



**Politecnico
di Torino**

Politecnico Di Torino

Corso di Laurea Magistrale in Ingegneria
Aerospaziale

Sviluppo di modelli surrogati per analisi FEM mediante reti neurali

Relatore:

Prof. Marco Petrolo

Candidato:

Lorenzo Amicuzi

Correlatori:

Prof. Alfonso Pagani

Dott. Pierluigi Iannotti

Sessione di laurea Aprile 2024

A.a. 2023/2024

Sommario

Il presente lavoro propone un approccio avanzato nell'analisi strutturale, combinando i vantaggi dell'approccio assiomatico e asintotico per formulare modelli precisi del comportamento meccanico delle strutture. Affrontando le limitazioni degli approcci tradizionali, si introduce un metodo misto, noto come assiomatico/asintotico, che bilancia precisione e costo computazionale.

La tesi si concentra sulla necessità di evitare un numero eccessivo di analisi, proponendo un approccio che ottimizza il processo decisionale e riduce il carico computazionale attraverso l'utilizzo delle reti neurali. L'obiettivo finale è fornire risultati accurati senza ricorrere a migliaia di simulazioni, rendendo il metodo più pratico ed efficiente per le applicazioni reali di progettazione strutturale. Inoltre, si sottolinea che la selezione del modello appropriato è cruciale e non può basarsi solo sull'aumento arbitrario dei gradi di libertà.

L'elemento chiave di questa proposta è la creazione del Best Theory Diagram (BTD), derivato dal metodo assiomatico/asintotico. Questo diagramma offre una rappresentazione sintetica delle teorie applicate a una specifica struttura, indicando la relazione tra la complessità matematica del modello e la precisione ottenuta. Attraverso il BTD, è possibile identificare il modello ottimale in termini di numero di gradi di libertà e precisione, facilitando una progettazione strutturale efficiente.

Indice

1	Introduzione	20
1.1	Carrera unified formulation, CUF	22
1.2	Machine Learning	23
2	Modelli Strutturali	27
2.1	Carrera Unified Formulation	27
2.1.1	Espansioni di Taylor	28
2.1.2	Espansioni di Lagrange	31
2.2	Equazioni di governo mediante PVD	34
2.3	Formulazione agli elementi finiti	38
2.3.1	Matrice di rigidezza	39
2.3.2	Matrice di massa	42
2.3.3	Vettore dei carichi	43
2.4	Analisi di risposta statica	43
2.5	Analisi delle vibrazioni libere	44
2.6	Analisi di risposta dinamica	46
3	Reti Neurali	47
3.1	Modello matematico del neurone	49
3.1.1	Funzioni di attivazione	51
3.2	Architetture della rete neurale artificiale	53

3.3	Training della rete	56
3.3.1	Backpropagation	57
3.3.2	Ottimizzazione	58
3.3.3	Overfitting e Underfitting	60
4	Metodo assiomatico-asintotico	63
4.1	Best Theory Diagram	65
4.2	BTD tramite Reti Neurali	67
4.2.1	Rete neurale sviluppata per un singolo input - il modello strutturale	69
4.2.2	Rete Neurale avanzata per l'analisi delle vibrazioni libere: modello strutturale, snellezza e condizioni al contorno . . .	72
4.2.3	Ottimizzazione della Selezione dei Dati di Training per Migliorare la Precisione delle Reti Neurali	75
4.2.4	Rete Neurale avanzata per l'analisi delle vibrazioni libere: modello strutturale, snellezza, rapporto h/t e condizioni al contorno	80
4.2.5	Integrazione di una rete neurale convoluzionale e densa . .	81
5	Risultati preliminari di analisi strutturali statiche e dinamiche	86
5.1	Analisi statiche	86
5.1.1	Trave con sezione quadrata	86
5.1.2	Trave con sezione quadrata cava	88
5.2	Analisi vibrazioni libere	91
5.2.1	Trave con sezione rettangolare	91
5.2.2	Multi-bay box beam	93
5.3	Analisi statiche AAM	97
5.3.1	Simply-supported, $0^\circ/90^\circ/0^\circ$	98
5.3.2	Simply-supported, $0^\circ/90^\circ/0^\circ/90^\circ$	100

5.4	Analisi vibrazioni libere AAM	102
6	Risultati	105
6.1	Risultati utilizzando la rete feed-forward con input solo il modello strutturale	105
6.2	Risultati utilizzando la rete feed-forward con input il modello strutturale, snellezza e condizioni di vincolo	111
6.3	Risultati della rete neurale ottimizzando la selezione dei dati di Training	121
6.3.1	Trave con sezione quadrata cava	125
6.3.2	Multi-bay box beam	131
6.4	Risultati utilizzando la rete feed-forward ottimizzata con input il modello strutturale, snellezza, rapporto $\frac{h}{t}$ e condizioni di vincolo .	140
6.4.1	Trave con sezione quadrata cava	140
6.4.2	Trave con sezione a C	148
6.5	Risultati utilizzando la rete neurale compresiva del ramo CNN e del ramo DNN	157
7	Conclusioni	173
	Ringraziamenti	180

Elenco delle figure

2.1	Elemento di Lagrange a quattro nodi (L4) nella geometria reale e normalizzata.	32
2.2	Modellazione LE con un elemento L4	34
2.3	Modello matematico di una beam 1D (a), piastra 2D (b) e guscio (c)	39
2.4	Assemblaggio della matrice di rigidezza del nodo	41
2.5	Assemblaggio della matrice di rigidezza dell'elemento	41
2.6	Assemblaggio della matrice di rigidezza globale	42
3.1	Schematizzazione semplificata di neuroni biologici	48
3.2	Single-Input Neuron	49
3.3	Multiple-Input Neuron	50
3.4	ReLU	52
3.5	Funzione sigmoide	53
3.6	Layer of S Neurons	54
3.7	Three-Layer Network	55
3.8	Relazione tra capacità ed errore	61
4.1	Best Theory Diagram	66
4.2	CUF-NN	68
4.3	Processo di creazione del BTM utilizzando l'applicazione di reti neurali	69

4.4	Diagramma di flusso del processo di sviluppo e valutazione di un modello di rete neurale per la previsione degli errori in teorie strutturali.	70
4.5	Input della rete neurale	73
4.6	Distribuzione delle teorie in funzione del numero di termini attivi .	76
4.7	Diagramma di flusso del processo di selezione dati di training con distribuzione non uniforme: dalla preparazione iniziale alla preparazione finale dei dati, evidenziando i passaggi chiave per assicurare una rappresentazione equilibrata delle teorie nel set di addestramento.	80
4.8	Input della rete neurale	81
4.9	Input del ramo CNN della rete neurale	82
4.10	Input del ramo DNN della rete neurale	83
5.1	Sezione rettangolare	87
5.2	Deflessione della trave con 40 elementi B4 lungo l'asse y relativa al modello TE4	88
5.3	Sezione quadrata cava	89
5.4	Distribuzione degli elementi lungo la sezione	89
5.5	Deflessione della trave relativa al modello 11 L9	91
5.6	Sezione rettangolare della trave	92
5.7	Forme modali della trave relativa al modello Taylor di ordine $N=4$.	93
5.8	Sezione della Multi-bay box beam	94
5.9	Multi-bay box and relativi modelli LE	94
5.10	Prime 9 frequenze proprie della Multi-bay box beam relative al modello 28 L9	96
5.11	Geometria guscio	97
5.12	BTD per $R/a=5$ e laminazione 0/90/0	100
5.13	BTD per $R/a=5$ e laminazione 0/90/0/90	102

5.14	BTD per $R/a=5$ e laminazione 0/90/0	104
6.1	Confronto tra il BTD derivato numericamente e quello ottenuto tramite rete neurale di una trave incastrata con $L/h=100$	108
6.2	Confronto tra il BTD derivato numericamente e quello ottenuto tramite rete neurale di una trave semplicemente appoggiata con $L/h=10$	109
6.3	Trave a sezione rettangolare con $L/h=10$	112
6.4	Trave a sezione rettangolare con $L/h=40$	112
6.5	Trave a sezione rettangolare con $L/h=100$	113
6.6	Fattore di rilevanza: Trave rettangolare incastrata	117
6.7	Fattore di rilevanza: Trave rettangolare simply supported	117
6.8	Confronto tra il BTD derivato numericamente e quello ottenuto tramite rete neurale di una trave incastrata con $L/h=60$	118
6.9	Confronto tra il BTD derivato numericamente e quello ottenuto tramite rete neurale di una trave semplicemente appoggiata con $L/h=60$	119
6.10	Trave a sezione rettangolare con $L/h=10$	122
6.11	Trave a sezione rettangolare con $L/h=40$	122
6.12	Trave a sezione rettangolare con $L/h=100$	123
6.13	Trave con sezione quadrata cava $L/h=20$	126
6.14	Trave con sezione quadrata cava $L/h=50$	126
6.15	Trave con sezione quadrata cava $L/h=100$	127
6.16	Box beam con $L/a=10$	131
6.17	Box beam con $L/a=40$	132
6.18	Box beam con $L/a=100$	132
6.19	Fattore di rilevanza: Box beam incastrata	137
6.20	Fattore di rilevanza: Box beam simply supported	137
6.21	Box beam con $L/a=5$ incastrata	138

6.22	Box beam con $L/a=60$ incastrata	138
6.23	Trave con sezione quadrata cava con $L/h=20$ e $h/t=10$	141
6.24	Trave con sezione quadrata cava con $L/h=10$ e $h/t=4$	141
6.25	Trave con sezione quadrata cava con $L/h=40$ e $h/t=20$	141
6.26	Trave con sezione cava quadrata con $L/h=5$, $h/t=4$ incastrata ad entrambi gli estremi	146
6.27	Trave con sezione cava quadrata con $L/h=80$, $h/t=25$ incastrata ad entrambi gli estremi	146
6.28	Sezione trave a C	148
6.29	Trave con sezione a C con $L/h=20$ e $h/t=10$	149
6.30	Trave con sezione a C con $L/h=10$ e $h/t=20$	150
6.31	Trave con sezione a C con $L/h=50$ e $h/t=4$	150
6.32	Trave con sezione a C con $L/h=5$, $h/t=4$ Simply supported	155
6.33	Trave con sezione a C con $L/h=80$, $h/t=25$ incastrata	155
6.34	Sezione quadrata piena	158
6.35	Sezione quadrata cava	158
6.36	Sezione multi bay box	158
6.37	Sezione a C con $h/t=20$	159
6.38	Trave con sezione rettangolare con $L/h=10$ Simply supported	159
6.39	Trave con sezione quadrata cava incastrata ad entrambi gli estremi	160
6.40	Box beam con $L/a=10$	160
6.41	Trave con sezione a C con $L/h=10$ Simply supported	160
6.42	Trave con sezione rettangolare con $L/h=10$ Simply supported	163
6.43	Trave con sezione quadrata cava incastrata ad entrambi gli estremi	163
6.44	Box beam con $L/a=10$	164
6.45	Trave con sezione a C con $L/h=10$ Simply supported	164
6.46	Sezione trave a C simmetrica	166
6.47	Sezione trave a Z	166

6.48	Sezione trave a I	167
6.49	Sezione a C simmetrica con $h/t=20$	167
6.50	Sezione a Z	168
6.51	Sezione a I	168
6.52	Trave con sezione a C con $L/h=10$ Simply supported	168
6.53	Trave con sezione a Z con $L/a=10$ Simply supported	169
6.54	Trave con sezione a I con $L/a=10$ Simply supported	169
6.55	Fattore di rilevanza di u_{10}	172
6.56	Fattore di rilevanza di u_{14}	172

Elenco delle tabelle

2.1	Espansioni di Taylor, modello 1D	29
2.2	Espansioni di Taylor, modello 2D	30
4.1	Notazione di layout che definisce la posizione di ciascuna variabile di spostamento nel caso di un modello 1D di secondo ordine	64
4.2	Rappresentazione simbolica di un modello 1D ridotto del secondo ordine	64
4.3	Struttura rete neurale	74
4.4	Ramo CNN	84
4.5	Ramo DNN	85
4.6	Parametri addestramento	85
5.1	Influenza del numero di elementi su u_z per diversi modelli di trave con sezione quadrata e rapporto $L/h = 10$	88
5.2	Influenza del numero di elementi su u_z per diversi modelli di trave con sezione quadrata	90
5.3	Prime quattro frequenze proprie di una trave rettangolare incastrata ad un estremo calcolate con differenti modelli strutturali	92
5.4	Prime nove frequenze naturali della Multi-bay box beam	95
5.5	Best theories per laminazione $0^\circ/90^\circ/0^\circ$, $R/a = 5$, $a/h = 100$	98
5.6	Best theories per laminazione $0^\circ/90^\circ/0^\circ$, $R/a = 5$, $a/h = 10$	99
5.7	Best theories per laminazione $0^\circ/90^\circ/0^\circ/90^\circ$, $R/a = 5$, $a/h = 100$. . .	101

5.8	Best theories per laminazione $0^\circ/90^\circ/0^\circ/90^\circ$, $R/a = 5$, $a/h = 10$. . .	101
5.9	Best theories per laminazione $0/90/0$, $R/a = 5$, $a/h = 100$	103
5.10	Best theories per laminazione $0/90/0$, $R/a = 5$, $a/h = 10$	103
6.1	Trave a sezione rettangolare incastrata - $L/h= 100$. N. neuroni nei 6 layer: 64, 64, 64, 64, 64, 64	106
6.2	Trave a sezione rettangolare incastrata - $L/h= 100$. N. neuroni nei 6 layer: 128, 128, 128, 128, 128, 128	106
6.3	Trave a sezione rettangolare incastrata - $L/h= 100$. N. neuroni nei 6 layer: 128, 128, 128, 64, 64, 64	106
6.4	Trave a sezione rettangolare simply supported - $L/h= 10$. N. neu- roni nei 6 layer: 64, 64, 64, 64, 64, 64	107
6.5	Trave a sezione rettangolare simply supported - $L/h= 10$. N. neu- roni nei 6 layer: 128, 128, 128, 128, 128, 128	107
6.6	Trave a sezione rettangolare simply supported - $L/h= 10$. N. neu- roni nei 6 layer: 128, 128, 128, 64, 64, 64	107
6.7	Best theories ricavate con rete neurale di una trave incastrata con $L/h=100$	110
6.8	Best theories FE di una trave incastrata con $L/h=100$	110
6.9	Best theories ricavate con rete neurale di una trave simply suppor- ted con $L/h=10$	110
6.10	Best theories FE di una trave simply supported con $L/h=10$	111
6.11	N. neuroni nei 6 layer: 128, 128, 128, 64, 64, 64	112
6.12	Best theories ricavate con la rete neurale di una trave incastrata con $L/h=10$	113
6.13	Best theories FE di una trave incastrata con $L/h=10$	113
6.14	Best theories ricavate con la rete neurale di una trave incastrata con $L/h=40$	114
6.15	Best theories FE di una trave incastrata con $L/h=40$	114

6.16	Best theories ricavate con la rete neurale di una trave incastrata con L/h=100	114
6.17	Best theories FE di una trave incastrata con L/h=100	115
6.18	Best theories ricavate con la rete neurale di una trave simply sup- ported con L/h=10	115
6.19	Best theories FE di una trave simply supported con L/h=10	115
6.20	Best theories ricavate con la rete neurale di una trave simply sup- ported con L/h=40	116
6.21	Best theories FE di una trave simply supported con L/h=40	116
6.22	Best theories ricavate con la rete neurale di una trave simply sup- ported con L/h=100	116
6.23	Best theories FE di una trave simply supported con L/h=100	117
6.24	Best theories ricavate con la rete neurale di una trave incastata con L/h=60	120
6.25	Best theories FE di una trave incastata con L/h=60	120
6.26	Best theories ricavate con la rete neurale di una trave simply sup- ported con L/h=60	120
6.27	Best theories FE di una trave simply supported con L/h=60	121
6.28	N. neuroni nei 6 layer: 128, 128, 128, 64, 64, 64	122
6.29	Best theories ricavate con la rete neurale di una trave rettangolare incastrata con L/h=10	123
6.30	Best theories ricavate con la rete neurale di una trave rettangolare incastrata con L/h=40	124
6.31	Best theories ricavate con la rete neurale di una trave rettangolare incastrata con L/h=100	124
6.32	Best theories ricavate con la rete neurale di una trave rettangolare simply supported con L/h=10	124

6.33	Best theories ricavate con la rete neurale di una trave rettangolare simply supported con $L/h=40$	125
6.34	Best theories ricavate con la rete neurale di una trave rettangolare simply supported con $L/h=100$	125
6.35	Best theories ricavate con rete neurale di una trave cava incastrata su entrambi i lati con $L/h=20$	127
6.36	Best theories FE di una trave cava incastrata su entrambi i lati con $L/h=20$	127
6.37	Best theories ricavate con rete neurale di una trave cava incastrata su entrambi i lati con $L/h=50$	128
6.38	Best theories FE di una trave cava incastrata su entrambi i lati con $L/h=50$	128
6.39	Best theories ricavate con rete neurale di una trave cava incastrata su entrambi i lati con $L/h=100$	128
6.40	Best theories FE di una trave cava incastrata su entrambi i lati con $L/h=100$	129
6.41	Best theories ricavate con rete neurale di una trave cava simply supported con $L/h=20$	129
6.42	Best theories FE di una trave cava simply supported con $L/h=20$.	129
6.43	Best theories ricavate con rete neurale di una trave cava simply supported con $L/h=50$	130
6.44	Best theories FE di una trave cava simply supported con $L/h=50$.	130
6.45	Best theories ricavate con rete neurale di una trave cava simply supported con $L/h=100$	130
6.46	Best theories FE di una trave cava simply supported con $L/h=100$.	131
6.47	Best theories ricavate con la rete neurale di box beam incastrata con $L/a=10$	132
6.48	Best theories FE di box beam incastrata con $L/a=10$	133

6.49	Best theories ricavate con la rete neurale di box beam incastrata con L/a=40	133
6.50	Best theories FE di box beam incastrata con L/a=40	133
6.51	Best theories ricavate con rete neurale di box beam incastrata con L/a=100	134
6.52	Best theories FE di box beam incastrata con L/a=100	134
6.53	Best theories ricavate con rete neurale di box beam simply suppor- ted con L/a=10	134
6.54	Best theories FE di box beam simply supported con L/a=10	135
6.55	Best theories ricavate con rete neurale di box beam simply suppor- ted con L/a=40	135
6.56	Best theories FE di box beam simply supported con L/a=40	135
6.57	Best theories ricavate con rete neurale di box beam simply suppor- ted con L/a=100	136
6.58	Best theories FE di box beam simply supported con L/a=100	136
6.59	Best theories ricavate con rete neurale di box beam incastrata con L/a=5	138
6.60	Best theories FE di box beam incastrata con L/a=5	139
6.61	Best theories ricavate con rete neurale di box beam incastrata con L/a=60	139
6.62	Best theories FE di box beam incastrata con L/a=60	139
6.63	Best theories ricavate con rete neurale di una trave a sezione qua- drata cava con L/h=20, h/t=10 incastrata ad entrambi gli estremi	142
6.64	Best theories FE di una trave a sezione quadrata cava con L/h=20, h/t=10 incastrata ad entrambi gli estremi	142

6.65	Best theories ricavate con rete neurale di una trave a sezione quadrata cava con $L/h=10$, $h/t=4$ incastrata ad entrambi gli estremi	142
6.66	Best theories FE di una trave a sezione quadrata cava con $L/h=10$, $h/t=4$ incastrata ad entrambi gli estremi	143
6.67	Best theories ricavate con rete neurale di una trave a sezione quadrata cava con $L/h=40$, $h/t=20$ incastrata ad entrambi gli estremi	143
6.68	Best theories FE di una trave a sezione quadrata cava con $L/h=40$, $h/t=20$ incastrata ad entrambi gli estremi	143
6.69	Best theories ricavate con rete neurale di una trave a sezione quadrata cava con $L/h=20$, $h/t=10$ semplicemente appoggiata	144
6.70	Best theories FE di una trave a sezione quadrata cava con $L/h=20$, $h/t=10$ semplicemente appoggiata	144
6.71	Best theories ricavate con rete neurale di una trave a sezione quadrata cava con $L/h=10$, $h/t=4$ semplicemente appoggiata	144
6.72	Best theories FE di una trave a sezione quadrata cava con $L/h=10$, $h/t=4$ semplicemente appoggiata	145
6.73	Best theories ricavate con rete neurale di una trave a sezione quadrata cava con $L/h=40$, $h/t=20$ semplicemente appoggiata	145
6.74	Best theories FE di una trave a sezione quadrata cava con $L/h=40$, $h/t=20$ semplicemente appoggiata	145
6.75	Best theories ricavate con rete neurale di una trave a sezione quadrata cava con $L/h=5$, $h/t=4$ incastrata ad entrambi gli estremi	147
6.76	Best theories FE di una trave a sezione quadrata cava con $L/h=5$, $h/t=4$ incastrata ad entrambi gli estremi	147

6.77	Best theories ricavate con rete neurale di una trave a sezione quadrata cava con $L/h=80$, $h/t=25$ incastrata ad entrambi gli estremi	147
6.78	Best theories FE di una trave a sezione quadrata cava con $L/h=80$, $h/t=25$ incastrata ad entrambi gli estremi	148
6.79	Best theories ricavate con rete neurale di una trave con sezione a C con $L/h=20$, $h/t=10$ incastrata	150
6.80	Best theories FE di una trave con sezione a C con $L/h=20$, $h/t=10$ incastrata	151
6.81	Best theories ricavate con rete neurale di una trave con sezione a C con $L/h=10$, $h/t=20$ incastrata	151
6.82	Best theories FE di una trave con sezione a C con $L/h=10$, $h/t=20$ incastrata	151
6.83	Best theories ricavate con rete neurale di una trave con sezione a C con $L/h=50$, $h/t=4$ incastrata	152
6.84	Best theories FE di una trave con sezione a C con $L/h=50$, $h/t=4$ incastrata	152
6.85	Best theories ricavate con rete neurale di una trave con sezione a C con $L/h=20$, $h/t=10$ semplicemente appoggiata	152
6.86	Best theories FE di una trave con sezione a C con $L/h=20$, $h/t=10$ semplicemente appoggiata	153
6.87	Best theories ricavate con rete neurale di una trave con sezione a C con $L/h=10$, $h/t=20$ semplicemente appoggiata	153
6.88	Best theories FE di una trave con sezione a C con $L/h=10$, $h/t=20$ semplicemente appoggiata	153
6.89	Best theories ricavate con rete neurale di una trave con sezione a C con $L/h=50$, $h/t=4$ semplicemente appoggiata	154

6.90	Best theories FE di una trave con sezione a C con $L/h=50$, $h/t=4$ semplicemente appoggiata	154
6.91	Best theories ricavate con rete neurale di una trave con sezione a C con $L/h=5$, $h/t=4$ semplicemente appoggiata	155
6.92	Best theories FE di una trave con sezione a C con $L/h=5$, $h/t=4$ semplicemente appoggiata	156
6.93	Best theories ricavate con rete neurale di una trave con sezione a C con $L/h=80$, $h/t=25$ incastrata	156
6.94	Best theories FE di una trave con sezione a C con $L/h=80$, $h/t=25$ incastrata	156
6.95	Best theories ricavate con rete neurale CNN di una trave con sezione rettangolare con $L/h=10$ semplicemente appoggiata	161
6.96	Best theories ricavate con rete neurale CNN di una trave con sezione quadrata cava con $L/h=10$ incastrata ad entrambi gli estremi	161
6.97	Best theories ricavate con rete neurale CNN di una trave con sezione quadrata cava con $L/h=20$ incastrata ad entrambi gli estremi	161
6.98	Best theories ricavate con rete neurale CNN di una box beam con $L/a=10$ incastrata	162
6.99	Best theories ricavate con rete neurale CNN di una box beam con $L/a=10$ semplicemente appoggiata	162
6.100	Best theories ricavate con rete neurale CNN di una trave con sezione a C con $L/h=10$ simply supported	162
6.101	Best theories ricavate con rete neurale CNN di una trave con sezione a C simmetrica con $L/h=10$ simply supported	169
6.102	Best theories FE di una trave con sezione a C simmetrica con $L/h=10$ simply supported	170
6.103	Best theories ricavate con rete neurale CNN di una trave con sezione a Z con $L/a=10$ simply supported	170

6.104 Best theories FE di una trave con sezione a Z con $L/a=10$ simply supported	170
6.105 Best theories ricavate con rete neurale CNN di una trave con sezione a I con $L/a=10$ simply supported	171
6.106 Best theories FE di una trave con sezione a I con $L/a=10$ simply supported	171

Capitolo 1

Introduzione

Nel campo dell'analisi strutturale, la formulazione di modelli che descrivano accuratamente il comportamento meccanico delle strutture è un processo complesso che ha avuto sviluppi attraverso due approcci principali: quello assiomatico e quello asintotico.

Il metodo assiomatico comporta la formulazione di ipotesi iniziali sul comportamento della struttura, dalle quali vengono derivate le equazioni che descrivono le relazioni geometriche che legano deformazioni a spostamenti, le equazioni del materiale che legano tensioni a deformazioni. Tuttavia, i modelli assiomatici hanno limitazioni, in quanto le ipotesi iniziali possono non essere sempre verificate nella realtà. Per superare questa limitazione, si è sviluppato un secondo approccio il cosiddetto metodo asintotico che si basa sulla ricerca di modelli che si avvicinano il più possibile a soluzioni di riferimento. In questo metodo, vengono introdotti termini aggiuntivi nel modello finché non si raggiunge uno scostamento dal valore di riferimento che risulta essere al di sotto di una certa soglia. Questo secondo approccio, tuttavia, può portare a modelli con un elevato costo computazionale, poiché si aggiungono termini fino a ottenere la precisione desiderata. La sfida diventa quindi trovare un equilibrio tra precisione e costo computazionale.

La soluzione proposta è un approccio misto, noto come metodo assiomatico/asintotico. In questo contesto, si fa una scelta iniziale, impostando ad esempio un ordine massimo di espansione. Questo rappresenta il lato assiomatico della procedura. Successivamente, si adotta un approccio asintotico, confrontando le soluzioni ottenute relative allo stesso problema strutturale utilizzando tutti i possibili modelli che contengono termini fino all'ordine massimo impostato. L'obiettivo è identificare il modello che si avvicina di più al valore di riferimento o al dato sperimentale previamente acquisito, garantendo così una descrizione accurata del comportamento strutturale senza sacrificare inutilmente il costo computazionale. In questo modo, l'approccio assiomatico/asintotico offre una via razionale e ottimale per la scelta del modello strutturale più adatto a descrivere una specifica struttura, combinando la precisione necessaria con un costo computazionale gestibile.

In questo scenario, l'introduzione delle reti neurali emerge come un'alternativa innovativa. Le reti neurali possono essere utilizzate per riprodurre il metodo assiomatico-asintotico, consentendo di esplorare un ampio spettro di modelli in modo più efficiente. Le reti neurali possono apprendere e generalizzare da dati di input, semplificando il processo di selezione del modello più adatto. Considerando, ad esempio, l'applicazione del metodo assiomatico-asintotico per un modello shell al quarto ordine, con 2^{15} possibili combinazioni di termini, l'utilizzo delle reti neurali può ridurre significativamente il carico computazionale, rendendo il confronto tra modelli più rapido ed efficiente. Questo approccio innovativo può rappresentare una soluzione all'elevato numero di modelli da considerare, migliorando l'efficacia complessiva del processo di selezione del modello strutturale. La rete prende in input un modello strutturale quindi la sequenza dei termini attivi di quel modello strutturale e restituisce uno o più parametri di accuratezza. Questi parametri possono riguardare diversi aspetti dell'analisi, come errori su frequenze naturali o spostamenti dovuti a carichi applicati. Attraverso questi parametri di accuratezza, è possibile costruire il Best Theory Diagram.

L'obiettivo finale è evitare di eseguire un elevato numero di analisi, ottimizzando il processo e riducendo il carico computazionale. In questo modo, è possibile ottenere risultati accurati senza dover eseguire migliaia di simulazioni, rendendo il processo più efficiente e pratico per applicazioni reali di progettazione strutturale.

1.1 Carrera unified formulation, CUF

La CUF è stata sviluppata a partire dai primi anni 2000 grazie al lavoro del professor Carrera presso il Politecnico di Torino, inizialmente dedicata allo sviluppo di teorie avanzate per piastre e gusci [1], [2] e successivamente estesa alla modellazione di travi [3], [4], [5]. Secondo la CUF, i problemi tridimensionali vengono ridotti in modo unificato a problemi bidimensionali o unidimensionali attraverso l'utilizzo di espansioni delle variabili generalizzate. La peculiarità distintiva dei modelli CUF risiede nella loro capacità gerarchica che rendono arbitraria la scelta delle funzioni di espansione e del loro ordine. Questo significa che modelli strutturali di qualsiasi ordine possono essere implementati senza la necessità di modifiche formali alle equazioni e alle matrici del problema. La CUF può quindi gestire geometrie complesse, condizioni al contorno e caratteristiche del materiale in modo arbitrario, senza ricorrere a formulazioni ad hoc. Questo aspetto rivoluzionario consente una versatilità senza precedenti nell'affrontare una vasta gamma di scenari strutturali senza compromettere la coerenza logica della formulazione. I modelli basati sulla CUF sono stati utilizzati per effettuare analisi diverse. Il fenomeno del buckling è stato esaminato in [6] mentre le analisi statiche sono state condotte in [5], [7], [8]. Per quanto riguarda le analisi di free-vibration, approfondimenti sono stati svolti in altre pubblicazioni [9], [10], [11].

Un'estensione della CUF è rappresentata dal metodo assiomatico-asintotico [12], [13], [14], [15]. Questa metodologia offre l'opportunità di effettuare una valutazione accurata del contributo di ogni termine presente nell'espansione, fornendo

così una prospettiva avanzata per prevedere la risposta meccanica di una struttura. Inoltre, consente di condurre facilmente studi parametrici su diversi parametri, come slenderness, rapporti ortotropici, sequenze di stratificazione, spessori e condizioni al contorno. Ciò agevola un'analisi dettagliata delle influenze di tali parametri sulla risposta strutturale.

1.2 Machine Learning

Il machine learning è un ramo dell'intelligenza artificiale (IA) che si concentra sull'utilizzo di dati e algoritmi per imitare il modo in cui gli esseri umani apprendono, migliorando progressivamente le performance dei computer sulla base dei dati disponibili. È una tecnica di IA che insegna ai computer ad apprendere dall'esperienza, utilizzando metodi computazionali per "apprendere" informazioni direttamente dai dati, senza la necessità di un'equazione predeterminata come modello. Gli algoritmi migliorano le proprie prestazioni in modo adattivo all'aumentare del numero di campioni disponibili per l'apprendimento. Il panorama del machine learning si articola principalmente in quattro categorie principali:

- apprendimento supervisionato
- apprendimento non supervisionato
- apprendimento semi-supervisionato
- apprendimento per rinforzo

L'apprendimento con supervisione è un processo attraverso il quale un algoritmo (macchina) utilizza un insieme noto di dati di input e le risposte (output) corrispondenti per addestrare un modello. Questo metodo è essenziale per problemi di classificazione e regressione, consentendo alle macchine di fare previsioni precise su nuovi dati. Questo modello viene poi impiegato per fare previsioni su

nuovi dati in modo accurato. L'obiettivo principale è far sì che l'algoritmo impari le caratteristiche chiave (key characteristics) di ciascun dato nel dataset, in modo da poter determinare la risposta associata a nuovi dati. Al contrario, l'apprendimento non supervisionato individua informazioni o strutture intrinseche nei dati quando le vengono dati in pasto dei dati grezzi, quindi senza che ci sia alcuna regola o funzione associata all'input che debba essere appresa. La macchina impara autonomamente a classificare e organizzare i dati grezzi provenienti dall'esterno, basandosi su caratteristiche comuni, al fine di prevedere modelli per input futuri. Questo approccio è utile per identificare cluster o raggruppamenti nei dati, rivelando pattern nascosti o relazioni tra le variabili. L'apprendimento semi-supervisionato rappresenta una via di mezzo tra supervisionato e non supervisionato, dove solo una parte dei dati è etichettata. Utilizzando tecniche di clustering, le macchine identificano pattern nei dati non etichettati, estendendo poi le etichette agli altri dati all'interno dei medesimi cluster. Infine, l'apprendimento per rinforzo si concentra sull'addestramento delle macchine attraverso l'interazione con l'ambiente circostante, mirando a massimizzare un obiettivo specifico. In questo contesto, le macchine apprendono attraverso il feedback sulle azioni intraprese, acquisendo gradualmente la capacità di prendere decisioni razionali.

I primi studi nel campo dell'apprendimento automatico risalgono a circa metà del secolo scorso. Tra i pionieri di questo campo figura Alan Turing, noto per il suo lavoro "On Computable Numbers", nel quale ha posto le basi per la riflessione sull'intelligenza artificiale e sulla necessità di sviluppare macchine in grado di apprendere. L'accezione moderna del termine "machine learning" è generalmente attribuita a Frank Rosenblatt, psicologo presso la Cornell University, il quale nel 1958 inventò il "perceptron" insieme al suo team di ricerca. Questa macchina era in grado di riconoscere le lettere dell'alfabeto ed era composta da tre elementi fondamentali: un'unità di input, un'unità di output e un algoritmo che permetteva alla macchina di apprendere minimizzando gli errori. Il concetto di base era

che la macchina riceveva un input, lo elaborava attraverso l'algoritmo e generava un output, che veniva poi confrontato con un valore di output ideale per valutare e migliorare il processo di apprendimento. Successivamente, il perceptron è stato perfezionato da Marvin Minsky e Seymour Papert, che sono oggi associati al modello più noto di questa macchina. Tuttavia, questo è stato solo l'inizio di un processo di evoluzione dell'apprendimento automatico, che continua ad avanzare rapidamente.

Nella letteratura scientifica, sono presenti diverse ricerche che combinano tematiche ingegneristiche con l'utilizzo del machine learning. Un esempio interessante è quello presentato da [16], il quale propone l'applicazione di una rete neurale per il monitoraggio dei deterioramenti all'interno di una struttura. Ciò che rende questa proposta particolarmente interessante è l'approccio innovativo nell'addestramento della rete, che si basa sull'utilizzo di campioni di danneggiamento generati attraverso analisi, anziché attraverso costose prove sperimentali. Elkordy, nel suo lavoro, conclude che lo sviluppo di questa tecnologia presenta un notevole potenziale, evidenziato dai risultati ottenuti e confrontati con quelli sperimentali. Tale approccio, dunque, si presenta promettente per il monitoraggio e la gestione dei deterioramenti nelle strutture, offrendo vantaggi significativi rispetto ai metodi tradizionali.

Nel vasto campo dell'ingegneria strutturale, numerosi sono gli studi che hanno contribuito fino a questo momento. Ad esempio, nel lavoro di [17] viene presentata una guida per la progettazione e l'addestramento di reti neurali volte a simulare programmi di analisi strutturale, con l'obiettivo di ridurre il tempo necessario affinché un processo di ottimizzazione conduca a una progettazione ottimale. Questa guida comprende anche la selezione del tipo di addestramento da utilizzare, così come il numero di nodi e strati interni da includere nella rete neurale. Rogers, inoltre, ha esaminato il problema dell'ottimizzazione della forma

della trave al fine di minimizzare il peso complessivo della struttura, garantendo sempre il rispetto dei vincoli strutturali.

Nel campo dell'analisi agli elementi finiti, è stato sviluppato un algoritmo per generare una mesh ottimale per lo studio dei problemi. Questo obiettivo è affrontato in [18], dove viene introdotta una rete neurale basata sull'algoritmo di training del tipo Back Propagation. La rete viene addestrata per produrre in output il numero ottimale di elementi finiti della mesh, e viene implementata utilizzando un metodo di parallelizzazione per velocizzare l'algoritmo di Back Propagation.

Nel campo dell'ingegneria aerospaziale, e più specificamente nell'analisi strutturale, l'impiego del machine learning sta conoscendo un crescente sviluppo. Numerosi esempi di questa tendenza emergono dalla letteratura scientifica: nell'articolo [19], è stata concepita una rete neurale artificiale finalizzata alla rilevazione dei danneggiamenti e alla stima della loro entità su una struttura. Nel contesto dell'indagine di problemi elastici concernenti strutture di tipo piastra e guscio, [20] ha sfruttato il machine learning e le reti neurali. In [21], viene esplorato l'utilizzo e i valori dei parametri interni di una rete neurale, fondamentali per la valutazione dell'accuratezza dei modelli teorici in ambito strutturale.

Capitolo 2

Modelli Strutturali

Le teorie strutturali classiche si fondano su un numero predeterminato di variabili generalizzate, spesso vincolate al problema specifico in esame. Questa dipendenza dal problema rappresenta una limitazione significativa per l'applicazione dei modelli classici, e superarla risulta spesso una sfida ardua. Nel presente capitolo, si illustra la struttura teorica di un nuovo approccio unificato che va oltre i limiti delle tradizionali tecniche di modellazione. In questo contesto, i campi di spostamento vengono ottenuti in maniera unificata, indipendentemente dall'ordine della teoria, considerato come un parametro di input per l'analisi. La formulazione unificata sarà presentata in dettaglio e successivamente impiegata per ricavare le equazioni di governo per la formulazione degli elementi finiti. In tal modo, si superano i vincoli legati alle convenzionali teorie strutturali classiche, aprendo la strada a un approccio più flessibile e applicabile a una vasta gamma di problemi.

2.1 Carrera Unified Formulation

La Carrera Unified Formulation (CUF) offre una formulazione unificata indipendente dall'ordine del modello considerato, rappresentando così un approccio generalizzato per la generazione di qualsiasi teoria strutturale. In particolare la CUF

consente di ricavare delle matrici/vettori degli elementi finiti in termini di nuclei fondamentali (FN). Questi nuclei fondamentali espressi attraverso quattro indici (τ, s, i, j) si presentano come matrici 3×3 (o 3×1 nel caso di un vettore). Ciò che risulta particolarmente significativo è che la loro forma non varia per problemi 1D, 2D o 3D.

Il campo di spostamento tridimensionale $\mathbf{u}(x,y,z)$ dei modelli di trave 1D e piastra e guscio 2D, nel contesto della Formulazione Unificata di Carrera, può essere espresso come:

$$\left. \begin{aligned} \mathbf{u}_{1D \text{ beam}}(x, y, z) &= F_\tau(x, z) \mathbf{u}_\tau(y) \\ \mathbf{u}_{2D \text{ plate}}(x, y, z) &= F_\tau(z) \mathbf{u}_\tau(x, y) \\ \mathbf{u}_{2D \text{ shell}}(\alpha, \beta, z) &= F_\tau(z) \mathbf{u}_\tau(\alpha, \beta) \end{aligned} \right\} \begin{array}{l} \tau = 1, 2, \dots, M \\ \tau = 0, 2, \dots, N \end{array} \quad (2.1)$$

$$\left. \begin{aligned} \delta \mathbf{u}_{1D \text{ beam}}(x, y, z) &= F_s(x, z) \delta \mathbf{u}_s(y) \\ \delta \mathbf{u}_{2D \text{ plate}}(x, y, z) &= F_s(z) \delta \mathbf{u}_s(x, y) \\ \delta \mathbf{u}_{2D \text{ shell}}(\alpha, \beta, z) &= F_s(z) \delta \mathbf{u}_s(\alpha, \beta) \end{aligned} \right\} \begin{array}{l} s = 1, 2, \dots, M \\ s = 0, 2, \dots, N \end{array} \quad (2.2)$$

dove F_τ e F_s sono le funzioni di espansione degli spostamenti generali \mathbf{u}_τ , M ed N indicano rispettivamente il numero di termini dell'espansione e l'ordine di espansione del modello. Secondo la notazione di Einstein, l'indicizzazione ripetuta indica una sommatoria. F_τ può essere di qualsiasi tipo. Ciò significa che è possibile assumere espansioni polinomiali, polinomi di Lagrange/Legendre, armoniche, esponenziali, combinazioni di diversi tipi di espansione, e così via.

2.1.1 Espansioni di Taylor

È evidente che teorie sia classiche che di ordine superiore possono essere facilmente ottenute dall'Eq.2.1 utilizzando polinomi di ordine diverso come F_τ . Questa

categoria di modelli è stata denominata modelli di espansione di Taylor nella letteratura sulla CUF [22], dimostrando una buona efficacia nell'analisi di strutture sottili e omogenee.

Nel caso 1D i polinomi utilizzati sono espressi attraverso la forma $F_\tau(x, z) = x^i z^j$, in cui i e j sono interi positivi che assumono valori crescenti fino al grado di espansione N. Queste funzioni sono dettagliatamente riportate nella Tabella 2.1, insieme all'indicazione del relativo ordine N e al numero di termini M che le costituiscono.

Tabella 2.1: Espansioni di Taylor, modello 1D

N	M	F_τ
0	1	$F_1 = 1$
1	3	$F_2 = x, F_3 = z$
2	6	$F_4 = x^2, F_5 = xz, F_6 = z^2,$
3	10	$F_7 = x^3, F_8 = x^2z, F_9 = xz^2, F_{10} = z^3$
\vdots	\vdots	\vdots
N	$(N+1)(N+2)/2$	$F_{(N^2+N+2)/2} = x^N \dots F_{(N+1)(N+2)/2} = z^N$

Nel caso 1D, la cinematica del generico modello di espansione di Taylor di secondo ordine è fornita di seguito:

$$\begin{aligned}
 u_x(x, y, z) &= u_{x1}(y) + u_{x2}x + u_{x3}z + u_{x4}x^2 + u_{x5}xz + u_{x6}z^2 \\
 u_y(x, y, z) &= u_{y1}(y) + u_{y2}x + u_{y3}z + u_{y4}x^2 + u_{y5}xz + u_{y6}z^2 \\
 u_z(x, y, z) &= \underbrace{u_{z1}(y)}_{N=0} + \underbrace{u_{z2}x + u_{z3}z}_{N=1} + \underbrace{u_{z4}x^2 + u_{z5}xz + u_{z6}z^2}_{N=2}
 \end{aligned} \tag{2.3}$$

Il modello unidimensionale dato dall'Equazione (2.3) presenta 18 variabili di spostamento: tre costanti (N = 0), sei lineari (N = 1) e nove paraboliche (N = 2). Il numero totale di variabili di spostamento del modello 1D (N_{DV}) è correlato a N

secondo la relazione:

$$N_{DV} = \frac{3 \times (N + 1) \times (N + 2)}{2} \quad (2.4)$$

Nel contesto della formulazione agli elementi finiti (FE), N_{DV} rappresenta il numero di gradi di libertà (DOFs) per nodo.

Per i casi 2D le funzioni di espansione sono funzioni di z ovvero modellano il campo di spostamento di una struttura lungo lo spessore. In questo contesto, le funzioni di espansione possono essere descritte come $F_\tau = z^i$, dove i è un numero intero positivo che varia da 1 a N . La Tabella 2.2 riporta le funzioni F_{tau} in relazione ad N ed M . Ogni riga mostra i termini di espansione di una teoria di ordine N .

Tabella 2.2: Espansioni di Taylor, modello 2D

N	M	F_τ
0	1	$F_0 = 1$
1	2	$F_1 = z$
2	3	$F_2 = z^2,$
3	4	$F_3 = z^3$
\vdots	\vdots	\vdots
N	N+1	$F_N = z^N$

Considerando un modello con ordine N il campo di spostamenti ottenuto con l'utilizzo di queste funzioni di espansione può essere espresso come:

$$\begin{aligned}
 u_x(x, y, z) &= u_{x1}(y) + u_{x2}z + u_{x3}z^2 + \dots + u_{xN}z^N \\
 u_y(x, y, z) &= u_{y1}(y) + u_{y2}z + u_{y3}z^2 + \dots + u_{yN}z^N \\
 u_z(x, y, z) &= \underbrace{u_{z1}(y)}_{N=0} + \underbrace{u_{z2}z}_{N=1} + \underbrace{u_{z3}z^2}_{N=2} + \dots + \underbrace{u_{zN}z^N}_N
 \end{aligned} \quad (2.5)$$

L'ordine del modello 2D è determinato dall'espansione lungo lo spessore. In questo contesto, il numero di nodi per ogni elemento è correlato all'approssimazione nel dominio (x, y) . Un modello 2D di grado N rappresenta pertanto una teoria che fa ricorso a un'espansione di Taylor di grado N per delineare in modo accurato il campo di spostamento lungo lo spessore. La scelta del modello 2D, dell'elemento e della mesh determina il numero totale di gradi di libertà del modello strutturale,

$$DOFs = \underbrace{3 \times M}_{\text{Num. di DOFs per nodo}} \times \underbrace{N_N}_{\text{Num. totale di nodi}} \quad (2.6)$$

2.1.2 Espansioni di Lagrange

Nel presente paragrafo, vengono introdotti i modelli inizialmente monodimensionali e successivamente bidimensionali, noti come modelli LE, basati su espansioni polinomiali di Lagrange. Nei modelli LE, le funzioni di espansione F_r coincidono con i polinomi di Lagrange e si contraddistinguono per le seguenti peculiarità:

- Le variabili e le condizioni al contorno del modello Lagrange possono essere collocate direttamente sulle superfici fisiche della struttura.
- Le incognite del problema sono componenti di pura deformazione senza rotazioni o variabili di ordine superiore per descrivere il campo di deformazione di un modello LE.

In questo approccio la sezione nel modello 1D o lo spessore nel modello 2D sono discretizzati con un pattern di punti di Lagrange (LPs). Il campo di spostamenti 3D è quindi il risultato di un'interpolazione degli spostamenti calcolati nei LPs. Il numero di gradi di libertà (DoFs) coincide con la somma degli spostamenti per ciascun LP. In questo caso non è richiesta la definizione di superfici o assi di riferimento, consentendo l'utilizzo diretto di una geometria CAD tridimensionale nell'analisi agli elementi finiti (FEA).

I polinomi di Lagrange sono comunemente espressi in coordinate normalizzate, conosciute anche come coordinate naturali. Tuttavia, è importante sottolineare che questa scelta non è vincolante, poiché i polinomi LE possono essere implementati anche in termini di coordinate reali.

Nel contesto unidimensionale vengono impiegati esclusivamente polinomi bidimensionali, poiché sono questi ad essere utilizzati sulla sezione trasversale del modello e sono denominati in base al numero di nodi coinvolti. Un esempio è rappresentato dall'elemento quadrangolare a quattro nodi (L4), che costituisce la configurazione più semplice. I polinomi per questo elemento sono definiti dalla seguente formula:

$$F_{\tau} = \frac{1}{4}(1 + \alpha\alpha_{\tau})(1 + \beta\beta_{\tau}) \quad \tau = 1, 2, 3, 4 \quad (2.7)$$

Si rimanda a [22] per i passaggi matematici per trasformare le coordinate naturali, Eq. (2.7), in coordinate fisiche, Eq. (2.1).

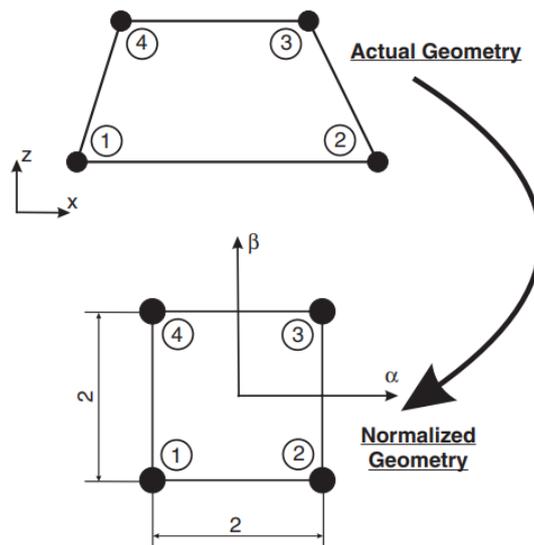


Figura 2.1: Elemento di Lagrange a quattro nodi (L4) nella geometria reale e normalizzata.

L'elemento quadrangolare a quattro nodi (L4) determina il seguente campo di spostamenti:

$$\begin{aligned}u_x &= F_1 u_{x1} + F_2 u_{x2} + F_3 u_{x3} + F_4 u_{x4} \\u_y &= F_1 u_{y1} + F_2 u_{y2} + F_3 u_{y3} + F_4 u_{y4} \\u_z &= F_1 u_{z1} + F_2 u_{z2} + F_3 u_{z3} + F_4 u_{z4}\end{aligned}\tag{2.8}$$

dove u_{x1}, \dots, u_{z4} rappresentano le tre componenti di spostamento di ciascun nodo.

Ciò implica:

1. Le incognite del problema sono solo gli spostamenti lungo le tre direzioni x , y e z .
2. Le incognite del problema possono essere posizionati sulle superfici fisiche del corpo.

Un tipico approccio di modellazione con elementi Lagrange è illustrato nella Figura 2.2 :

- Il corpo 3D è discretizzato a livello della sezione trasversale mediante elementi Lagrange. Il numero di tali elementi è influenzata dalla complessità geometrica della struttura e dalle condizioni al contorno (geometriche o meccaniche). Per agevolare la comprensione, nella Figura 2.2 è stato rappresentato un singolo elemento L4, considerando la struttura come un elemento trave a due nodi (B2).
- Il numero di gradi di libertà (DOFs) per ciascun nodo beam è determinato dalla discretizzazione della sezione trasversale. Nel caso dell'impiego di un elemento L4, si sfruttano complessivamente 12 DOFs per ogni nodo beam.
- A differenza dei modelli classici e TE, le variabili incognite nel contesto del modello computazionale non sono localizzate sull'asse dell'elemento trave.

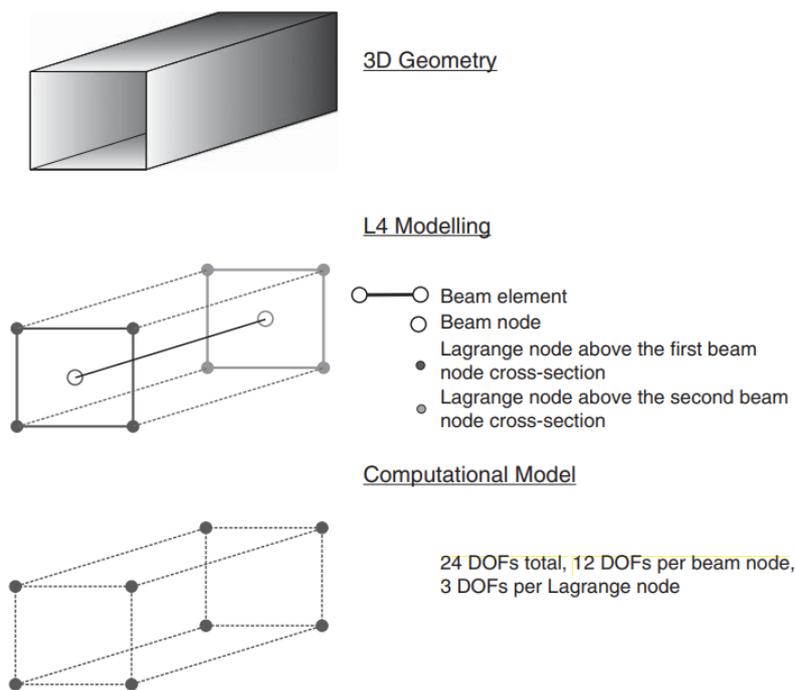


Figura 2.2: Modellazione LE con un elemento L4

E' importante sottolineare come le sezioni trasversali possono essere discretizzate mediante elementi multipli che consentono soprattutto di modellare facilmente le discontinuità geometriche e arricchire il campo di spostamento della sezione trasversale senza aumentare l'ordine di espansione polinomiale.

In conclusione è importante sottolineare come le funzioni di espansione descrivono un dominio bidimensionale per le sezioni trasversali nei modelli di travi unidimensionali, mentre descrivono uno spessore unidimensionale nei modelli di piastre e gusci bidimensionali.

2.2 Equazioni di governo mediante PVD

Le equazioni di governo possono essere ricavate attraverso il Principio degli Spostamenti Virtuali (PVD). Questo stabilisce nel caso dinamico la seguente ugua-

gianza:

$$\delta L_{int} = \delta L_{ext} - \delta L_{ine} \quad (2.9)$$

dove L_{int} è l'energia di deformazione, L_{ext} è il lavoro delle forze esterne, L_{ine} è il lavoro delle forze inerziali e δ indica la variazione virtuale.

La variazione virtuale del lavoro interno può essere espresso in termini di tensioni e deformazioni,

$$\delta L_{int} = \int_V \delta \boldsymbol{\epsilon}^T \boldsymbol{\sigma} dV \quad (2.10)$$

La forza esterna su un corpo generale è espressa come la somma di quattro contributi: le forze di volume \mathbf{g} sul volume V , le forze di superficie \mathbf{p} sulla superficie S , le forze di linea \mathbf{q} sulla linea l e la forza concentrata \mathbf{P} nel punto Q . La formulazione del lavoro esterno diventa:

$$\delta L_{ext} = \int_V \delta \mathbf{u}^T \mathbf{g} dV + \int_S \delta \mathbf{u}^T \mathbf{p} dS + \int_L \delta \mathbf{u}^T \mathbf{q} dy + \delta \mathbf{u}^T|_Q \mathbf{P} \quad (2.11)$$

L'espressione per δL_{ine} può essere scritta come:

$$\delta L_{ine} = \int_V \delta \mathbf{u} \rho \ddot{\mathbf{u}} dV \quad (2.12)$$

dove ρ è il materiale del materiale.

Le tensioni e deformazioni impiegate nella descrizione del lavoro virtuale possono essere rappresentate in funzione degli spostamenti. Le deformazioni possono essere espresse in termini degli spostamenti mediante la relazione geometrica:

$$\boldsymbol{\epsilon} = \mathbf{b} \mathbf{u} \quad (2.13)$$

dove \mathbf{b} è un operatore differenziale. In forma esplicita l'equazione 2.13 diventa:

$$\begin{bmatrix} \epsilon_{xx} \\ \epsilon_{yy} \\ \epsilon_{zz} \\ \gamma_{xz} \\ \gamma_{yz} \\ \gamma_{xy} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \partial_x & 0 & 0 \\ 0 & \partial_y & 0 \\ 0 & 0 & \partial_z \\ \partial_z & 0 & \partial_x \\ 0 & \partial_z & \partial_y \\ \partial_y & \partial_x & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u_x \\ u_y \\ u_z \end{bmatrix} = \mathbf{b}\mathbf{u} \quad (2.14)$$

dove il simbolo ∂_x rappresenta la derivata parziale rispetto a x ($\frac{\partial}{\partial x}$). Questa operazione di differenziazione è analoga per tutte le componenti.

Lo sforzo può essere ottenuto utilizzando la legge di Hooke:

$$\boldsymbol{\sigma} = C\boldsymbol{\epsilon} \quad (2.15)$$

dove C contiene i coefficienti elastici del materiale che nel sistema di riferimento materiale sono:

$$C = \begin{bmatrix} C_{11} & C_{12} & C_{13} & C_{14} & C_{15} & C_{16} \\ C_{21} & C_{22} & C_{23} & C_{24} & C_{25} & C_{26} \\ C_{31} & C_{32} & C_{33} & C_{34} & C_{35} & C_{36} \\ C_{41} & C_{42} & C_{43} & C_{44} & C_{45} & C_{46} \\ C_{51} & C_{52} & C_{53} & C_{54} & C_{55} & C_{56} \\ C_{61} & C_{62} & C_{63} & C_{64} & C_{65} & C_{66} \end{bmatrix} \quad (2.16)$$

Nel caso di un materiale isotropo la matrice C diventa:

$$C = \begin{bmatrix} 2G + \lambda & \lambda & \lambda & 0 & 0 & 0 \\ \lambda & 2G + \lambda & \lambda & 0 & 0 & 0 \\ \lambda & \lambda & 2G + \lambda & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & G & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & G & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & G \end{bmatrix} \quad (2.17)$$

dove:

$$G = \frac{E}{2(1 + \nu)}, \quad \lambda = \frac{\nu E}{(1 + \nu)(1 - 2\nu)} \quad (2.18)$$

Si noti che E , G e ν sono le proprietà elastiche del materiale e rappresentano rispettivamente il modulo di Young, il modulo di taglio e il coefficiente di Poisson.

I parametri λ e G sono anche noti come coefficienti di Lamé.

Se si impiegano tali equazioni (2.13 e 2.15), è possibile scrivere il lavoro virtuale in funzione degli spostamenti e ricavare le equazioni di equilibrio in forma forte quindi in ogni punto del corpo. Per una comprensione più dettagliata, si consiglia di fare riferimento a [22].

Tuttavia, è importante sottolineare che la risoluzione diretta di tali equazioni può essere una sfida complessa, in particolare quando si tratta di geometrie e condizioni al contorno più complesse. Spesso, la soluzione diretta è possibile solo per casi di geometrie e condizioni al contorno semplici.

Per superare queste difficoltà, è comune ricorrere al metodo degli elementi finiti che permette di ottenere le equazioni di equilibrio in forma debole attraverso il PVD.

2.3 Formulazione agli elementi finiti

Si considera la formulazione unificata del campo degli spostamenti introdotta nel paragrafo 2.1 e si procede ora a introdurre la formulazione agli elementi finiti, secondo la quale la funzione incognita spostamento è approssimata attraverso le funzioni di forma, denotate come N_i ciascuna moltiplicata per il valore corrispondente della funzione incognita in un nodo specifico.

$$\begin{aligned}
 \mathbf{u}_\tau(y) &= N_i(y)\mathbf{u}_{\tau i} \\
 \mathbf{u}_\tau(x, y) &= N_i(x, y)\mathbf{u}_{\tau i} \quad i = 1, 2, \dots, N_n \\
 \mathbf{u}_\tau(\alpha, \beta) &= N_i(\alpha, \beta)\mathbf{u}_{\tau i}
 \end{aligned} \tag{2.19}$$

$$\begin{aligned}
 \delta\mathbf{u}_s(y) &= N_j(y)\delta\mathbf{u}_{s j} \\
 \delta\mathbf{u}_s(x, y) &= N_j(x, y)\delta\mathbf{u}_{s j} \quad j = 1, 2, \dots, N_n \\
 \delta\mathbf{u}_s(\alpha, \beta) &= N_j(\alpha, \beta)\delta\mathbf{u}_{s j}
 \end{aligned} \tag{2.20}$$

dove i pedice i e j indicano la sommatoria su tutti i nodi dell'elemento, N_n rappresenta il numero totale di nodi per elemento, $\mathbf{u}_{\tau i}$ e $\mathbf{u}_{s j}$ sono i vettori degli spostamenti nodali, definiti nel seguente modo:

$$\begin{aligned}
 \mathbf{u}_{\tau i 1D \text{ e } 2D \text{ plate}} &= \{u_{x_{\tau i}}, u_{y_{\tau i}}, u_{z_{\tau i}}\}^T \\
 \mathbf{u}_{\tau i 2D \text{ shell}} &= \{u_{\alpha_{\tau i}}, u_{\beta_{\tau i}}, u_{z_{\tau i}}\}^T
 \end{aligned} \tag{2.21}$$

$$\begin{aligned}
 \delta\mathbf{u}_{s j 1D \text{ e } 2D \text{ plate}} &= \{u_{x_{s j}}, u_{y_{s j}}, u_{z_{s j}}\}^T \\
 \delta\mathbf{u}_{s j 2D \text{ shell}} &= \{u_{\alpha_{s j}}, u_{\beta_{s j}}, u_{z_{s j}}\}^T
 \end{aligned} \tag{2.22}$$

Sostituendo 2.19 e 2.20 in 2.1 e 2.2 si ottiene:

$$\begin{aligned}
 \mathbf{u}_{1D \text{ beam}}(x, y, z) &= F_\tau(x, z) N_i(y) \mathbf{u}_{\tau i} \\
 \mathbf{u}_{2D \text{ plate}}(x, y, z) &= F_\tau(z) N_i(x, y) \mathbf{u}_{\tau i} \\
 \mathbf{u}_{2D \text{ shell}}(\alpha, \beta, z) &= F_\tau(z) N_i(\alpha, \beta) \mathbf{u}_{\tau i}
 \end{aligned} \tag{2.23}$$

$$\begin{aligned}
 \delta \mathbf{u}_{1D \text{ beam}}(x, y, z) &= F_s(x, z) N_j(y) \delta \mathbf{u}_{s j} \\
 \delta \mathbf{u}_{2D \text{ plate}}(x, y, z) &= F_s(z) N_j(x, y) \delta \mathbf{u}_{s j} \\
 \delta \mathbf{u}_{2D \text{ shell}}(\alpha, \beta, z) &= F_s(z) N_j(\alpha, \beta) \delta \mathbf{u}_{s j}
 \end{aligned} \tag{2.24}$$

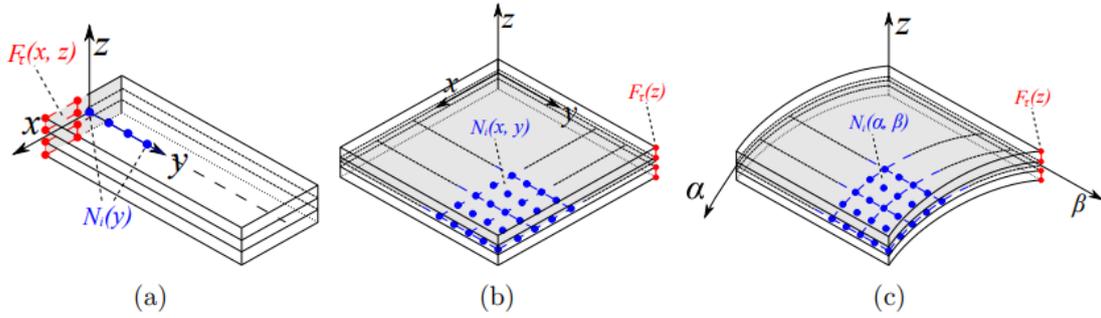


Figura 2.3: Modello matematico di una beam 1D (a), piastra 2D (b) e guscio (c)

2.3.1 Matrice di rigidezza

Partendo dalla forma unificata del campo di spostamento nell'Equazione 2.1 e dalle relazioni 2.13, 2.15, si ottiene la matrice di rigidezza in termini di nuclei fondamentali (FNs) la cui forma rimane invariata indipendentemente dall'ordine del modello e dall'espansione utilizzata.

La variazione virtuale del lavoro (2.35) interno in forma compatta è espressa come:

$$\delta L_{\text{int}} = \delta \mathbf{u}_{s j}^T \int_V (N_j F_s \mathbf{b}^T \mathbf{C} \mathbf{b} N_i F_\tau dV) \mathbf{u}_{\tau i} \tag{2.25}$$

È ora possibile introdurre la matrice $\mathbf{k}^{\tau sij}$ come segue:

$$\delta L_{\text{int}} = \delta \mathbf{u}_{sj}^T \mathbf{k}^{\tau sij} \mathbf{u}_{\tau i} \quad (2.26)$$

La matrice $\mathbf{k}^{\tau sij}$ rappresenta il nucleo fondamentale della matrice di rigidezza ed è una matrice 3×3, come illustrato di seguito:

$$k^{\tau sij} = \begin{bmatrix} k_{xx}^{\tau sij} & k_{xy}^{\tau sij} & k_{xz}^{\tau sij} \\ k_{yx}^{\tau sij} & k_{yy}^{\tau sij} & k_{yz}^{\tau sij} \\ k_{zx}^{\tau sij} & k_{zy}^{\tau sij} & k_{zz}^{\tau sij} \end{bmatrix} \quad (2.27)$$

L'assemblaggio della matrice di rigidezza si basa su quattro indici (τ, s, i e j). τ e s sono associati alle funzioni di espansione (F_τ e F_s), e il nucleo fondamentale viene calcolato variando τ e s , come illustrato nella Figura 2.4, che descrive la costruzione del cosiddetto blocco τs , coincidente con la matrice di rigidezza del nodo. La posizione di ogni blocco τs nella matrice di rigidezza dell'elemento è mostrata nella Figura 2.5. L'utilizzo della matrice di rigidezza dell'elemento è essenziale per ottenere la matrice di rigidezza globale, come evidenziato nella Figura 2.6. La versatilità del metodo consente il calcolo di modelli strutturali di qualsiasi ordine, poiché la definizione dell'ordine influisce sul ciclo τs .

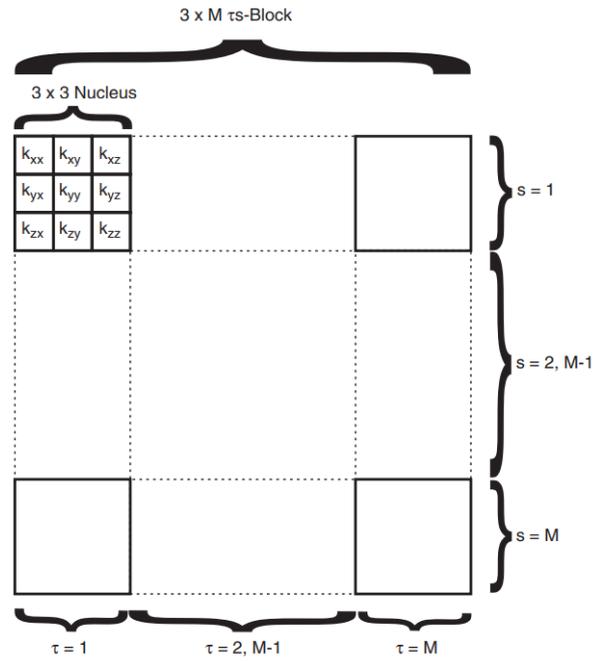


Figura 2.4: Assemblaggio della matrice di rigidezza del nodo

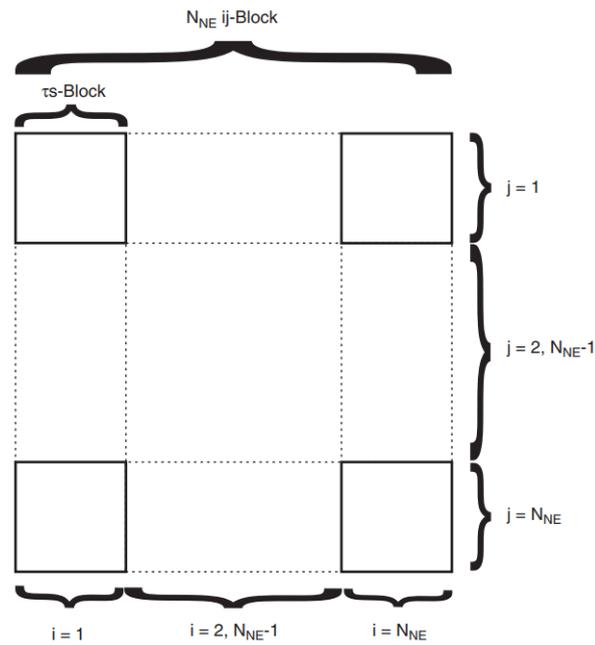


Figura 2.5: Assemblaggio della matrice di rigidezza dell'elemento

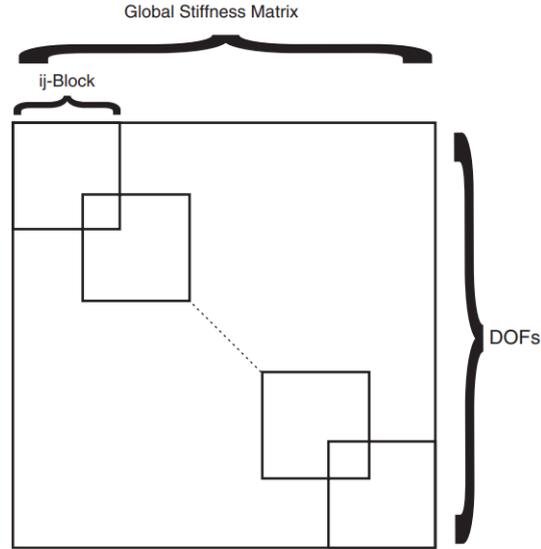


Figura 2.6: Assemblaggio della matrice di rigidità globale

2.3.2 Matrice di massa

Per ottenere la matrice di massa, si parte dal lavoro virtuale delle forze inerziali (2.12). Sostituendo le relazioni geometriche, costitutive e il campo di spostamenti, l'espressione può essere scritta in forma compatta come segue:

$$\delta L_{\text{ine}} = \delta \mathbf{u}_{s_j}^T \mathbf{m}^{\tau s i j} \ddot{\mathbf{u}}_{\tau i} \quad (2.28)$$

dove $\mathbf{m}^{\tau s i j}$ è la matrice di massa nella forma di FN le cui componenti sono:

$$\begin{aligned} m_{xx}^{\tau s i j} &= m_{yy}^{\tau s i j} = m_{zz}^{\tau s i j} = \int_V N_j F_s \rho N_i F_\tau dV \\ m_{yz}^{\tau s i j} &= m_{zx}^{\tau s i j} = m_{zy}^{\tau s i j} = m_{xy}^{\tau s i j} = m_{xz}^{\tau s i j} = m_{yx}^{\tau s i j} = 0 \end{aligned} \quad (2.29)$$

L'assemblaggio della matrice di massa globale segue le stesse regole della matrice di rigidezza.

2.3.3 Vettore dei carichi

E' possibile ricavare il vettore dei carichi dalla variazione virtuale del lavoro esterno 2.36. Supponendo un carico concentrato generico \mathbf{P} definito come:

$$\mathbf{P} = \begin{bmatrix} P_{u_x} \\ P_{u_y} \\ P_{u_z} \end{bmatrix} \quad (2.30)$$

il lavoro virtuale dovuto a \mathbf{P} è espresso come:

$$\delta L_{\text{ext}} = \mathbf{P} \delta \mathbf{u}^T \quad (2.31)$$

introducendo la Formulazione Unificata di Carrera 2.1 l'equazione 2.31 diventa:

$$\delta L_{\text{ext}} = F_s \mathbf{P} \delta \mathbf{u}_s^T \quad (2.32)$$

considerando gli spostamenti nodali e le funzioni di forma l'equazione 2.32 diventa:

$$\delta L_{\text{ext}} = F_s N_j \mathbf{P} \delta \mathbf{u}_{sj}^T = \mathbf{P}^{\tau i} \delta \mathbf{u}_{sj}^T \quad (2.33)$$

dove $\mathbf{P}^{\tau i}$ è il nucleo fondamentale del vettore di carico. In questo caso, è sufficiente un ciclo su τ e i per ottenere il vettore di carico dell'elemento. Il vettore globale può essere derivato sommando i carichi nei nodi condivisi.

2.4 Analisi di risposta statica

Nel caso statico, il Principio dei Lavori Virtuali (PVD) si esplica con:

$$\delta L_{\text{int}} = \delta L_{\text{ext}} \quad (2.34)$$

Il lavoro virtuale interno ed esterno, possono essere espressi rispettivamente come:

$$\delta L_{\text{int}} = \delta \mathbf{U}^T \mathbf{K} \mathbf{U} \quad (2.35)$$

$$\delta L_{\text{ext}} = \delta \mathbf{U}^T \mathbf{P} \quad (2.36)$$

dove \mathbf{K} è la matrice di rigidità assemblata, \mathbf{U} il vettore degli spostamenti nodali e \mathbf{P} il vettore dei carichi. Sostituendo 2.35 e 2.36 in 2.34 si ottiene:

$$\mathbf{K} \mathbf{U} = \mathbf{P} \quad (2.37)$$

La risoluzione dell'equazione implica il calcolo del vettore \mathbf{U} , e per effettuare questa operazione, la matrice non viene invertita, bensì sottoposta a una fattorizzazione, come ad esempio mediante il metodo di Cholesky.

2.5 Analisi delle vibrazioni libere

Nel contesto dell'analisi delle vibrazioni libere, si esamina l'equilibrio tra le forze elastiche e inerziali. In questa situazione, il PVD è espresso come segue:

$$\delta L_{\text{int}} = -\delta L_{\text{ine}} \quad (2.38)$$

La variazione virtuale del lavoro inerziale può essere scritta come:

$$\delta L_{\text{ine}} = \int_V \delta \mathbf{u} \rho \ddot{\mathbf{u}} dV \quad (2.39)$$

dove ρ è la densità del materiale e $\ddot{\mathbf{u}}$ è l'accelerazione. Applicando il metodo degli elementi finiti (FEM) e la CUF, la variazione del lavoro inerziale assume la forma:

$$\delta L_{\text{ine}} = \delta \mathbf{U}^T \mathbf{M} \ddot{\mathbf{U}} \quad (2.40)$$

dove \mathbf{M} è la matrice di massa assemblata. Le equazioni di equilibrio possono essere espresse nel modo seguente:

$$\mathbf{M}\ddot{\mathbf{U}} + \mathbf{K}\mathbf{U} = 0 \quad (2.41)$$

La risoluzione dell'Equazione 2.41 fornisce il vettore \mathbf{U} che soddisfa la condizione di equilibrio. Il problema si configura come un sistema omogeneo, e la soluzione richiede la risoluzione di un problema agli autovalori.

Il problema può essere agevolmente risolto considerando la soluzione armonica.

In questo caso, si ha:

$$\begin{aligned} \mathbf{U} &= \bar{\mathbf{U}} \cdot e^{i\omega t} \\ \dot{\mathbf{U}} &= i\omega\bar{\mathbf{U}} \cdot e^{i\omega t} \\ \ddot{\mathbf{U}} &= -\omega^2\bar{\mathbf{U}} \cdot e^{i\omega t} \end{aligned} \quad (2.42)$$

dove $\bar{\mathbf{U}}$ rappresenta l'ampiezza degli spostamenti e ω è la frequenza angolare.

Sostituendo 2.42 in 2.41 si ottiene:

$$-\mathbf{M}\omega^2\bar{\mathbf{U}}e^{i\omega t} + \mathbf{K}\bar{\mathbf{U}}e^{i\omega t} = 0 \quad (2.43)$$

Questa equazione può essere semplificata ulteriormente in un problema agli autovalori standard:

$$\bar{\mathbf{U}}e^{i\omega t}(-\mathbf{M}\omega^2 + \mathbf{K}) = 0 \quad (2.44)$$

$$-\mathbf{M}\omega^2 + \mathbf{K} = 0 \quad (2.45)$$

Il problema agli autovalori da risolvere assume quindi la forma:

$$\omega^2\mathbf{I} - \mathbf{M}^{-1}\mathbf{K} = 0 \quad (2.46)$$

Le frequenze naturali possono essere ottenute dagli autovalori:

$$f = \frac{\omega}{2\pi} \quad (2.47)$$

2.6 Analisi di risposta dinamica

Considerando il lavoro inerziale, elastico ed esterno, il problema da risolvere può essere espresso, attraverso il Principio dei Lavori Virtuali (PVD), nella forma:

$$\delta L_{\text{ine}} + \delta L_{\text{int}} = \delta L_{\text{est}} \quad (2.48)$$

Nella forma degli elementi finiti (FE), il problema diventa:

$$\delta \mathbf{U}^T \mathbf{M} \ddot{\mathbf{U}} + \delta \mathbf{U}^T \mathbf{K} \mathbf{U} = \delta \mathbf{U}^T \mathbf{P} \quad (2.49)$$

Quindi:

$$\mathbf{M} \ddot{\mathbf{U}} + \mathbf{K} \mathbf{U} = \mathbf{P} \quad (2.50)$$

L'Equazione 2.50 è formulata nel dominio del tempo. La risoluzione di questa equazione in tale dominio richiede l'applicazione di una metodologia numerica.

Capitolo 3

Reti Neurali

Le reti neurali artificiali rappresentano un modello computazionale ispirato dalle caratteristiche fondamentali della funzione cerebrale, sebbene distanti dalle loro controparti biologiche. Il cervello umano è composto da una vasta rete di neuroni altamente interconnessi, stimati in circa 10^{11} , ciascuno con circa 10^4 connessioni. Ogni neurone è costituito da tre componenti principali: le dendriti, il corpo cellulare e l'assone. Le dendriti agiscono come reti recettive, trasmettendo segnali elettrici al corpo cellulare. Quest'ultimo somma ed elabora tali segnali, applicando una soglia, e successivamente trasmette il risultato attraverso l'assone, una lunga fibra, ad altri neuroni. Il punto di contatto tra un assone di una cellula e una dendrite di un'altra cellula è chiamato sinapsi, dove avviene lo scambio di segnali attraverso processi chimici complessi. È l'organizzazione dei neuroni e la forza delle singole sinapsi che determina la funzione della rete neurale.

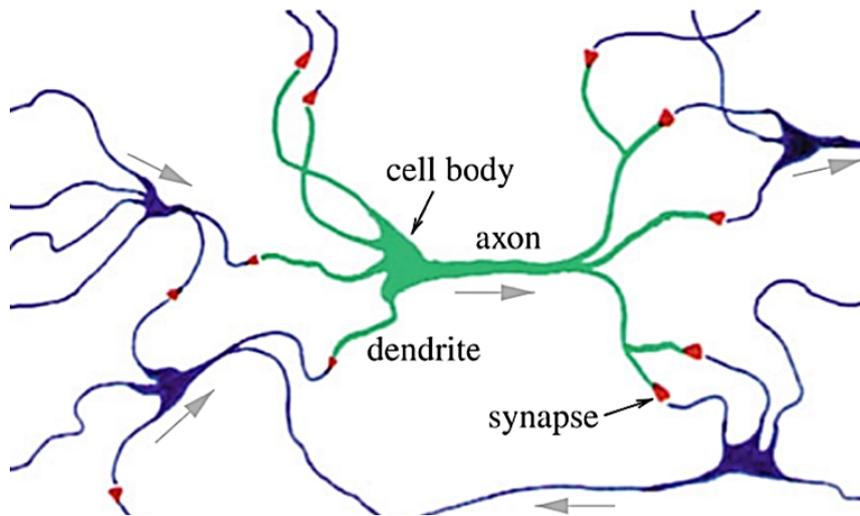


Figura 3.1: Schematizzazione semplificata di neuroni biologici

Sebbene parte della struttura neurale sia determinata geneticamente, molte altre parti si sviluppano attraverso l'apprendimento, con nuove connessioni che si formano e altre che si deteriorano nel corso della vita. Quindi, le strutture neurali continuano a cambiare durante tutta la vita, con cambiamenti che tendono principalmente a consistere nel rafforzamento o nell'indebolimento delle giunzioni sinaptiche. Ad esempio, si ritiene che la formazione di nuovi ricordi sia associata a modifiche nelle forze sinaptiche. Le reti neurali artificiali, sebbene non possiedano la complessità del cervello umano, presentano due somiglianze fondamentali con le reti neurali biologiche: entrambe sono composte da elementi computazionali interconnessi e la funzione della rete è determinata dalle connessioni tra questi elementi. Tuttavia, le reti neurali artificiali sono molto più semplici dei neuroni biologici. In sintesi, le reti neurali artificiali, sebbene ispirate alla biologia del cervello, sono costruite su principi semplificati e adattate per scopi specifici nell'ambito dell'elaborazione dei dati e dell'intelligenza artificiale.

3.1 Modello matematico del neurone

Viene introdotto il modello matematico semplificato del neurone e verrà spiegato come questi neuroni artificiali possono essere interconnessi per creare una vasta gamma di architetture di reti.

Il neurone a singolo input è rappresentato nella Figura 3.2. L'input scalare p viene moltiplicato per il peso scalare w per formare wp , uno dei termini inviati al sommatore. L'altro input, costante e pari a 1, viene moltiplicato per un bias b ¹ e quindi aggiunto al risultato precedente all'interno del sommatore. Il risultato di questa operazione, comunemente denominato input netto n , viene quindi passato a una funzione di trasferimento f ², producendo l'output scalare a del neurone. Se associamo questo modello semplificato al neurone biologico, possiamo notare che il peso corrisponde alla forza di una sinapsi, il sommatore e la funzione di trasferimento rappresentano il corpo cellulare del neurone, mentre l'output del neurone è analogo al segnale sull'assone.

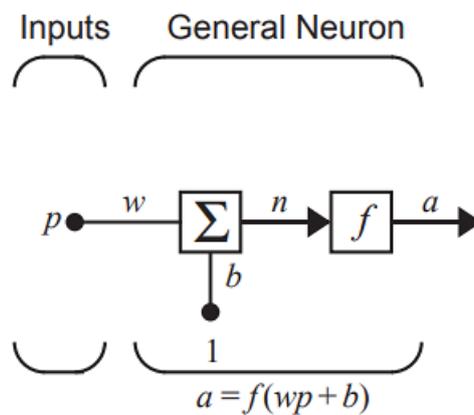


Figura 3.2: Single-Input Neuron

¹Alcuni autori preferiscono utilizzare il termine "offset"

²Alcuni autori preferiscono utilizzare il termine "funzione di attivazione"

L'output del neurone è calcolato, quindi come

$$a = f(wp + b) \quad (3.1)$$

La scelta della funzione di trasferimento è fondamentale poiché determina il comportamento del neurone nell'elaborazione dell'input. Il bias, analogo a un peso con l'eccezione di avere un input costante pari a 1, può essere omesso se non è necessario in un particolare neurone. Sia w che b sono parametri scalari regolabili del neurone, i quali vengono regolati durante il processo di apprendimento della rete neurale, al fine di ottimizzare la relazione tra input e output del neurone in modo da soddisfare gli obiettivi desiderati. La funzione di trasferimento può essere sia lineare che non lineare rispetto ad n , e la sua scelta dipende dalle esigenze specifiche del problema che il neurone deve risolvere.

Solitamente, un neurone riceve più di un input. Nella Figura 3.3, è illustrato un neurone con R input. Ogni input, indicato come p_1, p_2, \dots, p_R è pesato da elementi corrispondenti nella matrice dei pesi \mathbf{W}^3 , ossia $w_{1,1}, w_{1,2}, \dots, w_{1,R}$.

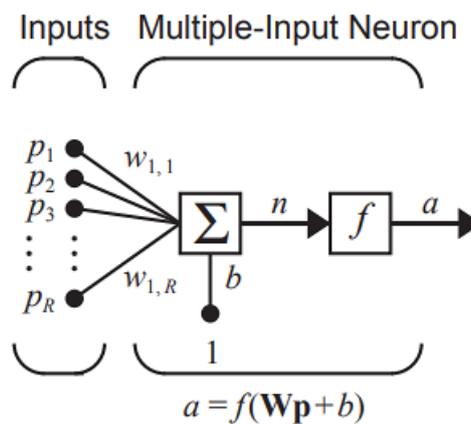


Figura 3.3: Multiple-Input Neuron

³Per convenzione, gli indici degli elementi nella matrice dei pesi sono assegnati in modo che il primo indice indichi il neurone destinatario del peso e il secondo indice indichi la sorgente del segnale che alimenta il neurone. Pertanto, in $w_{1,2}$, il primo indice indica la connessione al primo neurone dalla seconda sorgente.

Il neurone è dotato di un termine di bias b , il quale viene sommato agli input pesati per formare l'input netto n descritto dall'equazione:

$$n = w_{1,1}p_1 + w_{1,2}p_2 + \dots + w_{1,R}p_R + b \quad (3.2)$$

che in forma matriciale diventa:

$$n = \mathbf{W}\mathbf{p} + b \quad (3.3)$$

Successivamente, l'output del neurone è determinato dall'applicazione della funzione di trasferimento f all'input netto, ossia:

$$a = f(\mathbf{W}\mathbf{p} + b) \quad (3.4)$$

3.1.1 Funzioni di attivazione

Di seguito verranno descritte le principali funzioni di attivazione:

- **ReLU**

La funzione ReLU (Rectified Linear Unit) fornisce una trasformazione non lineare molto semplice. Data un'input x , la funzione è definita come il massimo di quell'elemento e 0:

$$\text{ReLU}(x) = \max(x, 0).$$

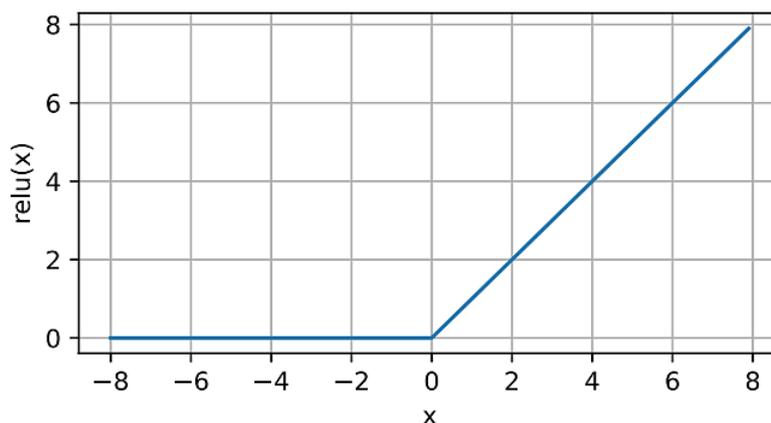


Figura 3.4: ReLU

La funzione ReLU mantiene solo i valori positivi scartando quelli negativi impostando le attivazioni corrispondenti a 0. Questo comporta che la funzione di attivazione sia lineare a tratti. Quando l'input è negativo, la derivata della funzione ReLU è 0; quando è positivo, la derivata è 1. Tuttavia, la funzione ReLU non è differenziabile quando l'input è esattamente 0. In questi casi, solitamente si considera la derivata come 0, poiché nella pratica l'input potrebbe non essere mai esattamente zero. La scelta della ReLU come funzione di attivazione è motivata anche dalla sua gestione agevole delle derivate: o svaniscono o lasciano semplicemente passare l'argomento. Questo comportamento favorisce una migliore ottimizzazione del modello neurale. Esistono varianti della funzione ReLU, come la funzione ReLU parametrizzata (pReLU). Questa variante aggiunge un termine lineare alla ReLU, consentendo così il passaggio di informazioni anche quando l'argomento è negativo:

$$pReLU(x) = \max(0, x) + \alpha \min(0, x)$$

- **Sigmoid Function**

La funzione sigmoide trasforma i suoi input, i cui valori appartengono al

dominio dei numeri reali, in output che si collocano nell'intervallo (0, 1):

$$\text{sigmoid}(x) = \frac{1}{1 + e^{-x}}$$

Le sigmoidi sono utilizzate comunemente come funzioni di attivazione sulle unità di output, quando si desidera interpretare tali output come probabilità in contesti di classificazione binaria. Tuttavia, la sigmoide è stata per lo più sostituita dalla più semplice e facilmente addestrabile ReLU per la maggior parte degli utilizzi nei livelli nascosti. Di seguito, la Figura 3.5 mostra la funzione sigmoide. Si noti che quando l'input è vicino a 0, la sigmoide mostra un comportamento simile a una trasformazione lineare.

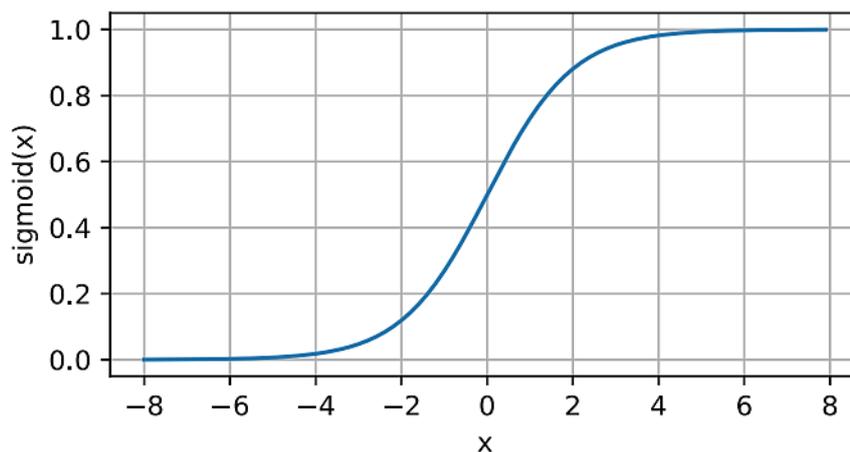


Figura 3.5: Funzione sigmoide

3.2 Architetture della rete neurale artificiale

E' importante notare che il numero di input in una rete neurale è strettamente legato alle caratteristiche specifiche del problema che si sta affrontando. Talvolta, un singolo neurone con molti input potrebbe non essere sufficiente, e potrebbe essere necessario un numero maggiore di neuroni, organizzati in uno o più strati, per affrontare la complessità del problema. Questo concetto di "strato" sarà esaminato in dettaglio successivamente.

Una rete composta da un singolo strato di S neuroni è illustrata nella Figura 3.6. È da notare che ciascuno degli R input è connesso a tutti i neuroni, e di conseguenza, la matrice dei pesi ha ora S righe.

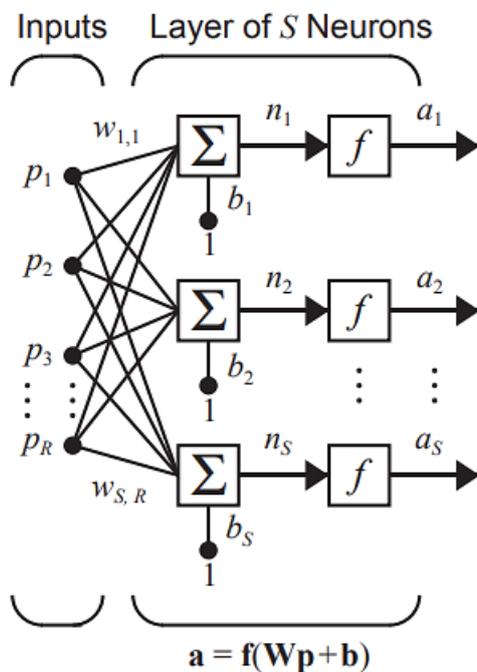


Figura 3.6: Layer of S Neurons

Ogni elemento del vettore di input \mathbf{p} è collegato a tutti i neuroni attraverso la matrice dei pesi \mathbf{W} :

$$\begin{bmatrix} w_{1,1} & w_{1,2} & \cdots & w_{1,R} \\ w_{2,1} & w_{2,2} & \cdots & w_{2,R} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ w_{S,1} & w_{S,2} & \cdots & w_{S,R} \end{bmatrix} \quad (3.5)$$

Ogni neurone è dotato di un bias b_i , un sommatore, una funzione di trasferimento f e produce un output a_i . L'insieme degli output forma il vettore di output \mathbf{a} . È comune osservare che il numero di input in uno strato possa essere diverso dal numero di neuroni (cioè R può essere diverso da S). Inoltre non è detto che i neuroni in uno strato debbano adottare la stessa funzione di trasferimento.

Considerando una rete con più strati, ogni layer ha la propria matrice dei pesi \mathbf{W} , il vettore di bias \mathbf{b} , un vettore di input netto \mathbf{n} e un vettore di output \mathbf{a} . Per distinguere tra i vari layer, si introducono delle notazioni aggiuntive utilizzando gli apici. Ad esempio, la matrice dei pesi per il primo layer sarà indicata come \mathbf{W}^1 , mentre per il secondo layer sarà \mathbf{W}^2 . Questa convenzione viene comunemente utilizzata in reti neurali multistrato come illustrato nella Figura 3.7, un esempio di rete a tre strati.

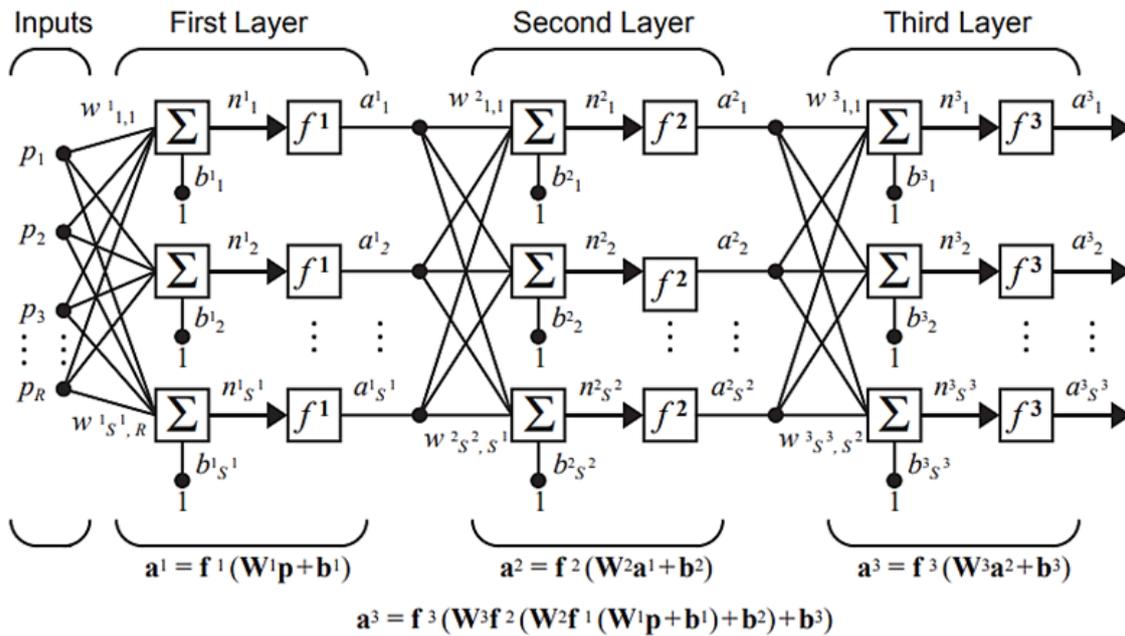


Figura 3.7: Three-Layer Network

Il layer il cui output è l'output finale della rete è chiamato "output layer", mentre gli altri strati sono definiti "hidden layer". Nella rete illustrata, il layer 3 è il layer di output, mentre i layer 1 e 2 sono layer nascosti. È importante notare come gli output di un layer interno diventino input per il layer successivo. Ad esempio, il layer 2 può essere considerato come una rete a un solo strato con $R = S^1$ input, $S = S^2$ neuroni e una matrice dei pesi $S^2 \times S^1 \mathbf{W}^2$.

Come detto precedentemente il numero di input e output è definito dalle specifiche del problema, e le caratteristiche desiderate dell'output influenzano la se-

lezione della funzione di trasferimento per il layer di output. Inoltre, quando si utilizzano più strati, non è sempre possibile ottenere direttamente dal problema esterno il numero di neuroni necessari nei layer nascosti. In effetti, pochi problemi consentono di prevedere con precisione il numero ottimale di neuroni da utilizzare in un layer nascosto, poiché questa è un'area attiva di ricerca in cui la scelta dipende da vari fattori e spesso richiede sperimentazione e ottimizzazione. L'uso dei bias fornisce alla rete una variabile aggiuntiva e rende le reti più potenti, ma a volte vengono omessi per ridurre il numero di parametri della rete e semplificare il processo di addestramento.

Le reti esaminate fino a qui sono caratterizzate da una struttura puramente feed-forward cioè senza connessioni retroattive. Esistono anche reti ricorrenti ossia reti con feedback in cui alcuni degli output sono connessi agli input nella rete stessa.

3.3 Training della rete

Nel contesto delle reti neurali, l'addestramento è un processo cruciale che coinvolge la regolazione e modifica dei pesi e dei bias della rete al fine di eseguire un compito specifico. Nell'ambito dell'apprendimento supervisionato, alla rete viene fornita un insieme di esempi di comportamento corretto della rete (set di addestramento). Questo set è composto da coppie di dati input-output corretti, rappresentati come

$$\{\mathbf{p}_1, \mathbf{t}_1\}, \{\mathbf{p}_2, \mathbf{t}_2\}, \dots, \{\mathbf{p}_q, \mathbf{t}_q\}$$

dove \mathbf{p}_q rappresenta l'input per la rete e \mathbf{t}_q rappresenta l'output desiderato (o target) corrispondente. Durante il processo di addestramento, gli input vengono applicati alla rete e i suoi output sono confrontati con i target corrispondenti. L'obiettivo è aggiornare i pesi e i bias della rete in modo tale che gli output prodotti si avvicinino sempre più ai target desiderati. Questo processo può essere iterativo e coinvolgere l'uso di algoritmi di ottimizzazione per minimizzare la discrepanza

tra gli output della rete e i target rappresenta dalla funzione costo o obiettivo.

L'obiettivo quindi dell'addestramento di una rete neurale è di trovare i valori ottimali dei pesi che minimizzano una funzione di perdita. Le reti neurali sono addestrate tramite varianti di ottimizzazione della discesa del gradiente, un processo che coinvolge il calcolo delle derivate parziali di una funzione di perdita tramite la retropropagazione. Sulla base di queste derivate, l'algoritmo di ottimizzazione determina come aggiornare ciascuno dei parametri della rete in ogni iterazione. Questo processo si svolge in due fasi cicliche:

- la propagazione in avanti (forward step)
- la retropropagazione

Nella fase di propagazione in avanti, gli input vengono elaborati attraverso la rete neurale e si generano gli output corrispondenti. Successivamente, si calcola l'errore tra gli output della rete e quelli desiderati, usando la funzione di perdita. Nella fase di retropropagazione, l'errore viene propagato all'indietro nella rete, partendo dall'ultimo strato fino al primo, usando la regola della catena per calcolare le derivate parziali della funzione di perdita rispetto ai parametri. Queste derivate vengono poi usate dall'algoritmo di discesa del gradiente per aggiornare i pesi di ciascun neurone, in modo da ridurre l'errore e migliorare le prestazioni della rete.

3.3.1 Backpropagation

Una volta selezionata una funzione di perdita appropriata, le derivate parziali di tale funzione rispetto ai pesi o ai bias coinvolti nel modello possono essere calcolate utilizzando la regola della catena della differenziazione. Il backpropagation è un algoritmo efficiente che sfrutta questa regola della catena con un ordine

specifico delle operazioni. La regola della catena può essere rappresentata come:

$$\frac{\partial z}{\partial x} = \frac{\partial z}{\partial y} \frac{\partial y}{\partial x} \quad (3.6)$$

Questo principio può essere applicato per trovare le derivate parziali della funzione di perdita rispetto a qualsiasi peso w_{ij} che connette un neurone j a un neurone precedente i in tutto il modello. Supponendo che o_j sia una funzione di attivazione che trasforma l'output z_j in unità di output, la derivata parziale della funzione di perdita rispetto a quel peso è:

$$\frac{\partial L}{\partial w_{ij}} = \frac{\partial L}{\partial o_j} \frac{\partial o_j}{\partial z_j} \frac{\partial z_j}{\partial w_{ij}} \quad (3.7)$$

O, più generalmente:

$$\frac{\partial L}{\partial w_{ij}} = \sum_p \left[\frac{\partial L}{\partial o_p} \left(\sum_k \frac{\partial o_p}{\partial z_k} \frac{\partial z_k}{\partial w_{ij}} \right) \right] \quad (3.8)$$

dove \sum_p è la sommatoria su tutte le unità di output e \sum_k è la sommatoria su tutti gli input che contribuiscono a o_p . Tuttavia, questa formula può semplificarsi notevolmente poiché molti termini nella sommatoria diventano nulli.

3.3.2 Ottimizzazione

Nel contesto delle reti neurali, minimizzare la funzione di perdita è un'operazione di ottimizzazione non convessa, che richiede algoritmi di ottimizzazione robusti. Questo perché esistono molteplici minimi locali che possono intrappolare l'ottimizzazione, impedendo di raggiungere il minimo globale nella funzione di perdita.

Stochastic Gradient Descent

SGD (Stochastic Gradient Descent) [23] è una approssimazione stocastica della discesa del gradiente di base, in cui i gradienti vengono stimati attraverso la retropropagazione. L'idea fondamentale di questa tecnica è che il gradiente rappresenta la media dei gradienti calcolati su un minibatch di dati. Ad ogni passo dell'algoritmo, si seleziona casualmente un minibatch di esempi $B = \{x^{(1)}, \dots, x^{(m)}\}$ dall'insieme di addestramento. Il minibatch è quindi un sottoinsieme dei dati di addestramento utilizzati per calcolare il gradiente e aggiornare i pesi del modello. In pratica, invece di utilizzare l'intero set di dati di addestramento per ogni passaggio dell'ottimizzazione, si utilizza solo un piccolo minibatch di dimensione m . Tipicamente, la dimensione del minibatch m è scelta come un numero relativamente ridotto di esempi, variando da 1 a qualche centinaio. In questo metodo, tutti i parametri θ vengono aggiornati utilizzando l'algoritmo seguente:

$$\theta \leftarrow \theta - \eta g \quad (3.9)$$

dove g è la stima del gradiente per ogni parametro e η è il learning rate. Questo metodo iterativo ha diversi vantaggi rispetto alla "semplice" discesa del gradiente, dove la derivata viene calcolata sull'intero set di addestramento. In primo luogo, utilizzando la discesa del gradiente stocastica, il tempo di calcolo per ogni aggiornamento non cresce con il numero di esempi di addestramento, ma solo con la dimensione del minibatch m . Inoltre, la SGD introduce rumore, anche quando si è vicini a un minimo. Questo impedisce all'algoritmo di convergere a un minimo locale, ma potrebbe anche prevenire qualsiasi convergenza del tutto. Per prevenire ciò, il tasso di apprendimento viene comunemente ridotto man mano che l'addestramento progredisce.

Momentum

Il momentum⁴ è un'estensione del SGD (Stochastic Gradient Descent) per accelerare il processo di apprendimento. Questo metodo accumula una media mobile esponenzialmente decrescente dei gradienti passati e continua a muoversi nella loro direzione. Formalmente, l'algoritmo del momento introduce una variabile v rappresentando la direzione e la velocità con cui i parametri si spostano nello spazio dei parametri. Gli aggiornamenti dei parametri avvengono secondo la seguente formula:

$$\theta \leftarrow \theta + v \quad (3.10)$$

dove v è definito come:

$$v \leftarrow \alpha v - \eta g \quad (3.11)$$

L'iperparametro $\alpha \in [0, 1)$ determina il decadimento esponenziale della velocità e g è la stima del gradiente calcolata su un minibatch. Se α è più grande, i contributi dei gradienti precedenti saranno più grandi. Questo generalmente porta a tempi di convergenza più veloci.

Per una trattazione più completa e la descrizione di ulteriori algoritmi di ottimizzazione si rimanda al [24].

3.3.3 Overfitting e Underfitting

Durante la fase di training se il dataset è limitato o poco diversificato, la rete rischia di non generalizzare⁵ bene su nuovi dati e può incorrere nell'overfitting.

L'overfitting si verifica quando la rete neurale mostra una buona performance sui

⁴Il termine "momentum" è ispirato all'analogia fisica, dove il gradiente negativo agisce come una forza che sposta una particella attraverso lo spazio dei parametri, in accordo con le leggi del moto di Newton.

⁵La generalizzazione si riferisce alla capacità di una rete di apprendere da un insieme di dati di addestramento e di applicare efficacemente ciò che ha imparato a nuovi dati. In altre parole, un modello che generalizza bene è in grado di fare previsioni accurate su input che non ha mai incontrato prima.

dati di addestramento, ma non su nuovi input non visti precedentemente. Questo si traduce in un errore di addestramento notevolmente inferiore rispetto all'errore di generalizzazione, misurato su un set di test o di validazione. Al contrario, l'underfitting si verifica quando il modello non riesce a raggiungere un livello accettabile di accuratezza sui dati di addestramento. Tipicamente, l'overfitting si verifica quando il numero di parametri della rete (e quindi la sua capacità) è eccessivamente elevato rispetto al numero di campioni di addestramento. Questo porta la rete a memorizzare eccessivamente i dettagli specifici dei dati di addestramento anziché apprendere i "concetti generali" che possono essere applicati in modo efficace ai nuovi dati. Per risolvere l'underfitting, è necessario aumentare la capacità del modello, ad esempio utilizzando reti neurali più profonde o più ampie. Tuttavia, è importante notare che questo può anche aumentare il rischio di overfitting. Pertanto, è essenziale trovare un equilibrio ottimale nella complessità del modello. Quanto esposto finora è schematizzato nel grafico della Figura 3.8.

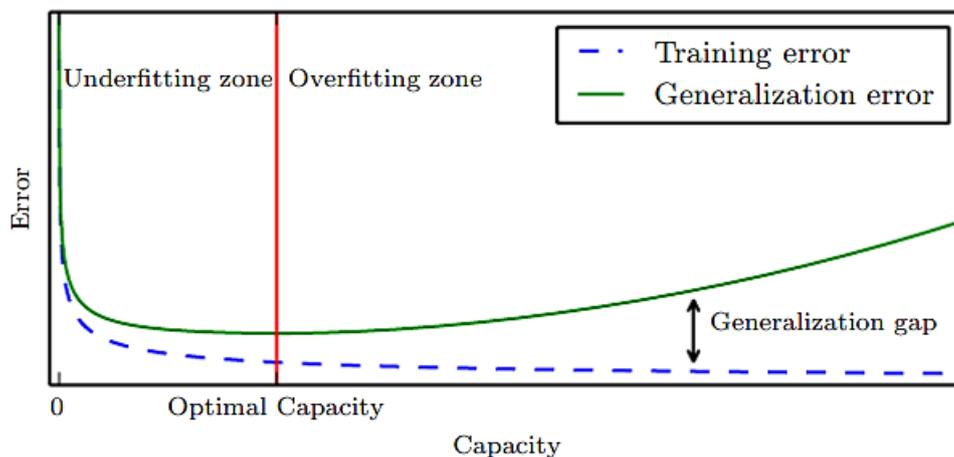


Figura 3.8: Relazione tra capacità ed errore

Per prevenire l'overfitting, esistono varie tecniche di regolarizzazione. Tuttavia, una trattazione approfondita di queste tecniche esula dagli obiettivi di questa tesi, che si limita a fornire una panoramica dei concetti basilari. Per un'analisi più ap-

profondità, si rimanda alla trattazione di riferimento [24]. Le tecniche principali sono:

- **Data augmentation:** Questo metodo è efficace per favorire una migliore generalizzazione del modello. Consiste nel generare e aggiungere dati al set di addestramento. Nell'ambito dell'identificazione delle immagini, questo processo è relativamente semplice ad esempio tramite capovolgimenti, traslazioni e rotazioni delle immagini. Queste variazioni sono comuni nel mondo reale e un set di dati aumentato può fornire una rappresentazione più accurata del rumore presente.
- **Dropout:** Azzerare casualmente alcune connessioni durante l'addestramento ad ogni iterazione per evitare l'overfitting.
- **Penalità per la norma dei parametri:** questa tecnica consiste nell'aggiungere una penalità alla funzione di perdita per limitare la capacità del modello. La funzione di perdita totale diventa quindi $L = L(\theta, y) + \alpha\rho(\theta)$, dove $L(\theta, y)$ è la funzione di perdita e $\rho(\theta)$ è un fattore che dipende solo dal valore dell'insieme di parametri θ . Nella regolarizzazione L^2 o decadimento dei pesi la penalità è proporzionale al quadrato della norma dei pesi ($\rho(\theta) = \frac{1}{2}|w|_2^2$). Questo favorisce pesi più piccoli, spingendo il modello ad aggiornare i parametri in direzioni che contribuiscono a ridurre la funzione obiettivo. Nella regolarizzazione L^1 , $\rho(\theta) = |w|_1$. Questa regolarizzazione porterà a una soluzione più sparsa con alcuni pesi che diventano zero, fungendo da meccanismo di selezione delle caratteristiche.

Capitolo 4

Metodo assiomatico-asintotico

I modelli strutturali avanzati, introdotti attraverso la formulazione unificata, si basano spesso su espansioni complete di un certo ordine, coinvolgendo tutte le variabili di spostamento di una specifica teoria di ordine. Tuttavia, è importante riconoscere che non tutte le variabili hanno la stessa rilevanza nella previsione del comportamento meccanico di una struttura, e alcuni termini potrebbero essere trascurabili senza compromettere la precisione della soluzione.

In questo contesto, il Metodo Assiomatico-Asintotico (AAM) si presenta come un approccio vantaggioso in quanto consente di esaminare l'influenza specifica di ciascuna variabile di una teoria avanzata sulla soluzione strutturale. Tale metodo è particolarmente utile nello sviluppo di teorie ridotte dei modelli strutturali, mantenendo al contempo un elevato livello di precisione rispetto alle espansioni complete. Questa capacità di ridurre significativamente i costi computazionali associati all'analisi strutturale è uno degli elementi fondamentali del metodo. Il termine "assiomatico-asintotico" è coniato in virtù del fatto che tale metodologia si basa su ipotesi assiomatiche al fine di ottenere risultati asintotici concentrandosi sull'analisi dell'impatto delle varie variabili che costituiscono un modello strutturale.

La sequenza operativa base è delineata di seguito ed è completamente sovrappo-
nibile sia per modelli unidimensionali che bidimensionali:

1. I dati del problema come condizioni al contorno, materiali e carichi applicati sono fissati
2. Viene scelto un set di variabili di output (es. σ, u)
3. Utilizzo della CUF per le teorie considerate
4. Viene fissata una teoria utilizzata come riferimento, spesso associata alla teoria di ordine massimo in questo contesto. Considerando ad esempio come riferimento una teoria del secondo ordine nel caso 1D, è possibile tabellare la posizione di ciascuna variabile di spostamento come illustrato a seguire.

Tabella 4.1: Notazione di layout che definisce la posizione di ciascuna variabile di spostamento nel caso di un modello 1D di secondo ordine

N=0	N=1		N=2		
u_{x_1}	u_{x_2}	u_{x_3}	u_{x_4}	u_{x_5}	u_{x_6}
u_{y_1}	u_{y_2}	u_{y_3}	u_{y_4}	u_{y_5}	u_{y_6}
u_{z_1}	u_{z_2}	u_{z_3}	u_{z_4}	u_{z_5}	u_{z_6}

5. Generazione di tutti i modelli ridotti considerando ogni combinazione di termini attivati (rappresentati con triangoli neri) e termini disattivati (rappresentati con triangoli bianchi). È altresì permesso mantenere attivi specifici termini in tutti i modelli.

Tabella 4.2: Rappresentazione simbolica di un modello 1D ridotto del secondo ordine

u_x	\triangle	\blacktriangle	\triangle	\blacktriangle	\triangle	\blacktriangle
u_y	\blacktriangle	\blacktriangle	\triangle	\triangle	\blacktriangle	\triangle
u_z	\triangle	\blacktriangle	\blacktriangle	\triangle	\blacktriangle	\triangle

Il modello 1D riportato nella Tabella 4.2 si riferisce al seguente campo di spostamento:

$$\begin{aligned}
 u_x &= \quad + xu_{x_2} + \quad + x^2u_{x_4} + \quad + z^2u_{x_6} \\
 u_y &= u_{y_1} + xu_{y_2} + \quad + \quad + xzu_{y_5} \\
 u_z &= \quad + xu_{z_2} + zu_{z_3} + \quad + xzu_{z_5}
 \end{aligned}
 \tag{4.1}$$

6. Determinazione del Best Theory Diagram che che sarà trattato nella sezione 4.1

4.1 Best Theory Diagram

Il Best Theory Diagram (BTD) è una rappresentazione derivata da un metodo assiomatico-asintotico che offre una visione chiara della relazione tra la complessità matematica di un modello e la precisione ottenuta. Nel diagramma, l'asse delle ascisse rappresenta un parametro indicativo dell'errore percentuale o di qualsiasi misura di accuratezza del modello, mentre sull'asse delle ordinate sono riportati il numero corrispondente di gradi di libertà o termini attivi.

Il BTD è la curva composta da tutti i modelli che forniscono l'errore minimo con il minor numero di variabili. Considerando l'accuratezza, non esistono modelli con meno variabili rispetto a quelli sul BTD. Allo stesso modo considerando il numero di variabili, non esistono modelli con un'accuratezza superiore a quelli sul BTD. La Figura 4.1 mostra un tipico andamento ad iperbole del BTD, il quale consente di modificare arbitrariamente una data teoria al fine di ottenere un minor numero di termini per un dato errore (spostamento verticale, ΔN), oppure di aumentare l'accuratezza mantenendo costanti i costi computazionali (spostamento orizzontale, Δerrore).

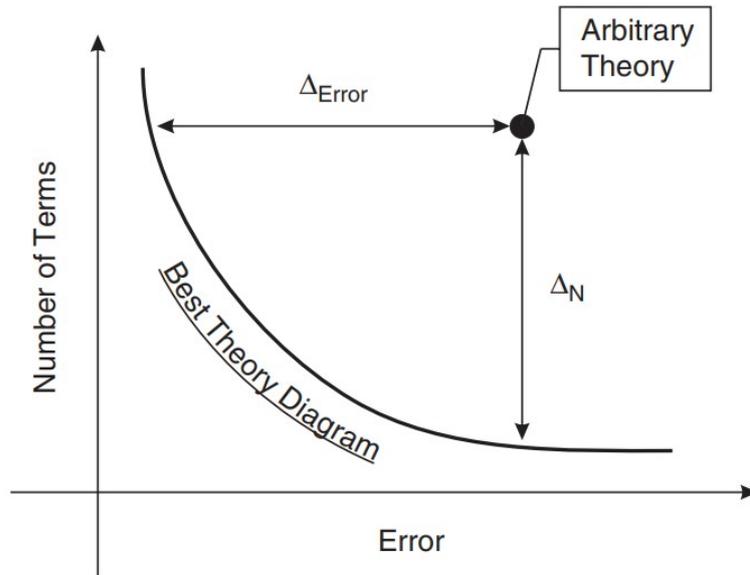


Figura 4.1: Best Theory Diagram

L'informazione derivante dal diagramma è preziosa: riducendo il numero di gradi di libertà, è possibile ottenere una precisione accettabile con un costo computazionale minore. È importante notare che il diagramma si riferisce ad un insieme di teorie applicate a un caso strutturale particolare. Cambiando il problema, come i vincoli, i carichi specifici o la geometria, e la variabile di output del MAAA, come ad esempio le componenti di spostamento o stress, o le frequenze naturali, utilizzate per calcolare l'errore rispetto a una soluzione di riferimento, il diagramma cambia di conseguenza.

Nel confronto tra teorie di ordini diversi, si osserva tipicamente che le teorie di ordine superiore tendono a produrre soluzioni più accurate. È cruciale sottolineare che non è sufficiente selezionare un elevato numero di gradi di libertà in modo arbitrario, presumendo che ciò conduca automaticamente a un modello migliore. Mentre passare da un ordine minore a un altro maggiore porterebbe risultati migliori, la vera sfida risiede nel determinare quale specifico modello di un determinato ordine sia più adatto a una particolare situazione strutturale.

4.2 BTM tramite Reti Neurali

Il principale scopo del BTM è valutare le prestazioni di una qualsiasi teoria strutturale data. Data l'enorme quantità di teorie presenti nella letteratura, il BTM può essere utile per tracciare linee guida sul loro utilizzo. Le sfide associate a questo compito sono numerose: per ottenere il BTM, sono necessarie migliaia di analisi per un dato problema. Inoltre, poiché i parametri del problema possono variare, il BTM varia di conseguenza. Questo può accadere anche quando cambia il parametro di controllo, ad esempio, frequenza, spostamento, stress.

Per ottenere il BTM con molte features viene utilizzato il Machine Learning tramite reti neurali artificiali. Attraverso la creazione di una vasta quantità di dati con la CUF che genera le equazioni di governo per qualsiasi teoria data, si addestrano le reti neurali considerando una vasta gamma di parametri di input, come lo spessore, la curvatura e le proprietà dei materiali. Inoltre, è possibile allenare più reti neurali e considerare vari parametri di controllo, quali frequenza, stress e spostamento. I risultati di ciascuna analisi della CUF-AAM diventano quindi, l'input per addestrare la rete neurale.

Analizzando casi relativi alle beam l'obiettivo è costruire il BTM con meno di 2^{15} analisi⁶ considerando, ad esempio, un quarto ordine al fine di ridurre i tempi di calcolo associati all'elevato costo computazionale. In prospettiva di calcoli più complessi, il tempo richiesto potrebbe diventare insostenibile. Tuttavia, l'utilizzo di una rete neurale opportunamente addestrata offre la possibilità di ridurre notevolmente i tempi di calcolo e la dipendenza da simulazioni tramite programmi agli elementi finiti. Il vantaggio principale risiede nella necessità di eseguire simulazioni solo all'inizio e poi utilizzarle per addestrare la rete, ottimizzando così tutte le successive applicazioni.

⁶A rigore le analisi sarebbero 2^{45} ma nella versione del codice MUL2 i termini omologhi nelle varie componenti sono attivati insieme

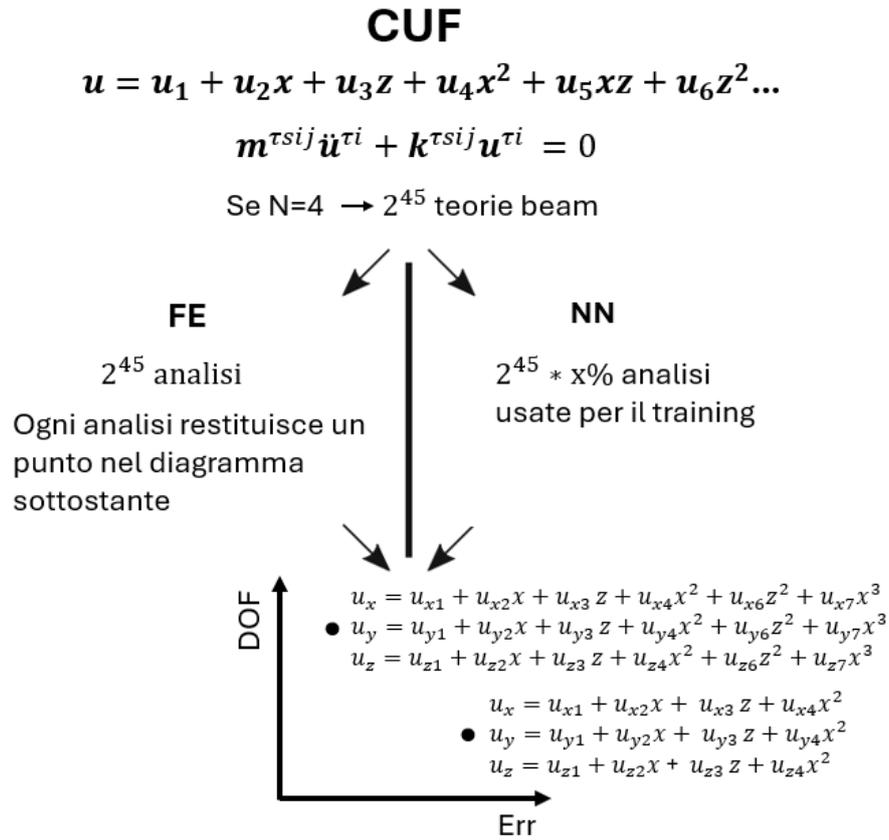


Figura 4.2: CUF-NN

In Figura 4.3 viene riportato un diagramma di flusso che evidenzia il processo di creazione del Best Theory Diagram utilizzando le reti neurali.

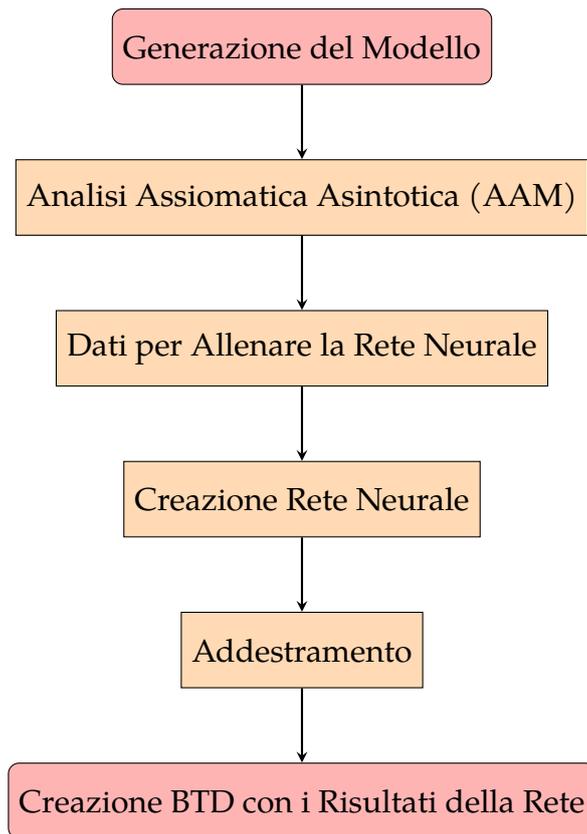


Figura 4.3: Processo di creazione del BTM utilizzando l'applicazione di reti neurali

4.2.1 Rete neurale sviluppata per un singolo input - il modello strutturale

La rete neurale è stata implementata utilizzando Python. Il processo inizia con la lettura dei dati (risultati analisi assiomatica asintotica), seguita dalla loro pre-elaborazione e dalla divisione in set di addestramento e test. Successivamente, viene creato e compilato un modello sequenziale, che viene poi addestrato e valutato. I risultati vengono infine tracciati e utilizzati per predire errori su nuovi dati, identificando le migliori teorie basate sulla loro performance.

Il codice utilizza il machine learning per predire errori nei modelli strutturali e quindi identifica le migliori configurazioni di modelli in base alle previsioni di errore. Per fare ciò, si utilizza una rete neurale feed-forward multistrato, adottando l'errore quadratico medio come funzione obiettivo e l'ottimizzatore Adam per

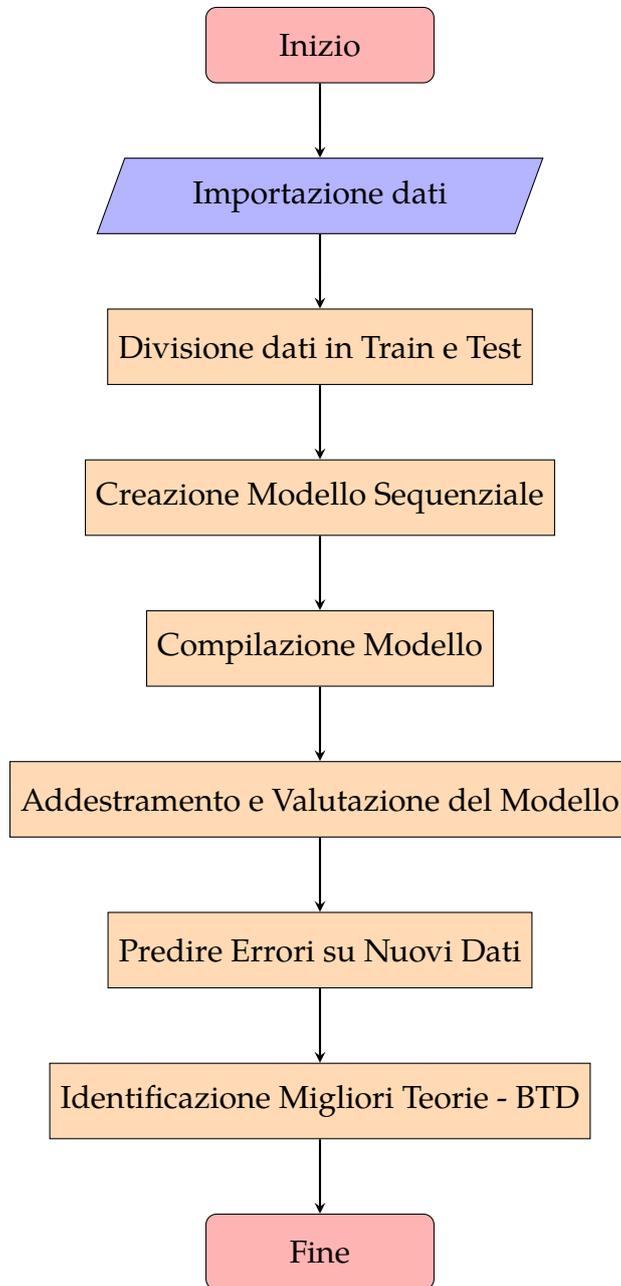


Figura 4.4: Diagramma di flusso del processo di sviluppo e valutazione di un modello di rete neurale per la previsione degli errori in teorie strutturali.

minimizzare l'errore. L'input alla rete consiste in una codifica binaria della teoria considerata con 1 e 0 per indicare una variabile di spostamento generalizzato attiva o inattiva, rispettivamente, mentre l'output è un vettore che quantifica l'errore predetto. L'obiettivo è quello di riprodurre i migliori risultati considerando il 20% delle analisi usati come training della rete. Per ottimizzare la configurazione della rete neurale, si esplorano diverse combinazioni di numero di neuroni per layer, numero di epoche e dimensioni del batch attraverso il metodo di grid search. Questo approccio consente di effettuare una ricerca esaustiva su una griglia predeterminata di questi parametri, anziché testare ciascuna combinazione separatamente, migliorando l'efficienza della selezione del modello.

Vengono analizzate tre specifiche configurazioni di reti neurali ciascuna composta da sette strati, in cui l'ultimo strato ha solo un neurone. Le configurazioni differiscono solo nel numero di neuroni nel layer di input e in quelli hidden. Esse sono le seguenti:

- Una rete con 64 neuroni sia nel layer di input che nei hidden layers (64x6).
- Una rete con 128 neuroni sia nel layer di input che nei hidden layers (128x6).
- Una rete con i primi tre layer composti ciascuno da 128 neuroni, seguiti da tre layer composti ciascuno da 64 neuroni (128x3, 64x3).

Le epoche considerate per l'addestramento sono [50, 100, 200, 300, 400] e le dimensioni dei batch esplorate sono [16, 24, 32, 64], con un validation split di [0.1, 0.15, 0.2, 0.25]. Ogni combinazione di parametri viene utilizzata per addestrare la rete, al fine di identificare la configurazione ottimale che minimizza il test loss.

Poiché si vuole confrontare diverse configurazioni di modelli, il parametro random state, che controlla la casualità della divisione dei dati in set di addestramento e validazione, è fissato. Ciò assicura che la divisione dei dati sia costante attraverso i diversi esperimenti, permettendo un confronto equo tra le diverse

configurazioni di rete.

4.2.2 Rete Neurale avanzata per l'analisi delle vibrazioni libere: modello strutturale, snellezza e condizioni al contorno

Questo codice, in ambiente python, è sviluppato per valutare e prevedere l'errore medio nelle prime dieci frequenze di vibrazione libera in travi rettangolari, considerando varie condizioni al contorno (incastro e appoggio semplice) e il rapporto L/h . Il processo si articola in fasi ben definite, ognuna delle quali contribuisce alla preparazione e all'analisi dei dati tramite un modello di rete neurale.

- **Integrazione di Caratteristiche Aggiuntive:** Al dataset originale, composto dai modelli strutturali, vengono aggiunti due attributi significativi: il rapporto L/h e un indicatore numerico per il tipo di vincolo (0 per l'incastro, 1 per l'appoggio semplice), come mostrato nella Figura 4.8. Questo arricchimento dei dati consente alla rete neurale di assimilare come le variazioni nelle dimensioni fisiche e nei vincoli influenzino le frequenze di vibrazione libera.

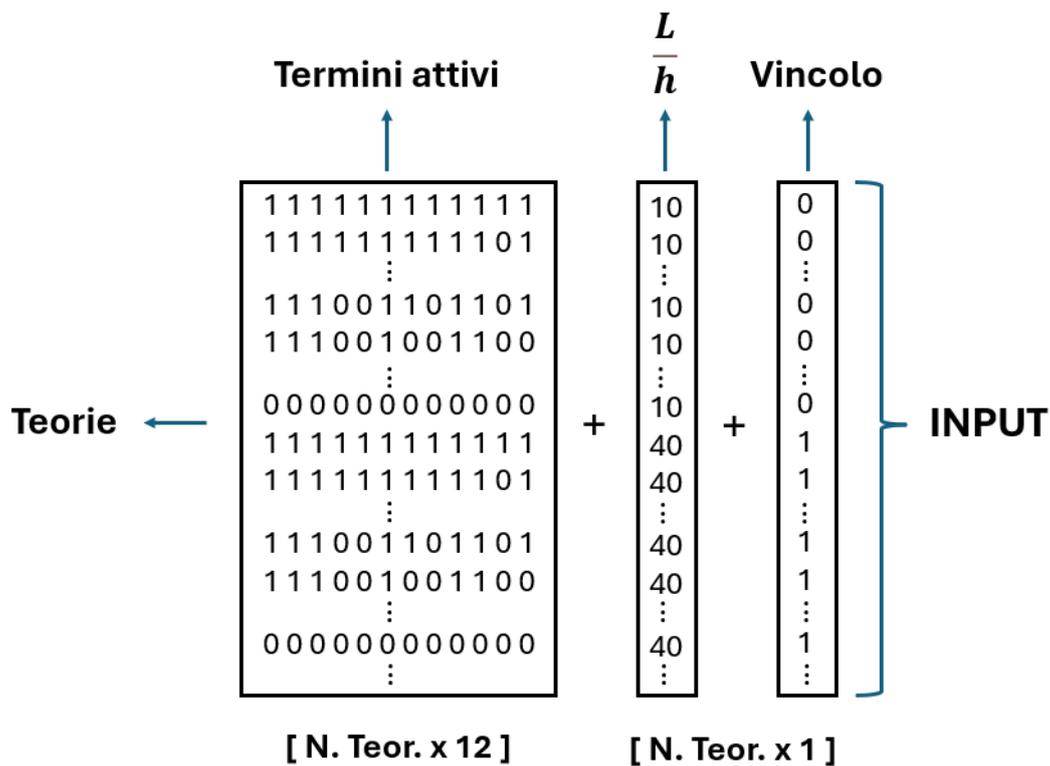


Figura 4.5: Input della rete neurale

- **Unificazione e Normalizzazione dei Dati:** I dati raccolti da diverse configurazioni vengono aggregati in un unico dataset, creando così una base ampia e variegata per l'addestramento. Successivamente, i dati vengono normalizzati con il StandardScaler per armonizzare le scale di misura delle diverse caratteristiche. Questo passaggio è cruciale per ottimizzare il processo di apprendimento, garantendo che nessuna variabile abbia un'influenza sproporzionata sul modello a causa della sua scala di grandezza.
- **Architettura e Addestramento della Rete Neurale:** Viene configurata una rete neurale sequenziale dotata degli stessi hidden layer e meccanismi di regolarizzazione L2 di 4.2.1, mirati a mitigare il rischio di overfitting. Viene utilizzato come ottimizzatore Adam con un learning rate pari a 0.001. La struttura mostrata in 4.3 è pensata specificamente per predire l'errore medio nelle frequenze di vibrazione, basandosi sull'apprendimento dalle caratte-

ristiche di input, inclusi i nuovi attributi relativi alle dimensioni fisiche e ai vincoli.

Tabella 4.3: Struttura rete neurale

Layer	Neuroni	Funzione di attivazione	Regolarizzazione
Dense (input)	128	ReLu	L2=0.001
Dense	128	ReLu	L2=0.001
Dense	128	ReLu	L2=0.001
Dense	64	ReLu	L2=0.001
Dense	64	ReLu	L2=0.001
Dense	64	ReLu	L2=0.001
Dense (output)	1	ReLu	Nessuna

- Preparazione dei Dati per l'Addestramento: La normalizzazione uniforme le diverse scale dei dati (ad esempio, la vasta gamma di valori per il rapporto L/h rispetto alla natura binaria dell'indicatore di vincolo), facilitando l'addestramento della rete. Questa omogeneizzazione è fondamentale per un efficace processo di apprendimento automatico, consentendo una più rapida convergenza e un miglioramento delle prestazioni del modello.

Nella procedura di ottimizzazione della rete neurale, analogamente a quanto fatto nel paragrafo 4.2.1, si applica una tecnica di grid search. L'obiettivo è affinare le prestazioni della rete, suddividendo il dataset in una porzione per il training, corrispondente al 20%, e una per il test, pari all'80%. I parametri selezionati per questa ottimizzazione includono:

- Numero di epoche: valori considerati sono 400, 500, 600, 700, 800. Questa ampia gamma di epoche permette di valutare l'effetto della durata dell'allenamento sulla precisione del modello.
- Dimensione del batch: fissata a 32 e 64. Questa scelta è dettata dalla ne-

cessità di gestire un volume di dati di training aumentato, ottimizzando al contempo il carico computazionale.

- Percentuale del validation split: esaminati i valori 0.1, 0.15, 0.2, 0.25. Questo parametro aiuta a monitorare e prevenire il sovra-adattamento durante l'allenamento, utilizzando una porzione dei dati di training per la validazione.

4.2.3 Ottimizzazione della Selezione dei Dati di Training per Migliorare la Precisione delle Reti Neurali

Quando i dati di training sono selezionati in modo casuale, i modelli con errori estremamente bassi sono relativamente rari nella popolazione totale dei modelli, la loro probabilità di essere inclusi nel dataset di training è minima. Di conseguenza, la rete neurale ha poche opportunità di "apprendere" da questi casi critici, portando a una generale mancanza di addestramento. Inoltre, questo fenomeno indica che esiste un bias di selezione nei dati di training. I modelli che presentano errori molto bassi tendono a essere quelli situati agli estremi della distribuzione della popolazione dei modelli. Se questi modelli estremi non sono adeguatamente rappresentati nel training set, la rete neurale non sarà in grado di generalizzare efficacemente su di essi, portando a discrepanze significative nei risultati quando questi modelli vengono valutati. Con 4.096 modelli disponibili ad esempio, si osserva che la distribuzione del numero di possibili combinazioni per un dato numero di termini attivi assume una forma a campana. In altre parole, ci sono le teorie che comprendono 8 o 9 termini che presentano il maggior numero di combinazioni possibili, mentre agli estremi, come per teorie con 14 termini, il numero di combinazioni si riduce drasticamente, a soli 15 in questo esempio e questo viene mostrato in Figura 4.6.

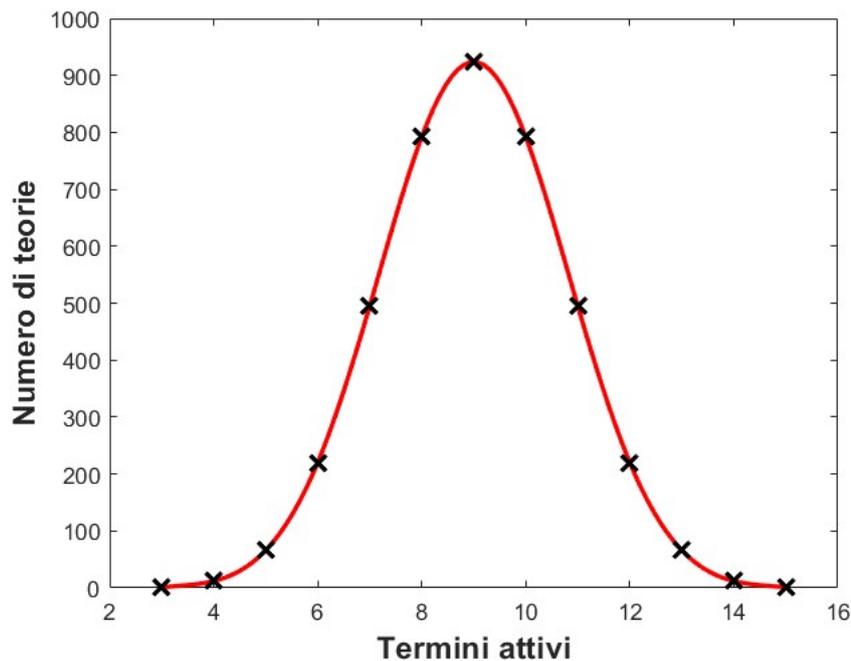


Figura 4.6: Distribuzione delle teorie in funzione del numero di termini attivi

Questo scenario rappresentato porta a un forte sbilanciamento nella rappresentazione delle categorie di teorie sul totale. Ci saranno quindi, tante teorie sia con pochi che con molti gradi di libertà che presentano errori significativi. Di conseguenza, quando si analizzano modelli che hanno percentuali di errore molto basse, questi rappresentano solo una piccola frazione del dataset complessivo. L'importanza di includere questi modelli rari nel training set diventa evidente quando si considera la capacità della rete di riprodurre accuratamente la curva desiderata (BTD). Se la rete neurale ha la fortuna di "vedere" questi modelli durante il training, c'è una maggiore probabilità che riesca a modellare accuratamente tali casi. Tuttavia, a causa della selezione casuale dei dati di training, spesso questi modelli critici vengono trascurati, compromettendo la capacità della rete di generalizzare correttamente su tutto lo spettro di possibili configurazioni. Il problema sollevato riguarda la rappresentanza dei dati nel contesto dell'addestramento di reti neurali. Tuttavia, questa discussione suggerisce che la questione principale non è tanto la qualità dei risultati, che si riconosce essere soddisfacente, ma piuttosto se sia

possibile o meno migliorare ulteriormente questi risultati. Ciò porta alla considerazione se accontentarsi dei risultati attuali oppure esplorare strategie per affinare l'accuratezza delle previsioni (predictions).

L'output della rete deve essere estremamente accurato poiché, in effetti, dall'output della rete si ricava la teoria con il minimo errore. In altre parole, quando si crea il Best Theory Diagram (BTD) tramite una rete neurale, si forniscono in input tutti i modelli e tutte le sequenze di termini, e per ciascuno di essi si ottiene il parametro di valutazione come l'errore medio sulle frequenze. Tuttavia, è essenziale che vi sia una corrispondenza tra la teoria reale, che riflette l'errore minimo, e la teoria derivata dalla predizione della rete, che corrisponde all'errore calcolato. Questo perché l'obiettivo finale è quello di utilizzare una delle teorie migliori ottenute, e ciò richiede che essa sia in sintonia con la teoria reale associata al minimo errore.

Invece di affidarsi a un campionamento puramente casuale, si suggerisce di adottare una strategia che preveda la selezione sia casuale ma di una percentuale di modelli per ciascuna categoria, inversamente proporzionale alla loro frequenza sul totale. Tale approccio mira a incrementare la rappresentatività dei modelli meno frequenti ma significativi, come quelli a 14 gradi di libertà, nel dataset di training.

Questa strategia solleva questioni significative riguardo al costo computazionale, specialmente considerando che, in teoria, i modelli con un numero maggiore di gradi di libertà comportano un costo computazionale superiore. Tuttavia, a causa del modo in cui è strutturato il codice, tutti i modelli hanno lo stesso costo computazionale. Ciò è dovuto al fatto che le teorie ridotte vengono ottenute a partire dalla teoria completa andando a penalizzare la matrice di rigidità. In pratica, questo significa che laddove un grado di libertà viene silenziato, nella matrice di rigidità vengono azzerati i termini sulla diagonale principale che vi corrispondono. Di conseguenza, la dimensione della matrice di rigidità rimane invariata,

e ciò porta a una situazione in cui non esiste praticamente alcuna differenza a livello di costo computazionale tra i diversi modelli. Quindi, anche se includere un numero maggiore di modelli potrebbe comportare un costo computazionale più elevato, è importante considerare che questo rischio potrebbe pesare maggiormente sull'intera procedura assiomatica-asintotica. Pertanto, è fondamentale considerare il bilanciamento tra l'accuratezza della predizione e l'efficienza computazionale nella selezione dei modelli da includere nel training della rete. Per affrontare questa sfida, è essenziale adottare strategie di selezione dei dati di training più sofisticate che garantiscano una rappresentazione equilibrata di tutti i tipi di modelli, inclusi quelli con errori estremamente bassi. Questo potrebbe includere tecniche come il campionamento stratificato, dove i modelli vengono selezionati per il training in modo proporzionale alla loro distribuzione nella popolazione totale.

Di seguito è riassunto il processo per implementare la selezione dei dati di training basata sulla distribuzione non uniforme dei dati:

- Preparazione Iniziale: I percorsi dei file contenenti i dati numerici sono organizzati e pronti per l'analisi.
- Estrazione e Organizzazione dei Dati: Viene eseguita la lettura dei dati dai file specificati, estraendo modelli e errori associati. Questi sono poi organizzati in matrici, con aggiunte informazioni su spessore e tipo di vincolo per ogni teoria, permettendo un'analisi dettagliata basata sulle caratteristiche fisiche della trave.
- Determinazione del Numero di Termini Attivi: Il processo calcola il numero di termini attivi per ciascun modello, basato sulla somma degli "1" presenti in ogni riga delle matrici dei modelli. Questo numero indica i gradi di libertà attivi per ciascun modello, essenziale per identificarne la complessità.

- Selezione Basata su Probabilità Inverse: Calcolando la frequenza delle teorie per ogni numero di termini attivi, si stabilisce una probabilità di selezione inversamente proporzionale, dando priorità alle teorie meno rappresentate. Vengono escluse le teorie con 15 e 3 gradi di libertà
- Normalizzazione e Selezione dei Dati di Addestramento: Le probabilità calcolate vengono normalizzate e applicate per selezionare una frazione specifica del dataset totale (il 20%) per l'addestramento. La selezione avviene in modo che rifletta la distribuzione desiderata, basata sulle probabilità inverse.
- Preparazione Finale dei Dati: Dopo la selezione, i dati sono pronti per essere suddivisi in set di addestramento e di test. Questo include la scalatura dei dati per l'addestramento basata sulle caratteristiche fisiche e sui vincoli delle travi, assicurando che il modello possa apprendere da un'ampia varietà di casi.

Questa metodologia assicura che teorie meno rappresentate abbiano una maggiore probabilità di essere incluse nel set di training, aiutando la rete ad apprendere e migliorando la sua capacità di generalizzazione.



Figura 4.7: Diagramma di flusso del processo di selezione dati di training con distribuzione non uniforme: dalla preparazione iniziale alla preparazione finale dei dati, evidenziando i passaggi chiave per assicurare una rappresentazione equilibrata delle teorie nel set di addestramento.

4.2.4 Rete Neurale avanzata per l'analisi delle vibrazioni libere: modello strutturale, snellezza, rapporto h/t e condizioni al contorno

Una volta identificata la configurazione ottimale per il campionamento dei dati di training, la rete neurale è stata opportunamente adattata per includere, oltre alle teorie strutturali, la snellezza e le condizioni di vincolo anche il rapporto $\frac{h}{t}$ dove h rappresenta l'altezza della sezione trasversale e t lo spessore. Il metodo adottato per la generazione dell'input segue fedelmente la procedura descritta nel

paragrafo 4.2.2 con la lettura e l'elaborazione dei dati da vari file BTB, contenenti informazioni sulle frequenze naturali e sulle varie teorie strutturali. I modelli strutturali, insieme ai rapporti $\frac{L}{h}$ e $\frac{h}{t}$ e alle condizioni di vincolo vengono concatenati per formare un unico set di dati di input come mostrato in Figura 4.8. Con questo tipo di input verrà analizzata una trave a sezione quadrata cava e una trave con sezione a C in cui sia le dimensioni della sezione che la lunghezza possono essere considerati.

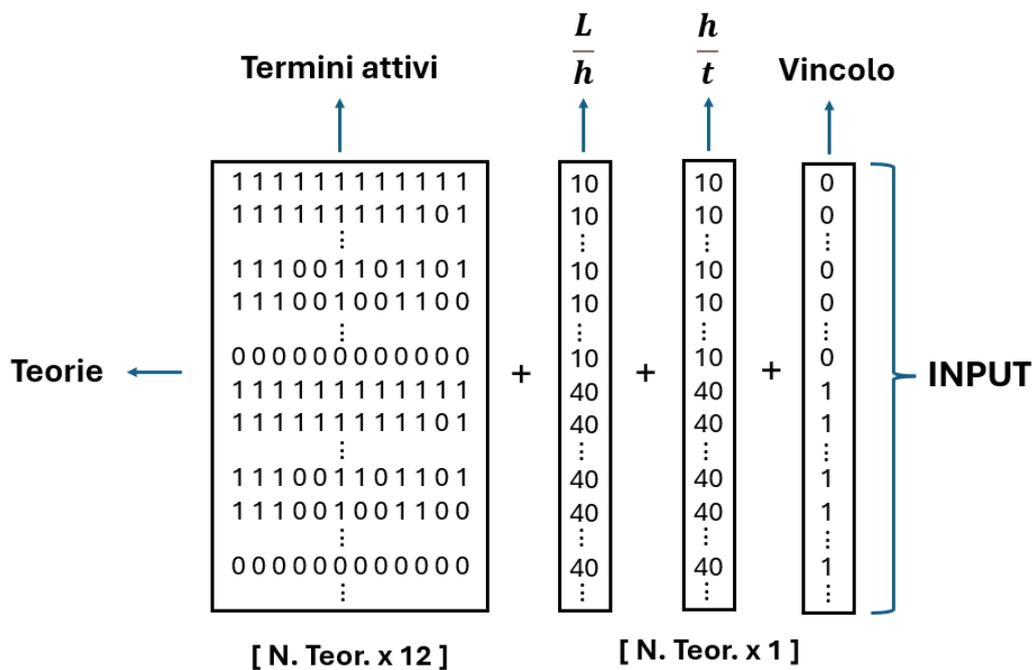


Figura 4.8: Input della rete neurale

4.2.5 Integrazione di una rete neurale convoluzionale e densa

Le reti sviluppate fino ad adesso sono reti valide e allenate per uno specifico caso strutturale. Per considerare un approccio più generale che includa la descrizione di più sezioni di diversi casi strutturali si è implementato un modello più complesso che combina una rete neurale convoluzionale (CNN) con una rete neurale densa (DNN). Questo approccio ibrido trae vantaggio dalla rappresentazione delle sezioni strutturali sotto forma di immagini, ciascuna raffigurante una gri-

glia dove i pixel indicano la presenza (valore 1) o l'assenza di materiale (valore 0). Le dimensioni della griglia sono uniformi per tutte le immagini, permettendo al modello di apprendere le caratteristiche distintive delle diverse configurazioni strutturali. Per ogni caso, comprensivo di 4096 teorie viene utilizzata una sola immagine invece di 4096 immagini per ogni teoria al fine di ridurre la complessità computazionale, i requisiti di memoria e semplificare e ottimizzare la rete. Dopo l'elaborazione delle immagini attraverso il ramo CNN, gli output di questo primo ramo di rete vengono associati a ciascuna delle teorie strutturali corrispondenti e ai dati relativi al rapporto L/h , e alle condizioni di vincolo costruendo il set di dati di input del ramo DNN. In questo modo, ogni teoria sarà accompagnata dall'output corrispondente del ramo CNN relativo all'immagine del suo gruppo.

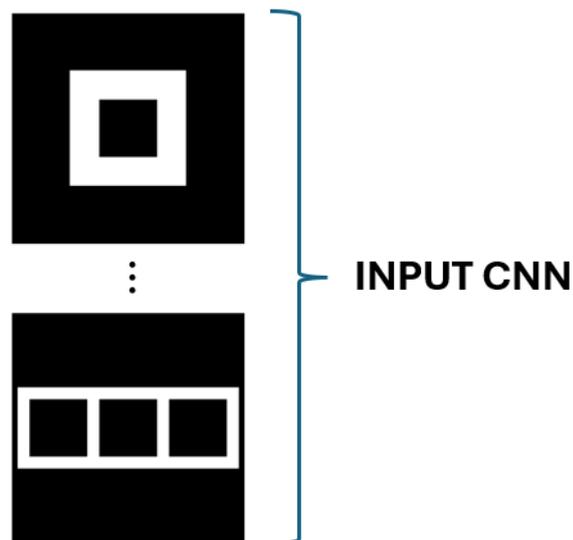


Figura 4.9: Input del ramo CNN della rete neurale

Tabella 4.4: Ramo CNN

Layer	Filtri (dimensioni) / Neuroni	Funzione di attivazione	Fasi di elaborazione
Convoluzionale	32 (3x3)	ReLu	
MaxPooling2D	-	-	Pooling 2x2
BatchNormalization	-	-	-
Convoluzionale	64 (3x3)	ReLu	
MaxPooling2D	-	-	Pooling 2x2
BatchNormalization	-	-	-
Flatten	-	-	-
Dropout	-	-	Tasso 0.7
Dense	128	LeakyReLU	

La Tabella 4.5 presenta la struttura del ramo DNN, che elabora sia i dati delle teorie strutturali sia le caratteristiche delle immagini estratte dal ramo CNN. Questo ramo è composto da diversi layer densi con funzioni di attivazione ReLu e regolarizzazione L2, finalizzati a minimizzare la complessità del modello e prevenire l'overfitting. Il layer di output produce la previsione finale sull'errore di modello, utilizzando una funzione di attivazione ReLu per garantire che le previsioni siano non negative.

Tabella 4.5: Ramo DNN

Layer	Neuroni	Funzione di attivazione	Regolarizzazione
Dense	128	ReLu	L2=0.001
Dense	128	ReLu	L2=0.001
Dense	128	ReLu	L2=0.001
Dense	128	ReLu	L2=0.001
Dense	128	ReLu	L2=0.001
Dense	128	ReLu	L2=0.001
Dense	64	ReLu	L2=0.001
Dense (output)	1	ReLu	Nessuna

La Tabella 4.6 mostra i parametri di addestramento usati nella rete neurale.

Tabella 4.6: Parametri addestramento

Validation split	0.1
Epoche	900
Batch size	32

Nel modello sono impiegati callback come EarlyStopping e ReduceLROnPlateau per ottimizzare il processo di addestramento, fermandolo quando non si osservano miglioramenti significativi e adattando il tasso di apprendimento per evitare di rimanere bloccati in minimi locali. I dati di addestramento sono scelti con una probabilità di selezione inversamente proporzionale, dando priorità alle teorie meno rappresentate.

Capitolo 5

Risultati preliminari di analisi strutturali statiche e dinamiche

Nel corso di questa fase introduttiva, sono state condotte analisi statiche strutturali e dinamiche mediante l'utilizzo del software MUL2, sviluppato dal Gruppo di Ricerca MUL2 presso il Politecnico di Torino. Questo strumento si compone di diversi file di input, nei quali vengono inseriti i parametri necessari per condurre l'analisi. Tali file vengono successivamente elaborati dal software, dando luogo a file di post-processing che contengono i risultati dettagliati dell'analisi. L'obiettivo di questo capitolo è replicare alcuni dei risultati delle analisi statiche descritte in [25], nonché delle analisi dinamiche riportate in [26] e [27]. Inoltre, si intende ricavare il Best Theory Diagram (BTD) sia per il caso statico che dinamico di free vibration, come descritto rispettivamente in [28] e [29], al fine di verificare la bontà dei risultati ottenuti e confermare l'affidabilità del software impiegato.

5.1 Analisi statiche

5.1.1 Trave con sezione quadrata

Si consideri una trave incastrata ad un'estremità con la geometria della sezione trasversale mostrata nella Figura 5.1. La sezione trasversale ha un'altezza h di 0,2

m, e la larghezza b è uguale a h . Il rapporto di snellezza, rappresentato da L/h , è stato fissato a 10. Una forza concentrata F_z viene applicata in $[0, L, 0]$ verso il basso con un modulo di 50 [N]. I dati relativi al materiale sono i seguenti: il modulo di Young E è pari a 75 [GPa]; il rapporto di Poisson ν è pari a 0,33. Inoltre, si consideri il sistema di riferimento x - y - z con origine al centro della trave nella sezione di incastro. L'asse y è opportunamente orientato lungo la direzione principale della trave, mentre il piano x - z definisce la sezione trasversale della struttura.

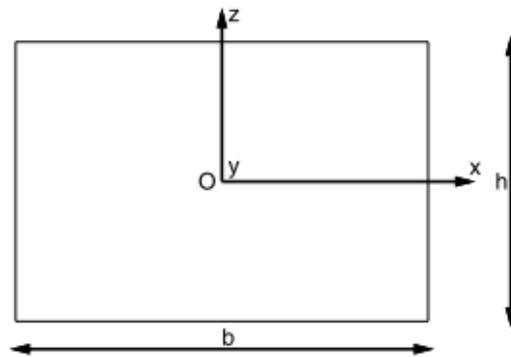


Figura 5.1: Sezione rettangolare

Il tipo di analisi statiche effettuate prevede l'utilizzo di diverse discretizzazioni lungo l'asse longitudinale della trave con lo scopo di valutare lo spostamento u_z nello stesso punto di applicazione del carico. Nello specifico, sono stati esaminati tre distinti numeri di elementi di tipo B4 lungo l'asse y : 5, 10 e 40. Per l'espansione sulla sezione è stata adottata la configurazione con un elemento Q9. Nella tabella seguente vengono riportati i risultati.

Tabella 5.1: Influenza del numero di elementi su u_z per diversi modelli di trave con sezione quadrata e rapporto $L/h = 10$.

N. Elemen.	5	10	40
$u_z \times 10^5 = -1.333$ [m]			
N=2 [25]	-1.320	-1.327	-1.330
N=4 [25]	-1.323	-1.330	-1.333
N=2	-1.319	-1.326	-1.329
N=4	-1.322	-1.329	-1.332

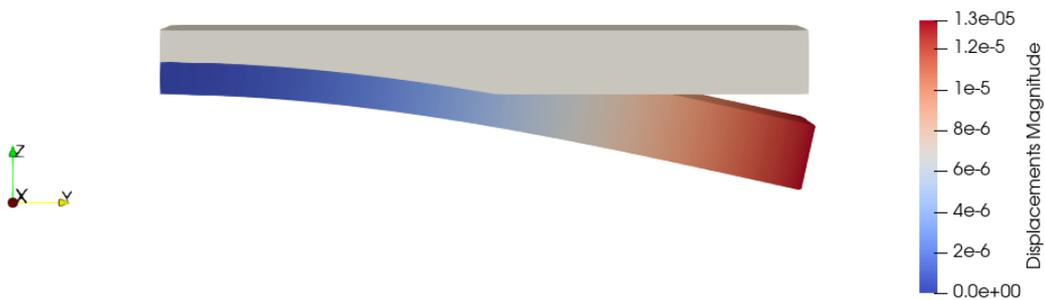


Figura 5.2: Deflessione della trave con 40 elementi B4 lungo l'asse y relativa al modello TE4

5.1.2 Trave con sezione quadrata cava

In questo studio, viene analizzata una sezione trasversale cava di forma quadrata con entrambe le estremità bloccate. La geometria della sezione trasversale è illustrata nella Figura 5.3. Il rapporto lunghezza-altezza (L/h) è fissato a 20, mentre il rapporto altezza-spessore (h/t) è 10, con l'altezza (h) pari a 1 m. Un carico puntuale ($F_z = 1$ N) viene applicato alla coordinata $[0, L/2, -h/2]$. Il materiale è lo stesso del caso precedente 5.1.1.

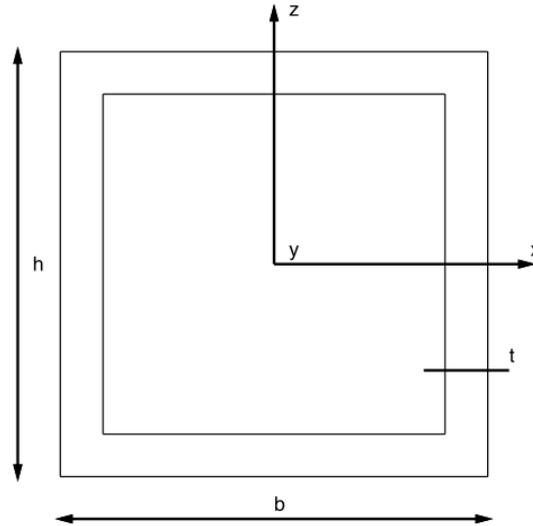


Figura 5.3: Sezione quadrata cava

Sono state impiegate tre discretizzazioni nella sezione trasversale, come illustrato nella Figura 5.4. Nello specifico, sono state implementate espansioni di Taylor e di Lagrange. La prima con ordine del modello 4, 8 e 11 mentre la seconda con 8, 9 e 11 elementi Q9, rispettivamente. Va notato che la distribuzione 8 L9 è simmetrica, mentre le distribuzioni 9 L9 e 11 L9 sono state impiegate con l'intento di catturare in modo più accurato il comportamento strutturale nelle immediate vicinanze del punto di applicazione del carico.

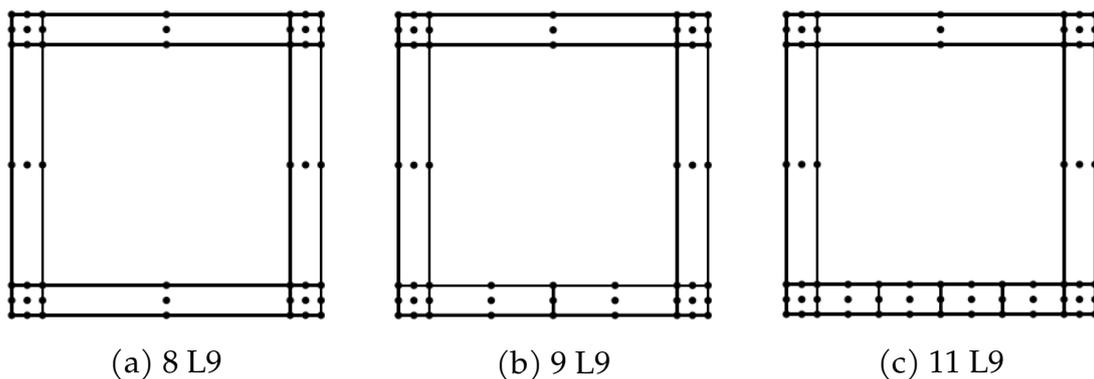


Figura 5.4: Distribuzione degli elementi lungo la sezione

La Tabella 5.2 presenta lo spostamento del punto in cui è applicato il carico, u_z e i gradi di libertà di ciascun modello considerato. Per l'analisi comparativa, si fa

riferimento al modello solido ottenuto mediante la costruzione del modello agli elementi finiti in MSC Nastran, nonché ai modelli di tipo Taylor e Lagrange.

Tabella 5.2: Influenza del numero di elementi su u_z per diversi modelli di trave con sezione quadrata

	DOF's	$u_z \times 10^8$ [m]
SOLID	128952	1.374
Taylor		
N = 4 [25]	1395	1.209
N = 8 [25]	4185	1.291
N = 11 [25]	7254	1.309
N = 4	1395	1.209
N = 8	4185	1.285
N = 11	7254	1.309
Lagrange		
8 L9 [25]	4464	1.277
9 L9 [25]	5022	1.308
11 L9 [25]	6138	1.326
8 L9 Fig.5.4 a	4464	1.277
9 L9 Fig.5.4 b	5022	1.308
11 L9 Fig.5.4 c	6138	1.326

Dai risultati ottenuti, emerge come le teorie avanzate sulle travi (Refined Beam Theories) consentano di ottenere risultati simili a quello del modello solido. Il costo computazionale dei modelli trave è significativamente inferiore rispetto a quello richiesto dal modello tridimensionale (3D). In particolare i modelli basati su Lagrange sono in grado di ricavare soluzioni più accurate rispetto a quelli basati su Taylor. Ciò è dovuto alla possibilità di distribuire in modo adeguato i punti di Lagrange per migliorare la soluzione al problema specifico infatti una distribuzione adeguata degli elementi L9 nella sezione trasversale risulta effica-

ce nel migliorare l'accuratezza della soluzione. Al contrario, il modello di Taylor distribuisce uniformemente raffinamento lungo la sezione trasversale, senza distinguere tra zone poco deformate e altamente deformate.

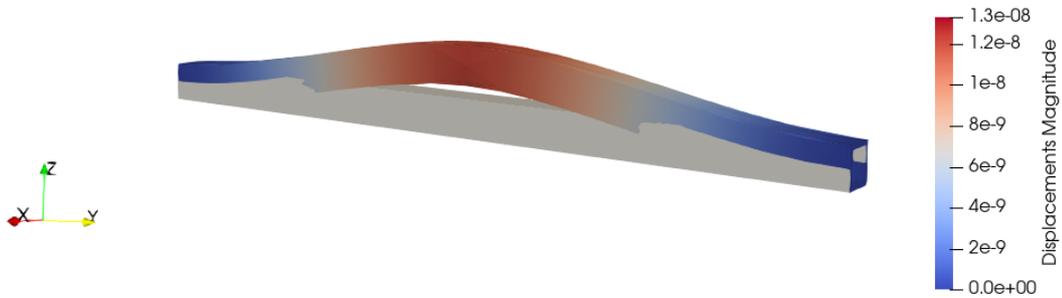


Figura 5.5: Deflessione della trave relativa al modello 11 L9

5.2 Analisi vibrazioni libere

5.2.1 Trave con sezione rettangolare

In questo paragrafo, si procede con un'analisi dinamica in particolare alle vibrazioni libere al fine di determinare le frequenze proprie della struttura presa in esame. Il soggetto dell'analisi è una trave avente una lunghezza L pari a 10 m con sezione rettangolare caratterizzata dalle dimensioni a e b rispettivamente di 1 m e 0.1 m come mostrato in Figura 5.6. La trave è incastrata ad un estremo e libera nell'altro. Il materiale impiegato è isotropo, con un modulo elastico E pari a 69 GPa, un poisson ratio ν di 0.33 e una densità ρ di $2700 \text{ Kg}/\text{m}^3$. Viene fissato sistema di riferimento con l'origine posizionata all'incastro, al centro della sezione, mentre l'asse y coincide con la direzione longitudinale della trave.

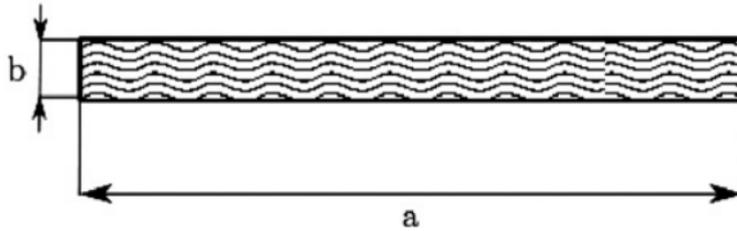


Figura 5.6: Sezione rettangolare della trave

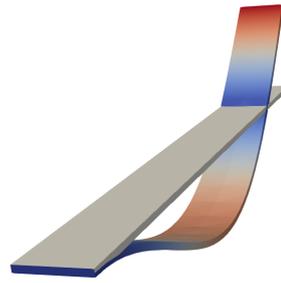
Nella Tabella 5.3 vengono riportate le prime 4 frequenze naturali della struttura in esame, calcolate mediante l'utilizzo di modelli basati su espansioni di Taylor di ordine 2, 3 e 4. I risultati ottenuti sono confrontati con la soluzione di riferimento ottenuta tramite il metodo degli elementi finiti tridimensionali (3D FEM) e con i valori riportati in [27].

Tabella 5.3: Prime quattro frequenze proprie di una trave rettangolare incastrata ad un estremo calcolate con differenti modelli strutturali

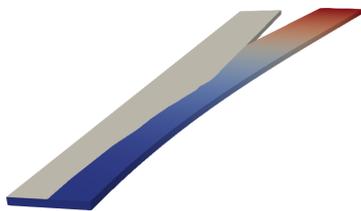
Modelli	Frequenze naturali [Hz]			
	1°	2°	3°	4°
3D FEM	0.8228	5.1521	8.1362	14.429
N=2 [27]	0.8318	5.2117	8.1529	14.6444
N=3 [27]	0.8263	5.1748	8.1447	14.4927
N=4 [27]	0.8255	5.1702	8.1443	14.4793
N=2	0.8306	5.2030	8.1368	14.6191
N=3	0.8250	5.1664	8.1287	14.4684
N=4	0.8242	5.1613	8.1278	14.4538



(a) Forma modale fuori dal piano valla
 $f = 0.8242$ Hz



(b) Forma modale fuori dal piano alla f
 $= 5.1613$ Hz



(c) Forma modale nel piano alla f =
 8.1278 Hz



(d) Forma modale fuori dal piano alla f
 $= 14.4538$ Hz

Figura 5.7: Forme modali della trave relativa al modello Taylor di ordine $N=4$

5.2.2 Multi-bay box beam

La struttura in esame è una trave semplicemente appoggiata ad entrambi gli estremi con la sezione trasversale di tipo multi-bay come rappresentato nella Figura 5.8. Le dimensioni della sezione trasversale sono $a = 0,38$ m e $b = 0,14$ m con uno spessore t di $0,02$ m e una lunghezza totale di $L = 10a$. Il materiale impiegato è una lega di alluminio caratterizzata da un modulo elastico $E = 75$ GPa, coefficiente di Poisson $\nu = 0.33$ e densità $\rho = 2700$ kg/m³.

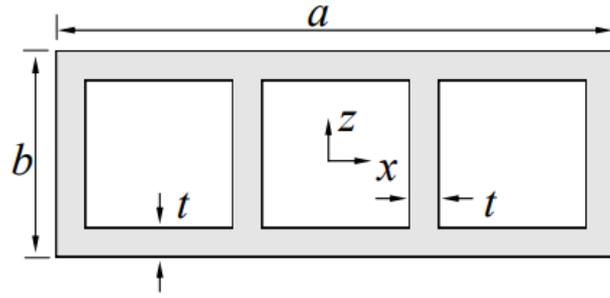
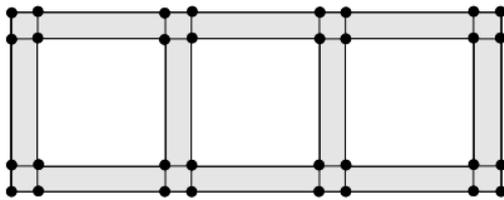
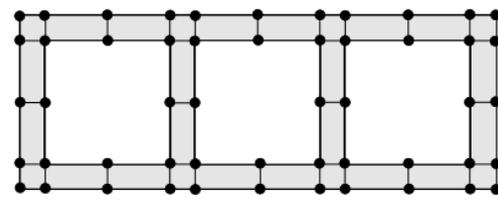


Figura 5.8: Sezione della Multi-bay box beam

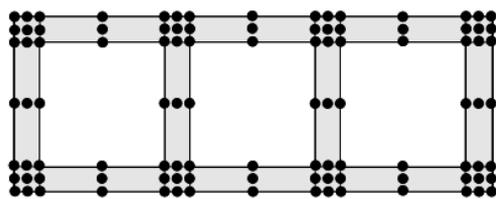
Per condurre l'analisi delle vibrazioni libere, sono state impiegate quattro diverse discretizzazioni LE nella sezione, mostrate nella Figura 5.9. Lungo l'asse longitudinale della trave (asse y) sono stati utilizzati complessivamente 20 elementi di tipo B4.



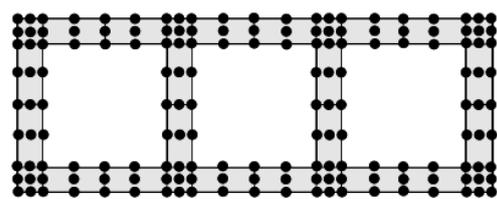
(a) 18 L4



(b) 28 L4



(c) 18 L9



(d) 28 L9

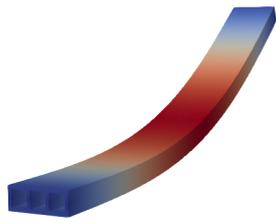
Figura 5.9: Multi-bay box and relativi modelli LE

La Tabella 5.4 mostra le frequenze naturali della struttura in esame calcolate secondo i diversi modelli presentati. Tali risultati sono successivamente confrontati con

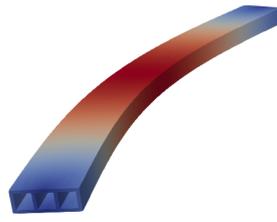
i dati ottenuti dagli stessi modelli riportati in [26] e con quelli ottenuti utilizzando il codice FEM 3D Nastran.

Tabella 5.4: Prime nove frequenze naturali della Multi-bay box beam

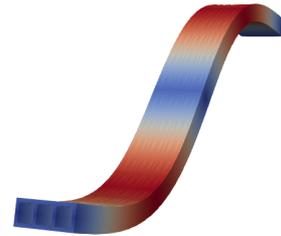
Modelli	Frequenze naturali [Hz]								
	1°	2°	3°	4°	5°	6°	7°	8°	9°
3D FEM [26]	29.435	66.420	115.670	248.670	252.950	275.050	433.070	510.810	528.870
18 L4 [26]	29.777	66.688	117.164	250.617	256.813	282.761	441.201	517.334	563.121
24 L4 [26]	29.551	66.517	116.223	249.470	254.551	281.994	436.805	513.677	557.610
18 L9 [26]	29.468	66.174	115.818	248.113	253.374	281.254	434.119	510.630	554.541
28 L9 [26]	29.435	66.426	115.671	248.763	433.169	276.265	426.923	511.195	534.016
18 L4	29.777	66.688	117.165	250.617	256.813	282.761	441.202	517.334	563.121
24 L4	29.551	66.518	116.224	249.470	254.552	281.995	436.806	513.677	557.611
18 L9	29.438	66.440	115.717	248.950	253.214	280.125	433.966	511.981	550.735
28 L9	29.435	66.426	115.672	248.764	252.967	276.266	433.170	511.195	534.014



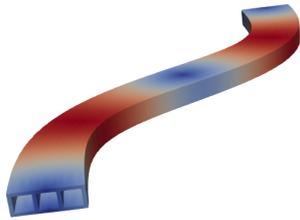
(a) $f = 29.435$ Hz



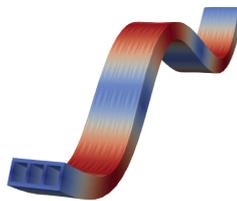
(b) $f = 66.426$ Hz



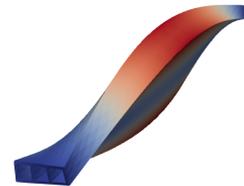
(c) $f = 115.67$ Hz



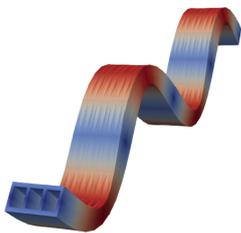
(d) $f = 248.76$ Hz



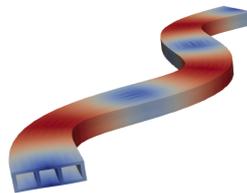
(e) $f = 252.97$ Hz



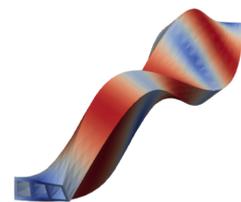
(f) $f = 276.27$ Hz



(g) $f = 433.17$ Hz



(h) $f = 511.2$ Hz



(i) $f = 534.02$ Hz

Figura 5.10: Prime 9 frequenze proprie della Multi-bay box beam relative al modello 28 L9

5.3 Analisi statiche AAM

Si procede ora con le analisi statiche per ricavare il best theory diagram per i casi considerati di seguito. La geometria considerata è un guscio rappresentato in figura 5.11 in cui $a = b$ e $R_\alpha = R_\beta = R$. Le proprietà del materiale sono $E1/E2 = 25$, $G_{12}/E2 = G_{13}/E2 = 0.5$, $G_{23}/E2 = 0.2$, $\nu = 0.25$ e $\rho = 2700 \text{ kg/m}^3$. Il carico è bi-sinusoidale e applicato sulla superficie superiore: $p_z = \hat{p}_z \sin\left(\frac{\pi\alpha}{a}\right) \sin\left(\frac{\pi\beta}{b}\right)$.

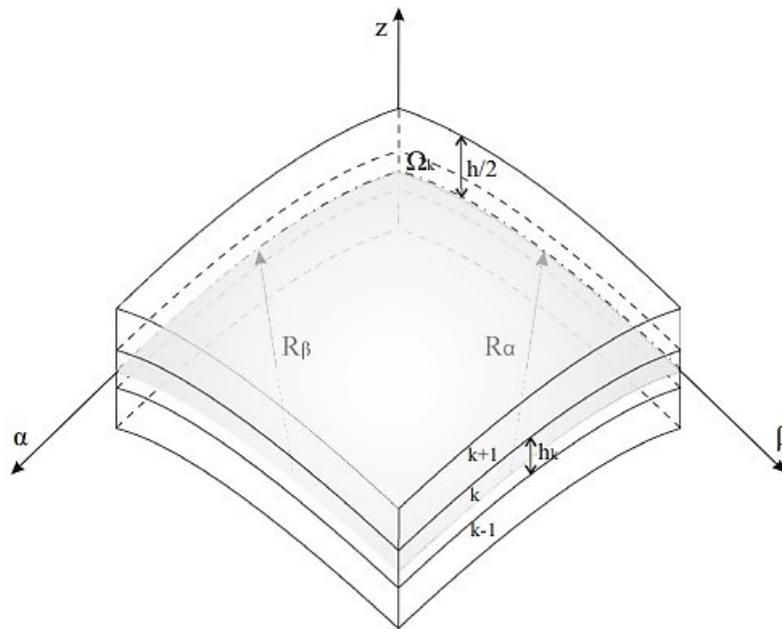


Figura 5.11: Geometria guscio

Dato che la struttura e il carico applicato mostrano una simmetria, è stato discretizzato soltanto un quarto del guscio utilizzando una mesh 4x4 composta da elementi Q9. Questa scelta di discretizzazione è stata adottata in quanto fornisce risultati sufficientemente accurati, come dimostrato in [30]. In tutti i casi, i tre termini costanti degli sviluppi, ovvero $u_{\alpha 1}$, $u_{\beta 1}$ e $u_{z 1}$, sono sempre presenti nei modelli ridotti per un totale di 2^{12} modelli. Tale scelta ha portato a una notevole riduzione del costo computazionale senza perdita significativa di informazioni, come confermato da studi precedenti che hanno evidenziato la presenza di tali termini costanti in quasi tutti i best models[28].

La notazione grafica per le best theories utilizza triangoli neri e bianchi per indicare rispettivamente termini attivi e inattivi. Come parametro di controllo per la valutazione dell'errore, è stato scelto il massimo valore di u_z calcolato a $z = 0$ cioè:

$$\text{Errore}[\%] = 100 \times \left| \frac{u_z - u_z^{N=4}}{u_z^{N=4}} \right| \quad (5.1)$$

Di seguito verranno presentati due casi con la stessa condizione di vincolo, che è il semplice appoggio, ma con due laminazioni differenti: una composta da strati orientati a $0^\circ/90^\circ/0^\circ$ e l'altra composta da strati orientati a $0^\circ/90^\circ/0^\circ/90^\circ$.

5.3.1 Simply-supported, $0^\circ/90^\circ/0^\circ$

La struttura del guscio presenta una laminazione simmetrica $0/90/0$, con vincolo di simply supported. Per discretizzare la struttura lungo lo spessore sono stati utilizzati tre elementi B4. Il rapporto tra il raggio di curvatura e il lato della struttura (R/a) è pari a 5, mentre il rapporto tra il lato della struttura e lo spessore (a/h) è stato variato, considerando un caso in cui è pari a 100 e un altro caso in cui è pari a 10. Questa scelta è stata fatta al fine di considerare gusci sia spessi che sottili e valutare il comportamento strutturale in entrambe le condizioni. Il modello adottato è del quarto ordine quindi $N = 4$.

Tabella 5.5: Best theories per laminazione $0^\circ/90^\circ/0^\circ$, $R/a = 5$, $a/h = 100$.

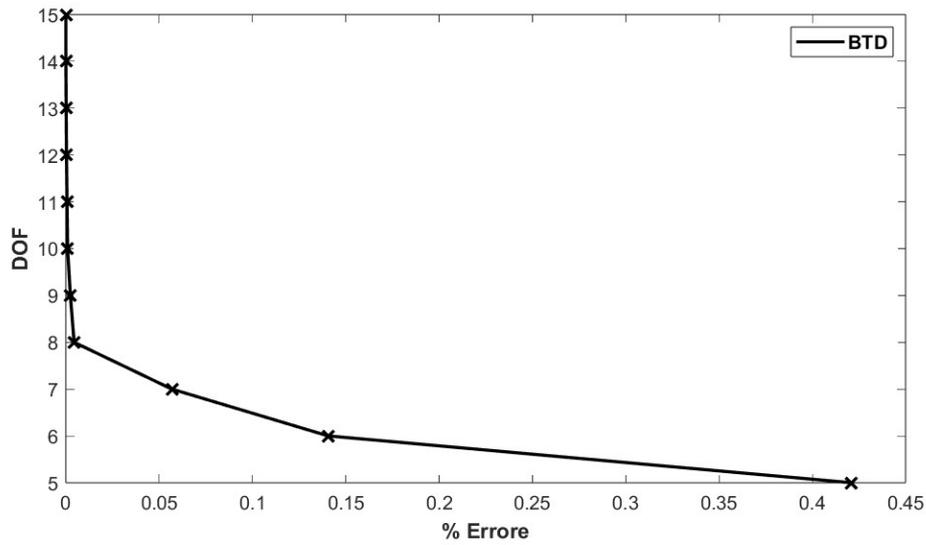
DOF	$u_{\alpha 1}$	$u_{\beta 1}$	$u_{z 1}$	$u_{\alpha 2}$	$u_{\beta 2}$	$u_{z 2}$	$u_{\alpha 3}$	$u_{\beta 3}$	$u_{z 3}$	$u_{\alpha 4}$	$u_{\beta 4}$	$u_{z 4}$	$u_{\alpha 5}$	$u_{\beta 5}$	$u_{z 5}$	%E
15	▲	▲	▲	▲	▲	▲	▲	▲	▲	▲	▲	▲	▲	▲	▲	0.000E+00
14	▲	▲	▲	▲	▲	▲	▲	▲	▲	▲	▲	▲	▲	▲	△	4.825E-06
13	▲	▲	▲	▲	▲	▲	▲	▲	▲	▲	▲	△	▲	▲	△	1.544E-04
12	▲	▲	▲	▲	▲	▲	▲	▲	▲	▲	△	△	▲	▲	△	3.233E-04
11	▲	▲	▲	▲	▲	▲	▲	▲	▲	▲	△	△	△	▲	△	6.137E-04
10	▲	▲	▲	▲	▲	▲	△	▲	▲	▲	△	△	△	▲	△	9.187E-04
9	▲	▲	▲	▲	▲	▲	△	▲	▲	▲	△	△	△	△	△	2.417E-03
8	▲	▲	▲	▲	▲	▲	△	△	▲	▲	△	△	△	△	△	4.398E-03
7	▲	▲	▲	▲	▲	▲	△	△	▲	△	△	△	△	△	△	5.679E-02
6	▲	▲	▲	▲	▲	△	△	△	▲	△	△	△	△	△	△	1.406E-01
5	▲	▲	▲	▲	▲	△	△	△	△	△	△	△	△	△	△	4.208E-01
	RF ₀ = 1.00			RF ₁ = 0.94			RF ₂ = 0.67			RF ₃ = 0.39			RF ₄ = 0.33			

Tabella 5.6: Best theories per laminazione $0^\circ/90^\circ/0^\circ$, $R/a = 5$, $a/h = 10$.

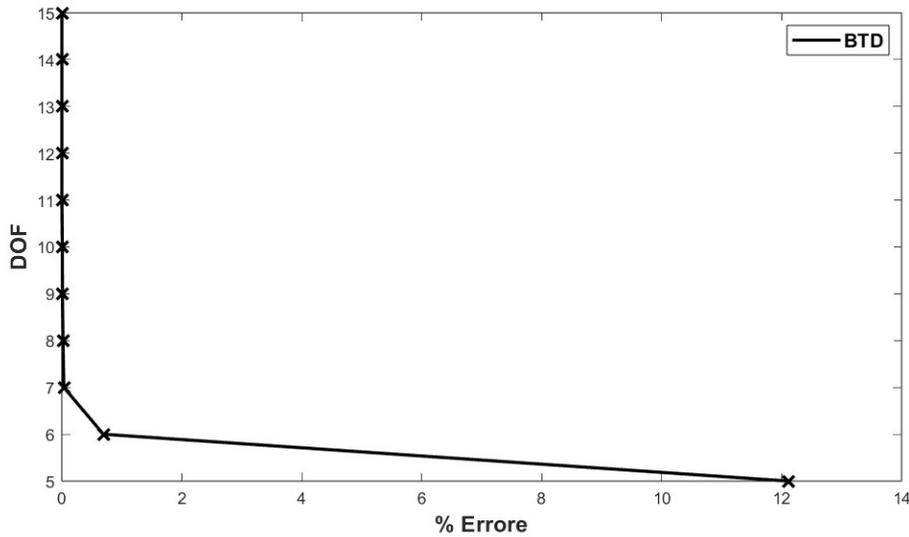
DOF	$u_{\alpha 1}$	$u_{\beta 1}$	$u_{z 1}$	$u_{\alpha 2}$	$u_{\beta 2}$	$u_{z 2}$	$u_{\alpha 3}$	$u_{\beta 3}$	$u_{z 3}$	$u_{\alpha 4}$	$u_{\beta 4}$	$u_{z 4}$	$u_{\alpha 5}$	$u_{\beta 5}$	$u_{z 5}$	%E
15	▲	▲	▲	▲	▲	▲	▲	▲	▲	▲	▲	▲	▲	▲	▲	0.000E+00
14	▲	▲	▲	▲	▲	▲	▲	▲	▲	▲	▲	▲	△	▲	▲	5.907E-05
13	▲	▲	▲	▲	▲	▲	▲	▲	▲	▲	▲	▲	▲	△	△	2.040E-04
12	▲	▲	▲	▲	▲	▲	▲	▲	▲	▲	▲	▲	△	△	△	2.625E-04
11	▲	▲	▲	▲	▲	▲	△	▲	▲	▲	▲	△	△	▲	△	2.998E-04
10	▲	▲	▲	▲	▲	△	▲	▲	▲	▲	△	△	△	▲	△	7.357E-03
9	▲	▲	▲	▲	▲	△	△	▲	▲	▲	▲	△	△	▲	△	9.026E-03
8	▲	▲	▲	▲	▲	△	△	▲	▲	▲	▲	△	△	△	△	1.818E-02
7	▲	▲	▲	▲	▲	△	△	△	▲	▲	▲	△	△	△	△	3.247E-02
6	▲	▲	▲	▲	▲	△	△	△	▲	▲	▲	△	△	△	△	6.919E-01
5	▲	▲	▲	▲	▲	△	△	△	△	△	△	△	△	△	△	1.211E+01
	RF ₀ = 1.00			RF ₁ = 0.82			RF ₂ = 0.67			RF ₃ = 0.58			RF ₄ = 0.27			

L'ultima riga di ciascuna tabella fornisce il fattore di rilevanza (RF) dei termini di un dato ordine all'interno del BTD. Il RF è calcolato come il rapporto tra il numero di termini attivi per un dato ordine e il numero totale di termini presenti. Ad esempio, un RF₀ = 1 indica che i termini di ordine zero sono sempre presenti nel BTD. Questo valore fornisce una misura della rilevanza di un set di variabili: maggiore è il RF, maggiore è l'influenza.

Le best theories non si discostano significativamente da quelle presentate nel paper di riferimento [28]. Si riscontrano solo pochi termini che non corrispondono, e considerando gli errori minimi che emergono anche con pochi gradi di libertà attivi, è plausibile che la principale fonte di variabilità risieda nel codice stesso. Per casi con rapporti a/h più ridotti (e quindi con gusci più spessi), si osserva una variazione in più, ma il principio rimane analogo. I gruppi di termini attivi che emergono inizialmente sono generalmente gli stessi.



(a) $a/h=100$



(b) $a/h=10$

Figura 5.12: BTD per $R/a=5$ e laminazione $0/90/0$

L'asse verticale del BTD varia da 5 a 15 poiché i modelli con quattro o meno gradi di libertà forniscono errori molto elevati e non sono di interesse pratico.

5.3.2 Simply-supported, $0^\circ/90^\circ/0^\circ/90^\circ$

Il secondo caso numerico riguarda una sequenza di laminazione diversa, che consiste in un pattern di angoli di $0^\circ/90^\circ/0^\circ/90^\circ$. Gli altri parametri geometrici riman-

gono costanti, così come le condizioni al contorno. I modelli BTD si trovano nelle Tabelle 5.7 e 5.8 mentre la Figura 5.13 mostra il BTD per un dato valore di R/a e variazioni di a/h .

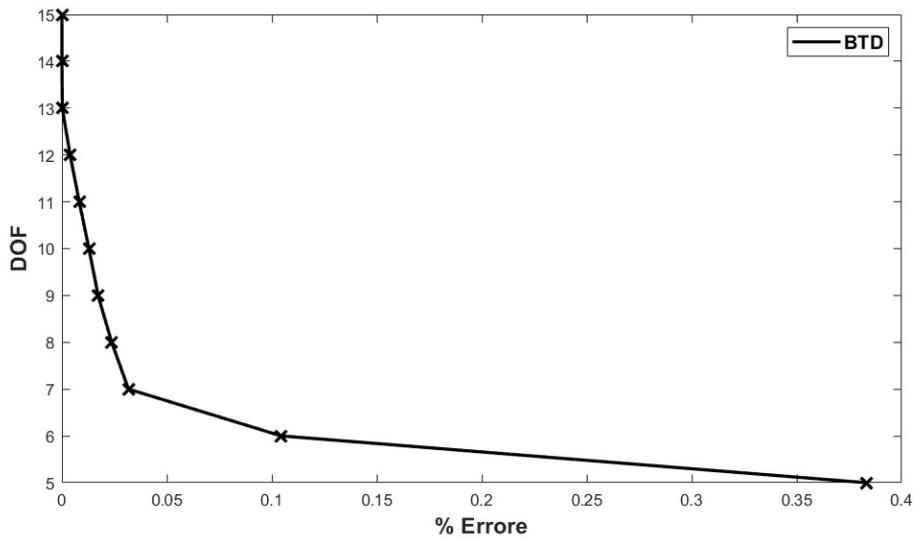
Tabella 5.7: Best theories per laminazione $0^\circ/90^\circ/0^\circ/90^\circ$, $R/a = 5$, $a/h = 100$.

DOF	$u_{\alpha 1}$	$u_{\beta 1}$	$u_{z 1}$	$u_{\alpha 2}$	$u_{\beta 2}$	$u_{z 2}$	$u_{\alpha 3}$	$u_{\beta 3}$	$u_{z 3}$	$u_{\alpha 4}$	$u_{\beta 4}$	$u_{z 4}$	$u_{\alpha 5}$	$u_{\beta 5}$	$u_{z 5}$	$\%E$
15	▲	▲	▲	▲	▲	▲	▲	▲	▲	▲	▲	▲	▲	▲	▲	0.000E+00
14	▲	▲	▲	▲	▲	▲	▲	▲	▲	▲	▲	△	▲	▲	▲	3.748E-05
13	▲	▲	▲	▲	▲	▲	▲	▲	▲	▲	▲	△	▲	▲	△	1.911E-04
12	▲	▲	▲	▲	▲	▲	▲	▲	▲	▲	▲	△	△	▲	△	3.927E-03
11	▲	▲	▲	▲	▲	▲	△	▲	▲	▲	▲	△	△	▲	△	8.273E-03
10	▲	▲	▲	▲	▲	▲	▲	△	▲	▲	▲	△	△	△	△	1.290E-02
9	▲	▲	▲	▲	▲	▲	△	△	▲	▲	▲	△	△	△	△	1.725E-02
8	▲	▲	▲	▲	▲	▲	△	△	▲	△	▲	△	△	△	△	2.371E-02
7	▲	▲	▲	▲	▲	▲	△	△	▲	△	△	△	△	△	△	3.172E-02
6	▲	▲	▲	▲	▲	△	△	△	▲	△	△	△	△	△	△	1.045E-01
5	▲	▲	▲	▲	▲	△	△	△	△	△	△	△	△	△	△	3.833E-01
	RF ₀ = 1.00			RF ₁ = 0.94			RF ₂ = 0.61			RF ₃ = 0.48			RF ₄ = 0.30			

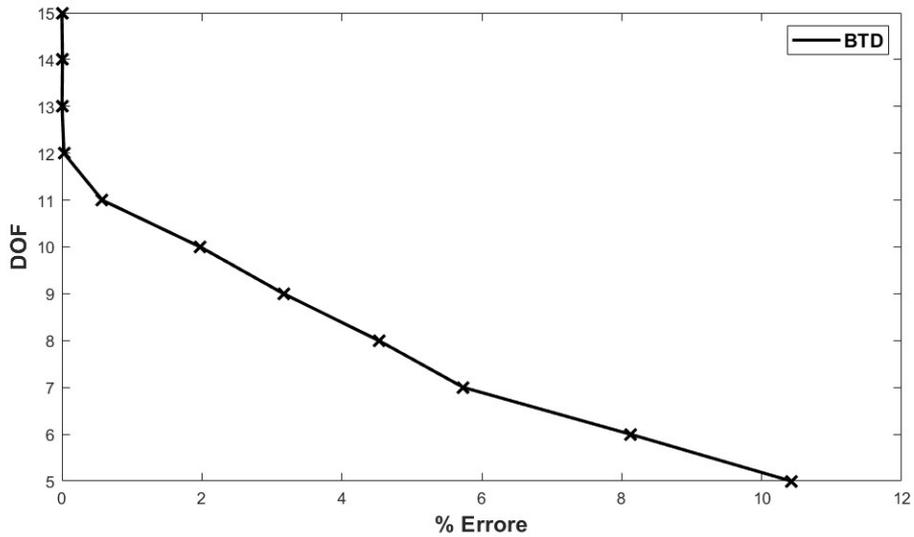
Tabella 5.8: Best theories per laminazione $0^\circ/90^\circ/0^\circ/90^\circ$, $R/a = 5$, $a/h = 10$.

DOF	$u_{\alpha 1}$	$u_{\beta 1}$	$u_{z 1}$	$u_{\alpha 2}$	$u_{\beta 2}$	$u_{z 2}$	$u_{\alpha 3}$	$u_{\beta 3}$	$u_{z 3}$	$u_{\alpha 4}$	$u_{\beta 4}$	$u_{z 4}$	$u_{\alpha 5}$	$u_{\beta 5}$	$u_{z 5}$	$\%E$
15	▲	▲	▲	▲	▲	▲	▲	▲	▲	▲	▲	▲	▲	▲	▲	0.000E+00
14	▲	▲	▲	▲	▲	▲	▲	▲	▲	▲	▲	▲	▲	▲	△	8.509E-03
13	▲	▲	▲	▲	▲	▲	▲	▲	▲	▲	▲	△	▲	▲	△	2.286E-03
12	▲	▲	▲	▲	▲	△	▲	▲	△	▲	▲	△	▲	▲	▲	3.002E-02
11	▲	▲	▲	▲	▲	△	▲	▲	△	▲	▲	△	▲	▲	△	5.774E-01
10	▲	▲	▲	▲	▲	△	▲	▲	△	▲	▲	△	▲	△	△	1.978E+00
9	▲	▲	▲	▲	▲	△	▲	△	△	▲	▲	△	▲	△	△	3.170E+00
8	▲	▲	▲	▲	▲	△	▲	△	△	▲	▲	△	△	△	△	4.529E+00
7	▲	▲	▲	▲	▲	△	△	△	△	▲	▲	△	△	△	△	5.737E+00
6	▲	▲	▲	▲	▲	△	△	△	△	△	▲	△	△	△	△	8.122E+00
5	▲	▲	▲	▲	▲	△	△	△	△	△	△	△	△	△	△	1.042E+01
	RF ₀ = 1.00			RF ₁ = 0.76			RF ₂ = 0.52			RF ₃ = 0.64			RF ₄ = 0.42			

Una notevole differenza rispetto alla situazione precedente per $a/h = 10$ è il notevole incremento del numero di gradi di libertà richiesti per ottenere un risultato con un margine di errore inferiore all'1%. In effetti, si osserva che, ad eccezione del caso di gusci sottili, sono necessari più di 10 gradi di libertà. In generale, con questo metodo di laminazione, si evidenzia un aumento dell'errore rispetto al caso precedente, mantenendo costante il numero di gradi di libertà.



(a) $a/h=100$



(b) $a/h=10$

Figura 5.13: BTD per $R/a=5$ e laminazione 0/90/0/90

5.4 Analisi vibrazioni libere AAM

Nel caso dell'analisi delle vibrazioni libere, si considera il guscio descritto nel paragrafo 5.3 e si applicano le stesse considerazioni sulla discretizzazione. Tuttavia, è importante notare che essendo stato modellizzato solo un quarto della piastra, le frequenze calcolate sono esclusivamente quelle simmetriche.

Per avere un singolo parametro di errore, il BTD utilizza la media degli errori nel modo seguente:

$$\text{Errore} = \frac{1}{10} \sum_{i=1}^{10} \left| \frac{f_i - f_i^{N=4}}{f_i^{N=4}} \right|. \quad (5.2)$$

dove f_i è i-esima frequenza di un generico modello shell ridotto e $f_i^{N=4}$ è i-esima frequenza del modello di riferimento.

Nelle Tabelle 5.9 e 5.8 riportate di seguito, sono elencate le Best Theories. Si nota che sono le stesse di quelle riportate in [29] con alcune variazioni dovute al fatto che nel suddetto articolo il guscio è stato discretizzato completamente mediante una mesh di dimensioni 16x16.

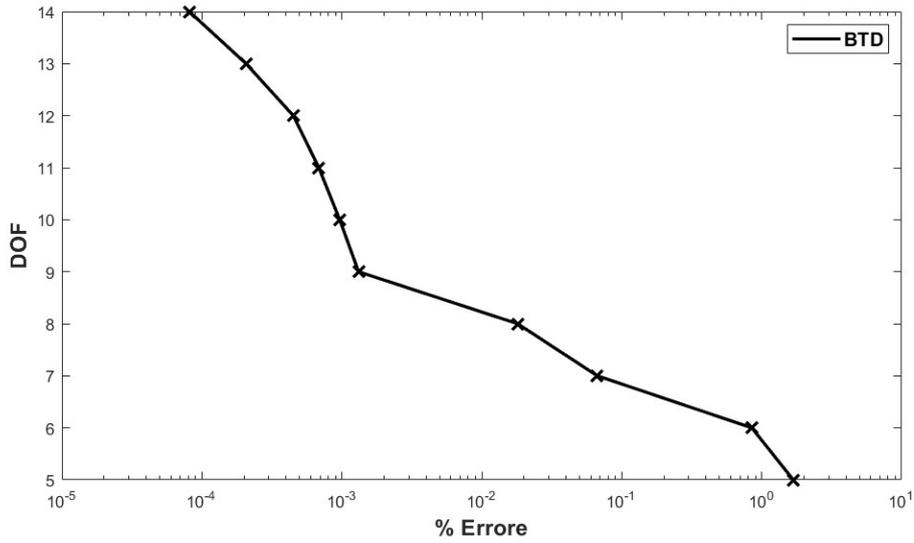
Tabella 5.9: Best theories per laminazione 0/90/0, R/a = 5, a/h = 100.

DOF	$u_{\alpha 1}$	$u_{\beta 1}$	$u_{z 1}$	$u_{\alpha 2}$	$u_{\beta 2}$	$u_{z 2}$	$u_{\alpha 3}$	$u_{\beta 3}$	$u_{z 3}$	$u_{\alpha 4}$	$u_{\beta 4}$	$u_{z 4}$	$u_{\alpha 5}$	$u_{\beta 5}$	$u_{z 5}$	$\%E_{AVG}$
15	▲	▲	▲	▲	▲	▲	▲	▲	▲	▲	▲	▲	▲	▲	▲	0.000E+00
14	▲	▲	▲	▲	▲	▲	▲	▲	▲	▲	▲	△	▲	▲	▲	8.142E-05
13	▲	▲	▲	▲	▲	▲	▲	▲	▲	▲	▲	△	▲	▲	△	2.068E-04
12	▲	▲	▲	▲	▲	▲	▲	▲	▲	▲	▲	△	△	▲	△	4.505E-04
11	▲	▲	▲	▲	▲	▲	△	▲	▲	▲	▲	△	△	▲	△	6.856E-04
10	▲	▲	▲	▲	▲	▲	△	▲	▲	▲	▲	△	△	△	△	9.659E-04
9	▲	▲	▲	▲	▲	▲	△	△	▲	▲	▲	△	△	△	△	1.318E-03
8	▲	▲	▲	▲	▲	△	△	△	▲	▲	▲	△	△	△	△	1.806E-02
7	▲	▲	▲	▲	▲	△	△	△	▲	▲	△	△	△	△	△	6.684E-02
6	▲	▲	▲	▲	▲	△	△	△	△	▲	△	△	△	△	△	8.498E-01
5	▲	▲	▲	▲	▲	△	△	△	△	△	△	△	△	△	△	1.680E+00
	RF ₀ = 1.00			RF ₁ = 0.88			RF ₂ = 0.58			RF ₃ = 0.58			RF ₄ = 0.30			

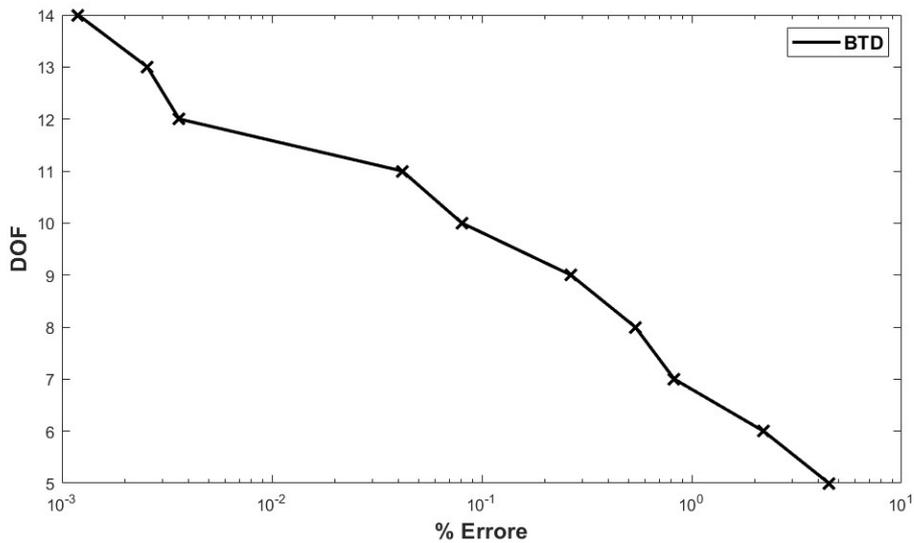
Tabella 5.10: Best theories per laminazione 0/90/0, R/a = 5, a/h = 10.

DOF	$u_{\alpha 1}$	$u_{\beta 1}$	$u_{z 1}$	$u_{\alpha 2}$	$u_{\beta 2}$	$u_{z 2}$	$u_{\alpha 3}$	$u_{\beta 3}$	$u_{z 3}$	$u_{\alpha 4}$	$u_{\beta 4}$	$u_{z 4}$	$u_{\alpha 5}$	$u_{\beta 5}$	$u_{z 5}$	$\%E_{AVG}$
15	▲	▲	▲	▲	▲	▲	▲	▲	▲	▲	▲	▲	▲	▲	▲	0.000E+00
14	▲	▲	▲	▲	▲	▲	▲	▲	▲	▲	▲	△	▲	▲	▲	1.196E-03
13	▲	▲	▲	▲	▲	▲	△	▲	▲	▲	▲	▲	△	▲	▲	2.552E-03
12	▲	▲	▲	▲	▲	▲	△	▲	▲	▲	▲	△	△	▲	▲	3.619E-03
11	▲	▲	▲	▲	▲	▲	△	▲	△	▲	▲	△	△	▲	▲	4.181E-02
10	▲	▲	▲	▲	▲	△	△	▲	△	▲	▲	△	△	▲	▲	8.037E-02
9	▲	▲	▲	▲	▲	△	△	▲	△	▲	▲	△	△	△	▲	2.659E-01
8	▲	▲	▲	▲	▲	△	△	△	△	▲	▲	△	△	△	▲	5.386E-01
7	▲	▲	▲	▲	▲	△	△	△	△	▲	▲	△	△	△	△	8.259E-01
6	▲	▲	▲	▲	▲	△	△	△	△	▲	△	△	△	△	△	2.198E+00
5	▲	▲	▲	△	▲	△	△	△	△	▲	△	△	△	△	△	4.498E+00
	RF ₀ = 1.00			RF ₁ = 0.79			RF ₂ = 0.39			RF ₃ = 0.67			RF ₄ = 0.48			

Nella Figura 5.14 viene presentato il BTD rispettivamente per il caso con rapporto a/h pari a 100 e a/h pari a 10. Si è utilizzata una scala logaritmica sull'asse delle ascisse per garantire una maggiore chiarezza nella rappresentazione. In particolare, la teoria con tutti i gradi di libertà attivi ha un errore nullo e per questo non potrebbe essere correttamente rappresentata su un diagramma semilogaritmico.



(a) $a/h=100$



(b) $a/h=10$

Figura 5.14: BTD per $R/a=5$ e laminazione 0/90/0

Capitolo 6

Risultati

6.1 Risultati utilizzando la rete feed-forward con input solo il modello strutturale

Considerando la prima tipologia di rete neurale descritta in 4.2.1, vengono esaminati due casi di riferimento di una trave a sezione rettangolare 5.2.1 con vincoli e rapporti L/h differenti:

- Vincolo di incastro e rapporto L/h pari a 100
- Vincolo simply supported e rapporto L/h pari a 10

Gli output della rete neurale sono gli errori percentuali nel caso dinamico di free vibration calcolati come 5.2.

Nelle seguenti Tabelle 6.1, 6.2, 6.6, 6.4, 6.5, 6.6 vengono riportate le migliori configurazioni di rete neurale per ogni epoca considerata. Le configurazioni selezionate sono caratterizzate dal minimo valore di test loss.

Tabella 6.1: Trave a sezione rettangolare incastrata - $L/h=100$. N. neuroni nei 6 layer: 64, 64, 64, 64, 64, 64

Epoche	Batch Size	Validation Split	Train Loss	Val Loss	Test Loss
50	16	0.15	0.3484	0.8397	0.8247
100	16	0.15	0.3305	1.1824	0.8277
200	24	0.2	0.2393	0.4570	0.4512
300	16	0.1	0.1794	0.8585	0.8108
400	24	0.25	0.2159	0.3693	0.4436

Tabella 6.2: Trave a sezione rettangolare incastrata - $L/h=100$. N. neuroni nei 6 layer: 128, 128, 128, 128, 128, 128

Epoche	Batch Size	Validation Split	Train Loss	Val Loss	Test Loss
50	16	0.15	0.3484	0.8397	0.8247
100	24	0.1	0.4489	0.4132	0.4937
200	24	0.2	0.2393	0.4570	0.4512
300	24	0.1	0.1604	0.3687	0.4395
400	24	0.15	0.2972	0.4555	0.4965

Tabella 6.3: Trave a sezione rettangolare incastrata - $L/h=100$. N. neuroni nei 6 layer: 128, 128, 128, 64, 64, 64

Epoche	Batch Size	Validation Split	Train Loss	Val Loss	Test Loss
50	64	0.25	0.4201	0.7774	0.9006
100	24	0.1	0.5341	0.5707	0.6773
200	16	0.15	0.2072	0.8348	0.7318
300	16	0.15	0.1727	0.5531	0.4489
400	16	0.2	0.1168	0.4556	0.4272

Tabella 6.4: Trave a sezione rettangolare simply supported - $L/h= 10$. N. neuroni nei 6 layer: 64, 64, 64, 64, 64, 64

Epoche	Batch Size	Validation Split	Train Loss	Val Loss	Test Loss
50	16	0.2	0.3717	1.7017	1.7564
100	16	0.1	0.3230	1.1364	1.6909
200	16	0.15	0.2606	1.3815	1.4589
300	64	0.2	0.1774	0.6149	0.5703
400	32	0.25	0.1306	0.9460	0.9097

Tabella 6.5: Trave a sezione rettangolare simply supported - $L/h= 10$. N. neuroni nei 6 layer: 128, 128, 128, 128, 128, 128

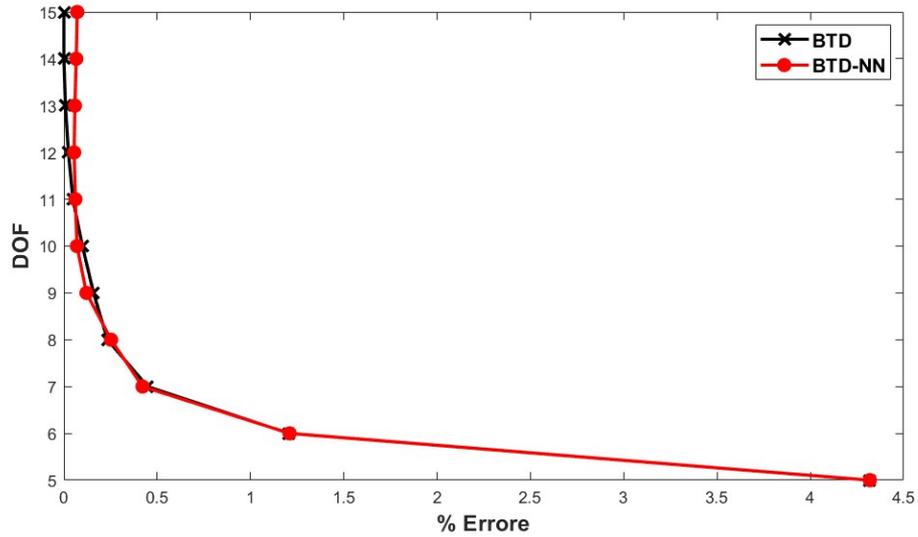
Epoche	Batch Size	Validation Split	Train Loss	Val Loss	Test Loss
50	16	0.25	0.3543	0.6782	0.7516
100	24	0.15	0.4027	1.9967	1.7108
200	24	0.15	0.3537	0.5968	0.5369
300	16	0.1	0.7158	0.9812	0.8900
400	16	0.15	0.2195	0.4033	0.4383

Tabella 6.6: Trave a sezione rettangolare simply supported - $L/h= 10$. N. neuroni nei 6 layer: 128, 128, 128, 64, 64, 64

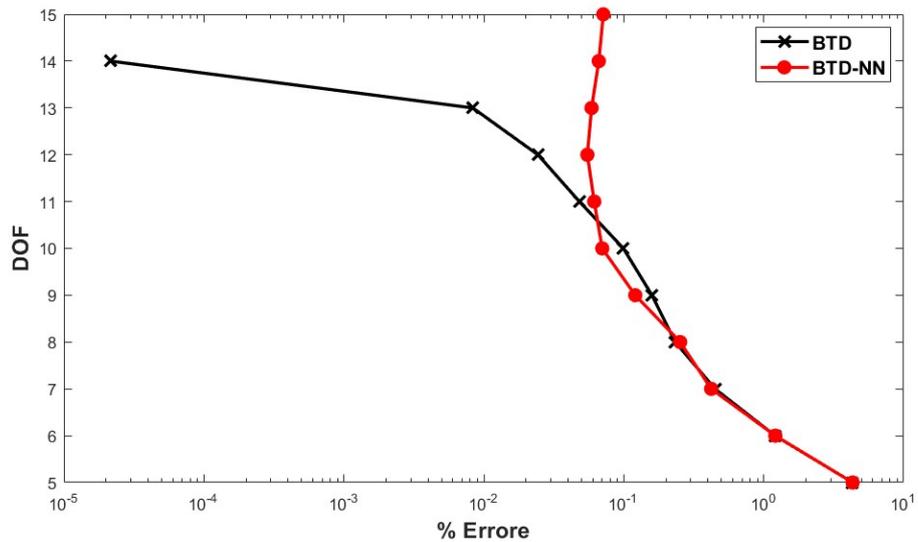
Epoche	Batch Size	Validation Split	Train Loss	Val Loss	Test Loss
50	16	0.2	0.4599	1.5687	1.7696
100	16	0.2	0.2684	0.4045	0.3592
200	64	0.1	0.1728	0.2496	0.2991
300	16	0.25	0.1321	0.2442	0.2453
400	16	0.2	0.0888	0.2108	0.2074

Dalle Tabelle 6.3 e 6.6 emerge una chiara evidenza: i migliori modelli nei due casi coincidono e corrispondono a quelli ottenuti utilizzando 400 epoche, un batch size di 16 e uno split di validazione del 20%.

Nelle Figure 6.1 e 6.2 sono rappresentati i grafici del BTD ottenuti sia numericamente che tramite l'utilizzo di reti neurali per i due casi considerati. Per ciascuno dei due casi, è inoltre presente un grafico semilogaritmico sull'asse delle ascisse.

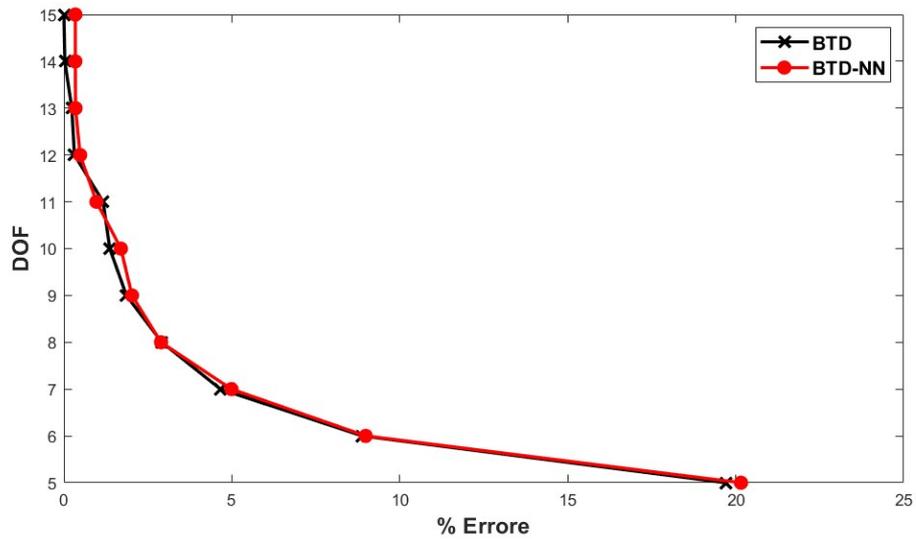


(a) Grafico

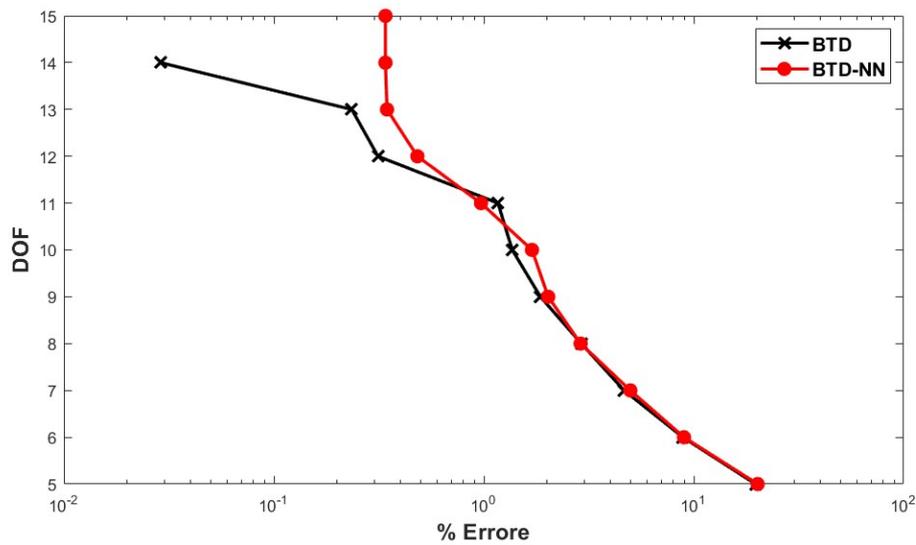


(b) Grafico semilobaritmico sull'asse delle ascisse

Figura 6.1: Confronto tra il BTD derivato numericamente e quello ottenuto tramite rete neurale di una trave incastrata con $L/h=100$



(a)



(b)

Figura 6.2: Confronto tra il BTD derivato numericamente e quello ottenuto tramite rete neurale di una trave semplicemente appoggiata con $L/h=10$

Nelle Tabelle 6.7, 6.8, 6.9 e 6.10 vengono riportate le Best Theories ricavate con la rete neurale e numericamente per i due casi di riferimento.

Tabella 6.7: Best theories ricavate con rete neurale di una trave incastrata con $L/h=100$

DOF	u_1	u_2	u_3	u_4	u_5	u_6	u_7	u_8	u_9	u_{10}	u_{11}	u_{12}	u_{13}	u_{14}	u_{15}	$\%E_{AVG}$
15	▲	▲	▲	▲	▲	▲	▲	▲	▲	▲	▲	▲	▲	▲	▲	6.813E-02
14	▲	▲	▲	▲	▲	▲	▲	▲	▲	▲	▲	▲	▲	▲	▲	4.745E-02
13	▲	▲	▲	▲	▲	▲	▲	▲	▲	▲	▲	▲	▲	▲	▲	4.986E-02
12	▲	▲	▲	▲	▲	▲	▲	▲	▲	▲	▲	▲	▲	▲	▲	4.791E-02
11	▲	▲	▲	▲	▲	▲	▲	▲	▲	▲	▲	▲	▲	▲	▲	5.977E-02
10	▲	▲	▲	▲	▲	▲	▲	▲	▲	▲	▲	▲	▲	▲	▲	8.340E-02
9	▲	▲	▲	▲	▲	▲	▲	▲	▲	▲	▲	▲	▲	▲	▲	1.180E-01
8	▲	▲	▲	▲	▲	▲	▲	▲	▲	▲	▲	▲	▲	▲	▲	1.983E-01
7	▲	▲	▲	▲	▲	▲	▲	▲	▲	▲	▲	▲	▲	▲	▲	4.539E-01
6	▲	▲	▲	▲	▲	▲	▲	▲	▲	▲	▲	▲	▲	▲	▲	1.145E+00
5	▲	▲	▲	▲	▲	▲	▲	▲	▲	▲	▲	▲	▲	▲	▲	4.080E+00

Tabella 6.8: Best theories FE di una trave incastrata con $L/h=100$

DOF	u_1	u_2	u_3	u_4	u_5	u_6	u_7	u_8	u_9	u_{10}	u_{11}	u_{12}	u_{13}	u_{14}	u_{15}	$\%E_{AVG}$
15	▲	▲	▲	▲	▲	▲	▲	▲	▲	▲	▲	▲	▲	▲	▲	0.000E+00
14	▲	▲	▲	▲	▲	▲	▲	▲	▲	▲	▲	▲	▲	▲	▲	2.170E-05
13	▲	▲	▲	▲	▲	▲	▲	▲	▲	▲	▲	▲	▲	▲	▲	8.350E-03
12	▲	▲	▲	▲	▲	▲	▲	▲	▲	▲	▲	▲	▲	▲	▲	2.438E-02
11	▲	▲	▲	▲	▲	▲	▲	▲	▲	▲	▲	▲	▲	▲	▲	4.822E-02
10	▲	▲	▲	▲	▲	▲	▲	▲	▲	▲	▲	▲	▲	▲	▲	9.941E-02
9	▲	▲	▲	▲	▲	▲	▲	▲	▲	▲	▲	▲	▲	▲	▲	1.590E-01
8	▲	▲	▲	▲	▲	▲	▲	▲	▲	▲	▲	▲	▲	▲	▲	2.332E-01
7	▲	▲	▲	▲	▲	▲	▲	▲	▲	▲	▲	▲	▲	▲	▲	4.486E-01
6	▲	▲	▲	▲	▲	▲	▲	▲	▲	▲	▲	▲	▲	▲	▲	1.205E+00
5	▲	▲	▲	▲	▲	▲	▲	▲	▲	▲	▲	▲	▲	▲	▲	4.318E+00

Tabella 6.9: Best theories ricavate con rete neurale di una trave simply supported con $L/h=10$

DOF	u_1	u_2	u_3	u_4	u_5	u_6	u_7	u_8	u_9	u_{10}	u_{11}	u_{12}	u_{13}	u_{14}	u_{15}	$\%E_{AVG}$
15	▲	▲	▲	▲	▲	▲	▲	▲	▲	▲	▲	▲	▲	▲	▲	3.401E-01
14	▲	▲	▲	▲	▲	▲	▲	▲	▲	▲	▲	▲	▲	▲	▲	3.401E-01
13	▲	▲	▲	▲	▲	▲	▲	▲	▲	▲	▲	▲	▲	▲	▲	3.559E-01
12	▲	▲	▲	▲	▲	▲	▲	▲	▲	▲	▲	▲	▲	▲	▲	4.829E-01
11	▲	▲	▲	▲	▲	▲	▲	▲	▲	▲	▲	▲	▲	▲	▲	9.652E-01
10	▲	▲	▲	▲	▲	▲	▲	▲	▲	▲	▲	▲	▲	▲	▲	1.599E+00
9	▲	▲	▲	▲	▲	▲	▲	▲	▲	▲	▲	▲	▲	▲	▲	2.021E+00
8	▲	▲	▲	▲	▲	▲	▲	▲	▲	▲	▲	▲	▲	▲	▲	2.898E+00
7	▲	▲	▲	▲	▲	▲	▲	▲	▲	▲	▲	▲	▲	▲	▲	4.985E+00
6	▲	▲	▲	▲	▲	▲	▲	▲	▲	▲	▲	▲	▲	▲	▲	8.984E+00
5	▲	▲	▲	▲	▲	▲	▲	▲	▲	▲	▲	▲	▲	▲	▲	2.016E+01

Tabella 6.10: Best theories FE di una trave simply supported con $L/h=10$

DOF	u_1	u_2	u_3	u_4	u_5	u_6	u_7	u_8	u_9	u_{10}	u_{11}	u_{12}	u_{13}	u_{14}	u_{15}	$\%E_{AVG}$
15	▲	▲	▲	▲	▲	▲	▲	▲	▲	▲	▲	▲	▲	▲	▲	0.000E+00
14	▲	▲	▲	▲	▲	▲	▲	▲	▲	▲	▲	▲	▲	▲	△	2.890E-02
13	▲	▲	▲	▲	▲	▲	▲	▲	▲	▲	▲	▲	▲	△	△	2.352E-01
12	▲	▲	▲	▲	▲	▲	▲	▲	▲	△	▲	▲	▲	△	△	3.135E-01
11	▲	▲	▲	▲	▲	▲	▲	▲	▲	▲	△	△	▲	△	△	1.169E+00
10	▲	▲	▲	▲	▲	▲	▲	▲	▲	△	△	△	▲	△	△	1.367E+00
9	▲	▲	▲	▲	▲	▲	▲	▲	▲	△	△	△	△	△	△	1.862E+00
8	▲	▲	▲	▲	▲	▲	▲	▲	△	△	△	△	△	△	△	2.915E+00
7	▲	▲	▲	▲	▲	▲	▲	▲	△	△	△	△	△	△	△	4.659E+00
6	▲	▲	▲	▲	▲	△	△	▲	△	△	△	△	△	△	△	8.874E+00
5	▲	▲	▲	▲	▲	△	△	△	△	△	△	△	△	△	△	19.697E+00

6.2 Risultati utilizzando la rete feed-forward con input il modello strutturale, snellezza e condizioni di vincolo

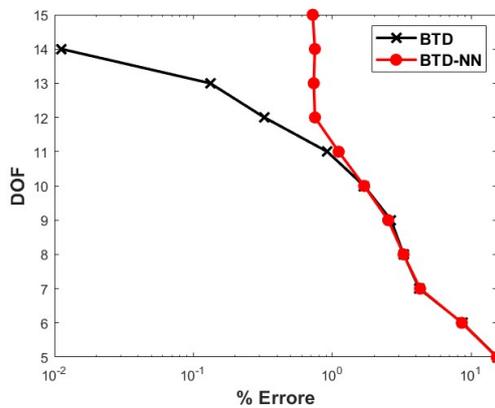
In questo paragrafo viene utilizzata la rete neurale descritta nel paragrafo 4.2.2. Per l'allenamento della rete sono stati selezionati dati relativi a travi a sezione rettangolare, caratterizzate da diversi rapporti L/h (lunghezza/altezza), sia in configurazioni incastrate che semplicemente appoggiate:

- Travi incastrate con rapporti L/h di 10, 40 e 100.
- Travi semplicemente appoggiate con rapporti L/h di 10, 40 e 100.

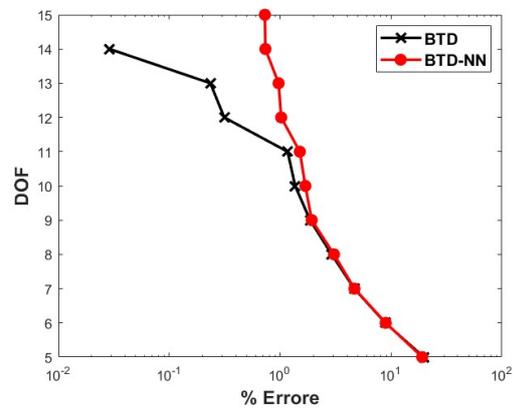
La Tabella 6.11 presenta le configurazioni ottimali di rete neurale per ciascuna epoca esaminata, selezionate per il loro minimo valore di perdita sui dati di test. Si è identificato che la configurazione più efficace utilizza 700 epoche, un batch size di 32, e un rapporto di divisione per la validazione del 20%.

Tabella 6.11: N. neuroni nei 6 layer: 128, 128, 128, 64, 64, 64

Epoche	Batch Size	Validation Split	Train Loss	Val Loss	Test Loss
400	32	0.15	0.1501	0.2563	0.2790
500	32	0.15	0.1493	0.2554	0.2628
600	32	0.15	0.1692	0.2312	0.2404
700	32	0.1	0.1419	0.2149	0.2224
800	32	0.2	0.1504	0.2470	0.2619

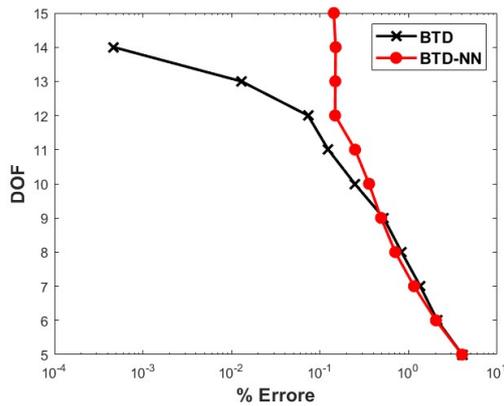


(a) Incastrata

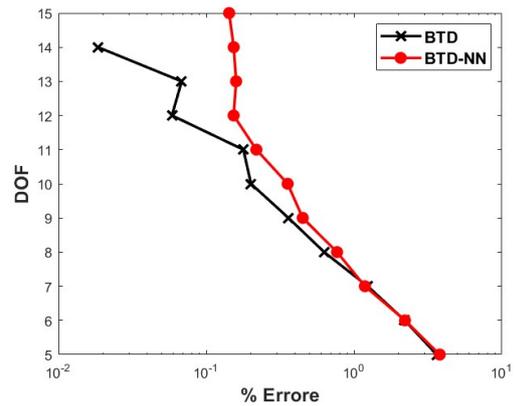


(b) Simply Supported

Figura 6.3: Trave a sezione rettangolare con $L/h=10$

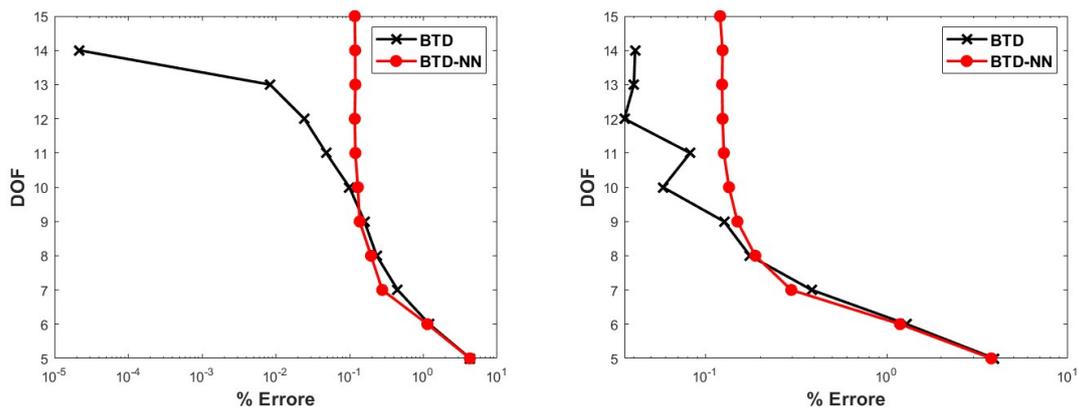


(a) Incastrata



(b) Simply Supported

Figura 6.4: Trave a sezione rettangolare con $L/h=40$



(a) Incastrata

(b) Simply Supported

Figura 6.5: Trave a sezione rettangolare con $L/h=100$

Tabella 6.12: Best theories ricavate con la rete neurale di una trave incastrata con $L/h=10$

DOF	u_1	u_2	u_3	u_4	u_5	u_6	u_7	u_8	u_9	u_{10}	u_{11}	u_{12}	u_{13}	u_{14}	u_{15}	$\%E_{AVG}$
15	▲	▲	▲	▲	▲	▲	▲	▲	▲	▲	▲	▲	▲	▲	▲	7.224E-01
14	▲	▲	▲	▲	▲	▲	▲	▲	▲	▲	▲	▲	▲	▲	▲	7.488E-01
13	▲	▲	▲	▲	▲	▲	▲	▲	▲	▲	▲	▲	▲	▲	▲	7.350E-01
12	▲	▲	▲	▲	▲	▲	▲	▲	▲	▲	▲	▲	▲	▲	▲	7.498E-01
11	▲	▲	▲	▲	▲	▲	▲	▲	▲	▲	▲	▲	▲	▲	▲	1.111E+00
10	▲	▲	▲	▲	▲	▲	▲	▲	▲	▲	▲	▲	▲	▲	▲	1.694E+00
9	▲	▲	▲	▲	▲	▲	▲	▲	▲	▲	▲	▲	▲	▲	▲	2.524E+00
8	▲	▲	▲	▲	▲	▲	▲	▲	▲	▲	▲	▲	▲	▲	▲	3.256E+00
7	▲	▲	▲	▲	▲	▲	▲	▲	▲	▲	▲	▲	▲	▲	▲	4.280E+00
6	▲	▲	▲	▲	▲	▲	▲	▲	▲	▲	▲	▲	▲	▲	▲	8.543E+00
5	▲	▲	▲	▲	▲	▲	▲	▲	▲	▲	▲	▲	▲	▲	▲	1.525E+01

Tabella 6.13: Best theories FE di una trave incastrata con $L/h=10$

DOF	u_1	u_2	u_3	u_4	u_5	u_6	u_7	u_8	u_9	u_{10}	u_{11}	u_{12}	u_{13}	u_{14}	u_{15}	$\%E_{AVG}$
15	▲	▲	▲	▲	▲	▲	▲	▲	▲	▲	▲	▲	▲	▲	▲	0.000E+00
14	▲	▲	▲	▲	▲	▲	▲	▲	▲	▲	▲	▲	▲	▲	▲	1.124E-02
13	▲	▲	▲	▲	▲	▲	▲	▲	▲	▲	▲	▲	▲	▲	▲	1.321E-01
12	▲	▲	▲	▲	▲	▲	▲	▲	▲	▲	▲	▲	▲	▲	▲	3.244E-01
11	▲	▲	▲	▲	▲	▲	▲	▲	▲	▲	▲	▲	▲	▲	▲	9.201E-01
10	▲	▲	▲	▲	▲	▲	▲	▲	▲	▲	▲	▲	▲	▲	▲	1.694E+00
9	▲	▲	▲	▲	▲	▲	▲	▲	▲	▲	▲	▲	▲	▲	▲	2.645E+00
8	▲	▲	▲	▲	▲	▲	▲	▲	▲	▲	▲	▲	▲	▲	▲	3.256E+00
7	▲	▲	▲	▲	▲	▲	▲	▲	▲	▲	▲	▲	▲	▲	▲	4.222E+00
6	▲	▲	▲	▲	▲	▲	▲	▲	▲	▲	▲	▲	▲	▲	▲	8.597E+00
5	▲	▲	▲	▲	▲	▲	▲	▲	▲	▲	▲	▲	▲	▲	▲	1.535E+01

Tabella 6.14: Best theories ricavate con la rete neurale di una trave incastrata con $L/h=40$

DOF	u_1	u_2	u_3	u_4	u_5	u_6	u_7	u_8	u_9	u_{10}	u_{11}	u_{12}	u_{13}	u_{14}	u_{15}	$\%E_{AVG}$
15	▲	▲	▲	▲	▲	▲	▲	▲	▲	▲	▲	▲	▲	▲	▲	1.431E-01
14	▲	▲	▲	▲	▲	▲	▲	▲	▲	▲	▲	▲	▲	▲	△	1.499E-01
13	▲	▲	▲	▲	▲	▲	▲	▲	▲	△	▲	▲	▲	▲	△	1.487E-01
12	▲	▲	▲	▲	▲	▲	▲	▲	▲	△	▲	▲	△	▲	△	1.478E-01
11	▲	▲	▲	▲	▲	▲	▲	▲	▲	△	▲	▲	△	△	△	2.486E-01
10	▲	▲	▲	▲	▲	▲	△	▲	▲	△	▲	▲	△	△	△	3.573E-01
9	▲	▲	▲	▲	▲	▲	▲	▲	▲	△	△	△	△	△	△	4.892E-01
8	▲	▲	▲	▲	▲	▲	△	▲	▲	△	△	△	△	△	△	7.066E-01
7	▲	▲	▲	▲	▲	▲	△	▲	△	△	△	△	△	△	△	1.153E+00
6	▲	▲	▲	▲	▲	▲	△	△	△	△	△	△	△	△	△	2.038E+00
5	▲	▲	▲	△	▲	▲	△	△	△	△	△	△	△	△	△	4.006E+00

Tabella 6.15: Best theories FE di una trave incastrata con $L/h=40$

DOF	u_1	u_2	u_3	u_4	u_5	u_6	u_7	u_8	u_9	u_{10}	u_{11}	u_{12}	u_{13}	u_{14}	u_{15}	$\%E_{AVG}$
15	▲	▲	▲	▲	▲	▲	▲	▲	▲	▲	▲	▲	▲	▲	▲	0.000E+00
14	▲	▲	▲	▲	▲	▲	▲	▲	▲	▲	▲	▲	▲	▲	△	4.676E-04
13	▲	▲	▲	▲	▲	▲	▲	▲	▲	▲	▲	▲	△	▲	△	1.295E-02
12	▲	▲	▲	▲	▲	▲	▲	▲	▲	△	▲	▲	△	▲	△	7.308E-02
11	▲	▲	▲	▲	▲	▲	▲	▲	▲	△	▲	▲	△	△	△	1.239E-01
10	▲	▲	▲	▲	▲	▲	▲	▲	▲	△	△	▲	△	△	△	2.468E-01
9	▲	▲	▲	▲	▲	▲	△	▲	▲	△	△	▲	△	△	△	5.229E-01
8	▲	▲	▲	▲	▲	▲	△	▲	▲	△	△	△	△	△	△	8.324E-01
7	▲	▲	▲	▲	▲	▲	△	▲	△	△	△	△	△	△	△	1.356E+00
6	▲	▲	▲	▲	▲	▲	△	△	△	△	△	△	△	△	△	2.110E+00
5	▲	▲	▲	△	▲	▲	△	△	△	△	△	△	△	△	△	4.026E+00

Tabella 6.16: Best theories ricavate con la rete neurale di una trave incastrata con $L/h=100$

DOF	u_1	u_2	u_3	u_4	u_5	u_6	u_7	u_8	u_9	u_{10}	u_{11}	u_{12}	u_{13}	u_{14}	u_{15}	$\%E_{AVG}$
15	▲	▲	▲	▲	▲	▲	▲	▲	▲	▲	▲	▲	▲	▲	▲	1.177E-01
14	▲	▲	▲	▲	▲	▲	▲	▲	▲	▲	▲	▲	▲	▲	△	1.190E-01
13	▲	▲	▲	▲	▲	▲	▲	▲	▲	△	▲	▲	▲	△	▲	1.196E-01
12	▲	▲	▲	▲	▲	▲	▲	▲	▲	△	▲	▲	▲	△	△	1.176E-01
11	▲	▲	▲	▲	▲	▲	▲	▲	△	△	▲	▲	▲	△	△	1.198E-01
10	▲	▲	▲	▲	▲	▲	△	▲	△	△	▲	▲	▲	△	△	1.296E-01
9	▲	▲	▲	▲	▲	▲	△	▲	△	△	△	▲	▲	△	△	1.371E-01
8	▲	▲	▲	▲	▲	▲	△	▲	△	△	△	▲	△	△	△	1.955E-01
7	▲	▲	▲	▲	▲	▲	△	▲	△	△	△	△	△	△	△	2.775E-01
6	▲	▲	▲	▲	▲	▲	△	△	△	△	△	△	△	△	△	1.134E+00
5	▲	▲	▲	△	▲	▲	△	△	△	△	△	△	△	△	△	4.262E+00

Tabella 6.17: Best theories FE di una trave incastrata con $L/h=100$

DOF	u_1	u_2	u_3	u_4	u_5	u_6	u_7	u_8	u_9	u_{10}	u_{11}	u_{12}	u_{13}	u_{14}	u_{15}	$\%E_{AVG}$
15	▲	▲	▲	▲	▲	▲	▲	▲	▲	▲	▲	▲	▲	▲	▲	0.000E+00
14	▲	▲	▲	▲	▲	▲	▲	▲	▲	▲	▲	▲	▲	▲	△	2.167E-05
13	▲	▲	▲	▲	▲	▲	▲	▲	▲	▲	▲	▲	△	▲	△	8.350E-03
12	▲	▲	▲	▲	▲	▲	▲	▲	▲	△	▲	▲	△	▲	△	2.438E-02
11	▲	▲	▲	▲	▲	▲	▲	▲	▲	△	▲	▲	△	△	△	4.822E-02
10	▲	▲	▲	▲	▲	▲	▲	▲	▲	△	△	▲	△	△	△	9.941E-02
9	▲	▲	▲	▲	▲	▲	▲	▲	△	△	△	▲	△	△	△	1.590E-01
8	▲	▲	▲	▲	▲	▲	△	▲	△	△	△	▲	△	△	△	2.332E-01
7	▲	▲	▲	▲	▲	▲	△	▲	△	△	△	△	△	△	△	4.486E-01
6	▲	▲	▲	▲	▲	▲	△	△	△	△	△	△	△	△	△	1.205E+00
5	▲	▲	▲	△	▲	▲	△	△	△	△	△	△	△	△	△	4.318E+00

Tabella 6.18: Best theories ricavate con la rete neurale di una trave simply supported con $L/h=10$

DOF	u_1	u_2	u_3	u_4	u_5	u_6	u_7	u_8	u_9	u_{10}	u_{11}	u_{12}	u_{13}	u_{14}	u_{15}	$\%E_{AVG}$
15	▲	▲	▲	▲	▲	▲	▲	▲	▲	▲	▲	▲	▲	▲	▲	7.287E-01
14	▲	▲	▲	▲	▲	▲	▲	▲	▲	▲	▲	▲	▲	▲	△	7.363E-01
13	▲	▲	▲	▲	▲	▲	▲	▲	▲	▲	▲	▲	▲	△	△	9.685E-01
12	▲	▲	▲	▲	▲	▲	▲	▲	▲	△	▲	▲	▲	△	△	1.023E+00
11	▲	▲	▲	▲	▲	▲	▲	▲	▲	▲	△	△	▲	△	△	1.505E+00
10	▲	▲	▲	▲	▲	▲	▲	▲	▲	▲	△	△	▲	△	△	1.688E+00
9	▲	▲	▲	▲	▲	▲	▲	▲	▲	△	△	△	△	△	△	1.927E+00
8	▲	▲	▲	▲	▲	▲	▲	▲	△	△	△	△	△	△	△	3.060E+00
7	▲	▲	▲	▲	▲	▲	△	▲	△	△	△	△	△	△	△	4.679E+00
6	▲	▲	▲	▲	▲	△	△	▲	△	△	△	△	△	△	△	8.953E+00
5	▲	▲	▲	▲	▲	△	△	△	△	△	△	△	△	△	△	1.911E+01

Tabella 6.19: Best theories FE di una trave simply supported con $L/h=10$

DOF	u_1	u_2	u_3	u_4	u_5	u_6	u_7	u_8	u_9	u_{10}	u_{11}	u_{12}	u_{13}	u_{14}	u_{15}	$\%E_{AVG}$
15	▲	▲	▲	▲	▲	▲	▲	▲	▲	▲	▲	▲	▲	▲	▲	0.000E+00
14	▲	▲	▲	▲	▲	▲	▲	▲	▲	▲	▲	▲	▲	▲	△	2.890E-02
13	▲	▲	▲	▲	▲	▲	▲	▲	▲	▲	▲	▲	▲	△	△	2.352E-01
12	▲	▲	▲	▲	▲	▲	▲	▲	▲	△	▲	▲	▲	△	△	3.135E-01
11	▲	▲	▲	▲	▲	▲	▲	▲	▲	▲	△	△	▲	△	△	1.169E+00
10	▲	▲	▲	▲	▲	▲	▲	▲	▲	△	△	△	▲	△	△	1.367E+00
9	▲	▲	▲	▲	▲	▲	▲	▲	▲	△	△	△	△	△	△	1.862E+00
8	▲	▲	▲	▲	▲	▲	▲	▲	△	△	△	△	△	△	△	2.915E+00
7	▲	▲	▲	▲	▲	▲	△	▲	△	△	△	△	△	△	△	4.659E+00
6	▲	▲	▲	▲	▲	△	△	▲	△	△	△	△	△	△	△	8.874E+00
5	▲	▲	▲	▲	▲	△	△	△	△	△	△	△	△	△	△	1.970E+01

Tabella 6.20: Best theories ricavate con la rete neurale di una trave simply supported con $L/h=40$

DOF	u_1	u_2	u_3	u_4	u_5	u_6	u_7	u_8	u_9	u_{10}	u_{11}	u_{12}	u_{13}	u_{14}	u_{15}	$\%E_{AVG}$
15	▲	▲	▲	▲	▲	▲	▲	▲	▲	▲	▲	▲	▲	▲	▲	1.429E-01
14	▲	▲	▲	▲	▲	▲	▲	▲	▲	▲	▲	▲	▲	▲	△	1.535E-01
13	▲	▲	▲	▲	▲	▲	▲	▲	▲	△	▲	▲	▲	△	▲	1.593E-01
12	▲	▲	▲	▲	▲	▲	▲	▲	▲	△	▲	▲	▲	△	△	1.533E-01
11	▲	▲	▲	▲	▲	▲	△	▲	▲	△	▲	▲	▲	△	△	2.185E-01
10	▲	▲	▲	▲	▲	▲	△	▲	▲	△	▲	▲	△	△	△	3.555E-01
9	▲	▲	▲	▲	▲	▲	▲	▲	▲	△	△	△	△	△	△	4.497E-01
8	▲	▲	▲	▲	▲	▲	△	▲	▲	△	△	△	△	△	△	7.672E-01
7	▲	▲	▲	▲	▲	▲	△	▲	△	△	△	△	△	△	△	1.184E+00
6	▲	▲	▲	▲	▲	▲	△	△	△	△	△	△	△	△	△	2.209E+00
5	▲	▲	▲	△	▲	▲	△	△	△	△	△	△	△	△	△	3.795E+00

Tabella 6.21: Best theories FE di una trave simply supported con $L/h=40$

DOF	u_1	u_2	u_3	u_4	u_5	u_6	u_7	u_8	u_9	u_{10}	u_{11}	u_{12}	u_{13}	u_{14}	u_{15}	$\%E_{AVG}$
15	▲	▲	▲	▲	▲	▲	▲	▲	▲	▲	▲	▲	▲	▲	▲	0.000E+00
14	▲	▲	▲	▲	▲	▲	▲	▲	▲	▲	▲	▲	△	▲	▲	1.854E-02
13	▲	▲	▲	▲	▲	▲	▲	▲	▲	▲	▲	▲	△	▲	△	6.827E-02
12	▲	▲	▲	▲	▲	▲	▲	▲	▲	▲	▲	▲	△	△	△	5.866E-02
11	▲	▲	▲	▲	▲	▲	△	▲	▲	▲	▲	▲	△	△	△	1.785E-01
10	▲	▲	▲	▲	▲	▲	△	▲	▲	△	▲	▲	△	△	△	2.009E-01
9	▲	▲	▲	▲	▲	▲	△	▲	▲	△	△	▲	△	△	△	3.603E-01
8	▲	▲	▲	▲	▲	▲	△	▲	▲	△	△	△	△	△	△	6.275E-01
7	▲	▲	▲	▲	▲	▲	△	▲	△	△	△	△	△	△	△	1.236E+00
6	▲	▲	▲	▲	▲	▲	△	△	△	△	△	△	△	△	△	2.200E+00
5	▲	▲	▲	△	▲	▲	△	△	△	△	△	△	△	△	△	3.621E+00

Tabella 6.22: Best theories ricavate con la rete neurale di una trave simply supported con $L/h=100$

DOF	u_1	u_2	u_3	u_4	u_5	u_6	u_7	u_8	u_9	u_{10}	u_{11}	u_{12}	u_{13}	u_{14}	u_{15}	$\%E_{AVG}$
15	▲	▲	▲	▲	▲	▲	▲	▲	▲	▲	▲	▲	▲	▲	▲	1.203E-01
14	▲	▲	▲	▲	▲	▲	▲	▲	▲	△	▲	▲	▲	▲	▲	1.241E-01
13	▲	▲	▲	▲	▲	▲	▲	▲	▲	△	▲	▲	▲	△	▲	1.234E-01
12	▲	▲	▲	▲	▲	▲	△	▲	▲	△	▲	▲	▲	△	▲	1.241E-01
11	▲	▲	▲	▲	▲	▲	▲	▲	△	△	▲	▲	▲	△	△	1.262E-01
10	▲	▲	▲	▲	▲	▲	△	▲	△	△	▲	▲	▲	△	△	1.347E-01
9	▲	▲	▲	▲	▲	▲	▲	▲	△	△	△	▲	△	△	△	1.499E-01
8	▲	▲	▲	▲	▲	▲	△	▲	△	△	△	▲	△	△	△	1.883E-01
7	▲	▲	▲	▲	▲	▲	△	▲	△	△	△	△	△	△	△	2.973E-01
6	▲	▲	▲	▲	▲	▲	△	△	△	△	△	△	△	△	△	1.185E+00
5	▲	▲	▲	△	▲	▲	△	△	△	△	△	△	△	△	△	3.776E+00

Tabella 6.23: Best theories FE di una trave simply supported con $L/h=100$

DOF	u_1	u_2	u_3	u_4	u_5	u_6	u_7	u_8	u_9	u_{10}	u_{11}	u_{12}	u_{13}	u_{14}	u_{15}	$\%E_{AVG}$
15	▲	▲	▲	▲	▲	▲	▲	▲	▲	▲	▲	▲	▲	▲	▲	0.000E+00
14	▲	▲	▲	▲	▲	▲	▲	▲	▲	▲	▲	▲	▲	▲	▲	4.084E-02
13	▲	▲	▲	▲	▲	▲	△	▲	▲	△	▲	▲	▲	▲	▲	4.024E-02
12	▲	▲	▲	▲	▲	▲	△	▲	▲	△	▲	▲	△	▲	▲	3.563E-02
11	▲	▲	▲	▲	▲	▲	△	▲	▲	▲	▲	▲	△	△	△	8.230E-02
10	▲	▲	▲	▲	▲	▲	△	▲	▲	△	△	▲	▲	△	△	5.820E-02
9	▲	▲	▲	▲	▲	▲	△	▲	△	△	▲	▲	△	△	△	1.265E-01
8	▲	▲	▲	▲	▲	▲	△	▲	△	△	△	▲	△	△	△	1.758E-01
7	▲	▲	▲	▲	▲	▲	△	▲	△	△	△	△	△	△	△	3.851E-01
6	▲	▲	▲	▲	▲	▲	△	△	△	△	△	△	△	△	△	1.288E+00
5	▲	▲	▲	△	▲	▲	△	△	△	△	△	△	△	△	△	3.923E+00

Un'analisi statistica viene eseguita per esaminare il fattore di rilevanza visto in 5.3.1 riguardante i termini per $N=3$ e $N=4$ ottenuti mediante l'approccio assiomatico asintotico, sia nel caso simply supported che incastro. Come mostrato dalle figure 6.6 e 6.7 i termini higher order diventano più importanti al diminuire di L/h .

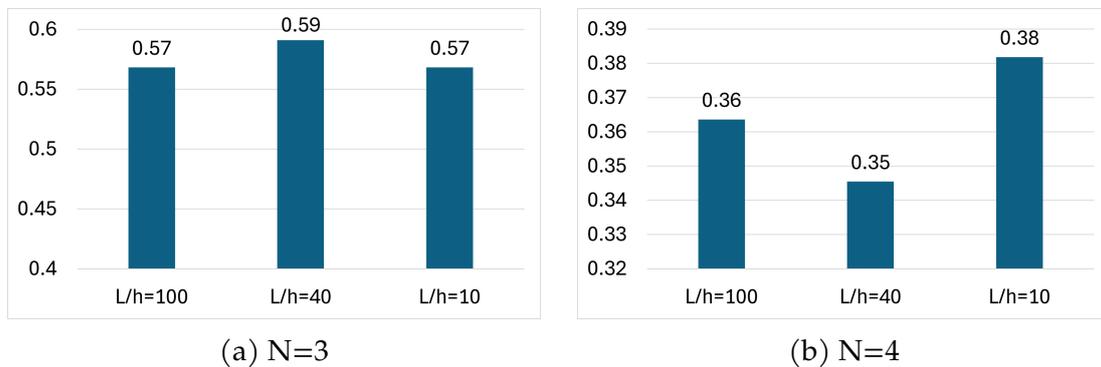


Figura 6.6: Fattore di rilevanza: Trave rettangolare incastrata

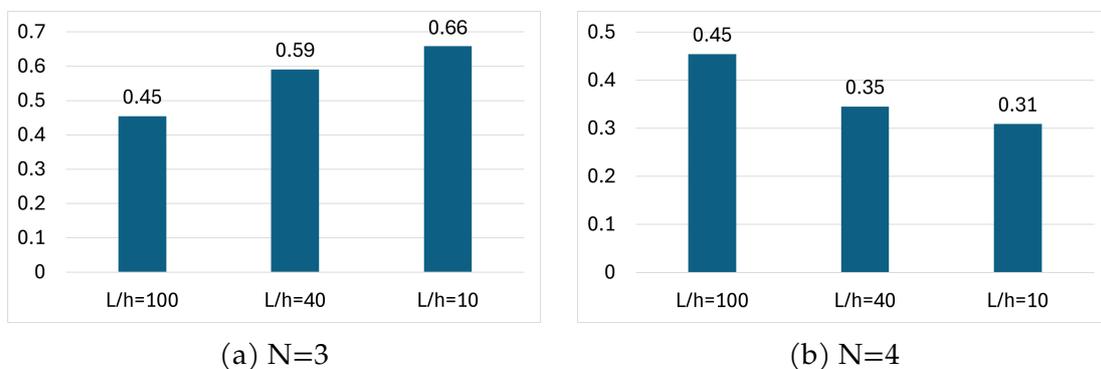
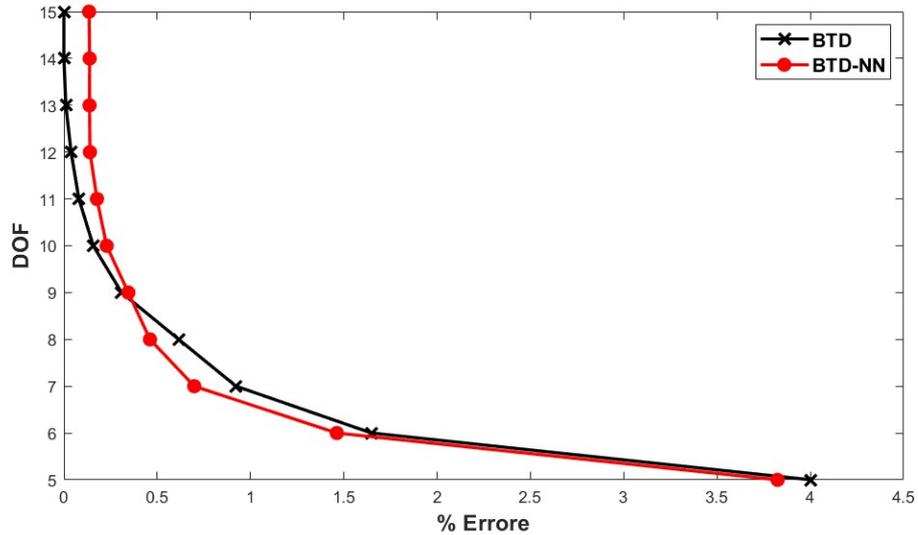
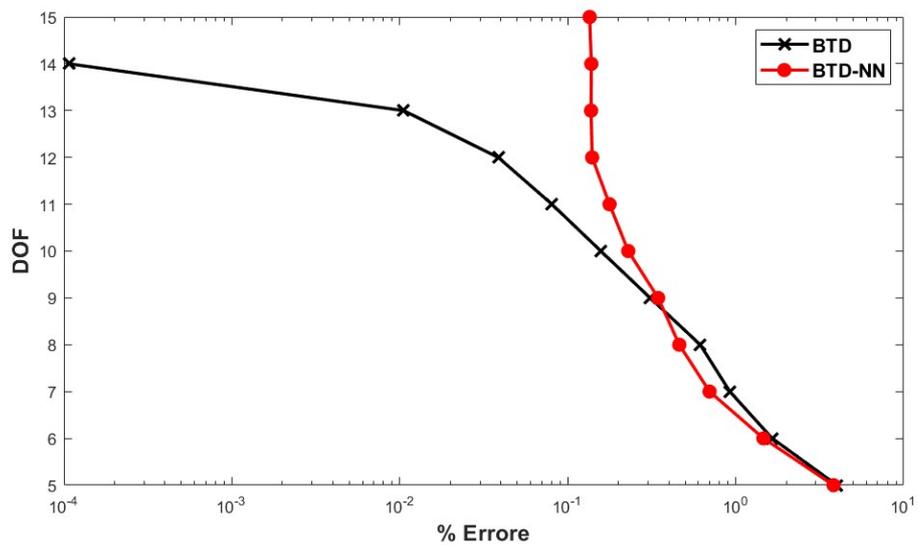


Figura 6.7: Fattore di rilevanza: Trave rettangolare simply supported

Nelle Figure 6.8 e 6.9 viene presentato il BTD sia in scala lineare che logaritmica sull'asse delle ascisse, relativo alla stessa trave con un rapporto L/h pari a 60, sia in configurazione incastrata che semplicemente appoggiata. È importante notare che questo specifico caso non è stato incluso nel dataset utilizzato per l'allenamento della rete neurale.

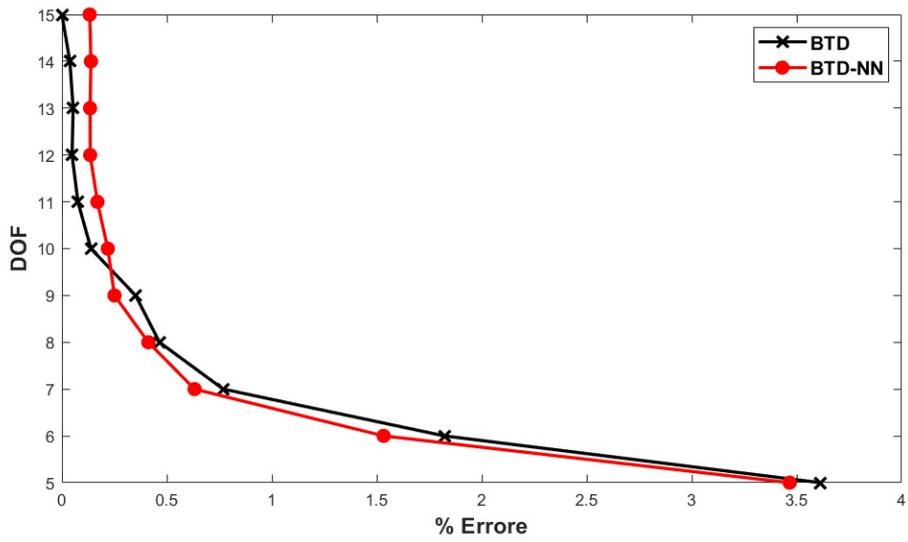


(a)

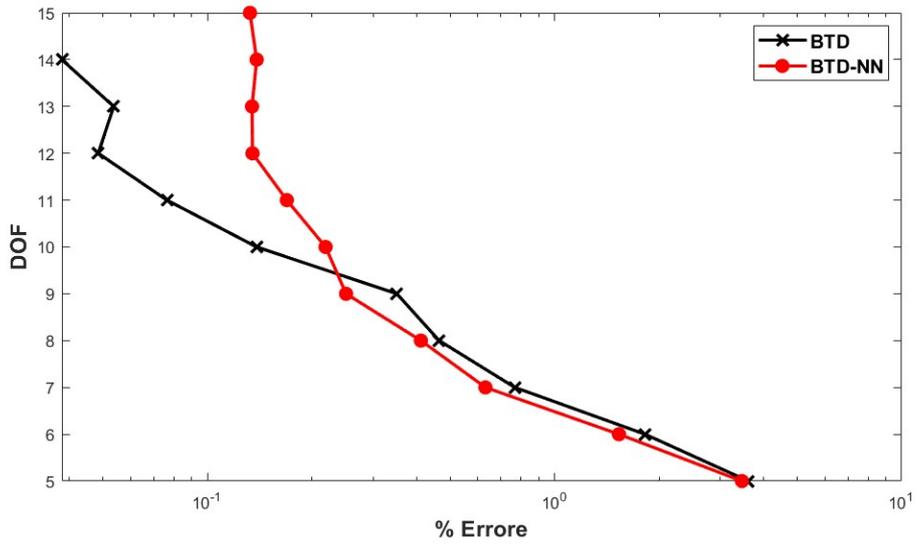


(b)

Figura 6.8: Confronto tra il BTD derivato numericamente e quello ottenuto tramite rete neurale di una trave incastrata con $L/h=60$



(a)



(b)

Figura 6.9: Confronto tra il BTD derivato numericamente e quello ottenuto tramite rete neurale di una trave semplicemente appoggiata con $L/h=60$

Tabella 6.24: Best theories ricavate con la rete neurale di una trave incastata con $L/h=60$

DOF	u_1	u_2	u_3	u_4	u_5	u_6	u_7	u_8	u_9	u_{10}	u_{11}	u_{12}	u_{13}	u_{14}	u_{15}	$\%E_{AVG}$
15	▲	▲	▲	▲	▲	▲	▲	▲	▲	▲	▲	▲	▲	▲	▲	1.350E-01
14	▲	▲	▲	▲	▲	▲	▲	▲	▲	△	▲	▲	▲	▲	▲	1.381E-01
13	▲	▲	▲	▲	▲	▲	▲	▲	▲	△	▲	▲	▲	▲	△	1.376E-01
12	▲	▲	▲	▲	▲	▲	▲	▲	▲	△	▲	▲	△	▲	△	1.397E-01
11	▲	▲	▲	▲	▲	▲	▲	▲	▲	△	△	▲	△	▲	△	1.772E-01
10	▲	▲	▲	▲	▲	▲	△	▲	▲	△	▲	▲	△	△	△	2.292E-01
9	▲	▲	▲	▲	▲	▲	▲	▲	▲	△	△	△	△	△	△	3.453E-01
8	▲	▲	▲	▲	▲	▲	△	▲	▲	△	△	△	△	△	△	4.614E-01
7	▲	▲	▲	▲	▲	▲	△	▲	△	△	△	△	△	△	△	6.987E-01
6	▲	▲	▲	▲	▲	▲	△	△	△	△	△	△	△	△	△	1.463E+00
5	▲	▲	▲	△	▲	▲	△	△	△	△	△	△	△	△	△	3.824E+00

Tabella 6.25: Best theories FE di una trave incastata con $L/h=60$

DOF	u_1	u_2	u_3	u_4	u_5	u_6	u_7	u_8	u_9	u_{10}	u_{11}	u_{12}	u_{13}	u_{14}	u_{15}	$\%E_{AVG}$
15	▲	▲	▲	▲	▲	▲	▲	▲	▲	▲	▲	▲	▲	▲	▲	0.000E+00
14	▲	▲	▲	▲	▲	▲	▲	▲	▲	▲	▲	▲	▲	▲	△	1.072E-04
13	▲	▲	▲	▲	▲	▲	▲	▲	▲	▲	▲	▲	△	▲	△	1.054E-02
12	▲	▲	▲	▲	▲	▲	▲	▲	▲	△	▲	▲	△	▲	△	3.857E-02
11	▲	▲	▲	▲	▲	▲	▲	▲	▲	△	▲	▲	△	△	△	8.051E-02
10	▲	▲	▲	▲	▲	▲	▲	▲	▲	△	△	▲	△	△	△	1.574E-01
9	▲	▲	▲	▲	▲	▲	△	▲	▲	△	△	▲	△	△	△	3.093E-01
8	▲	▲	▲	▲	▲	▲	△	▲	△	△	△	▲	△	△	△	6.152E-01
7	▲	▲	▲	▲	▲	▲	△	▲	△	△	△	△	△	△	△	9.226E-01
6	▲	▲	▲	▲	▲	▲	△	△	△	△	△	△	△	△	△	1.649E+00
5	▲	▲	▲	△	▲	▲	△	△	△	△	△	△	△	△	△	4.003E+00

Tabella 6.26: Best theories ricavate con la rete neurale di una trave simply supported con $L/h=60$

DOF	u_1	u_2	u_3	u_4	u_5	u_6	u_7	u_8	u_9	u_{10}	u_{11}	u_{12}	u_{13}	u_{14}	u_{15}	$\%E_{AVG}$
15	▲	▲	▲	▲	▲	▲	▲	▲	▲	▲	▲	▲	▲	▲	▲	1.325E-01
14	▲	▲	▲	▲	▲	▲	▲	▲	▲	▲	▲	▲	▲	▲	△	1.385E-01
13	▲	▲	▲	▲	▲	▲	▲	▲	▲	△	▲	▲	▲	△	▲	1.343E-01
12	▲	▲	▲	▲	▲	▲	▲	▲	▲	△	▲	▲	▲	△	△	1.348E-01
11	▲	▲	▲	▲	▲	▲	▲	▲	▲	△	△	▲	△	▲	△	1.692E-01
10	▲	▲	▲	▲	▲	▲	△	▲	▲	△	△	▲	▲	△	△	2.189E-01
9	▲	▲	▲	▲	▲	▲	△	▲	▲	△	△	▲	△	△	△	2.508E-01
8	▲	▲	▲	▲	▲	▲	△	▲	▲	△	△	△	△	△	△	4.118E-01
7	▲	▲	▲	▲	▲	▲	△	▲	△	△	△	△	△	△	△	6.320E-01
6	▲	▲	▲	▲	▲	▲	△	△	△	△	△	△	△	△	△	1.532E+00
5	▲	▲	▲	△	▲	▲	△	△	△	△	△	△	△	△	△	3.466E+00

Tabella 6.27: Best theories FE di una trave simply supported con $L/h=60$

DOF	u ₁	u ₂	u ₃	u ₄	u ₅	u ₆	u ₇	u ₈	u ₉	u ₁₀	u ₁₁	u ₁₂	u ₁₃	u ₁₄	u ₁₅	%E _{AVG}
15	▲	▲	▲	▲	▲	▲	▲	▲	▲	▲	▲	▲	▲	▲	▲	0.000E+00
14	▲	▲	▲	▲	▲	▲	▲	▲	▲	▲	▲	▲	▲	▲	▲	3.805E-02
13	▲	▲	▲	▲	▲	▲	▲	▲	▲	△	▲	▲	△	▲	▲	5.366E-02
12	▲	▲	▲	▲	▲	▲	△	▲	▲	▲	▲	▲	△	▲	△	4.845E-02
11	▲	▲	▲	▲	▲	▲	△	▲	▲	△	▲	▲	△	▲	△	7.636E-02
10	▲	▲	▲	▲	▲	▲	△	▲	▲	△	▲	▲	△	△	△	1.385E-01
9	▲	▲	▲	▲	▲	▲	△	▲	▲	△	△	▲	△	△	△	3.512E-01
8	▲	▲	▲	▲	▲	▲	△	▲	△	△	△	▲	△	△	△	4.648E-01
7	▲	▲	▲	▲	▲	▲	△	▲	△	△	△	△	△	△	△	7.682E-01
6	▲	▲	▲	▲	▲	▲	△	△	△	△	△	△	△	△	△	1.822E+00
5	▲	▲	▲	△	▲	▲	△	△	△	△	△	△	△	△	△	3.614E+00

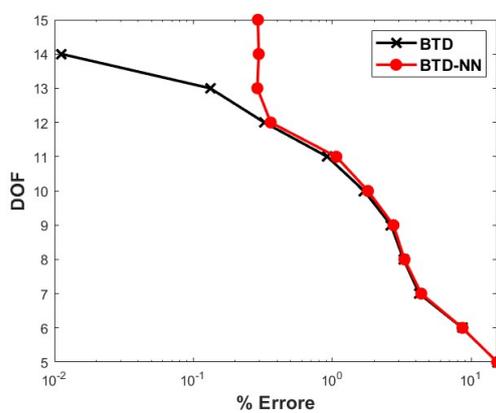
Dall'analisi dei grafici, si nota come la curva generata dalla rete neurale presenti discordanze rispetto a quella derivata da calcoli numerici, specialmente per modelli con più di dieci gradi di libertà. Tale discrepanza si attribuisce principalmente alla distribuzione degli errori molto bassi dal 10 al 15 grado di libertà e alla modalità di selezione dei dati di training.

6.3 Risultati della rete neurale ottimizzando la selezione dei dati di Training

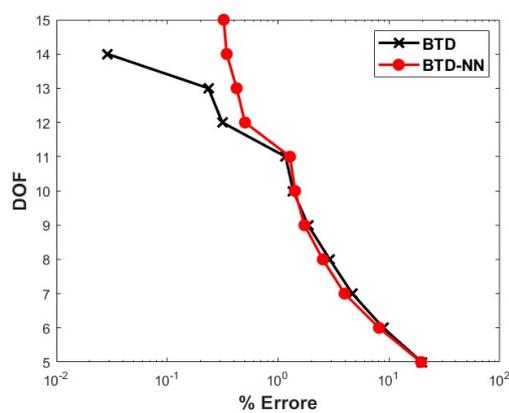
La riflessione nel paragrafo precedente apre alla possibilità di andare oltre l'approccio di selezione casuale dei dati. Per affrontare questa sfida, si propone una selezione mirata dei dati di training che tenga conto della distribuzione disomogenea delle teorie. Conducendo anche in questo caso un'analisi variando i parametri dell'allenamento nello stesso modo del paragrafo 4.2.2, prendendone anche gli stessi casi, vengono riportati nella Tabella 6.28 risultati migliori per ogni teoria. La rete migliore che verrà usata per ricavare i BTD è quella con un numero di epoche pari ad 800.

Tabella 6.28: N. neuroni nei 6 layer: 128, 128, 128, 64, 64, 64

Epoche	Batch Size	Validation Split	Train Loss	Val Loss	Test Loss
400	32	0.1	0.1778	0.2249	0.2919
500	32	0.1	0.1980	0.2433	0.2788
600	32	0.15	0.1540	0.2557	0.2799
700	32	0.15	0.1772	0.1913	0.2324
800	32	0.1	0.1352	0.1978	0.2282

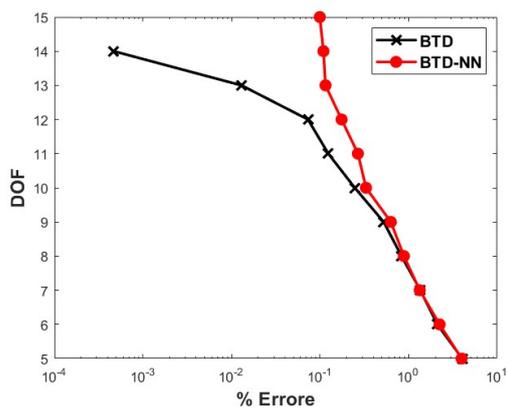


(a) Incastrata

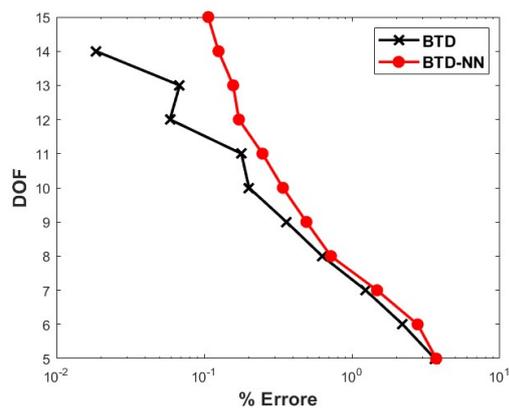


(b) Simply Supported

Figura 6.10: Trave a sezione rettangolare con $L/h=10$



(a) Incastrata



(b) Simply Supported

Figura 6.11: Trave a sezione rettangolare con $L/h=40$

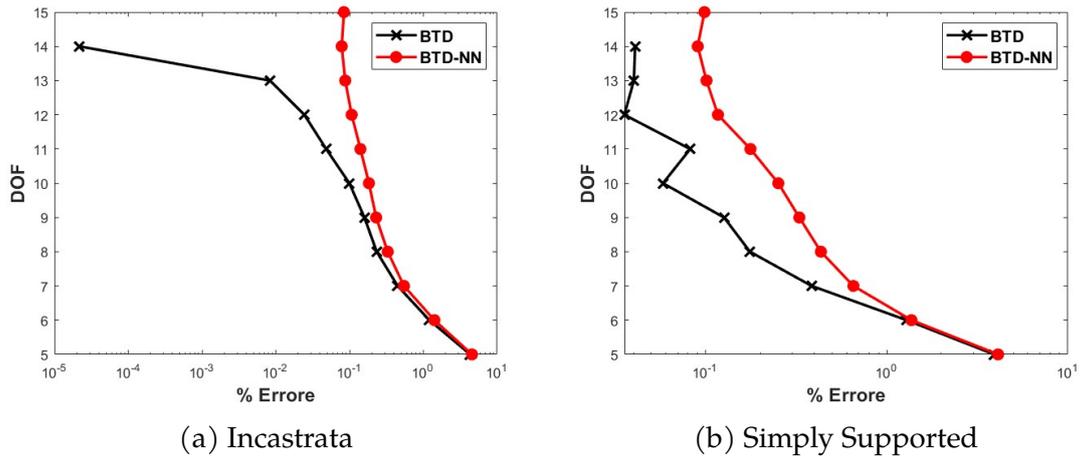


Figura 6.12: Trave a sezione rettangolare con $L/h=100$

Vengono riportati di seguito le Tabelle relative alle Best Theories ricavate con la rete neurale.

Tabella 6.29: Best theories ricavate con la rete neurale di una trave rettangolare incastrata con $L/h=10$

DOF	u_1	u_2	u_3	u_4	u_5	u_6	u_7	u_8	u_9	u_{10}	u_{11}	u_{12}	u_{13}	u_{14}	u_{15}	$\%E_{AVG}$
15	▲	▲	▲	▲	▲	▲	▲	▲	▲	▲	▲	▲	▲	▲	▲	2.915E-01
14	▲	▲	▲	▲	▲	▲	▲	▲	▲	△	▲	▲	▲	▲	▲	2.955E-01
13	▲	▲	▲	▲	▲	▲	▲	▲	▲	△	▲	▲	▲	△	△	2.887E-01
12	▲	▲	▲	▲	▲	▲	▲	▲	▲	△	▲	▲	▲	△	△	3.603E-01
11	▲	▲	▲	▲	▲	▲	▲	▲	△	△	▲	▲	▲	△	△	1.068E+00
10	▲	▲	▲	▲	▲	▲	▲	▲	△	△	▲	▲	△	△	△	1.805E+00
9	▲	▲	▲	▲	▲	▲	△	▲	▲	△	△	▲	△	△	△	2.755E+00
8	▲	▲	▲	▲	▲	▲	△	▲	▲	△	△	△	△	△	△	3.303E+00
7	▲	▲	▲	▲	▲	▲	△	▲	△	△	△	△	△	△	△	4.364E+00
6	▲	▲	▲	▲	▲	△	△	▲	△	△	△	△	△	△	△	8.632E+00
5	▲	▲	▲	▲	▲	△	△	△	△	△	△	△	△	△	△	1.534E+01

Tabella 6.30: Best theories ricavate con la rete neurale di una trave rettangolare incastrata con $L/h=40$

DOF	u_1	u_2	u_3	u_4	u_5	u_6	u_7	u_8	u_9	u_{10}	u_{11}	u_{12}	u_{13}	u_{14}	u_{15}	$\%E_{AVG}$
15	▲	▲	▲	▲	▲	▲	▲	▲	▲	▲	▲	▲	▲	▲	▲	9.937E-02
14	▲	▲	▲	▲	▲	▲	▲	▲	▲	△	▲	▲	▲	▲	▲	1.093E-01
13	▲	▲	▲	▲	▲	▲	▲	▲	▲	△	▲	▲	▲	△	▲	1.152E-01
12	▲	▲	▲	▲	▲	▲	▲	▲	▲	△	▲	▲	▲	△	△	1.751E-01
11	▲	▲	▲	▲	▲	▲	▲	▲	▲	△	▲	▲	△	△	△	2.678E-01
10	▲	▲	▲	▲	▲	▲	▲	▲	▲	△	△	▲	△	△	△	3.305E-01
9	▲	▲	▲	▲	▲	▲	△	▲	▲	△	△	▲	△	△	△	6.302E-01
8	▲	▲	▲	▲	▲	▲	△	▲	▲	△	△	△	△	△	△	8.852E-01
7	▲	▲	▲	▲	▲	▲	△	▲	△	△	△	△	△	△	△	1.336E+00
6	▲	▲	▲	▲	▲	▲	△	△	△	△	△	△	△	△	△	2.239E+00
5	▲	▲	▲	△	▲	▲	△	△	△	△	△	△	△	△	△	3.969E+00

Tabella 6.31: Best theories ricavate con la rete neurale di una trave rettangolare incastrata con $L/h=100$

DOF	u_1	u_2	u_3	u_4	u_5	u_6	u_7	u_8	u_9	u_{10}	u_{11}	u_{12}	u_{13}	u_{14}	u_{15}	$\%E_{AVG}$
15	▲	▲	▲	▲	▲	▲	▲	▲	▲	▲	▲	▲	▲	▲	▲	8.395E-02
14	▲	▲	▲	▲	▲	▲	▲	▲	▲	△	▲	▲	▲	▲	▲	7.826E-02
13	▲	▲	▲	▲	▲	▲	▲	▲	▲	△	▲	▲	▲	△	▲	8.736E-02
12	▲	▲	▲	▲	▲	▲	▲	▲	▲	△	▲	▲	▲	△	△	1.068E-01
11	▲	▲	▲	▲	▲	▲	△	▲	▲	▲	△	▲	△	▲	△	1.404E-01
10	▲	▲	▲	▲	▲	▲	△	▲	▲	△	△	▲	▲	△	△	1.832E-01
9	▲	▲	▲	▲	▲	▲	△	▲	▲	△	△	▲	△	△	△	2.292E-01
8	▲	▲	▲	▲	▲	▲	△	▲	△	△	△	▲	△	△	△	3.291E-01
7	▲	▲	▲	▲	▲	▲	△	▲	△	△	△	△	△	△	△	5.460E-01
6	▲	▲	▲	▲	▲	▲	△	△	△	△	△	△	△	△	△	1.411E+00
5	▲	▲	▲	△	▲	▲	△	△	△	△	△	△	△	△	△	4.555E+00

Tabella 6.32: Best theories ricavate con la rete neurale di una trave rettangolare simply supported con $L/h=10$

DOF	u_1	u_2	u_3	u_4	u_5	u_6	u_7	u_8	u_9	u_{10}	u_{11}	u_{12}	u_{13}	u_{14}	u_{15}	$\%E_{AVG}$
15	▲	▲	▲	▲	▲	▲	▲	▲	▲	▲	▲	▲	▲	▲	▲	3.227E-01
14	▲	▲	▲	▲	▲	▲	▲	▲	▲	△	▲	▲	▲	▲	▲	3.438E-01
13	▲	▲	▲	▲	▲	▲	▲	▲	▲	△	▲	▲	▲	▲	△	4.226E-01
12	▲	▲	▲	▲	▲	▲	▲	▲	▲	△	▲	▲	▲	△	△	5.030E-01
11	▲	▲	▲	▲	▲	▲	▲	▲	▲	△	▲	▲	▲	△	△	1.279E+00
10	▲	▲	▲	▲	▲	▲	▲	▲	▲	△	△	▲	▲	△	△	1.421E+00
9	▲	▲	▲	▲	▲	▲	▲	▲	▲	△	△	△	△	△	△	1.727E+00
8	▲	▲	▲	▲	▲	▲	▲	▲	△	△	△	△	△	△	△	2.529E+00
7	▲	▲	▲	▲	▲	▲	△	▲	△	△	△	△	△	△	△	3.973E+00
6	▲	▲	▲	▲	▲	△	△	▲	△	△	△	△	△	△	△	8.118E+00
5	▲	▲	▲	▲	▲	△	△	△	△	△	△	△	△	△	△	1.945E+01

Tabella 6.33: Best theories ricavate con la rete neurale di una trave rettangolare simply supported con $L/h=40$

DOF	u_1	u_2	u_3	u_4	u_5	u_6	u_7	u_8	u_9	u_{10}	u_{11}	u_{12}	u_{13}	u_{14}	u_{15}	$\%E_{AVG}$
15	▲	▲	▲	▲	▲	▲	▲	▲	▲	▲	▲	▲	▲	▲	▲	1.065E-01
14	▲	▲	▲	▲	▲	▲	▲	▲	▲	▲	▲	▲	▲	▲	△	1.249E-01
13	▲	▲	▲	▲	▲	▲	▲	▲	▲	△	▲	▲	▲	▲	△	1.570E-01
12	▲	▲	▲	▲	▲	▲	▲	▲	▲	△	▲	▲	▲	△	△	1.716E-01
11	▲	▲	▲	▲	▲	▲	▲	▲	▲	△	△	▲	△	▲	△	2.479E-01
10	▲	▲	▲	▲	▲	▲	▲	▲	▲	△	△	▲	△	△	△	3.406E-01
9	▲	▲	▲	▲	▲	▲	▲	▲	▲	△	△	△	△	△	△	4.913E-01
8	▲	▲	▲	▲	▲	▲	△	▲	▲	△	△	△	△	△	△	7.191E-01
7	▲	▲	▲	▲	▲	▲	△	▲	△	△	△	△	△	△	△	1.475E+00
6	▲	▲	▲	▲	▲	▲	△	△	△	△	△	△	△	△	△	2.776E+00
5	▲	▲	▲	△	▲	▲	△	△	△	△	△	△	△	△	△	3.707E+00

Tabella 6.34: Best theories ricavate con la rete neurale di una trave rettangolare simply supported con $L/h=100$

DOF	u_1	u_2	u_3	u_4	u_5	u_6	u_7	u_8	u_9	u_{10}	u_{11}	u_{12}	u_{13}	u_{14}	u_{15}	$\%E_{AVG}$
15	▲	▲	▲	▲	▲	▲	▲	▲	▲	▲	▲	▲	▲	▲	▲	9.860E-02
14	▲	▲	▲	▲	▲	▲	▲	▲	▲	△	▲	▲	▲	▲	▲	9.053E-02
13	▲	▲	▲	▲	▲	▲	▲	▲	▲	▲	▲	▲	▲	△	△	1.012E-01
12	▲	▲	▲	▲	▲	▲	▲	▲	▲	△	▲	▲	▲	△	△	1.170E-01
11	▲	▲	▲	▲	▲	▲	△	▲	▲	△	▲	▲	▲	△	△	1.769E-01
10	▲	▲	▲	▲	▲	▲	△	▲	▲	△	△	▲	▲	△	△	2.522E-01
9	▲	▲	▲	▲	▲	▲	△	▲	△	△	△	▲	▲	▲	△	3.294E-01
8	▲	▲	▲	▲	▲	▲	△	▲	△	△	△	▲	▲	△	△	4.331E-01
7	▲	▲	▲	▲	▲	▲	△	▲	△	△	△	△	△	△	△	6.544E-01
6	▲	▲	▲	▲	▲	▲	△	△	△	△	△	△	△	△	△	1.369E+00
5	▲	▲	▲	△	▲	▲	△	△	△	△	△	△	△	△	△	4.115E+00

6.3.1 Trave con sezione quadrata cava

La configurazione ottimale di rete neurale feed forward identificata per il caso di una trave con sezione rettangolare è stata applicata al caso di una trave con sezione quadrata cava, analizzato nella sezione 5.1.2. Da questo punto in avanti, si fa riferimento a questa configurazione di rete neurale in cui viene aggiunto il comando EarlyStopping per monitorare il training della rete in modo da fermare l'allenamento quando la loss sul validation set non migliora per un numero definito di epoche impostato a 100. Questa scelta deriva dalla considerazione che la rete neurale ottimizzata per la trave con sezione rettangolare potrebbe non essere la migliore soluzione per gli altri casi esaminati. La rete è stata addestrata consi-

derando diversi valori del rapporto L/h , specificatamente per $L/h = 20, 50$ e 100 , e prendendo in esame due diverse condizioni di vincolo: incastro su entrambi i lati estremi e il semplice appoggio. Vengono presentati di seguito i risultati ottenuti dalla rete confrontati con quelli ricavati numericamente.

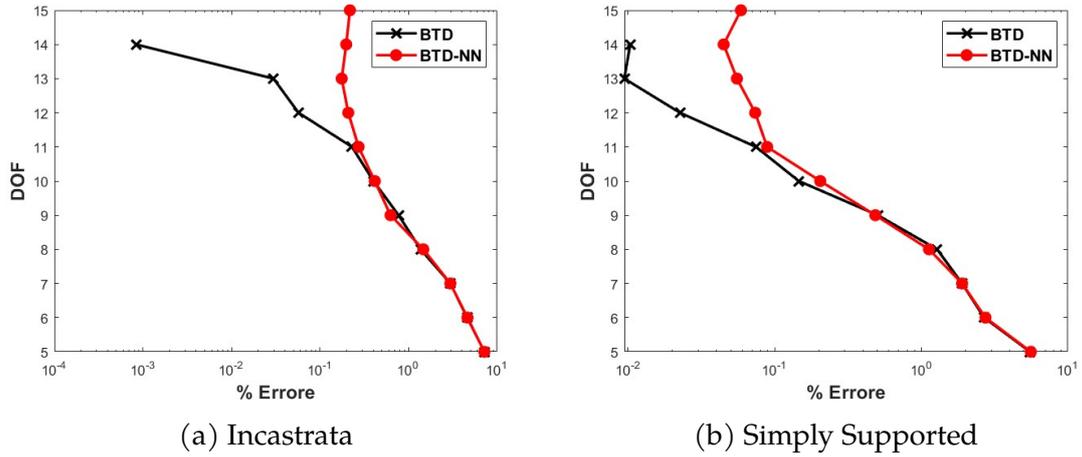


Figura 6.13: Trave con sezione quadrata cava $L/h=20$

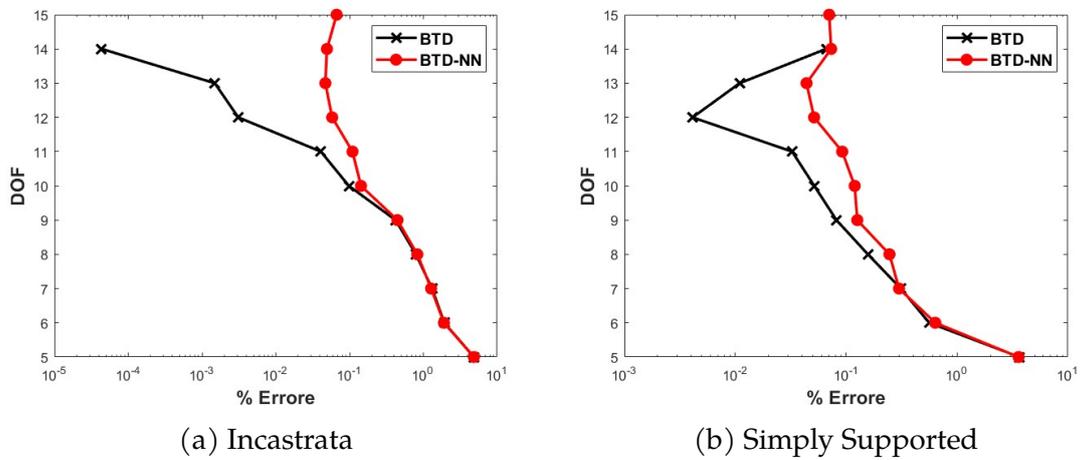


Figura 6.14: Trave con sezione quadrata cava $L/h=50$

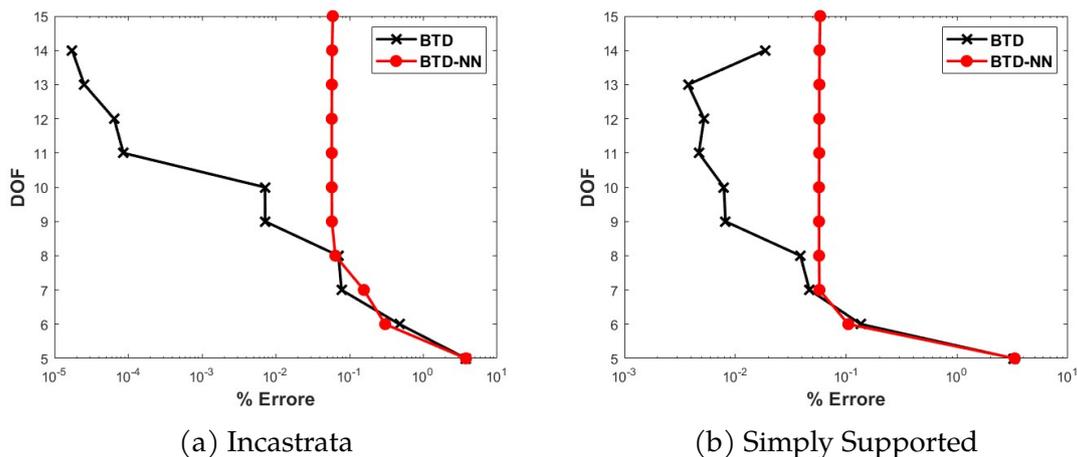


Figura 6.15: Trave con sezione quadrata cava $L/h=100$

Tabella 6.35: Best theories ricavate con rete neurale di una trave cava incastrata su entrambi i lati con $L/h=20$

DOF	u_1	u_2	u_3	u_4	u_5	u_6	u_7	u_8	u_9	u_{10}	u_{11}	u_{12}	u_{13}	u_{14}	u_{15}	$\%E_{AVG}$
15	▲	▲	▲	▲	▲	▲	▲	▲	▲	▲	▲	▲	▲	▲	▲	2.174E-01
14	▲	▲	▲	▲	▲	▲	▲	▲	▲	▲	△	▲	▲	▲	▲	1.974E-01
13	▲	▲	▲	▲	▲	▲	▲	▲	▲	▲	△	▲	▲	▲	△	1.756E-01
12	▲	▲	▲	▲	▲	▲	▲	△	▲	▲	△	▲	▲	▲	△	2.083E-01
11	▲	▲	▲	▲	▲	▲	▲	△	▲	▲	△	▲	△	▲	△	2.723E-01
10	▲	▲	▲	▲	▲	▲	▲	△	△	▲	△	▲	△	▲	△	4.147E-01
9	▲	▲	▲	▲	▲	▲	▲	△	△	▲	△	△	△	▲	△	6.259E-01
8	▲	▲	▲	▲	▲	△	▲	△	△	▲	△	△	△	△	▲	1.467E+00
7	▲	▲	▲	▲	▲	△	△	△	△	▲	△	△	△	△	▲	2.960E+00
6	▲	▲	▲	▲	▲	▲	△	△	△	△	△	△	△	△	△	4.618E+00
5	▲	▲	▲	△	▲	▲	△	△	△	△	△	△	△	△	△	7.169E+00

Tabella 6.36: Best theories FE di una trave cava incastrata su entrambi i lati con $L/h=20$

DOF	u_1	u_2	u_3	u_4	u_5	u_6	u_7	u_8	u_9	u_{10}	u_{11}	u_{12}	u_{13}	u_{14}	u_{15}	$\%E_{AVG}$
15	▲	▲	▲	▲	▲	▲	▲	▲	▲	▲	▲	▲	▲	▲	▲	0.000E+00
14	▲	▲	▲	▲	▲	▲	▲	▲	▲	▲	▲	▲	△	▲	▲	8.348E-04
13	▲	▲	▲	▲	▲	▲	▲	▲	▲	▲	△	▲	△	▲	▲	2.984E-02
12	▲	▲	▲	▲	▲	▲	▲	▲	▲	▲	△	▲	△	▲	△	5.710E-02
11	▲	▲	▲	▲	▲	▲	▲	△	▲	▲	△	▲	△	▲	△	2.294E-01
10	▲	▲	▲	▲	▲	▲	▲	△	△	▲	△	▲	△	▲	△	4.014E-01
9	▲	▲	▲	▲	▲	▲	▲	△	△	▲	△	△	△	▲	△	7.704E-01
8	▲	▲	▲	▲	▲	▲	▲	△	△	▲	△	△	△	△	△	1.365E+00
7	▲	▲	▲	▲	▲	▲	△	△	△	▲	△	△	△	△	△	2.967E+00
6	▲	▲	▲	▲	▲	▲	△	△	△	△	△	△	△	△	△	4.581E+00
5	▲	▲	▲	△	▲	▲	△	△	△	△	△	△	△	△	△	7.179E+00

Tabella 6.37: Best theories ricavate con rete neurale di una trave cava incastrata su entrambi i lati con $L/h=50$

DOF	u_1	u_2	u_3	u_4	u_5	u_6	u_7	u_8	u_9	u_{10}	u_{11}	u_{12}	u_{13}	u_{14}	u_{15}	$\%E_{AVG}$
15	▲	▲	▲	▲	▲	▲	▲	▲	▲	▲	▲	▲	▲	▲	▲	6.685E-02
14	▲	▲	▲	▲	▲	▲	▲	▲	▲	▲	▲	▲	▲	▲	△	4.936E-02
13	▲	▲	▲	▲	▲	▲	▲	▲	▲	▲	▲	▲	△	▲	△	4.696E-02
12	▲	▲	▲	▲	▲	▲	▲	△	▲	▲	▲	▲	△	▲	△	5.815E-02
11	▲	▲	▲	▲	▲	▲	▲	△	△	▲	△	▲	▲	▲	△	1.096E-01
10	▲	▲	▲	▲	▲	▲	▲	△	△	▲	△	▲	△	▲	△	1.428E-01
9	▲	▲	▲	▲	▲	▲	△	△	△	▲	△	▲	△	▲	△	4.460E-01
8	▲	▲	▲	▲	▲	▲	△	△	△	▲	△	△	△	▲	△	8.284E-01
7	▲	▲	▲	▲	▲	▲	△	△	△	△	△	▲	△	△	△	1.275E+00
6	▲	▲	▲	▲	▲	▲	△	△	△	△	△	△	△	△	△	1.901E+00
5	▲	▲	▲	▲	▲	△	△	△	△	△	△	△	△	△	△	4.835E+00

Tabella 6.38: Best theories FE di una trave cava incastrata su entrambi i lati con $L/h=50$

DOF	u_1	u_2	u_3	u_4	u_5	u_6	u_7	u_8	u_9	u_{10}	u_{11}	u_{12}	u_{13}	u_{14}	u_{15}	$\%E_{AVG}$
15	▲	▲	▲	▲	▲	▲	▲	▲	▲	▲	▲	▲	▲	▲	▲	0.000E+00
14	▲	▲	▲	▲	▲	▲	▲	▲	▲	▲	▲	▲	△	▲	▲	4.374E-05
13	▲	▲	▲	▲	▲	▲	▲	▲	▲	▲	△	▲	△	▲	▲	1.491E-03
12	▲	▲	▲	▲	▲	▲	▲	▲	▲	▲	△	▲	△	▲	△	3.108E-03
11	▲	▲	▲	▲	▲	▲	▲	△	▲	▲	△	▲	△	▲	△	4.091E-02
10	▲	▲	▲	▲	▲	▲	▲	△	△	▲	△	▲	△	▲	△	9.775E-02
9	▲	▲	▲	▲	▲	▲	△	△	△	▲	△	▲	△	▲	△	4.214E-01
8	▲	▲	▲	▲	▲	▲	△	△	△	▲	△	▲	△	▲	△	7.926E-01
7	▲	▲	▲	▲	▲	▲	△	△	△	△	△	△	△	▲	△	1.310E+00
6	▲	▲	▲	▲	▲	▲	△	△	△	△	△	△	△	△	△	1.918E+00
5	▲	▲	▲	△	▲	▲	△	△	△	△	△	△	△	△	△	4.849E+00

Tabella 6.39: Best theories ricavate con rete neurale di una trave cava incastrata su entrambi i lati con $L/h=100$

DOF	u_1	u_2	u_3	u_4	u_5	u_6	u_7	u_8	u_9	u_{10}	u_{11}	u_{12}	u_{13}	u_{14}	u_{15}	$\%E_{AVG}$
15	▲	▲	▲	▲	▲	▲	▲	▲	▲	▲	▲	▲	▲	▲	▲	0.000E+00
14	▲	▲	▲	▲	▲	▲	▲	▲	▲	▲	▲	△	▲	▲	▲	1.741E-05
13	▲	▲	▲	▲	▲	▲	▲	▲	▲	▲	▲	△	△	▲	▲	2.543E-05
12	▲	▲	▲	▲	▲	▲	▲	▲	▲	▲	△	▲	△	△	▲	6.457E-05
11	▲	▲	▲	▲	▲	▲	▲	▲	▲	▲	△	△	△	△	▲	8.623E-05
10	▲	▲	▲	▲	▲	▲	▲	△	▲	▲	△	△	△	△	▲	7.144E-03
9	▲	▲	▲	▲	▲	▲	▲	△	▲	▲	△	△	△	△	△	7.182E-03
8	▲	▲	▲	▲	▲	▲	△	▲	△	▲	△	△	△	△	△	7.076E-02
7	▲	▲	▲	▲	▲	▲	△	△	△	▲	△	△	△	△	△	7.782E-02
6	▲	▲	▲	△	▲	▲	△	△	△	△	▲	△	△	△	△	4.737E-01
5	▲	▲	▲	△	▲	▲	△	△	△	△	△	△	△	△	△	3.769E+00

Tabella 6.40: Best theories FE di una trave cava incastrata su entrambi i lati con $L/h=100$

DOF	u_1	u_2	u_3	u_4	u_5	u_6	u_7	u_8	u_9	u_{10}	u_{11}	u_{12}	u_{13}	u_{14}	u_{15}	$\%E_{AVG}$
15	▲	▲	▲	▲	▲	▲	▲	▲	▲	▲	▲	▲	▲	▲	▲	0.000E+00
14	▲	▲	▲	▲	▲	▲	▲	▲	▲	▲	▲	▲	▲	▲	▲	3.722E-06
13	▲	▲	▲	▲	▲	▲	▲	▲	▲	▲	▲	▲	▲	▲	▲	6.265E-05
12	▲	▲	▲	▲	▲	▲	▲	▲	▲	▲	▲	▲	▲	▲	▲	1.352E-04
11	▲	▲	▲	▲	▲	▲	▲	▲	▲	▲	▲	▲	▲	▲	▲	2.247E-04
10	▲	▲	▲	▲	▲	▲	▲	▲	▲	▲	▲	▲	▲	▲	▲	3.145E-04
9	▲	▲	▲	▲	▲	▲	▲	▲	▲	▲	▲	▲	▲	▲	▲	1.601E-02
8	▲	▲	▲	▲	▲	▲	▲	▲	▲	▲	▲	▲	▲	▲	▲	3.170E-02
7	▲	▲	▲	▲	▲	▲	▲	▲	▲	▲	▲	▲	▲	▲	▲	1.690E-01
6	▲	▲	▲	▲	▲	▲	▲	▲	▲	▲	▲	▲	▲	▲	▲	3.062E-01
5	▲	▲	▲	▲	▲	▲	▲	▲	▲	▲	▲	▲	▲	▲	▲	3.829E+00

Tabella 6.41: Best theories ricavate con rete neurale di una trave cava simply supported con $L/h=20$

DOF	u_1	u_2	u_3	u_4	u_5	u_6	u_7	u_8	u_9	u_{10}	u_{11}	u_{12}	u_{13}	u_{14}	u_{15}	$\%E_{AVG}$
15	▲	▲	▲	▲	▲	▲	▲	▲	▲	▲	▲	▲	▲	▲	▲	5.876E-02
14	▲	▲	▲	▲	▲	▲	▲	▲	▲	▲	▲	▲	▲	▲	▲	4.481E-02
13	▲	▲	▲	▲	▲	▲	▲	▲	▲	▲	▲	▲	▲	▲	▲	5.518E-02
12	▲	▲	▲	▲	▲	▲	▲	▲	▲	▲	▲	▲	▲	▲	▲	7.353E-02
11	▲	▲	▲	▲	▲	▲	▲	▲	▲	▲	▲	▲	▲	▲	▲	8.866E-02
10	▲	▲	▲	▲	▲	▲	▲	▲	▲	▲	▲	▲	▲	▲	▲	2.043E-01
9	▲	▲	▲	▲	▲	▲	▲	▲	▲	▲	▲	▲	▲	▲	▲	4.853E-01
8	▲	▲	▲	▲	▲	▲	▲	▲	▲	▲	▲	▲	▲	▲	▲	1.128E+00
7	▲	▲	▲	▲	▲	▲	▲	▲	▲	▲	▲	▲	▲	▲	▲	1.898E+00
6	▲	▲	▲	▲	▲	▲	▲	▲	▲	▲	▲	▲	▲	▲	▲	2.738E+00
5	▲	▲	▲	▲	▲	▲	▲	▲	▲	▲	▲	▲	▲	▲	▲	5.583E+00

Tabella 6.42: Best theories FE di una trave cava simply supported con $L/h=20$

DOF	u_1	u_2	u_3	u_4	u_5	u_6	u_7	u_8	u_9	u_{10}	u_{11}	u_{12}	u_{13}	u_{14}	u_{15}	$\%E_{AVG}$
15	▲	▲	▲	▲	▲	▲	▲	▲	▲	▲	▲	▲	▲	▲	▲	0.000E+00
14	▲	▲	▲	▲	▲	▲	▲	▲	▲	▲	▲	▲	▲	▲	▲	1.032E-02
13	▲	▲	▲	▲	▲	▲	▲	▲	▲	▲	▲	▲	▲	▲	▲	9.413E-03
12	▲	▲	▲	▲	▲	▲	▲	▲	▲	▲	▲	▲	▲	▲	▲	2.257E-02
11	▲	▲	▲	▲	▲	▲	▲	▲	▲	▲	▲	▲	▲	▲	▲	7.439E-02
10	▲	▲	▲	▲	▲	▲	▲	▲	▲	▲	▲	▲	▲	▲	▲	1.459E-01
9	▲	▲	▲	▲	▲	▲	▲	▲	▲	▲	▲	▲	▲	▲	▲	5.040E-01
8	▲	▲	▲	▲	▲	▲	▲	▲	▲	▲	▲	▲	▲	▲	▲	1.281E+00
7	▲	▲	▲	▲	▲	▲	▲	▲	▲	▲	▲	▲	▲	▲	▲	1.896E+00
6	▲	▲	▲	▲	▲	▲	▲	▲	▲	▲	▲	▲	▲	▲	▲	2.680E+00
5	▲	▲	▲	▲	▲	▲	▲	▲	▲	▲	▲	▲	▲	▲	▲	5.531E+00

Tabella 6.43: Best theories ricavate con rete neurale di una trave cava simply supported con $L/h=50$

DOF	u_1	u_2	u_3	u_4	u_5	u_6	u_7	u_8	u_9	u_{10}	u_{11}	u_{12}	u_{13}	u_{14}	u_{15}	$\%E_{AVG}$
15	▲	▲	▲	▲	▲	▲	▲	▲	▲	▲	▲	▲	▲	▲	▲	7.035E-02
14	▲	▲	▲	▲	▲	▲	▲	▲	▲	▲	△	▲	▲	▲	▲	7.322E-02
13	▲	▲	▲	▲	▲	▲	▲	▲	▲	▲	△	▲	▲	▲	△	4.393E-02
12	▲	▲	▲	▲	▲	▲	▲	△	▲	▲	△	▲	▲	▲	△	5.143E-02
11	▲	▲	▲	▲	▲	▲	▲	△	△	▲	△	▲	▲	▲	△	9.220E-02
10	▲	▲	▲	▲	▲	▲	▲	△	△	▲	△	△	△	▲	▲	1.194E-01
9	▲	▲	▲	▲	▲	▲	▲	△	△	▲	△	△	△	▲	△	1.261E-01
8	▲	▲	▲	▲	▲	▲	▲	△	△	▲	△	△	△	△	△	2.459E-01
7	▲	▲	▲	▲	▲	▲	△	△	△	▲	△	△	△	△	△	2.998E-01
6	▲	▲	▲	▲	▲	▲	△	△	△	△	△	△	△	△	△	6.368E-01
5	▲	▲	▲	△	▲	▲	△	△	△	△	△	△	△	△	△	3.592E+00

Tabella 6.44: Best theories FE di una trave cava simply supported con $L/h=50$

DOF	u_1	u_2	u_3	u_4	u_5	u_6	u_7	u_8	u_9	u_{10}	u_{11}	u_{12}	u_{13}	u_{14}	u_{15}	$\%E_{AVG}$
15	▲	▲	▲	▲	▲	▲	▲	▲	▲	▲	▲	▲	▲	▲	▲	0.000E+00
14	▲	▲	▲	▲	▲	▲	▲	△	▲	▲	▲	▲	▲	▲	▲	6.600E-02
13	▲	▲	▲	▲	▲	▲	▲	▲	▲	▲	△	▲	▲	▲	△	1.097E-02
12	▲	▲	▲	▲	▲	▲	▲	▲	▲	▲	△	▲	△	▲	▲	4.123E-03
11	▲	▲	▲	▲	▲	▲	▲	△	△	▲	△	▲	△	▲	▲	3.261E-02
10	▲	▲	▲	▲	▲	▲	▲	▲	▲	▲	△	△	△	▲	△	5.162E-02
9	▲	▲	▲	▲	▲	▲	▲	△	△	▲	△	▲	△	△	△	8.181E-02
8	▲	▲	▲	▲	▲	▲	▲	△	△	▲	△	△	△	△	△	1.571E-01
7	▲	▲	▲	▲	▲	▲	△	△	△	▲	△	△	△	△	△	3.115E-01
6	▲	▲	▲	▲	▲	▲	△	△	△	△	△	△	△	△	△	5.612E-01
5	▲	▲	▲	▲	▲	△	△	△	△	△	△	△	△	△	△	3.658E+00

Tabella 6.45: Best theories ricavate con rete neurale di una trave cava simply supported con $L/h=100$

DOF	u_1	u_2	u_3	u_4	u_5	u_6	u_7	u_8	u_9	u_{10}	u_{11}	u_{12}	u_{13}	u_{14}	u_{15}	$\%E_{AVG}$
15	▲	▲	▲	▲	▲	▲	▲	▲	▲	▲	▲	▲	▲	▲	▲	5.833E-02
14	▲	▲	▲	▲	▲	▲	▲	▲	▲	▲	▲	△	▲	▲	▲	5.761E-02
13	▲	▲	▲	▲	▲	▲	▲	▲	▲	▲	▲	△	▲	△	▲	5.739E-02
12	▲	▲	▲	▲	▲	▲	▲	▲	▲	▲	△	△	▲	△	▲	5.724E-02
11	▲	▲	▲	▲	▲	▲	▲	▲	▲	▲	△	△	△	▲	△	5.721E-02
10	▲	▲	▲	▲	▲	▲	▲	▲	▲	▲	△	△	△	△	△	5.693E-02
9	▲	▲	▲	▲	▲	▲	▲	△	▲	▲	△	△	△	△	△	5.697E-02
8	▲	▲	▲	▲	▲	▲	▲	△	△	▲	△	△	△	△	△	5.706E-02
7	▲	▲	▲	▲	▲	▲	▲	△	△	△	△	△	△	△	△	5.740E-02
6	▲	▲	▲	▲	▲	▲	△	△	△	△	△	△	△	△	△	1.047E-01
5	▲	▲	▲	△	▲	▲	△	△	△	△	△	△	△	△	△	3.312E+00

Tabella 6.46: Best theories FE di una trave cava simply supported con $L/h=100$

DOF	u_1	u_2	u_3	u_4	u_5	u_6	u_7	u_8	u_9	u_{10}	u_{11}	u_{12}	u_{13}	u_{14}	u_{15}	$\%E_{AVG}$
15	▲	▲	▲	▲	▲	▲	▲	▲	▲	▲	▲	▲	▲	▲	▲	0.000E+00
14	▲	▲	▲	▲	▲	▲	▲	▲	▲	▲	▲	▲	▲	△	▲	1.868E-02
13	▲	▲	▲	▲	▲	▲	▲	▲	△	▲	▲	▲	△	▲	▲	3.757E-03
12	▲	▲	▲	▲	▲	▲	▲	▲	△	▲	△	▲	▲	△	▲	5.230E-03
11	▲	▲	▲	▲	▲	▲	▲	▲	△	▲	△	▲	△	▲	▲	4.690E-03
10	▲	▲	▲	▲	▲	▲	▲	△	△	▲	△	△	△	▲	▲	7.910E-03
9	▲	▲	▲	▲	▲	▲	▲	△	△	▲	△	△	△	▲	▲	8.167E-03
8	▲	▲	▲	▲	▲	▲	▲	△	△	▲	△	△	△	△	△	3.873E-02
7	▲	▲	▲	▲	▲	▲	△	△	△	▲	△	△	△	△	△	4.673E-02
6	▲	▲	▲	▲	▲	▲	△	△	△	△	△	△	△	△	△	1.356E-01
5	▲	▲	▲	▲	▲	△	△	△	△	△	△	△	△	△	△	3.255E+00

6.3.2 Multi-bay box beam

Si considera la multi-bay box beam trattata nella sezione 5.2.2. La rete è stata addestrata considerando diversi valori del rapporto L/a , specificatamente per $L/a = 10, 40$ e 100 , e prendendo in esame due diverse condizioni di vincolo: l'incastro e il semplice appoggio. I risultati ottenuti dalla rete neurale vengono presentati nel seguito, confrontandoli con quelli ottenuti attraverso l'analisi numerica.

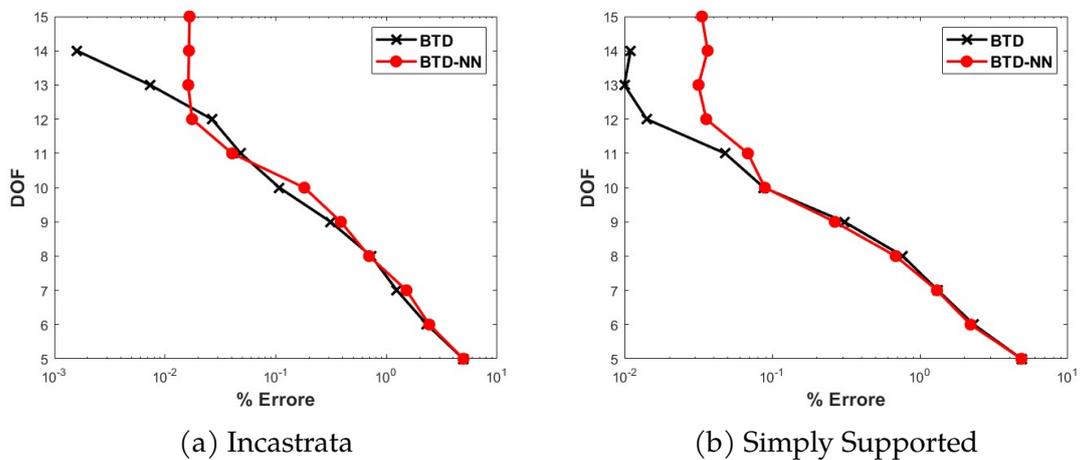


Figura 6.16: Box beam con $L/a=10$

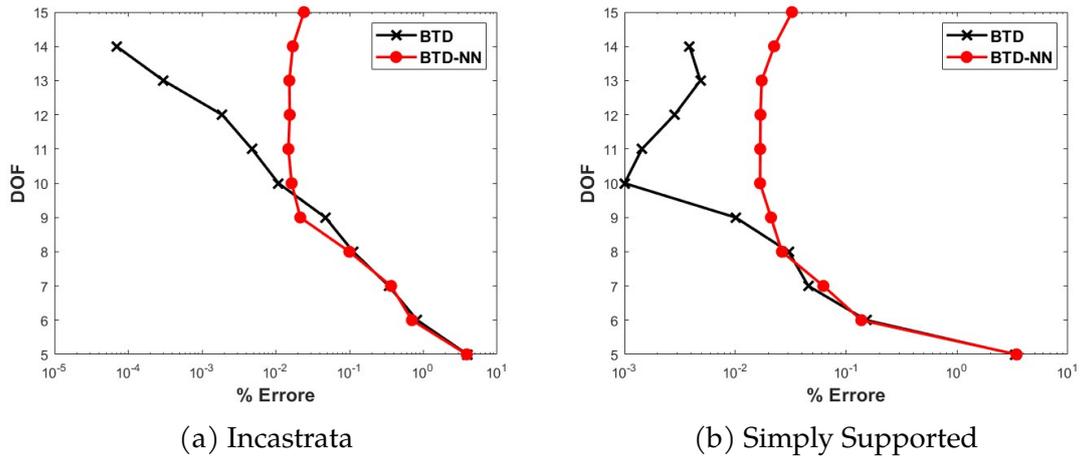


Figura 6.17: Box beam con $L/a=40$

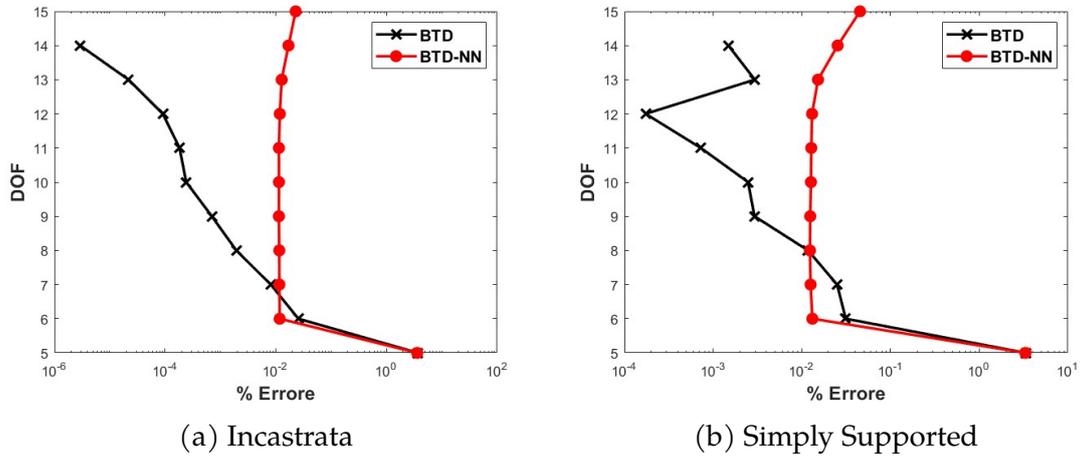


Figura 6.18: Box beam con $L/a=100$

Tabella 6.47: Best theories ricavate con la rete neurale di box beam incastrata con $L/a=10$

DOF	u_1	u_2	u_3	u_4	u_5	u_6	u_7	u_8	u_9	u_{10}	u_{11}	u_{12}	u_{13}	u_{14}	u_{15}	$\%E_{AVG}$
15	▲	▲	▲	▲	▲	▲	▲	▲	▲	▲	▲	▲	▲	▲	▲	1.664E-02
14	▲	▲	▲	▲	▲	▲	▲	△	▲	▲	▲	▲	▲	▲	▲	1.645E-02
13	▲	▲	▲	▲	▲	▲	▲	▲	▲	▲	△	▲	△	▲	▲	1.621E-02
12	▲	▲	▲	▲	▲	▲	▲	△	▲	▲	△	▲	△	▲	▲	1.755E-02
11	▲	▲	▲	▲	▲	▲	▲	△	△	△	▲	▲	△	▲	△	4.035E-02
10	▲	▲	▲	▲	▲	▲	▲	△	△	△	▲	▲	△	▲	△	1.811E-01
9	▲	▲	▲	▲	▲	▲	▲	△	△	△	▲	▲	△	▲	△	3.870E-01
8	▲	▲	▲	▲	▲	▲	▲	△	△	△	▲	▲	△	▲	△	6.964E-01
7	▲	▲	▲	▲	▲	▲	▲	△	△	△	▲	▲	△	▲	△	1.517E+00
6	▲	▲	▲	▲	▲	▲	▲	△	△	△	▲	▲	△	▲	△	2.437E+00
5	▲	▲	▲	▲	▲	△	△	△	△	△	▲	▲	△	▲	△	4.957E+00

Tabella 6.48: Best theories FE di box beam incastrata con $L/a=10$

DOF	u_1	u_2	u_3	u_4	u_5	u_6	u_7	u_8	u_9	u_{10}	u_{11}	u_{12}	u_{13}	u_{14}	u_{15}	$\%E_{AVG}$
15	▲	▲	▲	▲	▲	▲	▲	▲	▲	▲	▲	▲	▲	▲	▲	0.000E+00
14	▲	▲	▲	▲	▲	▲	▲	▲	▲	▲	▲	▲	△	▲	▲	1.594E-03
13	▲	▲	▲	▲	▲	▲	▲	▲	▲	▲	▲	▲	△	▲	△	7.317E-03
12	▲	▲	▲	▲	▲	▲	▲	▲	▲	▲	△	▲	△	▲	△	2.649E-02
11	▲	▲	▲	▲	▲	▲	▲	▲	△	▲	△	▲	△	▲	△	4.831E-02
10	▲	▲	▲	▲	▲	▲	▲	△	△	▲	△	▲	△	▲	△	1.077E-01
9	▲	▲	▲	▲	▲	▲	△	△	△	▲	△	▲	△	▲	△	3.129E-01
8	▲	▲	▲	▲	▲	▲	△	△	△	▲	△	△	△	▲	△	7.290E-01
7	▲	▲	▲	▲	▲	▲	△	△	△	△	△	△	△	▲	△	1.241E+00
6	▲	▲	▲	▲	▲	▲	△	△	△	△	△	△	△	△	△	2.323E+00
5	▲	▲	▲	▲	▲	△	△	△	△	△	△	△	△	△	△	4.936E+00

Tabella 6.49: Best theories ricavate con la rete neurale di box beam incastrata con $L/a=40$

DOF	u_1	u_2	u_3	u_4	u_5	u_6	u_7	u_8	u_9	u_{10}	u_{11}	u_{12}	u_{13}	u_{14}	u_{15}	$\%E_{AVG}$
15	▲	▲	▲	▲	▲	▲	▲	▲	▲	▲	▲	▲	▲	▲	▲	2.410E-02
14	▲	▲	▲	▲	▲	▲	▲	▲	▲	▲	▲	▲	△	▲	▲	1.703E-02
13	▲	▲	▲	▲	▲	▲	▲	△	▲	▲	▲	▲	△	▲	▲	1.527E-02
12	▲	▲	▲	▲	▲	▲	▲	△	△	▲	▲	▲	△	▲	▲	1.546E-02
11	▲	▲	▲	▲	▲	▲	▲	△	△	▲	△	▲	△	▲	△	1.484E-02
10	▲	▲	▲	▲	▲	▲	▲	△	△	▲	△	▲	△	▲	△	1.642E-02
9	▲	▲	▲	▲	▲	▲	△	△	△	▲	△	▲	△	▲	△	2.150E-02
8	▲	▲	▲	▲	▲	▲	△	△	△	△	△	▲	△	▲	△	9.936E-02
7	▲	▲	▲	▲	▲	▲	△	△	△	△	△	△	△	▲	△	3.652E-01
6	▲	▲	▲	▲	▲	▲	△	△	△	△	△	△	△	△	△	7.005E-01
5	▲	▲	▲	▲	▲	△	△	△	△	△	△	△	△	△	△	3.871E+00

Tabella 6.50: Best theories FE di box beam incastrata con $L/a=40$

DOF	u_1	u_2	u_3	u_4	u_5	u_6	u_7	u_8	u_9	u_{10}	u_{11}	u_{12}	u_{13}	u_{14}	u_{15}	$\%E_{AVG}$
15	▲	▲	▲	▲	▲	▲	▲	▲	▲	▲	▲	▲	▲	▲	▲	0.000E+00
14	▲	▲	▲	▲	▲	▲	▲	▲	▲	▲	▲	▲	▲	▲	△	6.937E-05
13	▲	▲	▲	▲	▲	▲	▲	▲	▲	▲	▲	▲	△	▲	△	3.018E-04
12	▲	▲	▲	▲	▲	▲	▲	▲	▲	▲	△	▲	△	▲	△	1.880E-03
11	▲	▲	▲	▲	▲	▲	▲	▲	△	▲	△	▲	△	▲	△	4.752E-03
10	▲	▲	▲	▲	▲	▲	▲	△	△	▲	△	▲	△	▲	△	1.086E-02
9	▲	▲	▲	▲	▲	▲	△	△	△	▲	△	▲	△	▲	△	4.702E-02
8	▲	▲	▲	▲	▲	▲	△	△	△	△	△	▲	△	▲	△	1.120E-01
7	▲	▲	▲	▲	▲	▲	△	△	△	△	△	△	△	▲	△	3.394E-01
6	▲	▲	▲	▲	▲	▲	△	△	△	△	△	△	△	△	△	8.241E-01
5	▲	▲	▲	▲	▲	△	△	△	△	△	△	△	△	△	△	3.949E+00

Tabella 6.51: Best theories ricavate con rete neurale di box beam incastrata con $L/a=100$

DOF	u_1	u_2	u_3	u_4	u_5	u_6	u_7	u_8	u_9	u_{10}	u_{11}	u_{12}	u_{13}	u_{14}	u_{15}	$\%E_{AVG}$
15	▲	▲	▲	▲	▲	▲	▲	▲	▲	▲	▲	▲	▲	▲	▲	2.290E-02
14	▲	▲	▲	▲	▲	▲	▲	▲	▲	▲	▲	▲	▲	▲	▲	1.699E-02
13	▲	▲	▲	▲	▲	▲	▲	▲	▲	▲	▲	▲	▲	▲	▲	1.279E-02
12	▲	▲	▲	▲	▲	▲	▲	▲	▲	▲	▲	▲	▲	▲	▲	1.184E-02
11	▲	▲	▲	▲	▲	▲	▲	▲	▲	▲	▲	▲	▲	▲	▲	1.141E-02
10	▲	▲	▲	▲	▲	▲	▲	▲	▲	▲	▲	▲	▲	▲	▲	1.142E-02
9	▲	▲	▲	▲	▲	▲	▲	▲	▲	▲	▲	▲	▲	▲	▲	1.140E-02
8	▲	▲	▲	▲	▲	▲	▲	▲	▲	▲	▲	▲	▲	▲	▲	1.158E-02
7	▲	▲	▲	▲	▲	▲	▲	▲	▲	▲	▲	▲	▲	▲	▲	1.162E-02
6	▲	▲	▲	▲	▲	▲	▲	▲	▲	▲	▲	▲	▲	▲	▲	1.177E-02
5	▲	▲	▲	▲	▲	▲	▲	▲	▲	▲	▲	▲	▲	▲	▲	3.597E+00

Tabella 6.52: Best theories FE di box beam incastrata con $L/a=100$

DOF	u_1	u_2	u_3	u_4	u_5	u_6	u_7	u_8	u_9	u_{10}	u_{11}	u_{12}	u_{13}	u_{14}	u_{15}	$\%E_{AVG}$
15	▲	▲	▲	▲	▲	▲	▲	▲	▲	▲	▲	▲	▲	▲	▲	0.000E+00
14	▲	▲	▲	▲	▲	▲	▲	▲	▲	▲	▲	▲	▲	▲	▲	2.919E-06
13	▲	▲	▲	▲	▲	▲	▲	▲	▲	▲	▲	▲	▲	▲	▲	2.189E-05
12	▲	▲	▲	▲	▲	▲	▲	▲	▲	▲	▲	▲	▲	▲	▲	9.109E-05
11	▲	▲	▲	▲	▲	▲	▲	▲	▲	▲	▲	▲	▲	▲	▲	1.828E-04
10	▲	▲	▲	▲	▲	▲	▲	▲	▲	▲	▲	▲	▲	▲	▲	2.412E-04
9	▲	▲	▲	▲	▲	▲	▲	▲	▲	▲	▲	▲	▲	▲	▲	6.999E-04
8	▲	▲	▲	▲	▲	▲	▲	▲	▲	▲	▲	▲	▲	▲	▲	1.937E-03
7	▲	▲	▲	▲	▲	▲	▲	▲	▲	▲	▲	▲	▲	▲	▲	8.128E-03
6	▲	▲	▲	▲	▲	▲	▲	▲	▲	▲	▲	▲	▲	▲	▲	2.561E-02
5	▲	▲	▲	▲	▲	▲	▲	▲	▲	▲	▲	▲	▲	▲	▲	3.696E+00

Tabella 6.53: Best theories ricavate con rete neurale di box beam simply supported con $L/a=10$

DOF	u_1	u_2	u_3	u_4	u_5	u_6	u_7	u_8	u_9	u_{10}	u_{11}	u_{12}	u_{13}	u_{14}	u_{15}	$\%E_{AVG}$
15	▲	▲	▲	▲	▲	▲	▲	▲	▲	▲	▲	▲	▲	▲	▲	3.325E-02
14	▲	▲	▲	▲	▲	▲	▲	▲	▲	▲	▲	▲	▲	▲	▲	3.637E-02
13	▲	▲	▲	▲	▲	▲	▲	▲	▲	▲	▲	▲	▲	▲	▲	3.154E-02
12	▲	▲	▲	▲	▲	▲	▲	▲	▲	▲	▲	▲	▲	▲	▲	3.558E-02
11	▲	▲	▲	▲	▲	▲	▲	▲	▲	▲	▲	▲	▲	▲	▲	6.812E-02
10	▲	▲	▲	▲	▲	▲	▲	▲	▲	▲	▲	▲	▲	▲	▲	8.878E-02
9	▲	▲	▲	▲	▲	▲	▲	▲	▲	▲	▲	▲	▲	▲	▲	2.641E-01
8	▲	▲	▲	▲	▲	▲	▲	▲	▲	▲	▲	▲	▲	▲	▲	6.816E-01
7	▲	▲	▲	▲	▲	▲	▲	▲	▲	▲	▲	▲	▲	▲	▲	1.299E+00
6	▲	▲	▲	▲	▲	▲	▲	▲	▲	▲	▲	▲	▲	▲	▲	2.191E+00
5	▲	▲	▲	▲	▲	▲	▲	▲	▲	▲	▲	▲	▲	▲	▲	4.844E+00

Tabella 6.54: Best theories FE di box beam simply supported con $L/a=10$

DOF	u_1	u_2	u_3	u_4	u_5	u_6	u_7	u_8	u_9	u_{10}	u_{11}	u_{12}	u_{13}	u_{14}	u_{15}	$\%E_{AVG}$
15	▲	▲	▲	▲	▲	▲	▲	▲	▲	▲	▲	▲	▲	▲	▲	0.000E+00
14	▲	▲	▲	▲	▲	▲	▲	▲	△	▲	▲	▲	▲	▲	▲	1.094E-02
13	▲	▲	▲	▲	▲	▲	▲	▲	▲	▲	△	▲	△	▲	▲	9.927E-03
12	▲	▲	▲	▲	▲	▲	▲	▲	△	▲	▲	▲	△	▲	△	1.406E-02
11	▲	▲	▲	▲	▲	▲	▲	▲	△	▲	△	▲	△	▲	△	4.779E-02
10	▲	▲	▲	▲	▲	▲	▲	△	△	▲	△	▲	△	▲	△	8.749E-02
9	▲	▲	▲	▲	▲	▲	△	△	△	▲	△	▲	△	▲	△	3.063E-01
8	▲	▲	▲	▲	▲	▲	△	△	△	▲	△	△	△	▲	△	7.626E-01
7	▲	▲	▲	▲	▲	▲	△	△	△	▲	△	△	△	▲	△	1.315E+00
6	▲	▲	▲	▲	▲	▲	△	△	△	△	△	△	△	▲	△	2.308E+00
5	▲	▲	▲	▲	▲	△	△	△	△	△	△	△	△	△	△	4.843E+00

Tabella 6.55: Best theories ricavate con rete neurale di box beam simply supported con $L/a=40$

DOF	u_1	u_2	u_3	u_4	u_5	u_6	u_7	u_8	u_9	u_{10}	u_{11}	u_{12}	u_{13}	u_{14}	u_{15}	$\%E_{AVG}$
15	▲	▲	▲	▲	▲	▲	▲	▲	▲	▲	▲	▲	▲	▲	▲	3.248E-02
14	▲	▲	▲	▲	▲	▲	▲	△	▲	▲	▲	▲	▲	▲	▲	2.243E-02
13	▲	▲	▲	▲	▲	▲	▲	△	▲	▲	▲	▲	△	▲	▲	1.733E-02
12	▲	▲	▲	▲	▲	▲	▲	△	△	▲	▲	▲	△	▲	▲	1.689E-02
11	▲	▲	▲	▲	▲	▲	▲	△	△	▲	△	▲	△	▲	▲	1.681E-02
10	▲	▲	▲	▲	▲	▲	▲	△	△	▲	△	▲	△	▲	△	1.675E-02
9	▲	▲	▲	▲	▲	▲	△	▲	△	▲	△	△	△	▲	△	2.101E-02
8	▲	▲	▲	▲	▲	▲	▲	△	△	▲	△	△	△	△	△	2.637E-02
7	▲	▲	▲	▲	▲	▲	△	△	△	▲	△	△	△	△	△	6.233E-02
6	▲	▲	▲	▲	▲	▲	△	△	△	△	△	△	△	△	△	1.371E-01
5	▲	▲	▲	▲	▲	△	△	△	△	△	△	△	△	△	△	3.442E+00

Tabella 6.56: Best theories FE di box beam simply supported con $L/a=40$

DOF	u_1	u_2	u_3	u_4	u_5	u_6	u_7	u_8	u_9	u_{10}	u_{11}	u_{12}	u_{13}	u_{14}	u_{15}	$\%E_{AVG}$
15	▲	▲	▲	▲	▲	▲	▲	▲	▲	▲	▲	▲	▲	▲	▲	0.000E+00
14	▲	▲	▲	▲	▲	▲	▲	▲	△	▲	▲	▲	▲	▲	▲	3.869E-03
13	▲	▲	▲	▲	▲	▲	▲	▲	▲	▲	▲	▲	△	△	▲	4.845E-03
12	▲	▲	▲	▲	▲	▲	▲	▲	▲	▲	▲	△	▲	△	△	2.841E-03
11	▲	▲	▲	▲	▲	▲	▲	▲	△	▲	△	▲	△	▲	▲	1.441E-03
10	▲	▲	▲	▲	▲	▲	▲	▲	▲	▲	△	△	△	△	△	1.004E-03
9	▲	▲	▲	▲	▲	▲	▲	△	△	▲	▲	△	△	△	△	1.007E-02
8	▲	▲	▲	▲	▲	▲	△	△	△	▲	△	△	△	▲	△	3.034E-02
7	▲	▲	▲	▲	▲	▲	△	△	△	▲	△	△	△	△	△	4.555E-02
6	▲	▲	▲	▲	▲	▲	△	△	△	△	△	△	△	△	△	1.522E-01
5	▲	▲	▲	▲	▲	△	△	△	△	△	△	△	△	△	△	3.373E+00

Tabella 6.57: Best theories ricavate con rete neurale di box beam simply supported con $L/a=100$

DOF	u_1	u_2	u_3	u_4	u_5	u_6	u_7	u_8	u_9	u_{10}	u_{11}	u_{12}	u_{13}	u_{14}	u_{15}	$\%E_{AVG}$
15	▲	▲	▲	▲	▲	▲	▲	▲	▲	▲	▲	▲	▲	▲	▲	4.537E-02
14	▲	▲	▲	▲	▲	▲	▲	▲	▲	▲	▲	△	▲	▲	▲	2.538E-02
13	▲	▲	▲	▲	▲	▲	▲	▲	▲	▲	▲	△	△	▲	▲	1.525E-02
12	▲	▲	▲	▲	▲	▲	▲	▲	▲	▲	△	△	▲	▲	△	1.307E-02
11	▲	▲	▲	▲	▲	▲	▲	▲	△	▲	△	△	▲	▲	△	1.280E-02
10	▲	▲	▲	▲	▲	▲	▲	▲	△	▲	△	△	△	▲	△	1.269E-02
9	▲	▲	▲	▲	▲	▲	△	▲	△	△	▲	△	△	▲	△	1.246E-02
8	▲	▲	▲	▲	▲	▲	▲	△	△	△	△	△	△	▲	△	1.237E-02
7	▲	▲	▲	▲	▲	▲	△	△	△	△	△	△	△	▲	△	1.257E-02
6	▲	▲	▲	▲	▲	▲	△	△	△	△	△	△	△	△	△	1.318E-02
5	▲	▲	▲	▲	▲	△	△	△	△	△	△	△	△	△	△	3.316E+00

Tabella 6.58: Best theories FE di box beam simply supported con $L/a=100$

DOF	u_1	u_2	u_3	u_4	u_5	u_6	u_7	u_8	u_9	u_{10}	u_{11}	u_{12}	u_{13}	u_{14}	u_{15}	$\%E_{AVG}$
15	▲	▲	▲	▲	▲	▲	▲	▲	▲	▲	▲	▲	▲	▲	▲	0.000E+00
14	▲	▲	▲	▲	▲	▲	▲	▲	▲	▲	▲	▲	△	▲	▲	1.488E-03
13	▲	▲	▲	▲	▲	▲	▲	▲	△	▲	▲	▲	▲	△	▲	2.958E-03
12	▲	▲	▲	▲	▲	▲	▲	▲	▲	▲	▲	△	▲	△	△	1.737E-04
11	▲	▲	▲	▲	▲	▲	▲	▲	▲	▲	▲	△	△	△	△	7.278E-04
10	▲	▲	▲	▲	▲	▲	▲	△	▲	▲	▲	▲	△	△	△	2.481E-03
9	▲	▲	▲	▲	▲	▲	△	▲	▲	▲	△	△	△	△	△	2.930E-03
8	▲	▲	▲	▲	▲	▲	△	△	▲	▲	△	△	△	△	△	1.177E-02
7	▲	▲	▲	▲	▲	▲	▲	△	△	△	△	△	△	△	△	2.500E-02
6	▲	▲	▲	▲	▲	▲	△	△	△	△	△	△	△	△	△	3.127E-02
5	▲	▲	▲	▲	▲	△	△	△	△	△	△	△	△	△	△	3.336E+00

Viene condotta un'analisi statistica per valutare il fattore di rilevanza visto in 5.3.1 per i termini di $N=3$ e $N=4$ ricavati con il metodo assiomatico asintotico sia nel caso simply supported che incastro. Come mostrato dalle figure 6.19 e 6.20 i termini di ordine $N=4$ diventano rilevanti per rapporti L/h più piccoli viceversa per $N=3$.

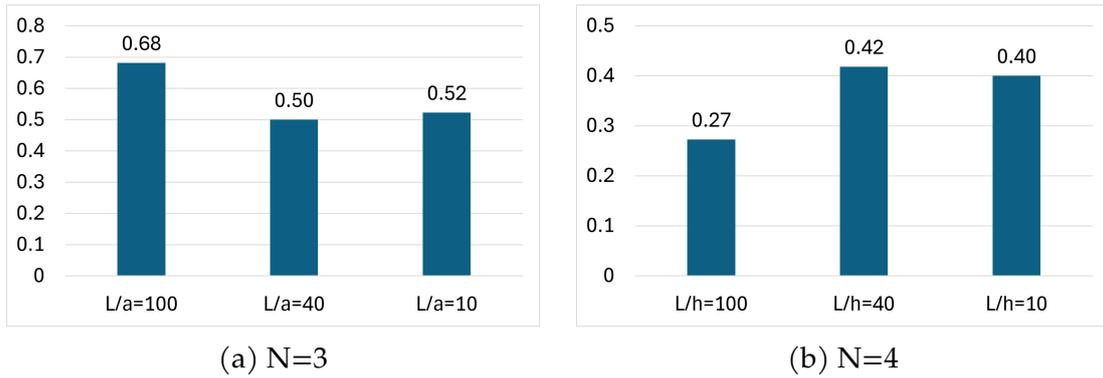


Figura 6.19: Fattore di rilevanza: Box beam incastrata

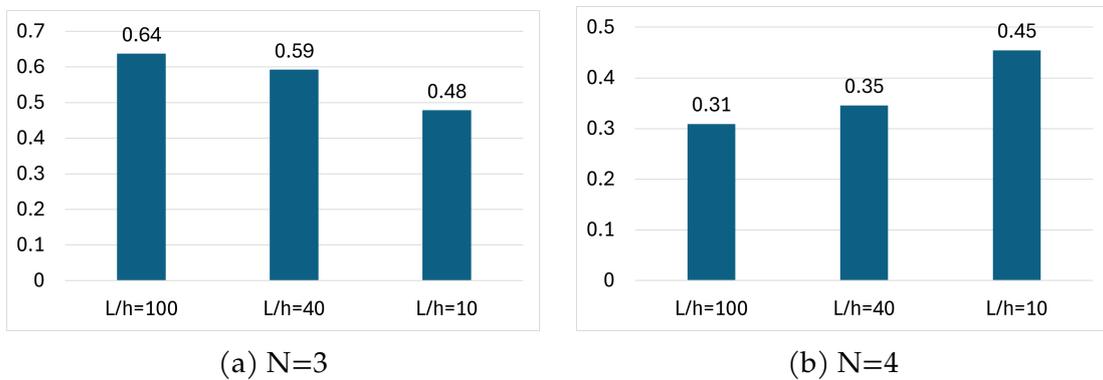


Figura 6.20: Fattore di rilevanza: Box beam simply supported

La rete neurale addestrata viene ora testata su due nuovi valori di L/a pari a 5 e 60 con condizione di vincolo incastro per $L=0$. Le Figure 6.21 e 6.22 mostrano i BTD per i due casi. Successivamente verranno presentate anche le best theories ricavate con la rete confrontate on quelle ricavate utilizzando gli elementi finiti.

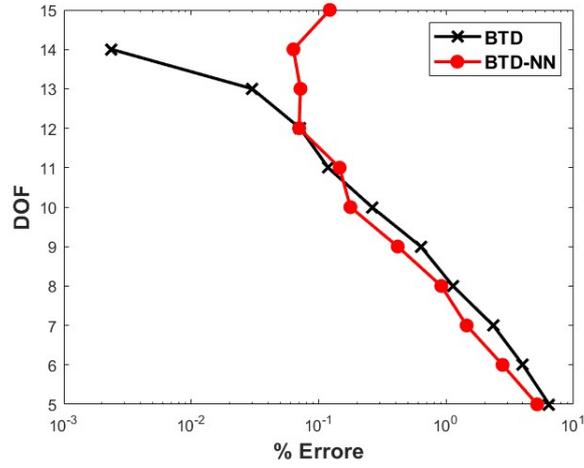


Figura 6.21: Box beam con $L/a=5$ incastrata

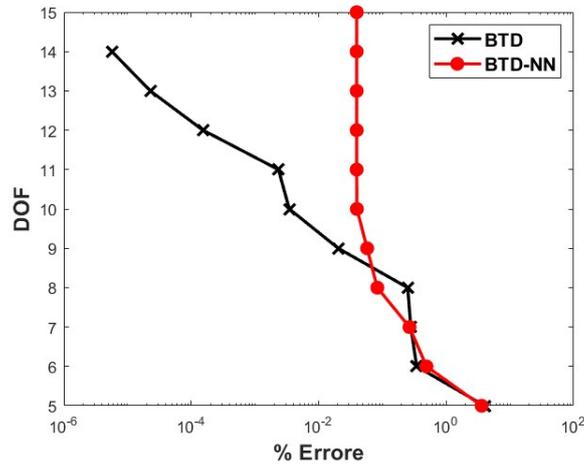


Figura 6.22: Box beam con $L/a=60$ incastrata

Tabella 6.59: Best theories ricavate con rete neurale di box beam incastrata con $L/a=5$

DOF	u_1	u_2	u_3	u_4	u_5	u_6	u_7	u_8	u_9	u_{10}	u_{11}	u_{12}	u_{13}	u_{14}	u_{15}	$\%E_{AVG}$
15	▲	▲	▲	▲	▲	▲	▲	▲	▲	▲	▲	▲	▲	▲	▲	1.221E-01
14	▲	▲	▲	▲	▲	▲	▲	▲	▲	▲	▲	▲	▲	▲	▲	6.328E-02
13	▲	▲	▲	▲	▲	▲	▲	▲	△	▲	▲	▲	△	▲	▲	7.189E-02
12	▲	▲	▲	▲	▲	▲	▲	△	△	▲	▲	▲	△	▲	▲	7.017E-02
11	▲	▲	▲	▲	▲	▲	▲	△	△	▲	▲	▲	△	▲	△	1.458E-01
10	▲	▲	▲	▲	▲	▲	▲	△	△	▲	△	▲	△	▲	△	1.772E-01
9	▲	▲	▲	▲	▲	▲	△	△	△	▲	△	▲	△	▲	△	4.167E-01
8	▲	▲	▲	▲	▲	▲	△	△	△	▲	△	△	△	▲	△	9.154E-01
7	▲	▲	▲	▲	▲	△	△	△	△	△	△	△	△	▲	▲	1.447E+00
6	▲	▲	▲	▲	▲	▲	△	△	△	△	△	△	△	△	△	2.769E+00
5	▲	▲	▲	▲	▲	△	△	△	△	△	△	△	△	△	△	5.171E+00

Tabella 6.60: Best theories FE di box beam incastrata con $L/a=5$

DOF	u_1	u_2	u_3	u_4	u_5	u_6	u_7	u_8	u_9	u_{10}	u_{11}	u_{12}	u_{13}	u_{14}	u_{15}	$\%E_{AVG}$
15	▲	▲	▲	▲	▲	▲	▲	▲	▲	▲	▲	▲	▲	▲	▲	0.000E+00
14	▲	▲	▲	▲	▲	▲	▲	▲	▲	▲	▲	▲	△	▲	▲	2.365E-03
13	▲	▲	▲	▲	▲	▲	▲	▲	▲	▲	▲	▲	△	▲	△	3.009E-02
12	▲	▲	▲	▲	▲	▲	▲	▲	△	▲	▲	▲	△	▲	△	7.147E-02
11	▲	▲	▲	▲	▲	▲	▲	▲	△	▲	△	▲	△	▲	△	1.186E-01
10	▲	▲	▲	▲	▲	▲	▲	△	△	▲	△	▲	△	▲	△	2.615E-01
9	▲	▲	▲	▲	▲	▲	▲	△	△	▲	△	△	△	▲	△	6.323E-01
8	▲	▲	▲	▲	▲	▲	△	△	△	▲	△	△	△	▲	△	1.129E+00
7	▲	▲	▲	▲	▲	▲	△	△	△	▲	△	△	△	△	△	2.338E+00
6	▲	▲	▲	▲	▲	▲	△	△	△	△	△	△	△	△	△	3.997E+00
5	▲	▲	▲	△	▲	▲	△	△	△	△	△	△	△	△	△	6.413E+00

Tabella 6.61: Best theories ricavate con rete neurale di box beam incastrata con $L/a=60$

DOF	u_1	u_2	u_3	u_4	u_5	u_6	u_7	u_8	u_9	u_{10}	u_{11}	u_{12}	u_{13}	u_{14}	u_{15}	$\%E_{AVG}$
15	▲	▲	▲	▲	▲	▲	▲	▲	▲	▲	▲	▲	▲	▲	▲	3.941E-02
14	▲	▲	▲	▲	▲	▲	△	▲	▲	▲	▲	▲	▲	▲	▲	3.941E-02
13	▲	▲	▲	▲	▲	▲	△	△	▲	▲	▲	▲	▲	▲	▲	3.941E-02
12	▲	▲	▲	▲	▲	▲	△	▲	△	△	▲	▲	▲	▲	▲	3.941E-02
11	▲	▲	▲	▲	▲	▲	△	△	△	▲	▲	▲	△	▲	▲	3.941E-02
10	▲	▲	▲	▲	▲	▲	△	△	△	▲	△	▲	▲	▲	△	3.971E-02
9	▲	▲	▲	▲	▲	▲	▲	△	△	△	△	▲	△	▲	△	5.750E-02
8	▲	▲	▲	▲	▲	▲	△	△	△	△	△	▲	△	▲	△	8.302E-02
7	▲	▲	▲	▲	▲	▲	△	△	△	△	△	▲	△	△	△	2.655E-01
6	▲	▲	▲	▲	▲	▲	△	△	△	△	△	△	△	△	△	4.905E-01
5	▲	▲	▲	▲	▲	△	△	△	△	△	△	△	△	△	△	3.601E+00

Tabella 6.62: Best theories FE di box beam incastrata con $L/a=60$

DOF	u_1	u_2	u_3	u_4	u_5	u_6	u_7	u_8	u_9	u_{10}	u_{11}	u_{12}	u_{13}	u_{14}	u_{15}	$\%E_{AVG}$
15	▲	▲	▲	▲	▲	▲	▲	▲	▲	▲	▲	▲	▲	▲	▲	0.000E+00
14	▲	▲	▲	▲	▲	▲	▲	▲	▲	▲	▲	▲	▲	▲	△	5.689E-06
13	▲	▲	▲	▲	▲	▲	▲	▲	▲	▲	▲	▲	△	▲	△	2.275E-05
12	▲	▲	▲	▲	▲	▲	▲	▲	▲	▲	△	▲	△	▲	△	1.531E-04
11	▲	▲	▲	▲	▲	▲	▲	△	▲	▲	△	▲	△	▲	△	2.331E-03
10	▲	▲	▲	▲	▲	▲	▲	△	△	▲	△	▲	△	▲	△	3.452E-03
9	▲	▲	▲	▲	▲	▲	△	△	△	▲	△	▲	△	▲	△	2.024E-02
8	▲	▲	▲	▲	▲	▲	△	△	△	▲	△	△	△	▲	△	2.489E-01
7	▲	▲	▲	▲	▲	▲	△	△	△	△	△	△	△	▲	△	2.782E-01
6	▲	▲	▲	▲	▲	▲	△	△	△	△	△	△	△	△	△	3.442E-01
5	▲	▲	▲	▲	▲	△	△	△	△	△	△	△	△	△	△	3.986E+00

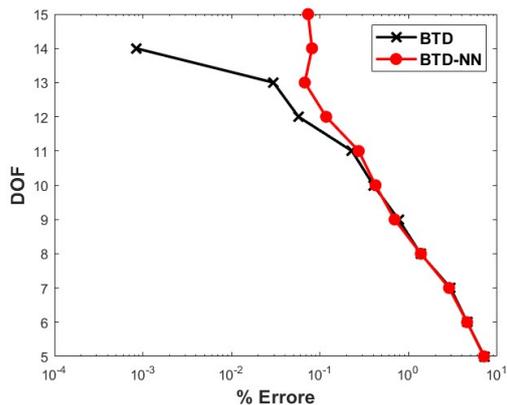
6.4 Risultati utilizzando la rete feed-forward ottimizzata con input il modello strutturale, snellezza, rapporto $\frac{h}{t}$ e condizioni di vincolo

6.4.1 Trave con sezione quadrata cava

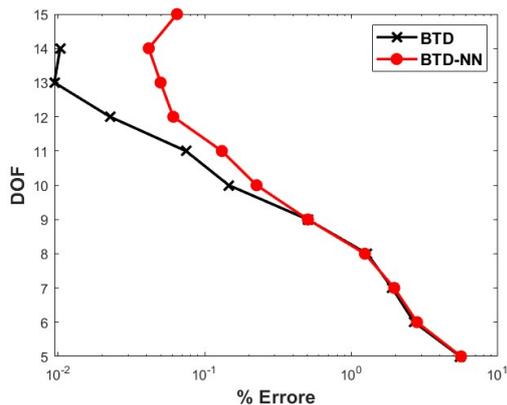
In questo paragrafo viene analizzata la stessa trave con sezione quadrata cava della sezione 5.1.2 per prevedere gli errori medi percentuali sulle prime 10 frequenze attraverso l'uso di una rete neurale che prende in input oltre alle teorie strutturali e alle condizioni di vincolo anche i rapporti L/h (rapporto tra la lunghezza e l'altezza della sezione) e h/t (rapporto tra l'altezza della sezione e lo spessore della parete). Questi rapporti servono a descrivere in modo completo le dimensioni della sezione della trave. I set di dati usati per l'allenamento comprendono:

- $L/h = 20, h/t = 10$ incastrata ad entrambi gli estremi e semplicemente appoggiate
- $L/h = 10, h/t = 4$ incastrata ad entrambi gli estremi e semplicemente appoggiate
- $L/h = 40, h/t = 20$ incastrata ad entrambi gli estremi e semplicemente appoggiate

Vengono presentati di seguito i risultati BTD ricavati con la rete neurale confrontati con quelli ricavati numericamente.

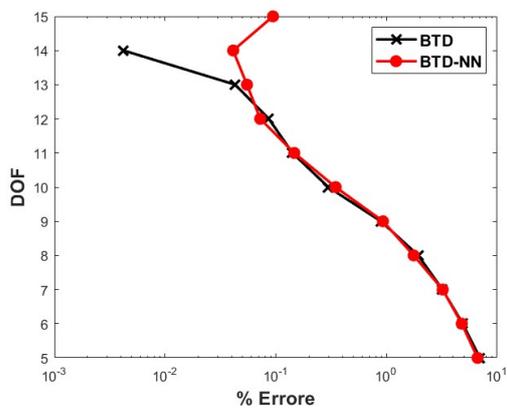


(a) Incastrata

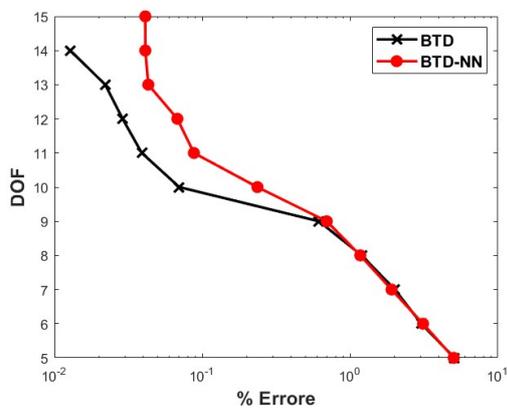


(b) Simply Supported

Figura 6.23: Trave con sezione quadrata cava con $L/h=20$ e $h/t=10$

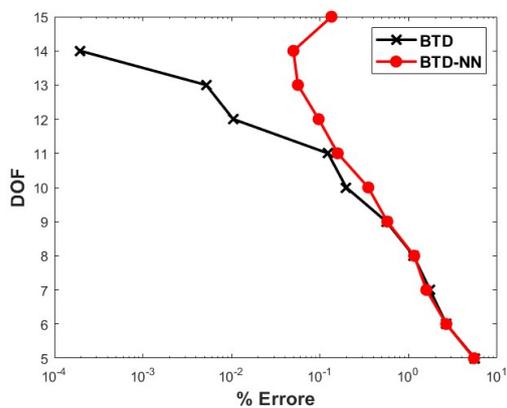


(a) Incastrata

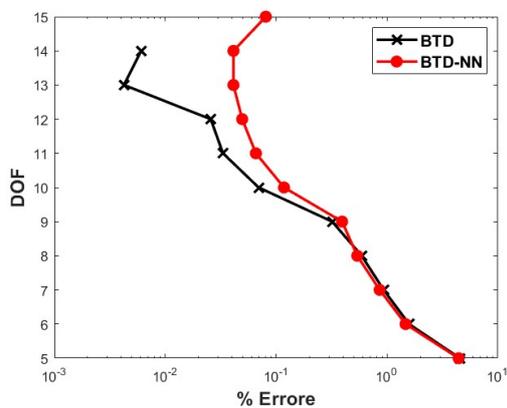


(b) Simply Supported

Figura 6.24: Trave con sezione quadrata cava con $L/h=10$ e $h/t=4$



(a) Incastrata



(b) Simply Supported

Figura 6.25: Trave con sezione quadrata cava con $L/h=40$ e $h/t=20$

Tabella 6.63: Best theories ricavate con rete neurale di una trave a sezione quadrata cava con $L/h=20$, $h/t=10$ incastrata ad entrambi gli estremi

DOF	u_1	u_2	u_3	u_4	u_5	u_6	u_7	u_8	u_9	u_{10}	u_{11}	u_{12}	u_{13}	u_{14}	u_{15}	$\%E_{AVG}$
15	▲	▲	▲	▲	▲	▲	▲	▲	▲	▲	▲	▲	▲	▲	▲	7.328E-02
14	▲	▲	▲	▲	▲	▲	▲	▲	▲	▲	▲	▲	△	▲	▲	8.123E-02
13	▲	▲	▲	▲	▲	▲	▲	▲	▲	▲	△	▲	△	▲	▲	6.724E-02
12	▲	▲	▲	▲	▲	▲	▲	▲	▲	▲	△	▲	△	▲	△	1.172E-01
11	▲	▲	▲	▲	▲	▲	▲	△	▲	▲	△	▲	△	▲	△	2.735E-01
10	▲	▲	▲	▲	▲	▲	▲	△	△	▲	△	▲	△	▲	△	4.232E-01
9	▲	▲	▲	▲	▲	▲	▲	△	△	▲	△	▲	△	△	△	6.954E-01
8	▲	▲	▲	△	▲	▲	▲	△	△	▲	▲	△	△	△	△	1.376E+00
7	▲	▲	▲	▲	▲	▲	▲	△	△	△	△	△	△	△	△	2.863E+00
6	▲	▲	▲	▲	▲	▲	△	△	△	△	△	△	△	△	△	4.574E+00
5	▲	▲	▲	△	▲	▲	△	△	△	△	△	△	△	△	△	7.094E+00

Tabella 6.64: Best theories FE di una trave a sezione quadrata cava con $L/h=20$, $h/t=10$ incastrata ad entrambi gli estremi

DOF	u_1	u_2	u_3	u_4	u_5	u_6	u_7	u_8	u_9	u_{10}	u_{11}	u_{12}	u_{13}	u_{14}	u_{15}	$\%E_{AVG}$
15	▲	▲	▲	▲	▲	▲	▲	▲	▲	▲	▲	▲	▲	▲	▲	0.000E+00
14	▲	▲	▲	▲	▲	▲	▲	▲	▲	▲	▲	▲	△	▲	▲	8.348E-04
13	▲	▲	▲	▲	▲	▲	▲	▲	▲	▲	△	▲	△	▲	▲	2.984E-02
12	▲	▲	▲	▲	▲	▲	▲	▲	▲	▲	△	▲	△	▲	△	5.710E-02
11	▲	▲	▲	▲	▲	▲	▲	△	▲	▲	△	▲	△	▲	△	2.294E-01
10	▲	▲	▲	▲	▲	▲	▲	△	△	▲	△	▲	△	▲	△	4.014E-01
9	▲	▲	▲	▲	▲	▲	▲	△	△	▲	△	△	△	▲	△	7.704E-01
8	▲	▲	▲	▲	▲	▲	▲	△	△	▲	△	△	△	△	△	1.365E+00
7	▲	▲	▲	▲	▲	▲	△	△	△	▲	△	△	△	△	△	2.967E+00
6	▲	▲	▲	▲	▲	▲	△	△	△	△	△	△	△	△	△	4.581E+00
5	▲	▲	▲	△	▲	▲	△	△	△	△	△	△	△	△	△	7.179E+00

Tabella 6.65: Best theories ricavate con rete neurale di una trave a sezione quadrata cava con $L/h=10$, $h/t=4$ incastrata ad entrambi gli estremi

DOF	u_1	u_2	u_3	u_4	u_5	u_6	u_7	u_8	u_9	u_{10}	u_{11}	u_{12}	u_{13}	u_{14}	u_{15}	$\%E_{AVG}$
15	▲	▲	▲	▲	▲	▲	▲	▲	▲	▲	▲	▲	▲	▲	▲	9.433E-02
14	▲	▲	▲	▲	▲	▲	▲	▲	▲	▲	△	▲	▲	▲	▲	4.121E-02
13	▲	▲	▲	△	▲	▲	▲	▲	▲	▲	▲	▲	△	▲	▲	5.496E-02
12	▲	▲	▲	△	▲	▲	▲	▲	▲	▲	▲	▲	△	▲	△	7.238E-02
11	▲	▲	▲	△	▲	▲	▲	▲	△	▲	▲	▲	△	▲	△	1.469E-01
10	▲	▲	▲	△	▲	▲	▲	△	△	▲	▲	▲	△	▲	△	3.473E-01
9	▲	▲	▲	△	▲	▲	▲	△	△	▲	▲	△	△	▲	△	9.297E-01
8	▲	▲	▲	△	▲	▲	▲	△	△	▲	▲	△	△	△	△	1.762E+00
7	▲	▲	▲	▲	▲	▲	△	△	△	▲	△	△	△	△	△	3.218E+00
6	▲	▲	▲	△	▲	▲	▲	△	△	△	△	△	△	△	△	4.790E+00
5	▲	▲	▲	△	▲	▲	△	△	△	△	△	△	△	△	△	6.646E+00

Tabella 6.66: Best theories FE di una trave a sezione quadrata cava con $L/h=10$, $h/t=4$ incastrata ad entrambi gli estremi

DOF	u_1	u_2	u_3	u_4	u_5	u_6	u_7	u_8	u_9	u_{10}	u_{11}	u_{12}	u_{13}	u_{14}	u_{15}	$\%E_{AVG}$
15	▲	▲	▲	▲	▲	▲	▲	▲	▲	▲	▲	▲	▲	▲	▲	0.000E+00
14	▲	▲	▲	▲	▲	▲	▲	▲	▲	▲	▲	▲	△	▲	▲	4.215E-03
13	▲	▲	▲	▲	▲	▲	▲	▲	▲	▲	△	▲	△	▲	▲	4.302E-02
12	▲	▲	▲	▲	▲	▲	▲	△	▲	▲	▲	▲	△	▲	△	8.652E-02
11	▲	▲	▲	▲	▲	▲	▲	△	△	▲	△	▲	△	▲	▲	1.416E-01
10	▲	▲	▲	△	▲	▲	▲	△	△	▲	▲	▲	△	▲	△	2.986E-01
9	▲	▲	▲	▲	△	▲	▲	△	△	▲	△	▲	△	▲	△	8.910E-01
8	▲	▲	▲	▲	▲	▲	▲	△	△	▲	△	△	△	△	△	1.937E+00
7	▲	▲	▲	▲	▲	▲	△	△	△	▲	△	△	△	△	△	3.204E+00
6	▲	▲	▲	△	▲	▲	▲	△	△	△	△	△	△	△	△	4.888E+00
5	▲	▲	▲	△	▲	▲	△	△	△	△	△	△	△	△	△	6.968E+00

Tabella 6.67: Best theories ricavate con rete neurale di una trave a sezione quadrata cava con $L/h=40$, $h/t=20$ incastrata ad entrambi gli estremi

DOF	u_1	u_2	u_3	u_4	u_5	u_6	u_7	u_8	u_9	u_{10}	u_{11}	u_{12}	u_{13}	u_{14}	u_{15}	$\%E_{AVG}$
15	▲	▲	▲	▲	▲	▲	▲	▲	▲	▲	▲	▲	▲	▲	▲	1.346E-01
14	▲	▲	▲	▲	▲	▲	▲	▲	▲	▲	▲	▲	▲	▲	△	4.998E-02
13	▲	▲	▲	▲	▲	▲	▲	△	▲	▲	▲	▲	▲	▲	△	5.625E-02
12	▲	▲	▲	▲	▲	▲	▲	▲	▲	▲	△	▲	△	▲	△	9.650E-02
11	▲	▲	▲	▲	▲	▲	▲	▲	△	▲	△	▲	△	▲	△	1.584E-01
10	▲	▲	▲	▲	▲	△	▲	△	△	▲	△	▲	△	▲	▲	3.504E-01
9	▲	▲	▲	▲	▲	▲	▲	△	△	▲	△	▲	△	△	△	5.753E-01
8	▲	▲	▲	▲	▲	▲	△	△	△	▲	△	△	△	▲	△	1.157E+00
7	▲	▲	▲	▲	▲	▲	△	△	△	▲	△	△	△	△	△	1.586E+00
6	▲	▲	▲	△	▲	▲	△	△	△	△	▲	△	△	△	△	2.663E+00
5	▲	▲	▲	△	▲	▲	△	△	△	△	△	△	△	△	△	5.470E+00

Tabella 6.68: Best theories FE di una trave a sezione quadrata cava con $L/h=40$, $h/t=20$ incastrata ad entrambi gli estremi

DOF	u_1	u_2	u_3	u_4	u_5	u_6	u_7	u_8	u_9	u_{10}	u_{11}	u_{12}	u_{13}	u_{14}	u_{15}	$\%E_{AVG}$
15	▲	▲	▲	▲	▲	▲	▲	▲	▲	▲	▲	▲	▲	▲	▲	0.000E+00
14	▲	▲	▲	▲	▲	▲	▲	▲	▲	▲	▲	▲	△	▲	▲	1.950E-04
13	▲	▲	▲	▲	▲	▲	▲	▲	▲	▲	△	▲	△	▲	▲	5.180E-03
12	▲	▲	▲	▲	▲	▲	▲	▲	▲	▲	△	▲	△	▲	△	1.047E-02
11	▲	▲	▲	▲	▲	▲	▲	△	▲	▲	△	▲	△	▲	△	1.229E-01
10	▲	▲	▲	▲	▲	▲	▲	△	△	▲	△	▲	△	▲	△	1.977E-01
9	▲	▲	▲	▲	▲	▲	▲	△	△	▲	△	△	△	▲	△	5.603E-01
8	▲	▲	▲	▲	▲	▲	△	△	△	▲	△	△	△	▲	△	1.137E+00
7	▲	▲	▲	▲	▲	▲	△	△	△	▲	△	△	△	△	△	1.742E+00
6	▲	▲	▲	▲	▲	▲	△	△	△	△	△	△	△	△	△	2.666E+00
5	▲	▲	▲	△	▲	▲	△	△	△	△	△	△	△	△	△	5.573E+00

Tabella 6.69: Best theories ricavate con rete neurale di una trave a sezione quadrata cava con $L/h=20$, $h/t=10$ semplicemente appoggiata

DOF	u_1	u_2	u_3	u_4	u_5	u_6	u_7	u_8	u_9	u_{10}	u_{11}	u_{12}	u_{13}	u_{14}	u_{15}	$\%E_{AVG}$
15	▲	▲	▲	▲	▲	▲	▲	▲	▲	▲	▲	▲	▲	▲	▲	6.466E-02
14	▲	▲	▲	▲	▲	▲	▲	▲	▲	▲	▲	▲	▲	▲	△	4.148E-02
13	▲	▲	▲	▲	▲	▲	▲	▲	▲	▲	▲	▲	△	▲	△	4.996E-02
12	▲	▲	▲	▲	▲	▲	▲	▲	▲	▲	△	▲	△	▲	△	6.096E-02
11	▲	▲	▲	▲	▲	▲	▲	△	▲	▲	△	▲	△	▲	△	1.308E-01
10	▲	▲	▲	▲	▲	▲	▲	△	△	▲	△	▲	△	▲	△	2.257E-01
9	▲	▲	▲	▲	▲	▲	▲	△	△	▲	△	▲	△	△	△	5.054E-01
8	▲	▲	▲	▲	▲	▲	▲	△	△	△	△	△	△	▲	△	1.236E+00
7	▲	▲	▲	▲	▲	▲	△	△	△	△	△	▲	△	△	△	1.961E+00
6	▲	▲	▲	▲	▲	▲	△	△	△	△	△	△	△	△	△	2.804E+00
5	▲	▲	▲	△	▲	▲	△	△	△	△	△	△	△	△	△	5.602E+00

Tabella 6.70: Best theories FE di una trave a sezione quadrata cava con $L/h=20$, $h/t=10$ semplicemente appoggiata

DOF	u_1	u_2	u_3	u_4	u_5	u_6	u_7	u_8	u_9	u_{10}	u_{11}	u_{12}	u_{13}	u_{14}	u_{15}	$\%E_{AVG}$
15	▲	▲	▲	▲	▲	▲	▲	▲	▲	▲	▲	▲	▲	▲	▲	0.000E+00
14	▲	▲	▲	▲	▲	▲	▲	▲	▲	▲	▲	▲	▲	▲	△	1.032E-02
13	▲	▲	▲	▲	▲	▲	▲	▲	▲	▲	△	▲	△	▲	▲	9.413E-03
12	▲	▲	▲	▲	▲	▲	▲	▲	▲	▲	△	▲	△	▲	△	2.257E-02
11	▲	▲	▲	▲	▲	▲	▲	▲	△	▲	△	▲	△	▲	△	7.439E-02
10	▲	▲	▲	▲	▲	▲	▲	△	△	▲	△	▲	△	▲	△	1.459E-01
9	▲	▲	▲	▲	▲	▲	▲	△	△	▲	△	△	△	▲	△	5.040E-01
8	▲	▲	▲	▲	▲	▲	▲	△	△	△	△	▲	△	△	△	1.281E+00
7	▲	▲	▲	▲	▲	▲	▲	△	△	△	△	△	△	△	△	1.896E+00
6	▲	▲	▲	▲	▲	▲	△	△	△	△	△	△	△	△	△	2.680E+00
5	▲	▲	▲	▲	▲	△	△	△	△	△	△	△	△	△	△	5.531E+00

Tabella 6.71: Best theories ricavate con rete neurale di una trave a sezione quadrata cava con $L/h=10$, $h/t=4$ semplicemente appoggiata

DOF	u_1	u_2	u_3	u_4	u_5	u_6	u_7	u_8	u_9	u_{10}	u_{11}	u_{12}	u_{13}	u_{14}	u_{15}	$\%E_{AVG}$
15	▲	▲	▲	▲	▲	▲	▲	▲	▲	▲	▲	▲	▲	▲	▲	4.123E-02
14	▲	▲	▲	▲	▲	▲	▲	△	▲	▲	▲	▲	▲	▲	▲	4.123E-02
13	▲	▲	▲	▲	▲	▲	▲	△	▲	▲	△	▲	▲	▲	▲	4.322E-02
12	▲	▲	▲	▲	▲	▲	▲	△	△	▲	△	▲	▲	▲	▲	6.790E-02
11	▲	▲	▲	▲	▲	▲	▲	△	△	▲	△	▲	△	▲	▲	8.791E-02
10	▲	▲	▲	▲	▲	▲	▲	△	△	▲	△	▲	△	▲	△	2.363E-01
9	▲	▲	▲	▲	▲	▲	▲	△	△	△	△	▲	△	▲	△	6.954E-01
8	▲	▲	▲	▲	▲	▲	△	△	△	△	△	▲	△	▲	△	1.172E+00
7	▲	▲	▲	▲	▲	▲	△	△	△	△	△	▲	△	△	△	1.909E+00
6	▲	▲	▲	▲	▲	▲	△	△	△	△	△	△	△	△	△	3.116E+00
5	▲	▲	▲	△	▲	▲	△	△	△	△	△	△	△	△	△	5.023E+00

Tabella 6.72: Best theories FE di una trave a sezione quadrata cava con $L/h=10$, $h/t=4$ semplicemente appoggiata

DOF	u_1	u_2	u_3	u_4	u_5	u_6	u_7	u_8	u_9	u_{10}	u_{11}	u_{12}	u_{13}	u_{14}	u_{15}	$\%E_{AVG}$
15	▲	▲	▲	▲	▲	▲	▲	▲	▲	▲	▲	▲	▲	▲	▲	0.000E+00
14	▲	▲	▲	▲	▲	▲	▲	▲	▲	▲	△	▲	▲	▲	▲	1.283E-02
13	▲	▲	▲	▲	▲	▲	▲	▲	▲	▲	▲	▲	△	▲	△	2.209E-02
12	▲	▲	▲	▲	▲	▲	▲	▲	△	▲	△	▲	△	▲	▲	2.896E-02
11	▲	▲	▲	▲	▲	▲	▲	△	△	▲	△	▲	△	▲	▲	3.902E-02
10	▲	▲	▲	▲	▲	▲	▲	△	△	▲	△	▲	△	▲	△	7.002E-02
9	▲	▲	▲	▲	▲	▲	△	△	△	▲	△	▲	△	▲	△	6.160E-01
8	▲	▲	▲	▲	▲	▲	△	△	△	△	△	▲	△	▲	△	1.198E+00
7	▲	▲	▲	▲	▲	▲	△	△	△	△	△	▲	△	△	△	2.008E+00
6	▲	▲	▲	▲	▲	▲	△	△	△	△	△	△	△	△	△	3.035E+00
5	▲	▲	▲	▲	▲	△	△	△	△	△	△	△	△	△	△	5.086E+00

Tabella 6.73: Best theories ricavate con rete neurale di una trave a sezione quadrata cava con $L/h=40$, $h/t=20$ semplicemente appoggiata

DOF	u_1	u_2	u_3	u_4	u_5	u_6	u_7	u_8	u_9	u_{10}	u_{11}	u_{12}	u_{13}	u_{14}	u_{15}	$\%E_{AVG}$
15	▲	▲	▲	▲	▲	▲	▲	▲	▲	▲	▲	▲	▲	▲	▲	8.068E-02
14	▲	▲	▲	▲	▲	▲	▲	▲	▲	▲	▲	▲	▲	▲	△	4.121E-02
13	▲	▲	▲	▲	▲	▲	▲	△	▲	▲	△	▲	▲	▲	▲	4.122E-02
12	▲	▲	▲	▲	▲	▲	▲	△	▲	▲	▲	▲	△	▲	△	4.942E-02
11	▲	▲	▲	▲	▲	▲	▲	△	△	▲	△	▲	△	▲	▲	6.571E-02
10	▲	▲	▲	▲	▲	▲	▲	△	△	▲	△	▲	△	▲	△	1.177E-01
9	▲	▲	▲	▲	▲	▲	▲	△	△	△	△	▲	△	▲	△	3.933E-01
8	▲	▲	▲	▲	▲	▲	△	△	△	△	△	▲	△	▲	△	5.389E-01
7	▲	▲	▲	▲	▲	▲	△	△	△	△	△	▲	△	△	△	8.587E-01
6	▲	▲	▲	▲	▲	▲	△	△	△	△	△	△	△	△	△	1.470E+00
5	▲	▲	▲	△	▲	▲	△	△	△	△	△	△	△	△	△	4.423E+00

Tabella 6.74: Best theories FE di una trave a sezione quadrata cava con $L/h=40$, $h/t=20$ semplicemente appoggiata

DOF	u_1	u_2	u_3	u_4	u_5	u_6	u_7	u_8	u_9	u_{10}	u_{11}	u_{12}	u_{13}	u_{14}	u_{15}	$\%E_{AVG}$
15	▲	▲	▲	▲	▲	▲	▲	▲	▲	▲	▲	▲	▲	▲	▲	0.000E+00
14	▲	▲	▲	▲	▲	▲	▲	▲	▲	▲	▲	▲	△	▲	▲	6.063E-03
13	▲	▲	▲	▲	▲	▲	▲	▲	▲	▲	△	▲	△	▲	▲	4.243E-03
12	▲	▲	▲	▲	▲	▲	▲	▲	▲	▲	△	▲	△	▲	△	2.572E-02
11	▲	▲	▲	▲	▲	▲	▲	△	▲	▲	△	▲	△	▲	△	3.317E-02
10	▲	▲	▲	▲	▲	▲	▲	△	△	▲	△	▲	△	▲	△	6.946E-02
9	▲	▲	▲	▲	▲	▲	△	△	△	▲	△	▲	△	▲	△	3.201E-01
8	▲	▲	▲	▲	▲	▲	△	△	△	△	△	▲	△	▲	△	5.904E-01
7	▲	▲	▲	▲	▲	▲	△	△	△	△	△	▲	△	△	△	9.325E-01
6	▲	▲	▲	▲	▲	▲	△	△	△	△	△	△	△	△	△	1.581E+00
5	▲	▲	▲	▲	▲	△	△	△	△	△	△	△	△	△	△	4.537E+00

La rete neurale precedentemente addestrata viene testata su nuove combinazioni di rapporti L/h e h/t , le quali non sono state incluse durante la fase di addestra-

mento. Questo test include due configurazioni di travi con sezione cava quadrata entrambe incastrate: una con rapporti L/h di 5 e h/t di 4, e un'altra con rapporti L/h di 80 e h/t di 25. I risultati ottenuti sono presentati nel seguito.

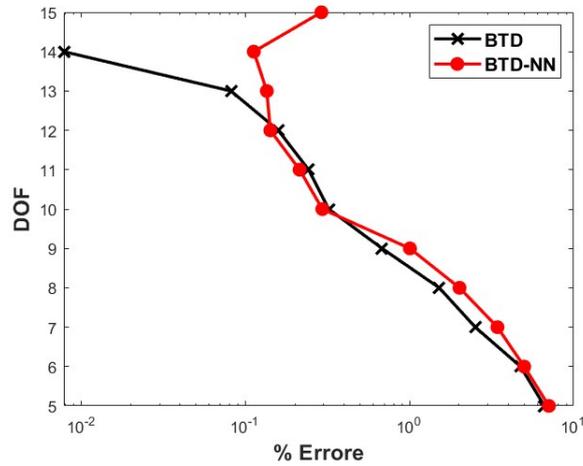


Figura 6.26: Trave con sezione cava quadrata con $L/h=5$, $h/t=4$ incastrata ad entrambi gli estremi

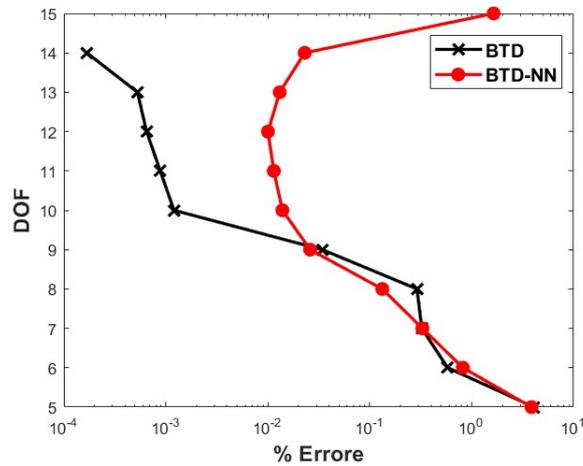


Figura 6.27: Trave con sezione cava quadrata con $L/h=80$, $h/t=25$ incastrata ad entrambi gli estremi

Tabella 6.75: Best theories ricavate con rete neurale di una trave a sezione quadrata cava con $L/h=5$, $h/t=4$ incastrata ad entrambi gli estremi

DOF	u_1	u_2	u_3	u_4	u_5	u_6	u_7	u_8	u_9	u_{10}	u_{11}	u_{12}	u_{13}	u_{14}	u_{15}	$\%E_{AVG}$
15	▲	▲	▲	▲	▲	▲	▲	▲	▲	▲	▲	▲	▲	▲	▲	2.903E-01
14	▲	▲	▲	▲	▲	▲	▲	▲	△	▲	▲	▲	▲	▲	▲	1.125E-01
13	▲	▲	▲	▲	▲	▲	▲	△	▲	▲	△	▲	▲	▲	▲	1.350E-01
12	▲	▲	▲	▲	▲	▲	▲	△	▲	▲	△	▲	△	▲	▲	1.418E-01
11	▲	▲	▲	▲	▲	▲	▲	▲	△	▲	△	▲	△	▲	△	2.138E-01
10	▲	▲	▲	△	▲	▲	▲	△	△	▲	▲	▲	△	▲	△	2.942E-01
9	▲	▲	▲	▲	▲	▲	▲	△	△	▲	△	△	△	▲	△	1.005E+00
8	▲	▲	▲	▲	▲	▲	▲	△	△	▲	△	△	△	△	△	2.015E+00
7	▲	▲	▲	▲	▲	▲	▲	△	△	△	△	△	△	△	△	3.432E+00
6	▲	▲	▲	▲	▲	△	▲	△	△	△	△	△	△	△	△	4.996E+00
5	▲	▲	▲	▲	▲	△	△	△	△	△	△	△	△	△	△	7.063E+00

Tabella 6.76: Best theories FE di una trave a sezione quadrata cava con $L/h=5$, $h/t=4$ incastrata ad entrambi gli estremi

DOF	u_1	u_2	u_3	u_4	u_5	u_6	u_7	u_8	u_9	u_{10}	u_{11}	u_{12}	u_{13}	u_{14}	u_{15}	$\%E_{AVG}$
15	▲	▲	▲	▲	▲	▲	▲	▲	▲	▲	▲	▲	▲	▲	▲	0.000E+00
14	▲	▲	▲	▲	▲	▲	▲	▲	▲	▲	▲	▲	△	▲	▲	7.821E-03
13	▲	▲	▲	△	▲	▲	▲	▲	▲	▲	▲	▲	△	▲	▲	8.165E-02
12	▲	▲	▲	△	▲	△	▲	▲	▲	▲	▲	▲	△	▲	▲	1.585E-01
11	▲	▲	▲	△	▲	▲	▲	△	△	▲	▲	▲	△	▲	▲	2.427E-01
10	▲	▲	▲	△	▲	△	▲	△	△	▲	▲	▲	△	▲	▲	3.216E-01
9	▲	▲	▲	△	△	△	▲	△	△	▲	▲	▲	△	▲	▲	6.804E-01
8	▲	▲	▲	△	△	△	▲	△	△	▲	△	▲	△	▲	▲	1.517E+00
7	▲	▲	▲	△	△	△	▲	△	△	▲	△	▲	△	▲	△	2.514E+00
6	▲	▲	▲	△	△	△	▲	△	△	▲	△	△	△	▲	△	4.744E+00
5	▲	▲	▲	△	△	△	▲	△	△	▲	△	△	△	△	△	6.633E+00

Tabella 6.77: Best theories ricavate con rete neurale di una trave a sezione quadrata cava con $L/h=80$, $h/t=25$ incastrata ad entrambi gli estremi

DOF	u_1	u_2	u_3	u_4	u_5	u_6	u_7	u_8	u_9	u_{10}	u_{11}	u_{12}	u_{13}	u_{14}	u_{15}	$\%E_{AVG}$
15	▲	▲	▲	▲	▲	▲	▲	▲	▲	▲	▲	▲	▲	▲	▲	1.641E+00
14	▲	▲	▲	▲	▲	▲	▲	▲	△	▲	▲	▲	▲	▲	▲	2.304E-02
13	▲	▲	▲	▲	▲	▲	▲	▲	△	▲	△	▲	▲	▲	▲	1.310E-02
12	▲	▲	▲	▲	▲	▲	▲	▲	△	▲	△	▲	▲	▲	△	1.005E-02
11	▲	▲	▲	▲	▲	▲	▲	▲	△	▲	△	▲	▲	▲	△	1.147E-02
10	▲	▲	▲	▲	▲	▲	▲	△	▲	▲	△	▲	▲	△	△	1.393E-02
9	▲	▲	▲	▲	▲	▲	▲	△	△	▲	△	▲	△	△	△	2.606E-02
8	▲	▲	▲	▲	▲	▲	△	△	△	▲	△	▲	△	△	△	1.329E-01
7	▲	▲	▲	▲	▲	▲	△	△	△	▲	△	△	△	△	△	3.283E-01
6	▲	▲	▲	▲	▲	▲	△	△	△	△	△	△	△	△	△	8.194E-01
5	▲	▲	▲	△	▲	▲	△	△	△	△	△	△	△	△	△	3.864E+00

Tabella 6.78: Best theories FE di una trave a sezione quadrata cava con $L/h=80$, $h/t=25$ incastrata ad entrambi gli estremi

DOF	u_1	u_2	u_3	u_4	u_5	u_6	u_7	u_8	u_9	u_{10}	u_{11}	u_{12}	u_{13}	u_{14}	u_{15}	$\%E_{AVG}$
15	▲	▲	▲	▲	▲	▲	▲	▲	▲	▲	▲	▲	▲	▲	▲	0.000E+00
14	▲	▲	▲	▲	▲	▲	▲	▲	▲	▲	▲	△	▲	▲	▲	1.683E-04
13	▲	▲	▲	▲	▲	▲	▲	▲	▲	▲	▲	△	▲	△	▲	5.277E-04
12	▲	▲	▲	▲	▲	▲	▲	▲	▲	▲	△	▲	△	△	▲	6.485E-04
11	▲	▲	▲	▲	▲	▲	▲	▲	▲	▲	△	△	△	△	▲	8.835E-04
10	▲	▲	▲	▲	▲	▲	▲	▲	▲	▲	△	△	△	△	△	1.204E-03
9	▲	▲	▲	▲	▲	▲	▲	△	▲	▲	△	△	△	△	△	3.427E-02
8	▲	▲	▲	▲	▲	▲	△	▲	△	▲	△	△	△	△	△	2.909E-01
7	▲	▲	▲	▲	▲	▲	△	△	△	▲	△	△	△	△	△	3.240E-01
6	▲	▲	▲	▲	▲	▲	△	△	△	△	△	△	△	△	△	5.806E-01
5	▲	▲	▲	△	▲	▲	△	△	△	△	△	△	△	△	△	4.093E+00

6.4.2 Trave con sezione a C

Viene esaminata una trave avente una sezione trasversale a forma di C [25] in cui $b_1 = b_2/2$, come illustrato in Figura 6.28. Vengono utilizzati 10 elementi B4 lungo l'asse della trave che vengono combinati con una discretizzazione della sezione trasversale realizzata mediante l'utilizzo di 5 elementi di tipo Q4. Il materiale presenta le seguenti proprietà meccaniche: modulo di Young E di 75 [GPa], coefficiente di Poisson ν pari a 0.33 e densità ρ uguale a 2700 Kg/m^3 .

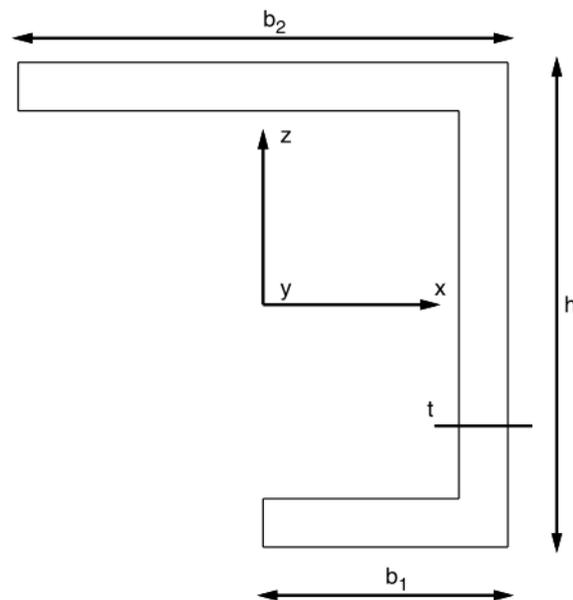


Figura 6.28: Sezione trave a C

La rete neurale viene allenata considerando diversi rapporti L/h e h/t combinati con due tipologie principali di condizioni al contorno: incastrata e semplicemente appoggiata. I set di rapporti geometrici esaminati comprendono:

- $L/h=20, h/t=10$ incastrata e semplicemente appoggiata
- $L/h=10, h/t=20$ incastrata e semplicemente appoggiata
- $L/h=50, h/t=4$ incastrata e semplicemente appoggiata

Per ciascuna di queste configurazioni geometriche e di vincolo, sono stati confrontati i risultati ottenuti dal modello di rete neurale con quelli derivati tramite metodi agli elementi finiti (FE) presentati di seguito.

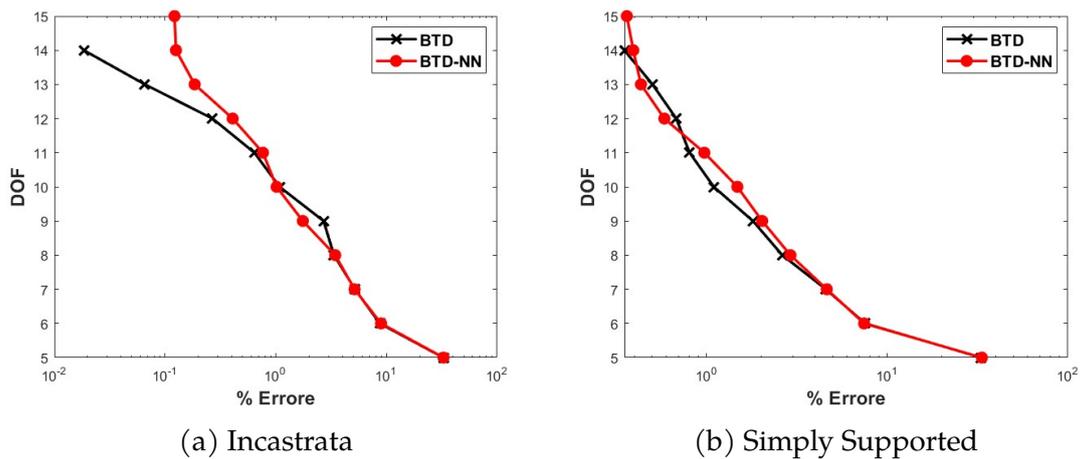
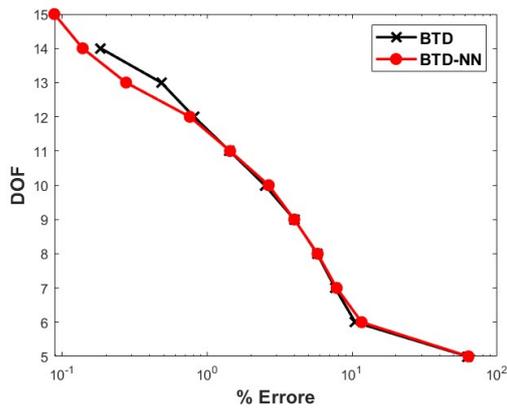
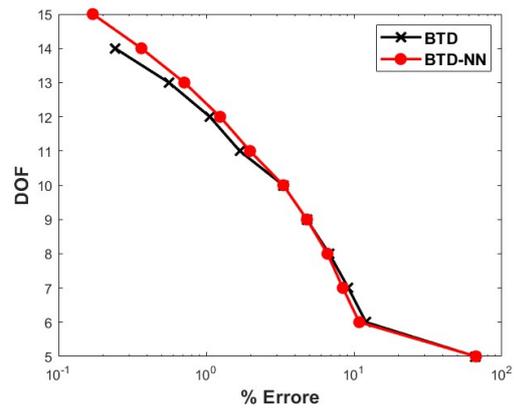


Figura 6.29: Trave con sezione a C con $L/h=20$ e $h/t=10$

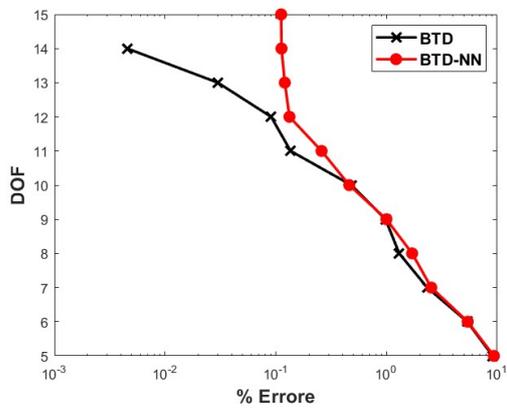


(a) Incastrata

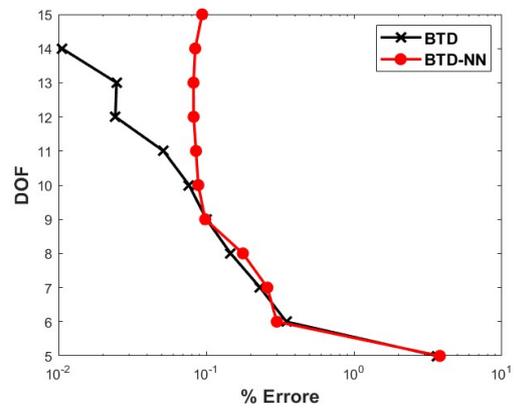


(b) Simply Supported

Figura 6.30: Trave con sezione a C con $L/h=10$ e $h/t=20$



(a) Incastrata



(b) Simply Supported

Figura 6.31: Trave con sezione a C con $L/h=50$ e $h/t=4$

Tabella 6.79: Best theories ricavate con rete neurale di una trave con sezione a C con $L/h=20$, $h/t=10$ incastrata

DOF	u_1	u_2	u_3	u_4	u_5	u_6	u_7	u_8	u_9	u_{10}	u_{11}	u_{12}	u_{13}	u_{14}	u_{15}	$\%E_{AVG}$
15	▲	▲	▲	▲	▲	▲	▲	▲	▲	▲	▲	▲	▲	▲	▲	1.217E-01
14	▲	▲	▲	▲	▲	▲	△	▲	▲	▲	▲	▲	▲	▲	▲	1.255E-01
13	▲	▲	▲	▲	▲	▲	△	▲	▲	▲	△	▲	▲	▲	▲	1.852E-01
12	▲	▲	▲	▲	▲	▲	△	▲	▲	▲	△	△	▲	▲	▲	4.081E-01
11	▲	▲	▲	▲	▲	▲	△	△	▲	▲	△	△	▲	▲	▲	7.659E-01
10	▲	▲	▲	▲	▲	▲	△	△	▲	▲	△	△	▲	▲	▲	1.018E+00
9	▲	▲	▲	△	▲	▲	△	△	▲	▲	△	△	△	▲	△	1.756E+00
8	▲	▲	▲	▲	▲	▲	△	△	△	▲	△	△	△	▲	△	3.444E+00
7	▲	▲	▲	▲	▲	△	△	△	△	▲	△	△	△	▲	△	5.152E+00
6	▲	▲	▲	△	▲	△	△	△	△	▲	△	△	△	▲	△	8.929E+00
5	▲	▲	▲	△	▲	▲	△	△	△	△	△	△	△	△	△	3.278E+01

Tabella 6.80: Best theories FE di una trave con sezione a C con $L/h=20$, $h/t=10$ incastrata

DOF	u_1	u_2	u_3	u_4	u_5	u_6	u_7	u_8	u_9	u_{10}	u_{11}	u_{12}	u_{13}	u_{14}	u_{15}	$\%E_{AVG}$
15	▲	▲	▲	▲	▲	▲	▲	▲	▲	▲	▲	▲	▲	▲	▲	0.000E+00
14	▲	▲	▲	▲	▲	▲	▲	▲	▲	▲	△	▲	▲	▲	▲	1.844E-02
13	▲	▲	▲	▲	▲	▲	▲	△	▲	▲	△	▲	▲	▲	▲	6.570E-02
12	▲	▲	▲	▲	▲	▲	△	△	▲	▲	△	▲	▲	▲	▲	2.681E-01
11	▲	▲	▲	▲	▲	▲	△	△	▲	▲	△	△	▲	▲	▲	6.416E-01
10	▲	▲	▲	▲	▲	▲	△	△	▲	▲	△	△	△	▲	▲	1.083E+00
9	▲	▲	▲	▲	▲	▲	△	△	△	▲	△	▲	△	▲	△	2.704E+00
8	▲	▲	▲	▲	▲	△	△	△	△	▲	△	△	△	▲	▲	3.359E+00
7	▲	▲	▲	▲	▲	△	△	△	△	▲	△	△	△	▲	△	5.196E+00
6	▲	▲	▲	△	▲	△	△	△	△	▲	△	△	△	▲	△	8.718E+00
5	▲	▲	▲	△	▲	▲	△	△	△	▲	△	△	△	△	△	3.264E+01

Tabella 6.81: Best theories ricavate con rete neurale di una trave con sezione a C con $L/h=10$, $h/t=20$ incastrata

DOF	u_1	u_2	u_3	u_4	u_5	u_6	u_7	u_8	u_9	u_{10}	u_{11}	u_{12}	u_{13}	u_{14}	u_{15}	$\%E_{AVG}$
15	▲	▲	▲	▲	▲	▲	▲	▲	▲	▲	▲	▲	▲	▲	▲	8.788E-02
14	▲	▲	▲	▲	▲	▲	△	▲	▲	▲	▲	▲	▲	▲	▲	1.378E-01
13	▲	▲	▲	▲	▲	▲	△	▲	▲	▲	△	▲	▲	▲	▲	2.745E-01
12	▲	▲	▲	▲	▲	▲	▲	△	▲	▲	△	▲	▲	▲	△	7.566E-01
11	▲	▲	▲	▲	▲	▲	△	▲	▲	▲	△	△	▲	▲	△	1.434E+00
10	▲	▲	▲	△	▲	▲	△	△	▲	▲	▲	▲	△	▲	△	2.649E+00
9	▲	▲	▲	▲	▲	▲	△	△	▲	▲	△	△	▲	▲	△	3.976E+00
8	▲	▲	▲	▲	▲	△	△	△	△	▲	△	▲	△	▲	△	5.762E+00
7	▲	▲	▲	▲	▲	△	△	△	△	▲	△	△	△	▲	△	7.801E+00
6	▲	▲	▲	△	▲	△	△	△	△	▲	△	△	△	▲	△	1.160E+01
5	▲	▲	▲	△	▲	△	△	△	△	▲	△	△	△	△	△	6.338E+01

Tabella 6.82: Best theories FE di una trave con sezione a C con $L/h=10$, $h/t=20$ incastrata

DOF	u_1	u_2	u_3	u_4	u_5	u_6	u_7	u_8	u_9	u_{10}	u_{11}	u_{12}	u_{13}	u_{14}	u_{15}	$\%E_{AVG}$
15	▲	▲	▲	▲	▲	▲	▲	▲	▲	▲	▲	▲	▲	▲	▲	0.000E+00
14	▲	▲	▲	▲	▲	▲	▲	▲	▲	▲	△	▲	▲	▲	▲	1.834E-01
13	▲	▲	▲	▲	▲	▲	▲	▲	▲	▲	△	△	▲	▲	▲	4.801E-01
12	▲	▲	▲	▲	▲	▲	▲	▲	▲	▲	△	△	▲	▲	△	8.077E-01
11	▲	▲	▲	▲	▲	▲	△	▲	▲	▲	△	△	▲	▲	△	1.424E+00
10	▲	▲	▲	△	▲	▲	△	△	▲	▲	▲	▲	△	▲	△	2.495E+00
9	▲	▲	▲	▲	▲	▲	△	△	▲	▲	△	△	△	▲	△	3.987E+00
8	▲	▲	▲	▲	▲	△	△	▲	△	▲	△	△	△	▲	△	5.725E+00
7	▲	▲	▲	▲	▲	△	△	△	△	▲	△	△	△	▲	△	7.617E+00
6	▲	▲	▲	△	▲	△	△	△	△	▲	△	△	△	▲	△	1.047E+01
5	▲	▲	▲	△	▲	△	△	△	△	▲	△	△	△	△	△	6.255E+01

Tabella 6.83: Best theories ricavate con rete neurale di una trave con sezione a C con $L/h=50$, $h/t=4$ incastrata

DOF	u_1	u_2	u_3	u_4	u_5	u_6	u_7	u_8	u_9	u_{10}	u_{11}	u_{12}	u_{13}	u_{14}	u_{15}	$\%E_{AVG}$
15	▲	▲	▲	▲	▲	▲	▲	▲	▲	▲	▲	▲	▲	▲	▲	1.118E-01
14	▲	▲	▲	▲	▲	▲	△	▲	▲	▲	▲	▲	▲	▲	▲	1.126E-01
13	▲	▲	▲	▲	▲	▲	△	▲	▲	▲	△	▲	▲	▲	▲	1.207E-01
12	▲	▲	▲	▲	▲	▲	△	▲	▲	▲	△	△	▲	▲	▲	1.330E-01
11	▲	▲	▲	▲	▲	▲	△	▲	▲	▲	△	△	▲	▲	△	2.593E-01
10	▲	▲	▲	▲	▲	▲	△	△	▲	▲	△	△	▲	▲	△	4.613E-01
9	▲	▲	▲	▲	▲	▲	△	△	▲	▲	△	△	△	▲	△	9.989E-01
8	▲	▲	▲	▲	▲	▲	△	△	▲	△	△	△	▲	△	△	1.706E+00
7	▲	▲	▲	▲	▲	▲	△	△	▲	△	△	△	△	△	△	2.541E+00
6	▲	▲	▲	▲	▲	▲	△	△	△	△	△	△	△	△	△	5.420E+00
5	▲	▲	▲	△	▲	▲	△	△	△	△	△	△	△	△	△	9.339E+00

Tabella 6.84: Best theories FE di una trave con sezione a C con $L/h=50$, $h/t=4$ incastrata

DOF	u_1	u_2	u_3	u_4	u_5	u_6	u_7	u_8	u_9	u_{10}	u_{11}	u_{12}	u_{13}	u_{14}	u_{15}	$\%E_{AVG}$
15	▲	▲	▲	▲	▲	▲	▲	▲	▲	▲	▲	▲	▲	▲	▲	0.000E+00
14	▲	▲	▲	▲	▲	▲	▲	△	▲	▲	▲	▲	▲	▲	▲	4.544E-03
13	▲	▲	▲	▲	▲	▲	△	△	▲	▲	▲	▲	▲	▲	▲	3.000E-02
12	▲	▲	▲	▲	▲	▲	△	△	▲	▲	▲	△	▲	▲	▲	9.082E-02
11	▲	▲	▲	▲	▲	▲	△	△	▲	▲	△	△	▲	▲	▲	1.361E-01
10	▲	▲	▲	▲	▲	▲	△	△	▲	▲	△	△	△	▲	▲	4.810E-01
9	▲	▲	▲	▲	▲	▲	△	△	▲	▲	△	△	▲	△	△	9.808E-01
8	▲	▲	▲	▲	▲	▲	△	△	▲	△	△	△	▲	△	△	1.304E+00
7	▲	▲	▲	▲	▲	▲	△	△	▲	△	△	△	△	△	△	2.331E+00
6	▲	▲	▲	▲	▲	▲	△	△	△	△	△	△	△	△	△	5.364E+00
5	▲	▲	▲	△	▲	▲	△	△	△	△	△	△	△	△	△	9.102E+00

Tabella 6.85: Best theories ricavate con rete neurale di una trave con sezione a C con $L/h=20$, $h/t=10$ semplicemente appoggiata

DOF	u_1	u_2	u_3	u_4	u_5	u_6	u_7	u_8	u_9	u_{10}	u_{11}	u_{12}	u_{13}	u_{14}	u_{15}	$\%E_{AVG}$
15	▲	▲	▲	▲	▲	▲	▲	▲	▲	▲	▲	▲	▲	▲	▲	3.629E-01
14	▲	▲	▲	▲	▲	▲	▲	▲	▲	▲	▲	△	▲	▲	▲	3.936E-01
13	▲	▲	▲	▲	▲	▲	△	▲	▲	▲	△	▲	▲	▲	▲	4.341E-01
12	▲	▲	▲	△	▲	▲	△	▲	▲	▲	▲	△	▲	▲	▲	5.850E-01
11	▲	▲	▲	△	▲	▲	△	△	▲	▲	▲	△	▲	▲	▲	9.733E-01
10	▲	▲	▲	▲	▲	▲	△	△	▲	▲	△	△	▲	▲	△	1.482E+00
9	▲	▲	▲	▲	▲	▲	△	△	▲	▲	△	△	△	▲	△	2.034E+00
8	▲	▲	▲	▲	▲	▲	△	△	△	▲	△	△	△	▲	△	2.915E+00
7	▲	▲	▲	▲	▲	△	△	△	△	▲	△	△	△	▲	△	4.633E+00
6	▲	▲	▲	△	▲	△	△	△	△	▲	△	△	△	▲	△	7.453E+00
5	▲	▲	▲	△	▲	▲	△	△	△	△	△	△	△	△	△	3.340E+01

Tabella 6.86: Best theories FE di una trave con sezione a C con $L/h=20$, $h/t=10$ semplicemente appoggiata

DOF	u_1	u_2	u_3	u_4	u_5	u_6	u_7	u_8	u_9	u_{10}	u_{11}	u_{12}	u_{13}	u_{14}	u_{15}	$\%E_{AVG}$
15	▲	▲	▲	▲	▲	▲	▲	▲	▲	▲	▲	▲	▲	▲	▲	0.000E+00
14	▲	▲	▲	△	▲	▲	▲	▲	▲	▲	▲	▲	▲	▲	▲	3.513E-01
13	▲	▲	▲	▲	▲	▲	▲	△	▲	▲	△	▲	▲	▲	▲	5.029E-01
12	▲	▲	▲	▲	▲	▲	△	▲	▲	▲	△	△	▲	▲	▲	6.806E-01
11	▲	▲	▲	▲	▲	▲	△	△	▲	▲	△	△	▲	▲	▲	8.067E-01
10	▲	▲	▲	▲	▲	▲	△	△	▲	▲	△	△	△	▲	▲	1.098E+00
9	▲	▲	▲	▲	▲	▲	△	△	▲	▲	△	△	△	▲	△	1.809E+00
8	▲	▲	▲	▲	▲	▲	△	△	△	▲	△	△	△	▲	△	2.629E+00
7	▲	▲	▲	▲	▲	△	△	△	△	▲	△	△	△	▲	△	4.584E+00
6	▲	▲	▲	△	▲	△	△	△	△	▲	△	△	△	▲	△	7.541E+00
5	▲	▲	▲	△	▲	▲	△	△	△	△	△	△	△	△	△	3.313E+01

Tabella 6.87: Best theories ricavate con rete neurale di una trave con sezione a C con $L/h=10$, $h/t=20$ semplicemente appoggiata

DOF	u_1	u_2	u_3	u_4	u_5	u_6	u_7	u_8	u_9	u_{10}	u_{11}	u_{12}	u_{13}	u_{14}	u_{15}	$\%E_{AVG}$
15	▲	▲	▲	▲	▲	▲	▲	▲	▲	▲	▲	▲	▲	▲	▲	1.710E-01
14	▲	▲	▲	▲	▲	▲	▲	▲	▲	▲	△	▲	▲	▲	▲	3.644E-01
13	▲	▲	▲	▲	▲	▲	▲	▲	▲	▲	△	△	▲	▲	▲	7.112E-01
12	▲	▲	▲	▲	▲	▲	▲	▲	▲	▲	△	△	▲	▲	△	1.242E+00
11	▲	▲	▲	▲	▲	▲	△	△	▲	▲	△	▲	▲	▲	△	1.978E+00
10	▲	▲	▲	▲	▲	▲	△	△	▲	▲	△	▲	△	▲	△	3.324E+00
9	▲	▲	▲	▲	▲	▲	△	△	▲	▲	△	△	△	▲	△	4.800E+00
8	▲	▲	▲	▲	▲	▲	△	△	△	▲	△	△	△	▲	△	6.604E+00
7	▲	▲	▲	▲	▲	△	△	△	△	▲	△	△	△	▲	△	8.398E+00
6	▲	▲	▲	△	▲	△	△	△	△	▲	△	△	△	▲	△	1.084E+01
5	▲	▲	▲	△	▲	△	△	△	△	▲	△	△	△	△	△	6.669E+01

Tabella 6.88: Best theories FE di una trave con sezione a C con $L/h=10$, $h/t=20$ semplicemente appoggiata

DOF	u_1	u_2	u_3	u_4	u_5	u_6	u_7	u_8	u_9	u_{10}	u_{11}	u_{12}	u_{13}	u_{14}	u_{15}	$\%E_{AVG}$
15	▲	▲	▲	▲	▲	▲	▲	▲	▲	▲	▲	▲	▲	▲	▲	0.000E+00
14	▲	▲	▲	▲	▲	▲	▲	▲	▲	▲	△	▲	▲	▲	▲	2.420E-01
13	▲	▲	▲	▲	▲	▲	▲	▲	▲	▲	△	△	▲	▲	▲	5.597E-01
12	▲	▲	▲	▲	▲	▲	▲	▲	▲	▲	△	△	▲	▲	△	1.059E+00
11	▲	▲	▲	▲	▲	▲	△	△	▲	▲	△	△	▲	▲	△	1.687E+00
10	▲	▲	▲	△	▲	▲	△	△	▲	▲	▲	▲	△	▲	△	3.322E+00
9	▲	▲	▲	▲	▲	▲	△	△	▲	▲	△	△	△	▲	△	4.792E+00
8	▲	▲	▲	▲	▲	△	△	▲	△	▲	△	△	△	▲	△	6.793E+00
7	▲	▲	▲	▲	▲	△	△	△	△	▲	△	△	△	▲	△	9.146E+00
6	▲	▲	▲	△	▲	△	△	△	△	▲	△	△	△	▲	△	1.203E+01
5	▲	▲	▲	△	▲	△	△	△	△	▲	△	△	△	△	△	6.618E+01

Tabella 6.89: Best theories ricavate con rete neurale di una trave con sezione a C con $L/h=50$, $h/t=4$ semplicemente appoggiata

DOF	u_1	u_2	u_3	u_4	u_5	u_6	u_7	u_8	u_9	u_{10}	u_{11}	u_{12}	u_{13}	u_{14}	u_{15}	$\%E_{AVG}$
15	▲	▲	▲	▲	▲	▲	▲	▲	▲	▲	▲	▲	▲	▲	▲	9.388E-02
14	▲	▲	▲	▲	▲	▲	▲	△	▲	▲	▲	▲	▲	▲	▲	8.429E-02
13	▲	▲	▲	▲	▲	▲	▲	△	▲	▲	▲	△	▲	▲	▲	8.205E-02
12	▲	▲	▲	▲	▲	▲	▲	△	▲	▲	▲	△	▲	▲	▲	8.226E-02
11	▲	▲	▲	▲	▲	▲	△	△	▲	▲	▲	△	▲	▲	▲	8.534E-02
10	▲	▲	▲	▲	▲	▲	△	△	▲	▲	▲	△	▲	▲	▲	8.840E-02
9	▲	▲	▲	▲	▲	▲	△	△	▲	▲	▲	△	▲	▲	△	9.851E-02
8	▲	▲	▲	▲	▲	▲	△	△	▲	▲	▲	△	△	△	△	1.770E-01
7	▲	▲	▲	▲	▲	▲	△	△	▲	△	▲	△	△	△	△	2.592E-01
6	▲	▲	▲	▲	▲	▲	△	△	△	△	▲	△	△	△	△	3.004E-01
5	▲	▲	▲	▲	▲	△	△	△	△	△	▲	△	△	△	△	3.800E+00

Tabella 6.90: Best theories FE di una trave con sezione a C con $L/h=50$, $h/t=4$ semplicemente appoggiata

DOF	u_1	u_2	u_3	u_4	u_5	u_6	u_7	u_8	u_9	u_{10}	u_{11}	u_{12}	u_{13}	u_{14}	u_{15}	$\%E_{AVG}$
15	▲	▲	▲	▲	▲	▲	▲	▲	▲	▲	▲	▲	▲	▲	▲	0.000E+00
14	▲	▲	▲	▲	▲	▲	▲	△	▲	▲	▲	▲	▲	▲	▲	1.059E-02
13	▲	▲	▲	▲	▲	▲	▲	△	▲	▲	▲	▲	▲	▲	▲	2.475E-02
12	▲	▲	▲	▲	▲	▲	▲	△	▲	▲	▲	▲	▲	▲	▲	2.429E-02
11	▲	▲	▲	▲	▲	▲	▲	△	▲	▲	▲	▲	△	▲	▲	5.139E-02
10	▲	▲	▲	▲	▲	▲	▲	△	▲	▲	▲	▲	△	▲	▲	7.652E-02
9	▲	▲	▲	▲	▲	▲	△	△	▲	▲	▲	▲	△	▲	▲	1.004E-01
8	▲	▲	▲	▲	▲	▲	△	△	▲	▲	▲	▲	△	▲	▲	1.462E-01
7	▲	▲	▲	▲	▲	▲	△	△	△	▲	▲	▲	△	▲	▲	2.315E-01
6	▲	▲	▲	▲	▲	▲	△	△	△	△	▲	▲	△	▲	▲	3.481E-01
5	▲	▲	▲	△	▲	▲	△	△	△	△	▲	▲	△	▲	▲	3.631E+00

La rete neurale addestrata viene valutata su nuove combinazioni di rapporti L/h e h/t che non sono state presentate durante la fase di addestramento. In questo caso, si considerano due tipi di travi a C: una semplicemente appoggiata con un rapporto L/h di 5 e un rapporto h/t di 4, e un'altra incastrata con un rapporto L/h di 80 e un rapporto h/t di 25. Di seguito vengono forniti i risultati sia in termini di BTD che di Best theories.

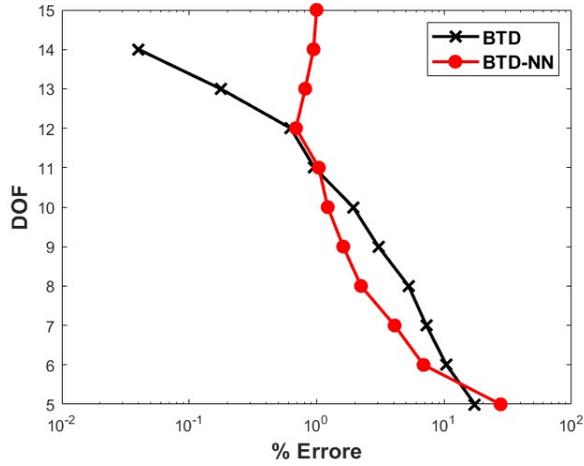


Figura 6.32: Trave con sezione a C con $L/h=5$, $h/t=4$ Simply supported

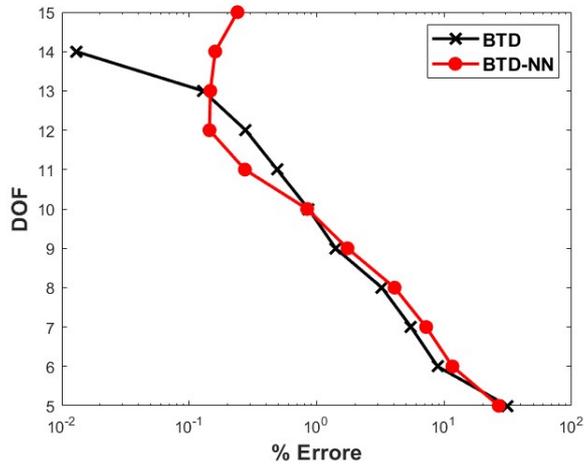


Figura 6.33: Trave con sezione a C con $L/h=80$, $h/t=25$ incastrata

Tabella 6.91: Best theories ricavate con rete neurale di una trave con sezione a C con $L/h=5$, $h/t=4$ semplicemente appoggiata

DOF	u_1	u_2	u_3	u_4	u_5	u_6	u_7	u_8	u_9	u_{10}	u_{11}	u_{12}	u_{13}	u_{14}	u_{15}	$\%E_{AVG}$
15	▲	▲	▲	▲	▲	▲	▲	▲	▲	▲	▲	▲	▲	▲	▲	9.971E-01
14	▲	▲	▲	▲	▲	▲	▲	△	▲	▲	▲	▲	▲	▲	▲	9.437E-01
13	▲	▲	▲	▲	▲	▲	▲	△	▲	▲	▲	▲	▲	▲	▲	8.118E-01
12	▲	▲	▲	▲	▲	▲	△	△	▲	▲	△	▲	▲	▲	▲	6.872E-01
11	▲	▲	▲	▲	▲	▲	△	△	▲	▲	△	▲	▲	▲	△	1.038E+00
10	▲	▲	▲	▲	▲	▲	△	△	▲	▲	△	△	▲	▲	△	1.220E+00
9	▲	▲	▲	▲	▲	▲	△	△	▲	▲	△	△	△	▲	△	1.615E+00
8	▲	▲	▲	▲	▲	▲	△	△	△	▲	△	△	△	▲	△	2.226E+00
7	▲	▲	▲	▲	▲	△	△	△	△	▲	△	△	△	▲	△	4.083E+00
6	▲	▲	▲	△	▲	△	△	△	△	▲	△	△	△	▲	△	6.890E+00
5	▲	▲	▲	▲	▲	△	△	△	△	△	△	△	△	△	△	2.769E+01

Tabella 6.92: Best theories FE di una trave con sezione a C con $L/h=5$, $h/t=4$ semplicemente appoggiata

DOF	u_1	u_2	u_3	u_4	u_5	u_6	u_7	u_8	u_9	u_{10}	u_{11}	u_{12}	u_{13}	u_{14}	u_{15}	$\%E_{AVG}$
15	▲	▲	▲	▲	▲	▲	▲	▲	▲	▲	▲	▲	▲	▲	▲	0.000E+00
14	▲	▲	▲	▲	▲	▲	▲	△	▲	▲	▲	▲	▲	▲	▲	3.986E-02
13	▲	▲	▲	▲	▲	▲	▲	△	▲	▲	△	▲	▲	▲	▲	1.760E-01
12	▲	▲	▲	▲	▲	▲	▲	△	▲	▲	△	△	▲	▲	▲	6.243E-01
11	▲	▲	▲	▲	▲	▲	△	△	▲	▲	△	△	▲	▲	▲	9.584E-01
10	▲	▲	▲	▲	▲	▲	△	△	▲	▲	△	△	△	▲	▲	1.931E+00
9	▲	▲	▲	▲	▲	▲	△	△	▲	▲	△	△	▲	△	△	3.046E+00
8	▲	▲	▲	▲	▲	▲	△	△	▲	△	△	△	▲	△	△	5.255E+00
7	▲	▲	▲	▲	▲	△	△	△	△	▲	△	△	△	▲	△	7.244E+00
6	▲	▲	▲	△	▲	△	△	△	△	▲	△	△	△	▲	△	1.041E+01
5	▲	▲	▲	△	▲	▲	△	△	△	△	△	△	△	△	△	1.741E+01

Tabella 6.93: Best theories ricavate con rete neurale di una trave con sezione a C con $L/h=80$, $h/t=25$ incastrata

DOF	u_1	u_2	u_3	u_4	u_5	u_6	u_7	u_8	u_9	u_{10}	u_{11}	u_{12}	u_{13}	u_{14}	u_{15}	$\%E_{AVG}$
15	▲	▲	▲	▲	▲	▲	▲	▲	▲	▲	▲	▲	▲	▲	▲	2.390E-01
14	▲	▲	▲	▲	▲	▲	▲	▲	▲	▲	▲	▲	▲	△	▲	1.598E-01
13	▲	▲	▲	▲	▲	▲	△	▲	▲	▲	▲	▲	▲	△	▲	1.463E-01
12	▲	▲	▲	▲	▲	▲	▲	▲	▲	▲	△	▲	▲	△	△	1.442E-01
11	▲	▲	▲	▲	▲	▲	▲	▲	▲	▲	△	△	▲	△	△	2.731E-01
10	▲	▲	▲	▲	▲	▲	△	▲	▲	▲	△	△	▲	△	△	8.407E-01
9	▲	▲	▲	▲	▲	▲	△	△	▲	▲	△	△	▲	△	△	1.743E+00
8	▲	▲	▲	▲	▲	▲	△	△	▲	▲	△	△	△	△	△	4.080E+00
7	▲	▲	▲	▲	▲	△	△	△	△	▲	△	△	△	▲	△	7.217E+00
6	▲	▲	▲	△	▲	△	△	△	△	▲	△	△	△	▲	△	1.160E+01
5	▲	▲	▲	△	▲	△	△	△	△	▲	△	△	△	△	△	2.678E+01

Tabella 6.94: Best theories FE di una trave con sezione a C con $L/h=80$, $h/t=25$ incastrata

DOF	u_1	u_2	u_3	u_4	u_5	u_6	u_7	u_8	u_9	u_{10}	u_{11}	u_{12}	u_{13}	u_{14}	u_{15}	$\%E_{AVG}$
15	▲	▲	▲	▲	▲	▲	▲	▲	▲	▲	▲	▲	▲	▲	▲	0.000E+00
14	▲	▲	▲	▲	▲	▲	▲	▲	▲	▲	▲	▲	△	▲	▲	1.293E-02
13	▲	▲	▲	▲	▲	▲	▲	▲	▲	▲	▲	▲	△	▲	△	1.284E-01
12	▲	▲	▲	▲	▲	▲	▲	▲	△	▲	▲	▲	△	▲	△	2.769E-01
11	▲	▲	▲	▲	▲	▲	▲	▲	△	▲	△	▲	△	▲	△	4.889E-01
10	▲	▲	▲	▲	▲	▲	△	△	▲	▲	△	▲	△	▲	△	8.613E-01
9	▲	▲	▲	▲	▲	▲	△	△	△	▲	△	▲	△	▲	△	1.406E+00
8	▲	▲	▲	▲	▲	▲	△	△	△	▲	△	△	△	▲	△	3.246E+00
7	▲	▲	▲	▲	▲	△	△	△	△	▲	△	△	△	▲	△	5.494E+00
6	▲	▲	▲	△	▲	△	△	△	△	▲	△	△	△	▲	△	8.873E+00
5	▲	▲	▲	△	▲	▲	△	△	△	△	△	△	△	△	△	3.128E+01

6.5 Risultati utilizzando la rete neurale compressiva del ramo CNN e del ramo DNN

Nel contesto di questo studio, è stata impiegata una rete neurale avanzata, caratterizzata dall'integrazione di un ramo convoluzionale e uno denso, come descritto nella sezione 4.2.5. Per l'analisi, è stata adottata una griglia di dimensioni 40x40, assumendo che ciascun lato del pixel misuri 1 cm. Questa configurazione ha permesso di esaminare vari casi di travi con specifici rapporti L/h , h/t , e differenti condizioni di vincolo. Le configurazioni analizzate comprendono:

- Trave con sezione quadrata con $L/h=10$ simply supported
- Trave con sezione quadrata cava con $L/h=20$ e $h/t=10$ incastrata ad entrambi gli estremi
- Trave con sezione quadrata cava con $L/h=10$ e $h/t=4$ incastrata ad entrambi gli estremi
- Trave multi-bay box con $L/a=10$ incastrata e simply supported
- Trave con sezione a C con $L/h=10$ e $h/t=20$ simply supported

Per generare le sezioni da analizzare attraverso il ramo convoluzionale della rete, è stata fissata una lunghezza L pari a 3.8 m per la box beam e pari a 2 m per le altre sezioni, da cui sono stati derivati i parametri per definire le sezioni tramite i rapporti L/h e h/t . Questa metodologia ha portato all'analisi di sei sezioni: una per la trave con sezione quadrata piena (Figura 6.34), due per la trave con sezione quadrata cava (Figura 6.35), due uguali per la trave multi-bay box (Figura 6.36) e una per la trave con sezione a C (Figura 6.37).

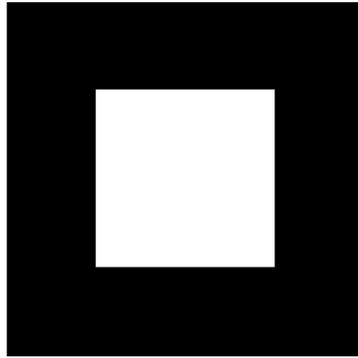
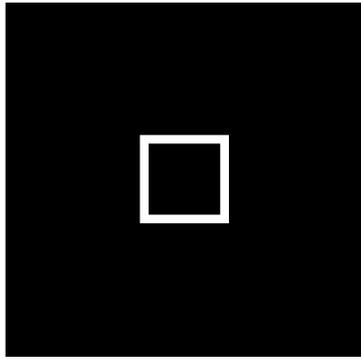
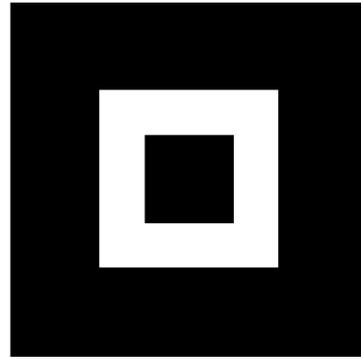


Figura 6.34: Sezione quadrata piena



(a) $h/t=10$



(b) $h/t=4$

Figura 6.35: Sezione quadrata cava

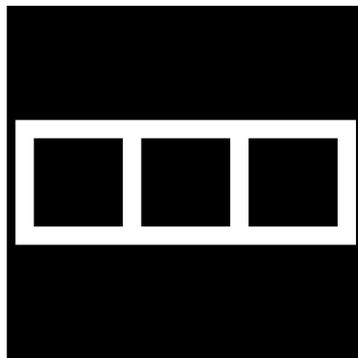


Figura 6.36: Sezione multi bay box

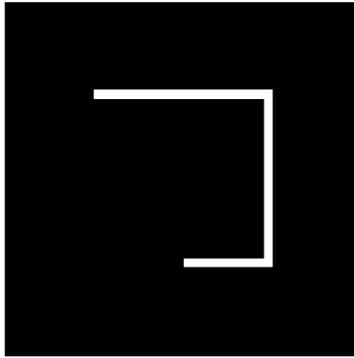


Figura 6.37: Sezione a C con $h/t=20$

Vengono riportati di seguito i risultati ottenuti utilizzando la rete neurale comprensiva del ramo CNN e del ramo DNN allenata utilizzando il 20% dei dati. Nelle tabelle non vengono riportati il confronto con le best theories ricavate attraverso gli elementi finiti (FE) perché poiché tali confronti sono stati già esaminati nei paragrafi 6.3 e 6.4.

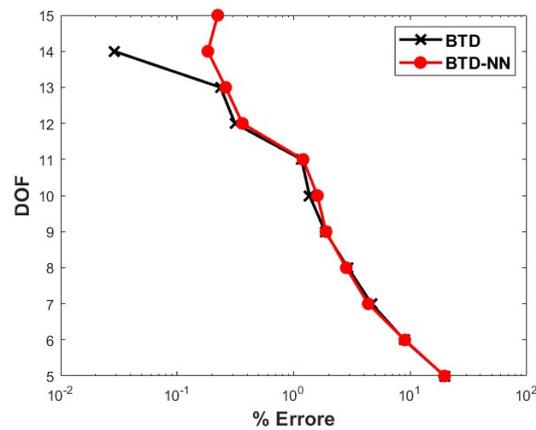
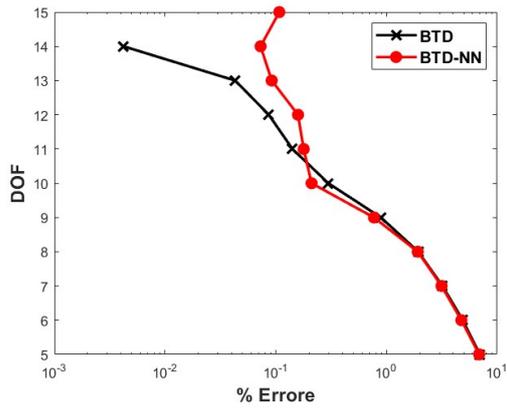
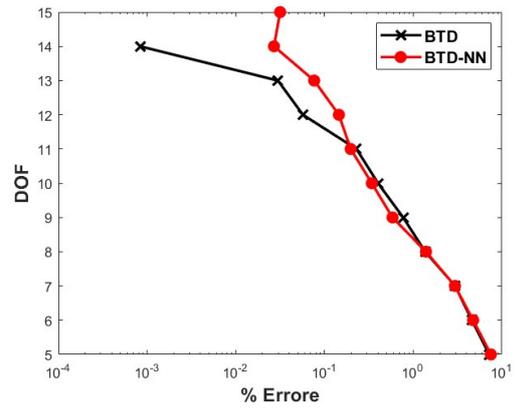


Figura 6.38: Trave con sezione rettangolare con $L/h=10$ Simply supported

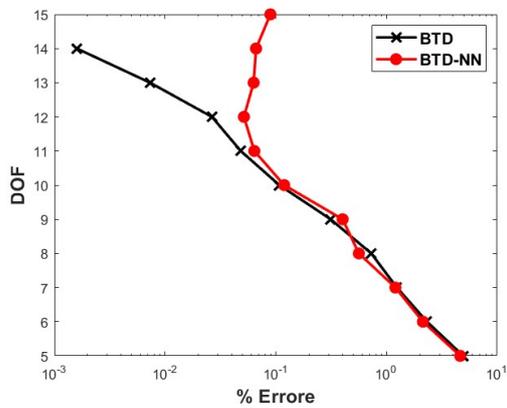


(a) $L/h=10$

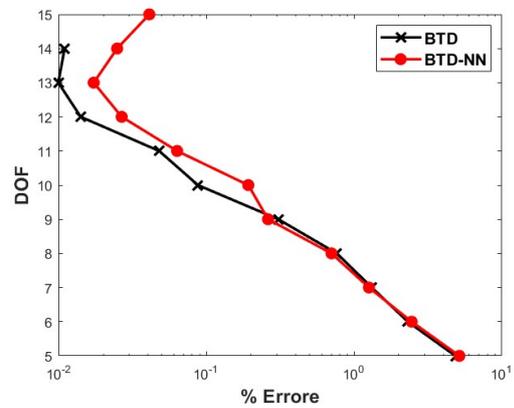


(b) $L/h=20$

Figura 6.39: Trave con sezione quadrata cava incastrata ad entrambi gli estremi



(a) Incastrata



(b) Simply Supported

Figura 6.40: Box beam con $L/a=10$

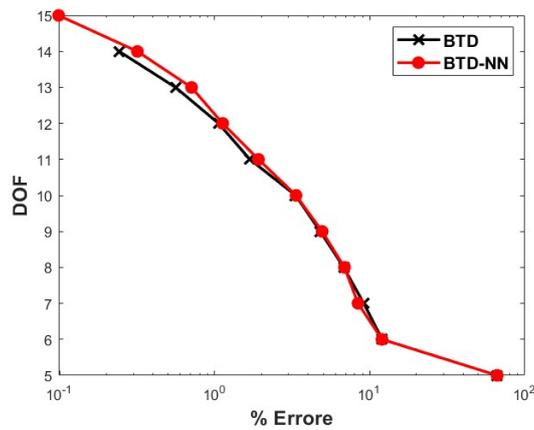


Figura 6.41: Trave con sezione a C con $L/h=10$ Simply supported

Tabella 6.95: Best theories ricavate con rete neurale CNN di una trave con sezione rettangolare con $L/h=10$ semplicemente appoggiata

DOF	u_1	u_2	u_3	u_4	u_5	u_6	u_7	u_8	u_9	u_{10}	u_{11}	u_{12}	u_{13}	u_{14}	u_{15}	$\%E_{AVG}$
15	▲	▲	▲	▲	▲	▲	▲	▲	▲	▲	▲	▲	▲	▲	▲	2.228E-01
14	▲	▲	▲	▲	▲	▲	▲	▲	▲	▲	▲	▲	▲	▲	▲	1.833E-01
13	▲	▲	▲	▲	▲	▲	▲	▲	▲	▲	▲	▲	▲	▲	▲	2.608E-01
12	▲	▲	▲	▲	▲	▲	▲	▲	▲	▲	▲	▲	▲	▲	▲	3.627E-01
11	▲	▲	▲	▲	▲	▲	▲	▲	▲	▲	▲	▲	▲	▲	▲	1.204E+00
10	▲	▲	▲	▲	▲	▲	▲	▲	▲	▲	▲	▲	▲	▲	▲	1.596E+00
9	▲	▲	▲	▲	▲	▲	▲	▲	▲	▲	▲	▲	▲	▲	▲	1.891E+00
8	▲	▲	▲	▲	▲	▲	▲	▲	▲	▲	▲	▲	▲	▲	▲	2.826E+00
7	▲	▲	▲	▲	▲	▲	▲	▲	▲	▲	▲	▲	▲	▲	▲	4.361E+00
6	▲	▲	▲	▲	▲	▲	▲	▲	▲	▲	▲	▲	▲	▲	▲	8.968E+00
5	▲	▲	▲	▲	▲	▲	▲	▲	▲	▲	▲	▲	▲	▲	▲	1.965E+01

Tabella 6.96: Best theories ricavate con rete neurale CNN di una trave con sezione quadrata cava con $L/h=10$ incastrata ad entrambi gli estremi

DOF	u_1	u_2	u_3	u_4	u_5	u_6	u_7	u_8	u_9	u_{10}	u_{11}	u_{12}	u_{13}	u_{14}	u_{15}	$\%E_{AVG}$
15	▲	▲	▲	▲	▲	▲	▲	▲	▲	▲	▲	▲	▲	▲	▲	1.076E-01
14	▲	▲	▲	▲	▲	▲	▲	▲	▲	▲	▲	▲	▲	▲	▲	7.292E-02
13	▲	▲	▲	▲	▲	▲	▲	▲	▲	▲	▲	▲	▲	▲	▲	9.194E-02
12	▲	▲	▲	▲	▲	▲	▲	▲	▲	▲	▲	▲	▲	▲	▲	1.588E-01
11	▲	▲	▲	▲	▲	▲	▲	▲	▲	▲	▲	▲	▲	▲	▲	1.787E-01
10	▲	▲	▲	▲	▲	▲	▲	▲	▲	▲	▲	▲	▲	▲	▲	2.106E-01
9	▲	▲	▲	▲	▲	▲	▲	▲	▲	▲	▲	▲	▲	▲	▲	7.708E-01
8	▲	▲	▲	▲	▲	▲	▲	▲	▲	▲	▲	▲	▲	▲	▲	1.918E+00
7	▲	▲	▲	▲	▲	▲	▲	▲	▲	▲	▲	▲	▲	▲	▲	3.144E+00
6	▲	▲	▲	▲	▲	▲	▲	▲	▲	▲	▲	▲	▲	▲	▲	4.749E+00
5	▲	▲	▲	▲	▲	▲	▲	▲	▲	▲	▲	▲	▲	▲	▲	6.872E+00

Tabella 6.97: Best theories ricavate con rete neurale CNN di una trave con sezione quadrata cava con $L/h=20$ incastrata ad entrambi gli estremi

DOF	u_1	u_2	u_3	u_4	u_5	u_6	u_7	u_8	u_9	u_{10}	u_{11}	u_{12}	u_{13}	u_{14}	u_{15}	$\%E_{AVG}$
15	▲	▲	▲	▲	▲	▲	▲	▲	▲	▲	▲	▲	▲	▲	▲	2.042E-01
14	▲	▲	▲	▲	▲	▲	▲	▲	▲	▲	▲	▲	▲	▲	▲	5.556E-02
13	▲	▲	▲	▲	▲	▲	▲	▲	▲	▲	▲	▲	▲	▲	▲	3.528E-02
12	▲	▲	▲	▲	▲	▲	▲	▲	▲	▲	▲	▲	▲	▲	▲	1.359E-01
11	▲	▲	▲	▲	▲	▲	▲	▲	▲	▲	▲	▲	▲	▲	▲	2.182E-01
10	▲	▲	▲	▲	▲	▲	▲	▲	▲	▲	▲	▲	▲	▲	▲	5.047E-01
9	▲	▲	▲	▲	▲	▲	▲	▲	▲	▲	▲	▲	▲	▲	▲	7.856E-01
8	▲	▲	▲	▲	▲	▲	▲	▲	▲	▲	▲	▲	▲	▲	▲	1.539E+00
7	▲	▲	▲	▲	▲	▲	▲	▲	▲	▲	▲	▲	▲	▲	▲	3.110E+00
6	▲	▲	▲	▲	▲	▲	▲	▲	▲	▲	▲	▲	▲	▲	▲	4.777E+00
5	▲	▲	▲	▲	▲	▲	▲	▲	▲	▲	▲	▲	▲	▲	▲	7.390E+00

Tabella 6.98: Best theories ricavate con rete neurale CNN di una box beam con $L/a=10$ incastrata

DOF	u_1	u_2	u_3	u_4	u_5	u_6	u_7	u_8	u_9	u_{10}	u_{11}	u_{12}	u_{13}	u_{14}	u_{15}	$\%E_{AVG}$
15	▲	▲	▲	▲	▲	▲	▲	▲	▲	▲	▲	▲	▲	▲	▲	8.937E-02
14	▲	▲	▲	▲	▲	▲	▲	▲	▲	▲	▲	▲	▲	▲	△	6.639E-02
13	▲	▲	▲	▲	▲	▲	▲	△	▲	▲	▲	▲	▲	▲	△	6.313E-02
12	▲	▲	▲	▲	▲	▲	▲	▲	▲	▲	△	▲	△	▲	△	5.158E-02
11	▲	▲	▲	▲	▲	▲	▲	△	▲	▲	△	▲	△	▲	△	6.405E-02
10	▲	▲	▲	▲	▲	▲	△	△	▲	▲	△	▲	△	▲	△	1.191E-01
9	▲	▲	▲	▲	▲	▲	△	△	△	▲	△	▲	△	▲	△	4.018E-01
8	▲	▲	▲	▲	▲	▲	△	△	△	▲	△	△	△	▲	△	5.631E-01
7	▲	▲	▲	▲	▲	▲	△	△	△	△	△	△	△	▲	△	1.206E+00
6	▲	▲	▲	▲	▲	▲	△	△	△	△	△	△	△	△	△	2.137E+00
5	▲	▲	▲	▲	▲	△	△	△	△	△	△	△	△	△	△	4.635E+00

Tabella 6.99: Best theories ricavate con rete neurale CNN di una box beam con $L/a=10$ semplicemente appoggiata

DOF	u_1	u_2	u_3	u_4	u_5	u_6	u_7	u_8	u_9	u_{10}	u_{11}	u_{12}	u_{13}	u_{14}	u_{15}	$\%E_{AVG}$
15	▲	▲	▲	▲	▲	▲	▲	▲	▲	▲	▲	▲	▲	▲	▲	4.099E-02
14	▲	▲	▲	▲	▲	▲	▲	▲	▲	▲	△	▲	▲	▲	▲	2.483E-02
13	▲	▲	▲	▲	▲	▲	▲	▲	▲	▲	△	▲	▲	▲	△	1.723E-02
12	▲	▲	▲	▲	▲	▲	▲	▲	▲	▲	△	▲	△	▲	△	2.665E-02
11	▲	▲	▲	▲	▲	▲	▲	▲	△	▲	△	▲	△	▲	△	6.324E-02
10	▲	▲	▲	▲	▲	▲	△	△	▲	▲	△	▲	△	▲	△	1.919E-01
9	▲	▲	▲	▲	▲	▲	△	△	△	▲	△	▲	△	▲	△	2.610E-01
8	▲	▲	▲	▲	▲	▲	△	△	△	▲	△	△	△	▲	△	7.021E-01
7	▲	▲	▲	▲	▲	▲	△	△	△	△	△	△	△	▲	△	1.259E+00
6	▲	▲	▲	▲	▲	▲	△	△	△	△	△	△	△	△	△	2.448E+00
5	▲	▲	▲	▲	▲	△	△	△	△	△	△	△	△	△	△	5.146E+00

Tabella 6.100: Best theories ricavate con rete neurale CNN di una trave con sezione a C con $L/h=10$ simply supported

DOF	u_1	u_2	u_3	u_4	u_5	u_6	u_7	u_8	u_9	u_{10}	u_{11}	u_{12}	u_{13}	u_{14}	u_{15}	$\%E_{AVG}$
15	▲	▲	▲	▲	▲	▲	▲	▲	▲	▲	▲	▲	▲	▲	▲	9.852E-02
14	▲	▲	▲	▲	▲	▲	▲	▲	▲	▲	△	▲	▲	▲	▲	3.175E-01
13	▲	▲	▲	▲	▲	▲	▲	▲	▲	▲	△	△	▲	▲	▲	7.087E-01
12	▲	▲	▲	▲	▲	▲	▲	▲	▲	▲	△	△	▲	▲	△	1.125E+00
11	▲	▲	▲	▲	▲	▲	△	▲	▲	▲	△	△	▲	▲	△	1.915E+00
10	▲	▲	▲	△	▲	▲	△	△	▲	▲	▲	▲	△	▲	△	3.347E+00
9	▲	▲	▲	▲	▲	▲	△	△	▲	▲	△	△	△	▲	△	4.931E+00
8	▲	▲	▲	▲	▲	△	△	▲	△	▲	△	△	△	▲	△	6.872E+00
7	▲	▲	▲	▲	▲	△	△	△	△	▲	△	△	△	▲	△	8.403E+00
6	▲	▲	▲	△	▲	△	△	△	△	▲	△	△	△	▲	△	1.198E+01
5	▲	▲	▲	△	▲	△	△	△	△	▲	△	△	△	△	△	6.623E+01

Si riportano di seguito i grafici che confrontano i risultati ottenuti utilizzando sia

una rete neurale densa feed forward che una rete che utilizza un ramo convoluzionale seguito da uno denso.

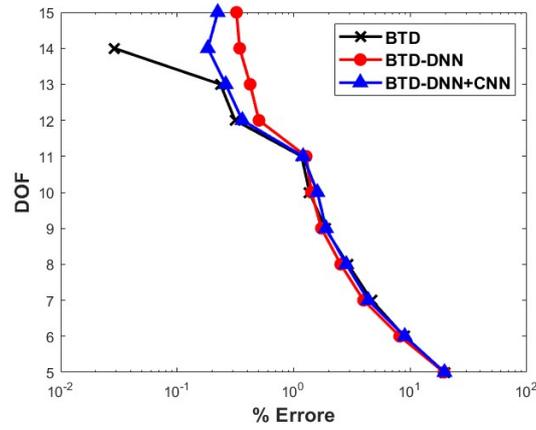


Figura 6.42: Trave con sezione rettangolare con $L/h=10$ Simply supported

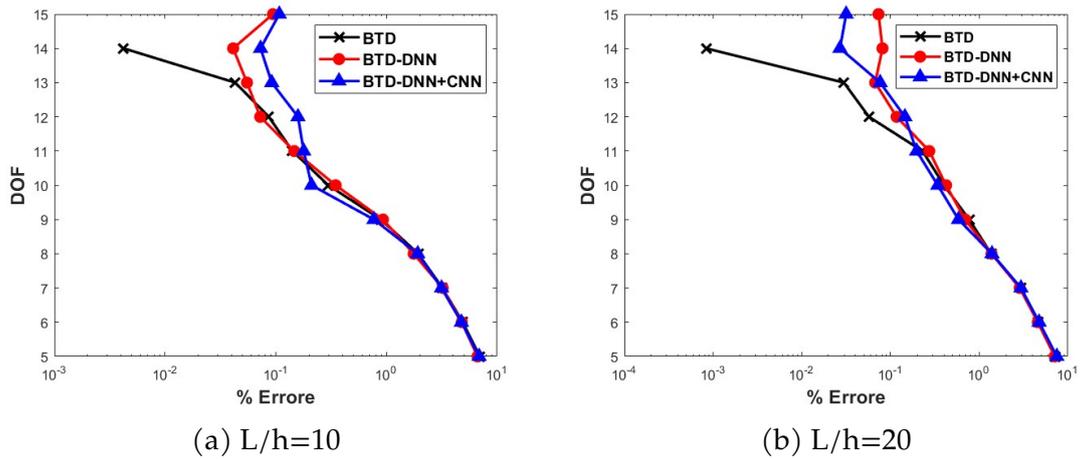


Figura 6.43: Trave con sezione quadrata cava incastrata ad entrambi gli estremi

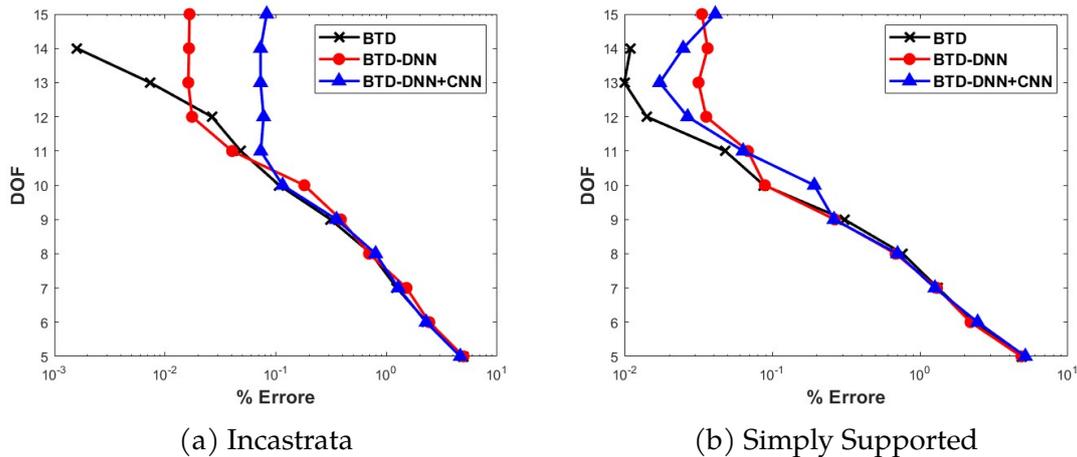


Figura 6.44: Box beam con $L/a=10$

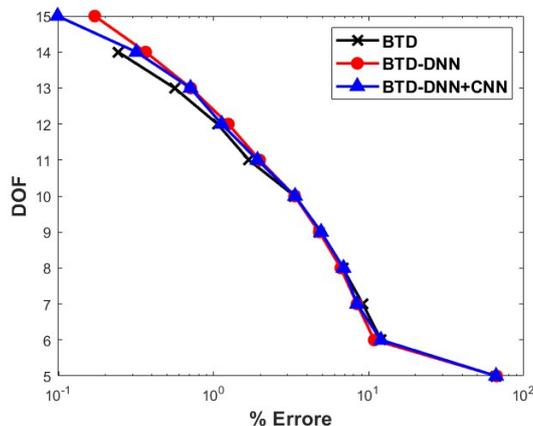


Figura 6.45: Trave con sezione a C con $L/h=10$ Simply supported

Dai grafici si osserva che la rete neurale densamente connessa (DNN) mostra prestazioni leggermente superiori rispetto all'approccio ibrido che combina una rete convoluzionale con una DNN (CNN+DNN). Questa differenza può essere attribuita alla maggiore complessità introdotta dalla rete ibrida. In particolare, il ramo convoluzionale della CNN+DNN processa le immagini per estrarre caratteristiche specifiche, che vengono successivamente analizzate dal ramo denso per la predizione. Questo aumento di complessità, sebbene potenzialmente vantaggioso per analizzare problemi con variazioni strutturali significative tra le sezioni di interesse, non ha portato a miglioramenti sostanziali nelle nostre specifiche

configurazioni di test. Tuttavia, è importante riconoscere che l'approccio ibrido CNN+DNN offre vantaggi significativi nell'analisi di problemi che presentano sezioni di forma e dimensioni variabili, poiché consente un'esplorazione più dettagliata e accurata delle caratteristiche strutturali. Pertanto, la scelta tra l'utilizzo di una DNN o di una combinazione CNN+DNN dovrebbe essere guidata dalla natura specifica del problema e dalle caratteristiche dei dati disponibili.

La rete neurale, precedentemente addestrata, viene ora valutata su casi strutturali con sezioni trasversali differenti rispetto a quelle utilizzate nella fase di addestramento. Si esaminano tre tipologie di sezione, illustrate nelle figure 6.46, 6.47, 6.48. Le caratteristiche del materiale rimangono invariate rispetto ai casi utilizzati per alleare la rete con un modulo di elasticità (E) di 75 GPa, un coefficiente di Poisson ν pari a 0.33 e densità ρ uguale a 2700 Kg/m^3 . Le travi sono considerate semplicemente appoggiate agli estremi. Le dimensioni delle travi sono le seguenti:

- Per la trave con sezione a C simmetrica: $L/b = 10$ e $h/t = 20$.
- Per la trave con sezione a Z: $a = 0.2 \text{ m}$, $b = 0.3 \text{ m}$, lo spessore (t) è 0.04 m , e la lunghezza (L) è 2 m .
- Per la trave con sezione a I: $t_1 = t_2 = 0.01 \text{ m}$, con altezza (b) e larghezza (a) uguali a 0.11 m .

In tutti i casi, l'asse della trave è discretizzato utilizzando 10 elementi di tipo B4. La discretizzazione della sezione trasversale prevede l'uso di 5 elementi Q4 per le travi con sezione a C simmetrica e a Z, e 7 elementi Q4 per la trave con sezione a I.

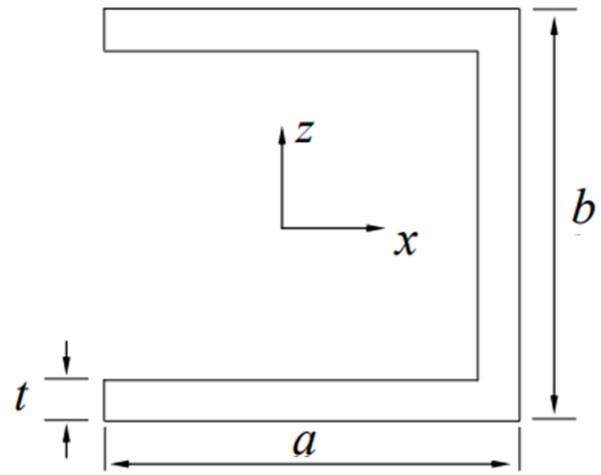


Figura 6.46: Sezione trave a C simmetrica

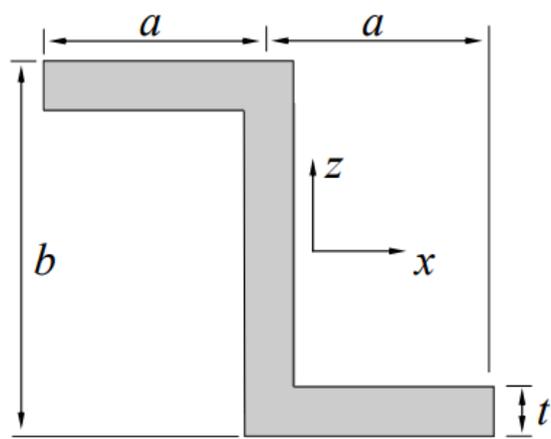


Figura 6.47: Sezione trave a Z

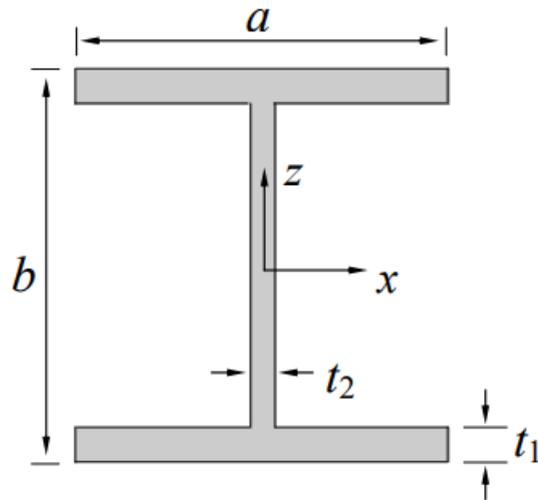


Figura 6.48: Sezione trave a I

Per determinare le sezioni da analizzare utilizzando il ramo convoluzionale della rete, viene stabilita una lunghezza L fissata a 2 metri per la trave a C simmetrica e la trave a Z, mentre per la trave a I viene impostata una lunghezza di 1.1 metri. Le immagini delle sezioni sono riportate nelle figure 6.49, 6.50, 6.51.

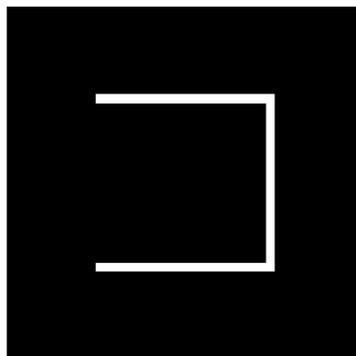


Figura 6.49: Sezione a C simmetrica con $h/t=20$

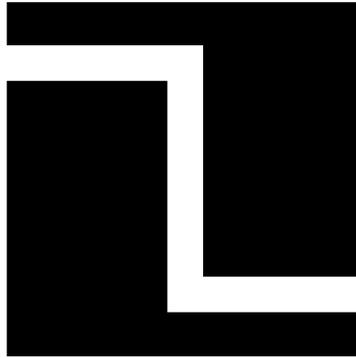


Figura 6.50: Sezione a Z

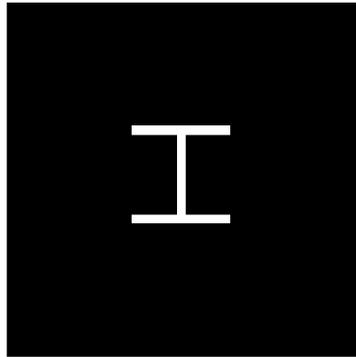


Figura 6.51: Sezione a I

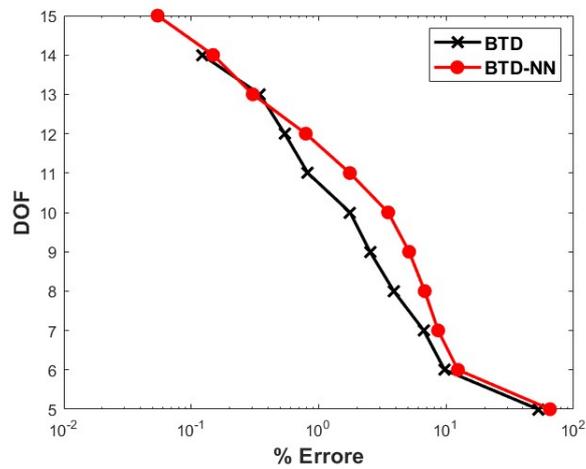


Figura 6.52: Trave con sezione a C con $L/h=10$ Simply supported

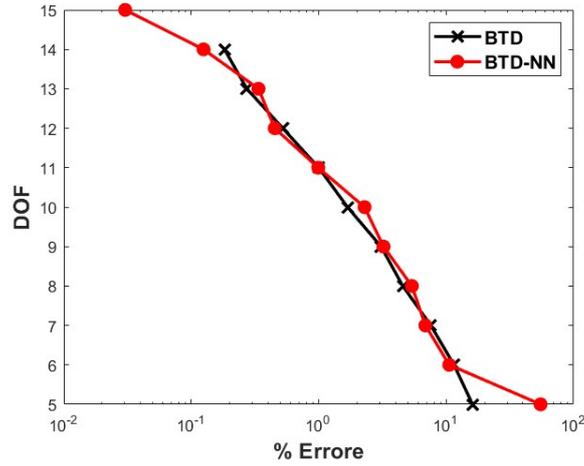


Figura 6.53: Trave con sezione a Z con $L/a=10$ Simply supported

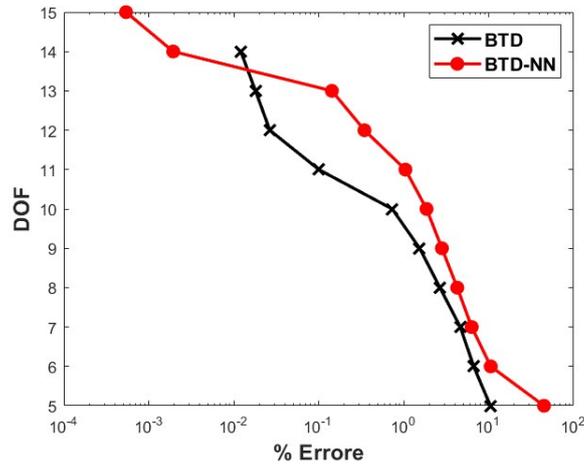


Figura 6.54: Trave con sezione a I con $L/a=10$ Simply supported

Tabella 6.101: Best theories ricavate con rete neurale CNN di una trave con sezione a C simmetrica con $L/h=10$ simply supported

DOF	u_1	u_2	u_3	u_4	u_5	u_6	u_7	u_8	u_9	u_{10}	u_{11}	u_{12}	u_{13}	u_{14}	u_{15}	$\%E_{AVG}$
15	▲	▲	▲	▲	▲	▲	▲	▲	▲	▲	▲	▲	▲	▲	▲	5.444E-02
14	▲	▲	▲	▲	▲	▲	▲	▲	▲	▲	▲	▲	▲	▲	△	1.482E-01
13	▲	▲	▲	▲	▲	▲	▲	▲	▲	▲	△	▲	▲	▲	△	3.040E-01
12	▲	▲	▲	▲	▲	▲	△	▲	▲	▲	△	▲	▲	▲	△	7.915E-01
11	▲	▲	▲	▲	▲	▲	△	▲	▲	▲	△	△	▲	▲	△	1.755E+00
10	▲	▲	▲	△	▲	▲	△	▲	▲	▲	▲	△	△	▲	△	3.504E+00
9	▲	▲	▲	▲	▲	▲	△	△	▲	▲	△	△	△	▲	△	5.120E+00
8	▲	▲	▲	▲	▲	▲	△	△	△	▲	△	△	△	▲	△	6.785E+00
7	▲	▲	▲	▲	▲	△	△	△	△	▲	△	△	△	▲	△	8.643E+00
6	▲	▲	▲	△	▲	△	△	△	△	▲	△	△	△	▲	△	1.236E+01
5	▲	▲	▲	△	▲	△	△	△	△	▲	△	△	△	△	△	6.522E+01

Tabella 6.102: Best theories FE di una trave con sezione a C simmetrica con $L/h=10$ simply supported

DOF	u_1	u_2	u_3	u_4	u_5	u_6	u_7	u_8	u_9	u_{10}	u_{11}	u_{12}	u_{13}	u_{14}	u_{15}	$\%E_{AVG}$
15	▲	▲	▲	▲	▲	▲	▲	▲	▲	▲	▲	▲	▲	▲	▲	0.000E+00
14	▲	▲	▲	▲	▲	▲	▲	▲	▲	▲	▲	▲	△	▲	▲	1.217E-01
13	▲	▲	▲	▲	▲	▲	▲	▲	▲	▲	▲	▲	△	▲	△	3.450E-01
12	▲	▲	▲	▲	▲	▲	▲	▲	▲	▲	△	▲	△	▲	△	5.406E-01
11	▲	▲	▲	▲	▲	△	▲	▲	▲	▲	△	△	△	▲	▲	8.215E-01
10	▲	▲	▲	▲	▲	▲	▲	▲	△	▲	△	△	△	▲	△	1.762E+00
9	▲	▲	▲	▲	▲	△	△	▲	▲	▲	△	△	△	▲	△	2.527E+00
8	▲	▲	▲	▲	▲	△	△	▲	△	▲	△	△	△	▲	△	3.880E+00
7	▲	▲	▲	△	▲	△	△	△	▲	▲	△	△	△	▲	△	6.665E+00
6	▲	▲	▲	△	▲	△	△	△	△	▲	△	△	△	▲	△	9.718E+00
5	▲	▲	▲	△	▲	△	△	△	△	▲	△	△	△	△	△	5.259E+01

Tabella 6.103: Best theories ricavate con rete neurale CNN di una trave con sezione a Z con $L/a=10$ simply supported

DOF	u_1	u_2	u_3	u_4	u_5	u_6	u_7	u_8	u_9	u_{10}	u_{11}	u_{12}	u_{13}	u_{14}	u_{15}	$\%E_{AVG}$
15	▲	▲	▲	▲	▲	▲	▲	▲	▲	▲	▲	▲	▲	▲	▲	3.030E-02
14	▲	▲	▲	▲	▲	▲	▲	▲	▲	▲	△	▲	▲	▲	▲	1.249E-01
13	▲	▲	▲	▲	▲	▲	▲	▲	▲	▲	△	△	▲	▲	▲	3.368E-01
12	▲	▲	▲	▲	▲	▲	▲	▲	▲	▲	△	△	▲	▲	△	4.516E-01
11	▲	▲	▲	▲	▲	▲	△	▲	▲	▲	△	△	▲	▲	△	9.920E-01
10	▲	▲	▲	▲	▲	▲	△	△	▲	▲	△	▲	△	▲	△	2.287E+00
9	▲	▲	▲	△	▲	▲	△	△	▲	▲	▲	△	△	▲	△	3.223E+00
8	▲	▲	▲	△	▲	△	△	▲	△	▲	▲	△	△	▲	△	5.381E+00
7	▲	▲	▲	▲	▲	△	△	△	△	▲	△	△	△	▲	△	6.871E+00
6	▲	▲	▲	△	▲	△	△	△	△	▲	△	△	△	▲	△	1.057E+01
5	▲	▲	▲	△	▲	△	△	△	△	▲	△	△	△	△	△	5.503E+01

Tabella 6.104: Best theories FE di una trave con sezione a Z con $L/a=10$ simply supported

DOF	u_1	u_2	u_3	u_4	u_5	u_6	u_7	u_8	u_9	u_{10}	u_{11}	u_{12}	u_{13}	u_{14}	u_{15}	$\%E_{AVG}$
15	▲	▲	▲	▲	▲	▲	▲	▲	▲	▲	▲	▲	▲	▲	▲	0.000E+00
14	▲	▲	▲	▲	▲	▲	▲	▲	▲	▲	△	▲	▲	▲	▲	1.821E-01
13	▲	▲	▲	▲	▲	▲	▲	▲	▲	▲	△	△	▲	▲	▲	2.730E-01
12	▲	▲	▲	▲	▲	▲	▲	▲	△	▲	△	△	▲	▲	▲	5.220E-01
11	▲	▲	▲	▲	▲	▲	▲	▲	△	▲	△	△	▲	▲	△	9.994E-01
10	▲	▲	▲	▲	▲	▲	△	△	▲	▲	△	△	▲	▲	△	1.683E+00
9	▲	▲	▲	▲	▲	▲	△	△	▲	▲	△	△	▲	△	△	3.083E+00
8	▲	▲	▲	▲	▲	▲	△	△	▲	△	△	△	▲	△	△	4.564E+00
7	▲	▲	▲	▲	▲	▲	△	△	△	△	△	△	▲	△	△	7.577E+00
6	▲	▲	▲	▲	▲	△	△	△	△	△	△	△	△	▲	△	1.151E+01
5	▲	▲	▲	△	▲	△	△	△	△	△	△	△	△	▲	△	1.608E+01

Tabella 6.105: Best theories ricavate con rete neurale CNN di una trave con sezione a I con $L/a=10$ simply supported

DOF	u_1	u_2	u_3	u_4	u_5	u_6	u_7	u_8	u_9	u_{10}	u_{11}	u_{12}	u_{13}	u_{14}	u_{15}	$\%E_{AVG}$
15	▲	▲	▲	▲	▲	▲	▲	▲	▲	▲	▲	▲	▲	▲	▲	5.398E-04
14	▲	▲	▲	▲	▲	▲	▲	▲	▲	▲	▲	▲	▲	▲	△	1.938E-03
13	▲	▲	▲	▲	▲	▲	▲	▲	▲	▲	△	▲	▲	▲	△	1.427E-01
12	▲	▲	▲	▲	▲	▲	△	▲	▲	▲	△	▲	▲	▲	△	3.456E-01
11	▲	▲	▲	▲	▲	▲	△	▲	▲	▲	△	△	▲	▲	△	1.046E+00
10	▲	▲	▲	▲	▲	▲	△	△	▲	▲	△	△	▲	▲	△	1.858E+00
9	▲	▲	▲	▲	▲	▲	△	△	△	▲	△	▲	△	▲	△	2.815E+00
8	▲	▲	▲	▲	▲	▲	△	△	△	▲	△	△	△	▲	△	4.269E+00
7	▲	▲	▲	▲	▲	△	△	△	△	▲	△	△	△	▲	△	6.313E+00
6	▲	▲	▲	△	▲	△	△	△	△	▲	△	△	△	▲	△	1.057E+01
5	▲	▲	▲	△	▲	△	△	△	△	▲	△	△	△	△	△	4.477E+01

Tabella 6.106: Best theories FE di una trave con sezione a I con $L/a=10$ simply supported

DOF	u_1	u_2	u_3	u_4	u_5	u_6	u_7	u_8	u_9	u_{10}	u_{11}	u_{12}	u_{13}	u_{14}	u_{15}	$\%E_{AVG}$
15	▲	▲	▲	▲	▲	▲	▲	▲	▲	▲	▲	▲	▲	▲	▲	0.000E+00
14	▲	▲	▲	▲	▲	▲	▲	▲	▲	▲	▲	▲	△	▲	▲	1.210E-02
13	▲	▲	▲	▲	▲	▲	▲	▲	▲	▲	△	▲	△	▲	▲	1.803E-02
12	▲	▲	▲	▲	▲	▲	▲	▲	▲	▲	△	▲	△	▲	△	2.655E-02
11	▲	▲	▲	▲	▲	▲	△	▲	▲	▲	△	▲	△	▲	△	1.004E-01
10	▲	▲	▲	▲	▲	▲	△	▲	▲	▲	△	△	△	▲	△	7.323E-01
9	▲	▲	▲	▲	▲	▲	△	▲	▲	▲	△	△	△	▲	△	1.541E+00
8	▲	▲	▲	▲	▲	△	△	▲	△	▲	△	△	△	▲	△	2.669E+00
7	▲	▲	▲	△	▲	△	△	▲	△	▲	△	△	△	▲	△	4.633E+00
6	▲	▲	▲	△	▲	△	△	△	△	▲	△	△	△	▲	△	6.655E+00
5	▲	▲	▲	△	▲	△	△	△	△	▲	△	△	△	▲	△	1.047E+01

Si può notare dai grafici 6.52, 6.53, 6.54 che la rete neurale comprensiva del ramo CNN e DNN mostri una capacità di generalizzazione superiore rispetto alla semplice configurazione densa, attribuibile alla maggiore complessità dell'architettura. Nonostante la rete DNN isolata possa aver manifestato prestazioni leggermente superiori in casi strutturali specifici, l'approccio ibrido offre vantaggi significativi in termini di flessibilità applicativa. La capacità della rete ibrida di adattarsi efficacemente a una vasta gamma di forme e dimensioni delle sezioni analizzate ne sottolinea la superiorità, rendendola una soluzione preferibile per contesti applicativi che richiedono un alto grado di generalizzazione e versatilità.

Un'analisi statistica è stata effettuata sui termini più importati tra gli higher order per le best theories ricavate con il metodo assiomatico asintotico per le travi analizzate, aventi il rapporto L/h pari a 10. In particolare, sono stati individuati due termini di particolare rilevanza, u_{10} e u_{14} . Nelle figure 6.55 e 6.56 viene mostrato rispettivamente la percentuale del numero di volte in cui il termine u_{10} e u_{14} compare nelle Best theories ricavate con il metodo assiomatico asintotico rispetto al numero totale di volte in cui potrebbe essere attivo, che è pari a 12.

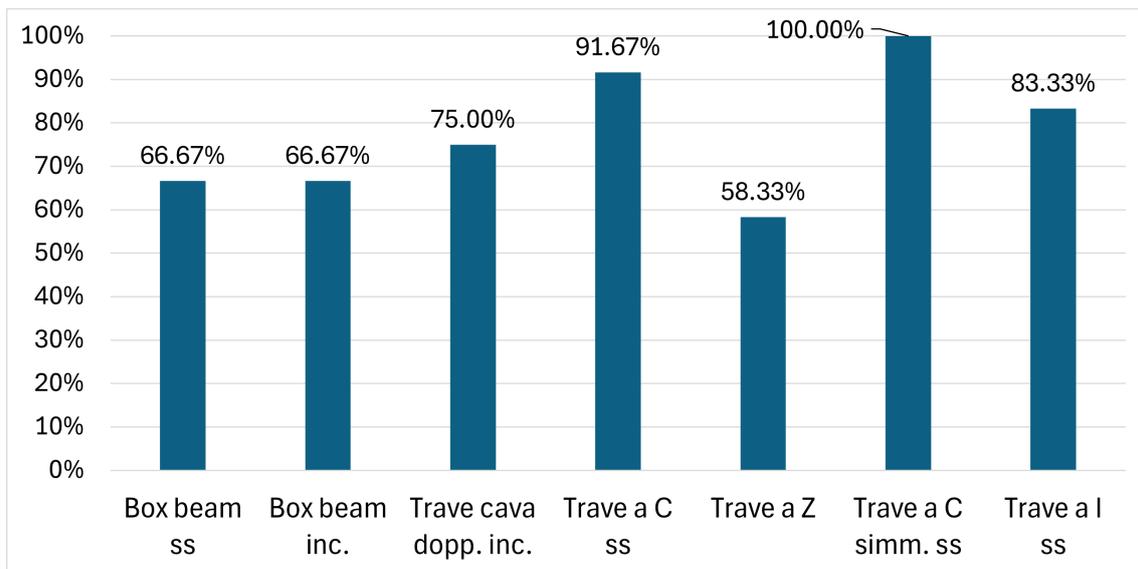


Figura 6.55: Fattore di rilevanza di u_{10}

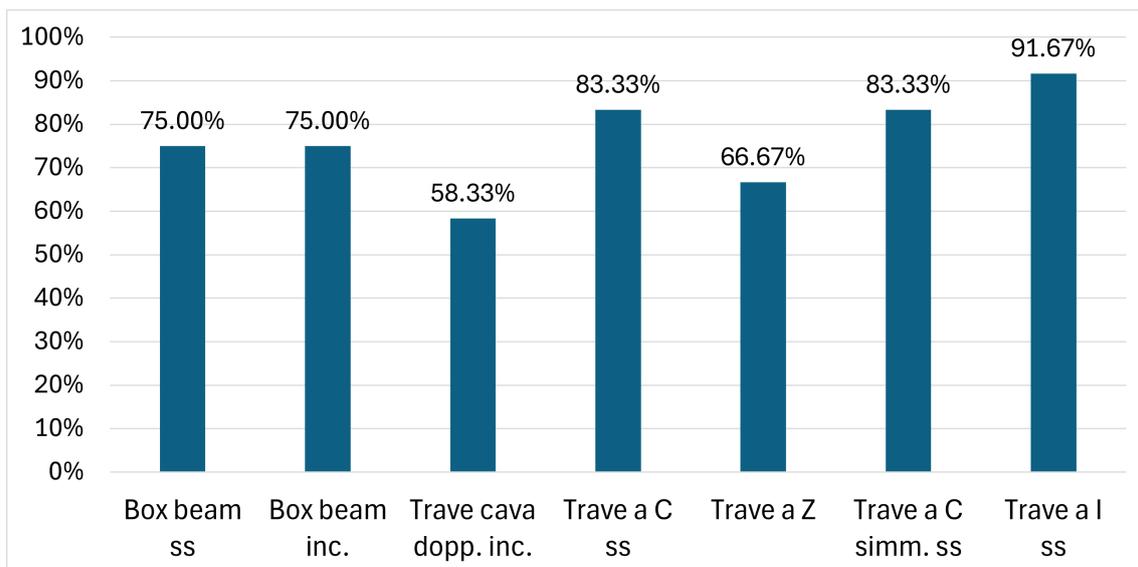


Figura 6.56: Fattore di rilevanza di u_{14}

Capitolo 7

Conclusioni

L'analisi presentata in questa tesi evidenzia come il campo dell'analisi strutturale si stia evolvendo grazie all'integrazione di metodologie innovative e all'avvento delle tecnologie computazionali avanzate. In particolare, si è assistito a un'evoluzione dei metodi di analisi attraverso l'adozione di approcci sia assiomatici che asintotici, culminati nell'approccio misto assiomatico/asintotico. Tale metodologia si è dimostrata efficace nel bilanciare la precisione delle previsioni con il costo computazionale, fornendo un framework ottimale per la selezione dei modelli strutturali più adatti a descrivere il comportamento meccanico delle strutture.

Il ruolo delle reti neurali, in questo contesto, emerge come un elemento di svolta, consentendo un'esplorazione efficiente di un ampio spettro di modelli e offrendo una soluzione pratica al problema della selezione del modello. L'approccio innovativo basato sulle reti neurali ha il potenziale per ridurre significativamente il carico computazionale grazie alla loro capacità di apprendere e generalizzare dai dati di input.

Il Best Theory Diagram (BTD), introdotto come strumento di valutazione delle prestazioni delle teorie strutturali, si conferma essenziale per guidare gli ingegneri nella scelta delle teorie più appropriate basandosi sulla complessità matematica

del modello e sulla precisione ottenuta. Questo strumento, arricchito dall'impiego del Machine Learning e delle reti neurali artificiali, permette un'analisi dettagliata ed efficiente anche di fronte a una vasta quantità di dati e variabili.

Inizialmente, è stata adottata una rete neurale densa (DNN) che considera come input le teorie strutturali, la snellezza e le condizioni di vincolo. Questo modello ha mostrato una capacità notevole di elaborare e interpretare i dati strutturali, fornendo risultati accurati per configurazioni specifiche. Tuttavia, per affrontare le limitazioni legate alla specificità delle forme e dimensioni delle sezioni delle travi, è stata introdotta una seconda rete in grado di integrare il rapporto h/t come parametro di input, ampliando così la gamma di sezioni con la stessa forma ma differenti dimensioni. Il parametro più importante è il rapporto di snellezza evidenziando un aumento dei termini di ordine 4 al diminuire del rapporto stesso. In entrambe le reti 10 DOF sono sufficienti a garantire una precisione del $98 \div 99$ % rispetto al modello $N = 4$ completo.

La sfida di generalizzare l'analisi anche a diverse forme di sezioni strutturali ha portato allo sviluppo di un modello ibrido, che combina una rete neurale convoluzionale (CNN) con una rete neurale densa (DNN). Questo approccio avanzato sfrutta le immagini delle sezioni strutturali per apprendere le caratteristiche distintive di varie configurazioni, superando i limiti precedentemente incontrati. La CNN elabora le immagini delle sezioni, identificando la presenza o l'assenza di materiale in base alla distribuzione dei pixel, mentre la DNN integra queste informazioni visive con i dati numerici relativi alle proprietà strutturali, alla snellezza, al rapporto h/t , e alle condizioni di vincolo. Delle sezioni analizzate con L/h pari a 10, sono emersi come i termini più significativi negli higher order, \mathbf{u}_{10} e \mathbf{u}_{14} .

In conclusione, l'adozione di metodologie avanzate, come il metodo assiomatico/asintotico e l'uso di reti neurali, rappresenta un passo significativo verso un'analisi strutturale più precisa ed efficiente. Questi sviluppi non solo migliorano la

capacità di prevedere il comportamento delle strutture ma aprono anche nuove prospettive per la ricerca futura nel campo dell'ingegneria strutturale. L'interazione tra tecniche computazionali avanzate e conoscenze ingegneristiche tradizionali promette di portare a una maggiore comprensione e innovazione nel progettare e analizzare le strutture, affrontando così le sfide complesse del mondo reale con soluzioni sempre più sofisticate ed efficienti. Possibili sviluppi futuri includono l'addestramento della rete neurale convoluzionale (CNN) e densa (DNN) con un numero maggiore di casi strutturali al fine di ottenere una migliore generalizzazione. Un'ulteriore alternativa potrebbe essere la progettazione di una nuova rete neurale che consideri tutti e 45 i termini di ogni teoria come input e che includa anche la parametrizzazione del materiale e della mesh. Queste strategie porterebbero a una maggiore capacità della rete di affrontare una vasta gamma di casi e di condizioni.

Bibliografia

- [1] Erasmo Carrera. "Theories and finite elements for multilayered, anisotropic, composite plates and shells". In: *Archives of computational methods in engineering* 9 (2002), pp. 87–140.
- [2] Erasmo Carrera. "Theories and finite elements for multilayered plates and shells: a unified compact formulation with numerical assessment and benchmarking". In: *Archives of Computational Methods in Engineering* 10 (2003), pp. 215–296.
- [3] Erasmo Carrera, Gaetano Giunta e Marco Petrolo. *Beam structures: classical and advanced theories*. John Wiley & Sons, 2011.
- [4] Erasmo Carrera e Gaetano Giunta. "Refined beam theories based on a unified formulation". In: *International Journal of Applied Mechanics* 2.01 (2010), pp. 117–143.
- [5] Erasmo Carrera et al. "Refined beam elements with arbitrary cross-section geometries". In: *Computers & structures* 88.5-6 (2010), pp. 283–293.
- [6] Salah M Ibrahim et al. "Buckling of composite thin walled beams by refined theory". In: *Composite Structures* 94.2 (2012), pp. 563–570.
- [7] Erasmo Carrera, Gaetano Giunta e Marco Petrolo. "A modern and compact way to formulate classical and advanced beam theories". In: *Developments and applications in computational structures technology*. Saxe-Coburg Publications, 2010, pp. 75–112.

- [8] Erasmo Carrera, Marco Petrolo e Enrico Zappino. "Performance of CUF approach to analyze the structural behavior of slender bodies". In: *Journal of Structural Engineering* 138.2 (2012), pp. 285–297.
- [9] Erasmo Carrera, Marco Petrolo e Paolo Nali. "Unified formulation applied to free vibrations finite element analysis of beams with arbitrary section". In: *Shock and Vibration* 18.3 (2011), pp. 485–502.
- [10] Erasmo Carrera, Marco Petrolo e Alessandro Varello. "Advanced beam formulations for free-vibration analysis of conventional and joined wings". In: *Journal of Aerospace Engineering* 25.2 (2012), pp. 282–293.
- [11] Marco Petrolo, Enrico Zappino e Erasmo Carrera. "Refined free vibration analysis of one-dimensional structures with compact and bridge-like cross-sections". In: *Thin-Walled Structures* 56 (2012), pp. 49–61.
- [12] Erasmo Carrera, Flavio Miglioretti e Marco Petrolo. "Accuracy of refined finite elements for laminated plate analysis". In: *Composite Structures* 93.5 (2011), pp. 1311–1327.
- [13] Erasmo Carrera, Flavio Miglioretti e Marco Petrolo. "Guidelines and recommendations on the use of higher order finite elements for bending analysis of plates". In: *International Journal for Computational Methods in Engineering Science and Mechanics* 12.6 (2011), pp. 303–324.
- [14] Erasmo Carrera e Marco Petrolo. "Guidelines and recommendations to construct theories for metallic and composite plates". In: *AIAA journal* 48.12 (2010), pp. 2852–2866.
- [15] Erasmo Carrera e Marco Petrolo. "On the effectiveness of higher-order terms in refined beam theories". In: (2011).
- [16] Mohamed Fahim Elkordy, Kuo-Chun Chang e George C Lee. "Neural networks trained by analytically simulated damage states". In: *Journal of Computing in Civil Engineering* 7.2 (1993), pp. 130–145.

- [17] James L. Rogers. "Simulating structural analysis with neural network". In: *Journal of Computing in Civil Engineering* 8.2 (1994), pp. 252–265.
- [18] B. H. V. Topping, A. I. Khan e A. Bahreininejad. "Parallel training of neural networks for finite element mesh decomposition". In: *Computers & Structures* 63.4 (1997), pp. 693–707.
- [19] Alfonso Pagani, Marco Enea e Erasmo Carrera. "Component-wise damage detection by neural networks and refined FEs training". In: *Journal of Sound and Vibration* 509 (2021), p. 116255.
- [20] Chao A Yan, Riccardo Vescovini e Lorenzo Dozio. "A framework based on physics-informed neural networks and extreme learning for the analysis of composite structures". In: *Computers & Structures* 265 (2022), p. 106761.
- [21] Marco Petrolo e Erasmo Carrera. "On the use of neural networks to evaluate performances of shell models for composites". In: *Advanced Modeling and Simulation in Engineering Sciences* 7 (2020), pp. 1–28.
- [22] Erasmo Carrera et al. *Finite element analysis of structures through unified formulation*. John Wiley & Sons, 2014.
- [23] Yann LeCun et al. "Gradient-based learning applied to document recognition". In: *Proceedings of the IEEE* 86.11 (1998), pp. 2278–2324.
- [24] Ian Goodfellow, Yoshua Bengio e Aaron Courville. *Deep Learning*. MIT press, 2016.
- [25] Erasmo Carrera e Marco Petrolo. "Refined beam elements with only displacement variables and plate/shell capabilities". In: *Meccanica* 47 (2012), pp. 537–556.
- [26] Mihai Dan, Alfonso Pagani e Erasmo Carrera. "Free vibration analysis of simply supported beams with solid and thin-walled cross-sections using higher-order theories based on displacement variables". In: *Thin-Walled Structures* 98 (2016), pp. 478–495.

- [27] Erasmo Carrera, Flavio Miglioretti e Marco Petrolo. "Computations and evaluations of higher-order theories for free vibration analysis of beams". In: *Journal of Sound and Vibration* 331.19 (2012), pp. 4269–4284.
- [28] Marco Petrolo e Erasmo Carrera. "Best theory diagrams for multilayered structures via shell finite elements". In: *Advanced Modeling and Simulation in Engineering Sciences* 6.1 (2019), pp. 1–23.
- [29] Marco Petrolo e Erasmo Carrera. "Methods and guidelines for the choice of shell theories". In: *Acta Mechanica* 231.2 (2020), pp. 395–434.
- [30] Maria Cinefra e Stefano Valvano. "A variable kinematic doubly-curved MITC9 shell element for the analysis of laminated composites". In: *Mechanics of Advanced Materials and Structures* 23.11 (2016), pp. 1312–1325.
- [31] Alfonso Pagani et al. "Use of Lagrange polynomials to build refined theories for laminated beams, plates and shells". In: *Composite Structures* 276 (2021), p. 114505.
- [32] Marco Petrolo. *Advanced aeroelastic models for the analysis of lifting surfaces made of composite materials*. Erasmo Carrera, 2011.
- [33] Gopinath Rebala, Ajay Ravi e Sanjay Churiwala. *An Introduction to Machine Learning*. Springer, 2019.

Ringraziamenti

In questa tesi, desidero esprimere la mia profonda gratitudine e riconoscenza verso coloro che hanno reso possibile il compimento di questo viaggio accademico.

Un ringraziamento speciale va alla mio relatore, il Professore Marco Petrolo, per avermi dato fiducia fin da subito e per il tempo che ha dedicato a questo progetto. Il suo sostegno, unito a una guida professionale e attenta, ha reso questo percorso di tesi non solo possibile ma anche ricco di apprendimenti.

Un ringraziamento particolare va anche all'Ingegnere Pierluigi Iannotti, la cui presenza e supporto sono stati fondamentali durante tutto il percorso che ha portato alla realizzazione di questa tesi. Il suo approccio chiaro, la disponibilità sempre estesa e la gentilezza nei miei confronti hanno reso il percorso non solo più agevole ma anche estremamente gratificante. La sua dedizione e competenza hanno lasciato un'impronta indelebile sul mio lavoro, arricchendolo di valore e significato.

Un grazie di cuore va alla mia famiglia, il cui incondizionato credere in me ha rappresentato il faro nella mia avventura accademica. Il loro sostegno, sacrificio e amore hanno reso possibile raggiungere questo traguardo.

Infine, ma non per importanza, voglio dedicare un ringraziamento tutto speciale alla mia fidanzata Ilaria. Il tuo amore, pazienza e sostegno sono stati essenziali nel superare i momenti difficili e nel gioire insieme delle vittorie. La tua presenza è

stata una costante fonte di ispirazione e motivazione a perseguire i miei obiettivi.

A tutti voi, il mio più sincero e profondo ringraziamento. Questa tesi non rappresenta solo il culmine di un percorso di studi, ma il riflesso dell'amore, dell'amicizia e del sostegno che ho avuto la fortuna di ricevere lungo il cammino.