

Laurea Magistrale in Ingegneria Civile Dipartimento di Ingegneria Strutturale, Edile e Geotecnica

Studio del comportamento di edifici esistenti vicini soggetti a forzante sismica

Caso studio di eccitazione sismica stazionaria

Relatore:

Prof. Giuseppe Andrea Ferro

Correlatori:

Prof. Giuseppe Carlo Marano

Prof.ssa Luciana Restuccia

Candidata:

Francesca Scrofani

Matr. 262386

Ai miei genitori,
il più grande esempio di forza
con cui combattere ogni battaglia
e superare ogni ostacolo.
E a mio fratello,
il più bel regalo che potessero farmi.

ABSTRACT

Per ovviare alla scarsa quantità di informazioni presenti in letteratura e all'assenza di robuste linee guida circa lo studio di edifici esistenti vicini soggetti a terremoto, la ricerca di un opportuno sistema di collegamento tra tali edifici sembra una necessaria strada da percorrere. Se progettati correttamente, tali sistemi di collegamento avranno il compito di assorbire e dissipare gran parte dell'energia proveniente dal sisma, evitando, perciò, il verificarsi di fenomeni distruttivi, quali il martellamento. Il principale vantaggio di questo sistema di collegamento consiste nella possibilità di dissipare energia senza richiedere alcun contatto con il terreno; il collegamento avviene solo tra gli edifici oggetto di studio.

Le incertezze sul comportamento del sistema dinamico e, non di meno, sulle eccitazioni sismiche hanno portato lo studio di questo problema verso l'ambito stocastico e probabilistico, riuscendo a considerare, in questo modo, la natura casuale di queste ultime.

In questo lavoro è stato studiato il comportamento di due edifici vicini soggetti a terremoto attraverso l'analisi di un sistema a due gradi di libertà (MDOF), filtrato e soggetto ad una forzante esterna, la cui risposta è stata valutata nel campo della dinamica stocastica, in modo da riuscire a considerare al meglio sia le incertezze sui parametri del sistema che sul modello adottato per descrivere l'azione dinamica. Come eccitazione in input al sistema strutturale viene assunto un processo stocastico di rumore bianco stazionario filtrato con distribuzione gaussiana a media nulla, per cui l'eccitazione alla base viene modellata attraverso i filtri di Tajimi-Kanai e Clough-Penzien. In questo studio l'eccitazione dinamica è stata considerata come stazionaria: si prevede l'analisi nel caso di eccitazione dinamica non stazionaria.

La soluzione sta nella ricerca della coppia ottimale di rigidezza e smorzamento del sistema di collegamento da progettare, avendo note le caratteristiche di rigidezza e smorzamento dei due edifici in esame e del terreno dove sorgono.

ABSTRACT

To overcome the absence of robust guidelines in literature concerning the problem of adjacent existing buildings under earthquake, the study of an appropriate connection system between these buildings seems necessary. These connection systems will absorbe and dissipate some of energy from the earthquake, avoiding destructive phenomena, such as pounding. The main advantage of this type of connection system is that it can dissipate energy without any contact with the ground; in fact, the connection takes place only between the buildings under study.

The uncertainties about the behavior of the dynamic system and seismic excitations have led the study of this problem to the stochastic and probabilistic field. In this way, it is simpler to consider the randomic nature of seismic excitations.

In this thesis, the behavior of two adjacent existing buildings under earthquake was studied through the analysis of the two-degree-of-freedom (MDOF) filtered system forced by an external seismic force. The response of this system has been evaluated in a stochastic dynamics field, in order to consider, in the best way, both the uncertainties about the parametres of system and the model adopted to describe the dynamic action. As an input excitation to the structural system, a stochastic process of white noise stationary gaussian filtered was considered. In this way, the excitation at the base of the structure is modeled through the Tajimi-Kanai and Clough-Penzien filters. In this study, the dynamic excitation was considered as stationary: the study of the non-stationary dynamic excitation case is expected.

The solution is to be found in the research of the optimal stiffness and damping of the connection system, when the characteristics of the two adjacent existing buildings under earthquake and of the ground where they stand are knwon.

Indice

1	Introdu	ızione	17
2	Le vibr	azioni	21
	2.1 Vil	brazioni deterministiche	22
	2.2 An	alisi dinamica nel dominio della frequenza: trasformata di Fourier	32
3	Teoria 37	della probabilità e variabili aleatorie – Richiami di dinamica stocasti	ica
	3.1 Cla	assificazione dei processi casuali	38
	3.2 Pro	oprietà statistiche	40
	3.2.1	Distribuzione di probabilità monodimensionale	40
	3.2.2	Parametri stocastici: distribuzione monodimensionale	42
	3.2.3	Distribuzione di probabilità di ordini superiori	46
	3.2.4	Parametri stocastici: distribuzione di ordine superiore	48
	3.2.5	Distribuzioni indipendenti e condizionate	49
	3.2.6	Distribuzione Gaussiana	51
	3.2.7	Distribuzione esponenziale	53
	3.2.8	Distribuzione di Poisson	54
	3.3 De	scrizione probabilistica dei processi aleatori o stocastici	55
	3.3.1	Parametri stocastici per variabili non dipendenti dal tempo	56
	3.3.2	Parametri stocastici per il caso di processi aleatori stazionari	57
	3.3.3	Processi aleatori stazionari gaussiani	58
	3.3.4	Interpretazione energetica della densità spettrale di potenza	60
	3.3.5	Dominio delle frequenze – caso generale	65
	3.3.6	Momenti spettrali	67
	3.3.7	Descrizione di particolari processi	69
4	Analisi	aleatoria di sistemi forzati da processi aleatori	77
	4.1 Te	oria dei filtri	77
	4.2 Af	fidabilità strutturale	80
	4.2.1	Caso particolare: processi di risposta gaussiani a media nulla	81
	4.3 Mo	odellazione aleatoria della forzante sismica	84
	4.4 Mo	odellazione nel dominio della frequenza dell'accelerazione sismica con	me
	_	aleatorio stazionario bianco filtrato	
		odellazione matematica nel dominio del tempo	
5	Fenom	eno del pounding tra le strutture	95
6	Formu	lazione del problema e risultati ottenuti	99

	6.1	Formulazione nello spazio di stato	103
	6.2	Determinazione della distanza soglia	107
	6.3	Densità spettrale di potenza nel dominio della frequenza	111
7	Co	nclusioni e sviluppi futuri	115
A	PPEN	NDICE	119
В	Bibliog	rafia	121

INDICE DELLE FIGURE

Figura 2.1: Oscillatore smorzato e forzato ad un grado di libertà (SDOF) - elaborazione
dell'autrice
Figura 2.2: Oscillazioni libere dell'oscillatore elementare smorzato - [3] – rielaborazione dell'autrice
Figura 2.3: Fase transitoria e di regime della risposta di un oscillatore elementare
soggetto ad una forzante sinusoidale - [3] – rielaborazione dell'autrice
Figura 2.4: Fattore di amplificazione D a) e angolo di sfasamento φ_p b) in funzione di
$\beta = \omega_f/\omega_0$ e ξ_0 , per oscillatori elementari soggetti a forzante sinusoidale - [3] –
rielaborazione dell'autrice
Figura 2.5: Funzione gradino unitario a) e relativa funzione delta di Dirac b) - [3] -
rielaborazione dell'autrice
Figura 2.6: Rappresentazione di un sistema ad un grado di libertà eccitato da una
forzante qualunque - elaborazione dell'autrice
Figura 2.7: Analisi dell'integrale di Duhamel di un segnale impulsivo - [4] 32
Figura 2.8: Funzione impulso unitario nel dominio del tempo a) e nel dominio delle
frequenze b) - [3] – rielaborazione dell'autrice
Figura 3.1: Campioni di processi aleatori stazionari - [3]
Figura 3.2: Principali proprietà della Funzione Densità di Probabilità di una variabile
aleatoria continua - [3] – rielaborazione dell'autrice
Figura 3.3: Funzione Densità di Probabilità di variabili aleatorie continue a) al variare
del valor medio e b) al variare della deviazione standard - [3] - rielaborazione
dell'autrice
Figura 3.4: Probabilità congiunta tra le variabili aleatorie continue x_1 e x_2 - [3] –
rielaborazione dell'autrice
Figura 3.5: Funzione densità di probabilità $p_x(x)$ e funzione distribuzione di
probabilità $F_x(x)$ di una variabile aleatoria gaussiana - [3] – rielaborazione dell'autrice
Figura 3.6: Campioni estratti dal processo aleatorio $X(t)$: $X_1 = X(t_1) \dots X_n = X(t_n) - [4]$
55
Figura 3.7: a) Storia temporale e b) spettro di potenza della funzione periodica x(t) - [3] – rielaborazione dell'autrice
Figura 3.8: a) Storia temporale e b) spettro di Fourier di una funzione non periodica
x(t) - [3] – rielaborazione dell'autrice
Figura 3.9: Interpretazione geometrica dei parametri spettrali - [3] – rielaborazione
dell'autrice
Figura 3.10: Processo aleatorio sinusoidale: a) campione del processo b) funzione di
autocorrelazione c) densità spettrale di potenza - [3] – rielaborazione dell'autrice 69
Figura 3.11: Processo aleatorio stazionario a banda stretta: a) campione del processo
b) funzione di autocorrelazione c) densità spettrale di potenza - [3] – rielaborazione
dell'autrice
Figura 3.12: Processo aleatorio stazionario a banda larga: a) campione del processo b)
funzione di autocorrelazione c) densità spettrale di potenza - [3] – rielaborazione
dell'autrice

Figura 3.13: Processo aleatorio bianco: a) campione del processo b) funzione di
autocorrelazione c) densità spettrale di potenza - [3] – rielaborazione dell'autrice 74
Figura 4.1: Schema dell'operazione di filtraggio: a) segnale forzante in ingresso b) filtro
c) segnale in uscita - [3] – rielaborazione dell'autrice
Figura 4.2: Rappresentazione grafica delle funzioni di trasferimento nel caso di a) filtro
a banda stretta e b) filtro a banda larga - [3] – rielaborazione dell'autrice
Figura 4.3: Rappresentazione di un processo forzante filtrato monovariato - [3] –
rielaborazione dell'autrice
Figura 4.4: Funzioni densità di probabilità delle variabili aleatorie resistenza R e
sollecitazione S - [3] – rielaborazione dell'autrice
Figura 4.5: Attraversamenti con pendenza positiva (x) e negativa (o) di una barriera
unilaterale b da parte di un campione del processo aleatorio X(t) - [3] – rielaborazione
dell'autrice
Figura 4.6: Onde sismiche: a) longitudinali; b) trasversali; c) e d) superficiali - [3] 85
Figura 4.0. Onde sistificite. a) foligitudinari, b) trasversari, c) e d) superficiari - [5] 85 Figura 4.7: Accelerogrammi registrati in siti diversi con indicazione dei picchi massimi
assoluti - [3]86
Figura 4.8: Accelerogrammi, con indicazione dei picchi massimi assoluti, e spettri di
Fourier a) componente N-S del terremoto di El Centro 1940; b) componente S-E del
terremoto di Taft 1952 - [3]
Figura 4.9: Risposte in termini di spostamento al variare delle caratteristiche
dinamiche di un oscillatore elementare ($\xi_0 = 0.05$) soggetto ai seguenti accelerogrammi:
a) componente N-S del terremoto di El Centro 1940; b) componente S-E del terremoto
di Taft 1952 - [3]
Figura 4.10: Spettri di risposta in termini di spostamento (cm), velocità (cm/s) e
accelerazione totale (cm/s ²), con indicazione dei valori asintotici per $\xi_0 = 0.05$, per le
componenti di accelerogramma: a) N-S del terremoto di El Centro 1940 b) S-E delle
terremoto di Taft 1952 - [3]90
Figura 4.11: Confronto tra spettri di velocità e pseudo-velocità e tra spettri di
accelerazione e pseudo-accelerazione ($\xi_0 = 0.05$) per i seguenti accelerogrammi: a)
componente N-S del terremoto di El Centro 1940, b) componente S-E del terremoto di
Taft 1952 - [3]90
Figura 4.12: Rappresentazione grafica del filtro di Tajimi-Kanai - [3] – rielaborazione
dell'autrice
Figura 4.13: Rappresentazione schematica del filtro di Clough-Penzien - [3] -
rielaborazione dell'autrice93
Figura 5.1: Giunto strutturale tra due nuove costruzioni vicine – figura reperita da [5]
96
Figura 5.2: Giunto strutturale tra una nuova costruzione vicina ad una esistente -
figura reperita da [5]97
Figura 6.1: Rappresentazione schematica del sistema a due gradi di libertà studiato -
elaborazione dell'autrice
Figura 6.2: Rappresentazione schematica del modello logico utilizzato - [6] -
rielaborazione dell'autrice
Figura 6.3: Andamento dello spostamento relativo (espresso in metri) dei due edifici
al variare della rigidezza ω_c e dello smorzamento ξ_c del sistema di collegamento –
elaborazione dell'autrice

Figura 6.4: Andamento del valore soglia b (espresso in metri) al variare della rigidezza
ω_c e dello smorzamento ξ_c del sistema di collegamento – elaborazione dell'autrice 108
Figura 6.5: Rappresentazione tramite curve di livello dell'andamento del valore soglia
b al variare della rigidezza ω_c e dello smorzamento ξ_c del sistema di collegamento-
elaborazione dell'autrice109
Figura 6.6: Esempio di utilizzo delle curve di livello del valore soglia b per la ricerca
delle caratteristiche che il sistema di collegamento dovrà avere - elaborazione
dell'autrice
Figura 6.7: Densità spettrale di potenza di Tajimi-Kanai – elaborazione dell'autrice
Figura 6.8: Densità spettrale di potenza di Clough-Penzien – elaborazione dell'autrice

ELENCO DELLE TABELLE

Tabella 6.1: Parametri dello spettro	di potenza d	i Clough-Penzien	associati a	eventi
sismici realmente accaduti (Yeh e V	Ven. 1990) - [3	1		111

1 Introduzione

L'Italia è un Paese ad elevato rischio sismico, di cui soltanto pochissime aree fanno parte della zona sismica 4, mentre la maggior parte di esse sono caratterizzate da un livello di rischio maggiore. A seconda della zona di cui una certa area fa parte, si dovrà procedere con interventi mirati, quali: adozione di misure di prevenzione (per esempio rafforzando gli edifici e le infrastrutture esistenti), valutazione del rischio di costruzioni critiche, monitoraggio sismico e modellazione del terremoto. Queste ultime saranno utili, rispettivamente, per permettere l'evacuazione delle persone nelle aree a rischio e come aiuto per gli ingegneri per una corretta progettazione di costruzioni più resistenti all'azione del terremoto. [1]

Si stima che circa la metà delle costruzioni esistenti in Italia non siano in grado di resistere ai terremoti che potrebbero colpirle. Come detto pocanzi, la prima strada da poter seguire per proteggere le strutture da un sisma è quella di renderle più robuste, in modo da riuscire a resistere al massimo terremoto atteso nella zona in cui si trova la struttura oggetto di studio, tramite rinforzo locale o globale; l'altra strada è sicuramente l'applicazione di dispositivi di isolamento sismico. Tali dispositivi hanno il compito di assorbire e disperdere l'energia proveniente dal sisma, senza che questa danneggi la struttura. Di solito i dispositivi di isolamento sismico vengono utilizzati in edifici di nuova costruzione, donando quindi un elevatissimo grado di sicurezza.

Per quanto riguarda gli edifici esistenti, l'inserimento di un sistema di isolamento sismico non è sempre possibile sia per motivi tecnici (vicinanza di altri edifici e/o impossibilità di intervenire in sicurezza alla base della costruzione), che per motivi economici (l'impatto economico sarà sicuramente maggiore per edifici esistenti piuttosto che per quelli di nuova costruzione). [2]

La Normativa italiana (Norme Tecniche per le Costruzioni – NTC 2018) riporta metodi e linee guida riguardo nuove costruzioni contigue e nuove costruzioni vicine a quelle già esistenti, ma non fornisce linee guida precise circa strutture esistenti vicine: vengono descritte le varie tipologie di analisi sismiche,

ma non vi è un vero e proprio procedimento di verifica. Per il caso di strutture esistenti, la letteratura riporta l'obbligo di considerare la singola struttura oggetto di studio, trascurando il contributo dato dalle strutture adiacenti, spesso anch'esse esistenti. Tale mancanza, perciò, porterà sicuramente il progettista a percorrere la strada più semplice: analizzare sismicamente il solo edificio di interesse, non considerando il contributo fornito dall'analisi del comportamento dell'intero aggregato edilizio.

Tale scelta di analisi e verifica sarà probabilmente la più veloce, ma non la più corretta. Il comportamento degli edifici adiacenti potrebbe condizionare il comportamento dell'edificio di interesse soggetto a sisma, causando, nel caso estremo, anche danni da martellamento. Quando tale aspetto non viene preso in considerazione, l'analisi non produrrà una risposta corretta.

Il presente lavoro di tesi si concentra sul comportamento di edifici esistenti vicini eccitati da input sismico. L'obiettivo finale sarà, perciò, esaminare tale comportamento e ricercare la coppia ottimale di rigidezza e smorzamento di un sistema di collegamento da porre tra gli edifici in modo da minimizzare lo spostamento relativo rendendolo almeno minore rispetto alla distanza presente tra le strutture esistenti ed evitando, quindi, il verificarsi del fenomeno del martellamento.

Si è deciso di procedere con lo studio in ambito stocastico, in maniera tale da poter analizzare la natura stocastica dell'eccitazione e dei parametri di progettazione e in modo da riuscire a considerare al meglio sia le incertezze sui parametri del sistema che sul modello adottato per descrivere l'azione dinamica. Il problema verrà, quindi, analizzato come una grandezza che varia nel tempo in modo casuale e con determinate caratteristiche.

Nella teoria delle vibrazioni casuali, le azioni e le risposte dinamiche verranno analizzate e descritte come indicatori stocastici (matrice di correlazione, densità spettrale di potenza, ecc...).

L'approccio tipico per descrivere e caratterizzare le azioni dinamiche nel campo delle vibrazioni casuali consiste nel considerare come eccitazione in ingresso un processo stocastico gaussiano di rumore bianco, per il quale esistono soluzioni semplici, filtrato con un sistema intermedio di filtri, in modo da descrivere al meglio l'azione finale.

Le soluzioni più utilizzate, per quanto riguarda tale sistema intermedio di filtri, sono i filtri di Tajimi-Kanai e di Clough-Penzien.

Nel secondo paragrafo verranno fornite alcune informazioni sulle varie tipologie di vibrazioni; nel terzo paragrafo verranno descritte le nozioni base della dinamica stocastica, della probabilità e della teoria dei processi casuali; il quarto paragrafo si concentrerà sull'analisi aleatoria dei sistemi forzati da processi aleatori: verranno, quindi, discusse la teoria dei filtri e la modellazione aleatoria nel dominio della frequenza e nel dominio del tempo; nel quinto paragrafo verrà affrontato il fenomeno del martellamento tra le strutture; il sesto paragrafo si concentrerà sulla formulazione del problema oggetto di studio e sul

1. Introduzione

modello utilizzato, per cui verranno forniti i risultati ottenuti dalle analisi; il settimo paragrafo tratterà, infine, le conclusioni e gli eventuali sviluppi futuri.

2 Le vibrazioni

Le vibrazioni non sono altro che uno stato di eccitazione indotto su un sistema da forze dinamiche esterne, le quali possono, in casi estremi, creare danni alle strutture. Esse possono essere suddivise come segue:

- <u>Vibrazioni libere</u>: rimossa immediatamente dopo l'inizio del moto l'eccitazione iniziale, il sistema è lasciato libero di muoversi. Se il sistema è ad un solo grado di libertà (SDOF Single Degree Of Freedom), esso si muoverà con una singola frequenza, detta frequenza naturale; se, invece, il sistema possiede più gradi di libertà (MDOF Multi Degree Of Freedom), il suo moto sarà caratterizzato da una combinazione lineare dei principali modi di vibrare del sistema;
- <u>Vibrazioni forzate</u>: l'eccitazione resta applicata al sistema per tutta la durata del moto e ne influenza la risposta. Bisognerà prestare molta attenzione quando la frequenza naturale coincide con la frequenza di eccitazione, poiché porterebbe al fenomeno della risonanza (amplificazione delle vibrazioni);
- <u>Vibrazioni non smorzate</u>: quando le dissipazioni sono trascurabili nelle analisi;
- <u>Vibrazioni smorzate</u>: quando le dissipazioni non sono trascurabili nelle analisi;
- <u>Vibrazioni lineari</u>: quando l'equazione del moto è risolvibile in campo lineare ed è applicabile il principio di sovrapposizione;
- <u>Vibrazioni non lineari</u>: quando l'equazione del moto non è risolvibile in campo lineare e, per ovviare a questo problema, si utilizza la linearizzazione;
- <u>Vibrazioni deterministiche</u>: quando vengono definite nel tempo da una funzione deterministica;
- <u>Vibrazioni casuali</u>: quando vengono definite nel tempo da una legge statistica o una funzione stocastica.

2.1 Vibrazioni deterministiche

Per comprendere al meglio le vibrazioni casuali, si procede con l'analisi di un sistema ad un grado di libertà soggetto a vibrazioni deterministiche. I riferimenti adottati per questa sezione sono stati presi da [3].

Caso armonico: vibrazioni forzate per forzante sinusoidale

Viene analizzato il caso armonico di un oscillatore elementare per osservare e comprendere la natura dell'eccitazione dinamica.

Nella Dinamica delle Strutture per oscillatore elementare si intende il sistema strutturale più semplice composto da una massa m che si può spostare in una sola direzione e il cui spostamento è influenzato dalla presenza di una molla di richiamo elastica avente rigidezza k.

Si considera, quindi, un sistema ad un grado di libertà (Single Degree Of Freedom – SDOF) composto da un oscillatore elementare con dissipazione di tipo viscoso e soggetto ad una forzante sinusoidale $f(t) = F_0 \sin(\omega_f t)$, schematizzato in *Figura* 2.1:

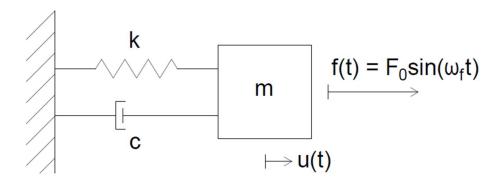


Figura 2.1: Oscillatore smorzato e forzato ad un grado di libertà (SDOF) - elaborazione dell'autrice

dove m è la massa totale del sistema, k è la costante di rigidezza, c è la costante di dissipazione viscosa, f(t) è la forza esterna, u(t) è lo spostamento deterministico dell'elemento e t indica il tempo.

Applicando il *principio di D'Alambert* (o *principio dell'equilibrio dinamico*) è possibile ricavare l'equazione del moto. Tale principio si basa sull'equilibrio che in ogni istante si fanno tutte le forze agenti sulla massa m: le forze attive f(t), le forze di richiamo elastico -ku(t), le forze di inerzia $-m\ddot{u}(t)$ e le forze interne dissipative viscose $-c\dot{u}(t)$. Per cui la condizione di equilibrio istantaneo è data dalla seguente equazione

differenziale ordinaria lineare non omogenea del secondo ordine a coefficienti costanti:

$$m\ddot{u}(t) + c\dot{u}(t) + ku(t) = F_0 \sin(\omega_f t)$$
(2.1a)

dove il simbolo [•] indica la derivata nel tempo della quantità [•].

Dividendo ambo i membri per la massa m, si ottiene l'equazione del moto in forma canonica:

$$\ddot{u}(t) + 2\xi_0 \omega_0 \dot{u}(t) + \omega_0^2 u(t) = \frac{F_0}{m} \sin(\omega_f t)$$
(2.1b)

dove $\omega_0^2 = \frac{k}{m}$ è la frequenza naturale dell'oscillatore e $\xi_0 = \frac{c}{2\sqrt{km}}$ è il rapporto o fattore di smorzamento viscoso rispetto allo smorzamento viscoso critico $c_{crit} = 2\sqrt{km} = 2m\omega_0$. Per una vibrazione libera smorzata, se $c < c_{crit}$ ($\xi_0 < 1$) il moto della massa è oscillatorio e decade nel tempo secondo una legge esponenziale e il sistema è detto sottosmorzato, invece se $c > c_{crit}$ (e quindi se $\xi_0 > 1$) il moto non è più oscillatorio, ma è smorzato secondo una legge armonica smorzata e il sistema è detto sovrasmorzato.

Il periodo proprio avrà come unità di misura il secondo *s* e può essere espresso come:

$$T_0 = 2\pi \sqrt{\frac{m}{k}} \tag{2.2}$$

Esso è collegato alla pulsazione naturale o frequenza circolare propria ω_0 secondo la seguente relazione:

$$\omega_0 = \frac{2\pi}{T_0} = \sqrt{\frac{k}{m}} \tag{2.3}$$

La soluzione dell'equazione del moto è data dalla somma della soluzione della omogenea associata $u_{om}(t)$ e della soluzione particolare $u_p(t)$. La soluzione della omogenea associata viene ricavata ponendo le forze esterne nulle $(f(t) = F_0 \sin(\omega_f t) = 0)$, risultando, perciò, identica alla soluzione che governa le oscillazioni libere. La soluzione particolare è, invece, una qualunque funzione continua con la sua derivata e che soddisfa le (2.1) e fornisce contributo alla risposta del sistema finchè permane la forzante esterna.

$$u(t) = u_{om}(t) + u_p \tag{2.4}$$

Facendo riferimento alla tipologia di strutture sottosmorzate (come possono essere le strutture civili), la soluzione della omogenea associata può essere scritta come segue:

$$u_{om}(t) = e^{-\xi_0 \omega_0 t} \left[C_1 \cos(\overline{\omega}_0 t) + C_2 \sin(\overline{\omega}_0 t) \right]$$
 (2.5)

dove $\overline{\omega}_0 = \omega_0 \sqrt{1 - \xi_0^2}$ è la pulsazione smorzata dell'oscillatore elementare, mentre C_1 e C_2 sono due costanti, determinate in funzione delle condizioni iniziali del moto u_0 e \dot{u}_0 , che valgono:

$$C_1 = u_0,$$
 $C_2 = \frac{\dot{u}_0 + \xi_0 \omega_0 u_0}{\overline{\omega}_0}$ (2.6)

Tali costanti vengono ricavate imponendo le condizioni iniziali alla risposta globale del sistema:

$$u(0) = u_{om}(0) + u_p(0) = u_0, \quad \dot{u}(0) = \dot{u}_{om}(0) + \dot{u}_p(0) = \dot{u}_0 \quad (2.7)$$

La soluzione della omogena associata può essere scritta anche nella seguente forma:

$$u_{om}(t) = \bar{\rho}_0 e^{-\xi_0 \omega_0 t} \cos(\bar{\omega}_0 t - \bar{\varphi}_0) \tag{2.8}$$

dove $\bar{\rho}_0 e^{-\xi_0 \omega_0 t}$ è una funzione che interpola i massimi della risposta e $\bar{\varphi}_0$ è l'angolo di fase. $\bar{\rho}_0$ e $\bar{\varphi}_0$ vengono determinate in funzione delle condizioni iniziali del moto:

$$\bar{\rho}_0 = \left[u_0^2 + \left(\frac{\dot{u}_0 + \xi_0 \omega_0 u_0}{\overline{\omega}_0} \right)^2 \right]^{\frac{1}{2}}, \qquad \tan \bar{\varphi}_0 = \frac{\dot{u}_0 + \xi_0 \omega_0 u_0}{\overline{\omega}_0 u_0}$$
(2.9)

Dalla *Figura* 2.2 si nota come il periodo $\bar{T}_0 = \frac{\bar{\omega}_0}{2\pi}$ aumenti all'aumentare della pulsazione smorzata.

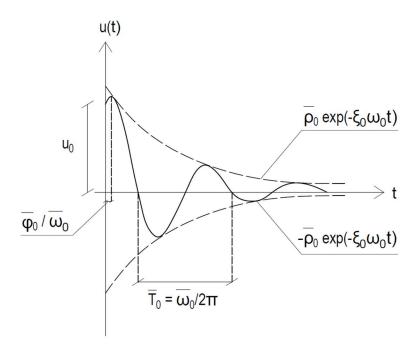


Figura 2.2: Oscillazioni libere dell'oscillatore elementare smorzato - [3] – rielaborazione dell'autrice

La soluzione particolare deve soddisfare l'equazione (2.1) e può essere espressa nella seguente forma:

$$u_p(t) = \rho_p \sin(\omega_f t - \varphi_p) \tag{2.10}$$

Sostituendo la (2.9) nella (2.1) si ottiene:

$$\rho_{p} = \frac{F_{0}}{k} \frac{1}{\sqrt{\left[1 - \left(\frac{\omega_{f}}{\omega_{0}}\right)^{2}\right]^{2} + \left[2\xi_{0}\left(\frac{\omega_{f}}{\omega_{0}}\right)\right]^{2}}},$$

$$\tan \varphi_{p} = \frac{2\xi_{0}\left(\frac{\omega_{f}}{\omega_{0}}\right)}{\left(1 - \left(\frac{\omega_{f}}{\omega_{0}}\right)\right)^{2}}$$
(2.11)

Come detto prima, nella risposta di un oscillatore elementare sottosmorzato il contributo dell'omogenea associata decade nel tempo secondo una legge esponenziale, mentre il contributo della particolare persiste finchè permane la forza esterna. Si possono, perciò, distinguere due fasi: la prima fase, detta *transitoria*, in cui prevale il contributo fornito dalla soluzione dell'omogena associata (dipendente, quindi, dalle condizioni iniziali); la seconda fase, detta di *regime*, in cui prevale il contributo dato dalla soluzione particolare.

Facendo riferimento alla *Figura* 2.3, si nota che quanto maggiore sarà lo smorzamento, tanto più breve sarà il tratto transitorio, per cui la risposta del sistema impiegherà un tempo minore per entrare nella fase stazionaria.

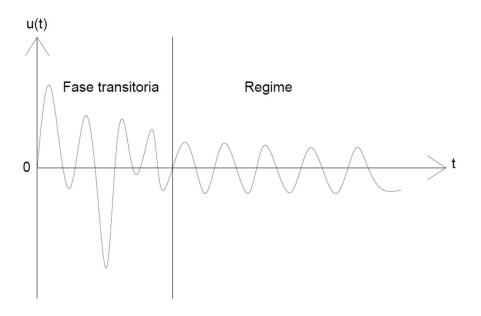


Figura 2.3: Fase transitoria e di regime della risposta di un oscillatore elementare soggetto ad una forzante sinusoidale - [3] – rielaborazione dell'autrice

Dalla (2.10) è possibile ricavare il tempo di ritardo t_r , cioè l'intervallo di tempo tra il primo picco della forzante e il corrispondente picco della soluzione particolare oppure l'intervallo tra il primo attraversamento dell'asse temporale della forzante e il corrispondente attraversamento dell'asse temporale della soluzione particolare.

È possibile calcolare il tempo di ritardo ponendo nella (2.10) nullo l'argomento della funzione sinusoidale (per t=0 si ha il primo attraversamento della forzante):

$$t_r = \frac{\varphi_p}{\omega_f} = \frac{\varphi_p}{2\pi} T_f \tag{2.12}$$

dove $T_f = \frac{2\pi}{\omega_f}$ è il periodo della forzante.

Ipotizzando nulle le forze di inerzia e dissipative nelle (2.1), è possibile calcolare la *risposta pseudo-statica* $u_{st}(t) = \frac{F_0}{k} \sin(\omega_f t)$ e, di conseguenza, lo spostamento pseudo-statico massimo $\bar{u}_{st} = \frac{F_0}{k}$.

Allora si può riscrivere la (2.10) come segue:

$$u_p(t) = D\bar{u}_{st}\sin(\omega_f t - \varphi_p) \tag{2.13}$$

dove

$$D = \frac{u_p(t)|_{max}}{\bar{u}_{st}} = \frac{1}{\sqrt{\left[1 - \left(\frac{\omega_f}{\omega_0}\right)^2\right]^2 + \left[2\xi_0\left(\frac{\omega_f}{\omega_0}\right)\right]^2}}$$
(2.14)

è detto fattore di amplificazione, oppure coefficiente di magnificazione, e indica il rapporto tra il massimo della soluzione particolare e il massimo di quella pseudo-statica.

Noto $\beta = \omega_f/\omega_0$, pari al rapporto tra la frequenza circolare della forzante e la frequenza propria dell'oscillatore elementare, è possibile graficare (*Figura* 2.4) l'andamento del fattore di amplificazione D e dell'angolo di sfasamento φ_p rispetto al rapporto tra le frequenze. È possibile dedurre le seguenti considerazioni:

- 1. se $\beta \cong 0$ si ha $D \cong 1$, cioè il caso statico, in cui la forza varia molto lentamente rispetto al periodo naturale del sistema;
- 2. se $\beta \cong 1$ e $\xi_0 = 0$ (smorzamento nullo) si ha il caso di *risonanza illimitata*, in cui *D* tende asintoticamente all'infinito;
- 3. se $\beta \cong 1$ e $0 < \xi_0 < 0.5$ si ha D > 1: il valore massimo della risposta a regime è maggiore rispetto al valore massimo di quella pseudo-statica. Si nota, inoltre, un comportamento inversamente proporzionale tra lo smorzamento e il fattore di amplificazione;
- 4. se $\beta > 1.41$ si ha che D < 1, cioè che F_0/k è sempre maggiore rispetto al massimo della risposta a regime: si avrà una deamplificazione della risposta;
- 5. se $\beta \to +\infty$ si ha che $D \to 0$: la forzante varia molto rapidamente rispetto al periodo naturale del sistema;
- 6. se $\beta = 0$ oppure $\xi_0 = 0$ e $\beta < 1$ si ha $\varphi_p = 0$, a cui corrisponde un tempo di ritardo t_r nullo;
- 7. se $\beta = 1$ (e quindi $\omega_f = \omega_0$) si ha $\varphi_p = \pi/2$, a cui corrisponde $t_r = T_f/4$, per qualsiasi valore di rapporto di smorzamento;
- 8. se $\beta \gg 1$ e $\xi_0 \neq 0$ oppure se $\beta > 1$ e $\xi_0 = 0$ si ha $\varphi_p \cong \pi$, a cui corrisponde $t_r = T_f/2$. In questo caso la forzante e la risposta sono in *opposizione di fase*, in quanto sono sfasate di $T_f/2$: F(t) è massima quando u(t) è minima e viceversa.

Il valore massimo del fattore di amplificazione D si ha per $\omega_f = \omega_0$ solo se $\xi_0 = 0$. Negli altri casi, è possibile ricercare l'ascissa a cui si avrà il massimo di D e il corrispondente valore di D come:

$$\beta_{max} = \sqrt{1 - 2\xi_0^2},$$

$$D_{max} = D(\beta_{max}) = \frac{\omega_0}{2\xi_0 \overline{\omega}_0} \equiv \frac{1}{2\xi_0 (1 - \xi_0^2)^{\frac{1}{2}}}$$
(2.15)

Mentre l'angolo di sfasamento corrispondente sarà pari a:

$$\varphi_p(\beta_{max}) = \tan^{-1} \left[\frac{(1 - 2\xi_0^2)^{1/2}}{\xi_0} \right]$$
 (2.16)

Se si considerano valori molto piccoli di smorzamento ($\xi_0 \ll 1$), allora si può assumere che $\beta_{max} \cong 1$, $\overline{\omega}_0 \cong \omega_0$ e quindi

$$D_{max} \cong \frac{1}{2\xi_0}, \qquad \qquad \varphi_p(\beta_{max}) \cong \tan^{-1}\left(\frac{1}{\xi_0}\right)$$
 (2.17)

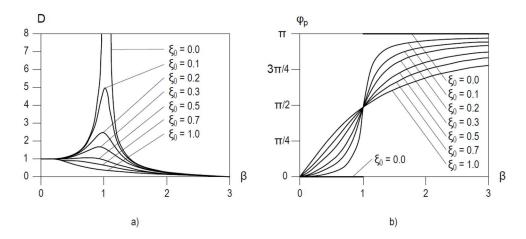


Figura 2.4: Fattore di amplificazione D a) e angolo di sfasamento φ_p b) in funzione di $\beta = \omega_f/\omega_0$ e ξ_0 , per oscillatori elementari soggetti a forzante sinusoidale - [3] – rielaborazione dell'autrice

Funzioni di risposta al gradino unitario e all'impulso unitario

Il caso armonico non riesce a tenere in conto della natura irregolare e variabile delle vibrazioni. Per tale motivo, nella Dinamica delle Strutture ricoprono un ruolo fondamentale le funzioni di risposta dell'oscillatore elementare alle forzanti gradino unitario e impulso unitario, in modo da poter descrivere le forzanti come sovrapposizione di impulsi. Tali funzioni appartengono alla classe delle *funzioni improprie* e hanno la seguente forma:

$$\mathcal{U}(t-t_0) = \begin{cases} 0 & t < t_0 \\ \frac{1}{2} & t = t_0 \\ 1 & t > t_0 \end{cases} \qquad \delta(t-t_0) = \begin{cases} 0 & t \neq t_0 \\ +\infty & t = t_0 \end{cases}$$
 (2.18)

dove $\mathcal{U}(\bullet)$ è la *funzione gradino unitario*, mentre $\delta(\bullet)$ è la funzione impulso unitario, nota anche come *funzione delta di Dirac*.

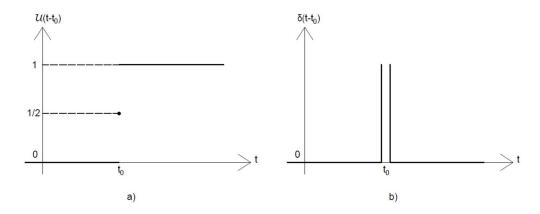


Figura 2.5: Funzione gradino unitario a) e relativa funzione delta di Dirac b) - [3] - rielaborazione dell'autrice

Tali funzioni sono collegate tra loro dalle seguenti relazioni differenziali:

$$\delta(t - t_0) = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t} \mathcal{U}(t - t_0) \qquad \mathcal{U}(t - t_0) = \int_0^t \delta(t - t_0) \,\mathrm{d}\tau \tag{2.19}$$

Si può definire, perciò, funzione di risposta al gradino unitario, la risposta dell'oscillatore elementare di massa unitaria forzato dalla forzante $\mathcal{U}(t)$ con condizioni iniziali nulle. Per ricavare, invece, la funzione risposta all'impulso unitario, è necessaria una derivazione della funzione risposta al gradino unitario.

Queste due funzioni godono di molteplici proprietà, la cui descrizione dettagliata è riportata in [3].

Formulazione integrale della risposta ad una forzante qualunque

La funzione d'impulso viene utilizzata per descrivere eccitazioni non definibili analiticamente.

Considerando un sistema ad un grado di libertà eccitato da una forzante qualunque f(t) (Figura 2.6), tale forzante può essere studiata come sommatoria di impulsi di intensità pari a $f(\tau)d\tau$.

Allora:

$$f(t) = \int_{t_0}^{+\infty} f(\tau)\delta(\tau - t)d\tau = \int_{t_0}^{+\infty} f(\tau)\delta(t - \tau)d\tau$$
$$\equiv \int_{-\infty}^{+\infty} f(\tau)\mathcal{U}(\tau - t_0)\delta(t - \tau)d\tau \qquad t > t_0 \qquad (2.20)$$

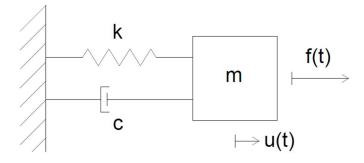


Figura 2.6: Rappresentazione di un sistema ad un grado di libertà eccitato da una forzante qualunque - elaborazione dell'autrice

Sapendo che

$$du_1(t,\tau) = u_1(t)f(\tau)d\tau \equiv h(t-\tau)\mathcal{U}(t-\tau)f(\tau)d\tau \qquad \tau > t_0 \quad (2.21)$$

dove $h_x(t)$ è la risposta ad una serie di segnali impulsivi $\delta(t)$,

e, facendo variare con continuità t nell'intervallo $(t_0, +\infty)$, è possibile ottenere la risposta globale di un oscillatore soggetto ad una forzante f(t):

$$u(t) = \int_{t_0}^{+\infty} h_x(t - \tau) \mathcal{U}(t - \tau) f(\tau) d\tau \qquad t > t_0$$
 (2.22)

la quale può essere riscritta anche come:

$$u(t) = \int_{-\infty}^{+\infty} h_x(t-\tau)\mathcal{U}(t-\tau)f(\tau)\mathcal{U}(\tau-t_0)d\tau \qquad t > t_0 \qquad (2.23)$$

La (2.23) rappresenta un *integrale di convoluzione* tra le due funzioni $h_x(t)U(t)$ e $f(t)U(t-t_0)$. Sfruttando le proprietà della funzione gradino unitario si ottiene:

$$u(t) = \int_{t_0}^{+\infty} h_{\chi}(t - \tau)f(\tau)d\tau \qquad t > t_0$$
 (2.24)

Tale integrale è detto integrale di Duhamel.

Nel caso di condizioni iniziali assegnate, diventa:

$$u(t) = \int_{t_0}^{+\infty} h_{\chi}(t - \tau) f(\tau) d\tau + h_{\chi}(\tau) f(\tau) \qquad t > t_0$$
 (2.25)

Per risolvere la (2.24) è necessario definire una *funzione di risposta all'impulso* $h_x(t)$ per il sistema dinamico oggetto di studio. L'equazione del moto per il sistema rappresentato in *Figura* 2.6 ha la seguente forma:

$$m\ddot{u}(t) + c\dot{u}(t) + ku(t) = f(t) \tag{2.26}$$

Allora la funzione di risposta all'impulso $h_x(t)$ sarà del tipo:

$$h_x(t) = \frac{e^{-\xi_0 \omega_0 t}}{m \overline{\omega}_0} \sin(\overline{\omega}_0 t) \, \mathcal{U}(t) \tag{2.27}$$

dove $\overline{\omega}_0 = \omega_0 \sqrt{1 - \xi_0^2}$ è la pulsazione smorzata dell'oscillatore elementare e $\mathcal{U}(t)$ è la funzione gradino unitario.

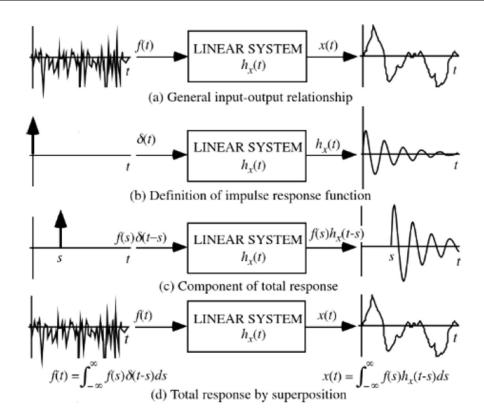


Figura 2.7: Analisi dell'integrale di Duhamel di un segnale impulsivo - [4]

2.2 Analisi dinamica nel dominio della frequenza: trasformata di Fourier

È possibile analizzare un sistema (o, più in generale, un processo) sia nel dominio del tempo che nel dominio della frequenza.

Il primo, sicuramente, è quello usato più spesso perché di più semplice utilizzo; il secondo, invece, viene impiegato quando si ha bisogno di studiare aspetti che non sarebbero di facile comprensione se studiati nel dominio del tempo. Tali due domini sono uno il duale dell'altro.

Per poter passare, infatti, da un dominio all'altro è necessario definire e conoscere la *trasformata di Fourier* (o *integrale di Fourier*) della funzione oggetto di studio:

$$\mathcal{F}[f(t)] = F(\omega) = \int_{-\infty}^{+\infty} f(t)e^{-i\omega t} dt$$
 (2.28)

dove il simbolo $\mathcal{F}[\bullet]$ indica la trasformata di Fourier della quantità tra parentesi, f(t) è una funzione arbitraria non periodica che soddisfa le condizioni di Dirichlet nell'intervallo temporale $(-\infty, +\infty)$ (cioè, possiede un

numero finito di massimi e di discontinuità all'interno dell'intervallo considerato) e ω è la frequenza circolare.

La trasformata di Fourier della funzione f(t) esiste ed è applicabile se vale la seguente condizione sufficiente ma non necessaria:

$$\int_{-\infty}^{+\infty} |f(t)| \mathrm{d}t < \infty \tag{2.29}$$

È possibile definire anche la trasformata inversa di $F(\omega)$, detta anche antitrasformata di Fourier, come:

$$\mathcal{F}^{-1}[F(\omega)] = f(t) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} F(\omega) e^{i\omega t} d\omega$$
 (2.30)

Si può dire, inoltre, che la funzione $F(\omega)$ rappresenta la distribuzione delle componenti armoniche della funzione f(t) sull'asse delle frequenze circolari ω . Viene, perciò, indicata anche come spettro di f(t).

Definita la trasformata di Fourier, è possibile valutare la funzione risposta di un oscillatore smorzato e forzato nel dominio della frequenza. L'equazione del moto in funzione del tempo sarà data da:

$$\ddot{u}(t) + 2\xi_0 \omega_0 \dot{u}(t) + \omega_0^2 u(t) = f(t) \tag{2.31}$$

Applicando la trasformata di Fourier ad entrambi i membri della (2.31) si ottiene:

$$(-\omega^2 + 2i\xi_0\omega_0\omega + \omega_0^2)U(\omega) = F(\omega)$$
(2.32)

dove

$$\mathcal{F}[u(t)] = U(\omega)$$
 $\mathcal{F}[\dot{u}(t)] = i\omega U(\omega)$ $\mathcal{F}[\ddot{u}(t)] = -\omega^2 U(\omega)$ (2.33)

 $U(\omega)$ è la trasformata di Fourier della funzione risposta dell'oscillatore elementare, u(t), e $F(\omega)$ è la trasformata di Fourier della forzante f(t).

Inoltre, è possibile riscrivere la (2.32) nella seguente forma:

$$U(\omega) = H(\omega)F(\omega) \tag{2.34}$$

in cui la funzione $H(\omega)$, detta funzione di trasferimento, è data dalla relazione:

$$H(\omega) = \frac{1}{\omega_0^2 - \omega^2 + 2i\xi_0\omega_0\omega} = \frac{(\omega_0^2 - \omega^2) - i2\xi_0\omega_0\omega}{(\omega_0^2 - \omega^2)^2 + 4\xi_0^2\omega_0^2\omega^2}$$
(2.35)

Tale funzione trasforma le caratteristiche dinamiche della forzante in quelle della risposta dell'oscillatore elementare. La sua inversa è detta *rigidezza dinamica* dell'oscillatore elementare.

Si può dimostrare che la funzione di trasferimento $H(\omega)$ coincide con la trasformata di Fourier della funzione risposta all'impulso unitario $u_1(t)$ dell'oscillatore elementare:

$$\mathcal{F}[u_1(t)] = \int_{-\infty}^{+\infty} u_1(t)e^{-i\omega} dt = \int_{-\infty}^{+\infty} h(t)\mathcal{U}(t)e^{-i\omega t}dt =$$

$$= \int_{0}^{+\infty} h(t)e^{-i\omega t}dt = H(\omega)$$
(2.36)

Nella *Figura* 2.8 si riporta l'andamento delle funzioni risposta all'impulso unitario rispetto al tempo e della sua trasformata di Fourier nel dominio delle frequenze.

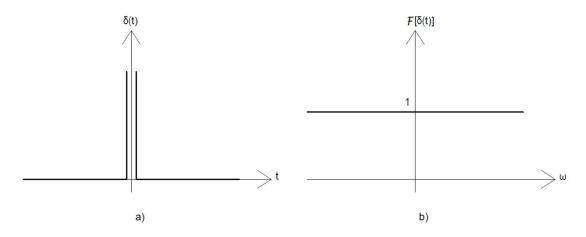


Figura 2.8: Funzione impulso unitario nel dominio del tempo a) e nel dominio delle frequenze b) - [3] – rielaborazione dell'autrice

Una volta caratterizzata la risposta dell'oscillatore $U(\omega)$ nel dominio della frequenza, è possibile ricercare la soluzione generale u(t) e la sua derivata prima $\dot{u}(t)$ applicando le antitrasformate di Fourier:

$$u(t) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} U(\omega) e^{i\omega t} d\omega = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} H(\omega) F(\omega) e^{i\omega t} d\omega$$
 (2.37)

$$\dot{u}(t) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} i\omega U(\omega) e^{i\omega t} d\omega = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} i\omega H(\omega) F(\omega) e^{i\omega t} d\omega \qquad (2.38)$$

2. Le vibrazioni

La soluzione nel dominio del tempo è spesso utilizzata poiché fornisce un'immagine nitida e immediata della frequenza predominante nella risposta.

3 Teoria della probabilità e variabili aleatorie – Richiami di dinamica stocastica

Da un punto di vista ingegneristico, analizzare delle strutture è un processo che può essere suddiviso in tre momenti: schematizzazione della struttura tramite un modello; definizione dei carichi agenti sulla struttura; scelta di un modello di calcolo e verifica.

È abbastanza intuitivo pensare che in ognuna di queste fasi ci saranno grandezze affette da incertezze: dal modello utilizzato, che non riuscirà mai a riprodurre con estrema affidabilità la realtà fisica, al comportamento dei materiali in gioco, fino alle proprietà aleatorie dei carichi agenti.

Per riuscire a considerare tutte queste variabili, è necessario associare metodi di calcolo aleatorio ai tradizionali metodi di calcolo deterministico.

La Teoria della Probabilità nasce, perciò, come tentativo di descrivere delle regolarità osservate in diversi esperimenti: cioè, quando i risultati di diverse osservazioni di uno stesso esperimento si distribuiscono secondo leggi che possono essere descritte con i metodi propri della statistica.

Si definisce, pertanto, *fenomeno* (o *evento*) *deterministico* se l'insieme dei risultati che lo caratterizzano è prevedibile in modo certo. Di conseguenza, una *variabile* è detta *deterministica* se descrive i risultati di un evento deterministico.

Il fenomeno (o evento) è detto invece aleatorio o casuale se per tale fenomeno, a parità di condizioni fisse, si ottiene ogni volta un risultato diverso. La variabile è detta aleatoria, perciò, se descrive i risultati di un evento aleatorio, secondo le leggi della probabilità. La variabile aleatoria o casuale è anche detta variabile stocastica.

Nella teoria della probabilità, un processo stocastico non è altro che la versione probabilistica della definizione di sistema dinamico.

Alla variabile aleatoria è possibile associare la probabilità dell'evento, una quantità, cioè, che valuta la probabilità che l'evento si verifichi o meno. Secondo la definizione classica di Laplace, la probabilità di un evento è pari al rapporto tra il numero dei casi favorevoli al verificarsi dell'evento e il numero totali dei casi possibili. Secondo, invece, la definizione statistica, la probabilità

del verificarsi di un evento E è pari al rapporto tra il numero M di volte in cui l'evento favorevole si è manifestato e il numero N totale degli esperimenti. Secondo tali definizioni, lo studio deterministico delle vibrazioni non è in grado di descrivere in maniera reale le azioni previste, a causa della loro natura

casuale e della difficoltà di previsione dei loro effetti dinamici che ne consegue.

È possibile sottolineare la distinzione tra variabile aleatoria e processo stocastico: mentre la descrizione della prima implica la costruzione di una funzione di distribuzione ad un istante fissato, il secondo richiede la descrizione del comportamento di questa distribuzione lungo tutta la storia temporale t. Inoltre, un processo stocastico può essere discreto o continuo sull'asse del tempo, mentre solitamente sarà discreto sull'asse dei campioni.

A sua volta, una variabile aleatoria è detta discreta o continua se può assumere valori appartenenti ad un insieme discreto o meno.

Anche per questa sezione, i riferimenti per i richiami teorici sono stati presi da [3].

3.1 Classificazione dei processi casuali

I processi casuali possono essere suddivisi in tre tipologie: in base alla regolarità, considerando le frequenze in gioco; in base alla memoria, considerando l'influenza dei valori assunti precedentemente; in base al tipo di distribuzione.

In base alla regolarità, i processi casuali si dividono in:

- *processo armonico*: processo caratterizzato da estrema regolarità, concentrata su un'unica frequenza;
- processo a banda stretta: processo abbastanza regolare, che spazia su un intervallo limitato di frequenze;
- processo a banda larga: processo più irregolare, che lavora su un intervallo ampio di frequenze;
- rumore bianco: processo caratterizzato da massima irregolarità e in cui il segnale spazia su infinite frequenze.

Per quanto riguarda, invece, la tipologia di distribuzione, solitamente si utilizza una distribuzione di tipo Gaussiana sia per l'elevata capacità di riprodurre le caratteristiche della maggior parte dei fenomeni, sia, soprattutto, per le semplificazioni di calcolo che è possibile effettuare (si tratta di un modello simmetrico a due parametri).

Inoltre, un processo aleatorio può essere *stazionario* se la sua distribuzione di probabilità resta invariata per diversi istanti di tempo, cioè se le distribuzioni di probabilità per t_i e per $t_i + \tau$ restano le stesse. (*Figura* 3.1)

È bene sottolineare, però, che i processi aleatori stazionari sono un'idealizzazione dei processi reali, poiché il processo aleatorio stazionario deve avere durata illimitata e questo, chiaramente, non può avere riscontro nella realtà fisica dei problemi strutturali. Tuttavia, è stato dimostrato che i processi aleatori che descrivono fenomeni fisici quali vento o terremoto, possono essere trattati come processi aleatori stazionari.

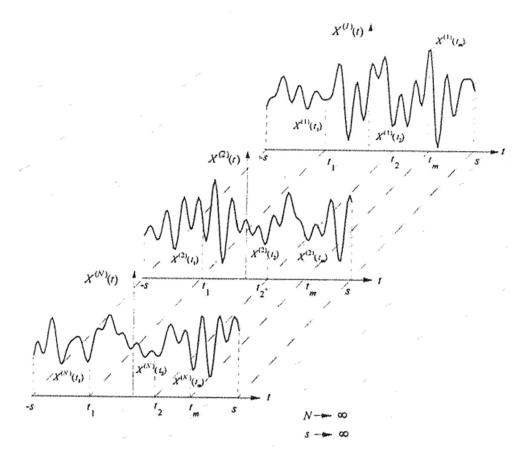


Figura 3.1: Campioni di processi aleatori stazionari - [3]

Esistono diversi tipi di stazionarietà legati a diversi indicatori probabilistici, tra cui i più importanti sono i momenti probabilistici. Si può affermare che, se la distribuzione è stazionaria, allora lo saranno anche i momenti ottenuti da essa; non è sempre vero il contrario.

Un processo stocastico è detto, invece, ergodico quando è possibile assumere il comportamento nel tempo di una singola funzione campione X(t) come rappresentativa dell'intero processo $\{X(t)\}$. L'ergodicità è una proprietà molto utile, ma difficile da dimostrare, in quanto bisognerebbe prelevare un gruppo rappresentativo di campioni. Tale operazione rimuove, quindi, i vantaggi dell'ipotesi iniziale, per cui quando presente e giustificata, l'ergodicità viene assunta fin dall'inizio.

Un processo stocastico ergodico è anche stazionario, ma non è sempre vero il contrario.

Le operazioni che si possono effettuare sui processi casuali sono le stesse di quelle applicabili in qualunque serie temporale; l'unica accortezza risiede nel fatto che i processi casuali, essendo stocastici, devono essere trattati con gli strumenti e le nozioni proprie della probabilità.

3.2 Proprietà statistiche

Vengono di seguito esposte le principali distribuzioni di probabilità e i relativi parametri stocastici per la descrizione probabilistica degli insiemi, poi estese alla trattazione dei processi casuali.

Si indicheranno le variabili casuali con le lettere maiuscole X, Y, ... e le possibili estrazioni da esse con le lettere minuscole x, y, ...

3.2.1 Distribuzione di probabilità monodimensionale

Per definizione, la probabilità di accadimento P(X) di un evento X è data da:

$$P(X) = \frac{1}{n} \sum_{k=1}^{m} x_{fav}$$
 (3.1)

dove n è il numero delle possibili estrazioni dell'esperimento e m è il numero delle estrazioni favorevoli.

Tale variabile, detta anche *funzione probabilità di massa* e che considera variabili discrete, può essere estesa alle variabili continue. Si parla, perciò, della *Funzione Densità di Probabilità (PDF)* $p_X(x)$, chiamata in questo modo proprio per sottolineare l'addensamento della probabilità nell'intorno del punto x. Come si vede dalla *Figura* 3.2, la Funzione Densità di Probabilità sottende un'area unitaria, poiché, per definizione, la somma delle probabilità di tutti gli elementi è pari ad uno. La *PDF*, moltiplicata per un intervallo dx, rappresenta la probabilità che la variabile aleatoria continua X possa assumere valori compresi tra x e x + dx:

$$P(x \le X \le x + dx) = \int_{x}^{x+dx} p_X(x) dx$$
 (3.2)

Per semplicità di lettura si pone a = x e b = x + dx: (Figura 3.2)

$$P(a \le X \le b) = \int_a^b p_X(x) \, dx \tag{3.3}$$

dove

$$P(a \le X \le b) = F_X(b) - F_X(a) \tag{3.4}$$

Con $F_X(x)$ si definisce la funzione distribuzione cumulativa di probabilità, detta anche funzione di distribuzione cumulativa (CDF) o funzione distribuzione di probabilità. Essa rappresenta la probabilità che la variabile aleatoria X assuma valori minori ad x:

$$F_X(x) = P(X \le x) = \int_{-\infty}^x p_X(x) dx$$
 (3.5)

Da cui si ricava la funzione densità di probabilità come:

$$p_X(x) = \frac{\mathrm{d}F_X(x)}{\mathrm{d}x} \tag{3.6}$$

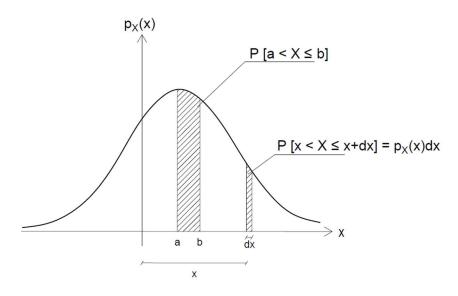


Figura 3.2: Principali proprietà della Funzione Densità di Probabilità di una variabile aleatoria continua - [3] – rielaborazione dell'autrice

Definita la densità di probabilità e fissato un numero reale k compreso tra 0 e 1, è possibile definire e avere un solo valore $x_k^{(i)}$ e un solo valore $x_k^{(s)}$ appartenenti ad X. Tali valori sono, rispettivamente, il *frattile inferiore di ordine k* e il *frattile superiore di ordine k*, tali che:

$$P(X \le x_k^{(i)}) = F_X(x_k^{(i)}) = k \quad P(X \ge x_k^{(s)}) = 1 - F_X(x_k^{(s)}) = k \quad (3.7)$$

È possibile determinare il frattile inferiore conoscendo e valutando l'inversa della funzione distribuzione di probabilità:

$$x_k^{(i)} = F_X^{-1}(k) (3.8)$$

La valutazione della funzione inversa della $F_X(x)$ è molto complessa; per questo motivo, per le distribuzioni più comuni, i frattili vengono forniti in tabelle riportate nei manuali.

3.2.2 Parametri stocastici: distribuzione monodimensionale

Per definire in maniera esaustiva le proprietà statistiche di una variabile aleatoria X, è necessario che sia nota la funzione distribuzione di probabilità $F_X(x)$ o la funzione densità di probabilità $p_X(x)$. È possibile, però, caratterizzare una variabile aleatoria anche attraverso la media, la varianza e i momenti.

La media aritmetica degli N esperimenti è definita dalla seguente relazione:

$$\bar{x}_N = \frac{1}{N} \sum_{i=1}^N r_i \qquad \leftrightarrow \qquad \bar{x}_N = \frac{1}{N} \sum_{i=1}^n N_i x_i \qquad (i = 1, 2, ..., n)$$
 (3.9)

dove N è il numero di esperimenti effettuati, r_i è il risultato dell'i-esimo esperimento, $N_i < N$ è il numero degli esiti favorevoli rispetto al valore di x_i e x_i sono i valori assunti dalla variabile X.

Per $N \to \infty$ si può scrivere che:

$$\lim_{N \to \infty} \frac{N_i}{N} = P(X = x_i) = P_X(x_i) = p_i \qquad (i = 1, 2, ..., n)$$
(3.10)

e

$$\lim_{N \to \infty} \bar{x}_N = \lim_{N \to \infty} \frac{1}{N} \sum_{i=1}^n N_i x_i = \sum_{i=1}^n P_X(x_i) x_i = \sum_{i=1}^n p_i x_i = \mu_X$$
 (3.11)

dove $P_X(x_i)$ è la funzione di probabilità valutata in $x = x_i$, p_i è la probabilità che la variabile aleatoria assuma il valore x_i , μ_X è la *media* o *valor medio* o *valore atteso* della variabile aleatoria.

Allora per il caso di variabili aleatorie discrete si può scrivere che:

$$\mu_X = \sum_{i=1}^n P_X(x_i) x_i \equiv \sum_{i=1}^n p_i x_i$$
 (3.12)

Mentre per il caso di variabili aleatorie continue vale la seguente relazione:

$$\mu_X = \int_{-\infty}^{+\infty} x p_X(x) \, \mathrm{d}x \tag{3.13}$$

In modo analogo, è possibile definire il *valore quadratico medio* φ_X^2 , rispettivamente per il caso discreto e per il caso continuo:

$$\varphi_X^2 = \sum_{i=1}^n P_X(x_i) x_i^2 \equiv \sum_{i=1}^n p_i x_i^2$$
(3.14)

$$\varphi_X^2 = \int_{-\infty}^{+\infty} x^2 p_X(x) \, \mathrm{d}x \tag{3.15}$$

Inoltre, si definisce varianza la seguente quantità:

$$\sigma_X^2 = \varphi_X^2 - \mu_X^2 \tag{3.16}$$

Da cui si ricava, rispettivamente per il caso discreto e per il caso continuo:

$$\sigma_X^2 = \sum_{i=1}^n p_i (x_i - \mu_X)^2$$
 (3.17)

$$\sigma_X^2 = \int_{-\infty}^{+\infty} (x - \mu_X)^2 p_X(x) \, \mathrm{d}x$$
 (3.18)

La varianza è una quantità che misura la dispersione della variabile aleatoria rispetto al valore medio.

Per definizione, valore quadratico medio e varianza sono due valori sempre positivi.

In ultimo, si definisce *scarto quadratico medio* o *deviazione standard* σ_X la radice quadrata della varianza:

$$\sigma_X = \sqrt{\sum_{i=1}^n p_i (x_i - \mu_X)^2}$$
 per variabili discrete (3.19)

$$\sigma_X = \sqrt{\int_{-\infty}^{+\infty} (x - \mu_X)^2 p_X(x) \, \mathrm{d}x} \qquad per \, variabili \, continue \qquad (3.20)$$

Nella *Figura* 3.3 si riporta un esempio di funzione densità di probabilità di variabili aleatorie continue al variare del valore medio con deviazione standard fissata e al variare della deviazione standard con valor medio fisso.

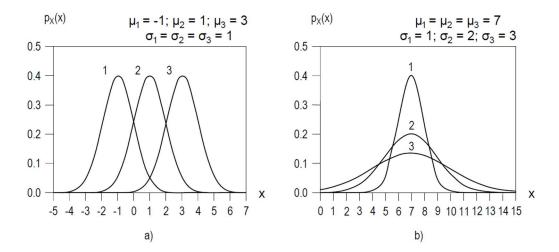


Figura 3.3: Funzione Densità di Probabilità di variabili aleatorie continue a) al variare del valor medio e b) al variare della deviazione standard - [3] – rielaborazione dell'autrice

Si può, quindi, riassumere quanto appena detto introducendo i *momenti* statistici di X m_k . Il momento di ordine k, rispettivamente per il caso di variabili aleatorie discrete e continue, sarà dato da:

$$m_k = \frac{1}{n} \sum_{k=1}^{m} x^k,$$
 $m_k = \int_{-\infty}^{+\infty} x^k p_X(x) dx$ (3.21)

Il *momento del primo ordine*, detto anche *valore medio*, indica il valore medio della distribuzione:

$$m_1 = \frac{1}{N} \sum_{k=1}^{m} x,$$
 $m_1 = \int_{-\infty}^{+\infty} x p_X(x) dx \equiv \mu_X$ (3.22)

Il momento del secondo ordine, detto anche valore quadratico medio, indica la dispersione dei valori rispetto all'origine:

$$m_2 = \frac{1}{N} \sum_{k=1}^{m} x^2,$$
 $m_2 = \int_{-\infty}^{+\infty} x^2 p_X(x) \, \mathrm{d}x \equiv \varphi_X^2$ (3.23)

Il momento del terzo ordine e il momento del quarto ordine vengono utilizzati di meno e forniscono informazioni circa la forma della distribuzione.

Il momento di ordine zero, invece, sarà pari all'area sottesa dalla funzione $p_X(x)$:

$$m_0 = \int_{-\infty}^{+\infty} p_X(x) \, \mathrm{d}x = 1$$
 (3.24)

Conoscendo il momento del secondo ordine, è possibile calcolare la *varianza*, che indica la dispersione dei valori rispetto al valore medio. Viene indicata come S^2 per il caso di variabili aleatorie discrete e σ^2 per il caso di variabili aleatorie continue:

$$S^{2} = \frac{1}{n} \sum_{k=1}^{m} (x - m_{1})^{2}, \qquad \sigma_{X}^{2} = \int_{-\infty}^{+\infty} (x - \mu)^{2} p_{X}(x) dx \qquad (3.25)$$

Dalla varianza si può facilmente calcolare *scarto quadratico medio* o *deviazione standard* σ_x :

$$S = \sqrt{S^2} = \sqrt{\frac{1}{n} \sum_{k=1}^{m} (x - m_1)^2},$$

$$\sigma_X = \sqrt{\sigma_X^2} = \sqrt{\int_{-\infty}^{+\infty} (x - \mu)^2 p_X(x) dx}$$
(3.26)

Un ulteriore parametro utile nell'interpretazione statistica dei fenomeni è il *coefficiente di variazione*, che descrive la variabilità relativa di una variabile aleatoria rispetto al suo valore medio. Esso è dato dal rapporto tra la deviazione standard e la media della variabile aleatoria:

$$C_X = \frac{\sigma_X}{\mu_X} \tag{3.27}$$

Se il coefficiente di variazione rappresenta un valore elevato, si avrà una notevole dispersione rispetto al valore medio e quindi un'elevata aleatorietà dei dati che definiscono la variabile aleatoria.

Alla luce di queste definizioni, è possibile affermare che per avere un'idea della aleatorietà dei risultati basta conoscere i valori numerici di valore medio, scarto quadratico medio e coefficiente di variazione.

Nella forma più generale, è possibile calcolare i momenti utilizzando l'*operatore media stocastica E*[\bullet]. Per esempio, considerando una funzione continua f(x), il suo valore medio sarà dato da:

$$E[f(x)] = \int_{-\infty}^{+\infty} f(x) p_X(x) dx$$
 (3.28)

3.2.3 Distribuzione di probabilità di ordini superiori

Analizzato il caso monodimensionale, è possibile studiare il comportamento di distribuzioni di probabilità di ordini superiori al primo.

Di seguito verranno esposte le proprietà e le definizioni relative ad una distribuzione di probabilità bidimensionale, che possono però essere estese anche ai casi di ordini superiori, semplicemente aumentando il numero delle variabili casuali.

Per poter definire in modo completo una coppia di variabili aleatorie X_1 e X_2 , basta conoscere la funzione densità di probabilità bidimensionale $p_{X_1X_2}(x_1,x_2)$, detta anche *funzione densità di probabilità congiunta* delle variabili aleatorie X_1 e X_2 , oppure la funzione distribuzione di probabilità bidimensionale $F_{X_1X_2}(x_1,x_2)$, detta anche *funzione distribuzione di probabilità congiunta* delle variabili aleatorie X_1 e X_2 . Tali funzioni sono legate dalle seguenti relazioni:

$$p_{X_1X_2}(x_1, x_2) = \frac{\partial^2}{\partial x_1 \partial x_2} F_{X_1X_2}(x_1, x_2)$$
(3.29)

$$F_{X_1X_2}(x_1, x_2) = P(X_1 \le x_1 \cap X_2 \le x_2) =$$

$$= \int_{-\infty}^{x_1} \int_{-\infty}^{x_2} p_{X_1X_2}(\rho_1, \rho_2) d\rho_1 d\rho_2$$
(3.30)

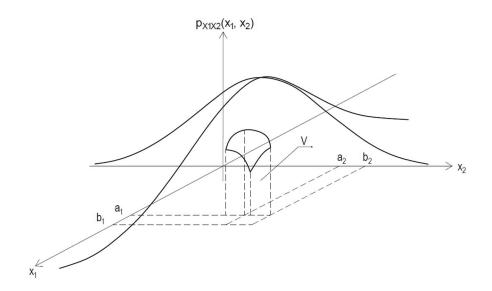


Figura 3.4: Probabilità congiunta tra le variabili aleatorie continue x_1 e x_2 - [3] – rielaborazione dell'autrice

La funzione densità di probabilità congiunta, data dal volume sotteso dalla funzione densità di probabilità, è pari all'unità:

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} p_{X_1 X_2}(x_1, x_2) dx_1 dx_2 = F(+\infty, +\infty) = 1$$
 (3.31)

Per l'elenco esaustivo delle proprietà relative a queste due funzioni, si rimanda al [3].

Nota la funzione di distribuzione di probabilità congiunta, è possibile estrarre da questa la distribuzione di una delle due variabili aleatorie, detta *marginale*.

Allora, considerate le due variabili aleatorie X_1 e X_2 e nota la funzione di distribuzione di probabilità bidimensionale $F_{X_1X_2}(x_1,x_2)$, la funzione distribuzione di probabilità marginale monodimensionale di una delle due variabili aleatorie, per esempio di X_1 , sarà data da:

$$F_{X_1X_2}(x_1, +\infty) = P(X_1 \le x_1 \cap X_2 \le +\infty) =$$

$$= \int_{-\infty}^{x_1} \int_{-\infty}^{+\infty} p_{X_1X_2}(\rho_1, \rho_2) d\rho_1 d\rho_2 \equiv F_{X_1}(x_1)$$
(3.32)

Dalla (3.32) è possibile ricavare la *funzione densità di probabilità marginale* monodimensionale di una delle variabili aleatorie, integrando la funzione densità di probabilità congiunta bidimensionale tra $-\infty$ e $+\infty$ rispetto all'altra variabile:

$$p_{X_1}(x_1) = \int_{-\infty}^{+\infty} p_{X_1 X_2}(x_1, x_2) \mathrm{d}x_2$$
 (3.33)

3.2.4 Parametri stocastici: distribuzione di ordine superiore

Per il caso di distribuzioni di ordini superiori, i parametri stocastici considerati non sono altro che un'estensione delle (3.21).

Anche in questo caso, si farà riferimento ad una distribuzione bidimensionale, le cui considerazioni possono eventualmente essere estese ai casi di distribuzioni di ordini superiori.

Si definisce, quindi, *momento di ordine* k = r + s di una distribuzione aleatoria bidimensionale, avente come componenti le variabili aleatorie X_1 e X_2 , la seguente quantità:

$$E[X_1^r X_2^s] = \int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} x_1^r x_2^s p_{X_1 X_2}(x_1 x_2) dx_1 dx_2 \qquad r + s = k \qquad (3.34)$$

I *momenti del primo ordine* di una variabile aleatoria bidimensionale coincidono con le *medie marginali* delle singole variabili, infatti:

$$E[X_1] = \mu_{X_1} \qquad E[X_2] = \mu_{X_2} \tag{3.35}$$

I momenti del secondo ordine di una variabile aleatoria bidimensionale coincidono con i valori quadratici medi delle singole componenti, detti anche momenti marginali del secondo ordine, e con il momento incrociato fra X_1 e X_2 :

$$E[X_1^2] = \varphi_{X_1}^2$$
 $E[X_2^2] = \varphi_{X_2}^2$ $E[X_1X_2] = \varphi_{X_1X_2}$ (3.36)

Noti i momenti del primo e del secondo ordine, si possono facilmente determinare le due *varianze marginali* e la *covarianza* tra X_1 e X_2 :

$$\sigma_{X_1}^2 = \varphi_{X_1}^2 - \mu_{X_1}^2 \qquad \sigma_{X_2}^2 = \varphi_{X_2}^2 - \mu_{X_2}^2 \tag{3.37}$$

$$\sigma_{X_1X_2} = E[X_1X_2] - E[X_1]E[X_2] = \varphi_{X_1X_2} - \mu_{X_1}\mu_{X_2}$$
(3.38)

La covarianza $\sigma_{X_1X_2}$ indica la misura del legame statistico presente tra le due variabili aleatorie. Il *coefficiente di correlazione*, il quale è una quantità adimensionale compresa tra 0 e 1, invece, fornisce una misura normalizzata di tale legame:

$$\rho_{X_1 X_2} = \frac{\sigma_{X_1 X_2}}{\sigma_{X_1} \sigma_{X_2}} \tag{3.39}$$

Le due variabili saranno, perciò, perfettamente correlate linearmente, se il coefficiente è pari a 1, oppure non correlate linearmente, se il coefficiente è pari a 0.

3.2.5 Distribuzioni indipendenti e condizionate

Nello studio di processi statistici è molto utile definire i concetti di indipendenza e di eventi condizionati.

Due eventi sono detti *indipendenti* se il verificarsi di uno non altera la probabilità che si verifichi l'altro. In caso contrario, i due eventi sono detti *dipendenti*.

Dati due eventi A e B, la *probabilità congiunta* $P(A \cap B)$ che questi si verifichino contemporaneamente è data da:

$$P(A \cap B) = P(A) \cdot P(B)$$
 se A e B sono eventi indipendenti (3.40)

Invece, quando un evento A è condizionato da un altro evento B, il risultato di A è influenzato dal risultato di B. Allora:

$$P(A \cap B) = P(B) \cdot P(A|B)$$
 se A e B sono eventi dipendenti (3.41)

dove

P(A|B) è detta *probabilità condizionata* e indica la probabilità che si verifichi l'evento A dopo che l'evento B si è già verificato. Da cui:

$$P(A|B) = \frac{P(A \cap B)}{P(B)}, \qquad P(B) > 0$$
 (3.42)

È possibile riscrivere la precedente relazione in termini di variabili aleatorie X_1 e X_2 , il cui dominio degli eventi è definito dall'intervallo (a, b]:

$$P(X_1 \le x_1 | a < X_2 \le b) = \frac{P(X_1 \le x_1 \cap a < x_2 \le b)}{P(a < x_2 \le b)}$$
(3.43)

Tenendo presente la (3.4), la (3.6) e le proprietà relative alle variabili aleatorie bidimensionali riportate nel [3], la (3.43) può essere vista in termini di funzione di distribuzione di probabilità (CDF) e di funzione di densità di probabilità (PDF):

$$F_{X_1}(x_1|a < x_2 \le b) = \frac{F_{X_1X_2}(x_1, b) - F_{X_1X_2}(x_1, a)}{F_{X_2}(b) - F_{X_2}(a)}$$
(3.44)

$$p_{X_1}(x_1|a < x_2 \le b) = \frac{\int_a^b p_{X_1 X_2}(x_1, x_2) dx_2}{F_{X_2}(b) - F_{X_2}(a)}$$
(3.45)

Invece, con la condizione che la variabile aleatoria $X_2 = \overline{X}$, la funzione densità di probabilità della variabile aleatoria X_1 sarà data da:

$$p_{X_1}(x_1|x_2=\bar{x}) = \frac{p_{X_1X_2}(x_1,\bar{x})}{p_{X_2}(\bar{x})}$$
(3.46)

Da cui è possibile ricavare la corrispondente funzione di distribuzione di probabilità condizionata:

$$F_{X_1}(x_1|x_2=\bar{x}) = \int_{-\infty}^{x_1} p_{X_1}(x_1|x_2=\bar{x}) \, \mathrm{d}x_1 \tag{3.47}$$

Nel caso di due eventi *A* e *B* indipendenti tra loro e ricordando la (3.40), la probabilità condizionata sarà pari a:

$$P(A|B) = \frac{P(A \cap B)}{P(B)} = P(A)$$
 (3.48)

E valgono le seguenti relazioni:

$$F_{X_1X_2}(x_1, x_2) = P(X_1 \le x_1 \cap X_2 \le x_2) =$$

$$= P(X_1 \le x_1)P(X_2 \le x_2) \equiv F_{X_1}(x_1)F_{X_2}(x_2)$$
(3.49)

$$p_{X_1X_2}(x_1, x_2) = p_{X_1}(x_1)p_{X_2}(x_2)$$
(3.50)

Per cui la (3.46) e la (3.47) diventeranno, rispettivamente:

$$p_{X_1}(x_1|x_2=\bar{x}) = \frac{p_{X_1X_2}(x_1,\bar{x})}{p_{X_2}(\bar{x})} = \frac{p_{X_1}(x_1)p_{X_2}(\bar{x})}{p_{X_2}(\bar{x})} = p_{X_1}(x_1)$$
(3.51)

$$F_{X_1}(x_1|x_2=\bar{x}) = \int_{-\infty}^{x_1} p_{X_1}(x_1|x_2=\bar{x}) \, \mathrm{d}x_1 = F_{X_1}(x_1) \tag{3.52}$$

3.2.6 Distribuzione Gaussiana

Nella teoria della probabilità, la distribuzione Normale o distribuzione di Gauss è una distribuzione di probabilità continua di solito utilizzata come prima approssimazione per descrivere variabili casuali che tendono a concentrarsi attorno ad un unico valore medio.

Inoltre, la distribuzione normale o gaussiana è tra le più importanti ed utilizzate nella teoria della probabilità. La ragione principale di questo enorme utilizzo è da attribuire sicuramente al risultato del *Teorema del Limite Centrale*, secondo il quale la somma di variabili aleatorie indipendenti, caratterizzate da una distribuzione qualsiasi, converge in una variabile aleatoria *X* con distribuzione normale o gaussiana.

Data una variabile aleatoria *X*, essa è detta normale o gaussiana se la sua funzione densità di probabilità (PDF), detta anche *funzione densità di probabilità gaussiana*, è data da:

$$p_X(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma_X} \exp\left[-\frac{1}{2} \left(\frac{x - \mu_X}{\sigma_X}\right)^2\right], \qquad -\infty < x < +\infty$$
 (3.53)

Tale funzione è una funzione continua nell'intervallo $(-\infty, +\infty)$, presenta punti di flesso in $x = \mu_X \pm \sigma_X$ e tende asintoticamente a zero per $x \to \pm \infty$. È, inoltre, simmetrica rispetto all'asse $x = \mu_X$, dove raggiunge il massimo pari a $1/(\sqrt{2\pi}\sigma_X)$.

L'importanza di tale distribuzione, quindi, risiede nella facilità di caratterizzazione, in quanto per caratterizzare le variabili aleatorie normali o gaussiane è necessaria la sola conoscenza dei momenti del primo e del secondo ordine, che coincidono con la media e la varianza.

La funzione distribuzione di probabilità (CDF) di una variabile aleatoria gaussiana è data da:

$$F_X(x) = P(X \le x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma_X} \int_{-\infty}^x \exp\left[-\frac{1}{2} \left(\frac{\rho - \mu_X}{\sigma_X}\right)^2\right] d\rho \tag{3.54}$$

Nella Figura 3.5 vengono riportate la funzione densità di probabilità $p_X(x)$ di una variabile aleatoria gaussiana e la funzione distribuzione di probabilità $F_X(x)$ di una variabile aleatoria gaussiana.

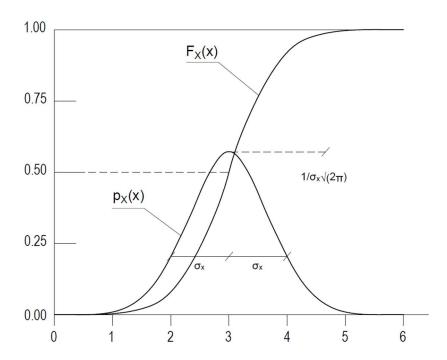


Figura 3.5: Funzione densità di probabilità $p_X(x)$ e funzione distribuzione di probabilità $F_X(x)$ di una variabile aleatoria gaussiana - [3] – rielaborazione dell'autrice

Se il momento del primo ordine risulta nullo, cioè $m_1 = \mu_X = 0$, la variabile aleatoria è detta a *media nulla*. In questo caso la funzione densità di probabilità gaussiana risulta essere simmetrica rispetto all'origine degli assi e la variabile gaussiana a media nulla risulta perfettamente individuata dalla sola conoscenza del momento del secondo ordine che, essendo nulla la media, coincide con la varianza.

Spesso, nello studio delle variabili aleatorie, è utile considerare la variabile aleatoria ridotta o standardizzata, definita come segue:

$$Z = \frac{x - \mu_X}{\sigma_X} \tag{3.55}$$

Per cui la funzione densità di probabilità gaussiana, detta *funzione densità* di probabilità della variabile aleatoria normale standardizzata, diventa:

$$p_Z(z) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{z^2}{2}} \tag{3.56}$$

Tale funzione densità è caratterizzata da media nulla e varianza unitaria.

La corrispondente funzione distribuzione di probabilità è data dalla seguente funzione:

$$F_Z(z) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_0^z \exp\left[-\frac{\rho^2}{2}\right] d\rho \tag{3.57}$$

È spesso utilizzato questo cambio di variabile per una mera questione di semplicità di calcolo, in quanto i risultati ottenuti per la forma normalizzata sono interni all'intervallo [0, 1]. Ottenuti i risultati per la forma normalizzata, la distribuzione gaussiana può essere nuovamente trasformata per ottenere i risultati desiderati, senza dover eseguire un'ulteriore integrazione numerica.

Nel caso bidimensionale, due variabili aleatorie X_1 e X_2 sono dette normali o gaussiane se la loro densità di probabilità congiunta è gaussiana bidimensionale:

$$p_{X_{1}X_{2}}(x_{1}, x_{2}) = \frac{1}{2\pi\sigma_{X_{1}}\sigma_{X_{2}}\sqrt{1 - \rho_{X_{1}X_{2}}^{2}}} \exp\left\{-\frac{1}{2(1 - \rho_{X_{1}X_{2}}^{2})} \times \left[\frac{(x_{1} - \mu_{X_{1}})^{2}}{\sigma_{X_{1}}^{2}} - \frac{2\rho_{X_{1}X_{2}}(x_{1} - \mu_{X_{1}})(x_{2} - \mu_{X_{2}})}{\sigma_{X_{1}}\sigma_{X_{2}}} + \frac{(x_{2} - \mu_{X_{2}})^{2}}{\sigma_{X_{2}}^{2}}\right]\right\}$$

$$(3.58)$$

La densità di probabilità gaussiana bidimensionale è univocamente definita se le medie marginali μ_{X_1} e μ_{X_2} , le varianze marginali $\sigma_{X_1}^2$ e $\sigma_{X_2}^2$, e la covarianza $\sigma_{X_1X_2} = \sigma_{X_1}\sigma_{X_2}\rho_{X_1X_2}$ sono note.

3.2.7 Distribuzione esponenziale

Nella teoria della probabilità, la distribuzione esponenziale è una distribuzione di probabilità continua utilizzata nella descrizione di eventi rari.

Tale distribuzione è caratterizzata da una funzione densità di probabilità (PDF) data da:

$$p(x,\lambda) = \begin{cases} \lambda e^{-\lambda x} & x \ge 0\\ 0 & x < 0 \end{cases}, \quad \lambda > 0$$
 (3.59)

Invece, la corrispondente funzione distribuzione di probabilità (CDF) è data da:

$$F(x,\lambda) = \begin{cases} 1 - e^{-\lambda x} & x \ge 0\\ 0 & x < 0 \end{cases}$$
 (3.60)

I parametri stocastici di media e varianza di una distribuzione esponenziale sono dati rispettivamente da:

$$\mu_X = \frac{1}{\lambda} \tag{3.61}$$

$$\sigma_X^2 = \frac{1}{\lambda^2} \tag{3.62}$$

3.2.8 Distribuzione di Poisson

La distribuzione di Poisson è una distribuzione di probabilità discreta utilizzata per descrivere la probabilità di eventi che si verificano in un dato intervallo di tempo, sapendo che mediamente se ne verificheranno un numero pari a λ . Tale distribuzione, quindi, viene utilizzata per la descrizione di eventi rari.

La sua funzione densità di probabilità (PDF) è data da:

$$p(n,\lambda) = \frac{\lambda^n}{n!} e^{-\lambda} \tag{3.63}$$

dove λ è il numero medio di eventi per intervallo di tempo e n è il numero di eventi per intervallo di tempo di cui si cerca la probabilità. Tale relazione vale per ogni $n \in \mathbb{N}$.

È possibile dimostrare che i parametri stocastici di media e varianza di una distribuzione di Poisson sono entrambi pari a λ :

$$\mu_X = \lambda \tag{3.64}$$

$$\sigma_X^2 = \lambda \tag{3.65}$$

3.3 Descrizione probabilistica dei processi aleatori o stocastici

La descrizione probabilistica presente nel capitolo precedente è relativa ad un evento aleatorio non dipendente dal tempo. Spesso, però, nel mondo dell'ingegneria civile ci si può trovare di fronte ad eventi aleatori dipendenti dal tempo, come per esempio l'accelerazione del terreno a seguito di un terremoto. Quando, come in questo caso, anche la variabile aleatoria dipende dal tempo, allora si parla di funzione aleatoria o *processo aleatorio*.

Si definiscono, nel modo più generale, *processo aleatorio* o *processo stocastico monodimensionale* e *processo stocastico multidimensionale*, rispettivamente, una funzione aleatoria dipendente da un parametro deterministico (per esempio il tempo) e una variabile aleatoria dipendente da più parametri deterministici. Un processo stocastico monodimensionale tempo dipendente è caratterizzato da variabili aleatorie che possono essere espresse come: $X_1 = X(t_1), X_2 = X(t_2), ..., X_n = X(t_n)$.

Nel seguito verrà indicato, perciò, con $X_1, X_2, ..., X_n$ la stessa variabile aleatoria in diversi istanti di tempo, mentre con X, Y, ... verranno indicate diverse variabili aleatorie relative ad un tempo fissato (Figura~3.6). Con le rispettive lettere minuscole si farà, invece, riferimento alle loro realizzazioni.

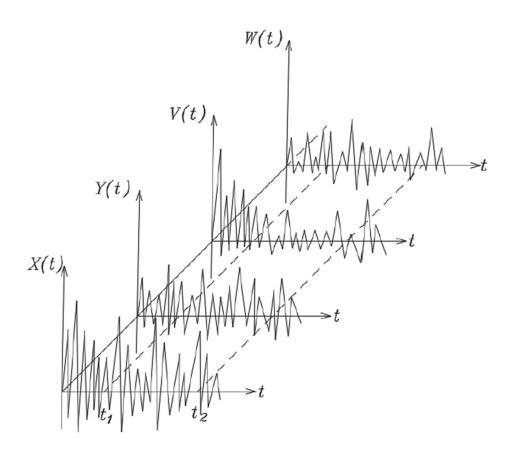


Figura 3.6: Campioni estratti dal processo aleatorio X(t): $X_1 = X(t_1) \dots X_n = X(t_n) - [4]$

3.3.1 Parametri stocastici per variabili non dipendenti dal tempo

Per un dato istante di tempo fissato t, la media può essere calcolata utilizzando l'operatore media stocastica $E[\bullet]$. Facendo riferimento alla (3.28), la media può essere, quindi, definita come:

$$\mu_X(t) = E[X(t)] = \int_{-\infty}^{+\infty} x \, p_x[x(t)] dt$$
 (3.66)

Quando, invece, si vuole calcolare la media stocastica relativa a due variabili aleatorie estratte dallo stesso processo ma per due istanti di tempo diversi, facendo riferimento alla (3.34) si otterrà la funzione di autocorrelazione $\Phi_{XX}(t_1, t_2)$:

$$\Phi_{XX}(t_1, t_2) = E[X_1 X_2] = \int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} x_1 x_2 p_{X_1 X_2}(x_1, x_2) dx_1 dx_2$$
 (3.67)

dove X_1 e X_2 sono le due variabili aleatorie estratte dal processo X(t) e relative agli istanti di tempo t_1 e t_2 .

La funzione $E[X_1X_2]$ è detta anche media a tempi multipli del secondo ordine.

La funzione di autocorrelazione è una funzione che assume sempre valori positivi ed esprime la correlazione statistica tra le variabili aleatorie in gioco, in funzione della distanza temporale o spaziale che sussiste tra tali variabili.

Se le due variabili aleatorie X(t) e Y(t) non sono estratte dallo stesso processo, in modo generale la funzione media si può esprimere tramite la *funzione di cross-correlazione* $\Phi_{XY}(t_1, t_2)$ come:

$$\Phi_{XY}(t_1, t_2) = E[X_1 Y_2] = \int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} x_1 y_2 p_{X_1 Y_2}(x_1, y_2) dx_1 dy_2$$
 (3.68)

Dalla definizione di covarianza esplicitata nella (3.38), è possibile descrivere, rispettivamente, la *funzione di autocovarianza* $K_{XX}(t_1, t_2)$ e la *funzione di cross-covarianza* $K_{XY}(t_1, t_2)$ come segue:

$$K_{XX}(t_1, t_2) = E[X_1 X_2] - E[X_1] E[X_2] =$$

$$= \int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} (x_1 - \mu_{X_1}) (x_2 - \mu_{X_2}) p_{X_1 X_2}(x_1, x_2) dx_1 dx_2$$
 (3.69)

$$K_{XY}(t_1, t_2) = E[X_1 Y_2] - E[X_1] E[Y_2] =$$

$$= \int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} (x_1 - \mu_{X_1}) (y_2 - \mu_{Y_2}) p_{X_1 Y_2}(x_1, y_2) dx_1 dy_2$$
 (3.70)

3.3.2 Parametri stocastici per il caso di processi aleatori stazionari

Per definizione di stazionarietà (cioè, che la distribuzione di probabilità resta invariata per diversi istanti di tempo, per cui le distribuzioni di probabilità per t_i e per $t_i + \tau$ restano le stesse), la densità di probabilità marginale e la densità di probabilità congiunta saranno date da:

$$p_{X_i}(x_i) = p_{X_{i+1}}(x_i + \tau) \equiv p_X(x)$$
(3.71)

e

$$p_{X_i X_{i+1}(x_i, x_{i+1})} = p_{X_1 X_2}(x_1, x_2) = p_{X_{t_i} X_{t_i + \tau}}(x_1, x_2)$$
(3.72)

dove
$$t_{i+1} - t_i = \tau$$
 $(i = 1, 2, ..., n)$

Nel caso di processi aleatori stazionari, quindi, è possibile modificare e semplificare le relazioni relative alla media, all'autocorrelazione .e all'autocovarianza.

La media stazionaria sarà, perciò, data da:

$$\mu_X(t_i) = \mu_X(t_{i+1}) = \mu_X = cost$$
 (3.73)

La funzione di autocorrelazione stazionaria sarà data da:

$$R_{XX}(t_i, t_{i+1}) = \Phi_{XX}(t_1, t_2)$$

$$= \int_{-\infty}^{+\infty} x(t_i) x(t_i + \tau) p_{X,X+\tau}(x, x + \tau) d\tau$$
(3.74)

La funzione di autocovarianza stazionaria sarà data da:

$$C_{XX}(t_i, t_{i+1}) = K_{XX}(t_1, t_2) =$$

$$= \int_{-\infty}^{+\infty} [x(t_i) - \mu_X][x(t_i + \tau) - \mu_X] p_{X,X+\tau}(x, x + \tau) d\tau \quad (3.75)$$

Si nota facilmente come la funzione di autocorrelazione stazionaria e la funzione di autocovarianza stazionaria non dipendano dai singoli valori di t_i e t_{i+1} , ma dipendono dal solo valore di $\tau = t_{i+1} - t_i$.

Nel caso di $\tau = 0$, i due istanti di tempo coincideranno ($t_i = t_{i+1}$), la funzione di autocorrelazione stazionaria convergerà al valore quadratico medio e la funzione di autocovarianza stazionaria convergerà al valore della varianza di variabili aleatorie continue.

3.3.3 Processi aleatori stazionari gaussiani

Un processo aleatorio stazionario è detto gaussiano (o normale) se tutti i momenti di ordine superiore al secondo sono nulli. Tale processo X(t) sarà, perciò, completamente identificato tramite la sola conoscenza del suo valore medio e della covarianza, per ogni coppia di istanti t_k e t_l .

Valore medio, varianza e funzione di correlazione saranno dati rispettivamente da:

$$\mu_X(t_k) = E[X_k] \tag{3.76}$$

$$\varphi_X(t_k, t_l) = E[X_k X_l] \tag{3.77}$$

$$R_{XX}(t_k, t_l) = E[X_k X_l] - E[X_k][X_l]$$
(3.78)

Per un processo aleatorio stazionario gaussiano la funzione densità di probabilità $p_{X_kX_l}(x_k, x_l)$ assume la seguente forma:

$$p_{X_k X_l}(x_k, x_l) = p_{X_k X_l}(x_k, x_l; t_k, t_l) = \frac{1}{2\pi (\text{Det}[\mathbf{R}_{XX}(t_k, t_l)])^{\frac{1}{2}}} \exp\left\{-\frac{1}{2} \boldsymbol{\xi}^T \mathbf{R}_{XX}^{-1}(t_k, t_l) \boldsymbol{\xi}\right\}$$
(3.79)

dove:

$$\boldsymbol{\xi} = \begin{bmatrix} x_k \\ x_l \end{bmatrix} - E \begin{bmatrix} X_k \\ X_l \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x_k - E[X_k] \\ x_l - E[X_l] \end{bmatrix}$$
(3.80)

e $\mathbf{R}_{XX}(t_k, t_l)$ è la matrice di correlazione:

$$\mathbf{R}_{XX}(t_k, t_l) = \begin{bmatrix} R_{XX}(t_k, t_k) R_{XX}(t_k, t_l) \\ R_{XX}(t_l, t_k) R_{XX}(t_l, t_l) \end{bmatrix} = \\
= \begin{bmatrix} E[X_k^2] E[X_k X_l] \\ E[X_l X_k] E[X_l^2] \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} (E[X_k])^2 E[X_k] E[X_l] \\ E[X_l] E[X_k] (E[X_l])^2 \end{bmatrix}$$
(3.81)

Tale matrice è una matrice simmetrica, in quanto vale la relazione

$$R_{XX}(t_k, t_l) = R_{XX}(t_l, t_k) \tag{3.82}$$

Considerata la stazionarietà del processo gaussiano analizzato, valgono le relazioni (3.73) e (3.74), per cui tale processo potrà essere definito in

modo esaustivo dalle seguenti relazioni relative al valore medio e alla funzione di correlazione:

$$E[(X(t_k))] = \mu_X = cost \tag{3.83}$$

$$R_{XX}(t_k, t_l) = R_{XX}(t_l - t_k) \equiv R_{XX}(\tau)$$
 (3.84)

La funzione di autocorrelazione del processo X(t) dipenderà, quindi, dal solo valore di τ pari a $\tau = t_l - t_k$ e assumerà valore pari a:

$$R_{XX}(\tau) = \varphi_X^2(\tau) - \mu_X^2 \tag{3.85}$$

in cui $R_{XX}(\tau) = E[X(t_k)E(t_k + \tau)] - E[X(t_k)]E[(X(t_k + \tau)]$, che, per il caso stazionario ($\tau = 0$), darà la (3.85). Tale espressione coincide con la varianza σ_X^2 . $\varphi_X(\tau)$ indica la media a tempi multipli del secondo ordine.

La funzione densità di probabilità congiunta seguirà, perciò, la seguente relazione:

$$\begin{split} p_{X_k X_l}(x_k, x_l; t_k, t_l) &\equiv p_{X_k X_l}(x_k, x_l; \tau) \\ &= \frac{1}{2\pi \sigma_X^2 \sqrt{1 - \rho_X^2(\tau)}} \times \\ &\times \exp\left\{-\frac{(x_k - \mu_X)^2 + (x_l - \mu_X)^2 - 2\rho_X(\tau)(x_k - \mu_X)(x_l - \mu_X)}{2\rho_X(\tau)(x_k - \mu_X)(x_l - \mu_X)}\right\} (3.86) \end{split}$$

dove $\rho_X(\tau)$ è l'equivalente del coefficiente di correlazione definito nella (3.39) e prende il nome di *funzione di autocorrelazione normalizzata*:

$$\rho_X(\tau) = \frac{R_{XX}(\tau)}{\sigma_X^2} \tag{3.87}$$

Dalla funzione di autocorrelazione, è possibile definire la *Densità Spettrale di Potenza* (PSD) o *autospettro* di un processo gaussiano stazionario X(t) come:

$$S_X(\omega) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} R_{XX}(\tau) e^{-i\omega\tau} d\tau$$
 (3.88)

Tale quantità coincide, a meno del fattore $1/2\pi$, alla trasformata di Fourier della funzione di autocorrelazione.

L'antitrasformata di Fourier assumerà, perciò, la seguente forma:

$$R_{XX}(\tau) = \int_{-\infty}^{+\infty} S_X(\omega) e^{i\omega\tau} d\omega$$
 (3.89)

Nella Dinamica Aleatoria e, in particolare, per processi aleatori stazionari, le relazioni (3.88) e (3.89) sono di fondamentale importanza, in quanto mettono in relazione il dominio del tempo con il dominio delle frequenze. Tali relazioni si chiamano *relazioni di Wiener-Khinchine*.

Come la condizione espressa nella (1.29), la (3.88) esiste se vale la condizione che segue:

$$\int_{-\infty}^{+\infty} |R_{XX}(\tau)| d\tau < \infty \tag{3.90}$$

Essendo la funzione di autocorrelazione una funzione pari, sarà pari anche la densità spettrale di potenza e quindi varrà che:

$$S_X(-\omega) = S_X(\omega) \tag{3.91}$$

Per un valore di $\tau = 0$ si determina il valore della varianza σ_X^2 :

$$\sigma_X^2 = R_{XX}(0) = \int_{-\infty}^{+\infty} S_X(\omega) d\omega$$
 (3.92)

Quest'ultima relazione indica che l'area sottesa dalla funzione densità spettrale di potenza $S_X(\omega)$ è pari alla varianza σ_X^2 del processo.

Come nel caso di dominio del tempo, nel dominio della frequenza le quantità necessarie per definire in modo esaustivo un processo aleatorio gaussiano saranno la media μ_X e la funzione densità spettrale di potenza $S_X(\omega)$.

3.3.4 Interpretazione energetica della densità spettrale di potenza

Indicando con x(t) la registrazione di una funzione deterministica reale (quale, per esempio, la risposta di un oscillatore elementare) di durata t_f , l'energia della funzione x(t) sarà data da:

$$\mathcal{E}_{x}(t_{f}) = \alpha \int_{0}^{t_{f}} x^{2}(t) dt$$
(3.93)

dove α ha dimensioni tali per cui il secondo membro della (3.93) abbia le dimensioni di un'energia. Perciò, se x(t) è uno spostamento, allora α sarà pari al rapporto tra la rigidezza e la durata della registrazione e $\mathcal{E}_x(t_f)$ misurerà l'energia potenziale; se x(t) è una velocità, allora α sarà

pari al rapporto tra la massa e la durata della registrazione e $\mathcal{E}_x(t_f)$ misurerà l'energia cinetica.

È possibile esprimere una funzione periodica (funzione, cioè, che si ripete in maniera identica dopo un intervallo di tempo T_f , detto periodo della funzione) attraverso la serie trigonometrica di Fourier come segue:

$$x(t) = \frac{1}{2}a_0 + \sum_{k=1}^{\infty} \left[a_k \cos(k\omega_p t) + b_k \sin(k\omega_p t) \right]$$
 (3.94)

dove $\omega_p = 2\pi/T_p$ è la frequenza circolare fondamentale della funzione periodica x(t), il termine a_0 è detto componente continua e i coefficienti a_k e b_k si determinano attraverso le seguenti relazioni:

$$a_k = \frac{2}{T_p} \int_{-\frac{T_p}{2}}^{\frac{T_p}{2}} x(t) \cos(k\omega_p t) dt ,$$

$$b_k = \frac{2}{T_p} \int_{-\frac{T_p}{2}}^{\frac{T_p}{2}} x(t) \sin(k\omega_p t) dt$$
(3.95)

Allora, a meno della costante α , l'energia della funzione periodica x(t) nel periodo T_p sarà data da:

$$\mathcal{E}_{x}(T_{p}) = T_{p} \left[\frac{a_{0}^{2}}{4} + \sum_{k=1}^{\infty} \frac{a_{k}^{2} + b_{k}^{2}}{2} \right]$$
 (3.96)

Tale quantità sarà finita in un periodo definito, mentre sarà infinita nell'intervallo temporale $(-\infty, +\infty)$.

Per poter rappresentare graficamente in maniera ottimale l'energia associata alle varie frequenze (multiple della frequenza fondamentale), risulta necessario introdurre lo *spettro di energia della funzione periodica*.

In generale, in Fisica, il termine spettro si riferisce alla suddivisione di una radiazione elettromagnetica nelle varie componenti e per cui si evidenzia l'intensità della radiazione per ogni frequenza. Nell'ambito dell'Ottica, il risultato della scomposizione sono delle righe colorate di diversa intensità per le varie frequenze; se l'intensità è costante, si ha la rappresentazione spettrale del colore bianco.

Le ordinate dello spettro di energia di una funzione periodica sono date dall'energia della funzione periodica x(t) nel periodo T_p (vedi (3.95)).

In maniera alternativa, le ordinate possono essere espresse come energia della funzione nell'unità di tempo, nota in Fisica come potenza:

$$S_x(T_p) = \frac{\mathcal{E}_x(T_p)}{T_p} = \frac{a_0^2}{4} + \sum_{k=1}^{\infty} \frac{a_k^2 + b_k^2}{2}$$
 (3.97)

Dimensionalmente tale quantità è pari al rapporto tra un'energia e un tempo.

La rappresentazione grafica di ogni termine della (3.97) in funzione delle frequenze costituisce lo spettro di potenza della funzione periodica x(t) (vedi $Figura\ 3.7b$).

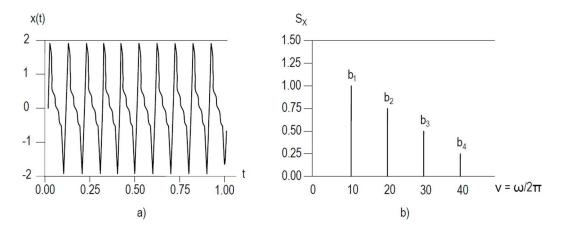


Figura 3.7: a) Storia temporale e b) spettro di potenza della funzione periodica x(t) - [3] – rielaborazione dell'autrice

Se, invece, la funzione x(t) non è una funzione periodica, è possibile ricavare lo spettro della funzione applicando la trasformata di Fourier $X(\omega)$:

$$X(\omega) = \int_{-\infty}^{+\infty} x(t)e^{-i\omega t} dt = \int_{-\infty}^{+\infty} x(t)[\cos(\omega t) - i\sin(\omega t)] dt \qquad (3.98)$$

in cui la parte reale e la parte complessa sono rispettivamente pari a:

$$\operatorname{Re} \{X(\omega)\} = \int_{-\infty}^{+\infty} x(t) \cos(\omega t) \, dt,$$

$$\operatorname{Im} \{X(\omega)\} = \int_{-\infty}^{+\infty} x(t) \sin(\omega t) \, dt$$
(3.99)

e il modulo della funzione trasformata:

$$C_{x}(\omega) = |X(\omega)| = \sqrt{X(\omega)X^{*}(\omega)} =$$

$$= \sqrt{(\operatorname{Re}\{X(\omega)\})^{2} + (\operatorname{Im}\{X(\omega)\})^{2}}$$
(3.100)

dove |•| indica il modulo di •, mentre l'asterico * indica il complesso coniugato.

Definito il modulo della funzione trasformata, è possibile riscrivere l'energia della funzione, nell'intervallo $(-\infty, +\infty)$, come segue:

$$\mathcal{E}_{x}(T_{p}) = \frac{\alpha}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} C_{x}^{2}(\omega) d\omega$$
 (3.101)

in cui il termine $C_x^2(\omega)$ rappresenta lo spettro dell'energia specifica, noto anche come densità spettrale di energia della funzione x(t) alle varie frequenze.

L'energia data dalla (3.101), riferita ad una funzione non periodica, è una quantità finita.

Nella *Figura* 3.8b si nota lo spettro di Fourier di una funzione continua caratterizzato dalla radice quadrata dell'energia specifica ($C_x(\omega)$).

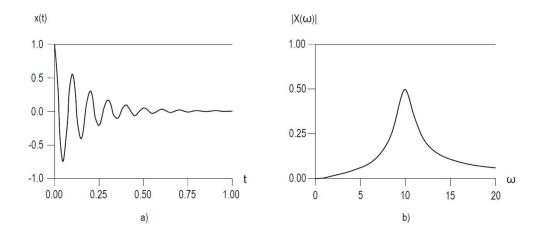


Figura 3.8: a) Storia temporale e b) spettro di Fourier di una funzione non periodica x(t) - [3] – rielaborazione dell'autrice

È possibile riassumere le principali differenze tra la rappresentazione spettrale di una funzione deterministica periodica e non periodica, definite nell'intervallo $(-\infty, +\infty)$:

- le funzioni periodiche possiedono uno spettro discontinuo, mentre le funzioni non periodiche sono caratterizzate da uno spettro continuo;
- per le funzioni periodiche l'energia totale è finita in un periodo T_p , mentre infinita per un intervallo di tempo $(-\infty, +\infty)$; per tale motivo, appare migliore la scelta di rappresentare le proprietà spettrali di tali funzioni attraverso lo spettro di potenza definito dalla (3.96);
- per le funzioni continue non periodiche e che posseggono la trasformata di Fourier, l'energia totale è finita; per tali funzioni è possibile rappresentare le proprietà spettrali attraverso la densità

spettrale di energia $C_x^2(\omega)$ oppure attraverso lo spettro di Fourier $|X(\omega)| \equiv C_x(\omega)$.

Alla luce di quanto detto finora, si consideri adesso un processo aleatorio stazionario a media nulla X(t), visto come insieme di infiniti campioni aventi valore medio e valore quadratico medio costanti. Allora, l'energia di un processo stazionario, pari alla media stocastica delle energie dei singoli campioni, può essere valutata come:

$$\mathcal{E}_X = \alpha E \left[\int_{-\infty}^{+\infty} X^2(t) \, dt \right] = \alpha \int_{-\infty}^{+\infty} \varphi_X^2 \, dt =$$

$$= \frac{\alpha}{2\pi} E \left[\int_{-\infty}^{+\infty} |X^2(\omega)| \, dt \right] = +\infty \qquad (3.102)$$

da cui si può affermare che un processo stazionario a media nulla possiede energia infinita.

Il termine $\alpha E[|X(\omega)|^2]/2\pi$ rappresenta l'energia specifica (o *densità spettrale di energia*) del processo aleatorio X(t).

Nella Dinamica Aleatoria, però, è più comune rappresentare graficamente la *densità spettrale di potenza* di un processo aleatorio stazionario, invece che l'energia specifica. Tale densità, dimensionalmente pari al rapporto tra l'energia specifica e il tempo, è una quantità sempre positiva e può essere espressa come segue:

$$S_X(\omega) = \lim_{T \to +\infty} \frac{1}{2T} \left\{ \frac{\alpha}{2\pi} E[|X(\omega, T)|^2] \right\} \equiv$$

$$\equiv \frac{\alpha}{2\pi} \lim_{T \to +\infty} \frac{1}{2T} E[|X(\omega, T)|^2]$$
(3.103)

dove 2T è l'intervallo temporale in cui sono definiti i campioni del processo aleatorio stazionario X(t) e

$$X(T,\omega) = \int_{-T}^{T} X(t)e^{-i\omega t} dt$$
 (3.104)

rappresenta la trasformata finita di Fourier di X(t) nell'intervallo (-T,T).

Definita la densità spettrale di potenza $S_X(\omega)$ (detto anche *spettro di potenza*), è possibile ricavare la potenza totale del processo aleatorio stazionario sommando tutti i contributi $S_X(\omega)$ d ω .

Come visto nella (3.92), la potenza totale di un processo aleatorio stazionario coincide con la varianza dello stesso; perciò, il processo aleatorio stazionario ha potenza totale finita se tale processo possiede varianza finita.

3.3.5 Dominio delle frequenze – caso generale

Nel modo più generale, è possibile estendere i concetti del capitolo 2.2, relativi al dominio delle frequenze e alla trasformata di Fourier, al campo delle vibrazioni casuali e, quindi, dei processi casuali.

Dato un processo casuale X(t) definito nel dominio del tempo, nel dominio delle frequenze diventa:

$$\bar{X}(\omega) = \int_{-\infty}^{+\infty} X(t)e^{-i\omega t} dt$$
 (3.105)

Dalla conoscenza del valore di $\bar{X}(\omega)$, si possono ottenere tutti i principali parametri stocastici nel dominio delle frequenze.

Essendo la trasformata di Fourier un operatore lineare, la *media del* processo $\bar{X}(\omega)$ sarà uguale alla trasformata di Fourier della media del processo stesso:

$$\mu_{\bar{X}}(\omega) = \int_{-\infty}^{+\infty} \mu_X(t) e^{-i\omega t} dt = \bar{\mu}_X(\omega)$$
(3.106)

Il processo definito nel dominio delle frequenze non è un processo reale. Per tale motivo, quando si vogliono calcolare i momenti del secondo ordine, è necessario fare riferimento ai valori complessi coniugati. Essi saranno indicati come z^* per individuare il complesso coniugato della variabile z.

L'autocorrelazione sarà, perciò, definita come segue:

$$\Phi_{\bar{X}\bar{X}}(\omega_1, \omega_2) = E[\bar{X}(\omega_1)\bar{X}^*(\omega_2)] \tag{3.107}$$

Mentre l'autocovarianza sarà data da:

$$K_{\bar{X}\bar{X}}(\omega_1, \omega_2) = E[[\bar{X}(\omega_1) - \mu_{\bar{X}}(\omega_1)] - [\bar{X}(\omega_2) - \mu_{\bar{X}}(\omega_2)]^*]$$
(3.108)

L'applicazione di un'analisi nel dominio della frequenza comporta, però, alcune difficoltà, in quanto le espressioni esplicitate sopra non esistono per molti casi di interesse, come per il caso di un processo stazionario.

In generale, però, è possibile ricavare la funzione densità spettrale di potenza S_{XX} o, nel caso di termini misti S_{XY} , tramite l'applicazione della trasformata di Fourier della funzione di autocorrelazione vista nella (3.107):

$$S_{XX}(\omega_1, \omega_2) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} \Phi_{XX}(t_1, t_2) e^{-i\omega t} dt$$
 (3.109)

$$S_{XY}(\omega_1, \omega_2) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} \Phi_{XY}(t_1, t_2) e^{-i\omega t} dt$$
 (3.110)

Chiaramente, le trasformate inverse assumeranno le forme seguenti:

$$\Phi_{XX}(t_1, t_2) = \int_{-\infty}^{+\infty} S_{XX}(\omega_1, \omega_2) e^{i\omega t} d\omega$$
 (3.111)

$$\Phi_{XY}(t_1, t_2) = \int_{-\infty}^{+\infty} S_{XY}(\omega_1, \omega_2) e^{i\omega t} d\omega$$
 (3.112)

I valori delle frequenze saranno sempre positivi, poiché fisicamente non è possibile definire dei valori di frequenze negativi. Si definisce, quindi, una densità spettrale di potenza unilaterale (o anche spettro di potenza unilaterale), che conterrà solo le frequenze positive del processo. Per tale motivo, per avere lo stesso contenuto energetico sotteso dalla funzione densità spettrale di potenza (che resta definita nel dominio $(-\infty, +\infty)$), sarà necessario moltiplicare per 2 i valori:

$$G_X(\omega) = 2 S_{XX}(\omega) \tag{3.113}$$

La densità spettrale di potenza unilaterale $G_X(\omega)$ sarà, quindi, una funzione reale, sempre positiva e definita nel dominio $[0, +\infty)$.

Qualora, invece della frequenza circolare ω si utilizzasse il valore normalizzato f, sarà necessario moltiplicare per 2π :

$$G_X(f) = 4\pi S_{XX}(\omega) \tag{3.114}$$

3.3.6 Momenti spettrali

Si definiscono *momenti spettrali* $\lambda_{i,X}$ di ordine i i momenti della densità spettrale di potenza unilaterale $G_X(\omega)$ rispetto all'asse $\omega=0$:

$$\lambda_{i,X} = \int_0^{+\infty} \omega^i G_X(\omega) \, d\omega \qquad i = 0, 1, \dots$$
 (3.115)

Il momento di ordine zero rappresenta l'area sottesa dalla funzione $G_X(\omega)$ e, per la (3.92), coincide con la varianza del processo X(t):

$$\lambda_{0,X} = \int_0^{+\infty} G_X(\omega) \, d\omega = \int_0^{+\infty} 2S_X(\omega) \, d\omega \equiv \int_{-\infty}^{+\infty} S_X(\omega) \, d\omega =$$

$$= \sigma_X^2$$
(3.116)

Tale relazione mostra come un processo stazionario avrà un contenuto energetico finito se possiede una varianza finita e viceversa.

I rapporti tra i momenti di ordine superiore e il momento di ordine zero forniscono informazioni utili.

Per esempio, tramite il rapporto tra il momento spettrale del primo ordine e quello di ordine zero è possibile valutare l'ascissa $\omega_{1,X}$ del baricentro dell'area sottesa dalla funzione $G_X(\omega)$:

$$\omega_{1,X} = \frac{\int_0^{+\infty} \omega G_X(\omega) \, d\omega}{\int_0^{+\infty} G_X(\omega) \, d\omega} = \frac{\lambda_{1,X}}{\lambda_{0,X}}$$
(3.117)

Invece, tramite il rapporto tra il momento spettrale del secondo ordine e quello di ordine zero, è possibile determinare il raggio giratore $\omega_{2,X}$ dell'area sottesa dalla funzione $G_X(\omega)$:

$$\omega_{2,X} = \left(\frac{\int_0^{+\infty} \omega^2 G_X(\omega) \, d\omega}{\int_0^{+\infty} G_X(\omega) \, d\omega}\right)^{\frac{1}{2}} = \sqrt{\frac{\lambda_{2,X}}{\lambda_{0,X}}}$$
(3.118)

È possibile definire anche il raggio giratore baricentrico $\overline{\omega}_{2,X}$ di un'area; tale quantità corrisponde alla dispersione dell'area attorno al suo baricentro:

$$\overline{\omega}_{2,X} = \sqrt{\frac{1}{\lambda_{0,X}} \left(\lambda_{2,X} - \frac{\lambda_{1,X}^2}{\lambda_{0,X}} \right)} = q_X \omega_{2,X}$$
 (3.119)

in cui q_X rappresenta un parametro adimensionale, detto *parametro della larghezza di banda dello spettro di potenza unilaterale*, che cresce al crescere della banda della densità spettrale di potenza ed è definito come:

$$q_X = \sqrt{1 - \frac{\lambda_{1,X}^2}{\lambda_{0,X} \lambda_{2,X}}} \qquad 0 \le q_X \le 1$$
 (3.120)

Un valore piccolo di q_X determina una densità spettrale di potenza a banda stretta, mentre un valore grande di q_X determina una densità spettrale di potenza a banda larga.

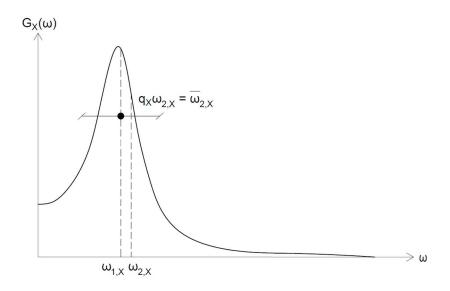


Figura 3.9: Interpretazione geometrica dei parametri spettrali - [3] – rielaborazione dell'autrice

3.3.7 Descrizione di particolari processi

Vengono di seguito descritti alcuni particolari processi aleatori stazionari a media nulla, già precedentemente introdotti nel paragrafo 3.1:

a) Processo aleatorio sinusoidale:

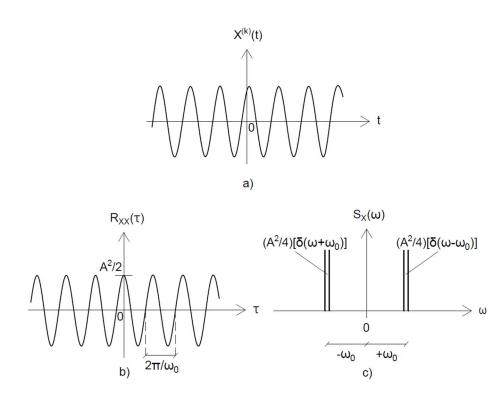


Figura 3.10: Processo aleatorio sinusoidale: a) campione del processo b) funzione di autocorrelazione c) densità spettrale di potenza - [3] – rielaborazione dell'autrice

Un processo aleatorio stazionario a media nulla è *sinusoidale* se il suo campione segue la seguente relazione:

$$X^{(k)}(t) = A\sin(\omega_0 t + \theta^{(k)})$$
(3.121)

dove θ è la variabile aleatoria assunta con densità uniforme all'interno dell'intervallo $[0, 2\pi]$:

$$p_{\theta}(\theta) = \frac{1}{2\pi} \qquad 0 \le \theta \le 2\pi \tag{3.122}$$

La funzione di autocorrelazione data dalla (3.74), può essere riscritta per il caso di processo aleatorio sinusoidale come:

$$R_{XX}(\tau) = E[X(t)X(t+\tau)] =$$

$$= A^2 \int_0^{2\pi} \sin(\omega_0 t + \theta) \sin[\omega_0(t+\tau) + \theta] p_\theta(\theta) d\theta \quad (3.123)$$

e sostituendo il valore della densità della (3.122):

$$R_{XX}(\tau) = \frac{A^2}{2\pi} \int_0^{2\pi} \sin(\omega_0 t + \theta) \sin[\omega_0 (t + \tau) + \theta] d\theta =$$

$$= \frac{A^2}{2} \cos(\omega_0 t)$$
(3.124)

Eseguendo la trasformata di Fourier della funzione di autocorrelazione, si ottiene la densità spettrale di potenza:

$$S_X(\omega) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{A^2}{2} \cos(\omega_0 \tau) e^{-i\omega \tau} d\tau =$$

$$= \frac{A^2}{4} [\delta(\omega + \omega_0) + \delta(\omega - \omega_0)]$$
(3.125)

dove con $\delta(\bullet)$ si indica la funzione impulso unitario (o delta di Dirac).

Di conseguenza, la densità spettrale di potenza unilaterale e i momenti spettrali saranno rispettivamente dati da:

$$G_X(\omega) = \frac{A^2}{2}\delta(\omega - \omega_0)$$
 (3.126)

$$\lambda_{i,X} = \omega_0^i \lambda_{0,X} \qquad \forall i \tag{3.127}$$

Come si evidenzia dalla *Figura* 3.10*b*, la funzione di autocorrelazione oscilla tra due massimi, mentre la densità spettrale (*Figura* 3.10*c*), risulta avere l'energia concentrata su due sole frequenze simmetriche.

Sostituendo, invece, la (3.127) nella (3.120) si ottiene un parametro della larghezza di banda dello spettro di potenza unilaterale nullo $q_X = 0$. Tale risultato è correlato alla presenza di una sola frequenza che caratterizza il processo.

b) Processo a banda stretta

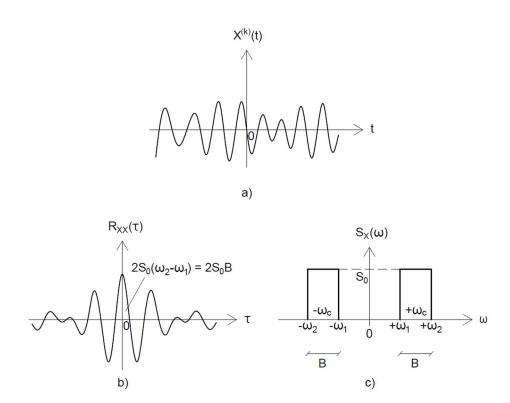


Figura 3.11: Processo aleatorio stazionario a banda stretta: a) campione del processo b) funzione di autocorrelazione c) densità spettrale di potenza - [3] – rielaborazione dell'autrice

Un processo aleatorio stazionario a media nulla è detto *a banda stretta* se la sua densità spettrale di potenza risulta diversa da zero solo in un campo stretto di frequenze di ampiezza $B = |\omega_2 - \omega_1|$. Tale densità spettrale è caratterizzata da una frequenza circolare centrale pari a $\omega_c = \pm (\omega_1 + \omega_2)/2$.

Un processo aleatorio a banda stretta è detto *processo aleatorio ideale* a banda stretta se la densità spettrale di potenza è data da:

$$S_X(\omega) = \begin{cases} S_0 & \omega_1 \le |\omega| \le \omega_2 \\ 0 & altrove \end{cases}$$
 (3.128)

Tale processo sarà un processo aleatorio a banda stretta se per S_0 si assume l'ordinata dello spettro di potenza corrispondente alla sua frequenza centrale ω_c .

Considerando la (3.89) e la (3.128), la funzione di autocorrelazione sarà data da:

$$R_{XX}(\tau) = 2 \int_{\omega_1}^{\omega_2} S_0 \cos(\omega \tau) d\omega = 2S_0 \left(\frac{1}{\tau} \sin(\omega \tau) \right) \Big|_{\omega_1}^{\omega_2} =$$

$$= \frac{2S_0}{\tau} \left[\sin(\omega_2 \tau) - \sin(\omega_1 \tau) \right] =$$

$$= 2S_0 B \left(\frac{\sin\left(\frac{B}{2}\tau\right)}{\frac{B}{2}\tau} \right) \cos(\omega_c \tau)$$
(3.129)

Valutandone il limite si otterrà la varianza:

$$\sigma_X^2 = \lim_{\tau \to 0} R_{XX}(\tau) = 2S_0 B = 2S_0(\omega_2 - \omega_1)$$
 (3.130)

I processi aleatori a banda stretta sono caratterizzati dall'avere una potenza preponderante in corrispondenza della frequenza centrale ω_c e una densità spettrale di potenza concentrata attorno alla frequenza centrale. Allora i momenti spettrali e il parametro della larghezza di banda dello spettro di potenza unilaterale saranno rispettivamente dati da:

$$\lambda_{0,X} = 2S_0 B$$
 $\lambda_{1,X} = 2S_0 B \omega_c$ $\lambda_{2,X} = 2S_0 B \left(\omega_c^2 + \frac{B}{12}\right)$ (3.131)

$$q_X = \frac{B}{\sqrt{12\omega_c^2 + B^2}} \cong \frac{B}{\omega_c \sqrt{12}} \qquad B \ll \omega_c \tag{3.132}$$

Per valori della larghezza della banda che tendono a zero ($B \to 0$), anche il parametro q_X tenderà a zero e il processo aleatorio a banda stretta convergerà verso il caso sinusoidale.

c) Processo a banda larga

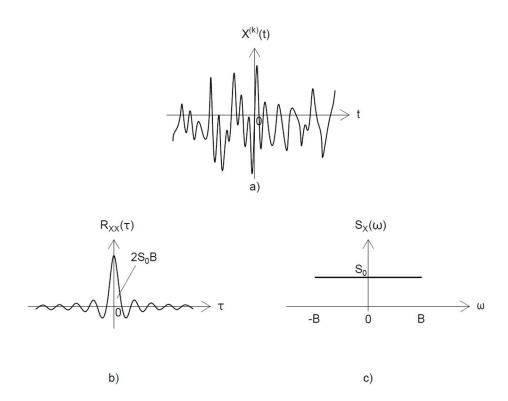


Figura 3.12: Processo aleatorio stazionario a banda larga: a) campione del processo b) funzione di autocorrelazione c) densità spettrale di potenza - [3] – rielaborazione dell'autrice

Un processo aleatorio stazionario a media nulla è detto *a banda larga* se la sua densità spettrale di potenza risulta diversa da zero in un intervallo ampio.

Se la densità spettrale di potenza è uniforme, allora i processi aleatori a banda larga sono detti *processi aleatori ideali a banda larga* e saranno caratterizzati da:

$$S_X(\omega) = \begin{cases} S_0 & |\omega| \le B \\ 0 & |\omega| > B \end{cases}$$
 (3.133)

Anche in questo caso, la funzione di autocorrelazione si ricerca sostituendo la (3.133) nella (3.89):

$$R_{XX}(\tau) = 2 \int_{\omega_1}^{\omega_2} S_0 \cos(\omega \tau) d\omega \approx 2 \int_0^B S_0 \cos(\omega \tau) d\omega =$$

$$= 2S_0 B \left(\frac{\sin(B\tau)}{B\tau} \right)$$
(3.134)

I momenti spettrali e il parametro della larghezza di banda dello spettro di potenza unilaterale saranno rispettivamente dati da:

$$\lambda_{0,X} = 2S_0 B$$
 $\lambda_{1,X} = S_0 B^2$ $\lambda_{2,X} = \frac{2S_0 B^3}{3}$ (3.135)

$$q_X = 1/2 (3.136)$$

d) Processo aleatorio bianco

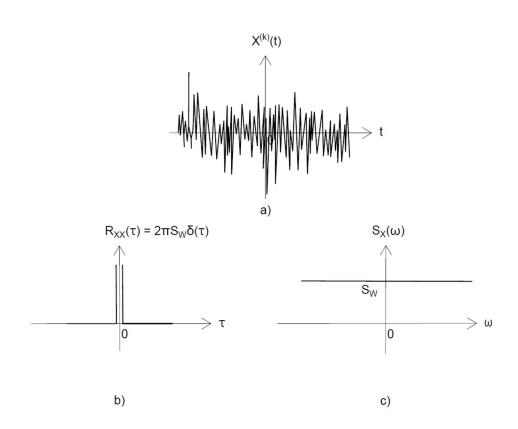


Figura 3.13: Processo aleatorio bianco: a) campione del processo b) funzione di autocorrelazione c) densità spettrale di potenza - [3] – rielaborazione dell'autrice

Un processo aleatorio stazionario a media nulla è detto *processo* aleatorio bianco se ha potenza specifica costante per tutte le frequenze. Tra i processi bianchi, quello più utilizzato è il processo ideale di rumore bianco, indicato con W(t).

La densità spettrale sarà, quindi, data da:

$$S_X(\omega) = S_W \qquad \forall \omega \tag{3.137}$$

E, tramite la (3.89), la corrispondente funzione di autocorrelazione:

$$R_{XX}(\tau) \equiv R_W(\tau) = \int_{-\infty}^{+\infty} S_0 e^{i\omega\tau} d\omega = S_0 \int_{-\infty}^{+\infty} e^{i\omega\tau} d\omega =$$

$$= 2\pi S_W \delta(\tau)$$
(3.138)

dove $\delta(\bullet)$ indica la funzione impulso unitario (o delta di Dirac).

Tale tipologia di processo è caratterizzata dalla non regolarità, in quanto ciò che succede in un istante non ha nessuna dipendenza statistica con ciò che succederà ad un istante anche infinitamente vicino.

Inoltre, data la potenza infinita e quindi infinita anche l'area sottesa dalla funzione densità spettrale di potenza, sarà infinita anche la varianza di tale processo. Chiaramente questa è un'idealizzazione matematica, poiché nella realtà non può esistere un processo avente varianza infinita. Tale idealizzazione, però, è molto utilizzata nella Dinamica Aleatoria, soprattutto nel trattamento della teoria dei filtri (tale teoria verrà sviluppata all'interno del paragrafo 4.1 di questa trattazione); il rumore bianco viene spesso assunto come input per un filtro, in modo da riuscire a descrivere correttamente fenomeni fisici complessi, ma anche per ricavare formulazioni semplici.

Per questa tipologia di processo i momenti spettrali e il parametro della larghezza di banda dello spettro di potenza unilaterale saranno rispettivamente dati da:

$$\lambda_{i,X} = \infty \qquad i = 0, 1, 2 \tag{3.139}$$

$$q_X = 1 \tag{3.140}$$

3. Teoria della probabilità e variabili aleatorie – Richiami di dinamica stocastica

4 Analisi aleatoria di sistemi forzati da processi aleatori

La risposta di un sistema forzato da un processo aleatorio (per esempio, quello gaussiano) sarà anch'essa un processo aleatorio caratterizzato dai parametri statistici precedentemente introdotti nel capitolo 3 (momenti, funzione densità di probabilità, ecc...).

Molti processi aleatori che si verificano sulle strutture reali come conseguenza di fenomeni naturali (quali sisma, vento, ecc...) possono essere modellati come processi aleatori bianchi filtrati: essi saranno processi aleatori stazionari (o non stazionari) soluzioni di sistemi di equazioni differenziali lineari semplici da risolvere. Se la densità spettrale di potenza costante del processo rumore bianco viene filtrata dalla funzione di trasferimento dell'energia del filtro, tali processi aleatori vengono detti filtrati.

Per le nozioni teoriche dei prossimi sottoparagrafi il riferimento è stato, ancora una volta, [3].

4.1 Teoria dei filtri

Le operazioni di filtraggio vengono spesso utilizzate nella Dinamica Aleatoria quando si vuole effettuare una analisi aleatoria nel dominio del tempo. Tale tipologia di analisi risulta molto efficacie se la forzante è un processo bianco, in quanto è possibile valutare le statistiche della risposta strutturale risolvendo sistemi di equazioni differenziali abbastanza semplici. Proprio per questo motivo, nelle operazioni di filtraggio i processi aleatori bianchi sono spesso utilizzati come segnali di input.

L'operazione di filtraggio può essere rappresentata tramite equazioni differenziali del tipo:

$$\mathcal{L}[X(t)] = F(t) \tag{4.1}$$

dove $\mathcal{L}[\cdot]$ è l'operatore differenziale che descrive le proprietà principali del sistema, X(t) è il segnale di output del sistema e F(t) è il segnale di input del sistema.

L'obiettivo di tale equazione differenziale sarà la ricerca e il calcolo della risposta X(t) per una data forzante in ingresso F(t), per cui si può scrivere l'operazione inversa, detta operazione di filtraggio del segnale forzante F(t):

$$X(t) = \mathcal{L}^{-1}[F(t)] \tag{4.2}$$

Si definisce filtro, perciò, il sistema fisico attraversato dal segnale forzante F(t) che fornisce la risposta X(t) (Figura 4.1).

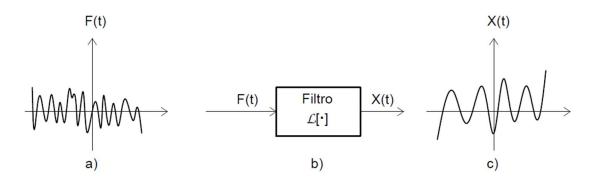


Figura 4.1: Schema dell'operazione di filtraggio: a) segnale forzante in ingresso b) filtro c) segnale in uscita - [3] – rielaborazione dell'autrice

Un filtro è detto lineare se, ad una combinazione lineare di più segnali in ingresso, corrisponde una risposta data dalla stessa combinazione lineare. Se tale filtro lineare possiede anche coefficiente costanti, la rappresentazione del filtraggio risulta maggiormente significativa nel dominio della frequenza, dove il segnale di input è legato a quello di output dalla seguente relazione:

$$X(\omega) = H_f(\omega)F(\omega) \tag{4.3}$$

dove $H_f(\omega)$ è una funzione che prende il nome di *funzione di trasferimento del filtro*; tale funzione è pari alla trasformata di Fourier del segnale di output del filtro avente come segnale in input la delta di Dirac:

$$H_f(\omega) = \mathcal{F}[\mathcal{L}^{-1}[\delta(t)]] \tag{4.4}$$

Inoltre, è possibile distinguere un filtro a banda stretta da un filtro a banda larga: un filtro è detto a banda stretta se il modulo di $H_f(\omega)$ presenta un picco molto pronunciato e se tutta la funzione si concentra attorno a tale picco; un filtro, invece, è detto a banda larga se il modulo di $H_f(\omega)$ non presenta picchi pronunciati (*Figura* 4.2).

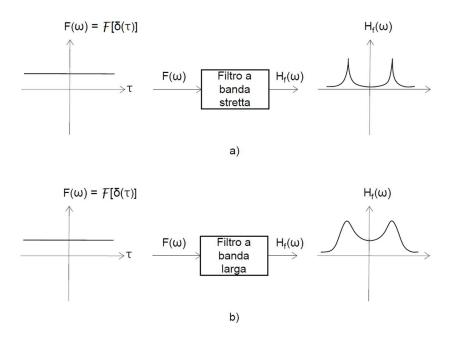


Figura 4.2: Rappresentazione grafica delle funzioni di trasferimento nel caso di a) filtro a banda stretta e b) filtro a banda larga - [3] – rielaborazione dell'autrice

Nello schema riportato in *Figura* 4.3, viene esplicitata la rappresentazione di un processo forzante filtrato monovariato, caratterizzato, cioè, dalla presenza di un unico segnale in ingresso.

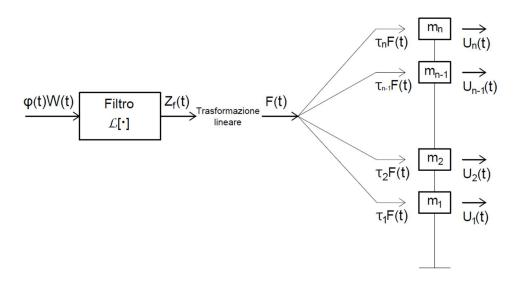


Figura 4.3: Rappresentazione di un processo forzante filtrato monovariato - [3] – rielaborazione dell'autrice

4.2 Affidabilità strutturale

Durante la progettazione, per poter considerare le possibili incertezze aleatorie nei materiali, nei carichi e nei modelli utilizzati, viene introdotto ed utilizzato il concetto di *affidabilità strutturale*, che coincide con la *probabilità di successo della struttura*: quando un evento è certo, tale probabilità avrà valore pari ad uno, mentre il suo complemento a uno rappresenta la *probabilità di crisi o fallimento* della struttura stessa.

Quando si segue, quindi, tale strada progettuale, è bene introdurre un livello di affidabilità della struttura, cioè un valore della probabilità per cui la resistenza R di un qualsiasi elemento della struttura sia maggiore della corrispondente sollecitazione S agente su di esso. Sarà, quindi, possibile definite la probabilità di successo P_S (o affidabilità A) e la probabilità di fallimento P_C tramite le seguenti relazioni:

$$P_S \equiv A = P[S \le R]$$
 $P_C = 1 - P_S = P[S > R]$ (4.5)

Le variabili S ed R sono variabili aleatorie definite dalle funzioni densità di probabilità $p_S(s)$ e $p_R(r)$: come si evidenzia dalla Figura 4.4, tali funzioni presentano una zona comune, per cui esiste una piccola probabilità non nulla che la probabilità relativa alla sollecitazione sia maggiore di quella relativa alla resistenza. Il progettista, quindi, progetterà una struttura tanto più affidabile quanto più piccola sarà tale area comune di sovrapposizione (è possibile ottenere tale risultato se i valori medi delle due variabili aleatorie sono molto distanti tra loro e se possiedono deviazioni standard molto piccole).

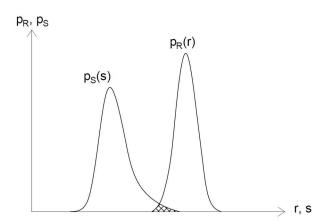


Figura 4.4: Funzioni densità di probabilità delle variabili aleatorie resistenza R e sollecitazione S - [3] – rielaborazione dell'autrice

Quando si trattano, invece, strutture soggette ad azioni dinamiche dipendenti dal tempo, è necessario introdurre un intervallo temporale [0,T] nel quale si ricerca la probabilità di successo. Solitamente, in tale intervallo di tempo considerato, la crisi avverrà per un dato elemento strutturale a causa del

raggiungimento di una sollecitazione superiore al corrispondente valore di resistenza limite. Considerando proprio questo caso e confrontando il generico processo risposta X(t) con il corrispondente valore di resistenza limite b > 0 all'interno dell'intervallo considerato [0,T], la probabilità di successo dell'elemento strutturale in esame per processi monodimensionali sarà data da:

$$P_{S}(T,b) \equiv A(T,b) = P[|X(t)| \le b; 0 \le t \le T] = P[X_{max}(T) \le b]$$
(4.6)

dove $|\cdot|$ indica il valore assoluto, b è una variabile positiva aleatoria che definisce il dominio del processo aleatorio X(t) e $X_{max}(t)$ indica il massimo del valore assoluto di X(t) nell'intervallo [0,T].

Quando si trattano processi monodimensionali, il dominio di sicurezza viene definito barriera bilaterale $\pm b$ ed è definito tra le due barriere -b e +b.

4.2.1 Caso particolare: processi di risposta gaussiani a media nulla

Per poter eseguire una corretta valutazione della probabilità di successo nel caso di processi di risposta gaussiani a media nulla, sarà necessario determinare:

- il <u>numero medio di attraversamenti</u> di una barriera bilaterale da parte del processo aleatorio X(t);
- l'<u>istante di primo passaggio</u> di una data barriera bilaterale da parte di un processo aleatorio X(t).

• Numero medio di attraversamenti:

Se contemporaneamente si ha che X(t) = b e che $\dot{X}(t) > 0$, si può affermare che ad un certo istante t avverrà un attraversamento con pendenza positiva unilaterale deterministica di livello b.

Sarà, perciò, possibile definire il *numero medio di attraversamenti con pendenza positiva della soglia b nell'unità di tempo* la seguente quantità:

$$N_X^+(b;t) = \int_0^\infty \dot{x} p_{X\dot{X}}(b;\dot{x};t) \,\mathrm{d}\dot{x}$$
 (4.7)

dove $p_{X\dot{X}}$ è la probabilità congiunta dei processi aleatori X(t) e $\dot{X}(t)$.

Se il processo è stazionario, la (4.7) diventa:

$$N_X^+(b;t) \equiv N_X^+(b) = \int_0^\infty \dot{x} p_{X\dot{X}}(b;\dot{x}) \,\mathrm{d}\dot{x}$$
 (4.8)

Noto il valore di $N_X^+(b;t)$, si definisce il numero medio di attraversamenti con pendenza positiva nell'intervallo temporale [0,T] della barriera unilaterale b la seguente quantità:

$$\overline{N_X^+}(b;T) = \int_0^T N_X^+(b;t) dt \qquad processi non stazionari
\overline{N_X^+}(b;T) = N_X^+(b)T \qquad processi stazionari$$
(4.9)

Analogamente alla (4.7) il numero medio di attraversamenti con pendenza negativa della soglia –b nell'unità di tempo è definito come:

$$N_X^-(-b;t) = -\int_{-\infty}^0 \dot{x} p_{X\dot{X}}(-b;\dot{x};t) \,\mathrm{d}\dot{x}$$
 (4.10)

Dalle (4.7) e (4.10) è possibile ricavare il numero medio di attraversamenti $N_X^{\pm}(b;t)$ totali con pendenza sia positiva che negativa della barriera unilaterale b nell'unità di tempo:

$$N_X^{\pm}(b;t) = N_X^{+}(b;t) + N_X^{-}(-b;t) = \int_{-\infty}^{+\infty} |\dot{x}| p_{X\dot{X}}(b;\dot{x};t) \,\mathrm{d}\dot{x} \tag{4.11}$$

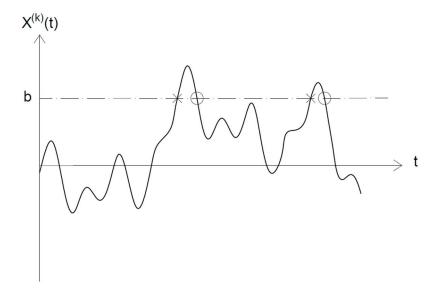


Figura 4.5: Attraversamenti con pendenza positiva (x) e negativa (0) di una barriera unilaterale b da parte di un campione del processo aleatorio X(t) - [3] – rielaborazione dell'autrice

Per il caso di processi gaussiani stazionari a media nulla, il *numero medio* di attraversamenti nell'unità di tempo con pendenza positiva di una barriera b è dato da:

$$N_X^+(b) = \frac{1}{2\pi} \frac{\sigma_{\dot{X}}}{\sigma_X} \exp\left(-\frac{b^2}{2\sigma_X^2}\right)$$
 (4.12)

Inoltre, sapendo che $p_{X\dot{X}}(b;\dot{x};t) \equiv p_{X\dot{X}}(-b;-\dot{x};t)$, è possibile affermare che il *numero medio totale di attraversamenti del processo aleatorio X(t) della barriera bilaterale* $\pm b$ *nell'unità di tempo N_X(b;t)*, è pari al doppio del numero medio di attraversamenti nell'unità di tempo della barriera unilaterale +b con pendenza positiva N_X^+ :

$$N_X(b;t) \equiv N_{|X|}^+(b;t) = 2N_X^+(b;t) \tag{4.13}$$

Per la conoscenza di tutti i parametri spettrali relativi a tale tipologia di processi, si rimanda al [3].

• Istante di primo passaggio:

È possibile definire l'istante in cui il processo |X(t)| supera per la prima volta il livello b come l'istante di primo passaggio $T_1(b)$ di una data barriera bilaterale $\pm b$ da parte del processo aleatorio X(t).

Tale definizione è legata a quella di affidabilità, in quanto è possibile confrontare la probabilità di successo con la probabilità che l'istante di primo passaggio $T_1(b)$ sia successivo all'intervallo di osservazione [0,T] del processo aleatorio:

$$P_S(T, b) \equiv A = P[T_1(b) \ge T]$$
 (4.14)

In alcuni casi appare necessario valutare la probabilità che si abbiano N attraversamenti indipendenti nell'intervallo temporale [0, T] della barriera bilaterale $\pm b$:

$$P[X_N(T) = N] = \frac{E[X_N(T)]^N}{N!} \exp\{-E[X_N(T)]\}$$
 (4.15)

dove $E[X_N(T)]$ è il valore medio del processo $X_N(T)$ (processo aleatorio contatore di Poisson) che, per il caso di processi stazionari, risulta essere pari a $E[X_N(T)] = N_{|X|}^+(b)T$. La (4.15) per il caso stazionario diventa:

$$P[X_N(T) = N] = \frac{\left[N_{|X|}^+(b)T\right]^N}{N!} \exp\{-\left[N_{|X|}^+(b)T\right]\}$$
(4.16)

Quando si verifica il caso di N=0, significa che vi è la probabilità che non ci siano attraversamenti della barriera b nell'intervallo [0,T]. Tale probabilità sarà pari alla probabilità che l'istante di primo passaggio $T_1(b)$ sia successivo all'istante T. Allora, per il caso stazionario si potrà scrivere che:

$$P_S(T,b) = P[T_1(b) \ge T] = P[X_N(T) = 0] = \exp[-N_{|X|}^+(b)T]$$
 (4.17)

Se alle considerazioni fatte per la (4.17) si aggiunge anche che per T=0 il processo aleatorio |X(t)| non superi la barriera unilaterale b, allora essa diventa:

$$P_{S}(T,b) = P[T_{1}(b) \ge 0]P[T_{1}(b) \ge T \mid |X(0)| \le b] =$$

$$= P_{S}(0,b)\exp[-\alpha_{X}(b)T]$$
(4.18)

dove $P_S(0,b) \equiv P[T_1(b) \ge 0] = 1$, cioè che l'instante di primo passaggio non sia precedente all'istante iniziale T = 0, qualunque sia la soglia b, e dove $\alpha_X(b) = N^+_{|X|}(b;t)$ indica la funzione di rischio per un dato dominio di sicurezza $\pm b$.

Nota la probabilità di successo $P_S(T, b)$, è possibile ricavare la *possibilità di crisi o fallimento* come complemento a uno:

$$P_C(T,b) = P[T_1(b) < T] = 1 - P_S(T,b)$$
(4.19)

Per ulteriori considerazioni, si rimanda al capitolo 8 del [3].

4.3 Modellazione aleatoria della forzante sismica

Per una corretta progettazione, è necessario uno studio approfondito della dinamica delle strutture, ponendo particolare attenzione ad una corretta modellazione dell'azione sismica. Nota la natura casuale di tale forza, essa sarà modellata come un processo aleatorio avente determinate caratteristiche.

L'azione sismica che impatta una struttura avrà delle proprietà associate a quelle del terremoto che la genera.

I terremoti non sono altro che uno scorrimento tettonico delle faglie presenti nella crosta terrestre. Tale scorrimento genera delle forze di taglio, le quali, nel momento in cui la resistenza limite al taglio dei materiali attraversati viene superata, liberano in modo improvviso enormi quantità di energia accumulata. In modo molto generale, un terremoto può essere schematizzato come la propagazione di onde sismiche orizzontali, le quali generano il caratteristico moto ondulatorio.

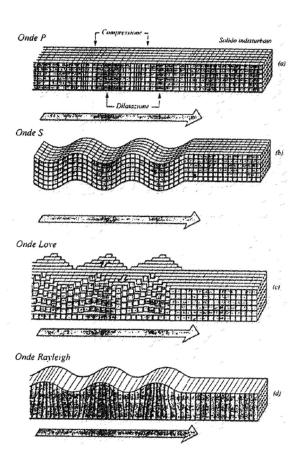


Figura 4.6: Onde sismiche: a) longitudinali; b) trasversali; c) e d) superficiali - [3]

È possibile classificare i terremoti in base alla loro intensità o alla loro magnitudo. L'intensità è una misura soggettiva degli effetti causati dal terremoto analizzato sul territorio; viene misurata tramite la scala Mercalli, la quale si basa sugli effetti visivi causati dal terremoto e dai fenomeni avvertiti dalle persone. La magnitudo, invece, è una misura oggettiva dello spostamento del terreno registrato dai sismografi, messo a confronto con lo spostamento prodotto da un terremoto campione in scala logaritmica. Essa misura, perciò, la quantità di energia liberata durante il terremoto analizzato. Tale quantità viene misurata tramite la scala Richter.

Da un punto di vista prettamente matematico, invece, l'azione sismica può essere rappresentata attraverso una forza di inerzia $f_I(t) = -m \left(\ddot{u}_g(t) + \ddot{u}(t)\right)$ proporzionale alla massa della struttura in esame e all'accelerazione totale (dove con \ddot{u}_g si indica l'accelerazione dovuta al movimento del terreno). Dalle informazioni viste in precedenza per un oscillatore smorzato forzato, per il caso di oscillatore ad un grado di libertà smorzato e forzato da forzante sismica, l'equazione di equilibrio dinamico assumerà la forma seguente:

$$m\left(\ddot{u}_g(t) + \ddot{u}(t)\right) + c\dot{u}(t) + ku(t) = 0 \tag{4.20}$$

La (4.20) si può riscrivere come:

$$m\ddot{u}(t) + c\dot{u}(t) + ku(t) = -m\ddot{u}_a(t) \equiv F(t) \tag{4.21}$$

dove con F(t) si indica la forzante esterna, che nel caso specifico equivale alla forzante sismica.

All'aspetto matematico della caratterizzazione dell'azione sismica, si affianca quello ingegneristico, per cui risulta interessante la conoscenza degli accelerogrammi conseguenti all'evento sismico oggetto di studio. Tali accelerogrammi mostrano l'andamento, la durata e i picchi massimi delle accelerazioni registrate (*Figura* 4.7).

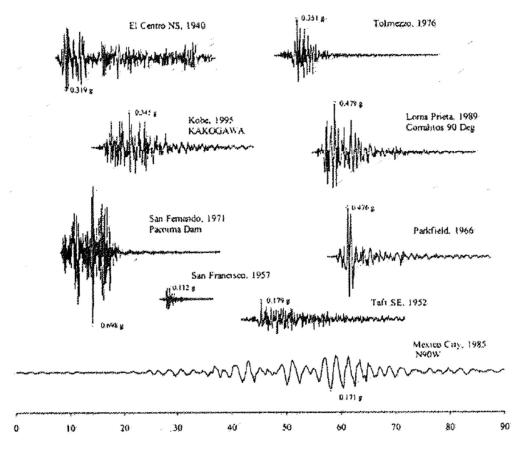


Figura 4.7: Accelerogrammi registrati in siti diversi con indicazione dei picchi massimi assoluti - [3]

È possibile constatare, però, che il picco massimo delle accelerazioni non è una caratteristica determinante per gli effetti di tale terremoto sulle strutture: uno stesso terremoto potrebbe causare enormi danni ad una struttura e lasciare indenne quella accanto. Questo fenomeno è conseguenza del fatto che gli effetti su una struttura indotti da sisma variano in relazione al legame tra il contenuto di energia del terremoto alle varie frequenze e i valori delle frequenze proprie della struttura. Risulta importante, quindi, la

determinazione del contenuto di energia di un terremoto attraverso gli spettri dell'accelerogramma (vale a dire definire la distribuzione delle componenti armoniche del segnale analizzato al variare della frequenza).

Per valutare gli effetti dell'accelerogramma di un terremoto su un oscillatore elementare vengono utilizzati lo *spettro di Fourier* e lo *spettro di risposta*.

Spettro di Fourier:

Si definisce spettro di Fourier la rappresentazione del contenuto di energia di un segnale deterministico rispetto alle frequenze.

L'energia di una funzione reale deterministica x(t), avente dominio di appartenenza $(-\infty, +\infty)$, è data dalla seguente quantità:

$$\mathcal{E}_{x} = \alpha \int_{-\infty}^{+\infty} x^{2}(t) dt = \frac{\alpha}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} C_{x}^{2}(\omega) d\omega$$
 (4.22)

dove α è una grandezza adimensionale e $C_x(\omega)$ indica lo spettro di Fourier del segnale:

$$C_{r}(\omega) = |X(\omega)| \tag{4.23}$$

Nella (4.23) con il simbolo $|X(\omega)|$ si indica il modulo della trasformata di Fourier della funzione deterministica x(t).

Se il segnale ha, invece, dominio di appartenenza pari a $[0, t_f]$, l'energia ricavata nella (4.22) diventa:

$$\mathcal{E}_{x} = \alpha \int_{0}^{t_{f}} x^{2}(t) dt = \frac{\alpha}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} |X(\omega, t_{f})| d\omega$$
 (4.24)

In ultimo, si definisce lo spettro di potenza specifica (o densità spettrale di potenza) come:

$$S_{x}(\omega, t_{f}) = \frac{\alpha}{2\pi t_{f}} |X(\omega, t_{f})|^{2}$$
(4.25)

dove con $\left|X(\omega,t_f)\right|^2$ si indica la densità spettrale di energia del segnale deterministico x(t) di durata finita $[0,t_f]$.

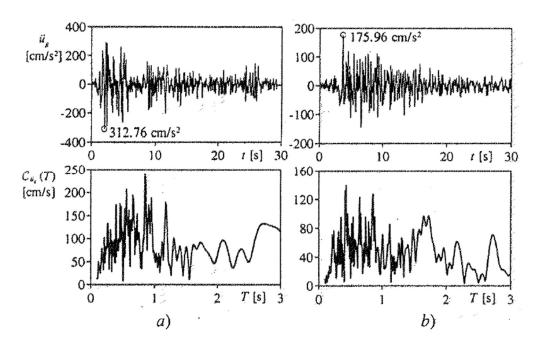


Figura 4.8: Accelerogrammi, con indicazione dei picchi massimi assoluti, e spettri di Fourier a) componente N-S del terremoto di El Centro 1940; b) componente S-E del terremoto di Taft 1952 - [3]

Spettro di Risposta:

Spesso, da un punto di vista ingegneristico, rispetto a quella energetica, risulta più interessante una rappresentazione spettrale degli spostamenti massimi rispetto alle frequenze. Dunque, per un dato rapporto di smorzamento e per un dato accelerogramma, si definisce spettro di potenza o spettro in termini di spostamento o spettro di risposta di spostamento di un oscillatore, la seguente funzione:

$$S_s(\omega_0, \xi_0) \equiv S_s(T_0, \xi_0) = \max_{0 \le t \le t_f} |u(t)|$$
(4.26)

dove l'intervallo $[0, t_f]$ indica la durata del terremoto considerato.

Dalla (4.26), per derivazione, è possibile definire rispettivamente lo *spettro di* velocità e lo *spettro di risposta di accelerazione totale*:

$$S_{v}(\omega_{0}, \xi_{0}) \equiv S_{v}(T_{0}, \xi_{0}) = \max_{0 \le t \le t_{f}} |\dot{u}(t)|$$
(4.27)

$$S_{a}(\omega_{0}, \xi_{0}) \equiv S_{a}(T_{0}, \xi_{0}) = \max_{0 \le t \le t_{f}} |\ddot{u}(t) + \ddot{u}_{g}(t)| \equiv$$

$$\equiv \max_{0 \le t \le t_{f}} |2\xi_{0}\omega_{0}\dot{u}(t) + \omega_{0}^{2}u(t)|$$
(4.28)

Di notevole interesse sono anche la pseudo-velocità spettrale e la pseudo-accelerazione spettrale:

$$S_{pv}(\omega_0, \xi_0) \equiv S_{pv}(T_0, \xi_0) = \omega_0 S_s(\omega_0, \xi_0) \equiv \frac{2\pi}{T_0} S_s(\omega_0, \xi_0)$$
 (4.29)

$$S_{pa}(\omega_0, \xi_0) \equiv S_{pa}(T_0, \xi_0) = \omega_0 S_{pv}(\omega_0, \xi_0) = \omega_0^2 S_s(\omega_0, \xi_0) \equiv$$

$$\equiv \frac{4\pi^2}{T_0^2} S_s(\omega_0, \xi_0)$$
(4.30)

È facilmente intuibile la semplicità di rappresentazione dello spettro di risposta (sia in termini di spostamento, che di velocità o accelerazioni) rispetto a quello di Fourier, ragione per cui il primo è indubbiamente il più utilizzato.

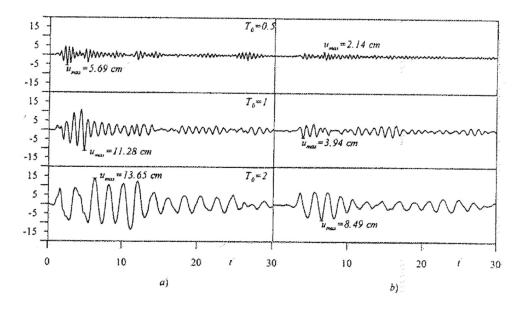


Figura 4.9: Risposte in termini di spostamento al variare delle caratteristiche dinamiche di un oscillatore elementare ($\xi_0 = 0.05$) soggetto ai seguenti accelerogrammi: a) componente N-S del terremoto di El Centro 1940; b) componente S-E del terremoto di Taft 1952 - [3]

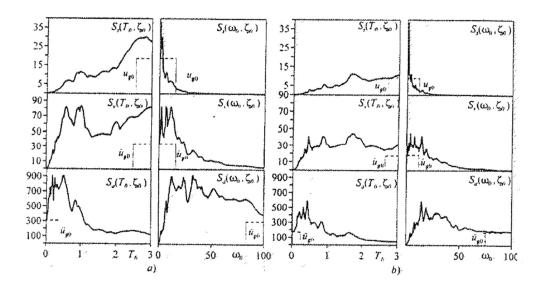


Figura 4.10: Spettri di risposta in termini di spostamento (cm), velocità (cm/s) e accelerazione totale (cm/s²), con indicazione dei valori asintotici per $\xi_0 = 0.05$, per le componenti di accelerogramma: a) N-S del terremoto di El Centro 1940 b) S-E delle terremoto di Taft 1952 - [3]

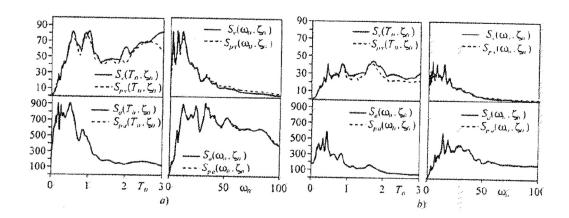


Figura 4.11: Confronto tra spettri di velocità e pseudo-velocità e tra spettri di accelerazione e pseudo-accelerazione ($\xi_0 = 0.05$) per i seguenti accelerogrammi: a) componente N-S del terremoto di El Centro 1940, b) componente S-E del terremoto di Taft 1952 - [3]

Ulteriori considerazioni possono essere fatte per lo *spettro di progetto elastico* e lo *spettro di potenza di progetto*.

Spettro di progetto elastico:

Lo spettro di progetto elastico viene utilizzato quando, ai fini progettuali, appare necessario prevedere lo spettro di risposta di un futuro terremoto. Quest'ultimo, per la natura imprevedibile del terremoto, non è rappresentabile prima che avvenga il terremoto stesso.

Lo spettro di progetto elastico, quindi, sarà valutabile tramite considerazioni statistiche, in modo da riuscire a tenere in conto tutte le incertezze: si giocherà mediando le curve degli spettri di risposta elastici di un numero rilevante di terremoti già avvenuti in condizioni similari.

• Spettro di potenza di progetto:

È possibile definire lo spettro di potenza di progetto del generico campione di accelerogramma tramite la seguente funzione:

$$S_{\ddot{U}_g}(\omega) = \frac{\alpha}{2\pi T_S} \left| A_g(\omega, T_S) \right|^2 = \frac{\alpha}{2\pi T_S} C_{\ddot{U}_g}^2(\omega) \tag{4.31}$$

dove $A_g(\omega, T_S)$ e $C_{\ddot{U}_g}$ rappresentano la trasformata di Fourier e lo spettro di Fourier del generico campione di accelerogramma $\ddot{U}_g(t)$ e T_S indica la durata del terremoto registrato dall'accelerogramma considerato.

Per ulteriori considerazioni e approfondimenti, si rimanda al capitolo 9 del [3].

4.4 Modellazione nel dominio della frequenza dell'accelerazione sismica come processo aleatorio stazionario bianco filtrato

Come già esplicitato nei paragrafi precedenti, un processo bianco filtrato è un processo aleatorio ottenuto come soluzione di un sistema di equazioni differenziali forzato dal processo bianco.

Nel 1960 Tajimi ipotizzò il processo aleatorio accelerazione sismica come un processo bianco filtrato, per il quale scelse l'equazione di un oscillatore elementare come equazione del filtro. Tale oscillatore verrà utilizzato, quindi, per modellare il terreno compreso tra la faglia e la struttura.

Da tale modellazione, Tajimi definisce la funzione densità spettrale di potenza del processo aleatorio accelerazione sismica alla base della struttura, detta anche densità spettrale di potenza di Tajimi-Kanai, la seguente relazione:

$$S_{\ddot{U}_g}(\omega) = \frac{(\omega_K^4 + 4\xi_K^2 \omega_K^2 \omega^2) S_W}{(\omega_K^2 - \omega^2)^2 + 4\xi_K^2 \omega_K^2 \omega^2} \equiv S_{TK}(\omega)$$
(4.32)

dove ω_K e ξ_K sono valori caratteristici del terreno (per terreni rigidi: ω_K può assumere valori compresi tra 4π e 5π , mentre per lo smorzamento si assumerà

sempre un valore costante pari a $\xi_K = 0.6$) e S_W rappresenta lo *spettro di potenza del processo bianco* dato dalla seguente relazione:

$$S_W = \frac{0.141\xi_K \ddot{u}_{g_0}^2}{\omega_K \sqrt{(1+4\xi_K^2)}} \tag{4.33}$$

in cui \ddot{u}_{g_0} rappresenta il picco massimo assoluto di accelerazione del terreno.

Dalla (4.33) è possibile ricavare le funzioni densità spettrali di potenza della velocità e dello spostamento del terreno, moltiplicandola rispettivamente per $1/\omega^2$ e per $1/\omega^4$.

Durante i loro studi, Clough e Penzien si sono resi conto che per valori di pulsazione naturale via via più piccoli ($\omega \to 0$), tali spettri tendono a valori sempre più illimitati. Suggerirono, perciò, la seguente modifica alla (4.32):

$$S_{\ddot{U}_g}(\omega) = S_{TK}(\omega) \frac{\omega^4}{(\omega_P^2 - \omega^2)^2 + 4\xi_P^2 \omega_P^2 \omega^2} \equiv S_{CP}(\omega)$$
 (4.34)

dove, anche in questo caso, ω_P e ξ_P sono valori caratteristici del terreno preso in esame.

4.5 Modellazione matematica nel dominio del tempo

Definita la modellazione in termini di frequenza, risulta necessario definire le equazioni differenziali del filtro, in modo da poter eseguire l'analisi aleatoria nel dominio del tempo. Questo perché, se da un lato la lettura dei risultati nel dominio della frequenza avrà un impatto sicuramente maggiore, il lavoro e la risoluzione di equazioni differenziali nel dominio del tempo sarà sicuramente più semplice.

Il modello matematico del filtro di Tajimi-Kanai sarà, perciò, dato dal seguente sistema di equazioni differenziali:

$$\ddot{u}_{g}(t) = -\omega_{f}^{2} u_{f}(t) - 2\xi_{f} \omega_{f} \dot{u}_{f}(t)$$

$$\ddot{u}_{f}(t) + 2\xi_{f} \omega_{f} \dot{u}_{f}(t) + \omega_{f}^{2} u_{f}(t) - W(t)$$
(4.35)

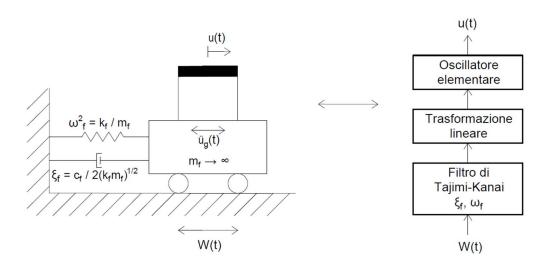


Figura 4.12: Rappresentazione grafica del filtro di Tajimi-Kanai - [3] - rielaborazione dell'autrice

In tale modello matematico, il terreno viene modellato come un oscillatore di massa infinita sul quale è vincolato l'oscillatore elementare soggetto ad un moto di solo trascinamento alla base.

Invece, il modello matematico del filtro di Clough-Penzien nel dominio del tempo è dato da un sistema di equazioni differenziali leggermente più complesso del precedente:

$$\ddot{u}_{g} = -\omega_{p}^{2} u_{p} - 2\xi_{p} \omega_{p} \dot{u}_{p} + \omega_{f}^{2} u_{f} + 2\xi_{f} \omega_{f} \dot{u}_{f}$$

$$\ddot{u}_{p} + \omega_{p}^{2} u_{p} + 2\xi_{p} \omega_{p} \dot{u}_{p} = \omega_{f}^{2} u_{f} + 2\xi_{f} \omega_{f} \dot{u}_{f}$$

$$\ddot{u}_{f} + 2\xi_{f} \omega_{f} \dot{u}_{f} + \omega_{f}^{2} u_{f} = -W(t)$$
(4.36)

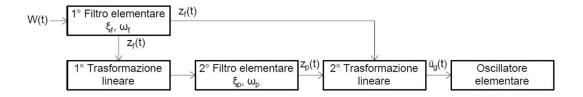


Figura 4.13: Rappresentazione schematica del filtro di Clough-Penzien - [3] – rielaborazione dell'autrice

Per il caso in esame, sarà proprio quest'ultimo modello ad essere utilizzato, per cui dettagli più approfonditi verranno forniti nel seguito della trattazione.

4	ŀ.	Analisi	aleatoria	di	sistemi	forzati	da	processi aleatori
---	----	---------	-----------	----	---------	---------	----	-------------------

5 Fenomeno del pounding tra le strutture

È ormai evidente come terremoti di entità sempre maggiore colpiscano l'intero territorio italiano, causando non solo enormi danni alle strutture, ma purtroppo anche un gran numero di vittime. Questo mette in luce l'elevata debolezza delle strutture presenti nel territorio a resistere a tali eccitazioni.

Per evitare che fenomeni come quelli appena citati possano causare danni di elevata entità, la ricerca ingegneristica studia e aggiorna costantemente la Normativa vigente, sviluppando una normativa sismica sempre più raffinata, la quale definisce i requisiti per la progettazione e la costruzione di edifici in zona sismica. Ciononostante, lo studio del fenomeno del martellamento strutturale ha dimostrato che le strutture soggette a sisma possono essere colpite da forze non previste in fase di progetto. Tale fenomeno è uno dei principali problemi di collasso strutturale tra strutture adiacenti e, proprio per questo motivo, la progettazione al giorno d'oggi si basa sulla corretta previsione di tali forze aggiuntive che si generano durante un evento sismico.

Il fenomeno del martellamento, detto anche *pounding strutturale*, è un fenomeno altamente distruttivo che si riferisce ad una situazione in cui due (o più) strutture adiacenti vengono colpite da forti azioni orizzontali (per esempio un evento sismico). È, quindi, il risultato del movimento relativo tra strutture vicine.

Esso è tipico per strutture che, durante un terremoto, non oscillano con lo stesso modo o frequenza e che non si trovino ad una distanza sufficiente tra loro: quando tale distanza non è adeguata, l'oscillazione delle strutture vicine potrebbe provocarne il contatto e, quindi, un consequenziale danneggiamento strutturale.

Per evitare tale fenomeno, in Italia, le *Norme Tecniche per le Costruzioni (D.M. 17 gennaio 2018)* prevedono che la distanza minima tra costruzioni contigue (d_{min}) non sia minore della somma degli spostamenti massimi orizzontali calcolati per lo Stato Limite di salvaguardia della Vita (SLV) e che non sia mai inferiore a

$$d = \frac{\alpha h}{100} \tag{5.1}$$

dove h è la quota della struttura in esame misurata dal piano di fondazione e α è un coefficiente di rischio sismico dato da:

$$\alpha = \frac{a_g S}{0.5g} \le 1 \tag{5.2}$$

Nella formula della (5.2) si indica con a_g l'accelerazione orizzontale massima indotta dal sisma (accelerazione di picco al suolo allo SLV), con S un coefficiente di amplificazione sismica che tiene conto delle caratteristiche del terreno (sarà pari al prodotto tra il coefficiente di amplificazione stratigrafica e quello di amplificazione topografica, $S = S_s \cdot S_t$) e con g l'accelerazione di gravità.

Qualora non si possano eseguire dei calcoli specifici, si assumerà $\alpha = 1$ e quindi $d = \frac{1}{100}h$ (cioè, lo spostamento massimo di una costruzione non isolata alla base può essere stimato come 1/100 della sua altezza).

Per assicurare una distanza adeguata tra costruzioni vicine, è buona norma progettare un cosiddetto *giunto strutturale*. Di solito tale accorgimento viene preso in considerazione quando si ricade in uno dei seguenti casi:

- nuove costruzioni vicine (*Figura* 5.1): qui la distanza tra gli edifici dovrà soddisfare la relazione $D \ge D_{min} = \frac{h_p}{100} \cdot \frac{2a_gS}{g}$, dove h_p indica l'altezza dell'edificio più basso;
- nuova costruzione realizzata vicino ad una già esistente (*Figura* 5.2): in questo caso, bisogna tenere in conto anche la diversa tipologia di materiale utilizzato tra la nuova costruzione in progetto e quella esistente. Qui la distanza tra gli edifici dovrà soddisfare la seguente relazione: $D \ge D_{min} = S_{min,1} + S_{min,2}$, dove $S_{min,1} = \frac{H_1}{100} \cdot \frac{a_g S}{g}$, $S_{min,2} = \frac{H_2}{100} \cdot \frac{a_g S}{g}$ e H_1 e H_2 indicano le altezze dei due edifici considerati.

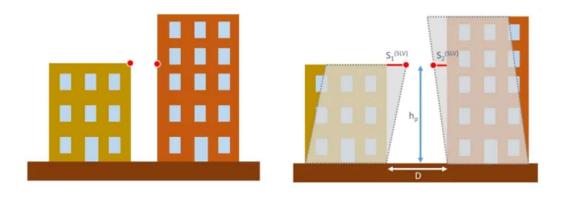


Figura 5.1: Giunto strutturale tra due nuove costruzioni vicine – figura reperita da [5]

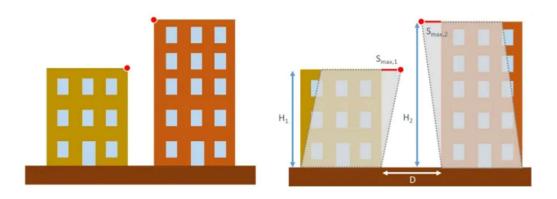


Figura 5.2: Giunto strutturale tra una nuova costruzione vicina ad una esistente – figura reperita da [5]

In una forma generale, è possibile affermare che la causa maggiore del martellamento tra strutture vicine è la diversa risposta dinamica che queste strutture avranno alle azioni orizzontali a cui possono essere soggette (sisma, vento, ecc...). Infatti, anche se sottoposte alla stessa accelerazione del suolo, due costruzioni possono avere differente risposta dinamica in termini di spostamento in funzione della propria massa e della propria rigidezza.

Un altro fattore che influisce sulla diversa risposta dinamica è sicuramente l'altezza della struttura, in quanto da essa dipende il periodo di vibrazione (per esempio: per telai in calcestruzzo armato, il periodo proprio di vibrazione T_1 viene valutato come $T_1 \cong 0.02 \ h \ (m)$, dove h è l'altezza del telaio. In maniera generale e grossolana, si può determinare il periodo proprio di vibrazione T_1 di un telaio avente N piani come $T_1 \cong 0.1 \ N$). Periodo proprio di vibrazione e distanza reciproca sono i principali fattori che determinano l'intensità e il numero di impatti che avverranno tra le strutture oggetto di studio.

Se gli edifici in esame hanno la stessa altezza, per la corretta determinazione della risposta dinamica degli stessi, entrano in gioco, allora, la tipologia e la tecnologia costruttiva: strutture aventi stessa altezza, ma realizzate una in calcestruzzo armato e l'altra in muratura, avranno periodi di vibrazione molto diversi.

Nel caso in cui si considerino, invece, edifici aventi stessa altezza e realizzate con la stessa tecnologia costruttiva, bisogna tenere in conto ulteriori eventuali contributi: per esempio, una struttura a pareti in calcestruzzo armato sarà molto più rigida rispetto ad una struttura a telaio in calcestruzzo armato.

Oltre al giunto strutturale, altre misure che possono essere adottate dal progettista per mitigare il fenomeno del pounding strutturale possono prevedere sicuramente l'adozione di:

- isolatori sismici alla base: tali strumenti vengono utilizzati per ridurre la trasmissione delle forze sismiche dal terreno alla struttura e, quindi, tra le strutture adiacenti;
- sistemi di smorzamento: tali sistemi hanno il compito di dissipare (smorzare) l'energia e ridurre le oscillazioni durante l'evento sismico.

5. Fenomeno del pounding tra le strutture

Tali misure, spesso, vengono adottate quando non è possibile garantire un adeguato giunto strutturale.

Si evince, quindi, come la normativa italiana ponga l'attenzione sull'analisi sismica e sulla verifica della distanza reciproca solo nel caso di nuove costruzioni adiacenti o di una nuova costruzione vicina ad una già esistente.

Nessuna menzione in merito viene fatta, invece, per il caso di aggregato edilizio esistente. Esso rappresenta l'insieme di edifici vicini, i quali non godono di continuità l'uno con l'altro. Tali edifici possono essere stati realizzati anche in epoche diverse e, proprio per questo motivo, l'attenzione verso questa tipologia di costruzione deve essere maggiore.

Per il caso di strutture esistenti, soprattutto per quelle più antiche e di valore culturale e artistico, esistono varie tipologie di interventi che hanno l'obiettivo di migliorare la loro resistenza ai terremoti, quali, per esempio, l'introduzione di rinforzi strutturali (rinforzo degli elementi strutturali, rinforzo dei nodi, ancoraggi, ecc...) e l'utilizzo di strutture esterne di supporto (come l'esoscheletro).

Per quanto riguardo le linee guida riportate in letteratura circa lo studio delle strutture esistenti poste all'interno di un aggregato edilizio, essa riporta l'obbligo di considerare la singola struttura oggetto di studio, trascurando il contributo proveniente dalle strutture adiacenti, spesso quindi anch'esse già esistenti.

Vi è, perciò, una carenza di informazioni abbastanza importante per quanto concerne tale tipologia di costruzioni.

Risulta, quindi, necessario uno studio approfondito circa la condizione di strutture esistenti vicine soggette a sisma, in cui l'obiettivo non dovrà essere lo studio del solo edificio in esame, ma, qualora presente, dovrà essere preso in considerazione anche l'aggregato edilizio attorno ad esso.

6 Formulazione del problema e risultati ottenuti

Il presente lavoro di tesi si concentra sullo studio del comportamento di due strutture esistenti vicine soggette a sisma.

La curiosità nasce proprio dalla mancanza di informazioni fornite in letteratura: è obbligatorio studiare ed analizzare sismicamente il singolo edificio oggetto di studio, ma non vi è nessun obbligo circa lo studio dell'aggregato edilizio circostante, qualora presente.

È stato, allora, analizzato il comportamento di un sistema strutturale a due gradi di libertà, in cui viene posizionato un sistema di collegamento tra i due edifici. Le caratteristiche di rigidezza e smorzamento di tale sistema di collegamento saranno le incognite da ricercare, in modo da ottenere uno spostamento orizzontale relativo tra le due strutture (esistenti e adiacenti) che sia minore della distanza che intercorre tra esse.

Nella *Figura* 6.1 viene esplicitato il sistema studiato, in cui i due gradi di libertà offerti si riferiscono al solo movimento orizzontale dei due edifici (u_1, u_2) .

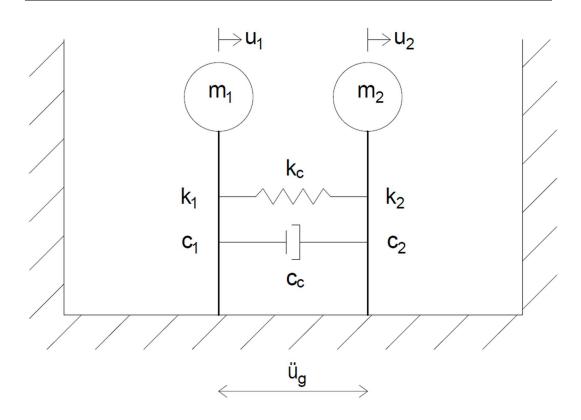


Figura 6.1: Rappresentazione schematica del sistema a due gradi di libertà studiato – elaborazione dell'autrice

In questo capitolo, per semplicità di lettura, non si riporta la dipendenza rispetto al tempo delle variabili di spostamento, velocità e accelerazione.

Le equazioni del moto associate al sistema strutturale ipotizzato saranno le seguenti:

$$m_1\ddot{u}_1 + c_1\dot{u}_1 + k_1u_1 = -m_1\ddot{u}_g + k_c(u_2 - u_1) + c_c(\dot{u}_2 - \dot{u}_1)$$

$$m_2\ddot{u}_2 + c_2\dot{u}_2 + k_2u_2 = -m_2\ddot{u}_g - k_c(u_2 - u_1) - c_c(\dot{u}_2 - \dot{u}_1)$$
(6.1)

Dove:

- m_1 è la massa del primo edificio;
- k_1 è la rigidezza del primo edificio;
- c_1 è la costante di smorzamento del primo edificio;
- u_1 è lo spostamento orizzontale rispetto al suolo del primo edificio;
- \dot{u}_1 è la velocità relativa al primo edificio (indica, cioè, la derivata prima rispetto al tempo t dello spostamento orizzontale u_1);
- \ddot{u}_1 è l'accelerazione relativa al primo edificio (indica, cioè, la derivata seconda rispetto al tempo t dello spostamento orizzontale u_1)
- m_2 è la massa del secondo edificio;
- k_2 è la rigidezza del secondo edificio;
- c_2 è la costante di smorzamento del secondo edificio;
- u_2 è lo spostamento orizzontale rispetto al suolo del secondo edificio;

- \dot{u}_2 è la velocità relativa al secondo edificio (indica, cioè, la derivata prima rispetto al tempo t dello spostamento orizzontale u_2);
- \ddot{u}_2 è l'accelerazione relativa al secondo edificio (indica, cioè, la derivata seconda rispetto al tempo t dello spostamento orizzontale u_2)
- \ddot{u}_q è l'accelerazione del terreno;
- k_c è la rigidezza del sistema di collegamento da inserire;
- c_c è la costante di smorzamento del sistema di collegamento da inserire.

È possibile esplicitare la frequenza e il rapporto di smorzamento del primo e del secondo edificio e i rapporti di massa e di frequenza, rispettivamente nelle forme seguenti:

$$\omega_{1} = \sqrt{\frac{k_{1}}{m_{1}}} \qquad \omega_{2} = \sqrt{\frac{k_{2}}{m_{2}}} \qquad \xi_{1} = \frac{c_{1}}{2\sqrt{k_{1}m_{1}}} \qquad \xi_{2} = \frac{c_{2}}{\sqrt{k_{2}m_{2}}}$$

$$\Psi_{m} = \frac{m_{2}}{m_{1}} \qquad \Psi_{\omega} = \frac{\omega_{2}}{\omega_{1}} \qquad (6.2)$$

Mentre, la frequenza e il rapporto di smorzamento per il sistema di collegamento saranno rispettivamente dati da:

$$\omega_c = \sqrt{\frac{k_c}{m_1}} \qquad \qquad \xi_c = \frac{c_c}{2\omega_1 m_1} \tag{6.3}$$

Allora, dividendo le (6.1) per la massa m_1 del primo edificio e sostituendo i valori riportati nelle (6.2) e nelle (6.3), è possibile riscrivere le (6.1) come:

$$\ddot{u}_1 + 2\xi_1\omega_1\dot{u}_1 + \omega_1^2u_1 = -\ddot{u}_g + \omega_c^2(u_2 - u_1) + 2\xi_c\omega_1(\dot{u}_2 - \dot{u}_1)$$

$$\ddot{u}_2 + 2\xi_2\omega_1\Psi_m\dot{u}_2 + \omega_1^2\Psi_\omega^2u_2 = -\ddot{u}_g - \frac{\omega_c^2}{\Psi_m}(u_2 - u_1) + \frac{2\xi_c\omega_1}{\Psi_m}(\dot{u}_2 - \dot{u}_1)$$

$$(6.4)$$

Per poter tenere in conto la natura stocastica dei parametri di progetto, del modello adottato e dell'eccitazione sismica a cui il sistema strutturale in esame è soggetto, è stato necessario studiare e modellare sia il sistema che l'eccitazione sismica come un processo stocastico.

Tale approccio consiste nel considerare come input al sistema strutturale l'accelerazione al suolo \ddot{u}_g , causata dal terremoto stesso. Per semplicità, essa viene modellata come processo stocastico di rumore bianco gaussiano filtrato stazionario (vedi Teoria dei filtri, paragrafo 4.1), per cui, considerando la modellazione di Clough Penzien, è possibile scrivere [6]:

$$\ddot{u}_{g} = -\omega_{p}^{2} u_{p} - 2\xi_{p} \omega_{p} \dot{u}_{p} + \omega_{f}^{2} u_{f} + 2\xi_{f} \omega_{f} \dot{u}_{f}$$

$$\ddot{u}_{p} + \omega_{p}^{2} u_{p} + 2\xi_{p} \omega_{p} \dot{u}_{p} = \omega_{f}^{2} u_{f} + 2\xi_{f} \omega_{f} \dot{u}_{f}$$

$$\ddot{u}_{f} + 2\xi_{f} \omega_{f} \dot{u}_{f} + \omega_{f}^{2} u_{f} = -\phi(t) w(t)$$
(6.5)

dove $u_f(t)$ è la risposta del primo filtro con frequenza ω_f e rapporto di smorzamento pari a ξ_f , $u_p(t)$ è la risposta del secondo filtro con frequenza ω_p e rapporto di smorzamento pari a ξ_p , w(t) è il rumore bianco gaussiano stazionario con funzione densità spettrale (Power Spectral Density, PSD) costante e pari a S_0 e media nulla, modulato dalla funzione $\phi(t)$. La funzione di modulazione $\phi(t)$ viene presa come la funzione a tratti proposta da Jennings:

$$\phi(t) = \begin{cases} (t/t_1)^2 & t < t_1 \\ 1 & t_2 \le t \le t_1 \\ \exp(-\theta(t - t_2)) & t > t_2 \end{cases}$$
 (6.6)

dove t_1 e t_2 sono gli istanti di inizio e fine della fase di scuotimento e θ è il coefficiente che controlla la forma della funzione esponenziale.

Il percorso logico seguito per ricavare gli spostamenti dei due edifici e, quindi, quello relativo tra i due da utilizzare come soglia minima, può essere schematizzato come in *Figura* 6.2:

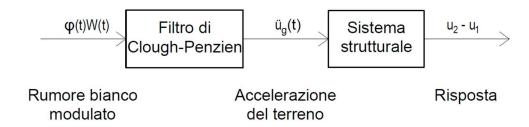


Figura 6.2: Rappresentazione schematica del modello logico utilizzato - [6] – rielaborazione dell'autrice

Perciò, utilizzando l'approccio stocastico per la determinazione dell'eccitazione sismica, il sistema dinamico di equazioni aumenta e si trasforma in:

$$\begin{split} \ddot{u}_{1} + 2\xi_{1}\omega_{1}\dot{u}_{1} + \omega_{1}^{2}u_{1} &= -\ddot{u}_{g} + \omega_{c}^{2}(u_{2} - u_{1}) + 2\xi_{c}\omega_{1}(\dot{u}_{2} - \dot{u}_{1}) \\ \ddot{u}_{2} + 2\xi_{2}\omega_{1}\Psi_{m}\dot{u}_{2} + \omega_{1}^{2}\Psi_{\omega}^{2}u_{2} &= -\ddot{u}_{g} - \frac{\omega_{c}^{2}}{\Psi_{m}}(u_{2} - u_{1}) + \frac{2\xi_{c}\omega_{1}}{\Psi_{m}}(\dot{u}_{2} - \dot{u}_{1}) \\ \ddot{u}_{g} &= -\omega_{p}^{2}u_{p} - 2\xi_{p}\omega_{p}\dot{u}_{p} + \omega_{f}^{2}u_{f} + 2\xi_{f}\omega_{f}\dot{u}_{f} \\ \ddot{u}_{p} + \omega_{p}^{2}u_{p} + 2\xi_{p}\omega_{p}\dot{u}_{p} &= \omega_{f}^{2}u_{f} + 2\xi_{f}\omega_{f}\dot{u}_{f} \\ \ddot{u}_{f} + 2\xi_{f}\omega_{f}\dot{u}_{f} + \omega_{f}^{2}u_{f} &= -\phi(t)w(t) \end{split}$$

$$(6.7)$$

6.1 Formulazione nello spazio di stato

Il sistema dinamico di equazioni riportato nella (6.7), formulato nello spazio di stato assume la seguente forma:

$$\dot{\mathbf{z}} = A\mathbf{z} + B\mathbf{e}(t)
\mathbf{y} = C\mathbf{z}$$
(6.8)

La prima equazione della (6.8) è detta equazione di input, mentre la seconda è detta equazione di output. Nell'equazione di input

$$\mathbf{z}(t) = \left[u_1(t), u_2(t), u_p(t), u_f(t), \dot{u}_1(t), \dot{u}_2(t), \dot{u}_p(t), \dot{u}_f(t)\right]^T$$
 è il vettore di stato;

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ -(\omega_1^2 + \omega_c^2) & + \omega_c^2 & + \omega_p^2 & -\omega_f^2 & -(2\xi_1\omega_1 + 2\xi_c\omega_1) & +2\xi_c\omega_1 & +2\xi_p\omega_p & -2\xi_f\omega_f \\ -\frac{\omega_c^2}{\Psi_m} & -\left(\omega_1^2 \Psi_\omega^2 + \frac{\omega_c^2}{\Psi_m}\right) & +\omega_p^2 & -\omega_f^2 & +\frac{2\xi_c\omega_1}{\Psi_m} & -\left(2\xi_2\omega_1\Psi_\omega + \frac{2\xi_c\omega_1}{\Psi_m}\right) & +2\xi_p\omega_p & -2\xi_f\omega_f \\ 0 & 0 & -\omega_p^2 & +\omega_f^2 & 0 & 0 & -2\xi_p\omega_p & +2\xi_f\omega_f \\ 0 & 0 & 0 & -\omega_f^2 & 0 & 0 & 0 & -2\xi_f\omega_f \end{bmatrix}$$

è la matrice di stato, funzione dei parametri del sistema;

 ${m B} = [0 \quad 0 \quad 0 \quad 0 \quad 0 \quad 0 \quad -1]^T$ è la matrice di input; $e(t) = \phi(t)w(t)$ è il processo di input applicato. Nell'equazione di output, ${m y}(t) = [u_1(t), u_2(t), \dot{u}_1(t), \dot{u}_2(t), \ddot{u}_1^a(t), \ddot{u}_2^a(t)]^T$ è il vettore dell'output, in cui è presente lo spostamento strutturale relativo al suolo del primo e del secondo edificio $(u_1(t), u_2(t))$, la velocità relativa al suolo del primo e del secondo edificio $(\dot{u}_1(t), \dot{u}_2(t))$ e l'accelerazione strutturale assoluta del primo e del secondo edificio $(\ddot{u}_1^a(t), \ddot{u}_2^a(t))$ e l'accelerazione strutturale assoluta del primo e del secondo edificio $(\ddot{u}_1^a(t), \ddot{u}_2^a(t))$ e $\ddot{u}_2^a(t) = \ddot{u}_2(t) + \ddot{u}_q(t)$;

è la matrice dell'output.

Considerando l'assunzione fatta per l'input, preso come rumore bianco gaussiano stazionario con funzione densità spettrale costante pari a S_0 e media nulla e uniformemente modulato, anche la risposta del sistema $\mathbf{z}(t)$ sarà, a sua volta, un processo stocastico stazionario con media nulla. Per tali ragioni, la descrizione completa della risposta può essere data in termini di matrice di covarianza $\mathbf{R}_{\mathbf{z}\mathbf{z}}(t)$ del vettore di stato. Tale matrice si può scrivere come $\mathbf{R}_{\mathbf{z}\mathbf{z}} = E(\mathbf{z}\mathbf{z}^T)$, dove con $E(\cdot)$ si indica l'operatore del valore atteso, e può

essere valutata numericamente risolvendo la seguente equazione differenziale matriciale:

$$\dot{\mathbf{R}}_{ZZ} = \mathbf{A}\mathbf{R}_{ZZ} + \mathbf{R}_{ZZ}\mathbf{A}^T + 2\pi S_0 \phi^2(t) \mathbf{B} \mathbf{B}^T$$
(6.11)

Per il caso stazionario la (6.11) diventa:

$$\mathbf{A}\mathbf{R}_{\mathbf{Z}\mathbf{Z}} + \mathbf{R}_{\mathbf{Z}\mathbf{Z}}\mathbf{A}^{T} + 2\pi S_{0}\phi^{2}(t)\mathbf{B}\mathbf{B}^{T} = 0$$

$$(6.12)$$

dove la densità spettrale di potenza del processo rumore bianco (vista anche come picco massimo assoluto dell'accelerazione del terreno) viene assunta pari a $S_0 = 0.005 \, m/s^2$ e, poiché si studia il fenomeno durante la fase di scuotimento, $\phi^2(t) = 1$.

Nota la matrice di covarianza $R_{ZZ}(t)$ del vettore di stato, è possibile ottenere la matrice di covarianza $R_{yy}(t)$ del vettore di output come:

$$\mathbf{R}_{yy} = E(\mathbf{y}\mathbf{y}^T) = \mathbf{C}E(\mathbf{z}\mathbf{z}^T)\mathbf{C}^T \tag{6.13}$$

Nel caso specifico in esame, sono stati considerati i seguenti parametri di progetto:

- $\omega_1 = 1$
- $\xi_1 = 2$
- $\xi_2 = 2$
- $\Psi_{\omega} = 2$
- $\Psi_m = 2$
- $\omega_p = 2\pi$
- $\xi_n = 2$
- $\omega_f = 2\pi$
- $\xi_f = 2$

Le incognite del problema sono, come già detto in precedenza, i valori di rigidezza ω_c e smorzamento ξ_c del sistema di collegamento. Per risolvere tale problema nel modo più chiaro possibile, è stato scelto MATLAB come ambiente in cui programmare e generare un codice idoneo.

Rigidezza e smorzamento del sistema di collegamento sono stati, quindi, analizzati come vettori riga contenenti, rispettivamente, valori compresi tra 0,1 e 10 e tra 0,02 e 1.

Per ogni combinazione di valori contenuti nei vettori di rigidezza e smorzamento del sistema di collegamento, sono state ricavate la matrice di stato A e la matrice di input B e, da queste, la matrice di covarianza R tramite la funzione MATLAB "lyap" (R=lyap(A,B)).

Da tale matrice di covarianza è possibile estrapolare i valori di varianza e covarianza relativi agli spostamenti ($\sigma_{u_1}^2 = \mathbf{R}(1,1), \sigma_{u_2}^2 = \mathbf{R}(2,2), \gamma_{u_1u_2} = \mathbf{R}(1,2)$), dove i pedici 1 e 2 si riferiscono rispettivamente al primo e al secondo edificio oggetto di studio) e determinare, quindi, il valore di varianza degli spostamenti come $\sigma_u^2 = \sigma_{u_1}^2 + \sigma_{u_2}^2 + \gamma_{u_1u_2}$. Il valore di varianza così determinato si riferisce all'iterazione (i,j) considerata relativa al valore di rigidezza $\omega_c(i)$ e smorzamento $\xi_c(j)$ del sistema di collegamento. Per ogni iterazione (i,j), estraendo la radice quadrata e ricavando quindi il valore della deviazione standard $\sigma_u(i,j)$, è possibile, alla fine dell'intero ciclo di iterazioni, ottenere la matrice completa σ_u contenente tutti i valori della deviazione standard degli spostamenti relativi ad ogni iterazione.

Lo stesso procedimento può essere applicato alle velocità: i valori estrapolati dalla matrice di covarianza \mathbf{R} saranno rispettivamente $\sigma_{\dot{u}_1}^2 = \mathbf{R}(5,5)$, $\sigma_{\dot{u}_2}^2 = \mathbf{R}(6,6)$, $\gamma_{\dot{u}_1\dot{u}_2} = \mathbf{R}(5,6)$; la varianza delle velocità sarà data da $\sigma_{\dot{u}}^2 = \sigma_{\dot{u}_1}^2 + \sigma_{\dot{u}_2}^2 + \gamma_{\dot{u}_1\dot{u}_2}$; si estrae la radice quadrata e si ricava, per ogni iterazione, il valore della deviazione standard relativa alle velocità $\sigma_{\dot{u}}(i,j)$ con cui, alla fine del ciclo di iterazioni, è possibile completare la matrice $\sigma_{\dot{u}}$ di tutti i valori della deviazione standard relativi alle velocità.

Vengono di seguito riportate rispettivamente la matrice di covarianza R(i,j) relativa ad una generica iterazione, la matrice di varianza completa relativa agli spostamenti σ_u e la matrice di varianza completa relativa alle velocità $\sigma_{\dot{u}}$:

$$\mathbf{R}(i,j) = \begin{bmatrix} \sigma_{u_1}^2 & \gamma_{u_1 u_2} & \cdots & \cdots & \cdots & \vdots \\ \gamma_{u_1 u_2} & \sigma_{u_2}^2 & \cdots & \cdots & \cdots & \vdots \\ \vdots & \cdots & \ddots & \cdots & \cdots & \vdots \\ \vdots & \cdots & \ddots & \cdots & \vdots \\ \vdots & \cdots & \cdots & \ddots & \cdots & \vdots \\ \vdots & \cdots & \cdots & \sigma_{u_1}^2 & \gamma_{u_1 u_2} \\ \vdots & \cdots & \cdots & \cdots & \gamma_{u_1 u_2} & \sigma_{u_2}^2 \end{bmatrix}$$
(6.14)

$$\boldsymbol{\sigma}_{u} = \begin{bmatrix} \sigma_{u}(1,1) & \cdots & \sigma_{u}(1,j) \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \sigma_{u}(i,1) & \cdots & \sigma_{u}(j,j) \end{bmatrix}$$

$$(6.15)$$

$$\boldsymbol{\sigma}_{\dot{u}} = \begin{bmatrix} \sigma_{\dot{u}}(1,1) & \cdots & \sigma_{\dot{u}}(1,j) \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \sigma_{\dot{u}}(i,1) & \cdots & \sigma_{\dot{u}}(j,j) \end{bmatrix}$$

$$(6.16)$$

Avendo nota, quindi, la matrice di varianza relativa agli spostamenti σ_u , vengono graficati i suoi valori rispetto a quelli della rigidezza e dello smorzamento relativi al sistema di collegamento.

Dalla *Figura* 6.3 si nota che, per valori alti di rigidezza del sistema di collegamento, si ottengono valori in termini di spostamento relativo dei due edifici via via sempre più piccoli: questo avvalora l'ipotesi di comportamento che ci si aspetta da un sistema come quello studiato, vale a dire spostamenti tanto più piccoli (e quindi comportamento generale tanto più rigido) quanto maggiore è il valore di rigidezza del sistema di collegamento.

Si nota, inoltre, che si ottengono valori piccoli in termini di spostamento relativo tra i due edifici quando lo smorzamento del sistema di collegamento tra essi assume valori via via più grandi: anche questo risultato avvalora il comportamento ipotizzato, in quanto per valori di smorzamento maggiori si aspetta un comportamento dissipativo maggiore e, quindi, uno spostamento relativo dei due edifici sempre più piccolo.

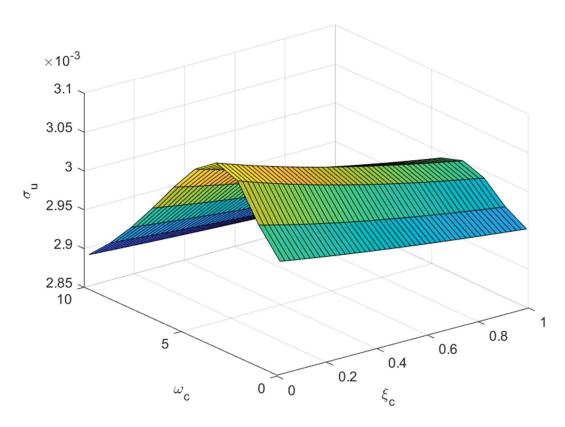


Figura 6.3: Andamento dello spostamento relativo (espresso in metri) dei due edifici al variare della rigidezza ω_c e dello smorzamento ξ_c del sistema di collegamento – elaborazione dell'autrice

6.2 Determinazione della distanza soglia

Dalla conoscenza delle matrici σ_u e $\sigma_{\dot{u}}$, contenenti, rispettivamente, le deviazioni standard relative agli spostamenti e alle velocità, è possibile ricavare il valore soglia b relativo alla distanza che intercorre tra le due strutture adiacenti.

Considerando la (4.18), la probabilità che l'istante di primo passaggio $T_1(b)$ sia successivo all'istante T (pari alla durata dell'evento) e che per T=0 il processo aleatorio |X(t)| non superi la barriera unilaterale b può essere scritta come:

$$P_S(T,b) = P_S(0,b) \exp\left[-N_{|X|}^+(b;t)T\right]$$
(6.17)

È possibile esplicitare ulteriori considerazioni:

- 1) il numero medio totale di attraversamenti del processo aleatorio X(t) della barriera bilaterale $\pm b$ nell'unità di tempo $N_X(b;t)$, che coincide con $N_{|X|}^+$, è pari al doppio del numero medio di attraversamenti nell'unità di tempo della barriera unilaterale +b con pendenza positiva N_X^+ . Allora, considerando un processo gaussiano stazionario a media nulla come nella (4.12), il numero medio totale di attraversamenti assume la seguente forma: $N_X(b;t) \equiv N_{|X|}^+(b;t) = 2N_X^+(b;t) \equiv 2N_X^+(b) = \frac{1}{2\pi} \frac{\sigma_X}{\sigma_X} \exp\left(-\frac{b^2}{2\sigma_Y^2}\right);$
- 2) la probabilità che, per qualunque soglia b considerata, l'istante di primo passaggio non sia precedente all'istante iniziale T = 0 è posta pari ad 1: $P_S(0,b) \equiv P[T_1(b) \ge 0] = 1$;
- 3) la probabilità di crisi (o fallimento) è data dal complemento ad uno della probabilità di successo: $P_C(T,b) = P[T_1(b) < T] = 1 P_S(T,b)$. Per il caos in esame verrà posta pari a $P_C(T,b) = 0.02$;
- 4) si assume come durata del sisma un valore pari a T = 10 sec.

Allora la (6.17) per il caso studio assume la seguente forma:

$$P_{S}(T,b) \equiv 1 - P_{C}(T,b) = P_{S}(0,b) \exp[-2N_{X}^{+}(b)T] \equiv$$

$$\equiv \exp\left[-2\left(\frac{1}{2\pi}\frac{\sigma_{\dot{X}}}{\sigma_{X}}\exp\left(-\frac{b^{2}}{2\sigma_{Y}^{2}}\right)\right)T\right]$$
(6.18)

per cui considerando $\sigma_X = \sigma_u(i,j)$, $\sigma_{\dot{X}} = \sigma_{\dot{u}}(i,j)$ e $P_C(T,b) = 0.02$, si ricava facilmente, per passaggio inverso, il valore di soglia b(i,j) che si riferisce all'iterazione (i,j) considerata, relativa al valore di rigidezza $\omega_C(i)$ e smorzamento $\xi_C(j)$ del sistema di collegamento.

Questo è un dato già molto importante: difatti, tale osservazione mette in relazione la distanza *b* nota ed esistente tra gli edifici adiacenti oggetto di studio e le caratteristiche di rigidezza e smorzamento che il sistema di collegamento tra i suddetti edifici dovrà avere per garantire una distanza minima pari almeno alla soglia *b* appena ricavata.

La Figura 6.4 mostra l'andamento del valore della soglia b al variare della rigidezza ω_c e dello smorzamento ξ_c del sistema di collegamento.

Anche per questo caso, è possibile fare delle considerazioni simili a quelle fatte per il caso dello spostamento relativo: da tale figura, infatti, si evince che per valori alti di rigidezza ω_c la distanza b necessaria tra gli edifici diminuisce. Questo risultato conferma il comportamento ipotizzato: quando il sistema di collegamento assume comportamento rigido, una piccola distanza tra gli edifici risulta già sufficiente per mantenere in sicurezza il sistema.

Risulta ancora sufficiente una piccola distanza tra gli edifici quando il sistema di collegamento tra essi è caratterizzato da un valore di smorzamento alto: tale caratteristica implica, quindi, un comportamento dissipativo, per cui una distanza piccola tra gli edifici riesce a garantire la sicurezza strutturale ricercata.

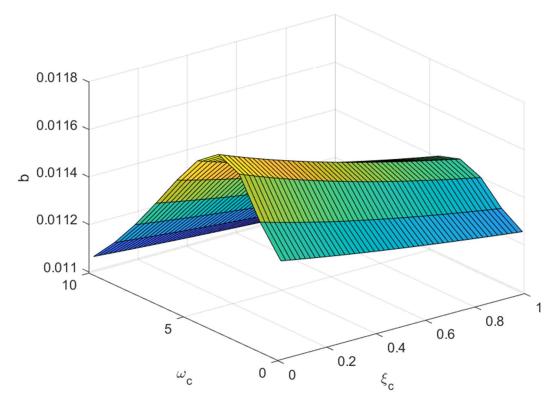


Figura 6.4: Andamento del valore soglia b (espresso in metri) al variare della rigidezza ω_c e dello smorzamento ξ_c del sistema di collegamento – elaborazione dell'autrice

Per poter avere una rappresentazione di maggiore impatto visivo, è stato graficato l'andamento della distanza soglia b rispetto alla rigidezza ω_c e allo smorzamento ξ_c del sistema di collegamento tramite curve di livello (*Figura* 6.5).

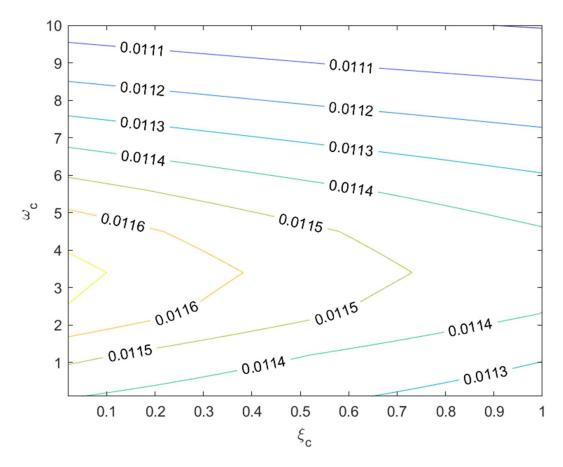


Figura 6.5: Rappresentazione tramite curve di livello dell'andamento del valore soglia b al variare della rigidezza ω_c e dello smorzamento ξ_c del sistema di collegamento— elaborazione dell'autrice

Dalla *Figura* 6.5, infatti, risulta molto più evidente il legame tra la distanza soglia *b*, presente tra i due edifici esistenti vicini oggetto di studio, e le caratteristiche da ricercare per il sistema di collegamento che si inserirà tra essi.

La distanza tra gli edifici è un valore noto (gli edifici esistono già, per cui la distanza che intercorre tra essi è facilmente determinabile). Le incognite, quindi, restano le caratteristiche di rigidezza e smorzamento del sistema di collegamento.

La loro determinazione è molto semplice. I passi da seguire saranno:

- ricercare il valore corretto della soglia b che intercorre tra gli edifici;
- ricercare i valori di rigidezza e smorzamento del sistema di collegamento relativi ad una distanza soglia minore rispetto a quella esistente. Questo permetterà di garantire la sicurezza strutturale ricercata durante il verificarsi di eventi sismici.

Quindi, se per esempio il valore della distanza soglia esistente risulta pari a $b_{esist} = 0.0116 \, m$, le caratteristiche di rigidezza e smorzamento del sistema di collegamento da inserire tra i due edifici adiacenti saranno da ricercare per valori di distanza soglia $b < b_{esist}$ (Figura 6.6).

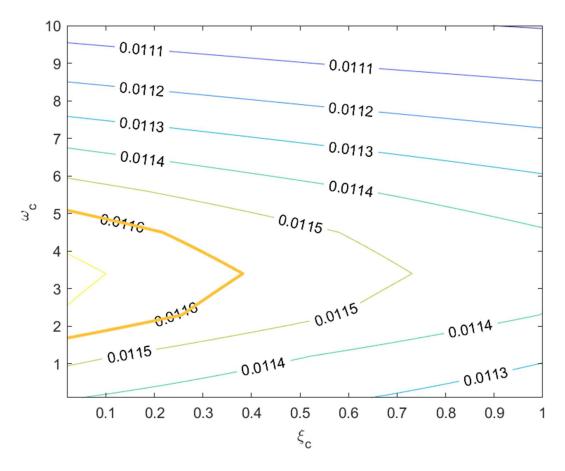


Figura 6.6: Esempio di utilizzo delle curve di livello del valore soglia b per la ricerca delle caratteristiche che il sistema di collegamento dovrà avere – elaborazione dell'autrice

6.3 Densità spettrale di potenza nel dominio della frequenza

Tenendo presenti le considerazioni fatte da Tajimi nel 1960 e, quindi, considerando il processo aleatorio di accelerazione sismica come un processo bianco filtrato gaussiano a media nulla, è possibile determinare la funzione densità spettrale di potenza per tale processo nel dominio della frequenza. La densità spettrale di potenza di Tajimi-Kanai sarà, perciò, data dalla seguente relazione riportata nella (4.32):

$$S_{ij_g}(\omega) = \frac{(\omega_K^4 + 4\xi_K^2 \omega_K^2 \omega^2) S_W}{(\omega_K^2 - \omega^2)^2 + 4\xi_K^2 \omega_K^2 \omega^2} \equiv S_{TK}(\omega)$$

Mentre, per Clough e Penzien la densità spettrale di potenza nel dominio della frequenza sarà data dalla (4.34):

$$S_{\ddot{U}_g}(\omega) = S_{TK}(\omega) \frac{\omega^4}{(\omega_P^2 - \omega^2)^2 + 4\xi_P^2 \omega_P^2 \omega^2} \equiv S_{CP}(\omega)$$

Per il caso in esame, lo spettro di potenza del processo bianco viene assunto costante e pari a $S_W = 0.005 \ m/s^2$, mentre per i valori caratteristici del terreno ω_K , ξ_K , ω_P e ξ_P si assumono i valori di un evento sismico realmente accaduto. Qui sono stati utilizzati quelli relativi alla stazione di El Centro riportati in Tabella 6.1: $\omega_K = 19.0$, $\xi_K 0.65$, $\omega_P = 2.0$ e $\xi_P = 0.6$.

STAZIONE	ω_K	ζĸ	ω_P	ζρ	S_W
El Centro	19.0	0.65	2.0	0.6	0.0029
Taft	20.0	0.65	1.0	0.5	0.0028
Mexico City	4.2	0.1	0.23	0.1	0.0033

Tabella 6.1: Parametri dello spettro di potenza di Clough-Penzien associati a eventi sismici realmente accaduti (Yeh e Wen, 1990) - [3]

Contrariamente a quanto riportato in *Tabella* 6.1, è stato utilizzato un valore per lo spettro di potenza relativo al processo bianco maggiore di quello che si otterrebbe dai calcoli. Il motivo di questa scelta risiede soltanto nella volontà di avere un contenuto di energia ancora maggiore.

Nella trattazione stocastica si utilizza la densità spettrale di potenza (PSD) poiché essa rappresenta la distribuzione dell'energia del processo considerato in funzione della frequenza. Dalla PSD è possibile, quindi, determinare la quantità di energia presente in ciascuna componente di frequenza.

Vengono di seguito riportati i grafici della densità spettrale di potenza di Tajimi-Kanai $S_{TK}(\omega)$ (Figura 6.7) e della densità spettrale di potenza di Clough-Penzien $S_{CP}(\omega)$ (Figura 6.8) in funzione della frequenza ω .

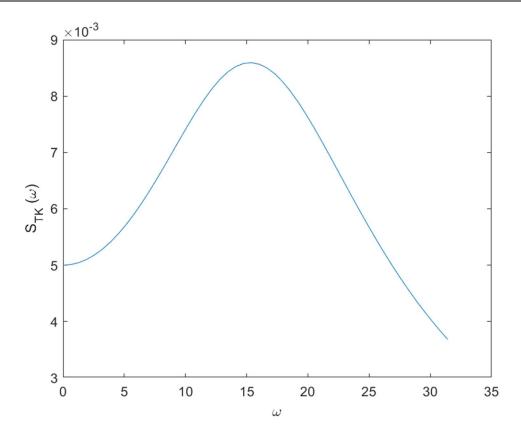


Figura 6.7: Densità spettrale di potenza di Tajimi-Kanai – elaborazione dell'autrice

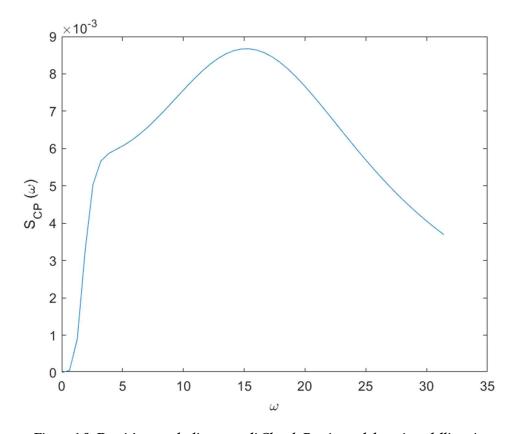


Figura 6.8: Densità spettrale di potenza di Clough-Penzien – elaborazione dell'autrice

Tali curve, quindi, rappresentano la quantità di energia del processo considerato (nel caso in esame: accelerazione sismica) presente in ciascuna componente di frequenza.

L'andamento di tali curve conferma quanto ipotizzato. Difatti, la curva relativa alla densità spettrale di potenza di Tajimi-Kanai per $\omega=0$ riporta un'ordinata diversa dal valore nullo, al contrario di quanto succede per il caso di Clough-Penzien. Questo accade perché Tajimi e Kanai nei loro studi prendevano in considerazione una forzante esterna statica; nel caso reale, ovviamente, questo non accade. Clough e Penzien, infatti, introducendo un ulteriore filtro nelle loro analisi, hanno fatto in modo di smussare tale aspetto, rendendo il loro studio quanto più vicino ad un ipotetico caso reale.

Inoltre, dall'andamento delle suddette curve, per il caso in esame, è possibile notare che entrambe presentano un valore di picco della densità spettrale di potenza per valori di frequenze che si attestano intorno a $\omega = 15 \ rad/sec$. Questo pone l'attenzione su svariati aspetti e modi di procedere. Infatti, noto il valore della frequenza relativa al picco della densità spettrale di potenza:

- se tale valore si attesta molto vicino a quello della frequenza ω_c del sistema di collegamento ricavato attraverso la procedura esplicata anche graficamente in Figura 6.6, il sistema complessivo potrebbe andare in risonanza, amplificando quindi l'energia e lo spostamento associati al fenomeno sismico. In questo caso, tale fenomeno amplificativo potrebbe essere ridotto, e addirittura eliminato, scegliendo un valore di ω_c che soddisfi la procedura esplicata graficamente in Figura 6.6 e stia lontano rispetto al valore relativo al picco della densità spettrale di potenza; oppure, tale fenomeno amplificativo potrebbe essere ridotto, scegliendo degli opportuni valori di smorzamento ξ_c : più grande sarà tale valore e maggiore sarà la capacità del sistema di collegamento di smorzare l'energia in entrata;
- quando tale valore di frequenza risulta diverso e lontano da quello scelto dalla procedura esplicata anche graficamente in *Figura* 6.6 per il sistema di collegamento, non si avranno particolari problemi di amplificazione del segnale. In questo caso, quindi, potrà essere preso in conto ogni valore assunto per il sistema di collegamento, ammesso che soddisfi almeno le richieste relative al paragrafo 6.2 e che tenga, quindi, in conto la procedura di determinazione esplicata graficamente in *Figura* 6.6.

Si riportano in Appendice alcuni estratti salienti del codice MATLAB utilizzato per questo lavoro.

6	Formulazione del	nrohlema e	ricultati	ottenuti
v.	I Ullimiaziulic aci	problema c	HISUHUALI	Ottonuu

7 Conclusioni e sviluppi futuri

L'enorme quantità di costruzioni esistenti nel nostro Paese e il contemporaneo aumento di eventi sismici sempre più distruttivi, hanno portato ad un'attenta analisi del problema.

La letteratura pone principale riguardo circa le nuove costruzioni, sia nel caso che esse sorgano vicino ad altre nuove o già esistenti, sia che esse siano isolate. Le NTC raccomandano un adeguato giunto strutturale, in modo che lo spostamento relativo massimo tra le costruzioni vicine sia sempre minore della distanza che intercorre tra esse.

Spesso, però, non è sempre possibile garantire una distanza opportuna, ragione per cui possono essere introdotte altre soluzioni che vanno dall'isolamento sismico alla base a sistemi di smorzamento con il compito di dissipare l'energia e ridurre le oscillazioni durante l'evento sismico.

Per quanto riguarda gli edifici esistenti, per ridurre la forzante sismica esterna, invece, possono essere utilizzate delle strutture di supporto esterne, come l'esoscheletro, le quali non sono altro che degli elementi progettati con il solo compito di attrarre a sé le forze orizzontali e scaricarle in fondazione. Si potrebbe, inoltre, utilizzare anche la strada del rinforzo strutturale, rinforzando localmente gli elementi strutturali più deboli o introducendo degli ancoraggi.

Sono tutte strade valide. Nella realtà, però, soprattutto quando queste tipologie di interventi prendono in considerazione edifici esistenti, la scelta del tipo di intervento deve allinearsi con la tipologia di struttura in esame e con l'aggregato edilizio che potrebbe circondarla.

Per tali motivazioni, potrebbe essere utile lo studio di un intervento alternativo, che abbia lo scopo di mantenere la sicurezza strutturale dell'edificio oggetto di studio, ma che, allo stesso tempo, non miri a stravolgere l'estetica di tale costruzione (né tantomeno del possibile aggregato edilizio che la circonda).

Questo lavoro nasce dalla curiosità, ma soprattutto dalla carenza di informazioni e linee guida circa lo studio del comportamento di edifici esistenti vicini soggetti a terremoto. Difatti, la letteratura pone l'obbligo di analisi e verifica dell'edificio preso in esame, ma non pone alcuna attenzione circa il possibile aggregato edilizio che lo circonda.

Per tale ragione, in questo studio l'attenzione è stata posta su un sistema composto da due edifici esistenti vicini soggetti a terremoto.

L'analisi non è stata svolta nella classica maniera dinamica, ma, per poter considerare al meglio le incertezze sui parametri del sistema e la natura casuale del modello adottato e dell'eccitazione sismica alla base, l'analisi è stata svolta in ambito stocastico.

Lo scopo finale di tale studio è stata la ricerca della coppia ottimale di rigidezza e smorzamento di un opportuno sistema di collegamento da porre tra gli edifici esistenti, in modo che lo spostamento relativo tra questi sia sempre minore della distanza che intercorre tra le strutture esistenti. Una soluzione cosiffatta è tale da garantire la sicurezza strutturale durante gli eventi sismici che possono verificarsi.

È stato, quindi, studiato un sistema a due gradi di libertà soggetto ad una forzante esterna sismica. Tale forzante sismica è stata modellata come un processo stocastico di rumore bianco stazionario, filtrato, gaussiano a media nulla, per cui anche la risposta del sistema sarà, a sua volta, un processo stocastico stazionario con media nulla. Per tali ragioni, la descrizione completa della risposta verrà data in termini di matrice di covarianza, da cui, tramite codice MATLAB, è stato studiato l'andamento degli spostamenti relativi e della distanza soglia tra gli edifici rispetto ai valori di rigidezza e smorzamento del sistema di collegamento.

Da quest'ultimo grafico, se visto come curve di livello, avendo noto il valore della distanza tra gli edifici esistenti, le caratteristiche del sistema di collegamento saranno facilmente determinabili. Si ricercano, quindi, i valori di rigidezza e smorzamento del sistema di collegamento tali per cui la distanza soglia ad essi correlata sia minore della distanza effettiva esistente tra gli edifici oggetto di studio.

È stato, poi, graficato e analizzato l'andamento delle curve relative alla densità spettrale di potenza di Tajimi-Kanai e Clough- Penzien in funzione della frequenza. Dall'andamento e dalle caratteristiche di tali curve sono state ricavate le ultime considerazioni relative alla scelta dei parametri di frequenza e smorzamento da attribuire al sistema di collegamento. Nel caso in cui il valore della frequenza del sistema di collegamento appena ricavata sia lontano da quello della frequenza relativa al picco della densità spettrale di potenza, si assumerà come valore di frequenza quello appena ricavato. Se, invece, tale valore di frequenza è uguale o si attesta molto vicino a quello relativo al picco della curva della densità spettrale di potenza, si aprono due possibilità: o si ricerca un altro valore della frequenza per il sistema di collegamento che sia lontano da quello di picco ma che continui a soddisfare i requisiti richiesti circa la distanza soglia (cioè che questa sia minore della distanza effettivamente presente tra i due edifici); oppure ricercare un valore di smorzamento del sistema di collegamento che sia grande abbastanza da consentire una maggiore capacità smorzante per l'energia in entrata.

In definitiva, perciò, l'obiettivo di tale lavoro non è stato fornire la soluzione ad un determinato problema, ma, anzi, si è riusciti a formulare un codice generale attraverso il quale è possibile determinare le caratteristiche del sistema di

7. Conclusioni e sviluppi futuri

collegamento da inserire tra due edifici qualsiasi, avendo note le caratteristiche di questi e del terreno su cui sorgono.

Tali risultati sono stati ricavati per il caso di forzante esterna sismica stazionaria. L'obiettivo futuro prevederà sicuramente l'analisi dello stesso sistema qui analizzato, ma nel caso di eccitazione dinamica non stazionaria.

APPENDICE

ESTRATTO DEL CODICE MATLAB UTILIZZATO DURANTE LO STUDIO

Caratterizzazione delle matrici A e B e determinazione dei valori soglia b:

```
for i=1:length(omega_c)
    for j=1:length(xi c)
        A = zeros(8,8);
        A(1:4,5:8) = eye(4);
        A(5,1) = - (omega 1^2 + omega c(i)^2);
        A(5,2) = + \text{ omega\_c(i)^2};
        A(5,3) = + \text{ omega_p^2};
        A(5,4) = - \text{ omega_f^2};
        A(5,5) = -((2*xi_1*omega_1)+(2*xi_c(j)*omega_1));
        A(5,6) = + 2*xi_c(j)*omega_1;
        A(5,7) = + 2*xi_p*omega_p;
        A(5,8) = -2*xi_f*omega_f;
        A(6,1) = + \text{ omega } c(i)^2/\text{fi m};
        A(6,2) = - ((omega 1^2*fi omega^2*fi m) + omega c(i)^2)/fi m;
        A(6,3) = + \text{ omega_p^2};
        A(6,4) = - \text{ omega } f^2;
        A(6,5) = + (2*xi_c(j)*omega_1)/fi_m;
        A(6,6) = -((2*xi 2*omega 1*fi omega*fi m) +
                                             + (2*xi_c(j)*omega_1)) / fi_m;
        A(6,7) = + 2*xi_p*omega_p;
       A(6,8) = -2*xi_f*omega_f;
        A(7,3) = - \text{ omega_p^2};
        A(7,4) = + \text{ omega\_f}^2;
       A(7,7) = -2*xi_p*omega_p;
        A(7,8) = + 2*xi_f*omega_f;
        A(8,4) = - \text{ omega } f^2;
        A(8,8) = -2*xi f*omega f;
        R = lyap(A,B);
        sigma2_x1 = R(1,1);
        sigma2_x2 = R(2,2);
        gamma x1x2 = R(1,2);
        sigma2_u = sigma2_x1+sigma2_x2+gamma_x1x2;
        sigma u = sqrt(sigma2 u);
        matr sigma u (i,j) = sigma u;
        sigma2_vel1 = R(5,5);
        sigma2_vel2 = R(6,6);
```

Determinazione della densità spettrale di potenza di Tajimi-Kanai e di Clough-Penzien:

120

Bibliografia

- [1] «Il rischio sismico nel 2023: analisi e previsioni,» [Online]. Available: https://www.davinciformazione.com/il-rischio-sismico-nel-2023-analisi-e-previsioni/.
- [2] «Oltre il 70% degli edifici italiani non è in grado di resistere ai terremoti,» [Online]. Available: https://www.lavoripubblici.it/news/Oltre-il-70-degli-edifici-italiani-non-e-in-grado-di-resistere-ai-terremoti-16409.
- [3] G. Muscolino, Dinamica delle strutture, McGraw-Hill Companies, 2001.
- [4] F. Pellizzari, *Robust optimization of MTMD systems for the control of vibrations*, Tesi di Laurea Magistrale.
- [5] «Giunto strutturale: come progettarlo per evitare il martellamento [NTC2018],» [Online]. Available: https://www.marcodepisapia.com/giunto-strutturale/.
- [6] A. Reggio, R. Greco, G. C. Marano e G. A. Ferro, «Stochastic Multi-objective Optimisation of Exoskeleton Structures,» *Optimization Theory and Applications*, 2020.
- [7] A. S. Al-Ghazali e H. Shariatmadar, «Hybrid active control of adjacent buildings interconnected by viscous dampers utilizing type-2 fuzzy controller considering soil-structure interaction,» *Elsevier*, 2021.
- [8] E. Magrinelli, M. Acito e M. Bocciarelli, «Numerical insight on the interaction effects of a confined masonry tower,» *Elsevier*, 2021.
- [9] F. Vicencio e N. A. Alexander, «Higher mode seismic structure-soil-structure interaction between adjacent building during earthquakes,» *Elsevier*, 2018.
- [10] H. Takabatake, M. N. Y. Yasui e A. Kishida, «Relaxation method for pounding action between adjacent buildings at expansion joint,» *Earthquake Engineering & Structural Dynamics*, 2014.
- [11] P. C. Polycarpou, P. Komodromos e A. C. Polycarpou, «A nonlinear impact model for simulating the use of rubber shock absorbers for mitigating the effects of structural pounding during earthquakes,» *Earthquake Engineering & Structural Dynamics*, 2012.
- [12] H. Naderpour, R. C. Barros, S. M. Khatami e R. Jankowski, «Numerical Study on Pounding between Two Adjacent Buildings under Earthquake Excitation,» *Hindawi*, 2015.
- [13] E. C. Kandemir-Mazanoglu e K. Mazanoglu, «An optimization study for viscous dampers between adjacent buildings,» *Elsevier*, 2016.

- [14] G. Stefani, M. D. Angelis e U. Andreaus, «Influence of the gap size on the response of a single-degree-of-freedom vibro-impact system with two-sided constraints: Experimental tests and numerical modeling,» *Elsevier*, 2021.
- [15] P. D. Trung, P. T. Quang, N. B. Toan, H. P. Hoa e N. T. Phuoc, «The effectiveness of rubber absorber in adjacent planar structures under earthquake-included pounding,» *International Journal of Civil Engineering and Technology* (IJCIET), 2018.
- [16] S. E. A. Raheem, «Mitigation measures for seismic pounding effects on adjacent buildings responses,» in *Computational Methods in Structural Dynamics and Earthquake Engineering*, Kos Island, Greece, 2013.
- [17] P. C. Polycarpou e P. Komodromos, «Numerical investigation of potential mitigation measures for poundings of seismically isolated buildings,» *Earthquakes and Structures*, 2011.
- [18] N. Jin e Y.-q. Yang, «Optimizing Parameters for Anticollision Systems between Adjacent Buildings under Earthquakes,» *Hindawi*, 2018.
- [19] A. Reggio, L. Restuccia e G. A. Ferro, «Feasibility and effectiveness of exoskeleton structures for seismic protection,» *Elsevier*, 2018.
- [20] A. Reggio, L. Restuccia, L. Martelli e G. A. Ferro, «Seismic performance of exoskeleton structures,» *Elsevier*, 2019.
- [21] Norme Tecniche per le costruzioni DM 17 gennaio 2018.
- [22] Supplemento ordinario n. 5 alla GAZZETTA UFFICIALE Serie generale n. 35, 11-2-2019.
- [23] H. G. Solari, M. A. Natiello e G. B. Mindlin, Nonlinear Dynamics: A Two-way Trip from Physics to Math, New York: CRC Press, 1996.
- [24] R. Greco, G. C. Marano e G. Monti, «Optimal design of a dissipative connection for seismic protection of wall-frame systems,» *Soil Dynamics and Earthquake Engineering*, vol. 87.