

POLITECNICO DI TORINO

Corso di Laurea Magistrale in Ingegneria Aerospaziale



Ottimizzazione di traiettorie di escape dal punto lagrangiano L2 del sistema Sole-Terra con propulsione elettrica

Relatore

Prof. Lorenzo Casalino

Candidato

Niccolò Scolari

Anno Accademico 2022/2023

Abstract

L'esplorazione interplanetaria rappresenta una delle sfide più stimolanti e complesse della storia del progresso scientifico e tecnologico. In anni recenti, con l'avvento della "New Space Economy", si è assistito ad un crescente coinvolgimento anche di compagnie ed investitori privati, favorendo un'accelerazione nello sviluppo di tecnologie sempre più sofisticate. L'avanzamento della conoscenza scientifica, unitamente al grande ritorno economico degli investimenti nel settore, ha favorito la progettazione e lo sviluppo di missioni ambiziose, affermando la presenza umana nello spazio. In un tale contesto, grande interesse è riservato ad alcune particolari aree, chiamate punti lagrangiani, poiché presentano numerose caratteristiche strategiche e vantaggiose per la realizzazione di missioni spaziali. Essi sono soluzioni del problema dinamico dei tre corpi e rappresentano delle posizioni di equilibrio nelle quali due corpi dotati di grande massa consentono ad un terzo corpo di massa molto inferiore, per esempio un satellite, di mantenere una posizione stabile rispetto ad essi, tramite l'interazione dei propri campi gravitazionali. In particolar modo, l'oggetto di studio di questa tesi è il punto lagrangiano L2 del sistema Sole-Terra (meglio noto come SEL2), collocato sull'asse immaginario che collega i due corpi, a circa 1.5 milioni di km di distanza dalla Terra, nella direzione opposta rispetto al Sole. La sua particolare posizione nello spazio garantisce una comunicazione rapida e costante con le ground station ed è ideale per l'osservazione astronomica dell'universo senza l'interferenza della Luna, del Sole e della Terra. Inoltre, richiede dei costi minimi in termini di consumi per il mantenimento dell'orbita e funge da punto di partenza ideale per missioni interplanetarie. Quest'ultimo aspetto è il principale oggetto di studio della tesi, nella quale si analizzano e ricercano le traiettorie ottimali per una manovra di evasione dalla sfera d'influenza terrestre per un piccolo satellite a propulsione elettrica, con partenza dal punto SEL2, tramite metodi di ottimizzazione indiretti. Il modello dinamico considera una gravitazione a quattro corpi, nel quale viene tenuta in considerazione anche la pressione di radiazione solare e vengono analizzati gli effetti della perturbazione lunisolare. L'obiettivo dello studio è identificare le traiettorie ottimali in termini di consumi di propellente, valutando diverse combinazioni al variare della data di partenza e della durata della missione. Il principale indicatore per questa tipologia di analisi è l'energia caratteristica del satellite (C3), valutata nel momento in cui viene raggiunto il limite della sfera d'influenza della Terra. La tesi ha l'intento di fornire un'analisi esaustiva delle possibili traiettorie di evasione dal punto SEL2, ponendo le basi per uno studio successivo su manovre interplanetarie con condizioni iniziali coincidenti con quelle ottenute al termine della manovra di escape.

*A questa fine
Che è anche un po' un inizio*

Indice

Elenco delle tabelle	VII
Elenco delle figure	VIII
Acronimi	XII
Nomenclatura	XIV
1 Introduzione	1
2 Meccanica orbitale	4
2.1 Le leggi fondamentali	4
2.1.1 La Legge di Gravitazione Universale	5
2.2 Il problema degli n -corpi	6
2.3 Il problema dei 2 corpi	10
2.3.1 Le costanti del moto	11
2.3.2 L'equazione della traiettoria	12
2.3.3 Elementi orbitali	13
2.4 Il problema dei 3 corpi circolare ristretto	17
2.5 Funzione del potenziale gravitazionale	20
2.6 Punti Lagrangiani	22
2.6.1 Punti collineari	23
2.6.2 Punti equilaterali	24
2.7 Sfera d'influenza	25
2.8 Missioni interplanetarie	26
2.8.1 Manovra di escape	27
3 I punti lagrangiani	30
3.1 I Punti lagrangiani nel sistema Sole-Terra	31
3.2 Orbite attorno ai punti lagrangiani	32
3.2.1 Orbita Lyapunov	32

3.2.2	Orbita Lissajous	33
3.2.3	Orbita Halo	33
3.3	Il punto lagrangiano SEL2	34
3.4	Missioni spaziali verso SEL2	35
3.4.1	Missioni passate	35
3.4.2	Missioni presenti	37
3.4.3	Missioni future	38
3.5	Missioni interplanetarie da SEL2	40
3.5.1	Gli asteroidi	41
3.5.2	Perchè studiare gli asteroidi	43
4	Ottimizzazione di traiettorie	47
4.1	Metodi di ottimizzazione indiretti	48
4.2	Teoria del controllo ottimale	49
4.2.1	Boundary Value Problem	54
5	Propulsione elettrica	59
5.1	Fondamenti di propulsione spaziale	59
5.1.1	L'equazione di Tsiolkovsky	63
5.2	Tipologie di propulsione	64
5.3	Propulsori elettrici	64
5.3.1	Propulsione elettrotermica	65
5.3.2	Propulsione elettrostatica	66
5.3.3	Propulsione elettromagnetica	67
5.4	Confronto tra chimico ed elettrico	68
6	Modello dinamico	70
6.1	Perturbazioni	76
6.1.1	Non perfetta sfericità della Terra	76
6.1.2	Perturbazione lunisolare	77
6.1.3	Pressione di radiazione solare	79
6.2	Definizione del caso di studio	80
6.2.1	Dati del problema	80
6.2.2	Codice di calcolo	81
7	Analisi e risultati	83
7.1	Creazione del database iniziale	84
7.2	Analisi al variare di t_0 e durata	91
7.2.1	Escape da SEL2 con data di partenza t_0 fissata	91
7.2.2	Escape da SEL2 con durata fissata	97
7.2.3	Parametri orbitali	99
7.3	Analisi su un ciclo di 28 giorni con C3 libera	101

7.3.1	Escape da SEL2 con durata fissata, durante un mese	101
7.3.2	Influenza del Sole su C3	104
7.3.3	Influenza della Luna su C3	106
7.3.4	Parametri orbitali	111
8	Conclusioni	114
A	Sistemi di riferimento	116
A.1	Geocentrico equatoriale	116
A.2	Eliocentrico-eclittica	117
A.3	Topocentrico	118
	Bibliografia	119

Elenco delle tabelle

5.1	Confronto tra le diverse famiglie di propulsori elettrici	68
5.2	Confronto tra propulsione chimica ed elettrica	69
6.1	Specifiche tecniche del satellite utilizzato nelle simulazioni	80
7.1	Data di spegnimento dei motori $t1$	85
7.2	Massa finale all'escape m_f [kg]	86
7.3	Energia finale all'escape, C_3 [km^2/s^2]	88

Elenco delle figure

1.1	Il telescopio spaziale Euclid, lanciato il 01 luglio 2023 in orbita Halo attorno al punto <i>SEL2</i> - Credits: ESA. Acknowledgement: Work performed by ATG under contract for ESA., CC BY-SA 3.0 IGO (2023)	3
2.1	Problema degli n -corpi - Credits: B. A. Stahl (Georgia Institute of Technology, 2008)	6
2.2	Problema degli n -corpi, schema con masse e forze	7
2.3	Moto relativo tra due corpi - Credits: R. R. Bate et al in <i>Fundamentals of Astrodynamics</i> (2 nd edition - 2020, Dover Publications) [1]	10
2.4	Geometria dell'ellisse - Credits: C. A. Kluever in <i>Spaceflight Mechanics</i> (2003 - Edited by the author of the thesis in 2023)	13
2.5	Parametri orbitali kepleriani - Credits: M. Mesarch in <i>GDC Orbit Primer</i> (NASA - 2018)	14
2.6	Sezioni di conica - Credits: R. Maini in <i>Trajectory Analysis of UPESSAT - A CubeSat Project</i> (2014)	15
2.7	Problema dei 3 corpi circolare ristretto - Credits: M. Ceriotti in <i>Hybrid solar sail and SEP propulsion for novel Earth observation missions</i> (2010)	17
2.8	I punti lagrangiani nel sistema Sole-Terra - Credits: Dr. Drang in <i>Lagrange points redux</i> (2016)	22
2.9	Geometria della traiettoria di evasione - Credits: H. Curtis in <i>Orbital Mechanics for Engineering Students</i> (2005, Elsevier) [4]	28
3.1	Punti lagrangiani del sistema Sole-Terra, nel campo gravitazionale - Credits: NASA / WMAP Science Team (2006)	31
3.2	Traiettoria Lissajous della missione <i>Gaia</i> - Credits: ESA – C. Carreau / ATG medialab (2013)	33
3.3	Orbite Halo attorno a EML2 - Credits: E. Zimovan in <i>Near rectilinear halo orbits and their application in cis-lunar space</i> (2017)	34

3.4	Rappresentazione di Herschel - Credits: NASA (2023)	36
3.5	Traiettorie delle missioni <i>Herschel</i> e <i>Planck</i> - Credits: ESA (2009) .	36
3.6	Rappresentazione del JWST - Credits: NASA (2023)	38
3.7	L'asteroide 4 Vesta - Credits: NASA/JPL-Caltech/UCLA/MPS/DLR/ IDA (Dawn mission, 2012)	42
3.8	Rappresentazione delle orbite dei quattro gruppi di NEA - Credits: S. Greenstreet (The University Of British Columbia, 2011)	43
3.9	Infografica sulla missione <i>DART</i> : si notano il sistema binario di asteroidi, la sonda ed il CubeSat <i>LiciaCube</i> - Credits: NASA/Johns Hopkins APL	45
5.1	Schematizzazione del sistema S/C - propellente, con conservazione della quantità di moto - Credits: G. Alessandrino in <i>Ottimizzazione di trasferte orbitali LEO con propulsione elettrica per missioni di Multi-Debris Removal</i> (2022)	61
5.2	Schematizzazione di un propulsore elettrostatico a ioni - Credits: O. Räisänen, own work, CC BY-SA 3.0 (2012)	66
6.1	Il sistema di riferimento <i>EME2000</i> - Credits: V. Vittaldev in <i>The Unified State Model. Derivation and Applications in Astrodynamics and Navigation</i> (2010)	72
6.2	SR <i>EME2000</i> e topocentrico - Credits: L. Casalino e L. Mascolo in <i>Optimal Escape from Sun-Earth and Earth-Moon L2 with Electric Propulsion</i> (2022) [9]	73
6.3	Modello di campo gravitazionale EGM2008 - Credits: A. Bezděk in <i>MATLAB script for visualizing geoid height and other elevation data on rotating 3D globe</i> (2013)	77
6.4	Rappresentazione delle perturbazioni - Credits: L. Casalino e L. Mascolo in <i>Optimal Escape from Sun-Earth and Earth-Moon L2 with Electric Propulsion</i> (2022) [9]	78
7.1	Posizione di satellite, Terra e Luna nell'arco del primo mese di escape	87
7.2	Massa finale all'escape [kg] in funzione della durata, per diversi t_0 .	89
7.3	Energia all'escape [km^2/s^2] in funzione della durata, per diversi t_0 .	89
7.4	Confronto tra C_3 e posizione della Luna a $t_0 = 160$	90
7.5	Escape da SEL2 per $t_0 = 160$: 19/06/2025, SR GEO EQ	91
7.6	Escape da SEL2 per $t_0 = 160$: 19/06/2025, SR ELIO EQ	92
7.7	Ingrandimento della figura 7.6	93
7.8	Escape da SEL2 per $t_0 = 161$: 16/08/2025, SR GEO EQ	94
7.9	Escape da SEL2 per $t_0 = 161$: 16/08/2025, SR ELIO EQ	94
7.10	Escape da SEL2 per $t_0 = 162$: 13/10/2025, SR GEO EQ	95
7.11	Escape da SEL2 per $t_0 = 162$: 13/10/2025, SR ELIO EQ	95

7.12	Escape da SEL2 per $t_0 = 163$: 10/12/2025, SR GEO EQ	96
7.13	Escape da SEL2 per $t_0 = 163$: 10/12/2025, SR ELIO EQ	96
7.14	Escape da SEL2 con durata di 90 giorni, SR GEO EQ	97
7.15	Escape da SEL2 con durata di 105 giorni, SR GEO EQ	98
7.16	Escape da SEL2 con durata di 130 giorni, SR GEO EQ	98
7.17	Eccentricità della traiettoria all'escape, per durata fissata	99
7.18	Semiassse maggiore della traiettoria all'escape, per durata fissata . .	100
7.19	Escape da SEL2 con durata di 90 giorni, in un mese, SR GEO EQ .	102
7.20	Escape da SEL2 con durata di 105 giorni, in un mese, SR GEO EQ	102
7.21	Escape da SEL2 con durata di 130 giorni, in un mese, SR GEO EQ	103
7.22	Escape da SEL2 con durata di 90 giorni, con passo 0.01	104
7.23	Valore di C_3 durante la missione, per durata di 90 giorni	105
7.24	Valore di C_3 durante la missione, per durata di 105 giorni	105
7.25	10/07/2025	106
7.26	17/07/2025	106
7.27	Massa finale all'escape [kg] per diversi t_0 durante un mese	107
7.28	C_3 all'escape [km^2/s^2] per diversi t_0 durante un mese	107
7.29	C_3 all'escape [km^2/s^2] scalata, per diversi t_0 durante un mese . . .	108
7.30	C_3 all'escape [km^2/s^2] per due t_0 distanti un mese	109
7.31	Istogramma di C_3 all'escape scalata, per diversi t_0 durante un mese	110
7.32	Eccentricità della traiettoria all'escape, per i diversi t_0	112
7.33	Eccentricità della traiettoria all'escape scalata, per i diversi t_0 . . .	112
7.34	Semiassse maggiore della traiettoria all'escape, per i diversi t_0	113
A.1	Sistema di riferimento geocentrico equatoriale - Credits: H. D. Curtis in <i>Orbital Mechanics for Engineering Students</i> (2014)	116
A.2	Sistema di riferimento eliocentrico-eclittica - Credits: J. Heiligers in <i>Optimisation of Solar Sail Interplanetary Heteroclinic Connections</i> (2014)	117
A.3	Sistema di riferimento topocentrico - Credits: <i>PROJ. Geocentric to topocentric conversion</i> (2023)	118

Acronimi

AU Astronomical Unit

BVP Boundary Value Problem

CNSA China National Space Administration

CR3BP Circular Restricted 3-Body Problem

CSA Canadian Space Agency

DNC Dynamically New Comet

EGM Earth Geopotential Model

EME2000 Earth Mean Equator al J2000

EML2 Earth-Moon Lagrange point 2

ESA European Space Agency

GEO Geostationary Earth Orbit

ICRF International Celestial Reference Frame

ICRH Ion Cyclotron-Resonance Heating

JAXA Japan Aerospace Exploration Agency

JWST James Webb Space Telescope

LEO Low Earth Orbit

LSP Luni-Solar Perturbation

MOID Minimum Orbit Intersection Distance

MPD Magnetoplasma dinamico (propulsore)

NASA National Aeronautics and Space Administration

NEA Near Earth Asteroid

NEO Near Earth Object

NGA National Geospatial-intelligence Agency

OCP Optimal Control Problem

OCT Optimal Control Theory

PHO Potentially Hazardous Object

PPT Pulsed Plasma Thruster

PPU Power Processing Unit

SEL2 Sun-Earth Lagrange point 2

SF Switching Function

SOI Sphere Of Influence

SR Sistema di Riferimento

VASIMR Variable Specific Impulse Magnetoplasma Rocket

WMAP Wilkinson Microwave Anisotropy Probe

Nomenclatura

χ	vettore delle condizioni al contorno <i>OCT</i>
Δt	tempo di funzionamento del propulsore [s]
ΔV	incremento di velocità $\left[\frac{km}{s}\right]$
η_R	riflettività solare
η_T	efficienza della spinta
γ_T	angolo di elevazione della spinta [deg]
λ	variabile aggiunta
μ	costante gravitazionale planetaria
μ_{ζ}	costante gravitazionale Luna = $4.902 \cdot 10^3 \left[\frac{km^3}{s^2}\right]$
μ_{\odot}	costante gravitazionale Sole = $1.327 \cdot 10^{11} \left[\frac{km^3}{s^2}\right]$
μ_{\oplus}	costante gravitazionale Terra = $3.986 \cdot 10^5 \left[\frac{km^3}{s^2}\right]$
ν	anomalia vera [deg]
Ω	Longitudine (ascensione retta) del nodo ascendente [deg]
ω	argomento del pericentro [deg]
Φ	termine funzionale di Lagrange <i>OCT</i>
Φ_{EM}	potenziale <i>EGM 2008</i>
ψ_T	angolo di heading della spinta [deg]
ρ	distanza adimensionale <i>CR3BP</i>
σ	condizioni al contorno ottimali <i>OCT</i>

τ	periodo orbitale [s]
θ	ascensione retta [deg]
φ	declinazione [deg]
φ	termine funzionale di Mayer <i>OCT</i>
ζ, η, ξ	coordinate adimensionali <i>CR3BP</i>
a	semiasse maggiore [km]
$a, \mathbf{a}, \ddot{\mathbf{r}}$	accelerazione $\left[\frac{km}{s^2}\right]$
AU	unità astronomica = $1.496 \cdot 10^8$ [km]
c	velocità ottimale di scarico $\left[\frac{m}{s}\right]$
$C3$	energia caratteristica $\left[\frac{m^2}{s^2}\right]$
E	energia [J]
e	eccentricità
G	costante di gravitazione universale = $6.67430 \cdot 10^{-11}$ $\left[\frac{Nm^2}{kg^2}\right]$
g_0	accelerazione gravitazionale sulla Terra <i>sea level</i> 9.80665 $\left[\frac{m}{s^2}\right]$
H	Hamiltoniano
h, \mathbf{h}	momento angolare specifico $\left[\frac{m^2}{s}\right]$
i	inclinazione [deg]
I, J, K	sistema di riferimento <i>EME2000</i>
I_{SP}	impulso specifico [s]
I_t	impulso totale $\left[\frac{kgm}{s}\right]$
J	parametro funzionale <i>OCT</i>
J^*	parametro funzionale trasformato <i>OCT</i>
L_s	potenza totale irradiata dal Sole = $3.846 \cdot 10^{26}$ [W]
m	massa [kg]

m_p	massa propellente $[kg]$
p	pressione esercitata da un fotone = $4.55682 \cdot 10^{-6} (1AU) \left[\frac{N}{m^2}\right]$
p	semi-latus rectum $[km]$
P_E	potenza elettrica $[W]$
r	raggio $[km]$
r, θ, φ	coordinate polari
S	superficie del satellite irradiata dal Sole
T	spinta (thrust) $[N]$
t	tempo $[s]$
U	funzione potenziale gravitazionale $\left[\left(\frac{km}{s}\right)^2\right]$
u, v, w	componenti di velocità radiale, tangenziale e normale $\left[\frac{m}{s}\right]$
$v, \mathbf{v}, \dot{\mathbf{r}}$	velocità $\left[\frac{km}{s}\right]$
x, y, z	coordinate cartesiane $[km]$
ω	velocità angolare sinodica $\left[\frac{rad}{s}\right]$

Capitolo 1

Introduzione

L'esplorazione interplanetaria è una macroarea di ricerca scientifica e tecnologica che riguarda la definizione di strumenti, traiettorie e missioni per osservare e comprendere le caratteristiche di pianeti, lune, asteroidi ed altri corpi celesti del Sistema Solare e dello spazio profondo. Negli ultimi anni, l'avvento e lo sviluppo della "New Space Economy" hanno favorito una forte accelerazione nella progettazione di missioni spaziali, coinvolgendo anche compagnie ed investitori privati. Lo sviluppo di tecnologie sofisticate, l'avanzamento della ricerca scientifica ed il ritorno economico degli investimenti hanno contribuito allo sviluppo di missioni ambiziose, spostando l'interesse verso settori che in passato avevano goduto di minori attenzioni. Tra questi spiccano il turismo spaziale e l'estrazione mineraria dagli asteroidi (o da altri corpi celesti minori). Quest'ultimo aspetto è di grande interesse economico considerato che, secondo stime della NASA il valore complessivo dei minerali presenti nei corpi della fascia degli asteroidi si attesta su diverse centinaia di quintilioni ¹ di dollari. Inoltre, lo studio di questi corpi celesti rimasti in una condizione invariata per miliardi di anni è di enorme interesse scientifico, poiché potrebbe aiutare a comprendere il processo di formazione del Sistema Solare e come gli elementi alla base della vita siano stati portati sulla Terra. In un tale contesto, è riservato un grande interesse verso alcune particolari aree dello spazio, chiamate punti lagrangiani, poiché godono di ottime caratteristiche geometriche e fisiche, molto vantaggiose nell'ottica della realizzazione di missioni spaziali. I punti lagrangiani sono soluzioni del problema dinamico dei tre corpi e rappresentano delle posizioni di equilibrio nelle quali due corpi dotati di grande massa consentono ad un terzo corpo di massa molto inferiore, per esempio un satellite, di mantenere una posizione stabile rispetto ad essi, tramite l'interazione dei propri campi gravitazionali. Per ogni coppia di corpi principali che costituiscono

¹Il quintilione è un numero che corrisponde ad un milione di triliardi, cioè $1000000^5 = 10^{30}$

un sistema a 3 corpi, sono definiti 5 punti lagrangiani; in particolare questa tesi si focalizza sul sistema Sole-Terra ed il punto oggetto di studio delle analisi è $L2$, meglio noto come $SEL2$, ovvero *Sun Earth Lagrangian (point) 2*. Tale punto è collocato sul prolungamento dell'asse immaginario che collega i due corpi, a circa 1.5 milioni di km di distanza dalla Terra, nella direzione opposta rispetto al Sole. La particolare posizione che occupa nello spazio presenta numerosi benefici per le missioni spaziali destinate verso di esso e, per questo motivo, negli anni è stato l'obiettivo di satelliti e sonde di diverse agenzie spaziali di tutto il mondo. La sua posizione, infatti, garantisce una comunicazione rapida e costante con le ground station ed è un punto ideale per l'osservazione astronomica dell'universo senza l'interferenza della Luna, del Sole e della Terra. Inoltre, un satellite collocato in orbita attorno ad esso richiede dei costi minimi in termini di consumi per il mantenimento dell'orbita e funge da punto di partenza ideale per missioni interplanetarie, in particolar modo per quanto riguarda quelle dirette verso asteroidi *Near Earth (NEA)*. Quest'ultimo aspetto è il principale oggetto di studio della tesi, nella quale si analizzano e ricercano le traiettorie ottimali per una manovra di evasione dalla sfera d'influenza terrestre per un piccolo satellite a propulsione elettrica, con partenza dal punto lagrangiano $SEL2$, tramite metodi di ottimizzazione indiretti. L'evasione serve a portare il satellite in un'area dello spazio sufficientemente lontana dalla Terra per non risentire più in maniera rilevante della sua attrazione gravitazionale. Una volta giunto a destinazione, il satellite potrà intraprendere una seconda fase di manovra interplanetaria, in questo caso di tipo eliocentrico, per dirigersi verso asteroidi o altri corpi celesti minori. Il modello dinamico del problema considera una gravitazione a quattro corpi (Sole, Terra, Luna e satellite), nel quale viene tenuta in considerazione anche la pressione di radiazione solare e vengono analizzati gli effetti della perturbazione lunisolare. L'obiettivo dello studio è identificare le traiettorie ottimali in termini di consumi di propellente, valutando diverse combinazioni al variare della data di partenza e della durata della missione. In questo modo è possibile valutare gli effetti della perturbazione del Sole e della Luna sullo spacecraft ed analizzarne l'andamento durante un ciclo lunare o in diversi momenti dell'anno, variando la data di partenza della missione. Il principale indicatore preso in considerazione per questa tipologia di analisi è l'energia caratteristica del satellite (nota come $C3$), valutata nel momento in cui viene raggiunto il limite della sfera d'influenza della Terra, assunto, per questa trattazione, a 3 milioni di km di distanza da essa. La tesi è strutturata in 7 capitoli, volti ad inquadrare il problema sotto diversi aspetti tecnici e fisici, per poi fornire un'analisi approfondita delle possibili traiettorie di evasione dal punto $SEL2$. Dopo questo primo capitolo introduttivo, nel quale è stato presentato il problema in esame, la tesi verte sul tema della meccanica orbitale, approfondendo in particolare il problema degli n -corpi e la definizione matematica dei punti lagrangiani, introducendo concetti chiave come quelli di sfera d'influenza, potenziale

gravitazionale e parametri orbitali. Tale trattazione permette di analizzare, nel corso del capitolo 3, i punti lagrangiani da un punto di vista più pratico, volto alla comprensione delle tipologie di traiettorie che possono essere percorse attorno ad essi. L'attenzione viene, poi, spostata sul punto *SEL2*, focalizzandosi sulle missioni spaziali passate, presenti e future destinate verso di esso; infine la trattazione verte sulle missioni interplanetarie con partenza da *SEL2*, in particolar modo quelle destinate verso gli asteroidi *Near Earth*, con un approfondimento sulle motivazioni scientifiche, economiche e tecnologiche che li rendono obiettivi così importanti per delle missioni spaziali. Il capitolo 4 si focalizza sull'ottimizzazione di traiettorie, in particolare tramite metodi indiretti, introducendo la teoria del controllo ottimale ed il modello matematico implementato nel codice di calcolo utilizzato per le simulazioni. Successivamente, nel corso del capitolo 5, si affronta il tema della propulsione elettrica nelle missioni spaziali, confrontandola con quella chimica e presentandone punti di forza e svantaggi. Vengono, inoltre, presentate le diverse tipologie di propulsori elettrici per applicazioni spaziali, approfondendo i principali aspetti tecnici della propulsione elettrotermica, elettrostatica ed elettromagnetica. Nel capitolo 6 si illustra il problema reale in esame, introducendo il modello dinamico adottato per lo studio, con riferimenti al codice di calcolo ed alle perturbazioni di cui si è tenuto conto. Vengono, inoltre, presentate le caratteristiche del modello di satellite impiegato per le analisi ed i parametri tecnici del propulsore a ioni installato a bordo. Infine, il capitolo 7 racchiude tutti i risultati delle analisi effettuate, presentando i diversi casi di studio, le metodologie applicate ed i dati ottenuti nel corso delle simulazioni, valutandoli e commentandoli in maniera dettagliata.

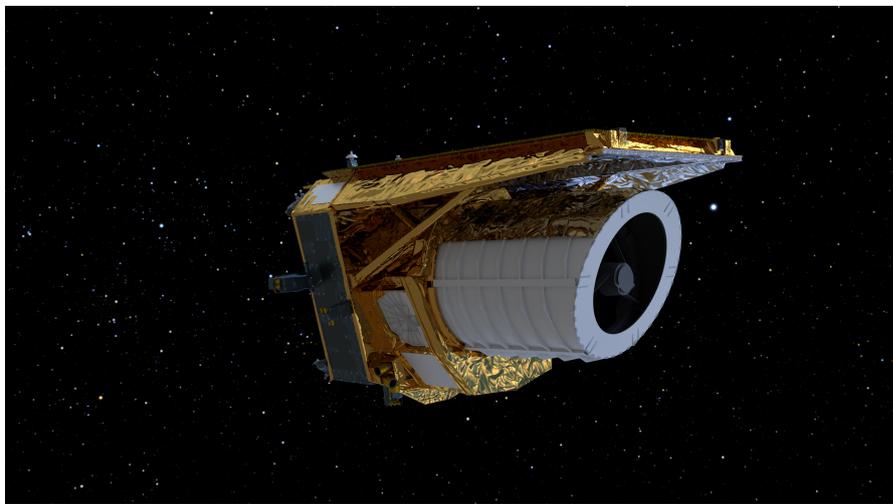


Figura 1.1: Il telescopio spaziale Euclid, lanciato il 01 luglio 2023 in orbita Halo attorno al punto *SEL2* - Credits: ESA. Acknowledgement: Work performed by ATG under contract for ESA., CC BY-SA 3.0 IGO (2023)

Capitolo 2

Meccanica orbitale

La meccanica orbitale, o celeste, è una branca della meccanica classica che studia il moto dei corpi celesti da un punto di vista fisico e matematico. Un corpo celeste è un qualsiasi oggetto astronomico non appartenente alla Terra, che abbia origine naturale (come pianeti, stelle, asteroidi, comete, satelliti naturali...), oppure antropica, nel caso di sonde, satelliti e stazioni spaziali. Nel corso del capitolo verrà affrontata la fenomenologia della meccanica celeste, a partire dalle leggi di Keplero, di Newton e della gravitazione universale, fino ad arrivare alle missioni interplanetarie, passando per gli elementi orbitali classici, il problema degli n -corpi, l'equazione della traiettoria, le manovre di fuga e la funzione del potenziale gravitazionale, fondamentale per la definizione dei punti lagrangiani, che verranno trattati nel capitolo 3. Nel corso del capitolo si adotta la notazione in grassetto per indicare un vettore, mentre lo stesso simbolo non in grassetto indica il modulo del vettore, come nel caso $|\mathbf{r}| = r$.

2.1 Le leggi fondamentali

Alle basi di tutta la trattazione della meccanica celeste vi sono alcune importanti leggi fisiche, formulate tra il 1608 ed il 1619 dall'astronomo tedesco Johannes von Kepler e fondamentali per gli studi successivi di sir Isaac Newton, che lo portarono, nel 1687, a formulare la *Legge di gravitazione universale*. Le 3 leggi di Keplero, di seguito riportate, sono una descrizione, ma non una spiegazione, del moto dei pianeti attorno al Sole:

- K1.** L'orbita di un pianeta è ellittica (quindi giace su un piano) ed il Sole occupa uno dei fuochi dell'ellisse;
- K2.** Il raggio vettore congiungente il pianeta al Sole spazza aree uguali in tempi uguali;

K3. Il quadrato del periodo di rivoluzione di un pianeta è proporzionale al cubo della distanza media dal Sole.

Tali leggi, così formulate, sono esatte solo nel caso di alcune ipotesi, tra cui la trascurabilità della massa del pianeta rispetto a quella della stella di riferimento, la possibilità di modellizzare i corpi come punti materiali e di trascurare le interazioni tra diversi pianeti o altri corpi. Nonostante ciò, sono applicabili non soltanto ai pianeti, ma a qualunque corpo orbitante attorno ad un altro, come nel caso dei satelliti. Sono, inoltre, fondamentali per la successiva formulazione delle tre leggi del moto di Newton:

N1. Legge di inerzia - Ogni oggetto materiale permane nel suo stato di quiete o di moto rettilineo uniforme se la risultante delle forze esterne su esso applicate è nulla;

N2. Principio di proporzionalità - La variazione della quantità di moto di un oggetto materiale è proporzionale al vettore risultante delle forze esterne ad esso applicate;

N3. Conservazione della quantità di moto - Ad ogni azione applicata dall'esterno su un corpo materiale corrisponde una reazione uguale e contraria dello stesso corpo.

Esse costituiscono le fondamenta della dinamica, caratterizzando in maniera completa le forze e le leggi che regolano l'equilibrio ed il moto dei corpi.

2.1.1 La Legge di Gravitazione Universale

Oltre ad enunciare le tre leggi del moto, raccolte nel trattato *Philosophiæ Naturalis Principia Mathematica*, nel 1687 Newton formulò la *Legge di Gravitazione Universale*, derivata da osservazioni empiriche e che afferma:

Due corpi si attraggono con una forza direttamente proporzionale (G) al prodotto delle loro masse e inversamente proporzionale al quadrato della loro distanza (r).

Essa può essere espressa in una notazione matematica vettoriale come

$$\mathbf{F}_g = -\frac{GMm}{r^2} \frac{\mathbf{r}}{r} \quad (2.1)$$

I termini di massa nell'equazione rappresentano delle masse gravitazionali m^g , che esprimono la capacità di un corpo dotato di massa di attrarne gravitazionalmente un altro. Il segno negativo indica che la forza è attrattiva. Il termine G , infine, è una costante di proporzionalità, detta di attrazione universale, e vale

$$G = 66.7 \pm 0.005 \cdot 10^{-12} \frac{m^3}{kg \cdot s^2} \quad (2.2)$$

2.2 Il problema degli n -corpi

In fisica, il problema degli n -corpi consiste nel prevedere i moti individuali di un insieme di n masse m_1, m_2, \dots, m_n distribuite in uno spazio euclideo ¹ che interagiscono tra di loro soltanto attraverso forze gravitazionali. Esso rappresenta in modo più generale il sistema caratteristico del problema in esame in questa tesi, nel quale il satellite è il corpo con massa m_1 , che interagisce attraverso forze gravitazionali con le $(n - 1)$ masse degli altri corpi celesti. Una rappresentazione schematica del problema è riportata in figura 2.1.

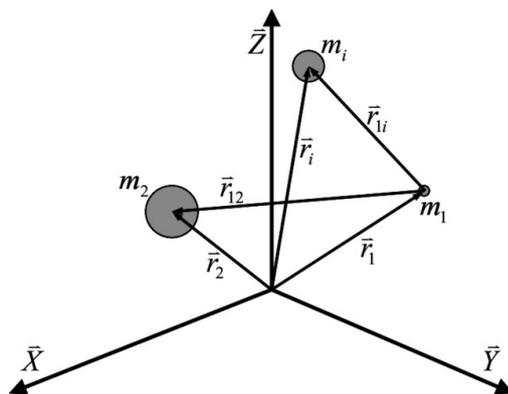


Figura 2.1: Problema degli n -corpi - Credits: B. A. Stahl (Georgia Institute of Technology, 2008)

Si ipotizzi di analizzare un sistema costituito da n corpi, nel quale il satellite è indicato dalla massa i -esima, come illustrato in figura 2.2. La forza gravitazionale agente sul satellite può essere determinata applicando la legge della gravitazione universale; dopodiché, il vettore dato dalla somma di tutte le forze gravitazionali e di tutte le forze esterne agenti sulla massa m_i verrà usato per determinare l'equazione del moto. Le forze esterne agenti sul satellite sono tutte quelle forze di natura non gravitazionale che potrebbero essere esercitate sul corpo: per esempio, va considerata la possibilità che il satellite espella massa (sotto forma di propellente) per generare spinta, oppure che il moto avvenga a distanze dalla Terra sufficientemente ridotte perchè si verifichino fenomeni di resistenza aerodinamica; inoltre, devono essere valutati anche gli effetti della pressione di radiazione solare e le perturbazioni dovute alla non perfetta sfericità dei pianeti ², che causano delle variazioni al

¹In matematica, uno spazio euclideo è uno spazio in cui valgono gli assiomi e i postulati della geometria euclidea.

²La Terra, così come la Luna, è un ellissoide: leggermente schiacciata ai poli e più gonfia all'equatore.

termine della forza gravitazionale introdotta da Newton. Tutti questi fenomeni non possono essere trascurati, ma vanno considerati nell'equazione generale del moto.

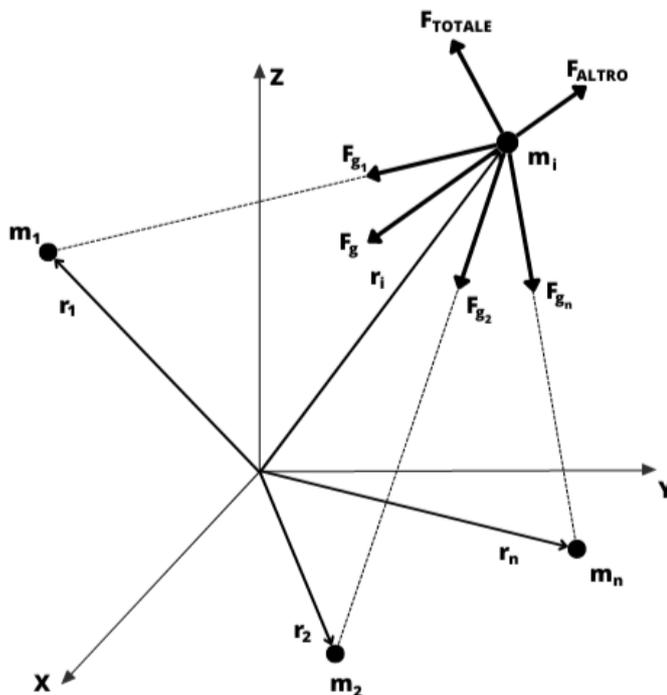


Figura 2.2: Problema degli n -corpi, schema con masse e forze

Il primo passo dell'analisi riguarda la scelta di un sistema di coordinate nel quale descrivere il moto: si assume un sistema di riferimento X, Y, Z , nel quale le posizioni r_1, r_2, \dots, r_n delle n -masse sono note (schema in figura 2.1). Dopodiché, applicando la legge di Newton della gravitazione universale, si esprime la forza \mathbf{F}_{g_n} esercitata sulla massa m_i dalla massa m_n

$$\mathbf{F}_{g_n} = -\frac{Gm_i m_n}{r_{ni}^3}(\mathbf{r}_{ni}) \quad (2.3)$$

dove

$$\mathbf{r}_{ni} = \mathbf{r}_i - \mathbf{r}_n \quad (2.4)$$

Il vettore somma di tutte le forze gravitazionali agenti sul corpo i -esimo, \mathbf{F}_g può essere scritto come

$$\mathbf{F}_g = -\frac{Gm_i m_1}{r_{1i}^3}(\mathbf{r}_{1i}) - \frac{Gm_i m_2}{r_{2i}^3}(\mathbf{r}_{2i}) - \dots - \frac{Gm_i m_n}{r_{ni}^3}(\mathbf{r}_{ni}) \quad (2.5)$$

In questa formula non è presente, per ovvii motivi, il termine ii , poichè comporterebbe l'esistenza di un corpo i -esimo che esercita una forza attrattiva su se stesso.

Semplificando la 2.5 con la notazione sommatoria, si ottiene

$$\mathbf{F}_g = -Gm_i \sum_{\substack{j=1 \\ j \neq i}}^n \frac{m_j}{r_{ij}^3} (\mathbf{r}_{ij}) \quad (2.6)$$

La somma di tutte le forze esterne viene indicata con il termine \mathbf{F}_{ALTRO} , che include il contributo di resistenza, spinta, pressione di radiazione solare, perturbazioni dovute alla non perfetta sfericità dei corpi, etc. La forza totale agente sul corpo i -esimo sarà, così, definita

$$\mathbf{F}_{TOTALE} = \mathbf{F}_g + \mathbf{F}_{ALTRO} \quad (2.7)$$

A questo punto è possibile applicare la seconda legge del moto di Newton **N2**..

$$\frac{d}{dt}(m_i \mathbf{v}_i) = \mathbf{F}_{TOTALE} \quad (2.8)$$

Che può essere riscritta come

$$m_i \frac{d\mathbf{v}_i}{dt} + \mathbf{v}_i \frac{dm_i}{dt} = \mathbf{F}_{TOTALE} \quad (2.9)$$

Dividendo entrambi i membri per la massa m_i e riordinando, si ottiene l'equazione generale del moto per il corpo i -esimo

$$\ddot{\mathbf{r}}_i = \frac{\mathbf{F}_{TOTALE}}{m_i} - \dot{\mathbf{r}}_i \frac{\dot{m}_i}{m_i} \quad (2.10)$$

nella quale $\ddot{\mathbf{r}}_i$ è il vettore accelerazione del corpo i -esimo nel sistema di coordinate X, Y, Z, m_i è la massa del corpo i -esimo, \mathbf{F}_{TOTALE} è il vettore somma di tutte le forze gravitazionali ed esterne, $\dot{\mathbf{r}}_i$ è il vettore velocità del corpo i -esimo nel sistema di coordinate X, Y, Z e \dot{m}_i è il tasso di variazione della massa del corpo i -esimo (ad esempio per espulsione di propellente). La 2.10 è un'equazione differenziale del secondo ordine, non lineare e vettoriale, che non presenta soluzioni, così definita. Per questo motivo, è necessario effettuare alcune assunzioni che la semplifichino:

1. Si assume che la massa del corpo i -esimo rimanga costante;
2. Si assume che i corpi siano a simmetria sferica, in modo da poter considerare le masse come se fossero concentrate nel proprio centro;
3. Si assume che la resistenza e le altre forze esterne non siano presenti, in modo tale che l'unica forza agente sia di tipo gravitazionale, tra i rispettivi centri.

Così facendo, la 2.10 si riduce a

$$\ddot{\mathbf{r}}_i = -G \sum_{\substack{j=1 \\ j \neq i}}^n \frac{m_j}{r_{ji}^3}(\mathbf{r}_{ji}) \quad (2.11)$$

Assumendo che la massa m_1 sia la Terra, m_2 un satellite e le restanti m_3, m_4, \dots, m_n siano, rispettivamente, la Luna, il Sole ed i pianeti, l'equazione 2.11 diventa

$$\ddot{\mathbf{r}}_1 = -G \sum_{j=2}^n \frac{m_j}{r_{j1}^3}(\mathbf{r}_{j1}) \quad (\text{per } i = 1) \quad (2.12)$$

$$\ddot{\mathbf{r}}_2 = -G \sum_{\substack{j=1 \\ j \neq 2}}^n \frac{m_j}{r_{j2}^3}(\mathbf{r}_{j2}) \quad (\text{per } i = 2) \quad (2.13)$$

Considerato che dalla 2.4

$$\mathbf{r}_{12} = \mathbf{r}_2 - \mathbf{r}_1 \quad (2.14)$$

allora

$$\ddot{\mathbf{r}}_{12} = \ddot{\mathbf{r}}_2 - \ddot{\mathbf{r}}_1 \quad (2.15)$$

Sostituendo la 2.12 e la 2.13 nella 2.15, si ottiene

$$\ddot{\mathbf{r}}_{12} = -G \sum_{\substack{j=1 \\ j \neq 2}}^n \frac{m_j}{r_{j2}^3}(\mathbf{r}_{j2}) - G \sum_{j=2}^n \frac{m_j}{r_{j1}^3}(\mathbf{r}_{j1}) \quad (2.16)$$

che in forma estesa diventa

$$\ddot{\mathbf{r}}_{12} = - \left[\frac{Gm_1}{r_{12}^3}(\mathbf{r}_{12}) + G \sum_{j=3}^n \frac{m_j}{r_{j2}^3}(\mathbf{r}_{j2}) \right] - \left[-\frac{Gm_2}{r_{21}^3}(\mathbf{r}_{21}) - G \sum_{j=3}^n \frac{m_j}{r_{j1}^3}(\mathbf{r}_{j1}) \right] \quad (2.17)$$

Dato che $\mathbf{r}_{12} = -\mathbf{r}_{21}$, si possono raccogliere i termini corrispondenti di ciascuna parentesi, ottenendo

$$\ddot{\mathbf{r}}_{12} = -G \frac{m_1 + m_2}{r_{12}^3}(\mathbf{r}_{12}) - \sum_{j=3}^n Gm_j \left(\frac{\mathbf{r}_{j2}}{r_{j2}^3} - \frac{\mathbf{r}_{j1}}{r_{j1}^3} \right) \quad (2.18)$$

dove $\ddot{\mathbf{r}}_{12}$ è l'accelerazione del satellite rispetto alla Terra, mentre il secondo termine dell'equazione raccoglie gli effetti perturbativi della Luna, del Sole e dei pianeti.

2.3 Il problema dei 2 corpi

A questo punto, nota l'espressione generale del moto relativo tra due corpi perturbato da altri corpi celesti, diventa possibile ridurre l'equazione ad una per due soli corpi. Il caso più semplice del problema degli n -corpi è, infatti, quello per $n = 2$. Per procedere, si consideri un sistema di riferimento X, Y, Z analogo al precedente (figura 2.2) ed un secondo sistema di riferimento X', Y', Z' inerziale e parallelo al primo, come quello raffigurato nell'immagine 2.3.

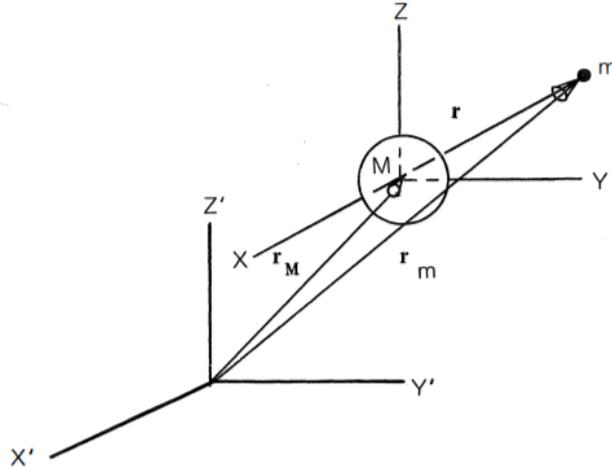


Figura 2.3: Moto relativo tra due corpi - Credits: R. R. Bate et al in *Fundamentals of Astrodynamics* (2nd edition - 2020, Dover Publications) [1]

Siano M e m le masse dei due corpi e si centri l'origine del secondo sistema di riferimento con il corpo di massa M . In questo caso la posizione dei due corpi è descritta dai vettori \mathbf{r}_M e \mathbf{r}_m . Si noti che per la 2.4 si ha che $\mathbf{r} = \mathbf{r}_m - \mathbf{r}_M$. Applicando la legge di Newton nel sistema di riferimento inerziale X', Y', Z' si ottengono

$$m\ddot{\mathbf{r}}_m = -\frac{GMm}{r^2} \frac{\mathbf{r}}{r} \quad (2.19)$$

$$M\ddot{\mathbf{r}}_M = -\frac{GMm}{r^2} \frac{\mathbf{r}}{r} \quad (2.20)$$

che possono essere riscritte come

$$\ddot{\mathbf{r}}_m = -\frac{GM}{r^3} \mathbf{r} \quad (2.21)$$

$$\ddot{\mathbf{r}}_M = -\frac{Gm}{r^3} \mathbf{r} \quad (2.22)$$

Sottraendo la 2.22 alla 2.21, si ottiene

$$\ddot{\mathbf{r}} = -\frac{G(M+m)}{r^3}\mathbf{r} \quad (2.23)$$

che non è altro che l'equazione vettoriale differenziale del moto relativo per il problema dei 2-corpi. Considerando che in questo studio verrà analizzato il moto di un satellite artificiale, la sua massa m sarà molto minore di quella del corpo centrale M (la Terra). Per questo motivo si può assumere che

$$G(M+m) \simeq GM \quad (2.24)$$

Si procede, quindi, ad introdurre un parametro μ , chiamato parametro gravitazionale

$$\mu \equiv GM \quad (2.25)$$

L'equazione 2.23 diventa, quindi

$$\ddot{\mathbf{r}} + \frac{\mu}{r^3}\mathbf{r} = 0 \quad (2.26)$$

La 2.26 descrive il moto del corpo m rispetto al corpo principale M ed è valida solo nel caso delle tre assunzioni semplificative effettuate nel paragrafo precedente e nel caso di $m \ll M$.

2.3.1 Le costanti del moto

Prima di procedere con la risoluzione dell'equazione del moto, in modo da ricavare la traiettoria del satellite, è necessario effettuare alcune considerazioni sulla natura delle orbite. Si noti, infatti, come il campo gravitazionale sia un campo conservativo: ciò significa che un corpo che si muove sotto la sola influenza di un campo gravitazionale non acquisisce né perde energia meccanica, ma è soggetto ad un cambio di forma dell'energia, che varia tra cinetica e potenziale. Inoltre, per variare il momento angolare di un corpo in moto attorno ad un centro di rotazione è necessaria una componente di forza tangenziale, ma dato che la forza gravitazionale è sempre diretta radialmente verso il centro di rotazione (dove è collocata la massa del corpo più grande M), il momento angolare non varia, in assenza di altri contributi.

Conservazione dell'energia meccanica

In un sistema in cui valgano le precedenti considerazioni, l'energia meccanica si conserva. Si può, dunque, ricavare una costante E , chiamata energia meccanica specifica, posseduta dal satellite. Tale costante racchiude il contributo dell'energia

cinetica per unità di massa e quello dell'energia potenziale per unità di massa e viene così definita

$$E = \frac{v^2}{2} - \frac{\mu}{r} \quad (2.27)$$

L'energia meccanica specifica rimane costante lungo l'orbita.

Conservazione del momento angolare

In analogia al paragrafo precedente, è possibile ricavare un vettore \mathbf{h} , chiamato momento angolare specifico e definito come segue

$$\mathbf{h} = \mathbf{r} \times \mathbf{v} \quad (2.28)$$

Il momento angolare specifico è definito come prodotto vettoriale tra \mathbf{r} e \mathbf{v} , perciò è sempre perpendicolare al piano contenente \mathbf{r} e \mathbf{v} . Inoltre, è anch'esso una costante del moto, ossia il suo valore non cambia lungo l'orbita. Ciò significa che \mathbf{r} e \mathbf{v} devono giacere sempre in uno stesso piano fissato nello spazio, chiamato piano orbitale.

2.3.2 L'equazione della traiettoria

L'equazione 2.21 ottenuta in precedenza descrive il moto di una piccola massa in orbita attorno ad un corpo centrale più grande. La sua soluzione completa non è semplice da ottenere, ma è possibile ricavare facilmente una soluzione parziale che contenga i dati relativi alla dimensione ed alla forma dell'orbita. Infatti, moltiplicando l'equazione del moto nel problema dei 2-corpi (2.26) per il momento angolare specifico \mathbf{h} (2.28), si ottiene

$$\ddot{\mathbf{r}} \times \mathbf{h} = \frac{\mu}{r^3} (\mathbf{h} \times \mathbf{r}) \quad (2.29)$$

Procedendo ad integrare l'equazione così ottenuta ed effettuando alcuni aggiustamenti, è possibile risolverla, definendo il raggio della traiettoria r al netto di una costante d'integrazione B

$$r = \frac{h^2/\mu}{1 + (B/\mu) \cos \nu} \quad (2.30)$$

Il termine ν rappresenta l'angolo di anomalia vera, ossia l'angolo compreso tra la costante d'integrazione vettoriale \mathbf{B} ed il raggio vettore \mathbf{r} . La 2.30 descrive l'equazione della traiettoria espressa in coordinate polari. Per riuscire a determinare la tipologia di curva descritta, è necessario confrontarla con l'equazione generica di una conica scritta in coordinate polari, con l'origine collocata in uno dei fuochi e ν che individua l'angolo compreso tra \mathbf{r} ed il punto sulla conica più vicino al fuoco

$$r = \frac{p}{1 + e \cos \nu} \quad (2.31)$$

Il termine p che compare al numeratore è una costante geometrica della conica, chiamata *semi-latus rectum*. Esso rappresenta la distanza tra il punto P di una conica ed il suo fuoco, quando $\nu = \frac{\pi}{2}$. Si noti come nel caso di $\nu = 0$ il raggio della conica sia minimo, determinando un punto chiamato *periapside*; al contrario, nel caso in cui $\nu = \pi$, il raggio della conica è massimo e localizza un punto chiamato *apoapside*. Tali punti mantengono le stesse caratteristiche geometriche nel caso di qualsiasi corpo centrale, ma potrebbero essere chiamati con nomi diversi in base ad esso: per esempio, nel caso della Terra, ci si riferirà ai due punti con i nomi perigeo ed apogeo, mentre nel caso del Sole si chiameranno perielio ed afelio. Infine, per un corpo celeste generico, si useranno i nomi periastro ed apoastro. Il termine e , invece, è un'altra costante, chiamata *eccentricità*, e determina la tipologia della conica. Le sue caratteristiche verranno approfondite dettagliatamente nel corso del paragrafo 2.3.3.

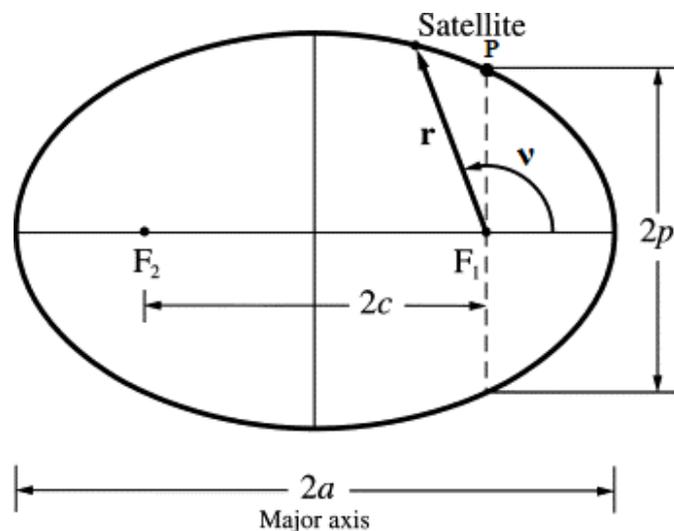


Figura 2.4: Geometria dell'ellisse - Credits: C. A. Kluever in *Spaceflight Mechanics* (2003 - Edited by the author of the thesis in 2023)

2.3.3 Elementi orbitali

Per definire la forma di un'orbita sono necessari soltanto due parametri: il semiasse maggiore a e l'eccentricità e . Per definire la posizione di un corpo lungo quell'orbita, serve introdurre l'anomalia vera ν a partire dal pericentro. Infine, per definire l'orientamento nello spazio è necessario introdurre tre angoli di Eulero ³. Gli

³Gli angoli di Eulero descrivono l'orientamento di un corpo rigido nello spazio attraverso una serie di rotazioni a partire da un sistema di riferimento fisso xyz centrato nell'origine.

elementi orbitali kepleriani sono l'insieme che raccoglie questi 6 parametri necessari per determinare in maniera univoca un'orbita, dato un sistema a 2 corpi:

- Semiasse maggiore a ;
- Eccentricità e ;
- Anomalia vera ν ;
- Inclinazione i ;
- Longitudine (o ascensione retta) del nodo ascendente Ω ;
- Argomento del pericentro ω ;

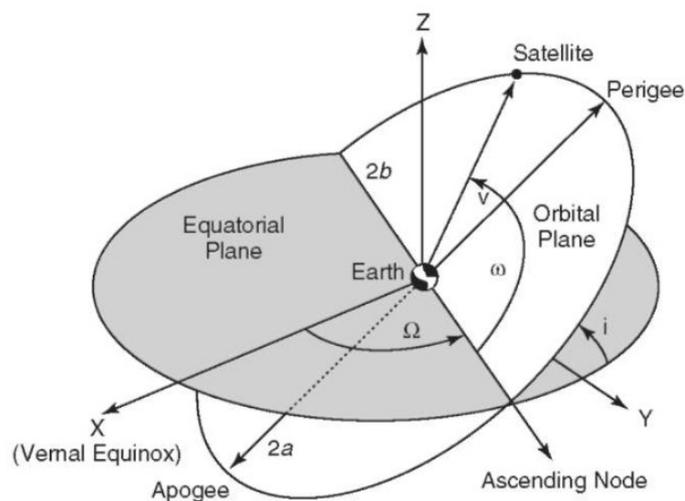


Figura 2.5: Parametri orbitali kepleriani - Credits: M. Mesarch in *GDC Orbit Primer* (NASA - 2018)

Si procede ad approfondire le caratteristiche geometriche di ciascun parametro.

Semiasse maggiore a

Il semiasse maggiore è la distanza che separa il periastro (o l'apoastro) dal centro dell'orbita; è un parametro che permette di individuarne sia le dimensioni che l'energia ed è strettamente correlato al periodo orbitale T . Può essere posto in relazione all'energia meccanica specifica attraverso l'equazione

$$E = \frac{v^2}{2} - \frac{\mu}{r} = -\frac{\mu}{2a} \quad (2.32)$$

Nel caso di orbita circolare il semiasse maggiore coincide con il raggio; Per orbite ellittiche assume un valore positivo, mentre per orbite paraboliche tende ad un valore infinito, che comporta energia orbitale nulla. Infine, nel caso di un'iperbole, assume un valore negativo, con energia orbitale positiva.

Eccentricità e

L'eccentricità di un'orbita è un parametro che misura quanto l'orbita sia deviata rispetto ad un cerchio (orbita circolare) e, per questo motivo, è indicativa della sua forma. Sotto le ipotesi standard precedentemente citate, infatti, l'eccentricità è definita per ciascuna tipologia di orbita e vale:

- $e = 0$ per orbite circolari;
- $0 < e < 1$ per orbite ellittiche;
- $e = 1$ per traiettorie paraboliche;
- $e > 1$ per orbite iperboliche.

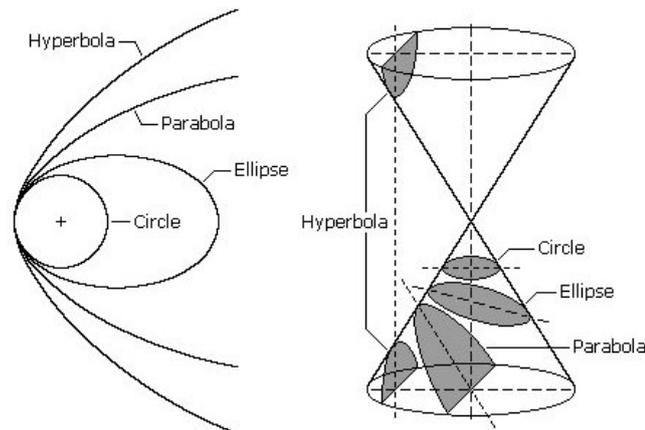


Figura 2.6: Sezioni di conica - Credits: R. Maini in *Trajectory Analysis of UPESSAT - A CubeSat Project* (2014)

Anomalia vera ν

L'anomalia vera identifica l'angolo compreso tra la linea degli apsi ⁴, in corrispondenza del pericentro dell'orbita, e la posizione del corpo orbitante, misurato sul piano orbitale. È l'unico dei sei parametri orbitali kepleriani a dipendere dal tempo, poiché, con il procedere del corpo lungo l'orbita, varia tra 0° e 360° .

⁴La linea degli apsi è quella che congiunge l'apocentro ed il pericentro dell'orbita

Inclinazione i

L'inclinazione di un'orbita è un parametro che identifica l'angolo tra il piano di riferimento ed il piano orbitale del satellite, espresso in gradi. Come piano di riferimento si considera l'equatore del corpo principale, oppure il piano dell'eclittica.

- Se $i = 0^\circ$, significa che il satellite orbita attorno al pianeta in corrispondenza del suo equatore, nello stesso verso di rotazione del pianeta;
- Se $i = 90^\circ$, significa che il satellite percorre un'orbita polare, passando sopra il polo nord ed il polo sud del pianeta;
- Se $i = 180^\circ$, significa che il satellite percorre un'orbita equatoriale, come per $i = 0^\circ$, ma in questo caso retrograda.

Longitudine del nodo ascendente Ω

La longitudine del nodo ascendente è un parametro che identifica l'angolo, rispetto all'astro di riferimento, compreso tra l'asse x del sistema di riferimento ed il nodo ascendente del corpo. Il nodo ascendente è uno dei due punti identificati dall'intersezione tra il piano dell'orbita ed un piano di riferimento (solitamente il piano equatoriale del corpo centrale); tali punti rappresentano il passaggio, nel senso di percorrenza dell'orbita, dall'emisfero meridionale a quello settentrionale del corpo centrale (nodo ascendente) e viceversa (nodo discendente). Nel caso di un corpo orbitante attorno al Sole, la longitudine del nodo ascendente identifica l'angolo compreso tra il punto d'Ariete (o punto Vernale o equinozio di Primavera) ed il nodo ascendente del corpo, misurato lungo l'eclittica, nello stesso senso di percorrenza del corpo orbitante.

Argomento del pericentro ω

L'argomento del pericentro (o argomento del periapside) è un parametro orbitale che identifica l'angolo compreso tra il vettore che punta al periapside, chiamato vettore eccentricità, ed il vettore che punta al nodo ascendente, detto vettore asse nodale. L'angolo viene misurato sul piano orbitale e nella direzione del moto.

Per un'orbita generica, quindi, il semiasse maggiore e l'eccentricità ne definiscono la forma, mentre l'inclinazione e la longitudine del nodo ascendente identificano il piano orbitale, l'argomento del pericentro specifica l'orientazione dell'orbita nel piano ed, infine, l'anomalia vera determina la posizione del corpo orbitante in funzione del tempo.

2.4 Il problema dei 3 corpi circolare ristretto

Un'altra formulazione del problema degli n -corpi è quella per $n = 3$, che permette di studiare il moto di un massa m soggetta all'attrazione di due corpi principali, m_1 e m_2 . Una sua formulazione semplificata, che consente di ottenere delle equazioni risolvibili numericamente, viene chiamata problema dei 3 corpi circolare ristretto (CR3BP - *Circular Restricted 3-Body Problem*) e si basa sulle seguenti assunzioni:

- Il corpo orbitante è molto meno massivo rispetto ai due corpi principali: $m \ll m_1, m_2$;
- I due corpi principali compiono un'orbita circolare attorno al baricentro del sistema binario.

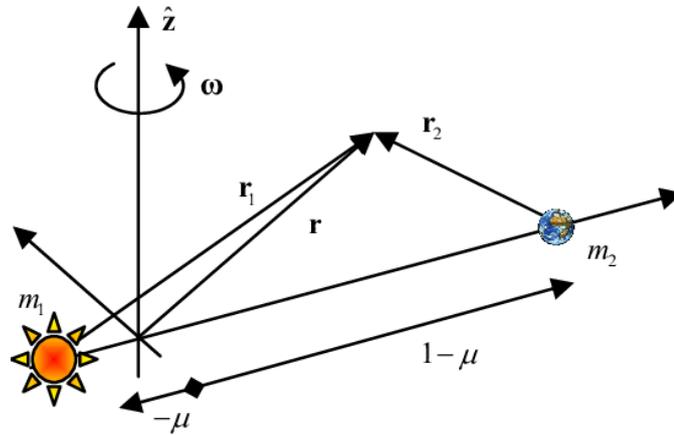


Figura 2.7: Problema dei 3 corpi circolare ristretto - Credits: M. Ceriotti in *Hybrid solar sail and SEP propulsion for novel Earth observation missions* (2010)

Si consideri un sistema di riferimento centrato nel baricentro e ruotante con esso (figura 2.7): nell'equazione del moto del corpo orbitante compaiono termini legati all'accelerazione centripeta ed alle accelerazioni apparenti, come quella derivante dalla forza di Coriolis. Si introducano, inoltre, le seguenti grandezze:

$$M = m_1 + m_2 \quad (2.33)$$

$$\mu = \frac{m_2}{M} \quad (2.34)$$

$$\tau = 2\pi\sqrt{\frac{R^3}{GM}} \quad (2.35)$$

$$\omega = \frac{2\pi}{\tau} = \sqrt{\frac{GM}{R^3}} \quad (2.36)$$

Dalle quali si ricavano

$$m_2 = \mu M \quad (2.37)$$

$$m_1 = (1 - \mu)M \quad (2.38)$$

Definendo R la distanza che separa i corpi m_1 e m_2 , si ottiene

$$(1 - \mu)Mx = \mu M(R - x) \quad (2.39)$$

con

$$x = \mu R \quad (2.40)$$

Pertanto, le posizioni dei tre corpi rispetto al centro di massa del sistema, possono essere scritte come di seguito

$$m_1 = \begin{bmatrix} -\mu R \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \quad (2.41)$$

$$m_2 = \begin{bmatrix} (1 - \mu)R \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \quad (2.42)$$

$$m = \begin{bmatrix} X \\ Y \\ Z \end{bmatrix} \quad (2.43)$$

La posizione del corpo orbitante m rispetto ai due corpi principali è, rispettivamente

$$\mathbf{r}_1 = \begin{bmatrix} X + \mu R \\ Y \\ Z \end{bmatrix} \quad (2.44)$$

$$\mathbf{r}_2 = \begin{bmatrix} X - (1 - \mu)R \\ Y \\ Z \end{bmatrix} \quad (2.45)$$

Permettendo di ricavare l'equazione del moto, così definita

$$\ddot{\mathbf{r}} + \boldsymbol{\omega} \wedge (\boldsymbol{\omega} \wedge \mathbf{r}) + 2\boldsymbol{\omega} \wedge \dot{\mathbf{r}} = \frac{1}{m}(\mathbf{F}_1 + \mathbf{F}_2) \quad (2.46)$$

con

$$\mathbf{F}_1 = -G \frac{(1 - \mu)Mm}{r_1^3} \mathbf{r}_1 \quad (2.47)$$

$$\mathbf{F}_2 = -G \frac{\mu Mm}{r_2^3} \mathbf{r}_2 \quad (2.48)$$

Nell'equazione 2.46 il primo termine rappresenta l'accelerazione relativa, il secondo l'accelerazione centripeta ed il terzo quella di Coriolis. Considerando che

$$\boldsymbol{\omega} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \omega \end{bmatrix} \quad (2.49)$$

e svolgendo tutti i prodotti vettoriali presenti nell'equazione del moto 2.46, la si può riscrivere nel seguente modo, in funzione delle tre coordinate x, y, z

$$\ddot{X} - \omega^2 X - 2\omega\dot{Y} = -GM(1 - \mu)(X + \mu R)\frac{1}{r_1^3} - GM\mu[X - (1 - \mu)R]\frac{1}{r_2^3} \quad (2.50)$$

$$\ddot{Y} - \omega^2 Y + 2\omega\dot{X} = -GM(1 - \mu)Y\frac{1}{r_1^3} - GM\mu Y\frac{1}{r_2^3} \quad (2.51)$$

$$\ddot{Z} = -GM(1 - \mu)\frac{1}{r_1^3} - GM\mu Z\frac{1}{r_2^3} \quad (2.52)$$

Le equazioni appena ricavate possono essere adimensionalizzate, mediante l'introduzione delle seguenti grandezze

$$\boldsymbol{\rho} = \frac{\mathbf{r}}{R} \quad (2.53)$$

$$\xi = \frac{X}{R} \quad (2.54)$$

$$\eta = \frac{Y}{R} \quad (2.55)$$

$$\zeta = \frac{Z}{R} \quad (2.56)$$

$$\tau = T\omega \quad (2.57)$$

$$\frac{d}{dt} = \omega \frac{d}{d\tau} \quad (2.58)$$

Ottenendo, così

$$\ddot{\xi} - \xi - 2\dot{\eta} = -(1 - \mu)\frac{\xi + \mu}{\rho_1^3} - \mu\frac{\xi - (1 - \mu)}{\rho_2^3} \quad (2.59)$$

$$\ddot{\eta} - \eta + 2\dot{\xi} = -(1 - \mu)\frac{\eta}{\rho_1^3} - \mu\frac{\eta}{\rho_2^3} \quad (2.60)$$

$$\ddot{\zeta} = -(1 - \mu)\frac{\zeta}{\rho_1^3} - \mu\frac{\zeta}{\rho_2^3} \quad (2.61)$$

Le equazioni del moto ottenute sono differenziali del secondo ordine non lineari (data la presenza di un termine cubico) ed accoppiate ⁵. Quest'ultima caratteristica fa sì che l'unico modo per risolvere il sistema sia tramite integrazione numerica.

⁵In un sistema di equazioni accoppiate le diverse equazioni sono connesse tra loro per i termini che le compongono e, perciò, non possono essere risolte indipendentemente l'una dall'altra

2.5 Funzione del potenziale gravitazionale

Si prosegue l'analisi introducendo il concetto di potenziale gravitazionale, ossia una grandezza fisica che descrive l'energia potenziale associata al campo gravitazionale in un dato punto nello spazio. Esso, infatti, rappresenta la quantità di lavoro necessaria per spostare una massa di prova da un punto di riferimento (solitamente posto ad una distanza infinitamente lontana dalla sorgente gravitazionale) al punto analizzato, mantenendo costante la sua energia cinetica. Si definisce

$$U = -\frac{Gm}{r} \quad (2.62)$$

dove m è la massa del corpo che genera il campo gravitazionale e r è la distanza tra il corpo ed il punto considerato. Il segno negativo indica che l'energia potenziale è sempre negativa e decrescente all'aumentare della distanza dal corpo. Di fatto, il potenziale gravitazionale fornisce una misura dell'energia potenziale gravitazionale per unità di massa in un punto dello spazio. Nel caso di due corpi principali che generano due differenti campi gravitazionali, il potenziale assume la forma

$$U = \frac{Gm_1}{r_1} + \frac{Gm_2}{r_2} + \frac{1}{2}\omega^2(X^2 + Y^2) = \frac{1-\mu}{\rho_1} + \frac{\mu}{\rho_2} + \frac{1}{2}(\xi^2 + \eta^2) \quad (2.63)$$

Valori elevati del potenziale comportano un grande lavoro necessario per spostare un corpo da un punto ad un altro; viceversa, valori di potenziale bassi determinano punti in cui è richiesto meno lavoro per compiere lo spostamento. Nel 1772 il matematico Joseph-Louis de Lagrange notò la presenza di cinque punti spaziali, nella trattazione del problema dei tre corpi, in cui si verificava una condizione di equilibrio tra le forze gravitazionali dei due corpi principali e la forza centrifuga necessaria a mantenere in orbita il terzo corpo. Questi punti, chiamati *Lagrangiani*, possono essere calcolati proprio a partire dalla definizione del potenziale gravitazionale. Calcolando il gradiente del potenziale nelle tre direzioni adimensionalizzate ξ , η e ζ , si ricavano:

In direzione ξ

$$\frac{dU}{d\xi} = \xi - \frac{1-\mu}{\rho_1^2} \frac{d\rho_1}{d\xi} - \frac{\mu}{\rho_2^2} \frac{d\rho_2}{d\xi} \quad (2.64)$$

Dato che

$$\rho_1^2 = (\xi + \mu)^2 + \eta^2 + \zeta^2 \quad (2.65)$$

$$\rho_2^2 = (\xi - (1 - \mu))^2 + \eta^2 + \zeta^2 \quad (2.66)$$

derivandole si ottiene

$$\frac{d\rho_1}{d\xi} = \frac{\xi + \mu}{\rho_1} \quad (2.67)$$

$$\frac{d\rho_2}{d\xi} = \frac{\xi - (1 - \mu)}{\rho_2} \quad (2.68)$$

permettendo di riscrivere la 2.64 nel seguente modo

$$\frac{dU}{d\xi} = \xi - (1 - \mu) \frac{\xi + \mu}{\rho_1^3} - \mu \frac{\xi - (1 - \mu)}{\rho_2^3} \quad (2.69)$$

In direzione η

$$\frac{dU}{d\eta} = \eta - \frac{1 - \mu}{\rho_1^2} \frac{d\rho_1}{d\eta} - \frac{\mu}{\rho_2^2} \frac{d\rho_2}{d\eta} \quad (2.70)$$

Dato che

$$\frac{d\rho_1}{d\eta} = \frac{\eta}{\rho_1} \quad (2.71)$$

$$\frac{d\rho_2}{d\eta} = \frac{\eta}{\rho_2} \quad (2.72)$$

si può di riscrivere la 2.70 nel seguente modo

$$\frac{dU}{d\eta} = \eta - \frac{1 - \mu}{\rho_1^2} \frac{\eta}{\rho_1^3} - \mu \frac{\eta}{\rho_2^3} \quad (2.73)$$

In direzione ζ

$$\frac{dU}{d\zeta} = -(1 - \mu) \frac{\zeta}{\rho_1^3} - \mu \frac{\zeta}{\rho_2^3} \quad (2.74)$$

Confrontando le tre equazioni, appena ottenute, del potenziale gravitazionale nelle direzioni ξ , η e ζ , si può notare una corrispondenza con le tre equazioni differenziali del moto ricavate in precedenza (2.59 e seguenti). Combinandole, si ricava il sistema

$$\ddot{\xi} - 2\dot{\eta} = \frac{dU}{d\xi} \quad (2.75)$$

$$\ddot{\eta} + 2\dot{\xi} = \frac{dU}{d\eta} \quad (2.76)$$

$$\ddot{\xi} = \frac{dU}{d\xi} \quad (2.77)$$

2.6 Punti Lagrangiani

I punti di equilibrio calcolati da Lagrange, non sono altro che i punti stazionari del potenziale gravitazionale, nello specifico nei casi in cui assume valore minimo. Per trovarli, si calcola la derivata della funzione potenziale e la si pone pari a zero. Infatti, nei casi in cui il gradiente del potenziale è nullo, lo è anche la forza risultante applicata sul corpo orbitante. Perciò

$$\frac{dU}{d\xi} = \xi - (1 - \mu) \frac{\xi + \mu}{\rho_1^3} - \mu \frac{\xi - (1 - \mu)}{\rho_2^3} = 0 \quad (2.78)$$

$$\frac{dU}{d\eta} = \eta - \frac{1 - \mu}{\rho_1^2} \frac{\eta}{\rho_1^3} - \mu \frac{\eta}{\rho_2^3} = 0 \quad (2.79)$$

$$\frac{dU}{d\zeta} = -(1 - \mu) \frac{\zeta}{\rho_1^3} - \mu \frac{\zeta}{\rho_2^3} = 0 \quad (2.80)$$

La 2.80, in particolare, è valida soltanto nel caso in cui $\zeta = 0$: ciò significa che i punti lagrangiani si trovano nel piano $\xi\eta$. I cinque punti sono classificati in *collineari* e *equilaterali* e godono di diverse proprietà, come di seguito approfondito. Nel grafico 2.8, il punto giallo centrale indica la posizione del Sole, quello blu la Terra ed il simbolo \times la posizione del baricentro del sistema. Le curve colorate rappresentano, invece, l'andamento del potenziale gravitazionale ed i simboli $+$ identificano i 5 punti lagrangiani.

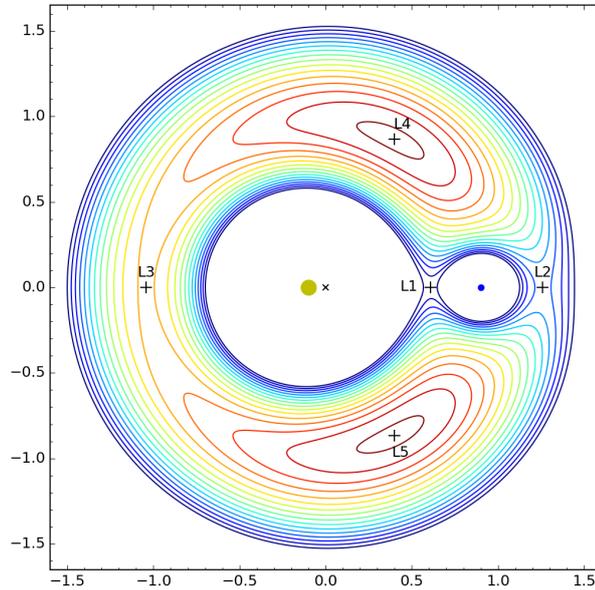


Figura 2.8: I punti lagrangiani nel sistema Sole-Terra - Credits: Dr. Drang in *Lagrange points redux* (2016)

2.6.1 Punti collineari

I punti L1, L2 e L3 sono chiamati collineari, poiché giacciono tutti sulla linea che unisce i due corpi più massivi del sistema, coincidente con l'asse ξ . Sono localizzati in corrispondenza dei punti in cui il gradiente del potenziale in direzione η si annulla (equazione 2.79), ossia quando $\eta = 0$.

Punto L1

Il punto lagrangiano L1 è localizzato tra il corpo m_1 e m_2 e la sua posizione si trova all'interno dell'intervallo

$$-\mu < \xi < (1 - \mu) \quad (2.81)$$

Risolvendo l'equazione 2.64 nel caso

$$\rho_1 + \rho_2 = 1 \quad (2.82)$$

e nell'ipotesi in cui $m_1 \gg m_2$ (cosicché il centro di massa risulti essere il corpo m_1), infatti, L1 si trova ad una distanza da m_2

$$\rho_2 \simeq \sqrt[3]{\frac{\mu}{3}} \quad (2.83)$$

Punto L2

Il punto lagrangiano L2 è localizzato oltre il corpo m_2 , dal lato opposto rispetto a m_1 , e la sua posizione si trova per

$$\xi > 1 - \mu \quad (2.84)$$

Risolvendo l'equazione 2.64 nel caso

$$\rho_1 - \rho_2 = 1 \quad (2.85)$$

e nell'ipotesi in cui $m_1 \gg m_2$, infatti, L2 si trova ad una distanza da m_2

$$\rho_2 \simeq \sqrt[3]{\frac{\mu}{3}} \quad (2.86)$$

esattamente pari al punto L1, ma nel verso opposto rispetto al corpo m_2 .

Punto L3

Il punto lagrangiano L3 è localizzato oltre il corpo m_1 , dal lato opposto rispetto a m_2 , e la sua posizione si trova per

$$\xi < -\mu \quad (2.87)$$

Risolviendo l'equazione 2.64 nel caso

$$\rho_2 - \rho_1 = 1 \quad (2.88)$$

e nell'ipotesi in cui $m_1 \gg m_2$, infatti, L3 si trova ad una distanza dai due corpi principali

$$\rho_1 \simeq 1 \quad (2.89)$$

$$\rho_2 \simeq 2 \quad (2.90)$$

2.6.2 Punti equilaterali

I punti L4 e L5 sono chiamati equilaterali poiché localizzati al vertice di due triangoli equilateri ai cui altri vertici si trovano i due corpi più massivi. Sono localizzati in corrispondenza dei punti in cui il gradiente del potenziale in direzione η e quello in direzione ξ (equazione 2.78) si annullano, per

$$\rho_1 = \rho_2 = 1 \quad (2.91)$$

Punto L4

Il punto lagrangiano L4 è localizzato alla stessa distanza dai due corpi principali, nelle coordinate

$$\xi = \frac{1}{2} - \mu \quad (2.92)$$

$$\eta = \frac{\sqrt{3}}{2} \quad (2.93)$$

Punto L5

Il punto lagrangiano L5 è localizzato alla stessa distanza dai due corpi principali, nelle coordinate

$$\xi = \frac{1}{2} - \mu \quad (2.94)$$

$$\eta = -\frac{\sqrt{3}}{2} \quad (2.95)$$

I punti lagrangiani verranno trattati con maggior dettaglio nel capitolo 3, in particolare modo per quanto riguarda il punto L2 del sistema Terra-Sole, oggetto di studio in questa tesi e punto di partenza delle traiettorie analizzate nel capitolo 7. Nel caso di tale sistema, la trattazione appena conclusa può essere adattata sostituendo il Sole al corpo m_1 e la Terra al corpo m_2 .

2.7 Sfera d'influenza

La sfera d'influenza (SOI - *Sphere Of Influence*) è un concetto astrodinamico che definisce una regione di spazio di forma sferoidale obolata attorno ad un corpo celeste, all'interno della quale l'influenza gravitazionale preponderante sui corpi che vi orbitano è quella esercitata dal corpo stesso. La sfera d'influenza viene utilizzata per identificare le aree del Sistema Solare nelle quali i diversi pianeti hanno un'influenza maggiore di quella del Sole sugli oggetti circostanti, nonostante questo sia molto più massivo (ma distante). Nello studio delle traiettorie (paragrafo 2.8), il limite della sfera d'influenza rappresenta il punto di passaggio dalla regione nella quale lo spacecraft viene considerato in orbita attorno al pianeta (problema dei 2-corpi) a quella in cui viene considerato in orbita attorno al Sole. L'equazione che determina il raggio della sfera d'influenza è la seguente

$$r_{SOI} = R_p \left(\frac{m_p}{m_s} \right)^{\frac{2}{5}} \quad (2.96)$$

nella quale R_p rappresenta la distanza del pianeta dal Sole, m_p la massa del pianeta e m_s quella del Sole. Nel caso della Terra, noto che

$$m_p = m_{\oplus} = 5.974 \cdot 10^{24} \text{ kg} \quad (2.97)$$

$$m_s = m_{\odot} = 1.989 \cdot 10^{30} \text{ kg} \quad (2.98)$$

e che la distanza media della Terra dal Sole è pari a

$$R_p = R_{\oplus} = 149.6 \cdot 10^6 \text{ km} \quad (2.99)$$

si definisce il raggio della sfera d'influenza della Terra, pari a

$$r_{SOI,\oplus} = 9.25 \cdot 10^5 \text{ km} \quad (2.100)$$

Considerando, invece, la Terra come corpo principale e la Luna come secondario, è possibile determinare il raggio della sfera d'influenza della Luna. Noto che

$$m_{\zeta} = 7.348 \cdot 10^{22} \text{ kg} \quad (2.101)$$

$$R_{\zeta} = 3.844 \cdot 10^5 \text{ km} \quad (2.102)$$

si definisce il raggio della sfera d'influenza della Luna, pari a

$$r_{SOI,\zeta} = 6.61 \cdot 10^4 \text{ km} \quad (2.103)$$

Si noti che i valori calcolati non sono delle quantità esatte ma, semplicemente, una stima ragionevole della dimensione della regione entro la quale il campo gravitazionale del corpo minore predomina su quello del corpo principale.

2.8 Missioni interplanetarie

L'orbita di un corpo celeste è costante nel tempo, a meno di fenomeni perturbativi. Ciò significa che per effettuare dei cambi di orbita è necessario modificare l'energia del corpo, variandone la velocità. Qualsiasi variazione di velocità, per essere impartita, necessita dell'attivazione del sistema propulsivo, per durate ed intensità più o meno lunghe, a seconda dell'obiettivo della manovra. In questo paragrafo si intende introdurre brevemente il tema delle missioni interplanetarie, per poi focalizzarsi in maniera dettagliata sulla prima fase della missione, caratterizzata dall'evasione dalla sfera d'influenza del corpo secondario, ed oggetto delle analisi presentate nel capitolo 7. Si ipotizzi una traiettoria che porti dalla Terra a Marte: nelle vicinanze della Terra, l'influenza principale esercitata sullo spacecraft è quella del campo gravitazionale terrestre; viceversa, vicino a Marte agisce principalmente il campo gravitazionale marziano. Nel mezzo, nella fase che, in termini di tempo, occupa la maggior parte della missione, il satellite risente maggiormente dell'influenza del Sole. In generale, nella realtà dei fatti, lo spacecraft è influenzato simultaneamente da tutti e tre i corpi (ed anche dagli altri corpi celesti). Ai fini di un'analisi preliminare della missione, però, risulta più conveniente disaccoppiare questi effetti, considerando come se il satellite fosse influenzato da un solo corpo alla volta. Questa approssimazione si chiama metodo delle *Patched conics*, ossia delle *coniche raccordate*. La traiettoria dalla Terra a Marte, infatti, viene scomposta in tre diversi tratti:

- Fase planetocentrica (*near-Earth*): il satellite si trova in una traiettoria iperbolica geocentrica di escape dalla SOI della Terra;
- Fase eliocentrica: il satellite si trova in un'orbita ellittica eliocentrica;
- Fase planetocentrica (*near-Mars*): il satellite si trova in orbita marziana, in una traiettoria d'ingresso nella SOI di Marte.

Per garantire un'uniformità della traiettoria, i diversi tratti devono essere considerati in successione, senza discontinuità (*coniche raccordate*). Il criterio per stabilire quando avvenga il passaggio da una fase alla successiva si basa sul concetto di sfera d'influenza (par.2.7). Il metodo delle *Patched conics* può essere applicato a

qualunque missione interplanetaria come, per esempio, quella che porta dall'orbita terrestre verso un asteroide. Le analisi svolte nel capitolo 7 mirano, infatti, a comprendere ed ottimizzare la prima fase della missione, portando un satellite all'esterno della sfera d'influenza della Terra, attraverso una manovra di evasione (o escape). Una volta "sfuggito" all'attrazione della Terra, il satellite si trova in un'orbita eliocentrica e, a quel punto, si aprono infiniti scenari di missione che lo possono portare verso pianeti, asteroidi, comete o altri corpi celesti.

2.8.1 Manovra di escape

Per sfuggire all'attrazione gravitazionale di un pianeta, è necessario che il satellite esegua una manovra di fuga (o di escape o di evasione), che lo porti ad uscire dalla sua sfera d'influenza, arrivando ad una distanza da esso chiamata r_∞ . La traiettoria percorsa dev'essere iperbolica, poiché permette di arrivare al limite della SOI del pianeta con una velocità relativa $v_\infty > 0$. Tale valore si chiama *eccesso iperbolico di velocità* ed è importante sia maggiore di zero, poiché permette al satellite di cominciare il tratto eliocentrico della traiettoria con una certa velocità, invece di farlo fermare ai limiti della sfera d'influenza del pianeta. Per una traiettoria di fuga parabolica, infatti, lo spacecraft arriva a r_∞ con una velocità relativa $v_\infty = 0$ e rimane nella stessa orbita del pianeta, senza immettersi nel tratto eliocentrico. L'eccesso iperbolico di velocità è definito dalla formula

$$v_\infty = \sqrt{\frac{\mu_\odot}{R_1}} \left(\sqrt{\frac{2R_2}{R_1 + R_2} - 1} \right) \quad (2.104)$$

Solitamente, inoltre, il punto di partenza della manovra di escape si trova su un'orbita circolare, detta di *parcheggio*, attorno al corpo principale. Il raggio di tale orbita, r_p , coincide con il periastro dell'iperbole di escape e può essere determinato a partire dal momento angolare

$$h = \frac{\mu_\oplus \sqrt{e^2 - 1}}{v_\infty} \quad (2.105)$$

ricavando

$$r_p = \frac{h^2}{\mu_\oplus} \frac{1}{1 + e} \quad (2.106)$$

La sua eccentricità è data da

$$e = 1 + \frac{r_p v_\infty^2}{\mu_\oplus} \quad (2.107)$$

che, sostituita nella 2.105, permette di ricavare

$$h = r_p \sqrt{v_\infty^2 + \frac{2\mu_\oplus}{r_p}} \quad (2.108)$$

Dalla 2.106 e dalla 2.108 è possibile ottenere la velocità al periastro, con la formula

$$V_p = \frac{h}{r_p} = \sqrt{v_\infty^2 + \frac{2\mu_\oplus}{r_p}} \quad (2.109)$$

Nota, inoltre, la velocità dell'orbita di parcheggio circolare

$$V_c = \frac{\mu_\oplus}{r_p} \quad (2.110)$$

si ricava la variazione di velocità Δv che è necessario fornire al satellite per effettuare la manovra di escape

$$\Delta V = V_p - V_c = V_c \left(\sqrt{2 + \frac{v_\infty^2}{V_c^2}} - 1 \right) \quad (2.111)$$

Per una completa definizione della traiettoria di fuga, è necessario definire un'ulteriore parametro β , che identifica la posizione del periastro, ossia il punto in cui viene fornito il ΔV . β misura l'angolo compreso tra la linea degli apside dell'iperbole ed il vettore velocità eliocentrica del pianeta di partenza

$$\beta = \cos^{-1} \left(\frac{1}{e} \right) = \cos^{-1} \left(\frac{1}{1 + \frac{r_p v_\infty^2}{\mu_\oplus}} \right) \quad (2.112)$$

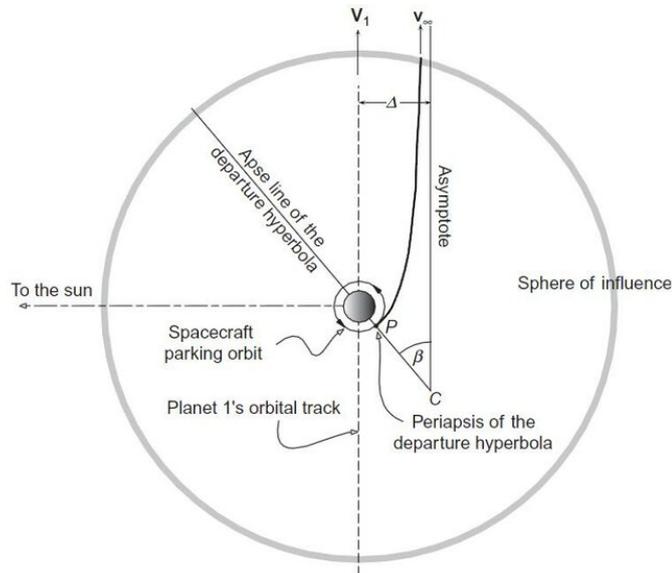


Figura 2.9: Geometria della traiettoria di evasione - Credits: H. Curtis in *Orbital Mechanics for Engineering Students* (2005, Elsevier) [4]

La modalità con la quale la manovra di evasione deve essere eseguita dipende dalla posizione del corpo celeste di arrivo, che può trovarsi in un'orbita attorno al Sole più interna oppure più esterna rispetto a quella del pianeta di partenza. Se l'orbita di arrivo è più interna (per esempio nel caso dalla Terra a Venere), la traiettoria di evasione deve essere tale da permettere una partenza "alle spalle" del pianeta, in modo da evadere con una ΔV in direzione opposta a v_{\oplus} e rendere la velocità eliocentrica del satellite minore rispetto alla sua velocità circolare di partenza. Viceversa, per orbite d'arrivo più esterne (per esempio dalla Terra a Marte), la partenza dovrà avvenire in una posizione anteriore rispetto al pianeta di partenza, in modo da ottenere una ΔV nella stessa direzione di v_{\oplus} e raggiungere una velocità eliocentrica maggiore rispetto a quella circolare di partenza.

Energia caratteristica C_3

In astrodinamica si utilizza un parametro chiamato energia caratteristica (C_3) per misurare l'eccesso di energia specifica rispetto a quella necessaria per sfuggire all'attrazione gravitazionale di un corpo celeste. Il suo valore è calcolato come quadrato dell'eccesso iperbolico di velocità e, per questo, la sua unità di misura è il m^2/s^2 ed il suo significato è quello di una velocità al quadrato, ma può essere inteso anche come energia per unità di massa.

$$C_3 = v_{\infty}^2 \quad (2.113)$$

In riferimento al problema dei 2 corpi, l'energia caratteristica può essere messa in relazione all'energia orbitale specifica nel seguente modo

$$\epsilon = \frac{1}{2}v^2 - \frac{\mu}{r} = \text{cost.} = \frac{1}{2}C_3 \quad (2.114)$$

Dall'equazione 2.114 si nota come, allontanandosi dal corpo centrale, l'energia cinetica del satellite diminuisca, ma aumenti quella potenziale, mantenendo il valore totale costante; di conseguenza, rimane costante anche il valore di C_3 , pari al doppio dell'energia orbitale specifica. Inoltre, un satellite che non dovesse possedere sufficiente energia per evadere, continuerebbe a percorrere un'orbita chiusa attorno al corpo di riferimento, con

$$C_3 = -\frac{\mu}{r} < 0 \quad (2.115)$$

Infine, un satellite che dovesse evadere con una traiettoria parabolica, possiederebbe l'esatta quantità di energia necessaria per sfuggire al campo gravitazionale, con

$$C_3 = 0 \quad (2.116)$$

L'energia caratteristica è un parametro che nel corso del capitolo 7 verrà analizzato con particolare attenzione, poiché di grande interesse per la successiva fase interplanetaria della missione.

Capitolo 3

I punti lagrangiani

Nel corso del paragrafo 2.6 si è introdotto il concetto di punti lagrangiani, in quanto punti stazionari di minimo del potenziale gravitazionale. In questo capitolo si approfondiranno maggiormente le loro caratteristiche geometriche e fisiche, per meglio comprendere i punti di forza ed i benefici in termini di stabilità nel collocare nei loro pressi satelliti, sonde ed altre strutture spaziali. Nel dettaglio, verrà studiato con maggior interesse il punto $L2$ del sistema Sole-Terra, meglio noto come $SEL2$. In corrispondenza dei punti lagrangiani due corpi molto massivi consentono ad un terzo corpo di massa molto inferiore di mantenere una posizione stabile relativamente ad essi, per effetto dell'interazione dei rispettivi campi gravitazionali. In questo modo un satellite (o un piccolo corpo celeste) posizionato in uno dei punti di Lagrange, si manterrà a distanza costante dai due corpi principali. L'immagine 3.1 mostra un diagramma del potenziale gravitazionale associato al sistema Sole-Terra. I punti $L1$, $L2$ e $L3$, noti come punti collineari (par.2.6.1), definiscono delle zone di equilibrio dinamicamente instabile: infatti, in caso di una perturbazione esterna sufficientemente intensa da spostarlo, il satellite continuerà ad allontanarsi dal punto in cui stazionava. Per ovviare a questa condizione, sono, dunque, necessarie delle manovre di *station keeping*, che permettano allo spacecraft di mantenersi stabile in corrispondenza del punto lagrangiano di riferimento. In queste aree le forze gravitazionali generano regioni in cui prevalgono effetti attrattivi (freccie rosse) oppure repulsivi (freccie blu). $L4$ e $L5$, invece, sono noti come punti equilaterali (par.2.6.2) e definiscono delle zone di equilibrio dinamicamente stabile, favorito dall'effetto Coriolis ¹. Nell'ambito del problema dei 2 corpi, per qualsiasi combinazione di corpi principali, sono definiti 5 punti lagrangiani: nel caso di

¹L'effetto Coriolis è determinato da una forza apparente, nota come forza di Coriolis, alla quale risulta soggetto un corpo osservato da un sistema di riferimento in rotazione rispetto ad uno inerziale

questa tesi, le analisi sono state eseguite considerando il Sole come m_1 e la Terra come m_2 , ma futuri studi potrebbero prendere in considerazione simulazioni volte ad individuare le analogie con il punto L_2 del sistema Terra-Luna (EML_2).

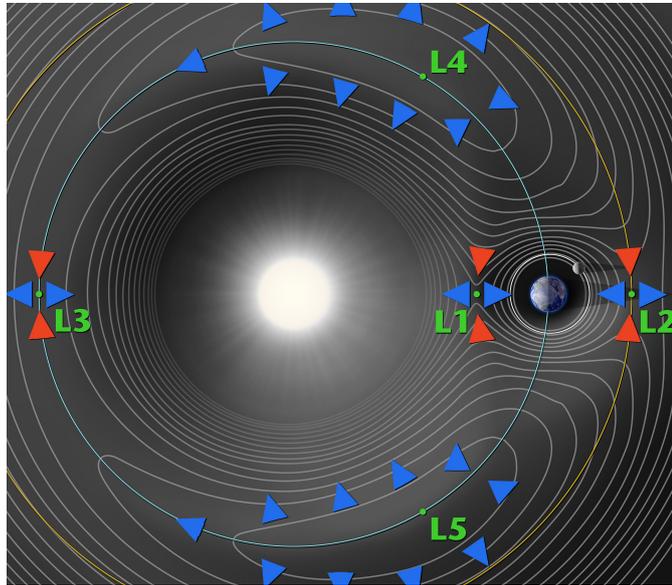


Figura 3.1: Punti lagrangiani del sistema Sole-Terra, nel campo gravitazionale - Credits: NASA / WMAP Science Team (2006)

3.1 I Punti lagrangiani nel sistema Sole-Terra

Ciascun punto presenta delle caratteristiche peculiari ed è oggetto d'interesse per diverse tipologie di studi e missioni: SEL_1 , ad esempio, permette di svolgere osservazioni astronomiche del Sole ottimali, senza l'interferenza della Luna e della Terra, poiché localizzato in un punto mai eclissato da quest'ultime. In corrispondenza di SEL_1 si trovano, infatti, il telescopio *SOHO* (*Solar and Heliospheric Observatory*) ed il satellite *ACE* (*Advanced Composition Explorer*), per lo studio del Sole, della sua corona, del campo magnetico, del vento solare ed altre caratteristiche. SEL_2 , invece, è un eccellente punto di osservazione dello spazio, poiché soggetto sempre alla stessa illuminazione solare, che facilita la gestione termica dei sottosistemi ed il puntamento verso lo spazio profondo. Inoltre, in corrispondenza di SEL_2 si trova la posizione ideale per collocare una futura stazione spaziale che funga da base di partenza per missioni interplanetarie, con evasioni dalla SOI della Terra a basso costo. Tali aspetti verranno analizzati con maggior dettaglio nel paragrafo 3.3 e saranno fondamentali per le analisi svolte nel capitolo 7. Attorno a SEL_2 sono già state lanciate le missioni *Planck Surveyor*, *WMAP* (*Wilkinson Microwave*

Anisotropy Probe), la sonda *Gaia* ed i telescopi *Herschel Space Observatory* e *James Webb*, per lo studio dello spazio profondo, della radiazione cosmica, dell'Universo primordiale, della sua evoluzione e della formazione delle galassie. Una missione spaziale indirizzata verso *SEL3* presenta alcuni potenziali vantaggi, anche se ad oggi non sono ancora state realizzate delle missioni reali. Tra gli aspetti positivi rientra la possibilità di un'osservazione continuativa del Sole, in analogia a *SEL1*, con analisi approfondite dell'eliosfera. Inoltre, gode di una posizione ottimale per l'identificazione degli asteroidi in arrivo e per l'osservazione dello spazio profondo, senza l'interferenza dell'atmosfera terrestre. Di contro, si trova in una posizione tale per cui non può essere visto dalla Terra, con conseguenti difficoltà di comunicazione e trasmissione dati. *SEL4* si trova in una posizione metastabile² ad 1 UA dal Sole, 60° più avanti rispetto alla Terra. Non è stata ancora realizzata nessuna missione nelle sue vicinanze, ma una futura potrebbe fungere da osservatorio solare, in modo da sorvegliare ed analizzare la radiazione e migliorarne i modelli predittivi. Inoltre, godrebbe di una vista costante sia del Sole che della Terra, garantendo una copertura globale di quest'ultima, o potrebbe sfruttare *SEL4* come punto di partenza per missioni di esplorazione spaziale, in particolare per quanto riguarda quelle dirette verso asteroidi NEA con distanza MOID ridotta o con traiettorie che li portano ad effettuare passaggi piuttosto ravvicinati alla Terra. Infine, ad oggi, non sono state realizzate missioni spaziali neanche per quanto riguarda *SEL5*, mentre i vantaggi derivanti da una possibile lancio futuro sono analoghi a quelli presentati per *SEL4*, dato che si tratta in entrambi i casi di punti equilaterali, con quest'ultimo che si trova, però, in una posizione arretrata di 60° rispetto alla Terra.

3.2 Orbite attorno ai punti lagrangiani

Le orbite attorno ad uno dei punti lagrangiani possono essere di diverso tipo, a seconda se giacciono sul piano dei corpi primari o se siano tridimensionali; tra le seconde, inoltre, vi è un'ulteriore distinzione in base alla loro periodicità, o meno.

3.2.1 Orbita Lyapunov

Un'orbita di Lyapunov è una tipologia di traiettoria definita sulla base del concetto di *stabilità di Lyapunov*: un punto di equilibrio è stabile se ogni orbita del sistema con origine sufficientemente vicina al punto di equilibrio rimane nelle sue vicinanze, nel tempo. Un'orbita di Lyapunov è nota anche come orbita caotica o orbita instabile ed è, infatti, caratterizzata da una forte sensibilità alle condizioni iniziali:

²La metastabilità è una condizione di equilibrio cui corrisponde un minimo locale di energia potenziale del sistema, pur esistendo un altro punto, di minimo assoluto, con energia minore

ciò significa che piccole variazioni dell'equilibrio, nelle condizioni iniziali, crescono col tempo e possono determinare risultati completamente diversi nel lungo periodo. Per questo motivo tali orbite sono molto difficili da prevedere in modo accurato. Le orbite di Lyapunov intorno ad un punto lagrangiano sono caratterizzate da traiettorie curve che giacciono interamente nello stesso piano dei due corpi principali e, pertanto, sono dette orbite planari.

3.2.2 Orbita Lissajous

Un'orbita Lissajous è tridimensionale (perciò, a differenza dell'orbita Lyapunov, non è percorsa su un piano) e costituisce una soluzione al problema dei 3 corpi circolare ristretto. La sua forma è determinata dall'interazione tra l'attrazione gravitazionale esercitata dai due corpi principali del sistema e la forza centrifuga applicata sul satellite. Un corpo posto su un'orbita *Lissajous* non orbita fisicamente attorno ad un punto di Lagrange, poiché, per sua natura, si tratta di un punto di equilibrio privo di massa, bensì percorre una traiettoria nelle sue vicinanze. Per ciascun punto esistono numerose orbite *Lissajous*, che si differenziano per la distanza media da esso e per il rapporto tra la frequenza della componente del moto sul piano e quella extra-planare.

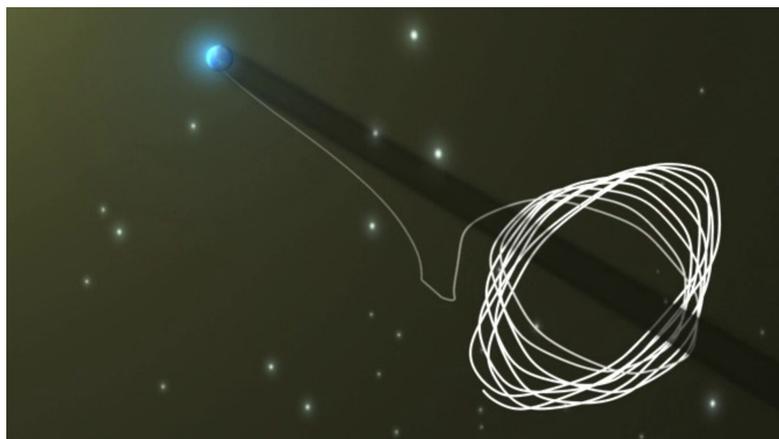


Figura 3.2: Traiettoria Lissajous della missione *Gaia* - Credits: ESA – C. Carreau / ATG medialab (2013)

3.2.3 Orbita Halo

In analogia ad una Lissajous, un'orbita Halo è un'orbita tridimensionale che costituisce una soluzione al *CR3BP*, pertanto include delle componenti perpendicolari al piano. A differenza della prima, però, è di tipo periodico. Un'orbita Halo, infatti, è un caso particolare di Lissajous, nel quale la frequenza della componente del

moto sul piano è pari a quella del moto extra-planare. Per ogni punto di Lagrange esistono numerose coppie di orbite Halo, simmetriche rispetto al piano dell'orbita su cui si trovano i due corpi principali.

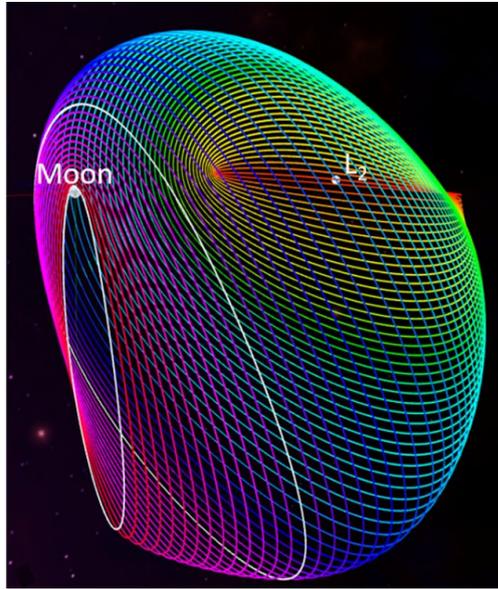


Figura 3.3: Orbite Halo attorno a EML2 - Credits: E. Zimovan in *Near rectilinear halo orbits and their application in cis-lunar space* (2017)

3.3 Il punto lagrangiano SEL2

Tra i cinque punti lagrangiani, *SEL2* è quello di maggior interesse, per la sua condizione di punto di partenza ideale per missioni interplanetarie. Si colloca sull'asse immaginario che collega il Sole alla Terra, circa 1.5 milioni di km “dietro” quest'ultima, quasi 4 volte la distanza tra la Luna e la Terra. Un satellite collocato nell'esatto punto *SEL2* sente l'attrazione solare e terrestre provenire dalla stessa direzione, perciò i loro contributi si sommano. Considerato che il corpo si trova più lontano dal Sole di quanto lo sia la Terra, la sua velocità orbitale eliocentrica dovrebbe essere minore, per la logica che deriva dall'equazione 2.32. Nonostante ciò, l'attrazione gravitazionale combinata dei due corpi fa sì che la velocità del satellite aumenti, permettendogli di compiere una rivoluzione attorno al Sole con lo stesso periodo orbitale della Terra e rimanendo allineato con essi. Un punto con queste particolari caratteristiche garantisce una comunicazione rapida e costante con le *ground station* ed è ideale per l'osservazione astronomica dell'Universo, poiché in grado di osservarlo senza l'interferenza della Luna, del Sole e della Terra; inoltre, il fatto che il satellite non debba orbitare attorno alla Terra, permette di evitare

passaggi ripetuti nelle sue zone d'ombra preservando il satellite da un susseguirsi di riscaldamenti e raffreddamenti, che potrebbero distorcere le osservazioni. Infine, proprio grazie alla sua condizione di equilibrio tra forza gravitazionale e centrifuga, richiede dei costi minimi in termini di consumi per il mantenimento dell'orbita, nonostante gli aggiustamenti necessari allo *station keeping*.

3.4 Missioni spaziali verso SEL2

Nel corso degli anni, dato il suo enorme interesse scientifico e tecnologico, sono state numerosissime le missioni spaziali verso *SEL2*. In questo paragrafo si intende fornire una visione d'insieme di quali siano stati i satelliti e le sonde principali lanciate verso questo particolare punto dello spazio, evidenziandone gli obiettivi scientifici e tecnologici, sia per quanto riguarda missioni passate e presenti, sia relativamente a futuri lanci in programma.

3.4.1 Missioni passate

Wilkinson Microwave Anisotropy Probe (2001-2010)

La sonda *Wilkinson Microwave Anisotropy Probe (WMAP)* della NASA è stata la prima ad orbitare attorno a *SEL2*. Operativa tra il 2001 ed il 2010, è stata lanciata con l'obiettivo di misurare la radiazione cosmica di fondo, rilevandone le differenze di temperatura. I dati raccolti sono stati utilizzati per calcolare la geometria e l'evoluzione dell'Universo, permettendo di stimarne con una maggior precisione l'età (13.73 ± 0.12 miliardi di anni). Inoltre, hanno reso possibile calcolare la quantità di materia ordinaria ed oscura che contiene, creando un modello della sua composizione fisica. Una volta conclusa la fase operativa, nell'ottobre del 2010 la sonda è stata dismessa su un'orbita eliocentrica, in modo da non ostacolare missioni future verso *SEL2*.

Herschel Space Observatory (2009-2013)

Il satellite *Herschel Space Observatory* è stato un telescopio dell'ESA lanciato nel 2009 e posizionato su un'orbita Lissajous attorno al punto *SEL2*, al fine di raccogliere informazioni sull'Universo con rilevamenti nello spettro dell'infrarosso. Tra gli obiettivi scientifici, c'erano lo studio della formazione delle galassie primordiali, delle stelle e della loro evoluzione, l'analisi e l'osservazione della composizione chimica dell'atmosfera e della superficie di comete, pianeti e satelliti. È stata dismessa nel 2013, in seguito all'esaurimento della riserva di elio che consentiva il raffreddamento della strumentazione scientifica a bordo, mantenendola ad una temperatura di circa $3K$. Per evitare che costituisse un pericolo per future missioni

spaziali, è stato spostato in un'orbita eliocentrica leggermente più esterna rispetto a quella della Terra.

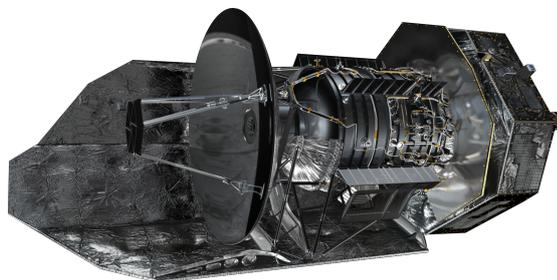


Figura 3.4: Rappresentazione di Herschel - Credits: NASA (2023)

Planck Surveyor (2009-2013)

Planck Surveyor è stata una missione dell'*ESA Horizon 2000 Scientific Programme*: un programma dell'Agenzia Spaziale Europea con l'obiettivo di accrescere la conoscenza scientifica e favorire l'innovazione industriale, affermando l'Europa nel settore della scienza spaziale. Il telescopio è stato lanciato nel 2009 verso *SEL2*, con l'obiettivo di acquisire un'immagine dell'anisotropia³ della radiazione cosmica di fondo. Dismessa nel 2013 in un'orbita eliocentrica, la missione è stata fondamentale per testare e verificare le teorie sulla formazione dell'Universo e la sua struttura.

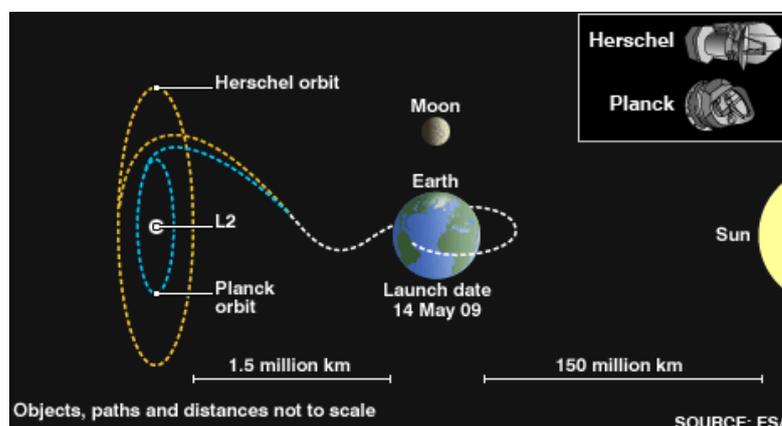


Figura 3.5: Traiettorie delle missioni *Herschel* e *Planck* - Credits: ESA (2009)

³L'anisotropia è la proprietà per la quale le caratteristiche di un dato fenomeno dipendono dalla direzione lungo la quale si considerano.

Chang'e 2 (2010-2014)

La sonda *Chang'e 2* è stata una missione dell'agenzia spaziale cinese (CNSA) lanciata nel 2010 con l'obiettivo di effettuare una ricognizione della superficie lunare, eseguire un test di navigazione e controllo, dirigendosi verso *SEL2* e mantenendo la posizione in orbita, ed infine raggiungere l'asteroide NEA 4179 *Toutatis*. Il periodo di tempo trascorso nei pressi del punto lagrangiano *SEL2* ha coperto circa un anno ed ha permesso alla CNSA di essere la terza agenzia spaziale a raggiungerlo.

3.4.2 Missioni presenti

Gaia (2013)

Gaia è una missione dell'ESA, lanciata nel 2013 con l'obiettivo di realizzare una mappatura tridimensionale della *Via Lattea*, analizzandone la composizione, la formazione e l'evoluzione. È stata posta in un'orbita Lissajous attorno a *SEL2*, data la sua posizione favorevole per l'osservazione costante dell'Universo senza l'interferenza di Sole, Terra o Luna. La missione sta raccogliendo quantità notevoli di dati, analizzando più di un miliardo di stelle e 14000 asteroidi, fornendo informazioni sulla loro posizione, la luminosità, la temperatura superficiale, il raggio e la velocità.

Spektr-RG (2019)

Spektr-RG è il frutto di una collaborazione tra il Russian Space Research Institute ed il German Aerospace Center. Si tratta di un osservatorio spaziale a raggi X e gamma, posto in un'orbita Halo attorno a *SEL2*, con l'obiettivo di analizzare la materia oscura ed effettuare analisi di ammassi di galassie e di nuclei galattici attivi. I primi sono strutture costituite da centinaia di galassie mantenute insieme dalla gravità, mentre i secondi sono regioni compatte al centro di una galassia, caratterizzate dal fatto che una frazione significativa dell'energia emessa ha origine non stellare.

James Webb Space Telescope (2021)

Lanciato il 25 dicembre 2021 a bordo di un razzo *Ariane 5*, il telescopio spaziale *James Webb (JWST)* è stato sviluppato in collaborazione tra la NASA, l'ESA e l'Agenzia Spaziale Canadese (CSA). È stato immesso in un'orbita Halo attorno a *SEL2*, ad una distanza dalla Terra tale da trovarsi all'esterno della sua atmosfera, evitando che la presenza di elementi come vapore acqueo ed anidride carbonica interferisca sulle rilevazioni. L'obiettivo della missione è quello di studiare i pianeti più esterni del Sistema Solare, le galassie lontane ed i pianeti extrasolari, senza essere influenzato dalla luce del Sole né dalla rotazione attorno alla Terra, garantendo una visuale continua e stabile delle regioni più remote dell'Universo. Le rilevazioni

sono effettuate nel campo dell'infrarosso, in modo da poter misurare più facilmente le basse frequenze della luce emessa dai corpi nello spazio profondo, senza che siano oscurate da gas e polveri nello spettro del visibile. In questo modo è possibile studiare le formazioni stellari, i dischi protoplanetari ed i nuclei galattici attivi.



Figura 3.6: Rappresentazione del JWST - Credits: NASA (2023)

Euclid (2023)

Euclid è un telescopio spaziale dell'ESA lanciato il 01 luglio 2023 ed impiegato nello studio dell'espansione dell'Universo, della materia oscura e dell'energia oscura. È equipaggiato con un telescopio a tre specchi, che opera nello spettro del visibile e dell'infrarosso, ed è posto in un'orbita Halo attorno al punto *SEL2*. Il suo principale obiettivo è lo studio dell'espansione dell'Universo negli ultimi 10 miliardi di anni, coprendo una porzione di spazio pari ad un terzo del cielo, in modo da creare un'immagine tridimensionale della distribuzione della materia (ordinaria ed oscura).

3.4.3 Missioni future

PLATO

Il *PLANetary Transits and Oscillations of stars (PLATO)* è un telescopio spaziale in fase di progettazione da parte dell'ESA, con lo scopo di studiare i pianeti extrasolari tramite la tecnica del transito ⁴. Il lancio è previsto per il 2026 e l'obiettivo principale sarà determinare il raggio e, quindi, la massa e la densità di vari esopianeti.

⁴Il transito è un fenomeno astronomico che consiste nell'occultazione, parziale o totale, di un corpo celeste, a causa di un altro corpo che si interpone tra il primo e l'osservatore.

Nancy Grace Roman Space Telescope

Il *Nancy Grace Roman Space Telescope*, noto anche come *Wide Field InfraRed Survey Telescope (WFIRST)*, è un telescopio spaziale della NASA, con data di lancio prevista per il 2027. L'obiettivo della missione sarà lo studio dell'energia oscura, dell'accelerazione cosmica e degli esopianeti ⁵, con l'intento di sostituire il telescopio *Hubble*, una volta dismesso.

LiteBIRD

Il satellite *Lite satellite for the studies of B-mode polarization and Inflation from cosmic background Radiation Detection (LiteBIRD)* è un osservatorio spaziale, attualmente in fase di progettazione, dell'agenzia spaziale giapponese JAXA. Il lancio, previsto per il 2028, avrà l'obiettivo di rilevare l'impronta dell'onda gravitazionale primordiale, tramite analisi sulla polarizzazione, e di realizzare una mappatura del cielo attraverso le microonde.

ARIEL

Il telescopio *Atmospheric Remote-Sensing Infrared Exoplanet Large-survey (ARIEL)* dell'ESA è un satellite attualmente in fase di sviluppo, con data di lancio prevista per il 2029, insieme alla sonda *Comet Interceptor*. L'obiettivo della missione sarà quello di studiare 1000 esopianeti in orbita attorno a stelle lontane, analizzandone le caratteristiche fisiche e le composizioni chimiche. I dati raccolti verranno utilizzati per cercare di comprendere la formazione e l'evoluzione dei sistemi planetari ed in che modo tali processi siano influenzati dalla stella madre.

Comet Interceptor

La sonda *Comet Interceptor* è una missione congiunta dell'ESA e della JAXA, con lancio previsto per il 2029, insieme al telescopio *ARIEL*. Si tratta di una missione di tipo "fast", ossia presenta un tempo di implementazione, dalla selezione al lancio, inferiore agli 8 anni, oltre che una massa (1000 kg) ed un budget contenuti (€ 150 milioni, escluso il lancio). A differenza delle precedenti missioni per lo studio delle comete, *Giotto* e *Rosetta*, l'obiettivo non sarà più una cometa periodica, ma una *Dynamically New Comet (DNC)*, ossia un corpo celeste con una traiettoria tale da avere una probabilità assolutamente ridotta di aver già attraversato la parte interna del Sistema Solare (probabilmente la cometa proverrà dalla nube di Oort). In questo modo, il corpo in questione non avrà sperimentato ancora alcuna

⁵Un esopianeta (o pianeta extrasolare) è un pianeta non appartenente al Sistema Solare, ma orbitante attorno ad un'altra stella.

alterazione dovuta ad un passaggio ravvicinato del Sole. La cometa target non è stata ancora individuata e, solitamente, questa tipologia di corpi viene rilevata con poco anticipo rispetto all'avvicinamento alla Terra: per questo motivo, la sonda sarà posizionata nel punto *SEL2* per un periodo di circa 3 anni, in attesa di poter completare il suo viaggio, non appena verrà individuato l'obiettivo.

ATHENA

L'osservatorio spaziale *Advanced Telescope for High Energy Astrophysics (ATHENA)* è un satellite in fase di sviluppo dell'Agenzia Spaziale Europea, con lancio previsto nel 2035. L'obiettivo scientifico della missione è lo studio delle componenti più calde ed energetiche dell'Universo, attraverso analisi ai raggi X. Le rilevazioni saranno incentrate sui gas caldi presenti nelle strutture a grande scala (nell'ordine dei miliardi di anni luce) e sui buchi neri supermassivi.

LUVOIR

Il satellite *Large Ultraviolet Optical Infrared Surveyor (LUVOIR)* è un telescopio a multi-lunghezza d'onda della NASA, attualmente in fase di progettazione, con lancio proposto per il 2039. Gli obiettivi della missione sono la caratterizzazione di esopianeti, inclusi quelli potenzialmente abitabili, oltre alla raccolta di dati per la comprensione della formazione e dell'evoluzione delle galassie.

3.5 Missioni interplanetarie da SEL2

La sua posizione nello spazio, fa sì che *SEL2* sia ampiamente riconosciuto come punto di grande interesse per la partenza di missioni interplanetarie. Una traiettoria interplanetaria con partenza da esso, infatti, presenterebbe numerosi vantaggi:

- Necessità di una ridotta quantità di energia per lasciare l'orbita terrestre, poiché si trova ad una distanza dalla Terra già piuttosto elevata (1.5 milioni di km). L'equazione 2.109, infatti, evidenzia come a raggi elevati corrispondano velocità di fuga più contenute e ciò significa che sarà richiesta una quantità di energia minore per raggiungere la velocità necessaria;
- Accesso facilitato ai pianeti esterni del Sistema Solare o agli asteroidi *Near Earth (NEA)*, con trasferimenti più efficienti rispetto ad una partenza da orbite basse e con la possibilità di effettuare uno *staging* della missione in corrispondenza del punto lagrangiano [14]. In questo modo, infatti, si avrebbe il vantaggio di dover spendere un ΔV molto minore rispetto a quello necessario per effettuare la stessa missione, ma con partenza da orbita LEO.

- Perturbazioni dovute all'attrazione della Terra e della Luna molto più contenute rispetto ad un lancio con partenza da un'orbita più bassa, poiché la distanza da esse è molto maggiore. Ciò implica minori correzioni di traiettoria durante la fase interplanetaria.
- Possibilità di sfruttare in maniera favorevole la perturbazione del Sole, in termini di attrazione gravitazionale, per ridurre la durata della fase propulsa della manovra e lasciare che il satellite venga trasportato a motori spenti. In questo modo, infatti, si lascerebbe al Sole il compito di spingere lo spacecraft, dopo un *single initial burn* dei propulsori.

Una delle destinazioni ideali di una manovra interplanetaria con partenza dal lagrangiano *SEL2* sono gli asteroidi, in particolare quelli *Near Earth*. Per questo motivo, infatti, una possibile prosecuzione del lavoro di analisi presentato nel corso del capitolo 7 potrebbe essere proprio l'identificazione e l'ottimizzazione di traiettorie che portino dai confini della SOI terrestre ad asteroidi target, fornendo come input alla manovra le condizioni ottimizzate ottenute dalla fase di escape.

3.5.1 Gli asteroidi

Un asteroide è un piccolo corpo celeste roccioso, di dimensioni comprese tra i pochi metri e le centinaia di chilometri. Gli asteroidi si sono formati circa 4.5 miliardi di anni fa e si ritiene siano residui del disco protoplanetario ⁶ che ha dato origine al Sistema Solare, che non sono stati incorporati nella formazione di alcun pianeta. Hanno, generalmente, una forma irregolare e sono composti da metalli e materiali rocciosi, con una composizione simile a quella caratteristica dei pianeti rocciosi. La maggior parte degli asteroidi è localizzata nella porzione di spazio compresa tra Marte e Giove, in una regione chiamata *Fascia (cintura) degli asteroidi*. L'asteroide più grande conosciuto è anche il primo ad essere stato scoperto: *Cerere*. Con un diametro di quasi 1000 km ed una composizione carbonacea, è stato successivamente riclassificato come pianeta nano. A seguire, con un diametro di circa 500 km ci sono *2 Pallas* e *4 Vesta*: il primo è meno massiccio ed ha una superficie costituita da silicati, mentre Vesta è il secondo corpo più massivo della fascia degli asteroidi ed il più luminoso visibile dalla Terra. Gli asteroidi di diametro superiore ai 250 km sono in totale 15, mentre il numero aumenta esponenzialmente al ridursi del diametro: i corpi con un diametro di 10 km sono circa 100 volte di più di quelli con diametro di 100 km. Al 2023, risultano scoperti più di 1,1 milioni di asteroidi.

⁶Un disco protoplanetario è una struttura discoidale costituita da gas e polveri in orbita attorno ad una stella già formata o in formazione (protostella).

Traiettorie e parametri orbitali

Le orbite degli asteroidi attorno al Sole sono ellittiche, vengono percorse nello stesso verso dei pianeti e sono spesso caratterizzate da elevate eccentricità. A causa dell'attrazione gravitazionale di un pianeta, può capitare che la traiettoria di un asteroide venga perturbata, portando ad una deviazione dall'orbita iniziale. In questa situazione l'asteroide perturbato può entrare in orbita attorno al pianeta, diventando un suo satellite, o andando ad impattare sulla sua superficie, oppure può andare a collidere con altri asteroidi, frantumandosi in frammenti più piccoli. Questi frammenti possono essere proiettati all'esterno del Sistema Solare oppure causare altre collisioni, sino a ridursi in "polvere cosmica".

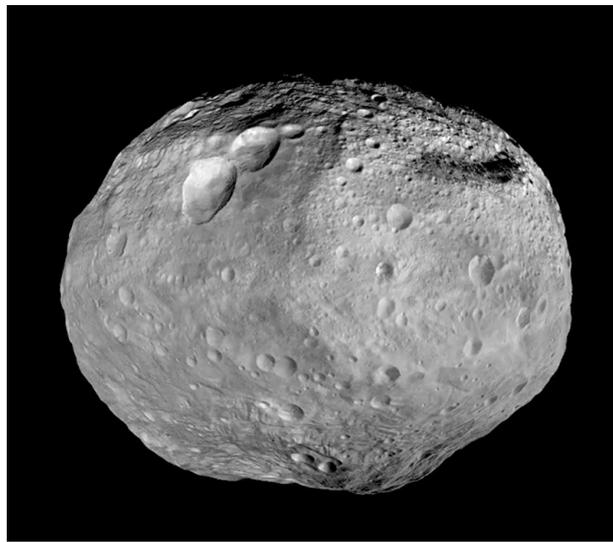


Figura 3.7: L'asteroide 4 Vesta - Credits: NASA/JPL-Caltech/UCLA/MPS/DLR/IDA (Dawn mission, 2012)

I Near Earth Object

Un corpo celeste con un'orbita che lo porti a transitare a meno di 1.3 AU dall'orbita terrestre, viene classificato come *NEO*; nel caso in cui la distanza minima tra la sua orbita e quella terrestre (*Minimum Orbit Intersection Distance - MOID*) sia inferiore alle 0.05 AU, ossia circa 7.48 milioni di Km, ed il suo diametro sia di almeno 140 m (500 ft), allora viene classificato come *Potentially Hazardous Object (PHO)*. Con tale nominativo si intende identificare oggetti destinati ad effettuare passaggi ravvicinati potenzialmente minacciosi per la sicurezza della Terra. La maggior parte di questi oggetti sono asteroidi, identificati con la sigla *NEA (Near Earth Asteroid)* e classificati in quattro gruppi: Atira, Aten, Apollo e Amor, a seconda dei rispettivi parametri orbitali, tra cui afelio, perielio e semiasse maggiore.

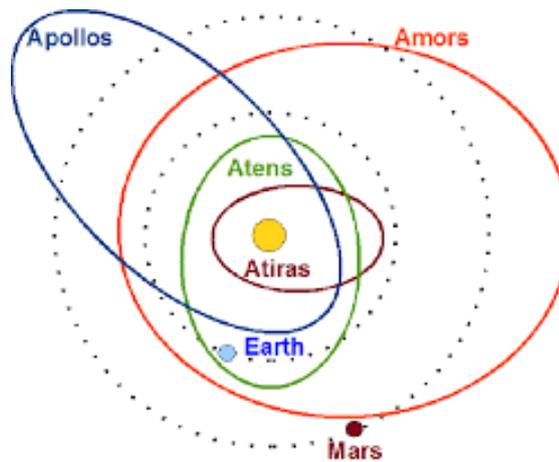


Figura 3.8: Rappresentazione delle orbite dei quattro gruppi di NEA - Credits: S. Greenstreet (The University Of British Columbia, 2011)

3.5.2 Perché studiare gli asteroidi

L'enorme interesse scientifico per gli asteroidi è dovuto principalmente al loro status di residui del processo di formazione del Sistema Solare: com'è noto, infatti, sono costituiti da frammenti che non sono stati inglobati dai pianeti in fase di formazione, compresa la Terra. Proprio perché rimasti in una condizione invariata per miliardi di anni, una conoscenza dettagliata della loro composizione e della struttura può fornire informazioni importanti sulla miscela chimica e sulle condizioni a partire dalle quali la Terra si è formata 4.6 miliardi di anni fa. Gli asteroidi, inoltre, sono la fonte della maggior parte dei meteoriti che entrano nell'atmosfera terrestre, impattando sulla sua superficie: secondo le stime, ogni giorno sono 25 milioni i meteoroidi, i micrometeoroidi e gli altri detriti spaziali ad entrare in atmosfera, per un totale di circa 15000 tonnellate di materiale ogni anno. Il loro studio non è importante soltanto per la sicurezza della Terra, ma anche per la comprensione di come gli elementi alla base della vita siano stati portati sul nostro pianeta ⁷. Infine, gli asteroidi sono una fonte di minerali, materiali volatili ed altre sostanze che possono essere sfruttati tanto per l'esplorazione e la colonizzazione del Sistema Solare, quanto per applicazioni sulla Terra. In sintesi, il loro studio è motivato da:

- Interesse scientifico e tecnologico: possono fornire risposte sulle origini del Sistema Solare e sulla nascita della vita sulla Terra e rappresentano una potenziale destinazione per missioni spaziali robotiche e umane;

⁷Si ritiene che le molecole a base di carbonio ed i materiali volatili alla base dello sviluppo della vita siano stati portati sulla Terra attraverso ripetuti impatti di asteroidi e comete.

- Interessi di difesa planetaria: l'impatto di grossi meteoriti potrebbe minacciare la vita sulla Terra;
- Interessi economici: contengono minerali, terre rare ed altre risorse che potrebbero essere estratte ed utilizzate nello spazio o sulla Terra;

Interesse scientifico e tecnologico

Gli elementi che costituiscono gli asteroidi rappresentano il materiale alla base dello sviluppo della vita sulla Terra e della costituzione degli altri pianeti; questi corpi sono, infatti, di notevole interesse scientifico, perché possono aiutare a trovare una spiegazione a come i pianeti si siano aggregati e trasformati, sino a raggiungere una configurazione così diversa da quella degli asteroidi da cui si erano originati. Tale studio potrebbe, inoltre, aiutare a trovare delle risposte a come, invece, sulla Terra si sia formata la vita, a partire da materia organica non vivente. Ad esempio, alcune osservazioni suggeriscono che l'asteroide *10 Hygiea* possa essere ricco di acqua sotto forma di minerali idrati. Lo studio delle sue condizioni, molto simili a quelle che si ritiene che ci fossero nei primi anni del Sistema Solare, potrebbe aiutare a capire come da esse si sia evoluta la vita.

Interessi di difesa planetaria

A causa della natura ellittica delle loro traiettorie, spesso gli asteroidi incrociano l'orbita terrestre; in alcuni casi effettuano dei passaggi ravvicinati, ad alcune decine di migliaia di chilometri dalla Terra. Occasionalmente, può capitare che finiscano per impattare sulla sua superficie, causando disastri a livello locale o globale (caso estremo). La probabilità che un asteroide colpisca la Terra è molto remota, ma le conseguenze di un impatto potrebbero essere devastanti: per questo motivo, si rende necessario lo studio di questi corpi, al fine di comprenderne la composizione, la struttura, le dimensioni e la traiettoria. Nonostante un impatto di un asteroide non sia un evento così probabile, accade quotidianamente che milioni di meteoroidi, micrometeoroidi ed altri detriti entrino nell'atmosfera terrestre, bruciando e disintegrandosi prima di impattare sulla sua superficie. Pertanto, son di estremo interesse lo studio di questi corpi e la caratterizzazione dei loro parametri orbitali, in modo da identificare con largo anticipo impatti potenzialmente pericolosi. Negli ultimi anni, inoltre, sono state proposte diverse soluzioni per modificare l'orbita di un asteroide, nel caso in cui il rischio di collisione fosse elevato, tuttavia la scarsa conoscenza della struttura interna di questi corpi rende complicato prevedere nel dettaglio come potrebbero reagire ad un impatto o ad un'esplosione nelle loro vicinanze. Per questo motivo, il 24 novembre del 2021 è stata lanciata la sonda *DART (Double Asteroid Redirection Test)*, al fine di studiare gli effetti cinetici dell'impatto di un veicolo spaziale contro un asteroide. La missione, conclusasi con

successo, aveva l'obiettivo di verificare se l'impatto della sonda fosse in grado di alterare, deflettendola, l'orbita dell'asteroide *65803 I Dimorphos* attorno al corpo principale *65803 Didymos*. L'impatto è stato documentato dal CubeSat dell'ASI, *LiciaCube*. Questa prima, storica, dimostrazione tecnologica potrebbe essere alla base di un sistema di protezione planetaria per prevenire eventuali future collisioni con asteroidi.

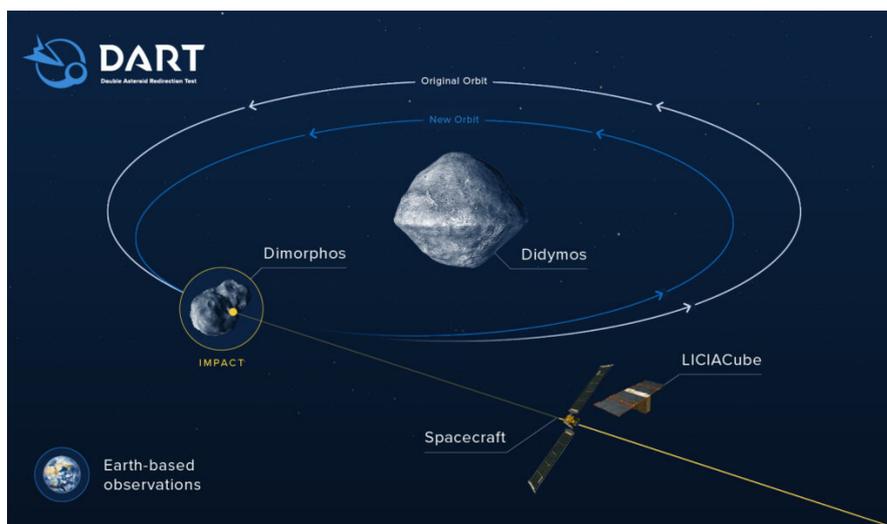


Figura 3.9: Infografica sulla missione *DART*: si notano il sistema binario di asteroidi, la sonda ed il CubeSat *LiciaCube*- Credits: NASA/Johns Hopkins APL

Interessi economici

Il consumo di materiali chiave sulla Terra è in costante aumento e si stima che entro 50/60 anni le scorte di elementi quali fosforo, antimonio, zinco, stagno, argento, piombo, indio, oro e rame si esauriranno. Una possibile soluzione al problema potrebbe essere quella di estrarre questi materiali sugli asteroidi o su altri pianeti minori. Gli asteroidi, infatti, sono ricchi di ferro, nichel, titanio, acqua, ossigeno ed altri elementi che potrebbero essere utilizzati anche come supporto vitale per future missioni spaziali in situ. L'acqua sarebbe essenziale per la colonizzazione umana di altri corpi celesti, l'idrogeno e l'ossigeno potrebbero essere usati come propellente per i razzi, mentre i metalli e gli altri minerali potrebbero venire impiegati per la costruzione di avamposti ed altre strutture di supporto alla colonizzazione. Gli asteroidi NEA sono, allo stesso tempo, quelli potenzialmente più pericolosi ma anche i principali candidati per missioni di estrazione: infatti, potrebbero essere sfruttati più facilmente per ottenere materie prime da utilizzare per lo sviluppo di strutture spaziali o per ottenere carburante per i razzi e le sonde per l'esplorazione e la colonizzazione del Sistema Solare. Il principale ostacolo al *mining* è la sostenibilità

economica: questo genere di missioni è ad elevatissimo rischio e richiede tempistiche di sviluppo molto lunghe ed ingenti investimenti. A tal proposito, si noti come la missione *OSIRIS-REx*, progettata per raccogliere un quantitativo di materiale compreso tra i 400 *g* e 1 *kg*, sia costata oltre 1 miliardo di dollari e che la sola fase di missione vera e propria, dal lancio al rientro della capsula, abbia una durata prevista di circa 7 anni. Affinché il *mining* diventi una soluzione percorribile, si rende, quindi, prima necessario sviluppare tecnologie per il volo spaziale più accessibili e convenienti. Nondimeno, l'interesse economico di questo genere di missioni è notevole e diverse compagnie aerospaziali private hanno già ricevuto finanziamenti per la progettazione e lo sviluppo di satelliti e sonde in grado di identificare asteroidi potenzialmente redditizi.

Capitolo 4

Ottimizzazione di traiettorie

L'ottimizzazione della traiettoria di uno spacecraft è un problema astrodinamico che consiste nella determinazione di una traiettoria che soddisfi specifiche condizioni iniziali e finali, portando a termine la missione e minimizzando (o massimizzando) alcuni parametri d'interesse. Generalmente, l'obiettivo più comune è la minimizzazione del propellente richiesto, che equivale a massimizzare la frazione della massa del satellite destinata ad altri utilizzi che non siano lo stoccaggio del propellente. Al contempo, è importante che durante il processo si prenda in considerazione un limite di tempo entro cui completare la missione, altrimenti il risultato dell'ottimizzazione sarebbe una traiettoria con una durata lunghissima, a fronte di consumi minimi. In sintesi, l'ottimizzazione dev'essere un compromesso tra durata e consumi. Ci sono altri casi di missioni, invece, nelle quali può essere importante minimizzare il tempo di manovra o altre ancora in cui la minimizzazione della durata della missione e quella del consumo di propellente sono pressoché sinonimi. In generale, il problema dell'ottimizzazione è piuttosto complesso, per diverse motivazioni:

1. Il sistema dinamico è non-lineare;
2. Le variabili considerate presentano molte discontinuità: per esempio, le manovre potrebbero essere di tipo impulsivo, ossia costituite da tante piccole accensioni (invece che da un'unica accensione continua del propulsore), determinando delle variazioni istantanee di velocità. Altre discontinuità potrebbero essere legate allo sfruttamento di *gravity assist* (manovre di *fly-by*) o al passaggio dalla sfera d'influenza di un corpo a quella di un altro;
3. Le condizioni iniziali o finali potrebbero non essere esplicite, per esempio nel caso di traiettorie interplanetarie, per le quali la posizione di partenza e di arrivo dipendono dal tempo di missione, che spesso è esso stesso una variabile dell'ottimizzazione;

4. Alcune delle forze in gioco potrebbero avere una dipendenza dal tempo, come nel caso delle perturbazioni di altri corpi celesti, che possono essere calcolate solo dopo aver determinato la loro posizione nel tempo, tramite le effemeridi;
5. L'architettura della traiettoria ottimizzata potrebbe non essere nota o stabilita a priori, per esempio per quanto riguarda il numero di impulsi e accensioni del propulsore o nel numero ottimale di *fly-by*.

Esistono molte tipologie diverse di traiettorie, anche a seconda che le manovre siano di tipo impulsivo (nel caso di propulsione chimica), con accensioni molto brevi rispetto al tempo di volo, oppure che la propulsione sia di tipo elettrico *low-thrust*, con spinte molto contenute ma continue nel tempo ed accelerazioni nell'ordine dei $10^{-5} g$, come nel caso in analisi (cap.5 e 6). Nelle due situazioni il problema del controllo ottimale (*Optimal Control Problem - OCP*) della spinta è qualitativamente differente ed i parametri in gioco variano molto. Il sistema ottenuto tenendo in considerazione tutti i parametri, le variabili e le condizioni al contorno è molto complesso ed una sua soluzione analitica è pressoché impossibile da trovare, se non in alcuni casi particolari. Per questo motivo, si fa ricorso all'ottimizzazione di tipo numerico.

4.1 Metodi di ottimizzazione indiretti

I metodi di ottimizzazione numerica per problemi di controllo ottimale sono di tre tipologie:

- Metodi indiretti;
- Metodi diretti;
- Metodi evoluzionistici.

I metodi indiretti descrivono il sistema con un set di equazioni differenziali, con condizioni al contorno assegnate, sfruttando i principi del calcolo variazionale ¹. Introducono, infatti, un vettore di stato ed ottimizzano le variabili di controllo modificandone i valori iniziali. Il problema così ottenuto è basato sul calcolo delle variazioni e la legge di controllo ottimale viene formulata come problema al contorno nei punti iniziale e finale. Tale approccio richiede l'aggiunta di alcune variabili, chiamate Moltiplicatori di Lagrange (o variabili di co-stato, poiché evolvono insieme al vettore di stato), in numero pari alle variabili di stato. I metodi diretti, invece,

¹Il calcolo variazionale si occupa della ricerca e dell'analisi dei massimi e minimi di funzioni il cui dominio è a sua volta un insieme di funzioni.

riducono il problema del controllo ottimale ad un problema di ottimizzazione di parametri, suddividendo la traiettoria in tanti passi più brevi. In questo modo la soluzione delle equazioni del sistema è ottenuta integrandole su ogni passo, rendendo, però, il calcolo computazionalmente molto lungo. Infine, i metodi evolutivisti (i più importanti dei quali sono i cosiddetti *algoritmi genetici*), sono una tipologia di ottimizzatori numerici che permettono di ottenere un set discreto di parametri, che vengono successivamente utilizzati per determinare la soluzione del problema in modo più semplice. Hanno il vantaggio di essere intrinsecamente adatti ad ottimizzazioni multi-obiettivo ed in grado di trovare le condizioni di ottimo in un range di ricerca molto ampio. Nel caso del problema in esame la trattazione e le analisi sono state effettuate utilizzando dei metodi di ottimizzazione indiretti. Questi, a differenza dei metodi diretti, seppur sfruttando tecniche analoghe, permettono di ottenere la soluzione ottimale con un minor costo computazionale, avendo utilizzato un numero minore di parametri. Ciò è dovuto al fatto che la traiettoria viene suddivisa in tanti segmenti più piccoli, che vengono studiati come problemi agli estremi in forma differenziale, generando un numero minore di parametri e determinando, quindi, un minor costo computazionale. Nonostante ciò, restano dei metodi poco robusti, poiché dipendono fortemente dalla soluzione di tentativo fornita inizialmente, con conseguenze non trascurabili in termini di difficoltà di convergenza. I metodi indiretti sono basati sulla teoria del controllo ottimale e risolvono il problema di ottimizzazione definendo e risolvendo un problema ai valori al contorno.

4.2 Teoria del controllo ottimale

Nel corso del paragrafo verrà affrontata la trattazione della teoria del controllo ottimale (*Optimal Control Theory - OCT*), derivata dagli studi del matematico russo Lev Semënovič Pontrjagin, in particolar modo per quanto riguarda il principio del massimo (o del minimo), formulato nel 1956. Dato un sistema in esame, è possibile descriverlo in funzione delle seguenti grandezze:

- Un vettore delle variabili di stato x ;
- Un vettore di controllo u ;
- Una variabile di tempo indipendente t .

La variazione nel tempo \dot{x} del vettore è descritta da un set di equazioni differenziali dipendenti dalle stesse grandezze x, u, t

$$\dot{x} = \frac{dx}{dt} = f(x, u, t) \quad (4.1)$$

La traiettoria viene, quindi, divisa in n archi (sotto-intervalli). In un intervallo j -esimo, si avrà un estremo inferiore per $t = t_{(j-1)_+}$, con $x_{(j-1)_+}$ ed uno superiore per $t = t_{j_-}$ e $x = x_{j_-}$. La notazione con i pedici $+$ e $-$ indica gli istanti immediatamente precedenti e successivi al punto di giunzione tra due archi consecutivi; si noti, però, che i valori in due estremi successivi potrebbero non essere identici, in modo da tenere in considerazione eventuali discontinuità nelle variabili. All'interno di ciascun intervallo, o arco, le variabili di stato e quelle di controllo sono continue e valgono leggi di controllo omogenee, mentre ai loro estremi valgono le condizioni al contorno. Le condizioni al contorno delle variabili di stato sono ottenute da relazioni non lineari nel tempo e sono scritte come

$$\chi \left(x_{(j-1)_+}, x_{j_-}, t_{(j-1)_+}, t_{j_-} \right) = 0 \quad j = 1, \dots, n \quad (4.2)$$

Il problema di ottimo consiste nella risoluzione del sistema, effettuando un calcolo variazionale nel quale venga massimizzato (o minimizzato) un parametro funzionale J , che include i valori assunti dal vettore di stato e dalle variabili di controllo lungo tutta la durata della missione e quelli assunti nell'istante di tempo finale. J viene definito

$$J = \varphi \left(x_{(j-1)_+}, x_{j_-}, t_{(j-1)_+}, t_{j_-} \right) + \sum_j \int_{t_{(j-1)_+}}^{t_{j_-}} \Phi(u(t), x(t), t) dt \quad j = 1, \dots, n \quad (4.3)$$

Il parametro φ dipende dai valori assunti dalle variabili di stato e dal tempo negli estremi considerati; la funzione Φ , invece, dipende dai precedenti ed anche dai valori assunti dalle variabili di controllo. Il funzionale J viene descritto secondo due formulazioni, tra loro alternative:

1. La formulazione di Mayer, nel caso di $\Phi = 0$

$$J = \varphi(x(t_0), x(t_f), t_0, t_f) \quad (4.4)$$

2. La formulazione di Lagrange, di tipo integrale, nel caso di $\varphi = 0$

$$J = \int_{t_0}^{t_f} \Phi(x, \dot{x}, t) dt \quad (4.5)$$

Per la presente trattazione si adotta la formulazione di Mayer e si procede ad introdurre i due Moltiplicatori di Lagrange (par.4.1) λ e μ , in modo da tenere in considerazione le equazioni differenziali ed anche le condizioni al contorno che devono essere rispettate. I Moltiplicatori introdotti sono:

- λ , ossia variabili aggiunte associate alle equazioni di stato;
- μ , ossia costanti aggiunte riferite alle condizioni al contorno χ .

La loro introduzione permette di riscrivere il funzionale J come funzionale trasformato J^* , nel seguente modo

$$J^* = \varphi + \mu^T \chi + \sum_{j=1}^n \int_{t_{(j-1)+}}^{t_{j-}} (\Phi + \lambda^T (f - \dot{x})) dt \quad (4.6)$$

Se sia le condizioni al contorno che le equazioni di stato risultano soddisfatte, con $\chi = 0$ e $\dot{x} = f$, allora il funzionale J ed il funzionale trasformato J^* coincidono e la stessa condizione vale per i loro valori agli estremi. Se si procede ad integrare per parti il funzionale trasformato J^* , è possibile svincolarlo dalla dipendenza dalla derivata del vettore di stato \dot{x}

$$J^* = \varphi + \mu^T \chi + \sum_{j=1}^n (\lambda^T x_{(j-1)+} - \lambda^T x_{j-}) + \sum_{j=1}^n \int_{t_{(j-1)+}}^{t_{j-}} (\Phi + \lambda^T - \dot{\lambda}^T x) dt \quad j = 1, \dots, n \quad (4.7)$$

A questo punto, si introduce un'ulteriore grandezza, chiamata Hamiltoniano del sistema, che esprime l'incremento istantaneo dell'espressione lagrangiana del problema. L'Hamiltoniano è definito come

$$H = \Phi + \lambda^T f \quad (4.8)$$

Procedendo a calcolare la derivata del funzionale trasformato, in funzione dell'Hamiltoniano, si ottiene

$$\begin{aligned} \delta J^* = & \left(-H_{(j-1)+} + \frac{\partial \varphi}{\partial t_{(j-1)+}} + \mu^T \frac{\partial \chi}{\partial t_{(j-1)+}} \right) \delta t_{(j-1)+} \\ & + \left(H_{j-} \frac{\partial \varphi}{\partial t_{j-}} + \mu^T \frac{\partial \chi}{\partial t_{j-}} \right) \delta t_{j-} \\ & + \left(\lambda_{(j-1)+}^T + \frac{\partial \varphi}{\partial x_{(j-1)+}} + \mu^T \frac{\partial \chi}{\partial x_{(j-1)+}} \right) \delta x_{(j-1)+} \\ & + \left(-\lambda_{j-}^T + \frac{\partial \varphi}{\partial x_{j-}} + \mu^T \frac{\partial \chi}{\partial x_{j-}} \right) \delta x_{j-} \\ & + \sum_j \int_{t_{(j-1)+}}^{t_{j-}} \left(\left(\frac{\partial H}{\partial x} + \lambda^T \right) \delta x + \frac{\partial H}{\partial u} \delta u \right) dt \quad j = 1, \dots, n \end{aligned} \quad (4.9)$$

A questo punto, per identificare i punti stazionari del funzionale modificato J^* e poter, quindi, ricavare le condizioni di ottimo, è necessario che la sua derivata prima sia nulla per qualsiasi variazione delle variabili del sistema δt , δx e δu e che le condizioni al contorno siano rispettate. Di conseguenza, diventa necessario scegliere in maniera accurata le variabili e le costanti aggiunte, in modo tale che i coefficienti moltiplicativi di ciascuna variazione presente nell'equazione 4.9 si annullino. A

tal proposito, si noti come i moltiplicatori di Lagrange siano del tutto arbitrari, ossia possono essere scelti a piacimento, in modo da annullare i coefficienti delle variazioni ∂x e ∂u . Così facendo, si ottengono le equazioni

$$\dot{\lambda} = \frac{\partial \lambda}{\partial t} = - \left(\frac{\partial H}{\partial x} \right)^T \quad (4.10)$$

$$\left(\frac{\partial H}{\partial u} \right)^T = 0 \quad (4.11)$$

La 4.10 rappresenta le equazioni di Eulero-Lagrange valide per le variabili aggiuntive, mentre la 4.11 raccoglie le equazioni algebriche valide per le variabili di controllo. Queste ultime sono indipendenti dai punti stazionari del funzionale, ed il fatto che siano punti di massimo oppure di minimo non influisce su di esse. Si noti come, però, alcuni controlli siano vincolati all'interno di un dato range: per esempio, la spinta del propulsore non può assumere valori negativi, perciò il suo minimo valore ammissibile deve necessariamente essere 0; per quanto riguarda l'estremo superiore, il massimo valore ammissibile è definito dalla tipologia di propulsore e non può essere, per ovvi motivi, infinito. In sintesi, la spinta è compresa nell'intervallo $0 \leq T \leq T_{max}$. Nel corso di questa trattazione non si esamineranno casi in cui i vincoli dipendano dal tempo oppure dalle variabili di stato, ma solo quelli in cui i loro valori siano espliciti e costanti. In presenza di un vincolo, il valore ottimale di controllo in un punto della traiettoria sarà determinato secondo il *Principio del massimo (o minimo)* di Pontrjagin, ossia identificando il punto di stazionarietà dell'Hamiltoniano in quel punto, che sia di massimo oppure di minimo. La risoluzione dell'equazione di Eulero-Lagrange determina due diversi casi possibili:

- Controllo localmente non vincolato, nel caso in cui il valore ottimale ottenuto dall'equazione 4.11 appartenga al dominio di ammissibilità prevista. Ciò significa che il vincolo non interviene in quel punto e che il valore ottenuto è, effettivamente, quello ottimale;
- Controllo vincolato, nel caso in cui il valore ottimale ottenuto ricada all'esterno del dominio di ammissibilità. In questo caso il valore ottimale di controllo verrà forzato ad essere uno dei due estremi dell'intervallo (il massimo oppure il minimo).

Infine, c'è un caso particolare in cui l'Hamiltoniano è lineare rispetto ad uno dei controlli vincolati. In questa situazione, si presentano altri due diversi casi per ricavare il valore ottimale:

- Se nell'equazione 4.8 il coefficiente di controllo vincolato assume valore non nullo, l'Hamiltoniano risulta massimizzato per il valore massimo, oppure minimo, del controllo, a seconda che il coefficiente sia positivo oppure negativo.

- Se nell'equazione 4.8 il coefficiente di controllo vincolato assume valore nullo su un sotto-intervallo, è necessario imporre pari a zero tutte le derivate successive, fino a che in una di queste non compaia esplicitamente il termine di controllo. Procedendo ad imporre uguale a zero la derivata nella quale compare questo termine, diventa possibile trovare il controllo ottimale.

A questo punto, restano da definire le condizioni al contorno. Nella trattazione che segue, verrà preso in considerazione l'estremo j -esimo, inteso come estremo superiore dell'intervallo $(j-1)$ -esimo oppure come inferiore del j -esimo. Si procede, quindi, a scrivere le equazioni al contorno e ad annullare i coefficienti ∂x_{j-} , ∂x_{j+} , ∂t_{j-} , ∂t_{j+} nell'equazione del funzionale trasformato J^*

$$-\lambda_{j-}^T + \frac{\partial \varphi}{\partial x_{j-}} + \mu^T \frac{\partial \chi}{\partial x_{j-}} = 0 \quad j = 1, \dots, n \quad (4.12)$$

$$\lambda_{j+}^T + \frac{\partial \varphi}{\partial x_{j+}} + \mu^T \frac{\partial \chi}{\partial x_{j+}} = 0 \quad j = 0, \dots, n-1 \quad (4.13)$$

$$H_{j-} + \frac{\partial \varphi}{\partial t_{j-}} + \frac{\partial \chi}{\partial t_{j-}} = 0 \quad j = 1, \dots, n \quad (4.14)$$

$$-H_{j+} + \frac{\partial \varphi}{\partial t_{j+}} + \frac{\partial \chi}{\partial t_{j+}} = 0 \quad j = 0, \dots, n-1 \quad (4.15)$$

Annullando i coefficienti delle variazioni, si eliminano i termini contenenti le costanti aggiuntive μ , ottenendo delle condizioni al contorno ottimali del tipo

$$\sigma \left(x_{(j-1)+}, x_{j-}, \lambda_{(j-1)+}, \lambda_{j-}, t_{(j-1)+}, t_{j-} \right) = 0 \quad (4.16)$$

Con quest'ultima equazione, il sistema differenziale necessario alla risoluzione è completamente definito e contiene le equazioni 4.1, 4.2, 4.10, 4.11, 4.16. Per una generica variabile di stato x soggetta ad un vincolo, le equazioni 4.12 e 4.13 forniscono le condizioni di ottimo per la variabile aggiunta λ_x . Nello specifico, le condizioni relative a λ_x presentano le seguenti caratteristiche:

- Se la variabile di stato x è assegnata all'istante di tempo iniziale ($t = 0$), non vi sono condizioni aggiuntive relative alla variabile aggiunta λ_{x_0} che, pertanto, assume un valore libero. Un discorso analogo vale nel caso dell'istante di tempo finale;
- Se il valore iniziale della variabile di stato x_0 non compare nella funzione Φ né nelle condizioni al contorno, allora la corrispondente variabile aggiunta nell'istante iniziale λ_{x_0} assume valore nullo. Un discorso analogo vale nel caso dell'istante di tempo finale;

- Se una variabile di stato x non è data in un generico istante di tempo j , ma è continua, allora anche la corrispondente variabile aggiunta è continua e si ha che $\lambda_{x_{j+}} = \lambda_{x_{j-}}$;
- Se una variabile di stato x è continua ed anche assegnata in un contorno interno, allora la corrispondente variabile aggiunta presenta una discontinuità di tipo libero, ossia i valori di $\lambda_{x_{j+}}$ e $\lambda_{x_{j-}}$ sono indipendenti tra loro e devono essere ottenuti tramite l'ottimizzazione.

Se, invece, l'Hamiltoniano non ha una dipendenza dal tempo, allora le equazioni 4.14 e 4.15 forniscono le condizioni al contorno che, nello specifico, presentano le seguenti caratteristiche:

- Se l'istante di tempo iniziale t_0 non compare nella funzione φ né nelle condizioni al contorno, allora si ha che l'Hamiltoniano nell'istante iniziale assume valore nullo ($H_0 = 0$). Un discorso analogo vale nel caso dell'istante di tempo finale;
- Se un istante di tempo intermedio t_j non compare nella funzione φ , allora l'Hamiltoniano è continuo nell'istante di tempo j e, quindi, $H_{j+} = H_{j-}$;
- Se il valore temporale in un istante di tempo intermedio t_j è esplicitamente assegnato, allora l'Hamiltoniano in quell'istante di tempo è discontinuo.

4.2.1 Boundary Value Problem

I metodi di ottimizzazione indiretti prevedono di applicare la teoria del controllo ottimale sul sistema di equazioni 4.1, le cui condizioni al contorno dipendono dalla tipologia di orbite tra le quali viene effettuato il trasferimento. La OCT definisce un nuovo sistema di equazioni differenziali ai limiti (*Boundary Value Problem - BVP*), nel quale i valori iniziali delle variabili considerate sono incogniti. Pertanto, diventa necessario ricercare i valori iniziali che soddisfino tutte le condizioni al contorno, sia per quanto riguarda quelle di ottimo, che quelle imposte, tramite un'integrazione di tipo numerico del sistema differenziale. Per questo motivo l'orbita completa viene divisa in tante sotto-parti, dette "archi". Il nuovo problema così definito presenta le seguenti caratteristiche:

- L'intervallo di integrazione viene suddiviso in n sotto-intervalli, all'interno dei quali vale un determinato sistema di equazioni differenziali, che potrebbero differire tra i diversi intervalli;
- La durata di ciascun sotto-intervallo non è nota a priori;
- Le condizioni al contorno potrebbero essere non lineari e coinvolgere valori ai contorni interni o esterni;

- Le variabili potrebbero essere discontinue ai contorni interni e, in seguito alla discontinuità, il loro valore potrebbe essere incognito.

Per semplificare la soluzione del problema differenziale ai limiti, esso viene riformulato come una successione di problemi ai valori iniziali, portati a convergenza attraverso il metodo di Newton. Inoltre, per ovviare alla condizione per cui la durata di ogni sotto-intervallo non sia nota a priori, ai fini dell'integrazione la variabile di tempo indipendente t viene sostituita con una nuova variabile ϵ , definita per il j -esimo sotto-intervallo

$$\epsilon = j - 1 + \frac{t - t_{j-1}}{t_j - t_{j-1}} = j - 1 + \frac{t - t_{j-1}}{\tau_j} \quad (4.17)$$

con il parametro τ_j che identifica la durata (incognita) del sotto-intervallo. Il problema iniziale viene, quindi, riformulato, introducendo un vettore y che contiene sia le variabili di stato x che le variabili aggiunte λ

$$y = f(x, \lambda) \quad (4.18)$$

e le equazioni differenziali vengono riscritte come

$$\frac{dy}{dt} = f^*(y, t) \quad (4.19)$$

Si introduce un nuovo vettore z , che include sia le variabili di stato e le variabili aggiunte (contenute in y) sia un vettore c dei parametri costanti

$$z = f(y, c) \quad (4.20)$$

Si effettua, quindi, il passaggio di variabile da t a ϵ , secondo quanto descritto nella 4.17, e si ottiene un nuovo sistema, nella forma

$$\frac{dz}{d\epsilon} = f^*(y, c, \epsilon) = f(z, \epsilon) \quad (4.21)$$

Esplicitando il secondo membro dell'equazione 4.21 per le variabili di stato e quelle aggiunte, si ottiene che

$$\frac{dy}{d\epsilon} = \tau_j \frac{dy}{dt} \quad (4.22)$$

mentre per quanto riguarda i parametri costanti, in quanto tali, si ha che

$$\frac{dc}{d\epsilon} = 0 \quad (4.23)$$

Le condizioni al contorno, infine, sono espresse secondo la forma

$$\psi(s) = 0 \quad (4.24)$$

nella quale s è un vettore contenente i valori assunti dalle variabili ad ogni estremità ed i parametri costanti incogniti

$$s = (y_{0+}, y_{1\pm}, \dots, y_{n-}, c) = (z_{0+}, z_{1\pm}, \dots, z_{n-}) \quad (4.25)$$

Tutti i valori iniziali sono, generalmente, incogniti e la soluzione del sistema consiste nella determinazione, con metodi iterativi, dei valori che le variabili devono assumere per soddisfare la 4.24. Per questo motivo, alla prima iterazione vengono scelti dei valori di tentativo p^1 ; dopodiché, l'iterazione successiva (r -esima) assumerà come valore iniziale il valore di tentativo p^1 e così via, per le diverse iterazioni sull'intera traiettoria. Si avrà, dunque

$$p^r = z(0) \quad (4.26)$$

Al termine dell'integrazione, si calcola l'errore sulle condizioni al contorno ψ^r , alla r -esima iterazione. Si noti come variazioni Δp nel valore di tentativo determinino variazioni dell'errore sulle condizioni al contorno ψ^r pari a

$$\Delta\psi = \left[\frac{\partial\psi}{\partial p} \right] \Delta p \quad (4.27)$$

Per annullare l'errore sulle condizioni al contorno, è necessario che ad ogni iterazione i valori iniziali vengano corretti di una quantità

$$\Delta p = p^{r+1} - p^r = - \left[\frac{\partial\psi}{\partial p} \right]^{-1} \psi^r \quad (4.28)$$

dove

$$\left[\frac{\partial\psi}{\partial p} \right] = \left[\frac{\partial\psi}{\partial s} \right] \left[\frac{\partial s}{\partial p} \right] \quad (4.29)$$

in modo da ottenere

$$\Delta\psi = -\psi^r \quad (4.30)$$

Il processo termina una volta che le condizioni al contorno 4.24 risultano verificate con la precisione desiderata. La prima matrice dell'equazione 4.29 è ottenuta derivando le condizioni al contorno rispetto alle variabili da cui dipendono, mentre la seconda derivando le variabili al contorno rispetto al proprio valore iniziale, ottenendo, quindi, i valori assunti ai contorni ϵ dalla matrice

$$\left[\frac{\partial z}{\partial p} \right] = [g(\epsilon)] \quad (4.31)$$

Tale matrice si ricava dall'integrazione del sistema di equazioni differenziali ottenuto derivando il sistema principale (equazione 4.21) rispetto ai valori iniziali

$$[g] = \frac{d}{d\epsilon} \left[\frac{\partial z}{\partial p} \right] = \left[\frac{\partial}{\partial p} \left(\frac{\partial z}{\partial \epsilon} \right) \right] = \left[\frac{\partial f}{\partial p} \right] = \left[\frac{\partial f}{\partial z} \right] \left[\frac{\partial z}{\partial p} \right] = \left[\frac{\partial f}{\partial z} \right] [g] \quad (4.32)$$

La convergenza del processo iterativo è verificata nel caso in cui l'errore sulle condizioni iniziali sia nullo, ossia quando è verificata l'equazione 4.30. Invece, i valori iniziali del sistema omogeneo 4.32 si ottengono a partire dalla 4.26

$$[g(0)] = \left[\frac{\delta z(0)}{\delta p} \right] = [I] \quad (4.33)$$

e coincidono con la matrice identità. Il metodo appena descritto permette di tenere in considerazione anche le discontinuità delle variabili: infatti, considerando una generica discontinuità localizzata in un punto i , basta aggiornare il vettore delle variabili z e la matrice g attraverso una relazione h che lega i valori delle variabili prima e dopo la discontinuità

$$z_{i+} = h(z_{i-}) \quad (4.34)$$

$$[g_{i+}] = \left[\frac{\partial h}{\partial z} \right] [g_{i-}] \quad (4.35)$$

Nel caso in esame, alcuni dei valori iniziali delle variabili sono noti, pertanto il vettore p si riduce al calcolo delle sole componenti incognite di $z(0)$ ed il vettore ψ alla determinazione delle condizioni al contorno non note all'istante iniziale, rendendo il problema reale molto più semplice da risolvere. Inoltre, la precisione richiesta è stata impostata pari a 10^{-7} , ossia si ha che

$$E_{max} = \max(\psi_i) < 10^{-7} \quad (4.36)$$

Infine, il metodo presenta alcuni ulteriori accorgimenti, per evitare il verificarsi di errori e favorire la convergenza. Infatti, la linearizzazione che è stata introdotta sul calcolo della frazione di correzione Δp , quando applicata ai valori di tentativo iniziali, introduce una serie di errori che potrebbero interferire in negativo sulla convergenza del metodo, causando un aumento dell'errore sulle condizioni al contorno ad ogni iterazione, piuttosto che una diminuzione. Gli accorgimenti adottati sono i seguenti:

- La correzione apportata ad ogni iterazione è soltanto una frazione di quella determinata, in modo da ridurre gli effetti degli errori. Pertanto si ha

$$p^{r+1} = p^r + K_1 \Delta p \quad K_1 = 0.1 \div 1 \quad (4.37)$$

- Dopo ogni iterazione si confronta l'errore massimo sulle condizioni al contorno E_{max}^{r+1} con quello ottenuto all'iterazione precedente E_{max}^r e se è rispettata la condizione 4.38, allora si procede con l'iterazione successiva

$$E_{max}^{r+1} < K_2 E_{max}^r \quad K_2 > 1 \quad (4.38)$$

- Se, al contrario, l'errore sulla nuova iterazione è troppo grande rispetto alla precedente, si applica il metodo di bisezione alla correzione apportata, dimezzandola, fino ad un massimo di cinque volte

$$p^{r+1} = p^r + K_1 \frac{\Delta p}{2} \quad (4.39)$$

Oltre la quinta applicazione, infatti, il processo viene stoppato poiché non in grado di convergere, per la soluzione di tentativo scelta.

Capitolo 5

Propulsione elettrica

Con propulsione elettrica per applicazioni spaziali si intende l'insieme di tutte le diverse tipologie di motori elettrici che vengono impiegati per la propulsione di veicoli nello spazio. Per meglio comprendere i benefici, gli svantaggi ed i campi di applicazione della propulsione elettrica, anche grazie al confronto con i metodi propulsivi più classici tipici della propulsione chimica, è necessario introdurre alcuni concetti e parametri di giudizio rilevanti, caratteristici della propulsione spaziale.

5.1 Fondamenti di propulsione spaziale

La propulsione spaziale consiste nella capacità di modificare la posizione o la velocità di uno spacecraft; per farlo, in linea di principio, si possono sfruttare tre metodi, che si basano sull'applicazione di diversi meccanismi di azione:

- Espulsione di massa;
- Azione di forze gravitazionali;
- Azione della pressione di radiazione solare.

Se gli ultimi due metodi sono legati a fattori esterni, l'espulsione di massa, invece, dipende dal meccanismo propulsivo adottato a bordo del satellite e dalla sua capacità di generare una spinta in grado di cambiarne il moto. La propulsione, però, non viene sempre utilizzata per effettuare manovre a lungo termine, ma viene sfruttata molto frequentemente per correzioni di orbita o per vincere le forze di attrito e le perturbazioni che agiscono sulla traiettoria dello spacecraft, deviandola. Per questo motivo, si effettua una distinzione tra propulsione primaria, ossia quella necessaria a modificare l'orbita, e propulsione ausiliaria, che viene sfruttata per le correzioni di traiettoria. Nel corso del paragrafo verrà presa in considerazione la primaria, data la sua rilevanza per lo studio sulle manovre di escape da *SEL2* che

verrà trattato nel capitolo 7. In generale, è possibile effettuare una distinzione tra le classi di propulsori in base alla spinta generata, che determina, di conseguenza, il campo delle loro possibili applicazioni:

- Micropropulsori, impiegati per manovre di controllo di precisione, come il mantenimento della stabilità di puntamento per osservatori e telescopi spaziali;
- Propulsori da 1 kW , utilizzati per lo *station keeping*, l'inserzione in orbita di piccoli satelliti, il mantenimento dell'orbita ed il *deorbiting*;
- Propulsori da 5 ÷ 10 kW , impiegati per inserzioni in orbite GEO, il *deorbiting* di grandi satelliti e per missioni scientifiche di grandi dimensioni;
- Propulsori da > 100 kW , adatti per l'esplorazione umana dello spazio.

Nel paragrafo 2.1 si è fatto riferimento alle tre leggi del moto di Newton, in quanto fondamentali per lo sviluppo della dinamica e per la caratterizzazione delle forze che regolano l'equilibrio ed il moto dei corpi. Anche la propulsione spaziale si basa sulle leggi di Newton, in particolare la terza, nota come conservazione della quantità di moto o come principio di azione e reazione:

Ad ogni azione applicata dall'esterno su un corpo materiale corrisponde una reazione uguale e contraria dello stesso corpo.

Ciò significa che un corpo che esercita una forza su un secondo corpo, riceve da esso una forza uguale in modulo ed opposta in verso; perciò per applicare il principio ad un propulsore spaziale basterebbe far sì che il sistema interagisse con un altro corpo, in modo da generare la spinta. Nello spazio, però, ci si trova nel vuoto ed il sistema è isolato, pertanto non è possibile scambiare una forza con un corpo esterno. Diventa, quindi, necessario che il propulsore scambi forza propulsiva con qualcosa che si trovi a bordo del satellite stesso e che possa essere espulso, rendendo il sistema non più isolato: la soluzione consiste nel portare a bordo il propellente, con il quale il propulsore possa scambiare quantità di moto, generando la spinta. Tale soluzione, però, pone dei vincoli molto impattanti sulla realizzazione della missione, poiché il veicolo spaziale può contenere solo quantità limitate di propellente (a causa del suo peso e del volume occupato), una volta esaurito il quale il moto dello spacecraft non è più in grado di essere controllato o modificato. I propulsori spaziali possono essere classificati in tre categorie, in base alla sorgente di energia che viene utilizzata per accelerare il propellente:

- Propulsione chimica, nel caso in cui la spinta sia generata dalla reazione chimica tra un combustibile ed un ossidante. Il propellente impiegato può essere di tipo liquido, solido oppure ibrido;

- Propulsione elettrica, nel caso in cui il propellente sia accelerato attraverso fenomeni di natura elettrica (o magnetica);
- Propulsione nucleare, nel caso in cui la spinta sia generata attraverso la fissione nucleare.

Indipendentemente dalla sua tipologia, si può descrivere il comportamento del propulsore attraverso alcune leggi fisiche e grandezze fondamentali, che vengono di seguito approfondite. Si consideri un sistema isolato, come quello schematizzato in figura 5.1, nel quale l'unica forza agente sullo spacecraft è quella scambiata con il propellente e per il quale valga, quindi, la conservazione della quantità di moto. Tale sistema è caratterizzato da una massa m e una velocità v in un dato istante di tempo iniziale t . Il sistema, inoltre, espelle massa; pertanto, all'istante di tempo $t + dt$, avrà espulso una quantità di massa infinitesimale di propellente dm_p . L'espulsione di massa determina un aumento dv nella velocità del sistema, in funzione della velocità effettiva di scarico c . La velocità globale del propellente, invece, è pari a $c - v$.

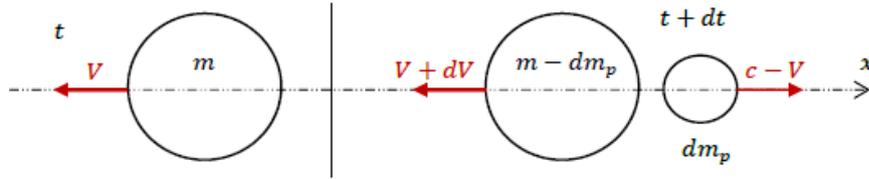


Figura 5.1: Schematizzazione del sistema S/C - propellente, con conservazione della quantità di moto - Credits: G. Alessandrino in *Ottimizzazione di trasferte orbitali LEO con propulsione elettrica per missioni di Multi-Debris Removal* (2022)

Per la conservazione della quantità di moto totale del sistema, si ha

$$mv = (m - dm_p)(v + dv) - dm_p(c - v) \quad (5.1)$$

Sviluppando l'equazione, si ottiene

$$mv = mv + mdv - vdm_p - dvdm_p - cdm_p + vdm_p \quad (5.2)$$

Semplificandola e trascurando gli infinitesimi di secondo ordine, si ottiene

$$mdv = cdm_p \quad (5.3)$$

Tale formulazione descrive una situazione istantanea, ma nella realtà il propellente viene espulso in modo continuo, attraverso un flusso di massa. Per questo motivo, si introduce la portata in massa di propellente, definita come

$$\dot{m}_p = \frac{dm_p}{dt} \quad (5.4)$$

Sostituendo la 5.4 nella 5.3, si ottiene che

$$m \frac{dv}{dt} = \dot{m}_p c = T \quad (5.5)$$

dove T indica la spinta generata dal propulsore. Si procede, dunque, ad introdurre alcuni parametri che descrivono le caratteristiche dei propulsori, a partire dall'impulso totale I_t , definito come l'integrale della spinta del propulsore nel tempo di funzionamento

$$I_t = \int_{t_0}^{t_f} T dt \quad (5.6)$$

L'impulso totale è un parametro che misura l'effetto cumulativo della spinta del sistema, perciò maggiore è l'impulso totale di un propulsore, maggiore è la capacità propulsiva, in termini di spinta, del satellite. L'impulso specifico, invece, è un parametro che misura l'efficienza del sistema propulsivo ed è definito dal rapporto tra l'impulso totale, ossia l'effetto prodotto, e la spesa richiesta, in termini di peso a terra della massa di propellente utilizzata

$$I_{SP} = \frac{I_t}{m_p g_0} \quad (5.7)$$

Nel caso in cui la spinta T fornita dal propulsore sia costante, la 5.6 si riduce a

$$I_t = T \Delta t \quad (5.8)$$

dove Δt rappresenta il tempo di funzionamento del propulsore. Nel caso in cui anche la velocità effettiva di scarico c sia costante, allora anche la portata in massa espulsa è costante e pari a

$$\dot{m}_p = \frac{m_p}{\Delta t} \quad (5.9)$$

Sostituendo la 5.8 e la 5.9 nella 5.7, si ottiene

$$I_{SP} = \frac{I_t}{m_p g_0} = \frac{T \Delta t}{\dot{m}_p \Delta t g_0} = \frac{T}{\dot{m}_p g_0} = \frac{\dot{m}_p c}{\dot{m}_p g_0} = \frac{c}{g_0} \quad (5.10)$$

Il risultato ottenuto mostra come l'impulso specifico e la velocità effettiva di scarico siano lo stesso parametro, a meno di una costante g_0 di accelerazione gravitazionale a Terra. Le due grandezze, infatti, esprimono l'efficienza con la quale il propellente viene impiegato per la generazione della spinta: maggiore è il loro valore, maggiore è l'efficienza del propulsore. Si noti, inoltre, come l'impulso specifico abbia la dimensione di un tempo, essendo definito dal rapporto tra una velocità ed un'accelerazione; il suo valore, infatti, rappresenta il tempo per il quale una data quantità di propellente è in grado di dare una spinta equivalente al proprio peso sulla Terra. A parità di massa, quindi, se aumenta l'impulso specifico, è possibile aumentare la spinta fornita oppure la durata di tempo per il quale viene fornita.

5.1.1 L'equazione di Tsiolkovsky

L'equazione del razzo di Tsiolkovsky è stata pubblicata nel 1903 dall'ingegnere e scienziato russo Konstantin Éduardovič Ciolkovskij (meglio noto con il nome, traslitterato, Tsiolkovsky) ed è alla base della propulsione spaziale. Essa descrive il moto dei corpi di massa variabile nello spazio ed afferma che, grazie alla conservazione della quantità di moto, un corpo è in grado di accelerare tramite l'espulsione di parte della sua massa nella direzione opposta rispetto a quella per cui si desidera l'aumento di velocità. L'equazione, infatti, pone in relazione l'aumento di velocità ΔV di un veicolo spaziale (noto anche come costo propulsivo di una manovra) dotato di un motore a reazione con il rapporto tra la sua massa iniziale e quella finale. Si noti come essa, però, non tenga conto di perdite, perturbazioni o altri disturbi esterni. La sua derivazione segue una serie di passaggi matematici, di seguito illustrati. Si introduce il concetto di costo propulsivo di una manovra, ossia la variazione di velocità ΔV cui è soggetto il veicolo durante la manovra

$$\Delta V = \int_{t_0}^{t_f} \frac{T}{m} dt \quad (5.11)$$

Sostituendo nell'equazione la definizione della spinta (eq. 5.5), si ottiene

$$\Delta V = \int_{t_0}^{t_f} \frac{\dot{m}_p c}{m} dt \quad (5.12)$$

Noto dalla 5.4 che $\dot{m}_p = \frac{dm}{dt}$, si può sostituire il termine al numeratore, effettuando un cambio di variabile di integrazione da t a m e modificando adeguatamente gli estremi d'integrazione. In questo modo la 5.12 diventa

$$\Delta V = - \int_{m_0}^{m_f} \frac{c}{m} dm \quad (5.13)$$

nella quale m_0 e m_f rappresentano la massa iniziale dello spacecraft al tempo t_0 e la sua massa finale al tempo t_f . Integrando, dunque, la 5.13, si ottiene

$$\Delta V = c \ln \left(\frac{m_0}{m_f} \right) \quad (5.14)$$

che può essere riscritta ponendo in evidenza il rapporto tra le masse

$$\frac{m_f}{m_0} = e^{-\frac{\Delta V}{c}} \quad (5.15)$$

Tale equazione è nota con il nome di *Equazione di Tsiolkovsky* (o *equazione del razzo*) e si interpreta nel seguente modo: all'aumentare del costo propulsivo, il rapporto tra la massa finale e quella iniziale decresce esponenzialmente. Ciò significa che all'aumentare dell'entità della manovra, la massa finale del satellite diminuisce, come conseguenza della maggior quantità di propellente consumato; inoltre, al diminuire della velocità efficace di scarico c , la massa finale del satellite diminuisce, a causa della peggior efficienza nell'utilizzo del propellente.

5.2 Tipologie di propulsione

In un propulsore la spinta viene generata attraverso l'accelerazione e l'espulsione del propellente stivato a bordo, dopo che ad esso è stata fornita una certa quantità di energia. La maggior parte dei motori spaziali sfrutta una propulsione di tipo chimico, attraverso reazioni termofluidodinamiche tra un combustibile ed un ossidante (caso bipropellente), oppure tramite un catalizzatore che provoca la decomposizione del combustibile, generando gas caldo (caso monopropellente). La propulsione chimica, infatti, sfrutta l'accelerazione dei gas caldi prodotti ed accelerati in un ugello, generando una spinta che, di conseguenza, è proporzionale all'energia cinetica del gas in uscita dall'ugello. L'energia cinetica è legata, a sua volta, all'energia chimica del propellente utilizzato. Un'altra tipologia di propulsione adottata a bordo dei satelliti è quella di tipo elettrico, che si basa sullo sfruttamento di forze elettromagnetiche per accelerare le particelle di propellente. La propulsione elettrica, quindi, a differenza di quella chimica, sfrutta una sorgente di energia indipendente dal propellente (non si verifica una reazione tra combustibile ed ossidante), attraverso un sistema di generazione di potenza solare o nucleare, per mezzo di pannelli solari, reattori a fissione nucleare oppure generatori a radioisotopi.

5.3 Propulsori elettrici

La propulsione elettrica rappresenta un'alternativa molto conveniente a quella di tipo chimico, poiché permette di aggirare la problematica dello stivaggio di propellente a bordo del satellite, riducendo la massa ed il volume occupato. L'energia elettrica sfruttata per ionizzare il propellente permette di applicare un campo elettrostatico (o elettromagnetico) nella direzione dell'accelerazione, in modo tale da generare una spinta attraverso l'espulsione degli ioni emessi. Questa tipologia di propulsori presenta numerose sotto-categorie e varianti, catalogabili secondo diverse classificazioni. La prima di queste è in base al regime di funzionamento del motore, che può essere:

- Stazionario, nel caso in cui il propulsore operi in modo continuato per una certa durata di tempo;
- Pulsato, nel caso in cui il propulsore operi per dei brevi intervalli di tempo (che possono essere approssimati come impulsivi), con durata inferiore ad 1 s, alternati a periodi più lunghi di accumulo di energia.

Nel corso degli anni sono stati sviluppati propulsori che sfruttano diverse tecnologie per accelerare il fluido di lavoro e che, in generale, possono essere raggruppati in tre famiglie, in base al meccanismo di accelerazione adottato:

- Accelerazione elettrotermica, se l'accelerazione del fluido avviene tramite riscaldamento elettrico;
- Accelerazione elettrostatica, nel caso in cui l'accelerazione del fluido sia fornita da forze di tipo elettrico;
- Accelerazione elettromagnetica, nel caso in cui l'accelerazione del fluido sia fornita da forze di tipo magnetico.

5.3.1 Propulsione elettrotermica

La propulsione elettrotermica consiste nell'accelerazione di un gas scaldato elettricamente e, successivamente, espanso in un ugello. Una soluzione di questo tipo permette di convertire l'energia termica in energia cinetica e può essere realizzata attraverso due diverse tipologie di riscaldamento del propellente:

- Resistogetti, ossia propulsori elettrotermici nei quali il propellente viene scaldato da una resistenza alla quale è fornita potenza elettrica. In questo modo il calore si trasmette dalla resistenza al propellente per convezione o irraggiamento.
- Arcogetti, ossia propulsori elettrotermici nei quali il calore viene depositato attraverso un arco elettrico direttamente nel propellente, che in origine è, almeno parzialmente, ionizzato. In questo modo il propellente diventa esso stesso un conduttore e al suo interno fluisce una corrente elettrica. Una soluzione di questo tipo permette di ottenere un riscaldamento non uniforme, mantenendo temperature più contenute nei pressi delle pareti del propulsore e maggiori lontano da esse.

In generale, la propulsione elettrotermica permette di raggiungere impulsi specifici maggiori di quelli ottenuti tramite propulsione chimica, ma è soggetta a tre diverse tipologie di perdite, che ne inficiano l'efficienza. Le principali sono di tipo termico, poiché non tutto il calore che viene dissipato dalla resistenza elettrica riesce ad essere convertito in potenza fornita al propellente, ma viene parzialmente disperso o per irraggiamento verso l'esterno del satellite o per trasmissione ai materiali che costituiscono il motore. Un'altra tipologia di perdite sono quelle legate ai flussi congelati (note come perdite per *frozen flow*): esse sono dovute al fatto che il passaggio del gas nell'ugello sia così repentino da non permettere di raggiungere un equilibrio chimico, determinando una frazione di propellente che non viene convertita in energia cinetica, rimanendo "congelata" all'interno del fluido. Infine, si verificano delle perdite di tipo aerodinamico, legate alla presenza di attriti (fenomeni dissipativi nello strato limite), divergenze e non-omogeneità del flusso.

5.3.2 Propulsione elettrostatica

La propulsione elettrostatica consiste nell'accelerazione di un propellente cui viene fornita energia attraverso forze di tipo elettrostatico, generate dalla presenza di un campo elettrico. La tipologia più diffusa di propulsore elettrostatico è il propulsore a ioni. Una soluzione di questo tipo, infatti, sfrutta il principio di azione e reazione applicato agli ioni presenti nel propellente e si articola su tre fasi:

1. Ionizzazione ed estrazione, durante la quale gli ioni vengono “generati” a partire da un propellente originariamente neutro e separati dagli elettroni;
2. Accelerazione degli ioni estratti, attraverso l'applicazione di un campo elettrico;
3. Neutralizzazione, durante la quale il fascio di ioni viene neutralizzato da un fascio di elettroni, per ristabilire la neutralità elettrica all'interno del propulsore.

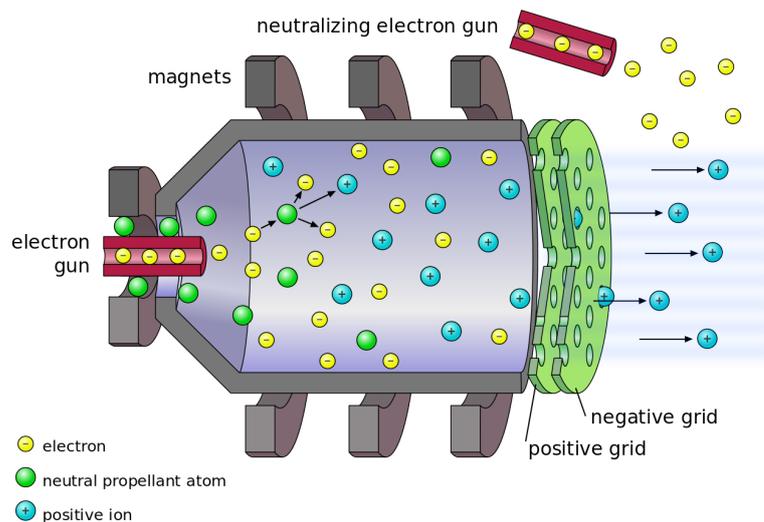


Figura 5.2: Schematizzazione di un propulsore elettrostatico a ioni - Credits: O. Räisänen, own work, CC BY-SA 3.0 (2012)

Propulsori ad effetto Hall

Il problema principale dei propulsori a ioni è la limitazione della densità di spinta, dovuta al fatto che vengono accelerati soltanto gli ioni e non tutto il propellente, determinando propulsori grandi e pesanti. Per aggirare questa limitazione, si sfrutta una tipologia di propulsore che sfrutta l'effetto Hall in una camera nella quale è presente un plasma quasineutro, per il quale non avviene una separazione delle

cariche. I propulsori di questo tipo basano il proprio funzionamento sulla presenza di solenoidi che generano un campo magnetico B diretto radialmente al propulsore ed ortogonale al campo elettrico E generato dalla differenza di potenziale tra il catodo e l'anodo che costituiscono il motore. L'interazione tra i due campi ed il propellente fa sì che quest'ultimo si ionizzi, determinando la nascita di un corrente elettronica all'interno del propulsore. La presenza sia di un campo elettrico che di uno magnetico rende i propulsori ad effetto Hall una sorta di ibrido tra propulsione elettrostatica ed elettromagnetica.

Variable Specific Impulse Magnetoplasma Rocket (VASIMR)

I propulsori di tipo *VASIMR* rappresentano una via di mezzo tra la propulsione elettrotermica e quella elettromagnetica, poiché hanno un funzionamento che coinvolge aspetti di entrambe le configurazioni, articolato in tre fasi:

1. Ionizzazione del propellente, attraverso delle onde elettromagnetiche in radiofrequenza;
2. Riscaldamento del propellente, attraverso la tecnica del *Ion Cyclotron-Resonance Heating (ICRH)*, fino alla formazione di un plasma;
3. Accelerazione ed espansione in un ugello magnetico, generando una spinta.

Un propulsore *VASIMR* è in grado di generare potenze molto elevate, con impulsi specifici compresi tra i 1000 e i 10000 s , offrendo un'alternativa che sia una via di mezzo tra la propulsione elettrica e quella chimica, in termini di prestazioni.

5.3.3 Propulsione elettromagnetica

La propulsione elettromagnetica consiste nell'accelerazione di un propellente cui viene fornita energia attraverso l'applicazione di un campo magnetico, che può essere autoindotto oppure applicato dall'esterno. Esistono due tipologie di propulsori elettromagnetici, in base al funzionamento continuo (propulsione stazionaria) oppure pulsato (propulsione instazionaria). Una soluzione di questo tipo consiste di due elettrodi, tra i quali viene applicata una differenza di potenziale che, a sua volta, genera un campo elettrico diretto dall'anodo al catodo. Tra i due elettrodi è presente un plasma quasinuetro, ossia il propellente; inoltre, sul sistema agisce un campo magnetico, perpendicolare a quello elettrico. Tramite una serie di collisioni, gli elettroni scambiano quantità di moto con gli atomi del plasma, risultandone accelerati. Come accennato in precedenza, questa famiglia di propulsori si suddivide in due categorie, a seconda del funzionamento:

- Propulsori *Magnetoplasmadinamici (MPD)*, nel caso in cui il funzionamento sia continuo. Gli *MPD* presentano alcune somiglianze con gli arcogetti, a

differenza dei quali sviluppano campi magnetici molto intensi, con portate ridotte e correnti elevate. Si possono, inoltre, suddividere in due sottocategorie, a seconda che il campo magnetico sia autoindotto (*self-field*) oppure imposto dall'esterno (*applied field*). In generale, in un propulsore *MPD* le forze magnetiche prevalgono su quelle di inerzia e di pressione, determinando l'accelerazione del propellente.

- Propulsori *Pulsed Plasma Thruster (PPT)*, nel caso in cui il funzionamento sia pulsato. I *PPT* sono progettati per tollerare temperature e, di conseguenza, correnti, molto elevate (per brevi periodi), con un rendimento elevato. Inoltre, le accensioni di breve durata determinano una migliore gestione termica, riducendo le perdite per flussi congelati. Il meccanismo di funzionamento può essere schematizzato in una successione di cinque fasi: immagazzinamento dell'energia, innesco della scarica attraverso una candela, stabilizzazione della scarica, accelerazione della scarica e, infine, emissione del propellente.

In sintesi, le diverse categorie analizzate possono essere valutate in base ad una serie di parametri prestazionali oppure in termini di funzionalità. La tabella 5.1 mostra un confronto tra le tre famiglie di propulsori elettrici presentate nel corso del capitolo. I parametri analizzati nel confronto sono l'impulso specifico I_s , la potenza elettrica P_E , il rendimento η , la massa della *Power Processing Unit (PPU)* per kW di potenza generato e la tipologia di applicazione per la quale ciascuna famiglia di propulsore è più adatta.

	Elettrotermica	Elettrostatica	Elettromagnetica	
			MPD	PPT
I_s [s]	300 ÷ 350	2000 ÷ 4000	2000 ÷ 5000	500 ÷ 1000
P_E [W]	500 ÷ 1500	200 ÷ 5000	100 <i>k</i> ÷ 4 <i>M</i>	1 ÷ 200
Rendimento	0.8	0.65	0.3	0.1
m_{PPU} [kg/kW]	1	2 ÷ 6	100	100
Applicazione	Mantenimento orbita	Trasf. medio ΔV	Trasf. grande ΔV	Correzioni precise

Tabella 5.1: Confronto tra le diverse famiglie di propulsori elettrici

5.4 Confronto tra chimico ed elettrico

I propulsori elettrici, generalmente, permettono di ottenere impulsi specifici maggiori rispetto a quelli chimici, a discapito delle spinte e delle accelerazioni generate, che nel caso elettrico sono di diversi ordini di grandezza inferiori, a causa delle limitazioni tecnologiche nella generazione di potenza elettrica a bordo degli spacecraft. Inoltre tendono a richiedere un ΔV effettivo superiore a quello ideale. Un altro vantaggio dei propulsori elettrici, però, consiste nella capacità di fornire una spinta per

periodi di tempo lunghi anche diversi mesi o anni, in modo continuativo. Di contro, una tipologia di propulsione che si basa sulla potenza elettrica generata attraverso pannelli fotovoltaici, sviluppa una dipendenza diretta dalla radiazione solare: nel momento in cui questa venisse a mancare, per esempio durante una fase di eclisse, il propulsore ne risentirebbe e necessiterebbe di uno spegnimento. Una propulsione di tipo elettrico, quindi, è preferibile per applicazioni in cui siano richieste un'elevata precisione, bassi valori di spinta e vita operativa molto lunga, come nel caso della propulsione ausiliaria per manovre di *station keeping*, controllo di assetto o dismissione, oppure come propulsione primaria per missioni a bassa spinta, come nel caso in esame in questa tesi, che verrà analizzato nel capitolo 7. La tabella 5.2 riassume le caratteristiche dei principali sistemi propulsivi chimici ed elettrici, confrontandone impulso specifico e spinta.

Sistema propulsivo	Famiglia propulsione	Impulso specifico [s]	Spinta [N]
Monopropellente liquido	Chimica	200 ÷ 250	0.01 ÷ 100
Bipropellente liquido	Chimica	300 ÷ 450	0.01 ÷ 10 ⁷
Propellente solido	Chimica	200 ÷ 300	1 ÷ 10 ⁶
Propellente ibrido	Chimica	250 ÷ 350	1 ÷ 10 ⁶
Resistogetti	Elettrotermica	200 ÷ 350	0.2 ÷ 0.3
Arcoggetti	Elettrotermica	400 ÷ 1000	0.2 ÷ 1
Ioni	Elettrostatica	2000 ÷ 5000	< 0.2
Effetto Hall	Elettrostatica	1500 ÷ 2000	< 2
PPT	Elettromagnetica	600 ÷ 2000	< 0.01
MPD	Elettromagnetica	2000 ÷ 5000	< 2

Tabella 5.2: Confronto tra propulsione chimica ed elettrica

Capitolo 6

Modello dinamico

L'obiettivo dello studio è la ricerca di una traiettoria di fuga ottimale dal punto lagrangiano L2 del sistema Sole-Terra, con propulsione elettrica. Le analisi sono effettuate senza considerare un target finale ben preciso, poiché lo scopo è verificare la fattibilità della manovra sulla base di diversi input forniti, osservando l'energia e la velocità finali; pertanto si considera una generica distanza dalla Terra di $3 \cdot 10^6 \text{ km}$, come punto finale dell'evasione. Affinché la procedura di calcolo converga ad una soluzione, si sfrutta un metodo di *shooting*: a partire da una soluzione di tentativo, viene eseguita una serie di iterazioni integrando le equazioni del problema (presentate nel capitolo 4.1) e calcolando ad ogni iterazione l'errore sulle condizioni al contorno, fino al raggiungimento della tolleranza imposta, pari a 10^{-7} . Il modello adottato ha la finalità di descrivere la dinamica del problema, in particolar modo per quanto riguarda il moto del satellite, schematizzato come un corpo puntiforme di massa variabile, inserito nel contesto di un problema dei 2-corpi (Terra-satellite) nel quale agiscono, però, anche le forze perturbative del Sole e della Luna, che contribuiscono ad influenzare la traiettoria (modello a 4-corpi). Le variabili di stato del problema sono la posizione \mathbf{r} , la velocità \mathbf{v} e la massa m del satellite, i cui valori iniziali sono noti. Ciascuna variabile di stato è descritta da un'equazione differenziale vettoriale:

$$\frac{d\mathbf{r}}{dt} = \mathbf{v} \quad (6.1)$$

$$\frac{d\mathbf{v}}{dt} = -\frac{\mu}{r^3}\mathbf{r} + \frac{\mathbf{T}}{m} + \mathbf{a}_P \quad (6.2)$$

$$\frac{dm}{dt} = -\frac{T}{c} \quad (6.3)$$

Il termine $-\frac{\mu}{r^3}\mathbf{r}$ nell'equazione 6.2 rappresenta il potenziale gravitazionale della Terra, ma con un'approssimazione come se essa fosse perfettamente sferica; questa assunzione, in realtà, non è corretta e verrà meglio approfondita nel corso

del paragrafo 6.1.1, nel quale verrà presentata anche la procedura per tenerla in considerazione nel modello dinamico. Il termine T , invece, indica la spinta generata dal propulsore ed assume alternativamente valore nullo (quando è spento) e valore massimo T_{max} (quando è in funzione). Il termine c è la velocità efficace di scarico (introdotta nel paragrafo 5.1.1), assunta costante, mentre il parametro \mathbf{a}_P rappresenta l'azione perturbativa globale, che tiene in considerazione diversi contributi:

$$\mathbf{a}_P = \mathbf{a}_J + \mathbf{a}_{lsg} + \mathbf{a}_{srp} \quad (6.4)$$

Il termine \mathbf{a}_J è la perturbazione legata alla non perfetta sfericità della Terra, che determina un'attrazione non uguale su tutta la superficie e varia, quindi, con la posizione del satellite. Il termine \mathbf{a}_{lsg} indica l'azione perturbativa della Luna e del Sole (perturbazione *lunisolare*) e varia anch'esso con la posizione del satellite. Infine, il termine \mathbf{a}_{srp} rappresenta l'effetto perturbativo causato dalla radiazione solare, che esercita una vera e propria pressione, e quindi una spinta, sul satellite. Si procede ad introdurre l'Hamiltoniano, definito in forma generale nell'equazione 4.8, applicandolo al modello dinamico appena descritto

$$H = \lambda_r^T \mathbf{v} + \lambda_v^T \left(-\frac{\mu^T \mathbf{r}}{r^2} \frac{\mathbf{r}}{r} + \frac{\mathbf{T}}{m} + \mathbf{a}_P \right) - \lambda_m \frac{\mathbf{T}}{c} \quad (6.5)$$

I valori delle variabili aggiuntive, invece, sono derivati dalle equazioni di Eulero-Lagrange

$$\frac{d\lambda_x}{dt} = -\frac{\partial H}{\partial x} \quad (6.6)$$

nelle quali x assume, alternativamente, il valore di r , θ , ϕ , u , v , w e m . Per definire le condizioni al contorno ottimali, è necessario introdurre il concetto di *Switching Function (SF)*, ossia una sorta di "interruttore" per la gestione della spinta, definita come

$$SF = \frac{\lambda_v}{m} - \frac{\lambda_m}{c} \quad (6.7)$$

La SF impatta sulla spinta generata secondo quanto segue:

- Se $SF > 0$, la spinta è massima e vale T_{max} ;
- Se $SF < 0$, la spinta è minima, cioè nulla;
- Se $SF = 0$, l'arco è singolare.

Sostituendo, quindi, la SF nell'Hamiltoniano dell'equazione 6.5, si ottiene

$$H = \lambda_r^T \mathbf{v} + \lambda_v^T \left(-\frac{\mu^T \mathbf{r}}{r^2} \frac{\mathbf{r}}{r} \right) - T(SF) + a_P \quad (6.8)$$

La massimizzazione dell'Hamiltoniano è una condizione imposta dalla OCT (par.4.2), necessaria per ottenere la soluzione ottimale al problema; le variabili di controllo coinvolte nella massimizzazione sono il modulo e la direzione della spinta. Se ne deduce che la direzione ottimale della spinta è parallela al vettore velocità aggiunto λ_v . Di conseguenza, la SF può essere riscritta come

$$SF = \frac{\lambda_v}{m} - \frac{\lambda_m}{c} \quad (6.9)$$

Il sistema di riferimento nel quale sono proiettate le equazioni vettoriali è il *Earth Mean Equator and Mean Equinox alla Epoch J2000*¹, noto con il nome di *EME2000*, ossia un SR geocentrico equatoriale nel quale i versori **I**, **J** e **K** rappresentano i vettori unità lungo i tre assi. La precessione e la nutazione² sono trascurate.

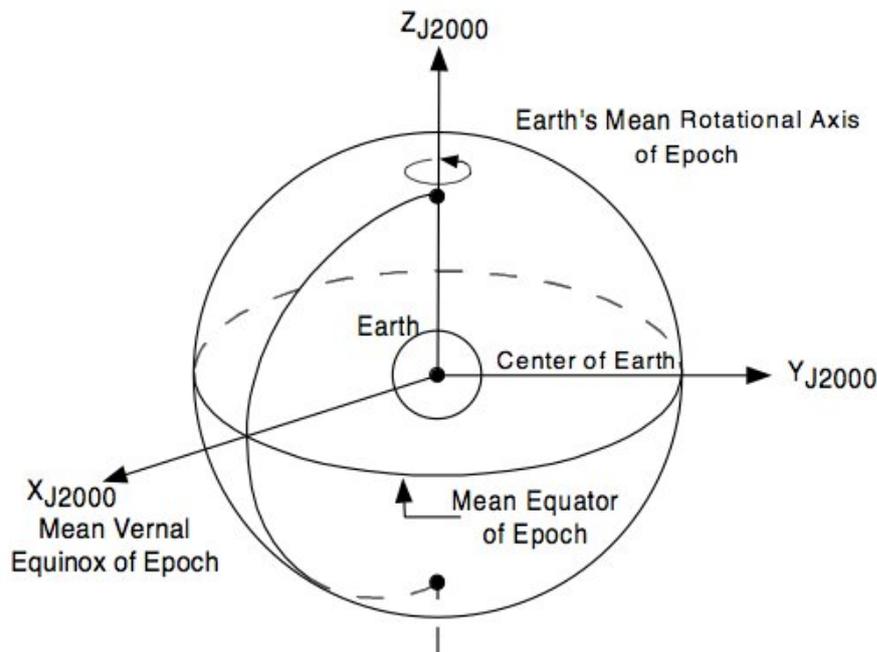


Figura 6.1: Il sistema di riferimento *EME2000* - Credits: V. Vittaldev in *The Unified State Model. Derivation and Applications in Astrodynamics and Navigation* (2010)

Nel SR la posizione del satellite è descritta in coordinate polari, con raggio r , ascensione retta θ e declinazione φ , secondo quanto segue:

$$r = r \cos \theta \cos \varphi \mathbf{I} + r \sin \theta \cos \varphi \mathbf{J} + r \sin \varphi \mathbf{K} \quad (6.10)$$

¹Ore 12:00 Tempo Terrestre del 01 Gennaio 2000.

²Moti dell'asse di rotazione terrestre causati dalle forze di marea esercitate da Sole e Luna.

Si introduce, quindi, un sistema di riferimento topocentrico, nel quale il versore \mathbf{i} rappresenta il vettore unità in direzione radiale, \mathbf{j} quello verso est e \mathbf{k} verso nord. Il passaggio dal SR *EME2000* a quello topocentrico diventa possibile attraverso una matrice di rotazione, nel seguente modo:

$$\begin{bmatrix} \mathbf{i} \\ \mathbf{j} \\ \mathbf{k} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos \theta \cos \varphi & \sin \theta \cos \varphi & \sin \varphi \\ -\sin \theta & \cos \theta & 0 \\ -\cos \theta \sin \varphi & -\sin \theta \sin \varphi & \cos \varphi \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{I} \\ \mathbf{J} \\ \mathbf{K} \end{bmatrix} \quad (6.11)$$

Nel nuovo sistema di riferimento topocentrico, i vettori posizione e velocità sono descritti da

$$\mathbf{r} = r\mathbf{i} \quad (6.12)$$

$$\mathbf{v} = \dot{\mathbf{r}} = u\mathbf{i} + v\mathbf{j} + w\mathbf{k} \quad (6.13)$$

con u , v e w che indicano le componenti radiale, verso est e verso nord, rispettivamente.

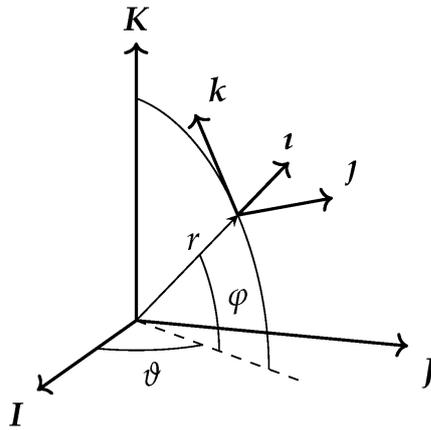


Figura 6.2: SR *EME2000* e topocentrico - Credits: L. Casalino e L. Mascolo in *Optimal Escape from Sun-Earth and Earth-Moon L2 with Electric Propulsion* (2022) [9]

Si possono, quindi, derivare le sette equazioni di stato, scalari, secondo quanto segue:

$$\frac{dr}{dt} = u \quad (6.14)$$

$$\frac{d\theta}{dt} = \frac{v}{r \cos \varphi} \quad (6.15)$$

$$\frac{d\varphi}{dt} = \frac{w}{r} \quad (6.16)$$

$$\frac{du}{dt} = -\frac{\mu}{r^2} + \frac{v^2 + w^2}{r} + \frac{T_u}{m} + (a_J)_u + (a_{lsp})_u + (a_{srp})_u \quad (6.17)$$

$$\frac{dv}{dt} = \frac{-uv + vw \tan \varphi}{r} + \frac{T_v}{m} + (a_J)_v + (a_{lsp})_v + (a_{srp})_v \quad (6.18)$$

$$\frac{dw}{dt} = \frac{-uw - v^2 \tan \varphi}{r} + \frac{T_w}{m} + (a_J)_w + (a_{lsp})_w + (a_{srp})_w \quad (6.19)$$

$$\frac{dm}{dt} = -\frac{T}{c} \quad (6.20)$$

ricordando che per la 6.4, $a_J + a_{lsg} + a_{srp} = a_P$. Il vettore di stato alle condizioni iniziali è, invece, descritto da

$$x = [r_0, \theta_0, \varphi_0, u_0, v_0, w_0, m_0] \quad (6.21)$$

Introducendo i parametri γ_T e ψ_T , ad indicare, rispettivamente, l'angolo di elevazione e l'angolo di *heading* della spinta, si può scomporre la spinta nel contributo di tre componenti, nelle direzioni u , v e w :

$$T_u = T \sin \gamma_T \quad (6.22)$$

$$T_v = T \cos \gamma_T \cos \psi_T \quad (6.23)$$

$$T_w = T \cos \gamma_T \sin \psi_T \quad (6.24)$$

A partire dalle tre equazioni appena definite, è possibile riscrivere l'Hamiltoniano, come

$$\begin{aligned} H = & \lambda_r u + \lambda_\theta \frac{v}{r \cos \varphi} + \lambda_\varphi \frac{w}{r} + \\ & + \lambda_u \left(-\frac{\mu}{r^2} + \frac{v^2}{r} + \frac{w^2}{r} + \frac{T}{m} \sin \gamma_T \right) + \\ & + \lambda_v \left(\frac{uv}{r} + \frac{vw}{r} \tan \varphi + \frac{T}{m} \cos \gamma_T \cos \psi_T \right) + \\ & + \lambda_w \left(-\frac{uw}{r} - \frac{v^2}{r} \tan \varphi + \frac{T}{m} \cos \gamma_T \sin \psi_T \right) + \\ & - \lambda_m \frac{T}{c} \end{aligned} \quad (6.25)$$

Imponendo pari a zero le sue derivate parziali, si ricavano il γ_T e ψ_T ottimali, che corrispondono ai valori ottimali cercati, in termini di direzione di spinta fornita dal propulsore. Matematicamente, è possibile scrivere

$$\left(\frac{\partial H}{\partial u} \right)^T = 0 \quad (6.26)$$

con u ad indicare il vettore di controllo

$$u = [\gamma_T \ \psi_T] \quad (6.27)$$

In questo modo si ottengono le equazioni algebriche di controllo

$$\sin \gamma_T = \frac{\lambda_u}{\lambda_V} \quad (6.28)$$

$$\cos \psi_T \cos \gamma_T = \frac{\lambda_u}{\lambda_V} \quad (6.29)$$

$$\sin \psi_T \cos \gamma_T = \frac{\lambda_w}{\lambda_V} \quad (6.30)$$

nelle quali λ_V rappresenta il modulo della variabile aggiunta riferita alla velocità e parallela alla direzione ottimale della spinta, espressa come

$$\lambda_V = \sqrt{\lambda_u^2 + \lambda_v^2 + \lambda_w^2} \quad (6.31)$$

Infine, per definire il set di equazioni differenziali per la variabile aggiunta

$$\lambda = [\lambda_r \ \lambda_\theta \ \lambda_\varphi \ \lambda_u \ \lambda_v \ \lambda_w \ \lambda_m] \quad (6.32)$$

si sfruttano le equazioni di Eulero-Lagrange

$$\frac{d\lambda}{dt} = - \left(\frac{\partial H}{\partial x} \right)^T \quad (6.33)$$

che diventano, quindi

$$\begin{aligned} \dot{\lambda}_r = \frac{1}{r^2} \left[\lambda_\theta \frac{v}{\cos \phi} + \lambda_\varphi w + \lambda_u \left(-\frac{2}{r} + v^2 + w^2 \right) + \right. \\ \left. + \lambda_v (-uv + vw \tan \varphi) + \lambda_w (-uw - v^2 \tan \varphi) \right] + \frac{dH}{da_P} \frac{da_P}{dr} \end{aligned} \quad (6.34)$$

$$\dot{\lambda}_\theta = 0 \quad (6.35)$$

$$\dot{\lambda}_\varphi = \frac{1}{r \cos \varphi^2} (\lambda_\theta v \sin \varphi - \lambda_v v w + \lambda_w v^2) + \frac{dH}{da_P} \frac{da_P}{d\varphi} \quad (6.36)$$

$$\dot{\lambda}_u = \frac{1}{r} (-\lambda_r r + \lambda_v v + \lambda_w w) + \frac{dH}{da_P} \frac{da_P}{du} \quad (6.37)$$

$$\dot{\lambda}_v = \frac{1}{r} \left[-\lambda_\theta \frac{1}{\cos \theta} - 2\lambda_u v - \lambda_v (u - w \tan \varphi) + 2\lambda_w v \tan \varphi \right] + \frac{dH}{da_P} \frac{da_P}{dv} \quad (6.38)$$

$$\dot{\lambda}_w = \frac{1}{r} (-\lambda_\varphi - 2\lambda_u w - \lambda_v (v \tan \varphi + \lambda_w u)) + \frac{dH}{da_P} \frac{da_P}{dw} \quad (6.39)$$

$$\dot{\lambda}_m = \frac{T}{m^2} \lambda_V + \frac{dH}{da_P} \frac{da_P}{dm} \quad (6.40)$$

6.1 Perturbazioni

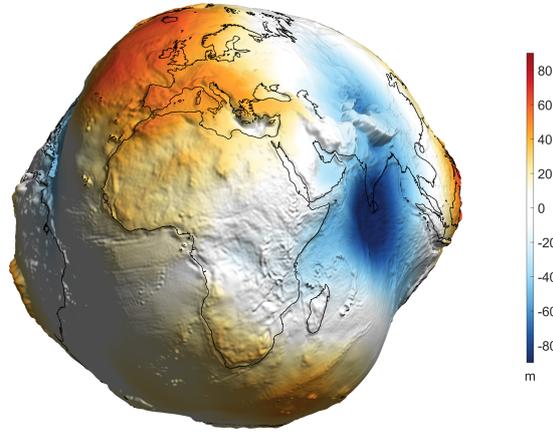
Come anticipato nell'introduzione di questo capitolo, il modello utilizzato per descrivere la dinamica del problema è a 4-corpi e tiene in considerazione non soltanto l'interazione tra il satellite e la Terra, ma anche quella con il Sole e la Luna. Un modello di questo tipo rende molto complicato descrivere il moto dello spacecraft, a causa delle forze e degli effetti perturbativi in gioco, che interferiscono con la sua traiettoria, deviandola. Per questo motivo, non è possibile analizzare la dinamica del problema semplicemente con il modello appena descritto, ma è necessario introdurre una serie di termini correttivi che tengano in considerazione le perturbazioni. Queste si suddividono in disturbi dovuti alla non perfetta sfericità della Terra, perturbazione di tipo lunisolare e pressione di radiazione solare. La resistenza atmosferica viene, in questo caso, trascurata, a causa della grande distanza dalla Terra cui si trova il satellite, ma in un caso più generico, va tenuta in considerazione.

6.1.1 Non perfetta sfericità della Terra

Nonostante le traiettorie analizzate si trovino ad una distanza molto elevata dalla Terra e risentano, quindi, in modo molto contenuto delle variazioni del potenziale gravitazionale terrestre, è necessario considerarle, per un'analisi più completa. Esse sono dovute alla non perfetta sfericità della Terra, dalla quale deriva un campo d'attrazione gravitazionale non uniforme. La Terra, infatti, non è una sfera perfetta, bensì un geoide, schiacciato ai poli e più gonfio all'equatore, in corrispondenza del quale risulta più massiva. Di conseguenza, il potenziale gravitazionale esercitato non è uniforme in tutte le direzioni (a partire dal centro della Terra), ma dipende dalla posizione in cui ci si trova. Per tener conto di questo effetto, non si può più considerare valido il modello classico introdotto nel paragrafo 2, ma è necessario introdurre uno in grado di approssimare la situazione appena descritta. La scelta è ricaduta su un modello chiamato *Earth Geopotential Model (EGM) 2008*, realizzato dalla *National Geospatial-intelligence Agency (NGA)* grazie ai dati raccolti dalla sonda *Gravity Recovery And Climate Experiment (GRACE)*, lanciata nel 2002 ed in grado di mappare le anomalie gravitazionali della Terra. *EGM 2008* considera un modello di perfetta sfericità, al quale aggiunge una serie di coefficienti che tengono in considerazione in modo separato tutti gli effetti della non perfetta simmetria. In questo modo, il potenziale viene calcolato con l'espressione

$$\Phi_{EG} = -\mu r \sum_{n=2}^N \left(\frac{r_E}{r}\right)^n \sum_{m=0}^n (C_{nm} \cos m\lambda + S_{nm} \sin m\lambda) P_{nm}(\sin \varphi) \quad (6.41)$$

nella quale μ è il parametro gravitazionale della Terra, r_E è il semiasse maggiore dell'ellissoide, φ e λ rappresentano la latitudine e la longitudine terrestre e P_{nm} , C_{nm} e S_{nm} rappresentano la funzione correttiva ed i suoi coefficienti.



Geoid height (EGM2008, nmax=1000)

Figura 6.3: Modello di campo gravitazionale EGM2008 - Credits: A. Bezděk in *MATLAB script for visualizing geoid height and other elevation data on rotating 3D globe* (2013)

6.1.2 Perturbazione lunisolare

Un altro fattore perturbativo molto rilevante, del quale bisogna tenere conto in fase di definizione del modello dinamico, è la perturbazione di altri corpi celesti; in questo caso, vengono considerate quelle del Sole e della Luna. L'intensità delle forze che questi corpi esercitano sul satellite, deviandone la traiettoria, dipende dalla loro posizione rispetto ad esso. Le posizioni rispetto alla Terra vengono determinate grazie al database di effemeridi *DE430JPL*, espresse nel sistema di riferimento *International Celestial Reference Frame (ICRF)*, che è pressoché coincidente con il *EME2000*³. La procedura che permette di tenere in considerazione le perturbazioni, è così strutturata: si consideri un generico corpo celeste perturbatore (indicato con la lettera b); la posizione di b rispetto alla Terra può essere espressa come

$$\mathbf{r}_b = x_b \mathbf{I} + y_b \mathbf{J} + z_b \mathbf{K} \quad (6.42)$$

³Dato che i due sistemi di riferimento sono molto simili, in questa analisi le piccole differenze tra i due vengono trascurate, considerandoli coincidenti

L'azione perturbativa che b esercita sul satellite, in termini di accelerazione, è espressa dall'equazione

$$\mathbf{a}_{bg} = - \left(\frac{\mu_b}{R_b^3} \right) \mathbf{R}_b - \left(\frac{\mu_b}{r_b^3} \right) \mathbf{r}_b \quad (6.43)$$

dove il termine \mathbf{r}_b è la posizione relativa della Terra rispetto a b (come mostrato in figura 6.4) e \mathbf{R}_b quella del satellite, pari a

$$\mathbf{R}_b = \mathbf{r} - \mathbf{r}_b \quad (6.44)$$

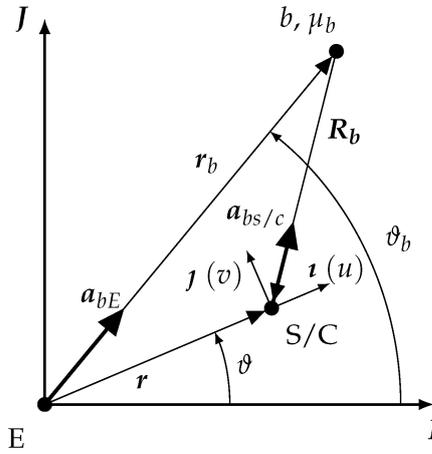


Figura 6.4: Rappresentazione delle perturbazioni - Credits: L. Casalino e L. Mascolo in *Optimal Escape from Sun-Earth and Earth-Moon L2 with Electric Propulsion* (2022) [9]

Procedendo a proiettare l'azione perturbativa in un sistema di riferimento topocentrico, l'accelerazione ottenuta con l'equazione 6.43 si scompone in tre contributi, nelle direzioni u , v e w , funzione delle variabili r , θ e ϕ :

$$(\mathbf{a}_{bg})_u = \frac{\mu_b}{R^3} [(r_b)_u - r] - \frac{\mu_b}{r_b^3} (r_b)_u \quad (6.45)$$

$$(\mathbf{a}_{bg})_v = \frac{\mu_b}{R^3} (r_b)_v - \frac{\mu_b}{r_b^3} (r_b)_v \quad (6.46)$$

$$(\mathbf{a}_{bg})_w = \frac{\mu_b}{R^3} (r_b)_w - \frac{\mu_b}{r_b^3} (r_b)_w \quad (6.47)$$

con

$$R = \sqrt{[r - (r_b)_u]^2 + (r_b)_v^2 + (r_b)_w^2} \quad (6.48)$$

Le equazioni ottenute si riferiscono ad un generico corpo b , considerato singolarmente; pertanto, per determinare l'azione perturbativa lunisolare è necessario calcolare in maniera separata il contributo del Sole e quello della Luna, per poi sommarli:

$$(\mathbf{a}_{lsp})_u = (\mathbf{a}_{lg})_u + (\mathbf{a}_{sg})_u \quad (6.49)$$

$$(\mathbf{a}_{lsp})_v = (\mathbf{a}_{lg})_v + (\mathbf{a}_{sg})_v \quad (6.50)$$

$$(\mathbf{a}_{lsp})_w = (\mathbf{a}_{lg})_w + (\mathbf{a}_{sg})_w \quad (6.51)$$

6.1.3 Pressione di radiazione solare

Un altro fattore perturbativo da considerare nell'analisi delle traiettorie è la pressione di radiazione solare. Questo fenomeno si genera a partire dall'emissione di particelle solari energetiche (fotoni) che vanno ad impattare contro la superficie del satellite, cedendogli la propria quantità di moto. Gli impatti dei fotoni esercitano una vera e propria pressione, che si traduce in una forza e, dunque, un'accelerazione. Il suo valore è molto contenuto ma, in ogni caso, non trascurabile. La pressione esercitata da un singolo fotone che impatta su un corpo ad una distanza R dal Sole è data dalla formula

$$p = \frac{L_s}{4\pi c R^2} \quad (6.52)$$

dove L_s è un parametro che rappresenta la potenza totale irradiata dal Sole e c è la velocità della luce nel vuoto. Ad una distanza R^* pari a quella tra il Sole e la Terra ($\simeq 150$ milioni di km), la pressione esercitata da un singolo fotone è $p^* = 4.55682 \cdot 10^{-6} \frac{N}{m^2}$. Invece, l'azione perturbativa complessiva causata dalla SRP, agente su un corpo sferico, si esprime con l'equazione

$$(\mathbf{a}_{srp}) = (1 + \eta)p^* \left(\frac{R^*}{R}\right)^2 \frac{S \mathbf{R}}{m R} = \frac{\Gamma \mathbf{R}}{m R^3} \quad (6.53)$$

dove η è il fattore di riflettività (assunto $\eta = 0.7$), un parametro che dipende dal materiale e dall'orientazione della superficie del satellite e varia tra 0, per un corpo in grado di assorbire completamente le radiazioni, e 1, per un corpo che riflette completamente la radiazione. S , invece, indica la superficie dello spacecraft sulla quale impatta la radiazione solare, mentre \mathbf{R} è la distanza che lo separa da Sole e m la sua massa. Anche in questo caso l'effetto perturbativo può essere scomposto nelle tre direzioni u , v e w

$$(\mathbf{a}_{srp})_u = \frac{\Gamma}{m R^3} [(\mathbf{r}_s)_u - \mathbf{r}] \quad (6.54)$$

$$(\mathbf{a}_{srp})_v = \frac{\Gamma}{m R^3} (\mathbf{r}_s)_v \quad (6.55)$$

$$(\mathbf{a}_{srp})_w = \frac{\Gamma}{mR^3}(\mathbf{r}_s)_w \quad (6.56)$$

Si noti come vi sia un'analogia tra l'azione perturbatrice della pressione di radiazione solare e l'attrazione gravitazionale esercitata da un corpo (per esempio il Sole) sul satellite: entrambe dipendono in maniera inversamente proporzionale dal quadrato della distanza che separa i due corpi. I due effetti, però, pur agendo lungo la stessa direzione, hanno verso opposto: l'attrazione gravitazionale, infatti, attira il satellite verso il Sole, mentre la SRP tende a spingerlo in direzione opposta. Infine, l'analisi deve tenere in considerazione anche il fatto che questa tipologia di disturbo non sia sempre presente, ma solamente quando il satellite è illuminato dal Sole. Nelle porzioni di traiettoria in cui esso si trova all'ombra della Terra, infatti, l'effetto perturbativo non si verifica, poiché i fotoni non impattano sul corpo.

6.2 Definizione del caso di studio

Nel corso di questa sezione verrà presentato il problema in esame, definendo i parametri iniziali noti e le incognite da determinare durante l'analisi, sia per quanto riguarda il satellite e le sue specifiche tecniche, che per i suoi parametri orbitali durante l'intera manovra. Verrà, inoltre, illustrato il funzionamento del codice di calcolo *el22ocube*, utilizzato durante le simulazioni della manovra di evasione.

6.2.1 Dati del problema

Per lo studio della manovra di escape viene ipotizzato di analizzare il moto di un piccolo satellite, appartenente alla categoria dei *CubeSat*, a bordo del quale è montato un propulsore elettrico a ioni. Nella tabella 6.1 sono riportate le principali specifiche tecniche del satellite e del propulsore.

Massa m	21 kg
Impulso specifico I_s	2100 s
Efficienza propulsore η	0.625
Spinta T	1 mN
Superficie S	0.12 m^2

Tabella 6.1: Specifiche tecniche del satellite utilizzato nelle simulazioni

Per il calcolo della perturbazione dovuta alla *SRP*, si considerano una superficie del satellite sulla quale impatta la radiazione solare $S = 0.12 \text{ m}^2$ ed un fattore di riflettività $\eta = 0.7$, con un potenza irradiata dal Sole pari a $3.846 \cdot 10^{26} \text{ W}$. Il

limite superiore dell'atmosfera è fissato ad una quota $z = 200 \text{ km}$: come anticipato nell'introduzione del paragrafo 6.1, in questo caso la resistenza atmosferica viene trascurata, poiché il satellite si trova ad una distanza dalla Terra molto maggiore rispetto a z ; tuttavia, questo valore introdotto nel codice di calcolo verrà interpretato come limite inferiore di quota, che il satellite non potrà mai superare per non compromettere la missione. La posizione iniziale della traiettoria viene fissata in corrispondenza del punto *SEL2*, a $1.5 \cdot 10^6 \text{ km}$ dalla Terra, sul prolungamento dell'asse immaginario che la congiunge al Sole, dalla parte opposta rispetto a quest'ultimo. Il punto di arrivo, invece, viene fissato ad una distanza $r_f = 3 \cdot 10^6 \text{ km}$ dalla Terra.

6.2.2 Codice di calcolo

Per effettuare l'ottimizzazione delle traiettorie di escape da *SEL2* è stato utilizzato un codice di calcolo scritto in linguaggio *Fortran*. Il codice, chiamato *el22ocube*, ha una struttura che implementa tutti gli aspetti teorici affrontati nei capitoli precedenti: esso sfrutta, infatti, un metodo di ottimizzazione indiretto per la risoluzione del problema, tenendo in considerazione le perturbazioni legate alla non perfetta sfericità della Terra, all'attrazione del Sole e della Luna ed alla pressione di radiazione solare. Nella procedura di calcolo vengono definite 14 variabili, indicate con la sigla *NY*:

- r , θ e φ per la posizione;
- u , v e w per la velocità;
- λ_r , λ_θ , λ_φ , λ_u , λ_v , λ_w come variabili aggiunte per la posizione e la velocità;
- m per la massa;
- λ_m come variabile aggiunta per la massa.

A queste si aggiungono due ulteriori variabili:

- t_1 , ossia il tempo in cui avviene lo spegnimento del propulsore;
- t_2 , ossia il tempo finale della traiettoria.

Complessivamente, quindi, viene definito un problema a 16 variabili (indicate dal parametro $Nmax = 16$). Tra queste, quelle incognite (*Kmax*) sono 8:

- λ_r , λ_θ , λ_φ , λ_u , λ_v , λ_w ;
- t_1 e t_2 .

Il programma considera due diverse possibili fasi nelle quali si può trovare il satellite durante la traiettoria, ossia a motore acceso, oppure spento. Per il calcolo della posizione di un corpo celeste rispetto alla Terra nell'istante di tempo considerato e per la determinazione dei suoi parametri orbitali si utilizzano due funzioni definite appositamente, ossia *eph3d* e *param*. Inoltre, viene definita una funzione (*BVNGL*) per valutare la convergenza, o meno, del metodo risolutivo: essa, infatti, riceve in input le condizioni iniziali, le integra, determina l'errore e lo corregge, resituendo un segnale di ritorno in output. Se il segnale risulta pari al valore -4 , allora significa che il sistema è andato a convergenza ed ha portato una soluzione corretta; in caso contrario, in base al valore restituito, è possibile risalire al problema riscontrato durante l'integrazione. Nel complesso, il codice è costituito da numerose subroutine e cicli per la determinazione della posizione dei diversi corpi celesti nei vari sistemi di riferimento, per il calcolo delle perturbazioni e la valutazione del loro impatto sulla traiettoria e per il calcolo dell'Hamiltoniano. Tutte le modifiche al codice in *Fortran* vengono effettuate su un file di testo, dopodiché è necessario generare un file eseguibile attraverso il programma *F90*, installato su un sistema operativo virtuale *Windows XP 32 bit*. Infine, è possibile lanciare l'eseguibile direttamente dal *prompt* dei comandi, fornendo in input alcuni parametri richiesti per la convergenza, tra i quali la frazione di correzione da utilizzare ($r_{min} < 1$) ed il numero massimo di iterazioni *jmax*, generalmente posto pari a 2000. Una volta completato questo passaggio, il codice è pronto per l'avvio della simulazione e richiede che vengano inseriti in input la data di partenza t_0 , la durata desiderata della traiettoria ed il valore di C_3 all'escape.

Capitolo 7

Analisi e risultati

In questo capitolo vengono presentate le analisi effettuate sulla traiettoria di fuga dalla sfera di influenza terrestre, con partenza dal punto lagrangiano L2 del sistema Sole-Terra, meglio noto come *SEL2*. L'obiettivo è identificare e comprendere i parametri coinvolti nella manovra di evasione ed analizzare la loro influenza sulla traiettoria. Inizialmente, lo spacecraft si trova nel punto *SEL2*, a 1.5 milioni di km dalla Terra, e deve arrivare a 3 milioni di km, distanza alla quale l'attrazione gravitazionale della Terra è sufficientemente piccola da poterla trascurare in favore di quella del Sole. Tale distanza rappresenta, pertanto, il passaggio sotto la sfera d'influenza del Sole ed il raggio finale della manovra di escape. Lo studio è stato suddiviso in varie fasi, volte ad approfondire i diversi aspetti e ad analizzare tutti i parametri coinvolti dalla manovra di evasione. In un primo momento si è svolta una simulazione delle diverse evasioni possibili, analizzando il comportamento della traiettoria al variare della data di partenza t_0 e della durata della traiettoria di escape, compresa tra t_0 e t_f (istante in cui viene raggiunto il limite considerato della sfera di influenza terrestre). Per queste simulazioni, il valore di C_3 all'escape è stato lasciato libero, in modo da poterne valutare l'andamento in funzione delle diverse combinazioni di data di partenza e durata di missione. Il tempo iniziale t_0 , invece, è stato fornito sotto forma di un tempo adimensionale, rappresentativo del tempo trascorso a partire dalla *epoch*¹ del *J2000*, ossia il 01 Gennaio 2000 alle ore 12:00. L'adimensionalizzazione è stata effettuata basandosi sull'assunzione

$$1 \text{ anno} = \Delta T = 2\pi \tag{7.1}$$

¹In astronomia, una *epoch* (epoca di riferimento) è un istante di tempo utilizzato come riferimento per una grandezza astronomica variabile nel tempo. Per esempio, può essere utilizzato per le coordinate celesti o gli elementi orbitali di un corpo celeste.

motivata dalla periodicità della Luna: con questa scala, infatti, il passo 1 vale

$$passo = 1 = 58.09 \text{ giorni} \quad (7.2)$$

corrispondente circa a due volte il periodo sinodico della Luna ², pari a 29.53 giorni. La modifica effettuata al codice ha permesso di creare un primo database di risultati, simulando l'escape per 4 diverse date di partenza t_0 , comprese tra 160 e 163, e per durate comprese tra i 70 ed i 160 giorni. Il valore $t_0 = 160$ corrisponde alla data del 19/06/2025, mentre 163 corrisponde al giorno 10/12/2025. Per il ciclo sul t_0 , il passo di integrazione scelto è stato pari a 1, determinando, quindi, una serie di simulazioni a cadenza di 58 giorni sulla data di partenza. Per quanto riguarda la durata, il passo di integrazione è stato scelto pari a 1 giorno. I valori estremi dell'intervallo di iterazione sono stati determinati da limitazioni fisiche legate alla natura della missione per quanto riguarda il valore minimo (70) ed arbitrariamente per quanto concerne quello massimo (160): il valore 70, infatti, rappresenta la minima durata raggiungibile con la tecnologia ed il sistema propulsivo utilizzato, mentre il valore di 160 è stato scelto poichè sufficientemente elevato da garantire la copertura di tutte le soluzioni possibili. Infine, l'analisi è stata raffinata ed il passo di iterazione sul t_0 è stato modificato ed imposto pari a

$$passo = 0.12 = 6.97 \text{ giorni} \quad (7.3)$$

in modo tale che sull'arco di 5 simulazioni il periodo temporale coperto fosse pari ad un periodo sinodico Lunare. Questa modifica ha permesso di valutare l'influenza della Luna sulla manovra di evasione, studiando le perturbazioni legate alla sua posizione nello spazio al momento della partenza e gli effetti sulla traiettoria del satellite. Nel dettaglio, le analisi per $t_0 = 160$ e $t_0 = 160.48$ sono collocate ad una distanza temporale di circa 28 giorni, permettendo di verificare, o meno, la periodicità dell'influenza Lunare sulla missione.

7.1 Creazione del database iniziale

Nella prima fase dello studio, si è proceduto a creare un database di soluzioni al variare del t_0 e della durata, in modo da poter classificare e tabulare i risultati in termini di data di spegnimento dei motori, data di arrivo, massa finale e valore di C_3 all'escape. I dati forniti come input sono stati:

²Il periodo (o mese) sinodico Lunare è il tempo impiegato dalla Luna per riallineare la propria posizione con il Sole e la Terra, dopo aver compiuto una rivoluzione attorno alla Terra. Si differenzia dal mese siderale che è, invece, il tempo impiegato dalla Luna ad occupare la stessa posizione apparente tra le stelle fisse, se osservata dalla Terra, pari a circa 27.32 giorni

- Data di partenza (prima iterazione): $t_0 = 160 = 19/06/2025$;
- Durata (prima iterazione): $durata = 70$ giorni;
- C_3 : libero;

Nella tabella 7.1 si riporta una porzione del database costruito, nella quale vengono rappresentate le date di spegnimento dei motori: la manovra, infatti, prevede una prima fase propulsa, seguita da un trasferimento a motori spenti, favorito dalla perturbazione solare. Il passo di iterazione considerato è stato pari a 1 per il t_0 (per un totale di 4 set di iterazioni, da 160 a 163) e pari a 1 giorno per la durata. Gli estremi dell'intervallo sulla durata sono stati 70, poiché minimo valore in grado di garantire la fattibilità della manovra, e 160; l'estremo superiore, in realtà, è stato determinato singolarmente per ciascun set di soluzioni: questo valore, infatti, non è noto a priori ma rappresenta la massima durata possibile date le condizioni iniziali. A tal proposito, si noti la casella corrispondente ad una manovra con $t_0 = 163$ e $durata = 70$ giorni: le simulazioni effettuate non sono state in grado di trovare una soluzione per tale scenario di missione poiché, a causa di alcuni fattori perturbativi, in particolare la posizione della Luna rispetto alla Terra, sarebbe stato necessario mantenere attivi i motori per più di 70 giorni per concludere l'escape in soli 70 giorni, determinando uno scenario impossibile. Nella tabella 7.1, così come nella 7.2 e nella 7.3, è stata riportata solamente una porzione dei risultati, con un passo di 5 giorni sulla durata, ed un intervallo ridotto sulla durata, compreso tra 70 e 130 giorni. I risultati completi sono, invece, riportati nei grafici in figura 7.2 e 7.3.

Duration [days]	Departure date			
	160	161	162	163
	19/06/2025	16/08/2025	13/10/2025	10/12/2025
130	20/06/2025	16/08/2025	13/10/2025	11/12/2025
125	20/06/2025	17/08/2025	14/10/2025	12/12/2025
120	21/06/2025	17/08/2025	14/10/2025	12/12/2025
115	22/06/2025	18/08/2025	15/10/2025	13/12/2025
110	23/06/2025	19/08/2025	15/10/2025	14/12/2025
105	24/06/2025	20/08/2025	17/10/2025	15/12/2025
100	25/06/2025	21/08/2025	18/10/2025	17/12/2025
95	28/06/2025	23/08/2025	20/10/2025	19/12/2025
90	30/06/2025	26/08/2025	22/10/2025	21/12/2025
85	04/07/2025	29/08/2025	26/10/2025	25/12/2025
80	09/07/2025	03/09/2025	31/10/2025	30/12/2025
75	17/07/2025	11/09/2025	07/11/2025	07/01/2026
70	02/08/2025	25/09/2025	21/11/2025	-

Tabella 7.1: Data di spegnimento dei motori t_1

La tabella 7.1 è così strutturata: per ciascuna data di partenza, riportata sia come tempo adimensionalizzato che come data in formato gg/mm/aaaa, viene indicato il cosiddetto $t1$, ossia la data in cui vengono spenti i motori del satellite, dopo una prima fase propulsa, e si lascia che sia l'effetto del Sole a spingerlo verso l'escape. Il valore di $t1$ varia in base alla durata della missione: per escape rapide, infatti, è necessario che i motori del satellite siano attivi per diverse settimane, in modo da fornire la spinta necessaria. Per manovre più lunghe, invece, bastano pochi giorni, o ore, di fase propulsa. Ciò è dovuto al fatto che all'aumentare della durata della missione, lo spacecraft segua una traiettoria meno energetica, che richiede una minor velocità orbitale e, quindi, una minor spinta del motore. Questo effetto è riscontrabile nella tabella 7.2, che riporta il valore della massa del satellite al termine dell'evasione, ottenuto sottraendo alla massa iniziale (pari a 21 kg) la massa di propellente consumato per la manovra: per escape rapide, con i motori attivi per diversi giorni, i consumi di propellente sono più elevati, determinando masse finali minori. Viceversa, manovre lente e lunghe, che prevedono un'accensione dei motori di poche ore, determinano masse finali pressoché identiche a quella iniziale.

Duration [days]	Departure date			
	160	161	162	163
	19/06/2025	16/08/2025	13/10/2025	10/12/2025
130	20,9953	20,9993	20,9999	20,9946
125	20,9932	20,9974	20,9981	20,9928
120	20,9906	20,9950	20,9958	20,9905
115	20,9906	20,9950	20,9958	20,9905
110	20,9834	20,9882	20,9894	20,9838
105	20,9783	20,9833	20,9846	20,9789
100	20,9716	20,9768	20,9785	20,9725
95	20,9629	20,9686	20,9705	20,9643
90	20,9516	20,9578	20,9601	20,9535
85	20,9366	20,9435	20,9462	20,9389
80	20,9152	20,9233	20,9264	20,9176
75	20,8814	20,8916	20,8953	20,8835
70	20,8138	20,8315	20,8368	-

Tabella 7.2: Massa finale all'escape m_f [kg]

In generale, in questa fase i consumi sono piuttosto ridotti, poiché il punto di partenza dell'escape si trova già ad una distanza $r = 1.5 \cdot 10^6$ km dal centro della Terra e l'attrazione gravitazionale di quest'ultima varia proporzionalmente a $1/r^2$; per di più, l'attrazione gravitazionale terrestre è proprio il fattore che influisce maggiormente sulla traiettoria del satellite, all'interno della sfera d'influenza della

Terra. Infine, il punto di partenza dell'escape non è casuale, ma si tratta del lagrangiano *SEL2*, collocato in un punto tale per cui l'attrazione combinata del Sole e della Terra uguaglia la forza centrifuga che mantiene il satellite in posizione; per questo motivo, il satellite rimane in un'orbita stabile nel punto *SEL2* a costo praticamente nullo ed un'evasione da questo punto non deve vincere un'intensa forza attrattiva come, invece, accadrebbe partendo direttamente dalla Terra. Per quanto riguarda la valutazione del t_0 , invece, essa assume notevole importanza dal punto di vista della posizione favorevole, o meno, della Luna al momento della partenza. Quest'ultima, infatti, nella sua rivoluzione attorno alla Terra, percorrerà in successione tratti di orbita favorevole in termini di spinta per il satellite e tratti sfavorevoli (effetto frenante), per un certo numero di volte, in base alla durata dell'evasione ed alla data di inizio missione. In figura 7.1 sono raffigurate le precedenti considerazioni: la curva rossa rappresenta, infatti, un tratto di circa un mese della traiettoria di escape del satellite, a partire da SEL2. La curva blu rappresenta, invece, l'orbita terrestre, mentre il punto nero indica la posizione della Luna per istanti di tempo distanti tra loro una settimana. Dal grafico si nota come la posizione reciproca tra il satellite e la Luna vari notevolmente nel corso del mese, con alcuni tratti in cui quest'ultima si trova in posizione avanzata lungo l'asse x ed altri in posizione arretrata. Per chiarezza, si noti come la figura 7.1 sia una semplice illustrazione esplicativa sul piano x-y di quella che è la posizione dei corpi, mentre nella realtà ci si trova in uno spazio tridimensionale. Ciò spiega anche il motivo per cui in alcuni tratti la Luna sembri quasi sovrapporsi alla Terra.

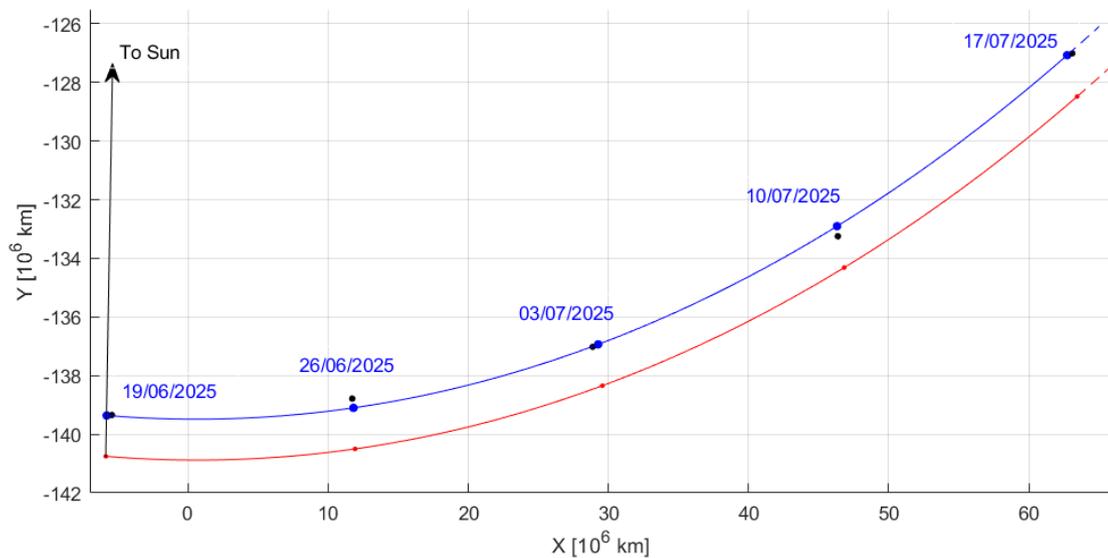


Figura 7.1: Posizione di satellite, Terra e Luna nell'arco del primo mese di escape

Completivamente, se la durata dell'orbita è tale da permettere al satellite di godere

maggiormente della spinta della Luna (effetto benefico), si tradurrà in un minor consumo di propellente ed in una maggiore energia all'escape; viceversa, se la durata sarà tale da avere una prevalenza dell'effetto frenante, i consumi saranno maggiori e l'energia all'escape minore. In sintesi, converrebbe trovarsi più lontani dalla Luna quando essa si trova nella porzione di orbita sfavorevole e più vicini ad essa nei tratti favorevoli. La situazione ideale, perciò, è quella per cui nell'istante iniziale della traiettoria la Luna si trovi all'inizio del proprio tratto di orbita favorevole. La tabella 7.3, infine, riporta il valore dell'energia residua del satellite al momento dell'escape, in km^2/s^2 . Tale valore assume un andamento sinusoidale, con una serie di oscillazioni legate al moto della Luna ed alla sua azione perturbativa.

Duration [days]	Departure date			
	160	161	162	163
	19/06/2025	16/08/2025	13/10/2025	10/12/2025
130	0,1993	0,2268	0,2271	0,1996
125	0,1833	0,2101	0,2115	0,1846
120	0,1659	0,1957	0,2031	0,1814
115	0,1596	0,1933	0,2077	0,1911
110	0,1695	0,2053	0,2225	0,2063
105	0,1769	0,2114	0,2289	0,2123
100	0,1690	0,1995	0,2159	0,1991
95	0,1505	0,1787	0,1955	0,1805
90	0,1318	0,1609	0,1820	0,1734
85	0,1277	0,1572	0,1828	0,1802
80	0,1414	0,1704	0,1970	0,1961
75	0,1581	0,1826	0,2071	0,2083
70	0,1870	0,1998	0,2199	-

Tabella 7.3: Energia finale all'escape, C_3 [km^2/s^2]

Per una maggiore accuratezza, si riportano alcuni grafici rappresentativi dei precedenti risultati, ottenuti raffigurando in un sistema di riferimento cartesiano i valori di mf e C_3 in relazione alla durata della missione. Si noti che sull'asse delle ascisse non vi è un tempo, ma una durata di missione: ciò significa che l'andamento raffigurato non è l'evoluzione nel tempo della grandezza, ma il luogo dei punti dei valori assunti dalla grandezza per le diverse durate della manovra di escape. La linea nera tratteggiata in figura 7.2 rappresenta la massa iniziale del satellite, pari a 21 kg ; le curve della massa finale tendono ad essa per durate di missione molto lunghe, poiché necessitano di spinte brevi e, di conseguenza, consumi di propellente molto contenuti. Viceversa, durate brevi comportano spinte e consumi più elevati.

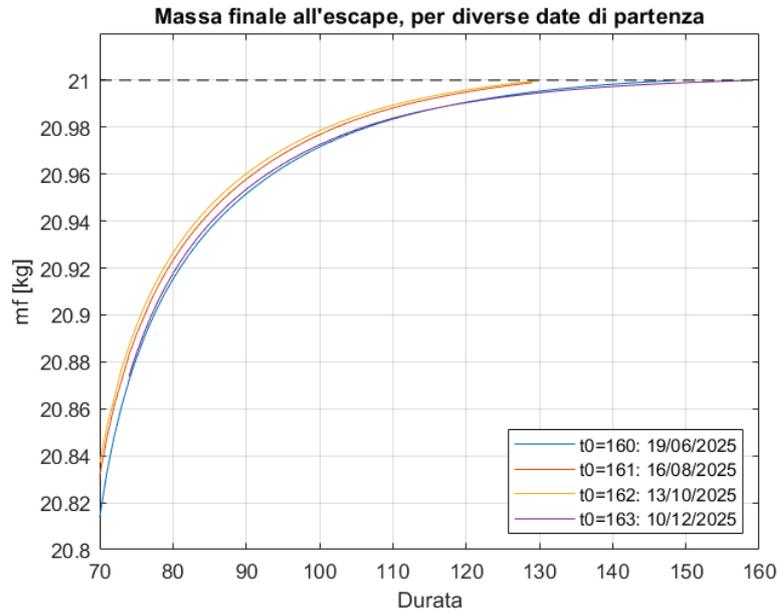


Figura 7.2: Massa finale all'escape [kg] in funzione della durata, per diversi t_0

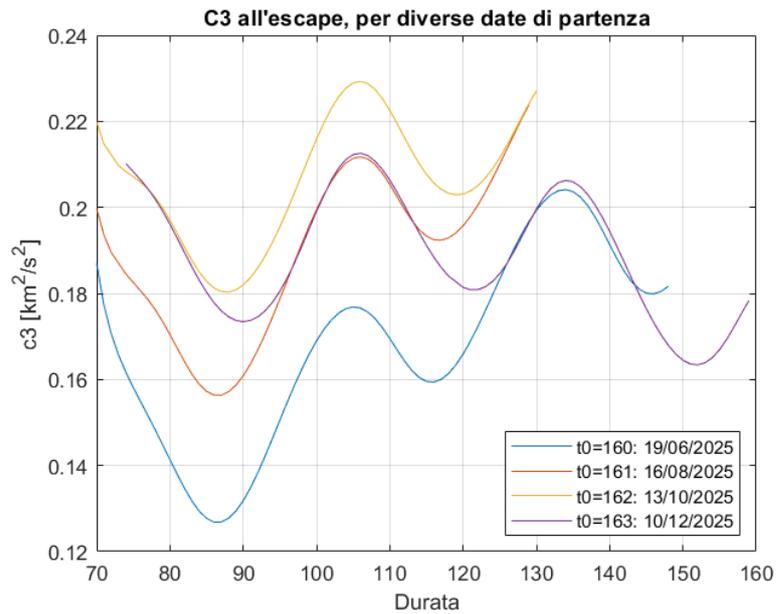


Figura 7.3: Energia all'escape [km^2/s^2] in funzione della durata, per diversi t_0

Ciascuna curva dei risultati trova riscontro, in termini di intervallo di raffigurazione, con il grafico 7.3, nel quale è rappresentata l'energia finale del satellite all'escape.

Come precedentemente evidenziato, tali intervalli sono dettati dalla natura della missione: le curve gialla e rossa, per esempio, rappresentano i casi con $t_0 = 161, 162$; per una durata di circa 130 giorni, raggiungono un valore di massa finale pressoché pari a quello iniziale. Questo punto rappresenta un limite di durata massima di escape date le condizioni di partenza: non risulterebbe, perciò, fattibile effettuare evasioni di durata più lunga, poiché la spinta fornita in questo modo è già minima. Le altre due curve, invece, raggiungono il massimo per durate superiori: la curva viola ($t_0 = 163$) permette di effettuare fughe con durate fino a 158 giorni; di contro, a differenza degli altri casi, non sono possibili durate inferiori ai 74 giorni (ciò spiega il valore assente nelle tabelle 7.1, 7.2 e 7.3). Queste differenze sono evidenziate nel grafico 7.3, che raffigura l'energia C_3 all'escape: il suo andamento sinusoidale è conseguenza della perturbazione Lunare sulla traiettoria del satellite. La distanza tra due massimi (o due minimi) di ciascuna curva è, infatti, pari a circa 29/30 giorni, corrispondente ai 29.53 giorni di un mese sinodico, a dimostrazione della forte influenza della posizione della Luna al momento della partenza. Tale effetto è motivato principalmente dalla spinta che viene fornita dai propulsori, nell'ordine dei $10^{-3} N$, sufficientemente piccola da essere soggetta a perturbazioni.

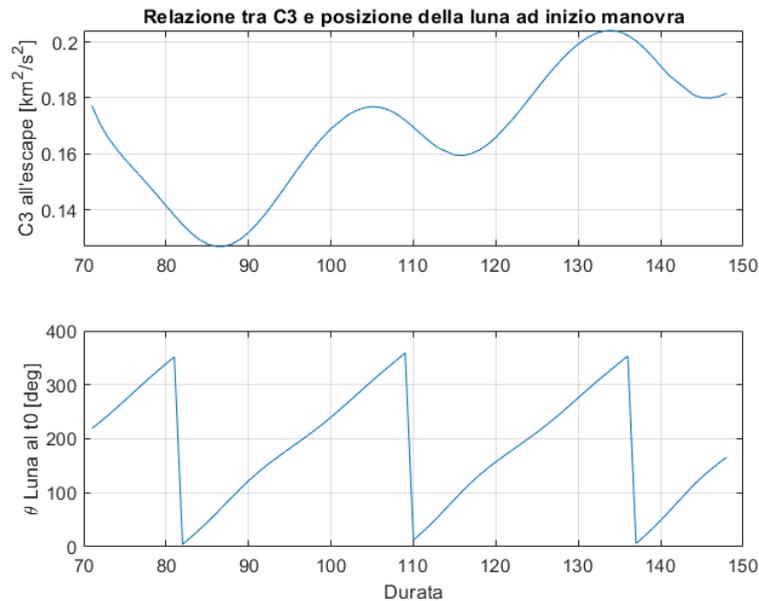


Figura 7.4: Confronto tra C_3 e posizione della Luna a $t_0 = 160$

Complessivamente, nonostante l'andamento sinusoidale legato all'azione perturbativa Lunare, con la durata della missione aumenta il periodo temporale in cui il satellite è soggetto all'azione solare: per questo motivo, la tendenza sarà quella di un aumento della velocità finale (e quindi di C_3). Ciò è evidente nel grafico 7.4,

che pone in relazione l'andamento di C_3 nel caso di $t_0 = 160$ e la posizione della Luna al momento dell'inizio della manovra (espressa in termini di angolo di fase θ).

7.2 Analisi al variare di t_0 e durata

Successivamente si è proceduto a raffinare i risultati ottenuti, con simulazioni più complete ed approfondite. Nel paragrafo sono riportate le analisi di tali risultati, per mezzo di considerazioni sia numeriche che grafiche, accompagnate da verifiche con la letteratura relativa alla meccanica orbitale ed alle manovre interplanetarie.

7.2.1 Escape da SEL2 con data di partenza t_0 fissata

In questa sezione sono analizzati i risultati delle simulazioni effettuate nel caso di data di partenza t_0 fissata; il parametro considerato come variabile è la durata della missione. Il valore di C_3 all'escape è lasciato libero. Le simulazioni sono state condotte per quattro diversi valori di t_0 , compresi tra 160 e 163, a completamento del database creato nel paragrafo 7.1. Per prima cosa si sono raffigurate le traiettorie di escape del satellite, al variare della durata, per le quattro diverse date di partenza. Per ciascun caso sono stati realizzati due grafici: uno posto in un sistema di riferimento geocentrico equatoriale e l'altro in uno eliocentrico equatoriale.

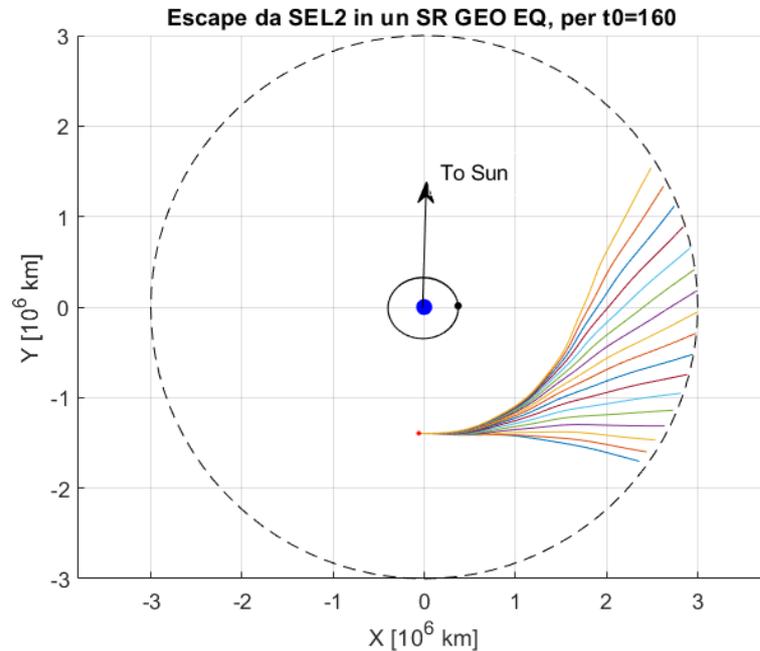


Figura 7.5: Escape da SEL2 per $t_0 = 160$: 19/06/2025, SR GEO EQ

Le traiettorie in figura 7.5 sono rappresentate in un sistema di riferimento geocentrico equatoriale, trasposto su un piano x-y, che non è altro che il piano equatoriale terrestre. L'asse z coincide con l'asse di rotazione terrestre e punta verso la Stella Polare, mentre l'asse x punta nella direzione del punto vernale ³. Ciascuna curva rappresenta la traiettoria percorsa dallo spacecraft per una data durata di missione; per motivi di chiarezza grafica, le durate riportate sono comprese nell'intervallo 70-150 giorni, con passo di 5 giorni. In tale sistema di riferimento geocentrico, considerata una velocità di escape non nulla (C_3 è stato lasciato libero durante l'ottimizzazione), le curve ottenute sono dei rami di iperbole non perfetta. All'aumentare della durata di missione, le traiettorie seguono percorsi e iperboli differenti, coprendo distanze più lunghe e portando ad una variazione dei valori di C_3 all'escape. La circonferenza nera raffigura l'orbita della Luna attorno alla Terra ed il punto nero indica la sua posizione al momento della partenza. Il punto rosso è *SEL2*. Si noti come per durate brevi l'escape tenda maggiormente ad un'iperbole perfetta e sia molto più diretta, rispetto a manovre più lunghe. All'aumentare della durata della missione, infatti, la traiettoria tende ad allungarsi ed incurvarsi verso la Terra, a causa del maggior tempo trascorso sotto l'influenza luni-solare.

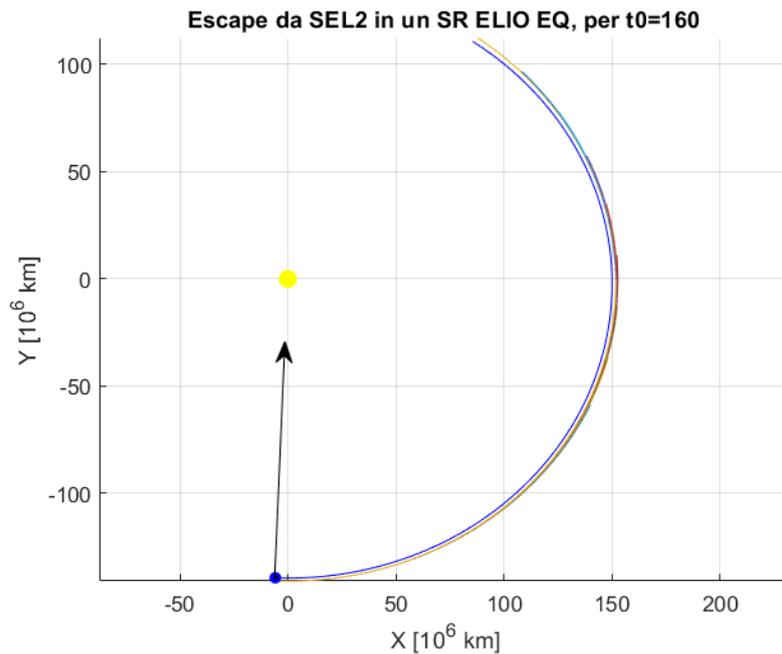


Figura 7.6: Escape da SEL2 per $t_0 = 160$: 19/06/2025, SR ELIO EQ

³Il punto vernale (o punto d'Ariete o punto gamma), è uno dei due punti equinoziali nei quali l'equatore celeste interseca l'eclittica.

Le traiettorie in figura 7.6 sono, invece, rappresentate in un sistema di riferimento eliocentrico equatoriale, anch'esso trasposto su un piano x-y. In questo caso, però, l'origine degli assi è posta nel centro del Sole, rappresentato da un punto giallo. La Terra è raffigurata da un punto blu e la freccia nera indica la direzione della congiungente Terra-Sole, sulla quale giace anche il punto di partenza della manovra *SEL2*. Da questo punto ha origine una famiglia di 8 diverse traiettorie di escape, caratterizzate da una durata crescente, con un passo di 10 giorni tra due curve successive. Infine, la curva blu più interna indica l'orbita terrestre attorno al Sole. La figura 7.7 è uno zoom sul grafico 7.6 e ne mostra una sezione nella quale sono rappresentate le diverse traiettorie di escape (curve colorate) e, ben distinta, l'orbita della Terra attorno al Sole. La traiettoria più esterna è quella di durata più breve e lo si può notare dal fatto che si concluda prima delle altre; procedendo verso l'interno, ci si sposta su traiettorie dalla durata maggiore, che arriveranno ai confini della sfera d'influenza terrestre dopo un viaggio sempre più lungo.

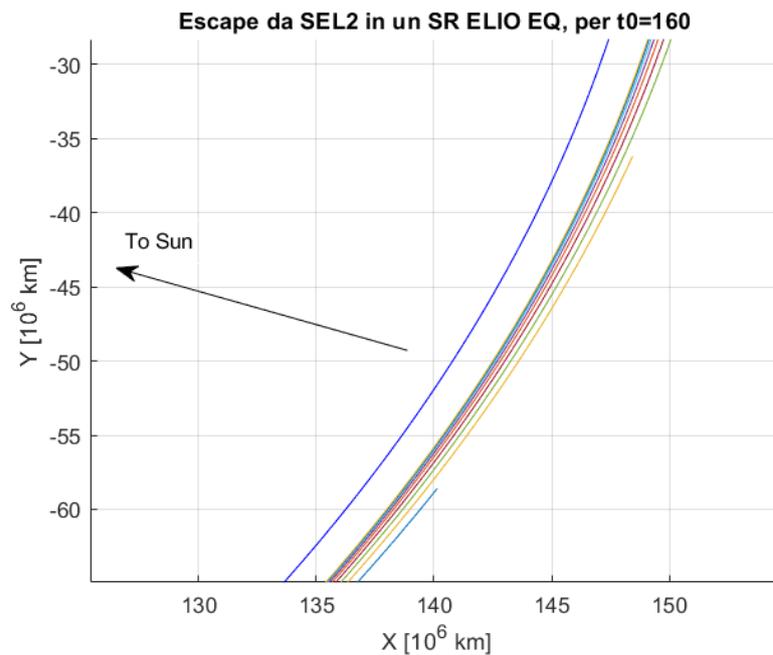


Figura 7.7: Ingrandimento della figura 7.6

Gli stessi grafici sono stati generati anche per i casi con date di partenza successive:

- $t_0=161$: 16/08/2025;
- $t_0=162$: 13/10/2025;
- $t_0=163$: 10/12/2025.

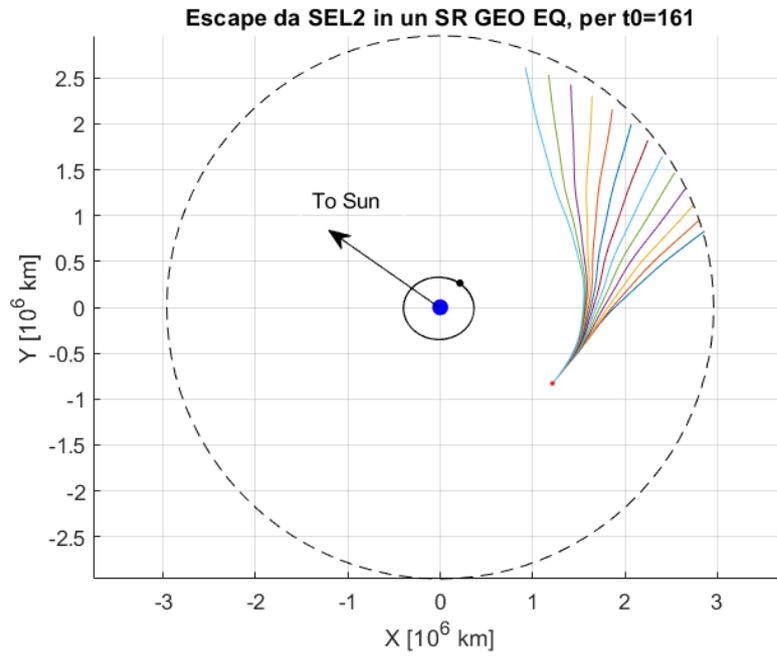


Figura 7.8: Escape da SEL2 per $t_0 = 161$: 16/08/2025, SR GEO EQ

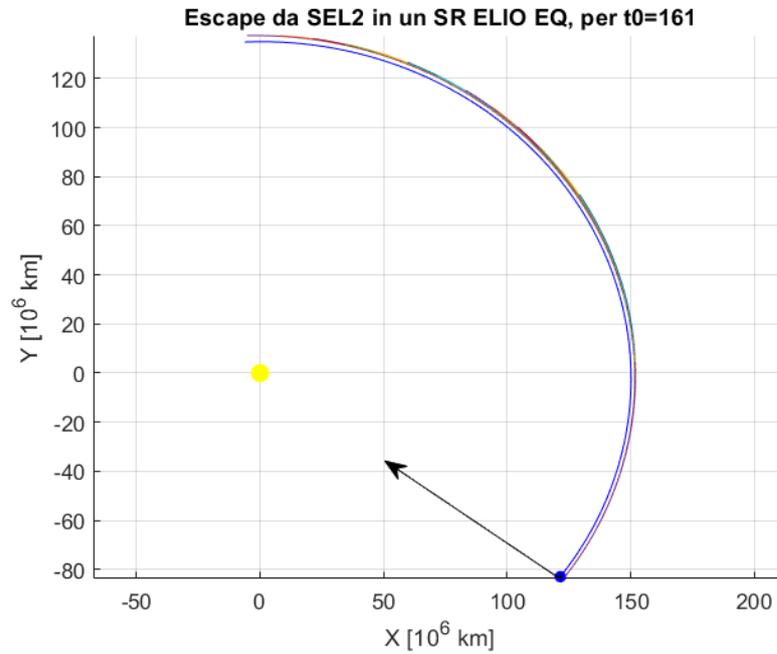


Figura 7.9: Escape da SEL2 per $t_0 = 161$: 16/08/2025, SR ELIO EQ

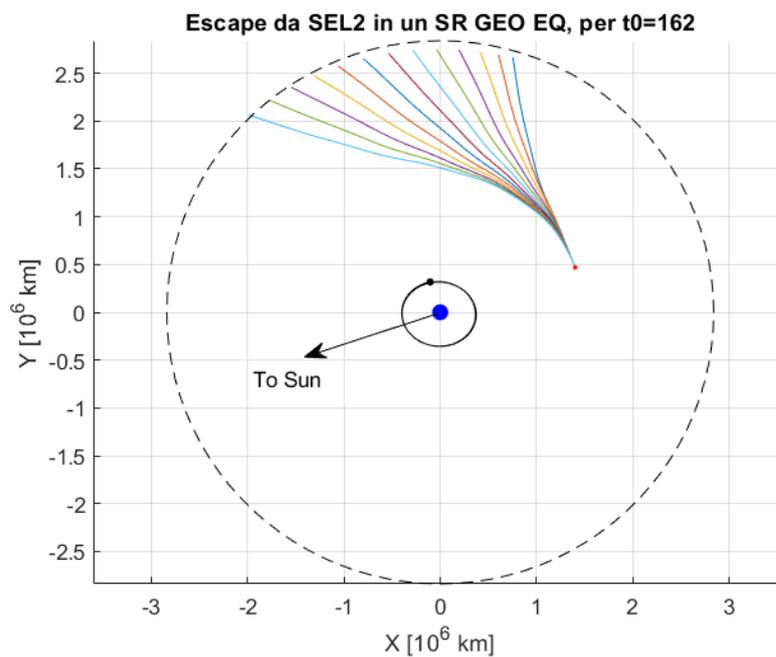


Figura 7.10: Escape da SEL2 per $t_0 = 162$: 13/10/2025, SR GEO EQ

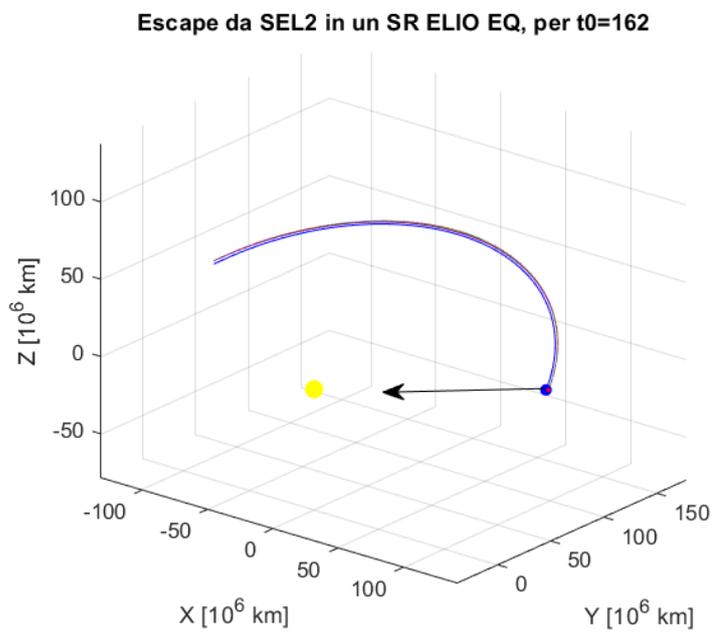


Figura 7.11: Escape da SEL2 per $t_0 = 162$: 13/10/2025, SR ELIO EQ

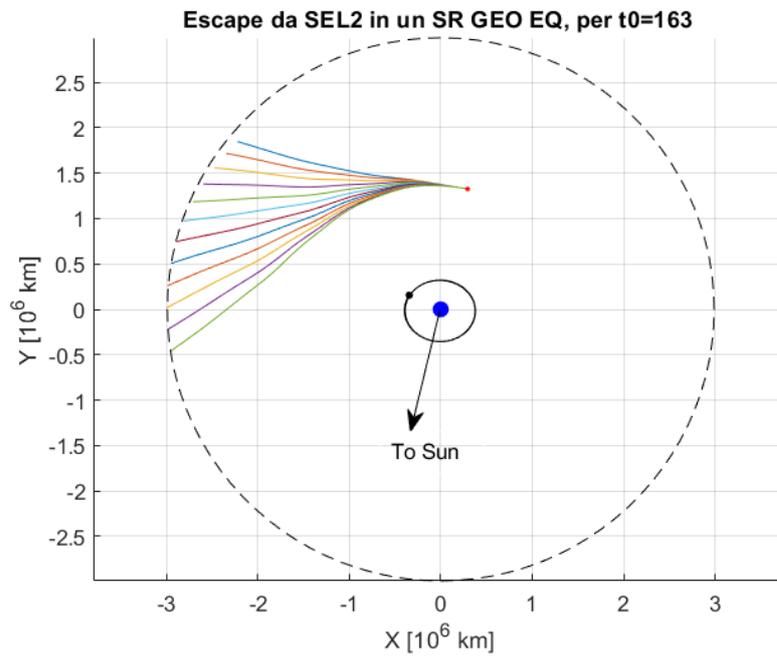


Figura 7.12: Escape da SEL2 per $t_0 = 163$: 10/12/2025, SR GEO EQ

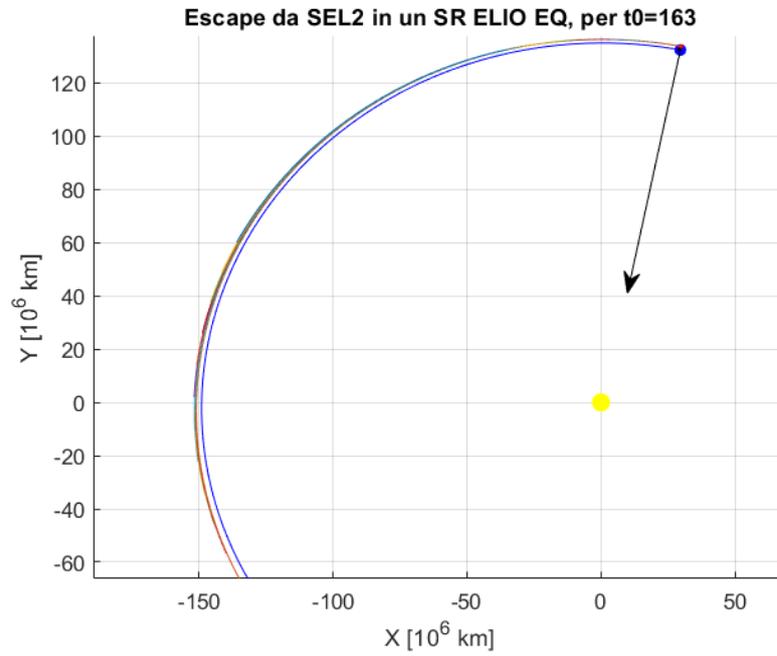


Figura 7.13: Escape da SEL2 per $t_0 = 163$: 10/12/2025, SR ELIO EQ

Per maggiore chiarezza, le traiettorie in figura 7.11 sono state rappresentate in un grafico 3D, riportando anche le coordinate del satellite lungo l'asse z . La situazione rappresentata non è differente dagli altri casi, con il punto giallo ad indicare il Sole, quello blu la Terra e le varie traiettorie raffigurate dalle curve colorate.

7.2.2 Escape da SEL2 con durata fissata

In questa sezione sono analizzati i risultati delle simulazioni effettuate nel caso di durata fissata; il parametro considerato come variabile è la data di partenza t_0 , con C_3 all'escape lasciato libero. Le simulazioni sono state condotte per tre diverse durate (90, 115, 130 giorni). I grafici raffigurano in un sistema di riferimento geocentrico equatoriale la traiettoria percorsa dal satellite. Sono stati realizzati in modo da evidenziare con lo stesso colore la traiettoria e la corrispondente posizione della Luna lungo la propria orbita, alla partenza. Ciascuno di essi raffigura l'escape per 4 diversi t_0 ed ha la peculiarità di essere realizzato a pari durata di missione: ciò significa che nello stesso grafico le traiettorie hanno tutte la stessa durata. La circonferenza nera tratteggiata, infine, raffigura l'ipotetico limite della sfera d'influenza della Terra. I tre grafici vanno visualizzati in successione, per meglio comprendere l'influenza della durata della missione sulla traiettoria di evasione: si noti come a missioni più lunghe corrispondano traiettorie molto più incurvate verso la Terra, sempre meno simili ai rami di iperbole caratteristici delle missioni brevi.

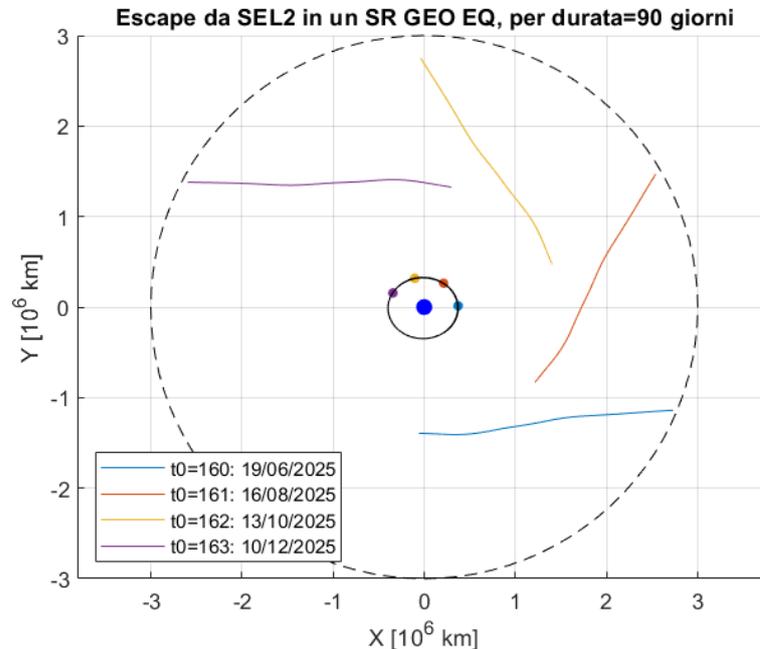


Figura 7.14: Escape da SEL2 con durata di 90 giorni, SR GEO EQ

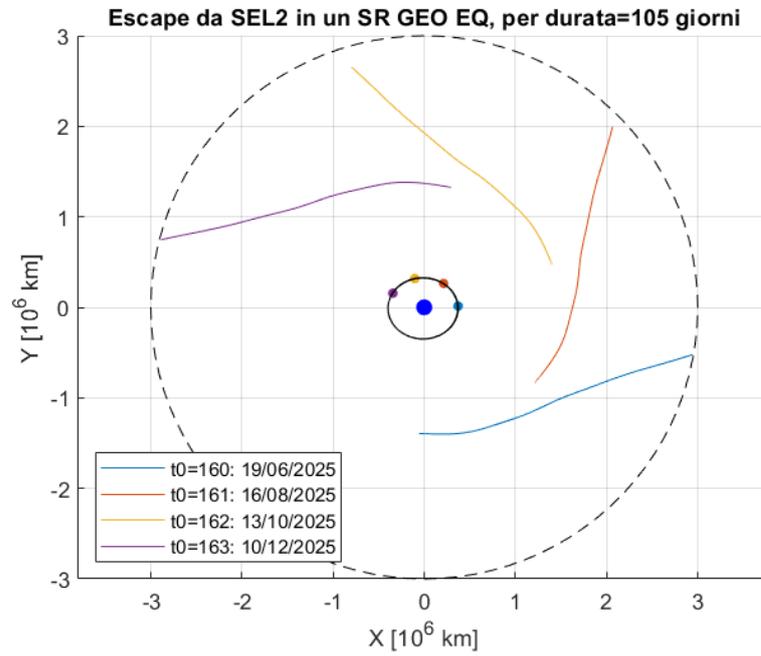


Figura 7.15: Escape da SEL2 con durata di 105 giorni, SR GEO EQ

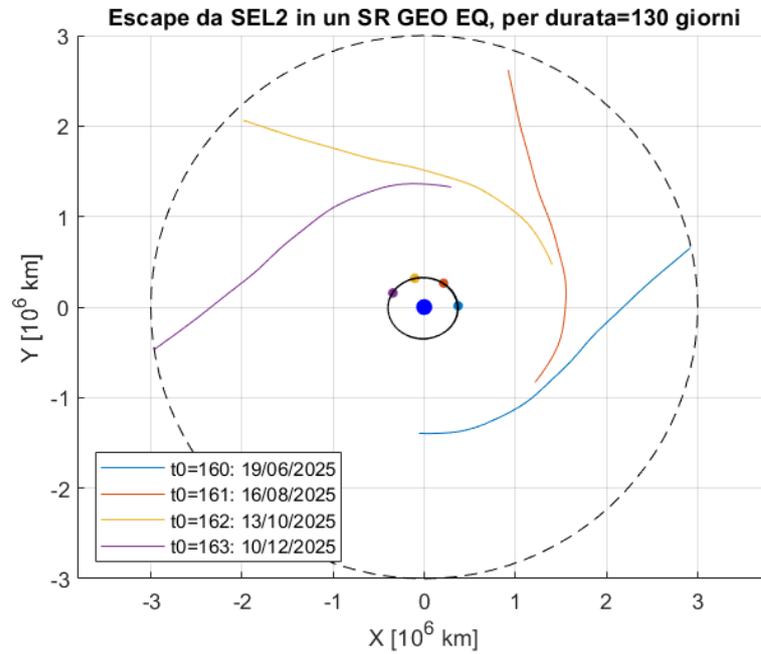


Figura 7.16: Escape da SEL2 con durata di 130 giorni, SR GEO EQ

7.2.3 Parametri orbitali

In conclusione a questa prima parte di analisi, si è proceduto a valutare l'andamento dei parametri orbitali, nello specifico eccentricità e semiasse maggiore. Lo studio è stato effettuato per due diverse durate, 90 e 105 giorni, ed i risultati sono mostrati nei grafici 7.17 e 7.18. Sull'asse delle ascisse, in questo caso, è stato riportato il cosiddetto $tt1$, ossia la data in cui avviene l'escape. Tale valore è stato mantenuto in forma adimensionalizzata, secondo l'assunzione 7.1. Le simulazioni sono state effettuate iterando 400 volte il codice *el22ocube* sul $t0$, a partire da 160; due iterazioni successive erano separate di un passo pari a

$$passo = 0.05 = 2.90 \text{ giorni} \quad (7.4)$$

Complessivamente, quindi, i grafici coprono un periodo temporale di circa 3.2 anni, permettendo di valutare l'andamento delle grandezze al netto della periodicità della rivoluzione terrestre attorno al Sole e Lunare attorno alla terra.

Eccentricità

Il primo parametro orbitale analizzato è l'eccentricità: il grafico mostra chiaramente come la differente durata della missione non abbia nessuna influenza sull'eccentricità dell'orbita al momento dell'escape, dato che nei due casi di diverse durate di missione, i grafici sono perfettamente sovrapponibili.

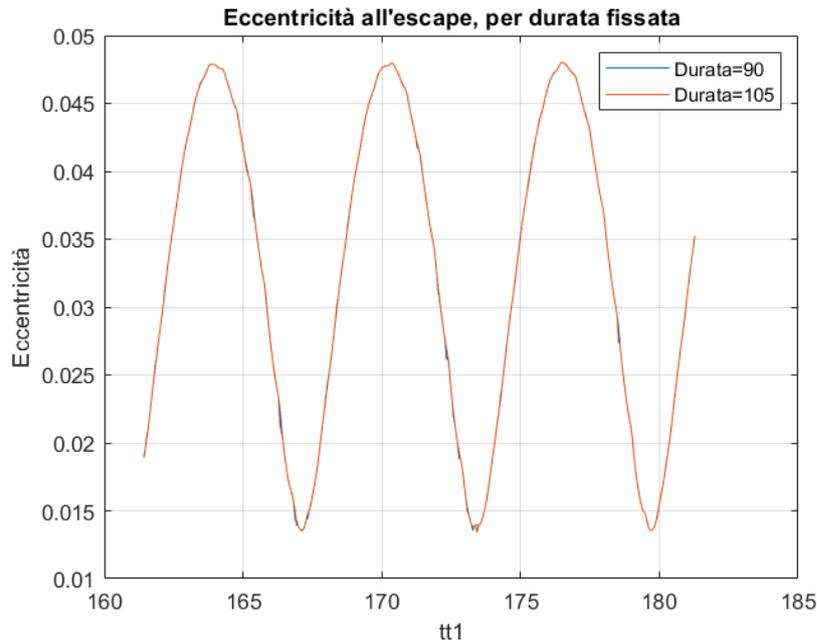


Figura 7.17: Eccentricità della traiettoria all'escape, per durata fissata

L'eccentricità assume un andamento sinusoidale, con periodo pari ad 1 anno, come conseguenza del periodo di rivoluzione della Terra attorno al Sole, ed ha un'ampiezza compresa all'incirca tra 0.013 e 0.048. Il primo massimo è raggiunto per $tt1 = 163.88$, in data 23/01/2026, che ricade nell'intorno del giorno in cui la distanza tra la Terra e il Sole è minima (147.1 milioni di km); il primo minimo, invece, è raggiunto per $tt1 = 167,13$, in data 31/07/2026, che ricade nell'intorno del giorno in cui la distanza tra la Terra e il Sole è massima (151.1 milioni di km). Da ciò si deduce come ci sia un rapporto inversamente proporzionale tra la distanza tra i due corpi celesti e l'eccentricità della traiettoria del satellite all'escape.

Semiassse maggiore

Si procede, infine, ad analizzare l'andamento del semiassse maggiore dell'orbita, in relazione al $tt1$: nuovamente, la durata della missione non ha nessuna influenza sul parametro analizzato. In questo grafico, a differenza del 7.17, è ben evidenziata anche la periodicità legata alla rivoluzione della Luna attorno alla Terra, che si manifesta con 12 oscillazioni di minore entità, di periodo circa 29 giorni, per ogni oscillazione completa di 1 anno. Anche in questo caso si delinea un rapporto di proporzionalità inversa tra la distanza Terra-Sole ed il valore del semiassse maggiore della traiettoria all'escape. Un'ulteriore analisi sui parametri orbitali è stata condotta nel paragrafo 7.3.4, analizzando il loro andamento per diversi $t0$.

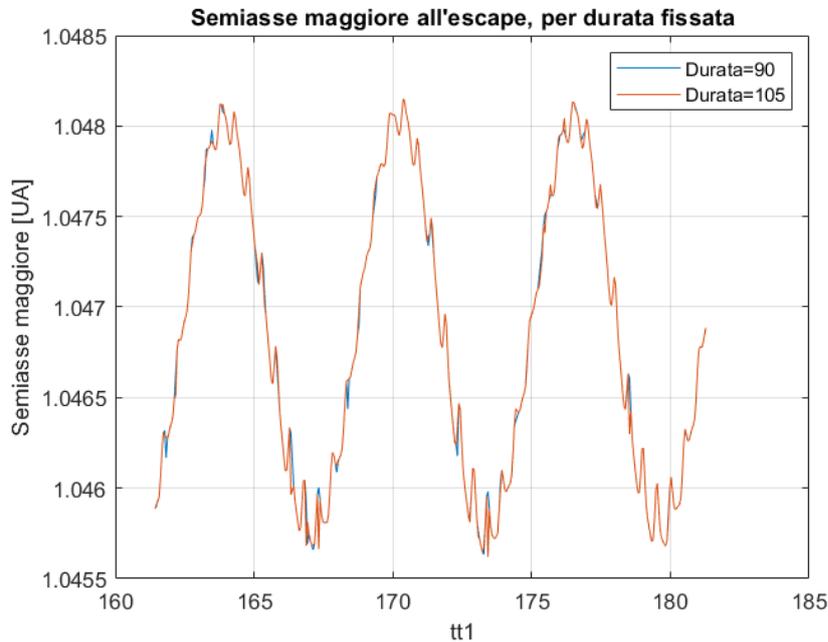


Figura 7.18: Semiassse maggiore della traiettoria all'escape, per durata fissata

7.3 Analisi su un ciclo di 28 giorni con C3 libera

In questa seconda fase di analisi l'intervallo di variazione del tempo di partenza t_0 è stato ridotto, diminuendo il passo di separazione tra due iterazioni successive a 0.12 (equazione 7.3). Così facendo è stato possibile coprire, con una successione di 5 iterazioni, un lasso di tempo pari a 28 giorni, per valutare con maggior dettaglio l'evoluzione dei parametri orbitali durante un periodo sinodico Lunare. Per questo motivo, tutti i risultati presentati nel corso del paragrafo derivano da simulazioni che considerano una data di inizio missione compresa tra $t_0 = 160$ e $t_0 = 160.48$. Nello specifico, in ognuno dei grafici saranno presenti 5 analisi, effettuate per:

- $t_0=160$: 19/06/2025
- $t_0=160.12$: 26/06/2025;
- $t_0=160.24$: 03/07/2025;
- $t_0=160.36$: 10/07/2025;
- $t_0=160.48$: 17/07/2025.

7.3.1 Escape da SEL2 con durata fissata, durante un mese

In analogia al paragrafo 7.2.2, in questa sezione sono analizzati i risultati delle simulazioni effettuate nel caso di durata fissata; il parametro considerato come variabile è la data di partenza t_0 , nelle cinque date indicate in precedenza, con C_3 all'escape lasciato libero. Le simulazioni sono state condotte per tre diverse durate (90, 115, 130 giorni). I grafici raffigurano in un sistema di riferimento geocentrico equatoriale la traiettoria percorsa dal satellite. Sono stati realizzati in modo da evidenziare con lo stesso colore la traiettoria e la corrispondente posizione della Luna lungo la propria orbita, alla partenza. Ciascuno di essi raffigura l'escape per i 5 diversi t_0 , a pari durata di missione: ciò significa che nello stesso grafico le traiettorie hanno tutte la stessa durata. I tre grafici vanno visualizzati in successione, per meglio comprendere l'influenza della durata della missione sulla traiettoria di evasione: si noti come a missioni più lunghe corrispondano traiettorie molto più incurvate verso la Terra, sempre meno simili ai rami di iperbole caratteristici delle missioni brevi. Contrariamente all'analisi di figura 7.14, i punti di partenza delle diverse traiettorie sono molto ravvicinati tra loro: la motivazione risiede nella ridotta distanza temporale che li separa, pari all'incirca ad una settimana. Tra la curva in colore azzurro e quella verde intercorrono 28 giorni - un mese sinodico Lunare; per questo motivo, il cerchio azzurro e quello verde, che indicano la posizione della Luna al momento della partenza del satellite, appaiono quasi sovrapposti, essendo trascorso un intero periodo sinodico tra le due traiettorie.

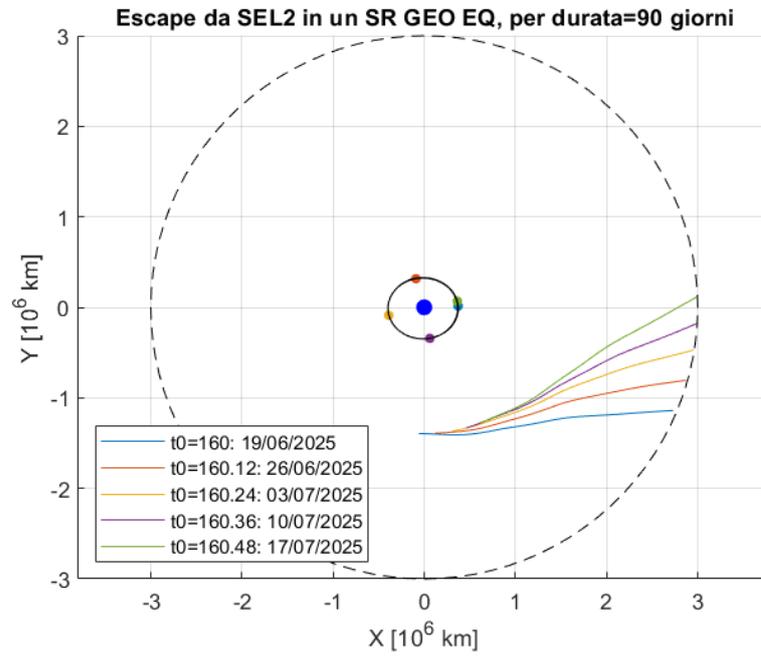


Figura 7.19: Escape da SEL2 con durata di 90 giorni, in un mese, SR GEO EQ

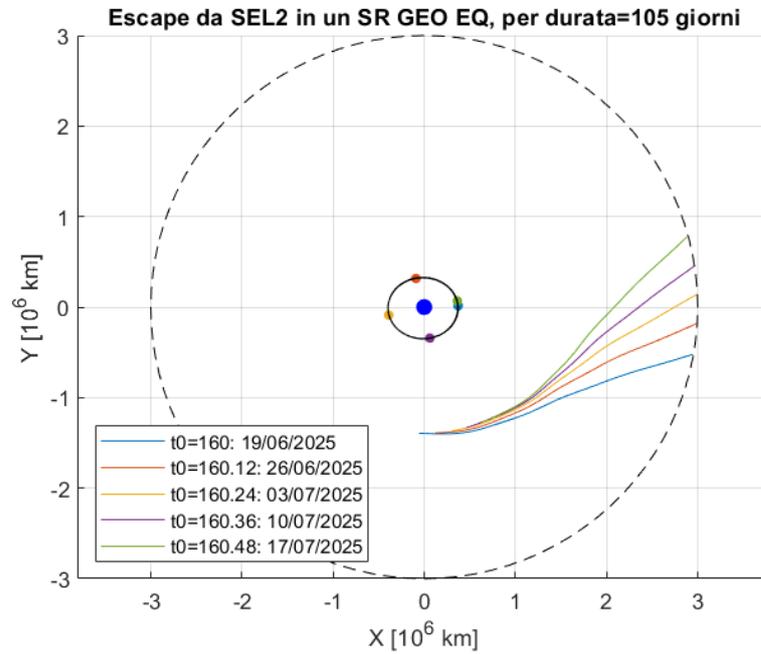


Figura 7.20: Escape da SEL2 con durata di 105 giorni, in un mese, SR GEO EQ

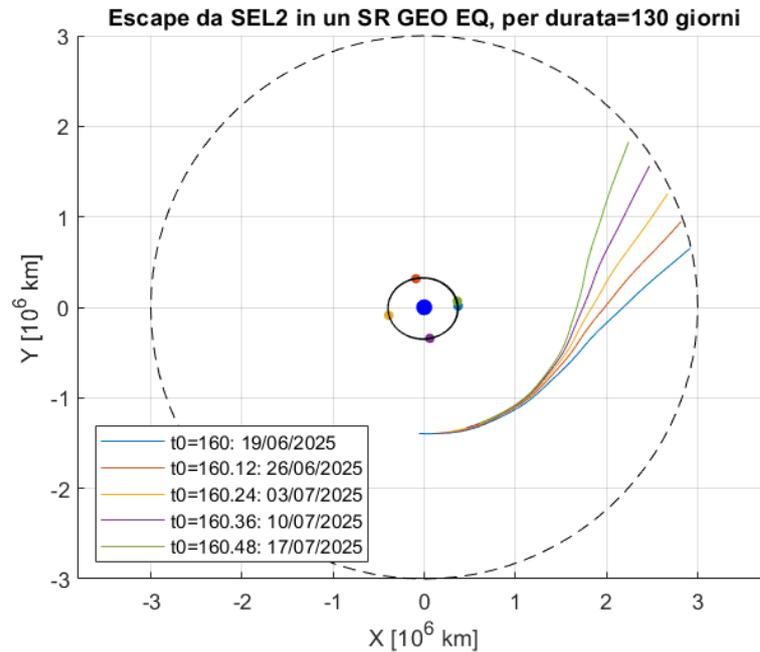


Figura 7.21: Escape da SEL2 con durata di 130 giorni, in un mese, SR GEO EQ

Si noti come lo spazio 'vuoto' che separa due curve consecutive non implichi una impossibilità di seguire traiettorie per determinati date di partenza, ma sia semplicemente legato al passo d'iterazione scelto in fase di calcolo, pari a circa una settimana. Ciò significa che tra due traiettorie successive, per esempio quella in colore azzurro e quella in colore rosso, sono presenti infinite altre possibili soluzioni. Dato l'elevato costo computazionale (e la scarsa utilità) nell'effettuare simulazioni così ravvicinate nel tempo, si riporta a titolo d'esempio un solo grafico, realizzato con una serie di iterazioni con passo

$$passo = 0.01 = 0.58 \text{ giorni} \tag{7.5}$$

Il grafico non è altro che una versione più completa di quello riportato in figura 7.19, nella quale viene rappresentata un'intera famiglia di soluzioni che presentano caratteristiche molto simili tra loro, in termini di parametri orbitali. Si noti, infatti, la fitta presenza di curve rappresentate in colore grigio, a dare una maggiore continuità alle diverse soluzioni. Ciascuna differisce dall'altra non soltanto per la rotazione dovuta alla diversa data di partenza, ma presenta anche differenze legate alla posizione della Luna. Una simulazione con passo d'iterazione ancora minore, avrebbe generato un infittimento delle curve grigie; viceversa, un passo maggiore, comporta un diradamento delle curve, sino a giungere ad un caso analogo a quello riportato in figura 7.19, nel quale sono illustrate solamente le 5 traiettorie distanti tra loro una settimana.

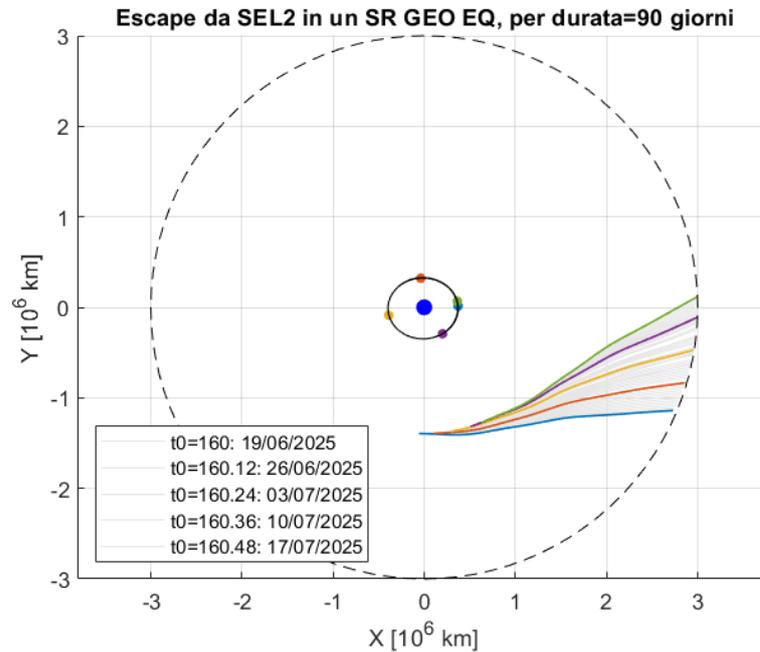


Figura 7.22: Escape da SEL2 con durata di 90 giorni, con passo 0.01

7.3.2 Influenza del Sole su C₃

Durante il suo viaggio verso il limite della sfera d'influenza terrestre, il satellite è, di fatto, spinto dal Sole, con un effetto positivo in termini di energia orbitale. Come evidenziato dalla tabella 7.1, lo spegnimento dei motori avviene, infatti, in una data abbastanza vicina alla partenza, lasciando che per la restante parte di traiettoria sia il Sole a favorire l'escape. Complessivamente, il guadagno di energia (espresso in termini di C_3) è dovuto per la maggior parte alla perturbazione solare, mentre il contributo della spinta dei propulsori è piuttosto ridotto e concentrato nelle prime fasi della missione. Questo effetto è illustrato in figura 7.23, nella quale viene rappresentato l'andamento dell'energia C_3 in funzione del tempo trascorso a partire dalla data del 19/06/2025, equivalente ad un $t_0 = 160$. Le curve sono realizzate a parità di durata di missione, assunta di 90 giorni. Il tratto realizzato con una curva più spessa identifica la fase propulsa della missione, durante la quale il contributo energetico principale fornito al satellite è quello della spinta dei motori. La porzione di grafico realizzata con un tratto più sottile rappresenta la fase a motori spenti. Si noti come il C_3 continui ad aumentare sensibilmente anche nella fase non propulsa, a dimostrazione dell'effetto benefico della presenza del Sole. Per durate maggiori, l'andamento dell'energia non subisce variazioni, continuando ad aumentare durante la missione. A dimostrazione di ciò, nel grafico 7.24 si riporta la medesima analisi, per una durata di missione pari a 105 giorni.

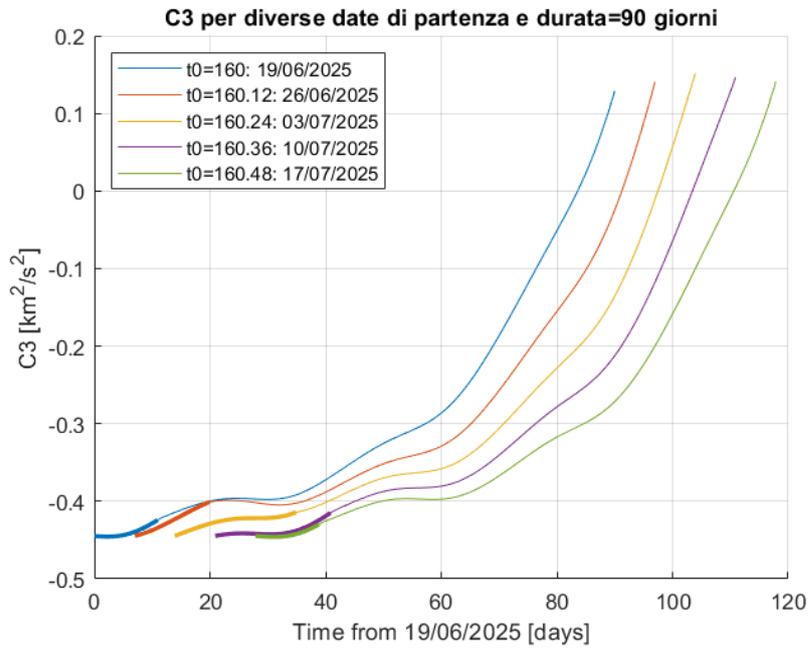


Figura 7.23: Valore di C_3 durante la missione, per durata di 90 giorni

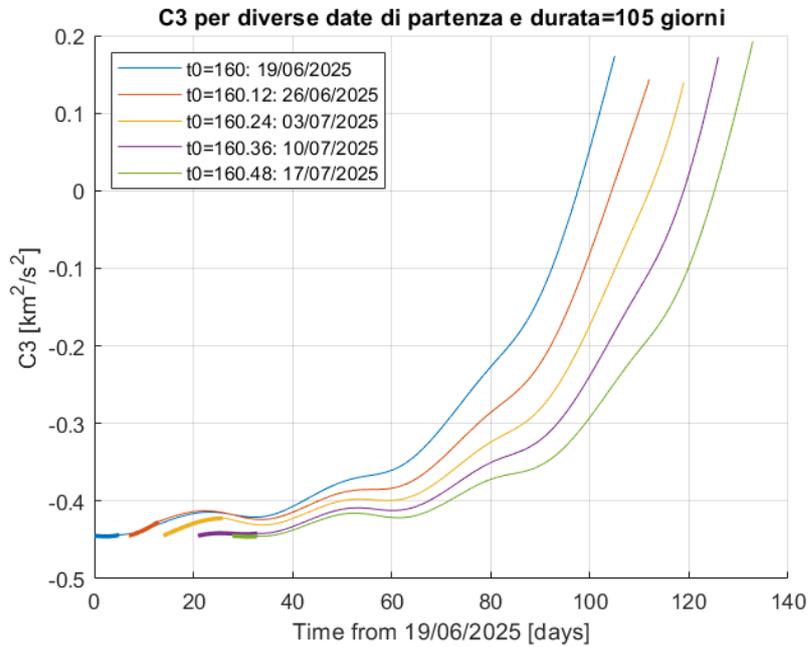


Figura 7.24: Valore di C_3 durante la missione, per durata di 105 giorni

Il tratto di curva rappresentativo della fase propulsa non ha la stessa durata per tutti i diversi t_0 : la data di spegnimento dei motori non è, infatti, stabilita a priori, ma è il risultato di una serie di simulazioni che tengono in considerazione anche la posizione dei corpi celesti principali, in particolare il Sole e la Luna.

7.3.3 Influenza della Luna su C3

Se è vero che il Sole ha un effetto complessivamente positivo sulla manovra di evasione, lo stesso non si può dire della Luna, la cui posizione al momento della partenza ha una forte influenza sulla traiettoria seguita dal satellite. In questo paragrafo si analizzano diverse soluzioni nell'arco di un periodo sinodico, proprio per valutare come la posizione della Luna impatti sulla missione ed il grafico 7.23 ne è una dimostrazione. Analizzando la curva verde (partenza il 17/07/2025) e quella viola (partenza il 10/07/2025) si nota come il tratto propulso sia decisamente superiore per il caso evidenziato in viola: la causa è da ricercare proprio nella posizione della Luna alla data di partenza, molto più conveniente nel primo caso. Un'ulteriore conferma si trova nelle immagini 7.25 e 7.26, che rappresentano graficamente la posizione dei tre corpi celesti nelle due date di partenza ⁴. Nel primo caso la Luna si trova quasi allineata alla Terra, al Sole e al satellite, penalizzando notevolmente quest'ultimo nella sua fuga da *SEL2*; nell'altro, si trova in una posizione più avanzata rispetto al satellite, con un minor impatto sulla sua traiettoria.



Figura 7.25: 10/07/2025

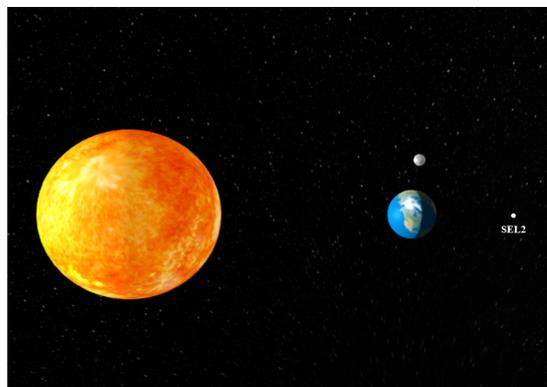


Figura 7.26: 17/07/2025

In termini di energia posseduta dal satellite, l'influenza della Luna sulla missione è ancora più evidente se si rappresentano graficamente i valori della massa finale e del C_3 in relazione alla durata della missione, in maniera analoga al paragrafo 7.1.

⁴Si noti che le distanze tra i diversi corpi celesti non sono in scala

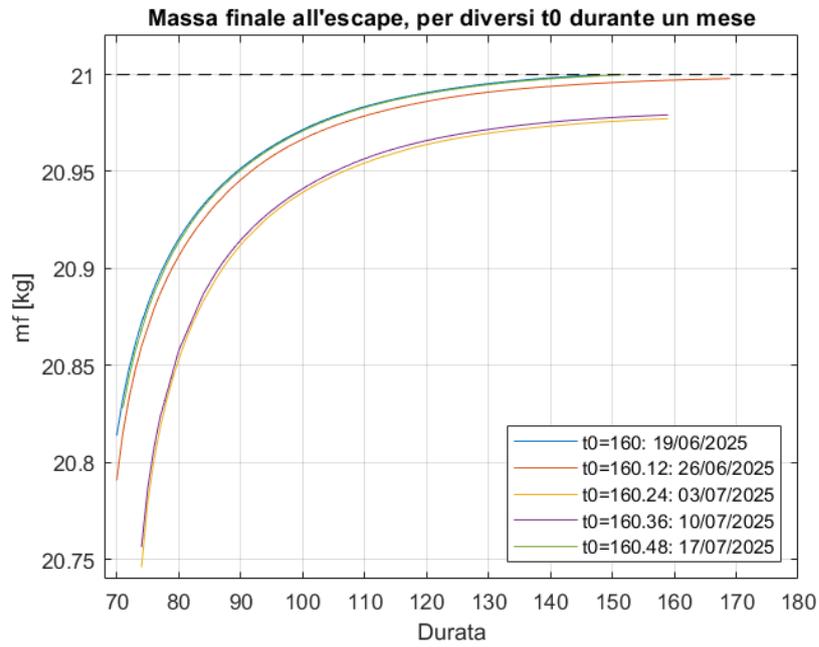


Figura 7.27: Massa finale all'escape [kg] per diversi t_0 durante un mese

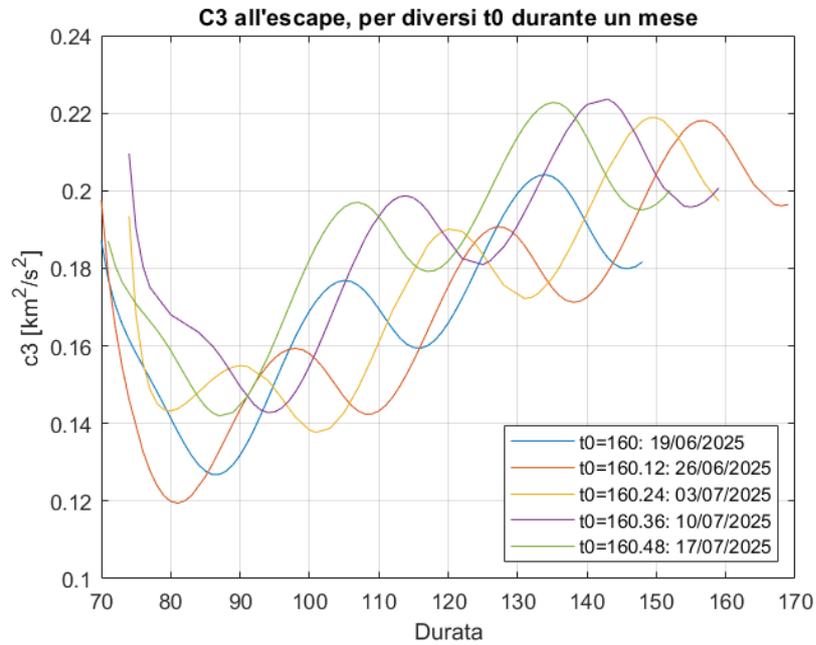


Figura 7.28: C_3 all'escape [km^2/s^2] per diversi t_0 durante un mese

La linea tratteggiata in nero nel grafico 7.27 rappresenta, anche in questo caso, la massa iniziale del satellite, pari a 21 *kg*. La massa finale tende ad essa per missioni dalla durata molto lunga, poiché necessitano di spinte iniziali brevi, lasciando che sia il Sole a spingere lo spacecraft per la maggior parte della traiettoria; di conseguenza, prevedono consumi di propellente molto contenuti. Al contrario, missioni più brevi comportano spinte maggiori, poiché non si lascia abbastanza tempo al Sole per esercitare una spinta sul satellite. In questi casi, la massa finale risulta essere inferiore, avendo consumato maggiori quantità di propellente durante la fase propulsa. Il grafico 7.28 risulta molto caotico, con le diverse curve che si sovrappongono e confondono tra di loro, rendendo complicata la sua lettura. Per una maggiore chiarezza, si è proceduto a sostituire la durata, riportata sull'asse delle ascisse, con una grandezza temporale alternativa, che permettesse di scalare le diverse curve del grafico, senza alterarle. Tale grandezza è stata così ottenuta:

$$(\text{tempo scalato})_n = \text{durata} + n * \Delta(t_0) \quad (7.6)$$

dove $\Delta(t_0)$ rappresenta il lasso di tempo (in giorni) che separa due t_0 consecutivi e n è un indice che indica l'iterazione n -esima. Il grafico 7.28 è stato, quindi, nuovamente realizzato, in funzione del nuovo tempo scalato.

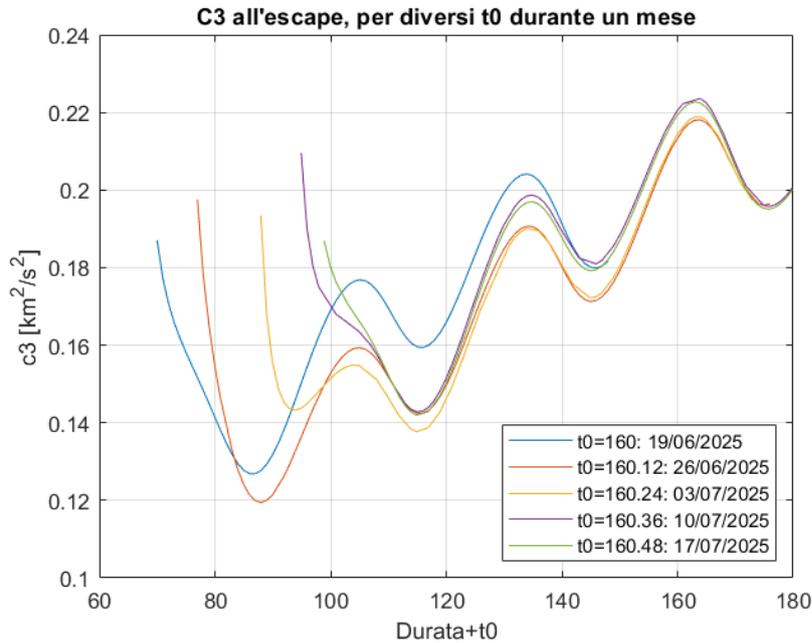


Figura 7.29: C_3 all'escape [km^2/s^2] scalata, per diversi t_0 durante un mese

Nella nuova configurazione scalata, il grafico risulta molto più ordinato e costituito da due sezioni distinte: una prima porzione ancora piuttosto disordinata, nella

quale le curve appaiono sparse, ed una seconda fase nella quale le diverse soluzioni convergono, fino a sovrapporsi tra loro. La prima parte, caratterizzata da durate brevi, è rappresentativa di traiettorie non sufficientemente lunghe per godere in maniera sensibile dei benefici della spinta da parte del Sole. In questa sezione, infatti, gli effetti della perturbazione Lunare sono più marcati di quella solare, pertanto le orbite ne risentono particolarmente, risultando in valori di energia all'escape molto sensibili alla diversa durata della manovra. Nel caso di missioni più lunghe, invece, il tempo trascorso è sufficientemente elevato da permettere al satellite di usufruire in modo consistente della spinta da parte del Sole. Per questo motivo, il principale fattore che influisce sul valore di C_3 all'escape non è più la sola perturbazione Lunare, ma una combinazione di quella solare e Lunare (lunisolare, per l'appunto). Le diverse curve assumono, dunque, un andamento simile, che le porta quasi a convergere per durate molto elevate. L'andamento sinusoidale è in ogni caso strettamente legato alla posizione della Luna, ma quest'ultima influisce in modo uguale sull'energia del satellite, a prescindere dalla data di partenza.

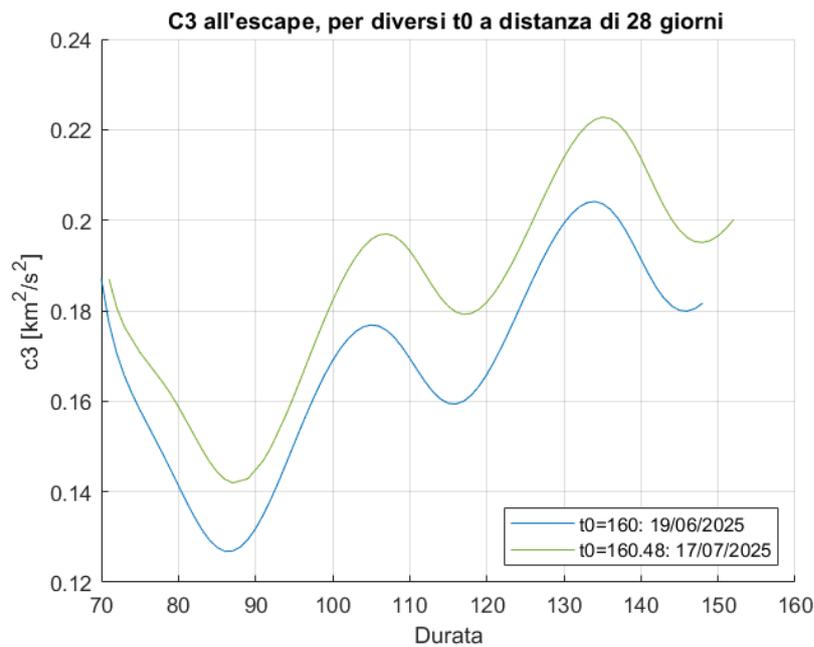


Figura 7.30: C_3 all'escape [km^2/s^2] per due t_0 distanti un mese

Focalizzandosi soltanto sulla prima e l'ultima curva, distanti tra loro un mese, è possibile verificare come l'energia C_3 in funzione della durata della missione abbia un andamento molto simile nei due casi, a dimostrazione della periodicità legata alla rivoluzione della Luna attorno alla Terra. Le due curve rappresentate nel grafico 7.30 sono estrapolate dal 7.28 e raffigurano l'energia residua all'escape nel

caso di partenza, rispettivamente, il 19/06/2025 ed il 17/07/2025. L'andamento sinusoidale presenta una serie di picchi che non raggiungono sempre lo stesso valore. Ciò è dovuto alla presenza della perturbazione solare ed al fatto che nel tempo cambi anche la distanza dalla Luna, con conseguenti variazioni nella forza esercitata sul corpo. La Luna fornisce un contributo accelerante quando si trova in una posizione tale da generare una forza diretta in un verso concorde al moto del satellite; viceversa, contribuisce con un effetto rallentante quando si trova in una posizione tale che la forza esercitata sullo spacecraft sia diretta in un verso contrario al moto di quest'ultimo. La distanza tra due massimi (o minimi) locali è pari a circa 29 giorni, perfettamente in linea con i 29.5 del periodo sinodico della Luna. Ciò significa che per circa 14/15 giorni la perturbazione della Luna sarà favorevole all'escape, mentre nei successivi 14/15 avrà un contributo negativo. Al termine del periodo favorevole viene raggiunto un punto di massimo locale; al contrario, al termine di un periodo sfavorevole si collocherà un minimo locale del C_3 .

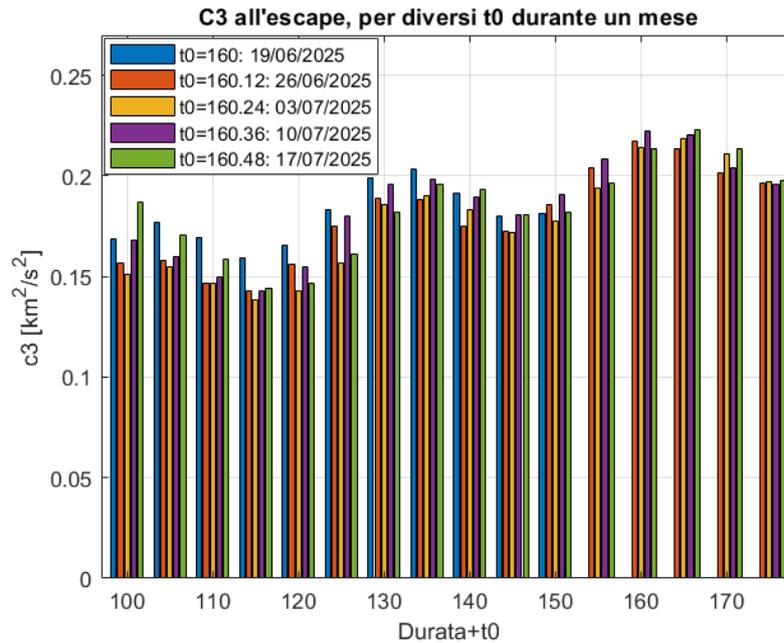


Figura 7.31: Istogramma di C_3 all'escape scalata, per diversi t_0 durante un mese

Visualizzando il valore di C_3 all'escape sotto forma di istogramma ⁵, si possono effettuare alcune considerazioni sul suo valore. In primis, si noti come la velocità

⁵La figura 7.31 mostra una porzione ridotta del grafico 7.29, a partire da un tempo scalato pari a 100, ossia il primo caso in cui si hanno a disposizione tutte e cinque le curve.

(strettamente legata al C_3) al confine della sfera d'influenza (SOI) terrestre raggiunga i picchi maggiori in corrispondenza delle durate più lunghe, che sono anche quelle che prevedono una fase propulsa più breve: ciò significa che il satellite è in grado di arrivare ad elevate velocità finali anche senza consumi di propellente eccessivi, grazie alla spinta del Sole. Invece, nel caso di missioni più brevi i picchi di velocità sono minori dei precedenti, a riprova del fatto che la maggior quantità di propellente consumato sia interamente spesa per sfuggire da *SEL2*, vincendo le perturbazioni, con un contributo minimo sulla velocità finale. In generale, è preferibile avere velocità elevate una volta giunti all'esterno della SOI, poiché comportano una minore spinta richiesta ai motori per le fasi successive della missione.

7.3.4 Parametri orbitali

Infine, si è proceduto a valutare l'andamento dei parametri orbitali, nello specifico eccentricità e semiasse maggiore, per tutti e cinque i diversi casi di t_0 analizzati nel corso del capitolo. Sull'asse delle ascisse è riportato il $tt1$, cioè la data in cui viene raggiunto il confine della sfera d'influenza terrestre, in forma adimensionale. Le simulazioni sono state condotte iterando il codice *el22ocube* sulla durata, con passo pari a 1 giorno. Complessivamente, i grafici coprono un periodo temporale di circa un centinaio di giorni, in quanto sono limitati dalla durata minima e massima possibili definite in maniera analoga a quanto spiegato nel paragrafo 7.1.

Eccentricità

Il primo parametro orbitale analizzato è l'eccentricità: il grafico mostra una serie di curve pressoché sovrapposte, con un andamento crescente nel tempo a prescindere dal t_0 . Da ciò si deduce come la scelta di partire in una determinata data abbia un'influenza minima sull'eccentricità dell'orbita finale in cui si immette il satellite. Questa considerazione deriva da un compromesso tra data di partenza e durata: infatti, considerando a titolo d'esempio un valore $tt1 = 162$ ed ipotizzando di tracciare una linea perpendicolare all'asse delle ascisse, si incontrano le diverse curve, con un'eccentricità $e \simeq 0.028$. Tale valore si trova in data "162" (13/10/2025), ma verrà raggiunto, in base alla data di partenza, dopo un diverso numero di giorni di missione: nel caso di $t_0 = 160.48$ sarà nelle prime fasi di missione, mentre per $t_0 = 160$ saranno già trascorsi circa 116 giorni. Ciò che si ottiene, invece, scalando il grafico per il

$$(\text{tempo scalato})_n = tt1 - n * \Delta(t_0) \quad (7.7)$$

è la situazione rappresentata nel grafico 7.33. In questo caso, ipotizzando di tracciare nuovamente una retta verticale passante per $tt1 = 162$, si intersecheranno le varie curve per valori differenti di eccentricità. A parità di durata, quindi, verranno raggiunte orbite finali differenti, a seconda della data di partenza.

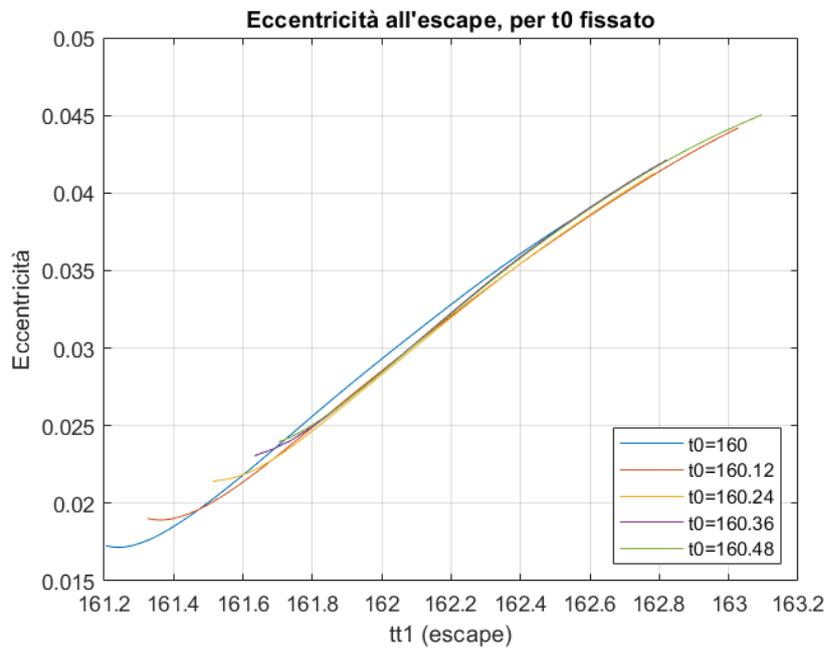


Figura 7.32: Eccentricità della traiettoria all'escape, per i diversi t0

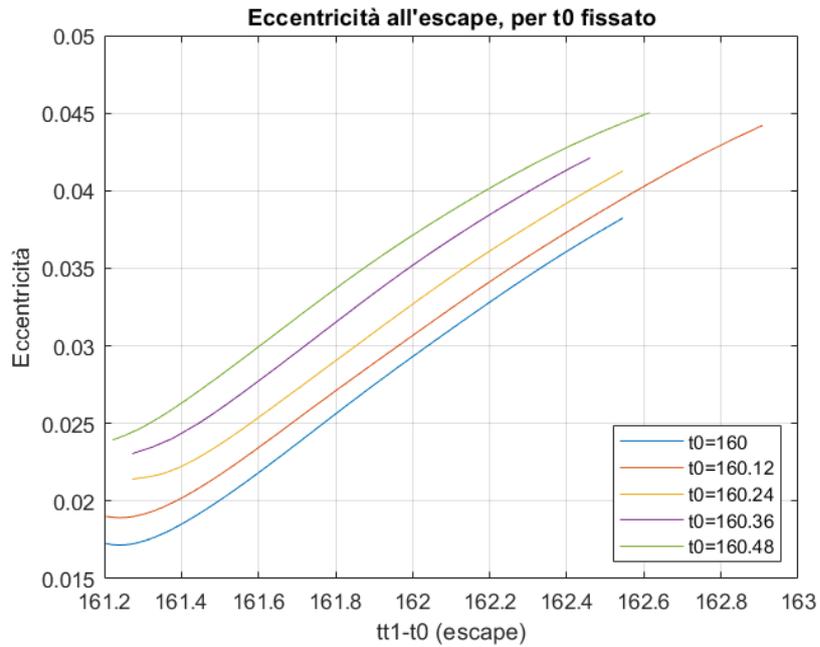


Figura 7.33: Eccentricità della traiettoria all'escape scalata, per i diversi t0

Semiassa maggiore

Si procede, in ultima analisi, a valutare l'andamento del semiassa maggiore dell'orbita, in relazione al $tt1$. Le curve sono realizzate in funzione del tempo scalato (equazione 7.7) e presentano un andamento dapprima decrescente, con un minimo localizzato nell'intorno di $tt1 = 161.5$, seguito da un tratto crescente. In questo caso il grafico presenta alcune differenze per le diverse date di partenza: ipotizzando, infatti, di tracciare una linea perpendicolare all'asse delle ascisse, in corrispondenza di una qualsiasi data, questa intersecherà le diverse curve in corrispondenza di un valore di semiassa maggiore differente per ciascuna di esse. L'andamento generale è, in ogni caso, coerente tra le diverse soluzioni e le piccole differenze riscontrate sono legate alle perturbazioni dei diversi corpi celesti.

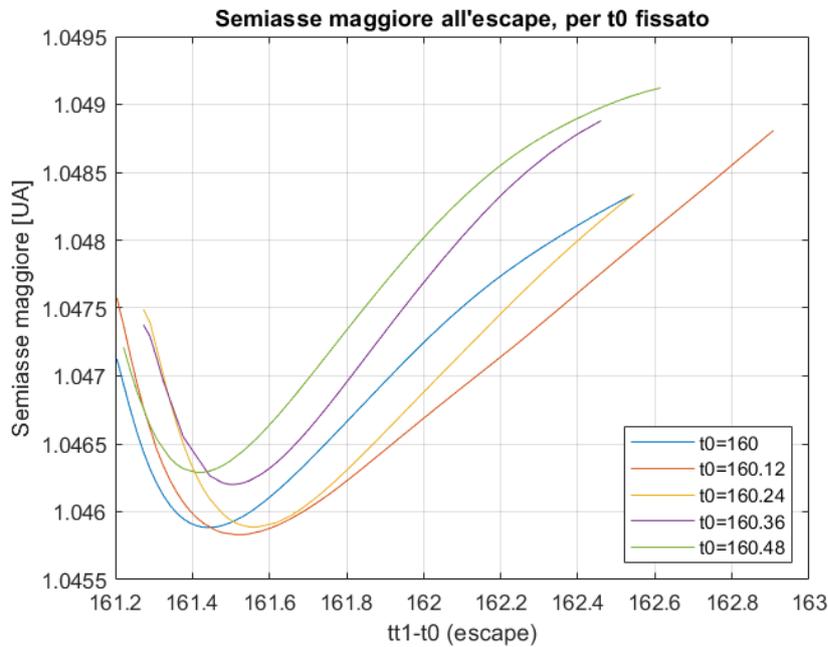


Figura 7.34: Semiassa maggiore della traiettoria all'escape, per i diversi t_0

Capitolo 8

Conclusioni

Le analisi e le simulazioni effettuate hanno permesso di creare un database di manovre di escape dal punto *SEL2*, per un piccolo satellite di tipo *CubeSat*, al variare della data di partenza e della durata della manovra, ottenendo diverse configurazioni e profili di missione. Tra le soluzioni ottenute, è possibile individuare quelle ottimali, ossia quelle che permettono al satellite di evadere dalla sfera d'influenza terrestre con la maggior velocità finale possibile. Tale parametro è stato valutato in termini di energia caratteristica $C3$ ed è fortemente influenzato dai tanti fattori che contribuiscono alla definizione della traiettoria. I più importanti tra questi sono le perturbazioni legate all'attrazione del Sole e della Luna: il primo fornisce un contributo positivo in termini di spinta sul satellite, trascinandolo verso la sua destinazione e permettendo di ridurre i tempi di accensione del propulsore e, conseguentemente, i consumi. L'attrazione lunare, invece, ha un'influenza di tipo periodico, per la quale si alternano circa 14 giorni di contributo favorevole alla spinta e 14 di contributo negativo, durante i quali il satellite risulta rallentato e la sua energia caratteristica $C3$ si riduce. Per questo motivo, diventa importante valutare in maniera opportuna la data di partenza della missione, in modo da iniziare la manovra nel momento in cui la luna si trovi all'inizio della fase favorevole: con l'avanzare della missione, infatti, il satellite si allontana da essa e quindi risente meno del suo effetto, sia nel caso positivo che negativo; perciò conviene sfruttare la fase favorevole quando ci si trova nelle vicinanze della luna. Sono, inoltre, presenti altre tipologie di perturbazioni, sebbene con un impatto ridotto sulla missione: tra queste, sono state considerate la non perfetta sfericità della Terra e la pressione sul satellite dovuta alla radiazione solare. Quest'ultimo contributo, seppur agente lungo la stessa direzione dell'attrazione gravitazionale solare, ha sempre verso opposto rispetto ad essa, determinando un effetto negativo sulla traiettoria del satellite. Sono state, nel complesso, effettuate numerose simulazioni, in modo tale da considerare un elevato numero di combinazioni tra data di partenza e durata della manovra e generare un database il più completo possibile. Le soluzioni ottimali, con i picchi di $C3$ più

elevati, sono state ottenute per missioni con durate più lunghe, nell'ordine dei 140 giorni. Queste soluzioni, infatti, prevedono una fase propulsa molto breve, lasciando che la maggior parte del lavoro, in termini di spinta, sia derivata dall'attrazione solare e permettendo al satellite di evadere dalla SOI terrestre con velocità più elevate e consumi di propellente minori. Quest'ultimo aspetto è un risultato molto importante, poiché le simulazioni confermano come la propulsione elettrica sia una soluzione molto conveniente per questo genere di missioni: rispetto ad un satellite a propulsione chimica, infatti, prevede consumi di propellente minimi, a discapito, però, di una maggiore durata della manovra. Per una missione di questo tipo si tratta di un compromesso accettabile, motivato dalla necessità di ridurre la quantità di propellente stivato a bordo, per riservare maggiori masse e volumi al carico utile, e che non presenta criticità legate ad una maggior durata della trasferta. Per completezza di informazione, è stato valutato l'impatto delle diverse soluzioni sui parametri orbitali, specialmente per quanto riguarda l'eccentricità della traiettoria ed il suo semiasse all'escape: i risultati ottenuti mostrano chiaramente l'influenza della perturbazione lunisolare sulla traiettoria, seppur senza conseguenze negative ai fini dell'ottimizzazione. Nel complesso, il lavoro svolto ha permesso di ottenere un'analisi esaustiva delle possibili traiettorie di evasione da *SEL2*, ponendo, inoltre, le basi per uno studio successivo sulla fase interplanetaria eliocentrica della missione. Tra i possibili sviluppi futuri si includono, infatti, una serie di studi e di ottimizzazioni di traiettorie che ricevano come condizioni in input quelle ottenute al termine della manovra di escape analizzata nel corso della tesi, scelte nei casi ottimali, per poi simulare una traiettoria, sotto l'influenza del Sole, che porti il satellite verso altri corpi celesti minori del Sistema Solare, come gli asteroidi *Near Earth*. Infine, un ulteriore sviluppo futuro potrebbe consistere nella realizzazione di una serie di simulazioni di una manovra di evasione dall'analogo punto lagrangiano L_2 del sistema Terra-Luna (*EML2*), in modo da confrontare i risultati delle evasioni dal punto L_2 di due sistemi differenti.

Appendice A

Sistemi di riferimento

A.1 Geocentric equatoriale

In un sistema di riferimento geocentrico equatoriale l'origine è posta nel centro della Terra ed il piano fondamentale (x-y) è il piano equatoriale terrestre. La terna di assi destrorsa che lo caratterizza è così composta:

- Asse X che giace sul piano equatoriale e punta verso l'equinozio vernale, ossia il punto in cui si trova il Sole il giorno dell'equinozio di primavera (21 marzo);
- Asse Y che giace anch'esso sul piano equatoriale, ruotato di 90° verso est rispetto all'asse X;
- Asse Z normale al piano equatoriale, che punta verso il polo nord.

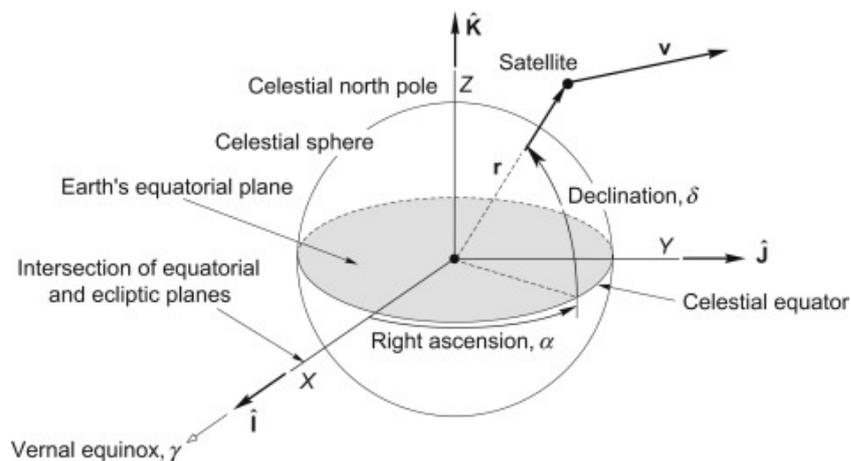


Figura A.1: Sistema di riferimento geocentrico equatoriale - Credits: H. D. Curtis in *Orbital Mechanics for Engineering Students* (2014)

Il sistema di riferimento geocentrico equatoriale non ruota in maniera solidale alla Terra, ma è fisso. La posizione di un corpo in un tale SR può essere descritta sia in coordinate cartesiane, che polari.

A.2 Eliocentrico-eclittica

In un sistema di coordinate eliocentrico-eclittiche l'origine è posta nel centro del Sole ed il piano fondamentale (x-y) è il piano dell'eclittica, ossia il piano nel quale giace l'orbita della Terra attorno al Sole. La terna di assi destrorsa è così composta:

- Asse X diretto verso il punto di intersezione tra il piano dell'eclittica ed il piano equatoriale della Terra, scelto in modo tale che il giorno dell'equinozio vernale il vettore che punta dal Sole alla Terra giaccia lungo X;
- Asse Y che giace anch'esso sul piano dell'eclittica, ruotato di 90° verso est rispetto all'asse X;
- Asse Z normale al piano dell'eclittica (e quindi agli altri due assi), in modo tale da avere la stessa direzione del vettore momento angolare orbitale della Terra attorno al Sole.

Il sistema di riferimento eliocentrico-eclittica non ruota in maniera solidale alla Terra, ma è fisso ¹. La posizione di un corpo in un tale SR può essere descritta sia in coordinate cartesiane, che polari.

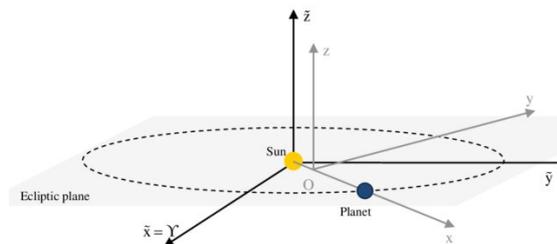


Figura A.2: Sistema di riferimento eliocentrico-eclittica - Credits: J. Heiligers in *Optimisation of Solar Sail Interplanetary Heteroclinic Connections* (2014)

¹In realtà, l'asse di rotazione terrestre non è perfettamente fisso, ma soggetto ad un lento moto di precessione. Di conseguenza, il punto d'intersezione tra il piano equatoriale e l'eclittica si sposta e, con esso, anche il sistema di riferimento.

A.3 Topocentrico

Un sistema di riferimento topocentrico è un sistema con coordinate locali in cui l'origine coincide con l'osservatore. La terna di assi destrorsa è così composta:

- Asse X in direzione radiale, con verso opposto rispetto all'attrazione gravitazionale;
- Asse Y rivolto verso est;
- Asse Z rivolto verso nord.

Gli assi Y e Z definiscono un piano locale tangente alla superficie della Terra, in corrispondenza dell'origine topocentrica.

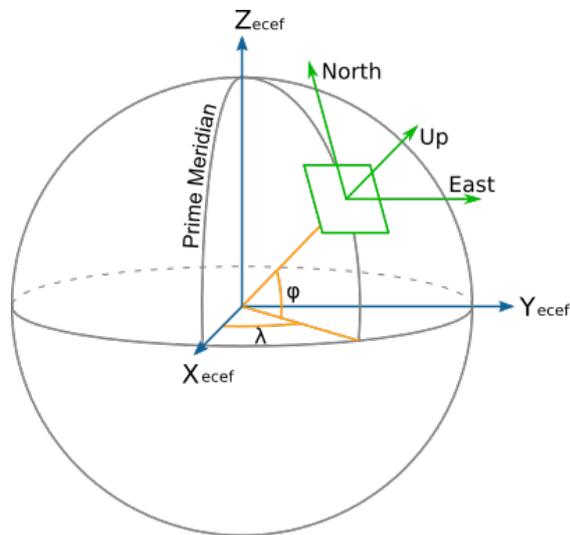


Figura A.3: Sistema di riferimento topocentrico - Credits: *PROJ. Geocentric to topocentric conversion* (2023)

Bibliografia

- [1] R. R. Bate, D. D. Mueller, J. E. White e W. W. Saylor. *Fundamentals of Astrodynamics: Second Edition*. Mineola, NY: Dover Publications Inc., 2020 (cit. a p. 10).
- [2] A. H. J. De Ruiter, C. J. Damaren e J. R. Forbes. *Spacecraft Dynamics and Control. An Introduction*. Chichester, United Kingdom PO19 8SQ: Wiley, 2013.
- [3] A. Fraknoi, D. Morrison e S. C. Wolff et al. *Astronomy*. Houston, TX 77005: OpenStax - Rice University, 2016.
- [4] H. D. Curtis. *Orbital Mechanics for Engineering Students*. Burlington, MA 01803: Elsevier Butterworth-Heinemann, 2005 (cit. a p. 28).
- [5] J. A. Kéchichian. *Applied Nonsingular Astrodynamics. Optimal Low-Thrust Orbit Transfer*. Cambridge, United Kingdom CB2 8BS: Cambridge University Press, 2018.
- [6] B. A. Conway. *Spacecraft Trajectory Optimization*. New York, NY 10013-2473: Cambridge University Press, 2010.
- [7] R. P. Binzel, M. A. Barucci e M. Fulchignoni. «The Origins of the Asteroids». In: *Scientific American* 265 (ott. 1991), pp. 88–95.
- [8] L. Mascolo e L. Casalino. «Escape trajectories from lagrangian points with electric propulsion». In: *Proc. AAS 21-252*. Torino, Italy 10129, feb. 2021. URL: <https://www.researchgate.net/publication/350617332>.
- [9] L. Mascolo e L. Casalino. *Optimal Escape from Sun-Earth and Earth-Moon L2 with Electric Propulsion*. Dipartimento di Ingegneria Meccanica e Aerospaziale, Politecnico di Torino. Apr. 2022. URL: <https://www.mdpi.com/2226-4310/9/4/186#> (cit. alle pp. 73, 78).
- [10] *NEO Basics*. Center for Near Earth Objects Studies (CNEOS). URL: <https://cneos.jpl.nasa.gov/about/basics.html>.
- [11] D. K. Yeomans. *Why Study Asteroids?* Jet Propulsion Lab, Solar System Dynamics. Apr. 1998. URL: https://ssd.jpl.nasa.gov/sb/why_asteroids.html.

- [12] S. Yarlagadda. *Economics of the Stars: The Future of Asteroid Mining and the Global Economy*. Harvard International Review (HIR). Apr. 2022. URL: <https://hir.harvard.edu/economics-of-the-stars/>.
- [13] J. Handal e J. Surowiec. *NASA Confirms DART Mission Impact Changed Asteroid's Motion in Space*. NASA e Johns Hopkins Applied Physics Laboratory. Ott. 2022. URL: <https://www.nasa.gov/press-release/nasa-confirms-dart-mission-impact-changed-asteroid-s-motion-in-space>.
- [14] J. Foust. *The L2 alternative*. The Space Review. Dic. 2006. URL: <https://www.thespacereview.com/article/759/1> (cit. a p. 40).
- [15] *L2, the second Lagrangian Point*. European Space Agency (ESA). URL: https://www.esa.int/Science_Exploration/Space_Science/Herschel/L2_the_second_Lagrangian_Point.
- [16] M. Battipede. *Appunti e dispense del corso di Meccanica del Volo Spaziale*. Politecnico di Torino. 2021.
- [17] L. Casalino. *Space Propulsion. Appunti e dispense del corso di Propulsione Spaziale*. Politecnico di Torino. 2022.
- [18] L. Mascolo. «Low-Thrust Optimal Escape Trajectories from Lagrangian Points and Quasi-Periodic Orbits in a High-Fidelity Model». Tesi di dott. Torino: Politecnico di Torino, 2023.
- [19] V. Dessanti. «Evasione da punti lagrangiani per missioni verso asteroidi». Tesi di laurea mag. Torino: Politecnico di Torino, 2022.
- [20] C. Mugoni. «Manovre di escape da orbita Lyapunov attorno al punto L2 Terra-Sole con propulsione elettrica». Tesi di laurea mag. Torino: Politecnico di Torino, 2022.
- [21] L. Livrari. «Escape maneuvers from Sun-Earth L2 Lagrangian Point with electric propulsion». Tesi di laurea mag. Torino: Politecnico di Torino, 2021.
- [22] *Sun, Earth and Moon Position - 3D Simulator*. TuTiempo.net. URL: <https://en.tutiempo.net/astrometry/sun-earth-moon-3d.html>.
- [23] *How Far is The Sun from Earth?* The Sky Live. URL: <https://theskylive.com/how-far-is-sun>.