

# POLITECNICO DI TORINO

Corso di Laurea Magistrale in Ingegneria Aerospaziale



Tesi di Laurea Magistrale

## Analisi delle condizioni di ottimo per traiettorie spaziali con discontinuità di spinta

**Relatore**

Prof. L. Casalino

**Candidata**

Chiara Feola

S277937

Anno Accademico 2021/2022



## Sommario

Lo scopo di questa tesi è quello di valutare, tramite l'utilizzo di metodi indiretti, le condizioni di ottimo per traiettorie spaziali con discontinuità di spinta dovute a potenza disponibile e a duty cycle. Come caso di studio si considera una missione interplanetaria verso l'asteroide 433 Eros.

L'ottimizzazione è fondamentale nell'ambito delle traiettorie spaziali in quanto permette di minimizzare un particolare indice di prestazione (ad esempio il consumo di propellente o il tempo) rispettando al contempo una serie di vincoli. In questa tesi, viene utilizzato un metodo indiretto per determinare la ripartizione ottimale della potenza e della corrispondente spinta durante la missione. I metodi indiretti si basano sulla teoria del controllo ottimale e sono noti per fornire risultati con elevata precisione in tempi di calcolo ridotti.

Per il tipo di missione considerato si impiega un sistema di propulsione elettrico per via del suo minor consumo rispetto alla propulsione chimica. Il sistema è costituito da un propulsore con potenza massima in ingresso di 13.95kW e minima di 8kW, regolabile in modulo e direzione di spinta. La spinta e la portata di propellente dipendono dalla potenza in ingresso, per cui tra queste grandezze si ipotizza una relazione cubica.

Nei seguenti capitoli verranno analizzati diversi casi di studio. In primo luogo, verrà condotta l'ottimizzazione di una missione breve. Dopodiché, considerando la stessa missione, l'utilizzo della spinta verrà ridotto al 70% per migliorare il controllo della navigazione negli ultimi 15 e 30 giorni. Inoltre, verrà esaminato l'effetto di un aumento della potenza minima, da 8kW a 9kW, sia nel caso di missione breve che di missione di lunga durata. Infine, per ogni missione, i risultati ottenuti con l'ottimizzazione saranno confrontati con il caso di studio reale.





# Indice

<b>Elenco delle tabelle</b>	v
<b>Elenco delle figure</b>	vi
<b>Acronimi</b>	ix
<b>1 Definizioni e Fondamenti di propulsione spaziale</b>	<b>3</b>
1.1 Valutazione della Spinta . . . . .	4
1.2 Prestazioni . . . . .	5
1.3 Equazione di Tsiolkovsky . . . . .	6
1.4 Perdite di Velocità . . . . .	8
1.4.1 Perdite per disallineamento . . . . .	9
1.4.2 Perdite per resistenza . . . . .	9
1.4.3 Perdite per gravità . . . . .	9
<b>2 Propulsione Elettrica</b>	<b>11</b>
2.1 Confronto propulsione chimica ed elettrica . . . . .	12
2.2 Classificazione Propulsori Elettrici . . . . .	14
2.3 Propulsione solare elettrica . . . . .	14
2.3.1 Tipologie di Propulsori . . . . .	15
2.3.2 Applicazioni . . . . .	17
<b>3 Elementi di Meccanica Orbitale</b>	<b>18</b>
3.1 Problema degli N-corpi . . . . .	18
3.2 Problema dei due corpi . . . . .	20
3.2.1 Equazione del moto dei due corpi . . . . .	20
3.2.2 Equazione della traiettoria . . . . .	21
3.3 Parametri orbitali . . . . .	21
3.4 Costanti del moto . . . . .	24
3.4.1 Conservazione dell'energia meccanica specifica . . . . .	24
3.4.2 Conservazione del momento angolare specifico . . . . .	25

3.4.3	Relazioni tra $(\mathcal{E},h)$ e geometria dell'orbita . . . . .	25
3.5	Trasferte Interplanetarie . . . . .	26
<b>4</b>	<b>Ottimizzazione di Traiettorie Spaziali</b>	<b>29</b>
4.1	Introduzione al problema di ottimizzazione . . . . .	29
4.1.1	Processo di ottimizzazione . . . . .	29
4.1.2	Metodi numerici . . . . .	30
4.2	Metodi Indiretti . . . . .	32
4.2.1	Teoria del controllo ottimale . . . . .	33
4.2.2	Problema differenziale ai limiti . . . . .	38
<b>5</b>	<b>Presentazione del problema</b>	<b>43</b>
5.1	Modello Matematico . . . . .	43
5.2	Assunzioni sul sistema . . . . .	44
5.3	Approccio indiretto . . . . .	44
5.4	Casi di studio . . . . .	46
<b>6</b>	<b>Risultati</b>	<b>48</b>
6.1	Asteroide (433) Eros . . . . .	48
6.2	Missione Breve Durata . . . . .	50
6.2.1	Vincolo $P_{min} = 8kW$ . . . . .	50
6.2.2	Riduzione duty cycle ultimi giorni di missione . . . . .	55
6.3	Vincolo $P_{min} = 9kW$ . . . . .	62
6.3.1	Missione Breve Durata . . . . .	62
6.3.2	Missione Lunga Durata . . . . .	70
<b>7</b>	<b>Conclusioni</b>	<b>80</b>
<b>A</b>	<b>Manovre Orbitali</b>	<b>82</b>
A.1	Trasferta di Hohmann . . . . .	82
A.2	Manovre a bassa spinta: approssimazione di Edelbaum . . . . .	84
<b>B</b>	<b>Equazioni in coordinate sferiche</b>	<b>87</b>
	<b>Bibliografia</b>	<b>91</b>

# Elenco delle tabelle

1.1	Valori tipici del $\Delta V$ per diverse missioni [1] . . . . .	7
3.1	Proprietà dei diversi tipi di orbite . . . . .	25
5.1	Casi di studio . . . . .	47
6.1	Parametri orbitali Terra (epoca J2000 [13]) e 433 Eros (epoca all'epoca JD 2455000,5 [14]) . . . . .	49
6.2	Tempi Missione . . . . .	50
6.3	Tempi di inizio e fine coasting . . . . .	51
6.4	Confronto masse finali $P_{min} = 8kW$ . . . . .	54
6.5	Tempi Missione . . . . .	55
6.6	Tempi di inizio e fine coasting $D\% = 90\%$ vs $D\% = 70\%$ . . . . .	55
6.7	Tempi di inizio e fine coasting $D\% = 70\%$ 15 giorni prima dell'arrivo a Eros . . . . .	58
6.8	Tempi di inizio e fine coasting $D\% = 70\%$ 30 giorni prima dell'arrivo a Eros . . . . .	58
6.9	Confronto masse finali $D\%=90\%$ e $D\%=70\%$ . . . . .	59
6.10	Tempi Missione . . . . .	62
6.11	Tempi di spegnimento e accensione del motore $P_{min} = 8kW$ . . . . .	64
6.12	Tempi di spegnimento e accensione del motore $P_{min} = 9kW$ . . . . .	64
6.13	Confronto masse finali $P_{min} = 8kW$ e $P_{min} = 9kW$ . . . . .	64
6.14	Tempi Missione . . . . .	70
6.15	Tempi di spegnimento e accensione del motore caso $P_{min} = 8kW$ . . . . .	71
6.16	Tempi di spegnimento e accensione del motore caso $P_{min} = 9kW$ . . . . .	76
6.17	Confronto masse finali $P_{min} = 8kW$ e $P_{min} = 9kW$ . . . . .	77

# Elenco delle figure

1.1	Sistema all'istante $t$ e all'istante $t + dt$ . . . . .	5
1.2	Forze agenti sul sistema [1] . . . . .	8
2.1	Hall Effect Rocket with Magnetic Shielding (HERMeS) thruster [2]	12
2.2	Prestazioni dei diversi propulsori elettrici [3] . . . . .	14
2.3	Rappresentazione Deep Space 1 [4] . . . . .	15
2.4	Schema di un propulsore a ioni (a) e ad effetto Hall (b) . . . . .	16
3.1	Problema N-corpi [5] . . . . .	19
3.2	Problema dei due corpi [5] . . . . .	21
3.3	Parametri Orbitali [7] . . . . .	23
4.1	Processo di ottimizzazione delle traiettorie spaziali [8] . . . . .	31
4.2	Algoritmo metodi shooting diretti e indiretti [8] . . . . .	32
5.1	Andamenti spinta e della portata di propellente in funzione della potenza (a) e potenza in funzione della distanza dal Sole (b) . . . .	45
6.1	433 Eros fotografato dalla sonda NEAR Shoemaker . . . . .	48
6.2	Traiettoria in 2D e in 3D durata 698 giorni . . . . .	50
6.3	Andamento parametri orbitali casi '0' e 'ottimo' $P_{min} = 8kW$ . . . .	51
6.4	Confronto andamenti potenze, spinte e raggi casi '0' e 'ottimo' $P_{min} =$ $8kW$ . . . . .	52
6.5	Confronto andamenti raggi casi '0' e 'ottimo' $P_{min} = 8kW$ al perielio (a) e all'afelio (b) . . . . .	53
6.6	Andamento parametri orbitali e massa $D\% = 70\%$ vs $D\% = 90\%$ . .	56
6.7	Confronto potenze, spinte e raggi $D\% = 90\%$ vs $D\% = 70\%$ . . . .	57
6.8	Confronto andamento vettore spinta 2D . . . . .	59
6.9	Confronto andamenti potenze, spinte e raggi casi '0' e 'ottimo' $D\% =$ $70\%$ vs $D\% = 90\%$ . . . . .	60
6.10	Confronto andamenti raggi al perielio (a) e all'afelio (b) casi '0'e 'ottimo' $D\% = 70\%$ vs $D\% = 90\%$ . . . . .	61

6.11	Confronto andamenti parametri orbitali casi '0' e 'ottimo' $D\% = 70\%$ vs $D\% = 90\%$ . . . . .	61
6.12	Traiettoria 2D e 3D durata 756 giorni . . . . .	62
6.13	Confronto andamenti potenze, spinte e raggi casi '0' e 'ottimo' $P_{min} = 8kW$ . . . . .	65
6.14	Confronto andamenti potenze,spinte e raggi casi '0' e 'ottimo' $P_{min} = 9kW$ . . . . .	66
6.15	Confronto andamenti delle masse $P_{min} = 8kW$ e $P_{min} = 9kW$ . . . . .	67
6.16	Confronto andamenti potenze, spinte e raggi casi ottimi $P_{min} = 8kW$ vs $P_{min} = 9kW$ . . . . .	68
6.17	Confronto andamenti raggi al perielio (a) e all'afelio (b) casi '0'e 'ottimo' $P_{min} = 8kW$ vs $P_{min} = 9kW$ . . . . .	69
6.18	Confronto andamenti parametri orbitali $P_{min} = 8kW$ vs $P_{min} = 9kW$ . . . . .	69
6.19	Andamenti vettore spinta lungo la traiettoria 2D $P_{min} = 8kW$ e $P_{min} = 9kW$ . . . . .	70
6.20	Traiettoria 2D e 3D durata 1279 giorni . . . . .	71
6.21	Confronto andamenti potenze, spinte e raggi casi '0' e 'ottimo' $P_{min} = 8kW$ . . . . .	72
6.22	Confronto andamenti spinte e raggi caso '0' e 'ottimo' $P_{min} = 9kW$ . . . . .	73
6.23	Confronto andamento potenze, spinte e raggi $P_{min} = 8kW$ vs $P_{min} = 9kW$ . . . . .	74
6.24	Confronto andamenti raggi al primo passaggio al perielio (a) e all'afelio (b) casi '0' e 'ottimo' $P_{min} = 8kW$ vs $P_{min} = 8kW$ . . . . .	75
6.25	Confronto andamenti raggi al secondo passaggio al perielio (a) e all'afelio (b) casi '0' e 'ottimo' $P_{min} = 8kW$ vs $P_{min} = 8kW$ . . . . .	75
6.26	Confronto andamento vettore spinta lungo la traiettoria 2D $P_{min} = 8kW$ e $P_{min} = 9kW$ . . . . .	78
6.27	Confronto andamenti parametri orbitali e massa $P_{min} = 8kW$ vs $P_{min} = 9kW$ . . . . .	79
A.1	Trasferta di Hohmann . . . . .	84
B.1	Sistema di Coordinate sferiche . . . . .	88



# Acronimi

**SEP**

Solar Electric Propulsion

**NLP**

Non Linear Programming

**BVP**

Boundary Value Problem

**PMP**

Pontryagin's Maximum Principle

**SF**

Switching Function

**EOF**

End of Life

**NEA**

Near Earth Asteroid

# Introduzione

Il rinnovato interesse per le missioni interplanetarie ha dato forte impulso alla ricerca di sistemi di propulsione innovativi ed efficienti per missioni di lunga durata. In tale contesto, la propulsione elettrica rappresenta attualmente la tecnologia più promettente. I suoi elevati impulsi specifici la rendono un'alternativa valida e conveniente alla propulsione chimica; tuttavia, a causa delle basse spinte che la caratterizzano, i tempi di missione richiesti sono molto lunghi.

L'esigenza di ottimizzare parametri di missione fondamentali come la durata e il consumo ha portato alla formulazione dei problemi di ottimizzazione. Generalmente, l'ottimizzazione delle traiettorie a bassa spinta viene formulata come un problema di controllo ottimale, il quale consente di determinare la legge di controllo ottimale che minimizza o massimizza un determinato indice di prestazione, rispettando al contempo i vincoli di missione imposti.

I propulsori elettrici hanno due modalità di funzionamento, *thrusting* e *coasting*, che possono determinare un comportamento discontinuo del sistema.

L'obiettivo di questo lavoro è quello di analizzare le condizioni ottimali per traiettorie spaziali in presenza di tali discontinuità. In particolare, vengono prese in considerazione due condizioni:

- **Potenza disponibile inferiore alla potenza minima del propulsore:** determina lo spegnimento del propulsore. Considerando un sistema di propulsione solare elettrica, questa condizione si verifica quando lo spacecraft raggiunge una determinata distanza dal Sole;
- **Riduzione del duty cycle nella fase finale della missione:** determina una diminuzione dell'utilizzo della spinta al fine di migliorare il controllo della navigazione.

Verranno valutati gli effetti di un aumento della potenza minima (da 8kW a 9kW) e di una riduzione del duty cycle (dal 90% al 70%) negli ultimi 15 e 30 giorni di missione.

In questo lavoro, per l'ottimizzazione si applicherà un approccio indiretto in quanto garantisce un'elevata precisione ed un minor costo computazionale rispetto ai metodi diretti. Nei metodi indiretti il problema del controllo ottimale viene trasformato

in un problema ai valori al contorno. Per la risoluzione del problema viene utilizzata una procedura iterativa implementata in Fortran che consente di determinare i valori iniziali delle variabili che soddisfano le condizioni al contorno, integrando numericamente le equazioni del sistema differenziale.

L'analisi verrà effettuata per una missione interplanetaria verso l'asteroide (433) Eros, di cui verrà esaminata solo la fase eliocentrica. Per l'analisi preliminare, si farà riferimento all'approssimazione delle coniche raccordate e alle equazioni del problema dei due corpi. Lo spacecraft è dotato di un sistema di Solar Electric Propulsion (SEP) che si basa sull'utilizzo combinato di pannelli solari e di un propulsore elettrico ad effetto Hall. La spinta e la portata di propellente del propulsore sono legate alla potenza in input da relazioni cubiche.

La tesi è strutturata in 7 capitoli. Il capitolo 1 fornisce una panoramica generale sulle definizioni e sui principi base della propulsione spaziale, mentre nel capitolo 2 si focalizza l'attenzione sulla propulsione elettrica e sui sistemi SEP.

Nel capitolo 3 vengono delineati alcuni concetti di meccanica orbitale utili a comprendere la fisica del problema, come il modello dei 2-corpi e l'approssimazione delle coniche raccordate.

Il capitolo 4 introduce il problema di ottimizzazione illustrandone: il processo di risoluzione, i possibili tipi di approccio e relativi metodi numerici.

Nel capitolo 5 vengono presentati il modello matematico e le assunzioni su cui si basa il problema ed i casi di studio che verranno analizzati.

Infine, nei capitoli 6 e 7 vengono riportati i risultati conseguiti e le conclusioni finali.

# Capitolo 1

## Definizioni e Fondamenti di propulsione spaziale

In termini generali, la propulsione è la capacità di modificare il moto di un corpo rispetto ad un sistema di riferimento inerziale. I sistemi propulsivi generano una forza, la spinta, in grado di mettere in moto corpi inizialmente fermi o di cambiarne la velocità o di contrastare eventuali forze perturbative.

Nell'ambito della propulsione spaziale, si distinguono due tipologie di propulsione:

- **Propulsione Primaria:** genera una forza che consente di modificare la traiettoria che il corpo nello spazio tenderebbe a seguire e quindi di cambiare l'orbita percorsa;
- **Propulsione Ausiliaria:** tramite la spinta si contrasta l'azione di forze (come ad esempio quelle gravitazionali) che tenderebbero a cambiare la traiettoria, consentendo allo spacecraft di rimanere in un'orbita predefinita e costante.

Tipicamente, per via dell'entità delle sue manovre, la propulsione primaria è più dispendiosa rispetto alla propulsione secondaria.

La propulsione si basa sul **Principio di Azione e Reazione**: espellendo dal sistema una determinata massa con una certa velocità e direzione, si ottiene per reazione una forza, la spinta  $T$ , che agisce in direzione opposta.

Affinché sia possibile variare la quantità di moto di un sistema, quest'ultimo deve scambiare quantità di moto con l'esterno; in caso il sistema fosse isolato, infatti, varrebbe la conservazione della quantità di moto.

Tuttavia, nello spazio viene a mancare l'elemento con cui il sistema deve interagire per produrre spinta. Da qui nasce l'esigenza di portare a bordo il mezzo con cui scambiare quantità di moto, ovvero il propellente.

La massa di propellente diventa un parametro discriminante per la fattibilità di una missione spaziale, in quanto ha un impatto sia sui costi che sulla massa di payload

che è possibile portare in orbita. Dunque, durante il progetto di una missione l'obiettivo che ci si pone è quello di ridurre nei limiti del possibile questa quantità.

## 1.1 Valutazione della Spinta

Considerando un sistema isolato, si può determinare la relazione che lega il propellente  $m_p$  e la spinta  $T$ . Si suppone che ad un istante iniziale  $t_0$ , il sistema sia dotato di massa  $M$  e velocità  $V$  e che sia sufficientemente lontano da qualsiasi altro corpo che possa esercitare una forza di gravità. Dopo un certo intervallo di tempo infinitesimo  $dt$ , il sistema espelle in direzione opposta a quella di moto una certa quantità di propellente  $dm_p$  con velocità  $c$  rispetto al sistema, quindi nel sistema di riferimento assoluto la velocità vale  $c-V$ . A seguito di ciò, il sistema avrà quindi una massa inferiore a quella iniziale, pari a  $M-dm_p$ , e la sua velocità sarà aumentata di una quantità  $dV$ .

Siccome il sistema è isolato, vale la **conservazione della quantità di moto**. Pertanto, è possibile scrivere che la quantità di moto al tempo  $t_0$  è uguale alla quantità di moto al tempo  $t_0 + dt$ :

$$MV = (M - dm_p)(V + dV) - dm_p(c - V) \quad (1.1)$$

A questo punto, trascurando i termini infinitesimi del secondo ordine, si ottiene una forma semplificata dell'equazione precedente:

$$MdV = dm_p c \quad (1.2)$$

Dall'equazione 1.2, si deduce che la variazione di quantità di moto del sistema  $MdV$  corrisponde alla quantità di moto della massa di propellente eiettata.

In realtà, l'equazione 1.2 va modificata per tener conto del fatto che il propellente viene eiettato come un getto continuo. Per cui, bisogna passare da una formulazione discreta ad una continua. A tal proposito, si definisce la portata di propellente  $\dot{m}_p$  come la quantità di propellente espulsa nell'intervallo di tempo  $dt$ :

$$\dot{m}_p = \frac{dm_p}{dt} \quad (1.3)$$

Dividendo entrambi i membri dell'equazione 1.2 per  $dt$  si ottiene:

$$M \frac{dV}{dt} = \dot{m}_p c = T \quad (1.4)$$

dove  $c$  è la *velocità efficace di scarico*,  $T$  la spinta e  $\dot{m}_p$  la portata di propellente. È importante sottolineare che in questa trattazione sono state fatte alcune ipotesi semplificative:

- **Velocità allineate:** la velocità  $c$  potrebbe non essere allineata a  $V$ , per cui sarebbe necessario considerare un'equazione vettoriale e proiettarla nelle diverse direzioni;
- **Contributo  $A_e(p_e - p_0)$  trascurabile:** il getto di propellente viene espulso in modo continuo dal propulsore, per cui all'uscita interagisce con l'ambiente esterno. L'espressione completa della spinta, infatti, è data dalla somma di due contributi  $T = \dot{m}_p U_e + A_e(p_e - p_0)$ . Nello spazio  $p_0 = 0$  e  $p_e$  è molto piccola, quindi il secondo contributo alla spinta è trascurabile rispetto al primo. Pertanto, in prima approssimazione,  $c \approx U_e$ .

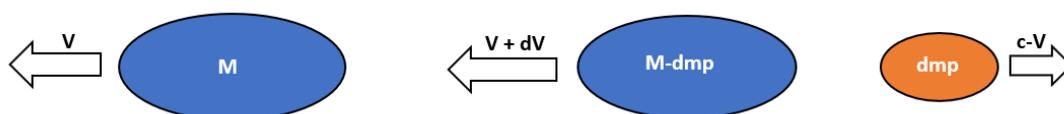


Figura 1.1: Sistema all'istante  $t$  e all'istante  $t + dt$

## 1.2 Prestazioni

Per valutare l'effetto della spinta, si introducono diverse grandezze:

- **Potenza della spinta:** rappresenta l'energia per unità di tempo necessaria per espellere il propellente con una velocità  $c$ .

$$P_T = \frac{1}{2} \dot{m}_p c^2 = \frac{Tc}{2} \quad (1.5)$$

- **Impulso totale:** permette di valutare l'effetto cumulativo della spinta nel tempo.

$$I_t = \int_{t_0}^{t_f} T dt \quad (1.6)$$

In caso di spinta costante:

$$I_t = T \Delta t = m_{media} \Delta V \quad (1.7)$$

Lo stesso impulso totale si può ottenere con spinte alte e  $\Delta t$  piccoli o viceversa. L'impulso totale non fornisce una valutazione precisa nel caso di propulsione primaria poiché dipende dalla massa media che non è nota ma è comunque indice dello sforzo propulsivo del motore. Per la propulsione secondaria, invece, dove i consumi sono bassi, l' $I_t$  è piuttosto accurato.

- **Impulso Specifico:** può essere interpretato come il rapporto tra *effetto utile*, cioè l'impulso totale, e la *spesa*, ovvero il peso (sulla Terra) della massa di propellente necessaria per ottenere quell'  $I_t$ .

$$I_s = \frac{I_t}{m_p g_0} \quad (1.8)$$

L'equazione 1.8 fornisce un valore di  $I_s$  mediato nel tempo ed è particolarmente utile quando la spinta varia con il tempo.

Nel caso di spinta e portata costanti, l'equazione 1.8 si può scrivere anche come:

$$I_s = \frac{T \Delta t}{\dot{m}_p \Delta t g_0} = \frac{c}{g_0} \quad (1.9)$$

Sotto tali ipotesi, l'impulso specifico è direttamente proporzionale alla velocità efficace di scarico tramite il fattore  $g_0$ .

L'impulso specifico ha le dimensioni e il significato fisico di un tempo; in particolare, l' $I_s$  rappresenta il periodo di tempo per cui una determinata massa di propellente è in grado di fornire una spinta pari al suo peso al livello del mare.

Insieme alla spinta, l'impulso specifico è una delle prestazioni più importanti in quanto è indice del consumo del propulsore: la massa di propellente necessaria per compiere la missione diminuisce all'aumentare dell'impulso specifico. Per cui alti valori di  $I_s$  suggeriscono minor consumo e quindi migliori prestazioni.

- **Velocità Efficace di Scarico  $c$ :** rappresenta la velocità media rispetto al sistema con cui il propellente viene espulso.

$$c = \frac{T}{\dot{m}_p} = \frac{I_s}{g_0} \quad (1.10)$$

### 1.3 Equazione di Tsiolkovsky

L'equazione di Tsiolkovsky o del razzo è fondamentale nel campo della propulsione spaziale in quanto consente di legare il  $\Delta V$  di una missione alle masse iniziale  $m_0$  e finale  $m_f$ .

Nell'ipotesi in cui siano valide le seguenti semplificazioni:

- Unica forza agente sul sistema è la spinta  $\vec{T}$ ;
- Spinta allineata al vettore velocità  $\vec{T} // \vec{V}$ .

È possibile esprimere la variazione di velocità che il motore fornirebbe in condizioni ideali come:

$$\Delta V = \int_{t_0}^{t_f} \frac{T}{m} dt \quad (1.11)$$

Sostituendo a  $T$  l'espressione 1.2, l'equazione può essere riscritta come:

$$\Delta V = \int_{t_0}^{t_f} \frac{\dot{m}_p c}{m} dt$$

Considerando poi che  $\dot{m}_p = -\frac{dm}{dt}$ , si può effettuare un cambio di variabili e si ottiene:

$$\Delta V = -c \int_{m_0}^{m_f} \frac{dm}{m}$$

Infine, ipotizzando  $c$  costante e integrando tra  $m_0$  e  $m_f$ , si ricava l'**Equazione di Tsiolkowsky**:

$$\Delta V = c \log \left( \frac{m_0}{m_f} \right) \iff \frac{m_f}{m_0} = e^{-\frac{\Delta V}{c}} \quad (1.12)$$

Come anticipato, si nota che l'equazione 1.12 correla le masse in gioco,  $m_0$  e  $m_f$ , la variazione di velocità  $\Delta V$  richiesta per la missione e la velocità efficace di scarico  $c$ , quindi l'impulso specifico.

Ciascuna missione è caratterizzata da un determinato  $\Delta V$  che il propulsore deve fornire affinché si riesca a portare in orbita il payload. L'equazione di Tsiolkowski suggerisce che, fissato  $\Delta V$ , al crescere di  $c$  (quindi dell'impulso specifico) il rapporto  $m_f/m_0$  aumenta. Ciò significa che la massa di propellente necessaria per compiere la missione tende a diminuire. Viceversa, la fattibilità della missione potrebbe essere compromessa.

Se il  $\Delta V$  della missione è grande,  $c$  deve essere dello stesso ordine di grandezza.

Mission	$\Delta V$ [km/s]
LEO insertion	10
1 year station keeping	0.5
LEO-GEO (impulsive)	3.5
LEO-GEO (spiral)	6
Earth escape (impulsive)	3.2
Earth escape (spiral)	8
Earth-Mars (impulsive)	5.5
Earth-Mars (spiral)	6
Earth-Jupiter (spiral)	16.7
Earth-Alpha Centauri	30000

**Tabella 1.1:** Valori tipici del  $\Delta V$  per diverse missioni [1]

## 1.4 Perdite di Velocità

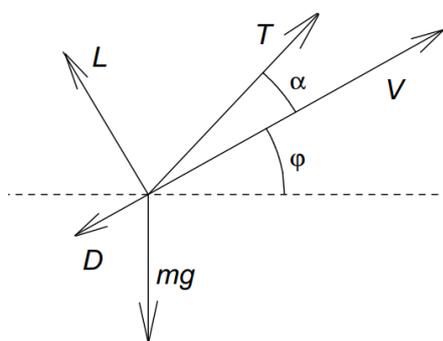
L'equazione 1.12 consente di valutare il salto di velocità ideale  $\Delta V_{id}$ , tuttavia il salto di velocità reale  $\Delta V = V_f - V_0$  che il propulsore deve garantire è maggiore per via delle perdite.

Per ricavare la relazione che lega il  $\Delta V_{id}$  al  $\Delta V$ , si riprende l'eq.1.12 e la si generalizza facendo cadere le ipotesi iniziali. Si considera, quindi, il caso in cui si abbia una spinta non parallela alla velocità e in cui siano presenti anche altre forze.

La nuova condizione è rappresentata in 1.2: il sistema si muove con velocità  $\vec{V}$  ed è soggetto all'azione di diverse forze, quali spinta  $\vec{T}$ , forza di gravità  $m\vec{g}$ , resistenza  $\vec{D}$  e portanza  $\vec{L}$ . Il vettore velocità  $\vec{V}$  è inclinato di un angolo  $\varphi$  (*Fly Path Angle*) sull'orizzonte locale mentre il vettore spinta  $\vec{T}$  forma un angolo  $\alpha$  con la velocità. A questo punto, si può scrivere l'equazione vettoriale del moto:

$$m \frac{d\vec{V}}{dt} = \vec{T} + m\vec{g} + \vec{D} \quad (1.13)$$

Si scompone l'eq.1.13 nelle direzioni parallela e perpendicolare alla velocità  $\vec{V}$ .



**Figura 1.2:** Forze agenti sul sistema [1]

Si focalizza l'attenzione sull'equazione in direzione  $//\vec{V}$ :

$$\frac{dV}{dt} = \frac{T}{m} \cos \alpha - \frac{D}{m} - g \sin \varphi \quad (1.14)$$

L'eq.1.14 può essere riscritta come:

$$\frac{dV}{dt} = \frac{T}{m} - \frac{T}{m} (1 - \cos \alpha) - \frac{D}{m} - g \sin \varphi \quad (1.15)$$

Infine, si integra l'eq.1.15 tra il tempo iniziale  $t_0$  e il tempo finale  $t_f$ :

$$V_f - V_0 = \int_{t_0}^{t_f} \frac{T}{m} dt - \int_{t_0}^{t_f} \frac{T}{m} (1 - \cos \alpha) dt - \int_{t_0}^{t_f} \frac{D}{m} dt - \int_{t_0}^{t_f} g \sin \varphi dt \quad (1.16)$$

Nell'eq.1.16 il termine al primo membro rappresenta la variazione di velocità effettiva che il motore deve fornire  $\Delta V$ ; a secondo membro, invece, il primo integrale corrisponde al  $\Delta V_{id}$  mentre i termini successivi sono indentificabili come perdite.

Dunque, l'espressione del  $\Delta V$  effettivo è la seguente:

$$V_f - V_0 = \Delta V_{id} - P_a - P_r - P_g \quad (1.17)$$

dove  $P_a$  sono le *perdite per disallineamento*,  $P_r$  sono le *perdite per resistenza* mentre  $P_g$  sono le *perdite per gravità*. A causa delle perdite, il  $\Delta V_{eff} = V_f - V_0$  è maggiore del  $\Delta V_{id}$ .

A questo punto, si analizzano più nel dettaglio le singole perdite.

### 1.4.1 Perdite per disallineamento

Come suggerisce il nome, derivano dal fatto che il vettore spinta  $\vec{T}$  e il vettore velocità  $\vec{V}$  non sono paralleli.

$$P_a = \int_{t_0}^{t_f} \frac{T}{m} (1 - \cos \alpha) dt \quad (1.18)$$

Queste perdite si annullano nel caso di  $\alpha = 0$ . Tuttavia, talvolta si cerca intenzionalmente di avere un certo grado di disallineamento perché consente di ridurre altre tipologie di perdite. Ad esempio, avere un angolo  $\alpha < 0$  mantiene lo spacecraft a quote basse, dove le velocità sono maggiori, e questo permette di ridurre le perdite per gravità.

### 1.4.2 Perdite per resistenza

Essendo  $D = \frac{1}{2}\rho V^2 SC_D$ , tali perdite sono proporzionali alla densità dell'aria e alla velocità al quadrato; al di fuori dell'atmosfera, invece, si ha  $P_r = 0$ .

$$P_r = \int_{t_0}^{t_f} \frac{D}{m} dt \quad (1.19)$$

Perciò nella fase di salita attraverso l'atmosfera conviene salire in verticale mantenendo la velocità bassa a quote basse (dove la densità è più alta) e poi portarsi a velocità più alte quando si raggiungono quote elevate dove la densità è sufficientemente bassa.

### 1.4.3 Perdite per gravità

Operando in un campo gravitazionale, queste perdite si generano perché parte della spinta serve a vincere la forza di gravità.

Si osserva che per  $\varphi > 0$  il termine fa perdere velocità mentre per  $\varphi < 0$  fa guadagnare velocità. Nonostante ciò, questo termine gioca sempre a sfavore: se l'obiettivo è salire di quota ( $\varphi > 0$ ) rappresenta una perdita perchè riduce la velocità invece, se l'obiettivo è scendere di quota ( $\varphi < 0$ ) e diminuire la velocità, il termine è comunque un ostacolo in quanto accelera invece che decelerare.

É utile rielaborare l'espressione iniziale per capire da quali fattori dipendono le perdite:

$$P_g = \int_{t_0}^{t_f} g \sin \varphi dt = \int_{t_0}^{t_f} \frac{g}{V} V \sin \varphi dt \quad (1.20)$$

Nell'eq.1.20 il prodotto  $V \sin \phi$  rappresenta la componente verticale della velocità  $u$ ; inoltre,  $u dt = dr$ . Quindi si ottiene:

$$P_g = \int_{t_0}^{t_f} \frac{g}{V} u dt = \int_{t_0}^{t_f} \frac{g}{V} dr = \left( \frac{g}{V} \right)_{medio} \Delta r \quad (1.21)$$

dove  $\Delta r = r_f - r_0$  rappresenta la variazione di raggio, quindi di quota. Come si osserva dall'eq.1.21, le perdite per gravità dipendono dal  $\Delta r$  e da  $\left( \frac{g}{V} \right)_{medio}$ . Supponendo fissati  $r_f$  e  $r_0$ , e di conseguenza anche la gravità  $g$  che dipende dalle due quote, si deduce che l'unico termine su cui si può intervenire è la velocità  $V$ : conviene avere una velocità più alta possibile per ridurre le perdite per gravità. In particolare, quando si deve salire di quota conviene farlo con velocità alta e, poiché la velocità si guadagna con la spinta, è opportuno prima spingere a raggi bassi e poi salire di quota. L'alternativa è salire in tempi brevi, quindi con  $dt$  piccoli: a parità di  $dr$  e  $\varphi$ , se  $u$  aumenta  $dt$  diminuisce e dunque le perdite si riducono.

## Capitolo 2

# Propulsione Elettrica

Negli ultimi decenni si è assistito ad un notevole sviluppo della propulsione elettrica tanto che, oggi, è considerata la tecnologia del futuro per la propulsione spaziale.

A rendere la propulsione elettrica una valida alternativa alla propulsione chimica, sono i suoi elevati *impulsi specifici* dell'ordine di *migliaia di secondi*, 10 volte superiori rispetto ai propulsori chimici. Ciò si traduce nella riduzione della quantità di propellente necessaria per compiere la missione e, di conseguenza, della massa iniziale del sistema. Tali implicazioni vanno a beneficio della fattibilità della missione, oltre che dei costi derivanti dall'utilizzo di veicoli di lancio più piccoli.

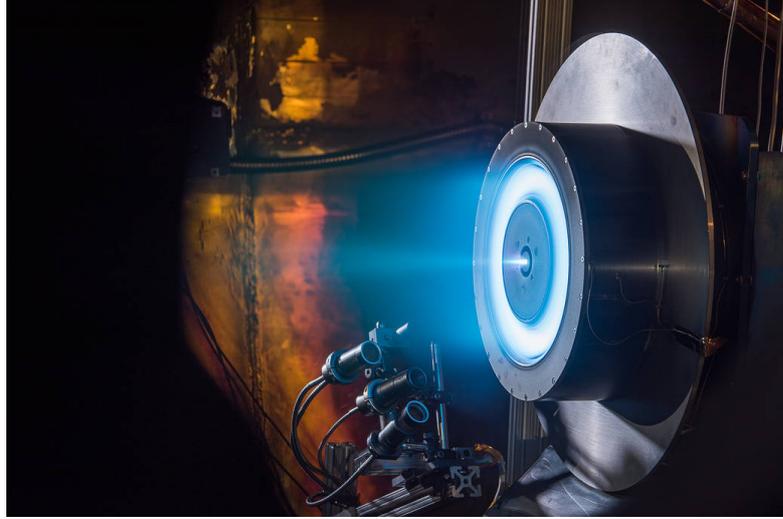
Al contempo, però, i valori di *spinta* caratteristici della propulsione elettrica sono molto bassi ( $< 1N$ ), quindi per ottenere variazioni significative di velocità  $\Delta V$ , sono richiesti *tempi* di missione molto lunghi (*mesi o anni*).

Le caratteristiche ora descritte limitano l'impiego dei propulsori elettrici principalmente a missioni che necessitano di basse spinte, lunghi periodi di operatività ed elevata precisione.

Dunque, la propulsione elettrica si presta bene soprattutto alla propulsione ausiliaria, eventualmente anche primaria ma solo in caso di missioni a bassa spinta. Esempi di possibili applicazioni sono:

- Controllo dell'assetto e della posizione dei satelliti in orbita;
- Missioni di esplorazione spaziale nel Deep Space;
- Trasferimenti orbitali;
- Operazioni di deorbiting di satelliti alla fine della loro vita operativa.

Sono escluse quindi le operazioni di lancio dalla Terra e il volo atmosferico, che rimangono prerogative della propulsione chimica.



**Figura 2.1:** Hall Effect Rocket with Magnetic Shielding (HERMeS) thruster [2]

## 2.1 Confronto propulsione chimica ed elettrica

Nella **propulsione chimica** l'energia chimica immagazzinata nel propellente viene trasformata attraverso la combustione in energia termica che scalda il propellente. Dopodiché, il propellente passa nell'ugello e viene accelerato fino alla velocità di uscita, l'energia termica viene così convertita in energia cinetica.

In prima approssimazione, trascurando le perdite presenti, si può scrivere che l'energia cinetica all'uscita è uguale all'energia chimica liberata:

$$P_T = \frac{1}{2} \dot{m}_p c^2 \approx \dot{m}_p E_{ch} = P_{ch} \quad (2.1)$$

da cui si ricava la velocità  $c$ :

$$c = \sqrt{2E_{ch}} \quad (2.2)$$

Nella **propulsione elettrica** cambia il meccanismo di accelerazione del propellente che avviene attraverso l'applicazione di un campo elettrico e/o magnetico.

La potenza elettrica fornita  $P_E$  viene convertita in potenza cinetica  $P_c$  del propellente ma non interamente per via delle perdite, si introduce perciò il rendimento  $\eta$ :

$$P_T = \frac{1}{2} \dot{m}_p c^2 \simeq \eta P_E \quad (2.3)$$

Da cui si ricava l'espressione per la velocità  $c$ :

$$c = \sqrt{2\eta \frac{P_E}{\dot{m}_p}} = \frac{2\eta P_E}{T} \quad (2.4)$$

Le possibili sorgenti esterne di potenza sono: pannelli solari, reattori a fissione nucleare o radioisotopi.

Confrontando l'eq.2.2 e l'eq.2.4 si osserva che:

- Nella propulsione chimica la velocità  $c$  è strettamente legata all'energia chimica contenuta nel propellente, ciò limita le prestazioni in termini di impulso specifico. Infatti,  $E_{ch}$  è fissata una volta scelta la combinazione di ossidante e combustibile. L'impulso specifico massimo si ottiene utilizzando  $LOx/LH_2$  ( $I_{s,max} \approx 450s$ );
- Nella propulsione elettrica, invece, la fonte di energia è separata dal propellente quindi, almeno teoricamente, non si hanno limiti su  $c$ . In particolare, si nota che è possibile aumentare la velocità intervenendo su due variabili:
  - **Diminuire la portata di propellente  $\dot{m}_p$**  (se la potenza  $P_E$  è fissata): siccome la spinta è proporzionale alla portata, ne consegue che i livelli di spinta generati sono bassi;
  - **Aumentare la potenza elettrica  $P_E$** : si necessita di un generatore di maggiori dimensioni che comporta un ulteriore aumento del peso a bordo da trasportare.

Si intuisce che anche nella propulsione elettrica si ha una limitazione dovuta alla sorgente esterna di potenza che penalizza la massa del sistema. Per cui, se  $P_E$  è limitata dal generatore, la spinta non può che essere piccola.

Si può dimostrare che la presenza del generatore limita l'accelerazione. Assumendo che la massa del generatore ( $m_g$ ) sia proporzionale alla potenza elettrica che produce  $P_E$ , si ha:

$$m_g = \alpha P_E = \frac{\alpha T c}{\eta} \quad (2.5)$$

La massa complessiva del sistema, invece, è data dalla somma dei seguenti contributi:

$$m_{tot} = m_{utile} + m_{generatore} + m_{propellente} \quad (2.6)$$

L'accelerazione massima che si può ottenere è data da:

$$a = \frac{T}{m} < \frac{T}{m_g} = \frac{2\eta}{\alpha c} \quad (2.7)$$

Considerando dei valori tipici per  $\eta = 0.5$ ,  $c = 10^4 m/s$  e  $\alpha = 15 kg/kW$ , i valori di accelerazione che ne derivano sono molto piccoli e non consentono il decollo dalla terra; ciò esclude l'utilizzo della propulsione elettrica in ambito terrestre.

Per ottenere grandi  $\Delta V$  con piccole accelerazioni, servono tempi di spinta molto lunghi. In caso di trasferimento da un'orbita all'altra, quindi, il  $\Delta V$  richiesto si raggiunge compiendo molti giri in orbita (traiettoria a spirale).

## 2.2 Classificazione Propulsori Elettrici

I propulsori elettrici vengono classificati in funzione del meccanismo di accelerazione utilizzato per generare spinta. In particolare, si identificano tre categorie principali di propulsori elettrici:

- Propulsori **elettrotermici**: il propellente viene preriscaldato fornendo energia elettrica, ad esempio attraverso un elemento resistivo (*Resistojets*) oppure attraverso un arco elettrico (*Arcjets*). Dopodiché, il gas caldo viene accelerato a grandi velocità tramite l'espansione nell'ugello;
- Propulsori **elettrostatici**: il propellente viene ionizzato e accelerato tramite l'applicazione di un campo elettrico;
- Propulsori **elettromagnetici**: il propellente ionizzato è accelerato mediante l'interazione di campi magnetici esterni e/o interni con correnti che scorrono all'interno del propellente stesso.

Nella fig.2.2 sono riportate le principali prestazioni delle diverse tipologie di propulsori elettrici.

Type	Thrust Range (mN)	Specific Impulse (sec)	Thruster Efficiency <sup>a</sup> (%)	Thrust Duration	Typical Propellants
Resistojet (thermal)	200–300	200–350	65–90	Months	NH <sub>3</sub> , N <sub>2</sub> H <sub>4</sub> , H <sub>2</sub>
Arcjet (thermal)	200–1000	400–800	30–50	Months	H <sub>2</sub> , N <sub>2</sub> , N <sub>2</sub> H <sub>4</sub> , NH <sub>3</sub>
Ion thruster	0.01–500	1500–8000	60–80	Years	Xe, Kr, Ar, Bi
Solid pulsed plasma (PPT)	0.05–10	600–2000	10	Years	Teflon
Magnetoplasma dynamic (MPD)	0.001–2000	2000–5000	30–50	Weeks	Ar, Xe, H <sub>2</sub> , Li
Hall thruster	0.01–2000	1500–2000	30–50	Months	Xe, Ar
Monopropellant rocket <sup>b</sup>	30–500,000	200–250	87–97	Hours or minutes	N <sub>2</sub> H <sub>4</sub>

**Figura 2.2:** Prestazioni dei diversi propulsori elettrici [3]

Dai dati si evince che i candidati ideali per missioni che richiedono  $\Delta V$  medio-grandi sono i propulsori a ioni e i propulsori ad effetto Hall, per via dei loro elevati impulsi specifici. Anche i propulsori magnetoplasmadinamici hanno prestazioni molto promettenti ma il loro complesso funzionamento ne rende difficile la realizzazione e la gestione; al momento esistono solo prototipi sperimentali.

## 2.3 Propulsione solare elettrica

Per lo studio di ottimizzazione si è considerato un sistema propulsivo di tipo *SEP* (*Solar Electric Propulsion*). La SEP si basa sull'utilizzo combinato di pannelli solari e uno o più propulsori elettrici: i primi convertono la radiazione solare in

potenza elettrica necessaria per il funzionamento dei secondi.

La conversione dell'energia elettrica in tensioni e correnti adeguate per il propulsore è affidata alla *PPU (Power Processing Unit)*. Inoltre, il sistema si compone di un'unità per immagazzinare, dosare ed erogare il flusso di propellente (e/o le sue riserve) ed in alcuni casi di un'unità per il controllo del vettore di spinta chiamata anche *Thrust Gimbal Assemblies (TGA)* [3]. Tali sottosistemi accomunano tutti i sistema di propulsione elettrica spaziale.

I benefici attuali e futuri della propulsione solare elettrica possono essere così riassunti [4]:

- Riduzione della quantità di propellente necessaria a bordo dei veicoli per le missioni nel Deep Space;
- Riduzione dei costi per le missioni nel Deep Space grazie all'utilizzo di veicoli di lancio più piccoli;
- Sviluppo di pannelli solari più leggeri, più resistenti, più compatti e meno costosi;
- In futuro potrebbe permettere la realizzazione di missioni con equipaggio umano oltre l'orbita bassa terrestre.

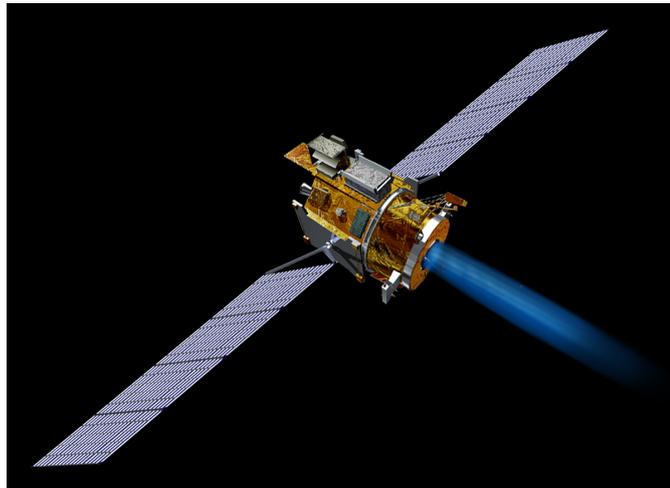


Figura 2.3: Rappresentazione Deep Space 1 [4]

### 2.3.1 Tipologie di Propulsori

Una delle tipologie di propulsore più utilizzata per la SEP è quella dei **propulsori a ioni**, appartenenti alla categoria dei propulsori elettrostatici. Il loro funzionamento

si basa su tre aspetti fondamentali: ionizzazione del propellente, successiva accelerazione degli ioni tramite l'applicazione di un campo elettrico e neutralizzazione del fascio di ioni in uscita. L'ultimo passaggio impedisce la formazione di un accumulo di cariche negative sul sistema che potrebbe attirare nuovamente gli ioni espulsi, annullando così la spinta.

Recentemente la NASA in collaborazione con Aerojet Rocketdyne ha progettato, sviluppato e testato un sistema SEP ad alta potenza per missioni scientifiche su larga scala, l'*Advanced Electric Propulsion System (AEPS)*. L'AEPS prevede l'utilizzo di un **propulsore ad effetto Hall** da 12.5 kW chiamato *Hall Effect Rocket with Magnetic Shielding (HERMeS)*. [2].

Questo sistema doveva essere utilizzato per la prima volta nella missione *ARRM (Asteroid Redirect Robotic Mission)* che fu poi cancellata. La sua prossima applicazione è prevista per il *Power and Propulsion Element (PPE)* di Gateway il cui lancio è previsto per il 2024 [2].

I propulsori ad effetto Hall sono considerati degli ibridi tra i propulsori elettrostatici e quelli elettromagnetici: si utilizza un campo magnetico per intrappolare gli elettroni emessi dal catodo, i quali andranno a ionizzare il propellente. Successivamente, gli ioni prodotti vengono accelerati verso l'uscita tramite un campo elettrico, diretto perpendicolarmente al campo magnetico. Insieme agli ioni, vengono espulsi anche un certo numero di elettroni necessari per neutralizzarli.

Attualmente il propellente maggiormente utilizzato per questi propulsori è lo *Xenon* per via della sua bassa energia di ionizzazione, alta massa molecolare e basso grado di erosione. Nei primi modelli, invece, venivano impiegati Mercurio e Cesio che a causa della loro tossicità non sono più in uso. Altri propellenti come il Bismuto mostrano buone prestazioni e sono al momento in fase di test, in particolare per i propulsori a effetto Hall.

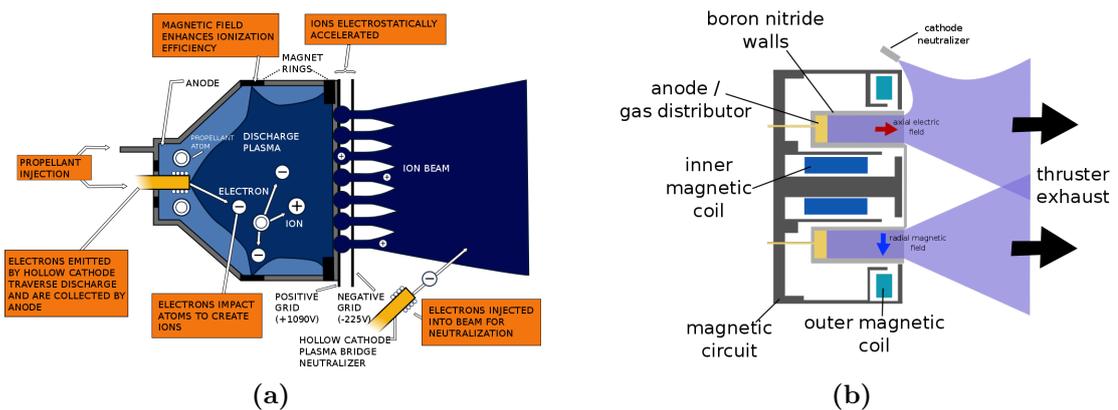


Figura 2.4: Schema di un propulsore a ioni (a) e ad effetto Hall (b)

### Prestazioni

Come si osserva dalla tabella in fig.2.2, i propulsori ad effetto Hall hanno impulsi specifici complementari a quelli dei propulsori a ioni. Infatti, i primi operano nominalmente nel range  $I_s = 1000 \div 2000s$  mentre i secondi per  $I_s > 2000s$ . Inoltre, con i propulsori ad effetto Hall si hanno potenze (quindi spinte) maggiori ( $300 \div 10000W$ ) rispetto ai propulsori a ioni ( $200 \div 5000W$ ) che riducono la durata della missione; d'altro canto essi presentano diverse problematiche come le interferenze elettromagnetiche, l'erosione delle superfici interne del propulsore e la presenza di ioni doppi che riducono la spinta prodotta. A causa delle diverse perdite, le efficienze dei propulsori ad effetto Hall sono leggermente inferiori a quelle dei propulsori a ioni.

### 2.3.2 Applicazioni

Di seguito vengono riportati alcuni esempi di missioni in cui è stata impiegata la propulsione solare elettrica:

- **Deep Space 1** (1998), primo utilizzo della propulsione elettrica, in particolare propulsori a ioni, per missione interplanetaria verso l'asteroide Braille e la cometa Borrelly;
- **Artemis** (2001): utilizzo di propulsori a ioni per manovre di station-keeping ma impiegati poi anche per propulsione primaria;
- **Smart 1** (2003): Hall thruster utilizzati per propulsione primaria verso la Luna;
- **DAWN** (2007): 3 Deep Space 1 thrusters per missione verso Cerere e Vesta;
- **GOCE** (2009): impiego propulsori a ioni per contrastare gli effetti della resistenza in orbita bassa;
- **BepiColombo** (2018): missione verso Mercurio, sistema SEP con propulsori a ioni per propulsione primaria.

# Capitolo 3

## Elementi di Meccanica Orbitale

In questo capitolo vengono illustrati i concetti su cui si basa il modello di traiettoria impiegato per lo studio di ottimizzazione. Come già anticipato, si prende in esame una trasferta interplanetaria e per l'analisi preliminare si applicano il **modello dei 2-corpi** e la **patched-conic approximation**.

### 3.1 Problema degli N-corpi

Il problema degli N-corpi considera un sistema costituito da N corpi assimilabili a punti materiali e ne analizza il moto relativo [5]. Considerando il sistema di riferimento inerziale (X,Y,Z) in fig.3.1, il moto del generico corpo di massa  $m_i$  è influenzato dalla forza gravitazionale esercitata dagli altri N-1 corpi di massa  $m_1 \dots m_{i-1}, m_{i+1} \dots m_N$  e dalla presenza di altre forze di natura non gravitazionale (come le forze aerodinamiche, la spinta propulsiva, la pressione di radiazione solare). Pertanto, la forza risultante  $\mathbf{F}_{tot}$  che agisce sul corpo di massa  $m_i$  si può esprimere come:

$$\mathbf{F}_{tot} = \mathbf{F}_{other} + \sum_{j=1, j \neq i}^N \mathbf{F}_{gj} \quad (3.1)$$

Nell'equazione 3.1  $\mathbf{F}_{other}$  è la risultante delle forze non gravitazionali mentre  $\mathbf{F}_{gj}$  è la forza gravitazionale esercitata dal corpo j-esimo sul corpo i-esimo.

Per la legge di gravitazione universale di Newton, la forza di attrazione che agisce tra i corpi di massa  $m_i$  e  $m_j$  vale:

$$\mathbf{F}_{gj} = -G \frac{m_i m_j}{r_{ji}^3} \mathbf{r}_{ij} \quad (3.2)$$

dove  $\mathbf{r}_{ji}$  è il vettore che congiunge il j-esimo corpo con l'i-esimo corpo mentre G è la *Costante di Gravitazione Universale* che nel Sistema Internazionale vale  $G = 6.6726 \times 10^{-11} \text{ m}^3\text{s}^{-2}\text{kg}^{-1}$ .

È importante sottolineare che la legge di Newton si applica solo a corpi sferici con massa distribuita uniformemente in gusci sferici. Dunque, nella realtà, la forma non sferica dei pianeti induce delle forze perturbative di cui si tiene conto nel termine  $\mathbf{F}_{other}$ .

Se si sostituisce l'eq.3.2 nell'eq.3.1, si ottiene un'equazione vettoriale differenziale del secondo ordine, non lineare:

$$\mathbf{F}_{tot} = \mathbf{F}_{other} - Gm_i \sum_{j=1, j \neq i}^N \frac{m_j}{r_{ji}^3} \mathbf{r}_{ji} \quad (3.3)$$

Applicando poi la seconda legge di Newton si perviene all'equazione generale del moto per l'i-esimo corpo:

$$\mathbf{F}_{tot} = \frac{d}{dt}(m_i \mathbf{v}_i) \rightarrow \ddot{\mathbf{r}}_i = \frac{\mathbf{F}_{tot}}{m_i} - \dot{\mathbf{r}}_i \frac{\dot{m}_i}{m_i} \quad (3.4)$$

dove  $\ddot{\mathbf{r}}_i$  è il vettore accelerazione dell'i-esimo corpo rispetto al sistema di riferimento (X,Y,Z). Infine, ipotizzando che l'unica forza presente sia quella gravitazionale ( $\mathbf{F}_{other} = 0$ ) e che la massa  $m_i$  rimanga costante ( $\dot{m}_i = 0$ ), l'equazione 3.4 diventa:

$$\ddot{\mathbf{r}}_i = -G \sum_{j=1, j \neq i}^N \frac{m_j}{r_{ji}^3} \mathbf{r}_{ji} \quad (3.5)$$

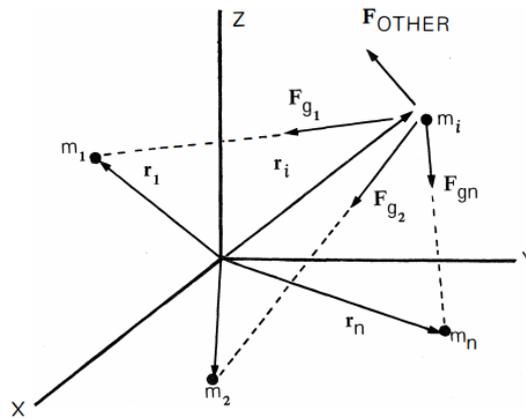


Figura 3.1: Problema N-corpi [5]

## 3.2 Problema dei due corpi

Quando si studia il moto di un veicolo spaziale in orbita attorno ad un corpo celeste (ad esempio il moto di un satellite in orbita attorno alla Terra), il problema degli N-corpi può essere semplificato e ricondotto al problema dei due corpi. Tale modello descrive con buona approssimazione la dinamica dei veicoli spaziali.

Il modello dei due corpi si propone di studiare la reciproca attrazione gravitazionale agente tra un corpo principale di massa  $M$  e un corpo secondario di massa  $m$ . Si considera trascurabile, quindi, la presenza di ulteriori corpi celesti e le relative forze di attrazione che essi esercitano sul corpo di massa  $m$ .

La formulazione del problema dei due corpi si basa sulle seguenti ipotesi [5]:

- **Hp:** *simmetria sferica dei corpi*, questo permette di considerare masse concentrate;
- **Hp:** massa del corpo secondario molto piccola rispetto a quella del corpo principale ( $m \ll M$ );
- **Hp:** l'*unica forza* che agisce sul sistema è quella *gravitazionale*, dunque si trascura la presenza di altre forze di natura diversa.

### 3.2.1 Equazione del moto dei due corpi

Al fine di ricavare l'equazione che descrive il moto relativo tra i due corpi, si definisce innanzitutto il sistema di riferimento inerziale di coordinate cartesiane  $(X', Y', Z')$  e il sistema di coordinate non rotanti  $(X, Y, Z)$ , parallele a  $(X', Y', Z')$  e avente origine nel centro di massa  $M$  come mostrato in fig.3.2 [5]. A questo punto, si introducono i vettori posizione  $\mathbf{r}_M$  e  $\mathbf{r}_m$  dei due corpi rispetto all'origine del sistema  $(X', Y', Z')$ .

Applicando le leggi di Newton nel sistema inerziale  $(X', Y', Z')$ , si ha:

$$m\ddot{\mathbf{r}}_m = -G\frac{Mm}{r^3}\mathbf{r} \quad (3.6)$$

$$M\ddot{\mathbf{r}}_M = G\frac{Mm}{r^3}\mathbf{r} \quad (3.7)$$

Se si introduce il vettore  $\mathbf{r} = \mathbf{r}_m - \mathbf{r}_M$  e si sottrae l'eq.3.7 all'eq.3.6, si ottiene l'**Equazione del Moto Relativo per il Problema dei due corpi**:

$$\ddot{\mathbf{r}} = \frac{d^2\mathbf{r}}{dt^2} = -\frac{\mu}{r^2} \frac{\mathbf{r}}{|\mathbf{r}|} \quad (3.8)$$

dove  $\ddot{\mathbf{r}}$  e  $\mathbf{r}$  rappresentano l'accelerazione e la posizione relativa del corpo secondario di massa  $m$  rispetto al corpo primario di massa  $M$ , mentre  $\mu$  è il parametro gravitazionale pari a  $GM \approx G(M + m)$  ed è caratteristico del corpo intorno a cui la massa  $m$  sta orbitando.

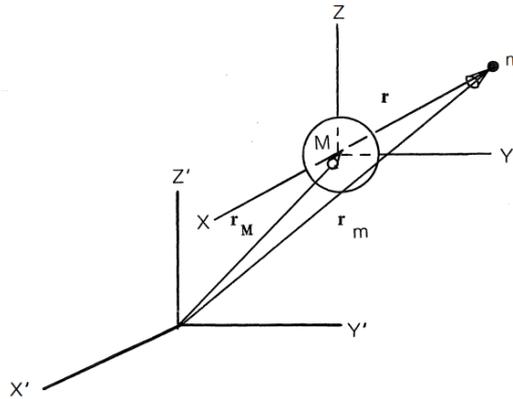


Figura 3.2: Problema dei due corpi [5]

### 3.2.2 Equazione della traiettoria

Rimaneggiando l'equazione 3.8 e procedendo con l'integrazione, si ricava l'equazione della traiettoria in coordinate polari:

$$r = \frac{h^2/\mu}{1 + \left(\frac{B}{\mu}\right) \cos \nu} \quad (3.9)$$

dove  $\mathbf{B}$  è il vettore della costante di integrazione e  $\nu$  è l'angolo tra il vettore  $\mathbf{B}$  e il raggio vettore  $\mathbf{r}$ .

Confrontando l'equazione 3.9 con l'equazione generale di una conica in coordinate polari aventi origine in uno dei fuochi, è possibile determinare il tipo di conica:

$$r = \frac{p}{1 + e \cos \nu} \quad (3.10)$$

dove  $p$  è una costante geometrica che prende il nome di *Semi-Latus Rectum*, la costante  $e$  è l'*eccentricità* mentre  $\nu$  è l'angolo tra il raggio  $r$  e il punto della conica più vicino al fuoco (periapside). Quando  $\nu = 0^\circ$  lo S/C si trova al periapside mentre per  $\nu = 180^\circ$  si trova all'apoapside. L'eccentricità determina il tipo di conica (circonferenza, ellisse, parabola, iperbole).

Dunque, la traiettoria descritta dal corpo secondario attorno al corpo principale è una conica avente fuoco collocato nel corpo principale ed è definita dalle condizioni iniziali di velocità  $V_0$  e di posizione  $r_0$ .

### 3.3 Parametri orbitali

Al fine di definire la forma, la dimensione e l'orientamento di un'orbita è necessario definire 6 grandezze che prendono il nome di *parametri orbitali o Kepleriani* [6].

I classici sei parametri orbitali sono:

- **Semiassse Maggiore  $a$ :** semisomma delle distanze di apoastro e periastro che sono rispettivamente il punto più vicino e il punto più lontano dal fuoco in cui è collocato il corpo principale.

$$a = \frac{r_p + r_a}{2} \quad (3.11)$$

Per orbite circolari il semiassse maggiore  $a$  coincide con il raggio mentre per orbite paraboliche  $a$  tende ad infinito. Infine, per orbite iperboliche e ellittiche si ha rispettivamente  $a > 0$  e  $a < 0$ .

- **Eccentricità  $e$ :** ad eccezione della parabola, si può valutare come il rapporto tra la distanza tra i fuochi  $c$  e il semiassse maggiore  $a$ .

$$e = \frac{c}{a} \quad (3.12)$$

$$e = \sqrt{1 + 2\mathcal{E} \left( \frac{h}{\mu} \right)^2} \quad (3.13)$$

Si ha  $e = 0$  per orbite circolari,  $0 < e < 1$  per orbite ellittiche,  $e = 1$  per orbite paraboliche e  $e > 1$  per orbite iperboliche.

Infine, si può definire anche il vettore eccentricità diretto verso il periastro:

$$\mathbf{e} = \left[ (V^2 - \mu/r) \mathbf{r} - (\mathbf{r} \cdot \mathbf{V}) \mathbf{V} \right] / \mu \quad (3.14)$$

- **Inclinazione  $i$ :** angolo tra il piano dell'orbita e il piano di riferimento;

$$i = \cos^{-1} \frac{h_K}{h} \quad (3.15)$$

con  $h_k$  componente perpendicolare al piano di riferimento.

- **Ascensione retta del nodo ascendente  $\Omega$ :** angolo tra la linea dei nodi, ovvero la retta d'intersezione tra il piano dell'orbita e il piano di riferimento che punta verso il nodo ascendente, e la direzione di riferimento  $\mathbf{I}$ .

$$\Omega = \cos^{-1} \left( \frac{n_I}{n} \right) \quad (3.16)$$

dove  $\mathbf{n} = \mathbf{K} \times \mathbf{h}$  è il vettore della linea dei nodi e  $n_I$  è la componente di  $n$  lungo la direzione  $\mathbf{I}$ .

- **Argomento del periastro  $\omega$** : angolo tra la linea dei nodi e il vettore eccentricità  $\mathbf{e}$ .

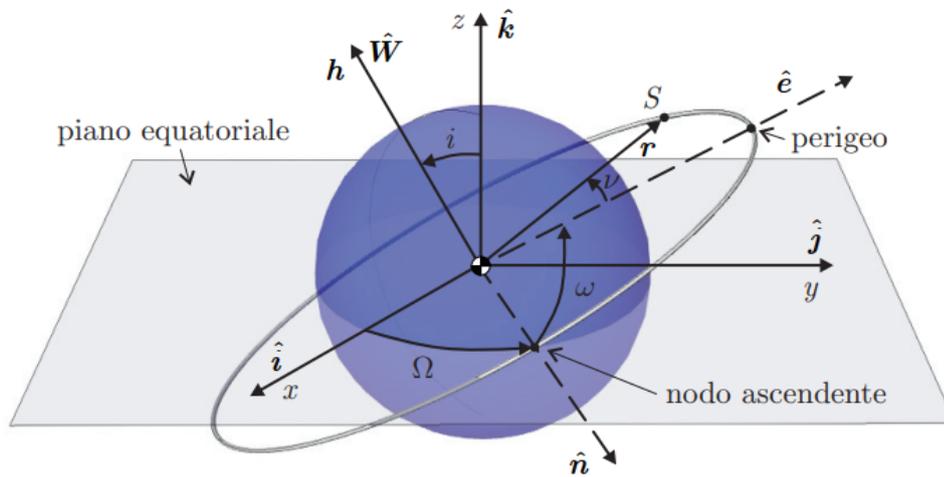
$$\omega = \cos^{-1} \left[ \mathbf{n} \cdot \frac{\mathbf{e}}{en} \right] \quad (3.17)$$

- **Anomalia vera  $\nu$** : angolo tra il vettore eccentricità  $\mathbf{e}$  e il vettore posizione  $\mathbf{r}$ .

$$\nu = \cos^{-1} \left[ \mathbf{e} \cdot \frac{\mathbf{r}}{(er)} \right] \quad (3.18)$$

In particolare, due di queste grandezze ( $a$  ed  $e$ ) definiscono le dimensioni e la forma dell'orbita; i restanti quattro ( $i, \Omega, \omega, \nu$ ), definiscono l'orientamento dell'orbita nello spazio e la posizione del satellite.

Inoltre, si possono introdurre anche ulteriori grandezze che sono altrettanto



**Figura 3.3:** Parametri Orbitali [7]

importanti nella caratterizzazione dell'orbita e che derivano dalla combinazione dei parametri sopraelencati.

- **Semi-Latus Rectum  $p$** : talvolta questo parametro viene utilizzato quando il semiasse maggiore non può essere definito, esso rappresenta la distanza tra corpo secondario e corpo principale quando  $\nu = 90^\circ$ .

La definizione di Semi-Latus Rectum che vale per tutte le coniche è:

$$p = \frac{h^2}{\mu} \quad (3.19)$$

dove  $h$  è il momento angolare specifico.

Esiste anche una relazione che lega  $p$  all'eccentricità e al semiasse maggiore:

$$p = a(1 - e^2) \quad (3.20)$$

- **Raggi di Periastro e Apoastro:**

$$r_p = a(1 - e) = \frac{p}{(1 + e)} \quad (3.21)$$

$$r_a = a(1 + e) = \frac{p}{(1 - e)} \quad (3.22)$$

Nel caso di orbita circolare queste grandezze non possono essere definiti in modo univoco; invece, per orbite aperte (come la parabola e l'iperbole) l'apoastro non ha alcun significato fisico.

- **Periodo orbitale** (solo per orbite ellittiche):

$$T = \frac{2\pi a^3}{\mu} \quad (3.23)$$

- **Longitudine del Periastro  $\theta$ :** per localizzare la posizione dello spacecraft in orbita spesso conviene definire un ulteriore parametro che corrisponde all'angolo tra il nodo ascendente e la posizione dello spacecraft nella sua orbita.

$$\theta = \omega + \nu \quad (3.24)$$

## 3.4 Costanti del moto

Il moto del corpo in orbita è caratterizzato dalla conservazione di due grandezze.

### 3.4.1 Conservazione dell'energia meccanica specifica

Il campo gravitazionale è un campo di tipo *conservativo*, ciò implica che un corpo che si muove sotto l'azione della gravità non vede aumentare o diminuire la sua energia meccanica ma l'energia si trasforma da una forma (*energia cinetica*) all'altra (*energia potenziale*).

L'**energia meccanica specifica**  $\mathcal{E}$  si può esprimere, quindi, come la somma dell'energia cinetica per unità di massa e dell'energia potenziale specifica:

$$\mathcal{E} = \frac{V^2}{2} - \frac{\mu}{r} = \text{costante} \quad (3.25)$$

### 3.4.2 Conservazione del momento angolare specifico

La forza gravitazionale è sempre diretta lungo la radiale che congiunge i due corpi, per cui il momento angolare del corpo rispetto all'origine del sistema di riferimento rimane invariato.

Il **momento angolare specifico**  $\mathbf{h}$  è dato da:

$$\mathbf{h} = \mathbf{r} \times \mathbf{V} = \text{costante} \quad (3.26)$$

Essendo il vettore  $\mathbf{h}$  perpendicolare al piano individuato dai vettori  $\mathbf{r}$  e  $\mathbf{v}$  per definizione, ne consegue che il moto descritto dal corpo deve necessariamente avvenire su un piano perpendicolare ad  $\mathbf{h}$  che prende il nome di *piano orbitale*.

### 3.4.3 Relazioni tra $(\mathcal{E}, \mathbf{h})$ e geometria dell'orbita

È possibile correlare l'energia meccanica specifica e il momento angolare specifico ai parametri geometrici che caratterizzano l'orbita ( $a, e, p$ ).

Per quanto riguarda il momento  $\mathbf{h}$ , basta combinare le equazioni 3.19 e 3.20 e si ottiene:

$$h = \mu p = \mu a(1 - e^2) \quad (3.27)$$

Per l'energia  $\mathcal{E}$ , invece, si considera la sua espressione in corrispondenza del periastro ( $\nu = 0$ ) e si sostituisce a  $V_p$  la sua relazione in funzione di  $h$ ,  $V_p = h/r_p$ . Pertanto, si ha:

$$\mathcal{E} = \frac{h^2}{2r_p^2} - \frac{\mu}{r_p} \quad (3.28)$$

Sostituendo nell'equazione 3.28 le relazioni 3.19 e 3.21, si ricava che  $\mathcal{E}$  dipende solo dal semiasse maggiore dell'orbita:

$$\mathcal{E} = -\frac{\mu}{2a} \quad (3.29)$$

Sulla base delle condizioni riportate nella tab, si deduce che  $\mathcal{E} < 0$  per orbite ellittiche,  $\mathcal{E} = 0$  per orbite paraboliche e  $\mathcal{E} > 0$  per orbite iperboliche.

	Semiasse Maggiore	Energia	Eccentricità
<b>Circonferenza</b>	$a=r$	$\mathcal{E} = -\frac{\mu}{2r}$	0
<b>Parabola</b>	$a \rightarrow \infty$	$\mathcal{E} = 0$	$e=1$
<b>Iperbole</b>	$a < 0$	$\mathcal{E} > 0$	$e > 1$
<b>Ellisse</b>	$a > 0$	$\mathcal{E} < 0$	$0 < e < 1$

**Tabella 3.1:** Proprietà dei diversi tipi di orbite

### 3.5 Trasferte Interplanetarie

Durante una missione interplanetaria, lo spacecraft trascorre la maggior parte del tempo sotto l'azione gravitazionale del Sole; infatti, la sua traiettoria risente del campo gravitazionale del pianeta di partenza o di arrivo per periodi brevi rispetto alla durata complessiva della missione.

In genere, per l'analisi preliminare di una trasferta interplanetaria, si ricorre ad un metodo analitico approssimativo che permette di determinare il  $\Delta V$  totale richiesto per compiere la missione. Il metodo largamente impiegato in tale contesto è la **teoria delle coniche raccordate** o **Patched-Conic Approximation**. Tale teoria si basa sul concetto di **sfere di influenza (SOI)**: ogni pianeta ha una sua regione nello spazio in cui l'effetto della forza di gravità del pianeta è predominante rispetto a quello degli altri corpi celesti. Per cui, il moto di un corpo che si trova all'interno di tale regione è quello di un corpo soggetto solo all'azione della forza di gravità del pianeta considerato.

L'equazione generale che permette di stimare le dimensioni della sfera di influenza è:

$$R_s = r \left( \frac{m}{M} \right)^{2/5} \quad (3.30)$$

dove  $r$  è la distanza tra il corpo secondario e il corpo attrattore principale le cui masse sono rispettivamente  $m$  e  $M$ .

Una tipica missione interplanetaria si compone delle seguenti fasi:

1. Fase di evasione dalla sfera di influenza del pianeta di partenza o pianeta 1 (*Fase Planetocentrica*)
2. Fase di trasferimento dall'orbita del pianeta 1 all'orbita del pianeta 2 (*Fase Eliocentrica*)
3. Fase di cattura nella sfera di influenza del pianeta di arrivo o pianeta 2 (*Fase Planetocentrica*)

Per la trattazione di trasferte interplanetarie si effettuano le seguenti ipotesi:

- Approssimazione delle **coniche raccordate**;
- Le **dimensioni delle sfere di influenza** sono **trascurabili** rispetto alle distanze eliocentriche;
- La **partenza** e l'**arrivo** avvengono all'interno della **sfera di influenza** dei pianeti.

In ogni fase, il problema può essere ricondotto al modello dei due corpi con la differenza che all'interno della sfera di influenza il corpo principale che attrae lo

S/C è il pianeta mentre durante la fase eliocentrica è il Sole.

Di conseguenza, in tutte e tre le fasi, la traiettoria percorsa è una conica e nel complesso si hanno quindi tre coniche che devono raccordarsi nei punti di passaggio da una fase all'altra (*punti di patch*).

Affinché lo spacecraft possa evadere dalla sfera di influenza di un pianeta, deve possedere in partenza una velocità che prende il nome di *Velocità di Fuga* o *Escape Velocity*  $V_{esc}$ . Occorre quindi dare un certo  $\Delta V_1$  per passare dalla velocità dell'orbita circolare  $V_{c1}$  alla  $V_{esc}$ .

$$V_{c1} + \Delta V_1 = V_{esc} \quad (3.31)$$

La manovra di escape può avvenire seguendo un'orbita parabolica o su iperbolica: per  $r \rightarrow \infty$  nel primo caso si avrebbe  $\mathcal{E} = 0 \rightarrow V_\infty = 0$ , invece nel secondo  $\mathcal{E} > 0 \rightarrow V_\infty = \sqrt{2\mathcal{E}} > 0$  con  $V_\infty$  *velocità di eccesso iperbolico*. Volendo ragionare a parità di effetto finale (stessi  $r_\infty$  e  $V_\infty$ ), con l'escape su parabola a raggio infinito bisognerebbe dare un ulteriore  $\Delta V$  pari a  $V_\infty$ . Siccome per ridurre le perdite è opportuno spingere a raggi bassi, risulta sempre più conveniente effettuare una manovra di escape su un'iperbole piuttosto che su una parabola.

La velocità di escape si può ricavare applicando la conservazione dell'energia meccanica specifica  $\mathcal{E}$  tra il punto di burnout (dopo che è stato dato il  $\Delta V_{esc}$ ) e il punto che si trova a  $r \rightarrow \infty$ :

$$\mathcal{E} = \frac{V_{esc}^2}{2} - \frac{\mu_1}{r_1} = \frac{V_\infty^2}{2} - \frac{\mu_1}{r_\infty} \quad (3.32)$$

Nell'equazione 3.32 il termine  $\mu_1/r_\infty$  tende a 0, pertanto l'espressione si riduce a:

$$V_{esc}^2 = V_\infty^2 + \frac{2\mu_1}{r_1} \quad (3.33)$$

Per cui la  $V_{esc}$  vale:

$$V_{esc} = \sqrt{V_\infty^2 + 2V_{c1}^2} \quad (3.34)$$

con  $V_{c1} = \sqrt{\mu_1/r_1}$ . Una volta fuori dalla sfera di influenza, ha inizio la fase eliocentrica in cui lo S/C si trova prevalentemente sotto l'effetto gravitazionale del Sole. Le condizioni per passare dall'orbita planetocentrica all'orbita eliocentrica o viceversa sono chiamate *condizioni di patch*.

Al confine della sfera di influenza, che è di dimensione infinita rispetto al pianeta 1 ma trascurabile rispetto al Sole, bisogna far corrispondere le diverse coniche. Nel passaggio da una conica all'altra, occorre tener presente che durante le manovre di evasione le velocità sono calcolate rispetto al pianeta ma al di fuori della sfera di influenza è necessario adottare un sistema di riferimento eliocentrico perciò le velocità sono valutate rispetto al Sole.

La velocità dello spacecraft all'inizio della fase eliocentrica si può ricavare dalla composizione delle velocità di Galileo:

$$\mathbf{V}_{assoluta} = \mathbf{V}_{relativa} + \mathbf{V}_{trascinamento} \quad (3.35)$$

Nel caso in esame,  $V_{assoluta}$  è la velocità dello S/C rispetto al Sole,  $V_{relativa}$  è la velocità dello S/C rispetto al pianeta 1 e  $V_{trascinamento}$  è la velocità del pianeta 1 rispetto al Sole. A questo punto, si possono scrivere le relazioni per le velocità, chiamate anche *condizioni di patch*:

$$\mathbf{V}_1 = \mathbf{V}_{\infty,1} + \mathbf{V}_{c1} \quad (3.36)$$

Ragionamenti analoghi possono essere fatti per la fase di cattura: giunti alla sfera di influenza del pianeta di arrivo è il pianeta che cattura lo S/C. Si ha:

$$\mathbf{V}_2 = \mathbf{V}_{c2} - \mathbf{V}_{\infty,2} \quad (3.37)$$

Tramite l'iperbole si arriva poi in modo tangente all'orbita di parcheggio del pianeta 2. Al periastro dell'iperbole si frena dando un  $\Delta V_2$  e lo spacecraft si inserisce nell'orbita con una manovra analoga ma opposta alla precedente.

$$\Delta V_2 = \sqrt{V_{\infty}^2 + 2V_{c2}^2} - V_{c2} \quad (3.38)$$

In questo lavoro, si focalizza l'attenzione soltanto sulla fase eliocentrica della missione in cui, per le ipotesi fatte, le sfere di influenza si considerano concentrate nel baricentro del corrispondente pianeta.

In genere, se si considerano orbite circolari e complanari e manovre impulsive la trasferta ottimale in termini di consumo per la fase eliocentrica è la **trasferta di Hohmann** in quanto richiede il minimo  $\Delta V$ ; tuttavia, per contro, per compiere una manovra di questo tipo si impiegano tempi lunghi. Inoltre, il modello di Hohmann si basa su delle forti semplificazioni che trovano poco riscontro nella realtà poiché gran parte delle orbite di pianeti e asteroidi non sono né circolari né complanari. Per una trattazione più approfondita sulla trasferta di Hohmann si rimanda all'appendice A.1.

In tutti gli altri casi, il costo della missione sarà maggiore e occorrerà risolvere un **problema di Lambert**: dati i vettori posizione  $r_1$  alla partenza e  $r_2$  all'arrivo e noto anche il tempo di missione  $t_2 - t_1$ , è possibile determinare l'orbita che conduce lo S/C da 1 a 2.

Nell'eventualità in cui si consideri la propulsione elettrica, l'ipotesi di manovra impulsiva non è più valida e si può applicare l'**Approssimazione di Edelbaum**, anche qui per ulteriori dettagli si rimanda all'appendice A.2.

# Capitolo 4

## Ottimizzazione di Traiettorie Spaziali

### 4.1 Introduzione al problema di ottimizzazione

Nell'ambito delle traiettorie spaziali, l'ottimizzazione riveste un ruolo fondamentale nel determinare la fattibilità e i costi di una missione. In termini generali, il problema di ottimizzazione si pone come obiettivo la ricerca della legge di controllo che massimizza o minimizza un particolare indice di prestazione. I requisiti sul consumo di propellente, ad esempio, hanno forti ripercussioni sia sulla massa di payload da portare in orbita sia sui costi di un trasferimento orbitale. Allo stesso modo, anche la durata di una missione può influenzare positivamente o negativamente la sua realizzazione.

Generalmente, infatti, i problemi di ottimo in campo spaziale mirano o alla massimizzazione della massa finale (in maniera equivalente alla minimizzazione della massa di propellente), fissata la massa iniziale, o alla minimizzazione del tempo di missione. Non si escludono, tuttavia, altri tipi di obiettivi come la minimizzazione dell'incremento di velocità o dell'accelerazione.

#### 4.1.1 Processo di ottimizzazione

Il processo di risoluzione del problema di ottimizzazione si articola in 4 steps [8]:

- **Modello dinamico**

Si individuano le variabili che rappresentano lo stato del sistema  $\mathbf{x}(t)$  (*posizione e velocità all'istante  $t$* ) e si ricavano le equazioni differenziali che descrivono l'evoluzione del sistema (*equazioni del moto*). Infine, vengono scelte le variabili

di controllo  $\mathbf{u}(t)$  che sono i gradi di libertà del sistema.

$$\dot{\mathbf{x}} = f(\mathbf{x}(t), \mathbf{u}(t), t) \quad (4.1)$$

- **Obiettivo**

In funzione dei requisiti di missione, vengono stabiliti gli obiettivi dell'ottimizzazione. Si definisce perciò la **funzione obiettivo J**, indice del costo o del beneficio della missione a seconda che si tratti di un problema di minimizzazione o di massimizzazione. Le funzioni obiettivo possono essere classificate in base a due criteri: il tipo (consumo di propellente, durata della missione etc.) e il numero (*single objective* o *multi-objective*).

La forma più generale e completa della funzione di costo è data dalla **formulazione di Bolza**[8]:

$$J(\mathbf{x}, \mathbf{u}, t) = h(\mathbf{x}(t_f), t_f) + \int_{t_0}^{t_f} g(\mathbf{x}(t), \mathbf{u}(t), t) dt \quad (4.2)$$

in cui  $t_0$  e  $t_f$  sono il tempo iniziale e finale,  $h$  è il *termine di Mayer* rappresentativo del costo relativo agli stati finali mentre  $g$  è il *termine di Lagrange* che tiene conto dei costi degli stati e dei controlli nel tempo.

- **Approccio**

A seconda del tipo di problema, si può decidere di applicare un approccio *analitico* o un approccio *numerico*;

- **Soluzione**

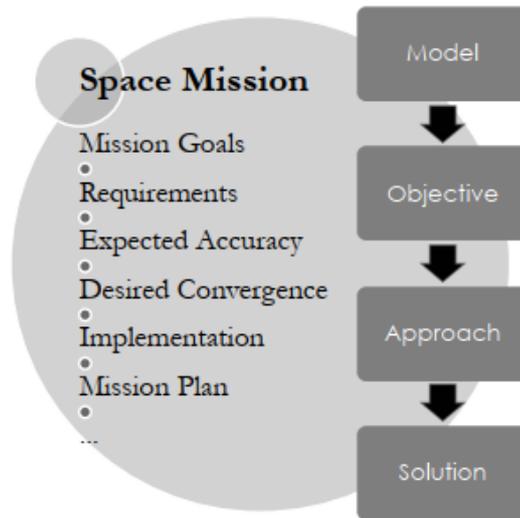
In base al metodo scelto nella fase precedente, si ricava la soluzione del problema. In particolare, l'approccio analitico fornisce una soluzione analitica in forma chiusa (anche se questa possibilità non è molto comune) mentre l'approccio numerico perviene alla soluzione mediante algoritmi numerici.

## 4.1.2 Metodi numerici

Dei 4 steps, la scelta dell'approccio rappresenta un elemento chiave del processo di ottimizzazione. Come accennato in precedenza, una prima distinzione generale è quella tra approcci analitici e numerici.

Per la risoluzione dei problemi di ottimizzazione, gli approcci analitici sono i più ricercati; tuttavia, nella maggior parte dei casi, tale approccio non è applicabile a causa dell'elevata complessità del problema.

Il più delle volte, quindi, è necessario ricorrere ai metodi numerici, i quali si suddividono principalmente in due grandi categorie:



**Figura 4.1:** Processo di ottimizzazione delle traiettorie spaziali [8]

- **Metodi Diretti**

I metodi diretti prevedono la discretizzazione delle variabili di stato e di controllo e la trasformazione del problema di ottimo in un problema di *programmazione non lineare (NLP)* che ottimizza direttamente la funzione obiettivo. Partendo da una soluzione di tentativo, il problema NLP cerca di determinare il set di variabili che rispetti i vincoli non lineari e che al contempo migliori l'indice di prestazione.

- **Metodi Indiretti**

Nei metodi indiretti il problema del controllo ottimale viene convertito in un *problema ai valori al contorno (BVP)* mediante l'applicazione del *Principio del Massimo di Pontryagin (PMP)*. Il PMP, infatti, restituisce le condizioni necessarie che la soluzione ottimale deve soddisfare. A differenza dei precedenti, però, i metodi indiretti richiedono la determinazione di nuove variabili, dette di *co-stato* o *aggiunte* che evolvono insieme al vettore di stato.

Partendo sempre da una soluzione di tentativo, si valuta l'errore sulle condizioni al contorno e si modifica di conseguenza la soluzione iniziale fino a quando non si raggiunge il valore di accuratezza desiderato.

Ai metodi diretti e indiretti talvolta si aggiunge anche una terza categoria:

- **Metodi di Programmazione Dinamica**

Si semplifica il problema di partenza scomponendolo in sotto-problemi più semplici correlati tra loro. La soluzione del problema complesso si ottiene

quindi risolvendo i singoli sotto-problemi tramite calcoli ricorsivi. Tale metodo non è adatto per risolvere problemi con un elevato numero di variabili e ha trovato applicazione soprattutto in problemi discreti.

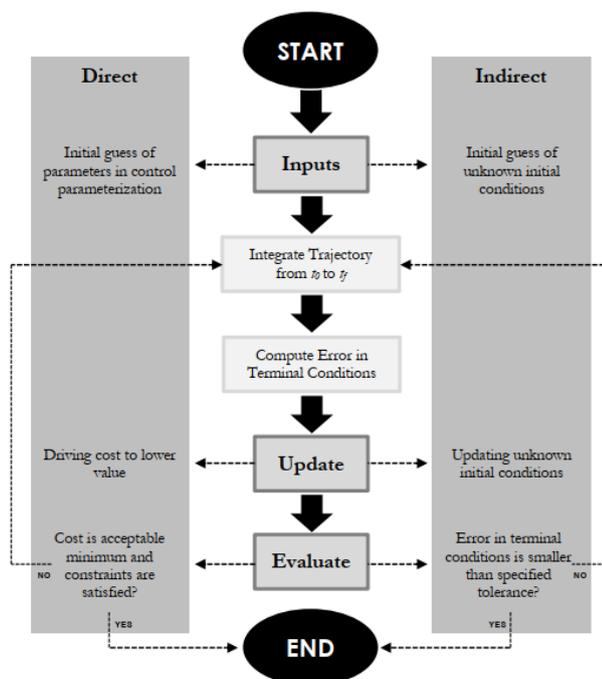


Figura 4.2: Algoritmo metodi shooting diretti e indiretti [8]

Il presente lavoro verte sull'utilizzo di metodi indiretti nell'ottimizzazione di traiettorie spaziali a bassa spinta. Pertanto, in questo capitolo verrà fornita una descrizione dell'approccio indiretto impiegato.

## 4.2 Metodi Indiretti

Un metodo indiretto opera costruendo analiticamente le condizioni necessarie e sufficienti per l'ottimalità che vengono poi risolte numericamente. I metodi indiretti utilizzano la teoria del controllo ottimale, basata sui principi del calcolo variazionale, per determinare le equazioni differenziali per le variabili aggiunte e per le condizioni di ottimo del problema di partenza.

Un approccio di questo tipo riconduce il problema di ottimo ad un problema ai limiti (BVP), la cui risoluzione permette di determinare le traiettorie ottimali candidate, dette "estremi". Ciascuno degli estremi calcolati viene poi esaminato per verificare se è un minimo, un massimo o un punto di sella locale. Tra le soluzioni

localmente ottimizzate, viene scelto l'estremo con il costo più basso [9].

I metodi indiretti offrono diversi vantaggi rispetto ai metodi diretti, ovvero:

- Per traiettorie spaziali a bassa spinta, il costo computazionale è tipicamente inferiore, in quanto i metodi diretti necessitano di un numero elevato di variabili per una descrizione accurata della traiettoria;
- Migliore accuratezza dei risultati;
- Forniscono utili informazioni teoriche relativamente alle caratteristiche fisiche e matematiche del problema.

D'altro canto, però, l'approccio indiretto presenta anche diverse problematiche di cui tener conto:

- Necessità di ricavare le espressioni analitiche delle condizioni necessarie, ciò incrementa le dimensioni del problema e non è immediato in caso di problemi particolarmente complessi;
- Il dominio di convergenza è limitato rispetto ai metodi diretti, poiché i primi richiedono delle stime iniziali anche per le variabili aggiunte;
- La soluzione iniziale di tentativo deve essere sufficientemente vicina alla soluzione ottimale per assicurare la convergenza. È necessaria, quindi, la conoscenza a priori di alcuni aspetti della soluzione. Specialmente per le variabili aggiunte la scelta non è intuitiva perché in genere non ha un significato fisico.

I progressi compiuti negli ultimi anni nel campo dei metodi indiretti hanno permesso di mitigare almeno in parte i precedenti svantaggi. In particolare, l'impostazione del problema e la derivazione delle condizioni di ottimo sono state rese più semplici e generali. Infine, alcuni miglioramenti sono stati apportati anche nella formulazione del BVP e nella convergenza della procedura di shooting.

### 4.2.1 Teoria del controllo ottimale

In questa sezione, viene illustrata la teoria del controllo ottimale coerentemente con la sua applicazione nell'ottimizzazione di traiettorie spaziali.

Considerato un generico sistema, si introduce il vettore delle *variabili di stato*  $\mathbf{x}$  che ne rappresentano lo stato. L'evoluzione del sistema tra l'istante iniziale  $t_0$  e l'istante finale  $t_f$  è descritta dal seguente sistema di equazioni differenziali del primo ordine:

$$\frac{d\mathbf{x}}{dt} = \mathbf{f}(\mathbf{x}, \mathbf{u}, t) \quad (4.3)$$

Il sistema di equazioni in 4.3 è funzione, oltre che del vettore  $\mathbf{x}$ , del vettore dei controlli  $\mathbf{u}$  e della variabile indipendente tempo  $t$ .

In questo caso, è opportuno suddividere la traiettoria in  $n$  sotto-intervalli, all'interno di ciascuno dei quali le variabili sono continue. Il  $j$ -esimo sotto-intervallo inizia all'istante  $t_{(j-1)+}$  e termina al tempo  $t_{j-}$ . In corrispondenza di tali estremi, le variabili assumono rispettivamente i valori  $\mathbf{x}_{(j-1)+}$  e  $\mathbf{x}_{j-}$ , dove i segni - e + indicano i valori assunti subito prima o dopo il punto considerato. In questo modo, è possibile gestire anche la presenza di discontinuità ai contorni interni relative alle variabili o eventualmente al tempo.

Per quanto riguarda le condizioni al contorno, tipicamente si tratta di condizioni *non-lineari* e di tipo *misto*, ovvero riguardano i valori delle variabili di stato e della variabile indipendente tempo sia ai contorni esterni che a quelli interni. Le condizioni al contorno vengono raggruppate nel vettore  $\chi$ :

$$\chi(\mathbf{x}_{(j-1)+}, \mathbf{x}_{j-}, t_{(j-1)+}, t_{j-}) = 0 \quad j = 1, \dots, n \quad (4.4)$$

Poiché l'obiettivo del problema di ottimo è quello di massimizzare o minimizzare un certo indice di prestazione, è opportuno introdurre la *funzione di costo* di cui si ricercano i massimi o minimi:

$$J = \varphi(\mathbf{x}_{(j-1)+}, \mathbf{x}_{j-}, t_{(j-1)+}, t_{j-}) + \sum_j \int_{t_{(j-1)+}}^{t_{j-}} \Phi(\mathbf{x}(t), \mathbf{u}(t), t) dt \quad j = 1, \dots, n \quad (4.5)$$

L'eq.4.5 definisce il funzionale  $J$  come la somma di 2 contributi:

- La funzione  $\varphi$  che dipende dai valori delle variabili e del tempo in corrispondenza contorni interni ed esterni;
- L'integrale su tutta la traiettoria della funzione  $\Phi$ , che dipende dal tempo e dai valori assunti da variabili e controlli in ogni punto.

Impiegando opportune variabili ausiliarie è sempre possibile ricondursi al caso  $\varphi = 0$  (*formulazione di Lagrange*) o  $\Phi = 0$  (*formulazione di Mayer*).

Per tenere conto delle equazioni differenziali di stato e condizioni al contorno si introducono i moltiplicatori di Lagrange: le *costanti aggiunte*  $\boldsymbol{\mu}$  e le *variabili aggiunte*  $\boldsymbol{\lambda}$ . Grazie ai nuovi parametri, si può riscrivere il funzionale come:

$$J^* = \varphi + \boldsymbol{\mu}^T \boldsymbol{\chi} + \sum_j \int_{t_{(j-1)+}}^{t_{j-}} (\Phi + \boldsymbol{\lambda}^T (\mathbf{f} - \dot{\mathbf{x}})) dt \quad j = 1, \dots, n \quad (4.6)$$

dove  $J^*$  prende il nome di *Funzionale Implementato*. Confrontando le equazioni 4.5 e 4.6, si intuisce che entrambi i funzionali dipendono dal tempo  $t$ , dalle variabili di stato  $\mathbf{x}$  e dalle loro derivate  $\dot{\mathbf{x}}$  e dai controlli  $\mathbf{u}$ . Nel caso in cui le condizioni al contorno e le equazioni di stato siano soddisfatte, i due funzionali coincidono così

come i loro valori estremali.

Per eliminare la dipendenza del funzionale  $J^*$  dalle derivate  $\dot{x}$ , si integra per parti l'eq.4.6. Per cui, si ha poi:

$$J^* = \varphi + \boldsymbol{\mu}^T \boldsymbol{\chi} + \sum \left( \boldsymbol{\lambda}_{(j-1)+}^T \mathbf{x}_{(j-1)+} - \boldsymbol{\lambda}_{j-}^T \mathbf{x}_{j-} \right) + \sum_j \int_{t_{(j-1)+}}^{t_{j-}} \left( \Phi + \boldsymbol{\lambda}^T \mathbf{f} - \dot{\boldsymbol{\lambda}}^T \mathbf{x} \right) dt \quad j = 1, \dots, n \quad (4.7)$$

Differenziando l'equazione 4.6, si ricava la variazione prima di  $J^*$ :

$$\begin{aligned} \delta J^* = & \left( -H_{(j-1)+} + \frac{\partial \varphi}{\partial t_{(j-1)+}} + \boldsymbol{\mu}^T \frac{\partial \boldsymbol{\chi}}{\partial t_{(j-1)+}} \right) \delta t_{(j-1)+} + \\ & \left( -H_{j-} + \frac{\partial \varphi}{\partial t_{j-}} + \boldsymbol{\mu}^T \frac{\partial \boldsymbol{\chi}}{\partial t_{j-}} \right) \delta t_{j-} + \\ & \left( \boldsymbol{\lambda}_{(j-1)+}^T + \frac{\partial \varphi}{\partial \mathbf{x}_{(j-1)+}} + \boldsymbol{\mu}^T \left[ \frac{\partial \boldsymbol{\chi}}{\partial \mathbf{x}_{(j-1)+}} \right] \right) \delta \mathbf{x}_{(j-1)+} + \\ & \left( \boldsymbol{\lambda}_{j-}^T + \frac{\partial \varphi}{\partial \mathbf{x}_{j-}} + \boldsymbol{\mu}^T \left[ \frac{\partial \boldsymbol{\chi}}{\partial \mathbf{x}_{j-}} \right] \right) \delta \mathbf{x}_{j-} \\ & \sum_j \int_{t_{(j-1)+}}^{t_{j-}} \left( \left( \frac{\partial H}{\partial \mathbf{x}} + \dot{\boldsymbol{\lambda}}^T \right) \delta \mathbf{x} + \frac{\partial H}{\partial \mathbf{u}} \delta \mathbf{u} \right) dt \quad j = 1, \dots, n \end{aligned} \quad (4.8)$$

Nell'equazione 4.8 le parentesi quadre rappresentano delle matrici mentre il termine  $H$  prende il nome di *Hamiltoniano* del sistema ed è definito come:

$$H = \Phi + \boldsymbol{\lambda}^T \mathbf{f} \quad (4.9)$$

Poiché la condizione necessaria di ottimo richiede la stazionarietà del funzionale  $J^*$ , è necessario che per qualsiasi  $\delta x$ ,  $\delta u$ ,  $\delta x_{(j-1)+}$ ,  $\delta x_{j-}$ ,  $\delta t_{(j-1)+}$ ,  $\delta t_{j-}$ , scelti compatibilmente con il sistema di equazioni e le condizioni al contorno, sia soddisfatta la condizione  $\delta J^* = 0$  compatibile con le equazioni differenziali e le condizioni al contorno.

Tramite un'appropriata scelta dei moltiplicatori di Lagrange, è possibile annullare contemporaneamente i coefficienti di ogni variazione  $\delta$  contenuta nell'equazione 4.8. Se si annullano i coefficienti di  $\delta \mathbf{x}$  e  $\delta \mathbf{u}$  nell'integrale per ogni punto della traiettoria, si ottengono rispettivamente le **equazioni di Eulero-Lagrange** per le variabili aggiunte (4.10) e le **equazioni algebriche** per i controlli (4.11):

$$\frac{d\boldsymbol{\lambda}}{dt} = - \left( \frac{\partial H}{\partial \mathbf{x}} \right)^T \quad (4.10)$$

$$\left( \frac{dH}{d\mathbf{u}} \right)^T = 0 \quad (4.11)$$

Si osserva che le leggi di controllo non dipendono dal fatto di cercare i massimi oppure i minimi di  $J$ .

Nel caso in cui un controllo sia soggetto ad un vincolo, quindi deve appartenere ad un dominio di ammissibilità, è necessario fare alcune precisazioni.

Si limita la trattazione a vincoli espliciti e costanti che perciò non sono funzione del tempo o delle variabili di stato.

Sulla base di questa premessa, si può affermare che il valore ottimale del controllo in ogni punto della traiettoria corrisponde a quello che rende massimo o minimo l'Hamiltoniano in quel punto a seconda che si cerchino rispettivamente il massimo o il minimo (*Principio di Massimo di Pontryagin*).

Se l'obiettivo è massimizzare  $J$ , si hanno due possibilità:

- **Controllo localmente non vincolato:** se il valore ottenuto dall'eq.4.11 ricade nel dominio di ammissibilità, allora esso corrisponde al valore ottimale del controllo. In questo caso, quindi, il vincolo non interviene in quel punto;
- **Controllo vincolato:** se il valore ottenuto dall'eq.4.11 non appartiene al dominio di ammissibilità, il valore ottimale si trova agli estremi del dominio, cioè il controllo assume il valore massimo o minimo.

Un'ulteriore considerazione va fatta in caso di linearità dell'Hamiltoniano rispetto a uno dei controlli soggetto a vincoli, visto che nell'equazione 4.9 il controllo non compare esplicitamente e non può essere determinato.

Anche qui si distinguono due casistiche:

- **Controllo bang-bang:** se nell'equazione 4.9 il coefficiente del controllo è *non nullo*, l'Hamiltoniano è massimizzato o minimizzato per il valore massimo del controllo a seconda che il coefficiente sia rispettivamente positivo o negativo;
- Se nell'equazione 4.9 il coefficiente del controllo è *identicamente nullo* durante un intervallo finito di tempo (arco singolare), bisogna imporre l'annullamento di tutte le derivate successive del coefficiente rispetto al tempo, fino a quando in una di esse non appare esplicitamente il controllo. Il controllo ottimale viene quindi determinato ponendo uguale a zero quest'ultima derivata.

A questo punto, si definiscono le condizioni al contorno mancanti. In primo luogo, si prende in considerazione il  $j$ -esimo contorno e si esplicitano le condizioni per tale punto che derivano dal considerarlo come estremo finale del  $(j - 1)$ -esimo sottointervallo o come estremo iniziale del  $j$ -esimo sottointervallo.

In secondo luogo, si annullano nell'equazione 4.8 i coefficienti rispettivamente di  $\delta x_{j-}$ ,  $\delta x_{j+}$ ,  $\delta t_{j-}$ ,  $\delta t_{j+}$ .

Si ricavano così le seguenti condizioni:

$$-\boldsymbol{\lambda}_{j-}^T + \frac{\partial \varphi}{\partial \mathbf{x}_{j-}} + \boldsymbol{\mu}^T \left[ \frac{\partial \boldsymbol{\chi}}{\partial \mathbf{x}_{j-}} \right] = 0 \quad j = 1, \dots, n \quad (4.12)$$

$$\boldsymbol{\lambda}_{j+}^T + \frac{\partial \varphi}{\partial \mathbf{x}_{j+}} + \boldsymbol{\mu}^T \left[ \frac{\partial \boldsymbol{\chi}}{\partial \mathbf{x}_{j+}} \right] = 0 \quad j = 1, \dots, n - 1 \quad (4.13)$$

$$H_{j-} + \frac{\partial \varphi}{\partial t_{j-}} + \boldsymbol{\mu}^T \frac{\boldsymbol{\chi}}{\partial t_{j-}} = 0 \quad j = 1, \dots, n \quad (4.14)$$

$$-H_{j+} + \frac{\partial \varphi}{\partial t_{j+}} + \boldsymbol{\mu}^T \frac{\boldsymbol{\chi}}{\partial t_{j+}} = 0 \quad j = 1, \dots, n - 1 \quad (4.15)$$

dove i pedici  $j_-$  e  $j_+$  indicano i valori assunti subito prima e subito dopo il punto  $j$ . Le equazioni 4.12 e 4.14 perdono di significato per  $j = 0$ ; vale lo stesso per le equazioni 4.13 e 4.15 nel caso  $j = n$ .

Se si eliminano le costanti aggiunte  $\boldsymbol{\mu}$  dalle equazioni 4.12-4.15, si ricavano le **condizioni al contorno di ottimo** del tipo:

$$\boldsymbol{\sigma} \left( \mathbf{x}_{(j-1)_+}, \mathbf{x}_{j-}, \boldsymbol{\lambda}_{(j-1)_+}, \boldsymbol{\lambda}_{j-}, t_{(j-1)_+}, t_{j-} \right) = 0 \quad (4.16)$$

L'equazione 4.16, insieme alle condizioni imposte 4.4, completa il sistema differenziale dato dalle equazioni 4.3 e 4.10.

Se una generica variabile di stato  $\mathbf{x}$  è soggetta a particolari condizioni al contorno, le equazioni 4.12 e 4.13 determinano particolari condizioni di ottimo per la relativa variabile aggiunta  $\boldsymbol{\lambda}_x$  [10]:

- Se il valore della variabile di stato  $x$  è assegnato al tempo iniziale, quindi nel vettore delle condizioni imposte  $\boldsymbol{\chi}$  compare un'equazione del tipo  $x_0 - a = 0$  con  $a$  valore dato, la variabile aggiunta  $\lambda_{x_0}$  è definita *libera*, cioè essa non è soggetta ad alcuna condizione. Ciò vale anche al tempo finale se la variabile  $x$  è assegnata in quel punto;
- Se il valore iniziale della variabile di stato  $x_0$  non è assegnato, la corrispondente variabile aggiunta è nulla all'istante iniziale  $\lambda_{x_0} = 0$ . Come prima, questa considerazione valge anche per il tempo finale;
- Se una variabile di stato è continua e non assegnata al contorno interno  $j$ , quindi il vettore  $\boldsymbol{\chi}$  contiene la condizione  $x_{j+} = x_{j-}$ , la corrispondente variabile aggiunta è anch'essa continua ( $\lambda_{x_{j+}} = \lambda_{x_{j-}}$ );
- Se una variabile di stato è continua e assegnata esplicitamente a un contorno interno (in  $\boldsymbol{\chi}$  si ha  $x_{j+} = x_{j-} = a$ ), la relativa variabile aggiunta presenta una discontinuità libera: il valore di  $\lambda_{j+}$  è indipendente da  $\lambda_{j-}$  e viene determinato attraverso l'ottimizzazione.

D'altro canto, se l'Hamiltoniano non dipende esplicitamente dal tempo, anche le equazioni 4.14 e 4.15 determinano particolari condizioni al contorno in alcune situazioni [10]:

- Se il tempo iniziale  $t_0$  non interviene esplicitamente né nelle condizioni al contorno  $\chi$  né nella funzione  $\varphi$ , l'Hamiltoniano è nullo all'istante iniziale ( $H_0 = 0$ ). Stesso discorso per il tempo finale;
- Se il tempo intermedio  $t_j$  non compare esplicitamente in  $\varphi$  e in  $\chi$  che lo coinvolge è la continuità del tempo ( $t_{j+} = t_{j-}$ ), l'Hamiltoniano è continuo nel punto  $j$  ( $H_{j+} = H_{j-}$ );
- Se il tempo  $t_j$  è esplicitamente assegnato, in  $\chi$  sono presenti le equazioni  $t_{j+} = t_{j-} = a$  e l'Hamiltoniano nel punto  $j$  ha una *discontinuità libera*.

## 4.2.2 Problema differenziale ai limiti

Il metodo indiretto si basa sull'applicazione della teoria del controllo ottimale al sistema di equazioni 4.3. La teoria del controllo ottimale formula poi il problema di ottimo come un problema matematico soggetto a vincoli differenziali e algebrici. Come visto in precedenza, i valori iniziali di alcune variabili di stato e aggiunte possono essere incogniti, pertanto il problema di ottimo si traduce in un **problema differenziale ai limiti (BVP)**. Il problema ai limiti è definito dalle equazioni differenziali 4.3 e 4.10 con condizioni al contorno imposte e di ottimo date da 4.4 e 4.16 mentre i controlli sono determinati dalle equazioni algebriche 4.11.

La risoluzione di tale problema consiste nel determinare tramite la tecnica di *Multiple Shooting* i valori iniziali delle variabili che consentono di soddisfare tutte le condizioni al contorno, sia imposte che ottime.

La tecnica del Multiple Shooting prevede la suddivisione dell'intervallo di tempo  $[t_0, t_f]$  in  $N + 1$  sotto-intervalli e l'integrazione della traiettoria su ciascun sotto-intervallo  $[t_i, t_{i+1}]$ . I valori iniziali delle variabili di stato e aggiunte in ciascun sotto-intervallo sono le incognite da determinare. Agli estremi di ogni sotto-intervallo è necessario applicare le condizioni di continuità.

A questo punto, si procede con il descrivere il metodo di risoluzione del problema ai limiti e come il problema di ottimo viene formulato in modo da adattarsi alle sue caratteristiche.

Le caratteristiche del problema in esame possono essere riassunte come segue:

- Ripartizione dell'intervallo di integrazione in sotto-intervalli in ciascuno dei quali le equazioni differenziali possono assumere forma differente;
- Durata incognita di ciascun sotto-intervallo;

- Possibile non-linearità delle condizioni al contorno, le quali possono coinvolgere i valori delle variabili sia ai contorni esterni sia a quelli interni;
- Possibile discontinuità delle variabili in corrispondenza dei contorni interni; dopo la discontinuità, il loro valore può essere incognito.

La difficoltà principale delle tecniche di ottimizzazione indirette è la soluzione del problema ai limiti che deriva dalla loro applicazione.

Per ricavare la soluzione del problema ai limiti (BVP), è necessario scomporlo in una successione di problemi ai valori iniziali che viene portata a convergenza tramite il metodo di Newton.

Dal momento che la durata di ciascun sottointervallo in genere incognita, risulta conveniente sostituire nell'integrazione la variabile indipendente tempo  $t$  con una nuova variabile  $\epsilon$  definita nel  $j$ -esimo sottointervallo dalla relazione:

$$\epsilon = j - 1 + \frac{t - t_{j-1}}{t_j - t_{j-1}} = j - 1 + \frac{t - t_{j-1}}{\tau_j} \quad (4.17)$$

dove  $\tau_j$  rappresenta la durata del  $j$ -esimo sottointervallo.

Si considera ora il sistema differenziale costituito dalle eq.4.3 e 4.10 in cui ai controlli sono state sostituite le espressioni date da 4.11. Di conseguenza, si formula un problema differenziale con vettore delle variabili, di stato e aggiunte,  $\mathbf{y} = (\mathbf{x}, \boldsymbol{\lambda})$ :

$$\frac{d\mathbf{y}}{dt} = \mathbf{f}^*(\mathbf{y}, t) \quad (4.18)$$

Poiché nel problema sono coinvolti anche parametri costanti, come le durate  $\tau$ , conviene definire un nuovo vettore  $\mathbf{z} = (\mathbf{y}, \mathbf{c})$  che tenga conto sia delle variabili (di stato e aggiunte)  $\mathbf{y}$  sia delle costanti  $\mathbf{c}$ .

A seguito del cambio di variabile indipendente e dell'introduzione del nuovo vettore  $\mathbf{z}$ , il sistema di equazioni diventa:

$$\frac{d\mathbf{z}}{dt} = \mathbf{f}(\mathbf{z}, \epsilon) \quad (4.19)$$

In particolare, se si esplicita il secondo membro in 4.19, si ottengono le equazioni per le variabili di stato e per i parametri costanti:

$$\begin{aligned} \frac{d\mathbf{y}}{d\epsilon} &= \tau_j \frac{d\mathbf{y}}{dt} \\ \frac{d\mathbf{c}}{d\epsilon} &= 0 \end{aligned} \quad (4.20)$$

Per quanto riguarda le condizioni al contorno, esse comprendono sia le condizioni imposte che di ottimo e in generale sono espresse come:

$$\boldsymbol{\psi}(\mathbf{s}) = 0 \quad (4.21)$$

dove  $\mathbf{s}$  è il vettore che include i valori che le variabili assumono a ogni contorno, interno o esterno, e i parametri incogniti.

$$\mathbf{s} = (\mathbf{y}_0, \dots, \mathbf{y}_n, \mathbf{c}) \quad (4.22)$$

Per la risoluzione del problema si adotta un procedimento iterativo che consente di determinare i valori iniziali delle variabili in grado di soddisfare le condizioni al contorno nell' eq.4.21.

Si suppone che nessuno dei valori iniziali delle variabili sia noto; dunque, alla prima iterazione, è necessario considerare dei valori di tentativo  $\mathbf{p}^1$ . Dopodiché, la r-esima iterazione inizia con l'integrazione delle equazioni 4.19 utilizzando i valori iniziali  $\mathbf{p}^r$  trovati al termine della iterazione precedente. Ciò equivale ad imporre:

$$\mathbf{z}(0) = \mathbf{p}^r \quad (4.23)$$

Si procede poi all' integrazione delle equazioni lungo la traiettoria considerando anche le eventuali discontinuità ai contorni interni.

In corrispondenza di ogni contorno si determina il valore delle variabili di stato e alla fine dell'integrazione si calcola l'errore sulle condizioni al contorno  $\psi^r$  alla r-esima iterazione.

Una variazione  $\Delta\mathbf{p}$  dei valori iniziali causa una variazione dell'errore sulle condizioni al contorno di una quantità pari a:

$$\Delta\psi = \left[ \frac{\partial\psi}{\partial\mathbf{p}} \right] \Delta\mathbf{p} \quad (4.24)$$

Siccome si cerca di annullare l'errore sulle condizioni al contorno e ottenere quindi  $\Delta\psi = -\psi^r$ , ad ogni iterazione i valori iniziali vengono corretti di una quantità  $\Delta\mathbf{p}$  fino a quando non sono soddisfatte le condizioni al contorno 4.21 con l'accuratezza richiesta:

$$\Delta\mathbf{p} = \mathbf{p}^{r+1} - \mathbf{p}^r = - \left[ \frac{\partial\psi}{\partial\mathbf{p}} \right]^{-1} \psi^r \quad (4.25)$$

La matrice che compare nell'equazione 4.25 deriva dal prodotto di due matrici:

$$\left[ \frac{\partial\psi}{\partial\mathbf{p}} \right] = \left[ \frac{\partial\psi}{\partial\mathbf{s}} \right] \left[ \frac{\partial\mathbf{s}}{\partial\mathbf{p}} \right] \quad (4.26)$$

In 4.26 la prima matrice si ricava derivando le condizioni al contorno rispetto alle grandezze che vi compaiono. La seconda matrice, invece, è costituita dai valori che le variabili assumono ai contorni rispetto ai valori iniziali, ovvero i valori che vengono assunti ai contorni dalla matrice:

$$\left[ \frac{\partial\mathbf{z}}{\partial\mathbf{p}} \right] = [\mathbf{g}(\epsilon)] \quad (4.27)$$

La seconda matrice si ottiene integrando il sistema di equazioni differenziali risultante dalla derivazione del sistema principale 4.19 rispetto a ciascuno dei valori iniziali:

$$[\dot{\mathbf{g}}] = \frac{d}{d\epsilon} \left[ \frac{\partial \mathbf{z}}{\partial \mathbf{p}} \right] = \left[ \frac{\partial}{\partial \mathbf{p}} \left( \frac{d\mathbf{z}}{d\epsilon} \right) \right] = \left[ \frac{\partial \mathbf{f}}{\partial \mathbf{p}} \right] \quad (4.28)$$

Esplicitando lo Jacobiano del sistema principale 4.19, l'equazione 4.28 diventa:

$$[\dot{\mathbf{g}}] = \left[ \frac{\partial \mathbf{f}}{\partial \mathbf{z}} \right] \left[ \frac{\partial \mathbf{z}}{\partial \mathbf{p}} \right] = \left[ \frac{\partial \mathbf{f}}{\partial \mathbf{z}} \right] [\mathbf{g}] \quad (4.29)$$

I valori iniziali per il sistema omogeneo 4.29 si ricavano derivando la relazione 4.23. Si ottiene così la matrice identità:

$$[\mathbf{g}(0)] = \frac{\partial \mathbf{z}(0)}{\partial \mathbf{p}} = [\mathbf{I}] \quad (4.30)$$

Questo metodo permette di trattare anche eventuali discontinuità nelle variabili. Nel caso in cui sia presente una discontinuità nel generico punto  $i$  della traiettoria, è necessario aggiornare sia il vettore delle variabili  $\mathbf{z}$  che la matrice  $\mathbf{g}$  tramite la relazione  $\mathbf{h}$  che correla i valori delle variabili prima e dopo la discontinuità:

$$\begin{aligned} \mathbf{z}_{i+} &= \mathbf{h}(\mathbf{z}_{i-}) \\ [\mathbf{g}_{i+}] &= \left[ \frac{\partial \mathbf{h}}{\partial \mathbf{z}} \right] [\mathbf{g}_{i-}] \end{aligned} \quad (4.31)$$

Il problema si semplifica nel momento in cui alcuni dei valori iniziali delle variabili sono fissati a priori. In tal caso, infatti, per i vettori  $\mathbf{p}$  e  $\boldsymbol{\psi}$  è necessario stimare soltanto le componenti incognite di  $\mathbf{z}(0)$  e le condizioni al contorno non esplicite al tempo iniziale.

La matrice nell'equazione 4.25 può essere valutata numericamente, ovvero l' $i$ -esima riga della matrice si ottiene variando la  $i$ -esima componente di  $\mathbf{p}$  di una quantità  $\Delta p$ , mentre le altre rimangono fisse, e procedendo poi con l'integrazione delle equazioni 4.19. In questo modo, è possibile calcolare la variazione delle condizioni al contorno  $\Delta \boldsymbol{\psi}(\Delta \mathbf{p})$ ; applicando poi la linearizzazione, la riga corrispondente si può ottenere come  $\Delta \boldsymbol{\psi}^T / \Delta \mathbf{p}$ . Talvolta, ricorrere a tale procedura conduce ad una soluzione più semplice e rapida del problema, tuttavia non sempre assicura la convergenza. Il rischio di compromettere la convergenza deriva, infatti, dalle approssimazioni numeriche introdotte per il calcolo della matrice in 4.25 che risulta quindi meno accurato. Analogamente, si può ricorrere ad una procedura numerica anche per il calcolo dello Jacobiano e della matrice  $\left[ \frac{\partial \boldsymbol{\psi}}{\partial \mathbf{s}} \right]$ .

Per l'integrazione delle equazioni differenziali del sistema principale 4.19 e del sistema omogeneo 4.29 viene impiegato un metodo a passo e ordine variabile basato sulle *formule di Adams-Multon*.

Inoltre, si impone che l'errore massimo  $E_{max} = \max_i(\psi_i)$  sulle condizioni al contorno sia coerente con l'accuratezza stabilita che è pari a  $10^{-7}$ .

La linearizzazione applicata per il calcolo della correzione  $\Delta\mathbf{p}$  data da 4.25 dà origine ad ulteriori errori potenzialmente dannosi per la convergenza, in quanto contribuiscono ad aumentare l'errore sulle condizioni al contorno. Pertanto, per ovviare a tale problema, si adottano i seguenti accorgimenti:

1. Per non allontanarsi troppo dalla soluzione, si applica una correzione che è solo una frazione di quella determinata:

$$\mathbf{p}^{r+1} = \mathbf{p}^r + K_1\Delta\mathbf{p} \quad (4.32)$$

con  $K_1 = 0.1 - 1$  a seconda di quanto la soluzione di partenza sia lontana o vicina rispetto a quella cercata.

2. Ad ogni iterazione l'errore massimo sulle condizioni al contorno  $E_{max}^{r+1}$  viene confrontato con quello dell'iterazione precedente  $E_{max}^r$ :

- Se l'errore massimo corrente è inferiore ad un multiplo di quello precedente ( $E_{max}^{r+1} < K_2 E_{max}^r$ ), si prosegue con la nuova iterazione. Dato che c'è la possibilità che l'errore sulle condizioni al contorno aumenti nelle prime iterazioni, si fissa un valore di  $K_2$  superiore all'unità,  $K_2 = 2 - 3$ ;
- Se l'errore massimo corrente è troppo alto rispetto all'errore precedente, si dimezza la correzione apportata. Pertanto, nell'integrazione delle equazioni del moto, si utilizzano come valori di tentativo:

$$\mathbf{p}^{r+1} = \mathbf{p}^r + K_1\Delta\mathbf{p}/2 \quad (4.33)$$

Dopodichè, si ripete il confronto tra il nuovo errore massimo ottenuto e quello dell'iterazione precedente e, se necessario, si procede ancora con la bisezione della correzione.

Superato il numero massimo di bisezioni stabilito, il procedimento si arresta in quanto la soluzione di tentativo scelta non è in grado di portare alla convergenza.

# Capitolo 5

## Presentazione del problema

Oggetto di studio di questa tesi è l'applicazione di un approccio indiretto all'ottimizzazione di traiettorie interplanetarie in presenza di discontinuità di spinta causate dal vincolo di potenza minima e dal duty cycle.

### 5.1 Modello Matematico

Come anticipato nel capitolo 2, durante l'analisi preliminare si focalizza l'attenzione sulla fase eliocentrica della missione: per modellare questa fase si ricorre all'approssimazione delle coniche raccordate e per descrivere il moto dello spacecraft vengono utilizzate le equazioni del problema dei due corpi (con massa variabile).

Pertanto, considerando un sistema di riferimento eliocentrico, le **equazioni di stato** sono:

$$\frac{d\mathbf{r}}{dt} = \mathbf{V} \quad (5.1)$$

$$\frac{d\mathbf{V}}{dt} = \mathbf{g} + \frac{\mathbf{T}}{m} \quad (5.2)$$

$$\frac{dm}{dt} = -q \quad (5.3)$$

dove  $\mathbf{r}$  è il vettore posizione,  $\mathbf{V}$  è il vettore velocità mentre  $\mathbf{T}$  è il vettore spinta. Le equazioni vettoriali devono essere proiettate in un opportuno sistema di riferimento. In questo caso, si adottano coordinate sferiche in un sistema di riferimento inerziale basato sul piano equatoriale. Per la trattazione completa sulla forma esplicita delle equazioni vettoriali si rimanda all'appendice B.

I parametri del problema noti in partenza sono la massa iniziale dello spacecraft  $m_0 = 3333.33$  kg e la velocità  $V_\infty = 3$  km/s ( $C3_0 = \sqrt{2\mathcal{E}} = V_\infty^2$ ).

Di conseguenza, per le **condizioni al contorno** si ha:

$$\mathbf{r}_0 = \mathbf{r}_E(t_0) \quad (5.4)$$

$$[\mathbf{v}_0 - \mathbf{v}_E(t_0)]^2 = C^2 \mathfrak{z}_0 \quad (5.5)$$

$$m_0 = 3333.33\text{kg} \quad (5.6)$$

$$\mathbf{r}_1 = \mathbf{r}_A(t_1) \quad (5.7)$$

$$\mathbf{V}_1 = \mathbf{V}_A(t_1) \quad (5.8)$$

dove i pedici 0 e 1 si riferiscono rispettivamente alla partenza dalla Terra e all'arrivo ad Eros mentre i pedici  $E$  e  $A$  indicano la terra e l'asteroide.

## 5.2 Assunzioni sul sistema

Lo spacecraft è dotato di pannelli solari che producono 15.5 kW di potenza elettrica a 1 AU (EOL), di cui però una quota (costante) di 1.5 kW è riservata ai sistemi di bordo dello S/C.

Prendendo come riferimento quanto ipotizzato per la missione ARRM [11], si assume che la potenza disponibile per il sistema propulsivo  $P_a$  vari in modo inversamente proporzionale al quadrato della distanza dal Sole. Tenendo conto della quota destinata all'elettronica di bordo, la  $P_a$  per la spinta si può valutare nel seguente modo:

$$P_a = 15.5/r^2 - 1.5 \text{ kW} \quad (5.9)$$

dove  $r$  è in AU e rappresenta la distanza dello S/C dal Sole.

Il sistema propulsivo è costituito da un propulsore elettrico con potenza minima in input pari a 8 kW e massima di 13.95 kW. In particolare, poiché la spinta ( $T$ ) e la portata di propellente ( $q$ ) del propulsore sono funzioni della potenza fornita in input ( $P$ ), per entrambe le grandezze  $T$  e  $q$  si assumono delle relazioni cubiche in funzioni di  $P$  [12]:

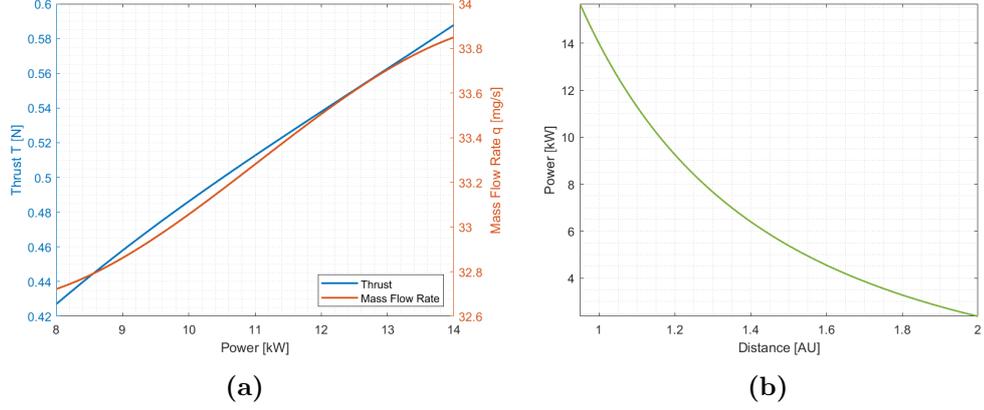
$$T = a_0 + a_1P + a_2P^2 + a_3P^3 \quad (5.10)$$

$$q = b_0 + b_1P + b_2P^2 + b_3P^3 \quad (5.11)$$

In fig.5.1a sono rappresentati gli andamenti della spinta e della portata di propellente in funzione della potenza.

## 5.3 Approccio indiretto

Come si è visto nel capitolo 3, i metodi indiretti si basano sulla teoria del controllo ottimale e trasformano il problema di ottimo in un problema ai limiti.



**Figura 5.1:** Andamenti spinta e della portata di propellente in funzione della potenza (a) e potenza in funzione della distanza dal Sole (b)

Nel caso dei metodi indiretti ad ogni equazione differenziale è associata una variabile aggiunta, per cui l'Hamiltoniano si definisce come:

$$H = \lambda_r^T \mathbf{V} + \lambda_V^T \mathbf{g} + T S_F \quad (5.12)$$

dove il termine  $S_F$  rappresenta il coefficiente della spinta e prende il nome di *Switching Function*.

La definizione della Switching Function è:

$$S_F = \frac{\lambda_V^T \mathbf{T}/T}{m} - \lambda_m \frac{q}{T} \quad (5.13)$$

I controlli ottimali devono massimizzare l'Hamiltoniano in ogni punto lungo la traiettoria, coerentemente con quanto previsto dal Principio del Massimo di Pontryagin. Pertanto, si deduce che la spinta deve essere parallela al vettore velocità aggiunta  $\lambda_V$ . La Switching function quindi diventa:

$$S_F = \frac{\lambda_V}{m} - \lambda_m \frac{q}{T} \quad (5.14)$$

La spinta assume valore massimo se  $S_F > 0$  mentre se  $S_F < 0$  il propulsore viene spento. Solo in alcuni casi particolari, solitamente in volo atmosferico, si ha  $S_F = 0$  e la spinta assume un valore intermedio (arco singolare).

Il PMP richiede la massimizzazione della funzione:

$$\bar{H} = T - \frac{m\lambda_m}{\lambda_V} q \quad (5.15)$$

Si osserva che la funzione  $\bar{H}$  è data dalla combinazione lineare della spinta  $T$  e della portata di propellente  $q$  con coefficiente  $K = m\lambda_m/\lambda_V$  che varia lungo la

traiettoria. In ogni punto della traiettoria,  $K$  è noto e si ricerca il valore di potenza che massimizza  $\bar{H}$ .

Infatti, se si introducono i coefficienti  $c_j = a_j - Kb_j$  per  $j = 0,1,2,3$ ,  $\bar{H}$  si può scrivere l'espressione di  $H$  in funzione della potenza  $P$ :

$$\bar{H} = c_0 + c_1P + c_2P^2 + c_3P^3 \quad (5.16)$$

## 5.4 Casi di studio

I casi di studio che si andranno a considerare presentano lungo la traiettoria delle discontinuità di spinta dovute a due fattori: potenza minima e duty cycle. In particolare, si andranno ad indagare le conseguenze di un aumento della potenza minima e di una riduzione del duty cycle negli ultimi giorni di missione:

- **Aumento della Potenza Minima**

Il vincolo di potenza minima impone lo spegnimento del motore ad un determinato raggio ( $r_{lim}$ ), oltre il quale si ha  $P_a < P_{min}$ . Si parte dal considerare prima  $P_{min} = 8\text{kW}$ , per la quale  $r_{lim} = 1.277\text{AU}$ . Dopodiché si aumenta la potenza minima portandola a  $P_{min} = 9\text{kW}$ , per cui  $r_{lim} = 1.215\text{AU}$ ;

- **Riduzione del Duty Cycle**

In termini generali, il duty cycle si può definire come la frazione di tempo in cui un sistema si trova in uno stato attivo rispetto al tempo complessivo. Spesso tale parametro è indicato in forma percentuale.

In questo caso, per il sistema propulsivo si considera inizialmente un duty cycle costante durante la missione e pari al 90% per tener conto di eventuali spinte mancate per motivi imprevisi.

Tuttavia, al fine di migliorare il controllo della navigazione nei giorni precedenti l'arrivo, in genere si impone un duty cycle pari al 70% negli ultimi 15 giorni, di conseguenza il propulsore viene spento per un periodo pari al 30% del tempo. Per simulare questa condizione, si riduce successivamente l'utilizzo della spinta al 70% durante gli ultimi 15 giorni. La stessa analisi verrà poi effettuata considerando gli ultimi 30 giorni della missione.

L'obiettivo sarà quello di confrontare per ogni caso di studio la soluzione ricavata dall'integrazione delle equazioni del moto (*soluzione '0'*) con quella ottenuta introducendo le opportune condizioni di ottimo nei punti di discontinuità (*soluzione 'ottimale'*).

Nello specifico l'ottimizzazione verrà condotta per i seguenti casi:

- **Caso 1:** vincolo potenza minima  $P_{min} = 8\text{kW}$ , si stabilisce una durata della missione pari a *698 giorni* e  $V_\infty = 3\text{km/s}$ . Inoltre, si ipotizza un duty cycle del 90% costante per l'intera missione;

- **Casi 1a-1b:** si riduce l'utilizzo della spinta rispettivamente negli ultimi 15 e 30 giorni, assumendo un *duty cycle* pari al 70%. Il vincolo di potenza minima, la durata di missione e  $V_\infty$  rimangono invariati rispetto al caso 0. Viene valutato il peggioramento della soluzione rispetto al caso precedente e vengono poi confrontate le soluzioni ottimali;
- **Casi 2a-2b:** si aumentano la durata della missione e la potenza minima che diventano rispettivamente *756 giorni* e  $P_{min} = 9kW$ . Invece, il *duty cycle* è pari al 90% ;
- **Casi 3a-3b:** si ripete l'analisi effettuata per i casi 2a-2b, portando però la durata della missione a *1279 giorni*. Tutti gli altri parametri sono uguali a quelli nei casi 2a-2b.

I dati relativi ai diversi casi sono riassunti nella tabella 5.1:

	Durata (giorni)	Potenza Minima	Duty cycle (ultimi giorni)
<b>Caso 1</b>			90%
<b>Caso 1a</b>	698	8kW	70% (ultimi 15 giorni)
<b>Caso 1b</b>			70% (ultimi 30 giorni)
<b>Caso 2a</b>	756	8kW	90%
<b>Caso 2b</b>		9kW	
<b>Caso 3a</b>	1279	8kW	90%
<b>Caso 3b</b>		9kW	

**Tabella 5.1:** Casi di studio

# Capitolo 6

## Risultati

### 6.1 Asteroide (433) Eros

L'analisi delle condizioni di ottimo è stata svolta considerando come casi di studio delle missioni interplanetarie. È stato scelto come target l'asteroide **(433) Eros**. Eros fu il primo asteroide ad essere individuato tra i *Near-Earth Asteroid (NEA)* e appartiene alla categoria degli **Amor**.

Eros è noto anche per essere il primo asteroide ad essere stato visitato da una sonda spaziale, la *NEAR Shoemaker* della NASA.



**Figura 6.1:** 433 Eros fotografato dalla sonda NEAR Shoemaker

Eros orbita ad una distanza media dal Sole di circa 1,5 AU e per compiere una rivoluzione completa attorno al Sole impiega un tempo pari a 1,76 anni. I punti dell'orbita a minima distanza (*perielio*) e a massima distanza (*afelio*) dal Sole, si

trovano rispettivamente a 1,113 AU a 1,783 AU. Di conseguenza, l'orbita di Eros è sempre esterna a quella della Terra. Inoltre, la minima distanza tra l'orbita di Eros e quella della Terra, *Minimum Orbit Intersection Distance (MOID)*, è pari a 0,148 AU.

Nella tabella 6.1 sono elencati i parametri orbitali della Terra e di Eros a confronto.

<b>Parametri orbitali</b>	<b>Terra</b>	<b>Eros 433</b>
Perielio	0,983 au	1,133 au
Afelio	1,0167 au	1,783 au
Semiasse maggiore	1,000 au	1,458 au
Periodo orbitale	365,256 giorni	643,246 giorni
Velocità orbitale	29,789 km/s	24,36 km/s
Inclinazione sull'eclittica	0°	10,830°
Eccentricità	0,0167	0,223
Longitudine del nodo ascendente	348,739°	304,376°
Argom. del perielio	114,207	178,707°

**Tabella 6.1:** Parametri orbitali Terra (epoca J2000 [13]) e 433 Eros (epoca all'epoca JD 2455000,5 [14])

Come si evince dalla tabella 6.1, l'orbita di Eros è caratterizzata da un semiasse maggiore più grande rispetto all'orbita terrestre, dunque il passaggio dalla Terra a Eros determina lo spostamento verso un'orbita più energetica in quanto  $\xi = -\frac{\mu}{2a}$ . Poiché le orbite sono ellittiche, l'energia orbitale è negativa. L'orbita di Eros, oltre ad avere maggiore eccentricità e semiasse, possiede anche una certa inclinazione rispetto all'orbita terrestre.

Pertanto, affinché si possa raggiungere Eros, è necessario effettuare dei gradualissimi cambiamenti sia di inclinazione del piano dell'orbita che di forma e dimensione.

## 6.2 Missione Breve Durata

### 6.2.1 Vincolo $P_{min} = 8kW$

La prima analisi è stata condotta nel caso di traiettoria con discontinuità di spinta dovuta alla potenza minima del propulsore,  $P_{min} = 8kW$ .

La durata della missione è stata fissata a 698 giorni, le date di inizio e fine sono riportate in tab.6.2. Nella fig.6.2 è raffigurata la traiettoria in 2D e 3D percorsa dallo spacecraft nel corso della missione. Inoltre, si precisa che la traiettoria 3D non è in scala.

	Escape Terra	Arrivo Eros	Durata (giorni)
Caso $P_{min} = 8kW$	7/08/2022	4/7/2024	698

Tabella 6.2: Tempi Missione

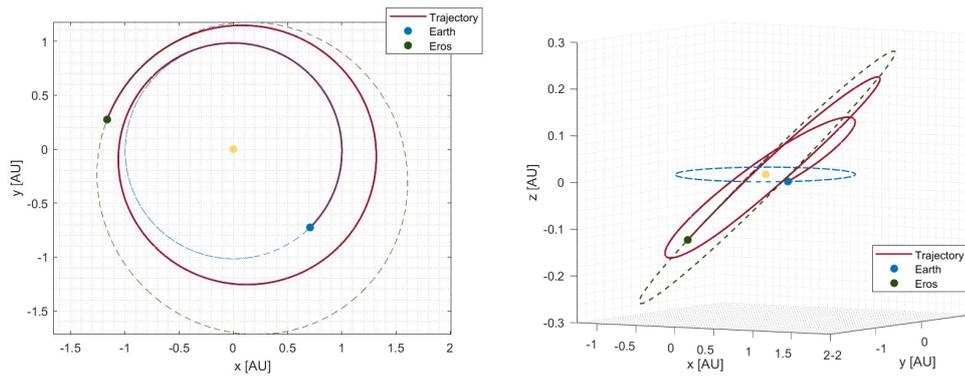


Figura 6.2: Traiettoria in 2D e in 3D durata 698 giorni

A questo punto si vanno a confrontare le soluzioni ottenute prima (*caso '0'*) e dopo (*caso 'ottimo'*) l'aggiunta delle condizioni di ottimo, considerando come dati di partenza quelli riportati nella tabella 5.1 relativi al caso di studio 1.

In figura 6.4a sono rappresentati a confronto gli andamenti della potenza disponibile  $P_a$  e della potenza utilizzata dal motore  $P_u$  nel caso 0 (linea tratteggiata) e nel caso ottimo (linea continua). Si osserva che non emergono marcate variazioni dei profili se non in corrispondenza dei tempi di spegnimento. Poiché per gran parte della missione prevale la sovrapposizione delle curve, possono essere fatte delle considerazioni che valgono per entrambi i casi.

La potenza disponibile è funzione della posizione relativa dello spacecraft rispetto al Sole, in particolare sarà più alta quando la distanza tra i due diminuisce e viceversa.

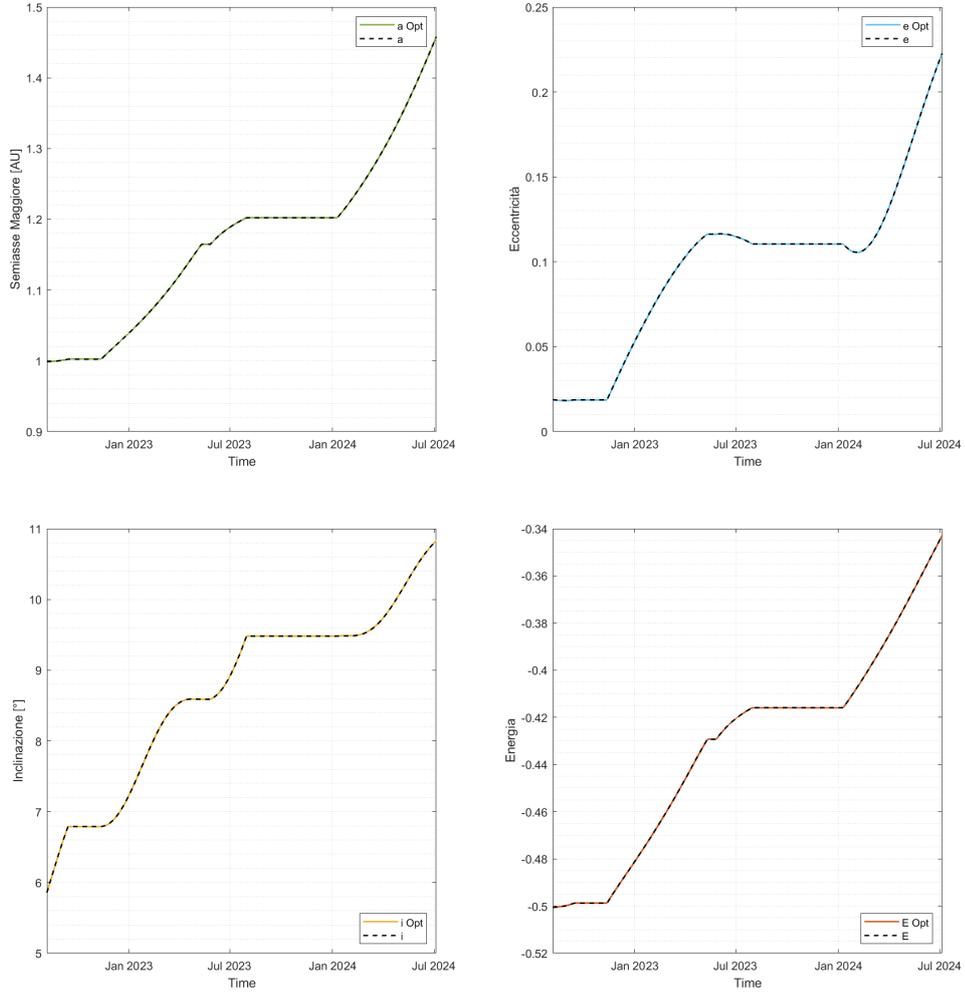
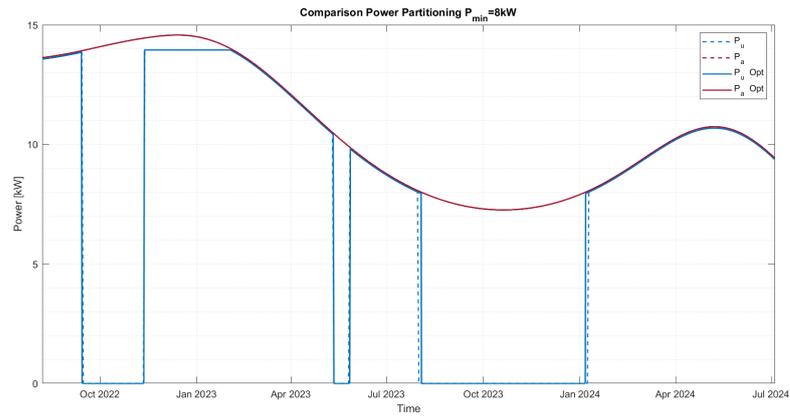


Figura 6.3: Andamento parametri orbitali casi '0' e 'ottimo'  $P_{min} = 8kW$

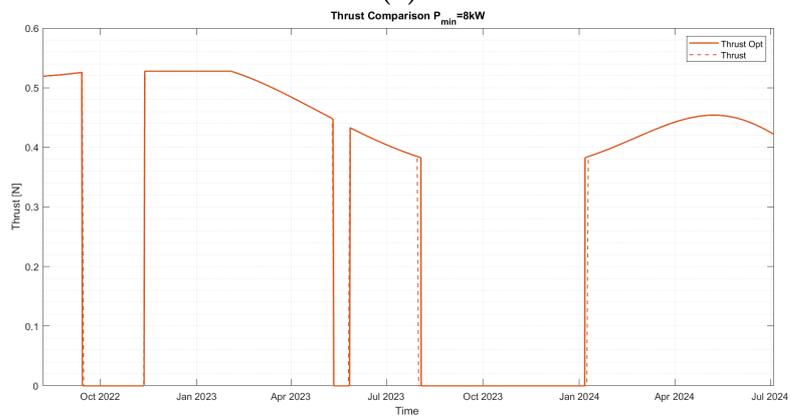
	Caso 0 $P_{min} = 8kW$		Caso Opt $P_{min} = 8kW$	
	Inizio	Fine	Inizio	Fine
1°	15-Sep-2022	11-Nov-2022	14-Sep-2022	11-Nov-2022
2°	11-May-2023	25-May-2023	11-May-2023	26-May-2023
3°	31-Jul-2023	08-Jan-2024	03-Aug-2023	06-Jan-2024

Tabella 6.3: Tempi di inizio e fine coasting

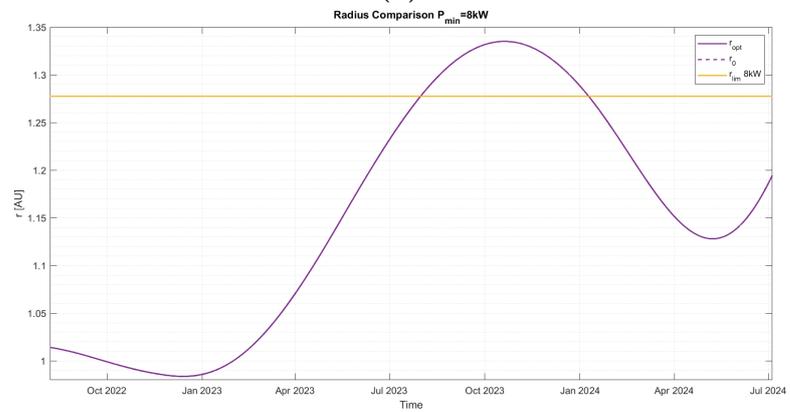
Dal grafico si nota che all'inizio della missione la potenza disponibile si aggira intorno ai  $13kW$ , poi la  $P_a$  aumenta e raggiunge il valore massimo  $P_{a,max} \approx 14.5kW$



(a)

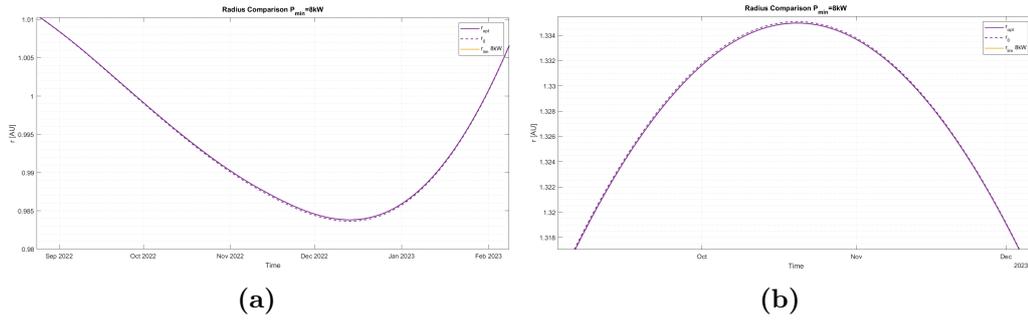


(b)



(c)

**Figura 6.4:** Confronto andamenti potenze, spinte e raggi casi '0' e 'ottimo'  
 $P_{min} = 8kW$



**Figura 6.5:** Confronto andamenti raggi casi '0' e 'ottimo'  $P_{min} = 8kW$  al perielio (a) e all'afelio (b)

in corrispondenza del perielio ( $r_{min} \approx 0.98AU$ ). Dopodiché, al crescere della distanza dal sole, la curva crolla fino al valore minimo  $P_{a,min} \approx 7kW$  che si ha in afelio ( $r_{max} \approx 1.335AU$ ). In seguito, la potenza disponibile aumenta nuovamente e arriva al secondo massimo della curva. Oltre questo punto, la  $P_a$  diminuisce fino a  $\approx 9.5kW$  al termine della missione. I valori indicativi dei raggi e delle potenze fin qui riportati sono relativi sia al caso ottimo che al caso 0, in quanto le due soluzioni presentano differenze dell'ordine di  $10^{-4}$ .

Per quanto riguarda l'andamento della  $P_u$ , esso è rappresentativo del funzionamento del propulsore. La spinta, infatti, è correlata alla potenza da una relazione cubica. Tale curva si caratterizza per l'alternanza di periodi di inattività del propulsore ( $P_u = 0$ ) e periodi in cui invece il propulsore è operativo ed eroga spinta.

In questo caso, si vede che il propulsore viene spento tre volte nel corso della missione per periodi di tempo più o meno lunghi. In particolare, il 3° coasting ha inizio quando lo spacecraft si trova a  $r_{lim,8kW} = 1.277AU$ , distanza a cui corrisponde una potenza disponibile pari a quella minima del propulsore ( $P_a = P_{min} = 8kW$ ). Osservando i tempi di inizio e fine di ciascun coasting in tabella 6.3 si nota che,rispetto al caso 0, nel caso ottimo le durate del 1° e del 2° coasting si prolungano di 1 giorno mentre il 3° coasting vede invece la sua durata ridursi di 5 giorni. Infatti, il 3° spegnimento avviene con 3 giorni di ritardo e la riaccensione del propulsore con 2 giorni di anticipo.

I profili di spinta nel caso 0 (linea tratteggiata) e ottimo (linea continua) sono raffigurati in fig.6.4b. Anche per le spinte, le uniche differenze evidenti tra i due casi sono relative ai tempi di spegnimento di cui si è discusso in precedenza.

Confrontando l'andamento delle spinte in fig.6.4b e quello dei parametri orbitali in fig.6.3, si può osservare che il primo tratto di spinta consente di aumentare l'inclinazione del piano dell'orbita mentre semiasse maggiore e eccentricità rimangono pressoché costanti. Durante il tratto successivo, invece, in cui il motore viene spento, tutti i parametri rimangono invariati.

Dopodiché, il propulsore ritorna operativo e si ha, non solo un ulteriore aumento dell'inclinazione, ma anche una forte crescita del semiasse maggiore e dell'eccentricità. In seguito al periodo di inattività dovuto alla condizione  $P_a < P_{min}$ , si ha la fase finale di spinta che determina una ripida impennata dei parametri orbitali, in particolare del semiasse maggiore e dell'eccentricità. Tali osservazioni sono valide anche qui per entrambi i casi poiché si ha sovrapposizione delle curve relative ai parametri orbitali.

In conclusione, sulla base delle considerazioni fatte fin ora, la soluzione ottima si differenzia dalla soluzione 0 essenzialmente per le durate dei coasting, specialmente del 3°. Grazie alla condizione di ottimo, infatti, è possibile prevedere con anticipo la presenza del tratto dove  $P_a < P_{min}$  ed il motore è costretto a spegnere, per cui la traiettoria nel caso ottimo viene modificata di conseguenza.

Come si può osservare in fig.6.5b, la traiettoria ottimale tende ad avere un raggio più basso in corrispondenza dell'afelio al fine di ridurre la durata del 3° spegnimento; in particolare, il  $\Delta r = r_{opt} - r_0$  all'afelio vale  $\Delta r_a = -1.19 \cdot 10^{-4} AU$ . Affinché questa condizione si verifichi, nel caso ottimo la traiettoria si porta ad un raggio più alto durante il passaggio al perielio (fig.6.5a) per poter abbreviare le fasi di spinta iniziali .

Considerata l'entità del  $\Delta r$  che è dell'ordine di  $10^{-4}$ , il guadagno che ne deriva in termini di consumo è molto basso. Dai risultati relativi alle masse finali in tabella 6.4 risulta che grazie all'ottimizzazione si riesce ad ottenere un aumento pari soltanto allo 0,002%.

Strategia	Massa finale [kg]	Variazione%
Caso $P_{min} = 8kW$ 0	2542,24	
Caso $P_{min} = 8kW$ Opt	2542,29	0,002 %

**Tabella 6.4:** Confronto masse finali  $P_{min} = 8kW$

## 6.2.2 Riduzione duty cycle ultimi giorni di missione

Rispetto al caso precedente, si introduce un'ulteriore discontinuità nel profilo della spinta riducendo il *duty cycle* ( $D\%$ ) al 70% negli ultimi 15 e 30 giorni. Per la restante parte della missione, invece, si assume un *duty cycle* del 90%.

	Escape Terra	Arrivo Eros	Durata (giorni)
<b>Caso 15 gg</b>	7/08/2022	5/07/2024	698
<b>Caso 15 gg Opt</b>	9/08/2022	7/07/2024	-
<b>Caso 30 gg</b>	8/08/2022	6/07/2024	-
<b>Caso 30 gg Opt</b>	10/ 08/2022	8/07/2024	-

**Tabella 6.5:** Tempi Missione

	Caso $D\% = 90\%$		Caso $D\% = 70\%$ 15gg		Caso $D\% = 70\%$ 30gg	
N°	Inizio	Fine	Inizio	Fine	Inizio	Fine
<b>1°</b>	14/9/2022	11/11/2022	17/9/2022	8/11/2022	24/9/2022	3/11/2022
<b>2°</b>	11/5/2023	26/5/2023	9/5/2023	15/5/2023	Assente	
<b>3°</b>	3/8/2023	6/1/2024	29/7/2023	8/1/2024	24/7/2023	11/1/2024

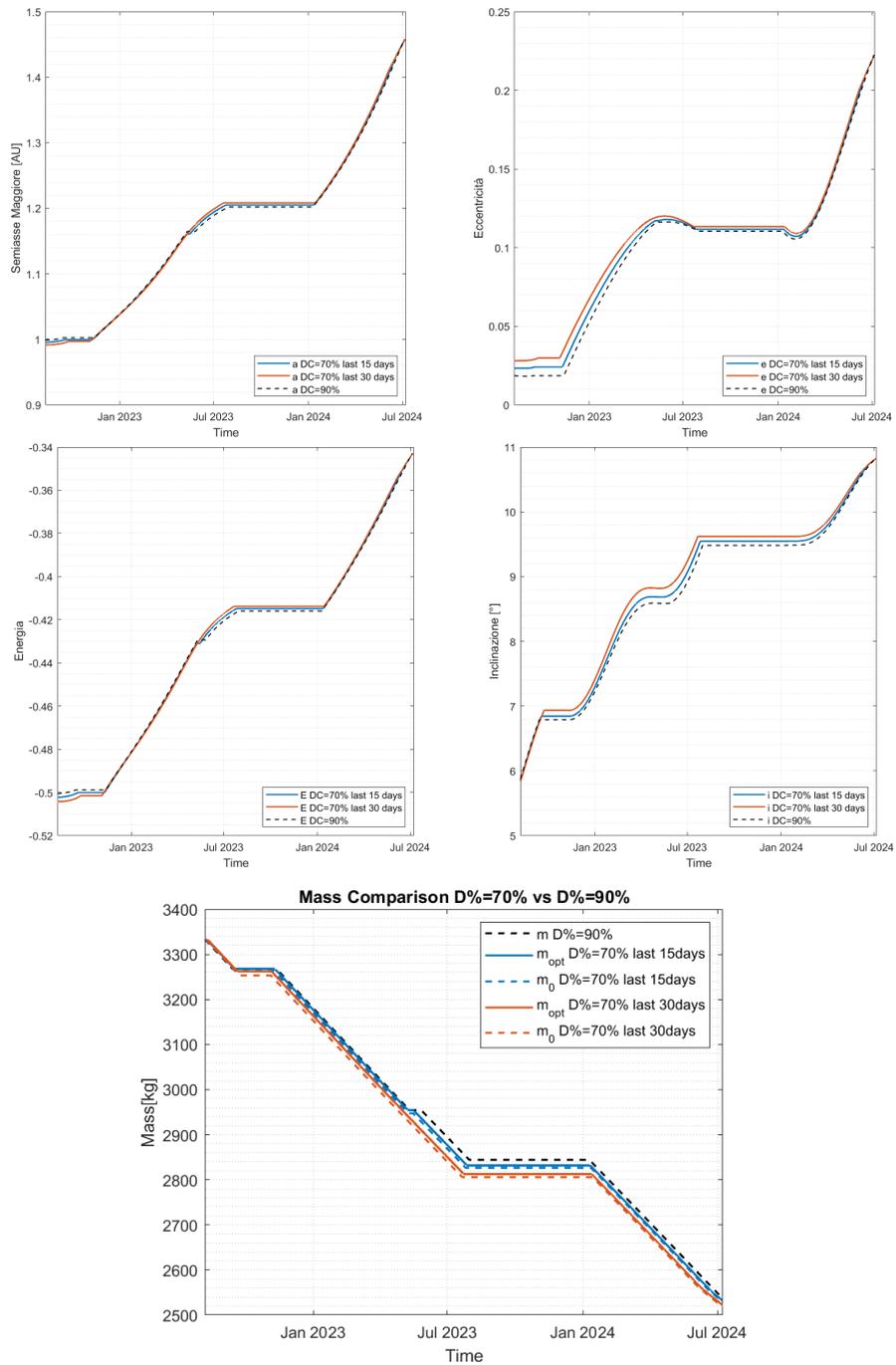
**Tabella 6.6:** Tempi di inizio e fine coasting  $D\% = 90\%$  vs  $D\% = 70\%$

In primo luogo, si valuta di quanto la soluzione precedente (con  $D\% = 90\%$ ) peggiori a seguito di queste modifiche.

Nella figura 6.7 sono raffigurati gli andamenti delle potenze e delle spinte nel caso  $D\% = 90\%$  (linea tratteggiata) e nei casi  $D\% = 70\%$  (linee continue). La riduzione dell'utilizzo della spinta negli ultimi 15/30 giorni fa sì che la traiettoria si porti verso raggi più bassi nei passaggi precedenti all'afelio per poter prolungare le fasi di spinta iniziali. Ne consegue una contrazione via via crescente dei primi due coasting nei casi con  $D\% = 70\%$  15 e 30 giorni. In particolare, dalla tab.6.6, si evince che per il caso 15 giorni la durata del 1° coasting viene ridotta di 5 giorni e quella del 2° viene dimezzata; invece, per il caso 30 giorni, la durata del 1° coasting viene ulteriormente ridotta di 12 giorni mentre il 2° coasting scompare del tutto a favore di una fase continua di spinta dal 3-Nov-2022 al 24-Jul-2023.

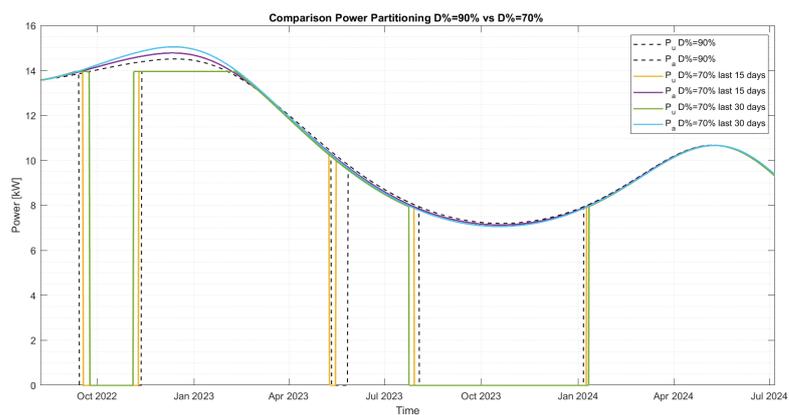
Anche dagli andamenti dei raggi in fig.6.7c è evidente la presenza di una prima regione in corrispondenza del perielio dove, passando dal caso  $D\% = 90\%$  ai casi  $D\% = 70\%$ , le curve si collocano progressivamente verso raggi più bassi; per cui, la potenza disponibile tende ad essere via via più alta ( $P_{a,max0.9} = 14.514kW$ ,  $P_{a,max15gg} = 14.779kW$ ,  $P_{a,max30gg} = 15.051kW$ ).

Poiché il propulsore eroga spinta per tempi più lunghi durante i primi due archi di thrusting, nei casi con  $D\% = 70\%$  la traiettoria raggiungerà raggi più alti in

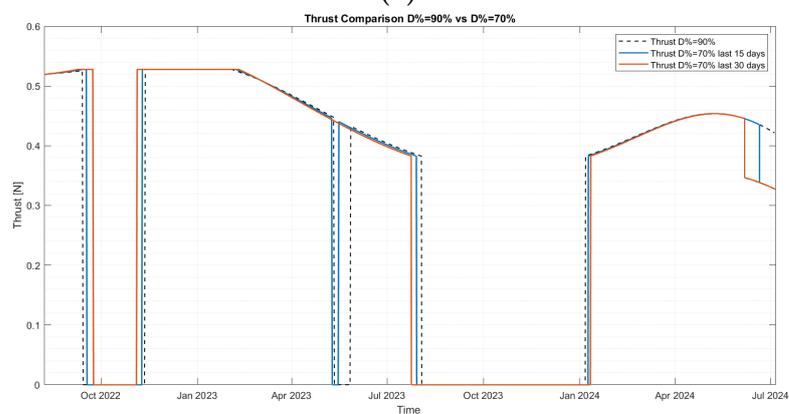


**Figura 6.6:** Andamento parametri orbitali e massa  $D\% = 70\%$  vs  $D\% = 90\%$

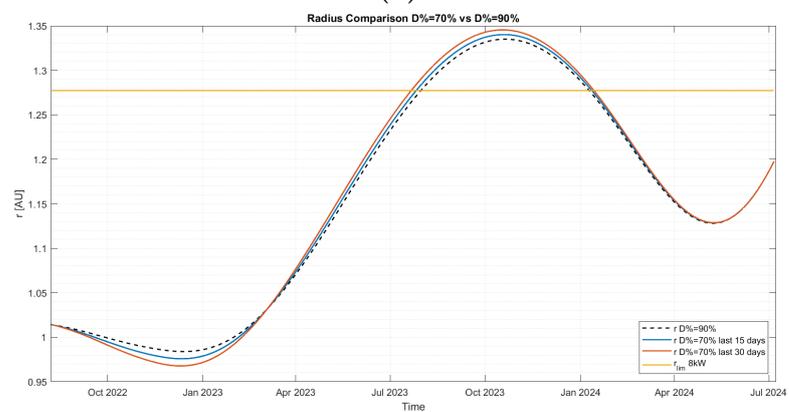
prossimità all'afelio. In effetti, sia nel grafico delle potenze che dei raggi, si può individuare un punto di inversione delle curve per  $r = 1,034AU$ .



(a)



(b)



(c)

**Figura 6.7:** Confronto potenze, spinte e raggi  $D\% = 90\%$  vs  $D\% = 70\%$

Questo determina il superamento in anticipo del raggio limite rispetto al caso con  $D\% = 90\%$  e il prolungamento del 3° coasting in cui  $P_a < P_{min}$ . Nei casi

	Caso $D\% = 70\%$ 15gg		Caso $D\% = 70\%$ 15gg Opt	
N° Coast.	Inizio	Fine	Inizio	Fine
1°	17-Sep-2022	8-Nov-2022	16-Sep-2022	9-Nov-2022
2°	9-May-2023	15-May-2023	9-May-2023	16-May-2023
3°	29-Jul-2023	08-Jan-2024	30-Jul-2023	07-Jan-2024

**Tabella 6.7:** Tempi di inizio e fine coasting  $D\% = 70\%$  15 giorni prima dell'arrivo a Eros

	Caso $D\% = 70\%$ 30gg		Caso $D\% = 70\%$ 30gg Opt	
N° Coast.	Inizio	Fine	Inizio	Fine
1°	24-Sep-2022	3-Nov-2022	21-Sep-2022	5-Nov-2022
2°	24-Jul-2023	11-Jan-2024	26-Jul-2023	9-Jan-2024

**Tabella 6.8:** Tempi di inizio e fine coasting  $D\% = 70\%$  30 giorni prima dell'arrivo a Eros

$D\% = 70\%$  15 e 30 giorni prima, infatti, le durate del 3° coasting vengono estese rispettivamente di una settimana e di due settimane.

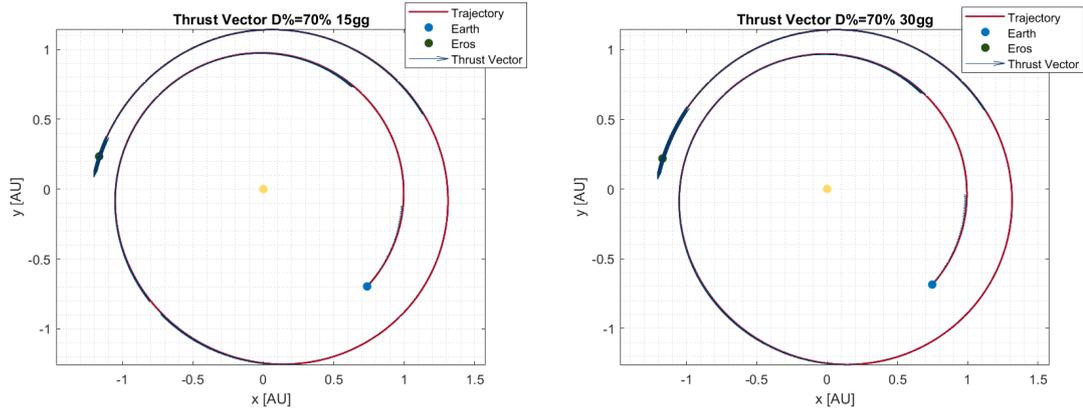
Osservando i grafici dei parametri orbitali in 6.6, si intuisce che il prolungamento dei primi due tratti di spinta nei casi con  $D\% = 70\%$  viene sfruttato soprattutto per aumentare l'inclinazione dell'orbita; si può notare, inoltre, anche un graduale incremento dell'eccentricità iniziale.

È importante evidenziare che lungo il profilo delle potenze non è presente alcuna discontinuità. Ciò accade perché non vi è una riduzione della spinta dovuta ad una diminuzione della potenza, ma si ha solo un troncamento della spinta. In fig.6.8 è possibile osservare la differenza nel tratto finale del vettore spinta tra i due casi. Questa redistribuzione della spinta causa nei casi con  $D\% = 70\%$  una progressiva riduzione della massa finale rispettivamente del -0,374 % e del -0,865% rispetto al caso  $D\% = 90\%$  (tabella 6.9).

Introducendo la condizione di ottimo nei casi  $D\% = 70\%$ , le curve delle potenze e della spinta si modificano come si vede in fig.6.9a e in fig.6.9b. Sapendo già che l'utilizzo della spinta verrà ridotto nel tratto finale, la traiettoria ottima fa in modo che lo spacecraft non si trovi troppo lontano dal Sole quando arriva all'afelio. In fig.6.9c, si nota che nei casi ottimi i raggi all'afelio sono inferiori. In particolare, il  $\Delta r = r_{opt} - r_0$  è più grande per il caso dei 30 giorni perché la correzione che bisogna apportare è maggiore ( $\Delta r_{30} = -3.5 \cdot 10^{-3} AU$ ,  $\Delta r_{15} = -2.4 \cdot 10^{-3} AU$ ). Di conseguenza, il 3° coasting si abbrevia. Invece, il 1° coasting si prolunga perché nella zona in prossimità del perielio si ha la condizione  $r_{opt} > r_0$ . Infine, anche il 2° coasting (presente solo nel caso 15 giorni) vede aumentare la sua durata perché

Strategia	Massa finale [kg]	Variazione%
Caso $D\% = 90\%$	2542,2900	
Caso $D\% = 70\%$ 15gg	2532,7718	-0,374%
Caso $D\% = 70\%$ 15gg Opt	2533,3833	-0,350 % (+0,024%)
Caso $D\% = 70\%$ 30gg	2520,2933	-0,865%
Caso $D\% = 70\%$ 30gg Opt	2521,7915	-0,806 (+0,059) %

**Tabella 6.9:** Confronto masse finali  $D\%=90\%$  e  $D\%=70\%$



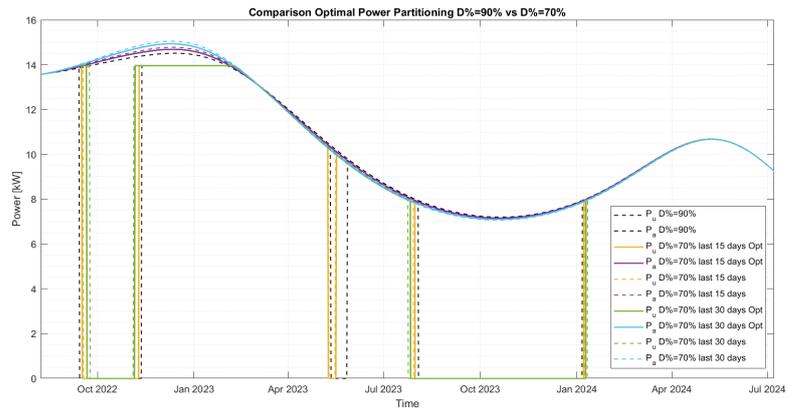
**Figura 6.8:** Confronto andamento vettore spinta 2D

$r_{opt}$  continua ad essere maggiore di  $r_0$  in quella zona.

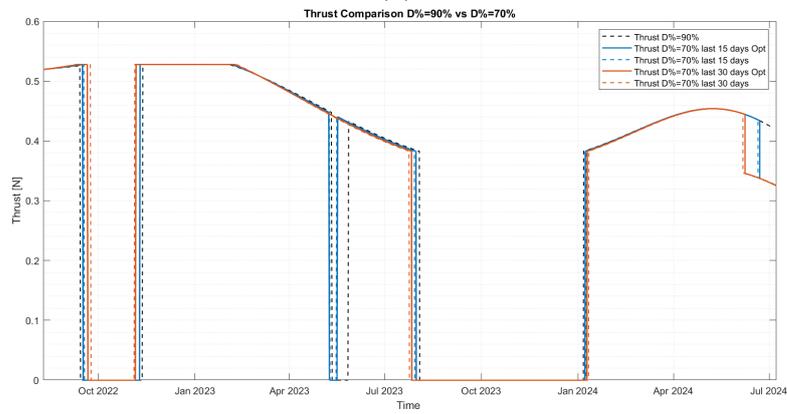
Gli scostamenti che si osservano tra caso 0 e ottimo in corrispondenza della discontinuità di spinta nel 15-esimo e 30-esimo giorno prima della fine della missione sono dovuti al fatto che nei casi ottimi la partenza, e quindi anche l'arrivo, sono posticipati di due giorni come prevede la tab.6.5.

Per quanto riguarda i parametri orbitali in fig.6.11, nei casi ottimi si riduce il gap tra le curve dell'inclinazione, soprattutto nel caso dei 30 giorni. Nel caso dei 15 giorni, invece, la curva ricalca quasi interamente la curva relativa a  $D\% = 90\%$ . Si verifica, inoltre, una lieve riduzione dell'eccentricità iniziale.

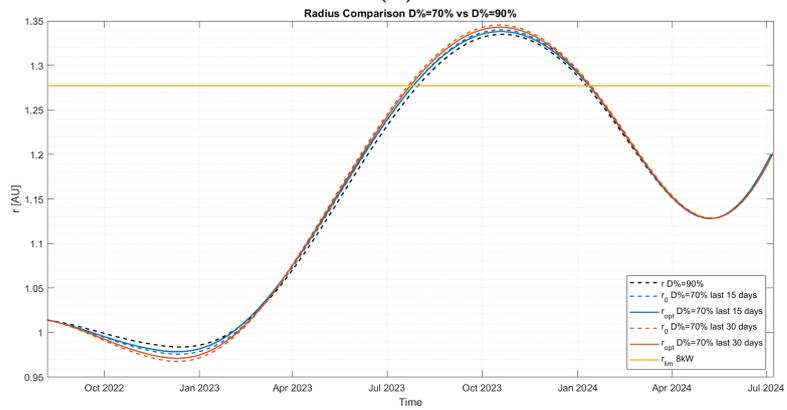
Grazie all'ottimizzazione, in entrambi i casi (15 e 30 giorni) si riesce ad ottenere un miglioramento della soluzione, in particolare il guadagno nel caso dei 30 giorni è maggiore rispetto al caso dei 15 giorni (+0,059% vs +0,024%).



(a)

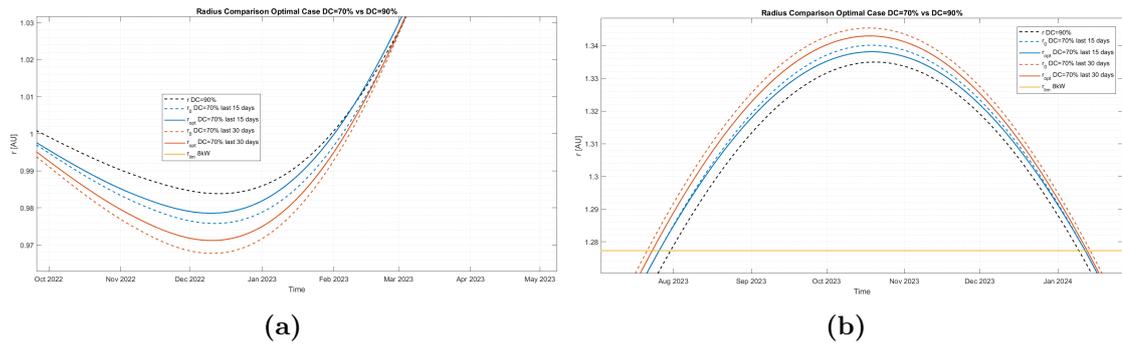


(b)

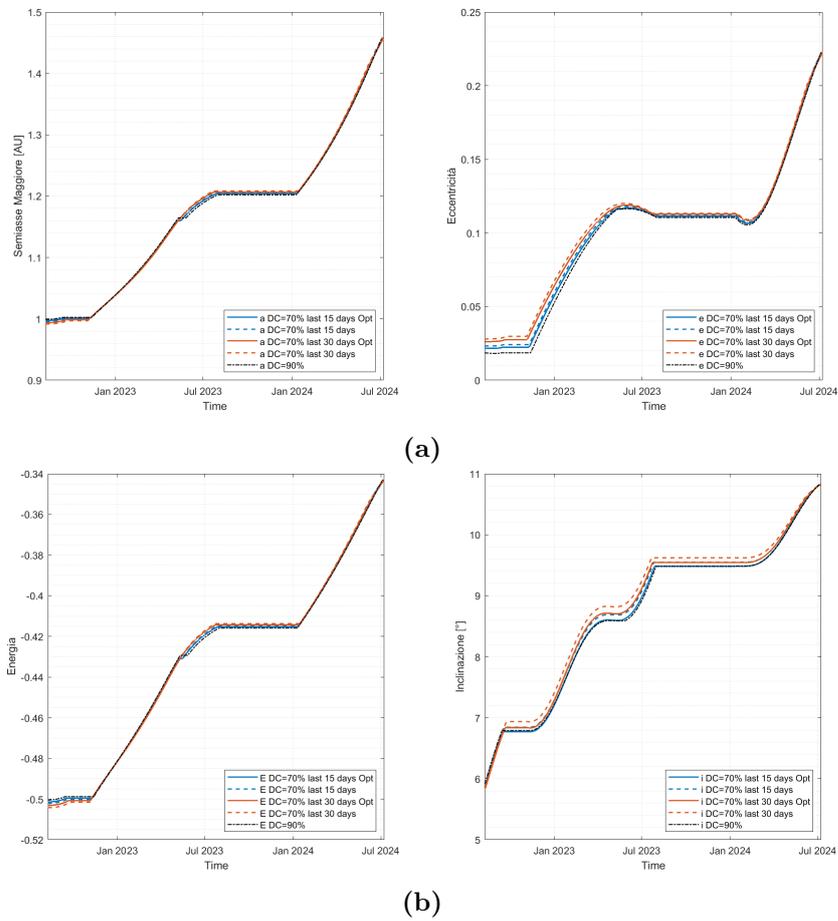


(c)

**Figura 6.9:** Confronto andamenti potenze, spinte e raggi casi '0' e 'ottimo'  $D\% = 70\%$  vs  $D\% = 90\%$



**Figura 6.10:** Confronto andamenti raggi al perielio (a) e all'afelio (b) casi '0' e 'ottimo'  $D\% = 70\%$  vs  $D\% = 90\%$



**Figura 6.11:** Confronto andamenti parametri orbitali casi '0' e 'ottimo'  $D\% = 70\%$  vs  $D\% = 90\%$

### 6.3 Vincolo $P_{min} = 9kW$

Successivamente, è stato valutato l'effetto di un aumento della potenza minima sui consumi. Pertanto, sono stati confrontati i risultati ottenuti dall'ottimizzazione della traiettoria con  $P_{min} = 8kW$  e con  $P_{min} = 9kW$ , considerando prima una missione breve e poi una missione di lunga durata.

#### 6.3.1 Missione Breve Durata

Per quanto riguarda la missione breve, per poter effettuare il confronto, è stato necessario prolungare la durata della missione rispetto ai casi precedenti da 698 a 756 giorni. Conseguentemente le date di escape dalla Terra e di arrivo ad Eros cambiano come riportato nella tabella 6.10.

Nella fig.6.12 è rappresentata la traiettoria in 2D e 3D (non in scala) seguita dallo spacecraft durante la missione con  $P_{min} = 8kW$ . La traiettoria nel caso di  $P_{min} = 9kW$  è del tutto simile, per cui la relativa rappresentazione è stata omessa.

	Escape Terra	Arrivo Eros	Durata (giorni)
Caso $P_{min} = 8kW$	26/07/2022	19/08/2024	756
Caso $P_{min} = 9kW$	19/07/2022	13/08/2024	-

Tabella 6.10: Tempi Missione

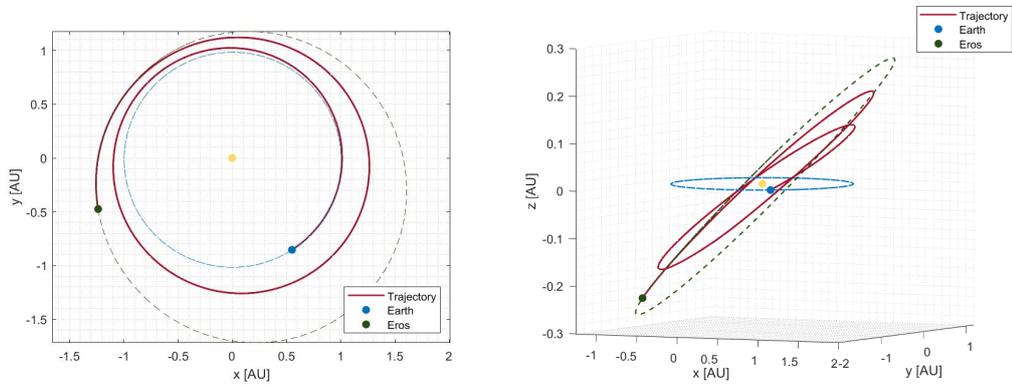


Figura 6.12: Traiettoria 2D e 3D durata 756 giorni

Partendo dal caso  $P_{min} = 8kW$ , in fig.6.13 sono raffigurati gli andamenti delle potenze nei casi '0' e 'ottimo'. Nel grafico si vede che la potenza disponibile  $P_a$  parte con un andamento abbastanza piatto, raggiunge il suo valore massimo  $P_{a,max} = 13.61kW$  (a  $r_{min} = 1.013AU$ ) poi desce fino al punto di minimo

$P_{a,min} = 7.33kW$  (a  $r_{max} = 1.325AU$ ). Dopodiché, la curva ricomincia a salire fino al secondo picco intorno agli  $11kW$ . Il profilo della  $P_u$  vede, invece, l'alternarsi di 4 coasting e 4 fasi in cui tutta la potenza disponibile viene utilizzata dal motore per produrre spinta. In particolare, la 3° fase spenta si caratterizza per la diminuzione di  $P_a$  sotto al valore minimo di  $8kW$ . I tempi di spegnimento ed accensione per ciascun coasting sono riportati in tab.6.11.

Se si osservano i grafici del confronto tra le potenze e la spinta in fig.6.13a e in fig.6.13b, si nota che le variazioni principali tra i due casi riguardano il 3° coasting. In particolare, nel caso ottimo non si ha un 3° coasting continuo dal 20-Aug-2023 al 27-Jan-2024 come nel caso 0, in quanto quest'ultimo inizia con 6 giorni di ritardo e viene poi interrotto dalla riaccensione del motore il 15-Nov-2023. Si nota quindi la presenza di un breve segmento di spinta aggiuntivo dal 15-Nov-2023 al 19-Nov-2023. Segue poi un periodo di inattività del motore che si protrae fino al 27-Jan-2024. In realtà, anche le durate dei primi due coasting e dell'ultimo risentono di alcune modifiche che tuttavia sono di minore entità.

Queste variazioni sono indotte dalla differenza tra i raggi delle due traiettorie. Analogamente a quanto visto per i casi precedenti, la soluzione ottima si porta ad un raggio più basso all'afelio per poter ridurre la durata dello spegnimento dovuto alla condizione  $P_a < P_{min}$ . Dunque, anche qui la differenza all'afelio  $r_{opt} - r_0$  è negativa e vale  $\Delta r_a = -3.616 \cdot 10^{-4}$ . Inoltre, in questo caso, superata la zona dove il raggio è maggiore del raggio limite si verifica una breve riaccensione del motore dovuta al fatto che la differenza  $r_{opt} - r_0$  diventa sempre più negativa.

Passando invece al caso di missione con  $P_{min} = 9kW$ , dalla tabella 6.10 si osserva anzitutto che la data di Escape dalla Terra e la data di arrivo a Eros vengono anticipate di una settimana.

Per  $P_{min} = 9kW$  i grafici delle spinte e delle potenze relativi ai casi '0' e 'ottimo' in fig.6.14 mostrano la presenza di tre archi di spinta di lunga durata e di una fase di coasting principale, dove  $P_a < P_{min}$ . Anche qui, con l'aggiunta della condizione di ottimo, cambiano le durate dei coasting rispetto al caso reale.

Dalla tab.6.12 si può constatare che effettivamente la durata del 1° coasting viene prolungata di una settimana mentre quella del 2° coasting viene abbreviata di 4 giorni. Con l'obiettivo di ridurre il tempo di spegnimento del coasting principale, infatti, dalla fig.6.17 si nota che la soluzione ottimale si porta prima ad un raggio più alto al perielio, per cui gli archi di spinta hanno durata inferiore, e questo permette poi di arrivare all'afelio con un raggio inferiore. La curva relativa a  $r_{opt}$  si colloca a valori inferiori rispetto a  $r_0$ ; in particolare, all'afelio il  $\Delta r_a = r_{opt} - r_0$  è pari a  $-10^{-3}$ . Per quanto i parametri orbitali, in fig.6.18 si vede che questa correzione incide sugli andamenti dell'inclinazione e dell'eccentricità che presentano delle piccole variazioni nell'entità dei salti.

Tramite l'ottimizzazione, per il caso  $P_{min} = 9kW$ , si riesce così ad ottenere un aumento dello 0,36% della massa finale, guadagno più cospicuo rispetto al caso

$P_{min} = 8kW$  in quanto la correzione apportata è maggiore.

	Caso 0 $P_{min} = 8kW$		Caso Opt $P_{min} = 8kW$	
N°Coast.	Inizio	Fine	Inizio	Fine
1°	9-Sep-2022	16-Nov-2022	8-Sep-2022	16-Nov-2022
2°	7-May-2023	23-Jul-2023	7-May-2023	24-Jul-2023
3°	20-Aug-2023	27-Jan-2024	26-Aug-2023	15-Nov-2023
4°	Assente		19-Nov-2023	27-Jan-2024
5°	4-Aug-2024	19-Aug-2024	6-Aug-2024	19-Aug-2024

**Tabella 6.11:** Tempi di spegnimento e accensione del motore  $P_{min} = 8kW$

	Caso 0 $P_{min} = 9kW$		Caso Opt $P_{min} = 9kW$	
N°Coast.	Inizio	Fine	Inizio	Fine
1°	20-Oct-2022	31-Oct-2022	16-Oct-2022	02-Nov-2022
2°	9-Jun-2023	4-Feb-2024	11-Jun-2023	2-Feb-2024
3°	13-Jul-2024	12-Aug-2024	14-Jul-2024	13-Aug-2024

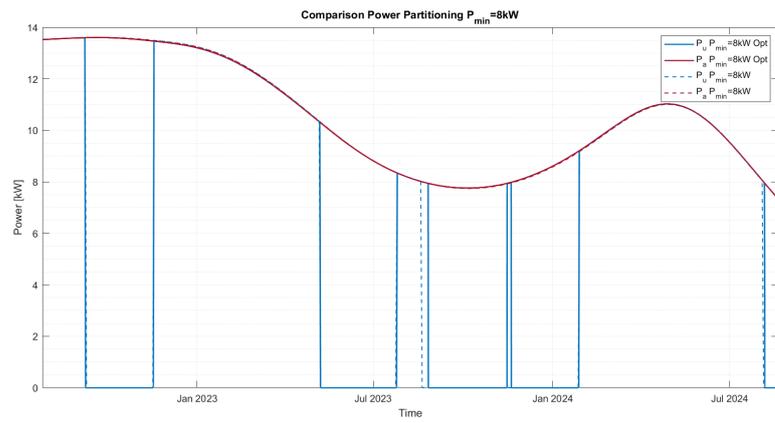
**Tabella 6.12:** Tempi di spegnimento e accensione del motore  $P_{min} = 9kW$

Strategia	Massa finale [kg]	Variazione%
Caso $P_{min} = 8kW$ 0	2590,4933	-
Caso $P_{min} = 8kW$ Opt	2591,3297	+0,032%
Caso $P_{min} = 9kW$ 0	2519,3787	- 2,745%
Caso $P_{min} = 9kW$ Opt	2528,8148	-2,4124% (+0,364 %)

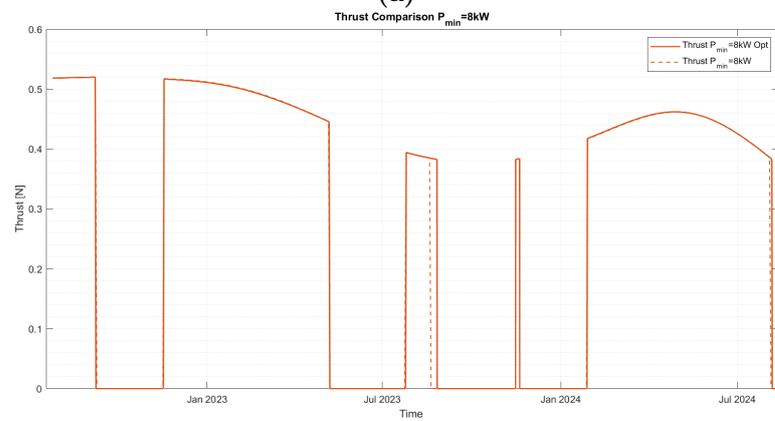
**Tabella 6.13:** Confronto masse finali  $P_{min} = 8kW$  e  $P_{min} = 9kW$

Dal confronto delle potenze e delle spinte rispettivamente in fig.6.16a e fig.6.16b, si vede che nel caso di  $P_{min} = 9kW$  la potenza disponibile presenta in partenza un andamento maggiormente oscillatorio rispetto al caso  $P_{min} = 8kW$ . Di fatti, la curva della  $P_a$  nel periodo tra il 19-Jul-2022 e il 27-Feb-2023 non appare piatta come nel caso precedente ma presenta un andamento crescente -decescente, collocandosi sempre a valori superiori alla curva  $P_{min} = 8kW$ . In questo zona, la  $P_a$  raggiunge il suo picco di massimo  $P_{a,max9kW} = 14.64kW$  (a  $r_{min} = 0.98AU$ ), valore che risulta maggiore di circa 1kW in confronto a  $P_{a,max8kW}$ . Dopodiché, la potenza disponibile  $P_{a,9kW}$  scende a valori inferiori rispetto a  $P_{a,8kW}$ . Negli ultimi mesi della missione, le due curve si raccordano e tendono a sovrapporsi.

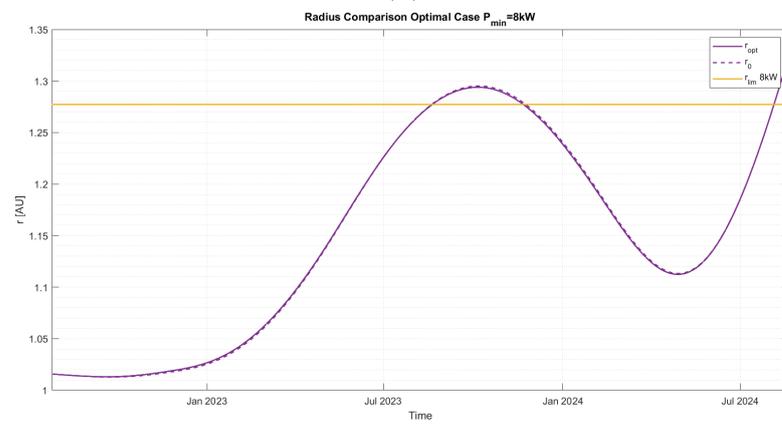
L' andamento della  $P_a$  deriva, in realtà, dall'andamento del raggio come mostra



(a)

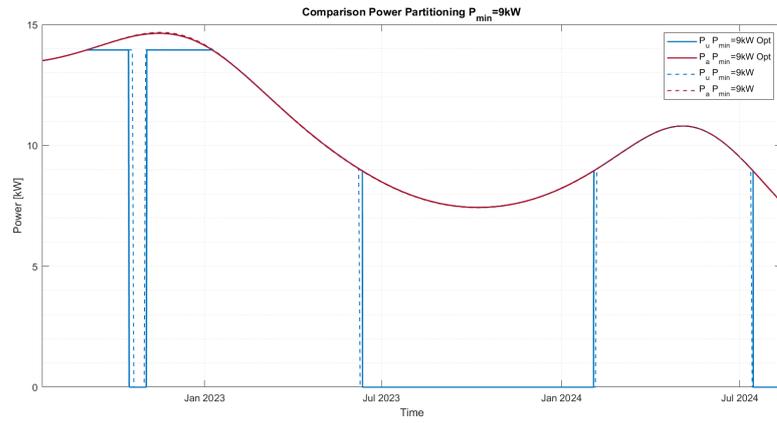


(b)

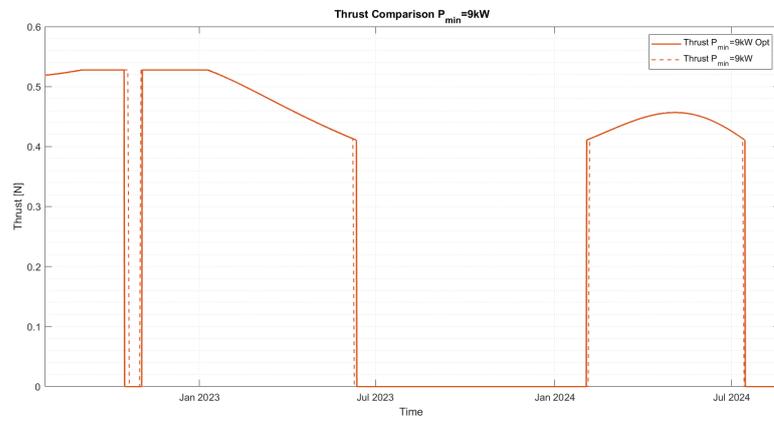


(c)

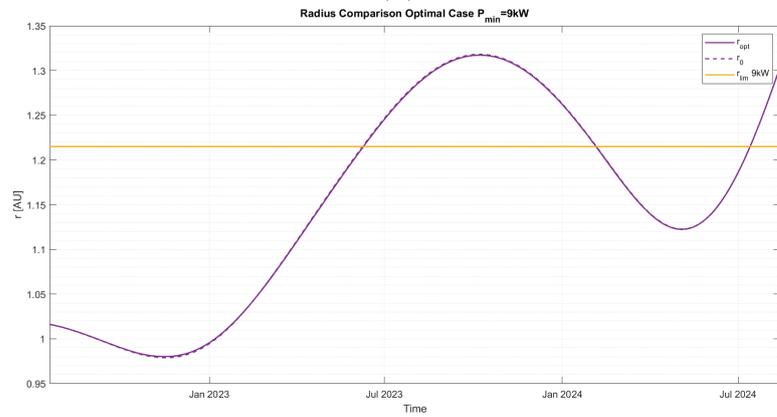
**Figura 6.13:** Confronto andamenti potenze, spinte e raggi casi '0' e 'ottimo'  $P_{min} = 8kW$



(a)



(b)



(c)

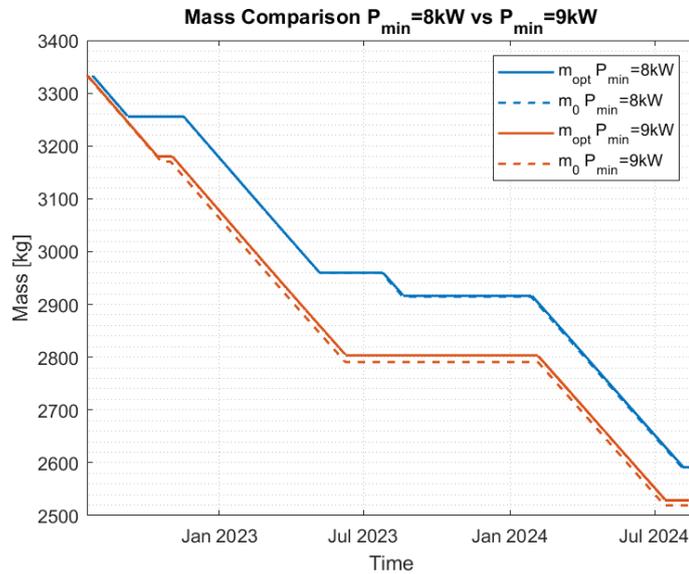
**Figura 6.14:** Confronto andamenti potenze,spinte e raggi casi '0' e 'ottimo'  
 $P_{min} = 9kW$

la fig.6.16c: la curva di  $P_{min} = 9kW$  in un primo momento tende verso raggi più bassi, al di sotto di 1 AU; dopo aver raggiunto il perielio, il raggio riprende ad aumentare fino a quando non si ha l'intersezione con la curva di  $P_{min} = 8kW$ . Da questo punto, le due curve seguono lo stesso andamento con  $r_{9kW} > r_{8kW}$  per poi ricongiungersi verso la fine.

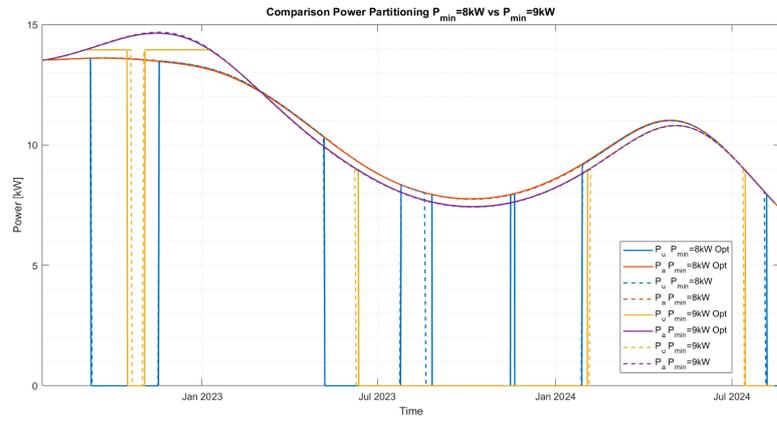
Per quanto riguarda la potenza utilizzata, imporre una potenza minima maggiore determina lo spegnimento anticipato e la riaccensione posticipata del propulsore nel 3° coasting. Dovendo rimanere spento per un tempo più lungo (dal 11-Jun-2023 al 2-Feb-2024 anziché dal 26-Aug-2023 al 15-Nov-2024), il propulsore è vincolato ad erogare maggiore spinta e per tempi più lunghi nei mesi precedenti, ha bisogno quindi di maggiore potenza. Infatti, in fig.6.16b, il profilo della spinta vede ridursi notevolmente la durata del 1° coasting (non più 2 mesi ma 2 settimane) mentre i primi due segmenti di spinta si estendono visibilmente. Ne risulta che il propulsore è vincolato ad un funzionamento quasi ininterrotto per un lungo periodo di tempo lungo la traiettoria come si vede in fig.6.19.

Dagli andamenti dei parametri orbitali e dell'energia in fig.6.18, si nota che con  $P_{min} = 9kW$  le curve presentano, in effetti, un numero di gradini inferiore mentre l'entità dei salti è maggiore, in particolare quello tra il 2-Nov-2022 e il 11-Jun-2023. Ciò fa sì che le manovre necessarie per giungere a destinazione siano più dispendiose in termini di propellente.

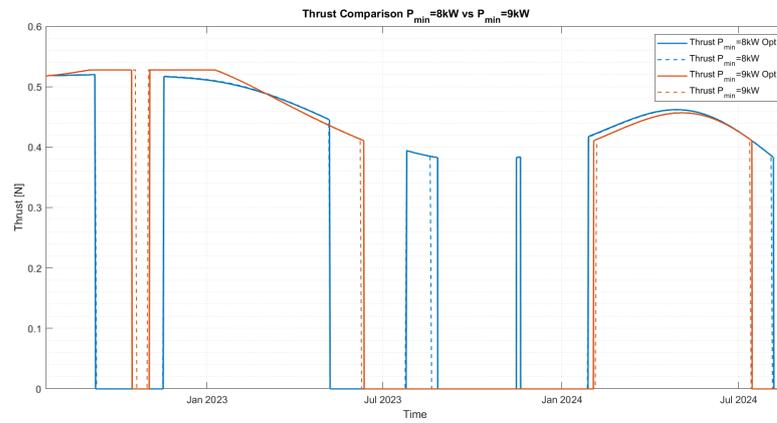
Dai risultati in tab.6.13 emerge come appunto l'aumento di  $P_{min}$  abbia causato un peggioramento della massa finale del 2,4124 %.



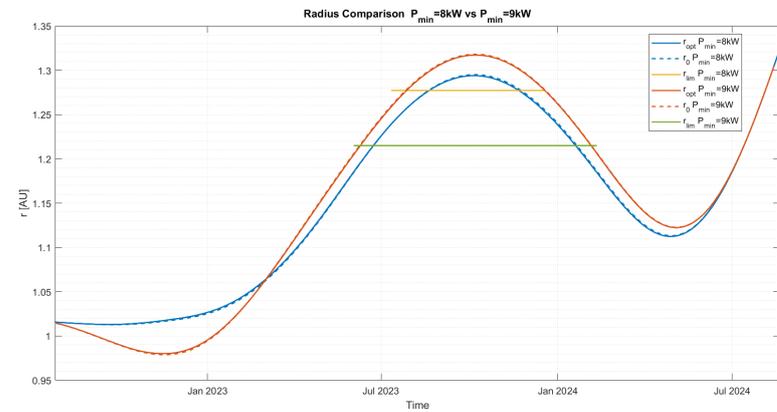
**Figura 6.15:** Confronto andamenti delle masse  $P_{min} = 8kW$  e  $P_{min} = 9kW$



(a)



(b)



(c)

**Figura 6.16:** Confronto andamenti potenze, spinte e raggi casi ottimi  $P_{min} = 8kW$  vs  $P_{min} = 9kW$

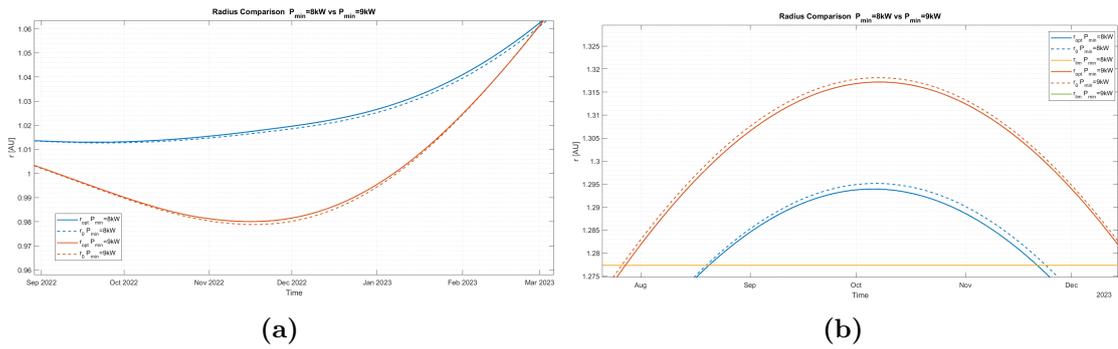


Figura 6.17: Confronto andamenti raggi al perielio (a) e all'afelio (b) casi '0' e 'ottimo'  $P_{min} = 8kW$  vs  $P_{min} = 9kW$

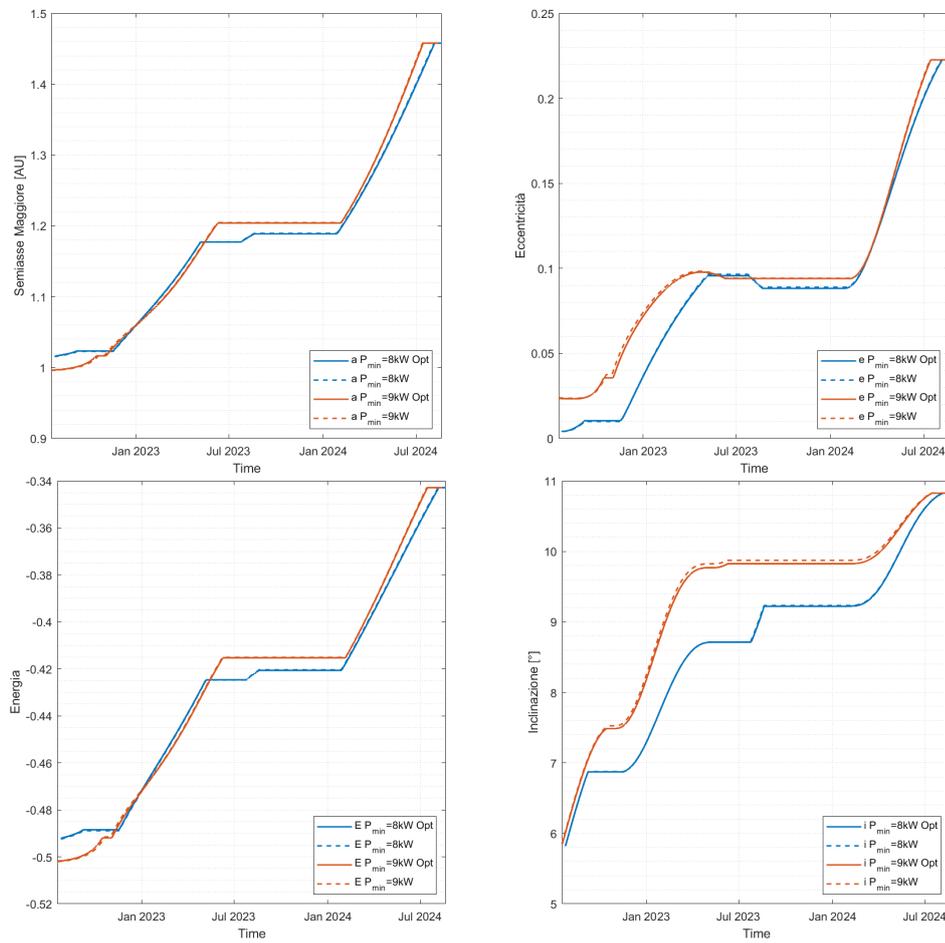
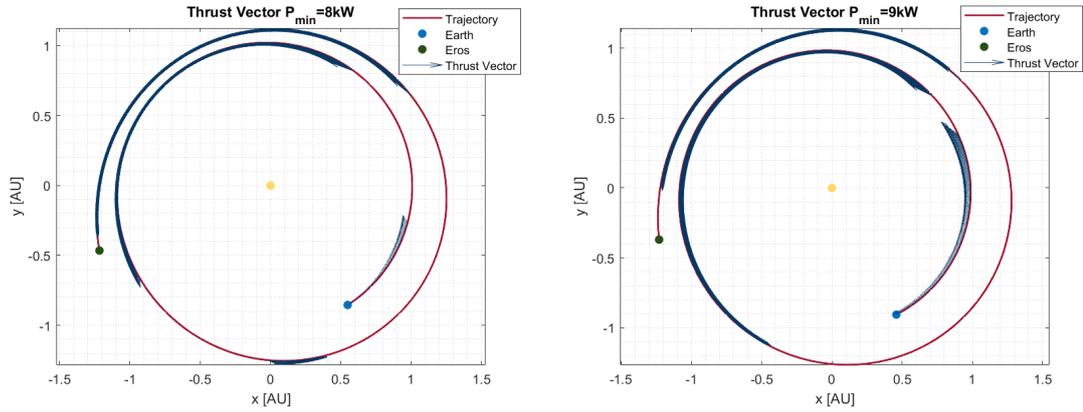


Figura 6.18: Confronto andamenti parametri orbitali  $P_{min} = 8kW$  vs  $P_{min} = 9kW$



**Figura 6.19:** Andamenti vettore spinta lungo la traiettoria 2D  $P_{min} = 8kW$  e  $P_{min} = 9kW$

### 6.3.2 Missione Lunga Durata

In seguito, la medesima analisi è stata svolta imponendo una durata della missione maggiore rispetto al caso precedente e pari a 1279 giorni.

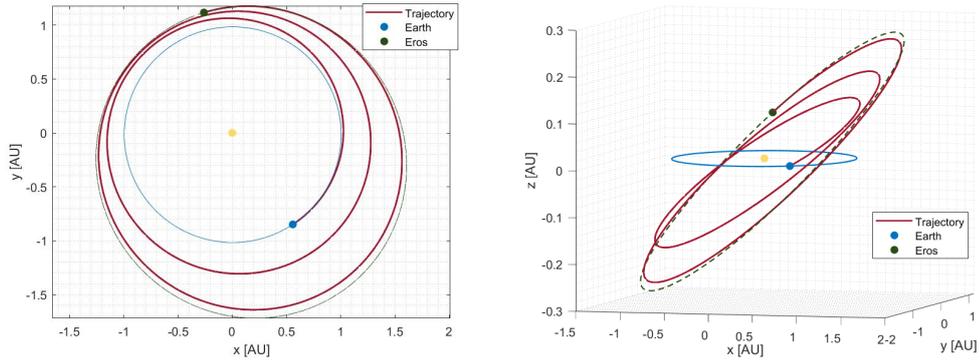
Nella fig.6.14 sono riportate le informazioni riguardo le date di inizio e fine della missione in esame. Nella fig.6.20, invece, è rappresentata la traiettoria in 2D e in 3D (non in scala) descritta dallo spacecraft. Come si osserva dalla fig.6.20, in

	Escape Terra	Arrivo Eros	Durata (giorni)
Caso $P_{min} = 8kW$	26/07/2022	25/01/2026	1279
Caso $P_{min} = 9kW$	27/07/2022	26/01/2026	-

**Tabella 6.14:** Tempi Missione

questo caso la traiettoria è caratterizzata da una rivoluzione in più attorno al Sole. In effetti, le variazioni dei parametri orbitali avvengono in maniera più graduale rispetto ai casi precedenti. Questa osservazione trova riscontro nella fig.6.27, dove vengono rappresentati gli andamenti dell'inclinazione, del semiasse maggiore e dell'eccentricità. Tali grandezze presentano un andamento lineare a tratti con un numero maggiore di salti ma di dimensioni inferiori se confrontati con quelli in fig.6.18. Lo stesso discorso vale anche per l'energia. Questo implica che le manovre di spinta necessarie per compiere la missione sono meno costose. Prolungare la durata della missione, dunque, ha un effetto benefico sulla massa finale che aumenta rispetto al caso di missione breve.

Partendo dal caso  $P_{min} = 8kW$ , nella fig.6.21 sono rappresentati gli andamenti delle potenze e della spinta nel caso '0' e 'ottimo'.



**Figura 6.20:** Traiettorie 2D e 3D durate 1279 giorni

In merito alle potenze, in fig.6.21a si nota che la potenza disponibile presenta 3

	Caso 0 8kW		Caso Opt 8kW	
N°Coast.	Inizio	Fine	Inizio	Fine
1°	08-Sep-2022	05-Nov-2022	08-Sep-2022	06-Nov-2022
2°	16-May-2023	26-Mar-2024	16-May-2023	27-Mar-2024
3°	31-Aug-2024	28-Dec-2025	30-Aug-2024	28-Dec-2025

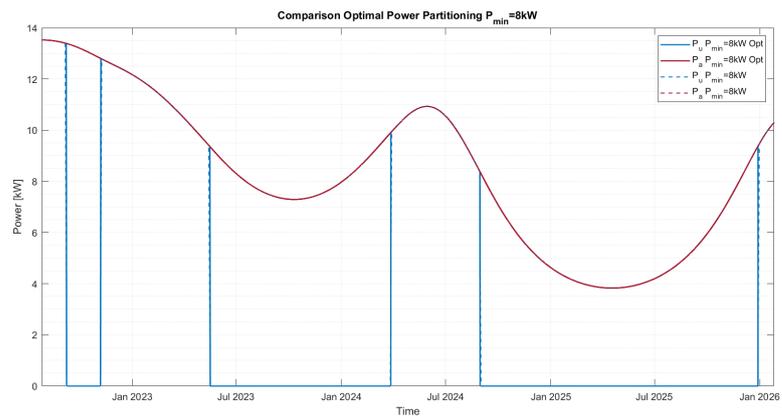
**Tabella 6.15:** Tempi di spegnimento e accensione del motore caso  $P_{min} = 8kW$

punti di massimo (quando lo spacecraft è in perielio) e 2 punti di minimo (quando lo spacecraft è in afelio). In particolare, la  $P_a$  assume il suo valore massimo assoluto il primo giorno di missione con  $P_{a,max} = 13.52kW$  in corrispondenza di  $r_{min} = 1.016AU$ . Dopodiché, la potenza decresce in quanto la distanza dal sole aumenta fino ad oltrepassare il valore limite corrispondente a  $P_{min} = 8kW$ . Si raggiunge poi il primo minimo della potenza  $P_a = 7.29kW$  a  $r = 1.328AU$ . Infine, si ha un'ulteriore oscillazione di  $P_a$  tra il secondo massimo  $P_a = 10.93kW$  a  $r = 1.117AU$  e il minimo assoluto  $P_{a,min} = 3.83kW$  a  $r_{max} = 1.706AU$ .

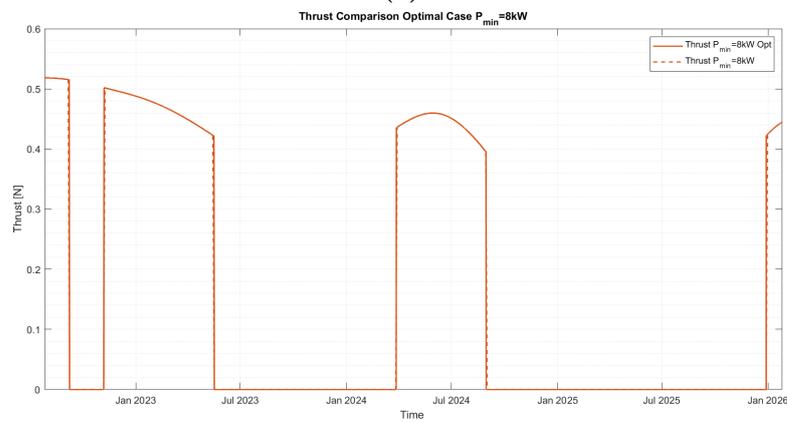
Tutta la potenza disponibile viene impiegata dal propulsore per produrre spinta nei punti di maggior vicinanza al sole. La fig.6.26, infatti, evidenzia come i tratti di spinta si concentrino principalmente nelle suddette zone.

Nel corso della missione si hanno poi 3 fasi di coasting che si alternano ai segmenti di spinta. Soltanto durante le ultime due fasi spente però la potenza disponibile scende al di sotto di 8kW. Tuttavia, l'inizio del 2° coasting, ma anche la fine, si verifica quando  $P_a$  è ancora sopra ai 9kW mentre il 3° coasting comincia a  $P_a = 8.40kW$  e termina a  $P_a = 8.37kW$ .

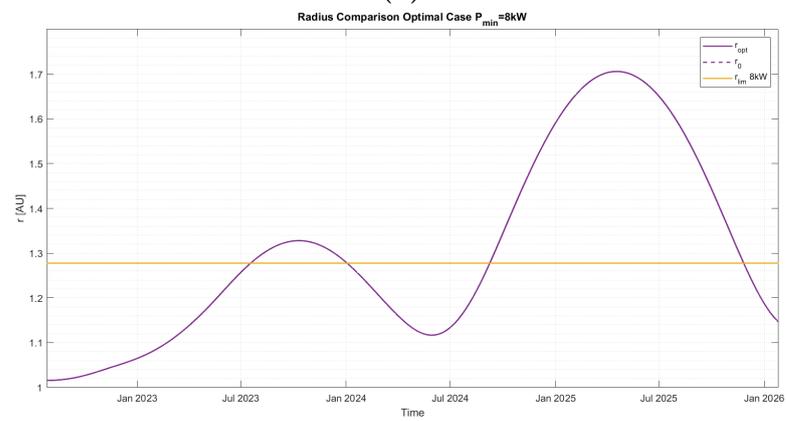
Nel momento in cui si considera il caso ottimo con  $P_{min} = 8kW$ , i risultati in tab.6.17 confermano quanto accade anche nella missione di breve durata, ossia il



(a)

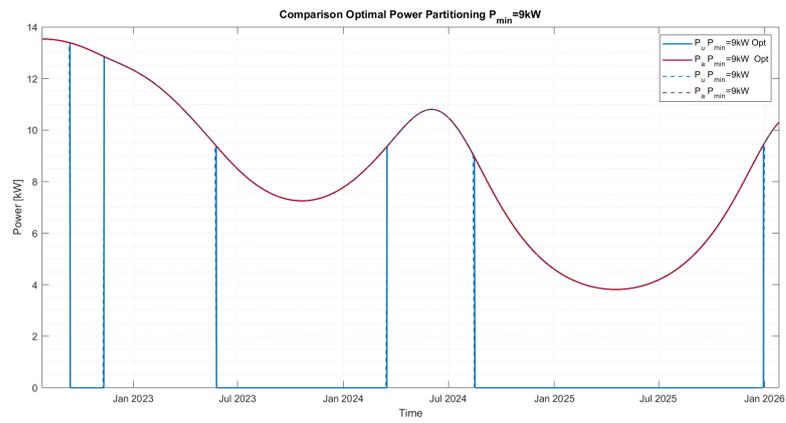


(b)

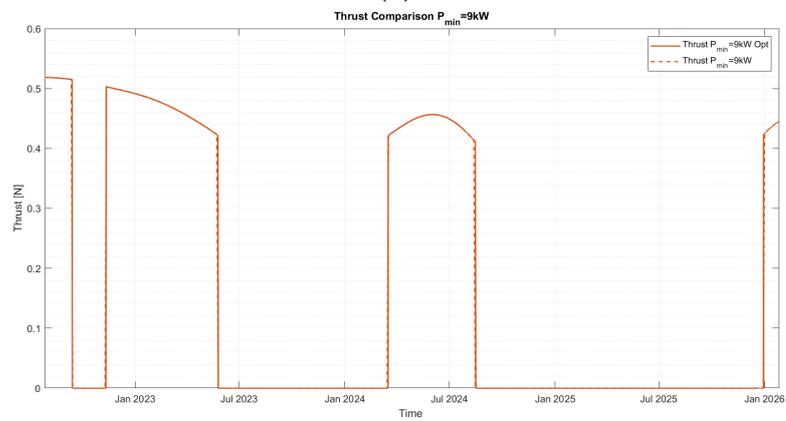


(c)

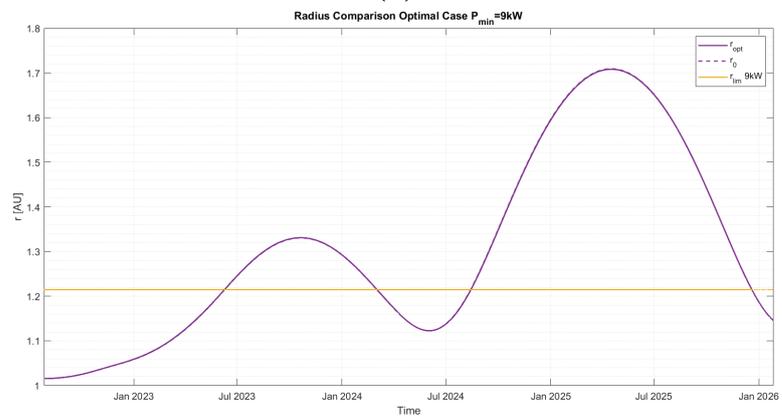
**Figura 6.21:** Confronto andamenti potenze, spinte e raggi casi '0' e 'ottimo'  
 $P_{min} = 8kW$



(a)

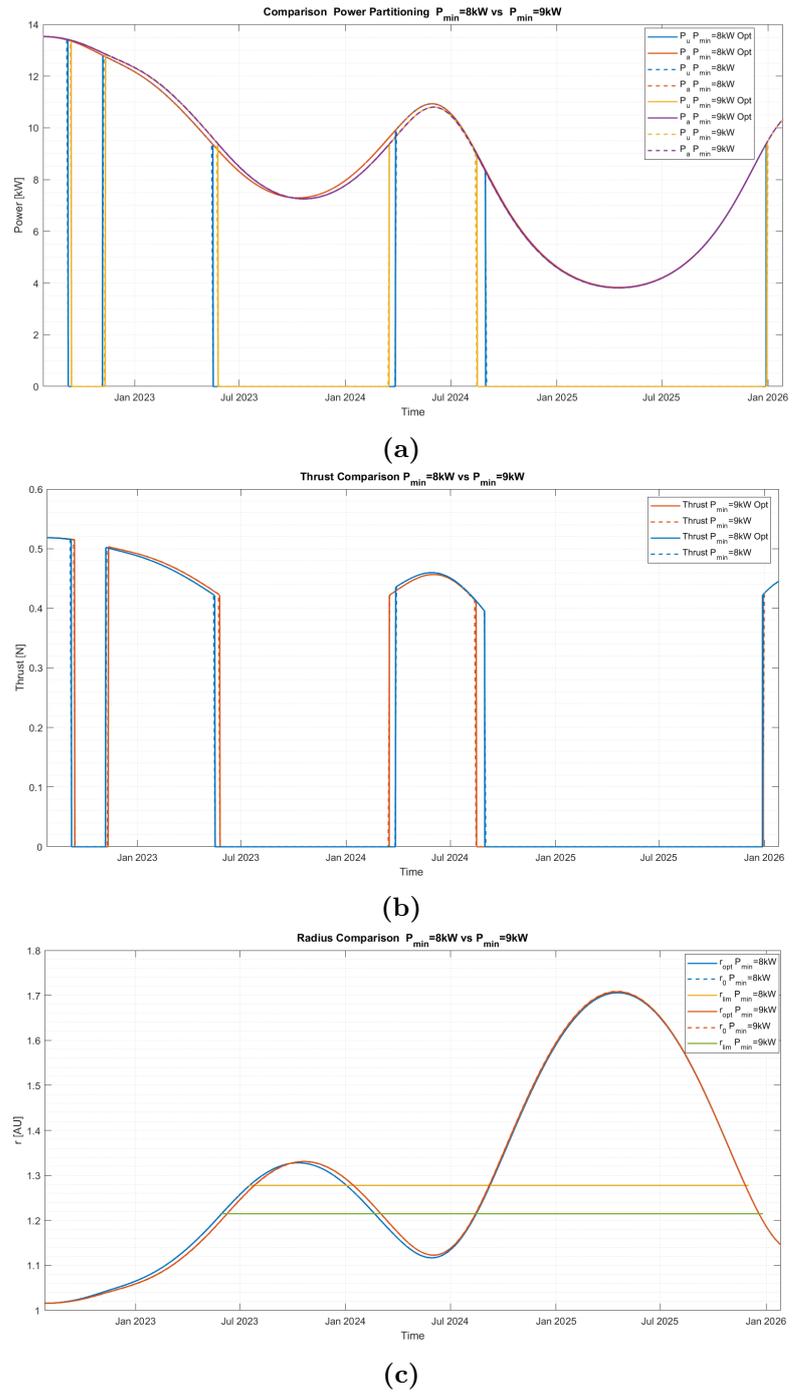


(b)

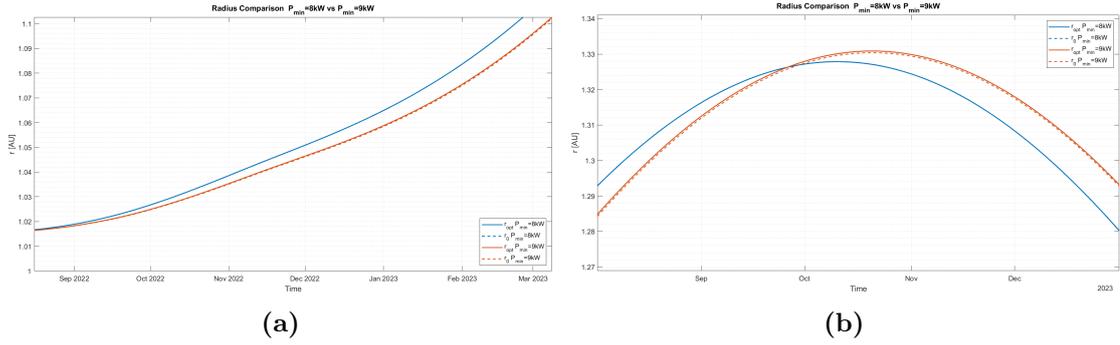


(c)

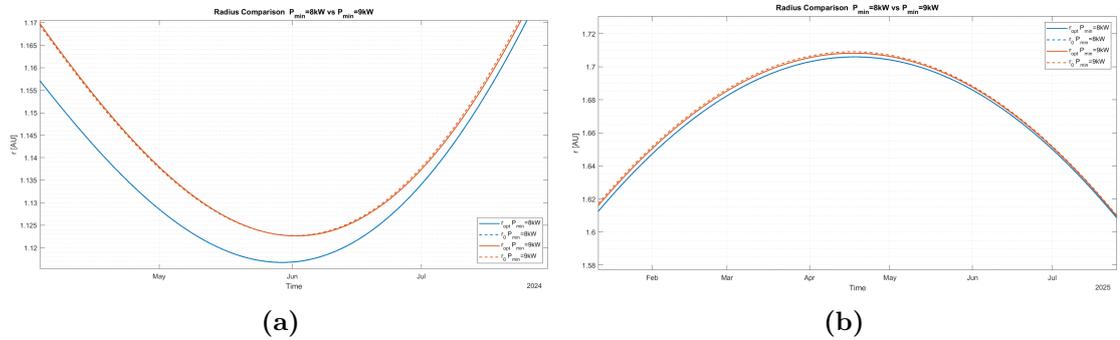
Figura 6.22: Confronto andamenti spinte e raggi caso '0' e 'ottimo'  $P_{min} = 9kW$



**Figura 6.23:** Confronto andamento potenze, spinte e raggi  $P_{min} = 8kW$  vs  $P_{min} = 9kW$



**Figura 6.24:** Confronto andamenti raggi al primo passaggio al perielio (a) e all'afelio (b) casi '0' e 'ottimo'  $P_{min} = 8kW$  vs  $P_{min} = 9kW$



**Figura 6.25:** Confronto andamenti raggi al secondo passaggio al perielio (a) e all'afelio (b) casi '0' e 'ottimo'  $P_{min} = 8kW$  vs  $P_{min} = 9kW$

guadagno in termini di massa finale è irrisorio. In realtà, in questo caso, essendo la variazione molto inferiore rispetto al caso precedente, si è stabilito che le due masse finali praticamente coincidono.

Ciò emerge in maniera evidente dal confronto tra i profili di potenza e spinta nei casi '0' e 'ottimo' rispettivamente in fig6.21a e fig6.21b. Infatti, in entrambi i grafici si ottiene una totale sovrapposizione delle curve. Se si considerano, però, i tempi di accensione e spegnimento in tab.6.15, si riscontrano nei due casi delle piccole discrepanze nelle durate dei tre coasting: le prime due vengono prolungate di 1 giorno, mentre l'ultima viene abbreviata di 1 giorno. Tali variazioni sono in linea con quanto visto nei casi precedenti e probabilmente sono legate alle medesime variazioni del raggio tra caso ottimo e 0. Tuttavia, osservando i grafici di confronto dei raggi in fig.6.24 e fig.6.25, non si riescono ad apprezzare particolari differenze poiché i  $\Delta r$  sono dell'ordine di  $10^{-6}$ . Le correzioni apportate, quindi, sono molto piccole in questo caso perché il vincolo di potenza minima non ha un forte impatto sulla distribuzione di spinta, le accensioni e gli spegnimenti infatti avvengono

	Caso 0 9kW		Caso Opt 9kW	
N° Coast.	Inizio	Fine	Inizio	Fine
1°	14-Sep-2022	09-Nov-2022	13-Sep-2022	10-Nov-2022
2°	25-May-2023	14-Mar-2024	25-May-2023	16-Mar-2024
3°	15-Aug-2024	29-Dec-2025	16-Aug-2024	29-Dec-2025

**Tabella 6.16:** Tempi di spegnimento e accensione del motore caso  $P_{min} = 9kW$

sempre a potenze maggiori della potenza minima.

A questo punto, si aumenta la potenza minima fino a 9kW. Il caso con  $P_{min} = 9kW$  presenta dei profili di potenze e di spinta in fig.6.22 molto simili al caso precedente. La potenza disponibile presenta, infatti, un andamento oscillatorio con tre massimi ( $P_{a,max_1} = 13.53kW$ ,  $P_{a,max_2} = 10.80kW$ ,  $P_{a,max_3} = 10.31kW$ ) e due minimi ( $P_{a,min_1} = 7.26kW$ ,  $P_{a,min_2} = 3.21kW$ ) in corrispondenza dei passaggi rispettivamente al perielio e all'afelio. Inoltre, si hanno anche qui tre fasi di coasting che si alternano agli archi di spinta. In particolare, durante gli ultimi due coasting la potenza disponibile scende sotto i 9kW. Come accadeva per  $P_{min} = 8kW$ , però, il 2° coasting inizia e termina a potenze al di sopra di quella minima, intorno a 9.38 kW.

Aggiungendo la condizione di ottimo, si verifica un lieve aumento della massa finale a differenza del caso  $P_{min} = 8kW$ . Questo incremento però è molto meno marcato rispetto a quello ottenuto con la missione breve.

Nei grafici delle potenze e della spinta in fig6.22a e fig6.22b, sono leggermente evidenti gli scostamenti dei coasting. Come detto in precedenza, in questo caso la potenza scende sotto i 9kW due volte nel corso della missione, durante il 2° e il 3° coasting. Nonostante ciò, è solo all'inizio del 3° che il vincolo di potenza minima effettivamente interviene e determina lo spegnimento del motore. Nel 2° coasting, invece, il propulsore viene spento/riacceso a potenze superiori a 9kW.

Al fine di ridurre la durata del 3° coasting, la traiettoria ottimale tende a portarsi ad un raggio più basso solo nel secondo passaggio all'afelio. Infatti, in fig.6.24b si vede che lo spacecraft percorrendo la traiettoria ottimale nel primo passaggio all'afelio raggiunge raggi più alti ( $r_{a,opt} - r_{a,0} = 4.7 \cdot 10^{-4}$ ). Pertanto, nella 1° zona a  $r > r_{lim,9kW}$  risulta che  $r_{opt} > r_0$  e la durata del 2° coasting viene prolungata. Nel secondo passaggio al perielio, invece, in fig.6.25a, si ha un'inversione di tendenza e  $r_{opt}$  diventa minore di  $r_0$ . Per cui, quando si arriva alla 2° zona con  $r > r_{lim,9kW}$ , all'afelio si ha questa volta  $r_{a,opt} - r_{a,0} = -10^{-3}$ . In questa regione si verifica il 3° coasting che nel caso ottimo ha durata minore.

Alla fine, tramite l'ottimizzazione, si ricava un guadagno del 0.011%, inferiore come detto rispetto al caso di missione breve, ma comunque maggiore rispetto al caso di  $P_{min} = 8kW$ .

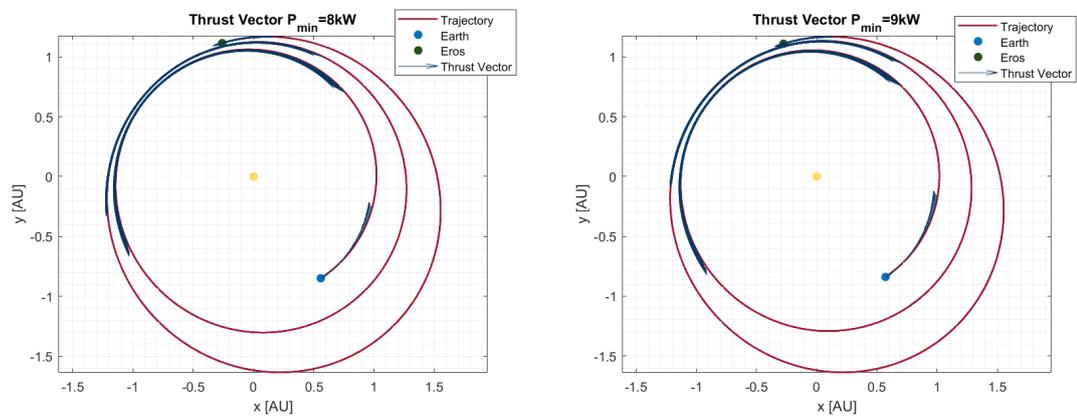
Si confrontano a questo punto i risultati ottenuti con  $P_{min} = 8kW$  e  $P_{min} = 9kW$ . Nella fig.6.23a sono rappresentati a confronto gli andamenti delle potenze, nei casi di  $P_{min} = 8kW$  e  $P_{min} = 9kW$ . Analogamente a quanto visto per la missione breve, si osserva che con  $P_{min} = 9kW$  inizialmente si ha una maggiore potenza disponibile, in quanto il raggio della traiettoria è più basso rispetto al caso  $P_{min} = 8kW$ . Tale condizione subisce un'inversione il 24-Sep-2023, quando la curva della  $P_{a,9kW}$  si porta su valori inferiori. Poi le due curve si raccordano e percorrono lo stesso andamento fino al termine della missione. Come si vede infatti dalla fig.6.23c, i raggi delle due traiettorie si discostano durante la prima oscillazione ma poi tendono a coincidere.

Per quanto riguarda invece la potenza utilizzata e quindi la spinta, le variazioni più accentuate si individuano nel 2° e nel 3° coasting. Nello specifico, con  $P_{min} = 9kW$  il 2° spegnimento avviene con un ritardo di 9 giorni ( $P = 9.38kW$  e  $r = 1.193AU$ ) mentre la successiva riaccensione avviene in anticipo di 12 giorni ( $P = 9.38kW$  e  $r = 1.196AU$ ). Pertanto, la durata del 2° coasting si riduce di 3 settimane.

Invece, il 3° coasting con  $P_{min} = 9kW$  ha inizio 2 settimane prima ( $P = 8.943kW$  e  $r = 1.218AU$ ) e termina lo stesso giorno. Come prima, ciò è dovuto al fatto che l'aumento di potenza minima comporta lo spegnimento in anticipo del motore. Essendo vincolato a rimanere spento per un periodo più lungo nel 3°coasting, il propulsore deve essere maggiormente operativo nei mesi precedenti, recupera quindi parte della spinta nel 2° coasting che si abbrevia. Come visibile anche dalla fig.6.26, la seconda fase di spinta viene prolungata mentre la terza si riduce. I parametri orbitali nei due casi non si discostano di molto come accadeva nel caso di missione breve e l'inclinazione è quella che mostra maggiori differenze. Tutto ciò determina una diminuzione della massa finale dello  $\approx 0.2\%$  rispetto al caso  $P_{min} = 8kW$ . Tale riduzione è inferiore rispetto a quella riscontrata nella missione breve perché il vincolo sulla durata è meno stringente. Questo permette nel caso  $P_{min} = 8kW$  di spegnere e riaccendere il propulsore a potenze più alte del valore minimo, prossime a quelle del caso  $P_{min} = 9kW$ .

Strategia	Massa finale [kg]	Variazione %
Caso 0 $P_{min} = 8kW$	2616,0818	-
Caso Opt $P_{min} = 8kW$	2616,0827	-
Caso 0 $P_{min} = 9kW$	2610,8217	-0,201 %
Caso Opt $P_{min} = 9kW$	2611,0897	-0,190 % (+0,011%)

**Tabella 6.17:** Confronto masse finali  $P_{min} = 8kW$  e  $P_{min} = 9kW$



**Figura 6.26:** Confronto andamento vettore spinta lungo la traiettoria 2D  $P_{min} = 8kW$  e  $P_{min} = 9kW$

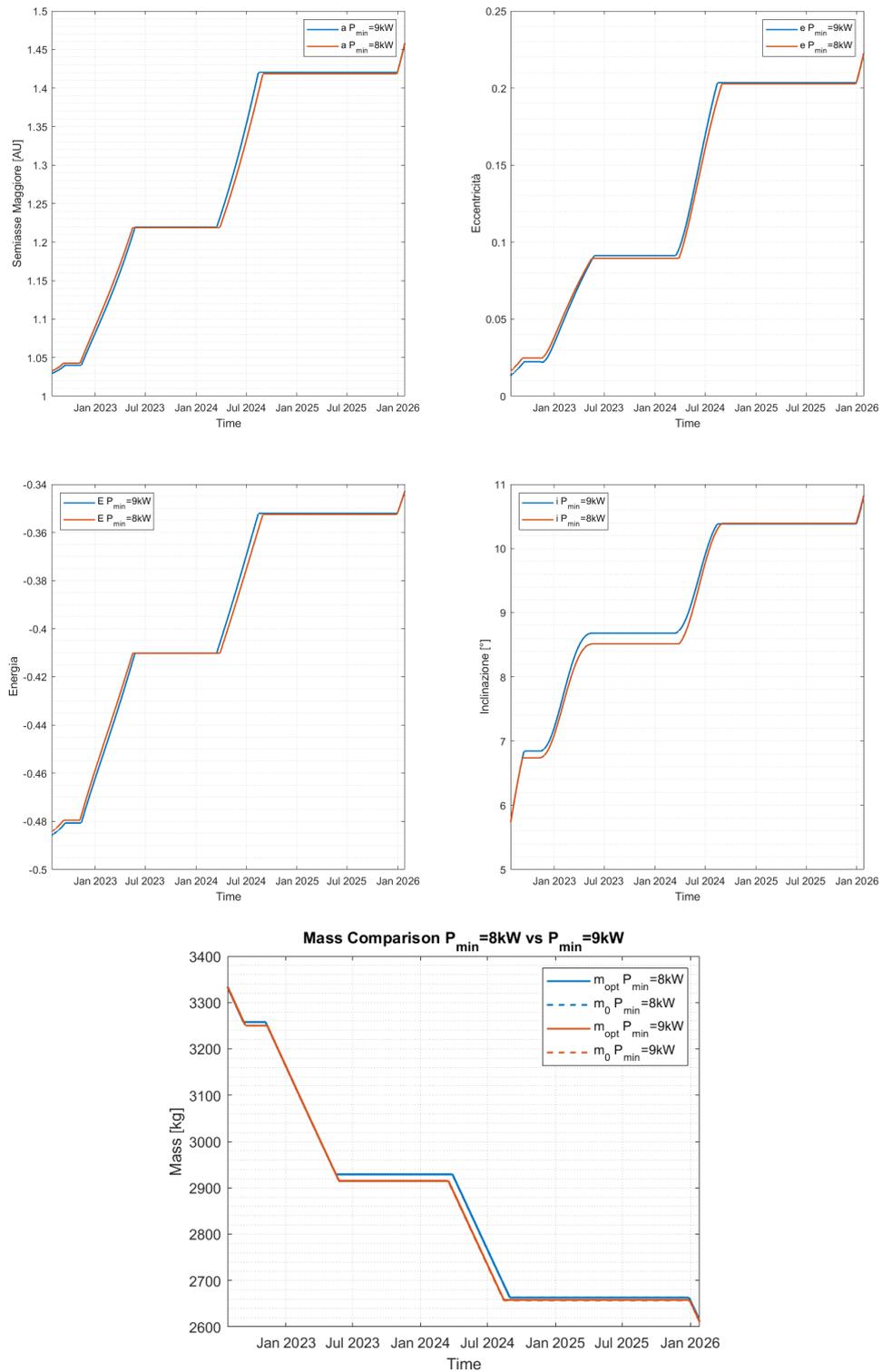


Figura 6.27: Confronto andamenti parametri orbitali e massa  $P_{min} = 8kW$  vs  $P_{min} = 9kW$

# Capitolo 7

## Conclusioni

L'obiettivo di questa tesi è stato quello di analizzare le condizioni ottimali di traiettorie spaziali in presenza di discontinuità di spinta, causate rispettivamente dallo spegnimento del propulsore e dalla riduzione dell'utilizzo della spinta (duty cycle) negli ultimi giorni di missione. Sono state esaminate le conseguenze di un aumento della potenza minima (da 8kW a 9kW) e di una riduzione del duty cycle (dal 90% al 70%) negli ultimi 15 e 30 giorni. Come caso di applicazione, è stata considerata una missione interplanetaria verso l'asteroide (433) Eros e un sistema di propulsione solare elettrica.

Per ogni caso di studio analizzato, sono state confrontate le soluzioni ottenute prima e dopo l'aggiunta delle condizioni di ottimo nei punti di discontinuità, al fine di valutarne il guadagno in termini di massa finale. Una massa finale maggiore equivale ad un minore consumo.

Per la risoluzione del problema di ottimo è stato utilizzato un metodo indiretto. I risultati sono stati ricavati mediante una procedura iterativa di shooting.

Per il primo caso analizzato, missione di breve durata con vincolo  $P_{min} = 8kW$  e duty cycle del 90% costante, i risultati indicano che la soluzione ottima ha portato ad un aumento della massa finale soltanto dello 0.002% rispetto al caso base.

La successiva diminuzione del duty cycle al 70% negli ultimi 15 e 30 giorni ha causato una progressiva riduzione della massa finale rispettivamente del -0.374% e del -0.865%, in quanto l'utilizzo di una minore spinta nel tratto finale comporta la necessità di prolungare le fasi di spinta precedenti. L'aggiunta delle condizioni di ottimo ha permesso di mitigare la riduzione della massa finale del +0.024% per i 15 giorni e del +0.059% per i 30 giorni.

Dopodiché la potenza minima è stata aumentata da 8kW a 9kW, considerando sia una missione breve che una missione di lunga durata a pari duty cycle (90%).

Per la missione breve, la soluzione ottima relativa a  $P_{min} = 9kW$  è quella che ha portato all'incremento più alto di massa finale, +0.364% contro +0.032% del caso ottimo  $P_{min} = 8kW$ . Considerando tutti i casi esaminati, questa è la variazione più

consistente ottenuta grazie all'introduzione delle condizioni di ottimo. Invece, per la missione di lunga durata, le condizioni di ottimo non influenzano particolarmente le soluzioni. Infatti, per  $P_{min} = 8kW$  la massa finale rimane pressoché invariata mentre per  $P_{min} = 9kW$  l'aumento di massa finale è solo dello 0.011%.

Sono state poi confrontate le soluzioni ottime  $P_{min} = 8kW$  e  $P_{min} = 9kW$ . Per entrambe le missioni, nel caso  $P_{min} = 9kW$  si è verificata una forte riduzione della massa finale, soprattutto nel caso di missione breve (-2,412%), dovuta al fatto che lo spegnimento e la riaccensione del propulsore si verificano a minore distanza dal Sole. Dovendo rimanere spento per un periodo di tempo più lungo, il propulsore deve erogare maggiore spinta nelle fasi precedenti.

L'introduzione delle condizioni di ottimo ha condotto in quasi tutti i casi soltanto ad un lieve miglioramento della soluzione, in quanto esse consentono di prevedere in anticipo le discontinuità e di correggere la traiettoria in funzione di queste ultime. Questo ha influito sulle durate degli archi di thrusting e di coasting nei profili di spinta. In particolare, si è osservato che la traiettoria ottimale in corrispondenza dei passaggi all'afelio si sposta verso raggi inferiori rispetto alla traiettoria non ottimale. Tale condizione consente di ridurre la durata dello spegnimento nelle zone a maggiori distanze dal Sole e di ripartire la spinta in modo più efficiente tra le diverse fasi.

Alla luce dei risultati conseguiti, si può concludere che è possibile utilizzare la soluzione senza le condizioni di ottimo, più semplice da ottenere, come prima stima della soluzione esatta. Ulteriori analisi possono essere condotte considerando asteroidi target che si trovano a maggiori distanze dal Sole e valutando quanto le condizioni di ottimo influiscano sulla soluzione.

# Appendice A

## Manovre Orbitali

Le manovre orbitali sono indispensabili sia per consentire il raggiungimento dell'orbita target a partire dall'orbita di parcheggio sia per contrastare l'azione di forze che tendono a perturbare il moto. In generale, si distinguono due tipi di manovre: **impulsive** e **non impulsive**.

Nelle manovre impulsive le variazioni del moto si realizzano attraverso variazioni finite di velocità ( $\Delta V$ ) in un tempo infinitesimo e sono tipiche della propulsione chimica. Nelle manovre non impulsive, invece, si hanno basse spinte erogate generalmente da propulsori elettrici che fanno variare i parametri dell'orbita in tempi molto lunghi, dando luogo a traiettorie a spirale.

### A.1 Trasferta di Hohmann

Si tratta della manovra impulsiva più economica nel caso di trasferimenti tra orbite circolari e complanari, in quanto richiede la *minima variazione di velocità*  $\Delta V$ .

Durante la trasferta di Hohmann, lo S/C percorre un'ellisse tangente alle orbite del pianeta di partenza e del pianeta di arrivo con apoastro e periastro coincidenti con i raggi di partenza  $r_1$  e di arrivo  $r_2$ .

I parametri geometrici dell'ellisse di Hohmann, quindi, sono:

$$\begin{aligned} 2a_H &= r_1 + r_2 \\ e_H &= \frac{r_2 - r_1}{r_1 + r_2} \end{aligned} \tag{A.1}$$

Per cui, l'energia orbitale si può esprimere come:

$$\mathcal{E}_H = -\frac{\mu}{2a_H} = -\frac{\mu}{r_1 + r_2} \tag{A.2}$$

Si considera la condizione illustrata in figura A.1 e si suppone, quindi, di voler passare dall'orbita di raggio  $r_1$  all'orbita di raggio  $r_2$  con  $r_2 > r_1$ . La velocità dello

spacecraft sull'orbita circolare di partenza è data da:

$$V_{c1} = \sqrt{\frac{\mu_1}{r_1}} \quad (\text{A.3})$$

Affinché alla partenza lo spacecraft possa inserirsi sull'ellissi di Hohmann, bisogna fornire un certo  $\Delta V_1$  per portare la velocità dal valore  $V_{c1}$  al valore  $V_{H1}$ .

$$V_{H1} = V_{c1} + \Delta V_1 \quad (\text{A.4})$$

Analogamente, si può valutare la velocità dello spacecraft sull'orbita di arrivo come:

$$V_{c2} = V_{H2} + \Delta V_2 = \sqrt{\frac{\mu_2}{r_2}} \quad (\text{A.5})$$

È possibile ricavare le espressioni per le velocità di Hohmann dall'equazione dell'energia meccanica specifica:

$$\mathcal{E}_H = -\frac{\mu}{r_1 + r_2} = \frac{V^2}{2} - \frac{\mu}{r} \quad (\text{A.6})$$

da cui si ricava:

$$V_{H1} = \sqrt{2 \left( -\frac{\mu_1}{r_1 + r_2} + \frac{\mu_1}{r_1} \right)} \quad (\text{A.7})$$

$$V_{H2} = \sqrt{2 \left( -\frac{\mu}{r_1 + r_2} + \frac{\mu_1}{r_2} \right)} \quad (\text{A.8})$$

I  $\Delta V$  da fornire rispettivamente alla partenza e all'arrivo sono quindi:

$$\Delta V_1 = V_{H1} - V_{c1} = V_{c1} \left( \sqrt{\frac{2r_2}{r_1 + r_2}} - 1 \right) \quad (\text{A.9})$$

$$\Delta V_2 = V_{c2} - V_{H2} = V_{c2} \left( 1 - \sqrt{\frac{2r_1}{r_1 + r_2}} \right) \quad (\text{A.10})$$

I  $\Delta V$  sono paralleli alla velocità, quindi non ci sono perdite per disallineamento. Inoltre, i  $\Delta V$  sono positivi se si va verso orbite di raggio più grandi rispetto a quella di partenza, viceversa sono negativi.

Il costo complessivo è dato da:

$$\Delta V = |\Delta V_1| + |\Delta V_2| \quad (\text{A.11})$$

Il tempo necessario per compiere una trasferta di Hohmann è la metà del periodo dell'orbita di trasferimento in quanto la partenza si verifica al perielio mentre l'arrivo all'afelio. Indicando con  $t_1$  l'istante della partenza dello S/C e con  $t_2$  l'istante di arrivo, per la trasferta di Hohmann si ha:

$$t_2 - t_1 = \pi \sqrt{\frac{a_H^3}{\mu}} \quad (\text{A.12})$$

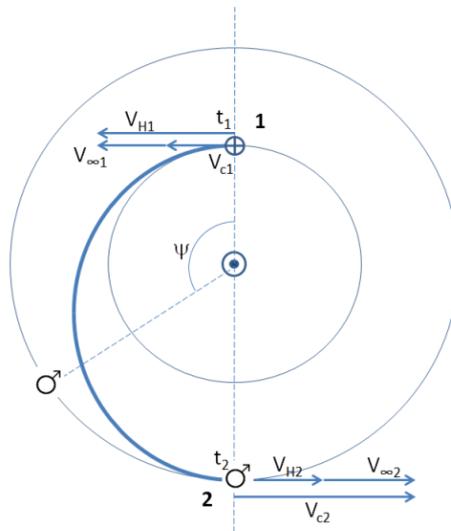


Figura A.1: Trasferta di Hohmann

## A.2 Manovre a bassa spinta: approssimazione di Edelbaum

Uno dei primi modelli che ha permesso di determinare le leggi di controllo e il  $\Delta V$  di una missione con propulsione elettrica è l'**approssimazione di Edelbaum**.

L'approssimazione di Edelbaum consente di semplificare le *equazioni planetarie di Gauss*, le quali correlano le variazioni dei parametri orbitali alle componenti di accelerazione in 3 particolari direzioni: tangenziale  $a_T$  (o in direzione della velocità  $a_V$ ), radiale  $a_R$  (o normale alla velocità  $a_N$ ) e perpendicolare al piano  $a_W$ .

Le ipotesi alla base della teoria di Edelbaum sono:

- **Orbite quasi-circolari** ( $r \approx a \approx p$ ,  $e \approx 0$ ,  $E \approx \nu \approx M$ ,  $V^2 \approx \mu/r$ ): poiché con la propulsione elettrica si hanno basse spinte, i parametri orbitali cambiano poco. Per cui, è ragionevole pensare che durante la trasferta l'orbita rimanga quasi-circolare;
- **Inclinazione piccola**: in realtà è importante che la variazione di inclinazione dell'orbita rispetto al piano di riferimento (es. piano orbitale di partenza) sia piccola. In tal caso, si ha  $\sin i \approx i$ ,  $\cos i \approx 1$ ,  $\theta = \Omega + \omega + \nu$ ;
- Le spinte e quindi le relative accelerazioni sono molto piccole:  $\mathbf{a}_V \approx \mathbf{a}_T \ll \mu/r^2$ ,  $\mathbf{a}_w \ll \mu/r^2$ ,  $\mathbf{a}_R \ll \mu/r^2$ ;

Applicando a questo punto le assunzioni di Edelbaum alle equazioni di Gauss, si ottengono le equazioni in forma semplificata:

$$V \frac{\dot{a}}{a} = 2a_T \quad (\text{A.13})$$

$$V \dot{e} = 2 \cos \nu a_T + \sin \nu a_R \quad (\text{A.14})$$

$$V \dot{i} = \cos(\omega + \nu) a_W \quad (\text{A.15})$$

$$i V \dot{\Omega} = \sin(\omega + \nu) a_W \quad (\text{A.16})$$

$$V \dot{\omega} = -V \dot{\Omega} + (2 \sin \nu a_T - \cos \nu a_R)/e \quad (\text{A.17})$$

$$\dot{\theta} = n = \sqrt{\mu}/a^3 \quad (\text{A.18})$$

dove il punto  $\cdot$  indica la derivata rispetto al tempo. In realtà, le equazioni A.16 e A.17 presentano una singolarità per  $i = 0$  e  $e = 0$ , Edelbaum infatti trascurò le due equazioni assumendo costanti i relativi parametri  $\Omega$  e  $\omega$ .

Le componenti dell'accelerazione possono essere esplicitate nel seguente modo:  $a_T = A \cos \alpha \cos \beta$ ,  $a_R = A \sin \alpha \cos \beta$ ,  $a_W = A \sin \beta$ , avendo definito nel piano l'angolo  $\alpha$  tra la spinta e la direzione tangenziale, fuori dal piano l'angolo  $\beta$  tra la spinta e il piano orbitale e  $A$  modulo dell'accelerazione costante. Ad ogni componente di accelerazione corrisponde una componente di spinta nella relativa direzione che produce un determinato effetto:

- La componente  $T_V$  permette di cambiare  $a$ , quindi l'energia,  $e$  e  $\omega$ ;
- La componente  $T_R$  varia la direzione ma non il modulo della velocità, quindi l'energia rimane invariata, cambiano però  $e$  e  $\omega$ ;
- La componente  $T_W$ , perpendicolare al piano dell'orbita, consente di variare  $i$  e  $\Omega$ .

Effettuando il cambio di variabile  $dt = \sqrt{\frac{a^3}{\mu}} d\nu$  e integrando le equazioni su un giro  $\nu$  da 0 a  $2\pi$ , si ottengono le variazioni di  $a$ ,  $e$  ed  $i$ :

$$\Delta a = (2aA/V) \int_0^{2\pi} \cos \alpha \cos \beta d\nu \quad (\text{A.19})$$

$$\Delta e = (A/V) \int_0^{2\pi} (2 \cos \nu \cos \alpha + \sin \nu \sin \alpha) \cos \beta d\nu \quad (\text{A.20})$$

$$\Delta i = (A/V) \int_0^{2\pi} \cos(\omega + \nu) \sin \beta d\nu \quad (\text{A.21})$$

Applicando la teoria del controllo ottimale, è possibile ricavare i valori di  $\alpha$  e  $\beta$  che individuano la direzione ottimale della spinta:

- Nel piano la massima variazione di  $a$  si ottiene con  $\alpha = \beta = 0$ , quindi  $a_T = A$ ,  $a_R = a_W = 0$  ( $\Delta e = \Delta i = 0$ );

- Nel piano la massima variazione di  $e$  si ottiene con  $\tan \alpha = \tan \nu/2$  e  $\beta = 0$  ( $\Delta a = \Delta i = 0$ );
- Fuori dal piano la massima variazione di  $i$  si ottiene con  $\beta = \pm 90^\circ$ .

In genere, durante una missione spaziale è necessario cambiare contemporaneamente e in maniera significativa il semiasse e l'inclinazione dell'orbita. Tuttavia, nell'approssimazione di Edelbaum, si assume che le variazioni di  $a$  ed  $i$  siano piccole in un giro, per cui è necessario compiere più giri per realizzare una trasferta tra orbite circolari inclinate. Si definisce così il **Problema di Edelbaum**.

Nel problema di Edelbaum si ipotizza che la traiettoria sia sempre quasi-circolare e che l'angolo  $\beta$  sia costante durante ogni rivoluzione. Si hanno due equazioni differenziali che riguardano le derivate dell'inclinazione e del tempo rispetto alla velocità e tali derivate sono funzione dell'angolo  $\beta$ :  $di/dV = -2 \tan \beta / (\pi V)$ ,  $dt/dV = -1/(A \cos \beta)$  con  $A$  modulo dell'accelerazione costante.

Il problema viene poi ottimizzato considerando  $\beta$  come variabile di controllo, ovvero ad ogni giro si sceglie la legge ottimale di  $\beta$  che corrisponde alle variazioni desiderate dei parametri orbitali. In particolare, l'ottimizzazione richiede:

$$\frac{\partial}{\partial \beta} \left( \frac{di}{dV} + k \frac{dt}{dV} \right) \rightarrow V \sin \beta = V_0 \sin \beta_0 = \text{cost} \quad (\text{A.22})$$

Il  $\Delta V$  propulsivo fornito dalla teoria di Edelbaum in caso di trasferte tra orbite circolari ( $0 \rightarrow 1$ ) con cambio di piano con  $\Delta i < 2\text{rad}$  è dato da:

$$\Delta V = \sqrt{V_0^2 + V_1^2 - 2V_0V_1 \cos \left( \frac{\pi}{2} \Delta i \right)} \quad (\text{A.23})$$

## Appendice B

# Equazioni in coordinate sferiche

Le equazioni di stato vengono proiettate in un sistema riferimento inerziale in quanto più conveniente data l'assenza delle accelerazioni di trascinamento e di Coriolis che complicherebbero la valutazione dello Jacobiano del sistema richiesta nella risoluzione del BVP e per la corrispondenza tra le variabili aggiunte alle componenti della velocità nel sistema inerziale e le componenti del primer vector [15].

Si utilizzano perciò coordinate sferiche in un sistema di riferimento inerziale basato sul piano equatoriale. In tale sistema, la posizione del veicolo è individuata dal raggio  $r$ , dalla *longitudine*  $\theta$  e dalla *latitudine*  $\phi$ . Il vettore velocità, invece, ha componenti radiale verso lo Zenit  $u$ , in direzione Est  $v$  e Nord  $w$  in un riferimento locale; ciò consente di correlare velocità relativa e assoluta in modo più semplice.

Proiettando le equazioni di stato nel sistema di riferimento appena descritto, si ha:

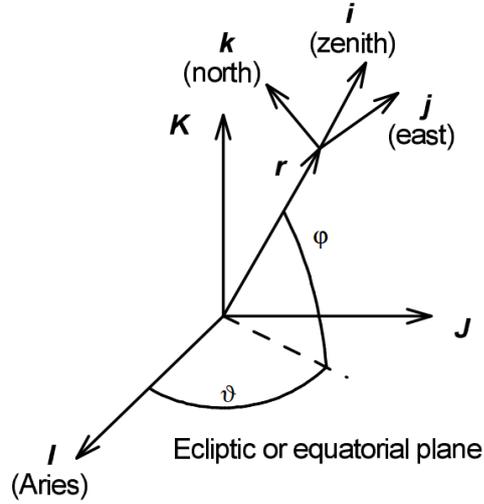
$$\frac{dr}{dt} = u \quad (\text{B.1})$$

$$\frac{d\theta}{dt} = \frac{v}{r \cos \phi} \quad (\text{B.2})$$

$$\frac{d\phi}{dt} = \frac{w}{r} \quad (\text{B.3})$$

$$\frac{dm}{dt} = -\frac{T}{c} \quad (\text{B.4})$$

$$\frac{du}{dt} = -\frac{1}{r^2} + \frac{v^2}{r} + \frac{w^2}{r} + \frac{T}{m} \sin \gamma_T + \frac{qS}{m} [-C_D \sin \gamma + C_L \cos \sigma \cos \gamma] \quad (\text{B.5})$$



**Figura B.1:** Sistema di Coordinate sferiche

$$\frac{dv}{dt} = -\frac{uv}{r} + \frac{vw}{r} \tan \phi + \frac{T}{m} \cos \gamma_T \cos \psi_T + \frac{qS}{m} [-C_D \cos \gamma \cos \psi + C_L (-\cos \sigma \sin \gamma \sin \psi + \sin \sigma \sin \psi)] \quad (\text{B.6})$$

$$\frac{dw}{dt} = -\frac{uw}{r} - \frac{v^2}{r} \tan \phi + \frac{T}{m} \cos \gamma_T \sin \psi_T + \frac{qS}{m} [-C_D \cos \gamma \sin \psi + C_L (-\cos \sigma \sin \gamma \sin \psi - \sin \sigma \cos \psi)] \quad (\text{B.7})$$

Nelle equazioni precedenti gli angoli  $\gamma$  e  $\psi$  rappresentano rispettivamente gli angoli di *elevazione* e di *heading* della velocità relativa  $\mathbf{V}_r$  misurati rispettivamente dal piano orizzontale, con angoli positivi verso l'alto, e in senso antiorario dal parallelo, con angoli positivi verso Nord. Analogamente,  $\gamma_T$  e  $\psi_T$  sono gli stessi angoli ma per la spinta  $\mathbf{T}$ . Infine,  $\sigma$  è l'angolo di *rollio*, ovvero l'angolo che la portanza aerodinamica forma rispetto al piano individuato dai vettori  $\mathbf{r}$  e  $\mathbf{V}_r$ . L'angolo  $\sigma$  viene misurato in senso orario attorno alla velocità relativa a partire dalla direzione radiale.

La portanza può essere scomposta in una componente nel piano della traiettoria che controlla la quota di volo ( $L \cos \omega$ ) ed una normale al piano ( $L \sin \omega$ ) che ruota il vettore velocità e varia quindi l'inclinazione dell'orbita. Per orbite dirette ( $\cos \psi > 0$ ), valori positivi di  $\sin \omega$  danno un contributo negativo alla derivata di  $w$  e portano quindi ad un incremento di inclinazione se il volo procede da Nord verso Sud.

Gli angoli  $\gamma$  e  $\psi$  dipendono solo dalle variabili di stato. Il legame tra tali grandezze

è espresso dalle seguenti relazioni:

$$\sin \gamma = \frac{u}{V_r} \quad (\text{B.8})$$

$$\cos \gamma \cos \psi = \frac{v - \omega r \cos \phi}{V_r} \quad (\text{B.9})$$

$$\cos \gamma \sin \psi = \frac{w}{V_r} \quad (\text{B.10})$$

dove il modulo della velocità relativa è pari a:

$$V_r = \sqrt{u^2 + (v - \omega r \cos \phi)^2 + w^2} \quad (\text{B.11})$$

Gli angoli  $\gamma_T$  e  $\psi_T$  sono i controlli che determinano la direzione della spinta mentre l'angolo  $\sigma$  determina quella della portanza.

Annullando le derivate parziali dell'Hamiltoniano rispetto agli angoli  $\gamma_T$  e  $\psi_T$ , si ricavano i valori ottimali per gli angoli di spinta:

$$\sin \gamma_T = \frac{\lambda_u}{\lambda_V} \quad (\text{B.12})$$

$$\cos \gamma_T \cos \psi_T = \frac{\lambda_u}{\lambda_V} \quad (\text{B.13})$$

$$\cos \gamma_T \sin \psi_T = \frac{\lambda_w}{\lambda_V} \quad (\text{B.14})$$

dove  $\lambda_V$  è il modulo del *primer vector* che è parallelo alla direzione ottimale di spinta:

$$\lambda_V = \sqrt{\lambda_u^2 + \lambda_v^2 + \lambda_w^2} \quad (\text{B.15})$$

Similmente, se si deriva l'Hamiltoniano rispetto all'angolo  $\sigma$  si ricava il valore ottimale per l'angolo di rollio per la portanza:

$$\cos \sigma = \frac{\lambda_u \cos \gamma - \lambda_v \sin \gamma \cos \psi - \lambda_w \sin \gamma \sin \psi}{\lambda_V \sin \delta} \quad (\text{B.16})$$

$$\sin \sigma = \frac{\lambda_v \sin \psi - \lambda_w \cos \psi}{\lambda_V \sin \delta} \quad (\text{B.17})$$

$$(\text{B.18})$$

Le equazioni differenziali per le variabili aggiunte sono fornite dalle *equazioni di Eulero-Lagrange*:

$$\begin{aligned} \dot{\lambda}_r = & \frac{1}{r^2} \left[ \lambda_\theta \frac{v}{\cos \phi} + \lambda_\phi w + \lambda_u \left( -\frac{2}{r} + v^2 + w^2 \right) + \lambda_v (-uv + vw \tan \phi) \right. \\ & + \lambda_w (-uw - v^2 \tan \phi) + \frac{2qS}{mV_r} \lambda_V \omega \cos \phi + [V_E (-C_D \cos \delta + C_L \sin \delta) \\ & \left. + L_E (-C_D \sin \delta - C_L \cos \delta)] - \frac{qS}{m} \lambda_V \frac{\partial \rho}{\partial r} \frac{1}{\rho} (-C_D \cos \delta + C_L \sin \delta) \right] \end{aligned} \quad (\text{B.19})$$

$$\dot{\lambda}_\theta = 0 \quad (\text{B.20})$$

$$\begin{aligned} \dot{\lambda}_\phi = & \frac{1}{r \cos^2 \phi} \left( -\lambda_\theta v \sin \phi - \lambda_v v \omega + \lambda_w v^2 \right) + \frac{2qS}{mV_r} \lambda_V \omega r \sin \phi + \\ & + [V_E (-C_D \cos \delta + C_L \sin \delta) + L_E (-C_D \sin \delta - C_L \cos \delta)] \end{aligned} \quad (\text{B.21})$$

$$\begin{aligned} \dot{\lambda}_u = & \frac{1}{r} (-\lambda_r r + \lambda_v v + \lambda_w w) - \frac{2qS}{mV_r} \lambda_V + [V_Z (-C_D \cos \delta + C_L \sin \delta) + \\ & + L_Z (-C_D \sin \delta - C_L \cos \delta)] \end{aligned} \quad (\text{B.22})$$

$$\begin{aligned} \dot{\lambda}_v = & \frac{1}{r} \left[ -\lambda_\theta \frac{1}{\cos \phi} - 2\lambda_v v + \lambda_v (u - w \tan \phi) + 2\lambda_e v \tan \phi \right] - \frac{2qS}{mV_r} \lambda_V + \\ & + [V_E (-C_D \cos \delta + C_L \sin \delta) + L_E (-C_D \sin \delta - C_L \cos \delta)] \end{aligned} \quad (\text{B.23})$$

$$\begin{aligned} \dot{\lambda}_w = & \frac{1}{r} (-\lambda_\phi - 2\lambda_u w - \lambda_v v \tan \phi + \lambda_w u) - \frac{2qS}{mV_r} \lambda_V + [V_N (-C_D \cos \delta + C_L \sin \delta) + \\ & + L_N (-C_D \sin \delta - C_L \cos \delta)] \end{aligned} \quad (\text{B.24})$$

$$\dot{\lambda}_m = \frac{T}{m^2} \lambda_V + \frac{qS}{m^2} \lambda_V (-C_D \cos \delta + C_L \sin \delta) \quad (\text{B.25})$$

dove  $\delta$  è l'angolo compreso tra il primer vector e la velocità relativa.

Inoltre, sono state introdotte le componenti nel riferimento locale Zenit-Est-Nord dei versori paralleli alla velocità relativa:

$$V_Z = \frac{u}{V_r} = \sin \gamma \quad (\text{B.26})$$

$$V_E = \frac{(v - \omega r \cos \phi)}{V_r} = \cos \gamma \cos \psi \quad (\text{B.27})$$

$$V_N = \frac{w}{V_r} = \cos \gamma \sin \psi \quad (\text{B.28})$$

e alla portanza:

$$L_Z = \frac{\lambda_u (1 - \sin^2 \gamma) - \lambda_v \sin \gamma \cos \gamma \cos \psi - \lambda_w \sin \gamma \cos \gamma \sin \psi}{\lambda_V \sin \delta} \quad (\text{B.29})$$

$$L_E = \frac{-\lambda_u \sin \gamma \cos \gamma \cos \psi + \lambda_v (1 - \cos^2 \gamma \cos^2 \psi) - \lambda_w \cos^2 \gamma \sin \psi \cos \psi}{\lambda_V \sin \delta} \quad (\text{B.30})$$

$$L_N = \frac{-\lambda_u \sin \gamma \cos \gamma \sin \psi + \lambda_v \cos^2 \gamma \sin \psi \cos \psi + \lambda_w (1 - \cos^2 \gamma \sin^2 \psi)}{\lambda_V \sin \delta} \quad (\text{B.31})$$

# Bibliografia

- [1] Lorenzo Casalino. *Space Propulsion*. 2021 (cit. alle pp. 7, 8).
- [2] Daniel A Herman et al. «Overview of the development and mission application of the advanced electric propulsion system (AEPS)». In: *International Electric Propulsion Conference*. E-19473. 2018 (cit. alle pp. 12, 16).
- [3] George P Sutton e Oscar Biblarz. *Rocket propulsion elements*. John Wiley & Sons, 2016 (cit. alle pp. 14, 15).
- [4] NASA/JPL. *PIA04242: Artist's Concept of Deep Space 1*. 2002-12-21 (cit. a p. 15).
- [5] Roger R. Bate, Donald D Mueller e Jerry E. White. *Fundamentals of astrodynamics*. Courier Dover Publications, 1971 (cit. alle pp. 18–21).
- [6] Lorenzo Casalino. *Spaceflight Sillabus*. 2021 (cit. a p. 21).
- [7] Alessandro A Quarta e Giovanni Mengali. «Fondamenti di meccanica del volo spaziale». In: *Fondamenti di meccanica del volo spaziale* (2013), pp. 1–788 (cit. a p. 23).
- [8] Abolfazl Shirazi, Josu Ceberio e Jose A Lozano. «Spacecraft trajectory optimization: A review of models, objectives, approaches and solutions». In: *Progress in Aerospace Sciences* 102 (2018), pp. 76–98 (cit. alle pp. 29–32).
- [9] Anil Rao. «A Survey of Numerical Methods for Optimal Control». In: *Advances in the Astronautical Sciences* 135 (gen. 2010) (cit. a p. 33).
- [10] Lorenzo Casalino. *Ottimizzazione Indiretta di Traiettorie Spaziali*. 2021 (cit. alle pp. 37, 38).
- [11] Melissa L McGuire, Nathan J Strange, Laura M Burke, Steven L McCarty, Gregory B Lantoine, Min Qu, Haijun Shen, David A Smith e Matthew A Vavrina. «Overview of the Mission Design Reference Trajectory for NASA's Asteroid Redirect Robotic Mission». In: GRC-E-DAA-TN44883 (2017) (cit. a p. 44).
- [12] Lorenzo Casalino e Matthew A. Vavrina. «OPTIMAL POWER PARTITIONING FOR ELECTRIC THRUSTERS». In: () (cit. a p. 44).

## BIBLIOGRAFIA

---

- [13] Nasa. *Earth Fact Sheet*. 2008 (cit. a p. 49).
- [14] Jet Propulsion Laboratory. *Small-Body Database Lookup, 433 Eros (A898 PA)*. 2008 (cit. a p. 49).
- [15] Lorenzo Casalino. *Equazioni in coordinate sferiche* (cit. a p. 87).