



**Politecnico
di Torino**

Corso di Laurea Magistrale in Ingegneria Meccanica

Tesi di Laurea Magistrale

**Studio e sperimentazione di
elettro-mandrini ad altissima
velocità supportati da cuscinetti
ad aria**

Relatori

Prof. Terenziano RAPARELLI

Prof. Federico COLOMBO

Ing. Luigi LENTINI

Candidato

Roberto GHIDINI

ANNO ACCADEMICO 2023-2024

Ringraziamenti

Si ringrazia la ditta Carbomech S.r.l. di Burolo (TO), che ha fornito il mandrino oggetto della tesi ed ha collaborato attivamente alla sperimentazione svolta.

Desidero inoltre ringraziare i relatori di questa tesi: il prof. Raparelli ed il prof. Colombo, per la loro disponibilità ed il lavoro di supervisione, e l'ing. Lentini per avermi guidato nello svolgimento delle attività con grande pazienza e dedizione.

Un affettuoso pensiero va ai miei amici, che hanno compreso appieno l'impegno che richiede il percorso universitario e lo hanno reso un po' più leggero.

Infine voglio esprimere la mia immensa gratitudine verso i familiari, ed in particolare i miei genitori, che mi hanno sostenuto ed incoraggiato fin dal principio di questo percorso universitario, e non hanno mai fatto mancare la loro fiducia.

Sommario

La continua espansione dell'industria elettronica negli ultimi anni ha portato parallelamente al progresso dell'automazione ad essa collegata. Nei processi di produzione dei circuiti stampati (*Printed Circuit Board*, PCB) sono richieste operazioni di foratura e fresatura (*PCB routing*) ad altissima precisione e velocità: gli elettromandrini che compiono queste lavorazioni possono arrivare a 200 krpm, con valori di *runout* (vibrazione radiale dell'utensile) vicini al μm .

Un obiettivo della ricerca in questo settore è il raggiungimento di velocità sempre maggiori, senza tuttavia compromettere la precisione e quindi mantenendo livelli di vibrazione contenuti. A tal fine è necessario disporre sia di modelli numerici accurati che di dati sperimentali affidabili. Il presente lavoro di tesi si sviluppa proprio su questi argomenti, contestualizzandoli al caso pratico di un elettromandrino con cuscinetti ad aria comunemente usato nell'industria elettronica per lavorazioni su PCB.

La parte di modellazione del sistema ha riguardato in particolare i cuscinetti ad aria radiali di tipo *externally pressurized*. L'algoritmo di calcolo proposto prevede la soluzione iterativa dell'equazione di Reynolds, applicata alla geometria cilindrica del cuscinetto radiale, secondo lo schema di avanzamento in tempo di Eulero esplicito; la discretizzazione del dominio è ottenuta tramite differenze finite. Particolare attenzione viene riposta nella definizione della *mesh*: la scelta del numero di nodi avviene in modo parametrico, tenendo conto della presenza fori di alimentazione. L'attendibilità del modello è stata verificata mediante il confronto con risultati presenti nella letteratura scientifica, sia di tipo numerico (ottenuti anche con metodi differenti, eg. elementi finiti) che di tipo sperimentale. Successivamente, il modello numerico del cuscinetto è stato integrato con le equazioni del moto del rotore, derivanti dal modello di Jeffcott. Al fine di applicare nel modo più fedele possibile il suddetto modello al caso reale del mandrino in esame, sono state inoltre effettuate misure geometriche volte a caratterizzare le superfici che coinvolgono i cuscinetti. Inoltre, viene presentato il progetto preliminare di un banco prova per la caratterizzazione dinamica dei supporti ad aria, che in futuro potrà apportare nuovi dati sperimentali utili alla validazione dei modelli.

In un paragrafo dedicato viene affrontato il problema della bilanciatura del rotore, particolarmente importante nei sistemi rotanti ad alta velocità, da un punto

di vista pratico. La tecnica per la misura e la correzione dello squilibrio residuo adottata dal costruttore del mandrino viene analizzata in modo critico, evidenziando alcuni aspetti che non sono contemplati nella classica trattazione teorica dell'argomento.

Una delle tecniche più utilizzate per innalzare la velocità massima raggiungibile dal sistema è il montaggio "flottante" dei cuscinetti per mezzo di elementi smorzanti esterni, come ad esempio gli anelli O-Ring. Ai fini della modellazione del sistema completo, è importante quindi conoscere le caratteristiche dinamiche di questi elementi; tuttavia, esse dipendono da una moltitudine di parametri quali il materiale, la temperatura, il precarico e le dimensioni dell'O-Ring. Risulta quindi necessario condurre una serie di prove sperimentali *ad hoc* sugli O-Ring della taglia di interesse. La tecnica più utilizzata per i test è il metodo BERM (*Base Excitation Resonance Mass*), che permette di stimare i coefficienti di rigidezza e smorzamento degli O-Ring in prova tramite la valutazione della risposta in frequenza di un sistema ad un grado di libertà, composto da una massa sospesa e dagli O-Ring stessi, a fronte di una eccitazione esterna. Sfruttando questo principio è stato realizzato un banco prova per la caratterizzazione dinamica degli O-Ring impiegati nel mandrino, con la possibilità di valutare l'effetto della precompressione radiale (*squeeze*).

Infine, attraverso prove in decelerazione, vengono rilevate le vibrazioni del rotore lungo due direzioni perpendicolari ed in piani differenti, esaminandone il contenuto in frequenza.

Le simulazioni numeriche riguardanti i cuscinetti ad aria hanno dimostrato una buona attendibilità del modello, anche in relazione a prove sperimentali. Tuttavia, per una completa validazione del modello, la realizzazione del banco prova per i cuscinetti è sicuramente un punto fondamentale. La caratterizzazione dinamica degli O-Ring, per la taglia specifica adottata nel mandrino, ha restituito valori di rigidezza e smorzamento ragionevolmente simili ai risultati di precedenti lavori. Questo consente l'utilizzo dei dati ottenuti nei modelli rotore-cuscinetti "flottanti", che rappresentano pertanto lo *step* successivo per quanto riguarda la modellazione.

Indice

Elenco delle tabelle	VII
Elenco delle figure	VIII
1 Introduzione	1
1.1 Supporti ad aria	1
1.1.1 Lubrificazione a fluido	1
1.1.2 Tipologie di supporti ad aria	2
1.1.3 Fenomeno dell'instabilità	7
1.1.4 Stato dell'arte nella ricerca	11
1.2 O-Ring	15
1.2.1 Geometria e materiali	15
1.2.2 Condizioni di montaggio	16
1.2.3 Caratterizzazione dinamica	17
1.2.4 Stato dell'arte nella ricerca	20
1.3 Rotori su cuscinetti ad aria	22
1.3.1 Analisi e diagnostica delle vibrazioni	22
1.3.2 Equilibratura del rotore	24
1.3.3 Stato dell'arte nella ricerca	27
2 Modellazione	29
2.1 Modellazione dei supporti ad aria	29
2.1.1 Equazione di Reynolds	29
2.1.2 Applicazione ai cuscinetti radiali aerostatici	33
2.1.3 Soluzione numerica	41
2.2 Modellazione dinamica degli O-Ring	47
2.3 Analisi di stabilità del rotore	49
3 Banchi prova e setup sperimentali	53
3.1 Caratterizzazione dinamica degli O-Ring	53
3.1.1 Descrizione del banco prova	53
3.1.2 Procedura di test	54

3.1.3	<i>Postprocessing</i> dei dati sperimentali	55
3.2	Prove sperimentali sul mandrino	56
3.2.1	Strumentazione per misure geometriche	56
3.2.2	Architettura del mandrino e banco prova	58
3.2.3	Procedura di bilanciamento del rotore	60
3.3	Progetto di un banco prova per supporti ad aria	62
4	Risultati	64
4.1	Caratterizzazione O-Ring del mandrino	64
4.2	Simulazione numerica di cuscinetti ad aria	68
4.2.1	Validazione del modello	68
4.2.2	Applicazione ai cuscinetti del mandrino	75
4.3	Prove sperimentali sul mandrino	77
4.3.1	Misurazioni geometriche e di squilibrio	77
4.3.2	Prove in decelerazione	78
5	Conclusioni e sviluppi futuri	81
A	Listato simulazione supporti	82
A.1	Modello numerico di cuscinetto aerostatico	82
A.2	<i>Function</i> per il calcolo della portata	87

Elenco delle tabelle

3.1	Strumentazione del banco prova O-Ring.	54
3.2	Strumentazione per le misurazioni geometriche.	56
3.3	Strumentazione utilizzata per i test sul mandrino.	60
4.1	Coefficienti della funzione interpolante, NBR 50.	65
4.2	Coefficienti della funzione interpolante, NBR 60.	66
4.3	Coefficienti della funzione interpolante, NBR 70.	67
4.4	Parametri della simulazione di confronto con la soluzione analitica.	68
4.5	Parametri del cuscinetto utilizzati da Wang et al. [31].	71
4.6	Parametri della simulazione di confronto con Wang et al. [31].	71
4.7	Parametri del banco prova di Shalash et al. [28].	73
4.8	Parametri della simulazione di confronto con Shalash et al. [28].	73
4.9	Parametri dei cuscinetti del mandrino.	75
4.10	Parametri della simulazione per i cuscinetti del mandrino.	75
4.11	Misurazioni geometriche.	78
4.12	Squilibrio residuo sull'albero.	78

Elenco delle figure

1.1	Classificazione dei supporti ad aria. [2]	3
1.2	Journal bearing. [2]	3
1.3	Funzionamento di un supporto aerodinamico.	4
1.4	Supporto aerostatico. [2]	5
1.5	Funzionamento di un supporto aerostatico.	6
1.6	Tipologie di alimentazione. [2]	6
1.7	Modello dinamico a parametri concentrati. [2]	7
1.8	Geometrie particolari delle superfici. [2]	9
1.9	<i>Tilting pad bearing</i> . [22]	9
1.10	<i>Foil bearing</i> . [13]	10
1.11	Montaggio dei supporti su O-Ring. [24]	10
1.12	Configurazioni di banchi prova per cuscinetti.	12
1.13	Banco prova per supporti aerostatici. Cunningham et al. [10]	13
1.14	Banco prova per supporti aerostatici. Matta et al. [20]	13
1.15	Banco prova per <i>foil bearing</i> . Mahner et al. [19]	14
1.16	Banco per il rilievo del profilo di pressione. Shalash et al. [28]	15
1.17	Condizioni di montaggio.	16
1.18	Modello 1-DOF, metodo diretto.	18
1.19	Modello 1-DOF, metodo BERM	18
1.20	Diagrammi di Bode, metodo BERM.	20
1.21	Banco prova per O-Ring. Al-Bender et al. [1]	21
1.22	Banco prova per O-Ring. Bättig e Schiffmann [4]	22
1.23	Componenti armoniche della vibrazione. [6]	23
1.24	Diagramma <i>cascade</i> . [6]	24
1.25	Diagramma <i>waterfall</i> . [6]	24
1.26	Squilibrio statico, di coppia, dinamico. [18]	25
1.27	Dettaglio del setup utilizzato. Waumans [33]	27
1.28	Banco prova completo. Waumans [33]	28
2.1	Bilancio di massa nell'elemento infinitesimo.	30
2.2	Equilibrio di forze del volume infinitesimo.	31
2.3	Geometria di riferimento.	34
2.4	Equilibrio dinamico del rotore.	40

2.5	Dominio cilindrico e sviluppo piano.	41
2.6	Griglia computazionale ($N_f = 4, a = 1, b = 1$).	42
2.7	<i>Stencil</i> di calcolo a 5 nodi.	43
2.8	Algoritmo di calcolo per l'equazione di Reynolds.	46
2.9	Algoritmo di calcolo per l'equazione della dinamica.	47
2.10	Modello di Maxwell (a sinistra) e Kelvin-Voigt (a destra). [17] . . .	48
2.11	Modello di Maxwell generalizzato. [17]	48
2.12	Coefficienti dinamici del film fluido.	50
3.1	Schematizzazione del banco prova.	54
3.2	Banco prova installato nella camera climatica.	55
3.3	Tipologie di errori rilevabili con il rotondimetro. (adattato da [21])	57
3.4	Rotondimetro e microscopio.	58
3.5	Schematizzazione in sezione del mandrino utilizzato.	59
3.6	Setup per i test sul mandrino.	59
3.7	Anelli utilizzati per la calibrazione.	61
3.8	Schematizzazione del banco prova.	62
4.1	Effetto dello squeeze δ , NBR 50	65
4.2	Effetto dello squeeze δ , NBR 60	66
4.3	Effetto dello squeeze δ , NBR 70	67
4.4	Confronto con la soluzione di Ausman [3]	69
4.5	Distribuzione di pressione nel cuscinetto aerodinamico.	70
4.6	Confronto con i risultati di Wang et al. [31] ($c = 15 \mu\text{m}, \varepsilon = 0.05$) .	72
4.7	Confronto con i risultati di Wang et al. [31] ($c = 20 \mu\text{m}, \varepsilon = 0.2$) . .	72
4.8	Capacità di carico a differenti pressioni di alimentazione.	73
4.9	Profili di pressione nel piano dei fori di alimentazione.	74
4.10	Caratteristiche del cuscinetto anteriore.	76
4.11	Caratteristiche del cuscinetto posteriore.	76
4.12	Distribuzione di pressione nel cuscinetto posteriore.	77
4.13	Profili di pressione a differenti velocità ($\varepsilon = 0.4$).	77
4.14	<i>Cascade plot</i>	79
4.15	Vibrazione sincrona.	80

Capitolo 1

Introduzione

1.1 Supporti ad aria

1.1.1 Lubrificazione a fluido

La lubrificazione a film fluido si basa sulla presenza di un fluido in pressione interposto tra le superfici in movimento relativo; la capacità di sostenere un carico è data dalla risultante delle forze di pressione agenti sull'elemento mobile. I cuscinetti a fluido costituiscono un'alternativa ai più classici e diffusi supporti radenti e volventi, dove invece vi è contatto diretto tra le superfici. Il vantaggio principale risiede nella totale eliminazione dello strisciamento tra le parti diminuendo l'attrito, l'usura e conseguentemente il calore generato.

Si possono avere supporti lubrificati a liquido (tipicamente olio) oppure a gas (ad esempio aria, elio, argon). La principale differenza tra i due è la diversa comprimibilità del fluido, che condiziona significativamente le loro caratteristiche: capacità di carico, rigidezza, smorzamento. I supporti lubrificati a gas sono caratterizzati dai seguenti aspetti positivi:

- il gas è un lubrificante molto stabile: la viscosità dei gas si mantiene circa costante al variare della temperatura, non subisce passaggi di stato, non è soggetto a cavitazione e può quindi lavorare a temperature estremamente basse o alte;
- i gas hanno una bassa viscosità, il che porta ad avere un attrito ridotto e quindi una esigua generazione di calore;
- il gas compensa le irregolarità di forma delle superfici, consentendo di ottenere delle elevate precisioni di posizionamento;
- la capacità di carico per unità di superficie è minore rispetto a quella di un cuscinetto volvente; tuttavia, agendo su una superficie più estesa, si ottiene una rigidezza maggiore e maggiormente uniforme lungo la superficie;

- la manutenzione è pressoché nulla.

Inoltre, se il gas utilizzato è aria, si può osservare che:

- non è inquinante né costoso ed è largamente disponibile;
- si può scaricare in atmosfera, operando in ciclo aperto;
- si può usare in ambienti che richiedono bassa contaminazione.

Tuttavia, i supporti lubrificati a gas hanno alcuni svantaggi:

- la comprimibilità e la bassa viscosità portano ad avere uno smorzamento ridotto, e quindi una maggiore tendenza all'instabilità;
- la capacità di carico complessiva non è elevata, inferiore sia rispetto ai supporti lubrificati ad olio che ai cuscinetti volventi e radenti;
- la loro produzione richiede tolleranze geometriche e dimensionali molto ristrette: si consideri che devono essere almeno di un'ordine di grandezza inferiore all'altezza del meato, che solitamente è dell'ordine della decina di μm ;
- l'aria deve essere adeguatamente filtrata, per non occludere i fori di alimentazione (ove presenti).

In virtù di queste caratteristiche, i supporti ad aria vengono utilizzati quando sono richieste elevate velocità (come nei rotori di giroscopi per navigazione e nelle turbine per trapani dentistici) e/o precisione di posizionamento (ad esempio nelle tavole rotanti per strumenti di misura). Ci sono inoltre alcune applicazioni nel settore nucleare, dove non è possibile effettuare manutenzioni frequenti e il fluido deve essere immune alle radiazioni [16].

1.1.2 Tipologie di supporti ad aria

I supporti ad aria sono realizzati in pressoché tutte le configurazioni richieste dalle applicazioni comuni: a pattino, anulari, conici, sferici e radiali, come rappresentato in **Figura 1.1**. Un'altra classificazione si ha in base al principio di funzionamento: a seconda del modo in cui si ottiene la distribuzione di pressione utile al sostentamento del carico si parlerà di supporti *aerodinamici* o *aerostatici*.

Vista la loro applicazione nei mandrini ad alta velocità, la trattazione che segue è focalizzata in particolare sui cuscinetti per il supporto radiale di un rotore, chiamati anche *journal bearings*: l'albero (*journal*) è l'elemento rotante, mentre il cuscinetto (*bearing* o *bush*) è la parte fissa (**Figura 1.2**). I parametri geometrici fondamentali che caratterizzano questa configurazione sono la lunghezza assiale del cuscinetto L , il diametro dell'albero D ed il gioco radiale c .

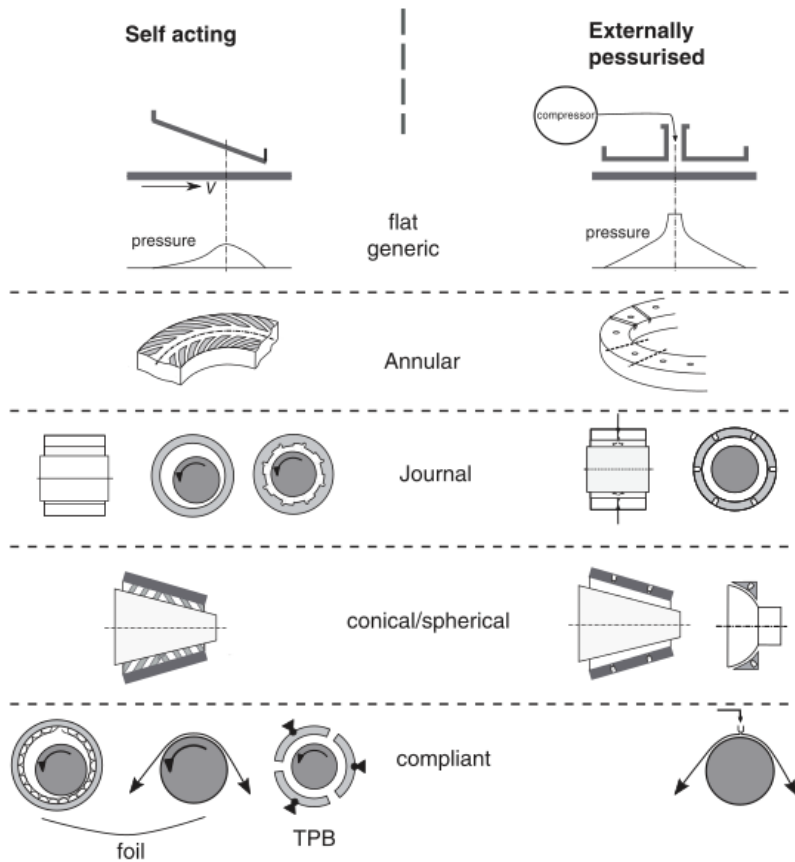


Figura 1.1: Classificazione dei supporti ad aria. [2]

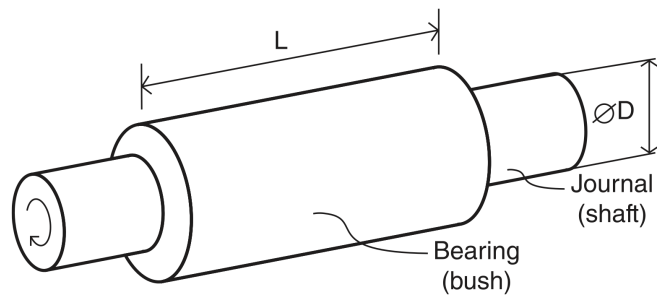


Figura 1.2: Journal bearing. [2]

Supporti aerodinamici

Nei supporti *aerodinamici* la distribuzione di pressione necessaria al sostentamento del carico si origina a seguito del moto relativo tra due superfici convergenti separate

da un fluido viscoso [14]. Più nello specifico, il movimento relativo richiama una portata di fluido nel verso delle sezioni decrescenti, dando luogo ad un campo di velocità e , secondo la legge dei fluidi viscosi newtoniani, a sforzi tangenziali che vengono equilibrati da una opportuna distribuzione di pressione.

Il principio di funzionamento di un *journal bearing* di tipo aerodinamico è riassunto nella **Figura 1.3**. A velocità di rotazione nulla, ed in presenza di un carico esterno W (quale può essere ad esempio la forza peso), il rotore è a contatto con il cuscinetto (**Fig. 1.3a**). Quando l'albero inizia a ruotare, per attrito tende a risalire lungo la superficie della boccola (**Fig. 1.3b**). Si configura una zona di meato convergente dove, per effetto degli sforzi viscosi, la pressione sarà maggiore, ed una zona divergente a pressione minore. Il campo di pressione, integrato sulla superficie del rotore, genera una forza risultante. Al raggiungimento di una velocità di rotazione sufficientemente elevata (velocità di *lift-off*), questa forza è in grado di contrastare il carico esterno W , avvicinando il centro del rotore C al centro della boccola O (**Fig. 1.3c**).

Si può notare che a regime, a causa della rotazione, il carico esterno W e l'eccentricità e non sono allineati ma formano un angolo ϕ . Esso prende il nome di *angolo di assetto* o *attitude angle*, ed è definito come l'angolo formato tra la direzione di applicazione del carico e la direzione che collega il centro dell'albero C al centro della boccola O . L'angolo di assetto è funzione della velocità di rotazione e di altri parametri operativi.

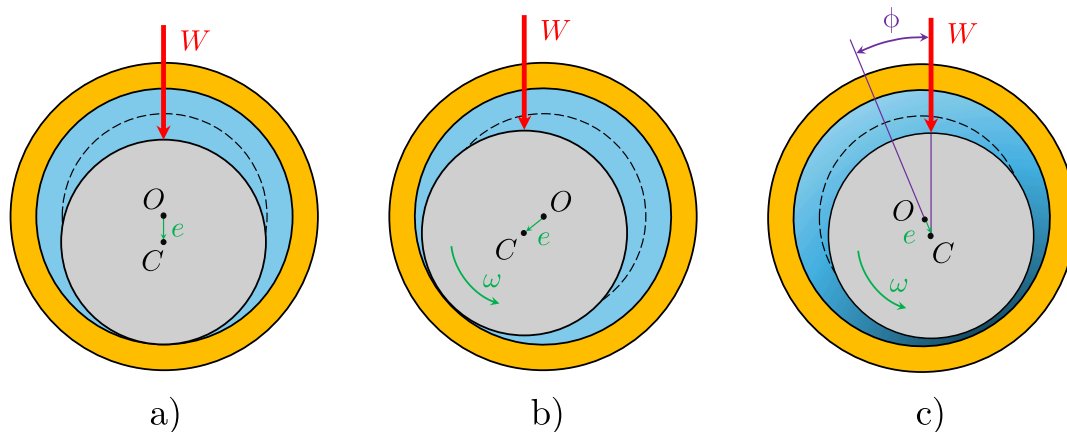


Figura 1.3: Funzionamento di un supporto aerodinamico.

Il vantaggio principale dei supporti aerodinamici è senza dubbio la semplicità della geometria, che è costituita dalle due superfici cilindriche affacciate di boccola e rotore, aventi diametro nominale D e lunghezza L , con un gioco radiale c tra loro. Inoltre, non necessitando di alimentazione esterna di aria compressa, semplificano ulteriormente il layout del sistema rendendolo più compatto e consentono un risparmio di energia. Grazie al fatto che non richiedono l'uso di sistemi di alimentazione

esterni, vengono anche chiamati *self-acting*.

I supporti aerodinamici sono però fortemente limitati in termini di capacità di carico. Essa generalmente aumenta al diminuire del gioco radiale c , il cui valore minimo raggiungibile è tuttavia determinato dal punto di vista pratico dalle capacità tecnologiche di produzione dei componenti. Inoltre il valore massimo di pressione che si instaura nel meato, che è responsabile della capacità di carico, è comunque limitato dalla comprimibilità del gas.

I cuscinetti aerodinamici presentano inoltre un'altra problematica. Nel transitorio di avviamento descritto in precedenza si ha strisciamento tra le parti fino al raggiungimento della velocità di *lift-off*. Si ha pertanto una seppur minima usura delle superfici, che se ripetuta nel tempo può portare al danneggiamento definitivo dei componenti. Per questo motivo i supporti aerodinamici non sono adatti ad operare con velocità ridotte, oppure frequentemente variabili in un ampio intervallo. L'usura può essere mitigata con trattamenti di rivestimento (*coatings*) che migliorano le proprietà tribologiche delle superfici.

Supporti aerostatici

Nei supporti *aerostatici* la pressione necessaria al sostentamento del carico viene generata con l'ausilio di una alimentazione esterna di aria compressa. L'aria viene introdotta nel meato per mezzo di una serie di condotti, disposti radialmente in numero maggiore di 4 e talvolta su più file, come rappresentato in **Figura 1.4**.

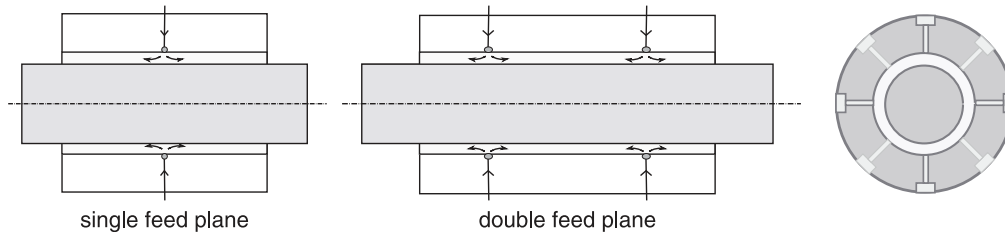


Figura 1.4: Supporto aerostatico. [2]

In assenza di forze esterne, con il rotore e la boccia perfettamente concentrici, le pressioni a valle degli ugelli sono le medesime e quindi la forza risultante sul rotore è nulla (**Figura 1.5a**). Applicando un carico radiale, il rotore tende ad assumere una posizione eccentrica che modifica la geometria del meato. Si configura perciò una zona dove l'altezza del meato h è inferiore rispetto al gioco radiale nominale, diminuendo la sezione di passaggio; qui la pressione aumenta rispetto alla condizione a eccentricità nulla. Nella zona diametralmente opposta accade esattamente il contrario, ovvero un aumento dell'altezza del meato ed una diminuzione della pressione. Questa nuova distribuzione di pressione, integrata sulla superficie del rotore, genera una risultante che contrasta l'azione del carico esterno giungendo ad una nuova condizione di equilibrio, con una eccentricità definita (**Figura 1.5b**).

Inoltre, a velocità di rotazione sufficientemente elevate, diventano significativi gli effetti aerodinamici che aumentano leggermente la capacità di carico e portano ad avere un angolo di assetto ϕ non nullo, secondo quanto discusso nel precedente paragrafo.

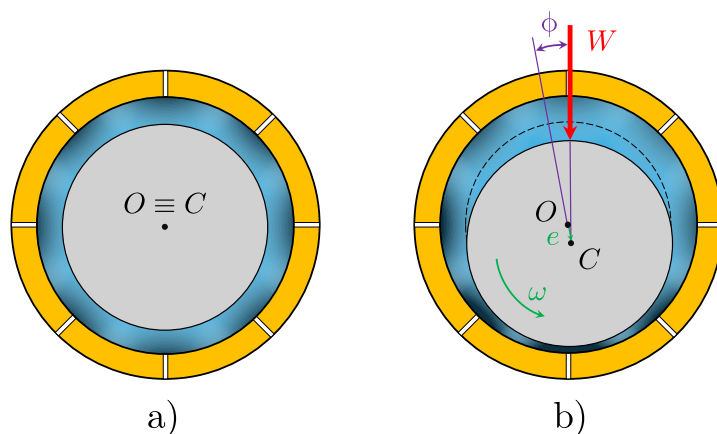


Figura 1.5: Funzionamento di un supporto aerostatico.

La geometria del foro di alimentazione riveste un ruolo importante nel determinare le caratteristiche statiche e dinamiche del supporto. In particolare, essa interviene nelle equazioni che governano il flusso entrante nel cuscinetto, modificando sia la formulazione del coefficiente di scarico che la sezione minima di passaggio (per maggiori dettagli si veda il **Paragrafo 2.1.2**). In virtù di questo, si possono generalmente riscontrare tre realizzazioni differenti, rappresentate in **Figura 1.6**:

- a) la sezione minima di passaggio è determinata dall'area tra lo sbocco del foro e la superficie del rotore: si parla in questo caso di *inherent restrictor*;
- b) si utilizza un inserto con foro calibrato, che determina una sezione ristretta minore di quella *inherent*: si parla di *orifice restrictor*;
- c) si possono utilizzare inserti o superfici in materiale poroso.

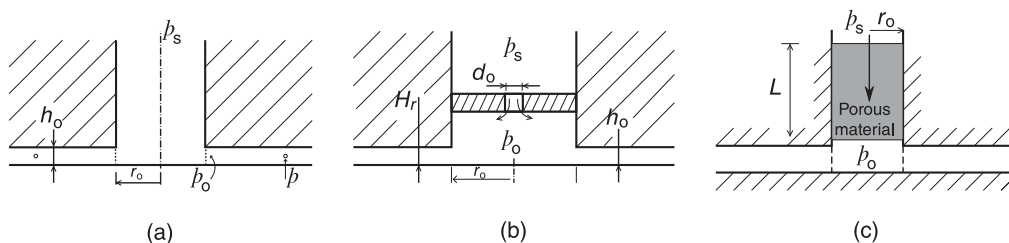


Figura 1.6: Tipologie di alimentazione. [2]

Inoltre, realizzando delle piccole camere a valle del foro di alimentazione dette *tasche* (*pocket*), si amplia la zona a pressione maggiore nell'intorno del foro, portando ad un aumento della capacità di carico.

I supporti aerostatici, a differenza degli aerodinamici, possiedono una capacità di carico anche a velocità nulla. Questa proprietà permette di realizzare ad esempio tavole rotanti per strumenti di misura, dove occorre una buona rigidità statica ed un attrito di primo distacco nullo per avere un posizionamento preciso e ripetibile. Inoltre, rispetto ai supporti aerodinamici, è possibile adottare un gioco radiale maggiore senza penalizzare eccessivamente le prestazioni.

Lo svantaggio di questi supporti è la necessità di una alimentazione esterna, che porta ad un layout più complesso sia del supporto che del sistema in cui è collocato. Si deve poi tenere conto del consumo d'aria, e quindi di energia, necessario al funzionamento, e delle possibili conseguenze che una mancanza di alimentazione può provocare.

1.1.3 Fenomeno dell'instabilità

In fase di progetto del supporto ad aria, dopo aver soddisfatto i requisiti statici (ovvero la capacità di carico, rigidità ed eccentricità a regime) è importante analizzare il comportamento dinamico del sistema, che consiste nel valutare la risposta a forzanti esterne variabili nel tempo, sia a rotore fermo che in movimento.

Ciascun supporto contribuisce alla dinamica del rotore con una matrice di rigidità K ed una di smorzamento C , propri del film fluido. In esse si individuano i termini principali sulla diagonale (k_{ii} e c_{ii}) ed i termini incrociati (k_{ij} e c_{ij}); il primo pedice indica la direzione della forza esercitata dal film fluido, mentre il secondo indica la direzione del conseguente spostamento. Questi coefficienti sono funzione dell'eccentricità ε , dell'angolo di assetto ϕ , della frequenza di eccitazione ν , della velocità di rotazione ω e, nel caso di cuscinetti aerostatici, dalla pressione di alimentazione p_s .

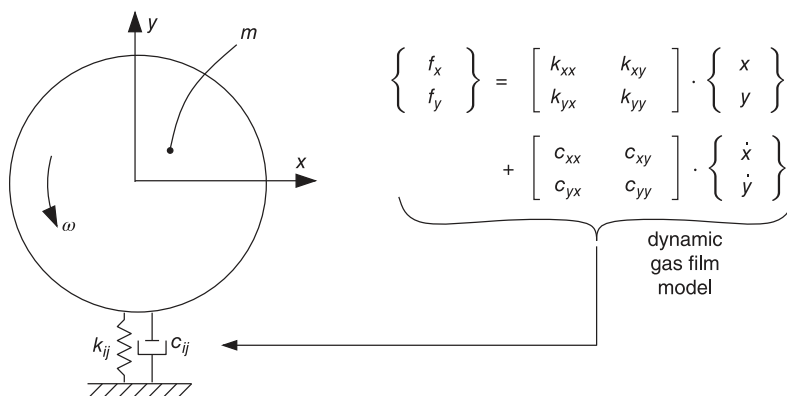


Figura 1.7: Modello dinamico a parametri concentrati. [2]

I supporti lubrificati a gas sono soggetti al fenomeno dell'instabilità, che consiste generalmente nell'insorgenza di vibrazioni autoeccitate di ampiezza crescente che portano il rotore a contatto con il supporto, spesso danneggiandolo irreparabilmente. Andando più nel dettaglio, si distinguono due tipologie differenti di instabilità.

Il fenomeno noto come *pneumatic hammering* avviene indipendentemente dalla velocità di rotazione ed è causato dal ritardo, dovuto alla dinamica del sistema pneumatico, che si crea tra lo spostamento Δh e la conseguente variazione di pressione Δp . La presenza delle tasche intorno ai fori di alimentazione è, in questo senso, un aspetto negativo: aumentando il volume a valle dei fori il sistema pneumatico diventa più lento, accentuando il ritardo tra lo spostamento e la reazione del film fluido.

Il secondo tipo di instabilità è dovuto sia alle proprietà del gas che agli effetti indotti dal movimento del rotore. I termini incrociati delle matrici di rigidezza k_{ij} e smorzamento c_{ij} , che sono trascurabili a rotore fermo, diventano significativi all'aumentare della velocità di rotazione. Il loro effetto combinato riduce lo smorzamento complessivo del sistema, dando origine a vibrazioni autoeccitate con frequenza asincrona. In letteratura questo tipo di instabilità è noto come *asynchronous whirl*, anche se alcuni autori lo denominano *half speed whirl* in quanto lo hanno riscontrato ad una frequenza pari alla metà di quella di rotazione. Il fenomeno sopraggiunge ad una certa velocità di rotazione, chiamata *onset speed*, che costituisce quindi un limite superiore alla velocità massima raggiungibile dal sistema.

Tra le due tipologie di instabilità descritte, l'*asynchronous whirl* è senza dubbio la più insidiosa e difficile da controllare. Un considerevole sforzo nella ricerca sui supporti lubrificati a gas è stato profuso al fine di eliminare il problema, o quantomeno a posticiparne l'insorgenza a velocità maggiori. Nei paragrafi che seguono sono brevemente descritte le principali tecniche o accorgimenti che vengono comunemente impiegati a tal fine.

Regole di buon progetto. Si è dimostrato [26] che il gioco radiale c incide sulla stabilità del sistema. Più nel dettaglio, si è riscontrata l'esistenza di un particolare c^* che delinea la minima velocità di soglia per l'instabilità. Per valori maggiori o minori di c^* il campo di stabilità aumenta; tuttavia, aumentare il gioco radiale penalizza la rigidezza e la capacità di carico, quindi solitamente si va nella direzione di ridurre c . Il valore minimo di gioco radiale raggiungibile è comunque limitato dalle capacità tecnologiche di lavorazione. La soglia di instabilità viene anche influenzata dal valore dell'eccentricità ε a regime, o in altre parole dal carico che viene applicato. Se il rotore è debolmente caricato, è maggiormente incline al fenomeno di instabilità. [2].

Forma delle superfici. Utilizzando geometrie più elaborate rispetto alle semplici superfici cilindriche è possibile massimizzare gli effetti aerodinamici e migliorare la stabilità del supporto. Le soluzioni più adottate, raffigurate nella **Figura 1.8**, sono:

- a) superfici trilobate (*three lobe journal bearings*);
- b) *step bearing*, poco diffusa in quanto di complessa realizzazione;
- c) *grooved journal bearings*, dove su una delle superfici cilindriche vengono ricavati dei solchi, detti *ragnature*. Particolarmente diffusa è la ragnatura a lisca di pesce (*herringbone grooved*).

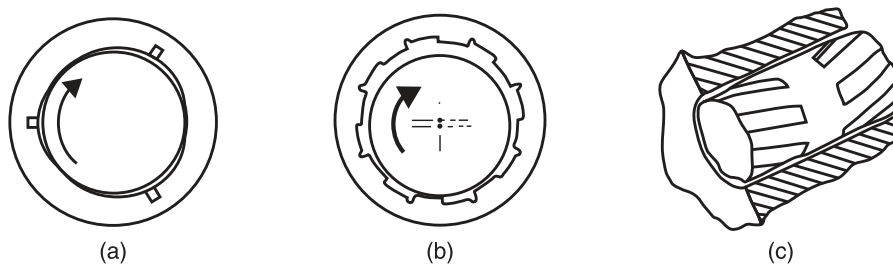


Figura 1.8: Geometrie particolari delle superfici. [2]

Deformabilità delle superfici. La stabilità del supporto migliora se le superfici che determinano il meato hanno la possibilità di modificarsi sotto l'azione della pressione che vige nel meato stesso.

I cuscinetti a pattini pivotanti (*tilting pad*, rappresentati in **Fig. 1.9**) sono formati da settori circolari (*pad*) che hanno la possibilità di ruotare attorno ad un punto. Questo conferisce alle superfici la capacità di autoallinearsi rispetto al rotore, e permette di utilizzare tolleranze di lavorazione sull'albero meno stringenti rispetto ad un classico supporto cilindrico a pareti fisse. [2]

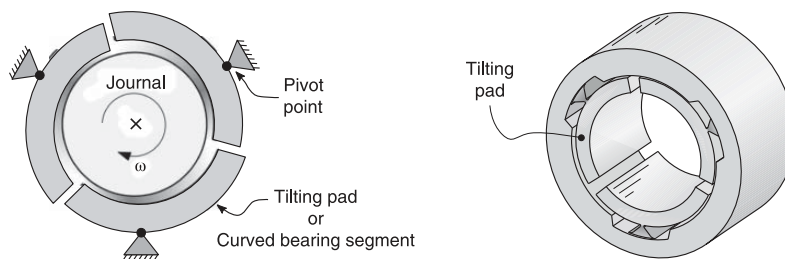


Figura 1.9: *Tilting pad bearing*. [22]

Nei cuscinetti a lamine (*foil bearing*, rappresentati in **Fig. 1.10**), la superficie del supporto non è rigida ma si può deformare sotto l'azione della pressione.

Rappresenta, sotto certi aspetti, una versione migliorata dei precedenti, in quanto elimina possibili problematiche negli snodi dei *pad*.

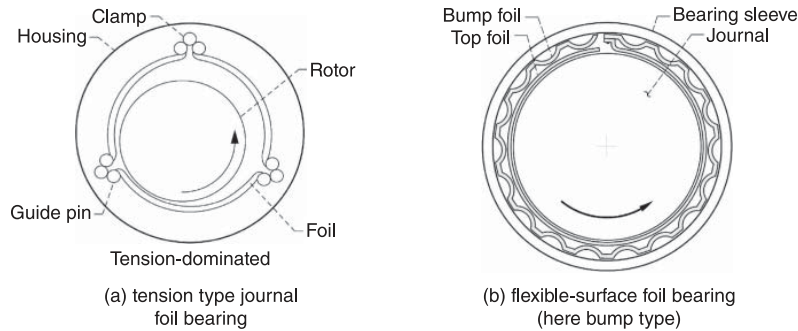


Figura 1.10: Foil bearing. [13]

Aggiunta di smorzamento esterno. Per aumentare lo smorzamento complessivo del sistema rotore-supporti, e quindi migliorarne la stabilità, si possono aggiungere elementi smorzanti esterni. In particolare, con i cuscinetti lubrificati a gas è pratica comune il montaggio flottante tramite anelli O-Ring. Essi infatti possiedono buone capacità smorzanti (date dal materiale elastomerico), sono largamente disponibili sul mercato in varie dimensioni e mescole e la loro geometria ben si adatta alla forma del cuscinetto radiale. Un chiaro esempio si può trovare nell'articolo di Powell [24], dove viene presentata l'applicazione della tecnica su una turbina dentale utilizzata in odontoiatria.

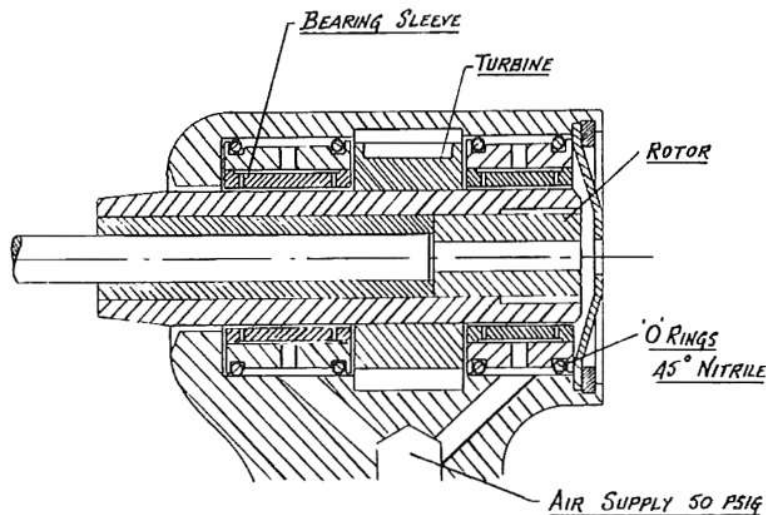


Figura 1.11: Montaggio dei supporti su O-Ring. [24]

1.1.4 Stato dell'arte nella ricerca

Modellazione

La teoria della lubrificazione a film fluido ha come punto di partenza il lavoro di Reynolds [27]. La sua applicazione al caso particolare dei supporti ad aria trova come principale ostacolo la non linearità delle equazioni, causata dalla comprimibilità del gas, che impedisce una soluzione in forma chiusa dell'equazione completa. Ausman [3] presentò una soluzione analitica approssimata, ricavata sotto l'ipotesi di piccole eccentricità; le espressioni ricavate sono utili per un progetto preliminare del supporto, ma non sono utilizzabili per analisi più complesse. Inoltre, la soluzione copre solamente il caso di supporto aerodinamico.

Per questo motivo l'attenzione si è focalizzata su approcci numerico-analitici o puramente numerici. I primi consistono essenzialmente nella linearizzazione delle equazioni di Reynolds mediante approssimazioni: tra i più utilizzati vi sono il metodo *PH* linearizzato ed il *perturbation method*. Invece, con una soluzione puramente numerica, l'equazione di Reynolds viene integrata aggiornando la distribuzione di pressione a piccoli intervalli di tempo Δt , nota la geometria del meato. Il calcolo numerico offre sia differenti tecniche di avanzamento in tempo (metodi espliciti, impliciti e semi-impliciti) che discretizzazione del dominio (differenze finite, elementi finiti).

Sono quindi numerosi gli articoli che trattano la questione utilizzando tecniche differenti ad applicate a casi particolari. Ad esempio, uno dei primi articoli a trattare la soluzione numerica dell'equazione di Reynolds fu quello di Raimondi [25] (1961), che usò il metodo delle differenze finite applicato al caso di un supporto aerodinamico. Czolczynski [11] (1999) usò il metodo delle direzioni alternate, che è un tipo di metodo semi-implicito, con una discretizzazione alle differenze finite applicato ad un supporto aerostatico. Infine, in Wang et al. [31] (2024) viene utilizzato il metodo del sovrarilassamento (*Successive Over Relaxation*), con una discretizzazione agli elementi finiti.

Sperimentazione

Nella letteratura scientifica sono presenti diverse varianti di banchi prova per supporti lubrificati a gas, realizzati secondo una di queste configurazioni:

- i supporti in prova sorreggono direttamente l'albero, ed il carico viene impartito con un dispositivo esterno, solitamente nella mezzeria del rotore (**Fig. 1.12a**);
- il rotore è supportato da una coppia di cuscinetti ausiliari, mentre la boccola in prova è calzata sull'albero rimanendo sospesa entro i supporti (**Fig. 1.12b**) o nella parte a sbalzo del rotore (**Fig. 1.12c**): le forzanti esterne vengono imposte alla boccola.

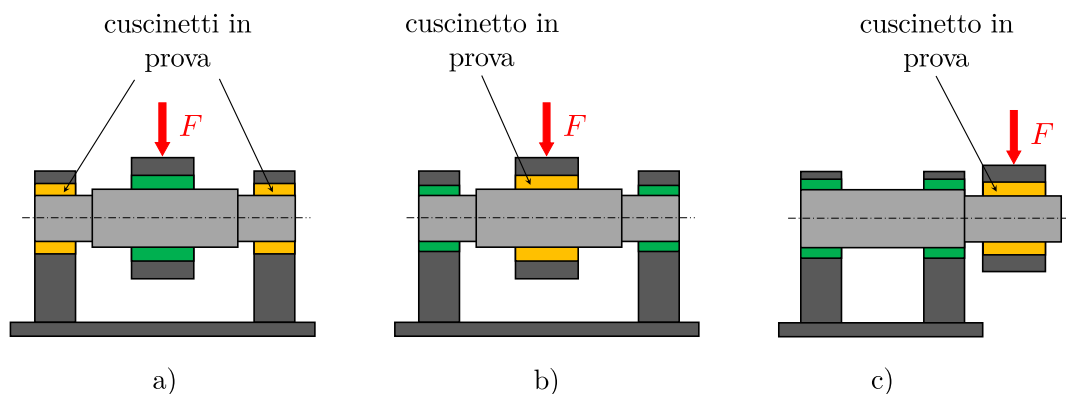


Figura 1.12: Configurazioni di banchi prova per cuscinetti.

Si riportano di seguito alcuni esempi significativi e interessanti per le particolari soluzioni ivi adottate.

Nella configurazione adottata da Cunningham et al. [10], rappresentata in **Figura 1.13**, il banco prova è composto da un rotore ad asse verticale, sorretto assialmente da un cuscinetto reggispira aerostatico e supportato radialmente dai due cuscinetti aerostatici di cui si vuole eseguire la caratterizzazione. I due cuscinetti radiali e il reggispira sono installati su tre piastre in acciaio, che vengono assemblate con appositi distanziali alla corretta distanza; una quarta piastra in alto chiude a pacchetto l'assieme. Il carico esterno agente in direzione radiale è impresso in mezzeria utilizzando un collare di carico (*load shoe*), che è sostanzialmente una metà di un cuscinetto aerostatico. Il collare è spinto contro il rotore da un cilindro pneumatico esterno. Una coppia di turbine ad aria, ricavate di pezzo sull'albero, consentono di accelerare e frenare il rotore; la velocità massima raggiunta nei test è di 25 krpm. Lo spostamento radiale dell'albero è rilevato in due piani distinti con due sensori capacitivi in direzioni perpendicolari per ciascun piano. La velocità del rotore è rilevata con un sensore induttivo affacciato sulla turbina.

Di diversa concezione è il banco prova presentato da Matta et al. [20], rappresentato in **Figura 1.14**, dove il rotore è disposto orizzontalmente ed è supportato da una coppia di cuscinetti ausiliari lubrificati ad acqua di tipo Lomakin. Il supporto aerostatico in prova, installato in un corpo (*housing*), è posizionato nella parte a sbalzo del rotore, al di fuori dei supporti ausiliari. L'assieme supporto-*housing* è vincolato assialmente con una terna di *stinger* fissati a loro volta al telaio del banco. Il carico statico, avente direzione verticale, viene stabilito da una molla precaricata, mentre il carico dinamico è dato da una coppia di *shaker* elettromagnetici perpendicolari posti a 45° rispetto alla verticale e collegati all'*housing* per mezzo di *stinger*. Un telaio a portale sorregge gli *shaker* e la molla di precarico. Il rotore è collegato con un giunto elastico ad un motore elettrico in grado di raggiungere la velocità di rotazione di 60 krpm. Quattro sensori induttivi, due perpendicolari in due piani distinti, misurano lo spostamento della boccia rispetto all'albero; in parallelo ad

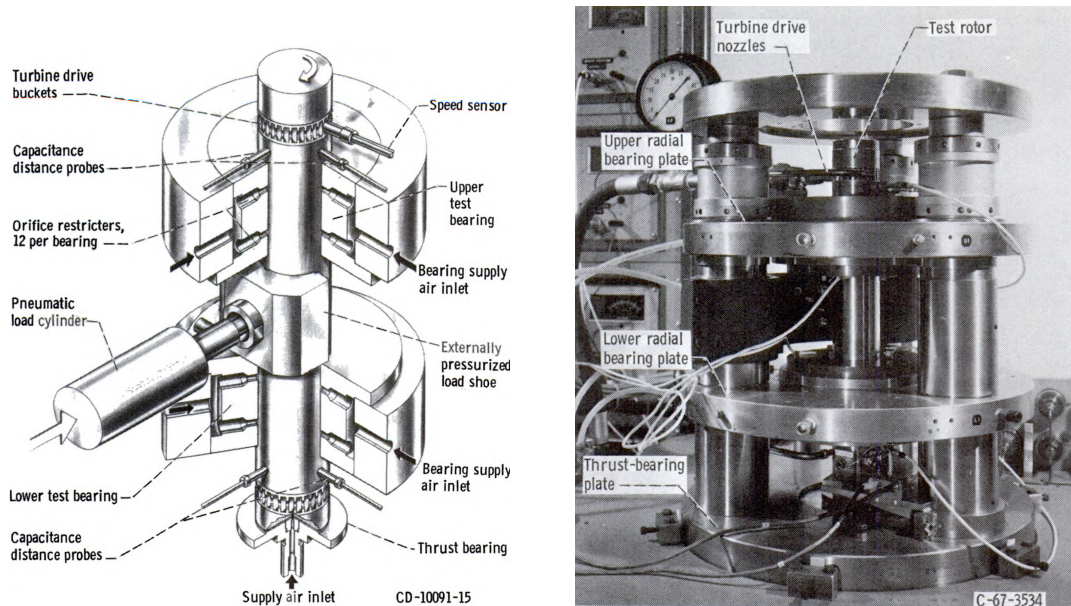


Figura 1.13: Banco prova per supporti aerostatici. Cunningham et al. [10]

essi sono anche impiegati quattro accelerometri. La forza impressa dagli *shaker* è rilevata da celle di carico installate sugli *stinger*, mentre il precarico è indicato da un dinamometro. Infine, la velocità di rotazione dell'albero è misurata da un tachimetro ottico.

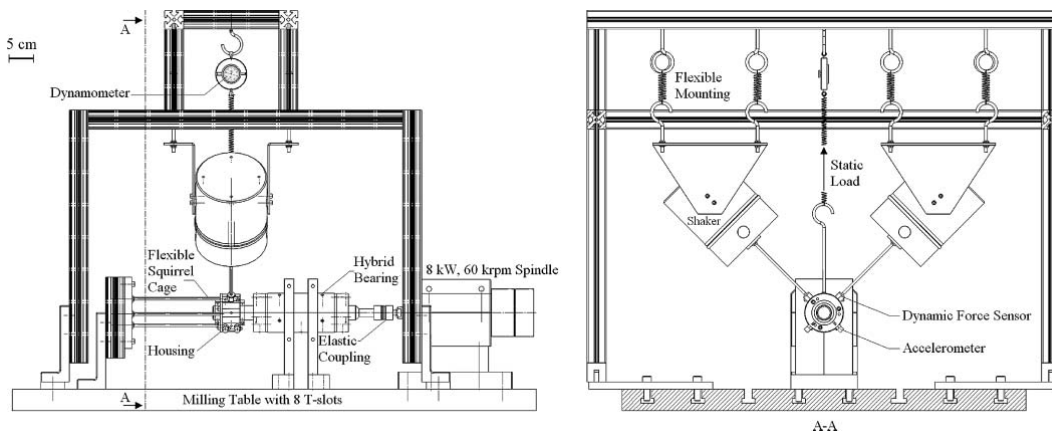


Figura 1.14: Banco prova per supporti aerostatici. Matta et al. [20]

Il banco prova per supporti di tipo *foil bearing* utilizzato da Mahner et al. [19], riportato in **Figura 1.15**, aveva l'obiettivo di valutare la coppia d'attrito, la velocità minima di sostentamento (*lift-off*) e il comportamento in relazione alla temperatura. Il rotore è sorretto da quattro cuscinetti a sfere obliqui precaricati in configurazione

ad X. Gli autori hanno verificato che la rigidezza dei cuscinetti fosse sufficientemente maggiore rispetto a quella del *foil bearing* in prova, in modo da non influenzare le misure. Il rotore è accoppiato all'albero di un elettromandrino, utilizzato in questo contesto come motore, tramite un giunto a soffietto. Il cuscinetto in prova è contenuto in un alloggiamento, ed è realizzato in due parti.

Sull'alloggiamento sono stati realizzati una decina di fori filettati radiali, che permettono l'avvitamento di un'asta (*torque rod*) in diverse posizioni angolari. L'asta ha il compito di trasmettere la coppia d'attrito, che tende a far ruotare tutto l'assieme cuscinetto-alloggiamento, ad una cella di carico tramite un cavo orizzontale. In direzione opposta, sempre collegata all'asta, ci sono due molle fissate al telaio che contribuiscono al posizionamento iniziale e forniscono un precarico torsionale all'assieme. Il carico esterno viene applicato tramite un attuatore lineare, fissato ad un telaio a portale, la cui parte mobile è collegata all'asta di cui sopra tramite un cavo in direzione verticale. Una cella di carico misura la forza imposta.

Un coppia di sensori induttivi a correnti parassite misurano lo spostamento del cuscinetto in prova; altri due sensori induttivi rilevano l'oscillazione dell'albero. Due accelerometri piezoelettrici, uno sul cuscinetto a sfere e l'altro sull'elettromandrino, ne monitorano la condizione operativa. Infine, la temperatura del cuscinetto in prova e di quelli di supporto al rotore viene misurata con termocoppie, mentre la temperatura del rotore viene rilevata con una coppia di termometri ad infrarossi.

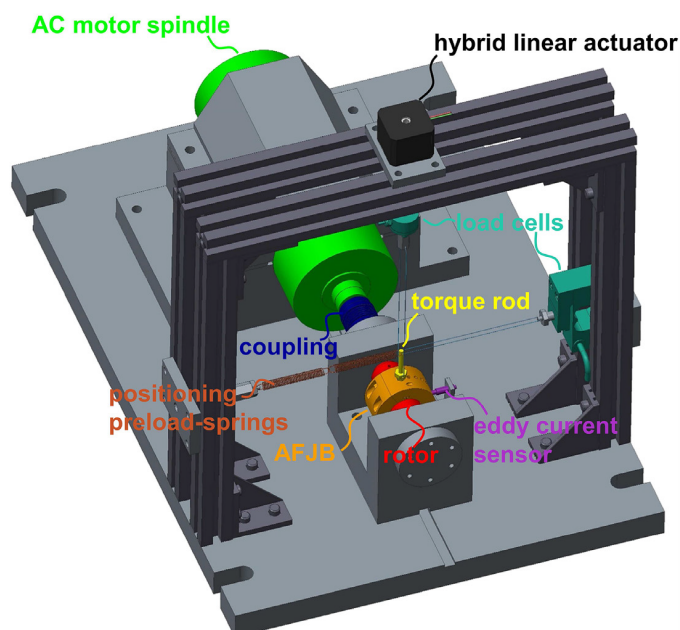


Figura 1.15: Banco prova per *foil bearing*. Mahner et al. [19]

Infine, si menziona il *setup* sperimentale adottato da Shalash et al. [28], mostrato in **Figura 1.16**, che aveva come obiettivo la misura del profilo di pressione all'interno del meato di un cuscinetto aerostatico. I cuscinetti in prova sono fissati in due supporti a collare ancorati al basamento del banco. Essi sono identici da un punto di vista del numero e disposizione dei fori di alimentazione e delle dimensioni geometriche; tuttavia, un cuscinetto è stato realizzato con prese di pressione per la misurazione del profilo di pressione nel senso circonferenziale in 25 punti, mentre l'altro in direzione assiale con 6 punti. Il rotore viene trascinato da un motore elettrico collegato tramite un albero flessibile. Le misure di pressione sono eseguite con trasduttori piezoresistivi; la portata d'aria per ciascuna boccola è rilevata con due flussimetri ad effetto Coriolis. Infine lo spostamento del rotore è misurato con sensori capacitivi lungo due direzioni perpendicolari in corrispondenza di ciascun supporto.

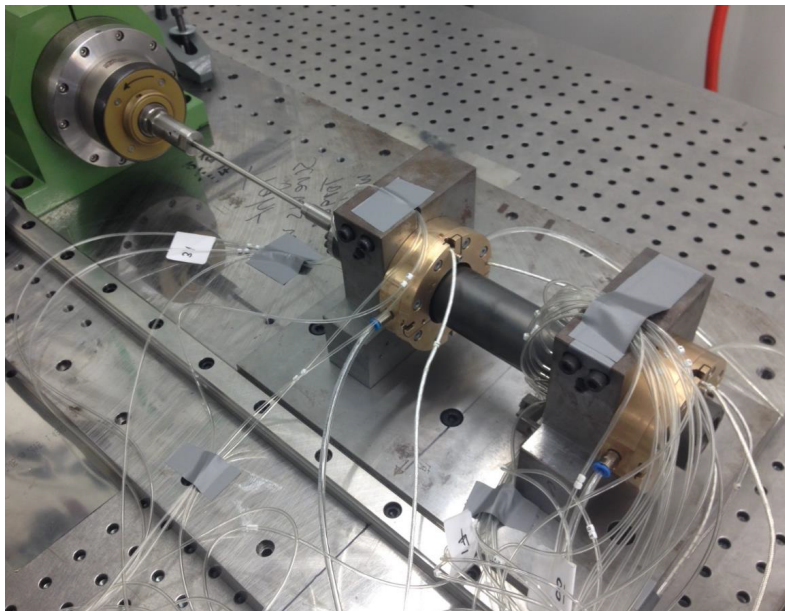


Figura 1.16: Banco per il rilievo del profilo di pressione. Shalash et al. [28]

1.2 O-Ring

1.2.1 Geometria e materiali

Gli O-Ring sono anelli a sezione circolare che vengono comunemente impiegati come elementi di tenuta. Inoltre la loro forma, semplicità e disponibilità ha portato al loro utilizzo nei supporti ad aria come elementi smorzanti. Gli O-Ring comunemente presenti nel mercato sono in materiale elastomerico; in particolare, i materiali più utilizzati sono:

- gomma nitrilica (NBR);
- gomma siliconica;
- gomma fluorurata (FKM, nota anche con il nome commerciale Viton®);
- gomma perfluorinata (FFKM, nota anche come Kalrez®).

Un parametro utile a caratterizzare un materiale polimerico è la durezza, che viene indicata da un numero riferito alla scala Shore A. Il valore è ricavato da una prova di indentazione, dove si valuta la profondità dell'impronta realizzata da un penetratore normalizzato su un campione del materiale. Per i materiali sopra elencati, si ricade solitamente nell'intervallo che va dai 50 ai 90 Shore.

1.2.2 Condizioni di montaggio

Per assolvere al suo compito, l'O-Ring è montato nella sua sede con un determinato precarico. Più precisamente, durante il montaggio si determina un allungamento circonferenziale (*stretch*) ed una compressione radiale (*squeeze*). Indicando con D il diametro interno e con d il diametro di corda dell'O-Ring, con D_i e D_e i diametri delle superfici di riscontro interna ed esterna (come indicato in **Figura 1.17**), si definiscono i due parametri *stretch* ε e *squeeze* δ secondo le rispettive **Equazioni 1.1a** e **1.1b**:

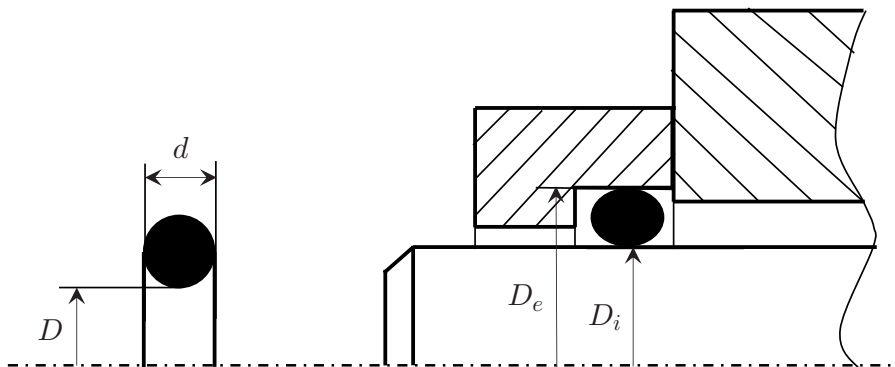


Figura 1.17: Condizioni di montaggio.

$$\varepsilon = \frac{D_i - D}{D} \quad (1.1a)$$

$$\delta = 1 - \frac{D_i - D_e}{2d} \quad (1.1b)$$

Quando l'O-Ring viene utilizzato come elemento di tenuta, i valori di *stretch* e *squeeze* nominali vengono scelti in base al livello di pressione che deve sopportare

in esercizio ed alla tipologia di tenuta (statica o dinamica). Inoltre, essi influenzano anche le proprietà dinamiche, ovvero i coefficienti di rigidità e smorzamento.

1.2.3 Caratterizzazione dinamica

A seguito del loro impiego nei cuscinetti come elementi smorzanti, la caratterizzazione dinamica degli O-Ring è diventata un punto cruciale nell'analisi di stabilità del sistema rotore-supporti. Facendo riferimento al modello viscoelastico di Kelvin-Voigt (descritto nella **Sezione 2.2**) le proprietà degli O-Ring si possono descrivere con due parametri concentrati: la rigidità k e lo smorzamento c . Essi dipendono dal materiale, dalle dimensioni, dall'ampiezza e frequenza di eccitazione, dalla temperatura e dal precarico [12]. Per tenere conto di questi fattori è necessaria un'attività sperimentale approfondita: per lo svolgimento dei test sono possibili due approcci differenti, diretto oppure indiretto.

Metodo diretto

Il metodo diretto consiste essenzialmente nell'imporre una forza F sinusoidale, in direzione radiale, all'O-Ring in prova, registrando lo spostamento x . Ripetendo questa procedura a diverse frequenze di eccitazione è possibile ricavare la funzione di trasferimento sperimentale $T_{exp}(\omega)$, definita da

$$T_{exp}(\omega) = \frac{F(\omega)}{x(\omega)}$$

Facendo riferimento al modello a parametri concentrati di Kelvin-Voigt (**Sez. 2.2**), dall'equilibrio delle forze si può scrivere:

$$F(t) = kx(t) + c\dot{x}(t)$$

Esprimendo lo spostamento sinusoidale imposto x e la sua derivata in forma complessa attraverso la relazione di Eulero¹, si può ricavare l'espressione analitica della funzione di trasferimento:

$$T(\omega) = \frac{F(\omega)}{x(\omega)} = k + j\omega c$$

Confrontando le funzioni di trasferimento analitica e sperimentale è possibile ricavare k e c :

$$k(\omega) = \operatorname{Re} \left(\frac{F(\omega)}{x(\omega)} \right)$$

$$c(\omega) = \frac{1}{\omega} \operatorname{Im} \left(\frac{F(\omega)}{x(\omega)} \right)$$

¹ $e^{j\omega t} = \cos(\omega t) + j \sin(\omega t)$

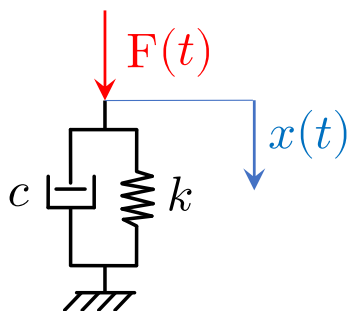


Figura 1.18: Modello 1-DOF, metodo diretto.

Il principio alla base del metodo diretto è semplice, tuttavia si riscontrano alcuni svantaggi nell'applicazione pratica. Per il calcolo viene richiesta una misura di spostamento ed una di forza, che risulta più soggetta ad errori. Inoltre, la risonanza della struttura che costituisce il banco prova può limitare il campo di frequenze esaminabile, così come le prestazioni dello *shaker* utilizzato.

Metodo indiretto (BERM)

Nel metodo indiretto, noto anche come *base excitation - mass resonance method* o BERM, l'eccitazione dinamica dell' O-Ring viene indotta dall'oscillazione di una massa sospesa. Questa tecnica sfrutta la risonanza del sistema equivalente massa-molla-smorzatore con eccitazione della base, rappresentato in **Figura 1.19**. Dal

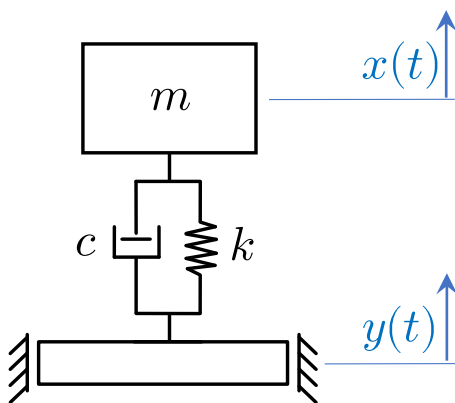


Figura 1.19: Modello 1-DOF, metodo BERM

diagramma di corpo libero della massa m si può scrivere l'equazione di equilibrio:

$$m\ddot{x}(t) + c[\dot{x}(t) - \dot{y}(t)] + k[x(t) - y(t)] = 0 \quad (1.3)$$

Applicando uno spostamento sinusoidale alla base $y(t) = Y_0 \sin(\omega t)$, e sfruttando la relazione di Eulero, si può riarrangiare l' **Eq. 1.3** ed esplicitare la funzione di

trasferimento nota come *trasmissibilità* $H(\omega)$:

$$H(\omega) = \frac{X(\omega)}{Y(\omega)} = \frac{k(\omega) + j\omega c(\omega)}{k(\omega) - m\omega^2 + j\omega c(\omega)} \quad (1.4)$$

Indicando con $A(\omega) = x_0/y_0$ è il rapporto tra ampiezze di vibrazione, e con $\phi(\omega)$ lo sfasamento angolare tra l'ingresso $y(t)$ e l'uscita $x(t)$, è possibile estrarre i valori di rigidità k e smorzamento c secondo le **Equazioni 1.5a** e **1.5b**:

$$k(\omega) = \frac{m\omega^2 A(\omega) [A(\omega) - \cos \phi(\omega)]}{1 + A(\omega) [A(\omega) - 2 \cos \phi(\omega)]} \quad (1.5a)$$

$$c(\omega) = \frac{m\omega A(\omega) \sin \phi(\omega)}{1 + A(\omega) [A(\omega) - 2 \cos \phi(\omega)]} \quad (1.5b)$$

Riassumendo, per una data massa m , è possibile calcolare i coefficienti k e c a differenti frequenze di eccitazione ω partendo dal rapporto $A(\omega)$ e lo sfasamento $\phi(\omega)$. A differenza del metodo diretto, quindi, non necessita la misura della forza imposta alla base: è sufficiente acquisire gli spostamenti, delle velocità o delle accelerazioni della massa risonante e dell'alloggiamento.

Osservando le **Eq. 1.5a** e **1.5b** si nota che, in particolare per lo smorzamento, i valori calcolati sono molto sensibili al valore di ϕ . Considerando gli inevitabili errori nella misura di ϕ , quando esso assume valori prossimi a 0° o 180° il calcolo dei coefficienti non può essere considerato attendibile. Analizzando la risposta in frequenza della trasmissibilità, si osserva che l'angolo di fase è pressoché nullo a basse ω , in corrispondenza della frequenza di risonanza è attorno ai 90° per poi tendere a 180° per ω maggiori.

Pertanto una buona regola per ottenere dati sperimentali validi è fare in modo che la risonanza del sistema cada nell'intervallo di frequenze di interesse per il test. Essa è determinata dai tre parametri concentrati del modello di **Fig. 1.19**, ovvero la massa m , la rigidità k e lo smorzamento c ; tuttavia gli ultimi due sono oggetto di misura, e quindi si può intervenire solamente sulla massa. L'effetto della variazione di m si può cogliere osservando la **Figura 1.20**, dove la funzione di trasferimento è stata tracciata utilizzando due masse m_1 ed m_2 differenti, a parità di k e c . La rigidità e lo smorzamento utilizzati per la ricostruzione della trasmissibilità sono funzioni della frequenza di eccitazione f secondo una legge di potenza che approssima i dati sperimentali (si vedano le **Eq. 3.1** nel **Paragrafo 3.1.3**). Le aree con sfondo colorato rappresentano gli intervalli di validità del test, secondo i limiti indicati da Darlow e Zorzi [12] che suggerisce di scartare i dati ricavati con ϕ al di fuori dell'intervallo $15^\circ \div 165^\circ$. Si nota perciò che la riduzione della massa oscillante ha un duplice effetto: innalzare la frequenza di risonanza ed ampliare il campo di validità del test.

Per un dimensionamento preliminare di m , quando k e c non sono ancora noti, si può trascurare lo smorzamento e considerare un valore di rigidità opportuno

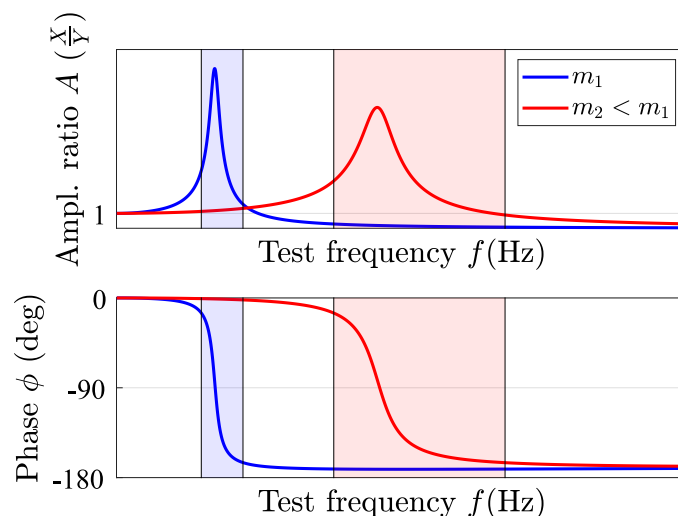


Figura 1.20: Diagrammi di Bode, metodo BERM.

basandosi sulla letteratura in merito, oppure procedere per tentativi. Per coprire un range esteso di frequenze di test potrebbe essere necessario utilizzare alberi con masse differenti, ad esempio usando diversi materiali, praticando dei fori di alleggerimento o con inserti removibili.

1.2.4 Stato dell'arte nella ricerca

Una applicazione del metodo diretto per la caratterizzazione dinamica degli O-Ring si può trovare nell'articolo di Al-Bender et al. [1], dove è stata condotta una campagna di test su O-Ring in Viton[®] e Kalrez[®]. In **Figura 1.21** è rappresentato il banco prova utilizzato dagli autori. L'O-Ring oggetto di misura è montato tra l'albero (3) e una boccola (7). L'albero è fissato ad un supporto (5) a sua volta collegato ad un telaio a portale (6), ed è quindi fisso. La boccola invece rimane flottante, e viene collegata ad uno *shaker* in grado di imprimere una forza sinusoidale in direzione radiale. Lo spostamento della boccola è rilevato da due sensori capacitivi (8), mentre la forza trasmessa è misurata dalla cella di carico (4) posta tra il supporto e il telaio. I test sono stati eseguiti a temperatura ambiente, utilizzando O-Ring di diverse dimensioni e materiali con diversi livelli di *squeeze*. I risultati riportano la rigidezza e lo smorzamento in funzione della frequenza di eccitazione, in forma di grafici, ed i coefficienti della funzione di potenza che interpola i dati. Inoltre, i risultati sono stati elaborati con l'intento di evidenziare l'incidenza delle dimensioni geometriche dell'O-Ring sulle caratteristiche dinamiche. Gli autori hanno tratto le seguenti conclusioni:

- all'aumentare della frequenza di eccitazione, la rigidezza aumenta mentre lo smorzamento diminuisce;

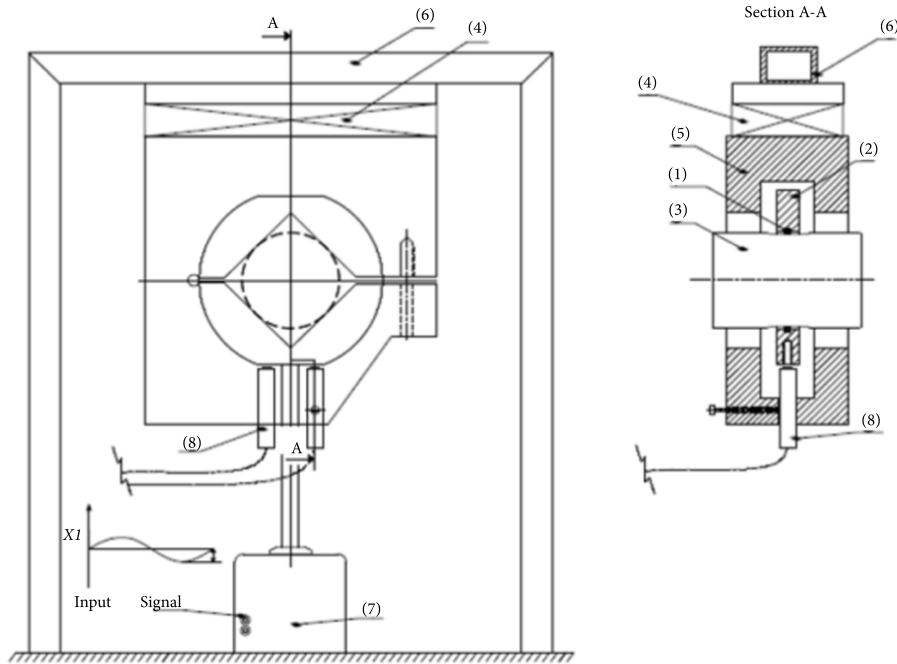


Figura 1.21: Banco prova per O-Ring. Al-Bender et al. [1]

- sia la rigidezza che lo smorzamento aumentano con le dimensioni dell'O-Ring e dello *squeeze*;
- un materiale con durezza Shore maggiore possiede maggior rigidezza e smorzamento.

Il metodo BERM risulta tuttavia il metodo più utilizzato e ricorrente in letteratura. In questo senso un punto di riferimento è il lavoro svolto da Chiang et al. [7], che formularono uno dei primi design di banco prova per la caratterizzazione dinamica di elastomeri. Invece, una applicazione più recente e focalizzata sugli O-Ring è quella di Bättig e Schiffmann [4], rappresentata in **Figura 1.22**. Due O-Ring in prova vengono calzati sull'albero (1), che costituisce la massa oscillante del sistema. Lo *squeeze* viene definito tramite due coperchi intercambiabili (4), che si innestano nel corpo principale (*housing*, 3). L'*housing* è fissato alla tavola di uno *shaker* elettromagnetico, che gli impone uno spostamento sinusoidale. Lo spostamento assoluto dell'*housing* e della massa oscillante vengono rilevati da due sensori capacitivi (6). Con questo *setup*, sono stati misurati i coefficienti di rigidezza e smorzamento per O-Ring in NBR di due differenti mescole e di diverse dimensioni, cambiando lo *squeeze* per mezzo dei coperchi. Per quanto riguarda le caratteristiche dinamiche, le conclusioni sono simili a quelle riportate da Al-Bender et al. [1].

Sempre nell'articolo di Bättig e Schiffmann [4], i dati ottenuti in via sperimentale sono stati utilizzati per la creazione di un modello adimensionalizzato utile per

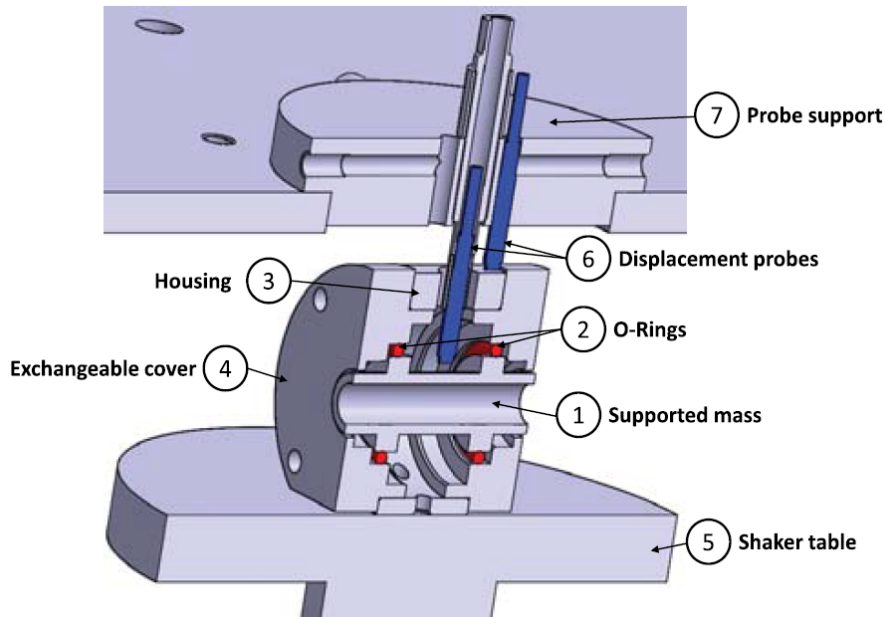


Figura 1.22: Banco prova per O-Ring. Bättig e Schiffmann [4]

la stima dei coefficienti di rigidità e smorzamento. Questo tipo di approccio è stato intrapreso precedentemente anche da Shoyama e Fujimoto [30], che dopo aver misurato le proprietà dinamiche degli O-Ring realizzarono un modello agli elementi finiti sfruttando i dati sperimentali.

1.3 Rotori su cuscinetti ad aria

1.3.1 Analisi e diagnostica delle vibrazioni

L'analisi delle vibrazioni del rotore del mandrino è un punto di fondamentale importanza nel suo sviluppo. Per ottenere lavorazioni ad alta precisione, infatti, è necessario ridurre quanto più possibile le oscillazioni alla punta dell'utensile. In generale, il segnale di vibrazione complessiva è composto da una somma di armoniche a differenti frequenze; relativamente alla velocità di rotazione, si possono distinguere in

- *subsincrona* ($< 1\times$), *subarmoniche* se sottomultiple della frequenza di rotazione;
- *sincrona* ($1\times$);
- *supersincrona* ($> 1\times$), *superarmoniche* se multiple intere della frequenza di rotazione.

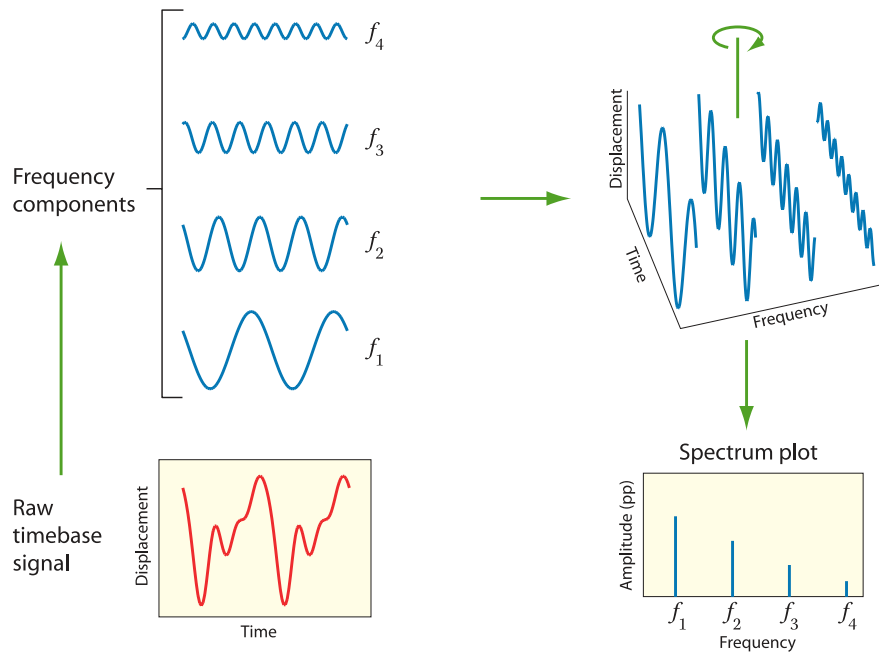


Figura 1.23: Componenti armoniche della vibrazione. [6]

Le componenti di vibrazione hanno origine da diversi fenomeni: ad esempio, lo squilibrio dà origine ad una vibrazione sincrona, mentre l'instabilità analizzata nella **Sezione 1.1.3** è visibile come componente asincrona. Nell'ottica di abbattere il livello globale di vibrazione, quindi, è importante diagnosticare correttamente la causa per poter intervenire di conseguenza.

Due strumenti utili ad interpretare le informazioni provenienti da una misura di vibrazione sono i diagrammi *cascade* e *waterfall*. Entrambi contengono gli spettri delle vibrazioni, ovvero la loro rappresentazione come ampiezze nel dominio delle frequenze. Nel diagramma *cascade* (**Fig. 1.24**) sono riportati gli spettri a differenti velocità di rotazione, mentre nel diagramma *waterfall* (**Fig. 1.25**) sono raffigurati gli spettri in diversi istanti temporali.

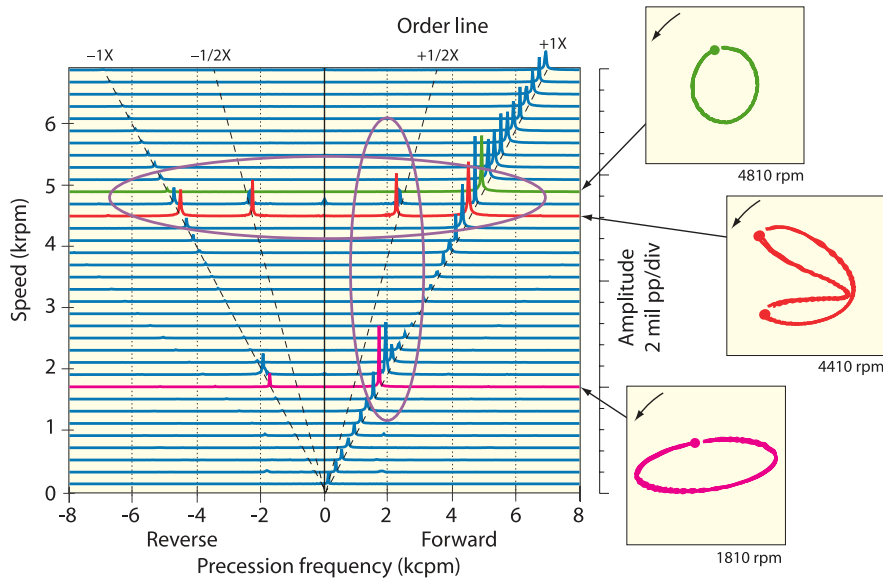


Figura 1.24: Diagramma *cascade*. [6]

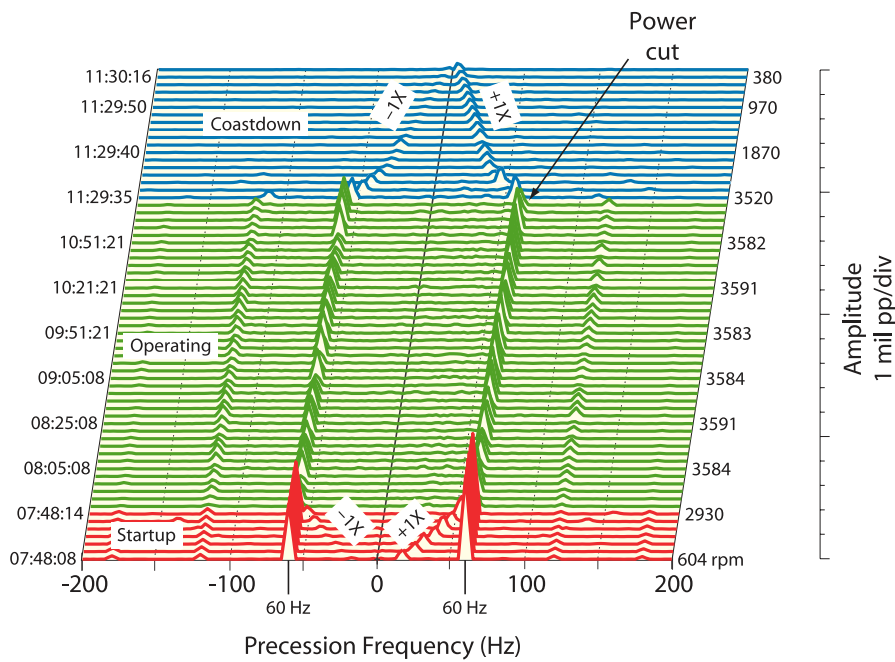


Figura 1.25: Diagramma *waterfall*. [6]

1.3.2 Equilibratura del rotore

Dal momento che lo squilibrio origina la componente più importante della vibrazione globale, il corretto bilanciamento dell'albero del mandrino è un'operazione

fondamentale. L'operazione di equilibratura consiste essenzialmente nel modificare la distribuzione di massa del rotore rispetto all'asse di rotazione, con l'intento di correggere due tipologie di squilibrio:

- squilibrio *statico*, se il centro di massa del rotore non giace sull'asse di rotazione;
- squilibrio *di coppia*, se l'asse di rotazione non è allineato ad uno degli assi principali d'inerzia.

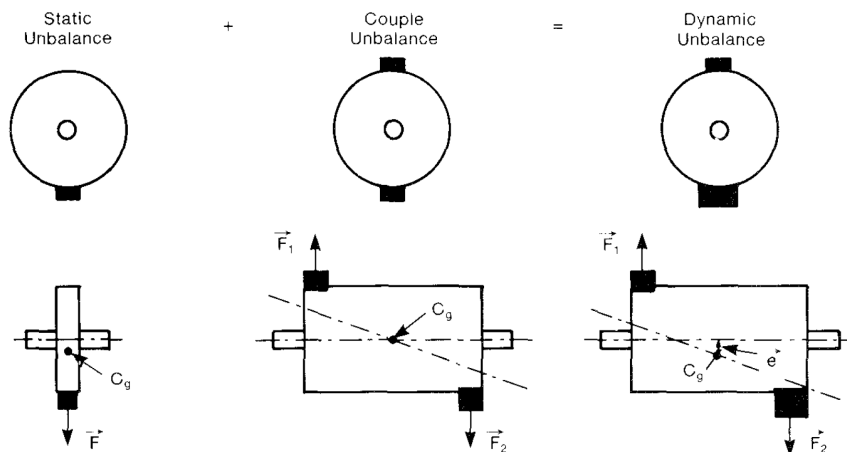


Figura 1.26: Squilibrio statico, di coppia, dinamico. [18]

Queste due componenti sono totalmente indipendenti l'una dall'altra; nel caso più generale, dove sono entrambi presenti, si parla di squilibrio *dinamico*. Per correggere uno squilibrio dinamico è generalmente necessaria l'aggiunta o rimozione di due masse m_1 ed m_2 dal rotore in due piani distinti, ad una certa distanza r dall'asse e posizione angolare ϕ . In questo modo è possibile portare il baricentro del rotore sull'asse di rotazione, ed allineare l'asse d'inerzia allo stesso.

Per valutare lo squilibrio residuo presente in un organo rotante si utilizzano delle macchine per equilibratura, che si possono classificare in due categorie:

- a supporti rigidi, dove si rilevano direttamente le forze generate dagli squilibri e trasmesse ai supporti;
- a supporti oscillanti, dove si risale allo squilibrio partendo da misure di vibrazioni.

Le macchine a supporti rigidi sono più semplici da utilizzare in quanto sono permanentemente calibrate e restituiscono la lettura con un solo lancio. Infatti, conoscendo la posizione relativa dei supporti rispetto ai piani di correzione, tramite un bilancio di forze la macchina riesce a calcolare direttamente lo squilibrio e quindi la

massa correttiva. Tuttavia, dal momento che si basano su misure di forza, hanno una sensibilità limitata.

Le macchine a supporti oscillanti, invece, basano il loro funzionamento su misure di vibrazione e perciò necessitano di una procedura di calibrazione, descritta nel paragrafo successivo. Questa tipologia di macchina, affidandosi a misure di vibrazione, è caratterizzata da una maggiore sensibilità.

Metodo dei coefficienti di influenza

L'obiettivo di questa procedura è la quantificazione dello squilibrio residuo partendo da misure di vibrazione (Genta [15]). Essi sono correlati da numeri complessi detti *coefficienti di influenza*, che esprimono l'effetto di una massa j -esima in termini di vibrazione sul piano di misura i -esimo:

$$\bar{A}_{ij} = \frac{\bar{V}_{ij} - \bar{V}_{i0}}{\bar{M}_j} \quad (1.6)$$

Si noti che con la notazione complessa di una grandezza è possibile esprimere in modo compatto il suo modulo e la sua posizione angolare rispetto ad un sistema di riferimento solidale all'albero. I coefficienti di influenza sono caratteristici del rotore in esame, e si calcolano con la seguente procedura:

- 1) si esegue una misura preliminare delle vibrazioni del rotore nei due piani (\bar{V}_{10} e \bar{V}_{20});
- 2) si aggiunge una massa campione \bar{M}_1 nel primo piano di correzione, si misurano nuovamente le vibrazioni nei piani (\bar{V}_{11} e \bar{V}_{21}) e si calcolano coefficienti di influenza relativi alla prima massa:

$$\bar{A}_{11} = \frac{\bar{V}_{11} - \bar{V}_{10}}{\bar{M}_1} \quad \bar{A}_{21} = \frac{\bar{V}_{21} - \bar{V}_{20}}{\bar{M}_1}$$

- 3) si rimuove la massa \bar{M}_1 , si aggiunge una massa \bar{M}_2 nel secondo piano di correzione e si registrano nuovamente le vibrazioni (\bar{V}_{12} e \bar{V}_{22}), calcolando poi i coefficienti di influenza relativi alla seconda massa:

$$\bar{A}_{12} = \frac{\bar{V}_{12} - \bar{V}_{10}}{\bar{M}_2} \quad \bar{A}_{22} = \frac{\bar{V}_{22} - \bar{V}_{20}}{\bar{M}_2}$$

Con due piani di misura e due masse di calibrazione, si determinano perciò quattro coefficienti di influenza. Nell'ipotesi di sistema lineare, si può asserire che la vibrazione iniziale sia causata da due masse U_1 ed U_2 , giacenti nei rispettivi piani utilizzati per le masse campione, secondo le **Eq. 1.7**:

$$\begin{cases} \bar{V}_{10} = \bar{U}_1 \bar{A}_{11} + \bar{U}_2 \bar{A}_{12} \\ \bar{V}_{20} = \bar{U}_1 \bar{A}_{21} + \bar{U}_2 \bar{A}_{22} \end{cases} \quad (1.7)$$

Si può usare anche una notazione matriciale:

$$\begin{Bmatrix} \bar{V}_{10} \\ \bar{V}_{20} \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} \bar{A}_{11} & \bar{A}_{12} \\ \bar{A}_{21} & \bar{A}_{22} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \bar{U}_1 \\ \bar{U}_2 \end{Bmatrix}$$

Nota la matrice dei coefficienti di influenza e i valori di vibrazione iniziale, è possibile risolvere il sistema ottenendo le masse \bar{U}_1 e \bar{U}_2 che rappresentano lo squilibrio, per poter agire di conseguenza mediante l'aggiunta o rimozione di materiale. Nella pratica i calcoli vengono eseguiti dal software della macchina equilibratrice, che inoltre guida l'operatore nell'intera procedura.

1.3.3 Stato dell'arte nella ricerca

Waumans [33] ha studiato la risposta allo squilibrio di un rotore su cuscinetti ad aria con il banco prova rappresentato in **Figura 1.28**. L'aspetto di particolare interesse di questo banco prova è la possibilità di impostare lo squilibrio del rotore con l'utilizzo di lamine (*foil*), fissate con viti a due dischi ricavati sul rotore. Le lamine utilizzate sono di diverso spessore e con uno sbilanciamento noto, ottenuto grazie ad una geometria volutamente asimmetrica. L'angolo dello squilibrio è modificabile semplicemente riposizionando le lamine: su di esse, infatti, vi è una serie di fori circolari che ne permettono l'orientamento con step di 30°. Il rotore è sostenuto da un cuscinetto aerostatico realizzato in due parti, che assolve sia alla funzione di supporto radiale che di reggispinna. L'albero è messo in rotazione tramite la turbina Pelton ricavata sul rotore stesso in mezzeria. Il supporto è poi inserito all'interno

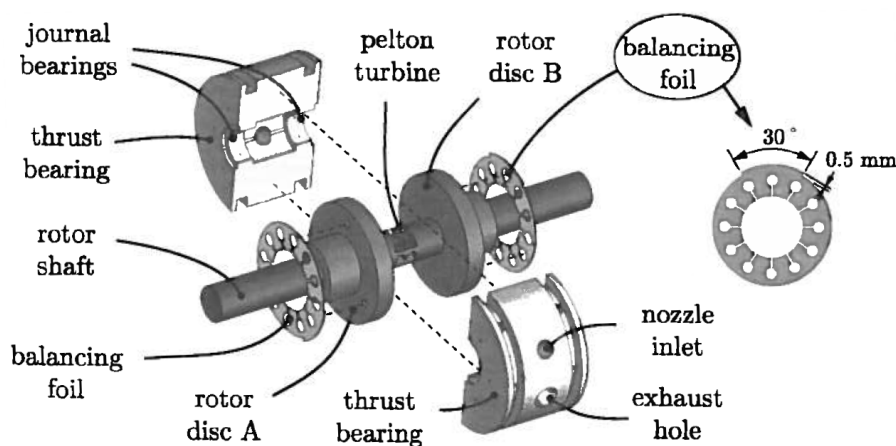


Figura 1.27: Dettaglio del setup utilizzato. Waumans [33]

di un *housing*, dove sono ricavati i fori per accedere con le sonde all'interno; il tutto viene chiuso a pacchetto con due tappi di chiusura (*closing* e *reference cover*). Lo spostamento dell'albero viene rilevato da due sensori a fibra ottica, mentre la velocità viene letta con un sensore affacciato alla turbina. La sperimentazione si

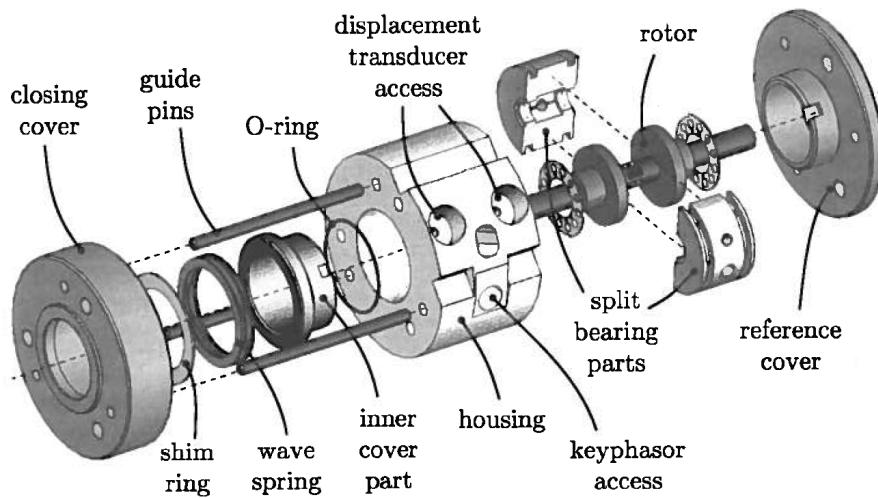


Figura 1.28: Banco prova completo. Waumans [33]

è basata dapprima sull'aspetto dell'equilibratura, evidenziandone l'effetto benefico in termini di vibrazione sincrona. Successivamente, sono stati svolti esperimenti in accelerazione e decelerazione con lo scopo di tracciare i diagrammi *waterfall*. I risultati sono poi stati impiegati per validare il modello numerico.

Un altro articolo che tratta la risposta allo squilibrio di un sistema rotore-cuscinetti è quello di Colombo et al. [9], dove un elettromandrino per lavorazioni su PCB simile a quello studiato in questa tesi viene utilizzato per validare i modelli numerici, sia nonlineari che linearizzati.

Capitolo 2

Modellazione

2.1 Modellazione dei supporti ad aria

2.1.1 Equazione di Reynolds

Alla base della teoria della lubrificazione a film fluido vi è l'equazione di Reynolds [27], che consente di calcolare la distribuzione di pressione nel meato (la porzione di spazio che divide i due elementi in moto relativo). Essa si può derivare formalmente dall'equazione di Navier-Stokes; tuttavia si procede con un approccio differente che parte dall'equazione di continuità. Nella trattazione che segue si adottano le seguenti ipotesi:

- forze di volume trascurabili;
- flusso laminare;
- fluido newtoniano isoviscoso;
- pareti impermeabili;
- assenza di scorrimento alle pareti;
- l'altezza del meato è trascurabile rispetto alle altre dimensioni.

Queste assunzioni comportano che:

- la pressione p e la viscosità μ possono essere considerati costanti lungo l'altezza del meato: $\mu = \mu(x, z)$, $p = p(x, z)$;

- gli sforzi viscosi nelle due direzioni possono essere descritti con un unico coefficiente di viscosità dinamica μ attraverso la legge di Newton-Stokes:

$$\tau_x = -\mu \frac{\partial u}{\partial y} \quad (2.1a)$$

$$\tau_z = -\mu \frac{\partial w}{\partial y} \quad (2.1b)$$

- i gradienti di velocità lungo le direzioni x ed y sono trascurabili rispetto a quelli lungo l'altezza del meato.

Si consideri un elemento infinitesimo di meato, di lati dx , dz ed altezza h , raffigurato in **Figura 2.1**. Si indicano con g_x e g_z le portate massiche per unità di profondità, e

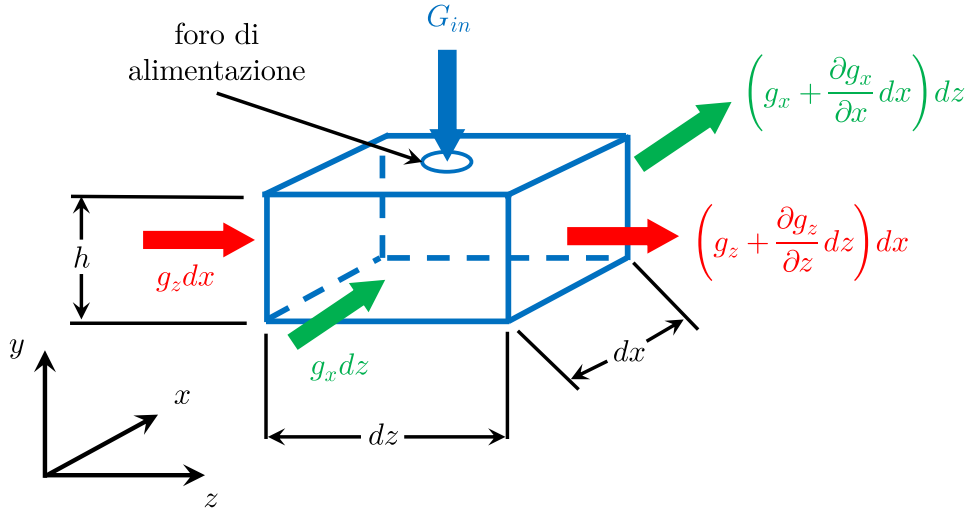


Figura 2.1: Bilancio di massa nell'elemento infinitesimo.

con G_{in} la portata in ingresso attraverso il foro di alimentazione (se presente, come nel caso dei cuscinetti aerostatici). Il bilancio di massa nell'elemento infinitesimo è dato da:

$$G_{in} + g_x dz + g_z dx - \left(g_x + \frac{\partial g_x}{\partial x} dx \right) dz - \left(g_z + \frac{\partial g_z}{\partial z} dz \right) dx = \frac{\partial m}{\partial t} \quad (2.2)$$

Inoltre, esplicitando la massa $m = \rho V = \rho dx dz h$ e riarrangiando l'equazione si ottiene:

$$G_{in} - \frac{\partial g_x}{\partial x} dx dz - \frac{\partial g_z}{\partial z} dx dz = \frac{\partial (\rho h)}{\partial t} dx dz \quad (2.3)$$

Ora occorre esprimere le portate g_x e g_z . L'equilibrio delle forze agenti sul volume infinitesimo (**Figura 2.2**) è dato da:

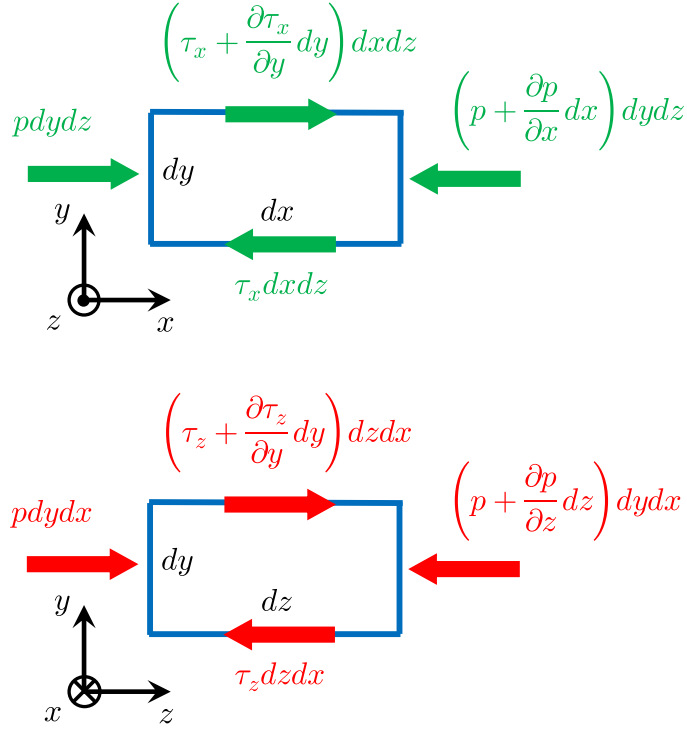


Figura 2.2: Equilibrio di forze del volume infinitesimo.

$$\begin{aligned}
 (x) \quad p dy dz + \left(\tau_x + \frac{\partial \tau_x}{\partial y} dy \right) dx dz - \tau_x dx dz - \left(p + \frac{\partial p}{\partial x} dx \right) dy dz &= 0 \\
 (z) \quad p dy dx + \left(\tau_z + \frac{\partial \tau_z}{\partial y} dy \right) dz dx - \tau_z dz dx - \left(p + \frac{\partial p}{\partial z} dz \right) dy dx &= 0
 \end{aligned} \tag{2.4}$$

dove u e w sono le velocità del fluido, rispettivamente lungo x e z . Considerando un fluido newtoniano e semplificando le **Eq. 2.4** si ottiene:

$$\begin{aligned}
 (x) \quad \frac{\partial p}{\partial x} &= \frac{\partial \tau_x}{\partial y} = \mu \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} \\
 (z) \quad \frac{\partial p}{\partial z} &= \frac{\partial \tau_z}{\partial y} = \mu \frac{\partial^2 w}{\partial y^2}
 \end{aligned} \tag{2.5}$$

Integrando due volte le **Eq. 2.5** è possibile esprimere le componenti di velocità del fluido all'interno del meato in funzione del campo di pressione:

$$\begin{aligned}
 (x) \quad u(y) &= \frac{1}{2\mu} \frac{\partial p}{\partial x} y^2 + A_1 y + A_2 \\
 (z) \quad w(y) &= \frac{1}{2\mu} \frac{\partial p}{\partial z} y^2 + B_1 y + B_2
 \end{aligned} \tag{2.6}$$

Per calcolare le costanti di integrazione si considerano le condizioni al contorno: in assenza di scorrimento, la velocità del fluido in corrispondenza delle pareti sarà pari a quella della parete stessa. La superficie superiore ha una velocità determinata dalle componenti (U_u, W_u) , mentre quella inferiore (U_l, W_l) , pertanto:

$$\begin{aligned} u(0) &= U_l \\ u(h) &= U_u \\ w(0) &= W_l \\ w(h) &= W_u \end{aligned}$$

Le costanti di integrazione A_2 e B_2 si ottengono dalla **Eq. 2.6**, ponendo $y = 0$ ed utilizzando le condizioni al contorno:

$$\begin{aligned} (x) \quad u(0) &= A_2 = U_l \\ (z) \quad w(0) &= B_2 = W_l \end{aligned}$$

Sostituendo i valori appena ricavati nell'**Eq. 2.6**, e ponendo $y = h$, si possono ricavare le altre due costanti A_1 e B_1 :

$$\begin{aligned} (x) \quad u(h) = U_u &= \frac{1}{2\mu} \frac{\partial p}{\partial x} h^2 + A_1 h + U_l \\ (z) \quad w(h) = W_u &= \frac{1}{2\mu} \frac{\partial p}{\partial z} h^2 + B_1 h + W_l \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} A_1 &= \frac{(U_u - U_l)}{h} - \frac{1}{2\mu} \frac{\partial p}{\partial x} h \\ B_1 &= \frac{(W_u - W_l)}{h} - \frac{1}{2\mu} \frac{\partial p}{\partial z} h \end{aligned}$$

Le espressioni finali dei profili di velocità in funzione dei gradienti di pressione saranno quindi:

$$\begin{aligned} (x) \quad u(y) &= \frac{1}{2\mu} \frac{\partial p}{\partial x} y^2 + \frac{(U_u - U_l)}{h} y - \frac{1}{2\mu} \frac{\partial p}{\partial x} hy + U_l \\ (z) \quad w(y) &= \frac{1}{2\mu} \frac{\partial p}{\partial z} y^2 + \frac{(W_u - W_l)}{h} y - \frac{1}{2\mu} \frac{\partial p}{\partial z} hy + W_l \end{aligned} \tag{2.8}$$

Integrando i profili di velocità lungo l'altezza del meato si ottengono delle portate volumiche per unità di profondità; considerando la densità ρ , è possibile ricavare le

espressioni delle portate massiche g_x e g_z :

$$\begin{aligned}
 g_x &= \rho \int_0^h u dy = \\
 &= \rho \int_0^h \left[\frac{1}{2\mu} \frac{\partial p}{\partial x} y^2 + \frac{y}{h} (U_u - U_l) - \frac{1}{2\mu} \frac{\partial p}{\partial x} hy + U_l \right] dy = \\
 &= \rho \left[\frac{y^3}{6\mu} \frac{\partial p}{\partial x} - \frac{hy^2}{4\mu} \frac{\partial p}{\partial x} + \frac{y^2}{2h} (U_u - U_l) + U_l y \right]_0^h = \\
 &= \rho \left(\frac{h^3}{6\mu} \frac{\partial p}{\partial x} - \frac{h^3}{4\mu} \frac{\partial p}{\partial x} + \frac{h(U_u - U_l)}{2} + U_l h \right) = \\
 &= -\frac{\rho h^3}{12\mu} \frac{\partial p}{\partial x} + \frac{\rho h U}{2}
 \end{aligned}$$

dove $U = U_u + U_l$ è la velocità relativa tra le superfici nella direzione x ; analogamente, si può ottenere g_z indicando con $W = W_u + W_l$ la velocità relativa tra le superfici nella direzione z :

$$g_z = \rho \int_0^h w dy = -\frac{\rho h^3}{12\mu} \frac{\partial p}{\partial z} + \frac{\rho h W}{2}$$

Inserendo le espressioni delle portate g_x e g_z nell'equazione di bilancio della massa (**Eq. 2.3**) e dividendo l'equazione per dx e dz si arriva alla forma generale dell'equazione di Reynolds:

$$\frac{G_{in}}{dx dz} + \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{\rho h^3}{12\mu} \frac{\partial p}{\partial x} - \frac{\rho h U}{2} \right) + \frac{\partial}{\partial z} \left(\frac{\rho h^3}{12\mu} \frac{\partial p}{\partial z} - \frac{\rho h W}{2} \right) = \frac{\partial \rho}{\partial t} h + \rho \frac{\partial h}{\partial t} \quad (2.9)$$

2.1.2 Applicazione ai cuscinetti radiali aerostatici

La formulazione dell'equazione di Reynolds nel caso di fluido comprimibile necessita di due ipotesi aggiuntive:

- il fluido è assimilabile ad un gas perfetto;
- il flusso è isoterma.

Secondo l'equazione di stato dei gas perfetti, è possibile esprimere la densità come $\rho = \frac{p}{R_g T}$, dove R_g è la costante elastica del gas e T la temperatura. L'equazione di Reynolds per i gas comprimibili assume quindi la seguente forma:

$$\begin{aligned}
 \frac{G_{in}}{dx dz} + \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{ph^3}{12\mu R_g T} \frac{\partial p}{\partial x} - \frac{ph}{R_g T} \frac{U}{2} \right) + \\
 + \frac{\partial}{\partial z} \left(\frac{ph^3}{12\mu R_g T} \frac{\partial p}{\partial z} - \frac{ph}{R_g T} \frac{W}{2} \right) = \frac{1}{R_g T} \left(\frac{\partial p}{\partial t} h + p \frac{\partial h}{\partial t} \right)
 \end{aligned} \quad (2.10)$$

Si può notare che la comprimibilità del gas apporta dei termini nonlineari nell'equazione.

Ora la si vuole applicare al caso specifico di una geometria cilindrica, come quella di un cuscinetto radiale. Con riferimento alla **Figura 2.3**, si esprime l'altezza del meato h in funzione di ϑ come

$$h(\vartheta) = c - e_x \cos \vartheta - e_y \sin \vartheta \quad (2.11)$$

Dal momento che la curvatura della superficie è trascurabile rispetto all'altezza

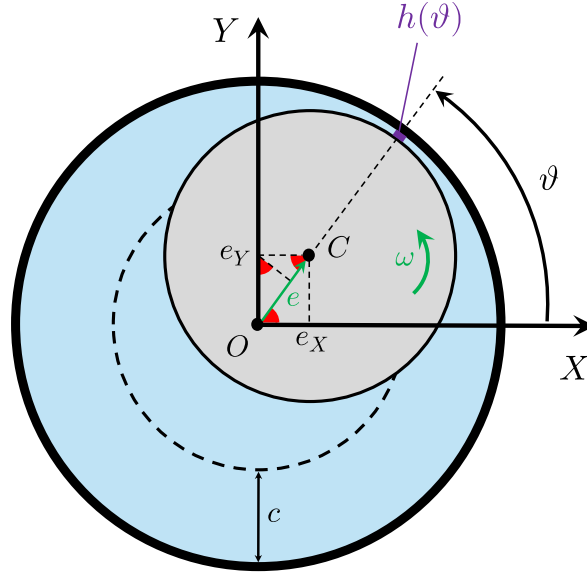


Figura 2.3: Geometria di riferimento.

del meato, è possibile introdurre la coordinata angolare ϑ e porre $x = r_0\vartheta$, con r_0 raggio del cuscinetto. In base al sistema di riferimento scelto ed alla definizione di h , l'altezza del meato minima si realizza con ϑ pari a $\vartheta_{h_{min}} = \arctan(e_y/e_x)$. Invece, la coordinata z si sviluppa lungo la direzione assiale del cuscinetto.

Il supporto è fisso, mentre l'albero ruota con velocità ω ; si ipotizza inoltre l'assenza di movimenti assiali. Con queste premesse si ha che $U = \omega r_0$ e $W = 0$. Pertanto, con il cambio di coordinate sopra descritto e le condizioni al contorno, l'equazione di Reynolds per un gas comprimibile applicata alla geometria del cuscinetto radiale diventa:

$$\begin{aligned} \frac{G_{in}}{r_0} \frac{d\vartheta dz}{d\vartheta dz} + \frac{\partial}{r_0 \partial \vartheta} \left(\frac{ph^3}{12 \mu R_g T} \frac{\partial p}{r_0 \partial \vartheta} - \frac{ph}{R_g T} \frac{\omega r_0}{2} \right) + \\ + \frac{\partial}{\partial z} \left(\frac{ph^3}{12 \mu R_g T} \frac{\partial p}{\partial z} \right) = \frac{1}{R_g T} \left(\frac{\partial p}{\partial t} h + p \frac{\partial h}{\partial t} \right) \end{aligned} \quad (2.12)$$

Portata in ingresso Per valutare la portata d'aria G_{in} in ingresso dai fori di alimentazione si ricorre all'espressione fornita dalla ISO 6358, dove figurano il coefficiente di scarico c_d , la sezione di passaggio minima A , la pressione di alimentazione p_s e la pressione a valle del foro p_c :

$$G_{in} = c_d A p_s \frac{0.6855}{\sqrt{R_g T}} \begin{cases} \sqrt{1 - \left(\frac{\frac{p_c}{p_s} - b_c}{1 - b_c}\right)^2} & \text{se } \frac{p_c}{p_s} > b_c \\ 1 & \text{se } \frac{p_c}{p_s} \leq b_c \end{cases} \quad (2.13)$$

dove $b_c = (2/\kappa+1)^{\kappa/(\kappa-1)}$ è il rapporto critico delle pressioni, pari a 0.528 per l'aria. Il valore del coefficiente di scarico c_d dipende da una moltitudine di fattori, tra cui le condizioni del flusso e la geometria del foro, e pertanto solitamente viene calcolato in modo empirico. In letteratura sono presenti diversi approcci per il calcolo di c_d :

- c_d costante;

$$c_d = 0.6 \div 0.9 \quad (2.14)$$

- Neves et al. [23]; il coefficiente di scarico è funzione di p_c/p_s , oppure costante a seconda del rapporto delle pressioni:

$$c_d = \begin{cases} 0.9093 - 0.0751 \frac{p_c}{p_s} & \text{se } \frac{p_c}{p_s} > b_c \\ 0.88 & \text{se } \frac{p_c}{p_s} \leq b_c \end{cases} \quad (2.15)$$

- Belforte et al. [5]; il coefficiente di efflusso è calcolato come funzione del numero di Reynolds, dell'altezza del meato e del diametro dell'ugello:

$$c_d = 0.85 \left(1 - e^{-8.2 \frac{h}{d_s}}\right) \left(1 - 0.3e^{-0.001 \text{Re}}\right) \quad (2.16)$$

$$\text{con } \text{Re} = \frac{4G_{in}}{\pi \mu d_s}$$

Inoltre, occorre precisare che la sezione minima di passaggio A può realizzarsi allo sbocco del foro di alimentazione (*inherent restrictor*) oppure nell'ugello di alimentazione (*orifice restrictor*), perciò:

$$A = \min \begin{cases} \pi d h & \text{inherent restrictor} \\ \pi \frac{d^2}{4} & \text{orifice restrictor} \end{cases}$$

Forze ed angolo di assetto Risolvendo l'equazione di Reynolds, è noto il campo di pressione nel meato ed è quindi possibile calcolare le forze esercitate dal film fluido sul rotore. Con riferimento alla **Figura 2.3**, le componenti F_{bx} e F_{by} lungo gli assi X, Y saranno date da:

$$F_{bx} = - \int_0^L \int_0^{2\pi} (p - p_a) \cos \vartheta r_0 d\vartheta dz \quad (2.17a)$$

$$F_{by} = - \int_0^L \int_0^{2\pi} (p - p_a) \sin \vartheta r_0 d\vartheta dz \quad (2.17b)$$

L'angolo di assetto ϕ , che è formato dalle direzioni dell'eccentricità e della risultante delle forze esercitate dal fluido, si può calcolare nel seguente modo:

$$\phi = \arctan \frac{e_y}{e_x} - \arctan \frac{-F_{by}}{-F_{bx}} \quad (2.18)$$

Coppia d'attrito e potenza dissipata La viscosità del fluido genera degli sforzi tangenziali sulle superfici, le cui risultanti agiscono come coppia frenante sul rotore. La tensione tangenziale si calcola con la legge di Newton per i fluidi viscosi:

$$\tau_{\vartheta} = -\mu \frac{\partial u}{\partial y}$$

Il campo di velocità e la sua derivata si possono ricavare sostituendo nell'**Eq. 2.8** le condizioni al contorno vigenti in un cuscinetto radiale ed utilizzando le coordinate cilindriche:

$$u(y) = \frac{1}{2\mu r_0 \partial \vartheta} y^2 + \frac{-\omega r_0}{h} y - \frac{1}{2\mu r_0 \partial \vartheta} h y + \omega r_0$$

$$\frac{\partial u}{\partial y}(y) = \frac{1}{\mu r_0 \partial \vartheta} y - \frac{\omega r_0}{h} - \frac{1}{2\mu r_0 \partial \vartheta} h$$

La tensione tangenziale si può calcolare in corrispondenza della superficie del rotore ($y = 0$) oppure in quella del cuscinetto ($y = h$):

$$\tau_{\vartheta}(0) = -\mu \frac{\partial u}{\partial y}(0) = \frac{\mu}{h} \omega r_0 + \frac{h}{2} \frac{\partial p}{r_0 \partial \vartheta}$$

$$\tau_{\vartheta}(h) = -\mu \frac{\partial u}{\partial y}(h) = \frac{\mu}{h} \omega r_0 - \frac{h}{2} \frac{\partial p}{r_0 \partial \vartheta} \quad (2.19)$$

Si noti che la differenza tra i due sforzi tangenziali non viola l'equilibrio di forze del volume infinitesimo: essa serve infatti ad accelerare il fluido nel meato. La coppia frenante agente sul rotore si calcola integrando lo sforzo tangenziale τ_{ϑ} lungo la superficie del rotore stesso, e moltiplicando per il braccio r_0 :

$$T_f = r_0 \int_0^L \int_0^{2\pi} \tau_{\vartheta}(0) d\vartheta dz \quad (2.20)$$

Infine, la potenza dissipata si calcola moltiplicando la coppia d'attrito per la velocità angolare:

$$P_f = T_f \omega \quad (2.21)$$

Equazione di Reynolds in forma adimensionale Per generalizzare i risultati dell'equazione di Reynolds si procede spesso con una adimensionalizzazione, definendo dei parametri per le variabili dipendenti ed indipendenti secondo dei valori di riferimento. La scelta di quest'ultimi è del tutto arbitraria, pertanto non esiste un unico modo di esprimere l'equazione in forma adimensionale.

Un primo metodo utilizza queste variabili:

- altezza del meato $H = \frac{h}{c}$;
- lunghezza assiale $Z = \frac{z}{r_0}$;
- pressione $P = \frac{p}{p_a}$;
- tempo $\tau = \nu t$, con ν frequenza di eccitazione;

e i gruppi adimensionali:

- *bearing number* $\Lambda = \frac{6\mu\omega}{p_a} \left(\frac{r_0}{c}\right)^2$
- *squeeze number* $\sigma = \frac{12\mu\nu}{p_a} \left(\frac{r_0}{c}\right)^2$
- *feed number* $\Lambda_f = \frac{12\mu R_g T}{p_a^2 c} \left(\frac{r_0}{c}\right)^2$

Utilizzando questi parametri l'equazione di Reynolds assume la seguente forma:

$$\Lambda_f G_{in} + \frac{\partial}{\partial \vartheta} \left[PH^3 \frac{\partial P}{\partial \vartheta} - \Lambda PH \right] + \frac{\partial}{\partial Z} \left[PH^3 \frac{\partial P}{\partial Z} \right] = \sigma \frac{\partial(PH)}{\partial \tau} \quad (2.22)$$

Il tempo t viene adimensionalizzato moltiplicandolo per la frequenza di eccitazione ν : in questo modo, il passo temporale per la soluzione numerica assume un valore congruo alla velocità. Questa scelta comporta però un problema: in condizioni statiche si ottiene un tempo nullo, che impedisce la risoluzione dell'equazione.

Un'alternativa che supera questo inconveniente consiste nel definire un tempo caratteristico t_0 , indipendente da ν :

$$t_0 = \frac{12\mu}{p_a} \left(\frac{r_0}{c}\right)^2 \quad (2.23)$$

ed esprimere il tempo adimensionalizzato τ come:

$$\tau = \frac{t}{t_0}$$

In questo modo, nell'espressione adimensionalizzata (**Eq. 2.22**), lo *squeeze number* diventa pari all'unità ($\sigma = 1$) e viene quindi eliminata la dipendenza dalla frequenza di eccitazione ν .

Inoltre è pratica comune esprimere in modo adimensionale anche le forze:

$$\bar{F}_{bx} = \frac{F_{bx}}{p_a LD} \quad (2.24a)$$

$$\bar{F}_{by} = \frac{F_{by}}{p_a LD} \quad (2.24b)$$

$$(2.24c)$$

così come i coefficienti dinamici:

$$K_{ij} = k_{ij} \frac{c}{p_a LD} \quad (2.25a)$$

$$C_{ij} = c_{ij} \frac{1}{3\mu L} \left(\frac{c}{D}\right)^2 \quad (2.25b)$$

Soluzione analitica Ausman [3] propose la soluzione analitica dell'equazione di Reynolds, per il caso di supporto aerodinamico e sotto le seguenti ipotesi:

- assenza di movimento assiale;
- processi isotermi ($\rho = p$);
- condizioni stazionarie ($\sigma = 0$);
- piccole eccentricità ε .

Le espressioni analitiche, seppur limitate dalle ipotesi, sono utili per un dimensionamento preliminare del supporto senza dover ricorrere a modelli più complessi, e costituiscono un riferimento per validare le simulazioni numeriche.

$$\bar{F}_r(\Lambda \pm \sigma) = \frac{\pi}{2} \varepsilon p_a LD \operatorname{Re} \left[\left(\frac{i(\Lambda \pm \sigma)}{1 + i(\Lambda \pm \sigma)} \right) \left(1 - \frac{\tanh(\sqrt{1 + i(\Lambda \pm \sigma)L/D})}{\sqrt{1 + i(\Lambda \pm \sigma)L/D}} \right) \right] \quad (2.26a)$$

$$\bar{F}_t(\Lambda \pm \sigma) = \frac{\pi}{2} \varepsilon p_a LD \operatorname{Im} \left[\left(\frac{i(\Lambda \pm \sigma)}{1 + i(\Lambda \pm \sigma)} \right) \left(1 - \frac{\tanh(\sqrt{1 + i(\Lambda \pm \sigma)L/D})}{\sqrt{1 + i(\Lambda \pm \sigma)L/D}} \right) \right] \quad (2.26b)$$

I pedici r, t sono riferiti ad un sistema di riferimento dove l'asse r è allineato alla direzione descritta dall'eccentricità, mentre l'asse t è perpendicolare ad esso. Con la tecnica delle perturbazioni si possono calcolare i coefficienti dinamici: i coefficienti di rigidezza k si esprimono come:

$$\begin{aligned} k_{xx} &= -\frac{\partial F_x}{\partial x} & k_{xy} &= -\frac{\partial F_x}{\partial y} \\ k_{yx} &= -\frac{\partial F_y}{\partial x} & k_{yy} &= -\frac{\partial F_y}{\partial y} \end{aligned} \quad (2.27)$$

Analogamente, si definiscono i coefficienti di smorzamento c :

$$\begin{aligned} c_{xx} &= -\frac{\partial F_x}{\partial \dot{x}} & c_{xy} &= -\frac{\partial F_x}{\partial \dot{y}} \\ c_{yx} &= -\frac{\partial F_y}{\partial \dot{x}} & c_{yy} &= -\frac{\partial F_y}{\partial \dot{y}} \end{aligned}$$

Restando nell'ambito di piccole eccentricità ε si può affermare che:

$$\begin{aligned} k_{ii} &= k_{xx} = k_{yy} & c_{ii} &= c_{xx} = c_{yy} \\ k_{ij} &= k_{xy} = -k_{yx} & c_{ij} &= c_{xy} = -c_{yx} \end{aligned}$$

I coefficienti dinamici in forma adimensionalizzata, ottenuti con la tecnica delle perturbazioni, sono dati da:

$$\begin{aligned} K_{ii} &= \frac{1}{2} \left(\bar{F}_r(\Lambda - \sigma) + \bar{F}_r(\Lambda + \sigma) \right) \\ C_{ii} &= -\frac{1}{2\sigma} \left(\bar{F}_t(\Lambda - \sigma) - \bar{F}_t(\Lambda + \sigma) \right) \\ K_{ij} &= \frac{1}{2} \left(\bar{F}_t(\Lambda - \sigma) + \bar{F}_t(\Lambda + \sigma) \right) \\ C_{ij} &= -\frac{1}{2\sigma} \left(\bar{F}_r(\Lambda - \sigma) - \bar{F}_r(\Lambda + \sigma) \right) \end{aligned}$$

Equazione della dinamica La dinamica del rotore viene analizzata per semplicità considerando il rotore come supportato da un cuscinetto soltanto e quindi analizzando solamente i moti di traslazione. Il rotore è caratterizzato da una massa m , con uno squilibrio statico che porta il baricentro ad avere una eccentricità \overline{CG} (**Fig. 2.4**). L'equilibrio delle forze agenti sul rotore lungo le due direzioni si può esprimere come:

$$m\ddot{x}_G = F_{bx} + F_x^e \quad (2.29a)$$

$$m\ddot{y}_G = F_{by} + F_y^e \quad (2.29b)$$

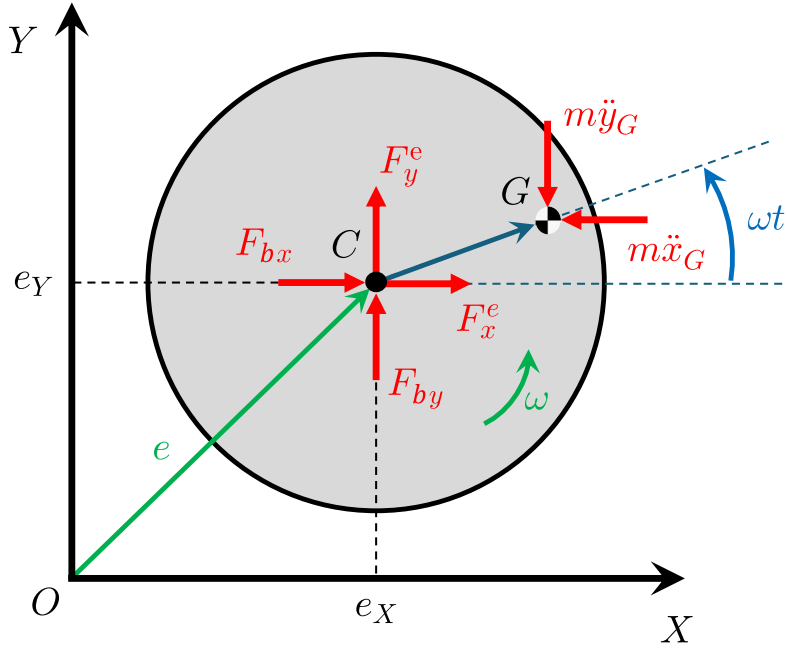


Figura 2.4: Equilibrio dinamico del rotore.

dove F_{bx} e F_{by} sono le già note forze esercitate dal film fluido, mentre F_x^e e F_y^e rappresentano le forze esterne agenti sul rotore, che generalmente possono avere una componente statica ed una dinamica con frequenza ν :

$$\begin{aligned} F_x^e &= F_{sx}^e + F_{dx}^e \sin(\nu t + \alpha_0) \\ F_y^e &= F_{sy}^e + F_{dy}^e \sin(\nu t + \alpha_0) \end{aligned}$$

Per ricondurre le forze al centro del rotore, si osserva che le coordinate del centro di massa G sono date da:

$$\begin{aligned} x_G &= e_X + \overline{CG} \cos(\omega t) \\ y_G &= e_Y + \overline{CG} \sin(\omega t) \end{aligned}$$

Derivando due volte è possibile ricavare l'accelerazione:

$$\begin{aligned} \ddot{x}_G &= \ddot{e}_X - \overline{CG}\omega^2 \cos(\omega t) \\ \ddot{y}_G &= \ddot{e}_Y - \overline{CG}\omega^2 \sin(\omega t) \end{aligned}$$

Sostituendo nell'**Equazione 2.29** si ottiene

$$m\ddot{e}_X = F_{bx} + F_{sx}^e + F_{dx}^e \sin(\nu t + \alpha_0) + m\overline{CG}\omega^2 \cos(\omega t) \quad (2.33a)$$

$$m\ddot{e}_Y = F_{by} + F_{sy}^e + F_{dy}^e \sin(\nu t + \alpha_0) + m\overline{CG}\omega^2 \sin(\omega t) \quad (2.33b)$$

Si osserva che l'ultimo termine di ciascuna equazione è dovuto alla presenza dello squilibrio statico nel rotore $U_s = m\overline{CG}$. Talvolta può essere più conveniente esprimere lo squilibrio U_s come prodotto di una massa m_s ad una distanza u_s dall'asse del rotore. Questa notazione è più fruibile dal punto di vista pratico, perché corrisponde alla lettura di squilibrio restituita da una macchina equilibratrice.

2.1.3 Soluzione numerica

Nei paragrafi che seguono sono descritti i passaggi utili per la stesura di un algoritmo finalizzato alla soluzione numerica dell'equazione di Reynolds e della dinamica.

Discretizzazione del dominio. Per discretizzare il dominio si utilizza il metodo delle differenze finite. Il dominio è una superficie cilindrica, di diametro D e lunghezza L , che ai fini computazionali si può sviluppare in un rettangolo (come schematizzato in **Fig. 2.5**) con condizione al contorno periodica su due lati. Alle estremità del cuscinetto vige la pressione ambiente p_a , per cui si impone una condizione di Dirichlet ai bordi superiore ed inferiore.

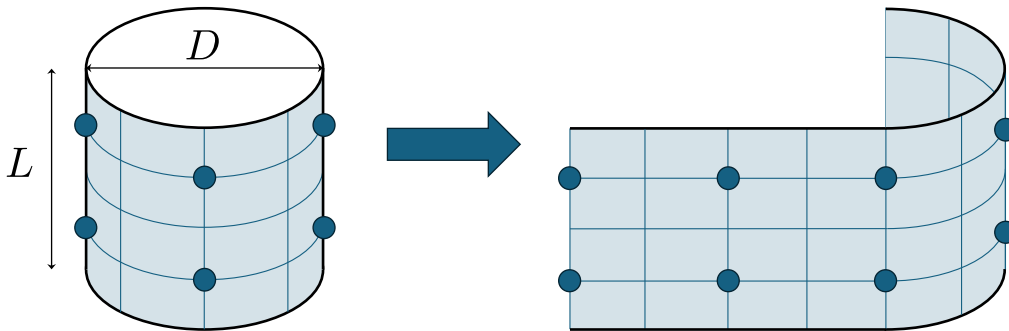


Figura 2.5: Dominio cilindrico e sviluppo piano.

Risulta di fondamentale importanza trovare un criterio per scegliere opportunamente il numero di nodi della griglia, in particolare quando si ha a che fare con supporti aerostatici dove occorre posizionare correttamente i fori di alimentazione nella griglia computazionale. Per quanto riguarda la discretizzazione lungo la circonferenza, il numero di nodi è parametrizzato secondo la relazione:

$$n = N_f(1 + a) + 1 \quad (2.34)$$

dove n è il numero di nodi lungo ϑ , N_f è il numero di fori di alimentazione lungo la circonferenza e a è il numero di punti tra un foro e il successivo. Utilizzando questo principio, i fori di alimentazione vengono equamente distribuiti lungo la circonferenza. Invece, per quanto riguarda la discretizzazione lungo z , è preferibile avere un numero di intervalli multiplo di 4. Infatti, solitamente si hanno 2 file

di fori di alimentazione, poste ad $1/4$ della lunghezza dall'estremità del cuscinetto; pertanto il numero di nodi m viene scelto nel seguente modo:

$$m = 4b + 1 \tag{2.35}$$

con b numero di intervalli in cui viene suddivisa la lunghezza assiale L . Se la posizione assiale dei fori fosse diversa da come appena descritto, il criterio andrebbe modificato opportunamente. I parametri a e b stabiliscono il grado di finezza della griglia computazionale, pertanto influenzano sia la precisione di calcolo che il tempo richiesto per la simulazione e vanno scelti in modo oculato.

La griglia di dimensione $m \times n$, che copre l'intero dominio fisico, viene ampliata con due colonne fittizie aggiuntive. Infatti, la condizione di periodicità del dominio impone che l'ultimo nodo (j_n) sia uguale al primo (j_1), e che venga aggiunto un nodo fittizio prima di j_1 pari al penultimo (j_{n-1}). Si giunge quindi alla griglia computazionale rappresentata in **Figura 2.6**.

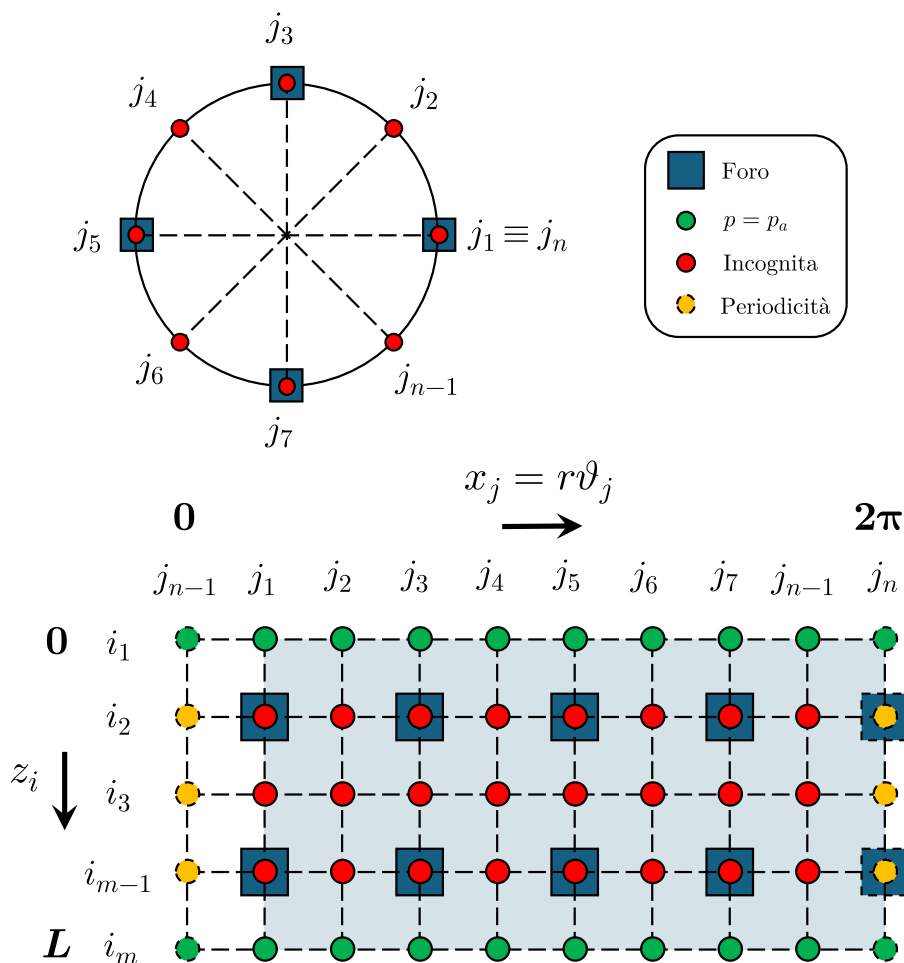


Figura 2.6: Griglia computazionale ($N_f = 4$, $a = 1$, $b = 1$).

Soluzione dell'Equazione di Reynolds Seguendo lo schema delle differenze finite centrate su dominio bidimensionale, si esprime l'**Eq. 2.1.2** in forma discretizzata nel punto (i, j) della griglia, secondo lo *stencil* di calcolo di **Figura 2.7**:

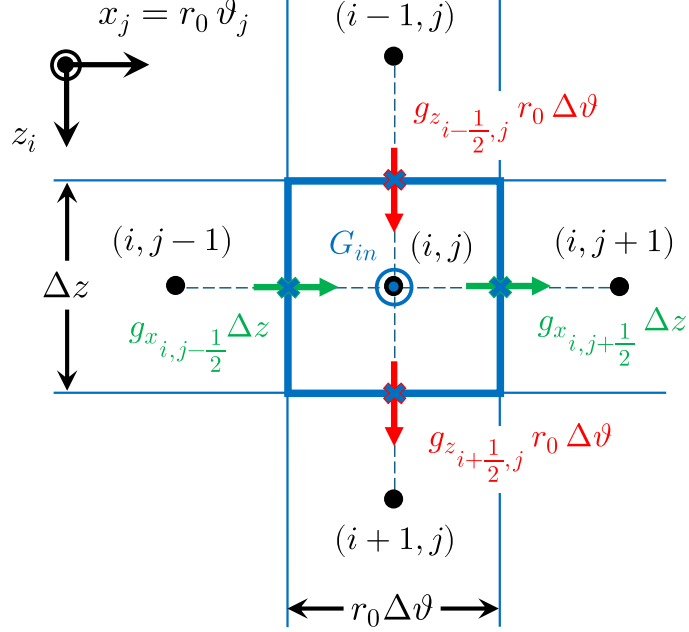


Figura 2.7: *Stencil* di calcolo a 5 nodi.

$$G_{in} + (g_W - g_E) \Delta z + (g_N - g_S) r_0 \Delta \vartheta = \frac{r_0 \Delta \theta \Delta z}{R_g T} h \frac{\partial p}{\partial t} + \frac{r_0 \Delta \theta \Delta z}{R_g T} p \dot{h} \quad (2.36)$$

dove le portate g_W, g_E, g_N e g_S sono espresse da:

$$g_W = g_{x_{i,j-\frac{1}{2}}} = -\frac{p_{i,j-\frac{1}{2}} h_{i,j-\frac{1}{2}}^3}{12\mu R_g T} \frac{\partial p}{r_0 \partial \vartheta} \Big|_{i,j-\frac{1}{2}} + \frac{p_{i,j-\frac{1}{2}} h_{i,j-\frac{1}{2}} \omega r_0}{2R_g T} \quad (2.37a)$$

$$g_E = g_{x_{i,j+\frac{1}{2}}} = -\frac{p_{i,j+\frac{1}{2}} h_{i,j+\frac{1}{2}}^3}{12\mu R_g T} \frac{\partial p}{r_0 \partial \vartheta} \Big|_{i,j+\frac{1}{2}} + \frac{p_{i,j+\frac{1}{2}} h_{i,j+\frac{1}{2}} \omega r_0}{2R_g T} \quad (2.37b)$$

$$g_N = g_{z_{i-\frac{1}{2},j}} = -\frac{p_{i-\frac{1}{2},j} h_{i-\frac{1}{2},j}^3}{12\mu R_g T} \frac{\partial p}{\partial z} \Big|_{i-\frac{1}{2},j} \quad (2.37c)$$

$$g_S = g_{z_{i+\frac{1}{2},j}} = -\frac{p_{i+\frac{1}{2},j} h_{i+\frac{1}{2},j}^3}{12\mu R_g T} \frac{\partial p}{\partial z} \Big|_{i+\frac{1}{2},j} \quad (2.37d)$$

Nelle espressioni delle portate discretizzate figurano dei termini relativi ai nodi intermedi $(i \pm \frac{1}{2}, j)$ e $(i, j \pm \frac{1}{2})$; essi vengono calcolati con il valore medio:

$$\begin{aligned} p_{i,j-\frac{1}{2}} h_{i,j-\frac{1}{2}} &= \frac{p_{i,j-1} h_{i,j-1} + p_{i,j} h_{i,j}}{2} \\ p_{i,j+\frac{1}{2}} h_{i,j+\frac{1}{2}} &= \frac{p_{i,j} h_{i,j} + p_{i,j+1} h_{i,j+1}}{2} \\ p_{i-\frac{1}{2},j} h_{i-\frac{1}{2},j} &= \frac{p_{i-1,j} h_{i-1,j} + p_{i,j} h_{i,j}}{2} \\ p_{i+\frac{1}{2},j} h_{i+\frac{1}{2},j} &= \frac{p_{i,j} h_{i,j} + p_{i+1,j} h_{i+1,j}}{2} \end{aligned}$$

Invece, le derivate saranno espresse da:

$$\begin{aligned} \left. \frac{\partial p}{r_0 \partial \vartheta} \right|_{i,j-\frac{1}{2}} &= \frac{p_{i,j} - p_{i,j-1}}{r_0 \Delta \vartheta} \\ \left. \frac{\partial p}{r_0 \partial \vartheta} \right|_{i,j+\frac{1}{2}} &= \frac{p_{i,j+1} - p_{i,j}}{r_0 \Delta \vartheta} \\ \left. \frac{\partial p}{\partial z} \right|_{i-\frac{1}{2},j} &= \frac{p_{i,j} - p_{i-1,j}}{\Delta z} \\ \left. \frac{\partial p}{\partial z} \right|_{i+\frac{1}{2},j} &= \frac{p_{i+1,j} - p_{i,j}}{\Delta z} \end{aligned}$$

Sostituendo questi termini nelle **Eq. 2.37**, e definendo i seguenti coefficienti:

$$\begin{aligned} c_\vartheta &= \frac{1}{24\mu R_g T r_0 d \vartheta} \\ c_z &= \frac{1}{24\mu R_g T dz} \\ c_\omega &= \frac{\omega r_0}{4R_g T} \end{aligned}$$

si possono esprimere in modo compatto le portate entranti ed uscenti dal nodo (i, j) in funzione dei nodi adiacenti:

$$\begin{aligned} g_W &= -c_\vartheta (p_{i,j-1} h_{i,j-1}^3 + p_{i,j} h_{i,j}^3) (p_{i,j} - p_{i,j-1}) + c_\omega (p_{i,j-1} h_{i,j-1} + p_{i,j} h_{i,j}) \\ g_E &= -c_\vartheta (p_{i,j+1} h_{i,j+1}^3 + p_{i,j} h_{i,j}^3) (p_{i,j+1} - p_{i,j}) + c_\omega (p_{i,j+1} h_{i,j+1} + p_{i,j} h_{i,j}) \\ g_S &= -c_z (p_{i-1,j} h_{i-1,j}^3 + p_{i,j} h_{i,j}^3) (p_{i,j} - p_{i-1,j}) \\ g_N &= -c_z (p_{i+1,j} h_{i+1,j}^3 + p_{i,j} h_{i,j}^3) (p_{i,j} - p_{i+1,j}) \end{aligned}$$

Ora si deve discretizzare l'**Equazione 2.36** nel tempo. Scelto un passo temporale Δt , si ricorre al metodo di Eulero esplicito, che consiste nel calcolo della pressione all'istante $k+1$ -esimo note le variabili all'istante k -esimo:

$$p_{i,j}^{k+1} = p_{i,j}^k + \left[G_{in} + (g_W - g_E) \Delta z + (g_N - g_S) r_0 \Delta \vartheta - \frac{r_0 \Delta \vartheta \Delta z}{R_g T} p_{i,j} \dot{h}_{i,j} \right]^k \frac{R_g T \Delta t}{r_0 \Delta \vartheta \Delta z h_{i,j}^k} \quad (2.42)$$

Ad ogni passo k la distribuzione di pressione viene aggiornata; l'iterazione continua fino a quando non vengono soddisfatte le condizioni di convergenza. Dapprima viene controllata la convergenza sul campo di pressione:

$$e_p = \left| \left(\frac{p_{i,j}^{k+1} - p_{i,j}^k}{p_{i,j}^k} \right)_{max} \right| < E_p \quad (2.43)$$

dove E_p è l'errore residuo ammesso. Quando la condizione espressa in **2.43** si verifica, si calcolano le forze con le **Eq. 2.17a** e **2.17b** e si verifica la stabilizzazione dell'angolo di assetto:

$$e_\phi = \left| \frac{\phi^{k+1} - \phi^k}{\phi^k} \right| < E_\phi \quad (2.44)$$

Se questa condizione non è soddisfatta, si procede con una nuova iterazione, altrimenti la procedura di calcolo termina. L'algoritmo è sintetizzato nella **Figura 2.8**.

Soluzione delle equazioni della dinamica La soluzione delle equazioni della dinamica richiede dapprima la soluzione dell'equazione di Reynolds in condizioni stazionarie, per poter fornire all'algoritmo un *set* di variabili iniziali fisicamente valide.

La discretizzazione nel tempo delle equazioni della dinamica viene condotto attraverso il metodo di Eulero esplicito, isolando le accelerazioni dalle **Eq. 2.33**:

$$\begin{aligned} \ddot{e}_X(t) &\simeq \frac{\dot{e}_X^{t+\Delta t} - \dot{e}_X^t}{\Delta t} = \frac{1}{m} \left[F_{bx} + F_{sx}^e + F_{dx}^e \sin(\nu t + \alpha_0) + m \overline{CG} \omega^2 \cos(\omega t) \right]^t \\ \ddot{e}_Y(t) &\simeq \frac{\dot{e}_Y^{t+\Delta t} - \dot{e}_Y^t}{\Delta t} = \frac{1}{m} \left[F_{by} + F_{sy}^e + F_{dy}^e \sin(\nu t + \alpha_0) + m \overline{CG} \omega^2 \sin(\omega t) \right]^t \end{aligned}$$

Da queste è possibile ricavare le velocità del centro del rotore:

$$\begin{aligned} \dot{e}_X^{t+\Delta t} &= \dot{e}_X^t + \frac{\Delta t}{m} \left[F_{bx} + F_{sx}^e + F_{dx}^e \sin(\nu t + \alpha_0) + m \overline{CG} \omega^2 \cos(\omega t) \right]^t \\ \dot{e}_Y^{t+\Delta t} &= \dot{e}_Y^t + \frac{\Delta t}{m} \left[F_{by} + F_{sy}^e + F_{dy}^e \sin(\nu t + \alpha_0) + m \overline{CG} \omega^2 \sin(\omega t) \right]^t \end{aligned}$$

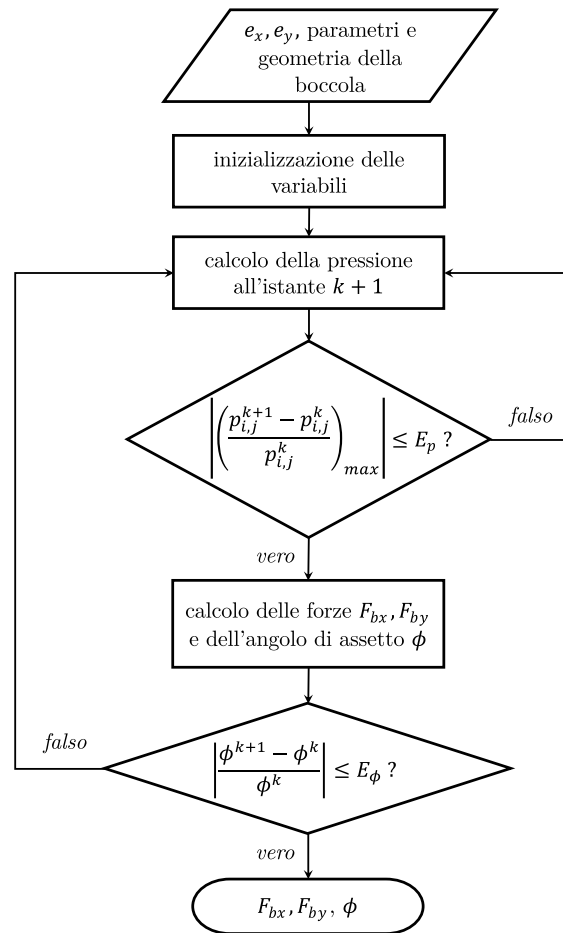


Figura 2.8: Algoritmo di calcolo per l'equazione di Reynolds.

Infine, si aggiornano le componenti dell'eccentricità:

$$e_X^{t+\Delta t} = e_X^t + \dot{e}_X^t \Delta t$$

$$e_Y^{t+\Delta t} = e_Y^t + \dot{e}_Y^t \Delta t$$

Ad ogni passo temporale Δt si risolvono simultaneamente le equazioni della dinamica e di Reynolds. L'algoritmo è rappresentato in **Fig. 2.9**.

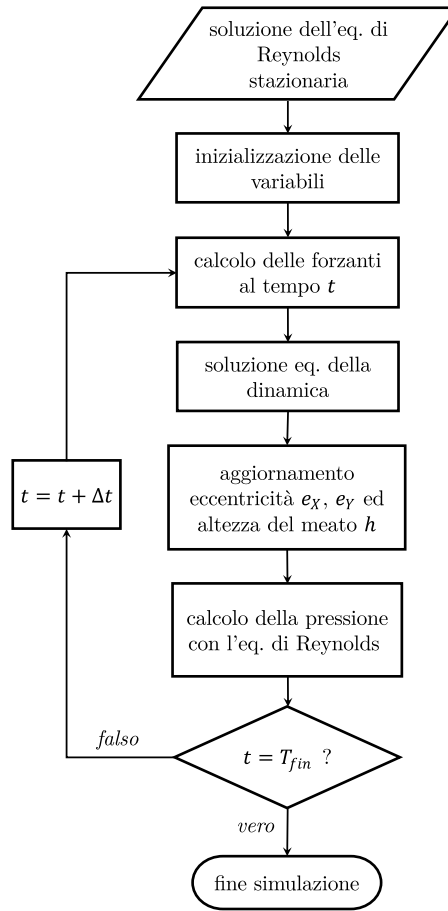


Figura 2.9: Algoritmo di calcolo per l'equazione della dinamica.

2.2 Modellazione dinamica degli O-Ring

I materiali polimerici con cui solitamente vengono realizzati gli O-Ring hanno un comportamento fortemente nonlineare ad elevate deformazioni. Tuttavia, nell'ipotesi di piccoli spostamenti, si può utilizzare un modello viscoelastico lineare [32], che in generale combina la proprietà di un solido elastico, descritta dalla legge di Hooke (Eq. 2.48a), con quella di uno smorzatore viscoso, descritta dalla legge di Newton (Eq. 2.48b):

$$\sigma = E\gamma \quad (2.48a)$$

$$\sigma = \eta \frac{\partial \gamma}{\partial t} \quad (2.48b)$$

dove σ è la sollecitazione, γ è la deformazione, E il modulo elastico e η il coefficiente di smorzamento viscoso. I due modelli viscoelastici a parametri concentrati più semplici sono quello di Kelvin-Voigt e quello di Maxwell, rappresentati in Figura 2.10:

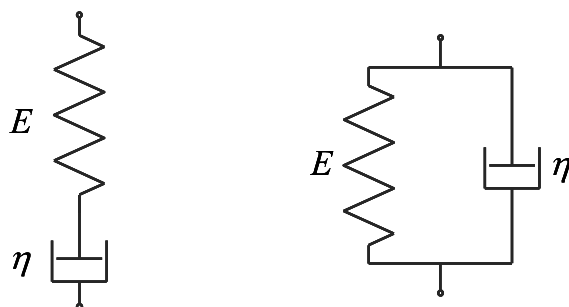


Figura 2.10: Modello di Maxwell (a sinistra) e Kelvin-Voigt (a destra). [17]

Il modello di Maxwell è costituito dalla serie di una molla di costante elastica E e di uno smorzatore viscoso con coefficiente η . Applicando una forza, essa è la medesima sia per la molla che per lo smorzatore, mentre la deformazione non è la medesima. Questo modello è rappresentativo del rilassamento del materiale. Si definisce il tempo di rilassamento τ (*relaxation time*) come

$$\tau = \frac{\eta}{E}$$

Nel modello di Kelvin-Voigt, invece, la molla e lo smorzatore sono in parallelo. Se si applica un gradino di forza, si nota che la deformazione della molla non è immediata ma è condizionata dall'azione ritardante dello smorzatore viscoso. Questo modello è quindi adatto a descrivere la componente dipendente dal tempo del *creep*.

Per contemplare sia il *creep* che il rilassamento del materiale si utilizza il modello di Maxwell generalizzato, formato mettendo in parallelo più elementi di tipo Maxwell, insieme ad una molla con costante elastica E_∞ , come rappresentato in **Figura 2.11**. Questo modello è quindi caratterizzato da una serie di parametri E_i

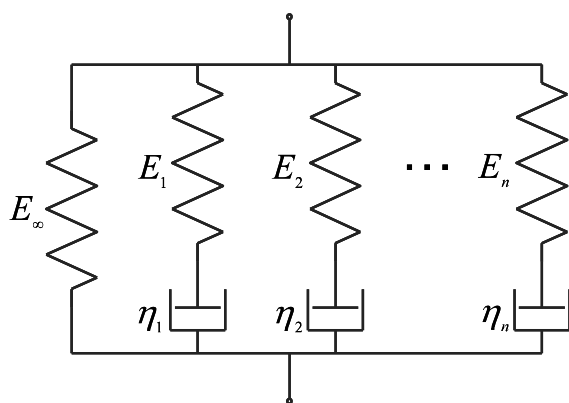


Figura 2.11: Modello di Maxwell generalizzato. [17]

e η_i , che danno luogo ad altrettanti τ_i .

Nell'ambito delle simulazioni numeriche, per rappresentare le proprietà del materiale si adotta spesso la seguente notazione: si definisce il *complex modulus* E^* come

$$E^* = E' + jE'' \quad (2.49)$$

dove la parte reale E' , chiamata *storage modulus*, rappresenta le proprietà elastiche, mentre la parte immaginaria E'' , chiamata *loss modulus*, è relativa allo smorzamento viscoso. Con riferimento al modello di Maxwell generalizzato in **Fig. 2.11**, i due moduli si calcolano con le seguenti espressioni:

$$E'(\omega) = E_\infty + \sum_{i=1}^n E_i \frac{\omega^2 \tau_i^2}{1 + \omega^2 \tau_i^2}$$

$$E''(\omega) = \sum_{i=1}^n E_i \frac{\omega \tau_i}{1 + \omega^2 \tau_i^2}$$

Il rapporto tra lo *storage modulus* ed il *loss modulus* è chiamato *loss factor* $\tan \delta$, e corrisponde alla tangente dell'argomento del modulo complesso E^* .

Limitatamente al campo di applicazione dinamica degli O-Ring, descritta nell'introduzione, il modello di Kelvin-Voigt è quello più utilizzato. Dai dati sperimentali, all'aumentare della frequenza di eccitazione si riscontra un andamento crescente per la rigidità e decrescente per lo smorzamento. Più nel dettaglio, l'andamento dei parametri globali k e c è approssimabile con leggi di potenza, con esponente positivo per quanto riguarda la rigidità e negativo per lo smorzamento [1].

2.3 Analisi di stabilità del rotore

L'analisi di stabilità di un rotore supportato da cuscinetti ad aria si può condurre attraverso il modello di rotore di Jeffcott. Per semplicità, si considerano solamente i moti di traslazione.

L'equilibrio del rotore lungo le due direzioni ortogonali x e y è espresso da due equazioni differenziali di secondo ordine:

$$m\ddot{x} + c_{xx}\dot{x} + c_{xy}\dot{y} + k_{xx}x + k_{xy}y = f_x \quad (2.51a)$$

$$m\ddot{y} + c_{yx}\dot{x} + c_{yy}\dot{y} + k_{yx}x + k_{yy}y = f_y \quad (2.51b)$$

Per proseguire con l'analisi è conveniente ricorrere alla rappresentazione nello spazio degli stati, che permette di trasformare il sistema di due equazioni differenziali del secondo ordine in quattro equazioni differenziali del primo ordine. Allo scopo, si esplicitano le derivate di ordine maggiore presenti nelle equazioni:

$$\dot{x} = -\frac{c_{xx}}{m}\dot{x} - \frac{c_{xy}}{m}\dot{y} - \frac{k_{xx}}{m}x - \frac{k_{xy}}{m}y + \frac{f_x}{m} \quad (2.52a)$$

$$\dot{y} = -\frac{c_{yx}}{m}\dot{x} - \frac{c_{yy}}{m}\dot{y} - \frac{k_{yx}}{m}x - \frac{k_{yy}}{m}y + \frac{f_y}{m} \quad (2.52b)$$

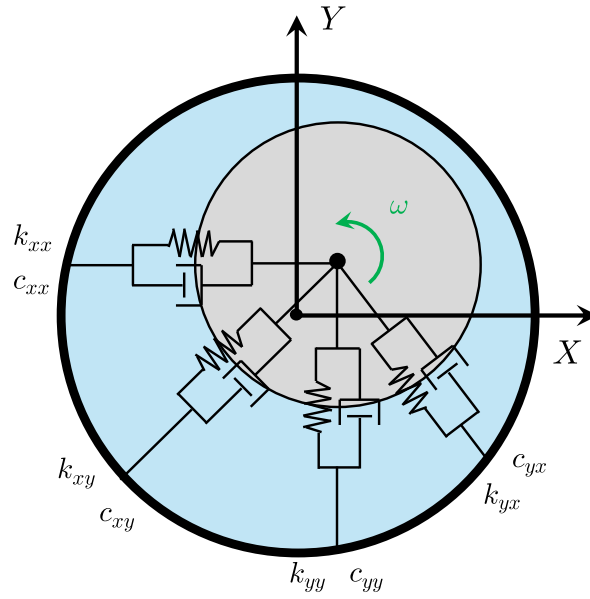


Figura 2.12: Coefficienti dinamici del film fluido.

Dopodiché si introducono le variabili di stato q_1 , q_2 , q_3 e q_4 e le derivate annesse, ed il termine noto:

$$\begin{cases} q_1 \\ q_2 \\ q_3 \\ q_4 \end{cases} = \begin{cases} \dot{x} \\ \dot{y} \\ x \\ y \end{cases} \quad \begin{cases} \dot{q}_1 \\ \dot{q}_2 \\ \dot{q}_3 \\ \dot{q}_4 \end{cases} = \begin{cases} \ddot{x} \\ \ddot{y} \\ \dot{x} \\ \dot{y} \end{cases} \quad \begin{cases} u_1 \\ u_2 \end{cases} = \begin{cases} f_x \\ f_y \end{cases}$$

Sostituendo questi termini nell'equazione di equilibrio (**Eq. 2.51**) ed osservando che $\dot{q}_3 = q_1$ e $\dot{q}_4 = q_2$ si possono esplicitare le derivate prime delle variabili di stato:

$$\dot{q}_1 = -\frac{c_{xx}}{m}q_1 - \frac{c_{xy}}{m}q_2 - \frac{k_{xx}}{m}q_3 - \frac{k_{xy}}{m}q_4 + \frac{1}{m}u_1 \quad (2.53a)$$

$$\dot{q}_2 = -\frac{c_{yx}}{m}q_1 - \frac{c_{yy}}{m}q_2 - \frac{k_{yx}}{m}q_3 - \frac{k_{yy}}{m}q_4 + \frac{1}{m}u_2 \quad (2.53b)$$

$$\dot{q}_3 = q_1 \quad (2.53c)$$

$$\dot{q}_4 = q_2 \quad (2.53d)$$

Le relazioni di cui sopra possono essere espresse in forma matriciale:

$$\begin{Bmatrix} \dot{q}_1 \\ \dot{q}_2 \\ \dot{q}_3 \\ \dot{q}_4 \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} -\frac{c_{xx}}{m} & -\frac{c_{xy}}{m} & -\frac{k_{xx}}{m} & -\frac{k_{xy}}{m} \\ -\frac{c_{yx}}{m} & -\frac{c_{yy}}{m} & -\frac{k_{yx}}{m} & -\frac{k_{yy}}{m} \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} q_1 \\ q_2 \\ q_3 \\ q_4 \end{Bmatrix} + \begin{bmatrix} \frac{1}{m} & 0 \\ 0 & \frac{1}{m} \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} u_1 \\ u_2 \end{Bmatrix} \quad (2.54)$$

Si definisce la matrice degli stati \mathbf{A} :

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} -\frac{c_{xx}}{m} & -\frac{c_{xy}}{m} & -\frac{k_{xx}}{m} & -\frac{k_{xy}}{m} \\ -\frac{c_{yx}}{m} & -\frac{c_{yy}}{m} & -\frac{k_{yx}}{m} & -\frac{k_{yy}}{m} \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{M}^{-1}\mathbf{C} & \mathbf{M}^{-1}\mathbf{K} \\ \mathbf{I} & \mathbf{0} \end{bmatrix} \quad (2.55)$$

dove \mathbf{M} , \mathbf{K} e \mathbf{C} sono rispettivamente la matrice di massa, di rigidità e di smorzamento del sistema, ed \mathbf{I} la matrice identità. Calcolando gli autovalori della matrice degli stati \mathbf{A} si avranno 4 autovalori, con annessi 4 autovettori che corrispondono ai modi di vibrazione associati alle variabili di stato (ovvero le componenti di spostamento e velocità):

$$\begin{aligned} \lambda_1 &= \omega_{n,1}\zeta_1 + j v_{d,1} \\ \lambda_2 &= \omega_{n,1}\zeta_2 - j v_{d,2} \\ \lambda_3 &= \omega_{n,2}\zeta_3 + j v_{d,3} \\ \lambda_4 &= \omega_{n,2}\zeta_4 - j v_{d,4} \end{aligned}$$

Le soluzioni sono accettabili da un punto di vista fisico solo se, fissato il modo m , la parte immaginaria dell'autovalore è pari alla frequenza di eccitazione ν alla quale sono stati calcolati i coefficienti dinamici della matrice degli stati \mathbf{A} . Le soluzioni dell'autoproblema per ciascuna velocità di rotazione dell'albero consentono di tracciare il diagramma di Campbell, che riporta le frequenze naturali $\omega_n(\omega)$ e la mappa di stabilità, che riporta lo smorzamento relativo $\zeta(\omega)$. Il sistema è stabile quando lo smorzamento relativo è maggiore di zero.

Come già anticipato, i coefficienti di rigidità e smorzamento che figurano all'interno della matrice degli stati sono funzione della velocità di rotazione ω e della frequenza di eccitazione ν . Si deve pertanto ricorrere ad un algoritmo iterativo:

- 1) si definiscono i parametri geometrici del sistema;
- 2) si stabilisce la velocità di rotazione $\omega = \omega^*$ alla quale si vogliono ricavare i parametri modali, e si assume come frequenza di eccitazione di primo tentativo $\nu^{k=1} = \omega^*$;

- 3) si fissa il valore del modo m considerato;
- 4) si calcolano i coefficienti dinamici con la frequenza di eccitazione dell'iterazione k -esima: $k_{ij}(\omega^*, \nu^k)$ e $c_{ij}(\omega^*, \nu^k)$
- 5) si calcolano gli autovalori relativi al modo considerato $\lambda_m = \omega_{n,m}\zeta_m \pm j\nu_{d,m}$;
- 6) si verifica che $\nu_{d,m}$ sia pari a ν^k entro una certa tolleranza; se la condizione non è verificata, si ripetono i punti da 4) e 5), ponendo $\nu^k = \nu_d$;
- 7) se la condizione al punto precedente è soddisfatta, si passa ad analizzare un altro modo m ripetendo i punti da 2) a 6).

Capitolo 3

Banchi prova e setup sperimentali

3.1 Caratterizzazione dinamica degli O-Ring

Seguendo il design di una precedente realizzazione presente nei laboratori del Dipartimento di Meccanica del Politecnico, è stato realizzato un banco prova adatto alla caratterizzazione degli O-Ring impiegati nel mandrino in prova come elementi smorzanti nei cuscinetti.

3.1.1 Descrizione del banco prova

In **Figura 3.1** è rappresentato in sezione il banco prova utilizzato nei test. Gli O-Ring in prova sono posti tra l'albero (13) e le relative sedi ricavate nei due coperchi (1), che vengono fissati al corpo centrale (*housing*, 12). L'*housing* è accoppiato a due lamine (6,8) per mezzo delle rispettive piastrine (3,10) e viti. Le lamine sono poi assemblate a pacchetto con i distanziali (5,7) e la base portasensori (9); l'assieme è serrato alla piastra di base (4) con viti mordenti. La forza esterna viene impressa da uno *shaker* esterno (visibile in **Fig. 3.2**), sospeso su una struttura a portale e collegato all'*housing* per mezzo di un'asta (*stinger*) con interposta una cella di carico (2), in modo da monitorare la forza trasmessa. Gli spostamenti dell'albero e dell'*housing* sono misurati da tre sensori capacitivi (11). Combinando alberi di differente diametro con coperchi aventi differenti sedi per l'O-Ring, è possibile modificare il precarico di montaggio degli stessi, andando a cambiare lo *stretch* e lo *squeeze*. Inoltre, il design del banco ne permette il posizionamento all'interno della camera climatica a disposizione del Dipartimento, consentendo l'esecuzione di test a differenti temperature. In **Figura 3.2** è raffigurato il banco prova, installato nella camera climatica; in **Tabella 3.1** è elencata la strumentazione utilizzata.

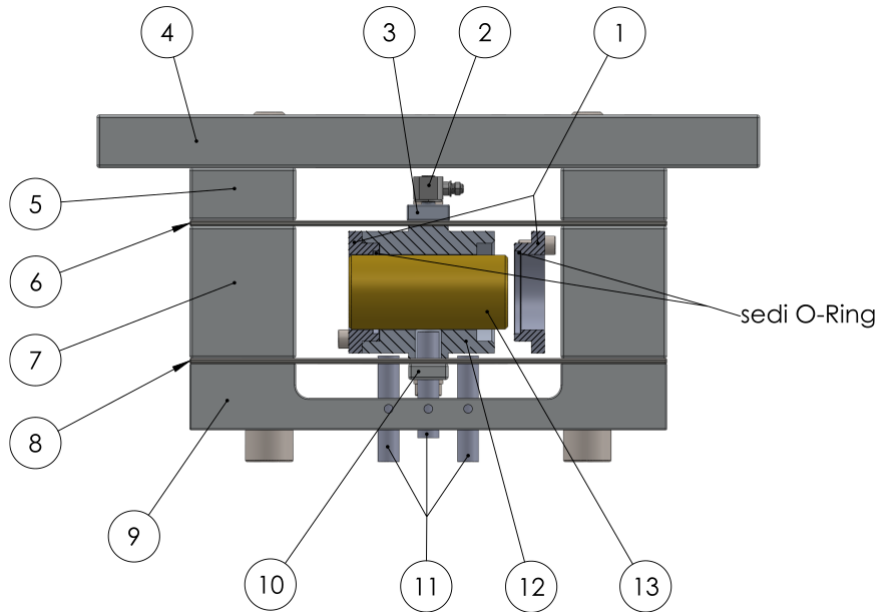


Figura 3.1: Schematizzazione del banco prova.

Tabella 3.1: Strumentazione del banco prova O-Ring.

Produttore	Strumento	Modello
Brüel & Kjær	shaker	Type 4824
	amplificatore	Type 2732
GW Instek	generatore di segnale	SFG-2104
Kistler	cella di carico	Type 9313AA1
	amplificatore di carica	Type 5073A
Micro-Epsilon	sistema di misura sensori capacitivi	capaNCDT 6200 CS05
National Instruments	sistema di acquisizione	USB-6212

3.1.2 Procedura di test

La prova avviene secondo la seguente procedura:

- 1) dopo aver assemblato il banco prova, si posizionano i sensori capacitivi ad una distanza tale da essere a metà del loro campo di misura, e si fissano alla base con viti in plastica;
- 2) si azzerava la lettura della cella di carico dal relativo software su PC;

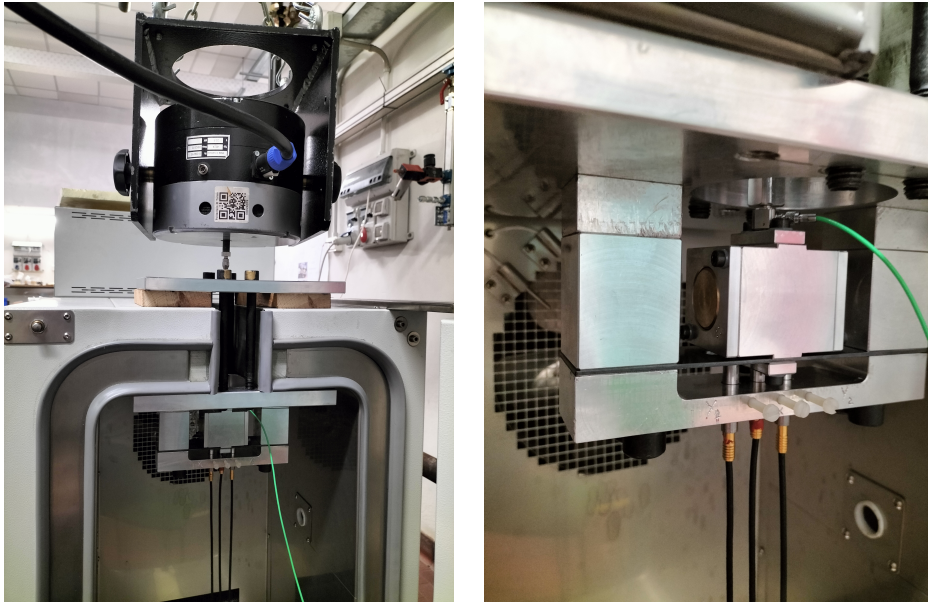


Figura 3.2: Banco prova installato nella camera climatica.

- 3) tramite il generatore di funzioni si imposta la frequenza di eccitazione desiderata, e con l'amplificatore dello *shaker* si regola una forza tale da imporre uno schiacciamento all'O-Ring $z = x - y$ dell'ordine di qualche μm ;
- 4) si lancia l'acquisizione dei dati tramite la VI di LabVIEW;
- 5) terminata l'acquisizione, si salvano i dati e si ripetono i punti 3) e 4), cambiando di volta in volta la frequenza di eccitazione in modo da coprire tutto il range di interesse per il test.

3.1.3 *Postprocessing* dei dati sperimentali

Nella parte di introduzione al metodo BERM (Paragrafo 1.2.3), si è discusso sull'importanza di affidarsi a misure in prossimità della risonanza del sistema ad un grado di libertà associato. In questo senso, occorre stabilire l'intervallo di fase entro il quale si considera attendibile la misura. Per verificare la corretta scelta dell'intervallo, viene seguita questa procedura:

- 1) l'affidabilità dei segnali misurati $x(t)$ ed $y(t)$ viene controllata assicurando che la coerenza¹ ad esso associata sia maggiore di 0.98 in corrispondenza della frequenza di test;

¹funzione matematica che misura il grado di correlazione tra il segnale di input e quello di output, si veda Shin e Hammond [29]

- 2) si calcolano l'ampiezza $A(\omega)$ e la fase $\phi(\omega)$ della funzione di trasferimento $H(\omega)$;
- 3) i coefficienti di rigidità e smorzamento vengono calcolati tramite le **Eq. 1.5a** e **1.5b**, considerando solamente i punti dove la fase è compresa tra un valore minimo ϕ_{min} ed un valore massimo ϕ_{max} ;
- 4) i valori di k e c calcolati al punto 3) sono utilizzati per ricavare le costanti di interpolazione, utilizzando come funzioni delle leggi di potenza descritte da:

$$k(\omega) = A\omega^\alpha \quad (3.1a)$$

$$c(\omega) = B\omega^\beta \quad (3.1b)$$

- 5) le funzioni interpolanti ricavate sono utilizzate per ricostruire la funzione di trasferimento;
- 6) confrontando le funzioni di trasferimento, sperimentale e ricostruita, è possibile avere un riscontro sulla scelta dei valori di ϕ_{min} e ϕ_{max} ;
- 7) se il confronto non risulta essere soddisfacente, si modifica l'intervallo di fase considerato per il calcolo.

3.2 Prove sperimentali sul mandrino

3.2.1 Strumentazione per misure geometriche

Gli strumenti utilizzati per le misurazioni geometriche sono elencati nella **Tabella 3.2**.

Tabella 3.2: Strumentazione per le misurazioni geometriche.

Produttore	Strumento	Modello	Sensibilità
SM	rotondimetro	R100	-
Leica	microscopio ottico	-	-
Mitutoyo	micrometro per esterni	293-521-30	0.001 mm
Intrinic	micrometro per interni	-	0.005 mm

Il *rotondimetro* (di cui vi è una foto in **Figura 3.4**) è uno strumento che permette la misura di errori di forma su componenti assialsimmetrici. La macchina è formata da una tavola rotante, con griffe per l'afferraggio del pezzo, ed un braccio

motorizzato che posiziona il tastatore lungo l'asse verticale ed orizzontale. Il pezzo in misura viene fatto ruotare, mentre il tastatore a contatto con la superficie del pezzo ne rileva il profilo. Tra le tipologie di errore misurabile vi sono:

- rettilineità;
- planarità;
- circolarità;
- cilindricità.

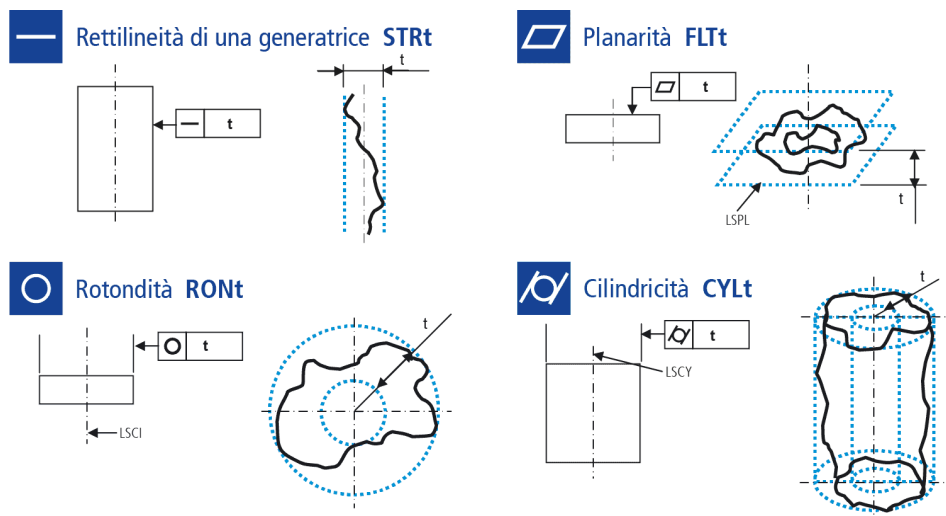


Figura 3.3: Tipologie di errori rilevabili con il rotondimetro. (adattato da [21])

In generale, l'errore di forma valuta lo scostamento del profilo di un pezzo reale da una geometria ideale presa a riferimento [8], che nel caso della circolarità e cilindricità sono rispettivamente un cerchio ed un cilindro. La norma ISO 12781-1 suggerisce i seguenti criteri, riferiti al caso della circolarità:

- cerchio dei minimi quadrati (LSC): il cerchio di riferimento è quello secondo cui le aree delimitate dal profilo reale all'esterno di esso sono uguali a quelle al suo interno;
- cerchio della zona minima (MZC); si definiscono due cerchi concentrici, che contengono l'intero profilo con una separazione radiale minima: l'errore è dato dalla distanza radiale tra questi due cerchi;
- minimo cerchio circoscritto (MCC): il cerchio di riferimento è il cerchio più piccolo in grado di contenere interamente il profilo reale: l'errore di rotondità è dato dalla massima distanza da questo cerchio;

- massimo cerchio inscritto (MCI): il cerchio di riferimento è il cerchio più grande inscrivibile all'interno del profilo reale: l'errore di rotondità è dato dalla massima distanza da questo cerchio.

Dei criteri analoghi si possono utilizzare per il caso della cilindricità. Naturalmente, la scelta del criterio incide sul valore finale dell'errore calcolato.

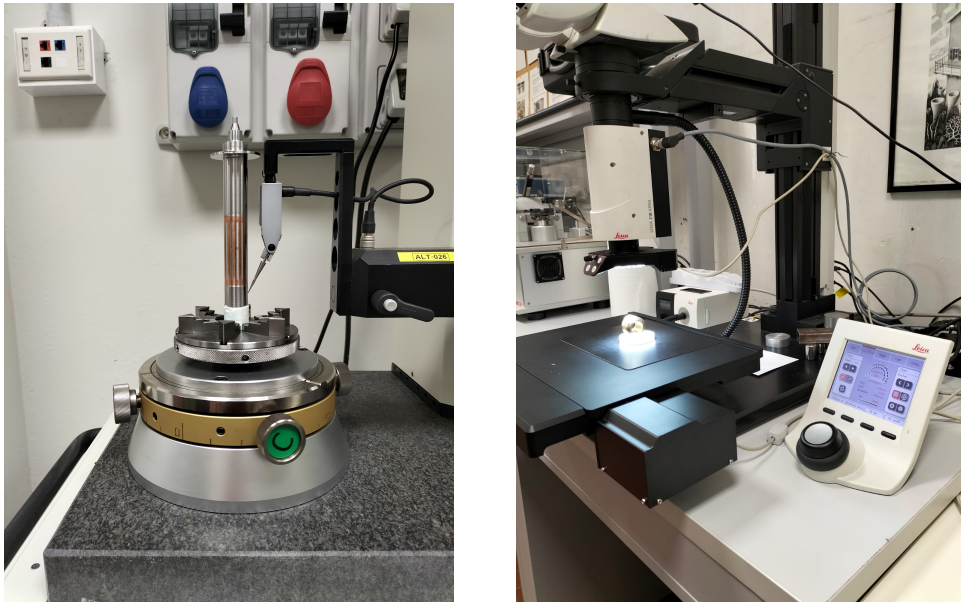


Figura 3.4: Rotondimetro e microscopio.

3.2.2 Architettura del mandrino e banco prova

L'elettromandrino per lavorazioni su PCB oggetto delle sperimentazioni è raffigurato schematicamente in **Fig. 3.5**. L'albero è supportato da due cuscinetti radiali aerostatici, di pari diametro D ma lunghezza assiale differente. Il sostentamento assiale è realizzato tramite due cuscinetti reggispinta anulari contrapposti ad un disco ricavata sul rotore. L'azionamento è di tipo asincrono: l'avvolgimento rotorico a gabbia di scoiattolo viene ricavato sul rotore, mentre l'avvolgimento trifase è nello statore. Per pilotare il motore si utilizza un driver dedicato, che sostanzialmente è un *inverter* con modulazione PWM.

All'interno del corpo cilindrico vi sono i condotti per la distribuzione dell'aria ai cuscinetti e per il raffreddamento ad acqua dello statore e dei supporti. Come si può vedere dalla **Fig. 3.6**, sul coperchio posteriore sono presenti i raccordi per il collegamento al circuito di raffreddamento, l'attacco per fornire l'aria ai cuscinetti ed un ingresso per azionare il meccanismo pneumatico di cambio utensile. Il mandrino utilizzato nei test è stato modificato per alloggiare le sonde attraverso il corpo del mandrino.

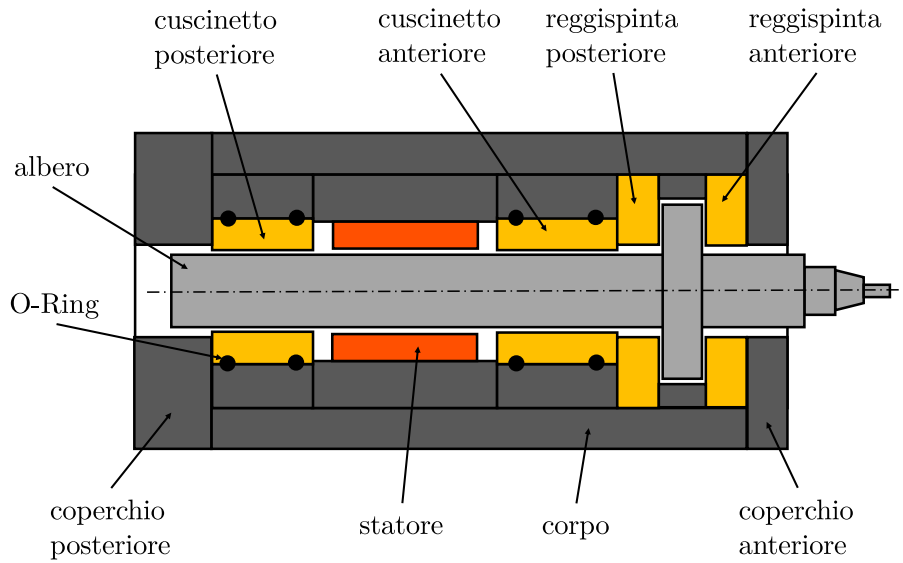


Figura 3.5: Schematizzazione in sezione del mandrino utilizzato.

Per eseguire le misure di vibrazione si utilizza il *setup* sperimentale presente in **Fig. 3.6**; la strumentazione è elencata nella **Tabella 3.3**. Il mandrino oggetto dei

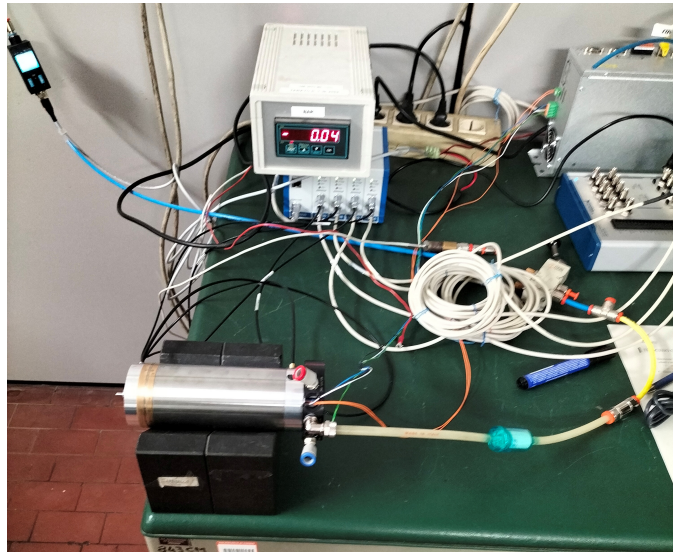


Figura 3.6: Setup per i test sul mandrino.

test è collegato alla linea di aria compressa del laboratorio, che è dotata di regolatore di pressione con valvola di interruzione. La portata d'aria viene misurata attraverso un flussimetro digitale, mentre la pressione di alimentazione viene misurata sia da un trasduttore che da un manometro analogico. Data la breve durata del test e la conseguente ridotta generazione di calore, si è ritenuto superfluo l'utilizzo

dell'acqua di refrigerazione, monitorando comunque la temperatura. La posizione del rotore viene letta in due piani distinti (anteriore e posteriore) lungo due direzioni ortogonali (x e y) con sensori capacitivi. I segnali vengono poi acquisiti ed elaborati con un PC.

Tabella 3.3: Strumentazione utilizzata per i test sul mandrino.

Produttore	Strumento	Modello
Micro-Epsilon	sistema di misura sensori capacitivi	capaNCDT 6200 CS05
National Instruments	sistema di acquisizione	NI USB 6341
Sieb & Meyer	driver motore	SD04
Festo	flussimetro	SFAB-200U
-	manometro	-

3.2.3 Procedura di bilanciamento del rotore

La misura dello squilibrio esistente sul rotore viene eseguita da una macchina equilibratrice a supporti oscillanti. Sostanzialmente è formata da un'unità di elaborazione con monitor e da un banco con supporti regolabili, in grado di oscillare orizzontalmente in direzione perpendicolare all'asse del rotore da equilibrare. Lo spostamento dei supporti è letto tramite due LVDT e mandato all'unità di elaborazione, mentre il riferimento angolare è fornito da una fotocellula che legge una tacca riflettente opportunamente ricavata sul rotore. La misura si basa sul metodo dei coefficienti di influenza descritto nel **Paragrafo 1.3.2**. I concetti e la procedura descritti sono validi anche per quanto riguarda l'equilibratura del rotore dell'elettromandrino oggetto di analisi. Tuttavia, alcuni fattori ne complicano l'esecuzione e richiedono una particolare attenzione.

Il rotore è di dimensioni ridotte, così come la sua massa. Pertanto, per ottenere delle vibrazioni rilevabili dagli strumenti, occorre eseguire la bilanciatura ad una velocità relativamente elevata (almeno 20 krpm), precludendo l'utilizzo dei supporti tradizionali a cuscinetti volventi. Si utilizza allo scopo un corpo mandrino, opportunamente preparato, sfruttandone i supporti ad aria e lo statore per portare in rotazione l'albero. Questa soluzione, pur essendo valida, ha alcune limitazioni. Le forze centrifughe generate dagli squilibri ed agenti sul rotore si scaricano sui supporti ad aria del corpo mandrino, che poi a sua volta le trasmette ai supporti dell'equilibratrice. Pertanto, misurando il sistema per intero anziché il rotore isolato, entra in gioco la trasmissibilità del sistema rotore-supporti, che potrebbe

alterare la misura dello squilibrio. Inoltre, utilizzando un corpo unico, si perde il disaccoppiamento tra i due piani di misura.

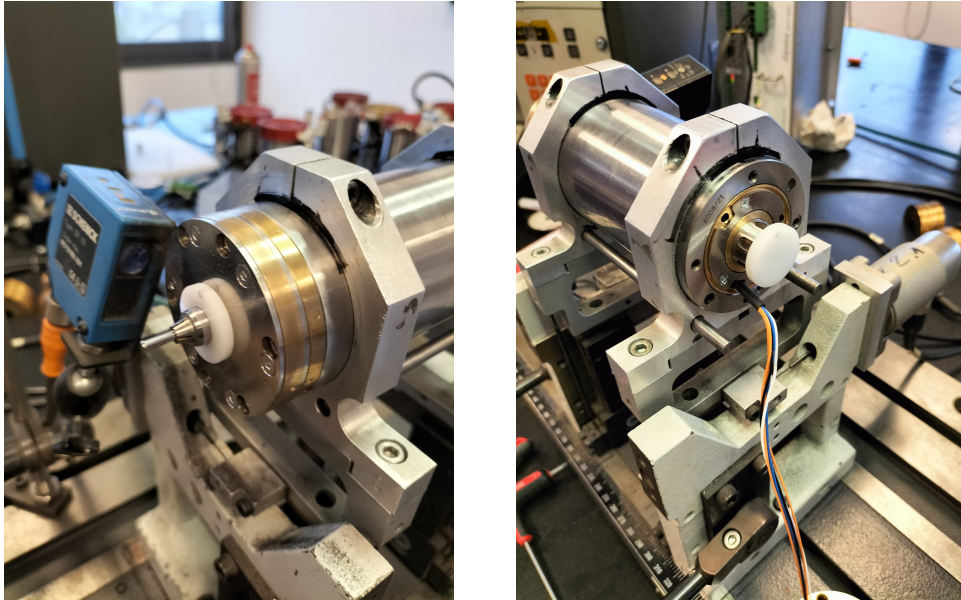


Figura 3.7: Anelli utilizzati per la calibrazione.

Un'altra criticità risiede nella fase di calibrazione, dove è richiesto l'uso di masse campione che poi vanno rimosse. Con rotori di dimensioni maggiori, che ruotano a velocità inferiori, si usano materiali adesivi applicati sulla superficie del rotore, ma in questo caso non è possibile. Per risolvere questo problema vengono utilizzati degli anelli in materiale plastico (visibili in **Figura 3.7**), da applicare ad incastro sul rotore, con degli appositi fori che permettono l'aggiunta di grani filettati per simulare le masse campione necessarie.

Un'ultima osservazione riguarda la procedura di correzione dello squilibrio. Essa viene eseguita manualmente, mediante asportazione di materiale, con una mola smerigliatrice a disco. Come si può intuire, l'operazione è molto delicata e necessita di grande esperienza e sensibilità da parte dell'operatore. Inoltre, la rimozione non può avvenire esattamente nei piani di calibrazione, che sono stabiliti dalla posizione degli anelli usati nella procedura. Tuttavia, mantenendo i piani effettivi di correzione vicini a quelli utilizzati per la calibrazione, l'errore commesso è minimo, e per le motivazioni esposte in precedenza è comunque minore di quello commesso dall'operatore durante la procedura di asportazione.

3.3 Progetto di un banco prova per supporti ad aria

Per validare le simulazioni numeriche riguardanti le caratteristiche statiche e dinamiche dei supporti a gas, è di grande interesse lo sviluppo di un *setup* sperimentale utile allo scopo. In particolare, il banco prova deve avere le seguenti caratteristiche:

- misura dello spostamento assoluto della boccola, in due direzioni perpendicolari;
- misura dello spostamento relativo tra albero e boccola, in due direzioni;
- eccitazione lungo le due direzioni;
- misura della forza impressa dall'esterno.

A seguito di una ricerca sugli articoli in letteratura che trattano questo argomento, si è giunti ad un progetto preliminare di banco prova per la caratterizzazione dinamica del supporto.

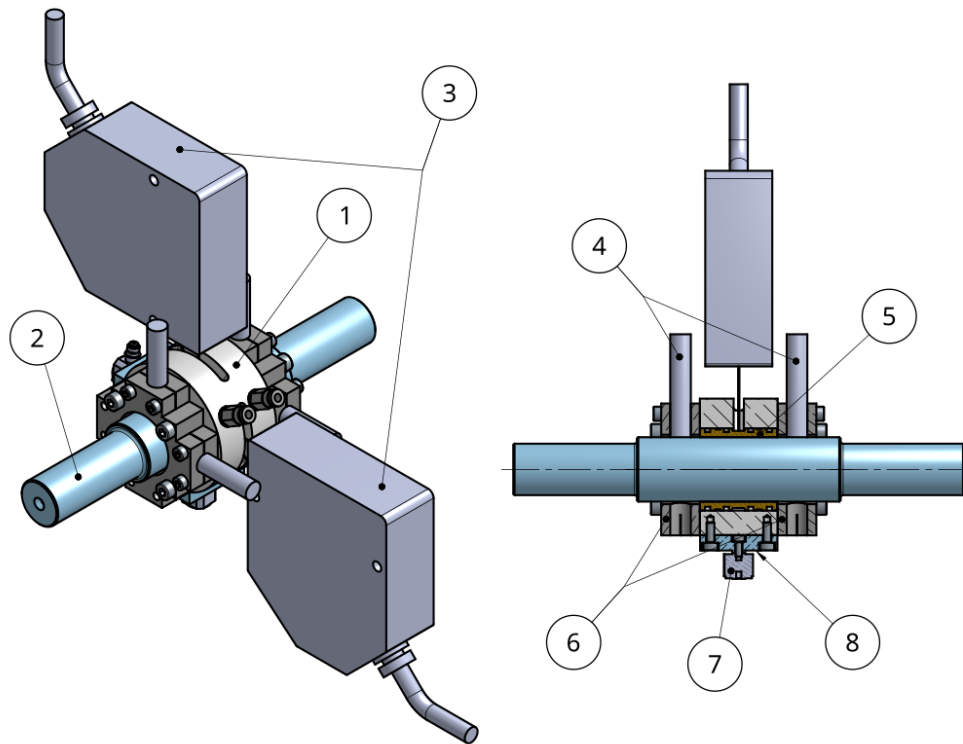


Figura 3.8: Schematizzazione del banco prova.

Il supporto in prova (5) è inserito all'interno del corpo portaboccola (1). Due slot ricavati nel portaboccola consentono la misura dello spostamento assoluto del

supporto mediante sensori laser (3). Lo spostamento relativo dell'albero rispetto al portabocca viene invece misurato con 4 sensori capacitivi (4) installati su apposite piastre portasensori (6). Tramite due piastrine di interfaccia (8) è possibile collegare il portabocca alle celle di carico (7), che saranno poi accoppiate agli attuatori.

Questa configurazione prevede che l'albero (2) venga supportato da due cuscinetti ausiliari, ricadendo quindi nel caso di **Fig. 1.12b** o **1.12c** descritti nel **Paragrafo 1.1.4**. La scelta dei cuscinetti di supporto deve tenere conto della velocità massima che si intende raggiungere, e devono garantire una rigidità maggiore rispetto a quella esibita dal cuscinetto in prova.

Nel prosieguo del progetto si dovrà scegliere un sistema per porre in rotazione l'albero: al momento, la soluzione più facilmente realizzabile è la turbina ad aria, ricavata di pezzo sull'albero. Con un buon progetto della palettatura è possibile raggiungere velocità considerevoli; inoltre, a differenza di azionamenti elettrici, non vengono generati disturbi elettromagnetici che interferiscono con la misura. Una alternativa potrebbe essere l'utilizzo di un motore esterno; il problema in quel caso risiede nell'accoppiamento tra l'albero motore e il rotore del banco prova.

Capitolo 4

Risultati

4.1 Caratterizzazione O-Ring del mandrino

Gli O-Ring oggetto dei test, utilizzati come elementi smorzanti nel mandrino, hanno un diametro interno D pari a 26.7 mm e un diametro di corda d pari a 1.78 mm. I test sono stati eseguiti su O-Ring in NBR aventi tre durezze differenti (NBR 50, NBR 60, NBR 70) cambiando cinque livelli di *squeeze* δ (5%, 10%, 15%, 20%, 25%). Lo *stretch* ε è mantenuto costante e pari a 5%, il valore previsto a progetto in condizioni di esercizio. I test sono stati eseguiti a temperatura ambiente di 25 °C.

I risultati ottenuti sono riportati in grafici doppio logaritmici (**Figure 4.1, 4.2 e 4.3**). I punti sperimentali sono rappresentati con *marker*; quelli pieni rappresentano i punti filtrati secondo la procedura descritta nel **Paragrafo 3.1.3**. Infine, con linee continue sono tracciate le funzioni interpolanti i dati sperimentali secondo le leggi di potenza descritte dalle **Equazioni 3.1**; i coefficienti di interpolazione sono riassunti nelle **Tabelle 4.1, 4.2 e 4.3**.

I risultati sono in accordo con i precedenti lavori, evidenziando una tendenza a crescere nella rigidità ed a diminuire nello smorzamento all'aumentare della frequenza di eccitazione. Si nota una marcata dispersione dei dati sperimentali a valori di *squeeze* molto bassi (5%); in fase di montaggio si è infatti riscontrato che l'albero era piuttosto lasco in questa configurazione. Tuttavia, la caratterizzazione dell'O-Ring con un precarico così basso non risulta di grande rilievo ai fini pratici in quanto solitamente lo *squeeze* adottato è di valore ben superiore.

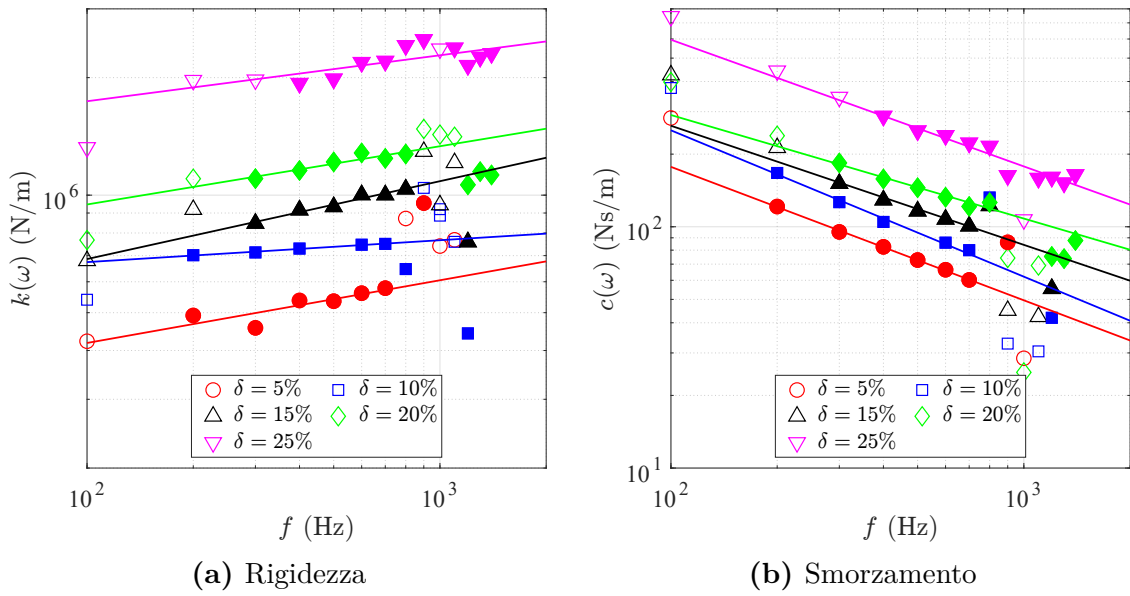


Figura 4.1: Effetto dello squeeze δ , NBR 50

Tabella 4.1: Coefficienti della funzione interpolante, NBR 50.

Squeeze δ	Rigidezza		Smorzamento	
	$A \cdot 10^{-5}$	α	$B \cdot 10^{-3}$	β
5 %	1.996	0.161	2.262	-0.553
10 %	5.204	0.056	4.101	-0.607
15 %	2.738	0.199	2.548	-0.494
20 %	4.762	0.149	2.097	-0.429
25 %	10.118	0.118	6.688	-0.525

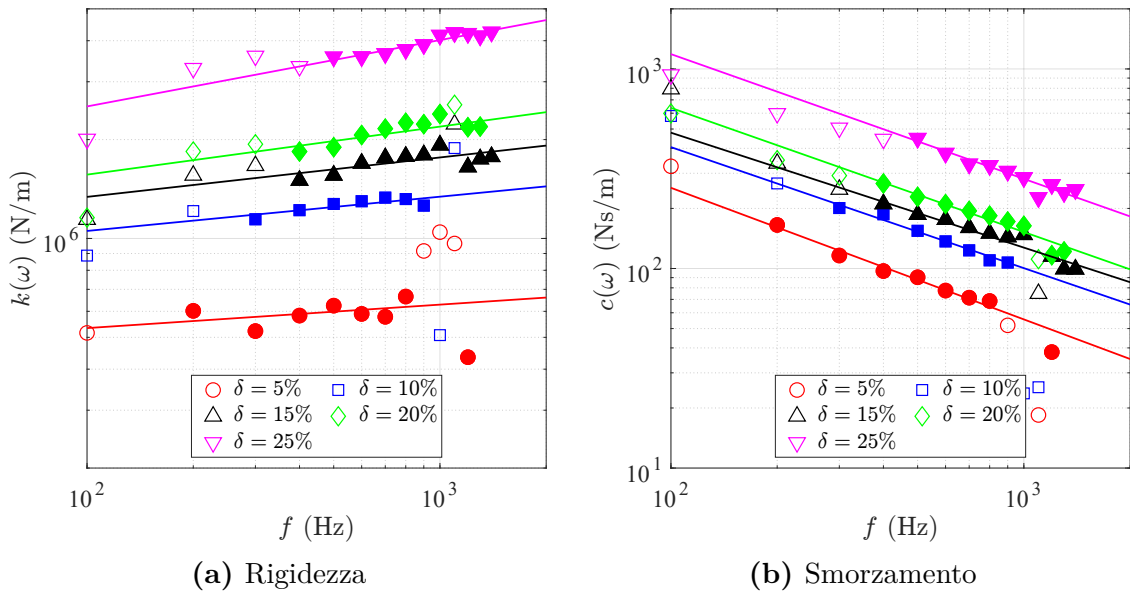
Figura 4.2: Effetto dello squeeze δ , NBR 60

Tabella 4.2: Coefficienti della funzione interpolante, NBR 60.

Squeeze δ	Rigidezza		Smorzamento	
	$A \cdot 10^{-5}$	α	$B \cdot 10^{-3}$	β
5	3.839	0.071	5.286	-0.659
10	6.520	0.104	6.622	-0.606
15	7.701	0.120	6.797	-0.576
20	7.981	0.146	11.195	-0.622
25	9.951	0.202	21.113	-0.625

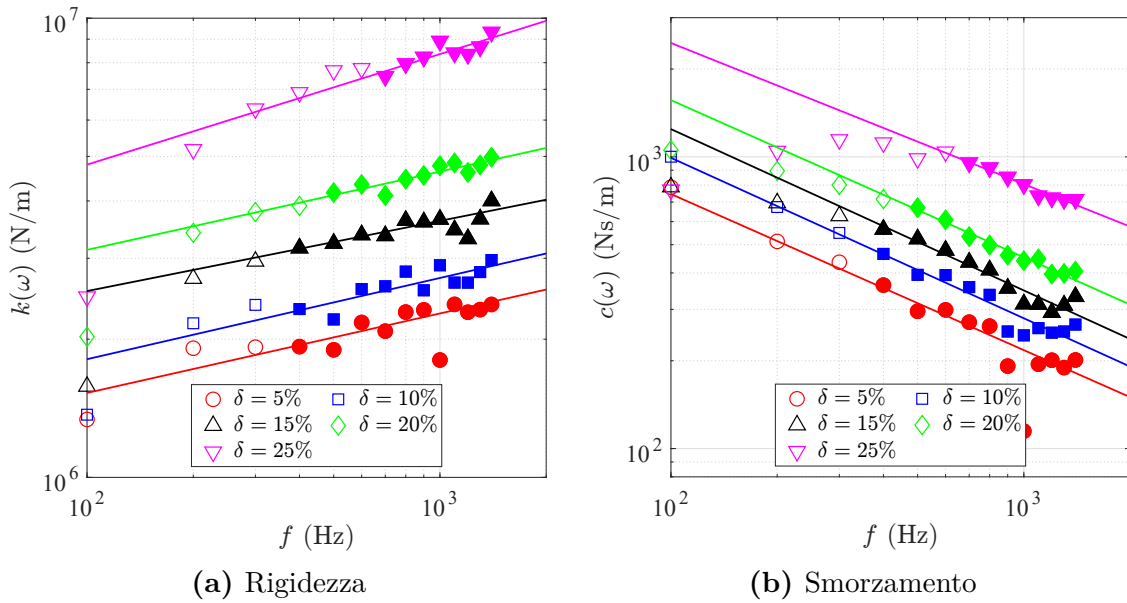


Figura 4.3: Effetto dello squeeze δ , NBR 70

Tabella 4.3: Coefficienti della funzione interpolante, NBR 70.

Squeeze δ	Rigidezza		Smorzamento	
	$A \cdot 10^{-6}$	α	$B \cdot 10^{-4}$	β
5	0.689	0.173	0.876	-0.535
10	0.801	0.177	1.250	-0.550
15	1.259	0.153	1.590	-0.553
20	1.427	0.171	1.869	-0.539
25	1.584	0.241	2.281	-0.484

4.2 Simulazione numerica di cuscinetti ad aria

Il modello numerico di cuscinetto aerostatico, secondo la discretizzazione presentata nel **Capitolo 2.1.3**, è stato realizzato in MATLAB; se ne riporta il listato in **Appendice A**.

4.2.1 Validazione del modello

Confronto con soluzione analitica Per verificare il buon funzionamento del modello realizzato, si esegue un confronto con la soluzione analitica proposta da Ausman, valida nell'approssimazione di piccole eccentricità: i risultati sono riportati in **Figura 4.4**. Siccome le funzioni sono espresse in termini adimensionali, il codice è stato adattato allo scopo per permettere il confronto. Inoltre, dal momento che le soluzioni si riferiscono ad un cuscinetto aerodinamico, la portata in ingresso viene imposta pari a zero, ed il numero di punti nella griglia viene scelto senza utilizzare il criterio descritto nella **Sezione 2.1.3**.

Tabella 4.4: Parametri della simulazione di confronto con la soluzione analitica.

nodi lungo la circonferenza n	64
nodi lungo l'asse m	32
errore di convergenza su p	1×10^{-6}
errore di convergenza su ϕ	1×10^{-4}
passo temporale $d\tau$	5×10^{-7}

I risultati ottenuti sono in buon accordo con le formulazioni analitiche. Nella **Figura 4.5**, a titolo d'esempio, è riportata la distribuzione di pressione nel cuscinetto.

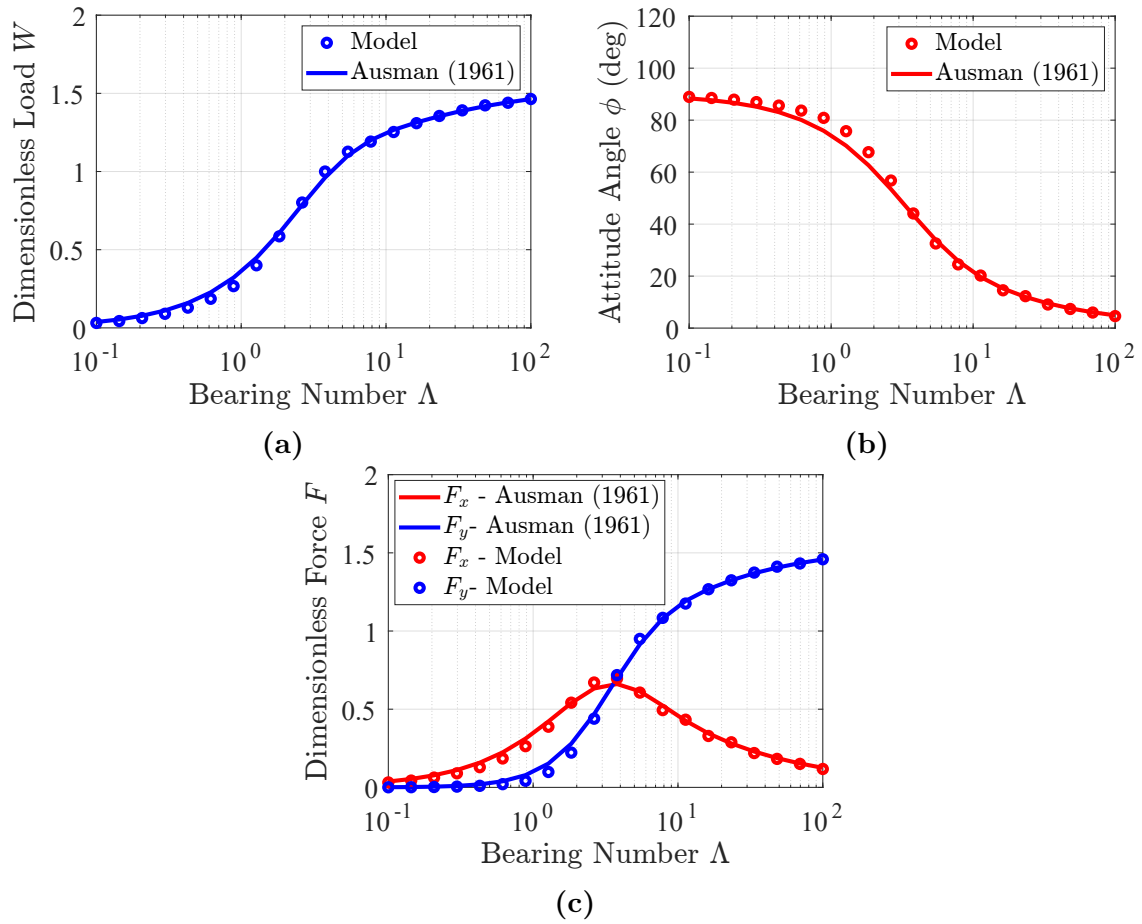


Figura 4.4: Confronto con la soluzione di Ausman [3]

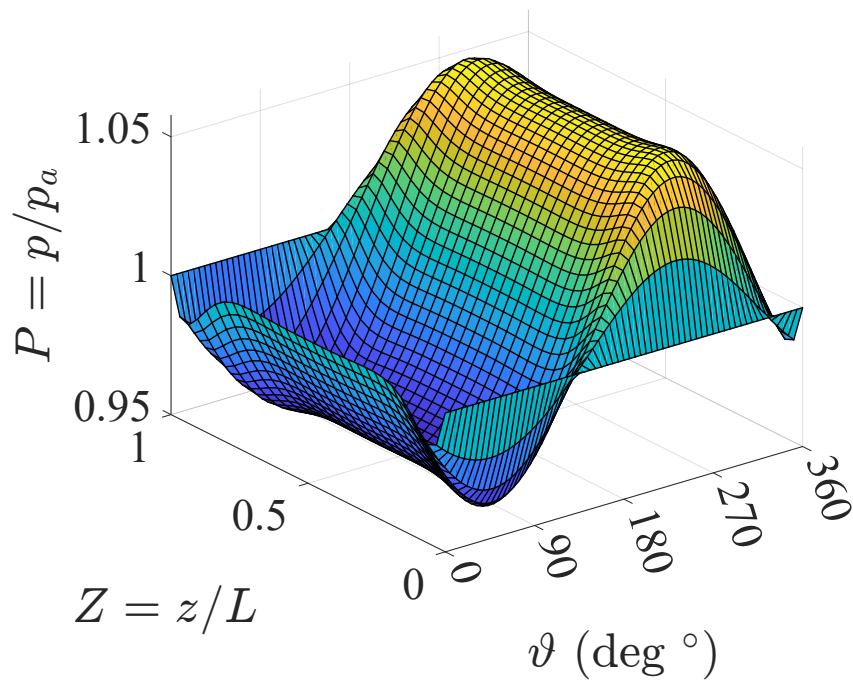


Figura 4.5: Distribuzione di pressione nel cuscinetto aerodinamico.

Confronto con soluzione numerica agli elementi finiti Successivamente, si procede ad un confronto con i risultati ottenuti da Wang et al. [31], che ha trattato il caso di un supporto aerostatico utilizzando il metodo agli elementi finiti e la tecnica del sovrarilassamento. I risultati, riportati nelle **Figure 4.6** e **4.7**, sono stati ottenuti con valori differenti di c e ε , che sono indicati nelle rispettive didascalie.

Tabella 4.5: Parametri del cuscinetto utilizzati da Wang et al. [31].

lunghezza del cuscinetto L	50.8 mm
diametro del cuscinetto D	50.8 mm
fori per ciascuna fila N_f	8
numero di file N_r	2
diametro dei fori d_s	0.2 mm
pressione di alimentazione p_s	5 atm
gioco radiale c	15,20 μm
velocità di rotazione ω	0÷50 krpm

Tabella 4.6: Parametri della simulazione di confronto con Wang et al. [31].

nodi lungo la circonferenza n	71
nodi lungo l'asse m	17
errore di convergenza su p	1×10^{-6}
errore di convergenza su ϕ	1×10^{-4}
passo temporale dt	5×10^{-7} s
metodo di calcolo c_d	Neves (Eq. 2.1.2)

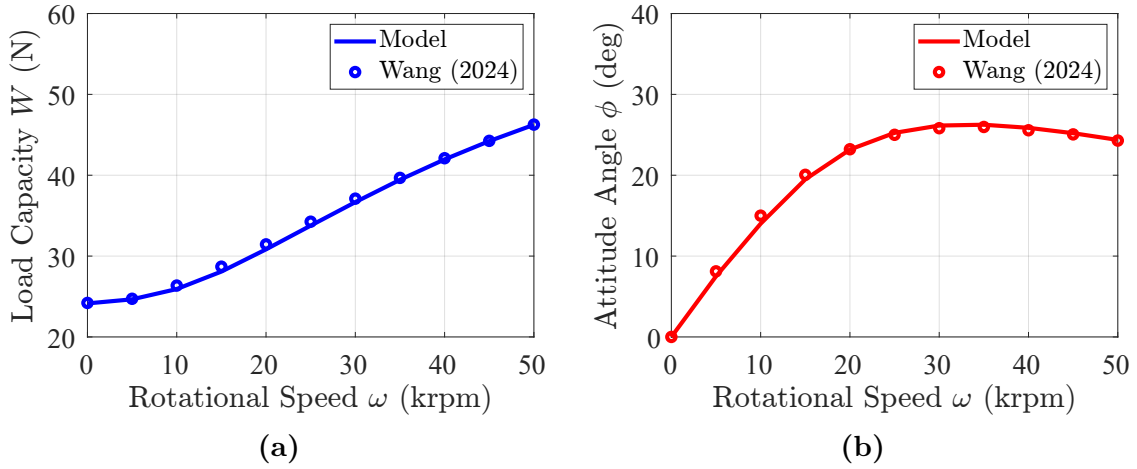


Figura 4.6: Confronto con i risultati di Wang et al. [31] ($c = 15 \mu\text{m}$, $\varepsilon = 0.05$)

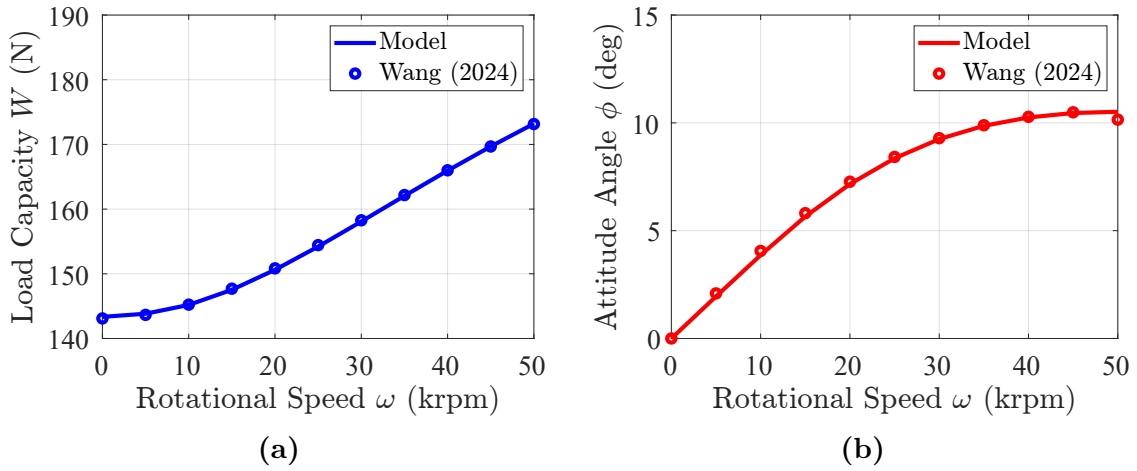


Figura 4.7: Confronto con i risultati di Wang et al. [31] ($c = 20 \mu\text{m}$, $\varepsilon = 0.2$)

I risultati ottenuti sono analoghi a quelli riportati nell'articolo.

Confronto con dati sperimentali Infine, si prova il modello confrontandolo con i dati sperimentali ottenuti da Shalash et al. [28]. In particolare, oltre alla capacità di carico verranno confrontati anche i profili di pressione a diversi valori di eccentricità e a velocità nulla.

Tabella 4.7: Parametri del banco prova di Shalash et al. [28].

lunghezza del cuscinetto L	40 mm
diametro del cuscinetto D	40 mm
fori per ciascuna fila N_f	18
numero di file N_r	2
diametro dei fori d_s	0.1 mm
pressione di alimentazione p_s	3÷7 bar
gioco radiale c	33.86 μm
velocità di rotazione ω	0,25 krpm

Tabella 4.8: Parametri della simulazione di confronto con Shalash et al. [28].

nodi lungo la circonferenza n	145
nodi lungo l'asse m	65
errore di convergenza su p	1×10^{-6}
errore di convergenza su ϕ	1×10^{-4}
passo temporale dt	5×10^{-8} s
metodo di calcolo c_d	$c_d = 0.625$

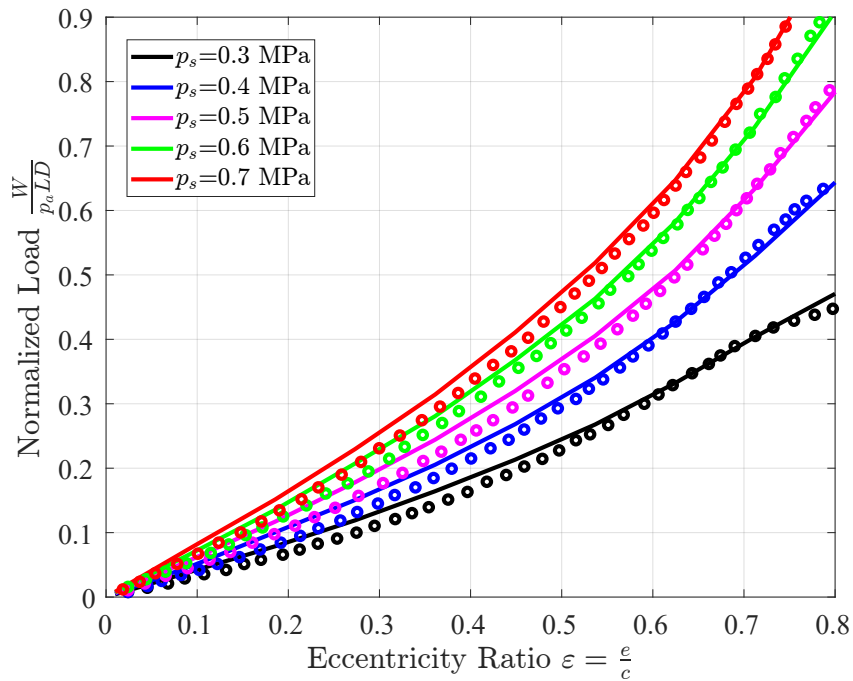


Figura 4.8: Capacità di carico a differenti pressioni di alimentazione.

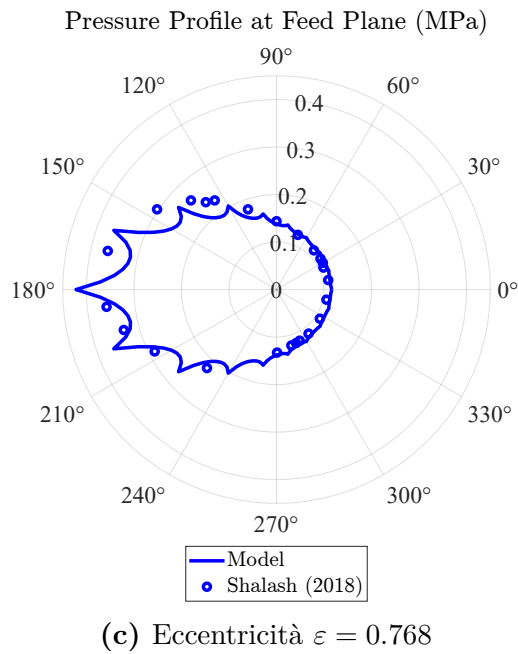
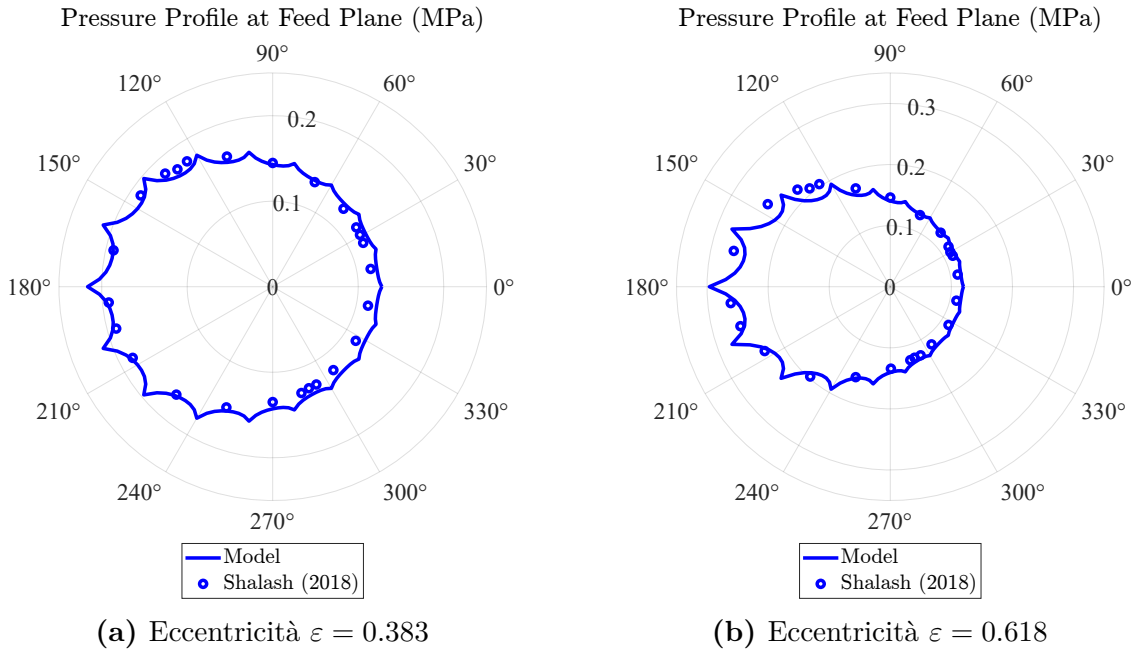


Figura 4.9: Profili di pressione nel piano dei fori di alimentazione.

La simulazione numerica mostra nel complesso un buon accordo con i dati sperimentali. Dalla **Fig. 4.8** si osserva che il modello numerico generalmente sovrastima la capacità di carico, specialmente a basse eccentricità.

4.2.2 Applicazione ai cuscinetti del mandrino

Il modello viene infine utilizzato per caratterizzare i cuscinetti presenti nel mandrino. Il valore del gioco radiale e il diametro dei fori di alimentazione fanno riferimento alle misurazioni, riportate nella **Sezione 4.3.1**, eseguite sui componenti attuali del mandrino. Sono state ricavate le capacità di carico e gli angoli di assetto in funzione della velocità di rotazione, a differenti eccentricità: i risultati sono in **Figura 4.10** e **4.11**.

Tabella 4.9: Parametri dei cuscinetti del mandrino.

	anteriore	posteriore
lunghezza del cuscinetto L	37 mm	26 mm
diametro del cuscinetto D	19 mm	19 mm
fori per ciascuna fila N_f	10	10
numero di file N_r	2	2
diametro dei fori d_s	0.119 mm	0.119 mm
pressione di alimentazione p_s	6 MPa	6 MPa
gioco radiale c	26.15 μm	25.95 μm
velocità di rotazione ω	200 krpm	200 krpm

Tabella 4.10: Parametri della simulazione per i cuscinetti del mandrino.

	anteriore	posteriore
nodi lungo la circonferenza n	81	81
nodi lungo l'asse m	75	53
errore di convergenza su p	1×10^{-6}	1×10^{-6}
errore di convergenza su ϕ	1×10^{-4}	1×10^{-4}
passo temporale dt	3×10^{-8} s	3×10^{-8} s
metodo di calcolo c_d	Neves	Neves

A fine dimostrativo, per visualizzare il funzionamento di un supporto aerostatico, sono state tracciate le distribuzioni di pressione a diverse eccentricità a velocità nulla (**Figura 4.12**) e i profili di pressione nel piano dei fori a differenti velocità di rotazione (**Figura 4.13**). Nelle prime si può vedere come il campo di pressione

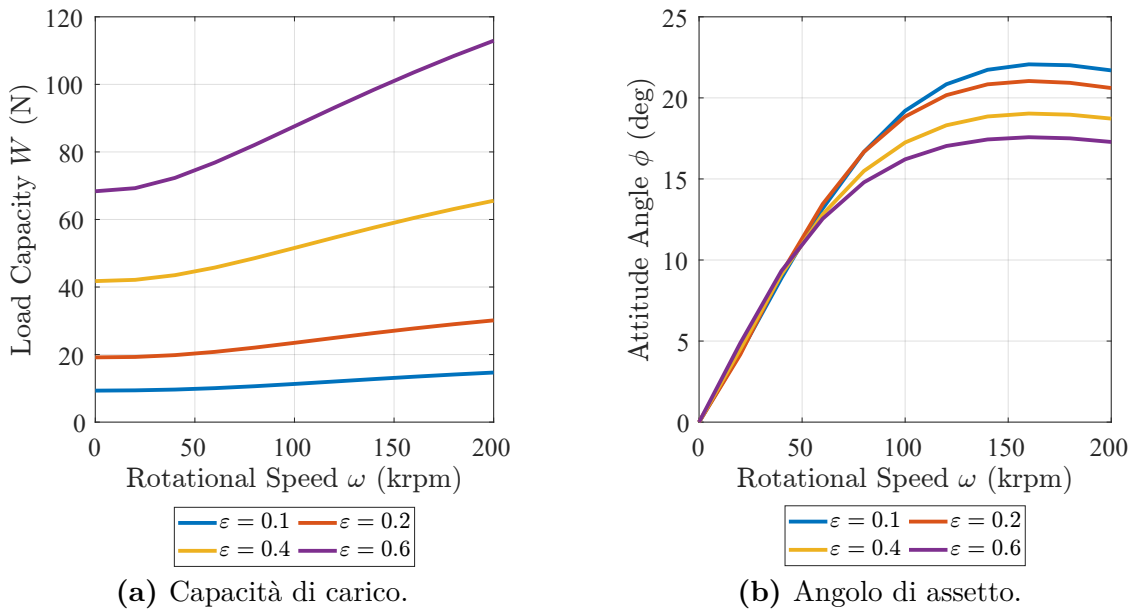


Figura 4.10: Caratteristiche del cuscinetto anteriore.

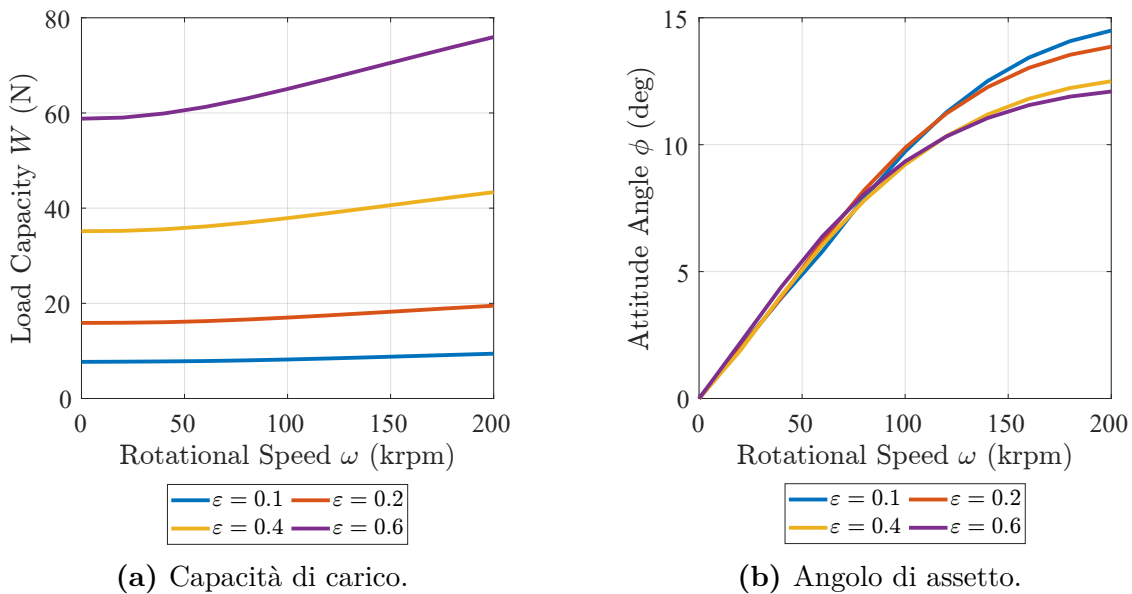


Figura 4.11: Caratteristiche del cuscinetto posteriore.

si modifica in seguito al cambiamento della geometria del meato, dovuta all'eccentricità. Nei profili invece si può scorgere l'effetto della velocità di rotazione.

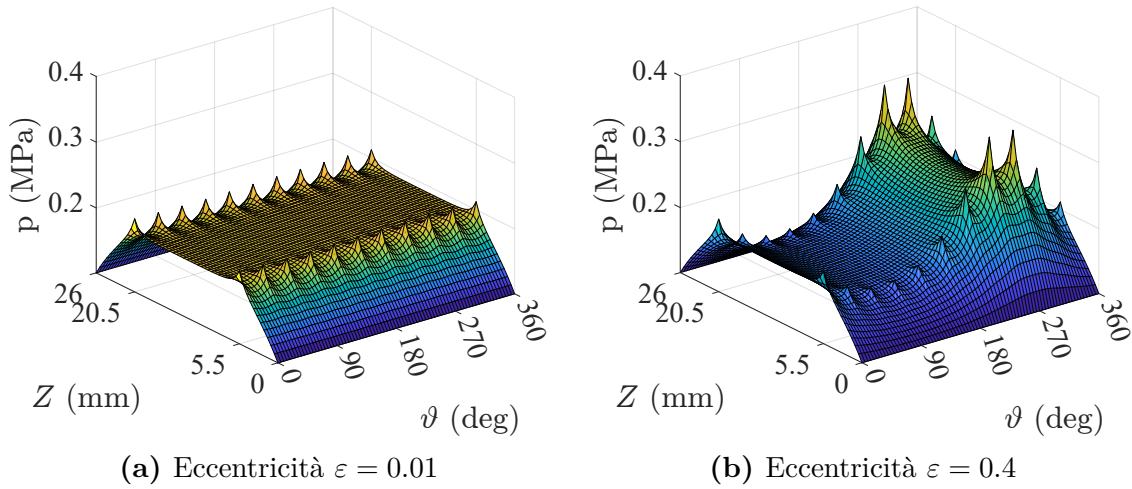


Figura 4.12: Distribuzione di pressione nel cuscinetto posteriore.

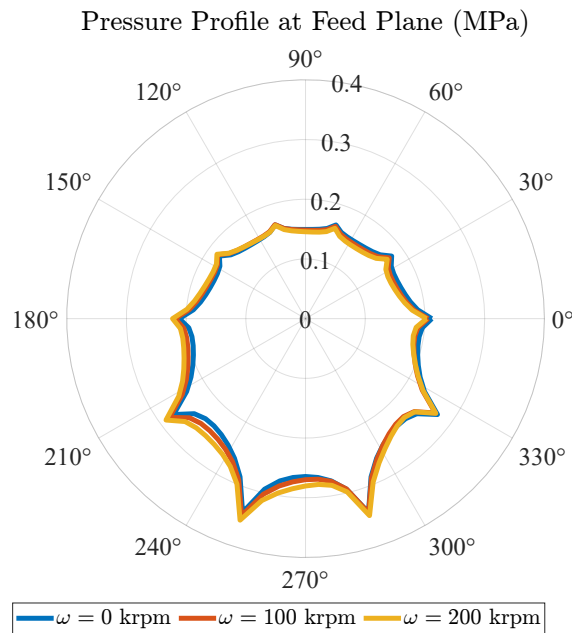


Figura 4.13: Profili di pressione a differenti velocità ($\varepsilon = 0.4$).

4.3 Prove sperimentali sul mandrino

4.3.1 Misurazioni geometriche e di squilibrio

Sono stati rilevati i diametri interni dei cuscinetti e delle corrispondenti sedi sull'albero; i dati in **Tabella 4.11** riportano i risultati come media di dieci misurazioni.

Inoltre, per quantificare la presenza di errori geometrici, è stata misurata la cilindricità delle superfici di cui sopra con il rotondimetro; il criterio utilizzato per il calcolo è quello dei minimi quadrati.

Tabella 4.11: Misurazioni geometriche.

	Quota nominale (mm)	Misurata (mm)	Errore di cilindricità (μm)
cuscinetto anteriore	19.045	19.049	3.726
cuscinetto posteriore	19.045	19.047	6.863
albero, sede anteriore	19.000	18.996	2.768
albero, sede posteriore	19.000	18.995	4.558

I fori di alimentazione sono stati ispezionati e misurati al microscopio: il diametro medio riscontrato è stato di 0.119mm a fronte di un valore a progetto di 0.120 mm.

Al termine dell'equilibratura del rotore è stato rilevato lo squilibrio residuo riportato in **Tabella 4.12**.

Tabella 4.12: Squilibrio residuo sull'albero.

Anteriore	Posteriore
6.75 mg @ 352°	0.42 mg @ 118°

4.3.2 Prove in decelerazione

La presenza di forti disturbi elettromagnetici causati dalle correnti circolanti nello statore impedisce di eseguire delle misurazioni con la strumentazione attuale. Per questo motivo si è deciso di condurre le prove a motore spento: si accelera il rotore fino al raggiungimento della velocità nominale, dopodiché si scollega il driver del motore e si acquisiscono i dati in decelerazione. Nelle **Figure 4.14** si riportano i *cascade plot* relativi alle misure nei due piani e lungo le due direzioni.

Nei diagrammi è immediatamente riconoscibile la vibrazione sincrona, ovvero a frequenza pari a quella di rotazione ($1\times$), che accompagna qualsiasi rotore avente uno squilibrio residuo. Si evidenziano inoltre vibrazioni a frequenze supersincrone.

Nelle **Figure 4.15** sono rappresentati i valori di vibrazione sincrona al variare della velocità di rotazione. Si può notare che i livelli di vibrazione sono maggiori nel piano anteriore rispetto a quello posteriore. In ogni caso, i valori riscontrati restano entro le specifiche riportate dal costruttore del mandrino.

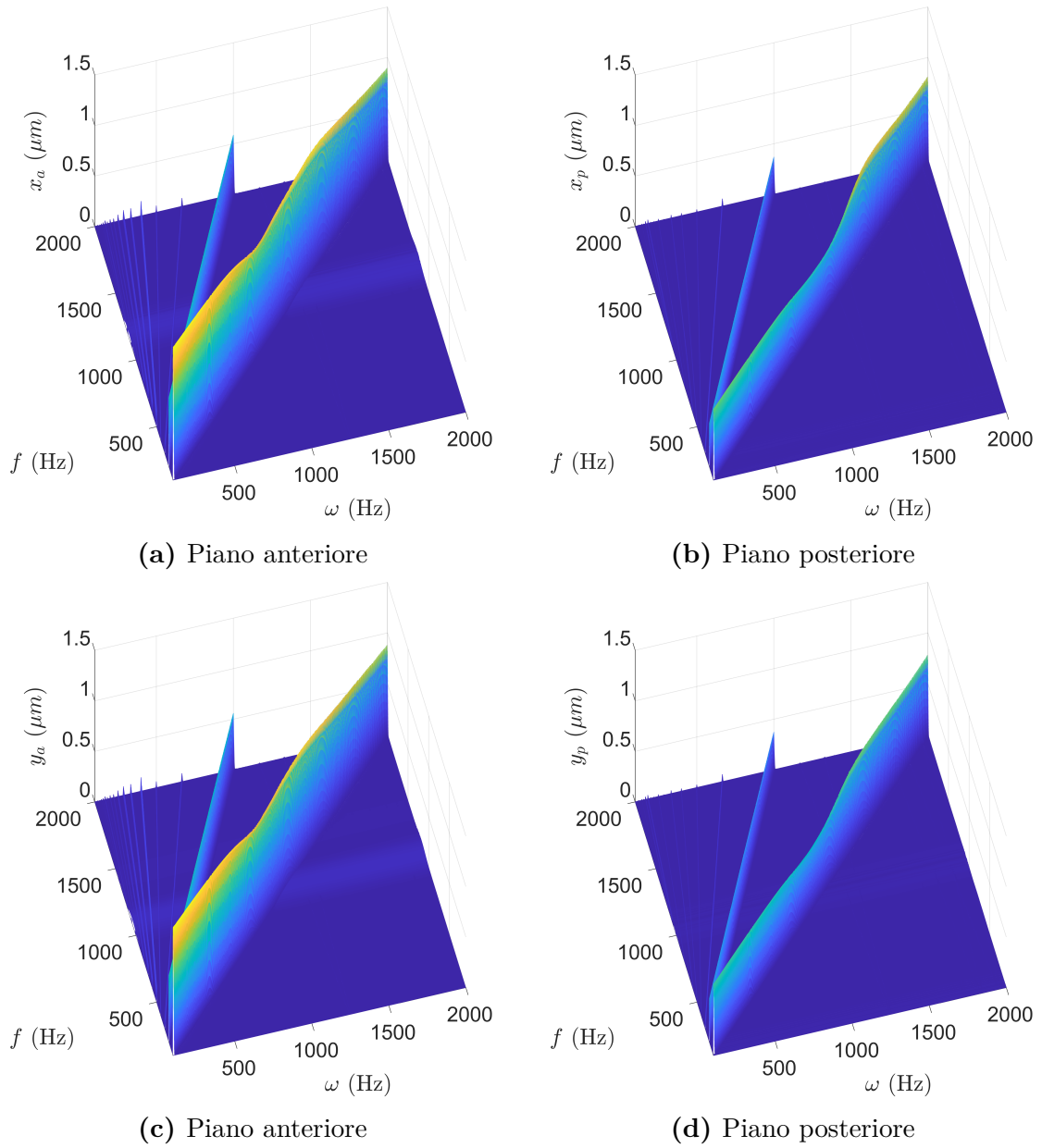
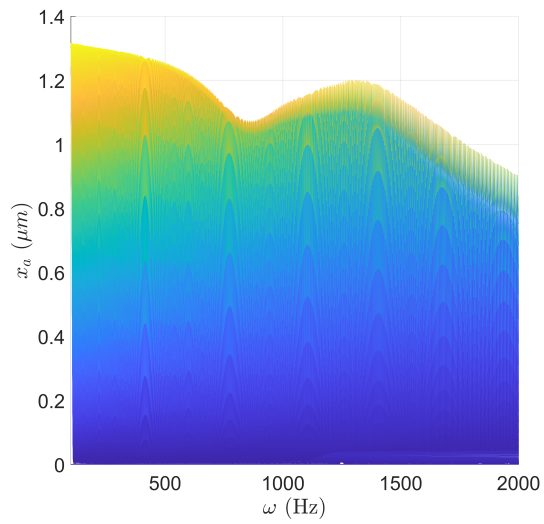
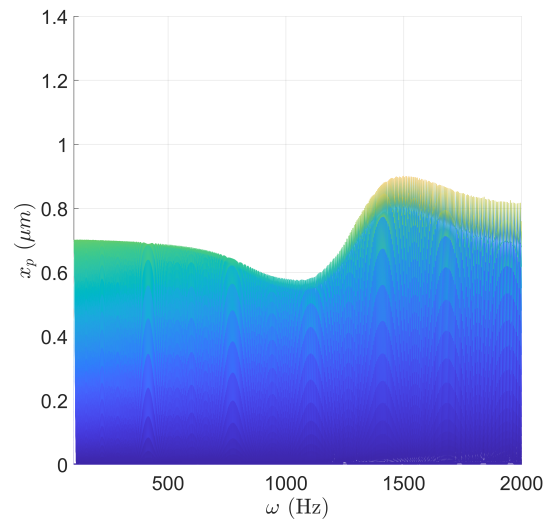


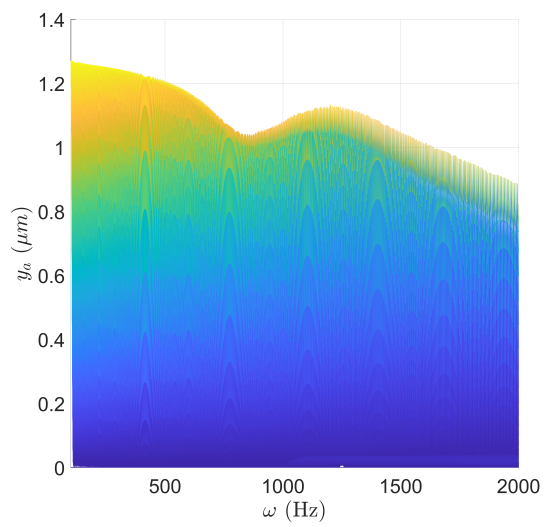
Figura 4.14: *Cascade plot*



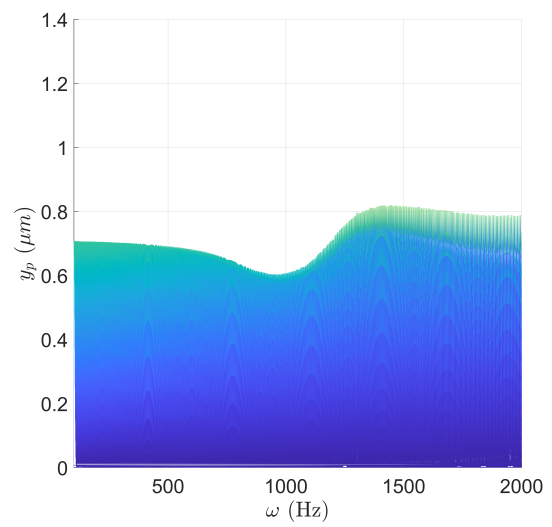
(a) Piano anteriore



(b) Piano posteriore



(c) Piano anteriore



(d) Piano posteriore

Figura 4.15: Vibrazione sincrona.

Capitolo 5

Conclusioni e sviluppi futuri

L'argomento di questa tesi era il progresso nella ricerca di sistemi rotanti ad alta velocità supportati da cuscinetti ad aria, con interesse al caso applicativo di un elettro-mandrino per lavorazioni su PCB.

La modellazione numerica del cuscinetto radiale aerostatico, confrontato con le simulazioni eseguite da altri autori in letteratura, restituisce pressoché gli stessi risultati. Anche in relazione ai dati sperimentali l'attendibilità del modello è buona, anche se emergono lievi differenze. Queste sono imputabili sia alle imprecisioni nelle misurazioni che ad una formulazione del coefficiente di scarico non del tutto attinente alla realtà. In ogni caso, la logica di discretizzazione della griglia si è rivelata coerente al caso fisico e facilmente adattabile a casi pratici. In futuro, al fine di ridurre i tempi di calcolo e/o migliorare la convergenza, si potrebbe ottimizzare il codice adottando tecniche differenti per la discretizzazione nello spazio, come gli elementi finiti, e per l'avanzamento in tempo, come il metodo di Runge-Kutta. L'applicazione ai cuscinetti del mandrino ha permesso di avere una stima della capacità di carico degli stessi, che risulta essere in linea con le specifiche fornite dal costruttore del mandrino.

La sperimentazione riguardo gli O-Ring ha permesso di ottenere le curve caratteristiche di rigidità e smorzamento in funzione della frequenza di eccitazione, a differenti valori di *squeeze*. Benché cambiando la massa oscillante si sarebbe potuto raggiungere un valore di frequenza maggiore, i risultati ottenuti si sono rivelati più che adeguati al fine di ricavare delle leggi empiriche utili nei modelli. Il *layout* del banco prova impiegato è ormai di comprovata affidabilità: basandosi su di esso, è quindi possibile testare O-Ring di taglia differente semplicemente modificando le dimensioni in modo opportuno e verificando la frequenza di risonanza del sistema.

L'analisi delle vibrazioni del rotore evidenzia, a conferma delle previsioni teoriche, che la principale fonte di vibrazioni è proprio lo squilibrio residuo. Questo sottolinea il fatto che la bilanciatura del rotore è un'operazione alla quale occorre dedicare grande cura. Come discusso, si potrebbe ottenere una lettura più precisa dello squilibrio disaccoppiando completamente i due piani di misura dell'equilibratrice.

Appendice A

Listato simulazione supporti

A.1 Modello numerico di cuscinetto aerostatico

```
1 clc
2 clear all
3 close all
4 set(0,'defaultTextInterpreter','latex');
5 set(0,'defaultAxesFontSize',20);
6 set(0,'defaultAxesFontName','TimesNewRoman');
7
8 %% Parametri Ingresso Modello
9 T=298; % Temperatura assoluta [K]
10 Rg=286.9; % Costante dell'aria [J/kg/K]
11 mu=1.8365e-5; % Viscosita' dinamica dell'aria [Pa s]
12 Pa=101325; % Pressione atmosferica [Pa]
13 rho=Pa/(Rg*T); % Densita' dell'aria [kg/m3]
14 cG=60000/rho; % conversione portata a 20 C
15
16 Ps=5*Pa; %% Pressione di alimentazione [Pa]
17 ds=0.2*1e-3; % Diametro fori alimentazione [m]
18 Nr=2; % N. file di fori alimentazione
19 Nf=8; % N. fori per ciascuna fila
20
21 D=50.8e-3; % Diametro boccola [m]
22 L=50.8e-3; % Lunghezza boccola [m]
23 c=20e-6; % Gioco Radiale [m]
24 r0=D/2; % Raggio albero [m]
25
26
```

```

27 %% Parametri Simulazione e Discretizzazione
28 n=Nf*(1+2^3)+1; % uno + tot nodi per ciascun foro, +1 per
    la ripetizione circolare
29 m=4*(2^2)+1; % numero intervalli multiplo di 4
30 dt=5e-7;
31
32 Omega_rpm=[0:5:50]*1e3; % vel. rotazione [rpm]
33 Omega=Omega_rpm*(2*pi)/60; % vel. rotazione [rad/s]
34 Eccentricity=c*0.2;
35
36 toll_P=1e-6; % tolleranza convergenza su pressione
37 toll_phi=1e-4; % tolleranza convergenza su phi=Fx/Fy
38
39 % Discretizzazione di theta
40 Nint=n-1;
41 dtheta=2*pi/Nint;
42 theta=(0:Nint)*dtheta;
43 theta=[theta(end-1) theta]; % penultimo nodo all'inizio
44 % Discretizzazione di z
45 Mint=m-1;
46 dz=L/Mint;
47 z=(0:Mint)*dz;
48 [Theta,Z] = meshgrid(theta,z);
49 % Definizione degli indici corrispondenti ai nodi interni
    considerando le ripetizioni
50 jj=2:length(theta)-1;
51 ii=2:length(z)-1;
52 % Posizione dei fori alimentazione (theta,z)
53 Hjj=pi/180*[1 45 90 135 180 225 270 315 1 45 90 135 180
    225 270 315]; % posizioni angolari
54 Hii=[1/4 1/4 1/4 1/4 1/4 1/4 1/4 1/4 3/4 3/4 3/4 3/4 3/4
    3/4 3/4 3/4]*L; % posizioni lungo l'asse
55 indjj=round(Hjj/dtheta);
56 indii=round(Hii/dz);
57 % Matrice logica per identificare i nodi con i fori
58 k=zeros(size(Theta));
59 k=k(ii,jj);
60 for pos=1:length(Hjj)
61     k(indii(pos),indjj(pos)+1)=10;
62 end
63
64 %% Inizializzazione Variabili

```

```

65 % Iniz. pressione nel meato
66 P_comp=Pa*ones(size(Theta));
67 P_old=P_comp(ii,jj);
68 P_new=P_old;
69 % Iniz. portata attraverso i fori
70 Gi_old=zeros(size(P_old));
71 Gi_new=Gi_old;
72 % Iniz. vettori caratteristiche
73 Ex=zeros(length(Omega),length(Eccentricity));
74 Ey=zeros(length(Omega),length(Eccentricity));
75 Fbx=zeros(length(Omega),length(Eccentricity));
76 Fby=zeros(length(Omega),length(Eccentricity));
77 Qin=zeros(length(Omega),length(Eccentricity));
78 Qout=zeros(length(Omega),length(Eccentricity));
79
80
81 %% Soluzione dell' Eq. Reynolds
82 for ecc_ind=1:length(Eccentricity)
83     eccentricity=Eccentricity(ecc_ind);
84
85     for omega_ind=1:length(Omega)
86         omega=Omega(omega_ind);
87
88         % Coefficienti eq. Reynolds
89         cx=1/(24*mu*Rg*T*r0*dtheta);
90         cz=1/(24*mu*Rg*T*dz);
91         cw=(omega*r0)/(4*Rg*T);
92
93         % Geometria del Meato
94         ex0=0;
95         ey0=1*eccentricity;
96         ex0_dot=(0e-6);
97         ey0_dot=(0e-6);
98         h0=c-ex0*cos(Theta)-ey0*sin(Theta);
99         h0_dot=-ex0_dot*cos(Theta)-ey0_dot*sin(Theta);
100        h_f=h0(ii,jj);
101
102        % Inizializzazione errori per calcolo della
           convergenza
103        err_P=100;
104        err_phi=100;
105        phi_old=1;

```

```

106     iter=0;
107
108     tic
109     while err_P>toll_P || err_phi>toll_phi
110         iter=iter+1;
111
112         % Calcolo portata in ingresso nodi
113         [Gi_new(k==10)]=portata_cd_cost(Ps,P_old(k==10),
114             ds,h_f(k==10));
115         % [Gi_new(k==10)]=portata_cd_Neves(Ps,P_old(k
116             ==10),ds,h_f(k==10));
117         % [Gi_new(k==10)]=portata_Belforte(Ps,P_old(k
118             ==10),ds,h_f(k==10),Gi_old(k==10));
119
120         % Calcolo portata in uscita dai nodi
121         gW=-cx*(P_comp(ii,jj-1).*h0(ii,jj-1).^3+P_comp(ii
122             ,jj).*h0(ii,jj).^3).*(P_comp(ii,jj)-P_comp(ii,
123             jj-1))+cw*(P_comp(ii,jj-1).*h0(ii,jj-1)+P_comp
124             (ii,jj).*h0(ii,jj));
125         gE=-cx*(P_comp(ii,jj+1).*h0(ii,jj+1).^3+P_comp(ii
126             ,jj).*h0(ii,jj).^3).*(P_comp(ii,jj+1)-P_comp(
127             ii,jj))+cw*(P_comp(ii,jj+1).*h0(ii,jj+1)+
128             P_comp(ii,jj).*h0(ii,jj));
129         gN=-cz*(P_comp(ii-1,jj).*h0(ii-1,jj).^3+P_comp(ii
130             ,jj).*h0(ii,jj).^3).*(P_comp(ii,jj)-P_comp(ii
131             -1,jj));
132         gS=-cz*(P_comp(ii+1,jj).*h0(ii+1,jj).^3+P_comp(ii
133             ,jj).*h0(ii,jj).^3).*(P_comp(ii+1,jj)-P_comp(
134             ii,jj));
135
136         % Bilancio di massa sui nodi da calcolare
137         P_new=P_old+(Gi_new+(gW-gE)*dz+(gN-gS)*r0*dtheta-
138             P_old.*h0_dot(ii,jj).*((r0*dtheta*dz)/(Rg*T)))
139             .*((Rg*T*dt)./(r0*dtheta*dz*h0(ii,jj)));
140
141         % Calcolo errore
142         err_P=abs(max((P_new(:)-P_old(:))./P_old(:)));
143         Err_P_i(iter)=err_P;
144
145         % Diverge?
146         if any(isnan(P_comp(:))) || any(isinf(P_comp(:)))
147             fprintf('Iterations diverge\n');

```

```

133         break;
134     end
135
136     % Aggiornamento soluzione
137     P_comp(ii,1)=P_new(:,end);
138     P_comp(ii,end)=P_new(:,1);
139     P_comp(ii,jj)=P_new;
140     P_old=P_new;
141     Gi_old=Gi_new;
142
143     if err_P<toll_P % calcolo gli integrali solo se P
144         e' arrivato a convergenza
145         % Forze nel riferimento XY
146         fbx=-trapz(z,trapz(theta(2:end),(r0*(P_comp
147             (:,2:end)-Pa).*cos(Theta(:,2:end))),2));
148         fby=-trapz(z,trapz(theta(2:end),(r0*(P_comp
149             (:,2:end)-Pa).*sin(Theta(:,2:end))),2));
150         % Calcolo errore su phi
151         phi_new=fbx/fby;
152         err_phi=abs((phi_new-phi_old)/phi_old);
153         Err_phi_i(iter)=err_phi;
154         phi_old=phi_new;
155         % Calcolo portate
156         Gout=-sum((gW-gE)*dz+(gN-gS)*r0*dtheta,"all")
157             ;
158         Gin=sum(Gi_new,"all");
159     end
160 end
161
162 toc
163 disp(['N. iterazioni: ' num2str(iter)])
164
165 % Salvataggio vettori
166 Ex(omega_ind,ecc_ind)=ex0;
167 Ey(omega_ind,ecc_ind)=ey0;
168 Fbx(omega_ind,ecc_ind)=fbx;
169 Fby(omega_ind,ecc_ind)=fby;
170 Qin(omega_ind,ecc_ind)=Gin*cG;
171 Qout(omega_ind,ecc_ind)=Gout*cG;
172
173 end

```

```

171 end
172
173 %% Calcolo Caratteristiche
174 Ecc=sqrt(Ex.^2+Ey.^2);
175 W=sqrt(Fbx.^2+Fby.^2);
176 Phi=-(atan2d(-Fby,-Fbx)-atan2d(ey0,ex0));

```

A.2 *Function* per il calcolo della portata

```

1 function [Gin]=portata_cd_cost(ps,p,ds,h)
2 cd=0.652;
3 Rg=286.9;
4 T=293;
5 psi=0.6855/sqrt(Rg*T);
6 b=0.5283;
7
8 Aori=pi.*ds.^2/4; % orifce restrictor (area foro)
9 A=pi.*ds.*h; % calcolo sezione inherent restrictor
10 cond_A=Aori<A; % controllo dove l'area del foro e' minore
    di quella inherent
11 A(cond_A)=Aori; % sostituisco dove serve
12
13 cs=cd.*A.*psi;
14
15 % caso sonico con flusso negativo
16 Gin=-cs.*p;
17 % caso subsonico con flusso negativo
18 c=p/ps<=1/b; %m atrice della stessa dimensione di p
19 Gin(c)=-cs(c).*p(c).*sqrt(1-((ps./p(c)-b)/(1-b)).^2);
20
21 % caso subsonico con flusso positivo
22 c=p/ps<=1;
23 Gin(c)=cs(c).*ps.*sqrt(1-((p(c)/ps-b)/(1-b)).^2);
24 % caso sonico con flusso positivo
25 c=p/ps<=b;
26 Gin(c)=cs(c).*ps;

```

```

1 function [Gin]=portata_cd_Neves(ps,p,ds,h)
2 cd=0.88;
3 Rg=286.9;
4 T=293;

```

```

5 psi=0.6855/sqrt(Rg*T);
6 b=0.5283;
7
8 A=pi.*ds.*h; % calcolo sezione inherent restrictor
9 Aori=pi.*ds.^2/4; % orifice restrictor (area foro)
10 cond_A=Aori<A; % controllo dove l'area del foro e' minore
    di quella inherent
11 A(cond_A)=Aori; % sostituisco dove serve
12
13 cs=A.*psi;
14
15 % caso sonico con flusso negativo
16 Gin=-cd.*cs.*p;
17 % caso subsonico con flusso negativo
18 c=p/ps<=1/b; % matrice della stessa dimensione di p
19 Gin(c)=-((0.9093-0.0751*(ps)./(p(c))).*cs(c).*p(c).*sqrt
    (1-((ps./p(c)-b)/(1-b)).^2));
20 % caso subsonico con flusso positivo
21 c=p/ps<=1;
22 Gin(c)=(0.9093-0.0751*(p(c))./(ps)).*cs(c).*ps.*sqrt(1-((
    p(c)./ps-b)/(1-b)).^2);
23 % caso sonico con flusso positivo
24 c=p/ps<=b;
25 Gin(c)=cd.*cs(c).*ps;

```

```

1 function [Gnew]=portata_cd_Belforte(ps,p,ds,h,G)
2 mu=1.81e-5;
3 Rg=287.6;
4 T=293;
5 psi=0.6855/sqrt(Rg*T);
6 b=0.5283;
7
8 A=pi.*ds.*h; % calcolo sezione inherent restrictor
9 Re=G./(pi.*mu.*ds);
10 cd=1.05*(1-0.3*exp(-0.005.*Re));
11
12 Aori=pi.*ds.^2/4; % orifice restrictor (area foro)
13 cond_A=Aori<A; % controllo dove l'area del foro e' minore
    di quella inherent
14 A(cond_A)=Aori; % sostituisco dove serve
15 Re(cond_A)=4*G(cond_A)/(pi.*mu.*ds);

```

```
16 cd(cond_A)=0.85.*(1-exp(-8.2*h(cond_A)./ds)).*(1-0.3*exp
    (-0.001.*Re(cond_A)));
17
18 cs=cd.*A.*psi;
19
20 % caso sonico con flusso negativo
21 Gnew = -cs.*p;
22 % caso subsonico con flusso negativo
23 c = p/ps<=1/b;
24 Gnew(c)=-cs(c).*p(c).*sqrt(1-((ps./p(c)-b)/(1-b)).^2);
25 % caso subsonico con flusso positivo
26 c = p/ps<=1;
27 Gnew(c)=cs(c).*ps.*sqrt(1-((p(c)/ps-0.528)/(1-b)).^2);
28 % caso sonico con flusso positivo
29 c = p/ps<=b;
30 Gnew(c) = cs(c)*ps;
```


Bibliografia

- [1] F. Al-Bender, F. Colombo, D. Reynaerts, R. Villavicencio e T. Waumans. “Dynamic Characterization of Rubber O-Rings: Squeeze and Size Effects”. In: *Advances in Tribology 2017* (2017).
- [2] F. Al-Bender. *Air Bearings: Theory, Design and Applications*. John Wiley & Sons, 2021.
- [3] J. Ausman. “An Improved Analytical Solution for Self-Acting, Gas-Lubricated Journal Bearings of Finite Length”. In: *Journal of Basic Engineering* 83.2 (1961), pp. 188–192.
- [4] P. Bättig e J. Schiffmann. “Data-Driven Model for the Dynamic Characteristics of O-Rings for Gas Bearing Supported Rotors”. In: *Journal of Applied Mechanics* 86.8 (2019), p. 081003.
- [5] G. Belforte, T. Raparelli, V. Viktorov e A. Trivella. “Discharge Coefficients of Orifice-type Restrictor for Aerostatic Bearings”. In: *Tribology International* 40.3 (2007), pp. 512–521.
- [6] D. Bently, C. Hatch e B. Grissom. *Fundamentals of Rotating Machinery Diagnostics*. ASME Press, 2002.
- [7] T. Chiang, J. Tessarzik e R. Badgley. *Development of Procedures for Calculating Stiffness and Damping Properties of Elastomers in Engineering Applications - Part I: Verification of Basic Methods*. Rapp. tecn. CR-120965. NASA National Aeronautics e Space Administration, 1972.
- [8] E. Chirone e S. Tornincasa. *Disegno Tecnico Industriale, vol. 2*. Il Capitello, 2015.
- [9] F. Colombo, L. Lentini, T. Raparelli, A. Trivella e V. Viktorov. “Unbalance Response Analysis of a Spindle Supported on Gas Bearings: A Comparison between Different Approaches”. In: *Lubricants* 10.6 (2022).
- [10] R. E. Cunningham, D. P. Fleming e W. J. Anderson. *Experiments on Rotating Externally Pressurized, Air Journal Bearings. Part 1 - Load Capacity and Stiffness*. Rapp. tecn. TN-D-5191. NASA National Aeronautics e Space Administration, 1969.

- [11] K. Czolczynski. *Rotordynamics of Gas-Lubricated Journal Bearing Systems*. New York, NY: Springer, 1999.
- [12] M. Darlow e E. Zorzi. *Mechanical Design Handbook for Elastomers*. Rapp. tecn. CR-3423. NASA National Aeronautics e Space Administration, 1981.
- [13] C. DellaCorte, K. C. Radil, R. J. Bruckner e S. A. Howard. “Design, Fabrication, and Performance of Open Source Generation I and II Compliant Hydrodynamic Gas Foil Bearings”. In: *Tribology Transactions* 51.3 (2008), pp. 254–264.
- [14] C. Ferraresi e T. Raparelli. *Meccanica Applicata*. CLUT, 2007.
- [15] G. Genta. *Dynamics of Rotating Systems*. Springer, 2005.
- [16] W. Gross. “Gas Bearings: A Survey”. In: *Wear* 6.6 (1963), pp. 423–443.
- [17] R. Liebich, A. Scholz e M. Wieschalla. “Rotors Supported by Elastomer-Ring Dampers - Experimental and Numerical Investigations”. In: *10th International Conference on Vibrations in Rotating Machinery*. London: Woodhead Publishing, 2012, pp. 443–453.
- [18] M. MacCamhaoil. *Static and Dynamic Balancing of Rigid Rotors*. Brüel & Kjær.
- [19] M. Mahner, M. Bauer, A. Lehn e B. Schweizer. “An Experimental Investigation on the Influence of an Assembly Preload on the Hysteresis, the Drag Torque, the Lift-off Speed and the Thermal Behavior of Three-pad Air Foil Journal Bearings”. In: *Tribology International* 137 (2019), pp. 113–126.
- [20] P. Matta, M. Arghir e O. Bonneau. “Experimental Analysis of Cylindrical Air-Bearing Dynamic Coefficients”. In: *Tribology Transactions* 53.3 (2010), pp. 329–339.
- [21] *Misurare la forma*. 2024. URL: <https://www.accretech.eu/it/misurare-la-forma/>.
- [22] M. Nabuurs. “Tilting Pad Gas Bearings for High Speed Applications: Analysis, Design and Validation”. Tesi di dott. K.U. Leuven, Department of Mechanical Engineering, 2020.
- [23] M. Neves, V. Schwarz e G. Menon. “Discharge Coefficient Influence on the Performance of Aerostatic Journal Bearings”. In: *Tribology International* 43.4 (2010), pp. 746–751.
- [24] J. W. Powell e M. C. Tempest. “A Study of High Speed Machines With Rubber Stabilized Air Bearings”. In: *Journal of Lubrication Technology* 90.4 (1968), pp. 701–707.
- [25] A. A. Raimondi. “A Numerical Solution for the Gas Lubricated Full Journal Bearing of Finite Length”. In: *ASLE Transactions* 4.1 (1961), pp. 131–155.

- [26] G. M. Rentzepis e B. Sternlicht. “On the Stability of Rotors in Cylindrical Journal Bearings”. In: *Journal of Basic Engineering* 84.4 (1962), pp. 521–531.
- [27] O. Reynolds. “IV. On The Theory of Lubrication and its Application to Mr. Beauchamp Tower’s Experiments, including an Experimental Determination of the Viscosity of Olive Oil”. In: *The Royal Society* 177 (1886), pp. 157–234.
- [28] K. Shalash, E. Guenat e J. Schiffmann. “Spatially Sampled Pressure Profile Measurements in Externally Pressurized Gas Journal Bearings”. In: *Tribology Transactions* 61.6 (2018), pp. 1094–1106.
- [29] K. Shin e J. Hammond. *Fundamentals of signal processing for sound and vibration engineers*. UK: John Wiley & Sons, 2008.
- [30] T. Shoyama e K. Fujimoto. “Calculation of High-Frequency Dynamic Properties of Squeezed O-Ring for Bearing Support”. In: *JSME Mechanical Engineering Journal* 5.2 (2018), pp. 17–00444.
- [31] P. Wang, Y. Li, X. Gao, Y. Ye, R. Li, X. Li, Y. Chen, J. Jin e C. Zhang. “Numerical Analysis on the Static Performance of Gas Journal Bearing by Using Finite Element Method”. In: *Nanomanufacturing and Metrology* 7.3 (2024).
- [32] I. M. Ward e J. Sweeney. *Mechanical Properties of Solid Polymers*. John Wiley & Sons, 2012.
- [33] T. Waumans. “On the design of High Speed Miniature Air Bearings: Dynamic Stability, Optimization and Experimental Validation”. Tesi di dott. K.U. Leuven, Department of Mechanical Engineering, 2009.