POLITECNICO DI TORINO

Corso di Laurea Magistrale in Ingegneria Meccanica

Corso di Laurea Magistrale

CARATTERIZZAZIONE DINAMICA DI O-RING PER APPLICAZIONI SU CUSCINETTI AD ARIA

Relatore

Terenziano RAPARELLI

Correlatori

Federico COLOMBO

Luigi LENTINI

Andrea TRIVELLA

Candidato

Andrea ORTI

A.A. 2021-2022

Indice

Elenco delle figure

Elenco delle tabelle

Abstract

I cuscinetti a gas rivestono un ruolo fondamentale in molte applicazioni in cui sono richieste elevate precisioni ed elevate velocità. Le applicazioni in cui sono impiegati ad alta velocità riguardano i mandrini di rettifica e foratura ad altissima velocità, guide di scorrimento di macchine utensili (CN), turbomacchine miniaturizzate, mentre le alte precisioni riguardano mandrini di precisione e tavole rotanti, macchine di misura a coordinate 3D, micromanipolatori.

Le caratteristiche prestazionali dei cuscinetti a gas sono direttamente correlate alle proprietà fisiche del gas. Un gas è un lubrificante molto stabile, non vaporizza, solidifica, è soggetto a cavitazione e si decompone a temperature estreme. I cuscinetti a gas possono quindi essere utilizzati nei turbocompressori operanti a 650° C, o all'estremo opposto, per camere criogeniche con temperature prossime allo zero assoluto. Inoltre, la viscosità del gas è meno influenzata dalla temperatura rispetto a quella di un liquido, mantenendo valori soddisfacenti per ampi intervalli di temperatura.

I limiti dei cuscinetti a gas sono principalmente dovuti alla comprimibilità ed alla scarsa viscosità dei gas, il ché comporta un consumo di gas elevato. Ciò motiva l'utilizzo di giochi molto piccoli che richiedono generalmente un controllo più stretto sulle tolleranze di fabbricazione, sulla finitura superficiale, sulle distorsioni termiche ed elastiche e sull'allineamento. La combinazione di comprimibilità e bassa viscosità comporta, inoltre, uno scarso smorzamento dei cuscinetti a gas.

Lo studio del loro comportamento dinamico porta ad affacciarsi al problema dell'instabilità, poiché risultano essere caratterizzati da due tipi di instabilità dinamica: *anynchronous rotor whirl* e *pneumatic hammering*. Al fine di ottenere un miglioramento della stabilità dinamica di cuscinetti a gas ad alta velocità è possibile inserire uno smorzamento esterno. Tra le soluzioni che esistono per l'introduzione dello smorzamento esterno ad un sistema rotore-cuscinetto, una tra le più diffuse è quella descritta da una boccola flottante come supporto flessibile, sostenuta da un O-Ring in gomma.

Lo scopo del presente lavoro di tesi è quello di caratterizzare il comportamento dinamico degli anelli elastomerici, ovvero l'identificazione dinamica della rigidezza e dello smorzamento, in differenti condizioni di lavoro. In letteratura si

possono trovare due metodi di prova per misurare le proprietà degli O-ring: il metodo diretto e il metodo indiretto, conosciuto anche come metodo della massa risonante. Nel presente lavoro è stato seguito quest'ultima metodologia.
É stato quindi progettato un banco prova in grado di caratterizzare sperimentalmente il comportamento degli O-ring, in modo da stimare la rigidezza dinamica e le proprietà di smorzamento al variare delle condizioni imposte, quali i parametri di *Squeeze* δ e di *Stretch* ε. Il banco prova è stato progettato in modo da poter essere impiegato all'interno di una camera termostatica. Sono state quindi eseguite delle prove a temperatura controllata in modo da analizzare l'influenza della temperatura di lavoro, fino a 120° C, sui valori di rigidezza e smorzamento. Il lavoro eseguito comprende, di conseguenza, anche la completa identificazione del banco prova al fine di verificare la corretta caratterizzazione degli O-Ring.
Successivamente, sono stati implementati dei modelli analitici che analizzassero il comportamento di un rotore sostenuto da cuscinetti a gas. Sono state considerate due principali configurazioni. La prima comprende il modello di un rotore rigido supportato da due *journal bearings*, che si rivela adatta alla descrizione di una grande varietà di contesti nel campo delle turbomacchine. Tale sistema è stato analizzato dapprima come sistema 2DOF, e successivamente integrato come sistema 4DOF, nel quale viene introdotto l'effetto giroscopico, fenomeno che denota importanza alle alte velocità del rotore. La seconda configurazione analizzata è quella di una singola boccola flottante come supporto di un rotore, nel quale è stato esaminato l'effetto dell'utilizzo degli anelli in gomma sul limite della velocità di rotazione raggiungibile senza l'insorgere dell'instabilità rotorica.

Capitolo 1

O-Ring

1.1 Introduzione

Gli O-Ring sono anelli di forma toroidale, generalmente di materiale elastomerico, utilizzati principalmente come guarnizioni. Una guarnizione O-Ring viene solitamente impiegata per prevenire la perdita di fluido o gas, ed è composto dall'anello stesso e dal suo alloggiamento.

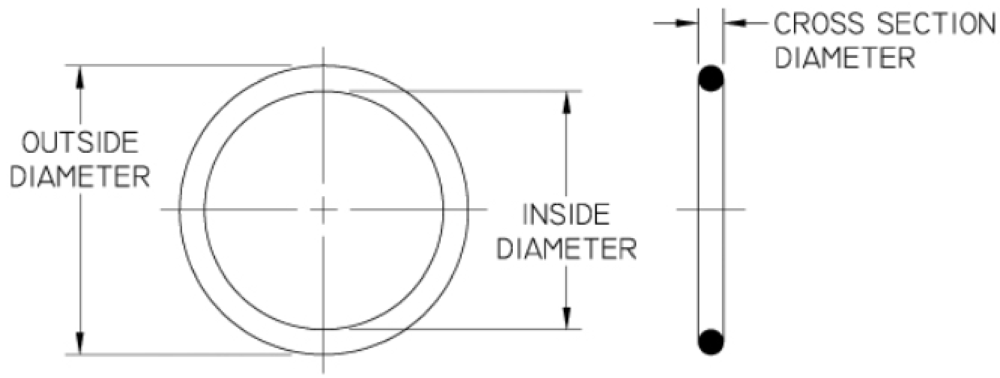


Figura 1.1: O-Ring. [1]

Il loro notevole utilizzo è giustificato dai diversi vantaggi che offrono:

- ampio range di pressioni e temperature di utilizzo;
- richiedono poco spazio e sono sono caratterizzati da un peso esiguo;
- facilità di montaggio;
- economicamente convenienti.

Tra i principali campi di applicazione, gli O-Ring vengono utilizzati per risolvere il problema della stabilità di cuscinetti a gas ad alta velocità. Sono presenti il letteratura differenti ricerche che dimostrano come attraverso il montaggio di anelli esterni venga posticipato il presentarsi del fenomeno dell'instabilità. Un esempio applicativo è illustrato in **Figura 1.2**, dove viene mostrata una sezione trasversale di una turbina dentale, che utilizza cuscinetti di tipo aerostatico su cui vengono montati due anelli elastomerici che, oltre a fornire un supporto alla stabilità, hanno applicazione di tenuta sigillando il serbatoio dell'aria che circonda i cuscinetti stessi.

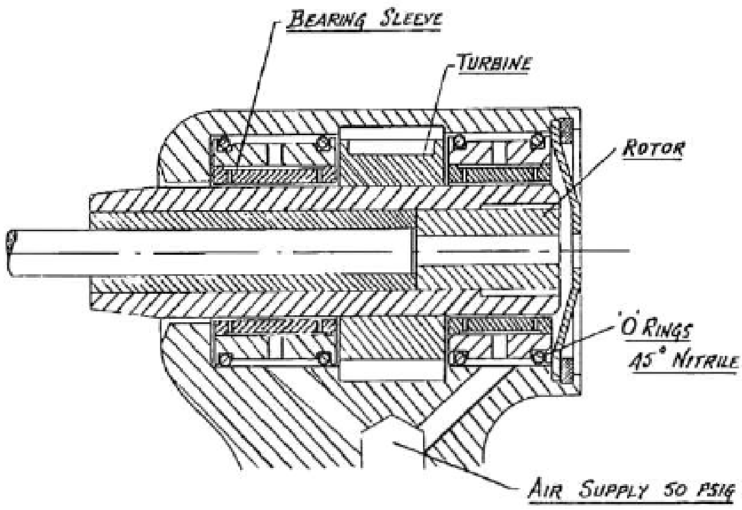


Figura 1.2: Turbina dentale con cuscinetti a gas. [2]

1.1.1 Funzionamento come tenuta

Gli O-ring vengono inseriti in una scanalatura in modo che siano tenuti in posizione, e quindi schiacciati tra due superfici. L'arresto del flusso del fluido da bloccare avviene attraverso sia la pressione meccanica della struttura circostante che la pressione trasmessa dal fluido stesso. Quando viene applicata pressione al sistema, ciò aiuta anche la tenuta dell'O-Ring spingendo l'anello stesso contro la parete della scanalatura opposta alla direzione della pressione e costringendolo ad espandersi perpendicolarmente alla direzione in cui viene schiacciato dalla pressione.

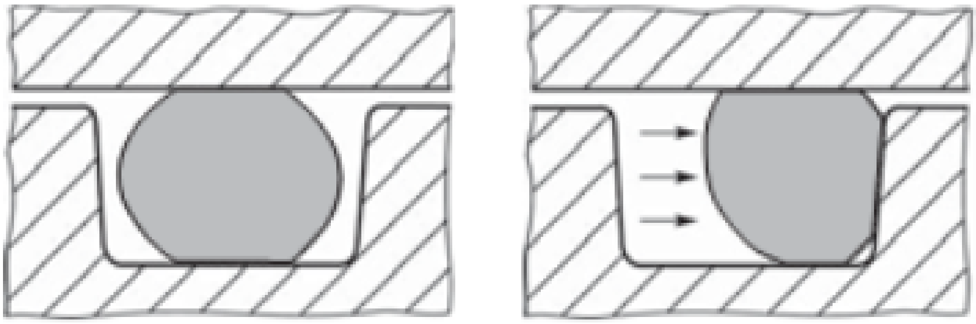


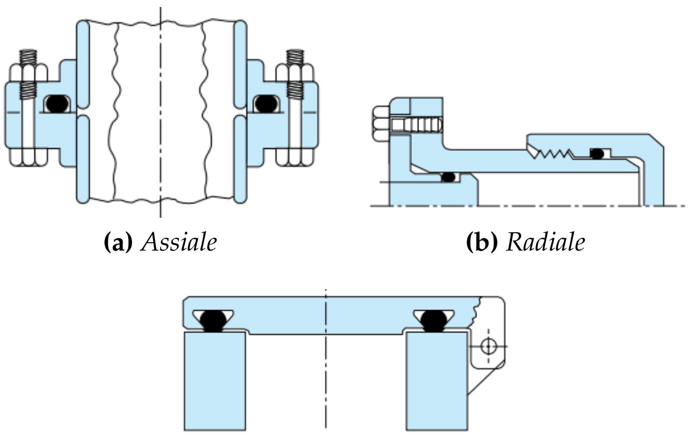
Figura 1.3: O-Ring montato (sx) e O-Ring sotto pressione (dx). [3]

Tenuta statica

Una tenuta statica è definita come una tenuta in cui tutte le superfici adiacenti non sono soggette a movimento relativo ad eccezione di una piccola espansione termica o di piccoli movimenti dovuti alla pressione del fluido. É doveroso far notare che la vera azione di tenuta statica è piuttosto rara, poiché il movimento vibrazionale è presente praticamente in tutte le applicazioni statiche.

Tenuta dinamica

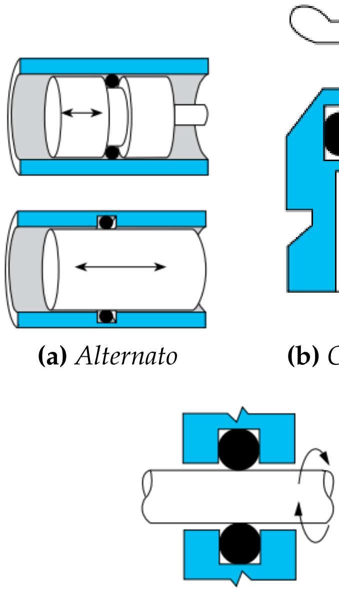
Le superfici si muovono l'una rispetto all'altra con un movimento alternativo. Con questo movimento l'anello viene spostato. Gli O-Ring sono più efficaci se usati per corse brevi e con diametri relativamente piccoli.



(a) *Assiale* **(b)** *Radiale*

(c) *Incastrato*

Figura 1.4: Tre tipologie di applicazioni di tenuta statica. [3]



(a) *Alternato* **(b)** *Oscillante*

(c) *Rotatorio*

Figura 1.5: Tre tipologie di applicazioni di tenuta dinamica. [3]

1.1.2 Mescole

Quando si sceglie un composto per O-ring, devono essere presi in considerazione molti fattori a seconda del tipo di impiego, poiché la scelta del materiale selezionato ha un'influenza significativa sui parametri di progettazione. I principali fattori da considerare sono il range di temperatura, pressione, tipo di tenuta dinamica o statica, vita utile desiderata, per cui la mescola deve essere scelta in base alla specifica applicazione. L'elastomero deve infatti resistere all'estrusione quando esposto alla pressione massima prevista del sistema ed essere in grado di mantenere buone proprietà fisiche attraverso l'intero intervallo di temperatura previsto.

1.2 Caratteristiche

1.2.1 Fattori di progettazione

Compatibilità

La compatibilità tra l'O-Ring e il fluido da contenere deve essere la prima considerazione nel processo di progettazione. Il fluido può infatti un effetto negativo immediato (e.g. una reazione chimica), con conseguente riduzione della durata della tenuta, si ottiene uno scarso vantaggio procedendo ulteriormente con la progettazione fino a quando questo problema di base non sarà risolto. Se è coinvolto più di un fluido, è necessario considerare sia la sequenza di esposizione che il tempo di contatto.

Temperatura

Nel caso di funzionamento solo ad alta temperatura, potrebbe essere necessario aumentare il volume del premistoppa per compensare l'espansione termica dell'O-Ring. Viceversa, per il funzionamento solo a bassa temperatura, si può ottenere una migliore tenuta riducendo la profondità del premistoppa, ottenendo così la giusta compressione sull'anello.

Pressione

La pressione può influenzare la scelta della durezza Shore della mescola. A pressioni molto basse, è più facile ottenere una tenuta adeguata con una durezza del durometro inferiore (50-60 Shore). Con pressioni più elevate, la combinazione di pressione e durezza Shore del materiale determina il gioco massimo che può essere tollerato in condizioni di sicurezza.

Lubrificazione

La lubrificazione delle guarnizioni è importante per l'installazione e il funzionamento delle tenute dinamiche, nonché per il corretto posizionamento di quelle statiche. Il loro utilizzo durante il montaggio aiuta a proteggere l'O-Ring da danni causati da abrasione, schiacciamento o taglio, aiutando anche a posizionare correttamente la guarnizione e a velocizzare le operazioni di assemblaggio.

1.2.2 Pulizia

Una adeguata pulizia è importante per assicurare un'azione di tenuta idonea e una lunga durata dell'O-Ring. La presenza di particelle estranee può causare perdite e danneggiamento.

1.2.3 Montaggio

Il montaggio deve essere eseguito con grande cautela in modo che l'O-Ring sia posizionato in maniera corretta nella sua sede e non venga danneggiato quando il gruppo premistoppa è chiuso. Alcune delle caratteristiche di progettazione più importanti per assicurare questo sono:

- L'allungamento del diametro interno quando l'anello è inserito nella scanalatura, non deve essere superiore al 5%;
- La dilatazione del diametro interno necessaria a raggiungere la sede durante il montaggio solitamente non supera il 25-50%;
- L'anello non deve compiere torsione durante l'inserimento;
- Gli O-ring non devono mai essere forzati su spigoli vivi, filettature, o altri spigoli vivi non protetti;
- La chiusura della sede deve essere ottenuta con un movimento longitudinale rettilineo, per cui è da evitare il movimento rotatorio o oscillatorio.

1.2.4 Squeeze e Forza di compressione

La ragione principale per cui gli O-Ring producono guarnizioni così efficaci è dovuta alla tendenza dell'anello di tornare alla sua forma originale non compressa quando la sezione trasversale viene modificata. Di conseguenza la compressione, misurata dal parametro *squeeze*, definito analiticamente nella **Sezione 2.1**, è di notevole importanza nella progettazione della tenuta dell'O-ring. Nelle applicazioni dinamiche, il valore massimo suggerito dalla letteratura [1] è di circa il 16%, a causa di considerazioni sull'attrito e sull'usura, sebbene le sezioni trasversali piccole possano essere compresse fino al 25%. Se utilizzato come tenuta statica, la compressione massima consigliata per la maggior parte degli elastomeri è del 30%, sebbene questa quantità possa causare problemi di assemblaggio in un progetto di tenuta a compressione radiale. La maggior parte delle applicazioni di tenuta non può tollerare una condizione di compressione nulla, ad eccezione di rari casi.
La forza richiesta per comprimere un anello di tenuta dipende principalmente dalla sua durezza Shore, dalla sua sezione trasversale e dalla quantità di compressione desiderata. La forza non è fissa, ma è caratterizzata un intervallo di valori. L'aumento delle temperature di servizio generalmente tende ad ammorbidire i materiali elastomerici, ma la forza di compressione diminuisce molto poco tranne nel caso le mescole più dure.

1.3 Modalità di danneggiamento

La durata e l'affidabilità ottimali possono essere raggiunte solo con la scelta della giusta mescola e con la comprensione dei vari fattori che influenzano la degradazione dell'elastomero. Il danneggiamento prematuro di un O-ring in servizio può essere solitamente attribuito a una combinazione di cause e non semplicemente a una singola modalità di usura. Di seguito viene fatto un breve riepilogo dei tipi più comuni di guasto [1].

- *Compression set*, è il cedimento più comune. Il danneggiamento è causato da un eccessiva compressione dell'elastomero utile per mantenere l'integrità della "linea di tenuta". Errori di questo tipo possono essere evitati modificando con la giusta scelta dell'elastomero o modificando le condizioni di lavoro

- *Estrusione*, dove l'O-ring fuoriesce dalla sua sede incastrandosi tra le superfici di accoppiamento. Le cause principali sono distanze eccessive o irregolari (e.g. eccentricità) o elevate pressioni. É utile in questo caso l'impiego di dispositivi di backup, strumento utilizzato come supplemento alla tenuta dell'O-ring. Il motivo principale per l'uso di un anello di riserva è ridurre il gioco sul lato di bassa pressione di un O-ring, che permette di resistere a pressioni più elevate rispetto al solo O-ring.

- *Guasto a spirale*, generalmente causata da un O-ring che scorre e rotola allo stesso tempo, per cui la torsione durante la fase di lavoro fa in modo che si sviluppino profondi tagli a spirale sulla superficie della guarnizione stessa. Può essere evitato con l'eliminazione di eccentricità, un miglioramento la finitura superficiale e/o miglioramento della lubrificazione.

- *Decompressione esplosiva*, causata da gas ad alta pressione che rimane intrappolato all'interno della struttura interna dell'elemento di tenuta elastomerico. La rapida diminuzione della pressione del sistema fa in modo che il gas intrappolato si espanda per adattarsi alla pressione esterna e questa espansione produce bolle e rotture sulla superficie della tenuta. Oltre alla scelta di un elastomero con migliore resistenza alla decompressione esplosiva, per evitare questa tipologia di danneggiamento si suggerisce di aumentare il tempo di decompressione per consentire al gas intrappolato di fuoriuscire dal materiale di tenuta.

- *Abrasione*, che si trova solo nelle tenute dinamiche soggette a movimento alternativo, oscillante o rotatorio. L'abrasione delle guarnizioni è causata principalmente da una finitura inadeguata della superficie a contatto dinamico con l'O-Ring, da una lubrificazione impropria fornita dal fluido del sistema o da contaminazione di particelle abrasive.

- *Usura*, la forma più comune nel caso di cicli di lavoro alternativi, rotanti e oscillanti. É importante notare che l'attrito è proporzionale alla deformazione, e che la pressione, l'aumento di temperatura e l'usura sono proporzionali all'attrito stesso.

- *Errori nel montaggio.* Molti guasti possono essere ricondotti direttamente alla fase di assemblaggio. Il montaggio deve essere eseguito con molta cura per un corretto funzionamento. Questi tipi di errori possono essere evitati I guasti di assemblaggio possono essere evitati con l'eliminazione di tutti gli spigoli vivi, migliorando la pulizia e con il controllo della dimensione dell'O-ring prima del montaggio.

(a) *O-Ring estruso*

(b) *O-ring ritorto con tagli a spirale in superficie*

(c) *O-Ring danneggiato da decompressione esplosiva*

(d) *L'usura è vista come l'appiattimento dell'O-ring su un lato*

Figura 1.6: Esempi di immagini di O-ring danneggiati. [1]

1.4 Materiali

Un polimero è il risultato di un legame chimico di molecole in una lunga struttura a catena, cioè sono caratterizzati dalla sequenza di più unità ripetitive tramite un processo di polimerizzazione. Il polimero di base di un composto elastomerico è chiamato "gomma", prodotto come gomma naturale oppure in maniera sintetica dall'industria chimica. I moderni materiali elastomerici sono generalmente composti dal 50 al 60% di gomma, mentre la restante parte è costituito da vari riempitivi, agenti vulcanizzanti, acceleranti, ritardanti di invecchiamento e altri

additivi chimici che modificano e migliorano le proprietà in modo da soddisfare i requisiti di una specifica applicazione.
Durante il processo di vulcanizzazione si forma la "reticolazione" tra le catene polimeriche. La reticolazione delle molecole trasforma la gomma da materiale con proprietà plastiche a materiale elastico. Dopo tale processo, il composto elastomerico acquisisce le proprietà fisiche opportune per realizzare una funzione di tenuta. Sebbene il termine "elastomero" sia sinonimo di "gomma", si può considerare come un polimero che può essere modificato in uno stato che mostra uno scarso flusso plastico e un recupero rapido o quasi completo da una forza in estensione e che, al rilascio della sollecitazione, tornerà approssimativamente alla sua forma originale. La definizione presente in letteratura [1] afferma infatti che:

- una parte in elastomero non deve rompersi quando viene allungata di circa il 100%

- Dopo essere stato allungato al 100%, tenuto per 5 minuti e poi rilasciato, deve rientrare entro il 10% della sua lunghezza originale entro 5 minuti dopo il rilascio

Un composto è una miscela di polimero di base e altre sostanze chimiche che formano un materiale in gomma finito. Più precisamente, un composto si riferisce a una miscela specifica di sostanze chimiche adattate a soddisfare particolari caratteristiche per ottimizzare le prestazioni in un richieste specifiche. I termini "composto" ed "elastomero" sono spesso usati in modo intercambiabile in un senso più generale.

Figura 1.7: Elastomero prima e dopo vulcanizzazione - processo di "reticolazione". [1]

[1] American Society for Testing and Materials (ASTM)

1.4.1 Scelta della mescola e del polimero di base

Le proprietà del polimero di base e la durezza del prodotto finito sono i principali fattori che consentono a un determinato composto di resistere al calore e agli agenti chimici.

La temperatura e la compatibilità con il "mezzo", ossia il fluido da bloccare, sono i parametri più importanti che devono essere considerati nella scelta del tipo di polimero di base. Solo quando questi fattori sono noti è possibile fornire una raccomandazione affidabile sulla scelta di un elastomero. Normalmente, è necessario trovare un compromesso tra prodotti di alta qualità e meno costosi.

A temperature elevate si formano infatti nuovi siti di reticolazione tra le catene polimeriche con conseguente perdita di flessibilità, perdendo in questo modo la caratteristica della memoria elastica utile ad un ottimale funzione di tenuta, per cui può essere causa di perdite. Il superamento del normale limite di temperatura massima porta inoltre ad una riduzione della vita utile.

Una reazione chimica tra fluido ed elastomero può portare a cambiamenti strutturali dell'elastomero stesso, ed il grado di questa variazione dipende sia dalla natura chimica del fluido oltre che dalla temperatura del sistema, poiché un mezzo aggressivo diventa più attivo con l'aumento della temperatura. I fenomeni che possono originarsi sono tre: l'elastomero assorbe il fluido, alcuni componenti della mescola vengono disciolti o possono avvenire delle reazioni chimiche tra l'elastomero e il mezzo sigillato. Il risultato è spesso un cambiamento di volume, ed il grado di variazione del volume dipende dal tipo di fluido, dalla struttura molecolare della mescola, dalla temperatura, dalla forma geometrica della tenuta e dalle condizioni di sollecitazione.

Tra gli elastomeri più diffusi per merito delle loro proprietà [4] troviamo:

- *NBR* o gomma nitrile, in cui il contenuto di acrilonitrile varia dal 18% al 50%. Maggiore è il suo contenuto, migliore è la resistenza a olio e carburante. Allo stesso tempo, l'elasticità e la resistenza al compression set sono influenzate negativamente. É caratterizzato da buone proprietà meccaniche rispetto ad altri elastomeri e da un'elevata resistenza all'usura, ma non ha una buona resistenza agli agenti atmosferici e all'ozono.

- *FMK* o elastomero fluorurato ha un'eccellente resistenza alle alte temperature, all'ozono, all'ossigeno, all'olio minerale, ai fluidi idraulici sintetici, ai combustibili, agli aromatici e a molti solventi organici e prodotti chimici. La resistenza alle basse temperature solitamente non è ottimale.

1.5 Comportamento viscoelastico lineare

Una delle caratteristiche principali dei polimeri è quella di mostrare una risposta che combina contemporaneamente le proprietà dei materiali puramente elastici con quelle dei materiali puramente viscosi. Questo comportamento è noto come viscoelasticità. In quest'ultima sezione descritto il comportamento viscoelastico del materiale polimerico. Ci si limita allo studio della viscoelasticità lineare, valida per il campo delle piccole deformazioni, nel quale sono richiesti solo termini lineari all'interno delle equazioni deformazione-spostamento.
I materiali viscoelastici sono interessati da fenomeni quali *creep* e *stress relaxation*. Il *creep* è il processo nel quale la deformazione del materiale sotto un carico prolungato nel tempo aumenta fino ad arrivare ad un limite asintotico. Analogamente, lo *stress relaxation*, noto come "rilassamento degli sforzi" o semplicemente "rilassamento", è il processo per cui il carico richiesto per mantenere una deformazione costante diminuisce nel tempo.
Mentre la legge di Hooke (i.e. **Eq. 1.1**) descrive il comportamento di un solido elastico lineare, la legge di Newton (i.e. **Eq. 1.2**) quello di un liquido viscoso lineare. Combinando queste due leggi si ottiene il comportamento di un solido viscoelastico lineare. La legge di Hooke generalizzata si ricava infatti assumendo che ciascuna delle componenti tensoriali della sollecitazione sia linearmente correlata a tutte le componenti tensoriali della deformazione e viceversa. La legge della viscosità di Newton definisce la viscosità η attraverso la proporzionalità della tensione σ ed il gradiente di velocità nel liquido.

$$\sigma = G\gamma \tag{1.1}$$

$$\sigma = \eta \frac{\partial \gamma}{\partial t} \tag{1.2}$$

Dove:

- G è il modulo di taglio, che è possibile correlare al modulo di Young E attraverso il coefficiente di Poisson ν
- γ è la deformazione

Mentre nella prima equazione la sollecitazione è linearmente correlata alla deformazione, nella seconda la sollecitazione è linearmente correlata alla velocità di deformazione.
Assunto che le deformazioni siano piccole e che ci siano relazioni lineari tra sollecitazione e deformazione, il principio di linearità deve essere esteso a materiali caratterizzati da deformazioni dipendenti dal tempo. Limitandosi alla viscoelasticità lineare è possibile valersi del principio di sovrapposizione di Boltzmann,

che consente di determinare la risposta del sistema andando a considerare che ogni incremento della sollecitazione contribuisca in modo indipendente alla deformazione finale, in modo che la deformazione totale possa essere ottenuta sommando tutti i contributi. Il principio di sovrapposizione di Boltzmann è un punto di partenza per una teoria del comportamento viscoelastico lineare, ed è talvolta chiamato "rappresentazione integrale della viscoelasticità lineare", perché definisce un'equazione integrale.
Un'altra soluzione percorribile altrettanto valida consiste nel mettere in relazione la sollecitazione con la deformazione mediante un'equazione differenziale lineare, che porta a una rappresentazione differenziale della viscoelasticità lineare. Ciò equivale a descrivere il comportamento viscoelastico mediante modelli meccanici costruiti da una molla elastica che si attiene alla legge di Hooke ed uno smorzatore viscoso che segue la legge della viscosità di Newton. I modelli più semplici sono costituiti da un'unica molla e un singolo smorzatore in serie o in parallelo, noti rispettivamente come modello Maxwell e modello Kelvin-Voigt, ed utilizzando questi elementi di base come elementi costitutivi, è possibile sviluppare sistemi più complessi.
Il modello Kelvin-Voigt, in **Figura 1.8**, è composto da una molla di modulo E in parallelo ad uno smorzatore di viscosità η. Questo modello è utilizzato per descrivere il *creep*. Nel caso di applicazione di una sollecitazione costante σ, l'estensione istantanea della molla è ritardata dal smorzatore viscoso. Di conseguenza, la deformazione si verifica a velocità variabile con la sollecitazione ripartita tra i due componenti fino a quando, dopo un tempo dipendente dalla viscosità dello smorzatore stesso, si raggiunge la massima estensione della molla. Nel momento in cui lo stress viene rimosso, si verifica il processo inverso, per cui non è presente una retrazione istantanea. La tensione totale σ è quindi ripartita tra molla e smorzatore: $\sigma = \sigma_1 + \sigma_2$, mentre la deformazione in ogni componente è la stessa e coincide con quella totale: $\gamma = \gamma_1 = \gamma_2$.

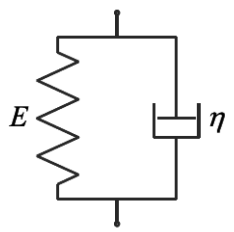


Figura 1.8: Modello di Kelvin-Voigt. [5]

Il modello Maxwell è costituito da una molla e da uno smorzatore in serie, come mostrato nella **Figura 1.9**. La risposta del sistema differisce rispetto a quella del modello precedente a causa della diversa disposizione dei componenti, per cui questa configurazione è utilizzata nella descrizione del rilassamento viscoelastico. Poiché la sollecitazione della molla e dello smorzatore è identica, la tensione totale $\sigma = \sigma_1 = \sigma_2$ mentre la deformazione totale è data dalla somma della deformazione della molla e dello smorzatore, ovvero $\gamma = \gamma_1 + \gamma_2$.

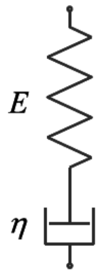


Figura 1.9: Modello di Maxwell. [5]

Per ottenere una rappresentazione del comportamento viscoelastico lineare reale è utilizzato il modello conosciuto come "Modello di Maxwell generalizzato", mostrato in **Figura 1.10**.

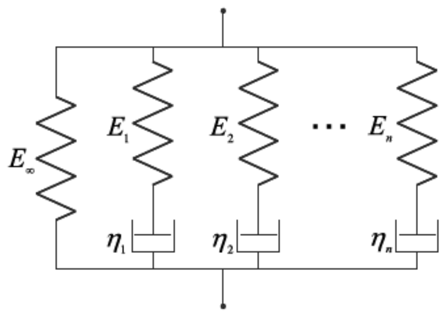


Figura 1.10: Modello di Maxwell generalizzato. [5]

1.5.1 Studi sperimentali sul comportamento viscoelastico lineare in funzione di frequenza e temperatura: equivalenza tempo-temperatura

Un strumento semplice per ridurre il livello di vibrazioni di un rotore è quello di inserire un anello in gomma che supporta l'anello esterno di un cuscinetto, come mostrato in **Figura 1.11**, in modo da ottenere un migliore smorzamento del sistema. La dinamica del rotore è difficile da prevedere quando si utilizzano dispositivi di smorzamento in elastomero a causa delle non linearità dei parametri del materiale, per cui è necessario creare delle *master curves* che possono essere trasformate nei classici parametri di rigidezza e smorzamento generalmente utilizzati nello studio della dinamica del rotore.

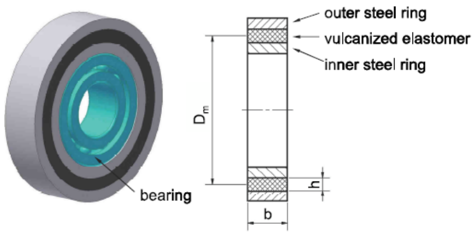


Figura 1.11: Design anello elastomerico. [5]

Per ottenere un'adeguata determinazione del comportamento viscoelastico dei polimeri, sono necessari dati su un ampio range di frequenze e temperature. Il numero di esperimenti richiesti può talvolta essere ridotto utilizzando l'equivalenza l'equivalenza tempo-temperatura. La dipendenza dalla temperatura delle proprietà del polimero è di fondamentale importanza perché questo materiale mostra cambiamenti molto grandi nelle proprietà al variare della temperatura. L'equivalenza tempo-temperatura definisce una correlazione del comportamento viscoelastico tra due temperature differenti attraverso un cambiamento nella scala temporale o nella scala di frequenza. Se si prendono in considerazione i diagrammi doppio-logaritmici della *creep compliance* J, o "cedevolezza a creep", in funzione del tempo mostrati nella **Figura 1.12a**, le cedevolezze alle temperature T_1 e T_2 possono essere sovrapposte esattamente da uno spostamento orizzontale pari a $\log \alpha_T$, dove α_T è chiamato *shift factor*, o "fattore di spostamento". Allo stesso modo in **Figura 1.12b** sono mostrati i grafici di $\tan \delta$ rispetto alla frequenza mostrano uno spostamento equivalente con la temperatura, definendo con $\tan \delta = G_2/G_1$, dove i fattori *storage modulus* G_1 e *loss modulus* G_2 determinano il *stress relaxation modulus* G^*.
La procedura sperimentale è illustrata nelle **Figure 1.13 e 1.14**. Viene tracciata una serie di curve di cedevolezza a creep nell'arco di un tempo stabilito. I singoli grafici vengono quindi trasposti lungo l'asse del tempo logaritmico fino a coincidere, utilizzando come valore di riferimento qualsiasi temperatura richiesta all'interno dell'intervallo sperimentale. Il modo più semplice per applicare l'equivalenza tempo-temperatura è quindi di realizzare una *master curve*, o semplicemente "curva principale", scegliendo una particolare temperatura e applicando solo uno spostamento orizzontale su una scala temporale logaritmica per fare in modo

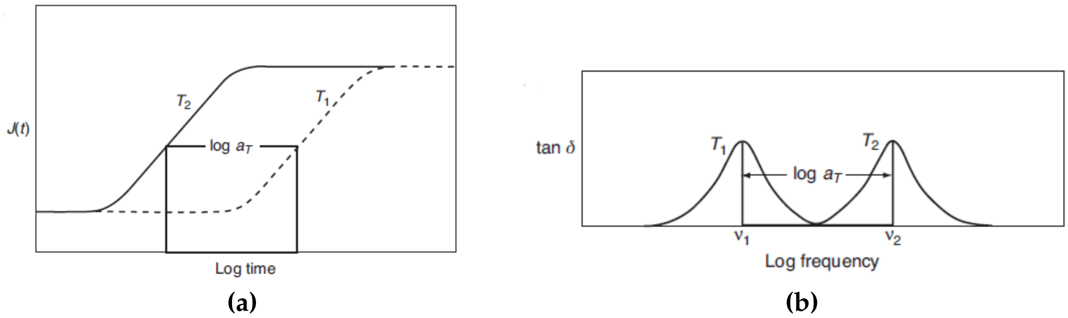


Figura 1.12: Diagrammi schematici che illustrano la forma più semplice di equivalenza tempo-temperatura per (a) la cedevolezza $J(t)$, e (b) fattore di perdita $\tan\delta$. [6]

che le curve per le altre temperature si uniscano il più uniformemente possibile alla curva della temperatura prestabilita.

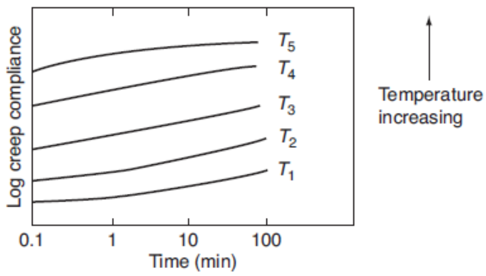


Figura 1.13: Plot del *creep* alle varie temperature. [6]

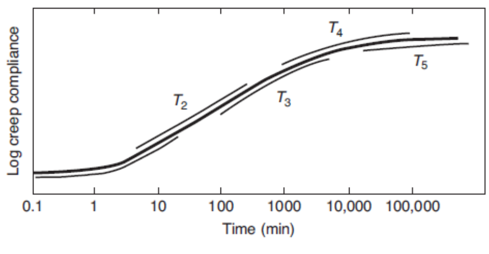


Figura 1.14: *Master curve* ottenuto dai plot sovrapposti della Figura 1.13. [6]

Lo studio di Liebich[5] presenta un'analisi che consente un processo di spostamento ottimizzato al fine di ottenere *master curves* adatte per ciascun materiale elastomerico. La procedura di spostamento e la curva master risultante in questo caso è relativa al modulo complesso $E^* = E_1 + jE_2$. Nel diagramma doppio logaritmico della componente conservativa E_1 rispetto alla frequenza, lo spostamento orizzontale risulta essere pari a:

$$\log f_2(E_{ref}, T_2) = \log f_1(E_{ref}, T_1) + \log \alpha_T(\Delta T) \tag{1.3}$$

Dove T_1 e T_2 sono due temperatura di misura utilizzate. Il valore di α_T è valido anche per la componente dissipativa E_2. Nel caso in cui, ottenuti i fattori di spostamento e la curva principale, si utilizzino i dati relativi a E_1 per ottenere la curva principale del fattore di perdita $\eta = E_2/E_1$, si verificherebbero discrepanze tra i dati misurati e le curve master. É possibile ottenere l'errore complessivo andando a confrontare entrambe le curve master per ogni temperatura di misurazione e sommando gli errori al quadrato per ogni temperatura e frequenza misurata.
L'idea del metodo sviluppato è di ottimizzare i fattori di spostamento al fine di ridurre l'errore complessivo, prendendo in considerazione sia i dati della componente conservativa che i dati del fattore di perdita, e si basa su tre operazioni: mutazione, ricombinazione e selezione, al fine di evolvere iterativamente soluzioni sempre migliori. Il confronto della mancata corrispondenza, indicata come *matching failure*, mostra come processo di spostamento manuale porta a piccoli errori per quanto riguarda la componente conservativa ma imprecisioni elevate per quanto riguarda il fattore di perdita, mentre il processo di ottimizzazione proposto riesce a trovare il compromesso ideale tra il modulo di conservazione e lo spostamento del fattore di perdita. I risultati sono mostrati in **Figura 1.15**.

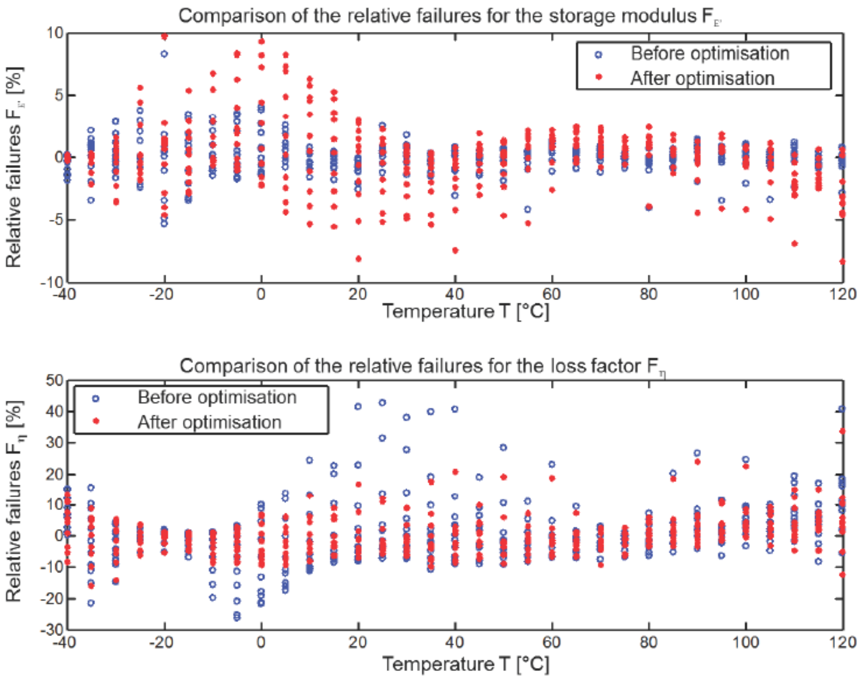


Figura 1.15: Errore relativo per parametri del materiale HNBR-60. [5]

Capitolo 2

Caratterizzazione dinamica degli O-Ring

Gli O-Ring possono essere impiegati con la funzione di fornire uno smorzamento esterno nel caso di macchine rotanti, ovvero caratterizzate dalla presenza al loro interno di componenti rotanti. Questa classificazione di macchinari include un'ampia gamma di dimensioni. Si spazia dalle macchine rotanti di piccole dimensioni si hanno motori elettrici per elettrodomestici e turbocompressori, fino ad arrivare grandi compressori industriali e apparecchiature per la trasmissione di potenza. Le vibrazioni nelle macchine rotanti possono portare a seri problemi di inquinamento acustico, sicurezza e spese operative. Il monitoraggio delle vibrazioni e la soppressione di queste ultime ha portato lo sviluppo di smorzatori esterni, tra i quali trovano spazio gli anelli in materiale elastometrico, necessari quindi ad assicurare un funzionamento ottimale del macchinario.

L'impiego di uno smorzatore esterno come supporto di cuscinetti a gas ad elevata velocità è un sistema efficace di stabilizzazione nel caso di sistemi ad elevata velocità supportati cuscinetti ad aria, i quali possono essere caratterizzati da due tipi di instabilità dinamica: *anynchronous rotor whirl* e *pneumatic hammering*. Ne deriva quindi la necessità di uno smorzamento per migliorare la stabilità del sistema rotore-cuscinetto, con lo scopo di aumentarne il campo di velocità di funzionamento. La presenza di una boccola flottante come supporto flessibile permette di compensare eventuali errori dovuti al montaggio o alle lavorazioni meccaniche. Una soluzione più diffusa è l'utilizzo di O-Ring in gomma, i cui valori di rigidezza e smorzamento sono dipendenti dalla frequenza di perturbazione.

La caratterizzazione sperimentale degli O-ring consente di stimare la rigidezza dinamica e le proprietà di smorzamento al variare delle condizioni imposte, quali temperatura, *Squeeze* δ, *Stretch* ε. Il parametro *Squeeze* è definito dalla relazione:

$$\delta = (1 - \frac{D_e - D_i}{2\Phi}) \cdot 100 \tag{2.1}$$

Dove:

- D_i è il diametro esterno dell'albero;
- D_e è il diametro esterno, ovvero l'alloggiamento;
- Φ è il diametro di corda dell'O-Ring.

e rappresenta la misura dello schiacciamento della corda dell'anello. Lo *stretch* definisce la misura della deformazione circonferenziale dell'O-Ring dovuta al montaggio dell'O-Ring sull'albero. Tale parametro è calcolato come:

$$\varepsilon = \frac{D_i - D}{D} \tag{2.2}$$

Dove il parametro D è il valore del diametro nominale dell'O-Ring.

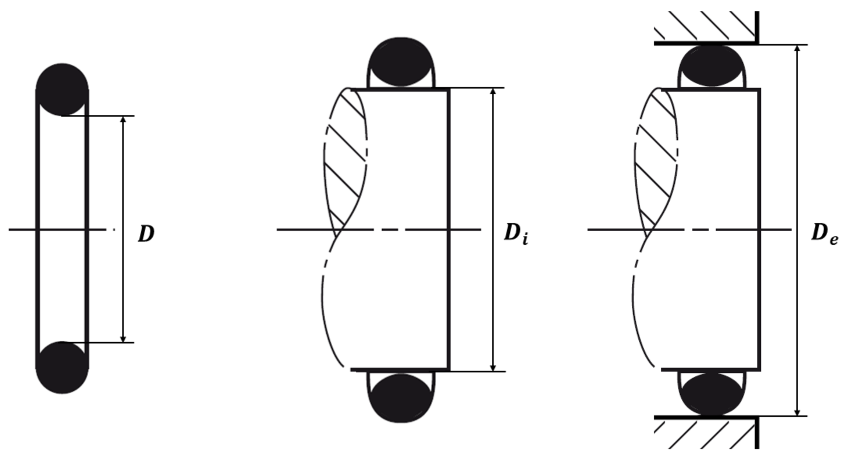
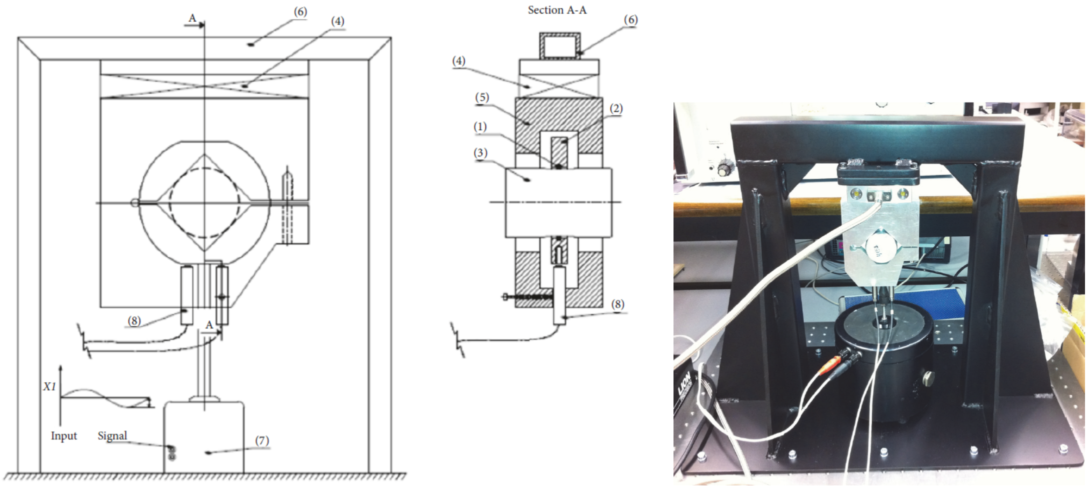


Figura 2.1: Rappresentazione schematica di: O-Ring indeformato, a sinistra; O-Ring montato sull'albero (*stretched*), al centro; O-Ring montato sull'albero e schiacciato, a destra

In letteratura si possono trovare due metodi di prova per misurare le proprietà degli O-ring: il metodo diretto, affrontato nella **Sezione 2.1** e il metodo indiretto, conosciuto anche come "metodo della massa risonante", nella **Sezione 2.2**. In questo capitolo vengono illustrate le procedure e vengono presentati risultati ottenuti delle misurazioni.

2.1 Metodo diretto

Il metodo diretto consiste nella misura diretta della forza esercitata sull'O-Ring e il corrispondente schiacciamento. Il banco di prova [7] utilizzato per la caratterizzazione dinamica tramite il metodo diretto viene mostrato in **Figura 2.2**. L'O-Ring (1) è compresso tra una boccola (2), collegata allo stinger dello shaker (7), e l'albero (3) fissato al supporto (5). É presente inoltre una cella di carico (4), posta tra il supporto e l'intelaiatura fissa (6). Tramite lo shaker si impone uno spostamento che viene rilevato dai sensori (8). I segnali provenienti dalla cella di carico e dai trasduttori di spostamento vengono inviati ed elaborati dal sistema di acquisizione.



(a) **(b)**

Figura 2.2: (a) Setup banco di prova e (b) foto del setup. [7]

É stata adottata un'ampiezza di deformazione dinamica degli O-ring molto piccola (2,5 μm), ovvero deformazioni molto piccole rispetto alle dimensioni dell'O-Ring stesso, in modo tale che si possa assumere un comportamento lineare senza che siano presenti effetti dovuti alla non-linearità. Il range di valori di *squeeze* utilizzato va dal 5% al 20%.
Le prove [7] sono state eseguite a temperatura costante di 20°C. Per quanto concerne la tipologia di O-Ring testati, si è optato per delle mescole resistenti alle alte temperature: Kalrez 4079 e Kalrez 6375, di durezza Shore 75 , e un elastomero fluoropolimerico Viton, di durezza Shore di 75 e 90. Ogni O-ring è stato testato a differenti frequenze imponendo uno schiacciamento x di tipo sinusoidale in ingresso e misurando in uscita la forza trasmessa F. Poiché il sistema è caratterizzato da una tecnica di controllo è in anello aperto, per ciascuna

frequenza l'ampiezza del moto dell'agitatore è stata regolata fino a quando i trasduttori di posizione non mostravano il valore richiesto. Sulla base delle funzioni temporali $x(t)$ e $F(t)$ acquisite a più frequenze sono state ottenute le funzioni di trasferimento sperimentali $F(s)/x(s)$. Con l'ausilio del modello di Kelvin Voigt[1] per la descrizione del comportamento viscoelastico lineare, la funzione di trasferimento può essere definita come:

$$\frac{F(s)}{x(s)} = k + cs \tag{2.3}$$

I valori di rigidezza k e di smorzamento c sono stati calcolati attraverso le seguenti equazioni [7]:

$$k(\omega) = Re[\frac{F(j\omega)}{x(j\omega)}] \tag{2.4}$$

$$c(\omega) = \frac{1}{\omega} Im[\frac{F(j\omega)}{x(j\omega)}] \tag{2.5}$$

Per ottimizzare lo studio e trovare una funzione che si avvicinasse il più possibile alla rappresentazione dei dati sperimentali, è stata eseguita una procedura di fitting dei dati stessi attraverso il metodo dei minimi quadrati. Seguendo questo procedimento le espressioni di rigidezza e smorzamento possono essere definite in forma esponenziale (nelle quali la pulsazione è espressa in rad/s:

$$k = A\omega^{\alpha} \tag{2.6}$$

$$c = B\omega^{\beta} \tag{2.7}$$

I seguenti grafici mostrano i risultati ottenuti dei coefficienti di rigidezza e smorzamento ottenuti sperimentalmente nel caso di O-Ring Viton 75. La **Figura 2.3** mostra l'effetto dello squeeze δ sul coefficiente di rigidezza k e sul coefficiente di smorzamento c su O-Ring Viton 75 di diametro interno $d = 11$ mm e diametro di corda $\Phi = 1{,}78$ mm. Si può notare che la rigidezza aumenta con la frequenza e con il livello di compressione, mentre lo smorzamento diminuisce con la frequenza e aumenta con il livello di compressione, entrambi con un andamento approssimativamente lineare.

L'effetto della geometria sul coefficiente di rigidezza k e sul coefficiente di smorzamento c viene mostrato in **Figura 2.4**, nel quale viene utilizzato livello medio di δ pari al 15%. Rigidezza k e smorzamento c crescono sia con l'aumento del diametro interno d che con il diametro di corda Φ, benché l'influenza di Φ sia quasi trascurabile quando d aumenta notevolmente.

[1]Per la descrizione del modello vedere **Pagina 12**

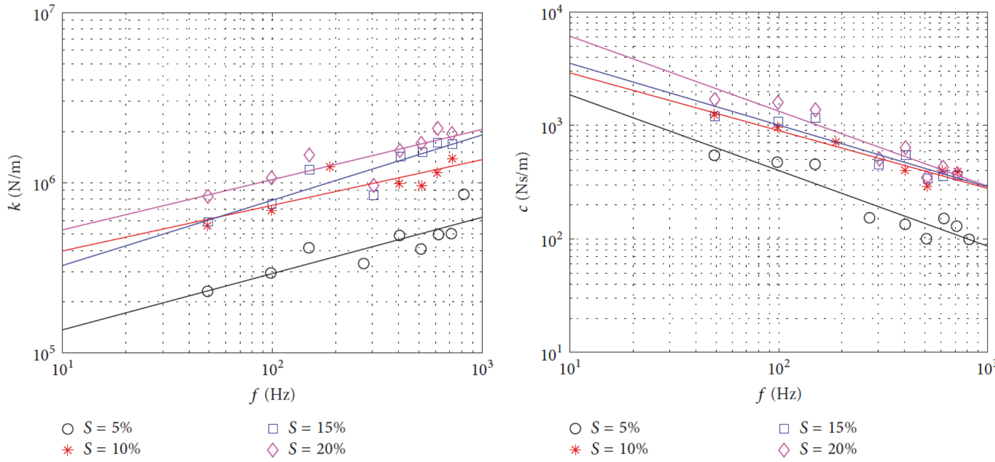


Figura 2.3: Effetto di δ sulla rigidezza k (a) e sullo smorzamento c (b). Viton 75, $d = 11$ mm, $\Phi = 1.78$ mm. [7]

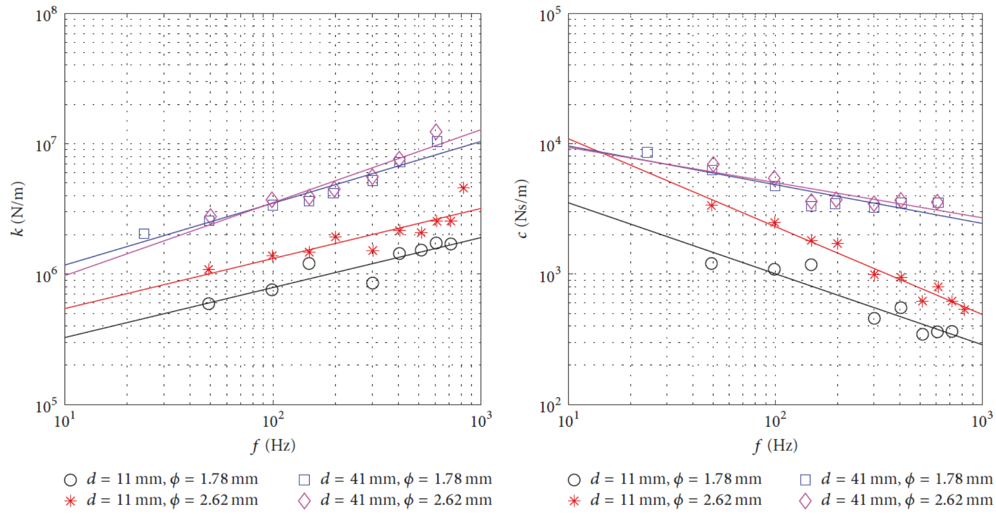


Figura 2.4: Effetto della dimensione sulla rigidezza k (a) e sullo smorzamento c (b). Viton 75, $\delta = 15\%$. [7]

La relazione tra lo squeeze δ e i coefficienti di rigidezza e smorzamento risulta essere approssimativamente lineare, e ciò viene mostrato in **Figura 2.5**, nella quale i coefficienti sono ottenuti alla frequenza di 200 Hz.
Per quanto concerne invece la correlazione di k e c con la geometria, ossia gli effetti del diametro interno d e del diametro di corda Φ, è stato valutato un

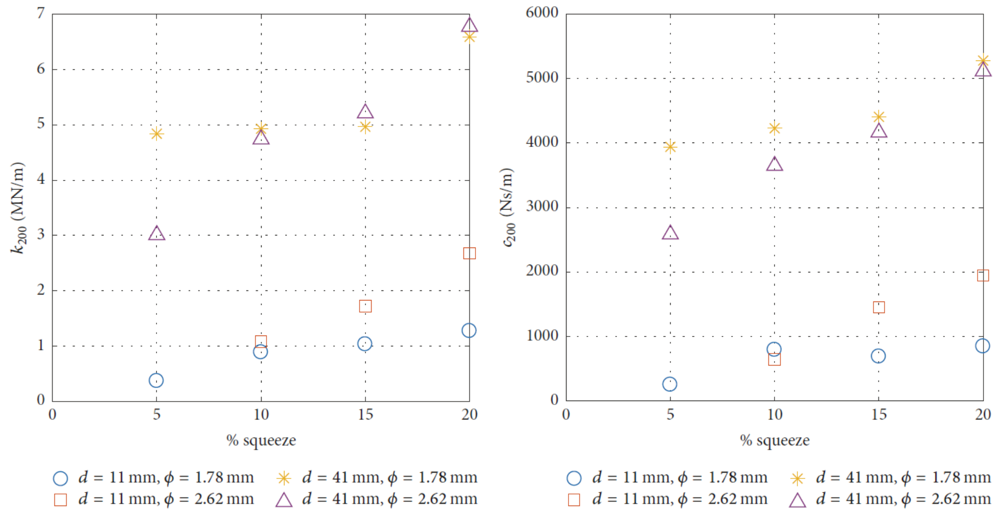


Figura 2.5: Effetto di δ su k_{200} e su c_{200}. [7]

metodo per identificare tali proprietà indipendentemente dalla dimensione degli O-Ring. I valori di rigidezza e smorzamento possono essere valutati utilizzando i coefficienti ottenuti come:

$$\begin{aligned} \bar{k}_{200} &= \frac{k_{200}}{d \cdot \Phi} \\ \bar{c}_{200} &= \frac{c_{200}}{d \cdot \Phi} \end{aligned} \tag{2.8}$$

dove i valori k_{200}, c_{200} sono calcolati in funzione di una frequenza pari a 200 Hz. In questo modo, a prescindere dalla geometria, è possibile ottenere:

$$\begin{aligned} \bar{k}_{200} &= A + B \cdot \delta \\ \bar{c}_{200} &= C + D \cdot \delta \end{aligned} \tag{2.9}$$

É stato sfruttato il metodo di interpolazione ai minimi quadrati per adattare le tendenze lineari ai dati sperimentali e trovare i coefficienti per l'identificazione di $\bar{k}_{200}$ e $\bar{c}_{200}$. I risultati ottenuti sono mostrati in **Figura 2.6**.

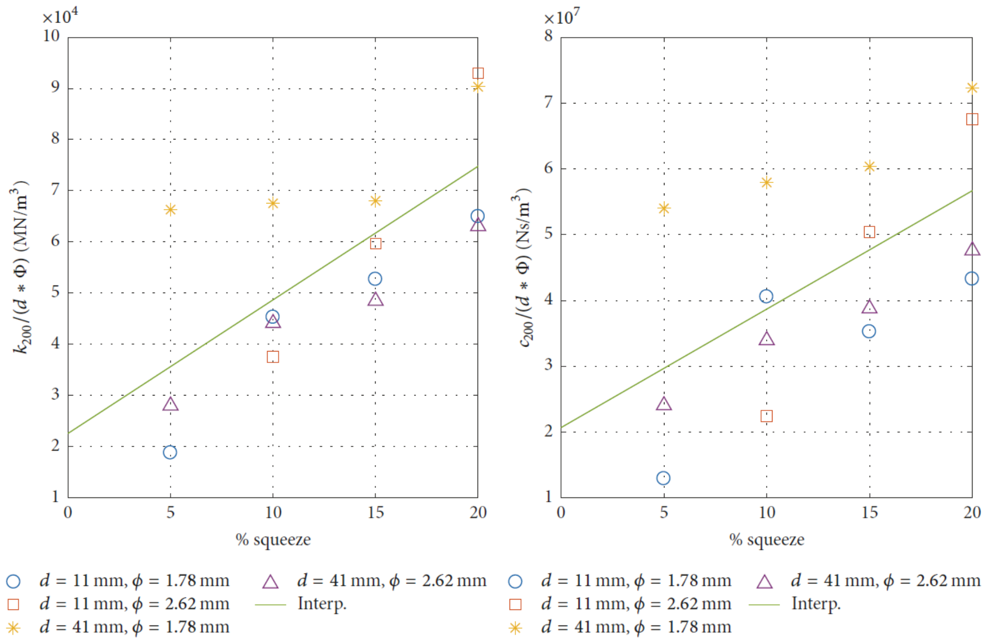
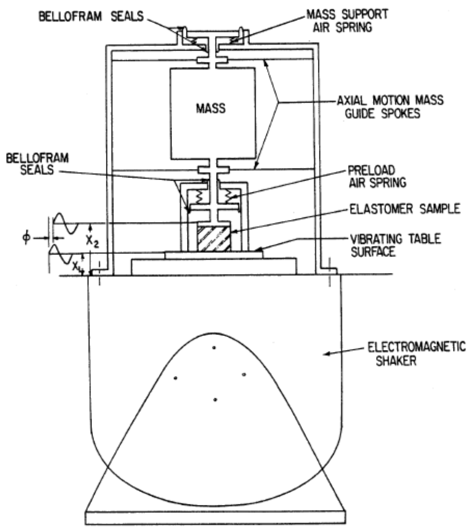


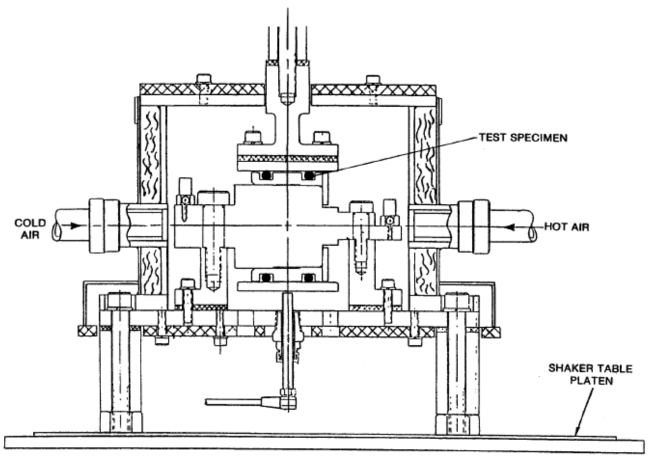
Figura 2.6: Effetto della dimensione su k_{200} e su c_{200}. [7]

2.2 Metodo indiretto

Una metodologia alternativa a quella approfondita nella sezione precedente è il metodo a massa risonante, noto anche con l'acronimo *BERM* (*base excitation resonant mass*). I semplici requisiti di misurazione del metodo di prova della massa risonante sono ciò che lo contraddistinguono. É sufficiente infatti ottenere le acquisizioni degli spostamenti, la misurazione dell'angolo di fase tra le misurazioni del movimento e la frequenza di vibrazione.



(a)



(b)

Figura 2.7: (a) Design banco di prova BERM. (b) Banco prova per test O-Ring. [8]

La **Figura 2.7 (a)** mostra uno schema del banco prova di base, utilizzato per test su materiale elastomerico. Il banco impiega un sistema a massa vibrante unidirezionale. Per il bilanciamento del sistema nel caso di utilizzo di masse di grandi dimensioni, sono presenti delle piastre di supporto caratterizzate da una buona rigidezza e un piccolo valore di smorzamento. Per le prove ad a bassa frequenza, in cui è richiesta una massa maggiore rispetto a quelle ad elevata frequenza, questa viene fornita fissando rigidamente un'asta e aggiungendo dei pesi nella sommità. Lo stelo riceve un sostegno radiale da due cuscinetti di guida. Il precarico è controllato da una coppia di cilindri pneumatici disposti direttamente sopra il provino. A partire dal banco di prova BERM, è possibile configurare il test per la caratterizzazione degli O-Ring, come mostrato in **Figura 2.7 (b)**. Il test prevede la misurazione dello spostamento della piastra di supporto e della massa risonante, la misura dell'angolo di fase tra queste misurazioni di spostamento, le misurazioni dello spostamento tra due piastre di supporto per assicurare l'effettiva ampiezza richiesta delle deformazione dell'elastomero e la frequenza di vibrazione.

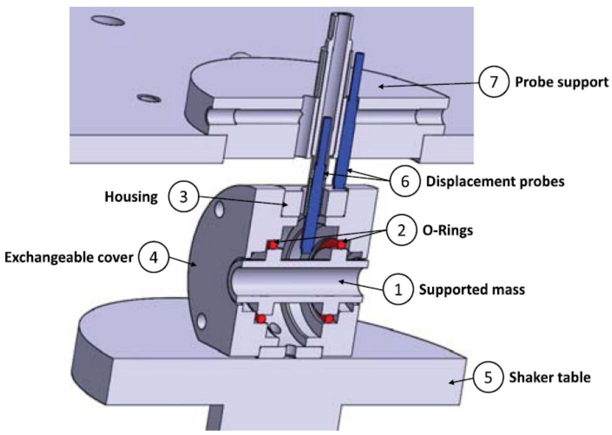
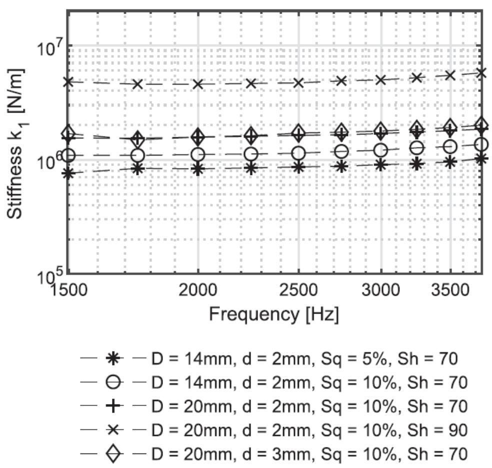


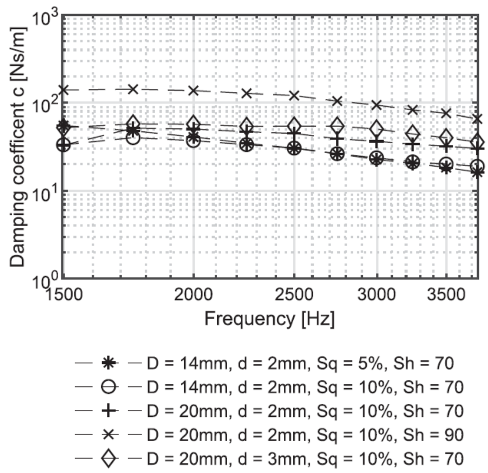
Figura 2.8: Diagramma schematico configurazione BERM. [9]

Una descrizione di un tipico banco di prova BERM, inclusa la strumentazione associata e le procedure di prova, è presente in letteratura [8] in modo sufficientemente dettagliato da essere utilizzata come guida nell'esecuzione di prove simili. Tra queste, viene mostrato in **Figura 2.8** la configurazione adottata da Schiffmann e Bättig [9]. In questo caso, una massa non rotante (1) è supportata su una coppia di O-Ring (2), tenuti in posizione in un alloggiamento (3) mediante chiusure intercambiabili (4) mentre l'housing è montato su uno shaker (5). La misurazione degli spostamenti dell'alloggiamento e della massa supportata mediante sonde di spostamento capacitivo (6) consente la determinazione della rigidezza e dei coefficienti di smorzamento. Dalla letteratura [9] si evince come

dati di misurazione accurati per rigidezza e smorzamento sono ottenuti in un intervallo di frequenza in cui la differenza dell'angolo di fase tra l'alloggiamento e la massa supportata è compresa tra 15 e 165 gradi. Come verrà mostrato nella **Sezione 3.3**, questo range dipende dall'accuratezza degli strumenti di prova utilizzati.
Di seguito vengono mostrati i risultati ottenuti da Schiffmann, dove sono stati utilizzati differenti valori di *squeeze* δ (5%, 10% e 20%), mentre il valore di *stretch* è stato mantenuto costante. É stato eseguito il calcolo della rigidezza e dello smorzamento per un modello unidimensionale attraverso i valori della massa supportata, della frequenza di eccitazione angolare e del rapporto di ampiezza della massa supportata e dell'alloggiamento. I principali effetti su k e c sono stati determinati utilizzando un metodo che consentisse di adattare un modello lineare con interazioni in modo da ottenere informazioni sulle variabili che influenzano i valori di rigidezza e di smorzamento.
I risultati di rigidezza e smorzamento ottenuti sono mostrati in **Figura 2.9** e sono presentati in scala doppio logaritmica in funzione della frequenza, dove viene indicato con D il diametro interno dell'O-Ring e con il parametro d il diametro di corda dello stesso.



(a)



(b)

Figura 2.9: (a) Rigidezza k e (b) Smorzamento c in funzione della frequenza di eccitazione. NBR, Shore 70 e Shore 90. [9]

La rigidezza degli O-Ring Shore 90 risulta essere approssimativamente tre volte superiore rispetto a quella degli O-Ring Shore 70, ed aumenta linearmente con la frequenza in scala logaritmica. Si può affermare che k aumenta all'aumentare del parametro *squeeze* δ e all'aumentare del diametro dell'O-Ring D, mentre il diametro della sezione trasversale d ha un piccolo effetto sulla rigidezza e non mostra tendenze chiare. I coefficienti di smorzamento medi per l'O-Ring 70 Shore risultano avere un valore raddoppiato rispetto a quelli con durezza Shore 90. Contrariamente alla rigidezza, lo smorzamento diminuisce linearmente con la frequenza.

Ulteriori tipologie di banco prova BERM sono state utilizzate negli anni per la determinazione delle caratteristiche dinamiche degli O-Ring in gomma nitrilica (NBR). Uno di questi modelli è quello in **Figura 2.10**, utilizzato per determinare il coefficiente di rigidezza e quello di smorzamento. Tale studio [10] si concentra poi sull'incomprimibilità dei materiali in gomma, andando a misurare la viscoelasticità degli O-ring per alte frequenze. Per determinare la viscoelasticità è stato utilizzato un metodo di test noto come *PBERM (paired base excitation resonant mass)* che consentisse di ottenere in modo diretto la viscoelasticità ad alta frequenza, prendendo in considerazione la dipendenza della frequenza e della pressione idrostatica dalla viscoelasticità.

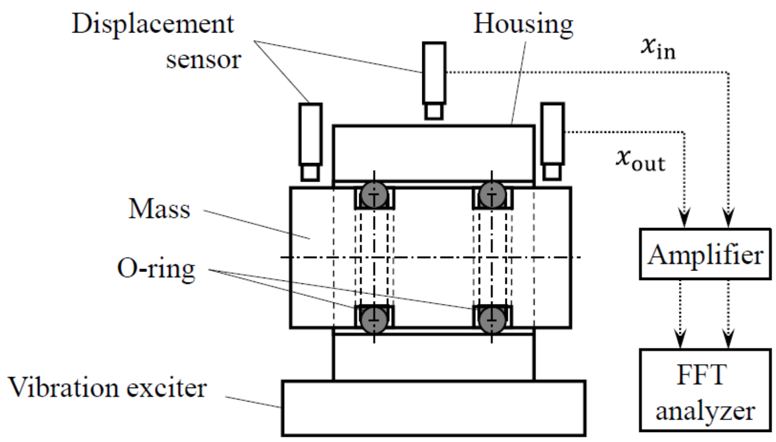


Figura 2.10: Banco prova BERM. [10]

Il banco prova mostra i due O-ring inseriti in scanalature circonferenziali ricavate sulla superficie dell'albero, che possono spostarsi contro l'alloggiamento a causa della deformazione degli O-ring stessi. A seguito della vibrazione sinusoidale di un eccitatore sul quale è fissato l'intero housing, sono confrontati gli spostamenti dell'alloggiamento e della massa, la quale può spostarsi rispetto all'alloggiamento a causa della deformazione degli O-Ring. Un analizzatore di spettro (*FFT Analyzer*) determina il rapporto di ampiezza la differenza di fase tra i segnali.

Vengono riportati in **Figura 2.11** in modo riepilogativo i risultati ottenuti[2] con il banco di prova a massa risonante.

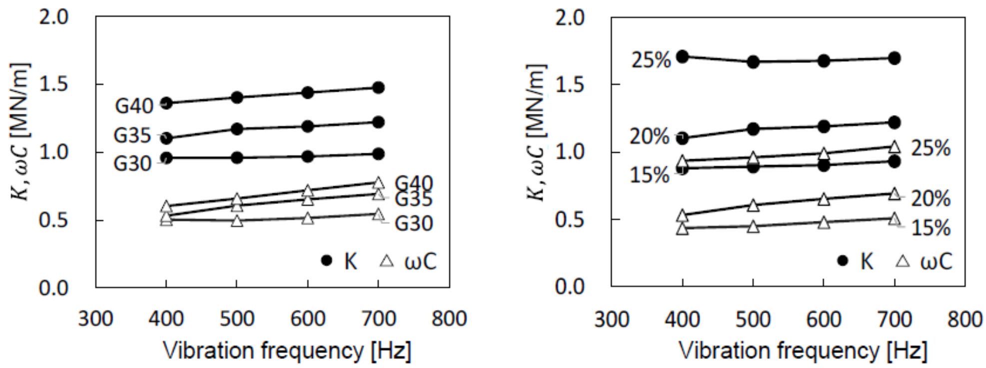
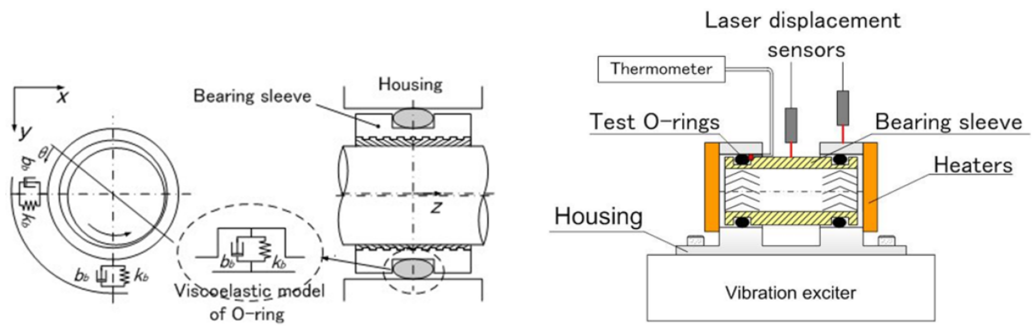


Figura 2.11: Rigidezza k e Smorzamento ωc valutati: (a) per le tre dimensioni dell'O-ring sotto la stessa compressione (20%). (b) per le tre compressioni per gli stessi O-ring (G35). [10]

[2] I valori di rigidezza e smorzamento sono calcolati a partire dalla valutazione della rigidezza complessa: $K^* = K + i$

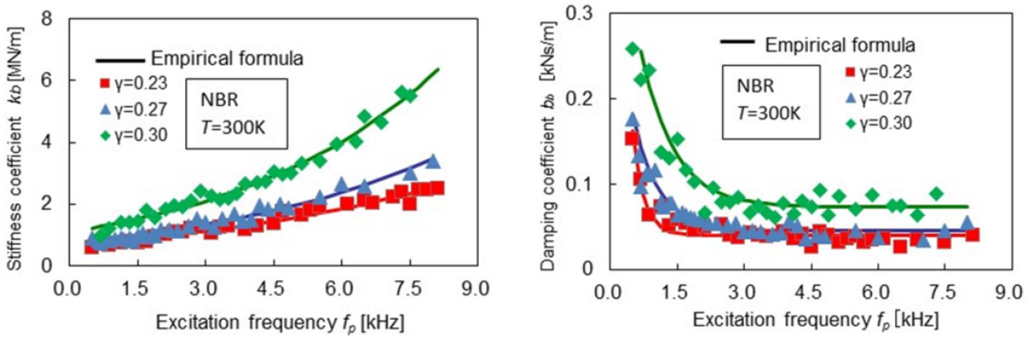
É utile anche riportare un esempio di banco prova che si contraddistingue per una configurazione differente rispetto a quelle appena descritte. La ricerca [11] si focalizza sugli effetti delle proprietà dinamiche degli O-ring di supporto sulla stabilità di cuscinetti herringbone-grooved Journal Bearings.
La **Figura 2.12a** mostra il sistema di cuscinetti in esame in questo studio. Dall'immagine si può notare come la viscoelasticità degli O-ring in gomma è espressa dal modello Voight, a cui si rimanda alla nota presente nella **Sezione 2.1 a pagina 22**. Nella stessa figura è rappresentato il banco prova per i test sperimentali utili a trovare i valori di rigidezza e smorzamento.



(a) **(b)**

Figura 2.12: (a) Herringbone-grooved journal bearings e O-Ring. (b) Banco prova del test. [11]

Gli O-ring di prova sono realizzati in gomma nitrilica, gomma stirene e gomma siliconica. La **Figura 2.13** mostra i risultati della valutazione dei coefficienti di rigidezza e smorzamento, rispettivamente, per i rapporti di δ pari a 0,23, 0,27 e 0,30, nei quali sono stati utilizzati gli O-ring in gomma nitrilica ed una temperatura di circa 300 K.
I coefficienti di rigidezza e smorzamento aumentavano con il rapporto di deformazione. All'aumentare della frequenza di eccitazione, il coefficiente di rigidezza è cresce mentre il coefficiente di smorzamento ha l'effetto opposto.



(a) **(b)**

Figura 2.13: Effetto di δ su: (a) Rigidezza k e (b) Smorzamento c. [11]

Infine è riportato il banco prova che rappresenta il punto di partenza del corrente lavoro di tesi, presente presso i laboratori del dipartimento di ingegneria meccanica ed aerospaziale (DIMEAS) del Politecnico di Torino.

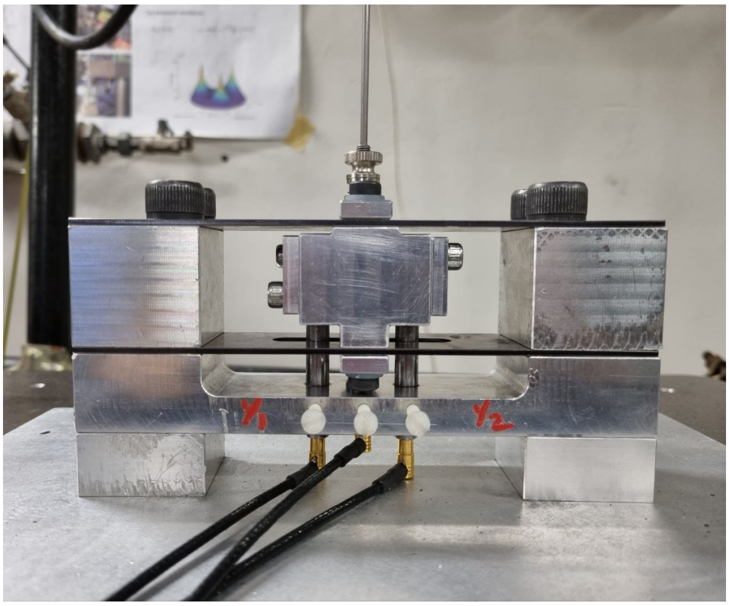


Figura 2.14: Foto del setup del precedente banco prova.

Avendo a disposizione i risultati ottenuti in precedenza con una diversa configurazione del banco prova, nei capitoli successivi è stato possibile confrontare tali valori con quelli ricavati dal nuovo modello. Come verrà trattato più avanti, in questo lavoro verrà utilizzata una sola lamina di smorzamento.

Capitolo 3

Attività sperimentale

3.1 Banco prova

L'intera catena di misura ha lo scopo di generare un segnale con caratteristiche scelte dall'utente, misurare la risposta del sistema e dunque raccogliere informazioni al fine di monitorare, memorizzare ed eventualmente elaborare il segnale elettrico in uscita. La finalità dell'attività è quella di effettuare una caratterizzazione dinamica delle proprietà degli O-Ring. L'obiettivo della catena di misura è il rilevamento degli spostamenti dell'albero e del suo alloggiamento ed il controllo e acquisizione di tali segnali. La catena di misura è costituita da un sistema di acquisizione, definito con l'acronimo *DAQ* (Data Acquisition System), ossia una struttura che raccoglie ed elabora informazioni e composta da sensori, scheda di acquisizione ed elaboratore.

3.1.1 Descrizione funzionale del banco

Input

La struttura sotto test è direttamente collegata allo shaker (Modal Exciter Type 4824) mediante l'avvitamento dello stinger sull'elemento "cover cap", con l'ausilio di un elemento antisvitamento per evitare l'allentarsi del collegamento. Il cover cap è serrato dalla parte opposta alla cella di carico. Lo stinger è una barra filettata in acciaio la cui geometria fornisce un'elevata rigidezza assiale e contemporaneamente essere abbastanza flessibile a taglio e a momento, in modo da poter eccitare la struttura nel punto e nella direzione voluta. Lo scopo principale dello stinger è quello di disaccoppiare dinamicamente lo shaker dalla struttura di prova, e la sua corretta collocazione dello stinger è di notevole importanza, in quanto il disallineamento può causare la distorsione della risposta

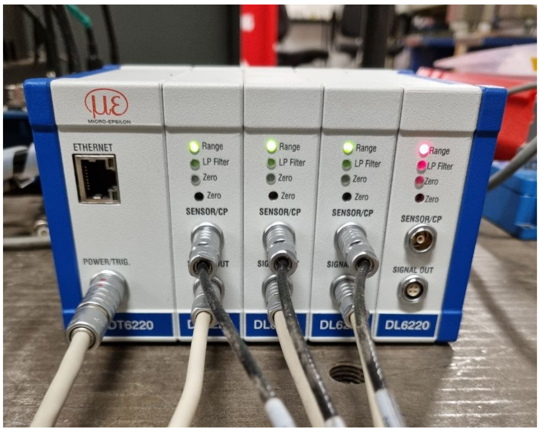
in frequenza. É necessario quindi prestare attenzione per garantire che l'allineamento sia corretto: qualsiasi resistenza della filettatura nella fase di avvitamento o svitamento è una chiara indicazione che l'allineamento non è corretto e che potrebbero esistere disallineamenti.
Lo shaker è comandato da un amplificatore (Power Amplifier Type 2732), che ha lo scopo di fornire all'eccitatore una corrente proporzionale alla forza che si vuole impartire. Il collegamento avviene tramite il connettore Neutrik SpeakON Lockable che sfrutta un sistema di bloccaggio con tecnologia "quick lock". L'amplificatore deve essere infine collegato con il generatore di segnale (SFG-2104), entrambi mostrati in **Figura 3.1**, tramite il quale si inserisce manualmente tramite tastierino la frequenza del segnale in ingresso. Il banco premette anche la generazione di un segnale sweep. In questo caso l'amplificatore viene connesso alla morsettiera (BNC-2120) tramite il connettore BNC per l'ingresso di tipo analogico nella posizione AI 1, con i pulsanti situati sotto i connettori BNC nella posizione dell'interruttore di sorgenti fluttuanti (FS). Un connettore a 68 pin collega la morsettiera alla piattaforma di strumentazione modulare PXI (PXIe-1071). La comunicazione tra il PXI e il PC avviene il cablaggio fisico della connessione Ethernet, per cui entrambi i dispositivi devono connessi all'interno di una rete locale.
Il PC deve essere inoltre collegato all'amplificatore Kistler (Charge Amplifier Type 5073A) nell'attacco RS-232C. Per la gestione della cella di carico nel PC è presente il programma "ManuWare" fornito direttamente con l'amplificatore. Per la generazione del segnale, Per la generazione del segnale Sweep viene utilizzato il programma Labview, sviluppato dalla National Instruments, che fornisce un ambiente di programmazione di tipo grafico ad oggetti, noto come Linguaggio-G (Graphic Language). Il software è costituito principalmente da due finestre: il *Front Panel* che rappresenta l'interfaccia utente, e il *Block Diagram*, dove avviene l'implementazione dei processi da eseguire tramite la logica dei diagrammi a blocchi.

Output

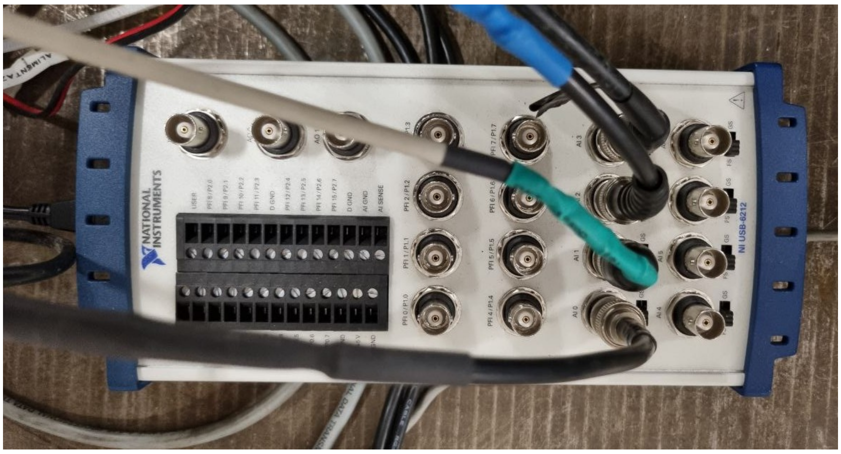
I sensori di spostamento capacitivi, fissati tramite l'utilizzo dei grani alla mensola, sono collegati tramite cavi negli ingressi superiori del sistema di misura multicanale modulare (capaNCDT 6200 Micro-Epsilon), sistema di misura che comprende un'unità di controllo e un demodulatore per ciascun sensore. Gli ingressi inferiori di ogni sensore vengono connessi con un dispositivo di acquisizione dati multifunzionale (NI USB-6212) che offre ingressi analogici, ingressi e uscite digitali e due contatori con risoluzione a 32 bit. Il dispositivo ha un amplificatore integrato per tempi di assestamento rapidi a frequenze di campionamento elevate.

Gli accelerometri, montati sull'housing e sulla mensola porta sensori, sono collegati tramite cavi ad un sistema di acquisizione dinamica del segnale (NI Sound and Vibration Device USB-4431), al quale è anche collegato il segnale di forza in uscita dalla cella. L'uscita di tale acquisitore comunica direttamente con il Laptop tramite cavo USB.
Il cavo di connessione della cella di carico Kiestler Type 9313AA1 è collegato con l'amplificatore Kiestler (Charge Amplifier Type 5073A) nell'ingresso Sensor1. L'uscita Exct/Control/Signal Out connette l'amplificatore stesso contemporaneamente al dispositivo di acquisizione dati NI USB-6212 e all'alimentatore a tensione fissa 24V/DC Voltcraft FSP-1243. Anche il sistema di misura Micro-Epsilon deve essere connesso all'alimentatore Voltcraft.
Infine, il dispositivo di acquisizione dati NI USB-6212 è connesso al Laptop. Tale dispositivo rappresenta l'interfaccia hardware tra elaboratore ed i dati esterni trasformando i dati analogici in input in dati utilizzabili dall'elaboratore, impiegando i driver forniti dal produttore stesso. Per l'acquisizione dei segnali viene utilizzato LabVIEW.

Figura 3.1: Foto dell'amplificatore Power Amplifier Type 2732 (in basso) e del generatore di segnale SFG-2104 (in alto).



(a)



(b)

Figura 3.2: Sistema di misura modulare capaNCDT 6200 Micro-Epsilon (**3.2a**) e dispositivo di acquisizione dati NI USB-6212 (**3.2b**)

3.2 Verifica della strumentazione

In questa sezione sono presentati i risultati dei test effettuati allo scopo di verificare il comportamento dinamico della strumentazione utilizzata nel banco prova. Tale procedura si suddivide in tre fasi consequenziali:

1. verifica della cella di carico;
2. verifica degli accelerometri;
3. verifica dei sensori capacitivi.

É stato possibile esaminare l'attendibilità valori in uscita dalla cella di carico tramite la progettazione di un piattello porta pesi. Quest'ultimo è stato progettato in modo da poter essere direttamente avvitato tramite filettatura al cover cap, ed ha lo scopo di sostenere dei pesi calibrati. Conoscendo il valore del peso di questi campioni è facile effettuare un confronto con la misura rilevata dalla cella di carico. Il banco di prova utilizzato è mostrato nella foto in **Figura 3.3**.

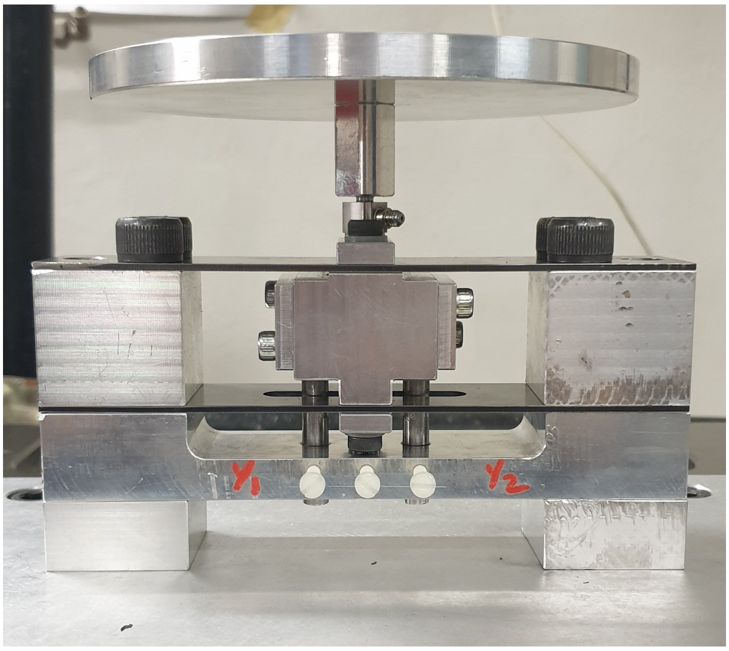


Figura 3.3: Foto del set up con il piattello porta pesi.

Dopo aver effettuato la verifica della cella di carico, è stato esaminato il valore del guadagno, *gain*, gli accelerometri. Il valore della forza in uscita dalla cella risulta essere quella necessaria a far traslare la massa sospesa. Tale forza risulta essere pari alla forza di inerzia della massa stessa, che può essere calcolata. Tramite la funzione *fft(X), Discrete Fourier trasform* è stato quindi valutato il contenuto in frequenza dei segnali in ingresso, in modo tale da poter ottenere la misura del guadagno degli accelerometri andando a confrontare i due valori di forza, quella misurata e quella calcolata analiticamente.

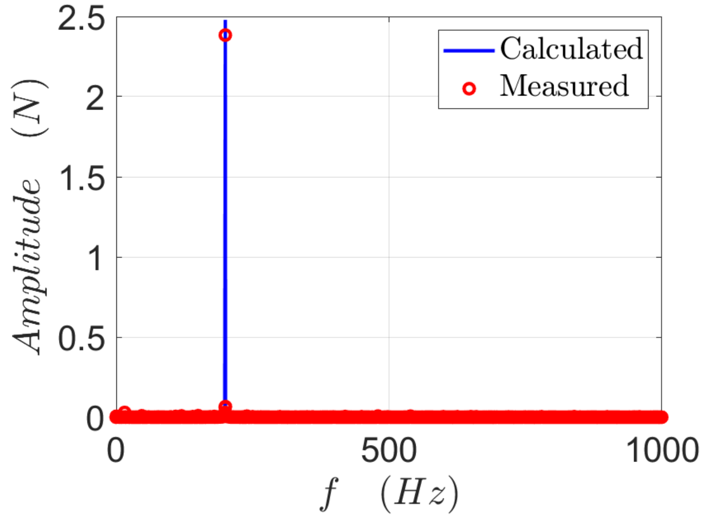


Figura 3.4: Contenuto in frequenza dei segnali ($f = 200$ Hz).

Sono stati infine verificati i sensori capacitivi. Come descritto precedentemente nella **Sezione 3.1.1**, tramite LabVIEW possono essere infatti acquisiti contemporaneamente sia i segnali rilevati dagli accelerometri che quelli registrati dai sensori capacitivi. Di conseguenza sono stati confrontati, come mostrato in **Figura 3.5**, gli andamenti dell'accelerazione determinata dalla doppia derivazione nel tempo dei segnali di spostamento dei sensori capacitivi ed il segnale di accelerazione rilevata direttamente dagli accelerometri. Per ottenere un raffronto ottimale, è stato necessario allineare le due accelerazioni tramite la valutazione della fase dei due segnali di forza.
La **Tabella 3.1** mostra i valori al variare della frequenza dell'ampiezza di oscillazione misurata dagli accelerometri e quella derivata matematicamente attraverso l'**Equazione 3.1**.

$$A(\omega) = \frac{A_1(\omega) + A_2(\omega)}{2} = \frac{Y_1(\omega^2) + Y_2(\omega^2)}{2} = Y\omega^2 \tag{3.1}$$

I test sono stati effettuati fino ad una frequenza massima di 200 [Hz] a causa dei problemi legati all'oscillazione dello shaker a bassa frequenza. La foto in **Figura 3.6** mostra il set-up utilizzato per questa tipologia di prova.

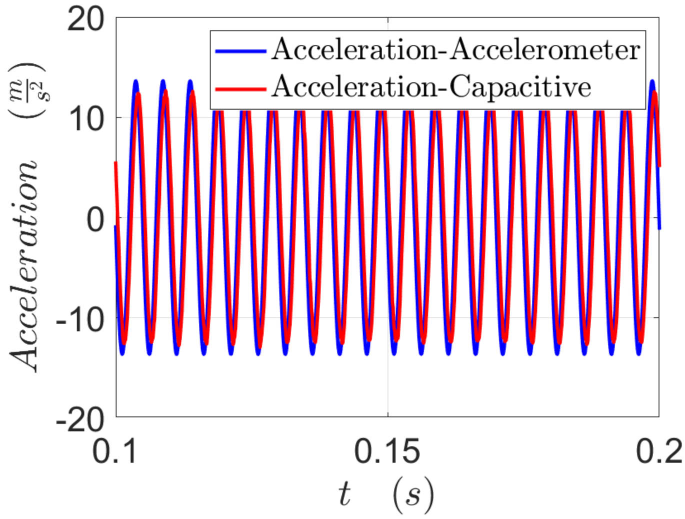


Figura 3.5: Confronto delle accelerazioni (f = 200 Hz).

f [Hz]	A [m/s^2]	$Y\omega^2$ [m/s^2]
20	1.149	1.224
40	2.222	2.387
50	2.539	2.764
100	3.945	4.214
150	6.302	6.808
200	13.622	14.525

Tabella 3.1: Confronto tra l'ampiezza dell'accelerazione misurata e quella ricavata analiticamente.

Un'ulteriore analisi dei sensori capacitivi è stata eseguita tramite il confronto dei diagrammi di Bode della funzione di trasferimento *accelerazione*/*forza* per i segnali in ingresso dei sensori capacitivi e degli accelerometri per le tre coppie di serraggio[1].

[1]Vedi **Sezione 3.5**

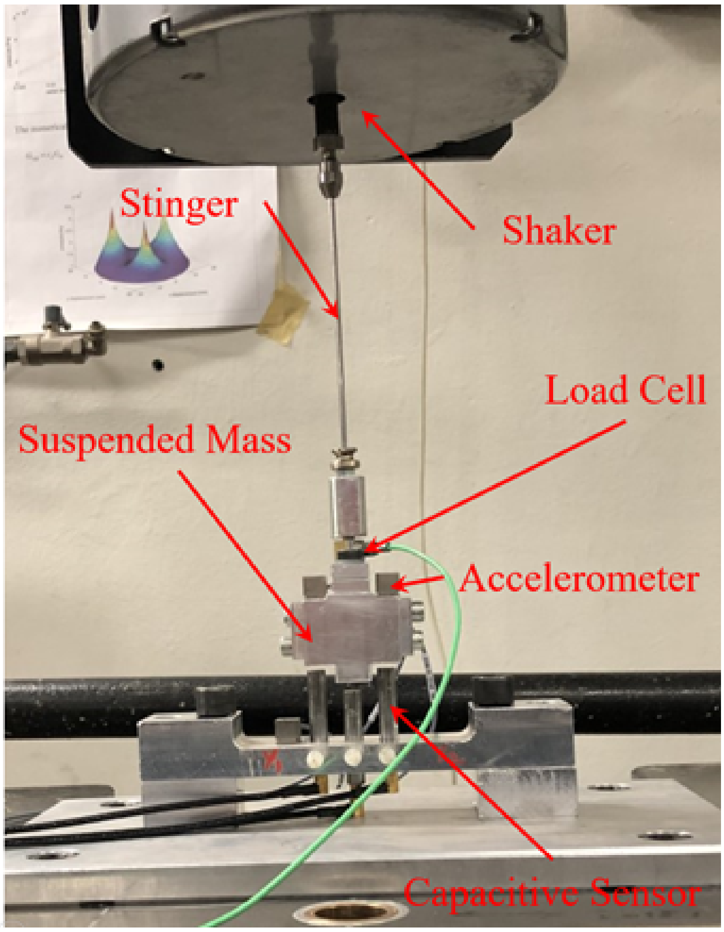


Figura 3.6: Foto della configurazione sperimentale utilizzata per la procedura di verifica dei sensori.

All'interno dello script si fa riferimento a due comandi Matlab:

- [txy,f]=tfestimate(x,y,window,noverlap,f,fs);
- [cxy,f]=mscohere(x,y,window,noverlap,f,fs);

La prima funzione trova la stima della funzione di trasferimento, t_{xy}, dato un segnale in input x e un segnale in output y. Utilizza il valore di *window* per suddividere x e y in segmenti ed eseguire la funzione finestratura servendosi di campioni *noverlap* per segmenti contigui. Restituisce quindi un vettore di frequenze, f, espresso in termini di frequenza di campionamento, fs, a cui viene stimata la funzione di trasferimento. La seconda viene utilizzata in per trovare c_{xy}, ovvero la stima della funzione coerenza tra i segnali di input e output. La coerenza è una funzione limitata inferiormente a zero, nel caso in cui il rumore sia grande rispetto al segnale, ed è prossima a uno nel caso ideale di assenza di rumore. La **Figura 3.8** mostra come il segnale in ingresso dai sensori capacitivi, principalmente per la prova 2, sia più lineare. Per questo motivo, nella **Sezione 3.5** verranno analizzati i segnali in ingresso dai sensori capacitivi.

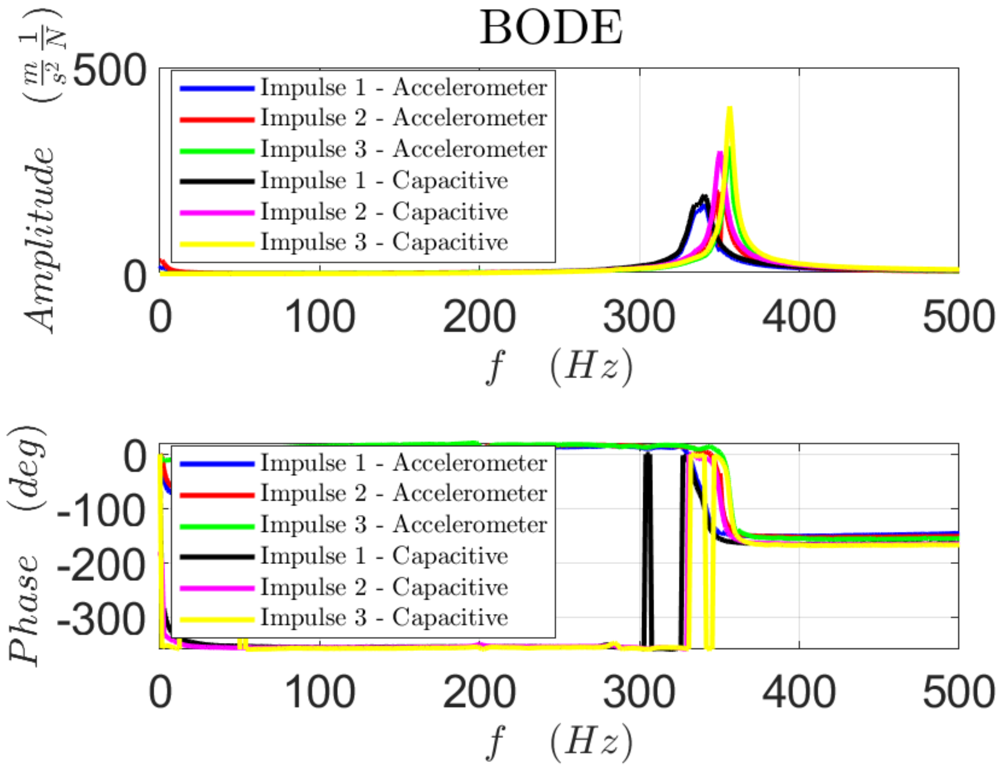


Figura 3.7: Diagramma di Bode dai segnali degli accelerometri e dei sensori capacitivi.

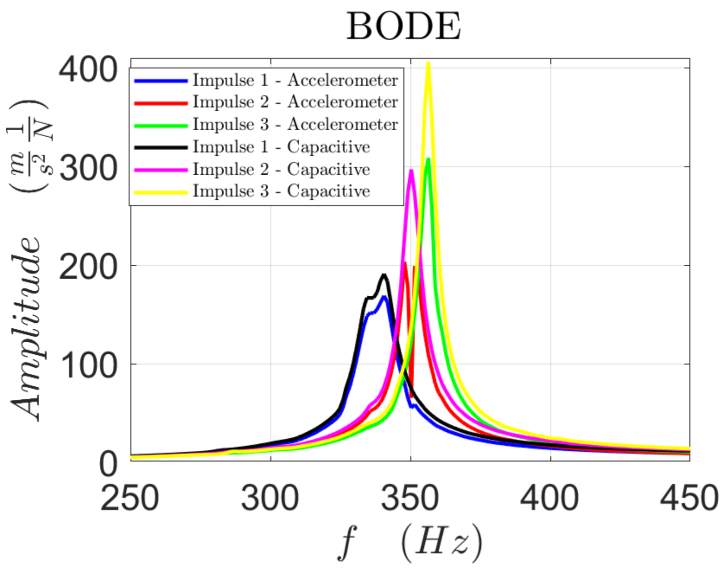


Figura 3.8: Zoom dell'ampiezza - Diagramma di Bode.

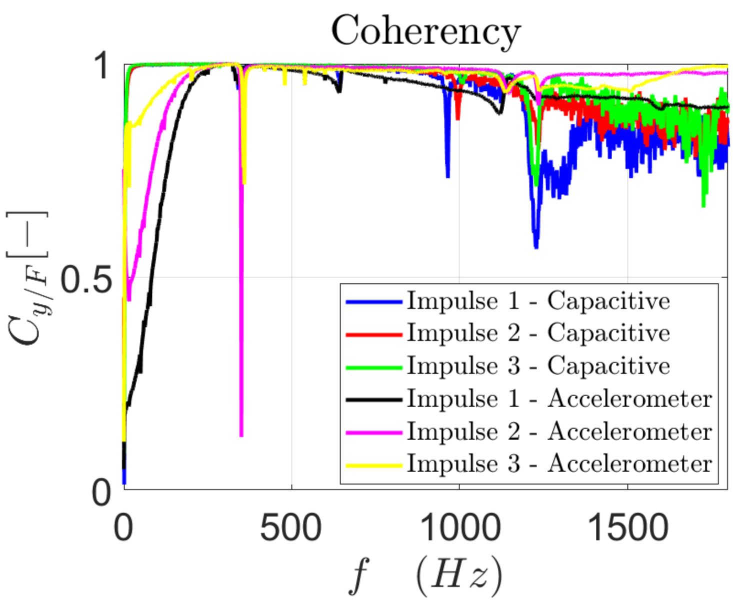


Figura 3.9: Confronto della coerenza.

3.3 Analisi dinamica

L'obiettivo principale del lavoro è quindi quello di interpretare i segnali in output del banco prova in termini di rigidezza e smorzamento degli anelli in prova. L'intero sistema può essere analizzato come un semplice modello massa-molla-smorzatore a un singolo grado di libertà soggetto ad eccitazione della base, come mostrato in **Figura 3.10**, indicando con k e c rispettivamente la rigidezza della molla e lo smorzamento viscoso.

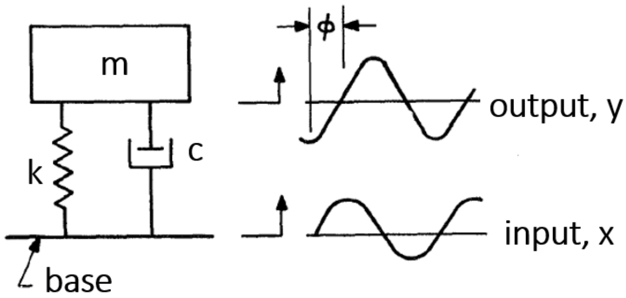


Figura 3.10: Modello massa-molla-smorzatore soggetto ad eccitazione della base.

L'equazione di equilibrio del sistema è:

$$m\ddot{x} + c(\dot{x} - \dot{y}) + k(x - y) = 0 \tag{3.2}$$

dove x rappresenta lo spostamento della massa e y lo spostamento della base. La soluzione del sistema risulta essere:

$$x(t) = x_0 e^{i\omega t} \qquad\qquad y(t) = y_0 e^{i\omega t} \tag{3.3}$$

Sostituendo le soluzioni appena trovate in **Equazione 3.3**, e dividendo per il termine $e^{i\omega t}$, si ottiene:

$$(k + c\omega) = \frac{m\omega^2 x_0}{x_0 - y_0} \tag{3.4}$$

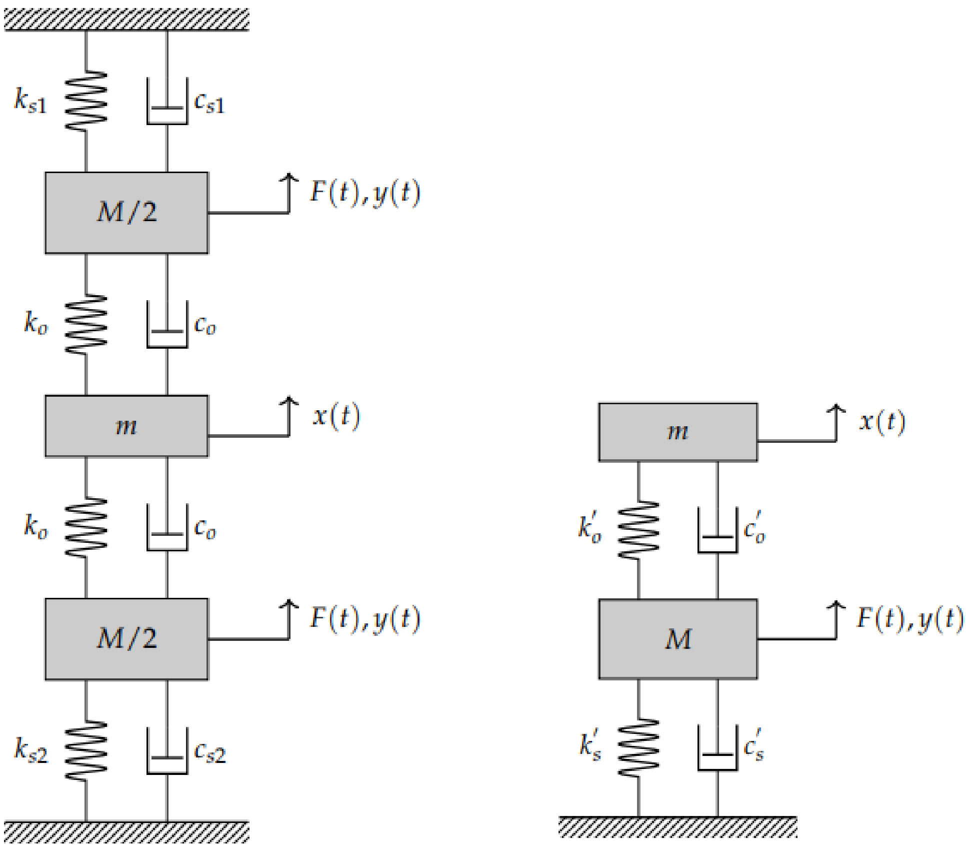
Si definisce con ϕ l'angolo di sfasamento tra $y(t)$ e $x(t)$, e con A il rapporto delle ampiezze $\frac{x_0}{y_0}$, per cui si ricava che:

$$(k + c\omega) = \frac{m\omega^2 (A\cos\phi - iA\sin\phi)}{A\cos\phi - iA\sin\phi - 1} \tag{3.5}$$

Ovvero:

$$k = \frac{m\omega^2(A^2 - A\cos\phi)}{A^2 - 2A\cos\phi + 1} \qquad\qquad c = \frac{m\omega A\sin\phi}{A^2 - 2A\cos\phi + 1} \tag{3.6}$$

In **Figura 3.11** viene mostrato come il modello composto da Housing (M) - Albero (m) può essere semplificato sfruttando la simmetria. Vengono indicati con $k_s^{'}$ e $c_s^{'}$ rispettivamente la rigidezza e il fattore di smorzamento della lamina.



(a) **(b)**

Figura 3.11: Rappresentazione del sistema completo (a) e del sistema semplificato (b).

Facendo riferimento al diagramma di corpo libero del modello semplificato, le equazioni di equilibrio risultano essere:

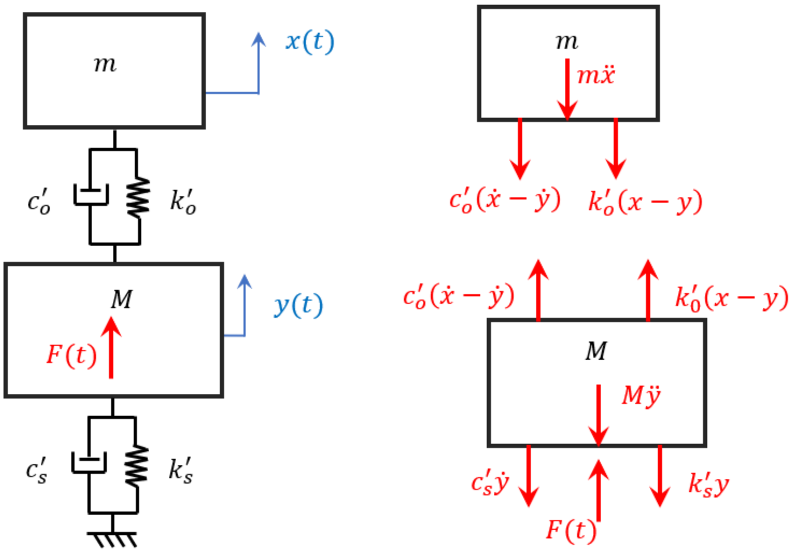


Figura 3.12: Diagramma di corpo libero del sistema.

$$m\ddot{x} + c_o^{'}(\dot{x} - \dot{y}) + k_o^{'}(x - y) = 0 \tag{3.7}$$

$$M\ddot{y} + c_s^{'}\dot{y} + k_s^{'}y - c_o^{'}(\dot{x} - \dot{y}) - k_o^{'}(x - y) = F \tag{3.8}$$

Sfruttando la trasformata di Laplace è possibile ottenere le funzioni di trasferimento che caratterizzano il comportamento del sistema:

$$\frac{x(s)}{y(s)} = \frac{c_o^{'}s + k_o^{'}}{ms^2 + c_o^{'}s + k_o^{'}} \tag{3.9}$$

$$\frac{x(s)}{z(s)} = -\frac{c_o^{'}s + k_o^{'}}{ms^2} \tag{3.10}$$

avendo indicato con $z = x - y$ il moto relativo di albero e housing. Sostituendo ora la relazione x/y in **Equazione 3.8**:

$$\frac{F}{y} = \frac{Mms^4 + (Mc + mc_s^{'} + mc_o^{'})s^3 + (Mk + c_s^{'}c_o^{'} + mk_o^{'} + mk_s^{'})s^2 + (c_s^{'}k_o^{'} + k_s^{'}c_o^{'})s + k_s^{'}k_o^{'}}{ms^2 + c_o^{'}s + k_o^{'}} \tag{3.11}$$

Infine si ottiene:

$$\frac{F}{z} = -[Ms^4 + (\frac{M}{m}c_o^{'} + c_o^{'} + c_s^{'})s^3 + (\frac{c_s^{'}c_o^{'}}{m} + \frac{M}{m}k_o^{'} + k_o^{'} + k_s^{'})s^2 + (\frac{c_s^{'}k_o^{'}}{m} + \frac{k_s^{'}k_o^{'}}{m})s + \frac{k_s^{'}k_o^{'}}{m}]\frac{1}{s^2} \tag{3.12}$$

É possibile anche definire, nell'analisi di tali funzioni di trasferimento, i seguenti parametri adimensionali:

$$\beta = \frac{M}{m} \quad \omega_n = \sqrt{\frac{k_o^{'}}{m}} \quad \omega_s = \sqrt{\frac{k_s^{'}}{m}} \quad \frac{c_o^{'}}{m} = 2\zeta\omega_n \quad \frac{c_s^{'}}{m} = 2\zeta_s\omega_s \quad \delta = \frac{c_s^{'}}{c_o^{'}} \quad \gamma = \frac{k_s^{'}}{k_o^{'}}$$

I calcoli eseguiti per ottenere le funzioni di trasferimento sopra descritte sono consultabili in **Appendice A**.

3.4 Influenza degli errori di misura

L'obiettivo di questa sezione è quello di valutare la precisione degli strumenti di misura utilizzati nelle prove, in modo tale che si possa verificare il campo di frequenze ottimale per ottenere una buona affidabilità dei risultati.
Sono stati dapprima calcolati di rigidezza e smorzamento al variare della frequenza di eccitazione, ricorrendo all'**Equazione 3.6**. I dati ottenuti sono stati interpolati in modo da stimare analiticamente il comportamento della rigidezza e dello smorzamento.
Si calcola quindi la funzione di trasferimento X_0/Y_0 (**Equazione 3.9**), ed il relativo diagramma di Bode, in **Figura 3.13** , con i valori imposti di $k(\omega)$ e $c(\omega)$. Ottenuti quindi i valori di ampiezza e angolo di fase al variare della frequenza, sono stati introdotti degli errori di misura casuali con una probabilità di distribuzione normale, in quanto la distribuzione gaussiana descrive ragionevolmente bene l'effettiva distribuzione degli errori casuali. I valori di riferimento sono ricavati dal datasheet dei sensori capacitivi.

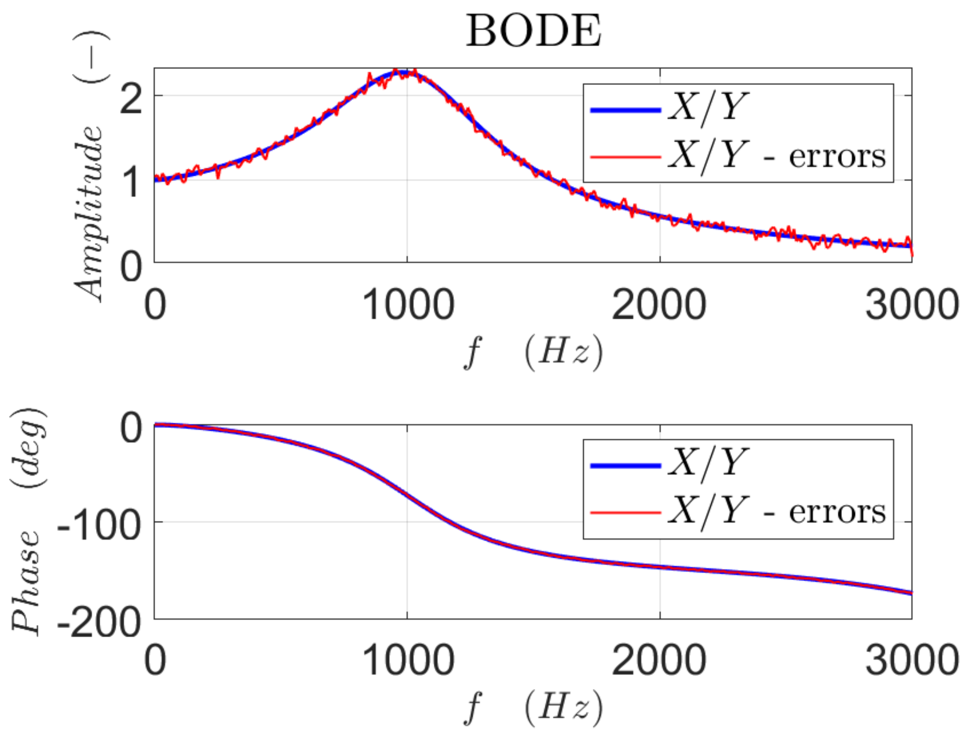


Figura 3.13: Diagramma di Bode X/Y con i valori di $k(\omega)$ e $c(\omega)$ ottenuti tramite interpolazione.

Uno schema rappresentativo del procedimento eseguito è mostrato in **Figura 3.14**.

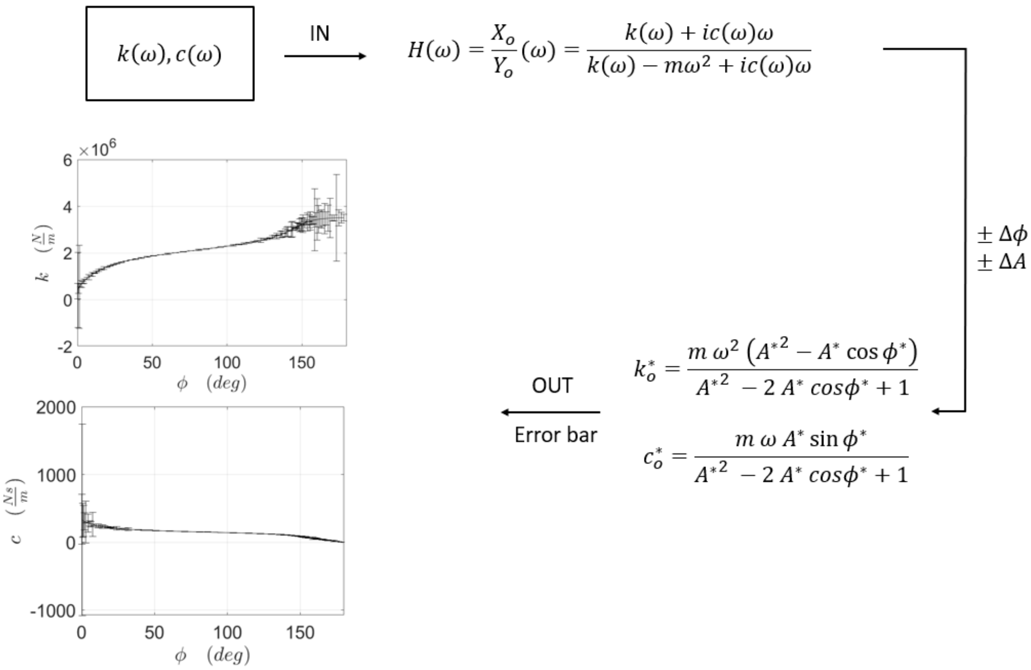


Figura 3.14: Schematizzazione del processo eseguito per la verifica dell'influenza degli errori di misura.

Le **Figure 3.15, 3.16** e **3.17** mostrano l'andamento dei valori di rigidezza e smorzamento calcolati considerando la presenza degli errori di misura, comparati con quelli ideali. I grafici mostrano rispettivamente i casi degli errori nella fase, degli errori nell'ampiezza e la combinazione di questi.

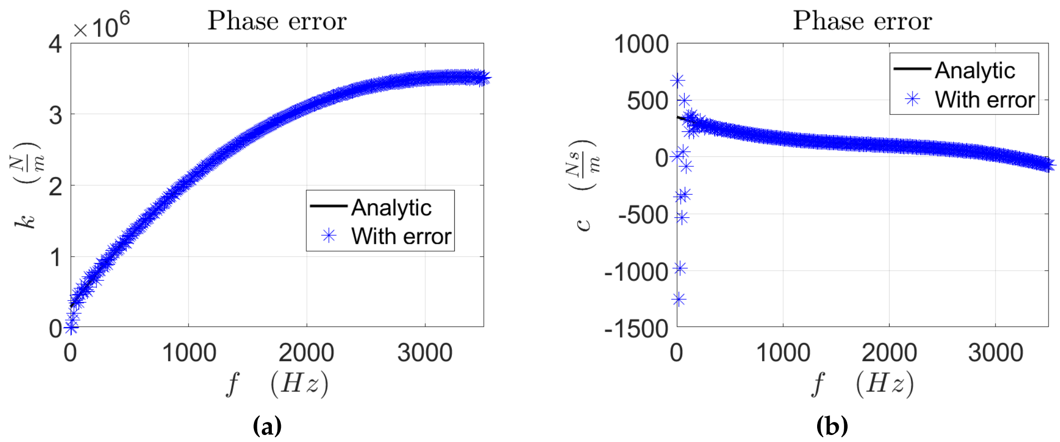


Figura 3.15: Confronto fra la soluzione analitica e i valori calcolati di rigidezza e smorzamento inserendo l'errore sulla fase.

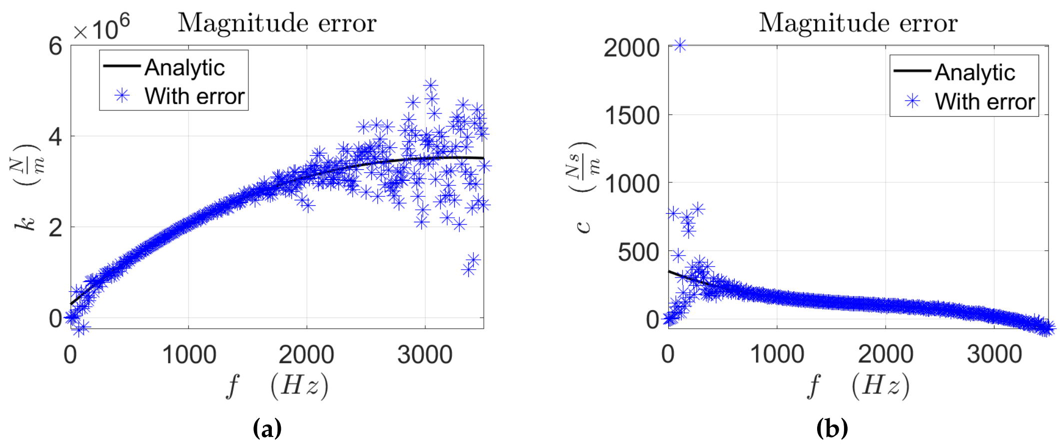
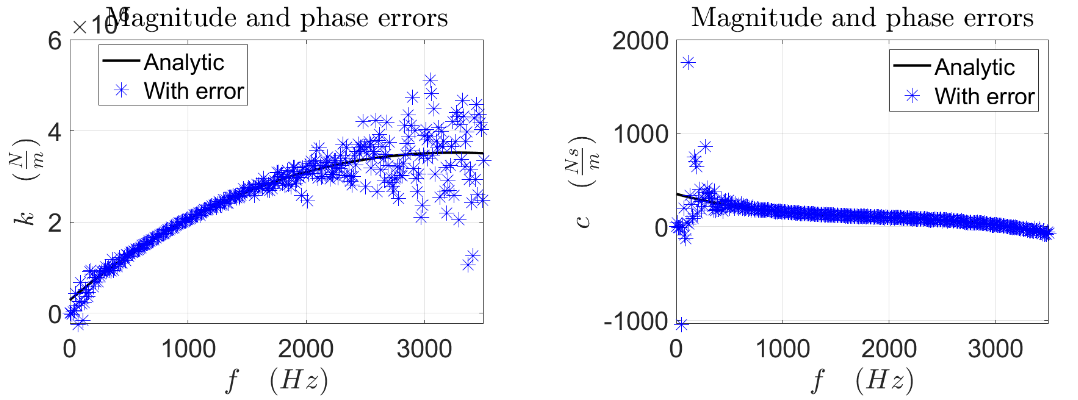


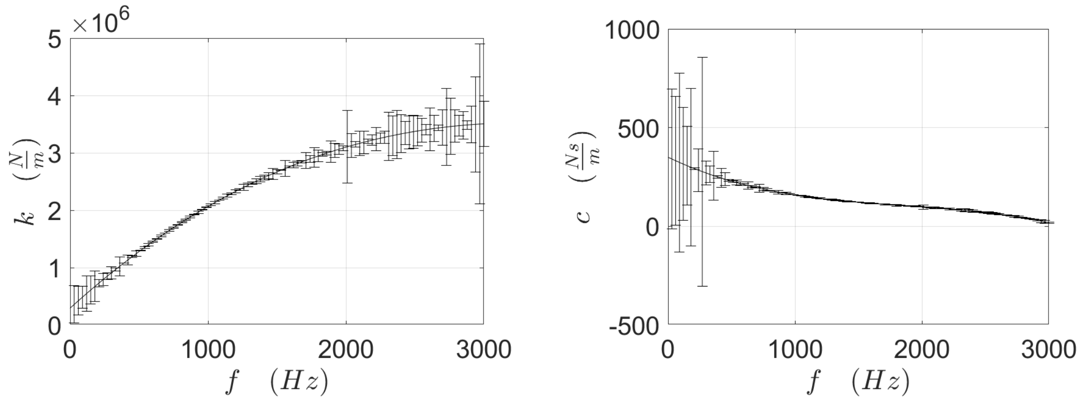
Figura 3.16: Confronto fra la soluzione analitica e i valori calcolati di rigidezza e smorzamento inserendo l'errore sull'ampiezza.



(a) **(b)**

Figura 3.17: Confronto fra la soluzione analitica e i valori calcolati di rigidezza e smorzamento inserendo in contemporanea errori sulla fase e sull'ampiezza.

La **Figura 3.18** mostra il valore delle *error bars* al variare della frequenza di eccitazione del sistema, nel caso in cui siano considerati contemporaneamente degli errori sulla fase e sull'ampiezza.



(a) **(b)**

Figura 3.18: *Error bars* con la variazione di frequenza

Per verificare effettivamente l'intervallo indicato in letteratura, affrontato in **Sezione 2.2**, è utile mostrare il grafico delle *error bars* valutato con l'andamento dell'angolo di fase ϕ della funzione di trasferimento. Dalla figura si può notare che per avere dei dati di misurazione accurati di rigidezza e smorzamento, la differenza dell'angolo di fase tra alloggiamento e albero deve essere compresa intorno al range $15° \div 160°$. In maniera cautelativa, i dati sono ottenuti andando a sovrastimare gli errori di misura, inserendo un errore di $1°$ nella lettura della fase e un errore pari a 0.05 nell'ampiezza della funzione di trasferimento.

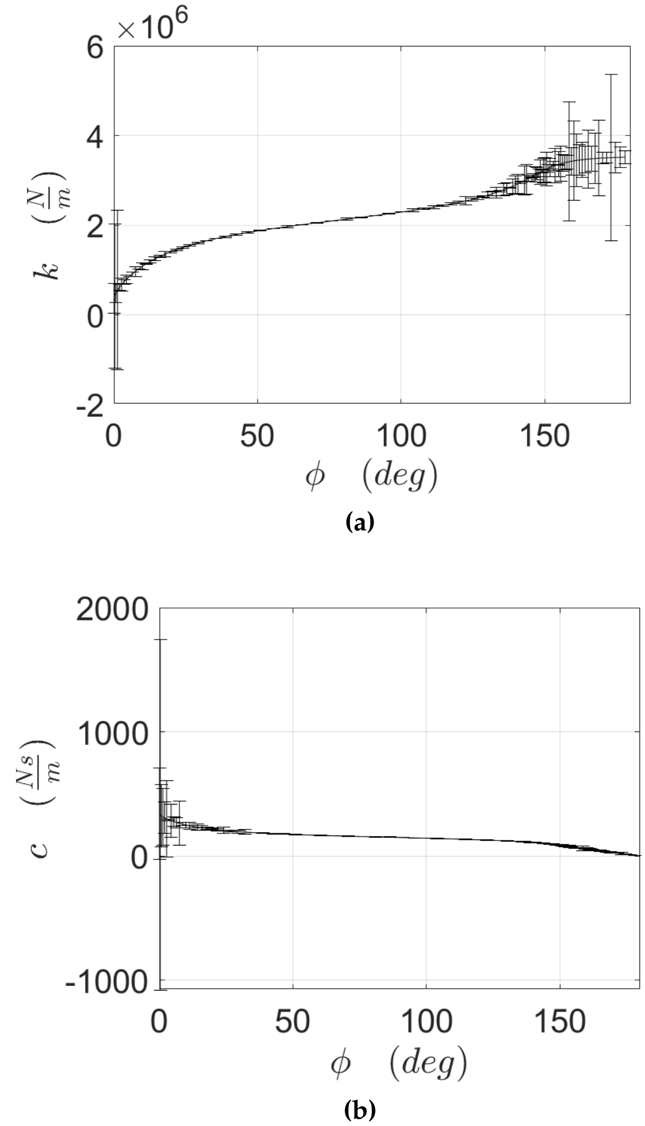


Figura 3.19: *Error bars* con la variazione della fase

3.5 Caratterizzazione del banco prova

3.5.1 Caratterizzazione Housing

L'analisi dei dati sperimentali utili alla creazione di un modello in grado di rappresentare il banco prova ha inizio con la caratterizzazione dell'intero alloggiamento degli alberi e degli O-Ring. Le prove eseguite hanno come obiettivo quello di identificare i valori di frequenza naturale, rigidezza e smorzamento. Durante le acquisizioni, l'intera struttura è montata nella posizione finale di assemblaggio, in **Figura 3.20**, ma senza la presenza di albero e O-Ring. Sono state eseguite delle prove a differenti coppie di serraggio della vite $M12$ per verificare la sua influenza sulle caratteristiche di smorzamento della lamina. La coppia è stata misurata in fase di montaggio con l'ausilio di una chiave dinamometrica ai valori di $5Nm$, $9Nm$ e $14Nm$. Tramite l'utilizzo di uno script Matlab sono state analizzate diverse prove in cui viene simulata un'eccitazione impulsiva, e delle quali viene presa una media dei valori di interesse. Le acquisizioni delle prove sono i valori y dei sensori capacitivi che misurano lo spostamento dell'housing e i valori di forza rilevati dalla cella di carico. L'elaborazione dei dati prevede due metodi[2] di identificazione dei parametri: il Metodo del decremento logaritmico ed il Metodo dei punti di metà potenza.

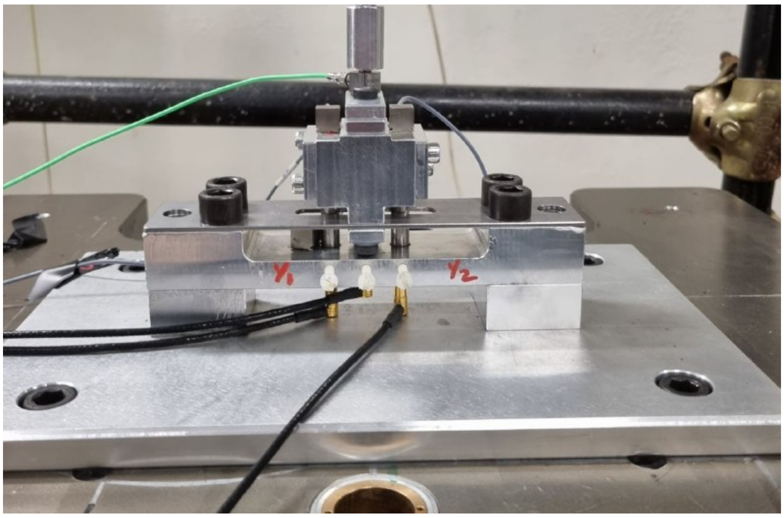


Figura 3.20: Foto del set-up utilizzato per la caratterizzazione dell'housing.

[2]Un approfondimento sui metodi utilizzati e i relativi calcoli è visionabile in **Appendice B**.

Nel metodo del decremento logaritmico, dopo aver isolato il tempo di interesse nel quale avviene la sollecitazione del sistema, di ottenere la posizione dei massimi locali dell'oscillazione con l'utilizzo della funzione Matlab $[pks, locs] = findpeaks(data)$, che restituisce un vettore con i picchi, e gli indici a cui si verificano, del segnale di ingresso. É così possibile calcolare, inserendo come input la massa M misurata in laboratorio della struttura, che comprende housing, coperchi e la parte di lamina non vincolata, e pari a 0.170 kg, il valore del decremento logaritmico δ e ricavare da esso il valore dello smorzamento ζ. Dall'analisi dei dati sono stati ricavati i valori presenti in **Tabella 3.2**, ovvero i valori medi ottenuti per le diverse prove.

Coppia $[Nm]$	$\omega_s[Hz]$	$\zeta[-]$	$k_s[\frac{N}{m}]$	$c_s[\frac{Ns}{m}]$
5	331.31	0.0050	$7.372 \cdot 10^5$	3.545
9	332.42	0.0091	$7.416 \cdot 10^5$	6.454
14	337.95	0.0106	$7.667 \cdot 10^5$	7.628

Tabella 3.2: Caratterizzazione Housing ricavata dal metodo del decremento logaritmico

Nelle figure seguenti vengono mostrati i risultati ottenuti a seguito dell'elaborazione dei dati. É infine presente in **Figura 3.23** un confronto dei dati sperimentali con la formulazione teorica descritta in **Equazione B.1**, dopo aver eseguito un'operazione di fitting per il valore della velocità iniziale v_0, in cui si può osservare come le due curve vadano a sovrapporsi quasi completamente.

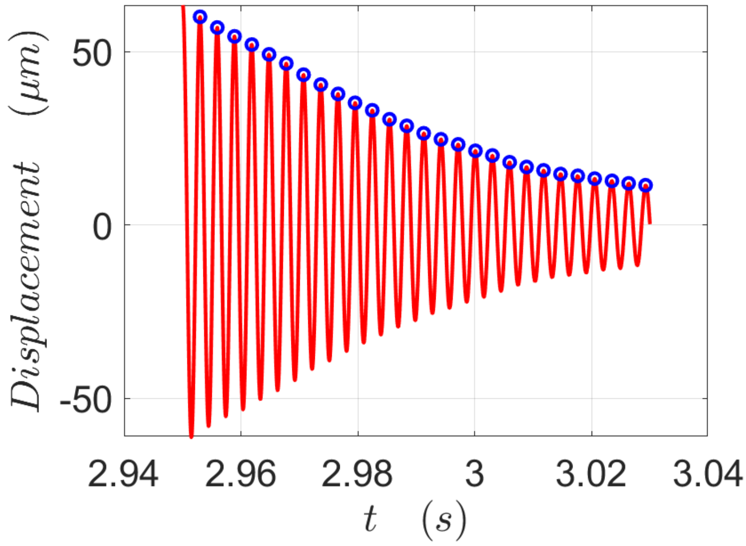


Figura 3.21: Comportamento temporale del sistema evidenziando i picchi di oscillazione ottenuti dalla funzione *findpeaks*.

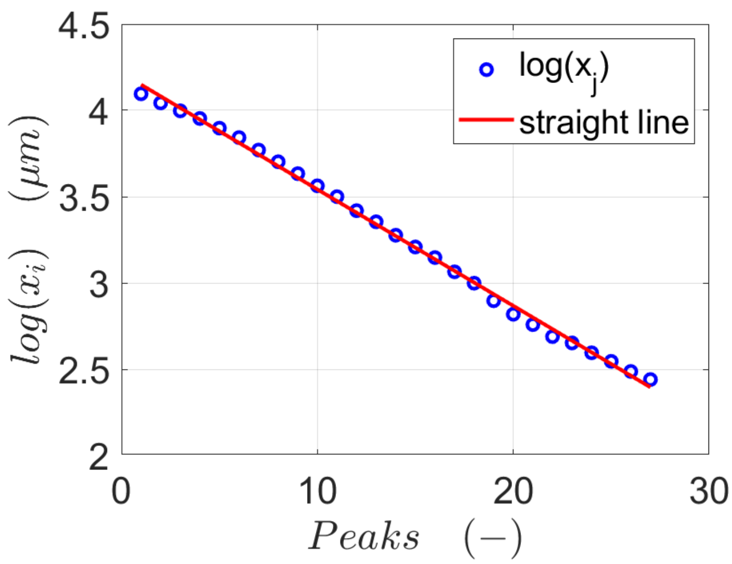


Figura 3.22: Logaritmo naturale dell'ampiezza di picco contro il punto di misurazione (vedi **Appendice B**).

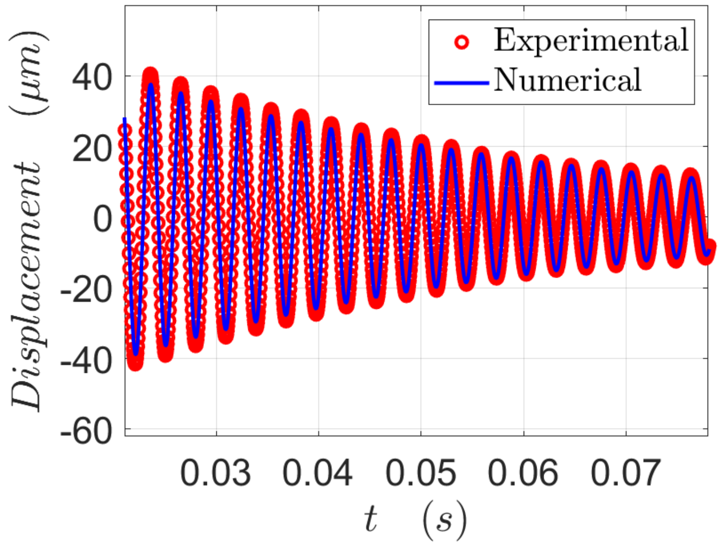


Figura 3.23: Confronto andamento sperimentale e numerico con il metodo del decremento logaritmico.

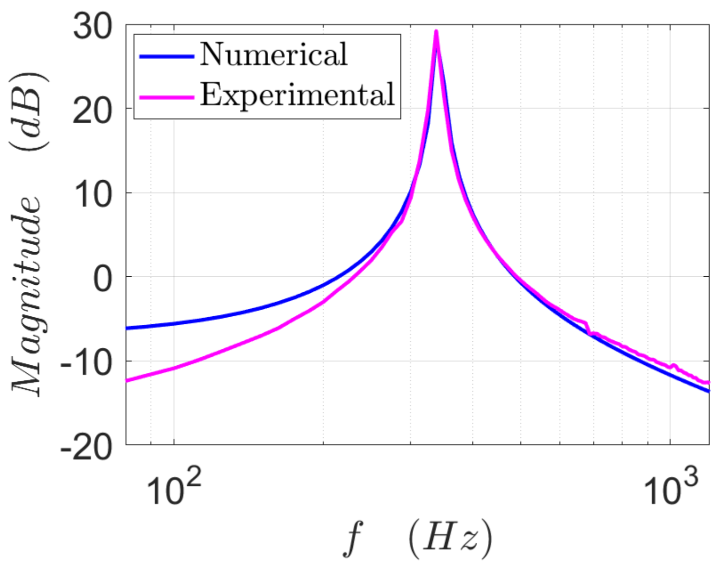


Figura 3.24: Sovrapposizione dello spettro del segnale in ingresso e lo spettro del segnale numerico ottenuto con il metodo del decremento logaritmico.

Nell'applicazione del metodo dei punti di metà potenza, vengono in primo luogo analizzati gli spettri dei segnali in ingresso, ovvero il contenuto in frequenza, ottenuti mediante la fft (ovvero, *fast Fourier transformation*). Sono state individuate alcune problematiche nell'utilizzo di tale procedimento a causa delle limitazioni del metodo stesso quando il sistema è caratterizzato da bassi valori di smorzamento, come mostra la **Figura 3.25**. Per tale motivo, al fine di delineare un andamento più regolare e interpretabile, il segnale filtrato tramite l'utilizzo della media mobile, smorzando le fluttuazioni contenute nei dati. Per avere una stima del fattore di smorzamento ζ che sia il più attendibile possibile, il parametro viene calcolato con differenti valori del fattore di diminuzione n e, dunque, dell'ampiezza di banda $(\Omega_b - \Omega_a)$. Nel caso di un sistema caratterizzato da un basso valore di smorzamento, infatti, il picco in corrispondenza della frequenza di risonanza risulta essere molto stretto, per cui è possibile che, a causa della scarsa risoluzione in frequenza e a seguito del filtraggio tramite media mobile eseguito, venga rilevato erroneamente il valore massimo. Per trovare quindi un valore affidabile, il metodo è stato eseguito per valori di N che variano da 2 dB a 6 dB, visibile in **Figura 3.27**, a cui è seguito un fitting di verifica in base alla prova effettuata. I valori ottenuti sono mostrati in **Tabella 3.3**.

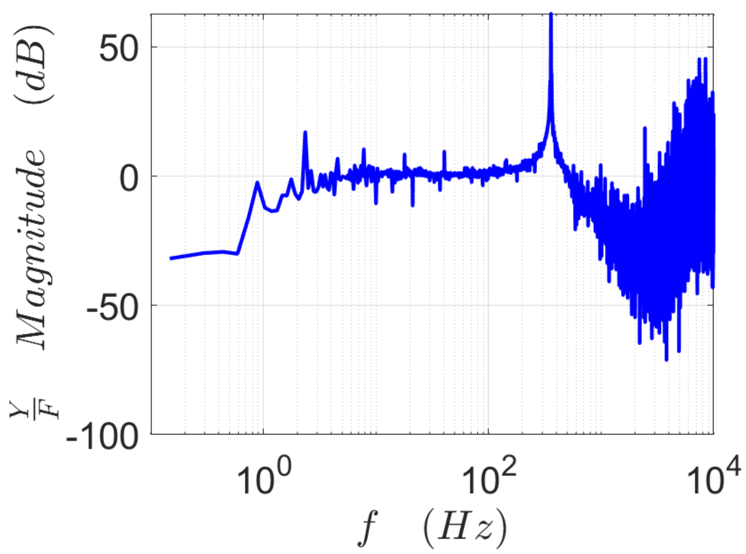
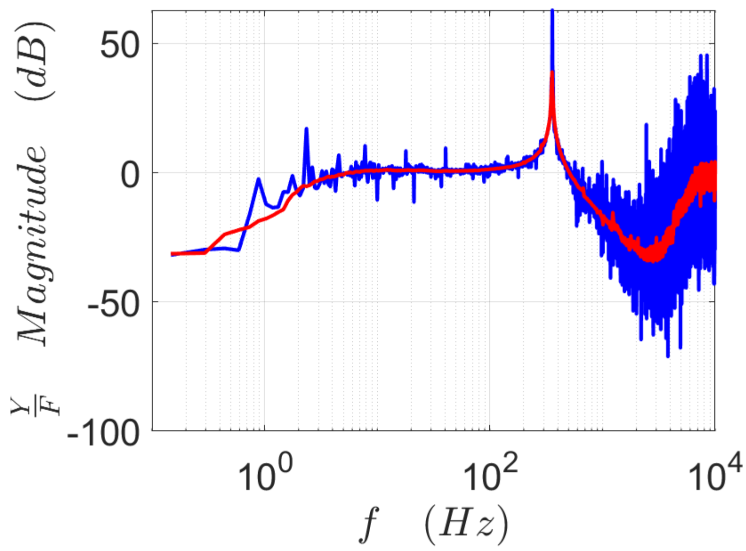
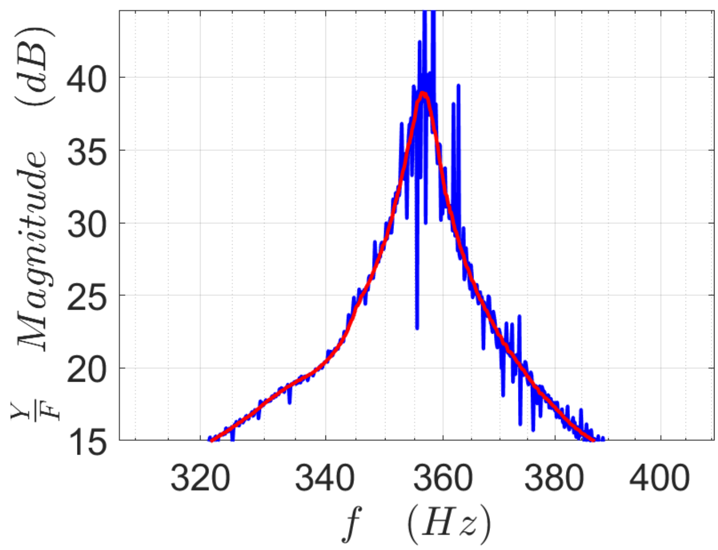


Figura 3.25: Spettro della funzione di trasferimento $\frac{Y}{F}$.



(a)



(b)

Figura 3.26: Spettro della funzione di trasferimento Y/F filtrato con la media mobile.

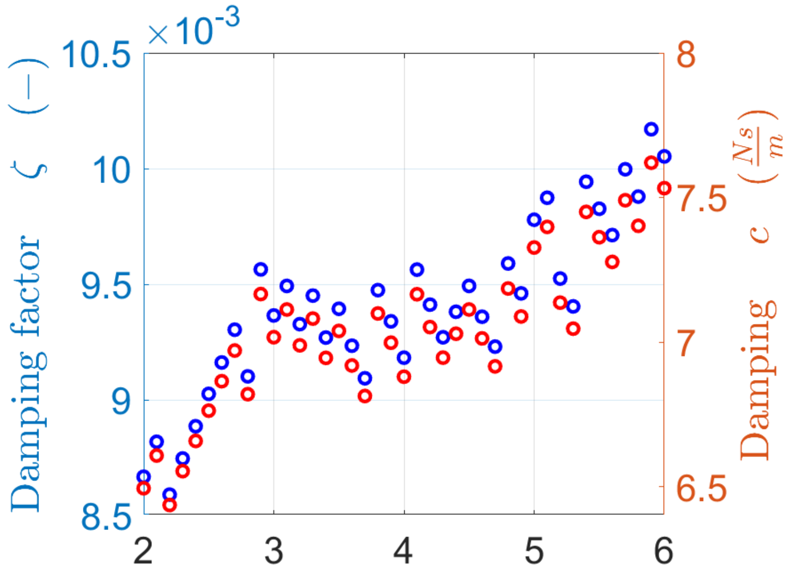


Figura 3.27: Valori misurati del fattore di smorzamento ζ (a sinistra) e dello smorzamento c (a destra) dipendenti dal numero di dB di decadimento.

Coppia $[Nm]$	$\omega_s[Hz]$	$\zeta[-]$	$k_s[\frac{N}{m}]$	$c_s[\frac{Ns}{m}]$
5	340.72	0.0239	$7.796 \cdot 10^5$	14.92
9	350.67	0.0090	$8.253 \cdot 10^5$	6.712
14	354.94	0.0098	$8.456 \cdot 10^5$	7.399

Tabella 3.3: Caratterizzazione Housing ricavata dal metodo dei punti di metà potenza

Come fatto in precedenza, per verificare l'attendibilità dei parametri ricavati, risulta necessario svolgere il confronto fra l'andamento teorico nel tempo della risposta del sistema e quello misurato sperimentalmente. Il risultato, visibile in **Figura 3.28**, mostra come la frequenza tra i due segnali non sia esattamente la stessa. Come detto in precedenza, questo è causato dal fatto che essendo il picco di risonanza sottile e avendo eseguito il filtraggio del segnale, viene individuata una frequenza di risonanza che non corrisponde esattamente a quella reale.

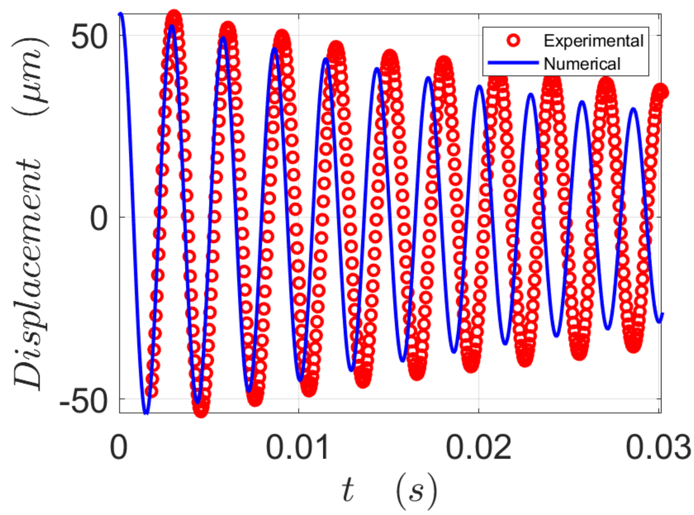


Figura 3.28: Confronto andamento sperimentale e numerico con il metodo dei punti di metà potenza.

É infine mostrato lo spettro ottenuto dal segnale numerico, dove si può notare come, a causa della scarsa risoluzione, non sia possibile raggiungere il picco del segnale.

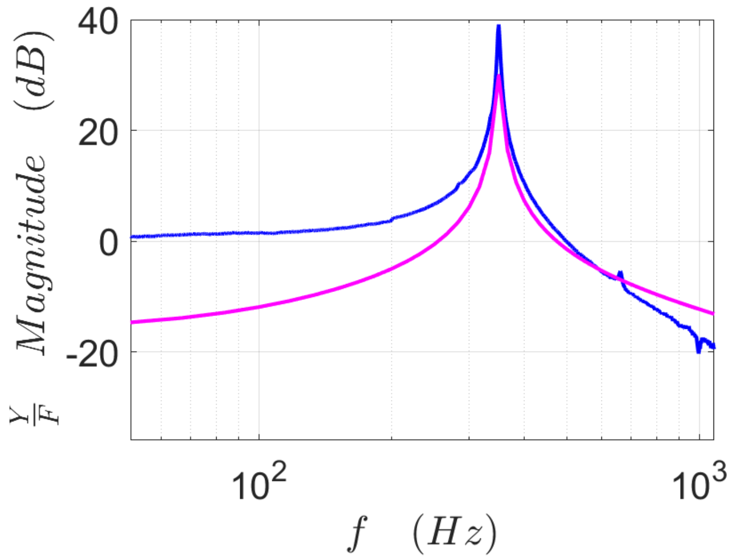


Figura 3.29: Sovrapposizione dello spettro filtrato tramite la media mobile e lo spettro del segnale numerico.

3.5.2 Caratterizzazione O-Ring

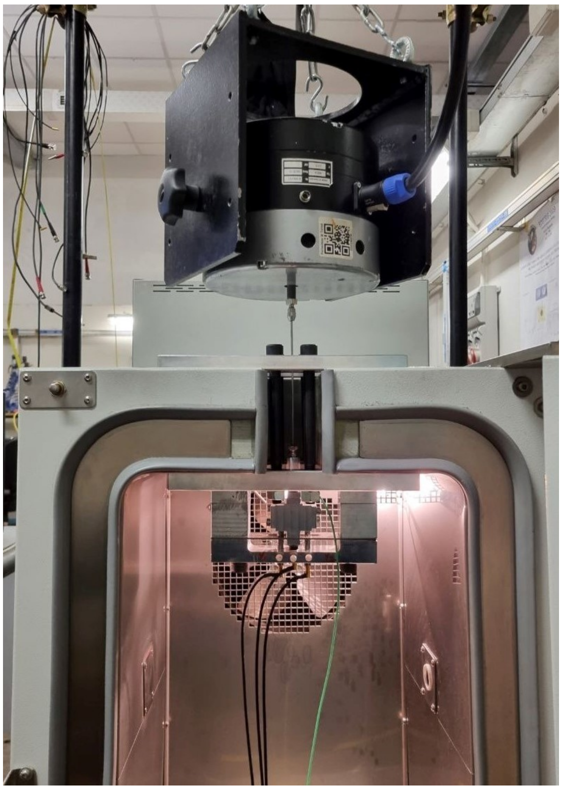
Lo scopo della caratterizzazione dinamica degli anelli O-Ring è quello di ottenere i valori di rigidezza e smorzamento di questi in funzione delle condizioni di lavoro, quali frequenza di eccitazione e temperatura di funzionamento. Per questo motivo, il banco prova descritto in precedenza è stato utilizzato in una configurazione tale da poter essere impiegato all'interno di una camera termostatica da laboratorio, presente all'interno del dipartimento DIMEAS del Politecnico di Torino. La cella termostatica GTEST-DINA permette il controllo della temperatura dell'ambiente di lavoro fino ad un massimo di 180° C, e l'isolamento termico è assicurato da un adeguato spessore di materiale coibente ecologico multistrato sandwich, che assicura una minima dispersione di energia. La configurazione finale utilizzata è mostrata in **Figura 3.30**, mentre uno schema rappresentativo è presente in **Appendice E**.
La caratterizzazione della massa sospesa non rotante è importante al fine della corretta interpretazione dei dati. Pertanto, sono state eseguite dieci misurazioni per ogni albero presente in laboratorio con lo scopo di verificarne la reale geometria. I valori medi sono riportati in **Tabella 3.4**.

Elemento	$d_{esterno}$ $[mm]$	$d_{interno}$ $[mm]$	*Massa* $[g]$	*Materiale*
Albero 1	12.89	–	54.73	Ottone
Albero 2	13.02	–	56.30	Ottone
Albero 3	13.11	–	56.51	Ottone
Albero 4	13.23	–	57.72	Ottone
Albero 5	13.02	–	55.64	Ottone
Albero Cavo 1	13.02	9.05	28.62	Ottone
Albero Cavo 2	13.02	8.03	11.08	Alluminio
Albero Cavo 3	13.10	8.97	29.46	Ottone
Albero Cavo 4	13.10	7.98	11.36	Alluminio

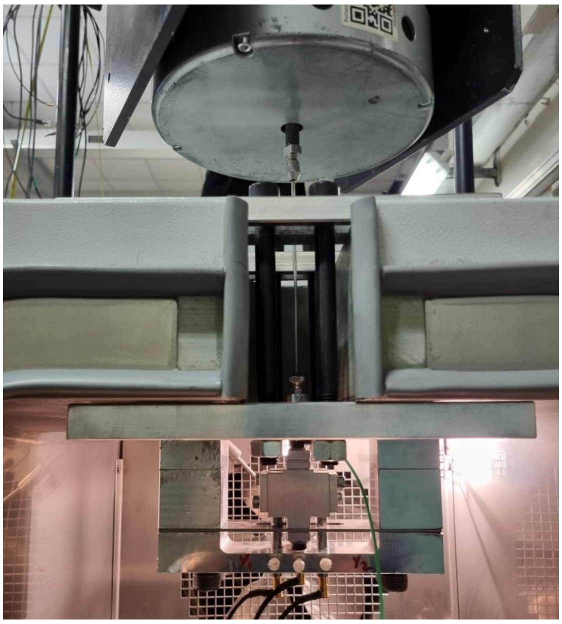
Tabella 3.4: Caratterizzazione della massa sospesa non rotante

Lo schema dei test sperimentali effettuate sono le seguenti:

- Prove dinamiche a temperatura controllata;
- Prove di ripetibilità sulla stessa coppia di O-Ring, provvedendo allo smontaggio e montaggio del banco tra una prova e quella successiva;
- Prove nelle quali vengono sostituiti gli O-Ring dopo ogni prova.



(a)



(b)

Figura 3.30: Foto del set-up utilizzato per la caratterizzazione degli O-Ring.

Gli O-Ring in prova sono tutti caratterizzati da:

- diametro nominale $D = 13$ mm
- diametro di corda $\Phi = 1$ mm

I test sono stati eseguiti utilizzando:

- L'albero No.3, di diametro nominale pari a 13.10 mm
- I coperchi con diametro nominale della sede degli anelli pari a 14.7 mm

Come affrontato nel **Capitolo 2** è importate valutare i parametri di *squeeze* e di *stretch*.
Facendo riferimento alla **Figura 2.1**, e riportando per comodità le **Equazioni 2.1** e **2.2**, si possono quindi valutare i parametri nominali:

$$\delta = (1 - \frac{D_e - D_i}{2\Phi}) \cdot 100 = 20\%$$

$$\varepsilon = \frac{D_i - D}{D} \cdot 100 = 0.77\%$$

Dalle misurazioni effettuate, è stato possibile calcolare i valori di *squeeze* e di *stretch* effettivi. In tabella sono indicati i parametri medi e la deviazione standard delle misure effettuate.

$\overline{D}_i$ $[mm]$	σ_{albero} $[-]$	$\overline{D}_{e,1}$ $[mm]$	σ_1 $[-]$	$\overline{D}_{e,2}$ $[mm]$	σ_2 $[-]$
13.11	0.0099	14.72	0.0163	14.72	0.0111

Tabella 3.5: Caratterizzazione della massa sospesa non rotante (Albero No.3) e delle sedi degli O-Ring sui due coperchi

I valori reali dei parametri risultano quindi essere:

$$\delta = 19.68\% \qquad \varepsilon = 0.85\%$$

Per l'elaborazione e la rappresentazione grafica dei risultati è stato utilizzato il software di calcolo MATLAB. I dati in output dal sistema di acquisizione presenti nei file *.txt* comprendono: la forza trasmessa dallo shaker, rilevata dalla cella di carico; la misurazione della posizione dell'housing in due punti differenti, in modo da poter avere una stima più efficace, tramite i trasduttori capacitivi; e la misurazione della posizione dell'albero, rilevata dal sensore capacitivo in posizione centrale. Una sezione del banco è mostrata in **Figura 3.31** Lo script è visionabile in **Appendice D**. All'interno di questo è possibile osservare come, a seguito del calcolo degli spettri dei segnali in ingresso di forza e spostamenti, vengono calcolati i valori dei coefficienti di rigidezza e smorzamento dall'**Equazione 3.6** precedentemente descritta.

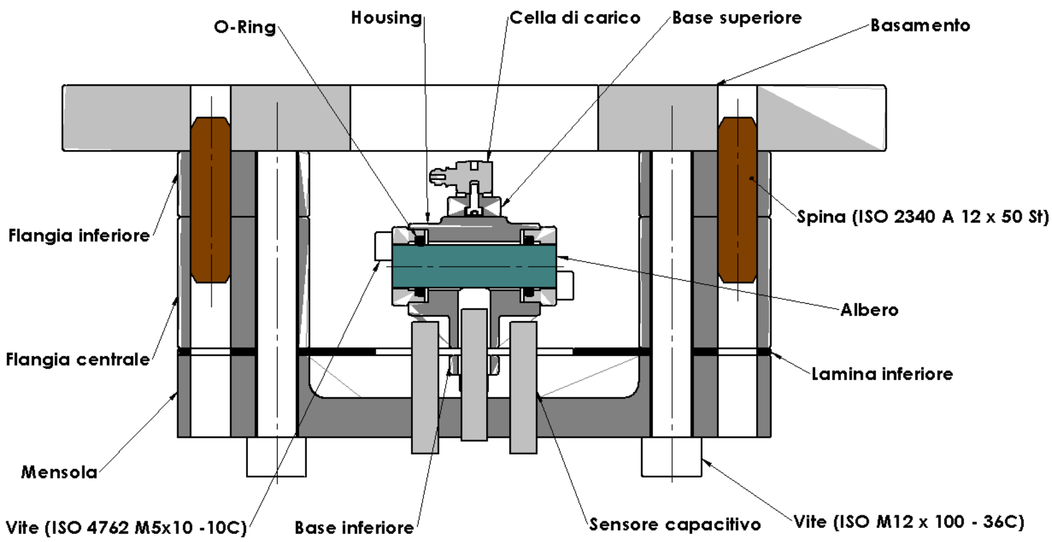


Figura 3.31: Sezione dello schema del banco prova.

Prove a temperatura controllata

Le prove a temperatura controllata sono state effettuate sempre sulla stessa coppia di O-Ring, senza modificare le condizioni di lavoro tra una prova e quella successiva, ovvero sempre con lo stesso montaggio.
Gli step seguiti sono stati i seguenti:

1. Montaggio dell'intero banco prova all'interno della camera termostatica;

2. Impostazione della temperatura voluta tramite il pannello di controllo della camera;

3. Raggiunta la temperatura stabilita e dopo aver atteso il tempo necessario in modo da assicurarsi che i componenti del banco abbiano raggiunto tale temperatura, sono stati eseguiti i test dinamici;

4. Ripetizione della procedura al punto 2 con una temperatura di prova superiore;

5. Spegnimento della camera climatica e apertura della porta, fino a raggiungere la temperatura ambiente.

Questa procedura è stata ripetuta per tre volte, in modo da assicurare una buona affidabilità dei dati. Le prove sono state effettuate alle temperature:

- 25° C
- 40° C
- 80° C
- 120° C

La temperatura massima raggiunta nelle prove, pari a 120° C è dovuta al limite massimo di temperatura di esercizio consentito dalla cella di carico Kiestler. I risultati ottenuti sono riportati di seguito.

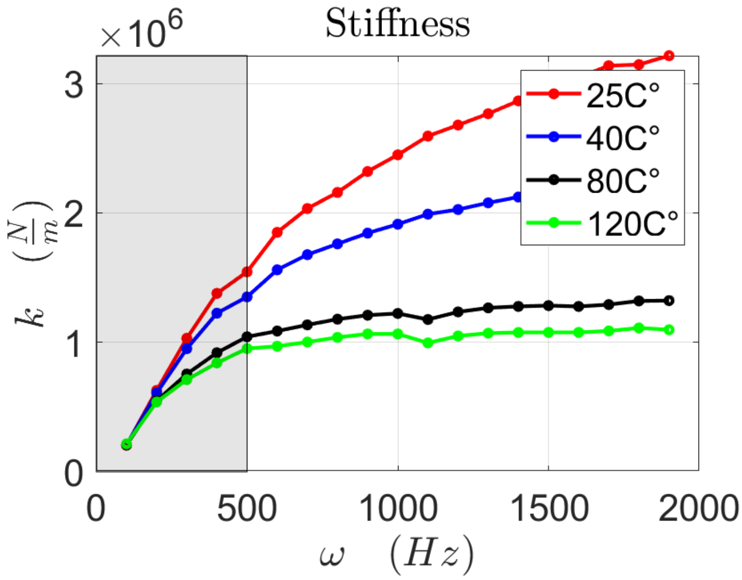


Figura 3.32: Confronto della rigidezza in funzione della frequenza per diverse temperature.

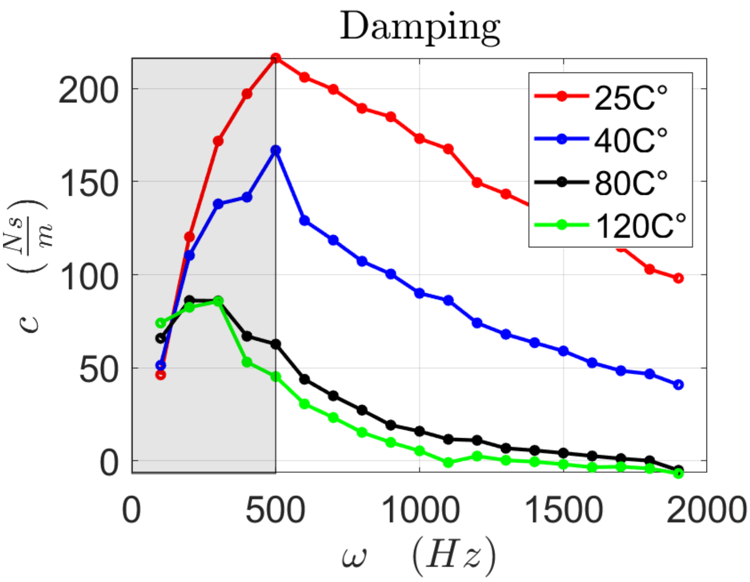


Figura 3.33: Confronto dello smorzamento in funzione della frequenza per diverse temperature.

Le **Figure 3.32** e **3.33** mostrano che, indipendentemente dalla temperatura di esercizio, la rigidezza ha un andamento decrescente con l'aumento della frequenza mentre lo smorzamento si comporta in modo opposto, confermando quanto riportato dagli studi precedenti affrontati nel **Capitolo 2**. Dai grafici si nota inoltre come l'incremento della temperatura di lavoro influenzi negativamente le prestazioni in termini di rigidezza e smorzamento degli anelli elastomerici, in quanto in entrambi i casi tali valori diminuiscono con l'aumento della temperatura. Come visto in **Sezione 3.4**, dati di misurazione ottimali si ottengono per un determinato sfasamento tra albero e l'alloggiamento, ovvero per frequenze maggiori di 500 Hz.

Prove di ripetibilità

Le prove di ripetibilità sono state effettuate provvedendo allo smontaggio e al montaggio del banco prova dopo ogni test, utilizzando sempre la stessa coppia di O-Ring. Lo scopo di questa analisi è quello di valutare la capacità del test di generare gli stessi risultati tra una serie di misure nelle quali le condizioni non vengono modificate.
Gli step, che sono stati ripetuti per dieci volte, sono i seguenti:

1. Montaggio dell'intero banco prova all'interno della camera termostatica in modo da poter visualizzare l'effettiva temperatura di lavoro;
2. Esecuzione del test dinamico;
3. Smontaggio del banco prova, con rimozione degli O-Ring dalla propria sede;
4. Ripetizione della procedura al punto 1, utilizzando la stessa coppia di O-Ring;

I risultati ottenuti, mostrati in **Figura 3.34** e in **Figura 3.35**, presentano delle curve che si sovrappongono lungo tutto il range di frequenze. Come si nota dai grafici, la dispersione dei dati si limita alla prova *Test 3*. Tale effetto è dovuto ad un montaggio non corretto degli anelli all'interno della propria sede. Per questo motivo risulta importante prestare molta attenzione durante il montaggio dell'intero banco prova.
Nonostante i test siano stati effettuati a temperatura ambiente, per completezza sono state registrare le temperature rilevate dal pannello di controllo della camera termostatica. Le temperatura variano nel range $30 \div 35°$ C. Si evidenzia come, principalmente ad elevate frequenze, anche una piccola differenza di temperatura incida, seppure in minima forma, nelle caratteristiche di rigidezza e smorzamento.

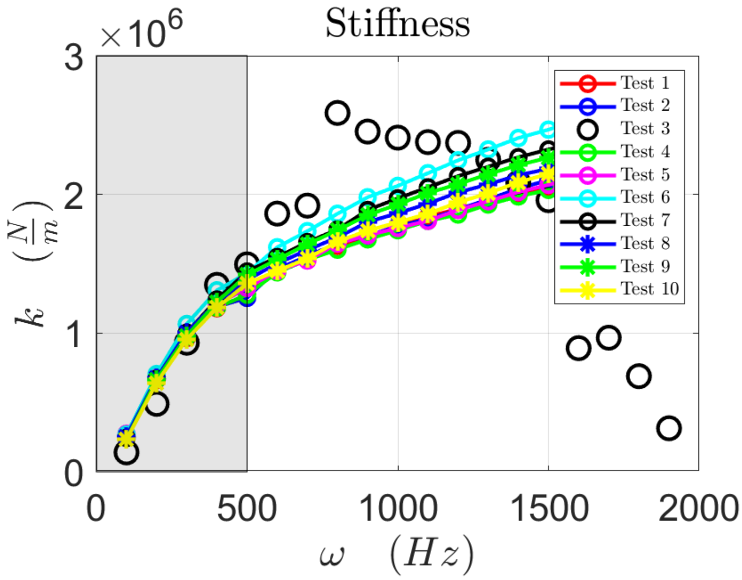


Figura 3.34: Confronto della rigidezza in funzione della frequenza - Prove di ripetibilità.

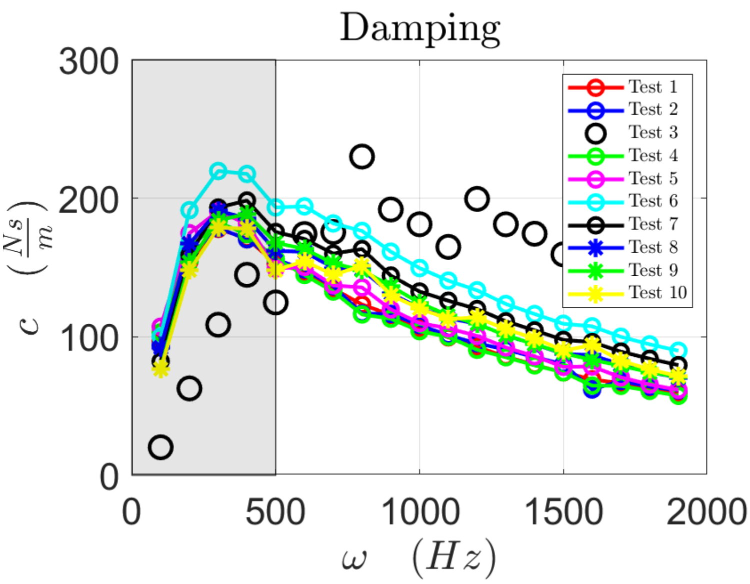


Figura 3.35: Confronto dello smorzamento in funzione della frequenza - Prove di ripetibilità.

Prove con sostituzione degli O-Ring

Questa tipologia di test ha previsto la sostituzione di O-ring dello stesso materiale (FKM 75 ShA). I passi seguiti sono quindi gli stessi della prova precedente, con la sola modifica dell'ultimo step. In questo caso, la procedura è stata eseguita per cinque volte. I grafici mostrano una buona correlazione tra le varie prove in quanto si ha un ottima sovrapposizione delle curve. Come nelle prove precedenti, si evidenzia come la temperatura leggermente minore registrata durante l'esecuzione della prova *Test 1* abbia influenza positiva, principalmente con l'aumento della frequenza, sul comportamento dinamico degli anelli elastomerici.

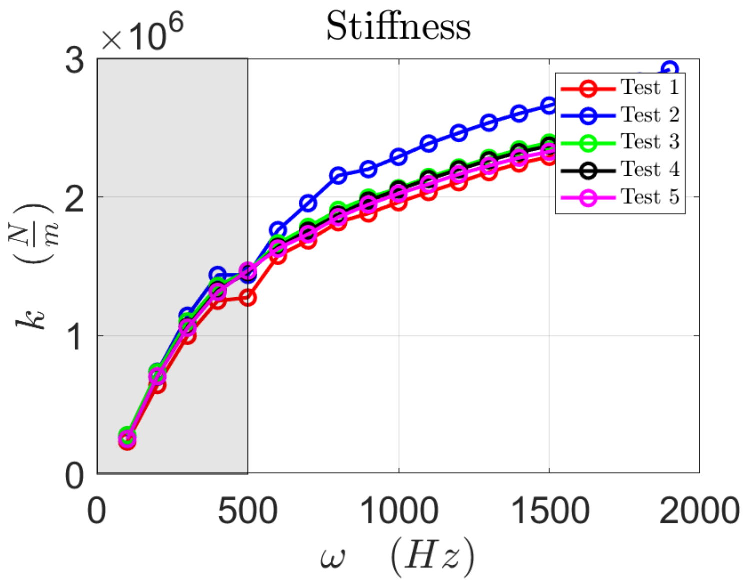


Figura 3.36: Confronto della rigidezza in funzione della frequenza - Prove con sostituzione degli O-Ring in prova.

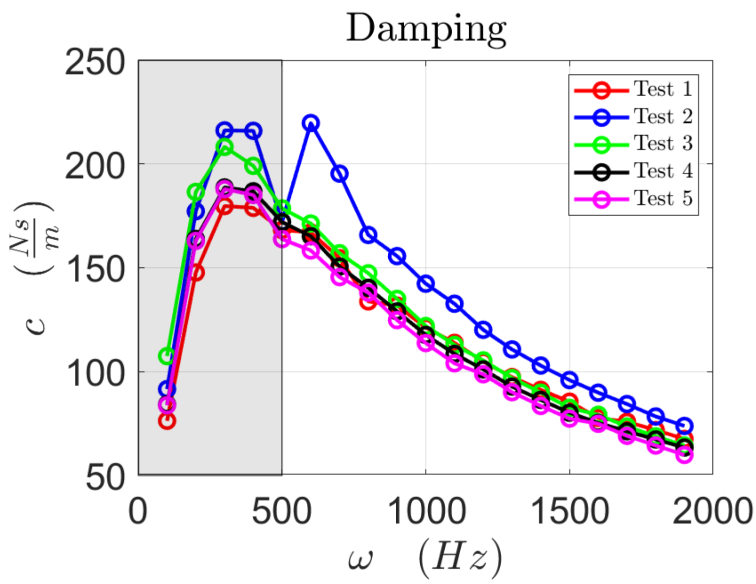


Figura 3.37: Confronto dello smorzamento in funzione della frequenza - Prove con sostituzione degli O-Ring in prova.

3.6 Confronto tra modello numerico e modello sperimentale

Con i dati ricavati nelle sezioni precedenti, è infine possibile effettuare un confronto del diagramma di Bode tra il modello numerico ed il modello sperimentale del sistema ad un grado di libertà X/Y. I dati del modello sperimentale sono stati ricavati utilizzando lo stesso script Matlab presente in **Appendice D**, in modo da calcolare i valori di ampiezza e fase del diagramma di Bode. Gli stessi dati di rigidezza e smorzamento sono quindi stati inseriti nell'**Equazione 3.9** in modo da verificare la correlazione fra i due modelli. Il confronto è mostrato in **Figura 3.38**.

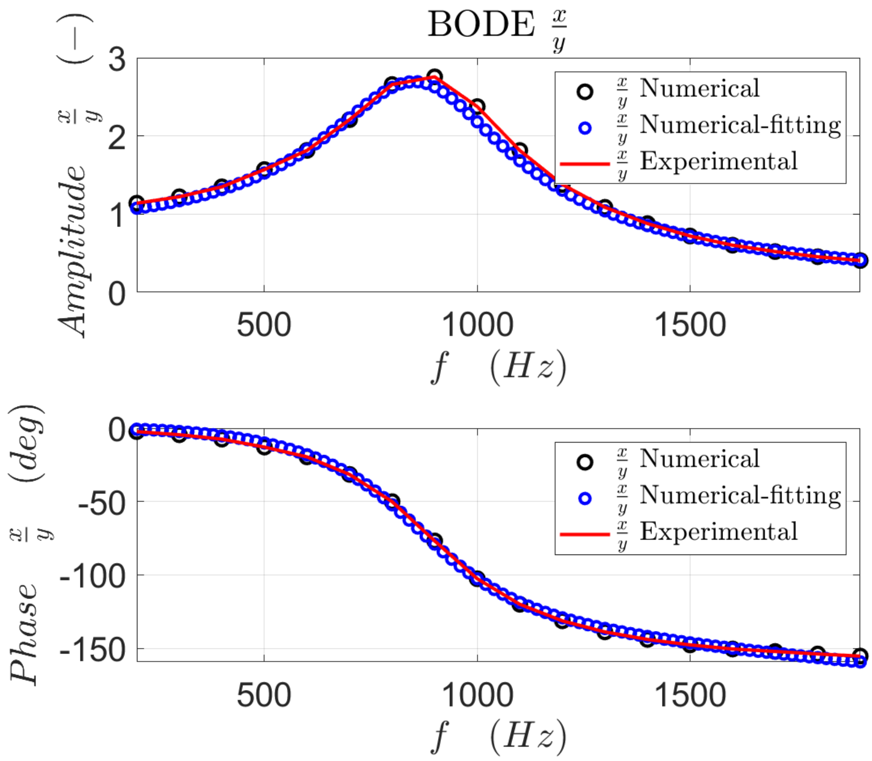


Figura 3.38: Diagramma di Bode del modello sperimemtale e del modello numerico.

Il diagramma mostra come il diagramma di Bode del modello sperimentale sia conforme con quello ottenuto analiticamente. Per avere una visione più comprensibile del grado di correlazione, è stato inserito nel grafico anche il modello numerico nel quale sono introdotti i valori di rigidezza e smorzamento per un numero maggiore di frequenze tramite un interpolazione dei dati.

Capitolo 4

Analisi modale

4.1 Housing

Il sistema Housing è caratterizzato da un singolo grado di libertà. Tale sistema è stato analizzato tramite la rappresentazione nello spazio degli stati, ovvero una descrizione del sistema dinamico in cui si fa particolare riferimento alle variabili di stato del sistema. Una spiegazione di tale metodo è presente in **Allegato C**.

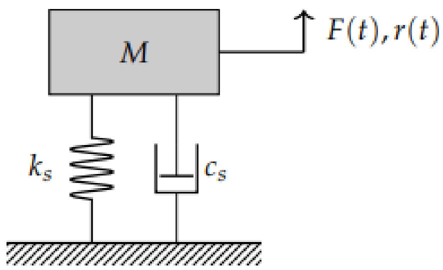


Figura 4.1: Rappresentazione dell'alloggiamento.

Si prenda in considerazione la **Figura 4.1**. L'equazione del moto che descrive il sistema:

$$M\ddot{r} + c_s\dot{r} + k_s r = F \tag{4.1}$$

Esplicitando il termine di grado maggiore, $\ddot{r}$:

$$\ddot{r} = -\frac{1}{M}(c_s\dot{r} + k_s r - F)$$

Vengono definite due nuove variabili che compongono il vettore di stato $\{x(t)\}$:

$$\{x(t)\} = \begin{Bmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} r(t) \\ \dot{r}(t) \end{Bmatrix}$$

Il sistema composto da una equazione differenziale del secondo ordine può quindi essere riformulato come due equazioni del primo ordine.

$$\begin{cases} \dot{x}_1 = x_2 \\ \dot{x}_2 = \frac{1}{M}(-c_s x_2 - k_s x_1 + F) \end{cases}$$

Si può riscrivere il sistema in forma matriciale.

$$\{\dot{x}(t)\} = [A]\,\{x(t)\} + [B]\,\{u(t)\}$$

$$\{y(t)\} = [C]\,\{x(t)\} + [D]\,\{u(t)\}$$

Le matrici, considerando la traslazione dell'housing come output del sistema, risultano essere:

$$\begin{Bmatrix} \dot{x}_1(t) \\ \dot{x}_2(t) \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -\frac{k_s}{M} & -\frac{c_s}{M} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \end{Bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ \frac{1}{M} \end{bmatrix} u(t)$$

$$y(t) = \begin{bmatrix} 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \end{Bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \end{bmatrix} u(t)$$

4.2 Albero

4.2.1 Spazio delle configurazioni

Il sistema di Albero e O-Ring può essere rappresentato dal diagramma di corpo libero del sistema presente in **Figura 4.2**, da cui si ricavano le equazioni del moto:

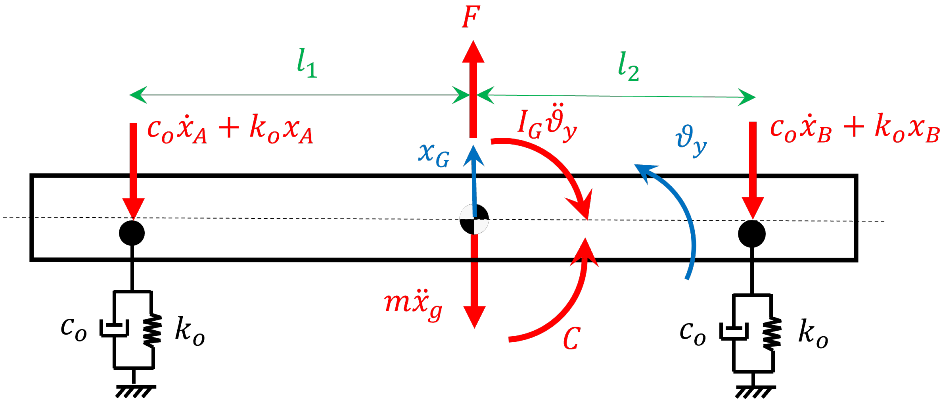


Figura 4.2: Diagramma di corpo libero albero - 2 gradi di libertà.

$$m\ddot{x}_G + c_o\dot{x}_A + k_o x_A + c_o\dot{x}_B + k_o x_B = F \tag{4.4}$$

$$I_G\ddot{\theta} - c_o\dot{x}_A l_1 - k_o x_A l_1 + c_o\dot{x}_B l_2 + k_o x_B l_2 = C \tag{4.5}$$

Sostituendo gli spostamenti e le velocità in A e B in funzione delle variabili x_G e θ e delle loro derivate:

$$x_A = x_G - l_1\theta \qquad x_B = x_G + l_2\theta \qquad \dot{x}_A = \dot{x}_G - l_1\dot{\theta} \qquad \dot{x}_B = \dot{x}_G + l_2\dot{\theta}$$

si ottiene:

$$m\ddot{x}_G + c_o(\dot{x}_G - l_1\dot{\theta}) + k_o(x_G - l_1\theta) + c_o(\dot{x}_G + l_2\dot{\theta}) + k_o(x_G + l_2\theta) = F \tag{4.6}$$

$$I_G\ddot{\theta} - c_o(\dot{x}_G - l_1\dot{\theta})l_1 - k_o(x_G - l_1\theta)l_1 + c_o(\dot{x}_G + l_2\dot{\theta})l_2 + k_o(x_G + l_2\theta)l_2 = C \tag{4.7}$$

Il problema può essere riscritto in forma matriciale:

$$\begin{bmatrix} m & 0 \\ 0 & I_G \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \ddot{x}_G \\ \ddot{\theta} \end{Bmatrix} + \begin{bmatrix} (c_o + c_o) & (c_o l_2 - c_o l_1) \\ (c_o l_2 - c_o l_1) & (c_o l_1^2 + c_o l_2^2) \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \dot{x}_G \\ \dot{\theta} \end{Bmatrix} +$$

$$+\begin{bmatrix}(k_o+k_o) & (k_ol_2-k_ol_1)\\(k_ol_2-k_ol_1) & (k_ol_1^2+k_ol_2^2)\end{bmatrix}\begin{Bmatrix}x_G\\\theta\end{Bmatrix}=\begin{Bmatrix}F\\C\end{Bmatrix} \tag{4.8}$$

Il problema può essere descritto da un sistema di equazioni del secondo ordine differenziali lineari, nella forma:

$$[M]\{\ddot{x}\}+[C]\{\dot{x}\}+[K]\{x\}=\{F\} \tag{4.9}$$

Dall'**Equazione 4.9** si possono facilmente distinguere la matrice di massa $[M]$, la matrice di smorzamento $[C]$ e la matrice di rigidezza $[K]$, il vettore delle coordinate generalizzate $\{x\}$ e il vettore delle forzanti $\{F\}$.

Risposta libera

Si considera, in questo caso, un sistema non forzato di cui si cerca una soluzione conservativa nella quale non viene considerato lo smorzamento, in quanto lo smorzamento in una struttura reale favorisce la diminuzione delle vibrazioni indesiderate. Le equazioni del moto diventano:

$$[M]\{\ddot{x}\}+[K]\{x\}=\{F\}=\{0\} \tag{4.10}$$

Si ricerca una soluzione sincrona, la cui forma è del tipo:

$$\{\ddot{x}\}=\begin{Bmatrix}\ddot{x}_G(t)\\\ddot{\theta}(t)\end{Bmatrix}=\begin{Bmatrix}x_{G0}\\\theta_0\end{Bmatrix}\cos(\omega t)=\{x_0\}\cos(\omega t)$$

Questo semplifica il problema nella forma:

$$[K]\{x_0\}=\omega^2[M]\{x_0\} \tag{4.11}$$

Si definisce quindi il problema agli autovalori, o *autoproblema*:

$$([K]-\omega^2[M])\{x_0\}=0 \tag{4.12}$$

nel quale, oltre a quella *banale* nulla, la soluzione viene calcolata sfruttando la relazione

$$det([K]-\omega^2[M])=0 \tag{4.13}$$

É possibile così trovare gli autovalori ω_i^2, le cui radici definiscono le pulsazioni proprie del sistema, e dai quali si ottiene la matrice diagonale degli autovalori $[\Lambda]$. Si risolve quindi il sistema ricavando gli autovettori ψ_i, ovvero le forme modali del sistema, che sono definiti a meno di una costante, i quali formano la matrice modale $[\Psi]$ disponendoli per colonne. In generale, un sistema di N equazioni avrà N coppie univoche di autovalore/autovettore.

Per caratterizzare correttamente le due frequenze proprie, è stata effettuata dapprima una normalizzazione degli autovettori imponendo il primo elemento pari al valore unitario, ovvero $\psi_{11} = \psi_{12} = 1$, e successivamente sono stati individuati i punti nodali. Quest'ultima operazione è utile per individuare quale delle due frequenze corrisponde ad un movimento di pura traslazione.
É possibile applicare la trasformazione modale diretta moltiplicando l'**Equazione 4.10** per $[\Psi]$ e premoltiplicando per la sua trasposta $[\Psi]^T$, si ottengono le matrici diagonali indicate come matrice di massa generalizzata e matrice di rigidezza generalizzata (oppure, rispettivamente, matrice di massa modale e di rigidezza modale):

$$[\Psi]^T[M][\Psi]\{\ddot{\eta}\} + [\Psi]^T[K][\Psi]\{\eta\} = \{Q\} = \{0\} \tag{4.14}$$

dove si definisce con $\{\eta(t)\}$, da cui $\{x(t)\} = [\Psi]\{\eta(t)\}$, il vettore delle coordinate modali, e si definisce con $\{Q\}$ il vettore della forzante generalizzato. Si arriva in questo modo ad un sistema di equazioni differenziali disaccoppiate. Tale proprietà è legata alle caratteristiche delle matrici $[M]$ e $[K]$ di essere entrambe simmetriche, il ché implica che gli autovalori e gli autovettori siano reali.

Risposta forzata

Si prende ora in esame la risposta del sistema smorzato.

$$[M]\{\ddot{x}\} + [C]\{\dot{x}\} + [K]\{x\} = \{F\} \tag{4.15}$$

In questo caso non è possibile applicare la trasformazione modale diretta utilizzando la matrice modale $[\Phi]$ in quanto non si realizza la diagonalizzazione della matrice $[C]$. Per il calcolo della risposta è possibile ricorrere all'inversione della matrice di rigidezza dinamica. Si ottiene di conseguenza che:

$$([K] - \omega^2[M] + i\omega[C])\{q\} = \{F\} \tag{4.16}$$

Dove si definisce la matrice di rigidezza dinamica $[K_{din}] = [K] - \omega^2[M] + i\omega[C]$.
Si può quindi ricavare la relazione:

$$\{q\} = [K_{din}(\omega)]^-1\{F\} = [\alpha(\omega)]\{F\} \tag{4.17}$$

con $[\alpha]$ che rappresenta la matrice di recettanza.

Le **Figure 4.3** e **4.4** mostrano il diagramma di Bode ottenuto dalla matrice di recettanza, essendo tale matrice funzione della frequenza di eccitazione[1]. La matrice di recettanza mostra, nella prima colonna, l'effetto della forza F sul valore della traslazione x_G e su quello della rotazione θ. La seconda colonna della matrice, invece, mostra l'influenza della coppia C.

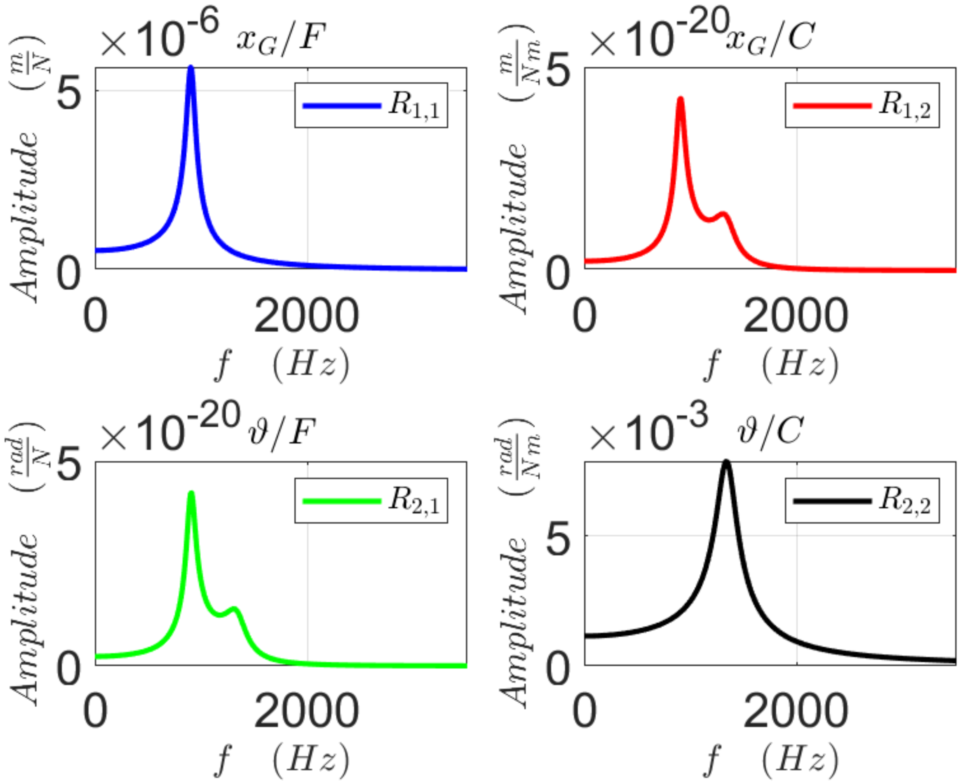


Figura 4.3: Diagramma di Bode: Ampiezza - Matrice di recettanza. (Albero No.1 - O-Ring Viton 70)

[1]Il valore unitario di rigidezza dell'O-ring è quello caratteristico di un O-Ring Viton70 in prova con un valore di *Squeeze 10%*, ottenuto dopo un processo di fitting ed utilizzato all'interno della funzione di trasferimento $x(s)/y(s)$ per un confronto con i dati sperimentali. Corrisponde quindi al valore di una rigidezza equivalente.

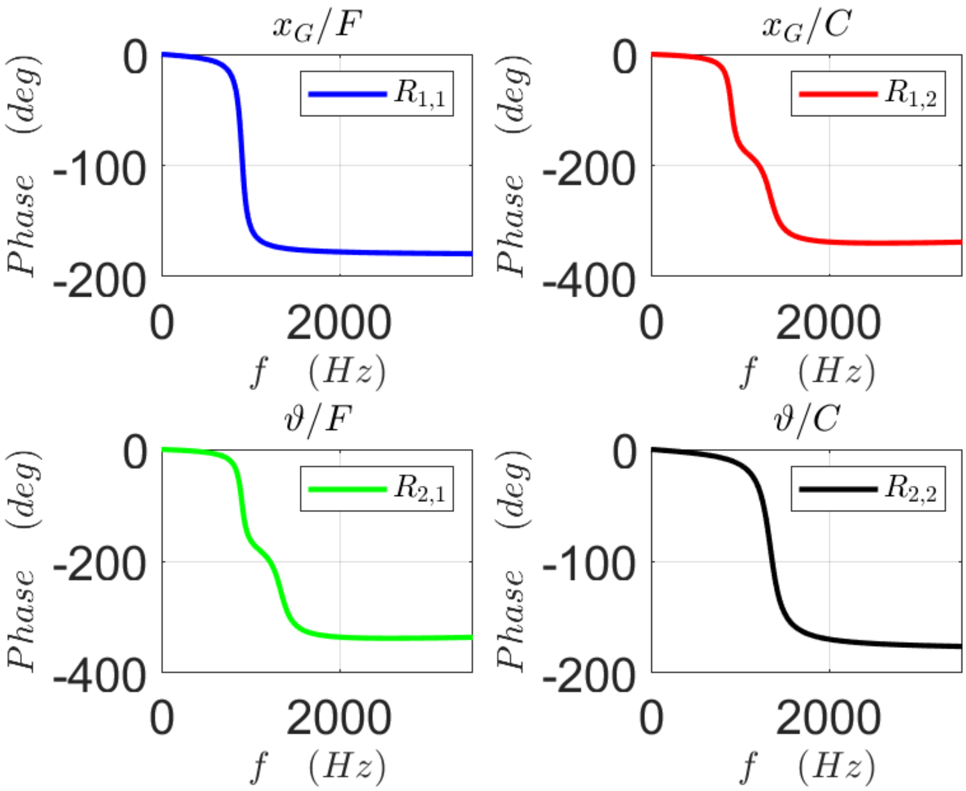


Figura 4.4: Diagramma di Bode: Fase - Matrice di recettanza. (Albero No.1 - O-Ring Viton 70)

La **Figura 4.5** mostra l'ampiezza, normalizzata rispetto al corrispettivo valore massimo, del diagramma di Bode per i termini diagonali della matrice di recettanza.

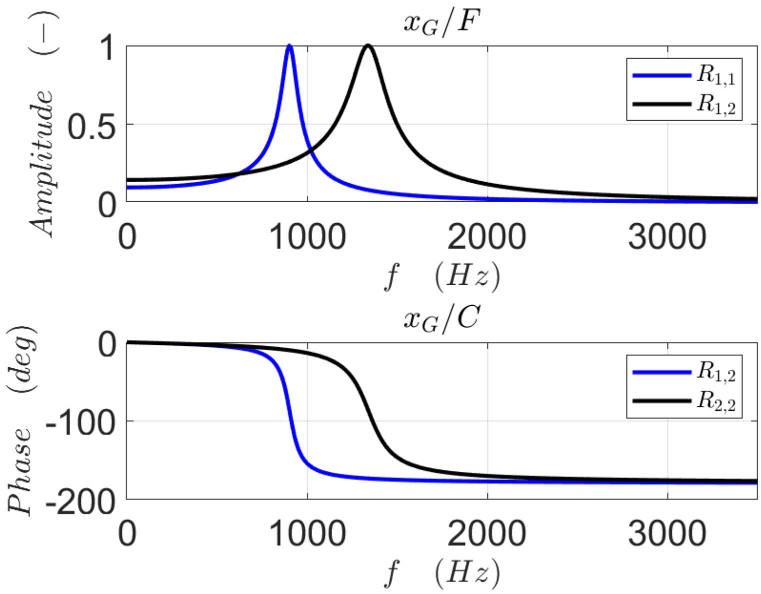


Figura 4.5: Diagramma di Bode normalizzato termini diagonali della matrice di recettanza. (Albero No.1 - O-Ring Viton 70)

Cambio di coordinate

Risulta possibile effettuare gli stessi calcoli presenti in in **Sezione 4.2.1** utilizzando un sistema di coordinate differente (x_A, x_B). Sostituendo nell'**Equazione 4.7** le seguenti espressioni:

$$\ddot{\theta} = \frac{\ddot{x}_B - \ddot{x}_A}{l_1 + l_2}$$

$$\ddot{x}_G = \frac{l_2}{l_1 + l_2}\ddot{x}_A + \frac{l_1}{l_1 + l_2}\ddot{x}_B$$

Si ottengono:

$$m(\frac{l_2}{l_1 + l_2}\ddot{x}_A + \frac{l_1}{l_1 + l_2}\ddot{x}_B) + c_o\dot{x}_A + k_o x_A + c_o\dot{x}_B + k_o x_B = F \tag{4.18}$$

$$I_G(\frac{\ddot{x}_B - \ddot{x}_A}{l_1 + l_2}) - c_o\dot{x}_A l_1 - k_o x_A l_1 + c_o\dot{x}_B l_2 + k_o x_B l_2 = C \tag{4.19}$$

Il problema può essere riscritto in forma matriciale:

$$\begin{bmatrix} \frac{ml_2}{l_1+l_2} & \frac{ml_1}{l_1+l_2} \\ -\frac{I_G}{l_1+l_2} & \frac{I_G}{l_1+l_2} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \ddot{x}_A \\ \ddot{x}_B \end{Bmatrix} + \begin{bmatrix} c_o & c_o \\ -c_o l_1 & c_o l_2 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \dot{x}_A \\ \dot{x}_B \end{Bmatrix} +$$

$$+ \begin{bmatrix} k_o & k_o \\ -k_o l_1 & k_o l_2 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} x_A \\ x_B \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} F \\ C \end{Bmatrix} \tag{4.20}$$

4.2.2 State Space

Riscrivendo le **Equazioni 4.6** e **4.7** di corpo libero dell'albero:

$$m\ddot{x}_G + (c_o + c_o)\dot{x}_G + (c_o l_2 - c_o l_1)\dot{\theta} + (k_o + k_o)x_G + (k_o l_2 - k_o l_1)\theta = F \quad (4.21)$$

$$I_G\ddot{\theta} + (c_o l_2 - c_o l_1)\dot{x}_G + (c_o l_2^2 + c_o l_1^2)\dot{\theta} + (k_o l_2 - k_o l_1)x_G + (k_o l_2^2 + k_o l_1^2)\theta = C \quad (4.22)$$

Si esplicitano i termini $\ddot{x}_G$ e $\ddot{\theta}$:

$$\ddot{x}_G = -\frac{(c_o + c_o)}{m}\dot{x}_G - \frac{(c_o l_2 - c_o l_1)}{m}\dot{\theta} - \frac{(k_o + k_o)}{m}x_G - \frac{(k_o l_2 - k_o l_1)}{m}\theta + \frac{F}{m}$$

$$\ddot{\theta} = -\frac{(c_o l_2 - c_o l_1)}{I_G}\dot{x}_G - \frac{(c_o l_2^2 + c_o l_1^2)}{I_G}\dot{\theta} - \frac{(k_o l_2 - k_o l_1)}{I_G}x_G - \frac{(k_o l_2^2 + k_o l_1^2)}{I_G}\theta + \frac{C}{I_G}$$

Viene definito il vettore di stato $\{x(t)\}$:

$$\{x(t)\} = \begin{Bmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \\ x_3(t) \\ x_4(t) \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} x_G \\ \theta \\ \dot{x}_G \\ \dot{\theta} \end{Bmatrix}$$

Il sistema può quindi essere riformulato come quattro equazioni del primo ordine.

$$\begin{cases} \dot{x}_1 = x_3 \\ \dot{x}_2 = x_4 \\ \dot{x}_3 = -\frac{(c_o+c_o)}{m}x_3 - \frac{(c_o l_2 - c_o l_1)}{m}x_4 - \frac{(k_o+k_o)}{m}x_1 - \frac{(k_o l_2 - k_o l_1)}{m}x_2 + \frac{F}{m} \\ \dot{x}_4 = -\frac{(c_o l_2 - c_o l_1)}{I_G}x_3 - \frac{(c_o l_2^2 + c_o l_1^2)}{I_G}x_4 - \frac{(k_o l_2 - k_o l_1)}{I_G}x_1 - \frac{(k_o l_2^2 + k_o l_1^2)}{I_G}x_2 + \frac{C}{I_G} \end{cases}$$

Le matrici, considerando come output del sistema lo spostamento trasversale e angolare dell'albero , risultano essere:

$$\begin{Bmatrix} \dot{x}_1(t) \\ \dot{x}_2(t) \\ \dot{x}_3(t) \\ \dot{x}_4(t) \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ -\frac{(k_o+k_o)}{m} & -\frac{(k_o l_2 - k_o l_1)}{m} & -\frac{(c_o+c_o)}{m} & -\frac{(c_o l_2 - c_o l_1)}{m} \\ -\frac{(k_o l_2 - k_o l_1)}{I_G} & -\frac{(k_o l_2^2 + k_o l_1^2)}{I_G} & -\frac{(c_o l_2 - c_o l_1)}{I_G} & -\frac{(c_o l_2^2 + c_o l_1^2)}{I_G} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \\ x_3(t) \\ x_4(t) \end{Bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ \frac{1}{m} & 0 \\ 0 & \frac{1}{I_G} \end{bmatrix} u(t)$$

$$\begin{Bmatrix} y_1(t) \\ y_2(t) \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \\ x_3(t) \\ x_4(t) \end{Bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix} u(t)$$

Risulta a questo punto importante mostrare (**Figura 3.23**) il confronto fra i valori ottenuti dalle coordinate fisiche della matrice di recettanza, e quelli ottenuti descrivendo il problema nello spazio degli stati.

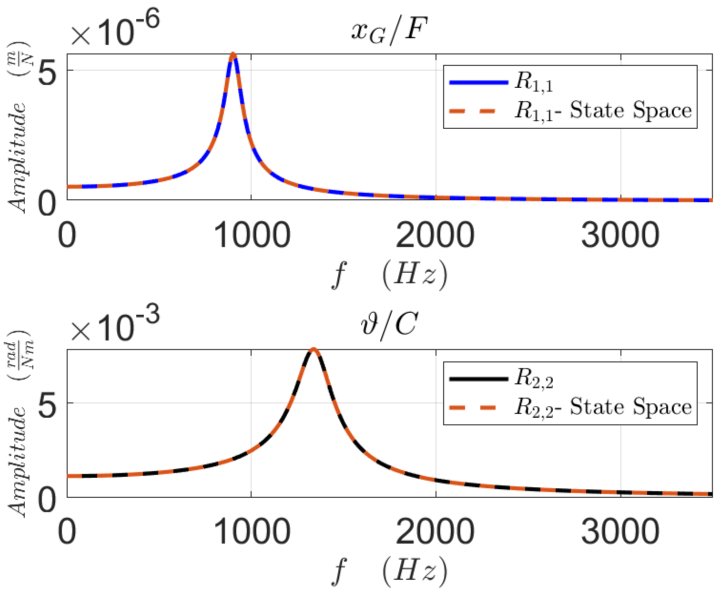


Figura 4.6: Diagramma di Bode: Ampiezza - Confronto termini diagonali matrice di recettanza e modello State Space. (Albero No.1 - O-Ring Viton 70)

4.3 Albero - Modello 1-DOF

Si considera ora il modello dell'albero ad un singolo grado di libertà. Se il sistema risulta essere simmetrico, ovvero $l_1 = l_2$, e nel caso si $k_{o1} = k_{o2}$ e $c_{o1} = c_{o2}$, può essere studiato considerando separatamente la rotazione e la traslazione dell'albero.

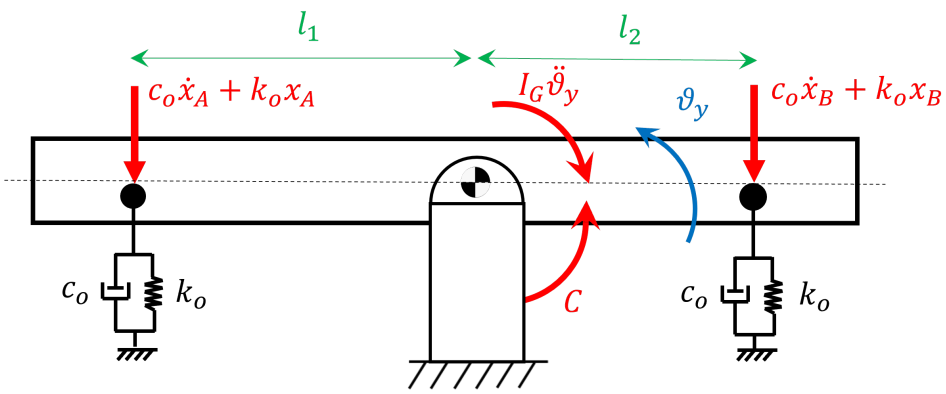


Figura 4.7: Albero ad 1 grado di libertà - Rotazione.

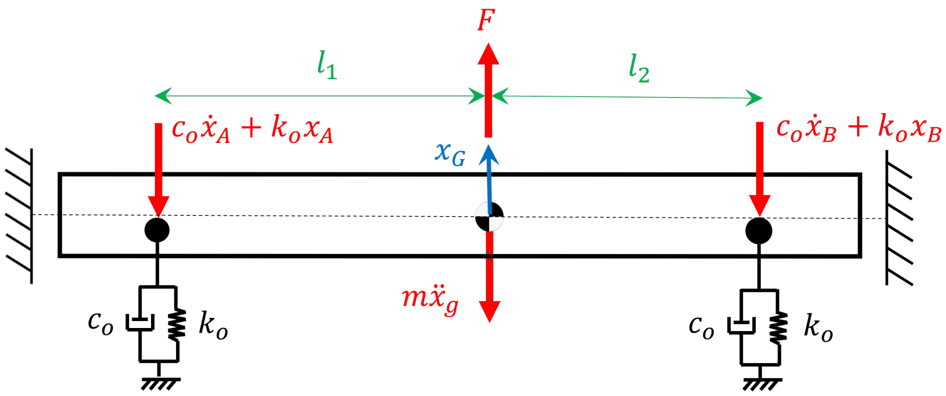


Figura 4.8: Albero ad 1 grado di libertà - Traslazione.

Dalle equazioni del moto definite precedentemente e affermando che:

- I_G è il momento diametrale di inerzia dell'albero, calcolato[2] come

$$I_G = \frac{1}{12}m(3R^2 + L^2);$$

- k_o è il valore di rigidezza del singolo O-Ring;
- c_o è il valore di smorzamento del singolo O-Ring;

Si definiscono come valori di rigidezza e smorzamento equivalenti di rotazione e traslazione:

$$k_{rot} = k_o l_1^2 + k_o l_2^2 \qquad c_{rot} = c_o l_1^2 + c_o l_2^2 \qquad k_{trasl} = k_o + k_o \qquad c_{trasl} = c_o + c_o$$

Dall'**Equazione 4.7**, la soluzione che si cerca è nella forma $\theta = \theta_0 e^{i\omega t}$, per cui derivando rispetto al tempo due volte la soluzione e sostituendo nell'equazione:

$$\omega_{n,rot} = \sqrt{\frac{k_{rot}}{I_G}} \tag{4.24}$$

In **Tabella 4.1** vengono mostrati i risultati ottenuti per ogni albero, dove per k_o è stato considerato lo stesso valore medio di riferimento del modello a due gradi di libertà, senza considerare quindi che il valore reale della rigidezza varia con la frequenza.

Elemento	$D\ [mm]$	$l\ [mm]$	Massa $[kg]$	$I_{d,G}\ [kg \cdot m^2]$	$f_{tilt}\ [Hz]$
Albero No.1	12,9	40	0,0547	$1{,}20 \cdot 10^{-5}$	1234,62
Albero No.2	13,0	40	0,0563	$1{,}23 \cdot 10^{-5}$	1217,04
Albero No.3	13,1	40	0,0565	$1{,}24 \cdot 10^{-5}$	1214,24
Albero No.4	13,2	40	0,0577	$1{,}26 \cdot 10^{-5}$	1201,45

Tabella 4.1: Valori della frequenza di tilting $[Hz]$ (**Eq. 4.24**) degli alberi per O-Ring Viton 70

Sviluppando le equazioni è possibile anche definire:

$$\zeta_{rot} = \frac{c_{rot}}{2\sqrt{k_{rot} I_G}} \tag{4.25}$$

[2]Momento diametrale di inerzia di un cilindro di raggio R, lunghezza L e massa m

$$\omega_{d,rot} = \omega_{n,rot}\sqrt{1-\zeta_{rot}^2} \tag{4.26}$$

Con lo stesso procedimento, dall'**Equazione 4.6**, la soluzione che si cerca è nella forma $x = x_0 e^{i\omega t}$, per cui derivando rispetto al tempo due volte la soluzione e sostituendo nell'equazione:

$$\omega_{n,trasl} = \sqrt{\frac{k_{trasl}}{m}} \tag{4.27}$$

Sviluppando le equazioni è possibile anche definire:

$$\zeta_{trasl} = \frac{c_{trasl}}{2\sqrt{k_{trasl}m}} \tag{4.28}$$

$$\omega_{d,trasl} = \omega_{n,trasl}\sqrt{1-\zeta_{trasl}^2} \tag{4.29}$$

É possibile a questo punto effettuare un confronto tra il modello a singolo grado di libertà con quello a due gradi di libertà presente nella sezione precedente. Sviluppando gli stessi calcoli, si ottiene:

$$\frac{\theta_0}{C_0} = \frac{1}{k_{rot} - \omega^2 I_G + i\omega c_{rot}} \tag{4.30}$$

$$\frac{x_0}{F_0} = \frac{1}{k_{trasl} - \omega^2 m + i\omega c_{trasl}} \tag{4.31}$$

La **Figura 4.9** mostra il confronto dei risultati ottenuti con i due modelli, da cui si evince che le due soluzioni coincidono perfettamente.

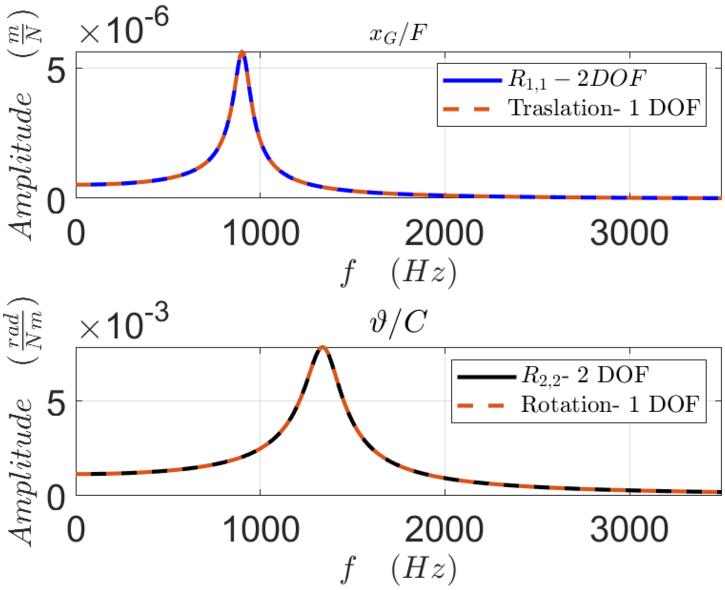


Figura 4.9: Confronto soluzioni ottenute per il modello a due gradi di libertà ed il modello a singolo grado di libertà. (Albero No.1 Viton 70)

Sono stati valutati gli effetti della modifica della geometria dell'albero. In particolare, è stato analizzato il caso nel quale si vada ad aumentare la lunghezza dell'albero in maniera simmetrica rispetto alla distanza assiale tra i due O-ring, che rimane inalterata. Il risultato è mostrato in **Figura 4.10** nel caso dell'Albero No.1, dove si nota che incrementando il valore della lunghezza effettiva dell'albero, si ha contemporaneamente una diminuzione della ω_{rot}, frequenza di tilting, e della ω_{trasl}, frequenza smorzata di traslazione, fino ad arrivare ad una lunghezza tale nella quale si incontrano.

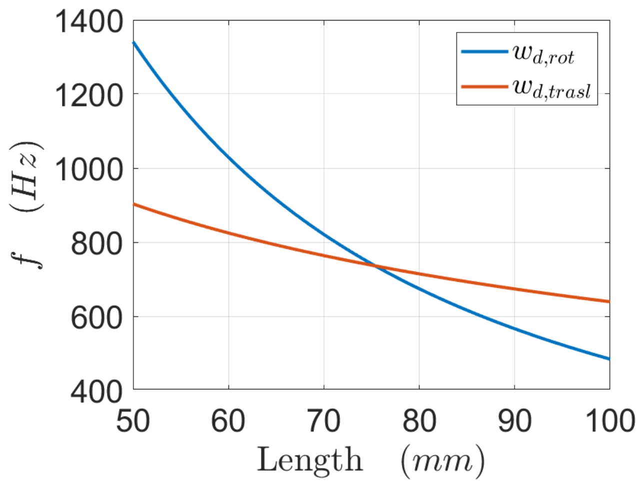


Figura 4.10: Andamento della frequenza smorzata di rotazione e di traslazione al variare della lunghezza dell'albero. (Albero No.1 Viton 70)

É stato anche valutato l'effetto dell'aumento non simmetrico della misura della lunghezza dell'albero, mostrato nel grafico seguente. Si nota come, nonostante l'incremento della dimensione longitudinale, le due frequenze non tendono ad intersecarsi, in quanto le distanze degli appoggi dell'albero risultano essere abbastanza distanti da non far prevalere la rotazione.

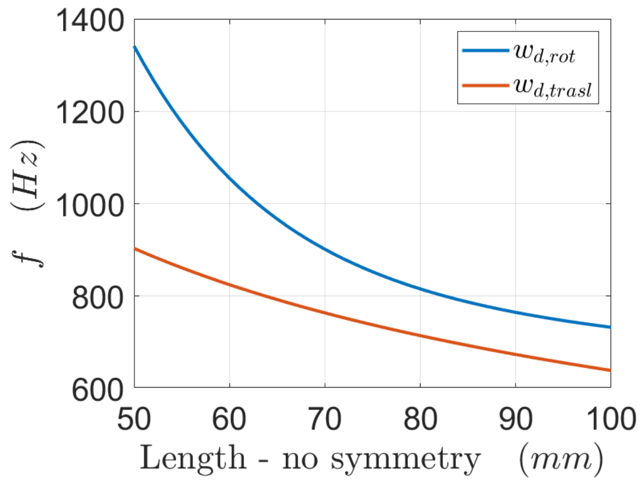


Figura 4.11: Andamento della frequenza smorzata di rotazione e di traslazione al variare della lunghezza dell'albero in maniera non simmetrica. (Albero No.1 Viton 70)

Con lo scopo di analizzare meglio quest'ultimo risultato, sono state modificate le distanze delle sedi degli O-Ring in modo da avvicinarli rispetto al caso originale. Si è di conseguenza valutato l'andamento delle frequenze ω_{rot} e ω_{trasl} quando i due appoggi si trovino inizialmente ad una una distanza di 12.5 mm (valore reale di 3 mm) dalle estremità dell'albero.

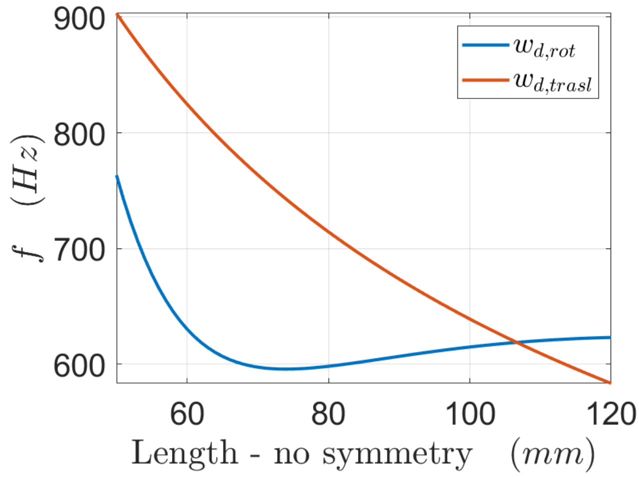


Figura 4.12: Andamento della frequenza smorzata di rotazione e di traslazione al variare della lunghezza dell'albero in maniera non simmetrica, con variazione della distanza originale delle sedi degli O-Ring. (Albero No.1 Viton 70)

4.4 Rotore supportato da due cuscinetti a gas

La formulazione, e la conseguente soluzione, delle equazioni rotodinamiche affrontate in questa sezione descrivono il modello di un semplice rotore rigido supportato da due *journal bearings*. Tale configurazione si rivela adatta alla descrizione di una grande varietà di contesti nel campo delle turbomacchine. La configurazione studiata, presente in **Figura 4.13** si compone di un rotore di massa m, momento polare di inerzia I_p, e momento trasversale di inerzia I_t, che ruota attorno all'asse z con una velocità di rotazione ω. Il rotore è supportano da due *journal bearings*.

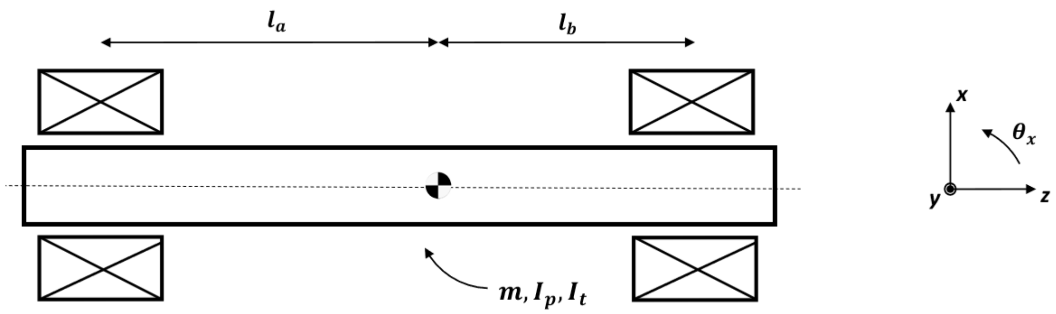


Figura 4.13: Rotore sostenuto da due cuscinetti a gas.

Il diagramma di corpo libero del rotore e delle forze applicate è mostrato in **Figura 4.14**.

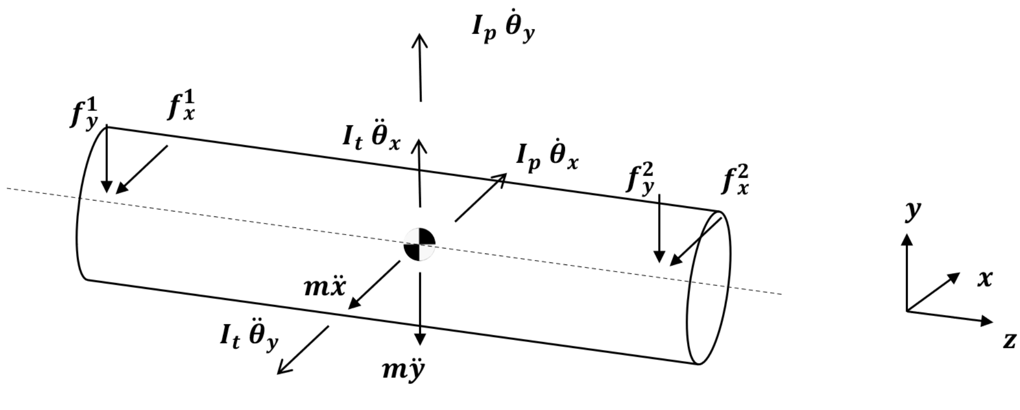


Figura 4.14: Rotore sostenuto da due cuscinetti a gas.

Il sistema rotore-cuscinetti è stato analizzato dapprima come sistema 2DOF, e successivamente è stato integrato come sistema 4DOF. Descritte le equazioni di corpo libero, i sistemi sono stati poi studiati attraverso lo spazio degli stati. Si evidenzia però che, i coefficienti dinamici del film di gas sono funzione contemporaneamente della velocità di rotazione del rotore ω e della frequenza di perturbazione ν. Il calcolo di tali coefficienti avviene tramite una procedura iterativa che verrà spiegata nel **Capitolo 5**. Attraverso tale processo iterativo, ad ogni velocità di rotazione ω dell'intervallo di interesse, si ottengono gli autovalori del sistema rotore-cuscinetti per ogni grado di libertà. Ogni autovalore trovato attraverso questo processo iterativo, descrive lo stato dinamico del suo modo corrispondente. Gli autovalori si rivelano essere, a coppie, complessi e coniugati, descritti dalla forma

$$\lambda_i = \omega_{n,i}\zeta_i \pm j\omega_{d,i}$$

da cui è possibile calcolare il fattore di smorzamento ζ.

4.4.1 Modello 2-DOF

La configurazione appena descritta è stata analizzata quindi in via preliminare con un sistema a due gradi di libertà, che prevede quindi una traslazione lungo l'asse y, e una rotazione θ_x attorno allo stesso asse.

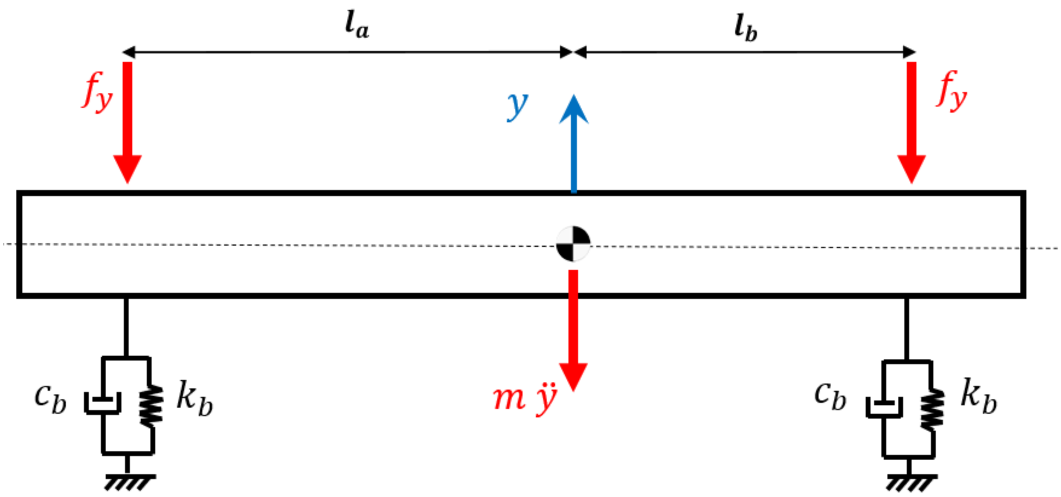


Figura 4.15: Diagramma schematico del sistema.

Si definiscono con k_b e c_b i coefficienti dinamici rispettivamente di rigidezza e smorzamento del film di gas. Le equazioni di corpo libero del rotore:

$$m\ddot{y} + f_y^{(1)} + f_y^{(2)} = 0$$

$$m\ddot{x} + f_x^{(1)} + f_x^{(2)} = 0$$

Si indica con il pedice ij la reazione del meato nella direzione i ad uno spostamento, o alla sua derivata, nella direzione j. Come viene affrontato nel capitolo successivo, il comportamento dinamico del film può essere espresso come segue:

$$\begin{Bmatrix} f_x \\ f_y \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} k_{xx} & k_{xy} \\ k_{yx} & k_{yy} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} x \\ y \end{Bmatrix} + \begin{bmatrix} c_{xx} & c_{xy} \\ c_{yx} & c_{yy} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \dot{x} \\ \dot{y} \end{Bmatrix}$$

Di conseguenza, sostituendo le espressioni delle forze appena definite f_x e f_y nelle equazioni di moto:

$$m\ddot{y} + (k_{yx}^{(1)} + k_{yx}^{(2)})x + (k_{yy}^{(1)} + k_{yy}^{(2)})y + (c_{yx}^{(1)} + c_{yx}^{(2)})\dot{x} + (c_{yy}^{(1)} + c_{yy}^{(2)})\dot{y} = 0$$

$$m\ddot{x} + (k_{xy}^{(1)} + k_{xy}^{(2)})y + (k_{xx}^{(1)} + k_{xx}^{(2)})x + (c_{xy}^{(1)} + c_{xy}^{(2)})\dot{y} + (c_{xx}^{(1)} + c_{xx}^{(2)})\dot{x} = 0$$

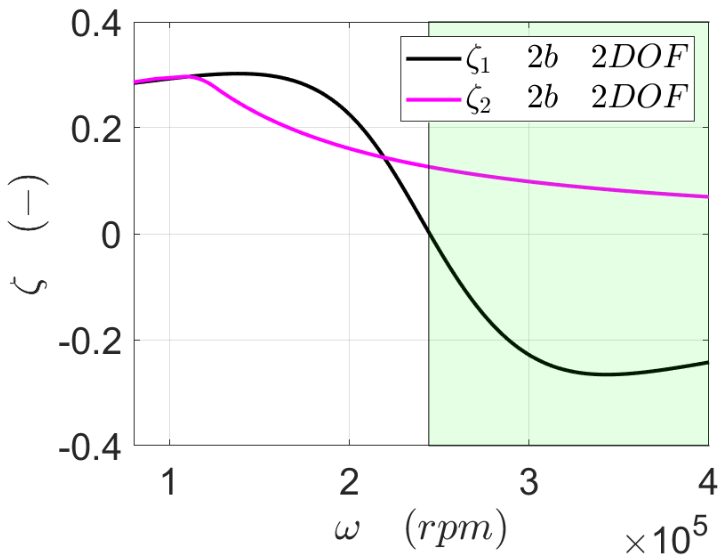


Figura 4.16: Smorzamento relativo ζ sistema 2DOF rotore-due cuscinetti a gas.

4.4.2 Modello 4-DOF

Nel modello a quattro gradi di libertà viene introdotto l'effetto giroscopico, fenomeno che denota importanza alle alte velocità del rotore. L'effetto giroscopico è proporzionale alla velocità del rotore e al momento di inerzia polare dello stesso. Nei turbocompressori, i diametri delle ruote del compressore e della turbina sono molto più grandi del diametro dell'albero del rotore, come mostrato in **Figura 4.17**. Pertanto, i loro effetti giroscopici devono essere presi in considerazione nel calcolo rotordinamico del rotore.

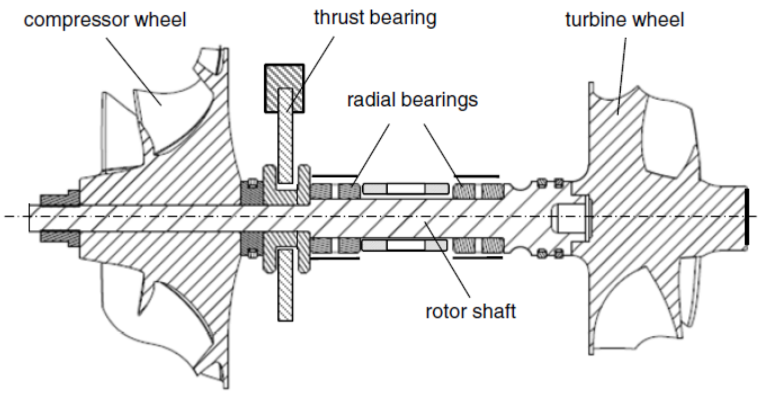


Figura 4.17: Rotore di un piccolo turbocompressore automobilistico. [12]

L'effetto giroscopico del rotore si basa sul teorema del momento angolare, e indica che la variazione del momento angolare è uguale a tutti i momenti esterni che agiscono sul rotore. Definendo con P un generico punto di riferimento nel rotore:

$$\underline{M}_P = (\frac{d\underline{K}}{dt})_P \tag{4.32}$$

Si sceglie inizialmente il sistema di riferimento rispetto a cui calcolare il momento risultante delle forze d'inerzia. Risulta conveniente scegliere una terna (x, y, z) che risulti essere solidale al corpo rigido considerato e che sia principale, ovvero con origine nel baricentro del sistema, e centrale d'inerzia, quindi con tensore d'inerzia diagonale. Si calcola quindi la derivata del momento della quantità di moto, utilizzando la regola del prodotto di derivazione nel teorema del trasporto tra i sistemi di coordinate stazionario (x, y, z) e rotante(x', y', z'). Si ha quindi che:

$$\frac{d\underline{K}}{dt} = (\dot{\underline{K}})_{rot} + \underline{\omega} \wedge \underline{K} \tag{4.33}$$

Dove ω è la velocità angolare del sistema di coordinate rotante dovuto all'effetto giroscopico, mentre il primo termine a destra rappresenta la variazione del modulo del vettore momento della quantità di moto, ossia la variazione vista dal sistema di riferimento solidale.
Si prende come riferimento la **Figura 4.18** e si definiscono di conseguenza:

- $I_{t,x}$ e $I_{t,y}$ i momenti di inerzia trasversali nelle direzioni x' e y';
- I_p il momento polare di inerzia in direzione z';
- θ_x e θ_y le velocità angolari nelle direzioni x' e y';
- Ω la velocità del rotore.

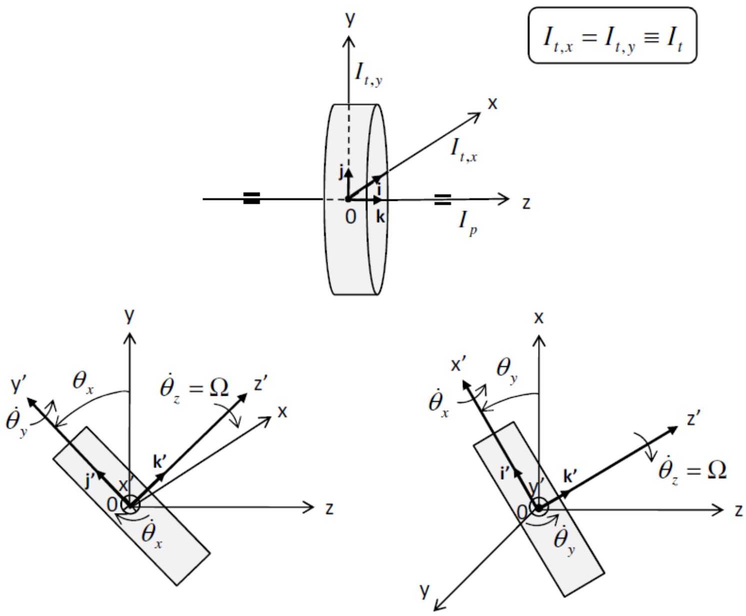


Figura 4.18: Effetto giroscopico di un rotore. [12]

Svolgendo tutti i calcoli, si ricava[12] che il momento giroscopico che agisce in aggiunta sul rotore, nel sistema di coordinate stazionario risulta essere pari a:

$$\underline{\mathrm{M}} = (-I_p\omega\dot{\theta}_y)\vec{i} + (I_p\omega\dot{\theta}_x)\vec{j} \tag{4.34}$$

Le equazioni di corpo libero del rotore mostrato nella figura iniziale, nel caso semplificato in cui si considerasse simmetrica la distanza dei due cuscinetti dal centro di massa del rotore, ovvero $l_1 = l_2 = l_b$, possono essere scritte come:

$$m\ddot{y} + (k_{yx}^{(1)} + k_{yx}^{(2)})x + (k_{yy}^{(1)} + k_{yy}^{(2)})y + (c_{yx}^{(1)} + c_{yx}^{(2)})\dot{x} + (c_{yy}^{(1)} + c_{yy}^{(2)})\dot{y} = 0$$

$$m\ddot{x} + (k_{xy}^{(1)} + k_{xy}^{(2)})y + (k_{xx}^{(1)} + k_{xx}^{(2)})x + (c_{xy}^{(1)} + c_{xy}^{(2)})\dot{y} + (c_{xx}^{(1)} + c_{xx}^{(2)})\dot{x} = 0$$

$$I_t\ddot{\theta}_x + I_p\dot{\theta}_y + (k_{yx}^{(1)} + k_{yx}^{(2)})\theta_x l_b^2 + (k_{yy}^{(1)} + k_{yy}^{(2)})\theta_x l_b^2 + (c_{yx}^{(1)} + c_{yx}^{(2)})\dot{\theta}_x l_b^2 + (c_{yy}^{(1)} + c_{yy}^{(2)})\dot{\theta}_x l_b^2 = 0$$

$$I_t\ddot{\theta}_y - I_p\dot{\theta}_x + (k_{xy}^{(1)} + k_{xy}^{(2)})\theta_y l_b^2 + (k_{xx}^{(1)} + k_{xx}^{(2)})\theta_y l_b^2 + (c_{xy}^{(1)} + c_{xy}^{(2)})\dot{\theta}_y l_b^2 + (c_{xx}^{(1)} + c_{xx}^{(2)})\dot{\theta}_y l_b^2 = 0$$

Il secondo termine nelle ultime due equazioni descrivono il momento giroscopico sotto l'ipotesi di piccole inclinazioni angolari del rotore.
A causa dell'accoppiamento tra film di gas ed effetto giroscopico esistente fra i gradi di libertà, la soluzione di un modo comprende sempre un vortice del rotore piuttosto che una vibrazione planare. L'informazione della forma del modo è contenuta all'interno del corrispondente autovettore. Per la configurazione rotore-cuscinetti, le prime due equazioni sopra descritte descrivono il comportamento vorticoso cilindrico, mentre le ultime due forniscono i modi vorticosi conici. Ogni coppia dei due modi contiene un moto di precessione in avanti, *forward whirling*, e un moto di precessione inverso, *backward whirling*.
L'andamento di ζ è mostrato in **Figura 4.19**, dove è stato diagrammato il confronto con il modello a 2 gradi di libertà.

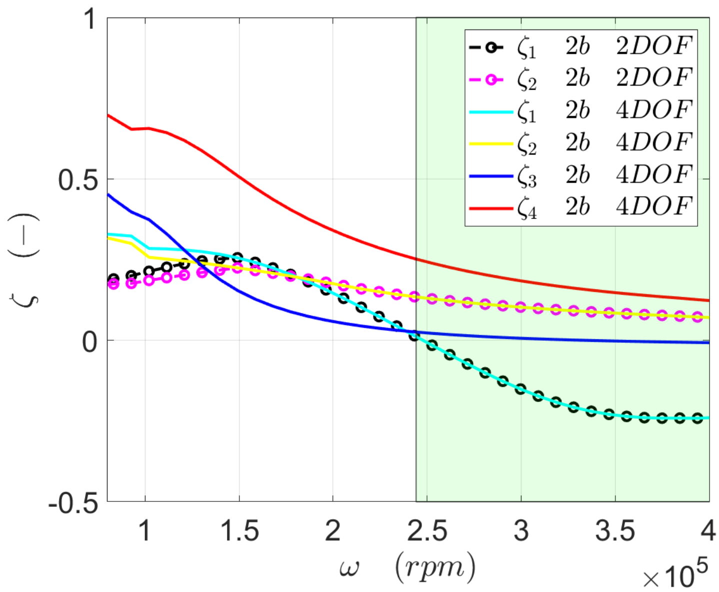


Figura 4.19: Confronto dello smorzamento relativo ζ sistema 2DOF e 4DOF rotore-due cuscinetti a gas.

Capitolo 5

Cuscinetti a gas

Nella lubrificazione a film fluido, in cui rientra la branca della lubrificazione a gas, l'attrito tra due superfici solide viene ridotto attraverso la presenza di un fluido in pressione che scorre tra di loro. L'utilizzo dei cuscinetti a gas è direttamente correlato alle proprietà fisiche del gas, in quanto questo risulta essere un lubrificante molto stabile, che non vaporizza, solidifica, è soggetto a cavitazione e non si decompone a temperature estreme. La bassa viscosità del gas origina coefficienti di attrito molto bassi e quindi minori valori di perdite per attrito ed il loro aumento di temperatura associato. L'assenza di contatto superficie-superficie porta ad una usura trascurabile, aumentandone la durata. I limiti di questa tipologia di cuscinetti sono principalmente dovuti alla comprimibilità dei gas e la sua bassa viscosità, poiché ciò si traduce in un livello di consumo di gas elevato, comportando l'uso di giochi molto piccoli. Inoltre, la combinazione di comprimibilità e bassa viscosità è il motivo per cui i cuscinetti a gas sono caratterizzati da scarso smorzamento. Lo spessore del film di gas che separa le superfici di appoggio può variare da sub-micrometro a diverse decine di micrometri a seconda delle dimensioni del sistema e dell'applicazione in questione. Esiste di conseguenza un'ampia gamma di configurazioni, morfologie e principi di funzionamento dei cuscinetti d'aria. Una generica classificazione è quella mostrata in **Figura 5.1**, dove i cuscinetti vengono distinti in relazione a:

- Dinamica, che ripartisce in base al principio di pressurizzazione del meato:
  - Aerodinamici, noti come *self-acting gas bearings*, nel caso in cui la distribuzione di pressione è conseguenza della velocità relativa tra le superfici del cuscinetto stesso;
  - Aerostatici, o *externally pressurized gas bearings*, quando il flusso è indotto dalla pressurizzazione esterna;
  - Ibridi, dove sono presenti sia gli effetti aerostatici che aerodinamici.

- Cinematica: si riferisce al movimento e alla morfologia dell'elemento portante. In questo caso si possono avere molte possibilità di distinzione, ma nella più generale si trovano:
  - Moto su un piano: *flat bearings*
  - Rotazione attorno ad una linea: *cylindrical and conical bearings*
  - Rotazione attorno ad un punto: *spherical bearings*.

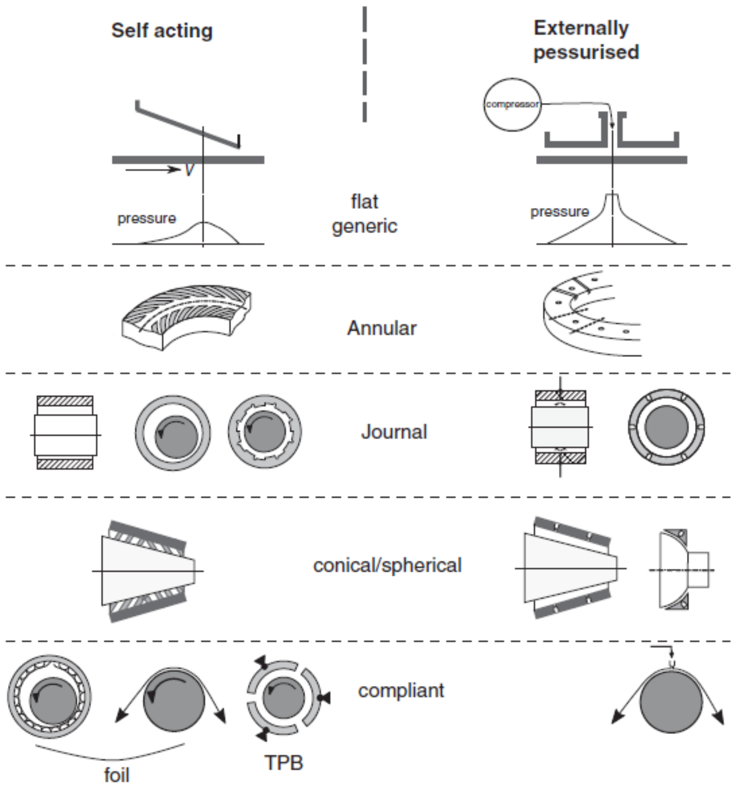


Figura 5.1: Classificazione dei cuscinetti a gas in base al tipo di generazione di pressione (dinamica) e alla morfologia (cinematica). [13]

5.1 Journal bearings

In questo capitolo verrà preso in esame come modello una tipologia specifica di cuscinetto radiale, noto come *journal bearings*, costituiti da un albero (*journal*) ruota liberamente in un manicotto (*bearing*) di supporto. Nel caso di cuscinetti aerodinamici, la geometria risulta essere spesso molto semplice, in cui sia il perno che il cuscinetto hanno una superficie convenzionalmente cilindrica.

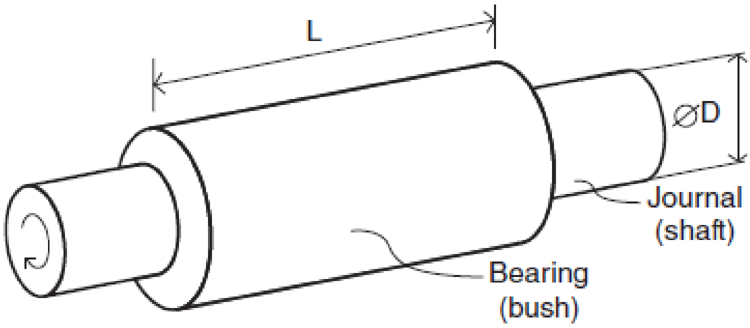


Figura 5.2: Modello generale di un *Journal bearing*. [13]

Supponendo cuscinetto e albero perfettamente cilindrici, facendo riferimento alla **Figura 5.3**, la geometria è determinata da:

- raggio dell'albero R;
- gioco radiale c del cuscinetto;
- lunghezza L del cuscinetto;
- eccentricità e del centro dell'albero rispetto al centro del cuscinetto;

Dalla figura si può notare che la scelta la direzione radiale r risulta essere opposta a quella dell'eccentricità, ed il vettore ad esso ortogonale è la direzione tangenziale t. Il sistema di coordinate (r, t) facilita la definizione e il calcolo delle grandezze principali. Le velocità di rotazione del perno e del cuscinetto sono rispettivamente ω e Ω. La forza portante F sottende un angolo di ampiezza ϕ con l'asse r, ed è noto come angolo di carico.

5.1.1 Equazione di Reynolds

L'equazione differenziale che governa la distribuzione della pressione nella lubrificazione a film fluido è nota come "equazione di Reynolds", che può essere

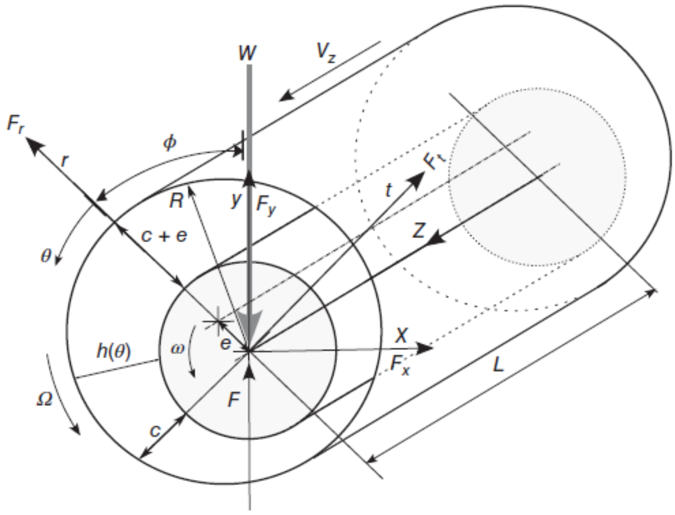


Figura 5.3: Notazione di riferimento del modello.[13]

derivata attraverso due[14] differenti criteri, dalle equazioni di Navier-Stokes e di continuità, oppure dal principio di conservazione della massa. Tale equazione, per il modello preso in esame, risulta essere:

$$\frac{\partial}{\partial z}(\frac{h^3}{12\mu}\rho\frac{\partial p}{\partial z}-\rho\frac{V_z h}{2})+\frac{1}{R}\frac{\partial}{\partial \theta}(\frac{h^3}{12\mu}\rho\frac{1}{R}\frac{\partial p}{\partial \theta}-\rho\frac{R(\Omega+\omega)h}{2})=\frac{\partial}{\partial t}(\rho h) \tag{5.1}$$

dove il termine h indica l'altezza del meato, che nel caso in cui gli assi di perno e cuscinetto rimangano paralleli può essere calcolata come $h = c + e\cos(\theta)$. É possibile normalizzare l'**Equazione 5.1** rispetto a R, c, L, p_a, μ e ν (ovvero la frequenza di oscillazione, vortice o perturbazione), ottenendo:

$$\frac{\partial}{\partial Z}(H^3\varrho\frac{\partial P}{\partial Z}-\Lambda_z H)+\frac{\partial}{\partial \theta}((H^3\varrho\frac{\partial P}{\partial \theta}-\varrho\Lambda_z H)=\sigma\frac{\partial}{\partial \tau}(\varrho H) \tag{5.2}$$

con $-\frac{L}{D} \leq Z = \frac{z}{L} \leq \frac{L}{D}$, avendo definito $H = \frac{h}{c}$, $\varrho = \frac{\rho}{\rho_a}$, $P = \frac{p}{p_a}$ e $\tau = \nu t$. Nell'espressione sono stati definiti nuovi parametri adimensionali:

- *Squeeze number*:

$$\sigma = \frac{12\mu\nu}{p_a}(\frac{R}{c})^2$$

- *Axial sliding number*:
$$\Lambda_z = \frac{6\mu V_z}{p_a}(\frac{R}{c})^2$$
il cui valore risulta essere molto vicino allo zero, per cui è convenzionalmente trascurato;

- *Peripheral sliding number* o, più comunemente, *bearing number*:
$$\Lambda_r = \frac{6\mu(\Omega + \omega)}{p_a}(\frac{R}{c})^2$$

In questo capitolo verrà trattato il caso in cui $\Omega = 0$, per cui viene più semplicemente impiegato il simbolo Λ, ossia:

$$\Lambda = \frac{6\mu\omega}{p_a}(\frac{R}{c})^2$$

5.1.2 Caratteristiche principali

Forze

La pressurizzazione del gas generale delle forze di reazione, che, facendo riferimento alla **Figura 5.3**, quelle nelle direzioni principali (r, t) sono calcolate come:

$$F_r = -\int_{-L/2}^{L/2}\int_0^{2\pi}(p - p_a)\cos\theta R d\theta dz \tag{5.3a}$$
$$F_t = -\int_{-L/2}^{L/2}\int_0^{2\pi}(p - p_a)\sin\theta R d\theta dz \tag{5.3b}$$

La capacità di carico W e l'angolo ϕ risultano essere:

$$W = \sqrt{F_r^2 + F_t^2} \qquad \phi = \arctan(\frac{F_t}{F_r}) \tag{5.4}$$

Da queste, è possibile calcolare le forze nelle direzioni (x, y):

$$F_x = -F_r\sin\theta + F_t\cos\theta \tag{5.5a}$$
$$F_y = F_r\cos\theta + F_t\sin\theta \tag{5.5b}$$

Rigidezza e smorzamento

Per qualsiasi sistema di coordinate x, y esistono quattro componenti di rigidezza e smorzamento, definite come:

$$k_{xx} = -\frac{\partial F_x}{\partial x} \qquad k_{xy} = -\frac{\partial F_x}{\partial y} \qquad k_{yx} = -\frac{\partial F_y}{\partial x} \qquad k_{yy} = -\frac{\partial F_y}{\partial y} \tag{5.6}$$

$$c_{xx} = -\frac{\partial F_x}{\partial \dot{x}} \qquad c_{xy} = -\frac{\partial F_x}{\partial \dot{y}} \qquad c_{yx} = -\frac{\partial F_y}{\partial \dot{x}} \qquad c_{yy} = -\frac{\partial F_y}{\partial \dot{y}} \tag{5.7}$$

il comportamento dinamico del sistema può essere espresso come segue:

$$\begin{Bmatrix} f_x \\ f_y \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} k_{xx} & k_{xy} \\ k_{yx} & k_{yy} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} x \\ y \end{Bmatrix} + \begin{bmatrix} c_{xx} & c_{xy} \\ c_{yx} & c_{yy} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \dot{x} \\ \dot{y} \end{Bmatrix} \tag{5.8}$$

in cui l'elemento k_{ij} rappresenta la reazione del meato nella direzione i a uno spostamento nella direzione j. Il coefficiente di smorzamento c_{ij} è definito di conseguenza, mentre f_x e f_y sono forze dinamiche esterne che agiscono sul rotore.
Per un sistema simmetrico (ovvero con $\epsilon = 0$), caratterizzato da bassa velocità $\omega > 0$ e piccola frequenza di eccitazione ν si può dimostrare[13] che:

$$k_{xx} = k_{yy} > 0 \qquad\qquad k_{xy} = -k_{yx} > 0 \tag{5.9}$$

$$c_{xx} = c_{yy} > 0 \qquad\qquad c_{xy} = -c_{yx} > 0 \tag{5.10}$$

Normalizzazione

É utile utilizzare delle forme adimensionalizzate di carico, rigidezza e smorzamento, tramite le formule sotto riportate:

$$\overline{W} = \frac{W}{p_a LD} \qquad K_{ij} = k_{ij}\frac{c}{p_a LD} \qquad C_{ij} = c_{ij}\frac{1}{3\mu L}(\frac{c}{D})^2 \tag{5.11}$$

5.1.3 Soluzione del problema

Una soluzione in forma chiusa del problema molto utile per stimare le caratteristiche statiche e dinamiche è riportata in letteratura da Ausman[15]. Le assunzioni che vengono fatte sono le seguenti: nessun movimento assiale, $\Lambda_z = 0$, compressione isoterma, $\varrho = P$ e stato stazionario, $\omega = 0$ e la presenza di una piccola perturbazione ϵ attorno alla posizione concentrica. Per semplicità è stato considerato solo il movimento radiale dell'albero, tralasciando il caso con inclinazione, essendo di minore importanza e che può essere trattato in modo simile. Ritornando al problema descritto sopra, l'**Equazione 5.2** diventa:

$$\frac{\partial}{\partial Z}(H^3 P\frac{\partial P}{\partial Z}) + \frac{\partial}{\partial \theta}((H^3 P\frac{\partial P}{\partial \theta} - \Lambda PH) = 0 \tag{5.12}$$

É possibile ricavare le componenti radiale e tangenziale della forza portante del cuscinetto:

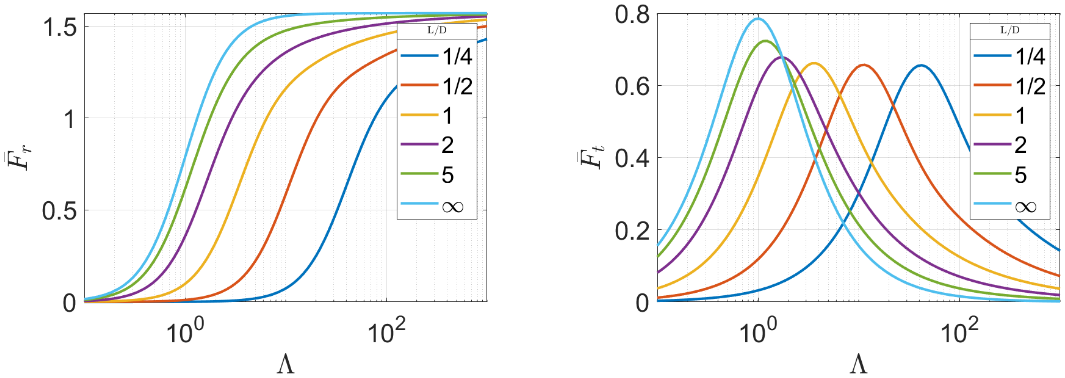
$$F_r = \epsilon p_a LD(\frac{\pi}{2})\,\mathrm{Re}\{(\frac{i\Lambda}{1+i\Lambda})[1 - \frac{\tanh\sqrt{1+i\Lambda}L/D}{\sqrt{1+i\Lambda}L/D}]\} \tag{5.13}$$

$$F_t = \epsilon p_a LD(\frac{\pi}{2})\,\mathrm{Re}\{(\frac{i\Lambda}{1+i\Lambda})[1 - \frac{\tanh\sqrt{1+i\Lambda}L/D}{\sqrt{1+i\Lambda}L/D}]\} \tag{5.14}$$

Oppure, riscrivendo la forza come un numero complesso in maniera più compatta:

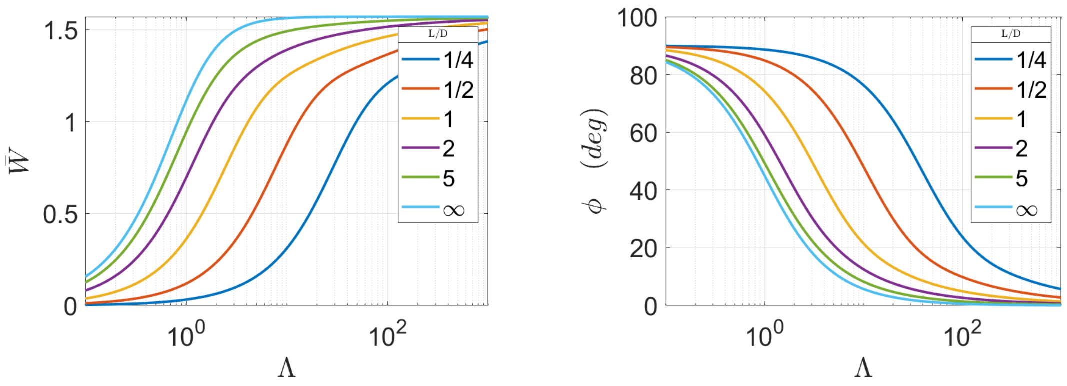
$$\bar{F}_r + i\bar{F}_t = \frac{F_r + iF_t}{\epsilon p_a LD} = (\frac{\pi}{2})(\frac{i\Lambda}{1+i\Lambda})\{1 - \frac{\tanh\sqrt{1+i\Lambda}L/D}{\sqrt{1+i\Lambda}L/D}\} \tag{5.15}$$

Le **Figure 5.4** e **5.5** mostrano rispettivamente i valori ottenuti delle forze $\bar{F}_r$ e $\bar{F}_t$, e del carico $\bar{W}$ e dell'angolo ϕ per un ampio intervallo di Λ al variare del rapporto L/D.



(a) **(b)**

Figura 5.4: $\bar{F}_r$ e $\bar{F}_t$ al variare di Λ per differenti L/D



(a) **(b)**

Figura 5.5: $\bar{W}$ e ϕ al variare di Λ per differenti L/D

I medesimi passaggi possono essere estesi al caso dinamico, quando piccole perturbazioni, in direzione radiale attorno alla posizione concentrica, sono considerate anche nella soluzione temporale. In questo modo si arriva a calcolare i coefficienti di rigidezza e smorzamento adimensionali come:

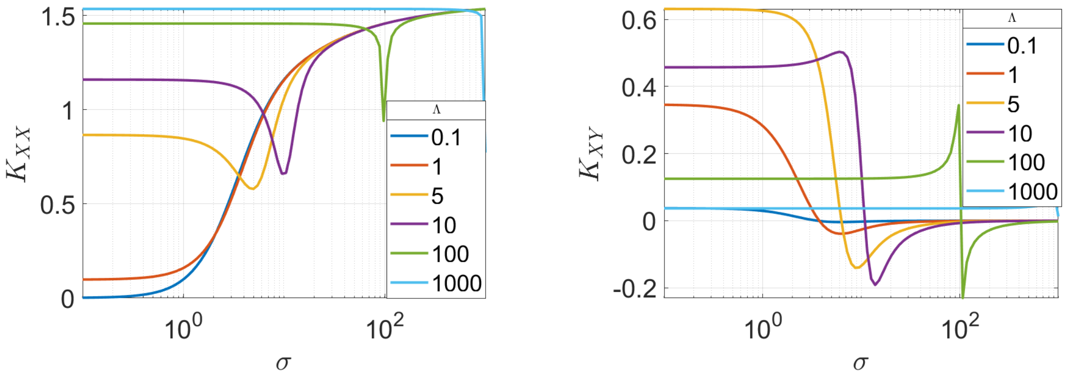
$$K_{XX} = K_{YY} = \frac{1}{2}(\bar{F}_r(\Lambda - \sigma) + \bar{F}_r(\Lambda + \sigma)) \tag{5.16}$$

$$K_{YX} = -K_{XY} = \frac{1}{2}(\bar{F}_t(\Lambda - \sigma) + \bar{F}_t(\Lambda + \sigma)) \tag{5.17}$$

$$C_{XX} = C_{YY} = -\frac{1}{2\sigma}(\bar{F}_t(\Lambda - \sigma) - \bar{F}_t(\Lambda + \sigma)) \tag{5.18}$$

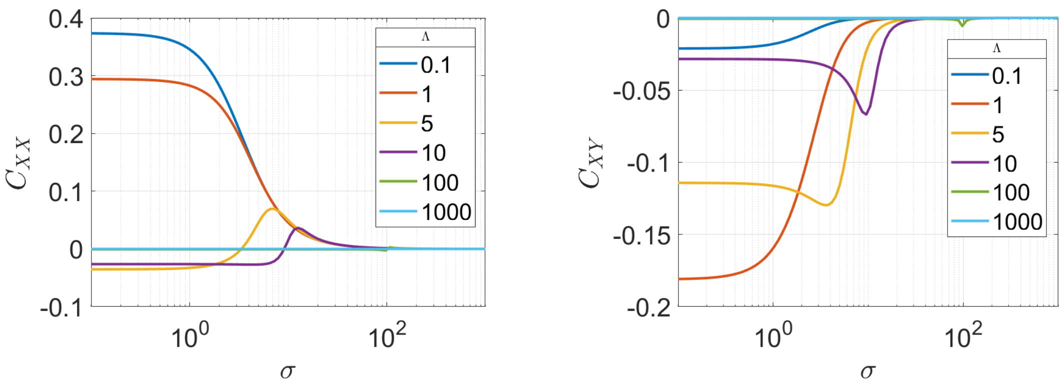
$$C_{YX} = -C_{XY} = -\frac{1}{2\sigma}(\bar{F}_r(\Lambda - \sigma) - \bar{F}_r(\Lambda + \sigma)) \tag{5.19}$$

Nella notazione precedente il sistema (X, Y) coincide, per convenienza di calcolo, con il sistema (r, t). In qualsiasi sistema di coordinate ortogonali scelto, le componenti XX e YY sono indicate come le componenti principali (*principal coefficients*), mentre le componenti XY e YX sono quelle incrociate (*cross-coupled coefficients*), ovvero quelle presenti nell'antidiagonale. In **Figura 5.6** e in **Figura 5.7** sono tracciati gli andamenti di tali coefficienti per un ampio range di *squeeze number* σ al variare di Λ.



(a) **(b)**

Figura 5.6: I coefficienti di rigidezza adimensionale K_{XX} e K_{XY} in funzione di σ per diversi valori di Λ. *Self-acting journal bearing* con $L/D = 1$ e piccola perturbazione ϵ



(a) **(b)**

Figura 5.7: I coefficienti di smorzamento adimensionale C_{XX} e C_{XY} in funzione di σ per diversi valori di Λ. *Self-acting journal bearing* con $L/D = 1$ e piccola perturbazione ϵ

5.2 Problema dell'instabilità rotorica

Lo studio completo di un cuscinetto a gas prevede, oltre una prima fase inerente alle caratteristiche statiche del cuscinetto stesso, che permette di conoscere caratteristiche come la capacità di carico, consumo di gas e perdite per attrito, uno studio sul comportamento dinamico dell'intero sistema, che porta ad affacciarsi al problema dell'instabilità dinamica. In generale, si possono incontrare due tipi di instabilità quando si ha a che fare con sistemi di cuscinetti a gas: *pneumatic hammering* e *asynchronous rotor whirl*.
Il primo caso si verifica per un sistema si cuscinetti a gas pressurizzato esternamente, e si instaura quando lo smorzamento principale nel meato di gas diventa negativo. Questa perdita di smorzamento è causata da un effetto di ritardo dovuto alla natura comprimibile dei gas. Questo fenomeno si verifica solitamente quando la fase di progetto si concentra sull'aumento della capacità di carico del carico e delle caratteristiche di rigidezza del cuscinetto. Alimentando i fori si creano grandi volumi in cui il film di lubrificante comprimibile può immagazzinare energia ed è in grado di rilasciare questa energia in fase con il movimento.
Il secondo tipo di instabilità è generalmente indicato come *half-speed*, o più in generale *non-synchronous whirling*. Come il caso precedente, sono entrambi fenomeni di autoeccitazione. Tuttavia, questo tipo di instabilità si origina dalla rotazione che genera un coefficiente di rigidezza $k_{ij} \neq 0$. Scopo della progettazione di cuscinetti a gas ad alta velocità è quindi l'aumento della velocità di avvio di questo vortice.

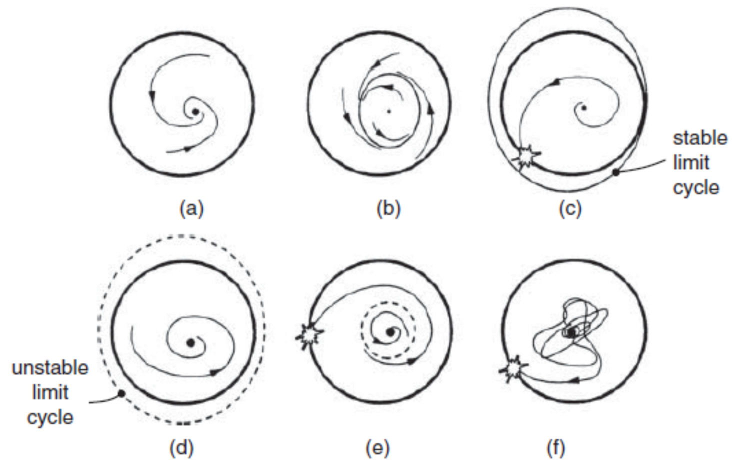


Figura 5.8: Classificazione degli stati di stabilità secondo Czolczsynki.[16]

Quando si tratta di macchine rotanti supportate cuscinetti lubrificati a gas è sempre possibile osservare un "moto vorticoso", che può essere definito come il movimento orbitale relativo tra l'asse geometrico di rotazione dell'albero e l'asse definito dai centri del supporto portante. Questo vortice, tuttavia, non preclude automaticamente la stabilità della condizione di lavoro, ma solo se l'orbita del vortice aumenta di dimensioni con rotazioni successive, senza cercare una condizione stabile, il vortice diventa instabile. Una classificazione del moto vorticoso e della sua stabilità è data da Czolczsynki[16], che descrive sei stati di stabilità che si possono incontrare in macchinari rotanti supportati su cuscinetti a gas. La **Figura 5.8** illustra questi sei stati di stabilità.

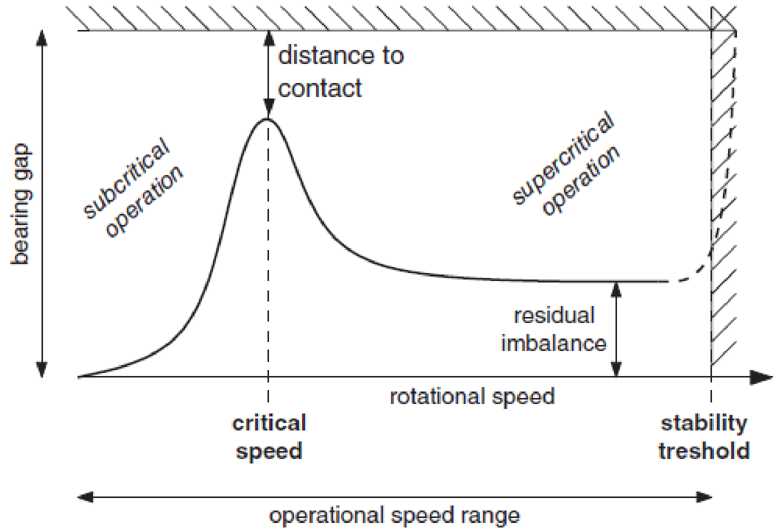


Figura 5.9: Comportamento qualitativo della risposta del cuscinetto con vortice sincrono per un intervallo di velocità operativa supercritica.[15]

Nella pratica non esiste alcun caso in cui il centro geometrico di un albero rotante coincida con il centro di massa. La rotazione attorno al centro geometrico impone una forza/coppia sbilanciata all'albero, il quale introduce un vortice sincrono con la velocità di rotazione. Se lo squilibrio viene contenuto entro determinati limiti, dal vortice sincrono non potrà indotta alcuna instabilità. Nel caso in cui venga oltrepassato un limite superiore alla velocità, si è riscontrato il verificarsi di un fenomeno vorticoso autoeccitato, come mostrato in **Figura 5.9**. Questo tipo di vortice, definito sopra come *half-speed whirling*, può essere di natura molto distruttiva.

5.2.1 Analisi della stabilità

Al fine di effettuare una corretta analisi della stabilità del sistema, è stato valutato il comportamento rotodinamico di un modello del rotore di Jeffcott di massa m, visibile in **Figura 5.10**, supportato da un singolo film di gas rappresentato da otto coefficienti dinamici.

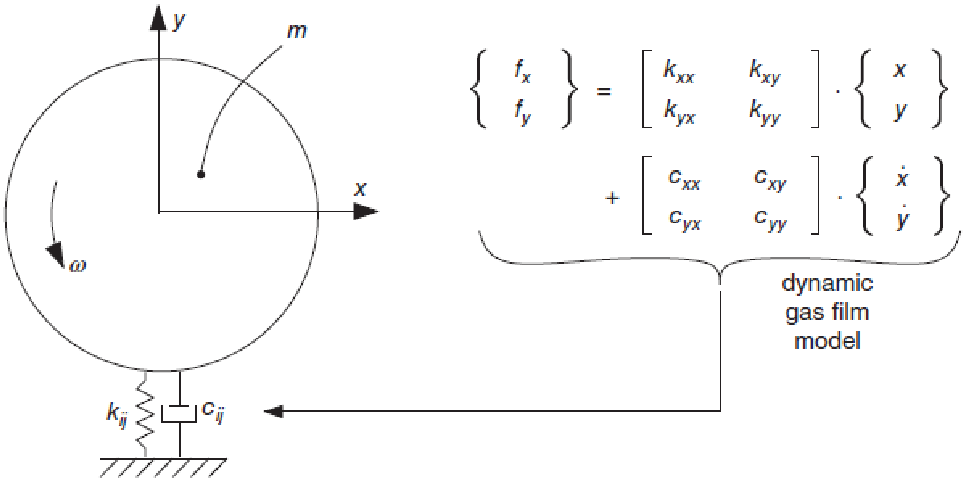


Figura 5.10: Modello dinamico di un rotore di Jeffcott.[17]

Le equazioni del moto sono che descrivono il sistema sono:

$$m\ddot{x} + c_{xx}\dot{x} + c_{xy}\dot{y} + k_{xx}x + k_{xy}y = 0 \tag{5.20}$$

$$m\ddot{y} + c_{yy}\dot{y} + c_{yx}\dot{x} + k_{yy}y + k_{yx}x = 0 \tag{5.21}$$

dove tutti i coefficienti dinamici dipendono dalla condizione di lavoro in regime stazionario (velocità del rotore ω, rapporto di eccentricità ϵ, angolo di assetto ϕ) e dalla frequenza di perturbazione ν. Applicando la condizione di un'eccentricità circa pari a zero, il sistema risulta essere simmetrico, per cui i termini *diretti* e i termini *misti* possono essere identificati dalle **Equazioni 5.9** e **5.10**:

$$k_{ii} = k_{xx} = k_{yy} \qquad c_{ii} = c_{xx} = c_{yy} \tag{5.22}$$

$$k_{ij} = k_{xy} = -k_{yx} \qquad c_{ij} = c_{xy} = -c_{yx} \tag{5.23}$$

Convertendo il sistema nel dominio di Laplace:

$$\begin{bmatrix} ms^2 + c_{ii}s + k_{ii} & c_{ij}s + k_{ij} \\ -c_{ij}s - k_{ij} & ms^2 + c_{ii}s + k_{ii} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} x \\ y \end{Bmatrix} = 0 \tag{5.24}$$

La soluzione omogenea può essere espressa come:

$$\lambda_{1,2} = \frac{-(c_{ii} + jc_{ij}) \pm \sqrt{(c_{ii} + jc_{ij})^2 - 4m(k_{ii} + jk_{ij})}}{2m} \tag{5.25}$$

dove la soluzione λ_1 rappresenta il moto di precessione, *forward whirling mode*, mentre λ_2 descrive il moto di precessione inverso, *backward whirling mode*. Se si considera trascurabile[17] l'effetto del coefficiente c_{ij}:

$$\lambda_{1,2} \approx \frac{-c_{ii} \pm \sqrt{c_{ii}^2 - 4m(k_{ii} + jk_{ij})}}{2m} \tag{5.26}$$

La soluzione omogenea di qualsiasi sistema lineare, indicando con ω_d la frequenza naturale smorzata, può essere caratterizzata dagli autovalori:

$$\lambda = \eta + j\omega_d \tag{5.27}$$

Il rapporto di smorzamento ζ, o smorzamento relativo, della soluzione è calcolato tramite l'**Equazione 5.28** e descrive come le oscillazioni in un sistema si attenuano dopo un disturbo.

$$\zeta = -\frac{\eta}{|\lambda|} = -\frac{\eta}{\omega_n} \tag{5.28}$$

Il rapporto di smorzamento di un sistema è inoltre correlato al suo decremento logaritmico δ attraverso la seguente equazione:

$$\delta = \frac{2\pi\zeta}{\sqrt{1-\zeta^2}} \tag{5.29}$$

Il problema di base nel calcolo delle radici degli autovalori si riscontra nella dipendenza di rigidezza e smorzamento dalla frequenza delle vibrazioni libere del rotore, ovvero la parte immaginaria di un autovalore incognito. Per risolvere il problema è necessario utilizzare una strategia di tipo iterativo, in quanto tutti i coefficienti dinamici dipendono sia dalla velocità di rotazione ω che dalla frequenza di perturbazione ν:

- Fissate le caratteristiche del sistema (e.g. geometria, configurazione sistema rotore-cuscinetto, campo di velocità), assumere il valore della frequenza di perturbazione ν^*. Risulta ragionevole ipotizzare come prima iterazione $\nu^* = \omega_i$;

- Calcolare i coefficienti di rigidezza e smorzamento per ogni coppia di valori (ω_i, ν^*), e sostituirli all'interno della matrice in **Equazione 5.24**;

- Calcolare gli autovalori λ_i della matrice;
- Se la parte immaginaria di uno degli autovalori risulti pari alla frequenza di perturbazione ν^* definita nel punto 1, allora l'autovalore è uno di quelli cercati. Il criterio di verifica che è stato utilizzato corrisponde al confronto tra il valore dell'errore relativo con quello della tolleranza prestabilita;
- Se ciò non accade, ovvero cambiare il valore di ν^* e ritornare al punto 2. Un criterio utile al fine di raggiungere la convergenza è quello di assumere il nuovo valore di ν^* pari a quello di ν_d appena trovato.

Tale processo deve essere ripetuto fino a quando si ricavano tutti i valori di λ. Uno schema del processo iterativo eseguito è presente in **Figura 5.11**.

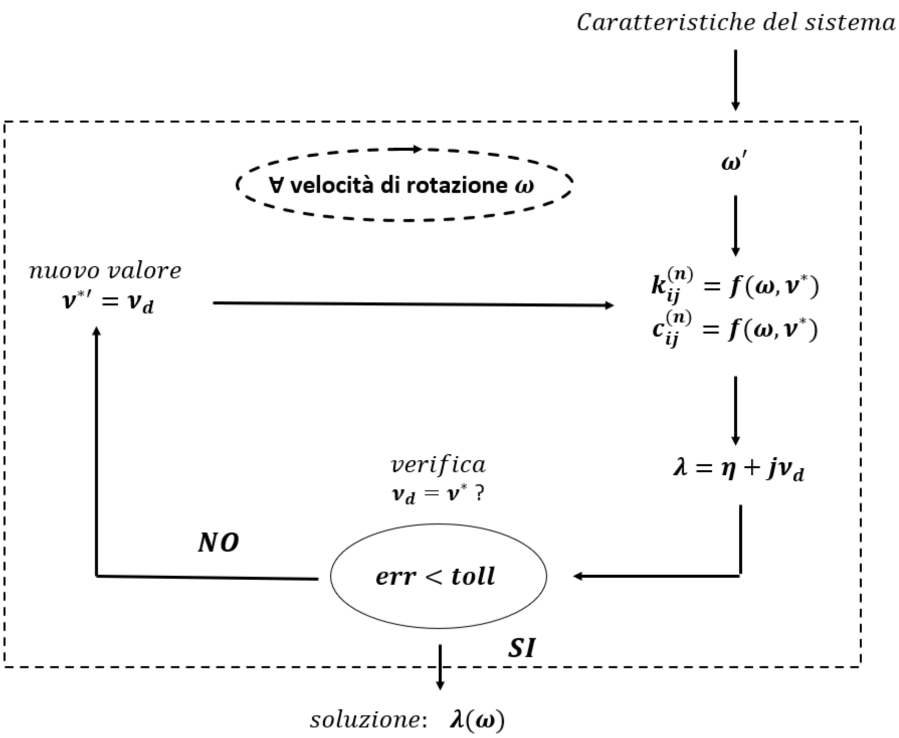


Figura 5.11: Schema risolutivo per il calcolo degli autovalori della matrice.

La **Figura 5.12** mostra l'andamento dello smorzamento relativo ζ nel caso del moto di precessione λ_1, per valori crescenti della velocità del rotore ω. Il punto in cui ζ risulta essere negativo rappresenta la velocità limite di inizio del vortice autoeccitato. A basse velocità, il coefficiente k_{ij} è molto piccolo, per cui la capacità di smorzamento del film è sufficiente a mantenere la stabilità del sistema.

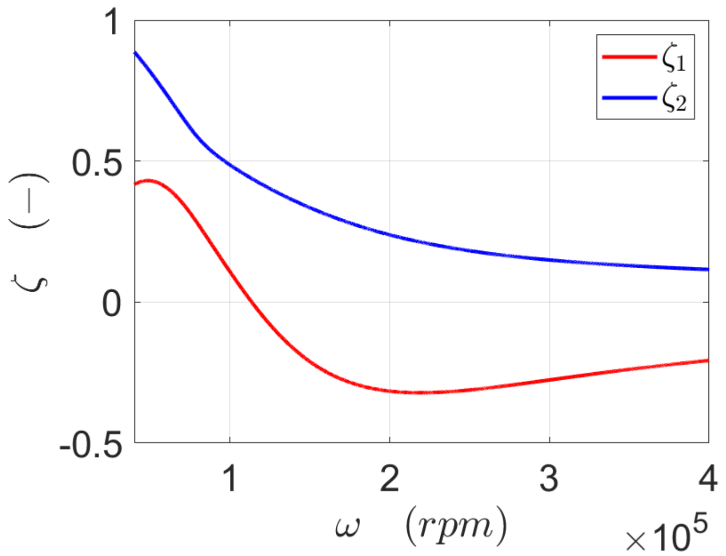


Figura 5.12: Smorzamento relativo ζ in funzione della frequenza ricavato da formula analitica semplificata di λ.

L'andamento dei coefficienti dinamici rispetto alla velocità del rotore è mostrato in **Figura 5.13**. Il termine diretto c_{ii} dello smorzamento diminuisce gradualmente all'aumentare della velocità, mentre il contributo dello smorzamento c_{ij} risulta essere minimo, da cui la formula semplificata (**Equazione 5.26**).
Risulta quindi importante evidenziare l'influenza dei diversi parametri nella perdita di stabilità causata dal vortice autoeccitato. Questo risulta causato dalla perdita di smorzamento dovuta all'accoppiamento incrociato indotto dalla rotazione nel film di gas. Un aumento dello smorzamento diretto c_{ii} o una diminuzione della massa del rotore m migliorano entrambi la stabilità, mentre l'effetto di una maggiore rigidezza diretta k_{ii} è quello di aumentare l'intervallo del termine misto k_{ij} ammissibile. É proprio l'aumento di k_{ij} ad avere un effetto negativo sulla stabilità del sistema.

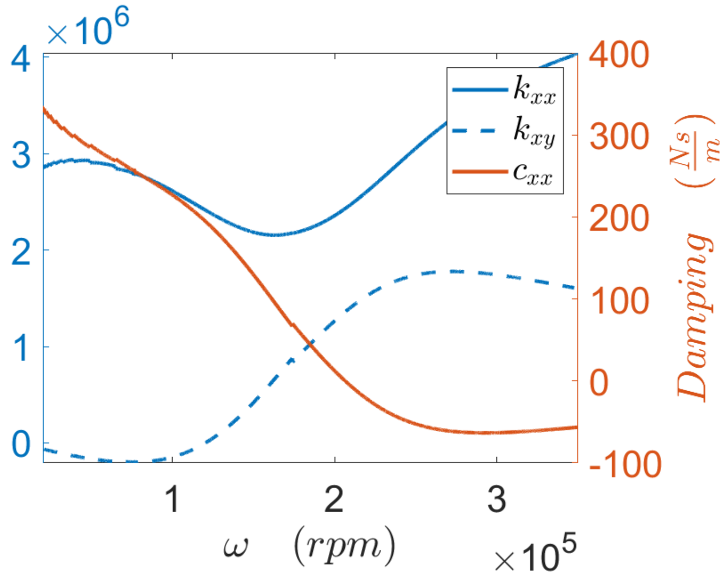


Figura 5.13: Andamento dei coefficienti k_{xx}, k_{xy} e c_{xx} in funzione della frequenza.

Un metodo differente per lo studio del problema risulta essere quello del calcolo degli autovalori ricavati della matrice $[A]$, ricavata partendo dalle **Equazioni 5.20** e **5.21**, ottenuta trasformando le due equazioni differenziali del secondo ordine in quattro del primo ordine, il che equivale a porre il problema nella rappresentazione dello *state-space*. Riscrivendo le equazioni nella forma:

$$\ddot{x} = -\frac{c_{xx}}{m}\dot{x} - \frac{c_{xy}}{m}\dot{y} - \frac{k_{xx}}{m}x - \frac{k_{xy}}{m}y$$

$$\ddot{y} = -\frac{c_{yy}}{m}\dot{y} - \frac{c_{yx}}{m}\dot{x} - \frac{k_{yy}}{m}y - \frac{k_{yx}}{m}x$$

Viene definito il vettore di stato $\{x(t)\}$:

$$\{x(t)\} = \begin{Bmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \\ x_3(t) \\ x_4(t) \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} x(t) \\ y(t) \\ \dot{x}(t) \\ \dot{y}(t) \end{Bmatrix}$$

In questo modo si ricava il seguente sistema.

$$\begin{cases} \dot{x}_1 = x_3 \\ \dot{x}_2 = x_4 \\ \dot{x}_3 = -\frac{c_{xx}}{m} x_3 - \frac{c_{xy}}{m} x_4 - \frac{k_{xx}}{m} x_1 - \frac{k_{xy}}{m} x_2 \\ \dot{x}_4 = -\frac{c_{yy}}{m} x_4 - \frac{c_{yx}}{m} x_3 - \frac{k_{yy}}{m} x_2 - \frac{k_{yx}}{m} x_1 \end{cases}$$

Il problema può quindi essere riscritto in forma matriciale definendo la matrice del sistema $[A]$ come:

$$[A] = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ -\frac{k_{xx}}{m} & -\frac{k_{xy}}{m} & -\frac{c_{xx}}{m} & -\frac{c_{xy}}{m} \\ -\frac{k_{yx}}{m} & -\frac{k_{yy}}{m} & -\frac{c_{yx}}{m} & -\frac{c_{yy}}{m} \end{bmatrix}$$

Per risolvere il problema tramite lo spazio degli stati vengono quindi definite le matrici nulle $[B]$ e $[D]$, e la matrice delle uscite $[C]$ come una matrice identità. Impiegando la funzione *pole(sys)* di Matlab, vengono automaticamente calcolati gli autovalori della matrice $[A]$. Gli autovalori si rivelano essere, a coppie, complessi e coniugati, descritti dalla forma:

$$\lambda_i = \omega_{n,i}\zeta_i \pm j\omega_{d,i}$$

dove sono state definite,

- $\omega_{n,i}$ la frequenza naturale non smorzata del modo i-esimo
- ζ_i il rapporto di smorzamento associato al modo i-esimo

Nella grafico in **Figura 5.14** è mostrato il risultato ottenuto, dove viene evidenziata la zona di instabilità, ovvero la velocità angolare a cui corrisponde un coefficiente ζ negativo. La **Figura 5.15** mostra invece il confronto con i risultati ottenuti nel modello del rotore sostenuto da due *journal bearing*, analizzato nel capitolo precedente. Si nota come il limite di velocità prima di raggiungere l'instabilità sia minore nel caso di una singola boccola presa in esame.

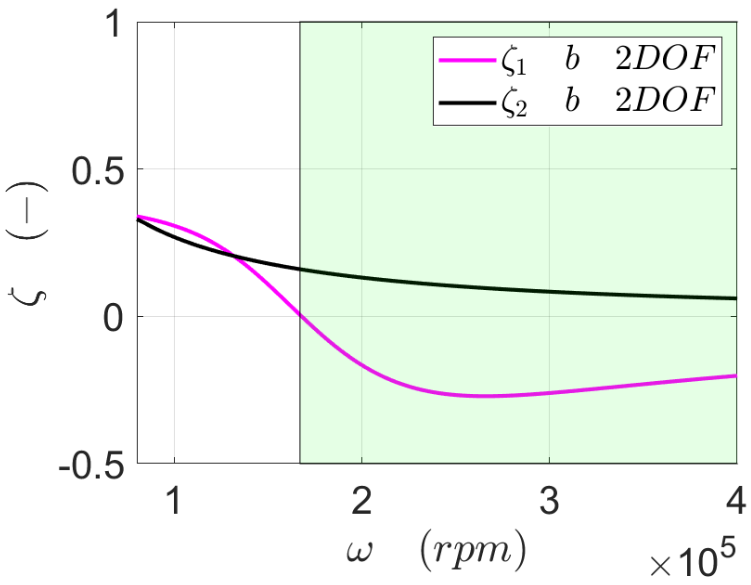


Figura 5.14: Smorzamento relativo ζ sistema 2DOF rotore-boccola.

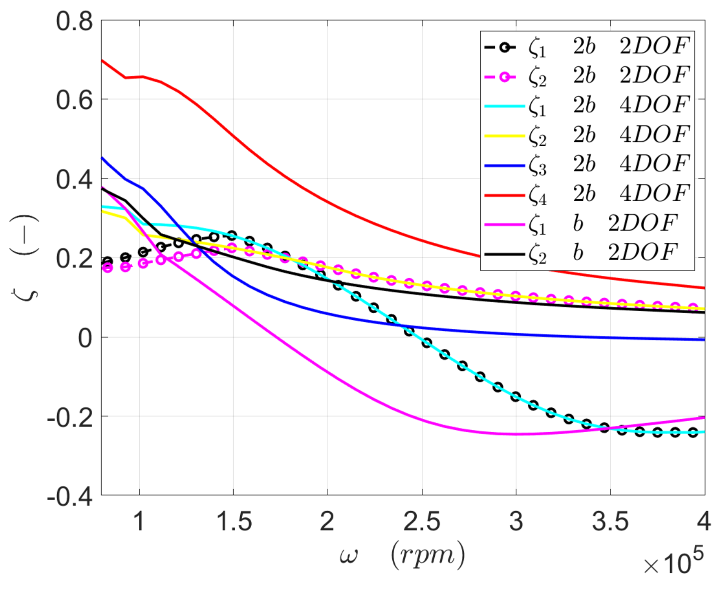


Figura 5.15: Confronto dello smorzamento relativo ζ sistema 2DOF e 4DOF rotore-due cuscinetti a gas con sistema rotore-boccola.

Successivamente allo studio dei coefficienti dinamici, è stato analizzato il comportamento dinamico del rotore in termini di spostamento e fase nelle direzioni x e y. Definendo con e il termine di sbilanciamento della massa del rotore nelle due direzioni, è possibile studiare il problema tramite lo studio della risposta forzata inserendo la forza centripeta agente sui cuscinetti. In termini matriciali:

$$[M]\{\ddot{x}\} + [C]\{\dot{x}\} + [K]\{x\} = \{F\}$$

Ovvero:

$$\begin{bmatrix} m & 0 \\ 0 & m \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \ddot{x} \\ \ddot{y} \end{Bmatrix} + \begin{bmatrix} c_{xx} & c_{xy} \\ c_{yx} & c_{yy} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \dot{x} \\ \dot{y} \end{Bmatrix} + \begin{bmatrix} k_{xx} & k_{xy} \\ k_{yx} & k_{yy} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} x \\ y \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} me\omega^2 \\ me\omega^2 e^{j\frac{\pi}{2}} \end{Bmatrix} \tag{5.30}$$

L'inversione della matrice di rigidezza dinamica, come visto nell'**Equazione 4.16**, e la matrice di recettanza che ne consegue (**Equazione 4.17**), permettono di ottenere la risposta del sistema. I risultati ottenuti sono mostrati nella figura seguente.

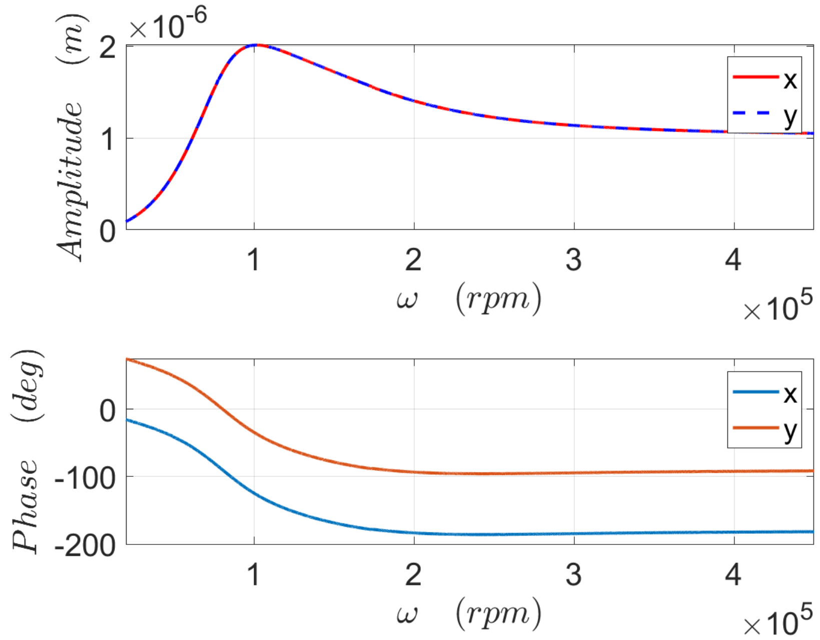


Figura 5.16: Comportamento dinamico del rotore in termini di spostamento e fase nelle direzioni x e y

5.2.2 Smorzamento esterno

Una possibile soluzione al fine di ottenere un miglioramento della stabilità del sistema di cuscinetti a gas ad alta velocità è quella dell'utilizzo di uno smorzamento esterno, in modo da ampliare l'intervallo di velocità operativa. Quanto visto nella sezione precedente ha dimostrato la necessità di uno smorzatore diretto a causa della diminuzione dello smorzamento con l'incremento della frequenza. Poiché lo smorzamento esterno ha un effetto migliore se applicato ad un sistema già intrinsecamente stabile, un approccio ottimale sarebbe quello di combinare contemporaneamente la compensazione, tramite uno smorzamento diretto, delle forze destabilizzanti con la prevenzione delle stesse.
Tra le configurazioni possibili, è stata valutato un modello del tipo *rotor-film-bush*, visibile in **Figura 5.17**.

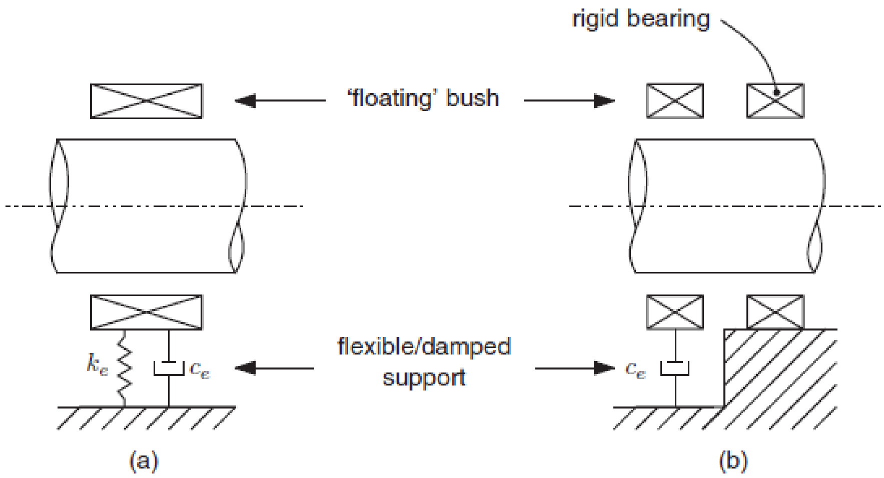


Figura 5.17: Rappresentazione schematica di due implementazioni per l'introduzione dello smorzamento esterno in un sistema rotore-cuscinetto.[17]

L'implementazione più diffusa, caratterizzata da una maggiore semplicità realizzativa, è mostrata nella configurazione a sinistra, **5.17 (a)**, nella quale la rigidezza k_e e lo smorzamento c_e del supporto agiscono in serie rispetto alle caratteristiche del film. In questo caso, è doveroso precisare che, per migliorare in modo considerevole la stabilità, la rigidezza k_e deve essere inferiore a quella del film di almeno un fattore due o tre. Il modello più semplice sarebbe quello di considerare un valore unico e costante sia per la rigidezza del supporto k_e che per lo smorzamento c_e. Come dimostrato durante il lavoro di tesi, questa rappresentazione non consente tuttavia un'adeguata caratterizzazione dell'O-ring, il

cui valore reale di rigidezza e smorzamento risulta fortemente dipendente dalla frequenza di perturbazione.
Il sistema del rotore di Jeffcott supportato da un cuscinetto a gas supportato rigidamente, viene quindi modificato in modo da considerare un supporto flessibile. Il modello dinamico del film di gas rimane invariato, ma ora diviene accoppiato in serie ad un modello di supporto dinamico attraverso la massa m_b della boccola flottante. Si assume un coefficiente di rigidezza del supporto k_e costante e un coefficiente di smorzamento c_e, che agisce in modo uniforme per tutte le direzioni di perturbazione. Il sistema di riferimento (x_b, y_b) indica la posizione della boccola flottante.

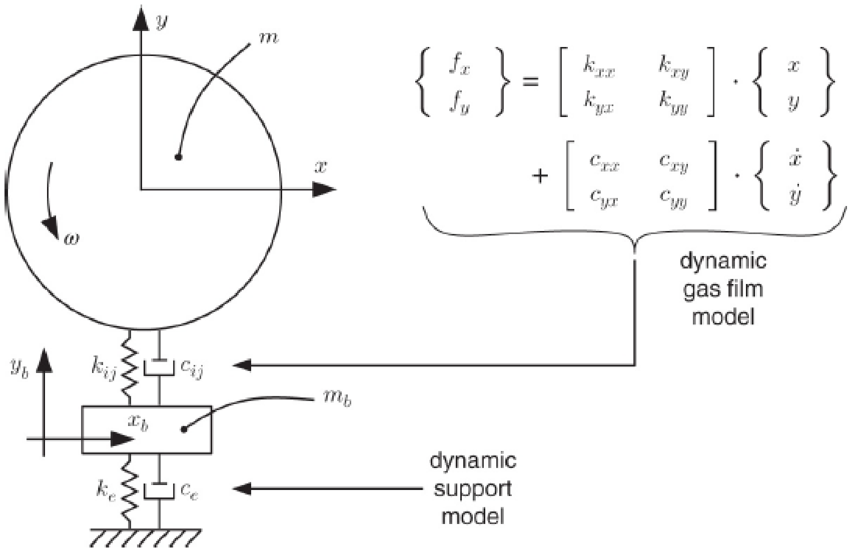


Figura 5.18: Modello dinamico del rotore di Jeffcott con supporto flessibile.[17]

Nel caso di film di gas sia simmetrico sono valide le **Equazioni 5.22** e **5.23**, per cui le equazioni del moto per il sistema a 4 gradi di libertà risultano essere:

$$m\ddot{x} + c_{ii}(\dot{x} - \dot{x}_b) + c_{ij}(\dot{y} - \dot{y}_b) + k_{ii}(x - x_b) + k_{ij}(y - y_b) = 0 \tag{5.31a}$$

$$m\ddot{y} + c_{ii}(\dot{y} - \dot{y}_b) - c_{ij}(\dot{x} - \dot{x}_b) + k_{ii}(y - y_b) - k_{ij}(x - x_b) = 0 \tag{5.31b}$$

$$m_b\ddot{x}_b + c_e\dot{x}_b + k_e x_b - c_{ii}(\dot{x} - \dot{x}_b) - c_{ij}(\dot{y} - \dot{y}_b) - k_{ii}(x - x_b) - k_{ij}(y - y_b) = 0 \tag{5.31c}$$

$$m_b\ddot{y}_b + c_e\dot{y}_b + k_e y_b - c_{ii}(\dot{y} - \dot{y}_b) + c_{ij}(\dot{x} - \dot{x}_b) - k_{ii}(x - x_b) + k_{ij}(y - y_b) = 0 \tag{5.31d}$$

Il sistema può essere quindi descritto nella forma matriciale:

$$\begin{bmatrix} m & 0 & 0 & 0 \\ 0 & m & 0 & 0 \\ 0 & 0 & m_b & 0 \\ 0 & 0 & 0 & m_b \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \ddot{x} \\ \ddot{y} \\ \ddot{x}_b \\ \ddot{y}_b \end{Bmatrix} + \begin{bmatrix} c_{ii} & c_{ij} & -c_{ii} & -c_{ij} \\ -c_{ij} & c_{ii} & c_{ij} & -c_{ii} \\ -c_{ii} & -c_{ij} & c_{ii} + c_e & c_{ij} \\ c_{ij} & -c_{ii} & -c_{ij} & c_{ii} + c_e \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \dot{x} \\ \dot{y} \\ \dot{x}_b \\ \dot{y}_b \end{Bmatrix} +$$

$$+ \begin{bmatrix} k_{ii} & k_{ij} & -k_{ii} & -k_{ij} \\ -k_{ij} & k_{ii} & k_{ij} & -k_{ii} \\ -k_{ii} & -k_{ij} & k_{ii} + k_e & k_{ij} \\ k_{ij} & -k_{ii} & -k_{ij} & k_{ii} + k_e \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} x \\ y \\ x_b \\ y_b \end{Bmatrix} = \{F\} \tag{5.32}$$

Ovvero, le equazioni del moto di un sistema ad n gradi di libertà sono descritte in forma matriciale come:

$$[M]\{\ddot{x}\} + [C]\{\dot{x}\} + [K]\{x\} = \{F\}$$

É possibile trovare una soluzione analitica nello spazio degli stati, sfruttando il medesimo procedimento effettuato con il modello a due gradi di libertà, è stato definito il vettore di stato $2n$-dimensionale $\{x(t)\}$:

$$\{x(t)\} = \begin{Bmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \\ x_3(t) \\ x_4(t) \\ x_5(t) \\ x_6(t) \\ x_7(t) \\ x_8(t) \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} x(t) \\ y(t) \\ x_b(t) \\ y_b(t) \\ \dot{x}(t) \\ \dot{y}(t) \\ \dot{x}_b(t) \\ \dot{y}_b(t) \end{Bmatrix}$$

Di conseguenza, viene definita la matrice del sistema $[A]$:

$$[A] = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ -\frac{k_{ii}}{m} & -\frac{k_{ij}}{m} & \frac{k_{ii}}{m} & \frac{k_{ij}}{m} & -\frac{c_{ii}}{m} & -\frac{c_{ij}}{m} & \frac{c_{ii}}{m} & \frac{c_{ij}}{m} \\ \frac{k_{ij}}{m} & -\frac{k_{ii}}{m} & -\frac{k_{ij}}{m} & \frac{k_{ii}}{m} & \frac{c_{ij}}{m} & -\frac{c_{ii}}{m} & -\frac{c_{ij}}{m} & \frac{c_{ii}}{m} \\ \frac{k_{ii}}{m_b} & \frac{k_{ij}}{m_b} & -\frac{k_{ii}+k_e}{m_b} & -\frac{k_{ij}}{m_b} & \frac{c_{ii}}{m_b} & \frac{c_{ij}}{m_b} & -\frac{c_{ii}+c_e}{m_b} & -\frac{c_{ij}}{m_b} \\ -\frac{k_{ij}}{m_b} & \frac{k_{ii}}{m_b} & \frac{k_{ij}}{m_b} & -\frac{k_{ii}+k_e}{m_b} & -\frac{c_{ij}}{m_b} & \frac{c_{ii}}{m_b} & \frac{c_{ij}}{m_b} & -\frac{c_{ij}+c_e}{m_b} \end{bmatrix}$$

Ovvero, in una forma più compatta:

$$[A] = \begin{bmatrix} 0 & I \\ -M^{-1}K & -M^{-1}C \end{bmatrix} \qquad [B] = \begin{bmatrix} 0 \\ -M^{-1} \end{bmatrix}$$

Dove le dimensioni delle matrici sono rispettivamente $2n \times 2n$ e $2n \times n$. La soluzione dell'equazione

$$\{\dot{x}\} = [A]\{x\} + [B]\{F\}$$

può essere effettuata mediante un'analisi modale nello spazio degli stati. A tal fine viene posto $\{F\} = 0$, ottenendo:

$$\{\dot{x}\} = [A]\{x\}$$

Poiché questa equazione rappresenta un sistema di equazioni differenziali ordinarie a coefficienti costanti, la sua soluzione ha la forma esponenziale

$$\{x(t)\} = \{z\}e^{\lambda t}$$

Si ottiene in questo modo il problema algebrico agli autovalori nella forma standard

$$[A]\{z(t)\} = [\lambda]\{z\}$$

La soluzione è quindi costituita dagli autovalori λ_i e dagli autovettori ψ_i, con $i = 1,2,..,2n$. Poiché la matrice $[A]$ è reale, se λ_r è un autovalore complesso, allora anche il complesso coniugato $\bar{\lambda}_r$ è un autovalore. Inoltre, l'autovettore ψ_r risultante di λ_r è anch'esso complesso, e l'autovettore $\bar{\psi}_r$ risultante di $\bar{\lambda}_r$, è il complesso coniugato di ψ_r.
Il sistema viene risolto sfruttando la stessa procedura iterativa mostrato in **Figura 5.11**, eseguendo il problema agli autovalori a vari valori della velocità di

rotazione ω, in quanto le caratteristiche del film ed i parametri del supporto dipendono dalla frequenza di perturbazione.
Il risultato, mostrato in **Figura 5.19**, mostra che l'utilizzo di un supporto esterno incrementa notevolmente la soglia di stabilità.

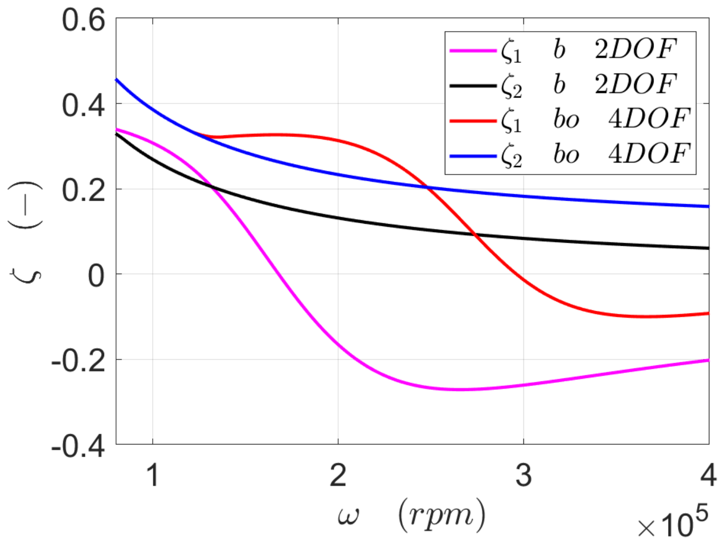


Figura 5.19: Confronto dello smorzamento relativo ζ sistema rotore-boccola senza e con O-Ring come smorzatore esterno

Conclusioni

Gli O-Ring, il cui utilizzo come guarnizioni e sistemi di tenuta è particolarmente diffuso nel settore industriale, risultano essere importanti per l'impiego come supporto esterno nei cuscinetti a gas ad alta velocità, con lo scopo di aumentarne la soglia di stabilità. Gli studi effettuati hanno consentito di analizzare il comportamento dinamico di rigidezza e smorzamento degli anelli elastomerici, in differenti condizioni di lavoro imposte, quali temperatura, *Squeeze* δ, *Stretch* ε, allo scopo di valutare il loro utilizzo come smorzatore esterno per applicazioni su cuscinetti a gas ad elevata velocità di rotazione. L'impiego di cuscinetti a gas risulta sempre più diffuso nelle applicazioni che richiedono elevata velocità. A tal fine è stata utilizzata come metodologia di caratterizzazione delle proprietà degli anelli elastomerici il "metodo indiretto", che prevede una massa non rotante, un albero, supportato su una coppia di O-Ring tenuti in posizione in un alloggiamento mediante delle chiusure intercambiabili. Il sistema è montato in modo da poter essere eccitato dinamicamente da uno shaker elettromagnetico. La misurazione degli spostamenti dell'alloggiamento e della massa supportata mediante sensori di spostamento capacitivi consente la determinazione della rigidezza e dei coefficienti di smorzamento.

Sono state condotte delle analisi preliminari del banco prova. Dapprima sono stati effettuati dei test con lo scopo di verificare la strumentazione utilizzata nel banco prova. Tale procedura è suddivisa in tre fasi consequenziali: la verifica della cella di carico, la verifica degli accelerometri e, infine, la verifica dei sensori capacitivi. Si è poi passati alla caratterizzazione dell'alloggiamento (housing) e della lamina di supporto, al fine di determinarne i valori di frequenza naturale, rigidezza e smorzamento. Per l'elaborazione dei dati sono state previsti due metodi di identificazione dei parametri differenti, in cui è stato riscontrato che il metodo del decremento logaritmico per il calcolo del valore dello smorzamento risulta essere, nel caso di valori di smorzamento molto piccoli, più accurato. Per la verifica del campo di frequenze ottimale ad ottenere una buona affidabilità dei dati, è stata inoltre valutata la precisione degli strumenti di misura utilizzati nelle prove. Da questa analisi è emerso che, a tal fine, la differenza dell'angolo di fase tra i segnali di spostamento alloggiamento e albero deve essere compresa

intorno al range $15° \div 160°$.
L'analisi dinamica del sistema ha quindi permesso di poter interpretare i segnali in output del banco in termini di rigidezza e smorzamento degli O-Ring testati. Si evidenzia come la rigidezza risulta aumentare con l'incremento della frequenza, mentre l'effetto opposto si ha con lo smorzamento, il quale tende a diminuire. Inoltre, la temperatura di lavoro ha un'influenza non trascurabile su questi parametri. Il banco prova ha permesso di compiere test fino ad una temperatura massima di 120° C. Dall'analisi delle prove è emerso che l'aumento della temperatura ha effettivamente un effetto negativo sia sul valore della rigidezza che su quello dello smorzamento.
I parametri identificati sono stati utilizzati per verificare la stabilità dinamica dei cuscinetti a gas, tramite la simulazione del comportamento rotodinamico di un rotore nel quale gli O-Ring sono utilizzati come supporto esterno ad essi. Il comportamento di questi tipi di sistemi è stato considerando diversi livelli di approssimazione. É stato esaminato dapprima il comportamento di un modello del rotore di Jeffcott, supportato da una singola boccola flottante, il cui comportamento del film di gas può essere descritta da otto coefficienti dinamici. Poiché tutti i coefficienti dinamici dipendono contemporaneamente dalla velocità di rotazione ω del rotore che dalla frequenza di perturbazione ν, è stata proposta una strategia di tipo iterativo al fine di determinarne i valori. Il sistema è stato poi implementato con l'inserimento di anelli in gomma come supporto, in modo che agiscano in serie rispetto alle caratteristiche del film. I risultati emersi da queste indagini mostrano come il loro impiego sia un mezzo efficace a posticipare questi fenomeni di instabilità indesiderati.

Appendice A

Funzioni di trasferimento

L'utilizzo di una funzione di trasferimento è un metodo efficace per risolvere sistemi lineari modellati da equazioni differenziali lineari,e può essere applicato per determinare la risposta di un sistema a qualsiasi eccitazione, sia essa transitoria, stazionaria, periodica o armonica. Tale metodo determina una trasformazione dei termini dell'equazione differenziale in un'equazione algebrica nella variabile s. Un vantaggio di lavorare nel dominio di Laplace, rispetto al dominio del tempo, è che le equazioni differenziali diventano equazioni algebriche. Una funzione di trasferimento $G(s)$, mette quindi in relazione un ingresso $u(s)$, con un'uscita $y(s)$.

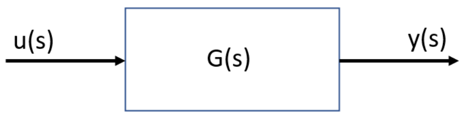


Figura A.1: Rappresentazione schema a blocchi di una funzione di trasferimento.

Vengono quindi riportati i calcoli effettuati per ottenere le diverse funzioni di trasferimento utili allo studio del modello. Considerando il modello in **Figura 3.11**, è possibile ricavare le equazioni di equilibrio **Equazioni 3.7** e **3.8** qui sotto riportate per semplicità:

$$m\ddot{x} + c_o^{'}(\dot{x} - \dot{y}) + k_o^{'}(x - y) = 0$$

$$M\ddot{y} + c_s\dot{y} + k_s y - c_o^{'}(\dot{x} - \dot{y}) - k_o^{'}(x - y) = F$$

- Funzione di trasferimento $G(s) = \frac{x(s)}{y(s)}$

$$
\begin{gathered}
ms^2x + c_o^{'}sx - c_o^{'}sy + k_o^{'}x - k_o^{'}y = 0 \\
x(ms^2 + c_o^{'}s + k_o^{'}) - y(c_o^{'}s + k_o^{'}) = 0 \\
\frac{x(s)}{y(s)} = \frac{c_o^{'}s + k_o^{'}}{ms^2 + c_o^{'}s + k_o^{'}}
\end{gathered}
$$

- Funzione di trasferimento $G(s) = \frac{x(s)}{z(s)}$

$$
\begin{gathered}
ms^2x + c_o^{'}sx - c_o^{'}sy + k_o^{'}x - k_o^{'}y = 0 \\
ms^2x + c_o^{'}sz + k_o^{'}z = 0 \\
ms^2x + z(c_o^{'}s + k_o^{'}) = 0 \\
\frac{x(s)}{z(s)} = -\frac{c_o^{'}s + k_o^{'}}{m^2}
\end{gathered}
$$

- Funzione di trasferimento $G(s) = \frac{y(s)}{F(s)}$

$$
\begin{gathered}
Ms^2y + c_s^{'}sy + k_s^{'}y - c_o^{'}sx + c_o^{'}sy - k_o^{'}x + k_o^{'}y = F \\
Ms^2y + c_s^{'}sy + k_s^{'}y - \frac{c_o^{'}s + k_o^{'}}{m^2 + c_o^{'}s + k_o^{'}}c_o^{'}sy + c_o^{'}sy - \frac{c_o^{'}s + k_o^{'}}{m^2 + c_o^{'}s + k_o^{'}}k_o^{'}y - k_o^{'}y = F \\
(Ms^2 + c_s^{'}s + k_s^{'} - \frac{c_o^{'}s + k_o^{'}}{m^2 + c_o^{'}s + k_o^{'}}c_o^{'}s + c_o^{'}s - \frac{c_o^{'}s + k_o^{'}}{m^2 + c_o^{'}s + k_o^{'}}k_o^{'} - k_o^{'})y = F \\
\frac{(Ms^2 + c_s^{'}s + k_s^{'} + c_o^{'}s - k_o^{'})(ms^2 + c_o^{'}s + k_o^{'}) - (c_o^{'}s + k_o^{'})^2}{m^2 + c_o^{'}s + k_o^{'}}y = F \\
\frac{y(s)}{F(s)} = \frac{ms^2 + c_o^{'}s + k_o^{'}}{Mms^4 + (Mc_o^{'} + mc_s^{'} + mc_o^{'})s^3 + (Mk_o^{'} + c_s^{'}c + mk_o^{'} + mk_s^{'})s^2 + (c_s^{'}k_o^{'} + k_s^{'}c_o^{'})s + k_s^{'}k_o^{'}}
\end{gathered}
$$

• Funzione di trasferimento $G(s) = \frac{x(s)}{F(s)}$

$$Ms^2y + c_s^{'}sy + k_s^{'}y - c_o^{'}sx + c_o^{'}sy - k_o^{'}x + k_o^{'}y = F$$

$$Ms^2\frac{m^2 + c_o^{'}s + k_o^{'}}{c_o^{'}s + k_o^{'}}x + (c_s^{'}s + k_s^{'})\frac{m^2 + c_o^{'}s + k_o^{'}}{c_o^{'}s + k_o^{'}}x - c_o^{'}sx + (c_o^{'}s + k_o^{'})\frac{m^2 + c_o^{'}s + k_o^{'}}{c_o^{'}s + k_o^{'}}x - k_o^{'}x = F$$

$$[Ms^2\frac{m^2 + c_o^{'}s + k_o^{'}}{c_o^{'}s + k_o^{'}} + (c_s^{'}s + k_s^{'})\frac{m^2 + c_o^{'}s + k_o^{'}}{c_o^{'}s + k_o^{'}} - c_o^{'}s + (c_o^{'}s + k)\frac{m^2 + c_o^{'}s + k_o^{'}}{c_o^{'}s + k_o^{'}} - k_o^{'}]x = F$$

$$\frac{(Ms^2 + c_s s + k_s + c_o^{'}s - k_o^{'})(ms^2 + c_o^{'}s + k_o^{'}) - (c_o^{'}s + k_o^{'})^2}{c_o^{'}s + k_o^{'}}x = F$$

$$\frac{x(s)}{F(s)} = \frac{c_o^{'}s + k_o^{'}}{Mms^4 + (Mc_o' + mc_s' + mc_o')s^3 + (Mk_o' + c_s'c_o' + mk_o' + mk_s')s^2 + (c_s k_o' + k_s'c_o')s + k_s'k}$$

• Funzione di trasferimento $G(s) = \frac{z(s)}{F(s)} = \frac{y}{F}\frac{x}{y}\frac{z}{x} = \frac{x}{F} - \frac{y}{F}$

$$\frac{z(s)}{F(s)} = \frac{-ms^2}{Mms^4 + (Mc_o' + mc_s' + mc_o')s^3 + (Mk_o' + c_s'c_o' + mk_o' + mk_s')s^2 + (c_s'k_o' + k_s'c_o')s + k_s'k_o'}$$

Appendice B

Misura dello smorzamento

B.1 Metodo del decremento logaritmico

Il metodo del decremento logaritmico risulta utile per calcolare il fattore di smorzamento ζ. Una misura della quantità di smorzamento in un sistema ad un singolo grado di libertà è la diminuzione di ampiezza nel compimento di un ciclo di vibrazione. Si prenda in considerazione lo spostamento mostrato in **Figura B.1**, assumendo che la curva sia rappresentativa dell'**Equazione B.2**, che corrisponde alla soluzione $x(t)$ di un sistema sotto-smorzato ($0 < \zeta < 1$).

$$x(t) = e^{-\zeta\omega_n t}(A_1 \cos(\omega_d t) + A_2 \sin(\omega_d t)) \tag{B.1}$$

dove, definendo con x_0 e y_0 i valori iniziali di spostamento e velocità, valgono le relazioni:

$$\begin{cases} A_1 = x_0 \\ A_2 = \frac{v_0 + \zeta\omega_n x_0}{\omega_d} \end{cases}$$

Siano ora A e ϕ l'ampiezza e l'angolo di fase della risposta, l'equazione precedente può essere riscritta come:

$$x(t) = Ae^{-\zeta\omega_n t} \cos(\omega_d t - \phi) \tag{B.2}$$

Si indicano con t_1 e t_2 i tempi corrispondenti al primo e al secondo picco, mentre x_1 e x_2 corrispondono ai rispettivi spostamenti dei picchi. Si ottiene il rapporto:

$$\frac{x_1}{x_2} = \frac{x(t_1)}{x(t_2)} = \frac{Ae^{-\zeta\omega_n t_1} \cos(\omega_d t_1 - \phi)}{Ae^{-\zeta\omega_n t_2} \cos(\omega_d t_2 - \phi)} \tag{B.3}$$

Poiché $t_2 = t_1 + T$ dove $T = 2\pi/\omega_d$ è il periodo dell'oscillazione smorzata, l'equazione diventa:

$$\frac{x_1}{x_2} = \frac{x(t_1)}{x(t_2)} = \frac{e^{-\zeta\omega_n t_1} \cos(\omega_d t_1 - \phi)}{e^{-\zeta\omega_n t_2} \cos[\omega_d(t_1 + T) - \phi]} = \frac{e^{\zeta\omega_n T} \cos(\omega_d t_1 - \phi)}{\cos(\omega_d t_1 - \phi + 2\pi)}$$

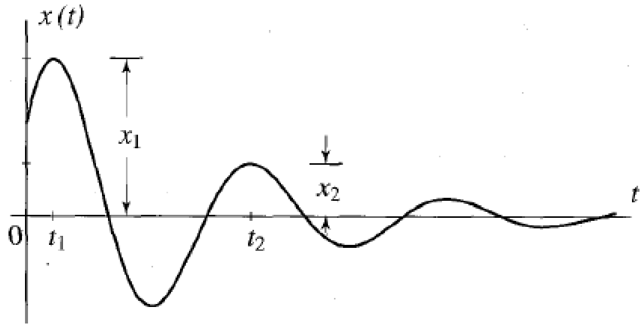


Figura B.1: Registrazione sperimentale della risposta di un sistema sottosmorzato.[18]

L'equazione può essere riscritta in funzione del solo fattore di smorzamento ζ:

$$\frac{x_1}{x_2} = e^{\zeta\omega_n T} = e^{2\pi\zeta\omega_n/\omega_d} = e^{2\pi\zeta/\sqrt{1-\zeta^2}} \tag{B.4}$$

Da cui si ricava il decremento logaritmico δ:

$$\delta = \ln\frac{x_1}{x_2} = \frac{2\pi\zeta}{\sqrt{1-\zeta^2}} \tag{B.5}$$

L'**Equazione B.5** può essere risolta per il fattore di smorzamento ζ, per cui si ottiene:

$$\zeta = \frac{\delta}{\sqrt{(2\pi)^2+\delta^2}} \tag{B.6}$$

Definendo con x_1 e x_{j+1} gli spostamenti dei picchi corrispondenti ai tempi t_1 e $t_{j+1} = t_1 + jT$, con j numero intero, le **Equazioni B.4** e **B.6** diventano:

$$\frac{x_1}{x_{j+1}} = (e^{2\pi\zeta/\sqrt{1-\zeta^2}})^j = e^{j2\pi\zeta/\sqrt{1-\zeta^2}} \qquad \delta = \frac{2\pi\zeta}{\sqrt{1-\zeta^2}} = \frac{1}{j}\ln\frac{x_1}{x_{j+1}}$$

Per ottenere ora una misura più accurata di ζ, data la relazione $\ln x_j = \ln x_1 - \delta(j-1)$ per $j = 1,2,..,l$, si considera che in un diagramma semilogaritmico il grafico $\ln(x_j)$ contro j ha un andamento lineare caratterizzato da una pendenza che risulta essere pari a $-\delta$. Risulta necessario effettuare un fitting dei dati, mostrato in **Figura B.2** dalla retta tratteggiata, in modo da minimizzare l'errore in quanto, poiché le misurazioni sono soggette ad errori, alcuni dei punti intermedi potrebbero non corrispondere esattamente con la retta.

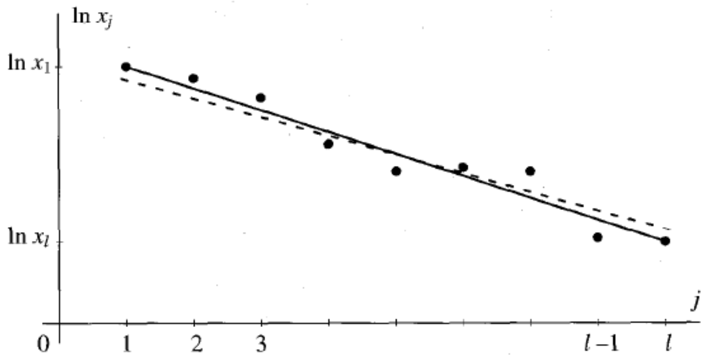


Figura B.2: Logaritmo naturale della misurazione dell'ampiezza di picco rispetto al punto della misurazione.[18]

B.2 Metodo dei punti di mezza potenza

Questa tecnica viene definita a partire dal modulo della recettanza $\|\alpha(\Omega)\|$ in un sistema caratterizzato da smorzamento viscoso:

$$\|\alpha(\Omega)\| = \frac{1/k}{\sqrt{(1-\Omega^2/\omega_n^2)+(2\zeta\Omega/\omega_n)^2}}$$

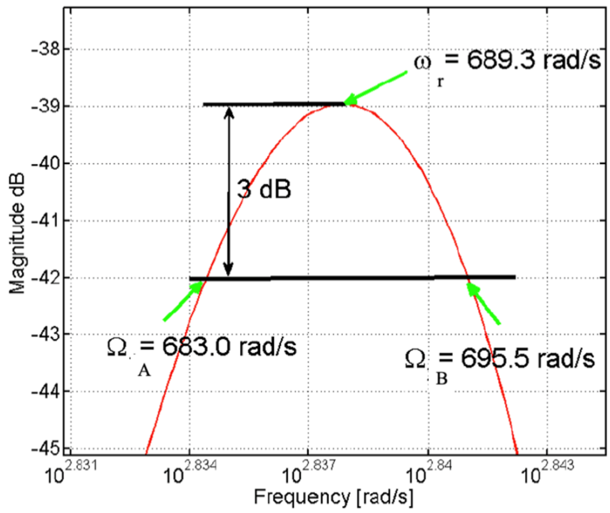


Figura B.3: Modulo della recettanza.

L'andamento di $\|\alpha(\Omega)\|$ mostra il massimo alla pulsazione di risonanza $\omega_r = \omega_n\sqrt{1-2\zeta^2}$, per poi avere un andamento monotono decrescente. Si interseca una retta orizzontale passante per un valore pari a $-3dB$ rispetto al massimo, intercettando così due punti, detti anche "punti di metà potenza". Allo stesso modo è possibile scegliere un valore N maggiore di $3dB$, in base alla caratteristica dell'ampiezza. Si può infatti intuire che in un sistema caratterizzato da uno smorzamento molto basso, e quindi da un picco di risonanza stretto, per avere dei risultati che rispecchiano il corretto valore del fattore di smorzamento ζ è utile considerare un'ampiezza di banda $(\Omega_b - \Omega_a)$ maggiore di quella che si otterrebbe a $3dB$. Definendo con $\sqrt{n}$ il fattore di diminuzione rispetto al quale si interseca la curva, il ché corrisponde a scrivere $20log\sqrt{n} = N$, e sviluppando i calcoli, si ottiene[19] che:

$$\frac{\zeta\sqrt{1-\zeta^2}}{1-2\zeta^2} = \frac{1}{\sqrt{n-1}}\frac{\Omega_b^2-\Omega_a^2}{2\omega_r} \tag{B.7}$$

Risulta quindi possibile calcolare ζ, dati i valori di Ω_a, Ω_b e ω_r trovati sperimentalmente.

Appendice C

Modello State Space

Un ulteriore metodo di rappresentazione di un sistema dinamico, oltre a quello descritto in **Appendice A** delle funzioni di trasferimento $G(s)$, è quello di descrivere il sistema nello spazio degli stati. Si utilizza in questo modo un numero di variabili che risulta essere analogo alla dimensione dinamica del sistema. Si consideri un generico sistema dinamico:

$$x(t) = f[x(t), u(t), t] \qquad \text{(equazione di stato)}$$
$$y(t) = g[x(t), u(t), t] \qquad \text{(equazione di uscita)}$$

in cui

- $x(t)$ è il vettore degli stati;
- $u(t)$ è il vettore degli ingressi;
- $y(t)$ è il vettore delle uscite;

Nel caso di sistemi lineari è possibile riscrivere il problema tramite le matrici $A(t)$, $B(t)$, $C(t)$ e $D(t)$:

$$\{\dot{x}(t)\} = [A(t)]\{x(t)\} + [B(t)]\{u(t)\}$$
$$\{y(t)\} = [C(t)]\{x(t)\} + [D(t)]\{u(t)\}$$

Le quattro matrici sono definite come: "matrice del sistema" $[A(t)]$, "matrice di distribuzione degli ingressi" $[B(t)]$, "matrice di distribuzione delle uscite" $[C(t)]$ e "matrice del legame algebrico ingresso-uscita" $[D(t)]$. Nei sistemi puramente dinamici l'ultima matrice risulta essere nulla.
Per un sistema di ordine n, con r input ed m output, la dimensione delle matrici risulta essere:

- $x \in R^{nx1}$
- $A \in R^{nxn}$
- $B \in R^{nxr}$
- $u \in R^{rx1}$
- $C \in R^{mxn}$
- $D \in R^{mxr}$
- $y \in R^{mx1}$

La **Figura C.1** mostra il significato delle matrici, dove la linea doppia indica i collegamenti multivariabili.[1]. Sono presenti tre blocchi puramente algebrici ed uno puramente dinamico, dove l'ingresso f è l'azione forzante.

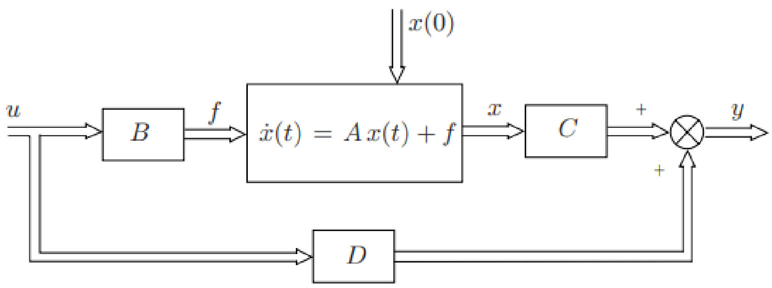


Figura C.1: Rappresentazione tramite sistema a blocchi delle matrici di un sistema lineare stazionario.

[1]Se si tratta del caso più generale di sistemi multivariabili, o MIMO (ovvero *multi-input, multi-output*)

C.1 Sistema Housing e Albero

É stato seguito lo stesso procedimento anche per l'intero sistema mostrato in **Figura C.2**.

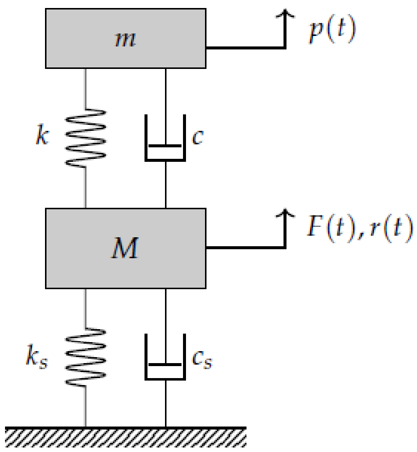


Figura C.2: Rappresentazione del sistema semplificato.

Le equazioni del moto che descrivono il sistema:

$$m\ddot{p} + c(\dot{p} - \dot{r}) + k(p - r) = 0 \tag{C.1}$$

$$M\ddot{r} + c_s\dot{r} + k_s r - c(\dot{p} - \dot{r}) - k(p - r) = F \tag{C.2}$$

Si esplicitano i termini $\ddot{p}$ e $\ddot{r}$:

$$\ddot{p} = -\frac{1}{m}[c(\dot{p} - \dot{r}) + k(p - r)]$$

$$\ddot{r} = \frac{1}{M}[c_s\dot{r} - k_s r + c(\dot{p} - \dot{r}) + k(p - r) + F]$$

Viene definito il vettore di stato $\{x(t)\}$:

$$\{x(t)\} = \begin{Bmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \\ x_3(t) \\ x_4(t) \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} p(t) \\ \dot{p}(t) \\ r(t) \\ \dot{r}(t) \end{Bmatrix}$$

Il sistema può quindi essere riformulato come quattro equazioni del primo ordine.

$$\begin{cases} \dot{x}_1 = x_2 \\ \dot{x}_2 = \frac{1}{m}(-cx_2 + cx_4 - kx_1 + kx_3) \\ \dot{x}_3 = x_4 \\ \dot{x}_4 = \frac{1}{M}[cx_2 - (c + c_s)x_4 + kx_1 - (k + k_s)x_3 + F] \end{cases}$$

Le matrici, considerando come output del sistema lo spostamento di albero e alloggiamento, risultano essere:

$$\begin{Bmatrix} \dot{x}_1(t) \\ \dot{x}_2(t) \\ \dot{x}_3(t) \\ \dot{x}_4(t) \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ -\frac{k}{m} & -\frac{c}{m} & \frac{k}{m} & \frac{c}{m} \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ \frac{k}{M} & \frac{c}{M} & -\frac{k_s+k}{M} & -\frac{c_s+c}{M} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \\ x_3(t) \\ x_4(t) \end{Bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ \frac{1}{M} \end{bmatrix} u(t)$$

$$\begin{Bmatrix} y_1(t) \\ y_2(t) \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \\ x_3(t) \\ x_4(t) \end{Bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix} u(t)$$

É inoltre possibile ottenere come output del sistema la deformazione dell'O-Ring $z(t) = x(t) - y(t)$, modificando opportunamente la matrice $[C]$. In questo caso si ha che:

$$[C] = \begin{bmatrix} 1 & 0 & -1 & 0 \end{bmatrix}$$

Appendice D

Script - Calcolo rigidezza e smorzamento

```
clc
clear all
close all

set(0,'defaultTextInterpreter','latex');
set(0,'defaultAxesFontSize',20);
set(0,'defaultAxesFontName','TimesNewRoman');

Frequenze=[100 200 300 400 500 600 700 800 900 1000 1100 1200 1300 1400 1500 1600 1700 1800 1900];
for index=1:length(Frequenze)

%Dati per Iter Parametrizzato
f_ext=Frequenze(index);     %Frequenza di Eccitazione
m=0.056;                    %Massa Albero
test=1;                     %Ripetizione Test no.
frequenza=1;                %Frequenza no.
Temp=30;                    %[C]
Albero=3;
OR=6;

%Caricamento Automatico Dati
Capacitivi=['load A' num2str(Albero) '_O' num2str(OR) '_fs20kHz_T' num2str(Temp) '_' num2str(f_ext) 'Hz_' num2str(test) '.txt;'];
Dati_Capa=['Dati2=A' num2str(Albero) '_O' num2str(OR) '_fs20kHz_T' num2str(Temp) '_' num2str(f_ext) 'Hz_' num2str(test) ';'];

```

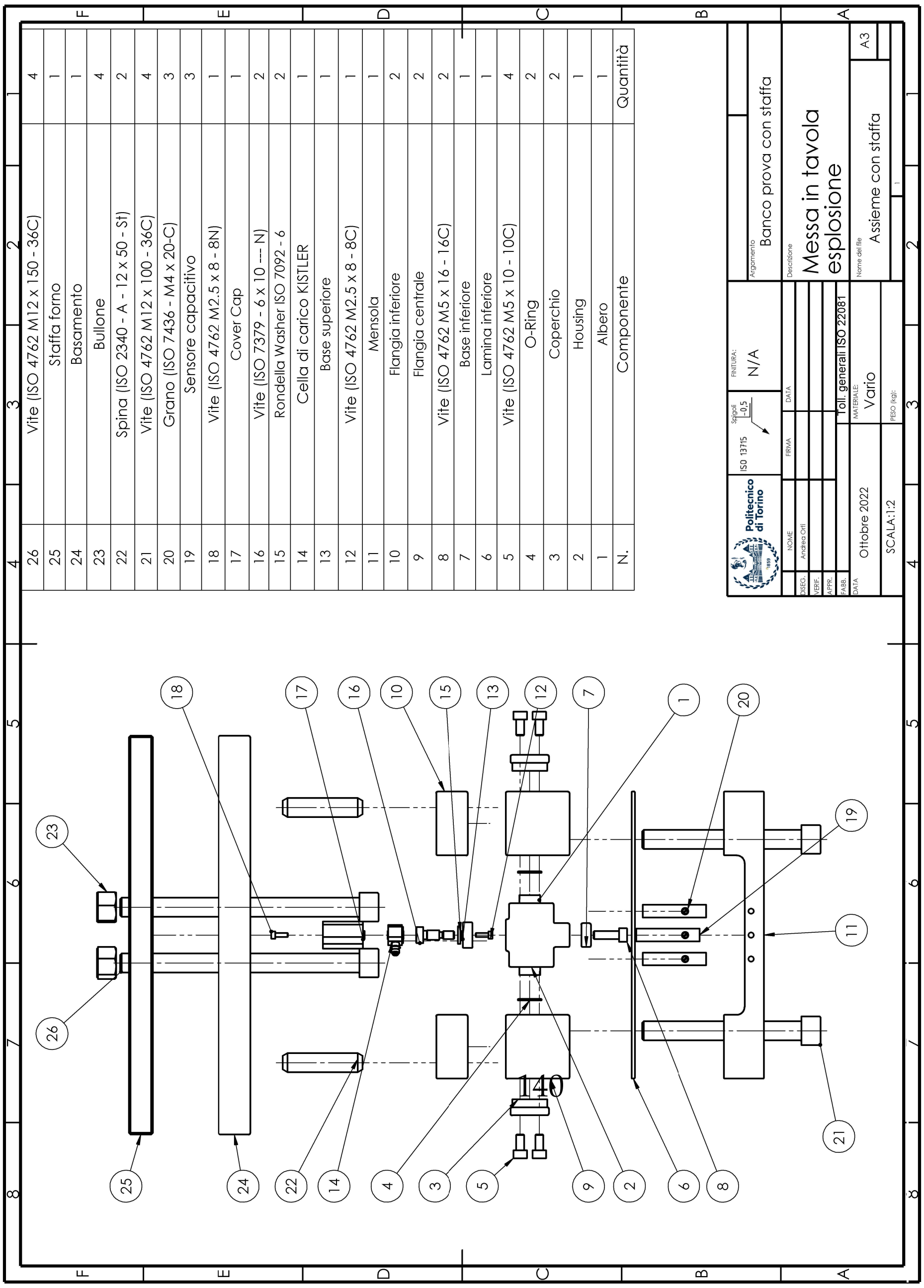
```
eval(Capacitivi)
eval(Dati_Capa)

x=Dati2(:,1)-mean(Dati2(:,1));
y1=Dati2(:,2)-mean(Dati2(:,2));
y2=Dati2(:,3)-mean(Dati2(:,3));
fc=Dati2(:,4)-mean(Dati2(:,4));

%Acquisitore lato Capacitivi
x=x*1e-6;     %(m)
y1=y1*1e-6; %(m)
y2=y2*1e-6; %(m)
fc=fc;          %(N)
y=(y1+y2)/2;
z=x-y;          %(m) Deformazione O-ring

%Frequenza di Acquisizione (fs)
fs=20000; %Fissa
dt=1/fs;
t=[1:length(x)]*dt;
t=t';

%Plot segnali nel tempo nel tempo
figure
plot(t,y1,'b','linewidth',2),hold on
plot(t,y2,'r','linewidth',2),hold on
plot(t,y,'g','linewidth',2),hold on
zoom on, grid on
xlabel('$Time t \quad (s)$'),ylabel('$Displacement {y}(t) \quad (m)$'),grid on
legend('Capacitive Sensor 1 - y_1','Capacitive Sensor 2 - y_2','Mean Dispacement y')

figure
plot(t,fc,'ro','linewidth',2),hold on
zoom on, grid on
xlabel('$Time t \quad (s)$'),ylabel('$Force {F}(t) \quad (N)$'),grid on
legend('Accelerometers','Capacitive Sensors 2')

%% Calcolo degli spettri
N=length(t);
%Spostamenti
Pxx=fft(x)/N;
Pyy=fft(y)/N;
Pzz=fft(z)/N;
%Forze
Pfc=fft(fc)/N;

```

```
%Costruzione asse delle frequenze
df=fs/N;
f=df*[0:floor(N/2)-1];
%Ampiezze Spettri
X=2*abs(Pxx(1:floor(N/2)));
Y=2*abs(Pyy(1:floor(N/2)));
Z=2*abs(Pzz(1:floor(N/2)));
Fc=2*abs(Pfc(1:floor(N/2)));

%Fasi Assolute
Phi_X=180/pi*angle(Pxx(1:floor(N/2)));
Phi_Y=180/pi*angle(Pyy(1:floor(N/2)));
Phi_Z=180/pi*angle(Pzz(1:floor(N/2)));
Phi_Fc=180/pi*angle(Pfc(1:floor(N/2)));

%Indice Corrispondente alla f_ext
[Peak_Fc IndFc]=max(Fc);

figure
subplot(2,1,1)
plot(f,X,'b','linewidth',2),hold on
plot(f,Y,'r','linewidth',2),hold on
plot(f,Z,'g','linewidth',2),hold on
plot(f(IndFc),X(IndFc),'b*','MarkerSize',12),hold on
plot(f(IndFc),Y(IndFc),'r*','MarkerSize',12),hold on
plot(f(IndFc),Z(IndFc),'g*','MarkerSize',12),hold on
zoom on, grid on,title('Displacements')
xlabel('$Frequency \quad (Hz)$'),ylabel('$Amplitude \quad (m)$'),grid on
legend('Housing - Y','Shaft - X','O-ring - Z=X-Y')
xlim([f(IndFc)-30 f(IndFc)+30])

subplot(2,1,2)
plot(f,Phi_X,'b','linewidth',2),hold on
plot(f,Phi_Y,'r','linewidth',2),hold on
plot(f,Phi_Z,'g','linewidth',2),hold on
plot(f(IndFc),Phi_X(IndFc),'b*','MarkerSize',12),hold on
plot(f(IndFc),Phi_Y(IndFc),'r*','MarkerSize',12),hold on
plot(f(IndFc),Phi_Z(IndFc),'g*','MarkerSize',12),hold on
zoom on, grid on,
xlabel('$Frequency \quad (Hz)$'),ylabel('$Phase \quad (deg)$'),grid on
xlim([f(IndFc)-30 f(IndFc)+30])


Amp=X(IndFc)/Y(IndFc)
Phi=-(Phi_X(IndFc)-Phi_Y(IndFc))
w=2*pi*f(IndFc)

```

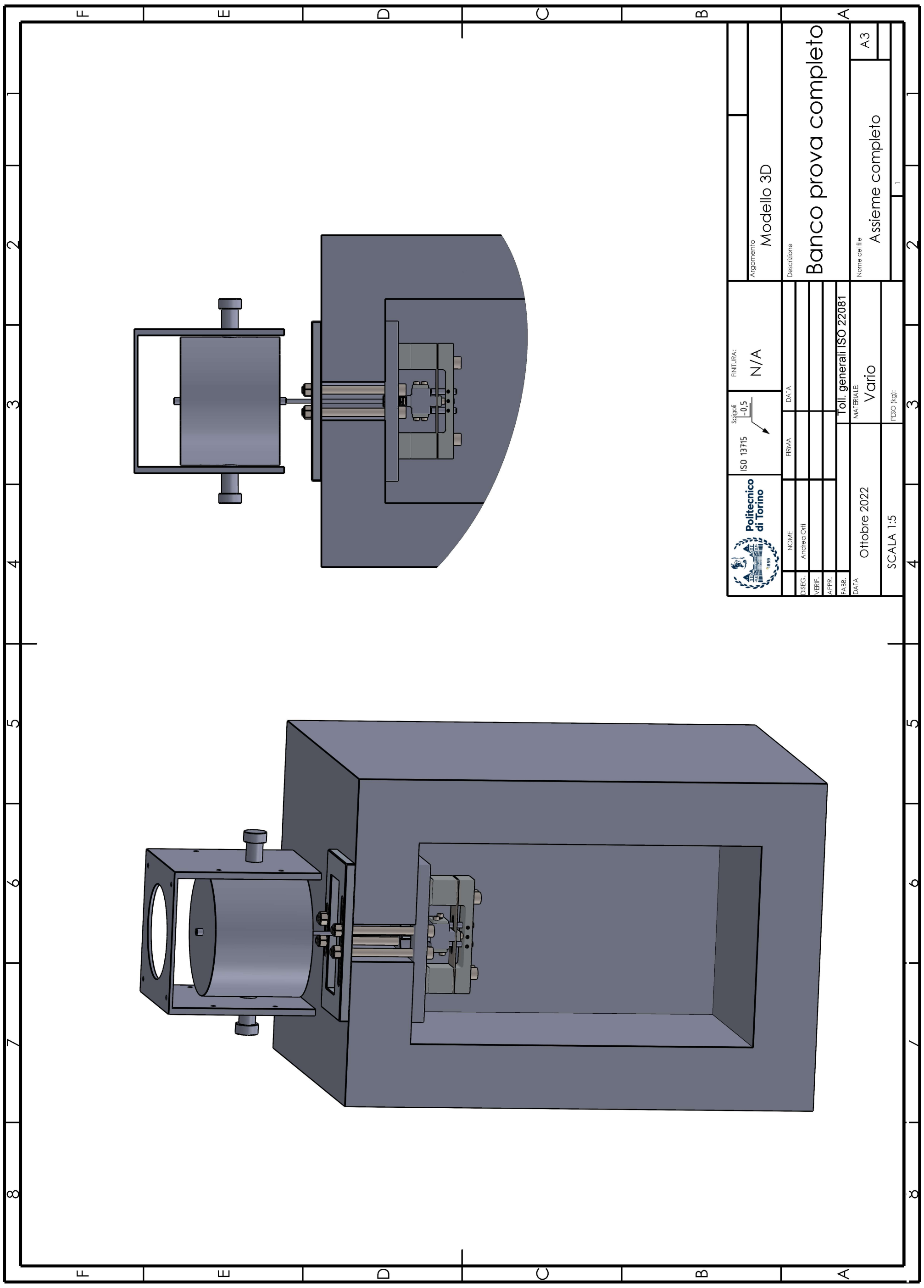
```
k=(m*w.^2.*Amp.*(Amp-cosd(Phi)))./(1+Amp.*(Amp-2.*cosd(Phi)));
c=(m*w.*Amp.*sind(Phi))./(1+Amp.*(Amp-2.*cosd(Phi)));

Amm=[f(IndFc) w k c];

% Appende i dati al file di testo
dlmwrite('Rigidezza_Smorzamento_T30_1.txt',Amm,'-append');

figure (99)
plot(w/2/pi,k,'b') hold on
title('Stiffness')
xlabel('$\omega \quad (Hz)$'),ylabel('$k \quad (\frac{N}{m})$')
grid on

figure (100)
plot(w/2/pi,c,'r'),hold on
title('Damping')
xlabel('$\omega \quad (Hz)$'),ylabel('$c \quad (\frac{Ns}{m})$')
end
```

Appendice E

Banco prova



N.	Componente	Quantità
26	Vite (ISO 4762 M12 x 150 - 36C)	4
25	Staffa forno	1
24	Basamento	1
23	Bullone	4
22	Spina (ISO 2340 - A - 12 x 50 - St)	2
21	Vite (ISO 4762 M12 x 100 - 36C)	4
20	Grano (ISO 7436 - M4 x 20-C)	3
19	Sensore capacitivo	3
18	Vite (ISO 4762 M2.5 x 8 - 8N)	1
17	Cover Cap	1
16	Vite (ISO 7379 - 6 x 10 --- N)	2
15	Rondella Washer ISO 7092 - 6	2
14	Cella di carico KISTLER	1
13	Base superiore	1
12	Vite (ISO 4762 M2.5 x 8 - 8C)	1
11	Mensola	1
10	Flangia inferiore	2
9	Flangia centrale	2
8	Vite (ISO 4762 M5 x 16 - 16C)	2
7	Base inferiore	1
6	Lamina inferiore	1
5	Vite (ISO 4762 M5 x 10 - 10C)	4
4	O-Ring	2
3	Coperchio	2
2	Housing	1
1	Albero	1


Politecnico di Torino
Modello 3D
Banco prova completo
Assieme completo
A3
ISO 13715
N/A
Toll. generali ISO 22081
Vario
Ottobre 2022
SCALA 1:5

Bibliografia

[1] Parker Hannifin Corporation. *Parker O-Ring Handbook*. Parker, 2021 (cit. alle pp. 1, 6–9).

[2] J. W. Powell e M. C. Tempest. «A Study of High Speed Machines With Rubber Stabilized Air Bearings». In: *Journal of Lubrication Technology* (1968) (cit. a p. 2).

[3] Eriks NV. *Sealing Elements - Technical Handbook O-Rings*. Eriks, 2020 (cit. alle pp. 3, 4).

[4] Aa. Vv. *Elastomer and rubber compounding materials - Manufacture, Properties and Applications*. Elsevier, 1989 (cit. a p. 10).

[5] R. Liebich, A. Scholz e M. Wieshalla. «Rotors supported by elastomer-ring-dampers - experimental and numerical investigations». In: *Institution of Mechanical Engineers - 10th International Conference on Vibrations in Rotating Machinery* (2012), pp. 443–453 (cit. alle pp. 12–15, 17).

[6] I.M. Ward e J. Sweeney. *Mechanical Properties of Solid Polymers*. Wiley, 2013 (cit. a p. 15).

[7] F. Al-Bender, F. Colombo et al. «Dynamic Characterization of Rubber O-Rings: Squeeze and Size Effects». In: *Advances in Tribology* (lug. 2017) (cit. alle pp. 21–25).

[8] M. Darlow e E. Zorzi. *Mechanical Design Handbook for Elastomers*. NASA, National Aeronautics e Space Administration, 1981 (cit. alle pp. 26, 27).

[9] J. Schiffmann e P. Bättig. «Data-Driven Model for the Dynamic Characteristics of O-Rings for Gas Bearing Supported Rotors». In: *Journal of Applied Mechanics* (ago. 2019) (cit. alle pp. 27, 28).

[10] T. Shoyama e K. Fujimoto. «Calculation of high-frequency dynamic properties of squeezed O-ring for bearing support». In: *Mechanical Engineering Journal* (2018) (cit. alle pp. 29, 30).

[11] N. Miyanaga e J. Tomioka. «Effect of Dynamic Properties of Support O-Rings on Stability of Herringbone-Grooved Aerodynamic Journal Bearings». In: *Tribology Online* (2016) (cit. alle pp. 31, 32).

[12] Nguyen-Schäfer H-. *Rotordynamics of Automotive Turbochargers*. Springer, 2012 (cit. alle pp. 93–95).

[13] F. Al-Bender et al. *Air Bearings: Theory, Design and Applications*. Vol. Tribology in Practice Series. WILEY, 2021 (cit. alle pp. 98–100, 102).

[14] B.J. Hamrock, R. Steven, S.R. Schmid e Jacobson B.O. *Fundamentals of Fluid Film Lubrication*. Marcel Dekker, Inc., 2004 (cit. a p. 100).

[15] J.S. Ausman. «An Improved Analytical Solution for Self-Acting, Gas-Lubricated Journal Bearings of Finite Length». In: *Journal of Basic Engineering* 83 (1961) (cit. alle pp. 102, 107).

[16] K. Czolczynski. *Rotordynamics of Gas-Lubricated Journal Bearing System*. Springer, 1999 (cit. alle pp. 106, 107).

[17] T. Waumans. *On the Design of High-speed Miniature Air Bearings: Dynamic Stability, Optimisation and Experimental Validation*. 2009 (cit. alle pp. 108, 109, 116, 117).

[18] L. Meirovitch. *Fundamentals of vibrations*. McGraw-Hill, 2001 (cit. alle pp. 128, 129).

[19] A. Fasana e S. Marchesiello. *Meccanica delle vibrazioni*. CLUT, 2006 (cit. a p. 130).