

**POLITECNICO DI TORINO**

---

Corso di Laurea Magistrale in Ingegneria Matematica

Tesi di Laurea Magistrale

**Analisi tempo-frequenza e operatori  
di localizzazione**



**Relatore**

prof. Fabio Nicola

**Correlatore:**

prof. Salvatore Ivan Trapasso

**Laureando**

Cristina Febbraiola

---

ANNO ACCADEMICO 2022/2023



# Indice

<b>1</b>	<b>Gli strumenti dell'analisi tempo-frequenza</b>	<b>6</b>
1.1	Trasformata di Fourier . . . . .	6
1.2	Definizione e proprietà della STFT . . . . .	8
1.3	STFT e stati coerenti . . . . .	12
1.4	Risoluzione dell'identità e ricostruzione . . . . .	13
1.5	Ricostruzione da coefficienti STFT discreti . . . . .	14
1.6	Principi di indeterminazione . . . . .	15
1.7	Stati coerenti canonici e osservazioni . . . . .	20
1.8	Ondine come particolare tipo di stato coerente . . . . .	21
<b>2</b>	<b>Approfondimento sulle ondine</b>	<b>24</b>
2.1	Il sistema di Haar . . . . .	24
2.2	L'analisi multirisoluzione . . . . .	30
2.3	Le ondine di Daubechies . . . . .	35
<b>3</b>	<b>Operatori di localizzazione</b>	<b>45</b>
3.1	Il limite delle basi ortonormali . . . . .	45
3.2	Localizzazione nello spazio usando gli stati coerenti . . . . .	52
3.3	Alcune generalizzazioni sulla localizzazione con approccio geo- metrico di Daubechies . . . . .	64
3.4	Alcune proprietà degli operatori di localizzazione . . . . .	66
	<b>Bibliografia</b>	<b>82</b>

# Introduzione

Questa tesi tratta l'analisi tempo-frequenza, un potente strumento che deriva dalla necessità di analizzare e rappresentare segnali che cambiano frequenza nel tempo. Tale necessità interessa vari ambiti, tra cui l'ingegneria, la fisica, la biologia e la geologia.

Nel primo capitolo si delinea una visione d'insieme di tutte le principali tecniche che compongono l'analisi tempo-frequenza. Si parte dalla tradizionale analisi di Fourier, che fornisce una rappresentazione del segnale in termini delle sue componenti in frequenza, ovvero interpretando il segnale come sovrapposizione di sinusoidi e cosinusoidi. Tuttavia, per quanto la trasformata Fourier sia utile nell'identificare il contenuto in frequenza di un segnale, non riesce a fornire alcuna informazione sulla distribuzione temporale dello spettro.

Si procede quindi con l'introduzione della short-time Fourier transform che estende la trasformata di Fourier analizzando il segnale in piccole, e parzialmente sovrapposte, finestre temporali. Grazie all'introduzione di famiglie di funzioni finestra, tutte derivanti da una stessa funzione madre, ma traslate e modulate nel tempo e in frequenza, le une rispetto alle altre, avremo finalmente, la possibilità di raccogliere l'informazione mancante: la variazione nel tempo del segnale.

Le famiglie di funzione finestra in questione, denominate stati coerenti, saranno da noi studiate approfonditamente. Ne presenteremo il comportamento nel discreto, ne studieremo la principale proprietà, ossia la risoluzione dell'identità, e ne approfondiremo il tipo più diffuso: gli stati coerenti canonici.

Il primo capitolo si chiude facendo la conoscenza delle ondine, presentate qui come particolare tipo di stato coerente, ma dalle capacità più ampie grazie alla modulazione in frequenza dell'ondina madre. Si vedrà però come anche le ondine non saranno capaci di superare il grande limite dell'analisi tempo-frequenza: il principio di indeterminazione di Heisenberg.

Nel secondo capitolo approfondiamo l'analisi delle ondine. In particolare, presenteremo la tradizionale costruzione delle ondine di Haar e delle loro proprietà. Nel seguito, evidenzieremo come tale costruzione può essere generalizzata per

ottenere basi ortonormali di ondine più generali mediante la teoria dell'analisi multirisoluzione di Meyer e Mallat. Chiudiamo il capitolo ripercorrendo la costruzione di un particolare tipo di ondine, quelle regolari e a supporto compatto introdotte da Daubechies.

Nel terzo e ultimo capitolo ci soffermiamo sul problema della localizzazione in tempo-frequenza. Se fino ad ora, nel paragone tra la trasformata di Fourier e la STFT, abbiamo visto le potenzialità della localizzazione, adesso ne affrontiamo anche alcuni aspetti problematici, in sostanza dovuti al troncamento di un segnale e alla perdita di informazione al di fuori dell'area di interesse. Si introduce quindi l'operatore di localizzazione proposto da Daubechies, che presenta code a decadimento rapido in tutte le direzioni. Si approfondiscono le sue caratteristiche, in particolare la sua commutazione con l'oscillatore armonico, e se ne studiano autofunzioni e autovalori.

Si conclude questa tesi con la consapevolezza della grande potenzialità della teoria di Daubechies che risulta evidente dalla comparazione con un altro metodo di localizzazione largamente diffuso: le onde sferoidali prolate. Tali onde permettono di annullare la coda in una delle due direzioni di nostro interesse: il tempo o lo spazio. Nel fare ciò, tuttavia, aumenta di molto il peso della coda relativa all'altra componente. La localizzazione di Daubechies nello spazio delle fasi, grazie alla sua azione simmetrica sulle variabili in gioco, permette invece di agire simultaneamente in entrambe le direzioni, aumentando la precisione di studio del segnale in una componente senza perdere efficacia nell'altra.

# Capitolo 1

## Gli strumenti dell'analisi tempo-frequenza

### 1.1 Trasformata di Fourier

La trasformata di Fourier, introdotta da Jean Baptiste Joseph Fourier ormai duecento anni fa, nel 1822, permette di scomporre un'onda qualsiasi nella sovrapposizione di diversi segnali sinusoidali, ognuno con differente frequenza e ampiezza.

Ricordiamo brevemente alcuni fatti sulle serie di Fourier di funzioni periodiche.

**Definizione 1.1.1.** Una funzione  $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{C}$  si dice periodica di periodo  $T > 0$  se  $f(x + T) = f(x)$  per ogni  $x \in \mathbb{R}$ .

Una funzione periodica di periodo  $T > 0$  è continua a tratti se esiste un numero finito di punti  $x_0 = 0 < x_1 < x_2 < \dots < x_n = T$  tale che:

- $f$  è continua in  $(x_i, x_{i+1})$ ,  $\forall i = 0, \dots, n - 1$ ;
- i limiti  $\lim_{t \rightarrow x_i^+} f(t)$  e  $\lim_{t \rightarrow x_{i+1}^-} f(t)$  esistono e sono finiti,  $\forall i = 0, \dots, n - 1$ .

**Definizione 1.1.2.** Data  $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{C}$ ,  $T$ -periodica e continua a tratti, allora i suoi coefficienti di Fourier  $(c_n)_{n \in \mathbb{Z}}$  sono definiti come:

$$c_n = \frac{1}{T} \int_{-T/2}^{T/2} f(x) e^{-in\omega x} dx, \quad \omega := \frac{2\pi}{T}.$$

Si definisce serie di Fourier della funzione  $f$

$$S_f(x) := \sum_{n=-\infty}^{+\infty} c_n e^{in\omega x}, \quad x \in \mathbb{R}.$$

Sotto opportune ipotesi di regolarità si possono dimostrare risultati di convergenza per  $S_f$ . Ad esempio, assumendo  $f$  periodica di classe  $C^1$ , si ha che  $S_f \rightarrow f$  uniformemente.

La teoria delle serie di Fourier, per quanto potente, si applica solo a funzioni periodiche. Intuitivamente, immaginando di considerare una qualsiasi funzione come periodica con periodo indefinitamente grande e passando da serie a integrale, si può introdurre la **trasformata di Fourier**.

**Definizione 1.1.3.** Data la funzione misurabile  $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{C}$ , la funzione

$$\mathcal{F}[f(t)](\omega) = \hat{f}(\omega) := \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} f(t) e^{-i\omega t} dt, \quad \omega \in \mathbb{R},$$

viene chiamata **trasformata di Fourier** (TF) di  $f$ . Si chiama **antitrasformata di Fourier** di  $f$  la funzione

$$\mathcal{F}^{-1}[f(\omega)](t) := \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} f(\omega) e^{i\omega t} d\omega, \quad t \in \mathbb{R}.$$

La trasformata di Fourier rappresenta la distribuzione delle frequenze presenti nel segnale; in particolare, il valore  $\hat{f}(\omega)$  rappresenta il "peso" delle componenti del segnale di frequenza  $\omega$ .

Si può dimostrare che se  $f \in L^1(\mathbb{R})$  allora la funzione  $\hat{f}$  è continua e soddisfa  $|\hat{f}(\omega)| \rightarrow 0$  per  $|\omega| \rightarrow +\infty$  (lemma di Riemann-Lebesgue). Inoltre, se  $f$  è una funzione continua e sommabile, vale la formula di ricostruzione

$$f(x) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} f(t) e^{i\omega(t-x)} dx d\omega,$$

ovvero  $\mathcal{F}^{-1} \circ \mathcal{F} = I$  (identità).

L'estensione della trasformata di Fourier alle funzioni  $L^2$  è garantita dal teorema di Plancherel, che stabilisce l'esistenza e l'unicità dell'estensione di  $\mathcal{F}$  (ristretto a  $L^1(\mathbb{R}) \cap L^2(\mathbb{R})$ ) a un operatore unitario  $L^2(\mathbb{R}) \rightarrow L^2(\mathbb{R})$ .

Ricordiamo inoltre che le definizioni richiamate fin qui si estendono in maniera naturale a funzioni  $f: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{C}$ .

## 1.2 Definizione e proprietà della STFT

Nello studio dei segnali reali e in molte applicazioni pratiche ci troviamo spesso di fronte alla necessità di concentrarci su un intervallo finito di tempo. È molto frequente, infatti, che il segnale preso in considerazione sia periodico, consentendoci di limitarne lo studio su una finestra temporale ampia quanto il periodo. Qualora il segnale non fosse periodico, resta comunque impossibile registrarlo oltre una finestra di tempo finita. Tutto ciò comporta quindi la necessità di studiare la funzione  $f$  localmente, in particolare siamo interessati allo *spettro di frequenza locale*.

Restringiamo quindi  $f$  a un intervallo e calcoliamo la trasformata di Fourier soltanto sulla funzione così localizzata. A questo scopo occorre moltiplicare  $f$  per una funzione *finestra*, sufficientemente regolare e a supporto compatto.

**Definizione 1.2.1.** La **short-time Fourier transform** (STFT) di una funzione  $f \in L^2(\mathbb{R})$  rispetto a una funzione finestra  $g \in C_c^\infty(\mathbb{R})$ , è così definita:

$$V_g f(x, \omega) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} f(t) \overline{g(t-x)} e^{-it\omega} dt, \quad x, \omega \in \mathbb{R}. \quad (1.1)$$

Analoga definizione vale per  $f, g$  definite in  $\mathbb{R}^n$ .

Facciamo alcune osservazioni sulla STFT.

- Possiamo spostare la localizzazione mediante la traslazione della finestra sull'asse del tempo al variare di  $x$ . Per questa ragione la STFT è spesso chiamata *sliding window Fourier transform*.

- In fisica lo spazio  $\mathbb{R}_t \times \mathbb{R}_\omega$  è chiamato *spazio delle fasi*, oppure *piano tempo-frequenza* in analisi armonica.

Se  $f, g \in L^2(\mathbb{R})$ , allora possiamo riscrivere  $V_g f$  in varie forme, ognuna delle quali sottolinea e mette in mostra una sua diversa peculiarità. Prima di fare ciò, però, richiamiamo alcune notazioni che ci risulteranno utili:

- il prodotto interno in  $L^2$  è dato da  $\langle f, g \rangle = \int_{\mathbb{R}} f(x) \overline{g(x)} dx$ ;
- la traslazione  $T_x f(t) := f(t - x)$ ;
- la modulazione  $M_\omega f(t) := e^{i\omega t} f(t)$ .

Grazie a queste definizioni possiamo riscrivere  $V_g f$  come

$$\begin{aligned} V_g f(x, \omega) &= (f T_x \bar{g})^\wedge(\omega) \\ &= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \langle f, M_\omega T_x g \rangle \end{aligned}$$

Da ciò si può dimostrare che la STFT è una funzione uniformemente continua su  $\mathbb{R}^2$ . Ciò segue infatti dalla continuità in senso forte in  $L^2$  delle famiglie di operatori  $\{T_x\}$  e  $\{M_\omega\}$ , che soddisfano le seguenti condizioni: per  $f \in L^2(\mathbb{R})$ ,

- $\lim_{x \rightarrow 0} \|T_x f - f\|_2 = 0$ ;
- $\lim_{\omega \rightarrow 0} \|M_\omega f - f\|_2 = \lim_{\omega \rightarrow 0} \|T_\omega \hat{f} - \hat{f}\|_2 = 0$ .

Osserviamo inoltre che:

- $T_x M_\omega$  e  $M_\omega T_x$  sono entrambe traslazioni tempo-frequenza, ma non commutano: infatti, si ha

$$T_x M_\omega = e^{-ix\omega} M_\omega T_x,$$

poiché

$$\begin{aligned} T_x M_\omega f(t) &= (M_\omega f)(t - x) \\ &= e^{i\omega(t-x)} f(t - x) \\ &= e^{-ix\omega} e^{i\omega t} f(t - x) \\ &= e^{-ix\omega} M_\omega T_x f(t). \end{aligned}$$

- $(T_x f)^\wedge = M_{-x} \hat{f}$  e  $(M_\omega f)^\wedge = T_\omega \hat{f}$ , poiché:

$$\begin{aligned} \int_{\mathbb{R}} f(t-x) e^{-it\omega} dt &= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{\mathbb{R}} f(t) e^{-i(t+x)\omega} dt = \\ &= e^{-ix\omega} \hat{f}(\omega), \end{aligned}$$

e

$$\begin{aligned} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{\mathbb{R}} (M_\omega f)(t) e^{-it\xi} dt &= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{\mathbb{R}} f(t) e^{-it(\xi-\omega)} dt = \\ &= T_\omega \hat{f}(\xi). \end{aligned}$$

- Vale l'identità di Parseval: per ogni  $f, g \in L^2(\mathbb{R})$ ,  $\langle f, g \rangle = \langle \hat{f}, \hat{g} \rangle$ .

Sfruttando questi risultati,  $V_g f$  può essere espressa equivalentemente come segue:

$$\begin{aligned} V_g f(x, \omega) &= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \langle f, M_\omega T_x g \rangle \\ &= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \langle \hat{f}, T_\omega M_{-x} \hat{g} \rangle \\ &= e^{-ix\omega} (\hat{f} T_\omega \overline{\hat{g}})^\wedge(-x) \\ &= e^{-ix\omega} V_{\hat{g}} \hat{f}(\omega, -x). \end{aligned}$$

L'espressione di  $V_g f$  appena trovata è nota come *identità fondamentale dell'analisi tempo-frequenza* e combina  $f$  e  $\hat{f}$ , mostrando come la trasformata di Fourier di fatto produca una rotazione di  $\frac{\pi}{2}$  nel piano tempo-frequenza.

In alternativa, la STFT può essere espressa tramite l'utilizzo di:

- involuzioni:  $g^*(x) = \overline{g(-x)}$ ;
- convoluzioni:  $(f * g)(x) = \int_{\mathbb{R}} f(y) g(x-y) dy$ , con  $f, g \in L^1(\mathbb{R})$ .

Risulta infatti

$$\begin{aligned} V_g f(x, \omega) &= e^{ix\omega} V_{\hat{g}} \hat{f}(\omega, -x) \\ &= e^{ix\omega} (f * M_\omega g^*)(x), \end{aligned}$$

dove abbiamo usato la proprietà della convoluzione  $(f * g)^\wedge = \hat{f} \cdot \hat{g}$ .

Osservando che

$$(f * g)(x) = \langle f, T_x g^* \rangle,$$

e impiegando l'identità fondamentale dell'analisi tempo-frequenza si ottiene

$$\begin{aligned} e^{-ix\omega} (f * M_\omega g^*)(x) &= e^{-ix\omega} \langle f, M_\omega T_x g^* \rangle \\ &= e^{-ix\omega} \langle \hat{f}, (M_\omega T_x g^*)^\wedge \rangle \\ &= e^{-ix\omega} \langle \hat{f}, T_\omega M_{-x} \hat{g}^* \rangle \\ &= e^{-ix\omega} \langle \hat{f}, e^{-ix\omega} M_{-x} T_\omega \hat{g}^* \rangle \\ &= e^{-ix\omega} e^{ix\omega} \langle \hat{f}, M_{-x} T_\omega \hat{g}^* \rangle \\ &= (\hat{f} * M_{-x} \hat{g}^*)(\omega). \end{aligned}$$

Mediante il cambio di variabile  $t \rightarrow t + \frac{x}{2}$ , risulta l'ulteriore espressione equivalente

$$\begin{aligned} V_g f &= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{\mathbb{R}} f\left(t + \frac{x}{2}\right) g\left(t - \frac{x}{2}\right) e^{-i\left(t + \frac{x}{2}\right)\omega} dt \\ &= e^{-i\frac{x}{2}\omega} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{\mathbb{R}} f\left(t + \frac{x}{2}\right) g\left(t - \frac{x}{2}\right) e^{-it\omega} dt, \end{aligned}$$

dove la trasformata tempo-frequenza simmetrica ottenuta è nota in letteratura come *cross-ambiguity function*.

Osserviamo che l'applicazione  $(f, g) \mapsto V_g f$  è sesquilineare, ovvero lineare rispetto a  $f$  e antilineare rispetto a  $g$ . Questa proprietà viene messa in risalto se riscriviamo  $V_g f$  usando gli operatori:

- prodotto tensoriale  $f \otimes g(x, t) = f(x) g(t)$ ;
- trasformata di coordinate asimmetrica  $T_a F(x, t) = F(t, t - x)$ ;
- trasformata di Fourier parziale  $F_2 F(x, \omega) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{\mathbb{R}} F(x, t) e^{-it\omega} dt$ .

Dati  $f, g \in L^2(\mathbb{R})$ , si ha infatti:

$$V_g f = F_2 T_a (f \otimes \bar{g})$$

Possiamo infine notare come la STFT sia covariante rispetto a modulazione e traslazione di  $f$ . Infatti, osservando che

$$M_{-\eta}T_{-u}M_{\omega}T_x = e^{-iu\omega}M_{\omega-\eta}T_{x-u},$$

risulta

$$\begin{aligned} V_g f(T_u M_{\eta} f)(x, \omega) &= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \langle T_u M_{\eta} f, M_{\omega} T_x g \rangle = \\ &= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \langle f, M_{-\eta} T_{-u} M_{\omega} T_x g \rangle = \\ &= e^{-iu\omega} V_g f(x-u, \omega-\eta), \end{aligned}$$

ovvero

$$V_g(T_u M_{\eta} f)(x, \omega) = e^{-iu\omega} V_g f(x-u, \omega-\eta), \quad \forall x, u, \omega, \eta \in \mathbb{R}. \quad (1.2)$$

### 1.3 STFT e stati coerenti

Nella definizione di STFT la funzione  $f$  è stata moltiplicata per una funzione finestra a supporto compatto  $g$ , centrata in 0 e poi traslata, di cui si è considerata la trasformata di Fourier. Così facendo,  $V_g f(x, \cdot)$  fornisce informazioni (ridondanti) sul contenuto in frequenza di  $f$  in un intorno di  $x$ . Risulta naturale chiedersi quali informazioni si potrebbero ottenere se le traslazioni fossero discrete, con passo in tempo e in frequenza rispettivamente pari a  $t_0$  e  $\omega_0$ .

A descriverci il comportamento di  $f$  intorno ai punti  $(nt_0, m\omega_0)_{n,m \in \mathbb{Z}}$  sarebbero i coefficienti di Fourier:

$$c_{m,n}[f](t_0, \omega_0) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{in\omega_0 t} g(t - mt_0) f(t) dt = V_g f(mt_0, n\omega_0).$$

La STFT così discretizzata si può interpretare come campionamento tempo-frequenza di  $f$  mediante un reticolo discreto di opportune funzioni di localizzazione, note in vari modi a seconda del contesto.

**Definizione 1.3.1.** Con *stati coerenti* si indica una famiglia di funzioni  $g^{(q,p)} \in L^2(\mathbb{R})$ , tutte generate da una singola funzione madre  $g \in L^2(\mathbb{R})$  mediante traslazione nello spazio delle fasi, ovvero:

$$g^{(q,p)}(x) := e^{ipx}g(x-q), \quad q, p \in \mathbb{R}.$$

In alte parole, per ottenere  $g^{(q,p)}$  da  $g$  si traslerà  $g$  di  $q$  e, in modo simile, la sua trasformata di Fourier  $\hat{g}$  di  $p$ .

Per ottenere un reticolo discreto basterà selezionare un sottoinsieme di punti  $(q, p)$  corrispondente ad un reticolo rettangolare del piano tempo-frequenza. In questo caso fisseremo degli step  $t_0, \omega_0 > 0$  e definiremo:

$$\begin{aligned} g_{m,n}(x) &:= \frac{1}{\sqrt{2\pi}}g^{(mt_0, n\omega_0)}(x) = \\ &= \frac{1}{\sqrt{2\pi}}e^{in\omega_0x}g(x - mt_0). \end{aligned}$$

Appare evidente come la STFT si possa anche interpretare come scomposizione di una funzione lungo un certo reticolo discreto di stati coerenti, dal momento che risulta

$$V_g f(mt_0, n\omega_0) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\langle f, g^{(mt_0, n\omega_0)} \rangle = \langle f, g_{m,n} \rangle.$$

## 1.4 Risoluzione dell'identità e ricostruzione

La più importante proprietà degli stati coerenti è sicuramente la **risoluzione dell'identità**. Tale proprietà esprime il fatto che, fissata  $g \in L^2(\mathbb{R})$ , la mappa:

$$\Phi: L^2(\mathbb{R}) \rightarrow L^2(\mathbb{R}^2), \quad \Phi f(q, p) = \langle f, g^{(q,p)} \rangle = \sqrt{2\pi}V_g f(q, p)$$

è una isometria (a meno di un fattore costante), ovvero risulta:

$$\int_{\mathbb{R}^2} |\langle g^{(q,p)}, f \rangle|^2 dqdp = 2\pi \|f\|^2 \|g\|^2.$$

La proprietà appena dimostrata implica una formula di ricostruzione per la STFT:

$$\frac{1}{2\pi} \int_{\mathbb{R}^2} \langle f, g^{(q,p)} \rangle g^{(q,p)} dqdp = f.$$

Ciò equivale a dire che  $f$  può essere completamente ricostruita partendo dalle proiezioni nello spazio delle fasi  $\langle f, g^{(q,p)} \rangle$ .

## 1.5 Ricostruzione da coefficienti STFT discreti

Grazie alla formula di risoluzione dell'identità vista in precedenza sappiamo che, nel caso di stati coerenti continui, la ricostruzione di  $f$  è sempre possibile. Non è però scontato che la ricostruzione sia possibile qualora solo un numero finito di coefficienti rispetto a una collezione di stati coerenti fosse disponibile.

Ricordiamo che  $\Phi$  è la mappa generata dal prodotto interno tra stati coerenti continui e funzione  $f$  di interesse, ovvero

$$\Phi: L^2(\mathbb{R}) \rightarrow L^2(\mathbb{R}^2), \quad \Phi f(q, p) = \langle f, g^{(q,p)} \rangle = \sqrt{2\pi} V_g f(q, p).$$

Fissiamo un reticolo discreto di punti  $(m\omega_0, n\omega_0)_{m,n \in \mathbb{Z}}$  e denotiamo con  $T$  la corrispondente mappa nel caso discreto:

$$T: L^2(\mathbb{R}) \rightarrow l^2(\mathbb{Z}^2), \quad (Tf)_{m,n} = c_{m,n}(f; g) := \langle f, g_{m,n} \rangle.$$

Fissata  $g$  una volta per tutte, scriveremo  $c_{m,n}(f)$  per semplicità. Prenderemo in considerazione solo i casi in cui  $T$  è limitata.

Perché  $f$  sia completamente caratterizzata attraverso i coefficienti  $c_{m,n}(f)$  occorre accertarsi del fatto che che:

- $T$  sia iniettiva;
- $T$  generi una ricostruzione numericamente stabile, ossia dati due segnali da ricostruire  $f_1$  e  $f_2$ , allora  $|c_{m,n}(f_1) - c_{m,n}(f_2)|$  dev'essere in qualche senso comparabile a  $\|f_1 - f_2\|_{L^2}$ .

In particolare, tali condizioni sono soddisfatte se esistono costanti assolute  $A, B > 0$  tali che

$$A\|f\|^2 \leq \sum_{m,n \in \mathbb{Z}} |\langle f, g_{m,n} \rangle|^2 \leq B\|f\|^2.$$

Ciò è riscrivibile come

$$A\mathbb{1} \leq T^*T \leq B\mathbb{1},$$

dove  $T^*$  è l'operatore aggiunto di  $T$ . Infatti, essendo  $T$  un operatore d'analisi,  $T^*: l^2(\mathbb{Z}^2) \rightarrow L^2(\mathbb{R})$  sarà un operatore di sintesi: dato  $c = (c_{m,n})_{m,n \in \mathbb{Z}^2} \in l^2(\mathbb{Z}^2)$ ,

vale

$$T^*c = \sum_{m,n} c_{m,n} \cdot g_{m,n}.$$

Infatti, si ha

$$\begin{aligned} \langle c, Tf \rangle &= \sum_{m,n} c_{m,n} \overline{\langle f, g_{m,n} \rangle} \\ &= \langle \sum_{m,n} c_{m,n} g_{m,n}, f \rangle \\ &= \langle T^*c, f \rangle. \end{aligned}$$

Se la condizione  $A\mathbb{1} \leq T^*T \leq B\mathbb{1}$  risulta soddisfatta, si dice che gli stati coerenti  $\{g_{m,n}\}$  formano un **frame** per  $L^2(\mathbb{R})$ , e  $A$  e  $B$  sono le costanti del frame.

Ci sono dei frame particolari per cui  $A = B$ , detti **tight frame**, che permettono un'agevole ricostruzione di  $f$ . Infatti, se  $T^*T = A\mathbb{1}$ , allora:

$$\begin{aligned} f &= A^{-1}T^*Tf \\ &= A^{-1} \sum_{m,n} \langle f, g_{m,n} \rangle g_{m,n}. \end{aligned}$$

## 1.6 Principi di indeterminazione

Studiando un segnale in una situazione reale, possiamo effettuare misure nel tempo o in frequenza localizzando il segnale su intervalli di tempo o di frequenze di ampiezza finita. Più precisamente, preso in considerazione il segnale  $f \in L^2(\mathbb{R})$ , possiamo definire:

- la sua **estensione temporale**  $\Delta t$  come:

$$\Delta t^2 = \frac{1}{\|f\|_{L^2}^2} \int_{-\infty}^{+\infty} t^2 |f(t)|^2 dt;$$

- la sua **estensione in frequenza**  $\Delta \omega$  come:

$$\Delta \omega^2 = \frac{1}{\|f\|_{L^2}^2} \int_{-\infty}^{+\infty} \omega^2 |\hat{f}(\omega)|^2 d\omega.$$

È naturale chiedersi cosa accada nel caso in cui  $\Delta t$  e  $\Delta \omega$  siano entrambi molto piccoli, e perciò virtualmente nel caso della localizzazione puntuale.

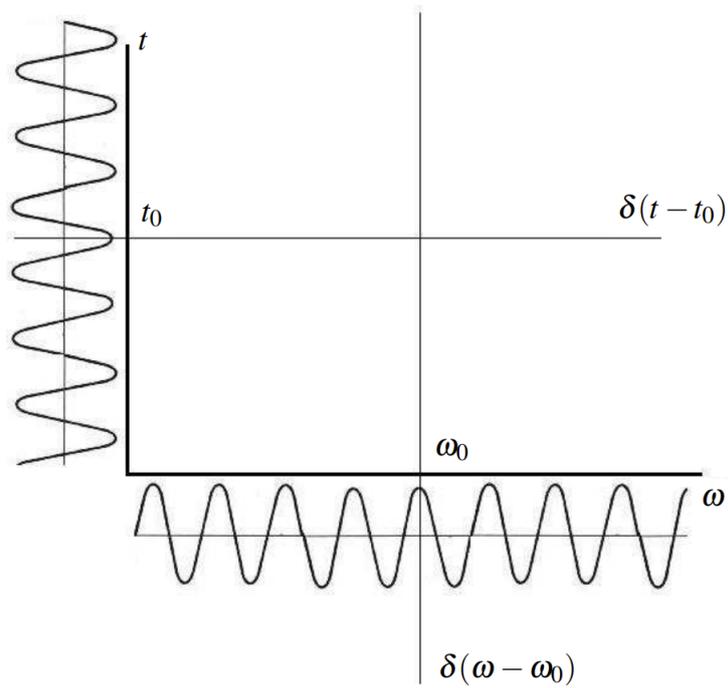


Figura 1.1. Studio di un'onda nello spazio delle fasi

Dal punto di vista dello spazio delle fasi, il segnale  $f$  è approssimativamente localizzato nel piano tempo-frequenza all'interno di un rettangolo di area  $\Delta t \times \Delta \omega$ , detto **rettangolo di Heisenberg**.

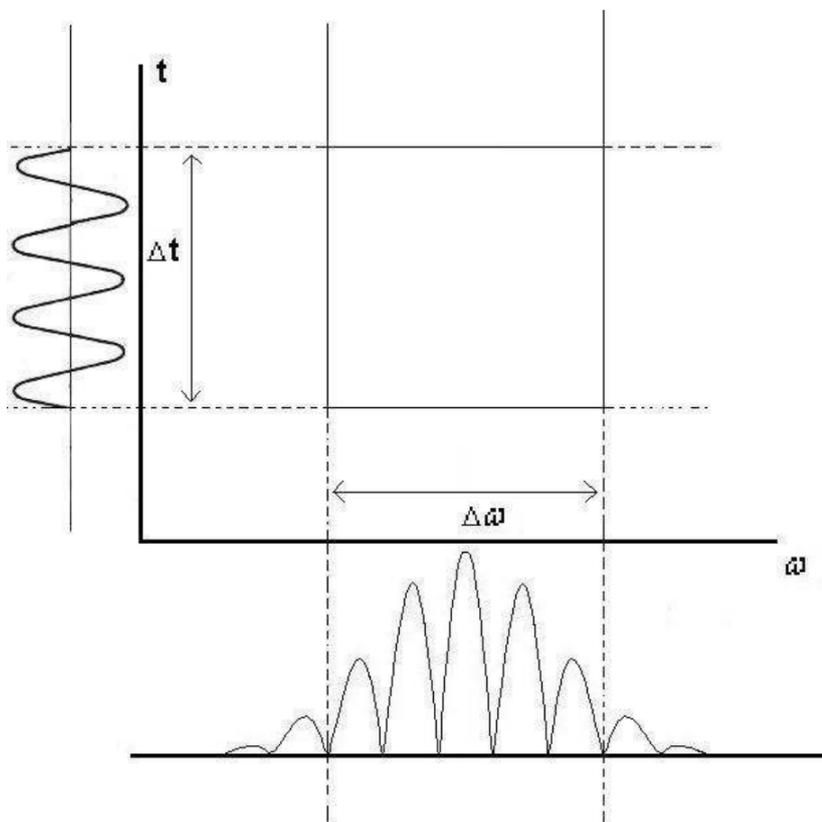


Figura 1.2. Rettangolo di Heisenberg

Il **principio di indeterminazione** si può enunciare in termini dell'area di tale rettangolo, che non può avere area minore di  $\frac{1}{2}$ , ovvero:

$$\Delta t \Delta \omega \geq \frac{1}{2},$$

o, in  $n$  dimensioni,

$$\Delta t \Delta \omega \geq \frac{n}{2}.$$

*Dimostrazione.* Supponiamo per semplicità  $f \in C_c^\infty(\mathbb{R})$  a valori reali. Osserviamo

che  $\Delta\omega$  si può riscrivere come

$$\begin{aligned}\Delta\omega^2 &= \frac{1}{\|f\|_{L^2}^2} \int_{-\infty}^{+\infty} \omega^2 |\hat{f}(\omega)|^2 d\omega = \\ &= \frac{1}{\|f\|_{L^2}^2} \int_{-\infty}^{+\infty} |i\omega \hat{f}(\omega)|^2 d\omega\end{aligned}$$

Grazie alle proprietà della trasformata di Fourier si ottiene

$$|i\omega \hat{f}(\omega)|^2 = |\hat{f}'(\omega)|^2.$$

Otteniamo così, per il teorema di Plancherel,

$$\Delta\omega^2 = \frac{1}{\|f\|_{L^2}^2} \int_{-\infty}^{+\infty} |\hat{f}'(\omega)|^2 d\omega = \frac{1}{\|f\|_{L^2}^2} \int_{-\infty}^{+\infty} |f'(t)|^2 dt.$$

Il prodotto durata-banda assumerà quindi il seguente valore:

$$\Delta t^2 \Delta\omega^2 = \frac{1}{\|f\|_{L^2}^4} \left( \int_{-\infty}^{+\infty} t^2 |f(t)|^2 dt \right) \left( \int_{-\infty}^{+\infty} |f'(t)|^2 dt \right).$$

Grazie alla disuguaglianza di Cauchy-Schwartz abbiamo

$$\left( \int_{-\infty}^{+\infty} t^2 |f(t)|^2 dt \right) \left( \int_{-\infty}^{+\infty} |f'(t)|^2 dt \right) \geq \left| \int_{-\infty}^{+\infty} t f(t) f'(t) dt \right|^2.$$

Integrando per parti troviamo

$$\int_{-\infty}^{+\infty} t f(t) f'(t) dt = \frac{f(t)^2}{2} \Big|_{-\infty}^{+\infty} - \frac{1}{2} \int_{-\infty}^{+\infty} f(t)^2 dt.$$

Poiché  $f$  è per ipotesi a supporto compatto, risulta

$$\int_{-\infty}^{+\infty} t f(t) \frac{df(t)}{dt} dt = -\frac{1}{2} \|f\|_{L^2}^2,$$

da cui:

$$\Delta t^2 \Delta\omega^2 \geq \frac{1}{\|f\|_{L^2}^4} \left| -\frac{1}{2} \|f\|_{L^2}^2 \right|^2 = \frac{1}{4}.$$

Calcolando la radice si ha infine

$$\Delta t \Delta\omega \geq \frac{1}{2}.$$

□

Il valore  $\frac{1}{2}$  rappresenta perciò l'area minima occupabile nello spazio delle fasi da un segnale realizzabile. Per concretezza, consideriamo una funzione Gaussiana modulata in frequenza, la cui trasformata di Fourier sarà quindi ancora una Gaussiana:

$$g(t) = \text{cost} \exp\left(-\frac{(t-t_0)^2}{2a^2}\right) e^{i\omega_0 t},$$

$$\hat{g}(\omega) = \text{cost}' \exp\left(-\frac{(\omega-\omega_0)^2 a^2}{2}\right),$$

dove  $a > 0$  è un parametro legato all'ampiezza della Gaussiana. In effetti, il termine  $a^2$ , che nella trasformata è passato dal denominatore al numeratore, fa sì che, restringendo la campana nel dominio del tempo, si allarghi quella nel dominio delle frequenze e viceversa.

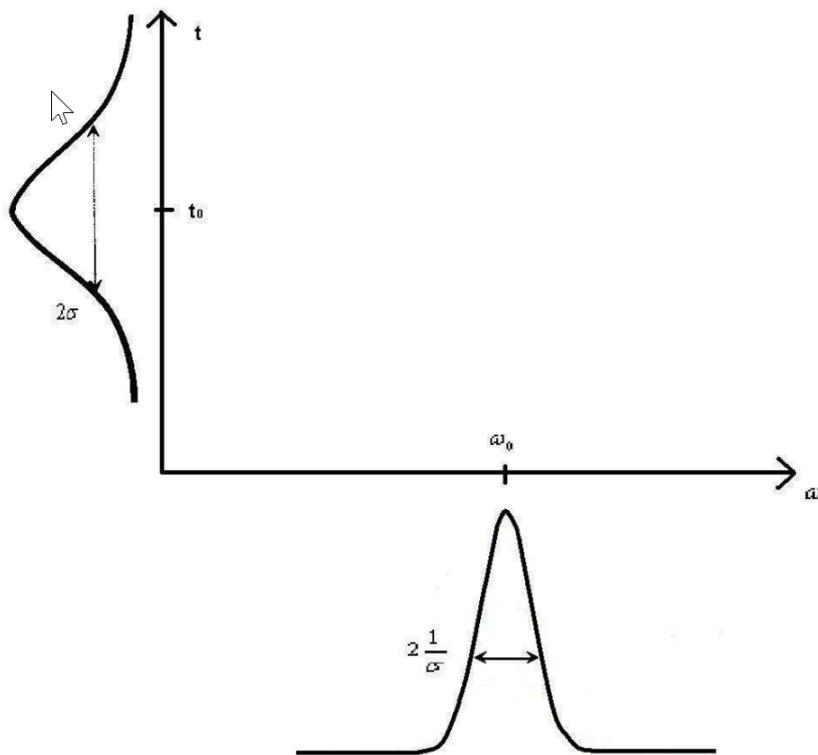


Figura 1.3. Effetto della dilatazione in tempo e in frequenza

Quindi, aumentando la precisione nel definire il segnale dal punto di vista temporale perdiamo la capacità di localizzarne il contenuto in frequenza e viceversa. Il principio di indeterminazione fissa infatti un'area minima del rettangolo di Heisenberg, ma non le dimensioni dei lati.

## 1.7 Stati coerenti canonici e osservazioni

Una scelta molto diffusa per gli stati coerenti, tanto da avere assunto il nome di **stati coerenti canonici**, è l'utilizzo di una Gaussiana come *funzione madre*. Poniamo quindi

$$g_0(x) := \pi^{-1/4} e^{-x^2/2},$$

e i rispettivi stati coerenti  $g_0^{(q,p)}$  sono noti come funzioni d'onda di Gabor, che approfondiremo in seguito. Per ora è importante spiegare perché tale scelta è così diffusa e cosa rende degni di nota gli stati coerenti canonici. La risposta risiede nella caratteristica peculiare della Gaussiana di minimizzare l'indeterminazione tempo-frequenza, ovvero per ogni  $q, p \in \mathbb{R}$  vale la relazione

$$\left[ \int |g_0^{(q,p)}(x)|^2 (x-q)^2 dx \right] \left[ \int |(g_0^{(q,p)})^\wedge(\omega)|^2 (\omega-p)^2 d\omega \right] = \frac{1}{4}.$$

*Osservazione 1.7.1.* Un'altra circostanza che rende speciale la scelta di  $g_0^{(q,p)}$  è il fatto che  $(g_0^{(q,p)})^\wedge$  dà luogo a uno stato coerente canonico. Possiamo dimostrare ciò in questo modo:

$$\begin{aligned} (g_0^{(q,p)})^\wedge(\omega) &= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int e^{ipt} \pi^{-1/4} e^{-(t-q)^2/2} e^{-i\omega t} dt \\ &= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int \pi^{-1/4} e^{-(t-q)^2/2} e^{-i(\omega-p)t} dt \\ &= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int \pi^{-1/4} e^{-(t-q)^2/2} e^{-i(\omega-p)(t-q)} e^{-i(\omega-p)q} dt \\ &= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-i(\omega-p)q} \int \pi^{-1/4} e^{-(t-q)^2/2} e^{-i(\omega-p)(t-q)} dt \\ &= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-i(\omega-p)q} \int \pi^{-1/4} e^{-u^2/2} e^{-i(\omega-p)u} du, \end{aligned}$$

dove abbiamo sostituito  $t - q$  con  $u$ . Poiché

$$\int e^{-i(\omega-p)u} e^{-u^2/2} = \sqrt{2\pi} e^{-(\omega-p)^2/2},$$

la trasformata di  $g_0^{(q,p)}$  altro non è che:

$$\begin{aligned} (g_0^{(q,p)})^\wedge(\omega) &= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \pi^{-1/4} e^{-i(\omega-p)q} \sqrt{2\pi} e^{-(\omega-p)^2/2} \\ &= \pi^{-1/4} e^{-i(\omega-p)q} e^{-(\omega-p)^2/2} \\ &= e^{ipq} g_0^{(p,-q)}(\omega). \end{aligned}$$

## 1.8 Ondine come particolare tipo di stato coerente

Le ondine sono un'altra famiglia di funzioni derivanti tutte da una stessa funzione madre, indicizzate da due parametri. La loro forma è la seguente:

$$h^{(a,b)}(x) = |a|^{-1/2} h\left(\frac{x-b}{a}\right),$$

dove  $b \in \mathbb{R}$  definisce la posizione dell'ondina, mentre  $a \neq 0$  è un parametro di dilatazione e  $h \in L^2(\mathbb{R})$  è una funzione oscillante che soddisfa una qualche condizione di ammissibilità, per esempio

$$C_h := \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{|\hat{h}(\omega)|^2}{|\omega|} d\omega < \infty.$$

Per  $|a| \ll 1$  l'ondina risulterà molto concentrata nel tempo e assai oscillante (quindi localizzata nelle alte frequenze), mentre per  $|a| \gg 1$  l'ondina sarà più allungata sull'asse del tempo, con frequenze molto più basse.

Questa capacità dell'ondina di cambiare la propria dilatazione senza cambiare forma la rende più utile rispetto agli stati coerenti canonici quando si desidera una migliore precisione alle alte frequenze.

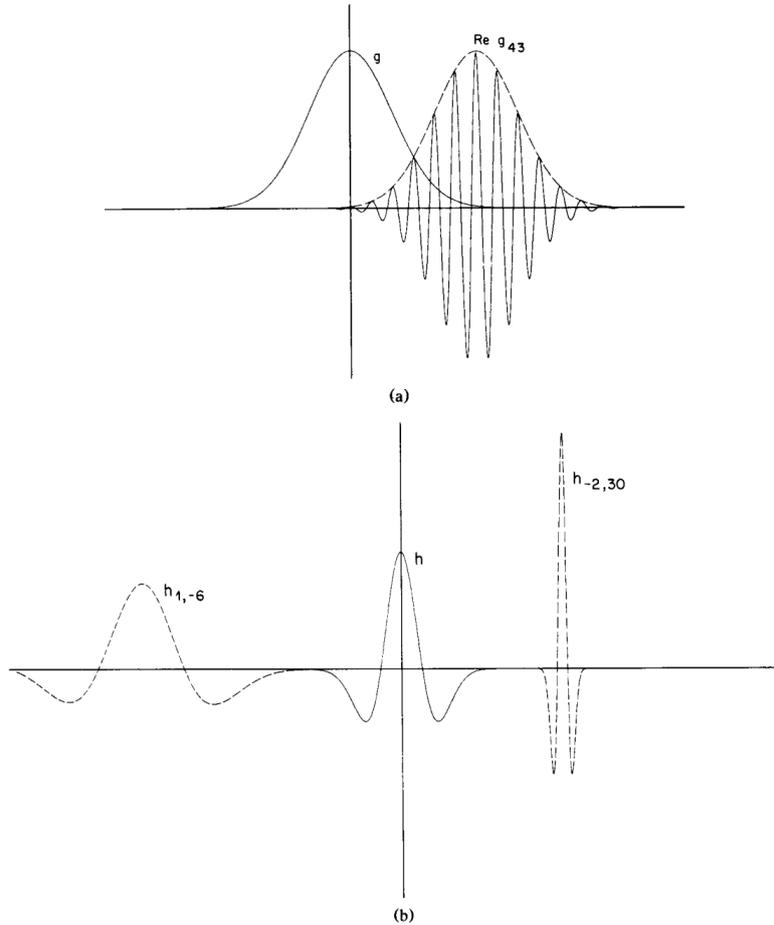


Figura 1.4. (a) stato coerente canonico, (b) ondina

Anche per le ondine si può dimostrare una formula di risoluzione dell'identità: date due funzioni  $f_1, f_2 \in L^2(\mathbb{R})$ , si ha

$$\int_{\mathbb{R}^2} \langle f_1, h^{(a,b)} \rangle \langle h^{(a,b)}, f_2 \rangle \frac{da}{a^2} db = C_h \langle f_1, f_2 \rangle.$$

Da questa relazione segue una formula di ricostruzione analoga a quella valida per gli stati coerenti:

$$f = C_h^{-1} \int_{\mathbb{R}^2} \langle f, h^{(a,b)} \rangle h^{(a,b)} \frac{da}{a^2} \int db.$$

Tutte queste similitudini tra stati coerenti e ondine non sono casuali, entrambe queste costruzioni sono casi particolari di stati coerenti rispetto a gruppi di Lie –

il gruppo di Heisenberg per gli stati coerenti, il gruppo affine per le ondine (note anche come **stati coerenti affini**).

## Capitolo 2

# Approfondimento sulle ondine

### 2.1 Il sistema di Haar

Per definire il sistema di Haar occorre introdurre gli **intervalli diadici** su  $\mathbb{R}$ :

$$I_{j,k} := \left[ \frac{k}{2^j}, \frac{k+1}{2^j} \right), \quad k, j \in \mathbb{Z}.$$

Si può notare come l'ampiezza dell'intervallo  $I_{j,k}$  sia  $|I_{j,k}| = \frac{1}{2^j}$ . Inoltre, ciascun intervallo del tipo  $I_{j,k}$  può essere suddiviso in due parti:

- la metà sinistra  $I_{j,k}^s$  assume la forma:

$$I_{j,k}^s = I_{j+1,2k},$$

di estremi:

$$\left[ \frac{2k}{2^{j+1}}, \frac{2k+1}{2^{j+1}} \right) = \left[ \frac{2k}{2^{j+1}}, \frac{2(k+1/2)}{2^{j+1}} \right),$$

equivalenti a:

$$\left[ \frac{k}{2^j}, \frac{2k+1}{2^{j+1}} \right) = \left[ \frac{k}{2^j}, \frac{k+1/2}{2^j} \right).$$

- La metà destra  $I_{j,k}^d$  assume la forma:

$$I_{j,k}^d = I_{j+1,2k+1},$$

di estremi:

$$\left[ \frac{2k+1}{2^{j+1}}, \frac{2k+2}{2^{j+1}} \right) = \left[ \frac{2(k+1/2)}{2^{j+1}}, \frac{2(k+1)}{2^{j+1}} \right),$$

equivalenti a:

$$\left[ \frac{2k+1}{2^{j+1}}, \frac{2k+2}{2^{j+1}} \right) = \left[ \frac{k+1/2}{2^j}, \frac{k+1}{2^j} \right).$$

Grazie a questa costruzione, dati due intervalli diadici  $I_{j_0, k_0}$  e  $I_{j_1, k_1}$  diversi fra loro (quindi aventi  $j_0 \neq j_1$  o  $k_0 \neq k_1$ ), uno sarà sottointervallo dell'altro oppure i due saranno disgiunti.

Presa ora in considerazione la funzione indicatrice dell'intervallo unitario

$$\phi(x) = \chi_{[0,1)}(x) := \begin{cases} 1 & (0 \leq x < 1) \\ 0 & (x \notin [0,1)), \end{cases} \quad x \in \mathbb{R},$$

definiremo il **sistema delle funzioni di scala di Haar** su  $\mathbb{R}$  la famiglia di funzioni  $(\phi_{j,k})$ , con  $j, k \in \mathbb{Z}$ , ottenute mediante traslazioni e dilatazioni di  $\phi$ :

$$\phi_{j,k}(x) := 2^{j/2} \phi(2^j x - k).$$

Notiamo che  $\phi_{j,k}(x) = 2^{j/2}$  sull'intervallo di estremi  $2^j x - k = 0$  e  $2^j x - k = 1$ , ossia se  $\frac{k}{2^j} \leq x \leq \frac{1+k}{2^j}$ , altrimenti è nulla. In altre parole,

$$\phi_{j,k} = 2^{j/2} \chi_{I_{j,k}}.$$

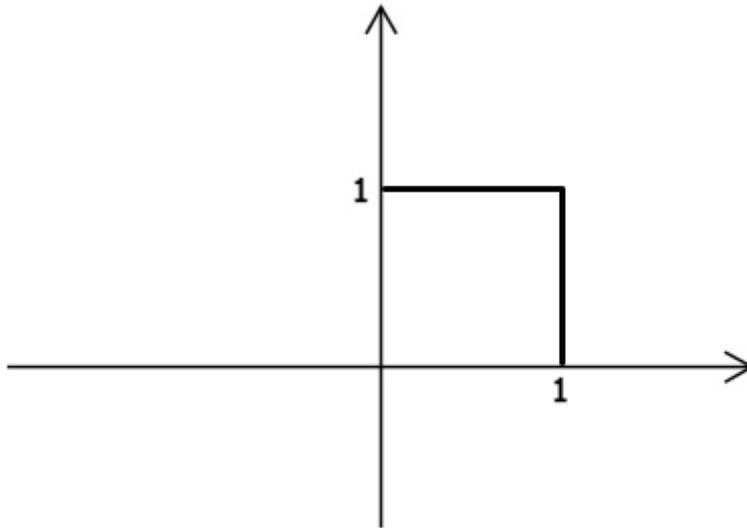


Figura 2.1. Funzione di scala di Haar con parametri  $j = 0$  e  $k = 0$ .

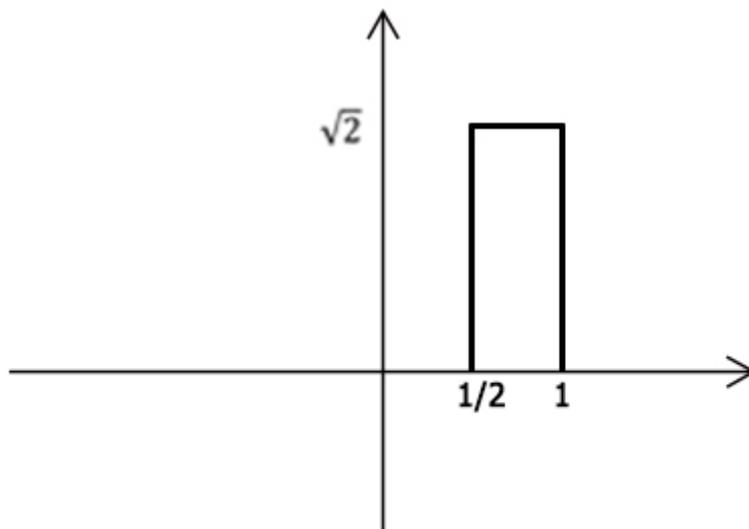


Figura 2.2. Funzione di scala di Haar con parametri  $j = 1$  e  $k = 1$ .

Consideriamo ora la combinazione di due funzioni indicatrici di sottointervalli

contigui di  $[0,1)$ , ovvero

$$\psi(x) = \chi_{[0,1/2)}(x) - \chi_{[1/2,1)}(x) = \begin{cases} 0 & (x < 0) \\ 1 & (0 \leq x < 1/2) \\ -1 & (1/2 \leq x < 1) \\ 0 & (x \geq 1). \end{cases}$$

Possiamo ora definire il **sistema di Haar** su  $\mathbb{R}$  mediante dilatazione e traslazione di tale combinazione:

$$\psi_{j,k}(x) := 2^{j/2} \psi(2^j x - k).$$

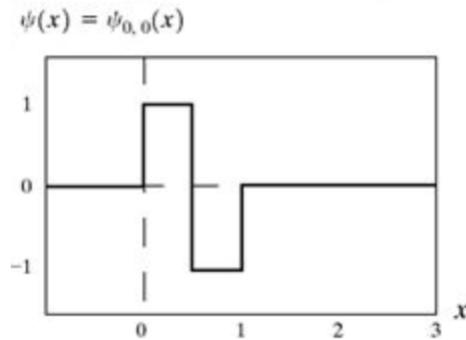


Figura 2.3. Funzione del sistema di Haar con parametri  $j = 0$  e  $k = 0$ .

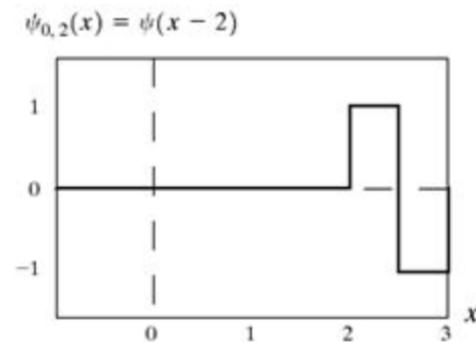


Figura 2.4. Funzione del sistema di Haar con parametri  $j = 0$  e  $k = 2$ .

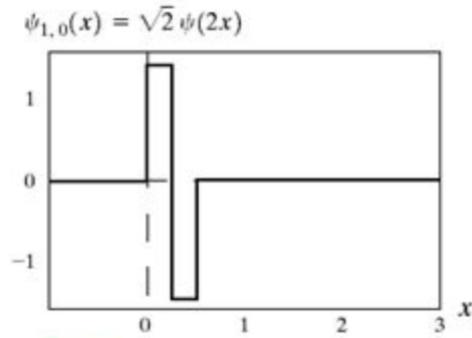


Figura 2.5. Funzione del sistema di Haar con parametri  $j = 1$  e  $k = 0$ .

In modo analogo a quanto fatto per  $\phi_{j,k}$ , andiamo a studiare i valori assunti da  $\psi_{j,k}$  su  $\mathbb{R}$ .

- $\psi_{j,k}(x)$  vale  $2^{j/2}$  da  $2^j x - k = 0$  a  $2^j x - k = 1/2$ , ossia da  $x = \frac{k}{2^j}$  a  $x = \left(\frac{1}{2} + k\right) \frac{1}{2^j} = \frac{2k+1}{2^{j+1}}$ , ovvero in  $I_{j,k}^s$ .
- $\psi_{j,k}(x)$  vale  $-2^{j/2}$  da  $2^j x - k = 1/2$  a  $2^j x - k = 1$ , ossia da  $x = \left(\frac{1}{2} + k\right) \frac{1}{2^j} = \frac{2k+1}{2^{j+1}}$  a  $x = \frac{1+k}{2^j}$ , ovvero in  $I_{j,k}^d$ .

Possiamo quindi scrivere:

$$\begin{aligned}\phi_{j,k}(x) &= 2^{j/2} \left[ \chi_{I_{j,k}^s}(x) - \chi_{I_{j,k}^d}(x) \right] = \\ &= 2^{j/2} \left[ \chi_{I_{j+1,2k}}(x) - \chi_{I_{j+1,2k+1}}(x) \right],\end{aligned}$$

pertanto

$$\phi_{j,k}(x) = 0 \quad \forall x \notin I_{j,k}.$$

Segue da quanto detto fino ad ora che gli integrali di  $\psi_{j,k}$  e del suo quadrato su  $\mathbb{R}$  abbiano i seguenti valori:

$$\begin{aligned}\int_{\mathbb{R}} \psi_{j,k}(x) dx &= 2^{j/2} \left( \int_{I_{j+1,2k}} dx - \int_{I_{j+1,2k+1}} dx \right) \\ &= \frac{2^{j/2}}{2^{j+1}} - \frac{2^{j/2}}{2^{j+1}} = 0.\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\int_{\mathbb{R}} |\psi_{j,k}(x)|^2 dx &= 2^j \left( \int_{I_{j+1,2k}} dx - \int_{I_{j+1,2k+1}} dx \right) \\ &= \frac{2^j}{2^{j+1}} + \frac{2^j}{2^{j+1}} \\ &= 2 \frac{2^j}{2^{j+1}} = \frac{2^{j+1}}{2^{j+1}} = 1.\end{aligned}$$

Studiamo ora i prodotti scalari tra funzioni del sistema di Haar. Ricordiamo che una famiglia di funzioni  $(f_i)_{i \in I}$  in  $L^2(\mathbb{R})$  si dice **sistema ortogonale** se:

$$\langle f_i, f_j \rangle = \int_{\mathbb{R}} f_i(x) \overline{f_j(x)} dx = \begin{cases} 0 & (j \neq i) \\ \int_{\mathbb{R}} |f_i(x)|^2 dx & (j = i). \end{cases}$$

Se poi  $\int_{\mathbb{R}} |f_i(x)|^2 dx = 1$  il sistema si dice **ortonormale**.

**Teorema 1.** Il sistema di Haar  $(\psi_{j,k})_{j,k \in \mathbb{Z}}$  è un sistema ortonormale per  $L^2(\mathbb{R})$ .

*Dimostrazione.* Occorre mostrare che:

$$\int_{\mathbb{R}} \psi_{j_0,k_0}(x) \overline{\psi_{j_1,k_1}(x)} dx = \begin{cases} 1 & (j_0 = j_1, k_0 = k_1) \\ 0 & (\text{altrimenti}). \end{cases} \quad (2.1)$$

Distinguiamo due casi per comodità.

- Nel caso in cui  $\psi_{j_0,k_0}$  e  $\psi_{j_1,k_1}$  abbiano lo stesso parametro di scala, cioè  $j = j_0 = j_1 \in \mathbb{Z}$ , si ha

$$I_{j,k_0} \cap I_{j,k_1} = \begin{cases} I_{j,k_0} & (k_0 = k_1) \\ 0 & (k_0 \neq k_1). \end{cases}$$

Quindi se  $k_0 = k_1$  si ha che

$$\int_{\mathbb{R}} \psi_{j_0,k_0}(x) \overline{\psi_{j_1,k_1}(x)} dx = \int_{\mathbb{R}} |\psi_{j,k_0}(x)|^2 dx = 1.$$

Se, invece,  $k_0 \neq k_1$ ,  $\psi_{j,k_0}$  ha un supporto disgiunto da quello di  $\psi_{j,k_1}$ , pertanto

$$\psi_{j,k_0}(x) \overline{\psi_{j,k_1}(x)} = 0,$$

da cui la tesi.

- Qualora le scale fossero diverse, cioè  $j_0 \neq j_1$ , ci sarebbero due possibilità:

1.  $I_{j_0, k_0} \cap I_{j_1, k_1} = \emptyset$ , allora  $\psi_{j_0, k_0}(x) \overline{\psi_{j_1, k_1}(x)} = 0$ .
2. Chiamato  $j_0$  il più grande tra  $j_0$  e  $j_1$ ,  $I_{j_0, k_0}$  è contenuto in  $I_{j_1, k_1}^s$  o in  $I_{j_1, k_1}^d$ .  
Se  $I_{j_0, k_0} \subset I_{j_1, k_1}^s$  ne consegue che:

$$\begin{aligned} & \int_{I_{j_0, k_0}} \psi_{j_0, k_0}(x) \overline{\psi_{j_1, k_1}(x)} dx = \\ & = 2^{j_0/2} (-2^{j_1/2}) \chi_{I_{j_0, k_0}^s} + (-2^{j_0/2}) (-2^{j_1/2}) \chi_{I_{j_0, k_0}^d} = \\ & = -2^{\frac{j_0+j_1}{2}} \chi_{I_{j_0, k_0}^s} + 2^{\frac{j_0+j_1}{2}} \chi_{I_{j_0, k_0}^d}. \end{aligned}$$

Quindi:

$$\begin{aligned} & \int_{\mathbb{R}} \psi_{j_0, k_0}(x) \overline{\psi_{j_1, k_1}(x)} dx = \\ & = 2^{\frac{j_0+j_1}{2}} \left( - \int_{I_{j_0, k_0}^s} dx + \int_{I_{j_0, k_0}^d} dx \right) = \\ & = \frac{2^{\frac{j_0+j_1}{2}}}{2^{j_0+1}} - \frac{2^{\frac{j_0+j_1}{2}}}{2^{j_0+1}} = 0. \end{aligned}$$

Ragionando analogamente, lo stesso risultato si ottiene qualora  $I_{j_0, k_0} \cap I_{j_1, k_1}^d$ , da cui la tesi.

□

## 2.2 L'analisi multirisoluzione

Per comprendere al meglio l'analisi multirisoluzione di Meyer abbiamo bisogno di definire il concetto di **base di Riesz**.

**Definizione 2.2.1.** Una famiglia  $\{f_k\}_{k=1}^{\infty}$  di elementi di uno spazio di Hilbert  $H$  viene detta **base di Riesz** di  $H$  se:

- $\{f_k\}_{k=1}^{\infty}$  è una base per  $H$ , ovvero per ogni  $g \in H$  esiste ed è unica la successione  $\{c_k\}_{k=1}^{\infty}$  tale che:

$$g = \sum_{k=1}^{\infty} c_k f_k;$$

- esistono due costanti  $B \geq A > 0$  tali che, per ogni  $g \in H$ ,

$$A \sum_{k=1}^{\infty} |c_k|^2 \leq \|g\|^2 \leq B \sum_{k=1}^{\infty} |c_k|^2.$$

É facile constatare che le basi ortonormali sono quelle particolari basi di Riesz aventi entrambe le costanti  $A$  e  $B$  pari a 1.

Consideriamo ora il caso in cui  $H = L^2(\mathbb{R})$ .

**Definizione 2.2.2.** Una successione crescente di sottospazi chiusi  $\{V_j\}_{j \in \mathbb{Z}}$  di  $L^2(\mathbb{R})$ , ovvero tali che

$$V_j \subset V_{j+1} \quad \forall j \in \mathbb{Z},$$

è detta **analisi multirisoluzione** di  $L^2$  (abbreviato in **MRA**) se:

1.  $\bigcap_{j=-\infty}^{+\infty} V_j = 0$ .
2.  $\bigcup_{j=-\infty}^{+\infty} V_j$  è un sottoinsieme denso di  $L^2$ .
3. Per ogni  $f \in L^2$  e  $j \in \mathbb{Z}$ , vale:  $f(x) \in V_j \Leftrightarrow f(2x) \in V_{j+1}$ .
4. Esiste  $g \in V_0$ , detta **funzione di scala**, tale che  $\{g_k(x) := g(x - k)\}_{k \in \mathbb{Z}}$  è una base di Riesz dello spazio  $V_0$ .

Dal punto 3 della definizione è facile dedurre che, se  $g$  è una funzione di scala, allora una base di Riesz per ogni  $V_j$  è data da

$$\left\{ 2^{j/2} g(2^j x - k) \right\}_{k \in \mathbb{Z}}.$$

In particolare, risulta che  $f \in V_j$  se e solo se

$$f(x) = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} c_k 2^{j/2} g(2^j x - k),$$

per qualche  $\{c_k\}_k \in l^2$ .

Possiamo osservare che la costruzione di Haar della sezione precedente è una particolare MRA di  $L^2$ , detta **MRA di Haar**, dove:

- $V_0$  è lo spazio costituito dalle funzioni costanti in  $I_{0,k} = [k, k+1), k \in \mathbb{Z}$  e appartenenti a  $L^2(\mathbb{R})$ ;
- $V_j$  è lo spazio costituito dalle funzioni costanti in  $I_{j,k} = [2^{-j}k, 2^{-j}(k+1)), k \in \mathbb{Z}$ , e appartenenti a  $L^2(\mathbb{R})$ . È evidente che  $V_j \subset V_{j+1}$ .

Segue che i sottospazi così definiti rispettano tutte le caratteristiche delle MRA:

- l'insieme  $\cup_{j=-\infty}^{+\infty} V_j$  è denso in  $L^2(\mathbb{R})$  dato che, affinché un vettore  $f \in L^2$  sia ortogonale a tutti i sottospazi  $V_j$ , deve soddisfare:

$$\int_{2^{-jk}}^{2^{-j(k+1)}} f(x) dx = 0, \forall k, j \in \mathbb{Z}.$$

In particolare, segue che  $f \equiv 0$  quasi ovunque.

- La proprietà  $f(x) \in V_j \Leftrightarrow f(2x) \in V_{j+1}$  è ovvia per via della stessa costruzione dei  $V_j$ .
- Una possibile funzione di scala può essere, in questo caso,  $g = \chi_{[0,1)}$ .

Abbiamo visto come abbiamo bisogno di una funzione  $g$  tale che

$$\{g(x-k)\}_{k \in \mathbb{Z}}$$

sia base di Riesz dello spazio  $V_0$ , affinché  $\{V_j\}_{j \in \mathbb{Z}}$  sia un'analisi multirisoluzione. A questo punto è naturale domandarsi se non sia possibile essere più stringenti nelle richieste, ad esempio richiedendo l'esistenza non di una base di Riesz per  $V_0$ , bensì di una base ortonormale.

Il seguente teorema ci assicura che, per ogni MRA, è possibile scegliere  $g$  in modo che essa generi una base ortonormale di  $V_0$ . Inoltre, ci assicura che la scelta di tale funzione  $g$  è unica, a meno di fattori di fase.

**Teorema 2.** Sia  $V$  un sottospazio chiuso di  $L^2(\mathbb{R})$  e sia  $g$  una funzione di  $V$  tale che  $\{g(x-k)\}_{k \in \mathbb{Z}}$  sia una base di Riesz di  $V$ .

Consideriamo la funzione  $\phi \in L^2(\mathbb{R})$  la cui trasformata di Fourier è definita da:

$$\hat{\phi}(x) = \hat{g}(x) \left( \sum_{k=-\infty}^{+\infty} |\hat{g}(x+2\pi k)|^2 \right)^{-1/2}. \quad (2.2)$$

Allora:

- $\phi \in V$ ;
- La famiglia  $\{\phi'(x-k)\}_{k \in \mathbb{Z}}$  forma una base ortonormale di  $V$  se e solo se  $\hat{\phi}' = \hat{\phi}\rho$ , dove  $\rho: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{C}$  è una funzione periodica, di periodo  $2\pi$  e tale che  $|\rho(x)| = 1$  per q.o.  $x \in \mathbb{R}$ .

La funzione  $\phi$  del teorema precedente verrà chiamata **funzione di scala ortonormale**. Inoltre, presa una qualsiasi MRA  $\{V_j\}_{j \in \mathbb{Z}}$ , possiamo definire:

- La famiglia di operatori  $\{W_j\}_{j \in \mathbb{Z}}$ , dove

$$W_j = \{w \in V_{j+1} \text{ t. c. } \langle w, v \rangle = 0, \forall v \in V_j\}.$$

$W_j$  è detto **complemento ortogonale** di  $V_j$  in  $V_{j+1}$ .

- La famiglia di sottospazi  $\{D_j\}_{j \in \mathbb{Z}}$ , dove

$$D_j(v) = \langle v, u_1 \rangle u_1 + \langle v, u_2 \rangle u_2 + \cdots + \langle v, u_r \rangle u_r,$$

dove  $v \in V_j$  e  $\{u_1, u_2, \dots, u_r\}$  è base ortonormale di  $W_j$ .  $D_j$  si dice **proiezione ortogonale** di  $V_j$  su  $W_j$ .

**Teorema 3.** Definiti  $\{W_j\}_{j \in \mathbb{Z}}$  e  $\{D_j\}_{j \in \mathbb{Z}}$  come sopra, possiamo riscrivere ogni funzione  $f \in L^2(\mathbb{R})$  come:

$$f = \sum_{j=-\infty}^{+\infty} D_j f,$$

e si ha

$$\|f\|^2 = \sum_{j=-\infty}^{+\infty} \|D_j f\|^2.$$

Ciò equivale a dire che  $L^2(\mathbb{R})$  è la somma ortogonale degli spazi  $W_k$ , ovvero:

$$L^2(\mathbb{R}) = \bigoplus_{k=-\infty}^{+\infty} W_k.$$

Questo teorema implica che, se  $\{\psi_{j,k}\}_{k \in \mathbb{Z}}$  è una base ortonormale di  $W_j$  per ogni  $j$ , allora  $\{\psi_{j,k}\}_{j,k \in \mathbb{Z}}$  è base ortonormale di  $L^2(\mathbb{R})$ . Questa osservazione è alla base della costruzione di basi ortonormali di  $L^2$  costituite da wavelet.

**Teorema 4.** Sia  $\{V_j\}$  un'analisi multirisoluzione di  $L^2(\mathbb{R})$  e sia  $\{W_j\}$  la famiglia associata dei complementi ortogonali. Esiste una funzione  $\psi \in \{W_0\}$  per cui la famiglia

$$\left\{ \psi_{j,k}(x) = 2^{j/2} \psi(2^j x - k) \right\}_{j,k \in \mathbb{Z}}$$

è una base ortonormale di  $L^2(\mathbb{R})$ . In particolare,

$$\psi(x) = 2 \sum_{k=-\infty}^{+\infty} (-1)^k \bar{c}_k \phi(2x + k - 1),$$

dove  $\phi$  è la funzione di scala ortonormale della MRA e  $(c_k)_{k \in \mathbb{Z}} \subset \ell^2(\mathbb{Z})$  è la successione di coefficienti

$$c_k = \frac{1}{2} \int_{\mathbb{R}} \phi(x/2) \bar{\phi}(x - k) dx.$$

**Definizione 2.2.3.** Se  $\{V_j\}$  è una MRA allora:

- la base ortonormale del teorema precedente

$$\left\{ 2^{j/2} \psi(2^j x - n) \right\}_{n \in \mathbb{Z}},$$

è chiamata **base di wavelets di  $L^2(\mathbb{R})$  associata alla MRA**;

- la funzione  $\psi$  è chiamata **wavelet** o **wavelet madre**.

In quanto base ortonormale, si ha che per qualsiasi funzione  $f \in L^2(\mathbb{R})$  vale

$$f = \sum_{j,k \in \mathbb{Z}} \langle f, \psi_{j,k} \rangle \psi_{j,k}.$$

Esaminiamo con più attenzione la base di ondine associata all'analisi multirisoluzione di Haar. Prendendo come funzione di scala  $\chi_{[0,1)}$ , si ricava:

$$c_k = - \int_0^1 \chi_{[0,1)}(2x - k) dx,$$

da cui segue che  $c_0 = c_1 = -1/2$ , mentre gli altri  $c_k$  saranno nulli. Perciò  $\psi = \chi_{[0,1/2)} - \chi_{[1/2,1)}$ , da cui

$$\psi_{j,k}(x) = \begin{cases} 2^{j/2} & (x \in [k2^{-j}, k2^{-j} + 2^{-j-1})) \\ -2^{j/2} & (x \in [k2^{-j} + 2^{-j-1}, (k+1)2^{-j})) \\ 0 & (\text{altrimenti}). \end{cases}$$

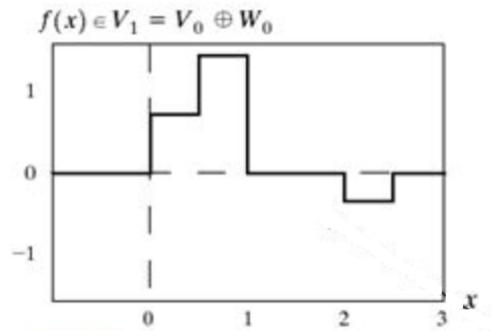


Figura 2.6. Esempio di funzione appartenente al sottospazio  $V_1$  della MRA di Haar.

## 2.3 Le ondine di Daubechies

Abbiamo visto fin qui che è possibile costruire una base ortonormale di  $L^2(\mathbb{R})$  a partire dalle ondine di Haar. Una proprietà che salta agli occhi di tali funzioni è la scarsa regolarità. Sembra perciò naturale chiedersi se si possano costruire basi ortonormali di ondine a supporto compatto ma sufficientemente regolari. Questo è un importante problema risolto da Daubechies, di cui ripercorriamo alcuni passaggi.

Partiamo da un polinomio trigonometrico:

$$m_0(t) = \sum_k c_k e^{ikt},$$

a coefficienti reali  $c_k$ . Supponiamo che  $m_0$  sia un **filtro**, secondo la seguente definizione.

**Definizione 2.3.1.** Una funzione  $m_0 \in L^2(\mathbb{R})$  è detta **filtro** se:

1. è continua e  $2\pi$ -periodica;
2.  $|m_0(t)|^2 + |m_0(t + \pi)|^2 = 1, \forall t$ ;
3.  $m_0(0) = 1$ .

Combinando i punti 2 e 3 della definizione precedente possiamo notare che, per  $t = 0$ , abbiamo:

$$\begin{aligned} |m_0(0)|^2 + |m_0(0 + \pi)|^2 &= 1 \\ \Rightarrow 1^2 + |m_0(\pi)|^2 &= 1 \\ \Rightarrow m_0(\pi) &= 0. \end{aligned}$$

Quindi  $\pi$  risulta necessariamente una radice del polinomio  $m_0$ , pertanto  $m_0$  è riscrivibile nella forma:

$$m_0(t) = \frac{(1 + e^{it})^N}{2^N} l(t),$$

dove:

- $N \geq 1$ ;
- $l$  è un nuovo polinomio trigonometrico, questa volta tale che  $l(\pi) \neq 0$ .

Definendo poi  $M_0(t) = |m_0(t)|^2$ , possiamo dire che:

- $M_0(t) + M_0(t + \pi) = 1$ ;
- $M_0(0) = 1$ ;
- $M_0(t) = \left| \frac{(1 + e^{it})^{2N}}{2^{2N}} \right| |l(t)|^2$ .

Inoltre sapendo che:

$$\cos x = \frac{e^{ix} + e^{-ix}}{2},$$

e quindi che:

$$\cos \frac{t}{2} = \frac{e^{it/2} + e^{-it/2}}{2},$$

notiamo come:

$$\begin{aligned} \cos^2 \frac{t}{2} &= \frac{e^{it}}{4} + \frac{2}{4} + \frac{1}{4e^{it}} \\ &= \frac{e^{2it} + 2e^{it} + 1}{4e^{it}} \\ &= \frac{(e^{it} + 1)^2}{4e^{it}}, \end{aligned}$$

da cui è semplice vedere la seguente uguaglianza:

$$M_0(t) = \left(\cos^2 \frac{t}{2}\right)^N |l(t)|^2.$$

Definendo poi  $L(t) = |l(t)|^2$  sappiamo già che questa funzione godrà delle seguenti proprietà:

- $L(t) = L(-t)$ ;
- $L(t)$  reale.

Unendo queste consapevolezza al fatto che  $l(t)$  è un polinomio trigonometrico, possiamo dire che  $L(t)$  è un polinomio in  $\cos(t)$ . Quindi, per la formula di bisezione

$$2 \sin^2(\alpha/2) = 1 - \cos(\alpha),$$

$L(t)$  può essere riscritta come funzione di  $\sin^2(t/2)$ , ovvero:

$$M_0(t) = \left(\cos^2 \frac{t}{2}\right)^N P\left(\sin^2 \frac{t}{2}\right).$$

Non tutte le funzioni  $P$  sono però ammissibili. Dobbiamo assicurarci, infatti, che  $M_0$  goda di tutte le proprietà prima elencate, in modo da non venir meno alla richiesta che  $m_0$  sia un filtro.

Riscriviamo a tal fine la proprietà

$$M_0(t) + M_0(t + \pi) = 1,$$

usando la nuova forma appena trovata per  $M_0$ :

$$\left(\cos^2 \frac{t}{2}\right)^N P\left(\sin^2 \frac{t}{2}\right) + \left(\cos^2 \frac{t + \pi}{2}\right)^N P\left(\sin^2 \frac{t + \pi}{2}\right) = 1.$$

Grazie alle proprietà delle funzioni trigonometriche:

$$\begin{aligned} \sin\left(x + \frac{\pi}{2}\right) &= \cos(x), \\ \cos\left(x + \frac{\pi}{2}\right) &= -\sin(x), \end{aligned}$$

abbiamo:

$$\begin{aligned}\cos^2\left(t + \frac{\pi}{2}\right) &= \sin^2\left(\frac{t}{2}\right), \\ \sin^2\left(t + \frac{\pi}{2}\right) &= \cos^2\left(\frac{t}{2}\right),\end{aligned}$$

quindi:

$$\left(\cos^2 \frac{t}{2}\right)^N P\left(\sin^2 \frac{t}{2}\right) + \left(\sin^2 \frac{t}{2}\right)^N P\left(\cos^2 \frac{t}{2}\right) = 1.$$

Imponendo ora il cambio di variabile  $y = \sin^2 \frac{t}{2}$  otteniamo:

$$(1-y)^N P(y) + y^N P(1-y) = 1,$$

da cui, tramite il **teorema di Bézout** ([5, Theorem 6.1.1]) sarà possibile ricavare  $P$ .

**Teorema 5** (di Bézout). Se  $a(x)$  e  $b(x)$  sono polinomi a coefficienti reali di grado  $N$ , privi di radici comuni, esistono unici due polinomi  $m(x)$  e  $n(x)$  di grado  $N - 1$  tali che:

$$m(x)a(x) + n(x)b(x) = 1.$$

Nel nostro caso specifico:

$$\begin{aligned}a(y) &= (1-y)^N, \\ b(y) &= y^N,\end{aligned}$$

mentre per il teorema di Bézout il polinomio  $P$  che stiamo cercando deve soddisfare

$$\begin{aligned}m(y) &= P(y), \\ n(y) &= P(1-y).\end{aligned}$$

Per unicità,  $n(y) = m(1-y)$ . Otteniamo pertanto

$$(1-y)^N m(y) + y^N n(y) = 1,$$

da cui:

$$m(y) = \frac{1 - y^N m(1-y)}{(1-y)^N}.$$

Scrivendo lo sviluppo di McLaurin di  $(1 - y)^{-N}$  abbiamo:

$$\begin{aligned}
 (1 - y)^{-N} &= \\
 &= 1 - N(-y) + \frac{-N(-N-1)}{2}(-y)^2 + \frac{-N(-N-1)(-N-2)}{6}(-y)^3 + \dots \\
 &= 1 + Ny + \frac{N(N+1)}{2}y^2 + \frac{N(N+1)(N+2)}{6}y^3 + \dots \\
 &= \sum_{k=0}^{N-1} \binom{N+k-1}{k} y^k + o(y^N).
 \end{aligned}$$

Quindi:

$$\begin{aligned}
 m(y) &= (1 - y)^{-N} [1 - y^N m(1 - y)] \\
 &= \sum_{k=0}^{N-1} \binom{N+k-1}{k} y^k + o(y^N).
 \end{aligned}$$

Visto che  $m(y)$  non può avere grado superiore a  $N - 1$ , deduciamo che  $o(y^N)$  è qui uguale a 0. Perciò:

$$P(y) = m(y) = \sum_{k=0}^{N-1} \binom{N+k-1}{k} y^k.$$

La  $P$  così trovata, che rinominiamo  $P_{N-1}$ , ha le caratteristiche da noi cercate ( $P(y) > 0$  per  $y \in [0,1]$  e  $P(0) = 1$ ) e, per il teorema di Bézout, è l'unica scelta con tali proprietà avente grado  $N - 1$ .

Vediamo ora se esistono altre  $P(y)$  ammissibili di grado più alto. L'eventuale  $P(y)$  da noi cercata dovrà verificare l'uguaglianza:

$$(1 - y)^N P(y) + y^N P(1 - y) = 1,$$

uguaglianza già verificata da  $P_{N-1}$ , quindi dovremo avere:

$$(1 - y)^N [P(y) - P_{N-1}(y)] + y^N [P(1 - y) - P_{N-1}(1 - y)] = 0. \quad (2.3)$$

Quest'ultima equazione implica che la sottrazione  $[P(y) - P_{N-1}(y)]$  sia divisibile per  $y^N$ . In altre parole, deve esistere un polinomio  $\tilde{P}(y)$  tale che:

$$P(y) - P_{N-1}(y) = y^N \tilde{P}(y). \quad (2.4)$$

Combinando le formule precedenti otteniamo:

$$(1-y)^N y^N \tilde{P}(y) + y^N (1-y)^N \tilde{P}(1-y) = 0,$$

perciò:

$$\tilde{P}(y) + \tilde{P}(1-y) = 0.$$

Da cui risulta:  $\tilde{P}$  dispari rispetto a  $y = \frac{1}{2}$ .

Riassumendo, abbiamo provato che

$$L(t) = P\left(\sin^2 \frac{t}{2}\right),$$

dove:

$$P(y) = P_{N-1}(y) + y^N D\left(\frac{1}{2} - y\right)$$

( $D$  è un qualsiasi polinomio dispari che renda  $P(y)$  positivo per  $y \in [0,1]$ ),

con:

$$P_{N-1}(y) = \sum_{k=0}^{N-1} \binom{N+k-1}{k} y^k.$$

Non ci resta ora che cercare la corrispondente  $l(t)$  (ricordiamo che  $L = |l|^2$ ). Nel farlo, ricorriamo al seguente teorema.

**Teorema 6.** (Lemma di Riesz) Per ogni polinomio trigonometrico di grado  $N$  del tipo

$$A(t) = \sum_{n=0}^N a_n \cos nt,$$

esiste un polinomio trigonometrico a coefficienti reali

$$B(t) = \sum_{n=0}^N b_n e^{int},$$

tale che:

$$A(t) = |B(t)|^2.$$

*Dimostrazione.*  $A(t)$  può essere riscritto come polinomio in  $\cos t$  di grado  $N$  e con coefficienti tutti reali:

$$A(t) = p(\cos t) = p\left(\frac{e^{it} + e^{-it}}{2}\right).$$

Tale polinomio può, a sua volta, essere scomposto utilizzando le sue radici  $c_n$ :

$$p\left(\frac{e^{it} + e^{-it}}{2}\right) = a \prod_{n=1}^N \left(\frac{e^{it} + e^{-it}}{2} - c_n\right).$$

Con il cambio di variabile  $z = e^{it}$  si ottiene:

$$\begin{aligned} p &= a \prod_{n=1}^N \left(\frac{z + z^{-1}}{2} - c_n\right) = \\ &= \frac{a}{z^N} z^N \prod_{n=1}^N \left(\frac{z + z^{-1}}{2} - c_n\right). \end{aligned}$$

Rinominando  $\frac{a}{z^N} = b$ :

$$p = b \prod_{n=1}^N \left(\frac{z^2}{2} + \frac{1}{2} - c_n z\right).$$

Cerchiamo infine le radici del fattore trovato:

$$\left(\frac{z^2}{2} + \frac{1}{2} - c_n z\right).$$

- Se  $c_n$  è reale avremo gli zeri

$$\frac{-c_n \pm \sqrt{c_n^2 - 1}}{1}.$$

1. Tali zeri, per  $|c_n| \geq 1$  saranno reali e potranno essere denominati  $r_n$  e  $r_n^{-1}$  (in particolare, se  $|c_n| = 1$ ,  $r_n = r_n^{-1}$ , ossia le due radici trovate saranno coincidenti).
2. Se  $|c_n| < 1$  i due zeri saranno complessi coniugati di modulo 1:  $e^{\pm i\alpha_n}$ .  
Da notare come, in questo caso esiste un  $t_n$  tale che  $\cos t_n = c_n$ . per cui:

$$p(\cos t_n) = A(t_n) = 0.$$

Da qui possiamo dedurre che  $e^{\pm i\alpha_n}$  hanno molteplicità pari.

- Se  $c_n$  non è reale dobbiamo prendere in considerazione le due radici  $c_n$  e  $\bar{c}_n$ .  
Il polinomio di nostro interesse può essere quindi riscritto come:

$$\left(\frac{z^2}{2} + \frac{1}{2} - c_n z\right) \left(\frac{z^2}{2} + \frac{1}{2} - \bar{c}_n z\right).$$

Appare chiaro come qui gli zeri siano quattro:

$$c_n \pm \sqrt{c_n - 1} \text{ e } \bar{c}_n \pm \sqrt{\bar{c}_n - 1}.$$

Ancora una volta dobbiamo distinguere due casi, a seconda del modulo di  $c_n$ .

1. Se  $|c_n| \neq 1$  nella quaterna trovata tutti gli zeri sono distinti e possono essere rinominati:

$$z_n, z_n^{-1}, \bar{z}_n, \bar{z}_n^{-1},$$

2. Se, invece,  $|c_n| = 1$  i quattro zeri si riducono a due, poiché a due a due coincidenti. Quindi hanno molteplicità 2 e sono entrambi complessi, tra loro coniugati e di modulo 1:

$$e^{+i\alpha_n}, e^{-i\alpha_n}.$$

Mettendo insieme tutte le caratteristiche trovate vediamo come il nostro polinomio è così fattorizzabile:

$$\begin{aligned} p(z) &= 2^{-N} b \prod_{n=1}^J (z - z_n)(z - z_n^{-1})(z - \bar{z}_n)(z - \bar{z}_n^{-1}) \cdot \\ &\quad \cdot \prod_{n=1}^I (z - e^{i\alpha_n})^2 (z - e^{-i\alpha_n})^2 \cdot \\ &\quad \cdot \prod_{n=1}^K (z - r_n)(z - r_n^{-1}). \end{aligned}$$

Risostituendo poi  $z$  con  $e^{it}$  e sfruttando il fatto che, per qualsiasi valore  $c_0 \neq 0$ , si ha:

$$|(e^{it} - c_0)(e^{it} - \bar{c}_0^{-1})| = |c_0|^{-1} |e^{it} - c_0|^2,$$

otteniamo:

$$\begin{aligned}
 A(t) &= 2^{-N} |b| \prod_{n=1}^J |z_n|^{-2} \cdot \prod_{n=1}^J |(e^{it} - z_n)(e^{it} - z_n^{-1})|^2 \cdot \\
 &\quad \cdot \prod_{n=1}^K |r_n|^{-1} \cdot \prod_{n=1}^K |e^{it} - r_n|^2 \cdot \\
 &\quad \cdot \prod_{n=1}^I |(e^{it} - e^{i\alpha_n})(e^{it} - e^{-i\alpha_n})|^2.
 \end{aligned}$$

Dato che  $A(t) = |B(t)|^2$  avremo:

$$\begin{aligned}
 B(t) &= 2^{-N/2} |b|^{1/2} \prod_{n=1}^J |z_n|^{-1} \cdot \prod_{n=1}^J (e^{2it} - 2e^{it} \operatorname{Re} z_n + |z_n|^2) \cdot \\
 &\quad \cdot \prod_{n=1}^K |r_n|^{-1/2} \cdot \prod_{n=1}^K (e^{it} - r_n) \cdot \\
 &\quad \cdot \prod_{n=1}^I (e^{2it} - 2e^{it} \cos \alpha_n + 1),
 \end{aligned}$$

che, come volevamo dimostrare, è un polinomio trigonometrico a coefficienti reali. □

Ora che conosciamo la costruzione del filtro:

$$m_0(t) = \left( \frac{(1 + e^{it})}{2} \right)^N l(t), \quad N \geq 1,$$

per definire le wavelets di Daubechies non ci resta che studiare la **condizione di Cohen**.

**Definizione 2.3.2.** Un insieme compatto  $K \subset \mathbb{R}$  si dice congruente a  $[-\pi, \pi]$  modulo  $2\pi$  se esistono:

- $q$  intervalli chiusi a due a due disgiunti (eccetto eventualmente che per gli estremi), tali che:

$$I_j \subseteq [-\pi, \pi], \quad [-\pi, \pi] = \cup_{j=1}^q I_j;$$

- $q$  interi  $k_1 \dots k_q$  tali che:

$$K = \cup_{j=1}^q (I_j + 2\pi k_j).$$

Se poi esiste una funzione filtro  $m_0$  tale che:

- $m_0$  ha valore 0 interno a  $K$ ;
- $\inf_{t \in K} \inf_{K \geq 1} |m_0(t/2^K)| > 0$ ,

si dice che tale funzione rispetta la **condizione di Cohen** e che il compatto  $K$  è un **compatto di Cohen**.

La condizione di Cohen è così importante perché un qualsiasi filtro  $m_0(t) \in \mathbb{C}^1$  che la soddisfa genera un'analisi multirisoluzione. Più precisamente:

**Teorema 7.** Sia  $m_0$  un filtro di classe  $C^1$  e sia  $\phi$  la funzione definita in trasformata da

$$\hat{\phi}(t) = \prod_{k=1}^{+\infty} m_0\left(\frac{t}{2^k}\right).$$

Allora  $\phi$  è una funzione di scala ortonormale  $\phi$  se e solo se  $m_0$  soddisfa la condizione di Cohen. In particolare, se il filtro ha la forma  $m_0(t) = \sum_k c_k e^{ikt}$ , con coefficienti  $c_k$  reali, allora  $\phi$  ha supporto compatto.

La funzione di scala ortonormale così trovata dà vita, tramite la MRA, alle così dette ondine di Daubechies, la cui wavelet madre sarà:

$$\hat{\psi}(2t) = e^{-it} \bar{m}_0(t + \pi) \hat{\phi}(t),$$

dove  $m_0$  è il filtro costruito in precedenza. Questa costruzione esplicita permette di studiare la regolarità di tali ondine mediante stime sulla velocità di decadimento delle corrispondenti trasformate di Fourier (si veda [5, Chapter 7]).

## Capitolo 3

# Operatori di localizzazione

### 3.1 Il limite delle basi ortonormali

Abbiamo visto come l'analisi multirisoluzione abbia come obiettivo quello di costruire una base ortonormale costituita da ondine. Può aver senso chiedersi se non sia possibile costruire basi ortonormali costituite da stati coerenti più generali, a partire dalla STFT. In questo capitolo vedremo come tale opzione risulterà non priva di insidie e, soprattutto, non ottimale contemporaneamente in tempo e in frequenza.

Se  $f$  è una funzione periodica di periodo  $\tau$  e  $g \in C_c^\infty(\mathbb{R})$  una finestra, ricordiamo che la corrispondente STFT ha, nel discreto, la forma:

$$(V_g f)_{m,n} = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{\mathbb{R}} f(t) g(t - m\tau) e^{-in\omega t} dt, \quad \omega = 2\pi/\tau, \quad (3.1)$$

con  $m, n \in \mathbb{Z}$ , e inoltre si ha

$$\int_0^\tau |f(t)|^2 dt = \sum_n |c_n|^2,$$

con

$$c_n = \frac{1}{\sqrt{\tau}} \int_0^\tau f(t) e^{-2\pi i n t / \tau} dt.$$

Affinché  $\{g_{m,n}(t) = g(t - m\tau) e^{-in\omega t}\}_{m,n \in \mathbb{Z}}$  sia una base ortonormale in  $L^2(\mathbb{R})$  occorre che:

- $\omega\tau = 2\pi$ ;
- $\int_{\mathbb{R}} |g(t)|^2 dt = 1$ .

Se volessimo studiare il comportamento degli elementi di tale base ortonormale in frequenza dovremmo calcolare la loro trasformata di Fourier:

$$\begin{aligned}\widehat{g_{m,n}} &= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{\mathbb{R}} g(t - m\tau) e^{-in\omega t} e^{-i\xi t} dt \\ &= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{\mathbb{R}} g(t - m\tau) e^{-in\omega(t - m\tau + m\tau)} e^{-i\xi(t - m\tau + m\tau)} dt \\ &= \widehat{g}(\xi + n\omega) e^{-in\omega m\tau} e^{-i\xi m\tau}.\end{aligned}$$

Ricordando che deve aversi  $\omega\tau = 2\pi$ , possiamo notare come il primo esponenziale è equivalente a:

$$e^{-inm2\pi} = 1.$$

Per questo motivo,

$$\widehat{g_{m,n}} = \widehat{g}(\xi + n\omega) e^{-i\xi m\tau}.$$

Siamo ora in grado di riscrivere  $(V_g f)_{m,n}$ , stavolta in termini di funzioni in frequenza:

$$(V_g f)_{m,n} = \mathcal{F}(fg(\cdot - m\tau))(n\omega) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{\mathbb{R}} \widehat{f}(\xi) \widehat{g}(\xi + n\omega) e^{-i\xi m\tau} d\xi.$$

Rispetto alla forma iniziale, che era relativa invece allo studio del segnale nel tempo, si hanno le seguenti trasformazioni:

$$\begin{aligned}f &\rightarrow \widehat{f} \\ g &\rightarrow \widehat{g} \\ \omega &\rightarrow \tau \\ \tau &\rightarrow \omega \\ (m, n) &\rightarrow (-n, m)\end{aligned}$$

Ne concludiamo che, se nel tempo scegliamo come funzione finestra  $g$ , nella frequenza avremo la corrispondente funzione finestra  $\widehat{g}$ .

Ciò che ci dobbiamo domandare è se entrambe queste funzioni finestra risultino una buona scelta. Perché la funzione finestra sia ottimale necessita di una buona localizzazione in tempo e in frequenza. Osserviamo che:

- se il decadimento fosse istantaneo, come nel caso della funzione indicatrice come finestra,  $\chi_{[0,\tau)}(t - m\tau)$ , ripetendo il segnale in modo periodico all'infinito si introdurrebbero discontinuità.

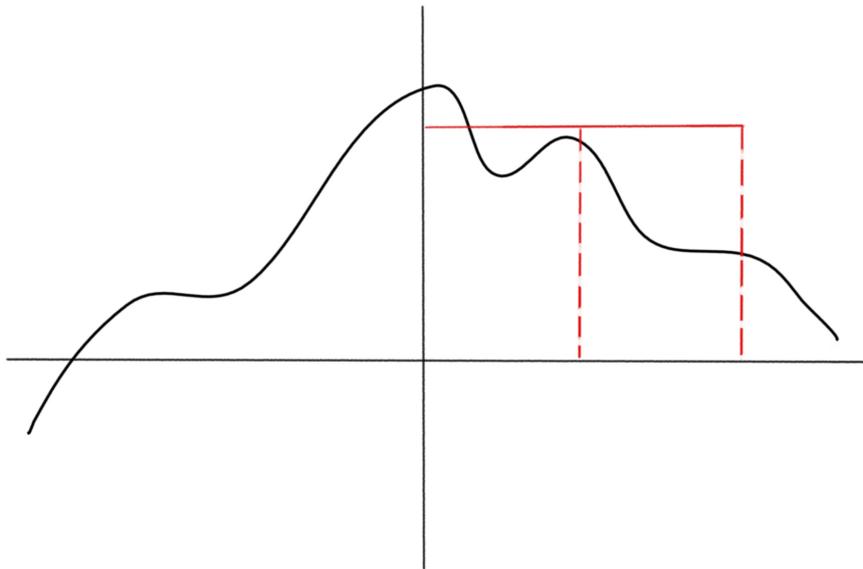


Figura 3.1. Esempio di come, se scelta in veste di funzione finestra la funzione indicatrice, si introducono discontinuità.

- Se, invece, il decadimento fosse troppo lento si avrebbe una sovrapposizione eccessiva.

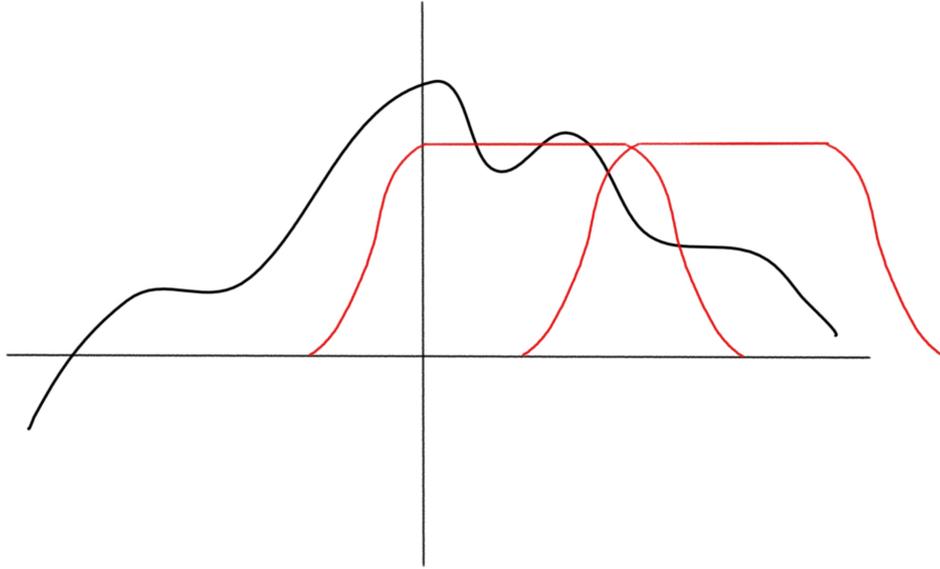


Figura 3.2. Esempio di come funzioni finestra a decadimento troppo lento implicino larghe sovrapposizioni.

Il seguente fondamentale teorema mostra che non ci sono basi ortonormali generate da  $g$  per le quali  $g$  e  $\hat{g}$  sono entrambe lisce con decadimento veloce.

**Teorema 8** (Teorema di Balian-Low). Se  $g \in L^2(\mathbb{R})$  e il sistema  $\{g_{m,n}\}_{m,n \in \mathbb{Z}}$  forma una base ortonormale per  $L^2$ , allora o  $g \notin L^2(\mathbb{R})$  oppure  $\hat{g} \notin L^2(\mathbb{R})$ .

*Dimostrazione.* Prendiamo in considerazione il caso in cui  $\tau = 1$  e  $\omega = 2\pi$ . Allora:

$$g_{m,n}(t) = g(t - m)e^{-2\pi i n t}.$$

Si parta col dimostrare che la cosiddetta trasformazione di Zak

$$U_Z: L^2(\mathbb{R}) \rightarrow L^2([0,1]^2),$$

$$(U_Z g)(s,t) = \sum_{l \in \mathbb{Z}} g(s-l)e^{2\pi i l t}, \quad s,t \in [0,1],$$

è unitaria. Osserviamo innanzitutto che  $U_Z$  si può estendere a valori di  $s, t$  esterni a  $[0,1]$ , poiché:

- $(U_Z g)(s, t+1) = (U_Z g)(s, t)$ , ossia la trasformazione è periodica in  $t$ ;
- $(U_Z g)(s+1, t) = \sum_l g(s+1-l)e^{2\pi i t l}$ , riscrivibile, tramite il cambio di variabile  $1-l=k$  e  $l=k+1$ , come segue:

$$\begin{aligned} (U_Z g)(s+1, t) &= \sum_k g(s-k)e^{2\pi i t(k+1)} = \\ &= e^{2\pi i t} (U_Z g)(s, t). \end{aligned}$$

Concentriamoci sulla base ortonormale di  $L^2(\mathbb{R})$ :

$$\chi_{[0,1]}(t-m)e^{2\pi i n t} = e_{m,n}(t)$$

e applichiamo la trasformazione  $U_Z$ , ottenendo:

$$(U_Z e_{m,n})(s, t) = \sum_{l \in \mathbb{Z}} \chi_{[0,1]}(s-m-l)e^{2\pi i n(s-l)} e^{2\pi i t l}.$$

L'unico valore di  $l$  per cui  $s-m-l$  è un valore compreso tra 0 e 1 è  $l = -m$ , allora:

$$(U_Z e_{m,n})(s, t) = e^{2\pi i n s} e^{-2\pi i t m}.$$

Le immagini di  $e_{m,n}$  mediante  $U_Z$  formano perciò una base ortonormale di  $L^2([0,1]^2)$  e prova come  $U_Z$  trasformi basi ortonormali in basi ortonormali rivelandosi, quindi, un operatore unitario.

Tornando alla funzione finestra, l'applicazione del nuovo operatore  $U_Z$  restituisce il seguente risultato:

$$\begin{aligned} (U_Z g_{m,n})(s, t) &= \sum_{l \in \mathbb{Z}} g(s-(m+l)) e^{2\pi i n(s-l)} e^{2\pi i t(l+m-m)} = \\ &= e^{2\pi i n s} e^{-2\pi i t m} (U_Z g)(s, t). \end{aligned}$$

Dato che  $\{g_{m,n}\}$  è una base ortonormale per ipotesi, per quanto appena provato, anche  $(U_Z g_{m,n})$  lo sarà per  $L^2([0,1]^2)$ .

Definiamo ora  $G(s, t) := (U_Z g)(s, t)$ , in modo che

$$(U_Z g_{m,n}) = e^{2\pi i n s} e^{-2\pi i t m} G(s, t).$$

Possiamo dimostrare che  $G(s,t)$  ha norma 1 su  $s,t \in [0,1]$ :

$$|G(s,t)| = 1.$$

Dato che  $\{g_{m,n}\}$  è base ortonormale, infatti, presa una funzione  $F \in L^2([0,1]^2)$ , si ha:

$$\begin{aligned} \sum_{m,n} |\langle F, U_Z g_{m,n} \rangle|^2 &= \int_{[0,1]^2} |F(s,t)|^2 ds dt \\ &= \sum_{m,n} \left| \int_{[0,1]^2} F(s,t) \overline{g(s,t)} e^{-2\pi i n s} e^{2\pi i m t} ds dt \right|^2 \\ &= \int_{[0,1]^2} |F(s,t)|^2 |G(s,t)|^2 ds dt. \end{aligned}$$

Da qui segue che  $|G(s,t)|^2 = 1$  quasi ovunque.

Se la funzione  $g$  decadde più velocemente di  $\frac{1}{t}$ , allora la serie

$$(U_Z g)(s,t) = \sum_{l \in \mathbb{Z}} g(s-l) e^{2\pi i t l}$$

sarebbe assolutamente convergente. Se invece  $\hat{g}$  avesse una proprietà simile, allora sia  $g$  stessa che  $(U_Z g)$  sarebbero continue. Con un decadimento più rapido si avrebbero anche proprietà di regolarità. Riassumendo:

- il fatto che  $\{g_{m,n}\}$  sia una base ortonormale implica che  $|G| = 1$  q.o.;
- il fatto che  $g$  decada più velocemente di  $\frac{1}{t}$  e  $\hat{g}$  decada più velocemente di  $\frac{1}{\xi}$  implica che  $G$  è continua.

Dimostreremo ora che le due condizioni  $|G| = 1$  e  $G$  continua sono incompatibili.

Visto quanto determinato per  $(U_Z g)$  avremo:

- $G(s,t+1) = G(s,t)$ ;
- $G(s+1,t) = G(s,t) e^{2\pi i t}$ .

Il fatto però che  $G$  è di norma unitaria ci permette di riscriverla, con l'introduzione di una funzione ausiliaria  $h(s,t)$  reale, come:

$$G(s,t) = e^{2\pi i h(s,t)}.$$

I due punti precedenti risulteranno quindi:

- $h(s, t + 1) = h(s, t) + k(s, t)$ ;
- $h(s + 1, t) = h(s, t) + t + l(s, t)$ ;

con  $k$  e  $l$  funzioni a valori interi. Il valore di  $h(s + 1, t + 1)$  sarà quindi calcolabile tramite due procedimenti distinti:

•

$$\begin{aligned} h(s + 1, t + 1) &= h(s + 1, t) + k(s + 1, t) \\ &= h(s, t) + t + k(s + 1, t) + l(s, t); \end{aligned}$$

•

$$\begin{aligned} h(s + 1, t + 1) &= h(s, t + 1) + t + 1 + l(s, t + 1) \\ &= h(s, t) + k(s, t) + t + 1 + l(s, t + 1). \end{aligned}$$

I risultati trovati con i due procedimenti rappresentano in entrambi i casi lo stesso valore, ossia  $h(s + 1, t + 1)$ , e dovranno perciò equivalersi:

$$h(s, t) + t + k(s + 1, t) + l(s, t) = h(s, t) + k(s, t) + t + 1 + l(s, t + 1).$$

Semplificando, otteniamo

$$k(s + 1, t) + l(s, t) = k(s, t) + 1 + l(s, t + 1).$$

Tuttavia, il fatto che  $G$  sia continua implica che  $h$  sia continua, e ciò assicura la continuità di  $k$  e di  $l$ . Essendo però  $k$  e  $l$  interi, non vi è altro modo per essere continue se non l'essere costanti. Riscriviamo quindi l'uguaglianza trovata imponendo  $k$  e  $l$  costanti:

$$k + l = 1 + k + l$$

Questa è palesemente una contraddizione, perciò  $G$  non può essere contemporaneamente di norma unitaria e continua. Tale incompatibilità si estende al fatto che non si possa avere  $\{g_{m,n}\}$  base ortonormale e, allo stesso tempo,  $g$  e  $\hat{g}$  con decadimento veloce.  $\square$

Questo teorema di impossibilità comporta la necessità di rivolgersi ad altre opzioni, per esempio  $\omega\tau < 2\pi$ , che dà luogo a ridondanza (frame). La problematica di fronte alla quale ci troviamo è esattamente quella già espressa tramite il principio di indeterminazione di Heisenberg, qui manifestata in una situazione diversa. Più ottimizziamo le condizioni in tempo o in frequenza, più perdiamo precisione nell'altro ambito.

### 3.2 Localizzazione nello spazio usando gli stati coerenti

Da quanto dimostrato nella sezione precedente emerge chiaramente come a comportare problemi di precisione nell'analisi tempo-frequenza del segnale è proprio la necessità di prendere in considerazione solo una frazione del segnale stesso, la necessità di localizzarlo. A seconda della scelta presa riguardo al metodo di localizzazione, che nel caso precedente emergeva sotto forma della determinazione della funzione finestra, si arriva a due differenti precisioni nel tempo e in frequenza, senza dimenticare, però, che all'aumentare della precisione di una delle due, diminuirà l'altra.

Nel 1988, ai tempi della pubblicazione dell'approccio geometrico di Daubechies di cui ci accingiamo a parlare, uno dei metodi maggiormente diffusi per la localizzazione del segnale era l'utilizzo dei due operatori:

- $Q_T$ , operatore che proietta il segnale di interesse  $f$  su un intervallo dell'asse dei tempi:

$$(Q_T f)(t) = \begin{cases} f(t) & (|t| \leq T) \\ 0 & (|t| \geq T); \end{cases}$$

- $P_W$ , operatore che proietta il segnale di interesse  $f$  su un intervallo dell'asse delle frequenze:

$$(P_W f)(t) = \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\sin[W(t-t')]}{\pi(t-t')} f(t') dt'.$$

Si indichi la composizione di questi due operatori con  $L_{T,W}$ :

$$L_{T,W} = Q_T P_W f.$$

Possiamo notare come  $L_{T,W}$  selezioni la parte del segnale  $f$  contenuta nel rettangolo  $[-T, T] \times [-W, W]$  dello spazio delle fasi.

*Osservazione 3.2.1.* Le funzioni singolari dell'operatore  $L_{T,W}$ , ossia le autofunzioni di  $L_{T,W}^* L_{T,W} = P_W Q_T P_W$ , sono degne di nota poiché spesso usate per l'eliminazione del rumore dai segnali e prendono il nome di **funzioni d'onda sferoidali prolate**.

*Osservazione 3.2.2.* Partendo da  $L_{T,W}$  possiamo generare operatori di localizzazione alternativi. Molto diffuso è, ad esempio, l'utilizzo di versioni più lisce di  $Q_T$  e  $P_W$ , come:

$$(\tilde{Q}_T f)(t) = g(t/T) f(t),$$

dove  $g \in C_c^\infty(\mathbb{R})$ .

*Osservazione 3.2.3.*  $L_{T,W}$  è stata qui definita considerando lo spazio delle fasi in dimensioni  $\mathbb{R}^2$ , ma si può ovviamente generalizzare a più dimensioni.

Daubechies, nel proporre un nuovo metodo di localizzazione riparte dagli stati coerenti, in particolar modo dalla loro proprietà più importante: la risoluzione dell'identità. Tale proprietà può essere riscritta solo per un sottospazio  $S$  dello spazio delle fasi  $\mathbb{R} \times \mathbb{R}$ . Per fare ciò risulta necessario restringere  $f$  proiettandolo sul solo sottospazio  $S$ . Utilizziamo a tal fine l'operatore  $P_S$ :

$$P_S f = \frac{1}{2\pi} \int_{p \in S} \int_{q \in S} \langle f, g_0^{(q,p)} \rangle g_0^{(q,p)} dq dp,$$

con:

- $g_0^{(q,p)}$  stato coerente canonico;
- $S \subset \mathbb{R} \times \mathbb{R}$  misurabile;
- $P_S$  positivo e limitato.

Da notare come, procedendo in questo modo,  $S$  possa assumere qualsiasi forma, svincolandosi dalla rigidità di  $[-T, T] \times [-W, W]$  tipica dell'utilizzo di  $L_{T,W}$ . Ancora più importante è che tale nuova costruzione gode della seguente proprietà:

**Lemma 3.2.1.** Sia  $\varepsilon$  una costante tale che  $0 < \varepsilon < 1$ .

Sia  $\text{dist}((p, q), S)$  la distanza Euclidea tra il punto  $(p, q)$  e il sottospazio  $S$ , ossia:

$$\text{dist}((p, q), S)^2 = \inf_{p', q' \in S} |(p - p')^2 + (q - q')^2|.$$

Si può allora dimostrare che:

$$\left| \langle g_0^{(q,p)}, P_S f \rangle \right| \leq \varepsilon^{-1/2} \|f\| \exp \left[ -\frac{1-\varepsilon}{4} \text{dist}((p, q), S)^2 \right].$$

*Dimostrazione.* Ricordando che:

$$g^{(q,p)}(x) = e^{ipx} g(x - q)$$

e

$$g_0(x) = \pi^{-1/4} \exp(-x^2/2),$$

abbiamo:

$$\begin{aligned} \langle g_0^{(q',p')}, g_0^{(q,p)} \rangle &= \int_{\mathbb{R}} \overline{e^{ip'x} \pi^{-1/4} e^{-(x-q')^2/2}} e^{ip'x} \pi^{-1/4} e^{-(x-q)^2/2} dx \\ &= \exp \left[ \frac{1}{2} (p' - p)(q' - q) - \frac{1}{4} (p - p')^2 - \frac{1}{4} (q - q')^2 \right]. \end{aligned}$$

Proviamo quindi a calcolare il prodotto di nostro interesse:

$$\left| \langle g_0^{(q,p)}, P_S f \rangle \right| \leq (2\pi)^{-1} \int_S \left| \langle g_0^{(q,p)}, g_0^{(q',p')} \rangle \langle g_0^{(q',p')} f \rangle \right| dq' dp'.$$

Sommando e sottraendo al secondo membro della disequazione una stessa quantità troviamo:

$$\begin{aligned} \left| \langle g_0^{(q,p)}, P_S f \rangle \right| &\leq (2\pi)^{-1} \exp \left[ -\frac{1-\varepsilon}{4} \inf_{(p', q' \in S)} ((p - p')^2 + (q - q')^2) \right] \\ &\cdot \int_S \exp \left[ -\frac{\varepsilon}{4} ((p - p')^2 + (q - q')^2) \right] \left| \langle g_0^{(q',p')} f \rangle \right| dq' dp'. \end{aligned}$$

Usando la disuguaglianza di Cauchy-Schwarz:

$$\left| \langle g_0^{(q,p)}, P_S f \rangle \right| \leq (2\pi)^{-1/2} \varepsilon^{-1/2} \exp \left[ -\frac{1-\varepsilon}{4} \text{dist}((p,q), S)^2 \right] \cdot \left[ \int_S \left| \langle g_0^{(q',p')}, f \rangle \right|^2 \right]^{\frac{1}{2}} dq' dp'.$$

La conclusione segue naturalmente usando la risoluzione dell'identità:

$$\left| \langle g_0^{(q,p)}, P_S f \rangle \right| \leq \varepsilon^{-1/2} \exp \left[ -\frac{1-\varepsilon}{4} \text{dist}((p,q), S)^2 \right] \|f\|.$$

□

La proprietà appena dimostrata di  $P_S f$  è molto importante perché ci mostra come, all'aumentare della distanza da  $S$ ,  $P_S f$  decade esponenzialmente. In altre parole, la funzione  $P_S f$  nello spazio delle fasi ha delle code che decadono velocemente lontano da  $S$ .

Si potrebbe obiettare sull'importanza di tale risultato notando come l'utilizzo di  $L_{T,W}$  riesca addirittura ad annullare le code. Infatti:

•

$$L_{T,W}^* L_{T,W} = P_W Q_T P_W$$

elimina la coda in frequenza;

•

$$L_{T,W} L_{T,W}^* = Q_T P_W Q_T$$

annulla la coda nel tempo;

ma entrambe hanno coda a decadimento lento nell'altra direzione.

$P_S$  invece mantiene le code in ambedue le direzioni, ma il decadimento di queste ultime è veloce sia nel tempo che in frequenza. In più, grazie alla simmetria di cui godono, si può cercare una strategia che le ottimizzi entrambe.

Questa differenza tra  $L_{T,W}$  e  $P_S$  può essere generalizzata alla comparazione tra una qualsiasi funzione che, come  $L_{T,W}$ , operi un taglio netto sul piano di fase con una qualsiasi funzione che, come  $P_S$ , usi invece uno peso.

Le funzioni simili a  $P_S$  nell'uso del peso possono essere così generalizzate: data una funzione peso  $F : \mathbb{R} \times \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{C}$ , poniamo

$$P_F f = (2\pi)^{-1} \int_{\mathbb{R}^2} F(q, p) \langle f, g_0^{(q,p)} \rangle g_0^{(q,p)} dpdq.$$

*Osservazione 3.2.4.* Se  $F$  è positiva e limitata allora lo sarà anche  $P_F$ .

*Osservazione 3.2.5.*  $P_S$  e  $P_F$  sono di classe traccia, ossia:

- il loro spettro è discreto;
- i loro autovalori sono finiti;

se, rispettivamente,  $S$  è limitata o  $F$  è in  $L^1(\mathbb{R} \times \mathbb{R})$ .

Prendendo come funzione peso  $F = \chi_S$ , ovvero

$$F_S(p, q) = \begin{cases} 1 & ((q, p) \in S) \\ 0 & ((q, p) \notin S), \end{cases}$$

si ha  $P_F = P_S$ . In questo caso, mettendo insieme le due osservazioni precedenti e notando come  $F_S$  è sia positiva che integrabile, si può dire che  $P_S$  è sia una funzione positiva che un operatore di classe traccia. Ciò permette di rappresentare qualsiasi funzione  $f$  concentrata nel sottospazio  $S$ , ossia tale che

$$f \approx P_S f,$$

come combinazione lineare di un numero finito di autovalori di  $P_S$ , a meno di un errore  $\varepsilon$ .

*Osservazione 3.2.6.* Se prendiamo una base ortonormale di  $L^2(\mathbb{R})$ , ad esempio  $\{f_e\}$ , allora:

$$\begin{aligned} \sum_e \langle f_e, P_F f_e \rangle &= (2\pi)^{-1} \int_{\mathbb{R}^2} F(q, p) dqdp \int_{\mathbb{R}} |g^{p,q}(x)|^2 dx \\ &= (2\pi)^{-1} \int_{\mathbb{R}^2} F(q, p) dqdp. \end{aligned}$$

Le  $P_S$  e  $P_F$  così definite non sono affatto facili da determinare. Per farlo più agevolmente andiamo a definire un caso particolare dove tale definizione risulta più semplice. Nello specifico, restringiamo il nostro discorso a tutte quelle  $F(q, p)$  che:

1. determinano un sottospazio dello spazio tempo-frequenza  $S$ ;
2. dipendono dalla variabile radiale  $r = \sqrt{p^2 + q^2}$ , ossia:

$$F(q, p) = \mathbb{F}(r^2).$$

D'ora in avanti, per rendere il più generici possibili gli importanti risultati che otterremo, ci muoveremo su uno spazio delle fasi in dimensione  $\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n$ , lasciando il caso particolare fino ad ora studiato, con lo spazio delle fasi in dimensione  $\mathbb{R}^1 \times \mathbb{R}^1$ , a un approfondimento successivo.

Per la simmetria sferica di  $F$ , quindi, la funzione peso dovrà dipendere da  $n$  variabili:  $r_j^2 = p_j^2 + q_j^2$ , con  $j = 1, \dots, n$ , così che:

$$F(q, p) = \mathbb{F}(r_1^2 \dots r_n^2).$$

**Teorema 9.** Data una  $F$  avente le precedenti proprietà possiamo dire che:

1. le autofunzioni di  $P_F$  sono funzioni di Hermite  $n$ -dimensionali tali che:

$$H_{[k]}(x) = \prod_{j=1}^n H_{k_j}(x_j),$$

con

$$[k] = (k_1, \dots, k_n) \in \mathbb{N}^n$$

e

$$H_l(t) = \pi^{-1/4} (2^l l!)^{-1/2} \left(t - \frac{d}{dt}\right)^l e^{-\frac{t^2}{2}};$$

2. gli autovettori corrispondenti

$$P_F H_{[k]} = \lambda_{[k]} H_{[k]},$$

sono:

$$\lambda_{[k]} = \left( \prod_{j=1}^n k_j! \right)^{-1} \int_0^{+\infty} ds_1 \dots \int_0^{+\infty} ds_n$$

$$\mathbb{F}(2s_1, \dots, 2s_n) \left( \prod_{j=1}^n s_j^{k_j} \right) \exp \left( - \sum_{j=1}^n s_j \right).$$

Prima di procedere con la dimostrazione del teorema ricordiamo come si definiscono le **funzioni di Hermite**.

Famose in molti campi, a partire dalla fisica quantistica, dove rappresentano le autofunzioni dell'oscillatore armonico quantistico, le funzioni di Hermite possono essere calcolate tramite la ricorsione di tre termini dipendenti da due valori iniziali:

$$\begin{aligned} H_0(t) &= \pi^{-1/4} \exp\left(-\frac{1}{2}t^2\right); \\ H_1(t) &= \pi^{-1/4} \sqrt{2}t \exp\left(-\frac{1}{2}t^2\right); \\ H_{k+1}(t) &= \sqrt{\frac{2}{k+1}}tH_k(t) - \sqrt{\frac{k}{k+1}}H_{k-1}(t). \end{aligned}$$

Sviluppando questa ricorsione avremo:

$$\begin{aligned} H_0 &= \pi^{-1/4} \exp\left(-\frac{1}{2}t^2\right); \\ H_1 &= \sqrt{2}\pi^{-1/4}t \exp\left(-\frac{1}{2}t^2\right); \\ H_2 &= \left[\sqrt{2}t^2 - \frac{1}{\sqrt{2}}\right] \pi^{-1/4} \exp\left(-\frac{1}{2}t^2\right); \\ H_3 &= \left[\sqrt{\frac{4}{3}}t^3 - \sqrt{3}t\right] \pi^{-1/4} \exp\left(-\frac{1}{2}t^2\right); \\ H_4 &= \left[\sqrt{\frac{2}{3}}t^4 - \sqrt{6}t^2 + \frac{\sqrt{6}}{4}\right] \pi^{-1/4} \exp\left(-\frac{1}{2}t^2\right); \\ H_5 &= \left[\frac{2}{15}\sqrt{15}t^5 - \frac{2}{3}\sqrt{15}t^3 + \frac{\sqrt{15}}{2}t\right] \pi^{-1/4} \exp\left(-\frac{1}{2}t^2\right); \\ &\text{etc...} \end{aligned}$$

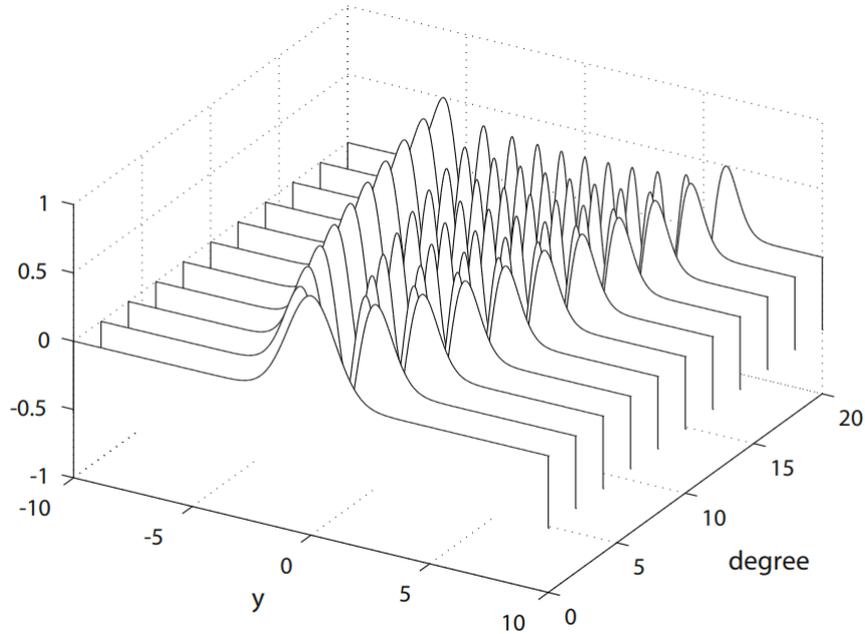


Figura 3.3. Le funzioni  $H_{degree}(y)$ .

Se normalizzate le funzioni  $H_n$  godono della seguente proprietà di ortogonalità:

$$\int_{-\infty}^{+\infty} H_n(t)H_m(t)dt = \delta_{m,n},$$

dove  $\delta_{m,n}$  è la  $\delta$  di Kronecker equivalente a 1 qualora  $m = n$  e nulla in tutti gli altri casi.

*Dimostrazione.* Perché quanto enunciato dal problema sia vero è necessario che:

$$\langle H_{[k]}, P_F H_{[k']} \rangle = \lambda_k \prod_{j=1}^n \delta_{k_j k'_j},$$

dove  $\delta_{k_j k'_j}$  è la delta di Kronecker appena definita.

Partiamo col calcolare:

$$\langle H_{[k]}, g_0^{(q,p)} \rangle,$$

che, usando le funzioni generatrici di Hermite e sostituendo  $t$  con  $r_1^2, \dots, r_n^2$ , risulta equivalere a:

$$\langle H_{[k]}, g_0^{(q,p)} \rangle = \left[ \prod_{j=1}^n (2^{k_j} k_j!) \right]^{-1/2} e^{-(r_1^2 + \dots + r_n^2)/4} \prod_{j=1}^n (q_j - ip_j)^{k_j}.$$

Se definiamo  $q_j$  e  $p_j$  rispettivamente come:

$$\begin{aligned} q_j &= r_j \cos \theta_j, \\ p_j &= r_j \sin \theta_j, \end{aligned}$$

con  $\theta_j$  angolo opportunamente fissato, quanto ricavato equivarrà, applicando la formula di Eulero, a:

$$\langle H_{[k]}, g_0^{(q,p)} \rangle = \left[ \prod_{j=1}^n (2^{k_j} k_j!) \right]^{-1/2} e^{-(r_1^2 + \dots + r_n^2)/4} \prod_{j=1}^n (r_j^{k_j} e^{-ik_j \theta_j}).$$

Tornando al calcolo di nostro interesse:

$$\langle H_{[k]}, P_F H_{[k']} \rangle,$$

dal momento che  $F$  dipende solo da  $r_1^2, \dots, r_n^2$  risulta facilmente integrabile ottenendo:

$$\begin{aligned} \langle H_{[k]}, P_F H_{[k']} \rangle &= \left[ \prod_{j=1}^n \delta_{k_j} \delta_{k'_j} (2^{k_j} k_j!)^{-1} \right] \\ &\int_0^{+\infty} dr_1 r_1 \dots \int_0^{+\infty} dr_n r_n e^{-(r_1^2 + \dots + r_n^2)/2} \\ &\mathbb{F}(r_1^2, \dots, r_n^2) \prod_{j=1}^n (r_j^{2k_j}). \end{aligned}$$

Questo risultato confrontato con la definizione di  $\lambda_{[k]}$  data dal teorema verifica che:

$$\langle H_{[k]}, P_k H_{[k']} \rangle = \lambda_{[k]} \prod_{j=1}^n \delta_{k_j} \delta_{k'_j}.$$

□

Il fatto che le autofunzioni di  $P_F$  sono funzioni di Hermite proprio come le autofunzioni dell'oscillatore armonico quantistico non è affatto un caso. Per spiegare al meglio questo legame tra operatore di localizzazione  $P_F$  e oscillatore armonico ci soffermiamo sul caso unidimensionale (per generalizzare il discorso a  $n$  dimensioni saranno necessari ragionamenti simili).

Il ritratto di fase di un oscillatore Hamiltoniano studiato nella meccanica classica figura come una serie di cerchi. Per vederlo al meglio occorre richiamare i concetti base riguardanti Lagrangiane e Hamiltoniane.

Definita la posizione con le coordinate:

$$q = (q_1, \dots, q_n) \in \mathbb{R}^n,$$

e la velocità con:

$$\dot{q} = (\dot{q}_1, \dots, \dot{q}_n),$$

si potrà descrivere il sistema dinamico con la sola Lagrangiana:

$$\mathbb{L} = f(q, \dot{q}, t),$$

Essa equivale alla differenza tra l'energia cinetica  $T$  e l'energia potenziale  $U$  del sistema:

$$\mathbb{L} = T - U,$$

e, in assenza di vincoli, all'equazione di Newton  $F = m\ddot{q}$ .

Noto ciò possiamo scrivere le equazioni del moto di nostro interesse come:

$$\frac{d}{dt} \left( \frac{\partial \mathbb{L}}{\partial \dot{q}} \right) - \frac{\partial \mathbb{L}}{\partial q} = 0.$$

Tale equazione è del secondo ordine e Hamilton la spezzò in due equazioni di primo ordine proponendo il seguente cambio di coordinate:

$$p_j = \frac{\partial \mathbb{L}}{\partial \dot{q}_j}.$$

$p_j$  viene detto momento lineare coniugato alle coordinate e, in coordinate cartesiane, equivale alla quantità di moto  $p = m\dot{q}$ . Lo spazio coordinata-momento è

proprio il corrispettivo fisico del nostro spazio delle fasi.

L'Hamiltoniana si presenta come:

$$\mathbb{H}(q, p, t) = p\dot{q} - \mathbb{L}(q, \dot{q}, t),$$

che, in assenza di vincoli dipendenti dal tempo, equivale all'energia totale del sistema, ossia alla somma dell'energia cinetica e potenziale:

$$\mathbb{H} = T + U, \text{ con } T = \frac{1}{2}m\dot{q}^2 \text{ oppure } T = \frac{p^2}{2m}.$$

In particolare la Lagrangiana dell'oscillatore armonico è:

$$\mathbb{L}(q, \dot{q}, t) = \frac{1}{2}m\dot{q}^2 - \frac{1}{2}kq^2,$$

con  $m, k > 0$ . Notando che  $U = \frac{1}{2}kq^2$ , si ha come Hamiltoniana:

$$\mathbb{H}(q, p, t) = \frac{p^2}{2m} + \frac{1}{2}kq^2.$$

Il sistema ha un solo grado di libertà, quindi in questo caso sia  $q$  che  $p$  sono vettori unidimensionali. Possiamo notare come:

$$\begin{cases} \dot{q} = \frac{\partial \mathbb{H}}{\partial p} \\ \dot{p} = -\frac{\partial \mathbb{H}}{\partial q}, \end{cases}$$

da cui:

$$\begin{cases} \dot{q} = \frac{p}{m} \\ \dot{p} = -kq. \end{cases}$$

Questo è un particolare caso del generico sistema:

$$\begin{cases} \frac{dx}{dt} = ax + by \\ \frac{dy}{dt} = cx + dy, \end{cases}$$

dove:

$$x \rightarrow q;$$

$$y \rightarrow p;$$

$$a \rightarrow 0;$$

$$b \rightarrow \frac{1}{m};$$

$$c \rightarrow k;$$

$$d \rightarrow 0.$$

Da cui la matrice:

$$\begin{bmatrix} 0 & 1/m \\ -k & 0 \end{bmatrix}$$

con equazione caratteristica:

$$\lambda^2 + \left(\frac{k}{m}\right)^2 = 0.$$

Rinominando  $\frac{k}{m} = \omega$ , gli autovalori risultano:

$$\lambda = \pm i\omega.$$

Il sistema generico prima descritto ha come soluzione:

$$x = be^{\sigma t} [C_1 \sin(\beta t) + C_2 \cos(\beta t)]$$

$$y = e^{\sigma t} \{[(\sigma - a)C_1 - \beta C_2] \sin(\beta t) + [\beta C_1 + (\sigma - a)C_2] \cos(\beta t)\},$$

dove:

- $C_1$  e  $C_2$  sono costanti arbitrarie;
- $\sigma$  è la parte reale degli autovalori della matrice, che nel nostro caso vale 0;
- $\beta$  è la parte immaginaria degli autovalori della matrice, che nel nostro caso vale  $\omega$ .

Sostituendo alla soluzione generale i valori del caso in esame otteniamo:

$$\begin{cases} q = \frac{1}{m} (C_1 \sin(\omega t) + C_2 \cos(\omega t)) \\ p = \omega (-C_2 \sin(\omega t) + C_1 \cos(\omega t)) \end{cases},$$

da cui si può notare che  $(q(t), p(t))$  sono punti di un cerchio nello spazio delle fasi al variare di  $t \in \mathbb{R}$ .

Possiamo quindi dire che la funzione

$$\psi(x, t) = e^{-ip(t)q(t)/2} g_0^{(q(t), p(t))}(x)$$

è ottenuta da una rotazione degli stati coerenti nello spazio delle fasi. In particolare, Essa si rivela essere la soluzione di:

$$i \frac{\partial}{\partial t} \psi(x, t) = \frac{1}{2} \left( -\frac{\partial^2}{\partial x^2} + x^2 - 1 \right) \psi(x, t),$$

che è l'equazione di Schrödinger che descrive l'evoluzione nel tempo dell'oscillatore armonico quantistico.

È naturale quindi che costruzioni che usano gli stati coerenti e che hanno una struttura rotazionalmente simmetrica portino ad operatori invarianti rispetto alle evoluzioni nel tempo generate da un oscillatore armonico Hamiltoniano. Nel nostro caso ciò è assicurato dalla scelta di  $\mathbb{F}$  fatta in modo tale che:

$$\begin{aligned} F(q, p) &= \mathbb{F}(r_1^2, \dots, r_n^2), \\ \text{con } r_j^2 &= p_j^2 + q_j^2, \quad j = 1, \dots, n. \end{aligned}$$

In altre parole, possiamo dire che  $P_F$  e  $\frac{1}{2}(-(\partial^2/\partial x^2) + x^2 - 1)$  commutano.

Quando due operatori commutano hanno una base di autovettori in comune: in questo caso le funzioni di Hermite.

### 3.3 Alcune generalizzazioni sulla localizzazione con approccio geometrico di Daubechies

Abbiamo visto come sia fondamentale che  $F$  goda di simmetria sferica. Non è però necessario che tale simmetria sia centrata nell'origine, come dato per scontato

fino ad ora. Possiamo, ad esempio, scegliere  $F$  invariante rispetto alle rotazioni nello spazio delle fasi attorno ad un punto qualsiasi  $(p^0, q^0)$ . In questo caso avremo:

$$F(q, p) = \mathbb{F} \left( (p_1 - p_1^0)^2 + (q_1 - q_1^0)^2, \dots, (p_n - p_n^0)^2 + (q_n - q_n^0)^2 \right).$$

Gli autovalori  $\lambda_k$  di  $P_F$  in questa nuova situazione risulteranno totalmente invariati rispetto a quanto riportato nella sezione precedente. I  $\lambda_k$  risultano, infatti, totalmente indipendenti da  $p^0, q^0$ .

Per quanto riguarda invece le funzioni di Hermite, ossia gli autovettori, esse saranno le stesse ma traslate rispettivamente di  $q^0$  e  $p^0$  nel tempo e nello spazio:

$$H_{[k]}^{p^0, q^0}(x) = e^{ip_0 x} H_{[k]}(x - q^0).$$

Fino ad ora ci siamo soffermati su insiemi  $S$  a simmetria sferica, ma passare a  $S$  ellittici è altrettanto semplice, basta utilizzare un coefficiente di dilatazione. Nel caso unidimensionale con lo spazio delle fasi  $\mathbb{R}^1 \times \mathbb{R}^1$  avremo quindi:

$$S_{\alpha, R} = \{(q, p) \in \mathbb{R}^2 : \alpha^2 q^2 + \alpha^{-2} p^2 \leq R^2\} \text{ con } \alpha \neq 0.$$

La dilatazione (o compressione) dovrà però essere applicata anche agli stati coerenti canonici. Per far ciò ricordiamo, come già spiegato precedentemente, che un operatore di dilatazione  $B_\alpha$  agisce nel seguente modo:

$$(B_\alpha f)(x) = \sqrt{\alpha} f(\alpha x).$$

Avremo quindi:

$$g^{(0, \alpha)}(x) = (B_\alpha g^0)(x) = \sqrt{\alpha} \pi^{-1/4} \exp\left(-\alpha^2 \frac{x^2}{2}\right)$$

e

$$g_{p, q}^{(0, \alpha)}(x) = e^{ipx} g^{(0, \alpha)}(x - q).$$

Da cui:

$$\begin{aligned}
 g_{p,q}^{(0,\alpha)}(x) &= e^{ipx} \sqrt{\alpha} \pi^{-1/4} \exp\left(-\alpha^2 (x-q)^2 / 2\right) = \\
 &= e^{ipx} \sqrt{\alpha} \pi^{-1/4} \exp\left(\frac{-\alpha^2 x^2 - \alpha^2 q^2 + 2\alpha^2 xq}{2}\right) \\
 &= \exp\left[i\frac{p}{\alpha} \alpha x\right] \sqrt{\alpha} \pi^{1/4} \exp\left((\alpha x - \alpha q)^2 / 2\right) = \\
 &= B_\alpha g_{p/\alpha, \alpha q}^0.
 \end{aligned}$$

Consapevoli di ciò, possiamo ridefinire l'operatore di localizzazione su  $S_{\alpha,R}$  come:

$$P_R^\alpha f = \frac{1}{2\pi} \int_{S_{\alpha,R}} \langle f, B_\alpha g_{p/\alpha, \alpha q}^0 \rangle B_\alpha g_{p/\alpha, \alpha q}^0 dq dp.$$

Così facendo, le code di  $P_R^\alpha$  perdono isotropia, l'indipendenza dalla direzione. Bisogna quindi agire con un operatore di dilatazione inverso:

$$\begin{aligned}
 B_\alpha^{-1} P_R^\alpha B_\alpha f &= \frac{1}{2\pi} \int_{S_{\alpha,R}} \langle f, g_{p/\alpha, \alpha q}^0 \rangle g_{p/\alpha, \alpha q}^0 dq dp \\
 &= \frac{1}{2\pi} \int_{\{(q')^2 + (p')^2 \leq R^2\}} \langle f, g_{p', q'}^0 \rangle g_{p', q'}^0 \\
 &= P_R f.
 \end{aligned}$$

Questo comporta che gli autovalori di  $P_R^\alpha$  saranno gli stessi trovati per  $P_R$ , mentre gli autovettori saranno le funzioni di Hermite inversamente dilatate:

$$\begin{aligned}
 H_K^\alpha(x) &= (B_\alpha^{-1} H_K)(x) = \\
 &= \frac{1}{\sqrt{\alpha}} H_K\left(\frac{x}{\alpha}\right).
 \end{aligned}$$

### 3.4 Alcune proprietà degli operatori di localizzazione

In questa sezione andremo in parte ad approfondire, in parte a dimostrare seguendo percorsi diversi, quanto già visto nelle sezioni precedenti. Prenderemo

qui in considerazione il solo caso unidimensionale, con lo spazio delle fasi di dimensione  $\mathbb{R}^1 \times \mathbb{R}^1$ .

Ripartiamo dall'operatore di localizzazione  $P_S$ , avente come  $S$  il disco di raggio  $R$ . Andiamo ad approfondire le caratteristiche delle funzioni collegate da tale operatore di localizzazione. Per aiutarci nei calcoli successivi, invece di inserire la scrittura sintetica degli stati coerenti canonici  $g_0^{(q,p)}$  utilizziamo la rappresentazione di Weyl-Heisenberg. Quest'ultimo è un ottimo strumento per ottenere traslazioni nello spazio di fase. Si presenta sempre come combinazione di due operatori. Di solito l'operatore di posizione nel tempo agisce moltiplicando la funzione, mentre quello di posizione in frequenza si esprime tramite una trasformata di Fourier:

$$Qf(t) = q \cdot f(t),$$

$$Pf(t) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int e^{-i\omega t} f(t) dt.$$

Nel nostro caso particolare, invece, la rappresentazione di Weyl-Heisenberg sarà combinazione di:

$$Qf(t) = f(t - q),$$

$$Pf(t) = e^{ipt} f(t).$$

Porremo quindi:

$$g_0^{(q,p)} = [W(q,p)g^0](x) := e^{ipx} g^0(x - q),$$

con  $g_0$  funzione Gaussiana.  $P_R f$  è quindi dato da

$$P_R f = \frac{1}{2\pi} \int_{\{q^2+p^2 < R^2\}} \langle f, W(q,p)g^0 \rangle W(q,p)g^0 dq dp,$$

dove:

$$\langle f, W(q,p)g^0 \rangle = \pi^{-1/4} \int f(x) \exp \left[ -\frac{1}{2}x^2 - \frac{1}{2}q^2 + xq - ipx + \frac{i}{2}pq \right] dx.$$

Guardando il termine  $\frac{i}{2}pq$  come il doppio prodotto del quadrato di binomio:

$$-\frac{1}{4}(q - ip)^2,$$

abbiamo:

$$\begin{aligned}
 \langle f, W(q, p)g \rangle &= \\
 &= \pi^{-1/4} \int f(x) e^{-(1/2)x^2} e^{x(q-ip)} e^{-(1/4)(q-ip)^2} e^{-(1/4)q^2 - (1/4)p^2} dx = \\
 &= \pi^{-1/4} \int f(x) \exp \left[ -\frac{1}{2}(x-q)^2 - ipx + \frac{i}{2}pq \right] dx.
 \end{aligned}$$

Il risultato del nostro prodotto è quindi una funzione analitica in  $q - ip$ , o equivalentemente in  $-i(p - iq)$ , moltiplicata per il fattore:

$$e^{-1/4|(q,p)|^2},$$

dove  $(q, p) \in \mathbb{R}^2$  e  $|(q, p)|^2 = q^2 + p^2$ .

Ci stiamo quindi muovendo dalla funzione  $f \in L^2$  verso funzioni analitiche crescenti in entrambe le direzioni, la cui crescita, però, è abbastanza controllata da tornare ad essere integrabili al quadrato già solo grazie alla moltiplicazione per  $e^{-1/4|(q,p)|^2}$ . Chiameremo questo spazio di arrivo spazio di Bargmann.

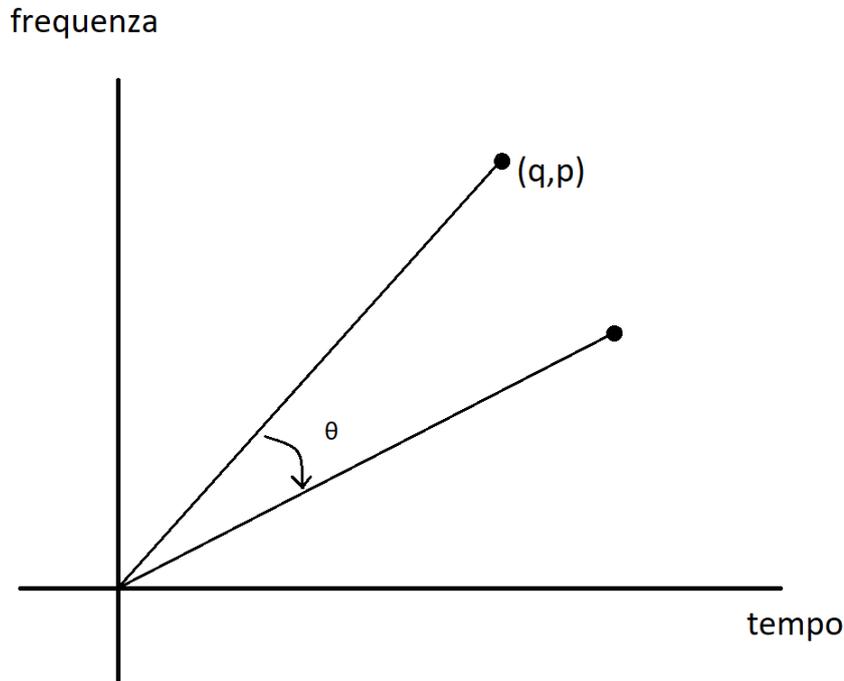


Figura 3.4. Esempio di rotazione di un angolo  $\theta$  nello spazio delle fasi

Altro elemento centrale nella costruzione dell'operatore di localizzazione di Daubechies è la rotazione e in particolare il suo rapporto con la gaussiana degli stati coerenti canonici e con le funzioni di Hermite. Rapporto quest'ultimo che nelle sezioni precedenti abbiamo illustrato con riferimento all'oscillatore armonico, ma che vogliamo qui dimostrare passo a passo, tramite l'introduzione di un nuovo operatore  $U_\theta$ .

La rotazione nello spazio delle fasi di un angolo  $\theta$  può essere definita con l'operatore:

$$R_\theta(q, p) = (\cos \theta q + \sin \theta p, -\sin \theta q + \cos \theta p),$$

che equivale a:

$$R_\theta \begin{pmatrix} q \\ p \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos \theta & \sin \theta \\ -\sin \theta & \cos \theta \end{pmatrix} \begin{pmatrix} q \\ p \end{pmatrix}.$$

Se nella ricostruzione che  $P_R$  fa di  $f$ , sul disco di raggio  $R$ , invece che fare comparire due volte lo stesso stato coerente canonico utilizziamo una volta  $W(q, p)$  e una volta la sua rotazione  $W(R_\theta(q, p))g^0$  otterremo un nuovo operatore:

$$U_\theta f := \int_{\mathbb{R}^2} \langle f, W(q, p)g^0 \rangle W(R_\theta(q, p))g^0 \frac{dpdq}{2\pi}.$$

$U_\theta$  è un operatore lineare e si rivelerà molto facile da calcolare, in particolare possiamo dimostrare che:

$$U_\theta W(q, p)g^0 = W(R_\theta(q, p))g^0.$$

*Dimostrazione.* Ricordando le proprietà del prodotto interno possiamo affermare che:

$$\langle W(q_1, p_1)g^0, W(q_2, p_2)g^0 \rangle = \langle g^0, W(-q_1, -p_1)W(q_2, p_2) \rangle,$$

dove abbiamo usato l'aggiunta di  $W(q_1, p_1)$  che è proprio  $W(-q_1, -p_1)$ .

Quindi, per quanto visto prima:

$$\begin{aligned} & \langle W(q_1, p_1)g^0, W(q_2, p_2)g^0 \rangle \\ &= \langle g^0, \exp\left[\frac{1}{2}(-q_1 p_2 + q_2 p_1)\right] W(-q_1 + q_2, -p_1 + p_2)g^0 \rangle. \end{aligned}$$

Estraendo il coniugato si ottiene:

$$\langle W(q_1, p_1)g^0, W(q_2, p_2)g^0 \rangle = e^{(i/2)(q_1 p_2 - q_2 p_1)} \langle g^0, W(q_2 - q_1, p_2 - p_1)g^0 \rangle.$$

Concentriamoci ora sul prodotto interno appena trovato. In generale:

$$\begin{aligned} \langle g^0, W(q, p)g \rangle &= \pi^{-1/4} \int g(x) \exp\left[-\frac{1}{2}x^2 - \frac{1}{2}q^2 + xq - ipx + \frac{i}{2}pq\right] dx \\ &= \pi^{-1/2} \int \exp\left[-x^2 - \frac{1}{2}q^2 + xq - ipx + \frac{1}{2}pq\right] dx. \end{aligned}$$

Raccogliendo  $ip$  dagli ultimi due termini dell'esponenziale e accorgendoci che i primi tre termini possono essere riscritti come

$$-x^2 - \frac{1}{2}q^2 + xq = -\left(x - \frac{q}{2}\right)^2 - \frac{1}{4}q^2,$$

avremo:

$$\langle g^0, W(q, p)g^0 \rangle = \pi^{-1/2} \int \exp \left[ - \left( x - \frac{q}{2} \right)^2 - \frac{1}{4}q^2 - ipx \left( x - \frac{q}{2} \right) \right] dx.$$

Il risultato è una trasformata di Fourier della Gaussiana, a cui manca il fattore  $\frac{1}{2}$  quindi:

$$\langle g^0, W(q, p)g^0 \rangle = \exp \left[ -\frac{q^2}{4} - \frac{p^2}{4} \right].$$

Inseriamo quanto ora ricavato nel calcolo di nostro interesse:

$$\begin{aligned} & \langle W(q_1, p_1)g^0, W(q_2, p_2)g^0 \rangle \\ &= e^{(i/2)(q_1 p_2 - q_2 p_1)} \langle g^0, W(q_2 - q_1, p_2 - p_1)g^0 \rangle = \\ &= e^{(i/2)(q_1 p_2 - q_2 p_1)} \exp \left[ -\frac{1}{4} |(q_2 - q_1, p_2 - p_1)|^2 \right]. \end{aligned}$$

Data la matrice simplettica

$$\begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{bmatrix},$$

tale che

$$J \begin{pmatrix} q \\ p \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} q \\ p \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} p \\ -q \end{pmatrix},$$

la formula precedente assume la forma:

$$\begin{aligned} & \langle W(q_1, p_1)g^0, W(q_2, p_2)g^0 \rangle = \\ &= \exp \left[ \frac{i}{2} (q_1, p_1) J (q_2, p_2) - \frac{1}{4} |(q_1 - q_2, p_1 - p_2)|^2 \right]. \end{aligned}$$

Alla luce di ciò, ricalcoliamo  $U_\theta$ :

$$U_\theta W(q', p')g^0 = \frac{1}{2\pi} \int_{\mathbb{R}^2} \langle W(q', p')g^0, W(q, p)g^0 \rangle W(R_\theta(q, p))g^0 dqdp.$$

Possiamo cambiare la variabile di integrazione che ora sarà  $R_\theta(q, p)$ , e i  $(p, q)$  originali saranno quindi ottenuti tramite una rotazione inversa:

$$\begin{aligned} & \frac{1}{2\pi} \int_{\mathbb{R}^2} \langle W(q', p')g^0, W(R_{-\theta}(q, p))g^0 \rangle W(q, p)g^0 dqdp = \\ &= \frac{1}{2\pi} \int_{\mathbb{R}^2} e^{i(q', p') J R_{-\theta}(q, p) - \frac{1}{4} |(q', p') - R_{-\theta}(p, q)|^2} W(q, p)g^0 dqdp. \end{aligned}$$

Dato che la norma euclidea è invariante rispetto alla rotazione, possiamo scrivere:

$$\begin{aligned} U_\theta W(q', p') g^0 &= \\ &= \frac{1}{2\pi} \int_{\mathbb{R}^2} \exp \left[ \frac{i}{2} (q', p') J R_{-\theta}(p, q) - \frac{1}{4} |R_\theta(q', p') - (q, p)|^2 \right]. \end{aligned}$$

Anche  $J$  è una rotazione, in particolare una rotazione di  $90^\circ$ ,  $J = R_{\pi/2}$ . Possiamo quindi invertire senza problemi l'ordine di applicazione di  $R$  e di  $J$ :

$$(q', p') J R_{-\theta}(q, p) = (q', p') R_{-\theta} J(q, p).$$

Dato che anche il prodotto scalare è invariante rispetto alla rotazione:

$$(q', p') R_{-\theta} J(q, p) = [R_\theta(q', p')] J(q, p),$$

ne concludiamo che:

$$U_\theta W(q', p') g^0 = \frac{1}{2\pi} \int_{\mathbb{R}^2} \langle W(R_\theta(q', p')) g^0, W(q, p) g^0 \rangle W(q, p) g^0 dq dp.$$

Quanto trovato non è altro che l'operatore identità. Ciò significa che, come volevasi dimostrare,

$$U_\theta W(q', p') g^0 = W(R_\theta(q', p')) g^0.$$

□

Dunque  $U_\theta$  è una rotazione nello spazio delle fasi, così come la stessa trasformata di Fourier. Infatti:

$$(W(q, p)f)^\wedge(\xi) = (W(p, -q)\hat{f})(\xi),$$

ci mostra come la trasformata di Fourier non è solo una semplice rotazione, ma una rotazione di esattamente  $90^\circ$  nello spazio tempo-frequenza.

Ci sono funzioni che hanno un comportamento particolarmente semplice quando vengono sottoposte a tali rotazioni. Pensiamo, ad esempio, alla Gaussiana: è emerso chiaramente tra i passaggi della dimostrazione precedente come tutto ciò che otteniamo traslando  $g^0$  è una rotazione delle sue etichette.

Ma la Gaussiana non è l'unica. Anche senza prendere in considerazione quanto

già sappiamo dalla fisica è naturale pensare che anche le funzioni di Hermite abbiano un comportamento analogamente semplice. Questo perché, come visto in precedenza, la funzione  $h_0$  altro non è che una Gaussiana e tutte le altre funzioni di Hermite nascono da questa tramite la già citata trasformazione:

$$h_n = \left( x - \frac{d}{dx} \right)^n g^0,$$

al netto di un fattore di normalizzazione, con  $\left( x - \frac{d}{dx} \right)^n$  operatore armonico. Quindi:

$$\begin{aligned} \langle h_n, W(q, p) g^0 \rangle &= \int h_n(x) \exp \left[ -\frac{1}{2}(x-q)^2 - ipx + \frac{1}{2}pq \right] dx = \\ &= N_n \int \left( x - \frac{d}{dx} \right)^n g^0(x) \exp \left[ -\frac{1}{2}(x-q)^2 - ipx + \frac{i}{2}pq \right] dx, \end{aligned}$$

dove  $N_n$  è il fattore di normalizzazione.

Usando l'integrazione per parti otteniamo:

$$\begin{aligned} \langle h_n, W(q, p) g^0 \rangle &= \\ &= N_n \int g^0(x) \left\{ \left( x + \frac{d}{dx} \right)^n \exp \left[ -\frac{1}{2}(x-q)^2 - ipx + \frac{i}{2}pq \right] \right\} dx. \end{aligned}$$

Dato che:

$$\frac{d}{dx} \left[ -\frac{1}{2}(x-q)^2 - ipx + \frac{i}{2}pq \right] = -(x-q) - ip + x = q - ip,$$

abbiamo:

$$\langle h_n, W(q, p) g^0 \rangle = N_n (q - ip)^n \exp \left[ -\frac{1}{4}(q^2 + p^2) \right].$$

Il risultato trovato appartiene sicuramente allo spazio di Bargmann definito ad inizio sezione. Infatti si tratta di un monomio moltiplicato per il già citato termine  $e^{-1/4}(q^2 + p^2)$ .

Grazie a quanto detto fino ad ora, possiamo calcolare esplicitamente  $U_\theta h_n$ . Vediamolo:

$$U_\theta h_n = \int_{\mathbb{R}^2} \langle h_n, W(R_{-\theta}(q, p)) g^0 \rangle W(q, p) g^0 \frac{dqdp}{2\pi} = \quad (3.2)$$

$$= \int_{\mathbb{R}^2} (R_\theta(q, p)_q - iR_\theta(q, p)_p)^n \exp \left[ -\frac{1}{4}(q^2 + p^2) \right] W(q, p) g^0 \frac{dqdp}{2\pi}. \quad (3.3)$$

Abbiamo qui usato l'invarianza della norma euclidea rispetto alla rotazione.

Osserviamo che:

$$(q - ip) = (q, p)(1, -i)$$

e

$$(R_\theta(q, p)) = (q, p)R_{-\theta}(1, -i).$$

Dove  $R_{-\theta}(1, -i)$  equivale a:

$$\begin{pmatrix} \cos(-\theta) & \sin(-\theta) \\ -\sin(-\theta) & \cos(-\theta) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ -i \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos(\theta) - i\sin(-\theta) \\ -\sin(-\theta) - i\cos(-\theta) \end{pmatrix}.$$

Dato che  $\cos(-\theta) = \cos(\theta)$  mentre  $\sin(-\theta) = -\sin(\theta)$ , abbiamo:

$$R_{-\theta}(1, -i) = \begin{pmatrix} \cos \theta + i \sin \theta \\ \sin \theta - i \cos \theta \end{pmatrix},$$

da cui:

$$\cos \theta + \sin \theta = \frac{e^{i\theta} + e^{-i\theta}}{2} + i \frac{e^{i\theta} - e^{-i\theta}}{2i} = \frac{2e^{i\theta}}{2} = e^{i\theta}$$

e

$$\begin{aligned} \sin \theta - i \cos \theta &= \frac{e^{i\theta} + e^{-i\theta}}{2i} - i \frac{e^{i\theta} + e^{-i\theta}}{2} = \\ &= \frac{e^{i\theta} - e^{-i\theta} - (i)^2 (e^{i\theta} + e^{-i\theta})}{2i} = \\ &= \frac{2e^{i\theta}}{2i} = \frac{e^{i\theta}}{i} \cdot \frac{i}{i} = \frac{e^{i\theta}i}{-1} = -ie^{i\theta}. \end{aligned}$$

Ne deduciamo che:

$$R_{-\theta}(1, -i) = \begin{pmatrix} \cos \theta + i \sin \theta \\ \sin \theta - i \cos \theta \end{pmatrix} = e^{i\theta} \begin{pmatrix} 1 \\ -i \end{pmatrix}.$$

Sfruttando quanto trovato, si ha:

$$U_\theta h_n = \int_{\mathbb{R}^2} e^{in\theta} \exp[(q, p)(1, -i)] \exp\left[-\frac{1}{4}(q^2 - p^2)\right] W(q, p) g^0 \frac{dqdp}{2\pi}.$$

Se torniamo sui nostri passi, alla dimostrazione di  $U_\theta$  quale semplice rotazione, appare lampante come abbiamo nuovamente trovato l'operatore identità moltiplicato per  $e^{in\theta}$ . Concludiamo perciò che:

$$U_\theta h_n = e^{in\theta} h_n.$$

Il risultato ottenuto, ossia  $U_\theta$ , è un oscillatore armonico traslato di  $\frac{1}{2}$  del suo periodo.

$U_\theta$  è dunque un operatore unitario che agisce in modo molto semplice sulle Gaussiane traslate e modulate, e che ha come autofunzioni le funzioni di Hermite.

Ora che conosciamo bene l'operatore  $U_\theta$  vediamo che rapporto ha con la costruzione di Daubechies che prima abbiamo espresso per una particolare scelta di  $S$ , equivalente ad una circonferenza di raggio  $R$  sullo spazio delle fasi:

$$\begin{aligned} P_R U_\theta f &= \int_{\{q^2+p^2 \leq R^2\}} \langle f, U_{-\theta} W(q, p) g^0 \rangle W(q, p) g^0 \frac{dqdp}{2\pi} \\ &= \int_{\{q^2+p^2 \leq R^2\}} \langle f, W(R_{-\theta}(q, p)) g^0 \rangle W(q, p) g^0 \frac{dqdp}{2\pi}. \end{aligned}$$

Grazie al fatto di aver scelto come sottospazio dello spazio delle fasi un disco, forma invariante rispetto alla rotazione, è possibile effettuare il seguente cambio di variabili:

$$\begin{aligned} P_R U_\theta f &= \int_{\{q^2+p^2 \leq R^2\}} \langle f, W(q, p) g^0 \rangle W(R_\theta(q, p)) g^0 \frac{dqdp}{2\pi} \\ &= \int_{\{q^2+p^2 \leq R^2\}} \langle f, W(q, p) g^0 \rangle U_\theta W(q, p) g^0 \frac{dqdp}{2\pi} \\ &= U_\theta P_R f, \end{aligned}$$

e vedere come gli operatori  $U_\theta$  e  $P_R$  commutano.

Ecco dimostrata, e non soltanto più intuita, la commutazione tra operatori di localizzazione e oscillatore armonico, da cui ne deriva che  $U_\theta$  e  $P_R$  hanno le stesse autofunzioni, le ormai a noi note funzioni di Hermite.

Per quanto riguarda gli autovalori, alla luce di queste nuove nozioni possiamo ricalcolarli ottenendo un risultato compatibile con quello della sezione precedente. In particolare,

$$P_R h_n = \lambda_n(R) h_n,$$

quindi,

$$\begin{aligned}\lambda_n(R) &= \langle P_R h_n, h_n \rangle \\ &= \frac{1}{2\pi} \int_{\{q^2+p^2 \leq R^2\}} |\langle h_n, W(q, p) g^0 \rangle|^2 dq dp.\end{aligned}$$

Avendo già calcolato in precedenza questo prodotto interno, sappiamo che:

$$\lambda_n(R) = \frac{1}{2\pi} \int_{\{q^2+p^2 \leq R^2\}} N_n^2 (q^2 + p^2)^n e^{-(1/2)(q^2+p^2)} dq dp.$$

Per poter integrare su dischi concentrici poniamo  $q^2 + p^2 = r$ . Con questo cambio di variabile dato che:

$$(q^2 + p^2)^n = r^n,$$

abbiamo:

$$dq dp = r^{n+1} dr.$$

Quindi:

$$\begin{aligned}\lambda_n(R) &= N_n^2 \int_0^R r^{2n+1} e^{-1/2r^2} dr \\ &= N_n^2 \int_0^{R^2/2} u^n e^{-u} du.\end{aligned}$$

Il nostro problema resta ora il fattore di normalizzazione, che non conosciamo. Sappiamo, però, che se  $R$  fosse infinito, quindi se integrassimo sull'intero piano, dovremmo ottenere 1, poiché staremmo moltiplicando  $h_n$  per sé stessa e  $P_R$  diventerebbe un operatore identità. Seguendo questo ragionamento  $N_n^2$  non è altro che 1 fratto la quantità che otterremmo integrando su tutto lo spazio, quantità equivalente a una funzione Gamma:

$$\begin{aligned}\lambda_n(R) &= \frac{1}{\Gamma(n+1)} \int_0^{R^2/2} u^n e^{-u} du = \\ &= \frac{1}{n!} \int_0^{R^2/2} u^n e^{-u} du.\end{aligned}$$

Si può notare come questo risultato altro non è che un caso particolare di quello visto nella sezione precedente, imponendo la dimensione  $\mathbb{R}^2$  allo spazio delle fasi e soffermandosi sul caso specifico di  $S$  pari a un cerchio di raggio  $R$ .

*Osservazione 3.4.1.* Fissato  $R$ , le  $\lambda_n(R)$  sono monotone decrescenti. Per  $R$  molto grandi e  $n$  piccole stiamo catturando gran parte del contenuto tempo-frequenza della funzione, quindi i  $\lambda_n(R)$  sono vicini al valore 1. Se  $n$  però risulta molto più grande di  $R^2/2$ , allora  $\lambda_n(R)$  sarà vicino al valore 0. Quindi la zona di decadimento delle  $\lambda_n(R)$  ha un'ampiezza dell'ordine di  $\mathcal{O}(R)$ .

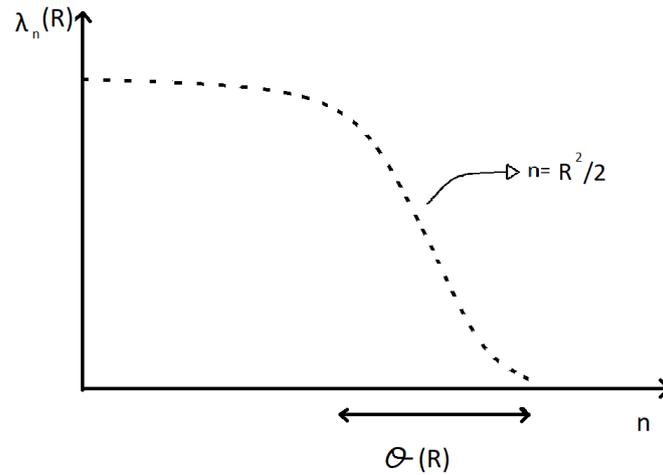


Figura 3.5. Raffigurazione del decadimento delle  $\lambda_n(R)$  all'aumentare di  $n$  in caso di localizzazione di Daubechies.

Da questa osservazione e da questo decadimento a simmetria radiale appare chiaro che gli operatori di localizzazione si comportano in maniera isotropa, cioè hanno le stesse code sia nel tempo che in frequenza. Agire su  $R$  significa migliorare il decadimento delle code in entrambe le direzioni.

Poiché è proprio  $\frac{R^2}{2}$  il punto critico oltre il quale si ha il decadimento maggiore, la traccia di  $P_R$  dovrà valere:

$$\text{Tr}P_R = \frac{R^2}{2} + \mathcal{O}(R).$$

Essa però equivale anche a:

$$\text{Tr}P_R = \sum_{m,n} \langle P_R w_{m,n}, w_{m,n} \rangle,$$

dove  $w_{m,n}$  è una base ortonormale discreta nello spazio delle fasi.

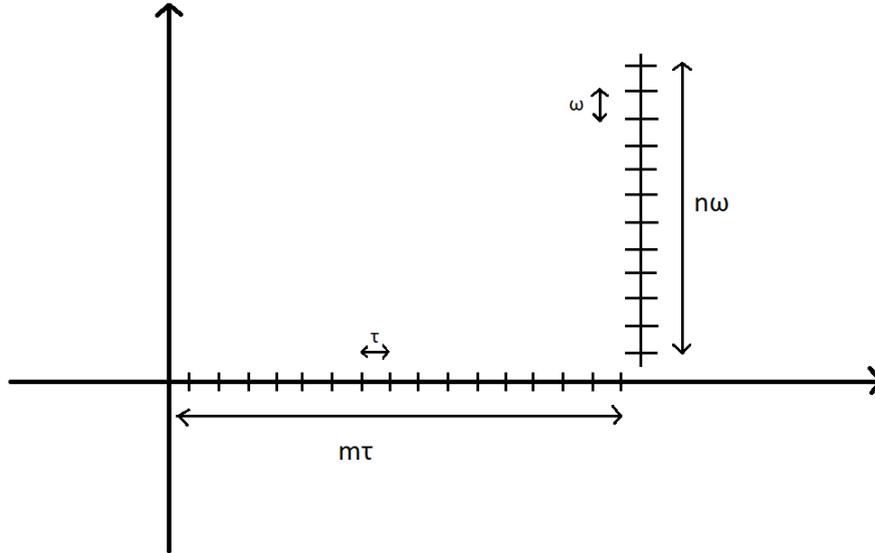


Figura 3.6. Discretizzazione dello spazio delle fasi per la costruzione di  $w_{m,n}$ .

Allora:

$$\text{Tr}P_R = \sum_{m,n} \int_{\{q^2+p^2 \leq R^2\}} |\langle w_{m,n}, W(q,p)g^0 \rangle|^2 dqdp.$$

Il risultato di tale integrare equivale al numero di "cellette" definite dalla base ortonormale discreta presenti all'interno dell'area del disco:

$$\begin{aligned} \text{Tr}P_R &= \frac{\text{Area del disco}}{\tau\omega} + \mathcal{O}(R) \\ &= \frac{\pi R^2}{\tau\omega} + \mathcal{O}(R). \end{aligned}$$

Mettendo a confronto i due risultati trovati:

$$\frac{\pi R^2}{\tau\omega} + \mathcal{O}(R) = \frac{R^2}{2} + \mathcal{O}(R),$$

vediamo come il prodotto  $\tau\omega$  deve essere pari a  $2\pi$ . Ecco ritrovato quanto già esplicitato parlando di basi ortonormali: perché queste siano tali abbiamo bisogno

che  $\tau\omega = 2\pi$ . Se non si raggiunge tale valore (quindi  $\tau\omega < 2\pi$ ) il sistema di stati coerenti è sovra-determinato, se lo si supera ( $\tau\omega > 2\pi$ ) sotto-determinato.

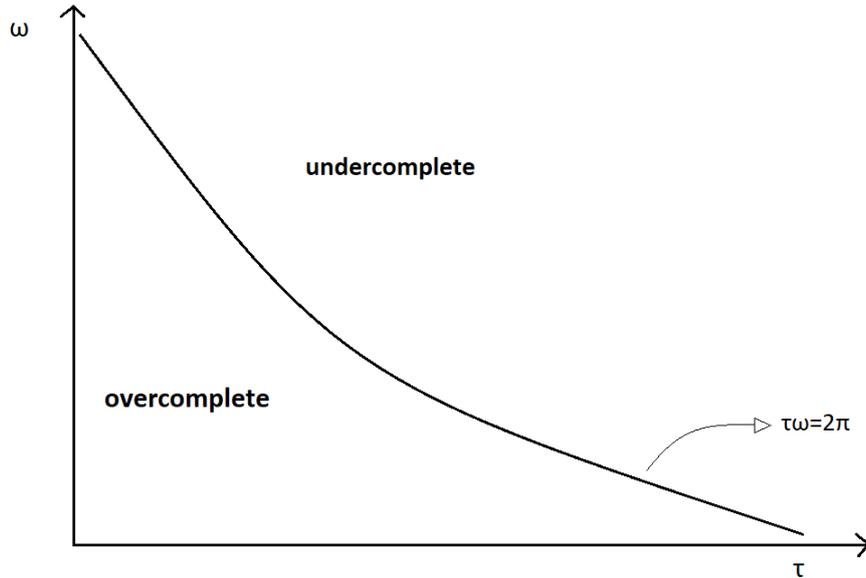


Figura 3.7. Situazioni di sotto-determinazione e sovra-determinazione al variare dei valori di  $\tau$  e  $\omega$ .

Il numero di gradi di libertà che abbiamo quando guardiamo una regione locale nello spazio tempo-frequenza è perciò pari all'area di tale regione diviso  $2\pi$ .

Considerando le onde sferoidali prolate:

$$(P_W f)^\wedge := \chi_{|\xi| \leq W} \hat{f};$$

$$Q_T f := \chi_{|t| \leq T} f;$$

la regione locale che andiamo a selezionare è quella evidenziata in figura:

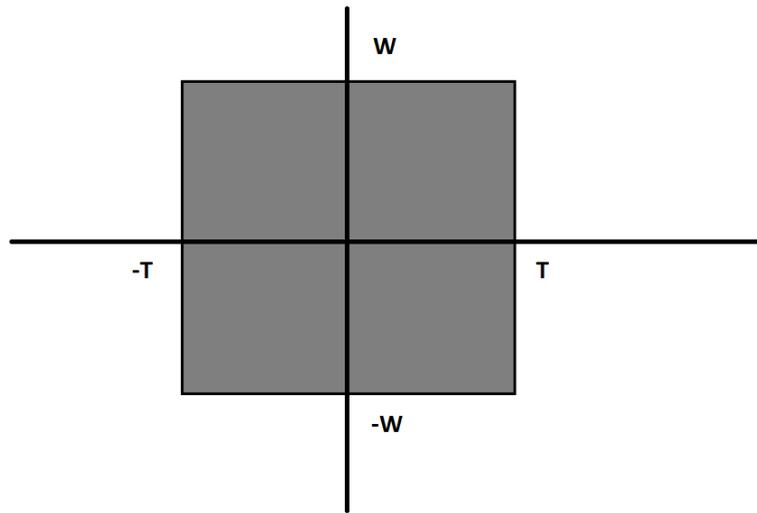


Figura 3.8. Area di interesse in caso di localizzazione tramite onde sferoidali prolate.

Tale rettangolo ha area  $4TW$ , che, per quanto detto prima, implica:

$$\frac{4TW}{2\pi} = \frac{2TW}{\pi}$$

gradi di libertà.

Lo spettro dell'operatore  $L_{TW} = Q_T P_W$  avrà quindi autovalori vicini a 1 per  $n$  piccoli, che subiranno un decadimento verso lo 0 intorno a  $n \simeq \frac{2TW}{\pi}$ . Il tempo di decadimento sarà dell'ordine di  $\log(TW)$ .

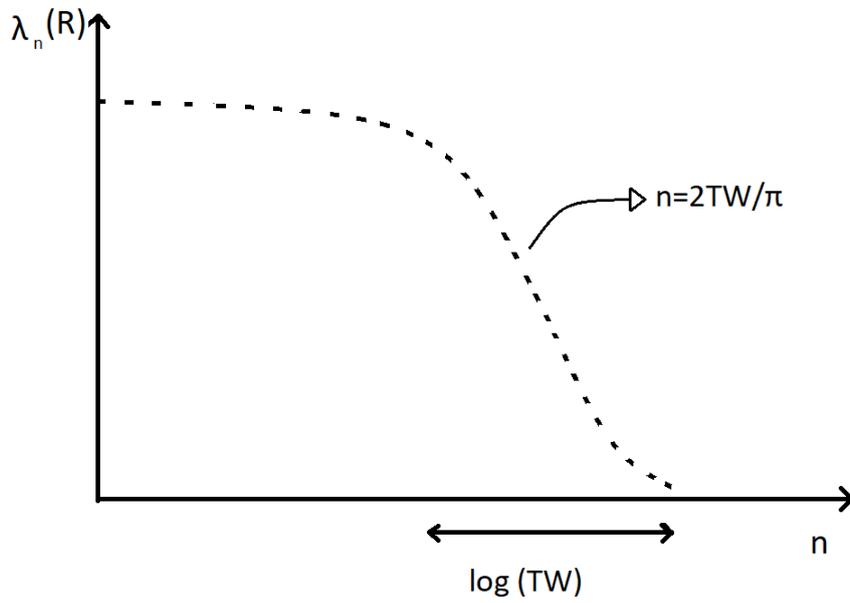


Figura 3.9. Raffigurazione della decadimento delle  $\lambda_n(R)$  all'aumentare di  $n$  in caso di localizzazione tramite onde sferoidali prolate.

# Bibliografia

- [1] Abreu Luís Daniel e Dörfler Monika. *An inverse problem for localization operators*. Inverse Problems 28 (2012), no. 11, 115001.
- [2] Bastianoni Federico, Cordero Elena, e Nicola Fabio. Decay and smoothness for eigenfunctions of localization operators. J. Math. Anal. Appl. 492 (2020), no. 2, 124480.
- [3] Daubechies Ingrid. *Time-Frequency Localization Operators: A Geometric Phase Space Approach*. IEEE Trans. Inform. Theory 34 (1988), no. 4, 605–612.
- [4] Daubechies Ingrid. The Wavelet Transform, Time-Frequency Localization and Signal Analysis. IEEE Trans. Inform. Theory 36 (1990), no. 5, 961–1005.
- [5] Daubechies Ingrid. *Ten Lectures on Wavelets*. Society for Industrial and Applied Mathematics (SIAM), Philadelphia, PA, 1992.
- [6] Gröchenig Karlheinz. *Foundations of Time-Frequency Analysis*. Birkhäuser, 2001.
- [7] Picardello Massimo A. *Analisi Armonica: aspetti classici e numerici*. [http://www.mat.uniroma2.it/~picard/SMC/didattica/materiali\\_did/Anal.Armon./LIBRO.pdf](http://www.mat.uniroma2.it/~picard/SMC/didattica/materiali_did/Anal.Armon./LIBRO.pdf).
- [8] Policardi Helena. *La teoria delle wavelets*. Tesi di laurea (2017), Università di Bologna.
- [9] Tibaldi Alberto. *Introduzione all'analisi in tempo-frequenza*. Tesi di laurea (2009), Politecnico di Torino.

**Riferimenti video:**

- [10] Institut des Hautes Études Scientifiques (IHÉS). *Ingrid Daubechies - 1/4 Time-Frequency Localization and Applications*. Youtube, Video, <https://youtu.be/RkGKOM1oK0E>.
- [11] Institut des Hautes Études Scientifiques (IHÉS). *Ingrid Daubechies - 2/4 Time-Frequency Localization and Applications*. Youtube, Video, <https://youtu.be/1s9zZ6ERAKo>.