

# POLITECNICO DI TORINO

Dipartimento di Ingegneria Meccanica e Aerospaziale

Corso di Laurea Magistrale in Ingegneria Aerospaziale



## Approssimazione analitica di manovre in orbita bassa per la rimozione di detriti

**Relatore**

Prof. Lorenzo Casalino

**Candidato**

Alexandru Florea

**Anno Accademico 2021/2022**

Dicembre 2022

Approssimazione analitica di manovre in orbita bassa  
per la rimozione di detriti

Alexandru Florea

# Indice

<b>1</b>	<b>Introduzione</b>	<b>2</b>
1.1	Cenni storici . . . . .	2
1.2	Manovre orbitali . . . . .	4
<b>2</b>	<b>Cenni di meccanica orbitale</b>	<b>6</b>
2.1	Parametri orbitali . . . . .	6
2.2	Perturbazioni dell'orbita . . . . .	8
2.2.1	Effetto dell'armonica $J_2$ . . . . .	9
2.2.2	Resistenza aerodinamica . . . . .	10
2.2.3	Pressione solare . . . . .	11
<b>3</b>	<b>Modello adottato</b>	<b>12</b>
3.1	Strategia Approssimata (S1) . . . . .	14
3.2	Strategia approssimata (S2) . . . . .	15
3.3	Strategia approssimata (S3) . . . . .	16
3.4	Strategia ottima (S4) . . . . .	16
<b>4</b>	<b>Risultati</b>	<b>18</b>
4.1	Missione di riferimento . . . . .	18
4.2	Missione con parametri orbitali variati . . . . .	23
<b>5</b>	<b>Conclusioni</b>	<b>34</b>
5.1	Possibili sviluppi futuri . . . . .	35

# Sommario

Durante la trattazione di questo lavoro di tesi, partendo da una breve descrizione storica delle missioni spaziali che hanno dato il via alla corsa allo spazio ed al continuo progresso tecnologico che ci ha permesso di lanciare in orbita migliaia di satelliti, si andranno ad accennare i problemi legati ai detriti spaziali ed alle conseguenze disastrose che potrebbe comportare una collisione con altri satelliti. Si proseguirà la trattazione con un cenno alle manovre orbitali, che permettono il moto spaziale e che verranno utilizzate nelle future missioni *ADR (Active Debris Removal)* per la rimozione attiva di detriti.

Seguiranno delle brevi digressioni sui parametri orbitali, che permettono di descrivere in modo univoco un'orbita, e sui disturbi che provocano delle perturbazioni di tali parametri.

Una volta definito il costo necessario ad effettuare una trasferta orbitale, si andranno a valutare e confrontare i risultati ottenuti adottando diverse strategie di ottimizzazione del costo  $\Delta V$ , applicandole anche a diverse casistiche. In particolare, verranno valutate manovre orbitali verso orbite differenti, andando a variare di volta in volta determinati parametri orbitali ed osservando come tali variazioni si ripercuotano sui costi in termini di  $\Delta V$ .

# Abstract

During the discussion of this thesis work, starting with a brief historical description of the space missions that started the space race and the continuous technological progress that has allowed us to launch thousands of satellites into orbit, the problems related to space debris and the disastrous consequences that a collision with other satellites could entail will be mentioned.

We will continue the discussion with a nod to orbital maneuvers, which enable space motion and will be used in future ADR (Active Debris Removal) missions for active debris removal.

This will be followed by brief digressions on orbital parameters, which allow an orbit to be uniquely described, and the disturbances that cause perturbations of these parameters.

Once the cost required to perform an orbital maneuver has been defined, the results obtained by adopting different  $\Delta V$  cost optimization strategies will be evaluated and compared, also applying them to different case histories. In particular, orbital maneuvers to different orbits will be evaluated by going to vary certain orbital parameters from time to time and observing how these variations affect the  $\Delta V$  cost.

# Ringraziamenti

*Un ringraziamento speciale al prof. Lorenzo Casalino, per avermi guidato durante questo percorso, sempre con estrema professionalità, disponibilità e pazienza. I suoi insegnamenti sono stati fondamentali durante tutto il percorso di stesura della tesi.*

*Ringrazio i miei genitori, i pilastri della mia vita, per i sacrifici fatti durante questi anni che mi hanno permesso di essere qui oggi e per avermi sempre sostenuto.*

*Ringrazio mia sorella, il regalo più bello che la vita mi abbia fatto, per avermi sempre supportato in questo difficile, lungo e tortuoso cammino e per non aver mai perso la fiducia in me.*

*Vorrei, inoltre, ringraziare tutti i miei amici, per aver condiviso con me in questi anni un percorso così bello e importante.*

*Infine, vorrei ringraziare Antonella, Daniele e Sara, per essere sempre stati al mio fianco e per essere sempre riusciti a regalarmi momenti di spensieratezza.*

*Grazie infinite a tutti voi, questo traguardo è soprattutto merito vostro!*

# Capitolo 1

## Introduzione

### 1.1 Cenni storici

Il 4 ottobre 1957 lo Sputnik 1, costruito dall'Unione Sovietica, divenne il primo satellite artificiale ad orbitare intorno alla Terra, sancendo di fatti l'inizio della corsa allo spazio.

Da quel giorno in poi, molteplici passi avanti sono stati fatti, rendendo possibile un numero sempre maggiore di lanci di razzi con a bordo satelliti o componenti di questi ultimi.

Basti pensare che il continuo progresso tecnologico ha permesso il lancio di un numero sempre crescente di satelliti, arrivando a lanciare in orbita 136 satelliti solamente nell'anno 2020.

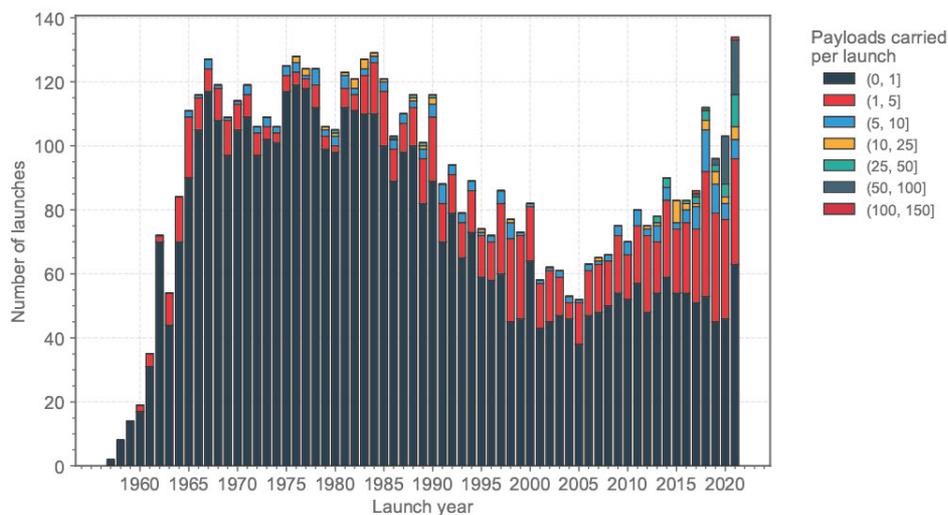


Figura 1.1: Numero di lanci annui

Le regioni di maggiore interesse ed utilizzo sono:

- Orbita LEO<sup>1</sup>, compresa tra i 300 km e i 1000 km di quota

---

<sup>1</sup>Low Earth Orbit

- Orbita GEO<sup>2</sup>, situata ad un'altezza tale per cui il periodo di rivoluzione del satellite coincide con il periodo di rotazione della Terra (circa 42000 km di quota)

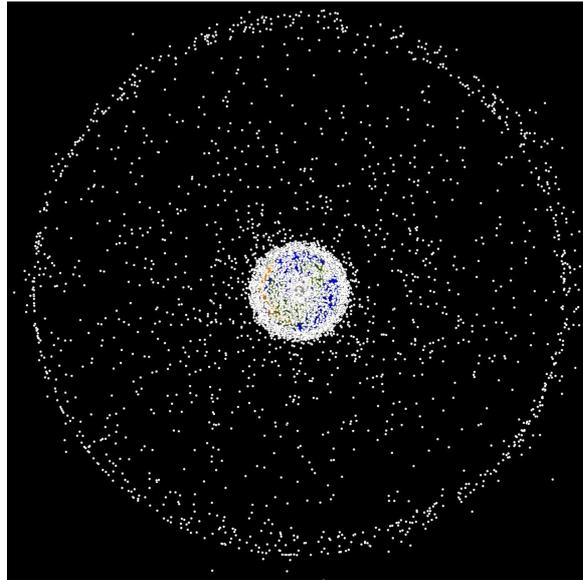


Figura 1.2: Debris in orbita al 2005

Tuttavia, il problema maggiore di avere così tanti satelliti in orbita è il fatto che, quando essi smettono di funzionare, rimangono comunque in orbita, rappresentando un potenziale pericolo di impatto per i satelliti ancora operativi che produrrebbe un effetto a cascata in cui ci sono sempre più detriti che rischiano di impattare con altri satelliti.

Tale fenomeno è conosciuto come **Sindrome di Kessler**, in onore di Donald J. Kessler che per primo illustrò il pericolo di avere tanti satelliti in orbita.

Questo rischio di impatto è chiaramente amplificato per quanto riguarda la Stazione Spaziale Internazionale (ISS) in quanto abitata da esseri umani. Infatti, nel corso della vita operativa della stazione spaziale, diverse volte è stato richiesto agli astronauti di raggiungere le proprie navicelle spaziali quando la ISS transitava in una zona a più elevato rischio di impatto. Fortunatamente, non si sono mai verificati impatti tali da richiedere l'abbandono della stazione spaziale.

Nonostante tutti i debris spaziali (anche quelli più piccoli con dimensioni fino a 10 cm) vengano costantemente osservati e catalogati, risulta molto difficile tracciare con precisione le loro orbite.

Infatti, nel 2009, si è verificato l'impatto tra due satelliti: il Cosmos 2251, satellite russo inattivo, e l'Iridium 33, satellite americano ancora attivo. L'impatto è avvenuto ad una altezza di 789 km con una velocità relativa all'impatto stimata intorno ai 11,7 km/s. Tale impatto ha comportato la distruzione di entrambi i satelliti e la formazione di una grande quantità di detriti (si stima intorno a 1700).

Un altro incidente è avvenuto nel 2013 quando un detrito proveniente dal sa-

---

<sup>2</sup>Geostationary Earth Orbit

tellite cinese Fengyun 1C ha colpito il nano-satellite russo BLITS, ad un'altezza di circa 865 km, facendo variare la sua orbita. L'esplosione del satellite cinese è stata dovuta al lancio di un missile cinese nell'ambito di un test missilistico nel programma anti-satellite cinese.

Queste due collisioni hanno fatto aumentare notevolmente la quantità di detriti e la loro densità, come evidenziato nella figura 1.3:

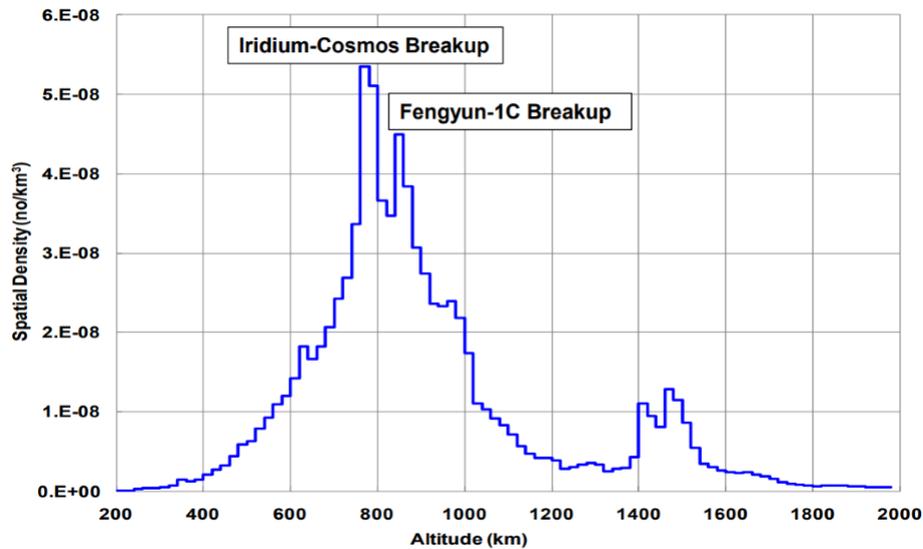


Figura 1.3: Densità dei detriti

Quindi, appare evidente la necessità di avviare un programma di **Active Debris Removal** (come ad esempio la *ClearSpace-1*), in modo da ridurre il rischio di collisioni ed aumentare la sicurezza degli altri satelliti e degli astronauti a bordo della stazione spaziale.

## 1.2 Manovre orbitali

Per poter effettuare una rimozione attiva dei detriti è necessario potersi muovere nello spazio e lo si fa attraverso le manovre orbitali, ovvero attraverso la variazione dell'orbita e/o dell'assetto del satellite in modo da raggiungere il target finale.

Una prima classificazione delle manovre orbitali che si può effettuare è la seguente:

- **Manovre impulsive:** la differenza di velocità richiesta per passare da un'orbita ad un'altra avviene attraverso una variazione quasi istantanea di velocità che può essere ottenuta attraverso uno o più impulsi
- **Manovre non impulsive:** la differenza di velocità richiesta per passare da un'orbita ad un'altra viene ottenuta attraverso una piccola spinta costante nel tempo, che permette di raggiungere il valore di velocità richiesto per poter orbitare sull'orbita target

Le manovre di tipo impulsivo, a loro volta, possono essere suddivise in base al numero di impulsi che compone la manovra orbitale, e le più comuni sono:

- **Ad un impulso:** viene utilizzata per manovre orbitali semplici, come ad esempio manovre di aggiustamento del periastro/apoastro o manovre per cambiare il piano orbitale
- **A due impulsi:** usata, ad esempio, per manovre di fasamento dell'orbita o manovre di trasferimento tra orbite attraverso un primo impulso sull'orbita di partenza ed un secondo impulso sull'orbita di arrivo. La più conosciuta è il trasferimento di Hohmann, che consente il trasferimento orbitale tra due orbite circolari e complanari.
- **A tre impulsi:** usata, ad esempio, per manovre di trasferimento in cui il semiasse maggiore dell'orbita di arrivo è molto maggiore di quello dell'orbita di partenza e per tale motivo si fa un primo trasferimento orbitale verso un'orbita cosiddetta *di parcheggio* e successivamente si completa il trasferimento orbitale verso l'orbita target

Il costo di una manovra di trasferimento orbitale impulsiva si calcola, quindi, in termini di  $\Delta V$  totale richiesto per il completamento della manovra. Quindi, ipotizzando di avere una manovra orbitale impulsiva con  $N$  impulsi, sarà necessario fornire un  $\Delta V_{tot}$ , in modulo, pari a:

$$|\Delta V_{tot}| = |\Delta V_1| + |\Delta V_2| + \dots + |\Delta V_N| \quad (1.1)$$

Lo scopo di questo lavoro di tesi è quello di andare a valutare e confrontare i risultati ottenuti, in termini di  $\Delta V$  totale, attraverso diverse strategie di calcolo.

Il tipo di manovra orbitale che viene adottata è sempre di tipo impulsivo, con un numero di impulsi variabile a seconda della strategia utilizzata.

Vengono, inoltre, simulati diversi casi andando a variare i parametri orbitali delle orbite ed analizzando come queste variazioni vadano ad influire sul costo complessivo della manovra di trasferimento orbitale.

## Capitolo 2

# Cenni di meccanica orbitale

### 2.1 Parametri orbitali

Al fine di agevolare la comprensione della trattazione, si rende necessario richiamare alcuni concetti base di meccanica orbitale.

Ogni corpo che si muove nello spazio lo fa seguendo una determinata orbita. Nel caso di un sistema formato da due corpi dotati di massa, di cui una molto minore dell'altra, il corpo con massa minore seguirà, secondo la **Prima legge di Keplero**, un'orbita ellittica intorno al corpo di massa maggiore (che risulta essere uno dei due fuochi dell'orbita).

Pertanto, il primo concetto che è utile richiamare è la definizione dei parametri orbitali. Essi sono un set di parametri che sono necessari per poter definire in modo univoco l'orbita di un determinato corpo che si muove nello spazio.

Il set *classico* di parametri che maggiormente vengono utilizzati per la descrizione univoca di un'orbita, è rappresentato dai **parametri orbitali classici** o **Kepleriani**.

Per poterli definire in modo accurato è anzitutto necessario definire il sistema di riferimento rispetto al quale tali parametri vengono definiti. In questo caso, il sistema al quale ci si riferisce nella definizione dei parametri orbitali Kepleriani è il **Sistema di riferimento geocentrico**. Esso è definito come segue:

- **Origine:** il centro della Terra
- **Piano fondamentale:** il piano equatoriale
- **Verso positivo dell'asse z:** emisfero contenente la stella Polaris

L'asse  $x$  di tale sistema di riferimento è nel piano dell'eclittica diretto verso la costellazione dell'Ariete, ovvero verso l'equinozio di primavera. Infine, l'asse  $y$  è determinato di conseguenza in modo da formare con gli altri due assi una terna destrorsa.

Una volta definito il sistema di riferimento, si può procedere alla definizione dei parametri orbitali Kepleriani:

1. **Semiassse maggiore  $a$ :** definisce le dimensioni dell'orbita

2. **Eccentricità  $e$ :** è un valore adimensionale che definisce la forma dell'orbita che può essere ellittica, circolare, parabolica o iperbolica. In particolare:

	Forma orbita
$e=0$	circolare
$0 < e < 1$	ellittica
$e=1$	parabolica
$e > 1$	iperbolica

Tabella 2.1: Relazione eccentricità - forma orbita

3. **Argomento del periastro  $\omega$ :** è l'angolo che si forma tra il vettore che punta al nodo ascendente ed il vettore eccentricità
4. **Anomalia vera al tempo  $t$   $\nu$ :** è l'angolo che si forma tra il pericentro dell'orbita e la posizione del corpo sull'orbita al tempo  $t$
5. **Longitudine del nodo ascendente  $\Omega$ :** è l'angolo che si forma tra il vettore  $\mathbf{x}$  del sistema di riferimento ed il nodo ascendente
6. **Inclinazione  $i$ :** è l'angolo che si forma tra il piano dell'orbita su cui sta orbitando il corpo ed il piano fondamentale del sistema di riferimento preso in considerazione

	Tipo di orbita
$0 < i < \frac{\pi}{2}$	Diretta
$\frac{\pi}{2} < i < \pi$	Retrograda

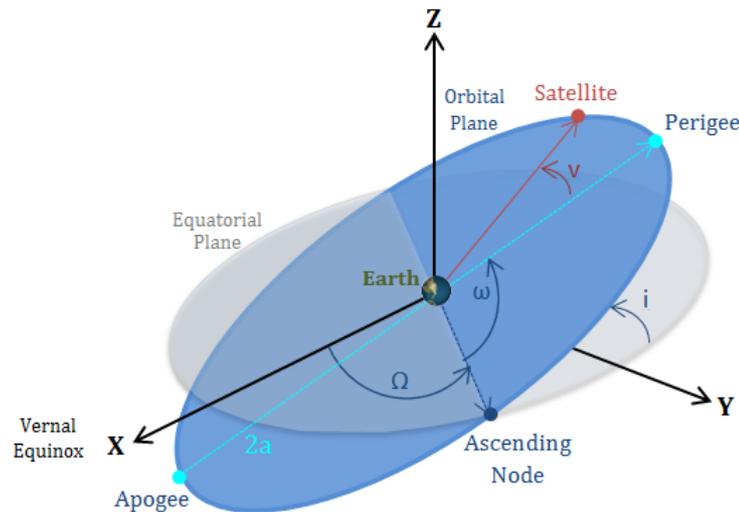


Figura 2.1: Parametri orbitali

Osservando i sei parametri appena definiti, si può notare come cinque di essi siano dei valori costanti e solamente uno vari in funzione del tempo. Infatti, soltanto

l'anomalia vera  $\nu$  cambia il proprio valore poiché rappresenta la posizione istantanea del corpo sull'orbita.

## 2.2 Perturbazioni dell'orbita

In realtà, quanto appena detto risulta essere vero soltanto se vengono prese in considerazione orbite ideali. Infatti, quando vengono trattate orbite reali si devono tenere in considerazione gli effetti perturbativi che agiscono sul corpo (ad esempio qualsiasi satellite che orbita intorno alla Terra) modificandone l'orbita.

Le perturbazioni orbitali sono delle forze esterne che agiscono sul moto del corpo orbitante, comportando la variazione di uno o più parametri orbitali.

Esse possono essere classificate nelle seguenti 3 categorie in base alla loro dipendenza dal tempo:

- **Perturbazioni secolari:** sono caratterizzate da un comportamento lineare e da un tempo di azione della perturbazione sull'orbita molto grande.
- **Perturbazioni periodiche di lungo periodo:** sono caratterizzate da un tempo di azione che può essere di alcuni mesi in certi casi, fino ad arrivare ad essere di alcuni anni per determinati tipi di perturbazione (come ad esempio la presenza di un terzo corpo). Un altro tipo di perturbazione periodica di lungo periodo può essere dovuta all'effetto oscillante di altri parametri orbitali, che determinano una variazione del parametro orbitale in esame.
- **Perturbazioni periodiche di breve periodo:** sono caratterizzate da un tempo di azione che comporta la variazione dei parametri orbitali una o più volte nell'arco di un'orbita.

A titolo di esempio, nella figura 2.2 vengono mostrati gli effetti delle suddette perturbazioni sul valore di un parametro orbitale.

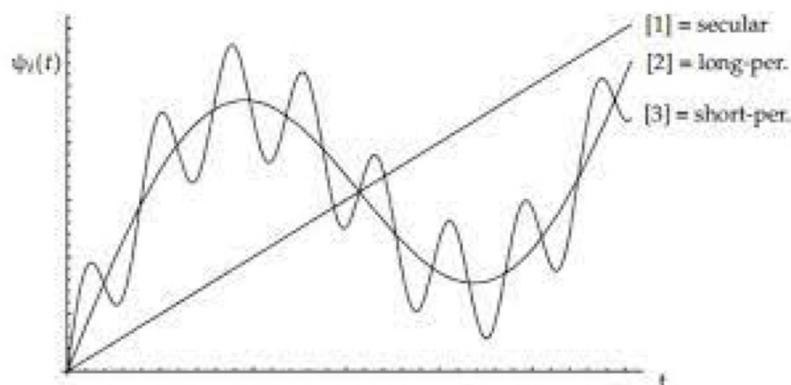


Figura 2.2: Perturbazioni orbitali

### 2.2.1 Effetto dell'armonica $J_2$

La visione comune è che il pianeta Terra sia perfettamente sferico. In realtà, esso è rappresentato da un **Geoide**, ovvero una superficie equipotenziale (del campo gravitazionale terrestre) che meglio si adatta, nel senso dei minimi quadrati, al livello medio globale del mare. Ciò significa che, qualora non esistessero le maree e le onde marittime, il livello medio globale delle acque terrestri andrebbero a "livellarsi" su questa superficie equipotenziale.

Perciò, la Terra viene rappresentata attraverso un ellissoide di riferimento generato nel 1984, attraverso un modello matematico, che costituisce il **WGS84**<sup>1</sup> e che specifica le effettive dimensioni del pianeta: Per tali motivi, la relazione che

	Valore
Semiassse maggiore <b>a</b> (km)	6378,137
Semiassse minore <b>b</b> (km)	6356,752
Eccentricità	0,0034

Tabella 2.2: Modello ellissoide WGS84

descrive l'energia potenziale terrestre passa dalla relazione 2.1

$$E_g = -\frac{\mu}{r} \quad (2.1)$$

dove  $\mathbf{r}$  rappresenta il raggio medio terrestre, alla relazione

$$E_g = -\frac{\mu}{r} \left\{ 1 - \sum_{n=2}^{\infty} J_n \left( \frac{r_t}{r} \right)^2 P_n \sin(La) - \sum_{n=2}^{\infty} \sum_{m=2}^{\infty} J_{n,m} P_n^m \sin(La) \cos(Lo - Lo_{n,m}) \right\} \quad (2.2)$$

dove  $La$  rappresenta la latitudine e  $Lo$  rappresenta la longitudine.

I termini  $J_n$  vengono definiti armoniche zonali, mentre i termini  $J_{n,m}$  vengono definiti armoniche tesserali o armoniche settoriali, rispettivamente nel caso in cui  $n \neq m$  e  $n = m$ .

Le armoniche con indice pari indicano la presenza di una qualche simmetria rispetto al piano equatoriale, mentre le armoniche con indice dispari indicano la presenza di un qualche tipo di asimmetria. Le armoniche più significative che si possono descrivere sono le seguenti:

- $J_2$ : vale  $1082,6 \cdot 10^6$  ed indica il fatto che la Terra è leggermente schiacciata ai poli
- $J_3$ : vale  $-2,54 \cdot 10^6$  ed indica che è presente una asimmetria tra l'emisfero sud e l'emisfero nord. In particolare, l'emisfero sud risulta essere più massivo rispetto all'emisfero nord.
- $J_{12}$ : vale  $-0,04 \cdot 10^6$  ed indica che l'equatore non è un cerchio ma un'ellisse

Tuttavia, l'armonica  $J_2$  è quella più rilevante in quanto comporta degli effetti diretti sui parametri orbitali. In particolare, la presenza del  $J_2$  comporta:

1. Regressione della linea dei nodi
2. Precessione della linea degli absidi

<sup>1</sup>World Geodetic System 1984

## Regressione della linea dei nodi

Il primo effetto di  $J_2$  riguarda la regressione della linea dei nodi. Ciò significa che nel tempo, il valore della longitudine del nodo ascendente varia. Tale variazione può essere quantificata attraverso la seguente relazione:

$$\frac{d\Omega}{dt} = -\frac{3}{2} \sqrt{\frac{\mu}{a^3}} \frac{J_2 \cos(i)}{(1-e^2)^2} \left(\frac{r_E}{a}\right)^2 \quad (2.3)$$

dove  $\mu = 389600 \frac{km^3}{s^2}$  rappresenta la costante gravitazionale terrestre.

Come si può osservare dall'equazione sopra descritta, si ha una variazione di  $\Omega$  nel tempo negativa nel caso in cui si considerano orbite dirette, mentre si ha una variazione positiva nel caso in cui si considerano orbite retrograde.

Questo comportamento di variazione di  $\Omega$  risulta essere benefico e viene in realtà sfruttato nell'ambito dei trasferimenti orbitali, in quanto, conoscendo il  $d\Omega/dt$  dei due piani orbitali, è possibile calcolare il tempo al quale essi saranno allineati.

## Precessione della linea degli absidi

Il secondo effetto di  $J_2$  riguarda la precessione della linea degli absidi, ovvero la variazione nel tempo del valore dell'argomento del periastro  $\omega$ . Tale variazione può essere quantificata attraverso la seguente relazione:

$$\frac{d\omega}{dt} = \frac{3}{4} \sqrt{\frac{\mu}{a^3}} \frac{J_2 (5\cos^2 i - 1)}{(1-e^2)^2} \left(\frac{r_E}{a}\right)^2 \quad (2.4)$$

Ponendo uguale a zero l'equazione appena scritta, si può osservare che questo effetto si annulla per due valori dell'inclinazione:

- $i_1 = 63,4^\circ$
- $i_2 = 116,6^\circ$

Quindi, si possono osservare le seguenti tre casistiche:

1. Per valori di inclinazione inferiori ad  $i_1$  o maggiori ad  $i_2$  si ha una **precessione** della linea degli absidi
2. Per valori di inclinazione pari ad  $i_1$  o ad  $i_2$  **non si osserva nessuna perturbazione**
3. Per valori di inclinazione compresi tra  $i_1$  ed  $i_2$  ( $i_1$  ed  $i_2$  esclusi) si osserva una **regressione** della linea degli absidi (effetto visibile nelle orbite Molnya)

### 2.2.2 Resistenza aerodinamica

Contrariamente a quanto si possa pensare, la resistenza aerodinamica è presente anche nello spazio e viene percepita nelle orbite che hanno un'altezza fino ai 1000 km circa. Questo è dovuto al fatto che, fino a tale quota, si sente ancora un'atmosfera residua.

L'effetto della resistenza aerodinamica sul moto di un corpo è quantificabile attraverso la seguente equazione:

$$F_a = \frac{1}{2} \rho V_x^2 S C_D \quad (2.5)$$

L'effetto della perturbazione diminuisce all'aumentare della quota ed il tempo di azione è molto lungo. Per tale motivo, durante questa trattazione, questa perturbazione dei parametri orbitali non verrà tenuta in considerazione.

### 2.2.3 Pressione solare

La pressione solare consiste in una variazione della pressione a causa della radiazione solare.

Essa viene assunta costante e pari a  $p = 4,5 \cdot 10^{-6} N/m^2$  e di per se non rappresenterebbe una grande perturbazione. Però, considerando che nelle orbite LEO si completano circa 15 orbite al giorno, l'effetto cumulativo della pressione solare inizia a farsi sentire.

Tuttavia, il suo effetto si ripercuote maggiormente sull'assetto del satellite piuttosto che sulla sua posizione. Per tali motivi, durante questa trattazione tale perturbazione non verrà tenuta in considerazione.

## Capitolo 3

# Modello adottato

Come accennato in precedenza, lo scopo di questo lavoro di tesi è quello di analizzare e confrontare il costo, in termini di  $\Delta V$ , di un trasferimento orbitale ottenuto attraverso l'implementazione di differenti strategie di calcolo, andando anche a confrontare diverse casistiche variando i parametri orbitali delle orbite in esame.

Tali strategie, che verranno illustrate a breve, variano tra di loro in base al tipo di manovra orbitale che si intende fare.

Nei casi in esame, verrà fatta l'assunzione che tutte le orbite considerate siano perfettamente circolari. Questa considerazione ci permette di semplificare tutta la trattazione, in quanto risultano vere le seguenti:

1. Per prima cosa, ricordando le definizioni dei parametri orbitali, risulta ovvio che è possibile trascurare l'eccentricità (in quanto l'eccentricità delle orbite circolari è nulla)  $e$  e l'argomento del periastro  $\omega$  (in quanto tale angolo ha una dipendenza dal vettore eccentricità). Inoltre, data la trascurabilità dell'argomento del periastro, si può ignorare anche l'effetto della precessione della linea degli absidi (dovuta all'effetto dell'armonica  $J_2$ ), semplificando ulteriormente il problema.
2. In secondo luogo, si assume che tutte le manovre di trasferimento orbitale avvengano in tempi relativamente lunghi, in modo da permettere un corretto fasamento tra i debris di partenza e di arrivo (riducendo così anche i consumi e rendendoli trascurabili) e che ci consente di trascurare i valori dell'anomalia media  $M$  dei due detriti e le relative variazioni dovute all'effetto dell'armonica  $J_2$  ed espresse attraverso la seguente legge:

$$\frac{\delta M}{\delta t} = \sqrt{\frac{\mu}{a^3}} + \frac{3}{4} \sqrt{\frac{\mu}{a^3}} \frac{J_2 (3 \cos^2(i) - 1)}{(1 - e^2)^{\frac{3}{2}}} \left( \frac{r_E}{a} \right)^2 \quad (3.1)$$

ricordando che il valore dell'eccentricità è nullo.

Tenendo in considerazione quanto appena detto, si può osservare come rimangono solo 3 parametri orbitali da tenere in considerazione, ovvero: semiasse maggiore delle orbite  $a$ , inclinazione delle orbite  $i$  e longitudine del nodo ascendente delle orbite  $\Omega$ .

Tuttavia, il valore del semiasse maggiore delle orbite ed il valore dell'inclinazione delle orbite rimangono costanti durante tutta la manovra di trasferimento orbitale

in quanto, durante questa trattazione, non si tiene conto della resistenza aerodinamica che altrimenti tenderebbe a variare i valori dei suddetti parametri orbitali. Perciò, l'unico valore che varia durante il tempo è la longitudine del nodo ascendente a causa dell'effetto di precessione nodale data dall'armonica  $J_2$ . In particolare,  $\Omega$  varia secondo la legge

$$\Omega(t) = \Omega(t_0) + \dot{\Omega} \cdot (t - t_0) \quad (3.2)$$

con  $t_0$  tempo di riferimento e  $t$  il tempo a cui si vuole calcolare il valore, mentre il valore di  $\dot{\Omega}$  varia in accordo legge descritta dall'Equazione 2.3.

Ora, essendo a conoscenza dei parametri orbitali delle due orbite tra le quali si vuole effettuare il trasferimento orbitale e tenendo in considerazione tutte le assunzioni appena fatte, è logico pensare che si possa trovare un determinato momento in cui risulti più *conveniente* effettuare la manovra.

Infatti, che si voglia risparmiare combustibile o che si voglia effettuare la manovra di trasferimento nel più breve tempo possibile, il momento migliore per tentare di effettuare il trasferimento orbitale è quando i piani orbitali delle orbite di partenza ed arrivo sono il più vicino possibile l'una all'altra. Ovvero, quando la differenza tra la  $\Omega_c^1$  e la  $\Omega_t^2$  diventa minima (idealmente nulla).

Questo momento ideale per effettuare il trasferimento orbitale è possibile calcolarlo grazie alla conoscenza dei parametri orbitali delle due orbite.

In particolare, è necessario conoscere:

- Longitudine del nodo ascendente dell'orbita di partenza  $\Omega_c$
- Longitudine del nodo ascendente dell'orbita di arrivo  $\Omega_t$
- Variazione nel tempo del nodo ascendente dell'orbita di partenza  $\dot{\Omega}_c$
- Variazione nel tempo del nodo ascendente dell'orbita di arrivo  $\dot{\Omega}_t$

Ad esempio, ipotizzando di voler effettuare un trasferimento orbitale tra due debris spaziali, denominati chaser e target, si potrebbe calcolare il tempo al quale le due orbite sono il più vicine possibile attraverso la seguente equazione:

$$t_{opt} = \frac{\Omega_t(t) - \Omega_c(t) \pm 2k\pi}{\dot{\Omega}_c(t) - \dot{\Omega}_t(t)} \quad (3.3)$$

dove  $t$  è un tempo di riferimento al quale vengono rilevati i parametri orbitali e  $k$  è un valore intero maggiore di zero che rappresenta il numero di orbite completate da uno dei due debris.

Infatti, come si può facilmente intuire, il tempo ottimale per il trasferimento orbitale dal chaser al target si ripete ogni volta che uno dei due debris compie un'orbita completa.

Tuttavia, spesso le missioni impongono che il trasferimento orbitale debba avvenire in un lasso di tempo limitato, perciò non sempre si riesce ad attendere che i due piani orbitali siano alla loro distanza minima e quindi si procede con una manovra orbitale che avviene in un tempo imposto.

<sup>1</sup>Longitudine del nodo ascendente dell'orbita di partenza

<sup>2</sup>Longitudine del nodo ascendente dell'orbita di arrivo

Quindi, potrebbe essere necessario effettuare un trasferimento orbitale quando:

$$\begin{cases} \Omega_t(t) - \Omega_c(t) \neq 0 \\ a_t(t) - a_c(t) \neq 0 \\ i_t(t) - i_c(t) \neq 0 \end{cases}$$

Il costo, in termini di  $\Delta V$ , richiesto per la manovra orbitale di trasferimento dovrà tenere conto di tali differenze, per permettere il compimento della manovra.

In particolare, il  $\Delta V$  dovrà tenere in considerazione 3 componenti:

- $\mathbf{x}$  rappresenta la variazione di velocità legata al cambio del RAAN  $\Omega$

$$x = (\Omega_t - \Omega_c) \cdot \sin(i_0) \cdot v_0 \quad (3.4)$$

- $\mathbf{y}$  rappresenta la variazione di velocità legata al cambio di semiasse maggiore dell'orbita

$$y = \frac{a_t - a_c}{2a_0} \cdot v_0 \quad (3.5)$$

- $\mathbf{z}$  rappresenta la variazione di velocità legata al cambio di inclinazione dell'orbita

$$z = (i_t - i_c) \cdot v_0 \quad (3.6)$$

con

$$\begin{cases} i_0 = \frac{i_t + i_c}{2} \\ a_0 = \frac{a_t + a_c}{2} \\ v_0 = \sqrt{\frac{\mu}{a_0}} \end{cases}$$

### 3.1 Strategia Approssimata (S1)

Ipotizzando che la manovra di trasferimento orbitale sia una manovra impulsiva che avviene attraverso 2 impulsi, possiamo definire:

- $\Delta V_a$  è la variazione di velocità che si ottiene in seguito al primo impulso e vale

$$\Delta V_a = \sqrt{(s_x x)^2 + (s_y y)^2 + (s_z z)^2} \quad (3.7)$$

- $\Delta V_b$  è la variazione di velocità che si ottiene in seguito al secondo impulso e vale

$$\Delta V_b = \sqrt{(x - s_x x - \Delta x)^2 + (y - s_y y)^2 + (z - s_z z)^2} \quad (3.8)$$

Quindi, una volta calcolati i 2 contributi  $\Delta V_a$  e  $\Delta V_b$  è possibile ricavare il costo, in termini di  $\Delta V$ , totale per il trasferimento sommando i due contributi sopracitati:

$$\Delta V_{tot} = \sqrt{(s_x x)^2 + (s_y y)^2 + (s_z z)^2} + \sqrt{(x - s_x x - \Delta x)^2 + (y - s_y y)^2 + (z - s_z z)^2} \quad (3.9)$$

I termini  $s_x, s_y$  e  $s_z$  rappresentano rispettivamente la frazione di  $x, y$  e  $z$  che viene utilizzata per completare il primo impulso.

Durante la prima variazione di velocità, la variazione del semiasse maggiore e dell'inclinazione comportano una variazione del RAAN rate, che dovrà essere tenuta in considerazione durante il secondo impulso attraverso il  $\Delta x = -ms_y y - ns_z z$ , dove

$$\begin{cases} m = 7\dot{\Omega}_0 \sin(i_0)t \\ n = \dot{\Omega}_0 \tan(i_0) \sin(i_0)t \end{cases}$$

Nelle ultime relazioni indicate,  $\Omega_0$  rappresenta la media tra il RAAN rate del chaser ed il RAAN rate del target mentre  $t$  rappresenta la durata del trasferimento.

Ritornando all'Equazione 3.9, è molto difficile trovarne il minimo in una forma chiusa. Pertanto, si procede con un'approssimazione elevando al quadrato entrambi i membri (ricordando che  $\Delta V_{tot} = \Delta V_a + \Delta V_b$ ) ed ignorando il termine  $2\Delta V_a \Delta V_b$  derivante dal doppio prodotto tra i termini del primo membro.

Una volta fatto ciò, si procede con la derivazione dell'espressione ricavata prima rispetto a  $s_x$ , poi rispetto a  $s_y$  ed infine rispetto a  $s_z$  e ponendo queste relazioni uguali a zero.

$$\frac{\delta(\Delta V_a^2 + \Delta V_b^2)}{\delta s_x} = 4x^2 s_x - 2mxy s_y - 2nxz s_z - 2x^2 = 0 \quad (3.10)$$

$$\frac{\delta(\Delta V_a^2 + \Delta V_b^2)}{\delta s_y} = -2mxy s_x + (4y^2 + 2m^2 y^2) s_y + 2mnyz s_z - 2y^2 + 2mxy = 0 \quad (3.11)$$

$$\frac{\delta(\Delta V_a^2 + \Delta V_b^2)}{\delta s_z} = -2nxz s_x + 2mnyz s_y + (4z^2 + 2n^2 z^2) s_z - 2z^2 + 2nxz = 0 \quad (3.12)$$

Attraverso queste equazioni è possibile ricavare i termini  $s_x x, s_y y$  e  $s_z z$ :

$$s_x x = \frac{2x + my + nz}{4 + m^2 + n^2} \quad (3.13)$$

$$s_y y = -\frac{2mx - (4 + n^2)y + mnz}{8 + 2m^2 + 2n^2} \quad (3.14)$$

$$s_z z = -\frac{2nx + mny - (4 + m^2)z}{8 + 2m^2 + 2n^2} \quad (3.15)$$

Sulla base di quanto ricavato finora si andranno a descrivere altre tre strategie per il calcolo del  $\Delta V_{tot}$ .

## 3.2 Strategia approssimata (S2)

La strategia approssimata S2 è una strategia nella quale si ha un solo impulso iniziale ed è una variazione della strategia approssimata nella quale vengono imposte le seguenti relazioni:

$$s_y = s_z = 1 \quad (3.16)$$

Per quanto riguarda il coefficiente  $s_x$ , esso viene calcolato in modo tale che valga la seguente relazione:

$$x - s_x x - \Delta x = 0 \quad (3.17)$$

Quindi, si ottiene:

$$s_x = 1 + \frac{my + nz}{x} \quad (3.18)$$

Quindi, ricordando le Equazioni 3.7 e 3.8, si ottiene:

$$\Delta V_a = \sqrt{(x + my + nz)^2 + y^2 + z^2} \quad (3.19)$$

$$\Delta V_b = 0 \quad (3.20)$$

Tuttavia, fornendo tutto il cambio di  $\Delta V$  con un solo impulso iniziale, si ottiene una situazione nella quale il chaser ed il target subiscono le medesime perturbazioni orbitali e si ricava che la somma  $my+nz$  è praticamente uguale alla differenza tra  $x_0$  e  $x$ . Quindi, l'equazione 3.19 si può riscrivere come segue:

$$\Delta V_a = \sqrt{x_0^2 + y^2 + z^2} \quad (3.21)$$

Questo significa che la soluzione ottenuta attraverso la strategia approssimata S2 è indipendente dal tempo di arrivo al debris target (ovvero dalla durata del trasferimento orbitale) e per questo motivo la il costo, in termini di  $\Delta V$ , di tale strategia è costante al variare della durata della manovra di trasferimento orbitale.

### 3.3 Strategia approssimata (S3)

Analogamente alla strategia S2, anche la strategia approssimata S3 si effettua con solo impulso, questa volta finale, ed è una variazione della strategia approssimata. La differenza di tale strategia, rispetto alla S2, risiede nel diverso valore che assumono i coefficienti  $s_x$ ,  $s_y$  e  $s_z$ :

$$s_x = s_y = s_z = 0 \quad (3.22)$$

In questo modo, ricordando le Equazioni 3.7 e 3.8, si ottiene:

$$\Delta V_a = 0 \quad (3.23)$$

$$\Delta V_b = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2} \quad (3.24)$$

In questo modo, aspettando il solo impulso finale, si riesce a sfruttare per un tempo maggiore l'effetto della precessione nodale dovuto all'effetto dell'armonica  $J_2$  che permette di avere, per un breve lasso temporale, un minor costo in termini di  $\Delta V$ .

### 3.4 Strategia ottima (S4)

Come accennato in precedenza, minimizzare la somma  $\Delta V_a + \Delta V_b$  in forma chiusa e trovare una soluzione risulta molto complicato ed è per questo motivo che si procede al calcolo del  $\Delta V_{tot}$  attraverso una approssimazione, rappresentata dalla strategia S1.

Tuttavia, è possibile ricavare il minimo della suddetta somma attraverso l'utilizzo

di software che facilitano il calcolo numerico.  
La strategia ottima si basa proprio su questa casistica.

L'idea è quella di sfruttare la funzione *fmincon* del software *Matlab*. Essa è un ottimizzatore non lineare che permette di ricavare, partendo da un certo valore iniziale, il minimo della funzione che si vuole ottimizzare attraverso un'ottimizzazione basata sul metodo del gradiente.

# Capitolo 4

## Risultati

In questo capitolo verranno mostrati i risultati delle missioni che sono state simulate, andando a confrontare l'andamento delle velocità richieste per effettuare il trasferimento orbitale da un *debris di partenza*<sup>1</sup> ad un *debris di arrivo*<sup>2</sup>.

In particolare, si andranno ad analizzare e confrontare i risultati ottenuti attraverso le seguenti strategie:

- **Strategia approssimata (S1):** la durata della trasferta orbitale è inferiore al tempo ottimale
- **Strategia approssimata (S2):** i coefficienti  $s_y$  e  $s_z$  vengono imposti pari a 1 mentre il coefficiente  $s_x$  viene calcolato in modo che la relazione  $x - s_x \cdot x - \delta x$  sia nulla. In questo modo l'impulso finale risulta nullo ed il trasferimento orbitale avviene interamente grazie al primo impulso
- **Strategia approssimata (S3):** vengono imposti nulli i coefficienti  $s_x$ ,  $s_y$  e  $s_z$ , in modo da ottenere un impulso iniziale nullo
- **Strategia ottima (S4):** viene minimizzata la somma  $\Delta V_A + \Delta V_B$  attraverso la function Matlab *fmincon*

Inizialmente si andranno a valutare e confrontare i risultati di tali strategie, nell'ipotesi in cui tutti i parametri orbitali delle orbite dei due detriti rimangano invariati, eccezion fatta per la longitudine del nodo ascendente  $\Omega$  (RAAN<sup>3</sup>).

Successivamente si andranno a modificare alcuni parametri orbitali di una delle due orbite, valutando come tali variazioni influiscano sul costo della trasferta orbitale.

Per tutte le missioni si è ipotizzato che il trasferimento orbitale inizi a  $T_{partenza} = 0$ .

### 4.1 Missione di riferimento

Come detto in precedenza, sono state analizzate le missioni di trasferimento orbitale tra due detriti, lasciando invariati i parametri orbitali di questi ultimi.

---

<sup>1</sup>Di seguito denominato chaser

<sup>2</sup>Di seguito denominato target

<sup>3</sup>Right Ascension of the Ascending Node

Verranno confrontati i risultati dei seguenti casi:

- $\Omega = 5^\circ$
- $\Omega = 10^\circ$

Si andranno, inoltre, a valutare due differenti situazioni: nella prima (che chiameremo Caso A) si ha il trasferimento orbitale tra i due detriti ipotizzando che  $\Omega_t = 0^\circ$  e  $\Omega_c = 5^\circ/10^\circ$ , mentre nella seconda situazione (che chiameremo Caso B) verranno invertiti i valori di  $\Omega$  di chaser e target, ottenendo risultati differenti. Nella Tabella 4.1 sono indicati alcuni dei parametri orbitali delle orbite del chaser e del target relative al caso A ed al caso B.

Parametri Orbitali	Chaser	Target
Semiassse maggiore (km)	7181,53	7157,39
Inclinazione (deg)	96,67	98,64
Eccentricità	0,0083	0.0152

Tabella 4.1: Parametri Orbitali

La differenza tra il caso A ed il caso B sta, come evidenziato in precedenza, nell'invertire i valori di  $\Omega$  di chaser e target.

	Chaser	Target
$\Omega$ Caso A (deg)	5 / 10	0
$\Omega$ Caso B (deg)	0	5 / 10

Tabella 4.2: Valori  $\Omega$

Conoscendo questi valori, è possibile calcolare la variazione della longitudine del nodo ascendente nel tempo, attraverso la seguente equazione:

$$\frac{d\Omega}{dt} = -\frac{3}{2} \sqrt{\frac{\mu}{a^3}} \frac{J_2 \cos(i)}{(1-e^2)^2} \left(\frac{r_E}{a}\right)^2 \quad (4.1)$$

Dall'equazione 4.1 si ricavano i seguenti valori di variazione del RAAN, validi sia per il caso A che per il caso B:

	Chaser	Target
$\dot{\Omega}$ (deg/day)	0,76°	1,00°

Tabella 4.3: RAAN Rate

Dalla Tabella 4.3 si può osservare che la variazione della longitudine del nodo ascendente è maggiore nell'orbita del target. Questo comporta quanto segue:

- **Caso A:** la  $\dot{\Omega}_t$  è maggiore della  $\dot{\Omega}_c$  mentre la  $\Omega_t$  è minore della  $\Omega_c$ ; questo significa che le due orbite si stanno avvicinando
- **Caso B:** la situazione è opposta al caso A, per cui quello che accade è che le due orbite ora si allontanano

Tale comportamento si può più facilmente valutare osservando le figure che mostrano gli andamenti delle soluzioni ottenute, in termini in  $\Delta V$ , attraverso le 4 strategie adottate.

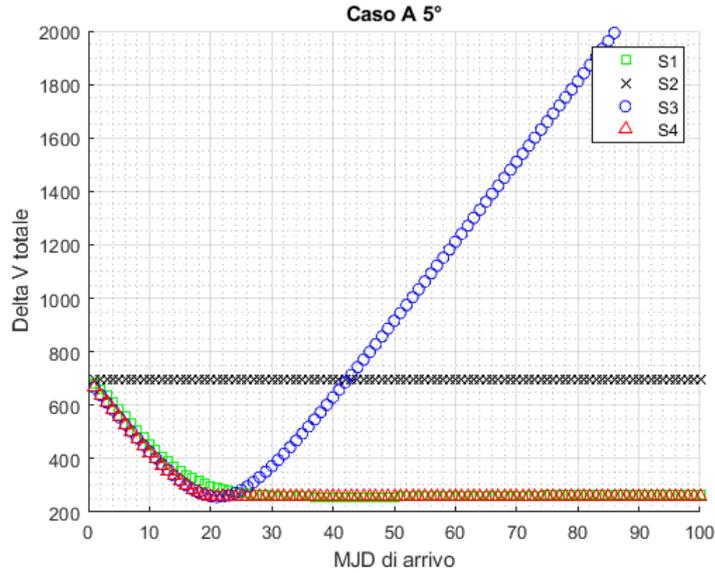


Figura 4.1: Caso A con  $\Omega_c = 5^\circ$

Dalla figura si evince che la S4 e la S1 sono pressoché simili tra di loro in termini di costo, mentre le soluzioni ottenute attraverso la S2 e la S3 risultano più onerose in termini di  $\Delta V$  nonostante siano leggermente meno costose delle altre due strategie per un breve intervallo temporale.

Analogamente, dalla Figura 4.2 si può osservare come le soluzioni, in termini di  $\Delta V$  totale, del caso  $\Omega_c = 10^\circ$  mostrino degli andamenti simili al caso  $\Omega_c = 5^\circ$ .

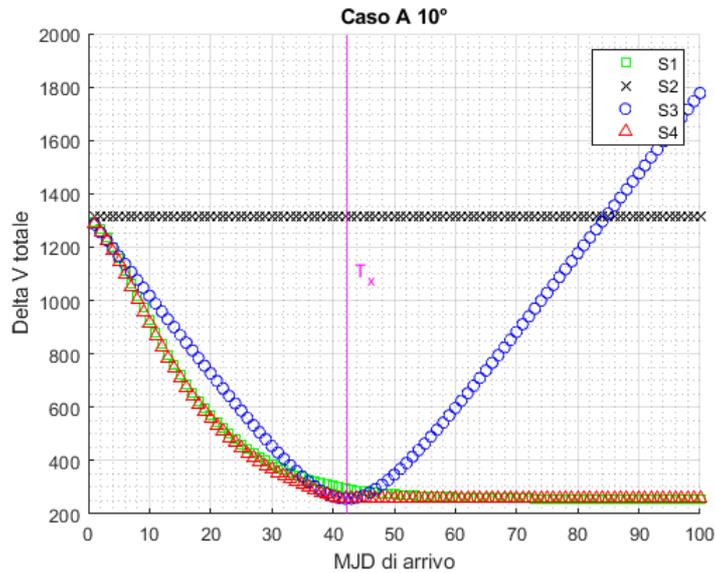


Figura 4.2: Caso A con  $\Omega_c = 10^\circ$

Come osservabile dalle figure, in entrambi i casi esiste un intervallo temporale nel quale la soluzione della S3 risulta migliore, in termini di  $\Delta V$  totale, della soluzione ottenuta attraverso la S1.

Questo intervallo temporale è situato nei dintorni di un tempo ben preciso, denominato  $T_x$  e definito dalla equazione 4.2:

$$T_x = \frac{\Omega_t - \Omega_c}{\dot{\Omega}_c - \dot{\Omega}_t} \quad (4.2)$$

Quest'ultimo è il tempo per cui i piani orbitali di chaser e target coincidono ed è per questo motivo che, per tempi che tendono al  $T_x$ , le soluzioni di tutte le strategie tendono al costo minimo.

Nella Tabella 4.4 vengono indicati i valori di  $T_x$  dei due casi valutati.

	$\Omega_c = 5^\circ$	$\Omega_c = 10^\circ$
$T_x$ [day]	21,16	42,32

Tabella 4.4:  $T_x$  Caso A

Tali valori trovano riscontro anche nella Figura 4.3 e nella Figura 4.4, in quanto si vede come le soluzioni tendano tutte ad un valore minimo e, in particolare, la soluzione ottenuta tramite la S3 diventa migliore rispetto alla soluzione ottenuta attraverso la S1.

Ovviamente, questo comportamento non si osserva con la S2, la quale rimane costante al variare della durata del trasferimento orbitale.

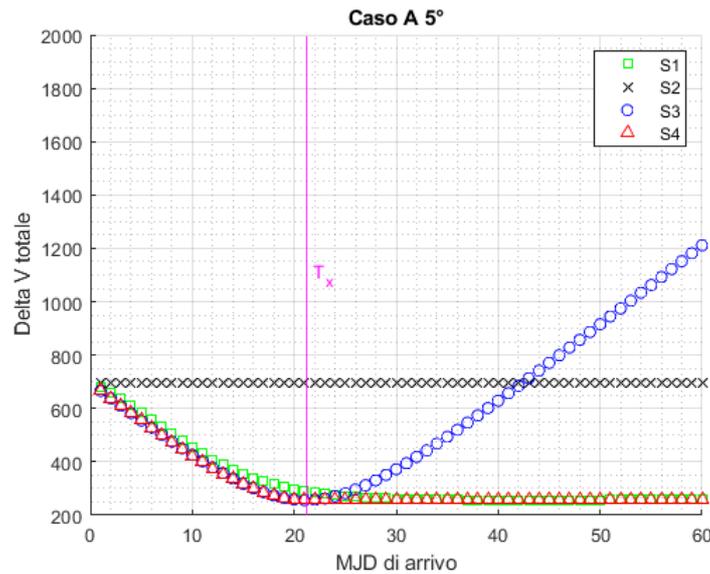


Figura 4.3: Zoom Caso A  $\Omega_c = 5^\circ$

Osservando le figure è possibile notare che l'intervallo temporale in cui la S3 è migliore della S1 è piuttosto breve. In particolare, per il caso A con  $\Omega = 5^\circ$ , l'intervallo si estende per circa 20 giorni: dal giorno 2 al giorno 24. Per quanto riguarda il caso A con  $\Omega_c = 10^\circ$  l'intervallo si estende per un periodo di 10 giorni:

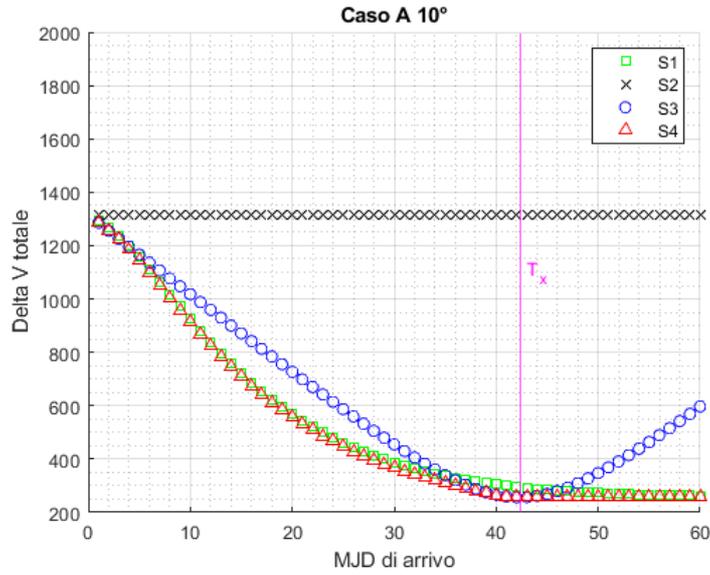


Figura 4.4: Zoom Caso A  $\Omega_c = 10^\circ$

dal giorno 36 al giorno 46.

Per quanto riguarda il caso B, la situazione è differente sia per quanto riguarda gli andamenti delle soluzioni in termini  $\Delta V$ , sia per quanto riguarda il tempo  $T_x$ .

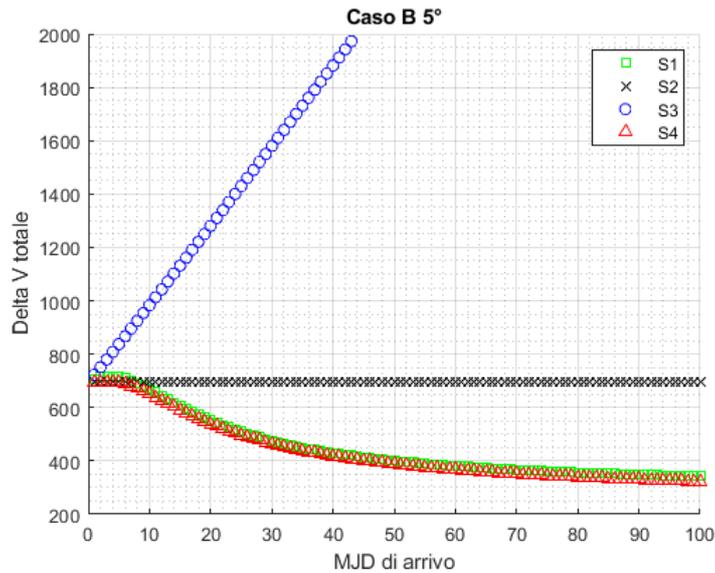


Figura 4.5: Caso B  $\Omega_t = 5^\circ$

Dalla figura si nota una netta differenza degli andamenti del  $\Delta V$  nel caso B rispetto agli andamenti nel caso A. Infatti, avendo ora delle orbite che si allontanano, si nota come le strategie adottate restituiscano delle soluzioni che sono, in linea di massima, più costose rispetto al caso A. La soluzione ottenuta attraverso la S3 risulta essere la più costosa delle 4 strategie adottate. La soluzione ottenuta attraverso la strategia S2 è anch'essa molto costosa in termini di  $\Delta V$  richiesto per

il completamento della manovra ma, a differenza della soluzione ottenuta attraverso la S3, potrebbe essere presa in considerazione in quanto, per un brevissimo intervallo temporale (dal giorno 1 al giorno 7), essa risulta essere meno costosa rispetto alla soluzione ottenuta attraverso la strategia S1. Questo accade perchè si ha poco tempo per sfruttare l'effetto della precessione nodale dovuta all'effetto dell'armonica J2 (che tiene conto della non perfetta sfericità della Terra), che è quanto si cerca di ottenere attraverso la S1.

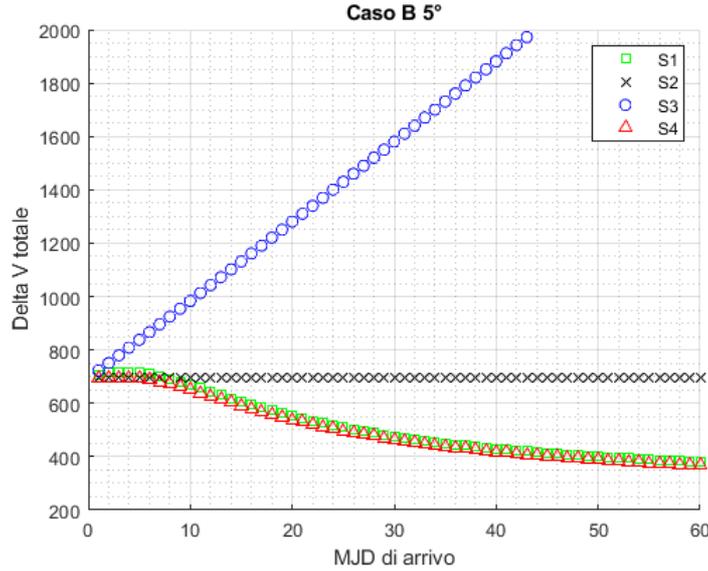


Figura 4.6: Zoom Caso B  $\Omega_t = 5^\circ$

Tale considerazione è maggiormente visibile nella Figura 4.6. Nella figura, inoltre, si può osservare come, nel caso B, al contrario di quanto visto nelle figure relative al caso A, non sia presente un intervallo temporale all'interno del quale le soluzioni ottenute attraverso le 4 strategie raggiungono un minimo. Questo avviene poiché, nel caso B, il  $T_x$  si verifica antecedentemente rispetto al tempo in cui si ha la partenza dal chaser ed è per questo motivo che nella figura non si riesce ad osservare un tempo in cui le soluzioni tendono al proprio minimo. Essendo però le soluzioni periodiche, si avrà un secondo  $T_x$  secondo la legge:

$$T_{x_2} = T_{x_1} + \frac{2\pi}{\dot{\Omega}_c - \dot{\Omega}_t} \quad (4.3)$$

Quindi, per poter osservare le soluzioni che tendono ad un costo minimo bisogna attendere un tempo pari  $T_{x_2}$ .

## 4.2 Missione con parametri orbitali variati

In questa missione, per semplicità di calcolo, è stata effettuata la simulazione per il solo caso  $\Omega = 5^\circ$ . Lo scopo di questa missione è analizzare e mostrare come variano le soluzioni ottenute, in termini di  $\Delta V$  totale richiesto per effettuare il trasferimento orbitale, e se e quando tali soluzioni raggiungono un minimo.

Parametri orbitali	Chaser	Target
Semiassse maggiore (km)	7181,53	7207,39
Inclinazione (deg)	96,67	98,64
Eccentricità	0,0083	0,0152

Tabella 4.5: Parametri orbitali caso semiassse aumentato

Parametri orbitali	Chaser	Target
Semiassse maggiore (km)	7181,53	7107,39
Inclinazione (deg)	96,67	98,64
Eccentricità	0,0083	0,0152

Tabella 4.6: Parametri orbitali caso semiassse diminuito

Si va a modificare dapprima il valore del semiassse maggiore dell'orbita target e successivamente il valore dell'inclinazione dell'orbita target. In particolare, partendo dai parametri orbitali invariati, mostrati nella Tabella 4.1, si ottengono i valori illustrati nelle Tabelle 4.5, 4.6 e 4.7. Analogamente alla missione senza variazioni dei parametri orbitali, anche in questo caso distingueremo tra:

- **Caso A:**  $\Omega_c = 5^\circ$  e  $\Omega_t = 0^\circ$
- **Caso B:**  $\Omega_c = 0^\circ$  e  $\Omega_t = 5^\circ$

Si è andati, quindi, a valutare l'andamento delle soluzioni ottenute in termini di  $\Delta V$  totale, confrontando le soluzioni di ogni strategia nei seguenti 4 casi:

1. *Parametri orbitali invariati*
2. *Semiassse maggiore orbita target aumentato di 50 km*
3. *Semiassse maggiore orbita target diminuito di 50 km*
4. *Inclinazione orbita target aumentata di  $0.5^\circ$*

Dalle figure si può osservare che gli andamenti delle soluzioni sono del tutto analoghe agli andamenti delle soluzioni dei casi precedentemente mostrati. Tuttavia, si evince un diverso comportamento delle soluzioni al variare dei parametri orbitali dell'orbita target. In particolare, si nota quanto segue:

- Quando si va ad incrementare l'inclinazione dell'orbita target, si osserva un incremento del costo necessario al trasferimento orbitale. Questo comportamento è dovuto al fatto che il  $\Delta i$  richiesto ora è maggiore, influenzando, perciò, direttamente sul  $\Delta V$  totale necessario al completamento della manovra.

Parametri Orbitali	Chaser	Target
Semiassse maggiore (km)	7181,53	7157,39
Inclinazione (deg)	96,67	99,14
Eccentricità	0,0083	0.0152

Tabella 4.7: Parametri orbitali caso inclinazione variata

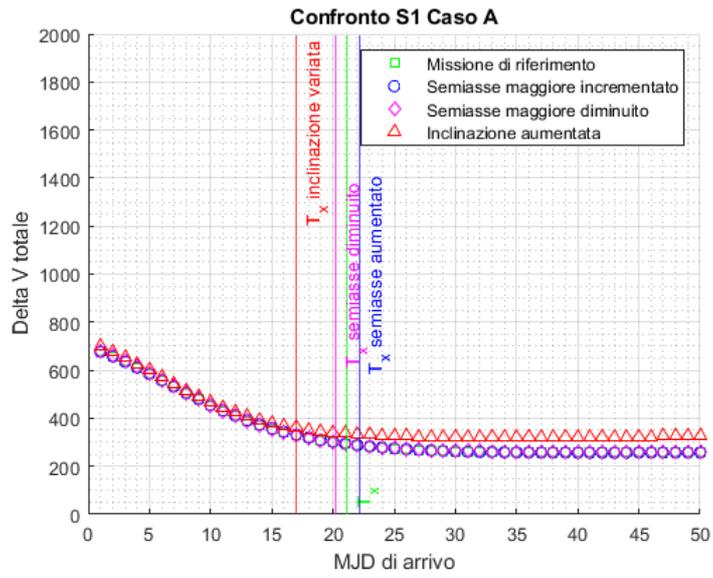


Figura 4.7: Zoom S1 caso A

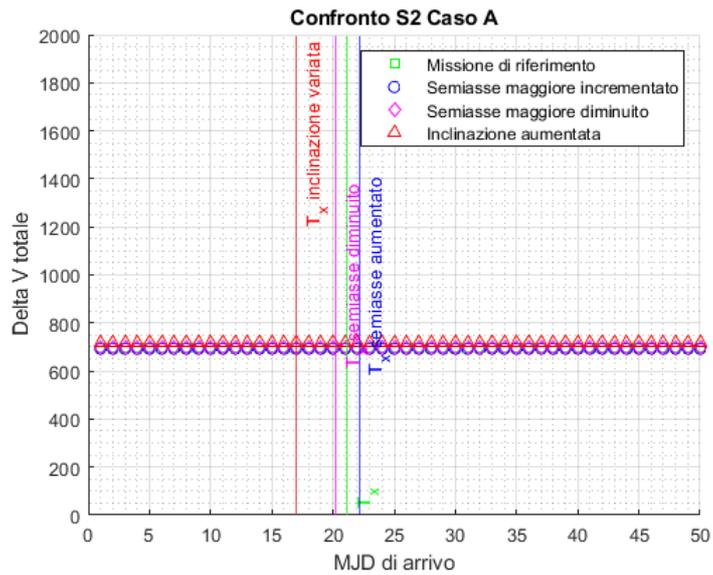


Figura 4.8: Zoom S2 caso A

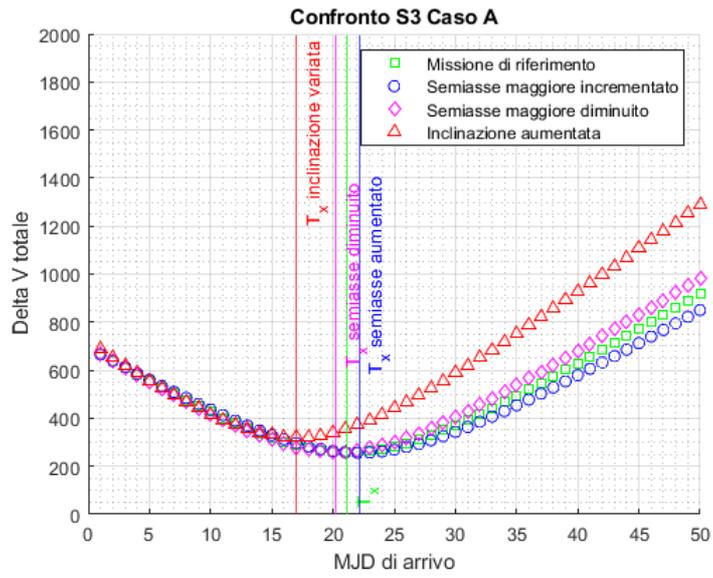


Figura 4.9: Zoom S3 caso A

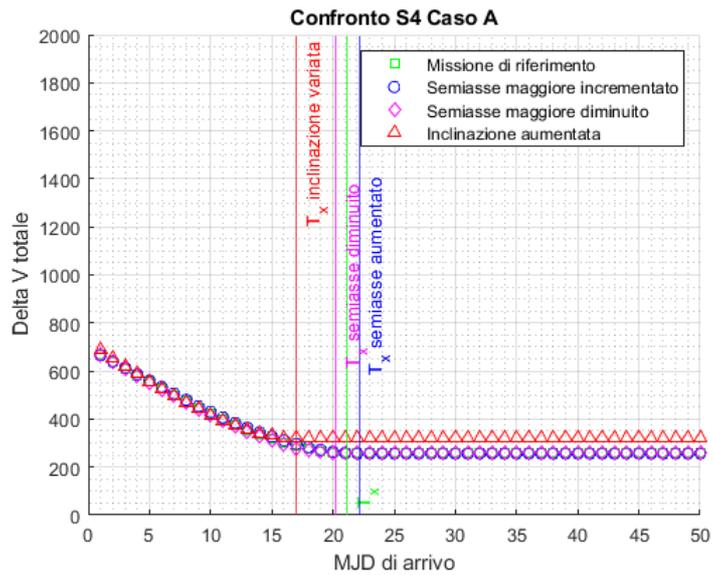


Figura 4.10: Zoom S4 caso A

- Quando si va ad incrementare il semiasse maggiore dell'orbita target, si osserva una diminuzione del costo necessario al trasferimento orbitale.
- Quando si va a diminuire il semiasse maggiore dell'orbita target, si osserva un aumento del costo necessario al trasferimento orbitale.

Ciò che è interessante osservare, è come variano i tempi  $T_x$  variando i parametri orbitali dell'orbita e, soprattutto, osservare se e come le soluzioni ricavate raggiungono il proprio valore minimo in termini di costo  $\Delta V$ .

Osservando l'Equazione 4.2 non si nota alcuna dipendenza dai valori di semiasse maggiore e/o inclinazione dell'orbita. Perciò, si potrebbe, erroneamente, ipotizzare che i valori di  $T_x$  siano rimasti invariati rispetto ai casi A e B precedentemente studiati. In realtà, questa assunzione è errata in quanto esiste una dipendenza dai valori di semiasse maggiore ed inclinazione tramite i valori di RAAN Rate attraverso l'Eq. 4.1.

Nella Tabella 4.8 vengono illustrati i valori di  $T_x$ :

	$T_x$ (day)
Parametri invariati	21,15
Semiasse aumentato	22,13
Semiasse diminuito	20,25
Inclinazione aumentata	17,02

Tabella 4.8:  $T_x$  al variare dei parametri orbitali caso A

Analogamente a quanto visto nei casi A e B precedentemente studiati, si possono osservare degli intervalli temporali per cui le soluzioni tendono ad un valore minimo e la S3 diventa meno costosa della S1.

Di nuovo, tale osservazione non trova riscontro per quanto riguarda le soluzioni ottenute attraverso la S2, le quali rimangono costanti e non mostrano alcuna dipendenza dal  $T_x$ .

Dalle figure si nota come gli andamenti siano molto simili tra di loro, differenziandosi in base al tempo  $T_x$  e in base all'intervallo temporale in cui le soluzioni raggiungono il minimo.

In generale, si può osservare che il caso in cui si va ad aumentare l'inclinazione dell'orbita target è quello che viene maggiormente modificato sia dal punto di vista dei costi sia dal punto di vista dell'intervallo temporale per cui si raggiunge il costo minimo. Infatti, nonostante la soluzione a costo minimo venga raggiunta con circa 4 giorni di anticipo rispetto alla missione senza variazioni di parametri orbitali, tale soluzione presenta dei valori di  $\Delta V$  totali maggiori, come anche evidenziato nelle Figure 4.7, 4.9 e 4.10.

I casi in cui si va a modificare il semiasse maggiore dell'orbita target, aumentandolo o diminuendolo dello stesso valore, subiscono delle modifiche minori rispetto al caso appena descritto sopra.

Prima di poter analizzare il comportamento delle soluzioni ricavate, bisogna fare una breve digressione sui valori che compongono il  $\Delta V$ . In particolare, esso è legato a 3 parametri:

- $x$  rappresenta la variazione di velocità legata al cambio del RAAN  $\Omega$

$$x = (\Omega_t - \Omega_c) \cdot \sin(i_0) \cdot v_0 \quad (4.4)$$

- $y$  rappresenta la variazione di velocità legata al cambio di semiasse maggiore dell'orbita

$$y = \frac{a_t - a_c}{2a_0} \cdot v_0 \quad (4.5)$$

- $z$  rappresenta la variazione di velocità legata al cambio di inclinazione dell'orbita

$$z = (i_t - i_c) \cdot v_0 \quad (4.6)$$

dove

$$\begin{cases} i_0 = \frac{i_t + i_c}{2} \\ a_0 = \frac{a_t + a_c}{2} \\ v_0 = \sqrt{\frac{\mu}{a_0}} \end{cases}$$

Sulla base di quanto appena detto, si è osservato che nel caso in cui si aumenta il semiasse maggiore dell'orbita target, il  $\Delta V$  totale richiesto risulta essere minore. Questo avviene poiché all'aumentare di  $a_t$ , il  $v_0$  diminuisce portando ad un aumento di  $y$ . Nonostante tale valore subisca un aumento i valori di  $x$  e  $z$  diminuiscono, contrastando l'incremento di  $y$  e portando il  $\Delta V$  complessivo a diminuire. Al contrario, nel caso in cui si va a diminuire il semiasse maggiore dell'orbita target si osserva un aumento del  $\Delta V$  totale richiesto. Questo accade perchè diminuendo  $a_t$ , il  $v_0$  aumenta portando come conseguenza ad un aumento di  $x$ ,  $y$  e  $z$ , che risultano, a loro volta, in un aumento del  $\Delta V$  totale.

Per quanto riguarda i casi B, ovvero i casi in cui si ha  $\Omega_c = 0^\circ$  e  $\Omega_t = 5^\circ$ , si

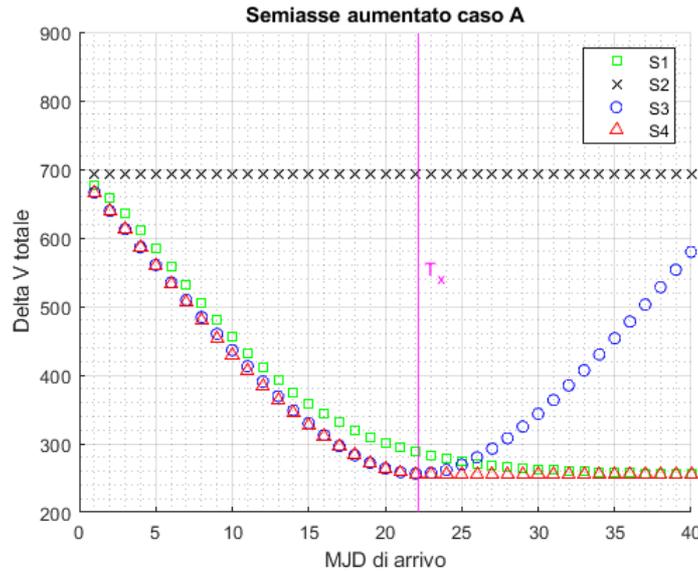


Figura 4.11: Confronto strategie semiasse aumentato caso A

osservano andamenti del  $\Delta V$  analoghi al caso B studiato in precedenza. Anche in questo caso, invertendo i valori di RAAN, si ricade nel caso in cui le orbite si stanno allontanando, portando ad aumentare il valore di  $\Delta V$  richiesto. Discorso analogo per il  $T_x$  e l'intervallo temporale in cui si ottiene il minimo delle soluzioni. Nelle figure seguenti si può osservare che il  $T_x$  è antecedente rispetto al tempo in cui si ha la partenza dal chaser verso il target e che non c'è un intervallo temporale all'interno del quale le soluzioni raggiungano il proprio valore minimo.

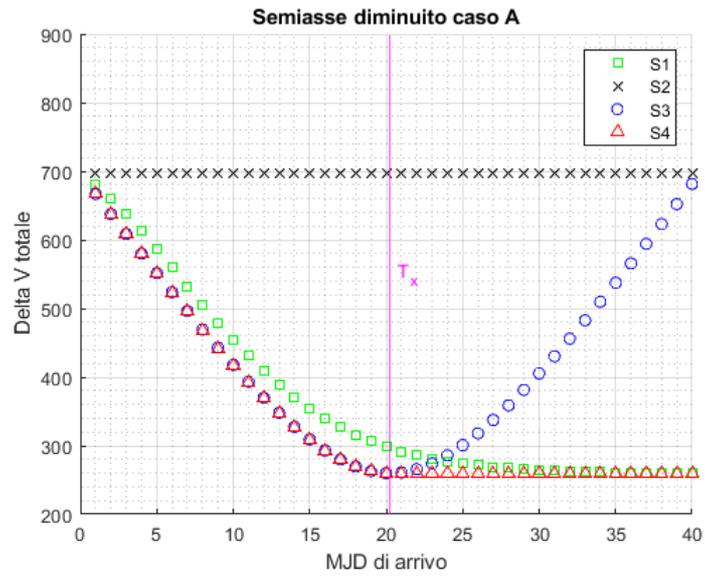


Figura 4.12: Confronto strategie semiassi diminuito caso A

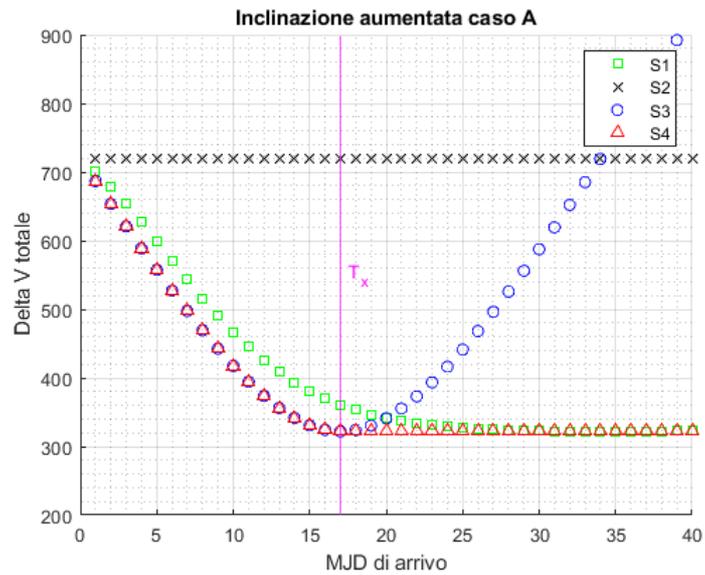


Figura 4.13: Confronto strategie inclinazione aumentata caso A

Per tempi brevi, la soluzione ottenuta attraverso la S2 risulta meno costosa rispetto alla soluzione ottenuta tramite la S1. Questo avviene poiché per tempi brevi, non si riesce a sfruttare al meglio l'effetto della precessione nodale dovuta all'effetto dell'armonica J2, che è ciò che si cerca di ottenere tramite la S1.

Inoltre, dalle figure si può facilmente osservare come, anche variando i parametri

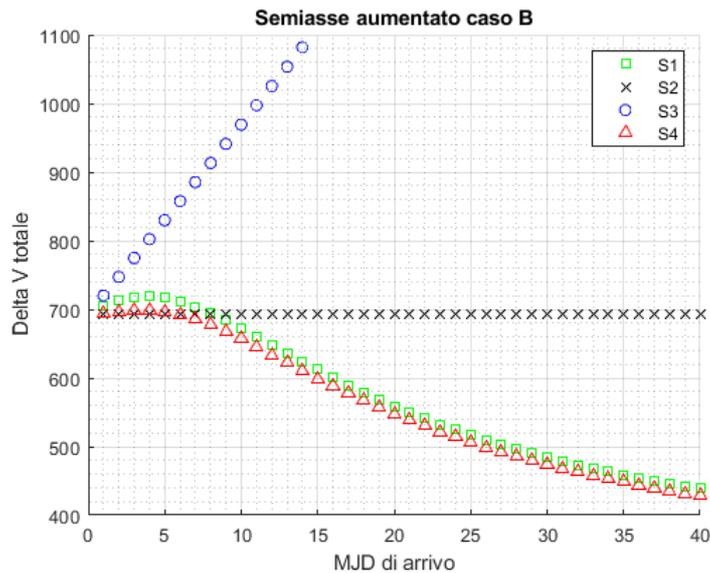


Figura 4.14: Confronto strategie semiasse aumentato caso B

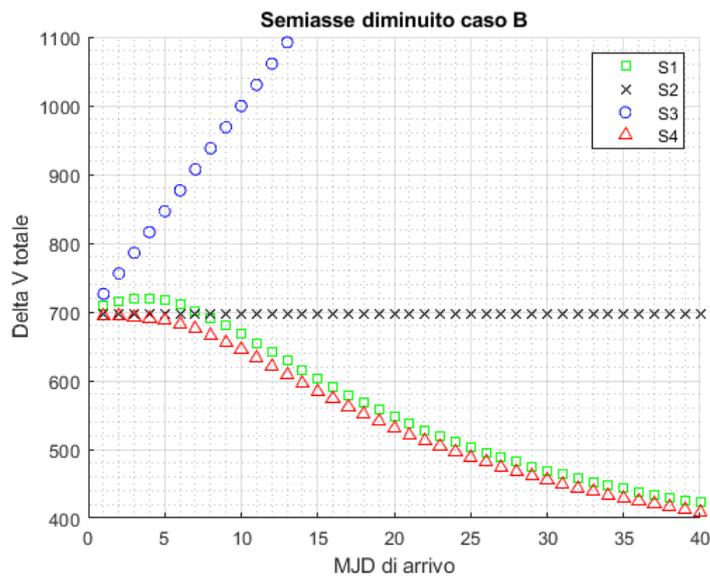


Figura 4.15: Confronto strategie semiasse diminuito caso B

orbitali, le soluzioni ottenute attraverso la strategia S3 nel caso B risultino le più onerose in termini di  $\Delta V$ .

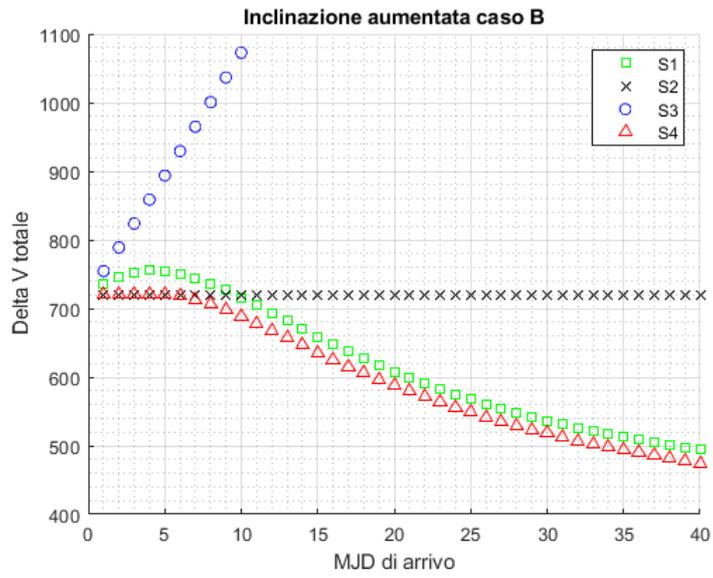


Figura 4.16: Confronto strategie inclinazione variata caso B

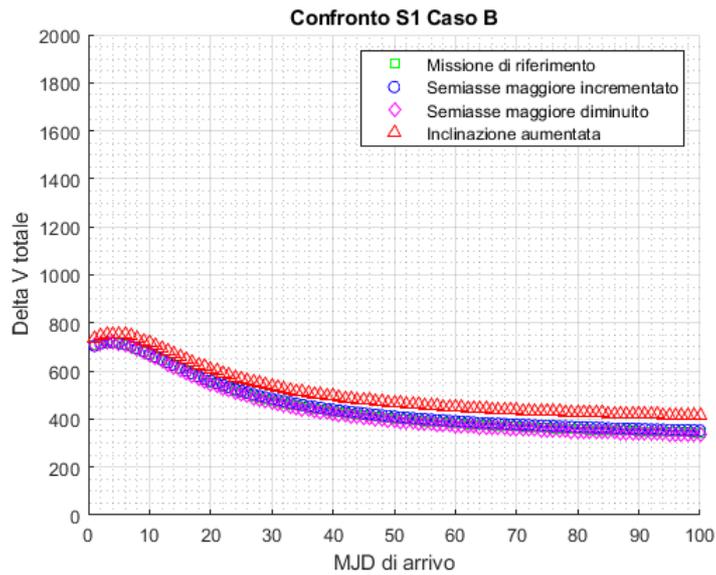


Figura 4.17: S1 Caso B

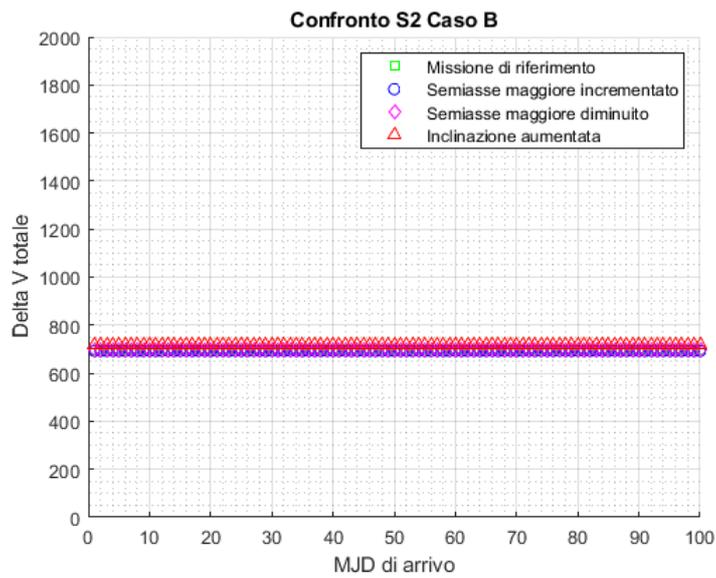


Figura 4.18: S2 Caso B

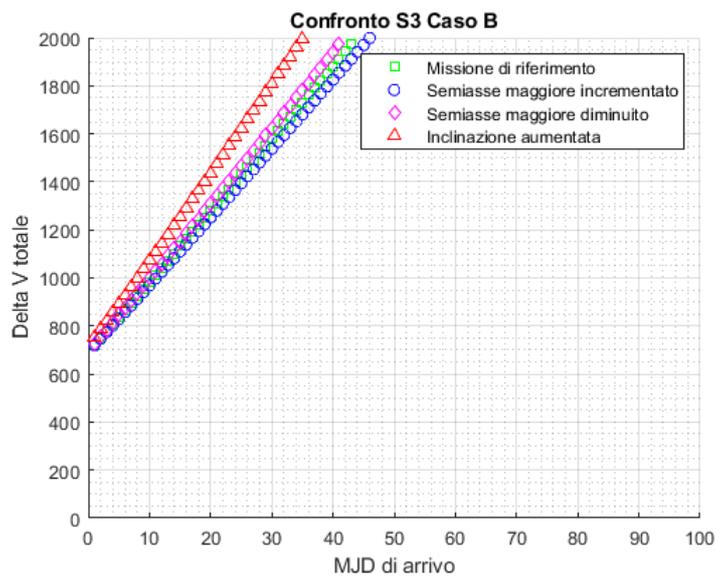


Figura 4.19: S3 Caso B

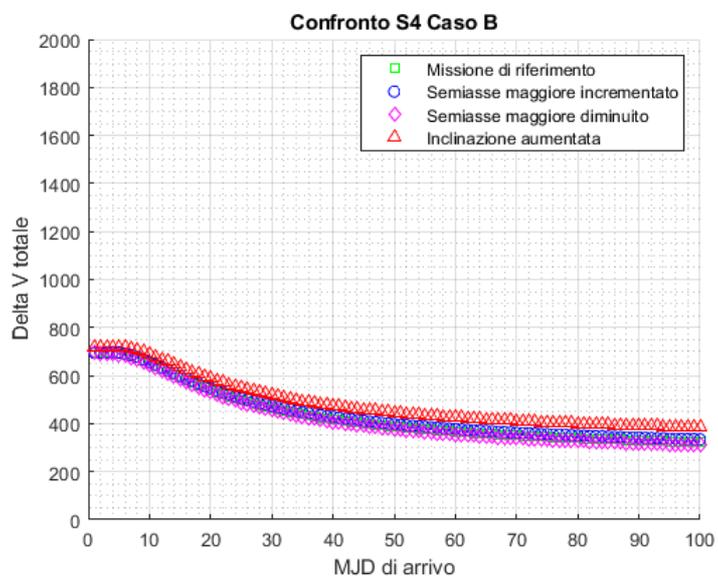


Figura 4.20: S4 Caso B

## Capitolo 5

# Conclusioni

La trattazione di questo lavoro di tesi ha avuto come obiettivo l'approssimazione analitica di manovre in orbita bassa terrestre (LEO) per la rimozione di detriti spaziali, quali componenti di razzi usati rimasti in orbita oppure vecchi satelliti ormai non operativi.

Iniziando da una breve descrizione del problema dei debris spaziali ed un breve cenno al concetto di parametri orbitali ed alle perturbazioni di questi ultimi, si è proseguito con la definizione del modello matematico adottato fino ad arrivare alla descrizione dei risultati ottenuti attraverso le 4 strategie adottate.

Ciò che si è osservato è innanzitutto un diverso andamento delle soluzioni tra il caso A ed il caso B studiati. Infatti, mentre nel caso A le soluzioni raggiungono i propri minimi intorno a valori di circa  $250 \text{ m/s}$ , nel caso B i valori minimi delle soluzioni si aggirano intorno a valori di circa  $400 \text{ m/s}$ , salvo il caso della strategia S2. Questo diverso andamento dipende dai valori di  $\Omega$  e  $\dot{\Omega}$  dei due detriti, che fanno sì che nel caso B le orbite si allontanino l'una dall'altra, aumentando di conseguenza i costi in termini di  $\Delta V$ .

In generale, si è osservato che le strategie S1 e S4 sono molto simili tra di loro, rendendo vera l'assunzione fatta in precedenza per cui si può ricavare il minimo di  $\Delta V_A + \Delta V_B$  attraverso un'approssimazione.

Le strategie S2 e S3, invece, risultano essere quelle più costose in termini di  $\Delta V$  poichè, utilizzando un solo impulso per fornire il  $\Delta V$  richiesto per la manovra di trasferimento orbitale, si ha meno tempo per sfruttare la precessione nodale dovuta all'effetto dell'armonica  $J_2$ . Tuttavia, come visto in precedenza, per un brevissimo intervallo temporale, la S2 diventa migliore della S1 nel caso in cui si stiano considerando orbite che si allontanano mentre la S3 diventa migliore della S1 nel caso in cui si stiano considerando orbite che si avvicinano.

Infine, nel capitolo 4.2 sono stati mostrati gli andamenti delle soluzioni delle diverse strategie in seguito alla variazione di alcuni parametri orbitali (semiasse maggiore  $a$  oppure inclinazione  $i$ ) dell'orbita del debris di arrivo. Ciò che si è osservato è che il caso in cui si aumenta il semiasse maggiore dell'orbita target vede, paradossalmente, una diminuzione dei costi  $\Delta V$  mentre tutti gli altri casi studiati hanno mostrato, complessivamente, un aumento dei costi in termini di  $\Delta V$  richiesto per completare la manovra di trasferimento orbitale.

## 5.1 Possibili sviluppi futuri

Guardando agli sviluppi tecnologici che si stanno continuamente facendo in campo spaziale, diventa sempre più fondamentale lo sviluppo di missioni di *Active Debris Removal*.

Pertanto, dei possibili sviluppi di questo lavoro di tesi potrebbero essere:

- Adottare un modello matematico che rifletta in modo più realistico la dinamica spaziale. In particolare, si potrebbero considerare corpi orbitanti su orbite ellittiche e non più circolari, in modo da avere soluzioni più aderenti alla realtà. Inoltre, si dovrebbero tenere in considerazione anche i parametri orbitali dell'eccentricità  $e$  e l'argomento del periastro  $\omega$ , rendendo il problema più complesso.
- Rinunciare all'ipotesi di assenza della resistenza aerodinamica, che tenderebbe a far variare i valori del semiasse maggiore  $a$  e dell'inclinazione  $i$  delle orbite durante la manovra di trasferimento orbitale.

# Bibliografia

- [1] Hong-Xin Shen, Lorenzo Casalino *Simple  $\Delta V$  Approximation for Optimization of Debris-to-Debris Removal*
- [2] Roger R. Bate, Donald D. Mueller, Jerry E. White *Fundamentals of Astrodynamics*
- [3] Donald J. Kessler, Nicholas L. Johnson, J.-C. Liou, Mark Matney *The Kessler Syndrome: Implications to Future Space operations*
- [4] Robin Biesbrock, Sarmad Aziz, Andrew Wolahan, Stefano Cipolla, Muriel Richard-Noca, Luc Piguet *The ClearSpace-1 Mission: ESA and ClearSpace team up to remove debris*