

POLITECNICO DI TORINO

Corso di Laurea Magistrale in Ingegneria Meccanica

Tesi di Laurea Magistrale

Sviluppo di un modello multibody di un riduttore armonico



Relatore e Correlatori

Prof. Massimo Sorli

Ph.D Andrea De Martin

Ph.D Antonio Carlo Bertolino

Ing. Andrea Raviola

Ing. Roberto Guida

Candidato

Salvatore Sartorio

Anno Accademico 2022/2023

Abstract

I riduttori armonici rappresentano una classe di riduttori ampiamente impiegati in applicazioni aerospaziali e industriali grazie alla loro capacità di ottenere un elevato rapporto di riduzione con un basso gioco attraverso un design leggero e compatto. In particolare, in ambito robotico, il loro utilizzo richiede un elevato grado di precisione, per tale motivo risulta necessario applicare logiche di Prognostics and Health Management (PHM) in modo da monitorare lo stato di salute del componente. L'applicazione di queste logiche necessita però di un ampio database che può essere ottenuto o attraverso dati sperimentali, o attraverso dati storici o per mezzo di modellazioni per mezzo di modelli high-fidelity. Quest'ultimo approccio, seppure meno efficace rispetto ai primi due, presenta dei vantaggi in termini di tempi e costi, per tale motivo lo scopo del presente lavoro di tesi è quello di ottenere una modellazione multibody del riduttore armonico per ottimizzare la pianificazione della manutenzione del robot e per prevenire eventi indesiderati e guasti imprevisti. Il presente lavoro si innesta in un percorso più grande ed è volto ad ottenere le condizioni iniziali del riduttore simulando l'inserimento del wave generator all'interno della flexspline il quale scambia una forza di contatto con la circular spline. Per fare questo, ciascuna delle flexspline viene trattata come un corpo singolo avente la propria dinamica e le interazioni, che intercorrono tra wave generator, flexspline e circular spline, vengono trattate come modelli molla-smorzatore. La deformazione finale raggiunta dalla flexspline, non è stabilita a priori, ma è il risultato delle interazioni con il wave generator e con la circular spline. Inoltre, come risultato, si ottiene la distribuzione delle forze di ingranamento lungo la flexspline e si osserva come tali forze siano simmetriche producendo, nella fase di inserimento, una coppia nulla sulla circular spline. Si valutano anche gli effetti che le forze di ingranamento hanno sulle forze di interazione tra wave generator e flexspline permettendo una corretta valutazione delle posizioni dei denti di quest'ultima.

Indice

Elenco delle figure	vi
Elenco delle tabelle	ix
Introduzione	1
1 Descrizione riduttore armonico	4
1.1 Principio di funzionamento	5
1.2 Geometria e dimensioni	8
1.3 Modalità di guasto	13
1.3.1 Usura dei denti e pitting	14
1.3.2 Nucleazione e propagazione delle cricche	15
2 Modello di inserimento e di rotazione del Wave Generator	18
2.1 Interazione tra Wave Generator e Flexspline	22
2.2 Interazione tra denti della Flexspline	26
2.3 Forza di richiamo flessionale	28
2.4 Forza di richiamo elastico dovuta alla rigidità torsionale	31
2.5 Rotazione del wave generator	32
3 Profilo dei denti	35
3.1 Profilo del dente a doppio arco della flexspline	36

Indice	v
<hr/>	
3.2 Profilo denti della Circular Spline	41
4 Modello di ingranamento tra Flexspline e Circular Spline	50
4.1 Determinazione del punto di contatto tra Flexspline e Circular Spline	53
4.2 Calcolo dell'angolo di ingranamento e scomposizione della penetrazione	62
4.3 Scomposizione forza di ingranamento	64
4.4 Rotazione del Wave Generator	65
4.5 Equilibrio alla rotazione alla base del dente della flexspline	70
5 Risultati simulazione inserimento wave generator	75
5.1 Forze di ingranamento F_m	78
5.2 Forza di interazione tra denti adiacenti	84
5.3 Confronto tra coordinate effettive x_i, y_i e coordinate teoriche x_p, y_p	86
5.4 Forze di contatto tra wave generator e flexspline	89
6 Risultati simulazione rotazione wave generator	91
6.1 Errore cinematico	92
6.2 Rapporto di trasmissione	94
6.3 Velocità di rotazione	95
Conclusioni e sviluppi futuri	97
Bibliografia	99

Elenco delle figure

1.1	Assemblaggio componenti del riduttore armonico	6
1.2	Esempio funzionamento di un riduttore armonico	7
1.3	Dimensioni del wave generator	8
1.4	Dimensioni flexspline indeformata	10
1.5	Dimensioni della circular spline	12
1.6	Effetto dell'angolo di conicità in un riduttore armonico	14
1.7	Effetto dell'angolo di conicità sull'usura dei denti	15
1.8	Flexspline di un riduttore armonico usato in un giunto di un robot collaborativo UR5	16
1.9	Effetto del <i>backup ratio</i> sulla direzione di propagazione. T: frattura del dente, R: frattura della rim, N: nessuna propagazione della cricca	17
2.1	Rappresentazione dei modelli tra le interfacce dei componenti	19
2.2	Rappresentazione modello per la valutazione del moto della flexspline	20
2.3	Diagramma di corpo libero dente della Flexspline	21
2.4	Schema inserimento Wave Generator	23
2.5	Schema molla-smorzatore WG-FS	25
2.6	Schema contatto denti adiacenti	26
2.7	Valutazione angolo ε_i per contatto denti adiacenti	27
2.8	Movimento della congiungente di due denti consecutivi	29

2.9	Schema direzione forza e coppia flessionale	30
2.10	Schema di rotazione del wave generator	34
3.1	Profilo a doppio arco del dente della Flexspline	36
3.2	Angolo di pressione	39
3.3	Dentatura completa della flexspline	40
3.4	Schema angoli per il calcolo analitico di un profilo coniugato	42
3.5	Esempio moto di salita del dente n°51 della flexspline	43
3.6	Sistemi di riferimento alla base della flexspline e della circular spline	45
3.7	Moto di un dente della flexspline visto nel sdr $X_{O2_{gap}}Y_{O2_{gap}}$	46
3.8	Profilo del dente della circular spline	47
3.9	Dentatura completa della circular spline	49
4.1	Esempio di tipi di ingranamento tra i denti della flexspline e della circular spline	51
4.2	Schema delle forze di meshing (a sinistra), schema del modello di contatto (a destra)	52
4.3	Esempio di individuazione dei denti in ingranamento	55
4.4	Schema delle posizione dei sistemi di riferimento dei denti di flexspline e circular spline rispetto a X_0Y_0	58
4.5	Indicizzazione dei profili della flexspline e della circular spline	59
4.6	Esempio di individuazione del punto di compenetrazione	60
4.7	Schema dell'ingranamento tra flexspline e circular spline per la scomposizione lungo la retta di pressione	63
4.8	Schema per la velocità tangenziale della circular spline	67
4.9	Diagramma di corpo libero della circular spline	69
4.10	Diagramma di corpo libero dei denti della flexspline	71

5.1	Modello in ambiente MATLAB/Simulink per l'inserimento del wave generator all'interno della flexspline con presenza della circular spline	75
5.2	Forze di ingranamento in diagramma polare	80
5.3	Compenetrazione per il calcolo della forza di ingranamento destro .	81
5.4	Rappresentazione della forza di ingranamento destro (a), angolo di ingranamento destro β_i [°] (b).	81
5.5	Scomposizione delle forze di ingranamento lungo gli assi X_0Y_0 . . .	82
5.6	Contributo di coppia dei singoli denti della circular spline	83
5.7	Scomposizione lungo X_0 e Y_0 delle forze di interazione tra denti adiacenti	84
5.8	Forza di interazione F_{i+1} tra denti adiacenti della flexspline.	85
5.9	Coordinate dei denti della flexspline prima e dopo l'inserimento del wave generator	87
5.10	Grafico polare della differenza tra i raggi vettori che individuano x_i, y_i e x_p, y_p	88
5.11	Differenza tra le coordinate effettive (x_i, y_i) e le coordinate approssimate x_p, y_p	88
5.12	Forze di contatto tra wave generator e flexspline	89
5.13	Scomposizione lungo X_0 e Y_0 delle forze di interazione tra flexspline e circular spline.	90
6.1	Modello MATLAB/Simulink per la rotazione del riduttore armonico	91
6.2	Errore cinematico	93
6.3	Analisi in frequenza dell'errore cinematico	93
6.4	Rapporto di trasmissione valutato con il rapporto degli angoli di rotazione	95
6.5	Rapporto di trasmissione valutato con il rapporto dell velocità di rotazione	95
6.6	Velocità di rotazione della circular spline	96

Elenco delle tabelle

1.1	Dimensioni del wave generator	9
1.2	Proprietà della flexspline	10
1.3	Dimensione della flexspline	11
1.4	Dimensione della circular spline	12
1.5	Proprietà della circular spline	12
1.6	FMECA di un riduttore armonico	13
3.1	Parametri del profilo del dente della Flexspine	38
5.1	<i>Trade off</i> tra punti di discretizzazione e tempo effettivo di simulazione	77
5.2	Parametri per la simulazione dell'inserimento del wave generator . .	78
5.3	Posizioni angolari di alcuni denti di interesse della flexspline	79

Introduzione

Il riduttore armonico, chiamato anche strain wave gear, è un organo di riduzione e trasmissione del moto che occupa un ruolo fondamentale nelle applicazioni robotiche e nell'ambito dei servoattuatori. Viene preferito rispetto ad altre tipologie di riduttori per via di diverse caratteristiche peculiari: ingresso ed uscita risultano essere coassiali e presenta un elevato rapporto di riduzione a fronte di peso ed ingombro contenuti. Tali caratteristiche sono ottenute grazie alla sua particolare architettura che consiste in tre componenti: una camma ellittica accoppiata ad un cuscinetto deformabile a sfere o a rulli (wave generator), una ruota flessibile con dentatura esterna che si deformerà ellitticamente (flexspline) e una ruota rigida con dentatura interna (circular spline). Inoltre, grazie al particolare tipo di ingranamento tra i denti della circular spline e della flexspline, garantisce l'assenza di backlash il che lo rende ideale per le applicazioni in cui viene usato. Nel capitolo 1 viene affrontata la descrizione di ciascun componente del riduttore ed il loro funzionamento complessivo.

Diversi studi si sono concentrati sul descrivere e modellare matematicamente il comportamento del riduttore armonico. In [1] il riduttore viene considerato come una *black box* nel quale vengono dati come valori di input l'errore cinematico e l'isteresi per valutarne l'effetto sul riduttore, in [2] vengono usate leggi empiriche al posto delle interazioni tra i singoli componenti. Questi modelli sono validi per quanto riguarda lo studio del comportamento di un riduttore armonico ma non sono abbastanza dettagliati per poter essere utilizzati nel caso di analisi di diagnostica e prognostica e comprendere la vita residua del componente stesso nel caso in cui insorga un difetto. Le tecniche di *Prognostics and Health Managemet* (PHM) sono percepite come una tecnologia innovativa in grado di aumentare notevolmente la disponibilità del robot e rappresentare un valore aggiunto non solo per la riduzione dei tempi di inattività e delle perdite economiche, ma anche per garantire la sicurezza degli operatori. Queste tecniche adottano approcci basati sull'esperienza umana,

su modelli fisici o digitali, su set di dati ed eventi storici. Un approccio di tipo PHM utilizzato è quello del *Data-Driven Models* (DDM), il quale utilizza i dati a disposizione per valutare degli indicatori di salute del componente. Il problema di questo approccio è la mancanza di dati sufficienti provenienti da unità difettose [3]. Per sopperire alla mancanza di dati, esiste un secondo approccio che consiste nello sviluppo di un modello *high-fidelity multibody*.

Quindi, nel caso studiato di riduttore armonico, la mancanza di un adeguato modello per l'applicazione di logiche di Prognostics and Health Management (PHM) e la conseguente possibilità di avere un ritorno in termini di tempi e costi dall'applicazione di tali logiche hanno spinto verso la definizione di un modello high-fidelity multibody del componente [4][5]. Tale modello va ad analizzare nel dettaglio le interazioni dei vari componenti così da poter inserire puntualmente un difetto e studiare come questo si propaga nel componente. Le interazioni già considerate in [4][5] sono quelle tra wave generator e flexspline e tra i denti adiacenti della flexspline e, inserendosi in questo percorso, il lavoro svolto in questa tesi sarà quello di modellare le interazioni tra i denti della flexspline e della circular spline. Il modello sviluppato può anche essere inserito in un più ampio modello di robot, per esempio, così da poter fare analisi di diagnostica e prognostica più precise. Per fare un esempio di come può essere introdotto un difetto nel modello si anticipa che l'interazione tra i vari componenti sarà modellata tramite un sistema molla-smorzatore (capitolo 2) quindi basterà variare la rigidità di un singolo dente fino ad azzerarla per simulare la rottura del dente stesso.

Sintetizzando ciò che viene descritto nei prossimi capitoli:

- **Descrizione riduttore armonico:** descrizione geometrica e funzionale del riduttore armonico con spiegazione di ogni singolo componente e panoramica dei possibili guasti;
- **Modello di inserimento e di rotazione del Wave Generator:** descrizione del modello di inserimento e di rotazione del wave generator senza la presenza della circular spline [4][5]. Questo modello anticipa la creazione del profilo dei denti in quanto è necessario per generare il profilo della circular spline che sarà coniugato al profilo a doppio arco della flexspline;
- **Profilo dei denti:** si vedono i vari profili dei denti di flexspline e circular spline e nello specifico si analizza il profilo a doppio arco per la prima e un

profilo coniugato per la seconda;

- **Modello di ingranamento tra Flexspline e Circular Spline:** per definire la forza scambiata durante l'inserimento e successivamente il moto del wave generator;
- **Risultati simulazione inserimento wave generator:** analisi dei risultati in cui si vedranno le differenze tra l'inserimento del wave generator senza la presenza della circular spline e l'inserimento con presenza della circular spline.

Capitolo 1

Descrizione riduttore armonico

I riduttori armonici sono dei tipi particolari di rotismi epicloidali inventati nel 1955 da C.W Musser e grazie al particolare tipo di ingranamento che riescono ad avere hanno avuto un largo utilizzo e sono diventati oggetto di approfonditi studi. Rispetto ai riduttori tradizionali, hanno vantaggi che ne hanno fatto preferire l'uso nei campi della robotica e dell'aerospazio:

- assenza di *backlash* che garantisce un preciso trasferimento del moto, questa è una delle caratteristiche più importanti infatti questi riduttori vengono anche soprannominati riduttori a zero *backlash*;
- dimensioni contenute e design compatto rispetto agli altri riduttori coassiali;
- elevati rapporti di trasmissioni;
- ingranamento simultaneo di più coppie di denti in presa che garantiscono un ingranamento fluido e silenzioso;
- possibilità di più configurazioni (flexspline fissa e circular spline mobile o viceversa).

Come ogni componente meccanico, deve fronteggiare dei difetti quali:

- necessita di grande precisione di posizionamento in quanto un minimo errore può dare problemi di interferenza;
- rottura a fatica poiché ci sono dei carichi ciclici che gravano sul componente flessibile ovvero la flexspline.

1.1 Principio di funzionamento

Si descrivono di seguito i componenti che costituiscono un riduttore armonico e come essi vengono montati per permetterne il funzionamento.

- **Wave generator:** è composto da un cuscinetto a sfere montato su una camma ellittica. Viene calettato sull'albero motore e quindi rappresenta il primo elemento della catena di riduzione. Grazie alla sua forma ellittica, durante la rotazione dell'anello interno si generano una coppia di onde sull'anello esterno che si trasferiranno sulla flexspline permettendo l'ingranamento con la circular spline.
- **Flexspline:** elemento flessibile d'acciaio a forma di cilindro circolare in condizione non deformate. Quando viene montato il wave generator all'interno della flexspline, quest'ultima si deforma secondo la forma del wave generator e ingrana con la flexspline. Può essere calettata all'albero di uscita o rimanere fissa e presenta una dentatura esterna.
- **Circular spline:** è un anello circolare con dentatura interna ed è l'elemento più esterno del riduttore. Grazie alla dentatura interna ingrana con la flexspline. Anche questo componente ha la possibilità di essere fisso oppure mobile e collegato all'albero di uscita.

In figura 1.1 è possibile osservare come viene montato un riduttore armonico. Come già detto nella descrizione dei componenti, si vede il wave generator come componente più interno, che viene inserito all'interno della flexspline deformandola. Quest'ultima viene inserita all'interno della circular spline e si può vedere come la deformazione permette un ingranamento tra la dentatura interna della circular spline e la dentatura esterna della flexspline lungo il semiasse maggiore. Mentre nel semiasse minore non si ha alcun ingranamento.

Come detto precedentemente, il riduttore armonico è un tipo particolare di rotismo epicicloidale in cui la funzione del portatreno viene affidata al wave generator e grazie alla flessibilità della flexspline è possibile trasformare il moto planetario dei satelliti ad un asse fisso in modo da poter collegare un albero di uscita. Data la similitudine con il rotismo epicicloidale è possibile definire il rapporto di trasmissione

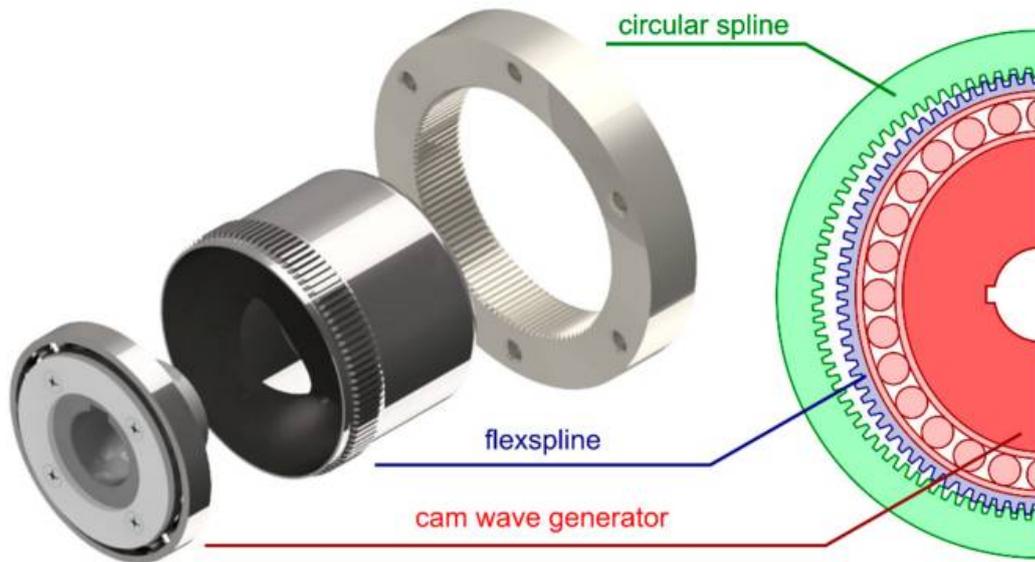


Figura 1.1 Assemblaggio componenti del riduttore armonico [6]

che corrisponde a quello presente nei cataloghi dei produttori di riduttori armonici:

$$\tau = \frac{Z_{FS}}{Z_{CS} - Z_{FS}} \quad (1.1)$$

Si vede da quest'ultima equazione che i rapporti di trasmissione sono elevati in quanto si ha una differenza tra i denti della circular spline e della flexspline molto bassa (nel caso studiato in questa tesi la circular spline ha due denti in più rispetto alla flexspline).

Ritornando al funzionamento del riduttore, come già detto, abbiamo due zone di ingranamento lungo il semiasse maggiore della flexspline deformata. Durante la rotazione, grazie alla forma ellittica del wave generator, si genera una pulsazione radiale sull'elemento flessibile ed è proprio questo fenomeno che ha dato il nome al riduttore. Questa deformazione si propaga nella flexspline come un'onda che segue la rotazione del wave generator. In figure 1.2 possiamo vedere il principio di funzionamento in cui però la circular spline è considerata fissa e la flexspline mobile. Si vede che ogni 180° di rotazione del wave generator, la flexspline ha ruotato nel senso opposto scalando di un dente della circular spline. Quindi ogni giro completo del wave generator, la flexspline avrà scalato due denti della circular spline. Questo meccanismo è dovuto alla differenza di denti tra circular spline e flexspline che è pari a $Z_{CS} - Z_{FS} = 2$. Nella nostra applicazione, come già detto l'elemento mobile è

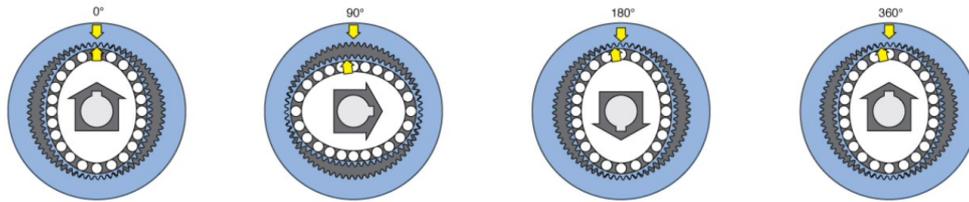


Figura 1.2 Esempio funzionamento di un riduttore armonico [7]

la circular spline, quindi ad ogni giro completo del wave generator corrisponderà uno scatto di due denti della circular spline nella stessa direzione di rotazione.

Dalle considerazioni fatte e dal rapporto di trasmissione calcolato è possibile scrivere una formula generale per legare insieme rotazione e velocità dei tre componenti per poi fare considerazioni riguardo quale elemento è fisso e quale è mobile:

$$\begin{cases} \theta_{WG} = (\tau + 1)\theta_{CS} - \tau\theta_{FS} \\ \dot{\theta}_{WG} = (\tau + 1)\dot{\theta}_{CS} - \tau\dot{\theta}_{FS} \end{cases} \quad (1.2)$$

Dalle equazione 1.2 è possibile vedere le differenze tra il collegamento dell'albero di uscita alla circular spline o alla flexspline. Infatti, si vede che, scegliendo quest'ultima come output e la prima come ruota fissa, si ottiene l'inversione del moto e la riduzione della velocità del wave generator di τ volte.

Invece, collegando l'uscita alla circular spline e mantenendo fissa la flexspline, si ha il mantenimento della direzione del moto e si ottiene una riduzione della velocità di $\tau + 1$ volte rispetto all'albero di ingresso.

Le equazioni mostrate finora in cui si vede la relazione tra input e output del riduttore armonico, sono relazioni ideali che si desidera ottenere ma non rispecchiano in pieno la realtà a causa delle non linearità introdotte dalle rigidità dei componenti, da fenomeni di isteresi e da errori cinematici. Questo rende ancora più indispensabile lo studio di un modello *multibody high fidelity* di riduttore per definire meglio la relazione tra input e output come verrà meglio spiegato nel capitolo 4.

1.2 Geometria e dimensioni

In questo paragrafo si descrivono la geometria dei componenti di un riduttore armonico evidenziando le dimensioni utili ai fini del modello multibody descritto nei capitoli 2 e 4.

Il primo componente è il wave generator che, come già descritto, è di forma ellittica ed è il responsabile della deformazione della flexspline. I valori riportati in tabella

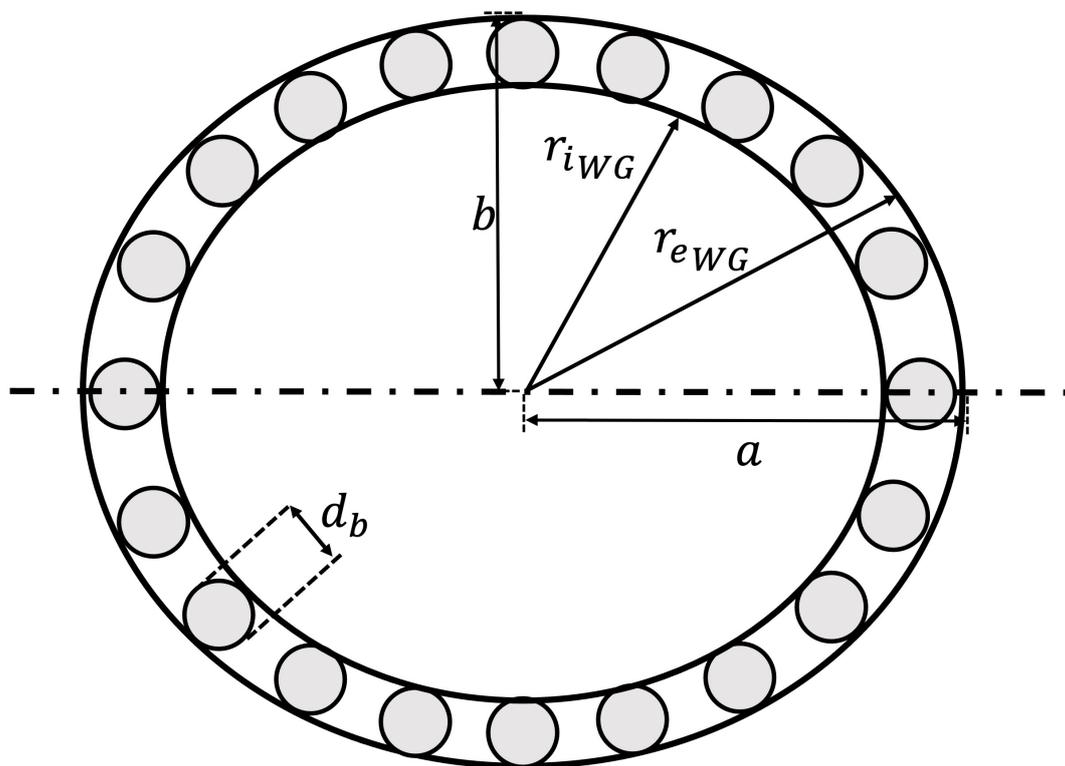


Figura 1.3 Dimensioni del wave generator

6.1 e visibili in figura 1.3 sono stati tratti da [4] e opportunamente modificati per adattarli alle simulazione svolte nel capitolo 5. I valori dei due raggi interni sono valutati rispetto al semiasse maggiore del wave generator. Inoltre, sono riportati gli spessori della pista interna e della pista esterna, il diametro delle sfere e il diametro interno del raggio motore poiché servono per la valutazione del momento di inerzia del wave generator J_{WG} . Quest'ultimo viene valutato sommando i momenti di inerzia

delle singole parti (equazione 1.3)

$$J_{WG} = J_{hub} + \sum_{i=1}^N J_{ball} + J_{ring} \quad (1.3)$$

dove:

- $J_{hub}[kgm^2]$ è il momento di inerzia della parte interna del wave generator valutato come il momento di inerzia di un cilindro cavo ellittico;
- $\sum_{i=1}^N J_{ball}[kgm^2]$ è la somma dei momenti di inerzia delle singole sfere;
- $J_{ring}[kgm^2]$ è il momento di inerzia della pista esterna e viene valutato come il momento di inerzia di un anello ellittico sottile.

Così facendo si ottiene un momento di inerzia del wave generator pari a $J_{WG} = 8.12 \cdot 10^{-5} kgm^2$.

Tabella 1.1 Dimensioni del wave generator

Grandezza	Notazione	Valore
Semiassse maggiore	a	31.175 mm
Semiassse minore	b	30.125 mm
Raggio interno pista esterna	r_{eWG}	29.575 mm
Raggio interno pista interna	r_{iWG}	22.605 mm
Diametro sfera	d_b	5.47 mm
Spessore pista esterna	s_{eWG}	1.6 mm
Spessore pista interna	s_{iWG}	1.5 mm
Raggio interno albero motore	r_{shaft}	16.2 mm

Si procede con la descrizione della flexspline indeformata, ovvero prima dell'inserimento del wave generator, in figura 1.4.

Una descrizione più approfondita sulle dimensioni dei denti della flexspline si trova nel capitolo 3.1. Per valutare il momento di inerzia si tratta la flexspline come un cilindro cavo a pareti sottili di raggio $(r_{0FS} + s_{rimFS})$, senza considerare la presenza dei denti in quanto sono di dimensione trascurabile rispetto all'intero componente.

$$J_{FS} = m_{FS} \cdot (r_{0FS} + s_{rimFS})^2 \quad (1.4)$$

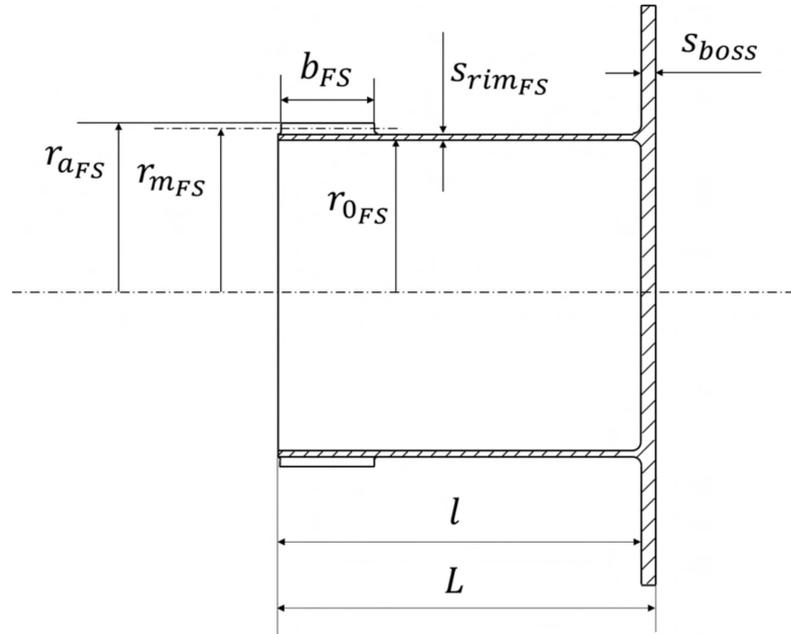


Figura 1.4 Dimensioni flexspline indeformata

In cui m_{FS} è la massa della flexspline valutata calcolando il volume V_{FS} di quest'ultima e conoscendo la densità ρ_{FS} del materiale con cui è fatta:

$$m_{FS} = V_{FS} \cdot \rho_{FS} = \pi \cdot l \cdot [(r_{0_{FS}} + s_{rim_{FS}})^2 - r_{0_{FS}}^2] \cdot \rho_{FS} \quad (1.5)$$

Si valuta anche la massa dei singoli denti m_{tooth} che serve per le equazioni di equilibrio nel capitolo 2.

$$m_{tooth} = V_{tooth} \cdot \rho_{FS} = h_{FS} \cdot b_{FS} \cdot L_b \quad (1.6)$$

Tabella 1.2 Proprietà della flexspline

Densità ρ_{FS} [kg/m^3]	m_{FS} [kg]	m_{tooth} [kg]	J_{FS} [$kg \cdot m^2$]
7850	0.038	$2.37 \cdot 10^{-5}$	$3.72 \cdot 10^{-5}$

Tabella 1.3 Dimensione della flexspline

Grandezza	Notazione	Valore
Numero denti della flexspline	Z_{FS}	200
Raggio flexspline indeformata	r_{0FS}	30.65 mm
Spessore della rim	s_{rimFS}	0.875 mm
Raggio di testa	r_{aFS}	32.034 mm
Altezza denti	h_{FS}	0.51 mm
Addendum	h_a	0.223 mm
Dedendum	h_f	0.286 mm
Raggio medio denti	r_{mFS}	31.78 mm
Lunghezza denti	b_{FS}	12.1 mm
Spessore flangia(boss)	s_{boss}	3.3 mm
Lunghezza ingresso-flangia	1	30.6 mm
Lunghezza alla base del dente	L_b	0.5 mm

Per quanto riguarda la circular spline, si valuta il raggio primitivo basandosi sulle dimensioni già conosciute della flexspline [8].

$$Rp_{CS} = r_{0FS} + s_{rimFS} + h_f + w_0 \quad (1.7)$$

In cui è presente la deformazione w_0 imposta dal wave generator (che si ritrova al capitolo 5). Dal raggio primitivo si valutano il raggio di base, il raggio interno e il raggio esterno della circular spline.

$$\begin{cases} Rb_{CS} = Rp_{CS} + h_f \\ Ri_{CS} = Rp_{CS} - h_a \\ Re_{CS} = Rb_{CS} + s_{rimCS} \end{cases} \quad (1.8)$$

Per lo sviluppo del modello *multibody* si rende necessario il calcolo dell'inerzia della circular spline, la quale viene analizzata come se fosse un cilindro cavo con pareti spesse.

$$J_{CS} = \frac{1}{2} \cdot m_{CS} (Re_{CS} + Ri_{CS})^2 \quad (1.9)$$

dove la massa della circular spline è stata valutata partendo dal suo volume e dalla sua densità come nel caso della flexspline.

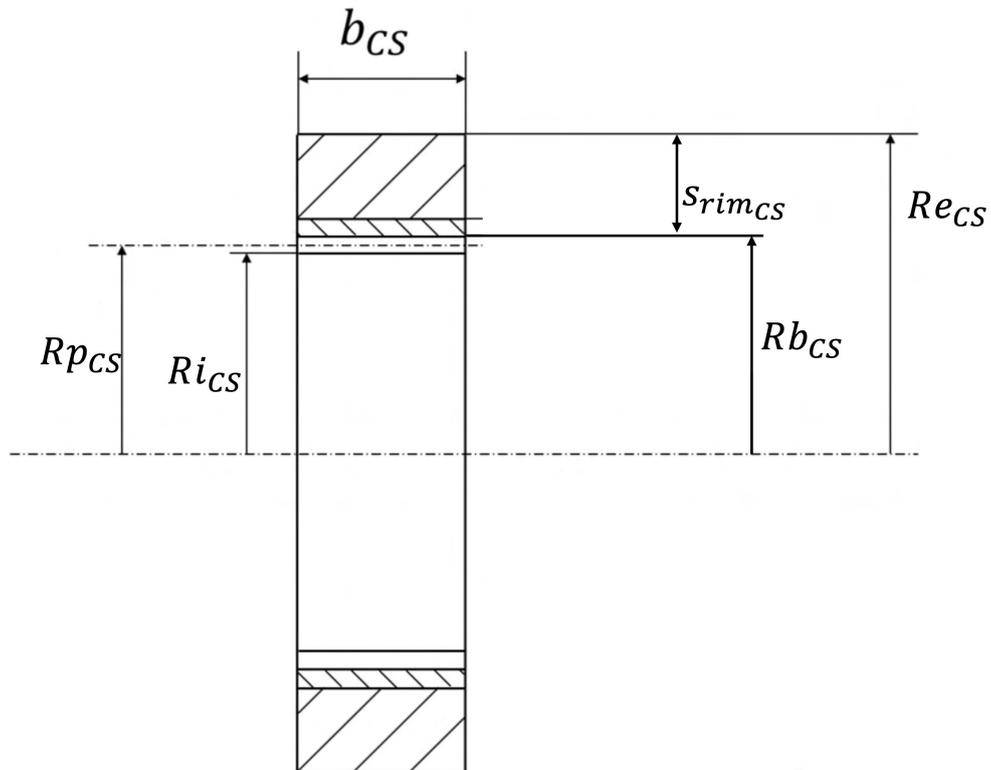


Figura 1.5 Dimensioni della circular spline

Tabella 1.4 Dimensione della circular spline

Grandezza	Notazione	Valore
Numero denti della circular spline	Z_{CS}	202
Raggio primitivo	$R_{p_{CS}}$	32.28 mm
Raggio esterno	$R_{e_{CS}}$	37.568 mm
Raggio interno	$R_{i_{CS}}$	32.06 mm
Spessore della rim	$s_{rim_{CS}}$	5 mm
Altezza denti	h_{CS}	0.51 mm
Lunghezza denti	b_{CS}	13 mm

Tabella 1.5 Proprietà della circular spline

Densità ρ_{CS} [kg/m^3]	m_{CS} [kg]	J_{CS} [$kg \cdot m^2$]
7500	0.595	$5.44 \cdot 10^{-3}$

1.3 Modalità di guasto

Nonostante la semplicità dei vari componenti, il meccanismo di funzionamento può portare ad un'ampia varietà di guasti che possono sfociare nella rottura del riduttore armonico [9]. Tra i guasti che possono causare una rottura del riduttore possiamo citare e spiegare più nel dettaglio i seguenti: usura dei denti, pitting, nucleazione e propagazione delle cricche. Inoltre, è possibile che ci sia anche un'inadeguata lubrificazione o un invecchiamento del lubrificante che può causare malfunzionamenti e rottura del riduttore.

In tabella 1.6 troviamo i risultati di una *Failure Mechanism, Effect and Criticality Analysis* (FMECA) eseguita in [9] sui difetti citati.

Tabella 1.6 FMECA di un riduttore armonico [9]

Modalità di guasto	Effetto	S	O	D	RPN
Usura interfaccia WG-FS	Contaminazione di lubrificante, perdita di efficienza, incremento dello strisciamento tra WG-FS	3	10	6	180
Rottura sezione posteriore	Vibrazioni, completa rottura del riduttore	9	2	9	162
Perdita di lubrificante	Usura, aumento del carico assiale sul wave generator	2	10	8	160
Usura del dente	Backlash, vibrazioni, irregolare distribuzione del carico, contaminazione lubrificante	3	10	4	120
Rottura alla base del dente	Eccessive vibrazioni, perdita di efficienza	7	4	4	112
Rottura diaframma	Vibrazioni, decrescita della rigidità torsionale, perdita di efficienza	4	3	9	108
Pitting	Contaminazione del lubrificante, usura	1	10	9	90
Rottura della rim	Vibrazioni, irregolare distribuzione del carico, perdita di efficienza e accuratezza, totale rottura del riduttore	9	1	4	36

Questo tipo di analisi, in breve, consiste nel valutare un indice chiamato *Risk Priority Number (RPN)* che determina quali difetti sono da considerare più pericolosi di altri. L'RPN viene definito come prodotto di altri tre fattori valutati con una scala da 1 a 10: *Severity (S)* è una misura dell'effetto del difetto sull'interno sistema (1 se il difetto non ha effetto sul sistema, 10 se causa totale rottura del componente); *Occurrence (O)* è la probabilità con il quale si verifica un guasto; *Detectability (D)* indica la possibilità di rilevare i sintomi dei difetti con un'ispezione manuale o con dei sensori. Si prosegue descrivendo i vari metodi di guasto nel dettaglio per averne una panoramica più precisa.

1.3.1 Usura dei denti e pitting

Come detto nel capitolo 1, i riduttori armonici vengono comunemente usati all'interno di applicazioni robotiche quali manipolatori robotici. Durante un tipico utilizzo dei manipolatori è possibile che si generino problemi di lubrificazione, i quali, a loro volta, possono generare usura adesiva tra i denti della flexspline e della circular spline. Inoltre, i denti della flexspline si consumano in modo non uniforme lungo la loro lunghezza, con un'usura maggiore nella sezione vicino all'ingresso rispetto a quella della sezione trasversale posteriore [9]. Questo è causato dall'angolo di

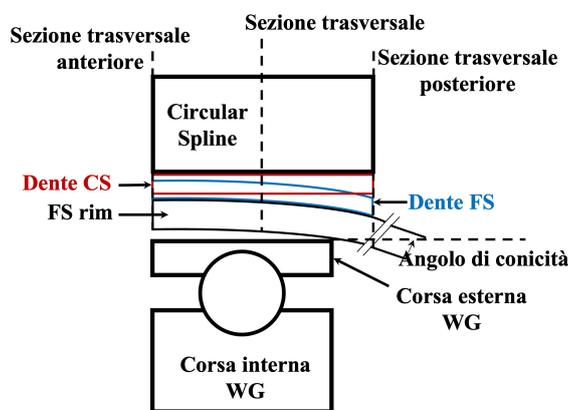


Figura 1.6 Effetto dell'angolo di conicità in un riduttore armonico [9]

conicità generato dall'inserimento del wave generator nella flexspline, che provoca la deformazione ellittica dell'ingranaggio solo nella sezione di ingresso della flexspline, mentre la sezione di uscita rimane circolare. Ciò crea un ingranamento irregolare dei denti della flexspline e della circular spline lungo l'asse di rotazione. La zona della flexspline più vicina alla sezione frontale e trasversale ingrana completamente con la circular spline, mentre nella regione restante si rischia di non avere contatto.

Un altro aspetto importante è la lubrificazione che caratterizza tre zone specifiche del riduttore armonico[9]: contatto tra i denti di flexspline e circular spline, cuscinetto del wave generator e interfaccia tra wave generator e flexspline. Un'inadeguata lubrificazione genera problemi di usura specialmente nell'interfaccia tra wave generator e flexspline generando problemi di efficienza del riduttore armonico [10].

Le ripetute sollecitazioni possono portare al pitting, che è la formazione di piccole cavità sulla superficie del dente. Questo è un fenomeno legato all'usura che si verifica principalmente nella regione del dente più vicina alla sezione anteriore

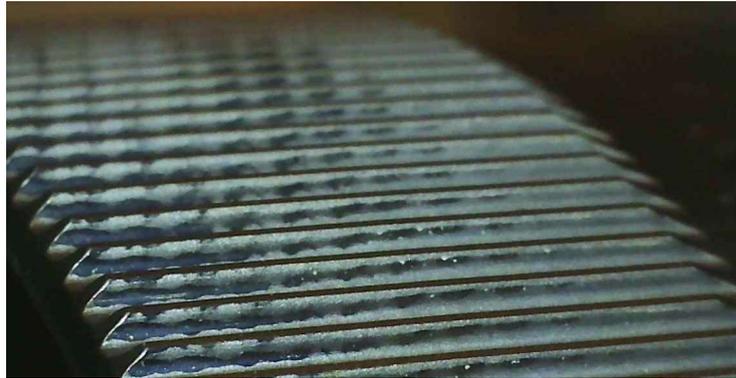


Figura 1.7 Effetto dell'angolo di conicità sull'usura dei denti [9]

e alla sezione trasversale della flexspline. Le particelle di materiale che si staccano dal dente a causa dell'usura possono mescolarsi con il lubrificante e degradarlo. Questo può causare danni non solo alla flexspline, ma anche al cuscinetto ellittico e all'interfaccia di contatto tra il wave generator e la flexspline, poiché il riduttore utilizza lo stesso lubrificante per tutti i suoi componenti. Pertanto, è importante controllare regolarmente lo stato dei denti e del lubrificante, al fine di prevenire danni maggiori ai componenti del riduttore.

1.3.2 Nucleazione e propagazione delle cricche

Una delle principali cause di rottura di un riduttore armonico è la rottura a fatica della flexspline dovuta alla presenza di micro cricche che si propagano durante la messa in funzione del componente [11].

La cricca può nucleare principalmente in quattro regioni della flexspline e in base a ciò ci possono avere differenti effetti sulla propagazione [9]. Le quattro regioni in questione visibili in figura 1.8 sono: rim (base del dente), dente, sezione trasversale posteriore, diaframma. Lo stress elevato, che si produce alla base del dente [11], causa la propagazione della cricca in due differenti direzioni: lungo il dente della flexspline o lungo la rim. Considerando la flexspline come un ingranaggio cilindrico, è possibile riferirsi a quanto descritto in [12] in cui, nonostante entrambe le propagazioni sono indesiderate, la prima non è considerata una rottura catastrofica mentre la seconda lo è. Quest'ultima è considerata catastrofica poiché la cricca potrebbe propagarsi lungo la direzione radiale della flexspline e quindi portare alla

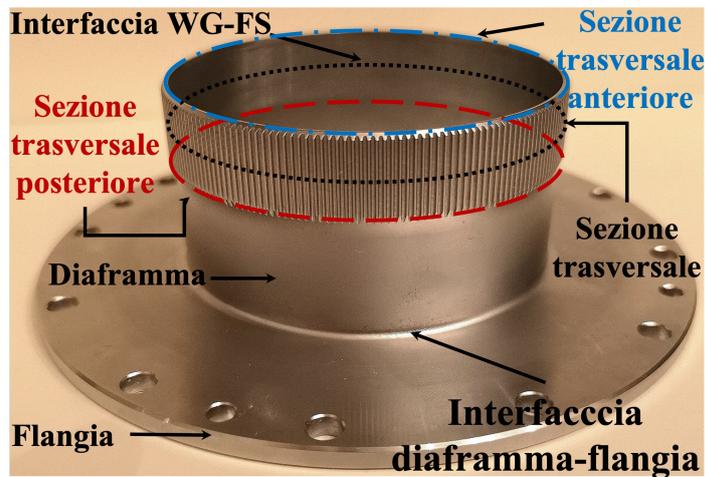


Figura 1.8 Flexspline di un riduttore armonico usato in un giunto di un robot collaborativo UR5 [9]

rottura di tutto il componente, mentre la propagazione lungo il dente porterebbe al massimo alla rottura del singolo dente [12]. Dagli studi condotti in [13] la direzione di propagazione della cricca può essere predetta tramite il *backup ratio* (m_b) che considera lo spessore della rim ($s_{rim_{FS}}$), l'altezza del dente (h) e la posizione iniziale della cricca.

Usando il *backup ratio* come discriminante per la direzione di propagazione della cricca, i risultati in [13][14] mostrano (figura 1.9) come, a prescindere dalla posizione iniziale della cricca, con $m_b < 0.5$ si ha una rottura lungo la rim alla base del dente mentre con $m_b > 1.3$ si ha propagazione lungo il dente.

Le cricche possono nucleare anche vicino alla punta del dente a causa di vibrazioni generate con carichi elevati e alte velocità [9]. In questo tipo di nucleazione, gioca un ruolo fondamentale la forza scambiata nell'ingranamento tra i denti della flexspline e della circular spline che dipende dallo spessore della rim della flexspline [15] e dal profilo dei denti dei due ingranaggi (descritto al capitolo 3).

Possono anche verificarsi delle rotture a fatica nella sezione posteriore della flexspline (visibile in figura 1.8) casuati da un incremento dello stress dovuto all'angolo di conicità presentato al paragrafo 1.3.1. A causa di questo angolo, la sezione posteriore della flexspline non viene deformata ellitticamente dal wave generator, quindi solo un lato di quest'ultimo va a contatto con la sezione posteriore della flexspline. Questo genera un'intensificazione delle tensioni che possono portare

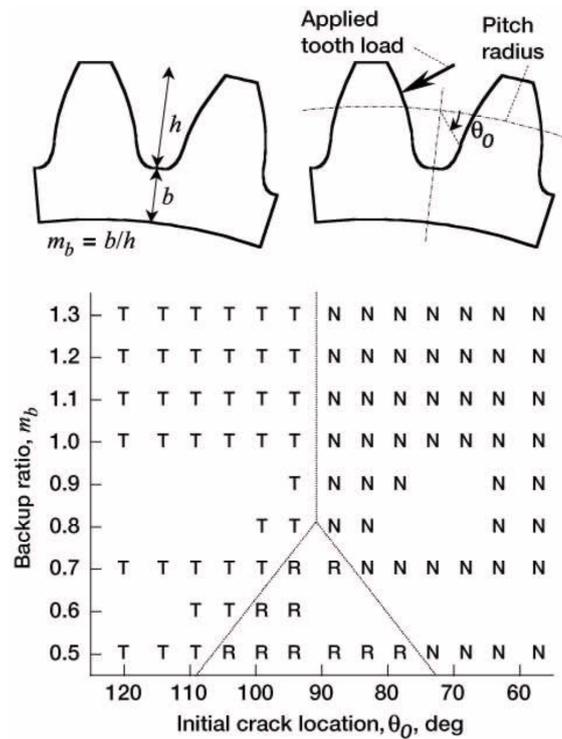


Figura 1.9 Effetto del *backup ratio* sulla direzione di propagazione. T: frattura del dente, R: frattura della rim, N: nessuna propagazione della cricca [14]

a rottura la flexspline a partire dalla sezione posteriore [16].

Un altro tipo di guasto che può verificarsi in un riduttore armonico si presenta nell'interfaccia tra il diaframma e la flangia [10]. Ciò potrebbe essere causato sia dalla deformazione generata dal wave generator, sia dal carico esterno. Quest'ultimo può portare ad un aumento dello sforzo di taglio generato nell'interfaccia favorendo la propagazione di un'eventuale cricca.

Capitolo 2

Modello di inserimento e di rotazione del Wave Generator

In questo capitolo si riportano le implementazione delle interazione tra i vari componenti del riduttore armonico tratte da [5][4] in cui viene descritto il modello di inserimento del wave generator all'interno della flexspline non considerando la circular spline. L'interazione con quest'ultima viene aggiunta in questa tesi nel capitolo 4 in cui si descrivono le forze di ingranamento.

Inoltre, viene aggiunto in questo capitolo, il modello di rotazione del wave generator che non comprende ancora la presenza della circular spline e viene trattato anticipatamente rispetto al suo inserimento.

Per simulare l'inserimento del wave generator, lo si considera indeformato e quindi di forma circolare, così facendo è possibile imporre una velocità di deformazione w_0 come parametro in input con l'obiettivo di deformare nel tempo il wave generator. Questo a sua volta entra in contatto con la flexspline deformandola di conseguenza per permetterle successivamente di ingranare con la circular spline. Quindi, la deformazione w rappresenta l'eccentricità dell'ellisse che parte da nulla al tempo 0 fino ad arrivare a $w_0 = 0.525\text{mm}$.

La deformazione che il wave generator impone alla flexspline è modellata considerando le forze di interazione tra questi con un modello molla-smorzatore così come il comportamento tra denti adiacenti della flexspline che sono considerati come corpi singoli identificati tramite le coordinate (x_i, y_i) . Anche il contatto tra i denti della felxspline e della circular spline vengono modellati nel capitolo 4 tramite

un sistema molla-smorzatore.

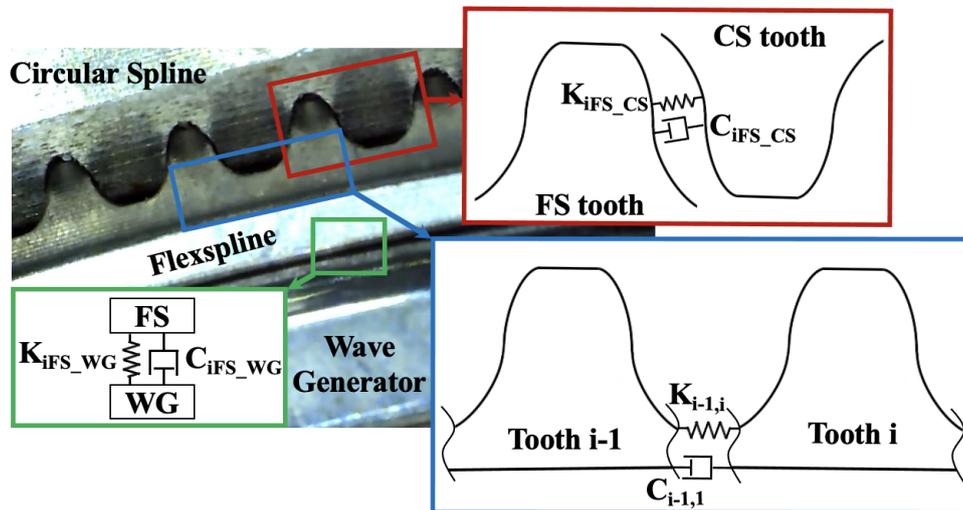


Figura 2.1 Rappresentazione dei modelli tra le interfacce dei componenti [5]

Inizialmente, prima di introdurre la discretizzazione del profilo dei denti, questi ultimi vengono trattati come puntiformi aventi coordinate x_i e y_i rispetto al sistema di riferimento fisso X_0Y_0 .

In figura 2.2 è possibile osservare lo schema iterativo per la valutazione della posizione dei denti della flexspline tramite le equazioni di equilibrio alla traslazione di ciascuno di essi. In questo capitolo viene descritta la maggior parte dello schema iterativo escludendo il contributo dell'ingranamento con la circular spline che viene trattato nel capitolo 4.

Quindi, elemento fondamentale, per lo studio del modello, è il singolo dente della flexspline sul quale viene applicato l'equilibrio alla traslazione e successivamente per completezza anche l'equilibrio alla rotazione. Dopo aver suddiviso la flexspline in Z_{FS} punti che corrispondono come numero e posizione ai Z_{FS} suoi denti, si può isolare un dente per scomporre le forze come si vede in figura 2.3.

Si vede che le forze in questione sono applicate nel verso positivo e successivamente si valutano i moduli e le reali scomposizioni di ciascuna di esse. Analizzando il diagramma di corpo libero in figura 2.3 è possibile ricavare l'equilibrio lungo

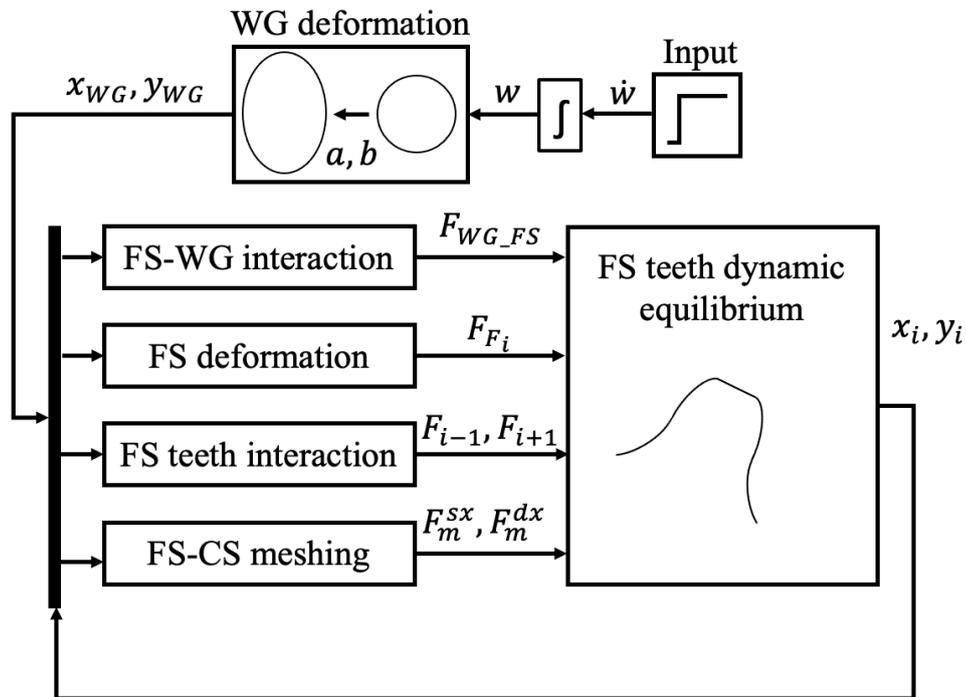


Figura 2.2 Rappresentazione modello per la valutazione del moto della flexspline

l'asse orizzontale X_0 e lungo l'asse verticale Y_0 .

$$m_i \ddot{x}_i + c_i \dot{x}_i = F_{F_i x} + F_{WG-FS i_x} + F_{i+1_x} + F_{i-1_x} + F_{R i_x} + F_{m_x}^{dx} + F_{m_x}^{sx} \quad (2.1)$$

$$m_i \ddot{y}_i + c_i \dot{y}_i = F_{F_i y} + F_{WG-FS i_y} + F_{i+1_y} + F_{i-1_y} + F_{R i_y} + F_{m_y}^{dy} + F_{m_y}^{sy} \quad (2.2)$$

Successivamente si riscrivono le equazioni 2.1 e 2.2 in funzione delle accelerazioni lungo X_0 e Y_0 , così da poter valutare per integrazione all'interno del modello, le coordinate dei punti x_i e y_i . Va inoltre considerato che fino alla valutazione delle forze di ingranamento, il dente è considerato puntiforme e tutte le forze applicate in un punto.

Invece, le forze di ingranamento vengono considerate applicate al punto di contatto in quanto si rende necessaria la valutazione della distanza rispetto al centro 0 del

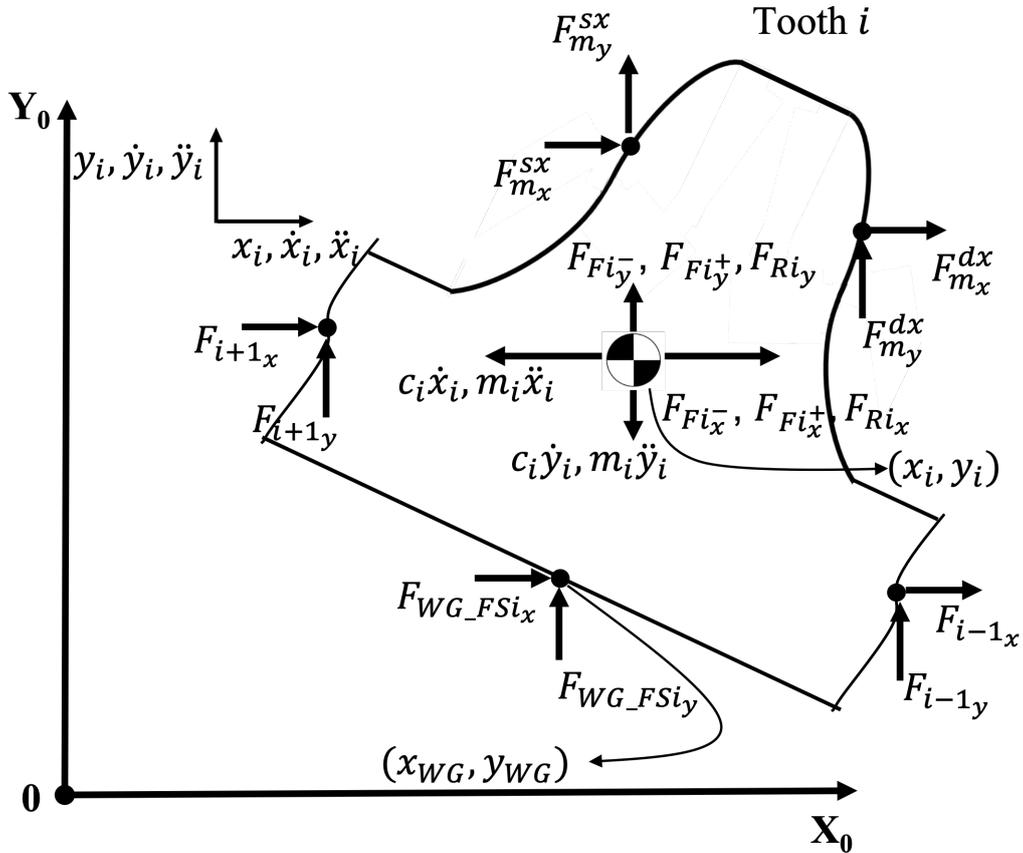


Figura 2.3 Diagramma di corpo libero dente della Flexspline

sistema di riferimento X_0Y_0 per poter valutare la coppia generata.

$$\begin{cases} \ddot{x}_i = \frac{1}{m_i}(F_{F_i x} + F_{WG-FSi_x} + F_{i+1_x} + F_{i-1_x} + F_{R_i x} + F_{m_x}^{dx} + F_{m_x}^{sx} - c_i \dot{x}_i) \\ \ddot{y}_i = \frac{1}{m_i}(F_{F_i y} + F_{WG-FSi_y} + F_{i+1_y} + F_{i-1_y} + F_{R_i y} + F_{m_y}^{dx} + F_{m_y}^{sx} - c_i \dot{y}_i) \end{cases} \quad (2.3)$$

In cui:

- F_{F_i} [N] è la forza di richiamo flessionale generata dal passaggio da forma circolare a forma ellittica della flexspline;
- F_{WG-FSi} [N] è la forza scambiata tra wave generator e flexspline diretta lungo la normale all'ellisse che sarà inclinata di un angolo α_{Ni} rispetto al sistema di riferimento X_0Y_0 ;

- F_{i+1}, F_{i-1} [N] sono rispettivamente le forze elastiche di interazione che il dente i -esimo scambia con il dente alla sua sinistra ($i+1$) e alla sua destra ($i-1$), dovute al passaggio da forma circolare a ellittica;
- F_{Ri} [N] è la forza di richiamo elastico dovuto alla rigidità torsionale della flexspline;
- F_m^{dx}, F_m^{sx} [N] sono le forze di ingranamento scambiate nel punto di contatto tra flexspline e circular spline e sono dirette lungo la retta d'azione inclinata di un angolo β_i rispetto al profilo del dente (analizzate al capitolo 4);
- c_i [Ns/m] è il coefficiente di smorzamento del dente i -esimo;
- m_i [kg] è la massa del dente i -esimo.

2.1 Interazione tra Wave Generator e Flexspline

La prima interazione che viene affrontata è quella tra Wave Generator e Flexspline poiché sono i due corpi che entrano per primi a contatto durante la fase di inserimento del wave generator.

Partendo da una condizione indeformata di flexspline (forma circolare) si definisco un numero di punti pari al numero di denti della flexspline equispaziati lungo la circonferenza, i quali rappresentano esattamente il dente trattato come elemento puntiforme. Così facendo è possibile individuare la posizione di ciascun dente all'inizio della simulazione usando un angolo definito Ψ_0 tale che:

$$\Psi_0 = \left[0 : \frac{2\pi}{Z_{FS}} : 2\pi \left(1 - \frac{1}{Z_{FS}} \right) \right] \quad (2.4)$$

misurato a partire dall'asse orizzontale X_0 in verso antiorario. Come detto, è ora possibile individuare le coordinate dei punti di discretizzazione della flexspline mediante l'angolo Ψ_0 usando le formule 2.5:

$$\begin{cases} x_{i_0} = r_{0_{FS}} \cos(\Psi_0) \\ y_{i_0} = r_{0_{FS}} \sin(\Psi_0) \end{cases} \quad (2.5)$$

Bisogna anche considerare che in condizioni indeformate, le coordinate dei denti della flexpline e dei punti di discretizzazione del Wave Generator coincidono. Si

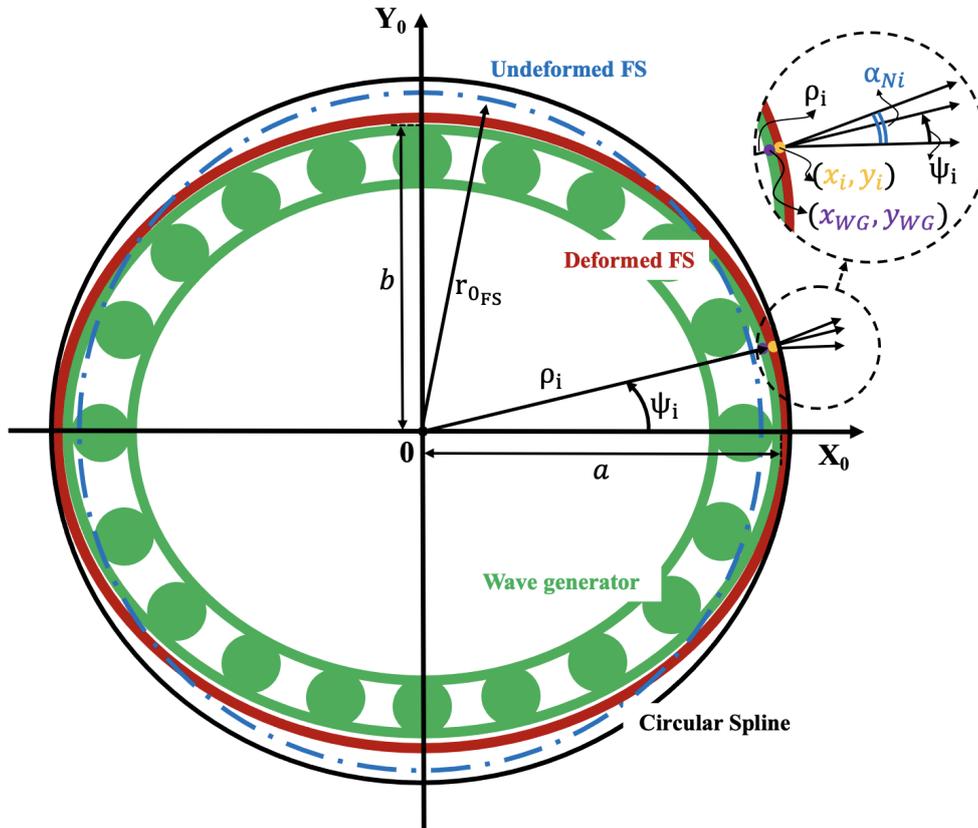


Figura 2.4 Schema inserimento Wave Generator [5]

applica la deformazione w_0 che, come si vede schematizzato in figura 2.4, ha l'effetto di spostare i denti della flexpline e questo rende necessaria la rivalutazione delle loro coordinate. Per fare questo, bisogna prima definire quelli che saranno i semiassi maggiore e inferiore dell'ellisse a fine deformazione:

$$\begin{cases} a = r_{0FS} + w_0 \\ b = r_{0FS} - w_0 \end{cases} \quad (2.6)$$

Fatto questo, la via analiticamente più corretta per trovare il punto di contatto sarebbe quello di trovare l'intersezione tra il profilo dell'ellisse e la normale all'ellisse stessa nel punto di coordinate x_i e y_i . Questo metodo richiederebbe l'utilizzo del blocco *interpreter function* di simulink che appesantirebbe troppo la simulazione. Per questo

motivo è stato scelto di trovare l'intersezione tra l'ellisse in coordinate polari e la retta che unisce il punto (x_i, y_i) con l'origine $(0,0)$. Si può vedere sempre in figura 2.4 l'individuazione delle coordinate del dente tramite il raggio vettore ρ_i e l'angolo ψ_i e delle coordinate del wave generator x_{WG} e y_{WG} che sono individuate dalla direzione radiale che corrisponderà all'angolo ψ_i .

$$\begin{cases} x_{WG} = a \cos(\psi_i) \\ y_{WG} = b \sin(\psi_i) \end{cases} \quad (2.7)$$

in cui:

$$\psi_i = \arctan\left(\frac{y_i}{x_i}\right) \quad \text{tale che } 0 < \psi_i < 2\pi \quad (2.8)$$

Inoltre, bisogna considerare che la direzione normale all'ellisse individuata con l'angolo α_{Ni} non corrisponde con la direzione radiale individuata da ψ_i . Questa distinzione è necessaria poiché le forze di interazione tra wave generator e flexpline sono in direzione normale all'ellisse.

$$\alpha_{Ni} = \arctan\left(\frac{a^2 y_i^2}{b^2 x_i^2}\right) \quad (2.9)$$

Tutti gli angoli sopra citati che vengono calcolati all'interno di un blocco simulink con la funzione *atan2* (che calcola l'arcotangente) dovranno essere successivamente riportati nel range di valori tra 0 e 2π .

Prima di procedere al calcolo delle forze c'è la necessità di proiettare le coordinate del dente lungo la normale all'ellisse e per fare ciò sfruttando le proprietà degli archi associati si arriva alla conclusione che per ogni quadrante vale la relazione:

$$x_i \cos(\alpha_{Ni}) + y_i \sin(\alpha_{Ni}) \quad (2.10)$$

L'equazione 2.10 rappresenta lo spostamento della flexpline lungo la direzione normale all'ellisse. Analogamente a quanto fatto per lo spostamento è possibile scomporre anche le velocità lungo la normale all'ellisse:

$$\dot{x}_i \cos(\alpha_{Ni}) + \dot{y}_i \sin(\alpha_{Ni}) \quad (2.11)$$

Per concludere prima di calcolare le forze scambiate, si fanno le stesse scomposizioni anche per lo spostamento e per la velocità dei punti del Wave Generator.

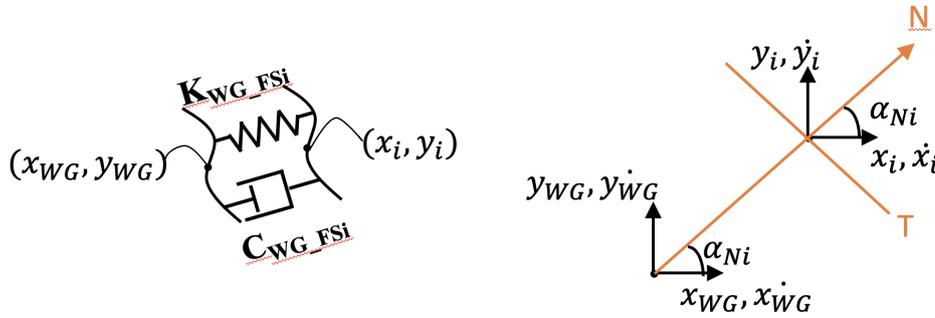


Figura 2.5 Schema molla-smorzatore WG-FS

Così facendo è possibile valutare la forza tramite 2.12 secondo il modello molla-smorzatore visibile in figura 2.5.

$$F_{WG-FS_i} = K_{WG-FS_i} [(x_{WG} - x_i) \cos(\alpha_{Ni}) + (y_{WG} - y_i) \sin(\alpha_{Ni})] + C_{WG-FS_i} [(\dot{x}_{WG} - \dot{x}_i) \cos(\alpha_{Ni}) + (\dot{y}_{WG} - \dot{y}_i) \sin(\alpha_{Ni})] \quad (2.12)$$

La forza ricavata in equazione 2.12 viene definita positiva quando la Flexpline penetra nel Wave generator. Siccome il modello è quello di un sistema molla-smorzatore, si genererebbe una forza anche nel caso in cui i due componenti sono in fase di allontanamento, cosa che però non ha alcun senso fisico in quanto non esistono forze di richiamo quando i due si allontanano. Quindi, per evitare che questo possa avvenire, viene inserito nel modello un saturatore dinamico che permette di generare solo forze di contatto positive. Dalla scomposizione della forza sugli assi di riferimento X_0Y_0 per i quattro quadranti e usando gli archi associati è possibile definire un'unica equazione per le forze di contatto tra Wave generator e Flexpline, ovvero:

$$\begin{cases} F_{WG-FS_i,x} = F_{WG-FS_i} \cos(\alpha_{Ni}) \\ F_{WG-FS_i,y} = F_{WG-FS_i} \sin(\alpha_{Ni}) \end{cases} \quad (2.13)$$

2.2 Interazione tra denti della Flexspline

I denti sono collegati tra loro attraverso la rim e, come schematizzato in figura 2.6, si prende in considerazione un modello molla-smorzatore per simulare il contatto attraverso la rim.

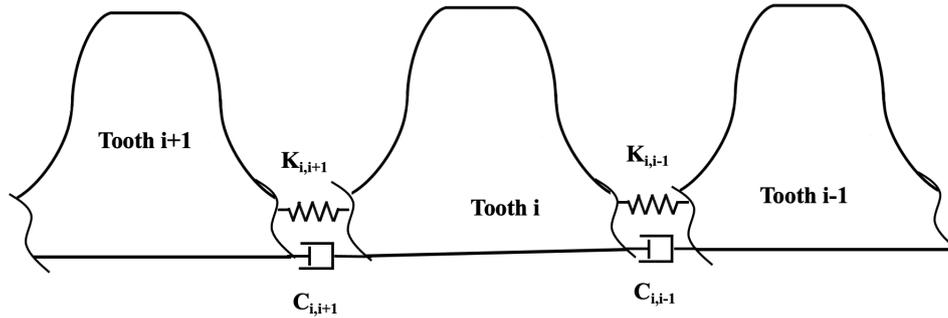


Figura 2.6 Schema contatto denti adiacenti

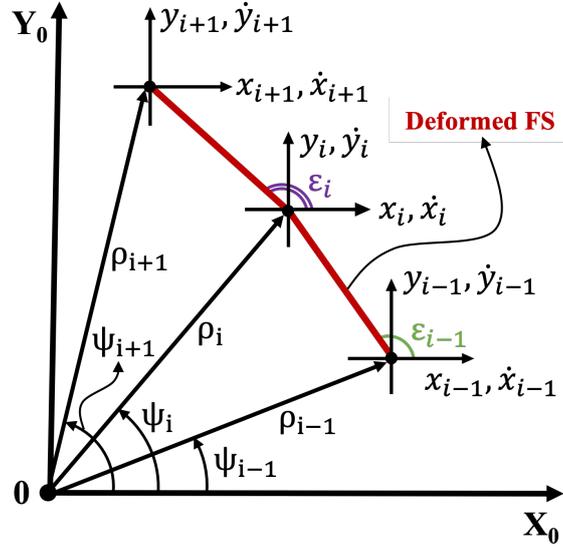
Il dente i^{th} si interfaccia con il dente 'i-1' e il dente 'i+1' rispettivamente tramite una rigidità K_{i-1} e K_{i+1} e uno smorzamento c_{i-1} e c_{i+1} . L'utilità del modellare il contatto tra denti adiacenti si può vedere nel momento in cui si vuole simulare una cricca alla base del dente che può causare una variazione della rigidità della rim e quindi del contatto tra due denti adiacenti.

Le forze vengono scambiate lungo la retta che congiunge i denti adiacenti in esame per cui è necessario individuare l'angolo tra la retta d'azione e l'asse X_0 . L'angolo in questione è ε_i come si vede in figura 2.7 ed è calcolabile tramite l'equazione 2.14.

$$\varepsilon_i = \arctan \left(\frac{y_{i+1} - y_i}{x_{i+1} - x_i} \right) \quad (2.14)$$

Bisogna sempre riportare il valore di ε tra 0 e 2π . Inoltre, l'inclinazione della congiungente tra il dente i^{th} e il suo precedente è pari a ε_{i-1} e si ottiene permutando l'angolo ε_i . Ora è possibile calcolare la forza secondo il modello molla-smorzatore:

$$\begin{cases} F_{i+1} = K_{i+1} \delta_{i+1} + c_i \dot{\delta}_{i+1} \\ F_{i-1} = K_{i-1} \delta_{i-1} + c_i \dot{\delta}_{i-1} \end{cases} \quad (2.15)$$

Figura 2.7 Valutazione angolo ε_i per contatto denti adiacenti [5]

Con:

$$\begin{cases} \delta_{i+1} = \sqrt{(x_i - x_{i+1})^2 + (y_i - y_{i+1})^2} - \delta_0 \\ \dot{\delta}_{i+1} = (\dot{x}_{i+1} - \dot{x}_i) \cos(\varepsilon_i) + (\dot{y}_{i+1} - \dot{y}_i) \sin(\varepsilon_i) \end{cases}$$

$$\begin{cases} \delta_{i-1} = \sqrt{(x_i - x_{i-1})^2 + (y_i - y_{i-1})^2} - \delta_0 \\ \dot{\delta}_{i-1} = (\dot{x}_{i-1} - \dot{x}_i) \cos(\varepsilon_i) + (\dot{y}_{i-1} - \dot{y}_i) \sin(\varepsilon_i) \end{cases}$$

In cui:

- δ_{i+1} e δ_{i-1} [m] sono rispettivamente le distanze tra i denti i e $i+1$ e i denti i e $i-1$ in condizioni di Flexspline deformate;
- $\delta_0 = \sqrt{(x_i - x_{i,0})^2 + (y_i - y_{i,0})^2}$ [m] è la distanza tra i denti ' i ' e ' $i+1$ ' e tra i denti ' i ' e ' $i-1$ ' in condizioni indeformate.
- $\dot{\delta}_{i+1}$ e $\dot{\delta}_{i-1}$ [m/s] sono le velocità relative con le quali i denti ' $i+1$ ' e ' $i-1$ ' si allontanano/avvicinano al dente i^{th} .

Si nota che i contributi dei singoli denti si sottraggono nella scomposizione lungo la congiungente dei denti adiacenti. Così facendo si vede che si ha una forza positiva

quando la velocità relativa tra i denti è maggiore di zero e quindi si ha una forza positiva quando i denti sono in fase di allontanamento.

Dopo aver scomposto spostamenti e velocità e quindi aver calcolato le forze in direzione delle congiugenti dei denti adiacenti, si procede con la scomposizione di queste ultime lungo le direzioni X_0 e Y_0 utilizzando l'equazione 2.16 per la scomposizione della forza F_{i+1} e l'equazione 2.17 per la scomposizione della forza F_{i-1} .

$$\begin{cases} F_{i+1x} = F_{i+1} \cos(\varepsilon_i) \\ F_{i+1y} = F_{i+1} \sin(\varepsilon_i) \end{cases} \quad (2.16)$$

$$\begin{cases} F_{i-1x} = -F_{i-1} \cos(\varepsilon_{i-1}) \\ F_{i-1y} = -F_{i-1} \sin(\varepsilon_{i-1}) \end{cases} \quad (2.17)$$

2.3 Forza di richiamo flessionale

Per spiegare il motivo per cui nel modello si aggiunge una coppia di richiamo flessionale che tende a riportare la flexspline deformata al suo stato indeformato, è necessario fare una considerazione sulla costante di smorzamento c_i del dente.

Se c_i è troppo grande, tutti i denti sono troppo smorzati e di conseguenza quelli sul semiasse minore hanno un ritardo nello spostamento rispetto alla variazione di eccentricità. Questo genera dei problemi nel modello in quanto si vuole che la flexspline si deformi quasi istantaneamente con la deformazione del Wave Generator se no c'è il rischio di avere denti della Flexspline che ingranano con denti della Circular spline dove però l'ingranamento non dovrebbe essere.

Sorge un altro problema a regime ovvero quando si raggiunge la condizione di ellisse del Wave Generator. Essendo il perimetro dell'ellisse uguale al perimetro della circonferenza della flexspline indeformata, a regime non ho più forze scambiate poiché è come se quest'ultima si comporta come una catena che si adatta appoggiandosi sull'ellisse generata dal Wave generator. Grazie allo smorzamento alto si hanno, durante la deformazione, delle forze scambiate tra Wave Generator e Flexspline poiché il rallentamento dei denti sull'asse minore fa sì che il perimetro non sia lo stesso della circonferenza. Avere uno smorzamento alto comunque non risolve il problema a regime e aggrava il pericolo di un falso ingranamento tra denti di circular

spline e flexspline.

Per risolvere questi problemi introduciamo una coppia flessionale C_f , che agisce sui singoli denti della flexspline, che cerca di riportare quest'ultima alle condizioni indeformate. Siccome ogni dente i^{th} è collegato al precedente e al successivo, a causa della coppia flessionale nascono due forze flessionali generate dai denti adiacenti che tendono a riportare la congiungente dei denti nella condizione indeformata quindi tendono globalmente a riportare la flexspline deformata (ellisse) alla condizione indeformata (circonferenza). In questo modo il comportamento da semplice catena appoggiata descritto precedentemente viene meno e anche a regime si ottiene uno scambio di forze tra Wave Generator e Flexspline.

In figura 2.8 si può notare che oltre ad una rotazione del segmento che congiunge i due denti consecutivi, c'è anche una traslazione che però non viene modellata in questa fase in quanto viene considerata nel paragrafo 2.4 nella forza di richiamo elastico dovuta alla rigidità torsionale della flexspline .

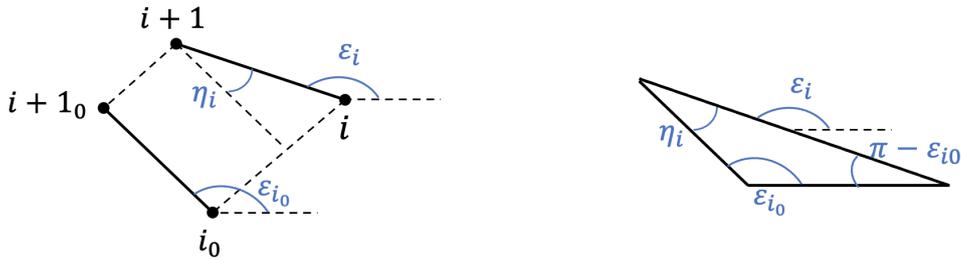


Figura 2.8 Movimento della congiungente di due denti consecutivi

Gli angoli ε_i sono quelli calcolati con l'equazione 2.14 e vengono confrontati con gli angoli in condizione indeformata della flexspline:

$$\varepsilon_{i,0} = \arctan \left(\frac{y_{i+1,0} - y_{i,0}}{x_{i+1,0} - x_{i,0}} \right) \quad (2.18)$$

Grazie agli angoli trovati con l'equazione 2.18 è possibile valutare di quanto sono ruotati i segmenti che congiungono i denti 'i' e 'i+1' e i denti 'i' e 'i-1', permutando i valori di $\varepsilon_{i,0}$. Questa rotazione viene definita insieme alla sua velocità di rotazione nell'equazione 2.19

$$\begin{cases} \eta_i = \varepsilon_i - \varepsilon_{i,0} \\ \dot{\eta}_i = \dot{\varepsilon}_i - \dot{\varepsilon}_{i,0} \end{cases} \quad (2.19)$$

All'inizio dell'inserimento del Wave Generator non si ha moto quindi abbiamo la condizione di $\dot{\epsilon}_{i,0} = 0$.

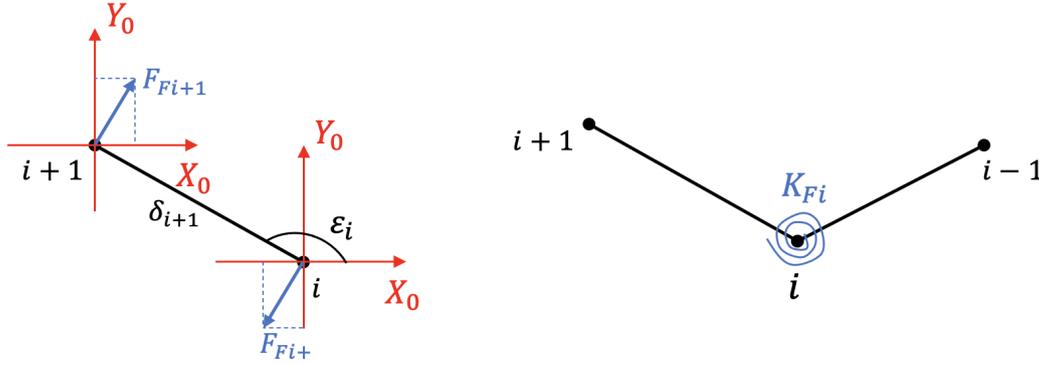


Figura 2.9 Schema direzione forza e coppia flessionale

Si procede con il calcolo della coppia flessionale schematizzata in figura 2.9 in cui si raffigura il dente i -esimo come una molla torsionale avente la propria rigidezza K_{Fi} e il proprio smorzamento c_{Fi} .

$$C_{Fi} = K_{Fi} \cdot \eta_i + c_{Fi} \cdot \dot{\eta}_i \quad (2.20)$$

Le forze flessionali schematizzate in figura 2.9 sono ricavate a partire dalla coppia flessione conoscendo la distanza tra i denti adiacenti valutata al paragrafo 2.2.

$$F_{Fi+} = F_{Fi+1} = \frac{C_{Fi}}{\delta_{i+1}} \quad (2.21)$$

con:

- F_{Fi+} [N] forza flessionale agente sul dente i durante l'interazione con $i+1$
- F_{Fi+1} [N] forza flessionale agente sul dente $i+1$ durante l'interazione con i

Come già definito più volte, per il calcolo della forza flessionale scambiata tra il dente i e il precedente $i-1$, si permutano i parametri iniziali quali rigidezza, smorzamento, angolo di orientamento della congiungente ϵ_i .

Si procede con la scomposizione delle forze lungo gli assi X_0 e Y_0 :

$$\begin{cases} F_{Fi+x} = -F_{Fi+} \sin(\epsilon_i) \\ F_{Fi+y} = F_{Fi+} \cos(\epsilon_i) \end{cases} \quad (2.22)$$

Bisogna ricordare che gli angoli considerati in questo capitolo vanno trattati come gli angoli dei precedenti capitoli e quindi viene fatto un controllo sul valore per garantire che siano tutti compresi tra 0 e 2π per evitare errori di calcolo dati dalla differenza dei vari angoli.

2.4 Forza di richiamo elastico dovuta alla rigidità torsionale

Il montaggio del riduttore armonico nell'applicazione sotto esame è tale che la circular spline è calettata sull'albero in uscita e quindi libera di muoversi, mentre la flexspline risulta fissa. Questo comportamento viene caratterizzato e modellato con l'introduzione di una rigidità torsionale della flexspline K_T che genera una coppia di reazione per mantenerla fissa durante la rotazione del wave generator e l'ingranamento con la circular spline. Questo fa capire che nel modello di inserimento del wave generator, non si genera nessuna coppia torsionale.

Altro fattore interessante legato alla rigidità torsionale è che quest'ultima aumenta a seconda dei denti in presa tra flexspline e circular spline che aumentano in base al carico esercitato sulla circular spline.

A questa variazione di rigidità torsionale è quindi possibile associare un fenomeno di isteresi poiché a seconda del carico si otterranno deformazioni differenti proprio causate da un diverso numero di denti in presa. Questo fenomeno può essere sviluppato in futuro lavoro di implementazione del modello.

Ora ci concentriamo sul modello matematico della coppia di richiamo torsionale C_{Ri} :

$$C_{Ri} = K_T \cdot \varphi_i + c_T \cdot \dot{\varphi}_i \quad (2.23)$$

$$\begin{cases} \varphi = \psi_i - \psi_0 \\ \dot{\varphi} = \dot{\psi}_i - \dot{\psi}_0 \end{cases} \quad (2.24)$$

Bisogna considerare che l'angolo ψ_0 non è lo stesso definito nell'equazione 2.4 ma viene ricavato alla fine della simulazione dell'inserimento del wave generator. Infatti, il contributo della coppia torsionale la si può osservare solo nel caso di rotazione del Wave Generator con l'ingranamento della circular spline. Inoltre, in condizioni

iniziali non si ha moto per cui ψ_0 è nullo. La velocità angolare $\dot{\psi}_i$ è data da:

$$\dot{\psi}_i = \frac{V_{Ri}}{\rho_i} \quad (2.25)$$

in cui la velocità V_{Ri} è in direzione perpendicolare alla direzione radiale nel punto i ed è quindi inclinata rispetto all'orizzontale di un angolo pari a $\pi/2 - \alpha_{Ri}$ e usando gli archi associati si calcola con l'equazione 2.26.

$$V_{Ri} = -\dot{x}_i \sin(\alpha_{Ri}) + \dot{y}_i \cos(\alpha_{Ri}) \quad (2.26)$$

Adesso si può valutare la forza flessionale dovuta alla torsione per poi scomporla:

$$F_{Ri} = \frac{C_{Ri}}{\rho_i} \quad (2.27)$$

La forza nell'equazione 2.27 è diretta perpendicolarmente al raggio ρ_i e quindi inclinata rispetto all'orizzontale di un angolo $\pi/2 - \alpha_{Ri}$ e da questo angolo usando gli archi associati è possibile definire la scomposizione della forza su tutti i quadranti con l'equazione 2.28

$$\begin{cases} F_{Rix} = F_{Ri} \sin(\alpha_{Ri}) \\ F_{Riy} = F_{Ri} \cos(\alpha_{Ri}) \end{cases} \quad (2.28)$$

2.5 Rotazione del wave generator

Durante la rotazione del wave generator, il punto di contatto tra quest'ultimo e la flexspline cambia quindi bisogna trovare un modo per calcolare di nuovo l'intersezione tra questi. Bisogna notare che non basta sommare la rotazione del wave generator θ_{WG} alla posizione dei punti di contatto individuata con ψ_i perché, così facendo, si sposterebbero semplicemente i denti lungo l'ellisse che però mancherebbe sempre il semiasse maggiore lungo la direzione X_0 che significherebbe che il wave generator non sta ruotando. Inoltre, si mancherebbe in rotazione anche la flexspline che, per il montaggio considerato in questo lavoro di tesi, deve rimanere fissa oscillando attorno ad una posizione fissa.

Un'altra possibile idea è quella di moltiplicare le coordinate del wave generator

per una matrice di rotazione 2.29:

$$R(\theta_{WG}) = \begin{bmatrix} \cos(\theta_{WG}) & \sin(\theta_{WG}) \\ -\sin(\theta_{WG}) & \cos(\theta_{WG}) \end{bmatrix} \quad (2.29)$$

Così facendo però si avrebbe effettivamente la rotazione del wave generator, ma non si avrebbe un corretto calcolo delle forze di interazione con la flexspline in quanto si avrebbero errori nel calcolo delle distanze tra (x_i, y_i) e (x_{WG}, y_{WG}) .

L'unica soluzione trovata è quella di calcolare i punti di intersezione tra i singoli denti della flexspline e il wave generator ruotato andando a risolvere il sistema di equazioni 2.30:

$$\begin{cases} \frac{(x_{WG} \cos(\theta_{WG}) + y_{WG}) \sin(\theta_{WG})^2}{a^2} + \frac{(-x_{WG} \sin(\theta_{WG}) + y_{WG}) \cos(\theta_{WG})^2}{b^2} = 1 \\ y = \tan(\psi_i) x \end{cases} \quad (2.30)$$

Come nel caso di inserimento del wave generator, la retta considerata è quella passante per il punto di coordinate (x_i, y_i) e in direzione radiale all'ellisse. Questo processo permette come prima di risparmiare tempo di simulazione in quanto non si usano blocchi simulink di interpretazione di funzioni di matlab. Da quest'intersezione si ricavano due punti di intersezione e si dovrà scegliere il punto opportuno a seconda dell'angolo in cui ci troviamo ovvero prenderemo la $x > 0$ per $-\pi/2 < \psi_i < \pi/2$ e $x < 0$ nella restante parte, in modo da avere il punto (x_{WG}, y_{WG}) più vicino al dente i^{th} della flexspline. Successivamente si calcola la coordinata y di ciascun punto usando la seconda equazione del sistema 2.30 tranne nel caso in cui $x_i = 0$ poichè si raggiunge la condizione per cui $\tan(\psi_i) = \infty$. Quindi, in quest'ultimo caso si usa l'equazione dell'ellisse per trovare la coordinata y . La soluzione del sistema viene svolta usando la funzione di calcolo simbolico presente in matlab.

Bisogna adesso fare attenzione all'angolo α_{N_i} in quanto avendo la rotazione del Wave Generator cambia l'orientazione dell'ellisse e quindi la normale ad esso. Per aggiornare l'angolo si ricalcola usando la formula 2.31:

$$\alpha_{N_{WG}} = \arctan\left(\frac{a^2 y_{i_{WG}}}{b^2 x_{i_{WG}}}\right) \quad (2.31)$$

Questa equazione considera le coordinate nel sistema di riferimento solidale al Wave

Generator quindi bisogna applicare una matrice di rotazione per portare le coordinate x_i, y_i nel corretto sistema di riferimento:

$$\begin{cases} x_{i_{WG}} \\ y_{i_{WG}} \end{cases} = \begin{bmatrix} \cos(\theta_{WG}) & \sin(\theta_{WG}) \\ -\sin(\theta_{WG}) & \cos(\theta_{WG}) \end{bmatrix} \cdot \begin{cases} x_i \\ y_i \end{cases} \quad (2.32)$$

Dopo aver calcolato l'angolo è possibile aggiornare α_{Ni} :

$$\alpha_{Ni} = \alpha_{N_{WG}} + \theta_{WG} \quad (2.33)$$

Per visualizzare meglio gli angoli di cui si sta parlando, si può osservare la figura 2.10 che da un esempio di rotazione dell'ellisse e di come gli angoli si aggiornano e si ricavano così le nuove coordinate.

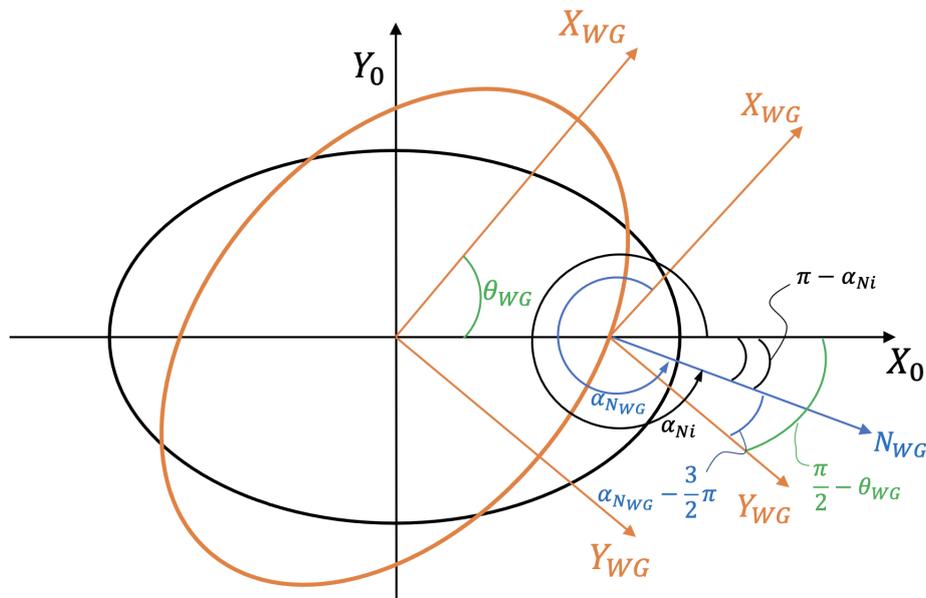


Figura 2.10 Schema di rotazione del wave generator

La trattazione riguardo alla rotazione del wave generator precede la generazione del profilo della circular spline in quanto, eseguendo una simulazione di rotazione ed estrapolando solo i dati cinematici, è possibile ottenere il profilo coniugato della circular spline analizzato nel capitolo 3.2.

Capitolo 3

Profilo dei denti

Di fondamentale importanza per la costruzione di un modello ottimale di riduttore armonico è lo studio del profilo dei denti della circular spline e della flexspline. Sono presenti in letteratura diverse tipologie di costruzione dei profili a seconda dell'obiettivo, del modello e del grado di dettaglio che si vuole raggiungere. Un primo tipo è rappresentato dall'utilizzo di denti di forma trapezoidale [17], tale profilo permette, grazie alla sua semplicità, di comprendere più facilmente il funzionamento del riduttore armonico grazie alla sua peculiare caratteristica di avere l'angolo di pressione costante lungo tutto il profilo.

Una seconda possibilità è rappresentata dai profili ad evolvente i quali permettono di risolvere le problematiche legate alla capacità di carico e alla riduzione degli sforzi nella zona di ingranamento [18] senza però riuscire ad evitare il problema legato all'interferenza. Per ovviare a tali problematiche sono state proposte diverse soluzioni, tra cui [19] nella quale il profilo del wave generator viene modificato per evitare l'interferenza tra i denti senza diminuire però la capacità di carico. Nonostante i miglioramenti apportati dal profilo ad evolvente, in letteratura si osserva come si è continuato a cercare un profilo che migliorasse la qualità dell'ingranamento.

La continua ricerca [20] ha portato allo sviluppo di un profilo a doppio arco a tangente non comune che garantisce un ottimo ingranamento e per tale motivo si è deciso di adottare tale profilo, che verrà più approfonditamente trattato in 3.1.

3.1 Profilo del dente a doppio arco della flexspline

Il profilo a doppio arco si è imposto nel processo produttivo dei denti della flexspline in quanto permette di aumentare il numero di denti in presa [21] e favorisce una migliore formazione e distribuzione di film lubrificante [22]. In letteratura ci sono molti lavori in cui si è utilizzato il profilo a doppio arco a tangente non comune con l'obiettivo di migliorare l'ingranamento come in [21][22], nei quali però non viene esaminato il problema dell'interferenza tra i denti la quale può essere causa di inceppamenti. Quest'ultimo problema viene affrontato in [20] in cui viene modificato il profilo a doppio arco a tangente non comune per migliorare l'ingranamento cercando di evitare i problemi legati all'interferenza. Da [20] vengono estrapolate le equazioni 3.1-3.2 per la generazione del profilo a doppio arco.

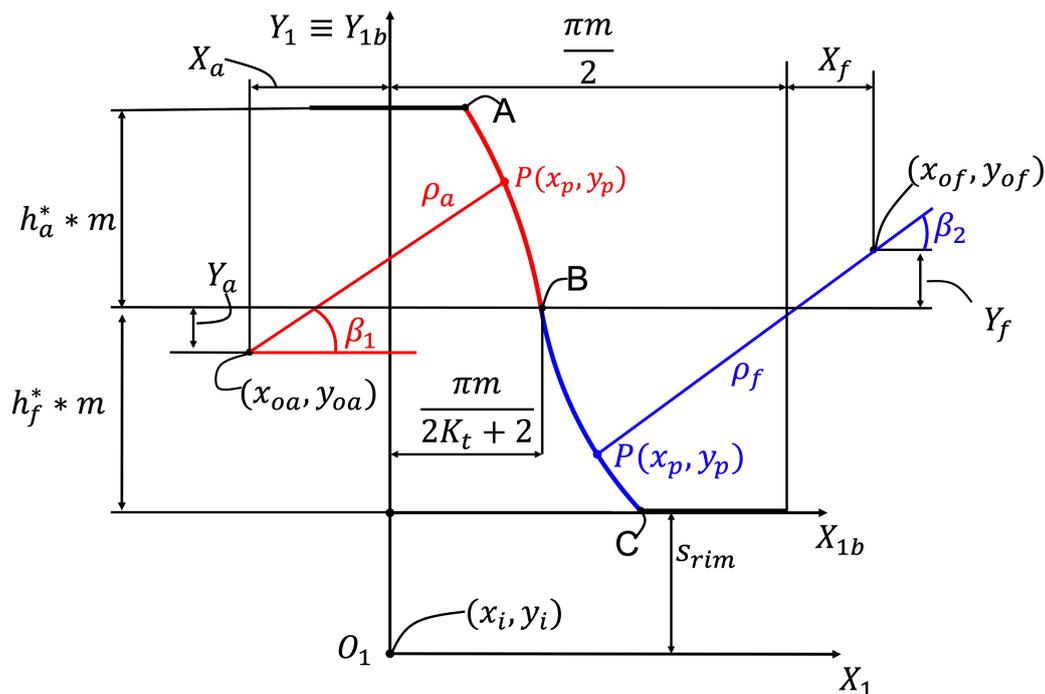


Figura 3.1 Profilo a doppio arco del dente della Flexspline

In figura 3.1 è possibile osservare i due diversi archi di circonferenza di cui è composto il profilo: l'arco \widehat{AB} e l'arco \widehat{BC} . Nella medesima figura è possibile osservare le circonferenze di raggio ρ_a e ρ_f da cui questi archi sono tratti. Le coordinate del profilo vengono definite in un sistema di riferimento X_1Y_1 con origine O_1 posto sulla corona interna della rim del dente della flexspline. L'arco \widehat{AB} in figura 3.1 viene

ricavato usando la 3.1:

$$\begin{cases} \vec{x}_1 = \rho_a \cos\left(\alpha_a - \frac{\vec{s}}{\rho_a}\right) + x_{oa} \\ \vec{y}_1 = \rho_a \sin\left(\alpha_a - \frac{\vec{s}}{\rho_a}\right) + y_{oa} \end{cases} \quad (3.1)$$

dove:

- $0 < \vec{s} < l_1$ è un parametro che percorre la lunghezza del profilo ed è discretizzato in N punti;
- $\vec{x}_1 = {}^{O1}\vec{x}_{FS}$, $\vec{y}_1 = {}^{O1}\vec{y}_{FS}$ sono le coordinate dei punti dell'arco \widehat{AB} rispetto al sistema di riferimento X_1Y_1
- $\alpha_a = \arcsin\left(\frac{h_a + Y_a}{\rho_a}\right)$ è l'angolo di pressione dell'addendum.
- $l_1 = \rho_a(\alpha_a - \gamma)$ è la lunghezza dell'arco \widehat{AB} .
- $x_{oa} = -x_a$ è la coordinata x del centro dell'arco \widehat{AB}
- $y_{oa} = h_f + s_{rim} - Y_a$ è la coordinata y del centro dell'arco \widehat{AB}

L'arco \widehat{BC} viene descritto con l'equazione 3.2:

$$\begin{cases} \vec{x}_2 = x_{of} - \rho_f \cos\left(\alpha_f - \frac{\vec{s}}{\rho_f}\right) \\ \vec{y}_2 = y_{of} - \rho_f \sin\left(\alpha_f - \frac{\vec{s}}{\rho_f}\right) \end{cases} \quad (3.2)$$

dove:

- $l_1 < \vec{s} < l_2$, anche in questo caso si ha una discretizzazione in N punti
- $\vec{x}_2 = {}^{O1}\vec{x}_{FS}$, $\vec{y}_2 = {}^{O1}\vec{y}_{FS}$ sono le coordinate dei punti dell'arco \widehat{BC} rispetto al sistema di riferimento X_1Y_1
- $\alpha_f = \arcsin\left(\frac{h_f + Y_f}{\rho_f}\right)$ è l'angolo di pressione dell'addendum dell'arco \widehat{BC}
- $l_2 = l_1 + \rho_f(\alpha_f - \gamma)$ è la lunghezza dell'arco \widehat{BC} .
- $x_{oa} = -x_a$ è la coordinata x del centro dell'arco \widehat{BC}
- $y_{oa} = h - h_a + s_{rim} + Y_f$ è la coordinata y del centro dell'arco \widehat{AB} .

Basandosi sempre sui dati presenti in [20] è possibile ottenere i parametri riportati in tabella 3.1 che caratterizzano il profilo a doppio arco della flexspline.

Tabella 3.1 Parametri del profilo del dente della Flexspline

Parametro	Valore/mm	Parametro	Valore/mm
h_a^*	0.7	ρ_a	0.7
h_f^*	0.9	ρ_f	0.7
X_a	0.4976	Y_a	0.1461
X_f	0.1781	Y_f	0.1034
K_t	1.7	γ	9.5°

Quindi, grazie alle equazioni 3.1 e 3.2 è possibile determinare il semiprofilo destro del dente della flexspline. Per ottenere il profilo completo, si specchia quello appena ottenuto rispetto all'asse Y_1 così da ottenere il profilo sinistro e si conclude inserendo la cima del dente discretizzata anche lei con N punti.

Dopo aver valutato il profilo della flexspline è possibile individuare l'angolo di ingranamento β_i compreso tra la normale al profilo e l'asse orizzontale. La valutazione di tale angolo permette di individuare la retta di pressione lungo cui si trova la forza di ingranamento.

Non avendo un profilo con una normale costante (differentemente dal profilo trapezoidale), in ogni punto di esso si ha un angolo di pressione differente. Inoltre, dato che il profilo è composto da due archi, si definiscono due equazioni differenti per il calcolo del β_i .

Per quanto riguarda l'arco \widehat{AB} , facendo riferimento ai tratti in rosso in figura 3.1 si ottiene:

$$\vec{\beta}_1 = \arcsin \left(\frac{\vec{y}_1 - (y_{oa} - s_{rim})}{\rho_a} \right) \quad (3.3)$$

Per l'arco \widehat{BC} , facendo riferimento ai tratti in azzurro nella figura 3.1 si ottiene:

$$\vec{\beta}_2 = \arcsin \left(\frac{(y_{of} - s_{rim}) - \vec{y}_2}{\rho_f} \right) \quad (3.4)$$

Le equazioni 3.3 e 3.4 permettono di valutare l'angolo di ingranamento lungo tutto il profilo del dente. Nel capitolo 4 le coordinate y_1 e y_2 sono sostituite con il punto di ingranamento ottenuto y_P , permettendo così la valutazione dell'angolo di pressione

per la scomposizione delle forze.

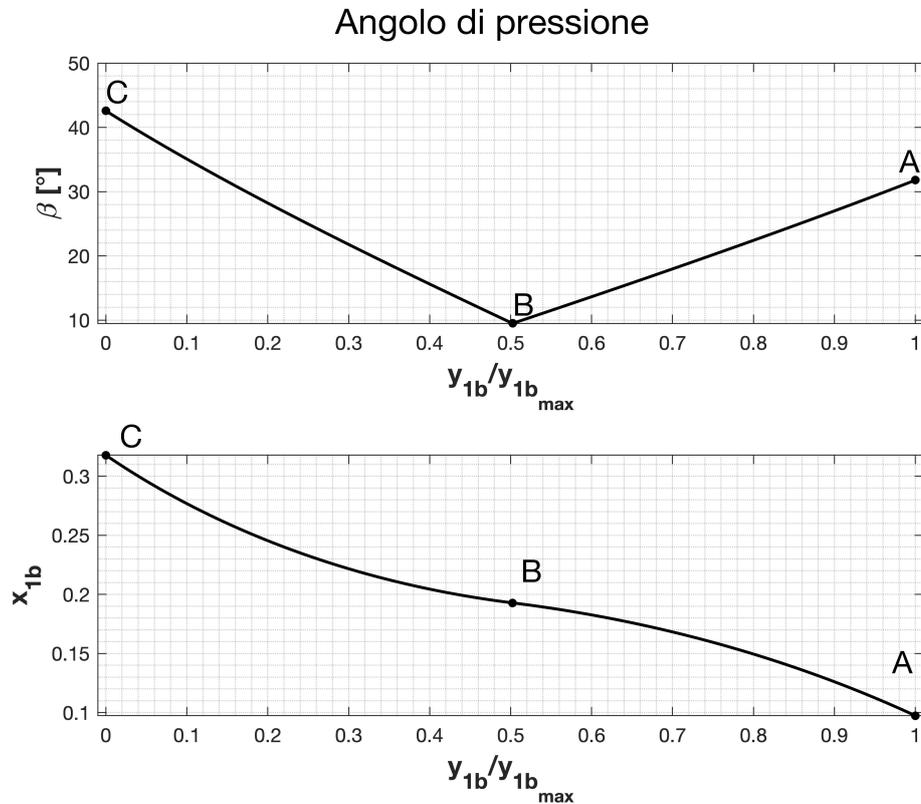


Figura 3.2 Angolo di pressione

In figura 3.2 è possibile osservare l'andamento dell'angolo di pressione lungo il profilo del dente. Come ci si aspetta, l'angolo di pressione è massimo partendo dalla cima del dente nel punto A e arriva al minimo nel punto B di giunzione dei due archi del profilo a doppio arco. Ci si aspetta anche che, per i tipi di profili che entrano a contatto, il punto di ingranamento per ogni dente stia nell'intorno del punto B in quanto si vuole evitare l'ingranamento sulla cima del dente della Flexspline e sulla base del dente.

Si procede con la costruzione della dentatura completa della flexspline partendo dal profilo del singolo dente. Per fare questo si rende necessario cambiare il sistema di riferimento di ciascun dente per riferirlo al sistema di riferimento fisso X_0Y_0 . Per cambiare sistema di riferimento vengono utilizzate le equazioni 3.5 ottenendo così le

coordinate dei denti della flexspline viste nel piano X_0Y_0 .

$$\begin{cases} {}^0\vec{x}_{FS,i} = x_i + {}^{01}\vec{x}_{FS} \cdot \sin \alpha_{Ni} + {}^{01}\vec{y}_{FS} \cdot \cos \alpha_{Ni} \\ {}^0\vec{y}_{FS,i} = y_i - {}^{01}\vec{x}_{FS} \cdot \cos \alpha_{Ni} + {}^{01}\vec{y}_{FS} \cdot \sin \alpha_{Ni} \end{cases} \quad (3.5)$$

in cui:

- ${}^0\vec{x}_{FS,i}$ e ${}^0\vec{y}_{FS,i}$ sono le coordinate del profilo del dente i^{th} rispetto a X_0Y_0
- x_i e y_i sono le coordinate del punto di contatto tra wave generator e flexspline rispetto a X_0Y_0 per ciascun dente i -esimo valutati integrando le equazioni 2.1 e 2.2
- ${}^{01}\vec{x}_{FS}$ e ${}^{01}\vec{y}_{FS}$ sono le coordinate del profilo del dente ricavate nell'equazioni 3.1-3.2
- α_{Ni} è l'angolo che individua la direzione normale all'ellisse (valutato al capitolo 2)

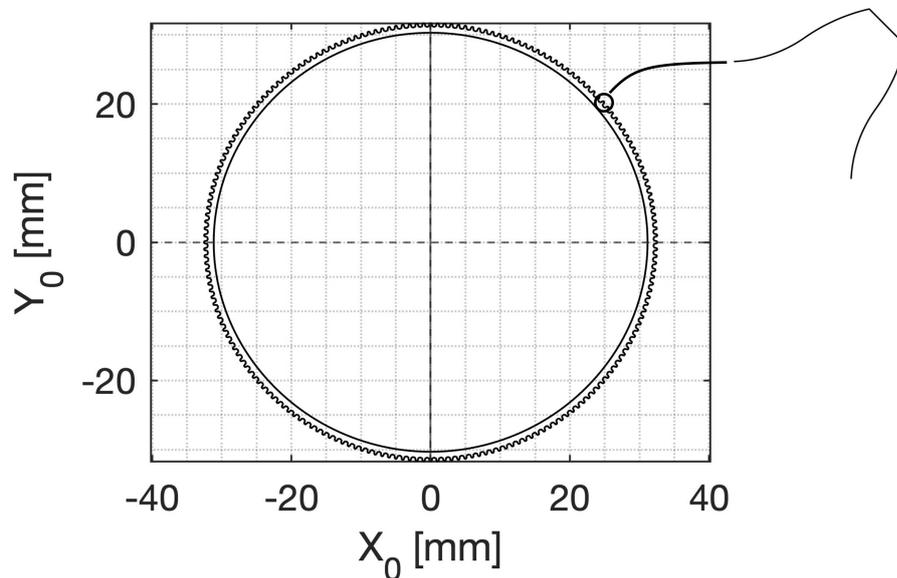


Figura 3.3 Dentatura completa della flexspline

3.2 Profilo denti della Circular Spline

Per poter definire l'ingranamento tra flexspline e circular spline è necessario definire anche il profilo di quest'ultima. Utilizzare il profilo a doppio arco anche per la circular spline farebbe sì da non ottenere un profilo coniugato a quello della flexspline, per tale motivo diviene necessario procedere in maniera differente in modo da ottenere un effettivo profilo coniugato, cioè un profilo in cui il rapporto di trasmissione tra le velocità risulti costante in modo che non vi sia strisciamento tra i denti.

In generale, per ogni profilo di un dente è possibile definire un insieme di profili coniugati che costituiscono il CED (Conjugate Existent Domain) e tra questi profili viene scelto il CTP (Conjugate Tooth Profile) ovvero quello che riesce a garantire le migliori condizioni di ingranamento. Per fare un esempio, nelle ruote dentate a denti dritti il profilo comunemente usato è quello a evolvente.

In [23] viene presentato un metodo analitico per cui due profili si dicono coniugati se soddisfano l'equazione 3.6.

$$\frac{\partial \vec{r}_2}{\partial \theta} \times \frac{\partial \vec{r}_2}{\partial \varphi} = 0 \quad (3.6)$$

dove:

- \vec{r}_2 è il raggio vettore per descrivere il profilo della circular spline;
- θ è l'angolo usato per descrivere il profilo della flexspline;
- φ è l'angolo tra il punto finale della discretizzazione del dente della flexspline e il semiasse maggiore del wave generator. Viene individuato questo punto perché il wave generator durante il suo moto, induce sul dente della flexspline un moto di salita e discesa.

All'equazione differenziale 3.6 deve essere associato il moto del dente della flexspline (di cui si conosce già il profilo) ed una matrice di rotazione per osservare il moto rispetto al profilo del dente della circular spline invece che dal profilo del dente della flexspline. Unendo queste parti è quindi possibile risolvere l'equazione differenziale e ottenere il profilo coniugato del dente della circular spline.

Tuttavia, la soluzione analitica 3.6 richiede metodi complessi caratterizzati da un elevato tempo di elaborazione computazionale. Per tale motivo è necessario

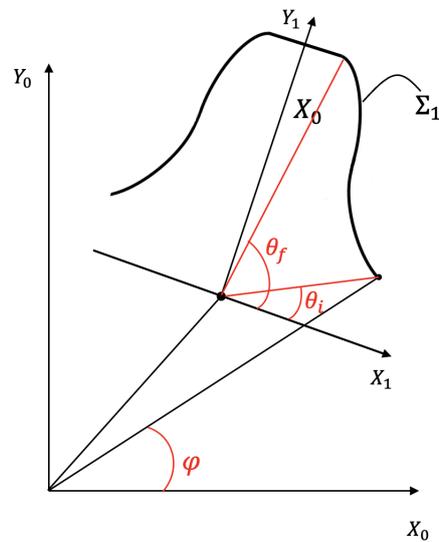


Figura 3.4 Schema angoli per il calcolo analitico di un profilo coniugato

utilizzare un metodo differente. Uno di questi è presentato in [24] in cui viene applicato un metodo cinematico che consiste nello studio del moto della flexspline per poter ricavare per involuppo il profilo della circular spline.

Per lo sviluppo del modello presente in questa tesi, si è preso spunto dal metodo cinematico usando come modello di partenza quello di rotazione del wave generator presentato al capitolo 2.5.

Si prende in considerazione il moto di un singolo dente della flexspline usando le simulazioni che si ricavano dal modello di rotazione. Siccome il profilo del dente della flexspline è descritto nel sistema di riferimento X_1Y_1 è necessario applicare una matrice di rototraslazione per poter osservare il moto dal sistema di riferimento del vano della circular spline.

A rigor di logica è possibile studiare il moto relativo di qualsiasi dente della flexspline. Per semplicità di comprensione si sceglie di studiare il dente che ha l'asse Y_1 sovrapposto all'asse Y_0 poiché in condizioni iniziali giace sul semiasse minore dell'ellisse e quindi con una rotazione di 90° del wave generator si può osservare il moto di salita. Il dente in questione è il n°51 della flexspline.

Quindi, scelto il dente di riferimento della flexspline è possibile individuare l'angolo $\psi_{CS_0,j}$ che permette di identificare l'origine del sistema di riferimento del vano j^{th} della circular spline in condizioni di riposo rispetto al sistema di riferimento

X_0Y_0 , il quale si trova alla destra del dente considerato.

$$\psi_{CS_0,j} = \frac{\pi}{2} - u \quad (3.7)$$

Per identificare il vano j^{th} si considera che, dopo aver costruito la dentatura completa della circular spline, i vani sono equispaziati con un passo angolare pari a $2\pi/Z_{CS}$. Così facendo si ottiene, in condizioni iniziali, che lungo il semiasse minore si ha il dente j^{th} della circular spline. Quindi, per ottenere il sistema di riferimento del vano considerato, si parte da $\pi/2$ (che identifica la posizione del dente della circular spline) e si applica una rotazione oraria "u" pari a metà del passo angolare così che, durante il moto di salita del dente della flexspline e il moto di rotazione della circular spline, si ha l'inserimento del dente n° 51 all'interno del vano j^{th} . Il sistema di riferimento identificato con l'angolo $\psi_{CS_0,j}$ è visibile in figura 3.6.

Il wave generator avrà una rotazione θ_{WG} compresa tra 0° e 90° e in figura 3.5 è possibile vedere come si muove il dente della flexspline.

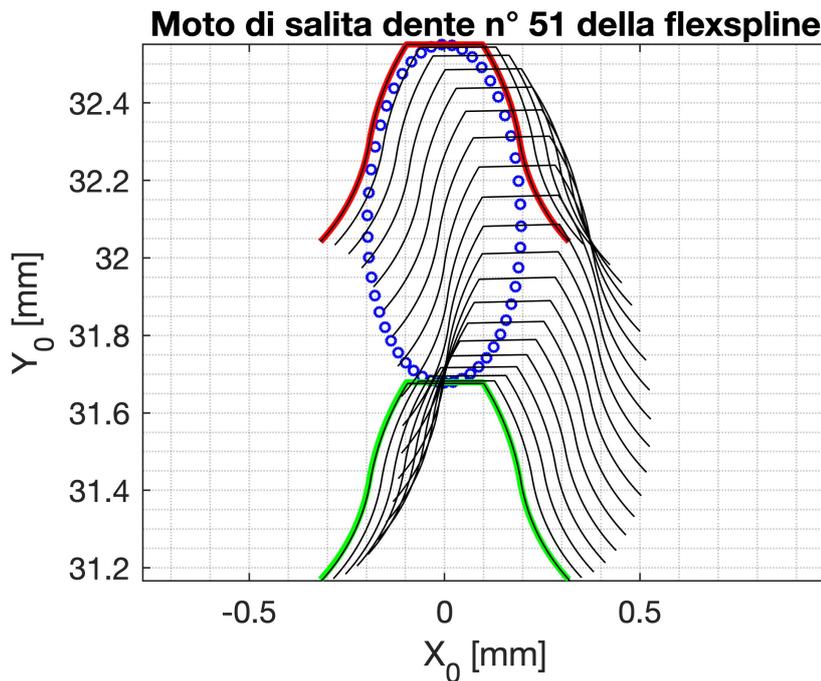


Figura 3.5 Esempio moto di salita del dente n°51 della flexspline

A differenza di quanto fatto in [24], la flexspline è fissa e la circular spline è collegata all'albero di uscita. Da questo dipende il moto che si osserva in figura 3.5 in cui il dente della flexspline raggiunge la configurazione in rosso quando il wave generator

ha ruotato di 90° e torna nella configurazione in verde quando il wave generator ha ruotato di ulteriori 90° .

Tramite il rapporto di trasmissione τ è possibile valutare di quanto idealmente si sposta il vano del dente della circular spline individuando così l'angolo $\psi_{CS,j}$

$$\psi_{CS,j} = \psi_{CS0,j} + \frac{\theta_{WG}}{\tau} \quad (3.8)$$

Avendo l'angolo $\psi_{CS,j}$ che identifica il moto del vano della circular spline è possibile individuare l'origine del suo sistema di riferimento tramite il raggio di base della circular spline tramite 3.9

$$\begin{cases} {}^O x_{O2bgap,j} = Rb_{CS} \cos(\psi_{CS,j}) \\ {}^O y_{O2bgap,j} = Rb_{CS} \sin(\psi_{CS,j}) \end{cases} \quad (3.9)$$

Inoltre, per escludere la rim del dente della flexspline viene definito un nuovo sistema di riferimento $X_{2b}Y_{2b}$ alla base del dente della flexspline tale che:

$$\begin{cases} {}^O x_{O1b} = x_i + s_{rimFS} \cos(\alpha_{Ni}) \\ {}^O y_{O1b} = y_i + s_{rimFS} \sin(\alpha_{Ni}) \end{cases} \quad (3.10)$$

dove x_i e y_i identificano il centro del sistema di riferimento O_1 , del dente n°51 della flexspline, durante il moto di salita ed equivalgono alle coordinate valutate integrando le equazioni di equilibrio 2.1-2.2 durante la rotazione del wave generator. Si procede traslando i punti di discretizzazione del dente della flexspline (figura 3.1) dal sistema di riferimento X_1Y_1 al sistema di riferimento $X_{1b}Y_{1b}$:

$$\begin{cases} {}^{O1b} \vec{x}_{FS,i} = {}^{O1} \vec{x}_{FS,i} \\ {}^{O1b} \vec{y}_{FS,i} = {}^{O1} \vec{y}_{FS,i} - s_{rimFS} \end{cases} \quad (3.11)$$

In figura 3.6 è possibile osservare i sistemi di riferimento visti nelle condizioni iniziali e bisogna anche ricordare che in questo caso si individua l'angolo α_{Ni} di un singolo dente della flexspline che varia nel tempo a causa del movimento imposto dal moto del wave generator come visto nel paragrafo 2.5.

Il valore iniziale di α_{Ni} è $\pi/2$ in quanto come detto precedentemente il dente

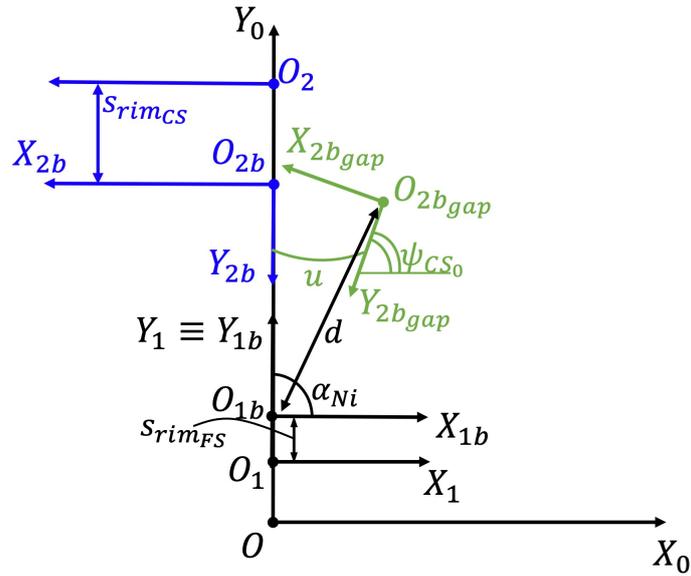


Figura 3.6 Sistemi di riferimento alla base della flexspline e della circular spline

scelto è quello che ha l'asse verticale corrispondente all'asse Y_0 .

Si può così definire la matrice di rototraslazione che permette di osservare il moto del dente della flexspline rispetto al sistema di riferimento del vano della circular spline.

$$M_{gap} = \begin{bmatrix} \cos(\gamma_{gap}) & \sin(\gamma_{gap}) & d_x \\ -\sin(\gamma_{gap}) & \cos(\gamma_{gap}) & d_y \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad (3.12)$$

dove:

- $\gamma_{gap} = \alpha_{Ni} - \psi_{CS,j} + \pi$;
- $d_x = {}^O x_{O1b,i} - {}^O x_{O2bgap,j}$ proiezione lungo l'asse X_0 della distanza d ;
- $d_y = {}^O y_{O1b,i} - {}^O y_{O2bgap,j}$ proiezione lungo l'asse Y_0 della distanza d .

$$\begin{Bmatrix} {}^{O2bgap} \vec{x}_{FS} \\ {}^{O2bgap} \vec{y}_{FS} \\ 1 \end{Bmatrix} = M_{gap} \cdot \begin{Bmatrix} {}^{O1b} \vec{x}_{FS} \\ {}^{O1b} \vec{y}_{FS} \\ 1 \end{Bmatrix} \quad (3.13)$$

Quindi durante il moto del dente della flexspline, tramite la matrice M_{gap} è possibile ottenere la traiettoria dei punti di discretizzazione della flexspline dal punto di vista del vano della circular spline, come si può osservare nella figura 3.7.

Infatti, si vede, evidenziato in rosso, la traiettoria della punta del dente della flexspline che durante il moto di salita entra nel vano della circular spline e tramite estrapolazione è possibile individuare il profilo in verde ovvero il profilo del dente della circular spline.

Selezionando tutto il profilo della flexspline per estrapolare il profilo coniugato della circular spline, sorge la possibilità di una compenetrazione dei denti della prima con la rim della seconda. Quindi, per avere la certezza che questo non accada, si impone l'altezza del dente della circular spline.

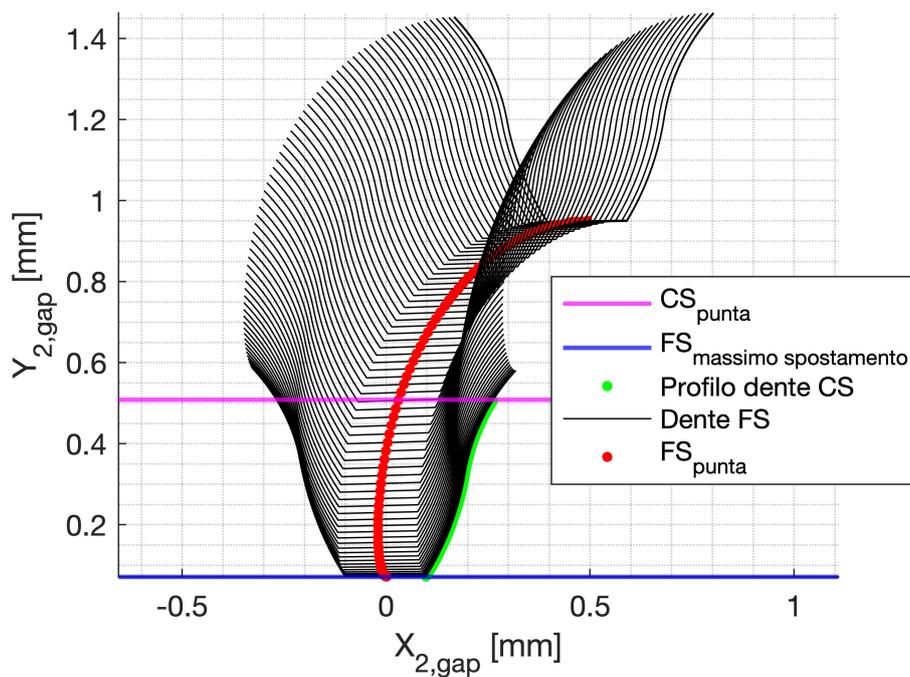


Figura 3.7 Moto di un dente della flexspline visto nel sdr $X_{O2_{gap}}Y_{O2_{gap}}$

Il semiprofilo appena trovato è nel sistema di riferimento del vano della circular spline, quindi bisogna applicare la matrice di rototraslazione 3.14 per poterlo portare nel sistema di riferimento $X_{2b}Y_{2b}$ alla base del dente in modo da poter costruire il

profilo completo e successivamente creare la dentatura completa della circular spline.

$$A_{gap-O2b} = \begin{bmatrix} \cos(u) & -\sin(u) & -Rb_{CS} \sin(u) \\ \sin(u) & \cos(u) & -Rb_{CS}(1 - \cos(u)) \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad (3.14)$$

$$\begin{Bmatrix} {}^{O2b}\vec{x}_{CS} \\ {}^{O2b}\vec{y}_{CS} \\ 1 \end{Bmatrix} = A_{gap-O2b} \cdot \begin{Bmatrix} {}^{O2bgap}\vec{x}_{CS} \\ {}^{O2bgap}\vec{y}_{CS} \\ 1 \end{Bmatrix} \quad (3.15)$$

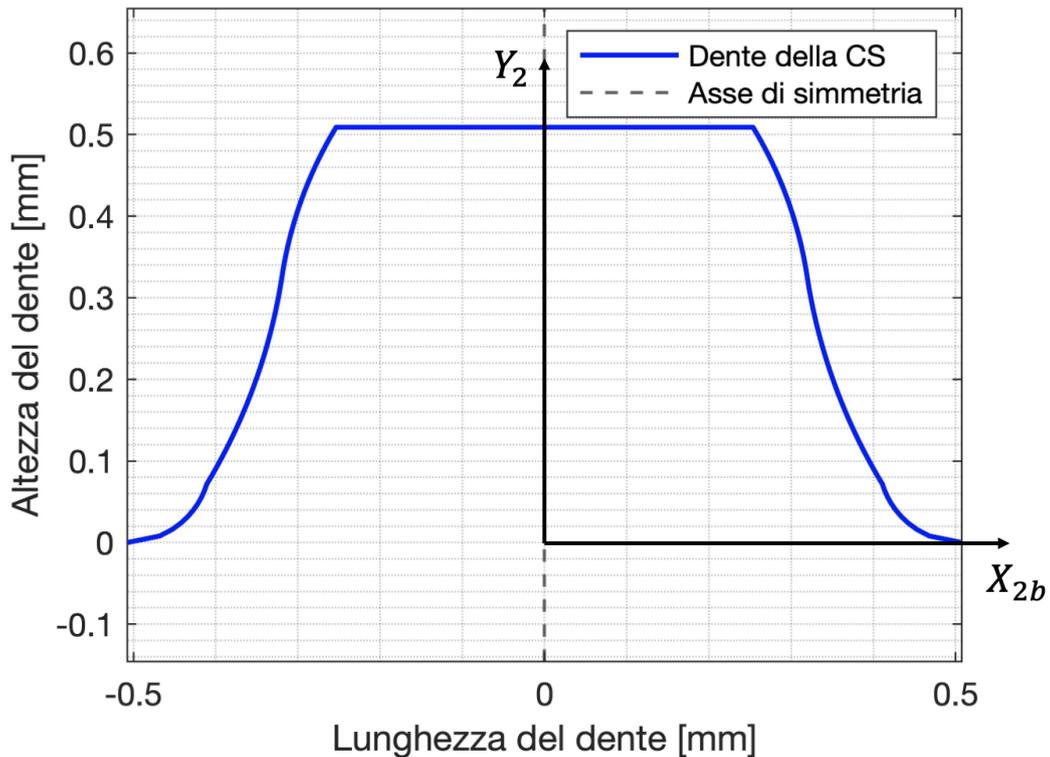


Figura 3.8 Profilo del dente della circular spline

In figura 3.8 si vede il profilo completo di un dente della circular spline rispetto al proprio sistema di riferimento $X_{2b}Y_{2b}$ che sta alla base del dente stesso. Si possono notare anche i raccordi presenti alla base ottenuti per evitare che ci possa essere ingranamento con la punta del dente della flexspline.

Per poter costruire la dentatura completa della circular spline, si definisce un nuovo sistema di riferimento alla base della rim del dente chiamato X_2Y_2 tale che:

$$\begin{cases} {}^O\vec{x}_{O2} = Re_{CS} \cos(\vec{\psi}_{CS_0}) \\ {}^O\vec{y}_{O2} = Re_{CS} \sin(\vec{\psi}_{CS_0}) \end{cases} \quad (3.16)$$

Dove Re_{CS} è il raggio esterno della circular spline e viene utilizzato per identificare la rim della circular spline che viene usata come base per la costruzione dei Z_{CS} denti della circular spline. Inoltre, l'angolo che adesso viene identificato come $\vec{\psi}_{CS_0}$ è un vettore che individua le posizioni di tutti i denti della circular spline, tale che, nell'istante iniziale (wave generator fermo), il primo dente della circular spline si trova subito alla destra del primo dente della flexspline che giace sull'asse X_0 .

$$\vec{\psi}_{CS_0} = \left[0 : \frac{2\pi}{Z_{CS}} : 2\pi \left(1 - \frac{1}{Z_{CS}} \right) \right] - \frac{\pi}{Z_{CS}} \quad (3.17)$$

Quindi, la 3.16 permette di individuare il sistema di riferimento X_2Y_2 rispetto al sistema X_0Y_0 di tutti i denti della circular spline lungo la circonferenza della stessa. Inoltre, la dentatura della circular spline è interna quindi i suoi denti saranno ruotati di π rispetto ai denti della flexspline.

Prendendo come riferimento la figura 3.8, si possono traslare i punti di discretizzazione dal sistema di riferimento $X_{2b}Y_{2b}$ al sistema di riferimento X_2Y_2 .

$$\begin{cases} {}^{O2}\vec{x}_{CS,j} = {}^{O2b}\vec{x}_{CS,j} \\ {}^{O2}\vec{y}_{CS,j} = -({}^{O2b}\vec{y}_{CS,j} - s_{rim}) \end{cases} \quad (3.18)$$

Quindi, conoscendo le coordinate dei punti di discretizzazione del dente della circular spline è possibile usare le equazioni 3.19 per generare la dentatura completa rispetto al sistema di riferimento X_0Y_0 .

$$\begin{cases} {}^O\vec{x}_{CS,j} = {}^O x_{O2j} - (-{}^{O2}\vec{x}_{CS} \sin(\psi_{CS_0,j}) - {}^{O2}\vec{y}_{CS} \cos(\psi_{CS_0,j})) \\ {}^O\vec{y}_{CS,j} = {}^O y_{O2i} - ({}^{O2}\vec{x}_{CS} \cos(\psi_{CS_0,j}) - {}^{O2}\vec{y}_{CS} \sin(\psi_{CS_0,j})) \end{cases} \quad (3.19)$$

Dove ${}^O\vec{x}_{CS,j}$ e ${}^O\vec{y}_{CS,j}$ rappresentano le coordinate dei punti di discretizzazione di ogni j^{th} dente della circular spline.

Applicando le equazioni 3.19 si ricava la dentatura completa della circular spline

come si può vedere in figura 3.9 in cui viene riportata anche la rim.

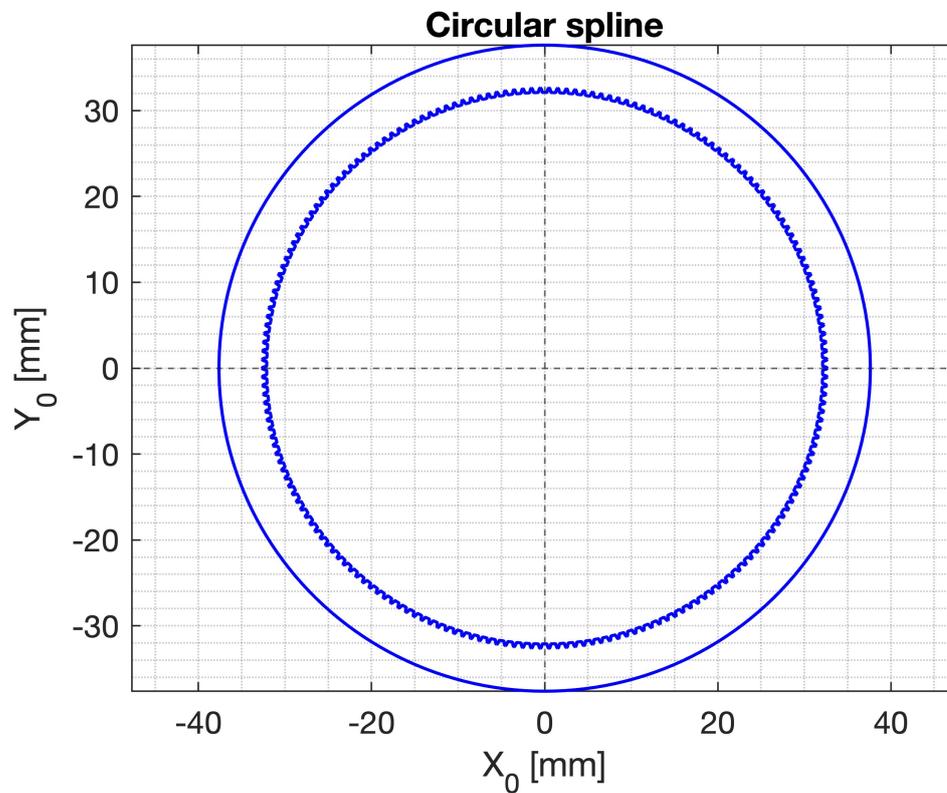


Figura 3.9 Dentatura completa della circular spline

In tale maniera è quindi possibile ottenere i profili completi di flexspline e circular spline in modo da garantire un ingranamento ottimanale ed un rapporto di trasmissione costante.

Definiti tali profili è possibile procedere studiando l'ingranamento tra i denti della circular spline e della flexspline e valutare così il contributo della forza di contatto tra i denti all'interno del modello di inserimento del wave generator.

Capitolo 4

Modello di ingranamento tra Flexspline e Circular Spline

Durante l'inserimento del wave generator, in aggiunta alle forze valutate nel capitolo 2, si valutano le forze di contatto tra i denti della flexspline e i denti della circular spline, in quanto quest'ultima viene implementata nel modello di inserimento. Nello specifico, la deformazione imposta alla flexspline, dal wave generator, permette l'ingranamento con la circular spline. Anche in questo caso, il contatto tra i denti della flexspline e della circular spline viene modellato tramite un sistema molla-smorzatore come si vede in figura 4.2b. Dopo aver valutato l'ingranamento, le forze vengono scomposte lungo gli assi X_0Y_0 per poter essere inserite nell'equazioni di equilibrio per il calcolo di \ddot{x}_i e \ddot{y}_i (equazione 2.3) per arrivare tramite doppia integrazione alle posizioni dei denti della flexspline x_i, y_i .

Prendendo come riferimento un singolo dente della flexspline, è possibile vedere che ingrana a destra e a sinistra con due differenti denti della circular spline. Quindi è possibile definire un ingranamento destro lungo il profilo destro del dente della flexspline e un ingranamento sinistro lungo il suo profilo. Saranno presenti più di una coppia di denti in presa e il numero delle coppie non può essere stabilito a priori ma deve essere ricavato tramite un modello *multibody*. In letteratura, tramite analisi FEM, si è visto come il numero di coppie di denti in presa dipende sia dal profilo del dente che dal carico applicato [2]. Inoltre, si è visto, sempre da analisi sperimentali, come dal numero di denti in presa dipenda la rigidità complessiva del riduttore [25].

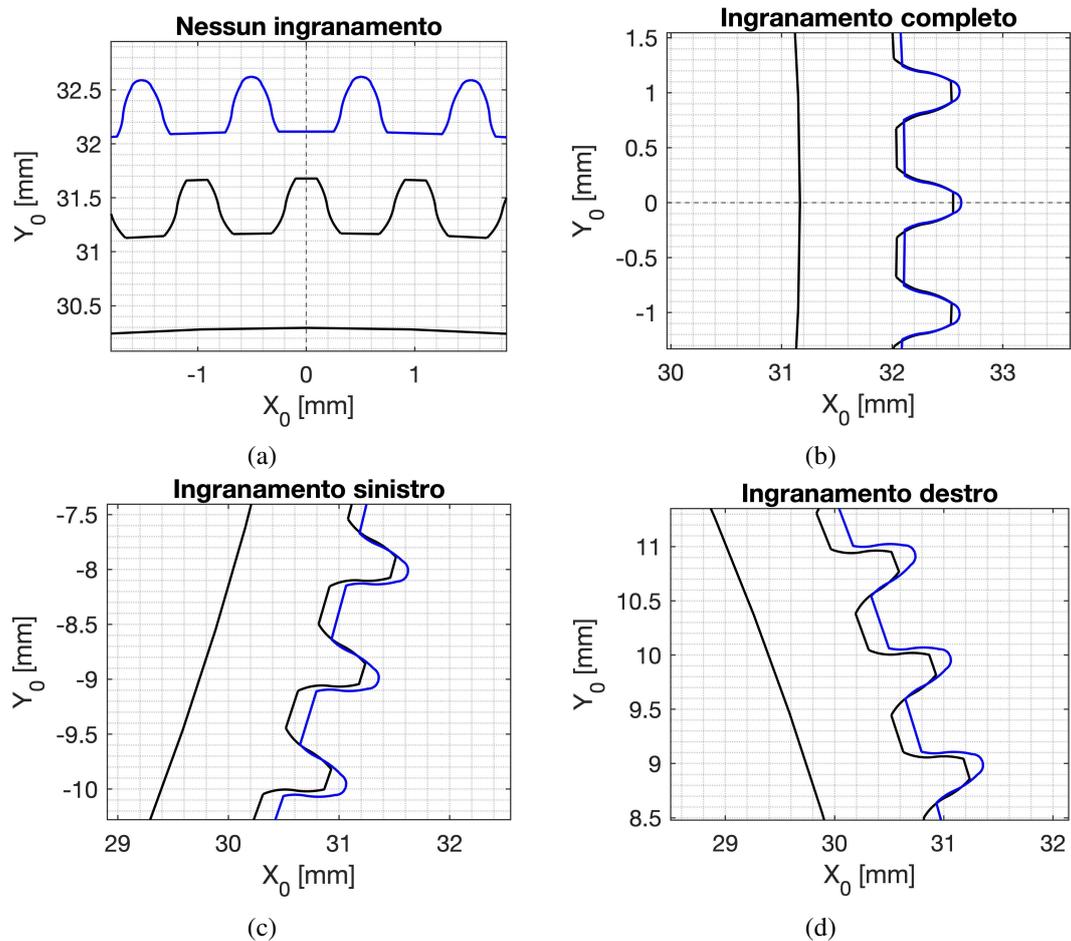


Figura 4.1 Esempio di tipi di ingranamento tra i denti della flexspline e della circular spline

Non tutte le coppie di denti a contatto presentano entrambi gli ingranamenti come è possibile vedere in figura 4.1. Questo grafico è stato realizzato dopo aver simulato l'inserimento del wave generator (senza la circular spline), come descritto nel capitolo 2, così da ottenere la flexspline deformata ellitticamente con il semiasse maggiore lungo l'asse X_0 , in modo da poter visualizzare i tipi di ingranamento. Si osserva in figura 4.1b come nel semiasse maggiore si ha sia ingranamento sinistro che ingranamento destro come ci si aspetterebbe. Invece, nel semiasse minore (figura 4.1a) non si ha contatto quindi non si generano forze di ingranamento. Osserviamo in figura 4.1c un esempio di ingranamento sinistro, con i denti della flexspline e della circular spline che si trovano nel quarto quadrante quindi al di sotto dell'asse X_0 . Questa condizione si realizza anche nel secondo quadrante ovvero tra i denti della flexspline e della circular spline che si trovano al di sopra dell'asse X_0 e alla sinistra

dell'asse Y_0 . Infine, in figura 4.1d si ha un esempio di ingranamento destro che si realizza nel primo quadrante come in figura e nel quarto quadrante. Questi esempi di ingranamento fanno notare come sia presente una simmetria dell'ingranamento.

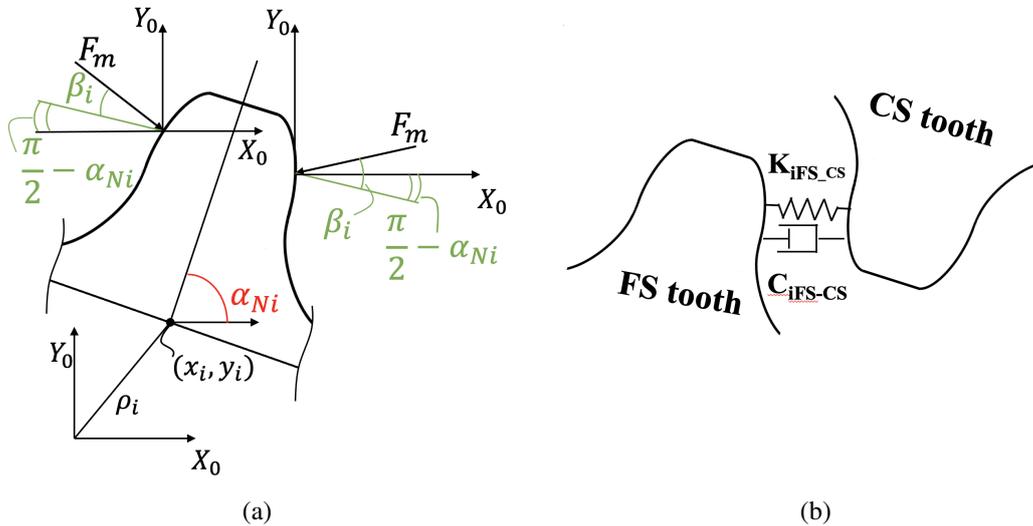


Figura 4.2 Schema delle forze di meshing (a sinistra), schema del modello di contatto (a destra)

In figura 4.2a è possibile osservare la forza di ingranamento F_m che giace lungo la retta di pressione individuata da β_i . Sono presenti una forza a sinistra e una forza a destra e si sottolinea che le due forze così come i due angoli di ingranamento sono differenti in quanto in generale il punto di contatto nel profilo destro non sarà simmetrico rispetto al sinistro. Invece, in figura 4.2b viene schematizzato il contatto, il quale è modellato con un sistema molla-smorzatore che permette di valutare la forza di ingranamento:

$$F_m = K_{FS-CS} \cdot l_m + C_{FS-CS} \cdot \dot{l}_m \quad (4.1)$$

con:

- K_{FS-CS} [N/m] rigidezza di contatto tra flexspline e circular spline;
- C_{FS-CS} [Ns/m] smorzamento di contatto tra flexspline e circular spline;
- l_m [m] deformazione dovuta alla compenetrazione tra profilo della flexspline e profilo della circular spline nel punto di contatto. Non è uguale tra ingranamento sinistro e destro;

- \dot{l}_m [m/s] velocità di deformazione dovuto alla velocità del punto di contatto della flexspline \dot{x}_i e \dot{y}_i e alla velocità della circular spline. Non è uguale tra ingranamento sinistro e destro.

Le componenti l_i e \dot{l}_i verranno definite meglio nel capitolo 4.2 in cui si tratta proprio della scomposizione della compenetrazione e delle forze di contatto lungo la retta di pressione.

Quindi, si estende il modello descritto al capitolo 2, simulando l'inserimento del wave generator all'interno della flexspline che verrà a sua volta inserita all'interno della circular spline permettendo così l'ingranamento tra più coppie di denti delle due ruote. Bisogna specificare che, quando si mette in rotazione il componente, non tutti i denti in ingranamento danno un contributo alla coppia e quindi al moto dell'albero di uscita. Infatti si distinguono due diversi comportamenti dei denti della flexspline [26]: *engaging-into* sono i denti della flexspline che contribuiscono alla trasmissione della coppia; *engaging-out* sono i denti della flexspline in uscita dall'ingranamento che non trasmettono la coppia. La definizione di quali denti sono in *engaging-into* e quali in *engaging-out* dipende dal verso di rotazione dell'albero di ingresso.

Con l'inserimento del wave generator è possibile analizzare un'ulteriore importante caratteristica dei riduttori armonici che riguarda l'ideale assenza di gioco tra i denti e quindi il non verificarsi di backlash durante il moto. Questo è dovuto al fatto che nell'inserimento i denti che ingranano sono simmetrici lungo la circonferenza e questo genera delle forze simmetriche che tengono stabile la circular spline per evitare il backlash [21]. Questo però non toglie il fatto che a causa di eventuali difetti quali giochi o cedevolezza all'interno del Wave Generator, si possa generare un fenomeno di isteresi tra la coppia in uscita e la torsione [26][27].

4.1 Determinazione del punto di contatto tra Flexspline e Circular Spline

Per il calcolo delle forze di ingranamento scambiate tra flexspline e circular spline, bisogna considerare il punto di applicazione di queste forze e la loro direzione.

Quindi, come prima cosa si prevede l'individuazione dei denti che sono effettivamente in ingranamento così da poterli analizzare e in modo da poter ridurre i tempi di simulazione escludendo i denti non in ingranamento. Una prima condizione di ingranamento necessaria ma non sufficiente la si vede nell'equazione 4.2.

$$\rho_{tip_i} = \sqrt{x_{tip_i}^2 + y_{tip_i}^2} > Ri_{CS} + m_{th} \quad (4.2)$$

dove:

- ρ_{tip} è la distanza tra il centro del sistema di riferimento X_0Y_0 e la mezzzeria della punta del dente della flexspline
- Ri_{CS} è il raggio della circonferenza di base della circular spline
- $m_{th} = 5 \cdot 10^{-5}$ è un valore di soglia per tener conto che nella realtà i denti hanno raggi di raccordo tra il profilo e la cima del dente e quindi con un ingranamento minore rispetto agli spigoli vivi.

In questo modo è possibile individuare tutti i denti che hanno un'alta possibilità di ingranamento in quanto si identificano tutti quelli della flexspline che si trovano all'interno del vano tra due denti della circular spline (figura 4.3). Così facendo, dato che si studiano i denti che hanno un'alta possibilità di ingranare, si può valutare l'ingranamento con una significativa riduzione dei tempi di simulazione. Si ricorda che, la condizione appena individuata non dà la certezza di un contatto tra i denti ma solo la possibilità che possa avvenire.

Adesso, si rende necessario valutare gli indici dei denti in ingranamento ovvero capire con quali denti della circular spline entra in contatto il dente i^{th} della flexspline. Bisogna ricordare che ogni arco del profilo dei denti della flexspline è discretizzato con N punti equispaziati. Quindi, il totale dei punti di discretizzazione del profilo destro sarà $2N$ e lo stesso vale per quello sinistro. Anche la punta del dente viene discretizzata in N punti equispaziati per poter così identificare l'angolo ψ_{tip_i} . Si ottiene un profilo del dente con un numero di punti discretizzazione pari a $5N$ definiti rispetto al sistema di riferimento X_0Y_0 tramite 3.5. Grazie a questo è possibile ricavare l'angolo ψ_{tip_i} ovvero l'angolo della cima del dente i^{th} della flexspline che è possibile osservare in figura 4.3 che, dal punto di vista della discretizzazione, sarà in

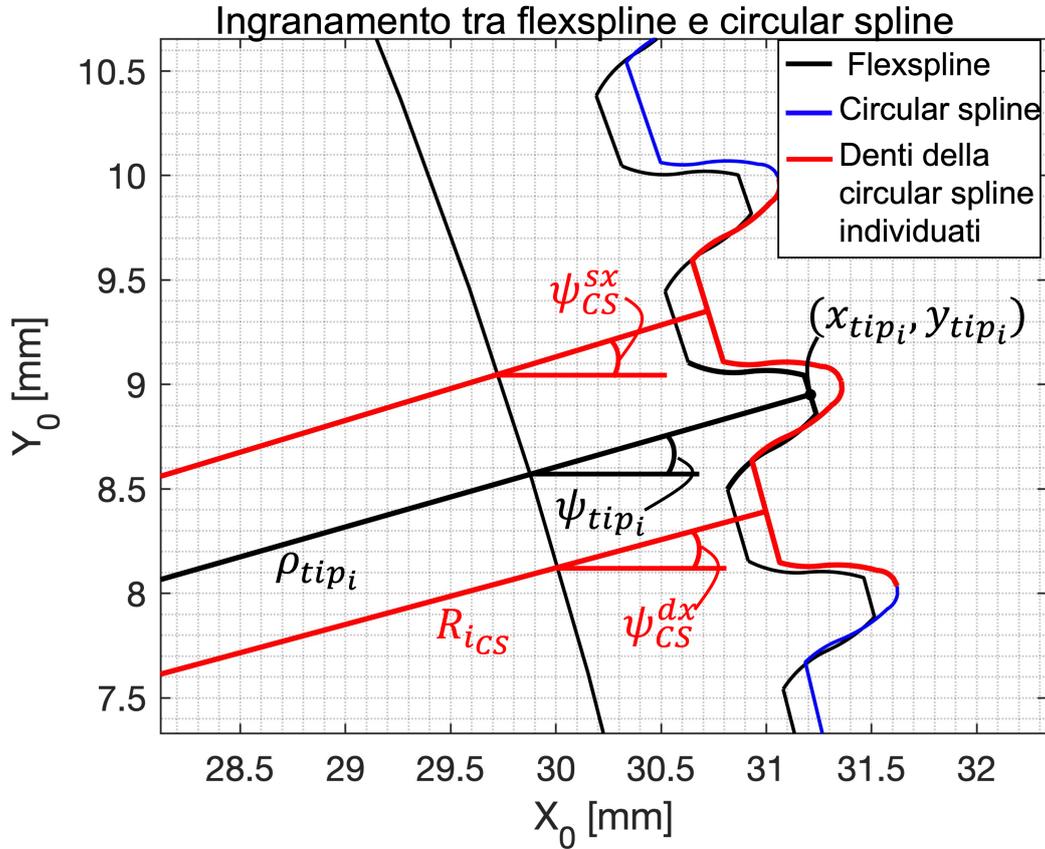


Figura 4.3 Esempio di individuazione dei denti in ingranamento

posizione $5N/2$.

$$\psi_{tip_i} = \arctan\left(\frac{O_{y_{tip_i}}}{O_{x_{tip_i}}}\right) \quad \text{tale che} \quad 0 < \psi_{tip_i} < 2\pi \quad (4.3)$$

Tale angolo viene confrontato con quello ricavato dalla punta dei denti della circular spline $0 < \vec{\psi}_{CS_0} < 2\pi$ definito in 3.17. Il confronto viene svolto eseguendo la differenza tra l'angolo ψ_{tip_i} e i Z_{CS} angoli $\vec{\psi}_{CS_0}$ della circular spline. Da questa differenza, viene selezionato il risultato minimo così da identificare l'angolo $\psi_{CS_{prox_j}}$ più vicino al dente i^{th} della flexspline.

$$\psi_{CS_{prox_j}} = \min(\psi_{tip_i} - \vec{\psi}_{CS_0}) \quad (4.4)$$

Dopo aver valutato quale dente della circular spline è più vicino al dente considerato della flexspline, è possibile distinguere due casi:

$$\text{Caso 1} \quad \Psi_{tip_i} > \Psi_{CS_{prox_j}}$$

$$\text{Caso 2} \quad \Psi_{tip_i} < \Psi_{CS_{prox_j}}$$

Il caso di uguaglianza tra i due angoli è escluso nel modello di inserimento del wave generator poiché corrisponde al caso in cui il dente della flexspline è perfettamente allineato con il dente della circular spline e questo si verifica solo lungo il semiasse minore che è stato escluso dalla condizione dell'equazione 4.2.

Nel caso 1 si ha che il dente j^{th} della circular spline più vicino è alla destra dell' i^{th} dente della flexspline quindi i denti con cui ingrana la flexspline sono il dente 'j' della circular spline a destra e il dente 'j+1' a sinistra quindi $\Psi_{CS_{prox_j}} < \Psi_{tip_i} < \Psi_{CS_{prox_{j+1}}}$.

Nel caso 2 il dente j^{th} della circular spline più vicino si trova alla sinistra del dente i^{th} della flexspline quindi i denti con cui ingrana la flexspline sono i denti 'j-1' (destra) e 'j' (sinistra) della circular spline $\Psi_{CS_{prox_{j-1}}} < \Psi_{tip_i} < \Psi_{CS_{prox_j}}$.

Riassumendo:

$$\begin{cases} \Psi_{CS}^{dx} = \Psi_{CS_{prox_j}} \\ \Psi_{CS}^{sx} = \Psi_{CS_{prox_{j+1}}} \end{cases} \quad \text{Caso 1} \quad (4.5)$$

$$\begin{cases} \Psi_{CS}^{dx} = \Psi_{CS_{prox_{j-1}}} \\ \Psi_{CS}^{sx} = \Psi_{CS_{prox_j}} \end{cases} \quad \text{Caso 2} \quad (4.6)$$

Dopo aver trovato gli angoli e di conseguenza gli indici dei denti della circular spline che ingranano con i denti della flexspline, è possibile ricostruire le coordinate di tutti i punti di discretizzazione dei denti della circular spline appena individuati, rispetto al sistema di riferimento fisso X_0Y_0 riscrivendo le equazioni 3.19.

$$\begin{cases} {}^0\vec{x}_{CS_{dx,j}} = Re_{CS} \cos(\Psi_{CS}^{dx}) + {}^{O2}\vec{x}_{CS} \sin(\Psi_{CS}^{dx}) + {}^{O2}\vec{y}_{CS} \cos(\Psi_{CS}^{dx}) \\ {}^0\vec{y}_{CS_{dx,j}} = Re_{CS} \sin(\Psi_{CS}^{dx}) - {}^{O2}\vec{x}_{CS} \cos(\Psi_{CS}^{dx}) + {}^{O2}\vec{y}_{CS} \sin(\Psi_{CS}^{dx}) \end{cases} \quad (4.7)$$

Prendendo in esempio un dente della flexspline individuato dal raggio ρ_{tip_i} e dall'angolo Ψ_{tip_i} in figura 4.3, è possibile vedere che l'equazione 4.7 individua in rosso il

dente della circular spline alla destra del dente della flexspline.

$$\begin{cases} {}^O\vec{x}_{CS_{sx}} = Re_{CS} \cos(\psi_{CS}^{sx}) + {}^{O2}\vec{x}_{CS} \sin(\psi_{CS}^{sx}) + {}^{O2}\vec{y}_{CS} \cos(\psi_{CS}^{sx}) \\ {}^O\vec{y}_{CS_{sx}} = Re_{CS} \sin(\psi_{CS}^{sx}) - {}^{O2}\vec{x}_{CS} \cos(\psi_{CS}^{sx}) + {}^{O2}\vec{y}_{CS} \sin(\psi_{CS}^{sx}) \end{cases} \quad (4.8)$$

L'equazione 4.8 è analoga alla precedente 4.7 ma con l'utilizzo di ψ_{CS}^{sx} che permette di individuare il dente della circular spline alla sinistra del dente della flexspline, evidenziato sempre in rosso in figura 4.3. All'interno del modello le equazioni 4.7-4.8 non vengono implementate perché vengono usate principalmente come verifica della corretta individuazione dei denti in ingranamento. Invece, gli angoli ψ_{CS}^{dx} e ψ_{CS}^{sx} sono fondamentali per il calcolo della matrice di rototraslazione 4.11.

Come detto in precedenza, la condizione 4.2 è solo necessaria ma non sufficiente, quindi per controllare se c'è ingranamento bisogna individuare la presenza o meno di compenetrazione esclusivamente sul profilo laterale dei denti, dato che sulla punta e sulla base dei denti non si può avere ingranamento. Quindi, dato che la rim non è di interesse per la compenetrazione, si utilizzeranno i sistemi di riferimento alla base dei denti della circular spline e della flexspline (rim esclusa) che sono già stati introdotti nel capitolo 3.2.

$$\begin{cases} {}^Ox_{O1b,i} = {}^Ox_i + s_{rimFS} \cos(\alpha_{Ni}) \\ {}^Oy_{O1b,i} = {}^Oy_i + s_{rimFS} \sin(\alpha_{Ni}) \end{cases} \quad (4.9)$$

Le equazioni 4.9 rispetto alle 3.10 usate nel capitolo 3.2, individuano l'origine dei sistemi di riferimento di tutti i denti della flexspline e di tutti i denti della circular spline. Dopo aver trovato i nuovi sistemi di riferimento si rende necessaria la traslazione dei punti di discretizzazione dai sistemi di riferimento X_1Y_1 e X_2Y_2 ai sistemi di riferimento $X_{1b}Y_{1b}$ e $X_{2b}Y_{2b}$.

$$\begin{cases} {}^{O1b}\vec{x}_{FS,i} = {}^{O1}\vec{x}_{FS,i} \\ {}^{O1b}\vec{y}_{FS,i} = {}^{O1}\vec{y}_{FS,i} - s_{rimFS} \end{cases} \quad (4.10)$$

Per quanto riguarda la discretizzazione dei denti della circular spline si utilizzano le coordinate rispetto al sistema di riferimento $X_{O2b}Y_{O2b}$ descritte in 3.15. Similmente a quanto visto nel capitolo 3.2 è possibile vedere in in figura 4.4 le posizioni dei sistemi di riferimento appena descritti.

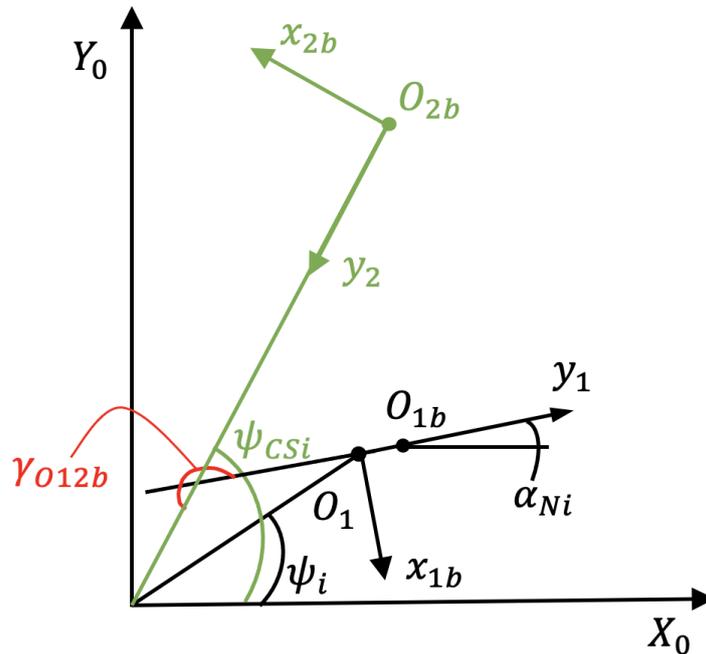


Figura 4.4 Schema delle posizioni dei sistemi di riferimento dei denti di flexspline e circular spline rispetto a X_0Y_0

Quindi, considerando che la compenetrazione riguarda la posizione relativa dei due denti che ingranano si decide di spostare i punti di discretizzazione della circular spline dal sistema di riferimento $X_{O2b}Y_{O2b}$ al sistema di riferimento $X_{O1b}Y_{O1b}$. Per fare ciò, si genera una matrice di roto-traslazione che permette il cambio di coordinate del dente della circular spline. La figura 4.4 permette di visualizzare e analizzare gli angoli e le distanze necessarie per poter definire la matrice 4.11.

$$M = \begin{bmatrix} \cos(\gamma_{O12b}) & \sin(\gamma_{O12b}) & d_{O1bx} \\ -\sin(\gamma_{O12b}) & \cos(\gamma_{O12b}) & d_{O1by} \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad (4.11)$$

Dove:

- $\gamma_{O12b} = \psi_{CSi} - \alpha_{Ni} + \pi$;
- $d_{O1bx} = x_{O2b,i} - x_{O1b,i}$ è la componente lungo l'asse orizzontale della distanza tra gli origini dei sistemi di riferimento O1 e O2;
- $d_{O1by} = y_{O2b,i} - y_{O1b,i}$ è la componente lungo l'asse verticale della distanza tra gli origini dei sistemi di riferimento O1 e O2.

Così facendo si può utilizzare la matrice di roto-traslazione M per tutti i punti di discretizzazione di ciascun dente della circular spline:

$$\begin{Bmatrix} {}^{01b}\vec{x}_{CS,j} \\ {}^{01b}\vec{y}_{CS,j} \\ 1 \end{Bmatrix} = M^{-1} \cdot \begin{Bmatrix} {}^{02b}\vec{x}_{CS,j} \\ {}^{02b}\vec{y}_{CS,j} \\ 1 \end{Bmatrix} \quad (4.12)$$

Tramite l'utilizzo della matrice 4.11 si ottiene, per fare un esempio, l'ingranamento in figura 4.5 dove possiamo osservare la posizione di due denti della circular spline rispetto allo stesso dente della flexspline.

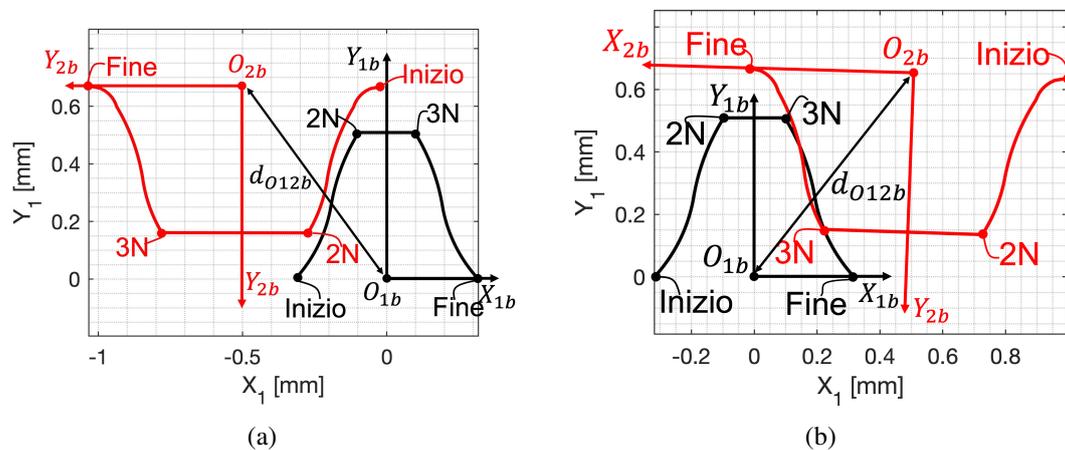


Figura 4.5 Indicizzazione dei profili della flexspline e della circular spline

Nell'esempio in questione si ha il dente $i=10$ della flexspline inserito nel vano tra il dente $j+1=11$, a sinistra, e il dente $j=10$, a destra, della circular spline. Nel caso esposto in figura 4.5a non si ha compenetrazione e quindi non si ha nessuno scambio di forza. Invece, in figura 4.5b, si ha compenetrazione e si può identificare un punto lungo il profilo di flexspline e circular spline nel quale avviene lo scambio di forze.

Dato che i tipi di ingranamento sono due (destro e sinistro) si è pensato di sviluppare il modello separando profilo destro della flexspline e profilo sinistro, in modo da poter selezionare i corretti punti di discretizzazione come mostrato in figura 4.5b in cui analizziamo $2N$ punti di discretizzazione della flexspline (dal punto $3N$ fino alla fine) e $2N$ punti della circular spline (dal punto $3N$ alla fine). Invece, in figura 4.5a vengono selezionati dal punto iniziale della flexspline al punto $2N$. Questa divisione tra ingranamento sinistro e destro è possibile grazie all'individuazione

dei due diversi angoli ψ_{CS}^{sx} e ψ_{CS}^{dx} che permettono di generare due matrici M di roto-traslazione da applicare ai due denti della circular spline che si trovano alla sinistra e alla destra del dente della flexspline.

Dopo aver isolato i punti di discretizzazione del profilo destro e sinistro della flexspline (per separare ingranamento destro e sinistro), si individuano i possibili punti che vanno in compenetrazione prendendo tutti quelli del profilo del dente della circular spline che hanno coordinata ${}^{01b}\vec{y}_{CS,j}$ inferiore alla coordinata ${}^{01b}\vec{y}_{FS,i}$ della punta della flexspline ${}^{01b}\vec{y}_{CS,j} < \max({}^{01b}\vec{y}_{FS,i})$. Questo permette di escludere anche un eventuale contatto sulla punta del dente dove non si vuole avere ingranamento.

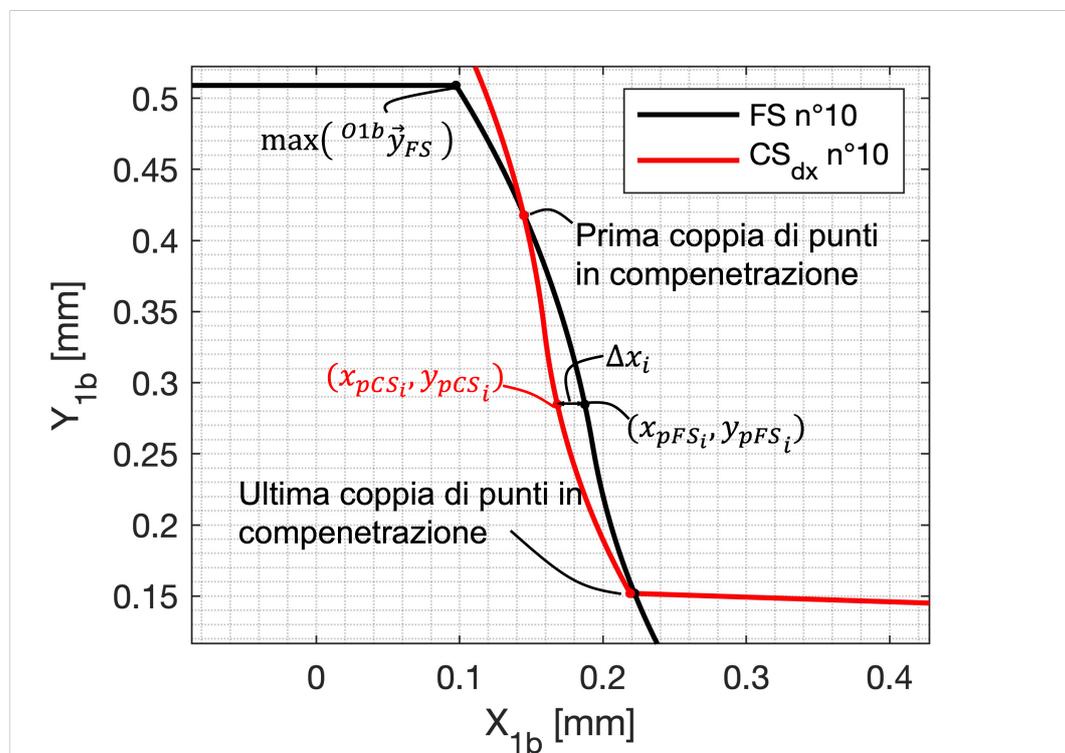


Figura 4.6 Esempio di individuazione del punto di compenetrazione

Quindi, si conoscono le coordinate ${}^{01b}\vec{y}_{CS,j}$ dei punti della circular spline che hanno la possibilità di compenetrare con la flexspline. A parità di coordinata y si valutano le coordinate ${}^{01b}\vec{x}_{FS,i}$ dei punti sul dente della flexspline e per farlo si ricorre alle equazioni che descrivono il profilo a doppio arco della flexspline 3.1-3.2. Nello specifico si risolvono le equazioni ponendo come variabile comune le coordinate ${}^{01b}\vec{y}_{CS,j}$ appena trovate.

Per le coordinate dell'arco \widehat{AB} si risolve il sistema 3.1 usando:

$${}^{01b}\vec{x}_{FS,i} = \rho_a \cos \left[a \sin \left(\frac{{}^{01b}\vec{y}_{FS,i} - y_{oa}}{\rho_a} \right) \right] \quad (4.13)$$

Invece per l'arco \widehat{BC} si usa:

$${}^{01b}\vec{x}_{FS,i} = x_{of} - \rho_f \cos \left[a \sin \left(\frac{y_{of} - {}^{01b}\vec{y}_{FS,i}}{\rho_f} \right) \right] \quad (4.14)$$

In entrambe le equazioni si è posto ${}^{01b}\vec{y}_{FS,i} = {}^{01b}\vec{y}_{CS,j}$ poiché come spiegato si ricercano due punti, di cui uno sul profilo del dente j^{th} della circular spline e uno sul profilo del dente i^{th} della flexspline, posti alla stessa ordinata.

Quindi, è stato possibile ottenere n coordinate ${}^{01b}\vec{x}_{CS,j}$ per la circular spline e n coordinate ${}^{01b}\vec{x}_{FS,i}$ sulla flexspline alla stessa coordinata ${}^{01b}\vec{y}_{FS,i}$. Fatto questo si calcola la differenza per ogni coordinata differenziando tra ingranamento destro e sinistro per poter valutare la presenza di compenetrazione.

$$\begin{cases} \vec{\Delta x}_i = \vec{x}_{CS,j} - \vec{x}_{FS,i} \leq 0 & \text{si compenetrazione destra} \\ \vec{\Delta x}_i = \vec{x}_{CS,j} - \vec{x}_{FS,i} \geq 0 & \text{si compenetrazione sinistra} \end{cases} \quad (4.15)$$

La prima condizione dell'equazione 4.15 viene applicata nel caso di possibile ingranamento destro e la seconda condizione nel caso di possibile ingranamento sinistro. Grazie alle condizioni 4.15 si ricavano più coppie di punti di discretizzazione che compenetrano lungo il profilo, di fatto la compenetrazione è rappresentata come un vettore. In figura 4.6 è possibile osservare un esempio di compenetrazione e si evidenziano le prime e le ultime coppie di coordinate che soddisfano la condizione 4.15 nel caso di ingranamento destro. Per identificare una singola compenetrazione lungo il profilo che permette di evidenziare un unico punto in cui applicare la forza di ingranamento, si sceglie di individuare la media degli indici della prima e dell'ultima coppia di punti di discretizzazione visibili in figura 4.6. Così facendo è stato possibile individuare un punto sul profilo della circular spline e un punto sul profilo della flexspline e di conseguenza viene valutata la compenetrazione lungo l'asse delle ascisse come differenza delle coordinate dei punti:

$$\Delta x_i = {}^{01b}x_{pCS,j} - {}^{01b}x_{pFS,i} \quad (4.16)$$

L'equazione 4.16 è un'approssimazione della compenetrazione che verrà valutata in modo generale nel prossimo paragrafo. Il punto in cui viene applicata la forza di ingranamento, sarà il punto medio dell'approssimazione della compenetrazione Δx . Questa approssimazione del punto di applicazione della forza e della compenetrazione viene considerata accettabile in quanto le dimensioni dei denti della circular spline e della flexspline sono trascurabili rispetto ai raggi delle stesse ruote quindi l'errore commesso nell'individuazione del punto è trascurabile.

Grazie a questa approssimazione si riesce così ad identificare una compenetrazione usando solo le equazioni del profilo a doppio arco della flexspline senza applicare le stesse equazioni anche al profilo della circular spline in quanto quest'ultima viene generata individuando le posizioni successive della flexspline come descritto nel paragrafo 3.2. Questo semplifica il processo di individuazione del punto di ingranamento in quanto non si appesantisce il modello con un sistema di equazioni per trovare il punto di intersezione tra due profili.

4.2 Calcolo dell'angolo di ingranamento e scomposizione della compenetrazione

Si procede con il calcolo dell'angolo di pressione β_i ovvero l'angolo che definisce la direzione in cui viene applicata la forza di ingranamento. Per valutarlo si applicano le equazioni 3.3 e 3.4 analizzate nel capitolo 3.1 utilizzando come coordinate del punto di contatto quelle ricavate nel paragrafo 4.1. Inoltre, tramite l'angolo di pressione, si scompone la compenetrazione 'l' per valutare la forza di ingranamento lungo la retta di pressione tramite la 4.1. Tramite lo schema in figura 4.7 è possibile osservare la relazione che intercorre tra la retta di pressione e la compenetrazione lungo gli assi X_0Y_0 . Ciò permette di riconoscere quale angolo è compreso tra la direzione della retta di pressione e la direzione orizzontale e si vede che tale angolo è differente a seconda che si abbia ingranamento destro e ingranamento sinistro come specificato nell'equazioni 4.17.

$$\begin{cases} \beta_i + \left(\frac{\pi}{2} - \alpha_{Ni}\right) & \text{ingranamento sinistro} \\ \beta_i - \left(\frac{\pi}{2} - \alpha_{Ni}\right) & \text{ingranamento destro} \end{cases} \quad (4.17)$$

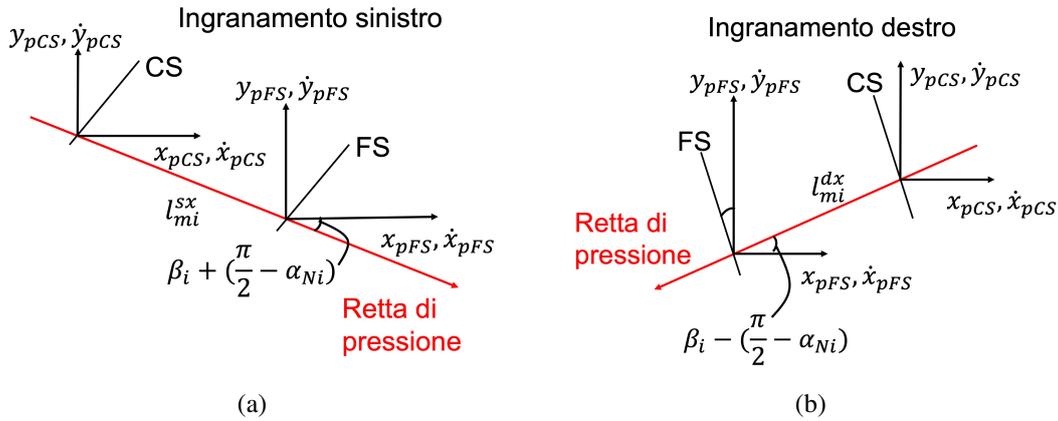


Figura 4.7 Schema dell'ingranamento tra flexspline e circular spline per la scomposizione lungo la retta di pressione

Ora che la retta di pressione è stata individuata, si procede analizzando la figura 4.7 in modo da identificare lo spostamento relativo tra flexspline e circular spline per poter individuare la compenetrazione e la velocità di compenetrazione per poi procedere con la scomposizione lungo la stessa retta di pressione.

$$\begin{aligned}
 l_{mi}^{sx} &= ({}^0x_{pCS_j} - {}^0x_{pFS_i}) \cos \left[\beta_i + \left(\frac{\pi}{2} - \alpha_{Ni} \right) \right] + ({}^0y_{pFS_i} - {}^0y_{pCS_j}) \sin \left[\beta_i + \left(\frac{\pi}{2} - \alpha_{Ni} \right) \right] \\
 &= ({}^0x_{pFS_i} - {}^0x_{pCS_j}) \cdot \sin [\beta_i - \alpha_{Ni}] + ({}^0y_{pFS_i} - {}^0y_{pCS_j}) \cdot \sin [\beta_i - \alpha_{Ni}]
 \end{aligned} \tag{4.18}$$

$$\begin{aligned}
 l_{mi}^{dx} &= ({}^0x_{pFS_i} - {}^0x_{pCS_j}) \cos \left[\beta_i - \left(\frac{\pi}{2} - \alpha_{Ni} \right) \right] + ({}^0y_{pFS_i} - {}^0y_{pCS_j}) \sin \left[\beta_i - \left(\frac{\pi}{2} - \alpha_{Ni} \right) \right] \\
 &= ({}^0x_{pCS_j} - {}^0x_{pFS_i}) \cdot \sin [\beta_i + \alpha_{Ni}] - ({}^0y_{pCS_j} - {}^0y_{pFS_i}) \cdot \sin [\beta_i + \alpha_{Ni}]
 \end{aligned} \tag{4.19}$$

L'equazione 4.18 rappresenta la scomposizione della compenetrazione dell'ingranamento sinistro e l'equazione 4.19 quella dell'ingranamento destro.

Tale scomposizione, riportata per una completa analisi dell'ingranamento, fa riferimento al caso più generale possibile utilizzando le coordinate del punto di ingranamento rispetto al sistema di riferimento X_0Y_0 . Invece, nel modello creato vengono utilizzati i punti di ingranamento rispetto al sistema di riferimento alla base del dente della flexspline $X_{1b}Y_{1b}$ e si ha che la compenetrazione non ha componente lungo l'asse Y_{01b} a causa dell'approssimazione valutata alla fine del capitolo 4.1.

Per quanto riguarda il calcolo della velocità di compenetrazione, esso contiene

il contributo della flexspline e della circular spline. Il contributo di quest'ultima è presente, come si potrà notare al paragrafo 4.4, solo nel caso in cui la circular spline è in movimento quindi nel modello di solo inserimento non sarà presente. Mentre, per quanto riguarda il contributo della flexspline, si utilizza la velocità ricavata dall'equilibrio alla traslazione di ogni singolo dente rispetto al sistema di riferimento X_0Y_0 in quanto, essendo il dente considerato un elemento rigido, ogni punto di discretizzazione si muove alla stessa velocità.

$$\dot{l}_{mi}^{sx} = \dot{x}_i \cdot \sin(\beta_i - \alpha_{Ni}) + \dot{y}_i \cdot \cos(\beta_i - \alpha_{Ni}) \quad (4.20)$$

$$\dot{l}_{mi}^{dx} = +\dot{x}_i \cdot \sin(\beta_i + \alpha_{Ni}) - \dot{y}_i \cdot \cos(\beta_i + \alpha_{Ni}) \quad (4.21)$$

Le stesse considerazioni di generalità fatte per la compenetrazione possono essere fatte anche per la velocità di compenetrazione solo che in questo caso non si ha il contributo della circular spline in quanto ferma e si considera direttamente la velocità di ogni singolo dente della flexspline riferita al sistema di riferimento X_0Y_0 .

Ricordiamo che le scomposizioni ricavate in 4.18 e in 4.19 riguardano una scomposizione generale e rigorosa della compenetrazione. Nel modello *multibody* creato verrà usata l'approssimazione della compenetrazione valutata in 4.16 che verrà scomposta lungo la retta di pressione secondo l'equazione 4.22.

$$l_{mi} = \Delta x_i \cos(\beta_i) \quad (4.22)$$

4.3 Scomposizione forza di ingranamento

Per concludere la trattazione sull'ingranamento tra flexspline e circular spline, si procede con la scomposizione della forza di ingranamento lungo gli assi X_0 e Y_0 . Si riprende la figura 4.2 per capire qual è la direzione della forza rispetto agli assi orizzontali e verticale e si nota che ci saranno due scomposizioni diverse per quanto riguarda la forza di ingranamento sinistra e quella di destra.

Per la forza di ingranamento destra abbiamo:

$$\begin{cases} F_{mx}^{dx} = -F_m \cos[\beta_i - (\frac{\pi}{2} - \alpha_{Ni})] = -F_m \sin(\beta_i + \alpha_{Ni}) \\ F_{my}^{dx} = -F_m \sin[\beta_i - (\frac{\pi}{2} - \alpha_{Ni})] = F_m \cos(\beta_i + \alpha_{Ni}) \end{cases} \quad (4.23)$$

Per la forza di ingranamento sinistra abbiamo:

$$\begin{cases} F_{mx}^{sx} = F_m \cos[\beta_i + (\frac{\pi}{2} - \alpha_{Ni})] = -F_m \sin(\beta_i - \alpha_{Ni}) \\ F_{my}^{sx} = -F_m \sin[\beta_i + (\frac{\pi}{2} - \alpha_{Ni})] = -F_m \cos(\beta_i - \alpha_{Ni}) \end{cases} \quad (4.24)$$

I pedici "mx" e "my", delle forze di ingranamento nelle equazioni 4.23 e 4.24, indicano rispettivamente le componenti lungo l'asse X_0 e lungo l'asse Y_0 necessarie per le equazioni di equilibrio 2.1 e 2.2. Le due scomposizioni sono fatte prendendo in esempio un dente nel primo quadrante, perché per gli altri quadranti, tramite gli archi associati e grazie al fatto che tutti gli angoli sono compresi da 0 e 2π , si scompongono allo stesso modo.

Le forze di ingranamento appena trovate si inseriscono nell'equazione di equilibrio alla traslazione per completare il calcolo della posizione dei denti x_i e y_i nel modello di inserimento del wave generator. Si vedrà nel capitolo 5 l'effetto dell'ingranamento sulla flexspline e sul wave generator. Si andrà anche a verificare che ultimato l'inserimento, si deve avere coppia nulla sulla circular spline e sulla flexspline in quanto non si ha la rotazione del wave generator.

Si conclude notando che nel modello sviluppato c'è stata la necessità di ridurre il tempo di simulazione elevato dovuto al calcolo di tutte le forze di ingranamento agenti su 200 denti che avevano una discretizzazione del profilo di N punti. Quindi, si è proceduto facendo una prima simulazione che comprende tutti i denti di flexspline e circular spline per poter individuare quali denti fossero in ingranamento durante tutta la simulazione per poter selezionare solo quelli utili per le simulazioni successive, in quanto non essendo ancora presente alcuna rotazione, i denti in ingranamento rimarranno sempre gli stessi. Si riscontra che i denti in ingranamento sono quelli a $\pm 20^\circ$ rispetto al semiasse maggiore sia lungo il lato destro che in quello sinistro del riduttore armonico. Questa ultima considerazione permette di avere la certezza sui denti in ingranamento rendendo nella pratica superflua la condizione definita con l'equazione 4.2.

4.4 Rotazione del Wave Generator

La rotazione del wave generator con la presenza della circular spline, viene implementata in un secondo modello in cui le condizioni iniziali delle posizioni dei denti

della flexspline (x_i, y_i) derivano dalle condizioni finali del modello di inserimento del wave generator. Quindi, partendo dalla flexspline già deformata, si applica, come input, la velocità di rotazione del wave generator θ_{WG} . Così facendo è possibile analizzare la trasmissione del moto dal wave generator alla circular spline dovuta alle forze di ingranamento. Inoltre, è possibile analizzare quello che viene definito come errore cinematico (equazione 4.25) che definisce l'errore che c'è tra lo spostamento effettivo della circular spline e quello teorico che si avrebbe tramite il rapporto di trasmissione

$$\theta_{ke} = \theta_{CS} - \frac{\theta_{WG}}{\tau} \quad (4.25)$$

con:

- θ_{ke} [°] è l'errore cinematico;
- θ_{CS} [°] è l'angolo di rotazione di uscita della circular spline;
- $\frac{\theta_{WG}}{\tau}$ [°] è il rapporto tra l'angolo di rotazione del Wave Generator e il rapporto di trasmissione e rappresenta la rotazione ideale che si desidera ottenere.

Il modello di rotazione del wave generator in cui è presente anche la circular spline deve considerare il moto di quest'ultima e il suo equilibrio alla rotazione. Nel presente paragrafo si può vedere come influisce la velocità della circular spline sulle forze di ingranamento e come valutare l'angolo di rotazione θ_{CS} che viene generato dall'interazione con la flexspline. Nello specifico, le forze di contatto generano una coppia che fa ruotare la circular spline permettendo così la trasmissione del moto dall'albero di ingresso, collegato al wave generator, all'albero di uscita, collegato alla circular spline.

Prima di tutto, si considera la velocità della circular spline che, essendo in moto, modifica le relazioni 4.20-4.21 che descrivono la velocità di compenetrazione considerando solo la velocità della flexspline. Di fatto, si nota che da ora in avanti si usa il pedice 'j' per identificare i denti in quanto ci si riferisce alla circular spline. Si inizia considerando che i punti di ingranamento valutati nel capitolo 4.1, devono essere riportati nel sistema di riferimento X_0Y_0 e vanno riferiti rispetto ai Z_{CS} denti della circular spline e non più ai Z_{FS} denti della flexspline.

Dalla figura 4.8 è possibile individuare i parametri necessari per poter ricavare sia la velocità tangenziale della circular spline, sia per poter calcolare la coppia generata dalle forze di ingranamento. Il punto identificato da (x_{mj}, y_{mj}) si trova a metà della

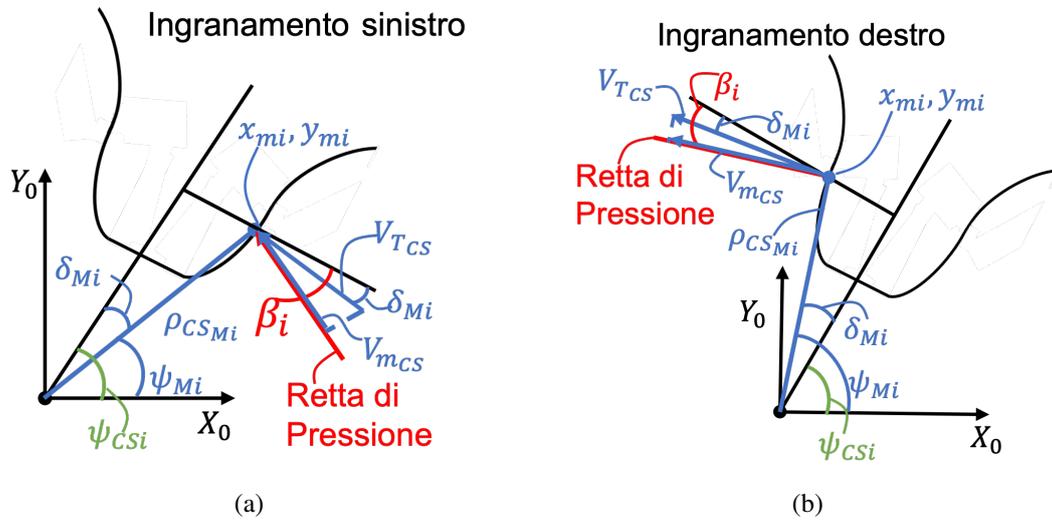


Figura 4.8 Schema per la velocità tangenziale della circular spline

compenetrazione valutata in 4.16 e per semplicità lo si raffigura sulla circular spline in figura 4.8.

$$\begin{cases} \rho_{CS_{Mj}} = \sqrt{x_{Mj}^2 + y_{Mj}^2} \\ \psi_{Mj} = \arctan\left(\frac{y_{Mj}}{x_{Mj}}\right) \quad 0 < \psi_{Mj} < 2\pi \end{cases} \quad (4.26)$$

Dove:

- $\rho_{CS_{Mj}}$ [m] è la distanza tra il punto di ingranamento e l'origine del sistema di riferimento X_0Y_0 ;
- ψ_{Mj} è l'angolo che identifica il punto di ingranamento rispetto all'asse X_0 .

Conoscendo la velocità angolare della circular spline e la posizione del punto di contatto è possibile calcolare la velocità tangenziale v_{TCSj} (equazione 4.27) la quale dovrà successivamente essere scomposta lungo la retta d'azione per poter considerare il contributo alla forza di ingranamento.

$$v_{TCSj} = \dot{\theta}_{CS} \cdot \rho_{CS_{Mj}} \quad (4.27)$$

Inoltre, si definisce l'angolo δ_{Mj} a seconda se si ha ingranamento destro o sinistro in modo da avere il valore dell'angolo sempre positivo ottenendo così un'unica formula

per la scomposizione.

$$\begin{cases} \delta_{Mj} = \psi_{Mj} - \psi_{CSj} & \text{ingranamento destro} \\ \delta_{Mj} = \psi_{CSj} - \psi_{Mj} & \text{ingranamento sinistro} \end{cases} \quad (4.28)$$

Così facendo si scompone la velocità tangenziale del punto di ingranamento della circular spline lungo la direzione della retta di pressione tramite l'equazione 4.29

$$v_{mCSj} = v_{TCSj} \cdot \cos(\beta_i - \delta_{Mj}) \quad (4.29)$$

Questa velocità, lungo la retta di pressione, si aggiunge al contributo di velocità per il calcolo della velocità di penetrazione \dot{l} , necessaria per la componente di smorzamento della forza di ingranamento.

$$\dot{l}_{mi}^{sx} = -v_{mCSj} + {}^O \dot{x}_{FSi} \cdot \sin(\beta_i - \alpha_{Ni}) + {}^O \dot{y}_{FSi} \cdot \cos(\beta_i - \alpha_{Ni}) \quad (4.30)$$

$$\dot{l}_{mi}^{dx} = v_{mCSj} + {}^O \dot{x}_{FSi} \cdot \sin(\beta_i + \alpha_{Ni}) - {}^O \dot{y}_{FSi} \cdot \cos(\beta_i + \alpha_{Ni}) \quad (4.31)$$

Si può procedere con il calcolo della coppia generata dalle forze di ingranamento. Sempre guardando la figura 4.8 è possibile raffigurare la forza di ingranamento lungo la retta di pressione così che la scomposizione sia quella all'equazione 4.32

$$C_{Mj} = F_{Mj} \cdot \cos(\beta_i - \delta_{Mj}) \cdot \rho_{CSMj} \quad (4.32)$$

Dove F_{Mj} indica la forza di ingranamento applicata sul profilo del dente j^{th} della circular spline e C_{Mj} è il contributo di coppia del j^{th} dente della circular spline. Dalla figura 4.9 si ricava l'equazione:

$$J_{CS} \ddot{\theta}_{CS} + c_{CS} \dot{\theta} + T_r = \sum_{i=1}^{Z_{CS}} C_{Mj} \quad (4.33)$$

Da questo equilibrio è possibile ricavare l'accelerazione angolare $\ddot{\theta}_{CS}$ e per integrazione anche la velocità angolare $\dot{\theta}_{CS}$ e lo spostamento angolare θ_{CS} .

$$\ddot{\theta}_{CS} = \frac{1}{J_{CS}} \cdot \left(\sum_{i=1}^{Z_{CS}} C_{Mi} - T_r - c_{CS} \dot{\theta}_{CS} \right) \quad (4.34)$$

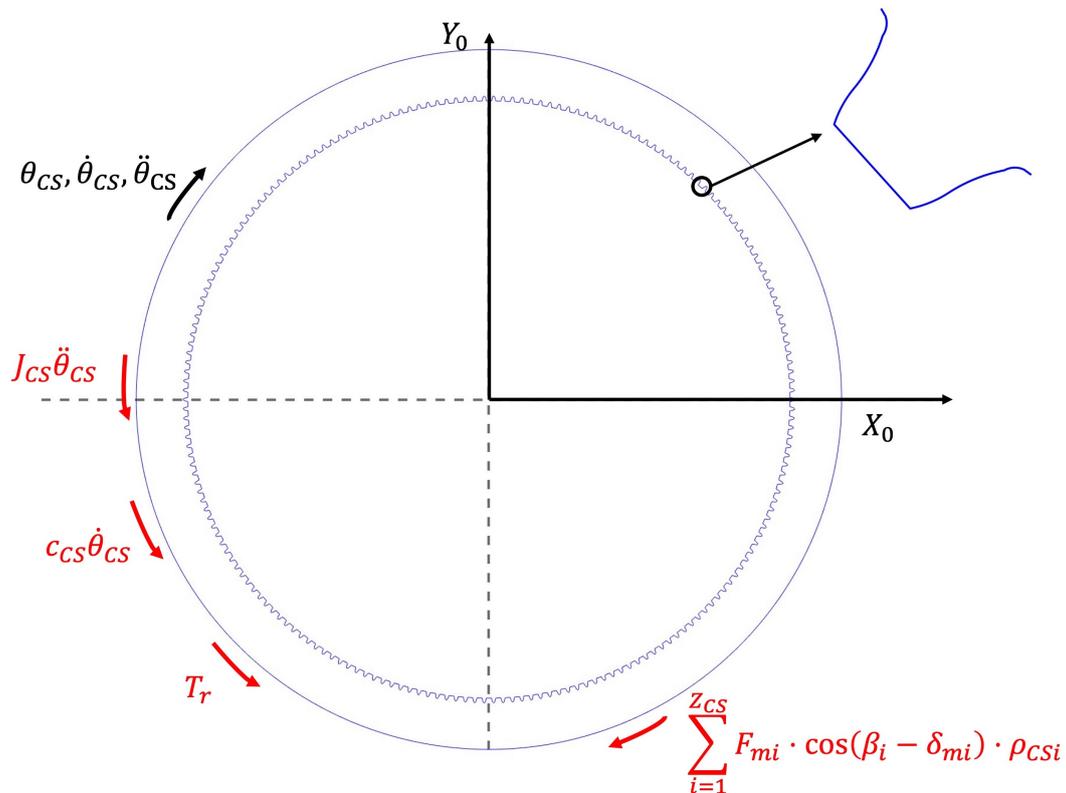


Figura 4.9 Diagramma di corpo libero della circular spline

Dove:

- $T_r [Nm]$ è la coppia di carico;
- $c_{CS} [Nms/rad]$ è il coefficiente di smorzamento della circular spline;
- $J_{CS} [kg \cdot m^2]$ è il coefficiente di inerzia della circular spline.

Questa equazione di equilibrio si può implementare anche nel modello del solo inserimento del wave generator con l'ovvio risultato che la coppia risultante sarà nulla in quanto le forze scambiate tra flexspline e circular spline sono simmetriche.

Grazie a questo ultimo passaggio è quindi possibile valutare lo spostamento angolare della circular spline in funzione dell'input dato come velocità di rotazione del Wave Generator che integrato ci dà lo spostamento angolare. Così facendo si può valutare l'errore cinematico come discusso all'inizio del capitolo.

4.5 Equilibrio alla rotazione alla base del dente della flexspline

Ad ora, l'equilibrio alla rotazione alla base del dente della flexspline non viene inserito nel modello del riduttore armonico ma viene descritto teoricamente in questo capitolo.

Ciascun dente della flexspline, oltre al moto oscillatorio dovuto alla rotazione del wave generator, può ruotare attorno al centro del sistema di riferimento X_1Y_1 , a causa dell'ingranamento con la circular spline. Nonostante tale rotazione sia di piccola entità, si rende necessario l'equilibrio alla rotazione per poter correggere l'angolo α_{Ni} per ottenere un modello completo del riduttore armonico.

$$\alpha_{Nic} = \alpha_{Ni} + \delta_{\alpha_{Ni}} \quad (4.35)$$

Dove $\delta_{\alpha_{Ni}}$ è l'angolo di rotazione del dente della flexspline e viene usato come correzione dell'angolo α_{Ni} . Per valutare l'equilibrio alla rotazione, bisogna scomporre le forze, valutate nel sistema di riferimento X_0Y_0 , lungo gli assi X_1 e Y_1 .

$$\begin{cases} F_{x_1} = F_{x_0} \cdot \sin(\alpha_{Nic}) - F_{y_0} \cdot \cos(\alpha_{Nic}) \\ F_{y_1} = F_{x_0} \cdot \cos(\alpha_{Nic}) + F_{y_0} \cdot \sin(\alpha_{Nic}) \end{cases} \quad (4.36)$$

dove le F_{x_0} e F_{y_0} sono le componenti lungo gli assi X_0 e Y_0 di una generica forza valutata nei capitoli 2 e 4 e visibili nel diagramma di corpo libero in figura 4.10. Prima di procedere con l'equilibrio alla rotazione rispetto all'origine O_1 , si rende necessaria la valutazione del momento di inerzia. Per fare ciò, si considera, come visibile in figura 4.10, un profilo trapezoidale per il dente della flexspline poiché riesce ad approssimare, per il calcolo dell'inerzia, il profilo a doppio arco. Sfruttando il principio di additività del momento di inerzia, quest'ultimo si valuta sommando il momento di inerzia di un rettangolo che rappresenta la rim, e di un trapezio per il dente. A sua volta, il momento di inerzia del trapezio viene stimato come somma di un rettangolo e di due triangoli.

$$I_{tot} = I_{rim} + I_{rett} + 2I_{tr} \quad (4.37)$$

I momenti di inerzia valutati sono areali e verranno moltiplicati per la densità

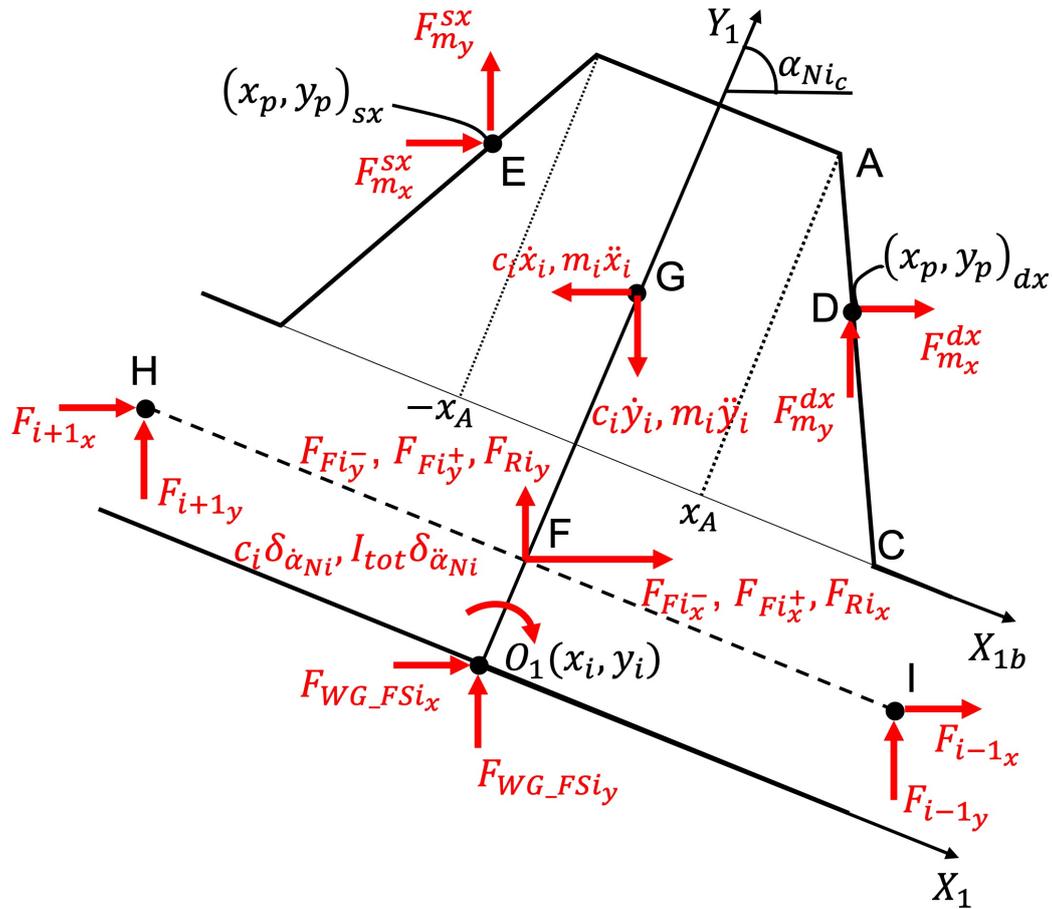


Figura 4.10 Diagramma di corpo libero dei denti della flexspline

superficiale del dente ρ_A :

$$\rho_A = \frac{m_{rim}}{A_{rim}} + \frac{m_{dente}}{A_{dente}} \quad (4.38)$$

Dove A_{rim} e A_{dente} sono rispettivamente l'area della porzione di rim considerata e l'area del dente considerato trapezoidale.

La massa della rim e del dente si valutano moltiplicando la densità dell'acciaio con il volume, considerando la porzione di rim sottostante a ciascun dente (distanza dal punto H al punto I in figura 4.10).

$$\begin{cases} m_{rim} = \rho_{acciaio} \cdot s_{rim_{FS}} \cdot \pi \cdot m \cdot \overline{HI} \\ m_{dente} = \rho_{acciaio} \cdot \frac{(2x_C + 2x_A) \cdot h}{2} \cdot \overline{HI} \end{cases} \quad (4.39)$$

Si può procedere con la valutazione dei momenti di inerzia areali, facendo attenzione

al fatto che la rotazione avviene attorno all'asse Z_1 perpendicolare a X_1Y_1 , quindi, si deve applicare il teorema degli assi perpendicolari per ciascun momento di inerzia stimato:

$$I_{Z_1} = I_{X_1} + I_{Y_1} \quad (4.40)$$

Il momento per quanto riguarda la rim è:

$$\begin{cases} I_{Y_1}^{rim} = \frac{s_{rim_{FS}} \cdot (\pi m)^3}{12} \\ I_{X_1}^{rim} = \frac{\pi m s_{rim_{FS}}^3}{3} \\ I_{Z_1}^{rim} = \frac{\pi m s_{rim_{FS}} [(\pi m)^2 + 4s_{rim_{FS}}^2]}{12} \end{cases} \quad (4.41)$$

Bisogna notare che Y_1 corrisponde all'asse baricentrico del rettangolo che rappresenta la rim e X_1 è sul suo lato inferiore.

Si procede con il calcolo del momento di inerzia del rettangolo costituente il dente, in cui l'asse Y_1 è l'asse baricentrico. Invece, per valutare il momento di inerzia rispetto all'asse X_1 si applica il teorema di Huygens-Steiner al momento valutato rispetto a X_{1b} .

$$\begin{cases} I_{Y_1}^{rett} = \frac{(2x_A)^3 h}{12} \\ I_{X_1}^{rett} = \frac{2x_A h^3}{3} + 2x_A \cdot h \cdot s_{rim_{FS}}^2 = 2x_A \cdot h \cdot \left(\frac{h^2}{3} + s_{rim_{FS}}^2\right) \\ I_{Z_1}^{rett} = \frac{(2x_A)^3 h}{12} + 2x_A h \left(\frac{h^2}{3} + s_{rim_{FS}}^2\right) \end{cases} \quad (4.42)$$

Per quanto riguarda il momento di inerzia del triangolo che compone il trapezio, bisogna applicare il teorema di Huygens-Steiner sia per trasporre il momento di inerzia da Y'_1 a Y_1 che per trasporre il momento di inerzia da X_{1b} a X_1 .

$$\begin{cases} I_{Y_1}^{tr} = \frac{(x_C - x_A)^3 \cdot h}{12} + x_A^2 \frac{(x_C - x_A) \cdot h}{2} = \frac{(x_C - x_A) \cdot h}{12} \cdot [(x_C - x_A)^2 + 6x_A^2] \\ I_{X_1}^{tr} = \frac{(x_C - x_A) \cdot h^3}{12} + \frac{(x_C - x_A) \cdot h}{2} \cdot s_{rim_{FS}}^2 = \frac{(x_C - x_A) \cdot h}{12} [h^2 + 6s_{rim_{FS}}^2] \\ I_{Z_1}^{tr} = \frac{(x_C - x_A) \cdot h}{12} \cdot [(x_C - x_A)^2 + 6x_A^2] + \frac{(x_C - x_A) \cdot h}{12} [h^2 + 6s_{rim_{FS}}^2] \end{cases} \quad (4.43)$$

Si può così stimare il momento di inerzia totale del dente della flexspline:

$$I_{Z_1}^{tot} = \rho_A \cdot (I_{Z_1}^{rim} + I_{Z_1}^{rett} + 2I_{Z_1}^{tr}) \quad (4.44)$$

Infine si valutano le coordinate dei punti di applicazione delle forze. Per quanto riguarda la forza di contatto, i punti di applicazione sono già stati valutati rispetto al sistema di riferimento X_1Y_1 nel capitolo 4.1.

Le forze di interazione tra denti adiacenti riguardano la rim quindi vengono considerate applicate a metà del passo in quanto è la metà tra un dente e il successivo:

$$\begin{cases} x_{1H} = -\frac{\pi m}{2} \\ y_{1H} = y_{1I} = \frac{s_{rimFS}}{2} \\ x_{1I} = \frac{\pi m}{2} \end{cases} \quad (4.45)$$

Le forze di richiamo flessionale e torsionale vengono considerate applicate nel baricentro della rim:

$$\begin{cases} x_{1F} = 0 \\ y_{1F} = \frac{s_{rimFS}}{2} \end{cases} \quad (4.46)$$

Le forze di inerzia vengono applicate nel baricentro del trapezio isoscele che approssima il profilo a doppio arco:

$$\begin{cases} x_{1G} = 0; \\ y_{1G} = h \frac{x_A + 2x_C}{3(x_A + x_C)} \end{cases} \quad (4.47)$$

Considerando le coordinate x dei punti di applicazione come ρ_x e le coordinate y come ρ_y è possibile scrivere l'equilibrio alla rotazione usando le componenti delle generiche forze valutate nell'equazione 4.36 moltiplicate per le rispettive distanze generiche ρ_x e ρ_y .

$$I_{Z_1}^{tot} \cdot \delta \ddot{\alpha}_{Ni} + c_i \cdot \delta \dot{\alpha}_{Ni} = -F_{x_1} \cdot \rho_y \pm F_{y_1} \cdot \rho_x + F_{x_1}^{inerzia} \cdot x_{1G} \quad (4.48)$$

Nell'equazione 4.48 si pone attenzione nel fatto che la forza lungo l'asse Y_1 si considerano positive se si trovano alla destra dell'asse Y_1 e negative se sono alla sua sinistra. Inoltre, si considera che il contributo di momento dovuto alle forze

inerziali $F_{x_1}^{inerzia}$ è opposto ai contributi delle altre forze.

Dall'equazione 4.48 è possibile ricavare l'accelerazione angolare $\delta\ddot{\alpha}_{Ni}$ e per integrazione si ottiene l'angolo di correzione $\delta\alpha_{Ni}$ che viene sommato all'angolo α_{Ni} .

Capitolo 5

Risultati simulazione inserimento wave generator

Il modello di inserimento del wave generator è stato sviluppato in ambiente Matlab/Simulink e implementa le equazioni descritte nel capitolo 2 per quanto riguarda l'interazione tra wave generator e flexspline e tra denti adiacenti della flexspline, nel capitolo 3 per la costruzione dei profili dei denti della flexspline e della circular spline), e nel 4 per le forze di ingranamento tra i denti della flexspline e della circular spline. I blocchi inerenti al capitolo 2 sono stati sviluppati in [4], mentre in questo lavoro di tesi si implementano i blocchi relativi al capitolo 4.

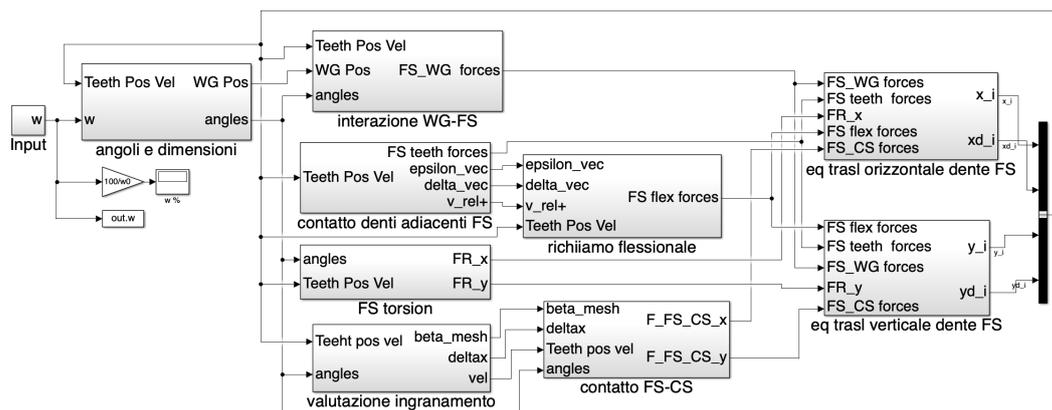


Figura 5.1 Modello in ambiente MATLAB/Simulink per l'inserimento del wave generator all'interno della flexspline con presenza della circular spline

Essendo il modello ancora ad un livello di sviluppo embrionale non si è effettuato un tuning per quanto riguarda le grandezze relative a rigidità e smorzamenti e per tale motivo, in termini di modulo, le grandezze analizzate non rispecchiano quelle misurabili attraverso prove sperimentali. Risulta però corretto l'andamento di tali grandezze e per tale motivo rimane valido lo scopo di studiare e comprendere il funzionamento del riduttore armonico.

Il modello è costituito dai seguenti blocchi:

- **input:** si fornisce la velocità di deformazione come input del modello;
- **angoli e dimensioni:** si implementano i calcoli degli angoli α_{Ni} e ψ_i e delle dimensioni del wave generator durante la deformazione (semiasse maggiore e semiasse minore) descritti nel capitolo 2.1;
- **interazione FS-WG:** si implementano le forze scambiate tra flexspline e wave generator spiegato nel capitolo 2.1;
- **contatto denti adiacenti FS:** si implementano le forze scambiate tra i denti adiacenti della flexspline descritte nel capitolo 2.2;
- **forza di richiamo torsionale:** in questo blocco si implementano le equazioni descritte nel capitolo 2.4. Dato che rappresenta il collegamento del wave generator con un giunto che non è presente al momento dell'inserimento ma solo durante la rotazione, il contributo del blocco risulta nullo e viene quindi omissso per alleggerire il modello. Deve essere usato in un futuro modello in cui si implementa la rotazione del wave generator.
- **richiamo flessionale:** implementa i calcoli per la forza di richiamo flessionale dovuta alla trasformazione della flexspline da circonferenza a ellisse spiegata nel capitolo 2.3;
- **valutazione ingranamento:** in questo blocco vengono implementati i passaggi per la creazione del profilo dei denti della flexspline e della circular spline (capitolo 3) e per l'individuazione del punto di ingranamento, della compenetrazione Δx e dell'angolo di pressione β_i (capitolo 4.1);
- **contatto FS-CS:** implementa la scomposizione della compenetrazione lungo la retta di pressione e il calcolo delle forze di ingranamento descritte nel capitolo 4.3;

- **equilibrio alla traslazione verticale e equilibrio alla traslazione orizzontale:** implementano le equazioni di equilibrio 2.1 e 2.2 per il calcolo delle coordinate x_i e y_i .

Le simulazioni eseguite sono state fatte impostando i seguenti parametri di simulazione:

- **tempo di simulazione:** 0.05 s;
- **passo della simulazione:** $2 \cdot 10^{-5}$ s;
- **solver:** ode14x.

La deformazione della flexspline avviene quasi istantaneamente quando il wave generator viene inserito fisicamente al suo interno. Per emulare questo comportamento nella simulazione, è necessario impostare un valore elevato per la velocità di deformazione \dot{w} , avendo di conseguenza tempi di simulazione ridotti. Il tempo effettivo di simulazione del modello dipende dal numero di punti di discretizzazione N utilizzati per rappresentare il profilo dei denti della flexspline e della circular spline (capitolo 3). Più punti di discretizzazione sono utilizzati, maggiore sarà la precisione nell'individuare il punto di ingranamento e di conseguenza la forza di contatto ma maggiore sarà anche il tempo di calcolo necessario. Quindi si è cercato di fare un *trade off* tra i punti di discretizzazione N e il tempo effettivo della simulazione. Si presentano in tabella 5.1 i tempi di simulazione ottenuti con discretizzazioni via via meno fitte ottenuti con un processore *Intel(R) Core(TM) i7-6700HQ CPU @ 2.60GHz* e una memoria RAM di 16Gb con velocità 2133 MHz.

Tabella 5.1 *Trade off* tra punti di discretizzazione e tempo effettivo di simulazione

N	$N_{tot}=5N$	$t_{effettivo}$ [min]
100	500	37.41
50	250	19.37
30	150	12.53
20	100	9.14
10	50	5.54

Il valore di N indica il numero di punti di discretizzazione di ciascun arco di cui sono composti i profili del dente della flexspline 3. Siccome il profilo è composto da un

totale di quattro archi e la punta, il totale dei punti di discretizzazione è $5N$. Il profilo coniugato della circular spline viene discretizzato a sua volta con lo stesso numero di punti totali di discretizzazione del profilo della flexspline. In tabella 5.1 si vede come al diminuire del numero di punti di discretizzazione, si ha un'elevata diminuzione del tempo effettivo di simulazione. Usando però $N=10$, si diminuisce la precisione nella valutazione delle forze di contatto, pur mantenendo un tempo di simulazione ragionevole. Con $N=100$, si ha un'ottima precisione per la valutazione delle forze di contatto ma un tempo effettivo di simulazione troppo elevato. Discretizzando con soli 30 punti, si ottiene un ragionevole tempo effettivo di simulazione e non si verificano perdite di precisione poiché i denti della circular spline e della flexspline sono molto piccoli, nell'ordine del decimo di millimetro quindi, per discretizzarli adeguatamente, sono sufficienti 150 punti di discretizzazione per tutto il profilo.

Si riportano in tabella 5.2 i valori di rigidità e smorzamento usati nel modello per simulare tutti i contatti descritti nei capitoli 2 e 4 ed il valore della velocità di deformazione data in input.

Tabella 5.2 Parametri per la simulazione dell'inserimento del wave generator

Parametro	Descrizione	Valore
\dot{w}_0	velocità di deformazione	105 mm/s
K_{WG-FS}	rigidità del contatto tra wave generator e flexspline	$8.6 \cdot 10^7$ N/m
c_{WG-FS}	smorzamento del contatto tra wave generator e flexspline	$1 \cdot 10^{-2}$ Ns/m
K_{fFS}	rigidità flessionale della flexspline	344 Nm/rad
c_{fFS}	smorzamento flessionale della flexspline	$1 \cdot 10^{-2}$ Nms/rad
K_{tooth}	rigidità tra denti adiacenti della flexspline	$4.3 \cdot 10^9$ N/m
c_{tooth}	smorzamento tra denti adiacenti della flexspline	$1 \cdot 10^{-2}$ Ns/m
K_{FS-CS}	rigidità del contatto tra flexspline e circular spline	$4.3 \cdot 10^7$ N/m
c_{FS-CS}	smorzamento del contatto tra flexspline e circular spline	$1 \cdot 10^{-2}$ Ns/m

5.1 Forze di ingranamento F_m

Il principale obiettivo dell'implementazione fatta in questa tesi è quello di investigare la distribuzione delle forze di contatto tra i denti della flexspline e della circular spline. Prima di analizzare i risultati ottenuti, si rende necessario definire la posizione di alcuni denti di riferimento della flexspline in modo da poterli ben identificare in

un diagramma polare.

Tabella 5.3 Posizioni angolari di alcuni denti di interesse della flexspline

N° dente	posizione angolare
1	0°
51	90°
101	180°
151	270°

Al termine dell'inserimento del wave generator, i denti n°1 e n°101 si trovano sul semiasse maggiore e i denti n°51 e n°151 si trovano sul semiasse minore.

Come detto nel capitolo 4, un comportamento tipico del riduttore armonico riguarda la presenza simultanea di più coppie di denti in presa, seppur in maniera differente (figura 4.1). Questo comportamento è riscontrabile in figura 5.2 dove, in un diagramma polare, è riportato l'andamento delle forze di ingranamento destro e sinistro. Lungo il semiasse maggiore si ha un ingranamento completo ovvero la compresenza dell'ingranamento destro e dell'ingranamento sinistro. Procedendo verso il primo quadrante (da 0° a 90°), si ha un aumento delle forze di ingranamento destro e una completa assenza delle forze di ingranamento sinistro. Viceversa, spostandosi nel quarto quadrante (da 270° a 360°), si ha un aumento delle forze di ingranamento sinistro e una diminuzione dell'ingranamento destro. Come ci si aspettava, lungo il semiasse minore non si hanno forze di ingranamento in quanto non c'è alcun contatto tra i denti della flexspline e i denti della circular spline. Questo andamento delle forze di contatto è dovuto ai profili dei denti usati (capitolo 3) e rende possibile la valutazione del numero di denti in presa in quanto, osservando solo i denti posti lungo il semiasse maggiore positivo, si hanno 13 denti in presa al di sopra di X_0 e 13 al di sotto. Considerando anche il dente posto sul semiasse maggiore, si ottiene un totale di 27 denti in presa ottenendo così un totale di 54 denti in presa, data la simmetria del riduttore, che corrisponde al 27% dei denti della flexspline. Questo risultato rispecchia quello presente in [28] dove la percentuale di denti in presa è tra il 20% e il 30%.

Altro fattore interessante da notare, è la perfetta simmetria tra ingranamento destro e sinistro. Questo si nota soprattutto nei denti n° 1 e n°101 che si trovano sul semiasse maggiore. Questi due denti hanno il profilo simmetrico al semiasse maggiore e hanno un ingranamento completo quindi le forze di contatto a destra e a

sinistra sono uguali (intersezione della curva blu e della curva rossa in figura 5.2).

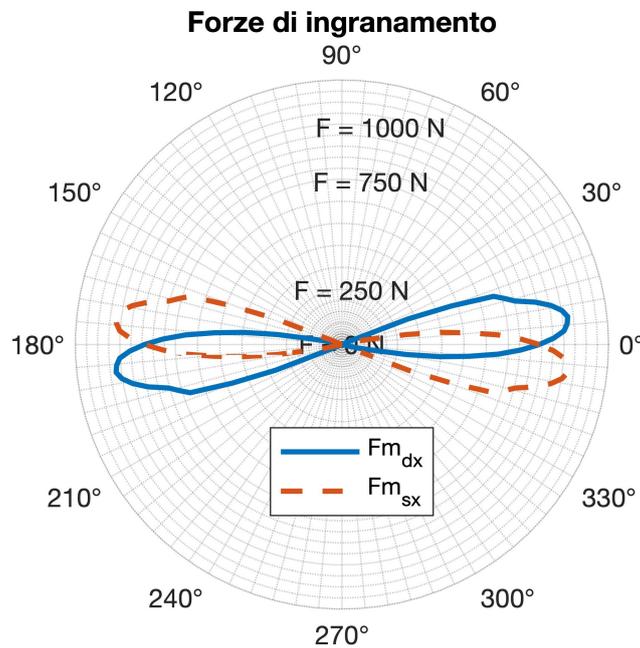


Figura 5.2 Forze di ingranamento in diagramma polare

Come descritto nel capitolo 4.1, la forza di contatto tra i denti è proporzionale alla compenetrazione tra i denti della circular spline e della flexspline. Vediamo in figura 5.3, l'andamento della compenetrazione lungo il profilo destro dei denti della flexspline (ingranamento destro). Si osserva, in un diagramma cartesiano, come l'andamento rispecchia lo stesso andamento della forza di ingranamento destro. Si riscontra una simmetria nella compenetrazione dipendente da quella geometrica del riduttore armonico infatti vediamo come l'andamento intorno al dente n°1 della flexspline si ripresenta nell'intorno del dente n°101.

Nonostante i moduli ottenuti non rispecchino la realtà, è utile, nel caso della compenetrazione, osservarne il modulo in quanto si raggiunge al massimo i 2 centesimi di millimetro come ordine di grandezza, il quale risulta ottimale per quanto riguarda l'approssimazione con la quale è stata valutata la compenetrazione nel capitolo 4.1. Infatti, quest'ultima è di un ordine di grandezza inferiore rispetto alla dimensione dei denti della flexspline e della circular spline.

Si può vedere in figura 5.4a la distribuzione delle forze di ingranamento destro lungo la flexspline. Si vede graficamente il modulo e la direzione delle forze ed è possibile verificare visivamente la diminuzione del modulo della forza andando verso il quarto

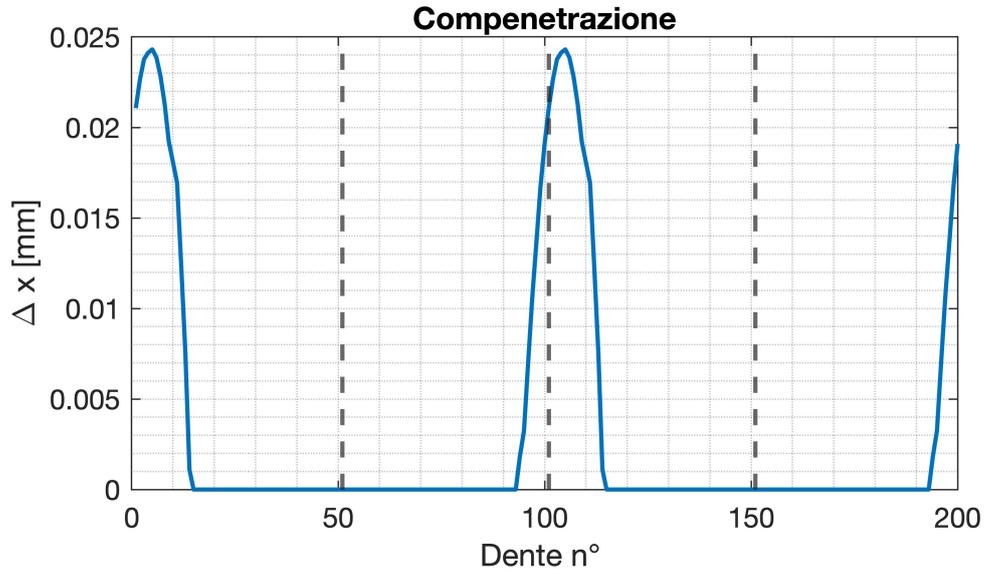


Figura 5.3 Compenetrazione per il calcolo della forza di ingranamento destro

quadrante (dove si ha maggior presenza di ingranamento sinistro e non destro).

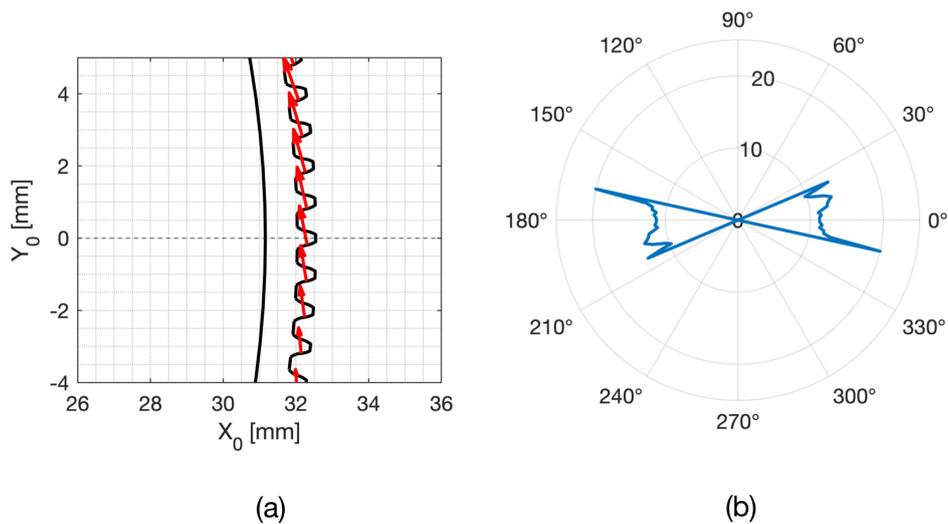


Figura 5.4 Rappresentazione della forza di ingranamento destro (a), angolo di ingranamento destro β_i [°] (b).

Inoltre, si osserva una continuità nella direzione delle forze dovuta alla continuità degli angoli di ingranamento rappresentati in figura 5.4b.

Si vede come si realizza la condizione prevista nel capitolo 3 con gli angoli di ingranamento che oscillano attorno al valore calcolato nel punto B (punto di mezzo

del profilo a doppio arco) della figura 3.2. Sempre in figura 5.4 (a destra), è possibile notare come ci si discosta dal valore medio dell'angolo di pressione andando al di sotto del semiasse maggiore sull'ultimo dente della flexspline in cui è presente la forza di ingranamento.

Come descritto nel capitolo 4.2, tramite l'angolo di ingranamento β_i e l'angolo α_{Ni} è possibile scomporre le forze di ingranamento lungo gli assi del sistema di riferimento X_0Y_0 (equazioni 4.18 e 4.19). Queste componenti, che si possono osservare in figura 5.5, sono quelle presenti nelle equazioni 2.1 e 2.2 per l'equilibrio alla traslazione della flexspline.

Dalla scomposizione si vede come le forze calcolate rispettano le direzioni e la simmetria previste. Infatti, per quanto riguarda la componente lungo Y_0 della forza di ingranamento destro, ci si aspettava un valore positivo nel quarto e nel primo quadrante e un valore negativo nel secondo e nel terzo.

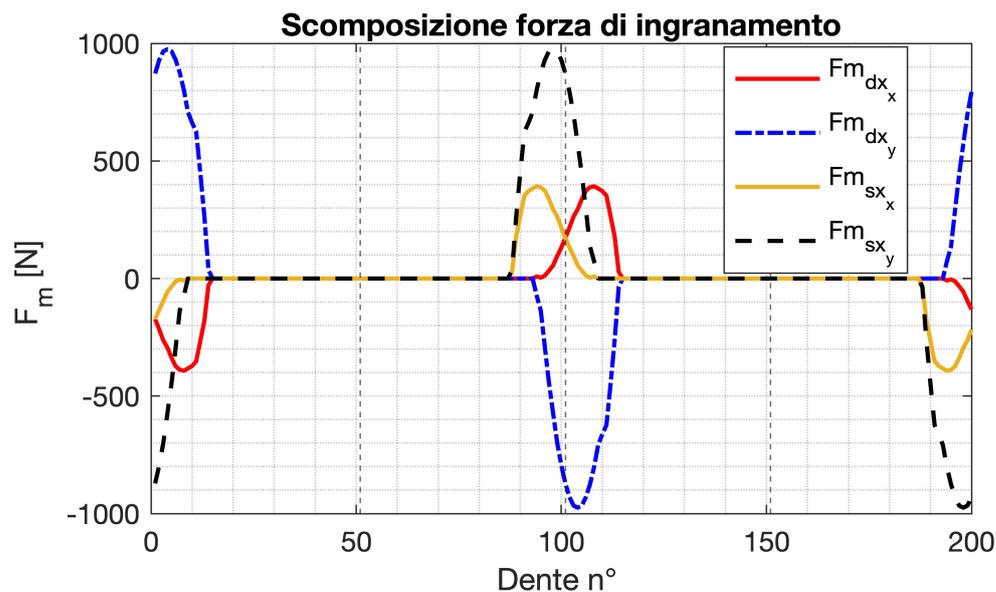


Figura 5.5 Scomposizione delle forze di ingranamento lungo gli assi X_0Y_0

Invece, per la componente lungo Y_0 della forza di ingranamento sinistro ci si aspettava il comportamento opposto alla forza di ingranamento destro ovvero un valore negativo nel primo e nel quarto quadrante e un valore positivo nel secondo e nel terzo quadrante.

Le componenti lungo l'asse X_0 della forza di ingranamento destro e sinistro sono concordi tra di loro come ci si aspettava e hanno un valore positivo nel secondo e

nel terzo quadrante e un valore negativo nel primo e quarto quadrante. Grazie alla figura 5.5 è possibile comprendere meglio la simmetria del sistema. Per esempio, per il dente n°1 (stesso discorso vale per il n°101) si hanno le componenti lungo X_0 dell'ingranamento destro e sinistro uguali in modulo e segno, e le componenti lungo Y_0 uguali in modulo e in verso opposto.

Riportando le forze di ingranamento sui denti della circular spline è possibile valutare la coppia totale agente sulla circular spline che deve risultare nulla in quanto non si ha rotazione del wave generator e quindi non si deve avere rotazione della circular spline. In figura 5.6 è possibile osservare il contributo di coppia di ciascun dente della circular spline scegliendo come punto di applicazione della forza il punto medio della compenetrazione valutata nel capitolo 4.1.

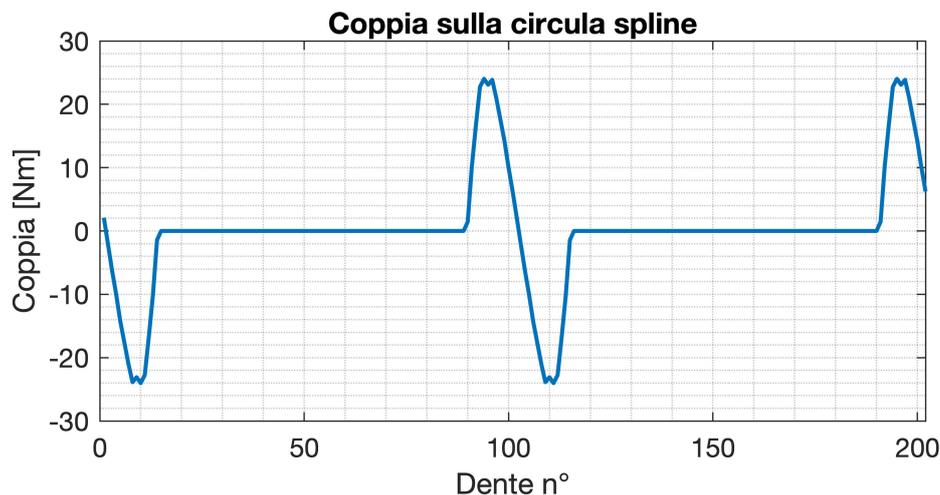


Figura 5.6 Contributo di coppia dei singoli denti della circular spline

Il contatto tra i denti della flexspline e della circular spline condizionano anche le altre forze descritte nel capitolo 2. Quindi nei prossimi paragrafi, si analizzano le modifiche apportate dalle forze di contatto comparando una simulazione in cui si usa il modello senza forza di ingranamento descritto al capitolo 2 e la simulazione con la presenza delle forze di ingranamento descritte finora.

5.2 Forza di interazione tra denti adiacenti

Si analizzano le forze scambiate tramite il modello molla-smorzatore tra due denti consecutivi della flexspline, come studiato nel capitolo 2.2. La forza F_{i+1} è la forza scambiata tra il dente 'i' e il dente 'i+1' identificato in senso antiorario. La forza F_{i-1} è la forza scambiata tra il dente 'i' e il dente 'i-1'. In figura 5.7 si osservano le scomposizioni delle due forze, valutate con l'inserimento della circular spline, lungo l'asse X_0 (figura 5.7a) e lungo l'asse Y_0 (figura 5.7b). In entrambe le figure, i punti rossi indicano i punti di inizio e fine delle forze di ingranamento in modo da poter capire la loro influenza sulla flexspline. Data la simmetria riscontrata sia lungo l'asse X_0 che lungo l'asse Y_0 è possibile studiare solo una delle due poiché l'altra ha lo stesso andamento.

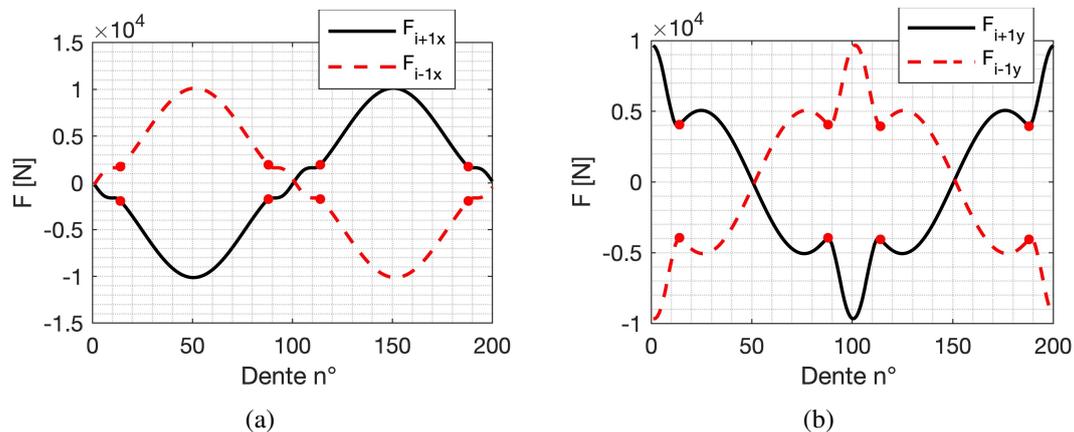


Figura 5.7 Scomposizione lungo X_0 e Y_0 delle forze di interazione tra denti adiacenti

In figura 5.8, il tratteggio rosso rappresenta l'andamento della forza nel modello di inserimento del wave generator senza la circular spline e viene confrontato con la curva nera che rappresenta la stessa forza al termine dell'inserimento del wave generator con la presenza della circular spline. Si nota una differenza sostanziale nell'intorno del semiasse maggiore ovvero nella zona in cui si verifica l'ingranamento. Infatti, si ha un aumento della forza di interazione dovuto alla forza di ingranamento nei denti nell'intorno del semiasse maggiore e procedendo verso il semiasse minore, il contatto tra denti adiacenti non risente più delle forze di ingranamento e si ritorna quasi al valore che si ha in assenza della circular spline. Questo comportamento si spiega ragionando su quello che succede fisicamente quando ingranano i denti della flexspline e della circular spline. In particolare, nel momento in cui i denti della

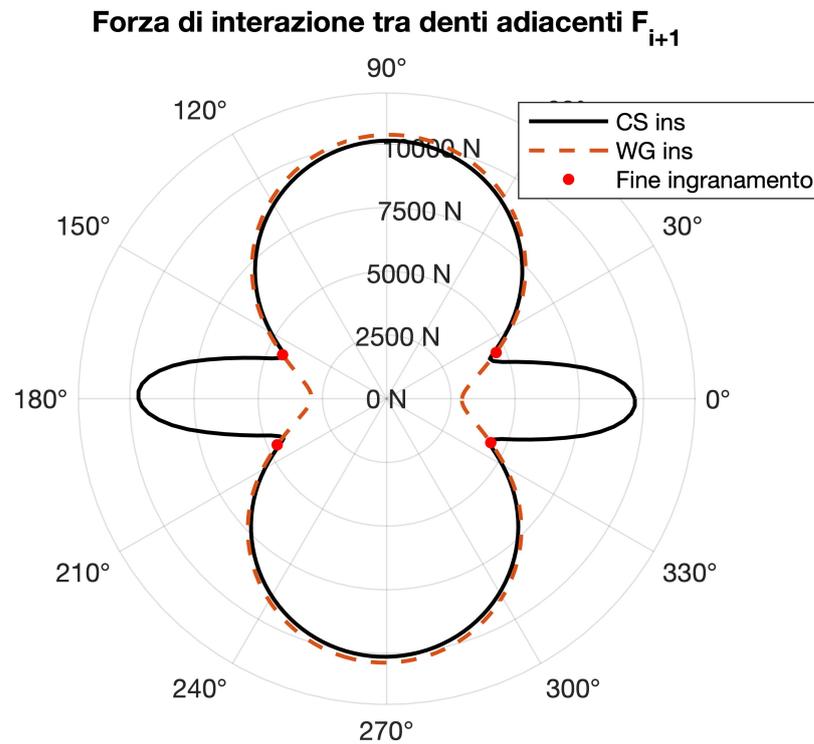


Figura 5.8 Forza di interazione F_{i+1} tra denti adiacenti della flexspline.

flexspline si inseriscono nei vani dei denti della circular spline, questi ultimi tendono ad allontanare i primi tramite le forze di contatto. Questo comportamento non si presentava in assenza della circular spline e questo spiega la differenza tra i due andamenti. Considerando invece le direzioni delle forze di ingranamento analizzate nel paragrafo 5.1 e prendendo come esempio i denti n°1 e n°2 della flexspline, si ha che il dente della circular spline che si inserisce nel vano tra i due denti, scambia una forza con componente negativa lungo Y_0 con il dente n°1 e una forza con componente positiva lungo Y_0 con il dente n°2 e quindi i due denti tendono ad allontanarsi per far spazio al dente della della circular spline.

Quindi, si vede che, anche nel caso in cui non è applicato nessun carico, la flexspline è soggetta ad una forza che può causare la propagazione di una cricca all'interno della rim. Con l'aggiunta della circular spline si nota che si ha una grande sollecitazione anche sul semiasse maggiore con un conseguente aumento della probabilità di propagazione di un'eventuale cricca come ci si aspetterebbe dato il contatto con la circular spline.

5.3 Confronto tra coordinate effettive x_i, y_i e coordinate teoriche x_p, y_p

Alla condizione indeformata della flexspline, che consiste in una circonferenza di raggio $r_0 = 30.65\text{mm}$, viene applicata una deformazione pari a $w_0 = 0.525\text{ mm}$ lungo l'asse X_0 che permette di ottenere, a fine inserimento del wave generator, le coordinate di ogni singolo dente x_i e y_i valutabili con 2.1 e 2.2. Così facendo si ottiene una flexspline ellittica, con semiasse maggiore lungo X_0 (0° e 180°), in cui ci si aspetta la massima deformazione di x_i , e semiasse minore lungo Y_0 (90° e 270°), in cui il raggio indeformato si riduce della deformazione w_0 .

Per capire meglio si osserva in figura 5.9 la differenza tra le coordinate dei denti della flexspline prima e dopo l'inserimento del wave generator, nello specifico si osserva in nero la simulazione in cui è presente la circular spline e in rosso quella in cui non è presente. Lungo il semiasse maggiore si vede il raggiungimento della deformazione w_0 lungo la coordinata x_i e la differenza tra presenza o meno della circular spline non è elevata. Invece, lungo il semiasse minore, si ha la coordinata y_0 che si discosta dalla condizione teorica e la presenza della circular spline accentua questa differenza. Questo è dovuto al contatto tra la flexspline e il wave generator lungo l'asse X_0 , il quale viene a mancare lungo il semiasse minore lasciando di conseguenza la deformazione in questa zona dipendente dalle sole forze di interazione tra denti adiacenti e dalle forze di richiamo flessionale. Queste ultime non permettono alla flexspline di raggiungere la medesima forma ellittica del wave generator come viene evidenziato in figura 5.10 e in figura 5.11 dove si confrontano le coordinate effettive dei singoli denti di ingranamento e le coordinate polari approssimate degli stessi.

$$\begin{cases} x_p = a \cdot \cos(\psi_i) \\ y_p = b \cdot \cos(\psi_i) \\ \rho_p = \sqrt{x_p^2 + y_p^2} \end{cases} \quad (5.1)$$

dove:

- $a = r_{0_{FS}} + w_0 = 31.175\text{ mm}$ è il semiasse maggiore;
- $b = r_{0_{FS}} - w_0 = 30.125\text{ mm}$ è il semiasse minore;
- $\psi_i = \arctan\left(\frac{y_i}{x_i}\right)$ è l'angolo che individua i punti di coordinate x_i e y_i .

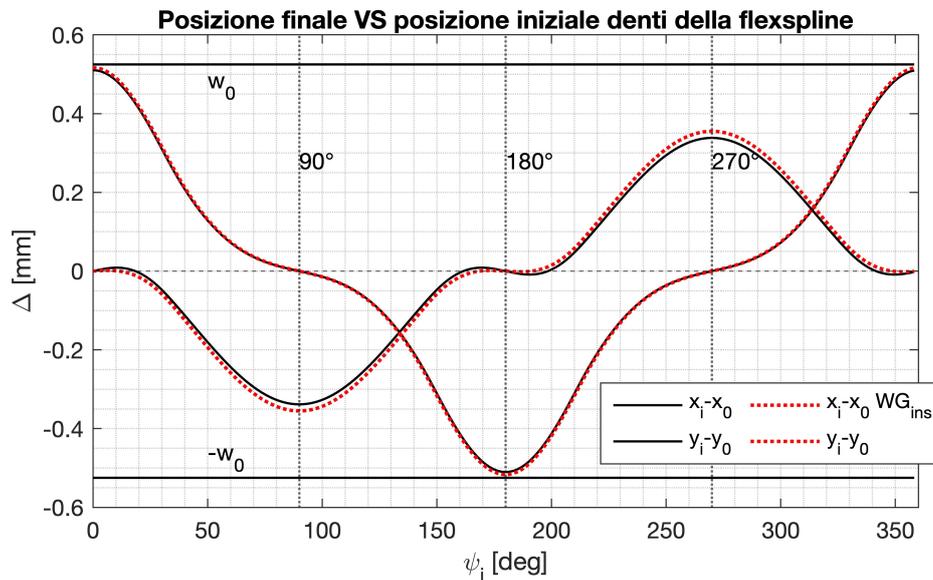


Figura 5.9 Coordinate dei denti della flexspline prima e dopo l'inserimento del wave generator

In figura 5.10 si osserva un grafico polare che mette a confronto il raggio vettore ρ_p e il raggio vettore ρ_i che identifica le coordinate dei denti della flexspline. Un valore pari a 0 mm corrisponderebbe alla sovrapposizione del profilo della flexspline al profilo ellittico teorico imposto dal wave generator. Nella curva che rappresenta l'inserimento del wave generator senza la circular spline (in rosso), si vede già che, lungo il semiasse maggiore, si ha una lieve differenza tra profilo effettivo e teorico dovuto al contatto tra wave generator e flexspline. Mentre, lungo il semiasse minore, come già è stato possibile osservare in figura 5.9, si ha una grande differenza che porta a concludere che, come spiegato nel capitolo 2.1, la flexspline non assume il profilo teorico imposto dal wave generator. La presenza della circular spline, accentua ancora di più questo effetto poiché i denti che ingranano tendono ad aumentare il contatto tra wave generator e flexspline aumentando la deformazione lungo il semiasse maggiore e di conseguenza diminuendo di molto la deformazione lungo il semiasse minore.

In figura 5.11 si riporta la stessa analisi eseguita in un diagramma cartesiano con le componenti dei raggi vettori ρ_i e ρ_p . Si nota di nuovo che la maggiore differenza tra presenza o meno dell'ingranamento la si vede lungo il semiasse minore con le coordinate y_i e y_p . Si ribadisce che questo effetto è dovuto alle forze di ingranamento scambiate tra i denti della flexspline e della circular spline nell'intorno del semiasse maggiore.

Posizione effettiva dei denti VS posizione approssimate

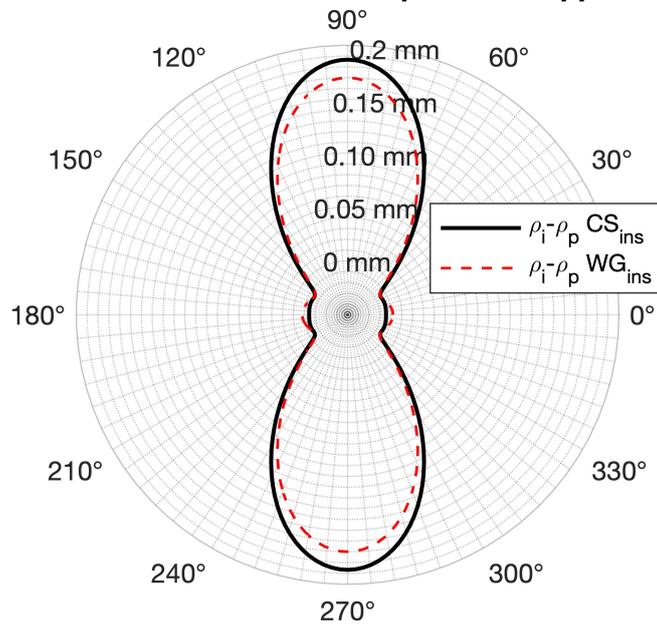


Figura 5.10 Grafico polare della differenza tra i raggi vettori che individuano x_i, y_i e x_p, y_p

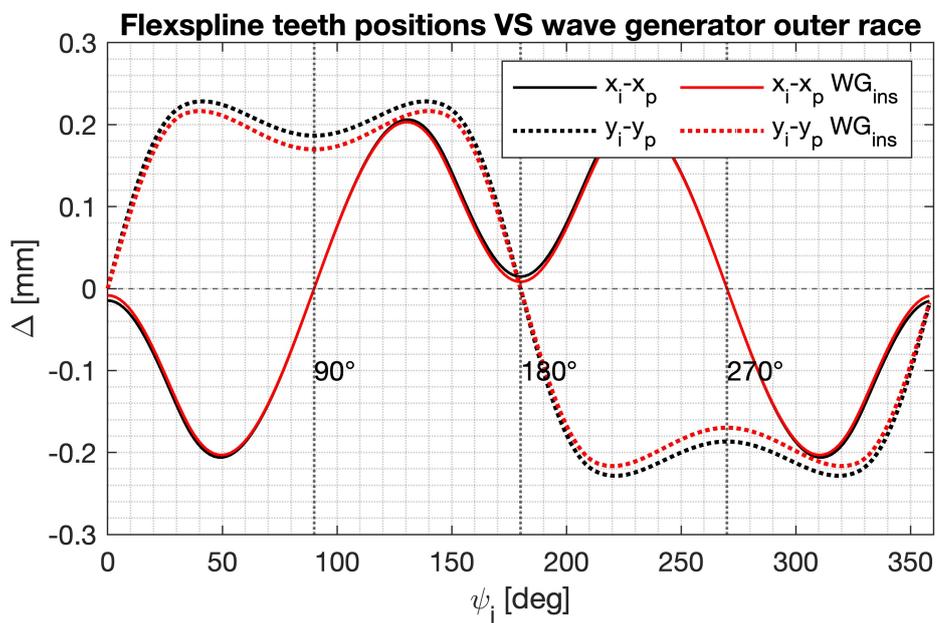


Figura 5.11 Differenza tra le coordinate effettive (x_i, y_i) e le coordinate approssimate x_p, y_p

5.4 Forze di contatto tra wave generator e flexspline

Le forze di contatto F_{WG-FS} sono valutate nel capitolo 2.1 e descrivono l'interazione tra la flexspline e il wave generator. Si ha una forza positiva nel momento in cui si ha compenetrazione tra il profilo del wave generator e la rim della flexspline mentre si ha forza nulla quando non c'è contatto tra i due componenti. Quindi, secondo quanto già detto nel paragrafo 5.3, ci si aspetta che si abbia uno scambio di forze lungo il semiasse maggiore in cui si ha la deformazione massima data dal wave generator che spinge sulla flexspline. Ci si aspetta anche una forza nulla nell'intorno del semiasse minore in quanto la flexspline si discosta dalla forma assunta dal wave generator non entrandoci in contatto.

In figura 5.12 si osserva un grafico polare delle forze di contatto. Si vede come già nel caso di solo inserimento del wave generator, si ha forza scambiata tra flexspline e wave generator lungo il semiasse maggiore ovvero dove il wave generator spinge la flexspline. Si arriva a forza nulla lungo il semiasse minore in quanto non si ha contatto. L'effetto delle forze di ingranamento tra circular spline e flexspline è quello di far aumentare la compenetrazione tra wave generator e flexspline lungo il semiasse maggiore poiché, essendo le forze di contatto entranti sul profilo della flexspline (figura 5.4a), spingono la flexspline contro il wave generator.

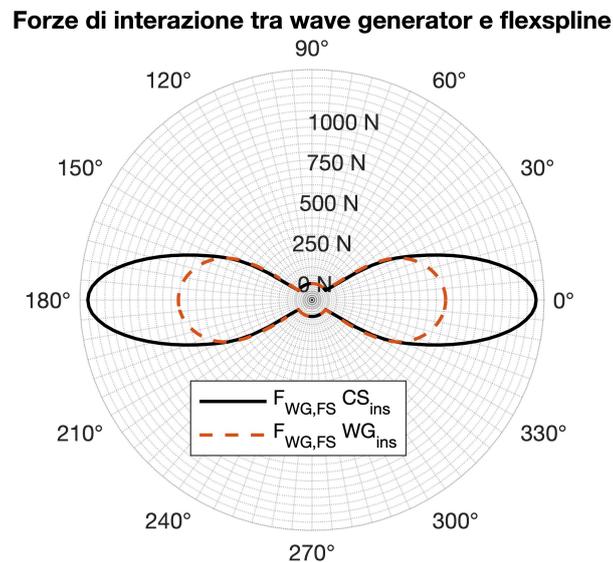


Figura 5.12 Forze di contatto tra wave generator e flexspline

Per comprendere meglio l'interazione con la circular spline, è possibile osservare la scomposizione delle forze di interazione tra flexspline e wave generator lungo gli assi X_0 e Y_0 in figura 5.13.

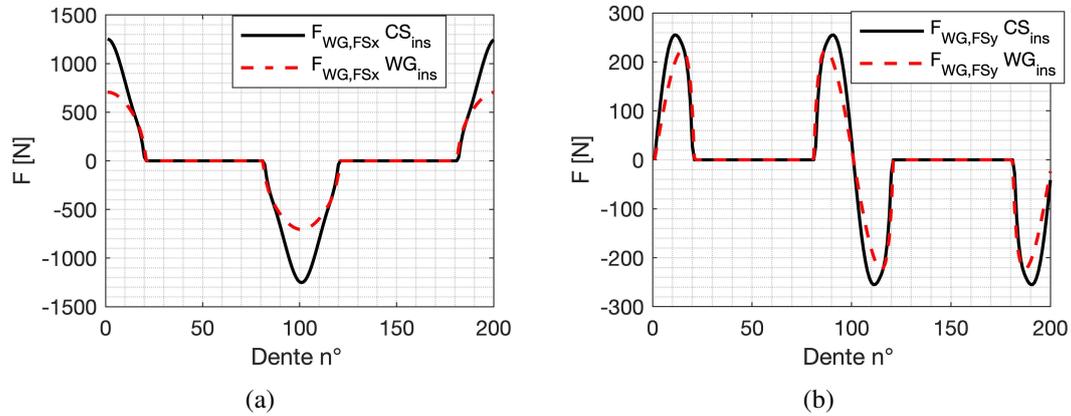


Figura 5.13 Scomposizione lungo X_0 e Y_0 delle forze di interazione tra flexspline e circular spline.

Si pone maggiore attenzione ai denti 1 e 101 in quanto, come detto precedentemente analizzando la figura 5.12, si ha il maggior contributo delle forze di ingranamento. In questi due denti si ha una facile analisi in quanto trovandosi lungo l'asse X_0 hanno componente nulla lungo l'asse Y_0 , come è visibile in figura 5.13b. Quindi, analizzando il contributo delle forze di ingranamento lungo X_0 (figura 5.5), si osserva che sia la forza destra che la sinistra sono direzionate verso la flexspline premendola contro il wave generator. Da questa interazione deriva l'incremento di forza tra flexspline e wave generator come è possibile osservare in figura 5.13a.

dato dall'equilibrio alla rotazione di quest'ultima come descritto nel capitolo 4.4. I parametri di simulazione usati per la rotazione sono:

- **tempo di simulazione:** 0.1 s;
- **passo di simulazione:** $1 \cdot 10^{-5}$ s;
- **solver:** ode14x
- **velocità di rotazione:** input a rampa con $\dot{\theta}_{WG}$ che parte da un valore nullo e arriva a 12.52 rad/s in 0.0012 s

Per la seguente simulazione si imposta, rispetto al caso del solo inserimento del wave generator, un tempo di simulazione più elevato, per poter simulare almeno una rotazione completa del wave generator, e un passo di simulazione più piccolo per poter simulare tutti i fenomeni fisici, evitando perdite di informazioni. Il processore e la RAM usate sono le medesime della simulazione di inserimento del wave generator. Anche in questo caso, la simulazione permette di analizzare i fenomeni legati alla rotazione del wave generator non rispecchiando i valori ottenuti in letteratura in quanto deve essere eseguito un *tuning* dei parametri per validare il modello.

6.1 Errore cinematico

L'errore cinematico, valutabile con l'equazione 4.25, gioca un ruolo importante per quanto riguarda le performance del riduttore armonico in quando può produrre perdita di coppia trasmessa e fluttuazioni nella velocità. Per tale motivo, in questo modello è possibile valutare l'errore cinematico descritto nel capitolo 4.4 usando la rotazione della circular spline valutata con l'equilibrio alla rotazione 4.9. Così facendo, esso viene valutato come output del modello e non più come input, come fatto in letteratura, permettendo così, grazie a successive simulazioni e miglioramenti del modello, di valutare le cause che lo producono.

Dalla simulazione condotta, siccome non vengono inseriti difetti all'interno del riduttore, ci si aspetta un errore cinematico nullo. Infatti, in figura 6.2 è possibile osservare l'errore cinematico prodotto con una rotazione di 360° del wave generator. Si vede come l'ordine di grandezza sia del decimo di mrad quindi considerabile come nullo. Nonostante il modulo rispecchi l'andamento atteso, dato dall'assenza di

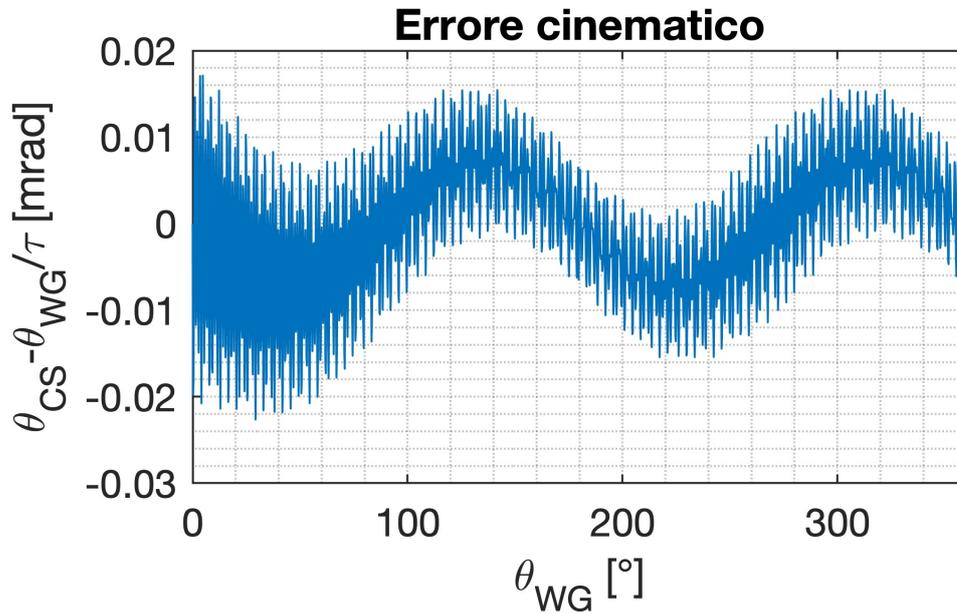


Figura 6.2 Errore cinematico

difetti, è possibile osservare un'oscillazione che può essere analizzata in frequenza tramite una *fast Fourier transform* (FFT).

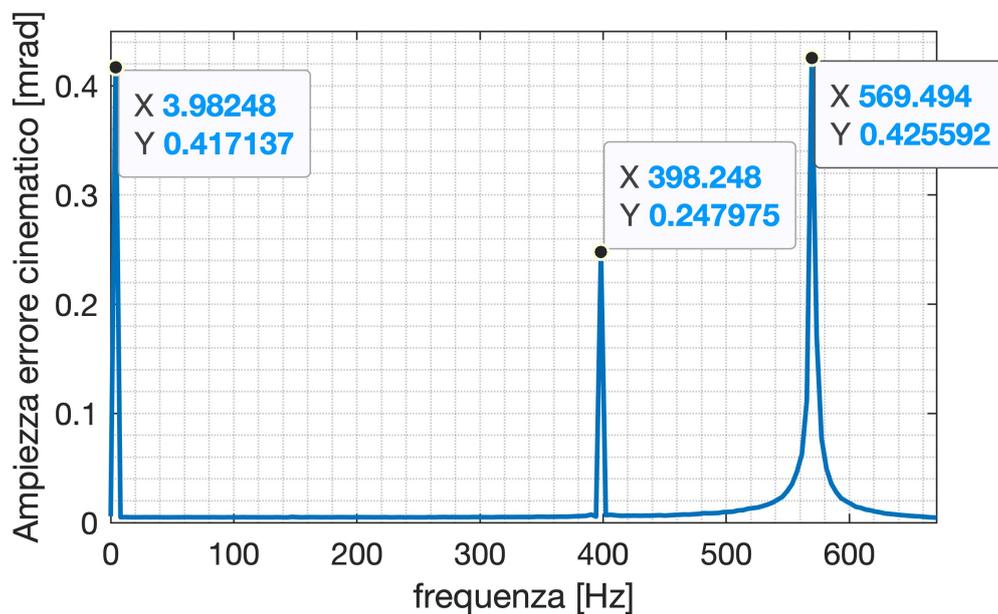


Figura 6.3 Analisi in frequenza dell'errore cinematico

In figura 6.3 è possibile osservare la presenza di tre armoniche differenti che caratte-

rizzano il segnale dell'errore cinematico. Le ultime due, ovvero quelle a frequenza di circa 398 Hz e 569 Hz, sono imputabili ad un modo di vibrare proprio del sistema dovuto all'elevato numero di molle utilizzate per simulare le varie interazioni del riduttore. La prima armonica ha una frequenza di circa 4 Hz che corrisponde a circa 25 rad/s, pari al doppio della velocità di rotazione del wave generator. Questo risultato dipende dalla geometria del wave generator e da come interagisce con la flexspline, in quanto, dato che le zone di ingranamento si trovano lungo il semiasse maggiore, sono sfasate di un angolo di 180° e quindi per ogni rotazione di 180° interagiscono con gli stessi denti.

6.2 Rapporto di trasmissione

Un altro parametro valutabile per studiare la correttezza del modello, è il rapporto di trasmissione che non viene visto come parametro in input ma viene valutato in due diversi modi: come rapporto tra le rotazioni o come rapporto tra le velocità di rotazione di circular spline e wave generator. Questi due metodi permettono di osservare se il rapporto di trasmissione corrisponde a quello teorico valutato in 1.1 considerando la flexspline fissa e la circular spline in rotazione. Dato che, nel modello considerato, i denti della circular spline sono due in più rispetto a quelli della flexspline, il rapporto τ sarà pari a 100 e considerando l'equazione 1.2 si avrà un rapporto di trasmissione pari a $\tau + 1$.

In figura 6.4 si può osservare il rapporto di trasmissione valutato con le rotazioni. Si può osservare che il rapporto oscilla, con la medesima frequenza dell'errore cinematico, in modo stabile nell'intorno del valore desiderato pari a circa 101. Inoltre, dato un iniziale ritardo di partenza della circular spline, si elimina il transitorio iniziale in quanto si avrebbe un rapporto di trasmissione tendente a infinito in quanto θ_{CS} tende a zero. In figura 6.5 si osserva il rapporto di trasmissione valutato come rapporto delle velocità. Si applica lo stesso taglio del transitorio iniziale del grafico in figura 6.4, ma si osserva un andamento instabile per un periodo di tempo più lungo. Infatti, a causa di ciò, la media valutata differisce di poco rispetto al valore desiderato, ma è possibile osservare che si tende comunque al valore di 101.

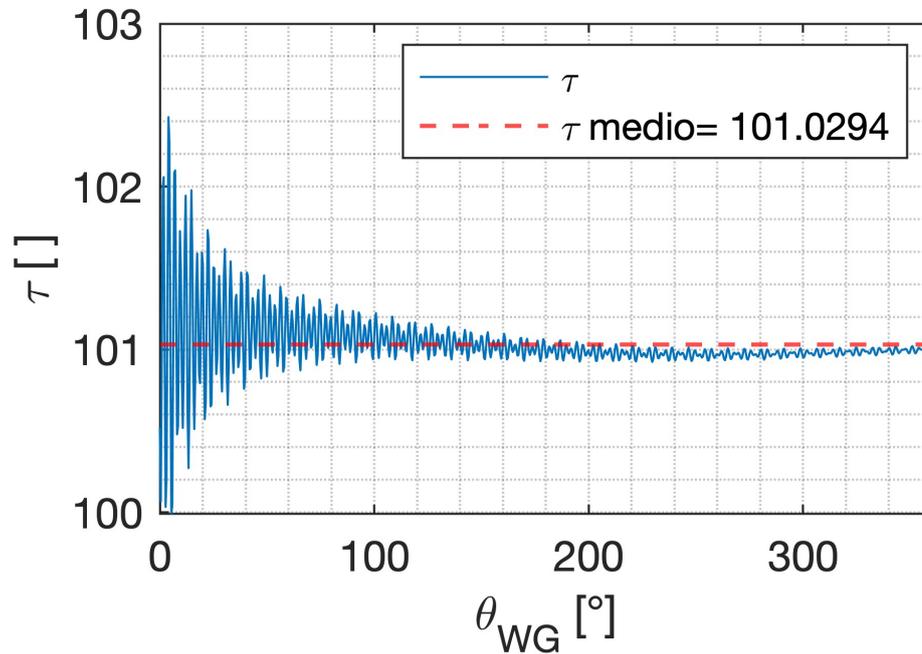


Figura 6.4 Rapporto di trasmissione valutato con il rapporto degli angoli di rotazione

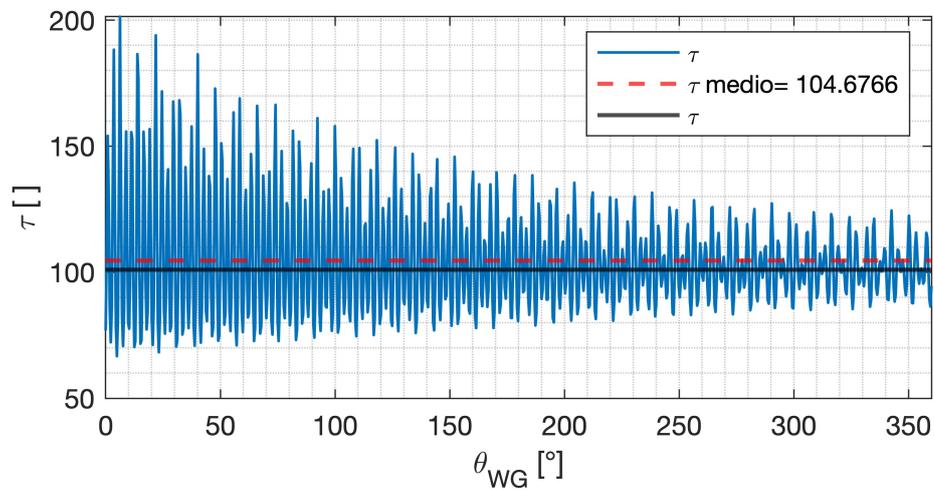


Figura 6.5 Rapporto di trasmissione valutato con il rapporto dell velocità di rotazione

6.3 Velocità di rotazione

La velocità di rotazione della circular spline, valutata come output del modello, deve essere coerente con la fisica del problema e con i risultati esposti precedentemente in cui si ha un rapporto di trasmissione simile alla realtà. Quindi ci si aspetta

un'oscillazione, dovuta alla modellazione dei contatti come nel caso dell'errore cinematico.

Infatti, è possibile notare in figura 6.6 che si ottiene una velocità con un'oscillazione dovuta, probabilmente, all'utilizzo di un modello molla-smorzatore per ogni contatto del riduttore. Questa velocità oscilla, con un'ampiezza via via meno elevata, nell'intorno del valore desiderato (in nero).

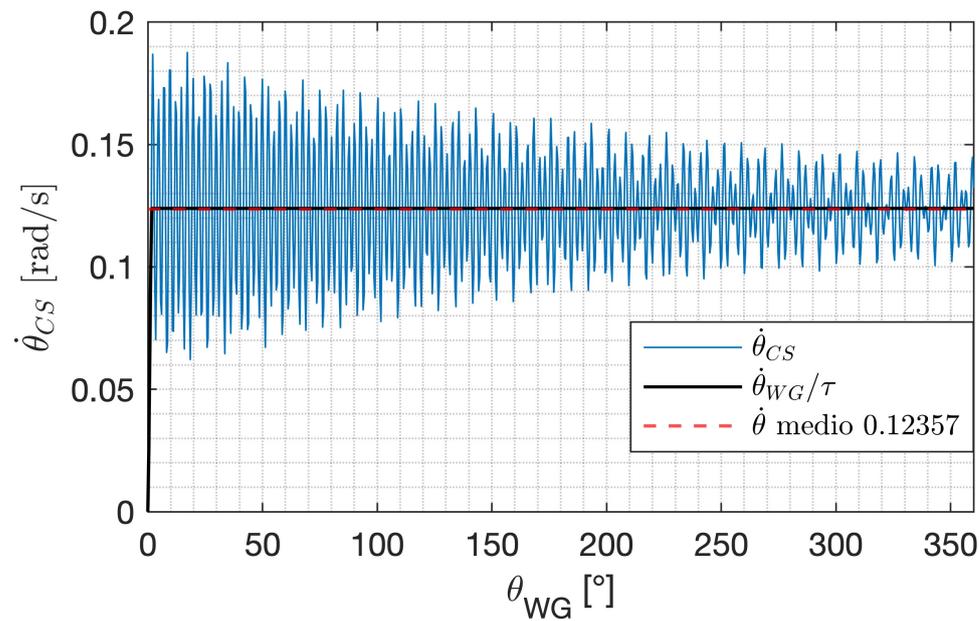


Figura 6.6 Velocità di rotazione della circular spline

Conclusioni e sviluppi futuri

Il riduttore armonico è un componente critico per le applicazioni in cui viene usato e per questo si è resa necessaria la descrizione di un modello *multibody* per consentire uno studio PHM e valutare la vita del componente. Dopo la descrizione del funzionamento e delle dimensioni principali usate per descrivere il riduttore, viene effettuata una panoramica sui tipi di guasti che possono incorrere durante l'utilizzo di un riduttore armonico e che potranno essere quindi simulati tramite il modello qui descritto. Successivamente, si procede con la descrizione del modello di inserimento del wave generator che, data una deformazione in input, deforma la flexspline tramite le forze di contatto modellate come sistemi molla-smorzatore. Le posizioni dei denti della flexspline valutate con le equazioni di equilibrio (x_i, y_i) serviranno come condizioni iniziali del modello di rotazione della flexspline da cui viene estrapolata la cinematica per la costruzione del profilo coniugato dei denti della circular spline. Si procede con la costruzione del profilo a doppio arco dei denti della flexspline che, insieme al profilo coniugato dei denti della circular spline, garantisce un'elevato numero di coppie di denti in presa in modo da avere un ingranamento ottimale. Dopo aver valutato il profilo dei denti, si estende il modello di inserimento del wave generator, implementando il contatto tra i profili dei denti della flexspline e della circular spline che viene modellato tramite diversi sistemi molla smorzatori, uno per ogni contatto. Osservando come si distribuiscono le forze lungo la flexspline è possibile notare la simmetria a fine inserimento del wave generator. Inoltre, le forze di ingranamento che si ricavano da questo modello, hanno degli effetti, sulle forze di interazione tra il wave generator e la flexspline, che rendono ancora più evidente come la flexspline dopo la deformazione non assuma perfettamente il profilo ellittico imposto dal wave generator in quanto il contatto si ha esclusivamente lungo il semiasse maggiore. Infatti, le forze di contatto tra la flexspline e la circular spline hanno avuto l'effetto di aumentare le intensità delle forze di contatto tra wave generator e flexspline lungo il

semiasse maggiore. Altro risultato interessante riguarda le forze di contatto tra denti adiacenti della flexspline, poiché si vede come le forze di ingranamento tendono a far allontanare i denti di quest'ultima lungo il semiasse maggiore per poi perdere l'effetto spostandosi verso il semiasse minore.

L'inserimento della circular spline all'interno del modello permette quindi di valutare, tramite le equazioni di equilibrio, le nuove posizioni dei denti (x_i e y_i) che potranno essere utilizzate per completare il modello del riduttore armonico aggiungendo:

- **equilibrio alla rotazione della flexspline:** che è spigato nel capitolo 6.1 ma non implementato nel modello MATLAB/Simulink. Permette di valutare la rotazione dei singoli denti della flexspline aggiungendo un possibile moto di rotazione attorno all'origine O_1 .
- **equilibrio al wave generator:** che permetterebbe di implementare un modello dettagliato di attrito che si genera tra il wave generator e la flexspline.

Inoltre, sarà necessario un *tuning* dei parametri quali rigidzze e smorzamenti dei modelli molla-smorzatore per garantire la validità del modello durante i test di diagnostica e prognostica. Questi avanzamenti permetteranno di avere un modello *multibody high-fidelity* di riduttore armonico completo in modo da poter simulare la presenza di un difetto e prevederne le conseguenze.

Bibliografia

- [1] Curt Preissner, Thomas J. Royston, and Deming Shu. A High-Fidelity Harmonic Drive Model. *Journal of Dynamic Systems, Measurement, and Control*, 134(1), 12 2011. 011002.
- [2] Chuang Zou, Tao Tao, Gedong Jiang, and Xuesong Mei. Deformation and stress analysis of short flexspline in the harmonic drive system with load. In *2013 IEEE International Conference on Mechatronics and Automation*, pages 676–680. IEEE, 2013.
- [3] Guixiu Qiao and Brian Weiss. Accuracy degradation analysis for industrial robot systems. ASME International Manufacturing Science and Engineering Conference, Los Angeles, CA, US, 2017-06-07 04:06:00 2017.
- [4] Carmine Costantino. *Sviluppo di un modello multibody di un harmonic drive a fini diagnostici e prognostici*. Tesi di laurea magistrale, Politecnico di Torino, 2020/2021.
- [5] Andrea Raviola, Antonio Carlo Bertolino, Andrea De Martin, Roberto Guida, Stefano Mauro, and Massimo Sorli. Multibody representation on the coupling between wave generator and flexspline in strain wave gears. 2022.
- [6] Kalina A, Mazurkow A, Witkowski W, Wierzba B, and Oleksy M. Properties of elasto-hydrodynamic oil film in meshing of harmonic drive gears. *materials* (basel). 2021. doi: 10.3390/ma14051194.
- [7] Harmonic Drive LLC. Speed Reducers for Precision Motion Control Harmonic Drive®. 2020.
- [8] Huimin Dong, Kwun-Lon Ting, and Delun Wang. Kinematic fundamentals of planar harmonic drives. 133(1), 2011.
- [9] A. Raviola, A. De Martin, Guida R., G. Jacazio, Mauro S., and Sorli M. Harmonic drive gear failures in industrial robots applications: An overview. *PHM Society European Conference*, 6(1), 11. <https://doi.org/10.36001/phme.2021.v6i1.2849>, 2021.
- [10] Jun-Yang Li, Jia-Xu Wang, Guang-Wu Zhou, Wei Pu, and Zhi-Hua Wang. Accelerated life testing of harmonic driver in space lubrication. *Proceedings*

- of the Institution of Mechanical Engineers. Part J, Journal of engineering tribology*, 229(12):1491–1502, 2015.
- [11] Jianlin Zheng and Wei Yang. Failure analysis of a flexspline of harmonic gear drive in stc industrial robot: Microstructure and stress distribution. *IOP Conference Series: Materials Science and Engineering*, 452(4):042148, dec 2018.
- [12] F. Curà, A. Mura, and C. Rosso. Investigation about crack propagation paths in thin rim gears. *Frattura ed integrità strutturale*, 30(30):446–453, 2014.
- [13] David G Lewicki and Roberto Ballarini. *Effect of Rim Thickness on Gear Crack Propagation Path*. 1996.
- [14] David G. Lewicki. *Gear Crack Propagation Path Studies– Guidelines Developed for Ultrasafe Design*. Glenn Research Center, 2002.
- [15] Vineet Sahoo and Rathindranath Maiti. Static load sharing by tooth pairs in contact in internal involute spur gearing with thin rimmed pinion. *Proceedings of the Institution of Mechanical Engineers. Part C, Journal of mechanical engineering science*, 230(4):485–499, 2016.
- [16] Jonathan Drew Smith, Andrew J. Nick, Jason M. Schuler, Andrew Kennett, and R. Peter Dillon. Cryobotics: Extreme cold environment testing of strain wave gear sets. In *IEEE Aerospace Conference Proceedings*, volume 2019-, 2019.
- [17] CW Musser. Strain wave gearing. us patent, 2906143. 1959.
- [18] K. Kondo and J. Takada. Study on tooth profiles of the harmonic drive. *Journal of Mechanical Design* 112.1, 1990.
- [19] Rathindranath Maiti. A novel harmonic drive with pure involute tooth gear pair. *Journal of mechanical design (1990)*, 126(1):178–182, 2004.
- [20] Yutong Yang, Junyang Li, Jiaxu Wang, and Fujiang Zeng. Analysis of tooth profile modification and meshing characteristics of double arc harmonic drive. 2021.
- [21] X. Chen, Yusheng Liu, Jingzhong Xing, Shuzhong Lin, and Wei Xu. The parametric design of double-circular-arc tooth profile and its influence on the functional backlash of harmonic drive. *Mechanism and Machine Theory* 73: 1-24, 2014.
- [22] Guangsheng Chen, Huanhuan Li, and Yang Liu. Double-arc harmonic gear profile design and meshing analysis for multi-section conjugation. *Advances in Mechanical Engineering* 11.5, 2019.
- [23] Litvin and Faydor L. Theory of gearing. washington: Nasa. , 1989.

-
- [24] Ting Tang, Junyang Li, Jiayu Wang, Ke Xiao, and Yanfeng Han. Double-circular-arc tooth profile design and parametric analysis on the comprehensive performance of the harmonic drive. *Proceedings of the Institution of Mechanical Engineers, Part J: Journal of Engineering Tribology*, 236(3):480–498, 2022.
- [25] Jianfeng Ma, Chao Li, Yingchao Luo, and Lingli Cui. Simulation of meshing characteristics of harmonic reducer and experimental verification. *Advances in mechanical engineering*, 10(3), 2018.
- [26] Zou Chuang, Tao Tao, Gedong Jiang, Xuesong Mei, and Junhui Wu. A harmonic drive model considering geometry and internal interaction. *Proceedings of the Institution of Mechanical Engineers. Part C, Journal of Mechanical Engineering Science* 231.4, 2017.
- [27] R. Dhaouadi, F.H. Ghorbel, and P.S. Gandhi. A new dynamic model of hysteresis in harmonic drives. *IEEE Transactions on Industrial Electronics (1982)* 50.6 (2003): 1165-171. Web.
- [28] Bikash Routh. Design aspects of harmonic drive gear and performance improvement of its by problems identification: A review. *AIP Conference Proceedings*, 1943(1):020016, 2018.