

POLITECNICO DI TORINO

Corso di Laurea magistrale in Ingegneria Aerospaziale



Tesi di Laurea Magistrale

Ottimizzazione di traiettorie interplanetarie per il raggiungimento di asteroidi prossimi alla Terra

Relatore

Prof. Lorenzo CASALINO

Candidato

Biagio LISTA

Anno Accademico 2023 - 2024

Sommario

Sin dall'inizio dell'*era spaziale*, gli asteroidi hanno sempre destato grande interesse in quanto materiale di scarto del processo di formazione dei pianeti del sistema solare, nonché fonte di pericolo per la vita sulla Terra. Per questi motivi, sono state progettate ed implementate diverse missioni spaziali aventi lo scopo di analizzare tali corpi celesti, nel cui contesto ha rivestito un ruolo rilevante il processo di ottimizzazione delle traiettorie volte al raggiungimento degli stessi.

Tale attività di tesi si pone l'obiettivo di individuare possibili opportunità di missione a basso costo (ΔV minimo) volte al raggiungimento di asteroidi prossimi alla Terra (Near Earth Asteroids - NEAs). A tal fine, a partire da un modello dinamico costituito da un micro - satellite di 21 kg equipaggiato con un propulsore a ioni con impulso specifico $I_{sp} = 2100s$, è stato implementato un metodo di ottimizzazione indiretta noto con il nome di *Teoria di controllo ottimale*. Quest'ultima consiste nell'individuazione e conseguente massimizzazione di una funzione obiettivo per mezzo della applicazione del *Principio del massimo di Pontryagin*. In particolare, è stato utilizzato un codice sviluppato presso il Politecnico di Torino, il quale, nell'ambito di un algoritmo iterativo, ha permesso di individuare la data di partenza ottimale per ogni target raggiungibile, in corrispondenza della quale espletare la manovra di rendezvous con il minimo dispendio di carburante.

Tale attività ha permesso di individuare soluzioni ottimali per otto asteroidi, tra i quali 2000 SG344 e 2012 TF79 costituiscono i target maggiormente accessibili. Inoltre, per tre degli otto asteroidi di partenza, è stato possibile inserire delle manovre di fly-by attorno ad asteroidi intermedi che hanno comportato, oltre ad una variazione del profilo di missione, un incremento del costo della stessa (ΔV).

Ringraziamenti

Alla mia famiglia

Indice

Elenco delle tabelle	VII
Elenco delle figure	VIII
1	1
1.1 Studio degli asteroidi	1
1.1.1 Missione Dawn	2
1.1.2 Missione OSIRIS - REx	4
1.1.3 Missione DART	5
1.1.4 Missione HERA	7
2 Propulsione elettrica	11
2.1 Richiami sulla propulsione	11
2.1.1 Classificazione	12
2.2 Propulsori elettrotermici	13
2.2.1 Resistogetto	13
2.2.2 Arcogetto	15
2.2.3 Propulsioni ad eccitazione ad alta frequenza	18
2.3 Propulsori elettrostatici	19
2.3.1 Propulsori a Ioni	19
2.3.2 FEEP	25
2.3.3 Propulsori colloidali	26
2.3.4 Propulsori ad effetto Hall	27
2.4 Propulsori elettromagnetici	29
2.4.1 Propulsori MPD self field	29
2.4.2 Propulsori MPD - applied field	32
3 Metodo di ottimizzazione delle traiettorie	33
3.1 Overview generale dei metodi di ottimizzazione	33
3.2 Metodo di ottimizzazione indiretta	36
3.2.1 Teoria del controllo ottimale	36

3.2.2	Problema Differenziale ai Limiti	40
4	Descrizione del modello	44
4.1	Assunzioni	45
4.2	Formulazione del modello	46
4.3	Applicazione della Teoria del Controllo ottimale	49
5	Risultati	51
5.1	Manovra di rendezvous semplice	53
5.2	Manovra di rendezvous con flyby intermedio	57
6	Conclusioni	64
A	Funzionamento generale dei Propulsori elettrotermici	65
A.1	Perdite termiche	67
A.2	Perdite per flussi congelati	68
A.3	Perdite aerodinamiche	68
B	Sparking Potential	71
C	Fasi di funzionamento di un Propulsore a ioni	72
C.1	Ionizzazione	72
C.2	Fasi di accelerazione e neutralizzazione	74

Elenco delle tabelle

2.1	Prestazioni Resistogetto	15
2.2	Prestazioni Arcogetto	18
2.3	Confronto prestazionale tra propulsori ionici	25
2.4	Prestazioni Propulsori ad effetto Hall	29
5.1	Lista di target possibili ottenuta	51
5.2	Lista di target raggiungibili	53
5.3	Soluzioni migliori per la manovra di Rendezvous	54
5.4	Soluzioni per Rendezvous con Fly-by	57

Elenco delle figure

1.1	Traiettoria della missione DAWN (NASA/JPL Caltech)	3
1.2	Prelevamento del campione di asteroide	5
1.3	DART mission [11]	7
1.4	Descrizione della missione HERA [12]	10
2.1	Terzo principio della dinamica [13]	12
2.2	Resistogetto [14]	14
2.3	Schemi Arcogetto	15
2.4	Andamento V - I [16]	16
2.5	Ion thruster [17], [18]	19
2.6	Catodo cavo [19]	23
2.7	Schema di un Field Emission Electric Propulsor [14]	25
2.8	Hall thruster [20]	27
2.9	Schema di un propulsore MPD [14]	30
4.1	Patched - conics [26]	45
4.2	Sistemi di riferimento inerziale e topocentrico [27]	47
5.1	Algoritmo iterativo	54
5.2	$\Delta t - \Delta V$	56
5.3	ΔV - No Fly-by vs Fly-by	58
5.4	m_f - No Fly-by vs Fly-by	59
5.5	2000 SG344	60
5.6	2006 RH120	61
5.7	2012 TF79	62
5.8	Traiettorie Fly - by	63
A.1	Schema unidimensionale del propulsore	65
A.2	Strato limite [30]	68
B.1	Curve di Paschen [31]	71

C.1 Orbitali [32]	72
C.2 Passaggio allo stato eccitato [33]	73

Capitolo 1

1.1 Studio degli asteroidi

Sin dal XVIII secolo, le dinamiche che hanno portato alla formazione del sistema solare hanno destato un grande interesse, portando gli scienziati a formulare diverse ipotesi che, solo con l'avvento dell'*era spaziale*, hanno acquisito una rilevanza scientifica tale da consolidarsi in teorie. Con il passare del tempo, costituendo gli asteroidi il materiale residuo del processo di formazione del Sole e dei pianeti costituenti il sistema solare, l'interesse verso questi corpi celesti è accresciuto, assumendo risvolti economici oltre che scientifici:

1. La ragione principale alla base di tale interesse è che, nel corso della formazione del sistema solare, gli asteroidi, a seguito dell'impatto con il pianeta Terra, hanno svolto il ruolo di vettori delle molecole organiche e delle sostanze chimiche volatili responsabili della genesi della vita. In tal caso, l'interesse risulta essere duplice: da una parte la volontà di individuare la miscela chimica che ha permesso l'instaurarsi delle condizioni di vita, dall'altra il desiderio di individuare le modalità con cui tali sostanze sono state trasportate sulla Terra [1];
2. La seconda ragione in termini di importanza si basa sulla premessa che la Terra viene costantemente bombardata da materiale interplanetario originatosi dallo scontro di due o più asteroidi. In questo caso, si tratta di materiale caratterizzato da dimensioni così piccole da venire disintegrato in fase di ingresso nell'atmosfera. Tuttavia, sebbene sia un'eventualità piuttosto remota, vi potrebbe essere la possibilità che il pianeta Terra possa essere interessato dalla collisione con asteroidi di dimensioni maggiori, con gravi conseguenze per noi che lo abitiamo. É dunque nata l'esigenza di studiare struttura, dimensione ed orbite degli asteroidi, nonché di progettare missioni spaziali aventi lo scopo di deviarne la traiettoria (Cfr paragrafo 1.1.3 - missione DART)[1];
3. La terza e ultima ragione che ci spinge a studiare gli asteroidi consiste nella possibilità di estrarre da essi materie prime. Tale attività, nota come "Asteroid

mining", ad oggi risulta la soluzione principale a diversi problemi del nostro tempo. Essa, infatti, ci permetterebbe non solo di reperire i minerali necessari alla costruzione delle strutture spaziali, ma anche di estrarre acqua, la cui scissione in idrogeno e ossigeno ci permetterebbe di ricavare il carburante da utilizzare per i vettori spaziali, e di conseguenza, data la maggior densità energetica dell'idrogeno, di alleggerire i vettori stessi. Ciò avrebbe un impatto enorme in termini di incremento della capacità di trasporto del singolo razzo[1].

Date le suddette ragioni, dunque, le principali agenzie spaziali (NASA, ESA, JAXA...) si sono impegnate nella progettazione di missioni di varia natura.

1.1.1 Missione Dawn

La missione Dawn, parte del programma Discovery della NASA, riveste un'importanza scientifica considerevole: si propone di indagare le condizioni e i processi alla base della formazione del sistema solare e di identificare le caratteristiche fisiche e morfologiche delle unità primordiali che hanno dato origine ai pianeti. Gli oggetti principali di studio sono l'asteroide Vesta ed il pianeta nano Cerere, rappresentanti i corpi celesti più grandi presenti nella *Fascia principale degli asteroidi*, la zona compresa tra Giove e Marte.

Descrizione

La missione ha avuto inizio il 27 Settembre 2007, data in cui è avvenuto il lancio da Cape Canaveral. Nella prima fase di missione, la sonda, in viaggio per raggiungere Vesta, ha prima effettuato una manovra di flyby attorno a Marte nel 2009, per poi raggiungerla nell'Agosto del 2011. Da questo momento, per 14 mesi, la sonda ha orbitato attorno a Vesta, durante i quali, la fase operativa è consistita nella raccolta dei dati utili all'analisi morfologica e composizionale del corpo celeste. Dopodiché, nell'Ottobre del 2012, la sonda ha abbandonato l'orbita di Vesta per dirigersi verso Cerere, osservato dal Marzo del 2015 fino al 1 Novembre del 2018, data in cui si è verificato l'esaurimento dell'idrazina utile all'orientazione dello Spacecraft. [2].

Il payload scientifico utilizzato per la raccolta dei dati è costituito da:

- una *Framing Camera*, sviluppata dal *Max Plank Institute*, che viene utilizzata per acquisire immagini nella frequenza del visibile;
- *Visible & Infrared Spectrometer (VIR)*, che permette di misurare l'intensità delle onde elettromagnetiche riflesse dal corpo oggetto di studio al fine di determinarne composizione, temperatura e proprietà della superficie;

-
- *Gamma Ray and Neutron Detector*, costituito da 21 sensori, caratterizzati da un'ampia field of view, utili a raccogliere l'energia contenuta nei raggi gamma e nei neutroni emessi dal corpo celeste, attraverso cui è stato possibile raccogliere informazioni sugli elementi maggiormente presenti sugli asteroidi di Vesta e Cerere.

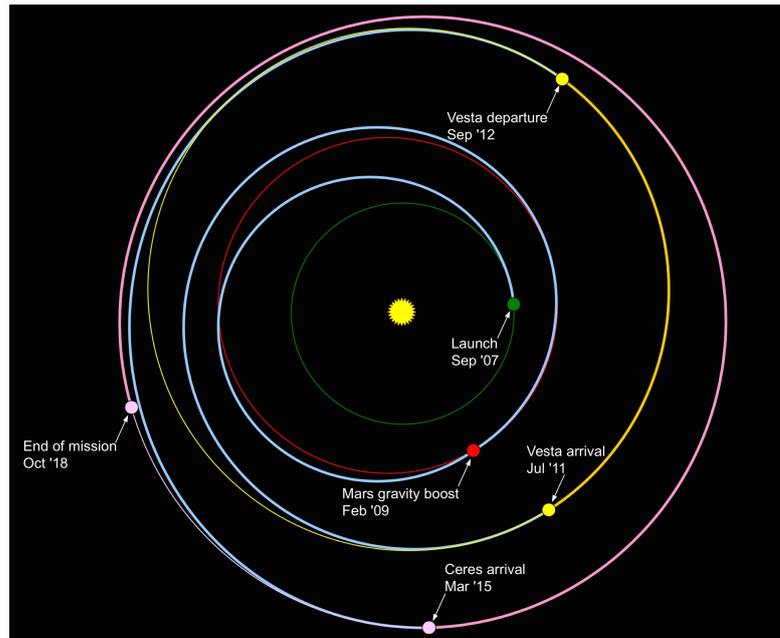


Figura 1.1: Traiettoria della missione DAWN (NASA/JPL Caltech)

Risultati

Dalle immagini e dai dati raccolti dalla missione in oggetto, Vesta è un corpo celeste roccioso, che presenta un nucleo di ferro fuso, e che dunque presenta caratteristiche più simili ai corpi celesti formati nella regione interna del sistema solare. Per quanto concerne Cerere, invece, sono state rilevate, in corrispondenza di alcune regioni della superficie, tracce di sali e ghiaccio; sostanze non comuni nella regione interna del sistema solare, che costituiscono la prova che un tempo possedesse un oceano globale. Per questo motivo, si pensa che Cerere si sia formato nella Fascia di Kuiper, al di là dell'orbita di Nettuno, per poi migrare nella Fascia principale. Quanto scoperto sta alla base di una teoria per cui, l'acqua e i composti organici siano stati trasportati da materiale proveniente dalla regione esterna del Sistema solare.

1.1.2 Missione OSIRIS - REx

OSIRIS REx (Origins, Spectral Interpretation, Resource Identification, Security, Regolith Explorer) è una missione NASA di esplorazione planetaria, sviluppata all'interno del programma *New Frontiers*.

Gli obiettivi di tale missione, che prevede lo studio dell'asteroide 101955 Benu, sono deducibili dal nome:

- **Origin** - Raccogliere ed analizzare un campione del materiale di cui è costituito l'asteroide, al fine di determinarne la storia e la distribuzione di minerali e composti organici;
- **Spectral Interpretation** - Definizione delle proprietà globali di un asteroide ricco di carbonio al fine di paragonarlo con i dati di altri asteroidi raccolti attraverso un telescopio;
- **Resource Identification** - Mappare le proprietà globali, la composizione chimica e la distribuzione dei minerali in modo tale da determinare, in primis, la storia geologica dell'asteroide e, in secondo luogo, individuare la zona di appartenenza del campione raccolto
- **Security** - Misurazione dell' *Effetto Yarkovsky* sull'asteroide Benu e delle proprietà dell'asteroide Benu che corroborano tale fenomeno.

Nota: L'*Effetto di Yarkovsky* consiste nell'instaurarsi di una forza a causa dell'azione combinata di radiazione solare e rotazione del corpo celeste. In particolare, data l'esposizione disomogenea alle radiazioni solari, la parte inizialmente maggiormente esposta tenderà ad emettere una maggiore quantità di radiazioni elettromagnetiche quando si trova "nella regione a pomeriggio"; il che fa sì che vi sia un'emissione disomogenea che consente l'instaurarsi di una forza che, seppur piccola, data l'inerzia bassa di un asteroide, determina una variazione dei parametri orbitali dell'asteroide stesso.

- **Regolith Explorer** - Documentare la texture, morfologia, composizione chimica e caratteristiche spettrali della regolite presente nella zona di campionatura.

La missione può essere scomposta nelle fasi seguenti: A seguito del lancio avvenuto il 9 Settembre 2016, e della successiva messa in orbita attorno al Sole, lo Spacecraft ha eseguito inizialmente una prima manovra di correzione dell'orbita, per poi effettuare due manovre di Flyby attorno alla Terra al fine di compiere la manovra di rendezvous con l'asteroide Benu. Una volta raggiunto l'asteroide, dunque, lo spacecraft ha iniziato una manovra di Flyover che aveva due scopi: Il primo è stato quello di acquisire immagini dettagliate dell'asteroide, utili a definirne la forma e le caratteristiche superficiali; il secondo, invece, consisteva

nell'effettuare una scansione della superficie del corpo celeste oggetto di studio al fine di selezionare un sito adatto all'attività di campionamento. La scelta è ricaduta su un sito chiamato "Nightingale", situato all'interno di un cratere relativamente giovane. Ciò ci ha permesso di prelevare un campione di 250 grammi di materiale poco contaminato, poi successivamente inoltrato sulla Terra per mezzo di una manovra di rientro durata due anni e mezzo. Il 24 settembre 2023, la sonda, giunta in prossimità della Terra, ha compiuto una manovra che ha permesso il rilascio della capsula contenente il campione in atmosfera, per poi ripartire al fine di espletare la seconda parte della missione, consistente nell'osservazione dell'asteroide Apophis [3, 4].



(a) *Fase di Touchdown*[5]

(b) *Fase di raccoglimento*[6]

Figura 1.2: Prelevamento del campione di asteroide

1.1.3 Missione DART

DART (**D**ouble **A**steroid **R**edirection **T**est) è una missione della NASA progettata al fine di eseguire la deviazione della traiettoria di un asteroide per mezzo di un impatto cinetico, ovvero una modalità che prevede il trasferimento di quantità di moto attraverso l'impatto con uno spacecraft che prende il nome di "Impactor". Il target è il corpo secondario di un sistema binario di asteroidi, composto da un corpo principale, l'asteroide Didymos, e dal suo satellite di dimensioni minori che prende il nome di Dimorphos. Il sistema di asteroidi in questione non è una minaccia, ma si tratta di un sistema di corpi vicini alla Terra che è stato selezionato al fine di simulare una situazione di pericolo, quale può essere l'imminente collisione di corpi massicci con il nostro pianeta [7].

Perché il sistema di corpi Didymos - Dimorphos?

Per la progettazione di questa missione, sono stati presi in considerazione 60 sistemi binari di asteroidi prossimi alla Terra (NEAs - Near Earth Asteroids), rilevati per mezzo di misurazioni RADAR. In tal contesto, è stato necessario definire i requisiti fisici che il sistema di corpi oggetto di studio doveva rispettare. Essi sono:

Accessibilità: il ΔV necessario per raggiungere il target deve essere contenuto;

Caratterizzazione: È di fondamentale importanza che gli asteroidi scelti siano caratterizzati da proprietà orbitali e fisiche (massa, volume, materiale...) ben definite. Inoltre, relativamente all'orbita propria del sistema target, viene richiesto che quest'ultima preveda passaggi nelle vicinanze della Terra sufficientemente ravvicinati nel tempo (aspetto importante ai fini della missione Hera - Paragrafo 1.1.4).

Dei 60 sistemi appartenenti al campione considerato, il sistema binario Didymos - Dimorphos è assunto a target ideale non solo sulla base della sua conformità ai requisiti prestabiliti. In tal senso, infatti, hanno contribuito misurazioni nello spettro del Visibile/Vicino Infrarosso, le quali hanno dimostrato come il corpo principale, Didymos, sia costituito da Condrite L/LL (Low/Low Low) (ovvero dello stesso materiale di cui sono composti i meteoriti); e simulazioni ed osservazioni di sistemi simili, che rivelano compatibilità parziale tra i corpi costituenti un sistema binario [8].

Descrizione della missione

La missione si suddivide nelle seguenti fasi:

Lancio: Il payload, costituito da un impactor cinetico e un cubesat 6U denominato LICIACube, è stato lanciato il 21 Novembre del 2021, per mezzo del Falcon 9 presso Cape Canaveral.;

Approccio: Una volta in prossimità del target, cinque giorni prima dell'impatto, viene rilasciato il LICIACube;

Impatto: Il 26 Settembre del 2022 è avvenuto l'impatto;

Misure: A seguito dell'impatto diverse sono le misurazioni che vengono eseguite. In particolare, sono state implementate osservazioni dalla Terra, per mezzo di payload ottici e RADAR, al fine di valutare le variazioni del periodo orbitale e del semiasse maggiore relative all'orbita di Dimorphos attorno al corpo principale, fondamentali per valutare il grado di deflessione dell'asteroide. Il LICIACube, invece, ha avuto il compito, in primo luogo, di acquisire le immagini dell'impatto con l'asteroide, e poi, in seconda battuta, di rilevare struttura ed evoluzione della nube di detriti liberata dall'impatto e di effettuare un flyby di Didymos e Dimorphos, durante il quale scansionare la superficie dei due asteroidi [9];

Comunicazione: A seguito della fase di rilevazione, il LICIACube ha provveduto a trasmettere i dati acquisiti a Terra.

Risultati della missione

Dall'analisi dei parametri orbitali rilevati prima e dopo l'impatto con l'asteroide target, è stato accertata una diminuzione di 32 minuti del periodo di deorbiting di Dimorphos attorno a Didymos, che è ha subito una riduzione da 11h e 53m a 11h e 21m. Considerando che il requisito minimo prefissato per reputare tale missione di successo prevedeva che il periodo orbitale del corpo secondario dovesse diminuire di 73 secondi, l'epilogo della missione ha ecceduto le aspettative, ponendo le basi per test futuri, ad esso analoghi, atti a perfezionare le tecniche di deflessione, necessarie a garantire una maggior sicurezza per il nostro pianeta [10].

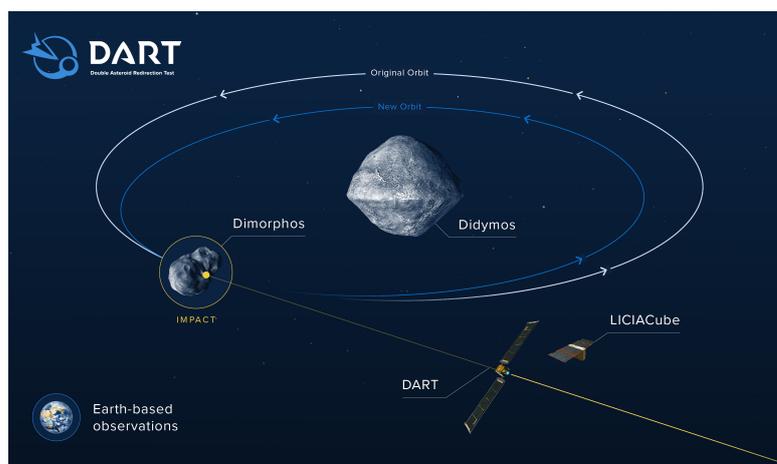


Figura 1.3: DART mission [11]

1.1.4 Missione HERA

Si tratta di una missione sviluppata dall'ESA, progettata nell'ambito della collaborazione internazionale AIDA (Asteroid Impact and Deflection Assessment) tra NASA ed ESA atta a dimostrare e validare la tecnologia utile alla deflessione di corpi celesti. In particolare, si tratta di una missione correlata a DART, avente l'obiettivo di valutare i risultati dell'impatto tra l'"Impattatore cinetico" e Dimorphos. Con lancio programmato nell'Ottobre 2024 e arrivo previsto a Dicembre del 2026, gli obiettivi scientifici di tale missione sono:

1. Misurare la massa di Dimorphos per determinare l'efficienza del trasferimento di quantità di moto;
2. Analizzare il cratere prodotto dalla missione DART al fine di migliorare la nostra comprensione sia del processo di formazione dei crateri, sia dei meccanismi della formazione dei crateri che influenzano l'efficienza di trasferimento di quantità di moto;

-
3. Osservare effetti dinamici difficilmente apprezzabili per mezzo di osservazioni terrestri, quali la librazione dinamica dovuta all'impatto, e l'eccitazione di posizione e assetto;
 4. Caratterizzare le proprietà superficiali e interne di Dimorphos, fondamentali ai fini del risultato dell'impatto, in modo tale da scalare il coefficiente di trasferimento della quantità di moto su asteroidi diversi.

Gli obiettivi secondari della missione sono invece i seguenti:

- i Caratterizzazione completa di Didymos e Dimorphos, i cui dati verranno utilizzati per valutare la formazione di sistemi binari di asteroidi prossimi alla Terra;
- ii Forzare la struttura superficiale e la mobilità della regolite sia su Didymos che su Dimorphos, consentendo così una prima comprensione di come le proprietà del materiale possano influenzare la formazione dei satelliti degli asteroidi;
- iii Permettere, per la prima volta, la misura dettagliata di proprietà superficiali e degli strati più interni di un cratere formato a seguito di un impatto avvenuto alla velocità di collisione tra asteroidi;
- iv Permettere di studiare la geofisica superficiale di due oggetti caratterizzati da dimensioni e gravità differenti, formati pressoché dagli stessi materiali;
- v Ottenere le prime misure di un asteroide, come Dimorphos, caratterizzato da dimensioni proprie di strutture formate sia a seguito di dinamiche legate sia alla forza che alla gravità;
- vi Caratterizzazione di un cratere formato con una data energia su un corpo di diametro di 160 metri, al fine di verificare quale, tra forza e gravità, è stato il fattore più influente sulla sua genesi;
- vii Osservare le caratteristiche superficiali dell'asteroide colpito a seguito della missione DART;
- viii Analizzare il cratere formatosi in seguito alla missione DART, alla ricerca di materiale incontaminato al fine di determinare possibili eventi ambientali propri dell'ambiente spaziale;
- ix Paragonare le caratteristiche del cratere formato a seguito della missione DART con le caratteristiche del cratere generato sull'asteroide Ryugu (162173), in regime di gravità, a seguito dell'impatto con lo spacecraft della missione spaziale Hayabusa2;
- x Investigare un asteroide, Didymos, il cui periodo di rotazione attorno al proprio asse è tale da garantirne una stabilità strutturale marginale.

Descrizione

La missione prevede che a tre settimane dalla fase di lancio, affidata al lanciatore Ariane 6, lo Spacecraft eseguirà manovre di Deep Space. A queste seguono due manovre di fly-by attorno a Marte, la prima nel Marzo del 2025 e la seconda nel mese di Gennaio del 2026, finalizzate al raggiungimento, nel Dicembre del 2026, del sistema binario Didymos - Dimorphos, e al conseguente inserimento in orbita. Da questo momento in poi ha inizio la fase di prossimità, equivalente alla fase scientifica della missione, e suddivisa nelle seguenti sotto-fasi [12]:

1. *Early Characterization Phase*: della durata di sei settimane, questa fase prevede che lo Spacecraft stazioni in orbita, mantenendo distanze di [20 - 30] km, allo scopo di rilevare le proprietà morfologiche, termiche e dinamiche di ambo gli asteroidi;
2. *Payload Deployment Phase*: dopodiché, vengono rilasciati due Cubesat, denominati Milani e Juventas, in contatto radio con lo spacecraft Hera, necessari ad espletare la fase seguente denominata *Detailed Characterization Phase*;
3. *Detailed Characterization Phase*: durante questa fase, caratterizzata da una durata di circa quattro settimane, lo spacecraft Hera, insieme ai Cubesat *Milani* e *Juventas*, effettuerà la mappatura della superficie e la determinazione di proprietà spettrali e interne degli asteroidi;
4. *Close Observation Phase*: durante questa fase, lo Spacecraft e i due Cubesat si avvicinano ulteriormente al sistema binario, per poi eseguire dodici manovre di flyby attorno al corpo interessato dall'impatto con la sonda DART, Dimorphos, per eseguire delle analisi dettagliate della sua superficie, con particolare interesse per il cratere di impatto;
5. Infine, viene implementata l'*Experimental Phase*, consistente in una fase in cui, grazie all'impiego di un sistema di guida autonomo, i Cubesat vengono condotti a distanze tali dalla superficie di Dimorphos da garantire misurazioni locali delle medesime proprietà (termiche, morfologiche e spettrali), relative a regioni di interesse precedentemente selezionate, e caratterizzate da elevate risoluzioni spaziali.

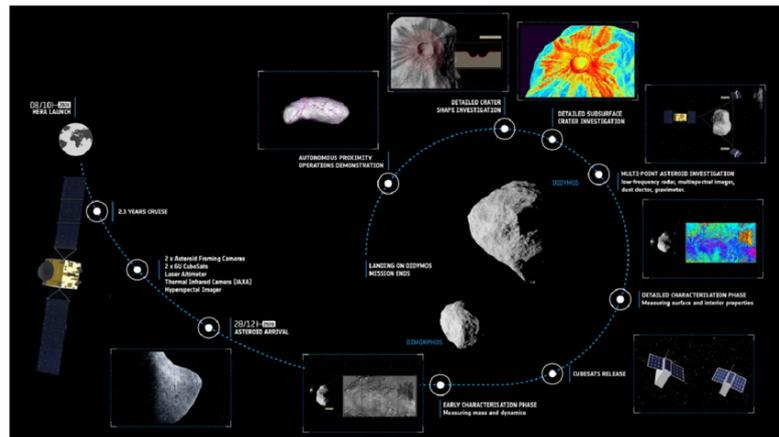


Figura 1.4: Descrizione della missione HERA [12]

Capitolo 2

Propulsione elettrica

Poiché gran parte delle missioni sopra trattate fa ricorso a sistemi propulsivi che afferiscono alla branca della propulsione elettrica, nel seguente capitolo vengono trattati i principi fisici alla base del funzionamento degli esemplari appartenenti alla suddetta classe.

2.1 Richiami sulla propulsione

La propulsione di un sistema, e quindi la produzione di una spinta, si basa sullo sfruttamento del terzo principio della dinamica:

"Per ogni forza che un corpo A esercita su un altro corpo B, ne esiste un'altra, uguale in modulo e direzione e contraria in verso, che B esercita su A."

$$\vec{F}_{AB} = -\vec{F}_{BA} \quad (2.1)$$

In ambito spaziale, tuttavia, a differenza di quanto avviene in ambito aeronautico, non vi è alcun mezzo esterno con cui tale scambio di forze possa avvenire; motivo per cui è necessario trasportare a bordo il propellente da accelerare. In particolare, il processo di generazione della spinta consta di due fasi:

1. fornitura di energia al propellente in camera di combustione;
2. accelerazione del propellente in ugello.

Analizzando la fase di fornitura di energia da un punto di vista meramente implementativo, è possibile menzionare due fonti energetiche distinte, rispettivamente di natura chimica ed elettrica, che ci permettono di riconoscere le omologhe

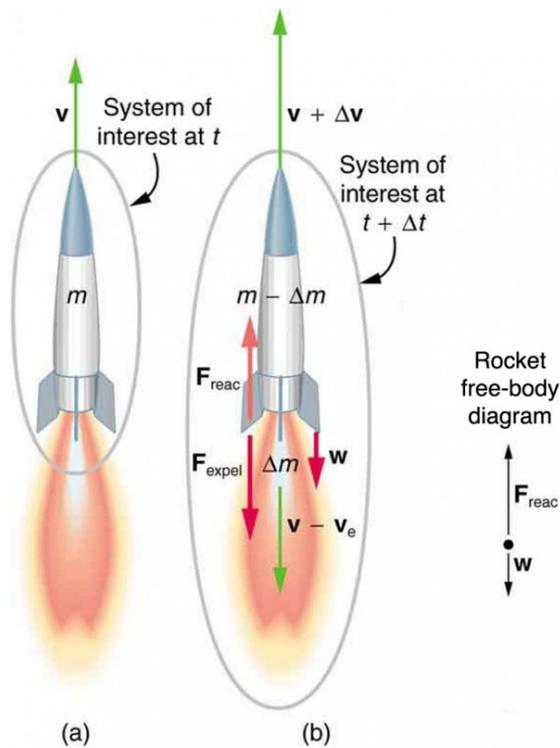


Figura 2.1: Terzo principio della dinamica [13]

branche della propulsione spaziale.

Nella presente trattazione, poiché le missioni interplanetarie, aventi lo scopo di favorire il rendezvous con asteroidi, prevedono l'implementazione della propulsione elettrica, verrà trattata la seconda branca qui elencata.

2.1.1 Classificazione

Quando trattiamo la propulsione elettrica, è possibile fare riferimento a due classificazioni distinte. La prima di esse, per noi di principale interesse, si basa sulle differenti modalità di accelerazione del propellente. Entrando più nel dettaglio, è possibile individuare tre modelli fondamentali di propulsione elettrica:

- *Propulsione elettrotermica:* il propellente viene scaldato elettricamente all'interno della camera di combustione, per poi essere espanso all'interno di un ugello supersonico;
- *Propulsione elettrostatica:* l'accelerazione del propellente avviene per mezzo di una forza elettrostatica;

- *Propulsione elettromagnetica*: l'accelerazione del gas viene ottenuta per mezzo di una forza elettromagnetica.

La seconda classificazione, invece, fa riferimento ai valori di potenza prodotti:

- *Microthrusters*: si tratta di propulsori che, dati i bassi livelli di potenza e di spinta che li caratterizzano (rispettivamente dell'ordine del W e del μN), vengono utilizzati unicamente per manovre di precisione;
- *1 kW thrusters*: si tratta di propulsori impiegati per manovre di station keeping, di inserimento dell'orbita, di mantenimento dell'orbita, per il deorbiting dello Spacecraft e per missioni interplanetarie
- *10 kW thrusters*: si tratta di propulsori montati su spacecraft di grandi dimensioni, impiegati principalmente per l'inserimento in orbita Geostazionaria e per il deorbiting;
- *100+ kW thrusters*: in fase di sviluppo, sono propulsori progettati al fine di permettere la realizzazione di missioni spaziali umane, caratterizzate da carichi paganti elevati e, dunque, di incentivare la colonizzazione spaziale da parte dell'uomo.

2.2 Propulsori elettrotermici

In questa classe di propulsori, il cui funzionamento generale è stato trattato in *Appendice A*, possiamo annoverare diversi modelli che, a monte dell'espansione in ugello, presentano differenti modalità di trasmissione dell'energia termica:

- Resistogetto;
- Arcogetto;
- Propulsori a eccitazione ad alta frequenza.

2.2.1 Resistogetto

Il funzionamento di questo propulsore prevede che il propellente venga prima riscaldato in camera di "combustione" sfruttando l'effetto Joule di una resistenza, per poi venire espanso in ugello. L'architettura del propulsore può assumere due configurazioni distinte. La prima prevede l'utilizzo di una resistenza posta a diretto contatto con il propellente, nel cui caso la trasmissione di calore avviene tramite convezione. La seconda configurazione, invece, consiste in una resistenza posta all'interno di una cavità a tenuta stagna, in cui la trasmissione di calore al propellente avviene per irraggiamento.

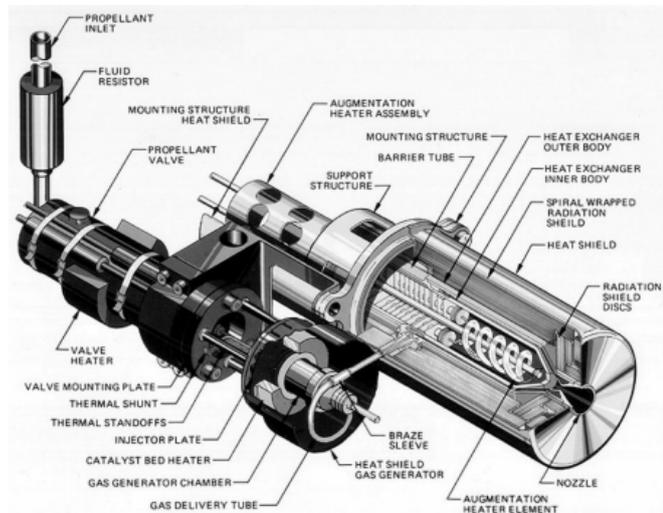


Figura 2.2: Resistojetto [14]

La differenza tra le suddette architetture, tuttavia, non si ferma al solo meccanismo di trasmissione del calore. Nel caso della resistenza a diretto contatto con il propellente, infatti, la vicinanza/contiguità tra questi due elementi comporta, da una parte, una miglior trasmissione dell'energia termica, mentre dall'altra una degradazione più marcata della resistenza, da attribuire all'instaurarsi di reazioni chimiche tra propellente e resistore, ad alte temperature. Ciò significa dunque che, al fine di compensare tali aspetti del funzionamento del propulsore, a parità di calore trasmesso, la resistenza della prima configurazione deve lavorare a temperature più basse.

Un altro parametro di fondamentale importanza è la pressione in camera p_c . Per alti valori di pressione, infatti, l'elevata densità del propellente fa sì che le molecole che lo costituiscono siano interessate da un maggior numero di urti, responsabili della trasmissione di energia termica e, dunque, di un'efficienza di trasmissione termica maggiore. Viceversa, per valori di pressione più bassi, non solo il propulsore è caratterizzato da una trasmissione di calore inefficiente, ma anche da un aumento delle perdite termiche, legate ai fenomeni sia di flusso congelato che di irraggiamento termico. Dunque, al fine di ottenere sia un coefficiente di scambio termico elevato che un grado di dissociazione in ugello contenuto, il requisito per questo parametro è $p_c = [1 \div 20]bar$.

Una criticità importante di questo tipo di propulsore, è la bassa efficienza termica, dovuta alle elevate perdite termiche che lo caratterizzano. La soluzione ingegneristica adottata per ovviare a tale problema è uno scudo termico, il quale, all'aumentare del numero di strati da cui è costituito, garantisce una minore dispersione di calore

$$q = \frac{q_0}{n + 1} \quad (2.2)$$

dove q_0 rappresenta il calore rilasciato all'esterno in assenza di scudo termico e n è il numero di strati utilizzati. Le prestazioni di questa tipologia di propulsore viene riportato nella tabella qui riportata.

Tabella 2.1: Prestazioni Resistogetto

Propellente	N_2H_4	NH_3
I_{sp} [s]	300	350
P_E [W]	500-1500	500
η	0.8	0.8
Voltaggio [V]	28	28
Massa del propulsore [kg/kW]	1-2	1-2
Massa del Power Processing Unit (PPU) [kg/kW]	1	1
sistema di alimentazione	blowdown	regolato
vita operativa [h]	500	-
impiego	Station keeping inserimento orbitale deorbiting	Correzioni orbitali

2.2.2 Arcogetto

Questo modello di propulsore elettrotermico, a differenza di quanto accade nei resistogetti, prevede che il riscaldamento del propellente avvenga per mezzo di un arco elettrico generato da due elettrodi: un catodo centrale; ed un anodo costituito dalle pareti del propulsore stesso.

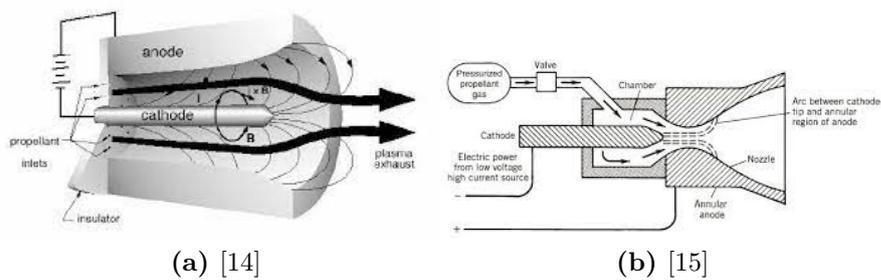


Figura 2.3: Schemi Arcogetto

Tuttavia, il principio di funzionamento risulta essere lo stesso. Infatti, mentre nel caso dei resistogetti il flusso di elettroni, innescati dalla differenza di potenziale

agli elettrodi, urtano ed eccitano gli atomi costituenti del reticolo cristallino di un resistore; nel caso qui trattato, l'arco elettrico è il risultato dell'eccitazione molecolare, e conseguente ionizzazione delle particelle costituenti il propellente. Andando più nel dettaglio della trattazione, facendo riferimento alla Figura 2.4 rappresentante l'andamento del potenziale al variare della corrente, è possibile suddividere la generazione dell'arco elettrico in più fasi.

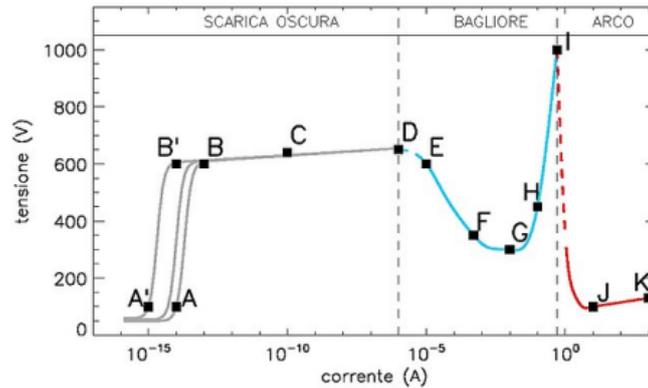


Figura 2.4: Andamento V - I [16]

All'inizio, in presenza di una ΔV iniziale, il propellente, caratterizzato da un basso grado di ionizzazione dovuto all'interazione con l'ambiente spaziale, presenta un basso livello di corrente dato dall'accelerazione degli elettroni liberi (0-A). All'aumentare della differenza di potenziale, in corrispondenza di ΔV sufficientemente grandi, gli elettroni acquisiscono una quantità di moto tale da garantire un grado di ionizzazione ulteriore degli atomi di propellente (evento associabile al tratto A-B). Aumentando ulteriormente la differenza di potenziale, gli ioni precedentemente formati, vengono accelerati quanto basta per ottenere l'energia cinetica necessaria per garantire il rilascio di elettroni, a seguito del bombardamento del catodo (polo negativo). Ciò avviene fin quando non si raggiunge la condizione nel punto D, nota con il nome di *Sparking Potential* (Appendice B), che determina il passaggio dal regime di *Scarica oscura* a quello di *Scarica a bagliore*. In questa circostanza, la quantità di carica diventa così elevata che la conducibilità dell'arco, e dunque l'emissione di elettroni, non dipende più dal livello di potenziale imposto dall'esterno, bensì dalle collisioni elettroni-atomi e ioni - catodo.

Giunti al regime di *Glow Discharge*, la scarica viene sostenuta dall'emissione di elettrodi, da parte del catodo, per effetto del bombardamento ionico. Questa fase della scarica è caratterizzata da urti elastici tra elettroni e atomi, i quali, per via della mancanza di trasmissione di energia cinetica, risultano inefficaci dal punto di vista propulsivo.

Aumentando ulteriormente il potenziale elettrico, muovendoci lungo il tratto G-I, ci

troviamo nella condizione in cui gli ioni sono interessati da accelerazioni maggiori, foriere di urti sempre più energetici tra ioni e il catodo. Ciò comporta un incremento della temperatura tale, del polo negativo, da causare un incremento dell'emissione di elettroni, e dunque una crescita della conducibilità. Questo meccanismo prende il nome di *Effetto termoionico*. Muovendoci invece nel regime di scarica ad arco, all'interno del plasma si instaurano urti anelastici, che garantiscono la trasmissione di energia termica agli atomi di propellente.

Il vantaggio legato all'implementazione dell'arcogetto, consiste nella possibilità di portare il propellente a temperature molto più elevate, sfruttando un fenomeno, noto come *Effetto pinch*. Infatti, una volta creato l'arco elettrico, caratterizzato da una densità di corrente j , si ha la generazione di un campo magnetico indotto \vec{B}_{ind} , strettamente dipendente dalla corrente concatenata. In particolare, ricorrendo alla legge di Ampere - Maxwell:

$$\nabla \times \vec{B}_{ind} = \mu_0 \vec{j} \quad (2.3)$$

e applicando il *Teorema di Stokes* al campo magnetico

$$\int \int_S (\nabla \times \vec{B}) = \oint \vec{B}_{ind} \cdot d\vec{l} \quad (2.4)$$

otteniamo:

$$\mu_0 J_{concatenata} = B 2\pi r \quad (2.5)$$

$$B_{ind} = \frac{\mu_0 J_{concatenata}}{2\pi r} \quad (2.6)$$

Dunque, sugli elettroni, in moto all'interno del campo magnetico indotto, si manifesta una *forza di Lorentz*

$$\vec{F} = nq\vec{v} \times \vec{B}_{ind} = \vec{j} \times \vec{B}_{ind} = -\frac{\mu_0 j^2 r}{2} \quad (2.7)$$

avente direzione radiale e orientata verso l'interno dell'arco elettrico. A riconferma di quanto detto prima, ciò significa che è possibile confinare l'arco elettrico in un volume ridotto, consentendo, a fronte di un riscaldamento disomogeneo del propellente, da una parte di portare quest'ultimo a temperature più elevate; e, dall'altro, allontanare la fonte di energia termica (l'arco elettrico) dalle pareti del propulsore.

Andando ad analizzare le prestazioni del propulsore oggetto di studio, si osserva che l'aumento delle temperature del propellente, derivante dallo sfruttamento di un arco elettrico, ci consente di avere valori della velocità efficace di scarico maggiori:

$$c = \sqrt{2c_p T_{media}} \quad (2.8)$$

e dunque, di ottenere un aumento dell'impulso specifico I_{sp} . Difatti, poiché la temperatura media del propellente raggiunta nel modello corrente, $T_{media} = 6000K$,

risulta pari a tre volte la temperatura media raggiunta nel resistogetto, si ottiene un incremento dell'impulso specifico di un fattore pari a $\sqrt{3}$.

Per quel che riguarda i valori del rendimento globale, invece, si nota un decremento sostanziale rispetto alla configurazione precedente: andamento associabile alla presenza di perdite sia termiche che per flusso congelato. Risulta, dunque, di fondamentale importanza ricorrere ad un funzionamento che preveda valori di pressione del propellente elevati, caratterizzati da una variabilità limitata; la quale, data l'elevata instabilità dell'arco elettrico, è imprescindibile al fine di non pregiudicare il funzionamento nominale del propulsore.

Tabella 2.2: Prestazioni Arcogetto

Propellente	N_2H_4	NH_3	H_2
I_{sp} [s]	500 - 600	500 - 800	1000
P_E [W]	300-2000	500 - 30000	5000 - 100000
η	0.35	0.3	0.4
Voltaggio [V]	100	100	200
Massa del propulsore [kg/kW]	0.7	0.7	0.5
Massa PPU [kg/kW]	2.5	2.5	2.5
sistema di alimentazione	regolato	regolato	regolato
vita operativa [h]	1000	1500	-
Impiego	Station keeping	Station Keeping; Alzamento apsidi	Trasferite a ΔV medio

2.2.3 Propulsioni ad eccitazione ad alta frequenza

Si tratta di un esemplare di propulsore elettrotermico, in cui l'eccitazione elettronica viene implementata attraverso l'emissione di onde elettromagnetiche a frequenza elevata. Un esempio è il propulsore a microonde, il quale presenta una camera di risonanza in cui vengono emesse delle onde elettromagnetiche stazionarie, caratterizzate da una frequenza di $f_e = 10^{10} Hz$. Gli elettroni, poiché sono caratterizzati da una frequenza vibrazionale prossima a f_e , si instaura il fenomeno della risonanza, responsabile dell'eccitamento degli elettroni e della conseguente formazione del plasma, poi successivamente espanso in ugello. Una versione alternativa di questa tipologia di propulsore, non richiedente l'installazione di una *Power Processing Unit*, sono i propulsori laser elettrotermici. Ovvero, un concept che si propone di favorire l'eccitazione elettronica per mezzo di una radiazione laser proveniente da una stazione di Terra. Tuttavia, in questo caso, data l'elevatissima frequenza di tali onde elettromagnetiche, l'eccitazione del propellente deve avvenire o per assorbimento risonante, oppure per fotoionizzazione. Nel primo

caso, gli elettroni degli orbitali più esterni dell'atomo assorbono momentaneamente l'energia trasportata dai fotoni, per poi trasmetterla all'esterno una volta che gli elettroni eccitati tornano all'orbitale di appartenenza. Nel secondo caso, invece, l'eccitazione dell'elettrone più esterno deve essere tale da ionizzare gli atomi, e dunque generare lo stato di plasma.

2.3 Propulsori elettrostatici

Come già anticipato, questo tipo di propulsione prevede che la fase di accelerazione venga espletata attraverso forze elettrostatiche generate a seguito dell'interazione delle particelle di propellente con un campo elettrostatico esterno. Il funzionamento prevede tre fasi:

1. Fase di ionizzazione (Appendice C.1);
2. Fase di accelerazione (Appendice C.2);
3. Fase di neutralizzazione (Appendice C.2).

2.3.1 Propulsori a Ioni

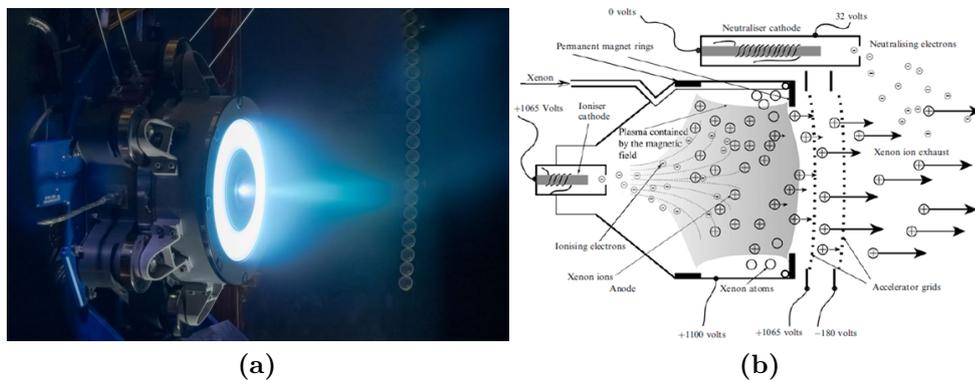


Figura 2.5: Ion thruster [17], [18]

I propulsori a ioni sono tipicamente caratterizzati da una camera di ionizzazione adibita alle fasi di ionizzazione e separazione della carica. Si tratta di una camera cilindrica delimitata ai suoi estremi da due piatti forati: il primo è adibito all'introduzione del propellente; il secondo, contrapposto al primo, svolge la funzione di schermo (motivo per cui viene chiamato *screen grid*). Al suo interno sono posti un catodo, in corrispondenza dell'ingresso, ed un anodo che funge da parete della camera.

Fase di ionizzazione

Possono essere implementate due modalità di ionizzazione. La prima, per *bombardamento elettronico*, prevede che gli elettroni, emessi dal catodo, vengano accelerati dal campo elettrostatico posto in essere dalla differenza di potenziale ΔV tra anodo e catodo, al fine di urtare e, successivamente, strappare un elettrone agli atomi di propellente. La seconda modalità, invece, prevede che l'accelerazione degli elettroni avvenga per mezzo di un'onda elettromagnetica in radiofrequenza (3 Hz - 300 GHz), prodotta da un solenoide che avvolge la camera di ionizzazione. Considerando che la strategia di ionizzazione normalmente implementata è la prima, il catodo e la *screen grid* assumono un potenziale V_C , mentre l'anodo viene posto ad un potenziale più elevato, pari a $V_C + V_D$. Durante le prime fasi del processo di ionizzazione, viene favorito lo stazionamento in camera degli elettroni liberati, ad alto contenuto energetico, al fine di aumentare la probabilità di ionizzazione.

$$dP = n_0 Q^{ion} dx \quad (2.9)$$

- n_0 = densità atomica;
- Q^{ion} = sezione d'urto per la ionizzazione.

Perché ciò sia realizzabile, viene indotto un campo magnetico \vec{B} in prossimità del catodo. In questa condizione, in cui i campi elettrico e magnetico coesistono, la forza complessiva agente sugli elettroni raccoglie tre contributi di forza:

- la forza di Coulomb, dovuta all'interazione degli elettroni con il campo elettrico;
- la forza di Lorentz, dovuta all'interazione degli elettroni con il campo magnetico;
- la forza relativa alle collisioni.

$$\vec{F} = \vec{F}_{Coulomb} + \vec{F}_{Lorentz} + \vec{F}_{collisioni} \quad (2.10)$$

$$\vec{F} = q\vec{E} + q\vec{v} \times \vec{B} - m\nu_c\vec{v} \quad (2.11)$$

Da qui otteniamo la seguente equazione differenziale che descrive il moto delle cariche negative.

$$m \frac{d\vec{v}}{dt} = q(\vec{E} + \vec{v} \times \vec{B}) - m\nu_c\vec{v} \quad (2.12)$$

Generalmente, in assenza di collisioni ($\nu_c = 0$), gli elettroni sono interessati da una traiettoria cicloidale (moto di Hall), caratterizzato da una velocità media

$$v_d = \frac{\vec{E} \times \vec{B}}{B^2} \quad (2.13)$$

detta *velocità di deriva*. Con l'introduzione delle collisioni tra gli elettroni e gli atomi del propellente, in base al valore assunto dalla frequenza con cui queste ultime si succedono ($\nu_c \neq 0$), è possibile apprezzare delle alterazioni del moto degli elettroni.

- se la ν_c è piccola, il numero di collisioni è così esiguo che il moto cicloidale risulta essere quasi inalterato;
- per valori elevati di ν_c , invece, il numero di collisioni è tale da impedire che gli elettroni acquisiscano la velocità necessaria affinché la forza di Lorentz ne curvi la traiettoria, che assume una direzione parallela al campo elettrico.

Per tenere conto di tali effetti è stato definito il *parametro di Hall*

$$\Omega = \frac{qB}{m\nu_c} \quad (2.14)$$

il quale, sulla base di quanto precedentemente menzionato, è necessario che assuma un valore significativamente superiore all'unità per assicurare il confinamento degli elettroni all'interno della camera.

Il risultato della fase di ionizzazione consiste nella creazione di un plasma quasi neutro, ovvero di un sistema caratterizzato dalla presenza di un ugual numero di particelle cariche positivamente e negativamente, poste ad un potenziale di poco inferiore al potenziale dell'anodo ($V_C + V_D$). Ciò determina il moto degli elettroni verso l'anodo e degli ioni verso la griglia di schermatura, causando così la separazione delle cariche.

Accelerazione degli ioni

A questo punto, gli ioni positivi, giunti in corrispondenza della griglia di schermatura, vengono ulteriormente accelerati per effetto di una seconda griglia, nota come *griglia di accelerazione*. Quest'ultima, infatti, posta ad una distanza x_a dalla screen grid, e caratterizzata da un potenziale negativo $-V_A$, è responsabile della caduta di potenziale $\Delta V = V_C + V_A$, attraverso cui la fase di accelerazione viene espletata. Tuttavia, se andassimo ad analizzare il moto di un singolo ione in fase di accelerazione, la presenza di altre particelle positive che lo precedono fa sì che su quest'ultimo agisca una forza repulsiva, che si oppone alla forza di Lorentz, generata dalla suddetta caduta di potenziale, e direttamente proporzionale al numero di ioni che lo precedono. Ne consegue, dunque, che in presenza di un numero sufficientemente grande di ioni, poiché l'effetto della formazione di una caduta di potenziale ΔV viene annullato, si assiste ad una saturazione della corrente degli ioni in uscita $j+$ e, conseguentemente, della spinta propulsiva. Tale limite di

corrente viene esplicitato dalla *legge di Child*.

$$j_{max} = \frac{4\epsilon_0}{9} \left(\frac{2q}{m_+} \right)^{\frac{1}{2}} \frac{\Delta V^{\frac{3}{2}}}{x_a^2} \quad (2.15)$$

Assumendo che la portata di propellente accelerata sia circa uguale alla portata di ioni in uscita dal propulsore, $\dot{m}_p = \dot{m}_+$, ed esplicitando \dot{m}_+

$$\dot{m}_+ = J_+ \frac{m_+}{q} = j_+ A \frac{m_+}{q} \quad (2.16)$$

siamo in grado di scrivere *la spinta per unità di area* massima ottenibile:

$$\left(\frac{T}{A} \right)_{max} = \frac{\dot{m}c}{A} \sim \frac{j_{max}m_+}{q} c = \frac{4\epsilon_0}{9} \left(\frac{2m_+}{q} \right)^{\frac{1}{2}} \frac{\Delta V^{\frac{3}{2}}}{x_a^2} c \quad (2.17)$$

Considerando che la velocità efficace di scarico sia ottimizzata in funzione della variazione di velocità $\Delta \vec{v}$ necessaria per portare a termine la missione, è possibile osservare un incremento del limite massimo di $\frac{T}{A}$:

- in presenza di una caduta di potenziale ΔV attraverso cui ottenere un incremento dell'accelerazione degli ioni, e, di conseguenza, della corrente j_+ . In tal caso, tuttavia, poiché la differenza di potenziale tra la screen grid e la griglia acceleratrice influenza anche la velocità efficace di scarico, è stata adoperata una terza griglia, nota come *griglia di decelerazione*, posta a potenziale nullo. In questo modo, legando la velocità efficace di scarico alla differenza di potenziale tra la screen grid e la griglia deceleratrice $\Delta V' = V_C$, ci è consentito incrementare j_+ e $\frac{T}{A}$ senza che il valore di c si discosti dal valore di ottimo c_{opt}

$$v = \sqrt{\frac{2q\Delta V}{m_+}} \longrightarrow v = \sqrt{\frac{2q\Delta V'}{m_+}} \quad (2.18)$$

- utilizzando propellenti le cui particelle ionizzate siano contraddistinte da una massa m_+ elevata;
- riducendo la distanza di installazione delle griglie di schermatura e accelerazione x_a .

Neutralizzazione

Una volta che gli ioni vengono espulsi dal propulsore, se non si effettua la fase di neutralizzazione, il potenziale positivo accumulato a valle della sezione di uscita sarebbe tale da causare la riflessione degli ioni successivamente emessi. Viene

dunque rilasciato un flusso di elettroni in prossimità della sezione di uscita, al fine di evitare tale effetto indesiderato. La soluzione ingegneristica trovata a tale necessità è l'implementazione del *catodo cavo*.

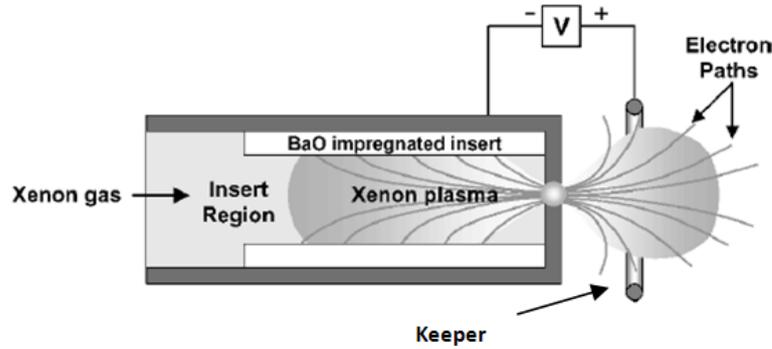


Figura 2.6: Catodo cavo [19]

Si tratta di un cilindro cavo al cui interno, a seguito dell'elevata emissione elettronica, ottenuta per effetto termoionico, si fa fluire e, conseguentemente, ionizzare una portata \dot{m}_n di propellente al fine di creare delle coppie ione - elettrone. A valle del foro di uscita, viene posizionato un elettrodo estrattore, a potenziale positivo, attraverso cui accelerare gli elettroni e respingere gli ioni, in modo da creare la corrente elettronica su menzionata.

Prestazioni

Considerando la portata di propellente, possiamo suddividerla in tre contributi differenti:

$$\dot{m}_p = \dot{m}_+ + \dot{m}_n + \dot{m}_{neutro} \quad (2.19)$$

dove \dot{m}_n corrisponde con la portata di propellente che attraversa il catodo cavo, mentre \dot{m}_{neutro} rappresenta la portata di propellente non ionizzata. Da qui, conoscendo la portata effettivamente utilizzata per gli scopi propulsivi, è possibile definire il rendimento che valuta la bontà dell'utilizzo del propellente.

$$\eta_u = \frac{\dot{m}_+}{\dot{m}_p} \quad (2.20)$$

Data la spinta esercitata dal propulsore

$$T = \dot{m}_+ u_+ \quad (2.21)$$

è possibile esplicitare la velocità efficace di scarico

$$c = \frac{T}{\dot{m}_p} = \frac{\dot{m}_+ u_+}{\dot{m}_p} = \eta_u u_+ \quad (2.22)$$

Facendo, invece, riferimento alla quantità di potenza elettrica concretamente convertita in potenza cinetica, può essere definito il rendimento elettrico:

$$\eta_{el} P_E = \frac{1}{2} \dot{m}_+ u_+^2 \quad (2.23)$$

$$\eta_{el} = \frac{\dot{m}_+ u_+^2}{2P_E} \quad (2.24)$$

dove la potenza elettrica può essere descritta da tre contributi distinti: la frazione convertita in potenza cinetica, la potenza necessaria alla ionizzazione del propellente e la frazione dedicata alle perdite elettriche:

$$P_E = \frac{1}{2} \dot{m}_+ u^2 + \mathcal{E}_b \frac{\dot{m}_+}{m_+} + \sum P_{perdite} \quad (2.25)$$

Per finire, siamo in grado di definire un terzo rendimento, noto come rendimento globale, che tiene conto della frazione di potenza elettrica trasformata in potenza propulsiva:

$$\eta_g P_E = \frac{\dot{m}_p c^2}{2} = \frac{Tc}{2} \quad (2.26)$$

$$\eta_g = \eta_u \frac{\dot{m}_+ u_+^2}{2P_E} = \eta_u \eta_{el} \quad (2.27)$$

Poiché l'obiettivo consiste nell'ottenere il rendimento globale massimo possibile, l'ideale sarebbe ottenere un incremento simultaneo di entrambi i rendimenti, elettrico η_{el} e di utilizzo del propellente η_u ; consistenti, nel primo caso, nell'abbassamento del costo di ionizzazione e delle perdite elettriche, mentre, nel secondo caso, nell'incremento della porzione di propellente ionizzato. Tuttavia, qualora dovessimo implementare un aumento della densità del propellente, contestualmente alla promozione del meccanismo di formazione degli ioni, con conseguente abbassamento del costo di ionizzazione \mathcal{E}_b , e dunque di η_{el} , si ha l'aumento della portata di propellente non ionizzata \dot{m}_{neutro} , responsabile della diminuzione di η_u . La stessa dinamica si presenta nel caso contrario: infatti, incrementando il flusso di elettroni in camera di ionizzazione, da una parte, si ha un aumento della portata di propellente effettivamente ionizzata \dot{m}_+ , responsabile della crescita di η_u ; mentre dall'altra, un incremento del costo di ionizzazione che conduce ad un abbassamento del rendimento elettrico η_{el} .

Dato l'elevato impulso specifico, questa tipologia di propulsori viene impiegata o per missioni ad alto $\Delta\vec{v}$, oppure per missioni di durata elevata. Infatti, possono essere impiegati sia per manovre interplanetarie che per manovre di mantenimento dell'orbita geostazionaria.

Tabella 2.3: Confronto prestazionale tra propulsori ionici

Modello	XIPS 13	XIPS 25	NSTAR	RITA 15	RITA 150	T5	T6
P_E [kW]	0.33	4.5	0.5 - 2.3	0.5	4.3	0.27 - 0.65	5.2
I_{sp} [s]	2570	3800	3100	5000	5000	3500	3500
T [mN]	18	165	20 - 95	15	150	10	40 - 200
η	0.7	0.7	0.63			0.64	
D [cm]	13	25	30	10	22	- 0.66	10
						10	22

2.3.2 FEEP

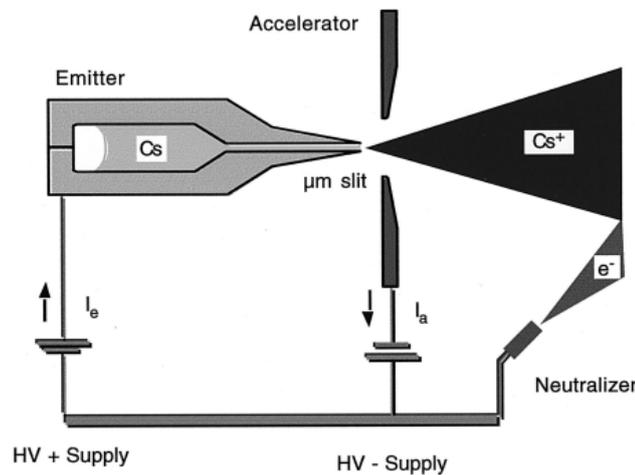


Figura 2.7: Schema di un Field Emission Electric Propulsor [14]

Con l'acronimo FEEP, *Field Emission Electric Propulsion*, si fa riferimento ad una classe di propulsori in cui l'emissione di ioni, atta alla generazione della spinta T , si ottiene per mezzo del fenomeno dell'*effetto campo*. La configurazione di questa tipologia di propulsori prevede un emettitore cavo, al cui interno viene collocato un serbatoio contenente un propellente, composto da un metallo alcalino liquido, come Cesio (Ce) o Iridio (Ir). Ad esso segue un *elettrodo acceleratore*, responsabile, assieme all'emettitore, della formazione del campo elettrico esterno necessario alla accelerazione degli ioni; ed un neutralizzatore, avente lo scopo di garantire la stabilità di carica del veicolo spaziale.

La scelta di un propellente metallico si basa sulla possibilità di poter sfruttare la

bassa energia di ionizzazione, propria degli elementi metallici, al fine di favorire la formazione di coppie ione-elettrone. Il funzionamento del propulsore prevede che si ponga l'emettitore ad un potenziale elettrico positivo $V_N = 6000V$, e l'elettrodo acceleratore ad un potenziale negativo $V_E = -4000V$. A questo punto, il propellente viene sottoposto ad una differenza di potenziale $\Delta V = 10000V$, tale da creare un campo elettrico tanto intenso da separare le coppie elettrone - ione, e accelerare gli ioni, successivamente neutralizzati per effetto di un catodo cavo posto in prossimità della sezione di uscita. La velocità di emissione degli ioni

$$u_+ = \sqrt{2\frac{q}{m}(V_N + V_E)} \quad (2.28)$$

è dell'ordine dei 60 km/s, equivalenti ad un impulso specifico $I_{sp} = cg_0 \approx 6000s$, che rende i propulsori *FEEP* adatti solo per missioni ad alto Δv . Le spinte e le potenze prodotte dal propulsore, rispettivamente dell'ordine dei μN e dei W , collocano questi propulsori tra i *microthrusters*, i quali, permettendoci di ottenere una regolazione precisa della spinta, vengono maggiormente impiegati per missioni in cui viene richiesto un controllo preciso della posizione e dell'orientazione dello Spacecraft.

2.3.3 Propulsori colloidali

Si tratta di propulsori elettrostatici, aventi lo stesso principio di funzionamento dei propulsori *FEEP*, con la sostanziale differenza che il propulsore accelerato non è costituito da metallo liquido, bensì da liquidi colloidali o liquidi ionici. I primi sono sistemi ottenuti mediante la dispersione di una fase solida, liquida o gassosa all'interno di una fase, detta disperdente, anch'essa solida, liquida o gassosa. Normalmente, si ricorre alla dispersione di ioduro di sodio (NaI) all'interno della formammide. Caratterizzati da una massa molecolare maggiore rispetto a quella dei metalli liquidi, la particolarità di questa tipologia di propellenti risiede nell'elevata tensione superficiale del liquido disperdente che permette, una volta ionizzato il sale, di creare gocce contenenti al proprio interno molteplici ioni, e contraddistinte da un rapporto $\frac{q}{m}$ minore. In conseguenza di ciò, si ottengono propulsori con un impulso specifico minore, approssimativamente pari a 1000 secondi. La seconda tipologia di propellente fa riferimento ad una classe di composti di ioni, caratterizzati da punti di fusione inferiori a al punto di ebollizione dell'acqua. Solitamente si fa ricorso a EMI-BF4; un composto che in fase di ionizzazione viene scomposto in coppie di ioni, a cui è possibile associare un rapporto $\frac{q}{m}$ prossimo a quello di un propulsore *FEEP*.

2.3.4 Propulsori ad effetto Hall

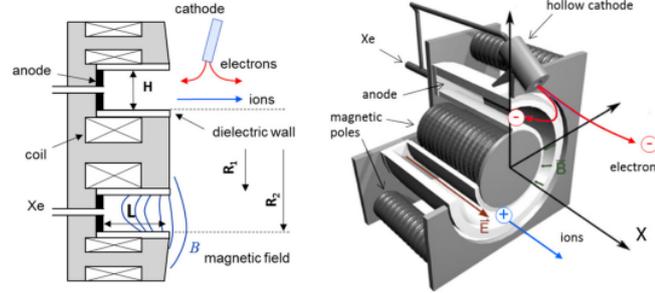


Figura 2.8: Hall thruster [20]

Il propulsore in questione si compone di una camera costituita da una cavità delimitata da un cilindro cavo esterno e un cilindro interno, concentrico al primo (prodotti con materiali ferromagnetici). Nel cuore di questa cavità, in corrispondenza del fondo, una piastra forata funge sia da sistema di alimentazione del propellente, solitamente Xenon, che da anodo. Quest'ultimo, insieme ad un catodo collocato in prossimità della sezione di uscita, sono responsabili della formazione del campo elettrico longitudinale. Relativamente alla generazione del campo magnetico radiale, di intensità pari a $0.1T$, invece, vengono impiegati dei solenoidi avvolti su strutture esterne ed interne alla camera. In presenza della differenza di potenziale $\Delta V = V_D$, il catodo emette una corrente $-J_D$ costituita da un flusso di elettroni che si muove verso il propulsore, $-J_E$, ed una componente $-J_N$, rappresentante la percentuale di elettroni utilizzati per la neutralizzazione. Una volta che la componente J_E giunge in prossimità del propulsore, l'influenza del campo magnetico radiale fa sì che gli elettroni, per valori del parametro di Hall prossimi a 100, si muovano secondo un moto cicloidale che favorisce la fase di ionizzazione del propellente. Nel momento in cui vi è un incremento sostanziale della frequenza delle collisioni ν_c con gli atomi e gli ioni del gas, la corrente di elettroni generata si muove in direzione dell'anodo interno. Nel frattempo, gli ioni formati a valle della fase di ionizzazione vengono accelerati sotto l'effetto del campo elettrico longitudinale, per poi essere espulsi con una velocità di uscita che, idealmente, assumerebbe per tutte le cariche positive il seguente modulo.

$$u_+ = \sqrt{2 \frac{q}{m} \Delta V} \quad (2.29)$$

Tuttavia, in base al punto della camera in corrispondenza del quale la ionizzazione dell'atomo è avvenuta, lo ione viene sottoposto a differenze di potenziale differenti. Motivo per cui, si introduce un coefficiente $f < 1$ che rappresenta la frazione di

tensione mediamente applicata sugli ioni:

$$u_+ = \sqrt{2f \frac{q}{m} \Delta V} \quad (2.30)$$

Da un punto di vista prestazionale, analizzando la fase di ionizzazione, a partire dalla conoscenza della portata di ioni prodotta \dot{m}_+ e della portata di propellente \dot{m}_p , è possibile definire il rendimento di utilizzo:

$$\eta_u = \frac{\dot{m}_+}{\dot{m}_p} = \frac{\dot{m}_+}{\dot{m}_a + \dot{m}_c} \quad (2.31)$$

con \dot{m}_a , corrispondente alla portata di propellente fornita in camera, e \dot{m}_c rappresentante la frazione di propellente fornita al catodo cavo. La particolarità di questo propulsore sta nel fatto che, data l'elevata percentuale di ionizzazione, prossima al 100%, $\dot{m}_a = \dot{m}_+$.

Passando, invece, alla fase di accelerazione degli ioni, sapendo che:

$$\frac{1}{2} \dot{m}_+ u_+^2 = J_+ f V_D \quad (2.32)$$

e conoscendo la potenza elettrica utilizzata $P_E = J_D V_D$, definiamo il rendimento elettrico:

$$\eta_{el} = \frac{\frac{1}{2} \dot{m}_+ u_+^2}{P_E} = \frac{J_+ f V_D}{J_D V_D} \quad (2.33)$$

il quale, considerando che $J_D = J_E + J_N$ e che $J_N \simeq J_+$, può essere espresso in funzione della frazione di tensione media applicata, f , e della corrente J_E che tiene conto sia del costo di ionizzazione che della perdita di elettroni.

$$\eta_{el} = \frac{\frac{1}{2} \dot{m}_+ u_+^2}{P_E} = \frac{\frac{1}{2} \dot{m}_+ u_+^2}{\frac{1}{2} \dot{m}_+ u_+^2 + \mathcal{E}_B \frac{\dot{m}_+}{m_+} + \sum P_{loss}} \quad (2.34)$$

Infine, il rendimento globale, come visto anche per i propulsori a ioni, assume la seguente forma

$$\eta_g P_E = \frac{Tc}{2} \quad (2.35)$$

$$\eta_g = \frac{\frac{1}{2} \dot{m}_+ u_+ \eta_u u_+}{P_E} = \eta_u \eta_{el} \quad (2.36)$$

Dal confronto prestazionale tra propulsori ionici e ad effetto Hall, poiché l'efficacia del processo di ionizzazione relativo al propulsore trattato risulta essere maggiore, il costo di ionizzazione ad esso associato, \mathcal{E}_b , sarà minore. Ciò significa che, nel caso dei propulsori ad effetto Hall, sarà necessario applicare una caduta di potenziale V_D minore affinché il rendimento globale raggiunga i valori propri di un propulsore a ioni. Ciò significa che, a parità di rendimento, un propulsore ad effetto Hall è caratterizzato da velocità efficaci di scarico minori, che lo rendono implementabile nel caso di missioni a $\Delta \vec{v}$ minori.

Tabella 2.4: Prestazioni Propulsori ad effetto Hall

Tipologia	Hall	Ionici	FEEP
Propellente	Xe	Xe	Cs,Ir
I_{sp} [s]	1500-2500	2000 - 4000	6000
P_E [W]	300 -10000	200 - 5000	1
η_g	0.5	0.65	0.8
Voltaggio [V]	200-600	1000 - 2000	6000
Massa propulsore [kg/kW]	2-3	3-6	?
massa del PPU [kg/kW]	6-10	6-10	?
sistema di alimentazione	regolato	regolato	no
vita operativa [h]	>7000	>10000	?
applicazioni	Station Keeping trasferimento orbitale per valori medi di ΔV	Station Keeping trasferimento orbitale per valori elevati di ΔV	Manovre di precisione

2.4 Propulsori elettromagnetici

La propulsione elettromagnetica si basa sull'accelerazione delle cariche, liberate in fase di ionizzazione, per mezzo della Forza di Lorentz. Per spiegarne il funzionamento, ricorriamo ad un modello semplificato del propulsore costituito da due piastre, poste ad una differenza di potenziale ΔV . In questa configurazione, in corrispondenza del volume delimitato dalle due piastre, le cariche, costituenti il plasma, si muovono nella direzione delle linee di campo elettrico generando una corrente J . Successivamente, mediante l'applicazione di un campo magnetico esterno orientato perpendicolarmente al campo elettrico, dall'interazione delle cariche in movimento con il campo magnetico \vec{B} si manifesta una forza $\vec{F} = q\vec{v} \times \vec{B}$ che agisce lungo l'asse del propulsore, e che contribuisce all'accelerazione delle cariche coinvolte.

2.4.1 Propulsori MPD self field

Si tratta di propulsori aventi una configurazione simile a quella di un arcogetto, caratterizzata da un catodo centrale, collocato all'interno di una camera cilindrica, le cui pareti fungono da anodo.

Il sistema di alimentazione, posto sul fondo della camera, immette gli atomi di propellente, mentre il catodo emette gli elettroni, fondamentali, a seguito della fase di ionizzazione, al fine di generare l'arco elettrico tra i due elettrodi. In tal caso, però, a differenza di quanto accade nel arcogetto, la corrente elettrica generata ha una intensità tanto elevata da rendere le forze magnetiche preponderanti rispetto

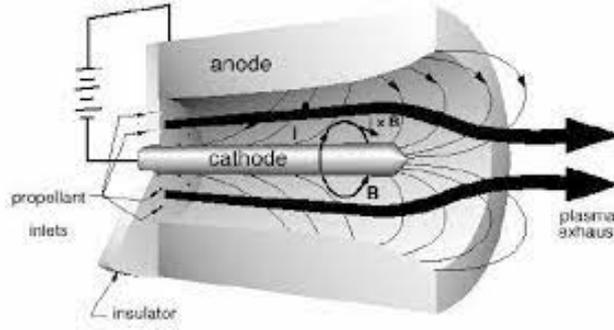


Figura 2.9: Schema di un propulsore MPD [14]

alle forze di pressione. Ciò si riflette anche sulla configurazione del propulsore, in cui l'ugello risulta privo di una gola, volta, nella fase di accelerazione fluidodinamica del flusso, alla conversione del regime da subsonico a supersonico. Le forze magnetiche coinvolte nell'accelerazione delle cariche si compongono di due contributi:

- una forza assiale, detta di *blowing*, nata dall'interazione della corrente radiale J_r con il campo magnetico indotto, tangenziale B_θ ; e responsabile dell'accelerazione del propellente ionizzato;
- una forza radiale di *pumping*, responsabile dell'*effetto pinch*, nata dall'interazione della componente assiale della corrente J_z con il campo magnetico indotto B_θ .

Facendo riferimento a due modelli semplificati del propulsore, poi successivamente corretti, sono stati analizzati i suddetti contributi separatamente, al fine di valutare gli apporti propulsivi ad essi associati:

$$T_B = \frac{\mu J^2}{4\pi} \left(\ln \frac{r_a}{r_c} + \frac{1}{4} \right) \quad (2.37)$$

$$T_P = \frac{1}{2} \frac{\mu J^2}{4\pi} \quad (2.38)$$

Dalla somma dei due contributi propulsivi si ottiene la *formula di Maecker*

$$T = T_B + T_P = \frac{\mu J^2}{4\pi} \left(\ln \frac{r_a}{r_c} + \frac{3}{4} \right) \quad (2.39)$$

che esplicita la spinta T come funzione della corrente e dell'ingombro trasversale r_a . Inoltre, è necessario evidenziare l'indipendenza di T dalla portata di propellente

accelerata \dot{m}_p . Ciò comporta che, fissata l'intensità della corrente prodotta, e dunque la spinta, la velocità efficace di scarico risulta inversamente proporzionale alla portata di propellente accelerata:

$$c = \frac{T}{\dot{m}_p} \propto \frac{J^2}{\dot{m}_p} \quad (2.40)$$

Potendo ora definire la potenza propulsiva

$$P_T = \frac{Tc}{2} = K \frac{J^4}{\dot{m}_p} \quad (2.41)$$

e una volta esplicitata la perdita di potenza all'anodo, e trascurando le perdite aerodinamiche e per flussi congelati equivalenti a circa il 10% della potenza elettrica fornita,

$$P_a = \frac{J}{q} \left(\frac{5}{2} kT_e + q\Delta V_{af} + \Phi \right) = K' J \quad (2.42)$$

possiamo definire il rendimento globale η_g ,

$$\eta_g = \frac{P_T}{P_T + P_a} = \frac{1}{1 + K'' \frac{\dot{m}_p}{J^3}} \quad (2.43)$$

dove:

- $\frac{5}{2}kT_e$ rappresenta l'entalpia media degli elettroni;
- ΔV_{af} è la caduta di potenziale in prossimità dell'anodo;
- Φ corrisponde alla funzione lavoro legata al trasporto di energia da parte degli elettroni;
- K, K' e K'' sono delle costanti.

Da qui è possibile constatare che affinché il rendimento aumenti, è necessario o ridurre la portata di propellente, oppure incrementare la corrente J . Tuttavia, in quest'ultimo caso, affinché si ottengano valori accettabili del rendimento, è necessario ricorrere a correnti dell'ordine dei $10^3 A$. In particolare, per i regimi di funzionamento di tale propulsore, corrispondenti a $J > 7000A$, poiché si ottengono valori elevati della spinta T e dell'impulso specifico $I_{sp} = cg_0$, i propulsori MPD possono essere impiegati per missioni ad lto $\Delta\vec{v}$, caratterizzate da un payload elevato.

2.4.2 Propulsori MPD - applied field

Tale tipologia di propulsore mantiene la configurazione geometrica di un *MPD - self field*, con l'aggiunta di un solenoide esterno, sorgente di campo magnetico applicato \vec{B}_{ext} . In questo caso, a differenza di quanto accade in un propulsore *MPD - self field*, l'applicazione del campo magnetico esterno favorisce l'introduzione di una componente tangenziale della corrente J_θ . In questo caso, dunque vi sono tre componenti di corrente J_r , J_z e J_θ , la cui interazione con il campo magnetico autoindotto B_θ e le componenti radiale $B_{ext,r}$ e assiale $B_{ext,z}$ del campo magnetico esterno genera tre contributi di forze, di *blowing*, *pumping* e *swirling*, responsabili della spinta propulsiva,

$$T \propto J^a B^b \quad (2.44)$$

con $a \in [0.8, 1]$ e $b \in [0.5, 1]$.

Esplicitando la potenza propulsiva

$$P_T \propto \frac{J^2 B^2}{\dot{m}_p} \quad (2.45)$$

e considerando che le perdite di potenza all'anodo rimangono inalterate,

$$P_a = K'' J \quad (2.46)$$

affinché prevalga l'effetto utile, anche in questo caso, è necessario ricorrere a correnti molto elevate. Ciò che invece distingue le due tipologie di propulsori MPD, è la potenza di alimentazione, dell'ordine dei *MW* nel caso del *self field*, e pari ad un massimo di *10kW* nel caso degli *applied field*.

Capitolo 3

Metodo di ottimizzazione delle traiettorie

3.1 Overview generale dei metodi di ottimizzazione

«In matematica applicata, e in particolare nella teoria delle decisioni, con l'espressione problemi di ottimizzazione si fa riferimento alle questioni attinenti alla ricerca dei criteri di scelta tra diverse opzioni o di determinazione del valore di particolari parametri, di solito riconducibile alla ricerca del massimo o del minimo di funzioni che costituiscono la rappresentazione matematica del problema.». Tale campo di studi, che permea la realtà di tutti i giorni, caratterizza gran parte delle sfide affrontate nei più disparati ambiti professionali, quali l'economia, la finanza, la logistica e l'ingegneria.

Nel corso di questa tesi viene trattata la *Teoria del controllo ottimale*, in cui l'obiettivo consiste nell'individuare la legge di controllo $u(t)$ di un sistema dinamico che minimizzi/massimizzi un dato indice prestazionale, senza che vengano violati i vincoli imposti al moto del sistema stesso. In tale ambito, è possibile individuare tre casistiche:

- *Ottimizzazione di traiettorie*: si tratta di un problema di ottimo la cui risoluzione consiste nell'individuazione di un input rappresentato da parametri statici, e di una traiettoria che ottimizzi l'indice prestazionale [21];
- *Controllo ottimo*: si tratta di un problema la cui risoluzione consiste nell'individuazione di un parametro di ingresso, esso stesso una funzione del tempo, e della traiettoria che ottimizzi l'indice prestazionale. [21]

*Nota bene:*In matematica il funzionale è una funzione il cui dominio è rappresentato da un insieme di funzioni \mathbf{X} , che prende il nome di spazio funzionale, e avente il codominio in \mathbb{R} o in \mathbb{C}

- *Problema di controllo ottimale:* caso in cui l'input del sistema dinamico da definire è un vettore caratterizzato sia da parametri statici che da funzioni del tempo. [21]

Nello sviluppo di una missione spaziale, data l'elevata incidenza della massa da portare in orbita, risulta di fondamentale importanza minimizzare il quantitativo di propellente accelerato per la realizzazione delle manovre. È dunque in questo contesto che viene applicata la teoria del controllo ottimale, avente il fine di identificare una strategia propulsiva ottima. Per far ciò, data la complessità del problema, una volta fissati la funzione obiettivo e i vincoli imposti al moto del sistema, è necessario ricorrere all'implementazione di metodi di natura numerica, i quali possono essere distinti in:

1. **Metodi diretti:** si tratta di metodi che prevedono, inizialmente, la discretizzazione della traiettoria, con conseguente approssimazione delle variabili di stato $x(t)$ e di controllo $u(t)$. In questo modo, parametrizzando le suddette variabili, e quindi rifacendoci a spazi finito - dimensionali, sia per i controlli che per gli stati, è possibile ridurre le dimensioni del problema, e, di conseguenza, i costi computazionali legati alla sua risoluzione. In particolare, le variabili x e u possono essere definite o come la combinazione lineare dei vettori che formano i sottospazi vettoriali contenenti le variabili stato e di controllo relative ai singoli archi di traiettoria:

$$x \in \text{span}\{x_1, \dots, x_i, \dots, x_p\}, \quad x = \sum_{i=1}^p \alpha_i x_i \quad \text{con } i = 1, \dots, p \quad (3.1)$$

$$u \in \text{span}\{u_1, \dots, u_j, \dots, u_q\}, \quad u = \sum_{j=1}^q \beta_j u_j \quad \text{con } j = 1, \dots, q \quad (3.2)$$

Oppure possono essere approssimate ricorrendo all'espansione polinomiale di Chebyshev. Tuttavia, in presenza di vincoli imposti sulla traiettoria, tale formulazione risulterebbe difficile da gestire.

Dopodiché, il problema di controllo ottimale viene trasformato in un *nonlinear programming problem* (NPL). Ciò significa che, una volta individuate le variabili decisionali del problema, ovvero le incognite da determinare in fase di ottimizzazione ($x(t), u(t)$ e t nel nostro caso), almeno uno tra la funzione obiettivo $J(x(t), u(t), t)$ e i vincoli imposti deve essere una funzione non lineare di tali variabili. A questo punto la risoluzione del problema di ottimizzazione viene affidata a metodi numerici appositi. Il vantaggio principale dei metodi di

ottimizzazione diretta è la capacità di convergere ad una soluzione di ottimo, indipendentemente dalla formulazione di funzionale e vincoli. Dall'altra parte, invece, gli svantaggi principali sono una scarsa accuratezza dei risultati; e, qualora le dimensioni del problema dovessero diventare importanti, un alto costo computazionale legato ad un elevato numero di parametri da determinare [22, 23, 24].

2. **Metodi indiretti:** si tratta di metodi che sfruttano i principi del *calcolo delle variazioni* al fine di individuare le condizioni di ottimo del problema di ottimizzazione. In particolare, l'implementazione di tali principi porta alla formalizzazione di un *problema differenziale ai limiti*, consistente nella risoluzione di un sistema di equazioni differenziali ordinarie che soddisfano le condizioni al contorno imposte. È inoltre possibile suddividere la traiettoria in archi; il che ci permette di gestire eventuali discontinuità delle variabili di stato, afferenti a casistiche relative a manovre impulsive, manovre di flyby e scarico di stadi esauriti. Nel caso dei metodi indiretti, non vi è una parametrizzazione delle legge di controllo, il cui valore di ottimo viene determinato per mezzo del *Principio di Massimo di Pontryagin*.

In questo caso, a differenza dei metodi diretti, le tecniche di ottimizzazione indiretta consistono nell'individuazione di un numero di parametri contenuto, e quindi con costi computazionali e tempi di calcolo limitati, atti a determinare soluzioni ottime caratterizzate da una precisione numerica elevata. D'altro canto, questi ultimi sono caratterizzati da una capacità limitata a convergere ad una soluzione di ottimo, fortemente dipendente dalle soluzioni di tentativo iniziali utilizzate; e da una scarsa robustezza a variazioni del sistema dinamico oggetto di studio [22].

3. **Metodi ibridi:** quando si parla di tecniche di ottimizzazione ibride, si fa riferimento a metodi caratterizzati dall'ottima convergenza, propria dell'ottimizzazione diretta, e dall'elevata precisione numerica, tipica della tecnica di ottimizzazione indiretta. Specificatamente, essa consiste nell'implementazione del metodo diretto, avente l'obiettivo di effettuare una valutazione approssimata delle variabili di stato e di controllo, e quindi di ottenere una soluzione ottimale approssimata da utilizzare come soluzione di tentativo per l'implementazione del metodo indiretto [22, 23].
4. **Algoritmi evolutivi:** sono tecniche euristiche ispirate alla teoria dell'evoluzione delle specie darwiniana. Difatti, dato un insieme finito di soluzioni del problema di ottimizzazione, che costituiscono gli "individui della popolazione", viene misurata la validità di una soluzione e la sua capacità di riprodursi, per mezzo di una funzione di adattamento, altrimenti chiamata *fitness function*. Dopodiché, con l'applicazione di operatori crossover e di mutazione, viene

creata la popolazione successiva di "individui", fino a quando non vengono soddisfatti i criteri di terminazione [22].

Tra i metodi numerici disponibili per la risoluzione del problema di ottimizzazione, noi tratteremo la tecnica indiretta.

3.2 Metodo di ottimizzazione indiretta

Dato il sistema dinamico oggetto di studio, la prima cosa da fare è rappresentare quest'ultimo nello *Spazio di stato*. Ciò significa passare da una descrizione del sistema per mezzo di un'equazione differenziale del n-esimo ordine, ad una sua rappresentazione per mezzo di un sistema di n equazioni differenziali ordinarie del primo ordine:

$$\dot{\vec{x}} = f(\vec{x}(t), \vec{u}(t), t) \quad (3.3)$$

Questa rappresentazione prevede tre elementi fondamentali:

- le variabili di stato contenute nel vettore degli stati $\vec{x}(t)$;
- le variabili di ingresso, anche note con il nome di controlli $\vec{u}(t)$;
- le variabili di uscita $\vec{y}(t) \in \vec{x}(t)$;

Nel nostro caso, come già anticipato, qualora le variabili di stato dovessero riscontrare delle discontinuità lungo la traiettoria dello Spacecraft, sarebbe necessario dividere la traiettoria in m archi, con il j-esimo intervallo caratterizzato dai valori al contorno $t_{(j-1)+}, t_{(j)-}, x_{(j-1)+}$ e $x_{(j)-}$; dove con i segni '-' e '+' si vogliono indicare rispettivamente i valori assunti dalle variabili subito prima e dopo di un punto di congiunzione tra due archi. A questo punto, è possibile definire le condizioni poste in corrispondenza dei contorni, sia esterni che interni, della traiettoria.

$$\chi(\vec{x}_{(j-1)+}, \vec{x}_{(j)-}, t_{(j-1)+}, t_{(j)-}) = 0 \quad \text{con } j = 1, \dots, m \quad (3.4)$$

3.2.1 Teoria del controllo ottimale

Di seguito, viene formalizzato il problema di controllo ottimale, che prevede la definizione di un funzionale obiettivo che rappresenti un costo/beneficio da minimizzare/massimizzare. La forma generale del funzionale è la seguente:

$$J = \phi(\vec{x}_{(j-1)+}, \vec{x}_{(j)-}, t_{(j-1)+}, t_{(j)-}) + \sum_{j=1}^m \int_{t_{(j-1)+}}^{t_{(j)-}} \Phi(\vec{x}(t), \vec{u}(t), t) dt \quad j = 1, \dots, m \quad (3.5)$$

che può essere riscritta anche in forma contratta.

$$J = \phi(\vec{x}(0), \vec{x}_f, t(0), t_f) + \int_{t_0}^{t_f} \Phi(\vec{x}(t), \vec{u}(t), t) dt \quad (3.6)$$

Qui \vec{x}_f e t_f rappresentano, rispettivamente, il vettore degli stati e l'istante finali, mentre ϕ è il costo terminale e Φ prende il nome di *Lagrangiana*.
 Due formulazioni particolari del funzionale, che prendono il nome di *Funzionale di Mayer* e *Funzionale di Lagrange*, sono di seguito riportate:

$$J = \phi(\vec{x}(0), \vec{x}_f, t(0), t_f) \quad \text{Mayer} \quad (3.7)$$

$$J = \int_{t_0}^{t_f} \Phi(\vec{x}(t), \vec{u}(t), t) dt \quad \text{Lagrange} \quad (3.8)$$

Come si può osservare, la forma di Mayer, prediletta ai fini dell'implementazione del metodo di ottimizzazione indiretta, è caratterizzata dall'assenza del costo lagrangiano; mentre, la formulazione di Lagrange si distingue per l'assenza del costo terminale.

Il problema così rappresentato, caratterizzato da condizioni al contorno e vincoli imposti sia alle variabili di stato che di controllo, prende il nome di *Problema di ottimizzazione vincolata*. In questo caso, al fine di semplificarne la risoluzione, si ricorre ad uno strumento del *Calcolo delle variazioni*, noto con il nome di *Metodo dei moltiplicatori di Lagrange*, che ci permette di riscrivere il problema di ottimizzazione vincolata originario sotto forma di un problema di ottimizzazione non vincolata, le cui dimensioni, però, risultano aumentate a seguito dell'aggiunta di parametri incogniti da determinare, e che prendono il nome di *Moltiplicatori di Lagrange*. Essi possono essere distinti in:

- variabili associate alle equazioni di stato λ , anche note come variabili di co-stato;
- costanti associate alle condizioni al contorno μ .

Possiamo dunque definire il *funzionale implementato*:

$$J^* = \phi + \vec{\mu}^T \chi + \sum_{j=1}^m \int_{t_{(j-1)^+}}^{t_{j^-}} \vec{\lambda}^T (\vec{f} - \dot{\vec{x}}) dt \quad j = 1, \dots, m \quad (3.9)$$

che costituisce una riformulazione del funzionale inizialmente definito. È possibile infatti notare che, qualora dovessero essere rispettate le equazioni di stato (3.3) e le condizioni al contorno (3.4), indipendentemente dal valore assunto dai moltiplicatori di Lagrange, si ha che $J^* = J$.

Poiché vogliamo che il funzionale non sia espresso in funzione della derivata temporale del vettore degli stati, effettuiamo un'integrazione per parti dell'integrale definito all'interno di J^* .

$$\int_{t_{(j-1)+}}^{t_{j-}} \vec{\lambda}^T (\vec{f} - \dot{x}) dt = \int_{t_{(j-1)+}}^{t_{j-}} \vec{\lambda}^T \vec{f} dt - \int_{t_{(j-1)+}}^{t_{j-}} \vec{\lambda}^T \dot{x} dt \quad (3.10)$$

$$\int_{t_{(j-1)+}}^{t_{j-}} \vec{\lambda}^T \dot{x} dt = [(\dot{\vec{\lambda}}^T \vec{x})_{j-} - (\dot{\vec{\lambda}}^T \vec{x})_{(j-1)+}] - \int_{t_{(j-1)+}}^{t_{j-}} \dot{\vec{\lambda}}^T \vec{x} dt \quad (3.11)$$

Sostituendo (3.11) in (3.9), il funzionale assume la forma seguente

$$J^* = \phi + \vec{\mu}^T \chi + \sum_{j=1}^m [(\dot{\vec{\lambda}}^T \vec{x})_{(j-1)+} - (\dot{\vec{\lambda}}^T \vec{x})_{j-}] + \sum_{j=1}^m \int_{t_{(j-1)+}}^{t_{j-}} (\vec{\lambda}^T \vec{f} + \dot{\vec{\lambda}}^T \vec{x}) dt \quad (3.12)$$

contenente una funzione al suo interno che prende il nome di *Hamiltoniana*.

$$H = \vec{\lambda}^T \vec{f} \quad (3.13)$$

A questo punto, differenziando J^* , si può definire la *variazione prima del funzionale* δJ^* :

$$\begin{aligned} \delta J^* = & \left(-H_{(j-1)+} + \frac{\partial \phi}{\partial t_{(j-1)+}} + \vec{\mu}^T \frac{\partial \chi}{\partial t_{(j-1)+}} \right) \delta t_{(j-1)+} + \left(H_{j-} + \frac{\partial \phi}{\partial t_{j-}} + \vec{\mu}^T \frac{\partial \chi}{\partial t_{j-}} \right) \delta t_{j-} \\ & + \left(\vec{\lambda}_{(j-1)+}^T + \frac{\partial \phi}{\partial \vec{x}_{(j-1)+}} + \vec{\mu}^T \left[\frac{\partial \vec{\chi}}{\partial \vec{x}_{(j-1)+}} \right] \right) \delta \vec{x}_{(j-1)+} + \left(\vec{\lambda}_{j-}^T + \frac{\partial \phi}{\partial \vec{x}_{j-}} + \vec{\mu}^T \left[\frac{\partial \vec{\chi}}{\partial \vec{x}_{j-}} \right] \right) \delta \vec{x}_{j-} \\ & + \sum_{j=1}^m \int_{t_{(j-1)+}}^{t_{j-}} \left[\left(\frac{\partial H}{\partial x} + \dot{\vec{\lambda}}^T \right) \delta x + \frac{\partial H}{\partial u} \delta u \right] dt \end{aligned} \quad (3.14)$$

Per individuare le soluzioni che minimizzino il funzionale di costo J^* , è necessario imporre la condizione di stazionarietà; ovvero annullare la variazione prima del funzionale ($\delta J^* = 0$), indipendentemente dall'entità assunta dalle variazioni $\delta \vec{x}_{(j-1)+}$, $\delta \vec{x}_{j-}$, $\delta t_{(j-1)+}$, δt_{j-} , $\delta \vec{x}$ e $\delta \vec{u}$. Tale condizione implica che i coefficienti correlati a tali variazioni devono annullarsi; il che ci permette di individuare i moltiplicatori di Lagrange ($\vec{\lambda}$ e $\vec{\mu}$). Annullando i coefficienti relativi alle variazioni $\delta \vec{x}$ e $\delta \vec{u}$, otteniamo le equazioni di Eulero - Lagrange, per l'identificazione delle variabili aggiunte:

$$\frac{d\lambda}{dt} = - \left(\frac{\partial H}{\partial \vec{x}} \right)^T \quad (3.15)$$

e la legge di controllo, utile ad individuare il vettore \vec{u}

$$\left(\frac{\partial H}{\partial \vec{u}} \right)^T = 0 \quad (3.16)$$

Quest'ultima rappresenta l'implementazione del *Principio di Massimo di Pontryagin*, il quale afferma che il controllo ottimale corrisponde con il vettore \vec{u} in grado di massimizzare la *funzione Hamiltoniana* e, quindi, di massimizzare J^* . Qualora le variabili di controllo ottenute sono soggette a vincoli, la legge di controllo ottimale ottenuta potrebbe non rientrare all'interno della *regione di ammissibilità*, e quindi all'interno dei range operativi. In questo caso, è necessario considerare la legge di controllo ammissibile, più prossima a quella teorica.

Nel caso particolare in cui l'*Hamiltoniana* presenti un legame lineare rispetto alla variabile di controllo, possono verificarsi i seguenti casi:

1. se il coefficiente di u è diverso da zero, l'*Hamiltoniana* sarà massimizzata con il valore massimo del controllo qualora il coefficiente fosse positivo. Al contrario, qualora quest'ultimo fosse negativo, la massimizzazione di H si ha in corrispondenza del valore minimo del controllo;
2. se il coefficiente di u risulta nullo in un intervallo di tempo finito, il controllo assume un valore intermedio da determinare annullando le derivate temporali del coefficiente.

Annullando invece i coefficienti relativi alle variazioni $\delta \vec{x}_{(j-1)+}$, $\delta \vec{x}_{j-}$, $\delta t_{(j-1)+}$ e δt_{j-} , definiamo le equazioni differenziali responsabili della determinazione delle condizioni al contorno per l'ottimo:

$$-H_{j+} + \frac{\partial \phi}{\partial t_{j+}} + \vec{\mu}^T \frac{\partial \chi}{\partial t_{j+}} = 0 \quad j = 0, \dots, m-1 \quad (3.17)$$

$$H_{j-} + \frac{\partial \phi}{\partial t_{j-}} + \vec{\mu}^T \frac{\partial \chi}{\partial t_{j-}} = 0 \quad j = 1, \dots, m \quad (3.18)$$

$$\vec{\lambda}_{j+}^T + \frac{\partial \phi}{\partial \vec{x}_{j+}} + \vec{\mu}^T \left[\frac{\partial \vec{\chi}}{\partial \vec{x}_{j+}} \right] = 0 \quad j = 0, \dots, m-1 \quad (3.19)$$

$$\vec{\lambda}_{j-}^T + \frac{\partial \phi}{\partial \vec{x}_{j-}} + \vec{\mu}^T \left[\frac{\partial \vec{\chi}}{\partial \vec{x}_{j-}} \right] = 0 \quad j = 1, \dots, m \quad (3.20)$$

Analizzando le equazioni differenziali relative alla soluzione di ottimo, per le condizioni al contorno si può osservare che:

- se la variabili di stato x sono definite all'interno delle condizioni al contorno ($\chi = 0$), la corrispondente variabile aggiunta risulterà libera in quei punti della traiettoria;
- se la variabile di stato x non compare sia nelle condizioni al contorno che nel contributo relativo al costo terminale (ϕ), la variabile aggiunta ad essa corrispondente assumerà valore nullo;
- se una variabile di stato risulta continua in corrispondenza di un punto di congiunzione tra archi ($x_{j-} = x_{j+}$), senza che il valore sia esplicitato, allora le variabili aggiunte corrispondenti si eguaglieranno ($\lambda_{j-} = \lambda_{j+}$);
- se una variabile di stato risulta continua da una fase all'altra, ed è dichiarata nel punto di congiunzione degli archi ($x_{j-} = x_{j+} = a \in \chi$), la variabile ad essa associata sarà caratterizzata da una discontinuità libera in quel punto; il che sta a significare che $\lambda_{x_{j+}}$ e $\lambda_{x_{j-}}$ devono essere ottimizzati.

In maniera analoga, relativamente all'*Hamiltoniana*, è possibile osservare che:

- se uno o entrambi gli istanti iniziale e finale non compaiono nè tra le condizioni al contorno e nè nella funzione di costo ϕ , l'*Hamiltoniana* assume valore nullo in tali istanti $H(t_0) = H(t_f) = 0$;
- se l'istante iniziale o finale vengono assegnati in maniera esplicita, il valore della funzione *Hamiltoniana* risulta libera. Ciò si ripete anche in corrispondenza di punti di giunzione interni. In tal caso, però, nel caso in cui si ha l'esplicitazione dell'istante intermedio t_j , si parla di discontinuità libera dell'*Hamiltoniana*;
- nel caso in cui l'istante t_j dovesse comparire nelle condizioni al contorno ma non nella funzione di costo terminale ϕ , senza che esso venga esplicitato, l'*Hamiltoniana* risulta continua in corrispondenza del punto di congiunzione j tra due archi della traiettoria ($H_{j+} = H_{j-}$).

3.2.2 Problema Differenziale ai Limiti

Dall'applicazione dei principi del *Calcolo Variazionale*, abbiamo ottenuto il sistema di equazioni differenziali costituito dalle equazioni (3.3), (3.15), (3.16), (3.17), (3.18), (3.19) e (3.20) che rappresenta il *Problema Differenziale ai Limiti*, classificabile in:

- *Problema Differenziale ai Limiti a due punti*, nel caso in cui la traiettoria fosse costituita da un unico intervallo;
- *Problema Differenziale ai Limiti a punti multipli*, nel caso in cui la traiettoria dovesse essere suddivisa in m sotto-intervalli.

La risoluzione di tale problema passa dall'implementazione di un metodo numerico iterativo, come il *Metodo di Newton*, volto alla ricerca dei valori iniziali delle variabili incognite che garantiscono il soddisfacimento delle condizioni al contorno. In particolare, nella casistica del *Problema Differenziale ai limiti a punti multipli*, poiché le durate relative ai sotto - intervalli risultano essere incognite, al fine di garantire l'integrazione è possibile sostituire la variabile indipendente del tempo con una sua equivalente adimensionale:

$$\epsilon = j - 1 + \frac{t - t_{(j-1)}}{t_j - t_{(j-1)}} = j - 1 + \frac{t - t_{(j-1)}}{\tau_j} \quad j = 1, \dots, m \quad (3.21)$$

In questo modo è possibile identificare gli estremi di integrazione di tutti i sotto - intervalli con una successione di numeri interi, relativi alla nuova variabile introdotta ϵ . Applicando la suddetta sostituzione e introducendo un vettore che raggruppi tutte le variabili di stato e di co-stato $\vec{y} = (\vec{x}, \vec{\lambda})$, è possibile riscrivere il problema differenziale ai limiti come segue:

$$\frac{d\vec{y}}{d\epsilon} = f^*(\vec{y}, \epsilon) \quad (3.22)$$

$$\left(\frac{\partial H}{\partial \epsilon} \right)^T = 0 \quad (3.23)$$

Quest'ultimo può essere poi ulteriormente generalizzato attraverso l'introduzione di un vettore $\vec{z} = (\vec{y}, \vec{c})$ contenente i vettori: \vec{y} , poc'anzi definito; e $\vec{c} = (\vec{\mu}, \tau)$, che raccoglie tutti i parametri costanti (ovvero le costanti aggiunte $\vec{\mu}$ e le durate dei sotto - intervalli τ_j). Otteniamo dunque il seguente sistema di equazioni differenziali

$$\frac{d\vec{z}}{d\epsilon} = f(\vec{z}, \epsilon) \quad (3.24)$$

di seguito esplicitato:

$$\frac{d\vec{z}}{d\epsilon} = \left(\frac{d\vec{y}}{d\epsilon}, \frac{dc}{d\epsilon} \right) \quad (3.25)$$

con

$$\frac{d\vec{y}}{d\epsilon} = \frac{d\vec{y}}{dt} \tau_j \quad (3.26)$$

$$\frac{dc}{d\epsilon} = 0 \quad (3.27)$$

Le condizioni al contorno, imposte e di ottimo, vengono solitamente raggruppate in un vettore:

$$\Psi(s) = 0 \quad (3.28)$$

dove $\vec{s} = (\vec{y}_0, \vec{y}_1, \dots, \vec{y}_n, \vec{c})$ è un vettore contenente i valori delle variabili di stato e delle variabili aggiunte in corrispondenza dei contorni, esterni ed interni. Poiché alcune di queste variabili sono incognite, come già anticipato, la determinazione del valore che queste ultime devono assumere al fine di soddisfare l'equazione (3.28) e, dunque, la risoluzione del *Problema Differenziale ai limiti* passa per l'applicazione del metodo di Newton. Considerando l' i -esima iterazione, la sua implementazione prevede l'utilizzo dei valori iniziali ottenuti a seguito dell'iterazione precedente.

$$z(0) = \vec{p}^i \quad (3.29)$$

Qualora l' i -esima iterazione corrispondesse con la prima, i valori iniziali delle variabili incognite devono essere inizializzate dall'utente. Alla fine di ogni iterazione, e dunque a seguito dell'aggiornamento dei valori delle variabili incognite, vengono calcolati gli errori relativi alle condizioni al contorno $\vec{\Psi}^i$. In particolare, succede che la variazione dei valori iniziali delle variabili Δp , a seguito di ogni singola iterazione, comporta una variazione degli errori:

$$\Delta \vec{\Psi} = \left[\frac{\partial \vec{\Psi}}{\partial \vec{p}} \right] \Delta \vec{p} \quad (3.30)$$

qui riportata sotto forma di espansione in serie troncata al primo ordine. Poiché vogliamo che il metodo vada a convergenza, gli errori calcolati sulle condizioni al contorno devono essere nulli. Ciò implica che la variazione dell'errore voluta alla fine della iterazione successiva ideale deve essere $\Delta \vec{\Psi} = -\vec{\Psi}^i$ e, di conseguenza, che la variazione dei valori iniziali delle variabili ideale deve essere:

$$\Delta \vec{p} = \vec{p}^{i+1} - \vec{p}^i = - \left[\frac{\partial \vec{\Psi}}{\partial \vec{p}} \right]^{-1} \vec{\Psi}^i \quad (3.31)$$

Una volta che l'obiettivo viene raggiunto, l'integrazione iterativa del sistema di equazioni differenziali si ferma.

Ricorrendo all'approccio analitico, la matrice $\left[\frac{\partial \vec{\Psi}}{\partial \vec{p}} \right]$ può essere calcolata riscrivendola sotto forma di prodotto di due matrici:

$$\left[\frac{\partial \vec{\Psi}}{\partial \vec{p}} \right] = \left[\frac{\partial \vec{\Psi}}{\partial \vec{s}} \right] \left[\frac{\partial \vec{s}}{\partial \vec{p}} \right] \quad (3.32)$$

La prima matrice è ottenibile calcolando il gradiente delle condizioni al contorno rispetto alle componenti del vettore \vec{s} . La seconda matrice, invece, contenente le

derivate parziali delle variabili ai contorni della traiettoria rispetto alle componenti del vettore dei valori iniziali, è equivalente alla matrice contenente le derivate parziali del vettore \vec{z} rispetto al vettore \vec{p} , calcolate in corrispondenza dei limiti ($\epsilon = 1, 2, \dots, m + 1$).

$$[g(\epsilon)] = \left[\frac{\partial \vec{z}}{\partial \vec{p}} \right] \quad (3.33)$$

Quest'ultima matrice viene individuata a valle della risoluzione di un sistema di equazioni differenziali, ottenuto calcolando la derivata parziale dell'equazione (3.24) rispetto a \vec{p} :

$$[g(\dot{\epsilon})] = \frac{d}{d\epsilon} \left[\frac{\partial \vec{z}}{\partial \vec{p}} \right] = \left[\frac{\partial}{\partial \vec{p}} \left(\frac{d\vec{z}}{d\epsilon} \right) \right] = \left[\frac{\partial \vec{f}}{\partial \vec{p}} \right] \quad (3.34)$$

e che può essere riscritta come segue

$$[g(\dot{\epsilon})] = \left[\frac{\partial \vec{f}}{\partial \vec{z}} \right] \left[\frac{\partial \vec{z}}{\partial \vec{p}} \right] = \left[\frac{\partial \vec{f}}{\partial \vec{z}} \right] [g(\epsilon)] \quad (3.35)$$

Dove $\left[\frac{\partial \vec{f}}{\partial \vec{z}} \right]$ rappresenta la matrice Jacobiana della funzione vettoriale \vec{f} .

Alternativamente, la medesima matrice, $\left[\frac{\partial \vec{\Psi}}{\partial \vec{p}} \right]$, può essere calcolata numericamente: Il primo passo consiste nell'introdurre una piccola perturbazione dp , dell'ordine di $10^{-6} \div 10^{-7}$, all'interno del vettore \vec{p} , per poi integrare il sistema di equazioni (3.24). In questo modo è, dunque, possibile calcolare gli errori $\Delta \vec{\Psi}$; e, linearizzando, determinare le componenti $\frac{\Delta \Psi}{\Delta p}$ della suddetta matrice [22, 25].

Capitolo 4

Descrizione del modello

Nel caso da noi trattato, il *metodo di ottimizzazione indiretta* è stato implementato nell'ambito delle trasferte interplanetarie: in particolare, lo Spacecraft, a partire da determinate condizioni iniziali, deve raggiungere un asteroide prossimo alla Terra. Lo studio della manovra di trasferimento orbitale viene condotta attraverso il metodo Patched-conics. Si tratta di un metodo attraverso cui condurre uno studio di fattibilità della manovra, volto alla valutazione del costo ($\Delta\vec{v}$) e dei tempi di missione. In particolare, quest'ultimo ci permette di dividere la manovra di trasferimento orbitale in fasi, declinate sotto forma di problemi dei due corpi, grazie all'introduzione della nozione di *sfera di influenza* (= regione dello Spazio in cui è possibile considerare preponderante l'interazione gravitazionale della massa in movimento con un unico corpo celeste). In tale contesto, si ha una prima fase, detta di fuga, in corrispondenza della quale il satellite esce fuori dalla sfera di influenza terrestre. Una volta fuori, poiché la forzante gravitazionale esterna predominante è relativa al Sole, lo Spacecraft entra nella fase eliocentrica, in corrispondenza della quale avviene il trasferimento orbitale vero e proprio. Infine, segue una seconda fase planetaria, di arrivo al target, in cui risulta dominante l'attrazione gravitazionale dell'asteroide di arrivo.

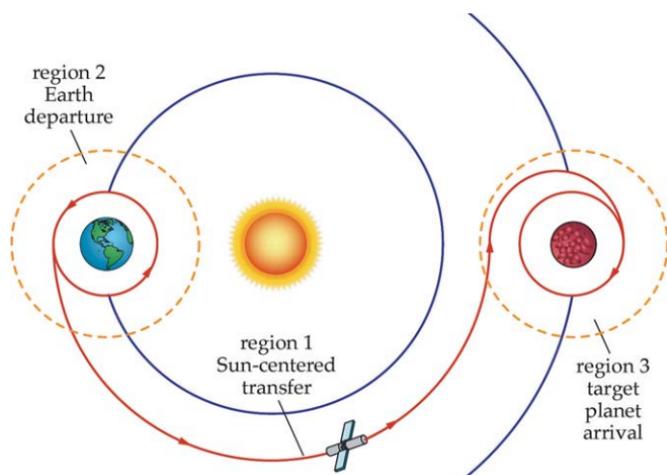


Figura 4.1: Patched - conics [26]

Per ognuna di queste fasi si ha la definizione di una porzione della traiettoria conica relativa alla manovra di trasferimento complessiva.

4.1 Assunzioni

Detto ciò, al fine di definire il modello matematico si assume che:

- Lo Spacecraft sia costituito da una massa puntiforme.
Tale assunzione, è di fondamentale importanza, in quanto ci permette di trattare la meccanica del volo dello Spacecraft, separandola dal controllo dell'assetto;
- Le forze atmosferiche siano trascurate.
Poiché in corrispondenza dell'istante iniziale lo Spacecraft occupa un'orbita di parcheggio, e considerando che gli asteroidi sono corpi privi di atmosfera, è possibile assumere che sul veicolo non si generino i contributi di portanza e Drag atmosferica;
- Le dimensioni delle sfere di influenza della Terra e dell'asteroide vengono considerate trascurabili.

Se consideriamo un sistema costituito da Sole, Terra e Spacecraft, caratterizzati rispettivamente dalle masse $m_S = 1.989 \times 10^{30} \text{ kg}$, $m_T = 5.98 \times 10^{24} \text{ kg}$ e $m \ll (m_S, m_T)$, la sfera di influenza terrestre ha un raggio:

$$r = \left(\frac{m_T}{m_S} \right)^{\frac{2}{5}} r_{ST} \quad (4.1)$$

il cui valore oscilla tra gli estremi dell'intervallo $[0.91 - 0.94] \times 10^6 km$ in base alla posizione che la Terra occupa lungo la sua traiettoria attorno al Sole $|r_{ST}|$. In questo caso, poiché tale raggio corrisponde circa ad $1/150$ della distanza Terra - Sole, è ragionevole trascurare la sfera di influenza terrestre, e, di conseguenza, quella associata a corpi meno massivi come gli asteroidi. In questo modo, nell'ambito del metodo di approssimazione *patched - conics*, oltre a semplificare la trattazione della manovra di trasferimento orbitale, si pone maggiore attenzione alla fase eliocentrica;

- Le perturbazioni luni - solari siano trascurabili $\vec{a}_{l_s} = 0$;
- Gli effetti perturbativi della pressione solare siano nulli;

4.2 Formulazione del modello

Entrando più nel dettaglio, il sistema dinamico, caratterizzato dal veicolo spaziale, è descritto dalle tre variabili di stato \vec{r} , \vec{V} e m , la cui evoluzione nel tempo viene determinata dal sistema di equazioni differenziali, ordinarie del primo ordine seguente:

$$\frac{d\vec{r}}{dt} = \vec{V} \quad (4.2)$$

$$\frac{d\vec{V}}{dt} = -\mu \frac{\vec{r}}{r^3} + \frac{\vec{T}}{m} \quad (4.3)$$

$$\frac{dm}{dt} = -\frac{T}{c} \quad (4.4)$$

in cui $-\mu \frac{\vec{r}}{r^3}$ rappresenta l'accelerazione gravitazionale terrestre, mentre \vec{T} , consistente nel vettore della spinta prodotta, rappresenta la variabile di controllo. Considerando un propulsore ad effetto Hall, caratterizzato da un impulso specifico costante $I_{sp} = 2100s$, una velocità efficace di scarico costante $c = g_0 I_{sp} = 20.6 km/s$ e da un rendimento di conversione costante $\eta = 0.625$, è possibile esplicitare la proporzionalità inversa tra la spinta e il quadrato della distanza dal Sole.

$$T = \frac{2\eta P_E}{c} = \frac{2\eta P_1}{c R_s^2} = \frac{T_1}{R_s^2} \quad (4.5)$$

Il sistema di riferimento scelto è un sistema inerziale, avente origine in corrispondenza del centro della Terra ed il piano fondamentale corrispondente con il piano equatoriale. Tale scelta è giustificata dalla possibilità di non prendere in considerazione le accelerazioni di trascinamento e di Coriolis, che altrimenti complicherebbero il calcolo dello Jacobiano, nonché dalla corrispondenza tra le componenti della

velocità e del primer vector ($\vec{\lambda}_v$). La posizione del corpo viene rappresentata per mezzo di coordinate cilindriche: il raggio r , longitudine θ e latitudine ϕ . La velocità, invece, è rappresentata dalle componenti u , v e w , relative ad un sistema di riferimento topocentrico, avente l'asse x nella direzione radiale, l'asse y direzionata verso Est, e l'asse z direzionato verso lo Zenit.

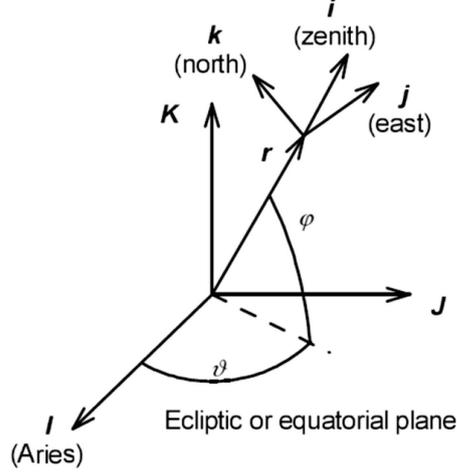


Figura 4.2: Sistemi di riferimento inerziale e topocentrico [27]

Proiettando le equazioni di stato nel sistema di riferimento scelto si ottiene:

$$\frac{dr}{dt} = u \quad (4.6)$$

$$\frac{d\theta}{dt} = \frac{v}{r \cos \phi} \quad (4.7)$$

$$\frac{d\phi}{dt} = \frac{w}{r} \quad (4.8)$$

$$\frac{du}{dt} = -\frac{\mu}{r^2} + \frac{(v^2 + w^2)}{r} + \frac{T}{m} \sin \gamma_T \quad (4.9)$$

$$\frac{dv}{dt} = \frac{(-uv + vw \tan \phi)}{r} + \frac{T}{m} \cos \gamma_T \cos \psi_T \quad (4.10)$$

$$\frac{dw}{dt} = \frac{(-uw - v^2 \tan \phi)}{r} + \frac{T}{m} \cos \gamma_T \sin \psi_T \quad (4.11)$$

$$\frac{dm}{dt} = -\frac{T}{c} \quad (4.12)$$

dove gli angoli γ_T e ψ_T , noti come gli angoli di elevazione e di heading relativi alla spinta, sono gli angoli formati dal vettore \vec{T} , rispettivamente, con il piano

orizzontale e l'asse *Nord* del sistema di riferimento topocentrico.

Passando alla definizione delle condizioni al contorno contenute nel vettore $\vec{\chi}$, iniziamo con il definire le condizioni iniziali $\vec{x}(t_0)$:

$$\vec{\chi}(t_0) = \begin{bmatrix} r_0 = r_E(t_0) \\ \theta_0 = \theta_E(t_0) \\ \phi_0 = \phi_E(t_0) \\ u_0 = u_E(t_0) \\ v_0 = v_E(t_0) \\ w_0 = w_E(t_0) \\ m_0 = 21 \text{ kg} \end{bmatrix} \quad (4.13)$$

e le condizioni finali:

$$\vec{\chi}(t_f) = \begin{bmatrix} r_f = r_A(t_f) \\ \theta_f = \theta_A(t_f) \\ \phi_f = \phi_A(t_f) \\ u_f = u_A(t_f) \\ v_f = v_A(t_f) \\ w_f = w_A(t_f) \\ m(t_f) = ? \end{bmatrix} \quad (4.14)$$

dove le condizioni iniziali sono relative a posizione e velocità assunte dal pianeta Terra (\vec{r}_E, \vec{v}_E) nell'istante iniziale t_0 , selezionato manualmente, e dalla massa inizialmente pari a $m_0 = 21 \text{ kg}$; mentre le condizioni finali fanno riferimento alla posizione e velocità assunte dall'asteroide target (\vec{r}_A, \vec{v}_A) in corrispondenza della data di arrivo, determinata a partire dalla conoscenza della data di partenza e della durata di missione voluta. L'unico parametro indefinito in fase di definizione del modello è la massa finale, che, come vedremo, sarà la grandezza interessata dal processo di ottimizzazione.

La casistica sopra rappresentata fa riferimento ad una traiettoria costituita da un unico arco. Come si potrà vedere, nel caso in cui dovessimo inserire una manovra di fly-by, sarebbe possibile dividere tale traiettoria in due archi, con un punto di congiunzione, rappresentante il contorno interno, in corrispondenza del quale devono essere definite le variabili di stato di posizione, velocità e massa. In particolare, in questo caso, le condizioni al contorno sono:

$$\vec{\chi}(t_i) = \begin{bmatrix} r(t_{i+}) = r(t_{i-}) = r_{\text{asteroide}}(t_i) \\ \theta(t_{i+}) = \theta(t_{i-}) = \theta_{\text{asteroide}}(t_i) \\ \phi(t_{i+}) = \phi(t_{i-}) = \phi_{\text{asteroide}}(t_i) \\ u(t_{i+}) = u(t_{i-}) \\ v(t_{i+}) = v(t_{i-}) \\ w(t_{i+}) = w(t_{i-}) \\ m(t_{i+}) = m(t_{i-}) \end{bmatrix} \quad (4.15)$$

caratterizzate dalla continuità delle variabili di massa, velocità e posizione, con la particolarità che quest'ultima risulta coincidente con la posizione assunta dall'asteroide intermedio $\vec{r}_{asteroide}(t_i)$.

Per quel che riguarda la variabile di controllo \vec{T} , il modello prevede l'adozione di un propulsore in grado di garantire due soli livelli di spinta ($T = 0$ e $T = T_{max}$), controllati dalla *Switching Function* - S_F [28].

4.3 Applicazione della Teoria del Controllo ottimale

Una volta definito il sistema dinamico, si procede con l'applicazione della *Teoria del Controllo Ottimale*. In tale contesto, la funzione obiettivo da massimizzare è la massa finale:

$$J = m_f \quad (4.16)$$

corrispondente con la formulazione di Mayer $J = \Phi(t_f, \vec{x}_f)$. Esso può essere riformulato sotto forma di *funzionale implementato*:

$$J = m_f + \vec{\mu}^T \vec{\chi} + \sum_{j=1}^m [(\dot{\vec{\lambda}}^T \vec{x})_{(j-1)+} - (\dot{\vec{\lambda}}^T \vec{x})_{j-}] + \sum_{j=1}^m \int_{t_{(j-1)+}}^{t_{j-}} (\vec{\lambda}^T \vec{f} + \vec{\lambda}^T \vec{x}) dt \quad (4.17)$$

in cui la funzione *Hamiltoniana* assume la seguente forma:

$$H = \vec{\lambda}_r^T \vec{V} + \vec{\lambda}_V^T \vec{g} + \vec{T} \left(\frac{\vec{\lambda}_V}{m} - \frac{\vec{\lambda}_m}{c} \right) = \vec{\lambda}_r^T \vec{V} + \vec{\lambda}_V^T \vec{g} + \vec{T} S_F \quad (4.18)$$

dove:

$$\lambda_V = \sqrt{\lambda_u^2 + \lambda_v^2 + \lambda_w^2} \quad (4.19)$$

è il modulo del *primer vector*, mentre S_F rappresenta la funzione, nota come *Switching Function*. Annullando le derivate parziali della funzione Hamiltoniana rispetto agli angoli γ_T e ϕ_T , individuiamo i valori ottimali di tali angoli:

$$\sin \gamma_T = \frac{\lambda_u}{\lambda_V} \quad (4.20)$$

$$\cos \gamma_T \cos \phi_T = \frac{\lambda_v}{\lambda_V} \quad (4.21)$$

$$\cos \gamma_T \sin \phi_T = \frac{\lambda_w}{\lambda_V} \quad (4.22)$$

mentre, facendo riferimento alle equazioni di Eulero - Lagrange, invece, è possibile derivare le equazioni differenziali relative alle variabili aggiuntive:

$$\dot{\lambda}_r = \frac{1}{r^2} \left[\lambda_\theta \frac{v}{\cos \phi} + \lambda_\phi w + \lambda_u \left(-\frac{2}{r} + v^2 + w^2 \right) + \lambda_v (-uv + vw \tan \phi) + \lambda_w \left(-uw - v^2 \tan \phi \right) \right] \quad (4.23)$$

$$\dot{\lambda}_\theta = 0 \quad (4.24)$$

$$\dot{\lambda}_\phi = \frac{1}{r \cos^2 \phi} \left(-\lambda_\theta v \sin \phi - \lambda_v vw + \lambda_w v^2 \right) \quad (4.25)$$

$$\dot{\lambda}_u = \frac{1}{r} (-\lambda_r r + \lambda_v v + \lambda_w w) \quad (4.26)$$

$$\dot{\lambda}_v = \frac{1}{r} \left[-\lambda_\theta \frac{1}{\cos \phi} - 2\lambda_u v + \lambda_v (u - w \tan \phi) + 2\lambda_w v \tan \phi \right] \quad (4.27)$$

$$\dot{\lambda}_w = \frac{1}{r} (-\lambda_{phi} - 2\lambda_u w - \lambda_v v \tan \phi + \lambda_w u) \quad (4.28)$$

$$\dot{\lambda}_m = \frac{T}{m^2} \lambda_V \quad (4.29)$$

Infine, il sistema di equazioni differenziali viene ultimato dalle equazioni 3.17, 3.18, 3.19 e 3.20 relative al condizioni al contorno ottimali, atte a definire le variabili incognite in corrispondenza di inizio e fine manovra, e qualora necessario, in corrispondenza della manovra di fly-by [29].

Particolare interesse è suscitato dalle condizioni al contorno ottimali relative alla manovra di fly-by. Difatti, in fase di risoluzione del problema differenziale ai limiti interni, si osserva che, sebbene entrambe le variabili di stato di posizione \vec{r}_2 , coincidente con il vettore posizione dell'asteroide intermedio, e della velocità \vec{V} siano caratterizzate da un andamento continuo, si ottengono delle variabili di co-stato $\vec{\lambda}_r$ e $\vec{\lambda}_V$ caratterizzate da andamenti rispettivamente discontinuo e continuo nel punto di congiunzione tra i due archi costituenti la traiettoria.

Capitolo 5

Risultati

In questo capitolo vengono esposti i risultati ottenuti dall'applicazione del metodo di ottimizzazione indiretta su casi di studio che prevedono il raggiungimento di target selezionati. La selezione degli asteroidi target è frutto di un processo iterativo. In particolare, sono state dapprima ricercate soluzioni per un cluster campione di quindici asteroidi, che mi ha permesso sia di individuare soluzioni ottime per tre degli asteroidi analizzati, che di identificare i valori di alcuni dei parametri orbitali che a prima battuta risultavano di fondamentale importanza al fine di garantire la convergenza del codice. Ho dunque impostato i valori di semiasse maggiore, eccentricità e inclinazione:

- $a < 1.06$ AU;
- $e < 0.12$;
- $i < 1.5^\circ$;

i quali mi hanno permesso di selezionare 43 nuovi potenziali target.

Tabella 5.1: Lista di target possibili ottenuta

	Target possibili	Epoch	a AU	e	i deg	ω deg	Ω deg
1	1991 VG	59000	1.032	0.052	1.430	26.889	71.268
2	2001 GP2	59000	1.037	0.074	1.279	111.257	196.706
3	2006 BZ147	59000	1.023	0.099	1.410	94.850	139.830
4	2006 JY26	59000	1.010	0.083	1.439	273.636	43.464
5	2006 RH120	54105	1.002	0.035	1.087	226.781	292.794
6	2007 UN12	59000	1.053	0.061	0.236	134.737	215.966
7	2007 VU6	59000	0.976	0.091	1.224	34.766	220.257

Continua nella pagina successiva

Tabella 5.1 – continua dalla pagina precedente

	Target possibili	Epoch	a AU	e	i deg	ω deg	Ω deg
8	2008 EA9	59000	1.049	0.075	0.439	343.152	24.457
9	2008 EL68	54531	1.039	0.057	1.039	234.837	357.321
10	2008 JL24	59000	1.038	0.107	0.551	282.045	225.738
11	2009 BD	55256	1.009	0.042	0.384	109.871	58.128
12	2009 YR	59000	0.943	0.110	0.700	127.956	87.165
13	2010 UJ	55487	0.943	0.0957	0.367	73.720	132.850
14	2010 UE51	59000	1.055	0.060	0.624	47.253	32.3
15	2010 VQ98	59000	1.023	0.027	1.475	341.773	46.171
16	2011 BQ50	59000	0.950	0.098	0.359	1.450	280.782
17	2011 UD21	59000	0.979	0.030	1.062	209.894	22.345
18	2011 UU190	59000	1.054	0.044	0.132	254.826	252.668
19	2012 EP10	59000	1.050	0.116	1.033	105.869	347.998
20	2012 TF79	59000	1.050	0.038	1.006	265.731	199.880
21	2013 BS45	59000	0.992	0.084	0.773	150.706	83.364
22	2014 HN2	59000	0.926	0.118	1.235	207.306	198.895
23	2014 JR24	59000	1.066	0.118	0.930	246.430	48.889
24	2014 QN266	59000	1.053	0.092	0.488	61.615	171.112
25	2014 WU200	59000	1.028	0.072	1.266	226.506	265.692
26	2014 WX202	59000	1.036	0.059	0.413	214.066	243.993
27	2015 PS228	59000	1.057	0.084	0.439	327.498	272.802
28	2017 UQ6	59000	0.944	0.110	0.591	229.784	333.361
29	2018 FM2	59000	0.942	0.095	1.158	191.930	143.057
30	2018 GE	59000	0.923	0.105	1.241	242.567	164.774
31	2018 GR4	59000	0.936	0.111	1.004	232.886	167.594
32	2018 PK21	59000	0.988	0.081	1.194	223.080	304.506
33	2018 PU23	59000	0.963	0.084	0.828	330.143	144.624
34	2018 TG6	59000	1.064	0.084	0.710	70.428	21.424
35	2019 GF1	59000	0.992	0.049	1.236	325.080	4.368
36	2019 NX5	59000	0.917	0.116	0.458	355.178	112.200
37	2019 PO1	59000	1.036	0.061	1.120	250.264	328.271
38	2019 UB4	59000	1.037	0.096	0.921	286.472	27.651
39	2020 BW13	59000	0.946	0.095	0.481	348.782	298.301
40	2020 CD3	58909	1.025	0.038	0.845	339.620	138.574
41	2020 PC	59000	0.953	0.082	0.563	175.841	285.533
42	2020 PJ6	59000	0.965	0.098	0.813	312.417	141.662
43	2020 SO	59000	1.037	0.034	0.141	331.312	105.965

Di questi ultimi, solo nel caso di cinque asteroidi è stato possibile individuare

delle soluzioni.

Considerando dunque l'intero processo di selezione degli asteroidi, sono riuscito ad identificare un totale di otto target certi, qui di seguito tabellati.

Tabella 5.2: Lista di target raggiungibili

	Target possibili	Epoch	a AU	e	i deg	ω deg	Ω deg
1	2000 SG344	61987	0.989	0.063	0.103	186.509	288.237
2	2006 RH120	54105	1.002	0.035	1.088	226.781	292.794
3	2008 EL68	54531	1.039	0.057	1.039	234.837	357.321
4	2008 UA202	59000	1.033	0.069	0.263	300.892	21.112
5	2009 YR	59000	0.943	0.110	0.700	127.956	87.165
6	2012 TF79	59000	1.050	0.038	1.006	265.731	199.880
7	2017 SV19	59000	1.063	0.0407	1.303	156.822	343.833
8	2020 BW13	59000	0.946	0.095	0.481	348.782	298.301

Per ognuno di essi, ho ricercato prima soluzioni relative ad una semplice manovra di rendezvous; per poi, sulla base delle soluzioni più promettenti, inserire una manovra di flyby attorno ad un asteroide intermedio. In entrambi i casi, l'obiettivo è stato quello di individuare la data di partenza in corrispondenza della quale l'angolo di fase tra lo spacecraft e l'asteroide fosse pari o prossimo al valore ideale, affinché i consumi di carburante fossero minimizzati.

5.1 Manovra di rendezvous semplice

Per la ricerca di soluzioni relative alla manovra di rendezvous ho implementato un processo iterativo. Il primo passo consiste, a partire da una soluzione già nota, nella ricerca di possibili soluzioni relative all'asteroide 2000 SG344. In particolare, bisogna dapprima impostare la data di partenza, prossima alla data di inizio della soluzione di tentativo, per poi eseguire il codice. Appena avviato il codice di calcolo, viene richiesta la definizione della durata di missione e di due indici numerici necessari ad individuare i corpi celesti di partenza e di arrivo. Qualora il codice vada a convergenza, viene compilato un file, denominato 'esat02.dat', contenente i valori assunti da: data iniziale t_i , data finale t_f , λ_θ , dalle variabili di stato incognite $\in \vec{x}$ e dalle variabili di co-stato $\vec{\lambda}_r$ e $\vec{\lambda}_v$. Questo file, viene successivamente utilizzato come soluzione di tentativo al fine di ricercare nuove soluzioni per diverse durate di missione Δt . A questo punto, una volta ricercate le soluzioni per tutte le durate di interesse, viene impostata una nuova data di partenza: convenzionalmente è stata

da me imposta una variazione di circa 1.5 giorni giuliani adimensionati tra un caso studio e l'altro.

Per cambiare obiettivo, è stato sfruttato un codice secondario, equivalente al primo, che, a partire da una soluzione relativa all'asteroide di partenza, mi ha permesso di individuare delle soluzioni di tentativo relativi all'asteroide target voluto. Fatto ciò, il processo iterativo poc'anzi descritto viene nuovamente implementato.

Alla fine delle simulazioni, per ognuno degli asteroidi target presi in considerazione, sono stati registrati i parametri ΔV e m_f , caratteristici del costo di missione. Specificamente, viene analizzato l'andamento di tali parametri al variare della data di partenza e durata al fine di individuare dei minimi locali del costo di missione. Una volta trovato il minimo locale è stato possibile identificare la data di inizio missione ideale, e conseguentemente avviare la medesima analisi per gli asteroidi rimanenti. Le soluzioni migliori sono state riportate nella tabella qui di seguito.

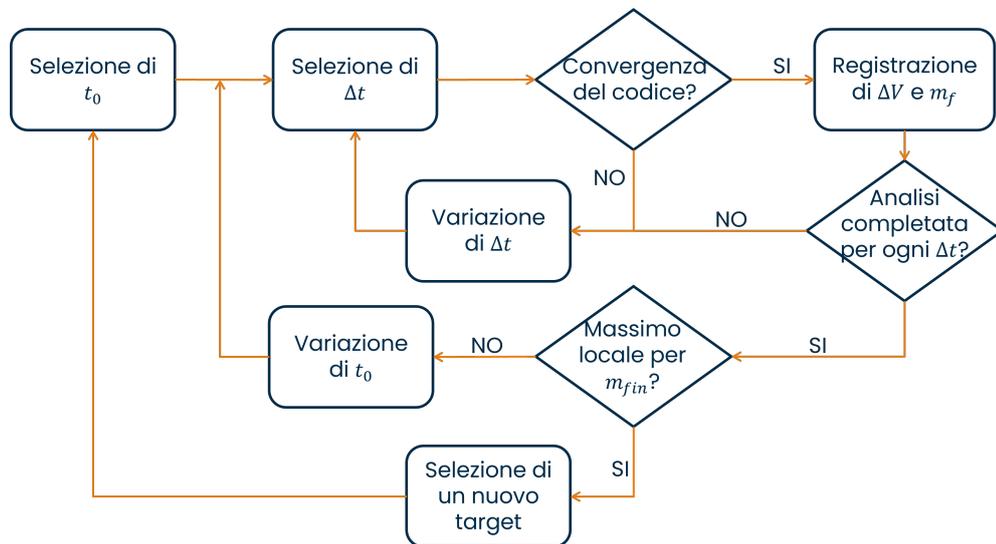


Figura 5.1: Algoritmo iterativo

Tabella 5.3: Soluzioni migliori per la manovra di Rendezvous

Asteroide target	m_i	m_f	ΔV	Δt	Data di partenza - Data di arrivo
	kg	kg	$\frac{km}{s}$	giorni	
2000 SG344	20.956	20.082	0.877	523.192	28/ 2/2027 - 04/ 8/2028
	20.956	20.082	0.877	581.324	28/ 2/2027 - 01/10/2028
	20.956	20.082	0.877	639.457	28/ 2/2027 - 28/11/2028
	20.956	20.082	0.877	697.589	28/ 2/2027 - 25/ 1/2029

Continua nella pagina successiva

Tabella 5.3 – continua dalla pagina precedente

Asteroide target	m_i kg	m_f kg	ΔV $\frac{km}{s}$	Δt giorni	Data di partenza - Data di arrivo
2006 RH120	20.937	20.057	0.884	523.192	14/ 5/2028 - 19/10/2029
	20.937	20.057	0.884	581.324	14/ 5/2028 - 16/12/2029
	20.937	20.062	0.879	639.457	14/ 5/2028 - 12/ 2/2030
	20.937	20.062	0.879	697.589	14/ 5/2028 - 12/ 4/2030
2008 EL68	20.927	19.506	1.448	523.192	23/ 6/2027 - 28/11/2028
	20.927	19.888	1.049	581.325	23/ 6/2027 - 25/ 1/2029
	20.927	19.935	1.000	639.457	23/ 6/2027 - 24/ 3/2029
	20.927	19.934	1.000	697.589	23/ 6/2027 - 21/ 5/2029
2008 UA202	20.922	19.718	1.221	523.192	25/ 9/2028 - 2/ 3/2030
	20.922	19.729	1.209	581.325	25/ 9/2028 - 29/ 4/2030
	20.922	19.827	1.107	639.457	25/ 9/2028 - 26/ 6/2030
	20.922	19.970	0.959	697.589	25/ 9/2028 - 24/ 8/2030
2009 YR	20.917	18.449	2.585	697.589	20/ 5/2029 - 18/ 4/2031
2012 TF79	20.937	20.345	0.591	523.192	25/ 1/2027 - 1/ 7/2028
	20.937	20.345	0.591	581.325	25/ 1/2027 - 29/ 8/2028
	20.937	20.345	0.591	639.457	25/ 1/2027 - 26/10/2028
	20.937	20.346	0.590	697.589	25/ 1/2027 - 23/12/2028
2017 SV19	20.918	19.346	1.608	552.258	29/ 6/2028 - 2/ 1/2030
	20.918	19.611	1.329	581.325	29/ 6/2028 - 31/ 1/2030
	20.918	19.788	1.143	639.457	29/ 6/2028 - 30/ 3/2030
	20.918	19.820	1.110	697.589	29/ 6/2028 - 27/ 5/2030
2020 BW13	20.915	18.852	2.139	639.457	17/ 8/2029 - 18/ 5/2031
	20.915	18.857	2.133	697.589	17/ 8/2029 - 15/ 7/2031

Come si può notare dai dati tabulati e dai grafici rappresentati in figura 5.2, indipendentemente dall'asteroide preso in considerazione, all'aumentare della durata della missione, il costo della manovra (ΔV) diventa inizialmente più basso, per poi stabilizzarsi ad un determinato valore.

Ciò avviene in quanto, inizialmente, all'aumentare della durata di missione Δt , viene implementata una vera e propria ottimizzazione della strategia propulsiva, atta a determinare direzione e intensità del vettore di spinta \vec{T} , oltre al numero e al punto di applicazione degli spari, che permetta di minimizzare il dispendio di carburante. Una volta che la configurazione di ottimo viene individuata, quest'ultima viene implementata anche per missioni caratterizzate da durate maggiori, in corrispondenza delle quali si ha l'inserimento di fasi aggiuntive note con il nome di *fasi di coasting*.

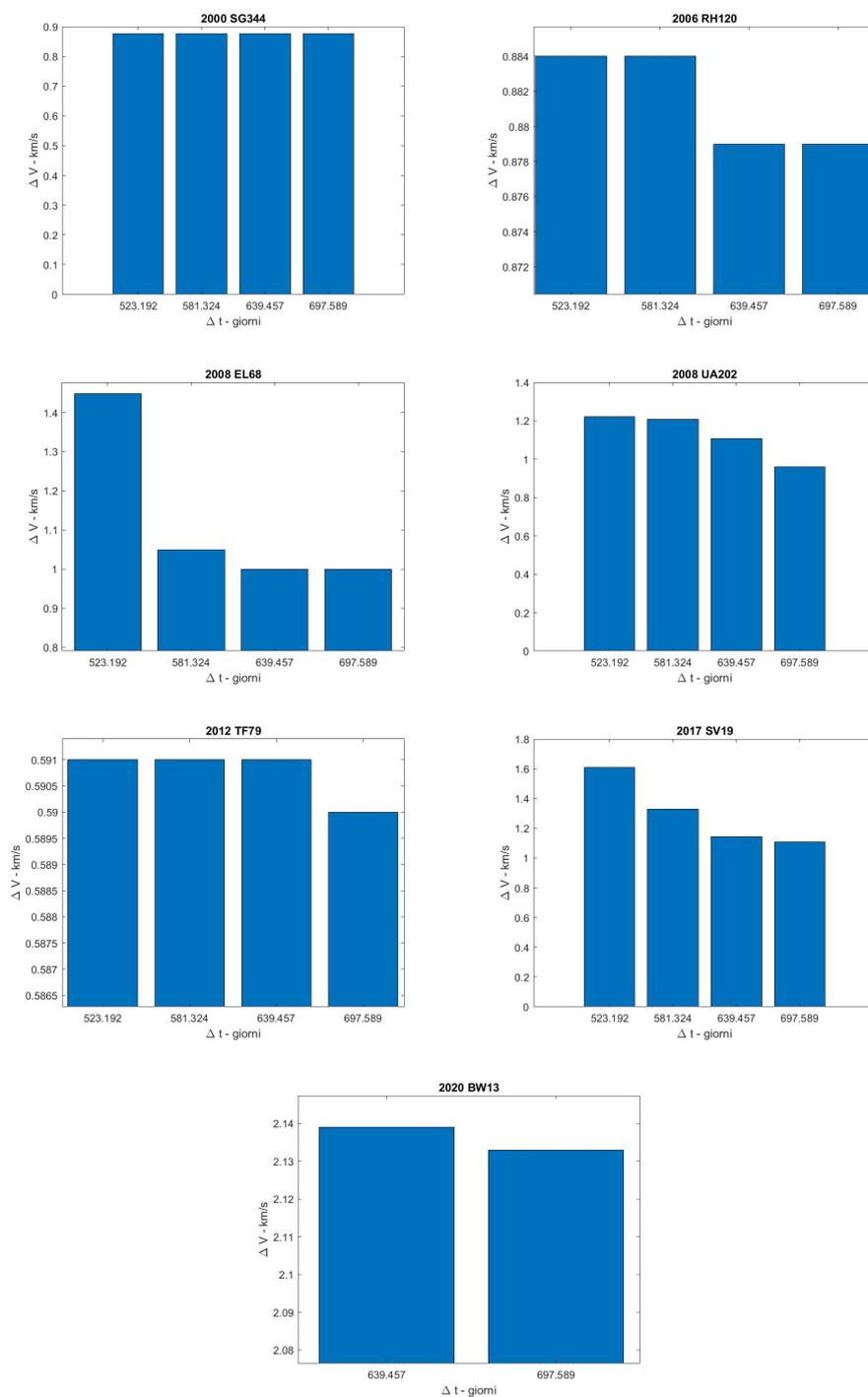


Figura 5.2: $\Delta t - \Delta V$

5.2 Manovra di rendezvous con flyby intermedio

Ai fini dell'inserimento di una manovra di flyby, è di fondamentale importanza individuare possibili asteroidi intermedi che ci permettano di eseguire tale manovra. Per fare ciò bisogna seguire i seguenti passi:

1. una volta individuate le soluzioni più promettenti relative alla manovra di rendezvous semplice, è necessario eseguire il codice utilizzando come soluzione di tentativo il documento esat02.dat, contenente la soluzione di riferimento;
2. in seconda battuta, viene fatto girare il file eseguibile scanfbntrj.exe il quale, una volta datogli in input gli istanti di inizio e fine missione, si serve del file OUT3.dat per compilare un documento (fort656.dat), contenente una lista di possibili asteroidi che lo spacecraft può incontrare lungo la missione;
3. per finire, il file fort656.dat deve essere analizzato al fine di individuare quegli asteroidi che presentano valori di Δr e $\Delta\theta$ sufficientemente piccoli, misurati rispetto alla posizione dello spacecraft. In particolare, i limiti superiori relativi al valore di tali parametri sono stati convenzionalmente fissati a $\|\Delta r\| < 0.18$ e $\|\Delta\theta\| < 3.95^\circ$.

Dopo aver individuato potenziali asteroidi intermedi, siamo stati in grado di cercare ed individuare soluzioni relative a manovre di trasferimento orbitale che prevedano l'esecuzione di una manovra di fly-by intermedia. Tali soluzioni sono state trascritte in un file 'esat02.dat' che, in questo caso, contiene anche i valori assunti dalle variabili t , \vec{V} , m e $\vec{\lambda}_v$ a valle della suddetta manovra.

Le soluzioni migliori sono riportate di seguito nella tabella 5.4.

Tabella 5.4: Soluzioni per Rendezvous con Fly-by

Asteroide target	Asteroide intermedio	m_i kg	m_f kg	ΔV $\frac{km}{s}$	Δt giorni	Data di partenza Data di arrivo
2000 SG344	2008 KZ5	20.956	19.582	1.396	697.589	28/ 2/2027 - 25/ 1/2029
2006 RH120	2016 HO3	20.937	19.185	1.800	697.589	14/ 5/2028 - 12/ 4/2030
2012 TF79	2010 DJ56	20.937	20.316	0.620	639.4569	25/ 1/2027 - 26/10/2028
		20.937	20.343	0.593	697.589	25/ 1/2027 - 23/12/2028

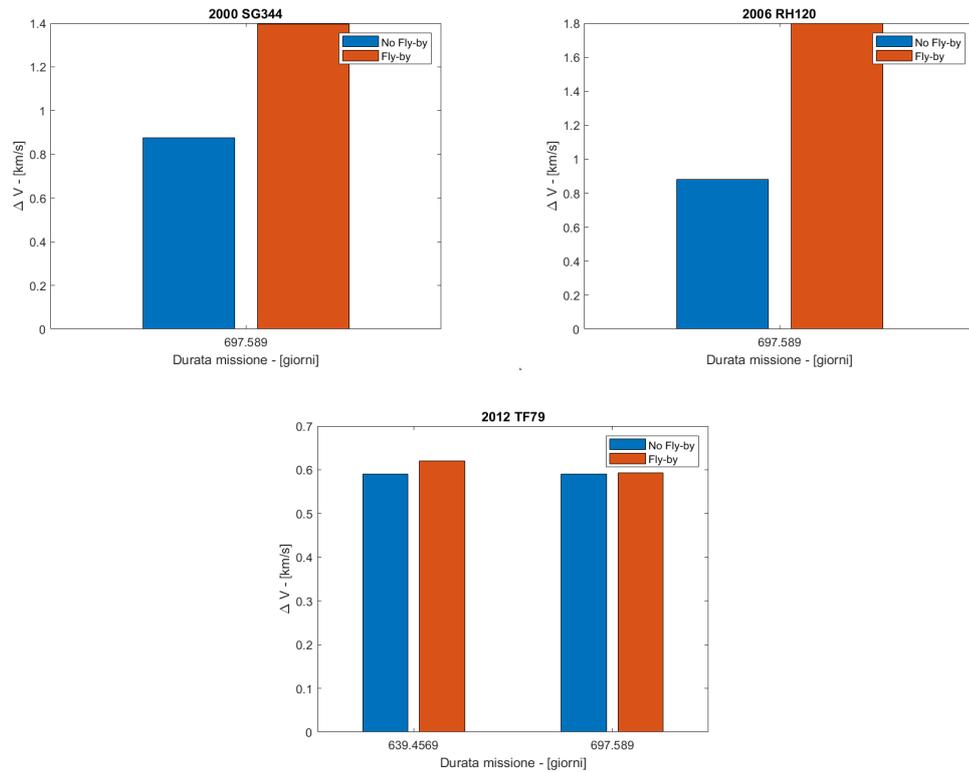


Figura 5.3: ΔV - No Fly-by vs Fly-by

Come è possibile desumere dal paragone con la casistica precedente (Figure 5.3 e 5.4), l'introduzione di una manovra di flyby causa un incremento del costo della missione, principalmente al cambio di piano orbitale necessario per raggiungere l'asteroide intermedio. Infatti, dall'analisi dell'andamento dell'inclinazione nel tempo si vede come l'introduzione del flyby sia responsabile di una variazione significativa dello stesso, che si esplica o in un aumento dell'inclinazione da raggiungere (caso di 2000 SG344), oppure in una lieve variazione del profilo di inclinazione (caso di 2006 RH120). Entrambe le casistiche comportano non solo l'incremento del costo di missione, ma anche la variazione dei profili nel tempo di Apoelio e Perielio. Solo nel caso dell'asteroide 2012 TF79 non si palesa una variazione sensibile del profilo di inclinazione nel tempo; il che, sulla base di quanto osservato poc'anzi, si riflette su un costo di missione, e su gli andamenti nel tempo di Apoelio e Perielio, pressoché invariati (Figure 5.5, 5.6 e 5.7).

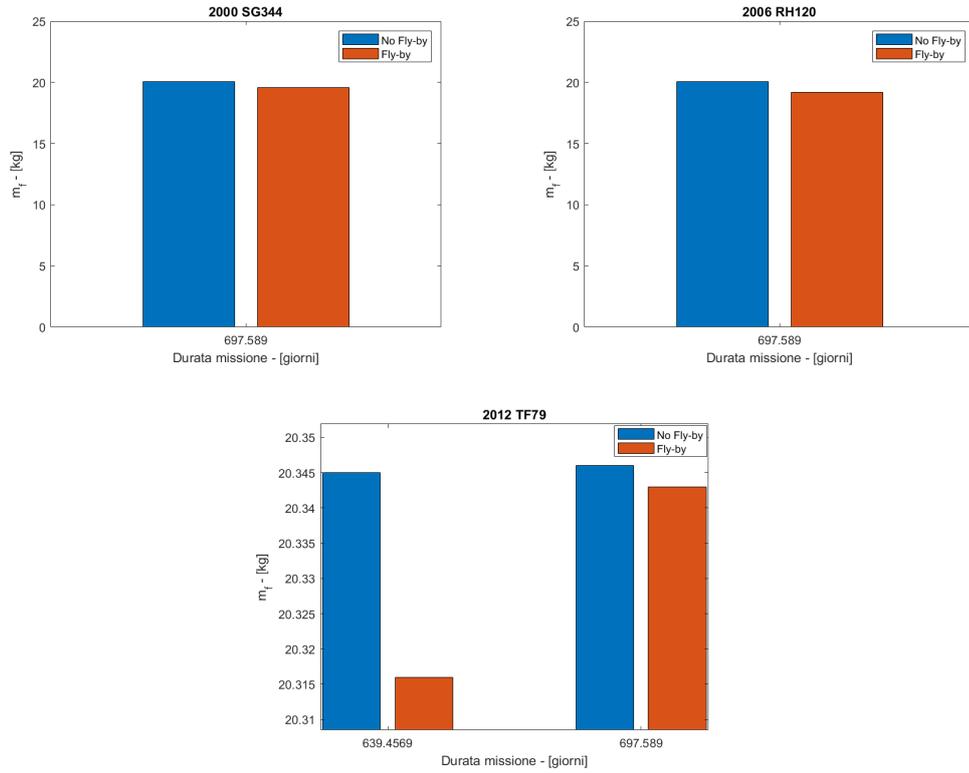


Figura 5.4: m_f - No Fly-by vs Fly-by

Inoltre, come è possibile osservare dalla Figura 5.8, il trasferimento dall'asteroide intermedio all'asteroide target prevede l'implementazione di un'azione propulsiva, atta a coadiuvare una manovra di fly - by che, a causa della scarsa influenza gravitazionale esercitata da corpi celesti poco massivi come gli asteroidi, risulta incapace di fornire il ΔV necessario.

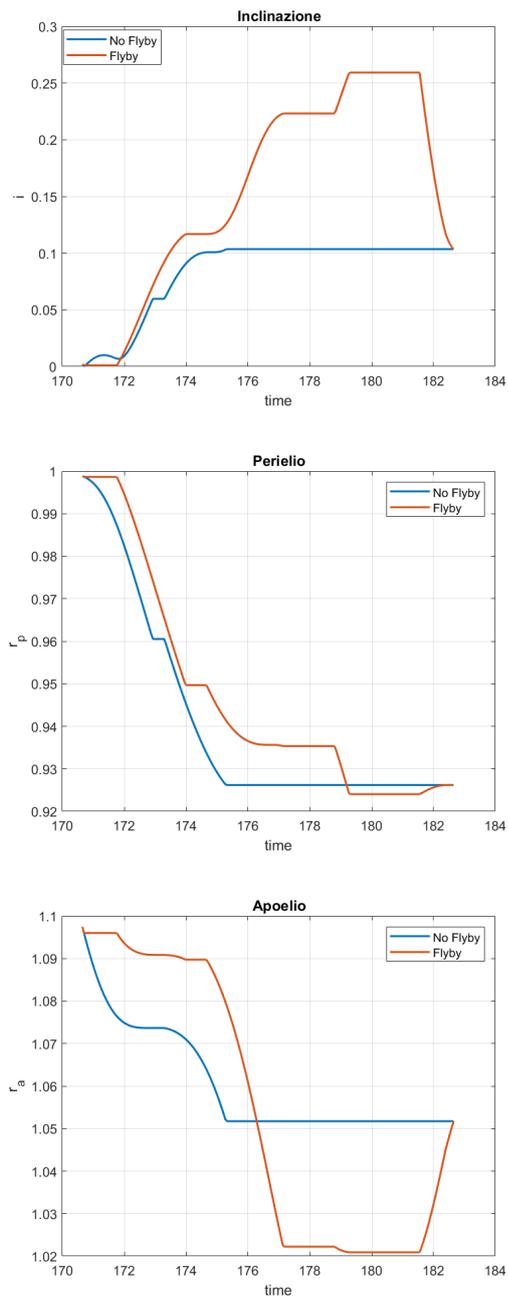
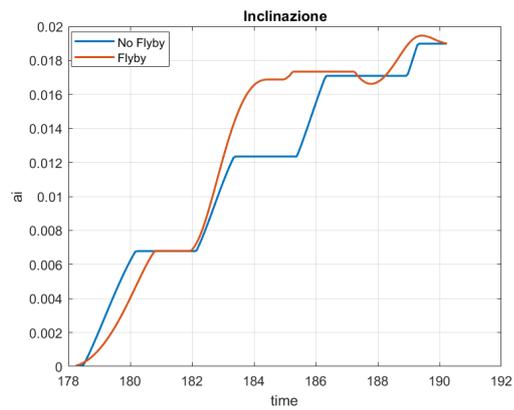
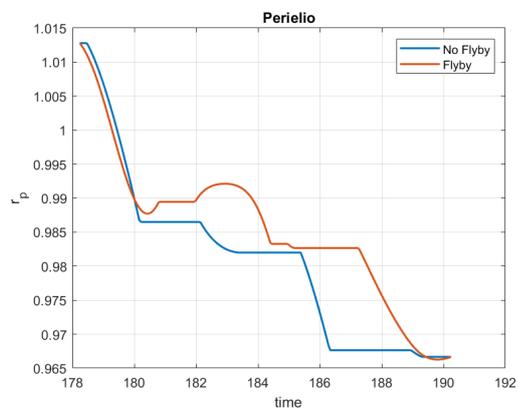


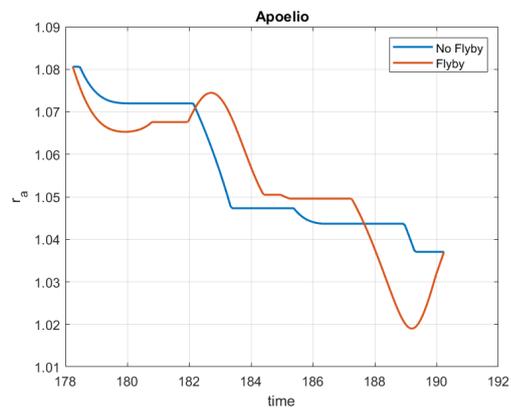
Figura 5.5: 2000 SG344



(a)

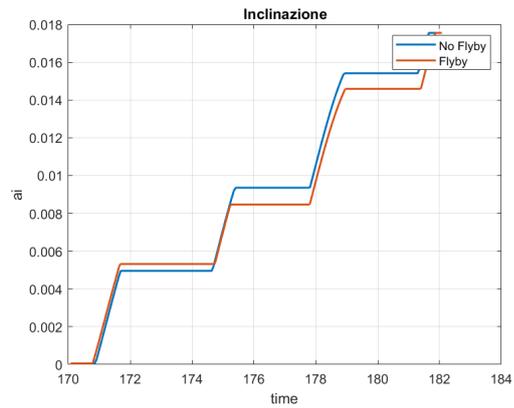


(b)

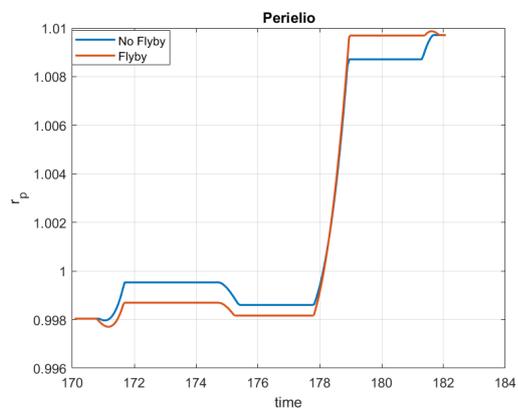


(c)

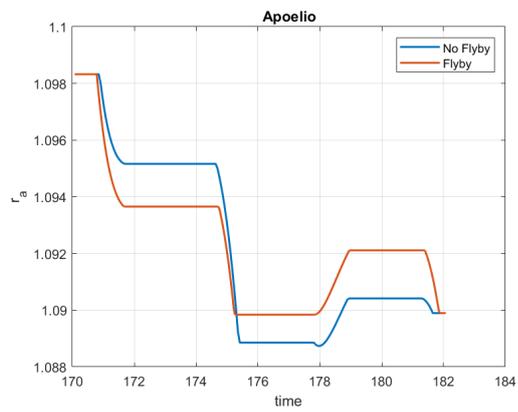
Figura 5.6: 2006 RH120



(a)



(b)



(c)

Figura 5.7: 2012 TF79

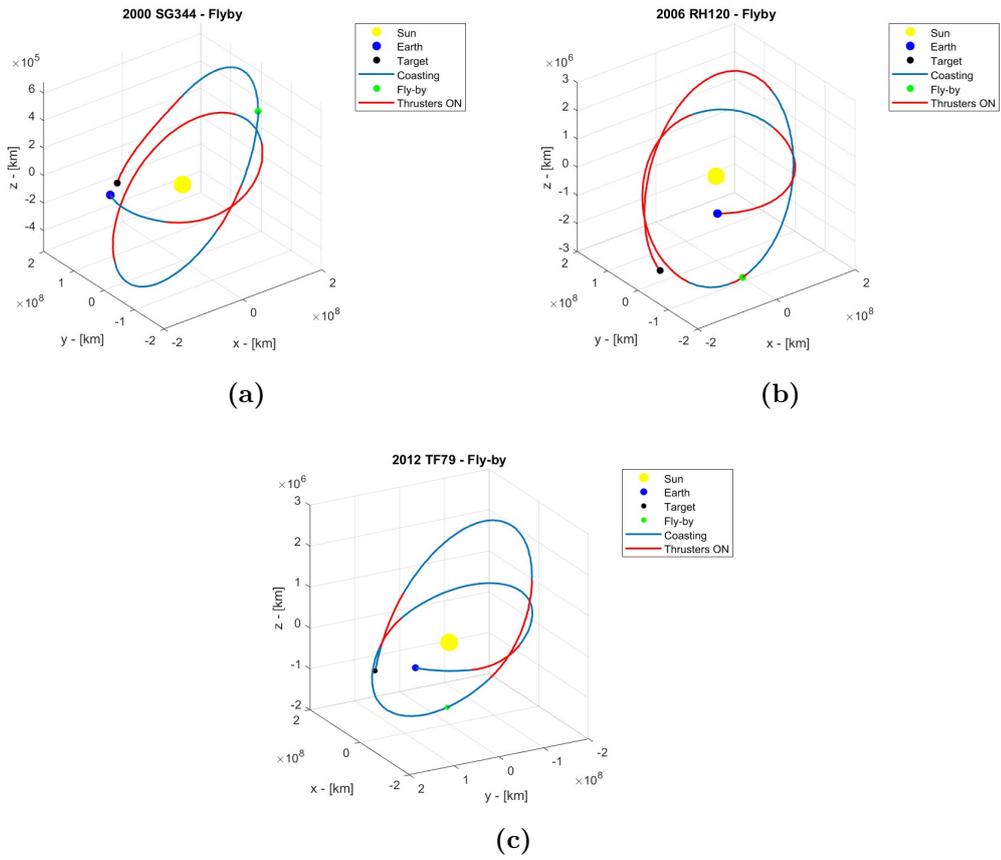


Figura 5.8: Traiettorie Fly - by

Capitolo 6

Conclusioni

Dall'attività di ottimizzazione svolta è stato possibile individuare delle soluzioni solo per otto asteroidi prossimi alla Terra, di piccole dimensioni, il cui rischio di un impatto futuro con la superficie terrestre risulta essere molto basso. In particolare, a seguito dell'implementazione dell'algoritmo iterativo, è stata individuata una finestra temporale che va dal 25/01/2027 al 17/08/2029, contenente le date di partenza associate ai minimi valori assunti dal ΔV necessari per il raggiungimento degli asteroidi target trovati.

Da una prima analisi delle missioni individuate, è possibile asserire che l'asteroide maggiormente accessibile è il 2012 TF79; mentre l'asteroide caratterizzato da una minore accessibilità è il 2020 BW13. Degli otto asteroidi raggiungibili, solo per tre di essi è stato possibile individuare delle soluzioni che prevedessero l'inserimento di una manovra di Fly-by intorno ad un asteroide intermedio, che, nel caso di due casi su tre, ha comportato un incremento sostanziale del costo di missione.

Detto ciò, è necessario osservare che il fatto stesso di avere individuato solo otto asteroidi raggiungibili a partire da un cluster iniziale di circa quarantasei target possibili costituisce un riscontro oggettivo delle note difficoltà di convergenza attribuibili al metodo di ottimizzazione indiretto. Inoltre, considerando le semplificazioni introdotte nel modello dinamico, a causa della scarsa robustezza del metodo utilizzato, l'introduzione degli effetti perturbativi trascurati potrebbe risultare non solo nell'individuazione di soluzioni difformi da quelle qui presentate, ma soprattutto nella possibilità di poter dichiarare raggiungibili un numero inferiore di asteroidi. In conclusione, bisogna puntualizzare che è stato messo in atto un processo iterativo, da una variazione che mi ha permesso di individuare delle soluzioni ottimali sulla base di un insieme, discreto e limitato, di soluzioni trovate che lo rendono meno accurato.

Appendice A

Funzionamento generale dei Propulsori elettrotermici

Il funzionamento generico di questo tipo di propulsori prevede la generazione di una spinta \vec{T} , convertendo l'energia termica, fornita al propellente, in energia cinetica. Facendo riferimento ad un modello unidimensionale del propulsore oggetto di studio, è possibile effettuarne una valutazione dal punto di vista prestazionale.

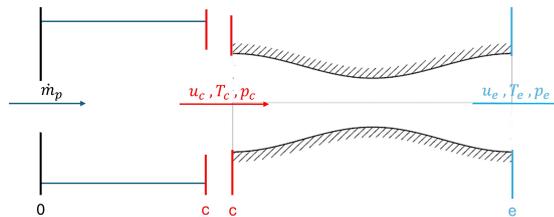


Figura A.1: Schema unidimensionale del propulsore

Indichiamo con le lettere 0 e c le sezioni di ingresso e di uscita della camera di combustione, e con e la sezione di uscita dell'ugello.

Assunzioni:

- il propellente si muove solo lungo l'asse x ;
- il propellente è un gas perfetto;
- consideriamo il caso ideale in cui si ha la conversione completa da energia termica a cinetica, rendimento termico ($\eta_{th} = 1$);
- consideriamo il caso in cui non vi sono perdite all'interno dell'ugello;
- consideriamo che l'espansione in ugello sia adiabatica ($c_p = costante$).

Ricorrendo al primo principio della termodinamica, scriviamo l'equazione di conservazione dell'energia all'interno della camera di combustione:

$$P_{termica} + P_{meccanica} = \dot{m}_p \Delta H^o \quad (A.1)$$

Dove ΔH^o rappresenta la variazione di entalpia totale del sistema $H^o = c_p T + \frac{u^2}{2}$.

$$P_{termica} + P_{meccanica} = \dot{m}_p \left[\left(c_p T_c + \frac{u_c^2}{2} \right) - \left(c_p T_0 + \frac{u_0^2}{2} \right) \right] \quad (A.2)$$

A questo punto possiamo fare alcune osservazioni importanti:

1. poiché siamo nella condizione in cui forniamo solo potenza termica, il contributo relativo alla potenza meccanica deve essere nullo;
2. la seconda osservazione che è doveroso fare è che, date le grandi dimensioni della camera di combustione, è possibile considerare trascurabili i contributi di velocità sia in ingresso che all'uscita della camera stessa ($u_0 = u_c \sim 0$);
3. infine, date le basse temperature a cui sono tenuti i serbatoi, è possibile trascurare la temperatura del propellente all'ingresso della camera di combustione ($T_0 \sim 0$).

Riducendo, dunque, l'equazione ai soli termini principali, risulta che la potenza elettrica fornita al propellente viene immagazzinata principalmente sotto forma di entalpia statica.

$$P_{termica} = \dot{m}_p c_p T_c \quad (A.3)$$

Scriviamo ora l'equazione di bilancio energetico del propellente, in fase di espansione adiabatica in ugello:

$$P_{termica} + P_{meccanica} = \dot{m}_p (H_e^o - H_c^o) \quad (A.4)$$

Considerando che le potenze termica e meccanica fornite in ugello sono nulle, $P_{termica} = P_{meccanica} = 0$, e andando ad esplicitare i contributi relativi all'entalpia totale, otteniamo:

$$c_p T_e + \frac{u_e^2}{2} = c_p T_c + \frac{u_c^2}{2} \quad (A.5)$$

Inoltre, considerando la temperatura in corrispondenza della sezione di uscita dell'ugello, T_e , trascurabile, è possibile ricavare la velocità di espulsione del propellente

$$\frac{u_e^2}{2} = c_p T_c \quad (A.6)$$

$$u_{e,ideale} = \sqrt{2c_p T_c} = \sqrt{2 \frac{\gamma}{\gamma - 1} \frac{R^*}{M} T_c} \quad (\text{A.7})$$

in cui:

- $\gamma = \frac{c_p}{c_v}$;
- R^* è la costante universale dei gas perfetti;
- M rappresenta la massa molare del gas.

Quel che è possibile osservare è che u_e dipende dalla temperatura T_c ; ciò significa che, sebbene sia possibile ottenere livelli idealmente molto elevati della velocità di scarico fornendo una maggior potenza termica, poiché il materiale di cui sono fatte le pareti della camera di combustione possono operare soltanto al di sotto di una temperatura critica, la velocità u_e di un dato propellente sarà limitato. Dunque, l'unica strategia attuabile per incrementare la velocità di scarico è quella di servirsi di un propellente dalla massa molare contenuta. La scelta migliore, da questo punto di vista, è l'idrogeno molecolare H_2 . Tuttavia, giacché H_2 è caratterizzato da una *bulk density* bassa, a parità di massa di propellente stivata a bordo, quest'ultimo richiede la costruzione di serbatoi eccessivamente voluminosi, e dunque massivi. Inoltre, il sistema di stoccaggio dell'idrogeno molecolare è caratterizzato da una complessità tecnologica elevata, dovuta alla necessità di conservare quest'ultimo allo stato liquido. Ciò significherebbe, infatti, ricorrere a serbatoi a pressione elevata, oppure a serbatoi dotati di rivestimenti termici atti a mantenere temperature criogeniche al loro interno.

Detto ciò, è possibile introdurre dei coefficienti, noti con il nome di rendimento, atti a tener conto di determinati effetti dissipativi che si palesano nella realtà. Questi ultimi sono classificati sotto forma di:

- perdite termiche;
- perdite per flussi congelati;
- perdite aerodinamiche.

A.1 Perdite termiche

La potenza termica, fornita all'interno della camera di combustione, non viene completamente immagazzinata nel propellente, sotto forma di entalpia totale; bensì, parzialmente trasmessa alle pareti della camera e in parte irraggiata verso l'esterno. In tal caso, dunque, per tenere conto di tali perdite, viene introdotto il coefficiente η_{th} . Detto ciò, possiamo riscrivere l'equazione (2.39):

$$\eta_{th} P_{termica} = \dot{m}_p c_p T_c \quad (\text{A.8})$$

A.2 Perdite per flussi congelati

L'evoluzione termodinamica del flusso di propellente nell'ugello, nelle condizioni ideali di pressione e temperatura costanti, porterebbe quest'ultimo ad avere entalpia di uscita nulla. Tuttavia, poiché l'espansione in ugello prevede un repentino abbassamento dei suddetti parametri, nella realtà si ha una variazione delle condizioni di equilibrio chimico e, quindi, l'insacco della dissociazione molecolare del propellente. In questo caso, il grado di dissociazione del gas dipende strettamente dal tempo di residenza in ugello: in particolare, se il tempo di residenza risulta essere maggiore della cinetica chimica, maggiore sarà il grado di dissociazione, e, dunque, poiché parte della entalpia viene utilizzata per garantire la reazione dissociativa, minore sarà la quantità di entalpia convertibile in energia cinetica. Viceversa, qualora la cinetica chimica dovesse essere più lenta rispetto ai tempi di residenza, la composizione chimica del propellente risulterebbe pressoché inalterata.

Analizzando l'espansione del gas in ugello, e considerando il fenomeno dissociativo, riscriviamo l'equazione (A.6):

$$\frac{u_e^2}{2} = h_c - h_f = \eta_f h_c \quad (\text{A.9})$$

dove h_f rappresenta l'entalpia di flusso congelato, mentre η_f è un rendimento che rappresenta la percentuale di entalpia effettivamente convertita.

A.3 Perdite aerodinamiche

Le perdite aerodinamiche sono principalmente legate a fenomeni quali presenza dello strato limite e, nei casi più critici, alla separazione del flusso. Nella realtà, infatti, all'interno di un fluido in movimento, nelle vicinanze di superfici solide, si viene a creare una regione, denominata "strato limite", in cui l'entità degli effetti viscosi risulta essere importante. In tale regione, infatti, il flusso risulta essere rallentato, fino al punto in cui quest'ultimo presenta le condizioni di aderenza ($u = 0$) in corrispondenza della parete.

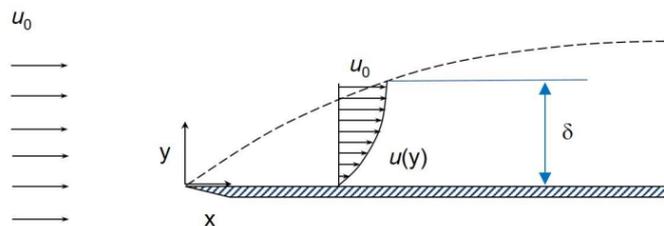


Figura A.2: Strato limite [30]

Ciò comporta l'instaurarsi sia di un gradiente di velocità lungo la sezione, che di un gradiente di temperatura, entrambi forieri di irreversibilità dovute rispettivamente all'attrito e allo scambio termico.

$$\tau_{xy} = \mu \frac{d\vec{u}}{dy} \quad (\text{A.10})$$

$$q_y = -\lambda \frac{\partial T}{\partial y} \quad (\text{A.11})$$

Dove μ e $\frac{d\vec{u}}{dy}$ sono rispettivamente viscosità e gradiente di velocità del flusso; mentre λ e $\frac{\partial T}{\partial y}$ rappresentano la conducibilità e il gradiente di temperatura.

Detto ciò, considerando le irreversibilità dovute a:

- lo scambio termico;
- le forze viscosi;
- la separazione del flusso;

viene definito un coefficiente η_{ae} , noto come *rendimento aerodinamico*, che stia a rappresentare la percentuale di energia cinetica convertibile in spinta.

$$P_T = \eta_{ae} \dot{m}_p \frac{u_e^2}{2} \quad (\text{A.12})$$

Inoltre, per effetto della variazione delle caratteristiche di flusso lungo la sezione, legata ai gradienti di velocità e di temperatura, è possibile osservare un'alterazione delle prestazioni in termini di produzione di spinta. Infatti, considerando il caso in cui il flusso fosse disomogeneo ed, in particolare, assumendo il flusso in prossimità della parete nullo $u = 0$; a parità di energia fornita

$$\dot{m}_p \frac{u_e^2}{2} = \frac{\dot{m}_p}{2} \frac{u_e^{*2}}{2} + \frac{\dot{m}_p}{2} \frac{0}{2} \quad (\text{A.13})$$

otteniamo che la velocità massima del flusso deve essere pari a:

$$u_e^* = \sqrt{2}u_e \quad (\text{A.14})$$

mentre la spinta vedrà una riduzione di circa il 29.3% rispetto al caso ideale di flusso omogeneo.

$$T^* = \frac{\dot{m}_p}{2} u_e^* = \frac{\dot{m}_p}{\sqrt{2}} u_e = \frac{T}{\sqrt{2}} = 70.71\%T \quad (\text{A.15})$$

Finalmente, inserendo tutte le perdite sopra elencate all'interno del modello ideale, possiamo ricalcolare la potenza cinetica prodotta dal propulsore come segue:

$$P_T = \frac{Tc}{2} = \eta_{th}\eta_f\eta_{ae}P_{termica} = \eta P_{termica} \quad (\text{A.16})$$

dove con η si indica il rendimento globale.

Appendice B

Sparking Potential

Con il termine *Sparking Potential* si fa riferimento al valore minimo di tensione per cui si ha l'innesco di un gas ionizzato (condizione di Sparking Potential) e, dunque, la perdita di isolamento tra due elettrodi immersi in un gas, noto con il nome tensione di breakdown, che viene definito dalla seguente relazione:

$$V_b = \frac{Bpd}{\log(Apd) - \log[\log(1 + 1/\gamma)]} \quad (\text{B.1})$$

Quest'ultima, determinati i parametri A,B e γ , dipendenti dal gas scelto, ci permette di mettere in relazione la tensione di breakdown con la pressione del propellente p, e la distanza d tra i due elettrodi. Le curve rappresentanti l'andamento di V_b al variare del prodotto pd prendono il nome di *Curve di Paschen*.

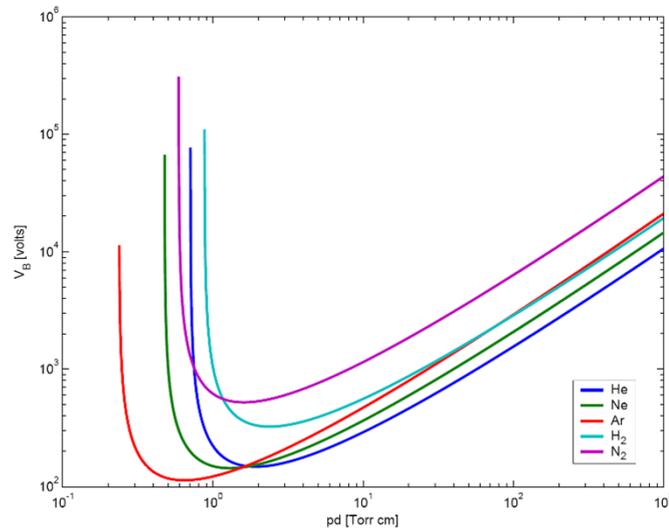


Figura B.1: Curve di Paschen [31]

Appendice C

Fasi di funzionamento di un Propulsore a ioni

C.1 Ionizzazione

Consideriamo un modello di atomo caratterizzato da un nucleo, costituito da protoni e neutroni, e da una nube di elettroni orbitanti attorno ad esso. Ciascuna carica negativa, costituente la nube elettronica, occupa orbitali diversi a cui è possibile associare livelli energetici e forme differenti.

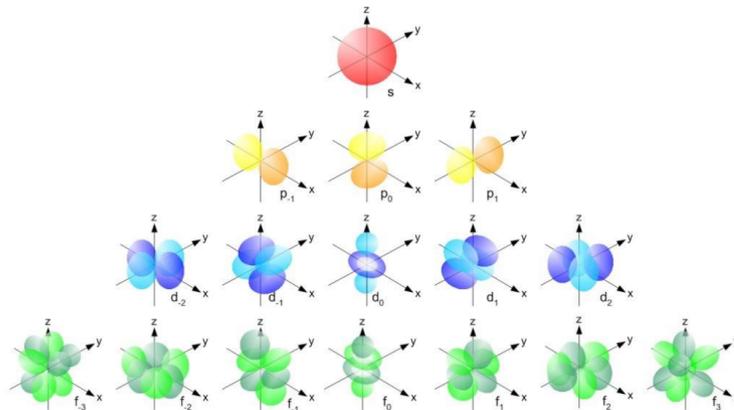


Figura C.1: Orbitali [32]

In particolare, maggiore è il livello energetico associato all'orbitale, e minore è l'intensità della forza di legame tra il singolo elettrone e il nucleo. Prendendo in considerazione un atomo, è possibile distinguere due configurazioni o stati dello stesso. Il primo di essi, lo *stato fondamentale*, consistente nella

configurazione, stazionaria, di minor energia dell'atomo, in cui la disposizione degli elettroni segue la regola della diagonale. Fornendogli una quantità di energia ϵ , l'atomo passa allo *stato eccitato*, in cui uno o più elettroni della nube si trasferiscono momentaneamente ad un livello energetico superiore.

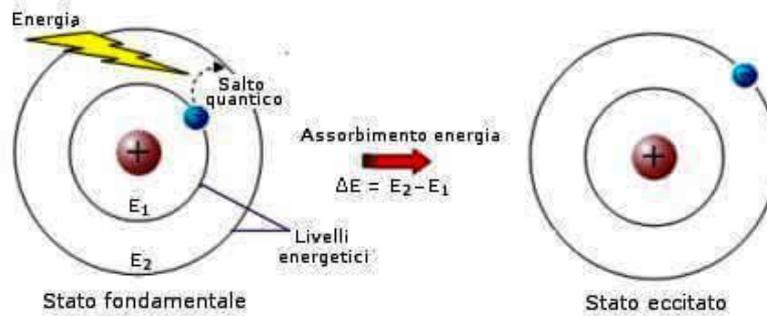


Figura C.2: Passaggio allo stato eccitato [33]

Per esempio, facendo riferimento all'atomo di idrogeno, attraverso l'apporto di energia, l'elettrone più esterno, compie un salto quantico, trasferendosi dall'orbitale $1s^1$ all'orbitale $2s^1$.

Tuttavia, qualora la quantità di energia fornita risulta maggiore o uguale all'energia potenziale di legame tra la carica negativa e il nucleo, l'atomo perde l'elettrone, rimanendo ionizzato. Tale quantitativo di energia prende il nome di *Energia di Ionizzazione*.



dove \mathcal{E}_i è l'energia di prima ionizzazione. Il processo di ionizzazione può essere portato a termine attraverso

- Urto anelastico: meccanismo di trasmissione di energia per mezzo di un urto con una particella ad alto contenuto energetico



- Fotoionizzazione: in questo caso l'energia viene fornita all'elettrone per mezzo di un fotone



dove l'energia νh è data dal prodotto tra la frequenza del fotone ν e la costante di Planck $h = 6.63 \times 10^{-34} Js$;

- Effetto campo: questa tecnica prevede di sfruttare la polarizzazione di carica dovuta alla presenza di un campo magnetico esterno, il quale, nel caso in cui dovesse essere sufficientemente grande, permetterebbe di strappare un elettrone all'atomo;

C.2 Fasi di accelerazione e neutralizzazione

A seguito della ionizzazione del propellente, segue la separazione delle cariche negative e positive generate. Questa fase è di fondamentale importanza in quanto, le forze elettrostatiche esercitate su ioni positivi ed elettroni assumono stesso modulo e verso opposto, contribuendo ad una forza elettrostatica totale nulla, incapace di generare spinta. Fatto ciò, segue dunque la fase di accelerazione degli ioni, sui quali agisce una forza per unità di volume $\vec{f} = n_+q\vec{E}$, a cui, per il terzo principio della dinamica, corrisponde una spinta T pari a:

$$\vec{T} = \int_V \vec{f} dV \quad (\text{C.4})$$

Per finire, una fase di fondamentale importanza è la neutralizzazione del propulsore. Infatti, l'espulsione degli ioni in fase di accelerazione, comporterebbe un accumulo di carica negativa in corrispondenza del propulsore, che eserciterebbe una forza attrattiva sugli ioni, risultante in un contributo negativo alla spinta T .

Bibliografia

- [1] Donald K. Yeomans. Apr. 1998. URL: https://ssd.jpl.nasa.gov/sb/why_asteroids.html#:~:text=Thus%20the%20study%20of%20asteroids,with%20tons%20of%20interplanetary%20material. (cit. alle pp. 1, 2).
- [2] 2023. URL: <https://www.asi.it/esplorazione/sistema-solare/dawn-cerere-vesta/> (cit. a p. 2).
- [3] URL: <https://science.nasa.gov/mission/osiris-rex/in-depth/> (cit. a p. 5).
- [4] Mariasole Maglione. 2023. URL: <https://www.astrospazio.it/2023/09/13/ecco-come-arrivera-sulla-terra-il-campione-dellasteroide-bennu-il-24-settembre/> (cit. a p. 5).
- [5] URL: <https://science.nasa.gov/mission/osiris-rex/> (cit. a p. 5).
- [6] URL: <https://www.wired.it/scienza/spazio/2021/05/10/osiris-rex-asteroide-bennu-abbandono/> (cit. a p. 5).
- [7] URL: <https://science.nasa.gov/solar-system/asteroids/didymos/> (cit. a p. 5).
- [8] Andrew S. Rivkin et al. «The Double Asteroid Redirection Test (DART): Planetary Defense Investigations and Requirements». In: *The Planetary Science Journal* 2 (2021), p. 113989. ISSN: 0019-1035. DOI: 10.3847/PSJ/ac063e. URL: <https://iopscience.iop.org/article/10.3847/PSJ/ac063e> (cit. a p. 6).
- [9] Andrew F. Cheng, Angela M. Stickle, Eugene G. Fahnestock, Elisabetta Dotto, Vincenzo Della Corte, Nancy L. Chabot e Andy S. Rivkin. «DART mission determination of momentum transfer: Model of ejecta plume observations». In: *Icarus* 352 (2020), p. 113989. ISSN: 0019-1035. DOI: <https://doi.org/10.1016/j.icarus.2020.113989>. URL: <https://www.sciencedirect.com/science/article/pii/S0019103520303559> (cit. a p. 6).
- [10] Justyna Surowiec. Ott. 2022. URL: <https://www.nasa.gov/news-release/nasa-confirms-dart-mission-impact-changed-asteroids-motion-in-space/> (cit. a p. 7).

- [11] URL: https://www.esa.int/Space_Safety/Hera/DART (cit. a p. 7).
- [12] Patrick Mickel et al. «The ESA Hera Mission: Detailed Characterization of the DART Impact Outcome and of the Binary Asteroid (65803) Didymos». In: *Planetary Science Journal* 3 (2022), p. 113989. ISSN: 0019-1035. DOI: 10.3847/PSJ/ac6f52. URL: <https://iopscience.iop.org/article/10.3847/PSJ/ac6f52> (cit. alle pp. 9, 10).
- [13] URL: <https://www.astronomia.com/2018/05/23/come-dura-fuggire-da-una-nana-rossa/> (cit. a p. 12).
- [14] Robert Jahn e Edgar Choueiri. «Electric Propulsion». In: dic. 2003, pp. 125–141. ISBN: 9780122274107. DOI: 10.1016/B0-12-227410-5/00201-5 (cit. alle pp. 14, 15, 25, 30).
- [15] G.P.Sutton. *Rocket Propulsion Elements*. New York, NY, USA: John Wiley & Sons, Inc., 1992 (cit. a p. 15).
- [16] URL: https://www.pngfind.com/mpng/wRmiho_glow-discharge-iv-curve-png-download-glow-discharge/ (cit. a p. 16).
- [17] URL: https://www.universetoday.com/164072/the-most-powerful-ion-engine-ever-built-passes-the-test/#google_vignette (cit. a p. 19).
- [18] URL: <https://aerospacenotes.com/ion-propulsion/> (cit. a p. 19).
- [19] URL: https://en.wikipedia.org/wiki/File:Fig221_Hollow_Cathode.PNG (cit. a p. 23).
- [20] jean-pierre Boeuf. «Tutorial: Physics and modeling of Hall thrusters». In: *Journal of Applied Physics* 121 (gen. 2017), p. 011101. DOI: 10.1063/1.4972269 (cit. a p. 27).
- [21] Anil Rao. «A Survey of Numerical Methods for Optimal Control». In: *Advances in the Astronautical Sciences* 135 (gen. 2010) (cit. alle pp. 33, 34).
- [22] Marco Grammatico. *Fuel-Optimal Lander Trajectory for Lunar Soft-Precision Landing*. 2021. URL: <http://webthesis.biblio.polito.it/id/eprint/18883> (cit. alle pp. 35, 36, 43).
- [23] Oskar Von Stryk e Roland Bulirsch. «Direct and Indirect Methods for Trajectory Optimization». In: *Annals of Operations Research* 37 (dic. 1992), pp. 357–373. DOI: 10.1007/BF02071065 (cit. a p. 35).
- [24] Tom Magnanti e Jim Orlin. URL: <https://web.mit.edu/15.053/www/AMP-Chapter-13.pdf> (cit. a p. 35).
- [25] Alessia Serafini. *OTTIMIZZAZIONE DEI PARAMETRI DI PROGETTO DEL TERZO STADIO A PROPELLENTE IBRIDO DI UN LANCIATORE PER PICCOLI SATELLITI*. 2021. URL: <http://webthesis.biblio.polito.it/id/eprint/18930> (cit. a p. 43).

- [26] URL: https://www.faa.gov/sites/faa.gov/files/about/office_org/headquarters_offices/avs/III.4.1.6_Interplanetary_Travel.pdf (cit. a p. 45).
- [27] Francesco Simeoni, Lorenzo Casalino e Antonio Amelio. «Indirect Optimization of Robust Orbit Transfer Considering Thruster Underperformance». In: apr. 2023, pp. 349–375. ISBN: 978-3-031-24811-5. DOI: 10.1007/978-3-031-24812-2_13 (cit. a p. 47).
- [28] Mascolo Luigi e Casalino Lorenzo. «Optimal Escape from Sun-Earth and Earth-Moon L2 with Electric Propulsion». In: *Aerospace* 9.4 (2022). ISSN: 2226-4310. DOI: 10.3390/aerospace9040186. URL: <https://www.mdpi.com/2226-4310/9/4/186> (cit. a p. 49).
- [29] Lorenzo Casalino, Guido Colasurdo, Matteo ROSA SENTINELLA et al. «Indirect optimization method for low-thrust interplanetary trajectories». In: *Proceedings of 30th International Electric Propulsion Conference*. 2007 (cit. a p. 50).
- [30] Carlo Minerva. *Risoluzione e visualizzazione del flusso di strato limite di Blasius attraverso l'implementazione di un metodo Runge - Kutta in Matlab*. 2018 (cit. a p. 68).
- [31] URL: <https://www.micro-la.com/open/tech-pills/40/plasma> (cit. a p. 71).
- [32] URL: <https://www.unidformazione.com/orbitali-ibridi/> (cit. a p. 72).
- [33] URL: <https://www.chimica-online.it/download/stato-eccitato.htm> (cit. a p. 73).