

POLITECNICO DI TORINO

Corso di Laurea Magistrale
in Ingegneria Matematica

Tesi di Laurea

Un metodo basato sulla simulazione per l'ottimizzazione dei livelli di stock in una catena distributiva a stadio singolo



Relatore

prof. Paolo Brandimarte
firma del relatore

.....

Candidata

Margherita Soro
firma della candidata

.....

Anno Accademico 2023-2024

A mio papà

A mia mamma

A Edoardo e ad Adele

Sommario

La gestione delle scorte riveste un ruolo chiave nella catena di approvvigionamento, influenzando la maggior parte dei settori economici. Questo ambito combina strategie operative e decisionali per ottimizzare i livelli di stock, con l'obiettivo di ridurre i costi e migliorare l'efficienza. Questa tesi si propone di valutare e analizzare diverse metodologie per affrontare il tema della gestione delle scorte in una catena di approvvigionamento a singolo stadio, composta da un magazzino centrale e molteplici punti vendita. Il progetto è suddiviso in due sezioni principali. Nella prima, viene fornita una panoramica del problema e si analizzano alcuni dei diversi metodi esistenti in letteratura per la sua risoluzione. Nonostante la presenza di metodi analitici che permettono di fornire soluzioni esatte, la loro applicabilità pratica è spesso limitata. Di conseguenza, si sono sviluppate numerose euristiche, basate su questi metodi, che vengono anch'esse esaminate. Nella seconda parte, viene presentato un metodo per l'ottimizzazione dei livelli di stock target. Esso utilizza un approccio black-box e un modello di simulazione a eventi discreti per il flusso e la vendita di prodotti all'interno di una rete di distribuzione. L'analisi presuppone l'adozione di una politica di stock di base, che verrà descritta nel dettaglio, e prende in esame vari tipi di domanda, sia deterministica che stocastica. Viene considerata inoltre la possibilità di effettuare trasferimenti di merce laterali tra i rivenditori, oltre al consueto approvvigionamento dal magazzino centrale ai punti vendita, arricchendo così le strategie di distribuzione.

Indice

Elenco delle tabelle	7
Elenco delle figure	8
I Prima parte	9
1 Introduzione	11
2 La catena di approvvigionamento	13
2.1 Struttura della supply chain	13
2.2 Politiche di gestione dello stock	14
3 I parametri	15
3.1 Domanda deterministica	15
3.1.1 Economic Order Quantity	15
3.1.2 Algoritmo Wagner-Within	16
3.1.3 Euristiche Silver-Meal	17
3.2 Domanda stocastica	18
3.2.1 Definizioni e Proposizioni	18
3.3 Costi di Shortage e Livelli di Servizio	21
3.4 Determinare il punto di riordino	22
3.4.1 Livelli di servizio	22
3.4.2 Costi di shortage	23
4 Trasferimenti laterali	27
4.1 Programmazione Dinamica	29
II Seconda Parte	33
5 Descrizione del problema	35
5.1 Modello di Simulazione	35
5.2 Modello di Ottimizzazione	38

6	Risultati	41
6.1	Domanda deterministica	41
6.2	Domanda stocastica	44
6.2.1	Distribuzione Normale	44
6.2.2	Distribuzione di Poisson	47
6.2.3	Distribuzione Binomiale Negativa	49
7	Conclusione	57

Elenco delle tabelle

6.1	I coefficienti di costo	42
6.2	I parametri dello scenario	43
6.3	I parametri dello scenario	45
6.4	I parametri dello scenario	46
6.5	I parametri dello scenario	47
6.6	I coefficienti di costo	49
6.7	I coefficienti di costo	51
6.8	I parametri dello scenario	52
6.9	I parametri delle distribuzioni	52
6.10	I parametri dello scenario	53

Elenco delle figure

6.1	La domanda al variare del tempo	42
6.2	Target Stock Levels ottenuti con un ciclo di ottimizzazione	43
6.3	Impatto dell’allocazione iniziale del stock sui costi totali della catena di approvvigionamento	44
6.4	I target stock levels ottimi all’aumentare della varianza della domanda	45
6.5	Analisi della sensibilità della funzione obiettivo alle variazioni del livello di stock target - Normale	46
6.6	I target stock levels ottimi all’aumentare della distanza di un punto vendita dal magazzino centrale	46
6.7	I target stock levels ottimi dopo un ciclo di ottimizzazione	47
6.8	Analisi della sensibilità della funzione obiettivo alle variazioni del livello di stock target - Poisson	48
6.9	Impatto della variazione della quantità di merce ordinata sulla funzione di costo	48
6.10	I target stock levels al variare del costo di trasferimento laterale della merce tra negozi	49
6.11	Confronto delle distribuzioni di Probabilità della Domanda	51
6.12	I target stock levels al variare della distribuzione della domanda	52
6.13	I target stock levels di 6 stores a diverse distanze dal magazzino	53
6.14	La funzione obiettivo media al variare della deviazione dai TSL ottimi	53
6.15	I due set di target stock leveles testati a confronto	54
6.16	I risultati ottenuti in 1000 simulazioni di domanda - Binomiale Negativa	54
6.17	I risultati ottenuti in 1000 simulazioni di domanda - Poisson	55

Parte I

Prima parte

Capitolo 1

Introduzione

Le scorte consistono nell'accumulo progressivo di beni e materiali trasformati. L'esistenza delle scorte è dovuta a una discrepanza temporale tra l'offerta e la domanda. Se l'offerta di un prodotto si sincronizzasse perfettamente con il momento in cui la domanda emerge, non sorgerebbe mai l'esigenza di immagazzinare tale prodotto. Tuttavia, questa perfetta sincronia è rara e, di conseguenza, la maggior parte delle aziende si trova a dover gestire questo disallineamento temporale tra domanda e offerta.

La gestione delle scorte, o inventory management, si configura quindi come un'attività complessa che comporta la pianificazione e il controllo strategico delle risorse man mano che esse si muovono attraverso la catena di approvvigionamento, passando dai fornitori, attraverso i processi produttivi, fino ad arrivare ai clienti finali. Questo processo è vitale per assicurare che i prodotti siano disponibili quando e dove sono necessari.

L'obiettivo della gestione delle scorte è quello di bilanciare la quantità di beni in magazzino con la domanda del mercato, minimizzando i costi legati alla loro conservazione e stoccaggio. Ciò richiede una previsione accurata della domanda, che deve tener conto di molteplici fattori e potenziali fluttuazioni. La comprensione approfondita delle dinamiche di *inventory*, che include la conoscenza dei tempi di consegna, il valore intrinseco dei beni, la loro reperibilità, il livello attuale di giacenza e il ritmo con cui vengono consumati o utilizzati, è fondamentale per un'efficace gestione delle scorte. Questa conoscenza permette di ottimizzare le operazioni, ridurre il capitale immobilizzato in beni non necessari e garantire che il flusso dei prodotti attraverso la supply chain sia efficiente e risponda alle esigenze del mercato.

Questa tesi si propone di esplorare e analizzare diverse metodologie per affrontare il tema della gestione delle scorte in una catena di approvvigionamento a singolo stadio, composta da un magazzino centrale e diversi punti vendita.

Il progetto è suddiviso in due sezioni principali. Nella prima, viene fornita una panoramica del problema e si analizzano alcuni dei diversi metodi esistenti in letteratura per

la sua risoluzione. Nella seconda parte, viene presentato un metodo per l'ottimizzazione dei livelli di stock target.

Il lavoro svolto è articolato nei seguenti capitoli:

- **Capitolo 2:** viene presentata la distinzione tra i due principali sistemi di supply chain e si discutono le politiche di gestione delle scorte, in particolare le strategie (R, Q) e (s, S) , per il controllo della quantità e del timing degli ordini.
- **Capitolo 3:** si concentra sull'ottimizzazione dei parametri chiave nelle politiche di gestione delle scorte, per scenari di domanda deterministica e stocastica. Vengono esplorati alcuni metodi per calcolare la quantità ottimale di ordine nel modello Economic Order Quantity, l'applicazione di algoritmi come Wagner-Whitin e di euristiche come Silver-Meal. Inoltre, vengono analizzati gli impatti dei costi di shortage e i livelli di servizio desiderati sull'ottimizzazione dei punti di riordino.
- **Capitolo 4:** esamina l'ottimizzazione della catena di approvvigionamento con particolare attenzione ai trasferimenti laterali, ovvero il trasferimento del prodotto tra punti vendita. Analizza due tipi di trasferimenti, proattivi e reattivi, e l'impiego della programmazione dinamica per massimizzare il profitto complessivo ottimizzando la quantità di merce spostata, il negozio di origine e di destinazione dello spostamento.
- **Capitolo 5:** introduce e sviluppa due modelli, un Modello di Simulazione e un Modello di Ottimizzazione. Il Modello di Simulazione mira a rappresentare il flusso di merce in una catena di approvvigionamento a stadio singolo in modo dinamico, consentendo di simulare diverse condizioni e politiche di gestione delle scorte per valutarne l'impatto. Il Modello di Ottimizzazione, scelta una politica di tipo *base stock*, ha come obiettivo quello di trovare i livelli di stock target in ogni negozio che minimizzino la funzione di costo attraverso l'algoritmo *Particle Swarm Optimization*.
- **Capitolo 6:** presenta i risultati ottenuti dall'applicazione dei modelli di simulazione e di ottimizzazione descritti nel capitolo precedente, focalizzandosi su due scenari principali: la domanda deterministica e la domanda stocastica. Il capitolo illustra come l'ottimizzazione dei livelli di stock influenzi significativamente i costi totali della catena di approvvigionamento, evidenziando l'importanza di un'accurata analisi e nonché scelta del modello di domanda.

Capitolo 2

La catena di approvvigionamento

2.1 Struttura della supply chain

Nell'ambito della gestione della supply chain, la distinzione tra sistemi single-echelon e multi-echelon riveste un ruolo cruciale nel determinare l'approccio ottimale alla gestione delle scorte e alla pianificazione delle operazioni.

- Una catena di fornitura a singolo echelon si caratterizza per la presenza di un unico livello o stadio all'interno della supply chain. Questo può includere, ad esempio, un solo livello di fornitori, di produzione o di distribuzione. L'obiettivo principale in un sistema single echelon è ottimizzare la gestione delle scorte e le operazioni in quel particolare stadio, senza tenere in considerazione le interazioni o le dipendenze con altri livelli della catena di fornitura. Tale approccio è più semplice e diretto ma potrebbe non catturare appieno la complessità e la dinamica dell'intera catena.
- Una catena di fornitura a multi-echelon comprende più livelli o stadi, che vanno dai fornitori ai produttori, dai magazzini ai centri di distribuzione, fino ai rivenditori, tutti interconnessi e interdipendenti. In un modello a multi-echelon, l'obiettivo è ottimizzare le prestazioni dell'intera catena di fornitura, prendendo in considerazione la complessità e le interdipendenze tra i vari stadi.

In questa tesi, come anticipato, ci concentreremo sull'ottimizzazione nell'ambito di una catena di fornitura a singolo stadio. Analizziamo in particolare il caso di un magazzino centrale di prodotti finiti che effettua distribuzioni a n punti vendita. Una delle potenziali direzioni future di ricerca riguarda l'ampliamento dell'analisi alla fase precedente del processo, ovvero la produzione, esplorando così il contesto di una catena di fornitura multi-stadio.

2.2 Politiche di gestione dello stock

Esistono diverse politiche per la gestione delle scorte, che coinvolgono decisioni sulla quantità degli ordini e sul timing, influenzando direttamente i livelli di stock, i costi e i livelli di servizio. Ogni politica è basata su un insieme specifico di ipotesi e ha un'applicabilità variabile in base a fattori come la variabilità della domanda, i tempi di consegna e la struttura dei costi di gestione e mantenimento.

Definiamo come posizione di *inventory* p la quantità totale disponibile di un articolo, includendo sia il livello di stock fisico presente che gli ordini in arrivo, escludendo però gli ordini dei clienti già ricevuti ma non ancora soddisfatti.

Politica (r, Q)

La politica r, Q è una strategia di revisione continua dello stock, dove:

- Un ordine viene innescato non appena la posizione di *inventory* p raggiunge o scende al di sotto di punto di riordino r .
- L'ordine è per una quantità fissa Q , sufficiente per portare p sopra r . Se non sufficiente, l'ordine sarà per il numero minimo di lotti necessari per superare r .
- In condizioni stazionarie, p è distribuita uniformemente sugli interi $r+1, r+2, \dots, r+Q$.

Applicazioni: Questa politica è adatta per sistemi con domanda composta da Poisson discreta, dove è richiesta una gestione attenta e continua delle scorte.

Politica (s, S)

La politica s, S differisce dalla r, Q per la flessibilità nella quantità d'ordine:

- Un ordine viene innescato quando p raggiunge o scende al di sotto a s , con l'obiettivo di riportare p a un livello target S .
- La dimensione dell'ordine varia in modo da ottimizzare le scorte in risposta a fluttuazioni significative della domanda.

Applicazioni: Questa politica è preferibile in scenari di alta variabilità della domanda, offrendo una gestione delle scorte più dinamica e potenzialmente più economica.

Capitolo 3

I parametri

Nell'ambito dell'implementazione della politica (r, Q) , è fondamentale determinare i parametri r e Q . Quando, invece, si adotta una politica di stock base, il valore di Q equivale sostanzialmente a $S - s$. Esploreremo vari metodi per il calcolo dei parametri ottimali, affrontando sia scenari di domanda stocastica che deterministica. Ci focalizzeremo in particolare sulla politica (s, S) , analizzandone l'applicazione e l'efficacia.

3.1 Domanda deterministica

Assumere che la domanda sia deterministica e nota può sembrare un'ipotesi irrealistica, in realtà in molte situazioni è ragionevole, specialmente in scenari come le consegne basate su contratti a lungo termine.

3.1.1 Economic Order Quantity

Il modello Economic Order Quantity (EOQ) è il più noto modello decisionale ed è basato sulle seguenti ipotesi fondamentali:

- **Domanda Costante e Continua:** Si assume che la domanda per l'articolo in questione sia costante nel tempo.
- **Costi di Ordinazione e di Mantenimento Costanti:** I costi associati all'effettuazione di un ordine e al mantenimento delle scorte in magazzino sono considerati costanti.
- **Quantità di Ordine Non Intera:** Il modello permette che la quantità di ordine sia un valore frazionario, anche se nella pratica spesso si arrotonda al numero intero più vicino.
- **Consegna Unica:** Si presuppone che l'intero ordine sia consegnato in un unico momento. Inoltre, se il tempo di consegna L è costante, possiamo presumere che sia nullo. L'unica differenza, nel caso di $L > 0$, è la necessità di effettuare l'ordine L unità di tempo prima.

- **Assenza di Stockout:** Non è contemplata la possibilità di esaurimento delle scorte.

Minimizzando la funzione costo, convessa in Q , otteniamo il seguente risultato:

$$Q^* = \sqrt{\frac{2AD}{h}} \quad (3.1)$$

dove:

- Q^* è la quantità ottimale,
- D è la domanda per unità di tempo,
- A è il costo fisso per ordine,
- h è il costo di mantenimento per unità per unità di tempo.

3.1.2 Algoritmo Wagner-Within

In generale, è relativamente semplice includere nei modelli di dimensionamento dei lotti altri costi che variano con la quantità di ordine. Più complesso è invece considerare una domanda variabile nel tempo, nella realtà molto più comune rispetto alla semplice domanda costante precedentemente esaminata. Questa analisi si concentra sulla domanda variabile deterministica e implica quindi che tutte le fluttuazioni siano note in anticipo. E' perciò possibile continuare a ignorare il lead time di consegna, come discusso precedentemente. Assumiamo inoltre di escludere ordini arretrati e di mantenere costanti i costi di stoccaggio e ordinazione nel tempo. La domanda avviene all'inizio di ogni periodo.

La notazione utilizzata è la medesima del paragrafo precedente, a cui aggiungiamo:

- T = numero di periodi,
- d_i = domanda nel periodo i , con $i = 1, 2, \dots, T$. Assumiamo che $d_i > 0 \forall i$.

Il modello così descritto è una generalizzazione dell' Economic Order Quantity Model ed è noto come modello di dimensionamento del lotto dinamico o, più brevemente, EOQ dinamico.

Enunciamo innanzitutto due proprietà della soluzione che risulteranno utili alla comprensione dei metodi di ottimizzazione illustrati.

- *Proprietà 1* Un lotto ottimale deve sempre coprire la domanda di un numero intero di periodi consecutivi.
- *Proprietà 2* I costi di mantenimento per la domanda d_k in un intervallo di tempo composto da uno o più periodi non devono mai superare il costo di ordinazione.

L'algoritmo di Wagner-Whitin permette di trovare la soluzione esatta al problema attraverso l'applicazione della programmazione dinamica.

Si procede nel seguente modo:

1. **Introduzione alla Notazione e Osservazioni Iniziali** Introduciamo la seguente notazione:

- f_k : il costo minimo dal periodo 1 al periodo k , ignorando i periodi da $k + 1$ a T .
- $f_{k,t}$: il costo minimo dal periodo 1 al periodo k , sapendo che l'ultima consegna avviene nel periodo t , con $t < k$.

Per il periodo zero, il costo è zero ($f_0 = 0$). Per un solo periodo, il costo minimo è semplicemente il costo di ordinazione A , poichè consideriamo che la domanda si verifichi sempre all'inizio del periodo.

2. **Ricorrenza della Programmazione Dinamica** Noto il costo minimo f_{t-1} , possiamo calcolare f_k con $k \geq t$ attraverso la seguente formula:

$$f_{k,t-1} = f_{t-1} + A + h \sum_{i=t+1}^k (i-t)d_i$$

3. **Processo Iterativo**

- Assumiamo di conoscere f_0, f_1, \dots, f_{k-1} .
- Attraverso la formula illustrata nel punto precedente, possiamo calcolare $f_{k,t}$ per ogni $1 \leq t \leq k$. Dalla seguente formula,

$$f_k = \min_{1 \leq t \leq k} f_{k,t}$$

possiamo facilmente ricavare f_k .

- Ripetiamo il processo fino a $k = T$.

4. **Criterio di Ottimizzazione** Per la proprietà 2, non è necessario calcolare $f_{k,t}$ per $k > j$ se il costo di mantenimento della domanda d_j per $k - t$ periodi è maggiore del costo di ordinazione.

5. **Soluzione Finale** Dopo aver calcolato f_k per tutti i periodi, la soluzione ottimale si trova guardando l'ultimo periodo T e identificando il periodo t' che dà il costo minimo con l'ultima consegna. La soluzione per i periodi prima di $t' - 1$ deve anch'essa essere ottima, quindi il processo viene ripetuto guardando il periodo $t' - 1$ e così via per trovare tutti i periodi ottimali di consegna.

3.1.3 Euristiche Silver-Meal

Sebbene l'algoritmo di Wagner-Whitin e altri metodi esatti siano nella maggior parte dei casi fattibili dal punto di vista computazionale, nella pratica è molto più comune utilizzare delle euristiche per ottenere una soluzione approssimata. Uno dei metodi più noti è l'euristica di Silver-Meal.

Essa usa un approccio sequenziale e si basa sulla minimizzazione dei costi medi per periodo associati alla consegna dei lotti. Si procede nel seguente modo:

1. **Primo lotto di consegna a $t = 1$:** Si inizia considerando il lotto di consegna che copre solo la domanda del primo periodo.
2. **Espansione Sequenziale:** Si calcola il costo medio per periodo per il lotto che include anche la domanda del secondo periodo e si confronta con quello calcolato precedentemente.

$$\frac{A + hd_2}{2}$$

3. **Criterio di Decisione:** Se il costo medio per periodo che include anche la domanda del secondo periodo è inferiore a quello che considera solo quella del primo, ovvero A , si continua ad aggiungere la domanda dei periodi successivi. Fino a che non si identifica un aumento del costo:

$$\frac{A + h \sum_{j=2}^k (j-1)d_j}{k} \leq \frac{A + h \sum_{j=2}^{k-1} (j-1)d_j}{k-1}, \quad 2 \leq k \leq n$$

e

$$\frac{A + h \sum_{j=2}^{n+1} (j-1)d_j}{n+1} > \frac{A + h \sum_{j=2}^n (j-1)d_j}{n}$$

4. **Nuova Consegna:** Qualora sia verificata la condizione sopra descritta, significa che è economicamente svantaggioso includere la domanda del periodo $n + 1$ nel primo lotto di consegna. Si decide quindi di effettuare una nuova consegna a $t = n + 1$ e si ripetono tutti i passaggi considerando $n + 1$ come primo periodo per calcolare il lotto più vantaggioso.

3.2 Domanda stocastica

Consideriamo ora diverse tecniche per determinare i parametri delle politiche (r, Q) e (s, S) quando la domanda è stocastica. Sia essa un intero non negativo. E' necessario innanzitutto stimarne un modello: quando è bassa, è preferibile utilizzare una distribuzione discreta; quando invece è relativamente grande, è più pratico utilizzare una distribuzione continua e approssimare all'intero più prossimo.

Questa sezione si concentra sull'analisi di situazioni in cui la domanda può essere efficacemente rappresentata attraverso un modello continuo, nello specifico da una distribuzione Normale.

3.2.1 Definizioni e Proposizioni

Siano $\phi(x)$ e $\Phi(x)$ rispettivamente la funzione di densità e la distribuzione di probabilità cumulata per $\mathcal{N}(\mu, \sigma^2)$

$$\phi(x) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{(x-\mu)^2}{2\sigma^2}}, \quad -\infty < x < \infty$$

$$\Phi(x) = \int_{-\infty}^x \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{(u-\mu)^2}{2\sigma^2}} du$$

Un limite dell'adottare una distribuzione normale risiede nel fatto che essa può assegnare una certa probabilità all'occorrenza di valori negativi, perchè variabili come la domanda di prodotti non possono assumere valori minori di zero. Scegliendo una distribuzione Gamma, tale inconveniente viene evitato in quanto essa è definita solo per valori positivi.

Consideriamo ora un sistema basato su una strategia (r, Q) . Denotiamo con p la posizione dell'*inventory* e con l il livello dell'*inventory*, ovvero la quantità di prodotto disponibile a cui sottraiamo gli ordini arretrati.

Valgono le tre seguenti proposizioni:

1. **Proposizione 1:** dati r e Q , la posizione dell'*inventory* p è uniformemente distribuita nell'intervallo $[r, r + Q]$.
2. Assumiamo che il tempo di consegna da magazzino sia costante pari ad L e denotiamo con $D(t, t + \tau) = D(\tau)$ la domanda stocastica nell'intervallo $(t, t + \tau)$.

Proposizione 2: Vale la seguente relazione

$$l(t + L) = p(t) - D(L)$$

3. Assumiamo sempre che il tempo di consegna da magazzino sia fisso e pari a L e che la domanda sia normalmente distribuita con media μ' e varianza σ'^2 . Definiamo con μ e σ rispettivamente la media e la deviazione standard per la domanda tenendo in considerazione il lead time L . I due parametri assumono i seguenti valori

$$\mu = \mu' L \quad \sigma = \sigma' L^{1/2}$$

Proposizione 3: La distribuzione di probabilità cumulata per il livello dell'*inventory* in stato stazionario è

$$F(x) = P(l \leq x) = \frac{1}{Q} \int_R^{R+Q} \left[1 - \Phi\left(\frac{u-x-\mu}{\sigma}\right) \right] du.$$

Da questa relazione, possiamo ricavare tale distribuzione anche nel caso dell'applicazione di una politica di tipo S . Introduciamo innanzitutto la seguente funzione di perdita

$$G(x) = \int_x^\infty (y-x)\phi(y)dy = \phi(x) - x(1 - \Phi(x)).$$

Si noti che

$$G'(x) = \Phi(x) - 1$$

Possiamo quindi riformulare la funzione di distribuzione cumulata come

$$\begin{aligned}
 F(x) &= \frac{1}{Q} \int_R^{R+Q} -G' \left(\frac{u-x-\mu}{\sigma} \right) du \\
 &= \frac{\sigma}{Q} \left[G \left(\frac{R-x-\mu}{\sigma} \right) - G \left(\frac{R+Q-x-\mu}{\sigma} \right) \right]
 \end{aligned}$$

da cui otteniamo la funzione di densità

$$\begin{aligned}
 f(x) &= -\frac{1}{Q} \int_R^{R+Q} \frac{1}{\sigma} \phi \left(\frac{u-x-\mu}{\sigma} \right) du \\
 &= -\frac{1}{Q} \left[\Phi \left(\frac{R+Q-x-\mu}{\sigma} \right) - \Phi \left(\frac{R-x-\mu}{\sigma} \right) \right].
 \end{aligned}$$

Se facciamo tendere $Q \rightarrow 0$, ovvero applichiamo un politica di tipo *base stock* con $S = R$, otteniamo che:

$$F(x) \rightarrow G \left(\frac{R-x-\mu}{\sigma} \right) = 1 - \Phi \left(\frac{R-x-\mu}{\sigma} \right) = \Phi \left(\frac{x-(R-\mu)}{\sigma} \right)$$

ovvero, il livello dell'*inventory* in stato stazionario segue una distribuzione normale con densità

$$f(x) = \frac{1}{\sigma} \phi \left(\frac{x-(R-\mu)}{\sigma} \right).$$

Le tre proposizioni appena esposte sono importanti per la sezione seguente, in cui analizzeremo i metodi di ottimizzazione dei punti di riordino in scenari caratterizzati da una domanda aleatoria.

In caso di domanda e monitoraggio delle scorte entrambi continui, si procede con l'effettuazione di un ordine nel momento preciso in cui la posizione dell'*inventory* raggiunge il punto di riordino R . Tale ordine viene ricevuto dopo un intervallo temporale corrispondente a L unità di tempo.

La definizione di *scorta di sicurezza* (SS) viene introdotta per descrivere la quantità media di merce disponibile immediatamente prima del ricevimento dell'ordine. Si calcola attraverso la formula,

$$SS = R - \mu$$

dove R è il punto di riordino e μ è la media della distribuzione di domanda che tiene in considerazione il lead time di consegna L .

La scorta di sicurezza, o *safety stock*, può essere interpretata come una scorta aggiuntiva che deve essere presente in negozio per proteggersi dalla variazione della domanda.

3.3 Costi di Shortage e Livelli di Servizio

Il costo di shortage è il costo che deriva dall'aver delle scorte disponibili insufficienti e dalla conseguente impossibilità di soddisfare la domanda dei clienti nel momento in cui si manifesta.

Nella situazione più semplice, un'azienda può perdere il profitto derivante da una vendita non realizzata. Tuttavia, gli impatti tendono ad essere più vasti, includendo la perdita di vendite future e la perdita di reputazione.

I costi di shortage possono essere classificati in due tipologie:

- Il *costo di shortage per unità e per unità di tempo*, rilevante, ad esempio, per i pezzi di ricambio. In questo caso infatti una mancanza di stock comporta l'arresto di una macchina fino a quando il pezzo non è nuovamente disponibile. I costi sono quindi proporzionali al tempo di attesa per il pezzo mancante.
- Il *costo di shortage per unità*, più adatto se le carenze sono compensate ad esempio da produzioni straordinarie a costi maggiori.

In entrambi i casi, per l'ampio impatto che tende ad avere l'impossibilità di soddisfare la domanda di un cliente, questi costi sono difficili da quantificare. C'è però consenso sul fatto che siano molto più elevati rispetto ai costi di gestione e mantenimento dello stock in magazzino o negozio. Per questo motivo, le aziende preferiscono mantenere delle scorte aggiuntive al di là delle loro esigenze percepite, come margine di sicurezza, che aumentano i costi di holding ma permettono di evitare quelli di shortage, molto più elevati.

I metodi analizzati nel paragrafo successivo, data una distribuzione di probabilità della domanda e fissate delle penalità per la carenza di stock, permettono di determinare la scorta di sicurezza, o equivalentemente il punto di riordino R , ottimi.

Un approccio alternativo si basa sulla definizione di un livello di servizio. Esso consiste nello stabilire, ad esempio, una percentuale di domanda che deve essere soddisfatta direttamente dallo stock disponibile in negozio o magazzino nel momento in cui essa avviene.

Esistono diversi metodi per misurare il livello di servizio. Ad esempio, possiamo imporre un vincolo minimo su:

- S_1 = la frazione della domanda che può essere soddisfatta immediatamente dalle scorte disponibili.
- S_2 = la frazione di tempo in cui le scorte sono in quantità superiore a zero.
- S_3 = la probabilità di non avere una carenza di stock in un ciclo di ordini

Solitamente i livelli di servizio variano tra il 90% e il 95%.

Indipendentemente dall'utilizzo di un livello di servizio o di un costo di shortage specifico, il punto di riordino R , quindi il margine di sicurezza ideale, aumenterà all'aumentare del livello di servizio o del costo di shortage utilizzato.

3.4 Determinare il punto di riordino

3.4.1 Livelli di servizio

Consideriamo una politica (R, q) con una data quantità Q fissata a priori. Sia il monitoraggio del livello di stock continuo. L'obiettivo è determinare il punto di riordino R che soddisfi un dato valore del livello di servizio S_1, S_2 o S_3 .

Sia la domanda continua normalmente distribuita.

- S_3 , ovvero la probabilità di non avere esaurimenti di scorta per ciclo di ordine, è utilizzata quando la domanda è continua. Siamo nello scenario in cui ordiniamo un lotto Q di dimensione scelta esattamente quando la posizione dell'*inventory* è R . Assumiamo che la domanda nel tempo di consegna sia normalmente distribuita con media μ e varianza σ^2 . Otteniamo

$$P(D(L) \leq R) = S_3 = \Phi\left(\frac{R - \mu}{\sigma}\right)$$

da cui otteniamo

$$R = \sigma\Phi^{-1}(S_3) + \mu$$

Utilizzando la definizione di scorta di sicurezza esposta nel paragrafo precedente, possiamo sostituire $\frac{R-\mu}{\sigma}$ con $\frac{SS}{\sigma}$ e trovare quindi un valore di tale rapporto sufficientemente grande. Noto tale valore, la definizione del punto di riordino può essere riformulata come

$$R = SS + \mu$$

- S_2 , è la probabilità di avere delle scorte positive e si formula come

$$S_2 = 1 - F(0) = 1 - \frac{\sigma}{Q} \left[G\left(\frac{R - \mu}{\sigma}\right) - G\left(\frac{R + Q - \mu}{\sigma}\right) \right]$$

tenendo conto della Proposizione 3.

Utilizzando $G'(x) = \Phi(x) - 1$, si mostra che $\frac{dS_2}{dR} > 0$, cioè, S_2 è crescente in R .

Scelto il livello di servizio, per trovare il più piccolo R che fornisca valore richiesto, è possibile usare una ricerca bisezionata.

Altrimenti, quando Q è grande, si può usare l'approssimazione

$$S_2 \simeq 1 - \frac{\sigma}{Q} G'\left(\frac{R - \mu}{\sigma}\right).$$

- S_1 corrisponde a S_2 nel caso di domanda continua.

3.4.2 Costi di shortage

Consideriamo ora i costi di shortage anzichè i livelli di servizio. Valgono le assunzioni e le definizioni delle precedenti sezioni che riportiamo qui per chiarezza

- La politica di riordino è di tipo (r, Q) con Q fissato
- h è il costo di gestione e mantenimento della merce in magazzino o negozio per unità e unità di tempo
- la domanda, tenendo conto del lead time di consegna, segue una distribuzione normale con media μ e varianza σ^2
- $l(t)$ è il livello dell'*inventory* al variare del tempo
- C_1 è il costo di shortage per unità e unità di tempo
- C_2 è il costo di shortage per unità

L'obiettivo è ricavare una relazione tra i due parametri cosicchè, dato un costo di shortage stabilito, è possibile calcolare il suo corrispondente livello di servizio da inserire nelle formule del paragrafo precedente per ottenere il punto di riordino R .

Usiamo la seguente notazione per il livello dell'*inventory*,

$$l^+ = \max(l, 0)$$

$$l^- = \max(-l, 0)$$

Procediamo ora derivando la relazione tra i costi di shortage e i livelli di servizio sia per C_1 che per C_2 .

Il costo di shortage per unità e unità di tempo C_1

Dalla notazione sopra esposta, otteniamo quindi che il tasso per il costo di mantenimento è hl^+ e il tasso per il costo di shoratage è C_1l^- .

Il tasso di costo totale è perciò pari a

$$hl^+ + C_1l^- = -C_1l + (h + C_1)l^+ = hl + (h + C_1)l^-$$

Definiamo come CC il costo atteso per unità di tempo,

$$CC = h\mathbb{E}(l) + (h + C_1)\mathbb{E}(l^-)$$

La posizione media dell'*inventory* p è per definizione $R + Q/2$ da cui il livello dell'inventario medio $R + Q/2 - \mu$. La formula per CC può essere quindi semplificata come segue

$$= h(R + Q/2 - \mu) + (h + C_1) \int_{-\infty}^0 F(x)dx$$

$$= h(R + Q/2 - \mu) + (h + C_1) \int_{-\infty}^0 \int_{\frac{R}{Q}}^1 \left[-G' \left(\frac{u - x - \mu}{\sigma} \right) \right] dudx$$

per la definizione di $F(x)$. Cambiando poi l'ordine di integrazione, otteniamo

$$= h(R + Q/2 - \mu) + (h + C_1) \frac{\sigma}{Q} \int_{\frac{R}{Q}}^{R+Q} G \left(\frac{u - \mu}{\sigma} \right) du.$$

Si ricordi la definizione della funzione di perdita G positiva e decrescente

$$G(x) = \int_x^{\infty} (y - x)\phi(y)dy = \phi(x) - x(1 - \Phi(x))$$

Introduciamo adesso una funzione $H(x)$ definita come

$$H(x) = \int_x^{\infty} G(v)dv = \frac{1}{2} \left[(x^2 + 1)(1 - \Phi(x)) - x\phi(x) \right]$$

Poichè $H'(x) = -G(x)$, H è una funzione decrescente e convessa. Servendoci di tale funzione, possiamo riscrivere la formula del costo totale atteso per unità di tempo

$$CC = h\left(R + \frac{Q}{2} - \mu\right) + (h + C_1) \frac{\sigma^2}{Q} \left[H \left(\frac{R - \mu}{\sigma} \right) - H \left(\frac{R + Q - \mu}{\sigma} \right) \right].$$

Per ottenere il punto di riordino, calcoliamo la derivata della funzione costo CC rispetto a R e eguagliamo a zero. Possiamo fare ciò perchè, per come sono state definite $H(x)$ e $G(x)$, tale funzione è convessa in R .

$$\frac{dC}{dR} = -h + (h + C_1) \frac{\sigma}{Q} \left[G \left(\frac{R + Q - \mu}{\sigma} \right) - G \left(\frac{R - \mu}{\sigma} \right) \right]$$

Nota la formula per il livello di servizio S_2

$$S_2 = 1 - \frac{\sigma}{Q} \left[G \left(\frac{R - \mu}{\sigma} \right) - G \left(\frac{R + Q - \mu}{\sigma} \right) \right],$$

possiamo semplificare la derivata come

$$\frac{dC}{dR} = h + (h + C_1)(S_2 - 1) = -C_1 + (h + C_1)S_2$$

La soluzione ottima è ottenuta eguagliando la derivata a zero, da cui otteniamo la seguente relazione

$$S_2 = \frac{C_1}{h + C_1}.$$

Definito un costo di shortage per unità e unità di tempo C_1 , possiamo determinare il livello di servizio che fornisce esattamente lo stesso punto di riordino e calcolare R con la formula derivata nella precedente sezione.

Il costo di shortage per unità C_2

Consideriamo ora tutte le assunzioni del modello precedente ma anzichè ottimizzare sul costo di shortage per unità e unità di tempo, utilizziamo quello solo per unità. Ogni qualvolta la domanda sia superiore a zero in un intervallo di tempo in cui lo stock è nullo o negativo, incorriamo nella penalità C_2 .

Si noti, prima di procedere, che la domanda è normalmente distribuita con media μ' e deviazione standard σ' , mentre la domanda quando si tiene conto anche del lead time L è normalmente distribuita con media $\mu = \mu' L$ e deviazione standard $\sigma = \sigma' L^{1/2}$

Il costo CC per unità di tempo può ora essere espresso come

$$\begin{aligned} CC &= h\left(R + \frac{Q}{2} - \mu\right) + h \int_{-\infty}^0 F(x) dx + C_2 \mu' F(0) = \\ &= h\left(R + \frac{Q}{2} - \mu\right) + h \frac{\sigma}{Q} \int_R^{R+Q} G\left(\frac{u - \mu}{\sigma}\right) du + \\ &\quad + C_2 \mu' \frac{\sigma}{Q} \left[G\left(\frac{R - \mu}{\sigma}\right) - G\left(\frac{R + Q - \mu}{\sigma}\right) \right]. \end{aligned}$$

Con l'ausilio della funzione H , riscriviamo l'espressione come segue

$$\begin{aligned} &= h\left(R + \frac{Q}{2} - \mu\right) + h \frac{\sigma^2}{Q} \left[H\left(\frac{R - \mu}{\sigma}\right) - H\left(\frac{R + Q - \mu}{\sigma}\right) \right] + \\ &\quad + C_2 \mu' \frac{\sigma}{Q} \left[G\left(\frac{R - \mu}{\sigma}\right) - G\left(\frac{R + Q - \mu}{\sigma}\right) \right]. \end{aligned}$$

La funzione costo totale per unità di tempo non è convessa in R però possiamo fare alcune approssimazioni

- se il numero di backorders è basso, $\int_{-\infty}^0 F(x) dx$ può essere approssimato con un valore nullo.
- se la quantità per ogni lotto Q è alta, $-G\left(\frac{R+Q-\mu}{\sigma}\right)$ può anch'esso essere considerato nullo poichè G è decrescente.

Otteniamo così la funzione approssimata, convessa in R ,

$$\tilde{C}C = h\left(R + \frac{Q}{2} - \mu\right) + C_2 \mu' \frac{\sigma}{Q} G\left(\frac{R - \mu}{\sigma}\right)$$

da cui possiamo calcolare il punto di riordino R eguagliando a zero la derivata

$$\frac{d\tilde{C}C}{dR} = h + C_2 \frac{\mu'}{Q} \left(\Phi\left(\frac{R - \mu}{\sigma}\right) - 1 \right) = 0$$

o

$$\Phi\left(\frac{R - \mu}{\sigma}\right) = 1 - \frac{Qh}{C_2\mu}.$$

da cui otteniamo la relazione con il livello di servizio che considera la probabilità di non avere esaurimenti di scorta per ciclo di ordine

$$S_3 = 1 - \frac{Qh}{C_2\mu}.$$

Capitolo 4

Trasferimenti laterali

Finora abbiamo esaminato vari scenari con domanda sia deterministica che stocastica, focalizzandoci sul determinare il livello ottimale di scorte per ogni punto vendita. Abbiamo assunto che la modalità di rifornimento fosse da un unico magazzino centrale, con specifici tempi di consegna. Tuttavia, l'incertezza legata alla domanda, unita alle variabili dei tempi e dei costi di approvvigionamento dal magazzino centrale, così come il rischio di esaurimento delle scorte in quest'ultimo, evidenziano spesso la necessità di implementare degli spostamenti laterali di merce direttamente tra i negozi. Questa strategia permette di mitigare lo squilibrio tra domanda e offerta e conseguentemente di minimizzare i costi di carenza e sovrastoccaggio di merce.

Distinguiamo tra due tipologie di trasferimenti laterali che differiscono per il momento e lo scopo del trasferimento.

- *trasferimenti proattivi*: si basano sulla previsione della domanda futura e sull'adeguamento dello stock prima che si verifichino effettivi esaurimenti, agendo in modo anticipato per ottimizzare la disponibilità di prodotto.
- *trasferimenti reattivi*: avvengono in risposta agli esaurimenti di scorte, per mitigarne l'impatto. Sono quindi una risposta diretta allo stockout e particolarmente utili se si considera la possibilità di backorder.

Il principale limite di questa strategia è stato, fino a poco tempo fa, la mancanza di informazioni aggiornate in tempo reale e affidabili sullo stock disponibile lungo la catena di approvvigionamento. Tuttavia, i progressi della tecnologia e l'adozione estesa dei sistemi ERP hanno reso possibile l'accesso a queste informazioni in molti casi.

La maggior parte dei modelli studiati in letteratura considera trasferimenti reattivi, sia in contesti di rifornimento periodico che continuo. Krishnan e Rao [6] (1965) furono i primi a pubblicare un articolo sui trasferimenti laterali all'interno dello stesso echelon, derivando una formula per i livelli ottimali di scorte in più punti vendita, assumendo che lo spostamento della merce avvenisse al termine del ciclo d'ordine, dopo la realizzazione della domanda.

Basandosi su questo modello, sono state studiate e analizzate numerose variazioni ed estensioni. Robinson [8] (1990) analizza un problema multi-località e multi-periodo. La soluzione ottima in questo scenario può essere calcolata analiticamente solo in due casi speciali: quando tutti i punti vendita hanno dei parametri di costo uguali o quando si considerano solo due punti vendita. Tuttavia, questi due scenari limitati hanno fornito la base per validare una tecnica di soluzione euristica basata sui metodi Monte Carlo applicabile in molti più contesti.

Abouee-Mehrizi, Berman e Sharma [5] (2015) hanno considerato un sistema di gestione delle scorte multi-periodo che include sia il rifornimento da un magazzino centrale sia i trasferimenti laterali proattivi. Gli autori hanno indagato un scenario in cui due rivenditori possono rifornire il loro stock da un fornitore o effettuare trasferimenti di merce tra di loro, osservando ad ogni periodo una domanda stocastica non negativa e sostenendo i relativi costi di gestione delle scorte. Hanno identificato che le politiche ottimali di rifornimento e trasferimento sono governate da quattro curve di commutazione, differenziandosi dalle tradizionali politiche di *inventory* basate sul raggiungimento di un livello di stock target. Anche in questo caso, la soluzione considera il caso specifico di soli due rivenditori.

La difficoltà di risolvere dei problemi di larga ha portato allo sviluppo di metodi euristici. Ad esempio, Banerjee, Burton e Banerjee [1] (2003) confrontano due regole di trasferimenti, che si innescano quando il livello di stock di uno dei rivenditori scende al di sotto del tasso medio di domanda.

- *TBA Transshipment based on Availability*: è una politica che ridistribuisce le scorte tra le località per prevenire stockout nel periodo successivo e ha un effetto a breve termine.
- *TIE Transshipment based on Inventory Equalization*: è una politica proattiva che bilancia gli stock per ridurre gli stockout a lungo termine. Questa strategia non solo previene gli esaurimenti di scorte futuri ma cerca anche di ottimizzare l'allocazione della merce all'interno della rete.

Queste politiche sono facili da implementare e adattabili a reti con vari rivenditori e periodi.

Un altro esempio di metodo euristico è quello basato sulla cosiddetta politica di trasferimento anticipato. Essa prevede la valutazione del profitto atteso derivante dal trasferimento di un'unità tra due punti vendita all'inizio del periodo, che viene confrontato con il profitto atteso senza spostamento. Il calcolo del profitto per ogni periodo considera il soddisfacimento della domanda aggregata per l'intero orizzonte temporale, supponendo che non ci siano più scambi. Se la differenza tra i due profitti supera i costi di trasporto, la quantità viene aumentata di un'unità. Questo processo continua fino all'identificazione di tutte le opportunità di trasferimento valutate come vantaggiose. I trasferimenti poi si aggregano e si completano.

4.1 Programmazione Dinamica

Esaminiamo una catena di approvvigionamento composta da un magazzino centrale e diversi punti vendita. Analogamente a quanto abbiamo assunto nel capitolo precedente, in ogni punto vendita si registra, a ciascun intervallo temporale t , una domanda di una quantità intera maggiore o pari a zero di un solo prodotto, uguale per tutti i punti vendita. Se la domanda è maggiore rispetto alla quantità presente in negozio in quel momento, escludiamo la possibilità di effettuare backorder.

La rete di distribuzione presa in considerazione è centralizzata: tutti i punti vendita sono gestiti da un'entità centrale il cui obiettivo è massimizzare il profitto complessivo della rete.

Un'innovazione rispetto agli scenari precedenti è la possibilità per ogni negozio di approvvigionarsi dagli altri negozi all'interno della stessa rete, anziché dal magazzino centrale. In questa sezione, ci concentriamo sul problema dei transshipments laterali e consideriamo come noto (ad esempio già calcolato con uno dei metodi descritti del capitolo precedente) il livello di stock target ottimo che deve essere mantenuto da ciascun rivenditore.

Abbiamo perciò un problema dinamico con un orizzonte temporale finito che implica la necessità di prendere decisioni sequenziali nel tempo. La metodologia di risoluzione principale è la programmazione dinamica. Nella prossima sezione, utilizziamo la terminologia della programmazione dinamica per modellare il problema, come è stato elaborato da Joern Meissner e Olga Rusyaeva [7]. L'obiettivo è definire una politica ottimale che specifichi le origini e le destinazioni degli spostamenti laterali, oltre alla quantità di merce spostata, al fine di ottimizzare il profitto dell'intera rete.

Sia T il numero di periodi temporali considerati, L il numero di rivenditori. Indichiamo con t l'indice per il tempo e con i, j gli indici per i vari negozi.

I parametri del modello sono i seguenti

- $S_i \geq 0$ livello di stock target per il rivenditore i
- $S = (S_1, \dots, S_L)$ lo stato iniziale del sistema al tempo $t = 0$
- h_i costo di holding per il punto vendita i
- p_i prezzo di vendita di un'unità nel punto vendita i
- c costo di trasporto per unità per distanza
- $\rho_{ij} > 0$ distanza tra la località i e la località j

Le variabili sono

- x_{it} lo stock disponibile nella località i all'inizio del periodo t

- y_{it} lo stock disponibile nella località i dopo gli spostamenti di merce effettuati all'inizio del periodo t
- z_{ijt} la quantità trasferita dalla località i alla località j all'inizio del periodo t
- $\mathbf{z}_{it} = (z_{i1t}, \dots, z_{iLt})$ il vettore con le quantità trasferite dalla località i al tempo t

Nella notazione utilizzata, quando non compare un indice specifico per la località, si fa riferimento al vettore che incorpora le variabili relative a tutti i negozi.

Sia d_{it} la domanda realizzata nel punto vendita i al tempo t . Assumiamo che essa sia indipendente per ogni rivenditore, non negativa e intera.

Le transizioni da uno stato all'altro del sistema possono essere descritte dai seguenti passaggi:

$$y_{it} = x_{it} + \sum_{j \in \mathcal{L}} (z_{jit} - z_{ijt})$$

$$x_{i,t+1} = (y_{it} - d_{it})^+, \forall i \in \mathcal{L}$$

dove

$$x^+ = \max(x, 0) = \begin{cases} x & \text{se } x > 0, \\ 0 & \text{altrimenti} \end{cases}$$

Il costo derivante dagli spostamenti di merce tra negozi è

$$C_t(\mathbf{x}_t, \mathbf{z}_t) = \sum_{i,j \in \mathcal{L}} c\rho_{ij} z_{ijt}$$

Il guadagno per il periodo di tempo $[t, t+1)$ deriva dalla vendita di ogni articolo in ognuno dei punti vendita a cui sottraiamo il costo di mantenimento in negozio per gli articoli non venduti

$$R_t(\mathbf{y}_t, \mathbf{d}_t) = \sum_{i \in \mathcal{L}} p_i \min(y_{it}, d_{it}) - \sum_{i \in \mathcal{L}} h_i (y_{it} - d_{it})^+$$

Da queste due espressioni, ricaviamo il profitto per il periodo t

$$P_t(\mathbf{x}_t, \mathbf{d}_t, \mathbf{z}_t) = R_t(\mathbf{y}_t, \mathbf{d}_t) - C_t(\mathbf{x}_t, \mathbf{z}_t)$$

Sia Π l'insieme delle politiche e z_t^π la variabile decisionale derivante dall'applicazione della politica π . L'obiettivo del problema è trovare la politica che massimizzi il valore atteso della somma dei profitti in tutti i periodi

$$\max_{\pi \in \Pi} \mathbb{E} \left[\sum_{t=0}^{T-1} P_t(\mathbf{x}_t, \mathbf{d}_t, \mathbf{z}_t^\pi) \right]$$

Stiamo affrontando un problema di ottimizzazione stocastica non lineare che richiede variabili intere. La programmazione dinamica è una tecnica proposta per la risoluzione.

Definiamo la funzione di valore dello stato y dopo aver effettuato la decisione z con l'equazione:

$$V_t^Z(y_t) = \mathbb{E}_{d_t} [R_t(y_t, d_t) + V_{t+1}(x_{t+1})], \quad 0 \leq t \leq T - 1$$

Il problema viene risolto ricorsivamente trovando l'ottimo della seguente equazione, che descrive il valore della soluzione nello stato pre-decisionale x ,

$$V_t(x_t) = \max_{z_t} \left(-C_t(x_t, z_t) + V_t^Z(y_t) \right).$$

Una volta calcolati i valori per tutti gli stati, possiamo trovare quindi la politica decisionale ottima.

Lo scopo di questo capitolo era illustrare un approccio per il raggiungimento della soluzione ottima per il problema descritto. È importante sottolineare, come già anticipato, che tale approccio è applicabile solo in situazioni molto semplificate, che raramente sono riflettono la complessità dei problemi reali, per la risoluzione dei quali diventa necessario l'uso di metodi euristici.

Parte II
Seconda Parte

Capitolo 5

Descrizione del problema

5.1 Modello di Simulazione

Questa sezione è dedicata alla descrizione del modello di simulazione a eventi discreti. Consideriamo il caso in cui un magazzino fornisce un solo prodotto a diversi negozi. La domanda dei clienti nei negozi è indipendente e le vendite non soddisfatte vengono considerate come perse, non c'è possibilità di fare una richiesta e attendere la merce.

Assumiamo che il sistema segua una politica di gestione delle scorte basata su un livello di stock di base S . Quando il livello di scorte è inferiore a S , il negozio richiede l'invio di una quantità di prodotto pari alla differenza tra S e il livello di stock attuale.

La simulazione viene eseguita per diversi periodi, e ogni periodo comporta la generazione della domanda in ciascun negozio, il soddisfacimento o meno della stessa e l'aggiornamento dei livelli di stock.

Prima di procedere con la descrizione delle classi, dei metodi e delle funzioni implementate per simulare il flusso di prodotto e le vendite, è utile presentare la notazione che verrà utilizzata.

- N : numero di negozi nella rete
- T : numero di periodi temporali considerati
- s_{jt} : livello di stock del negozio j al tempo t
- W_t : livello di stock del magazzino al tempo t
- d_{it} : domanda simulata per il negozio i al tempo t
- q_{it} : quantità di prodotto spedita dal magazzino al negozio i al tempo t
- q_{ijt} : quantità di prodotto spedita dal negozio i al negozio j al tempo t

Componenti e Processi Chiave

1. Classe Magazzino (`class Warehouse`):

Rappresenta una struttura di stoccaggio centrale.

Attributi:

- **capacity**: La quantità di merce in magazzino all’inizio della simulazione.
- **stock_on_hand**: La quantità attuale di merce presente in magazzino.

Metodi:

- **ship_products(self, quantity)**: Simula la spedizione di una quantità specificata q di merce dal magazzino. Il livello di stock W_t al termine del periodo di tempo t è pari a $W_t - \sum_{i=0}^{N-1} q_{it}$.
- **reset_state_w(self)**: Reimposta lo stato iniziale del magazzino al termine della simulazione.

2. Classe Negozio (class Store):

Rappresenta un negozio in cui, ad ogni istante di tempo, si verifica una domanda di merce. Il negozio ha la capacità di ricevere merce sia dal magazzino centrale che dagli altri negozi della rete, oltre alla possibilità di spedire merce agli altri negozi.

Attributi:

- **name**: Il nome del negozio.
- **ordered_quantity**: La quantità di merce che è stata ordinata per il negozio.
- **initial_stock_on_hand**: La quantità di merce in negozio all’inizio della simulazione.
- **stock_on_hand**: La quantità attuale di merce presente in negozio.
- **distance_from_warehouse**: La distanza del negozio dal magazzino centrale, *i.e.* il numero di giorni necessari affinché la merce arrivi dal magazzino al negozio.
- **distance_from_store**: La distanza media del negozio dagli altri negozi, *i.e.* il numero medio di giorni necessari affinché la merce arrivi da uno qualsiasi degli altri negozi al negozio preso in considerazione.
- **target_stock_level**: Il livello di stock desiderato che il negozio cerca di mantenere.
- **parameters**: I parametri della distribuzione utilizzata per simulare la domanda di merce nel negozio preso in considerazione.
- **pending_shipments**: Una lista che accumula le consegne in sospeso, rappresentate come tuple contenenti la quantità di prodotto e il tempo di attesa rimanente.

Metodi:

- `receive_demand(self, seed, period)`: Se la domanda è stocastica, simula la domanda del prodotto considerando la distribuzione selezionata e i parametri specifici del negozio. Restituisce la quantità di domanda generata.

In caso di una domanda deterministica, la funzione restituisce la quantità specifica richiesta per l'istante di tempo considerato.

- `receive_shipment(self, quantity, lead_time)`: Inserisce una nuova spedizione nell'elenco delle consegne in attesa, indicando sia la quantità che il tempo previsto per l'arrivo.
- `update_stock(self)`: Aggiorna lo stock del negozio in base alle spedizioni in sospeso e ai rispettivi tempi di consegna. Rimuove le spedizioni ricevute dalla lista delle spedizioni in arrivo.
- `ship_to_store(self, destination_store, quantity)`: Simula la spedizione di una quantità specificata di merce da un negozio a un altro. Aggiorna lo stock del negozio di partenza e chiama il metodo `receive_shipment` del negozio di destinazione.
- `fulfill_demand(self, warehouse, other_stores)`: Simula la gestione della domanda. Se lo stock attuale del negozio è sufficiente, soddisfa la domanda e aggiorna lo stock del negozio sottraendo la quantità richiesta.

Se, dopo aver soddisfatto o meno la domanda, il livello di stock è al di sotto del target stock level, viene attuata una politica di rifornimento con le seguenti condizioni:

- Rifornimento da un negozio: Se esiste un altro negozio che, dopo aver soddisfatto la propria domanda per quel periodo, mantiene un livello di stock superiore al suo livello desiderato. In caso di più negozi in tale situazione, la richiesta viene inoltrata a quello con la differenza di stock più elevata.
- Rifornimento dal magazzino: Se la condizione precedente non è verificata e se la quantità disponibile nel magazzino è sufficiente a coprire la richiesta.
- `reset_state(self)`: Reimposta lo stato del negozio allo stato iniziale, ripristinando lo stock, azzerando la domanda, svuotando la lista delle consegne in arrivo.

3. Funzione Simulazione (function `simulate_multiple_periods`):

- Simula il flusso di vendita e rifornimento di prodotto, gestendo gli scambi tra il magazzino e i negozi, nonché tra i vari negozi, per un numero di periodi di tempo dato in input.
- I parametri di output sono le metriche di valutazione del processo: la domanda totale non soddisfatta, la quantità totale spedita dai negozi, la quantità totale spedita dal magazzino e la quantità media di prodotto presente nei negozi e nel magazzino per ciascun periodo di tempo.

In sintesi, il modello di simulazione consente l'esplorazione di diverse strategie di gestione dell'*inventory* in una catena di approvvigionamento con vari negozi e un magazzino centrale. Grazie alla creazione di scenari simulati e l'analisi dei risultati ottenuti, è possibile valutare l'effetto delle diverse strategie e ottimizzare parametri chiave, come il livello desiderato di stock da mantenere in ogni negozio.

5.2 Modello di Ottimizzazione

Il modello di simulazione calcola dinamicamente il livello di stock dei negozi e del magazzino nel corso del tempo, insieme agli altri parametri restituiti dalla funzione di simulazione. Queste metriche di valutazione del flusso vengono utilizzate per definire la funzione di costo che il processo di ottimizzazione mira a minimizzare. Essa è composta dalle seguenti cinque componenti:

- $L = \sum_{i=0}^{N-1} \sum_{t=0}^{T-1} l_{it}$ la domanda totale non soddisfatta
- $Q_s = \sum_{i=0}^{N-1} \sum_{j=0}^{N-1} \sum_{t=0}^{T-1} q_{ijt}$ la quantità totale spedita dai negozi
- $Q_w = \sum_{i=0}^{N-1} \sum_{t=0}^{T-1} q_{it}$ la quantità totale spedita dal magazzino
- $I_s = \frac{1}{T} \sum_{i=0}^{N-1} \sum_{t=0}^{T-1} s_{it}$ la quantità media di prodotto presente nei negozi
- $I_w = \frac{1}{T} \sum_{t=0}^{T-1} W_t$ la quantità media di prodotto presente nel magazzino

Ciascuna di esse viene moltiplicata per un coefficiente di costo scelto a priori e fornito in input.

- a la penalità per ogni articolo non venduto
- c_s il costo di spedizione di un articolo da un negozio ad un altro
- c_w il costo di spedizione di un articolo dal magazzino a un negozio
- h_s il costo associato a mantenere un articolo in negozio per un periodo di tempo t
- h_w il costo associato a mantenere un articolo in magazzino per un periodo di tempo t

In questo lavoro, assumiamo l'assenza di costi fissi di spedizione ma è possibile incorporare facilmente diversi tipi di costi o parametri.

I target stock level, ossia i livelli di scorte desiderati per ciascun negozio, sono le variabili da ottimizzare attraverso la minimizzazione della funzione di costo, la somma ponderata delle cinque componenti sopra descritte.

$$F = aL + c_s Q_s + c_w Q_w + h_s I_s + h_w I_w$$

Le funzioni implementate per il modulo di ottimizzazione sono le seguenti.

1. Funzione Obiettivo (function objective_function):

La funzione imposta i target stock level per ogni negozio in base ai valori in input, esegue una singola simulazione utilizzando questi parametri e calcola il valore della funzione obiettivo.

Input:

- **initial_guess**: le supposizioni iniziali per i target stock level in ogni negozio.
- **warehouse**: Un'istanza della classe Warehouse.
- **stores**: una lista di istanze della classe Store.
- **coefficients**: i coefficienti di costo della funzione obiettivo: la penalità per la domanda non soddisfatta, i costi di spedizione e costi di mantenimento e gestione della merce in magazzino e nei negozi.
- **seed**: un valore di inizializzazione per la generazione dei numeri casuali nella simulazione.

2. Funzione Ottimizzazione (function optimizationPSO):

Questa funzione calcola i target stock level ottimi attraverso l'algoritmo Particle Swarm Optimization eseguito per un numero fissato di cicli o fino al raggiungimento di un limite di tempo.

Input:

- **num_cycles**: il numero di cicli di esecuzione dell'algoritmo.
- **time_limit**: il limite di tempo in minuti per l'esecuzione.
- **objective_function**: la funzione obiettivo da minimizzare.
- **initial_guess**: Le supposizioni iniziali per i livelli di stock target in ogni negozio da inserire alla prima iterazione di ogni ciclo.
- **warehouse**: Un'istanza della classe Warehouse.
- **stores**: una lista di istanze della classe Store.
- **coefficients**: i coefficienti di costo della funzione obiettivo: la penalità per la domanda non soddisfatta, i costi di spedizione e costi di mantenimento e gestione della merce in magazzino e nei negozi.

Ad ogni ciclo, associato a uno scenario di domanda differente, l'algoritmo calcola i target stock level che minimizzano la funzione obiettivo attraverso un numero pre-stabilito di iterazioni. I valori risultanti vengono memorizzati. Il processo si ripete per il numero di cicli scelto, al termine del quale la funzione calcola i target stock level medi e il valore medio della funzione obiettivo dai risultati raccolti.

Particle Swarm Optimization

L'algoritmo Particle Swarm Optimization (PSO) è una metaeuristica di ottimizzazione ispirata al comportamento sociale degli uccelli. In PSO, una popolazione di particelle rappresenta le soluzioni potenziali in uno spazio delle soluzioni multidimensionale.

Ogni particella i è caratterizzata da una posizione x_i e una velocità v_i in uno spazio D -dimensionale, dove D è il numero di variabili del problema di ottimizzazione. La posizione di ciascuna particella rappresenta una soluzione potenziale, mentre la velocità influenza la direzione e l'ampiezza dello spostamento.

L'algoritmo evolve nel seguente modo:

(a) **Inizializzazione:**

- Le posizioni e le velocità iniziali delle particelle vengono inizializzate casualmente nello spazio delle soluzioni.

(b) **Valutazione della Fitness:**

- La funzione obiettivo viene valutata per ogni particella, misurando la qualità della soluzione da essa rappresentata.

(c) **Aggiornamento delle Posizioni e Velocità:**

- Le posizioni e le velocità delle particelle vengono aggiornate secondo le equazioni di PSO, che incorporano la loro esperienza individuale e quella del gruppo. Questo aggiornamento permette alle particelle di convergere verso regioni di alta qualità nello spazio delle soluzioni.

(d) **Iterazioni:**

- I passaggi (b) e (c) vengono ripetuti per un numero fissato di iterazioni o fino al raggiungimento di un criterio di arresto.

Capitolo 6

Risultati

6.1 Domanda deterministica

Iniziamo esaminando un caso semplice in cui la domanda è nota. Come esempio introduttivo, consideriamo un numero di negozi $N = 3$ e un periodo temporale di $T = 273$ giorni.

Effettuiamo un'analisi su un'estrapolazione di dati storici fittizi di domanda, visualizzati nella figura 6.1. Tali dati non hanno alcuna origine reale ma sono impiegati al solo scopo di evidenziare quanto sia cruciale la scelta corretta dei livelli di stock target usati nell'applicazione di una base stock policy per ridurre i costi.

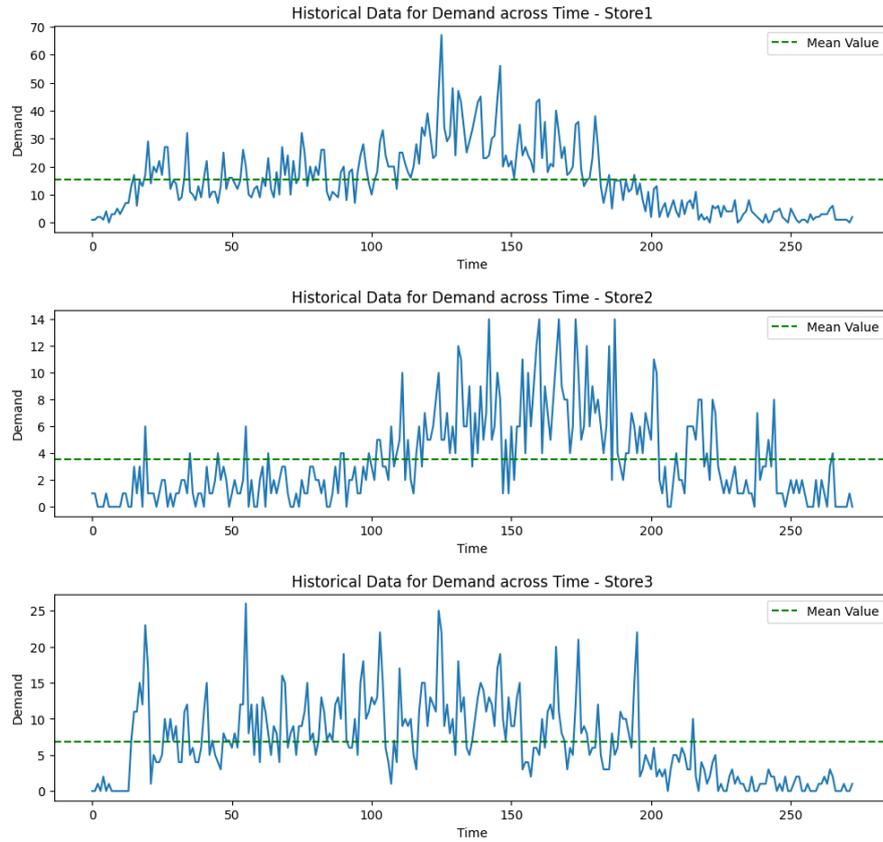


Figura 6.1: Fluttuazioni della domanda giornaliera per tre negozi in un periodo di 273 giorni, con la linea tratteggiata che rappresenta la media

Nelle seguenti tabelle, vengono presentati i coefficienti di costo e i parametri utilizzati per questa prima ottimizzazione.

a	c_s	c_w	h_s	h_w
1000	30	3	3.3	0.5

Tabella 6.1: I coefficienti di costo. I costi di mantenimento e gestione in magazzino h_w e negozio h_s sono da considerarsi mensili. I costi per articolo per periodo di tempo t sono rispettivamente 0.00183 e 0.0121.

Si è scelto, in questo scenario, di considerare una quantità di prodotto ordinato per ogni negozio superiore alla domanda realizzata.

Negozio	Qta Ordinata	Distanza da Magazzino	Distanza da Negozio
Store1	5000	1	2
Store2	1000	4	2
Store3	2000	1	2

Tabella 6.2: I parametri dello scenario

La soluzione al problema è ottenuta mediante l'utilizzo dell'algoritmo PSO, implementato in Python come descritto nella sezione precedente. Le supposizioni iniziali per i target stock level t_i sono $[1,1,1]$.

In seguito al tuning degli iperparametri per l'algoritmo Particle Swarm, ho identificato come parametri adatti alla risoluzione del problema in questione: `max_iter` impostato a 300 e `swarm_size` a 250. Questo processo di calibrazione è stato eseguito per ciascuna distribuzione analizzata. Tutti i risultati mostrati derivano dall'utilizzo di set diversi di iperparametri specificati di volta in volta.

La soluzione trovata in 40.1 secondi è la seguente:

```
Cycle: 1
Stopping search: Swarm best objective change less than 1e-08
Cycle 1: Target Stock Levels: [130.0379788 54. 42.16790358] | Objective Value: 45557.41764720078
```

Figura 6.2: Risultati dell'ottimizzazione dei target stock level tramite Particle Swarm con iperparametri calibrati, ottenuti in 40.1 secondi

La soluzione evidenzia la rilevanza della distanza del negozio dal magazzino. Nonostante lo *Store3* abbia una domanda media doppia rispetto allo *Store2*, il suo livello di stock ottimale rimane inferiore grazie a un tempo di attesa più breve per la consegna dal magazzino.

I significativi costi associati alla gestione e al mantenimento della merce nei negozi, unitamente ai costi derivanti dalle spedizioni laterali, rendono estremamente conveniente arretrare lo stock. Per confermare concretamente questa affermazione, fissati i target stock level ottimali t^* , calcoliamo la funzione di costo al variare della percentuale di stock ordinato allocato al tempo $t = 0$ in ciascun negozio.

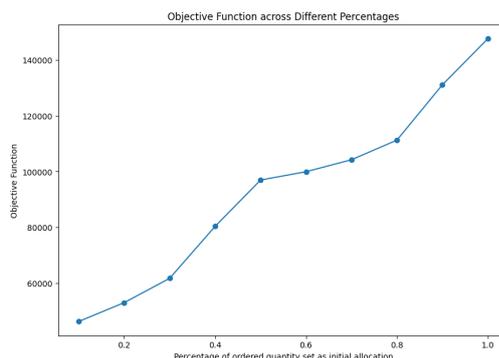


Figura 6.3: Variazione del costo totale della supply chain al variare della percentuale di stock inizialmente allocato in negozio

Nella figura 6.3, notiamo come il costo totale della catena di approvvigionamento, nel caso in cui venga allocata in negozio tutta la merce ordinata all'inizio dell'intervallo di tempo, sia del 228% superiore rispetto a quello sostenuto tenendo l'intera quantità inizialmente in magazzino e distribuendola sulla base di una base stock policy con i target stock level t^* .

6.2 Domanda stocastica

Consideriamo ora il caso in cui la domanda non sia deterministica.

L'approccio più comune consiste nell'estrapolare dei dati storici di vendite e stimare i parametri di una distribuzione ritenuta adatta a rappresentare la domanda. Questo modello è il più semplice, in quanto implica che le domande nei diversi periodi siano rappresentate da deviazioni casuali indipendenti rispetto a una media che si presume essere relativamente stabile nel tempo.

Molti prodotti possono essere rappresentati efficacemente da un modello costante, soprattutto quelli che si trovano in una fase matura del ciclo di vita del prodotto e vengono utilizzati regolarmente.

Un problema pratico di questo approccio consiste nell'ostacolo di misurare con precisione la domanda, poiché si registrano solo le vendite. Se si utilizzano le vendite storiche anziché le richieste per prevedere la domanda, si possono verificare errori significativi in tutte quelle situazioni in cui una porzione della domanda non viene soddisfatta per mancanza di prodotto.

6.2.1 Distribuzione Normale

Assumiamo che i coefficienti di costo siano i medesimi utilizzati nel caso precedente di domanda deterministica. Consideriamo i seguenti dati per la simulazione: la distanza dal magazzino è la medesima per ogni negozio ed è inferiore a quella tra un negozio e l'altro.

Negozio	Qta Ordinata	Distanza da WH	Distanza da Store	μ	σ_1	σ_2	σ_3
Store1	4095	1	2	15	1	3	6
Store2	2730	1	2	10	1	3	6
Store3	1365	1	2	5	1	3	6

Tabella 6.3: I parametri dello scenario

A ogni istante t e per ciascun negozio, simuliamo una domanda da una distribuzione Normale con medie e varianze specificate in tabella. I target stock levels nella tabella seguente sono dati dalla media dei risultati ottenuti attraverso l'ottimizzazione in 50 diversi scenari generati tramite simulazione Monte Carlo, utilizzando un algoritmo di Particle Swarm Optimization con il numero massimo di iterazioni (`max_iter`) impostato a 300 e la dimensione dello sciame (`swarm_size`) a 350.

Il grafico illustra la variazione dei target stock level t_i^* ottimali all'aumentare della varianza.

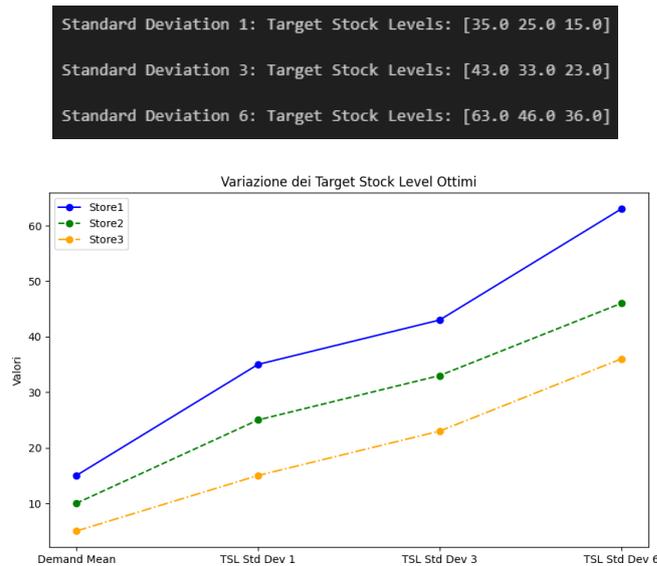
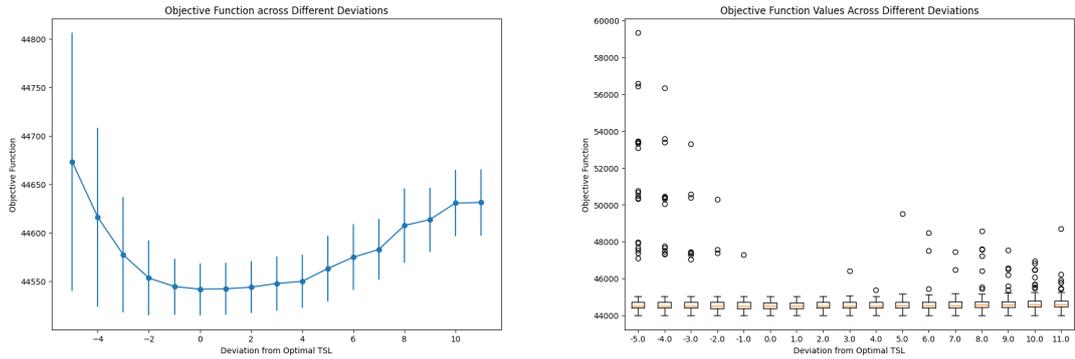


Figura 6.4: I target stock levels ottimi all'aumentare della varianza della domanda

Esaminiamo ora la stabilità dei risultati ottenuti nel caso di una deviazione standard fissa pari a 3. Calcoliamo la media della funzione di costo su 1000 simulazioni al variare della deviazione rispetto ai target stock level ottimi. Nelle seguenti immagini, osserviamo come una deviazione negativa aumenti significativamente la funzione di costo, poiché ciò comporta un incremento della domanda insoddisfatta, molto penalizzata nello scenario considerato.



(a) Andamento della funzione obiettivo media con intervalli di confidenza al 95%, mostrando la variazione rispetto alla deviazione dal livello di stock target risultato dall'ottimizzazione
 (b) Box Plot di Tukey - distribuzione dei valori della funzione obiettivo per differenti deviazioni dal livello di scorta target ottimale, con mediana indicata in arancione e segnalazione degli outlier

Figura 6.5: Analisi della sensibilità della funzione obiettivo

Ora analizziamo come variano i target stock level al variare della distanza dal magazzino. Manteniamo la deviazione standard fissata a 1 e calcoliamo i target stock level t_i^* modificando il tempo di consegna della merce dal magazzino allo *Store2*. I target stock levels mostrati, come per l'esempio precedente, sono dati dalla media dei risultati ottenuti attraverso l'ottimizzazione in 50 diversi scenari generati tramite simulazione Monte Carlo, utilizzando un algoritmo di Particle Swarm Optimization con il numero massimo di iterazioni (`max_iter`) impostato a 300 e la dimensione dello sciame (`swarm_size`) a 350.

Negozi	Qta Ordinata	Distanza da WH	Distanza da Store	μ	σ
Store1	4095	1	2	15	1
Store2	2730	1 2 3 4	2	10	1
Store3	1365	1	2	5	1

Tabella 6.4: I parametri dello scenario

```
Store2: distance from Warehouse 1: Target Stock Levels: [35.0 25.0 15.0] | Mean Cost Function: 43935.304
Store2: distance from Warehouse 2: Target Stock Levels: [35.0 35.0 15.0] | Mean Cost Function: 44306.289
Store2: distance from Warehouse 3: Target Stock Levels: [35.0 45.0 15.0] | Mean Cost Function: 44345.386
Store2: distance from Warehouse 4: Target Stock Levels: [35.0 55.0 15.0] | Mean Cost Function: 44973.176
```

Figura 6.6: I target stock levels ottimi all'aumentare della distanza di un punto vendita dal magazzino centrale

Si noti che, quando la varianza è bassa, il target stock level aumenta esattamente di un valore pari alla media della domanda. La funzione obiettivo media, calcolata su

2000 simulazioni di domanda, cresce all'aumentare della distanza dal magazzino. Questo suggerisce che, pur individuando i livelli di scorta target ideali, la posizione periferica di un punto vendita può portare a un aumento dei costi complessivi, un risultato che trova conferma nella logica pratica di gestione della supply chain.

6.2.2 Distribuzione di Poisson

Inizialmente senza modificare i coefficienti di costo di spedizione e gestione della merce usati precedentemente, assumiamo ora che la domanda provenga da una distribuzione di Poisson. I dati sono i medesimi del caso normale, che riporto per chiarezza anche qui.

Negozio	Qta Ordinata	Distanza da WH	Distanza da Store	λ
Store1	4095	1	2	15
Store2	2730	1	2	10
Store3	1365	1	2	5

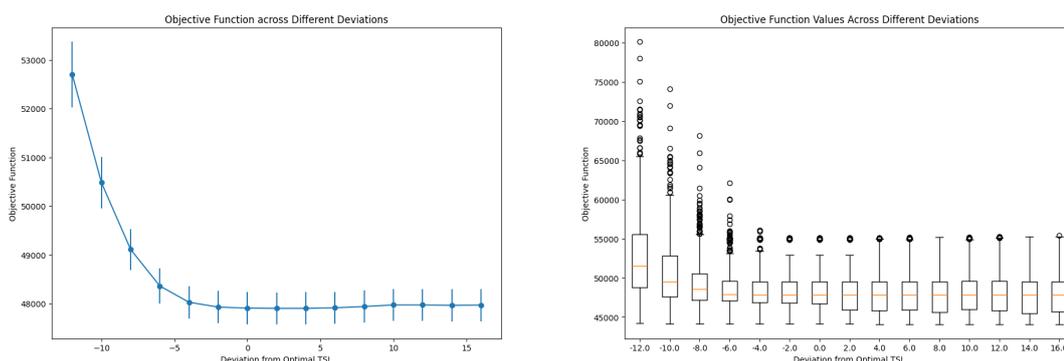
Tabella 6.5: I parametri dello scenario

Il risultato dell'ottimizzazione, ottenuto in 5 minuti e 46 secondi utilizzando un algoritmo di Particle Swarm Optimization con 200 iterazioni massime e una dimensione dello sciame di 300, è stabile attraverso i vari scenari Monte Carlo. Questo è vero sia assumendo una domanda che segue una distribuzione di Poisson sia per distribuzioni Normali con varianza significativamente minore rispetto alla media, a patto di calibrare adeguatamente gli iperparametri per l'algoritmo PSO.

```
Cycle: 1
Stopping search: Swarm best objective change less than 1e-08
Cycle 1: Target Stock Levels: [47.1894815 34. 19.67196429] | Objective Value: 45247.684337360326
```

Figura 6.7: I target stock levels dopo un ciclo di ottimizzazione

Esaminiamo anche in questo caso la stabilità della soluzione, analizzando la variazione della funzione di costo al variare dei livelli di stock target rispetto a quelli appena determinati. I tsl ottimi sono quindi i livelli più bassi di stock tali che la domanda venga sempre soddisfatta.



(a) Andamento della funzione obiettivo media con intervalli di confidenza al 95%, mostrando la variazione rispetto alla deviazione dal livello di stock target risultato dall'ottimizzazione (b) Box Plot di Tukey - distribuzione dei valori della funzione obiettivo per differenti deviazioni dal livello di scorta target ottimale, con mediana indicata in arancione e segnalazione degli outlier

Figura 6.8: Analisi della sensibilità della funzione obiettivo

Analizziamo ora l'impatto delle variazioni della quantità ordinata per ciascun negozio sulla funzione di costo. Le quantità considerate finora sono il risultato del prodotto tra la quantità media richiesta al giorno μ e il numero di giorni T . Con questi parametri, la quantità media invenduta su 2000 simulazioni è di 104 pezzi. La quantità ottimale da ordinare, come illustrato nella figura 6.9, è del 1,5% inferiore rispetto a quella attuale. Al termine del periodo di tempo considerato, in questo modo, non rimane stock invenduto.

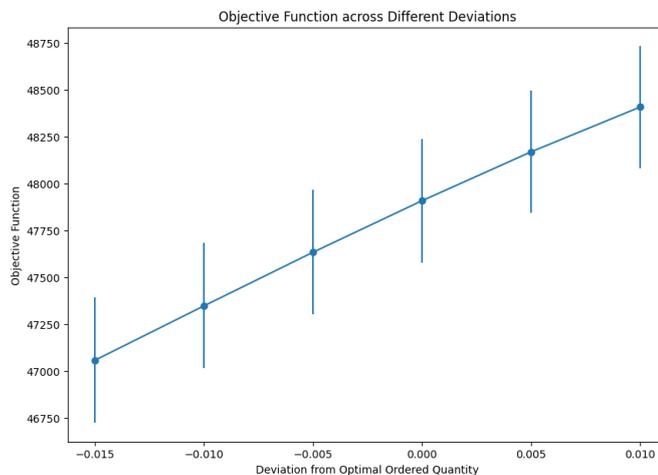


Figura 6.9: La funzione obiettivo media calcolata su 2000 simulazioni di domanda al variare della quantità ordinate.

Finora, tutte le analisi hanno mantenuto invariati i coefficienti di costo. Modifichiamo ora il business setting, considerando uno scenario in cui i costi di spedizione tra i negozi

e la gestione della merce in essi siano ridotti e paragonabili a quelli di magazzino. Nello specifico, calcoliamo e confrontiamo i risultati ottimi nei seguenti scenari.

Costi di spedizione laterale Riduciamo i costi di spedizione tra negozi del 10%, 30%, 50%, 70% e 90%.

a	c_s	c_w	h_s	h_w
1000	30	3	3.3	0.5
1000	27	3	3.3	0.5
1000	21	3	3.3	0.5
1000	15	3	3.3	0.5
1000	9	3	3.3	0.5
1000	3	3	3.3	0.5

Tabella 6.6: I coefficienti di costo. I costi di mantenimento e gestione in magazzino h_w e negozio h_s sono da considerarsi mensili.

In questo scenario, il costo di gestione e mantenimento della merce in magazzino rimane molto inferiore allo stesso per il negozio. Di conseguenza, per ridurre i costi, arretrare lo stock rimane incentivato. I risultati ottenuti confermano tale ipotesi, poiché i livelli ottimali di stock target rimangono pressoché invariati anche quando il costo di spedizione è uguale sia dal magazzino che dal negozio.

```

Store to Store Cost 30: Target Stock Levels: [47 34 19]
Store to Store Cost 27: Target Stock Levels: [47 34 19]
Store to Store Cost 21: Target Stock Levels: [46 34 19]
Store to Store Cost 15: Target Stock Levels: [46 34 19]
Store to Store Cost 9 : Target Stock Levels: [46 34 19]
Store to Store Cost 3 : Target Stock Levels: [47 35 19]

```

Figura 6.10: I target stock levels al variare del costo di trasferimento laterale della merce tra negozi. Essi sono i risultati medi su 50 diversi scenari Montecarlo con gli iperparametri dell’algoritmo PSO pari a $\text{max_iter} = 250$ e $\text{swarm_size} = 250$

6.2.3 Distribuzione Binomiale Negativa

La domanda dei clienti è spesso modellata come una distribuzione binomiale negativa. Questo modello si sviluppa quando il parametro λ di una distribuzione di Poisson è esso stesso una variabile casuale distribuita secondo una distribuzione Gamma:

$$\mu \sim \text{Gamma} \left(r, \frac{p}{1-p} \right)$$

dove r è un parametro di forma e il tasso $\frac{p}{1-p}$ è scelto per la distribuzione binomiale. Il modello Gamma-Poisson è quindi descritto dalla convoluzione:

$$P(k; r, p) = \int_0^\infty f_{\text{Poisson}}(k; \mu) f_{\text{Gamma}}\left(r, \frac{p}{1-p}\right) d\mu$$

Inserendo le definizioni delle distribuzioni di Poisson e Gamma nell'equazione, otteniamo:

$$P(k; r, p) = \int_0^\infty f_{\text{Poisson}}(k; \mu) f_{\text{Gamma}}\left(r, \frac{p}{1-p}\right) d\mu \quad (6.1)$$

$$= \int_0^\infty \left[\frac{\mu^k e^{-\mu}}{k!} \right] \times \left[\frac{1}{\Gamma(r)} \left(\frac{p}{1-p} \right)^r \mu^{r-1} e^{-\mu(1-p)/p} \right] d\mu \quad (6.2)$$

$$= \frac{(1-p)^r p^r}{k! \Gamma(r)} \int_0^\infty \mu^{r+k-1} e^{-\mu/p} d\mu \quad (6.3)$$

Usando l'identità:

$$\int_0^\infty y^b e^{-ay} dy = \frac{\Gamma(b+1)}{a^{b+1}} \quad (6.4)$$

possiamo fare la seguente sostituzione

$$\int_0^\infty \mu^{r-1+k} e^{-\mu/p} d\mu = p^{r+k} \Gamma(r+k) \quad (6.5)$$

Infine noto che $\Gamma(x+1) = x!$, possiamo scrivere:

$$P(k; r, p) = \frac{(1-p)^r p^r}{k! \Gamma(r)} p^k \Gamma(r+k) \quad (6.6)$$

$$= \frac{(1-p)^r p^k}{k!} \frac{\Gamma(r+k)}{\Gamma(r)} \quad (6.7)$$

$$= \frac{(1-p)^r p^k}{k!} \frac{(r+k-1)!}{(r-1)! k!} \quad (6.8)$$

$$= \binom{r+k-1}{k} p^k (1-p)^r \quad (6.9)$$

$$= \text{Binomiale Negativa}(r, p) \quad (6.10)$$

Nel contesto che stiamo considerando, nella maggior parte dei casi, il modello negativo binomiale descrive meglio i dati poiché la distribuzione è sovradispersa, cioè $\sigma^2 > \mu$ rispetto alla distribuzione di Poisson, per la quale $\sigma^2 = \mu$. Il parametro aggiuntivo permette quindi di avere delle code più lunghe.

Nella Figura 6.11 confrontiamo la densità in 1000 simulazioni per le tre distribuzioni di probabilità di domanda che abbiamo esaminato finora.

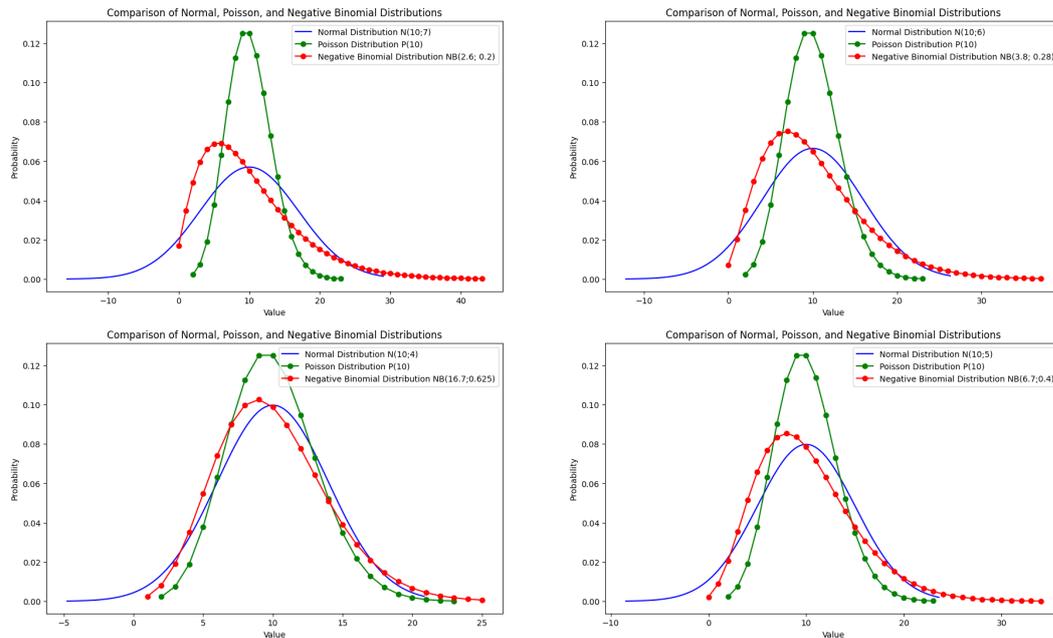


Figura 6.11: Confronto tra le densità delle distribuzioni Normale, di Poisson e Negativa Binomiale in 1000 simulazioni

Il parametro di media è fissato per tutte pari a 10. La distribuzione di Poisson mostra la minore dispersione. Osserviamo poi come la densità delle distribuzioni Normale e Negativa Binomiale varino al cambiare della varianza: procedendo in senso orario dall'angolo in alto a sinistra, la deviazione standard si riduce da $\sigma = 7$ a $\sigma = 4$ un'unità alla volta. È evidente la lunghezza della coda a destra della distribuzione Negativa Binomiale. Quando si dispone di una serie storica dei dati di domanda, scegliere di modellarla con una distribuzione di Poisson potrebbe essere rischioso se i dati mostrano una grande dispersione; in questi casi, risulta più adeguato utilizzare una distribuzione Negativa Binomiale, la quale, accettando solo valori positivi interi, è appropriata per descrivere la domanda di prodotti e al contempo permette di tenere conto di una maggiore variabilità.

Target Stock Levels ottimi a confronto Assumiamo che i coefficienti di costo siano quelli iniziali riportati nella tabella sottostante

a	c_s	c_w	h_s	h_w
1000	30	3	3.3	0.5

Tabella 6.7: I coefficienti di costo. I costi di mantenimento e gestione in magazzino h_w e negozio h_s sono da considerarsi mensili.

Lo scenario è il medesimo considerato nei precedenti esempi che riportiamo qui per chiarezza

Negozi	Qta Ordinata	Distanza da WH	Distanza da Store	λ
Store1	4095	1	2	15
Store2	2730	1	2	10
Store3	1365	1	2	5

Tabella 6.8: I parametri dello scenario

Confrontiamo i target stock levels ottenuti dall'ottimizzazione nei 3 casi:

	Store1	Store2	Store3
Poisson (λ)	15	10	5
Normale (μ)	15	10	5
Normale (σ)	6	6	6
NB (r)	10.71	3.85	0.81
NB (p)	0.42	0.28	0.14

Tabella 6.9: I parametri delle distribuzioni

I parametri della distribuzione Negativa Binomiale sono calcolati come segue in base alla media e alla varianza usate per la distribuzione Normale $p = \frac{\mu}{\sigma^2}$ e $r = \frac{\mu^2}{\sigma^2 - \mu}$. Si noti che questa parametrizzazione è possibile solo quando $\sigma^2 \geq \mu$ poichè p rappresenta una probabilità.

```
Poisson: Target Stock Levels: [47 34 20]
Normale: Target Stock Levels: [63 46 36]
Binomiale Negativa: Target Stock Levels: [63 53 51]
```

Figura 6.12: I target stock levels al variare della distribuzione della domanda

Si osserva che, con l'incremento della varianza della domanda, i livelli di stock target ottimali aumentano a causa dell'elevata penalità associata alla domanda non soddisfatta.

Numero di stores Esploriamo ora come si modificano i livelli ottimali di stock target quando includiamo un numero maggiore di negozi, tutti caratterizzati dagli stessi parametri di distribuzione della domanda ma con differenti tempi di consegna dal magazzino.

Lo scenario è il seguente:

Negozio	Qta Ordinata	Distanza da WH	Distanza da Store	r	p
Store1	4095	1	2	10.71	0.42
Store2	4095	2	2	10.71	0.42
Store3	4095	3	2	10.71	0.42
Store4	4095	4	2	10.71	0.42
Store5	4095	5	2	10.71	0.42
Store6	4095	6	2	10.71	0.42

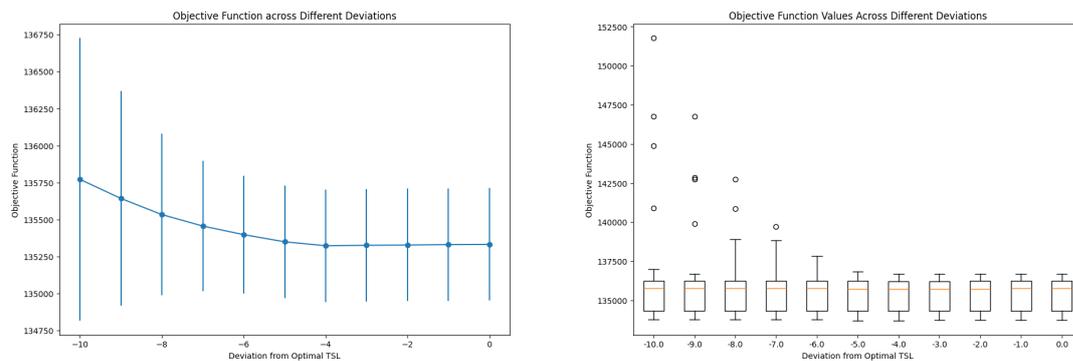
Tabella 6.10: I parametri dello scenario

I risultati presentati derivano dalla media dei livelli di stock ottimali, determinati utilizzando l'algoritmo di ottimizzazione PSO su un insieme di 50 scenari diversi generati tramite simulazione Monte Carlo. Si osserva che, nel caso in cui la domanda sia modellata attraverso una distribuzione binomiale negativa, con una varianza che supera la media, la variabilità dei livelli di scorta ottimali identificati in ogni ciclo di ottimizzazione è notevolmente superiore rispetto a quella riscontrata quando si assume che la domanda segua una distribuzione di Poisson.

Binomiale Negativa: Target Stock Levels: [57 76 92 108 122 138]

Figura 6.13: I target stock levels di 6 stores a diverse distanze dal magazzino. Sono i risultati medi calcolati su 50 diversi scenari Montecarlo con gli iperparametri dell'algoritmo PSO pari a `max_iter = 200` e `swarm_size = 250`

Nelle immagini sottostanti, osserviamo le variazioni della funzione obiettivo quando i livelli di scorta si posizionano al di sotto di quelli determinati attraverso l'ottimizzazione. La funzione obiettivo media è calcolata su 1000 simulazioni di domanda.



(a) Andamento della funzione obiettivo media con intervalli di confidenza al 95%, mostrando la variazione rispetto alla deviazione dal livello di stock target risultato dall'ottimizzazione
 (b) Box Plot di Tukey - distribuzione dei valori della funzione obiettivo per differenti deviazioni dal livello di scorta target ottimale, con mediana indicata in arancione e segnalazione degli outlier

Figura 6.14: La funzione obiettivo al variare della deviazione dai TSL ottimi

Ora esploriamo l'importanza di un'accurata ottimizzazione dei livelli di scorta presso i negozi. Per fare ciò, sperimentiamo con specifici livelli di scorta target e analizziamo la funzione obiettivo media, basandoci sullo stesso set di 1000 simulazioni di domanda. Impostiamo, per esempio, i livelli di scorta target pari alla domanda media moltiplicata per il doppio del lead time di consegna dal magazzino.

```
Binomiale Negativa: Target Stock Levels: [57 76 92 108 122 138]
Binomiale Negativa: Target Stock Levels: [30 60 90 120 150 180]
```

Figura 6.15: I due set di target stock levels testati a confronto

La funzione di costo media ha un incremento del +472% rispetto al valore ottenuto utilizzando i livelli di scorta derivanti dall'ottimizzazione.

```
Mean final objective: 773053.052
Std final objective: 96940.853
Confidence Interval: [767044.706, 779061.397]
Mean Unfulfilled Demand: 636
Mean Qty Shipped from Store: 0
Mean Qty Shipped from Warehouse: 23667
Mean Qty in Stores: 322
Mean Qty in Warehouse: 12048
Mean Qty unsold: 153
```

Figura 6.16: I risultati ottenuti in 1000 simulazioni di domanda proveniente da una distribuzione Binomiale Negativa. Oltre alla funzione di costo media e la deviazione standard, vengono mostrate tutte le metriche chiave che costituiscono la funzione obiettivo

Analizziamo il risultato ottenuto utilizzando i medesimi livelli di stock target dell'esempio precedente, ma simulando la domanda attraverso una distribuzione di Poisson con la stessa media $\mu = 15$ e mantenendo invariati tutti gli altri parametri. L'aumento della funzione di costo rimane elevato (+259%) ma ridotto rispetto alla precedente distribuzione. La ridotta variabilità della domanda consente di diminuire la domanda non soddisfatta del 44.9%.

```
Mean final objective: 486254.778
Std final objective: 43116.393
Confidence Interval: [483582.445, 488927.110]
Mean Unfulfilled Demand: 350
Mean Qty Shipped from Store: 0
Mean Qty Shipped from Warehouse: 23900
Mean Qty in Stores: 320
Mean Qty in Warehouse: 11829
Mean Qty unsold: 125
```

Figura 6.17: I risultati ottenuti in 1000 simulazioni di domanda proveniente da una distribuzione di Poisson. Oltre alla funzione di costo media e la deviazione standard, vengono mostrate tutte le metriche chiave che costituiscono la funzione obiettivo

Capitolo 7

Conclusione

In tutti gli ambienti in cui il business è caratterizzato da un'elevata volatilità e incertezza nella domanda, l'importanza della gestione della catena di approvvigionamento e dell'integrazione delle reti aziendali ha registrato una notevole crescita negli ultimi anni. Essenziale in tali ambienti è l'adozione di strategie di previsione della domanda accurate, che rivestono un ruolo critico per il successo complessivo della catena di fornitura. Dal lavoro svolto emerge che un'analisi approfondita della domanda per ottenere previsioni precise è un prerequisito indispensabile per l'ottimizzazione del flusso di merci all'interno della rete distributiva.

Tale ottimizzazione si rivela una strategia efficace sia per ridurre i costi associati allo stoccaggio, alla gestione e al trasporto dei prodotti, prevenendo gli stockout e, di conseguenza, migliorando la soddisfazione e il livello di servizio al cliente, sia per contribuire alla sostenibilità ambientale attraverso la riduzione di spostamenti non necessari.

Il lavoro di tesi svolto dimostra innanzitutto che la selezione di una distribuzione di probabilità adeguata per la domanda può influenzare significativamente i risultati, causando potenzialmente perdite di vendite o accumulo eccessivo di scorte. Si osserva che, a parità di media, un aumento della varianza nella distribuzione della domanda conduce alla necessità di stabilire livelli di stock target più elevati.

Oltre all'analisi della domanda, la valutazione del costo delle vendite perse, variabile in funzione del tipo di prodotto, del settore e dell'azienda, è un altro elemento fondamentale. Questo parametro spesso non corrisponde al solo valore economico del prodotto ma è influenzato anche da altri fattori difficilmente quantificabili numericamente, come la perdita di reputazione aziendale e l'insoddisfazione del cliente. Emerge infatti che una corretta valutazione di tale parametro modifica significativamente i risultati.

Il lavoro di tesi si concentra sull'analisi di un singolo prodotto con un'alta penalità associata all'insoddisfazione della domanda. Nonostante ciò, in realtà, quando i costi di mantenimento in negozio sono significativamente superiori rispetto a quelli di stoccaggio in magazzino, si evidenzia una forte inclinazione a conservare la maggior parte delle scorte in magazzino. Tuttavia, l'efficacia di questa strategia, che mira a minimizzare i costi di holding e di trasferimento tra i negozi, dipende strettamente dalla precisione nella stima dei livelli di scorta target. Una stima imprecisa dei TSL può portare a insoddisfazione della domanda, annullando i potenziali benefici.

Futuri sviluppi di questo studio potrebbero includere l'analisi di livelli di stock target variabili nel tempo in funzione delle fluttuazioni della domanda, l'esame di più prodotti simultaneamente e l'estensione del modello a sistemi logistici multi-echelon anziché a singolo echelon.

Bibliografia

- [1] Hossein Abouee-Mehrizi, Oded Berman, and Shrutivandana Sharma. Optimal joint replenishment and transshipment policies in a multi-period inventory system with lost sales. *Operations Research*, 63(2):342–350, 2015. ISSN 0030364X, 15265463. URL <http://www.jstor.org/stable/24540374>.
- [2] Anshul Agarwal. Multi-echelon supply chain inventory planning using simulation-optimization with data resampling, 2019.
- [3] A. Alfieri and P. Brandimarte. Object-oriented modeling and simulation of integrated production/ distribution systems. *Computer Integrated Manufacturing Systems*, 10(4):261–266, 1997. ISSN 0951-5240. doi: [https://doi.org/10.1016/S0951-5240\(97\)00018-9](https://doi.org/10.1016/S0951-5240(97)00018-9). URL <https://www.sciencedirect.com/science/article/pii/S0951524097000189>.
- [4] S. Axsäter. *Inventory Control*. International Series in Operations Research & Management Science. Springer International Publishing, 2015. ISBN 9783319157290. URL <https://books.google.it/books?id=v9YjCgAAQBAJ>.
- [5] Avijit Banerjee, Jonathan Burton, and Snehamay Banerjee. A simulation study of lateral shipments in single supplier, multiple buyers supply chain networks. *International Journal of Production Economics*, 81-82:103–114, 2003. ISSN 0925-5273. doi: [https://doi.org/10.1016/S0925-5273\(02\)00366-3](https://doi.org/10.1016/S0925-5273(02)00366-3). URL <https://www.sciencedirect.com/science/article/pii/S0925527302003663>. Proceedings of the Eleventh International Symposium on Inventories.
- [6] KS Krishnan and VRK Rao. Inventory control in n warehouses, 1965.
- [7] Joern Meissner and Olga Rusyaeva. Approximate Dynamic Programming for lateral transshipment problems in multi-location inventory systems. Working Papers MRG/0025, Department of Logistics, Kuehne Logistics University, February 2015. URL <https://ideas.repec.org/p/klu/logiwp/mrg-0025.html>.
- [8] Lawrence W. Robinson. Optimal and approximate policies in multiperiod, multilocation inventory models with transshipments. *Oper. Res.*, 38:278–295, 1990. URL <https://api.semanticscholar.org/CorpusID:34895456>.

- [9] Kerzel Ulrich. Demand models for supermarket demand forecasting. *International Journal of Supply and Operations Management*, 10(1):89–104, 2023. ISSN 23831359. doi: 10.22034/ij som.2022.109044.2145. URL http://www.ij som.com/article_2895.html.