

POLITECNICO DI TORINO

Corso di Laurea Magistrale
in Ingegneria Meccanica

Tesi di Laurea Magistrale

Pianificazione e analisi di smooth trajectories eseguite con manipolatori robotici



Relatore

Prof. Stefano Paolo Pastorelli

Co-Relatrice

Prof. ssa Laura Gastaldi

Candidata

Michela Renzi

Anno Accademico 2022-2023

Alla mia famiglia

Ringraziamenti

A conclusione di questo elaborato, desidero ringraziare tutte le persone che mi hanno supportato nella redazione dello stesso e che mi hanno sostenuto in questi anni di studi.

Innanzitutto, ringrazio il mio relatore, il Prof. Stefano Pastorelli, e la mia correlatrice, la Prof.ssa Laura Gastaldi, per la loro infinita disponibilità e tempestività ad ogni mia richiesta e per avermi fornito le indicazioni necessarie in ogni fase della realizzazione dell'elaborato. Grazie a voi ho accresciuto le mie conoscenze.

Ringrazio la Dott.ssa Elena Caselli per aver condiviso con me le sue conoscenze e competenze in merito all'argomento della mia tesi e le auguro buona fortuna per le sue ricerche future.

Un grazie speciale va alla mia famiglia per tutto il supporto che mi ha dato in questi anni e per aver sempre creduto in me. Ovviamente, senza di voi tutto questo non sarebbe stato possibile.

Ringrazio il Dott. Giovanni Palazzoni, un eccezionale medico e ricercatore nonché un grande amico di famiglia scomparso pochi mesi fa. Grazie per tutti i consigli che mi hai dato durante il mio percorso accademico e per il tuo straordinario lavoro che ha permesso di salvare molte vite umane. Sei stato una guida e una fonte di ispirazione per me.

Ringrazio i miei nuovi colleghi di lavoro. Grazie per avermi accolto sin da subito e per avermi supportato in questo periodo di conclusione della tesi. Mi auguro di crescere professionalmente insieme a voi e di costruire oltre un semplice rapporto di lavoro anche un'amicizia.

Infine ringrazio tutti gli amici che mi sono stati accanto durante questo percorso. Alcune di loro li ho portati con me dalla città in cui sono cresciuta, altri li ho conosciuti qui a Torino. Con queste persone ho trascorso i momenti più felici e più tristi di questi anni universitari, attimi che resteranno impressi per sempre nella mia memoria. Grazie per aver condiviso con me gioie e dolori.

POLITECNICO DI TORINO

Tesi di Laurea Magistrale

Titolo

**Pianificazione e analisi di smooth trajectories
eseguite con manipolatori robotici**



Indice

Elenco delle tabelle	6
Elenco delle figure	7
I Il significato di movimento fluido e metodi per la misura della scioltezza di movimento nell'uomo	9
1 Introduzione generale	11
1.1 Cosa si intende per traiettoria smooth	11
1.1.1 Fattori che determinano intermittenze all'interno dei movimenti	11
2 Metodi di misura della scioltezza di movimento	13
2.1 Il metodo DLJ: dimensionless jerk	14
2.2 Il metodo NP: number pf peaks measure	15
2.3 Il metodo SAL: spectral arch length	15
2.4 Il metodo SPARC: spectral arch length: SPectral ARC length	16
2.4.1 Applicazione del metodo SPARC in campo medico	18
II Pianificazione delle traiettorie	23
3 L'importanza della pianificazione delle traiettorie	25
4 Classificazione delle traiettorie	27
4.1 Traiettorie elementari	28
4.1.1 Traiettorie polinomiali	28
4.1.2 Traiettorie trigonometriche	35
4.1.3 Traiettorie basate sullo sviluppo in serie di Fourier	38
4.2 Traiettorie composte	40
4.2.1 Traiettorie a trapezio di velocità	40
4.2.2 Traiettorie a doppia S in velocità	43
4.2.3 Traiettorie Spline	44

5	Metodi per la pianificazione di traiettorie smooth	47
5.1	Tecniche di ottimizzazione	48
5.1.1	Minimizzazione del tempo di esecuzione	48
5.1.2	Minimizzazione dell'energia	49
5.1.3	Minimizzazione del jerk	50
5.1.4	Ottimizzazione ibrida	50
5.2	Alcuni metodi per la pianificazione di traiettorie smooth	51
5.3	Metodo Gasparetto-Zanotto: basato sulla limitazione del jerk e sull'utilizzo della B-spline	51
	Metodo Simon-Isik basato su traiettorie trigonometriche	57
	Algoritmo	58
	Ottimizzazione	59
	Metodo di pianificazione di traiettorie smooth basato sui profili polinomiali asimmetrici	61
	Vincoli	64
	Concatenazione dei polinomi	64
	Sintesi sul metodo di pianificazione di traiettorie tramite polinomi asimmetrici	65
	Metodo di pianificazione di traiettorie smooth point-to-point basate su polinomi di grado elevato	65
	Definizione dell'accelerazione	66
	Definizione dei vincoli cinematici	68
	Massimizzare il valore della velocità nel tratto a velocità costante	69
	Metodo di pianificazione di traiettorie smooth con tempo di esecuzione ottimale basato sulla curva ad S	70
	Modelli polinomiali	71
	Modelli trigonometrici	71
	Modello di pianificazione di traiettoria smooth basato sulla funzione sigmoidea	72
III	Analisi delle traiettorie pianificate con il metodo basato sulla curva ad S ottenuta mediante funzione sigmoidea	101
6	Scelta del metodo di pianificazione di traiettorie smooth e dei metodi di misura della fluidità di movimento	103
6.1	La scelta del metodo di pianificazione	103
6.2	La scelta dei metodi di misura della fluidità	104
6.2.1	Metrica SPARC	104
6.2.2	Metrica LDLJ-V	104
6.2.3	Metrica LDLJ-A	105
7	Esecuzione delle prove numeriche in ambiente matlab	107
7.1	Prova 1: Analisi delle traiettorie al variare di V_{max} e mantenendo costanti A_{max} , J_{max} e S_{max}	110
7.1.1	Prova 1.1: analisi su tre valori di J_{max}	110
7.1.2	Prova 1.2: analisi su tre valori di A_{max}	111
7.1.3	Prova 1.3: analisi su tre valori di S_{max}	113
7.2	Prova 2: Analisi delle traiettorie al variare di J_{max} e mantenendo costanti V_{max} , A_{max} e S_{max}	115

7.2.1	Prova 2.1: analisi su tre valori di A_{max}	115
7.2.2	Prova 2.2: analisi su tre valori di V_{max}	117
7.3	Prova 3: Analisi delle traiettorie al variare di A_{max} e mantenendo costanti V_{max} , J_{max} e S_{max}	118
7.3.1	Prova 3.1: analisi su tre valori di V_{max}	118
7.3.2	Prova 3.2: analisi su tre valori di J_{max}	120
7.3.3	Prova 3.3: analisi su tre valori di S_{max}	121
7.4	Prova 4: Analisi delle traiettorie al variare di S_{max} e mantenendo costanti V_{max} , A_{max} e J_{max}	123
7.4.1	Prova 4.1: analisi su tre valori di A_{max}	123
7.4.2	Prova 4.2: analisi su tre valori di J_{max}	125
7.4.3	Prova 4.3: analisi su tre valori di V_{max}	126

8	Conclusioni	127
----------	--------------------	------------

Elenco delle tabelle

5.1	Possibili combinazioni delle molteplicità delle radici a seconda del grado del polinomio .	63
5.2	Tempi di esecuzione delle traiettorie prima della sincronizzazione temporale dei giunti .	98
7.1	Andamento della SPARC e dell'LDLJ al variare del vincolo cinematico V_{max} per valori di J_{max} pari a $17rad/s^3$, $27rad/s^3$, $37rad/s^3$	110
7.2	Andamento della SPARC e dell'LDLJ al variare del vincolo cinematico V_{max} per valori di A_{max} pari a $4rad/s^2$, $5rad/s^2$, $6rad/s^2$	111
7.3	Andamento della SPARC e dell'LDLJ al variare del vincolo cinematico V_{max} per valori di S_{max} pari a $100rad/s^4$, $300rad/s^4$, $500rad/s^4$	113
7.4	Andamento della SPARC e dell'LDLJ al variare del vincolo cinematico J_{max} per valori di A_{max} pari a $5rad/s^2$, $6rad/s^2$, $7rad/s^2$	115
7.5	Andamento della SPARC e dell'LDLJ al variare del vincolo cinematico J_{max} per valori di V_{max} pari a $2rad/s$, $2.5rad/s$, $3rad/s$	117
7.6	Andamento della SPARC e dell'LDLJ al variare del vincolo cinematico A_{max} per valori di V_{max} pari a $2rad/s$, $4rad/s$, $6rad/s$	118
7.7	Andamento della SPARC e dell'LDLJ al variare del vincolo cinematico A_{max} per valori di J_{max} pari a $15rad/s^3$, $25rad/s^3$ e $35rad/s^3$	120
7.8	Andamento della SPARC e dell'LDLJ al variare del vincolo cinematico A_{max} per valori di S_{max} pari a $100rad/s^4$, $200rad/s^4$ e $300rad/s^4$	121
7.9	Andamento della SPARC e dell'LDLJ al variare del vincolo cinematico S_{max} per valori di A_{max} pari a $2rad/s^2$, $4rad/s^2$ e $6rad/s^2$	123
7.10	Andamento della SPARC e dell'LDLJ al variare del vincolo cinematico S_{max} per valori di J_{max} pari a $20rad/s^3$, $25rad/s^3$ e $30rad/s^3$	125
7.11	Andamento della SPARC e dell'LDLJ al variare del vincolo cinematico S_{max} per valori di V_{max} pari a $1rad/s$, $1.5rad/s$ e $2rad/s$	126

Elenco delle figure

2.1	Metodi di misura della scorrevolezza.	14
2.2	Calcolo della scioltezza di movimento tramite metodo SAL	16
2.3	Metodo SPARC applicato a diversi movimenti	17
4.1	Classificazione delle traiettorie	27
4.2	Distinzione tra interpolazione e approssimazione	28
4.3	Andamento di posizione, velocità e accelerazione per traiettorie polinomiali	29
4.4	Andamento di posizione, velocità e accelerazione per traiettorie lineari	30
4.5	Andamento di posizione, velocità e accelerazione per traiettorie paraboliche	32
4.6	Andamento di posizione, velocità e accelerazione per traiettorie cubiche	33
4.7	Andamento di posizione, velocità, accelerazione e jerk per traiettorie armoniche	36
4.8	Andamento di posizione, velocità, accelerazione e jerk per traiettorie cicloidali	37
4.9	Andamento di posizione, velocità e accelerazione per traiettoria di Gutman 1-3, traiettoria di Freudestein 1-3 e traiettoria di Freudestein 1-3-5	39
4.10	Andamento di posizione, velocità e accelerazione per traiettorie con profilo di velocità trapezoidale	42
4.11	Andamento di posizione, velocità e accelerazione per traiettorie a doppia S in velocità	44
4.12	Spline generica	45
5.1	Andamento di jerk, accelerazione, velocità e posizione funzione sigmoidea	73
5.2	Calcolo dei parametri di tempo	77
5.3	Gli otto tipi possibili di andamento del jerk	78
5.4	Andamento della posizione	86
5.5	Andamento della velocità	86
5.6	Andamento dell'accelerazione	87
5.7	Andamento del jerk	87
5.8	Andamento dello snap	88
5.9	Andamento della posizione senza sincronizzazione temporale	93
5.10	Andamento della velocità senza sincronizzazione temporale	94
5.11	Andamento dell'accelerazione senza sincronizzazione temporale	94
5.12	Andamento del jerk senza sincronizzazione temporale	95
5.13	Andamento dello snap senza sincronizzazione temporale	95
5.14	Andamento della posizione dopo la sincronizzazione temporale	96
5.15	Andamento della velocità dopo la sincronizzazione temporale	96
5.16	Andamento dell'accelerazione dopo la sincronizzazione temporale	97
5.17	Andamento del jerk dopo la sincronizzazione temporale	97

5.18	Andamento dello snap dopo la sincronizzazione temporale	98
7.1	Prove con V_{max}	108
7.2	Prove con J_{max}	108
7.3	Prove con A_{max}	109
7.4	Prove con S_{max}	109
7.5	Accelerazione prova 1.2	111
7.6	Accelerazione prova 1.3	113
7.7	Velocità prova 1.3	114
7.8	Velocità prova 2.1	115
7.9	Accelerazione prova 2.1	116
7.10	Velocità prova 2.2	117
7.11	Velocità prova 3.1	118
7.12	Accelerazione prova 3.3	121
7.13	Accelerazione prova 4.1	123
7.14	Accelerazione prova 4.3	126

Parte I

Il significato di movimento fluido e metodi per la misura della scioltezza di movimento nell'uomo

Capitolo 1

Introduzione generale

1.1 Cosa si intende per traiettoria smooth

Per fluidità di movimento, in inglese *movement smoothness*, si intende la continuità che un movimento possiede indipendentemente dalla sua ampiezza e durata. Tale continuità si ottiene in assenza di alternanza di accelerazioni e decelerazioni che generano un movimento intermittente e quindi non fluido. L'intermittenza, quindi, può essere dovuta a decelerazioni seguite da accelerazioni o a periodi di arresto non voluti che si manifestano durante il movimento e quindi maggiore è la loro durata, minore sarà la fluidità del movimento. Generalmente queste sono caratteristiche rilevabili nei movimenti dei neonati o in quelli di pazienti che hanno avuto un ictus o con determinate patologie come la sclerosi multipla e il disturbo di Parkinson. Infatti, i movimenti di braccio effettuati da pazienti sani sono caratterizzati da un andamento della velocità a campana e quindi da accelerazioni e decelerazioni gradualmente e senza arresti non voluti; al contrario, nei pazienti affetti da alcune patologie come quelle sopracitate, i movimenti risultano essere piuttosto intermittenti in quanto soggetti all'alternanza di accelerazioni e decelerazioni.

1.1.1 Fattori che determinano intermittenze all'interno dei movimenti

Esistono due tipologie di fattori che possono generare movimenti intermittenti:

1. **L'abilità del soggetto nello svolgere uno specifico task**

La scioltezza di movimento è indice della capacità del soggetto di controllare i movimenti da svolgere. L'intermittenza, infatti, può essere dovuta ad una scarsa capacità di controllo del soggetto sia a causa di disturbi neurologici sia a causa di una scarsa familiarità del soggetto verso il compito da eseguire. Perciò, anche un soggetto sano potrebbe compiere dei movimenti intermittenti nello svolgere un task ad egli del tutto nuovo perché non ha abbastanza familiarità con quest'ultimo. Nel caso di un soggetto che ha subito un ictus, invece, l'intermittenza dei movimenti sarà evidente anche nei task familiari al soggetto e direttamente proporzionale ai danni neurologici che egli presenta. Infatti, la segmentazione dei movimenti è il risultato di scarsa coordinazione degli arti, spasticità, alterazione delle sinergie muscolari per via di patologie, difficoltà nell'organizzazione temporale del movimento oppure di cambiamenti nell'eccitabilità del tratto cortico-spinale in seguito ad ictus. Si

precisa, tuttavia, che la relazione tra la morbidezza di movimento e l'eccitabilità del tratto cortico-spinale non è ancora chiara ma la scioltezza dei movimenti è comunque un indicatore dell'integrità del tratto cortico-spinale;

2. La natura del task o i vincoli presenti durante lo svolgimento del task stesso

La natura del compito da svolgere può implicare un movimento intermittente per via dei vincoli o dei requisiti da rispettare nello svolgere tale compito, anche se il soggetto che compie il movimento non risulta avere alcuna difficoltà nel controllo dei movimenti. Si tratta, ad esempio, del caso di traiettorie point-to-point che compromettono la fluidità richiedendo nette diminuzioni della velocità. Infatti, i vincoli implicano un livello minimo di intermittenza di movimento, che perciò dipende fortemente dal tipo di task da svolgere. Di conseguenza, non è possibile confrontare la scorrevolezza di due compiti completamente diversi. Quindi, la tipologia di task deve essere considerata sia nell'analisi della scorrevolezza di movimento relativamente all'esecuzione di un determinato task, sia nel confronto della scorrevolezza nel caso di task diversi tra loro.

È quindi evidente che la scorrevolezza può essere usata come criterio di confronto tra le esecuzioni di un determinato task da parte di soggetti differenti, e quindi con diversa abilità di controllo di movimento, oppure tra le esecuzioni di task differenti da parte di un determinato soggetto con una certa abilità di controllo di movimento.

Nei neonati o nelle persone che hanno subito un ictus si notano delle ondulazioni che sono il risultato della sovrapposizione di submovimenti. Di conseguenza, i movimenti fluidi saranno prodotti da pochi submovimenti strettamente legati tra loro e che si susseguono in maniera continuativa; al contrario i movimenti non fluidi saranno il risultato della successione di molti submovimenti slegati tra loro.

A questo punto, perciò, occorre determinare un buon metodo di misura della scorrevolezza di movimento.

Capitolo 2

Metodi di misura della scioltezza di movimento

Per quantificare la fluidità con cui viene eseguito un movimento occorre utilizzare un preciso metodo matematico e numerico. Negli anni sono state utilizzate varie metriche per poter quantificare la scioltezza e la fluidità dei movimenti, ciascuna delle quali basata su un particolare aspetto del movimento come il jerk assoluto medio normalizzato, il numero di picchi nel profilo di velocità, la velocità media normalizzata, periodo medio di arresto, la quantità di oscillazioni ad alta frequenza ecc.

Affinché si abbia una buona stima della scorrevolezza, è necessario che il metodo di misura della stessa sia:

1. **Valido:** ovvero in grado di stimare la grandezza da misurare;
2. **Sensibile:** ovvero in grado di rilevare anche le piccole differenze reali della grandezza da misurare;
3. **Affidabile:** ovvero deve essere robusto rispetto al rumore di misura; quindi, il valore fornito della grandezza in questione non deve essere influenzato dal rumore;
4. **Pratico:** ovvero la misura della grandezza deve essere di facile e pratica attuazione.

Per quanto riguarda la scorrevolezza di un movimento, la misura si reputa valida se indipendente dall'ampiezza e dalla durata del movimento, ovvero se adimensionale. La scorrevolezza, essendo inversamente proporzionale all'intermittenza causata da una cattiva gestione temporale del movimento o dalla mancanza di coordinazione dei movimenti, deve avere un andamento monotono decrescente al crescere dell'intermittenza. Di conseguenza, dato un movimento intermittente che può essere pensato come il risultato della sovrapposizione di "submovimenti" discreti, la scioltezza del movimento diminuirà all'aumentare del numero dei submovimenti o dell'ampiezza dell'intervallo temporale tra due successivi submovimenti.

Attualmente vengono utilizzati differenti metodi di misura per stimare la fluidità di movimento. Questi metodi vengono riportati nella figura 2.1 presente nell'articolo [Balasubramanian et al. \[2015\]](#) che indica i metodi più utilizzati per misurare la fluidità di un movimento, indicando per ciascuno le rispettive proprietà tecniche:

Tra questi, i più comuni sono quelli basati sul jerk. Tra quest'ultimi, tuttavia, soltanto due risultano

Measure	Validity			Sensitivity	Reliability Measurement noise	Practicality
	D	M1	M2			
Root mean square jerk	×	-	-	-	-	✓
Normalized mean absolute jerk	×	-	-	-	-	✓
Dimensionless jerk	✓	✓	✓	×	×	✓
Log dimensionless jerk	✓	✓	✓	✓	×	✓
No. of peaks	✓	✓	✓	×	×	✓
Speed arc length	✓	✓	✓	✓	×	✓
Spectral arc length						
(SAL introduced in [4])	×	✓	✓	✓	✓	✓
Spectral arc length						
(SPARC introduced in this paper)	✓	✓	✓	✓	✓	✓

D - Dimensionless; M1 - Monotonic response to changes in submovement interval; M2 - Monotonic response to changes in number of sub-movements. (x means the measure does not satisfy this property, ✓ indicates that it does satisfy the property. - indicates that information about this property is not available)

Figura 2.1: Metodi di misura della scorrevolezza.

essere validi e sono il metodo DLJ (dimensionless jerk) e il metodo LDLJ (long dimensionless jerk). Il metodo migliore, come si nota dalla tabella risulta essere il metodo SPARC. Infatti, mentre il metodo SAL non rispetta il requisito di adimensionalità pur essendo un metodo valido, sensibile, affidabile e pratico, il metodo SPARC riesce anche a produrre una misura priva di dimensione, eliminando la dipendenza dal tempo propria del metodo SAL.

Si riporta di seguito una descrizione di alcuni di questi metodi.

2.1 Il metodo DLJ: dimensionless jerk

Il metodo chiamato dimensionless jerk misura la scioltezza come segue:

$$DLJ \triangleq -\frac{(t_2 - t_1)^3}{v_{peak}^2} \int_{t_1}^{t_2} \left| \frac{d^2v(t)}{dt^2} \right|^2 dt \quad (2.1)$$

In (2.1) le varie grandezze hanno i seguenti significati:

1. $v(t)$ è la velocità di movimento;
2. t è il tempo;
3. t_1 e t_2 sono rispettivamente l'istante temporale in cui inizia il movimento e l'istante temporale in cui esso termina;
4. v_{peak} è la massima velocità raggiunta tra l'istante t_1 e l'istante t_2 ;

Questo metodo perde sensibilità all'interno del range fisiologico perciò si ricorre al metodo LDLJ che applica il logaritmo naturale al precedente metodo DLJ:

$$LDLJ \triangleq -\ln|DLJ| \quad (2.2)$$

Entrambi i metodi, tuttavia, risultano essere molto sensibili al rumore di misura e poco affidabili.

2.2 Il metodo NP: number pf peaks measure

Un altro metodo molto utilizzato per la misura della scioltezza di movimento è quello basato sul numero di picchi presenti nel profilo di velocità nel tempo (number of peaks measure). Un picco di velocità si ha quando si verificano contemporaneamente due condizioni:

1. Derivata della velocità nel tempo nulla;
2. Derivata seconda della velocità rispetto al tempo negativa.

$$NP \triangleq - \left| \left\{ v(t), \frac{dv(t)}{dt} = 0 \ \& \ \frac{d^2v(t)}{dt^2} < 0 \right\} \right| \quad (2.3)$$

Identificate quindi tutti i valori di $v(t)$ che costituiscono dei picchi si applica la cardinalità, indicata col simbolo $\left| \dots \right|$, che è un numero naturale che indica il numero degli elementi che costituiscono l'insieme, ovvero il numero dei picchi. Tuttavia, questo metodo manca di sensibilità e robustezza.

2.3 Il metodo SAL: spectral arch length

Questo metodo rappresenta un nuovo approccio alla stima della scioltezza di movimento e si basa sulla misura della lunghezza dell'arco spettrale. Esso, infatti, dato un profilo di velocità, stima la fluidità di movimento calcolando la lunghezza dell'arco di spettro di Fourier nel range di frequenze da 0 Hz a 20 Hz:

$$SAL \triangleq - \int_0^{\omega_c} \left[\left(\frac{1}{\omega_c} \right)^2 + \left(\frac{d\hat{V}(\omega)}{d\omega} \right)^2 \right]^{\frac{1}{2}} d\omega; \hat{V}(\omega) = \frac{V(\omega)}{V(0)}, \quad (2.4)$$

1. $V(\omega)$ è l'ampiezza dello spettro di Fourier;
2. $\hat{V}(\omega)$ è l'ampiezza normalizzata rispetto all'ampiezza per ω nulla $V(0)$;
3. ω_c è la pulsazione corrispondente ad una frequenza di 20 Hz, ovvero 40π rad/s.

Per via della presenza di una pulsazione di taglio, la misura sarà influenzata dalla scala temporale del profilo di velocità $v(t)$, che può essere compressa oppure dilatata. Questo è spiegato in figura 2.2 che riporta un particolare tipo di profilo di velocità, ovvero quello gaussiano, al variare della durata. Ciascuna curva è temporalmente scalata rispetto alle altre e la durata del profilo di velocità varia da 0.1 s a 2.0 s. Si nota come lo spettro di Fourier varia al variare del profilo di velocità scelto. In modo particolare, all'aumentare della durata del profilo di velocità lo spettro di Fourier risulta essere sempre più compresso lungo l'asse delle frequenze. Di conseguenza, all'aumentare della durata del profilo di velocità la lunghezza dell'arco dello spettro di Fourier si riduce come mostrato nella figura 2.2.

Come si nota, infatti, passando da una durata di 0.1 s ad una durata di 2.0 s, il valore ottenuto dal metodo SAL, e quindi la scioltezza del movimento, si riduce di circa 0.4. La sensibilità di questo metodo alla variazione della durata del movimento è dovuta all'utilizzo della frequenza di taglio ω_c , fissata a 40π , per il calcolo dell'integrale nell'equazione 2.4. In realtà la scioltezza non dovrebbe essere dipendente dalla durata temporale né dall'ampiezza del movimento e quindi dovrebbe restare invariata

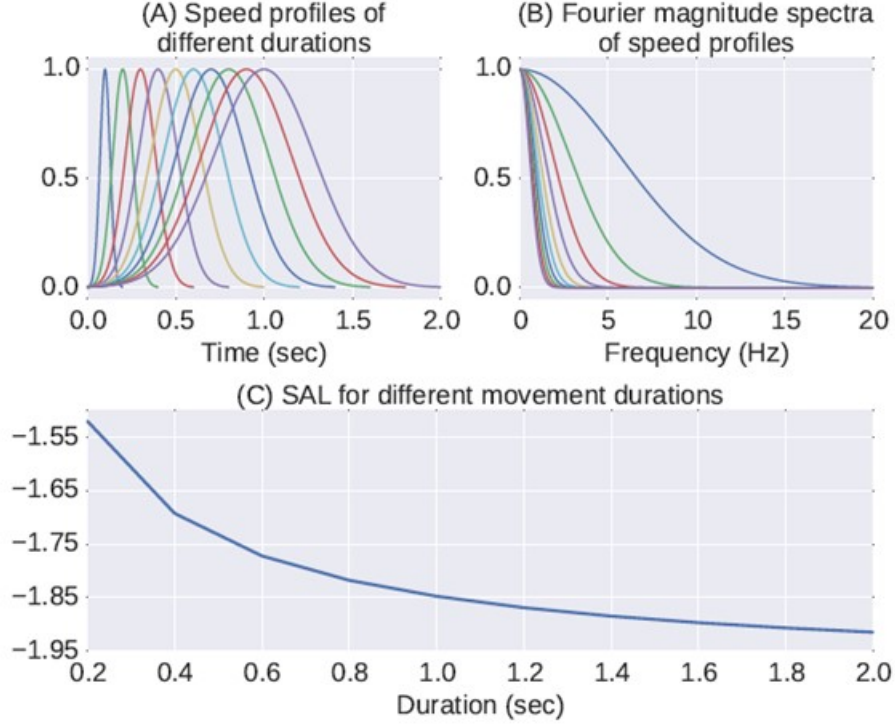


Figura 2.2: Calcolo della scioltezza di movimento tramite metodo SAL, [Balasubramanian et al. \[2015\]](#).

di fronte ad una compressione e dilatazione temporale del movimento e di fronte ad un aumento o riduzione dell'ampiezza. Nonostante ciò, questo metodo risulta essere più sensibile e affidabile degli altri precedenti.

2.4 Il metodo SPARC: spectral arch length: SPectral ARC length

Il metodo SPARC (SPectral ARC length) è una versione modificata del metodo SAL. Questo metodo, infatti, risolve il problema della dipendenza dalla durata temporale del movimento propria del metodo SAL, definendo la frequenza di taglio ω_c non in maniera costante ma in maniera adattiva, ovvero dipendente dall'ampiezza dello spettro di Fourier.

In questo caso infatti la ω_c non è più fissata a 40π ma è definita dalla formula 6.1:

$$\omega_c \triangleq \min \left\{ \omega_c^{max}, \min \left\{ \omega, \hat{V}(r) < \bar{V} \quad \forall \quad r > \omega \right\} \right\} \quad (2.5)$$

In questo modo la ω_c è limitata superiormente dal valore di ω_c^{max} ed, inoltre, è limitata anche dal valore dell'ampiezza dello spettro normalizzata associata ad essa $\hat{V}(r)$ che deve essere inferiore ad un valore di

soglia \bar{V} . Questo metodo risulta essere indipendente dalla scala temporale del movimento a differenza del metodo SAL, ma al tempo stesso mantiene la sensibilità e l'affidabilità proprie del metodo SAL. Ciò è dimostrato dalla figura 2.3, che riporta l'ampiezza normalizzata dello spettro di Fourier relativa a due profili di velocità gaussiani con durata differente. Scelto il valore dell'ampiezza di soglia \bar{V} , si determinano le due differenti frequenze di taglio ω_c associate ai due movimenti. A questo punto sostituendo il valore della ω_c trovato per ciascuno dei due movimenti all'interno dell'equazione per il calcolo dello SPARC 6.2, si otterranno due valori identici, dal momento che ciò che differenzia i due movimenti considerati è solo la durata temporale degli stessi. Sarà quindi possibile affermare che i due movimenti sono ugualmente fluidi.

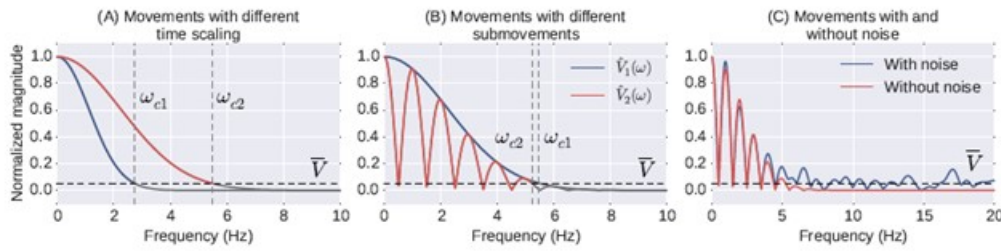


Figura 2.3: Metodo SPARC applicato a diversi movimenti, Balasubramanian et al. [2015].

Considerazioni sulla scelta del valore di soglia \bar{V} Dalle considerazioni appena fatte emerge l'importanza della corretta scelta del valore di soglia. Questo, infatti, influenza due differenti proprietà della misura:

1. **la sensibilità:** come si nota nella figura (B) 2.3, il valore di soglia influenza la sensibilità del metodo all'intermittenza di movimento. Per dimostrare ciò, si considerano due movimenti diversi: uno corrispondente ad un unico submovimento con un profilo di velocità gaussiano e l'altro corrispondente a due submovimenti gaussiani con un intervallo di tempo non nullo tra i due. Dal grafico si nota che la scelta di \bar{V} influenza i valori di ω_c che si ottengono per ciascuno dei due movimenti e quindi anche la parte di spettro che viene ignorata e che nel grafico è riportata in grigio. Perciò, se si fosse scelto un valore di soglia elevato, la frequenza di taglio del movimento con maggiore intermittenza sarebbe stato inferiore e quindi la parte del grafico contenente l'informazione dell'intermittenza sarebbe stata ignorata. Questa eliminazione dei dettagli spettrali comporterebbe una significativa perdita di sensibilità, di conseguenza conviene scegliere un valore di soglia \bar{V} più basso possibile;
2. **l'affidabilità:** come si nota nella figura (C) 2.3, il valore di soglia \bar{V} influenza la robustezza del metodo rispetto alla presenza di rumore. Sebbene ai fini della sensibilità convenga scegliere un valore di soglia \bar{V} basso, ai fini della robustezza nei confronti del rumore, al contrario, conviene sceglierlo elevato. Infatti, in presenza di rumore nel profilo della velocità, l'ampiezza dello spettro non si annulla mai e questo comporterebbe una frequenza di taglio ω_c molto elevata. Confrontando l'ampiezza dello spettro di un profilo ideale privo di rumore con quella di un profilo caratterizzato da rumore, si nota come quest'ultima non sia ancora nulla per la frequenza massima di 20 Hz. E quindi, per quel valore di soglia scelto, la frequenza di taglio associata al movimento con rumore non viene determinata dal valore di soglia ma dal limite massimo imposto ad essa, ovvero risulta

essere pari al suo limite superiore che è uguale a 20 Hz e corrispondente ad una ω_c di 40π . Per questo motivo il metodo SPARC calcola la ω_c come il minimo tra due valori.

Il metodo SPARC prevede, perciò, la determinazione di due parametri: il valore di soglia e la frequenza di taglio massima. In generale, si raccomanda di scegliere un valore di soglia pari a 0.05 e una frequenza di taglio massima di 20 Hz. Calcolata la frequenza di taglio ω_c , si determina il valore che rappresenta la fluidità del movimento mediante la formula 6.2:

$$SPARC = - \int_0^{\omega_c} \left[\left(\frac{1}{\omega_c} \right)^2 + \left(\frac{d\hat{V}(\omega)}{d\omega} \right)^2 \right]^{\frac{1}{2}} d\omega; \quad \hat{V}(\omega) = \frac{V(\omega)}{V(0)} \quad (2.6)$$

Il metodo SPARC, come si nota dalla figura 2.1, risulta essere il metodo migliore per la misura della dolcezza di movimento in quanto rispetta tutti i requisiti previsti, ovvero validità, sensibilità, affidabilità e praticità. Per quanto riguarda la validità, esso risulta essere adimensionale (al contrario del metodo SAL) e risulta dare una risposta monotona sia rispetto ai cambiamenti all'intervallo di un submovimento, sia rispetto ai cambiamenti del numero dei submovimenti. Ovvero al crescere del numero dei submovimenti, e quindi dell'intermittenza, esso restituisce valori decrescenti. Al contrario, se il numero dei submovimenti diminuisce, il metodo restituirà un valore più elevato.

Tuttavia, occorre affermare che non sempre il metodo SPARC risulta essere il metodo migliore per misurare la fluidità di movimento. Nell'articolo [Melendez-Calderon et al. \[2020\]](#) si precisa, infatti, che il metodo LDLJ calcolato sulla base dell'andamento della velocità (LDLJ-V) è migliore del metodo SPARC nel caso di movimenti meno dolci e con durate più lunghe. Questo, come affermato dall'articolo appena citato, è emerso analizzando movimenti caratterizzati da un numero elevato di submovimenti e ondulazioni e quindi movimenti più complessi che non erano stati analizzati nell'articolo [Balasubramanian et al. \[2015\]](#).

2.4.1 Applicazione del metodo SPARC in campo medico

Per le sue caratteristiche, il metodo SPARC trova applicazione anche in campo medico per lo studio delle conseguenze che alcune patologie, come l'Alzheimer, il morbo di Parkinson o l'ictus, hanno sui movimenti dei pazienti. In modo particolare, questo metodo viene usato per confrontare la fluidità dei movimenti di pazienti sani con quella dei movimenti di pazienti affetti da determinate patologie e quindi per quantificare il recupero motorio durante la neuroriabilitazione e predire il controllo motorio dopo un ictus. Di seguito si riporta un esempio in cui il metodo SPARC viene utilizzato per studiare i movimenti di pazienti che hanno subito un ictus.

L'articolo [Garcia FDV \[2021\]](#) esegue uno studio sperimentale del movimento da parte di soggetti con patologie croniche subentrante ad ictus e che quindi manifestano un ridotto controllo dei movimenti, debolezza muscolare, spasticità degli arti inferiori e instabilità posturale. Quest'ultimi sono stati sottoposti al 10 Meters Walking Test in ambiente esterno, ovvero un test che prevede l'esecuzione di una camminata per tratto di 10 metri, ad una velocità scelta arbitrariamente, e la loro deambulazione è stata poi confrontata con quella di soggetti sani. Questo studio ha coinvolto 32 individui post-ictus e 32 soggetti sani. Le misurazioni necessarie sono state effettuate mediante dei sensori IMU (Inertial Measurement Unit) montati sulla vita, che consentono l'estrazione delle componenti della velocità angolare del tronco, ovvero rollio, becchiaggio e imbardata. Questi sensori permettono, quindi, lo studio

della biomeccanica della deambulazione anche al di fuori di un laboratorio e sono sensori relativamente economici, presenti in molti oggetti di uso quotidiano come smartphones e smart watches, e che vengono usati in molteplici ambiti quali la neuroriabilitazione, lo studio della biomeccanica del movimento, la scienza dello sport, ecc. I dati ottenuti dal test sono stati successivamente analizzati tramite il metodo SPARC per determinare la fluidità dei movimenti eseguiti.

Questo metodo, infatti, essendo basato sulla trasformata di Fourier, riguarda il dominio della frequenza e quindi subisce un'influenza ridotta da parte della durata e dell'ampiezza di movimento. Dal momento che la velocità con cui vengono percorsi i 10 metri è scelta dal soggetto, questo permette di porre l'attenzione in maniera più selettiva sulla dolcezza e fluidità dei movimenti.

Da questi studi è emerso che gli individui che hanno subito un ictus mostrano un livello di fluidità e dolcezza di movimento inferiore (cioè uno SPARC più basso) rispetto a quello dei soggetti sani per quanto riguarda le componenti di velocità angolare responsabili del rollio e dell'imbardata. Inoltre, tra gli individui malati, la scioltezza di movimento risulta essere evidentemente più bassa e più variabile lungo il tratto percorso per i soggetti colpiti in maniera più grave dall'ictus. Si è notato, inoltre, che, generalmente, ai soggetti con spasticità agli arti inferiori è correlata una deambulazione più sciolta per quanto riguarda la componente di velocità angolare associata al beccheggio, come ad indicare che tali pazienti adattino la spasticità al mantenimento della meccanica della deambulazione, mentre il rollio è caratterizzato da una scioltezza ridotta.

Nell'articolo [Melendez-Calderon et al. \[2020\]](#) si applicano, confrontandoli tra loro, i metodi SPARC (spectral arc length) e LDLJV (log dimensionless jerk) sempre con lo scopo di quantificare la fluidità di movimento. Anche in questo caso sono stati utilizzati i sensori IMU e viene messo in luce un aspetto legato alla manipolazione dei dati ottenuti da questi sensori con i metodi SPARC e LDLJV. Come detto precedentemente, affinché un metodo per la misura della scioltezza di movimento sia valido e consistente deve essere adimensionale, sensibile, affidabile e quindi deve essere influenzato il minimo possibile dalla presenza di rumore ed, infine, deve avere un andamento monotono rispetto ai cambiamenti dei submovimenti. Per questi principi, si riscontrano due problemi legati all'utilizzo di questi metodi per rilevare la scioltezza di movimenti misurati con sensori IMU:

1. La necessità di conoscere la velocità

Nonostante le grandezze cinematiche diano una misura quantitativa del movimento, è necessario conoscere la velocità per poter misurare la scioltezza del movimento (che è al contrario una caratteristica qualitativa del movimento) attraverso questi due metodi di misura. Questo è legato principalmente al concetto di intermittenza che è, infatti, associato ai periodi di arresto del movimento detti MAP (movement arrest period), ovvero intervalli di tempo del movimento in corrispondenza dei quali tutte le derivate della posizione sono nulle. Tra quest'ultime, tuttavia, la più indicativa del periodo di arresto è la derivata prima, ovvero la velocità. Ciò perché, se si considerasse l'accelerazione, si potrebbero registrare dei MAP anche in corrispondenza degli intervalli di tempo in cui il movimento avviene a velocità costante. In questo modo, infatti, pur avendo un'accelerazione nulla non si ha un periodo di arresto del moto. Dal momento che il metodo SPARC è influenzato dalle intermittenze e quindi dai MAP, un'errata valutazione dei MAP comporterebbe una misura di dolcezza del movimento analizzato errata. Le stesse valutazioni valgono per il metodo LDLJ-V che anche se non dipende direttamente dai MAP, è basato sul jerk che è la derivata seconda della velocità e, quindi, anche in questo caso occorre calcolarlo sulla base del profilo di velocità. Per questo motivo è necessario comprendere come le componenti della velocità

lineare e angolare vengono acquisite dai sensori IMU.

I sensori IMU sono costituiti da un accelerometro a 3 assi che acquisisce le tre componenti dell'accelerazione lineare e un giroscopio a 3 assi che acquisisce le tre componenti della velocità angolare. Questo implica, dunque, una diversa gestione dei dati acquisiti a seconda che si consideri il moto traslatorio o rotatorio, considerando che, per quanto detto sopra, per misurare la scioltezza di movimento con i metodi SPARC e LDLJ-V occorre considerare la velocità.

Infatti, nel caso di moto traslatorio, i sensori IMU rilevano le tre componenti dell'accelerazione lineare e quindi le misurazioni acquisite non possono essere direttamente utilizzate per determinare la dolcezza di movimento, ma devono essere prima sottoposte ad un'operazione di integrazione. Tuttavia, i segnali acquisiti mediante l'accelerometro sono comunque influenzati dai movimenti di rotazione ed, inoltre, sono soggetti al rumore e, di conseguenza, questi errori si riverserebbero sulla velocità lineare ricavata e alterare la misura della scioltezza. Per questo, il metodo SPARC e il metodo LDLJ-V non dovrebbero essere utilizzati per stimare la fluidità di movimenti traslatori. In alternativa si potrebbe utilizzare il metodo LDLJ-A che pur basandosi sempre sul jerk, prevede di partire direttamente dall'accelerazione anziché dalla velocità. Allo stesso tempo, anche questo metodo presenta dei limiti, oltre al fatto che, utilizzando l'accelerazione si potrebbero rilevare arresti che in realtà non sono tali. Infatti, il segnale di accelerazione è comunque influenzato dalla presenza del moto rotatorio, dall'accuratezza con cui si determina l'orientazione del sensore IMU e dal rapporto tra l'accelerazione lineare e l'accelerazione di gravità.

Al contrario, nel caso di moto rotatorio, dal momento che il giroscopio a 3 assi del sensore IMU rileva la velocità angolare, le misure acquisite possono essere direttamente utilizzate per i due metodi di misura della scioltezza. In questo caso il metodo SPARC può essere direttamente applicato ai dati di velocità angolare acquisiti dal giroscopio, mentre il metodo LDLJ-V necessita di una correzione [Melendez-Calderon et al. \[2020\]](#)

2. Le misure acquisite mediante l'IMU nel sistema di riferimento locale del sensore devono essere espresse nel sistema di riferimento fisso (ovvero quello della Terra)

Questo passaggio, infatti, può causare errori che altererebbero la misura della scioltezza di movimento. Come affermato dall'articolo [Melendez-Calderon et al. \[2020\]](#), il problema della scelta del sistema di riferimento da usare per il calcolo della dolcezza di movimento, sebbene importante, viene raramente affrontato dalla letteratura. Nonostante si possa scegliere qualsiasi sistema di riferimento, quello della Terra risulta conveniente in quanto, oltre a dare consistenza alle misure, permette anche il confronto tra i risultati ottenuti da analisi differenti. Inoltre l'articolo precisa l'importanza dell'utilizzo di un numero sufficiente di sensori IMU e di un corretto posizionamento degli stessi nel momento in cui occorre determinare la scioltezza dei movimenti eseguiti da una determinata parte del corpo. Nel caso in cui si voglia analizzare la scioltezza di movimento di un braccio, è necessario utilizzare almeno due sensori IMU, uno posizionato sul polso e uno sulla spalla, in modo da avere anche un riferimento rispetto al tronco. Se si utilizzasse solo il sensore posizione sul polso, il valore di scioltezza ottenuto sarebbe riferito non al solo braccio ma all'intero corpo del soggetto.

Illustrati i metodi di misura della fluidità di movimento e avendo mostrato alcune applicazioni di tali metriche ai dati sperimentali derivanti da movimenti umani, si vogliono valutare questi metodi di misura applicandoli ai dati di pianificazione derivanti da algoritmi tratti dal campo della robotica e controllo assi in macchine servoattuate. L'obiettivo è quello di comprendere se queste metriche, utilizzate già in campo biomeccanico, siano in grado o meno di definire il livello di smoothness di traiettorie eseguite con manipolatori robotici. Nella parte II dell'elaborato si indicano, infatti, i motivi per cui occorre pianificare le traiettorie mirando al raggiungimento di un livello di fluidità di movimento adeguato alle esigenze.

Parte II

Pianificazione delle traiettorie

Capitolo 3

L'importanza della pianificazione delle traiettorie

Pianificare una traiettoria vuol dire trovare una relazione tra tempo e spazio, quindi consiste nel trovare una funzione che per ogni istante di tempo contenuto nel range temporale in cui la traiettoria viene definita, associ una desiderata posizione nello spazio. Nel fare questo, ovviamente, occorre considerare i limiti del sistema di attuazione, i carichi applicati su di esso e le vibrazioni generate dall'esecuzione della traiettoria.

La pianificazione delle traiettorie è importante sia per poter assicurare un corretto utilizzo dei robot e delle macchine automatiche, nell'obiettivo di evitare fenomeni indesiderati come vibrazioni, eccitazione delle frequenze di risonanza che potrebbero causare danni alla struttura, sia per la scelta e per il dimensionamento degli attuatori. Infatti, le traiettorie da eseguire hanno influenza diretta sul dimensionamento delle macchine, sugli sforzi e sui carichi che esse devono sostenere e sulle vibrazioni, nonché sulla precisione con cui viene eseguito il moto [Biagiotti and Melchiorri \[2008\]](#). Per evitare vibrazioni, eccitazioni delle frequenze di risonanza e per garantire un'adeguata precisione di esecuzione della traiettoria e di posizionamento, occorre pianificare delle traiettorie che garantiscano un certo livello di smoothness, ovvero di fluidità di movimento. Il problema, a questo punto, consiste nella misura di tale fluidità. Occorre, infatti, comprendere quale tipo di traiettoria scegliere a seconda delle esigenze di funzionamento e del livello di smoothness ottenibile dalla traiettoria stessa e quindi distinguere traiettorie più o meno smooth. Per far questo, nei capitoli successivi, si applicheranno i metodi di misura della smoothness più utilizzati tra quelli presentati nella parte I al capitolo 2 e che hanno già trovato applicazione in campo biomeccanico, alle traiettorie pianificate con algoritmi tratti dal campo della robotica e controllo assi in macchine servoattuate. Prima di trattare questo aspetto, nei paragrafi successivi, si illustrano vari tipi di traiettorie, da quelle elementari a quelle composte, fino ad arrivare alle traiettorie ottenute mediante metodi di pianificazione appositamente creati per generare movimenti smooth.

Capitolo 4

Classificazione delle traiettorie

Le traiettorie possono essere classificate, in primo luogo, come indicato nella figura 4.1:

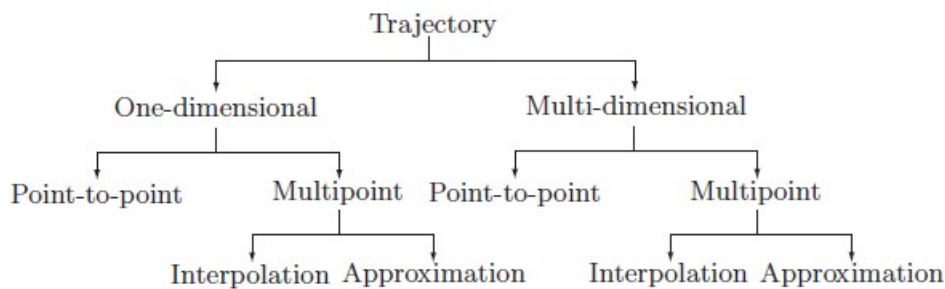


Figura 4.1: Classificazione delle traiettorie [Biagiotti and Melchiorri \[2008\]](#)

Anzitutto, si distinguono le traiettorie unidimensionali da quelle multidimensionali: le prime definiscono la posizione relativamente ad un unico grado di libertà e quindi sono rappresentate da funzioni scalari nel tempo, le seconde invece sono definite nello spazio e quindi rappresentate da funzioni vettoriali nel tempo. Per entrambe le categorie, si possono pianificare traiettorie Point-To-Point, che prevedono la definizione di punti di partenza e punti di arrivo senza obbligare il passaggio in punti intermedi, oppure traiettorie Multipoint che prevedono, invece, la definizione di un set di punti intermedi, detti via-points, da interpolare o da approssimare. Se si decide di interpolare i via-points, allora la traiettoria passerà in ogni punto intermedio (4.2 (a)); se si opta invece per l'approssimazione dei via-points, allora la traiettoria non passerà in ogni punto intermedio ma si avvicinerà solamente ad ciascuno di essi, commettendo un errore che deve essere contenuto all'interno di una tolleranza specificata (4.2 (b)).

Nel caso di traiettorie Point-To-Point, è possibile ottenere un movimento più complesso unendo più traiettorie definite tra un punto iniziale e finale per ciascuno dei quali sono definite delle condizioni al contorno di velocità, accelerazione, ecc. Nel caso di traiettorie multipoint, invece, per generare movimenti complessi è sufficiente definire i vari punti intermedi e determinare la funzione che li interpola o li approssima meglio a seconda delle condizioni al contorno imposte su ogni via-point.

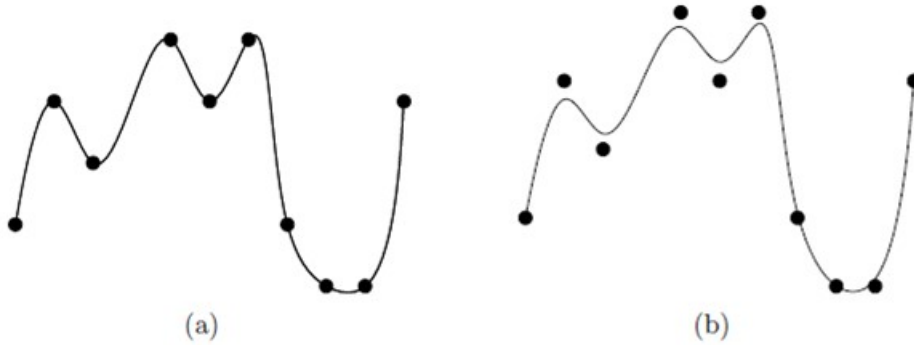


Figura 4.2: Distinzione tra interpolazione (a) e approssimazione (b) [Biagiotti and Melchiorri \[2008\]](#)

4.1 Traiettorie elementari

Come detto sopra, per pianificare una traiettoria occorre trovare una funzione nel tempo, definita nel range temporale compreso tra l'istante iniziale e l'istante finale del moto, che soddisfi le condizioni imposte sulla posizione, sulla velocità, sull'accelerazione all'inizio e alla fine del movimento. Nel trovare la relazione tra spazio e tempo, è possibile adottare varie tipologie di funzioni: funzione polinomiale, funzione trigonometrica, funzione esponenziale e funzioni ottenute dall'espansione di serie di Fourier sono utilizzate per la descrizione di traiettorie elementari. Se si vuole ottenere un moto più complesso, si può pensare di comporre tra loro queste funzioni.

4.1.1 Traiettorie polinomiali

Le traiettorie polinomiali sono espresse mediante l'utilizzo di polinomi, la cui funzione generica è rappresentata dall'equazione 4.1:

$$q(t) = a_0 + a_1 t + a_2 t^2 + \dots + a_n t^n \quad (4.1)$$

Dove n rappresenta il grado del polinomio e i vari coefficienti a_i , che saranno $n + 1$, sono determinati imponendo le condizioni al contorno. Il grado n dipende sia dalle condizioni al contorno da rispettare, sia dal grado di scioltezza di movimento che si desidera avere. Sulla base delle considerazioni appena fatte, dato che, generalmente, il numero di condizioni imposte è pari e quindi il numero dei coefficienti a_i , ovvero $n + 1$, è pari, il grado del polinomio n sarà dispari.

Nella figura 4.3 viene riportato un esempio di traiettoria polinomiale per la quale si riportano gli andamenti di posizione, velocità e accelerazione.

Traiettorie lineari

Si tratta di una traiettoria molto semplice che consente di descrivere facilmente l'andamento della posizione tra un punto iniziale q_0 e un punto finale q_1 , mediante l'utilizzo dell'equazione della retta passante per i due punti 4.2:

$$q(t) = a_0 + a_1(t - t_0) \quad (4.2)$$

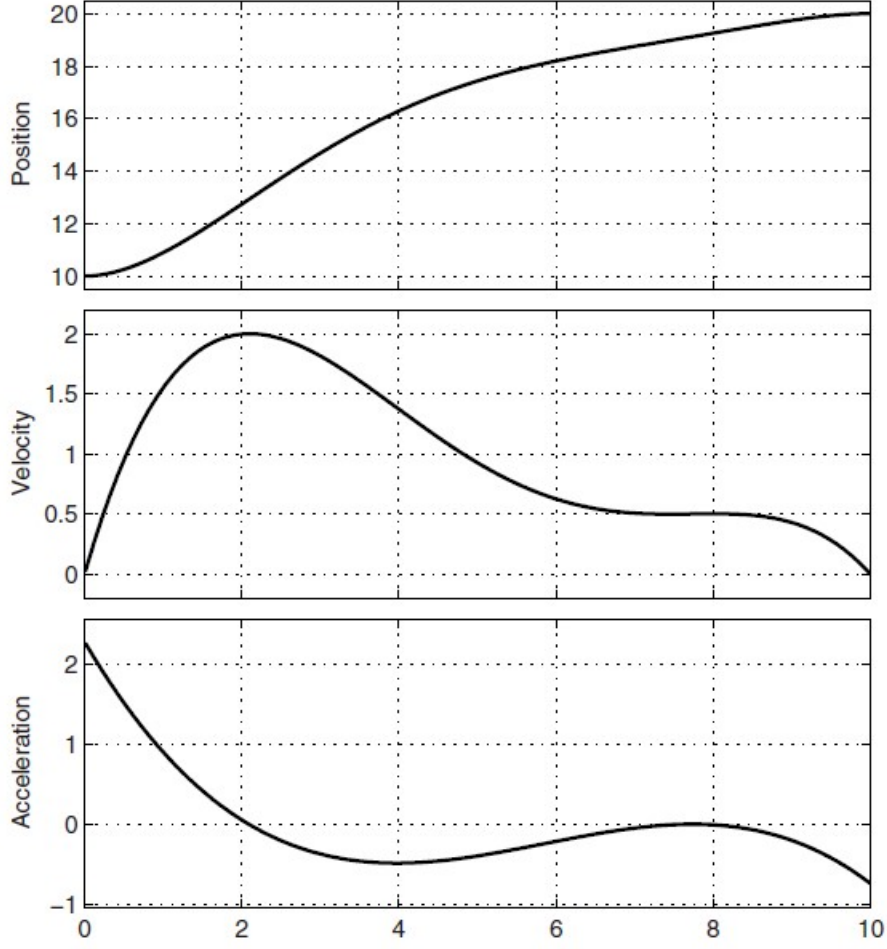


Figura 4.3: Andamento di posizione, velocità e accelerazione per traiettorie polinomiali dopo aver assegnato le condizioni al contorno e intermedie desiderate. [Biagiotti and Melchiorri \[2008\]](#)

Dove t_0 è l'istante iniziale del moto e i parametri a_0 e a_1 sono determinati mediante la risoluzione di un sistema di equazioni 4.3:

$$\begin{cases} q(t_0) = q_0 = a_0 \\ q(t_1) = q_1 = a_0 + a_1(t_1 - t_0) \end{cases} \implies \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 1 & T \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a_0 \\ a_1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} q_0 \\ q_1 \end{bmatrix} \quad (4.3)$$

Dove t_1 è l'istante finale del moto e $T = t_1 - t_0$ è la durata del moto. Di conseguenza, si ottiene 4.4:

$$\begin{cases} a_0 = q_0 \\ a_1 = \frac{q_1 - q_0}{t_1 - t_0} = \frac{h}{T} \end{cases} \quad (4.4)$$

Dove h rappresenta lo spostamento eseguito e, quindi, il rapporto tra h e tra T è pari alla velocità del moto che è quindi costante su tutto l'intervallo di tempo. Perciò, l'accelerazione è nulla su tutta la

traiettoria mentre nell'istante iniziale e finale ha un comportamento impulsivo in quanto nell'istante t_0 deve fornire istantaneamente la velocità richiesta mentre nell'istante t_1 deve annullare istantaneamente la velocità. Si veda al tal prosito la figura 4.4 dove viene riportato un esempio di traiettoria lineare e dove emerge quanto appena descritto. Questo tipo di pianificazione, perciò, può essere utilizzato quando

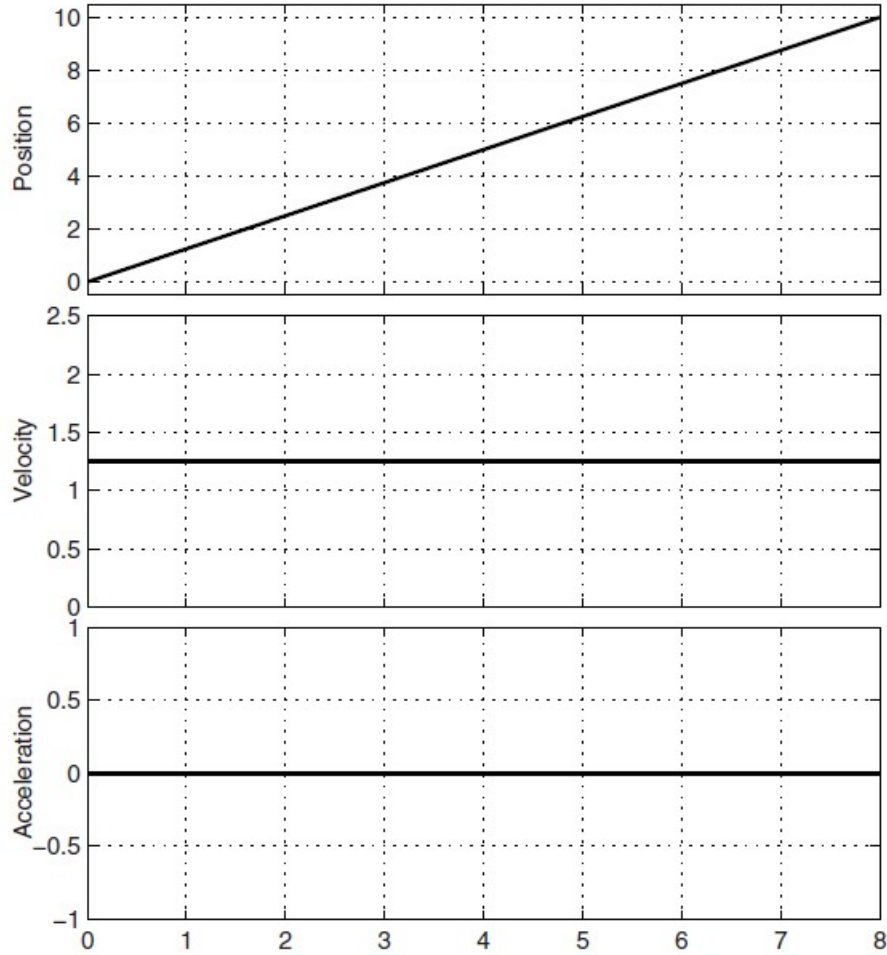


Figura 4.4: Andamento di posizione, velocità e accelerazione per traiettorie lineari considerando $t_0 = 0$, $t_1 = 8$, $q_0 = 0$ e $q_1 = 10$. [Biagiotti and Melchiorri \[2008\]](#)

si conoscono a priori gli istanti iniziale e finale del moto e le posizioni iniziale e finale, ma non consente di ottenere una velocità continua e valori di accelerazione e jerk limitati. Infatti, all'inizio e alla fine del moto, la velocità è discontinua e l'accelerazione tende ad infinito. Ciò, oltre a non garantire un moto fluido, rende questo tipo di pianificazione inutilizzabile.

Traiettorie paraboliche

Questo tipo di pianificazione prevede un'accelerazione costante in modulo con segno positivo per le fasi di accelerazione e negativo per le fasi di decelerazione. Si ottiene tramite la composizione di due polinomi di secondo grado uniti nel punto di flesso in corrispondenza di un istante indicato con t_f dove si ha il cambio da accelerazione a decelerazione. Supponendo di adottare un profilo simmetrico, si avrà $t_f = (t_0 + t_1)/2$ e $q_f = (q_0 + q_1)/2$. Quindi, si avrà che la durata del primo tratto e quella del secondo tratto saranno uguali e pari alla metà della durata totale e lo spostamento ottenuto in seguito al primo tratto e quello ottenuto in seguito al secondo tratto saranno uguali e pari alla metà dello spostamento totale. Considerando il primo tratto, l'equazione che lo descrive è la seguente 4.5:

$$q_a(t) = a_0 + a_1(t - t_0) + a_2(t - t_0)^2, \quad t \in [t_0, t_f] \quad (4.5)$$

I parametri a_0 , a_1 , a_2 sono ottenuti imponendo le condizioni di posizione all'inizio e alla fine del tratto di accelerazione e le condizioni di velocità all'inizio del moto 4.6:

$$\begin{cases} q_a(t_0) = q_0 = a_0 \\ q_a(t_f) = q_f = a_0 + a_1(t_f - t_0) + a_2(t_f - t_0)^2 \\ \dot{q}_a(t_0) = v_0 = a_1 \end{cases} \quad (4.6)$$

Si ottiene così:

$$a_0 = q_0, \quad a_1 = v_0, \quad a_2 = \frac{2}{T^2}(h - v_0 T) \quad (4.7)$$

Perciò si ottiene la funzione che descrive l'andamento della posizione e, derivando, si ottengono anche le funzioni di velocità e accelerazione che, come previsto, risulta essere costante 4.8.

$$\begin{cases} q_a(t) = q_0 + v_0(t - t_0) + \frac{2}{T^2}(h - v_0 T)(t - t_0)^2 \\ \dot{q}_a(t) = v_0 + \frac{4}{T^2}(h - v_0 T)(t - t_0) \\ \ddot{q}_a(t) = \frac{4}{T^2}(h - v_0 T) \quad (\text{constant}) \end{cases} \quad (4.8)$$

Nel tratto di decelerazione, cioè tra l'istante t_f e l'istante t_1 , la traiettoria è descritta dalla seguente equazione 4.9:

$$q_b(t) = a_3 + a_4(t - t_f) + a_5(t - t_f)^2 \quad t \in [t_f, t_1] \quad (4.9)$$

Come visto per il tratto di accelerazione, i parametri a_3 , a_4 e a_5 vengono determinati imponendo le condizioni di posizione all'inizio e alla fine del secondo tratto e la condizione di velocità nell'istante finale del moto v_1 4.10

$$\begin{cases} q_b(t_f) = q_f = a_3 \\ q_b(t_1) = q_1 = a_3 + a_4(t_1 - t_f) + a_5(t_1 - t_f)^2 \\ \dot{q}_b(t_1) = v_1 = a_4 + 2a_5(t_1 - t_f) \end{cases} \quad (4.10)$$

E quindi si ha:

$$a_3 = q_f = \frac{q_0 + q_1}{2}, \quad a_4 = 2\frac{h}{T} - v_1, \quad a_5 = \frac{2}{T^2}(v_1 T - h) \quad (4.11)$$

Quindi, determinati i parametri, si ottengono le funzioni di posizione, velocità e accelerazione per il secondo tratto 4.12:

$$\begin{cases} q_b(t) = q_f + \left(2\frac{h}{T} - v_1\right) (t - t_f) + \frac{2}{T^2} (v_1 T - h) (t - t_f)^2 \\ \dot{q}_b(t) = 2\frac{h}{T} - v_1 + \frac{4}{T^2} (v_1 T - h) (t - t_f) \\ \ddot{q}_b(t) = \frac{4}{T^2} (v_1 T - h) \end{cases} \quad (4.12)$$

Nella figura 4.5 vengono riportati gli andamenti di posizione, velocità e accelerazione per un esempio di traiettoria parabolica. Si nota che la pianificazione di traiettorie mediante polinomi di secondo grado non è sufficiente per ottenere un movimento dolce in quanto l'accelerazione presenta ancora delle discontinuità che generano valori del jerk infiniti.

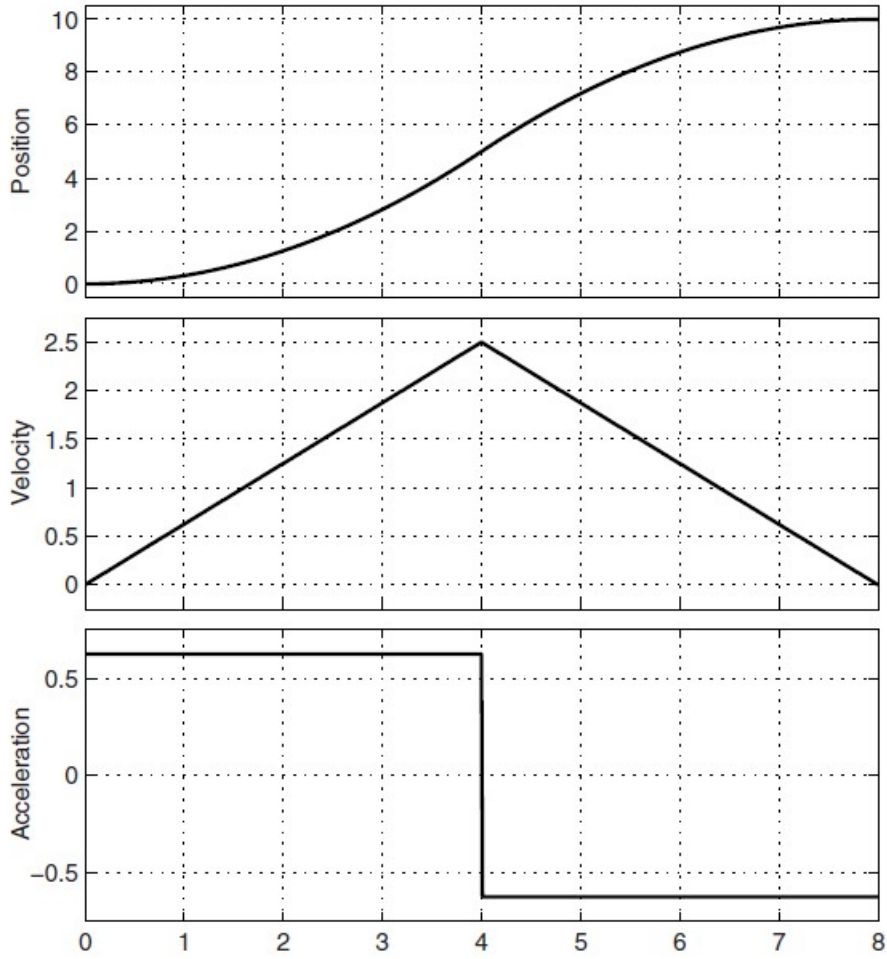


Figura 4.5: Andamento di posizione, velocità e accelerazione per traiettorie paraboliche considerando $t_0 = 0$, $t_1 = 8$, $q_0 = 0$ e $q_1 = 10$. [Biagiotti and Melchiorri \[2008\]](#)

Traiettorie cubiche

In questo caso, si applica lo stesso procedimento applicato per le traiettorie polinomiali di grado 1 e 2 ma considerando 4 condizioni al contorno dato che si avranno 4 parametri da determinare e quindi, brevemente:

$$q(t) = a_0 + a_1(t - t_0) + a_2(t - t_0)^2 + a_3(t - t_0)^3 \quad (4.13)$$

$$q(t_0) = q_0, \quad \dot{q}(t_0) = v_0, \quad q(t_1) = q_1, \quad \dot{q}(t_1) = v_1 \quad (4.14)$$

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & (t_1 - t_0) & (t_1 - t_0)^2 & (t_1 - t_0)^3 \\ 0 & 0 & 2(t_1 - t_0) & 3(t_1 - t_0)^2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a_0 \\ a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} q_0 \\ v_0 \\ q_1 \\ v_1 \end{bmatrix} \quad (4.15)$$

$$\begin{cases} a_0 = q_0 \\ a_1 = v_0 \\ a_2 = \frac{-3(q_0 - q_1) - (2v_0 + v_1)T}{T^2} \\ a_3 = \frac{2(q_0 - q_1) + (v_0 + v_1)T}{T^3} \end{cases} \quad (4.16)$$

Perciò, una volta fissate le condizioni di posizione iniziale e finale q_0 e q_1 , le condizioni di velocità iniziale e finale v_0 e v_1 e gli istanti di tempo iniziale e finale t_0 e t_1 , è possibile determinare la funzione della posizione nel tempo e, derivando, le funzioni di velocità, accelerazione e jerk. [L.Biagiotti \[2008-2009\]](#)

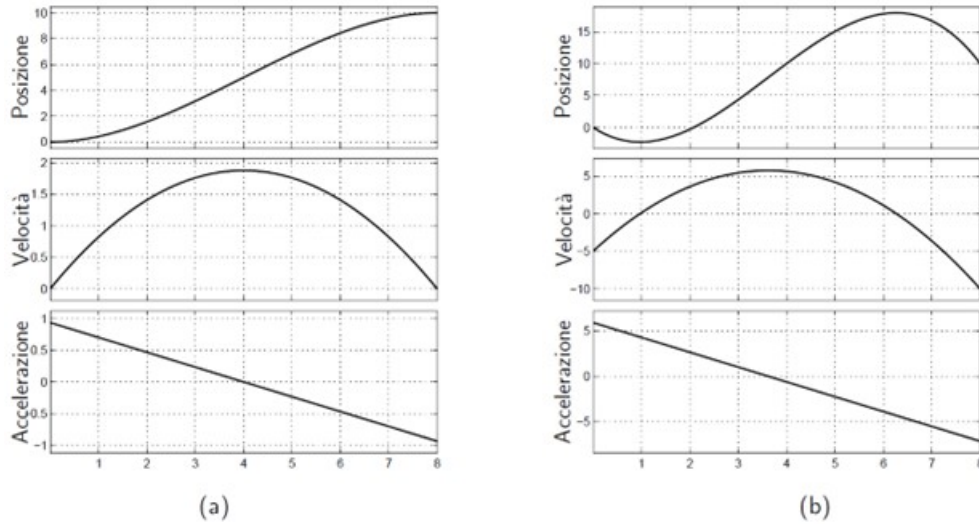


Figura 4.6: Andamento di posizione, velocità e accelerazione per traiettorie cubiche con $q_0 = 0, q_1 = 10, t_0 = 0$ e $t_1 = 8$. Nel caso (a) sono stati imposti valori di velocità nulli all'inizio e alla fine del moto $v_0 = v_1 = 0$. Nel caso (b) sono stati imposti valori di velocità non nulli sia all'inizio sia alla fine del moto $v_0 = -5$ e $v_1 = -10$. [L.Biagiotti \[2008-2009\]](#)

Dalla figura 4.6 si può notare che si ha una mancanza di continuità dell'accelerazione agli estremi dell'intervallo di tempo e ciò implica un jerk infinito negli istanti di tempo $t_0 = 0$ e $t_1 = 8$. Di conseguenza all'inizio e alla fine del moto si ha un "colpo di coppia" che, oltre a provocare un movimento poco fluido, potrebbe danneggiare i componenti del sistema.

Traiettorie polinomiali di quinto grado

Generalmente si usa nei casi in cui sono richiesti delle condizioni al contorno anche sull'accelerazione. Infatti nell'equazione generica di un polinomio di quinto grado 4.17 sono presenti sei coefficienti a_i da determinare le sei condizioni al contorno da applicare:

$$q(t) = a_0 + a_1(t - t_1) + a_2(t - t_1)^2 + a_3(t - t_1)^3 + a_4(t - t_1)^4 + a_5(t - t_1)^5 \quad (4.17)$$

condizioni al contorno 4.18:

$$\begin{cases} q(t_0) = q_0 & q(t_1) = q_1 \\ \dot{q}(t_0) = v_0 & \dot{q}(t_1) = v_1 \\ \ddot{q}(t_0) = a_0 & \ddot{q}(t_1) = a_1 \end{cases} \quad (4.18)$$

coefficienti determinati 4.19:

$$\begin{cases} a_0 = q_0 \\ a_1 = v_0 \\ a_2 = \frac{1}{2}a_0 \\ a_3 = \frac{1}{2T^3} [20h - (8v_1 + 12v_0)T - (3a_0 - a_1)T^2] \\ a_4 = \frac{1}{2T^4} [-30h + (14v_1 + 16v_0)T + (3a_0 - 2a_1)T^2] \\ a_5 = \frac{1}{2T^5} [12h - 6(v_1 + v_0)T + (a_1 - a_0)T^2] \end{cases} \quad (4.19)$$

dove $T = t_1 - t_0$.

In generale, quindi, per un polinomio di grado n , saranno necessarie $n+1$ condizioni al contorno per poter definire completamente la funzione di posizione nel tempo e ottenere, derivando, le funzioni di velocità, accelerazione e jerk.

4.1.2 Traiettorie trigonometriche

Le traiettorie trigonometriche sono basate sulle funzioni trigonometriche, ovvero seno e coseno. Per questo motivo, sono rappresentate da funzioni nel tempo che possono essere derivate infinite volte. Esempi di traiettorie trigonometriche sono la traiettoria armonica, la traiettoria cicloidale e la traiettoria ellittica.

Traiettorie armoniche

La traiettoria armonica presenta la seguente funzione di posizione [4.20](#):

$$q(t) = \frac{h}{2} \left(1 - \cos \frac{\pi(t-t_0)}{T} \right) + q_0 \quad (4.20)$$

Derivando rispetto al tempo, si ottengono poi le funzioni di velocità, accelerazione e jerk [4.21](#):

$$\begin{cases} q(t) &= \frac{h}{2} \left(1 - \cos \frac{\pi(t-t_0)}{T} \right) + q_0 \\ \dot{q}(t) &= \frac{h}{T} \frac{\pi}{2} \sin \left(\frac{\pi(t-t_0)}{T} \right) \\ \ddot{q}(t) &= \frac{h}{T^2} \frac{\pi^2}{2} \cos \left(\frac{\pi(t-t_0)}{T} \right) \\ \ddot{\dot{q}}(t) &= -\frac{h}{T^3} \frac{\pi^3}{2} \sin \left(\frac{\pi(t-t_0)}{T} \right) \end{cases} \quad (4.21)$$

dove t_0 e t_1 sono rispettivamente gli istanti iniziali e finali del moto, $T = t_0 - t_1$ e $h = q_1 - q_0$. Prestando attenzione alle equazioni e alla figura [4.7](#), si nota che l'accelerazione non si annulla all'istante di tempo iniziale e finale del moto. Ciò determina una discontinuità dell'accelerazione agli estremi dell'intervallo di tempo del moto e quindi genera un colpo di coppia sui giunti in quanto si ha il passaggio istantaneo tra un valore di accelerazione nullo e un valore di accelerazione finito non nullo. Infatti, il valore del jerk agli estremi sarà infinito.

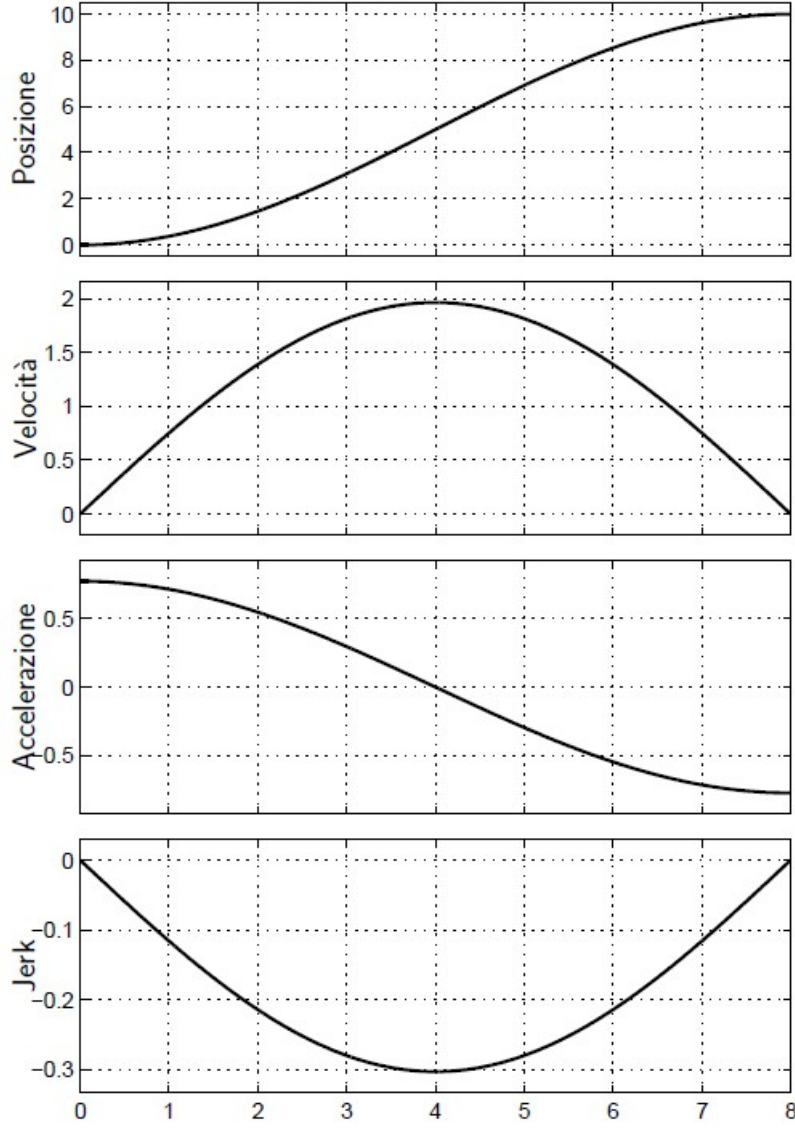


Figura 4.7: Andamento di posizione, velocità, accelerazione e jerk per traiettorie armoniche con $q_0 = 0$, $q_1 = 10$, $t_0 = 0$ e $t_1 = 8$. [L.Biagiotti \[2008-2009\]](#)

Traiettorie cicloidali

La traiettoria cicloidale risolve il problema di discontinuità dell'accelerazione agli estremi dell'intervallo di moto proprio della traiettoria armonica. Infatti, come mostrato in figura 4.8, l'accelerazione è nulla in t_0 e t_1 e quindi il jerk è finito in corrispondenza di essi. Si riporta la funzione di posizione nel caso di traiettoria cicloidale 4.22:

$$q(t) = h \left(\frac{t - t_0}{T} - \frac{1}{2\pi} \sin \frac{2\pi (t - t_0)}{T} \right) + q_0 \quad (4.22)$$

Derivando la funzione di posizione, si ottengono anche velocità, accelerazione e jerk 4.23:

$$\begin{cases} q(t) = h \left(\frac{t-t_0}{T} - \frac{1}{2\pi} \sin \frac{2\pi(t-t_0)}{T} \right) + q_0 \\ \dot{q}(t) = \frac{h}{T} \left(1 - \cos \frac{2\pi(t-t_0)}{T} \right) \\ \ddot{q}(t) = \frac{h}{T^2} 2\pi \sin \frac{2\pi(t-t_0)}{T} \\ \ddot{\dot{q}}(t) = \frac{h}{T^3} 4\pi^2 \cos \frac{2\pi(t-t_0)}{T} \end{cases} \quad (4.23)$$

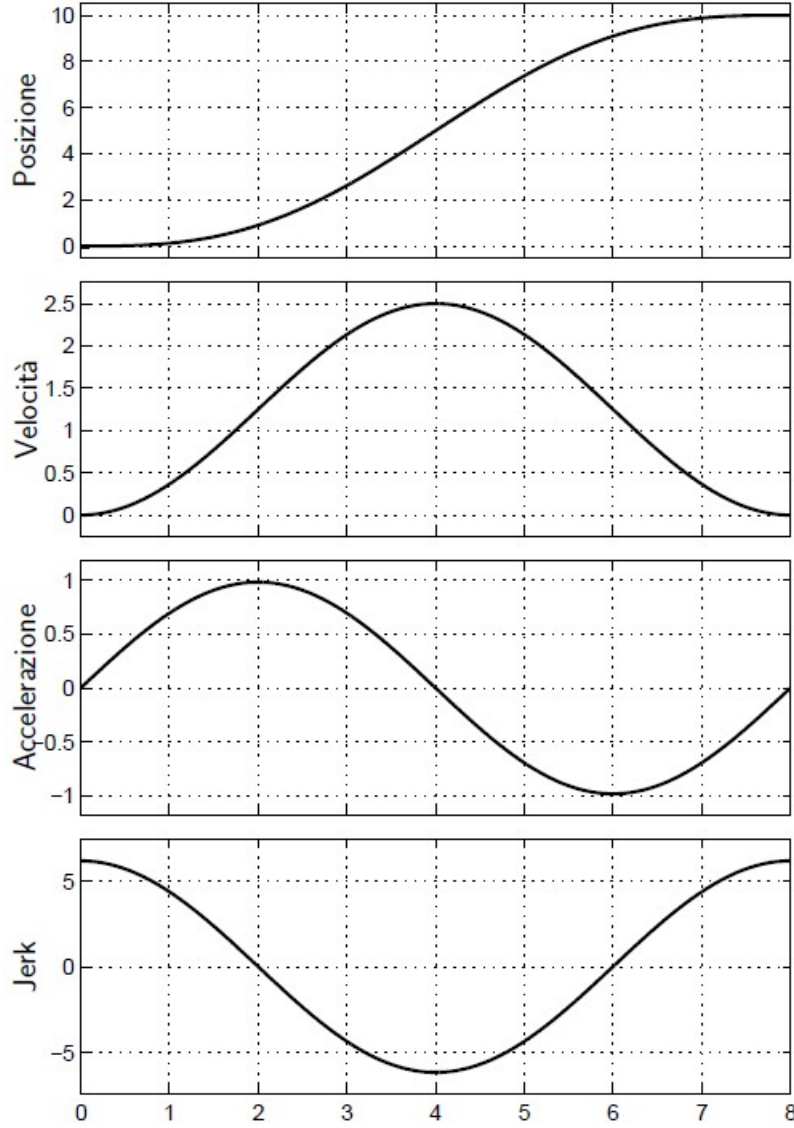


Figura 4.8: Andamento di posizione, velocità, accelerazione e jerk per traiettorie cicloidali con $q_0 = 0$, $q_1 = 10$, $t_0 = 0$ e $t_1 = 8$. [L.Biagiotti \[2008-2009\]](#)

4.1.3 Traiettorie basate sullo sviluppo in serie di Fourier

Questo tipo di traiettorie sono ottenute mediante lo sviluppo di Fourier di traiettorie elementari selezionando solo alcuni termini e rappresentano un ottimo compromesso tra quelle polinomiali e quelle trigonometriche in quanto sono infinitamente derivabili ma sono meno armoniche rispetto alle trigonometriche. Di seguito si riportano alcune tipologie di queste traiettorie:

Traiettoria di Gutman 1-3

I numeri riportati dopo il nome indicano quali termini dello sviluppo in serie di Fourier sono considerati. In questo caso, quindi, la prima e la terza armonica [4.24](#):

$$q(t) = h \left[\frac{t - t_0}{T} - \frac{15}{32\pi} \sin \left(\frac{2\pi (t - t_0)}{T} \right) - \frac{1}{96\pi} \sin \left(\frac{6\pi (t - t_0)}{T} \right) \right] + q_0 \quad (4.24)$$

Traiettoria di Freudestein 1-3

$$q(t) = h \left[\frac{t - t_0}{T} - \frac{27}{56\pi} \sin \left(\frac{2\pi (t - t_0)}{T} \right) - \frac{1}{168\pi} \sin \left(\frac{6\pi (t - t_0)}{T} \right) \right] + q_0 \quad (4.25)$$

Traiettoria di Freudestein 1-3-5

$$q(t) = h \left[\frac{t - t_0}{T} - \frac{0.9438}{2\pi} \left(\sin \frac{2\pi (t - t_0)}{T} + \frac{1}{54} \sin \frac{6\pi (t - t_0)}{T} + \frac{1}{1250} \sin \frac{10\pi (t - t_0)}{T} \right) \right] + q_0 \quad (4.26)$$

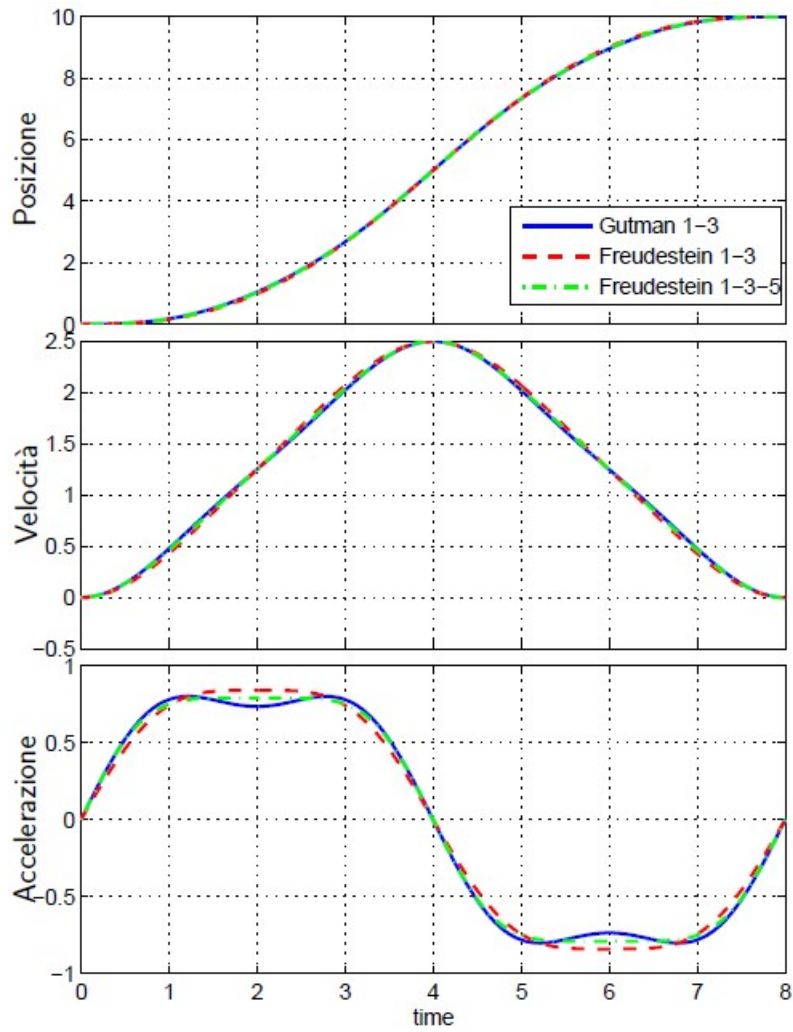


Figura 4.9: Andamento di posizione, velocità e accelerazione per traiettoria di Gutman 1-3, traiettoria di Freudestein 1-3 e traiettoria di Freudestein 1-3-5 con $q_0 = 0$, $q_1 = 10$, $t_0 = 0$ e $t_1 = 8$. [L.Biagiotti \[2008-2009\]](#)

4.2 Traiettorie composte

Le funzioni composte sono il risultato della composizioni di funzioni elementari al fine di rispondere a determinate esigenze di moto. Esse possono essere anche definite a tratti e costituite da funzioni elementari differenti. In questo modo in ciascun tratto si mantiene la continuità almeno di posizione e velocità.

4.2.1 Traiettorie a trapezio di velocità

Questa tipologia di traiettoria è definita a tratti: un tratto ad accelerazione costante positiva, un tratto ad accelerazione nulla e un tratto ad accelerazione costante negativa. Di conseguenza la velocità crescerà linearmente nel primo tratto, resterà costante nel secondo e decrescerà linearmente nel terzo. Questo implica che la posizione avrà un andamento parabolico nel primo tratto, lineare nel secondo e di nuovo parabolico nel terzo. Si nota, quindi, che in questo caso la posizione è data dalla combinazione di una traiettoria lineare e due traiettorie paraboliche e, di conseguenza, occorrerà determinare tre parametri per il primo e terzo tratto, ovvero quelli parabolici, e due parametri per il tratto centrale, cioè quello lineare. Nei passaggi successivi si considera $T = t_1 - t_0$, T_a l'istante di tempo in cui termina il primo tratto ad accelerazione positiva, $T - T_a$ l'istante di tempo in cui termina il secondo tratto ed inizia il tratto ad accelerazione negativa e v_c la velocità che caratterizza il secondo tratto ad accelerazione nulla.

Tratto 1: velocità crescente linearmente $t \in (0, T_a)$

$$\begin{cases} q(t) = a_0 + a_1 t + a_2 t^2 \\ \dot{q}(t) = a_1 + 2a_2 t \\ \ddot{q}(t) = 2a_2 \end{cases} \quad (4.27)$$

Come si nota occorre determinare tre parametri imponendo posizione iniziale q_0 , velocità iniziale v_0 e velocità finale v_c raggiunta in corrispondenza dell'istante finale del primo tratto T_a e che poi verrà mantenuta costante nel secondo tratto. Così facendo si otterrà:

$$\begin{cases} a_0 = q_0 \\ a_1 = 0 \\ a_2 = \frac{v_c}{2T_a} \end{cases} \quad (4.28)$$

Tratto 2: velocità costante $t \in (T_a, T - T_a)$

$$\begin{cases} q(t) = b_0 + b_1 t \\ \dot{q}(t) = b_1 \\ \ddot{q}(t) = 0 \end{cases} \quad (4.29)$$

In questo caso i parametri da determinare sono due b_0 e b_1 , determinati imponendo la posizione e la velocità all'inizio del secondo tratto, rispettivamente $q(T_a)$ e v_c . Dal momento che:

$$q(T_a) = q_0 + \frac{v_c T_a}{2} = b_0 + v_c T_a \quad (4.30)$$

si ottiene:

$$\begin{cases} b_0 = q_0 - \frac{v_c T_a}{2} \\ b_1 = v_c \end{cases} \quad (4.31)$$

Tratto 3: velocità decrescente linearmente $t \in (T - T_a, T)$

$$\begin{cases} q(t) = c_0 + c_1 t + c_2 t^2 \\ \dot{q}(t) = c_1 + 2c_2 t \\ \ddot{q}(t) = 2c_2 \end{cases} \quad (4.32)$$

Come si nota occorre determinare tre parametri imponendo posizione finale q_1 , velocità finale v_1 e velocità v_c raggiunta in corrispondenza dell'istante iniziale del terzo tratto $T - T_a$. Così facendo si otterrà:

$$\begin{cases} c_0 = q_1 - \frac{v_c T^2}{2T_a} \\ c_1 = \frac{v_c T}{T_a} \\ c_2 = -\frac{v_c}{2T_a} \end{cases} \quad (4.33)$$

Imponendo i valori di t_0 , t_1 , T_a , q_0 , q_1 si ottiene la traiettoria desiderata. Un esempio di questo tipo di traiettoria è riportato in figura 4.10

Innanzitutto occorre considerare le due condizioni limite legate a questo tipo di traiettoria:

1. **degenerazione del profilo di velocità in un triangolo:** questo accade se $T_a = T/2$ e quindi il tratto a velocità costante scompare e si hanno soltanto un tratto di accelerazione e un tratto di decelerazione. Perciò occorre imporre $T_a \leq T/2$ oppure, operando sull'accelerazione si può imporre $|\ddot{q}| \geq \frac{4|q_1 - q_0|}{T^2}$;
2. **degenerazione del profilo di velocità in un rettangolo:** in questo caso $T_a = 0$ e quindi si ha soltanto il tratto di velocità costante e perciò l'accelerazione è sempre nulla. Di conseguenza, è richiesta un'accelerazione infinita nell'istante iniziale per raggiungere istantaneamente il valore di velocità richiesto e una decelerazione infinita nell'istante finale per riportare istantaneamente la velocità a 0.

Per determinare i parametri è possibile seguire due strade:

1. imporre la velocità massima $v_{max} = v_c$ e l'accelerazione massima a_{max} per ricavare poi T e T_a :

$$\begin{cases} T_a = \frac{v_{max}}{a_{max}} \\ T = \frac{h}{v_{max}} + \frac{v_{max}}{a_{max}} \end{cases} \quad (4.34)$$

e quindi la traiettoria è:

$$q(t) = \begin{cases} q_0 + \frac{1}{2}a_{max}(t - t_0)^2, & t_0 \leq t \leq t_0 + T_a \\ q_0 + a_{max}T_a \left(t - t_0 - \frac{T_a}{2}\right), & t_0 + T_a < t \leq t_1 - T_a \\ q_1 - \frac{1}{2}a_{max}(t_1 - t)^2, & t_1 - T_a < t \leq t_1. \end{cases} \quad (4.35)$$

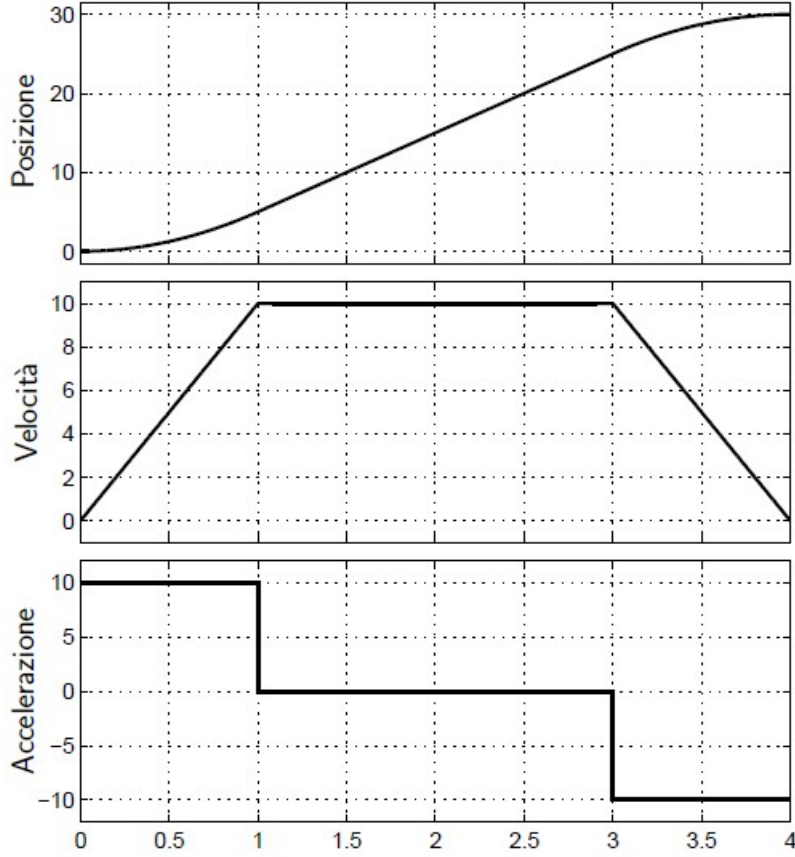


Figura 4.10: Andaneto di posizione, velocità e accelerazione per traiettorie con profilo di velocità trapezoidale. In questo caso si pongono con $q_0 = 0$, $q_1 = 30$, $t_0 = 0$, $t_1 = 4$, $T_a = 1$ e $v_c = 10$. [L.Biagiotti \[2008-2009\]](#)

2. imporre T e T_a ricavando $v_{max} = v_c$ e a_{max} :

$$\begin{cases} v_{max} = \frac{h}{T-T_a} \\ a_{max} = \frac{h}{T_a(T-T_a)} \end{cases} \quad (4.36)$$

Determinati tali parametri e quindi l'espressione della traiettoria $q(t)$ e le sue derivate, è necessario verificare le condizioni 1 e 2 per capire se il profilo di velocità ottenuto imponendo i requisiti desiderati sia o meno un profilo trapezoidale.

Questa tipologia di profili, tuttavia non è sufficiente dove si richiede una dolcezza di movimento più elevata. Infatti, profili polinomiali di primo e secondo grado non consentono di ottenere un'accelerazione continua su tutto l'intervallo di tempo del moto e quindi valori del jerk contenuti. Ciò provoca dei colpi di coppia che, oltre a poter causare dei danni a componenti del sistema, generano un moto non fluido. Se si vuole ottenere un moto più "smooth", perciò, si deve ricorrere a traiettorie che prevedono l'utilizzo di polinomi di grado superiore a 2 e che quindi consentano di ottenere almeno un'accelerazione continua

su tutto l'intervallo di moto (estremi t_0 e t_1 inclusi). Di seguito sono analizzate delle tipologie di traiettorie che si avvicinano a questo tipo di moto.

4.2.2 Traiettorie a doppia S in velocità

Questo tipo di traiettoria, come il precedente, prevede un tratto di accelerazione, un tratto a velocità costante e un tratto di decelerazione ma, al contrario del precedente, definisce anche i segmenti di accelerazione e decelerazione stessi in modo tale da ottenere un'accelerazione continua nell'intero intervallo di moto e quindi un jerk costante a tratti. Un esempio generico di questo tipo di traiettoria è riportato in figura [4.11](#)

Si può scegliere di utilizzare un profilo simmetrico o asimmetrico. Se si sceglie di utilizzare un profilo simmetrico, allora si imporranno vincoli simmetrici sui valori di velocità, accelerazione e jerk, ovvero $v_{min} = -v_{max}$, $a_{min} = -a_{max}$ e $j_{min} = -j_{max}$. In questo caso il tratto di accelerazione è uguale a quello di decelerazione e perciò si ha $T_a = T_d$ e $T_{j1} = T_{j2} = T_j$. A questo punto, conoscendo i vincoli sulla posizione iniziale e finale e sulla velocità iniziale e finale, è possibile calcolare i parametri necessari per definire la traiettoria.

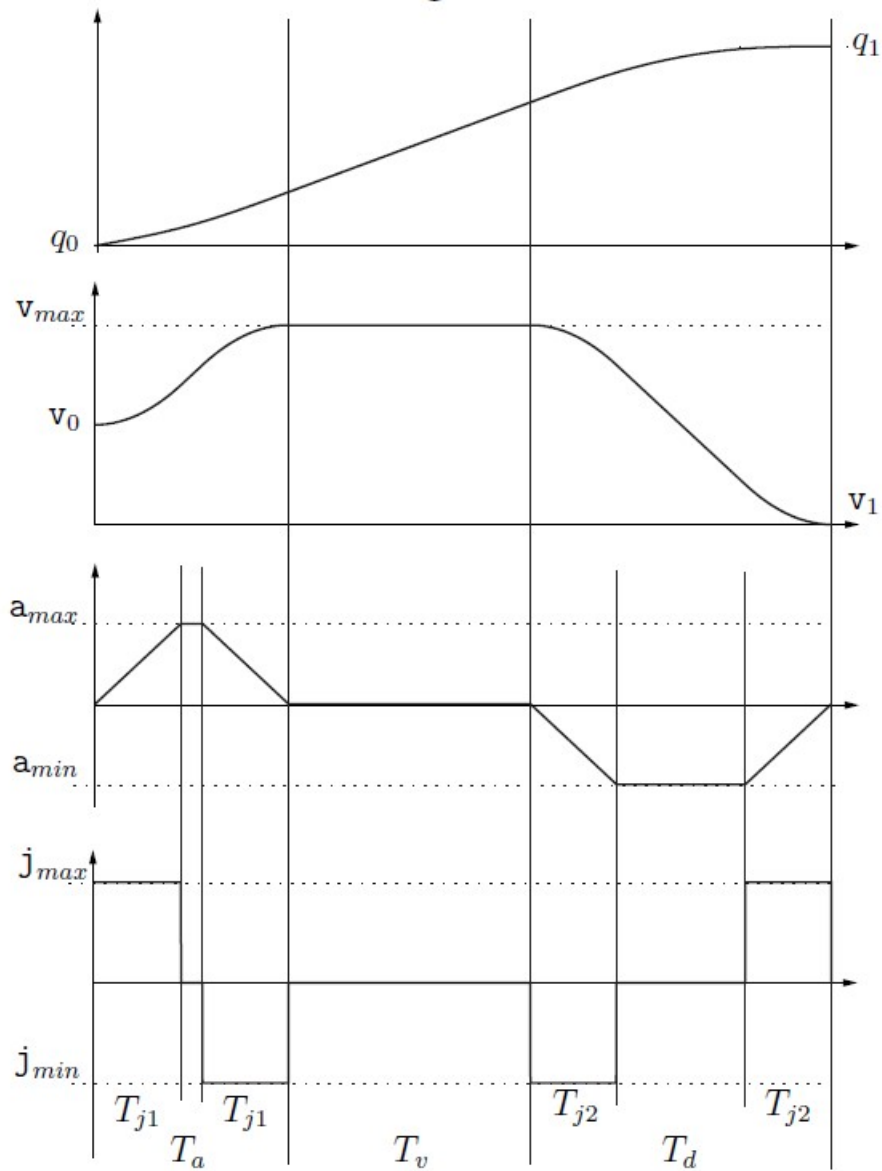


Figura 4.11: Andamento di posizione, velocità e accelerazione per traiettorie a doppia S in velocità. [L.Biagiotti \[2008-2009\]](#)

4.2.3 Traiettorie Spline

Le traiettorie spline sono date dall'unione di polinomi, di grado generalmente pari a 3 o a 5, definiti su intervalli di tempo contenuti nell'intervallo di tempo totale del moto 4.12. Si tratta di traiettorie multipoint che hanno lo scopo di interpolare n punti con la curvatura minima possibile. Saranno quindi necessari $n-1$ polinomi determinati imponendo le condizioni di passaggio per gli n punti e le condizioni di continuità sia della traiettoria complessiva sia delle sue derivate almeno fino alla secondo, così da

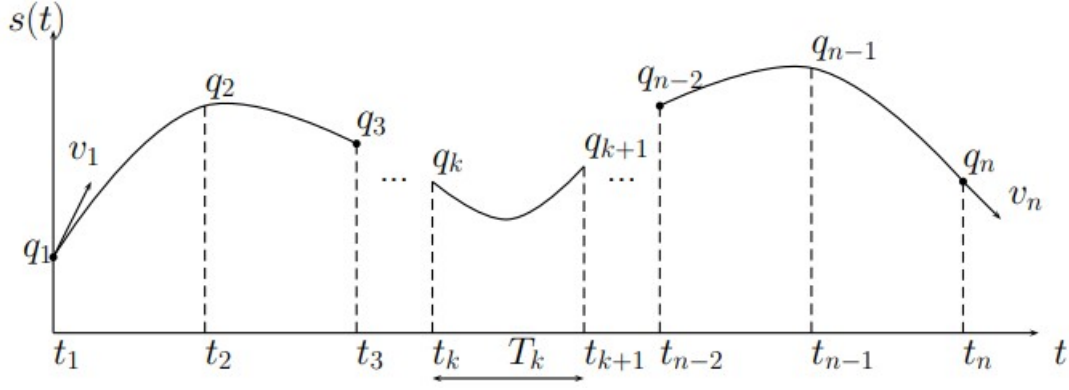


Figura 4.12: Spline generica ottenuta con l'unione di polinomi, ciascuno dei quali è definito su intervalli di tempo $[t_k, t_{k+1}]$. L.Biagiotti [2008-2009]

avere un'accelerazione continua (per questo è necessario comporre la traiettoria con polinomi di grado almeno pari a 3). Nel caso di polinomi di terzo grado si parla di spline cubica, la cui espressione generica è definita come segue:

$$s(t) = \{q_k(t), \quad t \in [t_k, t_{k+1}], \quad k = 0, \dots, n-1\},$$

$$q_k(t) = a_{k0} + a_{k1}(t - t_k) + a_{k2}(t - t_k)^2 + a_{k3}(t - t_k)^3.$$

Si hanno perciò quattro parametri da determinare per ogni polinomio $q_k(t)$ e, quindi, $4(n-1)$ parametri in totale. Si dovranno quindi avere almeno $4(n-1)$ condizioni da imporre. Dal momento che i polinomi devono passare per gli n punti, si avranno 2 condizioni di passaggio per ogni polinomio e quindi $2(n-1)$ condizioni di passaggio in totale. Inoltre si avranno $n-2$ condizioni di continuità nei punti intermedi sia per la velocità sia per l'accelerazione. Quindi, si avranno $4(n-1) - 2(n-1) - 2(n-2) = 4n - 4 - 2n + 2 - 2n + 4 = 2$ gradi di libertà. Quest'ultimi verranno eliminati imponendo i valori di velocità iniziale e finale. A questo punto la spline cubica sarà completamente definita.

Si riportano di seguito i passaggi per il calcolo dei coefficienti a_{ki} . Nel caso in cui la spline sia cubica, ovvero ottenuta dall'unione di polinomi di grado pari a 3, occorrerà imporre 4 condizioni al contorno per poter definire completamente ogni polinomio. Si impongono, perciò, due condizioni al contorno sulla posizione e due condizioni al contorno sulla velocità, prese in corrispondenza degli istanti iniziale e finale dell'intervallo di tempo di riferimento per il polinomio considerato. Ovvero imponendo q_k, q_{k+1}, v_K e v_{k+1} :

$$\begin{cases} q_k(t_k) = a_{k,0} = q_k \\ \dot{q}_k(t_k) = a_{k,1} = v_k \\ q_k(t_{k+1}) = a_{k,0} + a_{k,1}T_k + a_{k,2}T_k^2 + a_{k,3}T_k^3 = q_{k+1} \\ \dot{q}_k(t_{k+1}) = a_{k,1} + 2a_{k,2}T_k + 3a_{k,3}T_k^2 \end{cases} \quad (4.37)$$

dove $T_k = t_{k+1} - t_k$. Il sistema 4.37 ha la seguente soluzione:

$$\begin{cases} a_{k,0} = q_k \\ a_{k,1} = v_k \\ a_{k,2} = \frac{1}{T_k} \left[\frac{3(q_{k+1} - q_k)}{T_k} - 2v_k - v_{k+1} \right] \\ a_{k,3} = \frac{1}{T_k^2} \left[\frac{2(q_k - q_{k+1})}{T_k} + v_k + v_{k+1} \right] \end{cases} \quad (4.38)$$

Tuttavia, per calcolare i valori di velocità nei punti intermedi, ovvero v_k $k = 1, \dots, n-1$, occorre imporre anche la continuità dell'accelerazione nei punti intermedi, ovvero in corrispondenza degli istanti di tempo in cui si ha il cambio del polinomio:

$$\ddot{q}_k(t_{k+1}) = 2a_{k,2} + 6a_{k,3}T_k = 2a_{k+1,2} = \ddot{q}_{k+1}(t_{k+1}), \quad k = 0, \dots, n-2 \quad (4.39)$$

A questo punto si sostituiscono le espressioni di $a_{k,2}$, $a_{k,3}$, $a_{k+1,2}$ e moltiplicando per $(T_k T_{k+1})/2$ si ottiene, per $k = 0, \dots, n-2$, l'equazione 4.40:

$$T_{k+1}v_k + 2(T_{k+1} + T_k)v_{k+1} + T_kv_{k+2} = \frac{3}{T_k T_{k+1}} [T_k^2(q_{k+2} - q_{k+1}) + T_{k+1}^2(q_{k+1} - q_k)] \quad (4.40)$$

Di conseguenza, si avrà un sistema di equazioni che possono essere espresse in forma matriciale 4.41:

$$\mathbf{A}\mathbf{v} = \mathbf{c} \quad (4.41)$$

dove \mathbf{A} è una matrice tridiagonale $(n-1) \times (n-1)$ i cui termini dipendono dagli intervalli di tempo T_k , \mathbf{v} è il vettore colonna contenente le incognite v_k con $k = 1, \dots, n-1$ ed, infine, \mathbf{c} è il vettore colonna dei termini noti c_k che dipendono esclusivamente dalle posizioni intermedie, dagli intervalli di tempo T_k e dai valori di velocità iniziale v_0 e v_n noti. Dal momento che la matrice ottenuta risulta essere sempre invertibile, è possibile costruire l'equazione 4.42:

$$\mathbf{v} = \mathbf{A}^{-1}\mathbf{c} \quad (4.42)$$

Determinato, quindi, il vettore delle incognite \mathbf{v} , si sostituiscono i valori delle velocità nell'equazione 4.38, si determinano i coefficienti $a_{k,0}$, $a_{k,1}$, $a_{k,2}$, $a_{k,3}$ per ogni polinomio k e la spline cubica risulta completamente determinata.

Capitolo 5

Metodi per la pianificazione di traiettorie smooth

Pianificare una traiettoria vuol dire trovare una legge temporale di moto lungo un determinato percorso geometrico, soddisfacendo dei requisiti prefissati sulle proprietà della traiettoria stessa. L'algoritmo che pianifica la traiettoria riceve in input i requisiti relativi al percorso geometrico, alla cinematica e alla dinamica, mentre restituisce in output le funzioni temporali di posizione, velocità e accelerazione dei giunti del sistema robotico.

In genere, il percorso geometrico per il quale si vuole definire la traiettoria viene definito nello spazio operativo del sistema stesso, dove vengono descritti anche il task da eseguire e gli eventuali ostacoli da evitare. Al contrario, la pianificazione della traiettoria è generalmente effettuata in spazio giunti mediante funzioni che soddisfano i vincoli cinematici e dinamici. Inoltre, la **pianificazione in spazio giunti** ha dei vantaggi rispetto a quella effettuata in spazio operativo per i seguenti motivi:

1. è più semplice rispettare i requisiti di traiettoria se la si pianifica direttamente in spazio giunti dato che il sistema di controllo agisce proprio sui giunti e non sull'end-effector;
2. consente di evitare i problemi legati alle condizioni singolarità cinematica e ai problemi di ridondanza.

Al tempo stesso, la pianificazione delle traiettorie in spazio giunti presenta anche uno svantaggio: data la traiettoria pianificata in spazio giunti, infatti, il movimento effettivamente eseguito dall'end-effector non è facilmente prevedibile a causa delle non linearità introdotte dall'algoritmo di cinematica diretta, passando dalla traiettoria in spazio giunti a quella in spazio operativo. In ogni caso, a prescindere dallo spazio in cui viene effettuata la pianificazione della traiettoria, quest'ultima deve rispettare i vincoli stabiliti a priori sui valori massimi delle coppie applicate ai giunti ed, inoltre, deve evitare condizioni di risonanza meccanica.

Questo obiettivo può essere perseguito pianificando delle traiettorie smooth, che consentono di evitare i colpi di coppia sui giunti generati dalle discontinuità di velocità e accelerazione e quindi le intermittenze, di ridurre le vibrazioni e l'usura dei componenti. In modo particolare, è preferibile avere delle traiettorie con accelerazioni continue sull'intero intervallo di tempo del moto (estremi inclusi), così da avere il jerk, ovvero la derivata dell'accelerazione, limitato in valore assoluto. Ciò è importante al fine di evitare l'usura delle parti meccaniche del robot e le condizioni di risonanza e al fine di eseguire le traiettorie

in maniera accurata. Infatti, le traiettorie che non possono essere definite smooth, potrebbero causare vibrazioni che andrebbero a danneggiare gli attuatori del robot e introdurrebbero errori anche elevati rispetto al task comandato. Perciò, minimizzare il jerk è un ottimo modo per ottenere delle traiettorie smooth.

5.1 Tecniche di ottimizzazione

Quasi ogni tecnica trovata nella letteratura scientifica sul problema della pianificazione della traiettoria si basa sull'ottimizzazione di alcuni parametri o di alcune funzioni oggettive. L'articolo [Gasparetto \[2012\]](#) riporta i criteri di ottimizzazione più significativi:

1. minimizzazione del tempo di esecuzione;
2. minimizzazione dell'energia (ovvero della coppia sull'attuatore);
3. minimizzazione del jerk.

Tuttavia, a volte, si seguono dei percorsi ibridi basati su più criteri di ottimizzazione. Ad esempio, è possibile pianificare la traiettoria seguendo il criterio di ottimizzazione del tempo e dell'energia.

5.1.1 Minimizzazione del tempo di esecuzione

Gli algoritmi per la minimizzazione del tempo di esecuzione sono stati i primi ad essere introdotti nella letteratura scientifica e avevano l'obiettivo di aumentare la produttività industriale. Esistono algoritmi che sono basati sul **diagramma di fase posizione-velocità**, utilizzando la posizione angolare della traiettoria e la velocità angolare che rappresentano lo stato del sistema, mentre l'accelerazione angolare è usata come variabile di controllo. In questo modo è possibile convertire i vincoli dinamici del robot e i vincoli sugli attuatori in vincoli che dipendono dallo stato del sistema. Per ogni punto della traiettoria, si determina il massimo valore ammissibile per la velocità angolare dell'end-effector e si costruisce la curva limite di velocità (VLC) nel piano posizione-velocità. La traiettoria ottimale sarà quindi quella che, per ogni punto del percorso da eseguire, permette di ottenere la massima velocità al di sotto della curva limite di velocità VLC.

Un approccio alternativo prevede invece l'utilizzo di **tecniche di programmazione dinamica**. In questo caso si discretizza lo spazio creando una griglia di punti, detti state-points. Basandosi sui vincoli di velocità, accelerazione e jerk, si associa ad ogni punto un set di possibili state-points successivi ed ad ognuno di essi si associa il costo corrispondente in termini di tempo di moto. Quest'ultimo è calcolato mantenendo costante il valore di accelerazione e l'algoritmo determina poi il percorso a cui è associato un costo minore, ovvero quello a cui corrisponde il tempo di esecuzione minore.

Confrontando le due tecniche appena presentate, la seconda non richiede un percorso parametrizzato a priori e può incorporare anche altri criteri di performance. Tuttavia, il primo approccio è molto efficiente se si considera il carico computazionale e può essere utilizzato anche per la pianificazione online delle traiettorie.

Svantaggi delle tecniche a minimizzazione del tempo di esecuzione

Le tecniche appena presentate, tuttavia, generano valori discontinui di accelerazione e di coppie nei giunti dal momento che i modelli dinamici usati per determinare le traiettorie assumono la perfetta rigidità dei link del robot e trascurano la dinamica degli attuatori. Ciò implica due effetti indesiderati:

1. gli andamenti delle coppie richieste non sono ottenibili nella realtà in quanto gli attuatori reali non sono in grado di generare coppie discontinue. Di conseguenza, l'andamento reale delle coppie nei giunti sarà ritardato rispetto a quello di riferimento e questo riduce l'accuratezza con cui si esegue la traiettoria. Infatti, gli attuatori sono soggetti al fenomeno del chatter, ovvero ad oscillazione ad alta frequenza e quindi a vibrazioni che causano usura e non consentono di ottenere traiettorie smooth;
2. Le tecniche finalizzate alla minimizzazione del tempo di esecuzione richiedono la saturazione di almeno un attuatore del robot ad un certo istante e quindi il controller non può correggere gli errori rispetto alla traiettoria comandata derivanti da disturbi o da errori di progettazione.

Per ovviare a questi problemi, si possono seguire diverse strade:

1. si può utilizzare la prima tecnica descritta, ovvero quella basata sul paio posizione-velocità, con una **limitazione alle variazioni di coppia**. Si considera, perciò, anche la derivata terza della posizione angolare, detta pseudo-jerk, che è soggetta al controllo e si richiede un'equazione dinamica del terzo ordine. Imponendo un valore limite del jerk si riesce quindi ad ottenere la realizzazione pratica della traiettoria usando il controllo PID. Si ha perciò una correlazione tra accuratezza della traiettoria e bassi valori del jerk;
2. In alternativa alla limitazione delle variazioni di coppia, si può optare per l'utilizzo di una **funzione oggettiva** contenente un contributo legato al tempo di esecuzione e un contributo legato all'energia dato dall'integrale dei quadrati delle coppie lungo la traiettoria. Si trova quindi un compromesso tra i due contributi, scegliendo di dare maggiore rilevanza alla velocità e quindi alla riduzione del termine associato al tempo di esecuzione oppure alla riduzione degli stress sugli attuatori del robot aumentando il contributo legato al tempo e, di conseguenza, garantire una maggiore durata dei componenti meccanici;
3. Un'altra soluzione è quella di usare **funzioni smooth** per definire le coppie sugli attuatori in quanto queste daranno traiettorie smooth. Un esempio di queste funzioni sono le spline cubiche oppure B-spline, usate in molti algoritmi in quanto assicurano la continuità dell'accelerazione.

In generale, le principali differenze tra le tecniche che mirano alla minimizzazione del tempo di esecuzione sono legate ai seguenti fattori: 1. Il tipo di vincoli considerato (cinematici o dinamici); 2. L'algoritmo iterativo usato; 3. La possibilità di estendere l'ottimizzazione ad altri criteri oltre quello del tempo.

5.1.2 Minimizzazione dell'energia

Il criterio della minimizzazione dell'energia permette di ottenere traiettorie smooth facili da seguire e riduce gli stress sugli attuatori del manipolatore robotico. Questo criterio, però, è legato meramente

all'aspetto economico che può essere rilevante in particolari applicazioni dove la sorgente di energia è limitata. In questi casi, quindi, si ricorre a metodi di pianificazione di traiettorie per ottimizzare tempo ed energia:

1. metodi basati su funzioni composte da due termini pesati, il primo associato al tempo di esecuzione e il secondo associato all'energia. Il peso conferito a ciascun termine è il frutto del compromesso tra riduzione del tempo e riduzione di energia e quindi riduzione degli stress sugli attuatori;
2. metodi basati su spline cubiche soggette sia a vincoli cinematici sul massimo valore della velocità, dell'accelerazione e del jerk sia a vincoli dinamici sul massimo valore delle coppie sui giunti;
3. metodi basati su B-spline che aggiungono i limiti fisici dei giunti ai vincoli cinematici e di coppia. La funzione oggettiva include anche un termine addizionale per evitare ostacoli mobili espressi come zone sferiche o ipersferiche.

5.1.3 Minimizzazione del jerk

Come accennato all'inizio del capitolo, in fase di pianificazione delle traiettorie è fondamentale ridurre le coppie sui giunti nonché le variazioni brusche delle stesse. Per ottenere ciò si ricorre ad un metodo di pianificazione delle traiettorie che prevede di fissare un limite superiore al valore del jerk. Minimizzare il jerk è un ottimo modo per ottenere delle traiettorie smooth in quanto consente di:

1. Ridurre gli errori durante l'esecuzione di traiettorie;
2. Ridurre gli stress sugli attuatori e sulla struttura del robot;
3. Limitare l'eccitazione delle frequenze di risonanza;
4. Ottenere un moto del robot coordinato e naturale che imita quello di un essere umano.

È fondamentale, tuttavia, che il metodo utilizzato per minimizzare il jerk permetta anche di imporre dei vincoli cinematici senza richiedere un tempo di esecuzione a priori. Tali vincoli vengono espressi come limiti superiori dei valori assoluti di velocità, accelerazione e jerk su ogni giunto del robot e devono essere inseriti prima di avviare l'algoritmo di pianificazione della traiettoria. La limitazione del jerk consente di limitare indirettamente la variazione delle coppie sui giunti senza dover considerare la dinamica di movimento.

5.1.4 Ottimizzazione ibrida

Evidenziati i vantaggi della riduzione del jerk, si è reputato opportuno adottare dei metodi che permettessero di ottimizzare contemporaneamente il tempo e il jerk. Questi algoritmi utilizzano diverse primitive per interpolare il percorso e differenti procedure di ottimizzazione. Vi sono algoritmi basati sulla minimizzazione di una funzione oggettiva che tiene conto sia della velocità sia della dolcezza della traiettoria, dal momento che la funzione è costituita da un termine proporzionale al tempo di esecuzione e da un termine proporzionale all'integrale del quadrato del jerk lungo la traiettoria, entrambi pesati da due parametri. Inoltre, questo algoritmo consente di definire i vincoli imposti al moto del robot prima dell'esecuzione della traiettoria. I vincoli sono espressi come limiti superiori del valore assoluto di velocità, accelerazione e jerk per ogni giunto del robot. Questo algoritmo, a differenza della maggior parte dei metodi di ottimizzazione del jerk, non richiede un tempo di esecuzione a priori.

5.2 Alcuni metodi per la pianificazione di traiettorie smooth

Negli anni sono stati sviluppati diversi metodi per pianificare traiettorie smooth, cercando anche di seguire strade sempre più semplici ed efficienti anche a livello computazione e quindi andando a ridurre la parametrizzazione, rispettando al tempo stesso le condizioni al contorno imposte. Pur esistendo vari modi per ottenere delle traiettorie smooth, non tutti questi risultano semplici e convenienti a livello computazionale. Ad esempio, pianificare una traiettoria smooth mediante una spline implica la determinazione di numerosi parametri essendo questa costituita da più polinomi (uno per ogni tratto compreso tra due punti da interpolare) di ordine almeno pari a 3.

5.3 Metodo Gasparetto-Zanotto: basato sulla limitazione del jerk e sull'utilizzo della B-spline

Nell'articolo [Gasparetto and Zanotto \[2007\]](#) viene presentato un metodo per la realizzazione di traiettorie smooth e si evidenzia come questo metodo, a differenza di altri, non richieda il tempo di esecuzione a priori e permetta di fissare i vincoli cinematici prima di avviare l'algoritmo.

Questo metodo adotta una funzione oggettiva data dalla somma di due termini [5.1](#):

1. Il primo termine è proporzionale al tempo di esecuzione;
2. Il secondo termine è proporzionale all'integrale del quadrato del jerk.

Questi due termini hanno effetti opposti e sono pesati mediante dei fattori: riducendo il primo termine si ottengono traiettorie con velocità, accelerazioni e jerk elevati e quindi traiettorie non smooth, mentre riducendo il secondo termine si ottengono traiettorie con grandezze cinematiche basse e quindi traiettorie più smooth, fluide. Quindi, occorre trovare un compromesso tra i due termini a seconda delle esigenze. Nel caso in cui si volesse ottenere una traiettoria smooth penalizzando la velocità di movimento converrebbe dare un peso maggiore al secondo termine; al contrario, nel caso in cui si volesse ottenere una traiettoria più veloce a discapito della fluidità di movimento converrebbe dare un maggior peso al primo termine. La traiettoria ottimale viene ottenuta risolvendo il seguente problema che impone anche i valori limite di velocità, accelerazione e jerk per ogni giunto e che consiste nel trovare il minimo della funzione oggettiva:

$$\left\{ \begin{array}{l} \min k_T N \sum_{i=1}^{vp-1} h_i + k_j \sum_{j=1}^N \int_0^{t_f} (\ddot{q}_j(t))^2 dt \\ \text{applicando i seguenti vincoli:} \\ \dot{q}_j(t) \leq VC_j, \quad j = 1, \dots, N \\ \ddot{q}_j(t) \leq WC_j, \quad j = 1, \dots, N \\ \ddot{\ddot{q}}_j(t) \leq JC_j, \quad j = 1, \dots, N \end{array} \right. \quad (5.1)$$

Il significato dei termini nel sistema [5.1](#):

Simbolo	Significato
N	Numero dei giunti
V_p	Numero di via-points
h_i	Intervallo di tempo tra due via-points
$\dot{q}_j(t)$	Velocità del j-esimo giunto
$\ddot{q}_j(t)$	Accelerazione del j-esimo giunto
$\bar{q}_j(t)$	Jerk del j-esimo giunto
k_T	Peso del termine proporzionale al tempo di esecuzione
k_J	Peso del termine proporzionale al jerk
t_f	Tempo di esecuzione totale della traiettoria
V_j	Limite di velocità del j-esimo giunto (vincolo simmetrico)
WC_j	Limite di accelerazione del j-esimo giunto (vincolo simmetrico)
JC	Limite di jerk del j-esimo giunto (vincolo simmetrico)

Quindi, risolto il problema presentato nel sistema 5.1 è possibile determinare il vettore h contenenti gli intervalli di tempo tra i vari via-points. La traiettoria trovata, tuttavia, deve anche rispettare le condizioni di velocità, accelerazione e jerk richieste nel punto iniziale e nel punto finale del moto.

Definizione della B-spline del 5° ordine

Per risolvere il problema sopra riportato si può pensare di utilizzare una funzione B-spline del 5° ordine. In generale, una funzione B-spline di grado p e di ordine $k = p + 1$ è una curva spline in funzione del tempo $B_p(t)$ ed è ottenuta dalla combinazione lineare di funzioni polinomiali $N_{i,p}(t)$ di grado p , chiamate base or blending functions, pesate mediante dei coefficienti Q_i chiamati control points. La curva è formata su una sequenza di nodi t_i e le base function sono definite in maniera ricorsiva mediante la formula di De Boor (si veda la formula 5.2).

$$B_p(t) = \sum_{i=1}^{n+1} Q_i N_{i,p}(t) \quad (5.2)$$

dove:

$$\begin{cases} N_{i,p}(t) = \frac{t-t_i}{t_{i+p}-t_i} N_{i,p-1}(t) + \frac{t_{i+p+1}-t}{t_{i+p+1}-t_{i+1}} N_{i+1,p-1}(t) \\ N_{i,\rho} = \begin{cases} 1, & \text{per } t_i \leq t < t_{i+1} \\ 0, & \text{altrove} \end{cases} \end{cases}$$

Di seguito si riporta il significato dei simboli usati:

Simbolo	Significato
p	Grado della B-spline
k	Ordine della B-spline
$B_p(t)$	B-spline di grado p
$N_{i,p}(t)$	Base function di grado p
Q_i	Punti di controllo della B-spline
$n + 1$	Numero dei punti di controllo
t_i	Nodi
$m + 1$	Numero di nodi

Condizioni al contorno

Innanzitutto, dal momento che è opportuno avere un jerk nullo all'inizio e alla fine della traiettoria, si introducono due punti virtuali, uno all'inizio e uno alla fine della traiettoria. Data una sequenza di $vp + 2$ punti, ovvero costituita dai via-points e dai due punti virtuali aggiunti, definita nello spazio giunti che ha dimensione N , ovvero pari al numero di giunti del robot, per completare l'interpolazione saranno necessari $m + 1$ nodi dove:

$$m + 1 = (vp + 2) + 2p = vp + 12 \quad (5.3)$$

da cui si ottiene:

$$m = (vp + 12) - 1 = n + p + 1 = n + 6 \quad (5.4)$$

Si calcola infine il numero di punti di controllo $n + 1$:

$$n + 1 = vp + 6 \quad (5.5)$$

Si definiscono gli $n + 1$ punti di controllo della traiettoria come CPQ_i , gli $m + 1$ nodi come Uq_i , gli $n + 1$ punti di controllo della velocità come CPV_i . Come visto nella formula 5.2 e considerando per semplicità un solo grado di libertà si ha:

$$q(t) = \sum_{i=1}^{n+1} CPQ_i \cdot N_{i,p}(t) \quad (5.6)$$

I punti di controllo di velocità sono calcolati con la formula 5.7:

$$CPV_i = \frac{p}{Uq_{i+p+1} - Uq_{i+1}} (CPQ_{i+1} - CPQ_i), \quad i = 1, \dots, n \quad (5.7)$$

La velocità si definisce su una frequenza di nodi U_v che si ottiene scartando i valori alle estremità del vettore di nodi U_q . Si ha quindi:

$$v(t) = \sum_{i=1}^n CPV_i \cdot N_{i,p-1}(t) \quad (5.8)$$

Si impongono, a questo punto, le condizioni al contorno della velocità:

$$\begin{aligned} CPV_1 &= \frac{p}{Uq_{p+2} - Uq_2} (CPQ_2 - CPQ_1) = -\frac{p}{Uq_{p+2} - Uq_2} \cdot CPQ_1 + \frac{p}{Uq_{p+2} - Uq_2} \cdot CPQ_2 = v_{in} \\ CPV_n &= \frac{p}{Uq_{n+p+1} - Uq_{n+1}} (CPQ_{n+1} - CPQ_n) = \\ &= -\frac{p}{Uq_{n+p+1} - Uq_{n+1}} \cdot CPQ_n + \frac{p}{Uq_{n+p+1} - Uq_{n+1}} \cdot CPQ_{n+1} = v_{fin} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\text{CPA}_i &= \frac{p-1}{Uv_{i+p} - Uv_{i+1}} (\text{CPV}_{i+1} - \text{CPV}_i), \quad i = 1, \dots, n-1 \\
\text{CPA}_1 &= \frac{p-1}{Uv_{p+1} - Uv_2} (\text{CPV}_2 - \text{CPV}_1) = a_{\text{in}} \\
a(t) &= \sum_{i=1}^{n-1} \text{CPA}_i \cdot N_{ip-2}(t) \\
\text{CPA}_{n-1} &= \frac{p-1}{Uv_{n+p-1} - Uv_n} (\text{CPV}_n - \text{CPV}_{n-1}) = a_{\text{fin}} \\
\text{CPA}_1 &= k_1 \cdot \text{CPQ}_1 + k_2 \cdot \text{CPQ}_2 + k_3 \cdot \text{CPQ}_3 = a_{\text{in}} \\
\text{CPA}_{n-1} &= k_{n-1} \cdot \text{CPQ}_{n-1} + k_n \cdot \text{CPQ}_n + k_{n+1} \cdot \text{CPQ}_{n+1} = a_{\text{fin}} \\
\text{CPJ}_i &= \frac{p-2}{Ua_{i+p-1} - Ua_{i+1}} (\text{CPA}_{i+1} - \text{CPA}_i), \quad i = 1, \dots, n-2 \quad j(t) = \sum_{i=1}^{n-2} \text{CPJ}_i \cdot N_{i,p-3}(t) \\
\text{CPJ}_1 &= \frac{p-2}{Ua_p - Ua_2} (\text{CPA}_2 - \text{CPA}_1) = j_{\text{in}} \\
\text{CPJ}_{n-2} &= \frac{p-2}{Ua_{n+p-3} - Ua_{n-1}} (\text{CPA}_{n-1} - \text{CPA}_{n-2}) = j_{\text{fin}} \\
\text{CPJ}_1 &= g_1 \cdot \text{CPQ}_1 + g_2 \cdot \text{CPQ}_2 + g_3 \cdot \text{CPQ}_3 + g_4 \cdot \text{CPQ}_4 = j_{\text{in}} \\
\text{CPJ}_{n-2} &= g_{n-2} \cdot \text{CPQ}_{n-2} + g_{n-1} \cdot \text{CPQ}_{n-1} + g_n \cdot \text{CPQ}_n + g_{n+1} \cdot \text{CPQ}_{n+1} = j_{\text{fin}}
\end{aligned}$$

A questo punto, è possibile determinare il sistema lineare da risolvere per ottenere la curva interpolante i punti desiderati e scritto per ogni giunto j del robot:

$$\begin{cases}
-\frac{p}{Uq_{p+2}-Uq_2} \cdot \text{CPQ}_{j,1} + \frac{p}{Uq_{p+2}-Uq_2} \cdot \text{CPQ}_{j,2} = v_{j, \text{ in}} \\
k_1 \cdot \text{CPQ}_{j,1} + k_2 \cdot \text{CPQ}_{j,2} + k_3 \cdot \text{CPQ}_{j,3} = a_{j, \text{ in}} \\
g_1 \cdot \text{CPQ}_{j,1} + g_2 \cdot \text{CPQ}_{j,2} + g_3 \cdot \text{CPQ}_{j,3} + g_4 \cdot \text{CPQ}_{j,4} = j_{j, \text{ in}} \\
\sum_{k=1}^{vp+6} N_{p,k}(\tau_i) \cdot \text{CPQ}_{j,k} = \text{VPR}_{j,i} \text{ with } i = 1, \dots, vp \\
g_{n-2} \cdot \text{CPQ}_{j,n-2} + g_{n-1} \cdot \text{CPQ}_{j,n-1} + g_n \cdot \text{CPQ}_{j,n} + g_{n+1} \cdot \text{CPQ}_{j,n+1} = j_{j, \text{ fin}} \\
k_{n-1} \cdot \text{CPQ}_{j,n-1} + k_n \cdot \text{CPQ}_{j,n} + k_{n+1} \cdot \text{CPQ}_{j,n+1} = a_{j, \text{ fin}} \\
-\frac{p}{Uq_{n+p+1}-Uq_{n+1}} \cdot \text{CPQ}_{j,n} + \frac{p}{Uq_{n+p+1}-Uq_{n+1}} \cdot \text{CPQ}_{j,n+1} = v_{j, \text{ fin}}
\end{cases}$$

Dove $\text{VPR}_{j,i}$ è l' i -esimo via-point del giunto j .

In forma compatta, per un robot con N giunti, si avrà il seguente sistema lineare :

$$\mathbf{A}\Phi_j = \mathbf{B}_j \quad \forall j = 1, \dots, N$$

$$\Phi_j = \begin{bmatrix} \text{CPQ}_{j,1} \\ \vdots \\ \text{CPQ}_{j,vp+6} \end{bmatrix} \quad \forall j = 1, \dots, N$$

La matrice A è la matrice dei coefficienti ed è non-singolare e diagonale a bande. A è unica per tutti i giunti perché dipende soltanto dall'intervallo di tempo $h_i = t_{i+1} - t_i$, compreso tra ogni singolo via-point e il successivo. Essa non può essere ricavata analiticamente ma richiede la valutazione delle funzioni di base per gli istanti di tempo corrispondenti ad ogni via-point.

Vincoli cinematici

I vincoli cinematici possono essere espressi considerando che la B-spline è limitata superiormente e inferiormente e quindi:

$$L_{\inf} \leq \sum_{i=1}^{n+1} Q_i \cdot N_{i,k}(t) \leq L_{\sup}$$

$$L_{\inf} \cdot \sum_{i=1}^{n+1} N_{i,k}(t) \leq \sum_{i=1}^{n+1} Q_i \cdot N_{i,k}(t) \leq L_{\sup} \cdot \sum_{i=1}^{n+1} N_{i,k}(t)$$

$$\sum_{i=1}^{n+1} L_{\inf} \cdot N_{i,k}(t) \leq \sum_{i=1}^{n+1} Q_i \cdot N_{i,k}(t) \leq \sum_{i=1}^{n+1} L_{\sup} \cdot N_{i,k}(t)$$

E quindi si ottiene:

$$L_{\inf} \leq Q_i \leq L_{\sup} \quad \forall i = 1, \dots, n+1$$

Quindi, emerge che porre i limiti superiori e inferiori alla B-spline equivale a porre i limiti ai punti di controllo. Ciò riduce la complessità computazionale del problema.

Sulla base di questo, i vincoli cinematici possono essere facilmente riscritti come segue

$$\begin{aligned} |CPV_{j,k}| &\leq VC_j, \quad k = 1, \dots, n \\ |CPA_{j,k}| &\leq WC_j, \quad k = 1, \dots, n-1 \\ |CPJ_{j,k}| &\leq JC_j, \quad k = 1, \dots, n-2 \end{aligned}$$

Dove CPV_k , CPA_k , CPJ_k sono i k-esimi valori dei punti di controllo di velocità, accelerazione e jerk per il giunto j-esimo e VC , WC , JC sono i limiti simmetrici di velocità, accelerazione e jerk per il giunto j-esimo. Tuttavia, i vincoli cinematici possono essere anche espressi limitando simmetricamente la velocità necessaria per passare da un via-point i-esimo del giunto j-esimo al successivo via-point i+1-esimo del giunto j-esimo nell'intervallo di tempo h_i al valore limite di velocità VC_j del giunto j stesso:

$$\left| \frac{q_{j,i+1} - q_{j,i}}{h_i} \right| \leq VC_j$$

Di conseguenza si determina il tempo di percorrenza tra un via point e l'altro come segue:

$$h_i > w_i = \max_{j=1, \dots, N} \left\{ \frac{|q_{j,i+1} - q_{j,i}|}{VC_j} \right\} > 0$$

Quindi il tempo di percorrenza di ogni tratto della traiettoria è determinato dal valore massimo consentito di velocità in ogni giunto. Quindi, più restrittiva è la condizione della velocità più il valore della velocità sarà basso e, di conseguenza, maggiore sarà il tempo di esecuzione della traiettoria.

Funzione oggettiva La funzione oggettiva per ottenere una traiettoria definita mediante la B-spline è la seguente:

$$\text{FOBJ} = k_T \sum_{i=1}^{vp+1} h_i + k_J \sum_{j=1}^N \int_0^{t_f} \left(\sum_{k=1}^{n-2} \text{CPJ}_{j,k} \cdot N_{p-3,k}(t) \right)^2 dt \quad (5.9)$$

Come si nota, l'integrale del secondo termine risulta abbastanza complesso da svolgere analiticamente. Si ricorre quindi ad un approccio numerico. Tuttavia, quest'ultimo tipo di approccio permette di ottenere soltanto un risultato approssimato dell'integrale; per ottenere il valore esatto è necessario svolgerlo analiticamente. Ciò richiede l'utilizzo della formula di De Boor per determinare l'espressione delle base-functions di grado 2 (essendo la B-spline di 5° ordine ed essendo il jerk la derivata terza della posizione). Si effettua poi l'integrazione che risulterebbe molto lunga. Quindi, in termini di tempo computazionale, risulta essere molto più conveniente l'approccio numerico e si accetta di penalizzare l'esattezza del risultato ottenuto.

Algoritmo

Per ottenere una traiettoria smooth occorre trovare il minimo della funzione oggettiva FOBJ mediante un processo iterativo. Riassumendo quindi i passaggi già affrontati sopra, l'algoritmo da implementare è il seguente:

1. Si parte da un percorso dato nello spazio operativo e, applicando l'inversione cinematica, si determina una sequenza di punti nello spazio giunti (questi punti sono detti via-points);
2. Si impongono i vincoli cinematici basati sulle caratteristiche della struttura progettata;
3. Si sceglie una prima soluzione approssimativa per poter avviare l'algoritmo di ottimizzazione iterativo;
4. L'algoritmo riceve in input la funzione oggettiva FOBJ e i vincoli cinematici;
5. La soluzione finale è ottenuta a valle delle iterazioni effettuate dall'algoritmo mediante la funzione `fmincon` di MatLab.

Il punto 3) risulta essere un passo molto importante in quanto influenza il tempo computazionale e il risultato finale in uscita dall'algoritmo. La scelta della soluzione iniziale con cui far partire le iterazioni deve essere fatta, perciò, in maniera accurata. Essa può essere effettuata considerando il limite più basso dei tempi di esecuzione dei singoli tratti della trattoria, ovvero degli h_i . Con questi valori si risolve il sistema lineare e si ottengono i valori dei punti di controllo della traiettoria. In questo modo si scala la traiettoria in termini di tempo e se la variabile di tempo indicata con τ è definita come $\Lambda * t$, il valore del fattore di scala Λ può essere scelto tra i valori dei punti di controllo della velocità, dell'accelerazione e del jerk come segue:

$$\Lambda_1 = \max_j \left\{ \max_k \left\{ \frac{|\text{CPV}_{j,k}|}{\text{VC}_j} \right\} \right\}, \quad j = 1, \dots, N, k = 1, \dots, n$$

$$\Lambda_2 = \max_j \left\{ \max_k \left\{ \frac{|\text{CPA}_{j,k}|}{\text{WC}_j} \right\} \right\}, \quad j = 1, \dots, N, k = 1, \dots, n-1$$

$$\Lambda_3 = \max_j \left\{ \max_k \left\{ \frac{|\text{CPJ}_{j,k}|}{\text{JC}_j} \right\} \right\}, \quad j = 1, \dots, N, k = 1, \dots, n-2$$

Si ottiene, quindi, il fattore di scala Λ :

$$\Lambda = \max(1 \quad \Lambda_1 \quad \Lambda_2^{1/2} \quad \Lambda_3^{1/3})$$

Da qui, è possibile determinare la soluzione iniziale utilizzabile che sarà quella il cui vettore degli intervalli di tempo tra un via-point e l'altro è definito come segue:

$$H_0 = \Lambda H_{lb}$$

Dove H_{lb} è il vettore contenente il limite minimo dei valori di h_i ottenuto come segue:

$$h_i > w_i = \max_{j=1, \dots, N} \left\{ \frac{|q_{j,i+1} - q_{j,i}|}{\text{VC}_j} \right\}$$

Metodo Simon-Isik basato su traiettorie trigonometriche

Questo metodo descritto nell'articolo [Simon and Isik \[1993\]](#) prevede l'utilizzo di splines trigonometriche per l'interpolazione di traiettorie eseguite dai giunti del robot. Si basa sull'assunzione che i nodi in spazio giunti sono ottenuti a partire da quelli in spazio operativo applicando l'algoritmo di cinematica inversa.

1. Genera traiettoria smooth;
2. Permette di evitare ostacoli in tempo reale.

I parametri della splines vengono definiti al fine di minimizzare una funzione oggettiva che può essere quella del jerk o dell'energia. La spline trigonometrica di ordine m è una funzione avente le seguenti proprietà:

1. È periodica con periodo 2π ;
2. Soddisfa le condizioni di interpolazione richieste $y(t_j) = y_j$, con $j = 0, \dots, n$ e t_j appartenente a $[0, 2\pi]$;
3. Presenta $2m$ vincoli per ciascuno degli n intervalli di tempo $[t_{i-1}, t_i]$ con $i = 1, \dots, n$ e ha la seguente forma:

$$y(t) = y_i(t), \quad t \in [t_{i-1}, t_i], \quad (i = 1, 2, \dots, n)$$

$$y_i(t) = a_{i,0} + \sum_{k=1}^{m-1} (a_{i,k} \cos kt + b_{i,k} \sin kt) + a_{i,m} \sin m(t - \gamma_i) \quad (5.10)$$

$$\gamma_i = (\tau_{i,1} + \tau_{i,2} + \dots + \tau_{i,2m}) / 2m$$

Dove le $\tau_{i,j}$ sono i $2m$ istanti di tempo in cui l' i -esimo segmento di spline ha i vincoli applicati. Come si nota dall'equazione di $y_i(t)$, i coefficienti da determinare sono $2m$ per ogni tratto della spline trigonometrica e quindi, per determinarli, sarà necessario imporre $2m$ vincoli su ogni segmento. I vincoli sono indicati genericamente con:

$$y^r(t_i) = y_i^r$$

Con $r = 0, 1, \dots, m-1$ e $i = 0, \dots, n$. Quindi si hanno $2m$ equazioni lineari per determinare i coefficienti di ciascun tratto della spline. Inoltre, per assicurare la continuità della spline trigonometrica e delle sue prime $m-1$ derivate si impone:

$$y^r(t_i^-) = y^r(t_i^+)$$

Algoritmo

L'algoritmo per generare una traiettoria spline trigonometrica del 4° ordine ($m = 4$) definita in spazio giunti riceve in input un set di $(n+1)$ punti in spazio giunti indicati con y_i con $i = 0, \dots, n$ che sono ottenuti mediante l'algoritmo di cinematica inversa a partire dai punti definiti in spazio operativo. L'intervallo di tempo normalizzato per ogni segmento della spline è scelto pari a $[0, \pi/4]$.

$$y_i(t) = a_{i,0} + \sum_{k=1}^3 (a_{i,k} \cos kt + b_{i,k} \sin kt) + a_{i,4} \cos 4t, \quad (0 \leq t \leq \pi/4) \quad (5.11)$$

L'output dell'algoritmo è un set di $8n$ coefficienti (ovvero $8 = 2m = 2 * 4$ coefficienti per ciascuno degli n segmenti della spline trigonometrica) che permettono di descrivere completamente la spline che ha velocità, accelerazione e jerk continui. Gli 8 coefficienti per ogni tratto della spline, ovvero per ogni intervallo $[t_{i-1}, t_i]$, sono determinati mediante 8 vincoli che rappresentano il valore della funzione agli istanti iniziale e finale del segmento e i valori delle prime 3 derivate prima della funzione sempre negli istanti iniziale e finale del segmento t_{i-1} e t_i . Il valore della funzione in corrispondenza degli istanti iniziale e finale è determinato mediante l'algoritmo di cinematica inversa a partire dai punti iniziale e finale in spazio operativo. Per quanto riguarda invece i valori delle prime 3 derivate in corrispondenza dei punti iniziale e finale del tratto, si possono imporre direttamente dei valori qualora l'utente desiderasse determinati valori di velocità, accelerazioni e jerk, oppure si può applicare un algoritmo per minimizzare una funzione oggettiva. Per determinare gli 8 coefficienti dell' i -esimo segmento della spline trigonometrica occorre calcolare l'inversa di una matrice 8×8 indicata con A_i che però può essere calcolata a priori in quanto è funzione soltanto di t_{i-1} e t_i . Perciò, scelto il segmento della spline e fissati t_{i-1} e t_i , è possibile calcolare la matrice A_i e la sua inversa a priori, senza risolvere un sistema di equazioni lineari. In questo modo si ha un grande vantaggio computazionale che distingue le splines trigonometriche da quelle algebriche, per le quali occorre invece risolvere un sistema di equazioni lineari per determinare i coefficienti della spline. Nel caso della spline trigonometrica la matrice A_i è costante e indipendente da i .

1. **Determinare i 3(n+1) vincoli**

Dato che l'ordine della spline trigonometrica è 4, $r = 1, \dots, 3$:

$$y^{(r)}(t_i) = y_i^{(r)} \quad i = 0, 1, \dots, n \quad r = 1, 2, 3$$

2. Si usano i vincoli imposti per ogni segmento normalizzato della spline per determinare gli 8 coefficienti di $y_i(t)$;

$$\begin{bmatrix} a_{i,0} \\ a_{i,1} \\ b_{i,1} \\ a_{i,2} \\ b_{i,2} \\ a_{i,3} \\ b_{i,3} \\ a_{i,4} \end{bmatrix} = A_i^{-1} \begin{bmatrix} y_{i-1} \\ y_i \\ y'_{i-1} \\ y'_i \\ y''_{i-1} \\ y''_i \\ y'''_{i-1} \\ y'''_i \end{bmatrix} \quad (i = 1, 2, \dots, n)$$

3. Si definisce la spline trigonometrica con segmenti di lunghezza pari a $\pi/4$ (perché in genere permette di ottenere le traiettorie più smooth) e scalata nel tempo come:

$$y(t(i-1)\pi/4) = y_i(t), \quad t \in [0, \pi/4], \quad (i = 1, \dots, n)$$

In modo da soddisfare le condizioni di interpolazioni e in modo che abbia lunghezza $n * \pi/4$;

4. A questo punto, si corregge la spline trigonometrica convertendola dalla scala $n\pi/4$ alla scala desiderata e pari a T.

$$\theta(t) = y(n\pi t/4T)$$

Quest'ultima è una funzione continua che rappresenta l'andamento dell'angolo dei giunti nel tempo ed è derivabile fino alla derivata terza.

I 4 passaggi riportati devono essere eseguiti una volta per ogni giunto del robot. Se uno dei nodi della traiettoria deve essere variato per via della presenza di un ostacolo, devono essere modificati solo i 2 segmenti che toccano quel nodo, mentre i restanti $n - 2$ segmenti della spline che non toccano quel nodo rimangono invariati. Questo risulta essere un evidente vantaggio nell'ambito della pianificazione online delle traiettorie in quanto la procedura di modifica della traiettoria per via di un ostacolo risulta essere efficiente a livello computazionale.

Ottimizzazione

Nella definizione della spline trigonometrica, l'utente può scegliere il valore delle prime tre derivate di $y_i(t)$ per ogni nodo. Queste possono essere scelte al fine di minimizzare una funzione oggettiva anche se questo implica un maggior sforzo computazionale che dipende dalla forma della funzione oggettiva stessa.

$$J = f[\theta(t)]$$

La funzione oggettiva f è una generica funzione non lineare, $\theta(t)$ è un vettore di splines trigonometriche di lunghezza pari al numero di giunti del robot. $\theta(t)$ contiene le splines trigonometriche scalate e traslate nel tempo a partire dalle spline trigonometriche normalizzate contenute nel vettore $y(t)$, ciascuna delle quali costituita da n segmenti $y_i(t)$.

Problema di ottimizzazione

Dato un set di punti in spazio giunti per ogni giunto del robot, quali sono i parametri ottimali con cui definire le splines trigonometriche che interpolano questi punti?

$$J = \sum_{k=1}^n g[y_k(t)] = \sum_{k=1}^n J_k$$

Dove g è una generica funzione non lineare della stessa forma di f ma a differenza di quest'ultima contiene delle costanti che scalano la funzione a livello temporale. Si ha un problema di ottimizzazione di dimensione $3P(n-1)$ dove $(n-1)$ è il numero di nodi interni della traiettoria di ogni giunto. Per aumentare l'efficienza computazionale si può riscrivere il problema di ottimizzazione come:

$$\min_{y_i^r} (J_i, J_{i+1}) \quad (i = 1, \dots, n-1)$$

Ottenendo quindi $(n-1)$ problemi di ottimizzazione, ciascuno di dimensione pari a $3P$. in questo modo possono risolvere più problemi con un tempo computazionale minore. Inoltre a differenza di altri metodi che permettono di calcolare i parametri ottimali solo per i nodi estremi della traiettoria, questo permette di ottimizzare anche i parametri dei segmenti che unisco i nodi intermedi. Esistono anche metodi che utilizzano splines algebriche, ma in questo caso l'ordine delle splines deve essere contenuto per evitare oscillazioni e, inoltre, lo sforzo computazionale sarebbe maggiore per via della necessità di imporre un collegamento tra un segmento di traiettoria e i segmenti adiacenti. I segmenti della spline trigonometrica, invece, sono disaccoppiati e ciò consente una maggiore efficienza computazionale nel momento in cui si applica un metodo iterativo di ottimizzazione come quello che mira a minimizzare il jerk.

Metodo di ottimizzazione basato sul jerk

Il metodo prende ispirazione dal processo di pianificazione dei movimenti del braccio da parte del cervello umano che infatti tende a minimizzare la funzione del jerk in corrispondenza dei giunti che sono spalla, gomito e polso. La funzione oggettiva considerata è la seguente:

$$J = \int_0^T [\theta'''(t)]^2 dt$$

La minimizzazione della funzione può essere effettuata per un giunto alla volta dal momento che il jerk di ciascun giunto è disaccoppiato da quello degli altri. Dal momento che la funzione è quadratica, avrà un solo minimo. Come spiegato prima il problema può essere riscritto come $(n-1)$ problemi di dimensione pari a 3 volte il numero dei giunti del sistema in questione. Il punto in cui la funzione oggettiva assume il suo minimo, e quindi il punto in cui si ha la soluzione del problema di ottimizzazione, si ottiene risolvendo la seguente equazione:

$$\frac{\partial}{\partial y_i^{(r)}} \left(\int_0^{\pi/4} \{ [y_i'''(t)]^2 + [y_{i+1}'''(t)]^2 \} dt \right) = 0, \quad (i = 1, \dots, n-1), \quad (r = 1, 2, 3) \quad (5.12)$$

Si hanno quindi $3(n-1)$ equazioni. Sostituisco l'espressione del jerk nel punto i e nel punto $i+1$ all'interno dell'equazione e integro analiticamente e si ottiene una funzione quadratica con 14 coefficienti

(7 per l'istante i e 7 per l'istante $i + 1$). Ciascuno dei 7 coefficienti dell'istante i è una funzione lineare nota di 8 parametri (2 per ogni valore di $r = 0, \dots, 3$):

$$(y_{i-1}^{(r)}, y_i^{(r)}), (r = 0, 1, 2, 3)$$

Le $3(n - 1)$ equazioni sono funzioni quadratiche ciascuna dipendente da 12 parametri (3 valori di j per 4 valori di r):

$$y_j^r \quad (j = i - 1, i, i + 1), (r = 0, 1, 2, 3)$$

Si può riscrivere l'equazione sopra come:

$$D_1 \begin{bmatrix} y_{i-1} \\ y_i \\ y_{i+1} \end{bmatrix} + D_2 \begin{bmatrix} y'_{i-1} \\ y''_{i-1} \\ y'''_{i-1} \end{bmatrix} + D_3 \begin{bmatrix} y'_i \\ y''_i \\ y'''_i \end{bmatrix} + D_4 \begin{bmatrix} y'_{i+1} \\ y''_{i+1} \\ y'''_{i+1} \end{bmatrix} = 0, \quad (i = 1, \dots, n - 1) \quad (5.13)$$

Le matrici D_i sono matrici 3x3 note. A questo punto, definendo:

$$Y_i^{(r)} \equiv (y'_i y''_i y'''_i)^T$$

Si costruisce il seguente sistema si riscrive:

$$\begin{bmatrix} D_3 & D_4 & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ D_2 & D_3 & D_4 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & D_2 & D_3 & D_4 & 0 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & \dots & \dots & 0 & D_2 & D_3 & D_4 \\ 0 & \dots & \dots & \dots & 0 & D_2 & D_3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} Y_1^{(r)} \\ Y_2^{(r)} \\ Y_3^{(r)} \\ \vdots \\ Y_{n-2}^{(r)} \\ Y_{n-1}^{(r)} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} C_1 \\ C_2 \\ C_3 \\ \vdots \\ C_{n-2} \\ C_{n-1} \end{bmatrix} \quad (5.14)$$

Dove C_i sono vettori 3x1 ottenuti dal sistema precedente.

Metodo di pianificazione di traiettorie smooth basato sui profili polinomiali asimmetrici

Nell'articolo [Boryga et al. \[2022\]](#), viene presentato un ulteriore metodo per ottenere delle traiettorie smooth. Tale metodo si basa sull'utilizzo di profili polinomiali asimmetrici. Si introduce quindi un coefficiente di asimmetria k dal quale si ottiene il profilo asimmetrico di velocità. In questo caso l'accelerazione non è ottenuta direttamente mediante un profilo polinomiale, ma dalla molteplicità delle radici del polinomio. Il problema è quindi determinare il coefficiente di asimmetria e il tempo di esecuzione. Queste due quantità sono necessarie per determinare gli andamenti di velocità, posizione e jerk. In questo modo si riduce la complessità della parametrizzazione nel dominio del tempo. Questo verrà evidenziato nelle prossime righe.

Si definisce un generico polinomio di grado j :

$$p(t) = p * (t - t_1)^{m_1} * (t - t_2)^{m_2} * \dots * (t - t_j)^{m_j} \quad (5.15)$$

dove:

1. p è il coefficiente polinomiale;
2. t è la variabile di tempo;
3. t_1, t_2, \dots, t_j sono gli istanti temporali a cui corrispondono gli zeri del polinomio e quindi sono le sue radici;
4. m_1, m_2, \dots, m_j sono le molteplicità delle radici;
5. j è il numero delle radici.

Sia n il grado del polinomio, n sarà dato da:

$$n = \sum_{i=1}^j m_i \quad (5.16)$$

Il polinomio scritto in forma di prodotto di fattori consente una caratterizzazione del moto più semplice e rapida rispetto a quello scritto come somma di potenze, in quanto occorre determinare un solo coefficiente.

Prima di procedere con la descrizione del metodo, si indicheranno le quantità cinematiche come segue:

1. $s(t)$ la funzione di posizione;
2. $s^1(t)$ la funzione di velocità;
3. $s^2(t)$ la funzione di accelerazione;
4. $s^3(t)$ la funzione di jerk;
5. $s^4(t)$ la funzione di snap.

Si assume che la funzione di accelerazione sia:

1. definita nell'intervallo di tempo in cui avviene il moto $[0, t_{end}]$: tale requisito è fondamentale nel caso di pianificazione di una traiettoria point-to-point in quanto, in tal caso, i profili delle quantità cinematiche subiscono uno shift lungo l'asse temporale;
2. asimmetrica: tale condizione consente di ottenere i valori di velocità desiderati all'inizio e alla fine del moto;
3. costituita da due fasi di moto alternabili in maniera arbitraria, ovvero fase di accelerazione e fase di decelerazione dove la funzione assume segno positivo e negativo rispettivamente. Ad esempio, è possibile avere accelerazione dall'istante iniziale $t = 0$ all'istante $t = k * t_{end}$ e poi si potrebbe avere decelerazione fino all'istante finale t_{end} . Il valore k è detto coefficiente di asimmetria e può variare, ovviamente, tra 0 e 1. Questo permette di limitare il numero di zeri del polinomio a tre e determinate quindi la posizione del secondo zero, che coinciderà con l'istante temporale $k * t_{end}$ dove si assiste al cambio di segno della funzione di accelerazione. La seconda radice dell'accelerazione avrà una molteplicità dispari essendo legata al passaggio da accelerazione a decelerazione o viceversa;

4. tangente all'asse del tempo negli istanti di tempo iniziale e finale, in modo da avere accelerazione nulla all'inizio e alla fine del moto e quindi evitare brusche variazioni di coppia sui giunti. Questo, infatti, consente di avere un jerk nullo all'inizio e alla fine del moto e quindi una maggiore precisione di posizione, maggiore accuratezza e minori vibrazioni negli istanti iniziali e finali del movimento.

La forma del polinomio che determina il profilo di accelerazione con i requisiti appena indicati è la seguente:

$$s_{m_1 m_2 m_3}^2(t) = p * t^{m_1} * (t - k * t_{end})^{m_2} * (t - t_{end})^{m_3} \quad (5.17)$$

Affinché questi requisiti vengano rispettati, la molteplicità della prima e della terza radice deve essere superiore o uguale a 2 e la molteplicità della seconda radice deve essere dispari. A fronte di ciò, il grado minimo del polinomio che rappresenta l'andamento dell'accelerazione nel tempo sarà pari a 5 e in tal caso avremo che la molteplicità della prima e della terza radice sarà pari a 2 e la molteplicità della seconda radice sarà pari a 1 ($m_1 = 2, m_2 = 1, m_3 = 2$). Nel caso, invece, di un polinomio di grado pari a 6 avremo due possibili polinomi che soddisfano i requisiti richiesti e le cui radici hanno, in un caso, molteplicità pari rispettivamente a 2, 1, 3 e nell'altro molteplicità pari a 3, 1, 2. Per i polinomi di grado 7, 8, 9 le possibili combinazioni delle molteplicità delle tre radici sono riportate nella tabella seguente:

n	5	6	6	7	7	7	7	8	8	8	8	8	8	8	9	9	9	9	9	9	9	9	9
m ₁	2	3	2	4	3	2	2	5	4	3	2	3	2	6	5	4	3	2	4	3	2	2	2
m ₂	1	1	1	1	1	1	3	1	1	1	1	3	3	1	1	1	1	1	3	3	3	5	5
m ₃	2	2	3	2	3	4	2	2	3	4	5	2	3	2	3	4	5	6	2	3	4	2	2

Tabella 5.1: Possibili combinazioni delle molteplicità delle radici a seconda del grado del polinomio

Scelto il grado del polinomio e la molteplicità di ciascuna delle 3 radici, si sostituiscono le molteplicità scelte al posto dei parametri m_1, m_2, m_3 nella formula sopra riportata e si ottiene l'andamento dell'accelerazione. Di conseguenza, per integrazione si ottengono velocità e posizione e per derivazione il jerk. Su queste quantità cinematiche si stabiliscono i seguenti vincoli:

$$\begin{aligned} \forall_{t \in <0, t_e>} \left| s^{(i)}(t) \right| &\leq s_{\max}^{(i)} \\ \exists_{t \in <0, t_e>} \left| s^{(i)}(t) \right| &= s_{\max}^{(i)} \end{aligned}$$

L'applicazione di questi vincoli all'accelerazione e alla velocità è legata alle possibilità del sistema di azionamento, mentre l'applicazione degli stessi vincoli al jerk è finalizzata ad ottenere un movimento coordinato e continuo con maggiore accuratezza nel seguire le traiettorie desiderate, maggiore precisione di posizionamento, riduzione dei carichi di azionamento, limitazione delle vibrazioni e dell'attivazione delle frequenze di risonanza del sistema. A questo punto, tenendo conto dei vincoli precedenti e assumendo i valori iniziali e finali di posizione e velocità, occorre determinare:

1. il coefficiente di asimmetria k ;
2. il coefficiente polinomiale p ;
3. il tempo di realizzazione della traiettoria t_{end} .

Per far ciò si dovrebbe:

1. Determinare gli zeri della funzione $s(t)^{i+1}$ nell'intervallo di tempo compreso tra 0 e t_{end} ;
2. Determinare il valore della funzione $s(t)^i$ in corrispondenza degli zeri della derivata e, tra questi, si sceglie quello più grande in valore assoluto;
3. Creare un sistema di tre equazioni determinate come segue:
 - (a) Confronto tra il valore più grande in modulo della funzione $s(t)^i$ trovato al punto 2) e il valore massimo accettabile s_{max}^i ;
 - (b) Confronto tra la posizione finale ottenuta con la funzione di posizione trovata e la posizione imposta dalle condizioni al contorno;
 - (c) Confronto tra la velocità finale ottenuta con la funzione di velocità trovata e la velocità imposta dalle condizioni al contorno;
4. Risolvere il sistema a tre equazioni determinando il coefficiente di asimmetria k , il coefficiente polinomiale p e il tempo di realizzazione della traiettoria t_{end} .

A questo punto il polinomio iniziale con cui è stata definita l'accelerazione è completamente definito.

Vincoli

Per quanto concerne i vincoli imposti, è possibile imporre un limite massimo su una singola quantità cinematica oppure imporre un limite massimo su più quantità cinematiche simultaneamente. In quest'ultimo caso, dopo aver calcolato il t_{end} considerando uno alla volta ciascuno dei vincoli imposti sulle grandezze cinematiche, si sceglie quello maggiore e in questo modo verranno rispettati anche gli altri vincoli per i quali si sono ottenuti dei tempi t_{end} inferiori a quello scelto. Nel caso di un singolo vincolo applicato ad una sola delle grandezze cinematiche è possibile, esempio, imporre una velocità massima, un'accelerazione massima in valore assoluto, oppure un jerk massimo in valore assoluto.

Concatenazione dei polinomi

Nel caso in cui si necessiti di ottenere una traiettoria smooth che preveda il passaggio per due punti intermedi è possibile combinare più polinomi, scegliendo un polinomio per l'intervallo temporale tra l'istante iniziale e l'istante di tempo in corrispondenza del quale si ha il primo punto intermedio, un polinomio per l'intervallo di tempo compreso tra l'istante di tempo in cui si ha il primo punto intermedio e l'istante di tempo in cui si ha il secondo punto intermedio e un polinomio per l'intervallo di tempo compreso tra l'istante di tempo in cui si ha il secondo punto intermedio e l'istante di tempo finale. I coefficienti polinomiali, i coefficienti di asimmetria e i tempi di realizzazione delle traiettorie per ciascuno dei tratti definiti vengono calcolati sulla base della distanza tra i punti intermedi, della velocità che deve essere raggiunta in ciascun punto e dei vincoli di velocità, accelerazione e jerk. Perciò, rispetto a prima si aggiungono le condizioni di posizione e velocità nei punti intermedi.

Sintesi sul metodo di pianificazione di traiettorie tramite polinomi asimmetrici

Come visto precedentemente, questo metodo permette di ottenere degli andamenti di posizione, velocità, accelerazione, jerk e snap continui nel tempo nonché accelerazione nulla e con derivata nulla in corrispondenza degli istanti temporali iniziale e finale. Questo permette di ottenere un movimento continuo, fluido, accurato e privo di vibrazioni. Tali caratteristiche vengono mantenute anche in caso di traiettorie Point-To-Point in quanto è possibile combinare tra loro più polinomi rispettando le condizioni di posizione e velocità imposte nei punti intermedi. In generale, in relazione a questo metodo, è possibile affermare che:

1. il profilo di accelerazione ottenuto con questo metodo, usando la molteplicità delle radici del polinomio, è facile da definire in termini matematici in quanto la determinazione del coefficiente di asimmetria, del coefficiente polinomiale e il tempo di realizzazione della traiettoria è ottenuta da un sistema di tre equazioni;
2. il metodo rende possibile la pianificazione di traiettorie con punti intermedi concatenando più polinomi e scegliendo i valori di velocità iniziali e finali. In questo modo è possibile creare una traiettoria passante per più punti ma sempre caratterizzata dalla continuità dell'accelerazione e del jerk durante tutto il moto e, inoltre, scegliendo opportunamente i polinomi, è possibile ottenere anche la continuità dello snap (derivata del jerk) con valori nulli negli istanti di tempo iniziale e finale;
3. è possibile aggiungere ai vincoli di posizione e velocità imposti anche altri requisiti supplementari legati al tempo del moto, ai valori massimi o minimi di velocità, accelerazione e jerk. Questo facilita la pianificazione delle traiettorie in relazione alle caratteristiche del sistema, alla libertà di movimento del sistema stesso e alle proprietà del sistema di azionamento;
4. dall'andamento dell'accelerazione ottenuto dai polinomi è possibile ricavare per integrazione la funzione di velocità e di posizione nel tempo e per derivazione gli andamenti di jerk e snap.

Metodo di pianificazione di traiettorie smooth point-to-point basate su polinomi di grado elevato

Questo metodo, descritto nell'articolo [Wang et al. \[2019\]](#) prevede la pianificazione della traiettoria in spazio giunti. Il moto dei giunti è diviso in tre parti: la parte di accelerazione, la parte a velocità costante e la parte di decelerazione. Nel primo e terzo tratto la funzione di accelerazione è descritta da un polinomio di 4° ordine ottenuto considerando la molteplicità delle radici. Questo metodo permette l'applicazione di vincoli cinematici. Se si vuole ottenere la traiettoria ottimale anche dal punto di vista del tempo impiegato per percorrerla, l'obiettivo è massimizzare l'intervallo di tempo del tratto a velocità costante.

Definizione dell'accelerazione

Se si rappresenta la funzione di accelerazione con la classica scrittura polinomiale si ottiene:

$$\ddot{q}(t) = a_n * t^n + a_{n-1} * t^{n-1} + \dots + a_1 * t + a_0 \quad (5.18)$$

dove:

1. n è il grado del polinomio;
2. t è il tempo;
3. a_i sono i coefficienti del polinomio.

Maggiore n , maggiore saranno i coefficienti a_i da determinare per definire il polinomio che rappresenta l'accelerazione, e quindi maggiore sarà la difficoltà computazione specialmente se n è alto. Di conseguenza questa scrittura non risulta conveniente. Perciò questo articolo utilizza la scrittura del polinomio basata sulla molteplicità delle radici. Come detto prima si hanno tre tratti:

1. tratto di accelerazione;
2. tratto a velocità costante;
3. tratto di decelerazione

Essi sono individuati da quattro punti caratteristici:

1. Punto iniziale;
2. Punto di transizione I;
3. Punto di transizione II;
4. Punto finale.

Inoltre, per ogni giunto l'accelerazione deve essere nulla in corrispondenza di ciascuno di questi punti per assicurare la continuità dell'accelerazione. Quindi, nel tratto di accelerazione, la funzione di accelerazione è scritta nella seguente forma:

$$\ddot{q}_a(t) = b * t^k * (t - t_1)^l \quad (5.19)$$

dove:

1. b è il coefficiente polinomiale;
2. t_1 è l'istante di tempo in cui si ha la transizione tra accelerazione e tratto a velocità costante;
3. k è la molteplicità della radice nulla 0;
4. l è la molteplicità della radice t_1 .

Per il tratto di decelerazione invece, la funzione di accelerazione è espressa come segue:

$$\ddot{q}_d(t) = c * (t - t_2)^m * [(t - t_2) - (t_3 - t_2)]^p \quad (5.20)$$

dove:

1. c è il coefficiente polinomiale;
2. t_2 è l'istante di tempo in cui si ha la transizione tra tratto a velocità costante e tratto di decelerazione;
3. t_3 è l'istante di tempo finale;
4. m è la molteplicità della radice t_2 ;
5. p è la molteplicità della radice t_3 .

Da queste espressioni si ricavano, derivando, le espressioni del jerk nella parte di accelerazione e decelerazione rispettivamente.

$$\ddot{\dot{q}}_a(t) = b * (kt + lt - kt_1) * t^{k-1} * (t - t_1)^{l-1} \quad (5.21)$$

$$\ddot{\dot{q}}_d(t) = c * (mt + pt - m * t_3 - p * t_2) * (t - t_2)^{m-1} * (t - t_3)^{p-1} \quad (5.22)$$

Affinchè il jerk sia continuo è necessario assicurare che il jerk sia nullo nei quattro punti caratteristici, ovvero in corrispondenza degli istanti $t = 0, t_1, t_2, t_3$ e quindi si devono avere le seguenti condizioni sulle molteplicità delle radici $k \geq 2, l \geq 2, m \geq 2, p \geq 2$. Per semplicità si pone $k = 2, l = 2, m = 2, p = 2$.

$$\ddot{q}(t) = \begin{cases} b(t^4 - 2t_1t^3 + t_1^2t^2) & (0 \leq t \leq t_1) \\ 0 & (t_1 \leq t \leq t_2) \\ c[t^4 - 2(t_2 + t_3)t^3 + (t_2^2 + 4t_2t_3 + t_3^2)t^2 - 2(t_2t_3^2 + t_2^2t_3)t + t_2^2t_3^2] & (t_2 \leq t \leq t_3) \end{cases}$$

Il jerk del giunto può essere espresso come segue:

$$\ddot{\dot{q}}(t) = \begin{cases} b(4t^3 - 6t_1t^2 + 2t_1^2t) & (0 \leq t \leq t_1) \\ 0 & (t_1 \leq t \leq t_2) \\ c[4t^3 - 6(t_2 + t_3)t^2 + 2(t_2^2 + 4t_2t_3 + t_3^2)t - 2(t_2t_3^2 + t_2^2t_3)] & (t_2 \leq t \leq t_3) \end{cases}$$

La velocità del giunto può essere espressa come segue:

$$\dot{q}(t) = \begin{cases} b(\frac{1}{5}t^5 - \frac{1}{2}t_1t^4 + \frac{1}{3}t_1^2t^3) & (0 \leq t \leq t_1) \\ v_0 & (t_1 \leq t \leq t_2) \\ v_0 + c[\frac{1}{5}t^5 - \frac{1}{2}(t_2 + t_3)t^4 + \frac{1}{3}(t_2^2 + 4t_2t_3 + t_3^2)t^3 - (t_2t_3^2 + t_2^2t_3)t^2 + t_2^2t_3^2t] & (t_2 \leq t \leq t_3) \end{cases}$$

dove v_0 è la velocità nel tratto a velocità costante.

La posizione del giunto può essere espressa come segue:

$$q(t) = \begin{cases} b(\frac{1}{30}t^6 - \frac{1}{10}t_1t^5 + \frac{1}{12}t_1^2t^4) + q(0) & (0 \leq t \leq t_1) \\ q(0) + \frac{1}{60}bt_1^6 + v_0(t - t_1) & (t_1 \leq t \leq t_2) \\ q(0) + \frac{1}{60}bt_1^6 + v_0(t_3 + t_2 - t_1 - t) + c[\frac{1}{30}t^6 - \frac{1}{10}(t_2 + t_3)t^5 + \frac{1}{12}(t_2^2 + 4t_2t_3 + t_3^2)t^4 - \frac{1}{3}(t_2t_3^2 + t_2^2t_3)t^3 + \frac{1}{2}t_2^2t_3^2t^2] & (t_2 \leq t \leq t_3) \end{cases}$$

dove $q(0)$ è la posizione iniziale del giunto.

Definizione dei vincoli cinematici

Vincolo della velocità

Come per la velocità, si impone anche il valore limite dell'accelerazione A_m :

$$|\dot{q}(t)_{max}| \leq V_m$$

Per assicurare la continuità della velocità, si impone che:

1. la velocità in t_1 e in t_2 sia uguale al valore della velocità costante:

$$\dot{q}(t_1) = \dot{q}(t_2) = v_0 \quad (5.23)$$

2. la velocità in t_3 deve essere uguale a 0:

$$\dot{q}(t_3) = 0 \quad (5.24)$$

Per quanto descritto prima il valore della velocità nel tratto a velocità costante rappresenta il massimo valore di velocità raggiunto che quindi deve essere confrontato con il vincolo di velocità imposto. Considerando quindi il sistema di equazioni della velocità è possibile determinare il valore massimo della velocità sostituendo t con t_1 nella prima equazione del sistema oppure sostituendo t con t_2 nella terza equazione del sistema e si ottiene:

$$\frac{1}{30}|b|t_1^5 = \frac{1}{30}|c|(t_3 - t_2)^5 \leq V_m \quad (5.25)$$

Vincolo dell'accelerazione

Come per la velocità, si impone anche il valore limite dell'accelerazione A_m :

$$|\ddot{q}(t)_{max}| \leq A_m \quad (5.26)$$

A_m è il massimo valore di accelerazione consentito in modulo. Il massimo valore della funzione dell'accelerazione si trova imponendo nulla la sua derivata:

$$\frac{d\ddot{q}(t)}{dt} = 0 \quad (5.27)$$

Si ottiene quindi che nella parte di accelerazione il massimo dell'accelerazione si ha per $\frac{1}{2t_1}$ mentre per la parte di decelerazione il massimo valore assoluto si ha in corrispondenza di $\frac{1}{2(t_2+t_3)}$. Perciò i valori di accelerazione massima in modulo nel tratto di accelerazione e nel tratto di decelerazione sono rispettivamente:

$$|\ddot{q}(t)_{1,max}| = \frac{1}{16}|b|t_1^4 \quad (5.28)$$

$$|\ddot{q}(t)_{2,max}| = \frac{1}{16}|c|(t_3 - t_2)^4 \quad (5.29)$$

Di conseguenza si impone:

$$\frac{1}{16}|b|t_1^4 \leq A_m \quad (5.30)$$

$$\frac{1}{16}|c|(t_3 - t_2)^4 \leq A_m \quad (5.31)$$

Vincolo del jerk

Come per la velocità e l'accelerazione si impone anche il vincolo sul jerk.

$$|\ddot{q}(t)_{max}| \leq J_m \quad (5.32)$$

J_m è il massimo valore del jerk consentito in modulo. Per determinare il massimo della funzione del jerk si impone nulla la sua derivata come fatto per l'accelerazione:

$$\frac{d\ddot{q}(t)}{dt} = 0 \quad (5.33)$$

Si ottengono 4 soluzioni, due per la parte di accelerazione e due per la parte di decelerazione:

$$t_{1j} = \frac{3 - \sqrt{3}}{6t_1} \quad t_{2j} = \frac{3 + \sqrt{3}}{6t_1} \quad (5.34)$$

$$t_{3j} = \frac{(3 + \sqrt{3})t_2 + (3 - \sqrt{3})t_3}{6} \quad t_{4j} = \frac{(3 - \sqrt{3})t_2 + (3 + \sqrt{3})t_3}{6} \quad (5.35)$$

Si calcola quindi il valore di jerk in corrispondenza di questi istanti di tempo e si trovano i seguenti valori massimi di jerk in modulo rispettivamente per il tratto di accelerazione e decelerazione:

$$|\ddot{q}(t)_{1max}| = \frac{\sqrt{3}}{9}|b|t_1^3 \quad (5.36)$$

$$|\ddot{q}(t)_{3max}| = \frac{\sqrt{3}}{9}|c|(t_3 - t_2)^3 \quad (5.37)$$

E quindi si impone:

$$\frac{\sqrt{3}}{9}|b|t_1^3 \leq J_m \quad (5.38)$$

$$\frac{\sqrt{3}}{9}|c|(t_3 - t_2)^3 \leq J_m \quad (5.39)$$

Massimizzare il valore della velocità nel tratto a velocità costante

Per ottenere la massima velocità possibile nel tratto a velocità costante si impone:

$$\frac{1}{30}|b|t_1^5 = \frac{1}{30}|c|(t_3 - t_2)^5 = V_m \quad (5.40)$$

Considerando il tratto di accelerazione e i vincoli di accelerazione e di jerk imposti dalle equazioni trovate precedentemente si ottiene:

$$t_1 \geq \frac{15V_m}{8A_m} \quad e \quad t_1 \geq \sqrt{\frac{10\sqrt{3}V_m}{3J_m}} \quad (5.41)$$

$$t_1 = \max$$

Considerando invece il tratto di decelerazione si ha:

$$t_3 - t_2 \geq \frac{15V_m}{8A_m} \quad e \quad t_3 - t_2 \geq \sqrt{\frac{10\sqrt{3}V_m}{3J_m}} \quad (5.43)$$

$$(t_3 - t_2)_{min} = max$$

Per assicurare la continuità dello spostamento, l'intervallo di tempo ottimale durante il quale si ha velocità costante è dato da:

$$t_2 - t_1 = \left| \frac{q(t_3) + \frac{1}{60}c(t_3 - t_2)^6 - q(0) - \frac{1}{60}bt_1^6}{V_m} \right| \quad (5.45)$$

Si ricavano quindi i coefficiente polinomiale dell'accelerazione sia per il tratto di accelerazione sia per il tratto di decelerazione:

$$b = \frac{30V_m}{t_{1min}^5} \quad c = -\frac{30V_m}{(t_3 - t_2)_{min}^5} \quad (5.46)$$

In questo modo sono determinate le funzioni di accelerazione sia per il tratto di accelerazione sia per il tratto di decelerazione con l'obiettivo di ottimizzare il tempo di esecuzione e quindi massimizzare la velocità del tratto a velocità costante.

Metodo di pianificazione di traiettorie smooth con tempo di esecuzione ottimale basato sulla curva ad S

Nell'articolo [Fang et al. \[2019\]](#), viene proposto un metodo di pianificazione della traiettoria mediante la curva a S che consente di ottenere la traiettoria smooth ottimale in modo da soddisfare le esigenze di funzionamento ad alta velocità e ultra-precisione per manipolatori robotici in moderne applicazioni industriali. Il metodo utilizza una funzione sigmoidea a tratti per determinare un profilo di jerk con intervalli di tempo opportunamente scelte in modo che le traiettorie ottenute siano infinitamente derivabili sotto i vincoli di velocità, accelerazione e jerk. Tutti i parametri della traiettoria sono ottenuti tramite un algoritmo analitico che assicuri un costo computazionale accettabile. Il modello che utilizza la curva ad S è più efficiente rispetto a quelli che utilizzano le funzioni trigonometriche ed evitano l'elevata complessità associata ai modelli basati sui polinomi di ordine elevato. il compromesso tra efficienza e dolcezza di movimento viene effettuato tramite la scelta del valore limite dello snap, ovvero della derivata del jerk. I metodi che utilizzano la curva ad S sono divisi in due categorie:

1. Modelli polinomiali
2. Modelli trigonometrici

Il profilo di moto generalmente viene diviso in tre parti composte da più tratti: fase di avvio, fase di crociera con velocità massima e fase di frenata, tra le quali la fase di crociera può scomparire a causa dei limiti legati alla distanza.

Modelli polinomiali

1. **Modello polinomiale cubico:** è basato sulla curva a S del terzo ordine ed è uno dei modelli più utilizzati perché consente di ottenere il minimo tempo di moto con vincolo sul jerk e con moderata complessità. La curva è definita in 7 segmenti di cui i primi tre e gli ultimi 3 corrispondono rispettivamente alla fase di avvio e alla fase di frenata. Rispetto al profilo a trapezio di velocità che vede un profilo del jerk impulsivo, si ha un jerk rettangolare e quindi si hanno ridotti stress sugli attuatori e sulla struttura meccanica che sono generati da profilo di accelerazione a gradino. Al tempo stesso, la traiettoria così ottenuta presenta dei salti nel jerk e jerk che istantaneamente assumono valori finiti non nulli. Ciò comporta vibrazioni che inficiano la precisione di posizionamento.
2. **Modello polinomiale del 4° ordine:** presenta un numero di segmenti di traiettoria pari a 15 dal momento che ogni rampa di accelerazione e decelerazione è divisa in tre fasi separate. Questo profilo permette di evitare che il jerk assuma istantaneamente valori finiti non nulli sia all'inizio sia alla fine del moto. Definendo a questo punto il valore limite dello snap, è possibile ottenere un jerk che cresca e decresca con una pendenza massima specificata, evitando così dei salti a gradino.
3. **Modelli polinomiali di ordine più elevato:** consentono una maggiore scioltezza di movimento, la continuità dello snap e derivate superiori. Infatti a volte è necessario un profilo smooth dello snap per evitare gli sfavorevoli effetti dinamici del sistema meccanico. Questi modelli però non vengono utilizzati a meno che non sia richiesto espressamente, in quanto sono poco efficienti a livello computazionale.

Modelli trigonometrici

Dal momento che la definizione del profilo della traiettoria diventa sempre più complessa man a mano che il grado dei polinomi aumenta, ovvero man a mano che la traiettoria diventa più smooth, sono stati presi in considerazione anche le funzioni trigonometriche per definire la curva ad S assicurando la continuità del jerk.

1. **Modello con jerk sinusoidale:** si definisce il profilo del jerk mediante una funzione sinusoidale e da esso si ricavano i profili di accelerazione e decelerazione.

$$j(t) = \begin{cases} J_{\max} \sin\left(\frac{2\pi}{t_J}(t - t_0)\right) & t_0 \leq t < t_1 \\ 0 & t_1 \leq t < t_2 \\ -J_{\max} \sin\left(\frac{2\pi}{t_J}(t - t_2)\right) & t_2 \leq t \leq t_3 \end{cases}$$

dove t_J è l'intervallo di tempo in cui varia il jerk.

2. **Modello con jerk armonico** viene utilizzato per sostituire il jerk a rettangolo ottenuto con il profilo polinomiale cubico con una funzione cosinusoidale traslata.

$$j(t) = \begin{cases} \frac{J_{\max}}{2} \left(1 - \cos\left(\frac{2\pi}{t_J}(t - t_i)\right)\right) & t_0 \leq t < t_1, t_6 \leq t \leq t_7 \\ 0 & t_1 \leq t < t_2, t_3 \leq t < t_4, t_5 \leq t < t_6 \\ -\frac{J_{\max}}{2} \left(1 - \cos\left(\frac{2\pi}{t_J}(t - t_i)\right)\right) & t_2 \leq t < t_3, t_4 \leq t < t_5 \end{cases}$$

Il modello presenta sempre 7 segmenti come quello polinomiale cubico ma permette di generare traiettorie smooth con le performance di un modello polinomiale del 5° ordine, in quanto assicura la continuità dello snap.

Riassumendo, il modello trigonometrico è meno efficiente di quello polinomiale dal punto di vista del tempo di esecuzione in quanto nel secondo caso la massima accelerazione non viene mantenuta continuamente, ma, al tempo stesso, è più efficiente e conciso dal punto di vista computazionale dal momento che facilita il processo di ricerca dei parametri di movimento ottimali a parità di dolcezza di movimento. L'obiettivo è quindi quello di creare un metodo basato sulla curva ad S smooth ma che al tempo stesso sia conciso ed efficiente sia in termini di tempo di esecuzione della traiettoria sia in termini computazionali.

Modello di pianificazione di traiettoria smooth basato sulla funzione sigmoidea

Questo metodo mira l'esigenza di ottenere una traiettoria smooth con tempi di esecuzione e computazionali ridotti. Si tratta di un obiettivo complesso dal momento che in genera il livello di fluidità di movimento aumenta all'aumentare del tempo di esecuzione. Per ridurre il tempo di esecuzione della traiettoria si deve cercare di avere i valori di jerk, accelerazione e velocità il più alti possibile, raggiungerli il prima possibile e mantenerli il più a lungo possibile. Per garantire la continuità del jerk occorre avere un numero minimo di segmenti pari a 15 per comporre, con tempo di esecuzione ottimizzato, una traiettoria ottenuta da un profilo con curva a S del terzo ordine. Questo metodo permette di ottenere una traiettoria smooth con tempo di esecuzione ottimizzato in quanto costruisce un profilo di jerk continuo tramite la funzione di Sigmoid e, da questo, integrando, si ottengono accelerazione, velocità e spostamento. Le traiettorie smooth ottenute hanno un alto grado di continuità pur mantenendo il tempo di esecuzione ottimale e considerando sia le condizioni al contorno sia i vincoli cinematici di velocità, accelerazione e jerk. Inoltre, la complessità di calcolo è ragionevole e quindi è possibile adottare questo metodo anche per la pianificazione online dal momento che le soluzioni analitiche ottimali sono ottenute senza alcun processo iterativo di ottimizzazione. La funzione di Sigmoid è la seguente:

$$f(x) = \frac{1}{1 + \exp -x} \quad (5.47)$$

Questa funzione possiede delle caratteristiche che la rendono adatta per ottenere un andamento del jerk con cambiamenti fluidi e non netti. È definita su tutto l'insieme dei valori reali, ha valori monotonicamente crescenti tra 0 e 1 e centrati in 0.5 e questo favorisce la determinazione dei parametri ottimali e genera uno snap inferiore, e non prevede l'introduzione di coefficienti di guadagno. Inoltre, è facilmente differenziabile dal momento che contiene soltanto un'esponenziale, la pendenza della curva è maggiore per valori di x tendenti a 0 mentre si riduce avvicinandosi allo 0 per valori di x che tendono ad infinito in modulo. Quest'ultima caratteristica è utile per garantire la continuità del profilo. Supponendo che:

1. i limiti cinematici per velocità, accelerazione e jerk siano indicati con Vmax, Amax e Jmax;
2. la distanza da percorrere sia indicato con D (distanza relativa rispetto alla posizione iniziale e, quindi, sia positiva che negativa);
3. le derivate della traiettoria sono imposte nulle nella posizione iniziale e finale.

si ha:

$$j(t) = \text{sign}(D) \cdot \begin{cases} J_{\max} \frac{1}{1+e^{-a(1/(1-\tau_i)-1/\tau_i)}} & t_0 \leq t < t_1, t_{12} \leq t < t_{13} \\ J_{\max} & t_1 \leq t < t_2, t_{13} \leq t < t_{14} \\ J_{\max} \frac{1}{1+e^{a(1/(1-\tau_i)-1/\tau_i)}} & t_2 \leq t < t_3, t_{14} \leq t \leq t_{15} \\ 0 & t_3 \leq t < t_4, t_7 \leq t < t_8, t_{11} \leq t < t_{12} \\ -J_{\max} \frac{1}{1+e^{-a(1/(1-\tau_i)-1/\tau_i)}} & t_4 \leq t < t_5, t_8 \leq t < t_9 \\ -J_{\max} & t_5 \leq t < t_6, t_9 \leq t < t_{10} \\ -J_{\max} \frac{1}{1+e^{a(1/(1-\tau_i)-1/\tau_i)}} & t_6 \leq t < t_7, t_{10} \leq t < t_{11} \end{cases} \quad (5.48)$$

dove t_i con $i = 0, 1, \dots, 15$ sono gli istanti temporali, τ_i è la variabile di tempo normalizzata nell'intervallo $[t_{i-1}, t_i]$ e a è un parametro costante positivo che controlla il tasso di variabilità.

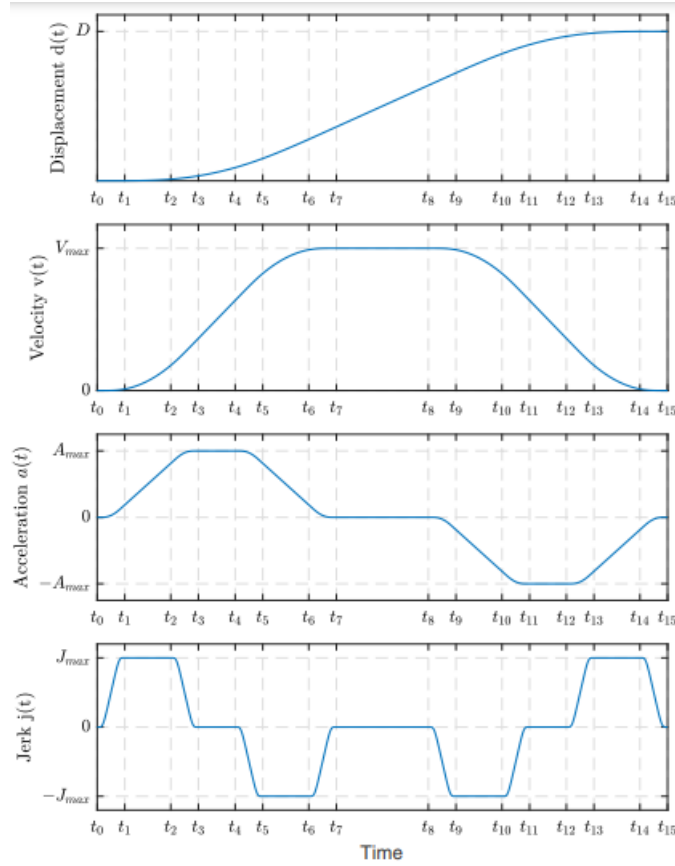


Figura 5.1: Andamento di jerk, accelerazione, velocità e posizione funzione sigmoidea, .

La traiettoria comprende quindici segmenti e l'intervallo di tempo di ogni fase è indicato come: $T_i = t_i - t_{i-1}$ con $i = 1, 2, \dots, 15$. Si distinguono le seguenti fasi:

1. **Fase di accelerazione** $[t_0, t_7]$: si impongono $T_1 = T_3 = T_5 = T_7$ e $T_2 = T_6$ per avere un profilo di accelerazione simmetrico;

2. **Fase di decelerazione** $[t_8, t_{15}]$: si impongono $T_9 = T_{11} = T_{13} = T_{15}$ e $T_{10} = T_{14}$ per avere un profilo di decelerazione simmetrico.

La forma della traiettoria dipende, perciò, dal valore di jerk massimo ammesso e dai quattro intervalli di tempo ovvero da T_s (intervallo di tempo con jerk variabile), T_j (intervallo di tempo con jerk costante), T_a (intervallo di tempo ad accelerazione costante), T_v (intervallo di tempo a velocità costante), durante i quali si raggiungono rispettivamente i valori massimi di snap, jerk, accelerazione e velocità. Il tempo totale di esecuzione della traiettoria T_{exe} è la somma degli intervalli di tempo dei 15 segmenti:

$$T_{exe} = \sum_{i=1}^{15} T_i \quad (5.49)$$

$$T_{exe} = 8T_s + 4T_j + 2T_a + T_v \quad (5.50)$$

Per trovare la traiettoria ottimale: calcolare i quattro tempi T_s, T_j, T_a, T_v in modo da ottenere il tempo T_{exe} minimo possibile per l'esecuzione della traiettoria tra posizione iniziale e posizione finale, rispettando anche i vincoli cinematici. Quindi:

$$\min T_{exe} = \int_0^{T_{exe}} 1 dt$$

$$j(t) = \begin{cases} T_i \geq 0, i = 1, \dots, 15 \\ |v(t)| \leq V_{max} \\ |a(t)| \leq A_{max} \\ |j(t)| \leq J_{max} \end{cases}$$

Le espressioni di velocità, accelerazione e spostamento non sono disponibili dal momento che la funzione del jerk non è analiticamente integrabile. I valori di queste grandezze cinematiche in determinati istanti di tempo sono comunque ottenibili attraverso il calcolo dell'area sottesa alla curva delle loro derivate. In generale, in presenza di tutti i 5 tratti, si ha:

$$\begin{cases} A_{max} = a(t_3) = a(t_4) = J_{max}(T_s + T_j) \\ v_{max} = v(t_7) = v(t_8) = A_{max}(2T_s + T_j + T_a) \\ |D| = |d(t_{15})| = V_{max}(4T_s + 2T_j + T_a + T_v) \end{cases} \quad (5.51)$$

Scelta del parametro del tasso di variazione a

Innanzitutto, si definisce lo snap derivando la funzione del jerk. Considerando solo l'intervallo $[t_0, t_1]$ si ha:

$$s(t) = \frac{d}{dt} j(t) = J_{max} \frac{ae^{-a(1/(1-\tau_1)-1/\tau_1)}}{[1 + e^{-a(1/(1-\tau_1)-1/\tau_1)}]^2} \left[\frac{1}{(1-\tau_1)^2} + \frac{1}{\tau_1^2} \right] \frac{1}{T_1}, \quad t_0 \leq t \leq t_1 \quad (5.52)$$

dove $\tau_1 = \frac{t-t_0}{T_1}$.

Ponendo $f = 1/(1-\tau_1) - 1/\tau_1$ si riscrive la funzione dello snap come:

$$s(t) = J_{max} \frac{ae^{-af}}{[1 + e^{-af}]^2} \dot{f} = \frac{a}{J_{max}} j(t) U_{max} - j(t) \dot{f}, \quad t_0 \leq t \leq t_1 \quad (5.53)$$

Questa funzione è continua e derivabile nel suo dominio. Derivando questa funzione si ottengono funzioni che sono continue e derivabili nell'intervallo di tempo indicato e che si annullano esponenzialmente

verso gli estremi dell'intervallo. In questo modo, quindi, si ottiene una traiettoria derivabile teoricamente all'infinito. Si vuole studiare l'influenza del parametro a che indica il tasso di variazione del jerk in modo da sceglierlo al fine di ottenere il profilo desiderato. Considerando sempre l'intervallo $[t_0, t_1]$, l'istante di tempo in cui lo snap raggiunge il suo valore massimo può essere determinato risolvendo la seguente equazione:

$$\dot{s}(t) = 0 \Rightarrow s(t) [J_{\max} - 2j(t)] \dot{j} + j(t) [J_{\max} - j(t)] \ddot{j} = 0 \quad (5.54)$$

Sostituendo l'espressione dello snap nell'equazione sopra riportata, si ottiene:

$$\frac{a}{J_{\max}} [J_{\max} - 2j(t)] \dot{j}^2 + \ddot{j} = 0 \quad (5.55)$$

Il numero delle radici dipende dal valore di a . Quando il valore di a è al di sotto di un certo valore, lo snap raggiunge il suo minimo locale all'istante $(t_0 + t_1)/2$ e i suoi valori massimi ai lati di questo e simmetricamente posizionati rispetto ad esso. Al di sopra di un certo valore, invece, lo snap ha un unico massimo in corrispondenza dell'istante $(t_0 + t_1)/2$. Per trovare il valore critico di a che discrimina le due situazioni, si definiscono due funzioni g e h come segue:

$$g = \frac{a}{J_{\max}} [J_{\max} - 2j(t)] \dot{j}^2$$

$$h = -\ddot{j}$$

Il numero di intersezioni tra le due funzioni rappresenta il numero delle radici dell'equazione riportata sopra. Se a è piccolo, entrambe le funzioni e due dei loro punti di intersezione sono simmetriche rispetto al punto individuato dalla coordinate $((t_0 + t_1)/2, 0)$. All'aumentare di a , i due punti di intersezione ai lati si avvicinano verso il punto intermedio fino a coincidere con esso. Questo avviene quando le derivate delle due funzioni nell'istante $(t_0 + t_1)/2$ sono uguali. A questo punto, aumentando ancora a , il punto di intersezione tra le due curve resterà sempre uno. Per determinare il valore di a critico si impone:

$$\dot{g}\left(\frac{t_0 + t_1}{2}\right) = \dot{h}\left(\frac{t_0 + t_1}{2}\right) \quad (5.56)$$

La cui soluzione è: $a = \frac{\sqrt{3}}{2}$. Perciò, al di sopra di questo valore, si ha un unico punto di intersezione tra le due funzioni nel punto medio dell'intervallo e in corrispondenza di questo lo snap raggiunge il suo valore massimo.

$$s_{\max} = s\left(\frac{t_0 + t_1}{2}\right) = \frac{2aJ_{\max}}{T_1} \quad (5.57)$$

Dal momento che $\frac{2J_{\max}}{T_1} > 0$, all'aumentare di a il valore massimo dello snap in corrispondenza del punto medio dell'intervallo aumenta se si mantengono costanti gli altri parametri.

Concludendo, dal momento che sarebbe opportuno che il profilo di snap non coinvolga oscillazioni multiple e che il valore massimo dello snap sia il più contenuto possibile, occorre scegliere a al di sopra del valore critico ma senza aumentarlo troppo. Il valore più conveniente risulta quindi essere proprio il valore critico.

Ponendo a pari al suo valore critico si ha:

$$j_{\max} = \frac{S_{\max} T_1}{\sqrt{3}} = \frac{S_{\max} T_s}{\sqrt{3}}$$

$$\begin{cases} a_{\max} = \frac{S_{\max} T_s}{\sqrt{3}} (T_s + T_j) \\ v_{\max} = \frac{S_{\max} T_s}{\sqrt{3}} (T_s + T_j) (2T_s + T_j + T_a) \\ d_{\max} = \frac{S_{\max} T_s}{\sqrt{3}} (T_s + T_j) (2T_s + T_j + T_a) (4T_s + 2T_j + T_a + T_v) \end{cases}$$

Lo snap influenza la durata delle fasi del profilo del jerk. Perciò, il valore massimo dello snap S_{\max} va scelto in modo tale da trovare il giusto compromesso tra il tempo di esecuzione della traiettoria e la fluidità di movimento e deve essere scelto dall'utente. Maggiore è il valore di S_{\max} , minore sarà il tempo di esecuzione della traiettoria a scapito della scioltezza di movimento. Minore è il valore di S_{\max} maggiore sarà il tempo di esecuzione della traiettoria ma, al tempo stesso, sarà maggiore la fluidità del movimento eseguito. In ogni caso, tuttavia, si garantisce la continuità della traiettoria.

Calcolo dei parametri T_s, T_j, T_a, T_v

L'algoritmo presentato risulta essere efficiente dal punto di vista computazionale in quanto permette di evitare dati ridondanti e in quanto prevede il tipo di profilo del jerk è scelto tra otto profili possibili a valle dei risultati di calcolo di ogni step previsto dall'algoritmo e quindi prende in considerazione soltanto le fasi del jerk necessarie 5.2. In ogni step vengono calcolati i limiti superiori dell'intervallo di tempo corrispondente a quella fase per ogni tipo di vincolo cinematico e tra questi viene scelto il più piccolo. Noto questo intervallo di tempo, si calcola il valore massimo di una delle grandezze cinematiche. In questo modo è possibile garantire l'esecuzione della traiettoria desiderata nel rispetto dei vincoli cinematici imposti e nel tempo più breve.

L'algoritmo prevede 4 step:

1. Determinazione del tempo T_s (fase di variazione del jerk)
2. Determinazione del tempo T_j (fase con jerk costante)
3. Determinazione del tempo T_a (fase ad accelerazione costante)
4. Determinazione del tempo T_v (fase a velocità costante)

STEP 1: Determinazione del tempo della fase di variazione del jerk T_s T_s viene calcolato sulla base dello spostamento e dei vincoli di jerk, accelerazione e velocità. Perciò, si ottengono 4 valori di T_s imponendo rispettivamente i vincoli di spostamento, jerk, accelerazione e velocità e, tra questi, si determina il minimo. Limitazione dello spostamento:

$$d_{\max} = |d(t_{15} \mid T_j = T_a = T_v = 0)| = \frac{8S_{\max} T_s^4}{\sqrt{3}}$$

$$T_s^{(d)} = \sqrt[4]{\frac{\sqrt{3}|D|}{8S_{\max}}}$$

Limitazione della velocità:

$$v_{\max} = v(t_7 \mid T_j = T_a = 0) = \frac{2S_{\max} T_s^3}{\sqrt{3}}$$

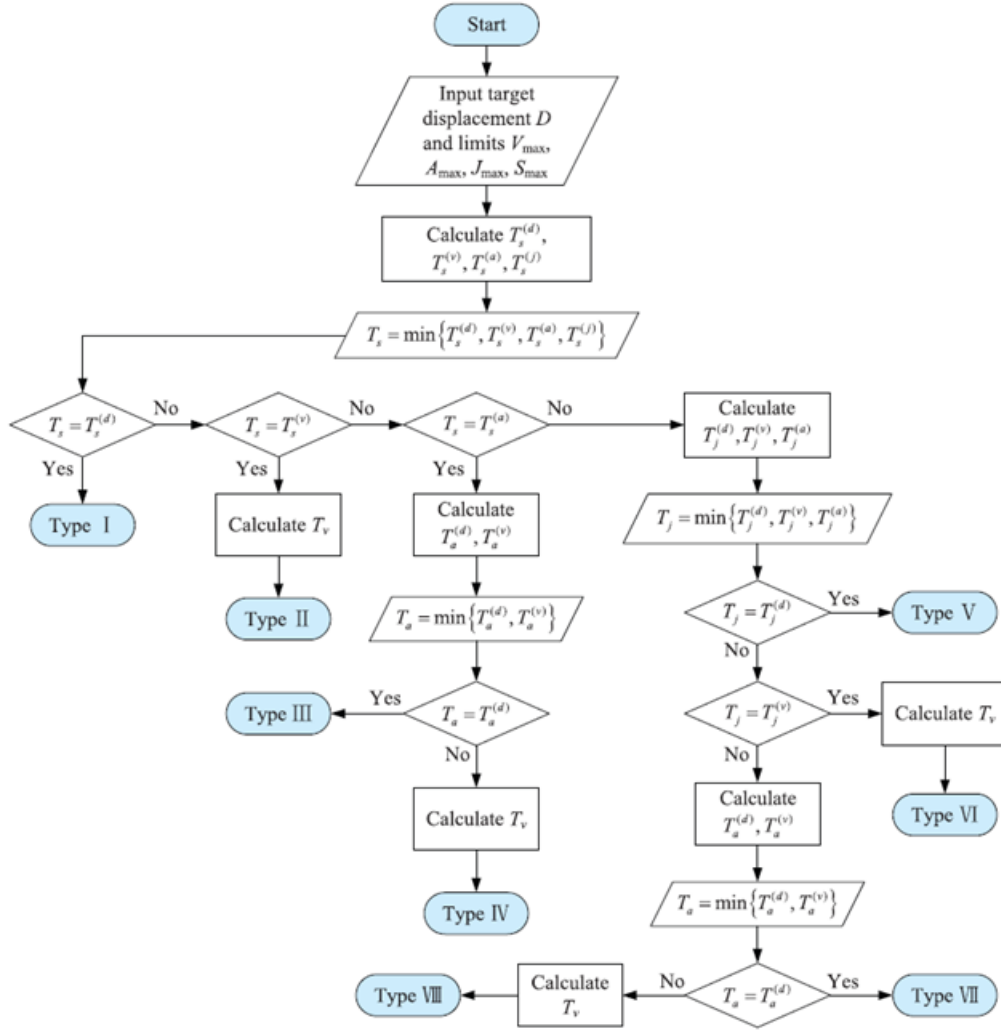


Figura 5.2: Calcolo dei parametri di tempo, .

$$T_s^{(v)} = \sqrt[3]{\frac{\sqrt{3}V_{\max}}{2S_{\max}}}$$

Limitazione dell'accelerazione:

$$a_{\max} = a(t_3 \mid T_j = 0) = \frac{S_{\max}T_s^2}{\sqrt{3}}$$

$$T_s^{(a)} = \sqrt{\frac{\sqrt{3}A_{\max}}{S_{\max}}}$$

Limitazione del jerk:

$$j_{\max} = \frac{S_{\max}T_1}{\sqrt{3}} = \frac{S_{\max}T_s}{\sqrt{3}}$$

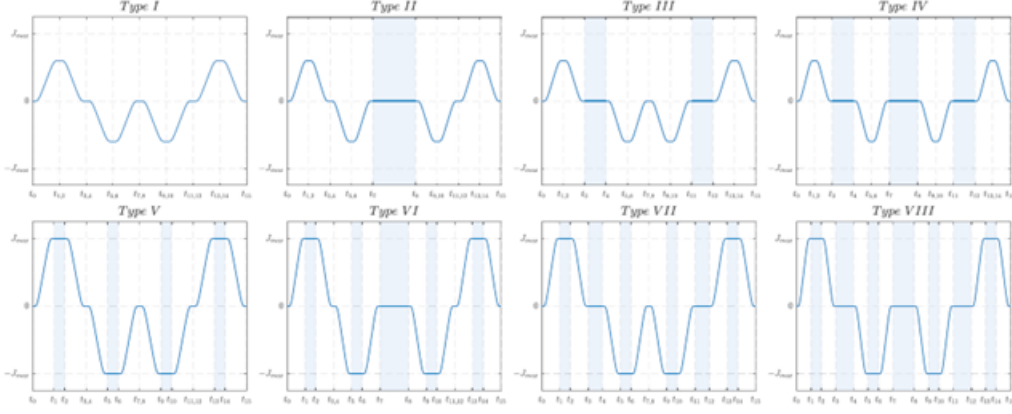


Figura 5.3: Gli otto tipi possibili di andamento del jerk, .

$$T_s^{(j)} = \frac{\sqrt{3}J_{\max}}{S_{\max}}$$

Calcolo del T_s :

$$T_s = \min \left\{ T_s^{(d)}, T_s^{(v)}, T_s^{(a)}, T_s^{(j)} \right\}$$

A seconda di quale tra i quattro tempi T_s risulta essere il minimo, si ha uno dei seguenti casi:

1. CASO 1: se $T_s^{(d)} = \min \left\{ T_s^{(d)}, T_s^{(v)}, T_s^{(a)}, T_s^{(j)} \right\}$ significa che lo spostamento da eseguire è l'unico fattore che influenza il tempo di esecuzione e che jerk, accelerazione e velocità non possono raggiungere i loro valori massimi. Perciò, non è necessario procedere al calcolo degli altri tempi ma si impone direttamente $T_j = T_a = T_v = 0$ in quanto l'unica fase esistente è quella con jerk variabile. Il jerk massimo viene ricalcolato come $J_{\max} = \frac{S_{\max}T_s^{(d)}}{\sqrt{3}}$;
2. CASO 2: se $T_s^{(v)} = \min \left\{ T_s^{(d)}, T_s^{(v)}, T_s^{(a)}, T_s^{(j)} \right\}$ significa che il valore massimo possibile della velocità può essere raggiunto senza le fasi a jerk costante e ad accelerazione costante, perciò si impone $T_a = T_j = 0$. I valori massimi di jerk e accelerazione non vengono mai raggiunti. Il jerk massimo viene ricalcolato come $J_{\max} = \frac{S_{\max}T_s^{(v)}}{\sqrt{3}}$. Si passa direttamente allo STEP 4;
3. CASO 3: se $T_s^{(a)} = \min \left\{ T_s^{(d)}, T_s^{(v)}, T_s^{(a)}, T_s^{(j)} \right\}$, allora sono assenti i segmenti a jerk costante perciò si impone $T_j = 0$. Il jerk massimo viene ricalcolato come $J_{\max} = \frac{S_{\max}T_s^{(a)}}{\sqrt{3}}$. Si passa direttamente allo STEP 3.
4. CASO 4: $T_s^{(j)} = \min \left\{ T_s^{(d)}, T_s^{(v)}, T_s^{(a)}, T_s^{(j)} \right\}$. Si passa allo STEP 2.

STEP 2: Determinazione del tempo della fase con jerk costante T_j T_j viene calcolato sulla base dello spostamento e dei vincoli di accelerazione e velocità. Perciò, si ottengono 3 valori di T_j imponendo rispettivamente i vincoli di spostamento, accelerazione e velocità e, tra questi, si determina il minimo. Limitazione dello spostamento:

$$|d(t_{15}T_a = T_v = 0)| = |D| = J_{\max} \left(8T_s^3 + 16T_s^2T_j + 10T_sT_j^2 + 2T_j^3 \right)$$

$$\Rightarrow T_j^{(d)} = \sqrt[3]{\frac{T_s^3}{27} + \frac{|D|}{4J_{\max}} + \sqrt{\frac{|D|T_s^3}{54J_{\max}} + \frac{D^2}{16J_{\max}^2}}} + \sqrt[3]{\frac{T_s^3}{27} + \frac{|D|}{4J_{\max}} - \sqrt{\frac{|D|T_s^3}{54J_{\max}} + \frac{D^2}{16J_{\max}^2}}} - \frac{5T_s}{3}$$

Limitazione della velocità:

$$v(t_7 | T_a = 0) = V_{\max} = J_{\max} (2T_s^2 + 3T_s T_j + T_j^2) \Rightarrow$$

$$T_j^{(v)} = -\frac{3T_s}{2} + \sqrt{\frac{T_s^2}{4} + \frac{V_{\max}}{J_{\max}}}$$

Limitazione dell'accelerazione

$$a(t_3) = A_{\max} = J_{\max} (T_j + T_s) \Rightarrow$$

$$T_j^{(a)} = \frac{A_{\max}}{J_{\max}} - T_s$$

Calcolo del T_j :

$$T_j = \min \{T_j^{(d)}, T_j^{(v)}, T_j^{(a)}\}$$

A seconda di quale tra i tre tempi T_j risulta essere il minimo, si ha uno dei seguenti casi:

1. CASO 1: se $T_j^{(d)} = \min \{T_j^{(d)}, T_j^{(v)}, T_j^{(a)}\}$ significa che il profilo di moto è composto solo da tratti in cui il jerk varia oppure è costante, mentre non si hanno tratti ad accelerazione e a velocità costante. Solo il jerk può raggiungere il suo valore massimo J_{\max} ;
2. CASO 2: se $T_j^{(v)} = \min \{T_j^{(d)}, T_j^{(v)}, T_j^{(a)}\}$ significa che la velocità può raggiungere il suo valore limite anche senza la fase ad accelerazione costante e quindi si impone $T_a = 0$. Si passa direttamente allo STEP 4;
3. CASO 3: se $T_j^{(a)} = \min \{T_j^{(d)}, T_j^{(v)}, T_j^{(a)}\}$ allora si passa direttamente allo STEP 3.

STEP 3: Determinazione del tempo della fase ad accelerazione costante T_a T_a viene calcolato sulla base dei T_s e T_j calcolati nei precedenti step e rispettando i vincoli di spostamento e di velocità. Perciò, si ottengono 2 valori di T_a e, tra questi, si determina il minimo. Limitazione dello spostamento:

$$|d(t_{15} | T_v = 0)| = |D| = A_{\max} (T_a^2 + 3T_j T_a + 6T_s T_a + 8T_s^2 + 2T_j^2 + 8T_s T_j)$$

$$\Rightarrow T_a^{(d)} = \frac{-(6T_s + 3T_j) + \sqrt{(2T_s + T_j)^2 + 4|D|/A_{\max}}}{2}$$

Limitazione della velocità:

$$v(t_7) = V_{\max} = A_{\max} (T_a + 2T_s + T_j) \Rightarrow T_a^{(v)} = \frac{V_{\max}}{A_{\max}} - 2T_s - T_j$$

Calcolo del T_a :

$$T_a = \min \{T_a^{(d)}, T_a^{(v)}\}$$

A seconda di quale tra i due tempi T_a risulta essere il minimo, si ha uno dei seguenti casi:

1. CASO 1: se $T_a^{(d)} = \min \{T_a^{(d)}, T_a^{(v)}\}$ significa che la velocità non può raggiungere il suo valore limite a causa del vincolo di spostamento e quindi non si ha la fase di crociera, ovvero quella a velocità costante. Perciò si impone $T_v = 0$;
2. CASO 2: se $T_a^{(v)} = \min \{T_a^{(d)}, T_a^{(v)}\}$, si passa direttamente allo STEP 4.

STEP 4: Determinazione del tempo della fase a velocità costante T_v T_v viene calcolato nel caso in cui lo spostamento è sufficientemente ampio da permettere alla velocità di raggiungere il suo valore limite e rimanere costante per un certo tempo che viene determinato tenendo conto proprio dello spostamento.

Calcolo del T_v :

$$T_v = \frac{|D - d(t_{15} | T_v = 0)|}{V_{\max}} = \frac{|D|}{V_{\max}} - (4T_S + 2T_j + T_a)$$

Determinati tutti e quattro i tempi T_s, T_j, T_a, T_v , il profilo di traiettoria ad S è determinato in maniera univoca.

Di seguito si riporta un esempio di pianificazione di traiettoria attraverso il metodo appena presentato.

Applicazione numerica del metodo di pianificazione di traiettoria ad S basato sulla funzione sigmoidea

Innanzitutto è stato implementato il metodo appena presentato in ambiente Matlab considerando di pianificare la traiettoria per un unico giunto. I dati di input scelti sono i seguenti:

1. Posizione iniziale del giunto $q_i = 0 \quad rad$;
2. Posizione finale del giunto $q_f = \frac{2\pi}{3} \quad rad$;
3. Vincolo di velocità del giunto $V_{\max} = 8 \quad rad/s$;
4. Vincolo di accelerazione del giunto $A_{\max} = 10 \quad rad/s^2$;
5. Vincolo di jerk del giunto $J_{\max} = 30 \quad rad/s^3$;
6. Vincolo di snap del giunto $S_{\max} = 150 \quad rad/s^4$.

Con questi dati di input, si pianifica la traiettoria di moto del giunto seguendo l'algoritmo del metodo scelto. Di seguito si riporta il codice matlab utilizzato per la pianificazione del giunto:

```
% Algoritmo Smooth and time-optimal S-curve trajectory planning for
    automated robots and machines
clear all
close all
clc

%% Input
Vmax=8;           %rad/s
Amax=10;          %rad/s^2
```

```

Jmax=30;          %rad/s^3
Smax=150;         %rad/s^4
qi=0; %rad
qf=2*pi/3; %rad
Dz=qf-qi; %rad
D=abs(Dz);

%% Inizializzo Ts, Tj, Ta, Tv
Ts=0;
Tj=0;
Ta=0;
Tv=0;

fprintf('Pianificazione della traiettoria: ');
%% STEP 1- Calcolo dei Ts
Ts_d=((sqrt(3)*D)/(8*Smax))^(1/4);
Ts_v=((sqrt(3)*Vmax)/(2*Smax))^(1/3);
Ts_a=sqrt((sqrt(3)*Amax)/(Smax));
Ts_j=(sqrt(3)*Jmax)/(Smax);
Ts=min([Ts_d,Ts_v, Ts_a, Ts_j]);

%% CASO 1
if Ts==Ts_d %il tempo di esecuzione influenzato solo dalla distanza
    percorsa
    % non serve calcolare altri intervalli di tempo
    % esistono solo le fasi in cui varia il jerk
    % jerk, accelerazione e velocit non possono raggiungere i valori
    limite imposti
    Tj=0;
    Ta=0;
    Tv=0;
    Jmax=(Smax*Ts_d)/sqrt(3); %si sostituisce il valor di Jmax con
    quello ottenuto da questa espressione
    fprintf('Andamento del jerk di Tipo I');
end
%% CASO 2
if Ts==Ts_v %la massima velocit ammissibile pu essere raggiunta
    senza le fasi con jerk costante e accelerazione costante
    %jerk e accelerazione non possono raggiungere i loro valori limite
    Tj=0;
    Ta=0;
    Jmax=(Smax*Ts_v)/sqrt(3); %si sostituisce il valor di Jmax con
    quello ottenuto da questa espressione
    % STEP 4 - Calcolo Tv
    Tv=D/Vmax-(4*Ts+2*Tj+Ta);

```

```

    fprintf('Andamento del jerk di Tipo II');
end
%% CASO 3
if Ts==Ts_a %sono assenti le fasi con jerk costante per via del vincolo
    sull'accelerazione
    Tj=0;
    Jmax=(Smax*Ts_a)/sqrt(3); %si sostituisce il valor di Jmax con
        quello ottenuto da questa espressione
    % STEP 3- Calcolo Ta
    Ta_d=(-(6*Ts+3*Tj)+sqrt((2*Ts+Tj)^2+(4*D)/Amax))/2;
    Ta_v=Vmax/Amax-2*Ts-Tj;

    Ta=min(Ta_d, Ta_v);
    %% CASO 3.1
    if Ta==Ta_d %la velocit non riesca a raggiungere il suo
        valore massimo per via dello spostamento, e quindi non
        presente il tratto a velocit costante.
        Tv=0;
        fprintf('Andamento del jerk di Tipo III');
    end
    %% CASO 3.2
    if Ta==Ta_v % presente anche il tratto a velocit costante
        % STEP 4 - Calcolo Tv
        Tv=D/Vmax-(4*Ts+2*Tj+Ta);
        fprintf('Andamento del jerk di Tipo IV');
    end
end
%% CASO 4
if Ts==Ts_j % necessario calcolare tutti gli altri intervalli di
    tempo (Tj, Ta, Tv)
    % STEP 2- Calcolo Tj
    Tj_d=((Ts)^3/27+D/(4*Jmax)+sqrt(((D*Ts^3)/(54*Jmax)+D^2/(16*Jmax^2)
        )))^(1/3)+((Ts)^3/27+D/(4*Jmax)-sqrt(((D*Ts^3)/(54*Jmax)+D
        ^2/(16*Jmax^2))))^(1/3)-(5*Ts)/3;
    Tj_v=-(3*Ts)/2+sqrt(Ts^2/4+Vmax/Jmax);
    Tj_a=Amax/Jmax-Ts;

    Tj=min([Tj_d, Tj_v, Tj_a]);
    %% CASO 4.1
    if Tj==Tj_d %il profilo costituito soltanto dai tratti in cui
        varia il jerk e dai tratti in cui si ha jerk costante. Solo il
        jerk pu raggiungere il limite massimo ammissibile Jmax.
        Ta=0;
        Tv=0;
        fprintf('Andamento del jerk di Tipo V');
    end
end

```



```

end
%% CASO 4.2
if Tj==Tj_v %non necessaria la fase ad accelerazione costante
    Ta=0;
    fprintf('Andamento del jerk di Tipo VI');
end
%% CASO 4.3
if Tj==Tj_a
    % STEP 3- Calcolo Ta
    Ta_d=(-(6*Ts+3*Tj)+sqrt((2*Ts+Tj)^2+4*D/Amax))/2;
    Ta_v=Vmax/Amax-2*Ts-Tj;
    %% CASO 4.3.1
    Ta=min(Ta_d, Ta_v);
    if Ta==Ta_d %la velocit non riesce a raggiungere il suo
        valore massimo per via dello spostamento, e quindi non
        presente il tratto a velocit costante.
        Tv=0;
        fprintf('Andamento del jerk di Tipo VII');
    end
    %% CASO 4.3.2
    if Ta==Ta_v % presente anche il tratto a velocit costante
        % STEP 4 - Calcolo Tv
        Tv=D/Vmax-(4*Ts+2*Tj+Ta);
        fprintf('Andamento del jerk di Tipo VIII');
    end
end

end

end
%% Calcolo del tempo di esecuzione della traiettoria
Texe=8*Ts+4*Tj+2*Ta+Tv;

%% Definizione della funzione del jerk j(t)

%Definizione dei 15 intervalli di tempo
t0=0;
t1=Ts;
t2=t1+Tj;
t3=t2+Ts;
t4=t3+Ta;
t5=t4+Ts;
t6=t5+Tj;
t7=t6+Ts;
t8=t7+Tv;
t9=t8+Ts;
t10=t9+Tj;

```

```

t11=t10+Ts;
t12=t11+Ta;
t13=t12+Ts;
t14=t13+Tj;
t15=t14+Ts;

%% Definizione della funzione del jerk
a=sqrt(3)/2;
figure (1)
syms y(x)
y(x)=sign(Dz).*piecewise( ...
    (t0<=x) & (x<t1),Jmax.*1./(1+exp((-a.*(1./((1-(x-t0)./(t1-t0))))
        -1./((x-t0)./(t1-t0)))))), ...
    (t1<=x) & (x<t2), Jmax,...
    (t2<=x) & (x<t3), Jmax.*1./(1+exp((a.*(1./((1-(x-t2)./(t3-t2))))
        -1./((x-t2)./(t3-t2)))))), ...
    (t3<=x)& (x<t4), 0, ...
    (t4<=x) & (x<t5), -Jmax.*1./(1+exp((-a.*(1./((1-(x-t4)./(t5-t4))))
        -1./((x-t4)./(t5-t4)))))), ...
    (t5<=x) & (x<t6), -Jmax, ...
    (t6<=x) & (x<t7), -Jmax.*1./(1+exp((a.*(1./((1-(x-t6)./(t7-t6))))
        -1./((x-t6)./(t7-t6)))))), ...
    (t7<=x) & (x<t8), 0,...
    (t8<=x) & (x<t9), -Jmax.*1./(1+exp((-a.*(1./((1-(x-t8)./(t9-t8))))
        -1./((x-t8)./(t9-t8)))))),...
    (t9<=x) & (x<t10), -Jmax,...
    (t10<=x) & (x<t11), -Jmax.*1./(1+exp((a.*(1./((1-(x-t10)./(t11-t10))
        )-1./((x-t10)./(t11-t10)))))),...
    (t11<=x) & (x<t12), 0,...
    (t12<=x) & (x<t13), Jmax.*1./(1+exp((-a.*(1./((1-(x-t12)./(t13-t12))
        )-1./((x-t12)./(t13-t12)))))),...
    (t13<=x) & (x<t14), Jmax,...
    (t14<=x) & (x<t15), Jmax.*1./(1+exp((a.*(1./((1-(x-t14)./(t15-t14))
        )-1./((x-t14)./(t15-t14)))))));

tempo=linspace(t0, t15, 1000);
jerk=y(tempo);
jerk(1)=0;
jerk(end)=0;
plot(tempo, jerk, 'LineWidth',2);
xlim([0 t15]);
xlabel('Tempo (s)');
ylabel('Jerk [rad/s^3]');
title('Jerk');
grid on

```

```

figure (2)
jerk=cast(jerk,"like",tempo);
acc= cumtrapz(tempo,jerk,2);
plot(tempo, acc, 'LineWidth', 2);
xlim([0 t15]);
xlabel('Tempo (s)');
ylabel('Accelerazione [rad/s^2]');
title('Accelerazione');
grid on

```

```

figure (3)
vel= cumtrapz(tempo,acc,2);
plot(tempo, vel, 'LineWidth', 2);
xlim([0 t15]);
xlabel('Tempo (s)');
ylabel('Velocit [rad/s]');
title('Velocit ');
grid on

```

```

figure (4)
pos= cumtrapz(tempo,vel,2);
plot(tempo, pos, 'LineWidth', 2);
xlim([0 t15]);
xlabel('Tempo (s)');
ylabel('Posizione [rad]');
title('Posizione');

```

```

figure (5)
passo=Texe/1000;
snap_999=diff(jerk)/passo;
snap=[snap_999 0];
plot(tempo, snap, 'LineWidth', 2);
xlim([0 t15]);
xlabel('Tempo (s)');
ylabel('Snap [rad/s^4]');
title('Snap');
grid on

```

Gli andamenti delle grandezze cinematiche che si ottengono dalla pianificazione della traiettoria vengono riportati nelle figure 5.4, 5.5, 5.6, 5.7 e 5.8.

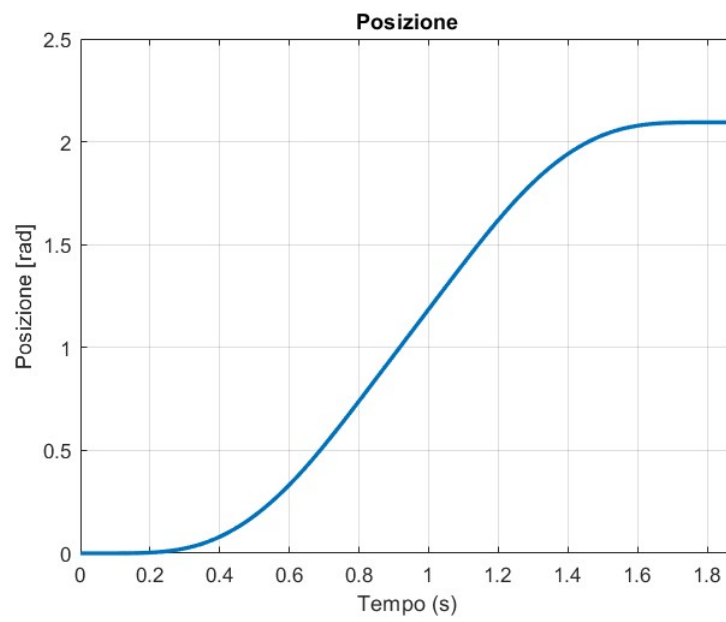


Figura 5.4: Andamento della posizione

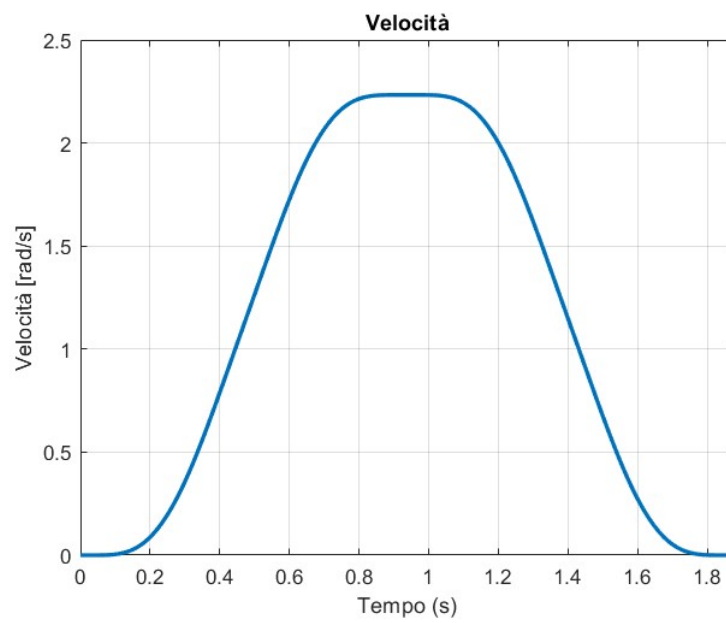


Figura 5.5: Andamento della velocità

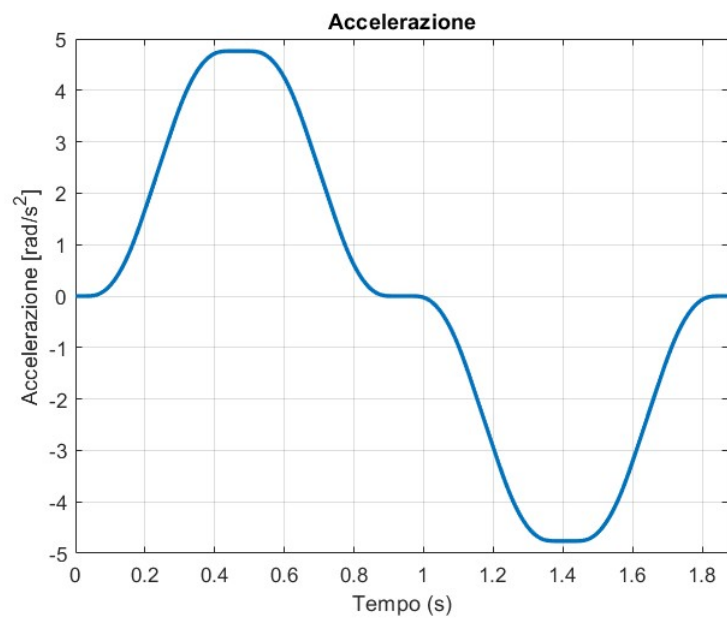


Figura 5.6: Andamento dell'accelerazione

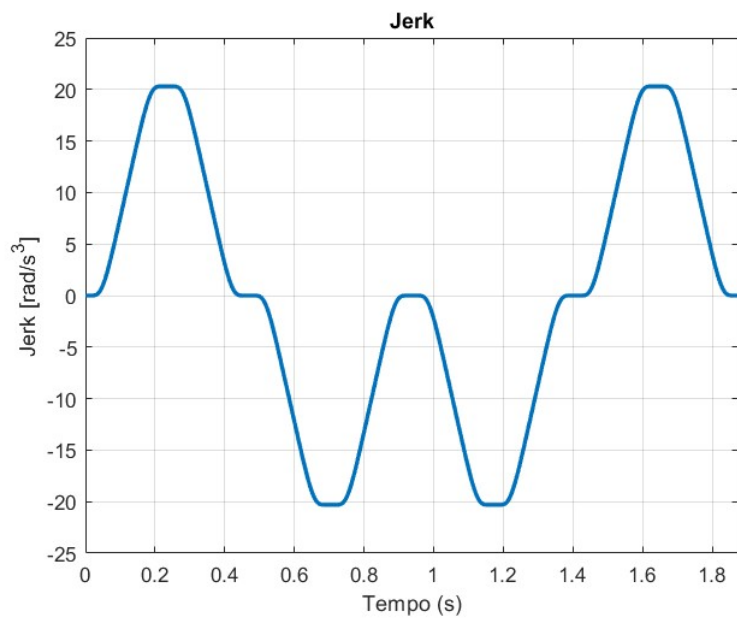


Figura 5.7: Andamento del jerk

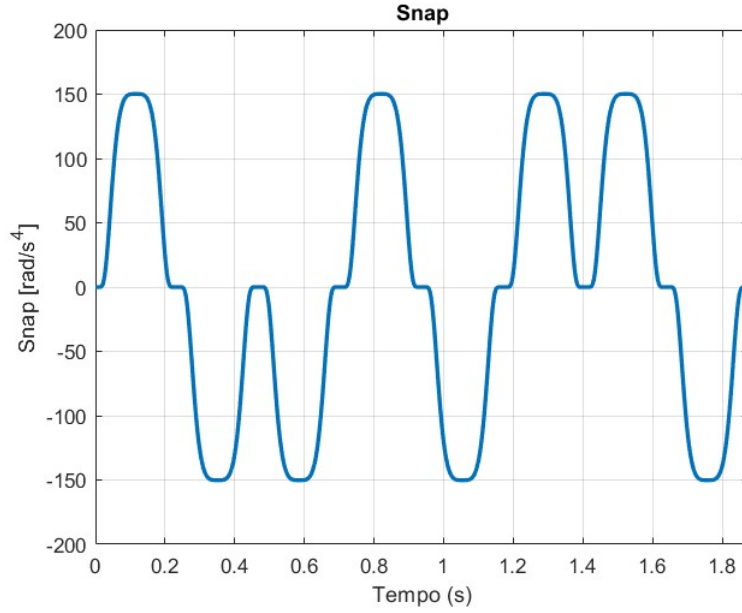


Figura 5.8: Andamento dello snap

Sulla base dei valori di input forniti si ottiene, in questo caso, un profilo del jerk di tipo I (per i vari tipi di jerk ottenibili si veda la figura 5.3), dal quale integrando e derivando numericamente si ottengono gli andamenti di accelerazione, velocità, posizione e snap. Si noti come velocità, accelerazione, jerk e snap siano continue su tutto l'intervallo di tempo di moto e nulle in corrispondenza dell'istante iniziale e dell'istante finale. Questo consente di evitare i colpi di coppia all'inizio e alla fine del moto e di ottenere un movimento smooth.

Sincronizzazione temporale

Se si considera un manipolatore a più gradi di libertà contenente quindi più giunti, anche se ogni giunto può essere controllato indipendentemente dagli altri, occorre sincronizzare i movimenti dei vari giunti. Infatti, ogni giunto ha i propri vincoli cinematici che spesso differiscono da quelli degli altri giunti. Di conseguenza, anche i 4 parametri temporali da calcolare T_s, T_j, T_a, T_v sono diversi da un giunto ad un altro e perciò si otterranno dei tempi di esecuzione della traiettoria T_{exe} differenti. In questo caso, si rallentano i giunti più veloci adattandoli al giunto più lento in modo da evitare stress elevati sugli attuatori. Per sincronizzare i giunti si determina il tempo di esecuzione della traiettoria maggiore tra i tempi di esecuzione della traiettoria minimi ottenuti per i vari giunti mediante il metodo di pianificazione indicati come $T_{exe,1}, T_{exe,2}, \dots, T_{exe,N}$. Perciò $T_{exe,sync}$ sarà determinato come:

$$T_{exe}^{sync} = \min(T_{exe,1}, T_{exe,2}, \dots, T_{exe,N}) \quad (5.58)$$

dove N è il numero degli attuatori e $T_{exe,k} = 8T_{s,k} + 4T_{j,k} + 2T_{a,k} + T_{v,k}$ con $k = 1, \dots, N$. Considerando un generico giunto k , la sua traiettoria viene dilatata linearmente di un fattore λ_k detto fattore di sincronizzazione che viene calcolato come segue:

$$\lambda_k = \frac{T_{exe}^{sync}}{T_{exe,k}}, \quad k = 1, \dots, N \quad (5.59)$$

Perciò, una volta determinato il fattore di sincronizzazione λ_k , è possibile determinare i 4 parametri di tempo associati alla traiettoria del giunto k sincronizzata col giunto più lento, ovvero:

$$(T_{s,k}^{sync}, T_{j,k}^{sync}, T_{a,k}^{sync}, T_{v,k}^{sync}) = \lambda_k (T_{s,k}, T_{j,k}, T_{a,k}, T_{v,k}), \quad \text{con } k = 1, \dots, N \quad (5.60)$$

A questo punto è possibile scalare nel tempo gli andamenti delle grandezze cinematiche:

Jerk

$$j_k^{sync} = \frac{j_k}{\lambda_k^3} \quad (5.61)$$

Quindi il valore massimo del jerk si riduce a:

$$j_{k,max}^{sync} = \frac{j_{k,max}}{\lambda_k^3} \quad (5.62)$$

Accelerazione

$$a_k^{sync} = \frac{a_k}{\lambda_k^2} \quad (5.63)$$

Quindi il valore massimo di accelerazione si riduce a:

$$a_{k,max}^{sync} = \frac{a_{k,max}}{\lambda_k^2} \quad (5.64)$$

Velocità

$$v_k^{sync} = \frac{v_k}{\lambda_k} \quad (5.65)$$

Quindi il valore massimo di velocità si riduce a:

$$v_{k,max}^{sync} = \frac{v_{k,max}}{\lambda_k} \quad (5.66)$$

Si deduce, quindi, che la sincronizzazione temporale comporta una riduzione dei valori massimi delle grandezze cinematiche essendo λ_k sempre ≥ 1 . In questo modo si ottengono traiettorie sincronizzate nel tempo, ovvero che iniziano e finiscono in corrispondenza degli stessi istanti iniziale e finale, dettati dal giunto più lento.

Di seguito si riporta un esempio di pianificazione di traiettoria per ciascun giunto di un manipolatore che supponiamo avere 6 gradi di libertà e quindi 6 giunti.

Si impongono i seguenti dati di input:

1. Posizione iniziale del giunto $q_i = [0, -\pi/6, 0, -\pi/3, 0, 0]$ *rad*;
2. Posizione finale del giunto $q_f = [0, -\pi/6, 0, -\pi/3, 0, 0]$ *rad*;
3. Vincolo di velocità del giunto $V_{max} = [8, 10, 10, 5, 5, 5]$ *rad/s*;
4. Vincolo di accelerazione del giunto $A_{max} = [10, 12, 12, 8, 8, 8]$ *rad/s²*;
5. Vincolo di jerk del giunto $J_{max} = [30, 40, 40, 20, 20, 20]$ *rad/s³*;
6. Vincolo di snap del giunto $S_{max} = [150, 150, 150, 150, 150, 150]$ *rad/s⁴*.

Il codice implementato in ambiente Matlab è il seguente:

```
%% robot 6 assi
clear all
close all
clc

%% Posizione iniziale dei giunti
qi=[0 -pi/6 0 -pi/3 0 0];

%% Posizione finale dei giunti
qf=[2*pi/3 pi/6 pi/4 pi/3 -pi/4 pi/6];

%% D
D=qf-qi;

%% Vmax
Vmax=[8 10 10 5 5 5];

%% Amax
Amax=[10 12 12 8 8 8];

%% Jmax
Jmax=[30 40 40 20 20 20];

%% Smax
Smax=[150 150 150 150 150 150];

%% Numero di istanti di tempo
N=1000;
```



```

%% Pianificazione delle traiettorie
for i=1:length(qi)
    fprintf('Pianificazione traiettoria giunto %d: ', i);
    [snap(i,:), jerk(i,:), acc(i,:), vel(i,:), pos(i,:), Texe(i), Ts(i)
        , Tj(i), Ta(i), Tv(i))]=smoothtraj(Vmax(i), Amax(i), Jmax(i),
        Smax(i), D(i), N, qi(i), i);
end
for i=1:5
    figure (i)
    legend('Giunto 1','Giunto 2', 'Giunto 3', 'Giunto 4', 'Giunto 5', '
        Giunto 6');
    grid on
end

%% Sincronizzazione temporale
fprintf('\n\nSincronizzazione temporale\n');
Texe_sync=max(Texe);
lambda=zeros(6,1);
for i=1:length(qi)
    lambda(i)=(Texe_sync/Texe(i));
    Ts(i)=lambda(i)*Ts(i);
    Tj(i)=lambda(i)*Tj(i);
    Ta(i)=lambda(i)*Ta(i);
    Tv(i)=lambda(i)*Tv(i);
    t0=0;
    t1=Ts(i);
    t2=t1+Tj(i);
    t3=t2+Ts(i);
    t4=t3+Ta(i);
    t5=t4+Ts(i);
    t6=t5+Tj(i);
    t7=t6+Ts(i);
    t8=t7+Tv(i);
    t9=t8+Ts(i);
    t10=t9+Tj(i);
    t11=t10+Ts(i);
    t12=t11+Ta(i);
    t13=t12+Ts(i);
    t14=t13+Tj(i);
    t15=t14+Ts(i);

    jerk(i,:)=jerk(i,:)./(lambda(i)^3);
    acc(i,:)=acc(i,:)./(lambda(i)^2);
    vel(i,:)=vel(i,:)./(lambda(i));
    tempo=linspace(0, Texe_sync, N);

```

```

% Plot grandezze cinematiche sincronizzate
figure(11)
plot(tempo, jerk(i,:), 'LineWidth',2);
xlim([0 t15]);
xlabel('Tempo (s)');
ylabel('Jerk [rad/s^3]');
title('Jerk');
hold on

figure (12)
plot(tempo, acc(i,:), 'LineWidth', 2);
xlim([0 t15]);
xlabel('Tempo (s)');
ylabel('Accelerazione [rad/s^2]');
title('Accelerazione');
hold on

figure(13)
plot(tempo, vel(i,:), 'LineWidth', 2);
xlim([0 t15]);
xlabel('Tempo (s)');
ylabel('Velocit [rad/s]');
title('Velocit ');
hold on

figure(14)
plot(tempo, pos(i,:), 'LineWidth', 2);
xlim([0 t15]);
xlabel('Tempo (s)');
ylabel('Posizione [rad]');
title('Posizione');
hold on

figure(15)
passo(i,:)=Texe(i)/N;
snap_999(i,:)=diff(jerk(i,:))/passo(i,:);
snap(i,:)=snap_999(i,:) 0];
plot(tempo, snap(i,:), 'LineWidth', 2);
xlim([0 t15]);
xlabel('Tempo (s)');
ylabel('Snap [rad/s^4]');
title('Snap');
hold on
end

```

```

for i=11:15
    figure (i)
    legend('Giunto 1','Giunto 2', 'Giunto 3', 'Giunto 4', 'Giunto 5', 'Giunto 6');
    grid on
end

```

Si precisa che la funzione *smoothtraj* implementa il codice riportato nel paragrafo precedente e relativo alla pianificazione di traiettoria per un solo giunto.

Si riportano di seguito gli andamenti delle grandezze cinematiche ottenuti prima e dopo la sincronizzazione temporale.

Gli andamenti delle grandezze cinematiche che si ottengono prima della sincronizzazione temporale vengono riportati nelle figure 5.9, 5.10, 5.11, 5.12 e 5.13.

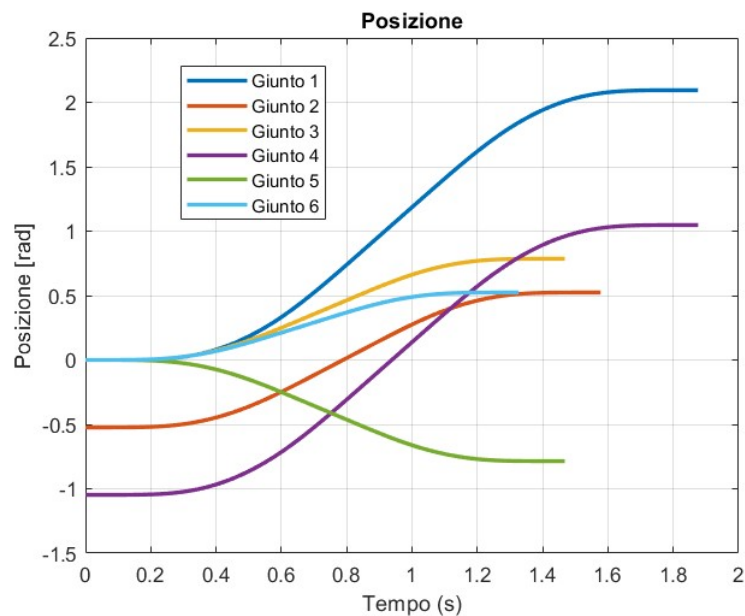


Figura 5.9: Andamento della posizione senza sincronizzazione temporale

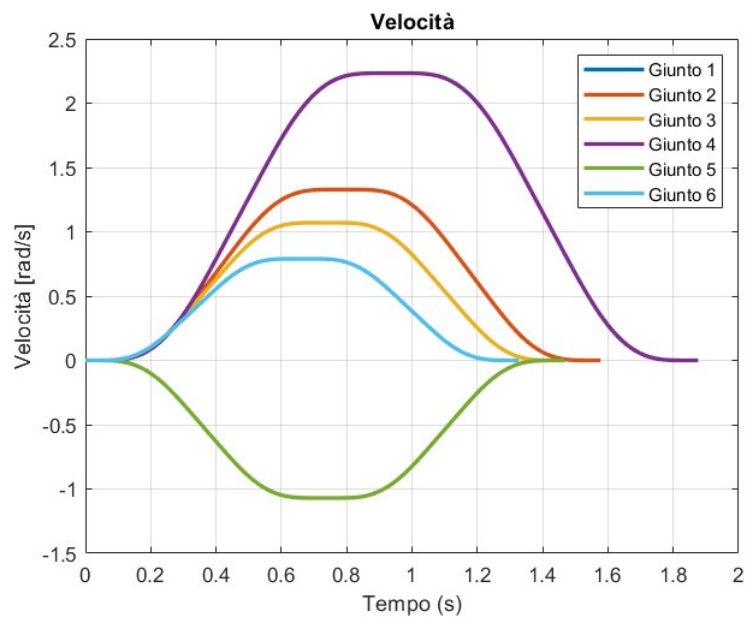


Figura 5.10: Andamento della velocità senza sincronizzazione temporale

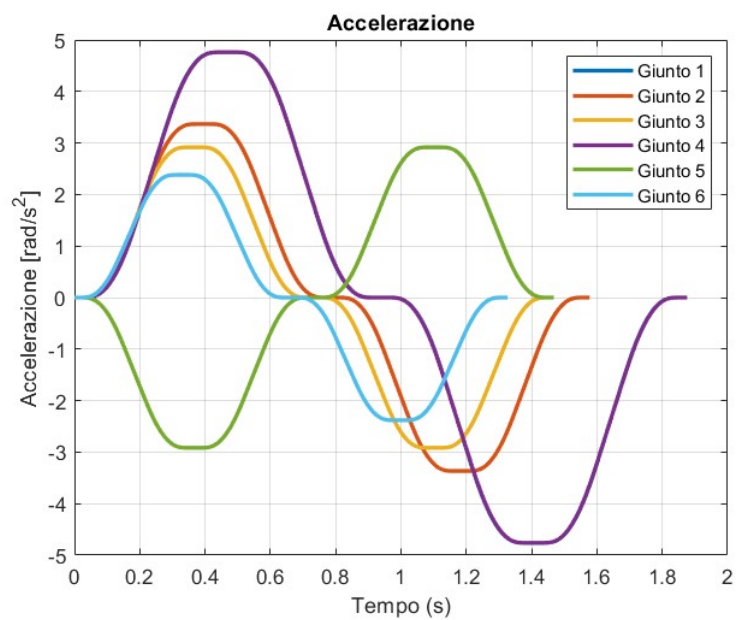


Figura 5.11: Andamento dell'accelerazione senza sincronizzazione temporale

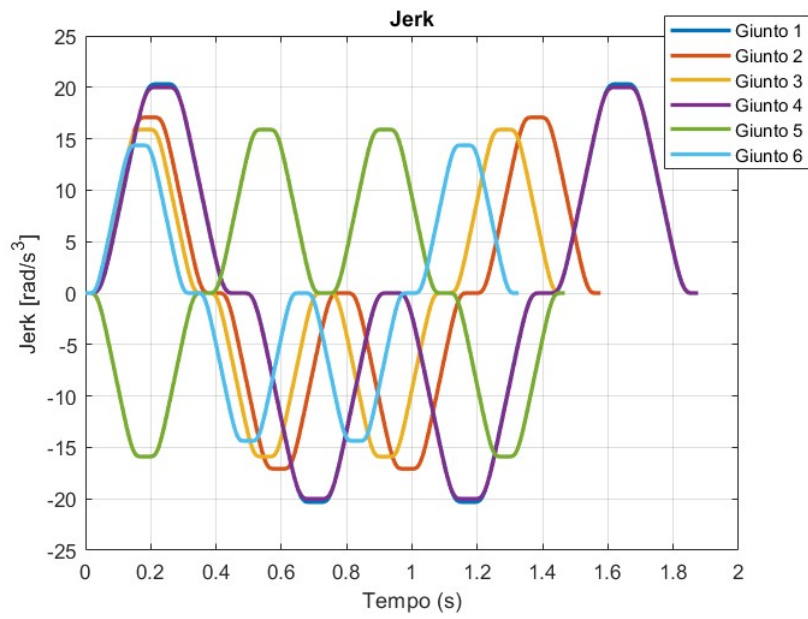


Figura 5.12: Andamento del jerk senza sincronizzazione temporale

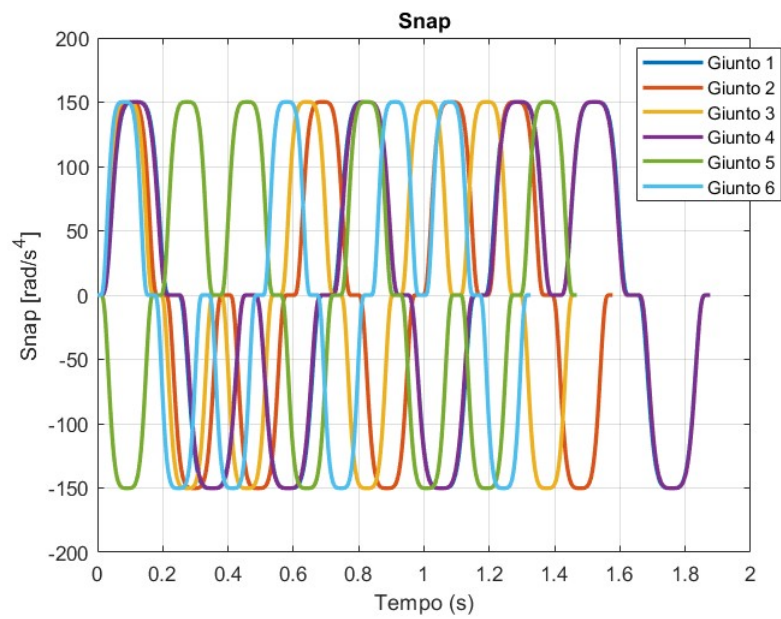


Figura 5.13: Andamento dello snap senza sincronizzazione temporale

Gli andamenti delle grandezze cinematiche che si ottengono dopo della sincronizzazione temporale vengono riportati nelle figure 5.14, 5.15, 5.16, 5.17 e 5.18.

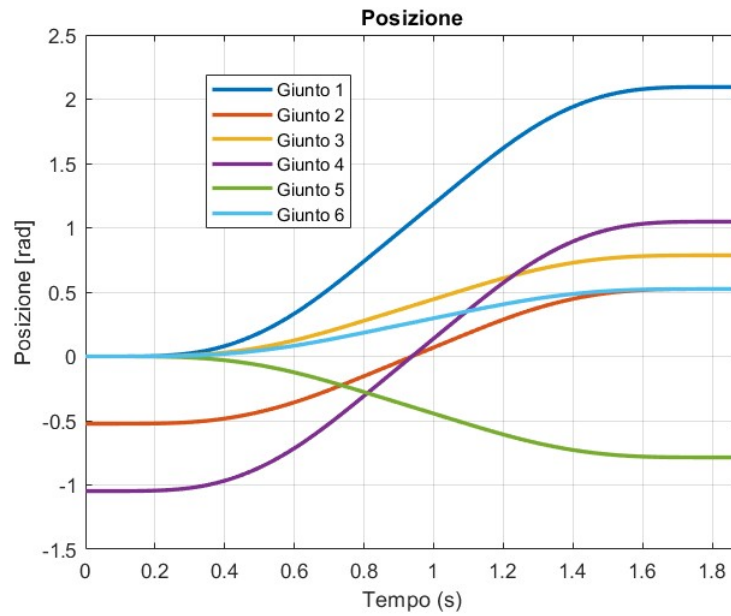


Figura 5.14: Andamento della posizione dopo la sincronizzazione temporale

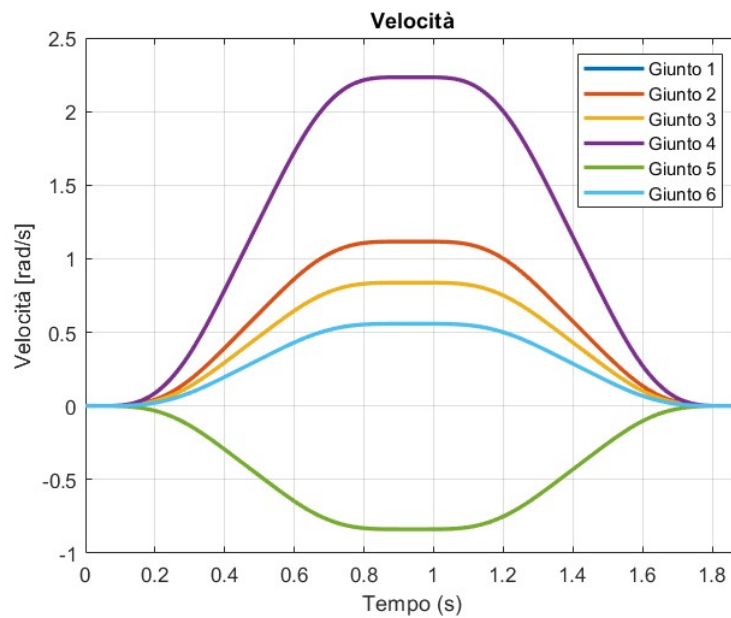


Figura 5.15: Andamento della velocità dopo la sincronizzazione temporale

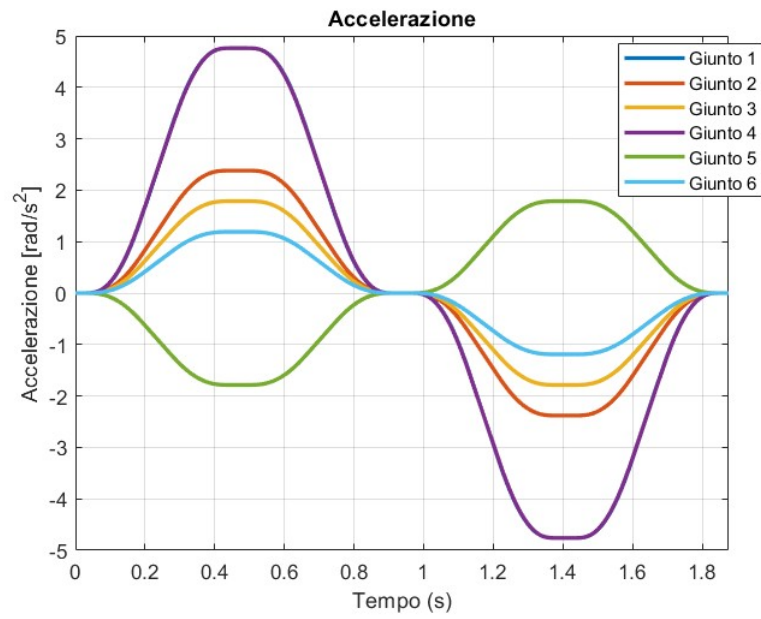


Figura 5.16: Andamento dell'accelerazione dopo la sincronizzazione temporale

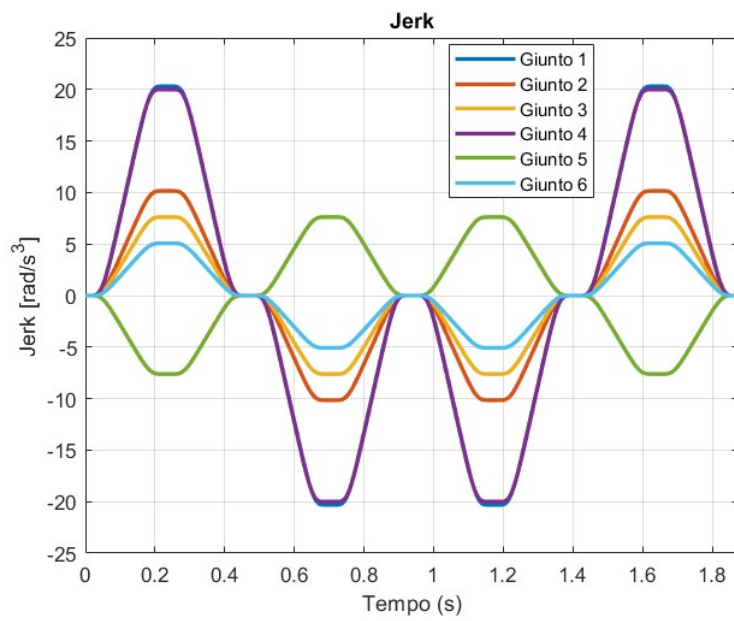


Figura 5.17: Andamento del jerk dopo la sincronizzazione temporale

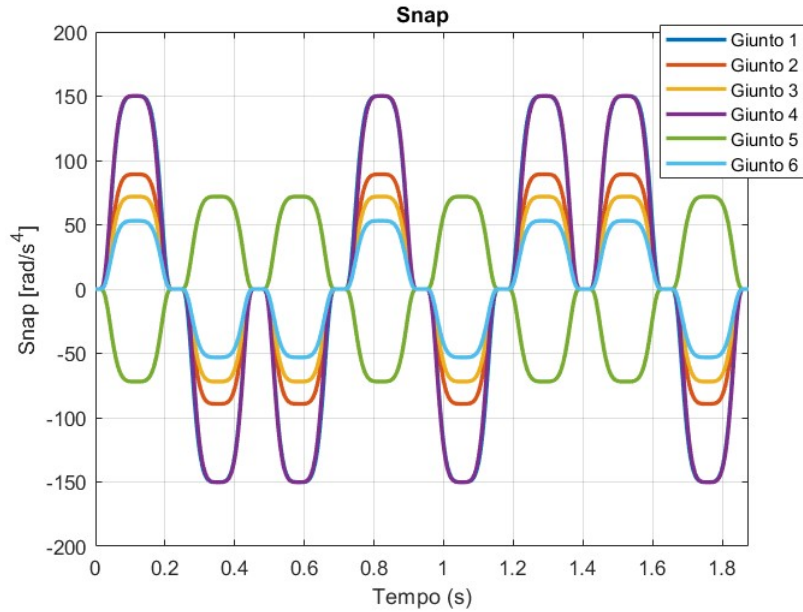


Figura 5.18: Andamento dello snap dopo la sincronizzazione temporale

Come si nota dai grafici sopra riportati, in seguito alla sincronizzazione temporale, tutti i giunti iniziano e terminano il movimento in corrispondenza degli stessi istanti iniziali e finali.

Nella tabella 5.2 si riportano i tempi di esecuzione delle traiettorie dei sei giunti prima della sincronizzazione temporale:

	Giunto 1	Giunto 2	Giunto 3	Giunto 4	Giunto 5	Giunto 6
Texe	1.8759	1.5774	1.4679	1.8760	1.4679	1.3264

Tabella 5.2: Tempi di esecuzione delle traiettorie prima della sincronizzazione temporale dei giunti

Nel caso specifico, il giunto più lento risulta essere il giunto 4, perciò la sincronizzazione temporale è eseguita secondo il tempo $T_{exe, sync} = 1.8760$. I grafici del giunto 4, quindi, non risentono della sincronizzazione temporale mentre i grafici associati agli altri giunti vengono "stirati" lungo l'asse dei tempi. I giunti più veloci vengono infatti rallentati in modo da adattarsi al giunto più lento. Si noti, inoltre, che il tempo associato al giunto 1 è inferiore a quello del giunto 4 soltanto di 0.0001s; perciò, anche il giunto 1 non risente della sincronizzazione temporale.

Confrontando gli andamenti della velocità dei giunti 2, 3, 5, 6, prima e dopo la sincronizzazione temporale (figure 5.10 e 5.15), si nota che i moduli delle velocità subiscono una riduzione in seguito alla sincronizzazione temporale (infatti i grafici risultano più schiacciati verso l'asse dei tempi). Quanto appena scritto vale anche per i grafici di accelerazione, jerk e snap. La riduzione dei valori in modulo delle grandezze cinematiche, inoltre, è di entità sempre maggiore passando dalla velocità all'accelerazione, al jerk e allo snap. Ciò è dovuto al fatto che nella direzione di derivazione aumenta l'esponente del fattore

di sincronizzazione e, quindi, aumenta il denominatore dell'espressione che consente di ottenere i profili sincronizzati. A tal proposito di vedano le formule [5.61](#), , .

Parte III

Analisi delle traiettorie pianificate con il metodo basato sulla curva ad S ottenuta mediante funzione sigmoidea

Capitolo 6

Scelta del metodo di pianificazione di traiettorie smooth e dei metodi di misura della fluidità di movimento

A questo punto si sceglie il metodo di pianificazione basato sulla curva ad S ottenuta mediante la funzione sigmoidea e si misura il livello di smoothness tramite il metodo SPARC, il metodo LDLJ-A e il metodo LDLJ-V.

6.1 La scelta del metodo di pianificazione

Dopo aver mostrato alcuni dei possibili metodi di pianificazione smooth, si è scelto di analizzare il metodo di pianificazione di traiettorie smooth basato sulla curva ad S ottenuta mediante la funzione sigmoidea presentato nel paragrafo . Questa scelta è stata effettuata considerando i seguenti vantaggi del metodo:

1. In alternativa ai tradizionali profili di movimento della curva S, questo metodo consente un miglioramento dell'efficienza relativa al trigonometrico S-modelli di curva a causa del fatto che l'accelerazione e jerk possono essere mantenuti a livelli saturi, mentre l'aumento della complessità è più gestibile rispetto ai modelli polinomiali S-curve di alto ordine.
2. Il compromesso tra efficienza e scorrevolezza può essere modulato dal valore limite dello snap (derivata del jerk), consentendo l'adattamento alle diverse esigenze di task. Infatti, questo metodo, ha la capacità di incorporare i benefici del modello polinomiale del terzo ordine e dei modelli trigonometrici pianificando traiettorie con jerk continuo e minimizzando il tempo di esecuzione, gestendo il conflitto tra alta velocità operativa e basse vibrazioni meccaniche.
3. Tutte le traiettorie sono prodotte senza alcuna violazione delle limitazioni fisiche dell'attuatore e sfruttando al meglio le caratteristiche dello stesso.

4. La fattibilità e la praticità di questo metodo sono valutate dalla simulazione e dagli studi sperimentali rispetto ad altre tecniche di riferimento in letteratura.

6.2 La scelta dei metodi di misura della fluidità

Per valutare il livello di smoothness delle traiettorie ottenute occorre scegliere, inoltre, un metodo di misura della fluidità dei movimenti. Si è scelto di misurare la scioltezza di movimento della traiettoria ottenuta con il metodo di pianificazione di traiettorie analizzato applicando il metodo SPARC al profilo di velocità in quanto, come evidenziato nel paragrafo 2.4, utilizza lo spettro di Fourier e risulta essere il metodo migliore. Inoltre, applicando il metodo SPARC alla velocità, si evita di confondere i tratti in cui si ha velocità costante con tratti in cui non si ha moto che verrebbero interpretati come intermittenze. Questo problema si avrebbe se si applicasse il metodo SPARC al profilo di accelerazione. Al tempo stesso è stata effettuata la misura della fluidità di movimento anche con il metodo LDLJ basato sul jerk. Tale metodo è stato usato in due varianti: LDLJ-V e LDLJ-A. Il metodo LDLJ-V si basa sul jerk ottenuto come derivata seconda della velocità, mentre il metodo LDLJ-A si basa sul jerk ottenuto come derivata prima dell'accelerazione. La differenza tra il metodo LDLJ-V e il metodo LDLJ-A, oltre che nel modo in cui si ottiene il jerk, sta anche nel fattore di normalizzazione che è necessario al fine di ottenere un valore di smoothness adimensionale (uno dei requisiti che devono essere soddisfatti affinché il metodo sia valido). Di seguito si riportano le equazioni da utilizzare per i tre metodi di misura scelti.

6.2.1 Metrica SPARC

Nel paragrafo 2.4 è riportata la descrizione della metrica SPARC e dei termini presenti nelle formule 6.1 e 6.2.

$$\omega_c \triangleq \min \left\{ \omega_c^{max}, \min \left\{ \omega, \hat{V}(r) < \bar{V} \quad \forall \quad r > \omega \right\} \right\} \quad (6.1)$$

$$SPARC = - \int_0^{\omega_c} \left[\left(\frac{1}{\omega_c} \right)^2 + \left(\frac{d\hat{V}(\omega)}{d\omega} \right)^2 \right]^{\frac{1}{2}} d\omega; \quad \hat{V}(\omega) = \frac{V(\omega)}{V(0)} \quad (6.2)$$

6.2.2 Metrica LDLJ-V

Il metodo LDLJ-V si basa sul jerk ottenuto come derivata seconda della velocità ed utilizza la formula 6.3. Tale metodo ha un fattore di normalizzazione pari a: $-\frac{(t_2-t_1)^3}{v_{peak}^2}$.

$$LDLJ - V \triangleq -\ln \left| -\frac{(t_2 - t_1)^3}{v_{peak}^2} \int_{t_1}^{t_2} \left| \frac{d^2 v(t)}{dt^2} \right|^2 dt \right| \quad (6.3)$$

6.2.3 Metrica LDLJ-A

Il metodo LDLJ-A si basa sul jerk ottenuto come derivata prima dell'accelerazione ed utilizza la formula [6.4](#). Tale metodo ha un fattore di normalizzazione pari a : $-\frac{(t_2-t_1)}{a_{peak}^2}$.

$$LDLJ - A \triangleq -\ln \left| -\frac{(t_2 - t_1)}{a_{peak}^2} \int_{t_1}^{t_2} \left| \frac{da(t)}{dt} \right|^2 dt \right| \quad (6.4)$$

Capitolo 7

Esecuzione delle prove numeriche in ambiente matlab

Utilizzando il metodo di pianificazione di traiettorie smooth basato sulla curva ad S ottenuta mediante la funzione sigmoidea presentato nel paragrafo , si vuole determinare il livello di smoothness delle traiettorie ottenute confrontando i risultati forniti dal metodo SPARC con quelli forniti dai metodi LDLJ-A e LDLJ-V.

Il metodo di pianificazione è stato implementato in Matlab utilizzando il codice presentato nel paragrafo , adattandolo alla pianificazione di 8 traiettorie contemporaneamente ed escludendo la sincronizzazione temporale.

Le prove mostrate di seguito sono tutte eseguite fornendo come posizione iniziale e finale del giunto $q_i = 0 \text{ rad}$ e $q_f = 2\pi/3 \text{ rad}$ rispettivamente. I vincoli cinematici imposti e forniti in input all'algoritmo di pianificazione, cambiano a seconda della prova ma, tra questi, tre sono costanti e uno varia in un certo range di 8 valori.

Di seguito si riporta una sintesi schematica dei casi di studio dove si riportano tutte le combinazioni di vincoli cinematici analizzate (figure [7.1](#), [7.2](#), [7.3](#), [7.4](#)). Si precisa che la colonna sulla sinistra delle figure indica gli otto valori che assume il vincolo cinematico che si è scelto di far variare (V_{max} nel caso della figura [7.1](#)) mentre le tabelle sulla destra delle figure riportano le prove eseguite e per ogni prova le tre sottoprobe corrispondenti in cui si sceglie di aumentare di volta in volta il valore di uno dei vincoli cinematici costanti su tutte e otto le pianificazioni.

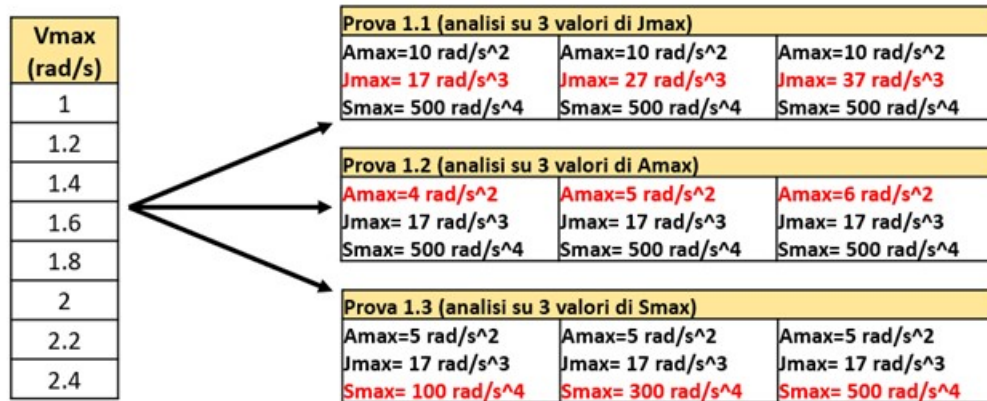


Figura 7.1: Prove con V_{max}

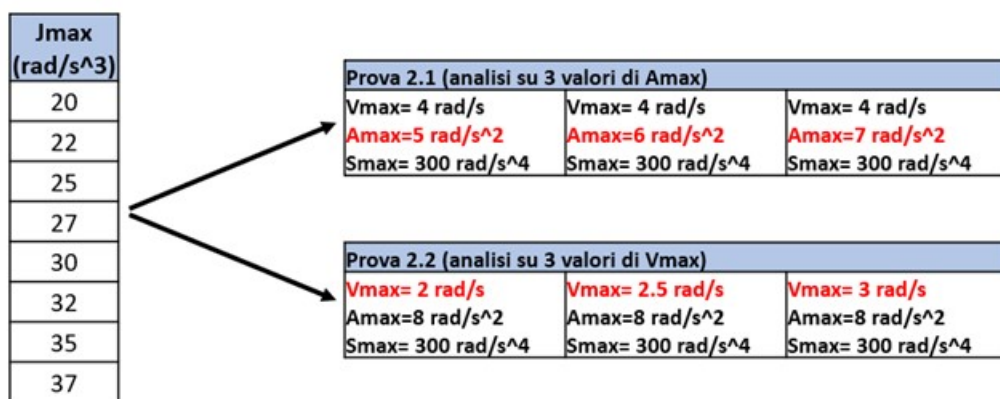


Figura 7.2: Prove con J_{max}

Amax (rad/s ²)	Prova 3.1 (analisi su 3 valori di Vmax)		
3	Vmax= 2 rad/s Jmax=15 rad/s ³ Smax= 300 rad/s ⁴	Vmax= 4 rad/s Jmax=15 rad/s ³ Smax= 300 rad/s ⁴	Vmax= 6 rad/s Jmax=15 rad/s ³ Smax= 300 rad/s ⁴
3.2	<div>Prova 3.2 (analisi su 3 valori di Jmax)</div> <div>Vmax= 4 rad/s Vmax= 4 rad/s Vmax= 4 rad/s</div> <div>Jmax=15 rad/s³ Jmax=25 rad/s³ Jmax=35 rad/s³</div> <div>Smax= 4000 rad/s⁴ Smax= 4000 rad/s⁴ Smax= 4000 rad/s⁴</div>		
3.4			
3.5			
3.6	<div>Prova 3.3 (analisi su 3 valori di Smax)</div> <div>Vmax= 4 rad/s Vmax= 4 rad/s Vmax= 4 rad/s</div> <div>Jmax=25 rad/s³ Jmax=25 rad/s³ Jmax=25 rad/s³</div> <div>Smax= 100 rad/s⁴ Smax= 200 rad/s⁴ Smax= 300 rad/s⁴</div>		
3.8			
4			
4.2			

Figura 7.3: Prove con Amax

Smax (rad/s ⁴)	Prova 4.1 (analisi su 3 valori di Amax)		
50	Vmax= 2 rad/s Amax=2 rad/s ² Jmax=20 rad/s ³	Vmax= 2 rad/s Amax=4 rad/s ² Jmax=20 rad/s ³	Vmax= 2 rad/s Amax=6 rad/s ² Jmax=20 rad/s ³
70	<div>Prova 4.2 (analisi su 3 valori di Jmax)</div> <div>Vmax= 2 rad/s Vmax= 2 rad/s Vmax= 2 rad/s</div> <div>Amax=10 rad/s² Amax=10 rad/s² Amax=10 rad/s²</div> <div>Jmax=20 rad/s³ Jmax=25 rad/s³ Jmax=30 rad/s³</div>		
100			
150			
200	<div>Prova 4.3 (analisi su 3 valori di Vmax)</div> <div>Vmax= 1 rad/s Vmax= 1.5 rad/s Vmax= 2 rad/s</div> <div>Amax=10 rad/s² Amax=10 rad/s² Amax=10 rad/s²</div> <div>Jmax=20 rad/s³ Jmax=20 rad/s³ Jmax=20 rad/s³</div>		
400			
500			
1000			

Figura 7.4: Prove con Smax

7.1 Prova 1: Analisi delle traiettorie al variare di V_{\max} e mantenendo costanti A_{\max} , J_{\max} e S_{\max}

Per l'esecuzione di questa prova sono stati imposti come vincoli cinematici costanti A_{\max} , J_{\max} , S_{\max} mentre V_{\max} assume i seguenti valori: [1 1.2 1.4 1.6 1.8 2 2.2 2.4].

7.1.1 Prova 1.1: analisi su tre valori di J_{\max}

Si è scelto di eseguire questa prova per 3 volte, aumentando di volta in volta il vincolo J_{\max} che ha assunto valori pari a 17rad/s^3 , 27rad/s^3 e 37rad/s^3 . La tabella 7.1 riporta i livelli di smoothness ottenuti:

	$A_{\max} = 10\text{rad/s}^2$ $J_{\max} = 17\text{rad/s}^3$ $S_{\max} = 500\text{rad/s}^4$			$A_{\max} = 10\text{rad/s}^2$ $J_{\max} = 27\text{rad/s}^3$ $S_{\max} = 500\text{rad/s}^4$			$A_{\max} = 10\text{rad/s}^2$ $J_{\max} = 37\text{rad/s}^3$ $S_{\max} = 500\text{rad/s}^4$		
V_{\max} (rad/s)	SPARC	LDLJ-A	LDLJ-V	SPARC	LDLJ-A	LDLJ-V	SPARC	LDLJ-A	LDLJ-V
1	-2.03	-9.77	-14.31	-2.07	-10.05	-14.76	-2.08	-10.18	-14.93
1.2	-1.91	-9.68	-13.81	-1.91	-9.95	-14.27	-1.93	-10.12	-14.48
1.4	-1.83	-9.60	-13.41	-1.88	-9.87	-13.86	-1.89	-10.05	-14.10
1.6	-1.69	-9.53	-13.07	-1.84	-9.80	-13.53	-1.85	-9.98	-13.77
1.8	-1.65	-9.47	-12.79	-1.69	-9.74	-13.24	-1.69	-9.92	-13.49
2	-1.63	-9.41	-12.55	-1.66	-9.68	-12.99	-1.68	-9.86	-13.25
2.2	-1.59	-9.36	-12.34	-1.65	-9.63	-12.78	-1.66	-9.81	-13.04
2.4	-1.55	-9.32	-12.16	-1.61	-9.58	-12.59	-1.63	-9.77	-12.85

Tabella 7.1: Andamento della SPARC e dell'LDLJ al variare del vincolo cinematico V_{\max} per valori di J_{\max} pari a 17rad/s^3 , 27rad/s^3 , 37rad/s^3

Dalla tabella 7.1, si nota come all'aumentare del valore del vincolo cinematico V_{\max} imposto si assista ad un miglioramento evidente e significativo del livello di smoothness sia utilizzando il metodo SPARC, sia utilizzando il metodo LDLJ. All'aumentare del valore del vincolo J_{\max} , passando da 17rad/s^3 a 37rad/s^3 ed infine a 37rad/s^3 , si assiste ad un peggioramento del livello di smoothness, seppur lieve, ma permane sempre un miglioramento del livello di smoothness all'aumentare della velocità. Da questa prova, quindi, si deduce che un piccolo aumento della velocità porta ad un significativo miglioramento della smoothness per tutti e tre i valori del jerk limite e che, all'aumentare del jerk limite, il livello di smoothness raggiunto peggiora.

7.1.2 Prova 1.2: analisi su tre valori di A_{max}

La prova è stata ripetuta per tre volte variando, anziché J_{max} che in questo caso è pari a 17rad/s^3 per tutte e tre le prove, il vincolo sull'accelerazione A_{max} che assunto i seguenti valori: 4rad/s^2 a 5rad/s^2 ed infine a 6rad/s^2 . Nella tabella 7.2 si riportano i risultati ottenuti.

	$A_{max} = 4\text{rad/s}^2$ $J_{max} = 17\text{rad/s}^3$ $S_{max} = 500\text{rad/s}^4$			$A_{max} = 5\text{rad/s}^2$ $J_{max} = 17\text{rad/s}^3$ $S_{max} = 500\text{rad/s}^4$			$A_{max} = 6\text{rad/s}^2$ $J_{max} = 17\text{rad/s}^3$ $S_{max} = 500\text{rad/s}^4$		
V_{max} (rad/s)	SPARC	LDLJ-A	LDLJ-V	SPARC	LDLJ-A	LDLJ-V	SPARC	LDLJ-A	LDLJ-V
1	-2.03	-9.77	-14.31	-2.03	-9.77	-14.31	-2.03	-9.77	-14.31
1.2	-1.91	-9.69	-13.80	-1.91	-9.68	-13.81	-1.91	-9.68	-13.81
1.4	-1.82	-9.69	-13.31	-1.83	-9.60	-13.41	-1.83	-9.60	-13.41
1.6	-1.68	-9.69	-12.91	-1.69	-9.53	-13.07	-1.69	-9.53	-13.07
1.8	-1.64	-9.69	-12.58	-1.65	-9.48	-12.78	-1.65	-9.47	-12.79
2	-1.59	-9.69	-12.30	-1.62	-9.48	-12.49	-1.63	-9.41	-12.55
2.2	-1.52	-9.69	-12.06	-1.58	-9.48	-12.23	-1.59	-9.36	-12.34
2.4	-1.40	-9.69	-11.88	-1.52	-9.48	-12.01	-1.55	-9.32	-12.16

Tabella 7.2: Andamento della SPARC e dell'LDLJ al variare del vincolo cinematico V_{max} per valori di A_{max} pari a 4rad/s^2 , 5rad/s^2 , 6rad/s^2

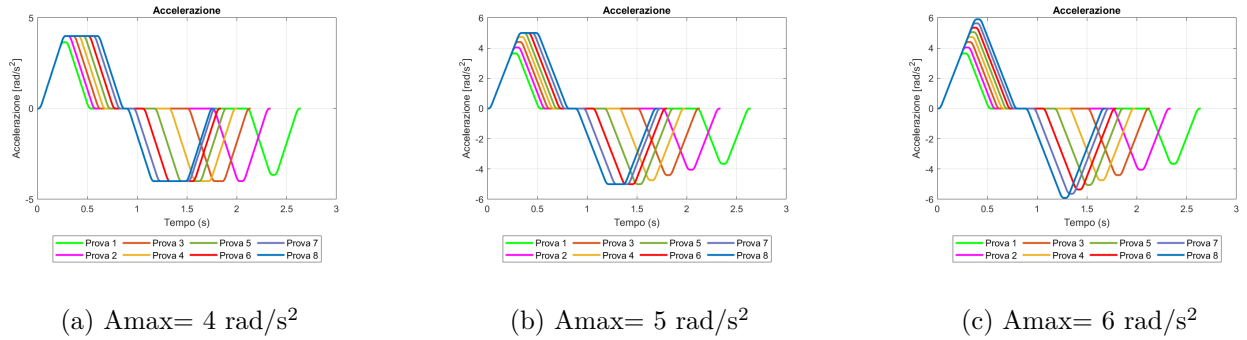


Figura 7.5: Accelerazione prova 1.2

Come si nota dai valori riportati nella tabella 7.2, si ha un evidente miglioramento della fluidità all'aumentare della velocità e aumentando l'accelerazione da 4rad/s^2 a 5rad/s^2 ed infine a 6rad/s^2 , si nota un peggioramento del livello di smoothness dello SPARC e dell'LDLJ-V mentre il metodo LDLJ-A mostra un miglioramento del livello di smoothness. Questo è legato all'andamento dei profili di accelerazione e alla formula della metrica LDLJ-A che, in modulo, è direttamente proporzionale al tempo di esecuzione della traiettoria e inversamente proporzionale al quadrato dell'accelerazione massima. Di conseguenza, dal momento che all'aumentare dell'accelerazione il tempo di esecuzione della traiettoria diminuisce e l'accelerazione massima aumenta, si ottiene una riduzione in modulo del valore ottenuto dal metodo LDLJ-A e di conseguenza un miglioramento della fluidità di movimento. Inoltre è da notare

che per $A_{max} = 4rad/s^2$ si ha un andamento costante dei valori LDLJ-A, per $A_{max} = 5rad/s^2$ i risultati variano per i primi quattro valori di V_{max} mentre restano costanti per gli ultimi quattro valori di V_{max} , ed infine per $A_{max} = 6rad/s^2$ i risultati diminuiscono dal primo all'ultimo valore di V_{max} . Per spiegare ciò, occorre far riferimento ai grafici dell'accelerazione associati ai tre valori di A_{max} 7.5. Come si nota nella figura 7.5a i grafici saturano tutti a $4rad/s^2$ eccetto quello della prova 1 e perciò avranno tutti la stessa accelerazione massima, mentre nella figura 7.5b saturano a $5rad/s^2$ solo i profili delle ultime quattro prove che avranno quindi tutte e quattro la stessa accelerazione massima ed infine, nella figura 7.5c si nota che nessuno dei profili di accelerazione raggiunge il limite di $6rad/s^2$ e perciò si avranno accelerazioni massime differenti e quindi valori differenti nella scala LDLJ-A.

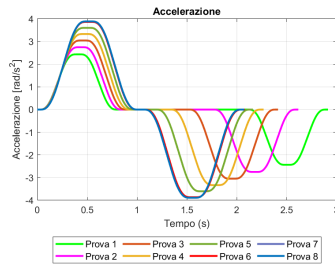
7.1.3 Prova 1.3: analisi su tre valori di S_{max}

A questo punto, la prova è ripetuta per tre volte variando il vincolo S_{max} che assume i seguenti valori: 100rad/s^4 , 300rad/s^4 e 500rad/s^4 . Nella tabella 7.3 sono riportati i risultati ottenuti da tale prova.

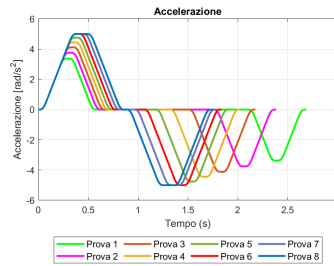
	$A_{max} = 5\text{rad/s}^2$ $J_{max} = 17\text{rad/s}^3$ $S_{max} = 100\text{rad/s}^4$			$A_{max} = 5\text{rad/s}^2$ $J_{max} = 17\text{rad/s}^3$ $S_{max} = 300\text{rad/s}^4$			$A_{max} = 5\text{rad/s}^2$ $J_{max} = 17\text{rad/s}^3$ $S_{max} = 500\text{rad/s}^4$		
V_{max} (rad/s)	SPARC	LDLJ-A	LDLJ-V	SPARC	LDLJ-A	LDLJ-V	SPARC	LDLJ-A	LDLJ-V
1	-1.89	-9.65	-13.57	-1.95	-9.80	-14.21	-2.03	-9.77	-14.31
1.2	-1.81	-9.59	-13.17	-1.88	-9.71	-13.73	-1.91	-9.68	-13.81
1.4	-1.66	-9.53	-12.85	-1.84	-9.63	-13.34	-1.83	-9.60	-13.41
1.6	-1.64	-9.49	-12.60	-1.67	-9.56	-13.02	-1.69	-9.53	-13.07
1.8	-1.60	-9.45	-12.38	-1.66	-9.49	-12.74	-1.65	-9.48	-12.78
2	-1.57	-9.42	-12.20	-1.62	-9.45	-12.50	-1.62	-9.48	-12.49
2.2	-1.57	-9.41	-12.19	-1.58	-9.45	-12.25	-1.58	-9.48	-12.23
2.4	-1.57	-9.41	-12.19	-1.52	-9.45	-12.03	-1.52	-9.48	-12.01

Tabella 7.3: Andamento della SPARC e dell'LDLJ al variare del vincolo cinematico V_{max} per valori di S_{max} pari a 100rad/s^4 , 300rad/s^4 , 500rad/s^4

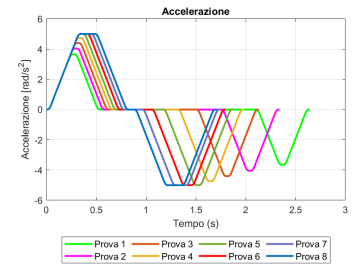
Dalla tabella 7.3 emerge ancora una volta un miglioramento del livello di smoothness all'aumentare della velocità. Osservando l'andamento dell'LDLJ-A, si nota che nel caso di $S_{max} = 100\text{rad/s}^4$ non si registra una variazione di smoothness tra la penultima e l'ultima prova, nel caso di $S_{max} = 300\text{rad/s}^4$ non si registrano variazioni di smoothness per le ultime tre prove e, infine, nel caso di $S_{max} = 500\text{rad/s}^4$ non si registrano variazioni di smoothness per le ultime quattro prove. Ciò è legato alla forma dei profili di accelerazione delle tre prove effettuate con valori di S_{max} differenti. Nella figura 7.6 si nota, infatti, che per la prova con $S_{max} = 100\text{rad/s}^4$ gli ultimi due profili di accelerazione sono sovrapposti, per la prova $S_{max} = 300\text{rad/s}^4$ gli ultimi tre profili di accelerazione saturano a $A_{max} = 5\text{rad/s}^2$, ed infine, per la prova con $S_{max} = 500\text{rad/s}^4$ gli ultimi quattro profili di accelerazione saturano sempre a $A_{max} = 5\text{rad/s}^2$.



(a) $S_{max} = 100 \text{ rad/s}^4$



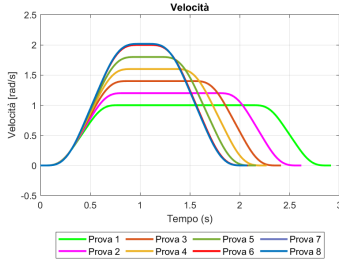
(b) $S_{max} = 300 \text{ rad/s}^4$



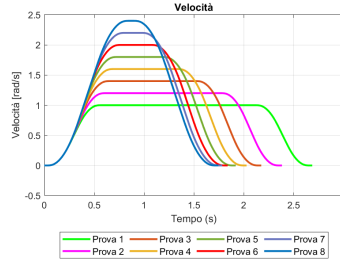
(c) $S_{max} = 500 \text{ rad/s}^4$

Figura 7.6: Accelerazione prova 1.3

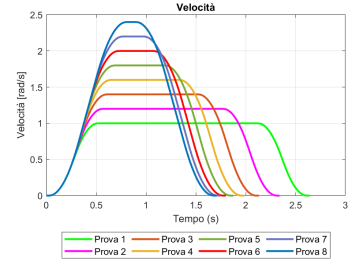
Inoltre, si nota che i valori restituiti dalla metrica SPARC per la prova con $S_{max} = 100 \text{ rad/s}^4$ si mantengono costanti e pari a -1.57 per le ultime tre prove. Ciò non accade per le altre prove eseguite rispettivamente con $S_{max} = 300 \text{ rad/s}^4$ e $S_{max} = 500 \text{ rad/s}^4$. Questo può essere spiegato osservando i profili di velocità delle prove riportati in figura 7.7. Da quest'ultimi è evidente che per la prova con $S_{max} = 100 \text{ rad/s}^4$ gli ultimi tre grafici sono sovrapposti tra loro e ciò è dovuto alla presenza degli altri vincoli cinematici che impediscono alla velocità di raggiungere il suo valore limite V_{max} ; tale problema non è presente, invece, nelle altre due prove in quanto, avendo aumentato S_{max} , la velocità arriva al suo valore limite corrispondente V_{max} che aumenta da 1 a 2.4.



(a) $S_{max} = 100 \text{ rad/s}^4$



(b) $S_{max} = 300 \text{ rad/s}^4$



(c) $S_{max} = 500 \text{ rad/s}^4$

Figura 7.7: Velocità prova 1.3

7.2 Prova 2: Analisi delle traiettorie al variare di J_{\max} e mantenendo costanti V_{\max} , A_{\max} e S_{\max}

Per l'esecuzione di questa prova sono stati imposti come vincoli cinematici costanti V_{\max} , A_{\max} , S_{\max} mentre J_{\max} assume i seguenti valori: [20 22 25 27 30 32 35 37].

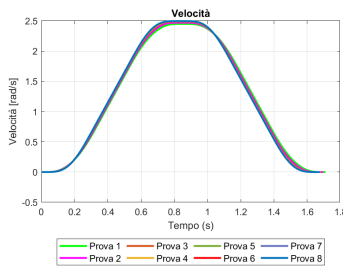
7.2.1 Prova 2.1: analisi su tre valori di A_{\max}

Si è scelto di eseguire questa prova per tre volte, aumentando di volta in volta il vincolo A_{\max} che ha assunto valori pari a 5rad/s^2 , 6rad/s^2 e 7rad/s^2 . I risultati ottenuti sono riportati nella tabella 7.4.

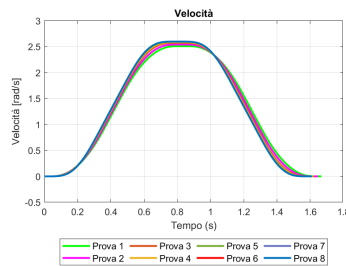
	$V_{\max} = 4\text{rad/s}$ $A_{\max} = 5\text{rad/s}^2$ $S_{\max} = 300\text{rad/s}^4$			$V_{\max} = 4\text{rad/s}$ $A_{\max} = 6\text{rad/s}^2$ $S_{\max} = 300\text{rad/s}^4$			$V_{\max} = 4\text{rad/s}$ $A_{\max} = 7\text{rad/s}^2$ $S_{\max} = 300\text{rad/s}^4$		
J_{\max} (rad/s^3)	SPARC	LDLJ-A	LDLJ-V	SPARC	LDLJ-A	LDLJ-V	SPARC	LDLJ-A	LDLJ-V
20	-1.39	-9.58	-12.08	-1.55	-9.42	-12.18	-1.55	-9.41	-12.19
22	-1.39	-9.65	-12.12	-1.55	-9.49	-12.21	-1.55	-9.46	-12.23
25	-1.39	-9.74	-12.18	-1.55	-9.59	-12.26	-1.55	-9.53	-12.30
27	-1.39	-9.79	-12.22	-1.55	-9.64	-12.29	-1.56	-9.57	-12.34
30	-1.39	-9.84	-12.26	-1.55	-9.71	-12.34	-1.56	-9.62	-12.40
32	-1.39	-9.84	-12.26	-1.55	-9.74	-12.37	-1.57	-9.65	-12.43
35	-1.39	-9.84	-12.26	-1.55	-9.74	-12.37	-1.57	-9.69	-12.46
37	-1.39	-9.84	-12.26	-1.55	-9.74	-12.37	-1.57	-9.69	-12.46

Tabella 7.4: Andamento della SPARC e dell'LDLJ al variare del vincolo cinematico J_{\max} per valori di A_{\max} pari a 5rad/s^2 , 6rad/s^2 , 7rad/s^2

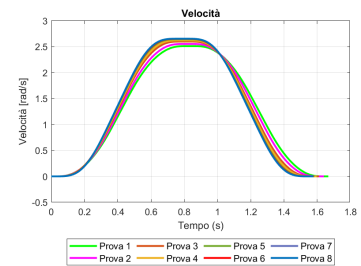
Come si nota dalla tabella 7.4, all'aumentare di J_{\max} si ha un peggioramento della fluidità di movimento. Tuttavia, è da evidenziare il fatto che mentre il metodo SPARC restituisce valori pressoché costanti al variare di J_{\max} , il metodo LDLJ mostra una sensibilità maggiore alla variazione del jerk. Questo trova spiegazione nei profili di velocità e nel modo in cui i metodi di misura determinano il livello di smoothness.



(a) $A_{\max} = 5 \text{ rad/s}^2$



(b) $A_{\max} = 6 \text{ rad/s}^2$



(c) $A_{\max} = 7 \text{ rad/s}^2$

Figura 7.8: Velocità prova 2.1

Come si nota dalla figura 7.8, i profili di velocità risultano essere molto sovrapposti tra loro. Questo giustifica il fatto che lo SPARC restituisca valori pressoché uguali al variare di J_{max} e che si differenziano leggermente tra loro solo per la prova con $V_{max} = 7 \text{ rad/s}$ per la quale si ha un lieve distacco tra un profilo di velocità e l'altro.

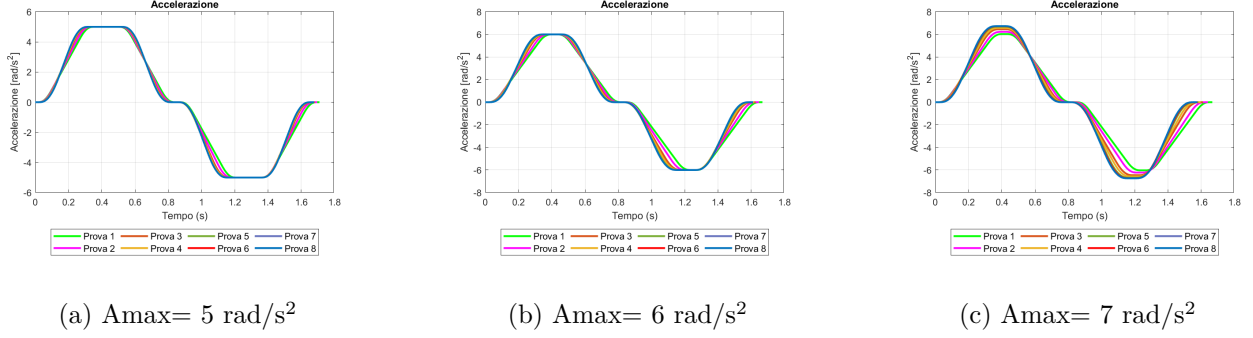


Figura 7.9: Accelerazione prova 2.1

Inoltre, mentre il metodo SPARC e il metodo LDLJ-V mostrano un peggioramento del livello di fluidità passando da $A_{max} = 5 \text{ rad/s}^2$ a $A_{max} = 6 \text{ rad/s}^2$ ed infine a $A_{max} = 7 \text{ rad/s}^2$, il metodo LDLJ-A mostra al contrario un miglioramento della fluidità all'aumentare dell'accelerazione. Ancora una volta, come visto per la prova 1.2 7.5, si ha che l'aumento di A_{max} porta ad un aumento dell'accelerazione massima raggiunta che riduce in modulo il valore in uscita dal metodo LDLJ-A indicando così un miglioramento della fluidità di movimento.

7.2.2 Prova 2.2: analisi su tre valori di V_{max}

Si è scelto di eseguire questa prova per tre volte, aumentando di volta in volta il vincolo V_{max} che ha assunto valori pari a 2rad/s , 2.5rad/s e 3rad/s . I valori ottenuti sono riportati nella tabella 7.5.

	$V_{max} = 2\text{rad/s}$ $A_{max} = 8\text{rad/s}^2$ $S_{max} = 300\text{rad/s}^4$			$V_{max} = 2.5\text{rad/s}$ $A_{max} = 8\text{rad/s}^2$ $S_{max} = 300\text{rad/s}^4$			$V_{max} = 3\text{rad/s}$ $A_{max} = 8\text{rad/s}^2$ $S_{max} = 300\text{rad/s}^4$		
J_{max} (rad/s^3)	SPARC	LDLJ-A	LDLJ-V	SPARC	LDLJ-A	LDLJ-V	SPARC	LDLJ-A	LDLJ-V
20	-1.63	-9.53	-12.66	-1.55	-9.41	-12.20	-1.55	-9.41	-12.19
22	-1.65	-9.59	-12.74	-1.56	-9.47	-12.28	-1.55	-9.46	-12.23
25	-1.65	-9.66	-12.84	-1.57	-9.55	-12.38	-1.55	-9.53	-12.30
27	-1.65	-9.71	-12.89	-1.58	-9.59	-12.43	-1.56	-9.57	-12.34
30	-1.65	-9.76	-12.95	-1.58	-9.65	-12.50	-1.56	-9.62	-12.40
32	-1.65	-9.78	-12.97	-1.59	-9.68	-12.54	-1.57	-9.65	-12.43
35	-1.65	-9.78	-12.97	-1.59	-9.71	-12.56	-1.57	-9.69	-12.46
37	-1.65	-9.78	-12.97	-1.59	-9.71	-12.56	-1.57	-9.69	-12.46

Tabella 7.5: Andamento della SPARC e dell'LDLJ al variare del vincolo cinematico J_{max} per valori di V_{max} pari a 2rad/s , 2.5rad/s , 3rad/s

Dai dati riportati nella tabella 7.5 si nota che all'aumentare di J_{max} si ha un generale peggioramento del livello di smoothness ottenuto mentre all'aumentare del vincolo V_{max} si assiste ad un miglioramento della fluidità di movimento. Tuttavia, si nota che il metodo SPARC fornisce un risultato costante all'aumentare di J_{max} per il primo gruppo di prove eseguite con $V_{max} = 2\text{rad/s}$ mentre indica un peggioramento della fluidità di movimento all'aumentare di J_{max} per le prove eseguite con $V_{max} = 2.5\text{rad/s}$ e $V_{max} = 3\text{rad/s}$. Per spiegare ciò occorre osservare i profili di velocità associati alle prove eseguite e riportati in figura 7.10

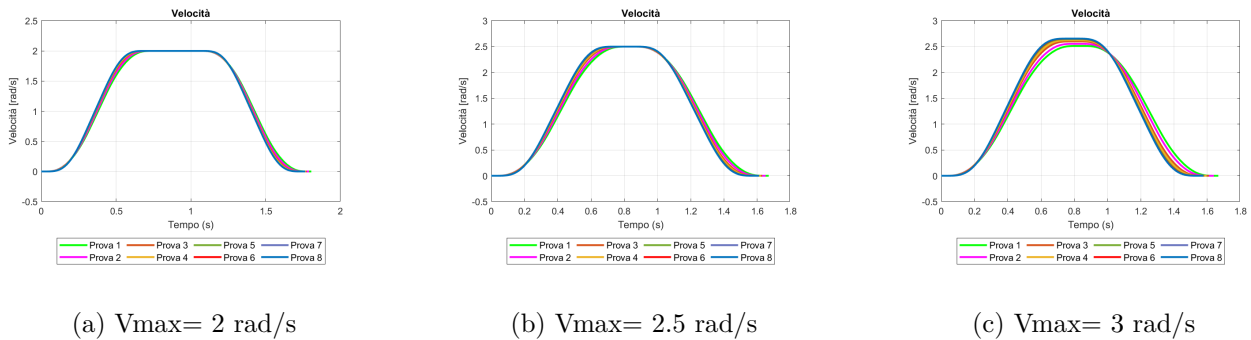


Figura 7.10: Velocità prova 2.2

Dai grafici di velocità si nota che nel caso con $V_{max} = 2\text{rad/s}$ i grafici di velocità sono sovrapposti perciò la smoothness rilevata dal metodo SPARC sarà costante. Nelle prove con $A_{max} = 2.5\text{rad/s}^2$ e $A_{max} = 3\text{rad/s}^2$ i grafici di velocità risultano essere leggermente più distaccati e ciò si traduce in livelli di smoothness SPARC leggermente differenti tra loro.

7.3 Prova 3: Analisi delle traiettorie al variare di A_{max} e mantenendo costanti V_{max} , J_{max} e S_{max}

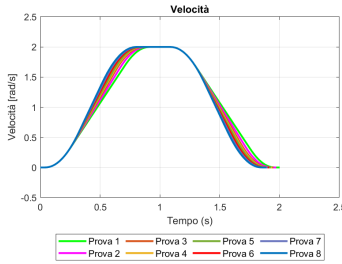
Per l'esecuzione di questa prova sono stati imposti come vincoli cinematici costanti V_{max} , J_{max} , S_{max} mentre A_{max} assume i seguenti valori: $[3 \ 3.2 \ 3.4 \ 3.5 \ 3.6 \ 3.8 \ 4 \ 4.2]$.

7.3.1 Prova 3.1: analisi su tre valori di V_{max}

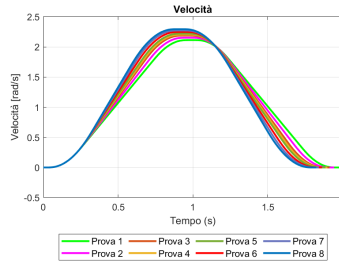
La prova in questo caso viene effettuata per 3 volte imponendo V_{max} pari rispettivamente a $2rad/s$, $4rad/s$ e $6rad/s$. I risultati ottenuti sono riportati nella tabella 7.6.

	$V_{max} = 2rad/s$ $J_{max} = 15rad/s^3$ $S_{max} = 300rad/s^4$			$V_{max} = 4rad/s$ $J_{max} = 15rad/s^3$ $S_{max} = 300rad/s^4$			$V_{max} = 6rad/s$ $J_{max} = 15rad/s^3$ $S_{max} = 300rad/s^4$		
A_{max} (rad/s^2)	SPARC	LDLJ-A	LDLJ-V	SPARC	LDLJ-A	LDLJ-V	SPARC	LDLJ-A	LDLJ-V
3	-1.40	-9.81	-12.01	-1.40	-9.81	-11.88	-1.40	-9.81	-11.88
3.2	-1.40	-9.75	-12.05	-1.40	-9.75	-11.88	-1.40	-9.75	-11.88
3.4	-1.54	-9.70	-12.09	-1.40	-9.70	-11.88	-1.40	-9.70	-11.88
3.5	-1.55	-9.67	-12.12	-1.40	-9.67	-11.88	-1.40	-9.67	-11.88
3.6	-1.56	-9.64	-12.14	-1.40	-9.64	-11.88	-1.40	-9.64	-11.88
3.8	-1.57	-9.59	-12.18	-1.40	-9.59	-11.89	-1.40	-9.59	-11.89
4	-1.58	-9.55	-12.22	-1.40	-9.55	-11.90	-1.40	-9.55	-11.90
4.2	-1.59	-9.50	-12.26	-1.40	-9.50	-11.92	-1.40	-9.50	-11.92

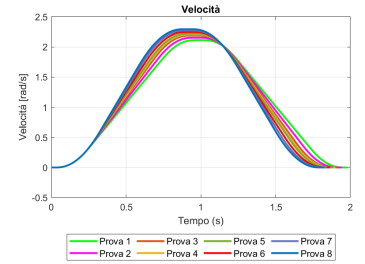
Tabella 7.6: Andamento della SPARC e dell'LDLJ al variare del vincolo cinematico A_{max} per valori di V_{max} pari a $2rad/s$, $4rad/s$, $6rad/s$



(a) $V_{max} = 2 \text{ rad/s}$



(b) $V_{max} = 4 \text{ rad/s}$



(c) $V_{max} = 6 \text{ rad/s}$

Figura 7.11: Velocità prova 3.1

Per analizzare la tabella 7.6 occorre distinguere il caso con $V_{max} = 2rad/s$ dagli altri due casi. Infatti, mentre nel caso con $V_{max} = 2rad/s$ si ha un peggioramento del livello di smoothness all'aumentare di A_{max} sia utilizzando il metodo SPARC, sia utilizzando il metodo LDLJ-V, negli altri due casi con $V_{max} = 4rad/s$ e $V_{max} = 6rad/s$ il metodo SPARC registra un livello di smoothness costante

all'aumentare di A_{max} e il metodo LDLJ-V continua a mostrare un peggioramento della smoothness all'aumentare di A_{max} . Invece il metodo LDLJ-A restituisce valori costanti al variare della velocità mentre migliora all'aumentare dell'accelerazione. Quest'ultimo aspetto può essere spiegato sempre considerando che un aumento dell'accelerazione massima raggiunta implica una riduzione in modulo del risultato restituito dal metodo LDLJ-A.

Si noti, inoltre, che passando da $V_{max} = 2rad/s$ a $V_{max} = 4rad/s$ i valori di smoothness ottenuti dal metodo LDLJ-V migliorano mentre passando da $V_{max} = 4rad/s$ a $V_{max} = 6rad/s$ non si rilevano differenze per tutti e tre i metodi. Questo è legato al fatto che il profilo di velocità non raggiunge il limite previsto già per $V_{max} = 4rad/s$ e quindi aumentando il limite di velocità a $V_{max} = 6rad/s$ non si notano differenze nei grafici. Si veda a tal proposito la figura [7.11](#).

7.3.2 Prova 3.2: analisi su tre valori di Jmax

La prova in questo caso viene effettuata per 3 volte imponendo Jmax pari rispettivamente a 15rad/s^3 , 25rad/s^3 e 35rad/s^3 . I risultati ottenuti sono riportati nella tabella 7.7

	Vmax = 4rad/s Jmax = 15rad/s ³ Smax = 4000rad/s ⁴			Vmax = 4rad/s Jmax = 25rad/s ³ Smax = 4000rad/s ⁴			Vmax = 4rad/s Jmax = 35rad/s ³ Smax = 4000rad/s ⁴		
Amax (rad/s ²)	SPARC	LDLJ-A	LDLJ-V	SPARC	LDLJ-A	LDLJ-V	SPARC	LDLJ-A	LDLJ-V
3	-1.40	-9.90	-11.78	-1.41	-10.39	-12.09	-1.40	-10.71	-12.34
3.2	-1.40	-9.83	-11.76	-1.41	-10.33	-12.06	-1.40	-10.65	-12.30
3.4	-1.41	-9.77	-11.75	-1.40	-10.27	-12.03	-1.41	-10.59	-12.27
3.5	-1.41	-9.74	-11.75	-1.40	-10.24	-12.02	-1.41	-10.56	-12.25
3.6	-1.41	-9.72	-11.75	-1.40	-10.22	-12.01	-1.41	-10.54	-12.23
3.8	-1.41	-9.66	-11.74	-1.40	-10.16	-11.99	-1.41	-10.48	-12.20
4	-1.40	-9.61	-11.75	-1.40	-10.11	-11.97	-1.40	-10.44	-12.18
4.2	-1.40	-9.56	-11.76	-1.40	-10.06	-11.96	-1.40	-10.39	-12.16

Tabella 7.7: Andamento della SPARC e dell'LDLJ al variare del vincolo cinematico Amax per valori di Jmax pari a 15rad/s^3 , 25rad/s^3 e 35rad/s^3

Come si nota nella tabella 7.7, il metodo SPARC registra un livello di smoothness all'incirca costante all'aumentare di Amax mentre i metodi LDLJ-A e LDLJ-V mostrano un miglioramento della smoothness all'aumentare di Amax. Si noti, inoltre che passando da $Jmax = 15\text{rad/s}^3$ a $Jmax = 25\text{rad/s}^3$ si assiste ad un peggioramento del livello di smoothness.

7.3.3 Prova 3.3: analisi su tre valori di S_{max}

La prova in questo caso viene effettuata per 3 volte imponendo S_{max} pari rispettivamente a 100rad/s^4 , 200rad/s^4 e 300rad/s^4 . I risultati ottenuti vengono riportati nella tabella 7.8.

	$V_{max} = 4\text{rad/s}$ $J_{max} = 25\text{rad/s}^3$ $S_{max} = 100\text{rad/s}^4$			$V_{max} = 4\text{rad/s}$ $J_{max} = 25\text{rad/s}^3$ $S_{max} = 200\text{rad/s}^4$			$V_{max} = 4\text{rad/s}$ $J_{max} = 25\text{rad/s}^3$ $S_{max} = 300\text{rad/s}^4$		
A_{max} (rad/s^2)	SPARC	LDLJ-A	LDLJ-V	SPARC	LDLJ-A	LDLJ-V	SPARC	LDLJ-A	LDLJ-V
3	-1.52	-9.54	-12.01	-1.40	-9.89	-12.04	-1.40	-10.09	-12.11
3.2	-1.53	-9.51	-12.05	-1.40	-9.86	-12.06	-1.40	-10.06	-12.12
3.4	-1.55	-9.48	-12.09	-1.40	-9.83	-12.08	-1.40	-10.03	-12.13
3.5	-1.55	-9.47	-12.11	-1.40	-9.81	-12.09	-1.40	-10.01	-12.13
3.6	-1.55	-9.45	-12.13	-1.40	-9.80	-12.10	-1.40	-10.00	-12.14
3.8	-1.56	-9.42	-12.17	-1.39	-9.77	-12.13	-1.40	-9.96	-12.14
4	-1.57	-9.41	-12.19	-1.39	-9.74	-12.15	-1.40	-9.92	-12.14
4.2	-1.57	-9.41	-12.19	-1.41	-9.72	-12.18	-1.40	-9.88	-12.15

Tabella 7.8: Andamento della SPARC e dell'LDLJ al variare del vincolo cinematico A_{max} per valori di S_{max} pari a 100rad/s^4 , 200rad/s^4 e 300rad/s^4

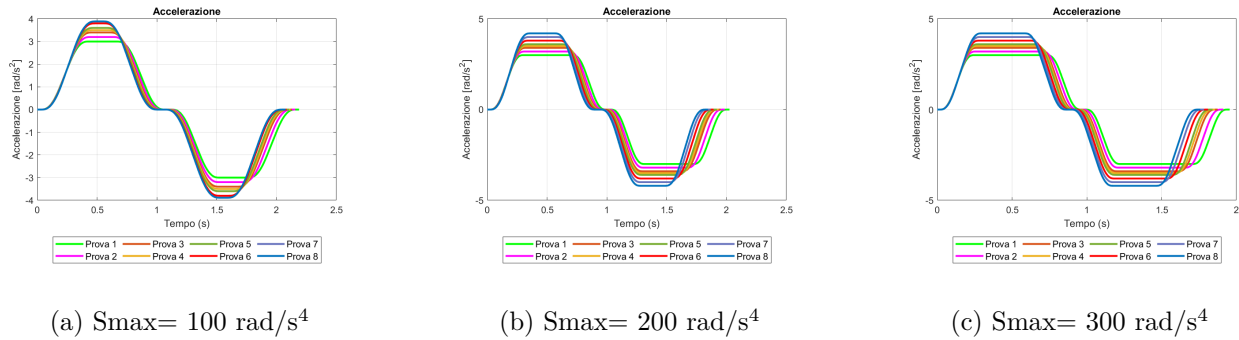


Figura 7.12: Accelerazione prova 3.3

Dai dati riportati nella tabella 7.8, si nota che l' LDLJ-V mostra un peggioramento della smoothness sia all'aumentare di A_{max} sia all'aumentare di S_{max} . Il metodo SPARC, invece, mostra un peggioramento della smoothness all'aumentare di A_{max} per la prova con $S_{max} = 100\text{rad/s}^4$ mentre resta praticamente costante ad un livello di smoothness migliore per le altre due prove con $S_{max} = 200\text{rad/s}^4$ e $S_{max} = 300\text{rad/s}^4$, quindi sembra perdere sensibilità all'aumentare di S_{max} . Il metodo LDLJ-A, infine, pur mostrando un peggioramento di fluidità di movimento all'aumentare di S_{max} , indica un miglioramento della smoothness all'aumentare di A_{max} . Anche in questo caso, ciò può essere spiegato considerando che un maggiore accelerazione massima raggiunta durante l'esecuzione della traiettoria, riduce in modulo il valore restituito dal metodo LDLJ-A. Come si nota dai grafici in figura 7.12, all'aumentare del vincolo imposto all'accelerazione A_{max} , aumenta anche il valore di accelerazione massima

raggiunta dal momento che in questo caso l'accelerazione raggiunge il suo limite massimo A_{max} durante l'esecuzione della traiettoria.

7.4 Prova 4: Analisi delle traiettorie al variare di S_{max} e mantenendo costanti V_{max} , A_{max} e J_{max}

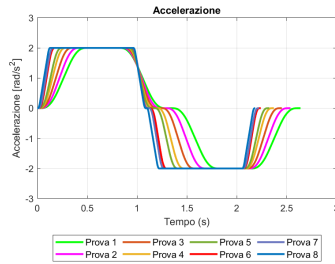
Per l'esecuzione di questa prova sono stati imposti come vincoli cinematici costanti V_{max} , A_{max} , J_{max} mentre S_{max} assume i seguenti valori: [50 70 100 150 200 400 500 1000].

7.4.1 Prova 4.1: analisi su tre valori di A_{max}

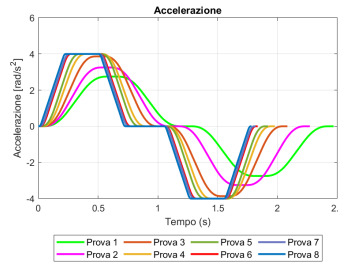
La prova in questo caso viene effettuata per 3 volte imponendo A_{max} pari rispettivamente a 2rad/s^2 , 4rad/s^2 e 6rad/s^2 . I risultati ottenuti vengono riportati nella tabella 7.9.

	$V_{max} = 2\text{rad/s}$ $A_{max} = 2\text{rad/s}^2$ $J_{max} = 20\text{rad/s}^3$			$V_{max} = 2\text{rad/s}$ $A_{max} = 4\text{rad/s}^2$ $J_{max} = 20\text{rad/s}^3$			$V_{max} = 2\text{rad/s}$ $A_{max} = 6\text{rad/s}^2$ $J_{max} = 20\text{rad/s}^3$		
S_{max} (rad/s^4)	SPARC	LDLJ-A	LDLJ-V	SPARC	LDLJ-A	LDLJ-V	SPARC	LDLJ-A	LDLJ-V
50	-1.39	-9.40	-11.80	-1.57	-9.24	-12.01	-1.57	-9.24	-12.01
70	-1.40	-9.57	-11.82	-1.57	-9.32	-12.10	-1.57	-9.32	-12.10
100	-1.40	-9.74	-11.86	-1.57	-9.42	-12.20	-1.57	-9.42	-12.20
150	-1.41	-9.95	-11.93	-1.59	-9.60	-12.35	-1.60	-9.55	-12.48
200	-1.40	-10.09	-11.99	-1.60	-9.71	-12.40	-1.62	-9.56	-12.58
400	-1.40	-10.40	-12.15	-1.59	-9.81	-12.41	-1.63	-9.52	-12.69
500	-1.41	-10.44	-12.16	-1.59	-9.83	-12.41	-1.63	-9.50	-12.71
1000	-1.40	-10.52	-12.17	-1.59	-9.87	-12.41	-1.64	-9.48	-12.75

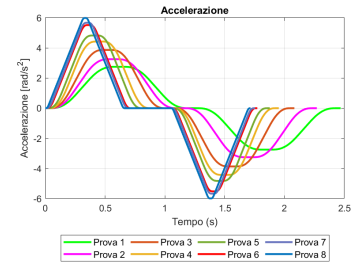
Tabella 7.9: Andamento della SPARC e dell'LDLJ al variare del vincolo cinematico S_{max} per valori di A_{max} pari a 2rad/s^2 , 4rad/s^2 e 6rad/s^2



(a) $A_{max} = 2 \text{ rad/s}^2$



(b) $A_{max} = 4 \text{ rad/s}^2$



(c) $A_{max} = 6 \text{ rad/s}^2$

Figura 7.13: Accelerazione prova 4.1

Dai risultati riportati nella tabella 7.9, si nota un peggioramento del livello di fluidità del movimento all'aumentare di S_{max} . Inoltre, si osserva che, mentre il metodo SPARC e il metodo LDLJ-V mostrano un peggioramento della fluidità di movimento passando da $A_{max} = 2\text{rad/s}^2$ a $A_{max} = 4\text{rad/s}^2$ ed infine a $A_{max} = 6\text{rad/s}^2$, il metodo LDLJ-A, come già riscontrato nelle prove precedenti, mostra un

miglioramento della smoothness all'aumentare dell'accelerazione limite A_{max} . Come si evince dai profili di accelerazione, infatti, all'aumentare di A_{max} aumenta il valore massimo raggiunto dall'accelerazione e perciò si riduce in modulo il valore restituito dall'LDLJ-A. Si precisa che i valori dell'LDLJ-A delle prove con $A_{max} = 4rad/s^2$ e $A_{max} = 6rad/s^2$ sono uguali per i primi tre valori di S_{max} . Ciò avviene in quanto i profili di accelerazione in questi casi non raggiungono il limite massimo A_{max} imposto e quindi non vengono influenzati dal passaggio del limite sull'accelerazione da $A_{max} = 4rad/s^2$ a $A_{max} = 6rad/s^2$.

7.4.2 Prova 4.2: analisi su tre valori di J_{\max}

La prova in questo caso viene effettuata per 3 volte imponendo J_{\max} pari rispettivamente a 20rad/s^3 , 25rad/s^3 e 30rad/s^3 . I risultati ottenuti vengono riportati nella tabella 7.10.

	$V_{\max} = 2\text{rad/s}$ $A_{\max} = 10\text{rad/s}^2$ $J_{\max} = 20\text{rad/s}^3$			$V_{\max} = 2\text{rad/s}$ $A_{\max} = 10\text{rad/s}^2$ $J_{\max} = 25\text{rad/s}^3$			$V_{\max} = 2\text{rad/s}$ $A_{\max} = 10\text{rad/s}^2$ $J_{\max} = 30\text{rad/s}^3$		
S_{\max} (rad/s^4)	SPARC	LDLJ-A	LDLJ-V	SPARC	LDLJ-A	LDLJ-V	SPARC	LDLJ-A	LDLJ-V
50	-1.57	-9.24	-12.01	-1.57	-9.24	-12.01	-1.57	-9.24	-12.01
70	-1.57	-9.32	-12.10	-1.57	-9.32	-12.10	-1.57	-9.32	-12.10
100	-1.57	-9.42	-12.20	-1.57	-9.42	-12.20	-1.57	-9.42	-12.20
150	-1.60	-9.55	-12.48	-1.60	-9.55	-12.48	-1.60	-9.55	-12.48
200	-1.62	-9.56	-12.58	-1.63	-9.65	-12.68	-1.63	-9.65	-12.68
400	-1.63	-9.52	-12.69	-1.65	-9.65	-12.89	-1.66	-9.75	-13.04
500	-1.63	-9.50	-12.71	-1.66	-9.63	-12.92	-1.67	-9.74	-13.09
1000	-1.64	-9.48	-12.75	-1.67	-9.60	-12.99	-1.67	-9.70	-13.17

Tabella 7.10: Andamento della SPARC e dell'LDLJ al variare del vincolo cinematico S_{\max} per valori di J_{\max} pari a 20rad/s^3 , 25rad/s^3 e 30rad/s^3

Dai risultati mostrati in tabella 7.10, si nota un peggioramento del livello di smoothness all'aumentare di S_{\max} , sia usando la metrica SPARC sia usando le metriche LDLJ-A e LDLJ-V. Inoltre, all'aumentare di J_{\max} da 20rad/s^3 a 25rad/s^3 ed infine a 30rad/s^3 non si hanno differenze per valori di S_{\max} bassi, mentre si assiste ad un peggioramento del livello di smoothness per i valori di S_{\max} più elevati. Quindi all'aumentare di S_{\max} si ha un peggioramento della fluidità di movimento e tale peggioramento aumenta all'aumentare di J_{\max} per i valori di S_{\max} più elevati tra quelli scelti.

7.4.3 Prova 4.3: analisi su tre valori di Vmax

La prova in questo caso viene effettuata per tre volte imponendo Vmax pari rispettivamente a 1rad/s , 1.5rad/s e 2rad/s . I risultati ottenuti vengono riportati nella tabella 7.11.

	Vmax = 1rad/s Amax = 10rad/s^2 Jmax = 20rad/s^3			Vmax = 1.5rad/s Amax = 10rad/s^2 Jmax = 20rad/s^3			Vmax = 2rad/s Amax = 10rad/s^2 Jmax = 20rad/s^3		
Smax (rad/s^4)	SPARC	LDLJ-A	LDLJ-V	SPARC	LDLJ-A	LDLJ-V	SPARC	LDLJ-A	LDLJ-V
50	-1.81	-9.42	-13.02	-1.61	-9.28	-12.23	-1.57	-9.24	-12.01
70	-1.85	-9.53	-13.28	-1.64	-9.39	-12.46	-1.57	-9.32	-12.10
100	-1.89	-9.65	-13.57	-1.65	-9.51	-12.72	-1.57	-9.42	-12.20
150	-1.93	-9.78	-13.90	-1.69	-9.65	-13.02	-1.60	-9.55	-12.48
200	-1.91	-9.88	-14.14	-1.70	-9.70	-13.20	-1.62	-9.56	-12.58
400	-2.04	-9.88	-14.43	-1.83	-9.67	-13.37	-1.63	-9.52	-12.69
500	-2.05	-9.87	-14.48	-1.82	-9.66	-13.40	-1.63	-9.50	-12.71
1000	-2.06	-9.83	-14.57	-1.83	-9.62	-13.46	-1.64	-9.48	-12.75

Tabella 7.11: Andamento della SPARC e dell'LDLJ al variare del vincolo cinematico Smax per valori di Vmax pari a 1rad/s , 1.5rad/s e 2rad/s

Come si nota dai risultati riportati nella tabella 7.11, all'aumentare di Smax si ha un peggioramento del livello di smoothness misurato con il metodo SPARC e con il metodo LDLJ-V. Come ci si attendeva, inoltre, si ottiene un miglioramento del livello di smoothness misurato aumentando Vmax da 1rad/s a 1.5rad/s ed infine a 2rad/s . Il metodo LDLJ-A, invece, mostra un peggioramento del livello di smoothness all'aumentare di Smax fino al valore pari a 200rad/s^4 mentre mostra un miglioramento del livello di smoothness per gli ultimi tre valori di Smax e ciò avviene per ciascuno dei tre valori di Vmax scelti. Ciò può essere spiegato osservando i profili di accelerazione riportati in figura 7.14 dove si nota che, per i profili associati agli ultimi tre valori di Smax, si ha un valore di accelerazione massima raggiunto maggiore rispetto a quello dei profili associati ai valori di Smax precedenti. Di conseguenza, dal momento che un valore di accelerazione massima maggiore genera un valore in modulo dell'LDLJ-A minore, si ottiene, in questo caso, un miglioramento del livello di smoothness.

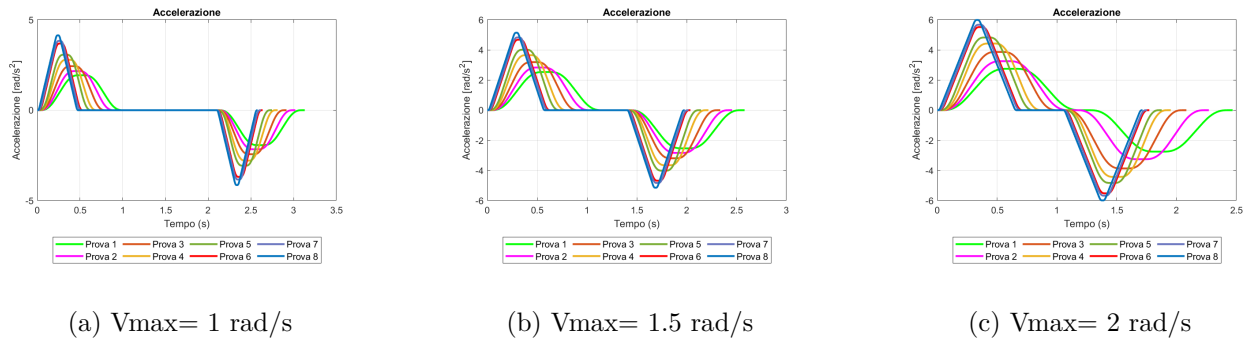


Figura 7.14: Accelerazione prova 4.3

Capitolo 8

Conclusioni

Dopo aver illustrato cosa si intende per traiettoria smooth, le problematiche per le quali si ricorre alla pianificazione di traiettorie smooth e alcuni tra i possibili metodi di pianificazione che consentono di ottenere delle traiettorie smooth, si è scelto uno di questi metodi che tenesse conto al tempo stesso dei vincoli cinematici da imporre, della fluidità di movimento e dell'efficienza computazionale, evitando la complessa parametrizzazione dei metodi basati su funzioni polinomiali. Il metodo scelto è il metodo di pianificazione di traiettorie smooth basato sulla curva ad S ottenuta attraverso la funzione sigmoidea.

Dopo aver illustrato l'algoritmo messo in atto dal metodo scelto, lo si è implementato in ambiente Matlab per poter eseguire delle pianificazioni di traiettoria e applicare ai profili cinematici ottenuti i metodi di misura della fluidità di movimento. A tal proposito sono stati scelti i seguenti metodi di misura: il metodo SPARC, il metodo LDLJ-V e il metodo LDLJ-A. Dalla letteratura è emerso che il metodo SPARC risulta essere il metodo migliore per la misura del livello di smoothness di un movimento in quanto rispetta tutti i requisiti previsti da un metodo di misura, ovvero validità, sensibilità, affidabilità e praticità. Esso si basa sulla misura della lunghezza dell'arco spettrale associato al profilo di velocità della traiettoria. Il metodo LDLJ-V e il metodo LDLJ-A (dove LDLJ sta long dimensionless jerk) si basano, invece, sul profilo del jerk ottenuto rispettivamente a partire dal profilo della velocità e dal profilo dell'accelerazione associati alla traiettoria.

Le prove numeriche sono state eseguite in spazio giunti per uno stesso giunto che si muove da una posizione iniziale di 0 rad a una posizione finale di $2\pi/3 \text{ rad}$ e imponendo i vincoli cinematici di velocità, accelerazione, jerk e snap richiesti in input dal metodo scelto. Per ogni prova effettuata sono state realizzate otto pianificazioni facendo variare uno dei quattro vincoli in un range di otto valori, mantenendo costanti gli altri tre, per valutare l'andamento del livello di smoothness.

Applicando le tre metriche di misura alle traiettorie pianificate, non sempre sono stati ottenuti i risultati attesi. In modo particolare, è emerso che il metodo LDLJ-A assume spesso un andamento opposto rispetto a quello atteso in quanto risulta essere molto influenzato dal valore di accelerazione massima raggiunto durante la traiettoria e, nello specifico, all'aumentare della stessa restituisce un livello di smoothness migliore. Il metodo SPARC, che, secondo quanto emerso dalla letteratura risulta essere il metodo migliore, mostra in realtà dei limiti. Esso, infatti, in alcune delle prove effettuate, sembra perdere sensibilità fornendo valori costanti al variare dei vincoli cinematici. Anche il metodo

LDLJ-V non sempre restituisce i risultati attesi, in quanto in una delle prove effettuate indica anch'esso un miglioramento del livello di smoothness all'aumentare dell'accelerazione come il metodo LDLJ-A.

Dallo studio dei risultati ottenuti, quindi, si evince che non è ancora possibile individuare un metodo di misura della fluidità di movimento che indichi l'effettiva differenza del livello di smoothness tra le varie traiettorie pianificate in modo da scegliere quella più adatta a seconda delle esigenze. Occorre quindi andare avanti nello studio di queste metriche per comprendere quale di queste sia più affidabile.

Bibliografia

- Sivakumar Balasubramanian, Alejandro Melendez-Calderon, Agnes Roby-Brami, and Etienne Burdet. On the analysis of movement smoothness. *Journal of NeuroEngineering and Rehabilitation*, 12(1), 2015. doi: 10.1186/s12984-015-0090-9. URL <https://www.scopus.com/inward/record.uri?eid=2-s2.0-84952872484&doi=10.1186%2fs12984-015-0090-9&partnerID=40&md5=82c9495374d421e83af8bf70e7c180f2>. Cited by: 228; All Open Access, Gold Open Access, Green Open Access.
- L. Biagiotti and C. Melchiorri. *Trajectory Planning for Automatic Machines and Robots*. Springer Berlin Heidelberg, 2008. ISBN 9783540856290. URL <https://books.google.it/books?id=FiX1ceRT5zoC>.
- Marek Boryga, Paweł Kołodziej, and Krzysztof Gołacki. The use of asymmetric polynomial profiles for planning a smooth trajectory. *Applied Sciences (Switzerland)*, 12(23), 2022. doi: 10.3390/app122312284. URL <https://www.scopus.com/inward/record.uri?eid=2-s2.0-85143736625&doi=10.3390%2fapp122312284&partnerID=40&md5=7b351d49b1008102d89047349bc09c56>. Cited by: 0; All Open Access, Gold Open Access, Green Open Access.
- Yi Fang, Jie Hu, Wenhai Liu, Quanquan Shao, Jin Qi, and Yinghong Peng. Smooth and time-optimal s-curve trajectory planning for automated robots and machines. *Mechanism and Machine Theory*, 137:127 – 153, 2019. doi: 10.1016/j.mechmachtheory.2019.03.019. URL <https://www.scopus.com/inward/record.uri?eid=2-s2.0-85062903983&doi=10.1016%2fj.mechmachtheory.2019.03.019&partnerID=40&md5=1b766b580ca9bc107a44fb48b89dccb8>. Cited by: 100.
- Schuch CP Schifino GP Balbinot G Pagnussat AS Garcia FDV, da Cunha MJ. Movement smoothness in chronic post-stroke individuals walking in an outdoor environment-a cross-sectional study using imu sensors. *PLoS One*, 2021. doi: 10.1371/journal.pone.0250100.
- A. Gasparetto and V. Zanutto. A new method for smooth trajectory planning of robot manipulators. *Mechanism and Machine Theory*, 42(4):455 – 471, 2007. doi: 10.1016/j.mechmachtheory.2006.04.002. URL <https://www.scopus.com/inward/record.uri?eid=2-s2.0-33846447790&doi=10.1016%2fj.mechmachtheory.2006.04.002&partnerID=40&md5=50e77a77badaaff3c03118e8f6731643>. Cited by: 349.
- Boscariol P. Lanzutti A. Vidoni R. Gasparetto, A. Trajectory planning in robotics. *Mathematics in Computer Science*, 6(3):269–279, 2012. URL <https://doi.org/10.1007/S11786-012-0123-8>.

- L.Biagiotti. Analisi e pianificazione delle traiettorie, dispense del corso "sistemi di controllo". *Università degli studi di Modena e Reggio Emilia, inedito*, 2008-2009. URL <http://www.dii.unimore.it/~lbiagiotti/MaterialeDidattico0809/CA-09-PianificazioneTraiettorieDispensa.pdf>.
- Alejandro Melendez-Calderon, Camila Shirota, and Sivakumar Balasubramanian. Estimating movement smoothness from inertial measurement units. *Frontiers in Bioengineering and Biotechnology*, 8, 2020. doi: 10.3389/fbioe.2020.558771. URL <https://www.scopus.com/inward/record.uri?eid=2-s2.0-85102030693&doi=10.3389%2ffbioe.2020.558771&partnerID=40&md5=36e5a039a0f390fdd7a27fc090343638>. Cited by: 15; All Open Access, Gold Open Access, Green Open Access.
- Dan Simon and Can Isik. A trigonometric trajectory generator for robotic arms. *International Journal of Control*, 57(3):505 – 517, 1993. doi: 10.1080/00207179308934404. URL <https://www.scopus.com/inward/record.uri?eid=2-s2.0-0343857379&doi=10.1080%2f00207179308934404&partnerID=40&md5=cc3f28b04896c6b8463bf731703aab9a>. Cited by: 55.
- He Wang, Heng Wang, Jiahai Huang, Bin Zhao, and Long Quan. Smooth point-to-point trajectory planning for industrial robots with kinematical constraints based on high-order polynomial curve. *Mechanism and Machine Theory*, 139:284 – 293, 2019. doi: 10.1016/j.mechmachtheory.2019.05.002. URL <https://www.scopus.com/inward/record.uri?eid=2-s2.0-85065162371&doi=10.1016%2fj.mechmachtheory.2019.05.002&partnerID=40&md5=52e0200db0c384f6bb6bad0e16ea2049>. Cited by: 55.