POLITECNICO DI TORINO

Corso di Laurea Magistrale in Ingegneria Aerospaziale

Ottimizzazione di laminati VAT realizzati in AFP attraverso un approccio orientato ai difetti

Relatori:

Prof. Alfonso PAGANI

Phd. Alberto RACIONERO

Candidato:

Dario ZAMANI

Ottobre 2023

A Mamma e Papà,
i miei fari

Summary

The focus of my master's thesis is the mechanical characterisation of variable stiffness composite laminates, also known as Variable Angle Tow (VAT). Unlike classical metal alloys used in aerospace, VAT composites have distinct phases already at the microscale. This fact makes their modelling particularly complex. Specifically, composite materials are not designed according to the Damage Tolerance theory, but rather according to the 'Crack-Free' design theory. By following this engineering philosophy, cracks become particularly important since it is not possible to predict how they will evolve over time. Therefore, it is necessary to develop optimal structures with the consideration that manufacturing processes occasionally produce defects in the component, substantially changing the structural properties of the laminate. Specifically, the study I conducted aimed to investigate the influence of defect parameters on the structural optimisation of curvilinear fiber composites produced with Automated Fiber Placement (AFP) techniques. These laminates are specially manufactured to guarantee high structural performance by optimising the distribution of material properties to obtain configurations that better withstand loads. However, the manufacturing process is prone to defects, notably gaps and overlaps. In particular, when the machine that follows the curved path to deposit the fibres fails to do so exactly, two types of defects are created in the plane: it may happen that two consecutive machine passes do not coincide correctly, leaving a gap; or it may happen that two successive passages partially overlap, creating steps in the laminate. The main objective of my dissertation is to investigate how these defects affect the structural performance of the laminates, with a focus on maximising the first natural frequency of the VAT laminate. In particular, the Defect layer method (DLM) was used in synergy with Carrera Unified Formulation (CUF) to capture the effect of gaps and overlaps in the mechanical behaviour of composite laminates. This approach allowed for a more accurate representation of the kinematic behaviour along the thickness. In addition, the optimisation process was performed using MATLAB's global optimisation toolbox, which iteratively enabled the identification of optimal parameters, given the manufacturing constraints, that improved structural performance. More specifically, by using the Python program, a code was written that by giving as input the

machine data (number of tows to be deposited, the thickness of each pass, the radius of curvature, and angles T_0 and T_1) allowed being able to simulate the different printing passes and obtain point by point the areas of possible overlap or gap for each layer. Once these regions were known, they were transferred to the mechanical model to observe how the mechanical properties were affected. At a later stage, a Matlab code was written that implemented a surrogate optimization algorithm, which by varying the printing parameters automatically launched the previously described Python code and the structural analysis. For each iteration, that program created the objective function taking into account the first natural frequency of the laminate and the optimization constraint due to the manufacturing technique. As a result, it was possible to estimate the optimal fiber curvature angles (T_0 and T_1) for each layer of the laminate taking into consideration the defects caused by the manufacturing process.

Table of Contents

List of Tables

List of Figures

Capitolo 1

Introduzione

1.1 Stato dell'arte dei compositi VAT e contenuto dell'elaborato

I materiali compositi si distinguono per la loro abilità nell'alterare le proprietà meccaniche attraverso una diversificazione nella sequenza di stratificazione all'interno del laminato stesso. Tale speciale capacità di adattamento della disposizione ottimale della laminazione interna di un componente è riconosciuta in letteratura con il termine di "tailoring". In precedenza, tale forma di modellazione veniva tradizionalmente conseguita mantenendo costante l'angolazione che le fibre assumono all'interno di ciascuno strato. Tale modalità di disposizione delle fibre 'dritte', però risulta essere un fattore limitante per quanto concerne la risoluzione in modo efficiente di problemi di ottimizzazione. Nello specifico, quando si è in presenza di una distribuzione delle sollecitazioni interne al componente che risultano essere non uniformi. In aggiunta, le proprietà meccaniche come ad esempio i moduli elastici longitudinali e trasversali dipendono fortemente dall'angolo di orientamento locale delle fibre. Di conseguenza, un percorso curvilineo delle fibre ha la possibilità di garantire proprietà di rigidezza variabili, contrariamente all'uso di una stratificazione tradizionale a fibre dritte, la quale invece presenta proprietà meccaniche che rimangono costanti nel piano.
In questo lavoro di tesi, le piastre VAT sono modellizzate impiegando la formulazione unificata (CUF), ovvero implementando dei modelli strutturali gerarchici e con un'accuratezza scalabile. Il lavoro di Demasi et al.,2017 [1] rappresenta uno dei punti di riferimento di questo elaborato. Nello specifico, vengono proposte teorie Equivalent Single Layer, Zig-Zag e Layer Wise implementando diversi ordini di espansione per le diverse variabili in modo da riuscire a caratterizzare staticamente i diversi laminati VAT soggetto dello studio. Si giunge in questo modo alla conclusione che implementare la formulazione unificata per l'analisi dei laminati VAT

porta ad ottenere una maggiore versalità (nel senso di accuratezza del risultato rispetto al tempo di calcolo) rispetto ai software commerciali usati. Questo fatto giustifica l'esigenza in questo elaborato di usare il framework proposto dalla CUF per le analisi strutturali che seguiranno.
Il contributo di Viglietti et al.,2019 [2] propone invece un modello raffinato monodimensionale basato sempre sul quadro di riferimento implementato dalla CUF per l'analisi delle vibrazioni libere di un laminato composito a rigidezza variabile. Si presenta, dunque, una trattazione basata sulla realizzazione di una cinematica accurata sulla sezione trasversale per ottenere un campo di spostamenti tridimensionale del laminato VAT in oggetto di studio.
Entrambi i lavori presentati hanno evidenziato che i modelli Layer-Wise (LW) forniscono le soluzioni più accurate rispetto ai modelli 3D implementati, e nello stesso tempo presentano una forte riduzione del numero di gradi di libertà. Specificatamente, l'uso di modelli Equivalent Single Layer (ESL) visto il loro costo computazionale più ridotto può essere giustificato per laminati sottili, mentre risulta necessario usare modelli LW per la caratterizzazione di laminati più spessi.
Si è deciso di implementare in questo elaborato la notazione proposta da Gurdal et al.,2008 [3] per descrivere l'orientamento delle fibre nel piano. In particolare, come si osserva in Figura 1.1, il percorso delle fibre è caratterizzato da una rotazione angolare Φ rispetto a una certa direzione di riferimento posta in un punto arbitrario A. Si definisce l'angolo di orientazione delle fibre in questo punto come T_0, e varia lungo una direzione x' orientata di un certo angolo Φ rispetto all'asse x di riferimento. L'angolo T_1, invece, rappresenta l'orientamento delle fibre ad una distanza d dal punto di riferimento A scelto in precedenza. Si esprimerà, dunque, l'angolo di rotazione locale delle fibre punto per punto $\theta(x, y)$ come funzione della coordinata locale x' attraverso la trasformazione $x' = xcos\Phi + ysin\Phi$. Inoltre, si ipotizzerà una variazione lineare dell'angolo di orientamento della fibra tra i punti A e B:

$$\theta(x') = \Phi + T_0 + \frac{(T_1 - T_0)}{d}|x'| \tag{1.1}$$

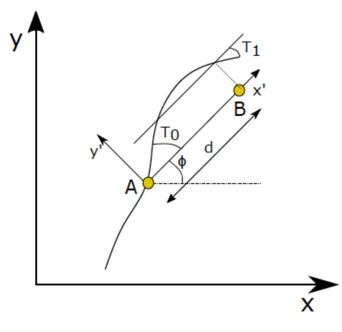


Figure 1.1: Sistema di riferimento del percorso curvilineo delle fibre [4]

L'obiettivo di questo elaborato è quello di investigare l'influenza dei parametri di difetto sull'ottimizzazione strutturale di compositi a fibre curvilinee realizzati attraverso tecniche di Automated Fiber Placement (AFP). Primariamente, nel Capitolo 2 si presentano dal punto di vista meccanico i laminati oggetto di questo studio. Specificatamente, si riportano le teorie strutturali che saranno usate diffusamente in tutto il lavoro. Si mostra nel dettaglio la teoria alla base della CUF e si presenta l'accoppiamento con il metodo agli elementi finiti.
Il Capitolo 3 ha lo scopo di presentare matematicamente gli step necessari a sviluppare un modello di 'Machine Simulation' adatto a caratterizzare completamente la difettologia di gaps e overlaps presenti nei laminati di interesse. Nello specifico si accoppierà il metodo 'Defect Layer' con la formulazione unificata per offrire una descrizione accurata della variazione delle proprietà strutturali in presenza di difetti di stampa.
In seguito, nel Capitolo 4 si effettua un excursus sul problema dell'ottimizzazione in presenza di materiali compositi, e si introduce, nello specifico, l'algoritmo surrogato implementato nello studio. Nel Capitolo 5 si presenta il processo di validazione dei risultati numerici effettuando un'analisi statica e dinamica implementando la CUF, precedentemente descritta, confrontando i risultati per tre casi: piastra in materiale isotropo, piastra in materiale composito "tradizionale" e piastra in materiale composito VAT. Successivamente, si presenta nel Capitolo 6 i risultati dell'analisi vibrazionale condotte effettuate con il software MUL2 nel caso di presenza di eventuali difetti di produzione AFP nei laminati VAT, nello specifico gaps ed overlaps. Infine, nel Capitolo 7 si presentano i risultati di ottimizzazione implementando un modello surrogato per massimizzare la prima frequenza naturale nel caso in cui siano presenti difettologie dovute al processo tecnologico.

1.2 Stato dell'arte della caratterizzazione meccanica dei materiali VAT

In questo paragrafo si intende fornire una descrizione riguardo allo stato attuale della ricerca nell'ambito della caratterizzazione meccanica dei materiali compositi a rigidezza variabile. Le fondamenta teoriche di questo elaborato sono contenute nel lavoro portato avanti da Racionero et al.,2021 [5] in cui si analizza nel dettaglio il comportamento meccanico di gusci in composito VAT sottoposti a diversi carichi esterni e diverse condizioni al contorno utilizzando la già citata CUF, la quale sarà opportunamente presentata nel Capitolo 2. L'indagine ha portato alla conclusione che i modelli Equivalent Single Layer (ESL) e Layerwise (LW) sono in accordo con i risultati ottenuti con le formulazioni proposte dai principali software commerciali per l'analisi dei pannelli piani. Inoltre, è stato riscontrato che l'opportuna scelta dei paramenti T_0, T_1 e Φ può essere regolata con precisione per modificare in modo

conveniente la distribuzione delle sollecitazioni in determinati punti di interesse.
Lo studio portato avanti da Pagani et al.,2023 [6] si concentra, invece, sulla necessità di caratterizzare meccanicamente anche la mesoscala. Nello specifico, si propone un approccio basato sul calcolo della risposta stocastica al livello di fibra e matrice dei laminati VAT affetti da difetti di incertezza multiscala. Anche in questo caso si usa la CUF per ottenere modelli bidimensionali e monodimensionali. In particolare, l'approccio bidimensionale Layer-wise viene adottato per la descrizione della macroscala, mentre si usa un approccio monodimensionale Component-wise per la caratterizzazione della mesoscala. L'uso di questi modelli porta come risultato quello di raggiungere un'efficienza computazionale superiore e di catturare accuratamente lo stato di sollecitazione tridimensionale alle diverse scale.
Il lavoro di Wu et al.,2012 [7] si concentra sulla descrizione analitica del comportamento di pre-buckling dei laminati VAT. Si implementa un approccio analitico usando il metodo di Rayleigh-Ritz per un laminato VAT di forma quadrata e semplicemente appoggiato. Specificatamente, si ottiene un aumento del carico critico di instabilità proprio a causa della ridistribuzione delle tensioni di prebuckling. Per arrivare a tali conclusioni viene proposta una modellazione basata su metodi energetici, la quale viene combinata utilizzando la funzione di stress di Airy per l'analisi di pre-buckling e buckling delle piastre VAT. In questo caso viene dimostrato che la funzione di Airy risulta essere molto più conveniente per gestire le diverse condizioni al contorno nel piano.
Nella pubblicazione di Wu et al.,2013 [8] si presenta uno studio, invece, sul comportamento di post-buckling, in cui viene sviluppata una formulazione semi-analitica basata su un approccio variazionale e successivamente viene applicato il metodo di Rayleigh-Ritz per risolvere il problema in regime postcritico. Anche in questo caso vengono presentati i risultati per una piastra di riferimento di forma quadrata e semplicemente appoggiata sottoposta ad un carico di compressione uniforme ai lati. In conclusione, si dimostra che i risultati migliori vengono ottenuti usando i laminati VAT, nei quali si verifica solo una piccola riduzione della rigidezza nella regione di postbuckling; e contemporaneamente si osserva anche che la rigidezza complessiva ed il carico critico di buckling si mantengono relativamente elevati. Si è quindi dimostrato che vi sono numerosi vantaggi risultanti nell'applicazione di questi materiali a rigidezza variabile per migliorare le prestazioni di postbuckling.
Un altro aspetto degno di nota si trova nel lavoro di Chen,Nie,2022 [9] in cui viene proposta un'indagine riguardante il comportamento post-critico non lineare di pannelli sandwich soggetti a carico di compressione in cui le facce superiori ed inferiori sono realizzate tramite piastre VAT. Nello specifico, si ha che lo strato di pelle è stato modellato utilizzando la teoria della deformazione a taglio del primo ordine, mentre il cuore è stato definito utilizzando teorie di ordine superiore. Si è riscontrato che la variazione di rigidezza delle facce gioca un ruolo determinante: in particolare, tale variazione della rigidezza delle pelli può far sì che i carichi di

instabilità globale e locale si avvicinino l'uno all'altro, aumentando di conseguenza la possibilità di riscontare un comportamento interattivo di buckling. Ciò suggerisce la possibilità di introdurre un knock-down factor (fattore di abbattimento), come nel caso di piastre con curvatura cilindrica, per riuscire a caratterizzare correttamente questa tipologia di laminati.
Nel contributo di Akhavan,Ribeiro,2011 [10] si approfondisce il tema del calcolo delle frequenze naturali e delle forme modali di piastre in composito a rigidezza variabile. Per effettuare questo studio vengono utilizzati elementi finiti che seguono la teoria della deformazione a taglio del terzo ordine. Nell'analisi si tiene conto delle restrizioni di produzione relative alle curvature delle fibre; inoltre sono state prodotte le mappe delle frequenze naturali in funzione degli angoli di curvatura delle fibre. Tale lavoro ha portato alla conclusione che l'uso di piastre VAT può portare ad una variazione significativa delle forme modali ed inoltre si può assistere ad aumento o diminuzione della prima frequenza naturale del laminato. Fattore di notevole importanza risulta essere la variazione dell'orientamento delle fibre, in quanto influisce sulle forme modali del laminato; inoltre si è osservato che le piastre più spesse risultano essere meno sensibili a questa variazione nel comportamento dinamico rispetto alle piastre più sottili.

1.3 Stato dell'arte dei processi produttivi VAT

Nella seguente sezione si vogliono riportare le principali fonti usate nell'elaborato per quanto riguarda il tema dei processi tecnologici legati alla produzione dei materiali compositi a fibra curvilinea. Le principali teconologie attualmente usate sono Automated Tape Laying (ATL) ed Automated Fiber Placement (AFP). Alla base di queste due modalità vi è la deposizione di materiali pre-impregnati (pre-preg), i quali sono composti da fibre unite con la matrice, da parte di macchine controllate numericamente. Tali macchine utilizzano una testa di posizionamento che pone il nastro (tape) su uno stampo (mandrino) per costruire il layup del componente da realizzare. La tecnologia ATL sfrutta grandi nastri pre-impregnati, i quali vengono disposti sulla superficie con un processo automatico che simultaneamente elimina il supporto del substrato. Tale metodo è impiegato per la produzione di parti caratterizzate da una geometria relativamente semplice; tuttavia tale tecnologia presenta un forte limite per quanto riguarda i raggi di curvatura massimi. In particolare, all'aumentare delle dimensioni del nastro, è indispensabile considerare raggi di curvatura più ampi per evitare l'insorgere di inevitabili difettologie, come ad esempio tow gap e tow overlap.
L'altra tecnologia alla base della produzione dei laminati VAT è l'AFP, anche'essa ha la peculiarità di usare una macchina a controllo numerico con la finalità di porre in modo automatico le fibre preimpregnate su uno stampo. A differenza delle

macchine ATL, queste riescono a posizionare fibre pre-preg con larghezza meno ampia, nello specifico tipicamente vanno da 32 mm a 125 mm. Inoltre, l'uso di questa tipologia di nastri permette la realizzazione di superfici ben più complesse rispetto a quelle realizzate con il metodo ATL.
Il lavoro di riferimento per lo studio delle tecnologie AFP risulta essere il lavoro di Zhang et al.,2020 [11], in cui si presenta una rassegna delle tecnologie di deposizione automatica delle fibre attualmente in uso. Nello specifico si presentano nuove soluzioni per migliorare le prestazioni dei sistemi di posizionamento delle fibre, come per esempio l'applicazione della saldatura a induzione con la finalità di migliorare la modulazione del dispositivo della testa di posizionamento; inoltre si indaga l'uso della stampa 3D e dell'ottimizzazione della topologia per il posizionamento delle fibre in composito.
Nel lavoro di Brasington et al.,2021 [12] si espone una panoramica della storia e delle tecnologie attuali nell'ambito AFP. In particolare, vengono mostrate dettagliatamente le diverse e successive fasi del processo produttivo dei compositi VAT che saranno descritte approfonditamente nel Capitolo 2.

1.4 Stato dell'arte caratterizzazione dei difetti nei materiali VAT

Un aspetto fondamentale che verrà opportunamente sviluppato nel Capitolo 3 sono i difetti che nascono dal processo di produzione AFP dei compositi VAT. Come descritto nel precedentemente, il processo di posizionamento automatico delle fibre consente la realizzazione di strutture in composito complesse e anche di notevoli dimensioni, garantendo allo stesso tempo un'qualità e tempi di realizzazione relativamente ridotti. In ogni modo, tale processo di fabbricazione non è privo di criticità: nello specifico, vi sono imperfezioni intrinseche legate a questo processo produttivo, che causano delle disparità tra il pezzo effettivamente prodotto ed il progetto originalmente concepito dal progettista. Questo fatto presenta come conseguenza una variazione delle caratteristiche meccaniche del laminato: pertanto risulta assolutamente necessario presentare lo stato dell'arte dei metodi sviluppati in letteratura per la stima di queste difettologie.
La pubblicazione di riferimento è contenuta nel lavoro di Heinecke,Willberg,2019 [13] in cui viene esposta un'analisi dei principali difetti di produzione legati al processo di fabbricazione AFP per laminati in composito VAT. Nel particolare, viene sottolineato che tra tutte le numerose difettologie presenti, i gaps (lacune) e gli overlaps (sovrapposizioni) risultano essere predominanti. In particolare, i tow gap risultano essere intervalli vuoti tra due passate consecutive in cui non avviene la deposizione a causa della curvatura locale del processo di deposizione. I tow overlap, d'altro canto, sono anomalie che emergono all'aumentare della curvatura di

deposizione, in cui due filamenti successivi si sovrappongano aumentando localmente lo spessore del laminato.
Diversamente da quanto si applicherà in questo elaborato, nel lavoro di *Blom et al.,2009* [14] si modellano le aree di gaps ed overlaps utilizzando una mesh molto raffinata per catturare completamente le dimensioni dei difetti. Tuttavia, questa metodologia comporta un elevato costo computazionale proprio a causa della grande quantità di elementi necessari.
Un altro importante lavoro su queste tematiche viene sviluppato da Fayazbakhsh et al.,2012 [15] in cui si analizza l'effetto di gap o overlap sulla rigidezza nel piano e sul carico critico di instabilità di laminati a rigidezza variabile. Nello specifico, viene sviluppato un metodo chiamato Defect Layer Method (DLM) in cui si considerano i gaps scalando le proprietà elastiche del materiale; mentre gli overlap si ottengono modificando lo spessore dello strato. Si dimostra che questa metodologia risulta essere più precisa nell'individuare e calcolare la percentuale dell'area dei difetti, indipendentemente dal numero di elementi finiti coinvolti. Pertanto, le principali conclusioni di questo studio riportano che i gaps risultano avere un effetto peggiorativo rispetto alla rigidezza nel piano ed il carico critico di instabilità; mentre gli overlap hanno l'effetto di essere migliorativi rispetto a queste prestazioni strutturali.
Nel lavoro di Pagani, Racionero,2020 [4] si implementa CUF, la quale permette di eseguire analisi a livello della meso-scala, modellando ogni strato in modo indipendente. Nello specifico, vengono implementati modelli di variazione strato per strato per mezzo di campi casuali attraverso un'analisi Monte Carlo così da riuscire a proporre una metodologia che tenga conto del disallineamento delle fibre. Si giunge, quindi, alla conclusione che i modelli Layerwise (LW) sono essenziali per tenere pienamente conto dell'effetto di queste difettologie sulla mesoscala.
Infine, un importante tassello viene completato da Marouene et al.,2016 [16] in cui si mostra uno studio sia sperimentale sia numerico sugli effetti sul comportamento di buckling dei laminati VAT in presenza di difetti nel piano, quali gaps ed overlaps. In prima istanza, viene svolto il lavoro sperimentale in cui sono prodotti laminati compositi a rigidezza variabile in cui le fibre sono depositate in modo curvilineo; successivamente viene provato secondo una codizione di carico di compressione uniassiale fino alla rottura con condizione al contorno di semplice appoggio ai bordi. Per studiare l'effetto dei difetti dovuti al processo AFP si realizzano i due laminati secondo la filosofia complete gap e complete overlap, così da consentire lo studio indipendente dell'effetto di ciascun tipo di difettologia isolatamente. Secondariamente, viene proposto uno studio di carattere numerico costruendo un modello bidimensionale agli elementi finiti utilizzando il software commerciale Abaqus; inoltre viene implementata uno script MATLAB per localizzare i gaps ed overlaps presenti all'interno dei laminati oggetto di studio. Infine, viene eseguita un'analisi di buckling lineare per ricavare il carico critico delle piastre realizzate in

precedenza. Si arriva, quindi, alla conclusione che vi sia una buona correlazione tra i risultati numerici agli elementi finiti e i risultati sperimentali ottenuti dalla realizzazione dei laminati. Nello specifico sia i risultati sperimentali sia quelli numerici mostrano che per i pannelli VAT realizzati con la filosofia complete overlap presentano rigidezza nel tratto di pre-buckling e carico critico di instabilità superiori rispetto a quelli realizzati con la filosofia complete gap.

1.5 Stato dell'arte ottimizzazione dei VAT

In questa sezione vengono esposti i principali lavori disponibili in letteratura sull'ottimizzazione dei compositi a rigidezza variabile. Questa tematica risulta essere il cuore centrale del lavoro che seguirà; inoltre sarà trattata in modo esaustivo dal punto di vista teorico nel Capitolo 4 di questo elaborato.
Il lavoro di riferimento per le ottimizzazioni che saranno presentate in questa tesi è presentato nell'articolo di Carvalho et al.,2022 [17] in cui si esplorano le applicazioni di strutture composite VAT per massimizzare la prima frequenza fondamentale tramite l'ottimizzazione degli angoli di laminazione ('tow angles'). Nello specifico, vengono posti dei vincoli di ottimizzazione intrinsecamente legati al processo di fabbricazione AFP e si applica l'ipotesi di variazione lineare dell'angolo della fibra lungo il laminato. Peculiarità di questo lavoro risulta essere il fatto che vengono considerati i difetti di tipo gap direttamente integrati all'interno del processo di ottimizzazione, specificatamente si applica il DLM con l'obiettivo di valutarne l'effetto sulla frequenza fondamentale. I risultati evidenziano che, nonostante i gaps deteriorino le prestazioni strutturali dei laminati VAT, la direzionalità delle fibre può comportare un certo incremento della loro frequenza fondamentale, in base alla geometria ed alle condizioni al contorno.
Nella pubblicazione di Nik et al.,2013 [18] si analizza, invece, come i parametri che regolano la formazione dei difetti influenzino l'insieme delle soluzioni ottimali in cui si cerca di massimizzare contemporaneamente la rigidezza nel piano ed il carico critico di buckling. Si constata che mantenendo costante la larghezza della passata ('course'), si ottiene che all'aumentare dei tows presenti all'interno di un singolo course, si riduce la quantità di aree dei difetti all'interno del laminato. In aggiunta, la quantità di aree in cui sono presenti i difetti si riducono significativamente utilizzando un percorso di deposizione il più possibile ampio. In particolare, viene dimostrato che usare un course con 32 tows riduce notevolmente la quantità dei difetti all'interno del laminato rispetto al caso in cui si usino solamente 8 tows per ogni course della macchina. Inoltre, nel problema di ottimizzazione si osserva che usare una strategia di full-gap comporta una riduzione della rigidezza nel piano e del carico critico di instabilità; d'altro canto usare una strategia di full-overlap porta a risultati migliori per quanto riguarda sia rigidezza sia del carico critico di

buckling.
Nello studio di Groh,Weaver,2015 [19] si propone una metologia di ottimizzazione di un tipico pannello alare di un aereo sottoposto ad un carico di compressione all'estremità.Vengono forniti i vincoli di ottimizzazione legati al processo di fabbricazione ed i criteri di rottura statica, inoltre viene fissato il carico critico di buckling. In particolare, si implementa uno schema di ottimizzazione ibrido tra algoritmo genetico ed algoritmo 'pattern-search' per arrivare ad una riduzione del 31% del peso rispetto al caso in cui le fibre erano disposte secondo una configurazione non curvilinea. In conclusione, si dimostra anche che è opportuno considerare la stabilità nella regione di postbuckling quando si ottimizzano strutture realizzate in VAT, così da prevenire eventuali instabilità del comportamento post-critico.
Nel lavoro di Zhao,Kapania,2022 [20] si illustra l'ottimizzazione del carico di instabilità condotta per una piastra realizzata in composito VAT che però presenta un foro centrale. Anche in questo caso, si considerano i vincoli legati al processo di produzione del laminato VAT. Sono considerate, nello specifico, tre condizioni al contorno ritenute rappresentative delle strutture aerospaziali: lo spostamento assiale nel piano, il taglio puro nel piano ed infine la flessione pura nel piano. I vincoli di ottimizzazione considerati riguardano il primo il raggio di rotazione della testa di deposizione del processo AFP; il secondo,invece, sul tow gap e overlap durante la fabbricazione dei laminati oggetto di studio. Viene impostato un algoritmo di ottimizzazione di tipo 'Particle swarm' per cercare il massimo carico critico di buckling. I risultati delle ottimizzazioni effettuate mostrano che nel caso in cui non si considerino vincoli di produzione AFP, in tutti i casi si assiste ad un aumento del carico critico di instabilità dei laminati VAT rispetto ai laminati con percorso di fibre tradizionalmente rettilineo. Viene inoltre riscontrato che l'applicazione dei vincoli di produzione AFP hanno un impatto sulle risposte all'instabilità: nello specifico, il carico critico di buckling risulta essere inferiore al caso in cui non si con considerano i vincoli di ottimizzazione.
L'articolo di Hao et al.,2021 [21] si interessa di un'altra problematica legata all'analisi ed all'ottimizzazione dei compositi a fibra curvilinea a rigidezza variabile: ovvero la necessità di considerare le possibili condizioni di incertezza, come nel caso di ottimizzazione del progetto basata sull'affidabilità. Nel merito di questo lavoro viene proposta una metologia basata su due stadi tramite l'analisi isogeometrica (IGA) per allegerire il costo computazionale. Nella prima fase vengono scelti lo spessore del singolo strato ed i parametri di laminazione come variabili di progetto, così da ottenere un numero di strati approssimato per la fase successiva del progetto. Nella seconda fase, invece, avviene l'ottimizzazione vera e propria con lo scopo anche in questo caso di massimizzare il carico critico di instabilità. Tale procedimento, seppur particolarmente oneroso computazionalmente, porta ad ottenere il numero minimo di strati necessari e le corrispondenti configurazioni di laminazione che soddisfano i vincoli di affidabilità impostati.

Capitolo 2

Teorie strutturali e Meccanica dei materiali VAT

2.1 Variable Angle Tow - VAT Laminates

Lo sviluppo negli ultimi anni di tecniche automatiche di piazzamento delle fibre ha permesso lo sviluppo di nuovi laminati in cui si ottiene un posizionamento curvilineo della fibra. Come si discuterà in seguito, si è riusciti a programmare opportunamente un braccio robotico in modo che non necessariamente si seguisse una traiettoria rettilinea posizionando la fibra strato per strato, bensì una traiettoria curvilinea.

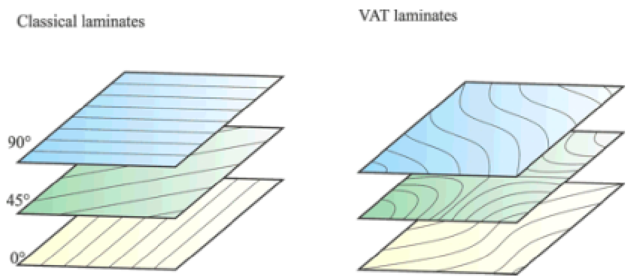


Figure 2.1: Confronto tra un laminato classico ed un laminato VAT

A differenza dei compositi classici in cui le fibre si distendono lungo una direzione fissa in ogni strato, producendo così una rigidezza costante per ogni strato, nei compositi VAT le fibre possono variare lungo un andamento curvilineo, e quindi fornire una rigidezza variabile nel piano.
In Figura 2.1 si osserva la principale differenza tra un laminato composito classico

e un laminato VAT: nel primo caso si assiste al posizionamento della fibra con direzione costante per ogni strato; nel secondo caso, invece, si osserva l'uso curvilineo delle traiettorie delle fibre. Si può facilmente constatare il vantaggio che si ottiene operando in quest'ultimo modo: si riesce a raggiungere uno spazio di design in possesso al progettista molto più grande rispetto al caso classico, permettendo quindi di ottenere condizioni ottimizzate non indagabili diversamente.

Volendo adesso caratterizzare matematicamente i compositi VAT, si osserva in Figura 2.2 la possibilità di avere principalmente due tipologie di laminazione curvilinea: a variazione lineare e a curvatura costante.

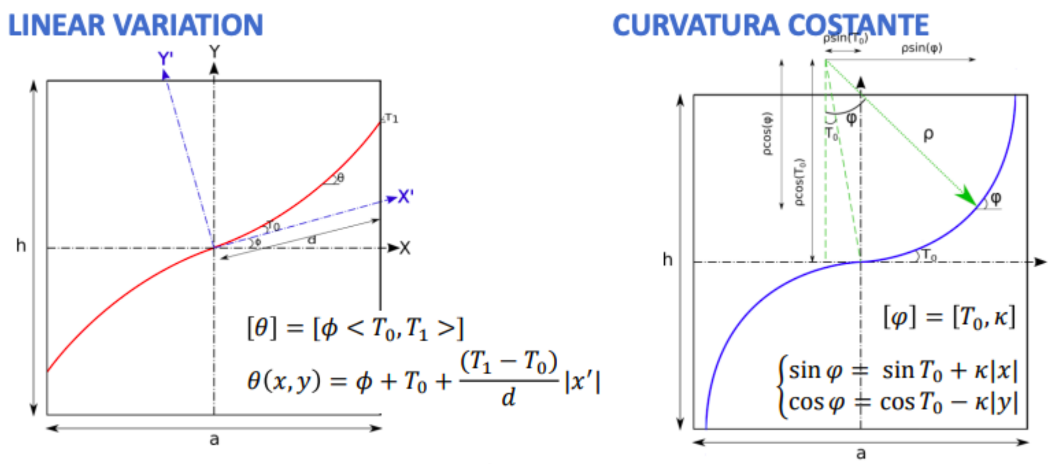


Figure 2.2: Confronto tra laminato VAT laminato con variazione lineare della fibra e con curvatura costante [3]

Nel primo caso l'angolo θ che descrive punto per punto nello strato la direzione locale della fibra è caratterizzato da 4 parametri fondamentali:

- Il primo parametro è l'angolo ϕ che si forma tra la direzione in cui si stira la fibra rispetto ad un sistema di riferimento globale $x - y$. Tale variabile rappresenta l'offset tra il sistema globale e locale del laminato e fornisce l'informazione che l'angolo θ locale della fibra varia tra un angolo T_0 e un angolo T_1 in modo lineare a meno di una costante ϕ.

- Il secondo parametro è l'angolo T_0 tra la coordinata locale x' e la traiettoria della fibra al centro della piastra.

- Il terzo parametro è l'angolo T_1 tra la coordinata locale x' e la traiettoria della fibra all'estremo del pannello.

- Il quarto parametro è la lunghezza caratteristica d che rappresenta la lunghezza della fibra tra T_0 e T_1, dunque concettualmente risulta diverse dalla dimensione orizzontale del pannelo a e dalla dimensione verticale h.

Avendo definito i parametri caratteristici di questa tipologia di laminazione, si riporta di seguito la modalità con cui in letteratura si caratterizzano gli strati dei laminati VAT a variazione lineare:

$$\theta(x, y) = \phi + T_0 + \frac{T_1 - T_0}{d}|x'| \quad \longrightarrow \quad [\theta] = [\phi\langle T_0, T_1\rangle] \tag{2.1}$$

Nel secondo caso, ovvero per i laminati a curvatura costante in letteratura si utilizza l'angolo φ per caratterizzare punto per punto nel piano l'angolo locale di orientamento della fibra. Si ha che il laminato si può descrivere tramite l'utilizzo di 2 parametri:

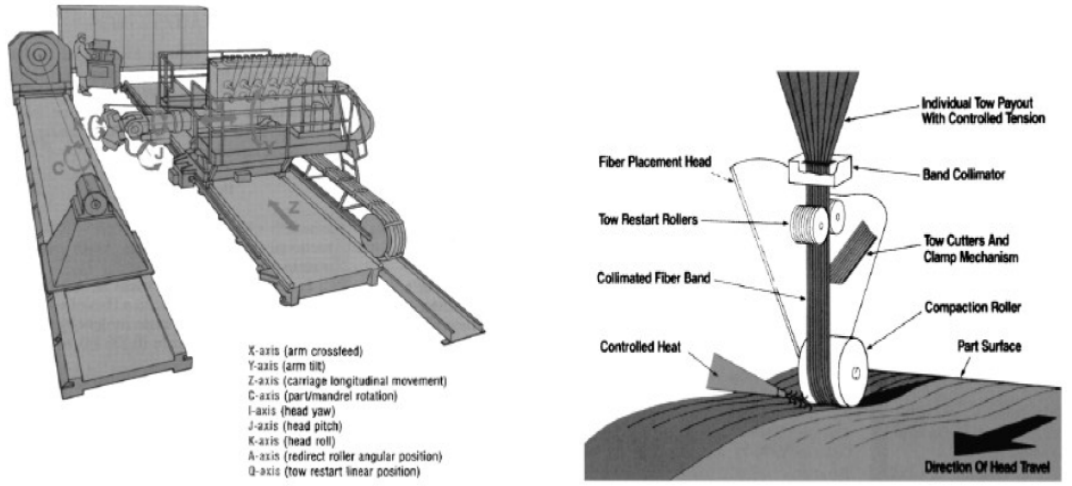
- Il primo parametro caratteristico per questa tipologia di laminati è l'angolo T_0, che anche in questo caso ha il significato di rappresentare l'orientamento della fibra nel punto centrale degli assi locali $x' - y'$.
- Il secondo parametro è κ che rappresenta la curvatura del percorso della fibra, e si ottiene facendo l'inverso del raggio di curvatura del braccio robotico della macchina usata per disporre le fibre nello strato.

Anche in questo caso è possibile caratterizzare questa tipologia di laminati con la seguente espressione matematica:

$$[\varphi] = [T_0, \kappa] \qquad \begin{cases} \sin\varphi = \sin T_0 + \kappa|x| \\ \cos\varphi = \cos T_0 - \kappa|y| \end{cases} \tag{2.2}$$

2.2 Automated Fiber Placement (AFP)

Si è già detto uno dei grandi vantaggi dei lamitati in cui le fibre vengono stirati secondo percorsi curvilinei è quello di avere un spazio di design ben più ampio dei laminati classici e nuove possibilità di ottimizzare le strutture in termini di rigidezza e peso. Tutto questo è possibile grazie grazie alla tecnica di manifattura chiamata Automated Fiber Placement (AFP). Tuttavia, la fabbricazione di laminati compositi con AFP può portare all'insorgere di difetti come gaps e overlaps. In breve, per quanto concerne i gaps, essi si riempiono con la resina dopo la polimerizzazione, mentre gli overlaps sono costituiti da accumuli di spessore localizzati. Risulta dunque fondamentale considerare tali difettologie durante la progettazione e la modellazione dei laminati compositi VAT.



a) b)

Figure 2.3: a) Configurazione tipica di una macchina AFP usata nell'industria aerospaziale b) Dettaglio della testa di posizionamento dei tows di materiale [22]

Si riporta in Figura 2.3 una tipica configurazione di una macchina AFP usata nell'industria aerospaziale per la fabbricazione di componenti. Essa è dunque costituita principalmente da una testa di posizionamento delle fibre montata su un braccio robotico e dotata di sei o sette gradi di libertà a seconda del tipo di configurazione della macchina AFP in uso. Il materiale viene alimentato al braccio sotto forma di nastro pre-impregnato costituito da fasci di fibre pre-impregnate di resina. Il singolo fascio di fibre pre-impregnate è chiamato tow, esso viene dunque fatto passare attraverso un sistema guidato sulla testa di deposizione delle fibre, che permette di allineare i vari tow in modo da formare un nastro largo. Ciascun tow depositato può avere una larghezza da 3,18 mm a 6,35 mm.
Ciascuna delle bande utilizzate per coprire una particolare dimensione della geometria è chiamata course. Tipicamente la larghezza di questi course può variare a seconda del tipo di macchina AFP in uso, ma in genere le macchine AFP possono posizionare fino ad un massimo di 32 tows per course di macchina, tale numero può essere modificato durante la stampa in maniera discreta in base alle esigenze. Il compito di posizionare dei singoli nastri nella posizione è assegnato alla testa guida, inoltre essa esegue anche la compattazione dei nastri usando il rullo di compattazione. In aggiunta, un'altra funzione della testa di posizionamento è quella di riscaldare il nastro per aumentarne la capacità di adesione alla superficie. Il fatto di avere quindi un materiale compatto e con alte capacità adesive aiuta la testa guidata a posizionare con grande precisione i tows sulle superfici desiderate. Il grande vantaggio di usare una tale tecnica per la realizzazione dei laminati a

rigidezza variabile è il fatto che la testa della macchina AFP ha anche la capacità di tagliare e risistemare i singoli tows. Ciò consente di variare l'orientamento delle fibre anche con curvature elevate.
Le tecniche di AFP usano principalmente 3 tipologie di materiali: termoindurenti, termoplastici e fibre secche. Nello specifico, i materiali termoindurenti e termoplastici vengono definiti pre-impregnati in quanto le fibre vengono annegate nella resina.
I materiali termoindurenti sono composti da una miscela di fibre e resine che, una volta indurite, creano un network reticolare tridimensionale, formati a livello microstrutturale da legami trasversali covalenti. Questi sono i materiali più usati nelle tecniche AFP grazie alla loro relativamente bassa viscosità. Inoltre, questi materiali presentano basse temperature di lavorazione e quindi bassi apporti di calore necessari. Risulta, però, necessario prevedere una fase di lavorazione secondaria in autoclave. Il grande difetto di questi materiali è che non possono essere di nuovo fusi e riprocessati, poichè degraderebbero. Questo è dovuto al fatto che al livello microstrutturale essi presentano legami covalenti non solo tra gli atomi di carbonio che formano le singole catene polimeriche, ma anche tra le catene principali. In questo caso aumentare la temperatura farebbe aumentare l'energia che tenderebbe a rompere i legami covalenti sia tra i monomeri della singola catena, sia quelli tra più catene; si assisterebbe dunque ad una distruzione delle unità fondati dei polimeri portandoli quindi inevitabilmente alla decomposizione.
I materiali termoplastici presentano catene polimeriche lineari non reticolate e poco ramificate presentando quindi relativamente basse temperature di rammollimento. Inoltre, tali polimeri termoplastici possono essere amorfi oppure semicristallini: nel primo caso presentano le macromolecole distribuite in modo disordinato; nel secondo le macromolecole non sono del tutto disposte in modo disordinato. Nel caso dei polimeri termoplastici amorfi presentano una graduale diminuzione della viscosità con l'aumento della temperatura, poiché le catene polimeriche che hanno ottenuto sufficiente energia termica possono muoversi abbastanza liberamente portando il polimero a comportarsi come un liquido viscoso. Il vantaggio dei termoplastici rispetto ai termoindurenti è quello di essere riciclabili e riprocessabili: ciò è possibile in quanto a livello microstrutturale essi presentano legami forti covalenti solo tra i monomeri costituenti le catene polimeriche, mentre i legami tra le catene polimeriche sono deboli. Tale proprietà della microstruttura li rende facilmente modellabili a caldo, inoltre dopo raffreddamento sono in grado di mantenere la forma impartitagli e risultano riformabili con un successivo raffreddamento. Il "riciclaggio" dei materiali termoplastici non è però a costo zero, in quanto i polimeri riciclati hanno proprietà fisiche e meccaniche inferiori a quelli di partenza. La caratteristica di rammollimento alle alte temperature rende questa tipologia di materiali ideali per questo tipo di processo. Un ulteriore vantaggio rispetto ai materiali analizzati in precedenza è quella del fatto che non sia necessario il consolidamento

in autoclave, ma sia possibile effettuare il consolidamento in situ. Una possibile difficoltà che si incotra è la difficoltà di stratificazione a causa delle temperature elevate richieste (intorno ai 400°C).
A differenza dei casi analizzati fino ad ora, i materiali in fibra secca sono privi di una matrice di resina. Il vantaggio nell'usare tali materiali risiederebbe proprio nel fatto che la fibra secca ha una maggiore flessibilità e facilità di gestione, in quanto non è confinata da una matrice di resina. Questo appunto la rende ideale per le applicazioni con la testa guidata. Inoltre, il fatto che non si faccia uso di resina riduce l'accumulo di resina nella testa della macchina, abbassando dunque i costi di produzione. Risulta, però, in ogni caso necessario attraverso dei processi di post-lavorazione infondere la resina nel pezzo finale, il che può rappresentare uno svantaggio in termini di tempi e costi di lavorazione.

2.3 Difetti dei compositi VAT

Come si è precedentemente detto il metodo di manifattura AFP risulta essere il più usato per la produzione dei materiali compositi a rigidezza variabile. Tuttavia, tale processo di produzione automatizzata non risulta essere ancora del tutto perfezionato; in particolare si possono riscontrare dei difetti nella produzione con metologia AFP. E' necessario sottolineare che tali difettologie riscontrate nella porzione di strato sono nella maggioranza dei casi una parte involontaria del processo automatizzato, risulta pertanto necessario una completa compressione di queste problematiche e di come questi influenzino le proprietà meccaniche del componente prodotto. I principali difetti indagati nella produzione dei compositi VAT sono i gaps, overlaps e i wrinkles.

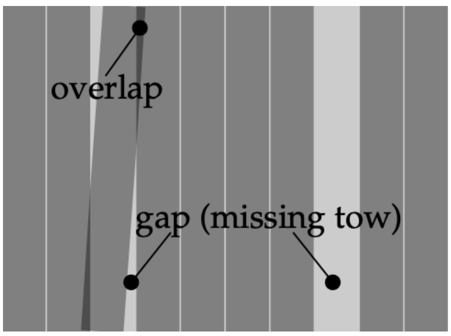


Figure 2.4: Esempio di difetti gap ed overlap in un processo AFP [13]

In Figura 2.4 si osserva un difetto di tipo gap, questo avviene quando due tows adiacenti non vengono perfettamente uniti, ma si viene a creare uno spazio vuoto tra di loro. Le aree interessate dai gaps sono regioni ricche di resina, dunque

possibili luoghi in cui si può assistere a coalescenza di microfessurazioni.
Sempre nella Figura 2.4 si osserva anche un difetto di tipo overlap, tale situazione si verifica quando due tows si sovrappongono, avendo come effetto quello di aumentare localmente lo spessore. Le aree interessate da questa difettologia sono invece povere di resina.
Per quando riguarda la formazione dei gaps sia per gli overlaps dipendono dalla strategia di stampa utilizzata: in particolare, se non si sceglie di imporre un parallelismo, stampare i tows facendo un offset perpendicolare alla direzione di stampa produrrebbe gaps oppure overlaps in base all'angolo locale iniziale e finale della fibra.
Un'altra tipologia di difetti derivanti del processo di AFP è il tows wrinkling, esso si verifica quando un tow viene guidato attraverso un percorso non lineare su una superficie complessa. Ciò può causare un motivo ondulato di pieghe lungo il bordo del tow, che rimane fuori dal piano dopo la compattazione e l'indurimento. Questo tipo di difetto è spesso causato dal posizionamento di tows con raggi di curvatura ridotti, che possono causare una lunghezza differenziale eccessiva tra i bordi del pezzo. E' necessario sottolineare che tale difettologia si appiattisce man mano che si stampano gli strati successivi, tale situazione può portare alla formazione di gap lungo lo spessore.

2.4 Richiami di Teoria dell'Elasticità

In questo capitolo introduttivo si vogliono riportare sommariamente le teorie fisiche ed ingegneristiche alla base delle analisi strutturali che seguiranno in questo lavoro di tesi.
In particolare, la risoluzione del problema elastico consiste nel giungere a conoscere la nuova condizione di equilibrio di tutti i punti del corpo in oggetto, assegnate forze esterne e vincoli. Nella pratica, si ha la necessità di descrivere la nuova forma che il corpo iniziale assume assegnate appunto le suddette condizioni al contorno. Analiticamente, quanto detto fino ad ora, si traduce nel calcolo degli spostamenti, delle tensioni e delle deformazioni per ogni punto P appartenente al corpo iniziale.

Usando come riferimento il corpo tridimensionale di volume V e di perimetro S riportato in Figura 2.5 è possibile scrivere il campo di spostamenti descritto dal vettore $\mathbf{u^T}$:

$$\mathbf{u^T} = \{u_x, u_y, u_z\} = \{u, v, w\}$$

Noto il sopraccitato vettore degli spostamenti si possono ricavare, come si vedrà in seguito, il tensore delle deformazioni $\boldsymbol{\epsilon}$ e delle tensioni $\boldsymbol{\sigma}$. Si vogliono riportare nel seguito le deformazioni e le tensioni espressi come vettori usando la notazione di Voight:

$$\boldsymbol{\epsilon^T} = \{\epsilon_{xx}, \epsilon_{yy}, \epsilon_{zz}, \gamma_{xz}, \gamma_{yz}, \gamma_{xy}\}$$

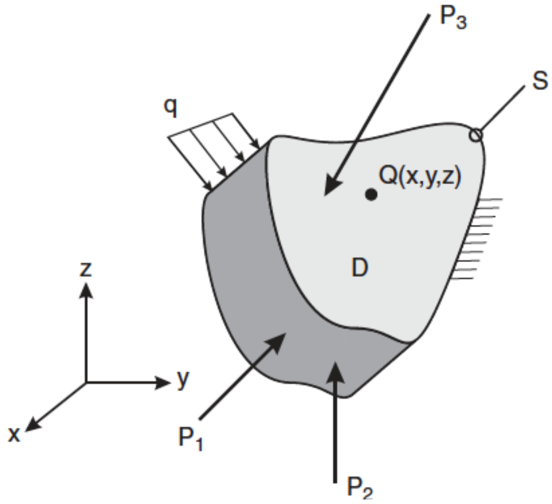


Figure 2.5: Descrizione del problema elastico 3D assegnati vincoli e carichi esterni [23]

$$\boldsymbol{\sigma}^{\boldsymbol{T}} = \{\sigma_{xx}, \sigma_{yy}, \sigma_{zz}, \sigma_{xz}, \sigma_{yz}, \sigma_{xy}\}$$

2.4.1 Relazioni Geometriche

Noto il campo di spostamenti u_x, u_y, u_z su tutto il dominio descritto in Figura 2.5 è possibile ricavare le 6 componenti di deformazione tramite *le relazioni geometriche*.

- Vi saranno 3 componenti relative al cambio volumetrico (deformazioni lineari): $\epsilon_{xx}, \epsilon_{yy}, \epsilon_{zz}$.
- Vi saranno 3 componenti relative al cambio di forma (distorsione a taglio): $\gamma_{xz}, \gamma_{yz}, \gamma_{xy}$

$$\epsilon_{xx} = \frac{\partial u_x}{\partial x} = u_{x,x}$$

$$\epsilon_{yy} = \frac{\partial u_y}{\partial y} = u_{y,y}$$

$$\epsilon_{zz} = \frac{\partial u_z}{\partial z} = u_{z,z}$$

$$\gamma_{xy} = \frac{\partial u_x}{\partial y} + \frac{\partial u_y}{\partial x} = u_{x,y} + u_{y,x}$$

$$\gamma_{zx} = \frac{\partial u_x}{\partial z} + \frac{\partial u_z}{\partial x} = u_{x,z} + u_{z,x}$$

$$\gamma_{zy} = \frac{\partial u_y}{\partial z} + \frac{\partial u_z}{\partial y} = u_{y,z} + u_{z,y}$$

In forma sintetica, è possibile riscrivere le relazioni geometriche appena viste introducendo opportunamente l'operatore lineare differenziale, il quale in questa trattazione sarà indacato con il termine **b**. Tale operatore viene applicato al campo di spostamenti **u** definito in precedenza:

$$\boldsymbol{\epsilon} = \mathbf{b}\mathbf{u} \tag{2.3}$$

Nello specifico, si osserva che l'operatore differenziale lineare risulta essere definito nel seguente modo:

$$\mathbf{b} = \begin{bmatrix} \partial/\partial x & 0 & 0 \\ 0 & \partial/\partial y & 0 \\ 0 & 0 & \partial/\partial z \\ \partial/\partial z & 0 & \partial/\partial x \\ 0 & \partial/\partial z & \partial/\partial y \\ \partial/\partial y & \partial/\partial x & 0 \end{bmatrix} \tag{2.4}$$

La relazione (2.3) risulta valida unicamente nel caso in cui siano verificate le ipotesi di linearità geometrica del problema strutturale: ovvero è necessario ipotizzare unicamente la presenza di piccole rotazioni e di piccoli spostamenti.

2.4.2 Equazioni costitutive

Nella risoluzione del problema elastico vengono fornite ulteriori 6 equazioni. Quest'ultime rappresentano le leggi che legano le tensioni con le deformazioni tramite i coefficienti del materiale. Nel caso specifico di materiali isotropi la matrice dei coefficienti elastici del materiale risulta particolarmente semplice da rappresentare:

$$\mathbf{C} = \begin{bmatrix} C_{11} & C_{12} & C_{12} & 0 & 0 & 0 \\ C_{21} & C_{22} & C_{12} & 0 & 0 & 0 \\ C_{21} & C_{22} & C_{33} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & C_{44} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & C_{55} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & C_{66} \end{bmatrix} \tag{2.5}$$

Le costanti elastiche che compaiono nella matrice **C** possono essere determinate attraverso i due coefficienti di Lamè λ e G:

$$C_{11} = \lambda + 2G \quad C_{12} = \lambda \quad C_{44} = G$$

I coefficienti di Lamè possono essere espressi in funzione del modulo di Young E e del coefficiente di Poisson ν:

$$G = \frac{E}{2(1+\nu)} \qquad \lambda = \frac{\nu E}{(1+\nu)(1-2\nu)}$$

Anche in questo caso è possibile scrivere l'equazione costitutiva in modo sintetico con la seguente relazione matriciale:

$$\boldsymbol{\sigma} = \mathbf{C}\boldsymbol{\epsilon} \tag{2.6}$$

L'equazione (2.6) risulta essere applicabile unicamente nel caso di validità delle ipotesi di *campo di deformazione lineare*. Nello specifico, si devono applicare le ipotesi di comportamento lineare del materiale.

2.4.3 Equazioni di equilibrio

Affinchè si possa chiudere il problema lineare elastico è necessario introdurre 3 ulteriori equazioni, denominate equazioni indefinite di equilibrio. In particolare, le componenti di tensione precedentemente ricavate in un generico punto del volume V rappresentato in Figura 2.5 devono soddisfare le seguenti condizioni di equilibrio dinamico differenziale indefinito lungo le tre direzioni di un sistema di riferimento cartesiano ortogonale definito dagli assi x, y, z:

$$\frac{\partial \sigma_{xx}}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{yx}}{\partial y} + \frac{\partial \tau_{zx}}{\partial z} = g_x$$

$$\frac{\partial \tau_{xy}}{\partial x} + \frac{\partial \sigma_{yy}}{\partial y} + \frac{\partial \tau_{zy}}{\partial z} = g_y$$

$$\frac{\partial \tau_{xz}}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{yz}}{\partial y} + \frac{\partial \sigma_{zz}}{\partial z} = g_z$$

Si può dunque affermare che si è arrivati a chiudere matematicamente il problema elastico lineare avendo definito un problema con 15 equazioni in 15 incognite. Tale problema risulta quindi essere ben posto matematicamente, ma troppo complesso da risolvere. Nella pratica non esiste soluzione esatta del problema in forma chiusa, se non per semplici casi. Nel seguito si procederà introducendo le teorie assiomatiche per elementi strutturali bidimensionali, le quali hanno il compito di introdurre delle ipotesi con lo scopo di semplificare sensibilmente le equazioni appena descritte, e quindi ridurre le incognite sulla base della tipologia e delle dimensioni prevalenti nella struttura in analisi.

2.5 Teoria elementare della Piastra

La prima teoria assiomatica che si intende riportare è la teoria della piastra sottile di Kirchhoff-Love, la quale partendo dalle ipotesi sul campo di spostamenti riesce a ricavare un set di 3 equazioni che descrivono la cinematica della piastra. Si riportano di seguito le tre ipotesi cinematiche su cui successivamente si costruirà il modello elementare bidimensionale:

1. I segmenti di spessore inizialmente rettilinei, rimangono tali a deformazione avvenuta.

2. I segmenti di spessore non variano la loro lunghezza a seguito della deformazione.

3. I segmenti di spessore inizialmente perpendicolari alla superficie di riferimento, mantengono tale condizione anche una volta avvenuta la deformazione.

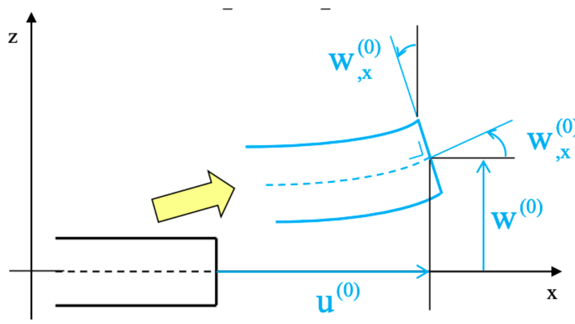


Figure 2.6: Schema della vista laterale del modello bidimensionale proposto dalla teoria elementare [24]

Dalle 3 ipotesi cinematiche è possibile ricavare il campo di spostamenti della teoria della piastra di Kirchhoff:

$$u(x, y, z) = u^{(0)}(x, y) + z\phi(x, y)$$

$$v(x, y, z) = v^{(0)}(x, y) + z\theta(x, y)$$

$$w(x, y, z) = w^{(0)}(x, y) + z\psi(x, y)$$

- La prima ipotesi cinematica impone che il segmento di spessore rimanga rettilineo a deformazione avvenuta, questo prescrive che nello sviluppo degli spostamenti u, v, w nell'introno della coordinata $z = 0$ ci si fermi al termine di ordine unitario. In sostanza, si è usato un campo di spostamenti che rimanga al massimo lineare in z.

- La seconda ipotesi richiede che il segmento di spessore rimanga costante in lunghezza, questo implica che la deformazione ϵ_{zz} deve essere nulla.

$$\epsilon_{zz} = \frac{\partial w}{\partial z} = \psi(x, y) = 0 \longrightarrow \psi(x, y) = 0$$

- La terza ipotesi prescrive che il segmento di spessore deve rimanere perpendicolare alla superficie media: in pratica questo si traduce nel ritenere nulli gli scorrimenti angolari γ_{xz} e γ_{yz}:

$$\gamma_{xz} = \frac{\partial u}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial x} = \phi(x,y) + \frac{\partial w^{(0)}}{\partial x} = 0 \longrightarrow \phi(x,y) = -\frac{\partial w^{(0)}}{\partial x} = -w^{(0)}_{,x}$$

$$\gamma_{yz} = \frac{\partial v}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial y} = \theta(x,y) + \frac{\partial w^{(0)}}{\partial y} = 0 \longrightarrow \theta(x,y) = -\frac{\partial w^{(0)}}{\partial y} = -w^{(0)}_{,y}$$

Applicando i ragionamenti sulle ipotesi cinematiche riportati si ottiene il campo di spostamenti della teoria elementare della piastra:

$$\begin{cases} u(x,y,z) = u^{(0)}(x,y) - zw^{(0)}_{,x}(x,y) \\ v(x,y,z) = v^{(0)}(x,y) - zw^{(0)}_{,y}(x,y) \\ w(x,y,z) = w^{(0)}(x,y) \end{cases}$$

Il passo successivo risulta quello di calcolare il *campo di deformazione* definito dalla teoria elementare della piastra applicando le relazioni geometriche al campo di spostamenti appena definito. Si rammenta, inoltre, che si è opportunamente scelto il campo degli spostamenti in modo che $\epsilon_{zz} = \gamma_{xz} = \gamma_{yz} = 0$.

$$\epsilon_{xx} = \frac{\partial u}{\partial x} = \frac{\partial u^{(0)}}{\partial x} - z\frac{\partial w^{(0)},x}{\partial x} = u^{(0)},x - zw^{(0)},xx$$

$$\epsilon_{yy} = \frac{\partial v}{\partial y} = \frac{\partial v^{(0)}}{\partial y} - z\frac{\partial w^{(0)},y}{\partial y} = v^{(0)},y - zw^{(0)},yy$$

$$\gamma_{xy} = \frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x} = u^{(0)}_{,y} + v^{(0)}_{,x} - zw^{(0)}_{,xy} - zw^{(0)}_{,yx} = u^{(0)}_{,y} + v^{(0)}_{,x} - 2zw^{(0)}_{,xy}$$

Si può riassumere il campo di deformazione proposto dalla teoria elementare in forma matriciale nel seguente modo:

$$\begin{Bmatrix} \epsilon_{xx} \\ \epsilon_{yy} \\ \gamma_{xy} \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} u^{(0)}_{,x} \\ v^{(0)}_{,y} \\ u^{(0)}_{,y} + v^{(0)}_{,x} \end{Bmatrix} - z \begin{Bmatrix} w^{(0)}_{,xx} \\ w^{(0)}_{,yy} \\ 2w^{(0)}_{,xy} \end{Bmatrix}$$

$$\boldsymbol{\epsilon} = \boldsymbol{\epsilon_0} + z\boldsymbol{\kappa} \tag{2.7}$$

- Il vettore $\boldsymbol{\epsilon_0}$ rappresenta il vettore delle deformazioni membranali, ovvero le dilatazioni specifiche e lo scorrimento angolare della superficie di riferimento nel suo piano.

- Il vettore $\boldsymbol{\kappa}$ rappresenta il vettore delle curvature, ovvero la misura dell' inarcamento della superficie di riferimento . Nello specifico, i termini $w^{(0)}_{,xx}$ e $w^{(0)}_{,yy}$ descrivono il comportamento flessionale della superficie di riferimento; mentre il termine $2w^{(0)}_{,xy}$ ne descrive il comportamento torsionale.

Per la seconda e la terza ipotesi sul campo cinematico alla base della teoria elementare si ha che $\gamma_{xz} = \gamma_{yz} = 0$, pertando saranno anche nulle le corrispondenti tensioni di taglio trasversale $\tau_{xz} = \tau_{yz} = 0$. Inoltre, per ottenere il *campo di tensione* della piastra di Kirchhoff è necessario applicare la prima ipotesi cinematica $\epsilon_{zz} = 0$ ed aggiungere un ulteriore *ipotesi sullo stato tensionale*, ovvero σ_{zz}= 0.

$$\begin{Bmatrix} \sigma^{(k)}_{xx} \\ \sigma^{(k)}_{yy} \\ \tau^{(k)}_{xy} \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} Q^{(k)}_{11} & Q^{(k)}_{12} & Q^{(k)}_{16} \\ Q^{(k)}_{12} & Q^{(k)}_{22} & Q^{(k)}_{26} \\ Q^{(k)}_{16} & Q^{(k)}_{26} & Q^{(k)}_{66} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \epsilon_{xx} \\ \epsilon_{yy} \\ \gamma_{xy} \end{Bmatrix} \tag{2.8}$$

L'equazione (2.8) può essere riassunta nella seguente relazione matriciale, che riassume i principali termini che compongono lo stato tensionale di una piastra sottile:

$$\boldsymbol{\sigma^{(k)}} = \mathbf{Q^{(k)}_P} \boldsymbol{\epsilon} \tag{2.9}$$

La relazione (2.9) mette in relazione le tensioni nel piano della piastra con le deformazioni rispetto agli assi geometrici. La matrice che lega queste due quantità è chiamata matrice delle rigidezze ridotte trasformate: nello specifico, i termini che la compongono variano da strato a strato del laminato. Risulta fondamentale che queste rigidezze ridotte trasformate che valgono nel sistema geometrico $x - y - z$ si possono ottenere a partire dalle rigidezze ridotte non trasformate che invece valgono nel sistema di ortotropia $1 - 2 - 3$.
Si definisce quindi la matrice delle rigidezze non trasformate $\mathbf{Q_P}$ valida solo nel sistema locale della singola lamina.

$$\mathbf{Q_P} = \begin{bmatrix} \frac{E_1}{1-\nu_{12}\nu_{21}} & \frac{\nu_{12}E_2}{1-\nu_{12}\nu_{21}} & 0 \\ \\ \frac{\nu_{12}E_2}{1-\nu_{12}\nu_{21}} & \frac{E_1}{1-\nu_{12}\nu_{21}} & 0 \\ \\ 0 & 0 & G_{12} \end{bmatrix}$$

Inoltre, risulta necessario definire una matrice di rotazione dipendente dal k-esimo strato attraverso l'orientamento $\theta^{(k)}$ della lamina: in particolare, tale angolo è di quanto deve ruotare il sistema geometrico $x - y$ per sovrapporsi all'asse locale 1 ruotando in senso anti-orario attorno a z.

$$\boldsymbol{\Lambda^{(k)}_P} = \begin{bmatrix} c^2 & s^2 & 2cs \\ s^2 & c^2 & -2cs \\ -cs & cs & c^2 - s^2 \end{bmatrix}$$

Dove c = $\cos(\theta^{(k)})$ ed s = $\mathrm{sen}(\theta^{(k)})$. Dunque, per ottenere la matrice delle rigidezze trasformate nel sistema globale $x-y-z$ del laminato si deve effettuare la seguente operazione:

$$[Q_P^{(k)}] = [\Lambda_P^{(k)}]^{-1} \cdot [Q_P] \cdot ([\Lambda_P^{(k)}]^{-1})^T \tag{2.10}$$

A questo punto è possibile definire le Matrici di rigidezza del laminato attraverso l'integrazione sullo spessore della matrice di rigidezza trasformata:

$$[A] = \langle [Q_P^{(k)}] \rangle \quad \text{matrice delle rigidezze membranali}$$

$$[B] = \langle z[Q_P^{(k)}] \rangle \quad \text{matrice delle rigidezze di accoppiamento}$$

$$[D] = \langle z^2[Q_P^{(k)}] \rangle \quad \text{matrice delle rigidezze flesso-torsionali}$$

Finalmente, è possibile scrivere le equazioni costitutive della piastra, ovvero le relazioni che legano i carichi nel piano, i momenti ed il taglio alle relative deformazioni:

$$\begin{cases} \{N\} = [A]\{\epsilon^{(0)}\} + [B]\{\kappa\} \\ \{M\} = [B]\{\epsilon^{(0)}\} + [D]\{\kappa\} \end{cases}$$

Da cui si ottengono le seguenti relazioni per il vettore delle deformazioni membranali $\boldsymbol{\epsilon}^{(\mathbf{0})}$ e le curvature $\boldsymbol{\kappa}$.

$$\begin{cases} \{\epsilon^{(0)}\} = [A']\{N\} + [B']\{M\} \\ \{\kappa\} = [B']^T\{N\} + [D']\{M\} \end{cases}$$

Dalle relazioni precedenti si può osservare che il comportamento membranale e quello flesso-torsionale risultano accoppiati: nello specifico, gli sforzi nel piano **N** provocano anche flesso-torsioni fuori dal piano ed i momenti generano anche deformazioni di tipo membranale.

2.6 Teoria della piastra di Reissner-Mindlin

La teoria elementare risulta valida per lo studio di elementi in cui lo spessore risulta trascurabile rispetto alle dimensioni caratteristiche della superficie. Tale teoria, dunque, esclude la presenza della deformabilità a taglio trasversale. Questa trattazione risulta pertanto valida per *materiali isotropi*, come le leghe metalliche, in cui la deformabilità longitudinale è circa 2.6 volte superiore alla deformabilità a taglio.

D'altro canto, la problematica di modelizzare strutture sottili laminate è quella di non poter più trascurabile la deformabilità tagliante, in quanto si ha che :

$$10 < \frac{E_1}{G_{1t}} < 200$$

La seconda teoria che si vuole proporre è una formulazione basilare, che partendo dalle tre ipotesi della teoria elementare viste in precedenza arriva a sviluppare un modello che considere la deformabilità a taglio. Nello specifico, si rilassa di fatto la terza ipotesi elementare: ovvero non si impone il fatto che i segmenti di spessore inizialmente rettilinei rimangano tali anche a deformazione avvenuta.
In questo modo si osserva il seguente campo di spostamenti, che a differenza del caso elementare, presenta la deformabilità a taglio trasversale.

$$\begin{cases} u(x,y,z) = u^{(0)}(x,y) + z\phi(x,y) \\ v(x,y,z) = v^{(0)}(x,y) + z\theta(x,y) \\ w(x,y,z) = w^{(0)}(x,y) \end{cases}$$

Si osserva, inoltre, dal campo di spostamenti della teoria di Reissner-Mindlin che le incognite del problema sono passate da 3 a 5, in quanto le rotazioni del segmento di spessore non sono più esprimibili come derivate dello spostamento lungo lo spessore calcolate nel piano medio, ma divengono variabili indipendenti.
Si è ottenuto quindi un modello più accurato avendo tolto un'ipotesi alla teoria elementare. In questo modo è possibile studiare elementi strutturali bidimensionali tozzi o compositi. Tutto ciò si traduce, però, in un costo computazionale maggiore proprio a causa dell'aumento di incognite del problema.

2.7 Carrera Unified Formulation (CUF)

Si è visto come la teoria elementare della piastra sia valida per lo studio di piastre sottili e di materiale isotropo, come ad esempio le leghe metalliche. Tale condizione però non risulta verificata nelle strutture in composito, dove vi è la presenza, come si vedrà nel seguito, di due fasi distinte, ovvero la matrice e la fibra.
Anche la teoria di Reissner-Mindlin, seppur in grado di descrivere la deformazione a taglio, non risulta sufficientemente accurata per descrivere le strutture in oggetto di studio, in quanto il campo di spostamenti descritto da tale teoria suppone il taglio costante strato per strato; dunque per materiali laminati significherebbe avere un taglio costante a tratti lungo lo spessore, avendo di fatto discontinuità delle tensioni taglianti da uno strato all'altro. Per migliorare il campo di spostamenti di questa teoria risulta necessario aggiungere dei termini al campo di spostamenti precedentemente ricavato in questo capitolo. Per fare ciò si utilizzeranno dei modelli di ordine superiore nei quali sopraggiungono termini di ordine superiore per

descrivere il campo cinematico. Banalmente si può osservare che finchè il campo di spostamenti rimane lineare in z, allora necessariamente il taglio sarà al più costante lungo il singolo strato, presupponendo dunque incompatibilità in termini di equilibrio; si mostra quindi l'essenzialità di usare dei modelli di ordine avanzato che prevedano un'espansione delle incognite bidimensionali oltre il grado unitario. Inoltre, si osserva che operando in questo modo si ha che l'accuratezza del modello utilizzato dipenda dall'ordine delle funzioni che si stabilisce di utilizzare.
Per applicare i modelli di ordine avanzato al problema in oggetto di analisi risulta necessario introdurre la Carrera Unified Formulation (CUF), con la quale si è in grado di costruire modelli strutturali avanzati considerando l'ordine della teoria come un parametro libero della formulazione.
Si riporta di seguito la *formulazione unificata* per un modello piastra in cui lo spostamento di un generico punto nello spazio viene rappresentato come un espansione di generiche funzioni F_τ:

$$\mathbf{u}(x, y, z) = F_\tau(z)\mathbf{u}_\tau(x, y) \qquad \tau = 1, ..., M \tag{2.11}$$

Si osserva dall'equazione 2.11 che il pedice τ in maniera consistente con la notazione di Einstein ha il significato di sommatoria. Inoltre, si ottiene che le funzioni di espansione F_τ variano sullo spessore di coordinata z; il vettore $\mathbf{u}_\tau$ è definito come vettore degli spostamenti generalizzati ed il parametro M indica il numero di termini dell'espansione usata, risultando quindi essere un parametro libero del problema, che determina l'accuratezza della teoria. Si ha dunque che essendo la dimensione lungo lo spessore trascurabile rispetto le dimensioni che caratterizzano il piano medio per un modello piastra, allora è possibile ipotizzare a priori l'andamento delle incognite lungo z attraverso le funzioni F_τ.
La classe di appartenenza del modello CUF bidimensionale è proprio dettata dalla scelta di queste funzioni interpolanti: si potranno usare nello specifico espansioni basate sui polinomi di Taylor (indicate con l'abbreviazione TE), oppure espensioni basate sui polinomi di Lagrange (abbraviate in LE).

2.8 Funzioni di Espansione

Come si è detto si possono scegliere diverse espressioni per la scelta delle espansioni dei polinomi interpolanti per definire il campo di spostamenti del modello bidimensionale, in particolare nel seguito si parlerà di espansioni basate sui polinomi di Taylor e sui polinomi di Lagrange.

2.8.1 Espansioni di Taylor (TE)

I primi modelli che si introducono sono basati sull'uso di polinomi di McLaurin definiti come $F_\tau(z) = z^i$, dove l'esponente i rappresenta un indice positivo che

parte dal valore 0 fino al grado massimo N del polinomio.
In Tabella 2.1 si riportano le funzioni approsimanti del comportamento sullo spessore delle incognite cinematiche secondo il modello dei polinomi di Taylor. In particolare, si riporta con N l'ordine dell'espansione e con M il numero di termini che compongono l'espansione. Tipicamente, nella modellazione di elementi 2D è sufficiente l'implementazione di modelli al più del quarto ordine per garantire la convergenza della soluzione.
L'importante proprietà di questa tipologia di espansioni polinomiali è quella di essere gerarchiche. Ovvero per approssimare il comportamento nella direzione z del modello bidimensionale è necessario aggiungere funzioni di ordine superiore alle espansioni dell'dell'ordine precedente. Si osserva inoltre che elimanando opportunamente alcuni termini dall'espansione di Taylor, allora si ricavano i campi di spostamento prescritti dalle teorie classiche della piastra viste in precedenza nel capitolo.

Ordine espansione (N)	Termini dell'espansione (M)	Funzioni F_{tau}
TE1	2	$\mathrm{F}_1 = 1, F_2 = z$
TE2	3	$\mathrm{F}_3 = z^2$
TE3	4	$\mathrm{F}_4 = z^3$
TE4	5	$\mathrm{F}_5 = z^4$
.	.	.
.	.	.
.	.	.
TEN	N+1	$\mathrm{F}_N = z^N$

Table 2.1: Forma compatta dei polinomi di Taylor (TE)

2.8.2 Espansioni di Lagrange (LE)

Un'altra classe di funzioni interpolanti è quella rappresentata delle espansioni di Lagrange LE. Tipicamente, si usano 3 tipi di espansione che fa uso ti tali espansioni: quella a 2 nodi (LE1), a 3 nodi (LE2) e a 4 nodi (LE3).
Preso ad esempio un elemento finito bidimensionale Q9 nel caso LE1 si ha per ogni nodo FEM un'espansione a due nodi sullo spessore. In questi casi per discretizzare la sezione di una piastra risulta più facile ricondursi al piano naturale dove è più agevole usare la formulazione di Lagrange. In generale, si usa come coordinata adimensionale ζ_i, che varia da -1 a +1; mentre con ζ si indica la posizione del nodo all'interno del sistema naturale dell'elemento.
Nel seguito si riporta l'elemento più semplice tra i modelli Lagrange, ovvero LE1

caratterizzato dalle seguenti funzioni lineari scritte nel piano naturale :

$$F_1 = \frac{1}{2}(1-\zeta), \qquad F_2 = \frac{1}{2}(1+\zeta), \qquad \begin{cases} \zeta_1 = -1 \\ \zeta_2 = +1 \end{cases} \tag{2.12}$$

Usando le espansioni di Lagrange LE2 si ha dunque il seguente campo di spostamenti:

$$u_x(x,y,z) = F_1(z)u_{x1}(x,y) + F_2(z)u_{x2}(x,y)$$
$$u_y(x,y,z) = F_1(z)u_{y1}(x,y) + F_2(z)u_{y2}(x,y)$$
$$u_z(x,y,z) = F_1(z)u_{z1}(x,y) + F_2(z)u_{z2}(x,y)$$

2.9 Metodo agli elementi finiti

Si vuole ora introdurre la formulazione FEM per problemi basati sulla formulazione CUF. In particolare, la formulazione agli elementi finiti risulta essere un utile strumento per il calcolo strutturale in cui viene fornita una soluzione approssimata per geometrie di nostro interesse in qualsivoglia condizione di carico e di vincolo.
Il metodo agli elementi finiti prevede dunque una risoluzione automatizzata di problemi strutturali discretizzati in un numero finito di domini o di elementi, dentro i quali i modelli matematici implementati lavorano in modo più efficiente. Si prosegue espandendo ed assemblando il problema e quindi arrivando alla soluzione tramite dei codici di calcolo automatico.
Si precisa che in questa trattazione l'accuratezza della soluzione dipende fortemente da quanto la discretizzazione in elementi finiti del dominio di partenza sia raffinata. Si sottolinea in ogni caso che se la discretizzazione risultasse troppo fitta il problema diverebbe computazionalmente costoso, in questi casi diviene necessario svolgere delle analisi di convergenza della mesh strutturale per stabilire la qualità della soluzione.

2.9.1 Equazioni di Governo

In questo paragrafo si derivano le equazioni di governo tramite il principio degli spostamenti virtuali ovvero il PVD; in particolare partendo dalla scrittura del campo di Spostamenti 2.11 si arriverà alla formulazione della matrice di rigidezza, delle masse ed il vettore di carico in termini di nuclei fondamentali, in cui la loro forma è indipendente dall'ordine del modello selezionato.
Inizialmente, si applica l'equazione alla base del principio dei lavori virtuali per descrivere il problema in termini di lavoro:

$$\delta L_{int} = \delta L_{ext} - \delta L_{ine} \tag{2.13}$$

Nell'Equazione 2.13 si riportano la presenza di diversi tipi di lavoro. Il lavoro delle forze interne dovuto dalla deformazione della struttura, il lavoro delle forze esterne compiuto dai carichi applicati distribuiti o concentrati, infine l lavoro delle forze d'inerzia, il quale è nullo nel caso statico.
Si vuole ora introdurre il formalismo usato tipicamente nello studio dei laminati, si andranno quindi a riscrivere le relazioni geometriche e leggi costitutive già viste in precedenza in questo capitolo, ma specializzate per lo studio delle tematiche presenti nell'elaborato. In prima analisi si riportano il campo di tensione e deformazione in cui viene per semplicità di trattazione si omette l'apice k riferito al k-esimo strato del laminato.

$$\boldsymbol{\sigma_p} = \{\sigma_{xx}, \sigma_{yy}, \tau_{xy}\}^T, \boldsymbol{\epsilon_p} = \{\epsilon_{xx}, \sigma_{yy}, \gamma_{xy}\}^T \tag{2.14}$$

$$\boldsymbol{\sigma_n} = \{\tau_{xz}, \tau_{yz}, \sigma_{zz}\}^T, \boldsymbol{\epsilon_n} = \{\gamma_{xz}, \gamma_{yz}, \epsilon_{zz}\}^T \tag{2.15}$$

Le relazioni lineari geometriche nel caso in esame vengono scritte nel seguente modo:

$$\boldsymbol{\epsilon_p} = \mathbf{b_p u} \tag{2.16}$$

$$\boldsymbol{\epsilon_n} = (\mathbf{b_{np}} + \mathbf{b_{nz}})\mathbf{u} \tag{2.17}$$

In cui l'operatore differenziale lineare può essere partizionato come segue:

$$\mathbf{b_p} = \begin{bmatrix} \partial/\partial x & 0 & 0 \\ 0 & \partial/\partial y & 0 \\ \partial/\partial y & \partial/\partial x & 0 \end{bmatrix}, \mathbf{b_{np}} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & \partial/\partial x \\ 0 & 0 & \partial/\partial y \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}, \mathbf{b_{nz}} = \begin{bmatrix} \partial/\partial z & 0 & 0 \\ 0 & \partial/\partial z & 0 \\ 0 & 0 & \partial/\partial z \end{bmatrix} \tag{2.18}$$

Si passa alla definizione delle leggi costitutive lineari del materiale:

$$\boldsymbol{\sigma_p} = \mathbf{C_{pp}}\boldsymbol{\epsilon_p} + \mathbf{C_{pn}}\boldsymbol{\epsilon_n} \tag{2.19}$$

$$\boldsymbol{\sigma_n} = \mathbf{C_{np}}\boldsymbol{\epsilon_p} + \mathbf{C_{nn}}\boldsymbol{\epsilon_n} \tag{2.20}$$

Nel caso di materiale ortotropo, come sarà il caso dei laminati in composito di cui si discuterà nel seguito di questo capitolo, le matrici di interesse saranno:

$$\mathbf{C_{pp}} = \begin{bmatrix} C_{11} & C_{12} & C_{16} \\ C_{12} & C_{22} & C_{26} \\ C_{16} & C_{26} & C_{66} \end{bmatrix} \mathbf{C_{np}} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ C_{13} & C_{23} & C_{36} \end{bmatrix} \mathbf{C_{pn}} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & C_{13} \\ 0 & 0 & C_{23} \\ 0 & 0 & C_{36} \end{bmatrix} \tag{2.21}$$

$$\mathbf{C_{nn}} = \begin{bmatrix} C_{55} & C_{45} & 0 \\ C_{45} & C_{44} & 0 \\ 0 & 0 & C_{33} \end{bmatrix}$$

Si scrive ora la variazione virtuale del lavoro delle forze interne come somma del contributo di due integrali:

$$\delta L_{int} = \int_A \int_\Omega \delta\epsilon_n^T \sigma_n d + \int_A \int_\Omega \delta\epsilon_p^T \sigma_p d \tag{2.22}$$

La variazione virtuale del lavoro delle forze inerziali in cui compare la densità del materiale ρ e il vettore delle accelerazioni $\ddot{u}$ si scrive come integrale di volume :

$$\delta L_{ine} = \int_V \rho \ddot{u} \delta u^T dV \tag{2.23}$$

Si definisce ora il vettore contenente le componenti della generica forza esterna concentrata applicata sull'elemento:

$$\mathbf{P} = \{P_{ux}, P_{uy}, P_{uz}\}^T$$

In questo modo è possibile definire l'espressione della variazione del lavoro delle forze esterne:

$$\delta L_{ext} = P \delta u^T \tag{2.24}$$

2.10 Formulazione FE

Alla base del metodo agli elementi finiti vi è la definizione del vettore degli spostamenti nodali:

$$\mathbf{u}_{\tau i} = \{u_{x\tau i} \quad u_{y\tau i} \quad u_{x\tau i}\}, \qquad \tau = 0{,}1, ..., N \quad i = 1{,}2, ..., N_{EN} \tag{2.25}$$

Il pedice i indica l'i-esimo nodo dell'elemento finito, mentre N_{EN} rappresenta il numero di nodi per elemento finito.
Riassumendo quanto fatto fin'ora si può affermare che si è riusciti a definire un campo di spostamenti tramite la CUF in cui il taglio non è più costante strato per strato; inoltre si è passati da un campo 3D definito dal problema elastico ad un campo bidimensionale, in quanto le funzioni $F_\tau(z)$ sono un input del problema.
Ciò che dunque si vuole fare tramite il modello agli elementi finiti è passare da incognite definite nel punto generico (x, y) ad incognite collocate in punti ben specifici, ovvero i nodi del modello FEM. Il fondamentale passaggio da incognite fisiche ad incognite nodali può essere fatto tramite le shape functions N_i.

$$\mathbf{u}(x, y, z) = N_i(x, y) F_\tau(z) u_{\tau i}(x, y) \tag{2.26}$$

2.10.1 Nuclei Fondamentali

La matrice di rigidezza dell'elemento finito viene definita nell'espressione lavoro virtuale interno:

$$\delta L_{int} = \delta u_{sj}^T \mathbf{k}^{\tau s i j} u_{\tau i} \tag{2.27}$$

Nell'equazione 2.13 si osserva $\mathbf{k}^{\tau s i j}$, ovvero una una matrice di dimensioni 3×3, che rappresenta il nucleo fondamentale della matrice di rigidezza. Gli indici i, j

vanno da 1 fino al numero dei nodi; gli indici τ ed s variano da 1 fino al numero di termini di espansione M. Tale matrice non dipende dall'ordine di espansione della teoria scelta e non dalla scelta dall'espansione polinomiale F_τ.
Il grande vantaggio della CUF è quella di assemblare le matrici agevolmente attraverso l'implementazione di codici di calcolo automatizzato. In particolare, si hanno quattro cicli di calcolo sugli indici i, j, τ, s in modo tale da ottenere un nucleo fontamentale (FN) per ogni combinazione di questi indici. Il nucleo 3x3 descritto in precedenza costituisce il punto di partenza della matrice globale della struttura. Dalla Figura 2.7 si osserva che il primo ciclo avviene sugli indici τ ed s. Ovvero si inizia con la definizione della matrice relativa al singolo nodo dell'elemento. Il secondo ciclo avviene sugli indici i, j in cui viene costruita la matrice degli elementi che costituiscono la matrice globale della struttura.

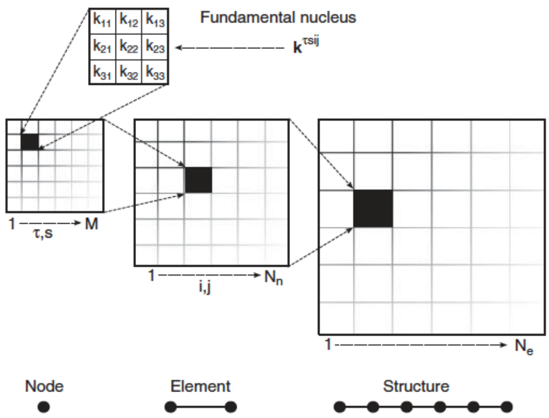


Figure 2.7: Procedura di assemblaggio tramite la CUF della matrice di rigidezza globale [23]

Volendo quindi proporre un'analisi lineare di risposta statica della struttura si procede tramite l'applicazione del principio dei lavori virtuali, in cui il lavoro virtuale delle forze di inerzia è considerato nullo:

$$\delta L_{int} = \delta L_{ext}$$

Il lavoro elastico delle campo di tensione interna si esprime come:

$$\delta L_{int} = \delta U^T K U \tag{2.28}$$

Il lavoro svolto dalle forze esterne invece si scrive:

$$\delta L_{ext} = \delta U^T K U \tag{2.29}$$

Applicando il bilancio del lavoro imposto dall'applicazione del PVD si ottiene che:

$$\delta U^T KU = \delta U^T KU \quad \longrightarrow \quad \mathbf{KU} = \mathbf{U} \quad \longrightarrow \quad \mathbf{U} = \mathbf{K}^{-1}\mathbf{P} \tag{2.30}$$

Si cerca ora di spiegare brevemente la modalità con cui avviene l'assemblaggio della matrice della masse, necessaria per svolgere l'analisi modale delle strutture. In particolare, sarà necessario partire dalla scrittura della variazione virtuale del lavoro operato dalle forze inerziali riportato in (2.23) sostituire l'approssimazione del campo di spostamenti bidimensionale e l'espansione dell'elemento finito, ottenendo così:

$$\delta L_{ine} = -\int_V \rho \ddot{u} \delta u^T dV = -\mathbf{q}_{\tau i}^T \mathbf{m}^{ij\tau s} \ddot{\mathbf{q}}_{sj} \tag{2.31}$$

Si osserva che nell'equazione (2.31) compare il vettore delle accelerazioni nodali $\ddot{\mathbf{q}}$, ed il nucleo fondamentale della matrice delle masse dell'elemento finito $\mathbf{m}^{ij\tau s}$. Avendo definito tutti gli elementi necessari, si può procedere con la definizione del problema dinamico. In particolare, una analisi delle vibrazioni libere ha come obiettivo fornire le frequenze naturali ed i modi propri di vibrare della struttura. Nella pratica, si investiga l'equilibrio tra le forze elastiche del modello e le forze inerziali. Applicando, dunque, il principio dei lavori virtuali (PVD) nel caso dinamico si ottiene:

$$\delta L_{int} = -\delta L_{ine} \tag{2.32}$$

Si esprimono i lavori in forma vettoriale facendo quindi comparire la matrice delle masse e la matrice di rigidezza globali della struttura opportunamente assemblate:

$$\delta L_{int} + \delta L_{ine} = 0 \longrightarrow \delta U^T M\ddot{U} + \delta U^T KU = 0 \longrightarrow \mathbf{M}\ddot{U} + \mathbf{K}U = 0 \tag{2.33}$$

L'equazione (2.33) fornisce come soluzione il vettore $\mathbf{U}$ che soddisfa le condizioni di equilibrio imposte dal problema. E' noto che la soluzione dell'equazione differenziale omogenea è del tipo *puramente armonico* del tipo:

$$U = \bar{U}e^{i\omega t} \longrightarrow \dot{U} = i\omega\bar{U}e^{i\omega t} \longrightarrow \ddot{U} = -\omega^2\bar{U}e^{i\omega t} \tag{2.34}$$

Sostituendo la soluzione (2.34) nell'equazione del moto (2.33) si ottiene una relazione valida nel dominio delle frequenze:

$$-\mathbf{M}\omega^2\bar{U}e^{i\omega t} + \mathbf{K}\bar{U}e^{i\omega t} = 0 \longrightarrow (-\mathbf{M}\omega^2 + \mathbf{K})\bar{U}e^{i\omega t} = 0 \tag{2.35}$$

Si osserva nell'equazione (2.35) il fatto che il problema dinamico è stato ridotto ad un problema lineare agli autovalori, il cui output saranno le frequenze naturali della struttura ed i modi propri di vibrare.

Si rimanda al Capitolo 5 per eventuali applicazioni della teoria illustrata in questa sede, in particolare si mostrerrano degli esempi numerici delle analisi statiche e dinamiche appena descritte usando la CUF applicata a delle piastre isotrope, multistrato e VAT. Per ulteriori approfondimenti sulla teoria alla base di questo elaborato si rimanda al testo di riferimento [23]

2.11 Materiali Compositi

I materiali compositi sono ampiamente utilizzati nell'industria aerospaziale per la loro capacità di fornire prestazioni elevate e peso ridotto. Tali materiali per uso aerospaziale sono generalmente costituiti da una matrice polimerica rinforzata da fibre di carbonio, fibre di vetro oppure fibre aramidiche.
Questi materiali sono caratterizzati da una serie di proprietà meccaniche superiori rispetto ai materiali metallici tradizionali, come ad esempio la resistenza alla corrosione, la rigidità e la resistenza alle alte temperature. Tutte queste caratteriste rendono i materiali compositi perfetti anche per l'industria spaziale in cui il loro uso è in crescita. Come si è detto i materiali compositi sono costituiti da molteplici fasi, generalmente due. La prima è la fibra che possiede elevate proprietà meccaniche ma risulta essere molto fragile. La seconda è la matrice che ha la funzione di proteggere, raccogliere e mantenere le fibre annegate nella corretta posizione. Combinando, dunque, le due fasi si ottiene un materiale ad alte prestazioni strutturali grazie al contributo delle fibre, e a peso ridotto dovuto all'apporto della matrice. Si vuole dunque sottolineare l'importante caratterizzazione dei compositi, ovvero il fatto che essi sono dei materiali *gerarchici*: ovvero a differenza delle leghe metalliche che sono materiali omogenei, i compositi che presentano delle fasi ben distinte già alla mesoscala, ovvero al livello della fibra e della matrice. Questo aspetto rende la loro modellizzazione molto complessa rispetto alle leghe aeronautiche classiche. Per esempio, generalmente le strutture in composito non vengono progettate secondo lo schema damage tollerance, bensì viene implementata la filosofia di progetto denominata crack-free: ovvero non si tiene conto a priori della presenza di fessurazzioni, le quali a seguito di diversi cicli di utilizzo inevitabilmente accresceranno. La presenza di cricche tendenzialmente non viene prevista, poichè risulta particolarmente complesso prevedere come tali imperfezioni evolveranno nel tempo. In letteratura, dunque, si predilige un approccio basato sull'affidabilità (reliability based). Nello specifico, si osserva che l'attuale spinta verso lo sviluppo di strutture ottimali in compositi stia portando sempre di più all'uso di un approccio prettamente statistico per descrivere meccanicamente tali strutture, tenendo conto dei diversi processi di manifattura, i quali talvolta possono produrre delle difettologie nel componente.
In particolare, nel settore aerospaziale i materiali compositi vengono utilizzati in una vasta gamma di applicazioni, tra cui componenti strutturali, rivestimenti per i serbatoi sugli aerei, parti interne di motori oppure per psezioni della fusoliera e

delle ali. Specificatamente, si è dimostrato che la loro implementazione permette di ridurre i consumi di propellente imbarcato avendo come conseguenza un notevole risparmio in termini di costi operativi dell'aeromobile. Proprio grazie alla loro resistenza, leggerezza e flessibilità di utilizzo i materiali compositi stanno diventando sempre più importanti nella progettazione di aeromobili moderni e di segmenti rivolti al settore spaziale, i quali richiedono prestazioni elevate e riduzione del peso. Tuttavia, i materiali compositi per uso aerospaziale richiedono una maggiore cura nella produzione e nella manutenzione rispetto ad altri settori. Nello specifico, i materiali compositi richiedono una manutenzione accurata e un'ispezione regolare per garantire la corretta riuscita delle operazioni di volo e per prolungare la vita utile dell'aeromobile.
Per la descrizione meccanica dei materiali compositi risulta necessario introdurre il comportamento dei materiali ortotropi, ovvero i materiali in cui vi sono 3 piani di simmetria del loro comportamento, ovvero si hanno proprietà meccaniche differenti in tre direzioni ortogonali rispetto alla loro struttura.
Si introduce il sistema di riferimento materiale caratterizzato dagli assi $1-2-3$, i quali prendono il nome di assi di ortotropia. Si procede riscrivendo l'equazione costitutiva nel sistema materiale del sistema:

$$\begin{Bmatrix} \sigma_1 \\ \sigma_2 \\ \sigma_3 \\ \sigma_4 \\ \sigma_5 \\ \sigma_6 \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} C_{11} & C_{12} & C_{13} & 0 & 0 & 0 \\ C_{12} & C_{22} & C_{23} & 0 & 0 & 0 \\ C_{13} & C_{23} & C_{33} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & C_{44} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & C_{55} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & C_{66} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \epsilon_1 \\ \epsilon_2 \\ \epsilon_3 \\ \epsilon_4 \\ \epsilon_5 \\ \epsilon_6 \end{Bmatrix} \tag{2.36}$$

Si osserva che nell'equazione costitutiva (2.36) vi sono 9 costanti ingegneristiche indipendenti del materiale. Inoltre, tale equazione può essere scritta in modo sintetico nella forma matriciale nel seguente modo:

$$\boldsymbol{\sigma}^* = \mathbf{C}^* \boldsymbol{\epsilon}^* \tag{2.37}$$

Passando alla formulazione in cui compare la *matrice di deformabilità* del materiale si ha la seguente formulazione:

$$\begin{Bmatrix} \epsilon_1 \\ \epsilon_2 \\ \epsilon_3 \\ \epsilon_4 \\ \epsilon_5 \\ \epsilon_6 \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} S_{11} & S_{12} & S_{13} & 0 & 0 & 0 \\ S_{12} & S_{22} & S_{23} & 0 & 0 & 0 \\ S_{13} & S_{23} & S_{33} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & S_{44} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & S_{55} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & S_{66} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \sigma_1 \\ \sigma_2 \\ \sigma_3 \\ \sigma_4 \\ \sigma_5 \\ \sigma_6 \end{Bmatrix} \tag{2.38}$$

Anche in questo caso è possibile scrivere in modo sintetico l'equazione (2.38):

$$\boldsymbol{\epsilon}^* = \mathbf{S}^* \boldsymbol{\sigma}^* \tag{2.39}$$

In particolare, la matrice di deformabilità $\mathbf{S}^*$ scritta nel sistema di riferimento materiale $1-2-3$ è così definita:

$$\mathbf{S}^* = \begin{bmatrix} \frac{1}{E_1} & \frac{-\nu_{21}}{E_2} & \frac{-\nu_{31}}{E_3} & 0 & 0 & 0 \\ \frac{-\nu_{12}}{E_1} & \frac{1}{E_2} & \frac{-\nu_{32}}{E_3} & 0 & 0 & 0 \\ \frac{-\nu_{13}}{E_1} & \frac{-\nu_{23}}{E_2} & \frac{1}{E_3} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \frac{1}{G_{13}} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{1}{G_{23}} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{1}{G_{12}} \end{bmatrix} \tag{2.40}$$

Come si è detto si è scritto le leggi costitutive del materiale nel sistema di riferimento materiale, ciò che risulta utile fare è scrivere le relazioni che legano le tensioni con le deformazioni rispetto ad un sistema di riferimento globale $x-y-z$.
Come mostrato in Figura 2.8 tale trasformazione tra sistema di riferimento materiale a sistema di riferimento globale si ottiene tramite una rotazione introno all'asse 3.

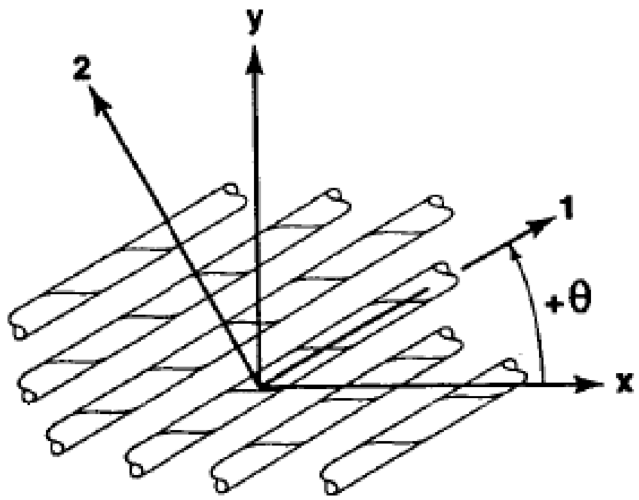


Figure 2.8: Rotazione positiva nel piano x-y per passare dal sistema di riferimento materiale al sistema di riferimento globale [25]

Si riporta di seguito l'equazione che trasforma il vettore delle tensioni dal sistema materiale $1-2-3$ al sistema di riferimento globale $x-y-z$ attraverso un'opportuna matrice di trasformazione:

$$\boldsymbol{\sigma}^* = \mathbf{T}_\sigma \boldsymbol{\sigma} \tag{2.41}$$

Analogamente, si possono svolgere i medesimi passaggi per il vettore delle deformazioni per passare tra i due sistemi di riferimento:

$$\boldsymbol{\epsilon}^* = \mathbf{T}_\epsilon \boldsymbol{\epsilon} \tag{2.42}$$

Si continua sostituendo le due Relazioni (2.41) e (2.42) nella legge costitutiva del materiale (2.37) nel sistema materiale $1-2-3$:

$$\mathbf{T}_\sigma \boldsymbol{\sigma} = \mathbf{C}^* \mathbf{T}_\epsilon \boldsymbol{\epsilon} \tag{2.43}$$

Da cui si ottiene il vettore dello stato di tensione rispetto al sistema di riferimento globale:

$$\boldsymbol{\sigma} = \mathbf{T}_\sigma^{-1} \mathbf{C}^* \mathbf{T}_\epsilon \boldsymbol{\sigma} = \tilde{\mathbf{C}} \boldsymbol{\epsilon} \tag{2.44}$$

Ruotando il sistema di riferimento si ha l'effetto di riempire maggiormente la matrice $\tilde{\mathbf{C}}$ nel sistema di riferimento globale, rispetto alla matrice $\mathbf{C}^*$ scritta invece nel sistema locale, introducendo dunque accoppiamenti tra tensioni e deformazioni prima non presenti.
Risulta, però, fondamentale sottolineare che nonostante i termini non nulli siano divenuti 13, i coefficienti indipendenti che descrivono il laminato in composito rimangono in ogni caso 9.

2.12 Teorie dei laminati

Come si è discusso in precedenza in questo capitolo, nello studio dei laminati in composito risulta fondamentale predire correttamente il campo di spostamenti, deformazioni e tensioni all'interno della struttura stessa. In particolare, viene richiesto un alto livello di dettaglio nell'analisi degli sforzi tangenziali, questione che i modelli bidimensionali elementari descritti precedentemente non affrontavano in maniera adeguata alle esigenze di questo elaborato. In particolare, nella trattazione dei laminati in composito si hanno diversi strati incollati tra di loro, risulta necessario predire in modo preciso le tensioni trasversali all'interfaccia delle diverse lamine che compongono la struttura. Se tali grandezze non fossero correttamente stimate nel caso in cui si applicasse uno sforzo elevato si potrebbe avere delaminazione tra diversi strati. Per raggiungere tali scopi si è dunque dovuto passare all'uso di teorie 2D che avevano l'obiettivo di discretizzare la superficie media della piastra, e la CUF per descrivere il comportamento lungo lo spessore del laminato.

- **Equivalent Single Layer - ESL**
  Nel modello Equivalent Single Layer per prima cosa si definisce la matrice di rigidezza **K** per ogni strato che compone il laminato; successivamente per trovare la matrice di rigidezza globale della struttura si esegue una sommatoria di tutte le matrici di rigidezza dei singoli layer. In questo modo si opera una omogenizzazione delle proprietà di ogni singolo strato della struttura avendo sommando i contributi di ogni strato nella matrice di rigidezza. Questo processo porta ad un modello che presenta una serie di variabili che in questo modo saranno attribuite all'intero multistrato, in quanto non si riesce a distinguere i singoli strati. In particolare, si può affermare che nei modelli ESL i gradi di libertà sono definiti per l'intero laminato: tali modelli risultano, dunque, più semplici e garantiscono la continuità degli spostamenti, ma non garantiscono l'equilibrio delle tensioni di taglio all'interfaccia. Si osserva inoltre che sia i modelli che si basano su espansioni di Taylor che i modelli che si basano su espansioni di Lagrange possono essere implementati con l'approccio ESL.

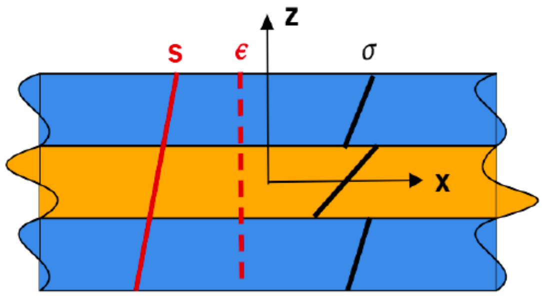


Figure 2.9: Modello di laminato ESL in cui si osserva l'andamento degli spostamenti s, delle deformazioni ϵ e delle tensioni σ lungo lo spessore del laminato multistrato [26]

In Figura 2.9 si osseva che in tale situazione si hanno spostamenti sono continui lungo lo spessore del laminato, ciò ha l'effetto di generare deformazioni continue. D'altro canto, si nota che le tensioni sono discontinue strato per strato, non garantendo quindi la continuità degli stress tangenziali.

- **Layer Wise - LW** Nel modello layer-wise si considera una differente serie di variabili per ogni singolo strato, e l'omogenizzazione è condotta solo all'interfaccia tra stato e strato. In questo modo si impone la continuità degli spostamenti all'interfaccia tra due strati adiacenti. In pratica, ciò che si osserva non considerando più un unico strato equivalente sono deformazioni discontinue all'interfaccia. D'altro canto, si ottiene che la matrice di rigidezza globale è più grande rispetto al caso precedente avendo più gradi di libertà in gioco; il vantaggio che, però , si ottiene con questo modello è quello che in ogni strato si hanno dei gradi di libertà indipendenti e quindi il modello risulta più performante.

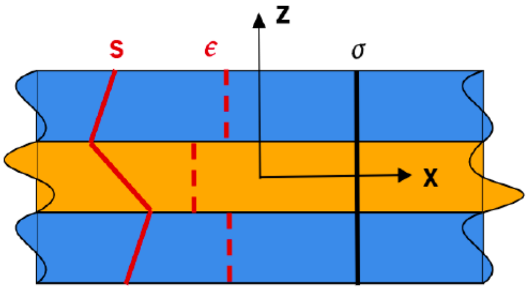


Figure 2.10: Modello di laminato LW in cui si osserva l'andamento degli spostamenti s, delle deformazioni ϵ e delle tensioni σ lungo lo spessore del laminato multistrato [26]

In Figura 2.10 si può ossevare che come nel caso precedente per ragioni di congruenza il campo di spostamenti risulta continuo sullo spessore, ciò che risulta discontinuo in questo caso è il campo di deformazione. Questo fatto permette di avere il campo di tensione continuo rispetto z.

Capitolo 3

Simulazione di Gap e Overlap

Dopo aver spiegato nel dettaglio la metodologia adottata per la caratterizzazione meccanica dei laminati a rigidezza variabile, risulta necessario illustrare come si è deciso di procedere per la simulazione delle difettologie introdotte dalla produzione AFP. Come si è già affrontato estensivamente nel Capitolo 2, le problematiche più comuni nella produzione dei laminati VAT sono i gap e gli overlap. In particolare, può capitare che due passaggi consecutivi della macchina usata per la deposizione delle fibre non coincidano correttamente, lasciando quindi delle lacune nel piano; oppure è possibile che le passate si sovrappongano parzialmente, creando quindi dei gradini nel laminato.

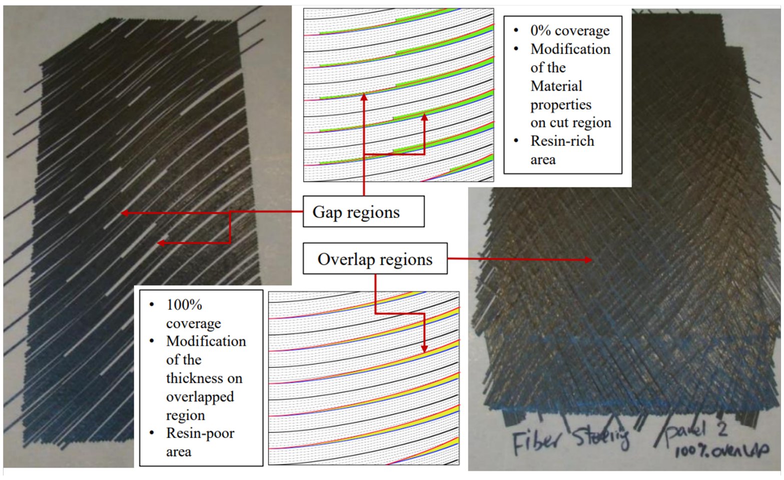


Figure 3.1: Rappresentazione dei difetti di Gaps (a sinistra) e di Overlaps (a destra) nel piano per compositi VAT [16]

In figura (3.1) si osservano due laminati VAT: nel primo si assiste una condizione in cui si impone la presenza di solo lacune, nel secondo invece si prescrive l'esistenza unicamente di sovrapposizioni. Nel primo caso, che nel seguito sarà chiamata complete gap condition, si osserva una modifica delle proprietà meccaniche del laminato nelle aree in cui vi sono le lacune; ed inoltre delle aree in cui la resina risulta essere in maggiore quantità. Nel secondo caso, che sarà denominato complete overlap condition, si assiste invece ad un inspessimento localizzato nelle aree di sovrapposizione; in aggiunta si osservano aree in cui la percentuale di resina risulta minoritaria.
In prima istanza, sarà quindi necessario spiegare dettagliatamente come si è deciso di impostare il codice Python alla base della modellizzazione della piastra multistrato VAT. Successivamente, si applicherà il Defect Layer Method (DLM) [15] al laminato appena descritto per stimare la variazione delle proprietà meccaniche del laminato in presenza di difetti, così da poi procedere con l'ottimizzazione.

3.1 Simulazione della macchina

Il primo passo è quello di definire formalmente la traiettoria che segue la macchina AFP nel depositare la singola fibra. Dal punto di vista matematico è necessario definire in prim'ordine la fibra di riferimento per ogni passata del braccio robotico nel piano. In particolare, in Figura 3.2 si può osservare la rappresentazione grafica della fibra fondamentale attorno alla quale si depositeranno gli altri tows che compongono un singolo course.

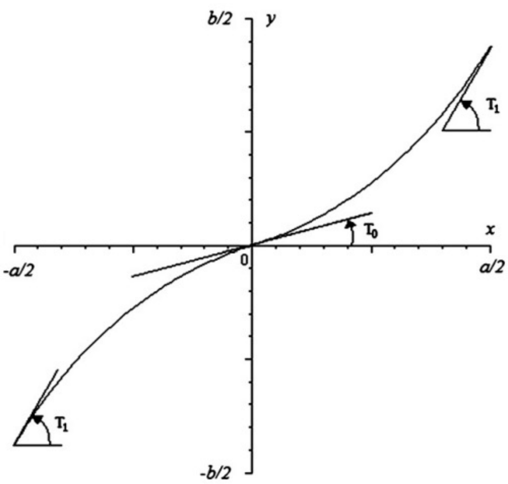


Figure 3.2: Rappresentazione grafica della fibra fondamentale in funzione dei parametri di macchina [10]

Si è scelto di implementare la seguente formulazione analitica per rappresentare la fibra fondamentale all'interno dello script Python usato per effettuare le ottimizzazioni in ambiente MATLAB.

$$y(x) = \begin{cases} \frac{a}{2(T_0-T_1)}\{\ln(\cos T_0) + \ln[\cos(-T_0 + 2T_1 + \frac{2(T_1-T_0)}{a})x]\} & -a \le x \le -\frac{a}{2} \\ \frac{a}{2(T_1-T_0)}\{-\ln(\cos T_0) + \ln[\cos(T_0 + \frac{2(T_0-T_1)}{a})x]\} & -\frac{a}{2} \le x \le 0 \\ \frac{a}{2(T_0-T_1)}\{-\ln(\cos T_0) + \ln[\cos(T_0 + \frac{2(T_1-T_0)}{a})x]\} & 0 \le x \le \frac{a}{2} \\ \frac{a}{2(T_1-T_0)}\{\ln(\cos T_0) + \ln[\cos(-T_0 + 2T_1 + \frac{2(T_0-T_1)}{a})x]\} & \frac{a}{2} \le x \le a \end{cases}$$

Il passaggio fondamentale è ora quello di definire formalmente i parametri della macchina AFP. Una volta noti quest'ultimi, sarà possibile simulare le diverse passate di stampa della macchina ed ottenere punto per punto le zone di sovrapposizione e di vuoto per ogni strato del laminato. Una volta che queste regioni dello spazio saranno note, allora si potranno trasferire queste informazioni nel modello matematico agli elementi finiti per poter riuscire così a stimare il comportamento meccanico dei laminati di nostro interesse prodotti con questa tecnica.

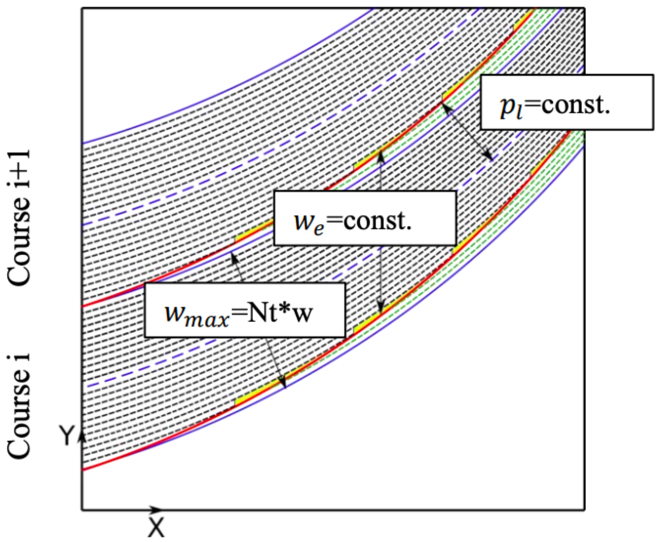


Figure 3.3: Rappresentazione grafica di una passata di stampa effettuata dalla macchina AFP [15]

In Figura 3.3 si possono osservare i principali parametri relativi ad una passata della macchina di deposizione. In particolare, note le informazioni che servono per tracciare la linea centrale è possibile creare un ramo sinistro ed un ramo destro opportunamente distanziate dal filamento centrale. Per fare ciò risulta fondamentale definire in modo preliminare i seguenti parametri della macchina scelta per questo elaborato:

- N_t = numero di tows per una passata della macchina = 16
- t_w = larghezza di un sigolo tow = 3.125 mm
- ρ_{min} = raggio di curvatura minimo che la macchina può eseguire = 625 mm

Noti questi parametri della macchina AFP in uso, è possibile calcolare le seguenti informazioni aggiuntive che sono state implementate nel codice per la simulazione della deposizione delle fibre.

$$\begin{cases} w_{max} = \text{Larghezza totale di un course} = N_t \cdot t_w = 50 \ \ [mm] \\ p_l = \text{Semilarghezza di un course della macchina} = costante \\ x_l = \text{Ascissa ramo sinistro del course} = x - p_l sin\theta(x) \\ x_r = \text{Ascissa ramo destro del course} = x + p_l sin\theta(x) \\ y_l(x) = \text{Ordinata ramo sinistro del course} = y(x) + p_l cos\theta(x) \\ y_r(x) = \text{Ordinata ramo destro del course} = y(x) - p_l cos\theta(x) \end{cases}$$

Avendo definito questi parametri risulta possibile descrivere completamente dal punto di vistra matematico e geometrico una passata della macchina AFP di interesse per questo lavoro. Si vogliono ora riportare le relazioni di definizione nel caso in cui l'angolo ϕ fosse diverso da 0°, ovvero nel caso in cui si avesse una rotazione del sistema di riferimento locale della fibra rispetto a quello globale del laminato:

$$\begin{cases} x_{l,rot} = x_l \cdot cos\phi - y_l(x) \cdot sin\phi \\ y_{l,rot} = x_l \cdot sin\phi + y_l(x) \cdot cos\phi \\ x_{r,rot} = x_r \cdot cos\phi - y_r(x) \cdot sin\phi \\ y_{r,rot} = x_r \cdot sin\phi + y_r(x) \cdot cos\phi \end{cases}$$

Infine, come prescritto in [15] risulta necessario imporre un limite sul raggio di curvatura massimo che la macchina AFP di interesse può descrivere depositando le fibre nel piano del laminato. In particolare, il limite viene espresso dal parametro κ_{lim} così definito:

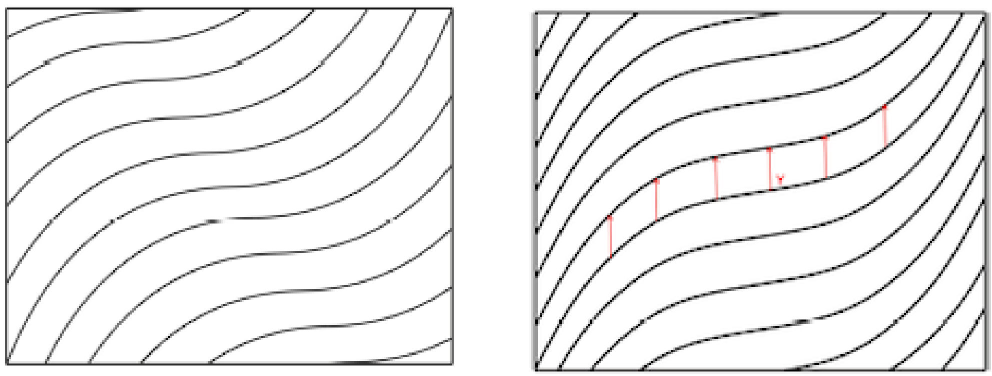
$$\kappa_{lim} = \frac{1}{\rho_{min}} = \frac{2(T_1 - T_0)}{a} cos\left((T_1 - T_0)\frac{x}{a/2} + T_0\right) \leq 1.57 \ \ [m^{-1}] \tag{3.1}$$

Il significato fisico dell'Espressione (3.1) risiede nel fatto che affinchè si possa realizzare effettivamente il laminato dati T_0 e T_1, in ogni punto lungo il percorso della fibra di riferimento deve valere che la curvatura locale non deve eccedere la curvatura massima consentita.
Definita la fibra centrale e le limitazioni dovute al processo teconologico implementato, rimane da discutere come tipicamente avviene il riempimento delle fibre per

coprire nel suo intero il laminato. Generalmente esistono due tipologie di ripetizione delle fibra fondamentale da parte del braccio robotico della macchina AFP:

1. La prima metodologia prevede che il braccio ripeta la deposizione della fibra per tutta la lunghezza della piastra mantenendo il parallelismo tra le diverse passate. Tale modalità di stesura si osserva in Figura 3.4 e risulta particolarmente vantaggiosa in quanto non consente la formazione di difetti come gap e overlap nei punti di tangenza tra 2 course consecutivi. Affinchè, però, tutto ciò sia possibile il braccio robotico della macchina AFP deve adattarsi al percorso per ogni passata, e questo implica il fatto che i valori T_0 e T_1 non saranno uguali al centro della piastra e ai bordi lungo la direzione di ripetizione delle fibre.

2. La seconda modalità che tipicamente viene usata è quella di seguire uno spostamento nella direzione di ripetizione dello stampaggio in modo da simulare l'off-set del braccio di una macchina AFP. In questo modo, però, rispetto al caso precedente si assiste all'insorgere di difettologie nel piano come gaps ed overlaps dovuti ai valori di T_0 e di T_1.



a) Parallelismo b) Traslazione

Figure 3.4: Andamento del percorso delle fibre lungo la piastra seguendo le due metodologie presentate [27]

Un aspetto di cui ora è necessario trattare considerando la seconda metodologia di deposizione delle fibre è il fatto che la La proiezione verticale tende ad aumentare o a diminuire mentre il braccio di deposizione della macchina AFP avanza in direzione orizzontale in funzione della regressione dell'angolo di curvatura locale $\theta(x)$.

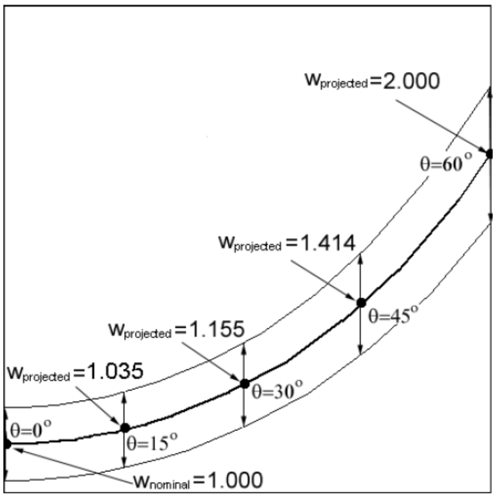


Figure 3.5: Variazione dell'altezza della proiezione di un tow per uno strato del laminato con angoli T_0=0° e T_1=60° [27]

Come si osserva in figura (3.5) la larghezza nominale per $\theta = 0°$ è rappresentata dal segmento verticale $w_{nominal}$. In particolare, si constata che all'aumentare dell'angolo di curvatura locale θ aumenta anche la larghezza effettiva. Nell'esempio pratico in Figura 3.5 si osserva che la larghezza nominale $w_{nominal}$ a $\theta = 0°$ vale 1, tale valore arriva a raddoppiare per $\theta = 60°$ al bordo dello strato. Questo fatto che si osserva può essere riassunto dalla seguente espressione analitica:

$$w_{projected} = \frac{w_{max}}{cos\theta(x)} = \frac{w_{nominal}}{cos\theta(x)} \tag{3.2}$$

Alla base dell'insorgere dei difetti di tipo gaps ed overlaps vi è proprio la Relazione (3.2). Specificatamente, la variazione di altezza lungo l'asse orizzontale che l'off-set del braccio robotico subisce, in quanto generalmente si usa un modello shifted di deposizione nel piano della fibra, porta alla generazione delle difettologie nel piano di cui si è già parlato. In particolare, la presenza di quest'ultimi è dovuta al valore che assumono gli angoli di laminazione T_0 e T_1, e dalla strategia di stampa adottata. Nella pratica si può imporre la stampa di due passate consecutive secondo una condizione di tangenza al centro della piastra, oppure di contatto al bordo. Riassumendo, si può dunque affermare che i 3 parametri che influenzano la presenza delle principali difettologie nel piano del laminato sono:

- L'angolo T_0 [deg] al centro della piastra
- L'angolo T_1 [deg] alla distanza $a/2$ dal centro della piastra
- La strategia di stampa usata: si può impostare una condizione di contatto al centro della piastra o al bordo per far stampare due course consecutivi.

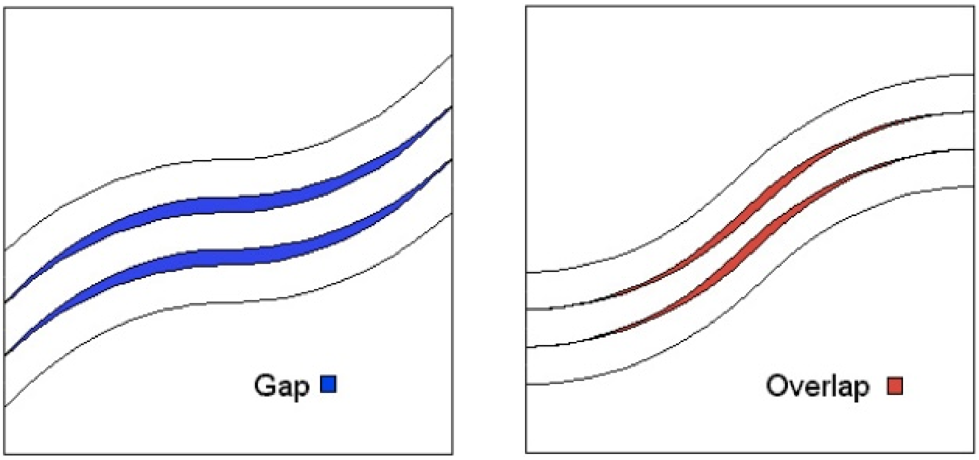
Di seguito si riporta uno schema riassuntivo per comprendere le condizioni di *complete gap* e *complete overlap* della produzione dei laminati VAT.

- Nel caso in cui si imponga al braccio robotico di depositare le fibre in modo che vi sia un contatto al bordo sinistro della piastra vale il segente fatto:

$$\begin{cases} \text{Se} \;\; \cos(T_0) > \cos(T_1) \Longrightarrow |T_0| < |T_1| \Longrightarrow \text{Complete Gap} \\ \text{Se} \;\; \cos(T_0) < \cos(T_1) \Longrightarrow |T_0| > |T_1| \Longrightarrow \text{Complete Overlap} \end{cases}$$

- Nel caso, invece, in cui si imponga al braccio robotico di depositare le fibre in modo che vi sia tangenza al centro della piastra si ha che:

$$\begin{cases} \text{Se} \;\; \cos(T_0) < \cos(T_1) \Longrightarrow |T_0| > |T_1| \Longrightarrow \text{Complete Gap} \\ \text{Se} \;\; \cos(T_0) > \cos(T_1) \Longrightarrow |T_0| < |T_1| \Longrightarrow \text{Complete Overlap} \end{cases}$$



a) $T_0 = 0°$ e $T_1 = 45°$ b) $T_0 = 45°$ e $T_1 = 0°$

Figure 3.6: Condizione di complete gap (a sinistra) e di complete overlap (a destra) nel caso in cui sia imposta tangenza al bordo sinistro [27]

In Figura 3.6 si mostra il caso in cui si impone al braccio di depositare la fibra nel piano in modo che vi sia tangenza al bordo sinistro. In questo caso, se l'angolo di laminazione T_0 al centro del laminato è minore in valore assoluto all'angolo T_1, allora si avrà una configurazione di complete gap al centro della piastra. D'altro canto, se l'angolo T_0 è maggiore in valore assoluto all'angolo T_1, allora si assisterà alla condizione di complete overlap sempre localizzato nella regione centrale del laminato.

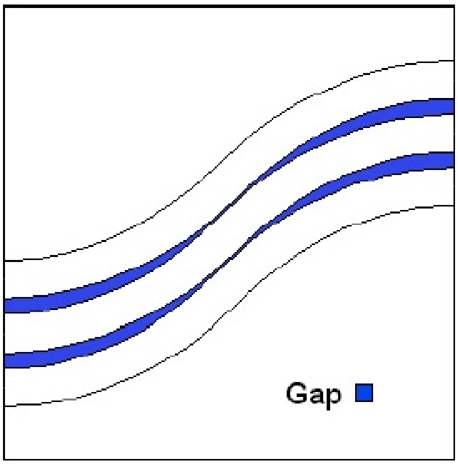


Figure 3.7: a) $T_0 = 45°$ e $T_1 = 0°$

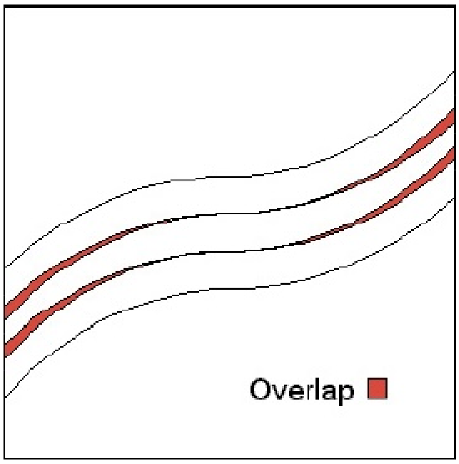


Figure 3.8: b) $T_0 = 0°$ e $T_1 = 45°$

Figure 3.9: Condizione di complete gap (a sinistra) e di complete overlap (a destra) nel caso in cui sia imposta tangenza al centro [27]

In Figura 3.9 si osserva, invece, il caso in cui viene imposto al braccio di depositare la fibra nel piano in modo che vi contatto al centro della piastra. Seguendo questa filosofia di deposizione, se l'angolo di laminazione T_0 al centro del laminato è maggiore in valore assoluto all'angolo T_1, allora si avrà una configurazione di complete gap ai bordi della piastra. Diversamente, se l'angolo T_0 è minore in valore assoluto all'angolo T_1, allora si otterrà la condizione di complete overlap sempre localizzato ai bordi del laminato.
In ogni caso, sia nella Figura 3.6 sia nella Figura 3.9 si osserva che le dimensioni di tali aree sia particolarmente ingente, quindi è stata necessaria l'implementazione di una strategia che limitasse il più possibile l'insorgere di difetti. In letteratura è stata proposta una strategia che si basava sulla modifica del numero di tows stampati per ogni passata della macchina, in modo da evitare la presenza di difettologie, in quanto un singolo course non è più costituito da un numero predeterminato di tows, ma è possibile variarlo in base alle esigenze. In particolare, il lavoro di Fayazbakhsh et al., [15] mostra che nella realtà non sia possibile variare in modo continuo la larghezza delle passate della macchina AFP, bensì è unicamente possibile modificare variare la w_{max} in modo discreto aggiungendo o togliendo i tows durante la stampa. Questa strategia correttiva porta come risultato una diminuzione sostanziosa dei difetti nel piano come gaps ed overlaps, rimangono unicamente delle aree triangolari di difetti.

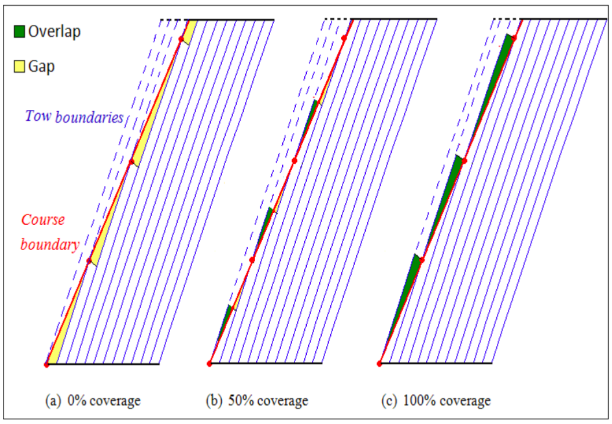


Figure 3.10: Presenza di gaps ed overlaps al variare del parametro di copertura adottato [22]

In Figura 3.10 si osservano le varie tecniche di correzione dei difetti adottate in letteratura [22], in particolare si può apprezzare il fatto che la quantità delle difettologie dipenda dalla percentuale di copertura implementata durante la stampa. Nello specifico, si verificheranno solo gaps con una copertura del 0% e solo overlap con una copertura del 100%. In particolare, si parla di complete gap quando viene impostato il parametro di compertura allo zero percento: ovvero si ha che nella strategia di deposizione il taglio avviene non appena il bordo di un tow interseca il confine della passata adiacente, come descritto in [17]. In questo modo si è dimostrato che la qualità del laminato stampato, oggetto di questo studio, è profondamente correlata alla strategia di stampa adottata. Ad esempio, una correzione dei difetti riduce il valore assoluto dell'area difetta ed opera una sorta di omogeneizzazione della geometria distribuendo queste piccole aree triangolari viste in Figura 3.10 lungo tutta la direzione della fibra e non più solo localizzata in alcune porzione del laminato come precedentemente osservato nelle Figure 3.6 e 3.9.

3.2 Defect Layer Method - DLM

Per caratterizzare meccanicamente i laminati VAT in presenza di difetti si è deciso di implementare il metodo DLM proposto in [15]. In particolare, si dimostra che la risposta della struttura alle sollecitazioni meccaniche è influenzata dalla posizione spaziale dei difetti nella piastra, modificando dunque ad esempio le frequenze proprie e i carichi critici di buckling. Applicare il DLM al laminato in esame significa discretizzare il piano medio della piastra in modo che le proprietà del singolo elemento finito saranno modificate in base alla percentuale dei difetti presente: seguendo questa filosofia tale variazione di proprietà diviene l'unico parametro che può essere modificato per simulare la presenza di eventuali difetti dovuti al processo AFP.

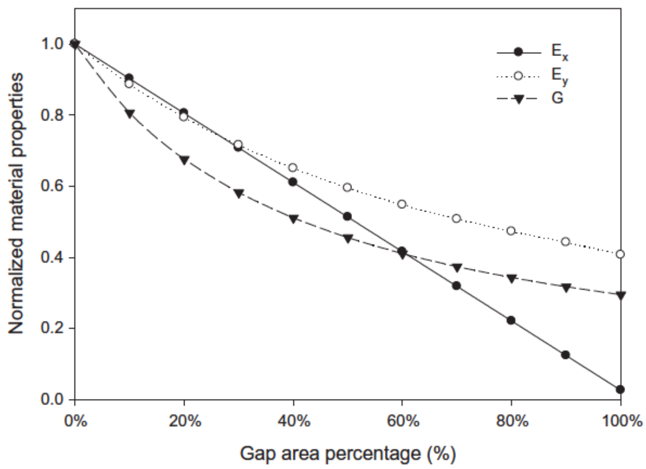


Figure 3.11: Andamento delle proprietà elastiche normalizzate rispetto alla percentuale dell'area di gaps per strato. [15]

Si osserva nella Figura 3.11 l'andamento della variazione delle proprietà meccaniche per ogni elemento in base alla percentuale di difetto gap presente al suo interno. Per quanto riguarda, invece, i difetti di tipo overlap si modificano le proprietà dello strato aumentandone proporzionalmente lo spessore, al posto di cambiare le caratteristiche meccaniche. In sintesi, il DLM presenta il grande vantaggio di necessitare un numero minore di elementi finiti per simulare l'eventuale presenza di difettologie, in quanto non vi è più la necessità di avere una mesh particolarmente densa così da catturare perfettamente il difetto.
Volendo entrare più nel merito numerico, è necessario valutare come le propietà mecccaniche varino in base alla percentuale di difetti presenti all'interno di ogni singolo elemento finito con cui si discretizza il laminato.
Nel caso in cui siano presenti difetti di tipo gap, come già mostrato in Figura 3.1, si avrà una presenza maggioritaria della resina usata per fissare gli strati, piuttosto che il pre-impregnato. Quindi nota l'area in percentuale del difetto presente nell'elemento finito A_{Gap} è possibile calcolare la densità effettiva rispetto a quella nominale:

$$\rho_{element} = (1 - A_{Gap})\rho_{pre-preg} + A_{Gap}\rho_{resin} \tag{3.3}$$

Dunque, in base alla percentuale del difetto presente nell'elemento finito si entra nel Grafico 3.11 e si stimano così le la variazioni delle caratteristiche meccaniche del materiale del singolo elemento. Operando in questo modo l'intera piastra viene fittiziamente modellizzata come multi-materiale. Una volta fatto ciò si costruisce

la matrice di riempimento che contiene i valori delle aree dei difetti presenti negli elementi dello strato. Riassumendo, si può affermare che si intende modellizzare i difetti di tipo gap in modo che ogni elemento finito con cui si discretizza il laminato coincida con le celle usate per il calcolo della matrice di riempimento, modificando le proprietà meccaniche del materiale in base alle entità del difetto mantenendo però inalterate le caratteristiche geometriche.
Per quanto riguarda, invece, i difetti di tipo overlap il metodo risulta essere particolarmente complesso, in quanto gli elementi finiti utilizzati per discretizzare il laminato mostrano un aumento locale di spessore in base alla percentuale di difetti presente, tenendo però inalterate le caratteristiche meccaniche del materiale. Nel codice usato per simulare la presenza di questi difetti si aumenta lo spessore in modo proporzionale all'area di sovrapposizione fissando un limite massimo di aumento di spessore del 95% come consigliato in [28]:

$$t_{overlap} = t_0(1 + A_{overlap}) \cdot 0.95 \tag{3.4}$$

Dato lo spessore iniziale t_0 si ipotizza un aumento locale proporzianale all'area di sovrapposizione $A_{overlap}$, mettendo un tetto all'aumento di spessore pari al 95%.

Capitolo 4

Ottimizzazione nei compositi

Il termine ottimizzazione dal punto di vista matematico è legato al concetto trovare la migliore soluzione possibile modificando le variabili di progetto, spesso soggette a vincoli. La maggior parte dei problemi pratici di interesse ingegneristico sono troppo complessi per poter essere risolti analiticamente, risulta dunque necessario far ricorso a metodi numerici e algoritmi di ottimizzazione.

4.1 Definizione del problema di ottimizzazione

Il primo passo per impostare il problema di ottimizzazione risulta essere quello di tradurre l'obiettivo in una formulazione matematica, che possa essere successivamente elaborata da un algoritmo di ottimizzazione. E' bene sottolineare che la prima fase della definizione del problema di ottimizzazione richiede una ricerca preliminare esauriente del tema da sviluppare: nello specifico, è necessario raccogliere tutti i dati pertinenti sui requisiti e le previsioni di prestazione. Successivamente, si identificano le variabili di progetto del sistema da ottimizzare, che vengono rappresentate dal seguente vettore colonna:

$$x = [x_1, x_2, ..., x_n] \tag{4.1}$$

E' importante che le variabili del progetto non devono dipendere l'una dall'altra e l'algoritmo di ottimizzazione può scegliere gli elementi del Vettore (4.1) in modo indipendente. Si deve, inoltre, discutere se le variabili di progetto sono continue o discrete. Le variabili di progetto continue sono numeri reali che possono variare in modo continuo all'interno di un intervallo specificato senza spazi vuoti tra di esso. Quando una o più variabili possono avere valori discreti si ha un problema di ottimizzazione discreto. In aggiunta, è spesso utile definire dei limiti sulle variabili di progetto che possono essere superiori o inferiori.

$$\underline{x_i} < x_i < \overline{x_i}, i = 1, ..., n \tag{4.2}$$

Tali limiti delle variabili di progetto risultano essere diversi dai vincoli di ottimizzazione: specificatamente, tali limiti devono essere basati su vincoli fisici reali del progetto da ottimizzare.
La funzione obiettivo ha il compito di definire una quantità che permette di individuare se un modello risulta ottimale rispetto ad un altro. Tale funzione deve consistere in uno scalare determinabile per un dato vettore di variabili di progetto. A seconda del problema in questione, la funzione obiettivo può essere massimizzata oppure minimizzata.

$$max[f(x)] = -min[f(x)] \tag{4.3}$$

Invertire la funzione obiettivo è un altro modo per trasformare un problema di massimizzazione in un problema di minimizzazione, ma generalmente risulta essere meno auspicabile in quanto altera la dimensione del problema e potrebbe introdurre nel problema divisioni per zero. Inoltre, la funzione obiettivo non è detto che rappresenti un unico obiettivo del progettista, ma potrebbe esprimerne molteplici. In particolare, in questo caso si parla di ottimizzazione multiobiettivo in cui non si produce un singolo progetto, bensì una serie di soluzioni che permettono di ottenere diversi compromessi tra gli obiettivi.
La maggior parte dei problemi di ottimizzazione ingegneristici prevede la necessità di applicare dei vincoli di ottimizzazione. Si parla, quindi, di funzioni delle variabili di progetto che si desidera limitare. La feasible region rappresenta, dunque, l'insieme dei punti che soddisfano tutti i vincoli del problema. Nello specifico, si cerca di minimizzare oppure massimizzare la funzione obiettivo operando all'interno di questo spazio di progettazione. La feasible region si amplia quando si eliminano i vincoli e si rimpicciolisce quando si aggiungono vincoli (ovviamente a meno che questi non siano ridondanti). E' importante sottolineare che nel momento in cui la regione di fattibilità cresce si ottiene che la funzione obiettivo ottimale migliora oppure subisce poche variazioni. Al contrario, si assiste ad un peggioramento dell'ottimo. Benché, i vincoli possano sembrare inizialmente limitanti, essi consentono spesso all'ottimizzatore di trovare soluzioni utili al problema in questione.
L'ultimo passo è quello di definire formalmente la dichiarazione del problema di ottimizzazione inserendo all'interno tutti gli ingredienti appena descritti, ovvero le variabili di progetto, la funzione obiettivo e i vincoli. Tale dichiarazione racchiude il concetto di voler massimizzare o minimizzare la funzione obiettivo variando le variabili di progetto entro i loro limiti, nel rispetto dei vincoli. Tutto ciò è possibile esprimerlo matematicamente con la seguente espressione:

$$\begin{array}{lll} \text{minimize} & f(x) & \\ \text{by varing} & \underline{x_i} < x_i < \overline{x_i} & i = 1, ..., n_x \\ \text{subject to} & g_j(x) \leq 0 & j = 1, ..., n_g \\ & h_l(x) = 0 & l = 1, ..., n_l \end{array} \tag{4.4}$$

In Figura 4.1 si riporta il tipico flow chart di un processo di ottimizzazione descritto in (4.4). Nella pratica, per un dato insieme di variabili di progetto x, l'analisi di ottimizzazione ha il compito di valutare i risultati degli obiettivi f e dei vincoli g ed h.

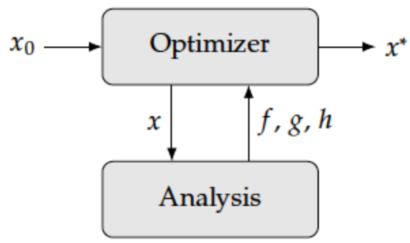


Figure 4.1: Schema a blocchi di un tipico processo di ottimizzazione automatizzato implementato in questo elaborato [29]

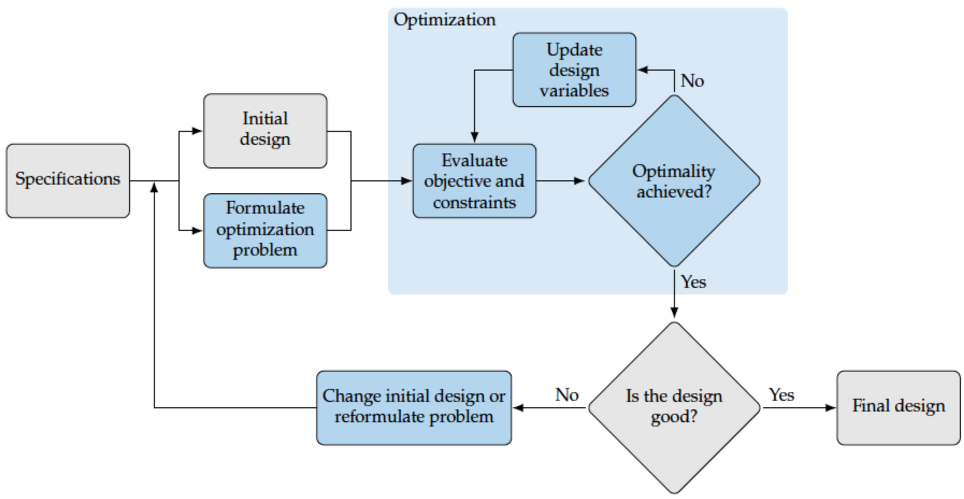


Figure 4.2: Diagramma di flusso del processo di ottimizzazione nella progettazione ingegneristica [29]

In teoria, f, geh dovrebbero essere computabili per tutti i valori di x che hanno senso dal punto di vista fisico. I limiti inferiori e superiori delle variabili di progetto devono essere stabiliti in in modo da evitare il più possibile progetti privi di significato fisico.
In Figura 4.2 il processo di ottimizzazione fin qui descritto può essere riassunto più dettagliatamente. In particolare, si osserva che l'ottimizzazione del progetto

richiede una formulazione formale del problema, il quale deve includere necessariamente le variabili di progetto che saranno modificate dall'ottimizzatore, l'obiettivo da minimizzare o massimizzare ed i vincoli da soddisfare. Per poter formulare tutto ciò è necessario sviluppare competenze sia nell'area tematica di interesse sia nell'ottimizzazione numerica. Per questo si rimanda al Capitolo 1 in cui viene svolta una analisi dello stato dell'arte dei materiali VAT e delle principali pubblicazione inerenti la loro ottimizzazione. Il progettista è chiamato a definire l'obiettivo, i parametri da modificare ed i vincoli da rispettare: tali decisioni hanno effetti profondi sul risultato finale.
Al termine del processo di ottimo, non è detto che si giunga immediatamente ad un design valido e praticabile: può essere necessario riformulare il problema di ottimizzazione modificando opportunamente la funzione obiettivo, oppure aggiungendo o rimuovendo vincoli o cambiando le variabili di progetto. Spesso, infatti, vengono svolti degli studi di post-ottimizzazione: tipicamente si eseguono analisi di sensività in cui le variabili di progetto o altri parametri vengono variati per quantificare il loro effetto sull'obiettivo e sui vincoli. Tali risultati possono indicare dove il progettista potrebbe agire per attenuare i vincoli del progetto, e quindi iniziare un nuovo loop di ottimizzazione.

4.2 Surrogate-Based Optimization

Un modello surrogato è un'approssimazione di un output funzionale, la quale rappresenta una curva di adattamento di alcuni dati fondamentali. Nello specifico, si utilizza questa modalità con l'obiettivo di costruire un modello che sia molto più veloce da calcolare rispetto alla funzione obiettivo originalmente definita, pur garantendo un'accuratezza sufficiente elevata lontano dai punti in cui la funzione è stata effettivamente valutata.
Nel processo di ottimizzazione il modello surrogato viene generalmente perfezionato in base alle esigenze. Inoltre, è necessario sottolineare che alcuni algoritmi di ottimizzazione utilizzano sia il modello surrogato sia il modello originale. In Figura 4.3 si osserva un flow chart riassuntivo del processo di ottimizzazione che implementa un modello surrogato. In genere si sostituisce la valutazione della funzione con un modello surrogato. Tuttavia, potrebbe non essere conveniente sostituire l'intero modello, ma sostituirne solo una parte.
Di seguito si vogliono brevente riassumere i passaggi chiave del processo di ottimizzazione in questione. In primo luogo, si utilizzano metodi di campionamento per scegliere i punti iniziali per valutare la funzione. Tali punti in letteratura prendono spesso il nome di training data, tale nome è dovuto al fatto che proprio a partire da questi dati si costruisce il modello surrogato utilizzato dall'ottimizzazione. In base ai risultati del processo di ottimo, si includono ulteriori punti nel campionamento e

viene ricostruito il surrogato. Tale fase prende il nome di infill.

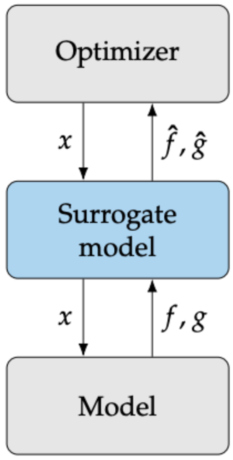


Figure 4.3: Schema a blocchi di un tipico processo di ottimizzazione basata sul Surrogato [29]

Il vantaggio di usare tale processo di ottimizzazione diviene evidente quando il modello originale è computazionalmente oneroso. Infatti, tali modelli possono essere richiamati con un costo computazionale minimo, anche se la loro costruzione richiede molteplici valutazioni del modello originale. Risulta dunque evidente che l'uso di questa metologia è conveniente quando il numero di valutazioni necessarie per costruire un modello surrogato accurato è inferiore a quello per ottimizzare direttamente il modello originale. Si sottolinea che maggiore è il numero di input, maggiori saranno le valutazioni del modello originale necessarie per costruire un surrogato sufficientemente accurato. Pertanto, se il problema di ottimizzazione presenta un numero elevato di variabili di progetto la generazione del modello surrogato potrebbe non essere conveniente.

4.3 Latin Hypercube Sampling

I metodi di campionamento, come già precedentemente affermato, hanno il compito di selezionare i punti di valutazione per costruire il surrogato a partire dal modello iniziale. La scelta di questi punti deve essere svolta con particolare cura affinchè si giunga alla definizione di un surrogato sufficientemente accurato.
Un metodo di campionamento molto diffuso per questa tipologia di problemi è Latin hypercube sampling (LHS), il quale si basa su un processo casuale, ma risulta essere più efficace del random sampling puro. In particolare, quest'ultima metodologia ha la tendenza a presentare fenomeni di clustering e risulta meno efficiente per

raggiungere distribuzioni auspicabili, come la legge dei grandi numeri. Questo fatto è dovuto al fatto che nel random sampling di tipologia pura ogni campione selezionato risulta essere indipendente dal campione precedente; al contrario nel latin hypercube sampling tutti i campioni vengono scelti preventivamente in modo da garantire una distribuzione uniforme. Questo fatto è evidente nella Figura 4.4 dove si comparano i due metodi di campionamento descritti tramite la scelta di 50 punti in uno spazio bidimensionale.

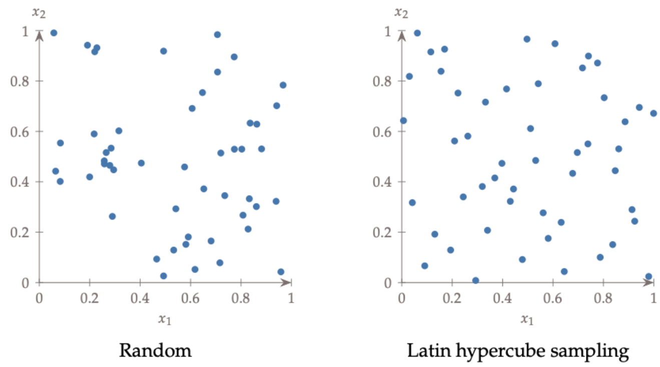


Figure 4.4: Confronto tra Pure Random Sampling e LHS [29]

Il principio su cui si basa la distribuzione di tipo latin hypercube è quello per cui esiste uno e un solo punto in una determinata riga o colonna. In particolare, LHS è un metodo di campionamento in cui si tenta di massimizzare la distanza tra i campioni. Il vincolo di tale procedimento è dato dal fatto che la proiezione su ciascun asse deve seguire una distribuzione di probabilità prestabilita, che può essere per esempio uniforme oppure normale. Si vuole sottolineare che spesso è comunque necessario richiedere molti campioni per caratterizzare con precisione lo spazio di progettazione, ma in ogni caso se ne richiedono un numero decisamente inferiore rispetto al random sampling puro.

4.4 Algoritmo SurrogateOpt

In questo elaborato si è fatto uso dell'algoritmo surrogato presente nella libreria Global Optimization Toolbox presente in MATLAB. In particolare, si vuole brevemente spiegare le fondamenta su cui si basa questo procedimento, e raccontare gli step fondamentali che l'autore ha implementato per la realizzazione del codice completamente *push-button* usato per le analisi che saranno presentate nel Capitolo 7. In generale, l'algoritmo cerca di risolvere il seguente problema matematico:

$$\underset{x}{min}\ f(x) \text{ such that } \begin{cases} lb \leq x \leq ub \\ A \cdot x \leq b \\ A_{eq} \cdot x = b_{eq} \\ c(x) \leq 0 \\ x_i \ \ integer, i \in intcon \end{cases}$$

Traducendo a parole quanto descritto in linguaggio matematico nella definizione formale del problema prevista dall'algoritmo , si può affermare che il solutore ha l'obiettivo di cercare il valore minimo globale di una funzione obiettivo anche in più dimensioni. La funzione di cui si sta cercando il minimo può essere soggetta a vincoli (sia lineari oppure non lineari). Il grande vantaggio di usare un algoritmo surrogato, rispetto ad esempio ad uno genetico, risiede nel fatto che risulta essere più conveniente dal punto di vista del tempo di esecuzione quando si hanno funzioni obiettivo particolarmente complesse, che richiedono quindi un lungo periodo per essere valutate ad ogni iterazione. Affinchè il risolutore possa funzionare correttamente viene richiesto di porre dei limiti superiori ed inferiori alle varibili di progetto che verranno variate per la ricerca del minimo della funzione.

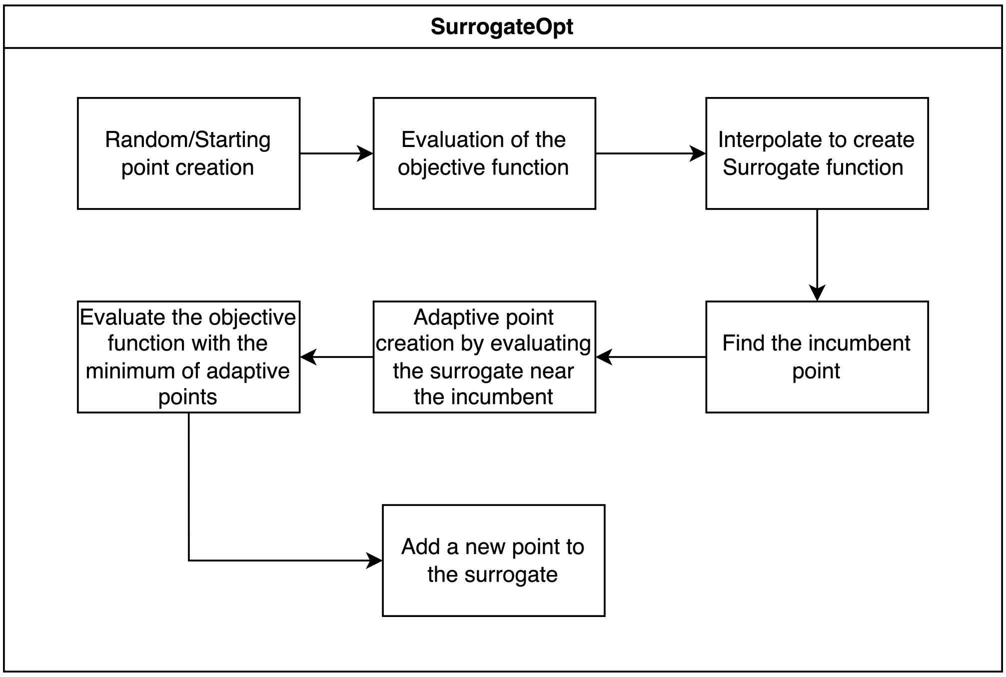


Figure 4.5: Diagramma di flusso implementato dall'algoritmo SurrogateOpt

In Figura 4.5 si mostra il funzionamento dell'algoritmo SurrogateOpt usato per l'ottimizzazione dei laminati VAT nel Capitolo 7.
Inizialmente, se l'utente non implementa in modo autonomo dei punti iniziali

attraverso una procedura di sampling, l'algoritmo prevede la creazione dei punti randomici in cui viene valutata la funzione obiettivo. Tale passaggio preliminare risulta fondamentale in quanto attraverso le radial basis functions viene interpolata la funzione obiettivo creando il surrogato. Dunque, si può affermare che dai random samples viene calcolato il valore della funzione obiettivo e si genera il surrogato dall'interpolazione di quest'ultima.
Nel caso in cui si dovesse minimizzare la funzione obiettivo, ad esempio, il valore più piccolo assunto dalla funzione dalla valutazione dei punti random è chiamato incumbent point. Nell'intorno di questo punto si valuta il valore della funzione obiettivo usando il modello interpolato, creando gli adaptive points. A questi punti sarà assegnato una parametro di fitness, detto anche di merito. In particolare, il punto che presenterà il parametro di fitness minimo diventerà un nuovo random, e sarà pertando l'unico punto tra quelli adattivi per cui sarà valuta la funzione obiettivo, e non il surrogato. Aggiunto di fatto un nuovo punto alla funzione interpolante, si procede nuovamente come descritto in precedenza creando prima gli incumbent points e successivamente gli adaptive ripetendo iterativamente il processo.

4.4.1 Definizione del problema di ottimizzazione per laminati VAT

Il problema di ottimizzazione che si cercherà di esplorare nell'elaborato, in questa fase preliminare, è definito matematicamente nel seguente modo:

$$\begin{aligned} &\text{maximise} && f_1 \\ &\text{by varing} && -90^\circ \leq T_0 \leq 90^\circ \\ & && -90^\circ \leq T_1 \leq 90^\circ \\ &\text{subject to} && \kappa_{lim} \leq 1.57 \quad [m^{-1}] \end{aligned} \tag{4.5}$$

Come si osserva nella definizione del Problema (4.5), l'obiettivo di questa trattazione sarà quella di massimizzare la prima frequenza naturale del laminato VAT in oggetto di studio, facendo variare gli angoli di laminazione T_0 e T_1 descritti nel Capitolo 2. Come vincolo del problema di ottimo viene scelto il massimo raggio di curvatura che il braccio della macchina AFP può svolgere nel depositare le fibre di carattere curvilineo lungo la piastra. In particolare, si rimanda alla definizione del parametro κ_{lim} data nel Capitolo 3.

In figura (4.6) si mostra il diagramma di flusso dell'algoritmo di ottimizzazione che si è implementato in questo elaborato in ambiente MATLAB. Il primo step

in cui vengono scelti i valori di T_0 e T_1 all'interno del framework dell'algoritmo SurrogateOpt è gia stato approfondito nella Figura 4.5. In particolare, per ogni iterazione dell'algoritmo una volta scelti i valori degli angoli di laminazione viene verificato se il vincolo sul manufacturing imposto dal parametro κ_{lim} è rispettato. In caso contrario si scartano questi valori di T_0 e di T_1 e si riparte da capo provando una nuova coppia di angoli di laminazione. Se il vincolo sul processo tecnologico AFP viene rispettato, allora è possibile procedere con la definizione della funzione obiettivo del problema di ottimizzazione in analisi. La complicazione di questa trattazione, rispetto all'analisi teorica presentata all'inizio di questo capitolo, risiede nel fatto che non si ha più una funzione analitica di cui si cerca il massimo oppure il minimo, bensì la funzione da ottimizzare diviene il risultato di un calcolo agli elementi finiti. Si vuole sottolineare che proprio perchè si cade nella casistica di avere una funzione obiettivo particolarmente complessa da valutare per ogni iterazione, risulta opportuno usare una metodologia di ottimizzazione basata sulla creazione di un surrogato. Nello specifico, la valutazione della funzione obiettivo di questo problema per ogni coppia di T_0 e T_1 proposta dal solutore nel caso di mesh strutturali notevolmente fitte richiederebbe al calcolatore un tempo di esecuzione nell'ordine dei giorni di attesa.
Superato il check, si procede scrivendo i valori di T_0 e di T_1 proposti dal solver su di un file di testo con estensione .txt; successivamente viene aperto ed avviato in batch un codice Python, in cui viene simulata la presenza di Gaps ed Overlaps per ogni layer del laminato dovuti al processo produttivo scelto. In primis, viene letto il file di testo precedentemente redatto contenente i valori degli angoli di laminazione. Successivamente, in base ai valori di questi angoli vengono simulate le passate di macchina come descritto nel Capitolo 3. L'output di questo stage è la definizione degli input per poter avviare l'analisi strutturale del laminato VAT definito in base ai valori T_0 e T_1 proposti dal solver.
In ultima istanza, viene avviato sempre in batch il programma MUL2.exe, il quale risolverà il problema dinamico accoppiando la formulazione unificata con il metodo agli elementi finiti, come descritto nel Capitolo 2. Ottenuta la prima frequenza naturale del laminato si procederà con la sua lettura avendo come obiettivo quello di massimizzare il suo valore.

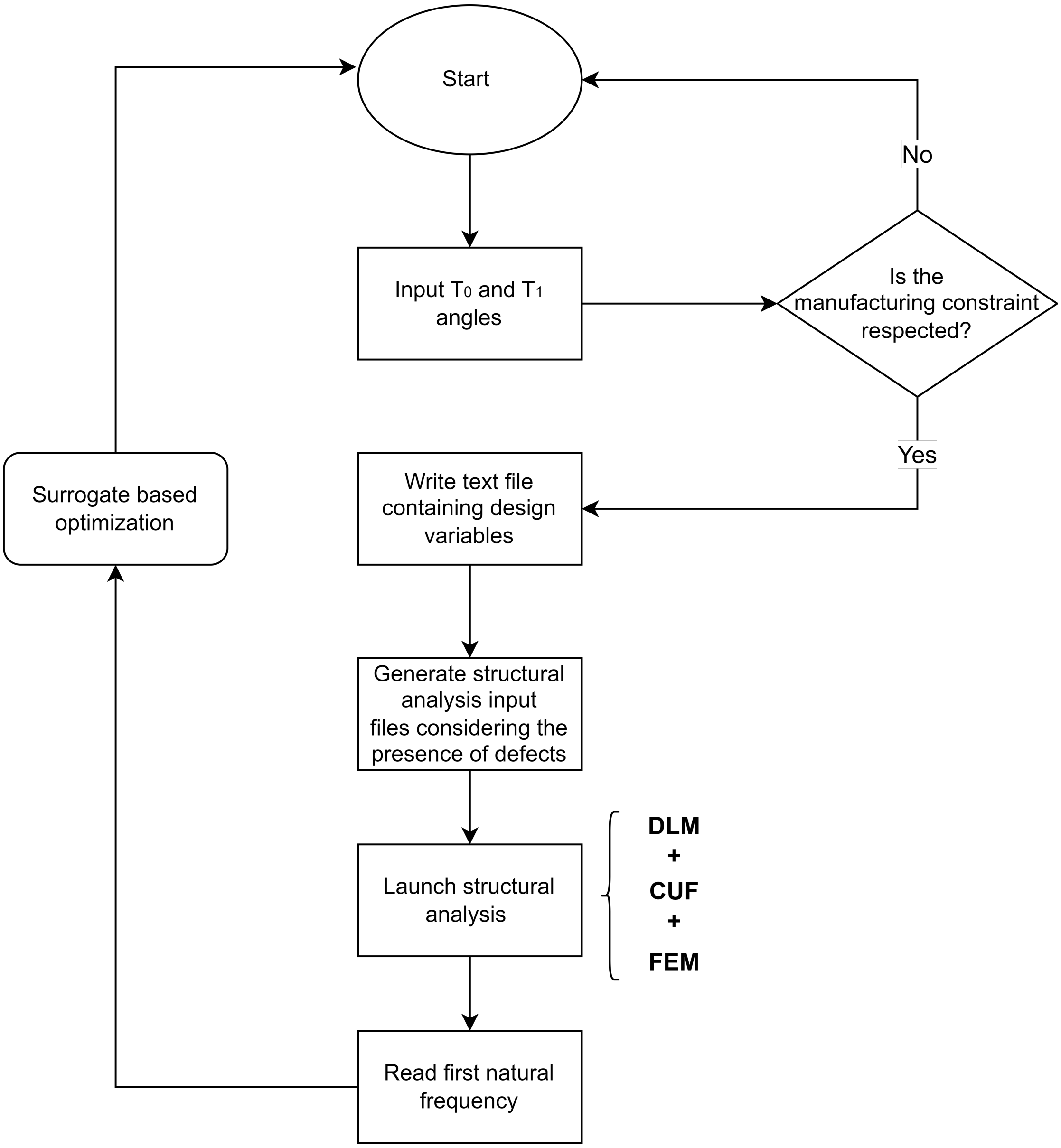


Figure 4.6: Diagramma di flusso implementato all'interno del framework di ottimizzazione su MATLAB per massimizzare la prima frequenza naturale dei laminati VAT

Capitolo 5

Validazione numerica all'uso della CUF per laminati VAT

In questo capitolo si entrerà nel merito di quanto descritto nel Capitolo 2, ovvero si utilizzeranno le nozioni alla base della CUF per lo studio strutturale di piastre laminate in composito. Nello specifico, si vuole mostrare degli esempi numerici sviluppati con il software MUL2, il quale attraverso l'implementazione della formulazione unificata permette lo studio non solo di laminati compositi ma anche dei VAT, i quali sono l'oggetto di questo elaborato. Sarà possibile solo dopo aver preso confidenza con il codice e con le analisi strutturali implementabili proseguire con lo sviluppo del tema di questo elaborato.

5.1 Piastra isotropa soggetta a carico di pressione

Il primo caso che si vuole analizzare è quello più semplice in assoluto e serve per comprendere le potenzialità ed assimilare le nozioni teoriche presentate nel Capitolo 2. Si prende una piastra quadrata incastrata su tutti e 4 i lati che presenta le seguenti caratteristiche geometriche: lato a = b = 0.3 m e di spessore t = $1.8{\cdot}10^{-3}$ m. Viene applicato un carico di pressione pari a P = 1000 N/m^2 sulla faccia superiore della piastra. In questo caso si comprende come il caso in analisi sia conforme al caso di piastra sottile e sarebbe dunque possibile applicare la teoria elementare della piastra presentata da Kirchhoff-Love esposta nel Capitolo 2.

	E [GPa]	ν	ρ [kg/m^3]
AL-2024	73.8	0.33	2768

Table 5.1: Proprietà meccaniche del materiale della piastra isotropa

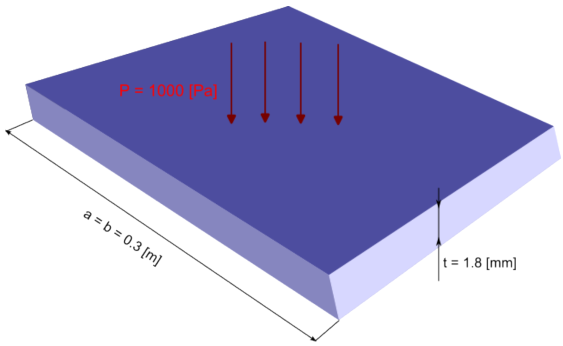


Figure 5.1: Modello geometrico della piastra isotropa soggetta ad un carico di pressione sul top

In Tabella 5.1 si riportano le proprietà meccaniche del materiale della piastra che si è deciso di analizzare, mentre in Figura 5.1 si riporta la geometria della struttura oggetto di questa prima analisi.

Modello	DOFs	u_z[mm]
4 x 4 Q9 - LD1	486	0.151
8 x 8 Q9 - LD1	1734	0.183
12 x 12 Q9 - LD1	3750	0.189
14 x 14 Q9 - LD1	5046	0.190

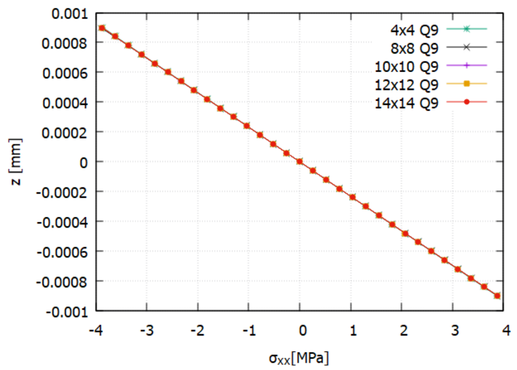
Table 5.2: Analisi di convergenza della mesh nel piano della piastra tramite elementi bidimensionali quadratici Q9. Sullo spessore si usano elementi B2 con cinematica lagrangiana LD1.

Modello	DOFs	u_z[mm]
14 x 14 Q9 - TE1	5046	0.190
14 x 14 Q9 - TE2	7569	0.247
14 x 14 Q9 - TE3	10092	0.247
14 x 14 Q9 - TE4	12615	0.247
14 x 14 Q9 - 2LD3	17661	0.247

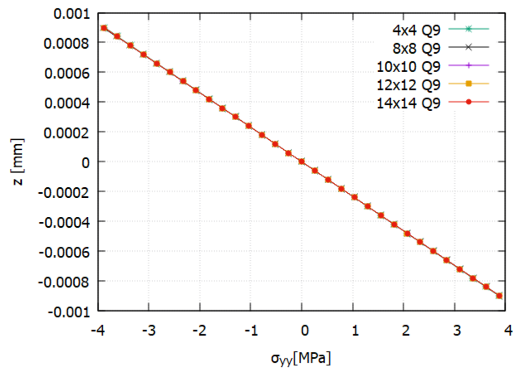
Table 5.3: Analisi dell'influenza della teoria strutturale attraverso l'uso di funzioni di espansione di Taylor e di Lagrange

Nella Tabella 5.2 si riporta il procedimento per l'analisi dell'influenza della teoria strutturale della piastra caricata trasversalmente. In particolare, si usano elementi finiti bidimensionali quadratici a 9 nodi, i quali risulteranno essere adeguati per lo

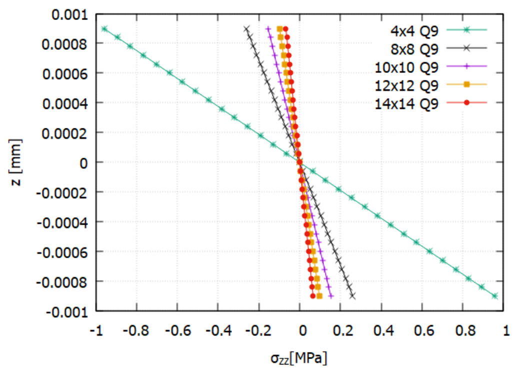
studio di laminati in composito nelle successive analisi. Per discretizzare lo spessore si è usata una cinematica lagrangiana di tipo LD1.
Nella Tabella 5.3 si mostra l'analisi di convergenza della mesh sullo spessore attraverso l'uso di elementi monodimensionali con cinematica lagrangiana. Si nota che si assiste ad una convergenza con modello di espansione LE1 lungo lo spessore. Si procede ora con il procedimento di convergenza della mesh nel piano attraverso la rappresentazione delle tensioni caratteristiche sullo spessore calcolate nel centroide della piastra al variare del numero di elementi finiti usati nel piano medio della piastra.



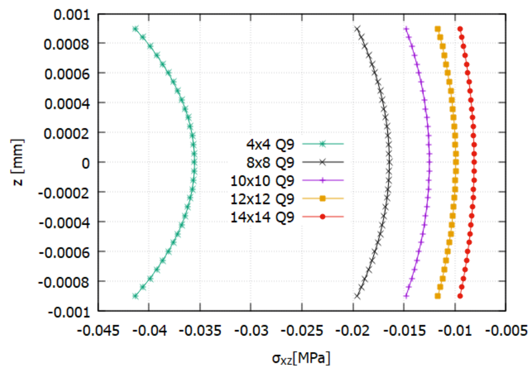
a)



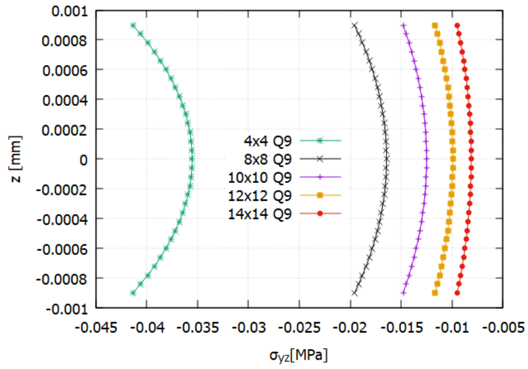
b)



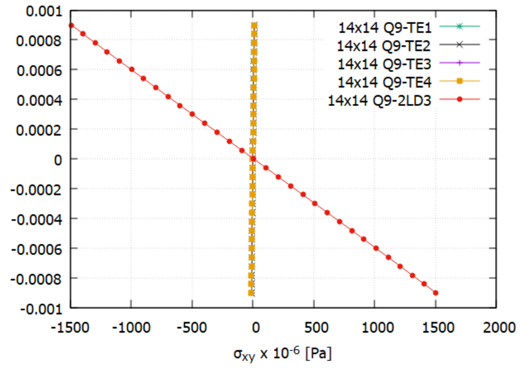
c)



d)



e)

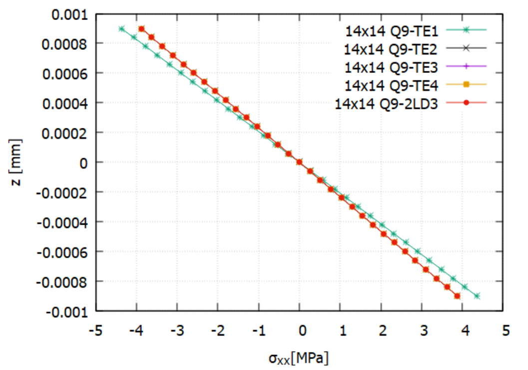


f)

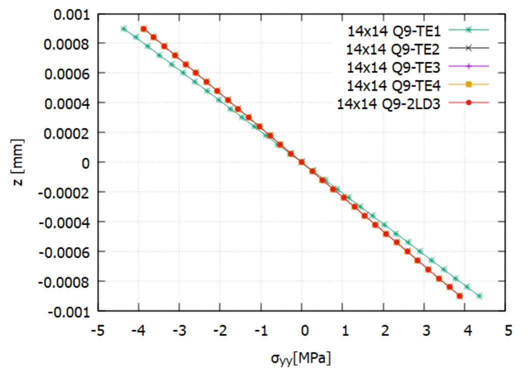
Figure 5.2: Andamento sullo spessore della a) σ_{xx} b) σ_{yy} c) σ_{zz} d) σ_{xz} e) σ_{yz}e f) σ_{xy} al variare della mesh nel piano

Modello	f_1 [Hz]	f_2 [Hz]	f_3 [Hz]	f_4 [Hz]	f_5 [Hz]
8x8Q9-LD1	214.25	450.46	665.71	851.67	854.72
12x12Q9-LD1	210.41	434.31	640.76	794.73	798.14
14x14Q9-LD1	209.63	431.11	635.85	783.92	787.39
16x16Q9-LD1	208.79	427.72	630.66	772.67	776.19

Table 5.4: Analisi di convergenza della mesh nel piano per l'analisi dinamica



a)



b)

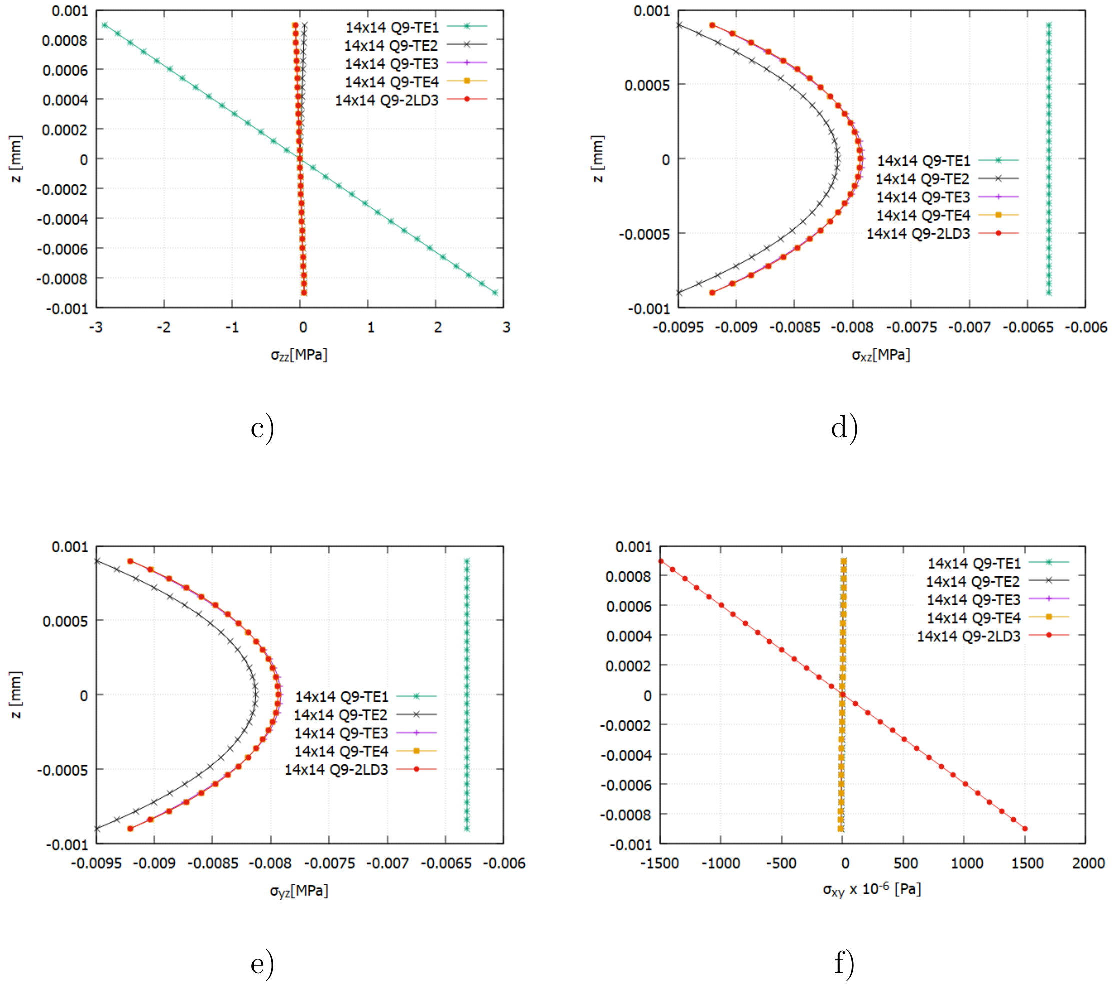


Figure 5.3: Andamento sullo spessore della a) σ_{xx} b) σ_{yy} c) σ_{zz} d) σ_{xz} e) σ_{yz} f) σ_{xy} al variare della funzione di espansione lungo lo spessore

In Tabella 5.4 si riportano le prime 5 frequenze naturali della piastra incastrata sui 4 lati calcolate attraverso il software MUL2 applicando la CUF. Si tiene fissa la teoria strutturale e si fa variare la mesh nel piano per eseguire un'analisi di convergenza della mesh nel piano.

5.1.1 Risultati usando Nastran™

Si riporta di seguito il modello agli elementi finiti della piastra in analisi usando il software commerciale di pre e post processing PATRAN ™. Avendo costruito il modello matematico di analisi ed avendo assegnato il materiale e le proprietà agli elementi finiti QUAD4, si inizializza l'analisi tramite il solutore NASTRAN™.

Modello	DOFs	u_z [mm]
Nastran™	2166	0.258

Table 5.5: Risultato di spostamento massimo della piastra usando il codice commerciale NASTRAN™

Modello	f_1 [Hz]	f_2 [Hz]	f_3 [Hz]	f_4 [Hz]	f_5 [Hz]
Nastran™	179.682	365.681	533.525	655.373	658.842

Table 5.6: Frequenze naturali della piastra isotropa incastrata sui 4 lati

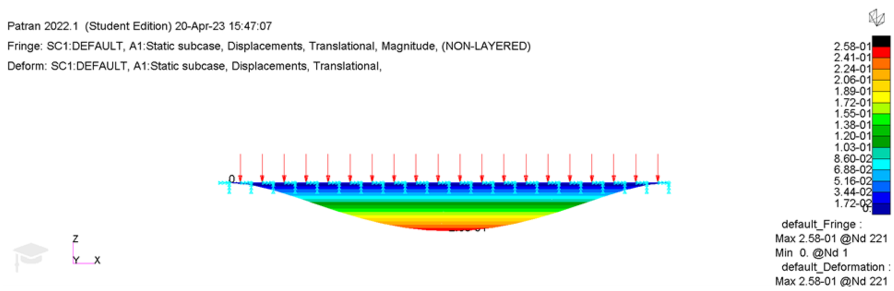


Figure 5.4: Modello matematico della piastra isotropa con un carico di pressione in Patran™

In Figura 5.4 si osserva che lo spostamento massimo si ha nel centro della piastra ed è pari a 0.258 mm. In Tabella 5.6 si riportano i primi 5 modi propri di vibrare della piastra isotropa in oggetto di studio calcolati dal codice commerciale di Nastran.

5.2 Piastra in composito soggetta a carico di pressione

In questa sezione si intente studiare una piastra in composito con le stesse dimensioni e geometria del caso in materiale isotropo, ma formata da 10 strati di materiale ortotropo. Anche in questo caso si è deciso di vincolare il laminato con un incastro su tutti e 4 i lati, si applica inoltre un carico di pressione di 1000 N/m^2 sulla faccia superiore della piastra. Si riportano in Tabella 5.7 le proprietà del materiale ortotropo che si è scelto per svolgere le simulazioni che seguiranno. La laminazione scelta dei diversi strati è di tipo simmetrico ed è $[0°/90°/45°/\text{-}45°/\text{-}30°]_s$.

E_{11} [GPa]	$E_{22/33}$ [GPa]	$G_{12/13}$ [GPa]	G_{23} [GPa]	$\nu_{12/13}$	ν_{23}	$\rho[kg/m^3]$
167.7	11.41	6.80	3.09	0.31	0.58	925.47

Table 5.7: Proprietà meccaniche del materiale ortotropo usato nei diversi strati del laminato

Nel caso in esame, come già discusso nel Capitolo 2, non è possibile usare la teoria elementare della piastra di Kirchhoff-Love, in quanto a differenza del caso precedente non è possibile trascurare la deformabilità a taglio del laminato in composito. Risulta, quindi necessario usare teorie di ordine superiore per descrivere pienamente questo comportamento. Pertando si adopera il software MUL2 per implementare la formulazione unificata, con la quale si intende descrivere meccanicamente la piastra in oggetto.

Modello	DOFs	u_z [mm]
4x4Q9-10LD1	2673	0.229
8x8Q9-10LD1	9537	0.228
10x10Q9-10LD1	14553	0.283
12x12Q9-10LD1	20625	0.286
14x14Q9-10LD1	27753	0.288

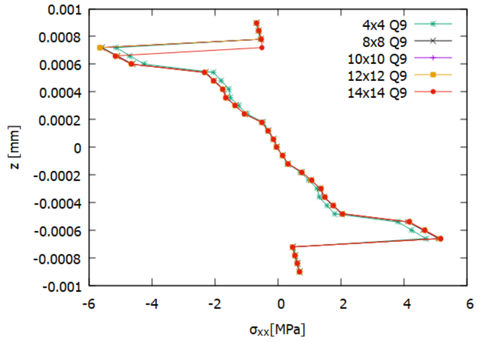
Table 5.8: Analisi di convergenza della mesh nel piano della piastra tramite elementi bidimensionali quadratici Q9. Sullo spessore si usano elementi B2 con cinematica lagrangiana LD1

Nella Tabella 5.8 viene riportata l'analisi di convergenza della mesh nel piano medio del laminato in composito. Si è scelto come nel caso precedente, di usare elementi finiti bidimensionali a 9 nodi che implementano funzioni di forma quadratiche, ovvero gli elementi Q9. Per discretizzare il comportamento lungo lo spessore della piastra, si usano elementi finiti monodimensionali a 2 nodi (B2) con cinematica Lagrangiana LE per ogni strato del laminato. Si è deciso di rappresentare il numero di gradi di libertà coinvolti nell'analisi e lo spostamento trasversale nel centroide della piastra al variare del numero di elementi finiti. Si osserva che all'aumentare del numero di essi, la differenza tra due spostamenti successivi diminuisce.

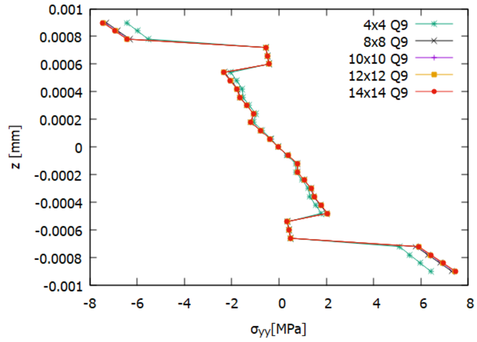
Modello	DOFs	u_z $[mm]$
14x14 Q9-TE1	5046	0.2695
14x14 Q9-TE2	7569	0.2877
14x14 Q9-TE3	10092	0.2880
14x14 Q9-TE4	12615	0.2880
14x14 Q9-10LD1	27753	0.2880
14x14 Q9-10LD2	52983	0.2883
14x14 Q9-10LD3	78213	0.2883

Table 5.9: Analisi di influenza della teoria strutturale attraverso l'uso di elementi monodimensionali B2,B3,B4 con cinematica Lagrangiana e di funzioni di espansione di Taylor

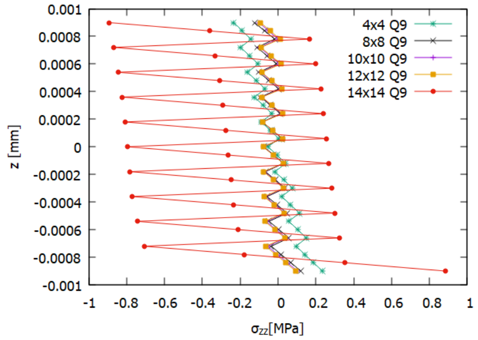
Nella Tabella 5.9 si riporta il procedimento di convergenza della mesh al variare delle funzioni di espansione lungo lo spessore, come già precedentemente detto, la CUF prevede di discretizzare il comportamento lungo l'asse z del laminato con elementi monodimensionali a 2, 3 o 4 nodi con cinematica legata alle espansioni usate. In particolare, si può osservare che fino alla terza cifra significativa anche il modello cinematico lagrangiano a due nodi LD1 risulta lo stesso dei modelli a più gradi di libertà, come LD2 e LD3.



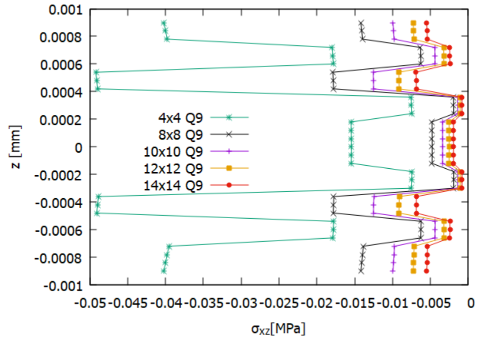
a)



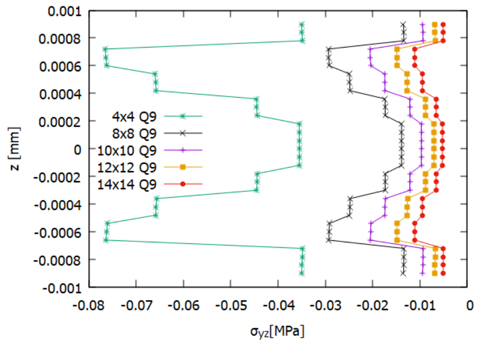
b)



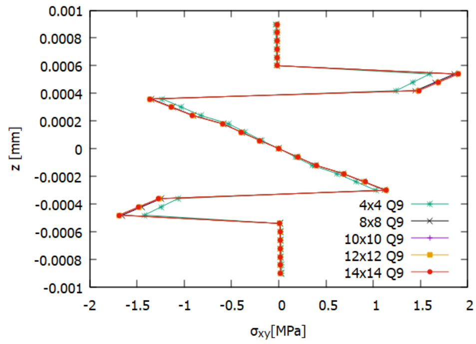
c)



d)

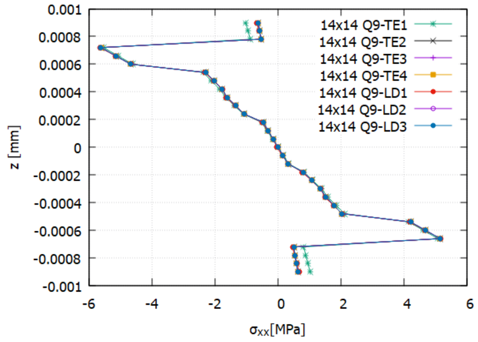


e)

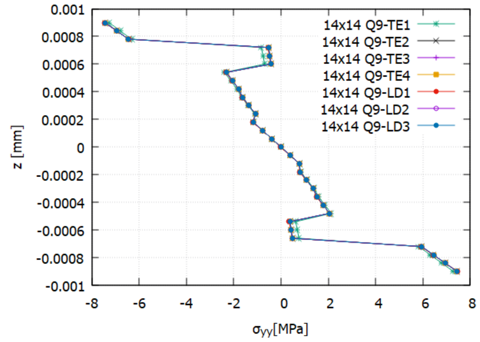


f)

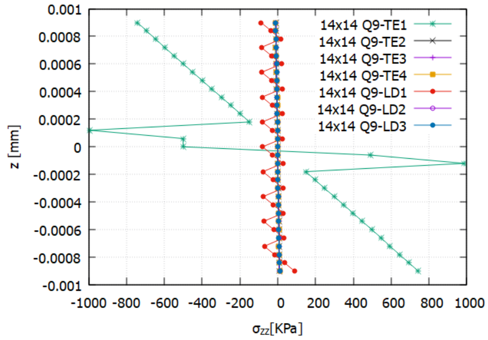
Figure 5.5: Andamento sullo spessore della a) σ_{xx} b) σ_{yy} c) σ_{zz} d) σ_{xz} e) σ_{yz}e f) σ_{xy} al variare della mesh nel piano



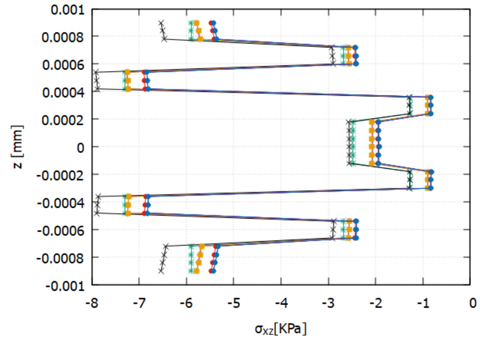
a)



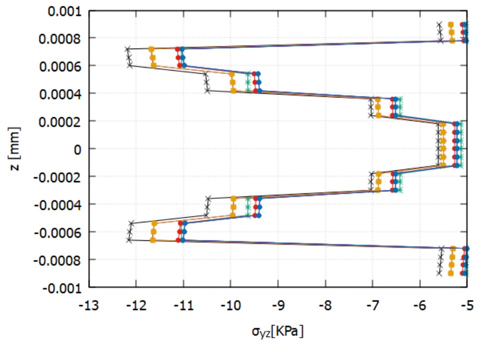
b)



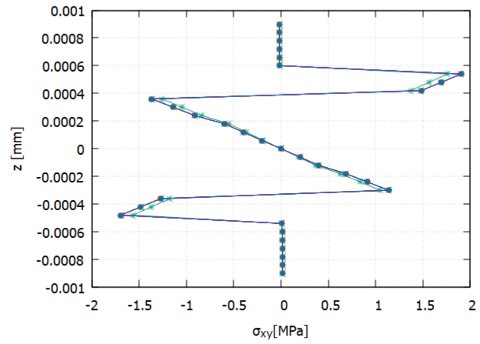
c)



d)



e)



f)

Figure 5.6: Andamento sullo spessore della a) σ_{xx} b) σ_{yy} c) σ_{zz} d) σ_{xz} e) σ_{yz} f) σ_{xy} al variare della funzione di espansione lungo lo spessore

Si procede con il procedimento di convergenza della mesh nel piano attraverso l'analisi delle tensioni lungo lo spessore al variare degli elementi finiti bidimensionali posizionati sul piano medio della piastra.
In particolare, si ottiene dalla Figura 5.5 una convergenza delle tensioni $\sigma_{xx}, \sigma_{yy}, \sigma_{xy}$ già dal valore di 8x8 elementi Q9 sul piano medio del laminato.

Modello	f_1 [Hz]	f_2 [Hz]	f_3 [Hz]	f_4 [Hz]	f_5 [Hz]
4x4Q9-LD1	336.22	759.28	868.37	1175.40	4666.07
8x8Q9-LD1	301.40	593.56	675.19	896.48	1118.94
10x10Q9-LD1	297.93	579.67	659.26	874.30	1069.70
12x12 Q9-LD1	296.15	572.70	651.38	863.29	1045.74
14x14 Q9-LD1	296.15	568.79	647.01	857.16	1032.50

Table 5.10: Analisi di convergenza della mesh nel piano per l'analisi dinamica della piastra in composito

In Tabella 5.10 vengono riportate le prime 5 frequenze naturali della piastra in composito incastrata sui 4 lati analizzata tramite la CUF. Viene congelata la teoria strutturale LD1 e viene fatta variare la mesh nel piano.

5.2.1 Risultati usando Nastran™

Si riporta di seguito, anche per questo caso il modello agli elementi finiti della piastra in analisi usando il software commerciale PATRAN ™. Successivamente, tale modello matematico in cui si è assegnato il materiale e le proprietà agli elementi finiti QUAD4, viene passato per l'analisi al solutore NASTRAN™.

Modello	DOFs	u_z [mm]
Nastran™	2166	0.295

Table 5.11: Risultato di spostamento massimo della piastra in composito usando il codice commerciale NASTRAN™

Modello	f_1 [Hz]	f_2 [Hz]	f_3 [Hz]	f_4 [Hz]	f_5 [Hz]
Nastran™	291.444	556.722	634.691	832.376	999.253

Table 5.12: Modi propri di vibrare della piastra composita incastrata sui 4 lati usando Nastran™

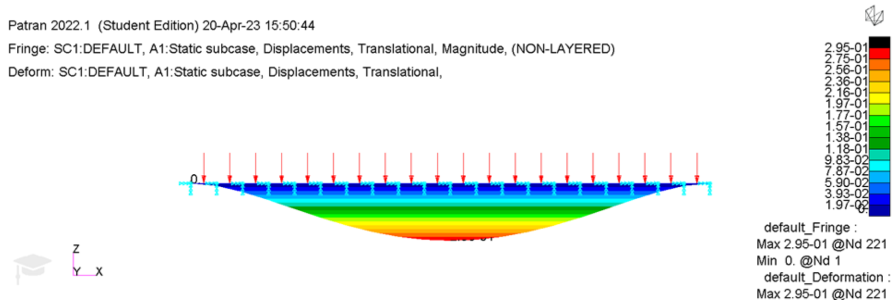


Figure 5.7: Modello matematico della piastra in composito con un carico di pressione in Patran™

In Figura 5.7 si osserva che lo spostamento massimo si ha nel centro della piastra ed è pari a 0.295 mm. In Tabella 5.12 si riportano i primi 5 modi propri di vibrare della piastra in composito in oggetto di studio calcolati con codice commerciale di Nastran™.

5.3 Piastra VAT soggetta a carico di pressione

Si vuole ora studiare una piastra composita a rigidezza variabile, con le medesime caratteristiche geometriche viste nei due casi precedenti. Le dimensioni caratteristiche e le condizioni a contorno implementate sono dunque le seguenti:

- Lunghezza e larghezza nel piano $a = b = 0.3$ m
- spessore della piastra $h = 1.8$ [mm]
- 10 strati con laminazione: $[\langle 0{,}45\rangle, \langle -45, -60\rangle, \langle 90{,}45\rangle, \langle 60{,}30\rangle, \langle 0{,}30\rangle]_s$
- Carico di pressione sulla faccia top del laminato pari a 1000 N/m^2

E_{11} [GPa]	$E_{22/33}$ [GPa]	$G_{12/13}$ [GPa]	G_{23}[GPa]	$\nu_{12/13}$	ν_{23}	$\rho[kg/m^3]$
137.9	8.96	7.1	6.21	0.30	0.49	1540

Table 5.13: Proprietà meccaniche del materiale ortotropo usato nei diversi strati del laminato VAT

In Tabella 5.14 si riporta il procedimento di convergenza della mesh nel piano: come precedentemente descritto si usano elementi bidimensionali a 9 nodi per discretizzare il piano medio del laminato e si usano elementi finiti monodimensionali a due nodi che implementano una cinematica di tipo Lagrangiano sullo spessore

LD1. Per l'analisi dell'influenza della teoria strutturale si opera come riportato nella Tabella 5.15; ovvero si implementano elementi finiti monodimensionali a 2, 3 e 4 nodi tutti con cinematica di tipo lagrangiano oppure si usano funzioni di espansione di Taylor. In aggiunta, si implementano anche funzione di espansione basate sui polinomi di Taylor. Si può osservare che si giunge a convergenza sullo spostamento trasversale utilizzando elementi a 3 nodi sullo spessore di tipo LD2.
Nella tabella (5.16) si mostra invece, come negli altri casi analizzati, il procedimento di convergenza della mesh nel piano per quanto riguarda un'analisi modale effettuata sul laminato VAT di interesse.
Nella figura (5.8) si riporta il processo di convergenza della mesh nel piano per quanto concerne lo stato tensionale del laminato.
Nella figura (5.9), invece, si investiga la convergenza della mesh dello stato tensionale lungo lo spessore del laminato.

Modello	DOFs	u_z $[mm]$
4x4 Q9-LD1	2673	0.292
8x8 Q9-LD1	9573	0.365
10x10 Q9-LD1	14553	0.375
12x12 Q9-LD1	20625	0.380
14x14 Q9-LD1	27753	0.383

Table 5.14: Analisi di convergenza della mesh nel piano della piastra tramite elementi bidimensionali quadratici Q9. Sullo spessore si usano elementi B2 con cinematica lagrangiana LE1.

Modello	DOFs	u_z $[mm]$
14x14 Q9-TE1	5046	0.3655
14x14 Q9-TE2	7569	0.3829
14x14 Q9-TE3	10092	0.3833
14x14 Q9-TE4	12615	0.3833
14x14 Q9-10LD1	27753	0.3831
14x14 Q9-10LD2	52983	0.3833
14x14 Q9-10LD3	78213	0.3833

Table 5.15: Analisi di influenza della teoria strutturale attraverso l'uso di elementi monodimensionali B2,B3,B4 con cinematica Lagrangiana e di funzioni di espansione basate sui polinomi di Taylor

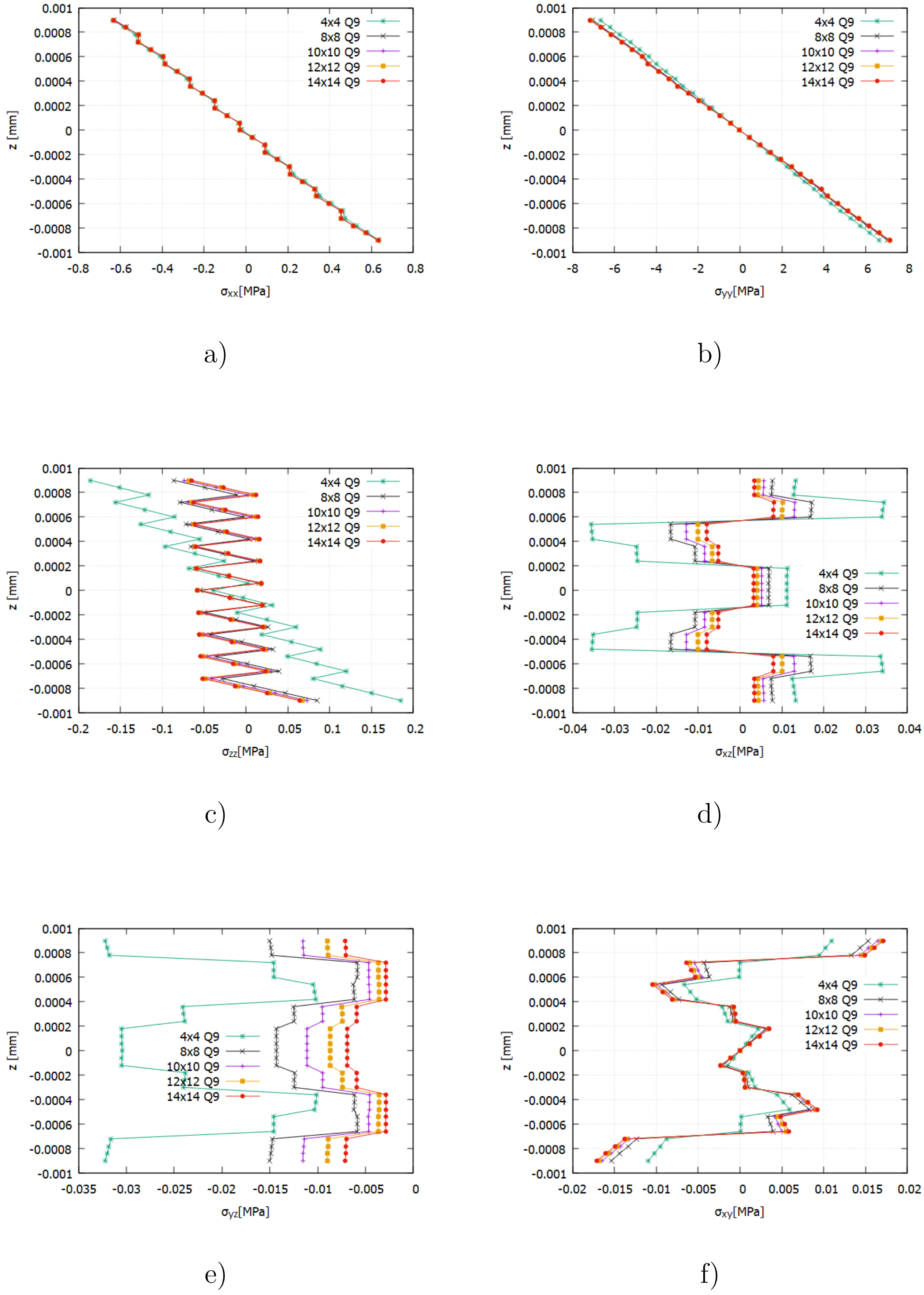
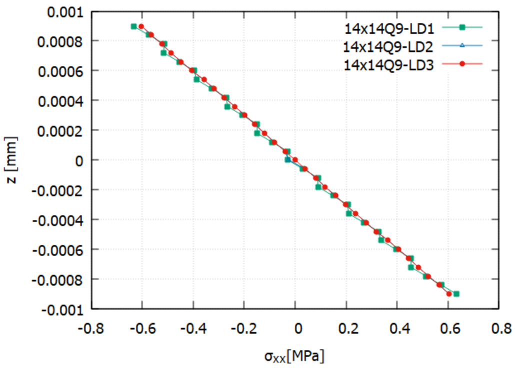


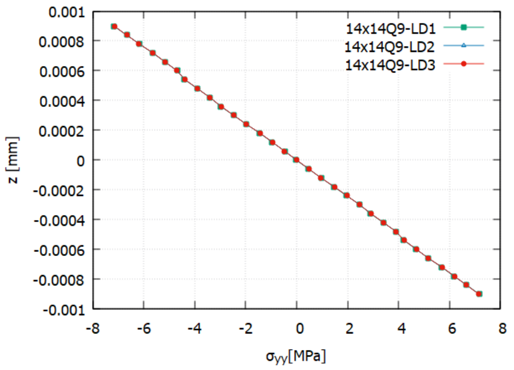
Figure 5.8: Andamento sullo spessore della a) σ_{xx} b) σ_{yy} c) σ_{zz} d) σ_{xz} e) σ_{yz}e f) σ_{xy} al variare della mesh nel piano

Modello	f_1 [Hz]	f_2 [Hz]	f_3 [Hz]	f_4 [Hz]	f_5 [Hz]
4x4 Q9-LD1	230.59	517.93	613.27	855.68	4203.95
8x8 Q9-LD1	202.53	405.19	448.00	638.78	747.75
10x10 Q9-LD1	199.56	395.33	434.60	620.10	714.86
12x12 Q9-LD1	197.98	390.23	427.75	610.49	698.51
14x14 Q9-LD1	197.05	387.25	423.80	604.91	689.20

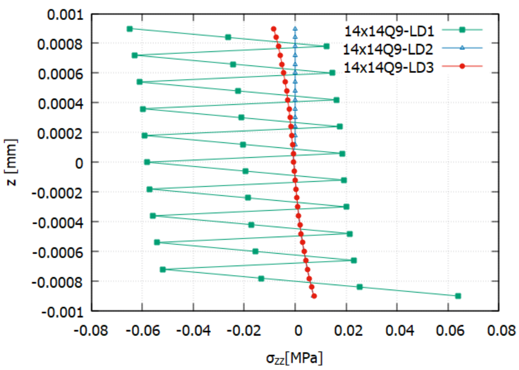
Table 5.16: Analisi di convergenza della mesh nel piano per l'analisi dinamica della piastra in composito a fibra curvilinea



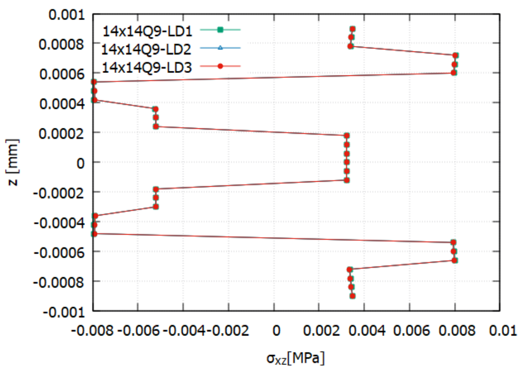
a)



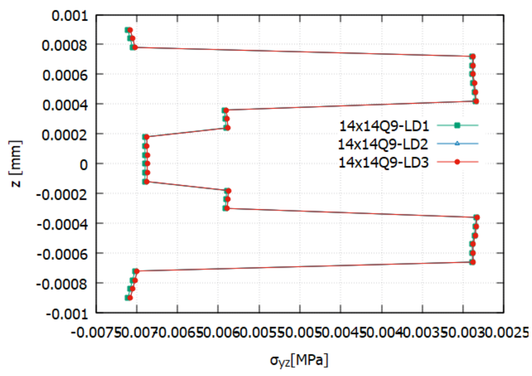
b)



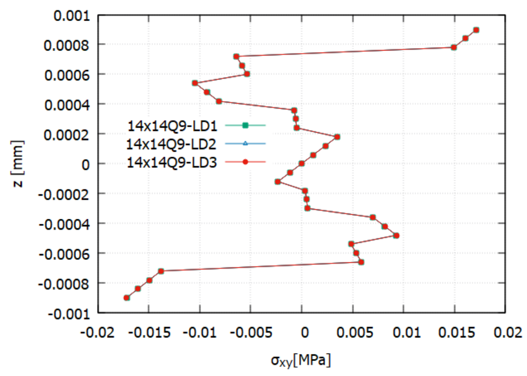
c)



d)



e)



f)

Figure 5.9: Andamento sullo spessore della a) σ_{xx} b) σ_{yy} c) σ_{zz} d) σ_{xz} e) σ_{yz} f) σ_{xy} al variare della funzione di espansione lungo lo spessore

5.3.1 Risultati usando Nastran™

In questo paragrafo come si è fatto in precedenza si è deciso di construire il modello del laminato VAT di riferimento su Patran™. Si è deciso di usare la funzione 'field' per poter assegnare la curvatura alle fibre per ogni strato del laminato. In particolare, per ogni elemento finito è stata assegnata una variazione lineare del sistema di riferimento locale in modo così da poter simulare la corretta curvatura del materiale ortotropo equivalente. Infine, si è deciso di usare elementi finiti QUAD4 nel piano.

Modello	DOFs	u_z $[mm]$
Nastran™	2166	0.328

Table 5.17: Risultato di spostamento massimo della piastra VAT usando il codice commerciale NASTRAN™

Modello	f_1 [Hz]	f_2 [Hz]	f_3 [Hz]	f_4 [Hz]	f_5 [Hz]
Nastran™	205.360	250.985	350.676	507.720	542.274

Table 5.18: Modi propri di vibrare della piastra VAT incastrata sui 4 lati usando Nastran™

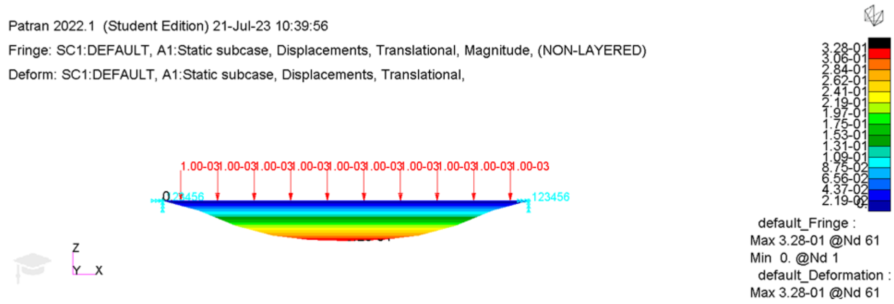


Figure 5.10: Modello matematico della piastra VAT con un carico di pressione in Patran™

Capitolo 6

Simulazione numerica in presenza di difetti

Nel seguente capitolo si andrà ad indagare il comportamento meccanico di una piastra multistrato a rigidezza variabile in presenza dei difetti tipici del processo produttivo AFP. Le teorie implementate dalle analisi strutturali sono state precedentemente presentate nel Capitolo 2 e nel Capitolo 3, dove si è discusso dell'accoppiamento tra le teorie DLM, CUF e FEM. Di seguito vengono riportati i risultati ottenuti mediante l'utilizzo del codice MUL2 e li si compara con i risultati presenti in letteratura in modo da validare il processo. In questa sede si intende, dunque, validare la parte di caratterizzazione meccanica dei laminati ed introdurre la sezione di simulazione in presenza di difetti. Così sarà possibile continuare con l'ultima parte di questo elaborato, ovvero l'ottimizzazione.

6.1 Analisi modale di un laminato VAT in assenza di difetti

In questa sezione si intende effettuare uno studio comparato di un laminato di riferimento presente in letteratura [10] in assenza di difettologie dovute alla produzione, così da avere un confronto con le successive simulazioni, dove invece tali problematicità verranno considerate.
Il laminato in oggetto presenta le seguenti caratteristiche:

- Rapporto spessore-lunghezza: $h/a = 0.01$
- 3 strati con sequenza di laminazione: $[\langle 0{,}45 \rangle, \langle -45, -60 \rangle, \langle 0{,}45 \rangle]$.
- Condizione al contorno: incastro su tutti e 4 i lati

- In Tabella 6.1 si riportano le proprietà del materiale usato per la piastra di riferimento [10].

E_{11} [GPa]	$E_{22/33}$ [GPa]	$G_{12/13}$ [GPa]	G_{23} [GPa]	$\nu_{12/13}$	ν_{23}	$\rho[kg/m^3]$
173	7.2	3.76	3.76	0.29	0.29	1540

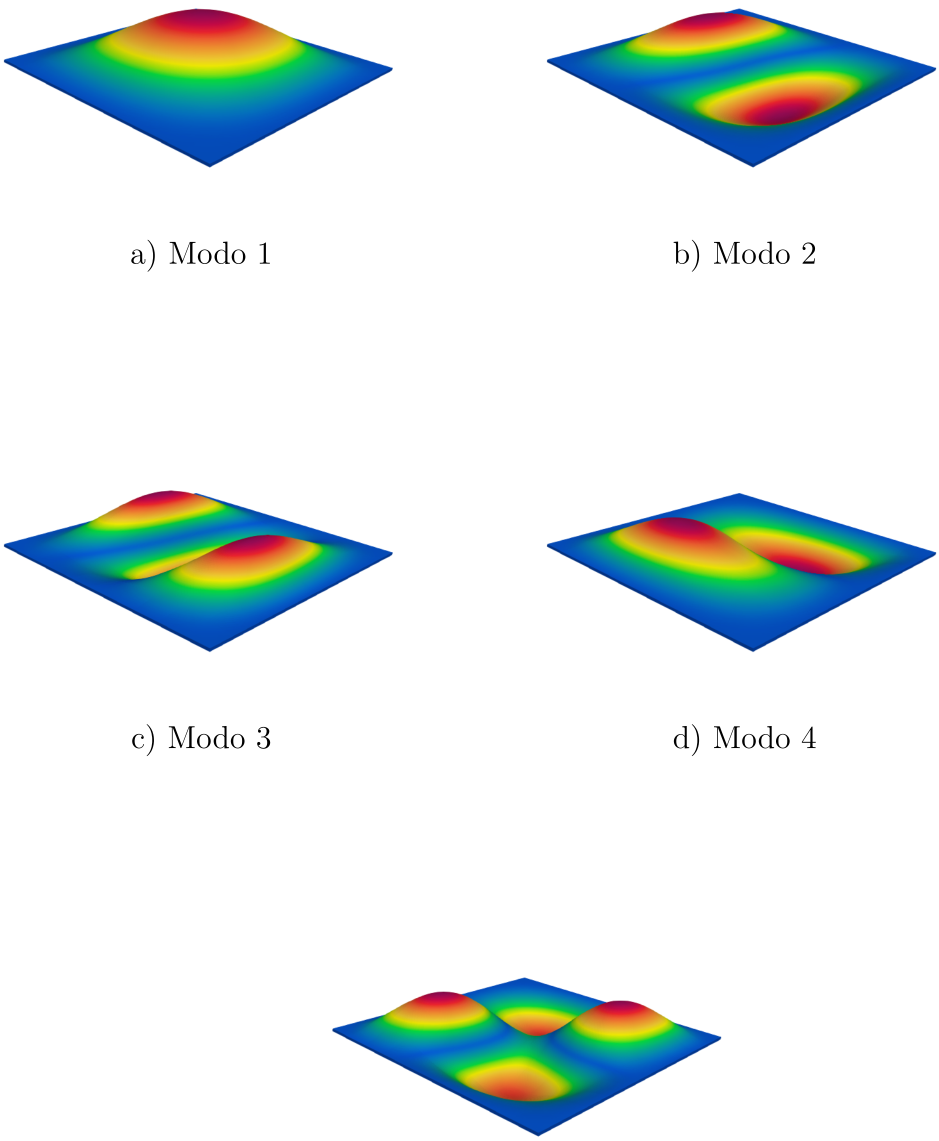
Table 6.1: Proprietà meccaniche del materiale ortotropo usato nei diversi strati del laminato VAT

Modello	DOFs	f_1 [Hz]	f_2 [Hz]	f_3 [Hz]	f_4 [Hz]	f_5 [Hz]
Ref [10]	500	92.26	130.82	195.19	237.86	274.99
Nastran™	486	94.45	126.18	181.01	238.56	252.62
4x4Q9-3LD2	1701	113.92	176.83	353.24	400.36	959.15
6x6Q9-3LD2	3549	100.59	147.27	238.26	275.59	322.88
8x8Q9-3LD2	6069	96.27	138.90	215.20	255.20	298.16
10x10Q9-3LD2	9261	94.44	135.54	206.40	247.05	287.67
14x14Q9-3LD2	17661	94.44	135.36	206.40	247.05	287.67
20x20Q9-3LD2	35301	94.44	135.36	206.40	247.05	287.67

Table 6.2: Analisi di convergenza nel piano al variare di elementi Q9. Lungo lo spessore vengono implementati elementi monodimensionali B3 con cinematica lagrangiana LD2.

Modello	DOFs	f_1 [Hz]	f_2 [Hz]	f_3 [Hz]	f_4 [Hz]	f_5 [Hz]
Ref [10]	500	92.26	130.82	195.19	237.86	274.99
Nastran™	486	94.45	126.18	181.01	238.56	252.62
10x10Q9-TE1	2646	95.41	137.76	211.21	249.26	291.19
10x10Q9-TE2	3969	94.62	135.64	206.93	247.87	288.66
10x10Q9-TE3	5292	94.45	135.38	206.47	247.06	287.70
10x10Q9-TE4	6615	94.45	135.38	206.47	247.06	287.70
10x10Q9-3LD1	5292	94.63	135.74	207.11	247.66	288.47
10x10Q9-3LD2	9261	94.53	135.85	207.52	247.04	288.03
10x10Q9-3LD3	13230	94.53	135.83	207.47	247.02	287.99

Table 6.3: Analisi di influenza della teoria strutturale per l'analisi dinamica



a) Modo 1

b) Modo 2

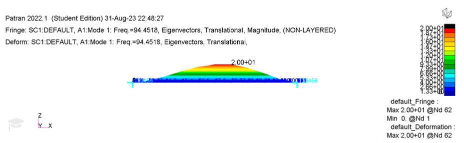
c) Modo 3

d) Modo 4

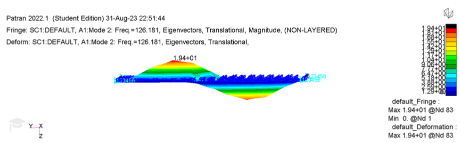
e) Modo 5

Figure 6.1: Primi 5 modi di vibrare della piastra incastrata $h/a = 0.01$ con espansione LE2

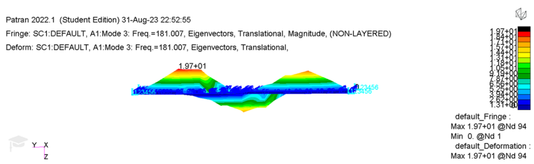
In Tabella 6.2 si esegue l'analisi di convergenza della mesh nel piano confrontando i risultati ottenuti con quelli presenti in letteratura [10]. Si osserva che si raggiunge la convergenza per catturare le prime 5 frequenze naturali per una mesh di 10 x 10 elementi Q9 nel piano della piastra. In Tabella 6.3 si riporta l'analisi di influenza della teoria strutturale implementata nel caso di analisi dinamica usando elementi monodimensionali con cinematica Lagrangiana a 2,3 e 4 nodi lungo lo spessore oppure usando funzioni di espansione di Taylor. In Figura 6.1 si presentano le prime 5 forme modali del laminato di riferimento in assenza di difetti. Nelle Tabelle 6.2 e 6.3 si è voluto confrontare i risultati in letteratura e quelli ottenuti mediante il codice MUL2 con un modello agli elementi finiti commerciale usando il software Nastran™. In particolare, per simulare l'andamento della fibra curvilinea negli strati della piastra si è usata l'opzione del field spatial presente in Patran™. Nello specifico, il field applicato rappresenta una variazione locale del sistema di riferimento del singolo elemento finito bidimensionale e risulta variare linearmento per ogni elemento finito lungo l'estensione. Procedendo in questo modo si osserva che si ottengono dei risultati del tutto in linea con quelli ottenuti in letteratura. Inoltre, in Figura 6.2 si riportano le prime 5 forme modali del laminato ottenute con Nastran™, quest'ultime risultano del tutto comparabili con le forme ottenuto mediante il software MUL2 riportate in Figura 6.1 ed in letteratura [10]. In questo modo, dunque, si è anche validata la modalità di simulazione dei laminati VAT attraverso l'uso del software commerciale agli elementi Nastran™.



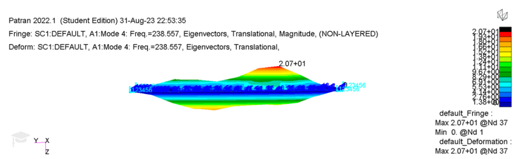
a) Modo 1



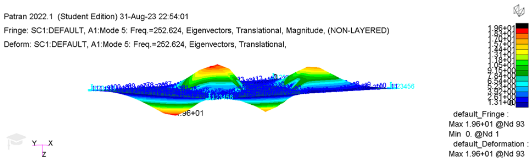
b) Modo 2



c) Modo 3



d) Modo 4



e) Modo 5

Figure 6.2: Primi 5 modi di vibrare della piastra incastrata $h/a = 0.01$ usando Nastran™

6.2 Analisi modale di un laminato VAT in Complete - Gap con correzione del difetto

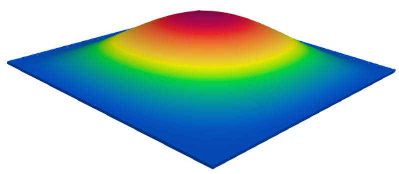
In questo paragrafo si vuole introdurre all'interno del laminato di riferimento la presenza di gaps nel piano. In Tabella 6.4 si mostra il procedimento di convergenza della mesh nel piano variando il numero di elementi Q9 lungo le dimensioni tenendo fisso il modello strutturale che descrive il comportamento lungo lo spessore. Si osserva rispetto al caso privo di difetti, un abbassamento della prima frequenza naturale di circa l'1%. In Tabella 6.5 si riporta, invece, l'analisi di influenza della teoria strutturale adotta; in questo caso, si tiene fissata la mesh nel piano e si fa variare il modello di approssimazione del comportamento lungo lo spessore del laminato usando elementi con cinematica Lagrangiana oppure funzioni di espansione di Taylor. In Figura 6.3 si osservano i primi 5 modi di vibrare del laminato in condizione di Complete Gap in cui viene applicato il criterio della correzione applicando il parametro di coverage, come già spiegato nel Capitolo 3. Non si osservano particolari differenze dal punto di vista della forma rispetto al caso privo di difettologie.

Modello	DOFs	f_1 [Hz]	f_2 [Hz]	f_3 [Hz]	f_4 [Hz]	f_5 [Hz]
4x4Q9-3LD2	1701	112.67	174.82	349.01	395.46	939.21
6x6Q9-3LD2	3549	99.51	145.62	235.51	272.41	319.02
8x8Q9-3LD2	6069	95.29	137.39	212.81	252.26	294.58
10x10Q9-3LD2	9261	93.47	133.91	204.18	244.26	284.31

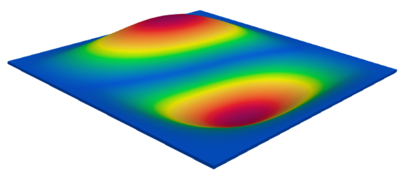
Table 6.4: Analisi di convergenza nel piano al variare di elementi Q9. Sullo spessore si usano elementi B3 con cinematica lagrangiana LE2.

Modello	DOFs	f_1 [Hz]	f_2 [Hz]	f_3 [Hz]	f_4 [Hz]	f_5 [Hz]
10x10Q9-TE1	2646	94.43	136.29	208.94	246.45	287.81
10x10Q9-TE2	3969	93.64	134.19	204.69	245.07	285.30
10x10Q9-TE3	5292	93.47	133.93	204.23	244.26	284.34
10x10Q9-TE4	6615	93.47	133.93	204.23	244.26	284.34
10x10Q9-3LD1	5292	93.65	134.28	204.87	244.86	285.11
10x10Q9-3LD2	9216	93.47	133.91	204.18	244.26	284.31
10x10Q9-3LD3	13230	93.46	133.89	204.13	244.24	284.28

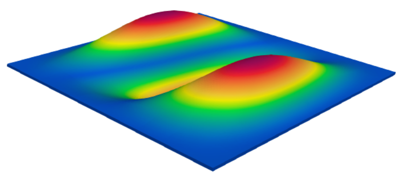
Table 6.5: Analisi di influenza della teoria strutturale per l'analisi dinamica in presenza di gaps



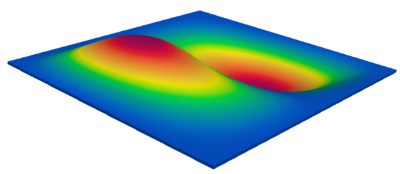
a) Modo 1



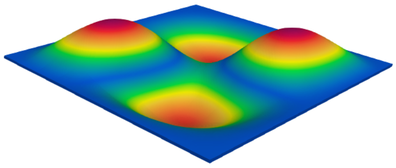
b) Modo 2



c) Modo 3



d) Modo 4



e) Modo 5

Figure 6.3: Primi 5 modi di vibrare della piastra incastrata $h/a = 0.01$ con espansione LE2 lungo lo spessore in presenza di strategia Complete Gap

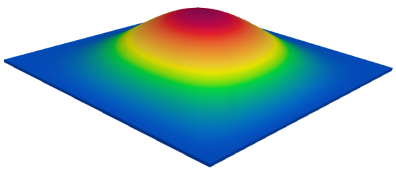
6.3 Analisi modale di un laminato VAT in Complete - Overlap con correzione del difetto

Modello	DOFs	f_1 [Hz]	f_2 [Hz]	f_3 [Hz]	f_4 [Hz]	f_5 [Hz]
4x4Q9-TE3	972	116.88	181.42	359.54	408.13	960.33
6x6Q9-TE3	2028	103.26	151.20	244.25	282.99	331.25
8x8Q9-TE3	3468	99.04	142.74	220.84	262.50	306.49
10x10Q9-TE3	5292	97.10	139.08	211.79	254.14	295.79

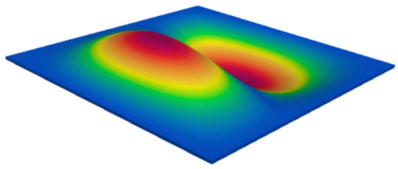
Table 6.6: Analisi di convergenza nel piano al variare di elementi Q9. Sullo spessore si implementa una cinematica di Taylor TE3

Modello	DOFs	f_1 [Hz]	f_2 [Hz]	f_3 [Hz]	f_4 [Hz]	f_5 [Hz]
10x10Q9-TE1	2646	98.09	141.51	216.62	256.41	299.41
10x10Q9-TE2	3969	97.28	139.36	212.28	254.98	296.80
10x10Q9-TE3	5292	97.10	139.08	211.79	254.14	295.79
10x10Q9-TE4	6615	97.10	139.08	211.79	254.14	295.79
10x10Q9-TE5	7938	97.09	139.06	211.73	254.13	295.76
10x10Q9-TE6	9261	97.09	139.06	211.73	254.13	295.76

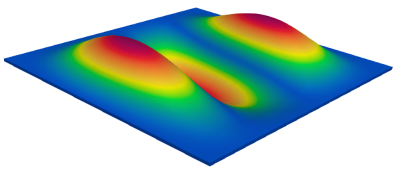
Table 6.7: Analisi di influenza della teoria strutturale per l'analisi dinamica in presenza di overlaps



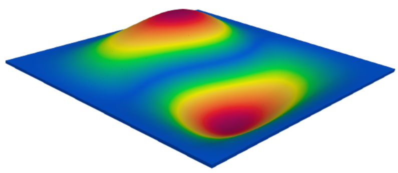
a) Modo 1



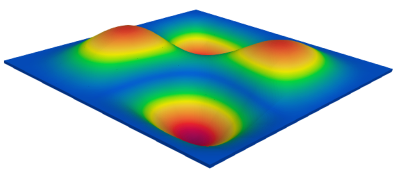
b) Modo 2



c) Modo 3



d) Modo 4



e) Modo 5

Figure 6.4: Primi 5 modi di vibrare della piastra incastrata $h/a = 0.01$ con espansione TE3 sullo spessore in presenza di strategia Complete Overlap

In questo paragrafo si è introdotta la presenza dei difetti di tipo overlap nel laminato di riferimento [10]. Nella Tabella 6.6 si procede, come visto nei casi precedenti, alla convergenza della mesh nel piano facendo variare gli elementi Q9 lungo le dimensioni. Si osserva un aumento della prima frequenza naturale del laminato di circa il 2.8%. Nella Tabella 6.7 viene mostrata l'influenza del modello strutturale per catturare la presenza dei difetti tenendo fissa la mesh nel piano. In Figura 6.4 si osservano le prime 5 forme modali del laminato in condizione di Complete Overlap in cui viene applicato il criterio della correzione applicando il parametro di coverage, introdotto nel Capitolo 3. Non si osservano particolari differenze dal punto di vista della forma rispetto al caso privo di difettologie oppure al caso di Complete Gap.
A questo punto risulta fondamentale chiare una questione ancora non trattata in questo elaborato: a differenza della simulazione in presenza di Gaps, quando si è nella condizione di Complete Overlap, come si osserva in Tabella 6.7, si è deciso di usare unicamente teorie strutturali che usassero come funzioni di espansione lungo lo spessore Polinomi di Taylor. Questo perchè a differenza dei gaps, nel caso in cui ci siano difetti di tipo overlap, si verifica un aumento locale dello spessore degli elementi utilizzati proporzionale alla quantità di difetti presenti, come già visto nel Capitolo 3. La variazione locale degli spessori degli elementi sullo spessore rende più complessa la creazione del modello, rispetto alla variazione delle proprietà del materiale costituente gli elementi finiti bidimensionali nel piano. Questo approccio alla modellizzazione dei difetti di tipo overlap, però, porta ad un drastico aumento del costo computazionale per modelli LayerWise (LW) basati sulla CUF, in quanto diventerebbe necessario aggiungere degli elementi di supporto lungo la dimensione z per garantire la continuità degli spessori delle diverse passate della macchina AFP. Proprio per questa problematica, che renderebbe di fatto poco vantaggioso l'uso dei modelli basati sulla CUF, si è deciso di implementare le teoria strutturale Equivalent Single Layer (ESL), in cui si usano come funzioni di espansione sullo spessore i polinomi di Taylor. In questo modo gli incrementi di spessore dovuti alla percentuale di difetto sono compattati in un unico strato equivalente, non necessitando quindi di nodi aggiuntivi che renderebbero eccessivamente oneroso dal punto di vista computazionale il modello.

Capitolo 7

Risultati ottimizzazione dei laminati VAT in presenza di difetti

Nel seguente capitolo si presentano i risultati delle ottimizzazioni svolte tramite l'algoritmo Surrogateopt implementato nel pacchetto Global Optimization Toolbox di MATLAB. Si rimanda al Capitolo 4 per approfondimenti sull'algoritmo di ottimizzazione surrogato e sul perchè si è deciso di usare tale metodologia per le analisi che seguiranno.

7.1 Validazione del modello matematico per la stima dei difetti nei laminati VAT

Si vuole ora validare il codice Python implementato per la stima delle difettologie nel piano dei laminati VAT con i risultati di ottimo presentati nel lavoro di Carvalho et al., [17]. Nello specifico si riportano i risultati per un pannello VAT ad 8 strati con laminazione simmetrica in codizione di Complete Gap con le seguenti caratteristiche:

- Piastra quadrata $a = b = 0.5$ m ed incastrata sui 4 lati
- Numero di tows per ogni course pari a 32 e larghezza tow pari a 3.175 mm
- La stampa è regolata in modo da imporre il contatto tra due passate successive al centro della piastra.
- Parametro di coverage impostato allo 0%

- Vincolo sul massimo raggio di curvatura imposto a $\kappa_{lim} = 1.57$ m^{-1}

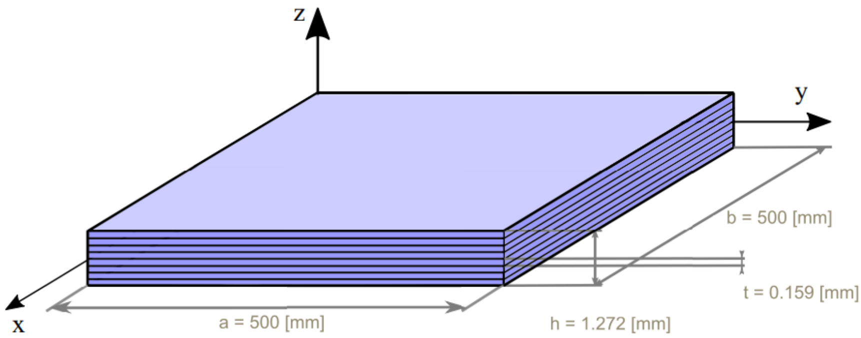


Figure 7.1: Caratteristiche geometrica della piastra ad 8 strati con laminazione simmetrica

Si riportano di seguito i materiali usati dal riferimento [17] per modellizzare la piastra riportata in Figura 7.1

Proprietà	E_1 [GPa]	E_2 [GPa]	G_{12} [GPa]	ν_{12}	$\rho[kg/m^3]$
G40-800/5276-1	143	9.1	4.8	0.3	1650
Resina	3.7	3.7	1.4	0.3	1310

Table 7.1: Proprietà del Carbon Epoxy Cytec G40-800/5276-1 e della resina usati nel laminato di riferimento [17]

	DOFs	f_1 [Hz]	f_2[Hz]	f_3 [Hz]
Ref [17]	2500	53.52	100.66	111.872
4x4Q9-8LD2	4131	59.88	122.77	152.52
6x6Q9-LD2	8619	55.53	108.26	125.19
8x8Q9-LD2	14739	54.18	103.64	118.42
10x10Q9-LD2	22491	53.62	101.73	115.56

Table 7.2: Analisi di convergenza della mesh nel piano usando elementi Q9 nella condizione di Complete Gap. Sullo spessore si implementano elementi monodimensionali a 3 nodi con cinematica Lagrangiana

Nella Tabella 7.2 si riporta l'analisi di convergenza della mesh nel piano usando elementi bidimensionali Q9. Risulta importante sottolineare, come si è già anticipato nel Capitolo 4, che il problema di ottimizzazione sarà centrato nel massimizzare la prima frequenza naturale del laminato in oggetto di studio. Si ritiene, dunque, fondamentale poter catturare correttamente la prima frequenza mantenendo però contenuto il costo computazionale. Per questa necessità si è ritenuto opportuno scegliere come mesh nel piano quella che presenta 6 elementi per 6 elementi biquadratici a 9 nodi lungo le 2 dimensioni della piastra. In particolare, si ritiene che per la necessità di catturare la prima frequenza naturale sia sufficientemente accurata avendo un costo computazione relativamente basso, ciò risulta importante per i problemi di ottimizzazione che saranno successivamente presentati. Se, invece, fosse stato necessario tenere conto delle frequenze natuali oltre la prima, allora sarebbe stato opportuno rendere maggiormente fitta la mesh nel piano come si osserva nella Tabella 7.2.

	DOFs	f_1 [Hz]	f_2[Hz]	f_3 [Hz]
Ref [17]	2500	53.52	100.66	111.87
6x6Q9-TE1	1014	56.03	109.41	126.24
6x6Q9-TE2	1521	55.54	108.29	125.22
6x6Q9-TE3	2028	55.54	108.27	125.20
6x6Q9-8LD1	4563	55.54	108.29	125.21
6x6Q9-8LD2	8619	55.53	108.26	125.19
6x6Q9-8LD3	12675	55.53	108.26	125.19

Table 7.3: Analisi di influenza del modello strutturale usando funzioni di espansione di Taylor e di Lagrange nella condizione di Complete Gap. Nel piano si implementano elementi bidimensionali a 9 nodi

7.2 Ottimizzazione della risposta dinamica di un laminato VAT in assenza di difetti

In questo capitolo si vuole risolvere il problema di ottimizzazione introdotto nel Capitolo 4 per il laminato di riferimento introdotto già nel Capitolo 6 e presente nel lavoro di Akhavan et al., 2011 [10]:

$$\begin{aligned}
&\text{maximise} && f_1 \\
&\text{by varing} && -90^\circ \leq T_0 \leq 90^\circ \\
& && -90^\circ \leq T_1 \leq 90^\circ \\
&\text{subject to} && \kappa_{lim} \leq 3.28 \quad m^{-1}
\end{aligned} \tag{7.1}$$

Si cerca quindi di massimizzare la prima frequenza naturale facendo variare gli angoli di laminazione della fibra curvilinea T_0 e T_1 nei tre strati di cui il laminato è composto. Per questo primo caso non si considera la presenza di difetti, bensì si ipotizza l'assenza di gaps ed overlaps, così da avere un riferimento per i casi successivi in cui le difettologie saranno, invece, prese in considerazione. Si impone, però, un vincolo di ottimizzazione legato al raggio di curvatura massimo praticabile dal braccio robotico della macchina AFP. In particolare, il parametro κ_{lim}, introdotto nel Capitolo 3, viene usato per esprimere tale vincolo al problema di ottimo presentato in (7.1). Si riportano di seguito i dati fissati per il problema di ottimizzazione in analisi:

- Piastra quadrata con $a = b = 1$ m
- Rapporto spessore-lunghezza del laminato pari al valore di $h/a = 0.01$
- La stampa è regolata in modo da imporre il contatto tra due passate successive al bordo sinistro della piastra.
- Presenza di 3 strati
- Si impone come condizione al contorno l'incastro su tutti e 4 i lati della piastra
- Vincolo sul massimo raggio di curvatura imposto da $\kappa_{lim} = 3.28$ m^{-1}
- Le proprietà del materiale sono riportate nella Tabella 7.4

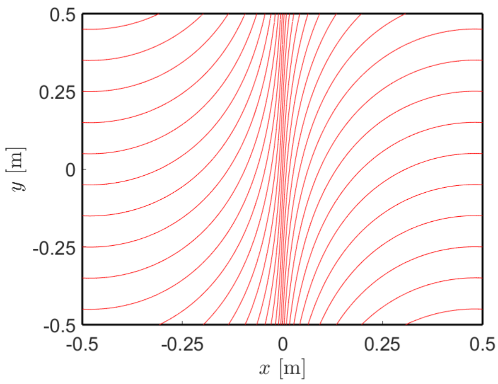
E_{11} [GPa]	$E_{22/33}$ [GPa]	$G_{12/13}$ [GPa]	G_{23} [GPa]	$\nu_{12/13}$	ν_{23}	$\rho[kg/m^3]$
173	7.2	3.76	3.76	0.29	0.29	1540

Table 7.4: Proprietà meccaniche del materiale ortotropo usato nei 3 strati del laminato VAT

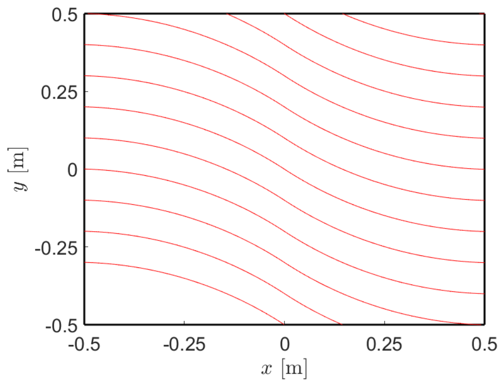
Modello	$[T_0]_1[°]$	$[T_1]_1[°]$	$[T_0]_2[°]$	$[T_1]_2[°]$	$[T_0]_3[°]$	$[T_1]_3[°]$	f_1 [Hz]
6x6Q9-TE1	90	-3.49	-41.85	-24.55	90	-3.46	127.75
6x6Q9-TE2	90	-3.50	-54.12	-14.18	90	-3.50	127.12
6x6Q9-TE3	90	-3.50	-65.58	-5.29	90	-3.50	126.87
6x6Q9-3LD1	90	-3.50	-65.94	-4.52	90	-3.50	126.87
6x6Q9-3LD2	90	-3.50	-65.31	-2	90	-3.50	126.87

Table 7.5: Angoli T_0 e T_1 di ottimo per ogni strato del laminato al variare delle funzioni di espansione lungo lo spessore

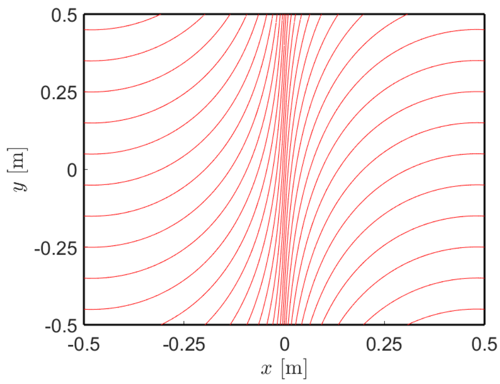
In Tabella (7.5) si riportano gli angoli di laminazione di ottimo per i 3 strati che costituiscono il laminato di riferimento [15] al variare della teoria strutturale implementata. Si osserva un'ottima convergenza dei risultati al variare del modello strutturale usato, sia per quanto riguarda la prima frequenza naturale di ottimo, sia per gli angoli T_0 e T_1. In Figura 7.2 si mostrano le traiettorie di ottimo delle fibre nei 3 strati del laminato in assenza di difetti.



a) 1° Layer



b) 2° Layer



c) 3° Layer

Figure 7.2: Rappresentazione grafica dell'andamento nel piano delle fibre per i 3 strati nella configurazione di ottimo nel caso di assenza di difetti ed usando il modello strutturale 3LD3

7.3 Ottimizzazione della risposta dinamica di un laminato VAT nella condizione di Complete-Gap

In questo capitolo si intende studiare il problema impostato nell'Equazione (7.1) per la piastra di riferimento [10], imponendo però la condizione di Complete Gap. Inoltre, come suggerisce il riferimento [17] è opportuno far variare il dominio delle variabili di progetto T_0 e T_1 da $-89°$ a $89°$ in modo da evitare l'insorgere di singolarità presenti nel codice Python per la stima dei difetti all'interno del laminato. Inoltre, come nel caso privo di difettologie, si userà una mesh fissata nel piano pari a 6 x 6 elementi biquadratici a 9 nodi, la quale si è visto risulta sufficiente a catturare la prima frequenza naturale del laminato VAT in presenza di difetti nel piano.

Modello	$[T_0]_1[°]$	$[T_1]_1[°]$	$[T_0]_2[°]$	$[T_1]_2[°]$	$[T_0]_3[°]$	$[T_1]_3[°]$	f_1 [Hz]
6x6Q9-TE1	-90	-12.45	53.96	47.92	-90	-12.79	125.38
6x6Q9-TE2	-90	-18.07	65.53	47.69	-90	-12.49	123.86
6x6Q9-TE3	-86.21	-17.02	66.27	43.85	-90	-5.72	123.65
6x6Q9-3LD1	-89.69	-18.05	64.70	49.02	-90	-7.28	123.75
6x6Q9-3LD2	-89.69	-18.05	64.69	49.03	-90	-7.28	123.49
6x6Q9-3LD3	-87.24	-18.14	64.72	44.41	-90	-7.17	123.61

Table 7.6: Angoli T_0 e T_1 di ottimo per ogni strato del laminato al variare delle funzioni di espansione lungo lo spessore

In Tabella 7.6 vengono riportati i risultati di ottimizzazione degli angoli di laminazione T_0 e T_1 in presenza della condizione di Complete Gap per il problema in cui il vincolo è posto da $\kappa_{lim} \leq 3.28\, m^{-1}$. Sempre dalla Tebella 7.6 si può osservare una convergenza dei risultati al variare della teoria strutturale implementata. Nello specifico, si assiste a piccole variazioni sia degli angoli di ottimo, sia della frequenza naturale variando le funzioni di espansione lungo lo spessore del laminato.

7.4 Ottimizzazione della risposta dinamica di un laminato VAT nella condizione di Complete-Overlap

In questo capitolo si presenta lo studio del problema di ottimizzazione presentato nell'Equazione (7.1) per la piastra di riferimento [10], imponendo però la condizione di Complete Overlap. Anche in questo caso, si segue il suggerimento di Carvalho et al., 2022 [17] riducendo il dominio delle variabili di progetto T_0 e T_1 per evitare singolarità presenti nella metodologia di stima dei difetti all'interno del laminato. Inoltre, in analogia ai casi precedenti, si implementa una mesh fissata nel piano pari a 6 x 6 elementi biquadratici a 9 nodi, la quale si è dimostrato essere sufficiente per catturare la prima frequenza naturale del laminato VAT.

Modello	$[T_0]_1[°]$	$[T_1]_1[°]$	$[T_0]_2[°]$	$[T_1]_2[°]$	$[T_0]_3[°]$	$[T_1]_3[°]$	f_1 [Hz]
6x6Q9-TE1	50.54	14.25	80.00	35.39	18.99	-5.36	136.99
6x6Q9-TE2	80	21.45	80	16.72	30.53	22.20	173.91
6x6Q9-TE3	22.44	-13.40	80.00	41.31	19.28	-11.22	143.80
6x6Q9-TE4	32.39	-14.48	76.65	27.08	21.49	-10.09	134.99
6x6Q9-TE5	32.39	-14.48	76.65	27.08	21.49	-10.09	134.95
6x6Q9-TE6	10.09	-8.46	80.00	16.23	11.93	-8.63	144.09

Table 7.7: Angoli T_0 e T_1 di ottimo per ogni strato del laminato al variare delle funzioni di espansione lungo lo spessore

In Tabella 7.7 si riportano i risultati di ottimizzazione degli angoli di laminazione T_0 e T_1 in presenza della condizione di Complete Overlap per il problema vincolato da $\kappa_{lim} \leq 3.28\ m^{-1}$. Sempre dalla Tebella 7.7 si può osserva, in questo caso, una maggiore diversificazione dei risultati al variare della teoria strutturale usata. In particolare, si assiste a delle variazioni sia degli angoli di ottimo, sia della frequenza naturale variando le funzioni di espansione lungo lo spessore del laminato: per esempio si osservi il modello strutturale TE2, il quale differisce sostanzialmente dalle altre soluzioni individuate.

7.5 Ottimizzazione di un laminato VAT con K=1.57 [m^{-1}]

Nei paragrafi che seguiranno il problema di ottimizzazione vincolata risulterà leggermente diverso rispetto a quanto visto fino ad ora. Nello specifico, si intende modificare il vincolo sul raggio di curvatura massimo che il braccio robotico della macchina AFP può eseguire. Secondo il riferimento [17] tipicamente quando si usano tows con una larghezza di 3.175 mm, come nel caso oggetto di studio, è opportuno usare una κ_{lim}=1.57 m^{-1} .

$$\begin{aligned} &\text{maximise} && f_1 \\ &\text{by varing} && -90^\circ \leq T_0 \leq 90^\circ \\ & && -90^\circ \leq T_1 \leq 90^\circ \\ &\text{subject to} && \kappa_{lim} \leq 1.57 \quad m^{-1} \end{aligned} \tag{7.2}$$

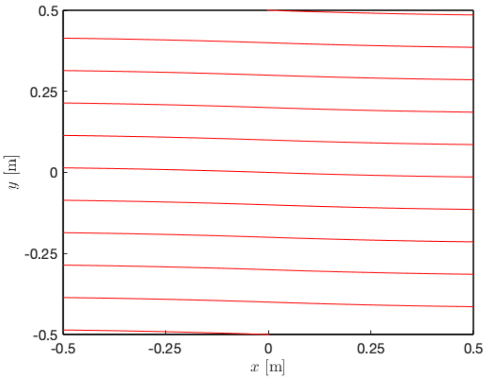
Inoltre, si è deciso di fissare i seguenti parametri durante le ottimizzazioni che seguiranno:

- Piastra quadrata di dimensioni $a = b = 1$ m
- Rapporto spessore-lunghezza del laminato pari al valore di $h/a = 0.01$
- La stampa è regolata in modo da imporre il contatto tra due passate successive al bordo sinistro della piastra.
- Presenza di 3 strati e materiale usato riportato in Tabella 7.4
- Si impone come condizione al contorno l'incastro su tutti e 4 i lati della piastra
- Vincolo sul massimo raggio di curvatura imposto da $\kappa_{lim} = 1.57$ m^{-1}

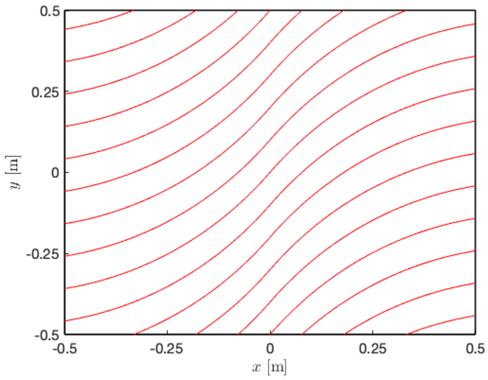
Modello	$[T_0]_1[°]$	$[T_1]_1[°]$	$[T_0]_2[°]$	$[T_1]_2[°]$	$[T_0]_3[°]$	$[T_1]_3[°]$	f_1 [Hz]
6x6Q9-TE1	-1.40	-0.07	36.98	-2.00	-1.74	0.10	116.73
6x6Q9-TE2	-0.5	-0.97	44.67	8.54	-1.92	-0.55	116.19
6x6Q9-TE3	-2.37	-0.88	55.49	11.79	-2.98	-0.19	116.09
6x6Q9-3LD1	-1.41	-0.09	50.50	6.89	-0.87	0.00	116.22
6x6Q9-3LD2	-2.38	-0.86	55.50	11.73	-2.98	-0.18	116.09
6x6Q9-3LD3	-2.38	-0.85	55.50	11.74	-2.97	-0.19	116.08

Table 7.8: Angoli T_0 e T_1 di ottimo per ogni strato del laminato in assenza di difetti al variare delle funzioni di espansione lungo lo spessore

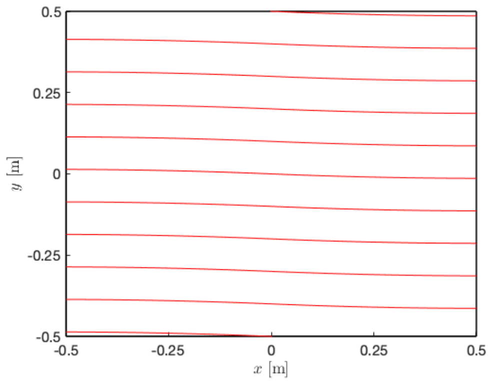
Nella Tabella 7.8 si riportano gli angoli di laminazione di ottimo per i tre strati del laminato di riferimento al variare del modello strutturale adottato. Nello specifico, si usano le diverse funzioni di espansione per descrivere il comportamento sullo spessore del laminato. Come già visto nel Capitolo 2 si usano funzioni di Taylor e di Lagrange. Si osserva, nello specifico, che nel caso di funzioni di Taylor i risultati sono più variegati, anche se le forme delle traiettorie delle fibre nei 3 diversi strati sono analoghe. Per quanto rigurda,invece, i modelli Layer-wise, si osserva una convergenza dei risultati per i modelli strutturali LD2 ed LD3. Inoltre, si può affermare che in tutti i modelli strutturali usati la prima frequenza naturale di ottimo si mantiene sempre nell'intorno dei 116 [Hz] nella condizione senza la presenza di difettologie nel piano. Si può quindi affermare che rispetto alla configurazione nominale presentata nel Capitolo 6 e nel lavoro di Akhavan et al., 2011 [10] vi sia un aumento della prima frequenza naturale del 5%.



a) 1° Layer



b) 2° Layer



c) 3° Layer

Figure 7.3: Rappresentazione grafica dell'andamento nel piano delle fibre per i 3 strati nella configurazione di ottimo nel caso di assenza di difetti ed usando il modello strutturale 3LD3

In Figura 7.3 si osserva l'andamento delle fibre di ottimo nei 3 strati del laminato in oggetto di studio. Nello specifico si osserva che il primo ed il terzo strato mostrano andamento delle fibre simile; mentre lo strato intermedio risulta essere particolarmente diverso dagli altri due mostrando una curvatura maggiore.

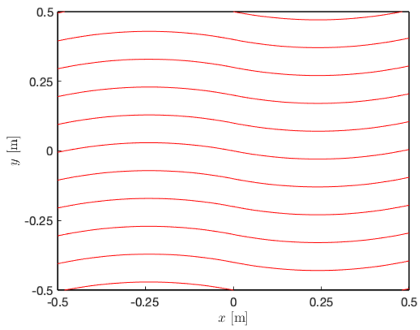
7.5.1 Ottimizzazione con $\mathrm{N}_{tows} = 8$

A differenza delle ottimizzazioni svolte imponendo il vincolo $\kappa_{lim} \leq 3.28$ m^{-1}, in questo caso si intende svolgere un'analisi di sensibilità delle ottimizzazioni al variare del parametro di stampa N_{tows}, introdotto nel Capitolo 3. Si procederà, dunque, alle diverse ottimizzazioni di T_0 e T_1 per i singoli layer variando la teoria strutturale usando 3 valori di N_{tows}, ovvero 8, 16 e 24. Successivamente, sarà possibile compare i risultati ottenuti e valutare l'eventuale influenza di questo parametro di stampa nel raggiungimento della condizione di ottimo.

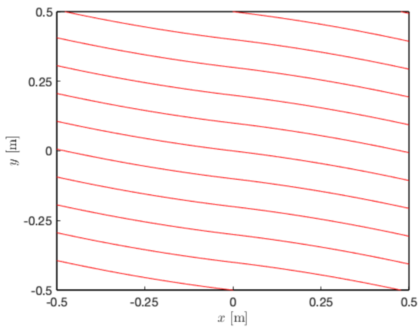
Modello	$[T_0]_1[°]$	$[T_1]_1[°]$	$[T_0]_2[°]$	$[T_1]_2[°]$	$[T_0]_3[°]$	$[T_1]_3[°]$	f_1 [Hz]
6x6Q9-TE1	-12.70	12.57	-8.93	-16.87	-18.36	23.26	112.17
6x6Q9-TE2	-15.35	15.52	3.30	-13.44	-17.49	20.34	110.87
6x6Q9-TE3	-14.27	14.33	-7.68	-17.93	-15.41	18.23	112.41
6x6Q9-3LD1	-12.44	13.23	-7.73	-15.25	-12.25	15.04	112.79
6x6Q9-3LD2	-9.07	9.62	-2.16	-13.33	-8.38	9.30	114.17
6x6Q9-3LD3	-13.86	15.00	-8.53	-15.45	-16.30	17.26	111.61

Table 7.9: Angoli T_0 e T_1 di ottimo per ogni strato del laminato in Complete Gap al variare delle funzioni di espansione lungo lo spessore

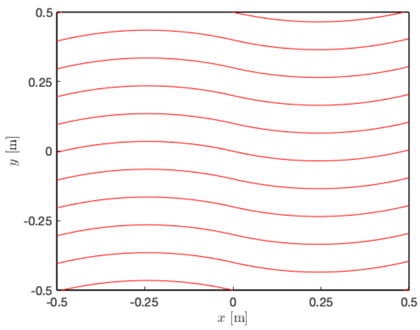
Nella Tabella 7.9 si riportano gli angoli di laminazione T_0 e T_1 di ottimo per il laminato di riferimento nella condizione di Complete Gap e con numero di tows per ogni course pari ad 8. Nello specifico si osserva rispetto al caso di riferimento privo di difetti un abbassamento della prima frequenza naturale di ottimo in media di circa il 3%. Tale valore è dovuto al fatto che la presenza di lacune nel piano ha l'effetto di abbassare la prima frequenza naturale come si è già visto nel Capitolo 6. Come nel caso privo di difettologie, anche in questo caso si riportano i risultati al variare del modello strutturale adottato. Rispetto al caso precedente, con la presenza di gaps si osserva una maggiore diversificazione dei risultati di ottimo variando la funzione di espansione lungo lo spessore. In particolare, pur mantenendo in tutte le casistiche studiate una traiettoria delle fibre per ogni layer simile, si assiste alla presenza di angoli di ottimo diversi per ogni modello analizzato.



a) 1° Layer



b) 2° Layer



c) 3° Layer

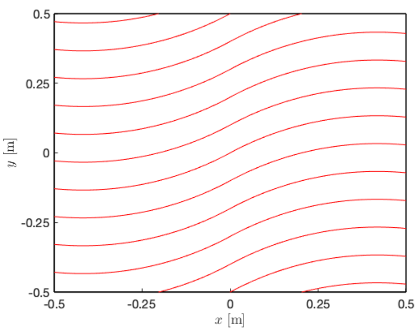
Figure 7.4: Rappresentazione grafica dell'andamento nel piano delle fibre per i 3 strati nella configurazione di ottimo nel caso di Complete Gap usando il modello strutturale 3LD3

In Figura 7.4 si osserva l'andamento delle fibre per ogni strato del laminato nella condizione di Complete gap e con l'uso di 8 tows per ogni passata.
In questa configurazione, si può osservare che le matrici di riempimento associate ai singoli layer,in cui sono riportate le aree di difetto di tipo gap, hanno al loro interno valori molto piccoli. Dunque, si può affermare che voler massimizzare la prima frequenza naturale di un laminato VAT coincide con il voler minimizzare l'area totale dei difetti di tipo gap presenti nel piano. Minori saranno le aree delle lacune presenti per ogni layer del laminato, maggiore sarà la prima frequenza naturale del laminato in questione.

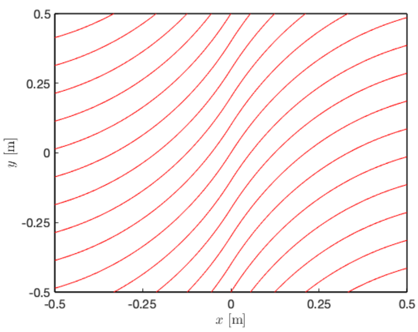
Modello	$[T_0]_1[°]$	$[T_1]_1[°]$	$[T_0]_2[°]$	$[T_1]_2[°]$	$[T_0]_3[°]$	$[T_1]_3[°]$	f_1 [Hz]
6x6Q9-TE1	35.49	-6.70	65.50	21.88	40.08	-2.86	127.15
6x6Q9-TE2	36.62	-4.95	65.23	21.77	29.76	2.47	123.98
6x6Q9-TE3	35.26	-6.61	63.63	20.58	33.16	-7.66	126.45
6x6Q9-TE4	35.93	-4.47	65.15	22.43	34.43	-7.45	125.93
6x6Q9-TE5	35.41	-7.35	65.08	21.57	34.36	-8.39	126.60
6x6Q9-TE6	34.34	-6.76	63.30	19.70	34.00	-7.34	125.84

Table 7.10: Angoli T_0 e T_1 di ottimo per ogni strato del laminato in complete overlap al variare delle funzioni di espansione lungo lo spessore

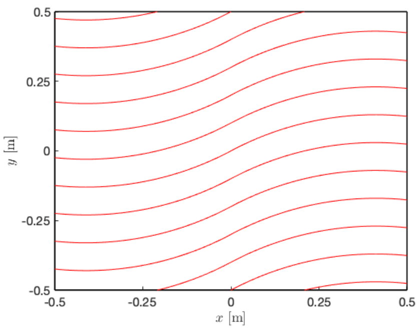
Nella Tabella 7.10 si riportano gli angoli di laminazione T_0 e T_1 di ottimo per il laminato di riferimento nella condizione di Complete Overlap e con numero di tows per ogni course pari ad 8. In particolare, si osserva rispetto al caso di riferimento privo di difetti un notevole aumento della prima frequenza naturale di ottimo in media di circa il 9%. Tale valore è dovuto al fatto che la presenza di overlap nel piano ha l'effetto di aumentare sensibilmente la prima frequenza naturale, come si è osservato precedentemente nel Capitolo 6. Come nei casi già analizzati, si riportano i risultati al variare dei modelli strutturali implementati. Rispetto al caso di complete gap, con la presenza di overlaps invece si osserva una maggiore omogenizzazione dei risultati al variare delle funzioni di espansione sullo spessore. In particolare, si osservano angoli di ottimo pressochè identici in tutti i casi studiati, in cui la traiettoria delle fibre nei layer si mantiene del tutto comparabile.



a) 1° Layer



b) 2° Layer



c) 3° Layer

Figure 7.5: Rappresentazione grafica dell'andamento nel piano delle fibre per i 3 strati nella configurazione di ottimo nel caso di Complete Overlap usando il modello strutturale TE6

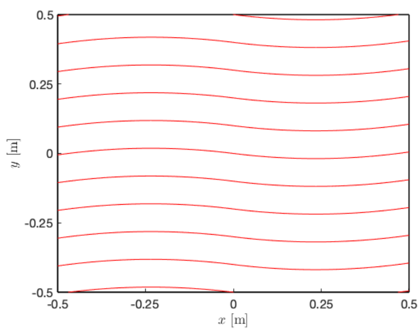
In Figura 7.5 si può osservare strato per strato l'andamento delle fibre nella condizione di ottimo per il caso di Complete Overlap e la presenza di 8 tows per ogni passata. Osservando le matrici di riempimento per questa configurazione degli angoli T_0 e T_1 si assiste alla presenza di valori molto grandi in valore assoluto. Da questo si può desumere, che il problema di voler massimizzare la prima frequenza naturale di un laminato VAT nel caso di complete overlap, si può tradurre nel voler aumentare la presenza di queste sovrapposizioni nel piano. Maggiori saranno queste aree di sovrapposizione maggiore sarà la prima frequenza naturale della piastra, come già osservato nel Capitolo 6.

7.5.2 Ottimizzazione con N$_{tows}$ = 16

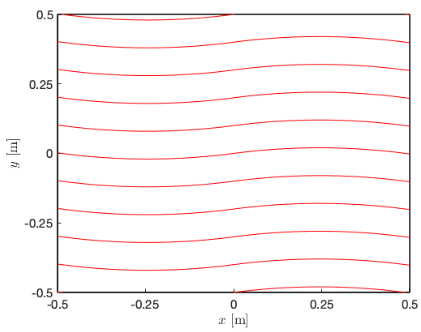
Modello	$[T_0]_1[°]$	$[T_1]_1[°]$	$[T_0]_2[°]$	$[T_1]_2[°]$	$[T_0]_3[°]$	$[T_1]_3[°]$	f_1 [Hz]
6x6Q9-TE1	-11.98	12.69	-0.41	-15.07	-17.07	21.07	112.17
6x6Q9-TE2	-9.02	9.87	12.52	-21.43	-15.12	16.34	112.83
6x6Q9-TE3	-9.22	9.60	9.03	-9.79	-13.16	17.17	112.41
6x6Q9-3LD1	-5.70	7.30	4.10	-12.48	-9.75	10.60	114.32
6x6Q9-3LD2	-9.22	9.60	9.03	-9.79	-13.16	17.17	112.42
6x6Q9-3LD3	-9.06	10.25	9.47	-9.95	-14.41	17.16	112.37

Table 7.11: Angoli T_0 e T_1 di ottimo per ogni strato del laminato in Complete Gap al variare delle funzioni di espansione lungo lo spessore

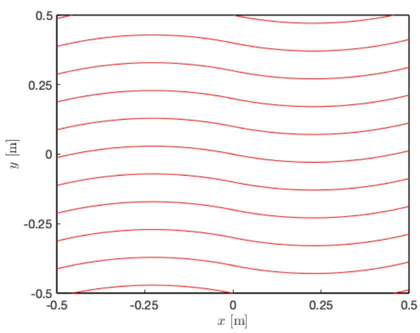
Nella Tabella 7.11 si riportano gli angoli di laminazione T_0 e T_1 di ottimo per il laminato di riferimento nella condizione di Complete Gap e con numero di tows per ogni course pari ad 16 per ogni passata. Nello specifico si osserva rispetto al caso di riferimento privo di difetti un abbassamento della prima frequenza naturale di ottimo come già osservato nel caso con 8 tows. Rispetto al caso di complete gaps per 8 tows, si osserva una maggiore uniformità dei risultati di ottimizzazione variando le diverse funzioni di espansione lungo lo spessore. Si può, dunque, osservare una traiettorie delle fibre per ogni layer del tutto simile per tutte le casistiche in oggetto di studio.



a) 1° Layer



b) 2° Layer



c) 3° Layer

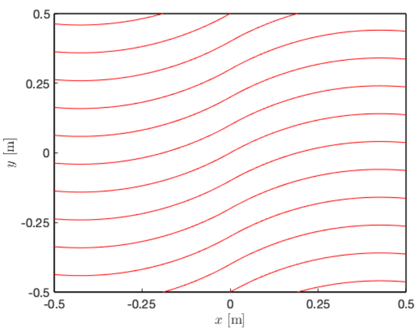
Figure 7.6: Rappresentazione grafica dell'andamento nel piano delle fibre per i 3 strati nella configurazione di ottimo nel caso di Complete Gap usando il modello strutturale 3LD3

In Figura 7.6 si riporta l'andamento delle diverse traiettorie delle fibre per ogni strato del laminato nella condizione di Complete Gap e con 16 tows per ogni passata della macchina. Anche in questo caso, si osservano valori particolarmente bassi nelle matrici di riempimento associate agli angoli di laminazione di ottimo riportati in Tabella 7.11, trovando nuovamente conferma al fatto che si ottiene tramite il processo di ottimizzazione strutturale una configurazione che minimizza la presenza di difetti di tipo gap.

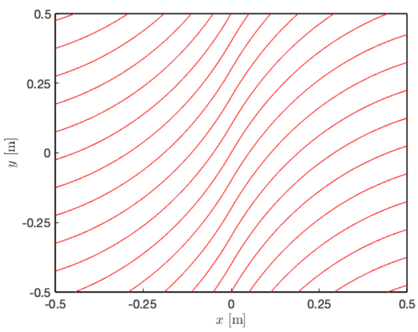
Modello	$[T_0]_1[°]$	$[T_1]_1[°]$	$[T_0]_2[°]$	$[T_1]_2[°]$	$[T_0]_3[°]$	$[T_1]_3[°]$	f_1 [Hz]
6x6Q9-TE1	35.36	-6.16	65.25	21.75	33.37	-8.50	124.68
6x6Q9-TE2	35.36	-6.16	65.25	21.75	33.37	-8.50	123.70
6x6Q9-TE3	35.49	-5.93	64.64	21.97	34.29	-9.42	123.20
6x6Q9-TE4	37.48	-5.33	63.18	19.71	31.57	-8.27	122.97
6x6Q9-TE5	37.24	-1.61	63.92	20.95	34.46	-2.81	122.51
6x6Q9-TE6	35.36	-6.15	65.25	21.75	33.37	-8.49	123.34

Table 7.12: Angoli T_0 e T_1 di ottimo per ogni strato del laminato in complete overlap al variare delle funzioni di espansione lungo lo spessore

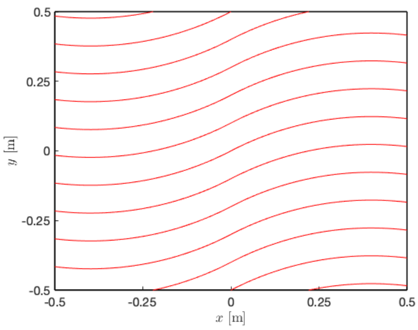
Nella Tabella 7.12 si riportano gli angoli di laminazione T_0 e T_1 di ottimo per il laminato di riferimento nella condizione di Complete Overlap e con numero di tows per ogni course pari ad 16. Analogamente al caso in cui vi erano 8 tows per ogni passata, si assiste ad un notevole aumento della prima frequenza naturale di ottimo rispetto al caso in cui i difetti non erano stati calcolati. Sempre in analogia al caso con 8 tows, si osservano dei valori del tutto simili degli angoli di laminazione di ottimo al variare delle funzioni di espansione sullo spessore. Si assiste, però, ad un abbassamento del valore delle prima frequenza di ottimo rispetto al caso di complete overlap con N_t=8.
In Figura 7.7 vengono riportati gli andamenti delle traiettorie delle fibre nella configurazione di ottimo nel caso di *complete overlap* ed $N_t = 16$.



a) 1° Layer



b) 2° Layer



c) 3° Layer

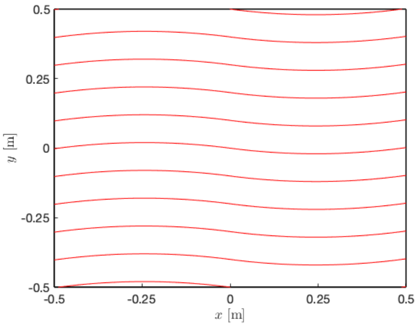
Figure 7.7: Rappresentazione grafica dell'andamento nel piano delle fibre per i 3 strati nella configurazione di ottimo nel caso di Complete Overlap usando il modello strutturale TE6

7.5.3 Ottimizzazione con $\mathrm{N}_{tows} = 24$

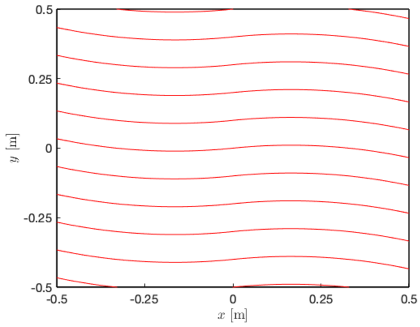
Modello	$[T_0]_1[°]$	$[T_1]_1[°]$	$[T_0]_2[°]$	$[T_1]_2[°]$	$[T_0]_3[°]$	$[T_1]_3[°]$	f_1 [Hz]
6x6Q9-TE1	-9.42	9.90	7.40	-15.07	-2.80	6.42	115.17
6x6Q9-TE2	-5.42	6.25	-11.95	-12.75	-4.57	16.41	115.33
6x6Q9-TE3	-0.42	0.93	-7.89	-12.14	-0.53	2.20	115.55
6x6Q9-3LD1	-2.49	3.45	-9.90	-12.47	-1.66	4.21	115.62
6x6Q9-3LD2	-9.42	9.89	7.40	-15.07	-2.80	6.43	114.20
6x6Q9-3LD3	-9.42	9.89	7.40	-15.07	-2.80	6.43	114.20

Table 7.13: Angoli T_0 e T_1 di ottimo per ogni strato del laminato in complete gap al variare delle funzioni di espansione lungo lo spessore

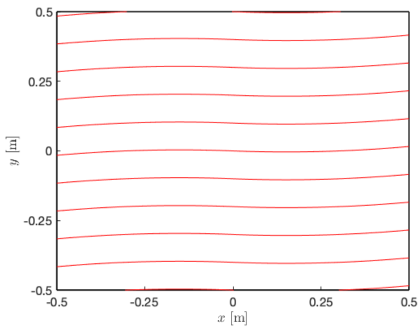
Ancora una volta si riportano in Tabella 7.13 gli angoli di laminazione T_0 e T_1 di ottimo nella condizione di Complete Gap e con numero di tows per ogni course pari 24. Nello specifico si osserva che tali angoli risultano particolarmente simili al caso in cui si erano considerati solo 16 tows. Nello specifico, si può affermare che la principale differenza tra l'uso di 16 e 24 tows risiede nel fatto di ottenere una prima frequenza naturale di ottimo differente. In particolare, l'uso di 24 tows porta ad avere una frequenza ottimale superiore ai casi in cui si sono considerati 8 o 16 tows per ogni passata della macchina. Si osserva, infatti, in Tabella 7.13 che rispetto al caso in cui non si sono considerati difetti, si ottiene in media una frequenza naturale ottimale inferiore di circa l'1% considerando gaps. Si osserva, inoltre, una convergenza dei risultati usando modelli layer-wise (LW) di secondo o terzo ordine rispetto all'uso di teorie equivalent single layer (ESL).



a) 1° Layer



b) 2° Layer



c) 3° Layer

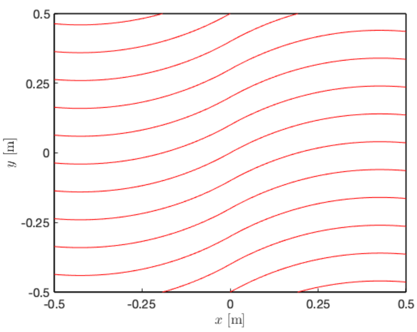
Figure 7.8: Rappresentazione grafica dell'andamento nel piano delle fibre per i 3 strati nella configurazione di ottimo nel caso di Complete Gap usando il modello strutturale 3LD3

In Figura 7.6 si riporta l'andamento delle diverse traiettorie delle fibre per ogni strato del laminato nella condizione di Complete gap e con 24 tows per ogni passata. In analogia ai casi precedentemente analizzati, si osservano valori particolarmente numerici esigui in valore assoluto nelle matrici di riempimento associate agli angoli di laminazione di ottimo, avendo quindi come significato quello di aver ottienuto una configurazione che minimizza la presenza di difetti di tipo gap in modo da avere la prima frequenza naturale massima.

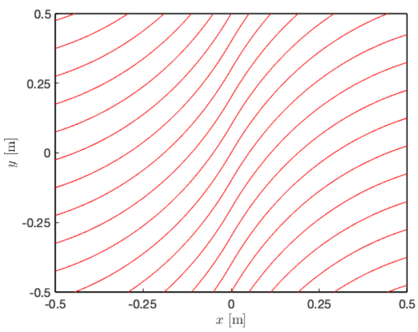
Modello	$[T_0]_1[°]$	$[T_1]_1[°]$	$[T_0]_2[°]$	$[T_1]_2[°]$	$[T_0]_3[°]$	$[T_1]_3[°]$	f_1 [Hz]
6x6Q9-TE1	39.36	-2.16	65.25	21.75	33.37	1.50	123.48
6x6Q9-TE2	39.36	-3.16	65.25	21.75	33.37	-8.50	122.95
6x6Q9-TE3	39.36	-3.16	65.25	21.75	33.37	-8.50	122.60
6x6Q9-TE4	35.36	-6.16	65.25	21.75	33.37	-8.50	122.22
6x6Q9-TE5	37.70	-4.73	64.61	21.82	34.28	-8.84	122.75
6x6Q9-TE6	35.26	-6.16	65.25	21.75	31.37	-8.50	122.28

Table 7.14: Angoli T_0 e T_1 di ottimo per ogni strato del laminato in complete overlap al variare delle funzioni di espansione lungo lo spessore

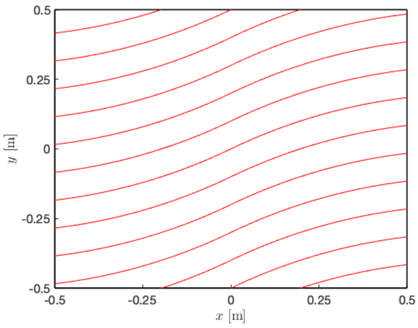
Nella Tabella 7.14 si riportano gli angoli di laminazione T_0 e T_1 di ottimo per il laminato di riferimento nella condizione di *Complete Overlap* e con numero di tows per ogni course pari ad 24. Come nelle ottimizzazione con 8 e 16 tows, si assiste ad un notevole aumento della frequenza naturale rispetto al caso in cui i difetti non erano stati calcolati. In aggiunte, si osservano degli angoli di ottimo del tutto simili ai casi precedenti. Rispetto al caso in cui si considerano i gaps, si dimostra che la variazione del numero dei tows per ogni passata è meno influente nelle ottimizzazioni in cui si è in Complete Overlap. D'altro canto, rispetto ai casi in cui si erano considerati 8 e 16 tows per ogni course si ottengono in media frequenze naturali di ottimo più basse. Nello specifico, rispetto al caso del laminato privo di difetti si ottiene un aumento della frequenza naturale di circa il 5%.
In Figura 7.9 vengono riportati gli andamenti delle traiettorie delle fibre nella configurazione di ottimo nel caso di Complete Overlap ed $N_t = 24$. Anche in questo caso, si possono osservare che le matrici di riempino associate agli angoli di ottimo in Tabella 7.14 presentano al loro interno valori particolarmente elevati, portando alla conseguenza del fatto che la configurazione ottenuta sia coincidente con la situazione in cui la presenza di overlap è massimizzata.



a) 1° Layer



b) 2° Layer



c) 3° Layer

Figure 7.9: Rappresentazione grafica dell'andamento nel piano delle fibre per i 3 strati nella configurazione di ottimo nel caso di Complete Overlap usando il modello strutturale TE6

Capitolo 8

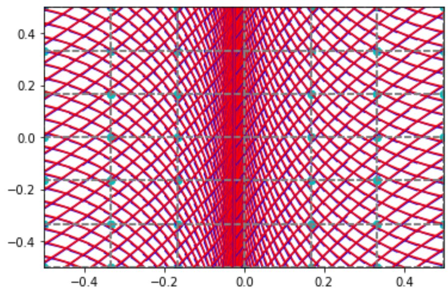
Conclusioni

L'avvento delle nuove tecniche di produzione come l'Automated Fiber Placement (AFP) oppure l'Automated Tape Laying (ATL) hanno portato all'introduzione di materiali compositi innovativi, in cui l'orientamento della fibra non è più costante all'interno della lamina. Tali laminati sono noti come Variable Angle Tow (VAT) o Variable Stiffness Composites (VSC). Le principali limitazioni che, però, riducono i possibili miglioramenti delle prestazioni meccaniche introdotti da questi materiali sono rappresentate dai difetti di fabbricazione. In particolare, i principali sono i Gaps e gli Overlaps, che si verificano tipicamente tra due passate successive della macchina. Tali difettologie, come mostrato nel Capitolo 6, alterano le prestazioni meccaniche della struttura rispetto al modello privo di difetti. Per poter prevedere la variazione del comportamento strutturale tenendo conto di queste problematiche si combina il Defect Layer Method (DLM) con la Carrera Unified Formulation (CUF). In particolare, il DLM viene utilizzato per la mappatura dei difetti dovuti al processo AFP direttamente all'interno del solutore agli elementi finiti basato sulla CUF. Infine, viene costruito un framework di ottimizzazione basato su una strategia globale e locale in modo da trovare gli angoli T_0 e T_1 che massimizzano la prima frequenza naturale del laminato. In Tabella 8.1 si riportano i risultati dello studio di ottimizzazione del laminato di riferimento [10] imponendo come condizione di vincolo del problema $\kappa_{lim} \leq 3.28$ m^{-1}. In particolare, vengono mostrati gli angoli di ottimo T_0 e T_1 per ciascuno dei 3 strati costituenti la piastra e la rispettiva prima frequenza naturale. Rispetto al caso di ottimo privo di difetti, si osserva che nella condizione di Complete Gap vi sia un abbassamento della frequenza del 2.57%. D'altro canto, nella condizione di Complete Overlap si osserva un incremento della prima frequenza naturale del 6.37%. In aggiunta, osservando le matrici di riempimento, usate dal DLM per l'applicazione dei difetti al metodo agli elementi finiti, si assiste al fatto che nella condizione di Complete Gap ottimizzata le aree di difetto in valore assoluto sono esigue. D'altra parte, nel caso di Complete Overlap ottimizzato tali aree risultano essere importanti. Dunque, per massimizzare la f_1 risulta necessario che i difetti di tipo gap siano minimizzati, mentre per quanto rigurda gli overlap questi apportano un contributo migliorativo per la prima frequenza del laminato.

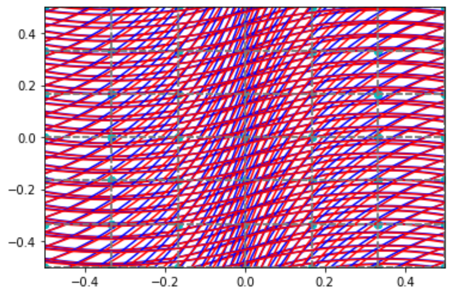
Modello	$[T_0]_1[°]$	$[T_1]_1[°]$	$[T_0]_2[°]$	$[T_1]_2[°]$	$[T_0]_3[°]$	$[T_1]_3[°]$	f_1 [Hz]
Pristine	90	-3.50	-65.31	-2	90	-3.50	126.87
Comp.Gap	-87.24	-18.14	64.72	44.41	-90	-7.17	123.61
Comp.Overlap	32.39	-14.48	76.65	27.08	21.49	-10.09	134.95

Table 8.1: Angoli T_0 e T_1 di ottimo per ogni strato del laminato nelle condizioni di assenza di difetti, Complete Gap e Complete Overlap con vincolo di ottimizzazione $\kappa_{lim} \leq 3.28$ m^{-1}

In Figura 8.1 si riportano le traiettorie di ottimo delle fibre nel piano nei casi di Complete Gap e di Complete Overlap come mostrato nella Tabella 8.1.



a) Complete Gap



b) Complete Overlap

Figure 8.1: Laminati di ottimo nelle condizioni di Complete Gap e di Complete Overlap con vincolo $\kappa_{lim} \leq 3.28$ m^{-1}

In Tabella 8.2 si riportano gli angoli T_0 e T_1 di ottimo per ciascuno strato del laminato applicando come vincolo $\kappa_{lim} \leq 1.57$ m^{-1}. In questo caso, si osserva una diminuzione della prima frequenza naturale del laminato del 3.2% nella condizione di Complete Gap; mentre si assiste ad un aumento della f_1 del 6.25% nel caso di Complete Overlap. Anche in questo caso si conferma il fatto che le lacune nel piano offrano un contributo deleterio per la prima frequenza naturale, al contrario le sovrapposizioni portano un contributo migliorativo.

Modello	$[T_0]_1[°]$	$[T_1]_1[°]$	$[T_0]_2[°]$	$[T_1]_2[°]$	$[T_0]_3[°]$	$[T_1]_3[°]$	f_1 [Hz]
Pristine	-2.38	-0.85	55.50	11.74	-2.97	-0.19	116.08
Comp.Gap	-9.06	10.25	9.47	-9.95	-14.41	17.16	112.37
Comp.Overlap	35.36	-6.15	65.25	21.75	33.37	-8.49	123.34

Table 8.2: Angoli T_0 e T_1 di ottimo per ogni strato del laminato nelle condizioni di assenza di difetti, Complete Gap e Complete Overlap con vincolo di ottimizzazione $\kappa_{lim} \leq 1.57$ m^{-1}

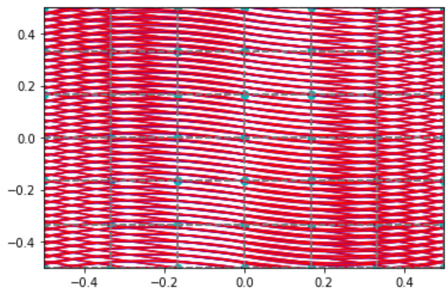
In una fase successiva si è deciso di osservare l'influenza del parametro N_{tows} sulle ottimizzazioni in presenza di difetti. In particolare, si è discusso nel Capitolo 3 dell'importanza di tale valore nell'ambito della correzione dei difetti, in quanto è possibile variare discretamente tale valore in modo da ridurre sensibilmente l'area dei difetti per ogni passata. In Tabella 8.3 si osserva la variazione degli angoli di ottimo T_0 e T_1 al variare di N_{tows}. Nello specifico, si appura dalle matrici di riempimento associate agli angoli di laminazione, che al diminuire del valore di N_{tows} l'area dei difetti in valore assoluto aumenti, in quanto la loro presenza è concentrata nelle regioni di contatto tra due passate successive. Dunque, nel caso di Complete Gap in Tabella 8.3 si assiste che all'aumentare del parametro di stampa N_{tows} le lacune nel piano diminuiscono portando ad un aumento della prima frequenza del laminato. Al contrario, in Tabella 8.4 si osserva che nella condizione di Complete Overlap, l'aumento del parametro N_{tows} porta alla diminuzione delle sovrapposizioni con conseguente decrescita della massima f_1 del laminato. In Appendice A si mostrano le forme modali ottenute usando gli angoli di laminazione di ottimo nelle tre diverse situazioni descritte: senza difetti, Complete Gap e Complete Overlap. Nello specifico, non si osservano particolari differenze nella forma dei modi propri di vibrare nel caso senza difetti e di Complete Overlap. D'altro canto, nelle condizioni ottimizzate di Complete Gap si assiste ad una differenza nel 5° modo proprio: pur mantenendo lo stesso numero di semionde nel piano la forma risulta differente.

Modello	$[T_0]_1[°]$	$[T_1]_1[°]$	$[T_0]_2[°]$	$[T_1]_2[°]$	$[T_0]_3[°]$	$[T_1]_3[°]$	f_1 [Hz]
$\mathrm{N}_{tows} = 8$	-13.86	15.00	-8.53	-15.45	-16.30	17.26	111.61
$\mathrm{N}_{tows} = 16$	-9.06	10.25	9.47	-9.95	-14.41	17.16	112.37
$\mathrm{N}_{tows} = 24$	-9.42	9.89	7.40	-15.07	-2.80	6.43	114.20

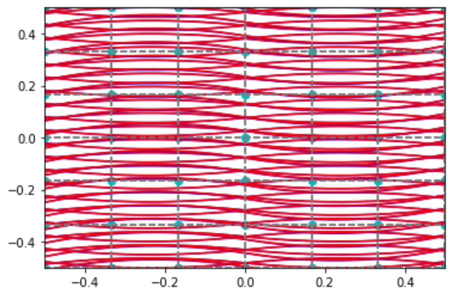
Table 8.3: Angoli T_0 e T_1 di ottimo per ogni strato del laminato nelle condizioni di Complete Gap al variare del parametro N_{tows}

Modello	$[T_0]_1$[°]	$[T_1]_1$[°]	$[T_0]_2$[°]	$[T_1]_2$[°]	$[T_0]_3$[°]	$[T_1]_3$[°]	f_1 [Hz]
$N_{tows} = 8$	34.34	-6.76	63.30	19.70	34.00	-7.34	125.84
$N_{tows} = 16$	35.36	-6.15	65.25	21.75	33.37	-8.49	123.34
$N_{tows} = 24$	35.26	-6.16	65.25	21.75	31.37	-8.50	122.28

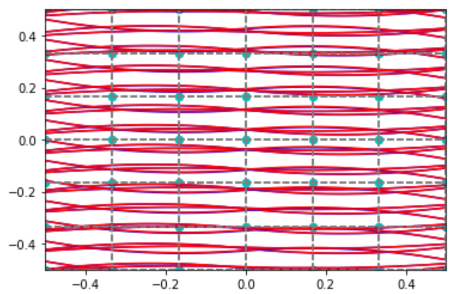
Table 8.4: Angoli T_0 e T_1 di ottimo per ogni strato del laminato nelle condizioni di Complete Overlap al variare del parametro N_{tows}



a) Comp.Gap con N_t=8



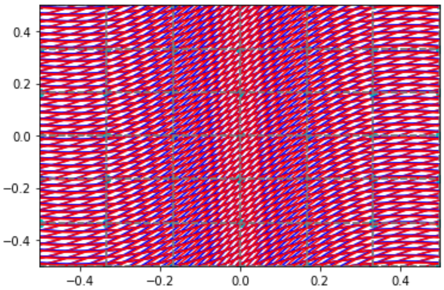
b) Comp.Gap con N_t=16



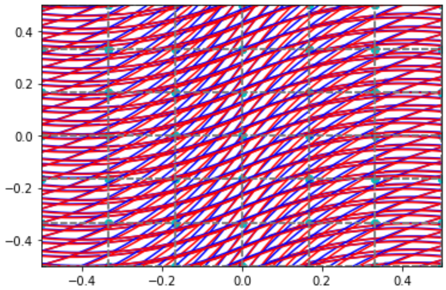
c) Comp.Gap con N_t=24

Figure 8.2: Rappresentazione grafica dell'andamento delle fibre nella configurazione di ottimo per i 3 strati in Complete Gap usando il modello strutturale 3LD3

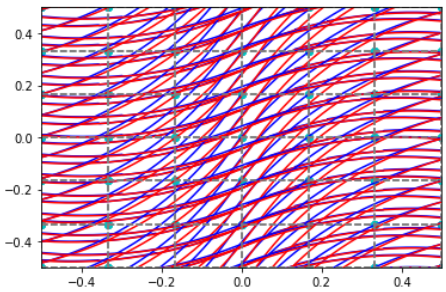
In Figura 8.2 si mostrano le traiettorie delle fibre nei casi ottimizzati nella condizione di Complete Gap al variare del paramentro N_{tows} come riportato in Tabella 8.3. Si ritrova conferma al fatto che al diminuire del numero di tows vi sia un incremento di lacune nel piano del laminato, avendo un effetto di diminuzione della f_1. In Figura 8.3 si mostrano invece gli andamenti delle fibre nel piano nella condizione di Complete Overlap sempre al variare di N_{tows} come visto in Tabella 8.4. In questo caso al diminuire del numero di filamenti per course si osserva un aumento dell'area delle sovrapposizione, con conseguente effetto benefico per la prima frequenza della piastra.



a) Comp.Overlap con N_t=8



b) Comp.Overlap con N_t=16

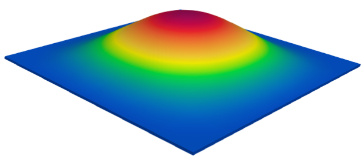


c) Comp.Overlap con N_t=24

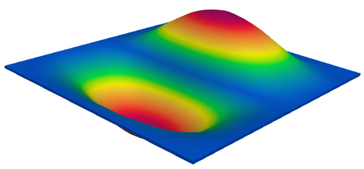
Figure 8.3: Rappresentazione grafica dell'andamento delle fibre nella configurazione di ottimo per i 3 strati in Complete Overlap usando il modello strutturale TE6

Appendix A

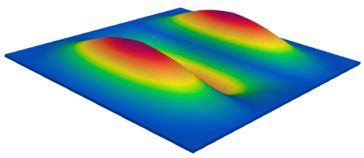
A.1 Forme Modali piastra 3 strati in assenza di difetti del capitolo (7.5)



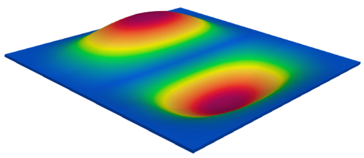
a) Modo 1



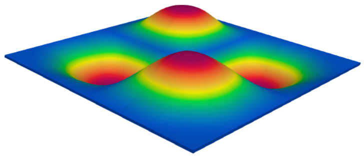
b) Modo 2



c) Modo 3



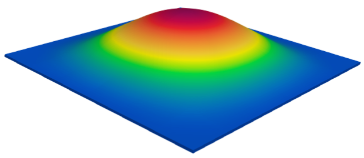
d) Modo 4



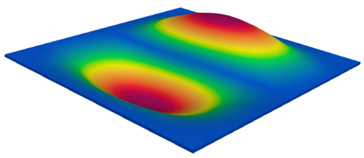
e) Modo 5

Figure A.1: Primi 5 modi di vibrare della piastra di riferimento a 3 layer nella configurazione di ottimo in assenza di difetti

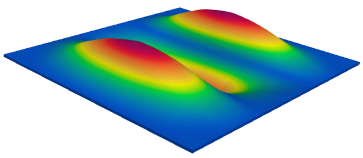
A.2 Forme Modali piastra 3 strati in Complete Gap con N$_{tows}$=8



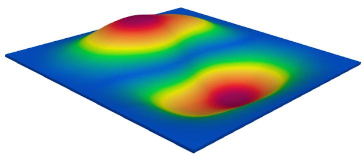
a) Modo 1



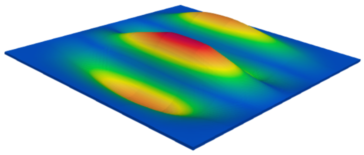
b) Modo 2



c) Modo 3



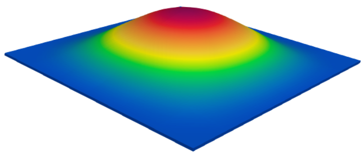
d) Modo 4



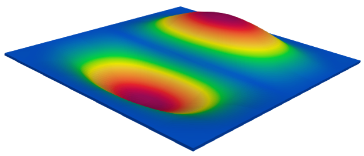
e) Modo 5

Figure A.2: Primi 5 modi di vibrare della piastra di riferimento a 3 layer nella configurazione di ottimo in condizione di Complete Gap e N$_{tows}$=8

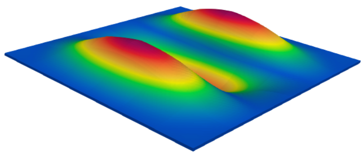
A.3 Forme Modali piastra 3 strati in Complete Gap con N$_{tows}$=16



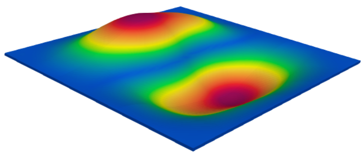
a) Modo 1



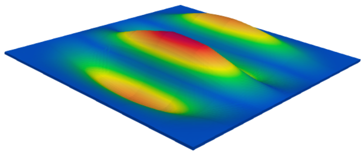
b) Modo 2



c) Modo 3



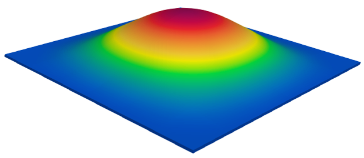
d) Modo 4



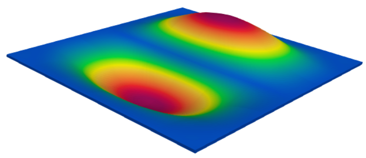
e) Modo 5

Figure A.3: Primi 5 modi di vibrare della piastra di riferimento a 3 layer nella configurazione di ottimo in condizione di Complete Gap e N$_{tows}$=16

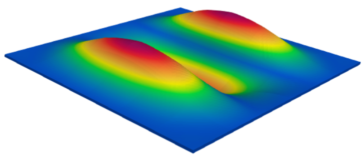
A.4 Forme Modali piastra 3 strati in Complete Gap con N$_{tows}$=24



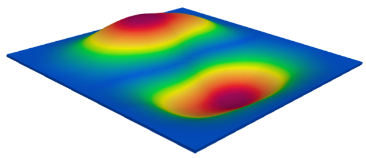
a) Modo 1



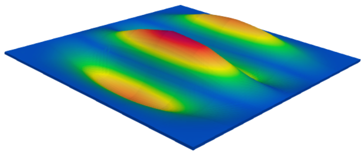
b) Modo 2



c) Modo 3



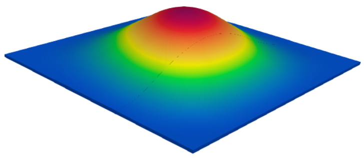
d) Modo 4



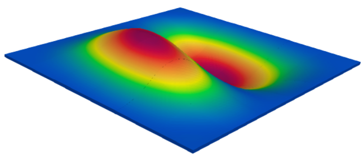
e) Modo 5

Figure A.4: Primi 5 modi di vibrare della piastra di riferimento a 3 layer nella configurazione di ottimo in condizione di Complete Gap e N$_{tows}$=24

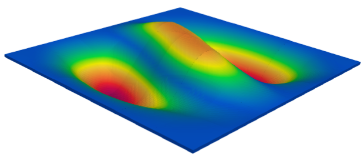
A.5 Forme Modali piastra 3 strati in Complete Overlap con N$_{tows}$=8



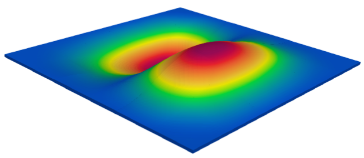
a) Modo 1



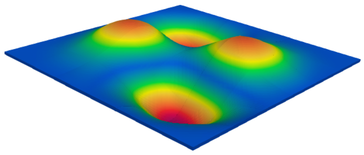
b) Modo 2



c) Modo 3



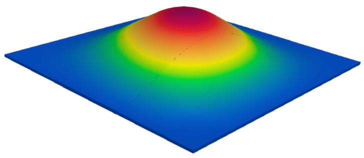
d) Modo 4



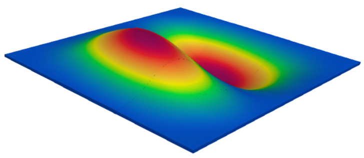
e) Modo 5

Figure A.5: Primi 5 modi di vibrare della piastra di riferimento a 3 layer nella configurazione di ottimo in condizione di Complete Overlap e N$_{tows}$=8

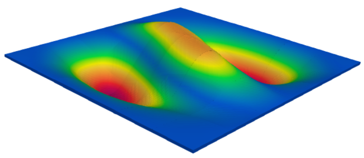
A.6 Forme Modali piastra 3 strati in Complete Overlap con N$_{tows}$=16



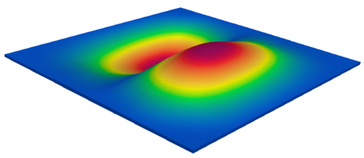
a) Modo 1



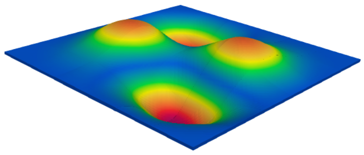
b) Modo 2



c) Modo 3



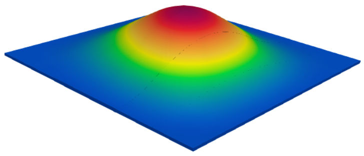
d) Modo 4



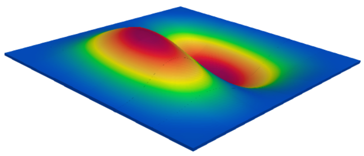
e) Modo 5

Figure A.6: Primi 5 modi di vibrare della piastra di riferimento a 3 layer nella configurazione di ottimo in condizione di Complete Overlap e N$_{tows}$=16

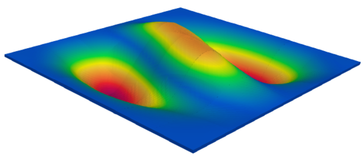
A.7 Forme Modali piastra 3 strati in Complete Overlap con N$_{tows}$=24



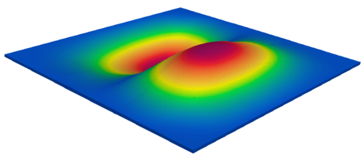
a) Modo 1



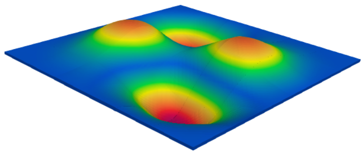
b) Modo 2



c) Modo 3



d) Modo 4



e) Modo 5

Figure A.7: Primi 5 modi di vibrare della piastra di riferimento a 3 layer nella configurazione di ottimo in condizione di Complete Overlap e N_{tows}=24

Bibliography

[1] L. Demasi, G. Biagini, F. Vannucci, E. Santarpia, and R. Cavallaro. «Equivalent Single Layer, Zig-Zag, and Layer Wise theories for variable angle tow composites based on the Generalized Unified Formulation». In: *Elsevier* (2017) (cit. on p. 1).

[2] A. Viglietti, E. Zappino, and E. Carrera. «Analysis of variable angle tow composites structures using variable kinematic models». In: *Elsevier* (2019) (cit. on p. 2).

[3] Z. Gurdal, B. F. Tatting, and K. Wu. «Variable stiffness composite panels: Effects of stiffness variation on the in-plane and buckling response.» In: *Composites Part A: Applied Science and Manufacturing* (2008) (cit. on pp. 2, 11).

[4] A. Pagani and A. R. Sanchez-Majano. «Infuence of fiber misalignments on buckling performance of variable stiffness composites using layerwise models and random fields». In: *Mechanics of Advanced Materials and Structures* (2020) (cit. on pp. 2, 7).

[5] A. R. Racionero, R. Azzara, A. Pagani, and E. Carrera. «Accurate Stress Analysis of Variable Angle Tow Shells by High-Order Equivalent-Single-Layer and Layer-Wise Finite Element Models». In: *Materials* (2021) (cit. on p. 3).

[6] A. Pagani, A. R. Racionero, and M. Petrolo. «Stochastic characterization of multiscale material uncertainties on the fibre-matrix interface stress state of composite variable stiffness plates». In: *Elsevier* (2023) (cit. on p. 4).

[7] Z.Wu, P. M Weaver, G. Raju, and B. C. Kim. «Buckling Analysis and Optimisation of Variable Angle Tow Composite Plates». In: *Thin-Walled Structures* (2012) (cit. on p. 4).

[8] Z.Wu, P. M Weaver, and G. Raju. «Postbuckling analysis of variable angle tow composite plates». In: *Elsevier* (2013) (cit. on p. 4).

[9] X. Chen and G. Nie. «On the nonlinear post-critical responses of VAT sandwich beams with variable stiffness composite skins under axial compression». In: *Elsevier* (2022) (cit. on p. 4).

[10] H. Akhavan and P. Ribeiro. «Natural modes of vibration of variable stiffness composite laminates with curvilinear fibers». In: *Elsevier* (2011) (cit. on pp. 5, 39, 76, 77, 79, 84, 87, 90, 93, 104).

[11] L. Zhang, X. Wang, J. Pei, and Y. Zhou. «Review of automated fibre placement and its prospects for advanced composites». In: *Springer* (2020) (cit. on p. 6).

[12] A. Brasington, C. Sacco, J. Halbritter, R. Wehbe, and R. Harik. «Automated fiber placement: A review of history, current technologies, and future paths forward». In: *Elsevier* (2021) (cit. on p. 6).

[13] F. Heinecke and C. Willberg. «Manufacturing-Induced Imperfections in Composite Parts Manufactured via Automated Fiber Placement». In: *Journal of Composites Science* (2019) (cit. on pp. 6, 15).

[14] A. W. Blom, C. S. Lopes, P. J. Kromwijk, Z. Gurdal, and P. P. Camanho. «A Theoretical Model to Study the Influence of Tow-drop Areas on the Stiffness and Strength of Variable-stiffness Laminates». In: *Journal of Composites Materials* (2009) (cit. on p. 7).

[15] K. Fayazbakhsh, M. A. Nik, D. Pasini, and L. Lessard. «Defect layer method to capture effect of gaps and overlaps in variable stiffness laminates made by Automated Fiber Placement». In: *Elsevier* (2012) (cit. on pp. 7, 39–41, 45–47, 89).

[16] A. Marouene, R. Boukhili, J. Chen, and A. Yousefpour. «Effects of gaps and overlaps on the buckling behavior of an optimally designed variable-stiffness composite laminates – A numerical and experimental study». In: *Elsevier* (2016) (cit. on pp. 7, 38).

[17] J. Carvalho, A. Sohouli, and A. Suleman. «Fundamental Frequency Optimization of Variable Angle Tow Laminates with Embedded Gap Defects». In: *Journal of Composites Science* (2022) (cit. on pp. 8, 46, 85–87, 90, 91).

[18] M. A. Nik, K. Fayazbakhsh, D. Pasini, and L. Lessard. «Optimization of variable stiffness composites with embedded defects induced by Automated Fiber Placement». In: *Elsevier* (2013) (cit. on p. 8).

[19] «Mass Optimization of Variable Angle Tow, Variable Thickness Panels with Static Failure and Buckling Constraints». In: 2015 (cit. on p. 9).

[20] W. Zhao and R. K. Kapania. «Buckling Analysis and Optimization of Stiffened Variable Angle Tow Laminates with a Cutout Considering Manufacturing Constraints». In: *Journal of Composites Science* (2022) (cit. on p. 9).

[21] P. Hao, H. Yang, Y. Wang, X. Liu, B. Wang, and G. Li. «Efficient reliability-based design optimization of composite structures via isogeometric analysis». In: *Elsevier* (2021) (cit. on p. 9).

[22] S. Prabhakar. «A Methodology for Finite Element Analysis of Curvilinear Fiber Laminates with Defects, Fabricated by Automated Fiber Placement Technique.» PhD thesis. McGill University of Montreal, 2011 (cit. on pp. 13, 46).

[23] E.Carrera, M.Cinefra, E.Zappino, and M.Petrolo. *Finete Element Analysis of Structures through Unified Formulation*. John Wiley & Sons, 2014 (cit. on pp. 17, 30, 32).

[24] M.Gherlone. «Strutture Aeronautiche: Appunti delle lezioni A.A. 2021-2022» (cit. on p. 20).

[25] R.M.Jones. *Mechanics of Composites Materials*. Taylor & Francis, 1999 (cit. on p. 34).

[26] D. Scano, E. Carrera, A. Pagani, and R. Augello. *Uso di Polinomi di Lagrange nell'Analisi Lineare e Nonlineare di Strutture Laminate*. 2021 (cit. on pp. 36, 37).

[27] P. T. Langley. «Finite Element Modeling of Tow-Placed Variable-Stiffness Composite Laminates». PhD thesis. Virginia Polytechnic, 1999 (cit. on pp. 42–45).

[28] A. A. Vijayachandran, P. Davidson, and A. M. Waas. «Optimal fiber paths for robotically manufactured composite structural panels.» In: *Elsevier* (2020) (cit. on p. 48).

[29] J. R. R. A. Martins A. Ning. *Engineering Design Optimization*. Cambridge University Press, 2021 (cit. on pp. 51, 53, 54).