima perdita di materiale (riquadro in rosso) lato piastra, poiché a seguito del test il provino non ha subito perdita di peso.

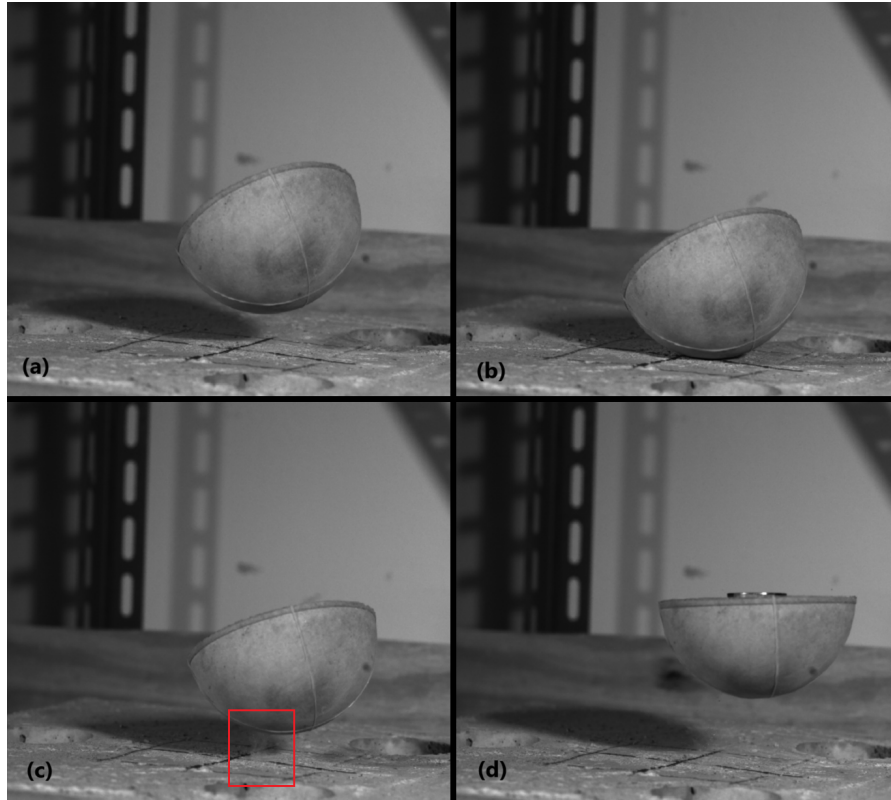


Figura 7.13: Fotogrammi acquisiti con la videocamera ad alta velocità per il provino SS-10-T2-19-2: (a) Istante prima del contatto; (b) Momento del contatto; (c)-(d) Istante dopo il contatto

7.3 Confronto tra due campioni sferici caratterizzati da materiale diverso

Si analizzano i due provini SS-6-T1-2 e SS-6-T2-1 caratterizzati dalla stessa forma, diametro e peso, ma composti da mix design di calcestruzzo diverso. A seguito del primo test entrambi i campioni non esibiscono una riduzione di peso, indice che non vi è stata alcuna frattura locale con perdita di massa. L'altezza di caduta per entrambi i provini è uguale a 143,2 cm ed entrambi raggiungono una velocità di 5,30 m/s. Per l'analisi con il software MatLab sono stati modificati i parametri iniziali, al fine di ottenere la convergenza dei risultati con il metodo della decomposizione variabile del modo VMD; pertanto, è stato impostato un numero di sottocampioni a seguito dell'impatto pari a 136. Le frequenze ottenute per entrambi i provini sono pari a $f_1 = 660$ Hz e $f_2 = 2740$ Hz. Le masse partecipanti, riportate nella trasformata rapida di Fourier [Figura 7.15] sono pressoché simili. L'applicazione del metodo della decomposizione variabile del modo [Figura 7.17] fornisce risultati attendibili per entrambi i provini, caratterizzati dallo stesso margine di errore.

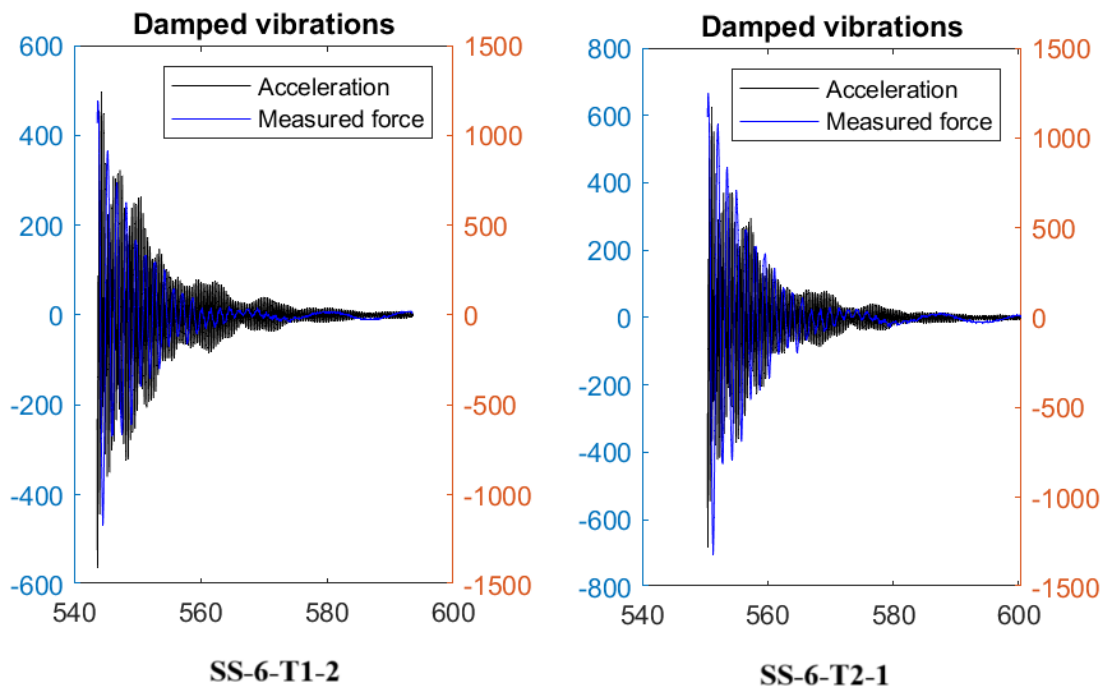


Figura 7.14: Confronto dei diagrammi di forza misurata e accelerazione tra i provini SS-6-T1-2 e SS-6-T2-1

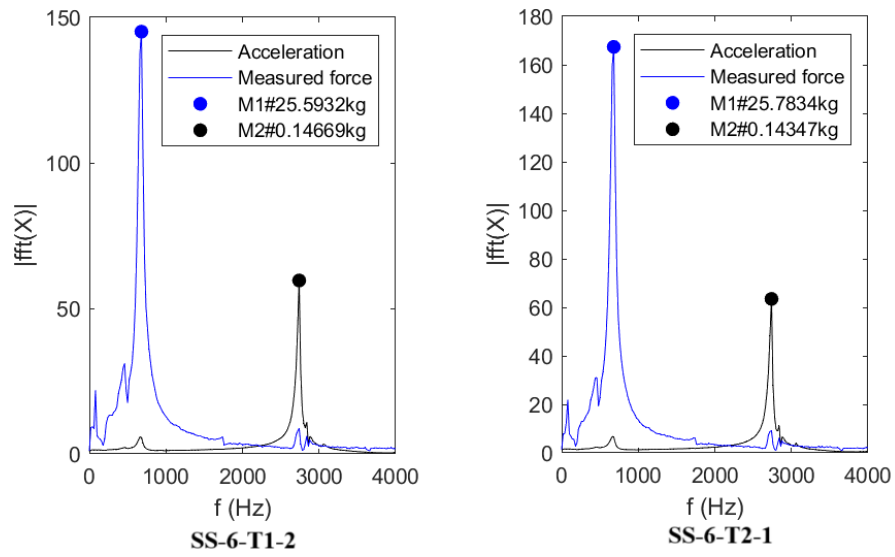


Figura 7.15: Confronto dei diagrammi della trasformata rapida di Fourier tra i provini SS-6-T1-2 e SS-6-T2-1

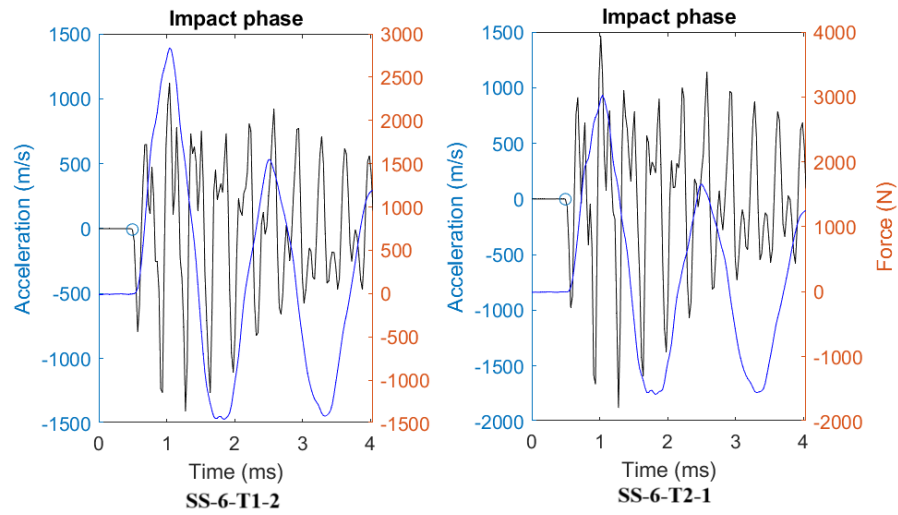


Figura 7.16: Confronto dei diagrammi della fase di impatto tra i provini SS-6-T1-2 e SS-6-T2-1

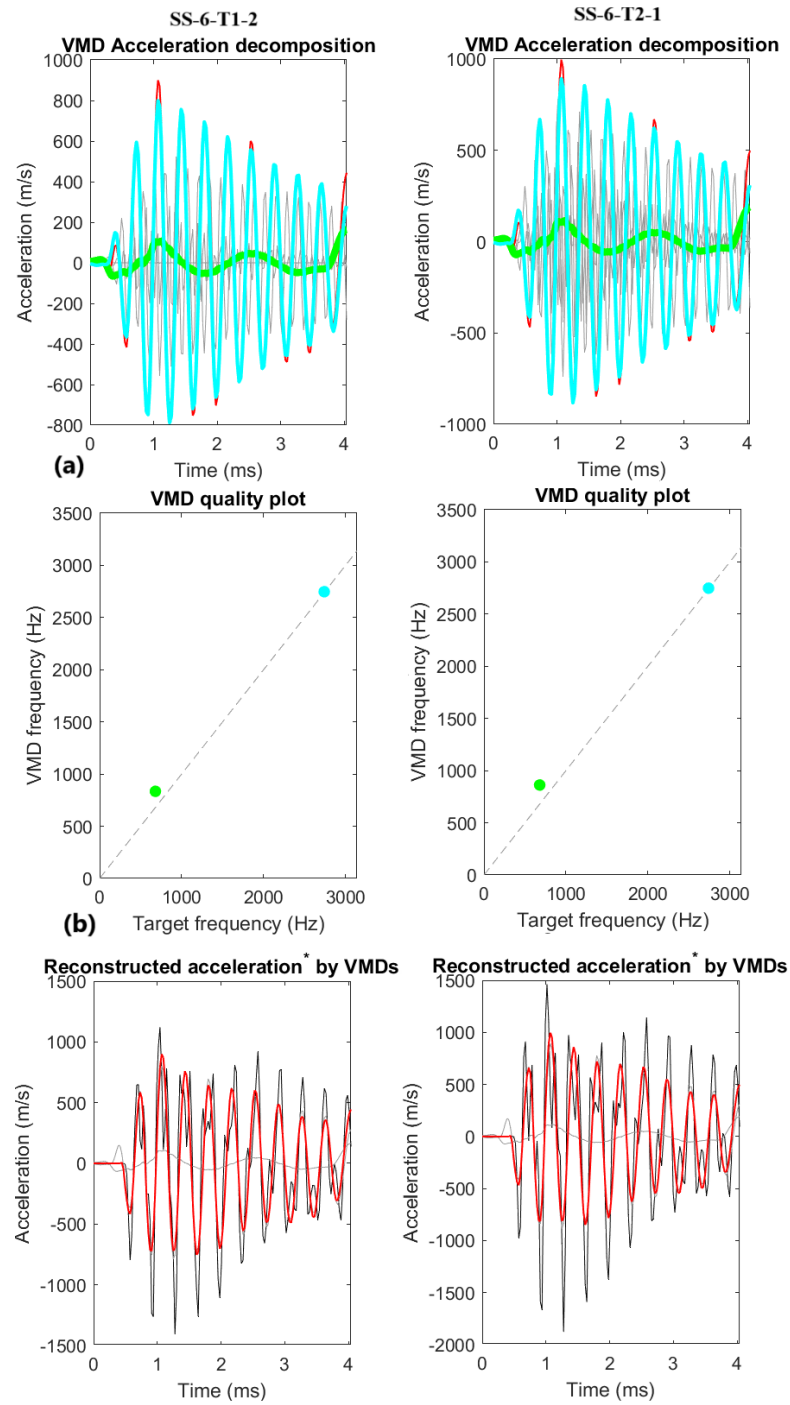


Figura 7.17: Confronto dei risultati ottenuti con il metodo VMD tra i provini SS-6-T1-2 e SS-6-T2-1: (a) Decomposizione dell'accelerazione; (b) Accuratezza dei risultati del metodo VMD; (c) Accelerazione ricostruita con il metodo VMD

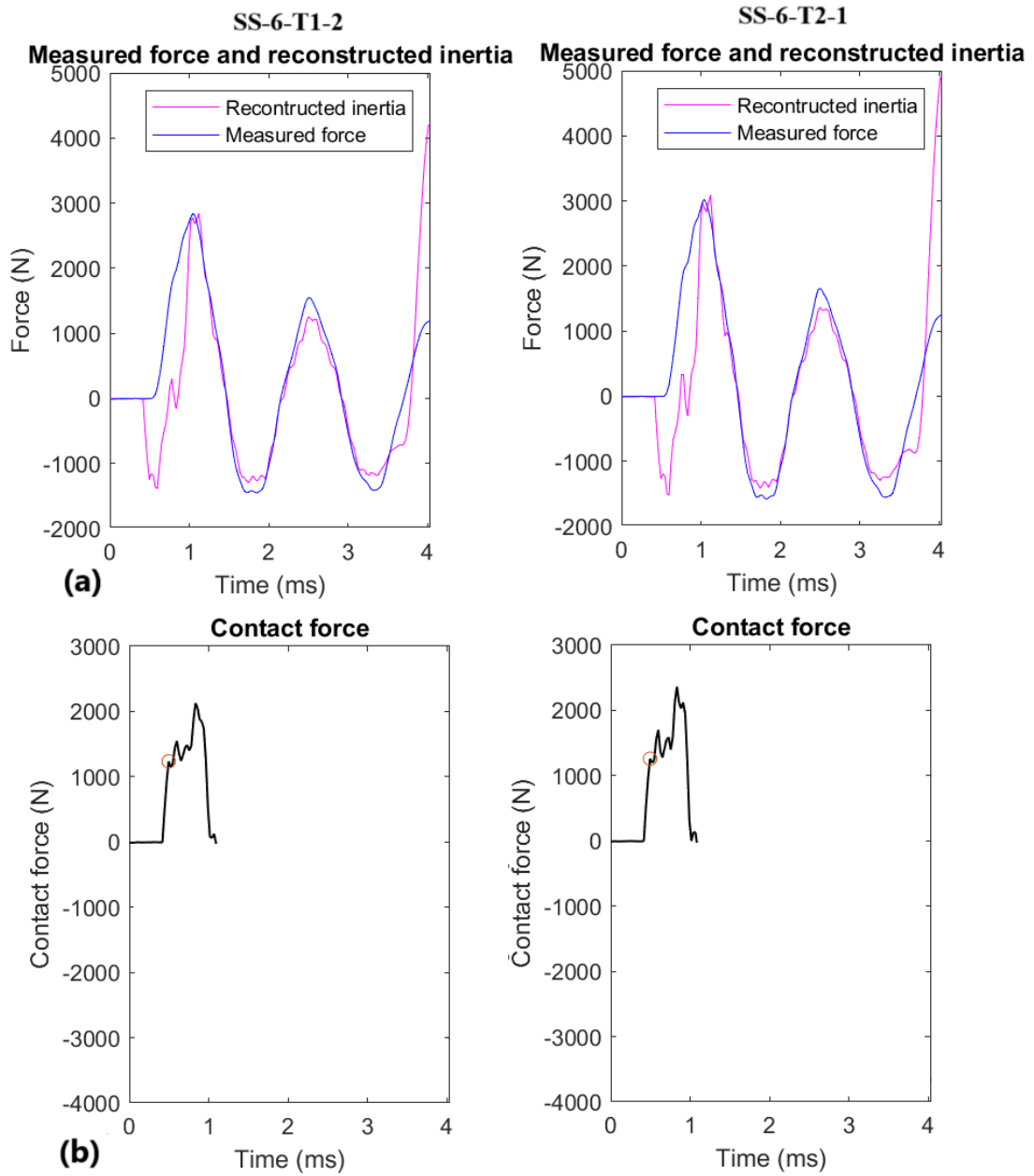


Figura 7.18: Confronto dei diagrammi dell'inerzia ricostruita (a) e della forza di contatto (b) tra i provini SS-6-T1-2 e SS-6-T2-1

I diagrammi delle forze di contatto [Figura 7.18] hanno un andamento simile per entrambi i provini, con un valore massimo di 2128,2 N per il primo campione e di 2363,4 N per il secondo. Pertanto, non si riscontrano sostanziali differenze nelle forze di impatto determinate per due provini caratterizzati da mix design diversi di

calcestruzzo. Come accennato nei precedenti paragrafi, ciò che realmente influenza il fenomeno di impatto tra due corpi è la massa e la velocità con cui entrano in collisione. Nel caso in esame a differenziare è solo la resistenza a compressione del calcestruzzo, che non condiziona le forze di contatto. In [Figura 7.19] si riportano i fotogrammi acquisiti per il provino SS-6-T1-2 e in [Figura 7.20] quelli relativi a SS-6-T2-1. Il contatto avviene quasi perfettamente in un punto e una sola volta tra la superficie sferica e quella piana per entrambi i test con una perdita minima di materiale lato piastra, poiché entrambi i campioni non registrano una diminuzione del peso a seguito della prova.

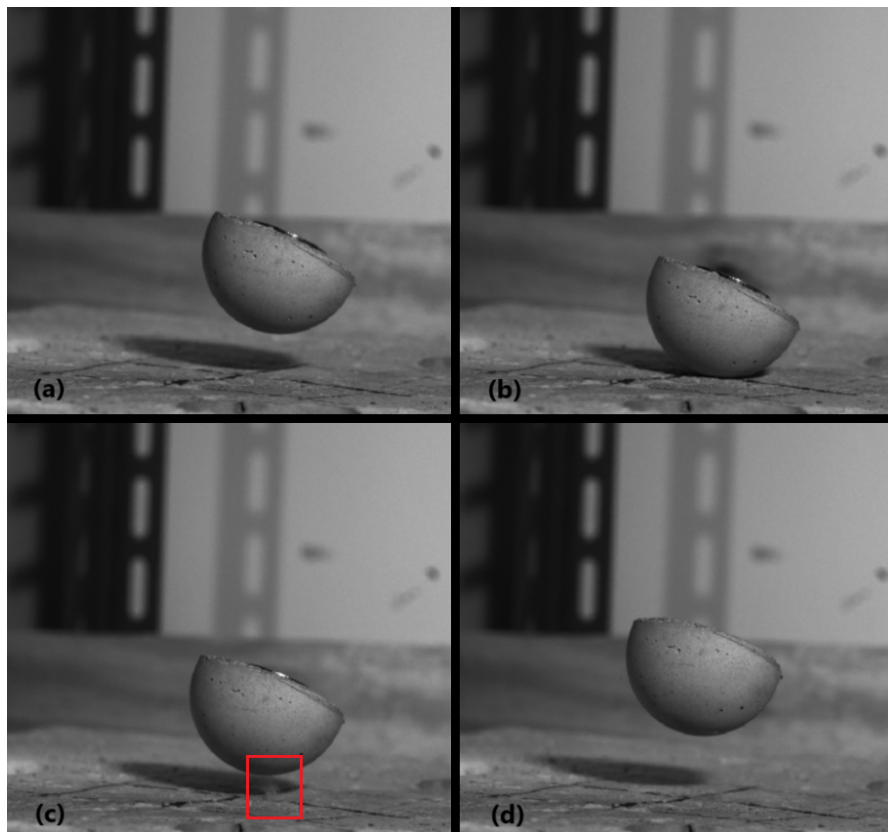


Figura 7.19: Fotogrammi acquisiti con la videocamera ad alta velocità per il provino SS-6-T1-2: (a) Istante prima del contatto; (b) Istante del contatto; (c)-(d) Istante dopo il contatto

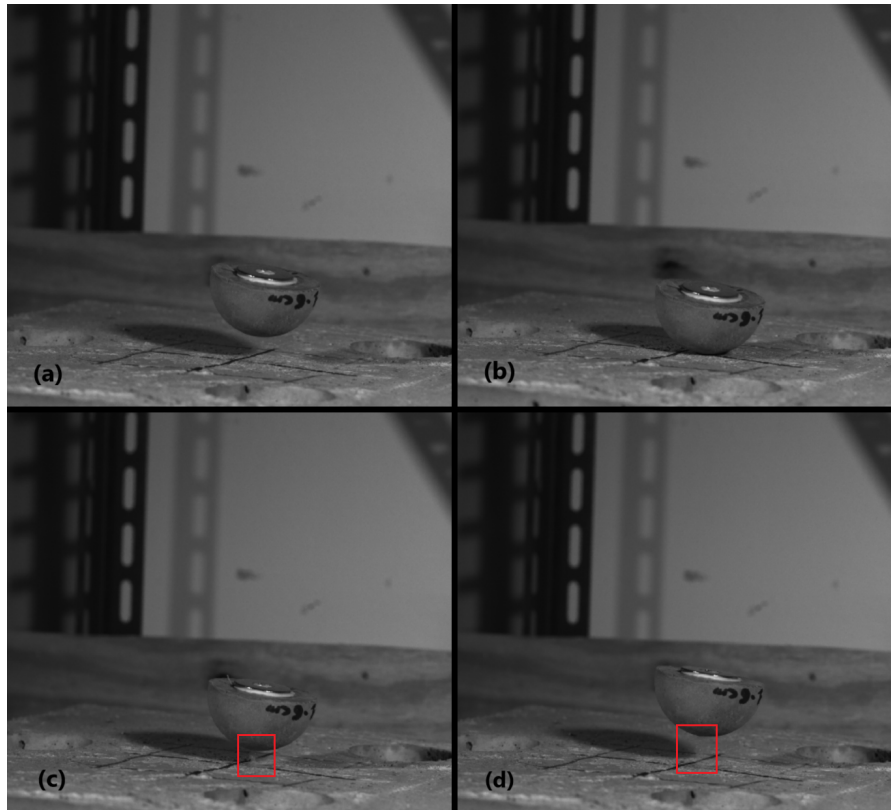


Figura 7.20: Fotogrammi acquisiti con la videocamera ad alta velocità per il provino SS-6-T2-1: (a) Istante prima del contatto; (b) Istante del contatto; (c)-(d) Istante dopo il contatto

7.4 Confronto tra due campioni cubici con diversa altezza di caduta

Si analizzano due provini di forma cubica caratterizzati dalle stesse dimensioni e peso, ma orientati in modo diverso così da modificare l'altezza di caduta durante la prova e individuarne gli effetti sulla definizione delle forze di contatto. Il campione C-8-A ha una rondella metallica posizionata sulla superficie di lati 5,2 cm e 10,3 cm; quindi, l'altezza di caduta è pari a 141 cm e la velocità al momento dell'impatto è di 5,26 m/s; mentre, il provino cubico C-8-B ha una rondella sulla superficie di lati pari a 5,2 cm, l'altezza di caduta è di 135,9 cm e si sviluppa una velocità di 5,16 m/s.

Dall'andamento dei diagrammi di accelerazione e forza misurate [Figura 7.21] si può notare che i valori ottenuti per il provino con l'altezza di caduta maggiore (C-8-A) oscillano intorno a valori pari a circa due volte rispetto all'altro campione.

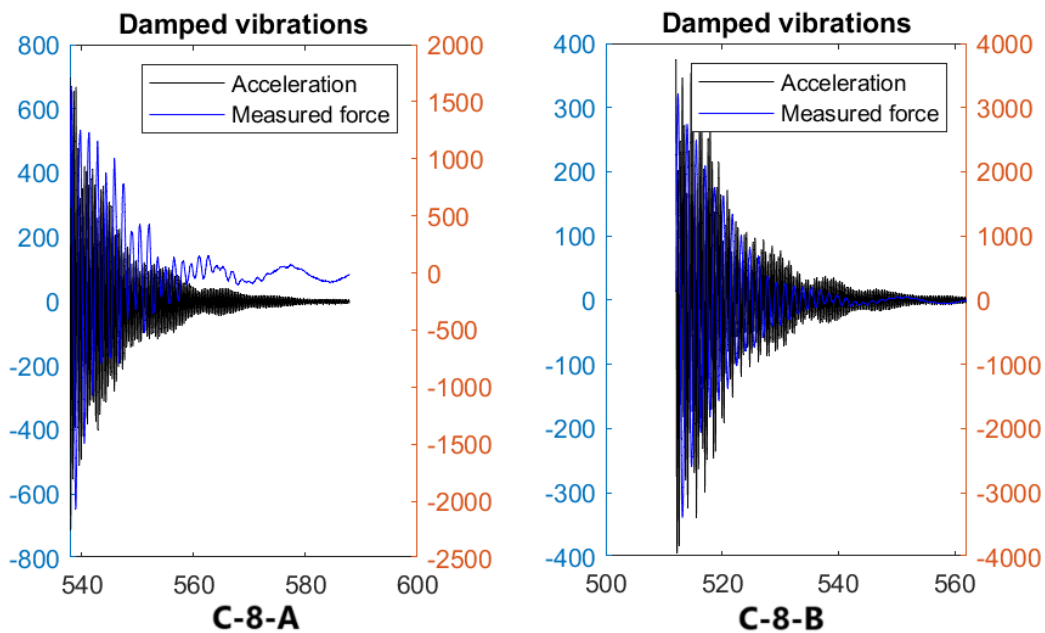


Figura 7.21: Confronto dei diagrammi di forza misurata e accelerazione tra i provini C-8-A e C-8-B

Le frequenze ottenute sono pari a $f_1 = 660$ Hz e $f_2 = 2740$ Hz per entrambi i campioni. Le masse partecipanti sono riportati nel diagramma della trasformata rapida di Fourier in [Figura 7.22]. Analizzando i grafici ottenuti per la fase di impatto, si osserva che i valori relativi all'accelerazione e alla forza presentano valori di picco più elevati per il provino C-8-A [Figura 7.23].

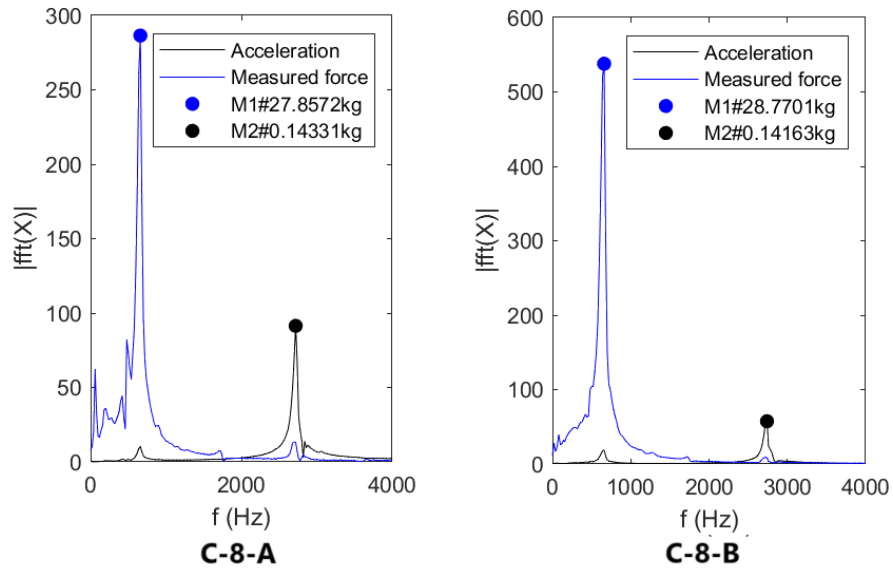


Figura 7.22: Confronto dei diagrammi della trasformata rapida di Fourier tra i provini C-8-A e C-8-B

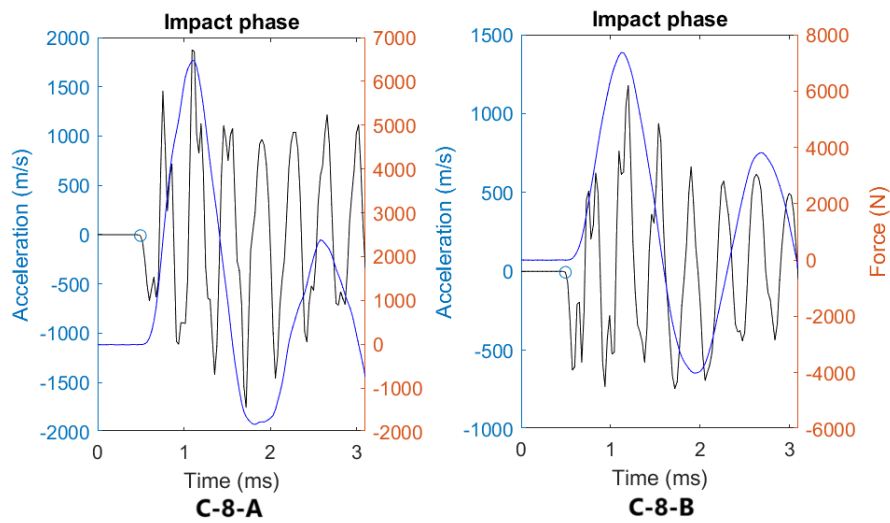


Figura 7.23: Confronto dei diagrammi della fase di impatto tra i provini C-8-A e C-8-B

L'applicazione del metodo della decomposizione variabile del modo fornisce risultati affidabili per entrambi i campioni, con valori di picco più elevati per il provino C-8-A, come mostrato in [Figura 7.24].

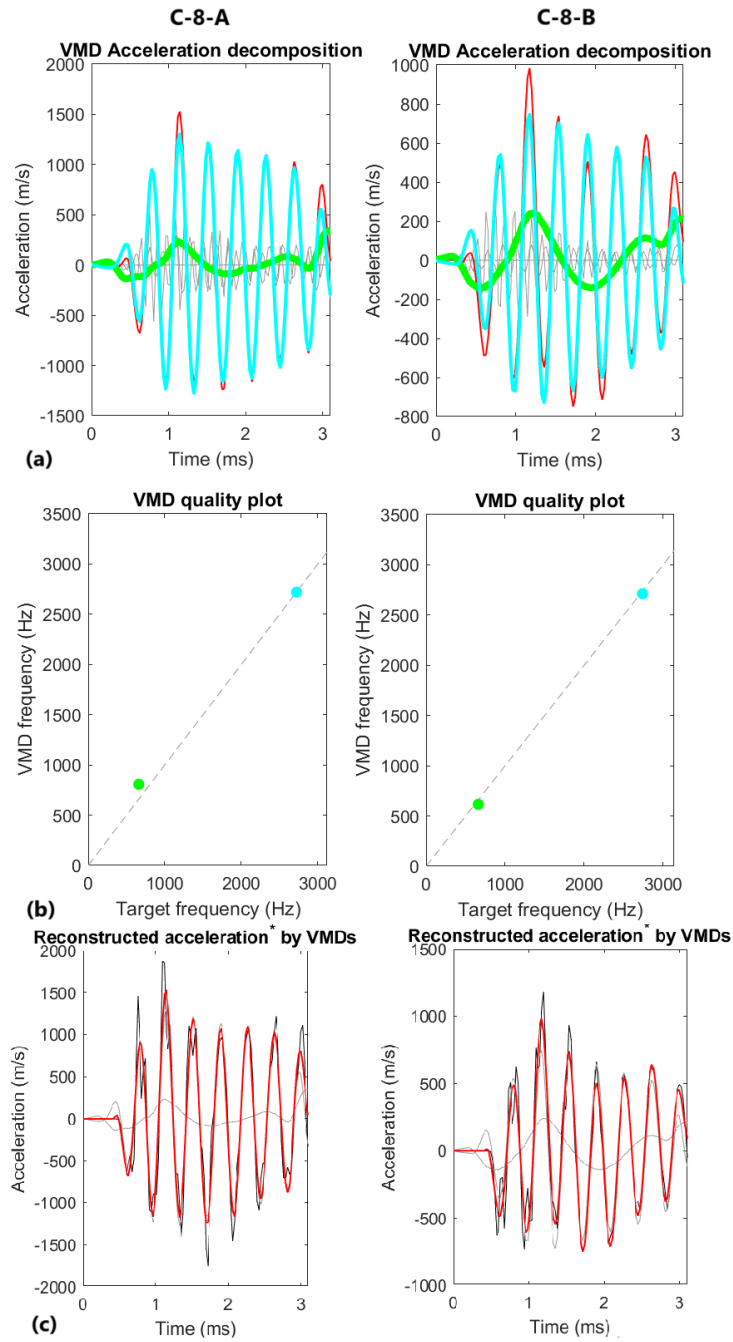


Figura 7.24: Confronto dei risultati ottenuti con il metodo VMD tra i provini C-8-A e C-8-B: (a) Decomposizione dell'accelerazione; (b) Accuratezza dei risultati; (c) Ricostruzione dell'accelerazione

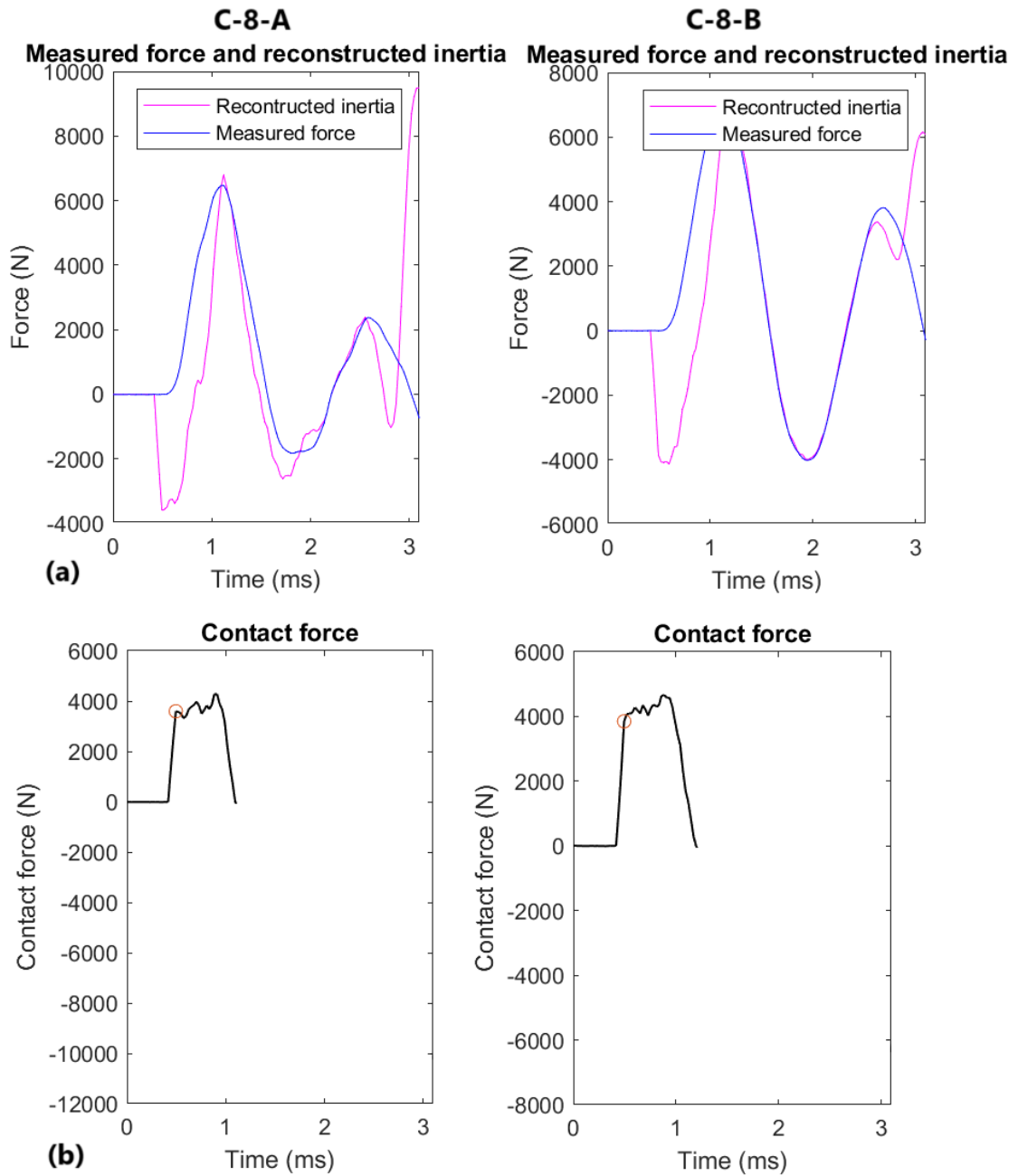


Figura 7.25: Confronto dei diagrammi dell'inertza ricostruita (sopra) e della forza di contatto (sotto) tra i provini C-8-A e C-8-B

Il provino C-8-A al momento dell'impatto ha una forza massima di 4277 N; mentre, il campione C-8-B di 4665 N. Sebbene l'altezza di caduta sia inferiore per

il secondo campione, si sviluppa una forza di contatto più elevata. Al momento del contatto del provino C-8-B, indicato con il pallino rosso, si registrano più picchi che oscillano intorno al valore massimo, prova che l'impatto non è avvenuto perfettamente in un punto. A conferma di tale ipotesi, i fotogrammi acquisiti con videocamera ad alta velocità evidenziano che l'impatto è avvenuto tra la base inferiore del provino [Figura 7.26 (b)] e la piastra. Il campione presentava una discontinuità nel volume, in corrispondenza della quale si è sviluppata una fessura, provocandone la completa rottura. Pertanto, a seguito della prova non è stato possibile effettuare la pesatura del campione per determinare la riduzione di peso. Tuttavia, dalle [Figure 7.26 (c) e (d)] è possibile stabilire che durante l'impatto sono avvenute delle fratture locali nell'interfaccia provino-piastra con conseguente riduzione della massa.

Per l'analisi dei fotogrammi relativi al provino C-8-A si rimanda alla [Figura 7.12] illustrata nei precedenti paragrafi. La zona in cui avviene l'impatto tra il provino C-8-B e la piastra è inferiore rispetto a quella del campione C-8-A; pertanto, all'interfaccia si sviluppa una forza maggiore, ottenendo un valore più elevato della forza di contatto.

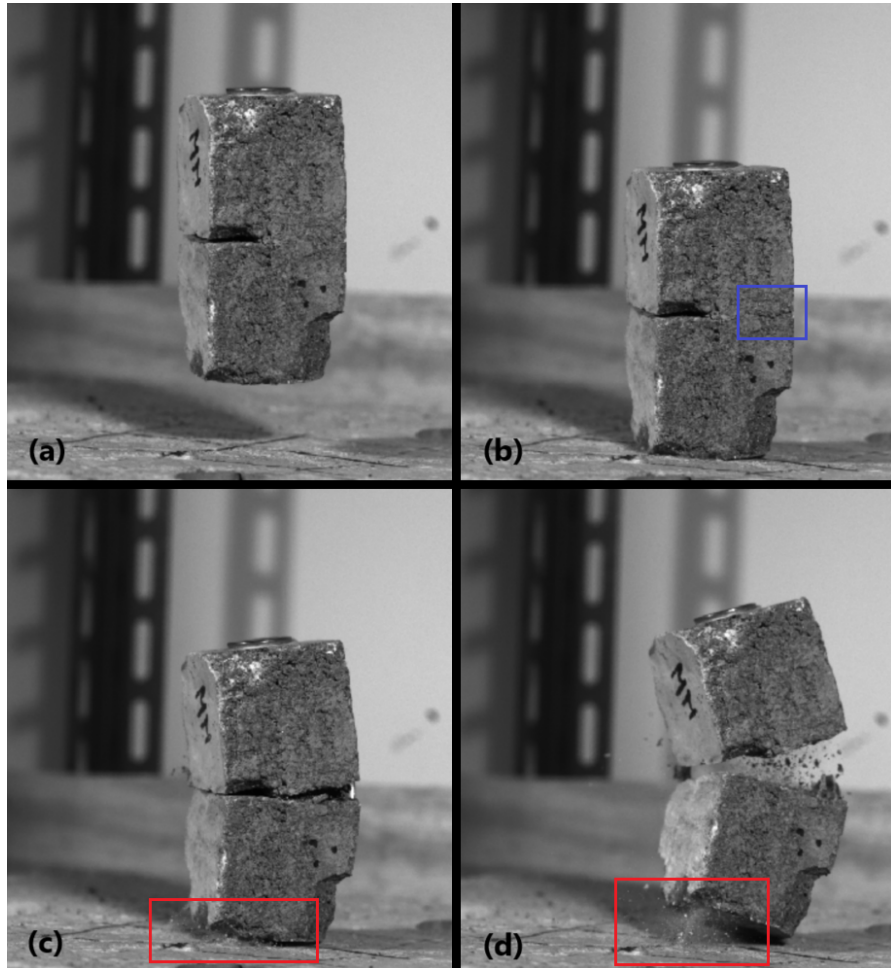


Figura 7.26: Fotogrammi acquisiti con la videocamera ad alta velocità per il provino C-8-B: (a) Istante prima del contatto; (b) Momento del contatto; (c) Momento dopo il contatto; (d) Momento dopo il contatto con rottura del provino

Tabella dei risultati

Di seguito si riporta la [Tabella 7.1] riassuntiva contenente i risultati ottenuti in tutte le prove di impatto eseguite sui campioni, con la pesatura prima e dopo il test e la forza di contatto massima.

Provino	m_1 [g]	m_2 [g]	h [m]	v [m/s]	Forza di contatto [N]
SP-6-T1-1	206,6	206,6	1,402	5,24	3204,7
SP-6-T1-2	214,9	214,9	1,402	5,24	3410,9
SP-6-T1-3	214	214,2	1,402	5,24	3017,6
SS-6-T1-1	124,4	124,4	1,432	5,30	1875
SS-6-T1-2	251,3	251,3	1,432	5,30	2128,2
SP-6-T2-1	251,3	251,3	1,402	5,24	2363,4
SP-6-T2-19-2	222	222	1,402	5,24	3218,3
SS-6-T2-1	143	143,1	1,432	5,30	2263
SP-7-T2-1	401,3	401,3	1,392	5,22	5359,7
SP-8-T2-18-1	574,1	573,6	1,382	5,20	8773,8
SP-8-T2-19-1	570,3	570,3	1,382	5,20	8217,4
SP-8-T2-19-3	574,2	571,8	1,382	5,20	9100
SS-8-T2-19-1	251,1	250,9	1,422	5,28	8250,5
SP-9-T2-19-2	827,9	827,5	1,372	5,18	11869,5
SS-9-T2-18-1	399,9	400	1,417	5,27	6028,6
SS-9-T2-18-2	396,6	396,7	1,417	5,27	5018
SS-10-T2-19-2	562,6	562,6	1,412	5,26	7746
SS-10-T2-19-1	574,1	572,6	1,412	5,26	9100
C-9-A	535,4	534,8	1,410	5,26	3444,8
C-8-A	541	540,7	1,410	5,26	4277
C-8-B	537,8	Rottura	1,359	5,16	4665
C-7-A	275,2	274,7	1,410	5,26	2104

Tabella 7.1: Tabella riassuntiva dei risultati ottenuti

Conclusioni

La definizione delle forze di contatto è molto complessa a causa della loro natura dinamica e dei parametri che le influenzano: forma, materiale, peso, altezza di caduta e velocità. Nello studio condotto attraverso l'analisi sperimentale è stato possibile agire su tali parametri al fine di osservare come la variazione di uno o più di essi provochi dei cambiamenti nelle forze di impatto tra due corpi. Dai risultati ottenuti per tre provini caratterizzati da una forma diversa è stata evidenziata una sostanziale differenza nell'andamento dei diagrammi delle forze di contatto. Per i campioni sferici e semisferici si ottengono forze di contatto con un'intensità maggiore e un andamento del diagramma caratterizzato da un picco massimo e da una forma a campana durante lo sviluppo del fenomeno di collisione. Questo è reso possibile grazie al contatto che avviene quasi perfettamente in un punto tra la superficie sferica del campione e quella piana della piastra. A confermare questa ipotesi è il confronto effettuato sui risultati ottenuti per un campione sferico e semisferico, che misuravano lo stesso peso prima della prova, per i quali l'andamento dei due diagrammi era pressoché uguale. Analizzando i provini di forma cubica è stato osservato che il diagramma delle forze di contatto è caratterizzato da una serie di picchi con valori che si aggirano intorno a quello massimo. La causa di questo fenomeno è legata alla forma del campione stesso che impedisce il contatto tra le due superfici in un solo punto. Difatti, in questo caso l'impatto tra il provino e la piastra avviene in più punti e lungo una superficie più grande, a causa della geometria del corpo e di possibili rotazioni che avvengono in fase di caduta e a seguito del primo contatto. Un altro parametro che influenza significativamente l'intensità delle forze di contatto è la velocità, legata all'energia cinetica che si sviluppa in fase di caduta libera e dissipata nell'evento di contatto tra campione e piastra. Agendo su tale parametro, selezionando e confrontando provini con forma e peso uguali, ma orientati in modo diverso, è emerso che un'altezza di caduta maggiore implica sia l'aumento della velocità sia lo sviluppo di una forza di contatto di intensità più elevata. La massa dei corpi in collisione gioca un ruolo fondamentale nella definizione delle forze di contatto e influenza significativamente l'andamento del diagramma e il loro valore massimo, poiché è direttamente proporzionale all'energia cinetica. Dall'analisi di provini caratterizzati da una massa diversa è

stato osservato che l'impatto di un campione che esibiva un peso maggiore prima della prova sviluppa delle forze di contatto più elevate rispetto al provino più leggero. Questa considerazione può essere confermata osservando e confrontando i risultati ottenuti in ogni prova e riportati in [Tabella 7.1].

Bibliografia

- [1] Foad Kiakojour, Valerio De Biagi, Bernardino Chiaia, and Mohammad Reza Sheidaii. «Progressive collapse of framed building structures: Current knowledge and future prospects». In: *Engineering Structures* 206 (2020), p. 110061 (cit. on pp. 3, 4).
- [2] Uwe Starossek. *Progressive collapse of structures*. Vol. 153. Thomas Telford London, 2009 (cit. on pp. 3, 4).
- [3] M Quigley. «Earthquake footage shows Turkey’s buildings collapsing like pancakes. An expert explains why; <https://theconversation.com/earthquake-footage-shows-turkeys-buildings-collapsing-like-pancakes-an-expert-explains-why-199389>». In: *The Conversation* (2023) (cit. on pp. 5, 6).
- [4] Y Shimbun. «Pancake Collapses’ Occurred in Turkey-Syria Earthquake; <https://japannews.yomiuri.co.jp/world/wider-world/20230216-91447/>». In: *Japannews* (2023) (cit. on p. 6).
- [5] B Alfarah. «Vertical "Pancake" Seismic Collapse Mode; <https://www.linkedin.com/pulse/vertical-pancake-seismic-collapse-mode-bashar-alfarah-msc-ph-d>». In: (2023) (cit. on p. 6).
- [6] Gianni Gilardi and Inna Sharf. «Literature survey of contact dynamics modelling». In: *Mechanism and machine theory* 37.10 (2002), pp. 1213–1239 (cit. on pp. 8, 9, 21).
- [7] Paulo Flores, Margarida Machado, Miguel T Silva, and Jorge M Martins. «On the continuous contact force models for soft materials in multibody dynamics». In: *Multibody system dynamics* 25 (2011), pp. 357–375 (cit. on pp. 10, 16, 20, 27, 28, 32).
- [8] Jan GM van Mier, Arjan F Pruijssers, Hans W Reinhardt, and Theo Monnier. «Load-time response of colliding concrete bodies». In: *Journal of Structural Engineering* 117.2 (1991), pp. 354–374 (cit. on pp. 10, 17–19).

-
- [9] Margarida Machado, Pedro Moreira, Paulo Flores, and Hamid M Lankarani. «Compliant contact force models in multibody dynamics: Evolution of the Hertz contact theory». In: *Mechanism and machine theory* 53 (2012), pp. 99–121 (cit. on p. 11).
- [10] Kendall Atkinson. *An introduction to numerical analysis*. John wiley & sons, 1991 (cit. on p. 12).
- [11] Salah Faik and Holly Witteman. «Modeling of impact dynamics: A literature survey». In: *2000 International ADAMS User Conference*. Vol. 80. Citeseer. 2000 (cit. on p. 13).
- [12] Kenneth H Hunt and Frank R Erskine Crossley. «Coefficient of restitution interpreted as damping in vibroimpact». In: (1975) (cit. on pp. 13, 22, 26).
- [13] Arnold CY Yong, Nelson TK Lam, and Scott J Menegon. *Collision Actions on Structures*. CRC Press, 2022 (cit. on pp. 15, 16, 21, 23, 28–31, 35–41).
- [14] Heinrich Hertz. «On the contact of solids—on the contact of rigid elastic solids and on hardness». In: *Miscellaneous papers* (1896), pp. 146–183 (cit. on p. 15).
- [15] Kenneth L Johnson. «One hundred years of Hertz contact». In: *Proceedings of the Institution of Mechanical Engineers* 196.1 (1982), pp. 363–378 (cit. on p. 17).
- [16] Jens Jacob Jensen and K Hoiseth. «Impact of dropped objects on lightweight concrete». In: *Nordic Concrete Research* 2 (1983), pp. 102–113 (cit. on p. 18).
- [17] Werner Goldsmith. *The theory and physical behaviour of colliding solids*. Dover Publ., 1999 (cit. on p. 19).
- [18] YA Khulief and AA Shabana. «A continuous force model for the impact analysis of flexible multibody systems». In: *Mechanism and machine theory* 22.3 (1987), pp. 213–224 (cit. on p. 20).
- [19] Arnold CY Yong, Nelson TK Lam, and Scott J Menegon. «Closed-form expressions for improved impact resistant design of reinforced concrete beams». In: *Structures*. Vol. 29. Elsevier. 2021, pp. 1828–1836 (cit. on p. 35).
- [20] M Ali, J Sun, N Lam, L Zhang, and E Gad. «Simple hand calculation method for estimating deflection generated by the low velocity impact of a solid object». In: *Australian Journal of Structural Engineering* 15.3 (2014), pp. 243–259 (cit. on p. 35).
- [21] Roberto Eiki Oshiro and Marcilio Alves. «Scaling impacted structures». In: *Archive of applied mechanics* 74 (2004), pp. 130–145 (cit. on pp. 43, 44).
- [22] Tatjana Misic, Marina Najdanovic-Lukic, and Ljubisa Nesic. «Dimensional analysis in physics and the Buckingham theorem». In: *European Journal of Physics* 31.4 (2010), p. 893 (cit. on p. 44).

- [23] Marcílio Alves and Roberto Eiki Oshiro. «Scaling the impact of a mass on a structure». In: *International Journal of Impact Engineering* 32.7 (2006), pp. 1158–1173 (cit. on pp. 47, 54).
- [24] Andreas P Christoforou and Ahmet S Yigit. «Scaling of low-velocity impact response in composite structures». In: *Composite Structures* 91.3 (2009), pp. 358–365 (cit. on pp. 50, 52, 55).
- [25] Anil K Chopra. *Dynamics of structures*. Pearson Education India, 2007 (cit. on p. 66).
- [26] Norden E Huang, Zheng Shen, Steven R Long, Manli C Wu, Hsing H Shih, Quanan Zheng, Nai-Chyuan Yen, Chi Chao Tung, and Henry H Liu. «The empirical mode decomposition and the Hilbert spectrum for nonlinear and non-stationary time series analysis». In: *Proceedings of the Royal Society of London. Series A: mathematical, physical and engineering sciences* 454.1971 (1998), pp. 903–995 (cit. on p. 67).
- [27] Ingrid Daubechies, Jianfeng Lu, and Hau-Tieng Wu. «Synchrosqueezed wavelet transforms: An empirical mode decomposition-like tool». In: *Applied and computational harmonic analysis* 30.2 (2011), pp. 243–261 (cit. on p. 69).
- [28] Konstantin Dragomiretskiy and Dominique Zosso. «Variational mode decomposition». In: *IEEE transactions on signal processing* 62.3 (2013), pp. 531–544 (cit. on p. 69).