

POLITECNICO DI TORINO

Corso di Laurea Magistrale
in Ingegneria Matematica

Tesi di Laurea Magistrale

**Pricing dinamico di biglietti aerei:
applicazione al caso Alpitour S.p.A.**



Relatore
prof. Paolo Brandimarte

Candidato
Federica Tamai

Anno Accademico 2022-2023

Sommario

Il problema di pricing dinamico di un prodotto ad orizzonte di vendita T e inventario finiti e senza possibilità di rifornimento può essere applicato al più specifico problema di vendita di biglietti aerei, in cui abbiamo un numero finito di posti volo e siamo interessati a modificarne il prezzo nel tempo in modo da massimizzare il profitto. In questa tesi si è scelto di affrontare questo problema con un modello di pricing rientrando nella categoria *passive learning*, ovvero una volta osservata la domanda scegliamo il successivo prezzo ottimale senza forzare una qualche variazione di questo. A ciò aggiungiamo l'elemento di previsione della domanda assumendo nota la funzione del valore atteso di vendita ma non i suoi parametri, che andranno stimati in base alle vendite effettuate. Grazie ai dati forniti dall'azienda Alpitour S.p.A. vedremo com'è possibile adattare la strategia di pricing ad un contesto reale e come essa performa. Il risultato principale di questa tesi è un bound sul regret dell'azienda, ovvero sulle perdite attese dovute all'utilizzo della policy proposta invece di quella ottimale, che sul lungo periodo risulta essere $\log^2(T)$ senza necessità di utilizzo di alcuna forma di learning attivo. Concluderemo quindi che, nel caso di vendita di biglietti aerei, utilizzando questo modello non è necessaria una variazione attiva dei prezzi, e quindi un controllo puntuale di questi ultimi, ma è più conveniente per l'azienda spendere risorse nello studio della risposta dei possibili compratori ai vari prezzi proposti, in modo da conoscere la funzione di domanda attesa e poter quindi simulare le vendite per determinare in anticipo i prezzi ottimali.

Ringraziamenti

Ringrazio l'azienda Alpitour S.p.A. e in particolare Serena Chiarle per avermi fornito i dati e le conoscenze necessari allo sviluppo di questa tesi, ringrazio inoltre il mio tutor aziendale Sergio Bergese e tutte le persone conosciute in Alpitour per avermi accompagnata nell'esperienza di tirocinio.

Un ringraziamento speciale va a tutti gli amici e i familiari che hanno creduto in me durante l'esperienza universitaria e mi hanno aiutata, ciascuno a suo modo, a raggiungere questo traguardo.

Indice

Elenco delle tabelle	9
Elenco delle figure	10
1 Pricing con inventario finito	13
1.1 Exploration vs exploitation	13
1.2 Inventario infinito	14
1.3 Inventario finito	15
2 Il modello	17
2.1 Struttura generale	17
2.1.1 Fase di stima dei parametri	18
2.1.2 Fase di ottimizzazione	19
2.2 Misure di performance	20
2.3 Risultati teorici	21
2.4 Implementazione	22
3 Risultati numerici	27
3.1 Simulazione di vendita	27
3.2 L'effetto del livello di inventario	28
3.3 L'effetto della lunghezza della selling season	29
3.4 L'effetto di C e S sulla varianza dei prezzi	30
4 Applicazione al caso Alpitour	33
4.1 Applicabilità del modello	33
4.2 I dati Alpitour	35
4.2.1 Risultati con funzioni esponenziale e logistica	38
4.3 L'elemento della distanza dalla data di partenza	40
4.3.1 Risultati considerando la DTD	44
4.3.2 La scelta del modello in base al contesto	45
5 Conclusioni	49

A Dimostrazioni e teoria	51
A.1 Condizioni su h	51
A.2 Bound per la stima dei parametri	51
Bibliografia	55

Elenco delle tabelle

3.1	Risultati per $C = 1, \dots, 9$: media su 100 simulazioni	29
3.2	Risultati per $S = 6, \dots, 14$: media su 100 simulazioni	30
3.3	Stime dei parametri e rispettivi R^2	30
4.1	Stime dei parametri e rispettivi R^2	38
4.2	Risultati per $h(x) = \exp(x)$ e $h(x) = \text{logit}(x)$: media su 20 simulazioni . .	40
4.3	Risultati per il caso DTD: media su 20 simulazioni	45

Elenco delle figure

3.1	Grafico della funzione $E[D(p)] = \text{logit}(\bar{\beta}_0 + \bar{\beta}_1 p)$	27
3.2	Regret e regret relativo: media su 100 simulazioni	28
3.3	Regret/ $\log^2(SS)$: media su 100 simulazioni	28
3.4	Crescita di $\lambda_{\min}(P_t)$ per diversi S	31
3.5	Andamento $\log_{10}(\ \hat{\beta}_t - \bar{\beta}\)$ per diversi S	32
4.1	Vendite totali per prezzo con e senza vendite sotto entry level	35
4.2	Vendite totali per prezzo per il primo sottogruppo di voli	36
4.3	Vendite totali per prezzo per il primo sottogruppo di voli (riscalate)	36
4.4	Fit lineare ed esponenziale	37
4.5	Fit logit	37
4.6	Regret relativo e regret/ $\log^2(SS)$ per $h(x) = \exp(x)$: media su 20 simulazioni	39
4.7	Regret relativo e regret/ $\log^2(SS)$ per $h(x) = \text{logit}(x)$: media su 20 simulazioni	39
4.8	Errore nella stima di $\bar{\beta}$ nel tempo per $h(x) = \exp(x)$ e $h(x) = \text{logit}(x)$: media su 20 simulazioni	39
4.9	Vendite ad un mese e due mesi dalla data partenza	41
4.10	Vendite a più di due mesi dalla data partenza	41
4.11	Probabilità di vendita per prezzo e DTD	43
4.12	Vendite totali per prezzo per il secondo sottogruppo di voli	43
4.13	Regret e Regret relativo: media su 20 simulazioni	44
4.14	Errore nella stima di $\bar{\beta}$ nel tempo: media su 20 simulazioni	44
4.15	Regret relativo: media su 20 simulazioni	45
4.16	Simulazione di prezzatura per una singola finestra di vendita, caso base	47
4.17	Simulazione di prezzatura per una singola finestra di vendita, caso DTD	47

Introduzione

Il problema di prezzare in maniera ottimale i posti disponibili su un volo aereo è stato studiato largamente a partire dalla fine degli anni '70 del 900, in seguito all'introduzione dell'*Airline Deregulation Act* da parte della Civil Aeronautics Board (CAB). Questo evento ha segnato il passaggio da una stringente regolamentazione sul mercato del trasporto aereo imposto dal governo degli Stati Uniti ad una più favorevole possibilità per le aziende del settore di gestire autonomamente i prezzi delle proprie tratte. Ciò ha portato in seguito alla nascita e crescita di compagnie aeree low-cost che hanno fatto di questa possibilità il loro cavallo di battaglia, aiutate anche dall'avvento di internet e della possibilità di raccogliere grazie ad esso maggiori informazioni riguardanti i movimenti di mercato e le preferenze dei compratori. Tutto questo ha portato allo sviluppo del *revenue management* (RM), ovvero la "raccolta di strategie e tattiche utilizzate dalle aziende per gestire scientificamente la domanda dei propri prodotti e servizi" [13]. Del RM fa parte per cui anche tutto ciò che riguarda il prezzamento dinamico o *dynamic pricing* dei biglietti aerei, che consiste nel modificare il prezzo di un volo nel tempo in base alla situazione e ai movimenti del mercato. È stato stimato che lo studio di queste tecniche abbia portato ad un incremento dei ricavi annuali delle compagnie aeree del 5% o anche del 6% [1]. Tuttavia l'utilizzo del pricing dinamico comporta inevitabilmente un certo sospetto da parte dei compratori, i quali sono consapevoli della possibilità di poter ottenere lo stesso prodotto a prezzi diversi e possono risultare infastiditi da un repentino cambiamento di questi [12], oppure mettere in atto strategie in modo da tentare di ottenere un posto volo al prezzo per loro più vantaggioso. Per questo motivo per anni l'utilizzo di tecniche di RM è stato e continua ancora ad essere visto con diffidenza in settori diversi da quello dei voli aerei, ad esempio per quanto riguarda la vendita al dettaglio si stima che solo il 12% dei venditori utilizzi tecniche di ottimizzazione dei prezzi [3].

Grazie ad un'esperienza di tirocinio svolta nell'area RM di Alpitour S.p.A., azienda leader in Italia nel settore turistico, ho potuto osservare in prima persona i processi alla base della gestione della capacità e dei prezzi dei vettori aerei da loro utilizzati, in particolare è stata l'esperienza a contatto con gli analisti di dynamic pricing a farmi interessare al problema di pricing dinamico di posti volo. L'obiettivo di questa tesi è dunque l'implementazione di un algoritmo di pricing con previsione della domanda che è in generale utilizzabile in contesti di vendita di un singolo prodotto durante stagioni di vendita finite e consecutive senza possibilità di rifornimento prima della fine della stagione, proprio come avviene nel caso della vendita di biglietti aerei, in cui abbiamo una certa quantità di posti disponibili

e, una volta giunta la data di partenza, ogni posto non venduto risulta perso. Faremo opportune assunzioni riguardanti il contesto specifico in cui il modello proposto può essere utilizzato, come ad esempio il meccanismo di vendita e la forma della funzione di domanda.

L'organizzazione della tesi è la seguente. Nel primo capitolo discuteremo quali sono le differenze tra i casi ad inventario finito e infinito e ciò che ci aspettiamo da un modello come quello di cui ci occupiamo. Nel secondo capitolo verrà mostrato il modello di pricing scelto, che è quello proposto da Den Boer e Zwart in [7], e la sua implementazione, vedremo quali misure di performance saranno adottate per determinare la resa dei risultati e alcuni risultati teorici a supporto di essi. I risultati numerici sono riportati nel terzo capitolo, insieme ad alcune considerazioni sull'influenza del rapporto tra livello di capacità iniziale e lunghezza delle finestre di vendita sulla performance del modello. Infine nel quarto capitolo andremo ad applicare tutto ciò ai dati forniti da Alpitour S.p.A., facendo opportune considerazioni sull'applicabilità del modello al loro caso e sfruttando l'occasione per analizzare la sua performance utilizzando dati reali.

L'intero codice implementato ai fini di questo lavoro è stato scritto in linguaggio Matlab, per le analisi dei dati aziendali nel capitolo 4 è stato invece utilizzato Python.

Capitolo 1

Pricing con inventario finito

1.1 Exploration vs exploitation

L'obiettivo di un'azienda che venda un prodotto su un orizzonte temporale finito, con o senza possibilità di rifornimento, è la massimizzazione del guadagno derivante dalla vendita. Nel momento in cui è possibile variare il prezzo nel tempo, si apre il problema di dover trovare un compromesso tra lo scegliere i prezzi che massimizzino il profitto nel breve periodo e la necessità di variarli in modo da constatare quali siano i migliori prezzi da imporre. Nel primo caso si decide di sfruttare la conoscenza acquisita dallo storico delle vendite in modo da utilizzare quei prezzi che portano maggiore guadagno all'azienda, nel secondo si sfrutta la possibilità di variarli in modo da raccogliere maggiori informazioni sul comportamento dei clienti in base al prezzo proposto. È facilmente intuibile che utilizzare solamente la prima strategia, detta *pure exploitation*, non permette di capire quali sono effettivamente i prezzi ottimali, dato che vengono utilizzati sempre gli stessi ed è possibile che esistano altre scelte che porterebbero un profitto maggiore all'azienda. Nemmeno una strategia di pura esplorazione o *pure exploration* è ottimale, dato che, variando in continuazione i prezzi, otteniamo certamente maggiori informazioni sul comportamento dei clienti, ma manchiamo completamente l'obiettivo di massimizzare il profitto. È da tenere in considerazione anche il fatto che i possibili compratori potrebbero essere scoraggiati o addirittura trovare frustrante un repentino cambiamento dei prezzi, il che sarebbe un danno per la reputazione del venditore [12], inoltre nei contesti di vendita al dettaglio modificare i prezzi potrebbe comportare dei costi aggiuntivi che il venditore deve tenere in considerazione. Alla luce di ciò ogni politica di prezzatura dei prodotti deve tentare di bilanciare gli aspetti di esplorazione e sfruttamento dei dati di vendita già raccolti. Nella presente trattazione andremo a considerare un contesto in cui i costi di cambiamento dei prezzi sono nulli, in modo che sia possibile variare il prezzo in ogni momento (che è in un certo senso il caso della vendita di biglietti aerei).

L'idea a cui ci atterremo è quella di poter variare il prezzo durante l'orizzonte di vendita in determinati istanti di tempo (che possono corrispondere a ore, giorni ma anche settimane in base alle esigenze dell'azienda), in ciascuno di questi istanti andiamo a considerare i

prezzi già imposti e il rispettivo venduto per determinare la relazione tra prezzo e domanda (che sarà rappresentata da una funzione di domanda dipendente da un numero fisso di parametri sconosciuti al venditore) e, di conseguenza, qual è il miglior prezzo da scegliere.

Le politiche di pricing dinamico possono essere suddivise grossolanamente in politiche di *learning passivo* (anche detto *certainty equivalent pricing*, che abbrevieremo con CEP) e di *learning attivo*. Nel primo caso in ogni istante temporale si va a scegliere il prezzo che è ottimale in base alla stima della probabilità di vendita a quel determinato prezzo, senza tentare in modo diretto una qualche esplorazione dei prezzi. Nel secondo caso si può decidere in base alla situazione di scegliere un prezzo diverso da quello ottimale, in modo da introdurre della variazione aggiuntiva nei prezzi. Andiamo ora a capire in quali casi è opportuno utilizzare le une o le altre.

1.2 Inventario infinito

La scelta di una strategia di pricing attiva o passiva è ovviamente influenzata dal tipo di problema che si sta affrontando, può sembrare che usare una politica di *learning attivo* sia migliore in generale, in quanto permette di avere una maggiore esplorazione dei prezzi, tuttavia mostreremo come questo non sia necessariamente vero, infatti una politica passiva performa bene nei casi in cui la capacità iniziale di inventario è finita e non c'è possibilità di rifornimento. Ciò non è tuttavia vero nel caso di inventario infinito.

Keskin e Zeevi dimostrano in [9] che in questo ultimo caso la politica CEP non performa bene poiché pone troppa enfasi sulla scelta del prezzo ottimale, questo porta i parametri della domanda a convergere ad un valore *non-informativo* che è diverso da quello vero, di conseguenza il venditore non arriverà mai a determinare quali sono i prezzi ottimali. Il fenomeno in questione viene chiamato dagli autori *incomplete learning*. Questo fenomeno può essere evitato forzando l'esplorazione dei prezzi, cosa che avviene come già detto nelle politiche di learning attivo.

Un esempio di questo tipo di strategia è dato da Den Boer e Zwart in [6], dove viene utilizzata una politica da loro chiamata *controlled variance pricing* (abbreviata in CVP). Questa consiste nello scegliere, nel momento in cui non si è osservata abbastanza varianza nei prezzi, un prezzo diverso da quello ottimale che è scelto in un suo intorno che va a rimpicciolirsi via via che si avvicina la fine della vendita. Andando a considerare il rate al quale cresce il regret, ovvero la perdita di ricavo dovuta all'utilizzo di prezzi diversi da quelli ottimali, diversi autori (ad esempio [4], [5]) dimostrano come nel caso di inventario infinito il risultato migliore ottenibile, ovvero il peggior rate di crescita del regret, sia $Regret(T) = O(\sqrt{T})$, dove T è l'orizzonte temporale di vendita. In particolare nel caso dell'utilizzo di CVP il regret cresce con rate $O(T^{\frac{1}{2}+\delta})$ con $\delta > 0$ arbitrariamente piccolo.

1.3 Inventario finito

Il caso che andiamo a considerare in questa tesi è quello di capacità di inventario finita e senza possibilità di rifornimento. A differenza di quanto riportato per il caso infinito, utilizzare una politica di learning attivo non è necessario, in quanto si può dimostrare una proprietà del CEP in caso finito detta *learning endogeno* ([7]). Essa consiste nella capacità dei prezzi di variare "da soli", ovvero avviene una sorta di esplorazione indiretta senza che ci sia necessità di forzarla come nel caso infinito. Questa proprietà deriva dal fatto che nel caso finito i prezzi ottimali dipendono non solo dalla distanza dall'istante di chiusura della vendita ma anche dal livello di inventario rimanente. In generale per quanto riguarda la vendita di prodotti senza rifornimento non è garantita al cliente la disponibilità del prodotto durante tutta la finestra di vendita, dunque il valore del singolo item si alza all'abbassarsi delle scorte. Questo è quello che ci aspettiamo succeda nel caso di vendita di biglietti aerei per viaggi turistici.

Il modello di pricing dinamico applicabile al contesto finito che andiamo a prendere in considerazione in questo lavoro e quello di Den Boer e Zwart descritto in [7]. In particolare vedremo come in questo caso il regret cresce con rate pari a $O(\log^2(T))$, che è addirittura migliore di quello ottenibile nel caso infinito. Il modello in questione è tuttavia ibrido, nel senso che in alcune condizioni si può forzare la variazione dei prezzi con quello che viene definito *minimal active learning* o MAL, ovvero la scelta di un prezzo diverso da quello ottimale nei casi in cui rimane un unico item in vendita o ci troviamo alla fine della stagione di vendita e non si è osservata abbastanza variazione nei prezzi. Vedremo come l'attivazione di questa fase di MAL dipende da un parametro ϵ che, se scelto abbastanza piccolo, esclude la possibilità di learning attivo, riducendo il modello a puro learning passivo.

Capitolo 2

Il modello

Nel seguente capitolo ci occuperemo di illustrare il modello di pricing dinamico con previsione della domanda adottato per risolvere il problema delineato nel capitolo 1. Vedremo inoltre alcuni risultati teorici relativi alla sua performance. Il modello e la conseguente implementazione dell'algoritmo utilizzato si rifanno a quelli già proposti da den Boer e Zwart in [7], con opportune modifiche effettuate in modo da renderli applicabili al nostro obiettivo di vendita di biglietti aerei.

2.1 Struttura generale

Prima di introdurre il modello di cui sopra è necessario specificare le assunzioni sulla quale esso si basa, nel capitolo 4 analizzeremo inoltre se queste assunzioni sono applicabili (o quantomeno adattabili) al modello di vendita dell'azienda Alpitour S.p.A. Il contesto a cui ci restringiamo è quello di un'azienda monopolista, non prenderemo dunque in considerazione alcuna interazione con altri venditori e perciò ci occuperemo di ottimizzare il profitto della vendita ipotizzando che i clienti non abbiano alternative di spesa. Le vendite vengono effettuate durante T *selling season* o finestre di vendita finite e consecutive di uguale lunghezza S , all'inizio delle quali la capacità dell'inventario C viene ripristinata. Nel nostro caso la singola *selling season* rappresenta la finestra di vendita di uno specifico volo e l'inventario è rappresentato dai posti disponibili sul vettore, assumiamo inoltre che questa capacità sia uguale per ogni *selling season*. Una *selling season* è divisa a sua volta in un numero finito di istanti temporali in cui in generale varia il prezzo del prodotto (biglietto) e possono avvenire le vendite. Una forte assunzione che facciamo è che in un istante temporale possa avvenire un'unica vendita, la distribuzione di domanda D è quindi una Bernoulli la cui media (e quindi anche la probabilità di vendita) dipende dal prezzo imposto e da alcuni parametri che specificheremo in seguito. Di conseguenza ipotizziamo implicitamente che ogni vendita sia indipendente dalle altre. I posti volo non venduti alla fine di una *selling season* sono considerati vendite mancate. Non consideriamo inoltre la possibilità di overbooking. Il prezzo scelto all'istante t p_t appartiene all'insieme continuo $[p_{min}, p_{max}]$ dove ovviamente $0 < p_{min} < p_{max}$ sono il minimo e il massimo prezzo ammissibili.

In ogni istante di tempo t si considerano i dati di vendita osservati su tutte le selling season già svoltesi definiti da

$$\mathcal{D}_{t-1} = \{(p_i, d_i) \in [p_{min}, p_{max}] \times \{0,1\}, i = 1, \dots, t-1\}$$

e si utilizzano per determinare il prezzo p_t , a questo punto si simula la vendita e se questa avviene viene scalato un item dall'inventario e aggiunto il ricavo della vendita al ricavo totale o *revenue*. Procediamo così iterativamente fino alla fine di tutte le selling season. Chiamiamo *pricing strategy* o *pricing policy* ψ un qualsiasi metodo che, dato l'insieme \mathcal{D}_{t-1} definito sopra, è in grado di generare come output il prezzo p_t da imporre nell'istante temporale t .

L'algoritmo implementato sulla base di questo modello consiste per ogni istante temporale di una fase di stima dei parametri della domanda e una fase di scelta del prezzo da imporre alle quali fa seguito poi la simulazione della domanda. Vediamo ora nel dettaglio le due fasi.

2.1.1 Fase di stima dei parametri

Come già anticipato assumiamo che in ogni istante temporale la domanda corrisponda alla realizzazione di una variabile random $D(p)$ dipendente dal prezzo p distribuita come una Bernoulli di media

$$E[D(p)] = h(\beta_0 + \beta_1 p),$$

dove h è una funzione con specifiche caratteristiche di continuità e β_0, β_1 sono due parametri appartenenti all'insieme compatto $B \in \mathbb{R}^2$ le cui caratteristiche dipendono dalla specifica funzione h scelta. Quest'ultima è definita per ogni prezzo appartenente a $[p_{min}, p_{max}]$ e su questo intervallo deve ovviamente avere valore compreso tra 0 e 1. Dato che la funzione h rappresenta la probabilità di vendita ad un determinato prezzo, vogliamo che essa sia decrescente in p , poiché questo è l'andamento generale che osserviamo nelle vendite di biglietti aerei. Per questo motivo imponiamo $\beta_1 < 0$ e che la derivata di h sia positiva.

Il ricavo atteso ottenuto imponendo il prezzo p sarà dunque $p \cdot h(\beta_0 + \beta_1 p)$, il nostro obiettivo nella successiva fase di ottimizzazione sarà dunque di imporre il prezzo in $[p_{min}, p_{max}]$ che massimizza il ricavo atteso. Tuttavia in generale non è detto che questo massimo esista e sia unico, è possibile però dimostrare che, sotto opportune condizioni, ciò è verificato. Le condizioni a cui facciamo riferimento sono riportate in [10] e sono rispettate dalle funzioni $h(x) = x$, $h(x) = \exp(x)$, $h(x) = \text{logit}(x) = \exp(x)/(1 + \exp(x))$, le quali sono tra le più semplici comunemente utilizzate per modellare la funzione di domanda.

Una volta raccolti i dati \mathcal{D}_t possiamo effettuare una stima dei parametri. Nel concreto questa avviene tramite il metodo di massimizzazione della funzione di verosimiglianza. Avendo assunto una domanda di tipo Bernoulli la funzione di verosimiglianza sarà data da

$$\mathcal{L}_t(\beta|\mathcal{D}_t) = \prod_{i=1}^t [d_i h(\beta_0 + \beta_1 p) + (1 - d_i)(1 - h(\beta_0 + \beta_1 p))]. \quad (2.1)$$

Nell'algoritmo implementato viene massimizzata la funzione di log-verosimiglianza

$$\log \mathcal{L}_t(\beta|\mathcal{D}_t) = \sum_{i=1}^t \log [h(\beta_0 + \beta_1 p)^{d_i} (1 - h(\beta_0 + \beta_1 p))^{(1-d_i)}] \quad (2.2)$$

tramite un ottimizzatore built-in di MATLAB. Se la soluzione $\hat{\beta}_t$ si trova al di fuori dell'insieme B viene proiettata al suo interno tramite minimizzazione della distanza euclidea tra $\hat{\beta}_t$ e $\beta \in B$. Rimandiamo all'appendice A per una possibile definizione dell'insieme B e per le condizioni su $h(x)$ citate prima.

2.1.2 Fase di ottimizzazione

Una volta stimati i parametri della funzione di domanda β assumiamo che questi siano i veri parametri (che chiameremo invece $\bar{\beta}$) e passiamo alla fase di ricerca del prezzo ottimale. Sia $\mathcal{X} = \{(c, s) | c = 0, \dots, C, s = 1, \dots, S\}$ lo spazio dei possibili stati unità residue-periodo. Chiamiamo *policy* (deterministica e stazionaria) $\pi \in \Pi$ la matrice le cui entrate $\pi(c, s)$ rappresentano il prezzo da imporre se ci troviamo nel periodo s della selling season con capacità residua c . Chiamiamo inoltre *value function* la funzione $V_{\bar{\beta}}^{\pi}(c, s)$ che rappresenta il ricavo atteso che possiamo ancora accumulare se ci troviamo nel periodo s con livello di inventario c seguendo la policy π . Assumiamo di trovarci nello stato $(c, s) \in \mathcal{X}$. Sappiamo che, se $c > 0$ e $s < S$, una volta stimati e assunti veri i parametri β e imposto il prezzo $\pi(c, s)$, ci aspettiamo di osservare una vendita con probabilità $h(\beta_0 + \beta_1 \pi(c, s))$ o nessuna con probabilità $1 - h(\beta_0 + \beta_1 \pi(c, s))$. Nel primo caso guadagniamo $\pi(c, s)h(\beta_0 + \beta_1 \pi(c, s))$ e ci spostiamo nello stato $(c - 1, s + 1)$, mentre nel secondo caso non otteniamo nessun guadagno e ci spostiamo in $(c, s + 1)$. In particolare se $c = C$ con le stesse modalità ci spostiamo in $(C, 1)$ (ovvero la vendita si ferma e inizia la successiva selling season) oppure $(C, s + 1)$, se invece $s = S$ ci spostiamo sempre in $(C, 1)$, guadagnando $\pi(c, S)$ con probabilità $h(\beta_0 + \beta_1 \pi(c, S))$ e 0 con probabilità $1 - h(\beta_0 + \beta_1 \pi(c, S))$.

Per quanto detto sopra è possibile calcolare ricorsivamente la value function tramite

$$\begin{aligned} V_{\bar{\beta}}^{\pi}(c, s) = & (1 - h(\beta_0 + \beta_1 \pi(c, s)))V_{\bar{\beta}}^{\pi}(c, s + 1) \\ & + h(\beta_0 + \beta_1 \pi(c, s))(\pi(c, s) + V_{\bar{\beta}}^{\pi}(c - 1, s + 1)) \end{aligned} \quad (2.3)$$

imponendo $V_{\bar{\beta}}^{\pi}(0, s) = 0$, in quanto nel momento in cui non abbiamo unità da vendere non abbiamo nemmeno possibilità di guadagno, e $V_{\bar{\beta}}^{\pi}(c, S + 1) = 0$, che possiamo pensare come il guadagno atteso nel momento in cui l'aereo decolla, quindi non è più possibile vendere. Sfruttando quanto detto, se ci troviamo nello stato (c, s) con stima dei parametri della domanda β possiamo imporre il prezzo ottimale $\pi_{\bar{\beta}}^*(c, s)$ che massimizza

$$V_\beta(c, s) = \max_{p \in [p_{min}, p_{max}]} (1 - h(\beta_0 + \beta_1 p)) V_\beta(c, s + 1) + h(\beta_0 + \beta_1 p) (p + V_\beta(c - 1, s + 1)) \quad (2.4)$$

L'esistenza di una policy ottimale per ogni valore di β è garantita dalla proposizione 4.4.3 di [11]. Notiamo che il valore $V_{\bar{\beta}}(C, 1)$ calcolato utilizzando i veri parametri della domanda rappresenta il vero ricavo atteso totale di una singola selling season, cioè il ricavo che ci aspettiamo a prescindere dai parametri β stimati. Come vedremo in 2.2 questa quantità ci servirà per determinare una misura di performance dell'algoritmo utilizzato. Notiamo infine che il prezzo ottimale $\pi_{\bar{\beta}}^*(c, s)$ è un numero in \mathbb{R} , in un contesto di vendita reale non sarà dunque possibile in generale scegliere esattamente questo prezzo ma andrà arrotondato almeno al secondo decimale in modo da essere utilizzabile.

2.2 Misure di performance

Come già osservato la formulazione 2.4 ci permette di ottenere, utilizzando i veri parametri della domanda $\bar{\beta}$, il vero ricavo atteso totale $V_{\bar{\beta}}(C, 1)$. Questo rappresenta dunque il migliore ricavo che possiamo ottenere, imponendo i rispettivi prezzi ottimali dati dalla strategia ψ_{opt} . Ci aspettiamo dunque che qualsiasi altra strategia ψ utilizzata per determinare i prezzi da imporre in ogni istante temporale performi peggio di ψ_{opt} . Un modo per confrontare la performance di diverse pricing policy è dato dal regret, definito in generale da

$$\text{Regret} = E_\psi \left[\sum_{t=1}^S (r(p_{opt}) - r(p_t)) \right]$$

per una singola selling season. Come notiamo esso è dato dal valore atteso di perdita di revenue su tutto il periodo di vendita dovuto al fatto che stiamo utilizzando i prezzi p_t generati dalla policy ψ invece dei prezzi ottimali. Estendendo la misura a tutto l'orizzonte temporale possiamo scrivere dunque

$$\text{Regret}(T) = TV_{\bar{\beta}}(C, 1) - \sum_{i=1}^{TS} E_\psi [p_i \min\{d_i, c_i\}]$$

dove T è il numero di selling season. Osserviamo che per minimizzare il regret, e quindi la perdita attesa, è necessario massimizzare il ricavo atteso dalla strategia ψ . Come già specificato il regret dipende dai veri parametri della domanda $\bar{\beta}$ che in generale non sono noti al venditore, dunque questa misura non può essere utilizzata nella pratica per determinare la strategia ottimale, ma è utile nelle simulazioni per avere una misura di performance del modello utilizzato. La misura che andremo ad utilizzare maggiormente per riportare i risultati computazionali è il regret relativo

$$\text{Relative regret}(SS) = \frac{\text{Regret}(SS)}{SSV_{\bar{\beta}}(C, 1)}$$

dove $SS = 1, \dots, T$ è il numero delle selling season già trascorse. Utilizzare il regret relativo ci permette di avere un'idea più immediata del regret rapportato alla miglior ricavo

atteso dopo SS finestre di vendita.

Un'altra informazione relativa al modello che ci interessa valutare è la quantità di variazione di prezzi che esso genera, anch'essa in generale legata alla strategia ψ utilizzata. Come misura di dispersione dei prezzi possiamo utilizzare, come vedremo più avanti, il minimo autovalore $\lambda_{min}(P_t)$ della matrice

$$P_t = \begin{pmatrix} t & \sum_{i=1}^t p_t \\ \sum_{i=1}^t p_t & \sum_{i=1}^t p_t^2 \end{pmatrix} \quad (2.5)$$

che dimostreremo essere legato alla velocità di convergenza delle stime dei parametri a $\bar{\beta}$.

2.3 Risultati teorici

Avendo descritto il modello scelto per prezzare un prodotto con inventario finito, possiamo mostrare ora alcuni risultati teorici relativi alla sua performance. I risultati di seguito riportati sono stati dimostrati da Den Boer e Zwart in [6], [7] e [8].

Andiamo a mostrare per prima cosa come la velocità di convergenza dei parametri della domanda è legata all'autovalore $\lambda_{min}(P_t)$ della matrice 4.3. Definiamo la variabile random

$$T_\rho = \sup\{t \in \mathbb{N} \mid \nexists \beta \in B \text{ with } \|\beta - \bar{\beta}\| \leq \rho \text{ e } \frac{\partial}{\partial \beta} \mathcal{L}_t(\beta | \mathcal{D}_t) = 0\} \quad (2.6)$$

che rappresenta l'ultimo istante temporale in cui il massimo della funzione di log-verosimiglianza non esiste in un intorno di $\bar{\beta}$ di raggio ρ .

La seguente proposizione dimostra l'esistenza asintotica di $\hat{\beta}$ e fornisce il tasso di convergenza quadratico di questa stima (per la dimostrazione si veda [8] pag. 389).

Proposizione 2.3.1 *Sia L una funzione non-random su \mathbb{N} tale che $\lambda_{min}(P_t) \geq L(t) > 0$ q.c. per ogni $t \geq t_0$ e $t_0 \in \mathbb{N}$ e tale che $\inf_{t \geq t_0} L(t)t^{-\alpha} > 0$ per qualche $\alpha > \frac{1}{2}$. Allora esiste un ρ_1 tale che per ogni $0 < \rho \leq \rho_1$ si ha $T_\rho < \infty$ q.c., $E[T_\rho] < \infty$ e*

$$E[\|\hat{\beta} - \bar{\beta}\|^2 \mathbf{1}_{t > T_\rho}] = O\left(\frac{\log(t)}{L(t)}\right).$$

Come già anticipato possiamo notare che il rate di crescita di $\lambda_{min}(P_t)$ influenza la velocità di convergenza dei parametri.

Ciò che andremo a mostrare a questo punto è quella che dagli autori viene chiamata proprietà di *learning endogeno*, ovvero la capacità dei prezzi, in un contesto di inventario e orizzonte di vendita finiti, di variare abbastanza da avvicinarsi ai prezzi ottimali anche senza l'ausilio di una politica di learning attivo, in particolare i parametri vengono imparati velocemente quando viene utilizzata una policy vicina a quella ottimale. Questa proprietà è legata al valore $\lambda_{min}(P_t)$, infatti dimostreremo che $\lambda_{min}(P_t)$ è strettamente

crescente se durante una selling season vengono imposti dei prezzi vicini a quelli ottimali. Utilizzando infatti prezzi vicini a quelli ottimali $\lambda_{min}(P_t)$ cresce linearmente e quindi il rate di convergenza dei parametri della domanda diventa $E[\|\hat{\beta} - \bar{\beta}\|^2 \mathbf{1}_{t > T_\rho}] = O(\frac{\log(t)}{t})$, il che implica una convergenza decisamente veloce.

Teorema 2.3.1 *Sia $1 < C < S$ e $k \in \mathbb{N}$. Esiste una costante $v_0 > 0$ e un intorno aperto $U \subset B$ contenente $\bar{\beta}$ tali che se*

$$p_{s+(k-1)S} = \pi^*(c_{s+(k-1)S}, s)$$

per ogni $s = 1, \dots, S$ e qualche sequenza $\beta_1, \dots, \beta_S \in U$, allora

$$\min_{1 \leq s, s' \leq S} |p_{s+(k-1)S} - p_{s'+(k-1)S}| \geq v_0/2$$

e

$$\lambda_{min}(P_{kS}) - \lambda_{min}(P_{(k-1)S}) \geq \frac{1}{8} v_0^2 (1 + p_{max}^2)^{-1}.$$

Nel teorema k indica il numero della selling season e $\pi^*(c, s)$ il prezzo ottimale nello stato (c, s) . La condizione $1 < C < S$ è necessaria affinché ci sia variazione di prezzo all'interno di una selling season. Se $C = 1$ infatti rischiamo di vendere nel primo istante temporale e quindi di chiudere la vendita senza aver avuto la possibilità di imporre prezzi diversi da quello iniziale. Se invece $C \geq S$ avremmo una quantità di prodotto pari a $C - S$ che non verrà venduta in alcun caso, i restanti S invece hanno la possibilità di essere venduti ciascuno in un unico periodo. In questo modo il problema diventa una ripetizione per S volte del caso $C = 1, S = 1$ in cui, come già spiegato, non avviene nessuna dispersione di prezzi. Dato che in questi casi non avviene il learning endogeno sarà necessaria una politica di learning attivo per convergere ai parametri e prezzi ottimali. Per la dimostrazione del teorema si veda [7] pag. 21.

In [7] viene fornito esplicitamente un lower bound per la costante v_0 . Come vedremo questa costante entrerà in gioco nel teorema riguardante l'andamento del regret per la specifica policy implementata per risolvere il problema.

2.4 Implementazione

Vediamo ora nel dettaglio com'è stata implementata la pricing strategy utilizzata per risolvere il problema facendo riferimento all'algoritmo 1.

Nella fase di inizializzazione scegliamo il valore della costante ϵ che ha la funzione di parametro soglia. Imponiamo inoltre i primi due prezzi che insieme a $\hat{\beta}_1$ ci serviranno per calcolare la prima stima $\hat{\beta}_2$. Dopodiché per ogni istante temporale se il livello di inventario è pari a 0 chiudiamo la vendita e ci spostiamo alla successiva selling season, altrimenti, dopo aver campionato la domanda al tempo t e aver calcolato una nuova stima dei parametri, mettiamo in atto una serie di verifiche che ci permettono di capire se è necessario

Initialization Choose $0 < \epsilon < (p_{\max} - p_{\min})/4$, $\hat{\beta}_1$ and $p_1, p_2 \in [p_{\min}, p_{\max}]$, $p_1 \neq p_2$

for $t \geq 2$ **do**

Sample the demand d_t at price p_t ;

if $c_{t+1} = 0$ **then**

Go to the start of the next selling season;

else if $c_{t+1} > 0$ **then**

Estimate $\hat{\beta}_t$;

Choose $p_{ceq} = \pi_{\hat{\beta}_t}^*(c_{t+1}, s_{t+1})$;

if (a) $c_{t+1} = 1$ or $s_{t+1} = S$ and
(b) $|p_i - p_j| < \epsilon$ for all $1 \leq i, j \leq t$ with $SS_i = SS_{t+1}$ and
(c) $|p_i - p_{ceq}| < \epsilon$ for all $1 \leq i \leq t$ with $SS_i = SS_{t+1}$ **then**

Choose $p_{t+1} \in (\{p_{ceq} - 2\epsilon, p_{ceq} + 2\epsilon\} \cap [p_{\min}, p_{\max}])$;

else

Set $p_{t+1} = p_{ceq}$;

end

end

Algorithm 1: Pricing strategy $\Phi(\epsilon)$

quello che gli autori in [7] chiamano *minimal active learning*, ovvero una variazione attiva dei prezzi. Tramite la condizione (a) controlliamo se ci troviamo alla fine della selling season oppure se è rimasto un solo articolo nell'inventario, in tal caso controlliamo se i prezzi all'interno della selling season si discostano tra loro di almeno ϵ (condizione (b)) e si discostano dal prezzo scelto p_{ceq} sempre di almeno ϵ (condizione (c)). In questo caso si sceglie come nuovo prezzo una variazione di 2ϵ da p_{ceq} che sia all'interno del range dei prezzi possibili (la condizione $0 < \epsilon < (p_{\max} - p_{\min})/4$ garantisce che almeno una delle due possibili variazioni di prezzo si trovi all'interno di tale intervallo). Nel caso in cui almeno una di queste condizioni non risulti soddisfatta andremo a imporre il prezzo p_{ceq} nel prossimo istante temporale. La fase di *minimal active learning* è necessaria solamente in quei casi in cui, giunti alla fine della selling season con un'unica unità di prodotto rimanente, non si è osservata abbastanza variazione dei prezzi, dunque andiamo a gestirla in maniera attiva almeno in un istante temporale. Ciò è utile poiché se t è piccolo è possibile che la stima $\hat{\beta}_t$ sia ancora lontana dal vero valore $\bar{\beta}$, dunque agendo in questo modo garantiamo una minima dispersione dei prezzi che altrimenti non avrebbe luogo. La politica dipende da ϵ nel senso che, scegliendo ϵ abbastanza piccolo, se $\hat{\beta}_t$ è abbastanza vicino a $\bar{\beta}$ le condizioni (a), (b) e (c) non vengono mai soddisfatte insieme, e dunque la policy rimane in tutto e per tutto una policy di learning passivo.

In concreto sono state implementate in linguaggio MATLAB cinque funzioni:

- **Pricing_Strategy**: prende in ingresso tutti i dati che definiscono il contesto di vendita e per ogni istante temporale $t = 1, \dots, S \cdot T$ simula la domanda, dopodiché raccoglie tutti i dati relativi alle vendite precedenti e li passa a **Estimation_Phase** in modo da trovare la nuova stima dei parametri $\hat{\beta}_t$. Utilizza poi questa per determinare tramite **Optimization_Phase** il prezzo ottimale p_{t+1} che verrà scelto nel successivo periodo. Viene effettuato inoltre il controllo MAL per capire se è necessario scegliere un prezzo diverso. In ogni caso se la capacità termina si ferma la vendita e si continua a piena capacità dall'istante temporale che corrisponde all'inizio della successiva selling season.
- **Estimation_Phase**: raccoglie tutti i dati relativi alle vendite passate a partire dall'istante $t = 1$ fino a $t - 1$ e, utilizzando come valore iniziale l'ultima stima di β , cerca i valori di β_0 e β_1 che minimizzano **LogLikelihood_Function**. Si determina quindi se il valore trovato si trova all'interno dell'insieme B scelto e in caso negativo si sceglie come $\hat{\beta}_t$ la proiezione di questo valore sull'insieme B .
- **Optimization_Phase**: calcola per ogni coppia (c, s) di livello di inventario e istante nella selling season il prezzo che minimizza **Value_Function**, in modo da fornire il prezzo ottimale da imporre nell'istante t .
- **LogLikelihood_Function**: utilizza i dati relativi alle vendite passate a partire dall'istante $t = 1$ fino a t per determinare la funzione di verosimiglianza al tempo t dipendente dai parametri β_0 e β_1 come in 2.2. Questa verrà utilizzata come handle function in **Estimation_Phase** per trovare i valori dei parametri che la massimizzano.

- **Value_Function**: calcola il valore della value function per la coppia (c, s) dove c è la quantità di prodotto rimanente e s è il periodo nella selling season. Viene inoltre utilizzata come handle function in **Optimization_Phase** per trovare il prezzo ottimale al tempo t .

Den Boer e Zwart sempre in [7] (pag. 26) dimostrano un importante risultato relativo alla policy appena illustrata. Come già detto se $\hat{\beta}_t$ è abbastanza vicino a $\bar{\beta}$ la convergenza dei parametri stimati a quelli veri diventa molto veloce e di conseguenza la policy si avvicina velocemente a quelli che sono i prezzi ottimali. Abbiamo per cui il seguente risultato sul comportamento del regret della strategia $\Phi(\epsilon)$ che dipende dal numero T delle selling season.

Teorema 2.4.1 *Sia $1 < C < S$ e $\epsilon < v_0/2$ con v_0 come in 2.3.1. Allora*

$$\text{Regret}(\Phi(\epsilon), T) = O(\log^2(T)).$$

Pur essendo possibile esplicitare un lower bound per la costante v_0 , nella pratica non è necessario farlo né conoscere esplicitamente v_0 poiché in base al risultato del teorema 2.4.1 se l'andamento del regret ricavato usando la strategia $\Phi(\epsilon)$ è $O(\log^2(T))$ ciò significa che il valore di ϵ scelto è abbastanza piccolo da soddisfare la condizione $\epsilon < v_0/2$.

Capitolo 3

Risultati numerici

In questa sezione andremo a riportare e commentare i risultati forniti dall'algoritmo implementato sulla base di quanto visto in 2. Lo scopo è quello di mostrare in particolare l'andamento del regret e delle stime dei parametri utilizzando dei valori fittizi di capacità, durata e limiti di prezzo in modo da capire come questi influenzano i risultati. In particolare vedremo come il rapporto C/S influenza il regret e l'accuratezza nella stima dei parametri, oltre al rate a cui λ_{min} cresce.

3.1 Simulazione di vendita

Come primo esempio scegliamo $C = 10$, $S = 20$, $T = 100$, $p_{min} = 1$, $p_{max} = 20$, $\bar{\beta} = [2, -0.4]$ e come funzione $h(x) = \text{logit}(x)$ con $x = \bar{\beta}_0 + \bar{\beta}_1 p$ (3.1). Ovviamente va sempre controllato che i veri parametri β scelti siano all'interno dell'insieme B definito. I dati sono gli stessi scelti da Den Boer e Zwart in [7] in modo da avere un riscontro sull'esattezza dell'implementazione. I risultati riportati sono dati dalla media su 100 iterazioni.

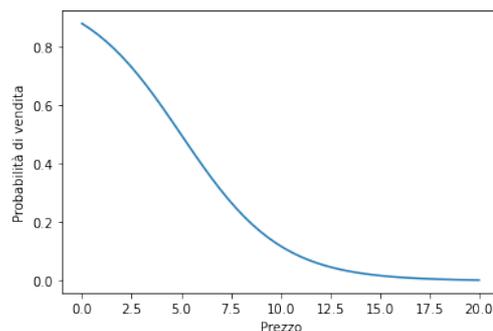


Figura 3.1: Grafico della funzione $E[D(p)] = \text{logit}(\bar{\beta}_0 + \bar{\beta}_1 p)$

In figura 3.2 sono riportati l'andamento del regret cumulato e relativo rispetto al susseguirsi delle selling season. Come notiamo dalla figura sulla destra dopo un certo numero

di selling season il regret relativo sembra attestarsi sotto la soglia del 10%-15%. In figura 3.3 abbiamo riportato il regret scalato di un fattore $\log^2(SS)$, dove $SS = 1, \dots, T$ è il numero delle selling season trascorse, in modo da poter osservare il comportamento descritto in 2.4.1. Il regret scalato sembra raggiungere il bound dopo circa 20 finestre di vendita, comportamento che possiamo riscontrare nel rallentamento della crescita del regret.

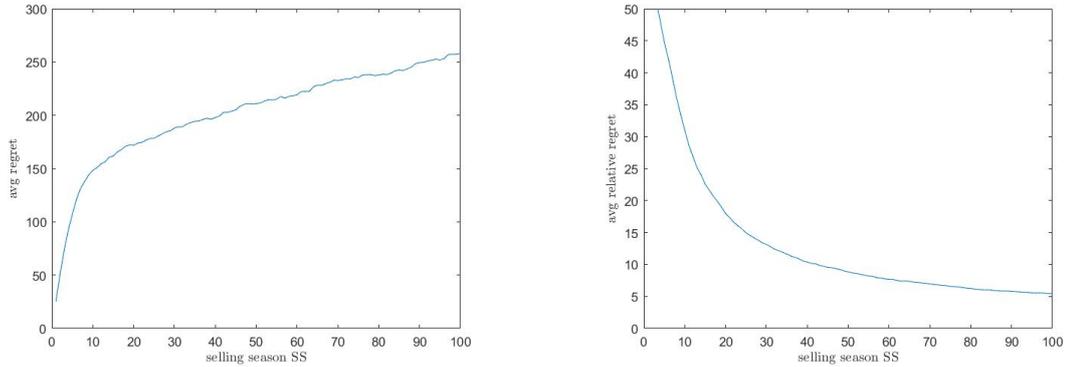


Figura 3.2: Regret e regret relativo: media su 100 simulazioni

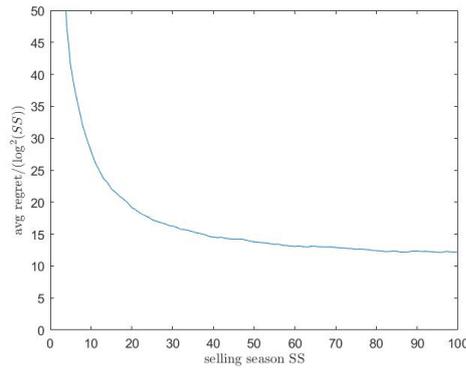


Figura 3.3: Regret/ $\log^2(SS)$: media su 100 simulazioni

Come già accennato i risultati ottenuti dipendono indirettamente dal rapporto C/S , l'esempio che abbiamo riportato si inserisce nel caso $C/S = 1/2$. Vedremo ora come i risultati riportati siano in linea con quelli ottenuti andando a variare il livello iniziale di inventario e la lunghezza della selling season.

3.2 L'effetto del livello di inventario

Fissiamo il numero di istanti temporali nella selling season $S = 10$ e vediamo come variano i risultati al variare della capacità. Scegliamo $C = 1, \dots, 9$ mantenendoci nel caso $C < S$ e,

come prima, riportiamo in 3.1 i dati relativi ad una media su 100 iterazioni. Manteniamo gli stessi valori di $T, p_{min}, p_{max}, \beta$ e h della simulazione precedente.

C	Revenue ottimale	Regret(100)	Regret relativo (100)	$\ \hat{\beta}_{TS} - \bar{\beta}\ $
1	800	166.77	20.85 %	0.598
2	1379	123.44	8.95 %	0.217
3	1806	157.91	8.74 %	0.225
4	2110	205.79	9.75 %	0.322
5	2310	238.51	10.33 %	0.334
6	2424	274.11	11.31 %	0.336
7	2478	325.58	13.14 %	0.353
8	2496	335.70	13.45 %	0.419
9	2500	452.40	18.09 %	0.462

Tabella 3.1: Risultati per $C = 1, \dots, 9$: media su 100 simulazioni

In 3.1 sono riportati il profitto che si otterrebbe utilizzando i prezzi ottimali, calcolato come $V_{\bar{\beta}}(C,1) \cdot T$, la perdita totale dovuta all'utilizzo dell'algoritmo proposto, il regret relativo nell'ultimo istante temporale e l'errore tra l'ultima stima di β e il suo vero valore. Come notiamo il regret relativo è più basso per valori minori di C e va ad aumentare all'avvicinarsi di C al valore S . Ciò avviene poiché, nel momento in cui la quantità di prodotto in vendita si avvicina al numero di istanti temporali in cui la vendita può avvenire, ci ritroviamo in una situazione in cui è difficile vendere tutto il prodotto entro la fine della finestra di vendita. Questo comporta una minore possibilità per l'algoritmo di imparare i prezzi ottimali, poiché non c'è quasi variazione nel valore marginale di un singolo prodotto $\Delta V_{\beta}(c, s) = V_{\beta}(c, s) - V_{\beta}(c - 1, s)$ e quindi abbiamo poca variazione dei prezzi proposti. Questo si riflette anche nelle stime $\hat{\beta}_t$, che come vediamo continuano a scendere allo scendere del valore di C , questo perché la minore variazione dei prezzi influisce sulla qualità della stima dei parametri.

Per quanto riguarda invece la performance nel caso in cui C è uguale a 1, vediamo che la stima dei parametri è molto debole, questo perché essendoci un unico prodotto in inventario la vendita termina molto prima della fine della selling season, addirittura portebbe finire nel primo istante di vendita, dunque la quantità di dati utilizzati nella fase di stima dei parametri è troppo bassa per avere un buon risultato, in quanto durante tutto l'orizzonte di vendita non avviene abbastanza dispersione dei prezzi.

3.3 L'effetto della lunghezza della selling season

Consideriamo gli stessi dati degli esempi precedenti, ma questa volta fissiamo il livello di inventario iniziale $C = 5$ e facciamo variare il numero di periodi temporali in ogni finestra di vendita $S = 6, \dots, 14$. Nella tabella 3.2 riportiamo come prima i risultati medi su 100 iterazioni per ogni valore di S .

Il comportamento osservato è in un certo senso speculare a quello osservato in 3.1. Mantenendo fisso il livello di inventario notiamo che, all'aumentare del numero di istanti

S	Revenue ottimale	Regret(100)	Regret relativo (100)	$\ \hat{\beta}_{TS} - \bar{\beta}\ $
6	1494	286.20	19.16 %	0.352
7	1725	278.12	16.13 %	0.351
8	1938	277.00	14.29 %	0.343
9	2133	246.49	11.56 %	0.336
10	2310	238.51	10.33 %	0.334
11	2470	251.92	10.20 %	0.334
12	2617	221.29	8.46 %	0.331
13	2751	195.59	7.11 %	0.324
14	2874	210.77	7.33 %	0.295

Tabella 3.2: Risultati per $S = 6, \dots, 14$: media su 100 simulazioni

nella finestra di vendita, diminuisce il regret relativo. Come spiegato prima, andando ad aumentare S stiamo dando all'algorithm maggiore possibilità di variare i prezzi e quindi di migliorare la stima dei parametri.

Possiamo affermare che un compromesso ragionevole tra regret relativo e errore nella stima dei parametri sia dato dal caso $C = 5$ e $S = 10$, quindi potrebbe aver senso utilizzare la policy proposta nei casi in cui il rapporto C/S è inferiore o uguale a $1/2$. Facciamo notare che questo è esattamente il caso in cui ci troviamo nell'esempio proposto in 3.1, i cui risultati sono in linea con quanto trovato fin'ora.

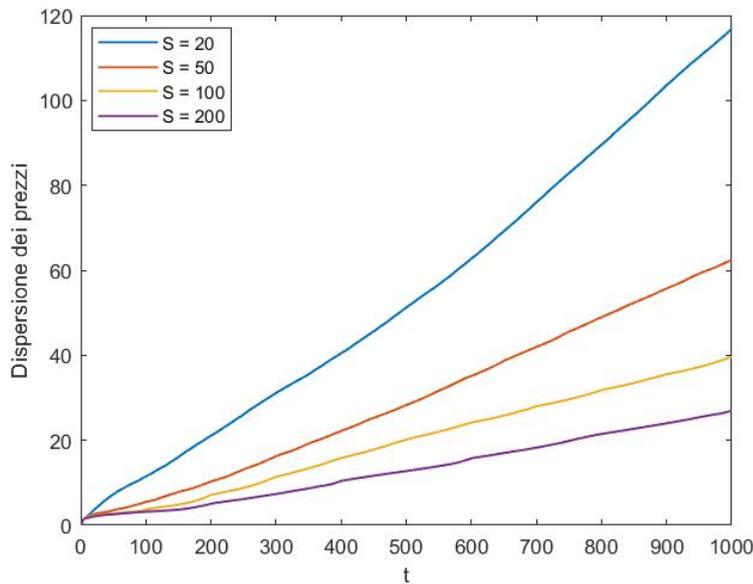
3.4 L'effetto di C e S sulla varianza dei prezzi

Come abbiamo notato dai risultati riportati nelle tabelle 3.1 e 3.2 variando il rapporto C/S varia anche la velocità di convergenza dei parametri della funzione di domanda e di conseguenza l'errore nella stima di questi. Andiamo ora a mostrare come questo comportamento è legato alla misura di dispersione dei prezzi $\lambda_{min}(P_t)$. Scegliamo come prima $p_{min} = 1$, $p_{max} = 20$, $\bar{\beta} = [2, -0.4]$ e $h(x) = \text{logit}(x)$. Fissiamo $C = 10$ e facciamo variare $S = \{20, 50, 100, 200\}$ scegliendo questa volta valori molto distanti tra loro. Per poter confrontare i risultati graficamente facciamo variare $T = 1000/S$ in funzione di S , in modo che il numero di istanti temporali lungo tutto l'orizzonte di vendita sia pari a 1000. Scegliamo $\epsilon = 1e - 6$ in modo da eliminare del tutto la possibilità di una variazione forzata dei prezzi.

S	T	C/S	$\lambda_{min}(P_{1000})$	$\ \hat{\beta}_{1000} - \bar{\beta}\ $
20	50	0.5	116.86	0.361
50	20	0.2	62.45	0.522
100	10	0.1	39.63	0.7212
200	5	0.05	26.93	0.8221

Tabella 3.3: Stime dei parametri e rispettivi R^2

Nella tabella 3.3 sono riportati per ogni valore di S il numero delle finestre di vendita, il rapporto tra capacità e lunghezza delle selling season, la misura di dispersione dei prezzi e l'errore di stima nell'ultimo istante temporale. Possiamo notare che al diminuire del rapporto tra C e S diminuisce anche la dispersione dei prezzi, questo perché, mantenendo fisso il numero di istanti temporali, diminuisce il numero di selling seasons. Dato che il rate di convergenza dei β è influenzato dalla velocità di crescita di $\lambda_{min}(P_t)$, è naturale che se quest'ultimo cresce lentamente avremo una decrescita più lenta dell'errore nella stima dei parametri. Gli stessi comportamenti si possono notare nelle figure 3.4 e 3.5, in quest'ultimo si è riportato un grafico semilogaritmico degli errori nella stima dei parametri in modo da mostrare meglio le differenze tra un caso e l'altro. I grafici sono a tratti poiché quando termina la capacità disponibile, e quindi la vendita, negli istanti successivi fino all'inizio della prossima selling season le stime dei beta e la misura di dispersione dei prezzi rimangono costanti, non essendoci nuovi prezzi da utilizzare per i calcoli.

Figura 3.4: Crescita di $\lambda_{min}(P_t)$ per diversi S

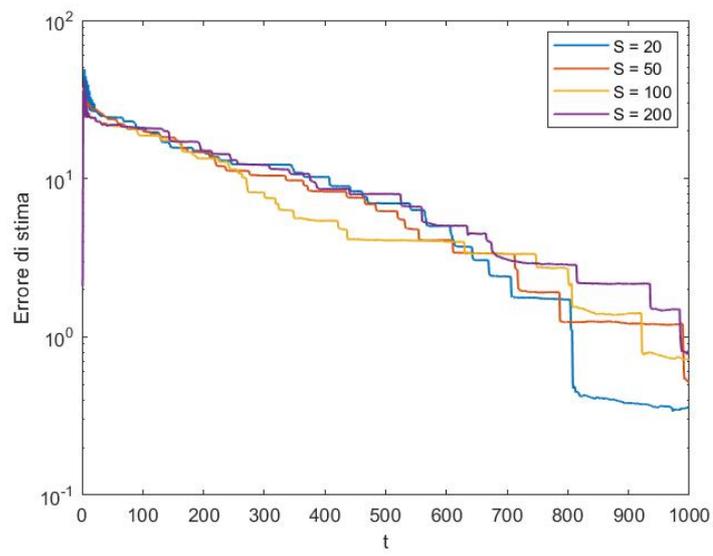


Figura 3.5: Andamento $\log_{10}(\|\hat{\beta}_t - \bar{\beta}\|)$ per diversi S

Capitolo 4

Applicazione al caso Alpitour

In questo capitolo ci occuperemo di applicare tutto ciò di cui ci siamo occupati nei precedenti ai dati di Alpitour S.p.A., un'azienda italiana operante nel settore del turismo. Vedremo prima di tutto quali sono le differenze tra le assunzioni del modello fatte in 2 e le vere condizioni di vendita dell'azienda, dopodiché andremo a mostrare i dati che utilizzeremo con l'obiettivo di dedurre i parametri della funzione di domanda h in modo da poter simulare le vendite. Vedremo poi come il modello performa e infine lo estenderemo al caso di una funzione di domanda che dipenda non solo dal prezzo, ma anche dall'istante temporale all'interno della selling season in cui ci troviamo.

4.1 Applicabilità del modello

Abbiamo già visto nel capitolo 2 quali siano le assunzioni del modello di Den Boer e Zwart, queste si sono rivelate necessarie per poter semplificare la risoluzione del problema ed è quindi chiaro che in contesti di vendita reali tutte queste condizioni non possano coesistere. Elenchiamo di seguito le principali differenze tra il modello scelto e l'azienda.

- Distribuzione della domanda binomiale: è un'assunzione decisamente stringente quella di ammettere un'unica vendita per istante temporale, in generale infatti dopo l'imposizione di un nuovo prezzo può avvenire più di una vendita prima che il prezzo sia nuovamente cambiato. L'azienda vende principalmente pacchetti che includono viaggio di andata e ritorno e hotel per due persone, senza contare i viaggi di gruppo, dunque ci aspettiamo di osservare almeno due vendite per istante temporale. La nostra assunzione può comunque avere senso se consideriamo come singola vendita il pacchetto, in tal caso ogni vendita fa riferimento a due posti volo che vengono venduti allo stesso prezzo. Tuttavia questa rimarrebbe un'assunzione non del tutto applicabile alla realtà, sempre poiché il numero di vendite può essere diverso da una per periodo.
- Vendite indipendenti: come già specificato nel caso di viaggi turistici è improbabile che le vendite di posti aerei siano indipendenti, basti pensare ad un viaggio di famiglia o di gruppo in cui più di due persone devono viaggiare insieme sullo stesso vettore.

In questo caso possiamo comunque restringerci al caso di vendite di pacchetti di coppia, in cui i due compratori sono vincolati a viaggiare insieme, ma le vendite di pacchetti diversi sono indipendenti tra di loro.

- Vendite dipendenti unicamente dal prezzo: trattando la vendita di posti volo, è improbabile che il cliente decida di comprare solo ed esclusivamente in base al prezzo proposto, è ragionevole pensare che egli scelga anche in base alle offerte dei concorrenti e alla vicinanza della data di partenza del vettore. Possiamo aggirare l'assunzione di monopolio considerando il fatto che Alpitour S.p.A. racchiude al suo interno i più importanti tour operator italiani e dunque possiamo immaginare che sia una delle prime scelte per quanto riguarda l'acquisto di pacchetti turistici [2]. In merito alla dipendenza dalla distanza dalla data di partenza, vedremo in come è possibile modificare il modello in modo da prendere in considerazione anche questo dato.
- Livello fisso di capacità iniziale: per semplicità assumiamo che la capacità del volo all'inizio di ogni selling season sia la stessa, questo non è in generale vero e anzi è possibile che l'azienda aumenti i posti disponibili mentre la vendita è in corso. Questi sono tuttavia casi particolari che decidiamo di non prendere in considerazione. Per quanto riguarda invece il livello iniziale di inventario si potrebbe ammettere una variazione all'inizio di ogni selling season, tenendo però in considerazione che i prezzi ottimali dipendono dalla capacità iniziale e quindi non esisterebbe una soluzione unica su tutto l'orizzonte temporale.
- Prezzo continuo: l'azienda Alpitour S.p.A. non utilizza il prezzo continuo ma un insieme predefinito e discreto di prezzi. Il modello proposto potrebbe tuttavia essere utilizzato come simulazione per determinare quali prezzi scegliere, dato che i prezzi ottimali a cui l'algoritmo converge sono un numero discreto pari al numero di periodi nella selling season. I risultati possono essere dunque utili ad un'azienda che non utilizza il prezzo continuo per determinare il set iniziale di prezzi che è possibile utilizzare. Ricordiamo inoltre come la possibilità di utilizzare prezzi diversi da quelli prefissati permetta di introdurre l'elemento di esplorazione dei prezzi che aiuta ad ottenere più informazioni sulle preferenze dei consumatori.
- Finestre di vendita consecutive: la vendita di posti per un singolo volo avviene in genere in contemporanea con quella di altri vettori per la stessa destinazione, è anche possibile che la partenza di due voli diretti nello stesso luogo avvenga nello stesso giorno. È dunque irrealistico pensare ad una vendita per selling season consecutive. Una possibile soluzione potrebbe consistere nel considerare come finestre di vendita non i singoli voli ma degli archi temporali fissi in cui la capacità di inventario è data dalla somma della disponibilità di tutti i vettori. In questo caso però rientreremmo in un problema di vendita multiprodotto con tutte le complicazioni che ne derivano.
- Periodi temporali fissi: nel modello proposto i cambiamenti di prezzo avvengono solamente in periodi fissi che possono essere interpretati in base alle esigenze come ore, giorni, settimane e così via, all'interno dei quali può avvenire un'unica vendita. Tuttavia nel caso dell'azienda Alpitour S.p.A. i prezzi possono essere variati in qualsiasi momento, dunque una vendita può essere determinata non solo dal prezzo ma anche

da quanto tempo quel prezzo è stato mantenuto. Noi assumiamo da questo momento che gli istanti temporali nel nostro modello corrispondano ai giorni che vanno dalla data di messa in vendita dei biglietti alla data di partenza del volo, senza considerare variazioni ulteriori dei prezzi. Ulteriori cambi potrebbero essere considerati alla pari di variazioni forzate da una componente di learning attivo.

4.2 I dati Alpitour

I dati forniti dall'azienda a supporto di questa tesi riguardano un periodo temporale di tre mesi di vendite per la medesima destinazione. Sono stati resi disponibili per ciascun volo il giorno di partenza, la capacità disponibile, le vendite effettuate, in quali date e i rispettivi ricavi. Inoltre siamo a conoscenza della fascia tariffaria in cui è stata effettuata ogni vendita.

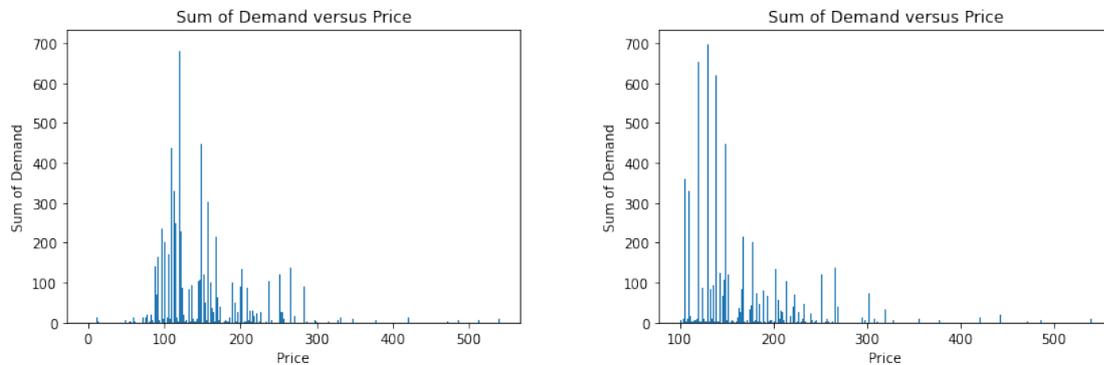


Figura 4.1: Vendite totali per prezzo con e senza vendite sotto entry level

In 4.1 sono mostrate le vendite avvenute per ciascun prezzo, nella figura a sinistra sono riportati i dati relativi a 230 voli sui tre mesi. Notiamo che attorno al 110 c'è un picco di domanda che sembra decrescere per valori più alti ma anche più bassi. Il motivo di questo comportamento è che stiamo considerando anche le vendite sotto *entry level*, ovvero quelle vendite avvenute a prezzo minore del primo imposto dall'azienda. Si è deciso di considerare questi dati come outliers, poiché le vendite sotto entry level avvengono solo in casi particolari in cui, ad esempio, il volo non riesce a vendere nemmeno a prezzi molto bassi. Questo è il motivo per cui, scesi sotto i 110, la domanda totale non continua ad aumentare. Per queste motivazioni eliminiamo dunque tutte le vendite sotto entry level e otteniamo il grafico a barre mostrato sempre in 4.1 a destra. A questo punto la domanda sembra possa ammettere un andamento monotono decrescente, che è quello che assumiamo per il modello preso in considerazione.

Come già detto, Alpitour S.p.A. non utilizza il prezzo continuo, ma ha a disposizione un certo numero di fasce tariffarie a ciascuna delle quali corrisponde un determinato prezzo. In generale due voli potrebbero avere per la stessa fascia tariffaria prezzi diversi, dunque la quantità di venduto a ciascun prezzo è influenzata da quanti voli condividono

lo stesso insieme di prezzi imponibili. Per questo si è deciso di restringere l'analisi ad un numero minore di voli (41) scelti in modo che ad ogni classe tariffaria corrisponda lo stesso prezzo, in particolare $p_{min} = 105$ e $p_{max} = 271$. Il risultato è riportato in figura 4.2 sempre non considerando le vendite sotto entry level. In questo grafico possiamo osservare meglio l'andamento quasi decrescente delle vendite rispetto all'aumentare dei prezzi.

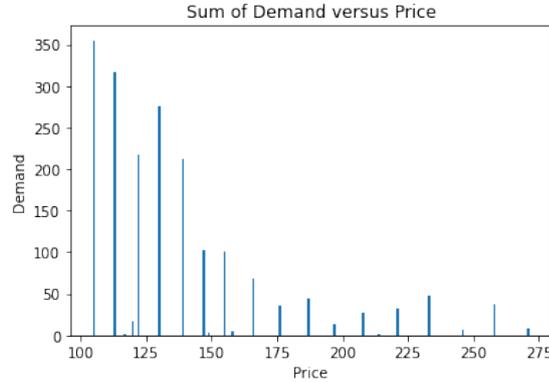


Figura 4.2: Vendite totali per prezzo per il primo sottogruppo di voli

A questo punto usiamo i dati selezionati per determinare quelli che sono i veri parametri della funzione $h(\beta_0 + \beta_1 p)$, che ci serviranno per permettere all' algoritmo di simulare la domanda. Per farlo si è deciso di fittare i dati con una funzione built-in di Python utilizzando diverse funzioni h . Prima di procedere dobbiamo ridimensionare i dati in modo da avere dei valori di domanda compresi tra 0 e 1, ciò è stato fatto utilizzando un semplice riscalamento min-max. In figura 4.3 riportiamo il risultato di questa operazione.

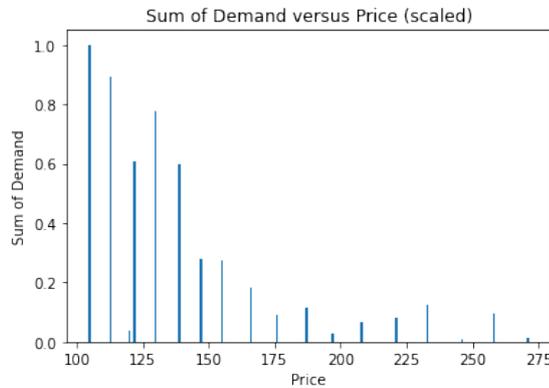


Figura 4.3: Vendite totali per prezzo per il primo sottogruppo di voli (risalate)

Si sono scelte come funzioni per fittare i parametri $h(x) = x$, $h(x) = \exp(x)$ e $h(x) = \text{logit}(x)$ dove $x = \beta_0 + \beta_1 p$. Dobbiamo tenere in considerazione facendo questa operazione che i risultati sono validi solamente se i valori di h sono compresi tra 0 e 1 su tutto l'intervallo $[p_{min}, p_{max}]$. Ciò è sempre vero per quanto riguarda la funzione logistica, ma

va verificato negli altri due casi. Nelle figure 4.4 e 4.5 possiamo osservare i risultati. A prima vista possiamo osservare come la funzione lineare risulta troppo semplice per descrivere l'andamento della probabilità di vendita, mentre sembrano più adatte a questo scopo la funzione esponenziale o logistica. Inoltre il valore della funzione lineare scende sotto 0 nell'intervallo dei prezzi possibili, mentre per le altre due funzioni rimangono nel range accettabile (0,1).

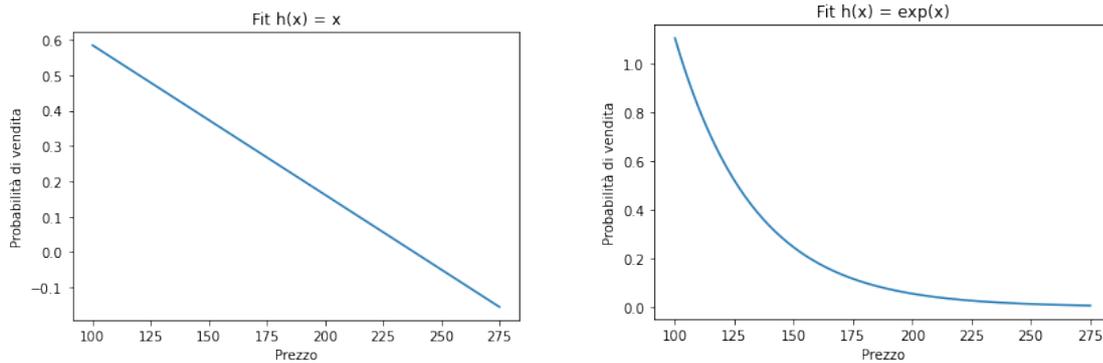


Figura 4.4: Fit lineare ed esponenziale

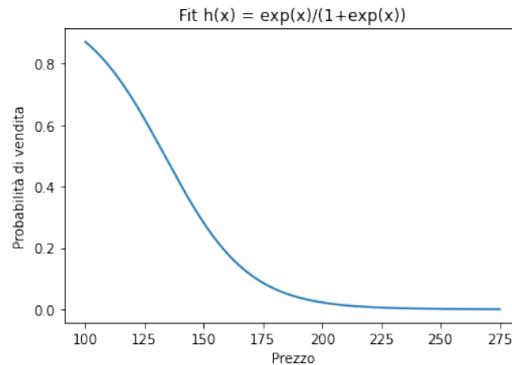


Figura 4.5: Fit logit

Nella tabella 4.1 sono riportati i valori stimati di β_0 , β_1 e il calcolo del valore R^2 per avere un'idea della qualità del fit. Il valore di β_1 è sempre minore di 0, dimostrando l'andamento decrescente della probabilità di vendita. Possiamo notare come i risultati siano sfavorevoli per quanto riguarda il fit lineare, mentre sono simili per le altre due funzioni, nonostante il fit esponenziale sia quello migliore. Notiamo anche che i risultati del fit esponenziale non siano utilizzabili se definiamo i bound dell'insieme B come in appendice A.2. Decidiamo quindi in questo caso di rilassare l'assunzione secondo la quale il prezzo che massimizza il revenue si debba trovare all'interno del range di prezzi possibili e manteniamo solo il vincolo (necessario) $\exp(\beta_0 + \beta_1 p) \in (0,1)$ per $p \in [p_{min}, p_{max}]$. Fatta

questa premessa possiamo mostrare i risultati della pricing strategy nei casi di funzione logistica ed esponenziale.

$h(x)$	β_0	β_1	R^2
x	1.0076	-0.0042	0.44
exp(x)	3.1097	-0.0301	0.67
logit(x)	7.6115	-0.0570	0.65

Tabella 4.1: Stime dei parametri e rispettivi R^2

4.2.1 Risultati con funzioni esponenziale e logistica

Come già accennato nel caso esponenziale scegliamo di utilizzare un insieme B con vincoli meno stringenti rispetto a quelli descritti in A.2. Vedremo come questo non influirà sulla stima dei parametri, in quanto l'unica caratteristica necessaria nella definizione dell'insieme B è la compattezza.

Sono stati scelti come dati iniziali $S = 100$, $C = 50$ e $T = 50$. Ci troviamo in questo modo nel caso $C/S = 1/2$, stiamo considerando per semplicità S come il numero di giorni in cui il volo è vendibile, dunque ammettiamo una sola vendita al giorno. Aumentando S e mantenendo fisso C è possibile diminuire il tempo che intercorre tra una vendita e l'altra, in questo caso il rapporto C/S diminuirebbe e come già abbiamo visto in 3.3 il regret relativo e l'errore nella stima dei beta potrebbero solo migliorare. Ricordiamo che $p_{min} = 105$, $p_{max} = 271$, $\bar{\beta}_0 = 3.1097$, $\bar{\beta}_1 = -0.0301$ per il caso esponenziale e $\bar{\beta}_0 = 7.6115$, $\bar{\beta}_1 = -0.0570$ per quello logistico. Si sono scelti come primi prezzi $p_1 = 105$, pari all'entry level, e $p_2 = 120$. Questa volta si è scelto di riportare i risultati dati da una media su 20 simulazioni.

Nelle figure 4.6 e 4.7 si possono osservare l'andamento del regret relativo e del regret scalato di un fattore $\log^2(SS)$ rispetto al susseguirsi delle selling season rispettivamente per i casi $h(x) = \exp(x)$ e $h(x) = \text{logit}(x)$, mentre nelle figure 4.8 sono riportati i grafici semilogaritmici dell'andamento dell'errore nella stima dei parametri sempre nei due casi. Nella tabella 4.2 infine troviamo il profitto che si otterrebbe utilizzando i prezzi ottimali, calcolato come $V_{\bar{\beta}}(C,1) \cdot T$, la perdita totale dovuta all'utilizzo dell'algorithm proposto, il regret relativo nell'ultimo istante temporale e l'errore tra l'ultima stima dei parametri e il loro vero valore.

Come possiamo osservare nei grafici a destra in 4.6 e 4.7 l'andamento del regret relativo sul lungo periodo è sempre $O(\log^2(T))$, nel caso della funzione esponenziale però questo comportamento è raggiunto più velocemente, infatti possiamo notare sia dai grafici a sinistra, sia dalla tabella 4.2 che il regret relativo in questo caso è più basso. Nonostante ci ritroviamo nel caso C/S in cui ci aspettiamo un regret relativo più alto, in questo caso la pricing policy performa decisamente meglio. È possibile spiegare questo fatto attribuendo la causa alla scelta dei prezzi iniziali p_1 e p_2 . Sappiamo dal teorema 2.3.1 che nel momento in cui i prezzi utilizzati sono vicini a quelli ottimali la dispersione dei prezzi aumenta e questo porta ad un miglioramento nelle stime dei beta, con conseguente miglioramento

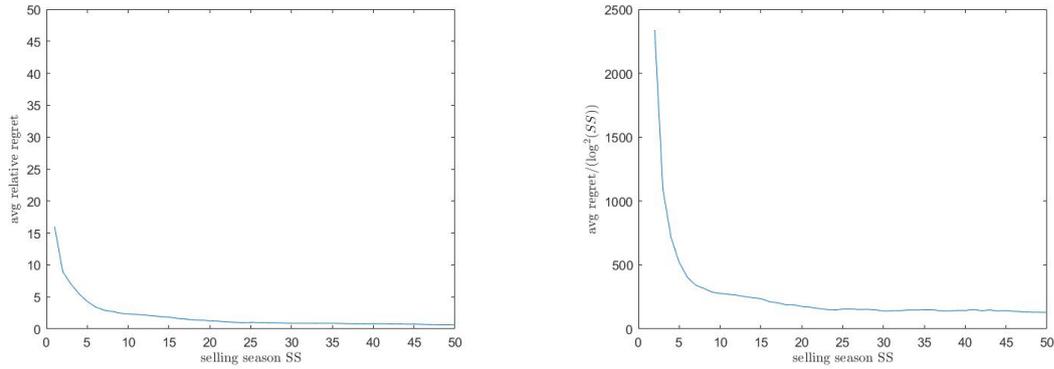


Figura 4.6: Regret relativo e $\text{regret}/\log^2(SS)$ per $h(x) = \exp(x)$: media su 20 simulazioni

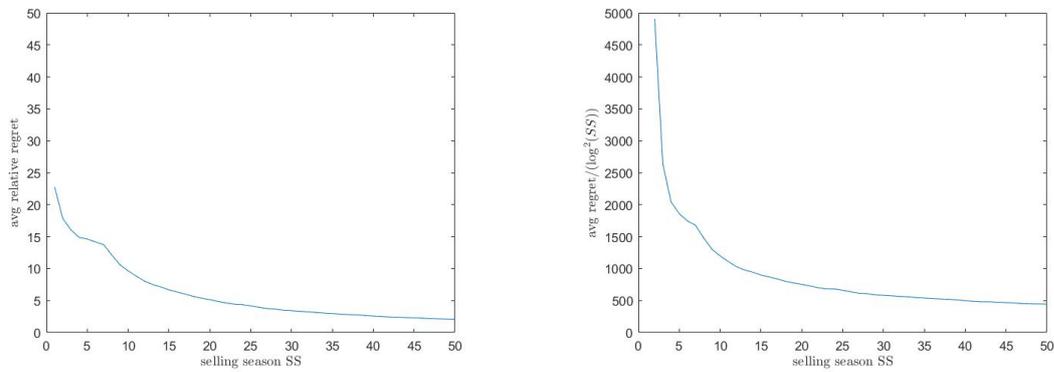


Figura 4.7: Regret relativo e $\text{regret}/\log^2(SS)$ per $h(x) = \text{logit}(x)$: media su 20 simulazioni

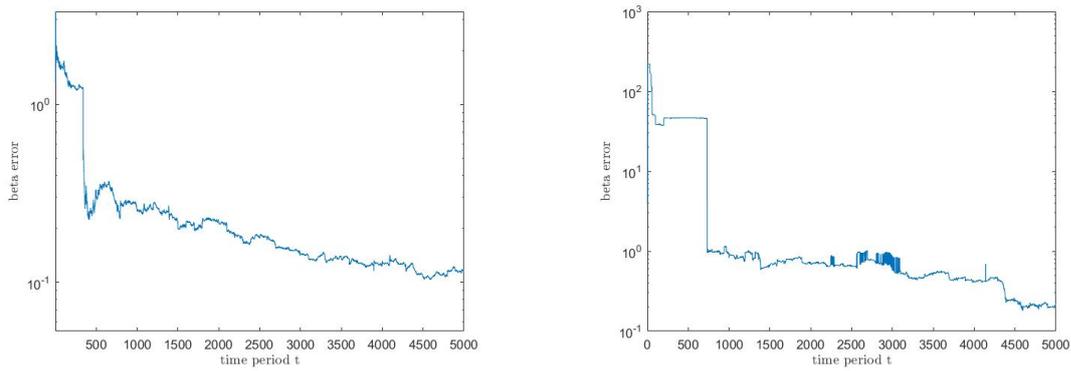


Figura 4.8: Errore nella stima di $\bar{\beta}$ nel tempo per $h(x) = \exp(x)$ e $h(x) = \text{logit}(x)$: media su 20 simulazioni

nella fase di scelta del prezzo ottimale. I due prezzi proposti all'inizio della prima finestra di vendita sono abbastanza vicini a quelli ottimali da far avvicinare quasi subito le stime dei parametri a quelli veri, comportamento che notiamo anche nei grafici 4.8. In tabella vediamo infatti che alla fine dell'orizzonte di vendita l'errore è molto basso, in particolare nel caso della funzione esponenziale. Queste ultime considerazioni spiegano anche perché il regret relativo è basso anche all'inizio dell'orizzonte di vendita.

Probabilmente i risultati nel caso esponenziale sono migliori poiché la domanda attesa cala meno drasticamente all'aumentare del prezzo rispetto al caso logit, ciò comporta una variazione meno marcata della probabilità di vendita ad una variazione minima di prezzo in quell'intervallo "critico" in cui la funzione logistica ha la massima pendenza, senza che ci sia una "separazione netta" tra la fascia di prezzi in cui la vendita attesa è maggiore e quella in cui è minore.

$h(x)$	Revenue ottimale	Regret(50)	Regret relativo (50)	$\ \hat{\beta}_{TS} - \bar{\beta}\ $
exp(x)	313662.57	1974.61	0.63%	0.118
logit(x)	329598.75	6794.32	2.06%	0.228

Tabella 4.2: Risultati per $h(x) = \exp(x)$ e $h(x) = \text{logit}(x)$: media su 20 simulazioni

4.3 L'elemento della distanza dalla data di partenza

Abbiamo fin'ora considerato la probabilità di vendita al tempo t come dipendente solamente dal prezzo scelto in quell'istante. Tuttavia è normale chiedersi se questa probabilità non possa dipendere anche da altri fattori, in generale questi casi possono essere trattati aumentando il numero di parametri da cui dipende h come suggerito in [7].

Nello specifico dei dati Alpitour si nota come la domanda aumenti all'avvicinarsi della data di partenza del volo, questo perché i biglietti vengono resi disponibili alcuni mesi prima del decollo quando i possibili acquirenti potrebbero non aver ancora considerato l'idea di un acquisto. Nelle immagini 4.9 e 4.10 è riportato il totale delle vendite per ogni prezzo divise per distanza dalla data di partenza. Come range temporali sono stati utilizzati gli stessi che vengono utilizzati dagli algoritmi di Alpitour S.p.A., ovvero dal decollo fino a un mese prima dalla data di partenza, da uno a due mesi prima della data di partenza e infine dai due mesi in poi prima della data di partenza. Questa semplice suddivisione è stata scelta dall'azienda proprio per il diverso comportamento di acquisto riscontrato in modo da tenerne conto nel momento in cui si deve decidere il prezzo da imporre. Come possiamo osservare, quando ci si trova a poca distanza dalla partenza le vendite aumentano (402 record) e i clienti acquistano a prezzi più alti, mentre all'allontanarsi dalla partenza diminuiscono le vendite che avvengono a prezzi più bassi (175 e 217 record rispettivamente per i range 31-60 giorni e 61+ giorni, il maggior numero di vendite in quest'ultimo caso è da attribuirsi anche alla maggior lunghezza del range temporale che può arrivare anche a diversi mesi).

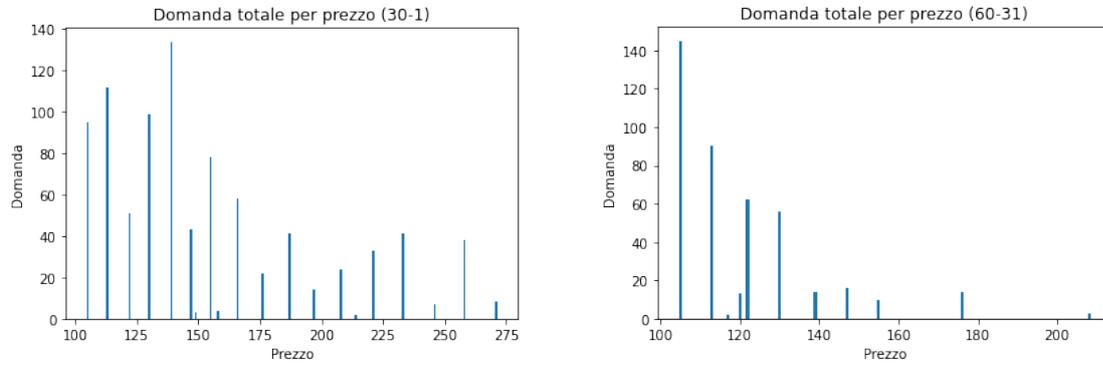


Figura 4.9: Vendite ad un mese e due mesi dalla data partenza

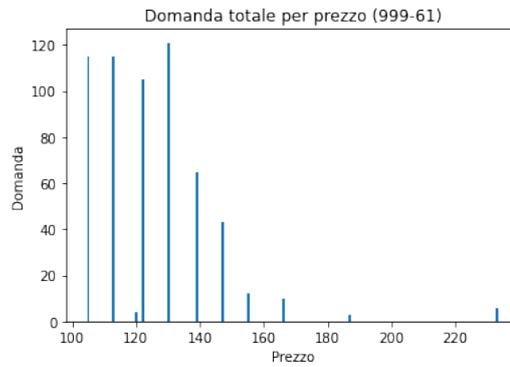


Figura 4.10: Vendite a più di due mesi dalla data partenza

Alla luce di queste osservazioni è opportuno prendere in considerazione il momento in cui avviene la vendita nel momento in cui vogliamo determinarne la probabilità. Chiamiamo *days to departure* (DTD) o distanza dalla data di partenza il numero di giorni che mancano alla chiusura delle vendite, il valore di questa variabile è S nel primo istante di vendita e decresce fino a 1, quando si raggiunge l'ultimo istante. Indicheremo con $DTD = 0$ il momento teorico in cui il volo decolla. In generale dato l'istante temporale $s = 1, \dots, S$ all'interno di una selling season, è possibile calcolare la DTD come

$$DTD = S - s + 1.$$

La funzione di probabilità di vendita, ovvero il valore atteso della distribuzione di domanda, sarà dato da

$$E[D(p, DTD)] = h(\beta_0 + \beta_1 p + \beta_2 DTD)$$

dove abbiamo introdotto un nuovo parametro β_2 che assumiamo essere anch'esso negativo, in quanto ci aspettiamo che la probabilità di vendita aumenti con l'avvicinarsi della data di partenza, e quindi aumenti al diminuire di DTD .

L'unica modifica che si effettua all'algoritmo riguarda la fase di stima dei parametri, che a questo punto all'istante t utilizza come dati i valori

$$\mathcal{D}_{t-1} = \{(p_i, d_i, DTD_i) \in [p_{min}, p_{max}] \times \{0,1\} \times \{1, \dots, S\}, i = 1, \dots, t-1\}$$

per calcolare le stime $\hat{\beta}_0$, $\hat{\beta}_1$ e $\hat{\beta}_2$. Rispetto al caso con due parametri varia anche l'insieme B in cui questi si trovano, la questione viene approfondita nell'appendice A.2.

La matrice di dispersione dei prezzi a questo punto diventa

$$P_t = \begin{pmatrix} t & \sum_{i=1}^t p_i & \sum_{i=1}^t DTD_i \\ \sum_{i=1}^t p_i & \sum_{i=1}^t p_i^2 & \sum_{i=1}^t p_i DTD_i \\ \sum_{i=1}^t DTD_i & \sum_{i=1}^t p_i DTD_i & \sum_{i=1}^t DTD_i^2 \end{pmatrix}$$

A questo punto ritraiamo i dati Alpitour nello stesso modo di prima ma considerando anche la distanza dalla data di partenza. Per ogni DTD consideriamo il prezzo medio delle vendite e la vendita complessiva e utilizziamo questi dati per fare un fit con la funzione logistica, in questo caso scegliamo di utilizzare quest'ultima in modo da essere sicuri che l'immagine della funzione sia tra 0 e 1 per l'intervallo dei prezzi scelti e per ogni possibile valore di DTD . Abbiamo questa volta scelto di utilizzare i dati di vendita dei voli con $p_{min} = 110$ e $p_{max} = 284$, riportati in figura 4.12 (24 voli). I parametri stimati risultano essere $\beta_0 = 1.9515$, $\beta_1 = -0.0124$ e $\beta_2 = -0.0159$, osserviamo dal grafico in figura 4.11 come la probabilità di vendita sia crescente per prezzi e DTD decrescenti. Il fatto che le DTD siano qui rappresentate come numeri in \mathbb{R} non ci preoccupa, in quanto nell'applicazione del modello consideriamo solo DTD in \mathbb{N} prefissate.

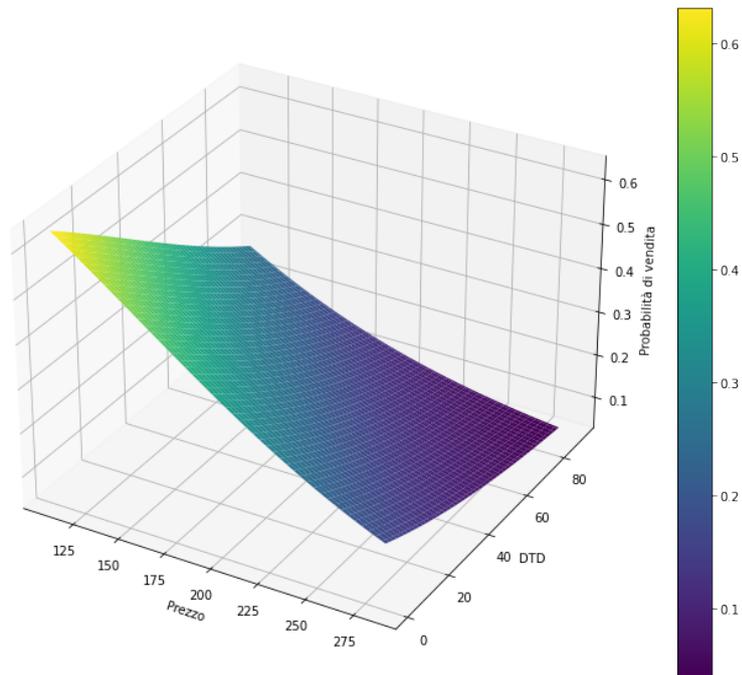


Figura 4.11: Probabilità di vendita per prezzo e DTD

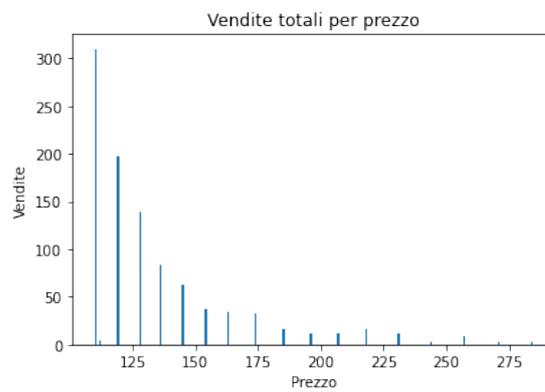


Figura 4.12: Vendite totali per prezzo per il secondo sottogruppo di voli

4.3.1 Risultati considerando la DTD

Utilizziamo come al solito l'insieme B definito in A.2. Sono stati scelti nuovamente come dati iniziali $S = 100$, $C = 50$ e $T = 50$. Ricordiamo che $p_{min} = 110$, $p_{max} = 284$, $\bar{\beta}_0 = 1.9515$, $\bar{\beta}_1 = -0.0124$ e $\bar{\beta}_2 = -0.0159$. Si sono scelti come primi prezzi $p_1 = 110$, pari all'entry level, e $p_2 = 115$. Di nuovo riportiamo i risultati dati da una media su 20 simulazioni.

Nelle figure 4.13 si possono osservare l'andamento del regret e del regret relativo rispetto al susseguirsi delle finestre di vendita, mentre nella figura 4.14 è riportato il grafico semilogaritmico dell'andamento dell'errore nella stima dei parametri. Nella tabella 4.3 infine troviamo il profitto che si otterrebbe utilizzando i prezzi ottimali, calcolato come $V_{\bar{\beta}}(C,1) \cdot T$, la perdita totale dovuta all'utilizzo dell'algorithm proposto, il regret relativo nell'ultimo istante temporale e l'errore tra l'ultima stima dei parametri e il loro vero valore.

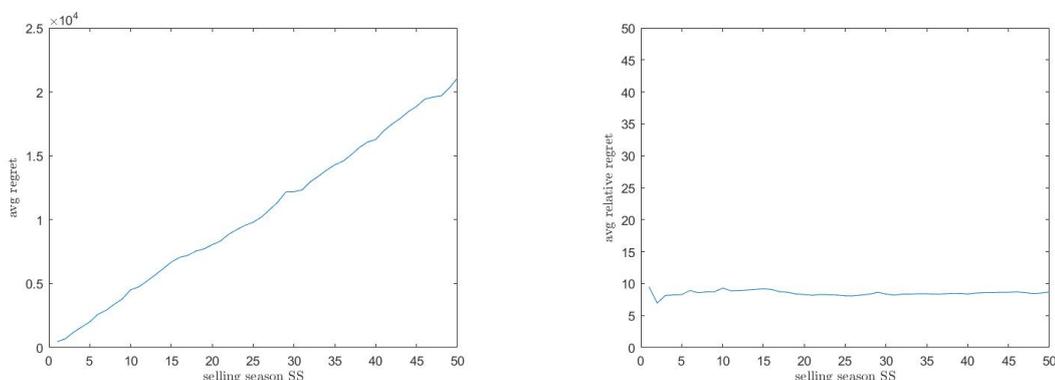


Figura 4.13: Regret e Regret relativo: media su 20 simulazioni

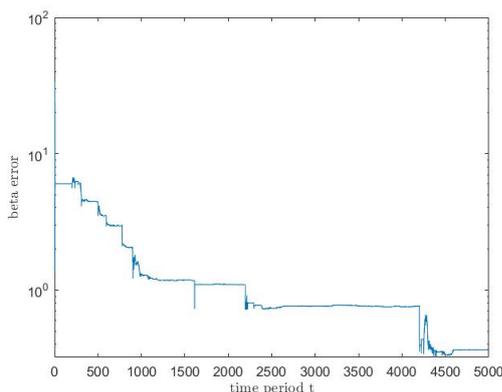


Figura 4.14: Errore nella stima di $\bar{\beta}$ nel tempo: media su 20 simulazioni

Revenue ottimale	Regret(50)	Regret relativo (50)	$\ \hat{\beta}_{TS} - \bar{\beta}\ $
242840.74	21083.32	8.68%	0.365

Tabella 4.3: Risultati per il caso DTD: media su 20 simulazioni

La prima cosa che notiamo in questo caso è un andamento del regret diverso rispetto al caso base. Infatti sembra che questo cresca linearmente nel tempo, comportamento che riscontriamo anche nel grafico del regret relativo, dove sembra esserci un andamento costante che dipende dal regret relativo iniziale. Sembra quindi che non valga più il bound sul regret mostrato nel teorema 2.4.1. Tuttavia l'errore di stima dei parametri e il regret relativo rimangono pressoché in linea con i risultati trovati in 3.2 per il caso $C/S = 1/2$. Possiamo mostrare come anche in questo caso, essendo il regret relativo quasi costante lungo tutto l'orizzonte temporale di vendita, questo dipenda in un qualche modo dalla scelta dai prezzi iniziali. Nella figura 4.15 è mostrato l'andamento del regret relativo nel caso in cui il secondo prezzo scelto sia $p_2 = 150$. Notiamo che il regret peggiora con un valore di 28120.64 e quindi regret relativo 10.93%. I risultati sono comunque in linea con 3.2, ma leggermente peggiori.

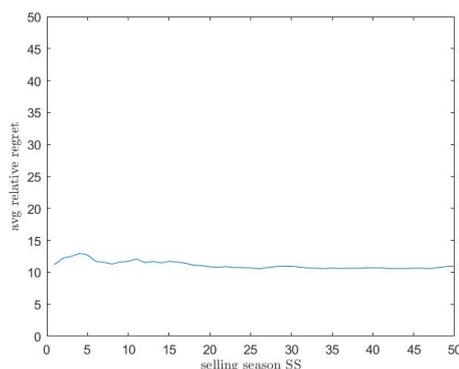


Figura 4.15: Regret relativo: media su 20 simulazioni

4.3.2 La scelta del modello in base al contesto

Abbiamo osservato come è possibile modificare il modello di pricing proposto in modo da sottolineare la dipendenza del prezzo di vendita dalla distanza dalla data di partenza del volo. Ciò ha influenza non solo sulla performance del regret e sulla stima dei parametri, che continuano ad avere un comportamento analogo a quello riscontrato nel caso base, ma anche e soprattutto sulla scelta dei prezzi e di come questi sono distribuiti nel tempo. Nel caso base teniamo in considerazione nella strategia di prezzatura sia della capacità residua sia il tempo mancante alla fine della finestra di vendita, ma la probabilità di vendita non dipende esplicitamente dall'istante temporale in cui ci si trova. Questo significa che l'algoritmo nella sua ricerca si stabilizzerà attorno ad un certo prezzo ottimale

che può essere imposto in qualsiasi momento, dato che la vendita attesa a quel prezzo rimarrà la stessa. Nel caso in cui scegliamo invece di considerare la distanza dalla data di partenza del volo, stiamo considerando una relazione esplicita tra l'istante temporale in cui viene proposto un prezzo e la probabilità che avvenga una vendita. Dato che la funzione $h(\beta_0 + \beta_1 p + \beta_2 DTD)$ è decrescente per prezzi e DTD crescenti, ci aspettiamo che all'inizio della selling season vengano proposti prezzi più bassi che vanno poi ad aumentare all'aumentare della probabilità di vendita basata sulla distanza dalla data di partenza.

Nelle figure 4.16 e 4.17 sono mostrate due simulazioni di vendita nel caso base e con DTD: la linea mostra i prezzi selezionati dall'algoritmo e i punti le vendite. In entrambi i casi sono stati scelti come esempi delle simulazioni relative all'ultima selling season, in modo che i prezzi scelti siano il più vicini possibile a quelli ottimali. Come ci aspettavamo nel caso base il prezzo si muove per la maggior parte della selling season attorno allo stesso valore senza mostrare varianza dovuta al susseguirsi degli istanti temporali, solo quando si avvicina la fine della vendita notiamo una variazione dei prezzi che sembra muoversi verso l'alto, seppur minimamente (l'ultimo picco decrescente è dovuto al fatto che, una volta terminato il prodotto da vendere, viene scelto come prezzo di default 0 nei successivi istanti in quanto questo non influisce sulle vendite e sui successivi calcoli dell'algoritmo). Nel caso in cui consideriamo la distanza dalla data partenza vediamo come il prezzo aumenta all'avvicinarsi della data di partenza, mantenendo comunque una certa costanza nelle vendite effettuate.

È chiaro che in un contesto di vendita di biglietti aerei un fattore determinante per la scelta del prezzo è la vicinanza della data di partenza del volo, come abbiamo visto nelle analisi svolte in 4.3. Dunque il modello che considera esplicitamente quest'ultima nella simulazione della domanda è quello che più si avvicina alle esigenze di un'azienda come Alpitour, in cui in generale il prezzo del volo aumenta con il susseguirsi degli istanti temporali, riuscendo comunque a mantenere alto il numero delle vendite.

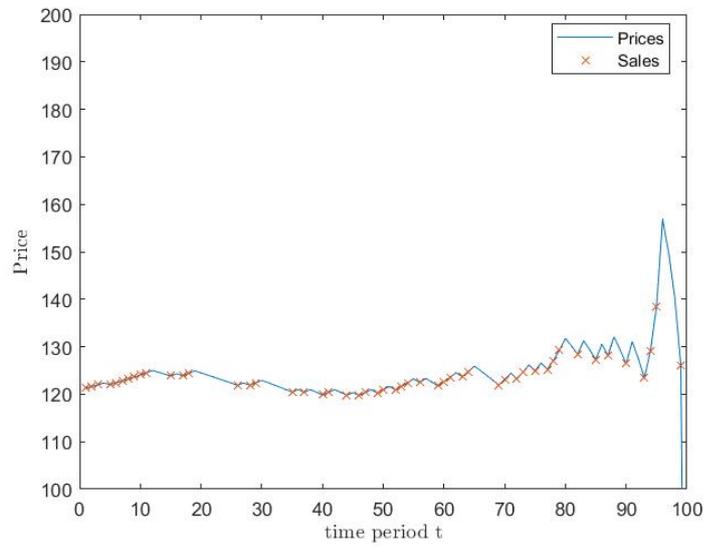


Figura 4.16: Simulazione di prezzatura per una singola finestra di vendita, caso base

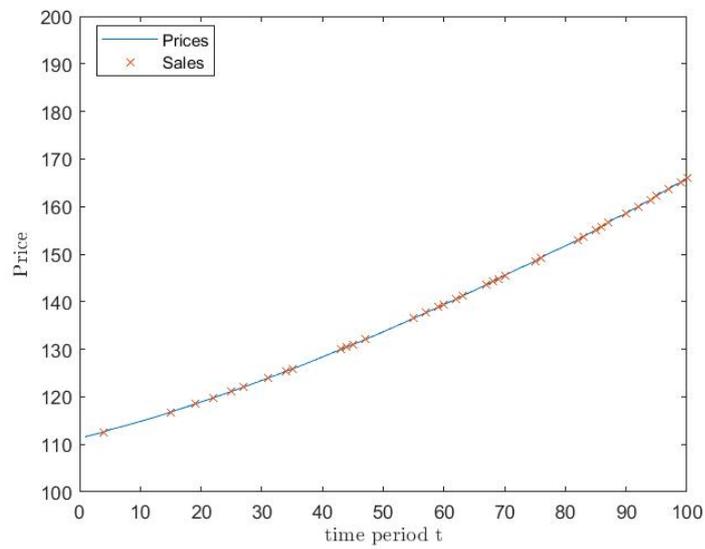


Figura 4.17: Simulazione di prezzatura per una singola finestra di vendita, caso *DTD*

Capitolo 5

Conclusioni

Abbiamo visto come il problema di prezzatura dinamica di biglietti aerei con previsione della domanda rientra nel più generale contesto di vendita di un prodotto con inventario e orizzonte di vendita finiti senza possibilità di rifornimento. Lo scopo in questo contesto è quello di massimizzare il profitto e per farlo è necessaria una politica che sia in grado di convergere quanto più velocemente possibile ai prezzi ottimali. Nel caso della policy da noi proposta, che alterna ad ogni istante una fase di stima dei parametri e una di scelta del prezzo da imporre in base all'ottimizzazione di una value function, si è dimostrato che è possibile quantificare la massima perdita di ricavo sul lungo periodo, ovvero $O(\log^2(T))$. Abbiamo inoltre dimostrato che questo risultato si può ottenere utilizzando una politica di learning passivo, a differenza del caso ad inventario infinito in cui è necessaria una variazione attiva dei prezzi per poter convergere a quelli ottimali, questo perché nel caso ad inventario finito questi ultimi dipendono non solo dalla distanza dalla fine delle vendite ma anche dalla quantità di prodotto ancora disponibile. Abbiamo visto che il rapporto C/S è determinante nella performance del modello, in quanto se il numero di istanti temporali nella selling season è troppo vicino al livello di capacità dell'inventario avviene una minore dispersione dei prezzi con conseguente convergenza più lenta dei parametri della domanda stimati a quelli reali, e quindi arriveremo a conoscere i prezzi ottimali molto più lentamente.

Abbiamo mostrato come applicare i risultati ottenuti al caso di vendita di biglietti aerei tramite l'analisi dei dati forniti dall'azienda Alpitour S.p.A. operante nel settore turistico, e sottoponendoli poi al modello proposto. Quello che abbiamo osservato è che è possibile utilizzare l'algoritmo ottenendo gli stessi risultati anche con istanze dell'ordine di quelle di un normale contesto di vendita di posti volo, abbiamo poi modificato il modello facendo l'osservazione che la vendita attesa non può dipendere solamente dal prezzo scelto, ma anche dalla distanza dalla data di partenza del volo. In questo modo abbiamo ottenuto dei risultati simili a quelli del caso base, nonostante l'andamento del regret sembri non avere lo stesso bound. Inoltre facendo dipendere la vendita attesa anche dalla distanza dalla data partenza il profilo dei prezzi proposti nelle simulazioni risulta più simile a quello che ci aspetteremmo in un contesto di vendita di biglietti aerei.

Alla luce delle osservazioni fatte e dei risultati ottenuti possiamo concludere i seguenti fatti su un eventuale utilizzo del modello proposto da parte di un'azienda che come Alpitour debba ottimizzare la vendita di posti volo:

- Come abbiamo visto non è necessario utilizzare una politica di learning attivo dei prezzi, poiché il modello proposto riesce a imparare i prezzi ottimali utilizzando solamente una politica di learning passivo. Questo significa che l'azienda non deve concentrare le sue risorse nella variazione manuale dei prezzi, ma si può affidare totalmente all'algoritmo aspettandosi che il regret non salga oltre ad una certa soglia sul lungo periodo
- Dato che i prezzi ottimali vengono trovati dopo un certo numero, seppur piccolo, di finestre di vendita, l'azienda può utilizzare l'algoritmo proposto per simulare le vendite in anticipo e utilizzare fin da subito i prezzi migliori, senza dover affrontare la prima fase in cui la crescita del regret è maggiore durante l'orizzonte di vendita effettivo.
- Alla luce di quanto detto al punto precedente, possiamo affermare che un'importante oggetto di studio da parte dell'azienda è la condotta degli acquirenti in base al prezzo proposto e alla distanza dalla data di partenza del volo. Si potrebbero utilizzare dunque i dati storici di vendita per analizzare questo comportamento e determinare la funzione h di vendita attesa e i suoi "veri" parametri in modo da poter simulare in anticipo le vendite. Dopodiché la vendita si fa partire con i prezzi ottimali fin da subito mantenendo la possibilità di variarli tramite l'algoritmo proposto qualora le vendite dovessero avere un andamento differente, dato che abbiamo visto che in ogni caso la stima dei parametri converge a quelli reali.

Ovviamente il modello utilizzato è decisamente semplicistico e non direttamente applicabile da un potenziale venditore. Possibili sviluppi per migliorarlo potrebbero essere innanzitutto, come fatto in 4.3, aggiungere ulteriori parametri alla funzione di domanda in modo da poter modellare in modo migliore la probabilità di vendita. Successivamente si potrebbe estendere la policy al caso di vendita multiprodotto, in modo da tenere in considerazione anche le molteplici possibilità che il compratore ha davanti e l'interazione tra i prezzi di queste. Sarebbe interessante inoltre aggiungere degli elementi di teoria dei giochi per introdurre anche la possibilità per il compratore di affidarsi ad altri venditori.

Appendice A

Dimostrazioni e teoria

A.1 Condizioni su h

Sia $r^* = \max_{p \in [p_{min}, p_{max}]} p \cdot h(\bar{\beta}_0 + \bar{\beta}_1 p)$ e per $(a, \beta, p) \in \mathbb{R} \times B \times [p_{min}, p_{max}]$ definiamo

$$g_{a,\beta}(p) = -(p - a)\beta_1 \frac{\dot{h}(\beta_0 + \beta_1 p)}{h(\beta_0 + \beta_1 p)}.$$

Assumiamo $g_{a,\bar{\beta}(p_{min})} < 1$ e $g_{a,\bar{\beta}(p_{max})} > 1$ e $g_{a,\bar{\beta}(p)}$ strettamente decrescente in p per ogni $0 \leq a \leq r^*$. Allora la funzione $(p - a)h(\bar{\beta}_0 + \bar{\beta}_1 p)$ ha un unico massimo p^* in $[p_{min}, p_{max}]$. Nel nostro caso $a = 0$.

A.2 Bound per la stima dei parametri

I parametri della domanda β_0, β_1 devono appartenere ad un insieme compatto $B \subset \mathbb{R}^2$ definito in base alla forma della funzione h . Per il lavoro svolto si è scelto di definire B sulla base dell'idea data da Den Boer e Zwart in [6], che consiste nello scegliere i limiti di B in modo che il valore p^* che massimizza $p \cdot h(\beta_0 + \beta_1 p)$ sia all'interno di un range di prezzi prefissato. In generale il range è l'insieme dei prezzi possibili $[p_{min}, p_{max}]$, ma possiamo scegliere di restringerlo in base alla considerazione che in un contesto di vendita l'azienda non ha interesse a imporre il prezzo minimo perché spera in ricavi maggiori e imponendo il prezzo massimo taglierebbe fuori una gran fetta dei consumatori. In questo caso nella trattazione che segue basta sostituire a p_{min} e p_{max} i valori $p_{min} + \delta$ e $p_{max} - \delta$, dove δ rappresenta il restringimento del range di prezzi all'intervallo entro il quale vogliamo che si trovi il massimo p^* . La dimostrazione esplicita verrà riportata per i casi $h(x) = \text{logit}(x)$ e $h(x) = \text{exp}(x)$ che sono quelli utilizzati nella tesi, per altri tipi di funzione il ragionamento è analogo. Specifichiamo che questo non è l'unico modo in cui è possibile definire l'insieme B , in quanto l'unica condizione richiesta è che sia un insieme compatto.

Iniziamo dal caso $h(x) = \text{logit}(x)$. Il valore p^* che risolve

$$p^* = \operatorname{argmax}_{p \in [p_{min}, p_{max}]} p \cdot \frac{\exp(\beta_0 + \beta_1 p)}{1 + \exp(\beta_0 + \beta_1 p)}$$

si trova ponendo a 0 la derivata, otteniamo

$$p^* = \frac{1}{\beta_1} \log(-\beta_1 p^* - 1) - \frac{\beta_0}{\beta_1}$$

con $p^* \in [p_{min}, p_{max}]$.

Da questa espressione possiamo ricavare le seguenti condizioni :

$$\begin{cases} \frac{1}{\beta_1} \log(-\beta_1 p_{min} - 1) - \frac{\beta_0}{\beta_1} \geq p_{min} \\ \frac{1}{\beta_1} \log(-\beta_1 p_{max} - 1) - \frac{\beta_0}{\beta_1} \leq p_{max} \end{cases}$$

e da qui ricavare le condizioni su β_0 (ricordando $\beta_1 < 0$):

$$\begin{cases} \beta_0 \geq \log(-\beta_1 p_{min} - 1) - \beta_1 p_{min} \\ \beta_0 \leq \log(-\beta_1 p_{max} - 1) - \beta_1 p_{max} \end{cases}$$

Gli argomenti dei logaritmi devono essere positivi, dunque un ulteriore vincolo da soddisfare è

$$\begin{cases} -\beta_1 p_{min} - 1 > 0 \\ -\beta_1 p_{max} - 1 > 0 \end{cases}$$

che si riduce a $\beta_1 < -\frac{1}{p_{min}}$, a questo punto possiamo scegliere in base al contesto l'ultimo vincolo dal basso su β_1 per ultimare la definizione dell'insieme B .

Passando al caso $h(x) = \exp(x)$ abbiamo che il valore p^* che risolve

$$p^* = \operatorname{argmax}_{p \in [p_{min}, p_{max}]} p \cdot \exp(\beta_0 + \beta_1 p)$$

soddisfa, ponendo a 0 la derivata rispetto al prezzo,

$$p^* = -\frac{1}{\beta_1}$$

con $p^* \in [p_{min}, p_{max}]$. Da qui ricaviamo le condizioni

$$\begin{cases} p_{min} \leq -\frac{1}{\beta_1} \\ p_{max} \geq -\frac{1}{\beta_1} \end{cases}$$

che formano il vincolo

$$-\frac{1}{p_{min}} \leq \beta_1 \leq -\frac{1}{p_{max}}.$$

Dobbiamo inoltre imporre che per ogni scelta dei parametri β il valore di $\exp(\beta_0 + \beta_1 p)$ si trovi all'interno del range $(0,1)$, condizione che non è soddisfatta in automatico come nel caso logit. Dobbiamo quindi avere $\exp(\beta_0 + \beta_1 p) < 1$ che si traduce in $\beta_0 + \beta_1 p < 0$ e quindi

$$\beta_0 < -\beta_1 p_{min}.$$

Come prima scegliamo l'ultimo vincolo su β_0 liberamente.

Seguendo lo stesso procedimento possiamo ricavare un possibile insieme $B \subset \mathbb{R}^3$ anche nel caso in cui la funzione h sia dipendente da un terzo parametro e dalla distanza dalla data di chiusura delle vendite, ovvero $h(\beta_0 + \beta_1 p + \beta_2 DTD)$. Svolgiamo i calcoli per il caso $h(x) = \text{logit}(x)$. In questo caso vogliamo che il prezzo che massimizza $p \cdot h(\beta_0 + \beta_1 p + \beta_2 DTD)$ si trovi all'interno dell'intervallo $[p_{min}, p_{max}]$ per ogni valore $DTD = 1, \dots, S$. Cerchiamo dunque

$$p^* = \underset{p \in [p_{min}, p_{max}], DTD \in \{1, \dots, S\}}{\text{argmax}} p \cdot \frac{\exp(\beta_0 + \beta_1 p + \beta_2 DTD)}{1 + \exp(\beta_0 + \beta_1 p + \beta_2 DTD)}.$$

Ponendo la derivata rispetto al prezzo a 0 otteniamo

$$p^* = \frac{1}{\beta_1} \log(-\beta_1 p^* - 1) - \frac{\beta_0}{\beta_1} - \frac{\beta_2}{\beta_1} DTD$$

con $p^* \in [p_{min}, p_{max}]$ e $DTD = 1, \dots, S$. Da qui ricaviamo

$$\begin{cases} \beta_0 + \beta_2 DTD \geq \log(-\beta_1 p_{min} - 1) - \beta_1 p_{min} & \forall DTD \\ \beta_0 + \beta_2 DTD \leq \log(-\beta_1 p_{max} - 1) - \beta_1 p_{max} & \forall DTD \end{cases}$$

Per la prima disequazione abbiamo il caso limite per $DTD=S$, per la seconda invece $DTD = 1$. Dunque il sistema si riduce alle due disequazioni

$$\begin{cases} \beta_0 \geq \log(-\beta_1 p_{min} - 1) - \beta_1 p_{min} - \beta_2 S \\ \beta_0 \leq \log(-\beta_1 p_{max} - 1) - \beta_1 p_{max} - \beta_2 \end{cases}$$

Dobbiamo come prima imporre che gli argomenti dei logaritmi siano entrambi positivi, i calcoli sono gli stessi di prima e quindi otteniamo $\beta_1 < -\frac{1}{p_{min}}$ con il secondo vincolo su β_1 libero. A questo punto non ci resta che imporre $\beta_2 < 0$ e l'ultimo vincolo su β_2 a piacere.

Bibliografia

- [1] Sven-Eric Andersson. Operational planning in airline business—can science improve efficiency? experiences from sas. *European Journal of Operational Research*, 43(1):3–12, 1989.
- [2] V. Assumma. La competitività secondo alpitour, 2023. <https://hotellerie.pambianconews.com/2023/05/11/la-competitivita-secondo-alpitour/>.
- [3] Ronald J Balvers and Thomas F Cosimano. Actively learning about demand and the dynamics of price adjustment. *The Economic Journal*, 100(402):882–898, 1990.
- [4] Omar Besbes and Assaf Zeevi. On the minimax complexity of pricing in a changing environment. *Operations research*, 59(1):66–79, 2011.
- [5] Josef Broder and Paat Rusmevichientong. Dynamic pricing under a general parametric choice model. *Operations Research*, 60(4):965–980, 2012.
- [6] Arnoud V den Boer and Bert Zwart. Simultaneously learning and optimizing using controlled variance pricing. *Management science*, 60(3):770–783, 2014.
- [7] Arnoud V den Boer and Bert Zwart. Dynamic pricing and learning with finite inventories. *Operations research*, 63(4):965–978, 2015.
- [8] Arnoud V den Boer and Bert Zwart. Mean square convergence rates for maximum quasi-likelihood estimators. *Stochastic systems*, 4(2):375–403, 2015.
- [9] N Bora Keskin and Assaf Zeevi. On incomplete learning and certainty-equivalence control. *Operations Research*, 66(4):1136–1167, 2018.
- [10] Martin A Lariviere. A note on probability distributions with increasing generalized failure rates. *Operations Research*, 54(3):602–604, 2006.
- [11] Martin L Puterman. *Markov decision processes: discrete stochastic dynamic programming*. John Wiley & Sons, 2014.
- [12] Vatroslav Škare and Dino Gospić. Dynamic pricing and customers’ perceptions of price fairness in the airline industry. *Tourism: An International Interdisciplinary Journal*, 63(4):515–528, 2015.

- [13] Kalyan T Talluri, Garrett Van Ryzin, and Garrett Van Ryzin. *The theory and practice of revenue management*, volume 1. Springer, 2004.