

# POLITECNICO DI TORINO

Corso di Laurea Magistrale  
in Ingegneria Matematica



**Politecnico  
di Torino**

Metodi di teoria cinetica e meccanica statistica per la radiazione cosmica di fondo

**Relatore:  
Lamberto Rondoni**

**Laureando:  
Maria Anna Consoli**

Anno Accademico 2023-2024

# Indice

<b>1</b>	<b>Introduzione</b>	<b>4</b>
<b>2</b>	<b>Equazione Kompaneets</b>	<b>7</b>
2.1	Scattering . . . . .	8
2.1.1	Scattering di Compton . . . . .	8
2.1.2	Scattering di Thomson . . . . .	8
2.1.3	Compton Inverso . . . . .	9
2.1.4	Doppio scattering e Bremsstrahlung . . . . .	9
2.2	Come derivare l'equazione di Kompaneets . . . . .	9
2.3	Metodo alternativo per ottenere equazione di Kompaneets . . . . .	10
2.3.1	Master equation . . . . .	10
2.3.2	Tasso di transizione . . . . .	11
2.3.3	Espansione di Kramer-Moyal . . . . .	12
2.4	Accelerazione stocastica e il termine aggiuntivo di diffusione . . . . .	13
<b>3</b>	<b>La legge di Planck e le distorsioni <math>y</math></b>	<b>17</b>
3.1	Strong heating . . . . .	18
3.2	Parametro $u$ . . . . .	19
3.3	Distorsioni di tipo $\mu$ . . . . .	20
3.4	Distorsioni di tipo $y$ . . . . .	21
<b>4</b>	<b>Rappresentazioni della legge di Planck</b>	<b>27</b>
4.1	$\Delta T/T$ fissato . . . . .	28
4.2	$\Delta T$ fissato . . . . .	30
<b>5</b>	<b>Confronto tra gli sviluppi</b>	<b>37</b>
<b>6</b>	<b>Variazioni della legge di Planck</b>	<b>47</b>
6.1	Sviluppo $n_{d1}$ . . . . .	49
6.1.1	Delta negativo . . . . .	56
6.1.2	Cambio segno termini lineari . . . . .	63
6.1.3	Termini quadratici . . . . .	70
6.2	Sviluppo $n_{d2}$ . . . . .	77
6.2.1	Delta negativo . . . . .	83
6.2.2	Termini quadratici . . . . .	89
6.3	Sviluppo $n_{d3}$ . . . . .	96
6.3.1	Delta negativo . . . . .	101
6.3.2	Cambio segno termini lineari . . . . .	107
6.3.3	Termini quadratici . . . . .	111

7	Confronto tra le variazioni	131
8	Conclusioni	133

# Capitolo 1

## Introduzione

La radiazione cosmica di fondo, o Cosmic Microwave background (CMB), è una radiazione elettromagnetica diffusa in tutto l'universo. Si tratta di una delle prove più significative a sostegno della teoria del Big Bang ed è ad oggi un utile strumento per lo studio dell'universo stesso.

A seguito del Big Bang, avvenuto circa 13,8 miliardi di anni fa, l'universo era inizialmente composto principalmente da particelle, come i barioni, che si sono formate in pochi minuti e tutto appariva sotto forma di un plasma ad alta temperatura e densità. Il principale fenomeno di interazione che avveniva in questa prima fase era lo scattering di Thomson. In seguito, 300000 anni dopo, l'universo si è espanso e raffreddato, fino al punto in cui la temperatura ha permesso la formazione di legami tra protoni ed elettroni, dando origine ai primi atomi stabili. Questo periodo è noto come ricombinazione. Successivamente, proprio a causa della formazione dei primi atomi, il numero di elettroni liberi è diminuito, mentre i fotoni hanno iniziato a viaggiare propagandosi nell'universo, causando il disaccoppiamento tra la materia e la radiazione [1].

La radiazione cosmica di fondo presenta lo spettro di un corpo nero a temperatura  $T = 2,725$  K con un picco alla frequenza 160,2 GHz circa [2]. Tuttavia, alle basse temperature, si presentano delle distorsioni da questo spettro. Queste possono essere dovute a dei processi che rompono l'equilibrio tra radiazione e materia o in generale dai fenomeni fisici che hanno interessato l'universo durante la sua espansione.

Inoltre sono state misurate anche delle piccole variazioni di temperatura, dette anisotropie, che aiutano a comprendere meglio la formazione dell'universo.

I primi a teorizzare l'esistenza della CMB furono George Gamow, Ralph Alpher e Robert Herman. Nei loro studi [3, 4, 5], essi predissero che, dal periodo iniziale in cui l'universo era caldo ed altamente denso, doveva derivare una radiazione residua che sarebbe apparsa ai giorni nostri come una radiazione a microonde.

Successivamente, nel 1965, Arno Penzias e Robert Wilson rivelarono, attraverso un'antenna a microonde, un rumore uniforme diffuso in tutto l'universo [6]. Un gruppo di studiosi di Princeton guidati da Robert Dicke ipotizzò che questo rumore di fondo osservato fosse

proprio la radiazione cosmica di fondo. Tale risultato fu così importante per lo studio dell'universo e per la validazione del modello del Big Bang che, nel 1978, Penzias e Wilson ricevettero il premio Nobel per la fisica.



## Capitolo 2

# Equazione Kompaneets

L'equazione di Kompaneets è un'equazione differenziale parziale che descrive l'evoluzione dello spettro dei fotoni in un plasma, soggetto principalmente al fenomeno dello scattering. Quest'equazione fu ottenuta nel 1956 dal fisico Anatoly Kompaneets, che pubblicò i suoi risultati in [7]. In particolar modo, questa equazione è fondamentale in ambiti astrofisici come la radiazione cosmica di fondo.

Secondo Kompaneets, dato che le equazioni di Maxwell sono lineari, la radiazione non può raggiungere l'equilibrio autonomamente, ma ha bisogno che ci sia uno scambio di energia con la materia per raggiungere l'equilibrio. Di fatto, quest'equazione tiene conto dello scambio di energia tra fotoni ed elettroni e degli effetti indotti [8].

L'equazione di Kompaneets, che più nello specifico descrive l'evoluzione temporale della funzione di distribuzione del numero di occupazione dei fotoni, può essere scritta in forma:

$$\frac{\partial n}{\partial t} = \frac{\sigma_T N_e h}{m_e c} \frac{1}{\nu^2} \frac{\partial}{\partial \nu} \left( \nu^4 \left[ \frac{k_B T_e}{h} \frac{\partial n}{\partial \nu} + (1+n)n \right] \right), \quad (2.1)$$

dove  $T_e$ ,  $m_e$  e  $N_e$  corrispondono rispettivamente alla temperatura, alla massa e alla densità degli elettroni, mentre  $k_B$ ,  $h$  e  $c$  sono la costante di Boltzmann, la costante di Planck e la velocità della luce e  $\sigma_T$  è la sezione d'urto di Thomson.

Il numero di occupazione dei fotoni è dato da

$$n(t, \nu) = \frac{c^3}{8\pi h \nu^3} E_\nu$$

e rappresenta la quantità media di fotoni con frequenza  $\nu$  al tempo  $t$ .  $E_\nu$  è la densità spettrale di energia, proporzionale a  $h(\nu/c^3)n(\nu, t)$  [9, 11].

Un'ipotesi importantissima è quella di essere in condizioni non relativistiche, pertanto per gli elettroni si ha l'ipotesi

$$k_B T_e \ll m_e c^2,$$

mentre per l'energia dei fotoni si ha

$$h\nu \ll m_e c^2$$

La soluzione stazionaria dell'equazione di Kompaneets è la distribuzione di Bose – Einstein:

$$n_{BE}(\nu) = \frac{1}{e^{h\nu/T_e k_B + C} - 1},$$

ma se si considera  $C = 0$ , si ottiene la distribuzione di Planck che descrive la radiazione elettromagnetica di un corpo nero ad una data temperatura  $T_e$  e in equilibrio termico

$$n_{PL} = \frac{1}{e^{h\nu/T_e k_B} - 1}.$$

## 2.1 Scattering

Lo scattering è un fenomeno in cui una radiazione o una particella subiscono una variazione della loro traiettoria originale a seguito dell'interazione con una particella o un campo.

### 2.1.1 Scattering di Compton

Lo scattering Compton è il principale processo cinetico che coinvolge la radiazione cosmica di fondo per lo scambio di energia. Non si tratta di uno scattering elastico poiché dopo l'interazione onda-particella si ha una variazione di energia. Per spiegare questo fenomeno, è necessario prendere in considerazione la natura corpuscolare della radiazione, che è costituita da particelle con quantità di moto  $p = \frac{h\nu}{c}$ . Quindi il fenomeno è descritto come l'interazione tra due particelle in cui un fotone di alta energia ne cede una parte all'elettrone, aumentando la sua energia cinetica. Imponendo la conservazione dell'energia e dell'impulso si può ricavare di quanto varia la lunghezza d'onda del fotone [10]:

$$\Delta\lambda = \lambda_f - \lambda_i = \lambda_c(1 - \cos\theta)$$

con  $\lambda_c = \frac{h}{m_e c}$  costante. Dunque, l'unica variabile che determina la variazione di lunghezza d'onda del fotone è l'angolo  $\theta$ , che è l'angolo che si forma tra le rette di direzione del fotone prima e dopo l'interazione. [10]

Questo scattering causa lo spostamento del fotone verso frequenze più basse.

### 2.1.2 Scattering di Thomson

Nello scattering di Thomson, al contrario, si considera la natura ondulatoria della radiazione. In questo caso, l'effetto dell'interazione onda-particella è quello di deviare l'onda senza che ci sia variazione di energia, pertanto è detto scattering elastico. L'interazione considerata è tra un'onda di bassa energia e un elettrone con velocità non relativistica ( $v \ll c$ ). Bisogna sottolineare che l'energia della radiazione è molto inferiore rispetto quella dell'elettrone. Anche la radiazione è tale da soddisfare la condizione non relativistica ( $h\nu \ll m_e c^2$ ). Interagendo con il campo elettromagnetico della radiazione, l'elettrone

assorbe energia sotto forma di energia cinetica e accelera, oscillando ed emettendo una radiazione con la stessa frequenza[10].

Un concetto legato allo scattering di Thomson è quella della sezione d'urto di Thomson. Si tratta del rapporto tra la potenza totale mediata nel tempo e irradiata da una particella che subisce il processo di scattering sull'intensità dell'onda elettromagnetica incidente [12]. Questa è data da:

$$\sigma_T = \frac{8\Pi}{3} \left( \frac{e}{4\Pi\epsilon_0 m_e c^2} \right)^2,$$

dove  $e$  è la carica dell'elettrone e  $\epsilon_0$  la permeabilità del vuoto.

### 2.1.3 Compton Inverso

Come suggerisce il nome, lo scattering di Compton inverso si ha con le condizioni opposte rispetto lo scattering di Compton, cioè quando è l'elettrone, con energia maggiore, a cederne parte al fotone, provocando uno spostamento di quest'ultimo verso frequenze più alte [10]. Come visto nel caso di scattering di Compton, con la condizione non relativistica  $h\nu_e \ll m_e c^2$ , l'energia e l'impulso totale si conservano.

### 2.1.4 Doppio scattering e Bremsstrahlung

Altri due processi di interazione tra fotoni ed elettroni sono il doppio scattering di Compton e Bremsstrahlung. La principale differenza con lo scattering di Compton e di Thomson è che in questo caso il numero di fotoni non è conservato [13].

Infatti, durante il fenomeno del doppio scattering di Compton, in seguito all'interazione tra un fotone libero e un fotone, si crea un altro fotone, secondo la reazione  $\gamma + e \rightarrow \gamma + \gamma + e$  (dove  $\gamma$  rappresenta il fotone e  $e$  l'elettrone) [14, 15]. Il fotone che interagisce con l'elettrone ha in seguito un'energia ridotta.

Anche il processo di Bremsstrahlung comporta la formazione di fotoni. Avviene tipicamente quando un elettrone viene deflesso dal un campo elettromagnetico, ed emette così una radiazione.

## 2.2 Come derivare l'equazione di Kompaneets

Per ottenere l'equazione che porta il suo nome, Kompaneets partì dall'equazione di Boltzmann. Quest'ultima descrive l'evoluzione temporale di una funzione di distribuzione di un sistema non in equilibrio termodinamico. La formula generale è data da:

$$\frac{df}{dt} = \left( \frac{\partial f}{\partial t} \right)_{\text{convezione}} + \left( \frac{\partial f}{\partial t} \right)_{\text{convezione}} + \left( \frac{\partial f}{\partial t} \right)_{\text{collisioni}}$$

equivalente a

$$\frac{df}{dt} + \mathbf{v} \cdot \nabla_r f + \mathbf{F} \cdot \nabla_p f = \left( \frac{\partial f}{\partial t} \right)_{\text{collisioni}},$$

dove  $f$  è la funzione di distribuzione della particella del sistema,  $r$  la posizione,  $v$  la velocità e  $F$  la forza che agisce su essa.

Per i fotoni, l'equazione di Boltzmann è data da [16]:

$$\frac{\partial n(\nu)}{\partial t} = \int (n(\nu')f(p')(1+n(\nu)) - n(\nu)f(p)(1+n(\nu'))) d^3p d\nu \quad (2.2)$$

dove  $n(\nu')f(p')(1+n(\nu))$  è il termine che indica la collisione di fotoni con frequenza  $\nu'$  ed elettroni con quantità di moto  $p'$ , ottenendo fotoni con frequenza  $\nu$  in seguito la collisione; analogamente vale lo stesso per il termine  $n(\nu)f(p)(1+n(\nu'))$ , dove la collisione tra fotoni con frequenza  $\nu$  ed elettroni con quantità di moto  $p$  comporta che dopo la collisione ci siano fotoni con frequenza  $\nu'$ . Consideriamo sempre come principale meccanismo lo scattering di Compton.

Si suppone di essere in condizioni non relativistiche e con un'espansione di Taylor fino al secondo ordine della quantità di moto degli elettroni e risolvendo gli integrali, si ottiene l'equazione di Kompaneets.

In questi passaggi però si hanno delle incongruenze che rompono la conservazione del numero di fotoni [16] e sono stati fatti vari tentativi per ottenere l'equazione di Kompaneets cercando di eliminare queste incongruenze.

## 2.3 Metodo alternativo per ottenere equazione di Kompaneets

Un metodo alternativo per ottenere l'equazione di Kompaneets è come approssimazione dell'espansione di Kramers-Moyal della Master Equation [10]. Scriviamo l'equazione di Kompaneets nella forma

$$\frac{\partial n(\nu, t)}{\partial t} = \frac{1}{\nu^2} \frac{\partial}{\partial \nu} (\nu^2 j(\nu)) \quad (2.3)$$

con la corrente

$$j(\nu) = \frac{N_e \sigma_{TC}}{m_e c^2} \nu^2 \left( k_B T \frac{\partial n(\nu, t)}{\partial \nu} + h(1+n(\nu, t))n(\nu, t) \right). \quad (2.4)$$

### 2.3.1 Master equation

La Master equation è un'equazione differenziale che descrive l'evoluzione temporale di un sistema inteso come combinazione probabilistica degli stati.

Partiamo dal caso semplice con due soli stati, per poi generalizzare.

Consideriamo una particella e siano  $P_1(t)$  e  $P_2(t)$  le probabilità che all'istante  $t$  si trovi rispettivamente nello stato 1 o 2, con  $P_1(t) + P_2(t) = 1$ . Allora la probabilità che la particella sia allo stato 1 al tempo  $t + dt$  ( $P_1(t + dt)$ ) è data da due contributi:

1. la probabilità che la particella sia nello stato 1 al tempo  $t$  e non faccia alcun salto nell'intervallo di tempo considerato
2. la probabilità che la particella sia nello stato 2 al tempo  $t$  e nell'intervallo  $dt$  faccia il salto nello stato 1.

Se la probabilità di fare salto il  $2 \rightarrow 1$  nell'intervallo  $(t, t + dt)$  è data da  $w(2 \rightarrow 1)dt$ , si ha che la probabilità di restare nello stato 1 è data da  $1 - w(1 \rightarrow 2)dt$ . Allora

$$P_1(t + dt) = P_1(t)(1 - w(1 \rightarrow 2))dt + P_2(t)w(2 \rightarrow 1)dt + O(dt^2).$$

Se si considera il limite  $dt \rightarrow 0$ , allora si ha

$$\frac{dP_1(t)}{dt} = -w(1 \rightarrow 2)P_1(t) + P_2(t)w(2 \rightarrow 1).$$

Se generalizziamo quanto detto, l'espressione generale della Master Equation allora è data da:

$$\frac{dP_i(t)}{dt} = \sum_j (w(j \rightarrow i)P_j(t) - w(i \rightarrow j)P_i(t)),$$

dove  $P_i(t)$  è la probabilità che la particella si trovi nello stato  $i$  al tempo  $t$  e  $w(j \rightarrow i)$ , la cui scrittura si può semplificare in  $w_{ij}$ , è la probabilità che la particella passi dallo stato  $j$  allo stato  $i$ .

### 2.3.2 Tasso di transizione

Introduciamo il fenomeno dell'annichilazione: si tratta del meccanismo in cui una particella si scontra con la sua relativa antiparticella distruggendosi a vicenda e trasformando la loro massa in energia sotto forma di fotoni. Consideriamo uno spazio di Fock, cioè lo spazio di Hilbert usato nella fisica quantistica per descrivere gli stati quantistici con un numero variabile di particelle, e supponiamo avvenga un'annichilazione che sostituisce un fotone con vettore d'onda  $\bar{k}$  con uno con vettore d'onda  $\bar{k}'$ . Il vettore d'onda indica l'energia e la direzione di movimento di un fotone.

Questo fenomeno è caratterizzato dal tasso di transizione [11]

$$j(\bar{k} \rightarrow \bar{k}') = \alpha(\bar{k}, \bar{k}')w(\bar{k}, \bar{k}')n(\bar{k}) \quad (2.5)$$

con

$$w(\bar{k}, \bar{k}') = \exp\left(\frac{h(\nu - \nu')}{2k_B T}\right) (1 + n(\bar{k}'))$$

dove  $\alpha(\bar{k}, \bar{k}')$  è un termine cinetico simmetrico e  $n(\bar{k})$  è il numero di occupazione dei fotoni con vettore d'onda  $\bar{k}$ .

Allora la Master equation per il numero di occupazione è data da

$$\frac{\partial n(\bar{k})}{\partial t} = \sum_{k'} (j(\bar{k}' \rightarrow \bar{k}) - j(\bar{k} \rightarrow \bar{k}')) = \quad (2.6)$$

$$= \sum_{k'} \alpha(k, k') (w(k', k)n(k') - w(k, k')n(k)) \quad (2.7)$$

Imponendo la conservazione del numero di fotoni, si ha:

$$\sum_k \frac{\partial n(k)}{\partial t} = \sum_{k,k'} \alpha(k, k') (w(k', k)n(k') - w(k, k')n(k)) = 0$$

da cui segue che dev'essere  $j(\bar{k} \rightarrow \bar{k}') - j(\bar{k}' \rightarrow \bar{k}) = 0$  o  $w(\bar{k}, \bar{k}')n(\bar{k}) = w(\bar{k}', \bar{k})n(\bar{k}')$ . Da questo punto si può ottenere

$$\exp\left(\frac{h(\nu - \nu')}{2k_B T}\right) (1 + n(\bar{k}'))n(k) = \exp\left(\frac{h(\nu' - \nu)}{2k_B T}\right) (1 + n(\bar{k}))n(k')$$

$$\exp\left(\frac{h\nu}{k_B T}\right) (1 + n(k'))n(k) = \exp\left(\frac{h\nu'}{k_B T}\right) (1 + n(k))n(k')$$

da cui segue che

$$\exp\left(\frac{h\nu}{k_B T}\right) \frac{n(k)}{1 + n(k)} = \text{cost.}$$

Prendiamo la costante uguale a 1 e si ha:

$$\exp\left(\frac{h\nu}{k_B T}\right) \frac{n(\bar{k})}{1 + n(\bar{k})} = 1$$

$$\exp\left(\frac{h\nu}{k_B T}\right) n(\bar{k}) = 1 + n(\bar{k})$$

$$n(\bar{k})(e^{\frac{h\nu}{k_B T}} - 1) = 1$$

da cui si ottiene la distribuzione di Planck.

$$n(\bar{k}) = \frac{1}{e^{\frac{h\nu}{k_B T}} - 1}$$

### 2.3.3 Espansione di Kramer-Moyal

L'espansione di Kramer-Moyal descrive l'evoluzione temporale di una distribuzione di probabilità. Il concetto è quello di espandere la distribuzione di probabilità in una serie di potenze.

Nei processi stocastici, l'espansione di Kramer-Moyal si riferisce a un'estensione di Taylor della Master equation.

Si considera in primo luogo il caso monodimensionale. Sia data una maglia regolare con  $\delta > 0$  e sia  $x = k_1$  un vettore d'onda con una sola componente. Se si salta da un punto  $x$  della maglia ad un altro ( $x + \delta$ ), questo salto avviene con tasso [11]

$$w(x, x + \delta) = (1 + n(x + \delta)) B\left(x + \frac{\delta}{2}\right) \exp\left(-\frac{U(x + \delta) - U(x)}{2k_B T}\right) \exp\left(\frac{\delta}{2k_B T} f\left(x + \frac{\delta}{2}\right)\right)$$

dove  $n$  indica il numero di particelle presenti sulla rete,  $B > 0$  indica un'attività disomogenea (in cui possiamo includere il termine  $\alpha$  usato precedentemente),  $U$  è l'energia potenziale e  $f$  una forza. Il tasso (2.5) è un caso particolare di quello appena visto e si ottiene imponendo  $f = 0$  e  $U = h\nu$ .

La Master equation per una  $\delta$  fissata è data da:

$$\frac{\partial n(k)}{\partial t} + j(x \rightarrow x + \delta) - j(x - \delta \rightarrow x) = 0$$

con  $j(x \rightarrow x + \delta) = n(x)w(x, x + \delta) - n(x + \delta)w(x + \delta, x)$  e  $j(x - \delta \rightarrow x) = n(x - \delta)w(x - \delta, x) - n(x)w(x, x + \delta)$ . L'espansione di Taylor rispetto  $\delta$  della Master equation fino al secondo ordine è data da [11]:

$$\frac{\partial n}{\partial t} = \delta^2 \left( \frac{(B\partial_\nu g + g\partial_\nu B)}{k_B T} (1 + n)n + \frac{(Bg + \partial_\nu B)}{k_B T} \partial_\nu n + \frac{2Bgn\partial_\nu n}{k_B T} + B\partial_{\nu\nu} n \right)$$

con  $g(x) = \partial_\nu U(x) - f(x)$  L'equazione si può riscrivere in modo equivalente come

$$\frac{\partial n(x)}{\partial t} = \delta^2 \frac{\partial}{\partial x} \left( B(x) \left( \frac{\partial n(x)}{\partial t} + \beta g(x)(1 + n(x))n(x) \right) \right),$$

assumendo così una struttura simile all'equazione di Kompaneets.

Se consideriamo  $n(x) = n(\nu, t)$ ,  $U(\nu) = h\nu$ ,  $f = 0$ ,  $g(\nu) = h$  e  $\nu = cx$ , e sostituiamo nell'equazione (2.3), otteniamo l'equazione di Kompaneets.

## 2.4 Accelerazione stocastica e il termina aggiuntivo di diffusione

L'accelerazione stocastica è l'accelerazione che ci si aspetta abbiano le particelle quando si muovono sotto l'influenza di un campo di forze soggetto a processi stocastici [17]. Essa è legata alla diffusione turbolenta, che a sua volta può essere considerata come ulteriore causa del trasferimento di quantità di moto dei fotoni.

Dunque, consideriamo il trasferimento di energia che avviene in un piccolo intervallo di tempo  $\Delta t$ .

Supponiamo ci sia un elettrone che si muove con velocità  $v$  e subisce un campo di forza non conservativo  $G_s$  per un intervallo di tempo  $s$ . La quantità di moto totale scambiata in un piccolo periodo di tempo  $\Delta t$  è data dall'integrale rispetto al tempo della forza  $G_s$ :

$$h\nu_\epsilon - h\nu_i = c \int_0^{\Delta t} G_s ds = c\tau \int_0^{\Delta t/\tau} \tilde{G}_u du$$

con  $\tilde{G}_u$  campo di forza riscaldato secondo  $u = s/\tau$  e

$$\tau = \frac{h\sigma_T N_e t}{m_e c}$$

il tempo riscaldato [17]. In base a quest'ultima variabile si può riscrivere l'equazione di Kompaneets riscalata:

$$\frac{\partial n}{\partial \tau} = \frac{1}{\nu^2} \frac{\partial}{\partial \nu} \left( \nu^4 \left( \frac{k_B T_e}{h} \frac{\partial n}{\partial \nu} + (1+n)n \right) \right) \quad (2.8)$$

Usando il teorema del limite centrale su quest'ultimo risultato si ha

$$h\nu_\epsilon - h\nu_i = c\tau \sqrt{\frac{\Delta t}{\tau}} Z = c\sqrt{\tau\epsilon} Z,$$

dove  $Z$  è una curva Gaussiana con media nulla. Dato che  $\tau^{-1} \propto \nu_i$  [17], allora

$$(h\nu_\epsilon - h\nu_i)^2 \propto \frac{1}{\nu_i} \epsilon$$

Il tempo in cui si ha scambio della quantità di moto è misurata in funzione di  $1/\nu$ , perciò le basse frequenze sono maggiormente interessate a questo fenomeno.

Questo ci suggerisce una diffusione aggiuntiva nello spazio di frequenze. Pertanto, si aggiunge all'equazione di Kompaneets un ulteriore termine di diffusione proporzionale a  $1/\nu^2$  [17]:

$$\frac{1}{\nu^2} \frac{\partial}{\partial \nu} \left( \nu^2 \frac{1}{\nu} \frac{\partial n}{\partial \nu} \right).$$

L'equazione di Kompaneets allora diventa

$$\frac{\partial n}{\partial \tau} = \frac{1}{\nu^2} \frac{\partial}{\partial \nu} \left( \nu^4 \left[ \frac{k_B T_e}{h} \frac{\partial n}{\partial \nu} + (1+n)n \right] \right) + \frac{1}{\nu^2} \frac{\partial}{\partial \nu} \left( \nu^2 \frac{k_B T_e}{h} B(\nu) \frac{\partial n}{\partial \nu} \right), \quad (2.9)$$

con  $B(\nu) \propto \frac{1}{\nu}$  per  $\nu \gg \nu_1$ . Ottenere un preciso valore di  $\nu_1$  è difficile, ma dall'analisi dei dati si ha  $\nu_1 < 10^{-2} GHz$ .

Con questa modifica, la distribuzione di Bose-Einstein non è più soluzione in condizione di equilibrio per l'equazione di Kompaneets.

Consideriamo una più ampia classe di equazioni di Kompaneets modificate [17]

$$\frac{\partial n}{\partial \tau} = \frac{1}{\nu^2} \frac{\partial}{\partial \nu} \left( \nu^2 \left[ D(\nu) \frac{\partial n}{\partial \nu} + \gamma(\nu)(1+n)n \right] \right)$$

con  $D(\nu)$  che rappresenta la diffusione in funzione della frequenza e  $\gamma(\nu)$  l'attrito.

Considerando l'equazione di Kompaneets riscalata (2.8) abbiamo:

$$D(\nu) = \nu^2 \frac{k_B T_e}{h} \quad \gamma(\nu) = \nu^2.$$

Allora si ha che la distribuzione di Bose-Einstein è soluzione stazionaria e

$$\frac{D(\nu)}{\gamma(\nu)} = \frac{k_B T_e}{h}$$

non dipende dalla frequenza.

Se si considera invece l'equazione di Kompaneets a cui abbiamo aggiunto il termine diffusivo (2.9), si ha invece un diverso  $D(\nu)$  [17]

$$D(\nu) = \frac{k_B T_e}{h} [\nu^2 + B(\nu)] \quad B(\nu) = \frac{\nu^2}{\alpha + 1} \left( \frac{\nu}{\nu_0} \right)^{-\alpha}$$

$$D(\nu) = \frac{k_B T_e}{h} \left[ \nu^2 + \nu^{2-\alpha} \frac{\nu_0^\alpha}{\alpha + 1} \right].$$

Considerando  $\alpha \simeq 3$ , si ha  $D(\nu) \propto \nu^2$  per grandi frequenze e  $D(\nu) \propto \nu^{2-\alpha}$  per le basse frequenze.

La distribuzione di Bose-Einstein non è più idonea per rappresentare una situazione d'equilibrio, ma si può trovare una nuova soluzione stazionaria dell'equazione di Kompaneets con l'aggiunta del termine diffusivo:

$$n_s(\nu) = \frac{1}{e^{\phi(\nu)} - 1}$$

con

$$\phi(\nu) = \int^\nu \frac{\gamma(\nu')}{D(\nu')} d\nu'.$$



## Capitolo 3

# La legge di Planck e le distorsioni $y$

Concentriamoci su un'analisi dettagliata della soluzione dell'equazione di Kompaneets.

La distribuzione dei fotoni  $n$  nello spettro della radiazione può essere descritto come sovrapposizione lineare di spettri di corpi neri [18]. Per ottenere una descrizione di questo tipo, consideriamo la seguente definizione

$$n(\nu, y) = \int_0^\infty R(T, y) n_{PL}(\nu, T) dT, \quad (3.1)$$

con  $n_{PL}(\nu, T)$  la distribuzione dello spettro di un corpo nero, cioè la distribuzione di Planck, e  $R(T, y)$  funzione della distribuzione della temperatura, che soddisfa la condizione normale

$$\int_0^\infty R dT = 1.$$

Per un corpo nero la cui temperatura osservata è  $T_R$  si ha

$$R = \delta(T - T_R).$$

Sia  $n(\nu, y)$  che  $R(T, y)$  sono funzioni della variabile  $y$ , detta parametro di Compton e definita come [19]

$$y = \int N_e \sigma_T c \frac{k_B T_e}{m_e c^2} dt = \int \frac{k_B T_e}{m_e c^2} d\tau,$$

con  $\tau$  la profondità ottica al scattering Compton, cioè il numero di interazione di scattering che un fotone subisce.

Il parametro di Compton può essere inteso come una variabile che quantifica l'importanza del processo di scattering di Compton inverso in un plasma: per  $y \ll 1$ , gli effetti dello scattering di Compton inverso sono trascurabili, mentre per  $y \gg 1$  si ha trasferimento di energia ai fotoni, modificando lo spettro della radiazione.

### 3.1 Strong heating

Consideriamo il caso di strong heating, ovvero quando la temperatura degli elettroni  $T_e$  è molto maggiore rispetto alla temperatura della radiazione  $T_R$ , ottenuta dalla temperatura osservata oggi riscalata a causa del redshift. La condizione è dunque  $T_e \gg T_R = T_0(1+z)$ . Nel caso di strong heating, il meccanismo dominante è quello di scattering di Compton inverso, per cui l'equazione di Kompaneets può semplificarsi in [19]

$$\frac{\partial n}{\partial y} = \frac{1}{x^2} \frac{\partial}{\partial x} \left( x^4 \frac{\partial n}{\partial x} \right). \quad (3.2)$$

Vogliamo dimostrare che la funzione  $n$ , definita come (3.1), soddisfa quest'ultima equazione e si vuole ottenere la funzione  $R(T, y)$  per cui ciò accade. Sostituiamo la definizione di  $n(\nu, T)$  (3.1) in quest'ultima equazione (3.2), pertanto calcoliamo:

$$\begin{aligned} \frac{\partial n}{\partial y} &= \int n_{PL}(\nu, T) \frac{\partial R(T, y)}{\partial y} dT \\ \frac{\partial n}{\partial x} &= \int R(T, y) \frac{\partial n_{PL}(\nu, T)}{\partial x} dT \\ \frac{\partial}{\partial x} \left( x^4 \frac{\partial n}{\partial x} \right) &= \frac{\partial}{\partial x} \left( x^4 \int R(T, y) \frac{\partial n_{PL}(\nu, T)}{\partial y} dT \right) = \\ &= \int R(T, y) \left( 4x^3 \frac{\partial n_{PL}(\nu, T)}{\partial x} + x^4 \frac{\partial^2 n_{PL}(\nu, T)}{\partial x^2} \right) dT. \end{aligned}$$

Sostituendo questi termini in (3.2) si ha:

$$\begin{aligned} \int n_{PL}(\nu, T) \frac{\partial R(T, y)}{\partial y} dT &= \int R(T, y) \left( 4x \frac{\partial n_{PL}(\nu, T)}{\partial x} + x^2 \frac{\partial^2 n_{PL}(\nu, T)}{\partial x^2} \right) dT = \\ &= \int R(T, y) \left( T^2 \frac{\partial^2 n_{PL}(\nu, T)}{\partial T^2} - 2T \frac{\partial n_{PL}(\nu, T)}{\partial T} \right) dT = \\ &= \int \left( \frac{\partial}{\partial T} \left( T^2 \frac{\partial n_{PL}}{\partial T} \right) - 4T \frac{\partial n_{BB}}{\partial T} \right) R dT. \end{aligned}$$

Integriamo per parti quanto ottenuto:

$$\begin{aligned} \int n_{PL} \frac{\partial R}{\partial y} dT &= \left( T^2 \frac{\partial n_{PL}}{\partial T} R - n_{PL} T R - 4RT n_{PL} \right) \Bigg|_0^{+\infty} + \\ &+ \int \left( n_{PL} T^2 \frac{\partial^2 R}{\partial T^2} + 4n_{PL} R + 6n_{PL} T \frac{\partial R}{\partial T} \right) dT = \\ &= \int n_{PL} \left( T^2 \frac{\partial^2 R}{\partial T^2} + 6T \frac{\partial R}{\partial T} + 4R \right) dT \end{aligned}$$

da cui, supponendo che  $T^2 R \rightarrow 0$  per  $T \rightarrow \infty$  [18], si ottiene che

$$\frac{\partial R}{\partial y} = T^2 \frac{\partial^2 R}{\partial T^2} + 6T \frac{\partial R}{\partial T} + 4R. \quad (3.3)$$

Se definiamo una nuova funzione

$$S(T, y) = e^{-4y} R(T, y),$$

l'equazione (3.3) diventa

$$\begin{aligned} \frac{\partial S}{\partial y} e^{4y} + 4e^{4y} S &= T^2 e^{4y} \frac{\partial^2 S}{\partial T^2} + 6T e^{4y} \frac{\partial S}{\partial T} + 4S e^{4y} \\ \frac{\partial S}{\partial y} &= T^2 \frac{\partial S}{\partial T^2} + 6T \frac{\partial S}{\partial T}. \end{aligned}$$

In termini della variabile  $z = \ln T + 3y$ , l'equazione diventa un'equazione di conduzione del calore:

$$\frac{\partial S}{\partial y} = \frac{\partial^2 S}{\partial z^2}.$$

La soluzione è data da [19]

$$R(y, T) = e^{4y} S(y, T) = \frac{e^{4y}}{\sqrt{4\Pi y}} \int S(0, z') e^{4y - \frac{1}{4y}(z-z')^2} dz' = \frac{1}{\sqrt{4\Pi y}} \int R(0, T') e^{-\frac{1}{4y} \ln^2(Te^{3y}/T')} dT'$$

con  $z' = \ln T'$ . Ricordando che  $R(T', 0) = \delta(T' - T_R)$ , si ottiene

$$R(T, y) = \frac{1}{T_R \sqrt{4\Pi y}} e^{-\frac{(\ln(T/T_R)+3y)^2}{4y}}. \quad (3.4)$$

Dunque, il numero di occupazione dei fotoni è dato da

$$n = \frac{1}{\sqrt{4\Pi y}} \int_0^\infty \frac{1}{e^{xT/T_R} - 1} e^{-\frac{(\ln(x'/x)+3y)^2}{4y}} \frac{dx}{x},$$

con  $x' = xT_e/T_R$ .

## 3.2 Parametro $u$

Introduciamo una nuova variabile:

$$u = \int \left(1 - \frac{T_R}{T_e}\right) dt. \quad (3.5)$$

Nel caso di strong heating ( $T_e \gg T_R$ ),  $u \rightarrow y$  [18], per cui segue che

$$n = \frac{1}{\sqrt{4\Pi u}} \int_0^\infty \frac{1}{e^{xT/T_R} - 1} e^{-\frac{(\ln(x'/x)+3u)^2}{4u}} \frac{dx}{x}. \quad (3.6)$$

Il parametro  $u$  è determinato dalla quantità di energia emessa nella radiazione  $\Delta\epsilon$  e dalla densità di energia della radiazione imperturbata  $\epsilon_i$ : in particolare, per  $u \ll 1$  abbiamo [20]

$$u \simeq \frac{1}{4} \frac{\Delta\epsilon}{\epsilon_i}.$$

L'equazione (3.6), che rappresenta la sovrapposizione di spettri di corpi neri, è adatta a descrivere piccoli distorsioni per  $y < 1$  [20], mentre per  $y > 5$ , una buona approssimazione dello spettro è data dalla distribuzione di Bose-Einstein con un potenziale chimico che dipende dalla frequenza:

$$n_{BE} = \frac{1}{\exp(x + \mu(x)) - 1}.$$

Per i valori intermedi di  $y$ , le distorsioni dello spettro si possono studiare solo dal punto di vista numerico.

### 3.3 Distorsioni di tipo $\mu$

Principalmente si individuano due tipi di distorsioni della CMB dallo spettro di un corpo nero: distorsioni di tipo  $\mu$  e distorsioni di tipo  $y$ .

Nel primo caso, lo spettro ha una distribuzione di Bose-Einstein con un potenziale chimico che dipende dalla frequenza dei fotoni, nel secondo caso invece si indicano distorsioni descritte dal parametro di Compton  $y$ .

Nelle distorsioni  $\mu$ , il potenziale chimico si annulla alle basse frequenze, mentre alle alte è una costante. Queste distorsioni si generano quando si può raggiungere equilibrio cinetico tra i processi di Compton e gli elettroni [22]. Un tale equilibrio è proprio descritto dalla distribuzione di Bose-Einstein con potenziale chimico  $\mu(x)$  [14]. Se sono messi a confronto lo spettro di un corpo nero e la distribuzione di Bose-Einstein con potenziale chimico positivo, quest'ultima, a parità di temperatura, presenta meno fotoni; al contrario, la distribuzione con potenziale chimico negativo ha più fotoni.

Il potenziale chimico dipende dall'energia emessa e, per ottenere tale relazione, si possono semplificare i passaggi considerando  $\mu$  che non dipende da  $x$ . Allora la densità d'energia della distribuzione di Bose-Einstein è data da

$$\rho_{BE} = \frac{1}{\pi^2} \int n_{BE} p^3 dp = \rho_{BB}(T_e) \psi(\mu),$$

mentre il numero di densità è data da

$$N_{BE} = \frac{1}{\pi^2} \int n_{BE}^2 dp = N_{BB}(T_e) \phi(\mu),$$

dove  $\rho_{BB}(T_e)$  e  $N_{BB}(T_e)$  sono la densità di energia e numero di densità del corpo nero con temperatura  $T_e$  e quantità di moto  $p$ . I termini  $\psi$  e  $\phi$  sono le correzioni dello spettro di un corpo nero per avere distribuzione di Bose-Einstein [14]: per  $\mu \ll 1$  si ha

$$\psi(\mu) = 1 - 3 \frac{I_2}{I_3} \mu,$$

$$\phi(\mu) = 1 - 2 \frac{I_1}{I_2} \mu$$

con

$$I_n = \int \frac{x^n}{e^x - 1} dx.$$

Considerando la conservazione dell'energia e del numero di densità nell'equilibrio cinetico si ha

$$\rho_{BE} = \rho_{BB}(T_i) \left(1 + \frac{\partial \rho_\gamma}{\rho_\gamma}\right)$$

$$N_{BE} = n_{BB}(T_i) \left(1 + \frac{\partial N_\gamma}{N_\gamma}\right)$$

con  $T_i$  la temperatura della CMB a cui avviene immissione di energia,  $\partial N_\gamma/N_\gamma$  numero di densità dei fotoni relativo e  $\partial \rho_\gamma/\rho_\gamma$  densità di energia relativo. Imponendo l'uguaglianza tra la definizione di  $\rho_{BE}$  e  $N_{BE}$  con quanto ottenuto con la conservazione dei fotoni, si ha [14]

$$\mu = \left(8 \frac{I_1}{I_2} - 9 \frac{I_2}{I_3}\right)^{-1} \left(3 \frac{\partial \rho_\gamma}{\rho_\gamma} - 4 \frac{\partial N_\gamma}{N_\gamma}\right).$$

In questo modo, si è stabilita la dipendenza delle distorsioni  $\mu$  dalla densità di energia.

### 3.4 Distorsioni di tipo $y$

Le distorsioni di tipo  $y$  si formano quando i processi di scattering di Compton non permettono che ci sia equilibrio cinetico tra i fotoni e gli elettroni [22].

Consideriamo il caso di strong heating ( $T_e \ll T_R$ ): dato che solitamente le distorsioni di questo tipo si generano per valori del redshift  $z < 10^4$ , possiamo ignorare i fenomeni di doppio scattering e Bremsstrahlung e considerare solo lo scattering di Compton. Allora l'equazione di Kompaneets si può riscrivere come

$$\frac{\partial n}{\partial y} = \frac{1}{x} \frac{\partial}{\partial x} \left( x^4 \frac{\partial n}{\partial x} \right). \quad (3.7)$$

Calcoliamo le componenti:

$$\frac{\partial n}{\partial x} = -\frac{e^x}{(e^x - 1)^2}$$

$$\frac{\partial}{\partial x} \left( x^4 \frac{\partial n}{\partial x} \right) = \frac{x^3 e^x}{(e^x - 1)^2} \left( x \frac{e^x + 1}{e^x - 1} - 4 \right)$$

da cui otteniamo

$$\frac{\partial n}{\partial y} = \frac{x e^x}{(e^x - 1)^2} \left( x \frac{e^x + 1}{e^x - 1} - 4 \right). \quad (3.8)$$

Se siamo nel caso di piccole distorsioni dallo spettro di un corpo nero, per cui  $n = n_{PL} + \delta n$  con  $\delta n \ll n_{PL}$ , allora tale distorsione può essere descritta proprio dal parametro di Compton  $y$  [14]:

$$\frac{\delta n}{n_{PL}} = y \frac{x e^x}{e^x - 1} \left( x \left( \frac{e^x + 1}{e^x - 1} - 4 \right) \right).$$

Poiché il parametro  $y$  dipende dalla temperatura degli elettroni  $T_e$ , allora alle alte temperature queste distorsioni si generano più facilmente. Temperature elevate si possono trovare negli ammassi delle galassie, e in questo caso il fenomeno della formazione di distorsioni  $y$  è denominato effetto Sunyaev-Zel'dovich [14].

Le distorsioni  $y$  si possono ottenere anche partendo dalla trattazione di  $n$  data da combinazioni di spettri di corpi neri a diverse temperature. Per semplicità, consideriamo  $c = k_B = h = 1$ . Consideriamo la media dell'espansione di Taylor del numero di occupazione  $n$  di un corpo nero a temperatura  $T + \Delta T$  [23]:

$$\langle n(T + \Delta T) \rangle = \left\langle \frac{1}{e^{\frac{\nu}{T + \Delta T}} - 1} \right\rangle = \quad (3.9)$$

$$= n \left( T + \left( 1 + \left\langle \left( \frac{\Delta T}{T} \right)^2 \right\rangle \right) \right) + \frac{1}{2} Y(x) \left\langle \left( \frac{\Delta T}{T} \right)^2 \right\rangle, \quad (3.10)$$

con

$$\left\langle \frac{\Delta T}{T} \right\rangle = 0$$

e

$$Y(x) = \frac{x e^x}{(e^x - 1)^2} \left( x \frac{e^x + 1}{e^x - 1} - 4 \right)$$

che descrive la distorsione  $y$  con ampiezza  $y = \frac{1}{2} \langle \left( \frac{\Delta T}{T} \right)^2 \rangle$ .

Se si svolge però interamente lo sviluppo si ottiene un risultato leggermente diverso:

$$\begin{aligned} & \langle n(T + \Delta T) \rangle = \\ & = \langle n(T) + \frac{\partial n}{\partial(\ln(T))} \left( \ln(T + \Delta T) - \ln(T) \right) + \frac{1}{2} \frac{\partial^2 n}{\partial(\ln(T))^2} \left( \ln(T + \Delta T) - \ln(T) \right)^2 \rangle = \\ & = \langle n(T) + \ln \left( \frac{T + \Delta T}{T} \right) \frac{\partial n}{\partial(\ln(T))} + \frac{1}{2} \left( \ln \left( \frac{T + \Delta T}{T} \right) \right)^2 \frac{\partial^2 n}{\partial(\ln(T))^2} \rangle = \\ & = \langle n(T) + \ln \left( 1 + \frac{\Delta T}{T} \right) \frac{\partial n}{\partial(\ln(T))} + \frac{1}{2} \left( \ln \left( 1 + \frac{\Delta T}{T} \right) \right)^2 \frac{\partial^2 n}{\partial(\ln(T))^2} \rangle = \\ & = \langle n(T) + \left( \left( \frac{\Delta T}{T} \right) - \frac{1}{2} \left( \frac{\Delta T}{T} \right)^2 \right) T \frac{\partial n}{\partial T} + \frac{1}{2} \left( \left( \frac{\Delta T}{T} \right)^2 \right) \left( T^2 \frac{\partial^2 n}{\partial T^2} + T \frac{\partial n}{\partial T} \right) \rangle = \\ & = \langle n(T) + \left( \left( \frac{\Delta T}{T} \right) + \left( \frac{\Delta T}{T} \right)^2 \right) T \frac{\partial n}{\partial T} + \frac{1}{2} \left( \frac{\Delta T}{T} \right)^2 T^4 \frac{\partial}{\partial T} \frac{1}{T^2} \frac{\partial n}{\partial T} \rangle = \\ & = n(T) + \left\langle \left( \frac{\Delta T}{T} \right)^2 \right\rangle T \frac{\partial n}{\partial T} + \frac{1}{2} \left\langle \left( \frac{\Delta T}{T} \right)^2 \right\rangle T^4 \frac{\partial}{\partial T} \frac{1}{T^2} \frac{\partial n}{\partial T} = \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 &= \frac{1}{e^{\nu/T} - 1} + \left\langle \left( \frac{\Delta T}{T} \right)^2 \right\rangle T \frac{\nu e^{\nu/T}}{T^2 (e^{\nu/T} - 1)^2} + \frac{1}{2} \left\langle \left( \frac{\Delta T}{T} \right)^2 \right\rangle T^4 \left\{ -\frac{x^2 e^x}{T^4 (e^x - 1)^2} \right. \\
 &\quad \left. - \frac{4x e^x}{T^4 (e^x - 1)^2} + \frac{2x^2 e^{2x}}{T^4 (e^x - 1)^3} \right\} = \\
 &= \frac{1}{e^x - 1} + \left\langle \left( \frac{\Delta T}{T} \right)^2 \right\rangle \frac{x e^x}{(e^x - 1)^2} + \frac{1}{2} \left\langle \left( \frac{\Delta T}{T} \right)^2 \right\rangle \frac{x e^x}{(e^x - 1)^2} \left( -x - 4 + \frac{2x e^x}{e^x - 1} \right) = \\
 &= \frac{1}{e^x - 1} + \left\langle \left( \frac{\Delta T}{T} \right)^2 \right\rangle \frac{x e^x}{(e^x - 1)^2} + \frac{1}{2} \left\langle \left( \frac{\Delta T}{T} \right)^2 \right\rangle \frac{x e^x}{(e^x - 1)^2} \left( \frac{-x e^x + x + 2x e^x}{e^x - 1} - 4 \right) = \\
 &= \frac{1}{e^x - 1} + \left\langle \left( \frac{\Delta T}{T} \right)^2 \right\rangle \frac{x e^x}{(e^x - 1)^2} + \frac{1}{2} \left\langle \left( \frac{\Delta T}{T} \right)^2 \right\rangle \frac{x e^x}{(e^x - 1)^2} \left( x \frac{e^x + 1}{e^x - 1} - 4 \right) = \\
 &= (n(T)) \left( 1 + \left\langle \left( \frac{\Delta T}{T} \right)^2 \right\rangle \frac{x e^x}{(e^x - 1)} \right) + \frac{1}{2} \left\langle \left( \frac{\Delta T}{T} \right)^2 \right\rangle Y(x) \neq \\
 &\neq n_{PL}(q) + \frac{1}{2} Y(x) \left\langle \left( \frac{\Delta T}{T} \right)^2 \right\rangle.
 \end{aligned}$$

L'ultima riga del risultato riportato in [23] non coincide con quanto ottenuto dallo sviluppo, dove  $n$  è espressa in funzione di

$$q = \left( T \left( 1 + \left\langle \left( \frac{\Delta T}{T} \right)^2 \right\rangle \right) \right),$$

ma, come si vedrà in seguito, sono tuttavia risultati simili. Il risultato è che da combinazioni di spettri di corpi neri a diverse temperature, si ottiene lo spettro di un corpo nero con distorsione  $y$ .

Questo sviluppo è stato ottenuto considerando che

$$\frac{\partial n}{\partial(\ln(T))} = T \frac{\partial n}{\partial T} \quad (3.11)$$

$$\frac{\partial^2 n}{\partial(\ln(T))^2} = T^2 \frac{\partial^2 n}{\partial T^2} + T \frac{\partial n}{\partial T} \quad (3.12)$$

$$\frac{\partial n}{\partial T} = \frac{\nu e^{\nu/T}}{T^2 (e^{\nu/T} - 1)^2} = \frac{x e^x}{T (e^x - 1)^2} \quad (3.13)$$

$$\frac{\partial}{\partial T} \left( \frac{1}{T^2} \frac{\partial n}{\partial T} \right) = \frac{-\nu e^{\nu/T}}{T^6 (e^{\nu/T} - 1)^2} - \frac{4\nu e^{\nu/T}}{T^5 (e^{\nu/T} - 1)^2} + \frac{2\nu^2 e^{2\nu/T}}{T^6 (e^{\nu/T} - 1)^3} \quad (3.14)$$

$$= -\frac{x^2 e^x}{T^4 (e^x - 1)^2} - \frac{4x e^x}{T^4 (e^x - 1)^2} + \frac{2x^2 e^{2x}}{T^4 (e^x - 1)^3} \quad (3.15)$$

La densità di energia di un corpo nero è

$$E = a_R T,$$

con  $a_R$  una costante della radiazione, mentre l'entropia si ottiene da

$$S = \frac{4}{3} a_R T^3.$$

Consideriamo lo spettro di due corpi neri con temperatura  $T_1 = T + \Delta T$  e  $T_2 = T - \Delta T$ , e i valori medi iniziali della densità di energia, densità di numero e densità di entropia sono dati da [23]:

$$\begin{aligned} E_i &= \frac{1}{2} a_R (T_1^4 + T_2^4) \approx a_R T^4 \left( 1 + 6 \left( \frac{\Delta T}{T} \right)^2 \right) > a_R T^4 \\ N_i &= \frac{1}{2} b_R (T_1^3 + T_2^3) \approx b_R T^3 \left( 1 + 3 \left( \frac{\Delta T}{T} \right)^2 \right) > b_R T^3 \\ S_i &= \frac{1}{2} \frac{4a_R}{3} (T_1^3 + T_2^3) \approx \frac{4a_R}{3} T^3 \left( 1 + 3 \left( \frac{\Delta T}{T} \right)^2 \right) > \frac{4a_R}{3} T^3, \end{aligned}$$

con

$$b_R = \frac{16\pi k_B \zeta(3)}{c^3 h^3}$$

con le costanti prese con i loro valori e  $\zeta(3) \simeq 1.20206$ .

Otteniamo la temperatura finale del corpo nero tale da mantenere inalterato la densità di numero dei fotoni  $N_i = N_f$ :

$$T_f = \left( \frac{N_i}{b_R} \right)^{1/3} \approx T \left( 1 + \left( \frac{\Delta T}{T} \right)^2 \right);$$

mentre la densità di energia è data da

$$E_f = a_R T_f^4 \approx a_R T^4 \left( 1 + 4 \left( \frac{\Delta T}{T} \right)^2 \right) < E_i.$$

Consideriamo

$$E_f - a_R T^4 = \frac{2}{3} (E_i - a_R T^4) = 4a_R T^4 \left( \frac{\Delta T}{T} \right)^2,$$

mentre la restante parte dell'energia iniziale

$$\Delta E = \frac{1}{3} (E_i - a_R T^4) = 2 \left( \frac{\Delta T}{T} \right)^2 a_R T^4$$

è l'energia della distorsione di tipo *y*.

Per piccole distorsioni, l'entropia dovrebbe variare come  $S = S_{PL} + \Delta S$  con

$$\begin{aligned} \Delta S &= 8\pi T^3 \int x^2 (\ln(1 + n_{PL}) - \ln(n_{PL})) \Delta n dx = \\ &= 8\pi T^3 \int x^3 \Delta n dx = \frac{\Delta E}{T} \end{aligned}$$

considerando sempre  $k_B = 1$ .

La differenza di entropia è data da:

$$\Delta S = \frac{\Delta E}{T} \approx 2a_R T^3 \left( \frac{\Delta T}{T} \right)^2.$$

"Mixando" gli spettri di due corpi neri e calcolando la media si ottiene nuovamente lo spettro di un corpo nero con la stessa entropia e numero di fotoni della media iniziale, ma temperatura maggiore alla temperatura iniziale media, con differenza

$$T_f - T_i = T \left( 1 + \left( \frac{\Delta T}{T} \right)^2 \right) - T = T \left( \frac{\Delta T}{T} \right)^2,$$

ed energia minore. La restante parte della densità di energia appare sotto forma di distorsione  $y$ .



## Capitolo 4

# Rappresentazioni della legge di Planck

Si definisce, in una function Matlab, il vettore  $x$  che racchiude i valori nell'intervallo  $[0.1, 10]$ . Ricordando che  $x = \frac{\nu}{T}$  (continua a valere la condizione  $k_B = h = c = 1$ ) e che la legge di Planck è definita come  $n_{PL}(x) = \frac{1}{e^x - 1}$ , in figura 4.1 è rappresentato il grafico della funzione  $y = x^3 n_{PL}(x)$ .

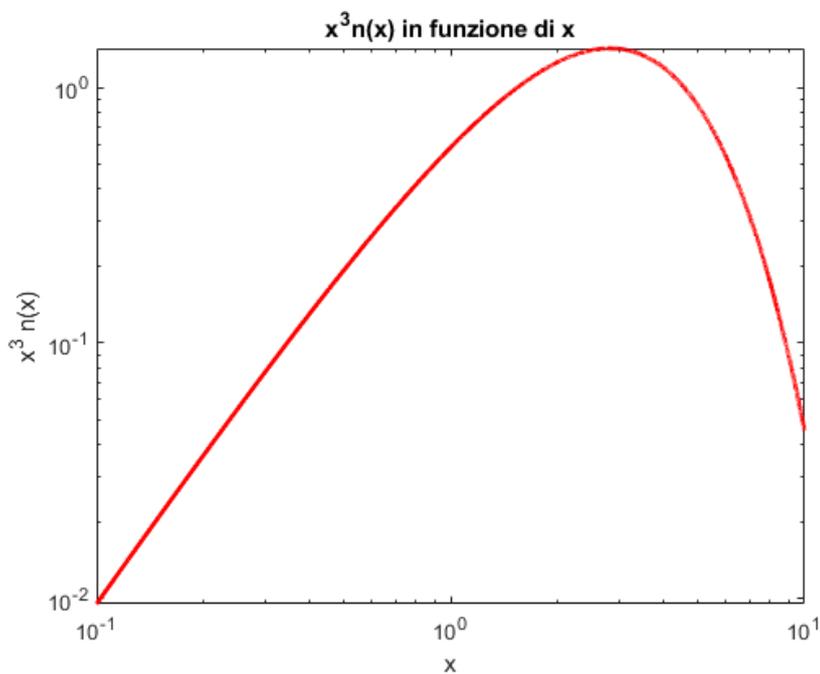


Figura 4.1.  $x^3 n_{PL}(x)$

Il risultato massimo, pari a 1.42, si ha per  $x = 2.8153$ , mentre per  $x \rightarrow 0.1$  e  $x \rightarrow 10$  la funzione tende a zero.

In figura 4.2, invece, sono riportati i grafici che rappresentano la legge di Planck  $n_{PL}$  sia in forma *loglog*, *plot* che *semilogx*. Senza che  $n_{PL}(x)$  sia moltiplicato per  $x^3$ , il valore massimo ottenuto è  $n_{PL}(x) = 9.5083$  circa per un valore della frequenza di circa  $x \rightarrow 0.1$ .

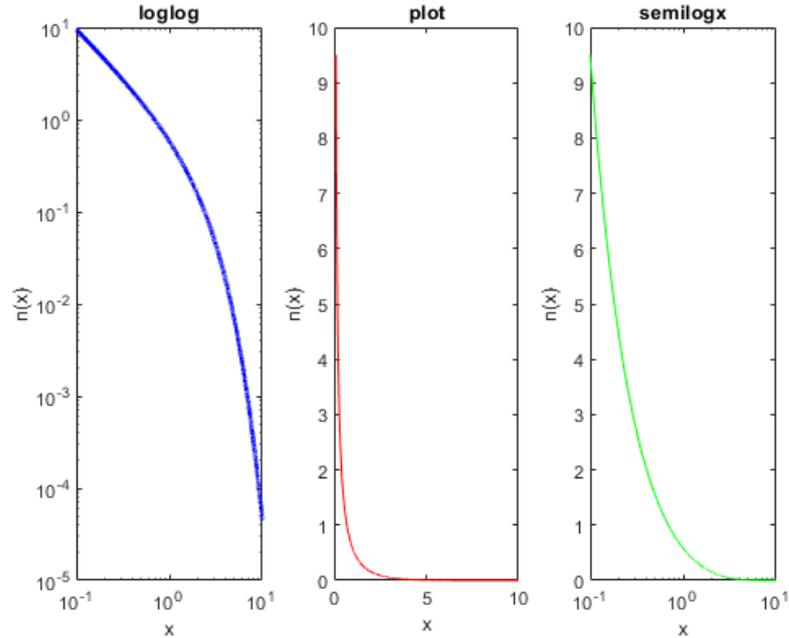


Figura 4.2. loglog (in blu), plot (in rosso) e semilogx (in verde) di  $n_{PL}(x)$

## 4.1 $\Delta T/T$ fissato

In un'altra function (che però richiama la precedente e tiene conto dei suoi risultati) si fissa un valore della frequenza  $\nu$  (ad esempio  $\nu = 10$ ) e si definisce un vettore di possibili valori della temperatura come  $T = \nu/x$ . Fissato  $\frac{\Delta T}{T} = 0.4$  si ottiene dunque un valore di  $\Delta T$  che varia con la temperatura ( $\Delta T = 0.4 \cdot T$ ). Data l'equazione per il numero di occupazione in funzione della temperatura  $n_T(T) = \frac{1}{e^{\nu/T} - 1}$ , si mettono a confronto i grafici in figura 4.3 e si osserva che  $n_T(T)$  e  $n_T(T + \Delta T)$  hanno lo stesso andamento ma che la seconda funzione, per stessi valori delle ascisse, ha ordinate maggiori, come ci si aspettava (analogamente si ha ordinate minori se consideriamo  $n_T(T - \Delta T)$ ).

Si nota che la stessa funzione, è concava, lineare e convessa rispettivamente nei tre differenti modi di raffigurazione e questo ci indica che la funzione  $n_T(T)$  cresce più velocemente

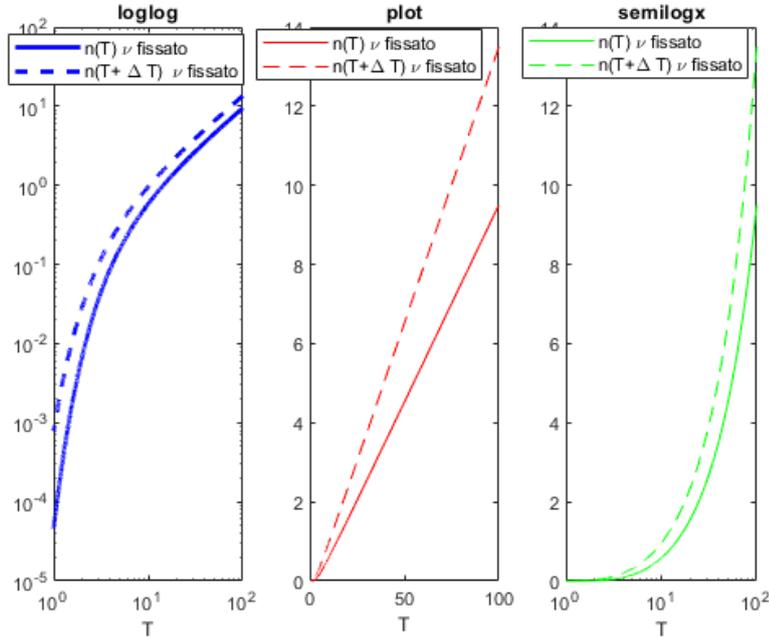


Figura 4.3.  $n_T(T)$  (linea continua) e  $n_T(T + \Delta T)$  (linea tratteggiata) rappresentati in loglog (in blu), plot (in rosso) e semilogx (in verde)

(quasi in maniera esponenziale) per  $T \rightarrow 1$  e poi tende ad avere una crescita più lineare. A conferma di ciò, si riporta in figura 4.4 un ingrandimento del *plot* della funzione per piccoli valori di  $T$ , dove appunto di può notare l'andamento esponenziale.

Se sono messi a confronto il grafico di  $x^3 n(x)$  con  $x^3 n_{PL}\left(\frac{x}{1 \pm \frac{\Delta T}{T}}\right)$  in figura 4.5, si osservano delle funzioni con lo stesso andamento ma ampiezza diversa, ma non si nota alcuna differenza cambiando il valore di  $\nu$ , ma si ha qualche cambiamento solo al variare di  $\frac{\Delta T}{T}$ .

In una nuova function (che richiama le due citate fino ad adesso) si fissa in questo caso un valore per la temperatura, come ad esempio  $T = 2.725$ , e la frequenza è dunque data da  $\nu = x \cdot T$ . Fissata  $\Delta T/T = 0.4$ , si definisce la legge di Planck come funzione della frequenza  $n_\nu(\nu)$  e i risultati di  $n_\nu(\nu)$  e  $n_\nu\left(\frac{\nu T}{T + \Delta T}\right)$  sono messi a confronto in figura 4.6.

Si può concludere dunque che la legge di Planck decresce esponenzialmente all'aumentare della frequenza.

I risultati ottenuti sono raggruppati in figura 4.7, dove è rappresentata la funzione  $x^3 n_{PL}(x)$  e  $x^3 n\left(\frac{x}{1 \pm \frac{\Delta T}{T}}\right)$ , con  $T$  o con  $\nu$  fissata.

Anche in questo caso, non si osservano differenze al variare della frequenza o della temperatura, ma solo al variare di  $\Delta T/T$ . Si nota inoltre che, per lo stesso valore di  $\Delta T/T$ , le funzioni risultano congruenti sia per  $\nu$  che per  $T$  fissato.

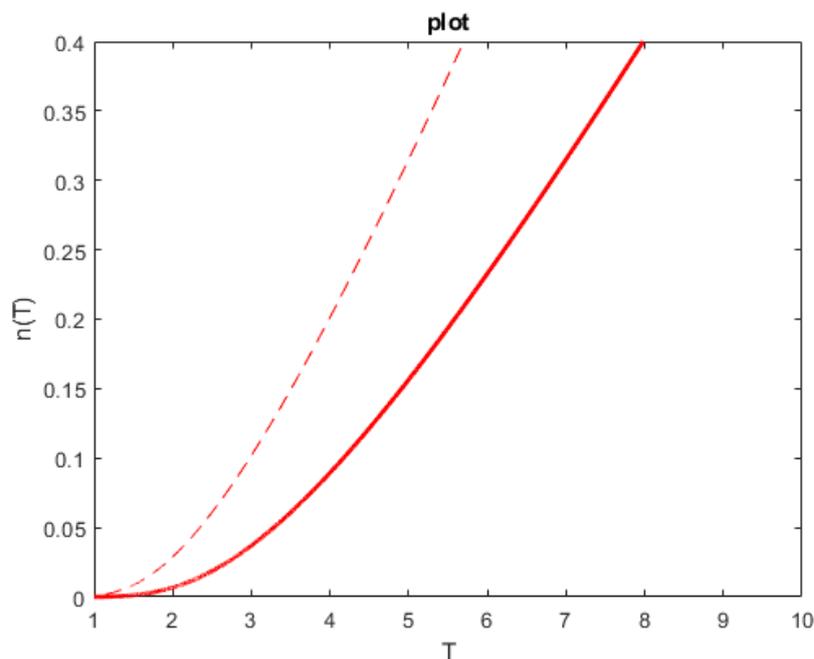


Figura 4.4. Plot di  $n(T)$  (linea continua) e  $n(T + \Delta T)$  (linea tratteggiata) per piccoli valori della temperatura

## 4.2 $\Delta T$ fissato

Si prova a fissare  $\Delta T$  e si considera  $\Delta T = 0.5$ . Quando  $\nu$  è fissato e il valore della temperatura  $T$  varia, varia anche il valore di  $\Delta T/T$ , che va da  $\Delta T/T = 0.005$  per  $T = 100$  a  $\Delta T/T = 0.5$  per  $T = 1$ . Questo comporta che, come illustrato in figura 4.8, per  $x \rightarrow 0.1$  la legge di Planck per  $T$  e  $T \pm \Delta T$  coincide.

Quando invece fissiamo la temperatura (fig. 4.9), non si osserva un comportamento diverso, poiché  $T + \Delta T$  è costante come nel caso precedente con  $\Delta T/T$  fissata.

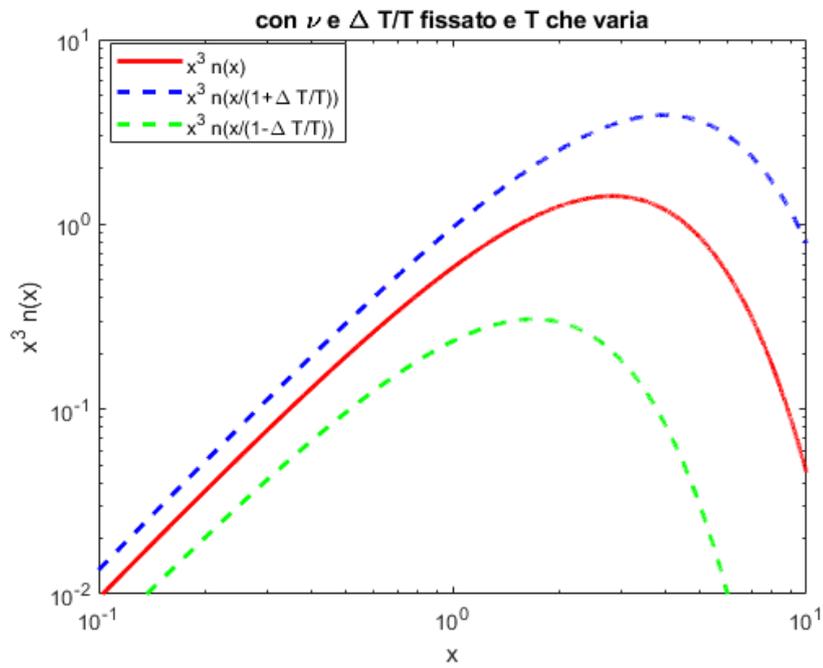


Figura 4.5. Confronto tra i grafici di  $x^3 n_{PL}(x)$  (in rosso),  $x^3 n(\frac{x}{1+\frac{\Delta T}{T}})$  (in blu) e  $x^3 n(\frac{x}{1-\frac{\Delta T}{T}})$  (in verde)

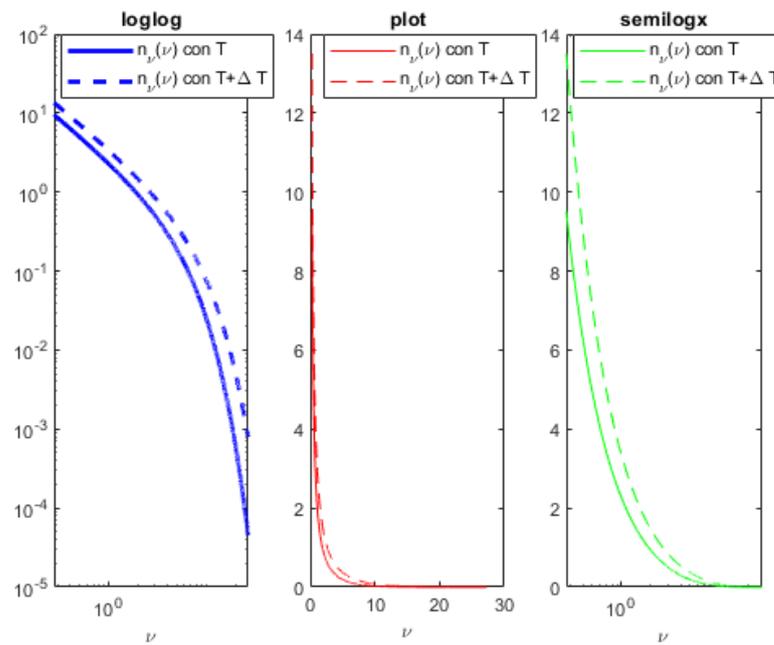


Figura 4.6. Confronto tra i grafici di  $n_\nu(\nu)$  (linee continue),  $n_\nu(\frac{\nu T}{T+\Delta T})$  (linee tratteggiate) con  $T$  e  $\Delta T/T$  fissati in loglog (in blu), plot (in rosso) e semilogx (in verde)

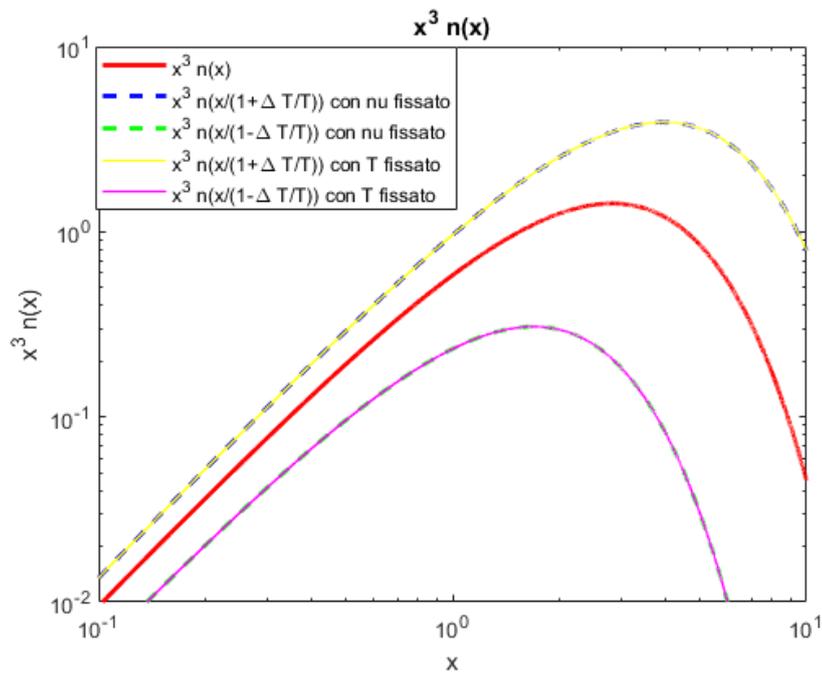


Figura 4.7. Confronto tra i grafici di  $x^3 n_{PL}(x)$  (in rosso),  $x^3 n(\frac{x}{1+\frac{\Delta T}{T}})$  con  $\nu$  fissato (in blu tratteggiato),  $x^3 n(\frac{x}{1-\frac{\Delta T}{T}})$  con  $\nu$  fissato (in verde tratteggiato),  $x^3 n(\frac{x}{1+\frac{\Delta T}{T}})$  con  $T$  fissato (in giallo),  $x^3 n(\frac{x}{1-\frac{\Delta T}{T}})$  con  $T$  fissato (in fucsia)

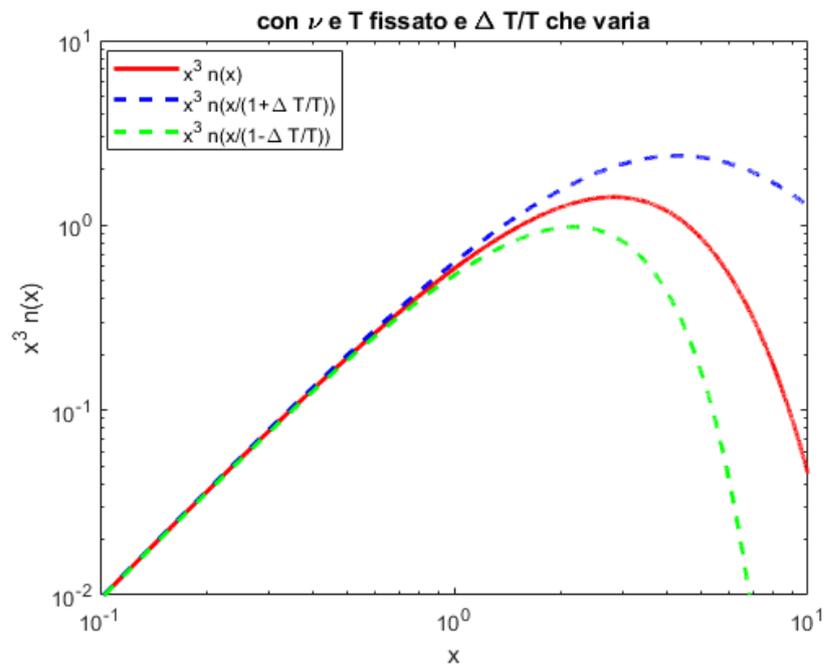


Figura 4.8. Confronto tra i grafici di  $x^3 n_{PL}(x)$  (in rosso),  $x^3 n(\frac{x}{1+\frac{\Delta T}{T}})$  (in blu) e  $x^3 n(\frac{x}{1-\frac{\Delta T}{T}})$  (in verde) con  $\nu$  e  $T$  fissati e  $\frac{\Delta T}{T}$  che varia

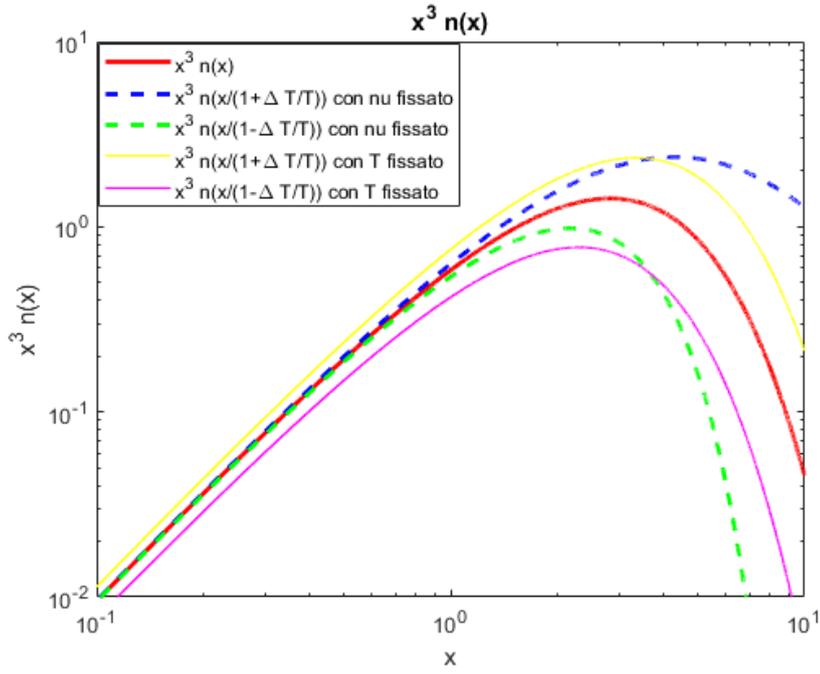


Figura 4.9. Confronto tra i grafici con  $\Delta T = 0.5$  di  $x^3 n_{PL}(x)$  (in rosso),  $x^3 n(\frac{x}{1+\frac{\Delta T}{T}})$  con  $\nu$  fissato (in blu tratteggiato),  $x^3 n(\frac{x}{1-\frac{\Delta T}{T}})$  con  $\nu$  fissato (in verde tratteggiato),  $x^3 n(\frac{x}{1+\frac{\Delta T}{T}})$  con  $T$  fissato (in giallo),  $x^3 n(\frac{x}{1-\frac{\Delta T}{T}})$  con  $T$  fissato (in fucsia)



## Capitolo 5

# Confronto tra gli sviluppi

Si consideri la legge di Planck

$$n_{PL}(x) = \frac{1}{e^x - 1}, \quad (5.1)$$

lo sviluppo di Taylor ottenuto precedentemente attraverso i nostri calcoli, che da adesso sarà denominato Sviluppo1,

$$Sviluppo1(x) = n_T(T) + \left(\frac{\Delta T}{T} + \left(\frac{\Delta T}{T}\right)^2\right) \frac{x e^x}{(e^x - 1)^2} + \frac{1}{2} \left(\frac{\Delta T}{T}\right)^2 Y(x) \quad (5.2)$$

e lo sviluppo (3.10), riportato in [23], che sarà rinominato Sviluppo2

$$Sviluppo2(x) = n_{PL}\left(\frac{x}{1 + \frac{\Delta T}{T} + \left(\frac{\Delta T}{T}\right)^2}\right) + \frac{1}{2} Y(x) \left(\frac{\Delta T}{T}\right)^2; \quad (5.3)$$

con

$$Y(x) = \frac{x e^x}{(e^x - 1)^2} \left(x \frac{e^x + 1}{e^x - 1} - 4\right).$$

Inoltre, con  $n_T$  si indica la legge di Planck espressa in funzione della temperatura, e analogamente con  $n_\nu$  la legge espressa in funzione della frequenza  $\nu$ .

Si tenta di rappresentare queste funzioni al variare del parametro  $\frac{\Delta T}{T}$ . Come primo tentativo si considera  $\frac{\Delta T}{T} = 0.1835$ , che corrisponde a  $\Delta T = 0.5$  e  $T = 2.725$ . In figura 5.1 è rappresentata, oltre alla legge di Planck e i due sviluppi appena definiti, la legge di Planck con la propria temperatura incrementata di  $\Delta T$ .

Tutte le funzioni sono maggiori rispetto la legge di Planck e in particolare,  $n_{PL}\left(\frac{x}{1 + \frac{\Delta T}{T}}\right)$  sembra coincidere con la funzione Sviluppo1.

Se invece si considera  $\Delta T = -0.1835$ , come si può osservare in figura 5.2,  $n_{PL}(x)$  è la funzione maggiore. In questo caso però, sebbene coincidano in un primo intervallo, Sviluppo1 e  $n_{PL}\left(\frac{x}{1 + \frac{\Delta T}{T}}\right)$  si differenziano per  $x \rightarrow 10$ , infatti la seconda che ha dei valori minori, mentre Sviluppo2, sempre per  $x \rightarrow 10$ , tende più a  $n_{PL}(x)$ .

Si rappresenta anche la funzione  $x^3 n(x)$ , per lo stesso valore di  $\frac{\Delta T}{T}$ , sia nel caso di  $\Delta T$  positivo che negativo (rispettivamente in fig. 5.3 e in fig. 5.4).

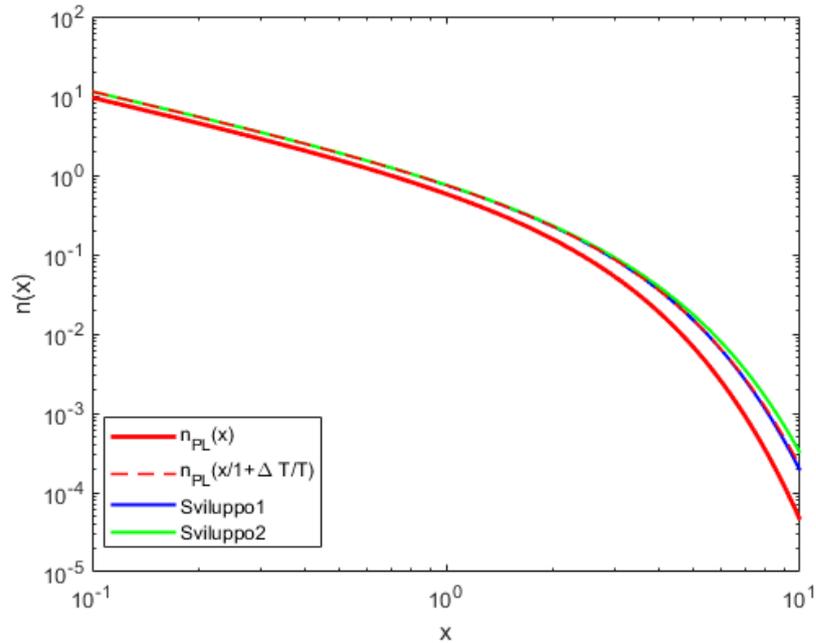


Figura 5.1. La legge di Planck (5.1) (in rosso), Sviluppo1 (5.2) (in blu), Sviluppo2 (5.3) (in verde) e la legge di Planck incrementata (in rosso tratteggiato) con  $\Delta T/T = 0.1835$

Nel caso con  $\Delta T$  positivo, la legge di Planck incrementata sembra coincidere nuovamente con Sviluppo1, mentre Sviluppo2 si discosta da queste due dopo aver raggiunto il suo massimo per  $x \rightarrow 10$ .

Anche nel caso negativo, nonostante la legge di Planck con variazione e i due sviluppi coincidano per un primo intervallo, dopo aver raggiunto il massimo hanno tre diversi comportamenti: in particolare la funzione  $n_{PL}(\frac{x}{1+\Delta T/T})$  tende a 0 più velocemente, mentre Sviluppo2 tende alla legge di Planck.

Si aumenta il valore del parametro  $\frac{\Delta T}{T} = 0.4$  e rappresentiamo sia il caso positivo in fig. (5.5) che il caso negativo in fig. (5.6).

Nel caso positivo, si nota un andamento simile a quello visto in precedenza, ma con un una differenza dalla legge di Planck leggermente maggiore.

Nel caso di  $\Delta T/T$  negativo invece, sebbene la legge di Planck variata continui ad avere lo stesso andamento ma con differenze maggiori da  $n_{PL}$ , per i due sviluppi si nota un comportamento diverso. Infatti, nell'intervallo  $x \in (2, 6)$ , questi tendono a decrescere leggermente, crescere e decrescere nuovamente, intersecando anche la legge di Planck.

Questa differenza tra caso positivo e negativo si ha anche per  $x^3 n(x)$ . Infatti, per

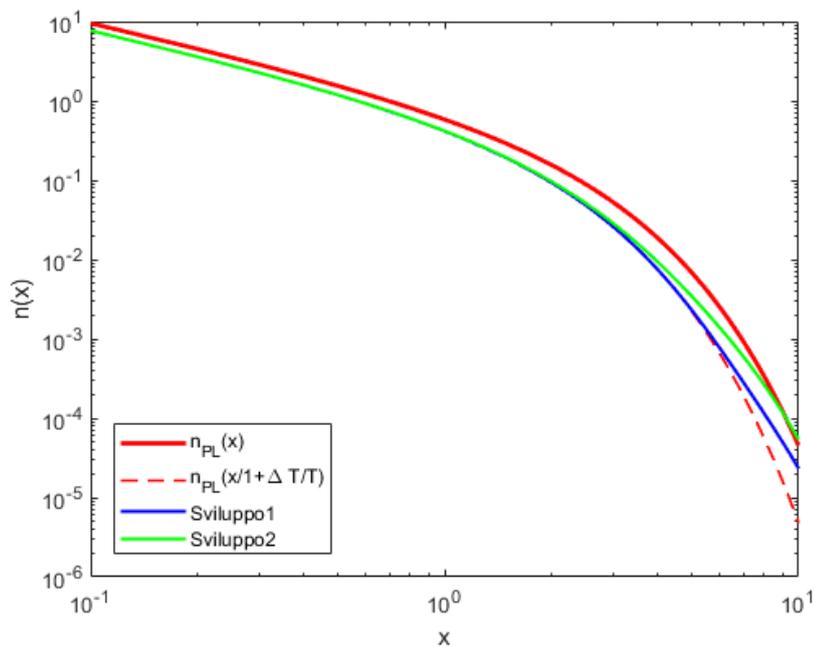


Figura 5.2. La legge di Planck (5.1) (in rosso), la legge di Planck incrementata (in rosso tratteggiato), Sviluppo1 (5.2) (in blu) e Sviluppo2 (5.3) (in verde) con  $\Delta T/T = -0.1835$

$\Delta T/T = 0.4$  (fig. 5.7) si ha un andamento delle funzioni del tutto simile al caso precedente, ma con dei valori maggiori.

Per il caso negativo invece (fig. 5.8) questo comportamento più ondulatorio delle due funzioni o nello stesso intervallo è più accentuato. Tuttavia, queste anomalie, non riguardano le basse frequenze.

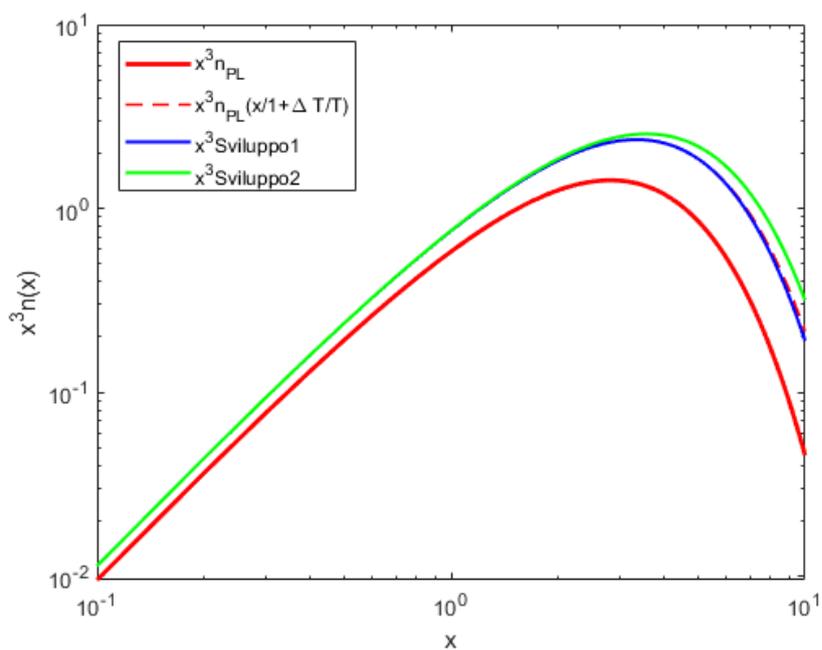


Figura 5.3.  $x^3 n(x)$  della legge di Planck (5.1) (in rosso), della legge di Planck incrementata (in rosso tratteggiato), di Sviluppo1 (5.2) (in blu) e di Sviluppo2 (5.3) (in verde) con  $\Delta T/T = 0.1835$

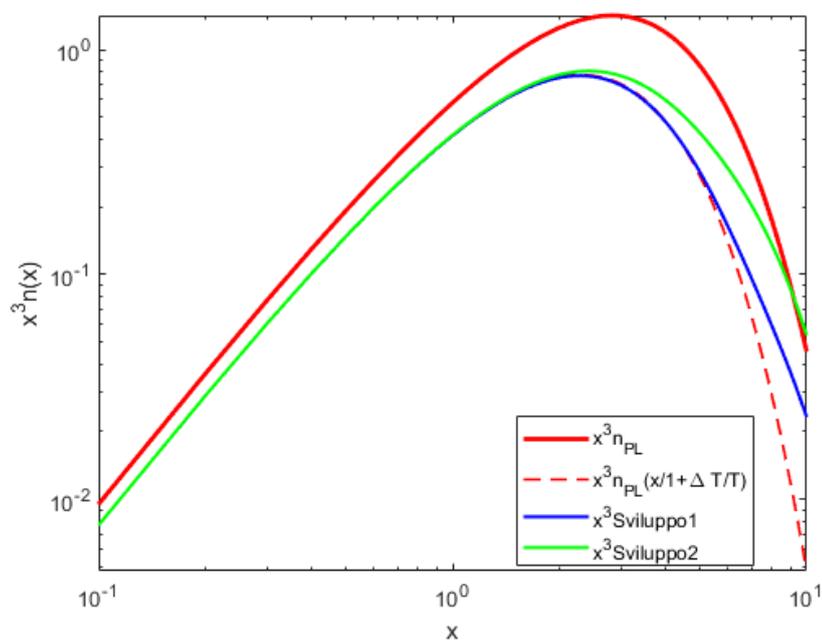


Figura 5.4.  $x^3 n(x)$  della legge di Planck (5.1) (in rosso), della legge di Plancke incrementata (in rosso tratteggiato), di Sviluppo1 (5.2) (in blu) e di Sviluppo2 (5.3) (in verde) con  $\Delta T/T = -0.1835$

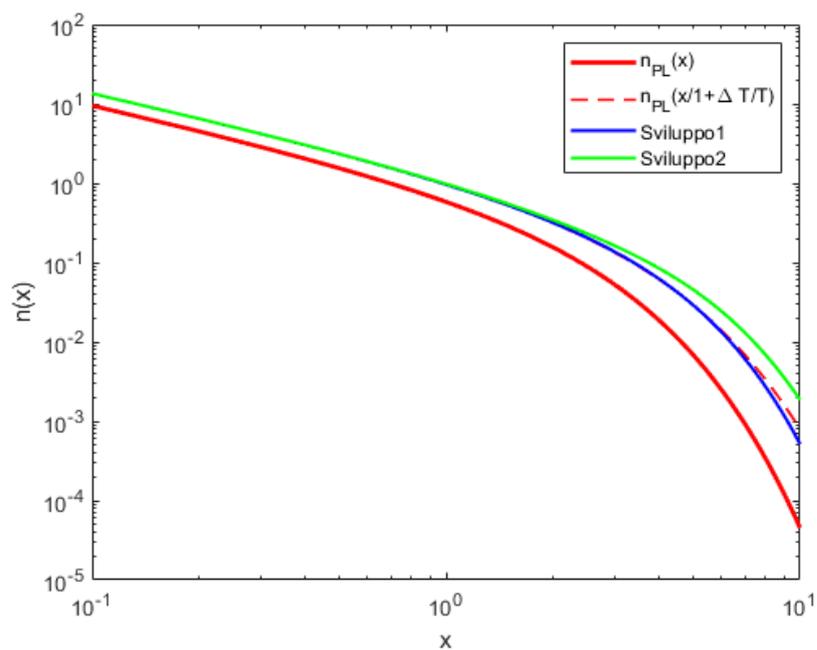


Figura 5.5. La legge di Planck (5.1) (in rosso), la legge di Planck incrementata (in rosso tratteggiato), Sviluppo1 (5.2) (in blu) e Sviluppo2 (5.3) (in verde) con  $\Delta T/T = 0.4$

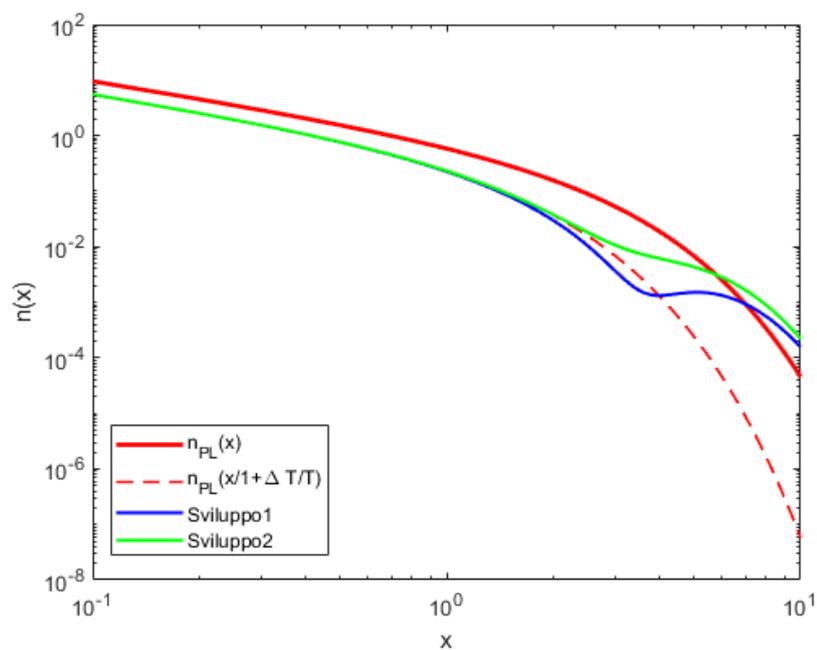


Figura 5.6. La legge di Planck (5.1) (in rosso), la legge di Planck incrementata (in rosso tratteggiato), Sviluppo1 (5.2) (in blu) e Sviluppo2 (5.3) (in verde) con  $\Delta T/T = -0.4$

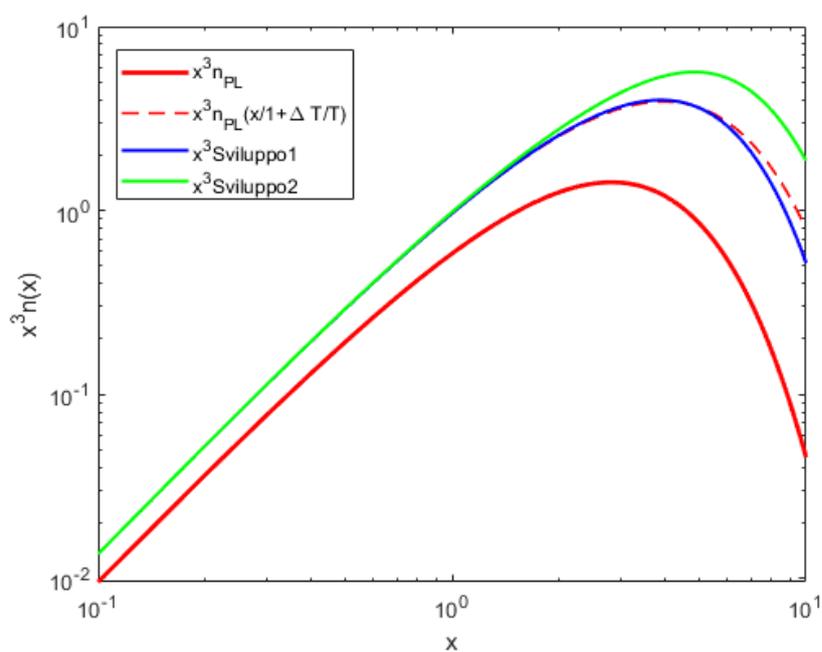


Figura 5.7.  $x^3 n(x)$  della legge di Planck (5.1) (in rosso), della legge di Planck incrementata (in rosso tratteggiato), di Sviluppo1 (5.2) (in blu) di Sviluppo2 (5.3) (in verde) con  $\Delta T/T = 0.4$

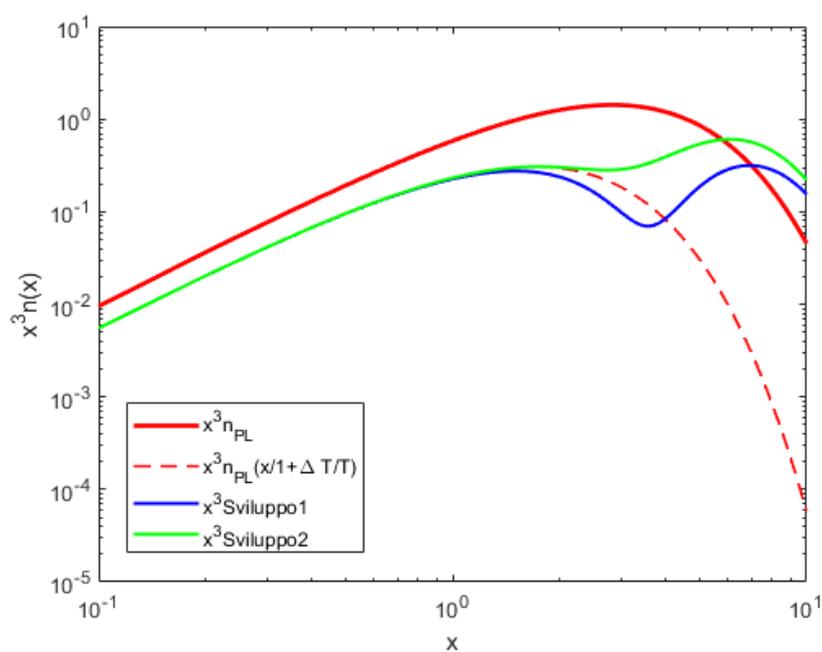


Figura 5.8.  $x^3 n(x)$  della legge di Planck (5.1) (in rosso), della legge di Planck incrementata (in rosso tratteggiata), di Sviluppo1 (5.2) (in blu) e di Sviluppo2 (5.3) (in verde) con  $\Delta T/T = -0.4$



## Capitolo 6

# Variazioni della legge di Planck

Partendo da (5.3) ottenuto in [23], proviamo a definire degli sviluppi di Taylor di alcune variazioni della legge di Planck come

$$n_{d1}(x) = n_T \left( \frac{\nu T}{\nu + T\gamma\Delta T} \right) = \frac{1}{e^{\nu/T + \gamma\Delta T} - 1} = \quad (6.1)$$

$$= n_{PL}(x) + \frac{xe^x}{(e^x - 1)^2} \left( -\frac{T\gamma\Delta T}{\nu + T\gamma\Delta T} + \left( -\frac{T\gamma\Delta T}{\nu + T\gamma\Delta T} \right)^2 \right) + \frac{1}{2} \left( -\frac{T\gamma\Delta T}{\nu + T\gamma\Delta T} \right)^2 Y(x), \quad (6.2)$$

oppure

$$n_{d2}(x) = n_T \left( T + \frac{\nu}{\gamma\Delta T} \right) = \frac{1}{e^{\frac{\nu}{T} + \gamma\Delta T} - 1} = \quad (6.3)$$

$$= n_{PL}(x) + \frac{xe^x}{(e^x - 1)^2} \left( \frac{x}{\gamma\Delta T} + \left( \frac{x}{\gamma\Delta T} \right)^2 \right) + \frac{1}{2} \left( \frac{x}{\gamma\Delta T} \right)^2 Y(x) \quad (6.4)$$

o ancora

$$n_{d3}(x) = n_T \left( \frac{\nu T}{\nu + \gamma\Delta T} \right) = \frac{1}{e^{\frac{\nu}{T} + \gamma\Delta T} - 1} = \quad (6.5)$$

$$= n_{PL}(x) + \frac{xe^x}{(e^x - 1)^2} \left( -\frac{\gamma\Delta T}{\nu + \gamma\Delta T} + \left( -\frac{\gamma\Delta T}{\nu + \gamma\Delta T} \right)^2 \right) + \frac{1}{2} \left( -\frac{\gamma\Delta T}{\nu + \gamma\Delta T} \right)^2 Y(x) \quad (6.6)$$

con, in tutti i casi,

$$Y(x) = \frac{xe^x}{(e^x - 1)^2} \left( x \frac{e^x + 1}{e^x - 1} - 4 \right).$$

Lo scopo è quello di ottenere un modello che rappresenti meglio le distorsioni di tipo  $y$  dello spettro della CMB dallo spettro di un corpo nero.

Queste variazioni sono state ottenute tramite lo stesso processo adottato per ottenere Sviluppo1 (5.2). Di seguito sono riportati i calcoli per  $n_{d1}$ , ma il procedimento è del tutto analogo anche per altri due casi.

$$\begin{aligned}
 n_T\left(\frac{\nu T}{\nu + T\gamma\Delta T}\right) &= n_T\left(T + T\left(\frac{\nu}{\nu + T\gamma\Delta T} - 1\right)\right) = \\
 &= n_T(T) + \frac{\partial n_T(T)}{\partial(\ln T)}\left(\ln\left(T + T\left(\frac{\nu}{\nu + T\gamma\Delta T} - 1\right)\right) - \ln(T)\right) + \\
 &+ \frac{1}{2}\frac{\partial^2 n_T(T)}{\partial(\ln T)^2}\left(\ln\left(T + T\left(\frac{\nu}{\nu + T\gamma\Delta T} - 1\right)\right) - \ln(T)\right)^2 = \\
 &= n_T(T) + \frac{\partial n_T(T)}{\partial(\ln T)}\left(\ln\left(1 + \frac{\nu}{\nu + T\gamma\Delta T} - 1\right)\right) + \frac{1}{2}\frac{\partial^2 n_T(T)}{\partial(\ln T)^2}\left(\ln\left(1 + \frac{\nu}{\nu + T\gamma\Delta T}\right)\right)^2 = \\
 &= n_T(T) + \frac{\partial n_T(T)}{\partial(\ln T)}\left(\ln\left(1 + \frac{\nu - \nu - T\gamma\Delta T}{\nu + T\gamma\Delta T}\right)\right) + \frac{1}{2}\frac{\partial^2 n_T(T)}{(\ln T)^2}\left(\ln\left(1 - \frac{T\gamma\Delta T}{\nu + T\gamma\Delta T}\right)\right)^2 = \\
 &= n_T(T) + \frac{\partial n_T(T)}{\partial(\ln T)}\left(-\frac{T\gamma\Delta T}{\nu + T\gamma\Delta T} - \frac{1}{2}\left(-\frac{T\gamma\Delta T}{\nu + T\gamma\Delta T}\right)^2\right) + \frac{1}{2}\frac{\partial^2 n_T(T)}{\partial(\ln T)^2}\left(-\frac{T\gamma\Delta T}{\nu + T\gamma\Delta T}\right)^2 = \\
 &= n_T(T) + T\frac{\partial n_T(T)}{\partial T}\left(-\frac{T\gamma\Delta T}{\nu + T\gamma\Delta T} - \frac{1}{2}\left(-\frac{T\gamma\Delta T}{\nu + T\gamma\Delta T}\right)^2\right) + \\
 &+ \frac{1}{2}\left(T^2\frac{\partial^2 n_T(T)}{\partial T^2} + T\frac{\partial n(T)}{\partial T}\right)\left(-\frac{T\gamma\Delta T}{\nu + T\gamma\Delta T}\right)^2 = \\
 &= \frac{1}{e^x - 1} + \frac{xe^x}{(e^x - 1)^2}\left(-\frac{T\gamma\Delta T}{\nu + T\gamma\Delta T} + \left(-\frac{T\gamma\Delta T}{\nu + T\gamma\Delta T}\right)^2\right) + \frac{1}{2}\left(-\frac{T\gamma\Delta T}{\nu + T\gamma\Delta T}\right)^2 Y(x)
 \end{aligned}$$

ricordando che

$$\begin{aligned}
 \frac{\partial n}{\partial(\ln(T))} &= T\frac{\partial n}{\partial T} \\
 \frac{\partial^2 n}{\partial(\ln(T))^2} &= T^2\frac{\partial^2 n}{\partial T^2} + T\frac{\partial n}{\partial T} \\
 \frac{\partial n}{\partial T} &= \frac{\nu e^{\nu/T}}{T^2(e^{\nu/T} - 1)^2} = \frac{xe^x}{T(e^x - 1)^2} \\
 \frac{\partial}{\partial T}\left(\frac{1}{T^2}\frac{\partial n}{\partial T}\right) &= \frac{-\nu e^{\nu/T}}{T^6(e^{\nu/T} - 1)^2} - \frac{4\nu e^{\nu/T}}{T^5(e^{\nu/T} - 1)^2} + \frac{2\nu^2 e^{2\nu/T}}{T^6(e^{\nu/T} - 1)^3} \\
 &= -\frac{x^2 e^x}{T^4(e^x - 1)^2} - \frac{4xe^x}{T^4(e^x - 1)^2} + \frac{2x^2 e^{2x}}{T^4(e^x - 1)^3}
 \end{aligned}$$

## 6.1 Sviluppo $n_{d1}$

Consideriamo lo sviluppo della prima variazione  $n_{d1}(T)$ , che incrementa di una quantità  $\gamma\Delta T$  l'esponente della legge di Planck:

$$n_{d1}(x) = n_T \left( \frac{\nu T}{\nu + T\gamma\Delta T} \right) = \frac{1}{e^{\nu/T + \gamma\Delta T} - 1} = \quad (6.7)$$

$$= n_{PL}(x) + \frac{x e^x}{(e^x - 1)^2} \left( -\frac{T\gamma\Delta T}{\nu + T\gamma\Delta T} + \left( -\frac{T\gamma\Delta T}{\nu + T\gamma\Delta T} \right)^2 \right) + \frac{1}{2} \left( -\frac{T\gamma\Delta T}{\nu + T\gamma\Delta T} \right)^2 \frac{x e^x}{(e^x - 1)^2} Y(x). \quad (6.8)$$

Dati  $T = 2.725$ ,  $\Delta T = 0.5$  e  $\gamma = 0.5$ , in figura 6.1 sono rappresentati la legge di Planck, Sviluppo1, Sviluppo2 e lo sviluppo della variazione  $n_{d1}$  e si riportano alcuni valori di queste funzioni e della differenza (intesa in valore assoluto) tra la variazione  $n_{d1}$  e la legge di Planck nella tabella che segue:

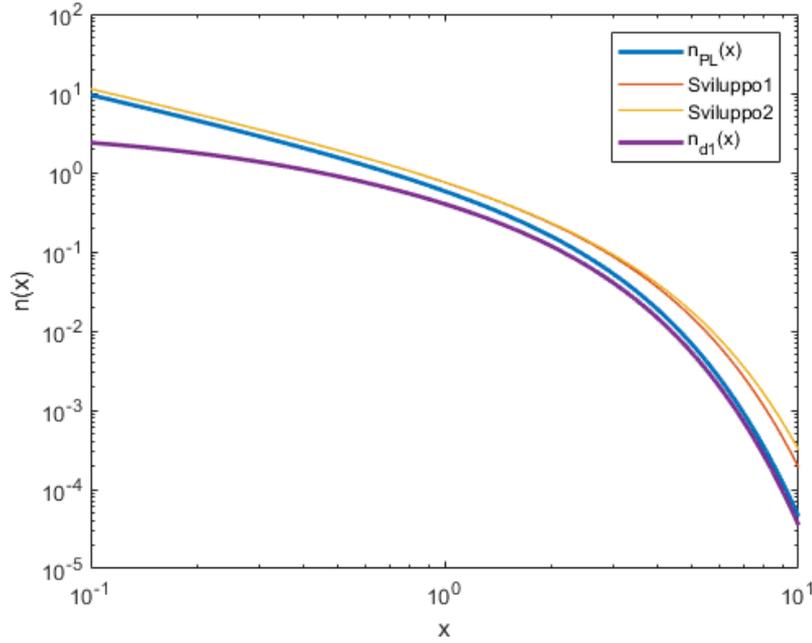


Figura 6.1. La legge di Planck (in blu) (5.1), Sviluppo1 (5.2) (in rosso), Sviluppo2 (5.3) (in giallo) e lo sviluppo della variazione  $n_{d1}(x)$  (6.8) (in viola) per  $T = 2.725$ ,  $\Delta T = 0.5$  e  $\gamma = 0.5$

x	$n_{PL}$	$n_{d1}$	$ n_{PL} - n_{d1} $	Sviluppo1	Sviluppo2
x=0.1	9.5083	2.3757	7.1327	11.3419	11.3423
x=1	0.5820	0.4409	0.1811	0.7534	0.7564
x=10	4.5402e-05	3.5408e-05	9.9936e-06	1.8986e-04	3.1626e-04

Sviluppo1 e Sviluppo2 quasi coincidono, infatti per  $x = 0.1$  hanno una differenza di  $0.0004$ , mentre per  $x = 10$  la differenza tra queste due funzioni è di  $1.2640e - 04$ . Entrambi coincidono molto con la legge di Planck per  $x \rightarrow 0.1$ , ma per  $x \rightarrow 10$  discostano maggiormente per una differenza di  $1.4446e - 04$  in  $x = 10$ .

Al contrario, lo sviluppo della funzione  $n_{d1}(x)$  si allontana di più dalla legge di Planck per  $x = 0.1$ , ma questa differenza tende ad annullarsi per  $x \rightarrow 10$  e si tratta in generale di una funzione minore rispetto a  $n_{PL}(x)$ .

Se invece raffiguriamo  $x^3 n_{PL}(x)$  in figura 6.2, osserviamo che sia la legge di Planck che la funzione  $n_{d1}$  raggiungono il loro massimo rispettivamente a  $x = 2.8153$  e  $x = 2.8649$ , quindi per valori di  $x$  molto vicini; mentre sia Sviluppo1 che Sviluppo2 raggiungono il massimo rispettivamente per  $x = 3.54$  e  $x = 3.34$ . A  $x = 2.6369$  si ha la differenza massima tra la legge di Planck e la variazione  $n_{d1}(x)$ .

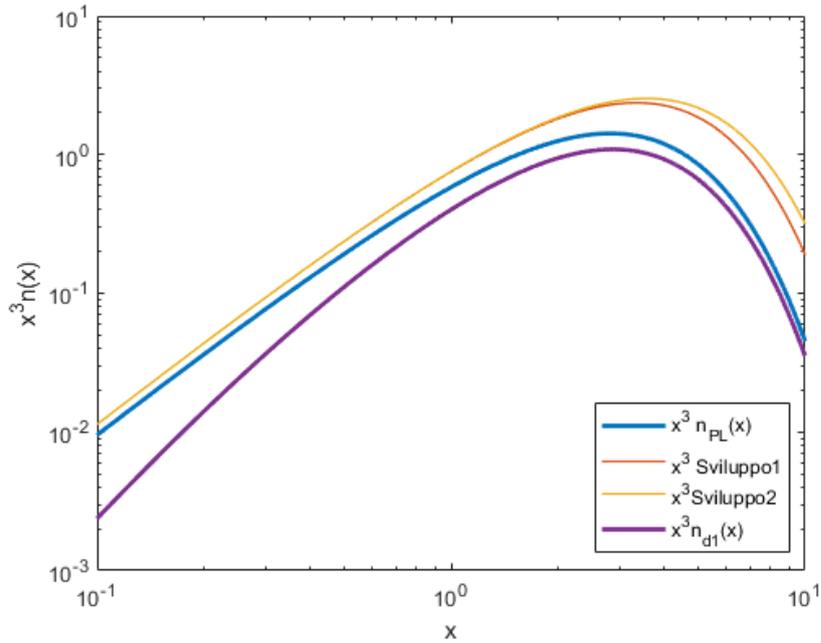


Figura 6.2.  $x^3 n(x)$  della legge di Planck (5.1) (in blu), di Sviluppo1 (5.2) (in rosso), di Sviluppo2 (5.3) (in giallo) e della variazione  $n_{d1}(x)$  (6.8) (in viola) per  $T = 2.725$ ,  $\Delta T = 0.5$  e  $\gamma = 0.5$

Di seguito sono riportati in tabella i valori per  $x^3 n(x)$ :

x	$x^3 n_{PL}$	$x^3 n_{d1}$	$x^3  n_{PL} - n_{d1} $	$x^3 Sviluppo1$	$x^3 Sviluppo2$
x=0.1	0.0095	0.0024	0.0071	0.0113	0.0113
x=1	0.5820	0.4409	0.1811	0.7534	0.7564
x=2.6369	1.4137	1.0817	0.3320	2.2209	2.3081
x=2.8153	1.4214	1.0909	0.3305	2.2866	2.3916
x=2.8649	1.4210	1.0914	0.3296	2.3012	2.4113
x=10	0.0454	0.0354	0.01	0.1899	0.3163

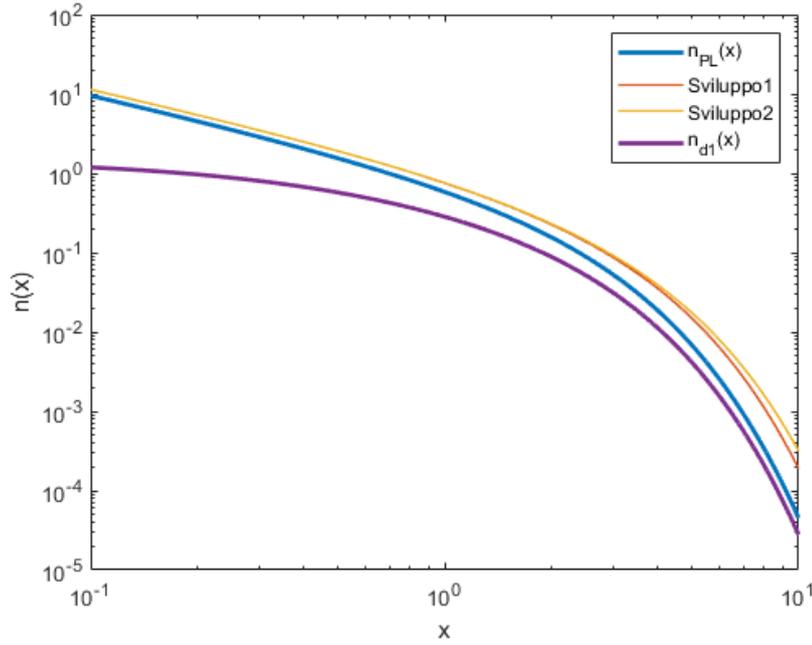


Figura 6.3. La legge di Planck (5.1) (in blu), Sviluppo1 (5.2) (in rosso), Sviluppo2 (5.3) (in giallo) e lo sviluppo della variazione  $n_{d1}$  (6.8) (in viola) per  $T = 2.725$ ,  $\Delta T = 0.5$  e  $\gamma = 1$

Se si aumenta il valore del parametro  $\gamma$ , considerando adesso  $\gamma = 1$  per gli stessi valori della temperatura e di  $\Delta T$  (fig. 6.3), dato che  $\gamma$  si trova nella definizione solo della variazione  $n_{d1}$ , quest'ultima sarà la sola funzione a presentare qualche differenza con il caso precedente. Si riportano anche in questo caso i valori in tabella:

x	$n_{PL}$	$n_{d1}$	$ n_{PL} - n_{d1} $	$Sviluppo1$	$Sviluppo2$
x=0.1	9.5083	1.1877	8.3206	11.3419	11.3423
x=1	0.5820	0.2835	0.2985	0.7534	0.7564
x=10	4.5402e-05	2.79003e-05	1.7502e-05	1.8986e-04	3.1626e-04

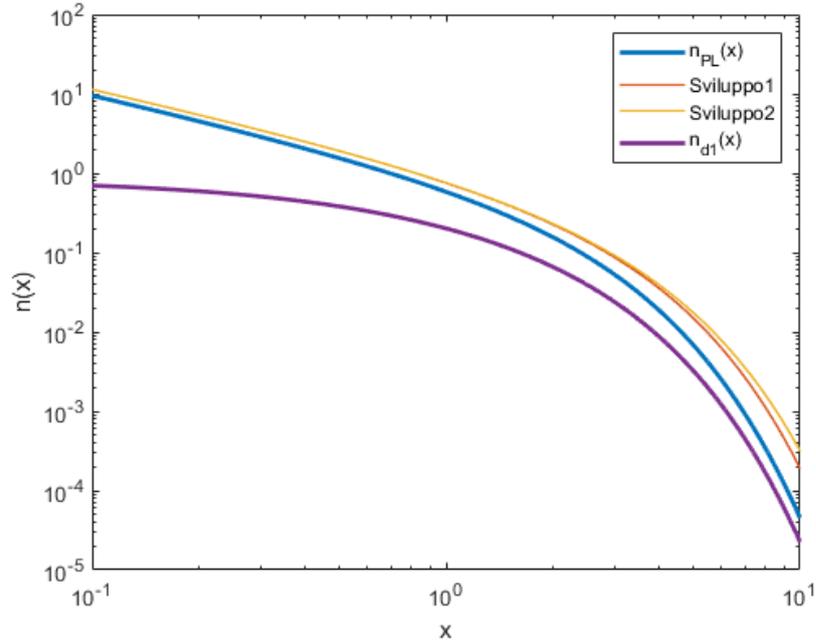


Figura 6.4. La legge di Planck (5.1) (in blu), Sviluppo1 (5.2) (in rosso), Sviluppo2 (5.3) (in giallo) e lo sviluppo della variazione  $n_{d1}(x)$  (6.8) (in viola) per  $T = 2.725$ ,  $\Delta T = 0.5$  e  $\gamma = 1.5$

Come si può notare dai valori riportati,  $n_{d1}(x)$  è minore rispetto al caso con  $\gamma = 0.5$  e di conseguenza aumentano le differenze con  $n_{PL}(x)$  rispetto al caso precedente, in particolare, per  $x = 0.1$ , si passa da una differenza di 7.1327 a una di 8.3206. Questo risultato è dovuto al fatto che la variazione  $n_{d1}$  incrementa di  $\gamma\Delta T$  l'argomento dell'esponenziale nella legge di Planck e dunque aumentare  $\gamma$  rende la funzione minore dato che l'esponenziale è al denominatore. Per lo stesso motivo, se si considera  $\gamma = 1.5$  (fig. 6.4), si ha una differenza ancora maggiore tra le due funzioni, come si può vedere dalla tabella (per  $x = 0.1$   $n_{d1}(x) \rightarrow 0$ ).

x	$n_{PL}$	$n_{d1}$	$ n_{PL} - n_{d1} $	<i>Sviluppo1</i>	<i>Sviluppo2</i>
x=0.1	9.5083	0.6986	8.8097	11.3419	11.3423
x=1	0.5820	0.2013	0.3807	0.7534	0.7564
x=10	4.5402e-05	2.2566e-05	2.2836e-05	1.8986e-04	3.1626e-04

Sono rappresentate le funzioni per  $x^3n(x)$ , sia per  $\gamma = 1$  (figura 6.5) che per  $\gamma = 1.5$  (figura 6.6). In entrambi i casi, l'andamento della variazione è simile al caso  $\gamma = 0.5$ , ma con ampiezza diversa. Per  $\gamma = 1$ , i valori delle funzioni sono date da:

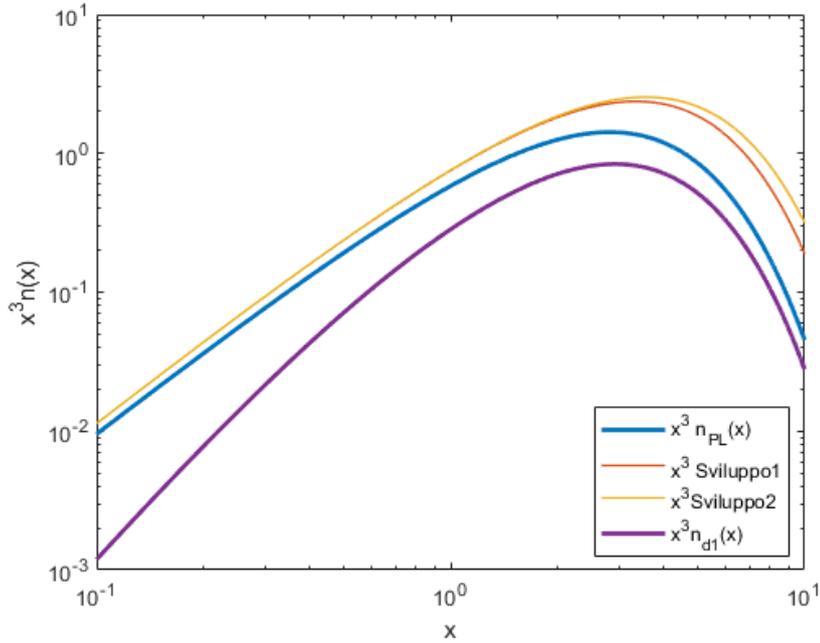


Figura 6.5.  $x^3 n(x)$  della legge di Planck (5.1) (in blu), di Sviluppo1 (5.2) (in rosso), di Sviluppo2 (5.3) (in giallo) e dello sviluppo della variazione  $n_{d1}(x)$  (6.8) (in viola) per  $T = 2.725$ ,  $\Delta T = 0.5$  e  $\gamma = 1$

x	$x^3 n_{PL}$	$x^3 n_{d1}$	$x^3  n_{PL} - n_{d1} $	$x^3 Sviluppo1$	$x^3 Sviluppo2$
x=0.1	0.0095	0.0012	0.0083	0.0113	0.0113
x=1	0.5820	0.2835	0.2985	0.7534	0.7564
x=2.6766	1.4167	0.8298	0.5869	2.2373	2.3284
x=2.8153	1.4214	0.8363	0.5851	2.2866	2.3916
x=2.9144	1.4196	0.8375	0.5820	2.3012	2.4113
x=10	0.0454	0.0219	0.0175	0.1899	0.3163

La differenza massima tra  $n_{d1}(x)$  e  $n_{PL}(x)$  si raggiunge per  $x = 2.6766$ , mentre la variazione raggiunge il suo massimo per  $x = 2.9144$ .

Di seguito i valori per il caso  $\gamma = 1.5$ :

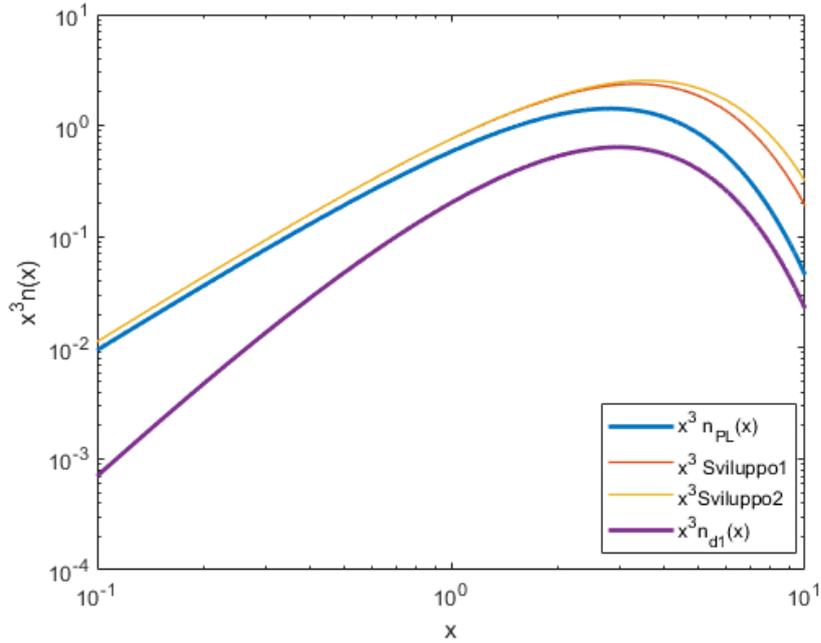


Figura 6.6.  $x^3 n(x)$  della legge di Planck (5.1) (in blu), di Sviluppo1 (5.2) (in rosso), di Sviluppo2 (5.3) (in giallo) e dello sviluppo della variazione  $n_{d1}(x)$  (6.8) (in viola) per  $T = 2.725$ ,  $\Delta T = 0.5$  e  $\gamma = 1.5$

x	$x^3 n_{PL}$	$x^3 n_{d1}$	$x^3  n_{PL} - n_{d1} $	$x^3 Sviluppo1$	$x^3 Sviluppo2$
x=0.1	0.0095	6.9863e-04	0.0088	0.0113	0.0113
x=1	0.5820	0.2013	0.3807	0.7534	0.7564
x=2.6865	1.4173	0.6306	0.7867	2.2413	2.3333
x=2.8153	1.4214	0.6366	0.7846	2.2866	2.3916
x=2.9640	1.4171	0.6389	0.7782	2.3256	2.4463
x=10	0.0454	0.0226	0.0228	0.1899	0.3163

Per  $\gamma = 1.5$ , la differenza massima si ha a  $x = 2.6865$ , mentre la variazione raggiunge il massimo a  $x = 2.9640$ .

Consideriamo adesso  $\gamma = 0.5$  e aumentiamo invece il valore di  $\Delta T$ , ad esempio  $\Delta T = 0.85$ . Poiché sia nella funzione  $n_{d1}$  che negli sviluppi il parametro  $\gamma$  è sempre legato a  $\Delta T$  attraverso un prodotto, allora aumentare  $\Delta T$  dovrebbe essere equivalente ad aumentare il parametro  $\gamma$ , quindi i valori che si ottengono per  $\Delta T = 0.85$  dovrebbero essere intermedi tra il caso  $\gamma = 0.5$  e il caso  $\gamma = 1$ .

I valori sono dati da:

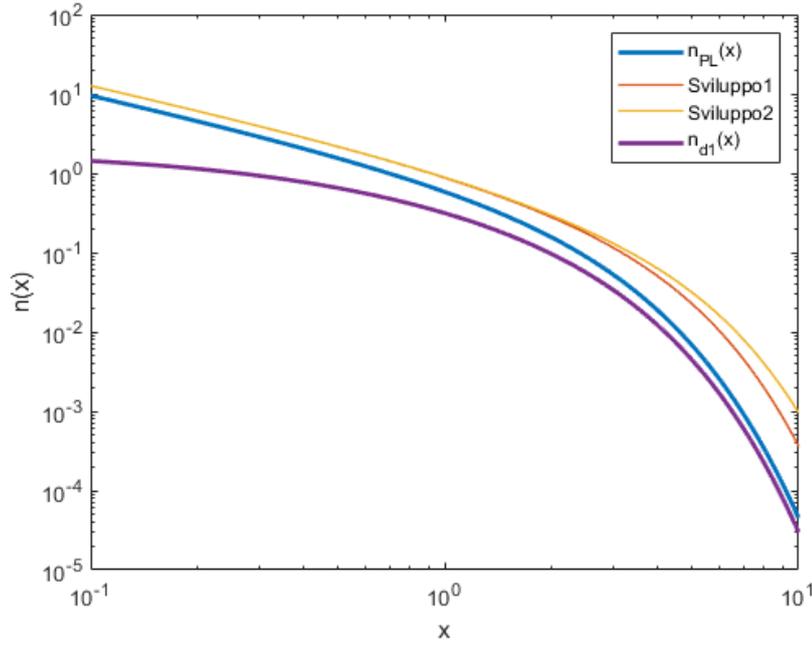


Figura 6.7. La legge di Planck (5.1) (in blu), Sviluppo1 (5.2) (in rosso), Sviluppo2 (5.3) (in giallo) e lo sviluppo della variazione  $n_{d1}(x)$  (6.8) (in viola) per  $T = 2.725$ ,  $\Delta T = 0.85$  e  $\gamma = 0.5$

$x$	$n_{PL}$	$n_{d1}$	$ n_{PL} - n_{d1} $	<i>Sviluppo1</i>	<i>Sviluppo2</i>
$x=0.1$	9.5083	1.4253	8.0830	12.6258	12.6268
$x=1$	0.5820	0.3141	0.2679	0.8765	0.8866
$x=10$	4.5402e-05	2.9911e-05	1.5491e-05	3.6376e-04	9.6157e-04

Il caso è rappresentato in figura 6.7. Come previsto, i valori della variazione  $n_{d1}$  e della sua differenza con la legge di Planck, sono compresi tra il caso  $\gamma = 0.5$  e  $\gamma = 1$ . Unica differenza è che, variando questa volta il  $\Delta T$ , variano anche i valori che assumono lo Sviluppo 1 e lo Sviluppo 2.

Anche nel caso della funzione  $x^3 n(x)$  (fig. 6.8) i valori sono intermedi.

$x$	$x^3 n_{PL}$	$x^3 n_{d1}$	$x^3  n_{PL} - n_{d1} $	$x^3 \text{Sviluppo1}$	$x^3 \text{Sviluppo2}$
$x=0.1$	0.0095	0.0014	0.0081	0.0126	0.0126
$x=1$	0.5820	0.3141	0.2679	0.8765	0.8856
$x=2.6667$	1.4160	0.8990	0.5170	2.8920	3.1809
$x=2.8123$	1.4214	0.9061	0.5153	2.9923	3.3305
$x=2.8946$	1.4203	0.9071	0.5132	3.0389	3.4047
$x=10$	4.5402e-05	2.9911e-05	1.5491e-05	3.6376e-04	9.6157e-04

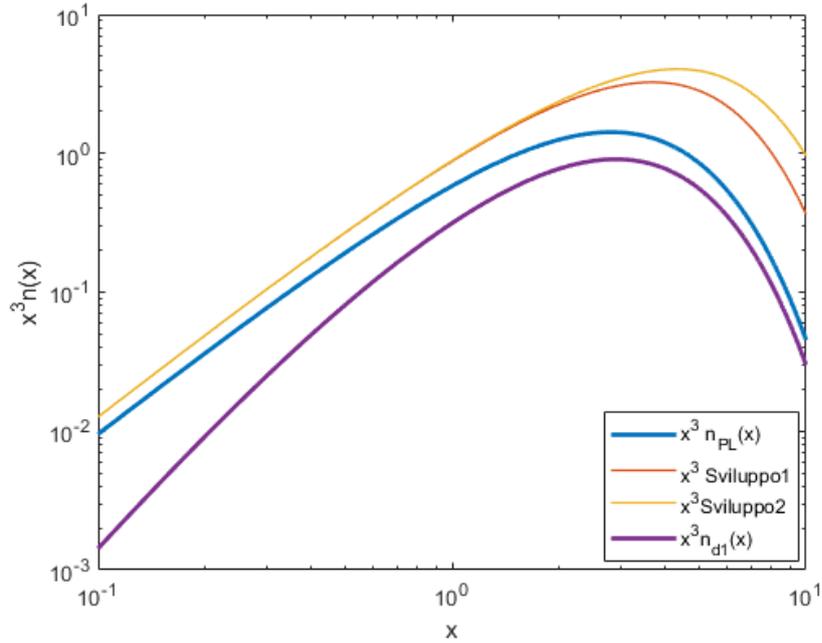


Figura 6.8.  $x^3 n(x)$  della legge di Planck (5.1) (in blu), di Sviluppo1 (5.2) (in rosso), di Sviluppo2 (5.3) (in giallo) e dello sviluppo della variazione  $n_{d1}(x)$  (6.8)  $T = 2.725$ ,  $\Delta T = 0.85$  e  $\gamma = 0.5$

Anche il punto in cui  $n_{d3}$  raggiunge il suo massimo è intermedio ai due casi, infatti  $2.8649 < 2.8946 < 2.9144$ .

### 6.1.1 Delta negativo

Le stesse considerazioni possono essere fatte con  $\Delta T$  negativo. Questo cambio del segno comporta una diminuzione dell'argomento dell'esponenziale e di conseguenza un aumento del valore della funzione. Ma va prestata attenzione al valore critico della  $x$ : infatti, poiché l'intervallo di interesse è dato da  $x \in (0.1, 10)$ , si potrebbero avere delle  $x$  che annullano i denominatori. Dunque bisogna imporre:

$$\begin{aligned} \nu + T\gamma\Delta T &\neq 0 \\ \frac{\nu}{T} + \gamma\Delta T &\neq 0 \\ x + \gamma\Delta T &\neq 0 \\ x &\neq -\gamma\Delta T \end{aligned}$$

Il termine  $e^x - 1$  invece non si annulla per questi valori.

Consideriamo nuovamente come caso iniziale  $T = 2.725$  e  $\gamma = 0.5$  e  $\Delta T = -0.5$ , pertanto il valore critico sarà  $x_C = 0.25$ . Come si può osservare in figura 6.9, per  $x \rightarrow x_C^+$ , si ha una singolarità, la funzione  $n_{d1}$  raggiunge il suo massimo ed ha un andamento molto diverso rispetto al caso con  $\Delta T$  positivo, mentre per  $x \in (1, 10)$  ha un comportamento molto simile alla legge di Planck; per  $x < x_C$ , invece, si hanno valori negativi che quindi non sono presi in considerazione.

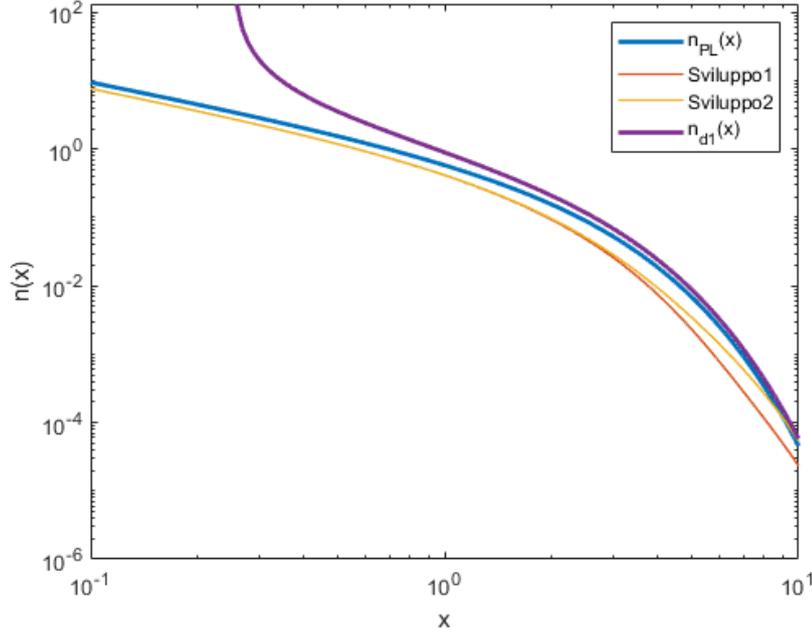


Figura 6.9. La legge di Planck (5.1) (in blu), Sviluppo1 (5.2) (in rosso), Sviluppo2 (5.3) (in giallo) e lo sviluppo della variazione  $n_{d1}(x)$  (6.8) (in viola) per  $T = 2.725$ ,  $\Delta T = -0.5$  e  $\gamma = 0.5$

$x$	$n_{PL}$	$n_{d1}$	$ n_{PL} - n_{d1} $	<i>Sviluppo1</i>	<i>Sviluppo2</i>
$x=0.2585$	3.3900	135.0477	131.6578	2.6848	2.6854
$x=1$	0.5820	0.8973	0.3153	0.4156	0.4176
$x=10$	4.5402e-05	5.8238e-05	1.2836e-05	2.3244e-05	5.3659e-05

Relativamente a  $x^3 n(x)$  (figura 6.10), si osserva come anche in questo caso per  $x \rightarrow x_C^+$ , la variazione  $n_{d1}$  raggiunge il suo valore massimo, in seguito decresce fino a circa  $x = 0.3874$ , ricresce, raggiunge un massimo locale per  $x = 2.7459$  e ha un andamento simile a quello della legge di Planck per  $x \in (1, 10)$  ma con dei valori maggiori, come previsto.

x	$x^3 n_{PL}$	$x^3 n_{d1}$	$x^3  n_{PL} - n_{d1} $	$x^3 Sviluppo1$	$x^3 Sviluppo2$
x=0.2586	0.0586	2.3046	2.2460	0.0464	0.0464
x=0.3874	0.1229	0.3987	0.2786	0.0957	0.0958
x=1	0.5820	0.8973	0.3153	0.4156	0.4176
x=2.7459	1.4202	1.8610	0.4409	0.7343	0.7914
x=2.8153	1.4214	1.8600	0.4386	0.7245	0.7853
x=10	0.0454	0.0582	0.0128	0.0232	0.0537

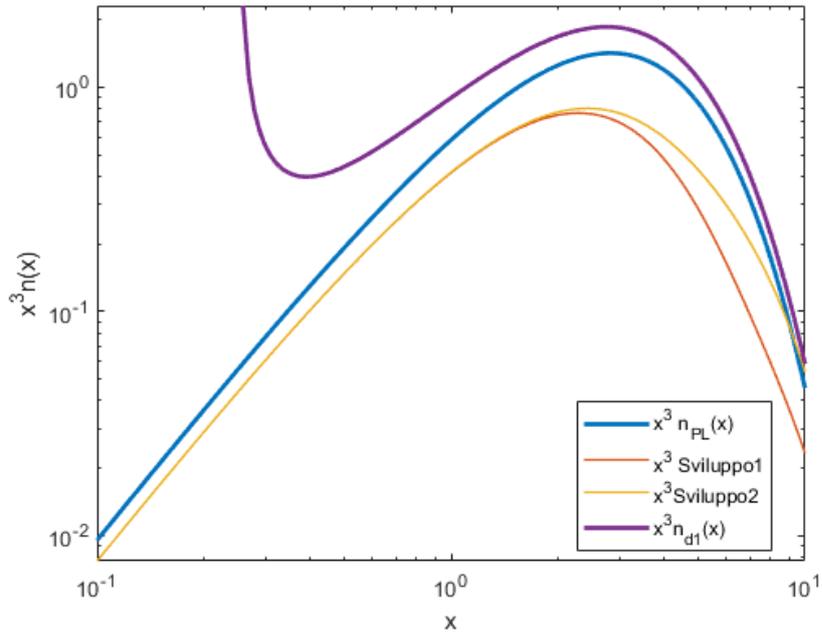


Figura 6.10.  $x^3 n(x)$  della legge di Planck (5.1), di Sviluppo1 (5.2) (in rosso), di Sviluppo2 (5.3) (in giallo) e dello sviluppo della variazione  $n_{d1}(x)$  (6.8) (in viola) per  $T = 2.725$ ,  $\Delta T = -0.5$  e  $\gamma = 0.5$

Se si aumenta il valore di  $\gamma$  e si considera  $\gamma = 1$ , allora in questo caso il valore critico della frequenza è  $x_C = 0.5$  ed infatti, in figura 6.11, si nota che per questo valore della  $x$  si ha una singolarità.

Di seguito sono riportati i valori per questo caso.

x	$n_{PL}$	$n_{d1}$	$ n_{PL} - n_{d1} $	$Sviluppo1$	$Sviluppo2$
x=0.5063	1.5171	414.014	412.497	1.1637	1.1648
x=1	0.5820	1.5781	0.9961	0.4156	0.4176
x=10	4.5402e-05	7.4330e-05	2.8928e-05	2.3244e-05	5.36

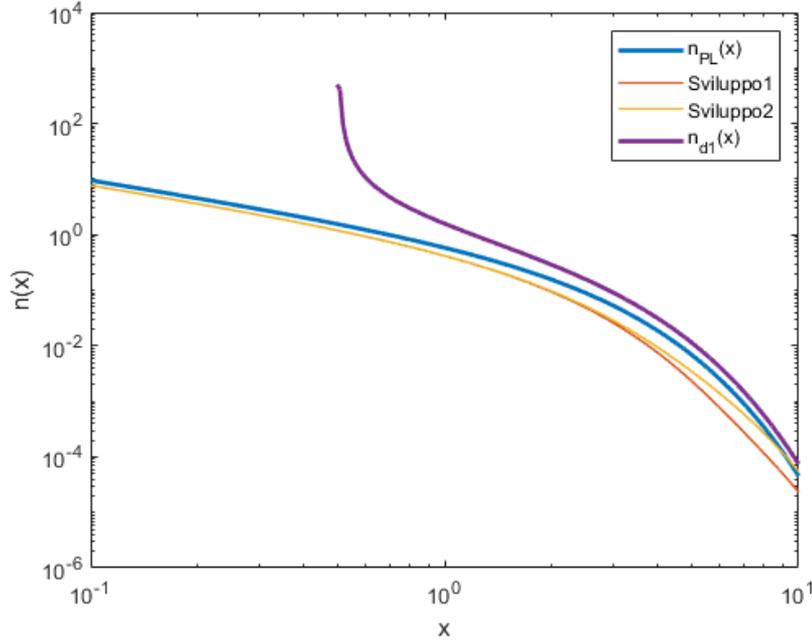


Figura 6.11. La legge di Planck (5.1) (in blu), Sviluppo1 (5.2) (in rosso), Sviluppo2 (5.3) (in giallo) e lo sviluppo della variazione  $n_{d1}(x)$  (6.8) (in viola) per  $T = 2.725$ ,  $\Delta T = -0.5$  e  $\gamma = 1$

Se messo a confronto con il caso  $\gamma = 0.5$  e  $\Delta T$  negativo, lo sviluppo di  $n_{d1}(x)$  risulta maggiore, pertanto anche le differenze con  $n_{PL}(x)$  sono maggiori, sebbene l'andamento rimanga lo stesso.

Riportiamo anche i valori per  $x^3 n(x)$  (in figura 6.12).

x	$x^3 n_{PL}$	$x^3 n_{d1}$	$x^3  n_{PL} - n_{d1} $	$x^3 Sviluppo1$	$x^3 Sviluppo2$
x = 0.5083	0.1982	35.1057	34.9074	0.1520	0.1522
x = 0.8333	0.4448	1.5126	1.0678	0.3258	0.3268
x = 1	0.5820	1.5781	0.9961	0.4156	0.4176
x = 2.6369	1.4137	2.4678	1.0542	0.7475	0.7989
x = 2.8153	1.4214	2.4572	1.0358	0.7245	0.7853
x = 10	0.0454	0.0743	0.0289	0.0232	0.0537

Anche questi valori sono maggiori rispetto al caso  $\gamma = 0.5$ , nonostante si abbia lo stesso andamento: la funzione  $n_{d1}(x)$  decresce esponenzialmente da  $x_C^+$ , raggiunge il suo minimo in  $x = 0.8333$ , poi ricresce e raggiunge un picco in  $x = 2.6369$ .

Aumentando ulteriormente il valore di  $\gamma$  a  $\gamma = 1.5$  (fig. 6.13), si ottiene  $x_C = 0.75$ .

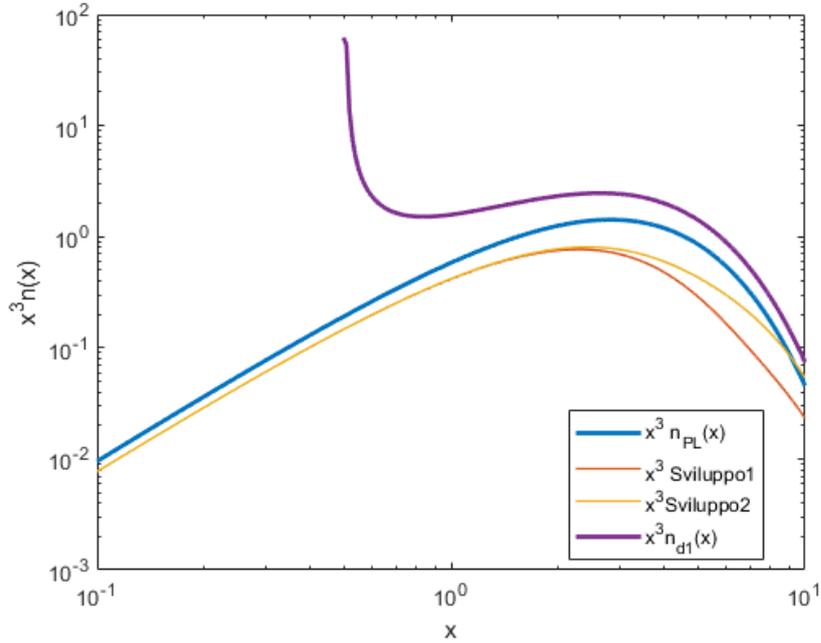


Figura 6.12.  $x^3 n(x)$  della legge di Planck (5.1) (in blu), dello Sviluppo1 (5.2) (in rosso), Sviluppo2 (5.3) (in giallo) e dello sviluppo della variazione  $n_{d1}(x)$  (6.8) (in viola) per  $T = 2.725$ ,  $\Delta T = -0.5$  e  $\gamma = 1$

L'andamento è simile a quello osservato per gli altri valori di  $\gamma$  con  $\Delta T$  negativo, ma con ampiezza maggiore.

x	$n_{PL}$	$n_{d1}$	$ n_{PL} - n_{d1} $	<i>Sviluppo1</i>	<i>Sviluppo2</i>
x = 0.7541	0.8883	2.2195e+03	2.2186e+03	0.6582	0.6598
x = 1	0.5820	4.0233	3.4413	0.4156	0.4176
x = 10	4.5402e-05	9.4157e-05	4.8755e-05	2.3244e-05	5.3659e-05

Anche il caso  $x^3 n(x)$  (figura 6.14) conferma che, con l'aumentare di  $\gamma$ , aumentano i valori della funzione  $x^3 n_{d1}(x)$  e le differenze con  $x^3 n_{PL}(x)$ .

x	$x^3 n_{PL}$	$x^3 n_{d1}$	$x^3  n_{PL} - n_{d1} $	$x^3 \text{Sviluppo1}$	$x^3 \text{Sviluppo2}$
x = 0.7541	0.3809	951.7803	951.3993	0.2823	0.2829
x = 1	0.5820	4.0233	3.4413	0.4156	0.4176
x = 1.4378	0.9255	3.1742	2.2487	0.6151	0.6226
x = 2.3793	1.3748	3.3646	1.9898	0.7658	0.8045
x = 2.8153	1.4124	3.2955	1.8740	0.7239	0.7849
x = 10	4.5402e-05	9.4157e-05	4.8755e-05	2.3244e-05	5.3659e-05

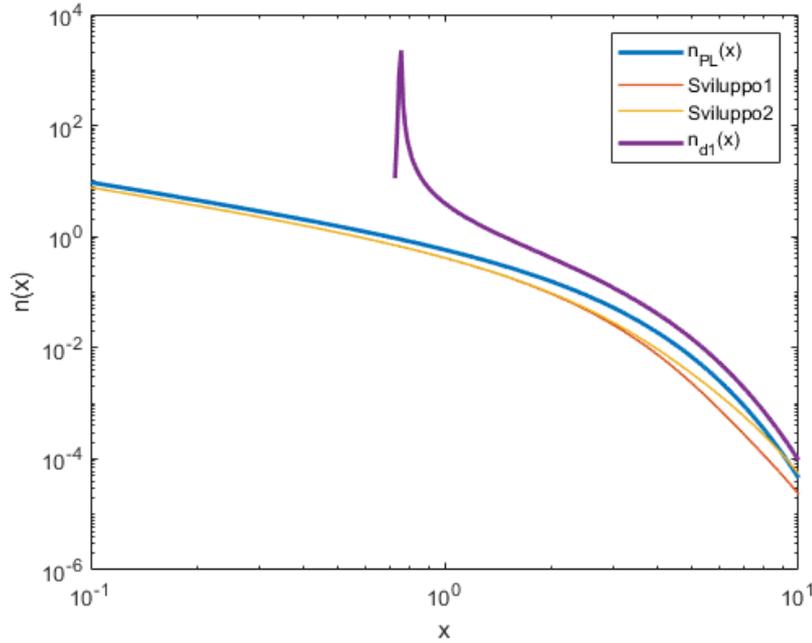


Figura 6.13. La legge di Planck (5.1) (in blu), Sviluppo1 (5.2) (in rosso), Sviluppo2 (5.3) (in giallo) e lo sviluppo della variazione  $n_{d1}(x)$  (6.8) (in viola) per  $T = 2.725$ ,  $\Delta T = -0.5$  e  $\gamma = 1.5$

In questo caso, lo sviluppo  $n_{d1}(x)$  raggiunge il suo minimo in  $x = 1.4378$  e un picco in  $x = 2.3793$ .

Esaminiamo cosa succede in questo caso se invece che  $\gamma$  si varia  $\Delta T$ , con  $\Delta T = 0.85$  e  $x_C = 0.4250$  (fig. 6.15).

x	$n_{PL}$	$n_{d1}$	$ n_{PL} - n_{d1} $	Sviluppo1	Sviluppo2
x = 0.4270	1.8774	2.0699e+03	2.0680e+03	1.1613	1.1633
x = 1	0.5820	1.3037	0.7217	0.3021	0.3065
x = 10	4.5402e-05	6.9134e-05	2.3732e-05	8.0504e-05	1.3550e-04

Come osservato precedentemente per il caso con  $\Delta T > 0$ , i risultati per questa scelta dei parametri sono intermedi tra quelli ottenuti da  $\gamma = 0.5$  e  $\gamma = 1$ . Lo stesso valore critico  $x_C$  risulta intermedio tra i due ( $0.25 < x_C = 0.4250 < 0.5$ ).

Anche il caso  $x^3 n(x)$  (figura 6.16) conferma che, con l'aumentare di  $\Delta T$ , aumentano i valori della funzione  $x^3 n_{d1}(x)$  e le differenze con  $x^3 n_{PL}(x)$ .

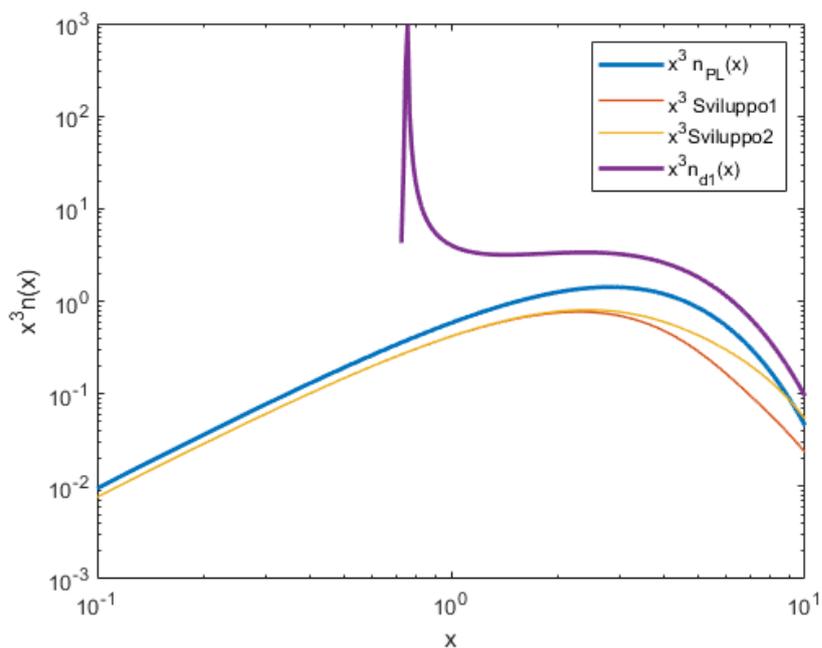


Figura 6.14.  $x^3 n(x)$  della legge di Planck (5.1) (in blu), di Sviluppo1 (5.2) (in rosso), di Sviluppo2 (5.3) e dello sviluppo della variazione  $n_{d1}(x)$  (6.8) (in viola) per  $T = 2.725$ ,  $\Delta T = -0.5$  e  $\gamma = 1.5$

$x$	$x^3 n_{PL}$	$x^3 n_{d1}$	$x^3  n_{PL} - n_{d1} $	$x^3 Sviluppo1$	$x^3 Sviluppo2$
$x = 0.4270$	0.1462	161.1487	161.0026	0.0904	0.0906
$x = 1$	0.5820	1.3037	0.7217	0.3021	0.3065
$x = 2.6765$	1.4167	2.2631	0.8464	0.3589	0.4727
$x = 10$	0.0454	0.0691	0.0237	0.0805	0.1355

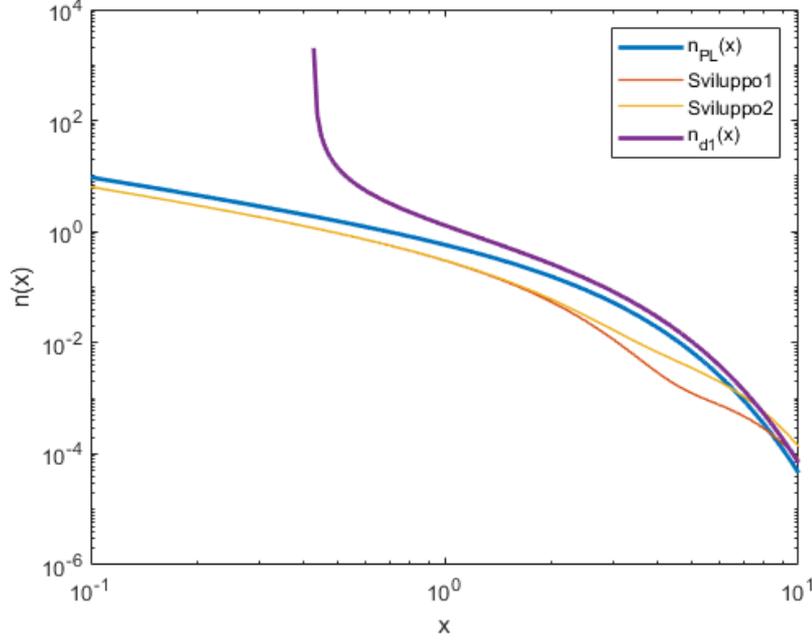


Figura 6.15. La legge di Planck (5.1) (in blu), Sviluppo1 (5.2) (in rosso), Sviluppo2 (5.3) (in giallo) e lo sviluppo della variazione  $n_{d1}(x)$  (6.8) (in viola) per  $T = 2.725$ ,  $\Delta T = -0.85$  e  $\gamma = 0.5$

### 6.1.2 Cambio segno termini lineari

Proviamo a cambiare il segno non di  $\Delta T$ , ma dei termini lineari dello sviluppo  $n_{d1}$ , avendo quindi:

$$n_{d1}(x) = n_{PL}(x) + \frac{xe^x}{(e^x - 1)^2} \left( \frac{T\gamma\Delta T}{\nu + T\gamma\Delta T} + \left( -\frac{T\gamma\Delta T}{\nu + T\gamma\Delta T} \right)^2 \right) + \frac{1}{2} \left( -\frac{T\gamma\Delta T}{\nu + T\gamma\Delta T} \right)^2 Y(x). \quad (6.9)$$

Le stesse considerazioni sono proposte anche per Sviluppo1 e Sviluppo2:

$$Sviluppo1(x) = n_T(T) + \left( -\frac{\Delta T}{T} + \left( \frac{\Delta T}{T} \right)^2 \right) \frac{xe^x}{(e^x - 1)^2} + \frac{1}{2} \left( \frac{\Delta T}{T} \right)^2 Y(x),$$

$$Sviluppo2(x) = n_T \left( T \left( 1 - \frac{\Delta T}{T} + \left( \frac{\Delta T}{T} \right)^2 \right) \right) + \frac{1}{2} \left( \frac{\Delta T}{T} \right)^2 Y(x)$$

con

$$Y(x) = \frac{xe^x}{(e^x - 1)^2} \left( x \frac{e^x + 1}{e^x - 1} - 4 \right).$$

Ci si aspetta che in questo caso la funzione  $n_{d1}$  abbia valori maggiori rispetto al caso senza cambiamenti di segno (6.8), poiché il termine lineare, che nella definizione di  $n_{d1}(x)$

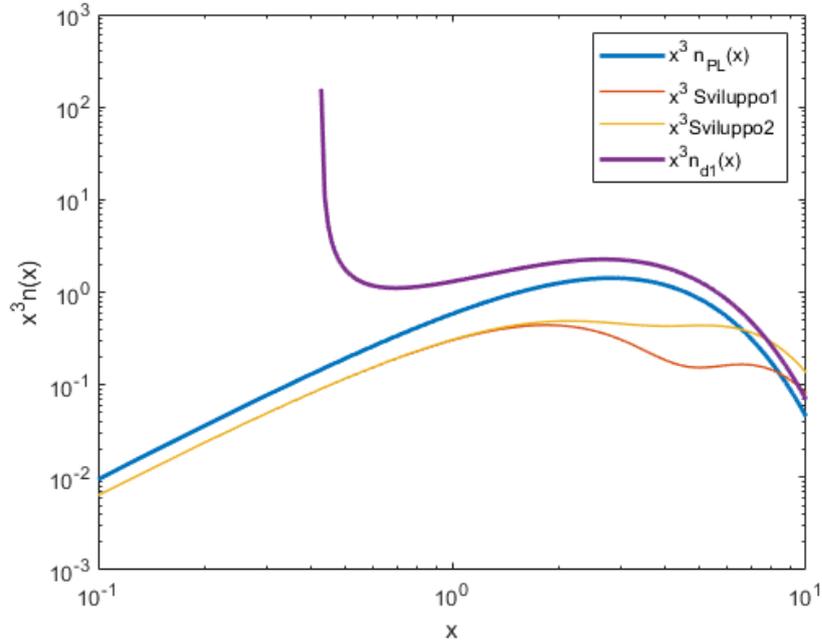


Figura 6.16.  $x^3 n(x)$  della legge di Planck (5.1) (in blu), di Sviluppo1 (5.2) (in rosso), di Sviluppo2 (5.3) (in giallo) e dello sviluppo della variazione  $n_{d1}$  (6.8) (in viola) per  $T = 2.725$ ,  $\Delta T = -0.85$  e  $\gamma = 0.5$

presenta un segno meno, adesso è positivo e quindi maggiore la funzione. Al contrario, per quanto riguarda Sviluppo1, si dovrebbero avere dei risultati minori. Sviluppo2 invece ha un argomento dell'esponenziale maggiore rispetto a quanto visto nel caso classico, quindi dovrebbe essere minore.

Per  $\Delta T = 0.5$  e  $\gamma = 0.5$  si ha (figura 6.17):

x	$n_{PL}$	$n_{d1}$	$ n_{PL} - n_{d1} $	<i>Sviluppo1</i>	<i>Sviluppo2</i>
x = 0.1	9.5083	16.6495	7.1412	7.6753	7.6755
x = 1	0.5820	0.7691	0.1871	0.4156	0.4176
x = 10	4.5402 e- 05	5.7557e - 05	1.2155e-05	2.3244e-05	5.3659e-05

Queste differenze tra  $n_{d1}(x)$  e  $n_{PL}(x)$  sono in realtà simili al caso classico in cui i termini lineari non hanno un cambio di segno, ma in questo caso  $n_{d1}(x) > n_{PL}(x)$ . Per quanto riguarda invece Sviluppo1 e Sviluppo2, i valori riportati in tabella confermano le ipotesi: sono infatti minori rispetto a quelli riportati per il caso classico. Analizziamo cosa succede per  $x^3 n(x)$  (fig. 6.18).

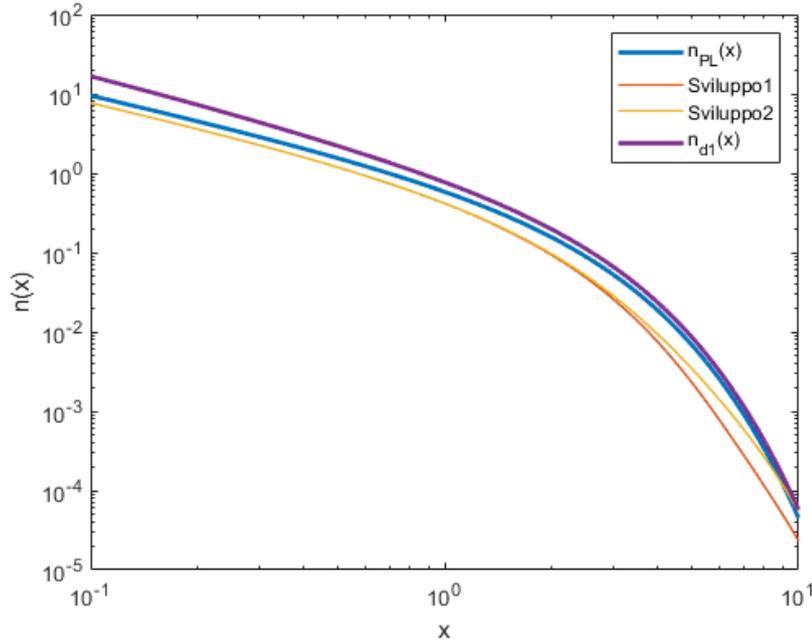


Figura 6.17. La legge di Planck (5.1) (in blu), Sviluppo1 (5.2) (in rosso), Sviluppo2 (5.3) (in giallo) e lo sviluppo della variazione  $n_{d1}$  (6.8) (in viola) con termini lineari cambiati di segno per  $T = 2.725$ ,  $\Delta T = 0.5$  e  $\gamma = 0.5$

x	$x^3 n_{PL}$	$x^3 n_{d1}$	$x^3  n_{PL} - n_{d1} $	$x^3 Sviluppo1$	$x^3 Sviluppo2$
x = 0.1	0.0095	0.0166	0.0071	0.0077	0.0077
x = 1	0.5820	0.7691	0.1871	0.4156	0.4176
x = 2.7459	1.4202	1.7842	0.3640	0.7343	0.7914
x = 2.8153	1.4214	1.7852	0.3638	0.7245	0.7863
x = 10	0.0454	0.0576	0.0122	0.0232	0.0537

Anche lo sviluppo di  $x^3 n_{d1}(x)$  è maggiore rispetto la legge di Planck, nonostante la differenza con essa è molto simile al caso senza cambiamento di segno. Per il resto,  $x^3 n_{d1}(x)$  ha lo stesso andamento: parte, per  $x = 0.1$ , da un valore molto piccolo vicino a zero, cresce e raggiunge il massimo, in questo caso in  $x = 2.8054$ , quindi in prossimità del punto in cui la legge di Planck raggiunge il suo massimo. A  $x = 2.7459$  invece si ha la differenza massima tra queste due funzioni.

Sviluppo1 e Sviluppo2 sono coincidenti all’inizio fino al raggiungimento del loro massimo, in seguito Sviluppo1 decresce più velocemente. Entrambi questi sviluppi sono minori rispetto la legge di Planck

Si incrementa il valore di  $\gamma$  considerando  $\gamma = 1$  (fig. 6.19).

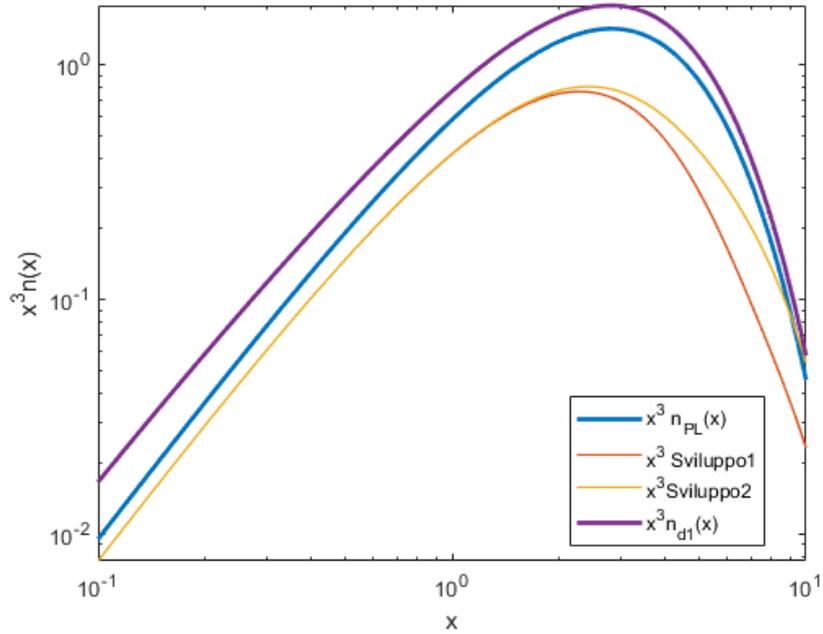


Figura 6.18.  $x^3 n(x)$  della legge di Planck (5.1) (in blu), di Sviluppo1 (5.2) (in rosso), di Sviluppo2 (5.3) (in giallo) e dello sviluppo della variazione  $n_{d1}$  (6.8) (in viola) con termini lineari cambiati di segno per  $T = 2.725$ ,  $\Delta T = 0.5$  e  $\gamma = 0.5$

x	$n_{PL}$	$n_{d1}$	$ n_{PL} - n_{d1} $	<i>Sviluppo1</i>	<i>Sviluppo2</i>
x = 0.1	9.5083	17.8405	8.3322	7.6753	7.6755
x = 1	0.5820	0.8973	0.3153	0.4156	0.4176
x = 10	4.5402e-05	7.1142e-05	2.5704e-05	2.3244e-05	5.3659e-05

I valori di  $n_{d1}(x)$  sono maggiori rispetto il caso con  $\gamma = 0.5$  e di conseguenza anche le differenze con  $n_{PL}(x)$  sono aumentate. Confrontando con il caso classico precedentemente esaminato, le differenze tra le due funzioni sono molto simili, sebbene in un caso la variazione sia minore e in questo sia maggiore rispetto  $n_{PL}(x)$ .

Si riportano i valori anche per  $x^3 n(x)$  (fig. 6.20):

x	$x^3 n_{PL}$	$x^3 n_{d1}$	$x^3  n_{PL} - n_{d1} $	$x^3 \text{Sviluppo1}$	$x^3 \text{Sviluppo2}$
x = 0.1	0.0095	0.0178	0.0083	0.0077	0.0077
x = 1	0.5820	0.8973	0.3153	0.4156	0.4176
x = 2.8153	1.4214	2.1202	0.6988	0.7245	0.7863
x = 2.8847	1.4206	2.1198	0.6992	0.7137	.7782
x = 10	0.0454	0.0711	0.0257	0.0232	0.0537

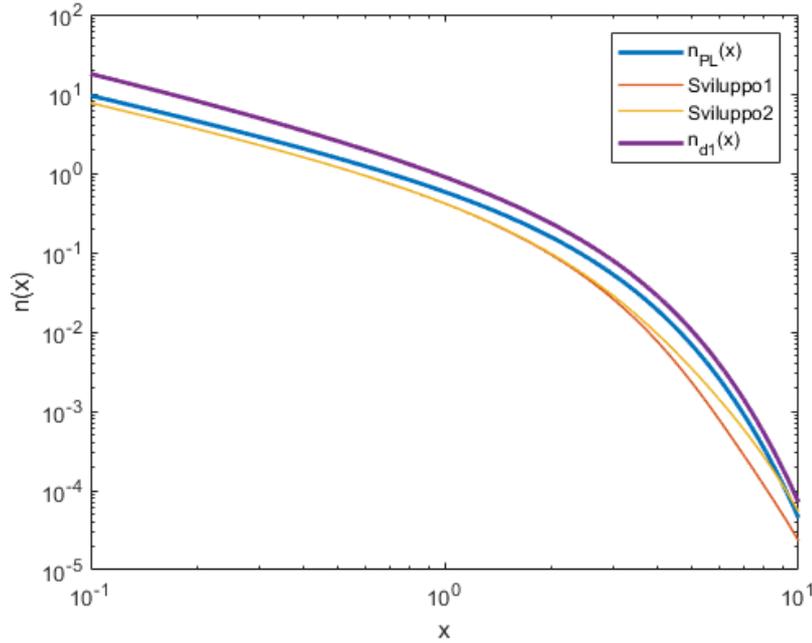


Figura 6.19. La legge di Planck (5.1) (in blu), Sviluppo1 (5.2) (in rosso), Sviluppo2 (5.3) (in giallo) e lo sviluppo della variazione  $n_{d1}$  (6.8) (in viola) con termini lineari cambiati di segno per  $T = 2.725$ ,  $\Delta T = 0.5$  e  $\gamma = 1$

Anche per  $x^3 n(x)$  si notano delle differenze maggiori rispetto al caso  $\gamma = 0.5$  e sono simili rispetto quanto visto in precedenza per  $\gamma = 1$  con  $n_{d1}$  senza cambio di segno.

Quindi per il caso per  $\gamma = 1.5$  (fig. 6.21), si prevede che  $n_{d1}(x)$  abbia valori maggiori rispetto il caso con  $\gamma = 1$  e differenze simili a quelle osservate per il caso classico di  $n_{d1}(x)$  con  $\gamma = 1.5$ .

x	$n_{PL}$	$n_{d1}$	$ n_{PL} - n_{d1} $	<i>Sviluppo1</i>	<i>Sviluppo2</i>
x = 0.1	9.5083	18.3310	8.8227	7.6753	7.6755
x = 1	0.5820	0.9904	0.4084	0.4156	0.4176
x = 10	4.5402e-05	8.592e-05	4.0518e-05	2.3244e-05	5.3659e-05

I valori riportati confermano quanto atteso.  
La stessa osservazione vale per  $x^3 n_{d1}(x)$  (fig. 6.22).

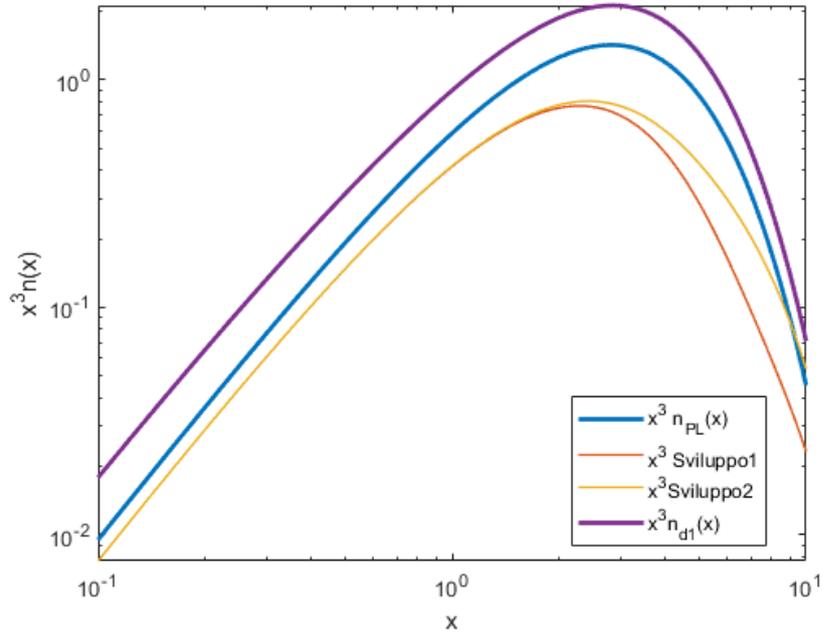


Figura 6.20.  $x^3 n(x)$  della legge di Planck (5.1) (in blu), di Sviluppo1 (5.2) (in rosso), di Sviluppo2 (5.3) (in giallo) e dello sviluppo della variazione  $n_{d1}$  (6.8) (in viola) con termini lineari cambiati di segno per  $T = 2.725$ ,  $\Delta T = 0.5$  e  $\gamma = 1$

x	$x^3 n_{PL}$	$x^3 n_{d1}$	$x^3  n_{PL} - n_{d1} $	$x^3 Sviluppo1$	$x^3 Sviluppo2$
x = 0.1	0.0095	0.0183	0.0088	0.0077	0.0077
x = 1	0.5820	0.9904	0.4084	0.4156	0.4176
x = 2.8153	1.4214	2.4274	1.006	0.7245	0.7863
x = 2.9957	1.4150	2.4257	1.0107	0.6948	0.7652
x = 10	0.0454	0.0859	0.0405	0.0232	0.0537

Nuovamente, si esamina cosa succede se si aumenta il valore di  $\Delta T$ : poiché questi due parametri sono sempre legati con un prodotto, se consideriamo  $\gamma = 0.5$  e  $\Delta T = 0.85$ , i valori attesi sono intermedi tra  $\gamma = 0.5$  e  $\gamma = 1$ . Riportiamo questo caso in figura 6.23.

x	$n_{PL}$	$n_{d1}$	$ n_{PL} - n_{d1} $	$Sviluppo1$	$Sviluppo2$
x = 0.1	9.5083	17.6023	8.0940	6.3925	6.3930
x = 1	0.5820	0.8633	0.2813	0.3021	0.3065
x = 10	4.5402e-05	6.6931e-05	2.1529e-05	8.0504e-05	1.355e-04

Di fatto, questi dati riportati confermano quanto previsto. Per quanto riguarda Sviluppo1 e Sviluppo2, si hanno dei valori minori rispetto il caso  $\Delta T = 0.5$ . Questi due sviluppi

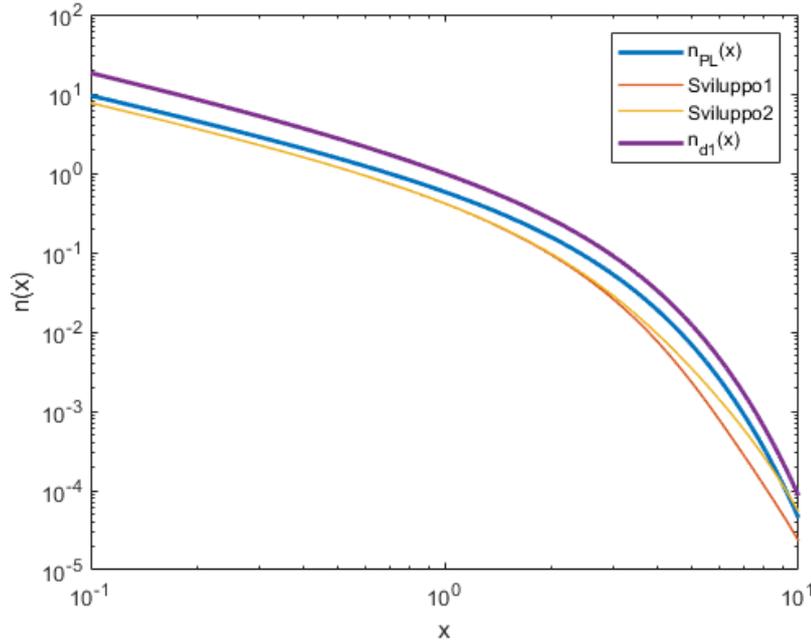


Figura 6.21. La legge di Planck (5.1) (in blu), Sviluppo1 (5.2) (in rosso), Sviluppo2 (5.3) (in giallo) e lo sviluppo della variazione  $n_{d1}$  (6.8) (in viola) con termini lineari cambiati di segno per  $T = 2.725$ ,  $\Delta T = 0.5$  e  $\gamma = 1.5$

coincidono per un primo intervallo  $x \in (0.1, 1)$ , ma in seguito il primo decresce più velocemente.

Si considera anche  $x^3 n_{d1}(x)$  (riportato in fig. 6.24).

I valori sono dati da:

x	$x^3 n_{PL}$	$x^3 n_{d1}$	$x^3  n_{PL} - n_{d1} $	$x^3 Sviluppo1$	$x^3 Sviluppo2$
x = 0.1	0.0095	0.0176	0.0081	0.0064	0.0064
x = 1	0.5820	0.8633	0.2813	0.3021	0.3065
x = 2.8153	1.4214	2.0227	0.6013	0.3368	0.4657
x = 2.8450	1.4213	2.0227	0.6013	0.332	0.4642
x = 10	0.0454	0.0669	0.0215	0.0805	0.1355

Anche in questo caso, per  $x^3 n_{d1}(x)$  i dati sono intermedi tra la scelta dei parametri  $\gamma = 0.5$  e  $\gamma = 1$  e anche l'andamento è lo stesso, con lo sviluppo della variazione  $n_{d1}(x)$  che raggiunge il massimo a  $x = 2.8252$ , in un punto vicino all'ascissa corrispondente al massimo della legge di Planck, mentre la massima differenza tra queste funzioni si ha per  $x = 2.8450$ .

Un comportamento molto diverso si nota per Sviluppo1 e Sviluppo2. Nel primo caso, per un intervallo  $x \in (0.1, 1)$ , lo sviluppo parte da un valore molto piccolo e poi raggiunge il massimo, decresce leggermente, poi cresce leggermente raggiungendo un altro massimo

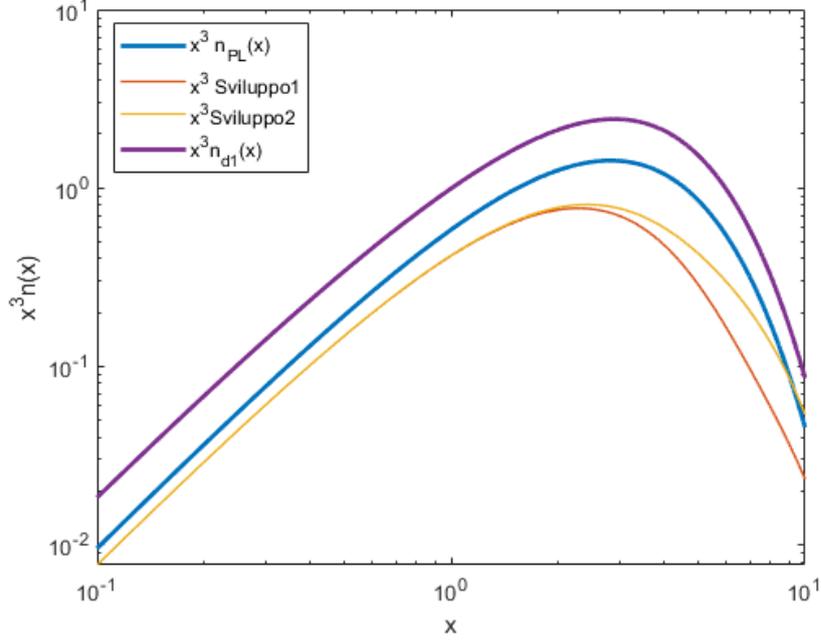


Figura 6.22.  $x^3 n(x)$  della legge di Planck (5.1) (in blu), di Sviluppo1 (5.2) (in rosso), di Sviluppo2 (5.3) (in giallo) e dello sviluppo della variazione  $n_{d1}$  (6.8) (in viola) con termini lineari cambiati di segno per  $T = 2.725$ ,  $\Delta T = 0.5$  e  $\gamma = 1.5$

locale e decresce nuovamente, intersecando la legge di Planck in  $x = 8.4144$ . Sviluppo2 invece, dopo aver raggiunto il suo massimo non decresce immediatamente ma si mantiene all'incirca costante e interseca  $x^3 n_{PL}$  in  $x = 6.6108$  e decresce successivamente.

### 6.1.3 Termini quadratici

Infine, si considerano gli sviluppi con solo i termini quadratici, cioè trascurando i termini lineari. Abbiamo dunque:

$$\begin{aligned} n_{d1}(x) &= n_{PL}(x) + \frac{x e^x}{(e^x - 1)^2} \left( -\frac{T \gamma \Delta T}{\nu + T \gamma \Delta T} \right)^2 + \frac{1}{2} \left( -\frac{T \gamma \Delta T}{\nu + T \gamma \Delta T} \right)^2 Y(x), \\ Sviluppo1(x) &= n_T(T) + \left( \frac{\Delta T}{T} \right)^2 \frac{x e^x}{(e^x - 1)^2} + \frac{1}{2} \left( \frac{\Delta T}{T} \right)^2 Y(x), \\ Sviluppo2(x) &= n_T \left( T \left( 1 + \left( \frac{\Delta T}{T} \right)^2 \right) \right) + \frac{1}{2} \left( \frac{\Delta T}{T} \right)^2 Y(x), \end{aligned}$$

con

$$Y(x) = \frac{x e^x}{(e^x - 1)^2} \left( x \frac{e^x + 1}{e^x - 1} - 4 \right).$$

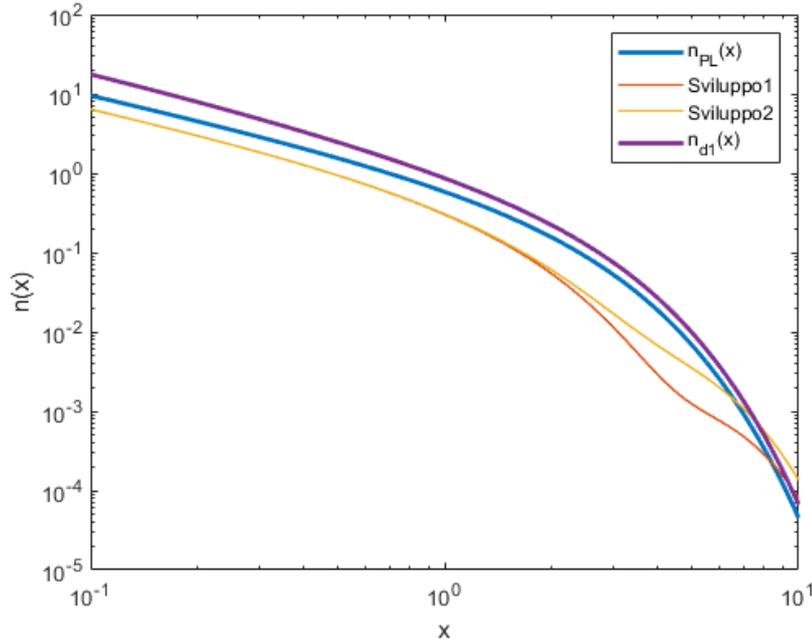


Figura 6.23. La legge di Planck (5.1) (in blu), Sviluppo1 (5.2) (in rosso), Sviluppo2 (5.3) (in giallo) e lo sviluppo della variazione  $n_{d1}$  (6.8) (in viola) con termini lineari cambiati di segno per  $T = 2.725$ ,  $\Delta T = 0.85$  e  $\gamma = 0.5$

Dall'eliminazione dei termini lineari, si prevede che tutti e tre gli sviluppi siano maggiori rispetto la legge di Planck. Come primo caso si considera  $T = 2.725$ ,  $\Delta T = 0.5$  e  $\gamma = 0.5$  (fig. 6.25).

$x$	$n_{PL}$	$n_{d1}$	$ n_{PL} - n_{d1} $	<i>Sviluppo1</i>	<i>Sviluppo2</i>
$x = 0.1$	9.5083	9.5126	0.0042	9.5086	9.5086
$x = 1$	0.5820	0.5850	0.0030	0.5845	0.5846
$x = 10$	4.5402e-05	4.6483e-05	1.0805e-05	1.0655e-04	1.0875e-04

Lo sviluppo  $n_{d1}$  si sovrappone alla legge di Planck  $n_{PL}$ , infatti la differenza maggiore tra le due funzioni è di 0.0042. Anche Sviluppo1 e Sviluppo2 sono molto simili alla legge di Planck e sono coincidenti tra loro. Si riporta anche  $x^3 n(x)$  (fig. 6.26).

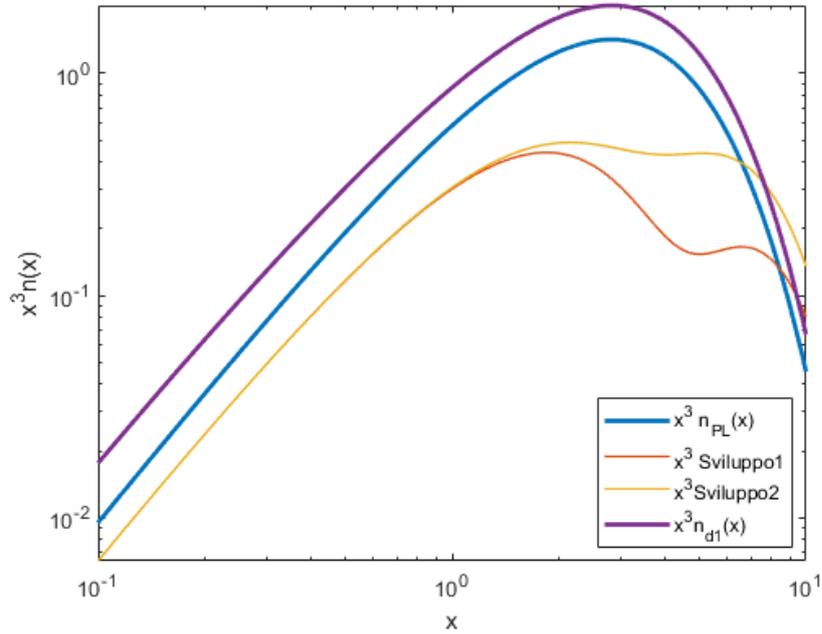


Figura 6.24.  $x^3 n(x)$  della legge di Planck (5.1) (in blu), di Sviluppo1 (5.2) (in rosso), di Sviluppo2 (5.3) (in giallo) e dello sviluppo della variazione  $n_{d1}$  (6.8) (in viola) con termini lineari cambiati di segno per  $T = 2.725$ ,  $\Delta T = 0.85$  e  $\gamma = 0.5$

x	$x^3 n_{PL}$	$x^3 n_{d1}$	$x^3  n_{PL} - n_{d1} $	$x^3 Sviluppo1$	$x^3 Sviluppo2$
x = 0.1	0.0095	0.0095	0	0.0095	0.0095
x = 1	0.5820	0.5850	0.0030	0.5845	0.5846
x = 2.8153	1.4214	1.4380	0.0166	1.5055	1.5083
x = 2.8351	1.4214	1.4381	0.0167	1.5071	1.5099
x = 10	0.0454	0.0465	0.0011	0.1066	0.1087

Anche per  $x^3 n(x)$ , la variazione e la legge di Planck sono quasi coincidenti, raggiungendo entrambe il massimo circa allo stesso punto, rispettivamente in  $x = 2.8351$  e  $x = 2.8153$ . Sviluppo1 e Sviluppo2 sono simili e differiscono di poco dalla legge di Planck, per una differenza di circa 0.1.

Si aumenti il valore di  $\gamma$  a  $\gamma = 1$  (fig. 6.27).

x	$n_{PL}$	$n_{d1}$	$ n_{PL} - n_{d1} $	$Sviluppo1$	$Sviluppo2$
x = 0.1	9.5083	9.5141	0.0058	9.5086	9.5086
x = 1	0.5820	0.5904	0.0084	0.5845	0.5846
x = 10	4.5402e-05	4.9521e-05	4.1187e-06	1.0655e-04	1.0875e-04

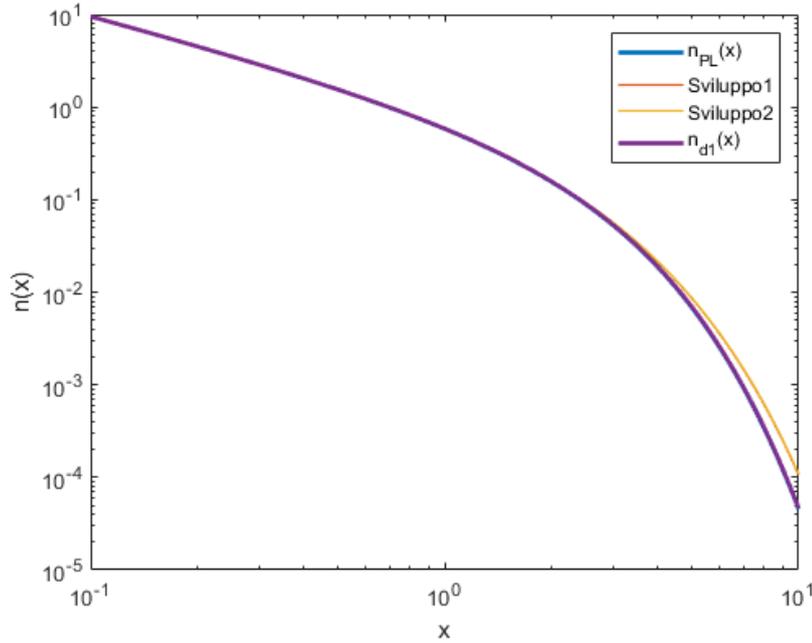


Figura 6.25. La legge di Planck (5.1) (in blu), Sviluppo1 (5.2) (in rosso), Sviluppo2 (5.3) (in giallo) e lo sviluppo della variazione  $n_{d1}$  (6.8) (in viola) con solo i termini quadratici per  $T = 2.725$ ,  $\Delta T = 0.5$  e  $\gamma = 0.5$

In questo caso le funzioni sono quasi coincidenti, ma con l'aumentare di  $\gamma$  aumentano leggermente i valori di  $n_{d1}(x)$ , tuttavia la differenza massima con la legge di Planck è di 0.0058.

Analizziamo  $x^3 n(x)$ , raffigurato in figura 6.28.

x	$x^3 n_{PL}$	$x^3 n_{d1}$	$x^3  n_{PL} - n_{d1} $	$x^3 Sviluppo1$	$x^3 Sviluppo2$
x = 0.1	0.0095	0.0095	0	0.0095	0.0095
x = 1	0.5820	0.5904	0.0084	0.5845	0.5846
x = 2.8153	1.4214	1.4783	0.0568	1.5055	1.5083
x = 2.8649	1.4210	1.4787	0.0577	1.509	1.512
x = 10	0.0454	0.0495	0.0041	0.1066	0.1087

$x^3 n_{d1}(x)$  e la legge di Planck sono quasi coincidenti e con l'aumentare di  $\gamma$  aumentano le differenze tra le due funzioni. Tale differenze osservate sono comunque molto piccole, infatti passiamo da una differenza massima per  $\gamma = 0.5$  di 0.0184 in  $x = 3.6180$  a una differenza per  $\gamma = 1$  di 0.0652 in  $x = 3.7270$ .

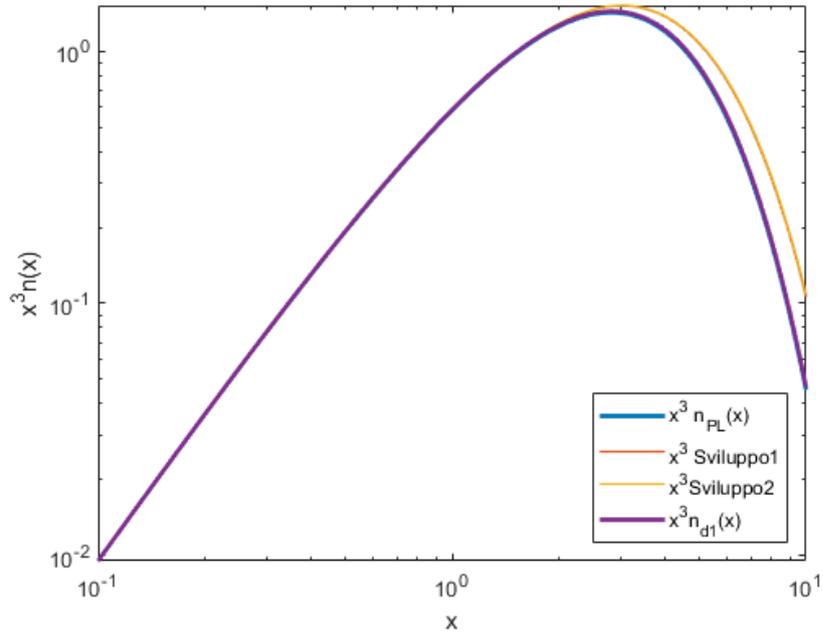


Figura 6.26.  $x^3 n(x)$  della legge di Planck (5.1) (in blu), di Sviluppo1 (5.2) (in rosso), di Sviluppo2 (5.3) (in giallo) e dello sviluppo della variazione  $n_{d1}$  (6.8) (in viola) solo i termini quadratici per  $T = 2.725$ ,  $\Delta T = 0.5$  e  $\gamma = 0.5$

Dunque aumentando ancora il valore di  $\gamma$  fino a  $\gamma = 1.5$  (fig. 6.29) abbiamo dei valori di  $n_{d1}(x)$  maggiori, ma di poco, come dimostrano i valori nella seguente tabella.

x	$n_{PL}$	$n_{d1}$	$ n_{PL} - n_{d1} $	<i>Sviluppo1</i>	<i>Sviluppo2</i>
x = 0.1	9.5083	9.5148	0.0065	9.5086	9.5086
x = 1	0.5820	0.5958	0.0139	0.5845	0.5846
x = 10	4.5402e-05	5.4243e-05	8.8412e-06	1.0655e-04	1.0875e-04

La differenza massima tra  $n_{PL}(x)$  e  $n_{d1}(x)$  è data da circa 0.014.

Rappresentiamo in figura 6.30 le funzioni  $x^3 n(x)$ .

x	$x^3 n_{PL}$	$x^3 n_{d1}$	$x^3  n_{PL} - n_{d1} $	$x^3 \text{Sviluppo1}$	$x^3 \text{Sviluppo2}$
x = 0.1	0.0095	0.0095	0	0.0095	0.0095
x = 1	0.5820	0.5958	0.0139	0.5845	0.5846
x = 2.8153	1.4214	1.5320	0.1106	1.5055	1.5083
x = 2.9045	1.4199	1.5340	0.1140	1.5111	1.5141
x = 10	0.0454	0.0542	0.0088	0.1066	0.1087

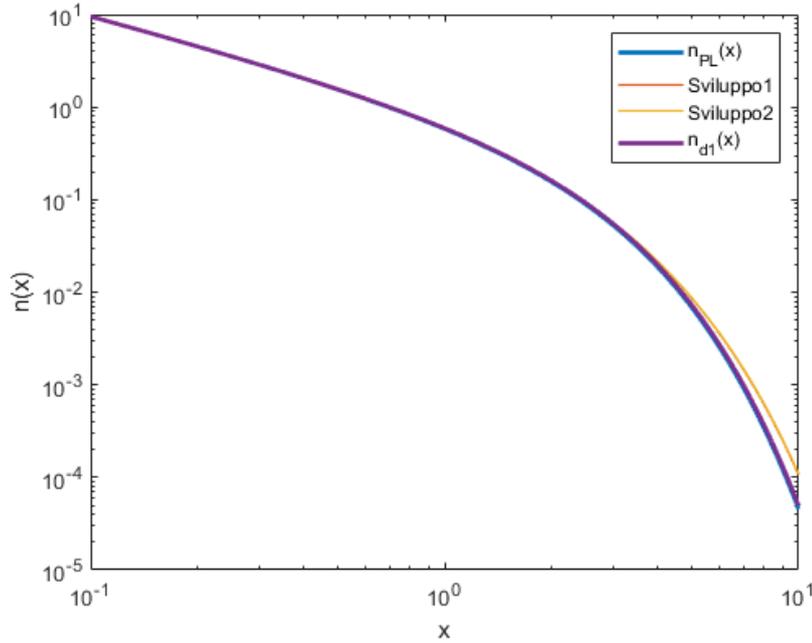


Figura 6.27. La legge di Planck (5.1) (in blu), Sviluppo1 (5.2) (in rosso), Sviluppo2 (5.3) (in giallo) e lo sviluppo della variazione  $n_{d1}$  (6.8) (in viola) con solo i termini quadratici per  $T = 2.725$ ,  $\Delta T = 0.5$  e  $\gamma = 1$

Anche in questo caso lo sviluppo  $n_{d1}$  cresce di poco rispetto al caso  $\gamma = 1$  e la differenza massima con  $n_{PL}$  è di 0.1309.

Si passi a considerare  $\Delta T = 0.85$  e  $\gamma = 0.5$  (fig. 6.31). Per  $n_{d1}(x)$  ci si aspetta dei valori intermedi tra  $\gamma = 0.5$  e  $\gamma = 1$ , mentre si prevede che le funzioni Sviluppo1 e Sviluppo2 siano maggiori rispetto il caso con  $\Delta T = 0.5$ .

x	$n_{PL}$	$n_{d1}$	$ n_{PL} - n_{d1} $	Sviluppo1	Sviluppo2
x = 0.1	9.5083	9.5138	0.0055	9.5091	9.5092
x = 1	0.5820	0.5887	0.0067	0.5893	0.5900
x = 10	4.5402e-05	4.8421e-05	3.0181e-06	2.2213e-04	2.4276e-04

I valori in tabella confermano quanto previsto. Le stesse considerazioni sono confermate per  $x^3 n(x)$  (fig. 6.32).

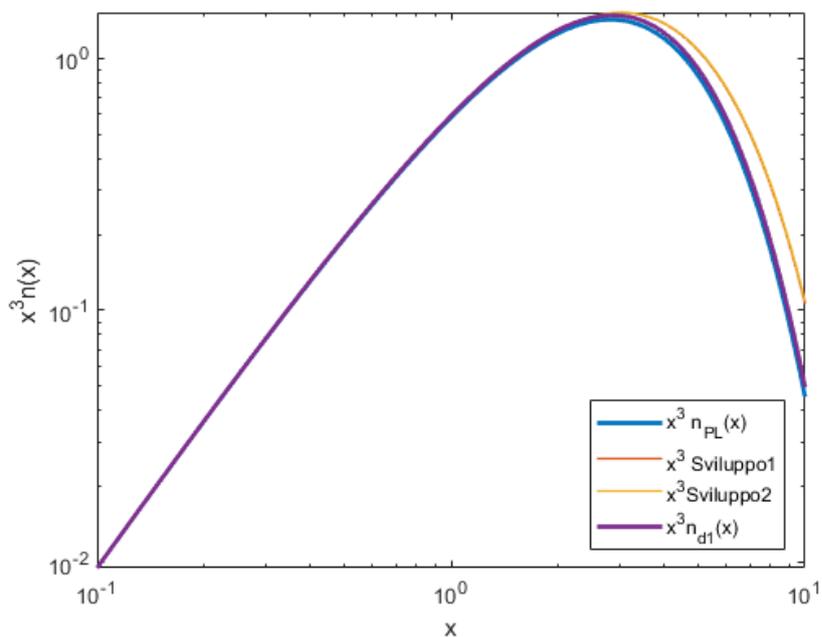


Figura 6.28.  $x^3 n(x)$  della legge di Planck (5.1) (in blu), di Sviluppo1 (5.2) (in rosso), di Sviluppo2 (5.3) (in giallo) e dello sviluppo della variazione  $n_{d1}$  (6.8) (in viola) con solo i termini quadratici per  $T = 2.725$ ,  $\Delta T = 0.5$  e  $\gamma = 1$

x	$x^3 n_{PL}$	$x^3 n_{d1}$	$x^3  n_{PL} - n_{d1} $	$x^3 Sviluppo1$	$x^3 Sviluppo2$
x = 0.1	0.0095	0.0095	0	0.0095	0.0095
x = 1	0.5820	0.5887	0.0067	0.5893	0.5900
x = 2.8153	1.4214	1.4644	0.0430	1.6645	1.6870
x = 2.8550	1.4214	1.4647	0.0435	1.6733	1.6966
x = 10	0.0454	0.0484	0.003	0.2221	0.2428

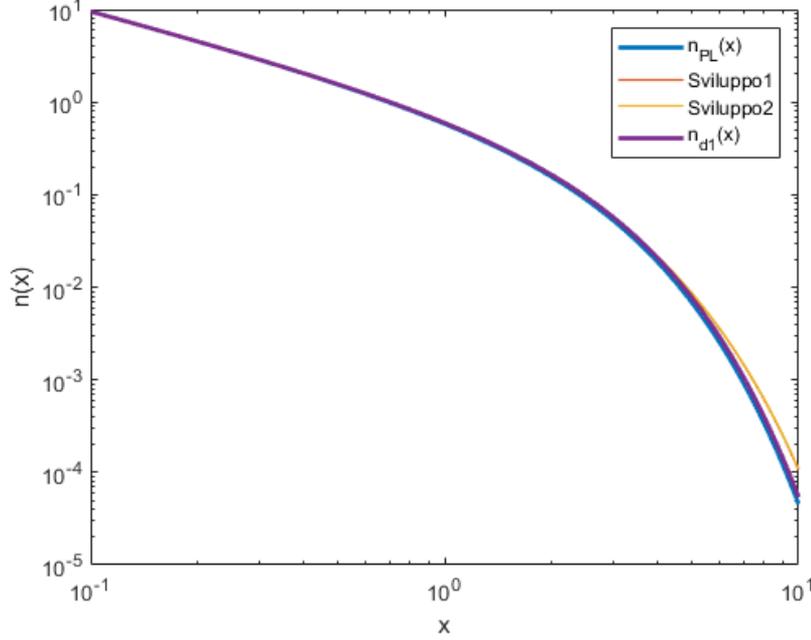


Figura 6.29. La legge di Planck (5.1) (in blu), Sviluppo1 (5.2) (in rosso), Sviluppo2 (5.3) (in giallo) e lo sviluppo della variazione  $n_{d1}$  (6.8) (in viola) con solo i termini quadratici per  $T = 2.725$ ,  $\Delta T = 0.5$  e  $\gamma = 1.5$

## 6.2 Sviluppo $n_{d2}$

Consideriamo la variazione  $n_{d2}(x)$ :

$$n_{d2}(x) = n_{PL}\left(T + \frac{\nu}{\gamma\Delta T}\right) = \frac{1}{e^{\frac{x\gamma\Delta T}{\gamma\Delta T+x}} - 1} = \quad (6.10)$$

$$= n_{PL}(x) + \frac{xe^x}{(e^x - 1)^2} \left( \frac{x}{\gamma\Delta T} + \left(\frac{x}{\gamma\Delta T}\right)^2 \right) + \frac{1}{2} \left(\frac{x}{\gamma\Delta T}\right)^2 Y(x). \quad (6.11)$$

Questa funzione incrementa il denominatore dell'argomento dell'esponenziale di un termine  $\frac{\nu}{\gamma\Delta T}$ , e dunque l'argomento diventa  $\frac{x\gamma\Delta T}{\gamma\Delta T+x}$ . Si tratta di un caso particolare, visto che la modifica alla legge di Planck non è una costante ma dipende dalla variabile  $x$ .

Siano dati  $T = 2.725$ ,  $\Delta T = 0.5$  e  $\gamma = 0.5$ . In figura 6.33 è rappresentata la variazione  $n_{d2}(x)$  e la legge di Planck per questa scelta dei parametri.

L'incremento dell'argomento dell'esponenziale migliora la funzione  $n_{d2}(x)$  rispetto la legge di Planck e si ha una piccola differenza iniziale, in seguito la variazione decresce fino a raggiungere un minimo a  $x = 0.5855$ , e da qui aumenta, avendo un andamento diverso rispetto la legge di Planck e raggiungendo il massimo a  $x = 4.8712$  e decrescendo

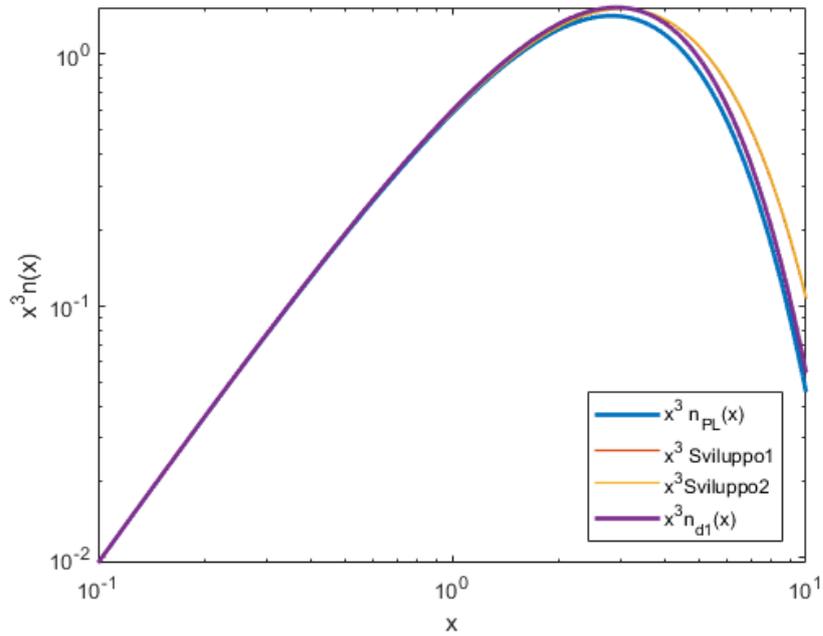


Figura 6.30.  $x^3 n(x)$  della legge di Planck (5.1) (in blu), di Sviluppo1 (5.2) (in rosso), di Sviluppo2 (5.3) (in giallo) e dello sviluppo della variazione  $n_{d1}$  (6.8) (in viola) i termini quadratici per  $T = 2.725$ ,  $\Delta T = 0.5$  e  $\gamma = 1.5$

nuovamente. Per  $x \rightarrow 10$  il comportamento delle due funzioni è molto diverso. Di seguito sono riportati i valori.

$x$	$n_{PL}$	$n_{d2}$	$ n_{PL} - n_{d2} $
$x = 0.1$	9.5083	13.5063	3.9980
$x = 0.5855$	1.2565	5.4027	4.1463
$x = 1$	0.5820	5.4723	4.8903
$x = 2.6270$	1.4128	1.1604	0.2524
$x = 4.8712$	0.0128	22.5085	22.4957
$x = 10$	4.5402e-05	2.9244	2.9244

Per  $x^3 n(x)$  (fig. 6.34), si può notare che la variazione è maggiore rispetto a  $x^3 n_{PL}$  e raggiunge il suo massimo a  $x = 7.3243$ , dove la differenza con la legge di Planck è di 4408,8 circa. Anche in questo caso, sebbene per  $x \sim 0.1$  le due funzioni abbiano una piccola differenza, al crescere di  $x$  si hanno due comportamenti diversi, al punto che per  $x \rightarrow 10$  si possono notare dei valori molto differenti.

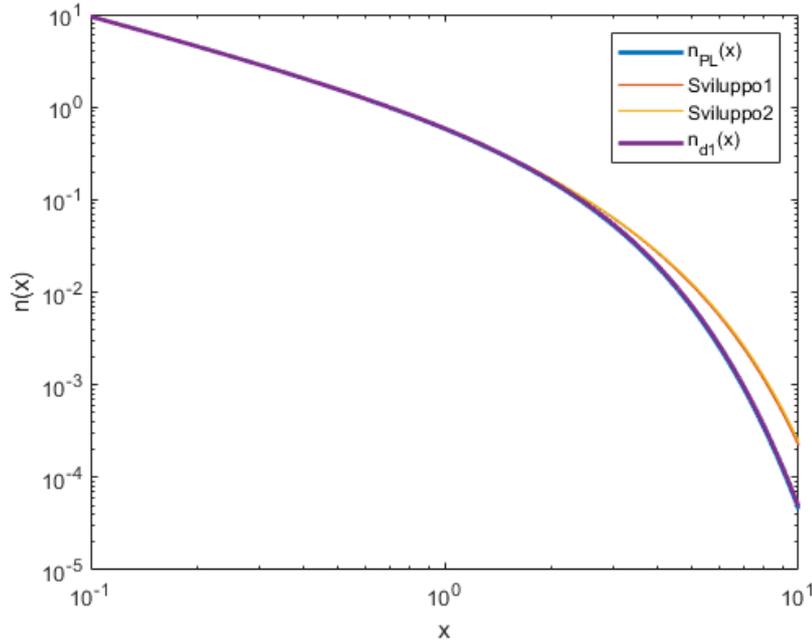


Figura 6.31. La legge di Planck (5.1) (in blu), Sviluppo1 (5.2) (in rosso), Sviluppo2 (5.3) (in giallo) e lo sviluppo della variazione  $n_{d1}$  (6.8) (in viola) con solo i termini quadratici per  $T = 2.725$ ,  $\Delta T = 0.85$  e  $\gamma = 0.5$

x	$x^3 n_{PL}$	$x^3 n_{d2}$	$x^3  n_{PL} - n_{d2} $
x = 0.1	0.0095	0.0135	0.004
x = 1	0.5820	5.4723	4.8903
x = 2.8153	1.4214	366.2174	364.7960
x = 7.3243	0.2594	4.4051e+03	4.4048e+03
x = 10	0.0454	2.9244e+03	2.9244e+03

Si aumenti il valore di  $\gamma$  a  $\gamma = 1$  (fig. 6.35) e quello che si osserva è che si ha un andamento della funzione  $n_{d2}(x)$  uguale al caso precedente con  $\gamma = 0.5$ , ma con dei valori minori. Quindi, per  $x = 0.1$ , lo sviluppo di  $n_{d2}(x)$  è data da  $n_{d2}(0.1) = 11.5070$ , con una differenza con la legge di Planck di 1.9987. In seguito la funzione decresce fino a raggiungere un valore minimo in  $x = 1.1306$ , e successivamente si ha un picco in  $x = 4.2423$ . In questo ultimo punto, la differenza tra le due funzioni è data da 5.8786, mentre nel caso  $\gamma = 0.5$ , nel punto il cui lo sviluppo di  $n_{d2}(x)$  raggiunge il suo massimo, la differenza è di 22.4957.

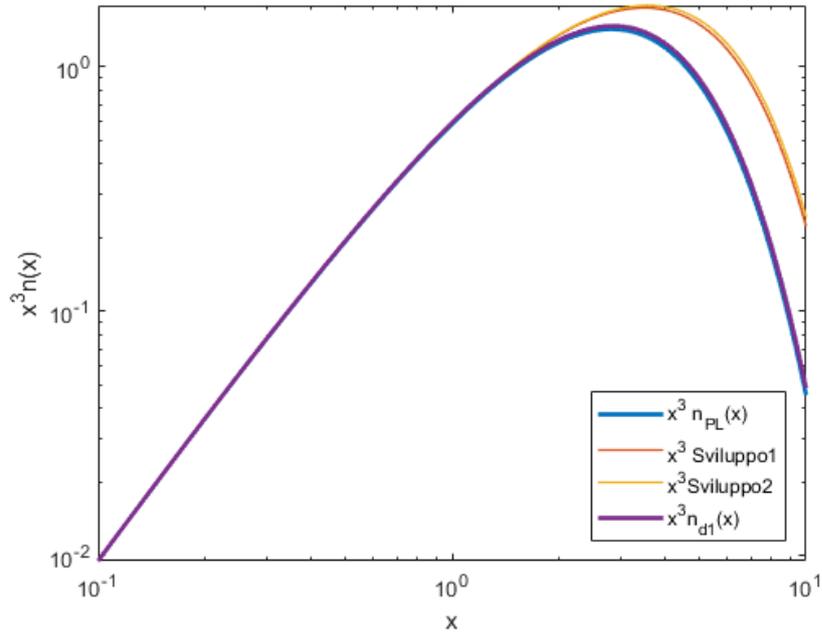


Figura 6.32.  $x^3 n(x)$  della legge di Planck (5.1) (in blu), di Sviluppo1 (5.2) (in rosso), di Sviluppo2 (5.3) (in giallo) e dello sviluppo della variazione  $n_{d1}$  (6.8) (in viola) con i termini quadratici per  $T = 2.725$ ,  $\Delta T = 0.85$  e  $\gamma = 0.5$

x	$n_{PL}$	$n_{d2}$	$ n_{PL} - n_{d2} $
x = 0.1	9.5083	11.5070	1.9987
x = 1	0.5820	2.7252	2.1432
x = 1.1306	0.4768	2.7012	2.2245
x = 4.2423	0.0146	5.8931	5.8786
x = 10	4.5402e-05	0.7357	0.7356

Anche per  $x^3 n(x)$  (fig. 6.36), si hanno delle differenze minori rispetto il caso precedente, nonostante la funzione  $n_{d2}$  resti comunque maggiore rispetto  $n_{PL}(x)$  e l'andamento osservato è lo stesso del caso  $\gamma = 0.5$ .

x	$x^3 n_{PL}$	$x^3 n_{d2}$	$x^3  n_{PL} - n_{d2} $
x = 0.1	0.0095	0.0115	0.002
x = 1	0.5820	2.7252	2.1432
x = 2.8153	1.4214	104.6042	103.1828
x = 7.2946	0.2638	1.1155e+03	1.1152e+03
x = 10	0.0454	735.6735	735.6281

In questo caso, la variazione raggiunge il suo massimo a  $x = 7.2946$ , dove si ha una differenza con la legge di Planck di  $1.1152e + 03$ .

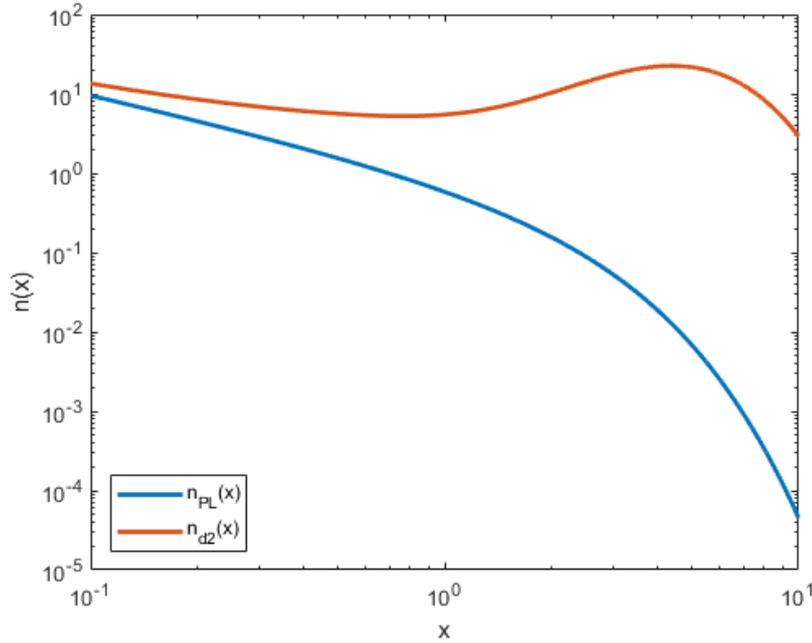


Figura 6.33. La legge di Planck (5.1) (in blu) e lo sviluppo della variazione  $n_{d2}$  (6.11) (in rosso) per  $T = 2.725$ ,  $\Delta T = 0.5$  e  $\gamma = 0.5$

Continuando ad aumentare il valore di  $\gamma$  fino a  $\gamma = 1.5$ , si può osservare in fig. 6.37, che l'andamento della funzione è sempre lo stesso (raggiunge un minimo in  $x = 1.4676$  e un massimo in  $x = 4.0937$ ), ma si hanno dei valori minori e le differenze con  $n_{PL}$  dunque diminuiscono.

$x$	$n_{PL}$	$n_{d2}$	$ n_{PL} - n_{d2} $
$x = 0.1$	9.5083	10.8407	1.3324
$x = 1$	0.5820	1.9437	1.3617
$x = 1.4676$	0.2995	1.7964	1.4969
$x = 4.0937$	0.0170	2.7506	2.7336
$x = 10$	4.5402e-05	0.3290	0.3290

Anche per  $x^3 n(x)$ , (fig. 6.38), all'aumentare di  $\gamma$  diminuiscono le differenze, nonostante queste siano, per certi valori della  $x$ , comunque grandi. Per il caso  $\gamma = 1.5$ ,  $x^3 n_{d2}(x)$  raggiunge il suo massimo in  $x = 7.2649$ .

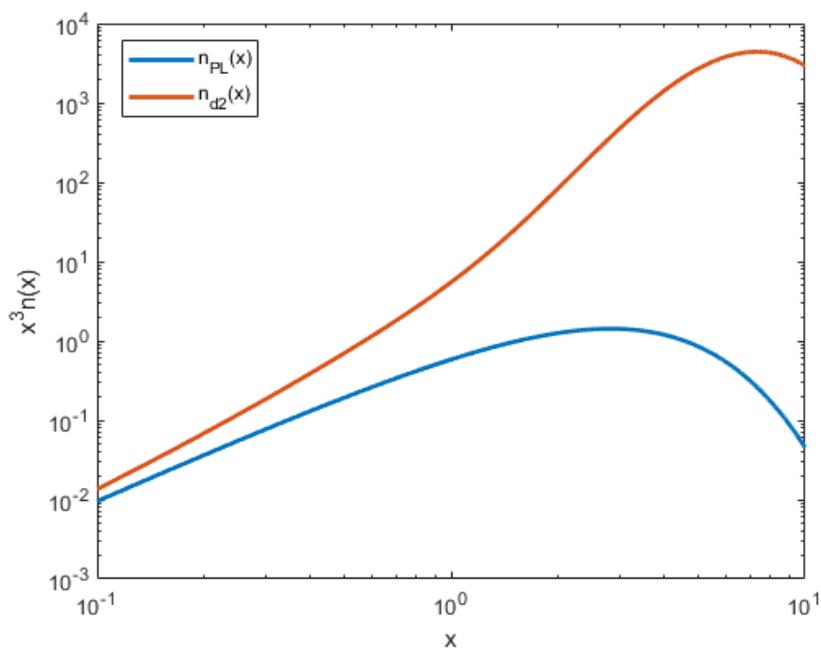


Figura 6.34.  $x^3 n(x)$  della legge di Planck (5.1) (in blu) e dello sviluppo della variazione  $n_{d2}$  (6.11) (in rosso) per  $T = 2.725$ ,  $\Delta T = 0.5$  e  $\gamma = 0.5$

x	$x^3 n_{PL}$	$x^3 n_{d2}$	$x^3  n_{PL} - n_{d2} $
x = 0.1	0.0095	0.0108	0.0013
x = 1	0.5820	1.9437	1.3617
x = 2.8153	1.4214	52.6066	51.1851
x = 7.2649	0.2685	502.1826	501.9151
x = 10	0.0454	329.0092	328.9638

Se si prova a variare  $\Delta T$  invece che il parametro  $\gamma$ , dato che, anche per  $n_{d2}$ , questi due parametri appaiono sempre insieme come fattori di un prodotto, allora non si hanno riscontri diversi all'aumentare dell'uno o dell'altro. Se quindi si considera  $\gamma = 0.5$  e  $\Delta T = 0.85$ , si presume che il caso sia intermedio tra la scelta dei parametri  $\gamma = 0.5$  e  $\gamma = 1$  (fig. 6.39).

x	$n_{PL}$	$n_{d2}$	$ n_{PL} - n_{d2} $
x = 0.1	9.5083	11.8598	2.3514
x = 1	0.5820	3.1661	2.5841
x = 1.0414	0.5455	3.1649	2.6194
x = 4.2820	0.014	8.0422	8.0282
x = 10	4.5402e-05	1.0163	1.0163

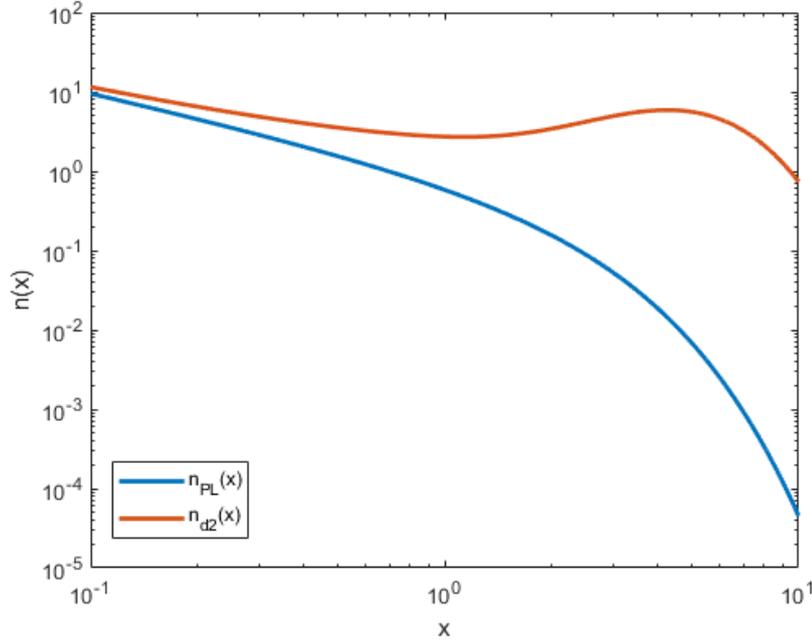


Figura 6.35. La legge di Planck (5.1) (in blu) e lo sviluppo della variazione  $n_{d2}$  (6.11) (in rosso) per  $T = 2.725$ ,  $\Delta T = 0.5$  e  $\gamma = 1$

Come previsto, questi valori sono intermedi tra i casi  $\gamma = 0.5$  e  $\gamma = 1$  e non si nota nessun comportamento diverso. Valo lo stesso per  $x^3 n(x)$  (fig. 6.40).

$x$	$x^3 n_{PL}$	$x^3 n_{d2}$	$x^3  n_{PL} - n_{d2} $
$x = 0.1$	0.0095	0.0119	0.0024
$x = 1$	0.5820	3.1661	2.5841
$x = 2.8153$	1.4214	139.259	137.8376
$x = 7.3045$	0.2623	1.5380e+03	1.5377e+03
$x = 10$	0.0454	1.0163e+03	1.0163e+03

In questo caso,  $x^3 n_{d2}$  raggiunge il suo massimo in  $x = 7.3045$ .

### 6.2.1 Delta negativo

Se si considera  $\Delta T$  negativo, lo sviluppo di  $n_{d2}(x)$  può annullarsi e avere dei valori negativi. Tuttavia, rispetto  $n_{d1}(x)$ , non ci sono dei valori critici, dato che i denominatori non si annullano per i valori di  $x$ ,  $\gamma$  e  $\Delta T$  considerati (tutti diversi da zero).

Per  $n_{d2}$ , considerare  $\Delta T$  negativo equivale al cambiare il segno dei termini lineari:

$$n_{d2}(x) = n_{PL}(x) + \frac{x e^x}{(e^x - 1)^2} \left( -\frac{x}{\gamma \Delta T} + \left( \frac{x}{\gamma \Delta T} \right)^2 \right) + \frac{1}{2} \left( \frac{x}{\gamma \Delta T} \right)^2 Y(x). \quad (6.12)$$

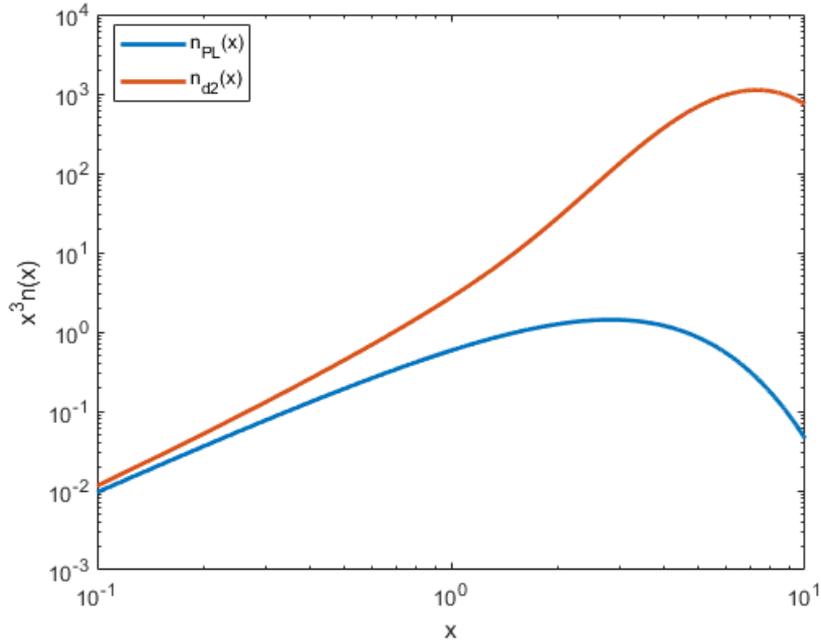


Figura 6.36.  $x^3 n(x)$  della legge di Planck (5.1) (in blu) e dello sviluppo della variazione  $n_{d2}$  (6.11) (in rosso) per  $T = 2.725$ ,  $\Delta T = 0.5$  e  $\gamma = 1$

Dati  $T = 2.725$ ,  $\Delta T = -0.5$  e  $\gamma = 0.5$ , in figura 6.41 sono rappresentate le funzioni per questi parametri. Si nota un comportamento nettamente differente dal caso con  $\Delta T$  positivo e, come previsto, si hanno dei valori negativi, in questo caso nell'intervallo  $x \in (0.22, 1.41)$  circa.

$x$	$n_{PL}$	$n_{d2}$	$ n_{PL} - n_{d2} $
$x = 0.1$	9.5083	5.513	3.9953
$x = 0.22$	4.0638	0	3.9698
$x = 1.41$	0.3230	0	0.3230
$x = 4.5991$	0.0102	20.6543	20.6442
$x = 10$	4.5402e-05	2.881	2.888

In un primo intervallo  $x \in (0.1, 0.22)$ , la funzione  $n_{d2}(x)$  decresce fino ad annullarsi e assumere in seguito valori negativi, raggiungendo un minimo in circa  $x = 0.68$ , ricresce fino a  $x = 1.41$ , da dove assume di nuovo valori positivi e cresce fino a raggiungere il suo valore massimo in  $x = 4.5991$ .

Analizzando  $x^3 n(x)$ , rappresentato in figura 6.42: la funzione  $n_{d2}(x)$  assume dei valori negativi nello stesso intervallo  $x \in (0.22, 1.41)$ .

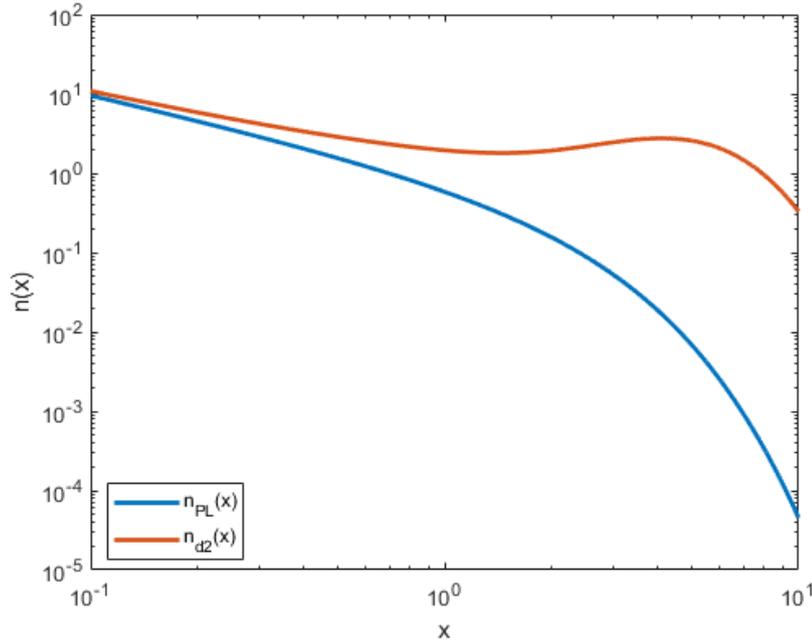


Figura 6.37. La legge di Planck (5.1) (in blu) e lo sviluppo della variazione  $n_{d2}$  (6.11) (in rosso) per  $T = 2.725$ ,  $\Delta T = 0.5$  e  $\gamma = 1.5$

$x$	$x^3 n_{PL}$	$x^3 n_{d2}$	$x^3  n_{PL} - n_{d2} $
$x = 0.1$	0.0095	0.0055	0.004
$x = 0.2247$	0.0450	0	0.045
$x = 1.4101$	0.9055	0	0.9055
$x = 2.8153$	1.4214	270.3472	268.9257
$x = 7.3848$	0.2501	4.2947e+03	4.2944e+03
$x = 10$	0.0454	2.8881e+03	2.8880e+03

A  $x = 7.3848$  si raggiunge il massimo della variazione e, dato che il suo valore in questo punto è nettamente maggiore rispetto le legge di Planck, è anche il punto in cui si ha anche la differenza massima tra queste due funzioni.

Si consideri adesso  $\Delta T = -0.85$  e  $\gamma = 0.5$  in figura 6.43.

Lo sviluppo di  $n_{d2(x)}$  ha lo stesso andamento osservato per il caso precedente ( $\gamma = 0.5$  e  $\Delta T = -0.5$ ): inizialmente decresce e assume dei valori negativi, ma in un intervallo diverso, cioè in  $x \in (0.3602, 1.6720)$ . Successivamente cresce, interseca  $n_{PL}(x)$  in  $x = 1.7450$  e raggiunge il suo massimo in  $x = 4.6883$ .

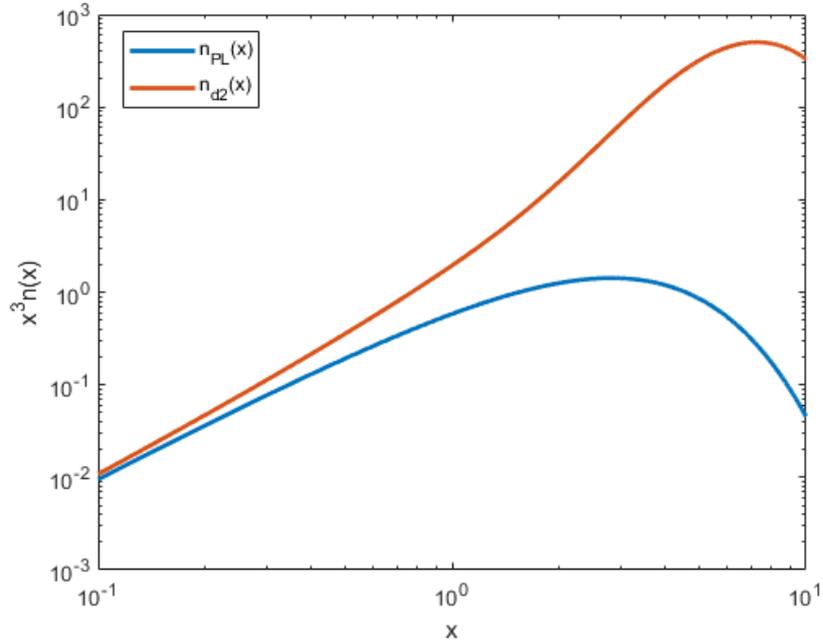


Figura 6.38.  $x^3 n(x)$  della legge di Planck (5.1) (in blu) e dello sviluppo della variazione  $n_{d2}$  (6.11) (in rosso) per  $T = 2.725$ ,  $\Delta T = 0.5$  e  $\gamma = 1.5$

x	$n_{PL}$	$n_{d2}$	$ n_{PL} - n_{d2} $
x = 0.1	9.5083	7.1578	2.3505
x = 0.3602	2.3062	0	2.3062
x = 1.6720	0.2313	0	0.2313
x = 4.6883	0.0093	6.9459	6.9367
x = 10	4.5402e-05	0.995	0.9949

Riportiamo in tabella anche i valori per  $x^3 n(x)$  (figura 6.44).

x	$x^3 n_{PL}$	$x^3 n_{d2}$	$x^3  n_{PL} - n_{d2} $
x = 0.1	0.0095	0.0072	0.0024
x = 0.3602	0.1078	0	0.1078
x = 1.6720	1.0813	0	1.0813
x = 2.8153	1.4214	82.8647	81.4433
x = 7.4036	0.2473	1.4730e+03	1.4728e+03
x = 10	0.0454	1.0056e+03	1.0056e+03

Le differenze tra  $n_{PL}(x)$  e  $n_{d2}(x)$  sono minori rispetto al caso  $\gamma = 0.5$  e rispetto al caso classico. Quindi aumentando  $\gamma$  ci si aspetta che le differenze diminuiscano sebbene la  $n_{d2}(x)$  resti sempre maggiore.

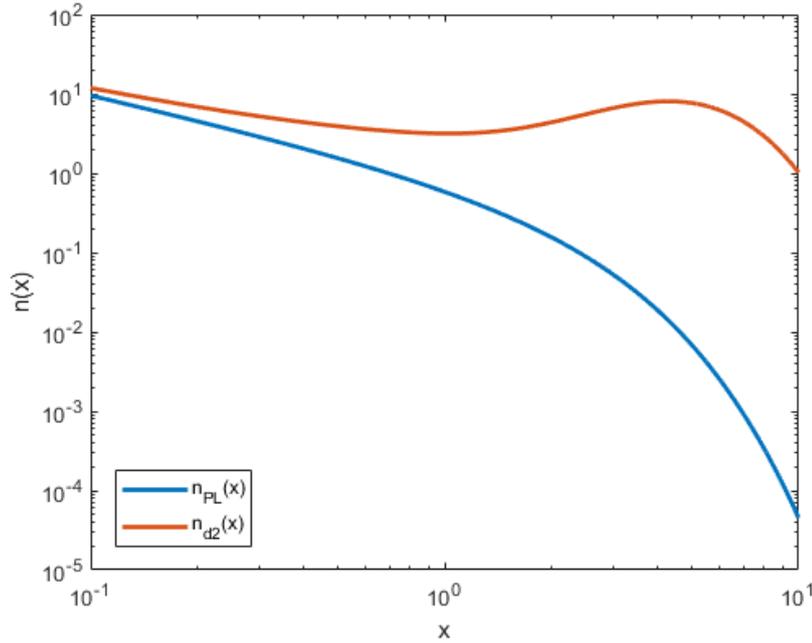


Figura 6.39. La legge di Planck (5.1) (in blu) lo sviluppo della variazione  $n_{d2}$  (6.11) (in rosso) per  $T = 2.725$ ,  $\Delta T = 0.85$  e  $\gamma = 0.5$

Per verificare ciò consideriamo i parametri  $\gamma = 1$  con  $\Delta T = -0.5$  (fig. 6.45). Lo sviluppo di  $n_{d2}$  ha lo stesso andamento: è inizialmente inferiore rispetto la legge di Planck, si annulla e assume valori negativi (in questo caso nell'intervallo  $x \in (0.4122, 1.7599)$ ), cresce fino ad intersecare  $n_{PL}$  e raggiunge il suo massimo nel punto  $x = 4.6586$ . La tabella che segue conferma che all'aumentare di  $\gamma$  o  $\Delta T$  in valore assoluto, diminuiscono le differenze tra le due funzioni.

$x$	$n_{PL}$	$n_{d2}$	$ n_{PL} - n_{d2} $
$x = 0.1$	9.5083	7.5103	1.9980
$x = 0.4122$	1.9603	0	1.9603
$x = 1.7599$	0.2078	0	0.2078
$x = 4.6586$	0.0096	4.9586	4.9490
$x = 10$	4.5402e-05	0.7175	0.7175

Anche per  $x^3 n(x)$  (fig. 6.46), nonostante l'andamento sia lo stesso del caso con  $\gamma = 0.5$  e  $\Delta T = -0.85$ , l'aumento di  $\gamma$  comporta una diminuzione delle differenze con la legge di Planck, come si può verificare dalla tabella che segue.

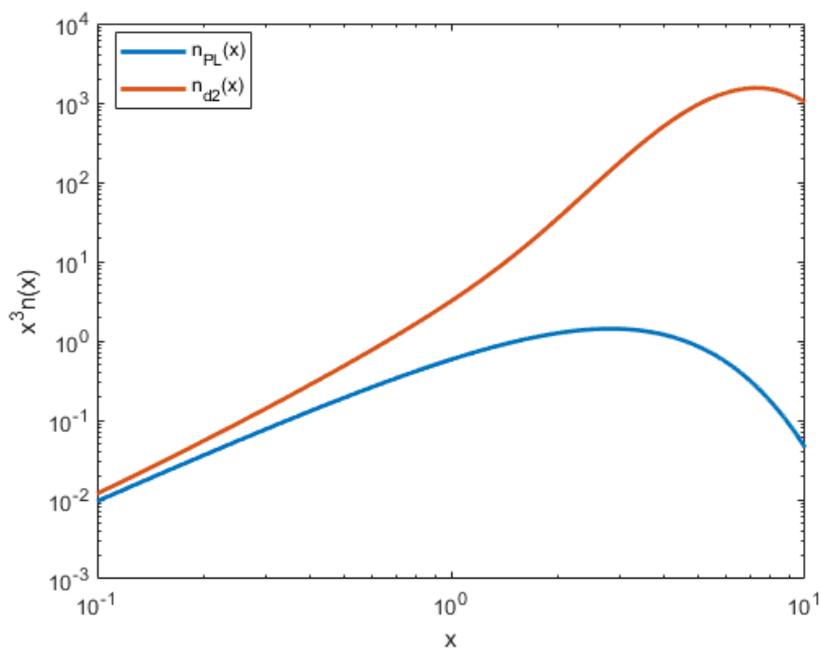


Figura 6.40.  $x^3 n(x)$  della legge di Planck (5.1) (in blu) e dello sviluppo della variazione  $n_{d2}$  (6.11) (in rosso) per  $T = 2.725$ ,  $\Delta T = 0.85$  e  $\gamma = 0.5$

x	$x^3 n_{PL}$	$x^3 n_{d2}$	$x^3  n_{PL} - n_{d2} $
x = 0.1	0.0095	0.0075	0.002
x = 0.4122	0.1373	0	0.1373
x = 1.7599	1.1328	0	1.1328
x = 2.8153	1.4214	56.6691	55.2477
x = 7.4036	0.2473	1.0602e+03	1.0600e+03
x = 10	0.0454	717.5119	717.4665

Consideriamo il caso  $\gamma = 1.5$  (fig. 6.47): aumentando  $\gamma$  le differenze sono diminuite ancora.

x	$n_{PL}$	$n_{d2}$	$ n_{PL} - n_{d2} $
x = 0.1	9.5083	8.1763	1.3321
x = 0.5806	1.2705	0	1.2705
x = 2.0076	0.1551	0	0.1551
x = 4.7675	0.0086	2.1199	2.1113
x = 10	4.5402e-05	0.3169	0.3169

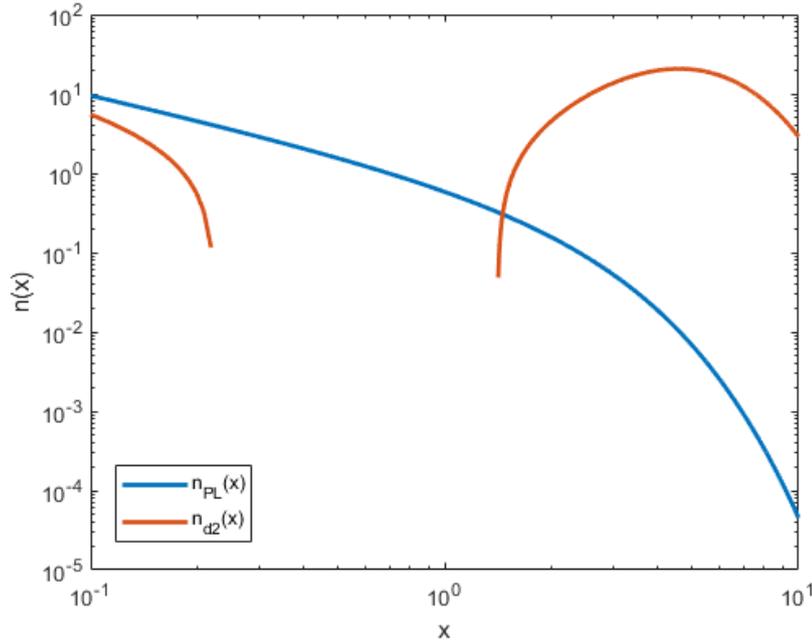


Figura 6.41. La legge di Planck (5.1) (in blu) e lo sviluppo della variazione  $n_{d2}$  (6.11) (in rosso) con  $\Delta T = -0.5$ ,  $T = 2.725$  e  $\gamma = 0.5$

Lo stesso si ha per  $x^3 n(x)$  (fig. 6.48). Tuttavia va sottolineato che, nonostante le differenze siano diminuite, restano in alcuni punti elevate (in  $x = 7.4333$ , la differenza è di 465.1212).

x	$x^3 n_{PL}$	$x^3 n_{d2}$	$x^3  n_{PL} - n_{d2} $
x = 0.1	0.0095	0.0082	0.0013
x = 0.5806	0.2487	0	0.2487
x = 2.0076	1.2554	0	1.2554
x = 2.8153	1.4214	20.6498	19.2284
x = 7.4333	0.2430	465.3642	465.1212
x = 10	0.0454	316.9014	316.8560

### 6.2.2 Termini quadratici

Dato lo sviluppo  $n_{d2}(x)$ , si considerino solo i termini quadratici, trascurando i termini lineari. Si ha dunque:

$$n_{d2}(x) = n_{PL}(x) + \frac{x e^x}{(e^x - 1)^2} \left( \frac{x}{\gamma \Delta T} \right)^2 + \frac{1}{2} \left( \frac{x}{\gamma \Delta T} \right)^2 Y(x). \quad (6.13)$$

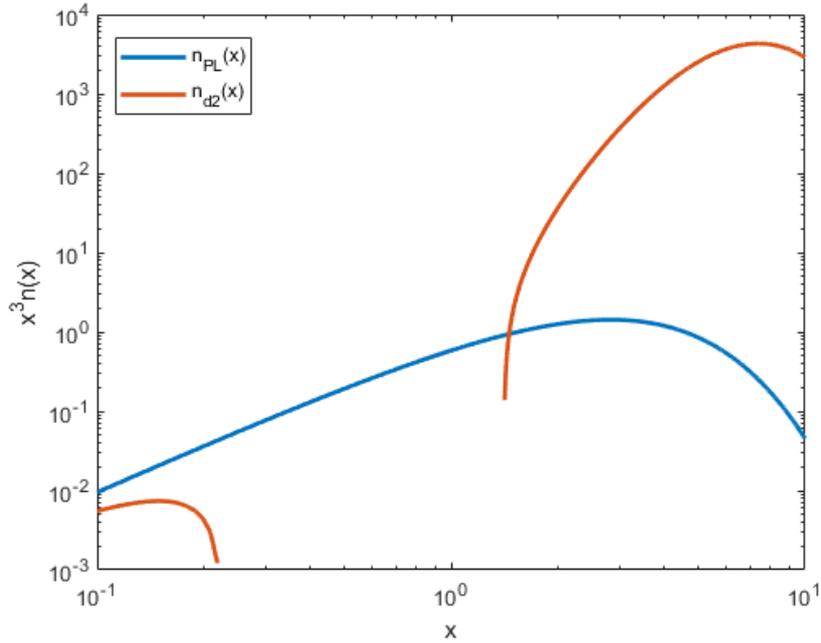


Figura 6.42.  $x^3 n(x)$  della legge di Planck (5.1) (in blu) e dello sviluppo della variazione  $n_{d2}$  (6.11) (in rosso) con  $\Delta T = -0.5$ ,  $T = 2.725$  e  $\gamma = 0.5$

Ci si aspetta dunque che la variazione sia sempre maggiore rispetto la legge di Planck, dato che i termini per cui  $n_{d2}(x)$  differisce da essa sono sempre positivi.

Consideriamo  $T = 2.725$ ,  $\Delta T = 0.5$  e  $\gamma = 0.5$ , e rappresentiamo questo caso in figura 6.49. Per  $x \rightarrow 0.1$ , le due funzioni sembrano coincidere, fino a circa  $x = 0.4$ , dove  $n_{d2}(x)$  raggiunge il suo minimo a circa  $x = 0.7144$ , in seguito cresce fino a raggiungere il picco a  $x = 4.4901$  e poi decresce nuovamente.

x	$n_{PL}$	$n_{d2}$	$ n_{PL} - n_{d2} $
x = 0.1	9.5083	9.5097	0.0013
x = 0.4	2.0332	2.1172	0.0840
x = 0.7144	0.9588	1.4209	0.4621
x = 1	0.5820	1.7896	1.2076
x = 4.4901	0.0113	21.5524	21.5411
x = 10	4.5402e-05	2.9062	2.9062

Considerando  $x^3 n(x)$  si può notare, in figura 6.50, che lo sviluppo di  $n_{d2}(x)$  è inizialmente coincidente con  $n_{PL}(x)$  (infatti per  $x = 0.1$  hanno lo stesso valore), a circa  $x = 0.56$  inizia a distaccarsi e cresce fino a raggiungere il massimo per  $x = 7.3541$ .

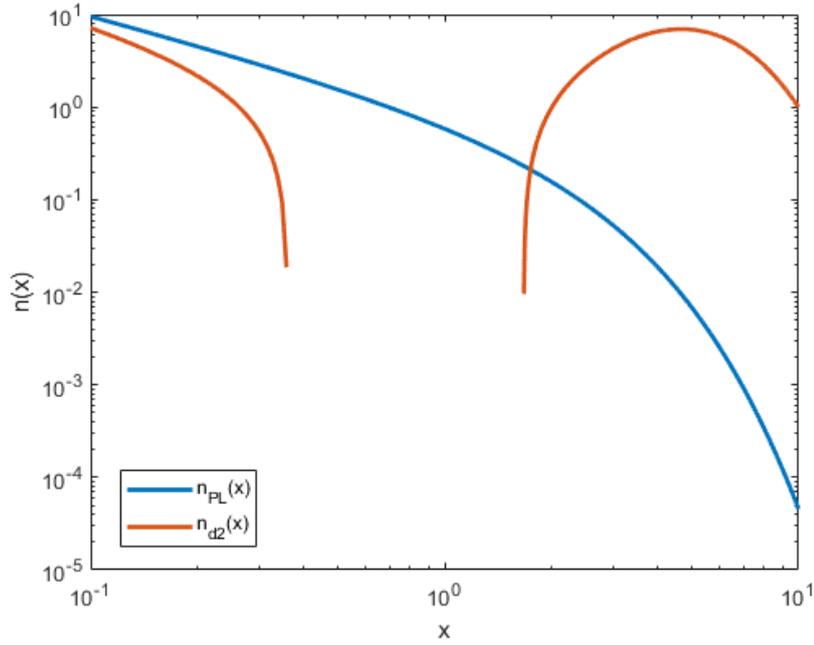


Figura 6.43. La legge di Planck (5.1) (in blu) e lo sviluppo della variazione  $n_{d2}$  (6.11) (in rosso) con  $\Delta T = -0.85$ ,  $T = 2.725$  e  $\gamma = 0.5$

x	$x^3 n_{PL}$	$x^3 n_{d2}$	$x^3  n_{PL} - n_{d2} $
x = 0.1	0.0095	0.0095	0
x = 0.5559	0.2310	0.2692	0.0382
x = 1	0.5820	1.7896	1.2076
x = 2.8153	1.4214	318.2823	316.8608
x = 7.3541	0.2547	4.3496e+03	4.3494e+03
x = 10	0.0454	2.9062e+03	2.9062e+03

Confrontati con il caso classico che non trascura i termini lineari (6.11), si hanno delle differenze minori, infatti nel caso citato la massima differenza tra le due funzioni era data da  $4.4048e + 03$ , mentre in questo caso è  $4.3494e + 03$ .

Sia data la scelta dei parametri  $\Delta T = 0.85$  e  $\gamma = 0.5$ , rappresentata in figura 6.51.

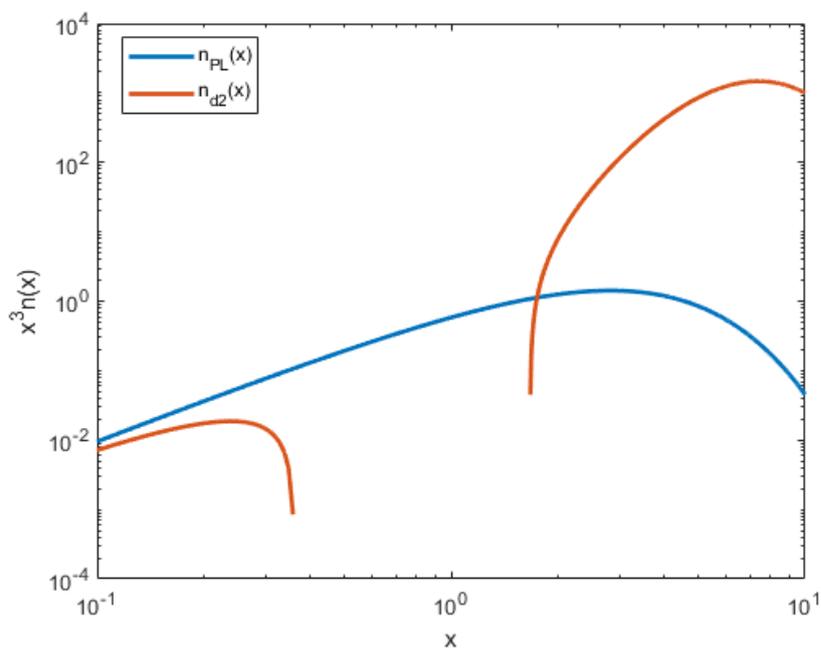


Figura 6.44.  $x^3 n(x)$  della legge di Planck (5.1) (in blu) e dello sviluppo della variazione  $n_{d2}$  (6.11) (in rosso) con  $\Delta T = -0.85$ ,  $T = 2.725$  e  $\gamma = 0.5$

$x$	$n_{PL}$	$n_{d2}$	$ n_{PL} - n_{d2} $
$x = 0.1$	9.5083	9.5088	4.6090e-04
$x = 0.7$	0.9864	1.1371	0.1507
$x = 0.9423$	0.6386	0.9921	0.3525
$x = 1$	0.5820	0.998	0.4178
$x = 4.4820$	0.0115	7.465	7.4536
$x = 10$	4.5402e-05	1.0056	1.0056

Anche in questo caso si ha una piccola differenza con  $n_{PL}(x)$  per  $x = 0.1$ , per  $x = 0.7$  le due funzioni iniziano a discostarsi e  $n_{d2}(x)$  raggiunge il minimo per  $x = 0.9423$ , poi cresce fino a raggiungere il massimo a circa  $x = 4.4820$ . Le differenze sono minori rispetto il caso  $\gamma = 0.5$ .

Rappresentiamo  $x^3 n(x)$  (figura 6.52).

$x$	$x^3 n_{PL}$	$x^3 n_{d2}$	$x^3  n_{PL} - n_{d2} $
$x = 0.1$	0.0095	0.0095	0
$x = 1$	0.5820	0.998	0.4178
$x = 2.8153$	1.4214	111.0619	109.6404
$x = 7.3541$	0.2547	1.5052e+03	1.5050e+03
$x = 10$	0.0454	1.0056e+03	1.0056e+03

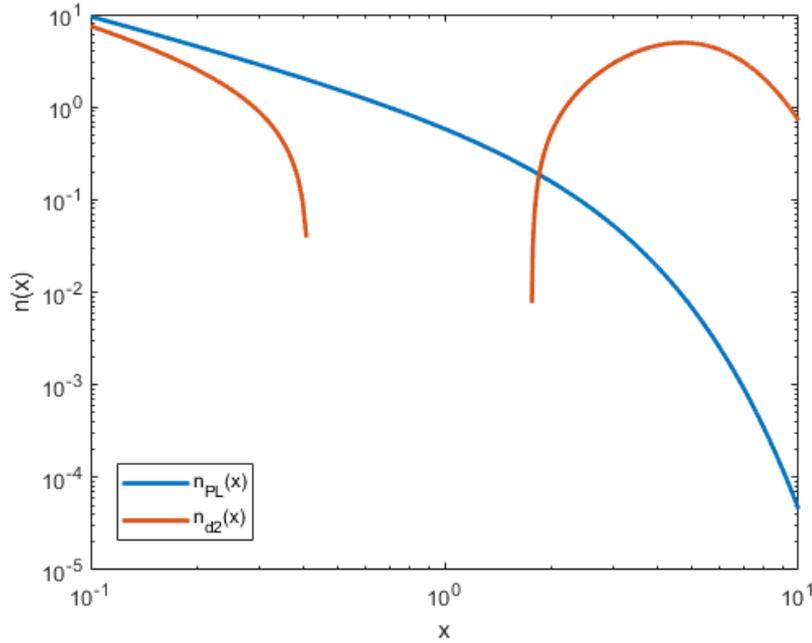


Figura 6.45. La legge di Planck (5.1) (in blu) e lo sviluppo della variazione  $n_{d2}$  (6.11) (in rosso) per  $T = 2.725$ ,  $\Delta T = -0.5$  e  $\gamma = 1$

Le differenze tra  $n_{PL}(x)$  e  $n_{d2}(x)$  sono minori rispetto al caso  $\gamma = 0.5$  e rispetto al caso classico.

Quindi aumentando  $\gamma$  ci si aspetta che le differenze diminuiscano sebbene la  $n_{d2}(x)$  resti sempre maggiore.

Incrementiamo il valore di  $\gamma$  fino  $\gamma = 1$  e rappresentiamo il caso in figura 6.53

x	$n_{PL}$	$n_{d2}$	$ n_{PL} - n_{d2} $
x = 0.1	9.5083	9.5087	3.33e-04
x = 1	0.5820	0.8839	0.3019
x = 1.0216	0.5625	0.8831	0.3205
x = 4.4703	0.0116	5.3966	5.3850
x = 10	4.5402e-05	0.7266	0.7265

Lo sviluppo  $n_{d2}(x)$  raggiunge il suo valore minimo in  $x = 1.0216$  e il suo massimo in  $x = 4.4703$ . Come previsto, le differenze con la legge di Planck sono diminuite.

Si consideri  $x^3 n(x)$  (figura 6.54). I dati della tabella che segue confermano che all'aumentare di  $\gamma$ ,  $x^3 n_{d2}(x)$  assume valori minori.

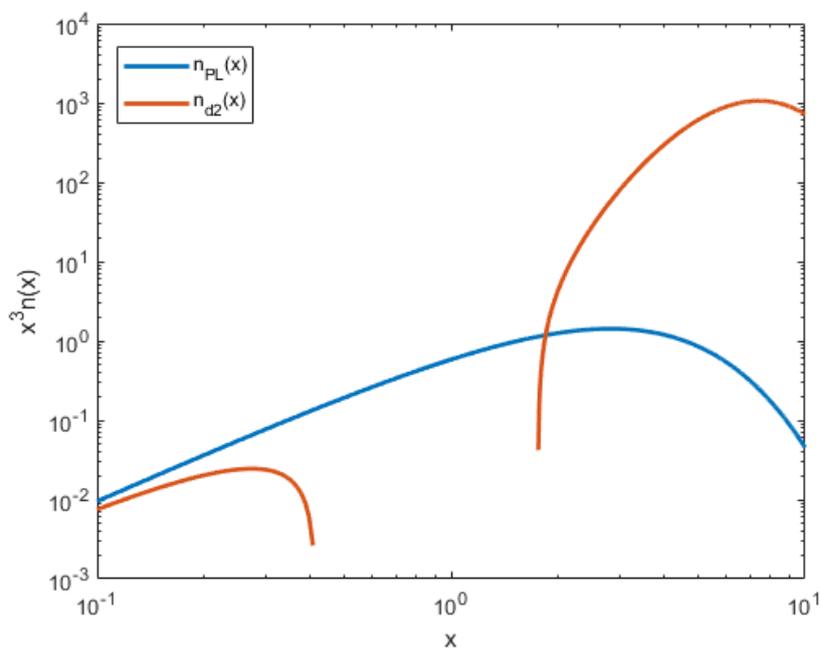


Figura 6.46.  $x^3 n(x)$  della legge di Planck (5.1) (in blu) e dello sviluppo della variazione  $n_{d2}$  (6.11) (in rosso) per  $T = 2.725$ ,  $\Delta T = -0.5$  e  $\gamma = 1$

x	$x^3 n_{PL}$	$x^3 n_{d2}$	$x^3  n_{PL} - n_{d2} $
x = 0.1	0.0095	0.0095	0
x = 1	0.5820	0.8839	0.3019
x = 2.8153	1.4214	80.6366	79.2152
x = 7.3541	0.2547	1.0876e+03	1.0873e+03
x = 10	0.0454	726.5927	726.5473

Riportiamo anche il caso  $\gamma = 1.5$  (figura 6.55) che conferma che lo sviluppo  $n_{d2}(x)$  ha lo stesso andamento ma con differenze minori.

x	$n_{PL}$	$n_{d2}$	$ n_{PL} - n_{d2} $
x = 0.1	9.5083	9.5085	1.4800e-04
x = 1	0.5820	0.7162	0.1342
x = 4.4802	0.0115	2.4049	2.3934
x = 10	4.5402e-05	0.3230	0.3229

Lo stesso si conferma per  $x^3 n(x)$  (figura 6.56).

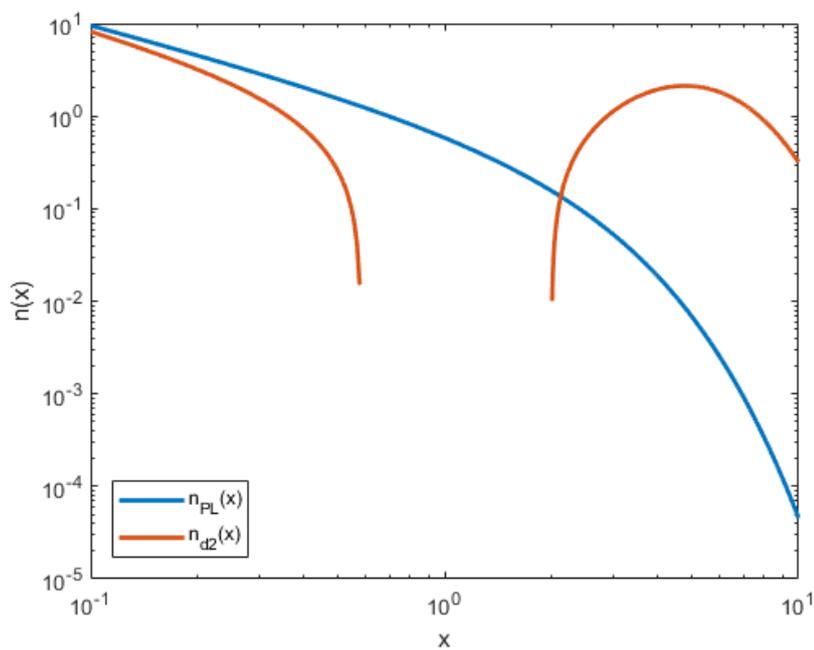


Figura 6.47. La legge di Planck (5.1) (in blu) e lo sviluppo della variazione  $n_{d2}$  (6.11) (in rosso) per  $T = 2.725$ ,  $\Delta T = -0.5$  e  $\gamma = 1.5$

$x$	$x^3 n_{PL}$	$x^3 n_{d2}$	$x^3  n_{PL} - n_{d2} $
$x = 0.1$	0.0095	0.0095	0
$x = 1$	0.5820	0.7162	0.1342
$x = 2.8153$	1.4214	36.6282	35.2068
$x = 7.3541$	0.2547	483.5198	483.2651
$x = 10$	0.0454	1.0056e+03	1.0056e+03

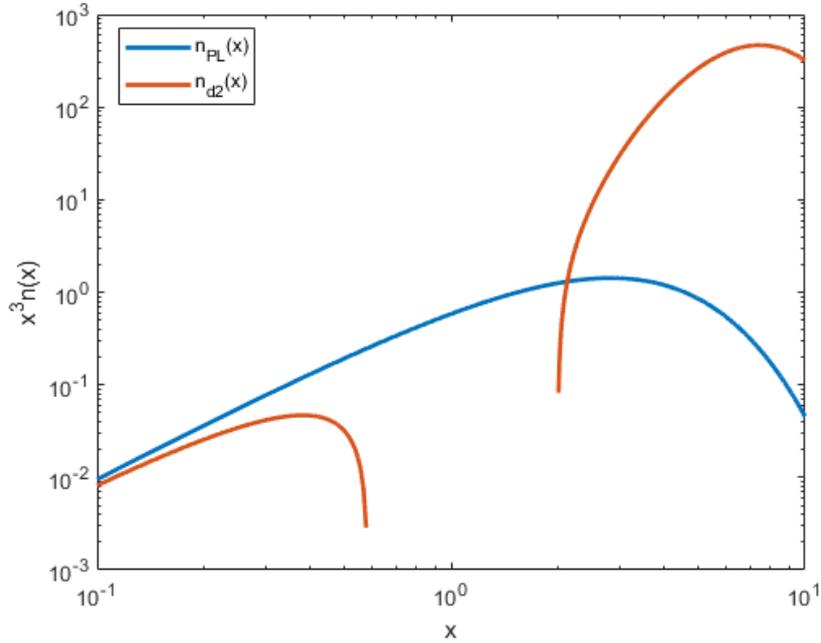


Figura 6.48.  $x^3 n(x)$  della legge di Planck (5.1) (in blu) e dello sviluppo della variazione  $n_{d2}$  (6.11) (in rosso) per  $T = 2.725$ ,  $\Delta T = -0.5$  e  $\gamma = 1.5$

### 6.3 Sviluppo $n_{d3}$

Si consideri la variazione  $n_{d3}(T)$

$$n_{d3}(T) = n_{PL}\left(\frac{\nu T}{\nu + \gamma \Delta T}\right) = \frac{1}{e^{\frac{\nu}{T} + \gamma \frac{\Delta T}{T}} - 1} = \quad (6.14)$$

$$= n_{PL}(x) + \frac{x e^x}{(e^x - 1)^2} \left( -\frac{\gamma \Delta T}{\nu + \gamma \Delta T} + \left( -\frac{\gamma \Delta T}{\nu + \gamma \Delta T} \right)^2 \right) + \frac{1}{2} \left( -\frac{\gamma \Delta T}{\nu + \gamma \Delta T} \right)^2 Y(x), \quad (6.15)$$

che equivale ad aumentare di  $\gamma \frac{\Delta T}{T}$  l'argomento dell'esponenziale. Si dovrebbero avere dunque  $n_{d3}(x) < n_{PL}(x)$ .

Consideriamo  $\gamma = 0.5$  e  $\Delta T = 0.5$  e rappresentiamo, in figura 6.57, la legge di Planck messa a confronto con la variazione.

Si nota che per  $x = 0.1$  c'è una differenza di 4.7788 tra le due funzioni che però va ad annullarsi per  $x \rightarrow 10$ . Di seguito sono riportati i valori:

x	$n_{PL}$	$n_{d3}$	$ n_{PL} - n_{d3} $
x = 0.1	9.5083	4.7295	4.7788
x = 1	0.5820	0.5051	0.0768
x = 10	4.5402e-05	4.1424e-05	3.9777e-06

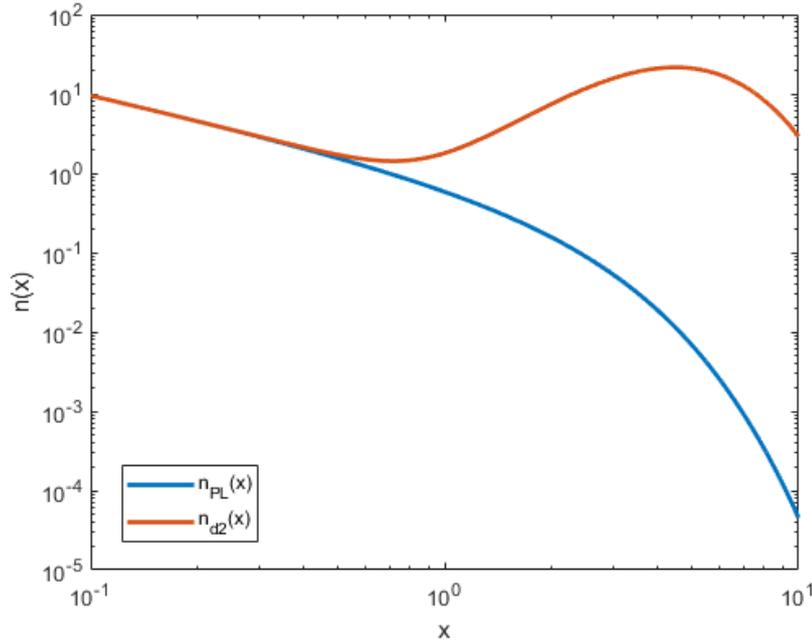


Figura 6.49. La legge di Planck (5.1) (in blu) e lo sviluppo della variazione  $n_{d2}$  (6.11) (in rosso) con soli termini quadratici per  $T = 2.725$ ,  $\Delta T = 0.5$  e  $\gamma = 0.5$

Se si considera il grafico di  $x^3 n_{d3}(x)$  (figura 6.58) si può notare che anche in questo caso la variazione è minore rispetto la legge di Planck. I valori sono:

x	$x^3 n_{PL}$	$x^3 n_{d3}$	$x^3  n_{PL} - n_{d3} $
x = 0.1	0.0095	0.0047	0.0048
x = 1	0.5820	0.5051	0.0768
x = 2.8153	1.4214	1.2896	0.1318
x = 2.8450	1.4213	1.2897	0.1316
x = 10	0.0454	0.0414	0.004

Le due funzioni hanno una differenza iniziale di 0.0048 in  $x = 0.1$ , in seguito la variazione  $n_{d3}$  raggiunge il suo massimo in  $x = 2.84505$ , mentre a  $x = 2.6072$  si ha il massimo della differenza tra le due, di circa 0.1326.

Consideriamo adesso  $\gamma = 1$ . Aumentando il valore di  $\gamma$  si ipotizza che aumenti la differenza tra le due funzioni. Le funzioni sono rappresentate in figura 6.59 i valori riportati nella tabella che segue:

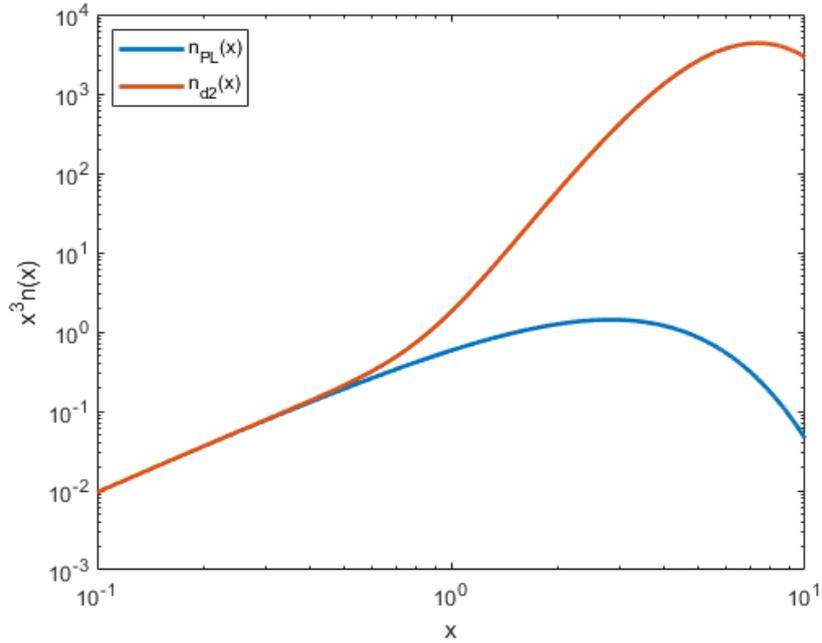


Figura 6.50.  $x^3 n(x)$  della legge di Planck (5.1) (in blu) e dello sviluppo della variazione  $n_{d2}$  (6.11) (in rosso) con soli termini quadratici per  $T = 2.725$ ,  $\Delta T = 0.5$  e  $\gamma = 0.5$

x	$n_{PL}$	$n_{d3}$	$ n_{PL} - n_{d3} $
x = 0.1	9.5083	3.0447	6.4636
x = 1	0.5820	0.4411	0.1409
x = 10	4.5402e-05	3.7811e-05	7.5912e-06

Se confrontati con il caso precedente, si può vedere come la differenza sia maggiore, a conferma di quanto ipotizzato. Si ha lo stesso per il caso  $x^3 n(x)$  (figura 6.60):

x	$x^3 n_{PL}$	$x^3 n_{d3}$	$x^3  n_{PL} - n_{d3} $
x = 0.1	0.0095	0.0030	0.0065
x = 1	0.5820	0.4411	0.1409
x = 2.8153	1.4214	1.1703	0.2511
x = 2.8550	1.4214	1.1707	0.2505
x = 10	0.0454	0.0378	0.0076

Rispetto al caso precedente, nonostante sia in generale diminuito il valore di  $n_{d3}(x)$  e quindi aumentata la differenza tra le due funzioni, l'andamento di  $x^3 n_{d3}(x)$  resta lo stesso e raggiunge il massimo sempre a  $x = 2.8550$ . La differenza raggiunge il massimo sempre a  $x = 2.6270$ .

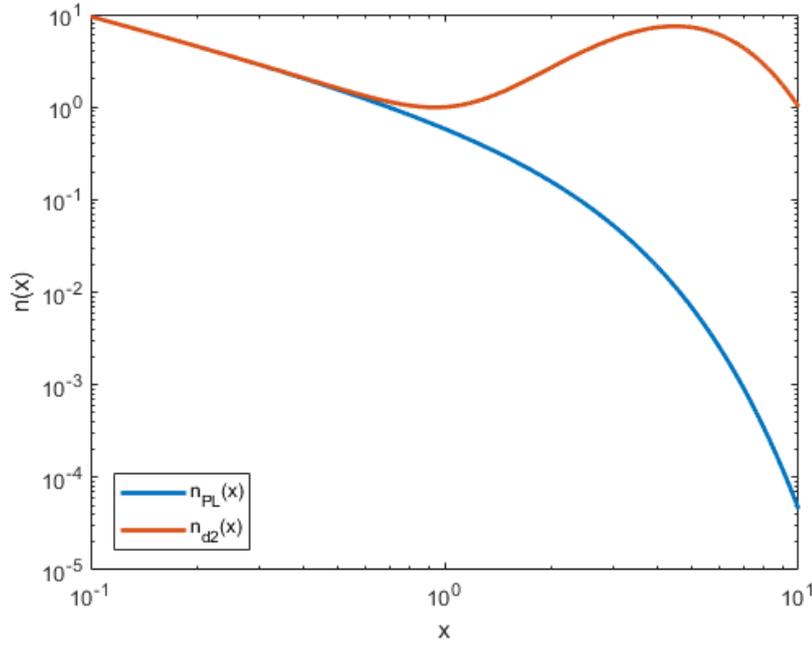


Figura 6.51. La legge di Planck (5.1) (in blu) e lo sviluppo della variazione  $n_{d2}$  (6.11) (in rosso) con soli termini quadratici per  $T = 2.725$ ,  $\Delta T = 0.85$  e  $\gamma = 0.5$

Sono riportati adesso i valori per  $\gamma = 1.5$  (fig. 6.61):

x	$n_{PL}$	$n_{d3}$	$ n_{PL} - n_{d3} $
x = 0.1	9.5083	2.1840	7.3244
x = 1	0.5820	0.3868	0.1952
x = 10	4.5402e-05	3.4543e-05	1.0859e-05

I valori della variazione  $n_{d3}$  sono diminuiti ancora, confermando ancora l'ipotesi.

Per  $x^3 n(x)$  (fig. 6.62) si ha:

x	$x^3 n_{PL}$	$x^3 n_{d3}$	$x^3  n_{PL} - n_{d3} $
x = 0.1	0.0095	0.0022	0.0073
x = 1	0.5820	0.3868	0.1952
x = 2.8153	1.4214	1.0622	0.3593
x = 2.8748	1.4208	1.0627	0.3581
x = 10	0.0454	0.0345	0.0109

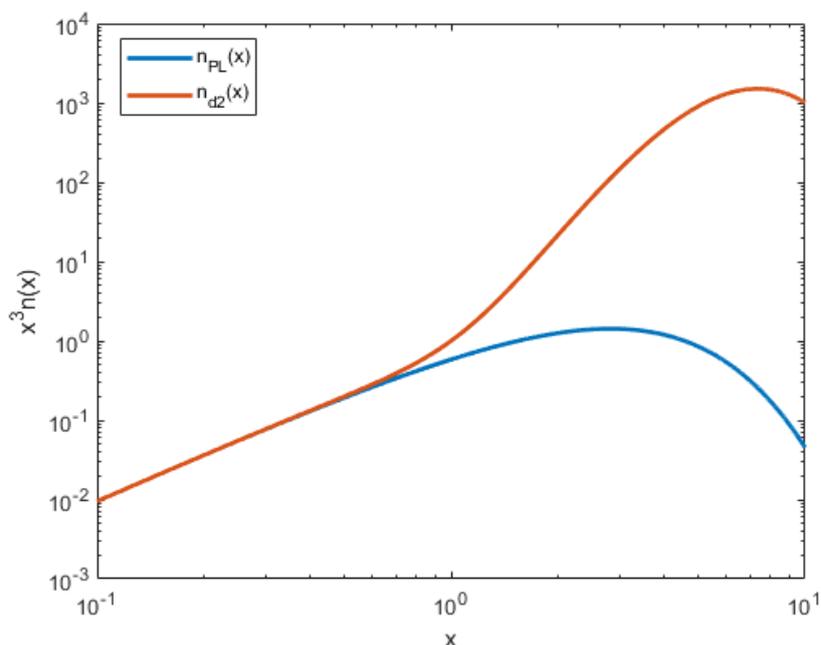


Figura 6.52.  $x^3 n(x)$  della legge di Planck (5.1) (in blu) e dello sviluppo della variazione  $n_{d2}$  (6.11) (in rosso) con soli termini quadratici per  $T = 2.725$ ,  $\Delta T = 0.85$  e  $\gamma = 0.5$

In questo caso, il massimo di  $x^3 n_{d3}(x)$  e il massimo della differenza tra le due funzioni si raggiungono rispettivamente a  $x = 2.88468$  e  $x = 2.6468$ .

Anche per quanto riguarda questa variazione  $n_{d3}(x)$ , i parametri  $\gamma$  e  $\Delta T$  sono legati tramite prodotto, perciò aumentare l'uno o l'altro non fa differenza. Si riportano dunque i valori per la scelta di parametri  $\gamma = 0.5$  e  $\Delta T = 0.85$  (fig. 6.63).

x	$n_{PL}$	$n_{d3}$	$ n_{PL} - n_{d3} $
x = 0.1	9.5083	3.4233	6.0850
x = 1	0.5820	0.4591	0.1228
x = 10	4.5402e-05	3.8858e-05	6.5443e-06

Confrontando i valori in tabella, si può verificare che questo caso è intermedio con il caso  $\gamma = 0.5$  e  $\gamma = 1$ . Vale lo stesso per  $x^3 n(x)$  (fig. 6.64).

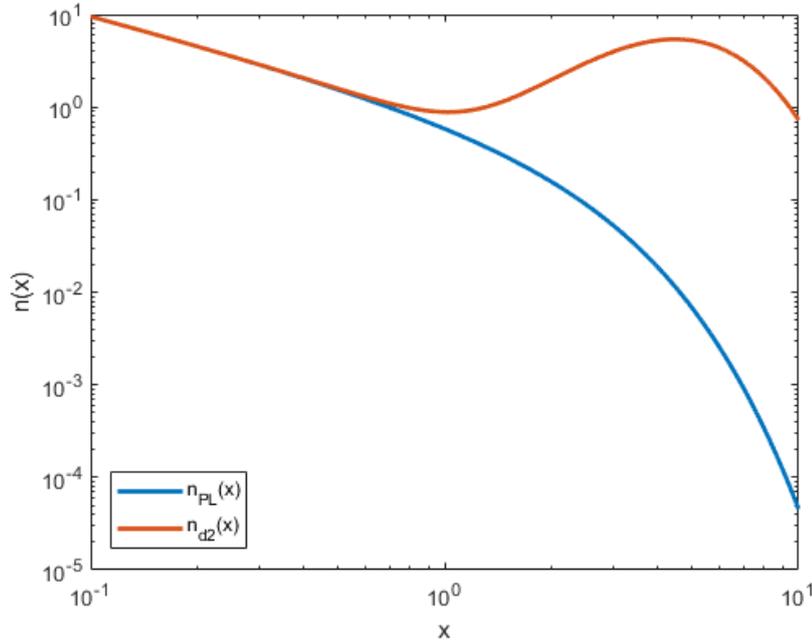


Figura 6.53. La legge di Planck (5.1) (in blu) e lo sviluppo della variazione  $n_{d2}$  (6.11) (in rosso) con soli termini quadratici per  $T = 2.725$ ,  $\Delta T = 0.5$  e  $\gamma = 1$

$x$	$x^3 n_{PL}$	$x^3 n_{d3}$	$x^3  n_{PL} - n_{d3} $
$x = 0.1$	0.0095	0.0034	0.0061
$x = 1$	0.5820	0.4591	0.1228
$x = 2.8153$	1.4214	1.2049	0.2166
$x = 2.8550$	1.4212	1.2051	0.2161
$x = 10$	0.0454	0.0389	0.0065

### 6.3.1 Delta negativo

Se si considerano valori negativi per  $\Delta T$ , il rischio è quello di avere un valor critico per  $x$  che annulli il denominatore. Tale valore è dato da:

$$x_c T + \gamma \Delta T = 0$$

$$x_c = -\gamma \frac{\Delta T}{T}.$$

Come primo caso siano dati  $\Delta T = -0.5$  e  $\gamma = 0.5$ . Il valore critico della  $x$  è dato da  $x_c = 0.0917$ , ma poiché l'intervallo di interesse è  $x \in (0.1, 10)$ , questo non causa nessun problema. Il risultato che si ottiene è che, per le stesse ascisse, adesso la variazione ha ordinate maggiori rispetto la legge di Planck, come rappresentato in figura 6.65.

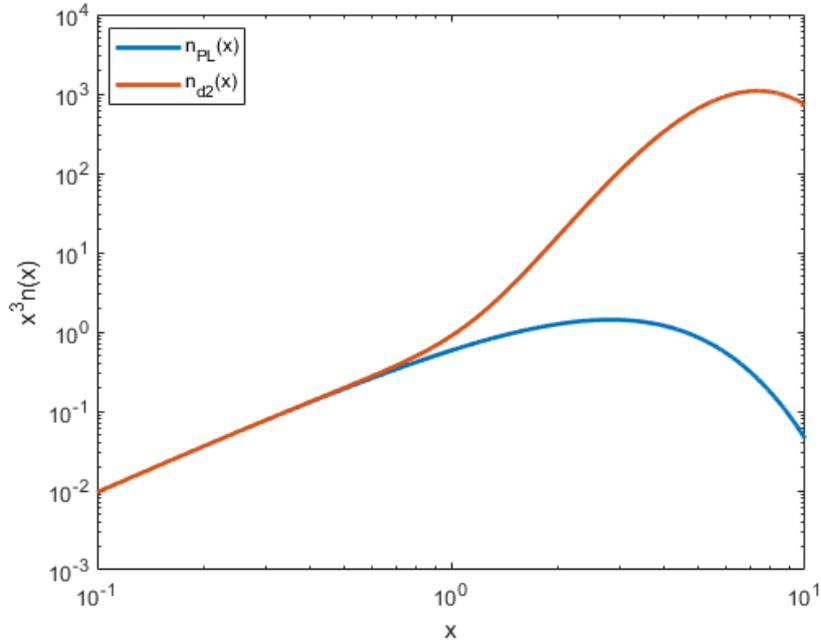


Figura 6.54.  $x^3 n(x)$  della legge di Planck (5.1) (in blu) e dello sviluppo della variazione  $n_{d2}$  (6.11) (in rosso) con soli termini quadratici per  $T = 2.725$ ,  $\Delta T = 0.5$  e  $\gamma = 1$

x	$n_{PL}$	$n_{d3}$	$ n_{PL} - n_{d3} $
x = 0.1	9.5083	121.5547	112.0463
x = 1	0.5820	0.4591	0.1228
x = 10	4.5402e-05	3.8858e-05	6.5443e-06

A  $x = 0.1$  si ha una grande differenza tra le due funzioni e  $n_{d3}(x)$  ha anche un flesso differente rispetto gli altri casi. Come si è detto, a  $x_C = 0.09$  è il valore critico per cui  $n_{d3}$  presenta una singolarità, quindi si può ipotizzare che questa differenza sia dovuta alla decrescita esponenziale in seguito all'asintoto per  $x \rightarrow x_c^+$ .

In figura 6.66, sono rappresentate le funzioni per  $x^3 n(x)$ .

x	$x^3 n_{PL}$	$x^3 n_{d3}$	$x^3  n_{PL} - n_{d3} $
x = 0.1	0.0095	0.1216	0.1120
x = 1	0.5820	0.6757	0.0938
x = 2.7955	1.4213	1.5677	0.1464
x = 2.8153	1.4214	1.5676	0.1462
x = 10	0.0454	0.0498	0.0044

Rispetto al caso con  $\Delta T > 0$ , si ha un comportamento differente per  $x \rightarrow 0.1^+$ . Infatti in questo caso, la funzione  $x^3 n(x)$  inizialmente decresce, raggiunge un minimo in  $x = 0.1396$ ,

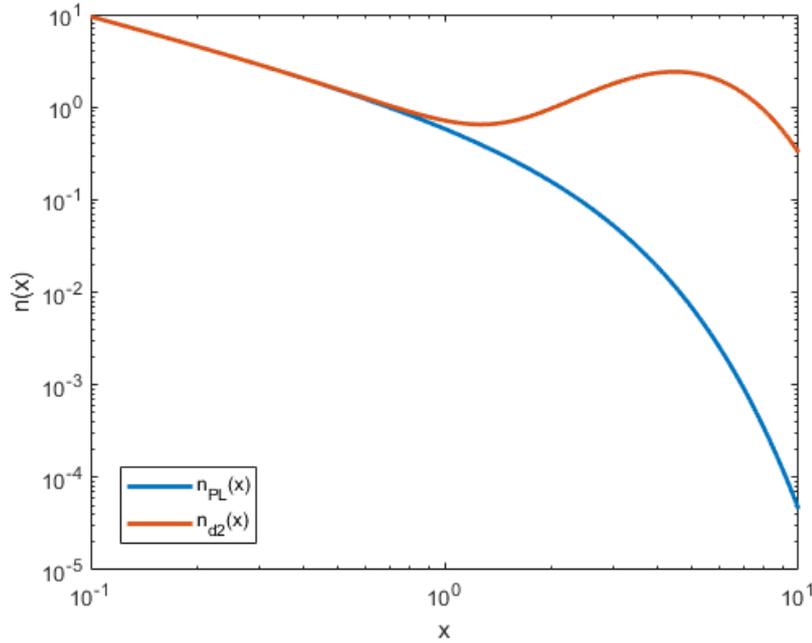


Figura 6.55. La legge di Planck (5.1) (in blu) e lo sviluppo della variazione  $n_{d2}$  (6.11) con soli termini quadratici per  $T = 2.725$ ,  $\Delta T = 0.5$  e  $\gamma = 1.5$

dopo ricesce e ha un comportamento molto simile a  $x^3 n_{PL}$ , raggiungendo un massimo in  $x = 2.7955$ .

Aumentiamo il parametro  $\gamma = 1$  e rappresentiamo il caso in figura 6.67. Per questo valore di gamma, il caso critico si ha in  $x_C = 0.1835$ , quindi nell'intervallo considerato.

$x$	$n_{PL}$	$n_{d3}$	$ n_{PL} - n_{d3} $
$x = 0.1892$	4.8012	190.2277	185.4265
$x = 1$	0.5820	0.7927	0.2107
$x = 10$	4.5402e-05	5.4523e-05	9.1213e-06

Per  $x \rightarrow x_C^+$ , come ipotizzato prima, c'è una decrescita esponenziale ed infatti in questi punti la differenza con la legge di Planck è alta. In seguito però, le due funzioni hanno comportamento simile, con la differenza che si annulla per  $x \rightarrow 10$ .

Per  $x^3 n(x)$ , raffigurato in figura 6.68, come in precedenza, si nota che  $x^3 n_{d3}(x)$  decresce per un intervallo successivo  $x_C$  raggiunge un minimo in  $x = 0.2783$ , in seguito ricesce e raggiunge il suo massimo in  $x = 2.7757$ , con un comportamento simile a quello della

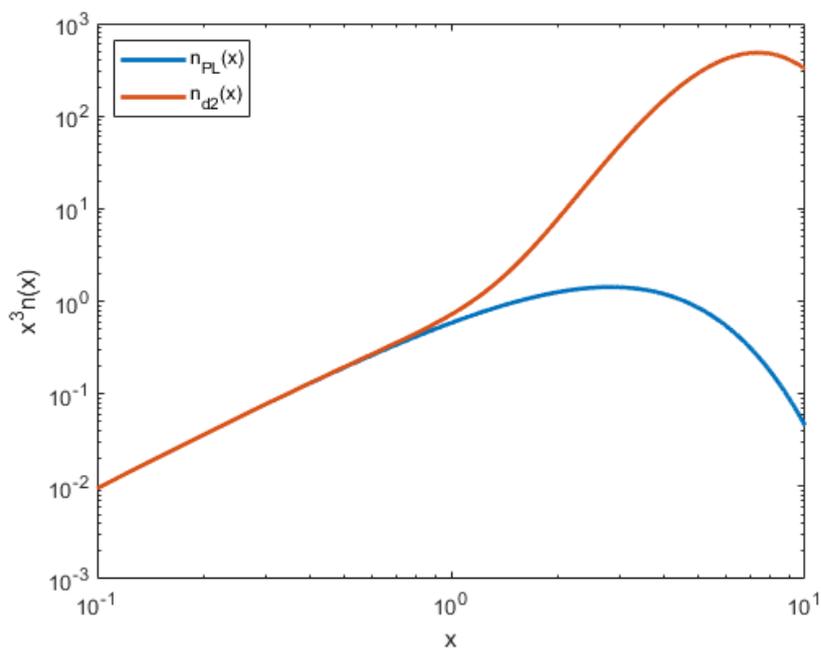


Figura 6.56.  $x^3 n(x)$  della legge di Planck (5.1) (in blu) e dello sviluppo della variazione  $n_{d2}$  (6.11) (in rosso) con soli termini quadratici per  $T = 2.725$ ,  $\Delta T = 0.5$  e  $\gamma = 1.5$

legge di Planck.

x	$x^3 n_{PL}$	$x^3 n_{d3}$	$x^3  n_{PL} - n_{d3} $
x = 0.1892	0.0325	1.2884	1.2558
x = 1	0.5820	0.7927	0.2107
x = 2.77575	1.4210	1.7308	0.3098
x = 2.8153	1.4214	1.7303	0.3089
x = 10	0.0454	0.0545	0.0091

Si aumenti ulteriormente il parametro  $\gamma$  ( $\gamma = 1.5$ ), con un valore critico  $x_C = 0.2752$  (fig. 6.69).

x	$n_{PL}$	$n_{d3}$	$ n_{PL} - n_{d3} $
x = 0.2784	3.1151	486.3786	483.2635
x = 1	0.5820	0.9425	0.3605
x = 10	4.5402e-05	5.9707e-05	1.4305e-05

Anche qui, dopo una decrescita esponenziale, la funzione  $n_{d3}$  ha lo stesso comportamento di  $n_{PL}(x)$ .

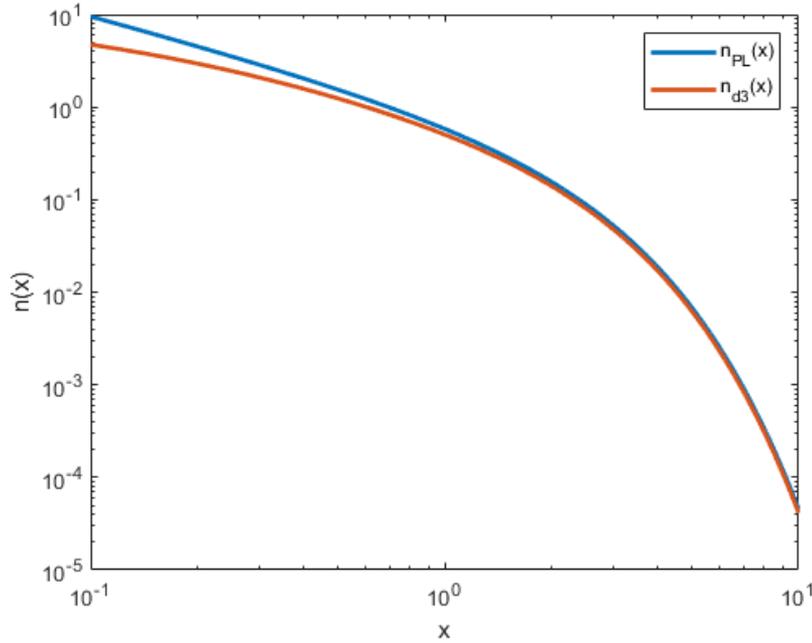


Figura 6.57. La legge di Planck (5.1) (in blu) e la variazione  $n_{d3}$  (6.15) (in rosso) per  $T = 2.725$ ,  $\Delta T = 0.5$  e  $\gamma = 0.5$

Anche per  $x^3 n(x)$  (fig. 6.70) si conferma il comportamento per  $\Delta T < 0$ , con una decrescita esponenziale da  $x_C$  fino al minimo in  $x = 0.4369$  e successivamente la variazione raggiunge il massimo in  $x = 2.7558$ .

$x$	$x^3 n_{PL}$	$x^3 n_{d3}$	$x^3  n_{PL} - n_{d3} $
$x = 0.2784$	0.0672	10.4950	10.4278
$x = 1$	0.5820	0.9425	0.3605
$x = 2.7360$	1.4198	1.9134	0.4936
$x = 2.8153$	1.4214	1.9120	0.4906
$x = 10$	0.0454	0.0597	0.0143

Si consideri infine il valore di  $\Delta T = -0.85$  con  $\gamma = 0.5$  (fig. 6.71), allora  $x_C = 0.1560$  (valore compreso tra i casi  $\gamma = 0.5$  e  $\gamma = 1$ ,  $0.0917 < x_C = 0.1560 < 0.1835$ ). Il comportamento della funzione è lo stesso visto per gli altri valori di  $\gamma$ , con una decrescita esponenziale e la differenza con la legge di Planck si annulla per  $x \rightarrow 10$ .

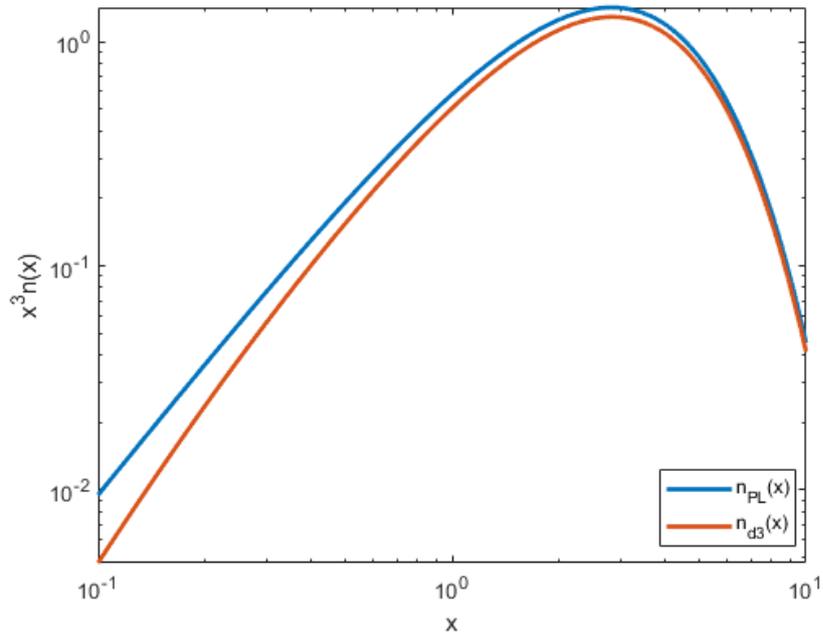


Figura 6.58.  $x^3 n(x)$  della legge di Planck (5.1) (in blu) e dello sviluppo della variazione  $n_{d3}$  (6.15) (in rosso) per  $T = 2.725$ ,  $\Delta T = 0.5$  e  $\gamma = 0.5$

x	$n_{PL}$	$n_{d3}$	$ n_{PL} - n_{d3} $
x = 0.1595	5.7829	307.4600	301.6771
x = 1	0.5820	0.7547	0.1727
x = 10	4.5402e-05	5.3051e-05	7.6495e-06

Anche  $x^3 n(x)$  (fig. 6.72) ha valori compresi tra il caso  $\gamma = 0.5$  e  $\gamma = 1$ .

x	$x^3 n_{PL}$	$x^3 n_{d3}$	$x^3  n_{PL} - n_{d3} $
x = 0.1595	0.0235	1.2476	1.2241
x = 1	0.5820	0.7547	0.1727
x = 2.7856	1.4212	1.6799	0.2588
x = 2.8153	1.4214	1.6797	0.2582
x = 10	0.0454	0.0531	0.0076

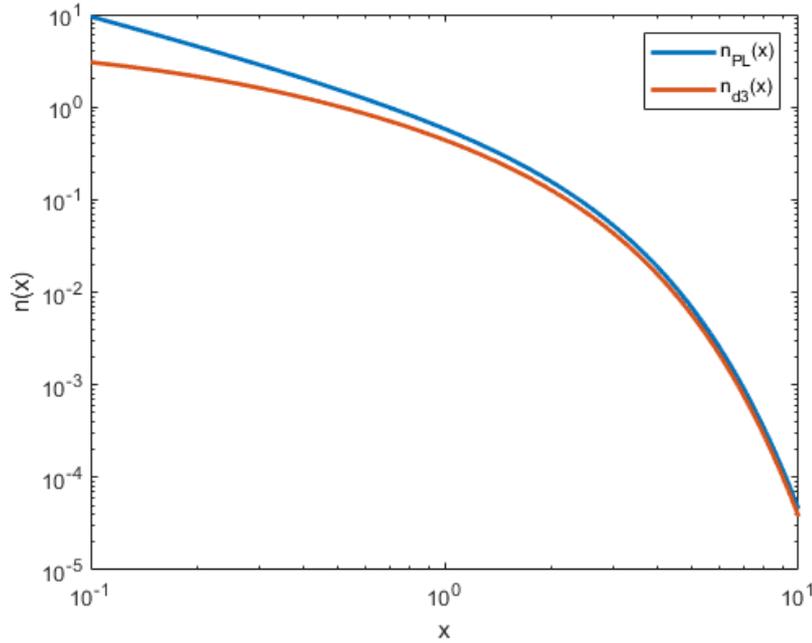


Figura 6.59. La legge di Planck (5.1) (in blu) e lo sviluppo della variazione  $n_{d3}$  (6.15) (in rosso) per  $T = 2.725$ ,  $\Delta T = 0.5$  e  $\gamma = 1$

### 6.3.2 Cambio segno termini lineari

Si consideri lo sviluppo  $n_{d3}$  con i termini lineari cambiati di segno. Si ha dunque:

$$n_{d3}(T) = n_{PL}(x) + \frac{xe^x}{(e^x - 1)^2} \left( \frac{\gamma\Delta T}{\nu + \gamma\Delta T} + \left( -\frac{\gamma\Delta T}{\nu + \gamma\Delta T} \right)^2 \right) + \frac{1}{2} \left( -\frac{\gamma\Delta T}{\nu + \gamma\Delta T} \right)^2 Y(x), \quad (6.16)$$

Il risultato che si ha è ovviamente che, per le stesse ascisse e per  $\Delta T > 0$ , adesso la variazione  $n_{d3}(x)$  ha ordinate maggiori rispetto la legge di Planck, come rappresentato in figura 6.73.

x	$n_{PL}$	$n_{d3}$	$ n_{PL} - n_{d3} $
x = 0.1	9.5083	14.2909	4.7826
x = 1	0.5820	0.6599	0.0779
x = 10	4.5402e-05	4.9680e-05	4.2778e-06

Come previsto, i valori in tabella confermano che con il cambio di segno dei termini lineari, lo sviluppo  $n_{d3}$  migliora la legge di Planck: si osserva una differenza di 4.7826 per  $x = 0.1$  che va ad annullarsi per  $x \rightarrow 10$ .

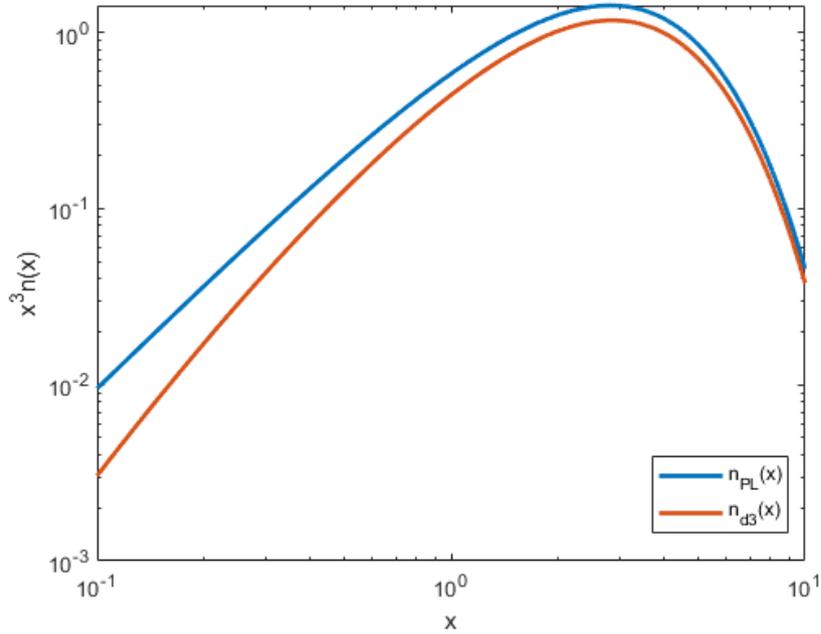


Figura 6.60.  $x^3 n(x)$  della legge di Planck (5.1) (in blu) e dello sviluppo della variazione  $n_{d3}$  (6.15) (in rosso) per  $T = 2.725$ ,  $\Delta T = 0.5$  e  $\gamma = 1$

Per  $x^3 n(x)$ , rappresentato in figura 6.74, il comportamento dello sviluppo è molto simile a quello di  $x^3 n_{PL}$ , ma con valori maggiori.

x	$x^3 n_{PL}$	$x^3 n_{d3}$	$x^3  n_{PL} - n_{d3} $
x = 0.1	0.0095	0.0143	0.0048
x = 1	0.5820	0.6599	0.0779
x = 2.8153	1.4214	1.5583	0.1389
x = 10	0.0454	0.0497	0.0043

In questo caso, lo sviluppo raggiunge il suo massimo in  $x = 2.8054$ , quindi molto in prossimità del punto in cui raggiunge il massimo la legge di Planck.

Aumentiamo il valore del parametro di  $\gamma$ , passando a  $\gamma = 1$  (fig. 6.75).

x	$n_{PL}$	$n_{d3}$	$ n_{PL} - n_{d3} $
x = 0.1	9.5083	15.9784	6.4706
x = 1	0.5820	0.7265	0.1446
x = 10	4.5402e-05	5.4173e-05	8.7706e-06

I valori della variazione sono aumentati solo leggermente.

Anche per  $x^3 n(x)$ , raffigurato in fig. 6.76, si nota un leggero aumento, rispetto al caso con  $\gamma = 0.5$ , dei valori della funzione.

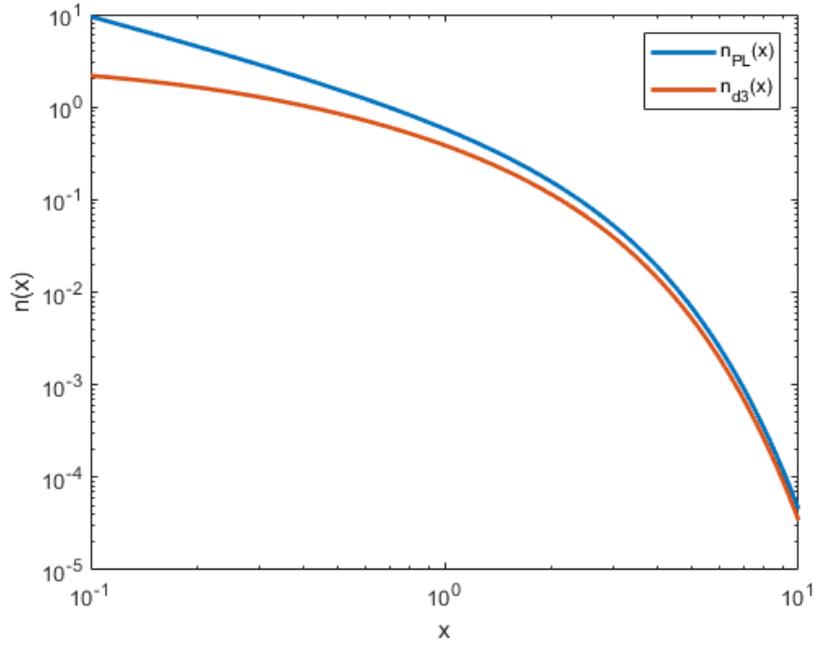


Figura 6.61. La legge di Planck (5.1) (in blu) e lo sviluppo della variazione  $n_{d3}$  (6.15) (in rosso) per  $T = 2.725$ ,  $\Delta T = 0.5$  e  $\gamma = 1.5$

x	$x^3 n_{PL}$	$x^3 n_{d3}$	$x^3  n_{PL} - n_{d3} $
x = 0.1	0.0095	0.0160	0.0065
x = 1	0.5820	0.7265	0.1446
x = 2.8153	1.4214	1.6912	0.2698
x = 10	0.0454	0.0542	0.0088

$x^3 n_{d3}$  raggiunge il suo massimo a  $x = 2.8054$ .

Anche con  $\gamma = 1.5$ , si ha un aumento per  $n_{d1}$ , come si può vedere dai valori in tabella e dalla figura 6.77.

x	$n_{PL}$	$n_{d3}$	$ n_{PL} - n_{d3} $
x = 0.1	9.5083	16.8417	7.333
x = 1	0.5820	0.7842	0.2022
x = 10	4.5402e-05	5.8847e-05	1.3465e-05

Lo stesso viene confermato per  $x^3 n(x)$  (fig. 6.78).

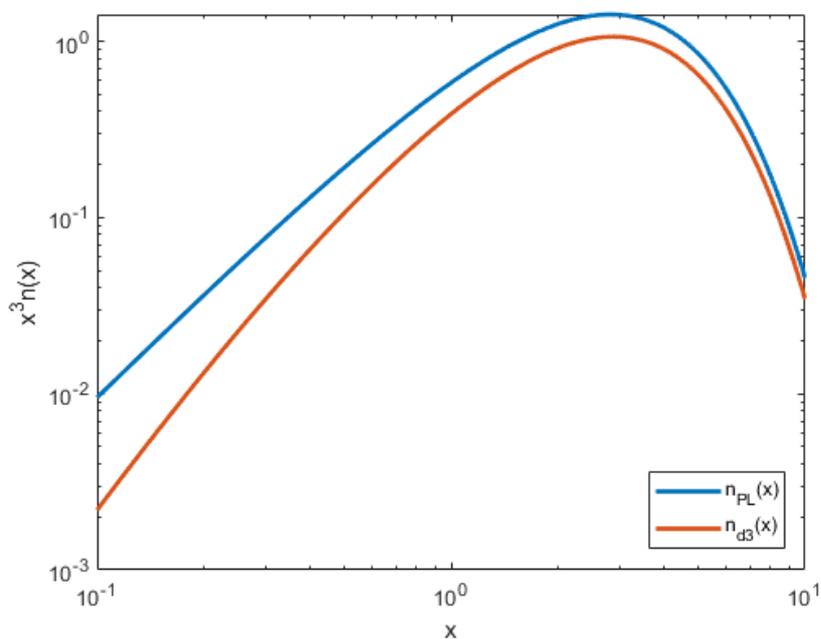


Figura 6.62.  $x^3 n(x)$  della legge di Planck (5.1) (in blu) e dello sviluppo della variazione  $n_{d3}$  (6.15) (in rosso) per  $T = 2.725$ ,  $\Delta T = 0.5$  e  $\gamma = 1.5$

x	$x^3 n_{PL}$	$x^3 n_{d3}$	$x^3  n_{PL} - n_{d3} $
x = 0.1	0.0095	0.0168	0.0073
x = 1	0.5820	0.7842	0.2022
x = 2.8153	1.4214	1.8203	0.3989
x = 10	0.0454	0.0589	0.0135

Come si è già dichiarato in precedenza, dato che  $\Delta T$  e  $\gamma$  sono legate da un prodotto, allora se consideriamo  $\Delta T = 0.85$  e  $\gamma = 0.5$  (fig. 6.79), si hanno dei valori intermedi tra il caso  $\gamma = 0.5$  e  $\gamma = 1$ .

x	$n_{PL}$	$n_{d3}$	$ n_{PL} - n_{d3} $
x = 0.1	9.5083	15.5995	6.0912
x = 1	0.5820	0.7076	0.1256
x = 10	4.5402e-05	5.2803e-05	7.4010e-06

Vale lo stesso anche per  $x^3 n(x)$ , in figura 6.80.

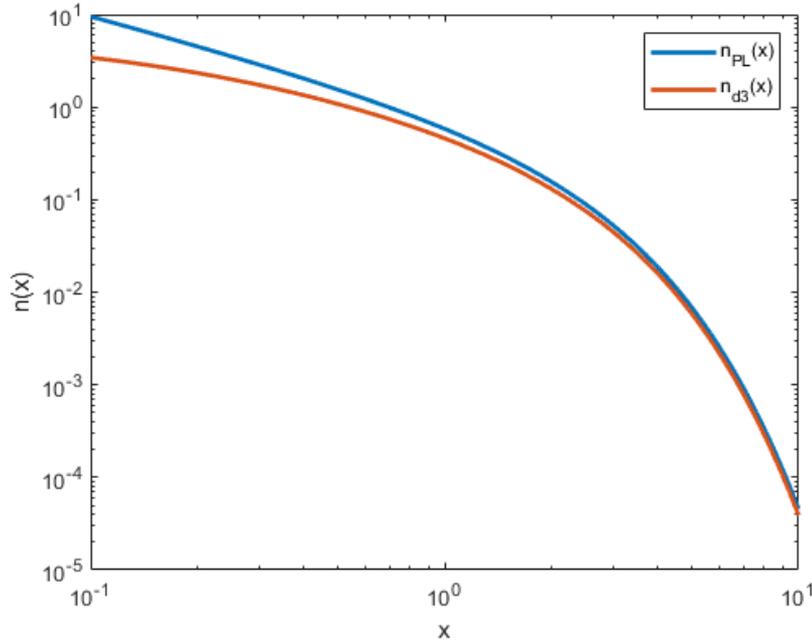


Figura 6.63. La legge di Planck (5.1) (in blu) e lo sviluppo della variazione  $n_{d3}$  (6.15) (in rosso) per  $T = 2.725$ ,  $\Delta T = 0.85$  e  $\gamma = 0.5$

x	$x^3 n_{PL}$	$x^3 n_{d3}$	$x^3  n_{PL} - n_{d3} $
x = 0.1	0.0095	0.0156	0.0061
x = 1	0.5820	0.7076	0.1256
x = 2.8153	1.4214	1.6517	0.2303
x = 10	0.0454	0.0528	0.0074

### 6.3.3 Termini quadratici

In quest'ultima parte si considerano solo i termini quadratici dello sviluppo, trascurando dunque i termini lineari di  $n_{d1}(x)$ .

$$n_{d3}(T) = n_{PL}(x) + \frac{x e^x}{(e^x - 1)^2} \left( -\frac{\gamma \Delta T}{\nu + \gamma \Delta T} \right)^2 + \frac{1}{2} \left( -\frac{\gamma \Delta T}{\nu + \gamma \Delta T} \right)^2 Y(x), \quad (6.17)$$

Il risultato che si prevede di ottenere è ovviamente che, per le stesse ascisse, adesso la variazione ha ordinate maggiori rispetto la legge di Planck, come rappresentato in figura 6.81.

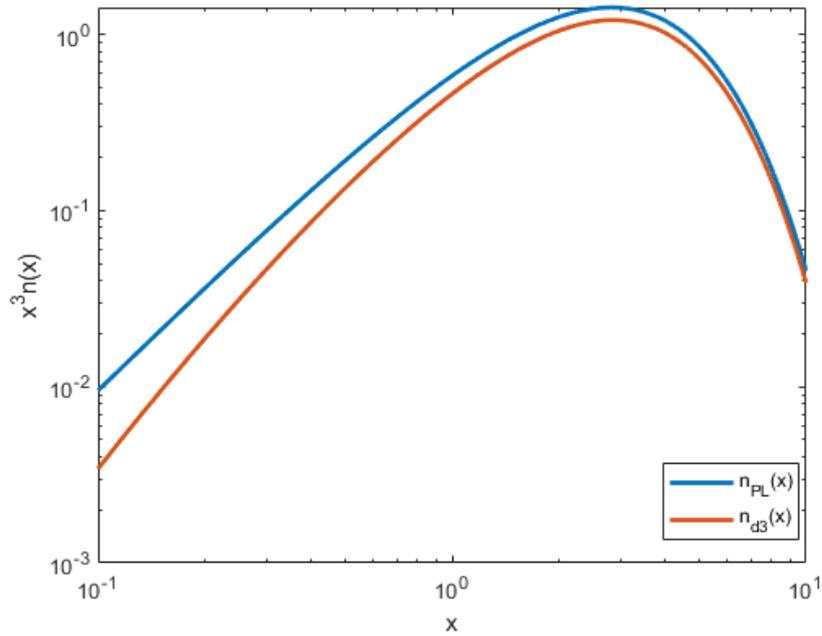


Figura 6.64.  $x^3 n(x)$  della legge di Planck (5.1) (in blu) e dello sviluppo della variazione  $n_{d3}$  (6.15) (in rosso) per  $T = 2.725$ ,  $\Delta T = 0.85$  e  $\gamma = 0.5$

x	$n_{PL}$	$n_{d3}$	$ n_{PL} - n_{d3} $
x = 0.1	9.5083	9.5102	0.0019
x = 1	0.5820	0.5825	5.3297e-04
x = 10	4.5402e-05	4.5552e-05	1.5011e-07

Sebbene  $n_{d3}$  sia maggiore, la differenza con la legge di Planck è molto piccola, soprattutto se comparata con il caso classico che non trascura i termini lineari. In quel caso infatti, in  $x = 0.1$  la differenza è di 4.7788, mentre nel caso in considerazione è di 0.0019.

Consideriamo  $x^3 n(x)$ , rappresentato in figura 6.82.

x	$x^3 n_{PL}$	$x^3 n_{d3}$	$x^3  n_{PL} - n_{d3} $
x = 0.1	0.0095	0.0095	0
x = 1	0.5820	0.5825	5.3297e-04
x = 2.8153	1.4214	1.4239	0.0025
x = 10	0.0454	0.0456	1.5011e-04

Anche se lo sviluppo è leggermente maggiore, anche in questo caso le differenze sono molto piccole, al punto che in  $x = 0.1$  è nulla. Il comportamento delle due funzioni è molto simile e lo sviluppo  $n_{d3}$  raggiunge il suo massimo in un punto molto vicino in cui

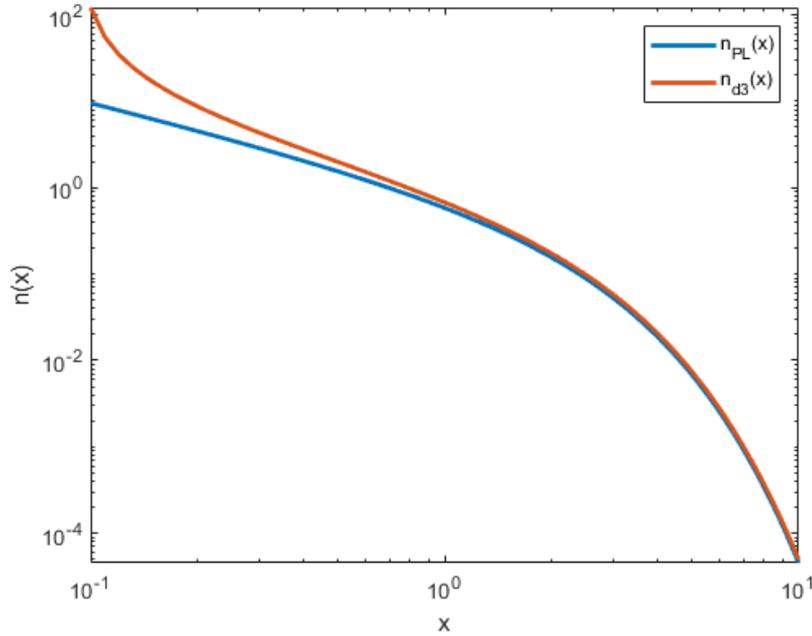


Figura 6.65. La legge di Planck (5.1) (in blu) e lo sviluppo della variazione  $n_{d3}$  (6.15) (in rosso) per  $T = 2.725$ ,  $\Delta T = -0.5$  e  $\gamma = 0.5$

raggiunge il massimo  $n_{PL}$  ( $x = 2.8252$ ).

Dati i parametri  $\Delta T = 0.85$  con  $\gamma = 0.5$ , la funzione  $n_{d3}$  risulta aumentata di poco ed infatti, dal punto di vista grafico, non si notano differenze.

x	$n_{PL}$	$n_{d3}$	$ n_{PL} - n_{d3} $
x = 0.1	9.5083	9.5114	0.0031
x = 1	0.5820	0.5834	0.0014
x = 10	4.5402e-05	4.5830e-05	4.2836e-07

Valo lo stesso per  $x^3 n_{d3}$

x	$x^3 n_{PL}$	$x^3 n_{d3}$	$x^e  n_{PL} - n_{d3} $
x = 0.1	0.0095	0.0095	0
x = 1	0.5820	0.5834	0.0014
x = 2.8153	1.4214	1.4283	0.0069
x = 10	0.0454	0.0458	4.2836e-04

Consideriamo direttamente il caso  $\gamma = 1.5$ . Anche per questo caso si ha un aumento dei valori di  $n_{d3}$ , ma non tale da notare una differenza dal grafico del caso con  $\gamma = 0.5$ .

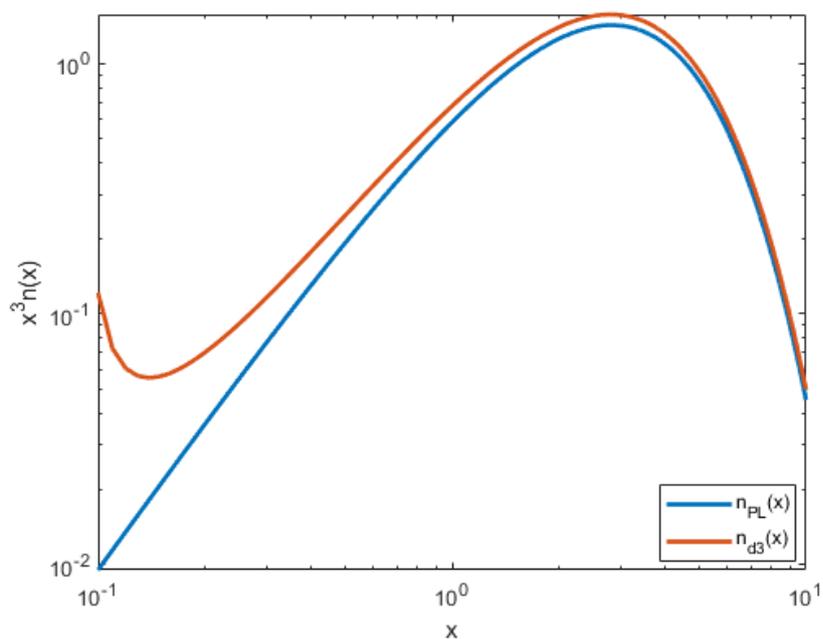


Figura 6.66.  $x^3 n(x)$  della legge di Planck (5.1) (in blu) e dello sviluppo della variazione  $n_{d3}$  (6.15) (in rosso) per  $T = 2.725$ ,  $\Delta T = -0.5$  e  $\gamma = 0.5$

x	$n_{PL}$	$n_{d3}$	$ n_{PL} - n_{d3} $
x = 0.1	9.5083	9.5128	0.0045
x = 1	0.5820	0.5855	0.0035
x = 10	4.5402e-05	4.6705e-05	1.3032e-06

Lo stesso si ha per la funzione  $x^3 n_{d3}$ .

x	$x^3 n_{PL}$	$x^3 n_{d3}$	$x^3  n_{PL} - n_{d3} $
x = 0.1	0.0095	0.0095	0
x = 1	0.5820	0.5855	0.0035
x = 2.8153	1.4214	1.4412	0.0198
x = 10	0.0454	0.0467	0.0013

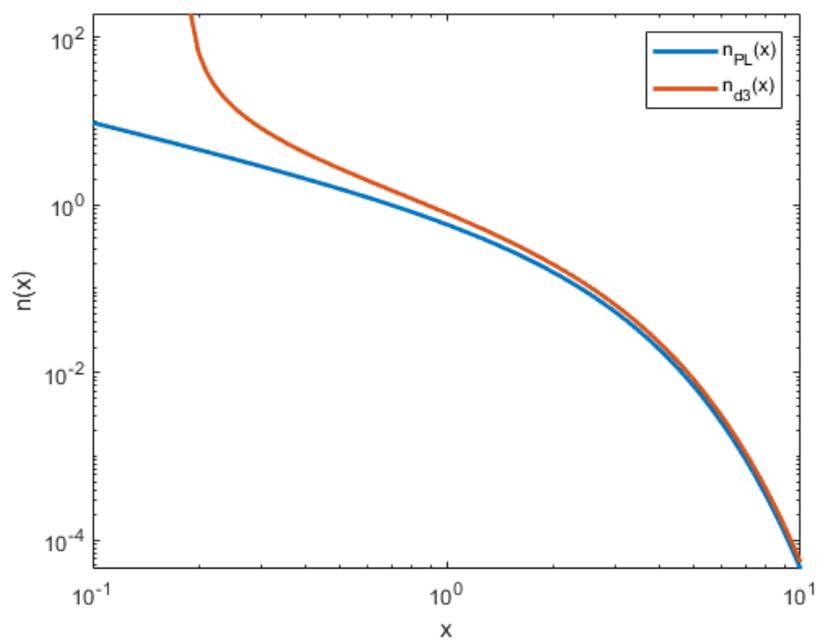


Figura 6.67. La legge di Planck (5.1) (in blu) e lo sviluppo della variazione  $n_{d3}$  (6.15) (in rosso) per  $T = 2.725$ ,  $\Delta T = -0.5$  e  $\gamma = 1$

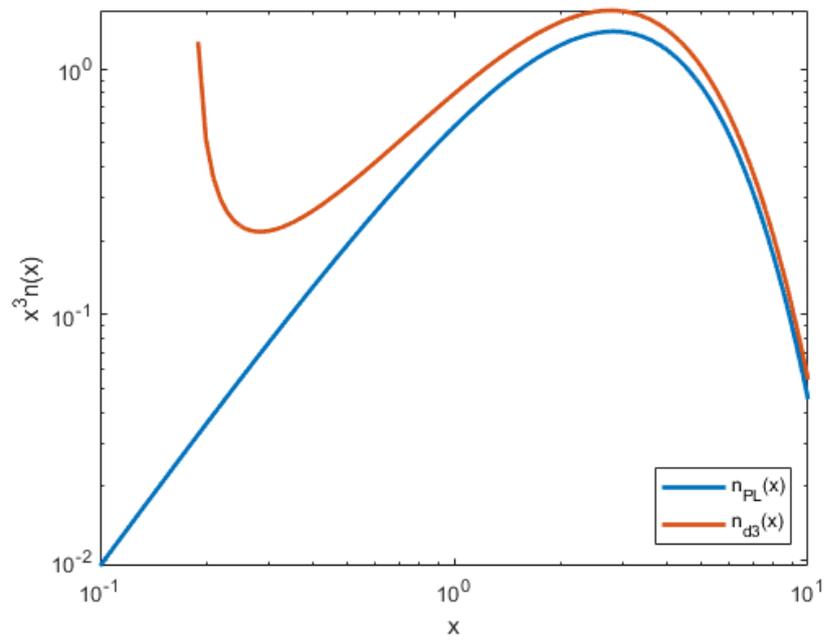


Figura 6.68.  $x^3 n(x)$  della legge di Planck (5.1) (in blu) e dello sviluppo della variazione  $n_{d3}$  (6.15) (in rosso) per  $T = 2.725$ ,  $\Delta T = -0.5$  e  $\gamma = 1$

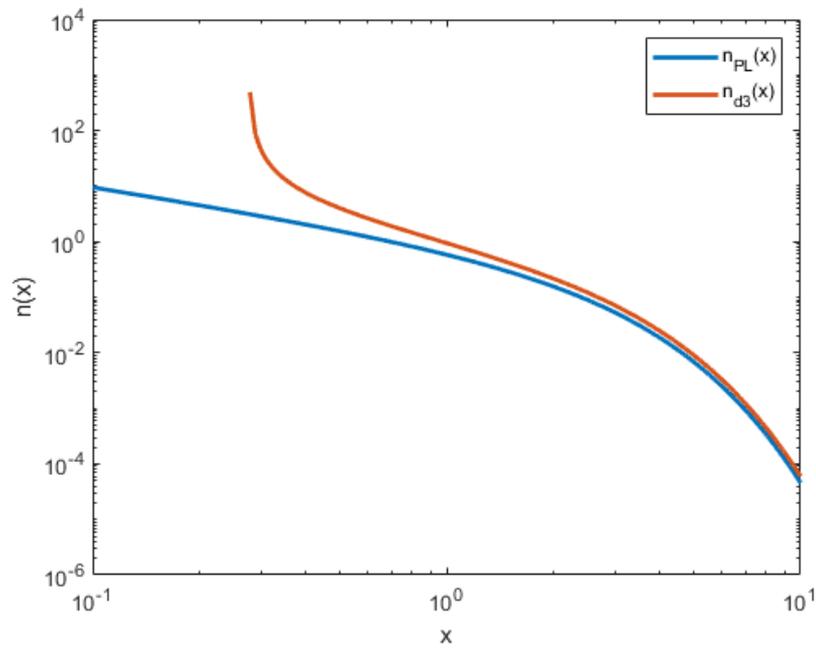


Figura 6.69. La legge di Planck (5.1) (in blu) e lo sviluppo della variazione  $n_{d3}$  (6.15) (in rosso) per  $T = 2.725$ ,  $\Delta T = -0.5$  e  $\gamma = 1.5$

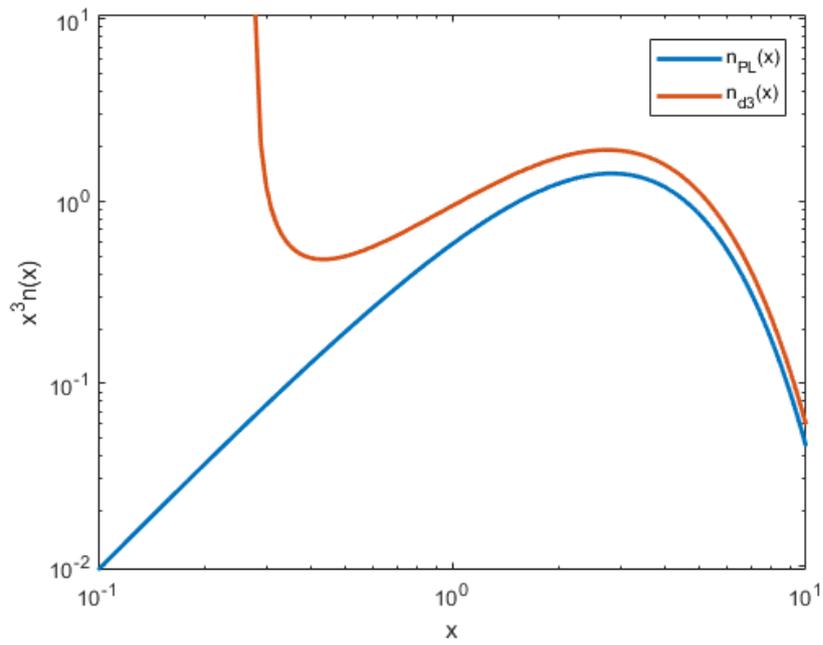


Figura 6.70.  $x^3 n(x)$  della legge di Planck (5.1) (in blu) e dello sviluppo della variazione  $n_{d3}$  (6.15) (in rosso) per  $T = 2.725$ ,  $\Delta T = -0.5$  e  $\gamma = 1.5$

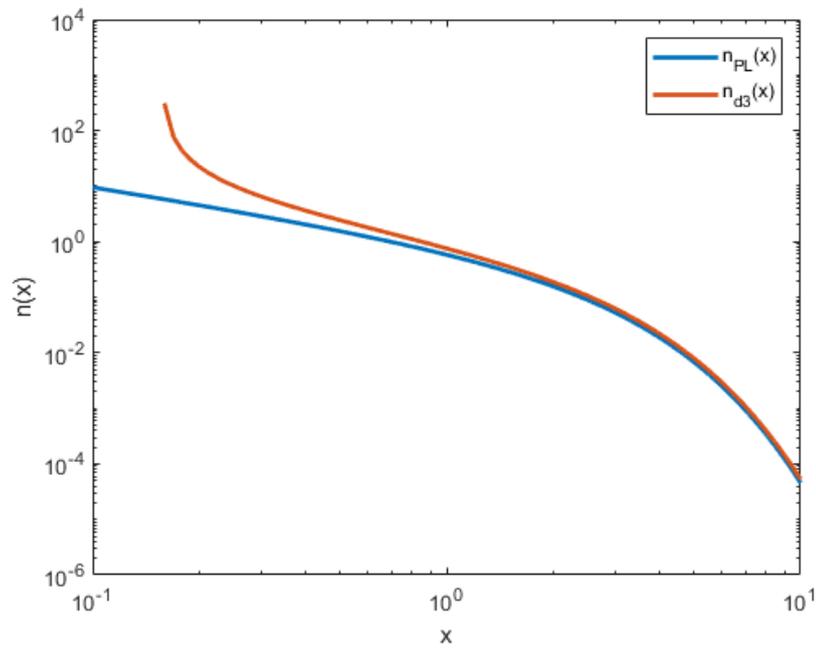


Figura 6.71. La legge di Planck (5.1) (in blu) e lo sviluppo della variazione  $n_{d3}$  (6.15) (in rosso) per  $T = 2.725$ ,  $\Delta T = -0.85$  e  $\gamma = 0.5$

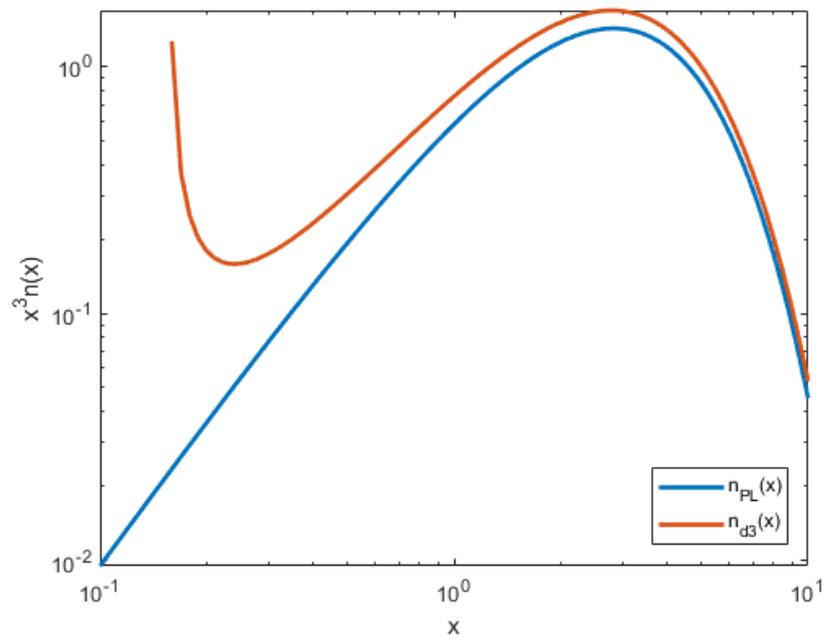


Figura 6.72.  $x^3 n(x)$  della legge di Planck (5.1) (in blu) e dello sviluppo della variazione  $n_{d3}$  (6.15) (in rosso) per  $T = 2.725$ ,  $\Delta T = -0.85$  e  $\gamma = 0.5$

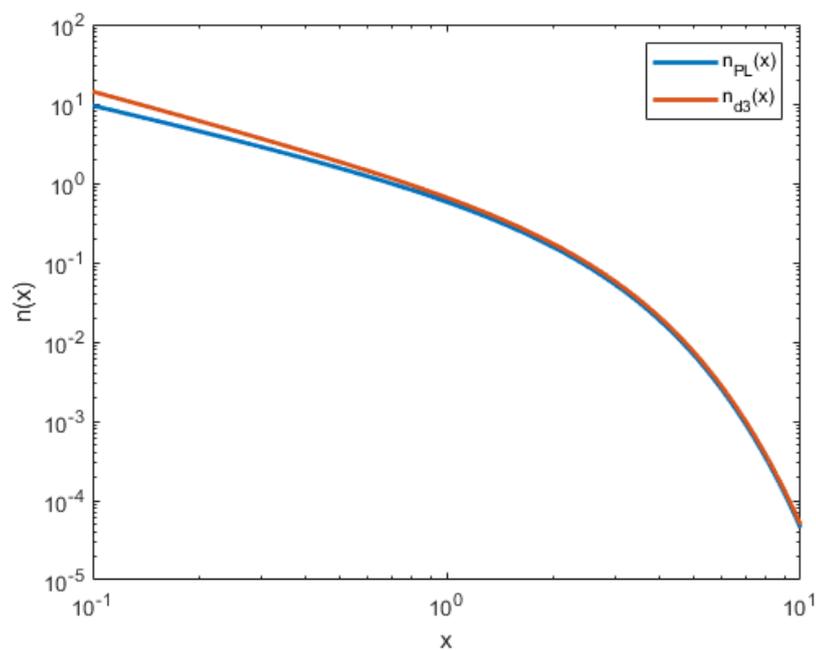


Figura 6.73. La legge di Planck (5.1) (in blu) e lo sviluppo della variazione  $n_{d3}$  (6.15) (in rosso) con termini lineari cambiati di segno per  $T = 2.725$ ,  $\Delta T = 0.5$  e  $\gamma = 0.5$

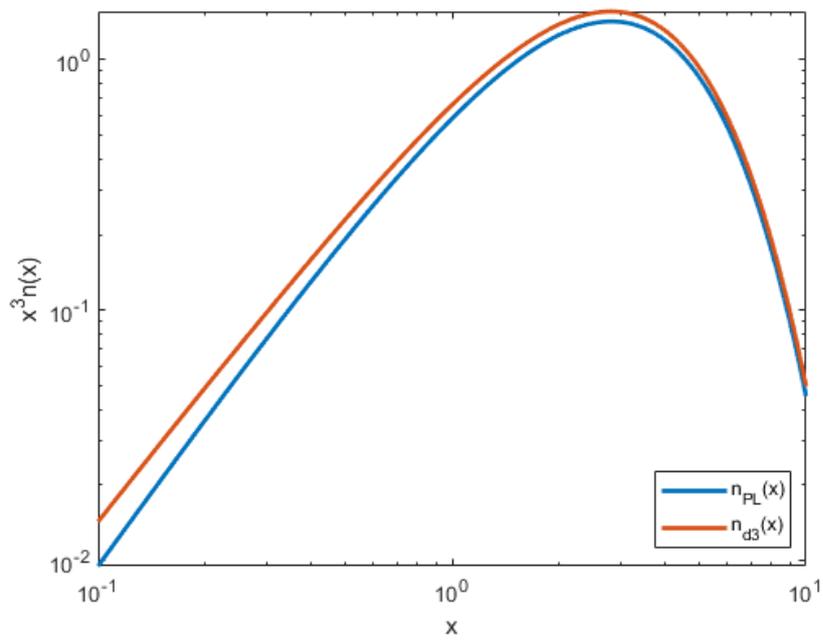


Figura 6.74.  $x^3 n(x)$  della legge di Planck (5.1) (in blu) e dello sviluppo della variazione  $n_{d3}$  (6.15) (in rosso) con termini lineari cambiati di segno per  $T = 2.725$ ,  $\Delta T = 0.5$  e  $\gamma = 0.5$

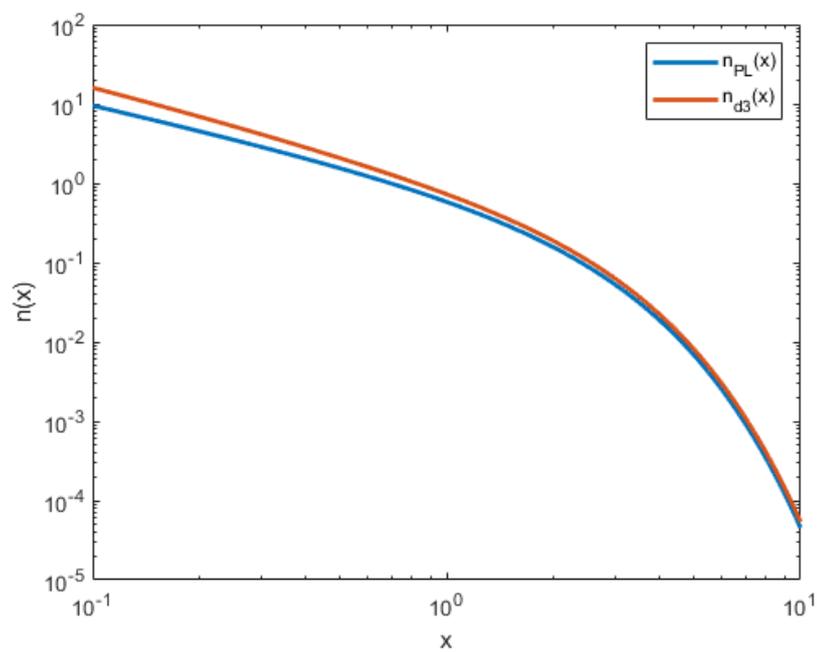


Figura 6.75. La legge di Planck (5.1) (in blu) e lo sviluppo della variazione  $n_{d3}$  (6.15) (in rosso) con termini lineari cambiati di segno per  $T = 2.725$ ,  $\Delta T = 0.5$  e  $\gamma = 1$

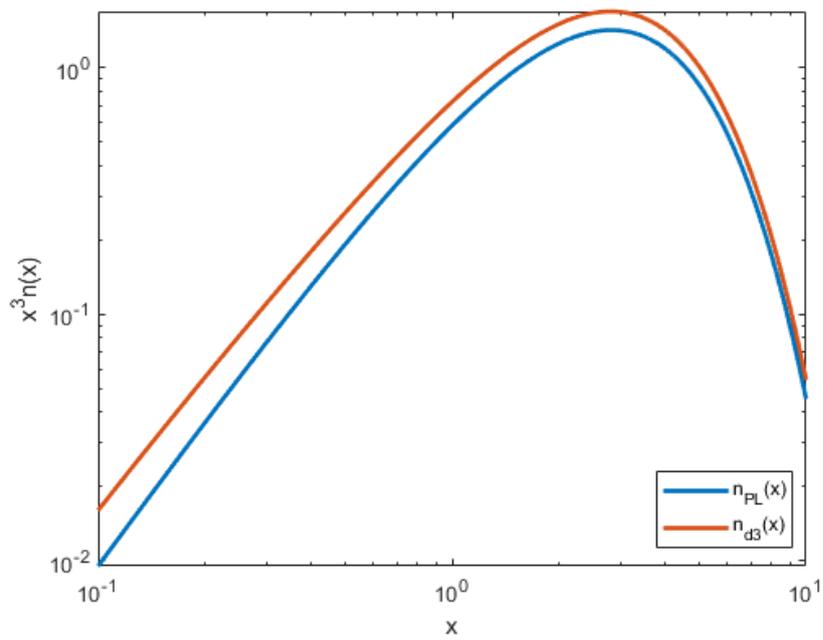


Figura 6.76.  $x^3 n(x)$  della legge di Planck (5.1) (in blu) e dello sviluppo della variazione  $n_{d3}$  (6.15) (in rosso) con termini lineari cambiati di segno per  $T = 2.725$ ,  $\Delta T = 0.5$  e  $\gamma = 1$

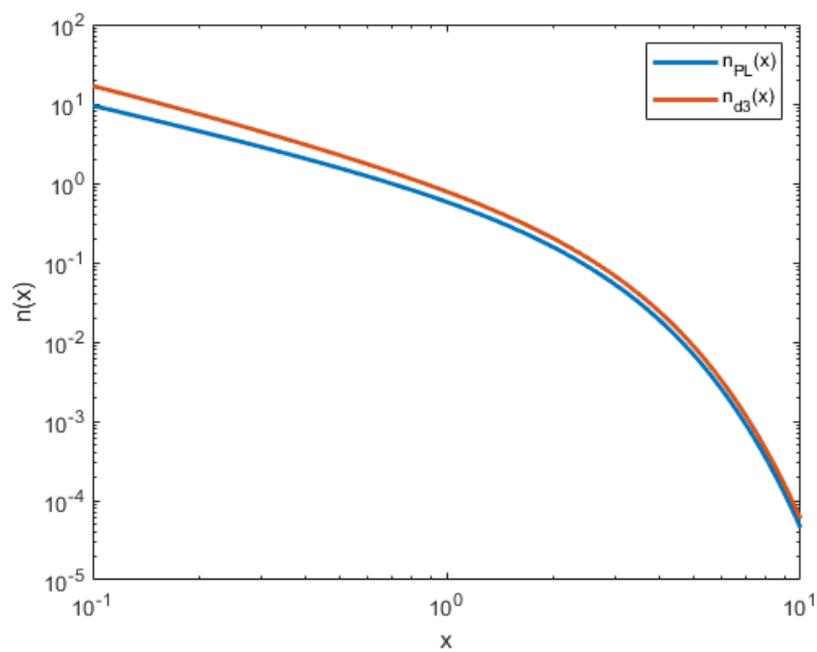


Figura 6.77. La legge di Planck (5.1) (in blu) e lo sviluppo della variazione  $n_{d3}$  (6.15) (in rosso) con termini lineari cambiati di segno per  $T = 2.725$ ,  $\Delta T = 0.5$  e  $\gamma = 1.5$

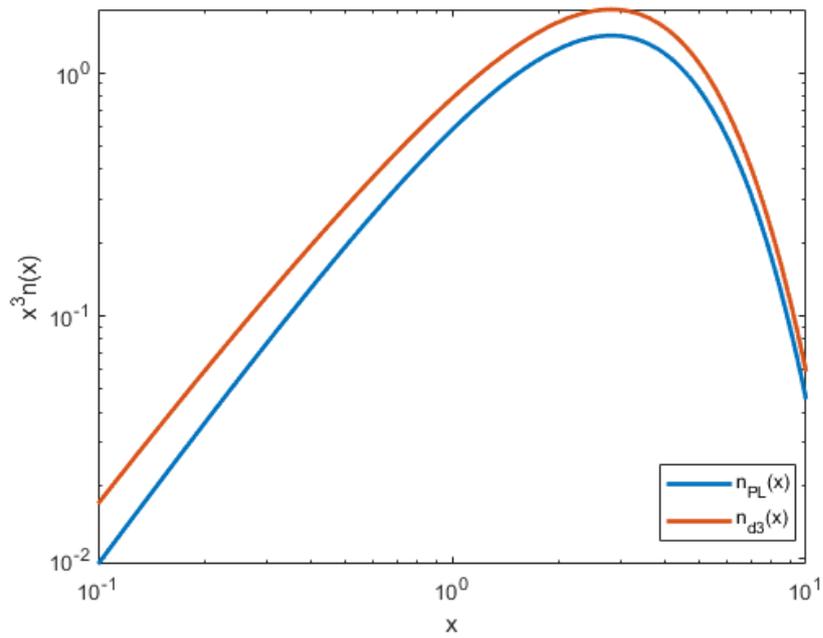


Figura 6.78.  $x^3 n(x)$  della legge di Planck (5.1) (in blu) e dello sviluppo della variazione  $n_{d3}$  (6.15) (in rosso) con termini lineari cambiati di segno per  $T = 2.725$ ,  $\Delta T = 0.5$  e  $\gamma = 1.5$

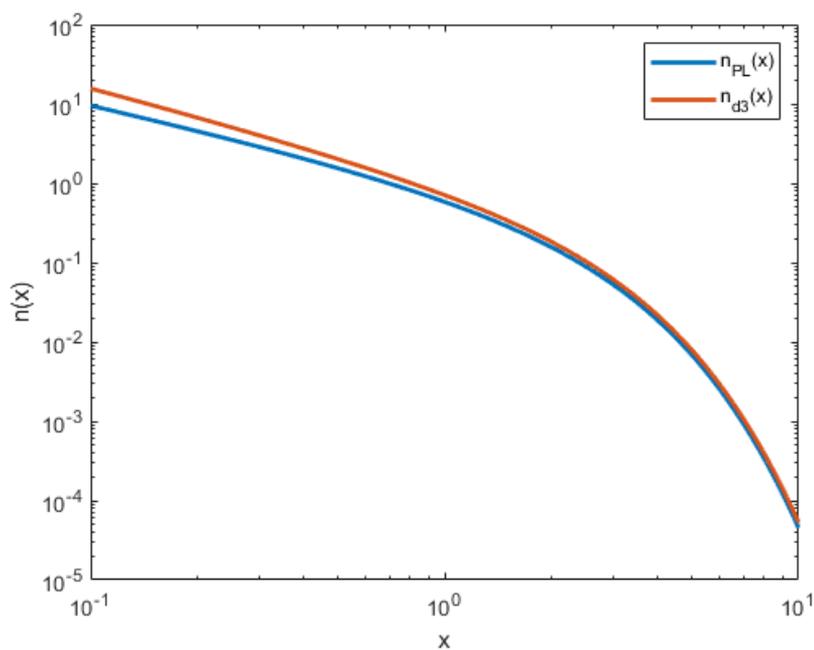


Figura 6.79. La legge di Planck (5.1) (in blu) e lo sviluppo della variazione  $n_{d3}$  (6.15) (in rosso) con termini lineari cambiati di segno per  $T = 2.725$ ,  $\Delta T = 0.85$  e  $\gamma = 0.5$

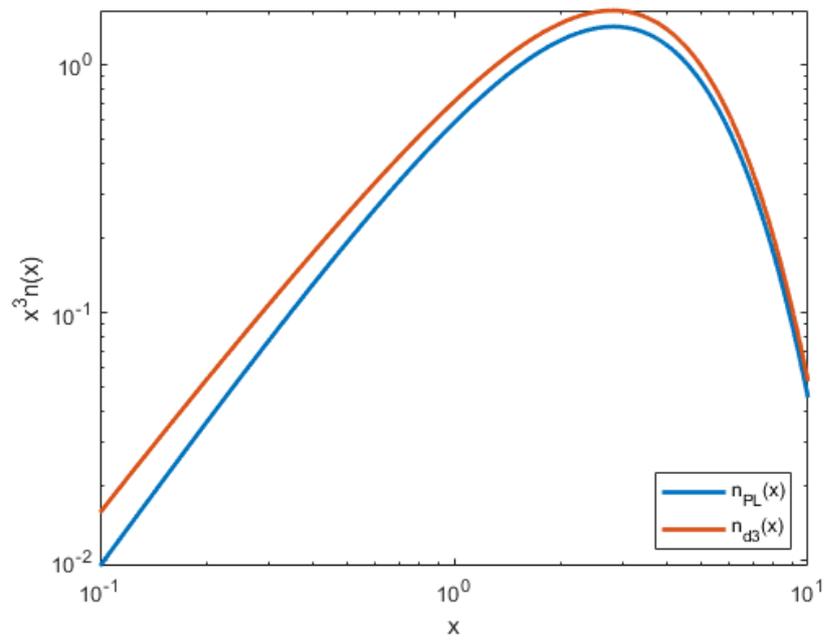


Figura 6.80.  $x^3 n(x)$  della legge di Planck (5.1) (in blu) e dello sviluppo della variazione (6.15) (in rosso) con termini lineari cambiati di segno per  $T = 2.725$ ,  $\Delta T = 0.85$  e  $\gamma = 0.5$

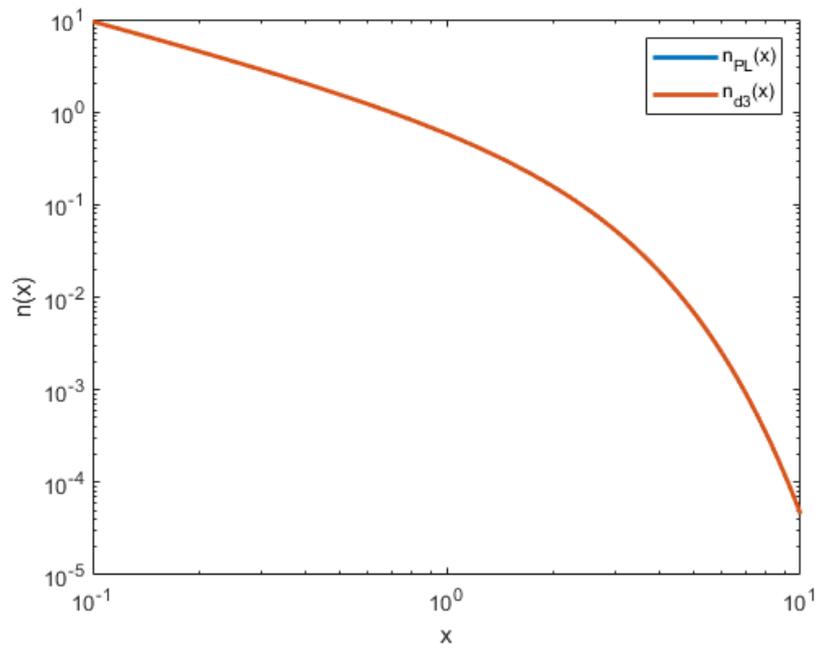


Figura 6.81. La legge di Planck (5.1) (in blu) e lo sviluppo della variazione  $n_{d3}$  (6.15) (in rosso) con solo termini quadratici per  $T = 2.725$ ,  $\Delta T = 0.5$  e  $\gamma = 0.5$

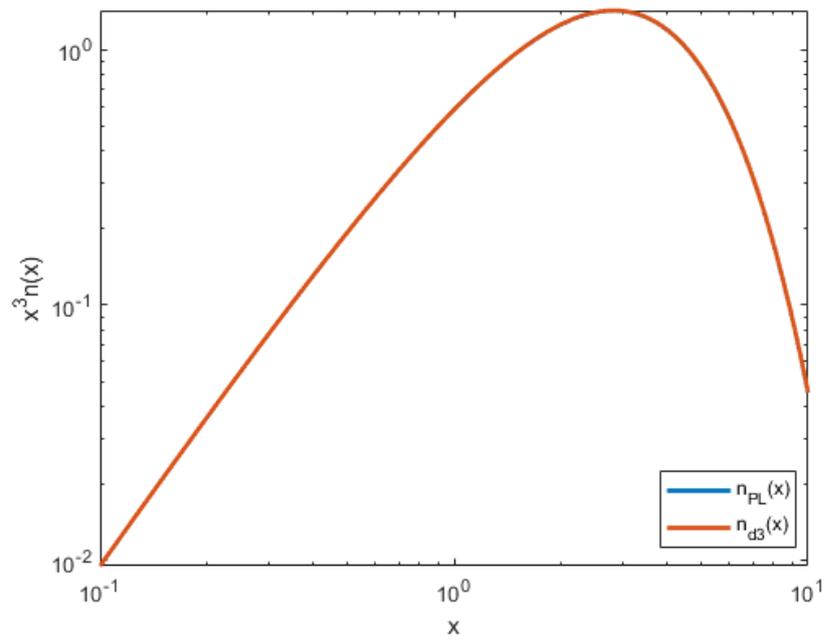


Figura 6.82.  $x^3 n(x)$  della legge di Planck (5.1) (in blu) e dello sviluppo della variazione  $n_{d3}$  (6.15) (in rosso) con soli termini quadratici per  $T = 2.725$ ,  $\Delta T = 0.5$  e  $\gamma = 0.5$

## Capitolo 7

# Confronto tra le variazioni

Di seguito, sono riassunti i principali risultati emersi dal confronto tra i casi analizzati ( $n_{d1}$ ,  $n_{d2}$ ,  $n_{d3}$ ).

La prima principale differenza tra i casi è che  $n_{d1}$  e  $n_{d3}$  sono caratterizzati per modificare la legge di Planck con un termine costante, mentre la variazione della legge di Planck in  $n_{d2}$  dipende dalla variabile  $x$ .

Inoltre,  $n_{d1}$  è generalmente minore rispetto  $n_{PL}$  e all'aumentare di  $\gamma$  diminuisce di più, lo stesso si nota anche per  $n_{d3}$ . Per quanto riguarda  $n_{d2}$ , questa funzione è maggiore rispetto alla legge di Planck e ha un andamento diverso per  $x \rightarrow 10$ , ma all'aumentare di  $\gamma$  o  $\Delta T$ , i suoi valori diminuiscono.

Per quanto riguarda invece  $x^3 n(x)$ , sia nel primo che nel terzo caso si ha sempre una funzione minore rispetto  $x^3 n_{PL}$  e con l'aumentare dei parametri, diminuiscono i valori. In entrambi si nota un andamento simile alla legge di Planck, ma mentre per  $n_{d1}$ , con l'aumentare di  $\gamma$  o  $\Delta T$ , aumenta l'ascissa in cui si ha il massimo, lo sviluppo  $n_{d3}$  continua ad avere il massimo in un intorno di  $x = 2.8$ .

La funzione  $x^3 n_{d2}$  invece è maggiore rispetto la legge di Planck e, nonostante con valori maggiori dei parametri diminuisca, le differenze tra le due funzioni restano sempre molto elevate.

Se invece si considera un  $\Delta T$  negativo, allora sia  $n_{d1}$  che  $n_{d3}$  presentano degli asintoti nei punti in cui si annullano i denominatori. Questi punti dipendono proprio dai parametri  $\gamma$  e  $\Delta T$  (e  $T$  nel caso di  $n_{d3}$ ). Nonostante la presenza di un asintoto, le funzioni successivamente tendono ad avere lo stesso andamento del caso regolare, anche per  $x^3 n(x)$ . In questo caso, aumentando in valore assoluto i parametri, aumentano anche i valori che assumono le funzioni.

Si hanno dei risultati completamente differenti per  $n_{d2}$ . In questo caso non si presentato delle singolarità, ma ci sono degli intervalli in cui la funzione ha valori negativi e tali intervalli dipendono dai parametri. Inoltre, se inizialmente la funzione è minore rispetto la legge di Planck, ad un certo punto la interseca e la maggiora. Ciò vale anche per  $x^3 n(x)$ .

Se invece si cambia segno ai termini lineari degli sviluppi  $n_{d1}$  e  $n_{d3}$ , allora in questo

caso queste due funzioni sono maggiori rispetto la legge di Planck ed è interessante sottolineare come però, negli stessi punti, le differenze sono simili con il caso classico. Ciò suggerisce che la principale differenza tra la legge di Planck e questi due sviluppi è dovuta proprio ai termini lineari.

Analogamente al caso senza cambiamento di segno, mentre il punto in cui  $x^3 n_{d1}$  raggiunge il suo massimo si sposta sempre più verso destra all'aumentare dei parametri,  $x^3 n_{d3}$  raggiunge il massimo in un intorno di  $x = 2.8$ .

Per  $n_{d2}$ , cambiare il segno dei termini lineari equivale a cambiare il segno di  $\Delta T$ .

Infine, si esamina il caso in cui i termini lineari sono trascurati, prendendo in considerazione solo i termini quadratici. Per quanto riguarda  $n_{d1}$  e  $n_{d3}$ , i risultati confermano quanto detto sopra: infatti i due sviluppi presentano una piccola differenza con la legge di Planck, tale da essere impercettibile graficamente anche aumentando i parametri.

Per la variazione  $n_{d2}$ , si osserva che la funzione è minore rispetto al caso classico, tuttavia, per  $x \rightarrow 10$  la differenza con la legge di Planck continua ad essere molto grande.

Alla luce di quanto esposto, si determina che il modello descritto da  $n_{d3}$  con  $\Delta T$  negativo è il più valido per rappresentare distorsioni maggiori della radiazione cosmica di fondo. Bisogna prestare attenzione alla frequenza critica per cui si annulla il denominatore: per far sì che non si abbia la singolarità nell'intervallo di interesse  $x \in (0.1, 10)$  possiamo considerare

$$\begin{aligned} x_C &< 0.1 \\ \frac{\gamma \Delta T}{T} &< 0.1 \end{aligned}$$

che corrisponde alla condizione

$$\gamma \Delta T < 0.2725$$

con  $T = 2.725$ . Il primo caso valutato con  $\gamma = 0.5$  e  $\Delta T = 0.5$  rientra in questa condizione. Con questa scelta dei parametri, l'asintoto non rientra nell'intervallo considerato, tuttavia, il suo effetto si manifesta, e quindi, alle basse frequenze  $n_{d3}(x)$  risulta maggiore a causa della decrescita esponenziale dovuta proprio all'asintoto.

## Capitolo 8

# Conclusioni

In questo lavoro di tesi, abbiamo esaminato i principali metodi di teoria cinetica e meccanica statistica applicati alla radiazione cosmica di fondo. L'obiettivo principale è studiare un modello che descriva le distorsioni della CMB dallo spettro di un corpo nero. Le teorie esistenti non descrivono completamente tale spettro, soprattutto alle basse frequenze. Di conseguenza, abbiamo cercato un approccio alternativo, correggendo alcuni modelli presenti in bibliografia, per ottenere risultati che descrivano lo spettro con valori superiori.

Storicamente, molti ricercatori hanno in primo luogo considerato l'equazione di Kompaneets, un'equazione cinetica che descrive l'evoluzione dello spettro della radiazione tenendo principalmente conto dello scattering di Compton. Tale equazione è stata ricavata partendo dall'equazione di Boltzmann, come indicato in [7]. Tuttavia, alcuni passaggi risultano ancora oggi incerti e per questo motivo in letteratura vi sono altri metodi alternativi su come si possa ottenere. Uno di questi metodi è descritto in [11].

Partendo dalla Master equation, un'equazione differenziale che descrive l'evoluzione temporale di un sistema inteso come combinazione probabilistica degli stati, si è determinato il tasso che descrive la probabilità che un fotone con vettore d'onda  $k$  si annichisca in un fotone con vettore  $k'$ . In seguito si è considerata l'espansione di Kramer-Moyal, che descrive l'evoluzione temporale di una distribuzione di probabilità. Data una rete monodimensionale in cui possono muoversi le particelle saltando da uno stato all'altro, si è descritto con la Master equation l'evoluzione temporale del numero di particelle presenti su ogni nodo della rete e in seguito, con l'espansione di Kramer-Moyal e con determinate scelte per il tasso di transizione, si ottiene l'equazione di Kompaneets.

Si è inoltre vista una modifica dell'equazione di Kompaneets dovuta all'accelerazione stocastica, che può causare un trasferimento di energia attraverso la quantità di moto. In [17] si definisce a causa di ciò un termine diffusivo che può essere addizionato all'equazione. L'aggiunta di questo termine però rompe l'equilibrio e dunque in [17] è indicata una soluzione stazionaria per questo caso.

La soluzione stazionaria dell'equazione di Kompaneets è la distribuzione di Bose-Einstein, che differisce della legge di Planck per una costante. A sua volta, la legge di Planck

rappresenta la distribuzione dei fotoni nello spettro di un corpo nero, mentre la soluzione dell'equazione di Koompaneets rappresenta la distribuzione dei fotoni nello spettro della CMB, dato dal numero di occupazione  $n(\nu, t)$ .

Dato il parametro di Compton  $y$ , per  $y > 5$  lo spettro della CMB è ben rappresentato dalla distribuzione di Bose-Einstein, mentre per  $y < 1$  una buona approssimazione è data da sovrapposizione di spettri di corpi neri, e per i casi intermedi bisogna affidarsi ad un'analisi numerica [20, 21].

In [18], si ottiene la distribuzione dei fotoni come sovrapposizione di spettri di corpi neri nel caso di strong heating  $T_e \ll T_R$ , partendo da una definizione di  $n$  data come integrale del prodotto tra la legge di Planck e una funzione di distribuzione della temperatura  $R$  e sostituendo tale definizione nell'equazione di Kompaneets riscritta in funzione del parametro di Compton  $y$ .

Le distorsioni dello spettro della radiazione cosmica di fondo possono essere di due tipi: di tipo  $\mu$ , dovute al potenziale chimico che dipende dalla frequenza, e di tipo  $y$ , che dipendono proprio dal parametro  $y$ .

Se si combinano spettri di corpi neri a temperature diverse, il risultato è a sua volta lo spettro di un corpo nero che presenta una distorsione di tipo  $y$ . Ciò è osservato in [23], dove si ottiene ciò dallo sviluppo di Taylor del numero di occupazione  $n$  valutato in  $T + \Delta T$ .

Quanto descritto sopra fa parte della bibliografia scientifica riguardo questo argomento, precedente questo lavoro di tesi.

Prendendo come principale spunto iniziale lo sviluppo di Taylor in [23], in questa tesi si sono presentate tre diverse variazioni del numero di occupazione  $n$ :  $n_{d1}(x)$ ,  $n_{d2}(x)$  e  $n_{d3}(x)$ . Per tutti i casi si sono svolte della analisi al variare sia del parametro  $\gamma$  che  $\Delta T$ , variando anche il segno di quest'ultima o trascurando i termini lineari o i termini quadratici.

Dai risultati,  $n_{d3}$  considerato con un  $\Delta T$  negativo e con la giusta scelta di parametri, è in grado di rappresentare distorsioni maggiori dello spettro della CMB. In particolare, poiché con un  $\Delta T$  negativo può esserci una singolarità nell'intervallo considerato  $x \in (0.1, 10)$ , per evitare ciò imponiamo la condizione  $x_C < 0.1$ , con  $x_C = \frac{\gamma \Delta T}{T}$  il punto in cui si ha l'asintoto. Una scelta dei parametri come  $T = 2.725$ ,  $\Delta T = 0.5$  e  $\gamma = 0.5$ , osservata precedentemente, soddisfa tale richiesta e può dunque essere un esempio per il modello.

# Bibliografia

- [1] E. Gawiser, J. Silk, The cosmic microwave background radiation, *Phys.Rept.*, 333, 245-267 (2000).
- [2] J. C. Mather, E. S. Cheng, R. E. Eplee, Jr., R. B. Isaacman, S. S. Meyer, R. A. Shafer, R. Weiss, E. L. Wright, C. L. Bennett, N. W. Boggess et al., A preliminary measurement of the cosmic microwave background spectrum by the Cosmic Background Explorer (COBE) satellite, *Astrophys. J. Lett.* 354, L37 (1990).
- [3] G. Gamow, The Origin of Elements and the Separation of Galaxies, *Physical Review*, 74 (4), 505–506 (1948)
- [4] G. Gamow, The Evolution of the Universe, *Nature*, 162, 680–682 (1948)
- [5] R. A. Alpher, R. C. Herman, On the Relative Abundance of the Elements, *Physical Review*, 74 (12), 1737–1742 (1948)
- [6] A. A. Penzias and R. W. Wilson, A measurement of excess antenna temperature at 4080 Mc/s, *Astrophys. J.* 142, 419 (1965).
- [7] A. S. Kompaneets, The establishment of thermal equilibrium between quanta and electrons, *Zh. Eksp. Teor. Fiz.* 31, 876 (1956) [*Sov. Phys. JETP* 4, 730 (1957)]
- [8] Malcolm S. Longair, *High Energy Astrophysics*, Cambridge, UK: Cambridge University Press (2011)
- [9] D.G. Shirk, *A Practical Review of the Kompaneets Equation and Its Application to Compton Scattering*, N.p., United States (2006).
- [10] Macconi D., "Processi di scattering in astrofisica", *Tesi di Laurea in Astronomia*, Università di Bologna, A.A 2015-2016, rel. Dallacasa D.
- [11] G. E. F. Oliveira, C. Maes, K. Meerts, On the derivation of the Kompaneets equation, *Astroparticle Physics*, 133, 102644 (2021)
- [12] Steven Errede, *Classical, Non-Relativistic Theory of Scattering of Electromagnetic Radiation*, UIUC Physics 436 EM Fields Sources II, Lect. Notes 14.5 (Fall Semester, 2015)

- [13] G. E. F. Oliveira, C. Maes, K. Meerts, Photon Frequency Diffusion Process, *Journal of Statistical Physics*, 189, 4 (2022)
- [14] H. Tashiro, CMB spectral distortions and energy release in the early universe, *Progress of Theoretical and Experimental Physics*, 2014 (6), 06B107 (2014)
- [15] L. Danese, G. De Zotti, Double Compton process and the spectrum of the microwave background, *Astronomy and Astrophysics*, 107, 39-42 (1982)
- [16] G. E. F. Oliveira, Statistical Mechanics of the Kompaneets Equation, *Tesi di Laurea Magistrale*, Supervisor C. Maes <https://arxiv.org/pdf/2107.07549> (2021)
- [17] Baiesi, M., Burigana, C., Conti, L., Falasco, G., Maes, C., Rondoni, L., Trombetti, T., Possible nonequilibrium imprint in the cosmic background at low frequencies, *Physical Review Research*, 2 (1), 013210-1-013210-15 (2020)
- [18] L. Danese, G. De Zotti, The Relic Radiation Spectrum and the Thermal History of the Universe, *Riv. Nuovo Cim.* 7, 277–362 (1977)
- [19] Ya B.Zeldovich, R. A. Sunyaev, The interaction of matter and radiation in a hot-model universe, *Astrophys. Space Sci.*, 4, 301-316 (1969)
- [20] C. Burigana, G. De Zotti, L. Danese, Constraints on the thermal history of the universe from the cosmic microwave background spectrum, *The Astrophysical Journal*, 379, 1 (1991)
- [21] Burigana C., De Zotti G., Danese L., Analytical description of spectral distortions of the cosmic microwave background, *Astronomy and Astrophysics*, 303, 323 (1995)
- [22] J. Chluba, R. A. Sunyaev, The evolution of CMB spectral distortion in the early Universe, *Monthly Notices of the Royal Astronomical Society*, 419 (2), 1294-1314 (2012)
- [23] Khatri, Rishi, Rashid A. Sunyaev, and Jens Chluba. Mixing of blackbodies: entropy production and dissipation of sound waves in the early Universe. *Astronomy and Astrophysics*, 542, 1-8 (2012)