

Introduzione

In questa dispensa vengono forniti alcuni elementi di base per la soluzione di equazioni alle derivate parziali che governano *problemi al contorno*. A questo scopo si introducono, in forma abbastanza sintetica, gli schemi alle differenze finite che vengono poi utilizzati per la riscrittura in forma discreta e per la soluzione numerica dell'equazione di Laplace in un dominio quadrato con opportune condizioni al contorno. La scelta dell'equazione di Laplace come problema tipo è motivata dal fatto che questa equazione è rappresentativa di molti problemi in ambito strutturale, termodinamico, fluidodinamico, elettromagnetico.

Nella prima sezione gli schemi alle differenze finite sono introdotti per funzioni di una sola variabile. Nella seconda sezione gli schemi vengono estesi al caso di derivate parziali, con particolare riferimento a problemi in due variabili e, infine, nella terza sezione gli schemi introdotti vengono impiegati per la discretizzazione del problema di Laplace.

1 Schemi alle differenze finite per funzioni di una variabile

Supponiamo di disporre di una serie di $n + 1$ coppie di valori f_i, x_i con $i = 1, \dots, n + 1$, e di voler valutare (in modo approssimato) la derivata della funzione f , che si assume continua e con derivate continue. Per semplicità si assume che i nodi siano equispaziati, ovvero per ogni $i = 1 \div n$ $x_{i+1} - x_i = h$.

Per valutare la derivata prima nel generico nodo i , si può usare uno sviluppo di Taylor con punto iniziale x_i per esprimere la funzione in x_{i+1} e in x_{i-1} , ottenendo quindi

$$f_{i+1} = f_i + f'_i h + f''_i \frac{h^2}{2} + f'''_i \frac{h^3}{6} + f^{iv}_i \frac{h^4}{24} \dots \quad (1)$$

$$f_{i-1} = f_i - f'_i h + f''_i \frac{h^2}{2} - f'''_i \frac{h^3}{6} + f^{iv}_i \frac{h^4}{24} \dots \quad (2)$$

$$(3)$$

Sottraendo la seconda equazione dalla prima si ha

$$f_{i+1} - f_{i-1} = f'_i 2h + f'''_i \frac{h^3}{3} + \dots ,$$

ovvero

$$f'_i = \frac{f_{i+1} - f_{i-1}}{2h} - f'''_i \frac{h^2}{6} + \dots .$$

Se h è abbastanza piccolo, l'espressione data fornisce il valore della derivata prima calcolata alle **differenze finite centrate**

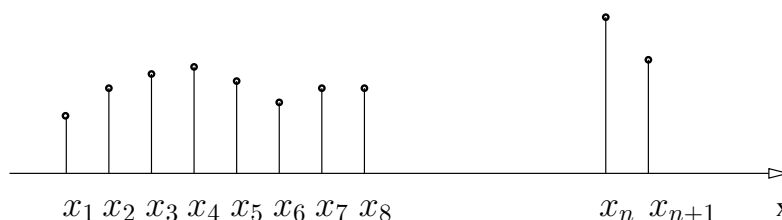


Figura 1:

Sempre a partire dagli sviluppi dati, sommando le equazioni (1) e (2) si ottiene

$$f_{i+1} + f_{i-1} = 2f_i + f''h^2 + f_i^{iv}\frac{h^4}{12} + \dots$$

da cui

$$f''_i = \frac{f_{i+1} - 2f_i + f_{i-1}}{h^2} - f_i^{iv}\frac{h^2}{12} + \dots$$

che, ancora per h piccolo, fornisce il valore della derivata seconda calcolata alle differenze finite centrate.

Le formule date consentono di calcolare le derivate per tutti i punti interni, ovvero $1 < i < n$, ma non consentono di calcolare le derivate per $i = 1$ (non dispongo del valore della funzione in $i = 0$) e in $i = n$ (non dispongo del valore della funzione in $i = n + 1$). Per superare questo problema si opera in modo del tutto simile e, volendo valutare la derivata in $i = 1$ si scrivono gli sviluppi in serie di Taylor per esprimere i valori che la funzione assume in $i = 2$ e $i = 3$. Combinando in modo opportuno gli sviluppi così ottenuti si ottiene

$$f'_i = \frac{-f_{i+2} + 4f_{i+1} - 3f_i}{2h} + f'''_i\frac{h^2}{3} + \dots$$

$$f'_i = \frac{f_{i-2} - 4f_{i-1} + 3f_i}{2h} + f'''_i\frac{h^2}{3} + \dots$$

che sono le espressioni delle derivate prime calcolate alle **differenze finite in avanti e indietro**.

Gli schemi alle differenze discussi in precedenza valutano le derivate con un errore proporzionale a h^2 e per questo sono accurate al **secondo ordine**. Attraverso procedure analoghe è possibile ottenere formule alle differenze di ordine superiore per la valutazione delle quali viene coinvolto un maggior numero di punti a monte e a valle.

2 Esempio di applicazione per equazioni al contorno in una dimensione



Figura 2:

Come semplice esempio di applicazione degli schemi alle differenze introdotti sopra, si considera il caso di una trave appoggiata sulla quale insiste una distribuzione di carico come mostrato in figura 2. Senza entrare nel dettaglio, il problema è governato da una equazione differenziale del tipo:

$$y''(x) + c(x)y(x) = p(x)$$

in cui y rappresenta lo spostamento verticale della trave causato dalla presenza del carico, $c(x)$ porta in conto caratteristiche locali della trave (materiale, sezione, forma...) e $p(x)$ è il valore locale del carico. Nell'esempio che segue si assumerà che le caratteristiche della trave sono costanti lungo tutto il tratto considerato (ovvero c è indipendente da x). Inoltre si assume che

la trave e' appoggiata e che quindi la deformazione e' nulla sul primo e ultimo nodo, ovvero $y_0 = y_8 = 0$. Per il carico si ipotizza che abbia una distribuzione triangolare, come in figura, e P indica il valore massimo di pressione che e', con riferimento alla figura, e' raggiunto proprio in corrispondenza del nodo 2.

Dalla discretizzazione alle differenze finite dell'equazione differenziale suddetta in corrispondenza del generico nodo i si ottiene:

$$\frac{y_{i+1} - 2y_i + y_{i-1}}{h^2} + c_i y_i = p_i \quad (4)$$

in cui h rappresenta la distanza tra un nodo e l'altro. Ad esempio se L e' la lunghezza totale, per la discretizzazione riportata in figura si avrebbe $h = L/8$.

Per la soluzione del problema e' necessario andare a scrivere l'equazione (4) in tutti i nodi interni, visto che e' qui che la deformata e' incognita. Si ha allora:

$$\begin{aligned} \frac{y_2 - 2y_1 + y_0}{h^2} + c_1 y_1 &= 0 \\ \frac{y_3 - 2y_2 + y_1}{h^2} + c_2 y_2 &= P \\ \frac{y_4 - 2y_3 + y_2}{h^2} + c_3 y_3 &= 0 \\ \frac{y_5 - 2y_4 + y_3}{h^2} + c_4 y_4 &= 0 \\ \frac{y_6 - 2y_5 + y_4}{h^2} + c_5 y_5 &= 0 \\ \frac{y_7 - 2y_6 + y_5}{h^2} + c_6 y_6 &= 0 \\ \frac{y_8 - 2y_7 + y_6}{h^2} + c_7 y_7 &= 0 \end{aligned}$$

Questo sistema di equazioni può essere riordinato come segue:

$$\begin{aligned} (c_1 h^2 - 2)y_1 + y_2 &= -y_0 \\ y_1 + (c_2 h^2 - 2)y_2 + y_3 &= P h^2 \\ y_2 + (c_3 h^2 - 2)y_3 + y_4 &= 0 \\ y_3 + (c_4 h^2 - 2)y_4 + y_5 &= 0 \\ y_4 + (c_5 h^2 - 2)y_5 + y_6 &= 0 \\ y_5 + (c_6 h^2 - 2)y_6 + y_7 &= 0 \\ y_6 + (c_7 h^2 - 2)y_7 &= -y_8 \end{aligned} \quad (5)$$

in cui si è tenuto conto del fatto che y_0 e y_8 sono noti.

La matrice rappresentativa del sistema (5) è quindi

$$A = \begin{bmatrix} (c_1 h^2 - 2) & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & (c_2 h^2 - 2) & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & (c_3 h^2 - 2) & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & (c_4 h^2 - 2) & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & (c_5 h^2 - 2) & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & (c_6 h^2 - 2) & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & (c_7 h^2 - 2) \end{bmatrix}$$

mentre il vettore termini noti è $B = [-y_0, Ph^2, 0, 0, 0, 0, -y_8]^T$. Ovviamente nel caso in cui le caratteristiche del materiale e la geometria sono costanti per tutta la lunghezza della trave i coefficienti c_i sono tutti uguali tra loro.

La soluzione di questo sistema lineare si ottiene attraverso l'applicazione dell'algoritmo di Thomas per matrici tridiagonali e il risultato sarà il vettore incognite $X = [y_1, y_2, y_3, y_4, y_5, y_6, y_7]$.

3 Schemi alle differenze finite per funzioni di due variabili

Nel caso in cui la funzione dipende da due o più variabili, i concetti esposti nella sezione precedente vanno estesi al caso di derivate parziali. Per rendere più semplice la comprensione del problema e la sua discretizzazione, si consideri lo schema rappresentato nella figura 3. Possiamo immaginare che la funzione di più variabili che si vuole studiare sia la distribuzione di temperatura nell'ambiente. Per semplicità l'ambiente è stato assunto di forma rettangolare e si immagina che la variabile in esame, la temperatura appunto, sia nota nei punti segnati nello schema.

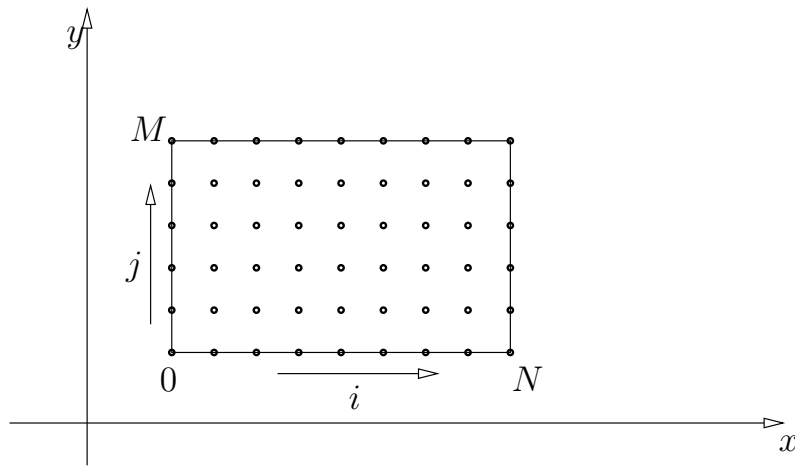


Figura 3:

Nel piano, il generico punto è individuato da una coppia di indici (i, j) con $i = 0, \div N$ e $j = 0, \div M$. Inoltre, come indicato in figura 3, nel caso di distribuzione uniforme dei nodi la coordinata x è la stessa per tutti i nodi che hanno lo stesso indice i , anche se hanno diverso indice j . Allo stesso modo, tutti i nodi che hanno lo stesso indice j hanno la stessa coordinata y . Questo rende estremamente semplice la costruzione di schemi alle differenze finite per il calcolo di derivate parziali in rispetto a x o y .

In pratica si tratta di utilizzare le stesse formule riportate in precedenza per le funzioni di una sola variabile, utilizzandole per la funzione di due variabili, diciamo $g(i, j)$, facendo variare solo l'indice relativo alla variabile rispetto alla quale si deve effettuare la derivata mantenendo fisso l'altro. Il passo verrà poi sostituito da Δx o Δy , a seconda della direzione rispetto alla quale si effettua la derivata.

Come esempio vengono riportate di seguito le espressioni delle derivate parziali prime e seconde rispetto a x e y , valutate con schemi alle differenze centrate riportati nella sezione precedente. La quantità

$$\frac{\partial g}{\partial x}(i, j) = \frac{g(i+1, j) - g(i-1, j)}{2\Delta x}$$

rappresenta il valore della derivata parziale rispetto alla x valutata nel nodo (i, j) . In modo simile

$$\frac{\partial g}{\partial y}(i, j) = \frac{g(i, j+1) - g(i, j-1)}{2\Delta y}$$

rappresenta il valore della derivata parziale rispetto alla y valutata nello stesso nodo (i, j) . Per le derivate seconde si ha:

$$\begin{aligned}\frac{\partial^2 g}{\partial x^2}(i, j) &= \frac{g(i+1, j) - 2g(i, j) + g(i-1, j)}{\Delta x^2} , \\ \frac{\partial^2 g}{\partial y^2}(i, j) &= \frac{g(i, j+1) - 2g(i, j) + g(i, j-1)}{\Delta y^2} .\end{aligned}$$

È infine opportuno sottolineare che gli errori relativi, trattandosi di schemi al secondo ordine, saranno rispettivamente proporzionali a Δx^2 o Δy^2 per le derivate parziali rispetto a x o a y .

4 Equazione di Laplace e sua soluzione numerica

Molti problemi di fisica tecnica, fluidodinamica, strutture e teoria dei campi elettromagnetici, sono governati da una equazione differenziale del tipo

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} = b \quad (6)$$

nota come *equazione di Poisson*. Nella (6) la funzione $f(x, y)$ rappresenta la distribuzione di una qualche variabile fisica, ad esempio la temperatura, mentre la $b(x, y)$ rappresenta un termine *sorgente*, ad esempio l'intensità di una fonte di calore. In molti problemi il termine sorgente è nullo in tutto il dominio e l'equazione (6) assume la forma

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} = 0 \quad (7)$$

nota come *equazione di Laplace*. È opportuno sottolineare che le forme riportate solo limitate a problemi bidimensionali. Forme completamente analoghe si possono avere in tre dimensioni aggiungendo la derivata seconda rispetto alla terza variabile spaziale z .

Per la soluzione delle equazioni di Poisson o Laplace è necessario assegnare *condizioni al contorno*. Nei problemi della fisica, queste condizioni possono essere di due tipi: in alcuni casi viene assegnata la stessa variabile f mentre in altri casi viene assegnata la sua derivata normale. Nel primo caso si parla di condizioni di *Dirichlet* nel secondo caso si parla di condizioni di *Neumann*. Si hanno condizioni di Dirichlet quando ad esempio si conosce il valore della temperatura su tutto il contorno mentre si hanno condizioni di Neumann quando sul contorno è posizionata una sorgente di calore.

Come esempio viene di seguito presentata la soluzione numerica dell'equazione di Laplace in un dominio rettangolare con condizioni di Dirichlet assegnate al contorno. Senza perdita di generalità si assume che il problema sia quello di determinare la distribuzione della f in una lastra piana rettangolare di lati $L_x = 5$ e $L_y = 4$ (figura 4). In forma discreta i lati L_x e L_y vengono discretizzati rispettivamente con $N = 5$ e $M = 4$ sottointervalli. Di conseguenza $\Delta x = L_x/N = 1$ e $\Delta y = L_y/M = 1$. L'intera lastra è quindi suddivisa in $(N+1) \times (M+1)$ nodi, ognuno dei quali individuato da una coppia (i, j) con $i = 0 \div N$ e $j = 0 \div M$. Poiché si assume che la funzione f sia assegnata al contorno, le quantità

$$f(0, j) , f(5, j) \quad \text{sono note } \forall j = 0 \div 4$$

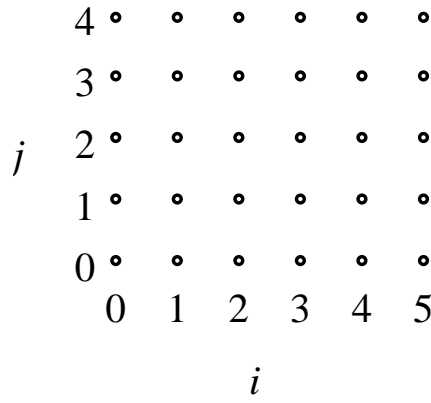


Figura 4:

e in modo simile

$$f(i, 0) , \quad f(i, 4) \quad \text{sono note } \forall i = 0 \div 5 .$$

Per determinare invece i valori della f nei nodi interni è necessario scrivere l'equazione di Laplace in forma discreta in ognuno di essi. A questo scopo, sulla base di quanto riportato nella sezione precedenti, in forma discreta si ha che

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} = \frac{f(i+1, j) - 2f(i, j) + f(i-1, j)}{\Delta x^2}$$

$$\frac{\partial^2 f}{\partial y^2} = \frac{f(i, j+1) - 2f(i, j) + f(i, j-1)}{\Delta y^2} .$$

Visto che, per quanto detto sopra, la discretizzazione è stata effettuata in modo che $\Delta x = \Delta y = 1$, le espressioni discrete delle derivate seconde si semplificano ulteriormente ottenendo quindi:

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} = f(i+1, j) - 2f(i, j) + f(i-1, j) \quad , \quad \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} = f(i, j+1) - 2f(i, j) + f(i, j-1) \quad .$$

Sostituendo queste due espressioni delle derivate seconde nell'equazione di Laplace (7), in corrispondenza del generico nodo i, j si ottiene

$$f(i, j-1) + f(i-1, j) - 4f(i, j) + f(i+1, j) + f(i, j+1) = 0 \quad . \quad (8)$$

Questa equazione va particolareggiata per tutti i nodi interni, ovvero per tutti i nodi i, j con $i = 1, 4$ e $j = 1, 3$, tenendo conto del fatto che i valori sui nodi al contorno sono noti.

Con riferimento alla figura 4, per il nodo $(1, 1)$ la (8) diventa

$$f(1, 0) + f(0, 1) - 4f(1, 1) + f(2, 1) + f(1, 2) = 0 \quad ,$$

e poiché $f(1, 0)$ e $f(0, 1)$ sono noti, si ha

$$-4f(1, 1) + f(2, 1) + f(1, 2) = -f(1, 0) - f(0, 1) \quad .$$

In modo simile, per il nodo $(2, 1)$ si ha

$$f(1, 1) - 4f(2, 1) + f(3, 1) + f(2, 2) = -f(2, 0) \quad ,$$

e così via. Nei nodi con entrambi gli indici superiori a 1 e inferiori a $N - 1$ e $M - 1$, rispettivamente, nessuno dei termini che compare nella somma è un termine di bordo e quindi tutti i contributi sono incogniti. A titolo di esempio, per il nodo $(3, 2)$ la (8) prende la forma

$$f(3, 1) + f(2, 2) - 4f(3, 2) + f(4, 2) + f(3, 3) = 0 \quad .$$

Raccogliendo tutte le equazioni si ottiene un sistema di equazioni lineari del tipo

$$AX = B$$

in cui

$$A = \begin{bmatrix} -4 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & -4 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -4 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -4 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & -4 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & -4 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & -4 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & -4 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & -4 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & -4 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & -4 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & -4 \end{bmatrix}$$

$$B = \begin{bmatrix} -f(1, 0) - f(0, 1) \\ -f(2, 0) \\ -f(3, 0) \\ -f(4, 0) - f(5, 1) \\ -f(0, 2) \\ 0 \\ 0 \\ -f(5, 2) \\ -f(0, 3) - f(1, 4) \\ -f(2, 4) \\ -f(3, 4) \\ -f(4, 4) - f(5, 4) \end{bmatrix}$$

e il vettore delle incognite è

$$X = \begin{bmatrix} f(1, 1) \\ f(2, 1) \\ f(3, 1) \\ f(4, 1) \\ f(1, 2) \\ f(2, 2) \\ f(3, 2) \\ f(4, 2) \\ f(1, 3) \\ f(2, 3) \\ f(3, 3) \\ f(4, 3) \end{bmatrix}$$

Questo mette in evidenza la struttura molto particolare della matrice che risulta essere pentadiagonale a blocchi. Inoltre, è possibile verificare che la matrice è diagonalmente dominante,

seppure in senso debole, e questo consente l'impiego di solutori iterativi, indispensabili per la soluzione di problemi con un numero molto elevato di incognite.