



**Politecnico
di Torino**

**Dipartimento di Ingegneria Meccanica e Aerospaziale
Corso di Laurea Magistrale in Ingegneria Aerospaziale**

Ottimizzazione di trasferte a bassa spinta tra orbite LEO con perturbazione J2

Relatore:

Prof. Lorenzo Casalino

Candidato:

Emanuele Russo

Anno Accademico 2022/2023

Indice

1	Introduzione	1
1.1	Detriti spaziali	1
1.2	Active Debris Removal	3
1.3	Propulsione elettrica e chimica	4
1.4	Impostazione del modello	6
2	Dinamica orbitale	8
3	Stima del ΔV	11
3.1	Effetto J_2	11
3.2	Approccio di Edelbaum	13
3.2.1	Variazione parametri orbitali	13
3.2.2	Manovra combinata	14
3.3	Metodo di stima del ΔV	16
3.4	Ottimizzazione approssimata del ΔV	20
4	Algoritmo di calcolo per modello impulsivo	22
4.1	Piani orbitali che si avvicinano	22
4.1.1	tempo di trasferta t uguale a t_*	22
4.1.2	tempo di trasferta t maggiore di t_*	23
4.1.3	tempo di trasferta t minore di t_*	23
5	Risultati modello impulsivo	25
5.1	Caso 1	25
5.2	Caso 2	29
6	Modello elettrico	32
6.1	Approssimazione archi di spinta	32
6.1.1	Durata archi di spinta	33

6.2	Algoritmo di calcolo per modello elettrico	33
7	Risultati modello elettrico	34
7.1	Caso 1 - Massa 100 kg (durata spinta circa 1g.)	34
7.2	Caso 1 - Massa 1000 kg (durata spinta circa 10gg.)	36
7.3	Caso 2 - Massa 100 kg (durata spinta circa 1g.)	37
7.4	Caso 2 - Massa 1000 kg (durata spinta circa 10gg.)	39
7.5	Confronto modelli	41
7.5.1	Caso 1	41
7.5.2	Caso 2	42
8	Conclusioni	43

Abstract

La crescente attività spaziale ha portato negli anni all'accumulo di detriti, soprattutto in specifiche orbite. Diversi studi e simulazioni dimostrano che per rendere l'attività spaziale sostenibile nel lungo termine è necessario rimuovere gli oggetti più critici. Questo elaborato esplora la possibilità di una missione a propulsione elettrica che recuperi in sequenza diversi detriti che si trovano in orbite simili. La propulsione elettrica, scelta per contenere i costi del propellente, presenta tempi di trasferta maggiori e offre la possibilità di sfruttare le perturbazioni legate alla non sfericità della terra, in particolare l'effetto J_2 . Viene fornito un modello di calcolo che stima in modo veloce il ΔV per passare da un'orbita LEO circolare a un'altra con altitudine e inclinazione simili, al fine di facilitare la selezione della sequenza ottimale di rimozione dei detriti.

Introduzione

1.1 Detriti spaziali

Con il termine detriti spaziali si fa riferimento a oggetti creati dall'uomo che si trovano in orbita terrestre senza svolgere alcuna funzione utile. Sono inclusi satelliti non più operativi, ultimi stadi di lanciatori, frammenti creati dalla collisione tra detriti stessi ma anche piccole particelle composte da vernice o materiale espulso da propulsori e razzi.

Nel 1978 Donald J. Kessler, consulente NASA, propone uno scenario, noto come sindrome di Kessler, in cui il numero di oggetti in orbita è talmente elevato da causare scontri sempre più frequenti, le collisioni diventano quindi la fonte primaria della creazione di nuovi detriti, causando una reazione a catena che porta all'aumento esponenziale del volume totale dei detriti, rendendo impossibile l'attività spaziale. Questo remoto scenario tuttavia non preoccupa le organizzazioni spaziali che continuano l'attività, spesso senza prevedere il rientro dei satelliti a fine missione, il numero di oggetti in orbita cresce negli anni. Per mitigare questa crescita l'IADC (Inter-Agency Debris Coordination Committee) formula nel 2002 delle linee guida che prevedono per le nuove missioni spaziali manovre di re-orbit o de-orbit che portino i satelliti fuori dalla zona LEO entro 25 anni dalla fine della loro vita operativa.

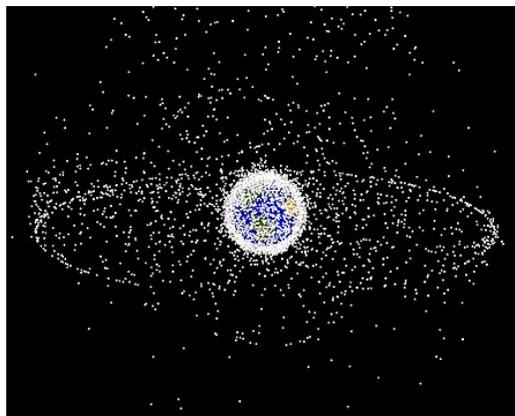


Figura 1.1: posizione dei detriti in orbita nel 2005

Queste misure risultano però insufficienti per risolvere il problema, come si vede in figura 1.1 ci sono zone densamente popolate da detriti come l'orbita geostazionaria (GEO) e l'orbita bassa (LEO).

L'evoluzione futura dei detriti in LEO non è stabile: secondo il modello DELTA (Debris Environment Long Term Analysis) dell'ESA è prevista una crescita del numero di detriti anche in caso di interruzione di futuri lanci in orbita. Dal 2016 l'ESA pubblica ogni anno un report sulla situazione dell'ambiente spaziale per fornire un quadro generale sull'attività spaziale e per determinare se le contromisure adottate stanno migliorando la sostenibilità a lungo termine dell'attività spaziale.

Il report del 2022 [2] evidenzia che stiamo lanciando più satelliti rispetto agli anni precedenti, soprattutto grazie all'enorme crescita del numero di costellazioni di satelliti commerciali in LEO, la maggior parte delle nuove missioni rispettano le linee guida sul de-orbit a fine vita operativa ma i satelliti attualmente attivi sono ancora costretti a effettuare manovre per evitare collisioni con detriti di vecchi spacecraft che sono ora diventati frammenti. Il nostro comportamento nei confronti dello spazio sta migliorando, gli avanzamenti tecnologici ci permettono di individuare detriti sempre più piccoli, ma tutto questo non basta, l'andamento attuale non è sostenibile nel lungo termine.

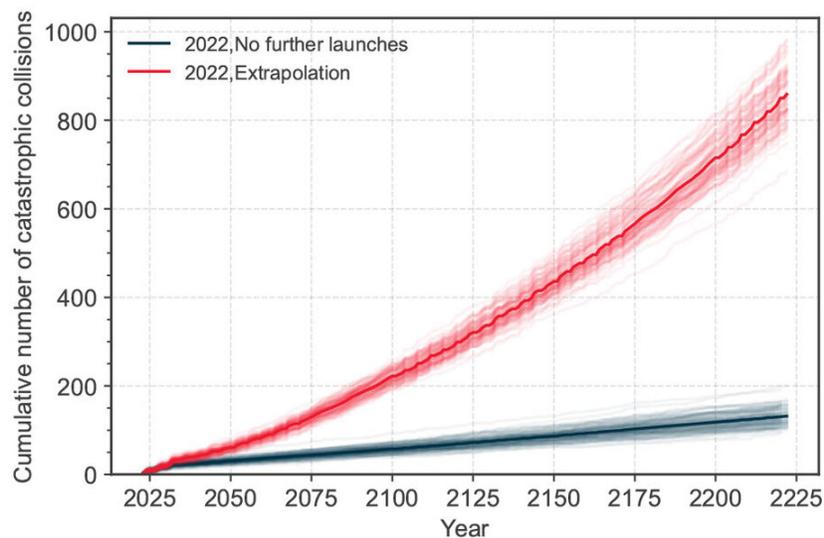


Figura 1.2: proiezioni ESA sul numero di collisioni catastrofiche

Sono più di 30 000 i detriti regolarmente tracciati ma i modelli dell'ESA stimano che il numero di oggetti di dimensioni superiori a 1 *cm* sia oltre un milione. Senza una modifica significativa della tendenza attuale il numero di collisioni catastrofiche potrebbe crescere a dismisura, come vediamo nella figura 1.2 che compara in rosso l'estrapolazione del comportamento attuale, che porterebbe a collisioni sempre più frequenti e in nero l'evoluzione in caso di arresto dell'attività spaziale, in questo caso ci si aspetta una crescita lineare del numero cumulativo di collisioni, una ogni 10 anni circa. [3]

1.2 Active Debris Removal

A lungo termine l'andamento attuale potrebbe portare veramente alla sindrome di Kessler, rendendo certe orbite inutilizzabili. Per stabilizzare la crescita dei detriti spaziali l'ESA ha identificato come obiettivo strategico la rimozione attiva (ADR - Active Debris Removal) degli oggetti più grandi, prima che vengano frammentati dalle collisioni. Una delle tecniche di ADR prevede l'applicazione di un kit propulsivo per il de-orbit in sicurezza del detrito. Studi di NASA e ESA dimostrano che con la rimozione di 5-10 oggetti all'anno dalle orbite LEO, pianificata scegliendo i target in base a massa, area e rischio cumulativo di collisione, l'ambiente può essere stabilizzato [1]. Con le attuali tecnologie la rimozione di 4 – 8 detriti con una singola missione di un anno è fattibile. [7]

L'efficacia dell'ADR dipende proprio dalla scelta dei detriti da rimuovere, gli oggetti selezionati devono avere:

- Grande massa, perché causerebbero numerosi frammenti in caso di collisione
- Alto rischio di collisione, devono quindi avere una grande area trasversale ed essere in orbite densamente popolate da altri oggetti
- Grande altitudine, dove il decadimento orbitale è lungo

Attraverso delle simulazioni sono state individuate alcune orbite LEO più a rischio di collisioni, hanno alta inclinazione e altitudine tra 800 e 1000 *km*, in particolare:

- $a = 1000 \text{ km}, i = 82^\circ$

- $a = 800 \text{ km}, i = 98^\circ$
- $a = 850 \text{ km}, i = 71^\circ$

La concentrazione di oggetti di dimensioni critiche in strette fasce orbitali potrebbe permettere missioni multi-target, che sono il focus di questo elaborato.

1.3 Propulsione elettrica e chimica

La propulsione elettrica e quella chimica presentano caratteristiche differenti, per evidenziarle partiamo dal considerare l'equazione di Tsiolkovsky che lega il ΔV di una manovra al cambiamento di massa da quella iniziale m_i alla finale m_f

$$\Delta V = c \ln \left(\frac{m_i}{m_f} \right) \quad (1.1)$$

L'unico parametro in gioco è la velocità efficace di scarico c . Ragionando parità di ΔV , a una c elevata corrisponde un rapporto $\frac{m_i}{m_f}$ contenuto e quindi a un consumo minore di propellente in termini di massa (m_p). Nella propulsione chimica, la fonte di energia per accelerare il propellente deriva dall'energia chimica del propellente stesso, e questa ha un determinato valore per unità di massa, l'energia fornita ha quindi un limite che porta a valori di c limitati.

$$c_{ch} = \sqrt{2E_{ch}}$$

Questa energia però può essere fornita in maniera molto rapida, perché le reazioni cinetiche chimiche coinvolte sono molto veloci, quindi si possono esprimere grandi potenze che portano a valori di spinta elevati.

Al contrario, la propulsione elettrica presenta una potenza disponibile limitata, solitamente ottenuta da pannelli solari, ne consegue che la spinta di un propulsore elettrico raggiunge valori inferiori rispetto alla propulsione chimica. Le velocità efficaci di scarico c che si possono raggiungere sono invece molto più alte e dipendono dalla tecnologia scelta per il propulsore.

Per paragonare le diverse soluzioni si utilizza generalmente l'impulso specifico invece della velocità efficace di scarico. Nella tabella seguente mettiamo a confronto le principali

tecnologie disponibili per la propulsione chimica ed elettrica.

$$I_{sp} = \frac{I_{tot}}{m_p g_0} = \frac{T \Delta t}{\dot{m}_p \Delta t g_0} = \frac{c}{g_0}$$

L'impulso specifico è direttamente proporzionale alla velocità efficace di scarico, i due parametri differiscono di un fattore g_0 che vale $9.81 [m/s^2]$

<i>propulsore</i>	$I_{sp} [s]$	$T [N]$
propulsione chimica		
monopropellente liquido	200-250	0.01 – 100
bipropellente liquido	300-450	0.01 – 10^7
propellente solido	200-300	1 – 10^6
propellente ibrido	250-350	1 – 10^6
propulsione elettrica		
resistogetto	200-350	0.2 – 0.3
arcogetto	400-1000	0.2 – 1
propulsore a ioni	2000-5000	< 0.2
propulsore a effetto Hall	1500-2000	< 2
propulsore PPT	600-2000	< 0.01
propulsore MPD	2000-5000	< 2

I notevoli vantaggi in termini di I_{sp} sono bilanciati da una riduzione di diversi ordini di grandezza della spinta massima raggiungibile.

Le caratteristiche diverse di questi due tipi di propulsione portano anche a traiettorie diverse per la stessa missione, nel caso chimico per una trasferta tra due orbite circolari bastano due impulsi (trasferta di Hohmann) mentre nel caso elettrico è necessario seguire una traiettoria a spirale con una variazione graduale dei parametri orbitali, come vediamo in figura 1.3.

Per gli scopi di questo elaborato risulta interessante l'opzione di considerare la propulsione elettrica che porta un risparmio sulla massa di propellente a fronte però di una capacità di spinta limitata che porta quindi a tempi di missione maggiori.

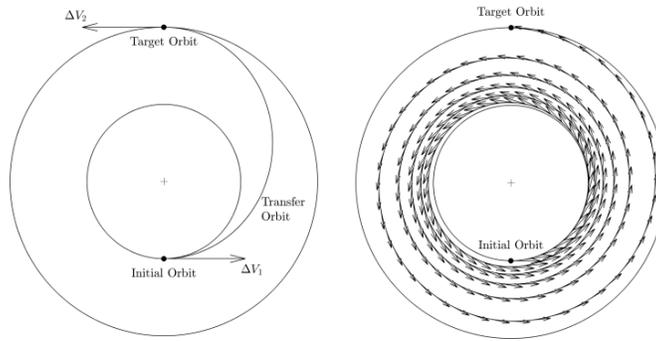


Figura 1.3: confronto traiettoria, propulsione chimica e elettrica

1.4 Impostazione del modello

In questa tesi si esplora la possibilità di una missione che effettui la rimozione attiva di più oggetti, passando da un target all'altro in una sequenza prestabilita. Tale missione potrebbe sfruttare la propulsione elettrica per contenere i costi del propellente. Questo elaborato propone un metodo di stima del costo, in termini di ΔV , per passare da un detrito al successivo usando propulsione elettrica a bassa spinta, in modo da facilitare scelta della sequenza ottimale di oggetti da rimuovere. Nello specifico verranno considerate, per il detrito k -esimo (orbita di partenza) e per il detrito $(k + 1)$ -esimo (orbita target), orbite LEO circolari con altitudine e inclinazione simili tra loro, nell'ottica di una sequenza di rimozione attiva che prenda di mira un cluster di oggetti con orbita simile.

Il capitolo 2 è un breve richiamo di alcuni concetti fondamentali legati alla dinamica orbitale, a cui segue una ampia trattazione delle basi su cui andremo a costruire il modello di questa tesi: nel capitolo 3 è introdotta la teoria di Edelbaum a cui viene integrata una modifica per tenere conto dell'effetto dell'armonica zonale J_2 , che modifica nel tempo alcuni parametri orbitali, in particolare il RAAN (Rigth Ascension of Ascending Node). Si ricava quindi un procedimento per stimare il ΔV tra due orbite LEO circolari. Lavorando ulteriormente con le equazioni si ottiene un metodo approssimato per l'ottimizzazione del ΔV per una trasferta a tre archi del tipo *thrust-coast-thrust*. Ci concentriamo inizialmente a manovre impulsive nel capitolo 4, ne deriva un algoritmo analitico che ottimizza le trasferte in maniera diversa a seconda dei dati di partenza. Il capitolo 5 espone i risultati del

modello impulsivo evidenziando le differenze tra due casi presi in esempio. Nel capitolo 6 gli archi di spinta non sono più considerati impulsivi, viene modificato il modello per tenere conto della bassa spinta, il capitolo 7 presenta i risultati di quest'ultimo modello elettrico e li confronta con quello precedente impulsivo.

Dinamica orbitale

Il sistema di riferimento che andremo a considerare durante tutta la trattazione è quello geocentrico equatoriale, definito nel seguente modo:

- L'origine coincide con il centro della Terra
- il piano fondamentale (in cui giacciono i versori \hat{I} e \hat{J}) è il piano equatoriale terrestre
- La direzione primaria (\hat{I}) è parallela alla linea degli equinozi e diretta verso il punto vernale
- Per completare la terna destrorsa, il versore \hat{J} è a 90° est rispetto a \hat{I} nel piano fondamentale, e il versore \hat{K} è diretto verso il polo nord

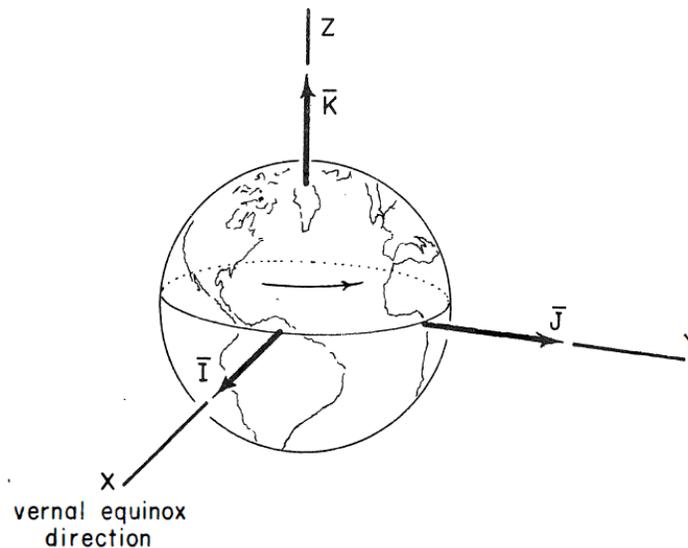


Figura 2.1: sistema di riferimento geocentrico equatoriale [4]

Questo sistema di riferimento non segue il moto di rivoluzione terrestre. L'unica rotazione dei versori è data dalla precessione degli equinozi che fa ruotare il punto vernale con un periodo di circa 26 000 anni.

Introduciamo ora i parametri orbitali kepleriani, necessari a descrivere in maniera univoca una qualsiasi orbita chiusa:

- a , semiasse maggiore, specifica le dimensioni dell'orbita
- e , eccentricità, determina la forma dell'orbita
- i , inclinazione, è l'angolo tra il piano dell'orbita e il piano fondamentale di riferimento
- Ω o RAAN, ascensione retta del nodo ascendente, è l'angolo nel piano fondamentale misurato tra il versore \hat{I} e il nodo ascendente, cioè il punto dove l'orbita interseca il piano fondamentale passando da sud a nord
- ω , argomento del periastro, specifica l'orientamento dell'orbita nel suo piano, è l'angolo nel piano orbitale misurato tra il nodo ascendente e il periastro
- ν , anomalia vera, è l'angolo, misurato nel piano orbitale, tra il periastro e la posizione del satellite

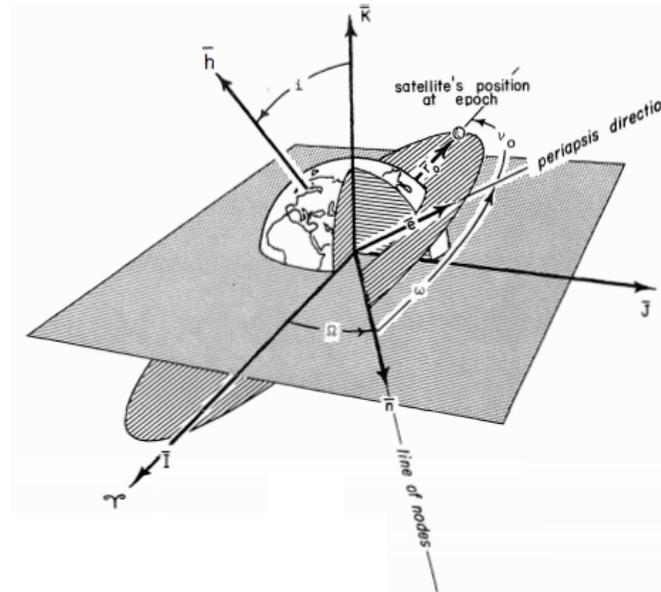


Figura 2.2: parametri orbitali [4]

I parametri a ed e descrivono l'orbita nel suo piano, i , Ω , e ω descrivono l'orientamento dell'orbita rispetto al sistema di riferimento, ν descrive in funzione del tempo la posizione del satellite nella sua orbita. In alternativa a ν si può usare l'anomalia media M che è la frazione di periodo orbitale trascorsa dall'ultimo passaggio al periastro, è espressa in termini di un angolo fittizio che varia linearmente col tempo ma non corrisponde ad alcun angolo geometrico dell'orbita.

In casi specifici alcuni di questi parametri perdono di significato e vanno introdotti dei nuovi parametri:

- Per orbite circolari ($e = 0$) non esiste più il riferimento del periastro, ω perde di significato e si definisce $u = \omega + \nu$, argomento della latitudine
- Per orbite equatoriali ($i = 0$) non esiste più il riferimento del nodo ascendente, Ω perde di significato e si definisce $\Pi = \Omega + \omega$, longitudine del periastro
- Per orbite sia circolari che equatoriali si definisce $l = \Omega + \omega + \nu$, longitudine vera

Stima del ΔV

In questo capitolo iniziamo a porre le basi per creare il modello che ci permetterà di calcolare il costo, in termini di ΔV , di una trasferta a bassa spinta tra due oggetti in orbite LEO circolari, tenendo conto dell'effetto J_2 . Il modello si basa sulle seguenti ipotesi semplificative:

- si considerano orbite quasi-circolari, quindi si trascura l'eccentricità ($e \simeq 0$), si possono confondere tra loro raggio, semiasse, e semilatus rectum ($r \simeq a \simeq p$), inoltre l'argomento del periastro ω perde di significato
- si suppone che la fasatura corretta sia ottenibile con modifiche trascurabili, pertanto l'anomalia vera ν e l'anomalia media M vengono escluse dalla trattazione

I parametri orbitali di interesse sono quindi a , i e Ω . Lo scopo del modello che stiamo creando è di calcolare una trasferta tra detriti nello stesso cluster, siamo quindi interessati a piccole variazioni dei parametri orbitali; come abbiamo visto nell'introduzione, le fasce di orbite più a rischio hanno alta inclinazione e altitudine tra 800 e 1000 km . A queste altitudini la resistenza atmosferica risulta trascurabile, trascuriamo inoltre la pressione solare e l'influenza di altri corpi celesti. Da queste considerazioni traiamo due ulteriori ipotesi:

- si considerano piccole variazioni dei parametri orbitali a , i e Ω
- l'unica perturbazione delle orbite è data dall'armonica zonale J_2

3.1 Effetto J_2

Se la Terra fosse perfettamente sferica e con distribuzione di massa omogenea, il potenziale gravitazionale sarebbe semplicemente:

$$V = -\frac{\mu}{r} \tag{3.1}$$

Dove μ è il parametro gravitazionale terrestre ($\mu = 398600 \text{ km}^3/\text{s}^2$) e r è la distanza dal centro della terra. Questa espressione del potenziale gravitazionale da origine alle orbite Kepleriane, descritte dalla seguente equazione del moto:

$$\ddot{\mathbf{r}} = -\frac{\mu}{r^3}\mathbf{r} \quad (3.2)$$

La realtà però è ben diversa, la Terra non è sferica, la sua forma viene approssimata da modelli di geodesia che complicano la relazione del potenziale andando a considerare l'effettiva distribuzione della massa terrestre.

$$\mathbf{V} = -\frac{\mu}{r} \left\{ 1 - \sum_{n=2}^{\infty} J_n \left(\frac{R_E}{r} \right)^2 P_n \sin La - \sum_{n=2}^{\infty} \sum_{m=2}^{\infty} J_{n,m} P_n^m \sin La \cos (Lo - Lo_{n,m}) \right\} \quad (3.3)$$

Vengono introdotte le armoniche zonali J_n e le armoniche tesserali e settoriali $J_{n,m}$, compaiono le dipendenze da latitudine e longitudine, mentre P_n rappresentano i polinomi di Legendre di grado n . L'armonica zonale J_2 considera lo schiacciamento dei poli terrestri e risulta essere l'effetto preponderante, vale $J_2 = 1.082 \cdot 10^{-3}$. Le altre armoniche hanno effetti via via minori, trascurabili rispetto a J_2 . Il contributo di J_2 al potenziale risulta:

$$\mathbf{V}_{J_2} = -\frac{\mu J_2 R_E^2}{2r^3} [3 \sin^2(La) - 1] \quad (3.4)$$

Che si può riscrivere introducendo i parametri orbitali i e ν :

$$\mathbf{V}_{J_2} = -\frac{\mu J_2 R_E^2}{2r^3} [3 \sin^2 i \sin^2 \nu - 1]$$

Applichiamo un approccio perturbativo: continuiamo a considerare le orbite Kepleriane e introduciamo gli effetti di J_2 come perturbazioni esterne.

J_2 causa perturbazioni su Ω , ω e M , l'unica rilevante per il modello che si vuole creare è quella su Ω e consiste nella regressione della linea dei nodi, ovvero una variazione di Ω nel tempo negativa per orbite dirette ($0^\circ < i < 90^\circ$) e positiva per orbite retrograde ($90^\circ < i < 180^\circ$). Riportiamo quindi l'equazione perturbata di Lagrange per Ω :

$$\frac{d\Omega}{dt} = \frac{1}{\sqrt{\frac{\mu}{a^3} a^2 \sqrt{1-e^2} \sin i}} \frac{\partial V}{\partial i} \quad (3.5)$$

Da cui si ricava:

$$\dot{\Omega} = -\frac{3}{2} \sqrt{\frac{\mu}{a^3}} J_2 \cos i \left(\frac{R_E}{p} \right)^2 \quad (3.6)$$

Specificando per un'orbita circolare ($p = a$) si ottiene:

$$\dot{\Omega} = -\frac{3}{2} \sqrt{\frac{\mu}{a^3}} J_2 \cos i \left(\frac{R_E}{a} \right)^2 \quad (3.7)$$

dove μ è il parametro gravitazionale terrestre e R_E il raggio della Terra all'equatore. Per piccole variazioni di a e i possiamo riscrivere questa relazione in forma differenziale:

$$\frac{\Delta \dot{\Omega}}{\dot{\Omega}} = -\frac{7}{2} \frac{\Delta a}{a} - \tan i \cdot \Delta i \quad (3.8)$$

3.2 Approccio di Edelbaum

Il modello di Edelbaum si basa su ipotesi coerenti con quelle già discusse:

- orbite quasi-circolari $\rightarrow e \simeq 0, r \simeq a \simeq p, V \simeq \frac{\mu}{r}$
- piccole variazioni di inclinazione $\rightarrow \cos \Delta i \simeq 1, \sin \Delta i \simeq \Delta i$
- spinta bassa, trascurabile rispetto all'accelerazione gravitazionale $\rightarrow \frac{T}{m} \ll \ll \frac{\mu}{r^2}$

Questo modello però non prevede alcuna perturbazione, lo andremo a modificare per considerare la regressione della linea dei nodi causata da J_2 .

3.2.1 Variazione parametri orbitali

Sotto queste ipotesi si semplificano le equazioni planetarie di Gauss, che descrivono come variano i parametri orbitali nel tempo:

$$\begin{aligned} V \frac{da}{dt} &= 2r A_T \\ V \frac{de}{dt} &= 2 \cos \nu A_T - \sin \nu A_R \\ V \frac{di}{dt} &= \cos(\omega + \nu) A_w \\ eV \frac{d\omega}{dt} &= -V \frac{d\Omega}{dt} + 2 \sin \nu A_T - \cos \nu A_R \\ \Delta i V \frac{d\Omega}{dt} &= \sin(\omega + \nu) A_w \\ \frac{d\nu}{dt} &= \sqrt{\frac{\mu}{a^3}} = \frac{V}{r} \end{aligned} \quad (3.9)$$

Dove A_T , A_R , e A_W rappresentano le tre componenti dell'accelerazione: tangenziale, radiale e fuori dal piano; per trovare le componenti della spinta basta dividere per la massa dello spacecraft. Notiamo che:

- La componente tangenziale della spinta modifica a , e , ω
- La componente radiale della spinta modifica e , ω
- La componente della spinta perpendicolare al piano orbitale modifica i , Ω

Possiamo riscrivere le componenti dell'accelerazione introducendo α , l'angolo nel piano dell'orbita tra il vettore velocità e il vettore spinta, e β , l'angolo tra il vettore spinta e il piano dell'orbita.

$$\begin{cases} A_T = \frac{T}{m} \cos \alpha \cos \beta \\ A_R = \frac{T}{m} \sin \alpha \cos \beta \\ A_W = \frac{T}{m} \sin \beta \end{cases} \quad (3.10)$$

3.2.2 Manovra combinata

Escludiamo le relazioni di $\dot{\omega}$ e $\dot{\nu}$ che non sono di interesse e notiamo che l'equazione di $\dot{\Omega}$ presenta una singolarità per $\Delta i = 0$ e quindi non può essere usata. Ci concentriamo ora su variazioni di semiasse maggiore e inclinazione. Nel caso di variazione di a la soluzione ottimale prevede $\alpha = 0$ e $\beta = 0$, quindi solamente spinta tangenziale. Per una manovra combinata che varia a e i vale nuovamente $\alpha = 0$ (assenza di spinta radiale) ma β non è più nullo poiché è necessaria una spinta fuori dal piano per variare l'inclinazione, la soluzione ottimale è $\beta = k \cos \omega + \nu$, dove k è funzione di Δa e Δi . Esiste una soluzione approssimata più semplice che ipotizza per β un valore costante $\bar{\beta}$ che cambia di segno in base quello di $\cos(\omega + \nu)$:

$$\beta = \begin{cases} \bar{\beta} & \text{se } \cos(\omega + \nu) > 0 \\ -\bar{\beta} & \text{se } \cos(\omega + \nu) < 0 \end{cases}$$

L'ottimizzazione prevede che β venga ricalcolato ad ogni rivoluzione, in particolare:

$$\frac{\sin \beta}{\sqrt{r}} = \text{cost}$$

Conviene quindi avere β crescente all'aumentare del raggio.

Per una manovra combinata su altitudine e inclinazione, il costo di una trasferta tra orbite circolari si può scrivere come:

$$\Delta V = \sqrt{V_0^2 - 2V_0V_f \cos \pi \frac{\Delta i}{2} + V_f^2} \quad (3.11)$$

dove V_0 e V_f sono le velocità circolari delle orbite iniziale e finale. Per piccole variazioni l'espressione si può riscrivere:

$$\Delta V = V_0 \sqrt{\left(\frac{\pi}{2} \Delta i\right)^2 + \left(\frac{\Delta a}{2a_0}\right)^2} \quad (3.12)$$

Da questa espressione è facile evidenziare i diversi contributi al ΔV dati da Δa e Δi :

$$\begin{cases} \frac{\Delta V_a}{V_0} = \frac{\Delta a}{2a_0} \\ \frac{\Delta V_i}{V_0} = \frac{\pi}{2} \Delta i \end{cases} \quad (3.13)$$

con $\Delta V = \sqrt{\Delta V_a^2 + \Delta V_i^2}$.

A questo punto integriamo questo modello con un terzo contributo al ΔV dato da $\Delta \Omega$

$$\frac{\Delta V_\Omega}{V_0} = \frac{\pi}{2} \sin i_0 (\underbrace{\Delta \Omega_{thrust} + \Delta \Omega_{J_2}}_{\Delta \Omega}) \quad (3.14)$$

$$\Delta V = \sqrt{\Delta V_\Omega^2 + \Delta V_a^2 + \Delta V_i^2}$$

dove $\Delta \Omega_{J_2}$ quantifica la variazione di Ω causata dall'effetto J_2 per l'intero tempo di trasferta, mentre $\Delta \Omega_{thrust}$ è la variazione causata attivamente dai due archi di spinta. Più avanti vedremo che una delle strategie che si possono adottare per ottimizzare il ΔV consiste nel rendere $\Delta \Omega_{J_2} = -\Delta \Omega_{thrust}$ in modo da annullare ΔV_Ω .

3.3 Metodo di stima del ΔV

Orbite diverse sono soggette a una regressione della linea dei nodi di diversa entità, anche piccole variazioni di semiasse e inclinazione portano ad avere un $\Delta\dot{\Omega}$ tra due orbite, questo modifica nel tempo il loro Ω relativo. Una possibile strategia potrebbe consistere nell'aspettare il naturale allineamento del RAAN delle orbite prima di effettuare manovre. Questo approccio però non è adatto al nostro scopo, la sequenza di detriti da raggiungere potrebbe dettare delle limitazioni sulla durata di ogni singola trasferta. Per questo motivo il tempo verrà trattato come input del problema, i risultati esprimeranno il costo della trasferta in funzione del tempo.

Andremo in prima analisi a cercare una soluzione ottima per ΔV forniti in modo impulsivo, successivamente questo modello verrà modificato per tenere conto della bassa spinta. Il modello impulsivo ci fornirà inoltre un utile paragone per commentare i risultati del modello elettrico finale.

Consideriamo una trasferta impulsiva del tipo *thrust-coast-thrust*, composta quindi da un primo impulso al tempo iniziale t_0 , una fase di coast e un secondo impulso al tempo finale t . L'obiettivo della manovra è quello di rendere, alla fine del secondo impulso, i parametri a , i e Ω del chaser uguali a quelli del target. Le variazioni di velocità necessarie a causare tali modifiche nei parametri orbitali sono state ottenute nel capitolo precedente:

$$\begin{cases} \Delta V_{\Omega} = \frac{\pi}{2} \Delta\Omega \sin i_0 V_0 \\ \Delta V_a = \frac{\Delta a}{2a_0} V_0 \\ \Delta V_i = \frac{\pi}{2} \Delta i V_0 \end{cases} \quad (3.15)$$

Queste tre componenti di variazione della velocità vengono compensate parzialmente dall'impulso iniziale che genera un ΔV_A , l'impulso finale completa la manovra generando un ΔV_B tale da far combaciare l'orbita del chaser con quella del target.

$$\Delta V_A + \Delta V_B = \Delta V = \sqrt{\Delta V_{\Omega}^2 + \Delta V_a^2 + \Delta V_i^2} \quad (3.16)$$

Per semplicità rinominiamo con x , y , e z le tre componenti di variazione della velocità e esplicitiamo le variazioni dei parametri orbitali:

$$x = \Delta V_\Omega = \frac{\pi}{2}(\Omega_{k+1}(t) - \Omega_k(t)) \sin i_0 V_0 \quad (3.17)$$

$$y = \Delta V_a = \frac{a_{k+1} - a_k}{2a_0} V_0 \quad (3.18)$$

$$z = \Delta V_i = \frac{\pi}{2}(i_{k+1} - i_k) V_0 \quad (3.19)$$

dove t è la durata imposta della trasferta tra il detrito k -esimo e il $(k + 1)$ -esimo mentre i valori di riferimento a_0 , i_0 , e V_0 sono calcolati nel seguente modo:

$$a_0 = \frac{a_{k+1} + a_k}{2}$$

$$i_0 = \frac{i_{k+1} + i_k}{2}$$

$$V_0 = \sqrt{\frac{\mu}{a_0}}$$

Notiamo subito che y e z sono calcolate direttamente dai dati iniziali $(a_k, i_k, a_{k+1}, i_{k+1})$ mentre in x compare una dipendenza dal tempo t che è dovuta all'effetto J_2 ; esplicitiamo meglio il termine $\Omega_{k+1}(t) - \Omega_k(t)$ per capire in che modo x dipende dal tempo:

$$\Omega_{k+1}(t) - \Omega_k(t) = \underbrace{\Omega_{k+1}(t_0 = 0) - \Omega_k(0)}_{\Delta\Omega(0)} + \underbrace{(\dot{\Omega}_{k+1}(0) - \dot{\Omega}_k(0))}_{\Delta\dot{\Omega}} \cdot t \quad (3.20)$$

Le Ω al tempo zero sono dati iniziali mentre le $\dot{\Omega}$ al tempo zero sono calcolate con l'equazione 3.7 del paragrafo sull'effetto J_2 .

$$\dot{\Omega}_k = -\frac{3}{2} \sqrt{\frac{\mu}{a_k^3}} J_2 \cos i_k \quad (3.21)$$

$$\dot{\Omega}_{k+1} = -\frac{3}{2} \sqrt{\frac{\mu}{a_{k+1}^3}} J_2 \cos i_{k+1}$$

Il termine $\Omega_{k+1}(t) - \Omega_k(t)$ risulta essere definito a priori, in base ai parametri orbitali iniziali $(a_k, i_k, \Omega_k, a_{k+1}, i_{k+1}, \Omega_{k+1})$ e al tempo t che è anch'esso fissato a priori; x quindi non tiene conto della manovra effettuata. L'effetto J_2 invece dipende fortemente dalla manovra effettuata, in particolare la prima fase propulsa introduce modifiche nei parametri

orbitali della fase di coast che modificano di conseguenza il $\dot{\Omega}$ effettivo. Per tenere conto di questa discrepanza introduciamo un Δx ; tra poco ricaveremo la sua espressione.

Introduciamo inoltre dei coefficienti di parzializzazione s_x , s_y , e s_z che ci permettono di esprimere il costo del primo arco di spinta (A):

$$\Delta V_A = \sqrt{(s_x x)^2 + (s_y y)^2 + (s_z z)^2} \quad (3.22)$$

Questi coefficienti s non sono vincolati a priori, saranno determinati dall'ottimizzazione della manovra. Nello specifico s_y e s_z determinano le variazioni di a e i del primo arco di spinta e quindi giocano un ruolo principale nel calcolo del Δx .

Per definire Δx immaginiamo una trasferta che con il primo arco di spinta (A) modifichi a e i in modo da fornire per effetto J_2 un $\Delta \dot{\Omega}_A$ che nel tempo di trasferta t compensa esattamente $\Omega_{k+1}(t) - \Omega_k(t)$.

$$\Omega_{k+1}(t) - \Omega_k(t) = \Delta \dot{\Omega}_A \cdot t \quad (3.23)$$

In questo modo x viene interamente compensato dal Δx e non risulta necessaria alcuna spinta per modificare direttamente Ω .

$$x + \Delta x = 0 \quad (3.24)$$

$\Delta \dot{\Omega}_A$ rappresenta la variazione di $\dot{\Omega}$ causata dalla variazione di a e i a seguito della prima fase propulsa, ricordiamo che x non tiene conto di come $\dot{\Omega}$ varia durante il tempo di trasferta, è proprio per questo motivo che è necessario un Δx per correggere questa discrepanza.

Ricordiamo anche la definizione di x e riscriviamo l'equazione 3.8 specificandola per il primo arco di spinta (A)

$$\begin{cases} x = \frac{\pi}{2}(\Omega_{k+1}(t) - \Omega_k(t)) \sin i_0 V_0 \\ \frac{\Delta \dot{\Omega}_A}{\dot{\Omega}_0} = -\frac{7}{2} \frac{\Delta a_A}{a_A} - \tan i_A \cdot \Delta i_A \\ \Omega_{k+1}(t) - \Omega_k(t) = \Delta \dot{\Omega}_A \cdot t \\ x + \Delta x = 0 \end{cases} \quad (3.25)$$

in cui il pedice A fa riferimento ai valori dopo il primo arco di spinta:

$$\Delta a_A = a_k(t_A) - a_k(0)$$

$$\Delta i_A = i_k(t_A) - i_k(0)$$

$$a_A = \frac{a_k(t_A) + a_k(0)}{2}$$

$$i_A = \frac{i_k(t_A) + i_k(0)}{2}$$

$$\dot{\Omega}_0 = \frac{\dot{\Omega}_k + \dot{\Omega}_{k+1}}{2}$$

Risolvendo il sistema 3.25, otteniamo un'espressione per Δx :

$$\Delta x = \underbrace{\frac{\pi}{2}(7\dot{\Omega}_0) \sin(i_0) \cdot t}_{m} \frac{\Delta a_A}{2a_A} V_0 + \underbrace{\tan i_0 \dot{\Omega}_0 \sin i_0 \cdot t}_n \frac{\pi}{2} \Delta i_A V_0 \quad (3.26)$$

in cui riconosciamo i contributi del primo impulso $s_y y$ e $s_z z$ e reggruppiamo il resto in due parametri m e n

$$\begin{cases} y = \frac{\Delta a}{2a_0} V_0 \implies s_y y = \frac{\Delta a_A}{2a_A} V_0 \\ z = \frac{\pi}{2} \Delta i V_0 \implies s_z z = \frac{\pi}{2} \Delta i_A V_0 \end{cases}$$

$$m = \frac{\pi}{2} (7\dot{\Omega}_0) \sin(i_0) \cdot t$$

$$n = \tan i_0 \dot{\Omega}_0 \sin i_0 \cdot t$$

che ci portano a riassumere l'espressione di Δx nella seguente formula:

$$\Delta x = m s_y y + n s_z z \quad (3.27)$$

Per arrivare a questa definizione abbiamo ipotizzato per semplicità di calcolo di scegliere $s_y y$ e $s_z z$ in modo da compensare esattamente $\Delta \Omega$ solo per effetto J_2 , ma il risultato che otteniamo lo possiamo estendere a un caso generico in cui non valgono più le ipotesi 3.23 e 3.24 e quindi la variazione di Ω sarà data sia dall'effetto J_2 che dalla manovra attiva del chaser.

L'effetto J_2 calcolato in termini di Δx ci è utile per esprimere il costo del secondo arco di spinta (B), tramite Δx teniamo conto della variazione di Ω ottenuta durante la fase di

coast:

$$\Delta V_B = \sqrt{(x + \Delta x - s_x x)^2 + (y - s_y y)^2 + (z - s_z z)^2} \quad (3.28)$$

Sommando i due archi otteniamo il ΔV totale:

$$\begin{aligned} \Delta V &= \Delta V_A + \Delta V_B \\ &= \sqrt{(s_x x)^2 + (s_y y)^2 + (s_z z)^2} + \sqrt{(x + \Delta x - s_x x)^2 + (y - s_y y)^2 + (z - s_z z)^2} \end{aligned} \quad (3.29)$$

3.4 Ottimizzazione approssimata del ΔV

Adesso ci concentriamo sui coefficienti s . Per cercare il minimo ΔV possiamo calcolare le derivate parziali rispetto a s_x , s_y , e s_z e porle uguali a zero:

$$\begin{cases} \frac{\partial \Delta V}{\partial s_x} = 0 \\ \frac{\partial \Delta V}{\partial s_y} = 0 \\ \frac{\partial \Delta V}{\partial s_z} = 0 \end{cases} \quad (3.30)$$

Il problema così come è posto non ha una soluzione in forma chiusa. [5] Risulta efficace adottare un'approssimazione che considera il quadrato dei termini presenti nell'equazione 3.29, trascurando i doppi prodotti:

$$\Delta V_A^2 + \Delta V_B^2 = (s_x x)^2 + (s_y y)^2 + (s_z z)^2 + (x + \Delta x - s_x x)^2 + (y - s_y y)^2 + (z - s_z z)^2 \quad (3.31)$$

Risolvendo il nuovo sistema:

$$\begin{cases} \frac{\partial \Delta V_A^2 + \Delta V_B^2}{\partial s_x} = 2x(2xs_x - mys_y - nzs_z - x) = 0 \\ \frac{\partial \Delta V_A^2 + \Delta V_B^2}{\partial s_y} = 2y(-mxs_x + 2ys_y + m^2ys_y + mnzs_z - y + mx) = 0 \\ \frac{\partial \Delta V_A^2 + \Delta V_B^2}{\partial s_z} = 2z(-nxs_x + mnys_y + 2zs_z + n^2zs_z - z + nx) = 0 \end{cases} \quad (3.32)$$

si ottengono le espressioni:

$$\begin{cases} s_x = \frac{2x + my + nz}{(4 + m^2 + n^2)x} \\ s_y = \frac{2mx - y(4 + n^2) + mnz}{y(8 + 2m^2 + 2n^2)} \\ s_z = \frac{2nx + mny - z(4 + m^2)}{z(8 + 2m^2 + 2n^2)} \end{cases} \quad (3.33)$$

Nell'algoritmo di calcolo proposto in questa tesi, questa soluzione approssimata verrà affiancata ad altre strategie per il calcolo dei coefficienti s_x, s_y, s_z nell'ottica di rendere la soluzione più vicina a quella ottima (calcolata con algoritmi di ottimizzazione al fine di confrontarla con la soluzione del nostro algoritmo analitico).

Algoritmo di calcolo per modello impulsivo

Per cercare di migliorare la soluzione approssimata ricavata nel capitolo precedente dividiamo le possibili coppie di chaser-target in due categorie:

1. L'effetto J_2 tende a far avvicinare i piani orbitali di chaser e target
2. L'effetto J_2 tende a far allontanare i piani orbitali di chaser e target

Per il secondo caso non risulta esserci un metodo per ottenere analiticamente i coefficienti s_x, s_y, s_z che ottimizzano il ΔV , mentre il primo caso risulta più interessante, possiamo sfruttare il fatto che i piani orbitali si avvicinano per trovare una soluzione ottimizzata.

4.1 Piani orbitali che si avvicinano

I piani orbitali si avvicinano quando $\Delta\Omega(0)$ ($= \Omega_{k+1} - \Omega_k$) e $\Delta\dot{\Omega}$ ($= \dot{\Omega}_{k+1} - \dot{\Omega}_k$) hanno segno opposto. In questo caso esiste un tempo t_* di attesa, trascorso il quale i piani orbitali di chaser e target vanno a coincidere (in termini di RAAN ma non di inclinazione i) senza che sia stata effettuata una spinta per modificare attivamente il RAAN del chaser (quindi con $x = \Delta V_\Omega = 0$). Il tempo $t = t_*$ è quello che rende nullo il termine $\Omega_{k+1}(t) - \Omega_k(t)$:

$$\Delta\Omega(0) + \Delta\dot{\Omega} \cdot t_* = 0 \quad (4.1)$$

$$t_* = -\frac{\Delta\Omega(0)}{\Delta\dot{\Omega}} \quad (4.2)$$

Nascono quindi due sottocasi, a seconda del fatto che il tempo di trasferta t sia maggiore o minore di t_* . Partiamo da analizzare il caso particolare in cui i due tempi coincidono.

4.1.1 tempo di trasferta t uguale a t_*

In questo caso la differenza di RAAN è esattamente compensata al momento dell'arrivo, quindi non è necessaria spinta: $x = \Delta V_\Omega = 0$. Per quanto riguarda la correzioni di

Δa e Δi , la soluzione ottima consiste nell'attendere l'allineamento delle orbite e dare un impulso solo al tempo finale. I coefficienti s risultano quindi tutti nulli.

$$\begin{cases} s_x = 0 \\ s_y = 0 \\ s_z = 0 \end{cases} \quad (4.3)$$

4.1.2 tempo di trasferta t maggiore di t_*

Cerchiamo di propagare la soluzione ottima del caso $t_{trasferta} = t_*$ anche nel caso di tempi di trasferta maggiori. La soluzione ottima prevede solamente un impulso finale che corregge Δa e Δi , inserendo un primo impulso incognito modifichiamo l'orbita iniziale del chaser in modo tale che al tempo finale si annulli il termine $\Omega_{k+1}(t) - \Omega_k(t)$ così come accade nel caso ottimo, in questo modo il contributo di spinta per correggere $\Delta\Omega$ risulta nullo sia nel primo che nel secondo impulso.

$$\begin{cases} s_x x = 0 \\ x + \Delta x - s_x x = 0 \end{cases} \quad (4.4)$$

a cui aggiungiamo la condizione aggiuntiva $s_y = s_z$ che distribuisce i contributi y e z con la stessa proporzione tra primo e secondo impulso. Queste equazioni, insieme alle definizioni di $x, y, z, \Delta x, m,$ e n , che troviamo nel capitolo precedente, portano alla soluzione:

$$\begin{cases} s_x = 0 \\ s_y = 1 - \frac{t_*}{t} \\ s_z = 1 - \frac{t_*}{t} \end{cases} \quad (4.5)$$

4.1.3 tempo di trasferta t minore di t_*

La soluzione che abbiamo costruito per tempi maggiori di t_* non è adatta per tempi minori: per sfruttare l'effetto J_2 in modo da azzerare il ΔV_Ω questo procedimento dà luogo

a coefficienti s_y e s_z negativi, questo significa una spinta aggiuntiva iniziale in direzione opposta rispetto al risultato finale, che quindi andrà poi compensata con il secondo impulso. Il bilancio complessivo tra l'azzeramento del ΔV_Ω e gli incrementi di ΔV_a e ΔV_i dà come risultato un ΔV elevato, si cercano quindi altri modi per calcolare i coefficienti s . L'approccio adottato consiste nel confronto di 3 soluzioni di tentativo:

a) solo impulso iniziale

$$\begin{cases} s_x = 1 \\ s_y = 1 \\ s_z = 1 \end{cases} \quad (4.6)$$

b) solo impulso finale

$$\begin{cases} s_x = 0 \\ s_y = 0 \\ s_z = 0 \end{cases} \quad (4.7)$$

c) soluzione approssimata del capitolo precedente

$$\begin{cases} s_x = \frac{2x + my + nz}{(4 + m^2 + n^2)x} \\ s_y = \frac{2mx - y(4 + n^2) + mnz}{y(8 + 2m^2 + 2n^2)} \\ s_z = \frac{2nx + mny - z(4 + m^2)}{z(8 + 2m^2 + 2n^2)} \end{cases} \quad (4.8)$$

Risultati modello impulsivo

Analizziamo due casi diversi, il primo con piani orbitali che tendono ad avvicinarsi per effetto J_2 , il secondo con piani orbitali che tendono ad allontanarsi.

I dati iniziali sono mostrati nella tabella seguente:

	<i>Caso 1</i>		<i>Caso 2</i>	
	Orbita chaser	Orbita target	Orbita chaser	Orbita target
Altitudine a [km]	779.3	733.8	779.3	733.8
Inclinazione i [deg]	98.64	97.45	98.64	97.45
RAAN Ω [deg]	0	3.5	3.5	0

Si noti che vengono mantenuti stessi a e i in entrambi i casi, è sufficiente scambiare Ω di chaser e target per invertire l'avvicinamento dei piani orbitali in un allontanamento

5.1 Caso 1

Riportiamo i risultati in funzione del tempo di trasferta t

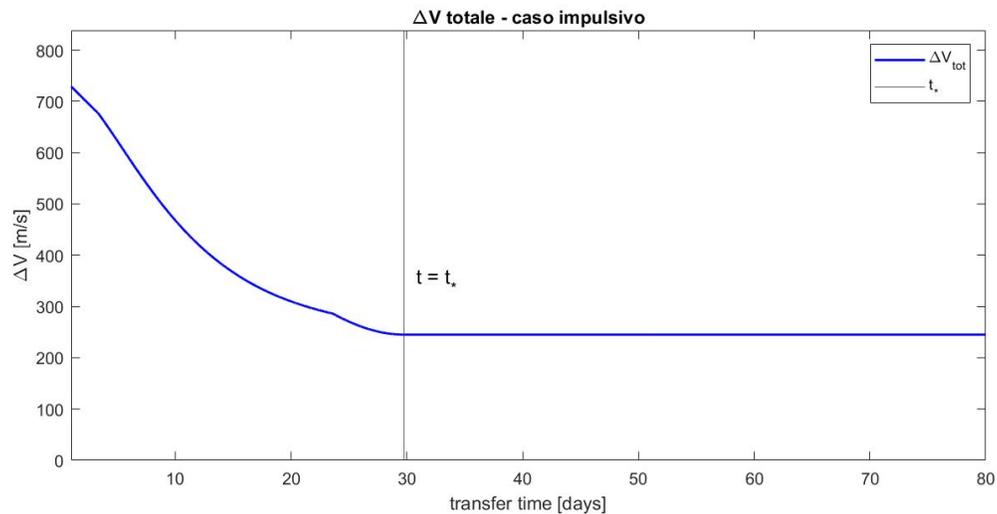


Figura 5.1: Modello impulsivo, caso 1

Notiamo una netta differenza tra i risultati per tempi inferiori e superiori a t_* , per evidenziarla meglio mostriamo i risultati aggiungendo al ΔV totale, anche i singoli contributi dei due impulsi.

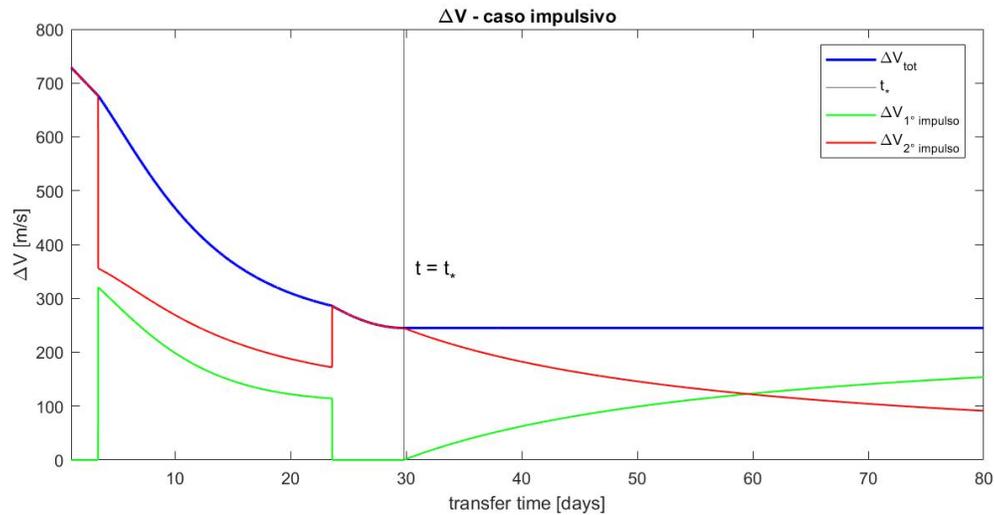


Figura 5.2: Modello impulsivo, caso 1

La soluzione del caso ideale $t = t_*$ è propagata per $t > t_*$ con risultato globale inalterato, notiamo che all'aumentare di t , l'aumento progressivo di ΔV_A nel primo impulso è compensato da una diminuzione di ΔV_B nel secondo impulso, in questo modo il ΔV totale risulta indipendente dal tempo di trasferta (purchè valga $t \geq t_*$)

Per $t < t_*$ notiamo invece che la soluzione è composta da diversi tratti in cui la definizione dei coefficienti s cambia dal caso b (4.7) al caso c (4.8) e nuovamente al caso b . Questo accade poiché l'algoritmo di calcolo seleziona per ogni t la soluzione migliore tra quelle calcolate. Si nota inoltre che per tempi di trasferta brevi il ΔV necessario cresce molto. Scegliamo tre diversi tempi significativi per andare a vedere nel dettaglio tutte le variabili che l'algoritmo ci fornisce come output, prendiamo:

- $t = 15gg.$ nella prima parte di grafico ($t < t_*$)
- $t = t_*$, per il caso 1 vale circa $30gg.$
- $t = 50gg.$ nella seconda parte di grafico ($t > t_*$)

Modello impulsivo - caso 1: valori per $t = 15gg.$

$\Delta V = 366.50 \text{ m/s}$	$\Delta V_A = 146.74 \text{ m/s}$	$\Delta V_B = 219.76 \text{ m/s}$	
$\Delta a = -45.50 \text{ km}$	$\Delta a_A = -214.45 \text{ km}$	$\Delta a_B = 168.95 \text{ km}$	
$\Delta i = -1.190^\circ$	$\Delta i_A = -0.279^\circ$	$\Delta i_B = -0.911^\circ$	
$\Delta \Omega = 3.500^\circ$	$\Delta \Omega_A = 0.369^\circ$	$\Delta \Omega_B = 0.369^\circ$	$\Delta \Omega_{J_2} = 2.762^\circ$

Modello impulsivo - caso 1: valori per $t = t_* \simeq 30gg.$

$\Delta V = 245.12 \text{ m/s}$	$\Delta V_A = 0.01 \text{ m/s}$	$\Delta V_B = 245.11 \text{ m/s}$	
$\Delta a = -45.50 \text{ km}$	$\Delta a_A = 0.00 \text{ km}$	$\Delta a_B = -45.50 \text{ km}$	
$\Delta i = -1.190^\circ$	$\Delta i_A = 0.000^\circ$	$\Delta i_B = -1.190^\circ$	
$\Delta \Omega = 3.500^\circ$	$\Delta \Omega_A = 0.000^\circ$	$\Delta \Omega_B = 0.000^\circ$	$\Delta \Omega_{J_2} = 3.500^\circ$

Modello impulsivo - caso 1: valori per $t = 50gg.$

$\Delta V = 245.10 \text{ m/s}$	$\Delta V_A = 99.07 \text{ m/s}$	$\Delta V_B = 146.04 \text{ m/s}$	
$\Delta a = -45.50 \text{ km}$	$\Delta a_A = -18.39 \text{ km}$	$\Delta a_B = -27.11 \text{ km}$	
$\Delta i = -1.190^\circ$	$\Delta i_A = -0.481^\circ$	$\Delta i_B = -0.709^\circ$	
$\Delta \Omega = 3.500^\circ$	$\Delta \Omega_A = -0.000^\circ$	$\Delta \Omega_B = -0.002^\circ$	$\Delta \Omega_{J_2} = 3.502^\circ$

Come si vinceva già dal grafico, notiamo che il ΔV totale rimane pressoché invariato tra $t = t_*$ e $t = 50gg.$, per entrambi notiamo che il $\Delta \Omega$ è compensato quasi interamente dal contributo di J_2 . La soluzione per $t = 15gg.$ invece presenta ΔV il 50% più alto rispetto agli altri due tempi, questo accade per il fatto che l'effetto J_2 non è più sufficiente a colmare tutto il $\Delta \Omega$, è necessario un ΔV_Ω che fa aumentare il ΔV totale; inoltre l'ottimizzazione approssimata dei coefficienti s porta ad avere un primo impulso che causa una variazione di semiasse maggiore del Δa iniziale, e quindi una conseguente spinta in direzione opposta nel secondo impulso per compensare l'eccesso iniziale e raggiungere il target. L'ottimizzazione porta a questa soluzione di compromesso poichè all'aumento di ΔV causato dalla variazione eccessiva di a , corrisponde una variazione del Δx che tiene conto dell'effetto J_2 in modo da contenere il costo per la variazione di Ω . Infatti possiamo

notare che, anche se il tempo è dimezzato, il $\Delta\Omega_{J_2}$ per $t = 15gg.$ è maggiore della metà rispetto al $\Delta\Omega_{J_2}$ per $t = t_* \simeq 30gg.$, questo significa che le variazioni di i e a date dal primo impulso hanno portato a un $\Delta\dot{\Omega}_A$ maggiore, pre sfruttare meglio l'effetto J_2 .

5.2 Caso 2

Riportiamo i risultati in funzione del tempo di trasferta t

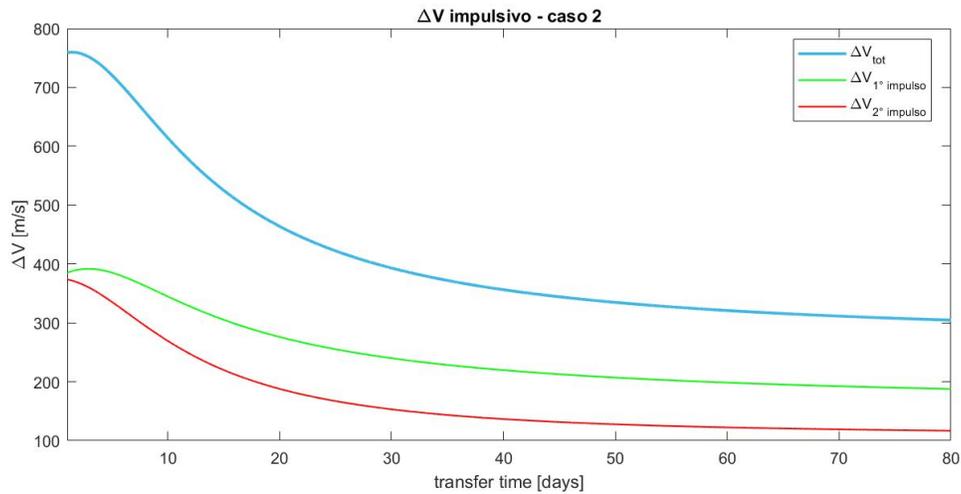


Figura 5.3: Modello impulsivo, caso 2

A prima vista notiamo un andamento simile al primo caso, il ΔV ha una forte decrescita nel primo tratto per poi adagiarsi verso un valore quasi costante.

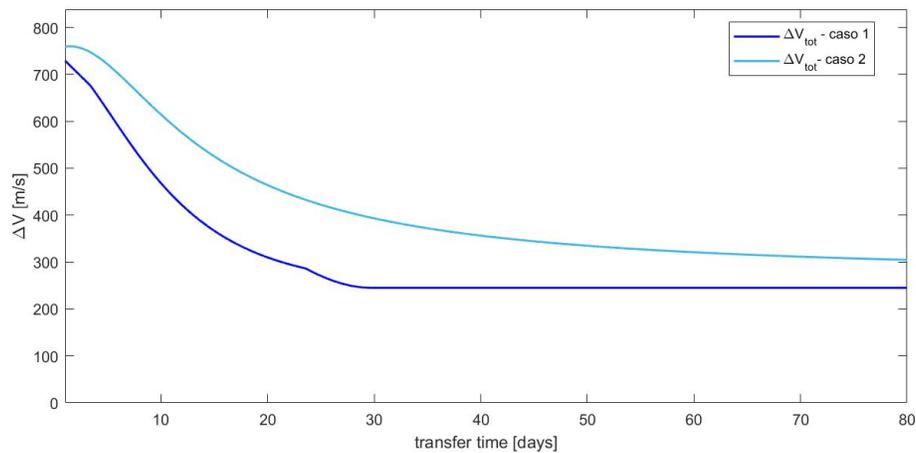


Figura 5.4: Confronto caso 1 e 2

La figura 5.4 confronta i due casi, si nota che il secondo risulta essere sempre più costoso in termini di ΔV perché non si può sfruttare l'effetto J_2 nel tempo per ridurre

la spinta necessaria, anzi, l'effetto J_2 è da contrastare. Riportamo anche per questo caso i valori di tutti le variabili output, per confrontarle scegliamo gli stessi tempi del primo caso:

- $t = 15gg.$
- $t = 30gg.$
- $t = 50gg.$

Ricordiamo che non è definito alcun t_* per il caso 2 in cui i piani orbitali di chaser e target si allontanano per effetto J_2 in assenza di manovre attive.

Modello impulsivo - caso 2: valori per $t = 15gg.$

$\Delta V = 525.09 \text{ m/s}$	$\Delta V_A = 305.19 \text{ m/s}$	$\Delta V_B = 219.90 \text{ m/s}$	
$\Delta a = -45.50 \text{ km}$	$\Delta a_A = 298.10 \text{ km}$	$\Delta a_B = -343.60 \text{ km}$	
$\Delta i = -1.190^\circ$	$\Delta i_A = -1.123^\circ$	$\Delta i_B = -0.067^\circ$	
$\Delta \Omega = 3.500^\circ$	$\Delta \Omega_A = -0.617^\circ$	$\Delta \Omega_B = -0.617^\circ$	$\Delta \Omega_{J_2} = -2.265^\circ$

Modello impulsivo - caso 2: valori per $t = 30gg.$

$\Delta V = 393.09 \text{ m/s}$	$\Delta V_A = 239.93 \text{ m/s}$	$\Delta V_B = 153.16 \text{ m/s}$	
$\Delta a = -45.50 \text{ km}$	$\Delta a_A = 221.60 \text{ km}$	$\Delta a_B = -267.10 \text{ km}$	
$\Delta i = -1.190^\circ$	$\Delta i_A = -0.997^\circ$	$\Delta i_B = -0.193^\circ$	
$\Delta \Omega = 3.500^\circ$	$\Delta \Omega_A = -0.235^\circ$	$\Delta \Omega_B = -0.235^\circ$	$\Delta \Omega_{J_2} = -3.030^\circ$

Modello impulsivo - caso 2: valori per $t = 50gg.$

$\Delta V = 334.75 \text{ m/s}$	$\Delta V_A = 207.04 \text{ m/s}$	$\Delta V_B = 127.71 \text{ m/s}$	
$\Delta a = -45.50 \text{ km}$	$\Delta a_A = 167.49 \text{ km}$	$\Delta a_B = -212.99 \text{ km}$	
$\Delta i = -1.190^\circ$	$\Delta i_A = -0.908^\circ$	$\Delta i_B = -0.282^\circ$	
$\Delta \Omega = 3.500^\circ$	$\Delta \Omega_A = -0.110^\circ$	$\Delta \Omega_B = -0.110^\circ$	$\Delta \Omega_{J_2} = -3.280^\circ$

I ΔV aumentano rispetto al caso 1 del 43%, 60%, 37%, rispettivamente per $t = 15gg.$, $t = 30gg.$, $t = 50gg.$. Per tutti e tre i tempi notiamo una caratteristica comune: il Δa_A

del primo impulso è dato in direzione contraria rispetto al Δa tra chaser e target. Questo accade per invertire l'andamento di $\dot{\Omega}$ del chaser e tornare a sfruttare l'effetto J_2 per contenere il ΔV_{Ω} . Il fatto di avere un primo Δa_A in direzione contraria porta a un Δa_B del secondo impulso elevato, con inevitabili ripercussioni sul ΔV totale. L'ottimizzazione porta a questa tendenza della modifica eccessiva di a al fine di sfruttare l'effetto J_2 ma non ritroviamo questa caratteristica anche per il parametro i perché la sua influenza su $\dot{\Omega}$ è minore rispetto all'influenza di a , e il costo di una modifica eccessiva di i sarebbe considerevole.

Modello elettrico

In questo capitolo andremo a modificare le equazioni che stimano il ΔV per tenere conto degli archi di spinta, che possono occupare una parte significativa della trasferta nel caso di propulsione elettrica a bassa spinta.

6.1 Approssimazione archi di spinta

Utilizziamo un approccio molto semplice, che consiste nell'approssimare ogni arco di spinta con un impulso centrato a metà dell'arco stesso. Il modello seguito è sempre del tipo *thrust-coast-thrust*, chiamiamo gli archi di spinta A e B , e le loro rispettive durate t_A e t_B , chiamiamo inoltre la fase di coast AB e la sua durata t_{AB} . La trasferta a bassa spinta può quindi essere approssimata da una trasferta a spinta impulsiva seguendo il seguente modello:

- Arco di spinta A
 - periodo di attesa su orbita di partenza, di durata $\frac{t_A}{2}$
 - impulso A
 - periodo di attesa su nuova orbita raggiunta, di durata $\frac{t_A}{2}$
- Fase di coast AB
 - periodo di attesa su stessa orbita, di durata t_{AB}
- Arco di spinta B
 - periodo di attesa su orbita di partenza, di durata $\frac{t_B}{2}$
 - impulso B
 - periodo di attesa su nuova orbita raggiunta, di durata $\frac{t_B}{2}$

Possiamo quindi ricondurci al caso impulsivo con due modifiche:

- il tempo effettivo trascorso tra gli impulsi A e B è

$$t_{coast} = \frac{t_A}{2} + t_{AB} + \frac{t_B}{2} = t - \frac{t_A}{2} - \frac{t_B}{2} \quad (6.1)$$

- La manovra impulsiva inizia al tempo $\frac{t_A}{2}$, bisogna quindi modificare le Ω iniziali delle orbite di chaser e target per tenere conto del tempo trascorso.

$$\Omega \left(t = \frac{t_A}{2} \right) = \Omega(t = 0) + \dot{\Omega} \cdot \frac{t_A}{2} \quad (6.2)$$

6.1.1 Durata archi di spinta

Per calcolare la durata degli archi di spinta bisogna introdurre un parametro a di accelerazione:

$$\Delta V = a \cdot t \iff t = \frac{\Delta V}{a} \quad (6.3)$$

$$a = \frac{T}{m} \quad (6.4)$$

L'accelerazione a dipende dalla massa del chaser m e dalla spinta del suo sistema propulsivo T , discuteremo il valore di questi parametri nel prossimo capitolo. Per ora consideriamo a come dato, la durata di un arco di spinta si può quindi calcolare direttamente dal ΔV di quell'arco.

6.2 Algoritmo di calcolo per modello elettrico

Abbiamo ricondotto il modello elettrico al modello impulsivo, ma le modifiche apportate rendono necessario il calcolo di t_A e t_B prima di poter di applicare l'algoritmo di calcolo del modello impulsivo. Come abbiamo appena visto, t_A e t_B dipendono dai risultati ΔV_A e ΔV_B .

L'algoritmo di calcolo del modello elettrico consiste quindi in successive iterazioni del metodo di risoluzione impulsivo: si parte dalla soluzione impulsiva per avere la prima stima di ΔV_A e ΔV_B da cui si calcolano t_A e t_B che ci permettono di calcolare ΔV_A e ΔV_B con questo nuovo modello descritto in questo capitolo, da questi otteniamo una nuova stima di t_A e t_B , e così via, fino alla convergenza dei risultati.

Risultati modello elettrico

Manteniamo gli stessi casi in esame ma distinguiamo l'analisi per due valori diversi di accelerazione, uno che da luogo, per questi specifici casi, a tempi totali di spinta della durata di un giorno circa, e un altro che da luogo a tempi totali di spinta di circa dieci giorni.

Ipotizzando una spinta disponibile dell'impianto propulsivo $T = 300mN$ possiamo pensare che la massa totale del satellite sia di $100kg$ per ottenere tempi di spinta di circa 1 giorno oppure $1000kg$ per ottenere tempi di spinta di circa 10 giorni.

7.1 Caso 1 - Massa 100 kg (durata spinta circa 1g.)

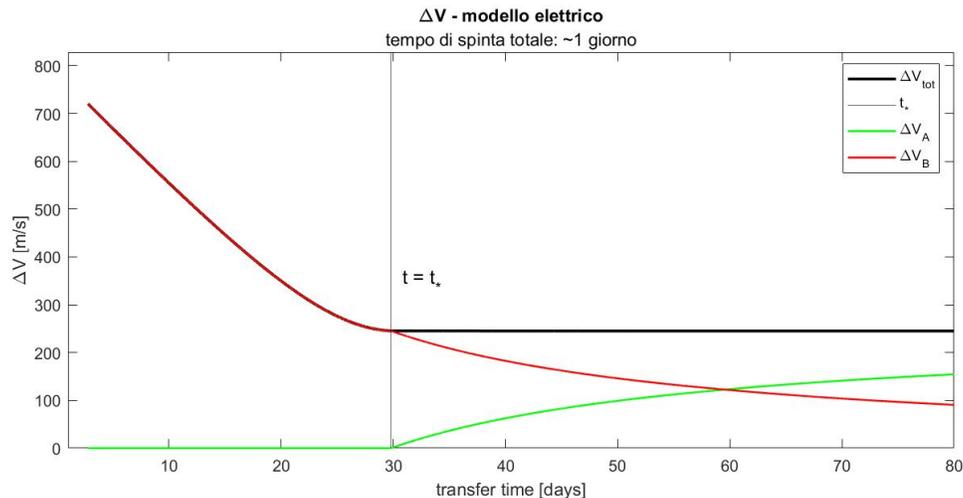


Figura 7.1: Modello elettrico - caso 1 - durata spinta 1g.

Per tempi maggiori di t_* notiamo che l'andamento è pressoché identico al caso impulsivo poiché la durata totale degli archi di spinta ($t_{spinta} \sim 1$ giorno) è piccola rispetto al tempo totale di trasferta ($t > 30$ giorni). Mentre per tempi minori di t_* prevale la soluzione b che prevede solamente il secondo arco di spinta. Inoltre iniziamo a notare una zona per

tempi molto piccoli dove la soluzione non esiste, poiché il tempo di spinta necessario alla trasferta calcolato dall'algoritmo supera il tempo totale di trasferta.

Modello elettrico - caso 1, massa 100 kg: valori per $t = 15gg$.

$t_{spinta} = 1.72 \text{ days}$	$t_A = 0.00 \text{ days}$	$t_B = 1.72 \text{ days}$	
$\Delta V = 446.53 \text{ m/s}$	$\Delta V_A = 0.00 \text{ m/s}$	$\Delta V_B = 446.53 \text{ m/s}$	
$\Delta a = -45.50 \text{ km}$	$\Delta a_A = -0.00 \text{ km}$	$\Delta a_B = -45.50 \text{ km}$	
$\Delta i = -1.190^\circ$	$\Delta i_A = -0.000^\circ$	$\Delta i_B = -1.190^\circ$	
$\Delta \Omega = 3.500^\circ$	$\Delta \Omega_A = 0.000^\circ$	$\Delta \Omega_B = 1.839^\circ$	$\Delta \Omega_{J_2} = 1.661^\circ$

Modello elettrico - caso 1, massa 100 kg: valori per $t = t_* \simeq 30gg$.

$t_{spinta} = 0.95 \text{ days}$	$t_A = 0.00 \text{ days}$	$t_B = 0.95 \text{ days}$	
$\Delta V = 245.38 \text{ m/s}$	$\Delta V_A = 0.01 \text{ m/s}$	$\Delta V_B = 245.37 \text{ m/s}$	
$\Delta a = -45.50 \text{ km}$	$\Delta a_A = -0.00 \text{ km}$	$\Delta a_B = -45.50 \text{ km}$	
$\Delta i = -1.190^\circ$	$\Delta i_A = 0.000^\circ$	$\Delta i_B = -1.190^\circ$	
$\Delta \Omega = 3.500^\circ$	$\Delta \Omega_A = 0.000^\circ$	$\Delta \Omega_B = 0.056^\circ$	$\Delta \Omega_{J_2} = 3.444^\circ$

Modello elettrico - caso 1, massa 100 kg: valori per $t = 50gg$.

$t_{spinta} = 0.95 \text{ days}$	$t_A = 0.38 \text{ days}$	$t_B = 0.56 \text{ days}$	
$\Delta V = 245.11 \text{ m/s}$	$\Delta V_A = 99.07 \text{ m/s}$	$\Delta V_B = 146.05 \text{ m/s}$	
$\Delta a = -45.50 \text{ km}$	$\Delta a_A = -18.39 \text{ km}$	$\Delta a_B = -27.11 \text{ km}$	
$\Delta i = -1.190^\circ$	$\Delta i_A = -0.481^\circ$	$\Delta i_B = -0.709^\circ$	
$\Delta \Omega = 3.500^\circ$	$\Delta \Omega_A = -0.000^\circ$	$\Delta \Omega_B = 0.009^\circ$	$\Delta \Omega_{J_2} = 3.491^\circ$

Per $t = 15gg$. il ΔV calcolato è maggiore del 22% rispetto al corrispettivo modello impulsivo, dovuto al fatto che il secondo impulso deve fornire un $\Delta \Omega_B$ considerevole, dato che J_2 compensa solo parzialmente il $\Delta \Omega$. Per $t = t_*$ e $t = 50gg$. c'è quasi una perfetta corrispondenza di tutti i risultati con il modello impulsivo.

7.2 Caso 1 - Massa 1000 kg (durata spinta circa 10gg.)

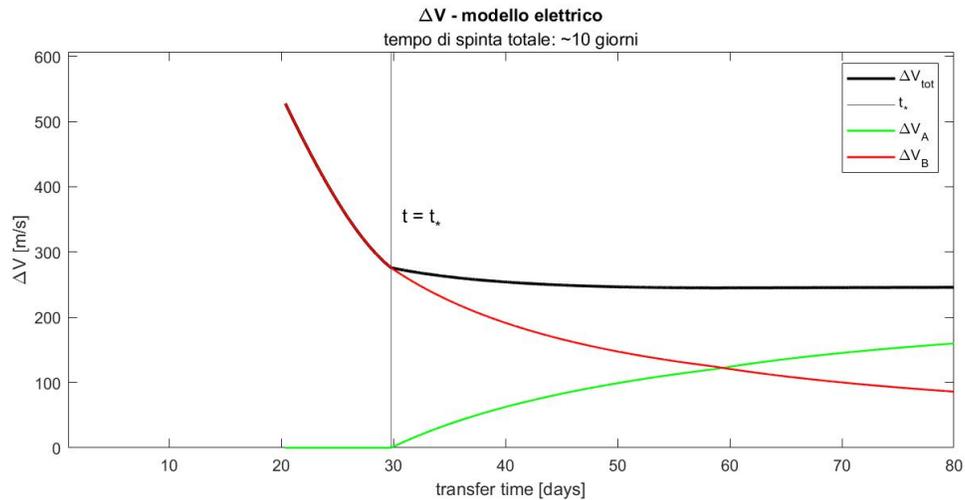


Figura 7.2: Modello elettrico - caso 1 - durata spinta 10gg.

Allungando il tempo di spinta a 10 giorni troviamo dei cambiamenti sostanziali. Per tempi maggiori di t_* la soluzione non è più costante al variare del tempo di trasferta ma tende ad adagiarsi su un asintoto orizzontale più lentamente rispetto al caso precedente. Notiamo invece che per tempi minori di t_* il ΔV necessario cresce molto rapidamente al diminuire del tempo t e la zona in cui la trasferta non è possibile è molto più estesa.

Per questo caso riportiamo le tabelle per $t = 30gg.$ e $t = 50gg.$ poichè per $t = 15gg.$ la soluzione non esiste.

Modello elettrico - caso 1, massa 1000 kg: valori per $t = t_* \simeq 30gg.$

$t_{spinta} = 10.65 \text{ days}$	$t_A = 0.00 \text{ days}$	$t_B = 10.65 \text{ days}$	
$\Delta V = 276.06 \text{ m/s}$	$\Delta V_A = 0.01 \text{ m/s}$	$\Delta V_B = 276.05 \text{ m/s}$	
$\Delta a = -45.50 \text{ km}$	$\Delta a_A = -0.00 \text{ km}$	$\Delta a_B = -45.50 \text{ km}$	
$\Delta i = -1.190^\circ$	$\Delta i_A = 0.000^\circ$	$\Delta i_B = -1.190^\circ$	
$\Delta \Omega = 3.500^\circ$	$\Delta \Omega_A = 0.000^\circ$	$\Delta \Omega_B = 0.626^\circ$	$\Delta \Omega_{J_2} = 2.874^\circ$

Modello elettrico - caso 1, massa 1000 kg: valori per $t = 50gg$.

$t_{spinta} = 9.52 \text{ days}$	$t_A = 3.82 \text{ days}$	$t_B = 5.70 \text{ days}$	
$\Delta V = 246.70 \text{ m/s}$	$\Delta V_A = 99.07 \text{ m/s}$	$\Delta V_B = 147.63 \text{ m/s}$	
$\Delta a = -45.50 \text{ km}$	$\Delta a_A = -18.39 \text{ km}$	$\Delta a_B = -27.11 \text{ km}$	
$\Delta i = -1.190^\circ$	$\Delta i_A = -0.481^\circ$	$\Delta i_B = -0.709^\circ$	
$\Delta \Omega = 3.500^\circ$	$\Delta \Omega_A = -0.000^\circ$	$\Delta \Omega_B = 0.107^\circ$	$\Delta \Omega_{J_2} = 3.393^\circ$

Gli effetti della bassa spinta sono più marcati, le variazioni dei parametri orbitali avvengono in tempi più lunghi e conseguentemente si riesce a sfruttare con meno efficacia J_2 . Il ΔV per $t = t_*$ aumenta del 12.6% rispetto al corrispettivo caso impulsivo, la soluzione migliora poi al crescere di t , infatti per $t = 50gg$. il valore di ΔV cambia solo dello 0.7% rispetto al modello impulsivo, e in generale tutti i parametri hanno valori vicini a quelli del modello impulsivo.

7.3 Caso 2 - Massa 100 kg (durata spinta circa 1g.)

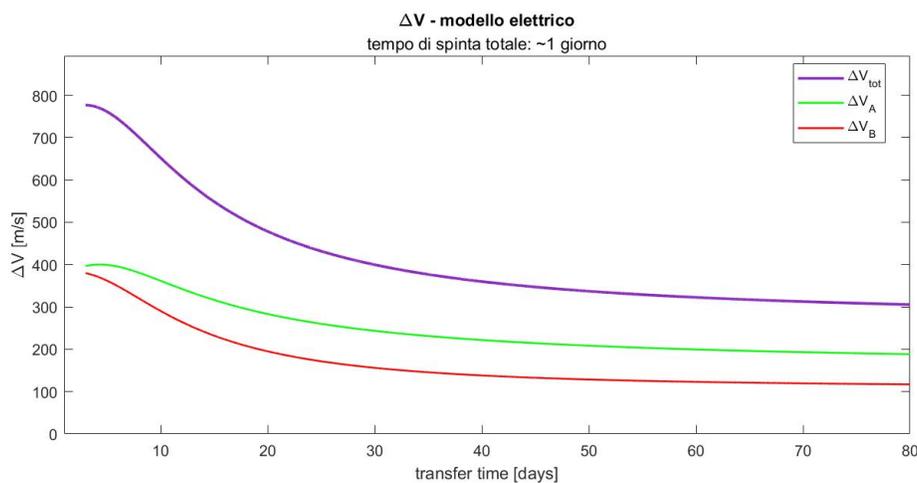


Figura 7.3: Modello elettrico - caso 2 - durata spinta 1g.

In questo caso notiamo un andamento molto simile al modello impulsivo con l'unica differenza che anche qui compare un range di tempi di trasferta piccoli in cui la soluzione non esiste.

Riportiamo le tabelle per:

- $t = 15gg.$
- $t = 30gg.$
- $t = 50gg.$

Modello elettrico - caso 2, massa 100 kg: valori per $t = 15gg.$

$t_{spinta} = 2.12 \text{ days}$	$t_A = 1.22 \text{ days}$	$t_B = 0.90 \text{ days}$	
$\Delta V = 548.75 \text{ m/s}$	$\Delta V_A = 316.51 \text{ m/s}$	$\Delta V_B = 232.25 \text{ m/s}$	
$\Delta a = -45.50 \text{ km}$	$\Delta a_A = 308.49 \text{ km}$	$\Delta a_B = -353.99 \text{ km}$	
$\Delta i = -1.190^\circ$	$\Delta i_A = -1.140^\circ$	$\Delta i_B = -0.050^\circ$	
$\Delta \Omega = -3.500^\circ$	$\Delta \Omega_A = -0.686^\circ$	$\Delta \Omega_B = -0.686^\circ$	$\Delta \Omega_{J_2} = -2.128^\circ$

Modello elettrico - caso 2, massa 100 kg: valori per $t = 30gg.$

$t_{spinta} = 1.54 \text{ days}$	$t_A = 0.94 \text{ days}$	$t_B = 0.60 \text{ days}$	
$\Delta V = 399.70 \text{ m/s}$	$\Delta V_A = 243.52 \text{ m/s}$	$\Delta V_B = 156.18 \text{ m/s}$	
$\Delta a = -45.50 \text{ km}$	$\Delta a_A = 227.33 \text{ km}$	$\Delta a_B = -272.83 \text{ km}$	
$\Delta i = -1.190^\circ$	$\Delta i_A = -1.007^\circ$	$\Delta i_B = -0.183^\circ$	
$\Delta \Omega = -3.500^\circ$	$\Delta \Omega_A = -0.247^\circ$	$\Delta \Omega_B = -0.247^\circ$	$\Delta \Omega_{J_2} = -3.006^\circ$

Modello elettrico - caso 2, massa 100 kg: valori per $t = 50gg.$

$t_{spinta} = 1.30 \text{ days}$	$t_A = 0.80 \text{ days}$	$t_B = 0.50 \text{ days}$	
$\Delta V = 337.09 \text{ m/s}$	$\Delta V_A = 208.47 \text{ m/s}$	$\Delta V_B = 128.62 \text{ m/s}$	
$\Delta a = -45.50 \text{ km}$	$\Delta a_A = 170.09 \text{ km}$	$\Delta a_B = -215.59 \text{ km}$	
$\Delta i = -1.190^\circ$	$\Delta i_A = -0.912^\circ$	$\Delta i_B = -0.278^\circ$	
$\Delta \Omega = -3.500^\circ$	$\Delta \Omega_A = -0.113^\circ$	$\Delta \Omega_B = -0.113^\circ$	$\Delta \Omega_{J_2} = -3.274^\circ$

I dati nelle tabelle confermano l'analogia con il modello impulsivo: i ΔV variano del 4.5%, 1.7% e 0.7% rispettivamente per $t = 15gg.$, $t = 30gg.$ e $t = 50gg.$ e in generale

tutti i parametri seguono l'andamento del caso impulsivo. Con tempi di spinta di circa 1 giorno non si apprezzano differenze sostanziali tra i risultati del modello elettrico e di quello impulsivo.

7.4 Caso 2 - Massa 1000 kg (durata spinta circa 10gg.)

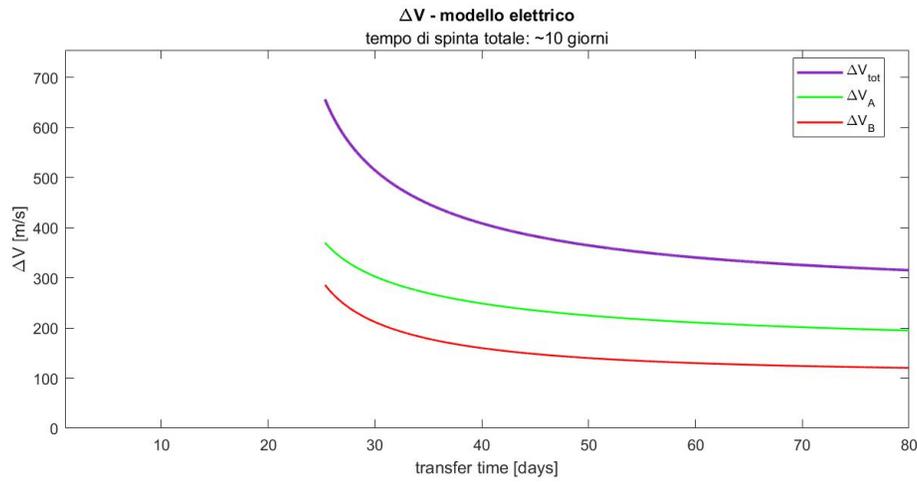


Figura 7.4: Modello elettrico - caso 2 - durata spinta 10gg.

Estendendo il tempo di spinta notiamo anche qui che la soluzione presenta lo stesso andamento del caso impulsivo ma si adagia più lentamente verso il suo valore asintotico. La zona in cui la trasferta non è possibile è molto più ampia.

Per questo caso riportiamo le tabelle per $t = 30gg.$ e $t = 50gg.$ poichè per $t = 15gg.$ la soluzione non esiste.

Modello elettrico - caso 2, massa 1000 kg: valori per $t = 30gg.$

$t_{spinta} = 19.87 \text{ days}$	$t_A = 11.69 \text{ days}$	$t_B = 8.18 \text{ days}$
$\Delta V = 514.92 \text{ m/s}$	$\Delta V_A = 302.92 \text{ m/s}$	$\Delta V_B = 211.99 \text{ m/s}$
$\Delta a = -45.50 \text{ km}$	$\Delta a_A = 312.67 \text{ km}$	$\Delta a_B = -358.17 \text{ km}$
$\Delta i = -1.190^\circ$	$\Delta i_A = -1.147^\circ$	$\Delta i_B = -0.043^\circ$
$\Delta \Omega = -3.500^\circ$	$\Delta \Omega_A = -0.482^\circ$	$\Delta \Omega_B = -0.482^\circ$
		$\Delta \Omega_{J_2} = -2.535^\circ$

Modello elettrico - caso 2, massa 1000 kg: valori per $t = 50gg$.

$t_{spinta} = 14.08 \text{ days}$	$t_A = 8.68 \text{ days}$	$t_B = 5.40 \text{ days}$	
$\Delta V = 364.96 \text{ m/s}$	$\Delta V_A = 224.94 \text{ m/s}$	$\Delta V_B = 140.02 \text{ m/s}$	
$\Delta a = -45.50 \text{ km}$	$\Delta a_A = 199.28 \text{ km}$	$\Delta a_B = -244.78 \text{ km}$	
$\Delta i = -1.190^\circ$	$\Delta i_A = -0.960^\circ$	$\Delta i_B = -0.230^\circ$	
$\Delta \Omega = -3.500^\circ$	$\Delta \Omega_A = -0.149^\circ$	$\Delta \Omega_B = -0.149^\circ$	$\Delta \Omega_{J_2} = -3.202^\circ$

I tempi di spinta più lunghi portano un peggioramento delle soluzioni, per $t = 30gg$. ΔV aumenta del 31% rispetto al modello impulsivo. All'aumentare di t la situazione tende a migliorare, infatti per $t = 50gg$. il ΔV è solamente il 9% in più rispetto al modello impulsivo.

7.5 Confronto modelli

Raggruppiamo ora le diverse soluzioni dei due modelli elettrici e del modello impulsivo per i casi proposti.

7.5.1 Caso 1

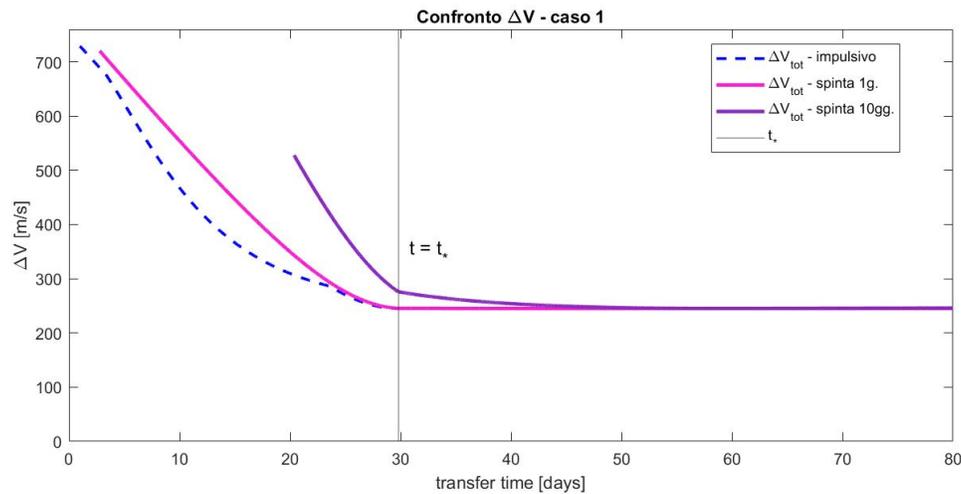


Figura 7.5: Confronto ΔV_{tot} - caso 1

Notiamo le stesse cose già evidenziate in precedenza, il divario più grande tra i 3 modelli è nella prima parte del grafico: il modello elettrico con tempi di spinta di 1 giorno si discosta dal modello impulsivo, soprattutto nella zona dove il modello impulsivo ha concavità verso l'alto, con errori relativi che arrivano di poco oltre il 20%. Il modello elettrico con tempi di spinta di 10 giorni mostra che non è possibile utilizzare una spinta così bassa per trasferite brevi ($t < 20gg.$) e anche quando la trasferta è possibile risulta molto costosa per tempi minori di t_* .

Invece, da t_* in avanti, le soluzioni del modello impulsivo e del modello elettrico con tempi di spinta di 1 giorno si sovrappongono e sono presto raggiunte anche dal modello elettrico con tempi di spinta più lunghi.

7.5.2 Caso 2

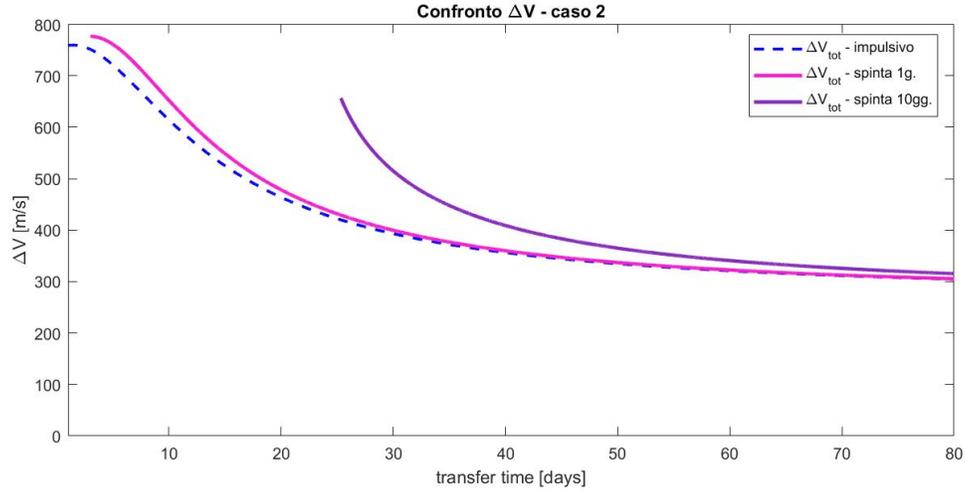


Figura 7.6: Confronto ΔV_{tot} - caso 2

In questo caso vediamo che il modello elettrico con tempi di spinta di 1 giorno è molto vicino al modello impulsivo per qualsiasi t . Il modello elettrico con tempi di spinta di 10 giorni presenta una zona molto estesa dove la trasferta non risulta possibile ($t < 25gg.$), inoltre, dove la trasferta è possibile, il ΔV risultante ha un divario considerevole rispetto al modello impulsivo (inizialmente +50%) che poi decresce all'aumentare di t .

In generale il caso 2 risulta più costoso del caso 1, sebbene i dati iniziali portino agli stessi valori di Δa , Δi e $\Delta \Omega$. La differenza è nel segno di $\Delta \dot{\Omega}$ causato dall'effetto J_2 che nel caso 1 favorisce una diminuzione del ΔV , questo effetto viene sfruttato per azzerare il ΔV_{Ω} , mentre nel caso 2 complica la strategia ottimale andando ad aggravare il costo di ΔV_a . Infatti per qualsiasi tempo di trasferta, sia nel modello impulsivo che in quello elettrico, il primo impulso fornisce un Δa_A in direzione opposta rispetto al target (per invertire l'andamento di $\dot{\Omega}$ del chaser) a cui corrisponde un Δa_B maggiorato, per compensare l'iniziale andamento in direzione contraria, e quindi un risultato finale con ΔV maggiore rispetto al caso 1.

Conclusioni

Questa tesi propone un metodo analitico per il calcolo di una trasferta a bassa spinta tra una coppia di detriti in orbita LEO circolare. Dato il costo computazionale molto contenuto rispetto ai metodi di ottimizzazione classici, il metodo proposto risulta particolarmente interessante per lo studio della sequenza ottimale di detriti per una missione di Active Debris Removal che rimuove in sequenza più detriti nelle orbite più congestionate e ad alto rischio di collisioni.

La base teorica è fornita dall'approssimazione di Edelbaum, alla quale viene affiancata una trattazione che include anche il parametro orbitale Ω sia come parametro modificato attivamente dalla spinta dello spacecraft, sia come parametro modificato passivamente dalla perturbazione J_2 , la prima armonica zonale, che considera la Terra non come una sfera perfetta ma come uno sferoide oblato, con una concentrazione di massa all'equatore.

Dalla teoria viene derivato in prima analisi un modello che considera spinte fornite in maniera impulsiva. Questo modello viene successivamente modificato per renderlo congruente con le ipotesi di bassa spinta su cui la teoria di Edelbaum si basa. Viene quindi proposto un procedimento per approssimare gli archi di spinta tramite le equazioni ricavate per il modello impulsivo. L'algoritmo che ne deriva per il modello elettrico prevede iterazioni dell'algoritmo impulsivo fino alla convergenza dei risultati. Il numero di iterazioni richiesto è minimo (< 10) pertanto il costo computazionale del modello elettrico è paragonabile a quello del modello impulsivo.

Sono illustrati due casi esemplari considerando due diversi valori di accelerazione dello spacecraft, uno che da luogo a tempi di spinta dell'ordine di grandezza di 1 giorno, uno che da luogo a tempi di spinta dell'ordine di grandezza di 10 giorni. Quest'ultimo valore di accelerazione molto bassa porta a un peggioramento notevole della soluzione in termini di ΔV mentre il valore di accelerazione più elevato rende la soluzione del modello elettrico aderente a quella del modello impulsivo.

Precedenti articoli [6] hanno già validato l'approccio usato in questa tesi per la stima

del ΔV mostrando risultati di poco superiori ($\simeq 5\%$) a quelli forniti dall'applicazione di metodi di ottimizzazione indiretta. Le modifiche introdotte in questa tesi sia nell'algoritmo di calcolo impulsivo che nel modello elettrico portano ad un ulteriore miglioramento delle stime.

Bibliografia

[1] Active debris removal.

https://www.esa.int/Space_Safety/Space_Debris/Active_debris_removal.

[2] Esa's space environment report 2022.

https://www.esa.int/Space_Safety/Space_Debris/ESA_s_Space_Environment_Report_2022.

[3] B. Bastida Virgili and H Krag. Active debris removal for leo missions. 2013.

[4] Roger R. Bate, Donald D. Mueller, and Jerry E. White. *Fundamentals of Astrodynamics*. Dover Publications, New York, 1971.

[5] Donato Martella. *Analisi di Traiettorie a Bassa Spinta per Rimozione di Detriti Spaziali*. Tesi di laurea, Politecnico di Torino, 2021.

[6] Hong-Xin Shen. Explicit approximation for j_2 -perturbed low-thrust transfers between circular orbits. *Journal of Guidance, Control, and Dynamics*, 44(8):1525–1531, 2021.

[7] Hong-Xin Shen, Tian-Jiao Zhang, Lorenzo Casalino, and Dario Pastrone. Optimization of active debris removal missions with multiple targets. *Journal of Spacecraft and Rockets*, 55(1):181–189, 2018.