

POLITECNICO DI TORINO

Corso di Laurea Magistrale
in Ingegneria Matematica



Tesi di Laurea Magistrale

Boson Josephson Junction (BJJ)

Relatore

Candidato

Prof. Gianni COPPA

Sergio Luigi LAZZARI

2022/23

Sommario

La coerenza di fase è una proprietà caratteristica dei condensati di Bose-Einstein che rende affascinanti fenomeni macroscopici come le oscillazioni di Josephson. Quest'ultime sono prodotte in una giunzione di Josephson bosonica (BJJ), che schematicamente consiste di due condensati debolmente accoppiati dove idealmente 1) gli atomi occupano solo due diversi stati a singola particella e 2) le interazioni atomo-atomo di contatto. Questa giunzione è formata da un condensato confinato in una doppia buca di potenziale, dove la barriera intermedia è abbastanza grande da consentire un debole collegamento tra i condensati su ciascun lato della doppia buca. Conseguentemente, le oscillazioni Josephson sono oscillazioni della densità delle particelle da un modo ad un altro, dove i modi sono sinistro e destro per la doppia buca. Ulteriormente, le interazioni atomo-atomo danno luogo a fenomeni più interessanti, come il self-trapping, il quale è un regime dinamico dove gli atomi rimangono intrappolati in uno dei due modi.

In questo lavoro di tesi si studia il comportamento dei condensati di Bose-Einstein in un BJJ, usando il formalismo teorico dell'approssimazione del campo medio (con l'equazione di Gross-Pitaevskii). Inoltre, poiché la dinamica Josephson è quasi monodimensionale, si è considerata una riduzione della dimensionalità dell'equazione di Gross-Pitaevskii. Successivamente si è studiato il modello a due modi il quale è uno dei più usati nello studio dell'effetto Josephson, poiché dà semplici equazioni analitiche che catturano, in larga misura, il comportamento del sistema andando a studiare i modi a fase nulla e la relativa analisi della stabilità in ogni singolo caso. Si è passati poi allo studio del Self-Trapping discreto (DST) il quale, in generale, modella un sistema accoppiato di oscillatori non armonici. Si è ristretta l'attenzione al caso particolare della DST, il Dimero, con quelle che vengono chiamate equazioni di Schrödinger non lineari discrete (DNLS). Per queste ultime si sono trovate le soluzioni stazionarie e le loro relative stabilità.

Infine, si è studiata la soluzione numerica dell'equazione tempo dipendente di Gross-Pitaevskii attraverso la tecnica del time-splitting. Le soluzioni basate sull'accuratezza numerica di questo approccio applicato al problema monodimensionale (1D) mostra che fornisce soluzioni stabili. Questo approccio, d'altronde, è stato applicato per studiare la dinamica del condensato di Bose-Einstein il quale è modellato

con GPE. Il "Breathing" del condensato con interazioni repulsive e attrattive sono state simulate di conseguenza nel caso 1D. Sempre numericamente, si è aggiunta una barriera di potenziale nel centro del dominio per analizzare l'evoluzione nel tempo della funzione d'onda contra la barriera.

Ringraziamenti

Prima di procedere con la trattazione, mi è doveroso dedicare questo spazio del mio elaborato alle persone che hanno contribuito alla stesura dello stesso. Volevo ringraziare infinitamente la mia famiglia per tutto quello che hanno fatto per me, in una vita fatta da estremi sacrifici, fin dal primo momento che ho deciso di effettuare questo percorso. Un ringraziamento anche al mio relatore Gianni Coppa, persona umile, che mi è stata vicina in un periodo particolare della mia vita, per i suoi indispensabili consigli e conoscenze trasmesse per la stesura dell'elaborato. Infine dedico questa tesi a me stesso, ai miei sacrifici alla mia tenacia che mi hanno permesso di arrivare fin qui.

Indice

Elenco delle tabelle	VIII
Elenco delle figure	IX
Introduzione	1
1 Teoria del Campo Medio del Condensato di Bose-Einstein	5
1.1 Equazione di Gross-Pitaevskii	6
1.2 Riduzione a una dimensione (1D)	7
2 Effetto Josephson nel condensato di Bose-Einstein	10
2.1 Modello a due modi	11
2.2 Caso buca simmetrica $\Delta E=0$	18
2.2.1 Soluzioni stazionarie e analisi della stabilità	18
2.2.2 Modi a fase nulla	23
2.2.3 Self-Trapping Quantistico Macroscopico (MQST)	26
2.2.4 Modi a fase π	28
3 Self-Trapping Discreto e Equazione di Schrödinger Non Lineare Discreta	33
3.1 Soluzioni Stazionarie	34
3.1.1 Caso $n = 2$	35
3.1.2 Stabilità delle soluzioni stazionarie	36
3.2 Integrabilità	40
3.3 Chaos	41
3.4 Applicazioni	43
4 Soluzione Numerica dell'Equazione di Gross-Pitaevskii	45
4.1 La discretizzazione alle differenze finite usando Crank Nicolson	45
4.1.1 Test numerici con Crank-Nicolson	48
4.2 Metodo Splitting	48

4.2.1	Metodo Splitting per l'equazione NLS	50
4.2.2	Test numerici metodo Splitting	52
4.2.3	Test numerici metodo ODE45	53
4.3	Barriera di Potenziale	54
5	Conclusioni	58
A	Principio di minima azione	60
B	Codice Matlab	62
B.0.1	Splitting-Method	62
B.0.2	Ode45	64
B.0.3	Barriera di Potenziale	65
	Acronimo	69
	Bibliografia	70

Elenco delle tabelle

2.1	Punti stazionari del sistema per interazioni repulsive $\Lambda > 0$	21
2.2	Punti stazionari del sistema per interazioni attrattive $\Lambda < 0$	21
3.1	Soluzioni stazionari della (3.8) per il caso $n = 2$	36

Elenco delle figure

2.1	Schema BJJ con due siti (sx L e dx R). Le BEC sono caratterizzate da una popolazione $N_{L,R}$ e una fase $\phi_{L,R}$. Hanno un'energia di interazione atomo-atomo U e sono accoppiate con un energia tunnel K [8].	19
2.2	Biforcazione per l'imbilancio della popolazione dei punti stazionari che sono massimi per $\Lambda > 0$: $z^0 = 0$ per $0 < \Lambda < 1$, $z^0 = \sqrt{1 - 1/\Lambda^2}$ (tratteggiata blu) e $z^0 = -\sqrt{1 - 1/\Lambda^2}$ (tratteggiata rossa), tutti per $\phi^0 = \pi$	22
2.3	Oscillazioni di Rabi ottenute per $z(0) = 0.1$ e interazione inter-atomica $\Lambda = 0$	24
2.4	Superfici di energia per $\Lambda = 2.5$. I colori diversi corrispondono alle diverse traiettore del sistema	24
2.5	Piccole Oscillazioni sinusoidali ottenute per $z(0) = 0.1$ e interazione inter-atomica $\Lambda = 10$	26
2.6	Oscillazioni di grande ampiezza: all'aumentare di $z(0)$ le armoniche diventano più alte e sempre meno non-armoniche	27
2.7	Macroscopic-Quantum-Self-Trapping(MQST) per $z(0) = 0.8 > z_c$. La z oscilla intorno ad un valore medio non nullo e la fase cresce monotonicamente	28
2.8	Evoluzione temporale dell'imbilancio di popolazione per $z(0)=0.6$ per $\Lambda=0.1$ e 1.1	29
2.9	Evoluzione temporale dell'imbilancio di popolazione per $z(0)=0.6$ per $\Lambda=1.111$ (a) e $\Lambda=1.2,1.25,1.3$ (b)	29
2.10	Traiettorie chiuse ottenute per $\Lambda = 0.5$ in un ritratto di fase ϕ - z	31
2.11	Traiettorie chiuse ottenute per $\Lambda = 1.5$ in un ritratto di fase ϕ - z	31
2.12	Traiettorie chiuse ottenute per $\Lambda = 10$ in un ritratto di fase ϕ - z	32
3.1	Relazione tra γ , ω , ϵ ed N per le soluzioni stazionarie con $n=2$. Le soluzioni stabili sono indicate con le linee piene mentre le soluzioni instabili con le linee tratteggiate. Il punto è un punto di biforcazione	38

3.2	Contorni di H sullo spazio delle fasi $\theta - \phi$ per $\gamma = 1.5$ quando $\epsilon = 1$.	39
3.3	Contorni di H sullo spazio delle fasi $\theta - \phi$ per $\gamma = 3$ quando $\epsilon = 1$.	40
3.4	Contorni di H sullo spazio delle fasi $\theta - \phi$ per $\gamma = 6$ quando $\epsilon = 1$.	40
3.5	Dinamica delle condizioni iniziali (3.22), governata dal Dimero DST (3.21) per valore della costante di accoppiamento $\epsilon = 0.1$	42
3.6	Dinamica delle condizioni iniziali (3.22), governata dal Dimero DST (3.21) per valore della costante di accoppiamento $\epsilon = 0.24$	42
3.7	Dinamica delle condizioni iniziali (3.22), governata dal Dimero DST (3.21) per valore della costante di accoppiamento $\epsilon = 0.6$	43
3.8	Oscillazione della differenza di probabilità di occupazione del sito $p = A_1 ^2 - A_2 ^2$ per $\epsilon = 0.1$	43
3.9	Oscillazione della differenza di probabilità di occupazione del sito $p = A_1 ^2 - A_2 ^2$ per $\epsilon = 0.24$	44
3.10	Oscillazione della differenza di probabilità di occupazione del sito $p = A_1 ^2 - A_2 ^2$ per $\epsilon = 0.6$	44
4.1	Soluzione di GPE usando il metodo Crank-Nicolson per interazione repulsiva, $g=3$	49
4.2	Soluzione di GPE usando il metodo Crank-Nicolson per interazione repulsiva, $g=-3$	49
4.3	"Breathing" del condensato per interazione repulsiva, $g=5$. Il valore della funzione $ \Psi(0, t) ^2$ nel centro della buca è data come funzione del tempo.	53
4.4	"Breathing" del condensato per interazione repulsiva, $g=-5$. Il valore della funzione $ \Psi(0, t) ^2$ nel centro della buca è data come funzione del tempo.	53
4.5	Evoluzione temporale del modulo quadro delle funzioni d'onda $\Psi_{0,t}$ quando $g = 1$ utilizzando la funzione ode45	54
4.6	Evoluzione temporale del modulo quadro delle funzioni d'onda $\Psi_{0,t}$ quando $g = 5$ utilizzando la funzione ode45	54
4.7	Evoluzione temporale del modulo quadro delle funzioni d'onda $\Psi_{0,t}$ quando $g = 10$ utilizzando la funzione ode45	55
4.8	Evoluzione temporale del modulo quadro delle funzioni d'onda $\Psi_{0,t}$ quando $g = -1$ utilizzando la funzione ode45	55
4.9	Evoluzione temporale del modulo quadro delle funzioni d'onda $\Psi_{0,t}$ quando $g = -2.5$ utilizzando la funzione ode45	56
4.10	Evoluzione temporale del modulo quadro delle funzioni d'onda $\Psi_{0,t}$ quando $g = -5$ utilizzando la funzione ode45	56
4.11	Evoluzione temporale di una funzione d'onda che infrange una barriera di potenziale $V = 9$	57

4.12 Evoluzione temporale di una funzione d'onda che infrange una barriera di potenziale $V = 1000$	57
--	----

Introduzione

La condensazione di Bose-Einstein è un fenomeno che si verifica quando un gas di particelle bosoniche è raffreddato sotto una certa temperatura critica T_c , e una grande parte di atomi condensa nello stato a singola particella a più bassa energia. Questo fenomeno è stato predetto da A. Einstein nel 1924 [1], il quale generalizzò il lavoro compiuto precedentemente da S.N. Bose sulla statistica quantistica dei fotoni. Nel suo precedente lavoro Bose considerò la radiazione termica del corpo nero come un gas di particelle indistinguibili. L'idea principale era di contare il numero di stati microscopici di luce quantistica. Basandosi su questo risultato A. Einstein estese questo modo di contare il numero di stati microscopici al caso di un gas ideale di Bose di particelle indistinguibili. Derivò la seguente espressione per il numero di particelle n_i che popolano uno stato individuale caratterizzato dall'aver energia ϵ_i

$$n_i = \frac{1}{e^{\beta(\epsilon_i - \mu)} - 1} \quad (1)$$

dove $\beta = 1/k_B T$, k_B è la costante di Boltzmann, T è la temperatura, e μ il potenziale chimico. Da questa distribuzione si possono calcolare tutte le proprietà termodinamiche di un gas ideale composta da particelle che soddisfano la statistica di Bose-Einstein. Per dare un'interpretazione fisica è utile definire la fugacità $z = e^{\beta\mu}$, il quale risulta essere ristretto al dominio $z \in [0,1)$, legata al potenziale chimico. Il potenziale chimico μ è ottenuto imponendo che la somma di tutte le occupazioni è uguale al numero totale di particelle N ,

$$N = \sum_i n_i = \sum_i \frac{z}{e^{\beta\epsilon_i} - z} \quad (2)$$

Quando il numero di particelle N è basso o la temperatura T è alta, questa equazione dà una fugacità molto piccola $z \ll 1$. Di conseguenza l'equazione (1) diventa $n_i \simeq z e^{-\beta\epsilon_i}$, la quale approssima la distribuzione di Maxwell-Boltzmann classica. Viceversa, se N è alto o T è basso la fugacità tende al limite $z=1$. Infatti se noi scriviamo l'equazione (2) separando il numero di particelle che occupano lo stato a più bassa energia $\epsilon_0 = 0$ otteniamo

$$N = n_0 + \sum_{i>0} n_i = \frac{z}{1-z} + \sum_{i>0} \frac{z}{e^{\beta\epsilon_i} - z} \quad (3)$$

Quando $z \simeq 1$, ovvero quando T è basso, n_0 diventa grande e il numero di particelle negli stati eccitati diventa limitato ed espresso come:

$$N_{ecc} \leq N_{max} = \sum_{i>0} \frac{1}{e^{\beta\epsilon_i} - 1} \quad (4)$$

Il punto chiave è che quando il numero di particelle è maggiore di N_{max} , l'eccesso di particelle $N - N_{max}$ deve essere posizionato nello stato a più bassa energia. Le particelle che occupano lo stato a più bassa energia formano il condensato mentre le particelle che occupano i livelli superiori eccitati formano la nuvola termica. Si noti come N_{max} dipende dalla temperatura. In questo modo si può definire la temperatura critica in cui avviene la transizione, la quale è definita come la più alta temperatura alla quale appare l'occupazione dello stato a più bassa energia [2]. La transizione a BEC avviene quindi al di sotto di una temperatura critica. Tale temperatura, espressa in Kelvin, per un gas uniforme consistente di particelle non interagenti vale

$$T_c = \left(\frac{n}{\zeta(3/2)} \right)^{2/3} \frac{2\pi\hbar^2}{Mk_B} \approx 3.3125 \frac{\hbar^2 n^{2/3}}{Mk_B} \quad (5)$$

e questa varia a seconda della densità del gas n e dalla massa M del gas stesso. E' utile ricavare dalla (5) la densità spazio delle fasi che denoteremo con $\bar{\omega}$. Questo è definito come il numero di particelle di gas bosoniche, di massa M alla temperatura T , contenute in un volume pari al cubo della lunghezza d'onda termica di de Broglie $\lambda_{dB}^3 = (2\pi\hbar^2/Mk_B T)^{3/2}$. In termini di λ_{dB} , la condizione critica alla transizione si verifica quando

$$\bar{\omega} = n\lambda_{dB}^3(T_c) = \zeta(3/2) \approx 2.612 \quad (6)$$

dove $n = N/V$ è la densità del gas e $\zeta(x)$ è la funzione zeta di Riemann. Da questa equazione si vede che quando $T \approx T_c$ la lunghezza d'onda di de Broglie diventa comparabile alla distanza interparticellare media, che è dell'ordine di $n^{-1/3}$. Sotto la temperatura di transizione $T < T_c$ il numero di particelle nel condensato è pari a $N_0 = N[1 - (T/T_c)^{3/2}]$. Si conclude quindi che nel limite in cui T tende a 0 i bosoni sono tutti nello stato fondamentale.

Effetto Josephson

Un interessante fenomeno che è stato osservato con i BEC è un analogo dell'effetto Josephson in sistemi di materia condensata. Schematicamente, una giunzione di Josephson bosonica (BJJ) consiste di due BEC debolmente accoppiati nella quale 1) gli atomi possono popolare solo due diversi stati particellari, e 2) gli atomi interagiscono tra loro localmente, attraverso interazioni di contatto atomo-atomo. Un condensato è descritto da un parametro d'ordine, corrispondente ad una funzione d'onda particellare che ciascun atomo popola, φ . Questa funzione d'onda può essere scritta in termini del suo modulo $|\varphi|$ e fase globale $\phi(t)$, che evolve nel tempo. In uno schema BJJ, ci sono due condensati debolmente accoppiati, ognuno dei quali con un modulo e una fase. Questo genera una differenza di fase tra di loro, creando l'aspetto di un effetto tunnel oscillante coerente di particelle da un condensato ad un altro, attraverso un debole collegamento. Questo è conosciuto come effetto Josephson in BEC. Questo effetto è stato studiato per la prima volta da B.D. Josephson nel 1962 nel contesto della superconduttività. Quando due superconduttori sono separati da una barriera isolante sottile, che forma quella che è chiamata giunzione Josephson, si genera una corrente finita tra di loro. Questa corrente è la spiegazione del passaggio di particelle attraverso la barriera ed è collegata alla differenza di fase tra i due superconduttori. Questo fenomeno è chiamato effetto Josephson a corrente continua. D'altronde se un voltaggio costante è applicato alla giunzione appare invece una corrente alternata. Un modo per preparare sperimentalmente un BJJ è di confinare un singolo BEC in una doppia buca di potenziale [3]. In tale sistema, la giunzione Josephson consiste nei due pacchetti di onde di materia localizzati in ciascuna buca, che sono debolmente accoppiati tramite tunneling di particelle attraverso una barriera potenziale. Questa configurazione presenta effetti analoghi a corrente continua e alternata, ma cosa interessante, presenta anche quello che è chiamato auto-intrappolamento quantistico macroscopico (MQST). Il MQST consiste nella soppressione del tunneling tra i condensati come conseguenza delle interazioni atomo-atomo. Un comune approccio teorico per studiare la dinamica di una giunzione di Josephson bosonica dentro la teoria del campo medio fu proposta da Smerzi [4]. Come discuteremo più in dettaglio nei capitoli successivi, sotto alcune condizioni questo sistema può essere descritto utilizzando solo i primi due modi a più bassa energia. Di conseguenza, uno ottiene una coppia di equazioni semplici che collegano la differenza di fase tra i condensati e il loro imbalance di popolazione. Quest'ultimo è la differenza tra il numero di particelle tra i due condensati [5].

Profilo della tesi

La tesi è organizzata come segue:

Nel **capitolo 1** presentiamo le basi teoriche per descrivere un BEC dentro la teoria del campo medio. E' un breve capitolo con materiale teorico il quale è importante per l'apprendimento degli sviluppi successivi. Diamo la definizione dell'equazione di Gross-Pitaevski (GPE), l'equazione di Gross-Pitaevskii tempo dipendente (TDGPE) e la riduzione della dimensionalità dell'equazione non lineare di Schrödinger. Nel **capitolo 2** è rivolto all'effetto Josephson nel condensato di Bose-Einstein. Nella sezione 2.1 parleremo del modello a due modi con i relativi casi particolari e l'analisi della stabilità del modello stesso.

Nel **capitolo 3** parleremo del Self-Trapping Discreto (DST) e dell'equazione di Schrödinger non lineare discreta (DNLS). Nella sezione 3.1 troveremo le soluzioni stazionarie del problema nel caso più semplice e studieremo la stabilità delle stesse. Nella sezione 3.2 studiamo l'integrabilità dell'equazione DST la quale è integrabile esattamente fino a un numero di equazioni pari a due. Nella sezione 3.3 si dà un accenno al chaos hamiltoniano ottenuto per un numero di equazioni maggiori di due. Infine nella sezione 3.4 si danno delle informazioni sull'applicazione dell'equazione DST in casi sperimentali.

Nel **capitolo 4** proponiamo un metodo efficiente per la risoluzione numerica dell'equazione di Gross-Pitaevskii (GPE) e confrontiamo il risultato ottenuto nella sezione 4.2 con la soluzione esatta. Infine nella sezione 4.3 parleremo della barriera di potenziale e degli effetti che questa provoca sulla funzione d'onda.

Nel **capitolo 5**, infine, si sono tratte le conclusioni dell'elaborato.

Capitolo 1

Teoria del Campo Medio del Condensato di Bose-Einstein

In un gas ogni atomo ha la sua energia e può muoversi liberamente. Quando questi atomi sono Bosoni, gli è permesso di avere la stessa energia allo stesso momento. Quando il gas è raffreddato, gli atomi rallentano e le loro energie diminuiscono. Per via della loro natura quantica gli atomi si comportano come onde la cui dimensione aumenta con la diminuzione della temperatura. A temperature molto basse, la grandezza delle onde diventa maggiore rispetto alla distanza media tra due atomi. Una volta raggiunta questa temperatura, tutti i bosoni possono essere alla stessa identica energia nello stesso stato quantico e perciò la funzione d'onda complessiva è costruita come un prodotto di N funzioni d'onda identiche. Collettivamente formano una singola onda quantica, chiamata condensato di Bose-Einstein (BEC). Il condensato di Bose-Einstein, perciò, è un particolare stato della materia in cui i Bosoni, raffreddati fino ad una frazione di grado superiore allo zero assoluto, perdono la loro individualità per dare luogo ad un comportamento singolare. Questo è vero per un gas ideale di Bose [6], nella quale lo stato occupato è lo stato fondamentale del potenziale esterno. Viceversa, se consideriamo interazioni particellari, la funzione d'onda dello stato fondamentale Ψ del condensato è una funzione d'onda $3N$ -dimensionale che non può essere espressa come un prodotto diretto di funzioni d'onda a singola particella [6]. Comunque, si può trovare il prodotto di N funzioni d'onda a singola particella φ identiche tali che riproducono la funzione d'onda totale Ψ . Il risultato di questo approccio è l'equazione di Gross-Pitaevskii. Questa equazione descrive come una funzione d'onda a singola particella φ è determinata dall'effetto combinato di energia cinetica, energia potenziale e dal campo medio esercitato su un dato atomo dai restanti $N-1$ atomi.

In questo capitolo introduciamo le basi per capire poi l'effetto Josephson all'interno della teoria del campo medio. Nella sezione 1.1 analizziamo l'equazione di

Gross-Pitaevskii. Nella sezione 1.2 analizzeremo una riduzione di dimensionalità dell'equazione di Gross-Pitaevskii.

1.1 Equazione di Gross-Pitaevskii

In questa sezione parleremo dell'equazione di Gross-Pitaevskii, la quale è un'equazione di Schrödinger non lineare che descrive lo stato quantico macroscopico. Consideriamo N bosoni identici intrappolati in un potenziale esterno $V_{ext}(r)$ in equilibrio alla temperatura $T = 0K$. Se gli atomi non interagiscono tra di loro, tutti sono nello stesso stato a singola particella φ_0 , che è lo stato fondamentale del potenziale esterno $V_{ext}(r)$. Lo stato complessivo pertanto è il prodotto diretto tra i singoli stati φ_0 relativi ad ogni singolo bosone. Nel caso in cui ci fossero interazioni inter-atomiche lo stato fondamentale complessivo risulta essere più intricato da calcolare e non è possibile ricavare una soluzione analiticamente e deve essere risolto numericamente.

In questo regime, la distanza interatomica è molto più grande della lunghezza di scattering a dell'onda, che descrive un intervallo efficace dell'interazione atomo-atomo. Sotto queste ipotesi, le collisioni dominanti sono collisioni elastiche e l'interazione a due particelle può essere ben descritta da un potenziale delta:

$$U(r - r') = g_{3D}\delta(r - r') \quad (1.1)$$

dove $g_{3D} = \frac{4\pi\hbar^2 a}{m}$ denota la costante di accoppiamento tridimensionale. La lunghezza di scattering a è positiva per interazioni repulsive e negativa per interazioni attrattive. Assumendo questo potenziale di interazione, Gross e Pitaevskii hanno sviluppato una teoria del campo medio per la descrizione approssimata dei BEC alla temperatura zero. In questo ambito il condensato è descritto da una funzione d'onda $\Psi(r, t)$ e obedisce all'equazione di Gross-Pitaevskii (GPE)

$$i\hbar\frac{\partial\Psi(r, t)}{\partial t} = \left[-\frac{\hbar^2}{2m}\Delta + V_{ext}(r) + g_{3D}N|\Psi(r, t)|^2 \right] \Psi(r, t) \quad (1.2)$$

In questa rappresentazione la funzione d'onda condensata è normalizzata all'unità e il quadrato del suo valore assoluto determina la densità atomica $\rho(r, t) = N|\Psi(r, t)|^2$. L'energia totale consiste di un'energia cinetica, un'energia potenziale esterna e un'energia di interazione che è proporzionale al quadrato della funzione d'onda e perciò spesso riferita come non linearità. L'equazione di Gross-Pitaevskii in genere non è possibile risolverla analiticamente. Nel caso limite di energia cinetica dominante, la GPE si riduce ad un'equazione di Schrödinger lineare, così riuscendo a ricavare la funzione d'onda nello stato fondamentale nel potenziale esterno. Per trovare l'equazione tempo dipendente di Gross-Pitaevskii, si propone una funzione

d'onda N-particellare come un prodotto di N funzioni tempo dipendenti relative ad una particella rispettivamente

$$\Psi(r_1, \dots, r_N, t) = \varphi(r_1, t)\varphi(r_2, t)\dots\varphi(r_N, t) \quad (1.3)$$

Questa soluzione trascura alcune correlazioni quantistiche tra gli atomi. Inserendo questa ipotesi nel principio di minima azione otteniamo l'equazione tempo dipendente di Gross-Pitaevskii (TDGPE)

$$i\hbar \frac{\partial \varphi(r, t)}{\partial t} = \left[-\frac{\hbar^2}{2m} \Delta + V_{ext}(r, t) + g_{3D}N|\varphi(r, t)|^2 \right] \varphi(r, t) \quad (1.4)$$

Se il potenziale esterno è tempo indipendente, si possono trovare soluzioni stazionarie del TDGPE della forma $\varphi(r, t) = \varphi(r) \exp \frac{-i\mu t}{\hbar}$ [4] In questa tesi si utilizzerà la seguente notazione: $\Psi(r)$ descrive la funzione d'onda totale del condensato, e così è normalizzata al numero di particelle totali N, mentre $\varphi(r)$ descrive un funzione d'onda relativa alla singola particella, normalizzata a 1.

1.2 Riduzione a una dimensione (1D)

Prima di risolvere l'equazione di Gross-Pitaevskii (GPE) 1D, analizziamo la sua derivazione dalla teoria quantistica. L'Hamiltoniana quantistica multi corpo di bosoni identici interagenti è data da

$$\begin{aligned} \hat{H} = & \int \hat{\psi}^+(r) \left[-\frac{1}{2} \nabla^2 + U(r) \right] \hat{\psi}(r) d^3r \\ & + \int \hat{\psi}^+(r) \hat{\psi}^+(r') W(r, r') \hat{\psi}(r') \hat{\psi}(r) d^3r d^3r' \end{aligned} \quad (1.5)$$

dove $\hat{\psi}(r, t)$ è l'operatore di campo bosonico. Nel nostro caso il potenziale esterno tempo indipendente è dato da

$$V_{ext}(r) = \frac{1}{2}(x^2 + y^2) + V(z) \quad (1.6)$$

che corrisponde ad un potenziale armonico trasversale di frequenza ω_{\perp} con lunghezza caratteristica $a_{\perp} = \sqrt{\hbar/(m\omega_{\perp})}$ e da un potenziale assiale $V(z)$ di tipo anch'esso armonico. Partendo dall'equazione 3D di Gross Pitaevskii (1.2) e sostituendo la (1.6) si ottiene

$$i \frac{\partial \Psi(r, t)}{\partial t} = \left[-\frac{1}{2} \nabla^2 + \frac{1}{2}(x^2 + y^2) + V(z) + g_{3D}N|\Psi(r, t)|^2 \right] \Psi(r, t) \quad (1.7)$$

dove $\Psi(r, t)$ è la funzione d'onda complessa normalizzata al numero totale di bosoni, cioè

$$\int |\Psi(r, t)|^2 d^3r = N \quad (1.8)$$

L'equazione GPE tempo dipendente 3D (1.7) non è altro che l'equazione di Eulero-Lagrange del funzionale di azione (Appendice A)

$$S = \int \mathcal{L} dt d^3r \quad (1.9)$$

con densità Lagrangiana

$$\mathcal{L} = \Psi^* \left[i \frac{\partial}{\partial t} + \frac{1}{2} \nabla^2 \right] \Psi - \frac{1}{2} (x^2 + y^2) |\Psi|^2 - V(z) |\Psi|^2 - \pi \gamma |\Psi|^4 \quad (1.10)$$

Per performare la riduzione ad una dimensione supponiamo una funzione d'onda della forma

$$\Psi(r, t) = \frac{N^{1/2}}{\pi^{1/2} \sigma(z, t)} \exp \left[- \left(\frac{x^2 + y^2}{2\sigma(z, t)^2} \right) \right] \phi(z, t) \quad (1.11)$$

dove $\sigma(z, t)$ e $\phi(z, t)$ sono rispettivamente l'ampiezza trasversale e la funzione d'onda bosonica assiale. Utilizziamo questa ipotesi Gaussiana al funzionale di azione del GPE 3D. Integrando in x e y e trascurando le derivate di $\sigma(z, t)$, si ottiene l'azione monodimensionale

$$S_e = \int \mathcal{L}_e dt dz \quad (1.12)$$

con la rispettiva densità Lagrangiana 1D

$$\mathcal{L}_e = \phi^* \left[i \frac{\partial^2}{\partial t} + \frac{1}{2} \partial_z \right] \phi - \frac{1}{2} \left(\frac{1}{\sigma^2} - \sigma^2 \right) |\phi|^2 - V(z) |\phi|^2 - \frac{(\partial_z \sigma)^2}{2\sigma^2} |\phi|^2 - \frac{g}{2\sigma^2} |\phi|^4 \quad (1.13)$$

Calcolando le equazioni di Eulero Lagrange sia di $\sigma(z, t)$ che $\phi(z, t)$ si ottiene

$$i \frac{\partial}{\partial t} \phi = \left[-\frac{1}{2} \partial_z^2 + V(z) + \frac{1}{2} \left(\frac{1}{\sigma^2} - \sigma^2 \right) + \frac{g}{\sigma^2} |\phi|^2 \right] \phi, \quad (1.14)$$

e

$$\sigma^4 = 1 + g |\phi|^2 + (\partial_z \sigma)^2 + \frac{\sigma^3}{|\phi|^2} \partial_z \left(\frac{\partial_z \sigma}{\sigma^2} |\phi|^2 \right) \quad (1.15)$$

Trascurando le derivate spaziali di $\sigma(z, t)$, l'ultima equazione diventa

$$\sigma = \left(1 + g |\phi|^2 \right)^{1/4} \quad (1.16)$$

L'equazione (1.14) e la (1.16) danno l'equazione di Schrödinger non lineare 1D

$$i \frac{\partial}{\partial t} \phi = \left[-\frac{1}{2} \partial_z^2 + V(z) + \frac{1}{2} \left(\frac{1}{\sqrt{1 + g |\phi|^2}} - \sqrt{1 + g |\phi|^2} \right) + \frac{g}{\sqrt{1 + g |\phi|^2}} |\phi|^2 \right] \phi, \quad (1.17)$$

Infine, sotto la condizione che

$$g|\phi(z, t)|^2 \ll 1 \tag{1.18}$$

si trova che $\sigma = 1$ e l'equazione (1.17) diventa l'equazione GPE 1D

$$i\frac{\partial}{\partial t}\phi(z, t) = \left[-\frac{1}{2}\partial_z^2 + V(z) + g|\phi(z, t)|^2\right]\phi(z, t) \tag{1.19}$$

Capitolo 2

Effetto Josephson nel condensato di Bose-Einstein

L'effetto Josephson nel condensato di Bose-Einstein è un effetto quantico macroscopico che da origine ad un aspetto fondamentale: la fase quantica. Dal precedente capitolo, sappiamo che un BEC può essere rappresentato da una funzione d'onda $\varphi(r)$ a singola particella nella quale gli atomi condensano. Abbiamo anche visto come il potenziale chimico μ del condensato governa l'evoluzione temporale della sua fase globale come $\varphi(r, t) = \varphi(r)e^{-\frac{i\mu t}{\hbar}}$. Perciò, l'evoluzione temporale della differenza di fase tra due BEC indipendenti è proporzionale alla differenza nei loro potenziali chimici.

L'effetto Josephson è osservato quando due BEC sono accoppiati, permettendo alle particelle di trasferirsi da un condensato all'altro. Il collegamento tra di loro deve essere debole per assicurare la conservazione della coerenza di fase in ogni condensato. Quando inizialmente, c'è una differenza di fase tra due condensati, appare una corrente continua particellare attraverso il collegamento dovuta all'effetto Josephson [7]. Lo scambio di particelle modula il potenziale chimico di ogni condensato il quale influenza l'evoluzione della differenza di fase. Di conseguenza, si ottengono oscillazioni di particelle da un condensato all'altro, chiamate oscillazioni di Josephson. Come vedremo, la frequenza di queste oscillazioni dipendono dalla forza delle interazioni atomo-atomo. L'impostazione che si è utilizzata è il BJJ interno. In questo caso i due condensati non sono separati spazialmente. Qui, i due condensati hanno due diversi stati interni dello stesso atomo. La condizione di debole accoppiamento è ottenuta accoppiando un fascio laser in risonanza con la transizione da uno stato interno ad un altro. Uno studio teorico sul BJJ fu fatto da Smerzi [5]. In questo articolo si è considerato un BEC confinato in una doppia barriera di potenziale descritto dall'equazione del campo medio di Gross-Pitaevskii, discussa nel capitolo 1. Sotto determinate condizioni il sistema può essere descritto

utilizzando solo i due modi ad energia più bassa. Come vedremo nel seguito, con questa approssimazione a due modi, si è derivato un semplice sistema di equazioni differenziali che riguarda la differenza di fase tra i due condensati e il loro imbalance di popolazione bosonica (differenza nel numero di particelle tra i due condensati). Inoltre nell'articolo si parla di "Macroscopic quantum self-trapping" (MQST). Si tratta di un regime dinamico nel quale gli atomi rimangono maggiormente intrappolati in una buca e l'effetto tunnel viene fermato.

Nella sezione 2.1 descriveremo l'approssimazione a due modi e si descrive la dinamica e diversi regimi che possono verificarsi con questa approssimazione.

2.1 Modello a due modi

In questa sezione si discute di un'approssimazione, la quale almeno qualitativamente può descrivere differenti regimi di dinamiche non lineari del sistema di due condensati di Bose-Einstein debolmente accoppiati. La funzione d'onda totale è scritta come una sovrapposizione di due funzioni d'onda spaziali tempo indipendenti localizzate nelle rispettive buche. In tal modo, è ricavata una descrizione formale del sistema in termini di due parametri dinamici, la variazione di fase e la variazione della popolazione. Queste due variabili sono coniugate e soddisfano due equazioni differenziali accoppiate.

La dinamica di due sistemi accoppiati è vincolata da una funzione d'onda a due modi

$$\Psi(r, t) = \Psi_1(t)\Phi_1(r) + \Psi_2(t)\Phi_2(r) \quad (2.1)$$

con

$$\Psi_{1,2}(t) = \sqrt{N_{1,2}(t)}e^{i\phi_{1,2}(t)} \quad (2.2)$$

dove $N_{1,2}$ è il numero di atomi e $\phi_{1,2}$ la fase nella corrispondente buca. La normalizzazione della funzione d'onda totale $\Psi(r, t)$ è fissata da un numero di atomi totale $N_T = N_1 + N_2$ e da $\int |\Phi_{1,2}|^2 dr = 1$. Affinchè sia soddisfatta la condizione di debole accoppiamento noi ipotizziamo che $\int \Phi_1 \Phi_2 dr = 0$.

Le funzioni d'onda spaziali $\Phi_1(r), \Phi_2(r)$ possono essere ottenute per mezzo di una combinazione lineare di autostati stazionari simmetrico e antisimmetrico dell'equazione di Gross-Pitaevskii:

$$\begin{aligned} \Phi_1(r) &= \frac{\Phi_s(r) + \Phi_{as}(r)}{\sqrt{2}} \\ \Phi_2(r) &= \frac{\Phi_s(r) - \Phi_{as}(r)}{\sqrt{2}} \end{aligned} \quad (2.3)$$

Siccome l'equazione di Gross-Pitaevskii è dotata di un termine di interazione non lineare in genere non supporta il principio di sovrapposizione. Tuttavia, l'ipotesi (2.1) è giustificata dal fatto che le nuvole interatomiche sono debolmente sovrapposte, per cui le interazioni nella regione di sovrapposizione possono essere trascurate. In aggiunta, l'uso delle funzioni d'onda (2.3) restringe la descrizione del regime, dove le interazioni atomiche producono solo piccole modifiche delle proprietà dello stato fondamentale nelle buche rispettive.

Se noi sostituiamo l'equazione (2.1) nell'equazione di Gross-Pitaevskii (1.4) otteniamo

$$i\hbar \frac{\partial}{\partial t} (\Psi_1(t)\phi_1(r) + \Psi_2(t)\phi_2(r)) = -\frac{\hbar^2}{2m} \nabla^2 (\Psi_1(t)\phi_1(r) + \Psi_2(t)\phi_2(r)) + [V_{ext}(r) + g|\Psi_1(t)\phi_1(r) + \Psi_2(t)\phi_2(r)|^2] (\Psi_1(t)\phi_1(r) + \Psi_2(t)\phi_2(r)) \quad (2.4)$$

Siccome $\phi_1(r)$ e $\phi_2(r)$ non dipendono dal tempo, segue che

$$i\hbar \phi_1(r) \frac{\partial \psi_1(t)}{\partial t} + i\hbar \phi_2(r) \frac{\partial \psi_2(t)}{\partial t} = -\frac{\hbar^2}{2m} \Psi_1(t) \nabla^2 \phi_1(r) - \frac{\hbar^2}{2m} \Psi_2(t) \nabla^2 \phi_2(r) + V_{ext}(r) (\Psi_1(t)\phi_1(r) + \Psi_2(t)\phi_2(r)) + g(|\psi_1(t)|^2 |\phi_1(r)|^2 + |\psi_2(t)|^2 |\phi_2(r)|^2 + \psi_1(t)\psi_2^*(t)\phi_1(r)\phi_2^*(r) + \psi_1^*(t)\psi_2(t)\phi_1^*(r)\phi_2(r)) (\Psi_1(t)\phi_1(r) + \Psi_2(t)\phi_2(r)) \quad (2.5)$$

Moltiplicando poi per $\Phi_1(r)$ e integrando nelle dimensioni spaziali si ricava l'equazione

$$\begin{aligned} i\hbar \frac{\partial \psi_1(t)}{\partial t} \underbrace{\int \phi_1^2(r) dr}_{I_1} + i\hbar \frac{\partial \psi_2(t)}{\partial t} \underbrace{\int \phi_2^2(r) dr}_{I_2} &= -\frac{\hbar^2}{2m} \Psi_1(t) \underbrace{\int \phi_1(r) \nabla^2 \phi_1(r) dr}_{I_3} \\ &- \frac{\hbar^2}{2m} \Psi_2(t) \underbrace{\int \phi_2(r) \nabla^2 \phi_2(r) dr}_{I_4} + \psi_1(t) \int V_{ext}(r) \phi_1^2(r) dr \\ &+ \psi_2(t) \int V_{ext}(r) \phi_2(r) \phi_1(r) dr + g \underbrace{\int \phi_1(r) [(|\psi_1(t)|^2 |\phi_1(r)|^2 + |\psi_2(t)|^2 |\phi_2(r)|^2 + \psi_1(t)\psi_2^*(t)\phi_1(r)\phi_2^*(r) + \psi_1^*(t)\psi_2(t)\phi_1^*(r)\phi_2(r)) (\Psi_1(t)\phi_1(r) + \Psi_2(t)\phi_2(r))] dr}_{I_5} \end{aligned} \quad (2.6)$$

Ulteriormente, utilizzando le condizioni di ortogonalità e normalizzazione che sono espresse come:

$$\int \phi_1(r)\phi_2(r)dr = 0 \quad (2.7)$$

e

$$\int |\phi_1(r)|^2 dr = 1 \quad (2.8)$$

si può facilmente trovare che

$$I_1 = 1 \quad (2.9)$$

e

$$I_2 = 0 \quad (2.10)$$

Successivamente, integrando gli altri integrali per parti calcoliamo I_3 e I_4 come:

$$I_3 = \int \phi_1(r) \nabla^2 \phi_1(r) dr = - \int |\nabla \phi_1(r)|^2 dr \quad (2.11)$$

e

$$I_4 = \int \phi_1(r) \nabla^2 \phi_2(r) dr = - \int \nabla \phi_1(r) \nabla \phi_2(r) dr \quad (2.12)$$

Allo stesso modo, usando anche la condizione di ortogonalità calcoliamo

$$\begin{aligned} I_5 &= \int \phi_1(r) [(|\psi_1(t)|^2 |\phi_1(r)|^2 + |\psi_2(t)|^2 |\phi_2(r)|^2 + \psi_1(t) \psi_2^*(t) \phi_1(r) \phi_2^*(r) \\ &\quad + \psi_1^*(t) \psi_2(t) \phi_1^*(r) \phi_2(r)) (\Psi_1(t) \phi_1(r) + \Psi_2(t) \phi_2(r))] \\ &= \int [(|\psi_1(t)|^2 |\phi_1(r)|^2 \phi_1^2(r) \psi_1(t)) + (|\psi_1(t)|^2 |\phi_1(r)|^2 \phi_1(r) \phi_2(r) \psi_2(t)) \\ &\quad + (|\psi_2(t)|^2 |\phi_2(r)|^2 \phi_1^2(r) \psi_1(t)) + (|\psi_2(t)|^2 |\phi_2(r)|^2 \phi_1(r) \phi_2(r) \psi_1(t)) \\ &\quad + \psi_1(t) \psi_2^*(t) \phi_1^3(r) \phi_2^*(r) \psi_1(t) + \psi_1(t) \psi_2^*(t) \phi_1^2(r) \phi_2^*(r) \psi_2(t) \phi_2(r) \\ &\quad + \psi_1^*(t) \psi_2(t) \phi_1^*(r) \phi_1^2(r) \phi_2(r) \psi_1(t) + \psi_1^*(t) \psi_2(t) \phi_1^*(r) \phi_1(r) \phi_2^2(r) \psi_2(t)] dr \end{aligned} \quad (2.13)$$

In questo integrale, solo il primo termine è diverso da zero, gli altri termini si annullano con la condizione di ortogonalità (2.7). Segue che:

$$I_5 = \int |\psi_1(t)|^2 |\phi_1(r)|^4 \psi_1(t) dr \quad (2.14)$$

Se consideriamo che $N_1 = |\psi_1(t)|^2$ allora si ottiene

$$I_5 = N_1 \int |\phi_1(r)|^4 \psi_1(t) dr \quad (2.15)$$

Infine mettendo tutto insieme, si ha:

$$\begin{aligned} i\hbar \frac{\partial \psi_1(t)}{\partial t} &= \frac{\hbar^2}{2m} \psi_1(t) \int |\nabla \phi_1(r)|^2 dr + \frac{\hbar^2}{2m} \psi_2(t) \int \nabla \phi_1(r) \nabla \phi_2(r) dr \\ &\quad + \psi_1(t) \int V_{ext}(r) \phi_1^2(r) dr + \psi_2(t) \int V_{ext}(r) \phi_1(r) \phi_2(r) dr \\ &\quad + g N_1 \psi_1(t) \int |\phi_1(r)|^4 dr \end{aligned} \quad (2.16)$$

$$\begin{aligned}
 i\hbar \frac{\partial \psi_1(t)}{\partial t} &= \left[\frac{\hbar^2}{2m} \int |\nabla \phi_1(r)|^2 dr + \int V_{ext}(r) \phi_1^2(r) dr + gN_1 \int |\phi_1(r)|^4 dr \right] \psi_1(t) \\
 &+ \left[\frac{\hbar^2}{2m} \int \nabla \phi_1(r) \nabla \phi_2(r) dr + \int V_{ext}(r) \phi_1(r) \phi_2(r) dr \right] \psi_2(t)
 \end{aligned} \tag{2.17}$$

Allo stesso modo, con la stessa procedura precedentemente effettuata, si ottiene un'equazione corrispondente per $\Psi_2(t)$ ottenuta riposizionando gli 1 con i 2 e viceversa della (2.17).

$$\begin{aligned}
 i\hbar \frac{\partial \psi_2(t)}{\partial t} &= \left[\frac{\hbar^2}{2m} \int |\nabla \phi_2(r)|^2 dr + \int V_{ext}(r) \phi_2^2(r) dr + gN_2 \int |\phi_2(r)|^4 dr \right] \psi_2(t) \\
 &+ \left[\frac{\hbar^2}{2m} \int \nabla \phi_2(r) \nabla \phi_1(r) dr + \int V_{ext}(r) \phi_2(r) \phi_1(r) dr \right] \psi_1(t)
 \end{aligned} \tag{2.18}$$

Definiamo i termini dentro l'integrale come:

$$\begin{aligned}
 E_{1,2}^0 &= \int \left[\frac{\hbar^2}{2m} |\nabla \phi_{1,2}|^2 + |\phi_{1,2}|^2 V_{ext} \right] dr \\
 K &= - \int \left[\frac{\hbar^2}{2m} \nabla \phi_1 \nabla \phi_2 + \phi_1 V_{ext} \phi_2 \right] dr \\
 U_{1,2} &= g \int |\phi_{1,2}|^4 dr,
 \end{aligned} \tag{2.19}$$

dove E_i^0 è l'energia di una particella nel sito $i = 1, 2$, U_i è l'energia di interazione del campo medio del sito i . Quando non ci sono le interazioni atomo-atomo le particelle passano da un sito ad un altro con una frequenza dettata da K . Questo termine è anche proporzionale alla differenza di energia tra lo stato fondamentale e il primo stato eccitato. Otteniamo così due equazioni di Shrödinger accoppiate nelle due buche per il BEC

$$\begin{aligned}
 i\hbar \frac{\partial \Psi_1}{\partial t} &= (E_1^0 + U_1 N_1) \Psi_1 - K \Psi_2 \\
 i\hbar \frac{\partial \Psi_2}{\partial t} &= (E_2^0 + U_2 N_2) \Psi_2 - K \Psi_1
 \end{aligned} \tag{2.20}$$

chiamate equazioni dinamiche a due modi nonlineari.

Successivamente si esprimono queste equazioni in termini di imbalance di popolazione

$$z(t) = \frac{N_1(t) - N_2(t)}{N_T} = \frac{|\psi_1|^2 - |\psi_2|^2}{N_T} \tag{2.21}$$

e la differenza di fase tra le due buche

$$\phi(t) = \phi_2(t) - \phi_1(t) \tag{2.22}$$

Sostituendo l'equazione (2.2) nella (2.20a) si ottiene

$$i\hbar \frac{\partial}{\partial t} \left(\sqrt{N_1} e^{i\theta_1(t)} \right) = (E_1^0 + U_1 N_1) \left(\sqrt{N_1} e^{i\theta_1(t)} \right) - K \left(\sqrt{N_2} e^{i\theta_2(t)} \right) \quad (2.23)$$

$$i\hbar \frac{\dot{N}_1}{2\sqrt{N_1}} e^{i\theta_1(t)} - \hbar \sqrt{N_1} \dot{\theta}_1 e^{i\theta_1(t)} = (E_1^0 + U_1 N_1) \left(\sqrt{N_1} e^{i\theta_1(t)} \right) - K \left(\sqrt{N_2} e^{i\theta_2(t)} \right) \quad (2.24)$$

Dividendo la (2.24) per $e^{i\theta_1(t)}$ e usando la (2.22), otteniamo:

$$i\hbar \dot{N}_1 - 2\hbar N_1 \dot{\theta}_1(t) = 2(E_1^0 + U_1 N_1) N_1 - 2K \sqrt{N_2 N_1} e^{i\phi(t)}$$

Assumendo che N_1 e $\theta_1(t)$ sono reali, si può separare la parte immaginaria e reale come segue:

$$\begin{cases} \hbar \dot{N}_1 + 2K \sqrt{N_2 N_1} \sin \phi(t) = 0, \\ \hbar N_1 \dot{\theta}_1(t) + (E_1^0 + U_1 N_1) N_1 - K \sqrt{N_2 N_1} \cos \phi(t) = 0 \end{cases} \quad (2.25)$$

e quindi,

$$\begin{cases} \dot{N}_1 = -\frac{2}{\hbar} K \sqrt{N_2 N_1} \sin \phi(t), \\ \dot{\theta}_1(t) = -\frac{1}{\hbar} (E_1^0 + U_1 N_1) + \frac{1}{\hbar} K \sqrt{\frac{N_2}{N_1}} \cos \phi(t) \end{cases} \quad (2.26)$$

Allo stesso modo, si ottiene un simile sistema sostituendo la (2.2) nella (2.20b)

$$\begin{cases} \dot{N}_2 = \frac{2}{\hbar} K \sqrt{N_2 N_1} \sin \phi(t), \\ \dot{\theta}_2(t) = -\frac{1}{\hbar} (E_2^0 + U_2 N_2) + \frac{1}{\hbar} K \sqrt{\frac{N_1}{N_2}} \cos \phi(t) \end{cases} \quad (2.27)$$

Sappiamo anche che

$$\begin{cases} N_1 + N_2 = N_T \\ \frac{N_1 - N_2}{N_T} = z \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} N_1 = N_T \left(\frac{1+z}{2} \right) \\ N_2 = N_T \left(\frac{1-z}{2} \right) \end{cases} \quad (2.28)$$

Poi si calcola

$$\begin{aligned} \dot{z}(t) &= \frac{1}{N_T} (\dot{N}_1(t) - \dot{N}_2(t)) \\ &= \frac{1}{N_T} \left(-\frac{2}{\hbar} \frac{N_T}{2} K \sqrt{1-z^2(t)} \sin \phi(t) - \frac{2}{\hbar} \frac{N_T}{2} K \sqrt{1-z^2(t)} \sin \phi(t) \right) \\ &= -\frac{2K}{\hbar} \sqrt{1-z^2(t)} \sin \phi(t) \end{aligned} \quad (2.29)$$

se si riscala ad una variabile tempo adimensionale $t2K/\hbar \rightarrow t$ dove $\omega_R = \frac{2K}{\hbar} = 1$ è la frequenza di Rabi, si trova

$$\dot{z}(t) = \sqrt{1-z^2(t)} \sin \phi(t) \quad (2.30)$$

Successivamente si è trovata

$$\begin{aligned}
 \dot{\phi}(t) &= \dot{\theta}_2(t) - \dot{\theta}_1(t) \\
 &= -\frac{1}{\hbar} \left(E_2^0 + U_2 N_T \left(\frac{1-z}{2} \right) \right) + \frac{1}{\hbar} K \sqrt{\frac{1+z}{1-z}} \cos \phi(t) \\
 &\quad + \frac{1}{\hbar} \left(E_1^0 + U_1 N_T \left(\frac{1+z}{2} \right) \right) - \frac{1}{\hbar} K \sqrt{\frac{1-z}{1+z}} \cos \phi(t) \\
 &= \frac{1}{\hbar} (E_1^0 - E_2^0) + \frac{1}{\hbar} \frac{U_1 - U_2}{2} N_T + \frac{1}{\hbar} \frac{U_1 + U_2}{2} N_T z(t) \\
 &\quad + \frac{2K}{\hbar} \frac{z(t)}{\sqrt{1-z^2(t)}} \cos \phi(t)
 \end{aligned} \tag{2.31}$$

se si riscala nuovamente la variabile tempo adimensionale $t2K/\hbar \rightarrow t$, segue che:

$$\dot{\phi}(t) = \frac{E_1^0 - E_2^0}{2K} + \frac{1}{2K} \frac{U_1 - U_2}{2} N_T + \frac{1}{2K} \frac{U_1 + U_2}{2} N_T z(t) + \frac{z(t)}{\sqrt{1-z^2(t)}} \cos \delta\phi(t) \tag{2.32}$$

e allora otteniamo

$$\dot{\phi}(t) = \Delta E + \Lambda z(t) + \frac{z(t)}{\sqrt{1-z^2(t)}} \cos \phi(t) \tag{2.33}$$

con

$$\begin{cases} \Delta E = \frac{E_1^0 - E_2^0}{2K} + \frac{U_1 - U_2}{4K} N \\ \Lambda = \frac{U_1 + U_2}{4K} N \end{cases} \tag{2.34}$$

L'imbilancio di popolazione e la relativa fase obediscono alle seguenti due equazioni:

$$\begin{cases} \dot{z}(t) = -\sqrt{1-z(t)^2} \sin \phi(t) \\ \dot{\phi}(t) = \Delta E + \Lambda z(t) + \frac{z(t)}{\sqrt{1-z(t)^2}} \cos \phi(t) \end{cases} \tag{2.35}$$

Queste equazioni sono analoghe al pendolo non rigido classico con angolo di inclinazione ϕ , momento angolare z e una lunghezza proporzionale a $\sqrt{1-z^2}$, il quale diminuisce con il momento angolare z [7]. La corrente tunnel che si crea è dettata dalla seguente legge

$$I = \frac{\dot{z}(t) N_T}{2} = I_0 \sqrt{1-z^2} \sin \phi \tag{2.36}$$

dove $I_0 = \frac{KN_T}{\hbar}$.

Questa analogia ci aiuterà a descrivere diverse dinamiche del condensato di Bose-Einstein (BEC). Notiamo che $\Lambda > 0$ e $\Lambda < 0$ corrisponde a interazioni atomo-atomo repulsive e attrattive, rispettivamente.

Se noi consideriamo z e ϕ come variabili canoniche coniugate che soddisfano il formalismo Hamiltoniano:

$$\dot{z} = -\frac{\partial H}{\partial \phi} \quad (2.37)$$

$$\dot{\phi} = \frac{\partial H}{\partial z} \quad (2.38)$$

possiamo usare il sistema (2.35) per determinare l'Hamiltoniana $H(z, \phi)$ come segue. Dal sistema (2.35) e dalla (2.36) e (2.37) si ottiene:

$$\frac{\partial H}{\partial \phi} = \sqrt{1 - z(t)^2} \sin \phi(t) \quad (2.39)$$

$$\frac{\partial H}{\partial z} = \Delta E + \Lambda z(t) + \frac{z(t)}{\sqrt{1 - z(t)^2}} \cos \phi(t) \quad (2.40)$$

Se si consideri l'equazione (2.38) segue che:

$$\begin{aligned} H(z, \phi) &= \int \sqrt{1 - z^2(t)} \sin \phi(t) d\phi \\ &= \sqrt{1 - z^2(t)} \int \sin \phi(t) d\phi \\ &\quad - \sqrt{1 - z^2(t)} \cos \phi(t) + A(z) \end{aligned} \quad (2.41)$$

Successivamente, differenziando rispetto a z l'espressione precedente si ha:

$$\frac{\partial H}{\partial z} = \frac{z(t)}{\sqrt{1 - z^2(t)}} \cos \phi(t) + \frac{dA(z)}{dz} \quad (2.42)$$

Sapendo quanto vale l'equazione (2.39) possiamo uguagliare ottenendo:

$$\frac{z(t)}{\sqrt{1 - z^2(t)}} \cos \phi(t) + \frac{dA(z)}{dz} = \Delta E + \Lambda z(t) + \frac{z(t)}{\sqrt{1 - z(t)^2}} \cos \phi(t) \quad (2.43)$$

$$\frac{dA(z)}{dz} = \Delta E + \Lambda z(t) \quad (2.44)$$

$$\begin{aligned} A(z) &= \int (\Delta E + \Lambda z(t)) dz \\ &= \Delta E z(t) + \Lambda \frac{z(t)^2}{2} \end{aligned} \quad (2.45)$$

Sostituendo $A(z)$ nella (2.40) otteniamo l'espressione dell'Hamiltoniana:

$$H(z, \phi) = \Delta E z(t) + \Lambda \frac{z(t)^2}{2} - \sqrt{1 - z^2(t)} \cos \phi(t) \quad (2.46)$$

Allo stesso risultato si arriva anche prendendo la (2.39) e integrando in z :

$$\begin{aligned} H(z, \phi) &= \int (\Delta E + \Lambda z(t) + \frac{z(t)}{\sqrt{1 - z(t)^2}} \cos \phi(t)) dz \\ &= \Delta E z(t) + \Lambda \frac{z(t)^2}{2} - \sqrt{1 - z^2(t)} \cos \phi(t) + B(\phi(t)) \end{aligned} \quad (2.47)$$

Differenziando quest'ultima equazione per ϕ si ottiene:

$$\frac{\partial H}{\partial \phi} = \sqrt{1 - z^2(t)} \sin \phi(t) + \frac{dB(\phi(t))}{d\phi} \quad (2.48)$$

Questo porterà, sapendo della (2.38), a

$$\frac{dB(\phi(t))}{d\phi} = 0 \Rightarrow B(\phi(t)) = c \quad (2.49)$$

Considerando $c = 0$ si ottiene nuovamente la (2.45).

A seconda del valore assunto da ΔE , come può essere visto dalla Figura 2.1 si hanno due diversi casi:

- $\Delta E = 0$: buca simmetrica
- $\Delta E \neq 0$: buca asimmetrica

Nella seguente sezione, ci focalizziamo sul caso a buca simmetrica.

2.2 Caso buca simmetrica $\Delta E=0$

In questa sezione si studia la prima classe delle dinamiche tunnel di Josephson, nelle quali la media temporale di entrambe le variabili dinamiche è nulla.

2.2.1 Soluzioni stazionarie e analisi della stabilità

Per $\Delta E = 0$, corrispondente ad una giunzione Josephson Bosonica (BJJ) simmetrica, le equazioni del moto (2.35) diventano:

$$\begin{cases} \dot{z}(t) = -\sqrt{1 - z(t)^2} \sin \phi(t) \\ \dot{\phi}(t) = \Lambda z(t) + \frac{z(t)}{\sqrt{1 - z(t)^2}} \cos \phi(t) \end{cases} \quad (2.50)$$

Allora noi possiamo avere due casi $\phi(t) = 2n\pi$ (k è pari) o $\phi(t) = (2n + 1)\pi$ (k è dispari).

Nel primo caso, se $\phi(t) = 2n\pi$, segue che:

$$\begin{aligned} \Lambda z(t) + \frac{z(t)}{\sqrt{1 - z(t)^2}} \cos(2n\pi) &= 0 \\ \Lambda z(t) + \frac{z(t)}{\sqrt{1 - z(t)^2}} &= 0 \\ \left(\underbrace{\Lambda + \frac{1}{\sqrt{1 - z(t)^2}}}_{\neq 0, \Lambda > 0} \right) z(t) &= 0 \\ z(t) &= 0 \end{aligned} \tag{2.57}$$

Pertanto la soluzione stato stazionario che corrisponde all'autofunzione simmetrica della GPE con energia $E_+ = -1$ è:

$$\begin{cases} \phi_s = 2n\pi \\ z_s = 0 \end{cases} \tag{2.58}$$

Nel secondo caso, se $\phi(t) = (2n + 1)\pi$, segue che:

$$\begin{aligned} \Lambda z(t) + \frac{z(t)}{\sqrt{1 - z(t)^2}} \cos((2n + 1)\pi) &= 0 \\ \left(\underbrace{\Lambda - \frac{1}{\sqrt{1 - z(t)^2}}}_{\neq 0, \Lambda > 0} \right) z(t) &= 0 \\ z(t) = 0 \quad o \quad z(t) = \pm \sqrt{1 - \frac{1}{\Lambda^2}} \end{aligned} \tag{2.59}$$

Pertanto la soluzione stato stazionario che corrisponde all'autofunzione simmetrica della GPE con energia $E_- = 1$ è:

$$\begin{cases} \phi_s = (2n + 1)\pi \\ z_s = 0 \end{cases} \tag{2.60}$$

Per interazioni interatomiche non lineari, si ha un tipo di autostato degenero della GPE che rompe la simmetria:

$$\begin{cases} \phi_s = (2n + 1)\pi \\ z_s = \pm \sqrt{1 - \frac{1}{\Lambda^2}} \end{cases} \tag{2.61}$$

con $|\Lambda| > 1$, e $E_s = \frac{1}{2}(\Lambda + \frac{1}{\Lambda})$.

Per valutare la stabilità di questi punti, abbiamo bisogno di valutare la matrice Hessiana del sistema dinamico, la quale per i possibili valori della differenza di fase, $\phi^0 = 0$ o π , è sempre diagonale e i suoi autovalori sono dati da $\partial_z^2 H$ e $\partial_\phi^2 H$ valutate nei rispetti punti di equilibrio. A seconda del segno di questi punti di equilibrio i punti stazionari saranno punti di massimo, minimo o sella. Notiamo che per interazioni repulsive, $\Lambda > 0$, lo stato stazionario $(z^0, \phi^0) = (0, 0)$ è sempre un minimo, e lo stato stazionario $(z^0, \phi^0) = (0, \pi)$ è un massimo instabile per $0 < \Lambda < 1$ e diventa una sella per valori di $\Lambda > 1$. Il punto di equilibrio $(z^0, \phi^0) = (\pm\sqrt{1 - \frac{1}{\Lambda^2}}, \pi)$ è un massimo instabile per $\Lambda > 1$, vedi Figura 2.4. I punti stazionari sono riassunti nella Tabella 2.1. Per $\Lambda = 1$ nasce una biforcazione come si può vedere dalla Figura 2.2. L'evoluzione del sistema può essere anche rappresentato in un piano delle fasi come vedremo in seguito.

(z^0, ϕ^0)	P.to Eq.	Minimo	Sella	Massimo
$(0, 0)$	$\forall \Lambda$	$\forall \Lambda$	-	-
$(0, \pi)$	$\forall \Lambda$	-	$\Lambda > 1$	$0 < \Lambda < 1$
$(\pm\sqrt{1 - \frac{1}{\Lambda^2}}, \pi)$	$\Lambda > 1$	-	-	$\Lambda > 1$

Tabella 2.1: Punti stazionari del sistema per interazioni repulsive $\Lambda > 0$

Notiamo invece che, per interazioni attrattive, $\Lambda < 0$, lo stato stazionario $(z^0, \phi^0) = (0, 0)$ è un minimo per $-1 < \Lambda < 0$ il quale diventa una sella per $\Lambda < -1$, e lo stato stazionario $(z^0, \phi^0) = (0, \pi)$ è sempre un massimo instabile per $\forall \Lambda$. Il punto di equilibrio $(z^0, \phi^0) = (\pm\sqrt{1 - \frac{1}{\Lambda^2}}, \pi)$ è una sella per $\Lambda < -1$. I punti stazionari sono riassunti nella Tabella 2.2. Il diagramma di biforcazione è rispecchiato rispetto a quello di Figura 2.2.

(z^0, ϕ^0)	P.to Eq.	Minimo	Sella	Massimo
$(0, 0)$	$\forall \Lambda$	$-1 < \Lambda < 0$	$\Lambda < -1$	-
$(0, \pi)$	$\forall \Lambda$	-	-	$\forall \Lambda$
$(\pm\sqrt{1 - \frac{1}{\Lambda^2}}, \pi)$	$\Lambda < -1$	-	$\Lambda < -1$	-

Tabella 2.2: Punti stazionari del sistema per interazioni attrattive $\Lambda < 0$

E'anche interessante studiare il comportamento del sistema per piccole oscillazioni intorno a questi due punti stazionari.

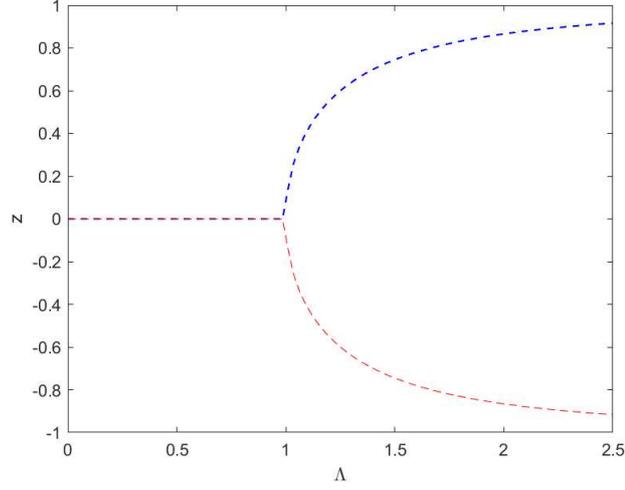


Figura 2.2: Biforcazione per l'imbilanciamento della popolazione dei punti stazionari che sono massimi per $\Lambda > 0$: $z^0 = 0$ per $0 < \Lambda < 1$, $z^0 = \sqrt{1 - 1/\Lambda^2}$ (tratteggiata blu) e $z^0 = -\sqrt{1 - 1/\Lambda^2}$ (tratteggiata rossa), tutti per $\phi^0 = \pi$

Oscillazioni di Rabi

Nel caso di doppia buca di potenziale simmetrica e interazione inter-atomica trascurabile ($U = \Lambda = 0$) le equazioni differenziali (2.50) diventano:

$$\begin{cases} \dot{z}(t) = -\sqrt{1 - z(t)^2} \sin \phi(t) \\ \dot{\phi}(t) = \frac{z(t)}{\sqrt{1 - z(t)^2}} \cos \phi(t) \end{cases} \quad (2.62)$$

Differenziando rispetto al tempo la prima equazione del sistema si ottiene:

$$\begin{aligned} \ddot{z} &= \frac{z(t)\dot{z}(t)}{\sqrt{1 - z^2(t)}} \sin \phi(t) - \sqrt{1 - z^2(t)} \dot{\phi}(t) \cos \phi(t) \\ &= -\frac{z(t)\sqrt{1 - z(t)^2} \sin \phi(t)}{\sqrt{1 - z^2(t)}} \sin \phi(t) - \sqrt{1 - z^2(t)} \left(\frac{z(t)}{\sqrt{1 - z(t)^2}} \cos \phi(t) \right) \cos \phi(t) \\ &= -z(t)(\sin^2 \phi(t) + \cos^2 \phi(t)) \\ &= -z(t) \end{aligned} \quad (2.63)$$

L'equazione precedente rappresenta un'equazione differenziale ordinaria del secondo ordine che può essere scritta come:

$$\ddot{z} + \omega^2 z(t) = 0 \quad (2.64)$$

dove

$$\omega^2 = 1 \rightarrow \omega = 1 \quad (2.65)$$

Ma abbiamo riscalato la variabile tempo adimensionale $t2K/\hbar \rightarrow t$, così che:

$$\omega = \frac{2K}{\hbar} \quad (2.66)$$

Il significato fisico di questo risultato è che intorno agli stati stazionari, dove non c'è variazione di imbalance di popolazione, ci sono oscillazioni periodiche chiamate oscillazioni di Rabi con frequenza $\omega_R = \frac{2K}{\hbar}$.

Differenziando, viceversa, rispetto al tempo la seconda equazione del sistema (2.62) si ottiene:

$$\begin{aligned} \ddot{\phi}(t) &= \frac{\dot{z}(t)}{\sqrt{1-z(t)^2}} \cos \phi(t) + \frac{\dot{z}(t)z(t)^2}{\sqrt{(1-z(t)^2)^3}} \cos \phi(t) - \frac{z(t)}{\sqrt{1-z(t)^2}} \dot{\phi}(t) \sin \phi(t) \\ &= \frac{\dot{z}(t)}{\sqrt{1-z(t)^2}} \left(1 + \frac{z^2(t)}{1-z^2(t)}\right) \cos \phi(t) - \frac{z(t)}{\sqrt{1-z(t)^2}} \dot{\phi}(t) \sin \phi(t) \\ &= -\sin \phi(t) \frac{1}{1-z(t)^2} \cos \phi(t) - \frac{z(t)}{\sqrt{1-z(t)^2}} \frac{z(t)}{\sqrt{1-z(t)^2}} \cos \phi(t) \sin \phi(t) \\ &= -\frac{1}{2} \left(\frac{1+z^2(t)}{1-z^2(t)} \right) \sin 2\phi(t) \end{aligned} \quad (2.67)$$

Se si impone:

$$\omega^2 = \frac{1+z^2(t)}{1-z^2(t)} \quad (2.68)$$

e si linearizza rispetto a $z(t)$ l'equazione (2.68) diventa $\omega = 1$. Questa è ancora la frequenza di Rabi come derivata sopra, e significa che anche la relativa fase oscilla alla frequenza di Rabi quando l'imbilancio della popolazione è approssimativamente nulla.

2.2.2 Modi a fase nulla

Questi modi descrivono una dinamica con una media temporale della fase nulla attraverso la giunzione $\langle \phi(t) \rangle = 0$ e $\langle z(t) \rangle = 0$. A questa tipologia di modi appartengono i modi a piccola ampiezza e i modi a grande ampiezza.

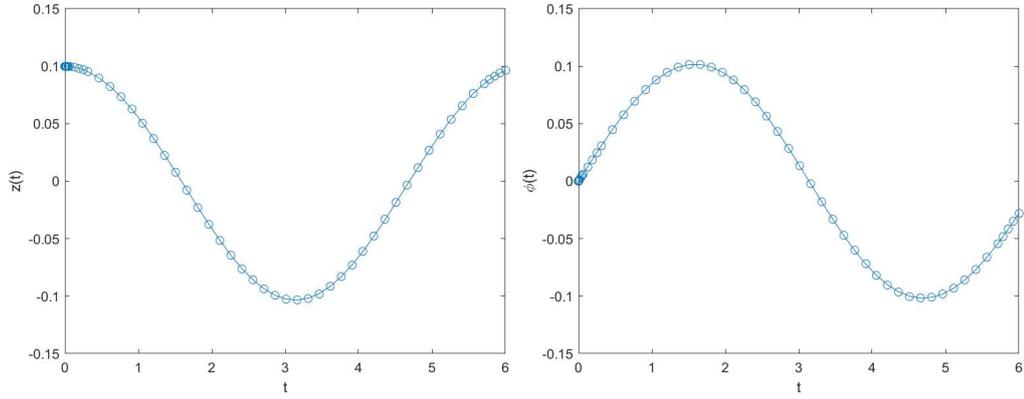


Figura 2.3: Oscillazioni di Rabi ottenute per $z(0) = 0.1$ e interazione inter-atomica $\Lambda = 0$

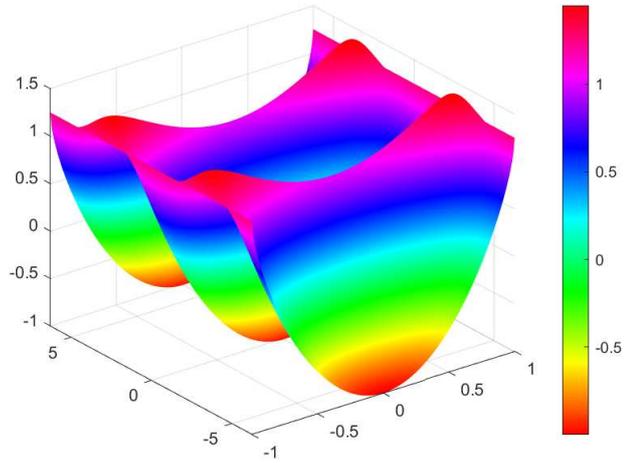


Figura 2.4: Superfici di energia per $\Lambda = 2.5$. I colori diversi corrispondono alle diverse traiettorie del sistema

• **Oscillazioni di piccola ampiezza:**

Queste oscillazioni, chiamate anche oscillazioni plasma, possono essere descritte in analogia al pendolo rigido con lunghezza del pendolo [7]:

$$(x^2 + y^2)^{1/2} = \sqrt{1 - z^2(t)} \quad (2.69)$$

che diminuisce con la velocità angolare z e con il momento di inerzia Λ^{-1} . Linearizzando il sistema (2.35) intorno a $\phi = 2n\pi$ e $z=0$ e procedendo

all'espansione:

$$\begin{aligned}\sqrt{1 - z^2(t)} &= 1 - \frac{1}{2}z^2(t) + \dots \\ \frac{1}{\sqrt{1 - z^2(t)}} &= 1 + \frac{1}{2}z^2(t) + \dots \\ \sin \phi(t) &\simeq \phi(t) \\ \cos \phi(t) &\simeq 1\end{aligned}\tag{2.70}$$

si trova:

$$\begin{cases} \dot{z}(t) = -(1 - \frac{1}{2}z^2(t) + \dots)\phi(t) \\ \dot{\phi}(t) = \Lambda z(t) + z(t)(1 - \frac{1}{2}z^2(t) + \dots) \end{cases}\tag{2.71}$$

Trascurando i termini in $z(t)$ maggiori al secondo grado si ottiene:

$$\begin{cases} \dot{z}(t) = -\phi(t) \\ \dot{\phi}(t) = (\Lambda + 1)z(t) \end{cases}\tag{2.72}$$

Se noi differenziamo la prima equazione del sistema (2.72) e sostituendo $\dot{\phi}$ otteniamo:

$$\ddot{z}(t) + (\Lambda + 1)z(t) = 0\tag{2.73}$$

con $\omega = \sqrt{\Lambda + 1}$. Sapendo che $\Lambda = \frac{UN_T}{2K}$, usiamo il cambio di variabile $t2K/\hbar \rightarrow t$, che porta alla frequenza plasma

$$\begin{aligned}\omega_{pl} &= \frac{2K}{\hbar} \sqrt{1 + \frac{UN_T}{2K}} \\ &= \frac{1}{\hbar} \sqrt{(2K)^2 + 2UN_T K}\end{aligned}\tag{2.74}$$

Da quest'ultima equazione si può infine trovare il periodo inverso in unità non scalate:

$$\tau_0^{-1} = \sqrt{(2K)^2 + 2UN_T K} / 2\pi\hbar\tag{2.75}$$

La Figura 2.5 mostra oscillazioni sinusoidali di piccola ampiezza per $\Lambda = 10$ e $z(0) = 0.1$.

• Oscillazioni di grande ampiezza:

Nel caso generale di atomi interagenti con oscillazioni di grande ampiezza, le equazioni (2.50) possono essere risolte in termini di funzioni ellittiche Jacobiane come mostrato in [4]. In questo regime di oscillazioni non armoniche, la frequenza di oscillazione dipende dall'imbilancio di popolazione iniziale $z(0)$

e della relativa fase $\varphi(0)$. Una soluzione numerica della (2.50) nel regime di oscillazioni di grande ampiezza è mostrato in Figura 2.6. Un aumento dell'imbilancio della popolazione iniziale $z(0)$ aggiunge armoniche più alte alle oscillazioni sinusoidali, il che porta a dinamiche sempre più non-armoniche. Il periodo di oscillazione aumenta con $z(0)$ finché, in a certo imbilancio di popolazione z_c , la dinamica subisce un rallentamento critico.

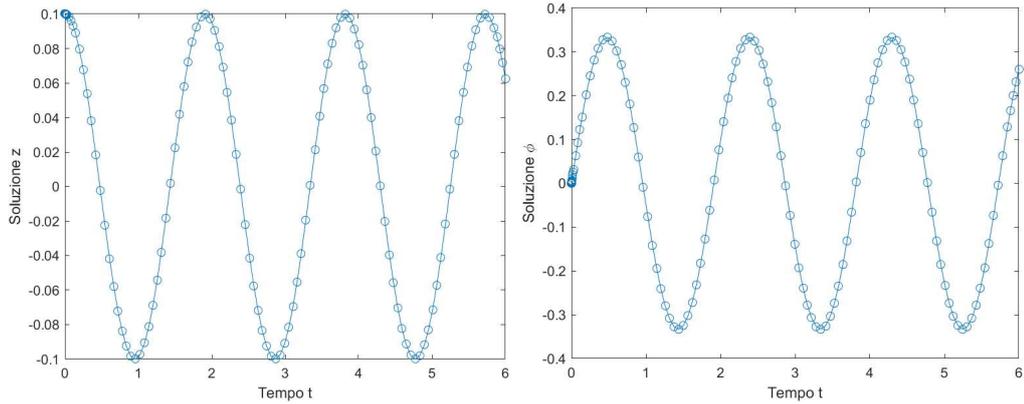


Figura 2.5: Piccole Oscillazioni sinusoidali ottenute per $z(0) = 0.1$ e interazione inter-atomica $\Lambda = 10$

2.2.3 Self-Trapping Quantistico Macroscopico (MQST)

Questi modi descrivono il regime non lineare, con $-\infty < \langle \phi \rangle < +\infty$ e $\langle z \rangle \neq 0$. Come mostrato nell'ultima sezione, la dinamica del sistema cambia drasticamente quando la popolazione iniziale assume un valore pari a quello critico. Per valori della popolazione iniziali maggiori di quello critico $z(0) > z_c$ l'effetto tunnel è soppresso e nasce il fenomeno del Self-Trapping, in cui i modi sono quasi-stazionari. Il valore critico è raggiunto quando il passaggio atomico tra le due buche non è più tale da contrastare l'evoluzione della relativa fase dovuta alla differenza dei potenziali chimici nelle rispettive buche. Secondo l'equazione (2.36) quando la fase supera il valore π la corrente I si inverte. Se questo accade prima che la differenza di popolazione si inverta a causa del tunneling, la popolazione viene bloccata in una buca e la fase relativa evolverà monotonicamente (running phase mode). Questo porterà a trovare una condizione critica per la popolazione z_c : l'energia iniziale per $z(0)=z_c$ e $\phi(0)$, data dall'equazione (2.46) deve essere abbastanza grande per raggiungere $\phi_f = \pi$ in $z_f = 0$ il quale corrisponde ad un energia $H_f = 1$. Ci sono diversi modi con il quale questo caso può essere ottenuto [7] ma tutti corrispondono alla condizione

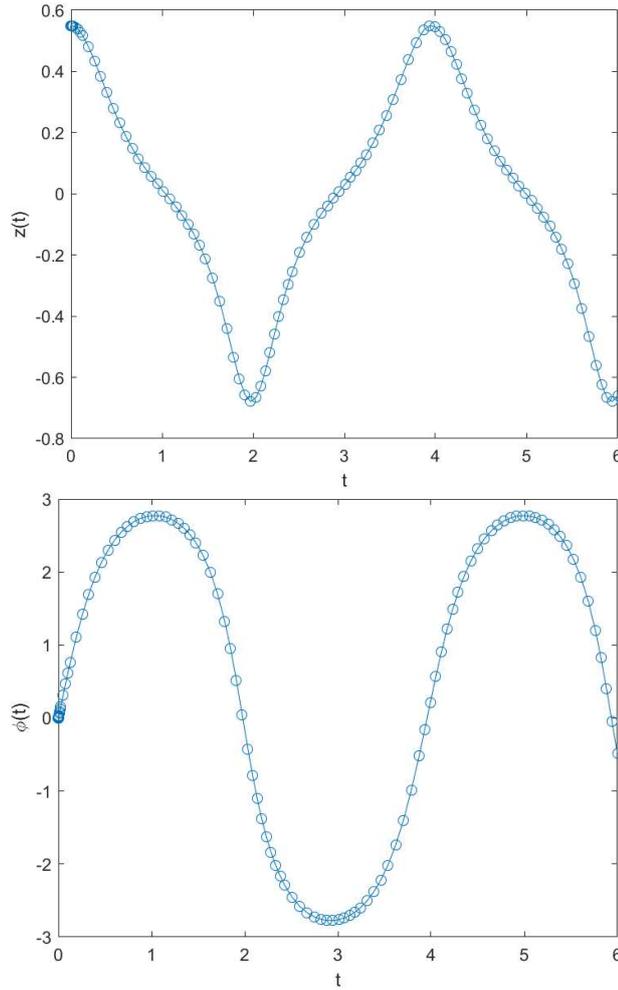


Figura 2.6: Oscillazioni di grande ampiezza: all'aumentare di $z(0)$ le armoniche diventano più alte e sempre meno non-armoniche

$$H_0 = H(z(0), \phi(0)) = \frac{\Lambda}{2} z(0)^2 - \sqrt{1 - z(0)^2} \cos(\phi(0)) > 1 \quad (2.76)$$

Per una fase iniziale nulla, questa equazione è solo risolvibile per $\Lambda > 2$, mentre per valori più piccoli non c'è nessuna transizione al self-trapping, neanche se l'imbilancio di popolazione iniziale $z(0)$ assumesse valori alti. Usando l'equazione (2.46) si trova, che l'imbilancio di popolazione critico per il Self-Trapping Quantistico Macroscopico (MQST) per $\phi(0) = 0$ è dato da

$$z_c = \frac{2\sqrt{\Lambda - 1}}{\Lambda}, \quad \Lambda > 2 \quad (2.77)$$

Alternativamente si potrebbe ottenere Λ_c fissando un valore di $z(0)$ dalla condizione critica $H=1$, ovvero:

$$\Lambda_c = 2 \frac{1 + \sqrt{1 - z(0)^2 \cos(\phi(0))}}{z(0)^2} \quad (2.78)$$

dove possiamo avere $\Lambda > \Lambda_c$ per $\Lambda > 1$ oppure $\Lambda < \Lambda_c$ per $\Lambda < -1$ e affinché esistano i punti stazionari ($z^0 \neq 0, \phi^0 = 0$).

Seguendo il primo approccio, infatti, e imponendo $\Lambda = 10$ si ottiene un valore di popolazione iniziale $z_c(0) = 0.6$. L'evoluzione dinamica nel regime MQST è mostrato in Figura 2.7 per $z(0) = 0.8$. Il periodo di oscillazione dell'imbilancio di popolazione z aumenta, e l'ampiezza diminuisce all'aumentare di $z(0)$. La differenza di fase tra i due condensati di Bose-Einstein cresce monotonicamente come si vede dalla Figura (2.7b).

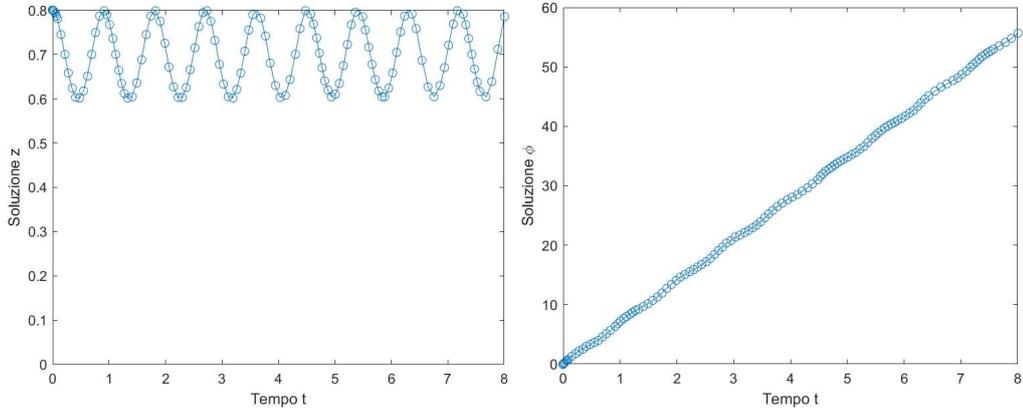


Figura 2.7: Macroscopic-Quantum-Self-Trapping(MQST) per $z(0) = 0.8 > z_c$. La z oscilla intorno ad un valore medio non nullo e la fase cresce monotonicamente

2.2.4 Modi a fase π

Questi modi corrispondono a una media temporale di fase attraverso la giunzione $\langle \phi \rangle = \pi$. In maniera del tutto simile ai modi a fase nulla, coinvolge oscillazioni di piccola e grande ampiezza e anche oscillazioni con self-trapping macroscopico. Per piccole oscillazioni, si possono linearizzare il sistema (2.50) intorno a $\phi = (2n + 1)\pi$ e $z = 0$, Figura 2.8a, ottenendo:

$$\omega = \sqrt{1 - \Lambda}, \quad \Lambda < 1 \quad (2.79)$$

Così,

$$\tau_\pi^{-1} = \sqrt{(2K)^2 - 2UN_T K / 2\pi\hbar} \quad (2.80)$$

Per grandi oscillazioni, si hanno oscillazioni non armoniche, le quali avvengono per il parametro di interazione $\Lambda > 1$ come può essere visto in Figura 2.8b. Sotto il valore critico, $\Lambda_c=1.111$ (Figura 2.9a), $z(t)$ oscilla intorno a 0. Sopra il valore critico $z(t)$ oscilla intorno a valori diversi da 0.

In aggiunta a questi due tipi di oscillazione si hanno altri due tipi di MQST in modi π , per i quali o $\langle z \rangle > z_s$ oppure $\langle z \rangle < z_s$ con $z_s = \sqrt{1 - 1/\Lambda^2}$. Da ciò il secondo valore critico $\Lambda_{c2} = \frac{1}{\sqrt{1-z(0)^2}} = 1.25$ [4]. Pertanto per $\Lambda_c < \Lambda < \Lambda_{c2}$, il periodo di oscillazione rallenta e il sistema evolve nel regime self-trapping a fase π . In questo regime la fase è localizzata intorno a π e l'imbilancio è bloccato. Per $\Lambda > \Lambda_{c2}$ il sistema va nel secondo tipo di stato self-trapping e la fase evolve illimitata (Figura 2.9b).

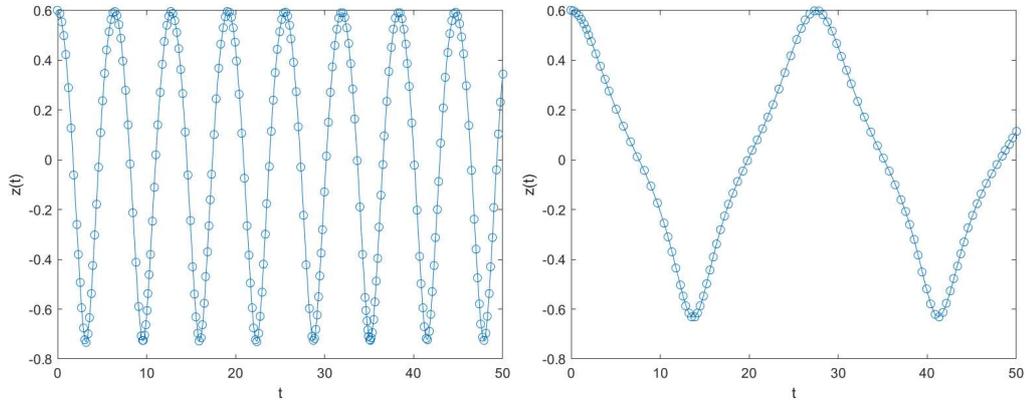


Figura 2.8: Evoluzione temporale dell'imbilancio di popolazione per $z(0)=0.6$ per $\Lambda=0.1$ e 1.1

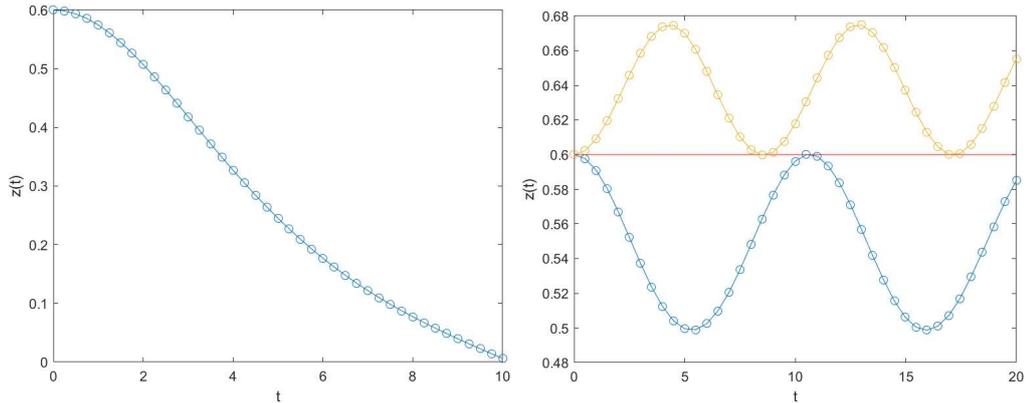


Figura 2.9: Evoluzione temporale dell'imbilancio di popolazione per $z(0)=0.6$ per $\Lambda=1.111$ (a) e $\Lambda=1.2, 1.25, 1.3$ (b)

Ritratto di fase

I vari regimi della dinamica del pendolo non rigido discusse sopra possono essere riassunte anche in un ritratto di fase, dove le linee di energia costante sono plottate in un diagramma ϕ - z .

In Figura 2.10, $\Lambda = 0.5$, si osserva la dinamica di Josephson con orbite chiuse (linee blu e gialle) intorno a ($\phi^0 = 0$) o intorno ($\phi^0 = \pi$). Nella Figura 2.11 quando $\Lambda = 1.5 > 1$, solo l'origine dà vita a oscillazioni di Josephson, e conseguentemente le orbite intorno a ($z^0 = 0, \phi^0 = \pi$) scompaiono.

Nel caso di interazioni repulsive infatti, abbiamo visto che per $\Lambda > 1$, il punto stazionario ($z^0 = 0, \phi^0 = \pi$) diventa un punto sella e appaiono due massimi ($z^0 = \pm\sqrt{1 - \frac{1}{\Lambda^2}}, \phi^0 = \pi$), vedi Figura 2.11. Un comportamento simile è trovato per interazioni attrattive. Questi punti stazionari presentano oscillazioni intorno ad essi. In questo regime, l'imbilancio ha lo stesso segno nell'evoluzione e perciò una delle buche è sempre sovrappopolata.

In questo regime, $\Lambda > 1$, tuttavia, esistono due diversi tipi di MQST a seconda che la differenza di fase evolva limitata, dando i cosiddetti modi a fase 0 e π , o se evolve illimitata, aumentando (o diminuendo) sempre nel tempo, dando origine alla "running phase modes".

Per valori di $1 < |\Lambda| < 2$ l'unico regime che si ottiene è il modo a fase 0 per interazioni attrattive $\Lambda < 0$ e il modo a fase π per interazioni repulsive $\Lambda > 0$ come si vede dalla Figura 2.11. In questi regimi la differenza di fase evolve limitata in $\phi^0 = 0$ e $\phi^0 = \pi$, rispettivamente. Per valori di $|\Lambda| > 2$ si possono avere entrambe le classi di MQST. In generale quindi il sistema evolverà seguendo un "running phase mode" (linee celesti della Figura 2.9). In questo caso i valori di ($z^0 = \pm\sqrt{1 - \frac{1}{\Lambda^2}}, \phi^0 = \pi$), che ammettono orbite chiuse, sono molto vicine a 1 come si vede dalla Figura 2.12.

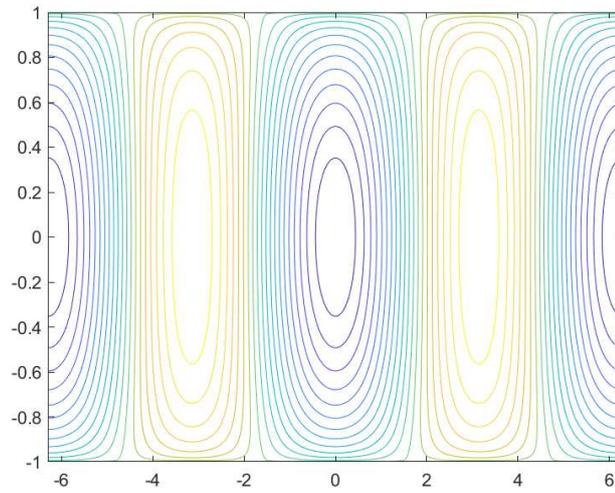


Figura 2.10: Traiettorie chiuse ottenute per $\Lambda = 0.5$ in un ritratto di fase ϕ - z

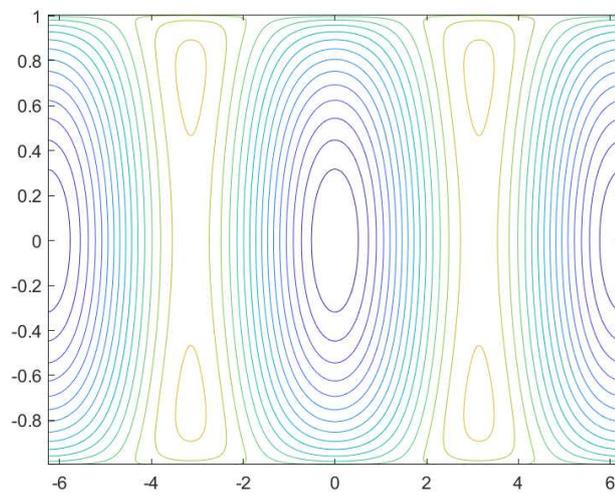


Figura 2.11: Traiettorie chiuse ottenute per $\Lambda = 1.5$ in un ritratto di fase ϕ - z

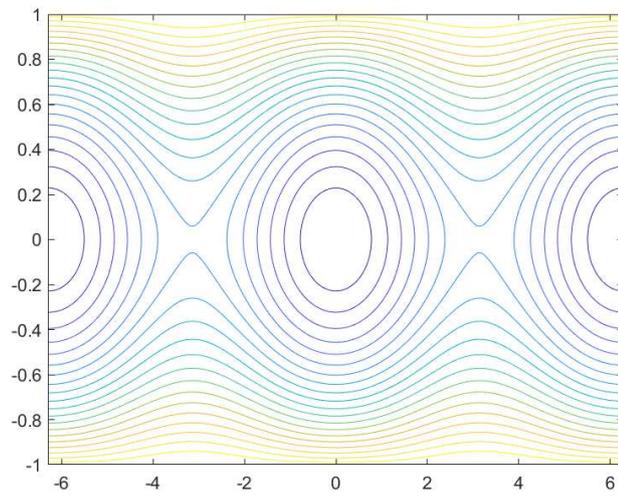


Figura 2.12: Traiettorie chiuse ottenute per $\Lambda = 10$ in un ritratto di fase ϕ - z

Capitolo 3

Self-Trapping Discreto e Equazione di Schrödinger Non Lineare Discreta

In questo capitolo, esamineremo il lavoro sui sistemi con pochi siti reticolari delle cosiddette equazioni discrete self-trapping (DST) in cui discuteremo l'integrabilità dei sistemi DST con pochi siti reticolari, la presenza di chaos in quelli non integrabili e le loro applicazioni. La DST modella un sistema di equazioni differenziali accoppiate di oscillatori quantistici non armonici. La DST è una generalizzazione dell'equazione di Schrödinger discreta non lineare (DNLS) e fu introdotta da Eilbeck, Lomdahl e Scott in [9]. L'equazione assume la forma

$$i \frac{d}{dt} \mathbf{A} + \mathbf{\Gamma} \mathbf{D}(|\mathbf{A}|^2) \mathbf{A} + \epsilon \mathbf{M} \mathbf{A} = 0 \quad (3.1)$$

dove $\mathbf{A} = \text{col}(\mathbf{A}_1, \mathbf{A}_2, \dots, \mathbf{A}_n)$ è un vettore complesso ad n componenti che rappresenta l'ampiezza di un particolare legame molecolare e \mathbf{D} è una matrice $n \times n$ diagonale che denota la non linearità

$$\mathbf{D}(|\mathbf{A}|^2) \equiv \text{diag}(|\mathbf{A}_1|^2, |\mathbf{A}_2|^2, \dots, |\mathbf{A}_n|^2) \quad (3.2)$$

Il vettore parametro $\mathbf{\Gamma} = (\gamma_1, \gamma_2, \dots, \gamma_n)$ è il peso della non linearità. La matrice $\mathbf{M} = [m_{jk}]$ è una matrice simmetrica reale $m_{jk} = m_{kj}$ rappresenta l'interazione dispersiva lineare tra il sito j -esimo e il sito k -esimo con costante di accoppiamento ϵ . In particolare quando la matrice \mathbf{M} è assunta esplicitamente come matrice tridiagonale l'equazione DST non è nient'altro che l'equazione DNLS 1D (monodimensionale) con condizioni al contorno periodiche. Le equazioni DNLS a dimensione maggiore

possono essere scritte nella forma generale (3.1) con una matrice M propriamente definita. Se il parametro reale $\Gamma = 0$ ma il parametro reale $\epsilon \neq 0$ la (3.1) rappresenta un sistema di oscillatori lineari accoppiati. Se, viceversa, $\Gamma \neq 0$ e $\epsilon = 0$ allora la (3.1) diventa un sistema di oscillatori disaccoppiati ma non armonici.

L'equazione DST può essere derivata dalla conservazione dell'Hamiltoniana [10]

$$H = - \sum_{j=1}^n \left(\frac{\gamma_j}{2} |A_j|^4 + \epsilon \sum_k m_{jk} A_j^* A_k \right) \quad (3.3)$$

Equazione (3.1) conserva anche la norma

$$N = \sum_j |A_j|^2 \quad (3.4)$$

Si noti come

$$\dot{H} = 0 \text{ e } \dot{N} = 0 \quad (3.5)$$

quando la A_j sono soluzioni di DST.

Storicamente, una delle motivazioni originali della formulazione dell'equazione DST (3.1) è stata usata per analizzare il self-trapping di energia vibrazionale in cristalli molecolari e proteine. Il termine self-trapping stesso infatti si riferisce a un'inibizione della dispersione di energia di un sistema di oscillatori nonlineari accoppiati.

Guardando all'equazione DST (3.1) come un modello della dinamica non lineare di molecole come quelle poliatomiche piccole come acqua, ammoniaca, metano, acetilene e benzene [11], è anche importante considerare il sistema DST per piccoli n , cioè sistemi reticolari piccoli di equazioni DST. Il caso di $n = 1, 2$ è stato studiato in dettaglio dove in particolare $n=2$ indica l'analisi della molecola d'acqua. La motivazione per studiare piccoli valori di n è di ottenere risultati precisi che poi possono essere generalizzati a sistemi di ordine maggiore.

3.1 Soluzioni Stazionarie

In molti casi non si riescono a trovare forme analitiche per soluzioni dell'equazione DST (3.1) e anche una classificazione qualitativa numerica è difficile. Ci sono comunque un'importante sottoclasse di soluzioni che possono essere facilmente classificate ed espresse in forma più semplice. Queste soluzioni sono le soluzioni stazionarie della DST e sono tempo dipendenti

$$A(t) = \phi \exp(i\omega t) \quad (3.6)$$

dove ϕ è indipendente dal tempo. Tali soluzioni sono di particolare interesse quando il sistema interagisce per esempio con onde elettromagnetiche. L'importanza di

queste soluzioni stazionarie è che loro sono facili da trovare e nello spazio delle soluzioni agiscono come isole di conoscenza dalle quali altre soluzioni possono essere trovate dalla teoria delle perturbazioni. Per questo giocano un ruolo fondamentale come soluzioni solitoniche esatte nella teoria di equazioni d'onda non lineari. Sostituendo (3.6) nella (3.1) si ottiene un problema agli autovalori, algebrico, non lineare per ω e ϕ .

$$-\omega\phi + \gamma\mathbf{D}(|\phi|^2)\phi + \epsilon M\phi = 0 \quad (3.7)$$

Quando $\gamma = 0$, la (3.7) si riduce ad un problema agli autovalori lineare $\epsilon M\phi = \omega\phi$ e gli autovalori ω e gli autovettori ϕ possono essere calcolati. Nel caso $\epsilon = 0$, noi abbiamo $\omega\phi_i = \gamma(|\phi_i|^2)\phi_i$. Siccome ω deve essere costante ogni ϕ_i deve soddisfare $\phi_i = 0$ o $|\phi_i|^2 = \omega/\gamma$. Se ϕ è reale, questo si riduce a $\phi_i = 0, \pm \sqrt{\omega/\gamma}$.

Notiamo anche l'invarianza di scala: se ϕ è una soluzione della (3.7) allora lo è anche $\phi \exp(i\alpha)$ per ogni α . Tra i due casi limite enunciati $\gamma = 0$ e $\epsilon = 0$ (o alternativamente $\epsilon \rightarrow \infty$ o $\gamma \rightarrow \infty$) è spesso possibile trovare soluzioni analitiche della (3.7). Quando viceversa le soluzioni non è possibile trovarle per via analitica sono necessari metodi numerici per la risoluzione. La stabilità lineare di ogni soluzione stazionaria può essere studiata dagli autovalori di un certo sistema lineare. Questa analisi darà o condizioni necessarie per la stabilità o condizioni sufficienti per l'instabilità. Faremo riferimento a soluzioni che soddisfano la condizione necessaria di stabilità come stabili.

Siccome ci sono molte soluzioni da descrivere, è conveniente adottare una nomenclatura per ogni soluzione. Se noi consideriamo solo il caso ϕ reale, nel limite che $\gamma \rightarrow \infty$ noi abbiamo almeno 3 soluzioni per ogni ϕ_i e 3^f soluzioni reali [10]. Questo caso limite per valori grandi di γ è usato per etichettare le soluzioni per tutti i valori di γ . Se $\phi_i \rightarrow \pm\sqrt{\omega/\gamma}$ quando $\gamma \rightarrow \infty$ noi usiamo rispettivamente " \uparrow " o " \downarrow " per etichettare le due soluzioni. Se $\phi_i \rightarrow 0$ quando $\gamma \rightarrow \infty$ usiamo un " \bullet ", mentre se $\phi_i = 0$ per tutti i γ noi usiamo "0". Se ϕ_i è complesso noi usiamo "*".

3.1.1 Caso n = 2

Nel caso n = 2 l'equazione vettoriale (3.7) diventa

$$\begin{aligned} -\omega\phi_1 + \gamma(|\phi_1|^2)\phi_1 + \epsilon\phi_2 &= 0 \\ -\omega\phi_2 + \gamma(|\phi_2|^2)\phi_2 + \epsilon\phi_1 &= 0 \end{aligned} \quad (3.8)$$

Restringiamo la nostra attenzione al caso dove ϕ_1 è reale e positivo e poi dalle equazioni notiamo che anche ϕ_2 lo è. Se noi moltiplichiamo la prima equazione della (3.8) per ϕ_2 e la seconda equazione per ϕ_1 e successivamente sottraiamo le

due equazioni ottenute, risulta un'equazione della forma

$$(\phi_1^2 - \phi_2^2)(1 + \gamma\phi_1\phi_2) = 0 \quad (3.9)$$

Quest'ultima equazione ci dà tre soluzioni per ϕ_1 e ϕ_2 : (a) $\phi_1 = \phi_2$, (b) $\phi_1 = -\phi_2$ e (c) $1 + \gamma\phi_1\phi_2 = 0$. Usando ora la (3.4) applicata alla (3.9) si ottengono le soluzioni desiderate e le relative autofrequenze.

Descrizione del Modo	Soluzioni Stazionarie	ω
($\uparrow\uparrow$)	$\phi_1 = \phi_2 = \sqrt{\frac{N}{2}}$	$\frac{\gamma}{2}N + \epsilon$
($\uparrow\downarrow$)	$\phi_1 = -\phi_2 = \sqrt{\frac{N}{2}}$	$\frac{\gamma}{2}N - \epsilon$
($\uparrow\bullet$)	$\phi_1 = \left(\frac{N}{2} \left(1 + \left(1 - \frac{4\epsilon^2}{N^2\gamma^2} \right)^{1/2} \right) \right)^{1/2}$ $\phi_2 = \left(\frac{N}{2} \left(1 - \left(1 - \frac{4\epsilon^2}{N^2\gamma^2} \right)^{1/2} \right) \right)^{1/2}$	γN

Tabella 3.1: Soluzioni stazionarie della (3.8) per il caso $n = 2$

3.1.2 Stabilità delle soluzioni stazionarie

Per studiare la stabilità delle soluzioni stazionarie consideriamo una perturbazione in un frame rotante [12] della forma

$$A_i(t) = (\phi_i + u_i(t))\exp(i\omega t) \quad (3.10)$$

dove $|u_i(t)| \ll \phi_i$. Sostituendo ora questa equazione nella (3.1) relativa a ogni componente e sapendo che valgono le equazioni (3.8) e linearizzando (andando a eliminare i termini $O(u^2)$ o maggiori) e poi imponendo $u_1(t) = \alpha_1(t) + \beta_1(t)$ e $u_2(t) = \alpha_2(t) + \beta_2(t)$ si ottiene il seguente sistema:

$$\begin{bmatrix} \dot{\alpha}_1 \\ \dot{\alpha}_2 \\ \dot{\beta}_1 \\ \dot{\beta}_2 \end{bmatrix} = \mathbf{A} \begin{bmatrix} \alpha_1 \\ \alpha_2 \\ \beta_1 \\ \beta_2 \end{bmatrix} \quad (3.11)$$

dove la matrice \mathbf{A} assume la seguente forma:

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & \omega - \gamma|\phi_1|^2 & -\epsilon \\ 0 & 0 & -\epsilon & \omega - \gamma|\phi_2|^2 \\ -\omega + 3\gamma|\phi_1|^2 & \epsilon & 0 & 0 \\ \epsilon & -\omega + 3\gamma|\phi_2|^2 & 0 & 0 \end{bmatrix} \quad (3.12)$$

la quale a sua volta può essere scritta come una matrice a blocchi della forma:

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 0 & \mathbf{C} \\ \mathbf{J} & 0 \end{bmatrix} \quad (3.13)$$

dove \mathbf{C} e \mathbf{J} sono matrici 2×2 . Così se λ^2 sono gli autovalori di \mathbf{JC} , allora $\pm \lambda$ sono gli autovalori di \mathbf{A} . Ora, affinché le soluzioni stazionarie siano stabili, tutti gli autovalori di \mathbf{A} devono avere parte reale minore o uguale a zero, e quindi gli autovalori di \mathbf{JC} devono essere reali e negativi o nulli. Dalla matrice \mathbf{A} , calcolando il suo determinante, si ottiene questa equazione

$$\lambda^4 - B\lambda^2 + \Gamma = 0 \quad (3.14)$$

dove

$$\begin{aligned} B &= (\mathbf{JC})_{11} + (\mathbf{JC})_{22}, \\ \Gamma &= (\mathbf{JC})_{11}(\mathbf{JC})_{22} - (\mathbf{JC})_{12}(\mathbf{JC})_{21} \end{aligned} \quad (3.15)$$

Effettuando un'analisi numerica in Matlab per le soluzioni stazionarie trovate nella tabella (3.1) abbiamo rispettivamente tre diversi casi:

(a) ($\uparrow\uparrow$)

Risolvendo l'equazione (3.14) inserendo la prima soluzione stazionaria $\phi_1 = \phi_2 = \sqrt{\frac{N}{2}}$ e $\omega = \frac{\gamma}{2}N + \epsilon$ e avendo posto $N=1$ ed $\epsilon = 1$ si ottengono gli autovalori di \mathbf{JC}

$$\begin{aligned} \lambda_1^2 &= 0 \\ \lambda_2^2 &= 4(\gamma/2 - 1) \end{aligned}$$

Questa soluzione ($\uparrow\uparrow$) è stabile per $0 \leq \gamma \leq 2$ e instabile altrimenti.

(b) ($\uparrow\downarrow$)

Risolvendo l'equazione (3.14) inserendo la seconda soluzione stazionaria $\phi_1 = -\phi_2 = \sqrt{\frac{N}{2}}$ e $\omega = \frac{\gamma}{2}N - \epsilon$ e avendo posto $N=1$ ed $\epsilon = 1$ si ottengono gli autovalori di

JC

$$\lambda_1^2 = 0$$

$$\lambda_2^2 = -4(\gamma/2 + 1)$$

Questa soluzione ($\uparrow\uparrow$) è stabile per $\gamma \geq -2$, ma $\gamma \geq 0$ perciò la soluzione ($\uparrow\uparrow$) è sempre stabile.

(c) ($\uparrow \bullet$)

Risolvendo l'equazione (3.14) inserendo la terza soluzione stazionaria $\phi_1 = \left(\frac{N}{2} \left(1 + \left(1 - \frac{4\epsilon^2}{N^2\gamma^2} \right)^{1/2} \right) \right)^{1/2}$, $\phi_2 = \left(\frac{N}{2} \left(1 - \left(1 - \frac{4\epsilon^2}{N^2\gamma^2} \right)^{1/2} \right) \right)^{1/2}$ e $\omega = \gamma N$ e avendo posto $N=1$ ed $\epsilon = 1$ si ottengono gli autovalori di **JC**

$$\lambda_1^2 = 0$$

$$\lambda_2^2 = 4\gamma^2(|1/2\sqrt{(1 - 4/\gamma^2)} - 1/2| + |1/2\sqrt{(1 - 4/\gamma^2)} + 1/2| - 3\gamma^2|1/2\sqrt{(1 - 4/\gamma^2)} - 1/2|^2 + |1/2\sqrt{(1 - 4/\gamma^2)} + 1/2|^2) - 2\gamma^2 - 2$$

Questa soluzione ($\uparrow \bullet$) è stabile perché $\lambda_2^2 \leq 0$, per $\forall \gamma$, e quindi la soluzione è sempre stabile. Come può essere visto dalla Figura 3.1 in $\gamma = 0$ abbiamo due rami,

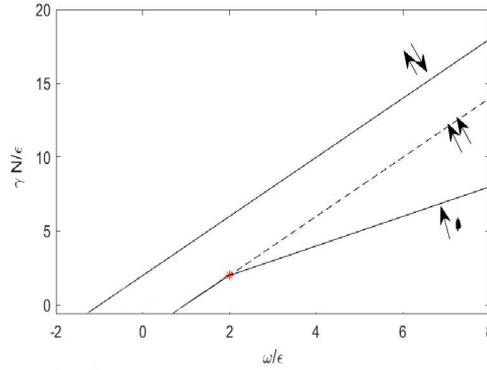


Figura 3.1: Relazione tra γ , ω , ϵ ed N per le soluzioni stazionarie con $n=2$. Le soluzioni stabili sono indicate con le linee piene mentre le soluzioni instabili con le linee tratteggiate. Il punto è un punto di biforcazione

($\uparrow\uparrow$) e ($\uparrow\downarrow$) corrispondenti ai due autovalori stabili di \mathbf{JC} . Quando $\gamma=2\omega/\epsilon$ la ($\uparrow\uparrow$) si biforca e da stabile diventa instabile, e nasce un ramo doppiamente degenere stabile ($\uparrow\bullet$). Il ramo ($\uparrow\downarrow$) rimane sempre stabile per ogni valore di γ .

Un modo migliore di plottare lo spazio delle fasi è come segue. Se poniamo $A_i = a_i \exp \theta_i$ per $i= 1,2$ allora possiamo eliminare a_2 usando $a_1^2 + a_2^2 = N = 1$ e consideriamo solo la differenza di fase $\theta = \theta_1 - \theta_2$. Queste coordinate ridotte ci permettono di scrivere l'Hamiltoniana (3.3) nella forma

$$H = \frac{1}{2}\gamma(1 + 2a_1^4 - 2a_1^2) - 2a_1(1 - a_1^2)^{1/2}\cos(\theta) \quad (3.16)$$

Utilizzando successivamente coordinate sferiche

$$\phi' = \theta, \quad \cos(\theta'/2) = a_1 \quad (3.17)$$

Si ottiene dalla (3.16) la seguente Hamiltoniana

$$H = -\frac{1}{2}\gamma(1 - \frac{1}{2}\sin^2\theta') - \sin\theta' \cos\phi' \quad (3.18)$$

Nelle Figure 3.2-3.3-3.4 sono plottati i contorni di H sullo spazio delle fasi $\theta - \phi$ per diversi valori di γ quando $\epsilon = 1$. Le Figure mostrano $-\pi/2 \leq \phi' \leq 3\pi/2$. E' interessante notare che i punti fissi in Figura 3.2-3.3-3.4 coincidono con le soluzioni stazionarie di cui sopra. In particolare per $\gamma = 1.5$ la soluzione stazionaria ($\uparrow\uparrow$) è un punto fisso stabile per $\gamma < 2$. Per $\gamma > 2$ nelle Figure 3.3-3.4 il punto si trasforma in una sella (instabile) e compaiono due nuovi centri stabili corrispondenti a ($\uparrow\bullet$) e ($\bullet\uparrow$)[9].

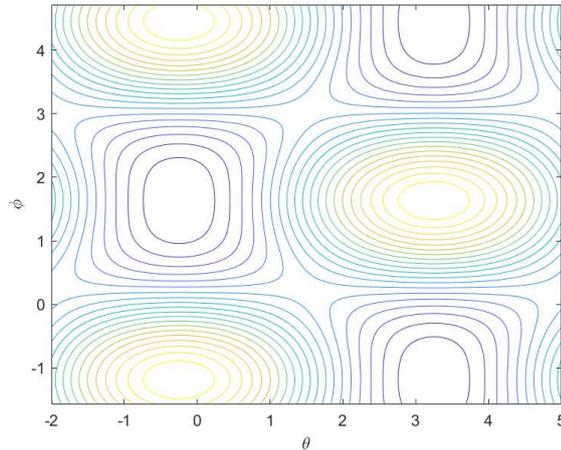


Figura 3.2: Contorni di H sullo spazio delle fasi $\theta - \phi$ per $\gamma = 1.5$ quando $\epsilon = 1$.

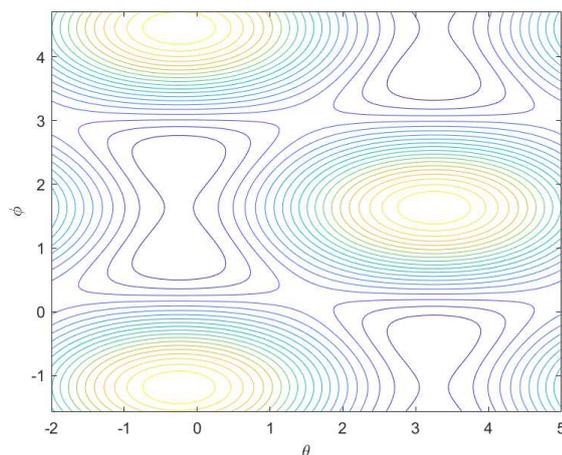


Figura 3.3: Contorni di H sullo spazio delle fasi $\theta - \phi$ per $\gamma = 3$ quando $\epsilon = 1$.

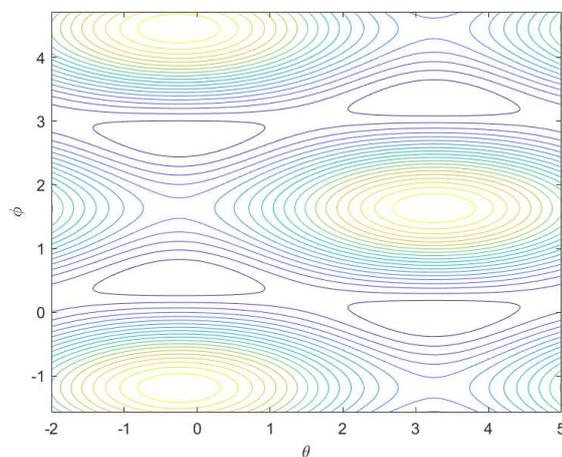


Figura 3.4: Contorni di H sullo spazio delle fasi $\theta - \phi$ per $\gamma = 6$ quando $\epsilon = 1$.

3.2 Integrabilità

Quando $n = 1$, l'equazione DST (3.1) è un monomero e rappresenta un oscillatore non lineare disaccoppiato

$$i \frac{d}{dt} A_1 + \gamma_1 |A_1|^2 A_1 = 0 \quad (3.19)$$

la quale è integrabile e può essere risolta analiticamente. E' facile vedere che la soluzione è

$$A_1 = 0, \pm A_1(0) e^{i\gamma_1 A_1(0)^2 t} \quad (3.20)$$

con la norma $N = 0$, $A_1(0)^2$ rispettivamente. Quando $n = 2$ (dimero), la DST

$$\begin{aligned} i \frac{d}{dt} A_1 + \gamma_1 |A_1|^2 A_1 + \epsilon A_2 &= 0 \\ i \frac{d}{dt} A_2 + \gamma_1 |A_2|^2 A_2 + \epsilon A_1 &= 0 \end{aligned} \tag{3.21}$$

è anche integrabile esattamente. Il dimero (3.7) è il sistema più semplice di DST dove uno può osservare la nozione di una transizione al self-trapping, cioè una transizione da uno stato self-trapped ad uno non self-trapped (oscillante). Per studiarlo, consideriamo il sistema con un coefficiente di non linearità uniforme $\gamma_1 = \gamma_2 = \gamma$, il quale è scalato a $\gamma = 1$, soggetto per esempio ad una condizione iniziale completamente localizzata

$$A_1(0) = 1, A_2(0) = 0 \tag{3.22}$$

Il dimero (3.7) è poi risolto numericamente usando diversi valori della costante di accoppiamento ϵ . Quando ϵ è abbastanza piccolo, è naturale aspettarci che la dinamica di $A_1(t)$ e $A_2(t)$ sia molto simile a quella ottenuta per $n = 1$ perché è come se la costante di accoppiamento non ci fosse, anche se c'è ma è piccola. Un esempio infatti è dettato dalla Figura 3.5 for $\epsilon = 0.1$. Definendo anche la differenza di probabilità di occupazione del sito $p = |A_1|^2 - |A_2|^2$, può essere visto che anche se la p sta oscillando, è definito nel segno (positivo). Questo è lo stato a cui ci riferiamo come stato self-trapped.

Per un valore leggermente maggiore di $\epsilon = 0.24$ la dinamica delle condizioni iniziali (3.8) appartiene ancora ad uno stato self-trapped come è plottato nella Figura 3.6. Si vede chiaramente che il periodo di oscillazione aumenta all'aumentare della costante di accoppiamento ϵ .

Se ϵ è aumentato ulteriormente, arriverà fino ad un valore critico della costante di accoppiamento ϵ_c superato il quale le dinamiche appartengono a uno stato differente. La Figura 3.7 mostra il caso in cui $\epsilon = 0.6 > \epsilon_c$. Si può notare che la differenza di probabilità p del sito di occupazione non è più definita in segno, e questo corrisponde a uno stato non self-trapped ed è di solito riferito come oscillazione di Josephson.

3.3 Chaos

Siccome la DST non è integrabile quando $n > 2$, si prevede quindi che l'equazione ammetterà il chaos hamiltoniano. Un primo studio è stato fatto da Lyapunov quando calcolò e analizzò numericamente il caso del trimero ($n = 3$) confermando la presenza di chaos nel sistema. Altri studi sono stati fatti sul trimero nel quale il terzo oscillatore è considerato come lineare ma comunque c'è la presenza di

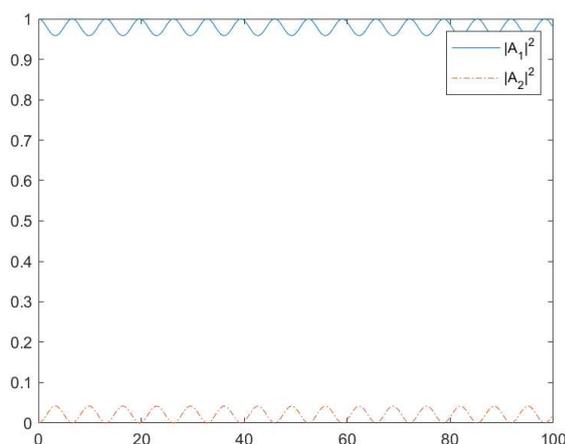


Figura 3.5: Dinamica delle condizioni iniziali (3.22), governata dal Dimero DST (3.21) per valore della costante di accoppiamento $\epsilon = 0.1$

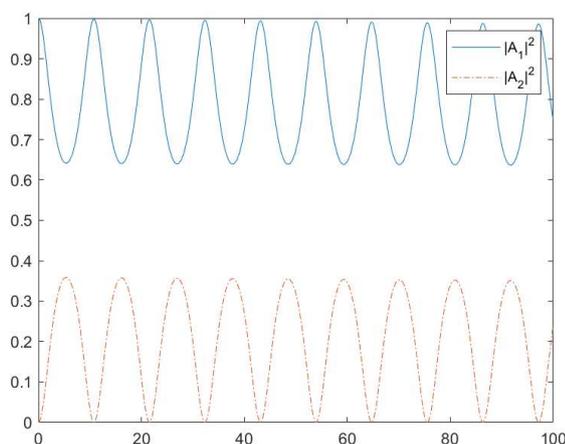


Figura 3.6: Dinamica delle condizioni iniziali (3.22), governata dal Dimero DST (3.21) per valore della costante di accoppiamento $\epsilon = 0.24$

regimi caotici per alcuni valori ben definiti della non-linearità e dei parametri di accoppiamento lineare. E' stato anche fatto uno studio da Hanning in cui si è utilizzato il trimero DST con $m_{11} = m_{22} = m_{33} = 0$ e $m_{13} = m_{23} \ll m_{12} = m_{21}$ ovvero un dimero che interagisce debolmente con il terzo oscillatore come una piccola perturbazione[13]. Poi, un approccio Melnikov potrebbe essere utilizzato per mostrare l'esistenza di caos omoclinico. Una simile idea è stata anche affrontata per il caso $n = 4$, dove il polimero è assunto essere formato da due dimeri integrabili connessi da un debole accoppiamento il quale ha anche dimostrato la presenza della diffusione di Arnold. Come altro esempio di comportamento caotico, Eilbeck ha dimostrato il caso a $n = 6$ reticolo benzene. Nel limite, invece, di

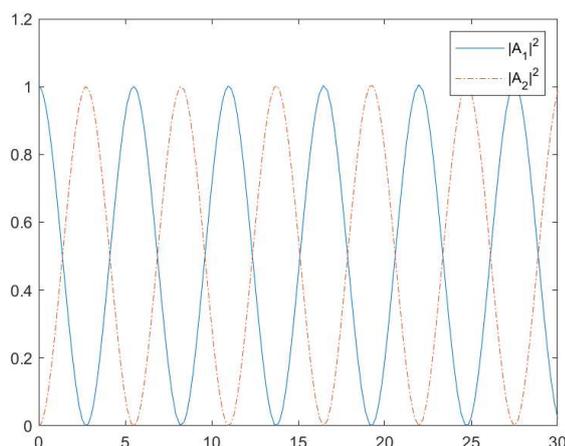


Figura 3.7: Dinamica delle condizioni iniziali (3.22), governata dal Dimero DST (3.21) per valore della costante di accoppiamento $\epsilon = 0.6$

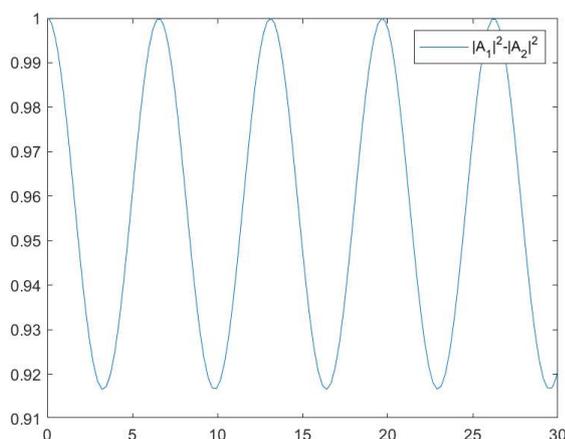


Figura 3.8: Oscillazione della differenza di probabilità di occupazione del sito $p = |A_1|^2 - |A_2|^2$ per $\epsilon = 0.1$

grandi n , il caos omoclinico è stato anche dimostrato e analizzato attraverso un'analisi Melnikov di un'equazione NLS continua perturbata[14].

3.4 Applicazioni

Come è già stato detto, una delle applicazioni dell'equazione DST è stato quello di descrivere osservazioni sperimentali di risonanze anomale di ammidie in cristalli molecolari e proteine, l'equazione DNLS (DST) egualmente ha applicazioni nello studio della propagazione dell'involuppo complesso del campo elettromagnetico nelle schiere della guida d'onda e la dinamica dei bosoni raffreddati a temperature

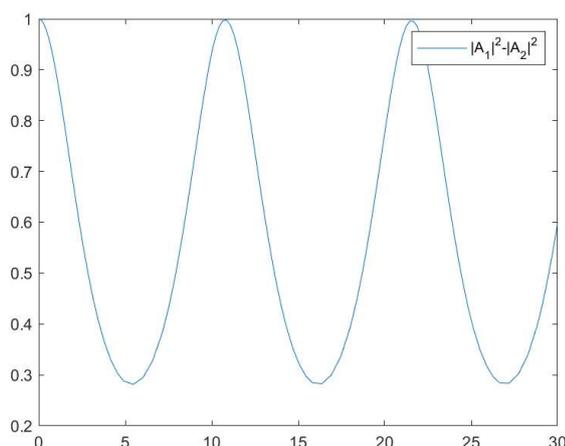


Figura 3.9: Oscillazione della differenza di probabilità di occupazione del sito $p = |A_1|^2 - |A_2|^2$ per $\epsilon = 0.24$

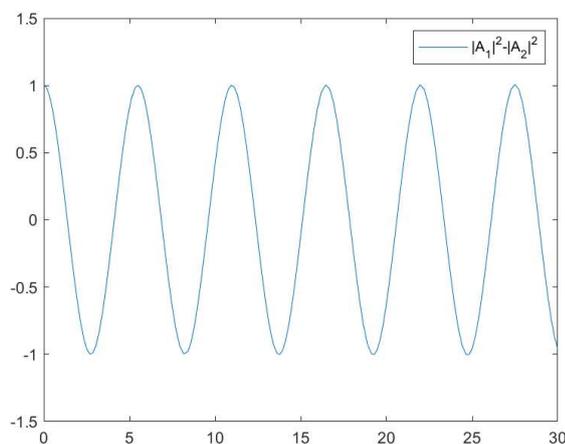


Figura 3.10: Oscillazione della differenza di probabilità di occupazione del sito $p = |A_1|^2 - |A_2|^2$ per $\epsilon = 0.6$

molto vicine allo zero assoluto che sono confinati in potenziali esterni [11]. Nel contesto della fisica di Bose-Einstein, è stato proposto il dimero DST per modellare il tunnel tra due condensati Bose-Einstein a temperatura zero (BECs) confinati in una doppia buca di potenziale. Tutte le dinamiche del sistema integrabile sono state risolte analiticamente da Kenkre e Campbell [15] e trovano la loro nuova interpretazione in questo contesto, compresa il cosiddetto "self-trapped quantico macroscopico" [4] che non è altro che lo stato self-trapped osservato nella sezione 3.2.

Capitolo 4

Soluzione Numerica dell'Equazione di Gross-Pitaevskii

In questo capitolo si propone un metodo efficiente per la risoluzione numerica dell'equazione di Gross-Pitaevskii (GPE). Presentiamo dapprima la soluzione dell'equazione Gross-Pitaevskii, che descrive lo stato fondamentale di un sistema quantistico di bosoni identici, usando lo schema della discretizzazione di Crank-Nicolson [16]. Nella sezione (4.1), si presenta l'equazione di Gross-Pitaevskii e viene insegnato il metodo di discretizzazione alle differenze finite e la strategia per trattare il termine non lineare. Nella sottosezione (4.1.1), diamo i risultati ottenuti con la tecnica di Crank-Nicolson. Successivamente, si risolve l'equazione GPE in tempo, con la tecnica del time splitting, e in spazio con il metodo alle differenze finite come vedremo nella sezione 4.2 e faremo uso di test numerici per la risoluzione [17]. Paragoniamo i risultati così ottenuti della soluzione discreta ottenuta nella sezione 4.2 con la soluzione esatta risolvendo lo stesso problema con la funzione Matlab ODE45. Infine si è inserita una barriera di potenziale nelle soluzioni numeriche per valutare l'evoluzione dell'onda contro la barriera (tunneling).

4.1 La discretizzazione alle differenze finite usando Crank Nicolson

L'equazione di Gross-Pitaevskii (1.2) è

$$i\hbar \frac{\partial \Psi(r, t)}{\partial t} = \left[-\frac{\hbar^2}{2m} \Delta + V_{ext}(r) + g|\Psi(r, t)|^2 \right] \Psi(r, t) \quad (4.1)$$

dove V_{ext} è definito come il potenziale esterno e g è la costante di accoppiamento e il termine che rende tale equazione così interessante è il termine non lineare $|\Psi(r, t)|^2$. Il processo di discretizzazione viene effettuato su coordinate spaziali, temporali e funzione d'onda, come nel caso dell'equazione di diffusione. Perciò, nel sistema sono stabilite due scale, la prima associata al trascorrere del tempo, Δt , e la seconda, Δx , associata alla discretizzazione spaziale, che si assume uguale lungo la direzione x. Quindi, le derivate sono definite come:

$$\frac{\partial \Psi}{\partial t} = \frac{\Psi_i^{n+1} - \Psi_i^n}{\Delta t} \quad (4.2)$$

$$\frac{\partial \Psi}{\partial x} = \frac{\Psi_i^{n+1} - \Psi_i^n}{\Delta x} \quad (4.3)$$

Il sotto-pedice indica la discretizzazione spaziale e il sovra-pedice indica la discretizzazione temporale. La derivata seconda si discretizza con uno schema centrato del secondo ordine

$$\frac{\partial^2 \Psi}{\partial x^2} = \frac{\Psi_{i+1}^n - 2\Psi_i^n + \Psi_{i-1}^n}{\Delta x^2} \quad (4.4)$$

Sostituendo le equazioni (4.2) e (4.4) all'interno della (4.1) otteniamo la seguente equazione di Gross-Pitaevskii discretizzata

$$i\hbar \frac{\Psi_i^{n+1} - \Psi_i^n}{\Delta t} = -\frac{\hbar^2}{2m} \left[\frac{\Psi_{i+1}^n - 2\Psi_i^n + \Psi_{i-1}^n}{\Delta x^2} \right] + \left[g|\Psi_i|^2 + V_i \right] \Psi_i^n \quad (4.5)$$

Esplicitando Ψ_i^{n+1} otteniamo

$$\Psi_i^{n+1} = \Psi_i^n - \frac{i\Delta t}{\hbar} \left(\frac{\hbar^2}{2m} \left[-\frac{\Psi_{i+1}^n - 2\Psi_i^n + \Psi_{i-1}^n}{\Delta x^2} \right] + \left[g|\Psi_i|^2 + V_i \right] \Psi_i^n \right) \quad (4.6)$$

e quindi

$$\Psi_i^{n+1} = \left(1 - \frac{i\Delta t}{\hbar} \left(\frac{\hbar^2}{2m} \left[-\frac{\Psi_{i+1}^n - 2\Psi_i^n + \Psi_{i-1}^n}{\Delta x^2} \right] + \left[g|\Psi_i|^2 + V_i \right] \right) \right) \Psi_i^n \quad (4.7)$$

Indicando con H l'operatore Hamiltoniano discretizzato

$$H = -\frac{\hbar^2}{2m} \left[\frac{\Psi_{i+1}^n - 2\Psi_i^n + \Psi_{i-1}^n}{\Delta x^2 \Psi_i^n} \right] + \left[g|\Psi_i|^2 + V_i \right] \quad (4.8)$$

e manipolando la (4.7) otteniamo l'equazione per l'evoluzione temporale per la funzione d'onda discretizzata

$$\Psi_i^{n+1} = \left(I - i \frac{\Delta t}{\hbar} H \right) \Psi_i^n \quad (4.9)$$

dove I rappresenta la matrice unitaria.

Usiamo l'approssimazione della differenza centrale in spazio, che è chiamato metodo di Crank-Nicholson, sulla funzione d'onda da evolvere

$$\Psi_i^{n+1} = \Psi_i^n - i \frac{\Delta t}{\hbar} H \Psi_i^n \quad (4.10)$$

Applicando una media temporale a $\Psi_i^n \rightarrow (\Psi_i^{n+1} + \Psi_i^n)/2$, otteniamo

$$\Psi_i^{n+1} = \Psi_i^n - i \frac{\Delta t H}{2\hbar} (\Psi_i^{n+1} + \Psi_i^n) \quad (4.11)$$

la quale riorganizzando i termini diventa

$$\left(1 + i \frac{\Delta t H}{2\hbar} \right) \Psi_i^{n+1} = \left(1 - i \frac{\Delta t H}{2\hbar} \right) \Psi_i^n \quad (4.12)$$

Infine la funzione d'onda al passo Ψ_i^{n+1} è data da

$$\Psi_i^{n+1} = \frac{\left(1 - i \frac{\Delta t H}{2\hbar} \right)}{\left(1 + i \frac{\Delta t H}{2\hbar} \right)} \Psi_i^n \quad (4.13)$$

I termini in parentesi nella (4.13) possono essere scritti in una forma più semplice, ovvero ponendo

$$\left(1 - i \frac{\Delta t H}{2\hbar} \right) \left(1 + i \frac{\Delta t H}{2\hbar} \right)^{-1} = Q^{-1} - 1 \quad (4.14)$$

dove Q assume la forma

$$Q = \frac{1}{2} \left(1 + i \frac{\Delta t H}{2\hbar} \right) \quad (4.15)$$

affinchè ci sia una tautologia. Sostituendo la (4.14) nella (4.13) otteniamo

$$\Psi_i^{n+1} = (Q^{-1} - 1) \Psi_i^n \quad (4.16)$$

La matrice Q risulta essere una matrice tridiagonale alla quale sono aggiunte condizioni periodiche

$$Q = \begin{bmatrix} \beta_1 & \gamma_1 & 0 & \dots & 0 & 0 & \alpha_N \\ \alpha_1 & \beta_2 & \gamma_2 & \dots & 0 & 0 & 0 \\ \cdot & \cdot & \cdot & \dots & \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \dots & \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \dots & \cdot & \cdot & \cdot \\ 0 & 0 & 0 & \dots & \alpha_{N-2} & \beta_{N-1} & \gamma_{N-1} \\ \gamma_N & 0 & 0 & \dots & 0 & \alpha_{N-1} & \beta_N \end{bmatrix} \quad (4.17)$$

con β_i , α_i e γ_i definiti come

$$\beta_i = \frac{1}{2} + \frac{i\Delta t\hbar}{4m\Delta x^2} + \frac{i\Delta tV_i}{4\hbar} + \frac{i\Delta tg|\Psi_i^n|^2}{4\hbar} \quad (4.18)$$

$$\alpha_i = \gamma_i = -\frac{i\Delta t\hbar}{8m\Delta x^2} \quad (4.19)$$

4.1.1 Test numerici con Crank-Nicolson

Il sistema è inizializzato con un lato $L = 10$ il quale è discretizzato in 128 punti interni. La simulazione viene eseguita in un sistema di unità naturali con $\hbar = 1$, $m = 1$, $\Delta t = 0.1$. La funzione d'onda che si è utilizzata per inizializzare il sistema per $t = 0$ è una Gaussiana centrata al centro del sistema, $L/2$ e con $\sigma = L/10$. Dalle simulazioni effettuate si vede che questo metodo non è efficiente come il metodo che utilizzeremo nella prossima sezione in quanto presenta instabilità nella soluzione all'aumentare della costante g , la quale regola il peso del termine non lineare dell'equazione di Gross-Pitaevskii come si vede dalla Figura 4.1 e 4.2 per interazioni attrattive e repulsive, rispettivamente.

4.2 Metodo Splitting

Il metodo Splitting è un metodo molto importante per la risoluzione dell'equazione di Gross-Pitaevskii (4.1). E' uno schema numerico stabile ed efficiente e Adhikari [18] propose un metodo split-step Crank-Nicolson per risolvere l'equazione (4.1). Questo metodo divide l'equazione in una parte lineare e in una parte non lineare. Per l'equazione lineare la risolviamo con il metodo Crank-Nicolson in tempo e uno schema alle differenze finite del secondo ordine in spazio. Per la parte non lineare, si risolve esattamente. Questo metodo è molto efficiente e stabile ed è stato anche denominato come metodo "Split-Step Finite Difference" (SSFD). Per introdurre il

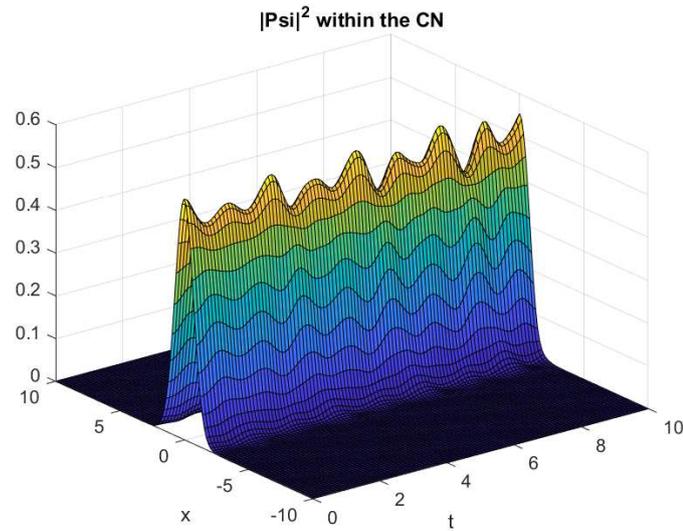


Figura 4.1: Soluzione di GPE usando il metodo Crank-Nicolson per interazione repulsiva, $g=3$.

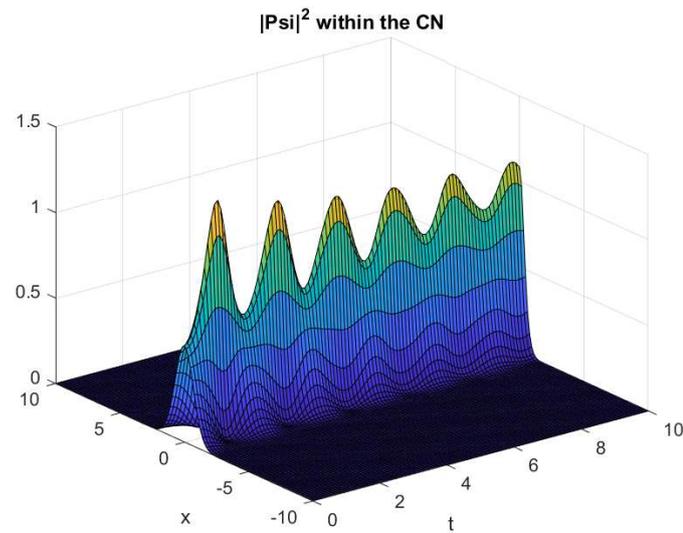


Figura 4.2: Soluzione di GPE usando il metodo Crank-Nicolson per interazione repulsiva, $g=-3$.

metodo scriviamo prima la (4.1) in 1D nella forma

$$i \frac{\partial \Psi(x, t)}{\partial t} = (A + B)\Psi(x, t), x \in R \quad (4.20)$$

dove $A = -\frac{1}{2} \frac{\partial^2}{\partial x^2} + V(x)$ è l'operatore lineare e $B = g|\Psi(x, t)|^2$ è l'operatore non lineare. L'idea principale nel metodo dello split-step, come accennato in precedenza,

approssima la soluzione esatta dell'equazione (4.1) risolvendo il sotto problema lineare

$$i\frac{\partial\Psi(x,t)}{\partial t} = A\Psi(x,t), \quad (4.21)$$

e risolvendo il sottoproblema non-lineare

$$i\frac{\partial\Psi(x,t)}{\partial t} = B\Psi(x,t), \quad (4.22)$$

in un dato ordine sequenziale. Per la prima versione del metodo al primo ordine, l'avanzamento in tempo viene effettuato in due passi. Nel primo step, una soluzione intermedia è calcolata secondo l'equazione lineare (4.21). Al secondo passo, la soluzione è calcolata facendo avanzare la soluzione secondo l'equazione puramente non lineare (4.22). Riassumendo, noi possiamo scrivere la soluzione nella forma

$$\Psi(x, t + \Delta t) = e^{-iB\Delta t}e^{-iA\Delta t}\Psi(x, t) \quad (4.23)$$

dove Δt è l'istante di tempo.

Per la seconda versione del metodo, si risolve prima la (4.22), successivamente si usa la soluzione come condizione iniziale per risolvere la (4.21), infine si usa la soluzione ottenuta come condizione iniziale per risolvere la (4.22) e si ottiene la soluzione approssimata. Questa versione è del secondo ordine. Riassumendo si ottiene la soluzione nella forma

$$\Psi(x, t + \Delta t) = e^{-iB\Delta t/2}e^{-iA\Delta t}e^{-iB\Delta t/2}\Psi(x, t), \quad (4.24)$$

questo particolare metodo si chiama Strang-Splitting. Dopo il time splitting, l'equazione non lineare (4.22) può essere risolta esattamente, mentre l'equazione lineare (4.21) potrebbe essere risolta usando il metodo di Crank-Nicolson in tempo e schema alle differenze finite del secondo ordine in spazio. Nella seguente sottosezione si parla più dettagliatamente del metodo SSFD per l'equazione NLS in una dimensione.

4.2.1 Metodo Splitting per l'equazione NLS

Analizziamo in questa sotto-sezione l'algoritmo che è alla base del metodo time-splitting SSFD più nel dettaglio, e in particolare nel caso monodimensionale ($d=1$). Si risolve il problema ai valori iniziali e al contorno della forma

$$i\frac{\partial\Psi(x,t)}{\partial t} = -\frac{1}{2}\Psi_{xx}(x,t) + V(x)\Psi(x,t) + g|\Psi(x,t)|^2\Psi(x,t), \quad -L \leq x \leq L, \quad t > 0 \quad (4.25)$$

$$\Psi(x, t = 0) = \Psi^0(x), \quad -L \leq x \leq L, \quad (4.26)$$

$$\Psi(-L, t) = \Psi(L, t) = 0, \quad t > 0 \quad (4.27)$$

Seguendo il metodo di time Splitting spiegato nella sezione 4.3, risolviamo ora il sotto-problema lineare

$$i \frac{\partial \Psi(x, t)}{\partial t} = -\frac{1}{2} \Psi_{xx}(x, t) + V(x) \Psi(x, t), \quad (4.28)$$

usando il metodo di Crank-Nicolson in tempo e differenze centrali in spazio. Il sotto-problema non lineare

$$i \frac{\partial \Psi(x, t)}{\partial t} = g |\Psi(x, t)|^2 \Psi(x, t) \quad (4.29)$$

è risolto esattamente. Infatti

$$\frac{d|\Psi_j|^2}{dt} = \Psi_j^* \frac{d\Psi_j}{dt} + \frac{d\Psi_j^*}{dt} \Psi_j = 0$$

pertanto $|\Psi_j|^2$ è costante nel tempo e la soluzione dell'equazione (4.29) è data da

$$\Psi_j(t_{n+1}) = \Psi_j(t_{n+1/2}) e^{-ig|\Psi_j(t_{n+1/2})|^2 \Delta t} \quad (4.30)$$

Scegliendo un passo di discretizzazione spaziale $\Delta x > 0$ con $\Delta x = (L - (-L))/N_x$ con N_x il numero di punti discreti, e scegliendo un passo di discretizzazione temporale $\Delta t > 0$ i punti griglia e gli istanti di tempo sono dati dalla seguente formula

$$x_j = -L + j\Delta x, \quad t_n = n\Delta t, \quad j = 0, 1, \dots, N_x, \quad n = 0, 1, 2, \dots$$

Indichiamo con Ψ_j^n il valore assunto dalla funzione $\Psi(x_j, t_n)$ nel punto x_j al tempo t_n . Usiamo la prima versione del metodo split-step e così otteniamo il seguente algoritmo di SSFD per le equazioni (4.25)-(4.27):

Passo 1: Scrivere la parte lineare con il metodo di Crank-Nicolson

$$i \frac{\Psi_j^{n+1/2} - \Psi_j^n}{\Delta t} = -\frac{1}{2} \left[\frac{\Psi_{j+1}^{n+1/2} - 2\Psi_j^{n+1/2} + \Psi_{j-1}^{n+1/2} + \Psi_{j+1}^n - 2\Psi_j^n + \Psi_{j-1}^n}{2\Delta x^2} \right] \quad (4.31)$$

$$- \frac{x_j^2}{4} (\Psi_j^{n+1/2} + \Psi_j^n)$$

Passo 2: Riorganizzare i termini dell'equazione (4.31) per ottenere

$$(1 + 2\alpha + \frac{ix_j^2 \Delta t}{4}) \Psi_j^{n+1/2} - \alpha \Psi_{j+1}^{n+1/2} - \alpha \Psi_{j-1}^{n+1/2} = (1 + 2\alpha - \frac{ix_j^2 \Delta t}{4}) \Psi_j^n + \alpha \Psi_{j+1}^n + \alpha \Psi_{j-1}^n \quad (4.32)$$

con $\alpha = \frac{i\Delta t}{4\Delta x^2}$ $j = 1, 2, \dots, N_x$, e $\Psi_0 = \Psi_{N_x+1} = 0 \forall n$.

Passo 3: Scrivere il tutto in forma matriciale

$$\begin{bmatrix} \beta_1 & -\alpha & \cdot & 0 & 0 \\ -\alpha & \beta_2 & \cdot & 0 & 0 \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ 0 & 0 & \cdot & \beta_{N-1} & -\alpha \\ 0 & 0 & \cdot & -\alpha & \beta_N \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \Psi_1 \\ \Psi_2 \\ \vdots \\ \vdots \\ \Psi_n \end{bmatrix}^{n+1/2} = \begin{bmatrix} \gamma_1 & \alpha & \cdot & 0 & 0 \\ \alpha & \gamma_2 & \cdot & 0 & 0 \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ 0 & 0 & \cdot & \gamma_{N-1} & \alpha \\ 0 & 0 & \cdot & \alpha & \gamma_N \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \Psi_1 \\ \Psi_2 \\ \vdots \\ \vdots \\ \Psi_n \end{bmatrix}^n \quad (4.33)$$

con $\beta_j = (1 + 2\alpha + \frac{ix_j^2\Delta t}{4})$ e $\gamma_j = (1 + 2\alpha - \frac{ix_j^2\Delta t}{4})$. Indicando con A e B la matrice a sinistra e a destra della (4.33) rispettivamente otteniamo quindi la soluzione intermedia

$$\Psi^{n+1/2} = A^{-1}B\Psi^n \quad (4.34)$$

la quale sarà usata come condizione iniziale della (4.35) per ottenere la soluzione della funzione d'onda all'istante successivo.

$$\Psi_j^{n+1} = \Psi_j^{n+1/2} e^{-i(g|\Psi_j^{n+1/2}|^2)} \quad (4.35)$$

Passo 4: si ripete il ciclo fino a che il passo t_n non arriva a T.

4.2.2 Test numerici metodo Splitting

In questa sottosezione presentiamo i risultati numerici ottenuti con la tecnica del time-splitting utilizzando il metodo SSFD per risolvere l'equazione NLS 1D. Utilizzando MATLAB si è impostato il problema con $L=10, T = 10, N_x=128, N_t=10000$ e implementato l'algoritmo (Appendice B per codice). Si è imposta una condizione iniziale come in [17] che è lo stato fondamentale per la buca con $g=0$. Quando $g > 0$, le interazioni tra le particelle sono repulsive. Viceversa, quando $g < 0$ le interazioni sono attrattive. Risolviamo il problema nel dominio spaziale $[-10,10]$ con condizioni al contorno di Dirichlet omogenee.

In Figura 4.1 viene raffigurata l'evoluzione temporale del condensato $|\Psi(x, t)|^2$ per un'interazione repulsiva ($g = 5$). La dinamica dello stato fondamentale che è lasciato evolvere con un potenziale è chiamato "Breathing" [19]. Nella Figura è raffigurato come la costante non lineare influenzi la frequenza di Breathing del condensato. Come si può facilmente vedere la densità al centro della buca è minore per valori di g sempre più grandi, questo perché aumentano le corrispondenti repulsioni interparticellari. Uno studio analogo può essere effettuato studiando la dinamica del condensato per il quale un'interazione interparticellare è attrattiva ($g = -2.5$). A causa del comportamento attrattivo, la densità al centro della buca $|\Psi(0, t)|^2$ è maggiore per valori di g via via più piccoli. Si osservi anche che la

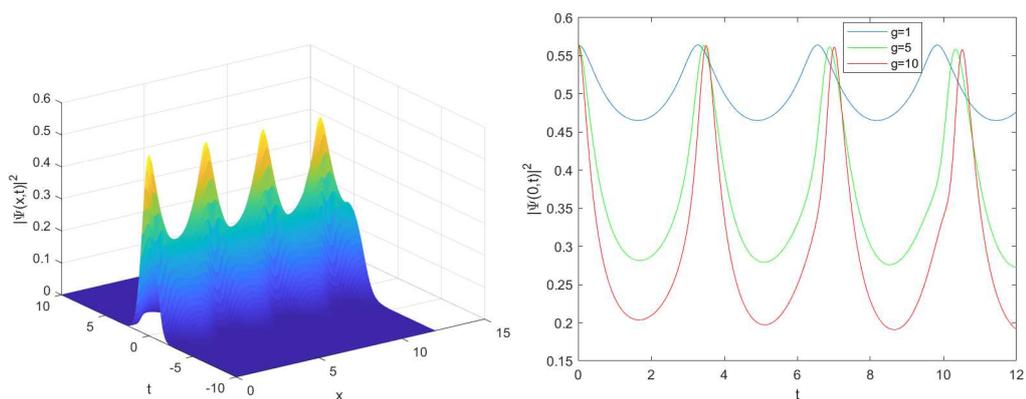


Figura 4.3: "Breathing" del condensato per interazione repulsiva, $g=5$. Il valore della funzione $|\Psi(0, t)|^2$ nel centro della buca è data come funzione del tempo.

frequenza di oscillazione del condensato aumenta con valori di g più piccoli come può essere visto nella Figura 4.2.

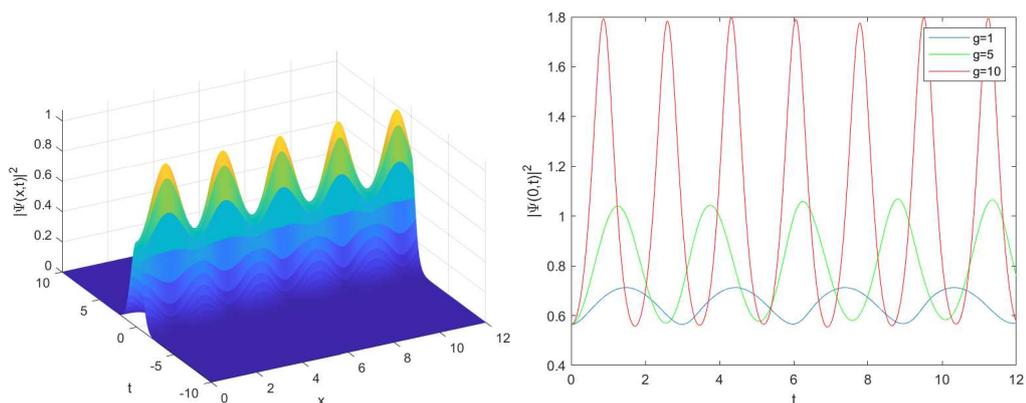


Figura 4.4: "Breathing" del condensato per interazione repulsiva, $g=-5$. Il valore della funzione $|\Psi(0, t)|^2$ nel centro della buca è data come funzione del tempo.

4.2.3 Test numerici metodo ODE45

Il risultato così ottenuto per via discreta è stato poi paragonato con la soluzione esatta ottenuta con la funzione MATLAB ODE45 (Appendice B per codice) e il risultato è visibile nelle Figure 4.5-4.10. L'impostazione del problema è sempre lo stesso con $L = 10$, $T = 10$ e $N_x = 128$. Si è impostata come condizione iniziale la stessa di [17]. Effettuando un paragone tra quanto ottenuto in entrambi i metodi si evince facilmente che i risultati sono gli stessi.

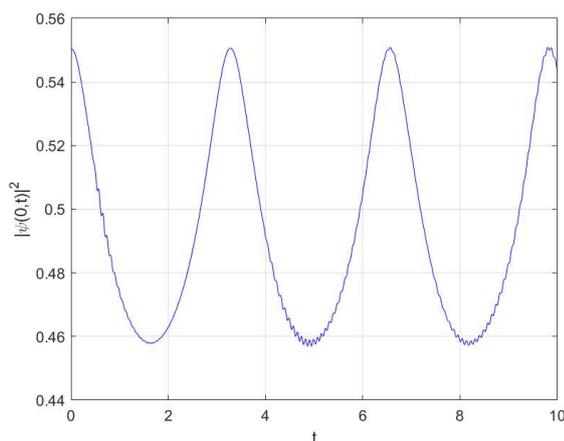


Figura 4.5: Evoluzione temporale del modulo quadro delle funzioni d'onda $\Psi_{0,t}$ quando $g = 1$ utilizzando la funzione ode45

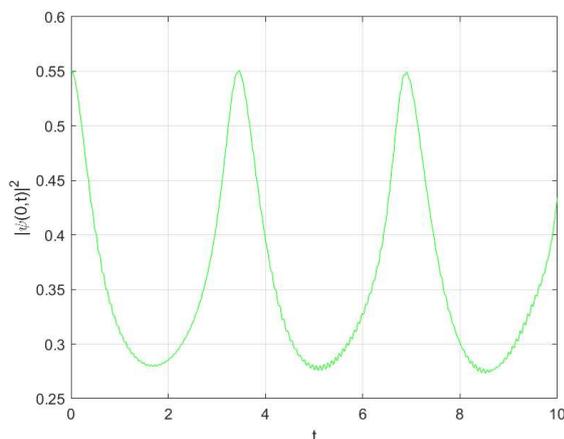


Figura 4.6: Evoluzione temporale del modulo quadro delle funzioni d'onda $\Psi_{0,t}$ quando $g = 5$ utilizzando la funzione ode45

4.3 Barriera di Potenziale

In questa sezione si analizza l'evoluzione temporale della funzione d'onda che infrange o da sinistra o da destra contro una barriera di potenziale posizionata nel centro del dominio. Questa barriera è stata modellata con matlab attraverso un impulso di Dirac posizionato in $x = 0$. A seconda del valore del potenziale utilizzato nel centro si può vedere o meno la presenza del fenomeno tunneling. Nella Figura 4.7 si vede l'evoluzione della funzione d'onda da destra verso sinistra che infrange su una barriera di potenziale $V = 9$. Dall'evoluzione si vede facilmente che parte dell'onda viene trasmessa attraverso la barriera e continua la sua evoluzione

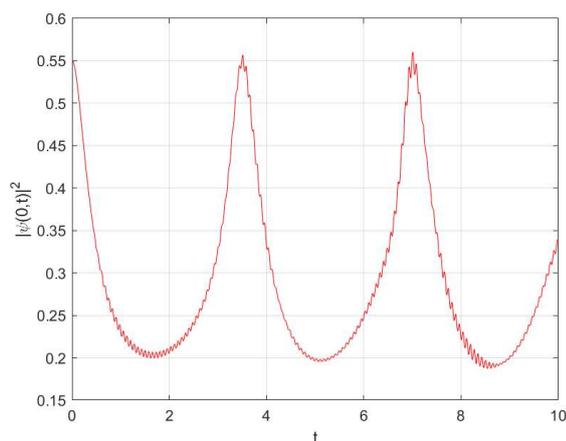


Figura 4.7: Evoluzione temporale del modulo quadro delle funzioni d'onda $\Psi_{0,t}$ quando $g = 10$ utilizzando la funzione ode45

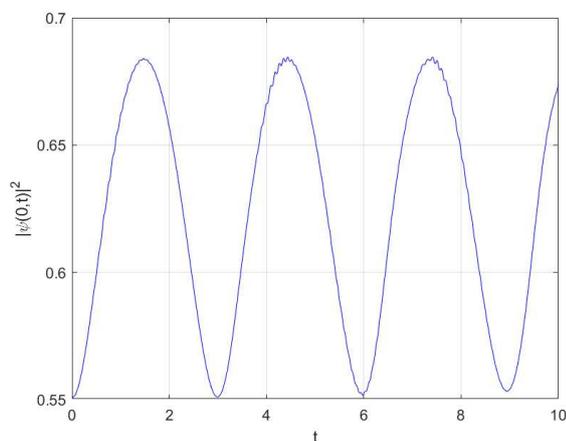


Figura 4.8: Evoluzione temporale del modulo quadro delle funzioni d'onda $\Psi_{0,t}$ quando $g = -1$ utilizzando la funzione ode45

verso sinistra, mentre parte dell'onda stessa viene riflessa indietro proseguendo l'evoluzione verso destra.

Successivamente è stato posto un valore di potenziale, sempre al centro del dominio, pari a $V = 1000$. Questo valore di potenziale è molto alto e come conseguenza durante l'evoluzione l'onda infrange contro la barriera e viene totalmente riflessa, non c'è nessun tipo di trasmissione come può essere visto nella Figura 4.8

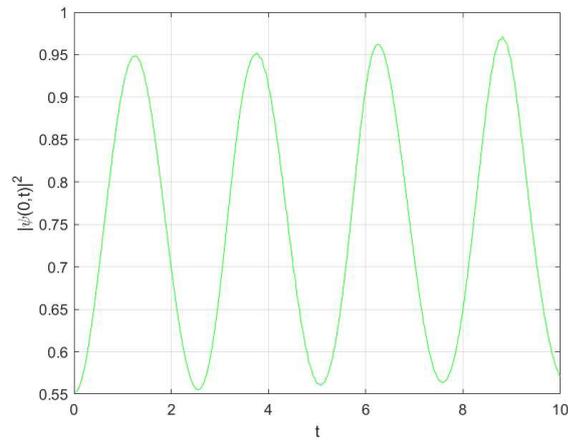


Figura 4.9: Evoluzione temporale del modulo quadro delle funzioni d'onda $\Psi_{0,t}$ quando $g = -2.5$ utilizzando la funzione ode45

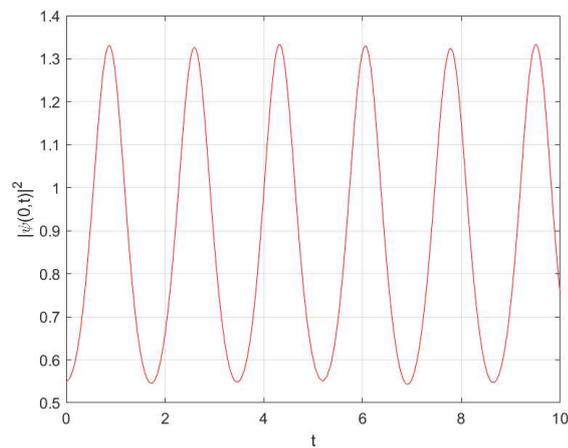
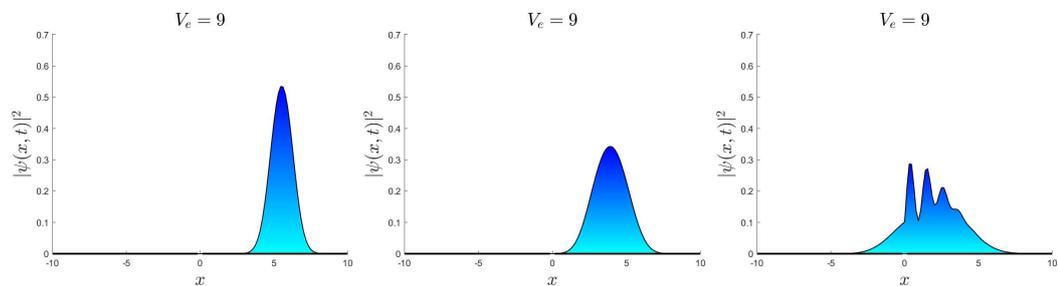


Figura 4.10: Evoluzione temporale del modulo quadro delle funzioni d'onda $\Psi_{0,t}$ quando $g = -5$ utilizzando la funzione ode45



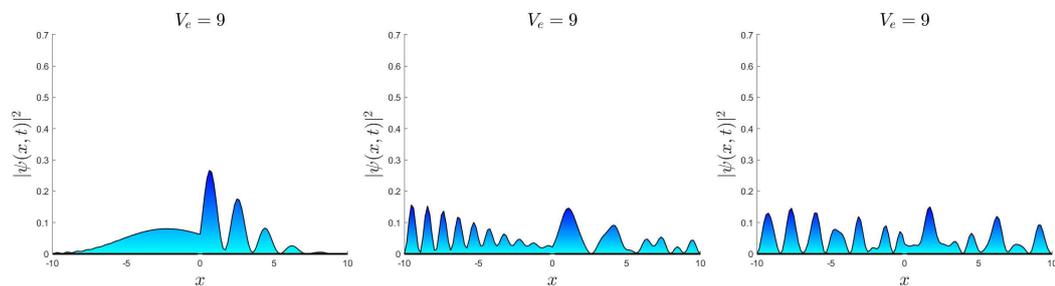


Figura 4.11: Evoluzione temporale di una funzione d'onda che infrange una barriera di potenziale $V = 9$

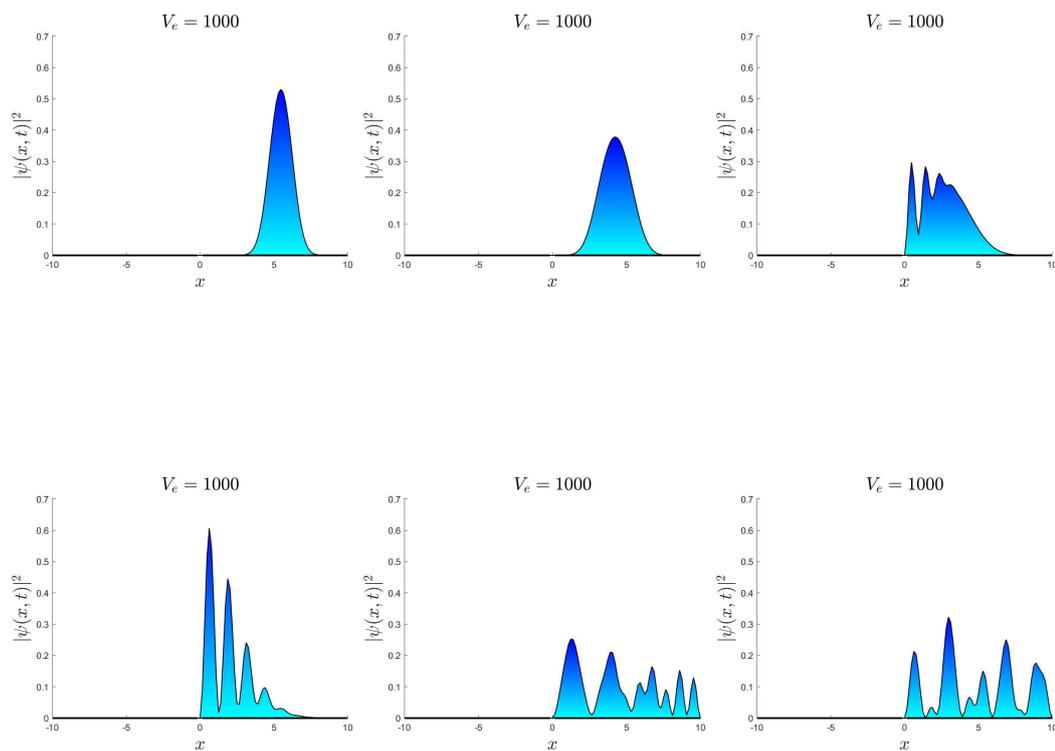


Figura 4.12: Evoluzione temporale di una funzione d'onda che infrange una barriera di potenziale $V = 1000$

Capitolo 5

Conclusioni

In questo lavoro di tesi, si è studiato il comportamento dei condensati di Bose-Einstein in un BJJ, usando il formalismo teorico dell'approssimazione del campo medio basato sull'equazione di Gross-Pitaevskii. Dal quadro di questa teoria, si è approssimata la funzione d'onda con l'approssimazione a due modi. Questo ha portato al sistema di equazioni dinamiche non lineari. Si è investigato il sistema dinamico per i due condensati nella doppia buca di potenziale per il caso simmetrico e si sono trovati i seguenti risultati:

- Oscillazione di Rabi
- Oscillazioni a fase 0 ($\langle \phi \rangle = \langle z \rangle = 0$)
- Running Phase Mode (MQST) a fase 0 ($-\infty < \langle \phi \rangle < +\infty$, $\langle z \rangle \neq 0$)
- Oscillazioni a fase π ($\langle \phi \rangle = \pi$, $\langle z \rangle = 0$)
- (MQST) a fase π ($\langle \phi \rangle = \pi$, $\langle z \rangle \neq 0$)

L'obiettivo principale è stato trovare la condizione nella quale avviene l'MQST, considerando due parametri, l'imbilancio di popolazione iniziale $z(0)$ e il parametro inter-atomico Λ .

Si è passati poi allo studio del Self-Trapping discreto (DST) il quale, in generale, modella un sistema accoppiato di oscillatori non armonici. Si è ristretta l'attenzione al caso particolare della DST, il Dimero, con quelle che vengono chiamate equazioni di Schrödinger non lineari discrete (DNLS). Per queste ultime si sono trovate le soluzioni stazionarie e le loro relative stabilità. Infine, si è studiata la soluzione numerica dell'equazione tempo dipendente di Gross-Pitaevskii attraverso la tecnica del time-splitting. Le soluzioni basate sull'accuratezza numerica di questo approccio applicato al problema monodimensionale (1D) mostra che fornisce soluzioni stabili. Questo approccio, d'altronde, è stato applicato per studiare la dinamica

del condensato di Bose-Einstein il quale è modellato con GPE. Il "Breathing" del condensato con interazioni repulsive e attrattive sono state simulate di conseguenza nel caso 1D. Sempre numericamente, si è aggiunta una barriera di potenziale nel centro del dominio per analizzare l'evoluzione nel tempo della funzione d'onda contra la barriera.

Appendice A

Principio di minima azione

Consideriamo una particella soggetta a un campo di forze che si trova in x_A al tempo t_A e in x_B al tempo t_B .

Vogliamo determinare la legge oraria (traiettoria) della particella. Il principio di minima azione dice che esiste una funzione $\mathcal{L}(x, v, t)$ chiamata Lagrangiana tale per cui la traiettoria vera rende minima l'azione

$$S_{AB} = \int_{t_A}^{t_B} \mathcal{L}(x(t), v(t), t) dt \quad (\text{A.1})$$

la quale è un numero reale che avrà un valore diverso per ogni traiettoria che soddisfa le condizioni al bordo. L'azione pertanto è un funzionale $S_{AB} : C \rightarrow \mathbb{R}$ dove C è l'insieme di tutte le possibili traiettorie $x(t)$ che soddisfano le condizioni al bordo.

L'obiettivo è quindi trovare la traiettoria che rende minima l'azione S . Supponiamo che $x(t)$ sia la traiettoria che rende minima la S . Allora per qualsiasi altra traiettoria

$$x(t) + \alpha\eta(t) \quad \alpha \in \mathbb{R} \quad (\text{A.2})$$

che soddisfi le condizioni al bordo $\eta(t_A) = \eta(t_B) = 0$. Deve valere la condizione

$$S[x] \leq S[x + \alpha\eta] \quad (\text{A.3})$$

La funzione $f(\alpha) = S[x + \alpha\eta]$ ha quindi un minimo per $\alpha = 0$ ossia

$$\left. \frac{d}{d\alpha} f(\alpha) \right|_{\alpha=0} = \left. \frac{d}{d\alpha} S[x + \alpha\eta] \right|_{\alpha=0} = 0 \quad (\text{A.4})$$

con

$$\begin{aligned} f(\alpha) = S[x + \alpha\eta] &= \int_{t_A}^{t_B} \mathcal{L} \left(x(t) + \alpha\eta(t), \frac{dx(t)}{dt} + \alpha \frac{d\eta(t)}{dt}, t \right) dt \\ &= \int_{t_A}^{t_B} \mathcal{L} \left(x(t) + \alpha\eta(t), \dot{x}(t) + \alpha\dot{\eta}(t), t \right) dt \end{aligned} \quad (\text{A.5})$$

Partendo dall'equazione A.4, portando dentro il segno di integrale la derivata e integrando per parti il secondo argomento dell'integrale si ottiene

$$\begin{aligned}
 \frac{d}{d\alpha} S[x + \alpha\eta] \Big|_{\alpha=0} &= \int_{t_A}^{t_B} \left(\frac{\partial}{\partial x} \mathcal{L}(x(t), \dot{x}(t), t) \eta(t) + \frac{\partial}{\partial \dot{x}} \mathcal{L}(x(t), \dot{x}(t), t) \dot{\eta}(t) \right) dt \\
 &= \int_{t_A}^{t_B} \left(\frac{\partial}{\partial x} \mathcal{L}(x(t), \dot{x}(t), t) \eta(t) \right) dt + \left[\frac{\partial}{\partial \dot{x}} \mathcal{L}(x(t), \dot{x}(t), t) \eta(t) \right]_{t_A}^{t_B} \\
 &\quad - \int_{t_A}^{t_B} \left[\frac{d}{dt} \frac{\partial}{\partial \dot{x}} \mathcal{L}(x(t), \dot{x}(t), t) \eta(t) \right] dt = \int_{t_A}^{t_B} \left[\frac{\partial}{\partial x} \mathcal{L}(x(t), \dot{x}(t), t) \right. \\
 &\quad \left. - \frac{d}{dt} \frac{\partial}{\partial \dot{x}} \mathcal{L}(x(t), \dot{x}(t), t) \right] \eta(t) dt \quad \forall \eta \quad \text{tale che} \quad \eta(t_A) = \eta(t_B) = 0
 \end{aligned} \tag{A.6}$$

Siamo arrivati quindi ad ottenere l'equazione di Eulero-Lagrange

$$\frac{\partial}{\partial x} \mathcal{L}(x(t), \dot{x}(t), t) - \frac{d}{dt} \frac{\partial}{\partial \dot{x}} \mathcal{L}(x(t), \dot{x}(t), t) = 0 \tag{A.7}$$

Appendice B

Codice Matlab

B.0.1 Splitting-Method

```
1 clear all;
2 L=10;
3 Nx = 128;
4 dx=2*L/Nx;
5 X=linspace(-L,L,Nx+1);
6 % condizione iniziale
7 u0 = pi.^(-1/4).*exp(-X.^2/2);
8 T =12;
9 nstep=10000;
10 t = linspace(0,T,nstep+1);
11 dt=T/nstep;
12 alpha=1i*dt/(4*dx.^2);
13
14 u=zeros(length(X),nstep+1);
15 %condizione iniziale
16 u(:,1)=(u0)';
17 %condizione al bordo
18 u(1,:)=0;
19 u(end,:)=0;
20
21 imax=length(X)-2; % rimuoviamo i punti al bordo
22 %costruiamo le matrici di Crank-Nicolson
23 e = ones(imax,1);
24 A = [-alpha*e (1+2*alpha)*e -alpha*e];
25 Lx = spdiags(A,[-1 0 1],imax,imax);
26 V = 1i*dt*diag(X.^2)/4;
27 V(1,:)=[];
28 V(end,:)=[];
29 V(:,1) = [];
```

```

30 V(:,end) = [ ];
31 AA = Lx+V;
32 B = [alpha*e (1-2*alpha)*e alpha*e];
33 Rx = spdiags(B,[-1 0 1],imax,imax);
34 BB = Rx-V;
35
36 %% CN method:
37
38 for n=2:nstep+1
39     % adjust the right matrix based on the fixed value on boundary
40     g = -1;
41     u(2:end-1,n)=AA\ (BB*u(2:end-1,n-1));
42     % time-splitting
43     u(2:end-1,n)= u(2:end-1,n) .* exp(-i*g*abs(u(2:end-1,n)).^2*dt);
44 end
45 r(:,1)=(u0)';
46 %condizione al bordo
47 r(1,:)=0;
48 r(end,:)=0;
49
50 for n=2:nstep+1
51     % adjust the right matrix based on the fixed value on boundary
52     g = -2.5;
53     r(2:end-1,n)=AA\ (BB*r(2:end-1,n-1));
54     % time-splitting
55     r(2:end-1,n)= r(2:end-1,n) .* exp(-i*g*abs(r(2:end-1,n)).^2*dt);
56 end
57
58 q(:,1)=(u0)';
59 %condizione al bordo
60 q(1,:)=0;
61 q(end,:)=0;
62
63 for n=2:nstep+1
64     % adjust the right matrix based on the fixed value on boundary
65     g = -5;
66     q(2:end-1,n)=AA\ (BB*q(2:end-1,n-1));
67     % time-splitting
68     q(2:end-1,n)= q(2:end-1,n) .* exp(-i*g*abs(q(2:end-1,n)).^2*dt);
69 end
70
71
72 t=[0:dt:T];
73 [Xg,tg] = meshgrid(X,t);
74 figure;
75 contourf(Xg,tg,abs(r.') .^2);
76
77 figure(2)
78 mesh(t,X,abs(r).^2)

```

```

79 xlabel('x')
80 ylabel('t')
81 zlabel('|\Psi(x,t)|^2')
82
83 figure(3)
84 plot(t,abs(u((Nx/2+1),:)).^2,t,abs(r((Nx/2+1),:)).^2,'green',t,abs(q
      ((Nx/2+1),:)).^2,'red');
85 xlabel('t')
86 ylabel('|\Psi(0,t)|^2');
87 legend('g=1','g=5','g=10')

```

B.0.2 Ode45

```

1 function my_ode()
2
3     g = -5;
4     L = 10;
5     Nx = 128;
6     x = linspace(-L,L,Nx+1);
7     tspan = [0 10];
8
9
10    function dZdt = odefcn(~,Z)
11
12        Np = 128;
13        dx = 2*L/Np;
14        v = linspace(-L,L,Np+1);
15
16        Z(1) = 0;
17        Z(Np+1) = 0;
18        dZdt = zeros(Np+1,1);
19        for n = 2:Np
20            dZdt(n) = 1i*((Z(n+1)-2*Z(n)+Z(n-1))/(2*dx.^2) - g*abs(Z(n)
21                ).^2*Z(n))-1i*v(n)^2/2*Z(n);
22        end
23    end
24
25    Nx = 128;
26    Z0 = zeros(Nx+1,1);
27    for n = 1:Nx
28        Z0(n) = pi.^(-1/4).*exp(-x(n).^2/2);
29    end
30    [t,Z] = ode45(@odefcn, tspan, Z0);
31
32    x = Z(:,Nx/2+1);

```

```

33 z = Z(:,Nx/2);
34
35 plot(t,abs(z).^2, 'r'), grid on
36 xlabel('t'), ylabel('|psi(0,t)|^2')
37
38 end

```

B.0.3 Barriera di Potenziale

```

1 clear all;
2 L=10;
3 Nx = 128;
4 dx=2*L/Nx;
5 X=linspace(-L,L,Nx+1);
6 % condizione iniziale
7 X0 = 3/5 * L;
8 k_0 = 2;
9 u0 = pi.^(-1/4).*exp(-(X-X0).^2/2).*exp(1i * k_0 * X);
10 T =12;
11 nstep=10000;
12 t = linspace(0,T,nstep+1);
13 dt=T/nstep;
14 alpha=1i*dt/(4*dx.^2);
15
16 u=zeros(length(X),nstep+1);
17 %condizione iniziale
18 u(:,1)=(u0)';
19 %condizione al bordo
20 u(1,:)=0;
21 u(end,:)=0;
22
23 imax=length(X)-2; % rimuoviamo i punti al bordo
24 %costruiamo le matrici di Crank-Nicolson
25 e = ones(imax,1);
26 A = [-alpha*e (1+2*alpha)*e -alpha*e];
27 Lx = spdiags(A,[-1 0 1],imax,imax);
28 V_b = 1000.0; % value of potential barrier
29 a = 0.5;
30 P = @(X) V_b*dirac(X);
31 Vb = zeros(Nx+1,1);
32 Vb(Nx/2) = 0.0;
33 Vb(Nx/2+1) = 1000.0;
34 Vb(Nx/2+2) = 0.0;
35 V = 1i*dt*diag(Vb)/2;
36 V(1,:)=[];
37 V(end,:)=[];

```

```

38 V(:,1) = [ ];
39 V(:,end) = [ ];
40 AA = Lx+V;
41 B = [alpha*e (1-2*alpha)*e alpha*e];
42 Rx = spdiags(B,[-1 0 1],imax,imax);
43 BB = Rx-V;
44
45 %% CN method:
46
47 for n=2:nstep+1
48     % adjust the right matrix based on the fixed value on boundary
49     g = 1;
50     u(2:end-1,n)=AA\ (BB*u(2:end-1,n-1));
51     % time-splitting
52     u(2:end-1,n)= u(2:end-1,n) .* exp(-i*g*abs(u(2:end-1,n)).^2*dt);
53 end
54
55 t=[0:dt:T];
56 [Xg,tg] = meshgrid(X,t);
57 figure;
58 contourf(Xg,tg,abs(u.').^2);
59
60 figure(2)
61 mesh(t,X,abs(u).^2)
62 xlabel('t')
63 ylabel('x')
64 zlabel('\|\Psi(x,t)|^2')
65
66 figure(3)
67 plot(t,abs(u((Nx/2+1),:)).^2);
68 xlabel('t')
69 ylabel('\|\Psi(0,t)|^2');
70 legend('g=1')
71
72 figure(4)
73 set(gcf, 'color', 'white')
74 colormap(1 - autumn)
75 hold on
76 h = patch(X, abs(u(:,1)).^2, abs(u(:,1)).^2, 'Linewidth', 1);
77 % Scaling potential barrier
78 g = plot(X, P(X)/(10 * a), 'Linewidth', 2, 'Color', 'k');
79 max_value = 1.25 * max(abs(u(:,1)).^2);
80 axis([min(X), max(X), 0, max_value])
81 xlabel('$x$', 'interpreter', 'latex', 'FontSize', 20)
82 ylabel('$\|\psi(x,t)|^2$', 'interpreter', 'latex', 'FontSize', 20)
83 title(sprintf(['$V_e = ', num2str(V_b), '$']), ...
84         'interpreter', 'latex', 'FontSize', 20)
85 drawnow
86 for i = 1 : numel(t)

```

```
87     set(h, 'YData', abs(u(:,i)).^2);  
88     set(h, 'CData', abs(u(:,i)).^2);  
89     drawnow  
90 end
```


Acronimo

BJJ

Boson Josephson Junction

BEC

Boson Einstein Condensate

GPE

Gross Pitaevskii Equation

TDGPE

Time Dependent Gross Pitaevskii Equation

MQST

Macroscopic Quantum Self Trapping

DST

Discrete Self Trapping

DNLS

Discrete Non Linear Schödinger

SSFD

Split Step Finite Difference

Bibliografia

- [1] Eric A Cornell e Carl E Wieman. «The bose-einstein condensate». In: *Scientific American* 278.3 (1998), pp. 40–45 (cit. a p. 1).
- [2] Christopher J Pethick e Henrik Smith. *Bose–Einstein condensation in dilute gases*. Cambridge university press, 2008 (cit. a p. 2).
- [3] R Gati e Markus K Oberthaler. «A bosonic Josephson junction». In: *Journal of Physics B: Atomic, Molecular and Optical Physics* 40.10 (2007), R61 (cit. a p. 3).
- [4] Augusto Smerzi, Stefano Fantoni, Stefano Giovanazzi e SR Shenoy. «Quantum coherent atomic tunneling between two trapped Bose-Einstein condensates». In: *Physical Review Letters* 79.25 (1997), p. 4950 (cit. alle pp. 3, 7, 25, 29, 44).
- [5] Michael Albiez, Rudolf Gati, Jonas Fölling, Stefan Hunsmann, Matteo Cristiani e Markus K Oberthaler. «Direct observation of tunneling and nonlinear self-trapping in a single bosonic Josephson junction». In: *Physical review letters* 95.1 (2005), p. 010402 (cit. alle pp. 3, 10).
- [6] Claude Cohen-Tannoudji e David Guéry-Odelin. «Advances in atomic physics: an overview». In: (2011) (cit. a p. 5).
- [7] Srikanth Raghavan, Augusto Smerzi, Stefano Fantoni e SR Shenoy. «Coherent oscillations between two weakly coupled Bose-Einstein condensates: Josephson effects, π oscillations, and macroscopic quantum self-trapping». In: *Physical Review A* 59.1 (1999), p. 620 (cit. alle pp. 10, 16, 24, 26).
- [8] Marine Pigneur e Jörg Schmiedmayer. «Analytical pendulum model for a bosonic Josephson junction». In: *Physical Review A* 98.6 (2018), p. 063632 (cit. a p. 19).
- [9] J Ch Eilbeck, PS Lomdahl e Alwyn C Scott. «The discrete self-trapping equation». In: *Physica D: Nonlinear Phenomena* 16.3 (1985), pp. 318–338 (cit. alle pp. 33, 39).

-
- [10] JC Eilbeck. «Introduction to the discrete self-trapping equation». In: *Davydov's Soliton Revisited: Self-Trapping of Vibrational Energy in Protein*. Springer, 1990, pp. 473–483 (cit. alle pp. 34, 35).
- [11] Panayotis G Kevrekidis e Hadi Susanto. «Few-lattice-site systems of discrete self-trapping equations». In: *The Discrete Nonlinear Schrödinger Equation: Mathematical Analysis, Numerical Computations and Physical Perspectives* (2009), pp. 249–257 (cit. alle pp. 34, 44).
- [12] J Carr e JC Eilbeck. «Stability of stationary solutions of the discrete self-trapping equation». In: *Physics Letters A* 109.5 (1985), pp. 201–204 (cit. a p. 36).
- [13] J Chris Eilbeck e Magnus Johansson. «The discrete nonlinear Schrödinger». In: *Proc. 3rd Conf.: Localization and Energy Transfer in Nonlinear Systems*. 2003, p. 44 (cit. a p. 42).
- [14] D Hennig, H Gabriel, Michael Finn Jørgensen, Peter Leth Christiansen e CB Clausen. «Homoclinic chaos in the discrete self-trapping trimer». In: *Physical Review E* 51.4 (1995), p. 2870 (cit. a p. 43).
- [15] VM Kenkre e DK Campbell. «Self-trapping on a dimer: time-dependent solutions of a discrete nonlinear Schrödinger equation». In: *Physical Review B* 34.7 (1986), p. 4959 (cit. a p. 44).
- [16] P. Teheran F. Fonseca R. Martinez. «Gross-Pitaevskii Equation Using The Crank-Nicholson Scheme». In: *Departamento de Física, Universidad Nacional de Colombia, Sede Bogotá*. 43 (2011) (cit. a p. 45).
- [17] Tsogbayar Tsednee, Banzragch Tsednee e Tsookhuu Khinayat. «Numerical solution to the time-dependent Gross-Pitaevskii equation». In: *arXiv preprint arXiv:2211.03964* (2022) (cit. alle pp. 45, 52, 53).
- [18] Sadhan K Adhikari e Paulsamy Muruganandam. «Bose-Einstein condensation dynamics from the numerical solution of the Gross-Pitaevskii equation». In: *Journal of Physics B: Atomic, Molecular and Optical Physics* 35.12 (2002), p. 2831 (cit. a p. 48).
- [19] Claude M Dion e Eric Cancès. «Spectral method for the time-dependent Gross-Pitaevskii equation with a harmonic trap». In: *Physical Review E* 67.4 (2003), p. 046706 (cit. a p. 52).