

# POLITECNICO DI TORINO

Tesi di laurea magistrale in INGEGNERIA CIVILE



**Politecnico  
di Torino**

Tesi di laurea magistrale

## Analisi strutturale di archi soggetti a danneggiamento

Relatori

Candidato

Prof. A. MANUELLO BERTETTO

VITTORIO LEPROTTO

Ing. J. MELCHIORRE

Prof. G.C. MARANO

**A.A 2022-2023**



# Abstract

Nella presente tesi magistrale, l'intento principale è quello di effettuare un'analisi strutturale di strutture ad arco a seguito dell'introduzione di un danneggiamento. Si intende dunque utilizzare un modello numerico realizzato tramite un codice Matlab, il quale si basa essenzialmente sulla soluzione analitica del problema della trave piana curva. Partendo quindi dalle equazioni differenziali che governano il problema della trave piana curva elastica lineare, si giunge per mezzo di alcune assunzioni semplificative ad una soluzione analitica, coincidente con un'equazione differenziale ordinaria del sesto ordine.

La risoluzione di tale equazione differenziale avviene tramite l'adozione del metodo delle differenze finite centrate. L'equazione risolvibile congiuntamente alle condizioni al contorno, permette quindi la determinazione degli spostamenti, delle caratteristiche interne della sollecitazione e delle tensioni, tutte grandezze intese come parametri di output.

Il danneggiamento viene quindi introdotto per mezzo di una molla elastica rotazionale tramite la quale si intende simulare una riduzione della rigidità flessionale. Tale riduzione mira a simulare una generica riduzione di rigidità flessionale oppure a ricreare le condizioni relative ad un decremento dell'inerzia sezionale, nonché l'aumento di cedevolezza di giunti. Ad ogni modo la molla rotazionale tramite una riduzione della sua rigidità permette il raggiungimento dell'obiettivo e quindi della riduzione della rigidità flessionale. L'introduzione di una o più molle

elastiche comporta la suddivisione della curva di partenza, rappresentante l'arco iniziale, in più curve, ognuna delle quali sottostà all'equazione differenziale del sesto ordine. La modellazione dell'arco, in una data configurazione di danneggiamento è comunque possibile in quanto tali curve rimangono connesse per mezzo delle condizioni al contorno, dettate dal vincolo interno molla rotazionale e applicate nel punto comune a due curve. In questo senso si procede alla determinazione della soluzione per mezzo di un sistema algebrico che presenterà un numero di equazioni pari alla somma del numero di punti utilizzati per discretizzare il dominio di partenza e le sei condizioni al contorno che si presentano per ogni tratto di curva. Dapprima si mostra come la modellazione numerica fornisca dei risultati corretti, andando a confrontare gli andamenti degli spostamenti e delle caratteristiche interne della sollecitazione ottenuti, con quelli derivanti dal software commerciale **SAP2000**. I confronti effettuati sono relativi a strutture ad arco che presentano una sola molla in corrispondenza della chiave dell'arco, considerando diverse tipologie di sezioni, diverse leggi di variazione della sezione lungo l'ascissa curvilinea e diverse condizioni di carico. Valutata la correttezza del modello numerico, si procede con la valutazione e l'analisi del comportamento strutturale di archi in acciaio a seguito dell'introduzione di più molle rotazionali, posizionate in corrispondenza dei punti in cui viene raggiunto il limite di snervamento, variando la rigidità delle molle stesse nonché il carico a cui la struttura è sottoposta.

Infine si procede con l'individuazione di un pattern di danneggiamento. Al fine di fare ciò si prende in considerazione una tipica struttura ad arco realizzata in legno lamellare, in cui verranno quindi adottati dei giunti in acciaio atti ad assicurare il collegamento fra i vari elementi strutturali che comporranno l'arco complessivo. Il pattern di danneggiamento in questo senso coincide quindi con la posizione delle connessioni. Partendo da questo presupposto si considerano differenti condizioni

di danneggiamento, ottenute fornendo diverse rigidzze flessionali alle molle rotazionali posizionate per l'appunto in corrispondenza dei giunti. Sulla base dei risultati ottenuti si conduce quindi una analisi statistica con riferimento ai principali parametri di output, al fine di effettuare delle considerazioni in funzione delle diverse condizioni di danneggiamento che in generale possono presentarsi.

# Ringraziamenti

Ai miei genitori



# Indice

Lista delle tabelle	x
Lista delle figure	XI
<b>1 INTRODUZIONE</b>	<b>1</b>
1.1 Danneggiamento . . . . .	5
1.2 Danneggiamento di archi in acciaio . . . . .	8
1.3 Danneggiamento archi in legno lamellare . . . . .	9
<b>2 Problema della trave curva</b>	<b>11</b>
2.1 Equazioni indefinite di equilibrio . . . . .	13
2.1.1 Equilibrio alla traslazione lungo la direzione $x$ . . . . .	15
2.1.2 Equilibrio alla traslazione rispetto alla direzione $y$ . . . . .	15
2.1.3 Equilibrio alla rotazione rispetto al baricentro . . . . .	16
2.1.4 Forma matriciale . . . . .	16
2.2 Equazioni cinematiche . . . . .	17
2.3 Equazioni costitutive . . . . .	19
<b>3 Soluzione del problema dell'arco</b>	<b>21</b>
3.1 Calcolo degli spostamenti tangenziali . . . . .	23
3.2 Assunzione di inerzia variabile . . . . .	25

<b>4</b>	<b>Definizione della forma dell'arco</b>	<b>29</b>
4.1	Arco circolare . . . . .	29
4.2	Arco parabolico . . . . .	32
4.3	Definizione del raggio di curvatura . . . . .	34
<b>5</b>	<b>Definizione dei carichi</b>	<b>36</b>
<b>6</b>	<b>Metodologia di risoluzione della struttura</b>	<b>38</b>
6.1	Metodo di risoluzione alle differenze finite . . . . .	42
<b>7</b>	<b>Vincoli interni e rigidezza flessionale</b>	<b>57</b>
7.1	Metodo I . . . . .	58
7.2	Metodo II . . . . .	60
7.3	Metodo III . . . . .	62
<b>8</b>	<b>Validazione del modello</b>	<b>66</b>
8.1	Arco a sezione circolare piena costante . . . . .	70
8.2	Arco a sezione circolare cava costante . . . . .	75
8.3	Arco a sezione circolare cava variabile in modo quadratico . . . . .	80
8.4	Arco parabolico con sezione quadrata cava variabile in modo quadratico	85
8.5	Arco parabolico a sezione circolare cava costante con sovraccarico su metà struttura . . . . .	90
8.6	Arco circolare a sezione quadrata piena costante . . . . .	95
<b>9</b>	<b>Comportamento strutturale</b>	<b>100</b>
9.1	Arco parabolico con sezione circolare cava costante . . . . .	100
9.1.1	Caso I . . . . .	101
9.1.2	Caso II . . . . .	108
9.1.3	Caso III . . . . .	113
9.2	Arco doppiamente incastrato con sezione circolare cava variabile . .	119

<b>10</b>	<b>Analisi di archi in legno lamellare</b>	<b>129</b>
10.1	Caratteristiche generali dell'arco . . . . .	132
10.1.1	Caratteristiche del materiale . . . . .	132
10.1.2	Caratteristiche geometriche dell'arco . . . . .	133
10.1.3	Configurazione di danneggiamento e valutazione rigidità . . . . .	135
10.2	Analisi statistica I . . . . .	136
10.2.1	Spostamenti lungo la direzione x: $D_x$ . . . . .	137
10.2.2	Spostamenti lungo la direzione y: $D_y$ . . . . .	139
10.2.3	Rotazioni: $\varphi$ . . . . .	141
10.2.4	Tensioni longitudinali di compressione: $\sigma_c$ . . . . .	143
10.2.5	Tensioni longitudinali di trazione: $\sigma_t$ . . . . .	144
10.2.6	Tensioni tangenziali: $\tau_c$ . . . . .	146
10.3	Analisi statistica II . . . . .	147
10.3.1	Analisi dati . . . . .	148
10.4	Analisi statistica III . . . . .	152
10.4.1	Spostamenti lungo la direzione x: $D_x$ . . . . .	153
10.4.2	Spostamenti lungo la direzione y: $D_y$ . . . . .	154
10.4.3	Rotazioni: $\varphi$ . . . . .	155
10.4.4	Tensioni longitudinali di compressione: $\sigma_c$ . . . . .	156
10.4.5	Tensioni longitudinali di trazione: $\sigma_t$ . . . . .	157
10.4.6	Tensioni tangenziali: $\tau$ . . . . .	158
<b>11</b>	<b>Conclusioni</b>	<b>160</b>

# Lista delle tabelle

3.1	Coefficienti per definizione curvatura $\chi$ e le sue derivate . . . . .	27
8.1	Proprietà acciaio S355 . . . . .	67
8.2	Condizioni al contorno relative ad arco doppiamente incastrato Fig.(8.1). . . . .	68
8.3	Condizioni al contorno relative ad arco doppiamente incernierato Fig.(8.2). . . . .	68
10.1	Posizione baricentro giunti . . . . .	135
10.2	Percentuali rigidezza flessionale . . . . .	139
10.3	Percentuali rigidezza flessionale . . . . .	141
10.4	Percentuali rigidezza flessionale . . . . .	142
10.5	Percentuali rigidezza flessionale . . . . .	144
10.6	Percentuali rigidezza flessionale . . . . .	145
10.7	Percentuali rigidezza flessionale . . . . .	147

# Lista delle figure

2.1	Elemento infinitesimo trave piana curva . . . . .	12
2.2	Caratteristiche interne della sollecitazione e forze esterne agenti . . .	14
2.3	Processo deformativo trave piana curva . . . . .	17
4.1	Arco circolare . . . . .	31
4.2	Rappresentazione del sistema di riferimento dell' <i>i</i> -esima curva rispetto a quello globale . . . . .	32
4.3	Arco parabolico . . . . .	33
4.4	Discretizzazione arco . . . . .	34
6.1	Spostamenti indotti dalle azioni esterne su un tratto infinitesimo <i>ds</i> di trave curva . . . . .	40
6.2	Rappresentazione arco doppiamente incastrato . . . . .	53
8.1	Rappresentazione qualitativa del modello strutturale con molla ro- tazionale e carichi a cui la struttura è soggetta. . . . .	69
8.2	Rappresentazione qualitativa del modello strutturale con molla ro- tazionale e carichi a cui la struttura è soggetta. . . . .	69
8.3	Rappresentazione dell'arco usato nel software SAP2000 . . . . .	70
8.4	Sezione circolare piena . . . . .	71
8.5	Confronto spostamenti $D_x$ . . . . .	72

8.6	Confronto spostamenti $D_y$ . . . . .	72
8.7	Confronto rotazioni $\varphi$ . . . . .	73
8.8	Confronto momento flettente $M$ . . . . .	74
8.9	Confronto sforzo normale $N$ . . . . .	74
8.10	Confronto sforzo di taglio $T$ . . . . .	75
8.11	Sezione circolare cava . . . . .	76
8.12	Confronto spostamenti $D_x$ . . . . .	77
8.13	Confronto spostamenti $D_y$ . . . . .	77
8.14	Confronto rotazioni $\varphi$ . . . . .	78
8.15	Confronto momento flettente $M$ . . . . .	79
8.16	Confronto sforzo normale $N$ . . . . .	79
8.17	Confronto sforzo di taglio $T$ . . . . .	80
8.18	Sezione circolare cava variabile . . . . .	81
8.19	Confronto spostamenti $D_x$ . . . . .	82
8.20	Confronto spostamenti $D_y$ . . . . .	82
8.21	Confronto rotazioni $\varphi$ . . . . .	83
8.22	Confronto momento flettente $M$ . . . . .	84
8.23	Confronto sforzo normale $N$ . . . . .	84
8.24	Confronto sforzo di taglio $T$ . . . . .	85
8.25	Sezione quadrata cava variabile . . . . .	86
8.26	Confronto spostamenti $D_x$ . . . . .	86
8.27	Confronto spostamenti $D_y$ . . . . .	87
8.28	Confronto rotazioni $\varphi$ . . . . .	87
8.29	Confronto momento flettente $M$ . . . . .	88
8.30	Confronto sforzo normale $N$ . . . . .	88
8.31	Confronto sforzo di taglio $T$ . . . . .	89
8.32	Arco parabolico parizalmente caricato con carico $q_0$ . . . . .	90

8.33	Confronto spostamenti $D_x$ . . . . .	91
8.34	Confronto spostamenti $D_y$ . . . . .	92
8.35	Confronto rotazioni $\varphi$ . . . . .	92
8.36	Confronto momento flettente $M$ . . . . .	93
8.37	Confronto sforzo normale $N$ . . . . .	93
8.38	Confronto sforzo di taglio $T$ . . . . .	94
8.39	Sezione quadrata piena . . . . .	96
8.40	Confronto spostamenti $D_x$ . . . . .	97
8.41	Confronto spostamenti $D_y$ . . . . .	97
8.42	Confronto rotazioni $\varphi$ . . . . .	98
8.43	Confronto momento flettente $M$ . . . . .	98
8.44	Confronto sforzo normale $N$ . . . . .	99
8.45	Confronto sforzo di taglio $T$ . . . . .	99
9.1	Evoluzione danneggiamento: Configurazione 1 (a), Configurazione 2 (b), Configurazione 3 (c). . . . .	103
9.2	Evoluzione spostamenti $D_x$ . . . . .	104
9.3	Evoluzione spostamenti $D_y$ . . . . .	104
9.4	Evoluzione rotazioni $\varphi$ . . . . .	105
9.5	Evoluzione momento flettente $M$ . . . . .	105
9.6	Evoluzione sforzo normale $N$ . . . . .	106
9.7	Evoluzione sforzo di taglio $T$ . . . . .	106
9.8	Andamento delle tensioni alla Von Mises caso I . . . . .	107
9.9	Evoluzione spostamenti $D_x$ . . . . .	109
9.10	Evoluzione spostamenti $D_y$ . . . . .	110
9.11	Evoluzione rotazioni $\varphi$ . . . . .	110
9.12	Evoluzione momento flettente $M$ . . . . .	111
9.13	Evoluzione sforzo normale $N$ . . . . .	111

9.14	Evoluzione sforzo di taglio $T$ . . . . .	112
9.15	Andamento delle tensioni alla Von Mises caso II . . . . .	113
9.16	Evoluzione spostamenti $D_x$ . . . . .	115
9.17	Evoluzione spostamenti $D_y$ . . . . .	115
9.18	Evoluzione rotazioni $\varphi$ . . . . .	116
9.19	Evoluzione momento flettente $M$ . . . . .	117
9.20	Evoluzione sforzo normale $N$ . . . . .	117
9.21	Evoluzione sforzo di taglio $T$ . . . . .	118
9.22	Andamento delle tensioni alla Von Mises caso III . . . . .	118
9.23	Evoluzione del danneggiamento: Configurazione 1 (a), Configurazione 2 (b), Configurazione 3 (c). . . . .	122
9.24	Evoluzione spostamenti $D_x$ . . . . .	123
9.25	Evoluzione spostamenti $D_y$ . . . . .	124
9.26	Evoluzione rotazioni $\varphi$ . . . . .	124
9.27	Evoluzione momento flettente $M$ . . . . .	125
9.28	Evoluzione sforzo normale $N$ . . . . .	125
9.29	Evoluzione sforzo di taglio $T$ . . . . .	126
9.30	Andamento tensioni alla Von Mises . . . . .	127
10.1	Impianto "Prima sport & Fun" I . . . . .	130
10.2	Impianto "Prima sport & Fun" II . . . . .	131
10.3	Tabella EN 14080:2013 . . . . .	133
10.4	Sezione arco in legno lamellare . . . . .	134
10.5	Schema strutturale e pattern di danneggiamento . . . . .	135
10.6	Analisi $D_x$ . . . . .	138
10.7	Analisi $D_y$ . . . . .	140
10.8	Analisi $\varphi$ . . . . .	142
10.9	Analisi $\sigma_c$ . . . . .	143

10.10	Analisi $\sigma_t$ . . . . .	145
10.11	Analisi $\tau$ . . . . .	146
10.12	Analisi risultati: Spostamenti in direzione x $Dx$ (a), Spostamenti in direzione y $Dy$ (b), Rotazioni $\varphi$ (c). . . . .	149
10.13	Analisi risultati: Tensioni longitudinali di compressione $\sigma_c$ (a), Tensioni longitudinali di trazione $\sigma_t$ (b), Tensioni tangenziali $\tau$ , (c) . . . . .	150
10.14	Analisi $D_x$ . . . . .	153
10.15	Analisi $D_y$ . . . . .	154
10.16	Analisi $\varphi$ . . . . .	155
10.17	Analisi $\sigma_c$ . . . . .	156
10.18	Analisi $\sigma_t$ . . . . .	158
10.19	Analisi $\tau$ . . . . .	159



# Capitolo 1

## INTRODUZIONE

Le strutture ad arco hanno da sempre esercitato un ruolo decisivo nel progresso e nello sviluppo dell'architettura e dell'ingegneria lungo tutto il corso della storia. Per poter comprendere la loro notevole importanza anche da un punto di vista culturale oltre che strutturale, basti pensare che le prime forme risalgono al periodo compreso fra il IV e il III millennio a.C, in Egitto [1].

"Arco non è altro che una fortezza causata da due debolezze, imperorché l'arco negli edifi è composto di due parti di circolo, i quali quarti circoli, ciascuno debolissimo per sé, desidera cadere, e opponendosi alla ruina l'uno dell'altro, le due debolezze si convertano in unica fortezza". Così fu definito da Leonardo da Vinci, primo a comprendere e studiare il funzionamento di queste strutture con un certo rigore.

Le strutture ad arco sono sempre state utilizzate grazie alla loro elevata capacità portante. La loro configurazione statica porta ad un funzionamento principalmente a compressione, tuttavia può comunque presentarsi un comportamento a flessione, nascente dal fatto che la forma di tali strutture non coincide con la curva delle pressioni. Il loro funzionamento statico, a differenza delle semplici strutture ad architrave, è di tipo spingente in quanto genera delle spinte nella direzione laterale ossia orizzontale, oltre naturalmente a riportare i carichi a terra in senso

verticale. Strutture di questo tipo hanno sicuramente trovato largo impiego nella realizzazione di ponti, subendo una netta evoluzione nel tempo, soprattutto in merito ai materiali, con una netta tendenza oggigiorno verso l'acciaio. Lo sviluppo di tali strutture, con utilizzo di materiali quale il calcestruzzo avvenne già a cavallo dell'800 e del '900 con Hennebique, Freyssinet e Maillart. L'adozione dell'acciaio per ponti ad arco invece vede il suo principio intorno agli ultimi due decenni del '700 con Darby, proseguendo dunque in una notevole evoluzione durante tutto il XIX secolo prima, con esponenti quali Telford, Brunel ed Eiffel e durante il XX secolo poi, con Lindenthal, Amman e Freeman.

Tipica forma ad arco è anche quella che assumono le centine metalliche, nonché gli elementi costituenti alcuni capannoni. In entrambi i casi è comunque possibile applicare i criteri di valutazione ed analisi degli archi. Sicuramente data la particolare rilevanza delle strutture ad arco per i ponti, sono stati condotti molti studi e dal punto di vista analitico e dal punto di vista numerico.

Relativamente alle strutture in muratura si ripercorre quanto riportato in [2]. Grande importanza hanno svolto gli studi di Pippard, Trantner & Chitty (1936) sulla base di una combinazione di risultati analitici e sperimentali. Notevole influenza hanno avuto gli studi di Heyman (1966) inerenti al metodo di progettazione plastica delle strutture in acciaio applicando i medesimi principi alle strutture ad arco in muratura, con conseguente diretta applicazione dei teoremi dell'analisi limite plastica. Livesley (1978) sfruttò i risultati e gli studi di Heyman per ottenere dei risultati mediante un algoritmo di programmazione lineare. Sulla base delle pubblicazioni di Heyman e Livesley sono stati condotti ulteriori studi da parte per esempio di Smith FW, Harvey WJ & Vardy AE (1990) e Harvey (1991), comunque in merito alle strutture in muratura con particolare attenzione all'utilizzo dei teoremi dell'analisi limite. Fra gli altri, sempre con riferimento all'analisi rigido plastica si ricordano gli studi di Gilbert & Melbourne (1995) e di Boothby & Brown

(1992).

Un altro metodo adottato per comprendere il funzionamento delle strutture ad arco è quello legato all'analisi elastica con diverse pubblicazioni ad opera di Bridle & Hughes (1989), McNeely, Archer & Smith(1989). Ricerche più recenti sulle leggi costitutive della muratura non armata, hanno portato alla loro implementazione in codici ad elementi finiti in relazione alle strutture ad arco. In questo ambito si fa quindi riferimento alle ricerche condotte da Drucker & Prager(1997), Taylor & Mallinder(1987-1993), Mallinder(1997), Choo, Coutie & Gong(1991), Loo & Yang(1991).

Altri ricercatori hanno invece adottato delle analisi elastiche non lineari come Pi YL e Nazmi(1997), soprattutto con riferimento alla resistenza di archi in acciaio ed ai fenomeni di instabilità ad essi connessi. Anche lo studio di strutture ad arco secondo analisi non lineari ha avuto un grande coinvolgimento nella comprensione delle strutture in esame con molteplici ricerche quali quelle di YL Pi et al. (2007), Pi & Trahair (1998), Tsiatas & Babouskos (2017), Dimopoulos & Gantes (2008), Zhang et al. (2019), Li et al. (2019), atte ancora allo studio dell'instabilità.

Altro ambito di studio risulta essere quello dell'individuazione della configurazione geometrica ottimale di tali strutture per cui ulteriori ricerche sono state condotte. Si fa riferimento ad esempio a Marano et al.(2014), Lewis (2016), tramite un modello matematico, Wang & Wang (2015) con uno studio sugli archi funicolari, nonché ricerche relative alla minimizzazione del volume del materiale strutturale e dell'eccentricità delle sollecitazioni interne come per esempio quella condotta da Marano et al. (2018), A. Manuello Bertetto & Marano (2022)[3].

Altri lavori sono relativi alla determinazione del design con il miglior costo, trovando un profilo ottimale come quello in [4]. Sicuramente oltre ai metodi analitici ed ai metodi numerici, come quello posto alla base del presenta lavoro [5], assumono una rilevante importanza anche il metodo numerico agli elementi finiti. Tale metodo può

naturalmente essere applicato intendendo la struttura come una serie di elementi trave fra loro connessi, al fine di approssimare la geometria curvilinea dell'arco. Tali segmenti possono dunque essere rettilinei o curvilinei, come nel metodo presentato da Ibrahimbegovic (1995) e nel metodo presentato da Tufekci et al. (2017) con il quale è possibile ottenere dei risultati non affetti da errori e numericamente corretti anche con un numero limitato di elementi, infatti lo studio si basa sulla soluzione analitica dell'equazione differenziale che governa le travi curve planari. Ulteriore e alternativo approccio è invece quello proposto da Bauer (2016)[6], in cui si sfrutta l'analisi isogeometrica, con la quale si definisce un elemento di una curva spaziale in modo non lineare assumendo la teoria di Bernoulli che includa la torsione ma senza deformazione. L'analisi isogeometrica (IGE), combina progettazione e analisi utilizzando le funzioni di base del Computer Aided Design (CAD) al fine di approssimare la soluzione nel contesto dell'analisi degli elementi finiti. L'analisi isogeometrica sfrutta essenzialmente il concetto di NURBS che genera delle funzioni di base utilizzate per costruire un modello geometrico esatto.

Il quantitativo di studi effettuati nell'ambito dell'analisi strutturale degli archi, di cui si è indicato qualche esempio, mostra come ancora oggi tali tipologie di strutture risultano di interesse e come sia in evoluzione la ricerca in merito al comportamento strutturale delle stesse.

Il lavoro presentato in questa tesi magistrale ha lo scopo di simulare la presenza di uno schema di danneggiamento cui la struttura ad arco risulta essere interessata, introducendo un vincolo interno quale quello molla rotazionale. In questo senso si procederà nell'intento di valutare il comportamento strutturale a seguito del danneggiamento stesso, ma anche a seguito della sua evoluzione e del suo progredirsi. Sulla base dei risultati ottenuti si avanzerà con la trattazione cercando di introdurre più vincoli interni quale quello indicato, in funzione delle condizioni che detteranno l'instaurarsi di un danno. Ulteriormente a ciò sarà anche valutato un pattern di

danneggiamento fisso, sulla base del quale sarà quindi possibile effettuare le dovute valutazioni in termini di analisi statistiche.

## 1.1 Danneggiamento

Nella presente tesi come indicato, l'obiettivo principale sarà quello di valutare, strutturalmente parlando, il comportamento di una struttura ad arco, a seguito di una configurazione di danneggiamento nonché a seguito dell'evoluzione di quest'ultima. L'analisi strutturale verrà condotta per mezzo di un codice Matlab [5], il quale si basa fondamentalmente su un'equazione differenziale del sesto ordine che governa il comportamento di una trave curva piana. La risoluzione avverrà pertanto tramite il metodo alle differenze finite e permetterà quindi la determinazione degli spostamenti e delle caratteristiche interne della sollecitazione, tramite le quali sarà dunque possibile valutare altresì lo stato tensionale.

In merito all'argomento che si vuole trattare, sono presenti in letteratura diversi studi.

Si fa presente che molti di essi riguardano in particolare anche o completamente l'individuazione delle sezioni che saranno soggette al danneggiamento. Fra di essi può essere menzionato quello di Verstryngge et al.(2021)[7] in cui si applicano i concetti dell'emissione acustica unitamente a quelli di meccanica della frattura per il monitoraggio ed il rilevamento del danneggiamento nelle strutture in muratura fra cui gli archi, Zampieri et al.(2016)[8] in cui si studia l'effetto dei difetti e del degrado, causanti la riduzione di spessore, sulla capacità dell'arco sotto azione sismica. Ulteriore studio che può essere citato è quello di Masciotta et al.(2020)[9] in cui tramite analisi di tipo sperimentale e numerico, si valuta il comportamento dinamico di un arco segmentario soggetto ad uno spostamento orizzontale progressivo in corrispondenza di un solo supporto, analisi condotta al fine di valutare l'evoluzione delle caratteristiche dinamiche in scenari di danno progressivo ed analizzando la

loro sensibilità alle cricche.

In merito a studi sul danneggiamento di archi in calcestruzzo armato si vuole invece citare la pubblicazione di Amorim et al.(2013)[10] in cui viene proposto un modello di fessurazione e danneggiamento semplificato, basato sull'utilizzo delle leggi costitutive della meccanica del danno cumulato. Quest'ultimo è un adattamento della meccanica della frattura alla teoria dei telai con utilizzo di cerniere plastiche, posizionate quindi in corrispondenza delle zone in cui si verificano gli effetti anelastici dati dalla fessurazione del calcestruzzo e il cedimento plastico dell'armatura. Altro studio è quello condotto da Viola & Tornabene (2005)[11] in cui si analizzano le vibrazioni libere di archi soggetti a danneggiamento, inteso come riduzione della rigidità flessionale per mezzo dell'utilizzo di una molla rotazionale, tramite l'equazione del moto, di tipo differenziale alle derivate parziali del sesto ordine. Studi simili sono quelli condotti da Cerri, Dilena & Ruta (2008), tramite risultati analitici e sperimentali con utilizzo di archi in acciaio. Pau, Greco & Vestroni (2010)[12] conducono uno studio sull'individuazione del danneggiamento in funzione della variazione della frequenza naturale propria in presenza di un danneggiamento inteso come intaglio, tramite dati numerici e sperimentali di archi parabolici. Greco & Pau (2011)[13] con uno studio sulla rilevazione di un danneggiamento in archi parabolici valutano lo spostamento statico. Si citano inoltre Eroglu et al. (2020), Capecchi et al. (2016), Greco et al. (2018), Caliò, Greco & D'urso (2016).

Data la moltitudine di studi e pubblicazioni presenti in letteratura, di cui sono stati riportati solamente alcuni esempi, si comprende chiaramente come tale ambito di studio sia di particolare interesse, ma anche attuale e in evoluzione.

Lo sviluppo del presente studio prende inizio dunque con la comprensione in merito all'implementazione del danneggiamento per mezzo dell'introduzione di una molla rotazionale, la quale permetterà sostanzialmente la possibile riduzione

di rigidezza flessionale. Quest'ultima come visibile durante la trattazione potrà essere determinata secondo diverse metodologie presenti in letteratura e sarà in taluni casi adottata anche per problemi che necessiterebbero di una trattazione accurata al fine di valutare il reale comportamento strutturale per esempio di giunti. Tuttavia il presente studio esula da questi aspetti e rimane solamente legato alla valutazione della risposta strutturale e alla stessa analisi in presenza di un singolo danneggiamento o di un pattern.

Il metodo delle differenze finite centrate, preferito al metodo delle differenze finite con passo avanti e passo indietro per ridurre l'errore numerico associato inevitabilmente ai risultati, permetterà di passare da una equazione differenziale del sesto ordine ad un sistema algebrico, la cui risoluzione avverrà necessariamente in presenza delle dovute condizioni al contorno.

I risultati determinati saranno quindi sottoposti ad una verifica di congruità rispetto a quelli che si otterranno, nelle medesime condizioni di carico e di schema strutturale, con il software commerciale **SAP2000**. Nel seguente modo avverrà la validazione del modello che permetterà di ottenere la certezza che esso abbia un corretto funzionamento.

La validazione del modello viene condotta sotto diverse condizioni. Più nello specifico si confronteranno i risultati di strutture ad arco aventi differenti sezioni, sezione variabile lungo l'ascissa curvilinea  $s$ , e diverse configurazioni di carico, nonché differenti forme geometriche che in particolare saranno quella parabolica e quella circolare.

Nello specifico in merito alle sezioni, saranno prese in considerazione quella circolare piena, quella circolare cava, quella quadrata cava e quella quadrata piena. Per quanto riguarda invece l'andamento della dimensione della sezione, sarà considerato un andamento costante ed una legge di variazione quadratica. Infine per le configurazioni di carico, si adotterà un carico distribuito e costante lungo tutta

l'ascissa curvilinea ed un carico distribuito e costante lungo  $s$ , ma esteso fino all'asse di simmetria della struttura.

## 1.2 Danneggiamento di archi in acciaio

Il passo successivo sarà la valutazione del comportamento strutturale di archi in acciaio a seguito dell'introduzione della molla rotazionale atta, come detto precedentemente a simulare un danneggiamento. In questo senso si vorrà comprendere da un punto di vista puramente teorico, come la struttura risponde all'applicazione consecutiva di più molle.

Nello specifico, la struttura verrà caricata fino al raggiungimento del limite di snervamento in corrispondenza di due sezioni, preso atto del fatto che si condurranno delle analisi su strutture simmetriche e caricate simmetricamente. Una volta individuato il limite di snervamento si procede ad una variazione della rigidezza flessionale delle molle e/o del carico applicato affinché venga raggiunto un ulteriore limite di snervamento in sezioni differenti dalle precedenti, senza però ottenere dei valori di tensione che superino tale valore limite.

In altrettanto modo sono state condotte delle valutazioni considerando l'inserimento delle molle rotazionali in corrispondenza delle sezioni maggiormente sollecitate, le quali pur non raggiungendo il limite di snervamento, si suppone siano soggette con una probabilità maggiore ad un danneggiamento. Allo stesso modo, in quest'ultimo caso, si è proceduto con la trattazione come descritto precedentemente e come visibile nel seguito.

Sulla base dei risultati ottenuti sarà quindi valutata l'evoluzione degli andamenti e degli spostamenti e delle caratteristiche interne della sollecitazione, nonchè quelli della tensione, la quale, in riferimento agli archi in acciaio, viene valutata tramite il criterio di Von Mises.

### 1.3 Danneggiamento archi in legno lamellare

Ulteriore punto della presente tesi magistrale, sarà quello inerente ad una analisi strutturale relativa agli archi in legno lamellare, tipologia di arco che viene molto spesso usata nella realizzazione di impianti sportivi.

Tale tipologia di struttura è realizzata per mezzo dell'unione di diversi elementi strutturali curvi, giuntati nella maggior parte dei casi tramite dei giunti in acciaio. Molto spesso questa tipologia realizzativa viene adottata per far fronte a problemi di trasporto o anche per problemi legati alla lavorazione del legno, problematiche la cui trattazione esula dallo scopo della presente tesi e che quindi non verranno ivi approfondite.

Questa particolare tipologia di struttura, realizzata per mezzo dei giunti in acciaio si adatta molto bene alla modellazione per mezzo delle molle rotazionali, le quali verranno quindi in questo caso applicate in corrispondenza delle connessioni stesse. In questo modo il rilevamento di un pattern di danneggiamento non dovrà essere determinato in funzione di considerazioni specifiche, ma sarà automaticamente individuato tramite la posizione dei giunti.

Questi ultimi saranno quindi intesi come semirigidi e pertanto ad essi dovrà essere associata una rigidità flessionale, la quale non sarà comunque oggetto di approfondimento facendo riferimento a specifiche connessioni e condizioni cui esse sono interessate. L'intento principale sarà quello infatti di effettuare delle analisi statistiche avendo un campione di configurazioni di danneggiamento.

Con configurazione di danneggiamento si intende l'individuazione di differenti rigidità flessionali da associare ai giunti, intese come un'aliquota della rigidità iniziale, supponendo che dunque tali connessioni possano essere sottoposte a diversi incrementi di cedevolezza. Fornendo quindi dei valori percentuali che decrementino

la rigidità iniziale, si intende ottenere un campione di dati, tramite il quale poter individuare le sezioni maggiormente sollecitate e soggette a spostamenti maggiori da un punto di vista statistico, tenendo quindi altresì conto di quali possano essere le configurazioni più gravose.

Allo stesso modo saranno valutati dei pattern che non prevedono la contemporanea applicazione del vincolo interno molla rotazionale in corrispondenza di ogni giunto. In questo senso si suppone che essi in partenza siano intesi come rigidi e che a seguito di fenomeni che inducono ad un deterioramento, possano raggiungere la condizione di giunzione semi-rigida. In questo senso saranno quindi individuati diversi schemi in merito all'applicazione della molla rotazionale, sulla base dei quali effettuare ancora una volta delle analisi statistiche.

## Capitolo 2

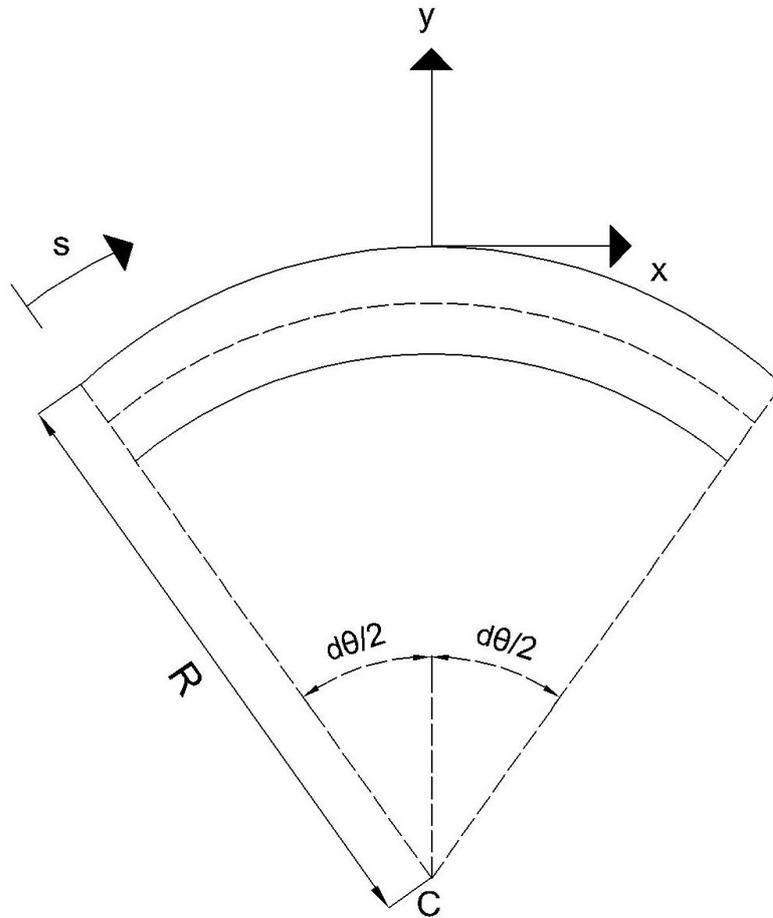
# Problema della trave curva

La valutazione del danneggiamento e la successiva identificazione della risposta strutturale degli archi prevede una parte preliminare atta all'ottenimento delle soluzioni analitiche sulla base delle quali si raggiungono delle soluzioni invece di tipo numerico. In questo senso, la determinazione delle soluzioni, può essere raggiunta per mezzo dell'equazione differenziale del sesto ordine come mostrato da J.Melchiorre [5].

Si procede quindi con la trattazione del problema della trave curva, attenendosi alla teoria di De Saint Venant, la quale sottostà fra le altre, all'ipotesi fondamentale di conservazione della sezione piana.

Gli archi infatti, sono degli elementi strutturali che si prestano bene alla modellazione per mezzo delle soluzioni che si ottengono per le travi curve, purchè si abbia un raggio di curvatura che sia più grande delle dimensioni delle sezioni in modo da non avere una struttura tozza il che rende maggiormente aderente la trattazione secondo la teoria di De Saint Venant.

L'elemento di trave curva può essere rappresentato come mostrato in Fig.(2.1).



**Figura 2.1:** Elemento infinitesimo trave piana curva

Dove:

- $R$ : Raggio di curvatura
- $d\theta$ : Angolo compreso fra due sezioni estreme
- $s$ : Ascissa curvilinea o asse curvilineo

Secondo quanto mostrato può essere facilmente determinabile l'estensione del tratto infinitesimo di trave  $ds$  come mostrato nell'espressione seguente:

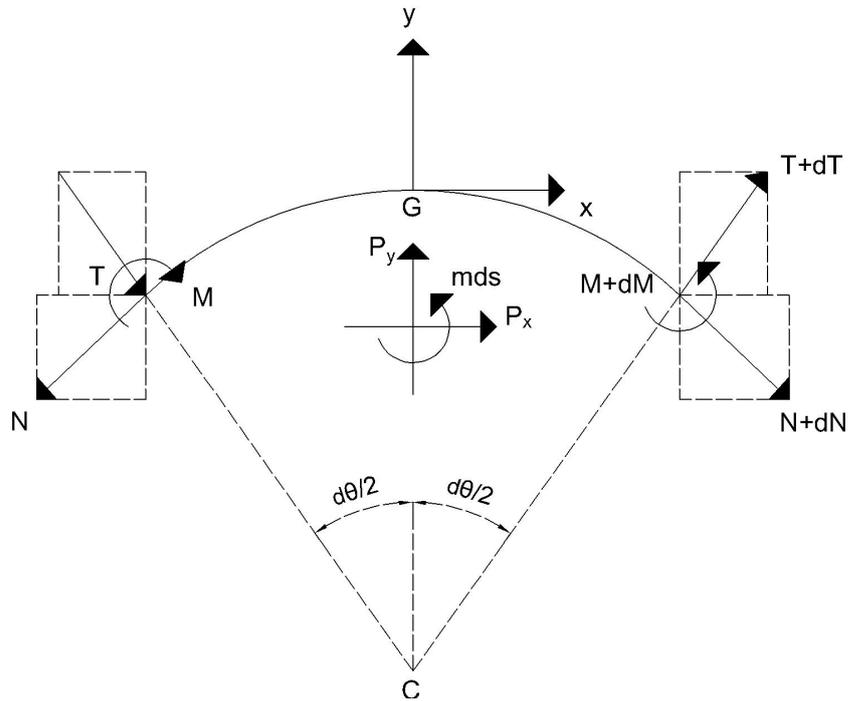
$$ds = R d\theta \tag{2.1}$$

Al fine di ottenere una soluzione, sarà necessario sfruttare tre tipologie di relazioni:

- Equazioni statiche (indefinite di equilibrio)
- Equazioni cinematiche
- Equazioni costitutive

## 2.1 Equazioni indefinite di equilibrio

Le equazioni indefinite di equilibrio permettono sostanzialmente di individuare una relazione fra le caratteristiche interne delle sollecitazioni e le forze esterne applicate all'elemento infinitesimo di trave. Le caratteristiche interne della sollecitazione per una trave curvilinea piana saranno  $M, N, T$  mentre in generale le azioni esterne applicate all'elemento infinitesimo saranno individuate come  $q(s)ds$ ,  $p(s)ds$  e  $m(s)ds$ , che rappresentano rispettivamente la risultante del carico distribuito normale, di quello distribuito tangenziale e del momento distribuito. Per chiarezza viene riportata una rappresentazione in Fig.(2.2), dell'elemento infinitesimo di trave su cui agiscono le tutte le azioni precedentemente indicate.



**Figura 2.2:** Caratteristiche interne della sollecitazione e forze esterne agenti

Si procede dunque con la scrittura delle equazioni di equilibrio nella direzione  $x$ , nella direzione  $y$  e con la scrittura dell'equilibrio alla rotazione rispetto al baricentro dell'elemento infinitesimo. Si preferisce procedere indicando in modo differente i carichi agenti sia lungo la direzione  $x$  sia lungo la direzione  $y$ . Essi saranno quindi indicati come  $P_x$  e  $P_y$ , mentre si continua ad indicare con  $m$  la risultante del momento distribuito applicata in corrispondenza del baricentro dell'elemento, ottenendo allora le relazioni riportate di seguito.

$$\begin{aligned} P_x &= p(s)ds \\ P_y &= q(s)ds \end{aligned} \tag{2.2}$$

Propedeuticamente alle trattazioni successive si indica che in virtù del fatto che si lavora con elementi infinitesimi, si può usufruire delle relazioni successivamente

mostrate:

$$\cos(d\theta) \cong 1 \quad (2.3)$$

$$\sin(d\theta) \cong d\theta \quad (2.4)$$

Eseguite tali considerazioni si procede alla scrittura delle equazioni di equilibrio.

### 2.1.1 Equilibrio alla traslazione lungo la direzione $x$

L'equilibrio in direzione  $x$  può essere espresso in modo generico come:

$$\sum F_x = 0 \quad (2.5)$$

Considerando quindi tutte le forze agenti sull'elemento lungo la direzione  $x$ , come mostrato in Fig.(2.2) si ottiene quanto segue:

$$-N + N + dN + T \frac{d\theta}{2} + (T + dT) \frac{d\theta}{2} + P_x ds = 0 \quad (2.6)$$

Semplificando è possibile ottenere l'equazione di equilibrio finale lungo la direzione  $x$ , come mostrato di seguito.

$$\frac{dN}{ds} + \frac{T}{R} + P_x = 0 \quad (2.7)$$

### 2.1.2 Equilibrio alla traslazione rispetto alla direzione $y$

Allo stesso modo si può scrivere l'equazione di equilibrio lungo la direzione  $y$  e quindi è possibile scrivere la relazione mostrata successivamente:

$$\sum F_y = 0 \quad (2.8)$$

Considerando quindi tutte le sollecitazioni e le caratteristiche interne delle sollecitazioni agenti sull'elemento, come visibile in Fig.(2.2) è possibile scrivere:

$$-T + T + dT - N \frac{d\theta}{2} - (N + dN) \frac{d\theta}{2} + P_y ds \quad (2.9)$$

Semplificando si ottiene:

$$\frac{dT}{ds} - \frac{N}{R} + P_y = 0 \quad (2.10)$$

### 2.1.3 Equilibrio alla rotazione rispetto al baricentro

Infine si può procedere alla scrittura dell'equilibrio alla rotazione attorno al baricentro  $G$ . Tale equilibrio si identifica a livello analitico con la relazione mostrata di seguito:

$$\sum M_G = 0 \quad (2.11)$$

Considerando quindi le azioni agenti sull'elemento infinitesimo come mostrato in Fig.(2.2), si ottiene:

$$-M + M + dM + T \frac{ds}{2} + (T + dT) \frac{ds}{2} + m ds = 0 \quad (2.12)$$

Nuovamente, semplificando, si ottiene la scrittura finale dell'equazione di equilibrio alla rotazione come mostrato di seguito.

$$\frac{dM}{ds} + T + m = 0 \quad (2.13)$$

### 2.1.4 Forma matriciale

Le equazioni di equilibrio che sono state precedentemente ricavate, possono essere comodamente espresse in forma matriciale. Al fine di avere un quadro chiaro, si

preferisce riportarle in modo riassuntivo come indicato successivamente.

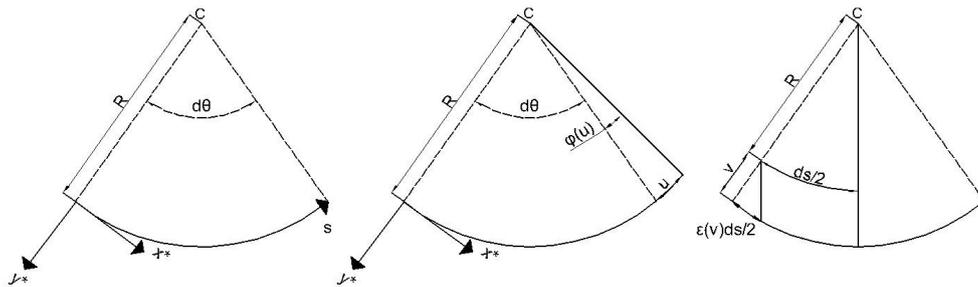
$$\begin{aligned} \frac{dN}{ds} + \frac{T}{R} + P_x &= 0 \\ \frac{dT}{ds} - \frac{N}{R} + P_y &= 0 \\ \frac{dM}{ds} + T + m &= 0 \end{aligned} \quad (2.14)$$

Si riporta quindi la scrittura di tali equazioni in forma matriciale.

$$\begin{bmatrix} -\frac{d}{ds} & -\frac{1}{R} & 0 \\ \frac{1}{R} & -\frac{d}{ds} & 0 \\ 0 & -1 & -\frac{d}{ds} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} N \\ T \\ M \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} P_x \\ P_y \\ m \end{bmatrix} \quad (2.15)$$

## 2.2 Equazioni cinematiche

In modo simile le equazioni cinematiche mettono in relazione gli spostamenti, causati dai carichi applicati, con le deformazioni come successivamente mostrato sulla base di quanto riportato in [14]. Al fine di procedere con la trattazione si riporta una rappresentazione esplicativa in Fig.(2.3), con l'intento di mostrare il processo deformativo della trave curva piana.



**Figura 2.3:** Processo deformativo trave piana curva

Nell'intento di giungere alla scrittura delle equazioni cinematiche per la trave curva piana, si riprendono le ben note equazioni cinematiche per la trave rettilinea,

le quali vengono riportate per completezza di seguito e scritte in forma matriciale.

$$\begin{bmatrix} \gamma \\ \epsilon \\ \chi \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{d}{dz} & 0 & +1 \\ 0 & \frac{d}{dz} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{d}{dz} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} v \\ u \\ \varphi \end{bmatrix} \quad (2.16)$$

Come visibile in Fig.(2.3) la variazione di angolo  $\varphi(u)$ , a meno di infinitesimi di ordine superiore può essere scritta come:

$$\varphi(u) = \frac{u}{R} \quad (2.17)$$

D'altro canto, lo spostamento radiale  $v$ , produce una dilatazione assiale  $\epsilon(v)$  che in accordo con la rappresentazione riportata in Fig.(2.3) può essere scritta, a meno di infinitesimi di ordine superiore come:

$$\epsilon(v) = \frac{v}{R} \quad (2.18)$$

A seguito della rotazione relativa infinitesima  $d\varphi$ , l'angolo fra le due sezioni estreme verrà individuato come  $d\theta + d\varphi$  e quindi come la somma fra la rotazione iniziale e quella elastica a seguito della deformazione. Di conseguenza la curvatura totale, è valutabile come:

$$\chi_{totale} = \frac{d\theta + d\varphi}{ds} \quad (2.19)$$

In questo modo la variazione di curvatura intesa come la curvatura dovuta alla rotazione elastica  $d\varphi$ , può essere scritta nel seguente modo:

$$\chi = \chi_{totale} - \frac{1}{R} = \frac{d\varphi}{ds} \quad (2.20)$$

Sfruttando le relazioni (2.17), (2.18) e (2.20) e inserendole nella (2.16) è possibile ottenere la relazione matriciale che esprime sostanzialmente le equazioni cinematiche

per la trave curva piana. Essa può essere scritta come:

$$\begin{bmatrix} \gamma \\ \epsilon \\ \chi \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{d}{ds} & -\frac{1}{R} & -1 \\ \frac{1}{R} & \frac{d}{ds} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{d}{ds} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} v \\ u \\ \varphi \end{bmatrix} \quad (2.21)$$

## 2.3 Equazioni costitutive

Infine i legami costitutivi permettono di legare le caratteristiche interne della sollecitazione con lo stato deformativo. Al fine di ottenere tali relazioni si parte dal legame costitutivo specifico per elementi in campo elastico lineare nel caso monodimensionale, noto anche come legge di Hooke e riportata di seguito:

$$\sigma = E\epsilon \quad (2.22)$$

e dalla relazione che lega gli scorrimenti angolari con le tensioni tangenziali:

$$\tau = \gamma G \quad (2.23)$$

Sulla base delle relazioni (2.22) e (2.23), si giunge alla scrittura delle equazioni costitutive espresse come:

$$\begin{aligned} N &= EA\epsilon \\ T &= GA\tau \\ M &= EJ\chi \end{aligned} \quad (2.24)$$

Le equazioni riportate in (2.24), possono essere scritte ancora una volta in forma matriciale nel seguente modo:

$$\begin{bmatrix} EA & 0 & 0 \\ 0 & GA_t & 0 \\ 0 & 0 & EJ \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \epsilon \\ \gamma \\ \chi \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} N \\ T \\ M \end{bmatrix} \quad (2.25)$$

## Capitolo 3

# Soluzione del problema dell'arco

Al fine di risolvere il problema dell'arco si farà esplicito riferimento alle equazioni ed alle relazioni riportate nel precedente capitolo.

Esse tramite adeguata manipolazione, porteranno alla scrittura di una equazione differenziale del sesto ordine, con la quale sarà quindi possibile valutare gli spostamenti tangenziali  $u(s)$ , causati dall'applicazione delle forze esterne.

Al fine di ottenere tale equazione, sono state effettuate delle assunzioni semplificative ed in particolare è stata assunta la trascurabilità della deformazione a taglio traducibile con un annullamento degli scorrimenti angolari. A livello analitico si assume quindi:

$$\gamma = 0 \tag{3.1}$$

A seguito di tale assunzione, l'equazione cinematica che definisce lo scorrimento angolare sarà soggetta ad una variazione.

Per comprendere meglio come variano quindi le equazioni cinematiche, esse vengono

riportate in (3.2) nella seguente forma:

$$\begin{aligned}\epsilon &= \frac{du}{ds} + \frac{v}{R} \\ \gamma &= \frac{dv}{ds} - \frac{u}{R} - \varphi \\ \chi &= \frac{d\varphi}{ds}\end{aligned}\tag{3.2}$$

Stando all'assunzione effettuata si ottiene dunque:

$$\varphi = \frac{dv}{ds} - \frac{u}{R}\tag{3.3}$$

Sostituendo quindi la relazione (3.3) all'interno dell'ultima equazione delle (3.2), è possibile ottenere:

$$\chi = \frac{d\varphi}{ds} = \frac{d^2v}{ds^2} - \frac{du}{ds} \frac{1}{R} + u \frac{R^I}{R^2}\tag{3.4}$$

Ulteriore assunzione è quella dell'instensibilità assiale della trave curva, che viene quindi tradotta in termini matematici come:

$$\epsilon = 0\tag{3.5}$$

Pertanto, considerando la relazione (3.5) e sostituendola all'interno della prima delle relazioni (3.2), si ottiene:

$$\frac{du}{ds} + \frac{v}{R} = 0\tag{3.6}$$

Da tale relazione si ottiene facilmente la seguente:

$$v = -\frac{du}{ds}R\tag{3.7}$$

Infine sostituendo quest'ultima all'interno dell'equazione (3.4), è possibile scrivere:

$$\chi = -\frac{d^3u}{ds^3}R - 2\frac{d^2u}{ds^2}R^I - \frac{du}{ds}\left(R^{II} + \frac{1}{R}\right) + u\frac{R^I}{R^2} \quad (3.8)$$

Per completezza, poichè essenziali nel prosieguo della trattazione, verranno anche riportate per esteso le derivate della curvatura, come mostrato di seguito:

$$\begin{aligned} -\frac{d\chi}{ds} &= \frac{d^4u}{ds^4}R + 3\frac{d^3u}{ds^3}R^I + \frac{d^2u}{ds^2}\left(3R^{II} + \frac{1}{R}\right) + \\ &+ \frac{du}{ds}\left(R^{III} - 2\frac{R^I}{R^2}\right) - u\left(\frac{R^{II}}{R^2} - 2\frac{(R^I)^2}{R^3}\right) \\ \\ -\frac{d^2\chi}{ds^2} &= \frac{d^5u}{ds^5}R + 4\frac{d^4u}{ds^4}R^I + \frac{d^3u}{ds^3}\left(6R^{II} + \frac{1}{R}\right) + \frac{d^2u}{ds^2}\left(4R^{III} - 3\frac{R^I}{R^2}\right) + \\ &+ \frac{du}{ds}\left(R^{IV} - 3\frac{R^{II}}{R^2} + 6\frac{(R^I)^2}{R^3}\right) + u\left(-\frac{R^{III}}{R^2} + 6\frac{R^I R^{II}}{R^3} - 6\frac{(R^I)^3}{R^4}\right) \\ \\ -\frac{d^3\chi}{ds^3} &= \frac{d^6u}{ds^6}R + 5\frac{d^5u}{ds^5}R^I + \frac{d^4u}{ds^4}\left(10R^{II} + \frac{1}{R}\right) + \\ &+ \frac{d^3u}{ds^3}\left(10R^{III} - 4\frac{R^I}{R^2}\right) + \\ &+ \frac{d^2u}{ds^2}\left(5R^{IV} - 6\frac{R^{II}}{R^2} + 12\frac{(R^I)^2}{R^3}\right) + \\ &+ \frac{du}{ds}\left(R^V - 4\frac{R^{III}}{R^2} + 24\frac{R^I R^{II}}{R^3} - 24\frac{(R^I)^3}{R^4}\right) + \\ &+ u\left(-\frac{R^{IV}}{R^2} + 8\frac{R^I R^{III}}{R^3} + 6\frac{(R^{II})^2}{R^3} - 36\frac{(R^I)^2 R^{II}}{R^4} + 24\frac{(R^I)^4}{R^5}\right) \end{aligned} \quad (3.9)$$

### 3.1 Calcolo degli spostamenti tangenziali

Al fine di giungere all'equazione finale, la cui incognita sarà lo spostamento  $u(s)$ , bisogna riprendere le equazioni indefinite di equilibrio, le quali vengono di seguito

riportate.

$$\begin{aligned}\frac{dN}{ds} + \frac{T}{R} + P_x &= 0 \\ \frac{dT}{ds} - \frac{N}{R} + P_y &= 0 \\ \frac{dM}{ds} + T + m &= 0\end{aligned}\tag{3.10}$$

Dalla terza delle Eq.(3.10) si ottiene:

$$-T = \frac{dM}{ds} + m\tag{3.11}$$

Sostituendo nella prima delle (3.10), è possibile ottenere:

$$\frac{dN}{ds} = \frac{1}{R} \frac{dM}{ds} + \frac{m}{R} - P_x\tag{3.12}$$

Allo stesso modo derivando la terza equazione delle (3.10) e sostituendo la derivata del taglio  $dT$  nella seconda delle stesse, si ottiene:

$$N = R\left(P_y - \frac{d^2M}{ds^2} - \frac{dm}{ds}\right)\tag{3.13}$$

Quindi derivando la (3.13) e sostituendo nella (3.12), è possibile scrivere:

$$R \frac{d^3M}{ds^3} + R^I \frac{d^2M}{ds^2} + \frac{1}{R} \frac{dM}{ds} = P_x + R^I P_y + R \frac{dP_y}{ds} - \frac{m}{R} - R^I \frac{dm}{ds} - R \frac{d^2m}{ds^2}\tag{3.14}$$

L'unica quantità non determinata o conosciuta risulta essere il momento flettente e quindi le sue derivate. Poichè lo scopo è quello di calcolare gli spostamenti tangenziali, si ricorre all'utilizzo delle equazioni costitutive, le quali a seguito delle assunzioni semplificative effettuate, si ridurranno ad un'unica equazione e quindi:

$$M = EJ\chi\tag{3.15}$$

Riprendendo quindi l'espressione (3.8) che definisce la curvatura in funzione solamente dello spostamento tangenziale e delle sue derivate, è possibile esprimere il momento flettente in funzione dell'incognita  $u$  e delle sue derivate. Derivando quindi il momento flettente l'Eq.(3.14), sarà funzione a sua volta dello spostamento tangenziale  $u$  e delle sue derivate.

## 3.2 Assunzione di inerzia variabile

Ci si pone nel caso più generale, assumendo che la sezione trasversale possa essere variabile lungo l'ascissa curvilinea, in base ad una data legge di variazione. Ciò comporta quindi anche una variazione del momento di inerzia lungo  $s$ . Allo stesso modo ci si pone nelle condizioni in cui il raggio di curvatura sia variabile. Si esclude comunque il caso in cui possano esservi delle variazioni di materiale. Tali assunzioni possono essere brevemente indicate come segue:

$$\begin{aligned} E &= \text{cost.} \\ J &= J(s) \\ R &= R(s) \end{aligned} \tag{3.16}$$

Volendo determinare analiticamente le derivate del momento come precedentemente richiesto, esse, sulla base dell'Eq.(3.15) possono essere scritte come:

$$\begin{aligned} \frac{dM}{ds} &= E \left( J^I \chi + J \frac{d\chi}{ds} \right) \\ \frac{d^2M}{ds^2} &= E \left( J^{II} \chi + 2J^I \frac{d\chi}{ds} + J \frac{d^2\chi}{ds^2} \right) \\ \frac{d^3M}{ds^3} &= E \left( J^{III} \chi + 3J^{II} \frac{d\chi}{ds} + 3J^I \frac{d^2\chi}{ds^2} + J \frac{d^3\chi}{ds^3} \right) \end{aligned} \tag{3.17}$$

Sotto tali condizioni, sostituendo le derivate del momento espresse in (3.17), all'interno dell'equazione (3.14), è possibile ottenere l'equazione differenziale finale,

riportata di seguito come:

$$\begin{aligned}
 & R\left(J^{III}\chi + 3J^{II}\frac{d\chi}{ds} + 3J^I\frac{d^2\chi}{ds^2} + J\frac{d^3\chi}{ds^3}\right) + \\
 & + R^I\left(J^{II}\chi + 2J^I\frac{d\chi}{ds} + J\frac{d^2\chi}{ds^2}\right) + \frac{1}{R}\left(J^I\chi + J\frac{d\chi}{ds}\right) \\
 & = -\frac{1}{E}\left(P_x + R^I P_y + R\frac{dP_y}{ds} - \frac{m}{R} - R^I\frac{dm}{ds} - R\frac{d^2m}{ds^2}\right)
 \end{aligned} \tag{3.18}$$

Sostituendo le espressioni che determinano la curvatura e le sue derivate, come riportato in Eq.(3.9), è possibile determinare la forma dell'equazione risolvente.

Al fine di semplificare la scrittura, si riportano le espressioni della curvatura e delle sue derivate come individuate in Eq.(3.9) per mezzo di coefficienti prossimamente riportati.

$$\begin{aligned}
 \chi &= a_1\frac{d^6u}{ds^6} + b_1\frac{d^5u}{ds^5} + c_1\frac{d^4u}{ds^4} + d_1\frac{d^3u}{ds^3} + e_1\frac{d^2u}{ds^2} + f_1\frac{du}{ds} + g_1u \\
 -\frac{d\chi}{ds} &= a_2\frac{d^6u}{ds^6} + b_2\frac{d^5u}{ds^5} + c_2\frac{d^4u}{ds^4} + d_2\frac{d^3u}{ds^3} + e_2\frac{d^2u}{ds^2} + f_2\frac{du}{ds} + g_2u \\
 -\frac{d^2\chi}{ds^2} &= a_3\frac{d^6u}{ds^6} + b_3\frac{d^5u}{ds^5} + c_3\frac{d^4u}{ds^4} + d_3\frac{d^3u}{ds^3} + e_3\frac{d^2u}{ds^2} + f_3\frac{du}{ds} + g_3u \\
 -\frac{d^3\chi}{ds^3} &= a_4\frac{d^6u}{ds^6} + b_4\frac{d^5u}{ds^5} + c_4\frac{d^4u}{ds^4} + d_4\frac{d^3u}{ds^3} + e_4\frac{d^2u}{ds^2} + f_4\frac{du}{ds} + g_4u
 \end{aligned} \tag{3.19}$$

I coefficienti utilizzati nelle espressioni della curvatura e delle sue derivate, dipendono a loro volta dal raggio di curvatura e dalle loro derivate. Esse sono state determinate precedentemente e riportate in (3.9) dalla quale è possibile notare che le derivate della curvatura come la curvatura stessa sono funzione dello spostamento e delle sue derivate nonché del raggio di curvatura e delle sue derivate. A questo punto dalle espressioni della curvatura e delle sue derivate, è possibile individuare i coefficienti  $a_1, \dots, g_4$ . Essi vengono riportati in Tab.(3.1).

$a_1 = 0$ $a_2 = 0$ $a_3 = 0$ $a_4 = R$	$b_1 = 0$ $b_2 = 0$ $b_3 = R$ $b_4 = 5R^{(1)}$
$c_1 = 0$ $c_2 = R$ $c_3 = 4R^{(1)}$ $c_4 = 10R^{(2)} + \frac{1}{R}$	$d_1 = R$ $d_2 = 3R^{(1)}$ $d_3 = 6R^{(2)} + \frac{1}{R}$ $d_4 = 10R^{(3)} - 4R^{(1)} \frac{1}{R^2}$
$e_1 = 2R^{(1)}$ $e_2 = 3R^{(2)} + \frac{1}{R}$ $e_3 = 4R^{(3)} - 3R^{(1)} \frac{1}{R^2}$ $e_4 = 5R^{(4)} - 6R^{(2)} \frac{1}{R^2} + 12(R^{(1)})^2 \frac{1}{R^3}$	$f_1 = R^{(2)} + \frac{1}{R}$ $f_2 = R^{(3)} - 2R^{(1)} \frac{1}{R^2}$ $f_3 = R^{(4)} - 3R^{(2)} \frac{1}{R^2} + 6(R^{(1)})^2 \frac{1}{R^3}$ $f_4 = R^{(5)} - 4R^{(3)} \frac{1}{R^2} + 24R^{(1)}R^{(2)} \frac{1}{R^3} - 24(R^{(1)})^3 \frac{1}{R^4}$
$g_1 = -R^{(1)} \frac{1}{R^2}$ $g_2 = -R^{(2)} \frac{1}{R^2} + 2(R^{(1)})^2 \frac{1}{R^3}$ $g_3 = -R^{(3)} \frac{1}{R^2} + 6R^{(1)}R^{(2)} \frac{1}{R^3} - 6(R^{(1)})^3 \frac{1}{R^4}$ $g_4 = -R^{(4)} \frac{1}{R^2} + 8R^{(1)}R^{(3)} \frac{1}{R^3} + 6(R^{(2)})^2 \frac{1}{R^3} - 36(R^{(1)})^2R^{(2)} \frac{1}{R^4} + 24(R^{(1)})^4 \frac{1}{R^5}$	

**Tabella 3.1:** Coefficienti per definizione curvatura  $\chi$  e le sue derivate

Sostituendo quindi le espressioni della curvatura, come espressa in (3.8) e le sue derivate espresse in (3.9), all'interno dell'equazione (3.18), è possibile ottenere l'equazione differenziale del sesto ordine, intesa come equazione risolutiva del problema. Essa può essere dunque scritta come indicato:

$$a \frac{d^6 u}{ds^6} + b \frac{d^5 u}{ds^5} + c \frac{d^4 u}{ds^4} + d \frac{d^3 u}{ds^3} + e \frac{d^2 u}{ds^2} + f \frac{du}{ds} + gu + h = 0 \quad (3.20)$$

Sostituendo le espressioni contenute in Eq.(3.19) all'interno dell'Eq.(3.18), è possibile scrivere i coefficienti  $a, \dots, g$  come:

$$\begin{aligned}
 a &= \left( R J^{III} + R^I J^{II} + \frac{1}{R} J^I \right) a_1 + \left( 3R J^{II} + 2R^I J^I + \frac{1}{R} J \right) a_2 + \\
 &\quad + \left( 3R J^I + R^I J^I \right) a_3 + R J a_4 \\
 b &= \left( R J^{III} + R^I J^{II} + \frac{1}{R} J^I \right) b_1 + \left( 3R J^{II} + 2R^I J^I + \frac{1}{R} J \right) b_2 + \\
 &\quad + \left( 3R J^I + R^I J^I \right) b_3 + R J b_4 \\
 c &= \left( R J^{III} + R^I J^{II} + \frac{1}{R} J^I \right) c_1 + \left( 3R J^{II} + 2R^I J^I + \frac{1}{R} J \right) c_2 + \\
 &\quad + \left( 3R J^I + R^I J^I \right) c_3 + R J c_4 \\
 d &= \left( R J^{III} + R^I J^{II} + \frac{1}{R} J^I \right) d_1 + \left( 3R J^{II} + 2R^I J^I + \frac{1}{R} J \right) d_2 + \\
 &\quad + \left( 3R J^I + R^I J^I \right) d_3 + R J d_4 \tag{3.21} \\
 e &= \left( R J^{III} + R^I J^{II} + \frac{1}{R} J^I \right) e_1 + \left( 3R J^{II} + 2R^I J^I + \frac{1}{R} J \right) e_2 + \\
 &\quad + \left( 3R J^I + R^I J^I \right) e_3 + R J e_4 \\
 f &= \left( R J^{III} + R^I J^{II} + \frac{1}{R} J^I \right) f_1 + \left( 3R J^{II} + 2R^I J^I + \frac{1}{R} J \right) f_2 + \\
 &\quad + \left( 3R J^I + R^I J^I \right) f_3 + R J f_4 \\
 g &= \left( R J^{III} + R^I J^{II} + \frac{1}{R} J^I \right) g_1 + \left( 3R J^{II} + 2R^I J^I + \frac{1}{R} J \right) g_2 + \\
 &\quad + \left( 3R J^I + R^I J^I \right) g_3 + R J g_4
 \end{aligned}$$

## Capitolo 4

# Definizione della forma dell'arco

Nel presente capitolo si intende fornire una spiegazione delle modalità con cui viene determinata la forma delle strutture ad arco in analisi. Si pone quindi particolare attenzione alla forma circolare e alla forma polinomiale del secondo ordine, intesa quindi come forma parabolica, tenendo conto ad ogni modo che in linea del tutto generale potrebbe essere implementata tramite apposita funzione, una qualsiasi forma da impartire alla struttura.

### 4.1 Arco circolare

L'arco circolare può essere definito a partire dall'equazione della circonferenza come mostrato di seguito:

$$x^2 + y^2 + ax + by + c = 0 \tag{4.1}$$

L'equazione (4.1), rimaneggiata e posta in forma esplicita, può quindi essere scritta come segue:

$$y = \sqrt{-x^2 - Ax - C + \frac{B^2}{4}} - \frac{B}{2} \quad (4.2)$$

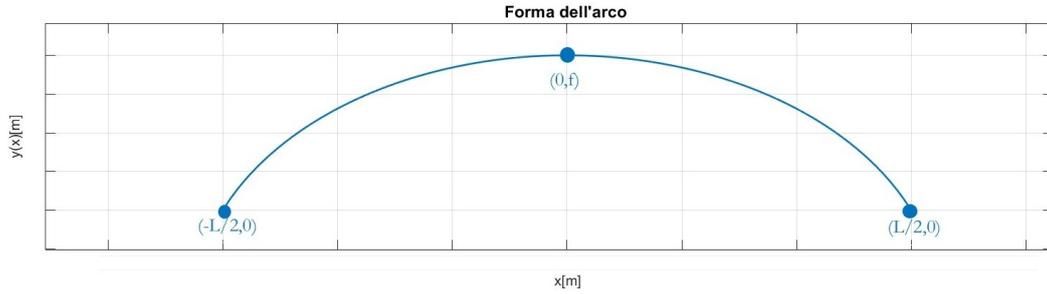
Come chiaramente visibile, l'equazione presenta tre coefficienti A,B,C la cui determinazione avviene per mezzo dell'imposizione del passaggio della circonferenza per tre punti. In particolare i coefficienti verranno determinati a partire dalla conoscenza della luce  $L$  e dell'altezza dell'arco  $f$ . Imponendo quindi il passaggio per i due punti estremi  $(-L/2,0)$ ,  $(L/2,0)$  e per il punto in chiave  $(0,f)$ , è possibile individuare i coefficienti detti, scritti nella forma:

$$\begin{aligned} A &= 0 \\ B &= \frac{L^2}{4f} - f \\ C &= -\frac{L^2}{4} \end{aligned} \quad (4.3)$$

Sulla base di quanto indicato è pertanto possibile riscrivere l'equazione della circonferenza in forma esplicita nel seguente modo:

$$y = \sqrt{-x^2 + \frac{L^2}{4} + \frac{(\frac{L^2}{4f} - f)^2}{4}} - \frac{\frac{L^2}{4f} - f}{4}$$

Si riporta di seguito, per completezza, una rappresentazione dell'arco circolare.



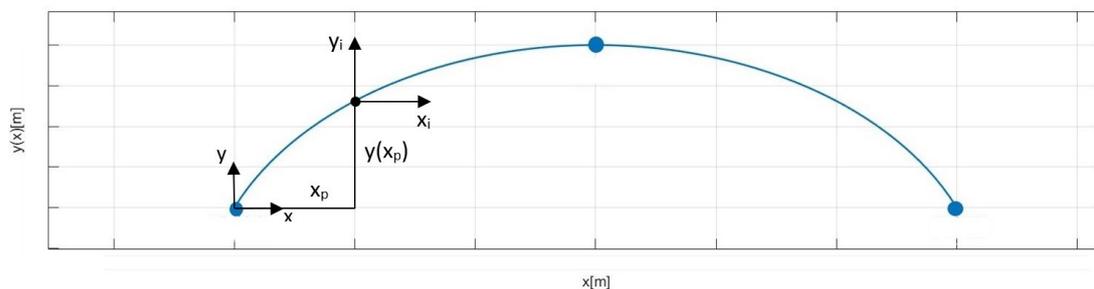
**Figura 4.1:** Arco circolare

Come meglio specificato in seguito, sarà necessario individuare differenti curve al fine di introdurre il danneggiamento e in questo senso, il sistema di riferimento per ciascuna porzione di curva viene posto in corrispondenza del suo punto iniziale. Questo implica che ogni circonferenza che definisce un determinato tratto di curva, dovrà passare per i generici punti  $[-(L/2 - x_p); 0]$ ,  $[(L/2 - x_p); 0]$  e  $[(L - 2x_p)/2; y_p]$  in cui con  $x_p$  si indica l'ascissa che determina la posizione del sistema di riferimento posizionato all'inizio dell' $i$ -esima curva rispetto al sistema di riferimento globale come mostrato in Fig.(4.2). L'ordinata  $y_p$  è invece automaticamente determinata per mezzo della relazione  $y = y(x)$  e definita come  $f - y(x_p)$ .

In questo senso si ha una variazione dei coefficienti precedentemente indicati che quindi possono essere scritti nel seguente modo:

$$\begin{aligned}
 A &= -\left(\frac{L}{2} - 2x_p\right) \\
 B &= \frac{\left(\frac{L}{2} - 2x_p\right)^2}{4f} \\
 C &= 0
 \end{aligned}
 \tag{4.4}$$

Al fine di rendere maggiormente chiaro questo concetto, si intende riportare di seguito una rappresentazione grafica, che permetta l'individuazione delle grandezze di cui si è discusso.



**Figura 4.2:** Rappresentazione del sistema di riferimento dell' $i$ -esima curva rispetto a quello globale

## 4.2 Arco parabolico

La determinazione dell'arco parabolico parte invece dalla definizione della funzione che permette di descrivere una parabola:

$$y = Ax^2 + Bx + C \quad (4.5)$$

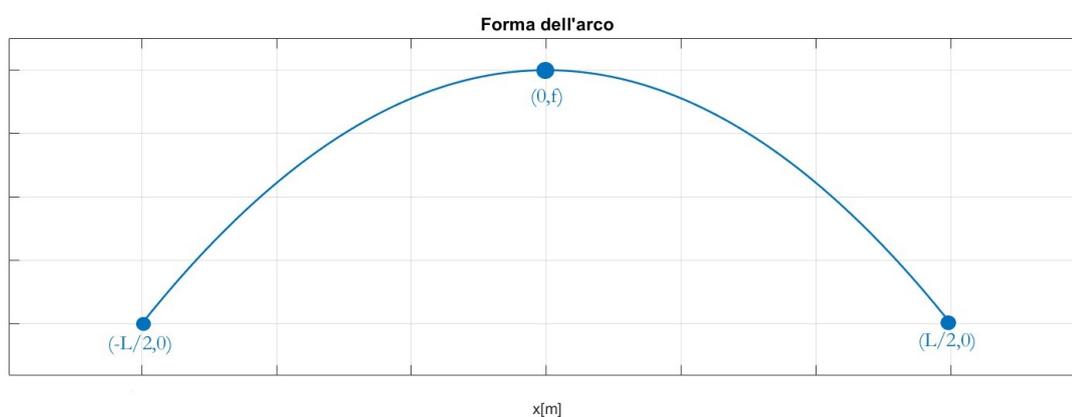
Allo stesso modo, come fatto per il caso precedente, si procede alla determinazione dei tre coefficienti  $A$ ,  $B$ ,  $C$ , per mezzo dell'imposizione del passaggio della parabola stessa per tre punti. Nello specifico essi saranno individuati per mezzo della conoscenza della luce dell'arco  $L$  e dell'altezza dell'arco in mezzera  $f$ . Si impone quindi il passaggio per i punti  $(-L/2, 0)$ ,  $(L/2, 0)$  e per il punto in chiave  $(0, f)$ , ottenendo:

$$\begin{aligned} A &= -\frac{4f}{L^2} \\ B &= 0 \\ C &= f \end{aligned} \quad (4.6)$$

In questo modo l'equazione che descrive la parabola, in funzione di  $L$  e di  $f$ , può essere scritta come:

$$y = \frac{4f}{L^2}x^2 + f \quad (4.7)$$

Per completezza, di seguito viene riportata una rappresentazione dell'arco parabolico.



**Figura 4.3:** Arco parabolico

Analogamente a quanto descritto precedentemente per l'arco circolare, anche in questo caso si ha una variazione dei coefficienti  $A$ ,  $B$ ,  $C$ , in funzione della posizione del sistema di riferimento dell' $i$ -esima curva, rispetto al sistema di riferimento globale. Facendo quindi riferimento alla Fig.(4.2), esplicitativa a prescindere dalla forma dell'arco, essi possono quindi essere riscritti nel seguente modo:

$$\begin{aligned} A &= -\frac{4y_p}{(L - 2x_p)^2} \\ B &= \frac{4y_p}{(L - 2x_p)} \\ C &= 0 \end{aligned} \quad (4.8)$$

### 4.3 Definizione del raggio di curvatura

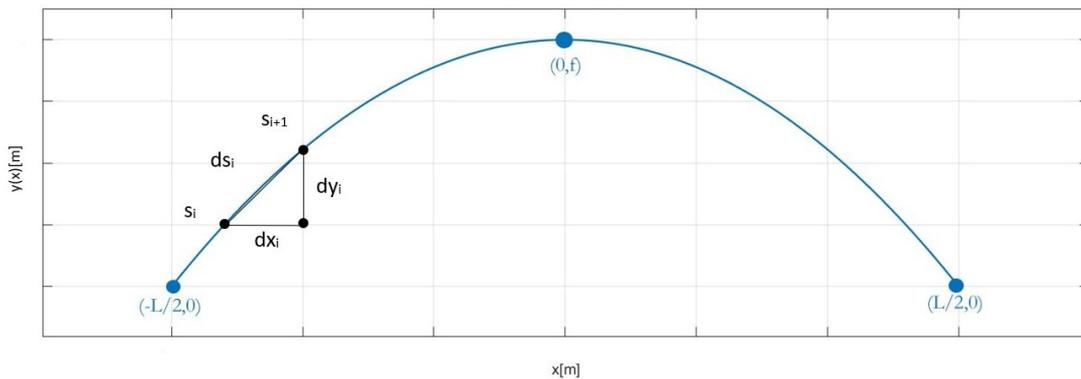
Al fine di risolvere l'equazione differenziale del sesto ordine, è necessario individuare il raggio di curvatura  $R$ . Come indicato in [5], a partire dall'equazione che descrive la curva, scritta in modo generico come  $y = y(x)$ , è possibile definire  $R(x)$  come:

$$R(x) = \frac{1}{\chi(x)} = \frac{(1 + (y^I)^2)^{3/2}}{y^{II}} \quad (4.9)$$

Tuttavia è necessario conoscere il raggio di curvatura in funzione dell'ascissa curvilinea  $s$ , per cui deve essere conosciuta la relazione:

$$R = R(s) \quad (4.10)$$

Risulta quindi necessario effettuare un cambio di variabile e in questo senso è possibile individuare la relazione  $s(x)$ , suddividendo l'intera curva rappresentante l'arco, in un numero finito di intervalli di estensione  $ds$  lungo l'ascissa curvilinea, come visibile in Fig.(4.4).



**Figura 4.4:** Discretizzazione arco

Scegliendo un numero di elementi appropriato, è possibile, approssimare bene la

loro estensione per mezzo del teorema di Pitagora, come indicato di seguito:

$$ds = \sqrt{(dx_i^2 + dy_i^2)} \quad (4.11)$$

In questo modo è necessario definire gli elementi  $dx_i$ , e una volta nota la relazione  $y = y(x)$  sono automaticamente definiti gli elementi  $dy_i$ . A questo punto è possibile stabilire la grandezza  $s_i$  tramite la conoscenza di  $x_i$  nell' $i$ -esimo punto.

Si procede allora creando per punti la funzione  $s(x)$ , la quale invertita consente quindi di ottenere la relazione  $x(s)$ . Sostituendo in (4.9), è possibile ottenere:

$$R(s) = R(x(s)) = \frac{1}{\chi(x(s))} = \frac{\sqrt{1 + (y^I(x(s)))^2}}{y^I(x(s))}$$

## Capitolo 5

# Definizione dei carichi

Nel presente capitolo viene mostrata la metodologia di determinazione dei carichi, i quali, come mostrato più specificatamente nel seguito, entrano in gioco all'interno dell'equazione differenziale del sesto ordine per mezzo del termine  $h$ .

Come già specificato, le forze esterne agenti sull'elemento infinitesimo di lunghezza  $ds$ , sono tre:

- $P_x = p(s)ds$ : Carico applicato in direzione tangenziale rispetto alla curva
- $P_y = q(s)ds$ : Carico applicato in direzione perpendicolare rispetto alla curva
- $m$  : Momento flettente

Nella presente tesi in particolare verranno considerati solamente dei carichi distribuiti e agenti lungo la direzione verticale. Considerando quindi il solo carico  $q(s)$ , inteso come carico distribuito agente lungo la struttura, è possibile scrivere le seguenti relazioni:

$$\begin{aligned} P_n(s) &= q(s)\cos(\alpha(s)) \\ P_t(s) &= q(s)\sin(\alpha(s)) \end{aligned} \tag{5.1}$$

in cui:

- $\alpha(s)$ : Angolo compreso fra direzione orizzontale e tangente alla curva
- $P_t(s)$ : Componente di carico agente in direzione tangente alla curva
- $P_n(s)$ : Componente di carico agente in direzione perpendicolare alla curva

In questo senso è quindi possibile scrivere:

$$\begin{aligned}P_x &= P_t(s) \\ P_y &= P_n(s)\end{aligned}\tag{5.2}$$

Nello specifico, per il lavoro svolto nel prosieguo, sarà di interesse valutare il peso proprio della struttura  $q_{sw}$  ed un sovraccarico  $q_0$  inteso come carico uniformemente distribuito lungo l'ascissa curvilinea  $s$ . Tali due carichi potranno quindi essere definiti come segue:

$$\begin{aligned}q(s) &= q_{sw} = -\gamma A(s) \\ q(s) &= q_0\end{aligned}\tag{5.3}$$

in cui:

- $\gamma$ : Peso specifico del materiale
- $A(s)$ : Sezione trasversale

## Capitolo 6

# Metodologia di risoluzione della struttura

Nel presente capitolo, si vogliono chiarire gli aspetti legati alla metodologia con cui viene affrontato il problema della risoluzione dell'equazione differenziale e quindi della struttura nel suo complesso. Il metodo utilizzato permette il calcolo delle caratteristiche della sollecitazione, degli spostamenti e delle tensioni, in archi che possano avere una curvatura variabile lungo la loro ascissa curvilinea ed una sezione trasversale variabile lungo la stessa, per mezzo della definizione di una legge di variazione, eventualmente lineare o quadratica.

Lo sviluppo del modello prende inizio dalla definizione di una equazione del sesto ordine [5], ottenuta sfruttando le relazioni statiche, cinematiche e costitutive, come mostrato precedentemente. Si riporta per chiarezza espositiva l'equazione differenziale del sesto ordine.

$$au^{(6)} + bu^{(5)} + cu^{(4)} + du^{(3)} + eu^{(2)} + fu^{(1)} + gu + h = 0 \quad (6.1)$$

La soluzione dell'equazione differenziale del sesto ordine sarà l'incognita  $u$ , che

nel caso specifico rappresenta lo spostamento nella direzione tangenziale rispetto ad ogni punto della curva. Relativamente ai coefficienti, essi sono delle funzioni dipendenti dal raggio di curvatura e la sua derivata prima e dal momento di inerzia della sezione trasversale e le sue derivate.

La forma con cui viene espresso ogni coefficiente dell'equazione differenziale del sesto ordine, rimane la medesima e dunque se ne riporta un esempio generico come visibile in Eq.(6.2), in cui si indica il generico coefficiente con il termine  $K$ . La scrittura dei coefficienti indicati è visibile in forma estesa in Eq.(3.21).

$$K = \left( R J^{III} + R^I J^{II} + \frac{1}{R} J^I \right) k_1 + \left( 3R J^{II} + 2R^I J^I + \frac{1}{R} J \right) k_2 + \left( 3R J^I + R^I \right) k_3 + \left( R J \right) k_4 \quad (6.2)$$

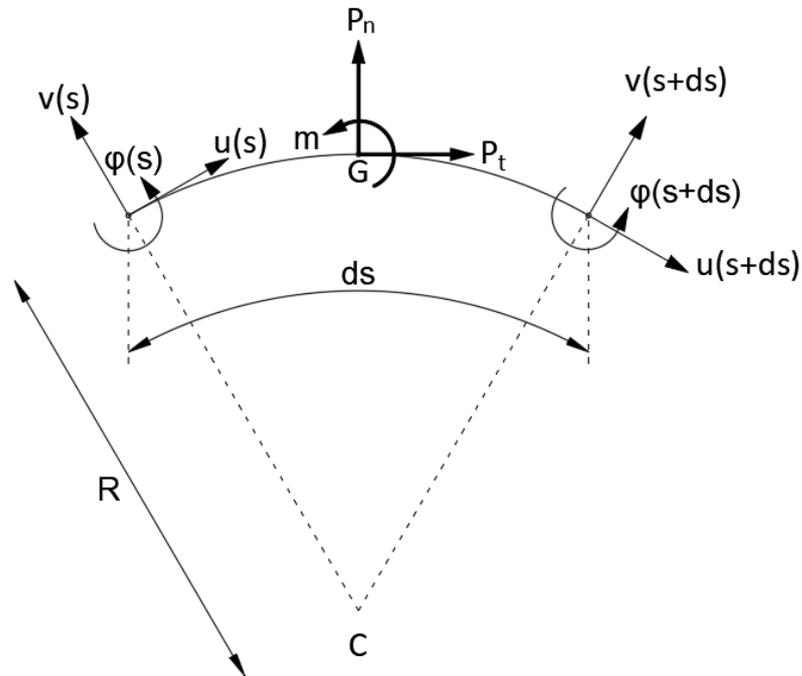
I generici coefficienti espressi come  $k_i$ , sono stati riportati precedentemente in Tab.(3.1).

Infine il coefficiente  $h$  usato in Eq.(6.1) viene definito come mostrato di seguito, facendo riferimento all'Eq.(3.18). Tale coefficiente può quindi essere scritto come:

$$h = \frac{1}{E} \left( P_t + R^I P_n + R P_n^I - \frac{m}{R} - R^I m^I - R m^{II} \right) \quad (6.3)$$

In essa  $E$  rappresenta il modulo elastico di Young, il quale viene definito in funzione del materiale adottato.  $P_n$ ,  $P_t$  e  $m$  rappresentano invece i carichi esterni applicati alla struttura in esame, rispettivamente uguali all'aliquota di carico normale, di carico tangenziale, rispetto ad un carico distribuito considerato agente sull'elemento di lunghezza  $ds$ , e al momento flettente distribuito. Al fine di rendere maggiormente chiara la trattazione di quanto appena espresso, tali carichi verranno rappresentati in Fig.(6.1), con annessa indicazione degli spostamenti dovuti

all'applicazione dei medesimi.



**Figura 6.1:** Spostamenti indotti dalle azioni esterne su un tratto infinitesimo  $ds$  di trave curva

Una volta definita l'equazione di partenza dalla quale derivare l'incognita principale e vale a dire lo spostamento tangenziale  $u$ , al fine di procedere alla sua determinazione, poichè l'ordine dell'equazione è pari a sei allora sarà necessario individuare sei condizioni al contorno. L'individuazione delle stesse dipenderà e dallo schema strutturale e della tipologia dei vincoli che verranno utilizzati. In questo senso sarà eventualmente possibile individuare più tratti di curva, a partire da quella iniziale, connessi per mezzo di vincoli interni di natura differente al fine di modellare il danneggiamento strutturale o atti a definire in modo idoneo la geometria complessiva della struttura, nel caso in cui ad esempio si vogliono

adottare differenti funzioni per determinare una forma più complessa. Anche i vincoli all'estremità della struttura potranno essere di diversa natura e di conseguenza le condizioni al contorno in accordo con tali vincoli potranno essere differenti. In linea del tutto generale si agirà comunque sulle seguenti grandezze:  $u$ ,  $v$ ,  $\varphi$ ,  $M$ ,  $N$ ,  $T$ .

La soluzione dell'Eq.(6.1) permette, unitamente alle condizioni al contorno di ottenere gli spostamenti tangenziali  $u$  relativi ai punti individuati secondo la discretizzazione della funzione rappresentante la curva che definisce la forma dell'arco. Da essi, per mezzo delle relazioni visibili in (6.4) e in (6.5), le quali sono ottenibili dalle relazioni (3.2) unitamente alle assunzioni semplificative effettuate, sarà possibile determinare anche gli spostamenti trasversali e le rotazioni. In tal modo il problema sarà compiutamente definito dal punto di vista cinematico e pertanto si ottiene:

$$v = -Ru^{(1)} \quad (6.4)$$

$$\varphi = -Ru^{(2)} - R^{II}u^{(1)} - \frac{1}{R}u \quad (6.5)$$

Inoltre, sfruttando l'equazione (6.6) è possibile determinare la curvatura  $\chi$  nei punti in esame.

$$\chi = -Ru^{(3)} - 2R^Iu^{(2)} - \left[ R^{II} + \frac{1}{R} \right] u^{(1)} + \frac{R^I}{R^2}u \quad (6.6)$$

Sfruttando dunque la relazione fra momento flettente  $M$  e curvatura  $\chi$  è possibile determinare inoltre, il taglio  $T$  e lo sforzo normale  $N$ , come indicato rispettivamente in (6.8) e (6.9). Ammesse queste considerazioni possono essere calcolate le caratteristiche interne della sollecitazione come indicato di seguito.

$$M = EJ\chi \quad (6.7)$$

$$T = -M^I - m \quad (6.8)$$

$$N = R(P_n - M^{II} - m^I) \quad (6.9)$$

## 6.1 Metodo di risoluzione alle differenze finite

L'Eq.(6.1) risulta essere del sesto ordine e dunque al fine di procedere alla sua risoluzione da un punto di vista numerico, con l'intento di ottenere la soluzione in termini di spostamento tangenziale  $u$ , viene usato il metodo alle differenze finite. Tale metodo permette di calcolare e determinare il valore approssimato della funzione  $u$  nel generico punto  $x$ , conoscendo solamente un numero limitato di valori della funzione nell'intorno del generico punto. Questo risulta essere dunque un notevole vantaggio dal momento in cui a livello analitico al fine di determinare il valore esatto della funzione in un generico punto, sarebbe necessario conoscere infiniti valori della funzione nell'intorno del punto stesso. Da questo punto di vista l'operatore rapporto differenziale rimpiazza l'operatore limite, in modo tale da poter ottenere un sistema algebrico del tipo  $Ax = b$ .

Il più classico degli approcci per l'applicazione di tale metodo consiste nello sviluppo in serie di Taylor della funzione  $u(x)$  nell'intorno del generico punto  $x$ , troncando lo sviluppo in modo opportuno. Si riporta dunque di seguito in Eq.(6.10) lo sviluppo generico della funzione  $u(x)$  troncato al primo ordine.

$$u(x) = u(x_0) + u^{(1)}(x - x_0) + o(x - x_0) \quad x \rightarrow x_0 \quad (6.10)$$

Di conseguenza se  $u^{(1)} \neq 0$  si può affermare che si sta approssimando la funzione  $u(x)$  con il polinomio del primo ordine del tipo riportato in Eq.(6.11).

$$P_1(x) = u(x_0) + u^{(1)}(x - x_0), \quad x \rightarrow x_0 \quad (6.11)$$

Pertanto, l'approssimazione comporta un errore individuabile nel modo riportato in Eq.(6.12).

$$E_1(x) = u(x) - P_1(x) = o(x - x_0), \quad x \rightarrow x_0 \quad (6.12)$$

Si nota in particolare che l'errore è un infinitesimo di ordine superiore al primo. Sulla base di ciò e facendo riferimento all'Eq.(6.12) si può valutare l'errore commesso, sfruttando l'Eq.(6.13).

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{E_1(x)}{(x - x_0)^2} &= \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{u(x) - P_1(x)}{(x - x_0)^2} \\ \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{u(x) - P_1(x)}{(x - x_0)^2} &= \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{u(x) - u(x_0) - u^{(1)}(x - x_0)}{(x - x_0)^2} \end{aligned} \quad (6.13)$$

Tramite quanto mostrato nei passaggi precedenti, si ottiene l'Eq.(6.14).

$$\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{E_1(x)}{(x - x_0)^2} = \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{u(x) - u(x_0) - u^{(1)}(x - x_0)}{(x - x_0)^2} \quad (6.14)$$

Utilizzando dunque in teorema di De l'Hopital si può risolvere il limite, ottenendo

quanto mostrato in Eq.(6.15).

$$\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{u^{(1)}(x) - u^{(1)}(x_0)}{2(x - x_0)} = \frac{1}{2}u^{(2)}(x_0) \quad (6.15)$$

Procedendo nel seguente modo è possibile giungere allo sviluppo di Taylor fino all'ordine desiderato, come mostrato nell'Eq.(6.16) ed espresso sottoforma di polinomio che approssima la funzione.

$$P_n(x) = \sum_{k=1}^n \frac{1}{k!} f^{(k)}(x_0)(x - x_0)^k \quad (6.16)$$

Data la natura del problema, in cui si ha l'individuazione di una mesh realizzata attraverso dei punti appositamente definiti, in funzione della discretizzazione della funzione che rappresenta l'arco, il valore corrispondente al generico punto  $x$  può essere valutato adottando lo sviluppo di Taylor nei punti immediatamente precedenti ed immediatamente successivi allo stesso, intendendo la loro posizione come intorno del punto in esame. Per tale motivo si riportano per esteso gli sviluppi nei punti di interesse, considerando che essendo l'equazione differenziale del sesto ordine, servirà definire il polinomio dello sviluppo in sei punti e quindi i tre precedenti ed i tre successivi al punto in esame di cui si vuole conoscere il valore relativo allo spostamento tangenziale  $u$ .

Si evidenzia che, per una migliore comprensione, il punto generico  $x$  in esame verrà individuato con la sua posizione, indicata dunque in modo generico come  $i$ -esima.

$$\begin{aligned}
 u(i+1) &= u(i) + u^{(1)}(i)dx + u^{(2)}(i)\frac{dx^2}{2} + u^{(3)}(i)\frac{dx^3}{6} + u^{(4)}(i)\frac{dx^4}{24} + \\
 &\quad + u^{(5)}(i)\frac{dx^5}{120} + u^{(6)}(i)\frac{dx^6}{720} \\
 u(i-1) &= u(i) - u^{(1)}(i)dx + u^{(2)}(i)\frac{dx^2}{2} - u^{(3)}(i)\frac{dx^3}{6} + u^{(4)}(i)\frac{dx^4}{24} + \\
 &\quad - u^{(5)}(i)\frac{dx^5}{120} + u^{(6)}(i)\frac{dx^6}{720} \\
 u(i+2) &= u(i) + u^{(1)}(i)dx + u^{(2)}(i)\frac{4dx^2}{2} + u^{(3)}(i)\frac{8dx^3}{6} + u^{(4)}(i)\frac{16dx^4}{24} + \\
 &\quad + u^{(5)}(i)\frac{32dx^5}{120} + u^{(6)}(i)\frac{64dx^6}{720} \\
 u(i-2) &= u(i) - u^{(1)}(i)dx + u^{(2)}(i)\frac{4dx^2}{2} - u^{(3)}(i)\frac{8dx^3}{6} + u^{(4)}(i)\frac{16dx^4}{24} + \\
 &\quad - u^{(5)}(i)\frac{32dx^5}{120} + u^{(6)}(i)\frac{64dx^6}{720} \\
 u(i+3) &= u(i) + u^{(1)}(i)dx + u^{(2)}(i)\frac{9dx^2}{2} + u^{(3)}(i)\frac{27dx^3}{6} + u^{(4)}(i)\frac{81dx^4}{24} + \\
 &\quad + u^{(5)}(i)\frac{243dx^5}{120} + u^{(6)}(i)\frac{792dx^6}{720} \\
 u(i-3) &= u(i) - u^{(1)}(i)dx + u^{(2)}(i)\frac{9dx^2}{2} - u^{(3)}(i)\frac{27dx^3}{6} + u^{(4)}(i)\frac{81dx^4}{24} + \\
 &\quad - u^{(5)}(i)\frac{243dx^5}{120} + u^{(6)}(i)\frac{792dx^6}{720}
 \end{aligned} \tag{6.17}$$

Al fine di ottenere la definizione delle derivate, si sfrutta lo sviluppo in serie di Taylor come mostrato di seguito.

$$u(i+1) = u(i) + \frac{\Delta x}{1} u^{(1)}(i) + \frac{\Delta x^2}{2!} u^{(2)}(i) + \dots + \frac{\Delta x^n}{n!} u^{(n)}(i) \quad (6.18)$$

L'Eq.(6.18) può essere rimaneggiata in modo da ottenere l'espressione riportata di seguito, indicando in questo caso la lunghezza dell'intervallo di discretizzazione con una quantità finita  $\Delta x$ , definita in funzione della natura del problema.

$$\frac{u(i+1) - u(i)}{\Delta x} \approx u^{(1)}(i) + o(\Delta x) \quad (6.19)$$

Si nota chiaramente come l'errore commesso cresca in modo lineare con il valore individuato per definire la lunghezza dell'intervallo che determina la discretizzazione. Al fine di diminuire l'errore commesso verranno adottate le differenze finite centrate in sostituzione delle differenze finite con passo in avanti e passo indietro. Si effettua dunque una combinazione lineare delle prime due espressioni che definiscono rispettivamente  $u(i+1)$  e  $u(i-1)$  come riportato nelle Eq.(6.17). Sottraendo la seconda espressione alla prima si ottiene quindi:

$$\frac{u(x + \Delta x) - u(x - \Delta x)}{2\Delta x} = u^{(1)}(x) + o(\Delta x^2) \quad (6.20)$$

Diversamente dal caso precedente, con le differenze finite centrate l'errore commesso è un infinitesimo di due ordini superiori al primo e pertanto esso risulta essere inferiore a quello commesso con le differenze finite in avanti e indietro. Questo permetterebbe dunque, qualora servisse, di incrementare l'estensione degli intervalli, ottenendo comunque delle soluzioni affette da errori accettabili.

Volendo ancora mostrare come ottenere la derivata seconda nel punto  $i$ -esimo,

si procede alla somma tra la prima e la seconda espressione riportate in (6.17), ottenendo quanto mostrato di seguito nell'equazione (6.21).

$$\frac{u(x + \Delta x) + u(x - \Delta x) - 2u(x)}{2\Delta x} = u^{(2)}(x) + o(\Delta x^2) \quad (6.21)$$

In definitiva la derivata prima e la derivata seconda valutate nel punto in esame, possono essere espresse come mostrato successivamente.

$$\frac{u(x + \Delta x) - u(x - \Delta x)}{2\Delta x} \approx u^{(1)}(x) \quad (6.22)$$

$$\frac{u(x + \Delta x) + u(x - \Delta x) - 2u(x)}{2\Delta x} \approx u^{(2)}(x) \quad (6.23)$$

Procedendo in maniera analoga a quanto mostrato è possibile ottenere le derivate di ordine superiore, le quali saranno ricavabili tramite una combinazione lineare delle equazioni e quindi dei polinomi, forniti dagli sviluppi di Taylor. Tuttavia per ottenere tali espressioni, gli sviluppi dovranno essere arrestati alla derivata quarta ed alla derivata sesta, per l'ottenimento rispettivamente delle derivate terza e quarta e delle derivate quinta e sesta. Si riportano per intero allora tutte le espressioni che definiscono le derivate dal primo ordine al sesto ordine, espresse questa volta in funzione dell'ascissa curvilinea.

$$\begin{aligned}\frac{du(i)}{ds} &= \frac{1}{2ds}[u(i+1) - u(i-1)] \\ \frac{du^2(i)}{ds^2} &= \frac{1}{(2ds)^2}[u(i-1) - 2u(i) + u(i+1)] \\ \frac{du^3(i)}{ds^3} &= \frac{1}{(2ds)^3}\left[-\frac{1}{2}u(i-2) + u(i-1) - u(i+1) + \frac{1}{2}u(i+2)\right] \\ \frac{du^4(i)}{ds^4} &= \frac{1}{(2ds)^4}\left[-\frac{1}{6}u(i-3) + 2u(i-2) - \frac{13}{2}u(i-1) + \frac{28}{3}u(i) + \right. \\ &\quad \left. - \frac{13}{2}u(i+1) + 2u(i+2) - \frac{1}{6}u(i+3)\right] \tag{6.24} \\ \frac{du^5(i)}{ds^5} &= \frac{1}{(2ds)^5}\left[-\frac{1}{2}u(i-3) + 2u(i-2) - \frac{5}{2}u(i-1) + \right. \\ &\quad \left. + \frac{5}{2}u(i+1) - 2u(i+2) + \frac{1}{2}u(i+3)\right] \\ \frac{du^6(i)}{ds^6} &= \frac{1}{(2ds)^6}\left[u(i-3) - 6u(i-2) + 15u(i-1) - 20u(i) + \right. \\ &\quad \left. + 15u(i+1) - 6u(i+2) + u(i+3)\right]\end{aligned}$$

Tuttavia, come mostrato precedentemente, l'errore che viene commesso già nel calcolo del polinomio di Taylor, dipende dall'ordine a cui arrestiamo lo stesso. Nell'intento quindi di ottenere delle soluzioni affette da un errore ridotto, il calcolo di ogni valore delle derivate, avviene sfruttando sempre il polinomio di Taylor ma arrestato al sesto ordine. Per mezzo delle medesime combinazioni lineari, sarà possibile quindi ottenere le equazioni riportate di seguito, potendo individuare i

coefficienti relativi alla funzione  $u$  in corrispondenza dei punti in esame, tramite quanto riportato in [15].

$$\begin{aligned} \frac{du(i)}{ds} = & \frac{1}{(ds)} \left[ -\frac{1}{60}u(i-3) + \frac{3}{20}u(i-2) + \frac{3}{4}u(i-1) + 0u(i) + \right. \\ & \left. + \frac{3}{4}u(i+1) - \frac{3}{20}u(i+2) + \frac{1}{60}u(i+3) \right] \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \frac{d^2u(i)}{ds^2} = & \frac{1}{(ds^2)} \left[ -\frac{1}{90}u(i-3) - \frac{3}{20}u(i-2) + \frac{3}{2}u(i-1) - \frac{49}{18}u(i) + \right. \\ & \left. + \frac{3}{2}u(i+1) - \frac{3}{20}u(i+2) + \frac{1}{90}u(i+3) \right] \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \frac{d^3u(i)}{ds^3} = & \frac{1}{(ds^3)} \left[ -\frac{1}{8}u(i-3) - 1u(i-2) + \frac{13}{8}u(i-1) + 0u(i) + \right. \\ & \left. - \frac{13}{8}u(i+1) + 1u(i+2) - \frac{1}{8}u(i+3) \right] \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \frac{d^4u(i)}{ds^4} = & \frac{1}{(ds^4)} \left[ -\frac{1}{6}u(i-3) + 2u(i-2) - \frac{13}{2}u(i-1) + \frac{28}{3}u(i) + \right. \\ & \left. - \frac{13}{2}u(i+1) + 2u(i+2) - \frac{1}{6}u(i+3) \right] \end{aligned} \tag{6.25}$$

$$\begin{aligned} \frac{d^5u(i)}{ds^5} = & \frac{1}{(ds^5)} \left[ -\frac{1}{2}u(i-3) + 2u(i-2) - \frac{5}{2}u(i-1) + 0u(i) + \right. \\ & \left. + \frac{5}{2}u(i+1) - 2u(i+2) + \frac{1}{2}u(i+3) \right] \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \frac{d^6u(i)}{ds^6} = & \frac{1}{(ds^6)} \left[ 1u(i-3) - 6u(i-2) + 15u(i-1) - 20u(i) + \right. \\ & \left. + 15u(i+1) - 6u(i+2) + 1u(i+3) \right] \end{aligned}$$

Al fine di padroneggiare meglio la soluzione si intende variare il metodo per la risoluzione numerica [5], la quale avveniva precedentemente tramite la funzione "fsolve". Con tale funzione implementata in Matlab è necessario fornire le espressioni che definiscono il valore delle derivate e le idonee condizioni al contorno negli appositi punti. Assegnando inoltre dei valori di partenza dell'incognita ricercata per tutti i punti analizzati, la funzione provvede alla determinazione del valore reale delle incognite. In questo caso si vuole avere un maggiore controllo delle condizioni che vengono imposte e si procederà dunque alla creazione di un sistema del tipo  $Ax = b$ . In questo senso, sostituendo le espressioni delle derivate riportate in (6.25) all'interno dell'Eq.(6.1) è possibile trasformare l'insieme di equazioni differenziali, determinanti la soluzione per ogni punto dell'insieme discretizzato, in un sistema di equazioni algebriche. Ricordando che il metodo di risoluzione si basa su una equazione differenziale del sesto ordine, per la determinazione dello spostamento all' $i$ -esimo nodo è necessario conoscere l'espressione delle derivate di ordine superiore alla prima fino alla sesta. Questo comporta al momento della sostituzione l'individuazione di sette incognite e vale a dire lo spostamento del punto in esame  $u(i)$  nonché gli spostamenti dei tre punti precedenti e successivi ad esso. La metodologia adottata implica perciò la definizione di un sistema di sette equazioni per definire la soluzione di un nodo del dominio discretizzato, tenendo comunque conto che per il primo nodo l'equazione algebrica di partenza coinvolge tre punti fittizi precedenti ad esso. Pertanto l'equazione relativa ad ogni nodo interessa i tre punti precedenti ad esso, ma anche i tre punti successivi, generando un processo a cascata che vede il coinvolgimento, per ogni equazione algebrica relativa al nodo terminale di ogni tratto di curva, dei tre punti fittizi successivi al nodo terminale stesso.

Si riporta quindi di seguito l'equazione risolvente a seguito della sostituzione delle relazioni che definiscono le derivate della funzione  $u$  in Eq.(6.26).

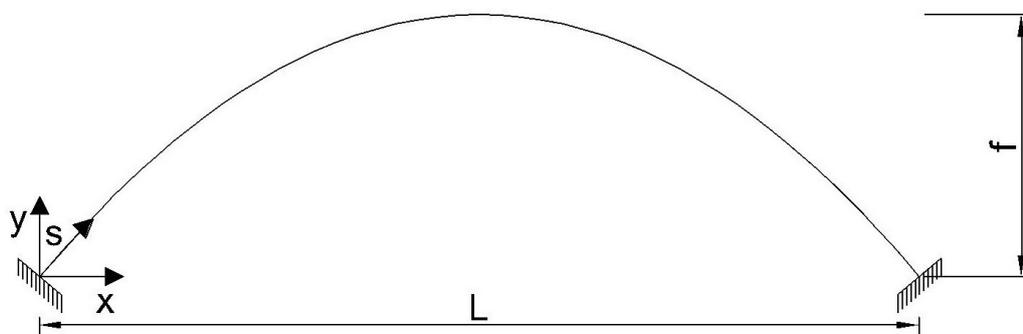
$$\begin{aligned}
 & u(i-3) \left[ -\frac{1}{60} f \frac{1}{ds} + \frac{1}{90} e \frac{1}{ds^2} + \frac{1}{8} d \frac{1}{ds^3} - \frac{1}{6} c \frac{1}{ds^4} - \frac{1}{2} b \frac{1}{ds^5} + a \frac{1}{ds^6} \right] + \\
 & u(i-2) \left[ \frac{3}{20} f \frac{1}{ds} - \frac{3}{20} e \frac{1}{ds^2} - d \frac{1}{ds^3} + 2c \frac{1}{ds^4} + 2b \frac{1}{ds^5} - 6a \frac{1}{ds^6} \right] + \\
 & u(i-1) \left[ -\frac{3}{4} f \frac{1}{ds} + \frac{3}{2} e \frac{1}{ds^2} + \frac{13}{8} d \frac{1}{ds^3} - \frac{13}{2} c \frac{1}{ds^4} - \frac{5}{2} b \frac{1}{ds^5} + 15a \frac{1}{ds^6} \right] + \\
 & u(i) \left[ g - e \frac{49}{18} \frac{1}{ds^2} + c \frac{28}{3} \frac{1}{ds^4} - 20a \frac{1}{ds^6} \right] + \tag{6.26} \\
 & u(i+1) \left[ \frac{3}{4} f \frac{1}{ds} + \frac{3}{2} e \frac{1}{ds^2} - \frac{13}{8} d \frac{1}{ds^3} - \frac{13}{2} c \frac{1}{ds^4} + \frac{5}{2} b \frac{1}{ds^5} + 15a \frac{1}{ds^6} \right] + \\
 & u(i+2) \left[ -\frac{3}{20} f \frac{1}{ds} - \frac{3}{20} e \frac{1}{ds^2} + d \frac{1}{ds^3} + 2c \frac{1}{ds^4} - 2b \frac{1}{ds^5} - 6a \frac{1}{ds^6} \right] + \\
 & u(i+3) \left[ \frac{1}{60} f \frac{1}{ds} + \frac{1}{90} e \frac{1}{ds^2} - \frac{1}{8} d \frac{1}{ds^3} - \frac{1}{6} c \frac{1}{ds^4} + \frac{1}{2} b \frac{1}{ds^5} + a \frac{1}{ds^6} \right] = -h(i)
 \end{aligned}$$

Per semplicità si preferisce rinominare in modo sintetico i coefficienti moltiplicatori che verranno indicati rispettivamente come:  $\gamma_{i-3}$ ,  $\gamma_{i-2}$ ,  $\gamma_{i-1}$ ,  $\gamma_i$ ,  $\gamma_{i+1}$ ,  $\gamma_{i+2}$ ,  $\gamma_{i+3}$ .

Sulla base delle Eq. (6.4), (6.5), (6.6), (6.7), (6.8), (6.9), utilizzando le espressioni

che definiscono le derivate nei loro diversi ordini, come riportate in Eq.(6.25), è possibile scrivere nuovamente delle equazioni differenziali che determinano le grandezze  $u, v, \varphi, M, T, N$ , utilizzate per la definizione dei vincoli sia esterni che interni. Esse saranno pertanto definite in funzione del punto in esame  $i$  –esimo e dei tre punti precedenti e successivi, i quali rappresentano un fattore comune per dei coefficienti formati da una combinazione lineare del raggio di curvatura e del momento di inerzia della sezione, nonché delle loro derivate, tutti parametri noti. La determinazione di tali grandezze risulta fondamentale per poter impartire dal punto di vista numerico i vincoli di cui si necessita.

Facendo quindi riferimento ad uno schema statico di base, riportato in Fig.(6.2), si mostra come è costituito il sistema di equazioni a livello matriciale, riportando la matrice dei coefficienti  $\mathbf{A}$  e il vettore dei termini noti  $\mathbf{b}$ .



**Figura 6.2:** Rappresentazione arco doppiamente incastrato



$$b = - \begin{bmatrix} h(0) \\ h(1) \\ h(2) \\ \vdots \\ \vdots \\ h(i) \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ h(n) \end{bmatrix}$$

In particolare sono stati indicati con  $\gamma_u$ ,  $\gamma_v$  e  $\gamma_\varphi$  i coefficienti moltiplicatori dei termini incogniti, in riferimento alle condizioni al contorno imposte.

Tale metodo è quindi naturalmente estendibile al caso in cui debbano essere applicate altre tipologie di vincolo, relativamente alle quali devono essere imposte delle condizioni inerenti alle caratteristiche interne delle sollecitazioni  $M$ ,  $T$ ,  $N$ .

Allo stesso modo, scegliendo l'opportuno posizionamento è possibile introdurre dei vincoli interni, dicendo però che in questo caso, all'interno della medesima equazione con la quale si impone una condizione relativamente ad una grandezza cinematica o ad una caratteristica interna della sollecitazione, devono essere tenuti in conto sia il nodo finale del tratto di arco che precede sia il nodo iniziale del tratto che segue. Questa particolarità, in merito ai vincoli interni, è dovuta al fatto che il problema deve essere necessariamente disaccoppiato e quindi a livello numerico non si può più avere una singola curva, bensì più curve che possono eventualmente essere descritte da una sola funzione o anche più funzioni. Volendo perciò introdurre un

vincolo interno, a livello matriciale le condizioni dette dovranno essere applicate ai due punti, terminale del tratto di arco che precede e iniziale del tratto di arco che segue, i quali dal punto di vista fisico rappresentano il medesimo nodo. Affinchè si chiarisca meglio quanto detto, si riporta la disposizione dei coefficienti all'interno della matrice  $[A]$  per tre generiche grandezze scelte fra gli spostamenti e le caratteristiche interne della sollecitazione e determinate in funzione della tipologia di vincolo che si vuole introdurre.

$$A = \begin{bmatrix} \dots & \dots \\ \dots & \dots \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \gamma_{i-3} & \gamma_{i-2} & \gamma_{i-1} & \gamma_i & \gamma_{i+1} & \gamma_{i+2} & \gamma_{i+3} & \gamma_{j-3} & \gamma_{j-2} & \gamma_{j-1} & \gamma_j & \gamma_{j+1} & \gamma_{j+2} & \gamma_{j+3} & \dots & \dots & \dots & \dots \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \gamma_{i-3} & \gamma_{i-2} & \gamma_{i-1} & \gamma_i & \gamma_{i+1} & \gamma_{i+2} & \gamma_{i+3} & \gamma_{j-3} & \gamma_{j-2} & \gamma_{j-1} & \gamma_j & \gamma_{j+1} & \gamma_{j+2} & \gamma_{j+3} & \dots & \dots & \dots & \dots \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \gamma_{i-3} & \gamma_{i-2} & \gamma_{i-1} & \gamma_i & \gamma_{i+1} & \gamma_{i+2} & \gamma_{i+3} & \gamma_{j-3} & \gamma_{j-2} & \gamma_{j-1} & \gamma_j & \gamma_{j+1} & \gamma_{j+2} & \gamma_{j+3} & \dots & \dots & \dots & \dots \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \gamma_{i-3} & \gamma_{i-2} & \gamma_{i-1} & \gamma_i & \gamma_{i+1} & \gamma_{i+2} & \gamma_{i+3} & \gamma_{j-3} & \gamma_{j-2} & \gamma_{j-1} & \gamma_j & \gamma_{j+1} & \gamma_{j+2} & \gamma_{j+3} & \dots & \dots & \dots & \dots \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \gamma_{i-3} & \gamma_{i-2} & \gamma_{i-1} & \gamma_i & \gamma_{i+1} & \gamma_{i+2} & \gamma_{i+3} & \gamma_{j-3} & \gamma_{j-2} & \gamma_{j-1} & \gamma_j & \gamma_{j+1} & \gamma_{j+2} & \gamma_{j+3} & \dots & \dots & \dots & \dots \\ \dots & \dots \\ \dots & \dots \end{bmatrix}$$

A questo punto l'individuazione della soluzione e quindi il valore di  $u(i) \forall i$  appartenente al dominio discretizzato, avviene tramite la risoluzione del sistema algebrico ed in particolare all'interno del codice Matlab per mezzo del comando  $A \setminus b$ .

## Capitolo 7

# Vincoli interni e rigidezza flessionale

Si presenta tale metodo con l'intento principale di studiare la struttura in esame soggetta al peso proprio  $q_{sw}$  e ad un sovraccarico diversamente definito  $q_0$  ed agente lungo l'ascissa curvilinea relativa alla struttura. In particolare si intende comprendere quale sarà il comportamento strutturale dell'arco, soggetto a diverse condizioni di carico, al variare dello schema statico, nonché delle caratteristiche geometriche della sezione, in presenza di un pattern di danneggiamento.

Il codice matlab permetterà di identificare la massima tensione raggiunta in corrispondenza di ogni nodo, secondo il criterio di Von Mises,  $\sigma^{VM}$ , qualora si analizzino delle strutture realizzate in acciaio. Nel caso in cui, come avverrà di seguito, si analizzeranno delle strutture in legno invece sarà altrettanto possibile calcolare le tensioni longitudinale alla Navier  $\sigma$ , nonché le tensioni tangenziali  $\tau$ .

Per quanto riguarda le strutture in acciaio, l'obiettivo sarà quello di identificare il raggiungimento della tensione di snervamento  $f_y$  o della sezione maggiormente sollecitata a livello tensionale, al variare inizialmente del carico e successivamente

anche della configurazione strutturale. Infatti il danneggiamento verrà identificato in generale come una variazione della rigidezza flessionale, in diminuzione. In questo modo, l'applicazione della molla rotazionale, a cui viene imposta una data rigidezza  $k$ , avverrà in corrispondenza del nodo in cui si registra la massima tensione, sia essa coincidente con quella di snervamento, sia essa inferiore. Successivamente verrà decrementata la rigidezza  $k$  della molla rotazionale che porterà in funzione del decremento applicato e del valore di partenza, eventualmente ad una ridistribuzione dello stato tensionale tale per cui la tensione massima  $\sigma_{max}^{VM}$  verrà registrata in corrispondenza di un nodo differente rispetto a quello in cui invece si è registrato il massimo valore, fermo restando che quest'ultimo potrebbe ripresentarsi nella medesima sezione in cui era stato registrato in precedenza. Si procederà quindi con il seguente metodo al fine di individuare un nuovo carico che porti ad ottenere l'uguaglianza  $\sigma^{VM} = f_y$ . In questo modo si vuole simulare il comportamento della struttura sottoposta ad un livello di danneggiamento che eventualmente nelle successive applicazioni, potrà essere inteso come un'evoluzione nel tempo, valutato perciò con la variazione della rigidezza flessionale e attribuendo il massimo carico che la struttura può sostenere a seguito della variazione dello schema strutturale o il massimo carico che la struttura può sostenere nella configurazione statica finale derivante dal danneggiamento che è stato individuato.

Relativamente alla determinazione della rigidezza flessionale della molla rotazionale elastica, ci si basa su quanto riportato in letteratura.

## 7.1 Metodo I

Come mostrato in [16], la rigidezza flessionale dipenderà quindi dalle caratteristiche geometriche della sezione ed in particolare dal momento di inerzia  $J$  della sezione, nonché dalla modulo elastico  $E$ . Si riporta dunque la formulazione analitica

in Eq.(7.1), applicata in questo caso in analogia con quanto indicato per una trave rettilinea e quindi in maniera esemplificativa.

$$k = \frac{EJ}{L} \quad (7.1)$$

La rigidezza flessionale  $k$  sarà decrementata tramite il coefficiente  $\beta$ , inizialmente unitario, con un decremento pari a 0,10 rispetto al valore precedente. Tenendo inoltre conto del fatto che la grandezza  $L$  sarà pari ad un aliquota della lunghezza dell'arco  $L_{arco}$ , in funzione del punto in cui avviene lo snervamento, ed esprimibile quindi come  $L = \alpha L_{arco}$ .

In definitiva la generica rigidezza flessionale potrà essere definita come mostrato successivamente in Eq.(7.2)

$$k = \beta \frac{EI}{\alpha L_{arco}} \quad (7.2)$$

Tale modo di procedere servirà solamente in una prima fase per determinare e comprendere il comportamento strutturale. Infatti esso rimane legato a considerazioni inerenti ad elementi rettilinei, con una visibile dipendenza dall'estensione degli elementi stessi. In questo senso quindi, a livello concettuale, si rimane distanti dal concetto di danneggiamento concentrato. Inoltre qualora si abbia un pattern di danneggiamento molto fitto, che preveda dunque l'individuazione di un numero consistente di punti danneggiati, la rigidezza assumerà dei valori molto elevati con la possibilità di tendere ad un vincolo interno prossimo a quello di incastro, non realmente coincidente con la modellazione che si intende condurre.

## 7.2 Metodo II

Al fine di effettuare una analisi più complessa che preveda uno studio completo sull'identificazione del danneggiamento, si intende valutare la variazione della rigidezza flessionale in modo differente. Nello specifico, nel momento in cui si vuole valutare l'effetto di un danneggiamento inteso come presenza di un intaglio la cui apertura progredisce nel tempo, allora si fa riferimento alla trattazione riportata in [17], tramite la quale si ha comunque l'intento di concentrare gli effetti di riduzione della rigidezza flessionale per cause diverse in una zona ristretta della struttura concentrando quindi il fenomeno in una data porzione.

Si assume che la presenza di un intaglio iniziale o comunque di un danneggiamento che causa la formazione di un'apertura o in generale che possa causare una decurtazione delle proprietà meccaniche della sezione, possa quindi influenzare una porzione limitata della struttura.

Il danneggiamento, in corrispondenza di questa porzione conduce ad un incremento di rotazione relativa  $\Delta\theta$ , fra i due lembi interessati, rispetto alla rotazione relativa che si avrebbe nelle condizioni in assenza di danneggiamento. Si ottiene quindi quanto segue:

$$\theta_D = \theta_{ND} + \Delta\theta \quad (7.3)$$

in cui  $\theta_D$  risulta essere la rotazione relativa nella configurazione danneggiata, mentre  $\theta_{ND}$  quella nella configurazione non danneggiata.

Si impongono inoltre le seguenti condizioni:

$$\theta_D = \frac{ML_D}{EI_D} \quad (7.4)$$

$$\theta_{ND} = \frac{ML_D}{EI_{ND}}$$

Unitamente ad esse si considera una variazione relativa della rigidezza flessionale espressa come:

$$\delta = \frac{EI_{ND} - EI_D}{EI_{ND}} \quad (7.5)$$

Sostituendo dunque nella (7.3) si ottiene, in analogia con il caso della trave rettilinea, quanto mostrato di seguito.

$$\Delta\theta = \frac{ML_D}{EI_{ND}} \frac{\delta}{1 - \delta} \quad (7.6)$$

Tramite quest'ultima equazione è possibile allora individuare la rigidezza flessionale nel seguente modo:

$$k = \frac{M}{\Delta\theta} = \frac{EI_{ND}}{L_D} \frac{1 - \delta}{\delta} \quad (7.7)$$

Si indica con  $L_D$  l'estensione della zona danneggiata, tale grandezza può essere espressa come indicato di seguito.

$$L_D = \phi_D R \quad (7.8)$$

in cui  $\phi_D$  rappresenta l'angolo di apertura della zona danneggiata. In questo modo il danneggiamento può concettualmente essere interpretato non solo come un intaglio, ma anche come uno di diverso tipo che si estende per un dato tratto. Infatti l'intento in questo senso è individuare una zona danneggiata ma con un sistema di riferimento polare. Si vuole inoltre sottolineare che il raggio  $R$ , viene individuato come quello della circonferenza osculatrice per ogni nodo della curva discretizzata e quindi individuabile a prescindere dalla forma dell'arco non necessariamente circolare.

Con l'espressione individuata in Eq.(7.7), sarà tuttavia necessario stabilire il valore quantitativo delle quantità  $\phi_D$  e  $\delta$ . Tali due parametri potranno essere quindi considerati variabili in modo da poter valutare e quantificare in diverso modo il livello di danneggiamento, tramite dunque l'estensione della zona danneggiata e

la variazione di rigidità flessionale. Poiché, come detto in precedenza, l'intento principale è quello di simulare la riduzione di sezione resistente, allora verrà fissato il valore di  $\phi_D$ , andando invece a variare il valore di  $\delta$ . Tuttavia è anche possibile introdurre un'estensione della zona danneggiata maggiore in funzione dell'intento che si vuole perseguire.

L'individuazione dei parametri sopraindicati avverrà eventualmente, qualora sia necessario, successivamente.

### 7.3 Metodo III

Ulteriore metodo di valutazione della rigidità flessionale della molla può essere quello proposto da A.Manuello in [18]. In tale lavoro viene proposto un metodo di valutazione della riduzione di rigidità dei giunti semi-rigidi nei gusci e nelle cupole a graticcio in legno, soggetti infatti ad una riduzione di rigidità.

Come mostrato nei metodi proposti precedentemente, anche in questo caso ci si basa su una riduzione del momento di inerzia associato al giunto, con l'obiettivo di simulare il suo comportamento nonché il deterioramento nel tempo.

Il modello proposto prende in considerazione quindi la rigidità della connessione e il possibile conseguente incremento della sua cedevolezza, dovuta ad una riduzione dell'efficienza del giunto.

Inizialmente si considera la rotazione della trave dovuta al momento flettente, come indicato di seguito:

$$\theta = \frac{ML}{EI} \tag{7.9}$$

Dove:

- M: Momento flettente agente
- E: Modulo elastico del materiale di cui è costituita la trave

- I: Momento di inerzia della sezione della trave

Al fine di simulare il comportamento del giunto si assume inoltre la eventuale presenza di un ulteriore elemento poszionato fra le travi, dicendo che comunque nei casi reali, i nodi di questo tipo possono avere un'estensione che varia fra i 100mm e i 500mm.

La cedevolezza del collegamento varia soltanto in funzione del momento di inerzia della sezione che rappresenta la connessione. Sulla base di tale assunzione, la matrice dei momenti di inerzia  $[I]$  viene moltiplicata per una matrice diagonale, contenente i coefficienti di riduzione per i momenti di inerzia, come mostrato di seguito.

$$\begin{bmatrix} I_{yy} & I_{xy} \\ I_{yx} & I_{xx} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} c_{yy} & 0 \\ 0 & c_{xy} \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ I_{xy}c_{yy} & I_{xx}c_{xy} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} I_{yy}c_{yy} & I_{xy}c_{xy} \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \quad (7.10)$$

In equazione (7.10) si ottiene una riduzione parziale dei momenti di inerzia per le componenti  $I_{yy}$  e  $I_{xy}$ , identificata come  $[I'']$ . Al fine di ottenere i valori riduttivi anche per le altre componenti, si può scrivere:

$$\begin{bmatrix} I_{yy}c_{yy} & I_{xy}c_{xy} \\ 0 & 0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ I_{xy}c_{xy} & I_{xx}c_{xx} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} I_{yy}c_{yy} & I_{xy}c_{xy} \\ I_{yx}c_{xy} & I_{xx}c_{xx} \end{bmatrix} \quad (7.11)$$

In forma compatta l'equazione (7.10) e l'equazione (7.11), possono essere scritte come:

$$[I][C'] - [K] + [K'] = [I'] \quad (7.12)$$

in cui  $[I]$  risulta essere la matrice contenente i momenti di inerzia della giunzione in assenza di danneggiamento;  $[C]$  risulta essere la matrice diagonale contenente i coefficienti di riduzione.  $[K]$  e  $[K']$  sono invece le matrici contenenti gli appropriati coefficienti di riduzione, rispettivamente sottratta e sommata a  $[I]''$ . Inoltre  $[I']$

rappresenta la matrice contenente i momenti di inerzia finali, intesi come ridotti. Considerando il modello di Chen et. al [19], la cedevolezza del giunto semi-rigido può essere scritta come:

$$\frac{L}{EI_{xx}} + \frac{2}{k} = \left( \frac{L_b k + 2EI_{xx}}{EI_{xx} k} \right) \quad (7.13)$$

in cui  $k/2$  risulta essere la rigidezza della connessione come riportato in[19]. Considerando quindi  $I_{n,xx}$  come il momento di inerzia della connessione e  $E_n$  il modulo elastico del materiale costituente la stessa, è possibile scrivere che  $I_{xx}/I_{n,xx} = a$  con  $a \geq 20$  e  $E_n/E \cong a$ , come nella maggior parte dei casi in cui si ha un giunto in acciaio in una struttura in legno. In accordo con tali assunzioni e considerando le Eq.(7.12) e (7.13), è possibile ottenere:

$$\frac{L}{EI_{xx}} \left( 1 + \frac{2EI_{xx}}{kL_b} \right) = \frac{L}{EI_{xx}} + \frac{L_n}{E_n I_{n,xx}} \quad (7.14)$$

in cui tutto ciò che viene contraddistinto con il pedice  $n$ , fa riferimento alla connessione, mentre tutte le grandezze senza pedice fanno riferimento alla trave. In questo modo è quindi possibile scrivere la rotazione come:

$$\theta = M \left( \frac{L + L_n}{E_n c I_{n,xx}} \right) \quad (7.15)$$

in cui  $c$  rappresenta il coefficiente di riduzione per  $I_{n,xx}$ . Tenendo in considerazione il fatto che l'estensione della connessione è molto ridotta rispetto a quella della generica trave, tale per cui  $L \cong L + L_n$  e che per quanto espresso precedentemente  $E_n I_{n,xx} \cong EI_{xx}$ , l'equazione (7.14) diventa:

$$1 + \frac{2EI_{xx}}{kL} = \frac{1}{c} \quad (7.16)$$

Tale equazione può quindi essere riscritta come segue:

$$c = \frac{kL}{kL + 2EI_{xx}} \quad (7.17)$$

fornendo quindi il coefficiente di riduzione in funzione della rigidezza della connessione proposta da Chen et al. [19].

Questo metodo rimane comunque legato ad analisi di diminuzione della rigidezza di giunti che collegano delle travi piane e rettilinee e presuppone la conoscenza della rigidezza iniziale del giunto, nonché l'individuazione dell'estensione della trave. Tuttavia rimane un metodo di riferimento in quanto specificamente adottato per connessioni in acciaio in strutture in legno.

## Capitolo 8

# Validazione del modello

Nel presente capitolo l'intento principale è quello di validare il modello, il quale prevede l'inserimento di un particolare vincolo interno, quale la molla elastica rotazionale, atta come detto, a simulare il danneggiamento della struttura.

La validazione del modello avverrà confrontando gli andamenti delle caratteristiche interne della sollecitazione  $M, N, T$ , nonché degli spostamenti  $D_x, D_y$  e della rotazione  $\varphi$ . In particolare gli spostamenti  $D_x$  e  $D_y$  rappresentano quelli lungo la direzione  $x$  e lungo la direzione  $y$ . Essi vengono quindi determinati a partire dalla conoscenza degli spostamenti  $u$  e  $v$ , riferiti invece al sistema di riferimento locale lungo l'ascissa curvilinea  $s$ . Sommando algebricamente le componenti è possibile quindi individuare gli spostamenti nel sistema di riferimento globale, visibile in Fig.(6.2), per mezzo delle seguenti relazioni:

$$D_x = -v \sin(\alpha) + u \cos(\alpha) \quad (8.1)$$

$$D_y = u \sin(\alpha) + v \cos(\alpha) \quad (8.2)$$

in cui  $\alpha$  rappresenta l'angolo compreso fra l'asse delle  $x$  e la direzione tangente all'arco in ogni suo punto.

Al fine di validare dunque il modello, si parte inizialmente dallo studio relativo all'applicazione di una singola molla rotazionale. Ciò comporta la suddivisione dell'arco iniziale in due archi, ognuno dei quali verrà risolto per mezzo dell'Eq(6.1), unitamente all'applicazione delle sei condizioni al contorno, per ognuno degli archi, pari all'ordine dell'equazione differenziale. Si avranno pertanto in generale dodici equazioni al contorno, in accordo con quanto indicato precedentemente. Si ricorda inoltre, come precedentemente discusso che il problema non può essere disaccoppiato in modo da risolvere separatamente i due archi, in quanto l'applicazione delle condizioni al contorno coinvolge contemporaneamente l'ultimo punto del primo arco e il primo del secondo arco.

Per ogni arco analizzato nel presente capitolo, verrà utilizzato il medesimo materiale strutturale, l'acciaio S355, di cui vengono riportati le principali caratteristiche di seguito in Tab.(8.1).

Acciaio strutturale S355		
Modulo elastico	$E[kN/m^2]$	$2,1 * 10^8$
Coefficiente di Poisson	$\nu[-]$	0,3
Coefficiente di dilatazione termica	$\alpha[1/C^\circ]$	$1,2 * 10^{-5}$
Peso specifico	$\gamma[kN/m^3]$	78.5
Tensione caratteristica di snervamento	$f_{yk}[MPa]$	355

**Tabella 8.1:** Proprietà acciaio S355

In Tab.(8.2) vengono riportate le condizioni al contorno utili per la definizione del problema, nei termini descritti, nel caso di vincolo incastro alle basi. Per completezza si riportano in Tab.(8.3) anche le condizioni al contorno relative ad un arco doppiamente incernierato, comunque risolvibile tramite il codice Matlab e una rappresentazione grafica in termini di configurazione strutturale, visibile in (8.2).

Nodo 1	Nodo 2		Nodo 3
$u_1^I = 0$	$u_2^I = u_2^{II}$	$N_2^I = N_2^{II}$	$u_3^{II} = 0$
$v_1^I = 0$	$v_2^I = v_2^{II}$	$V_2^I = V_2^{II}$	$v_3^{II} = 0$
$\varphi_1^I = 0$	$M_2^I = k(\varphi_2^I - \varphi_2^{II})$	$M_2^I = M_2^{II}$	$\varphi_3^{II} = 0$

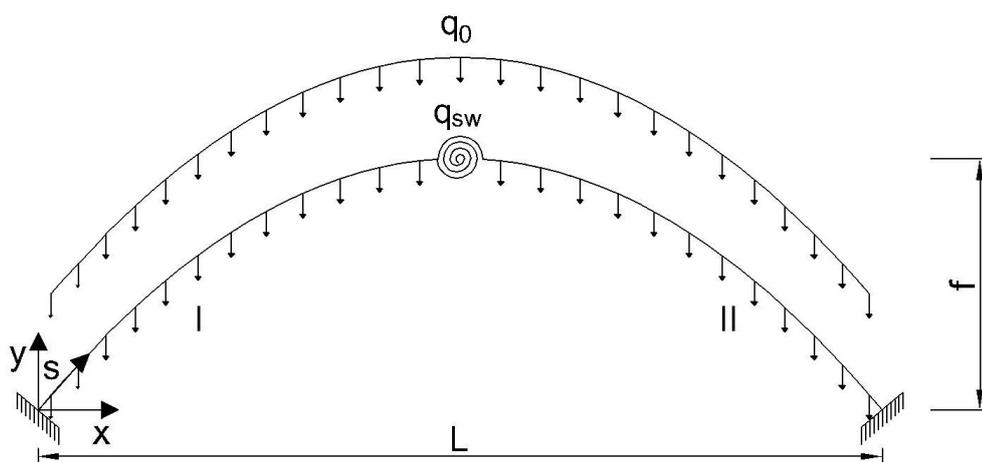
**Tabella 8.2:** Condizioni al contorno relative ad arco doppiamente incastrato Fig.(8.1).

Nodo 1	Nodo 2		Nodo 3
$u_1^I = 0$	$u_2^I = u_2^{II}$	$N_2^I = N_2^{II}$	$u_3^{II} = 0$
$v_1^I = 0$	$v_2^I = v_2^{II}$	$V_2^I = V_2^{II}$	$v_3^{II} = 0$
$M_1^I = 0$	$M_2^I = k(\varphi_2^I - \varphi_2^{II})$	$M_2^I = M_2^{II}$	$M_3^{II} = 0$

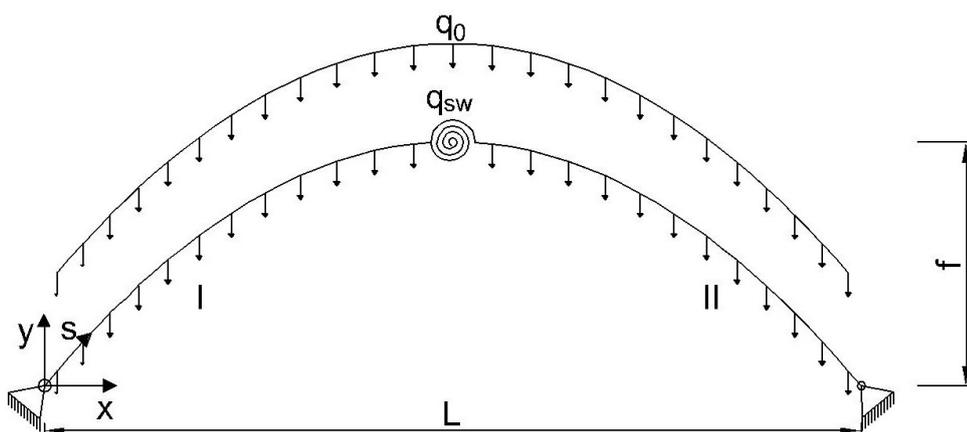
**Tabella 8.3:** Condizioni al contorno relative ad arco doppiamente incernierato Fig.(8.2).

In Fig.(8.1) viene riportata una rappresentazione qualitativa dello schema statico di un arco incastrato alla base con molla rotazionale in corrispondenza della generica sezione in cui avverrebbe il danneggiamento. Nel caso in esame, la struttura verrà sottoposta, come visibile, al peso proprio  $q_{sw}$  e al sovraccarico  $q_0$ , costante lungo l'ascissa curvilinea  $s$  ma con possibilità di disposizioni differenti.

La validazione del modello risulta di fondamentale importanza per le successive trattazioni, in quanto permetterà lo sviluppo delle discussioni senza la necessità di ulteriori validazioni, se non specificatamente necessarie, garantendo comunque il corretto funzionamento del codice e quindi la correttezza dei risultati ottenuti.



**Figura 8.1:** Rappresentazione qualitativa del modello strutturale con molla rotazionale e carichi a cui la struttura è soggetta.

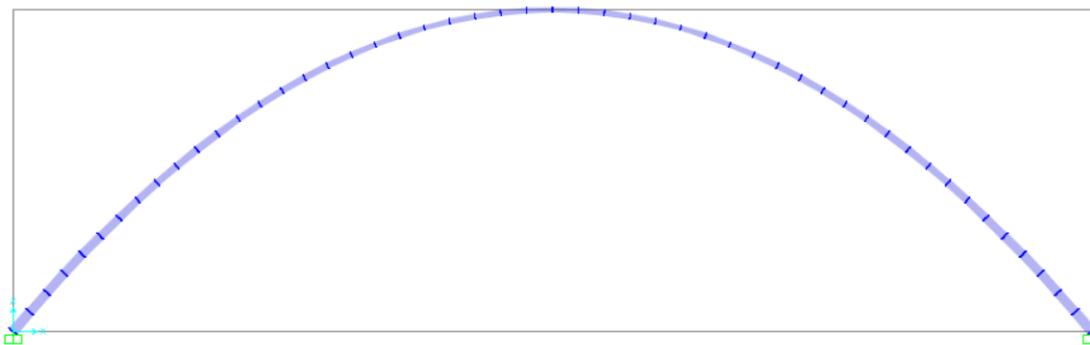


**Figura 8.2:** Rappresentazione qualitativa del modello strutturale con molla rotazionale e carichi a cui la struttura è soggetta.

La validazione del modello avverrà per mezzo dell'ausilio del software commerciale ad elementi finiti **SAP2000**, andando a sovrapporre gli andamenti delle caratteristiche interne della sollecitazione  $M, N, T$ , nonché delle grandezze cinematiche  $D_x, D_y, \varphi$ .

Si vuole inoltre mostrare per completezza una rappresentazione della struttura

modellata tramite il software FEM **SAP2000**. Poichè si vuole evitare di riportare una rappresentazione della struttura per ogni caso esaminato, si prende in considerazione un caso simbolico, coincidente con quello di arco parabolico a sezione circolare cava variabile in modo quadratico lungo l'ascissa curvilinea, con lunghezza  $L=100m$  e freccia  $f=30m$ . La sua rappresentazione è quindi visibile in Fig.(8.3).



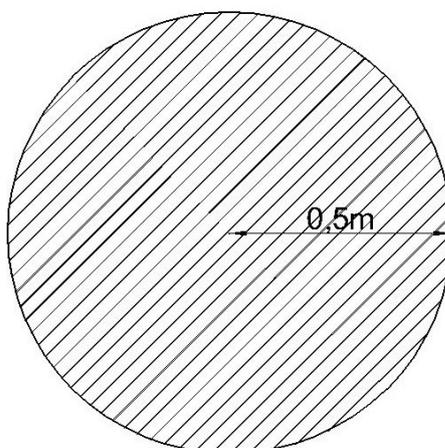
**Figura 8.3:** Rappresentazione dell'arco usato nel software SAP2000

## 8.1 Arco a sezione circolare piena costante

Il caso in esame prevede lo studio di un arco parabolico avente una luce pari a  $L = 100m$  ed una freccia pari a  $f = 30m$ .

La struttura si presenta interamente realizzata in acciaio S355 con peso specifico  $\gamma = 78,5kN/m^3$ . La sezione circolare cava avrà un raggio costante lungo l'ascissa curvilinea  $s$  e pari a  $r = 0,5m$ . Si riporta in Fig.(8.4) una rappresentazione della sezione trasversale.

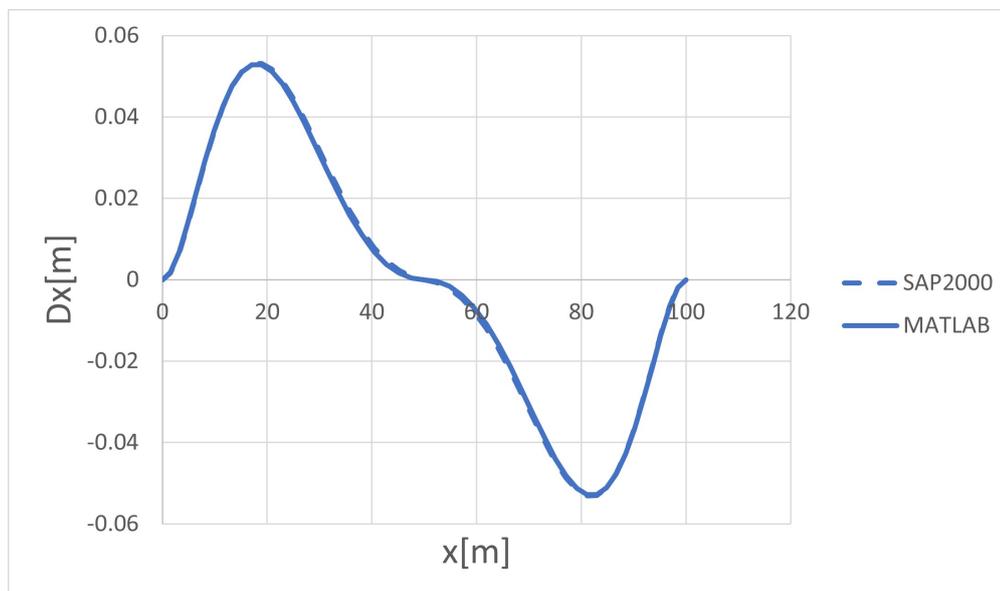
Sezione trasversale



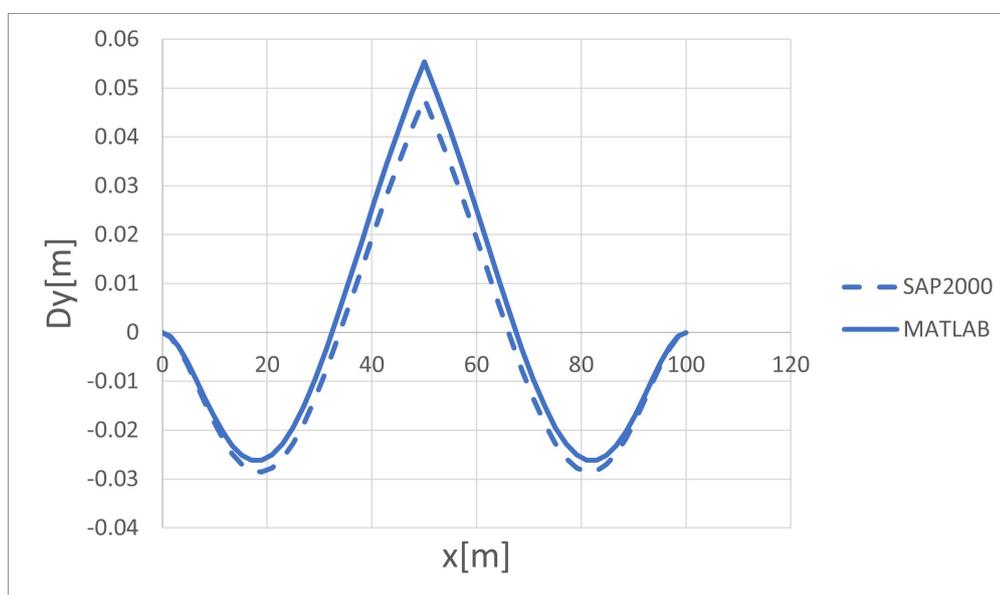
**Figura 8.4:** Sezione circolare piena

Il sovraccarico, scelto in modo arbitrario, in questo caso viene posto pari a  $q_0 = 100kN/m$ . Infine, in accordo con quanto indicato nel Capitolo 7, la rigidezza flessionale della molla viene posta pari a  $k = \frac{EJ}{0,5L_{arco}}$ .

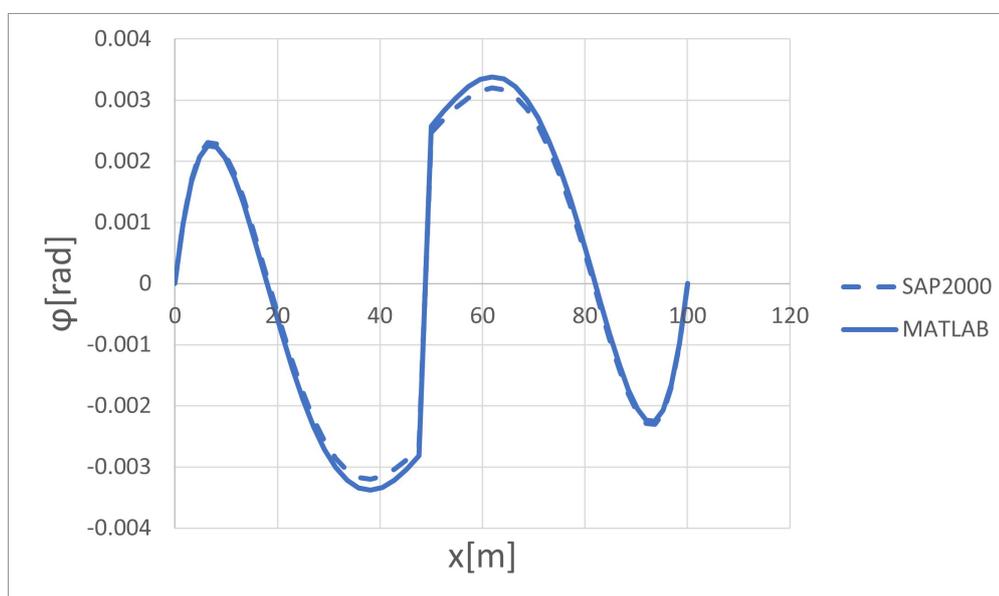
Si procede dunque a riportare i risultati ottenuti e quindi i confronti per il caso in esame, come visibile nelle figure successive.



**Figura 8.5:** Confronto spostamenti  $D_x$



**Figura 8.6:** Confronto spostamenti  $D_y$



**Figura 8.7:** Confronto rotazioni  $\varphi$

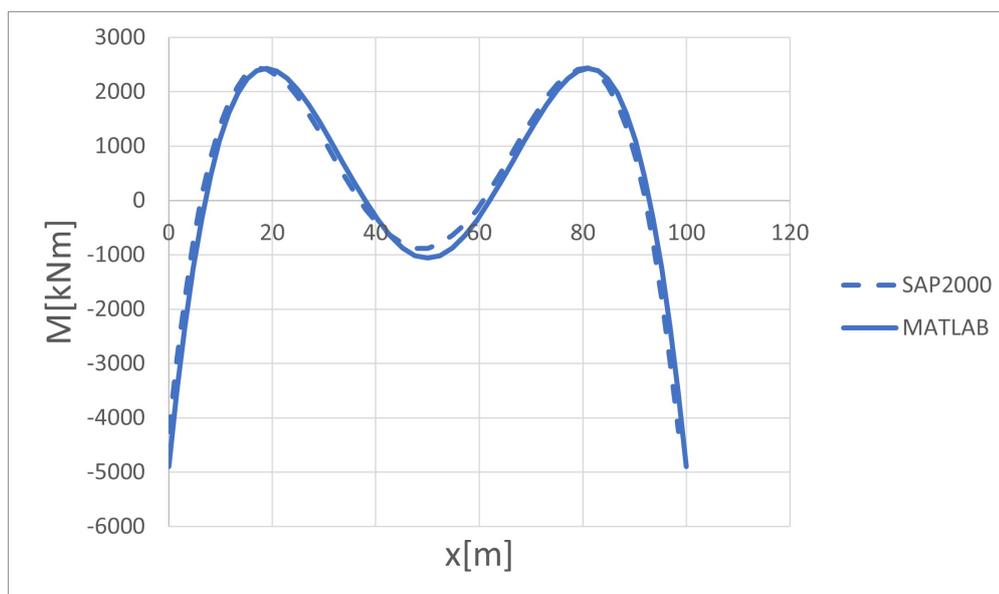


Figura 8.8: Confronto momento flettente  $M$

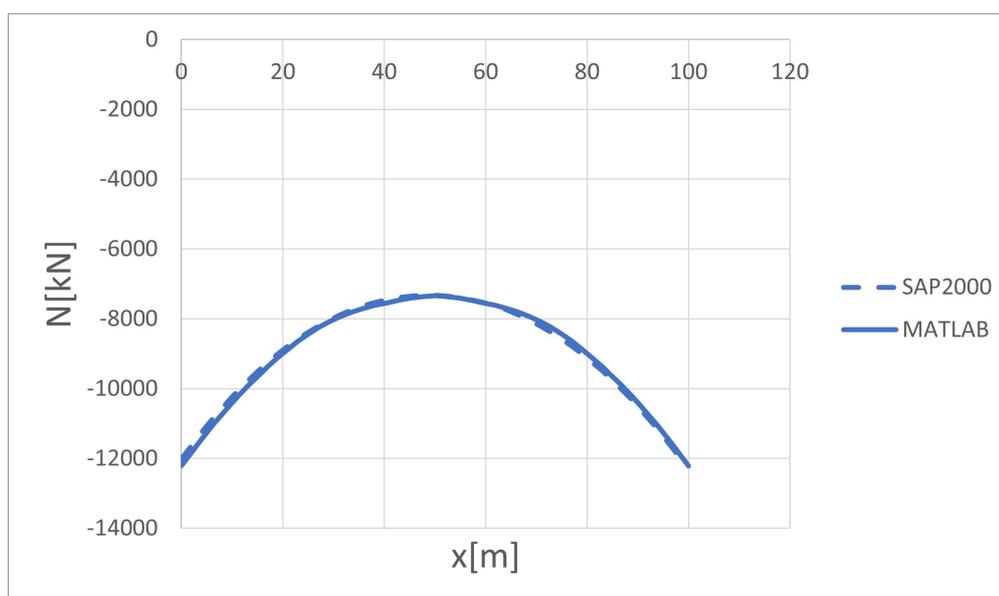


Figura 8.9: Confronto sforzo normale  $N$

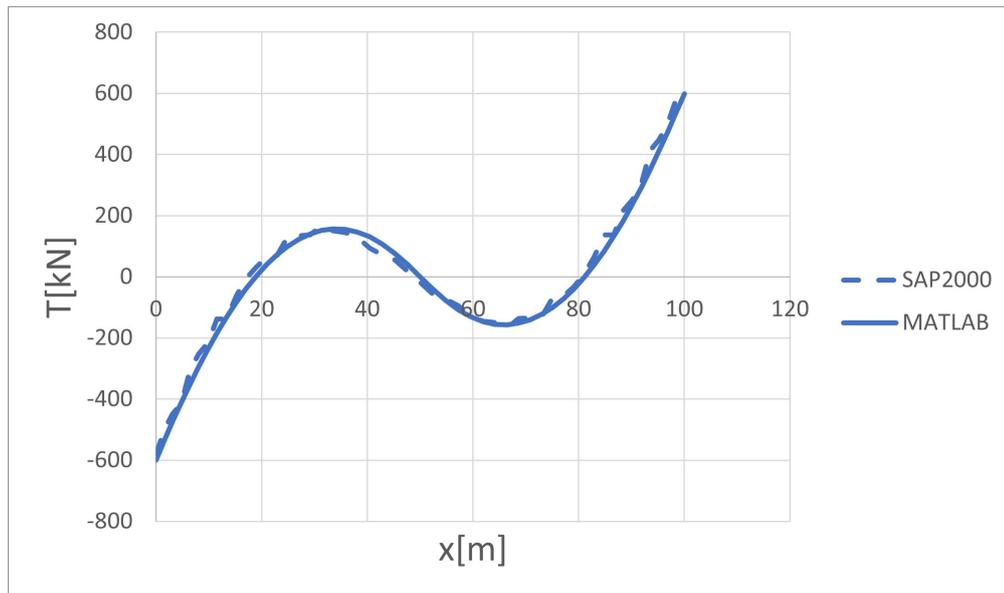


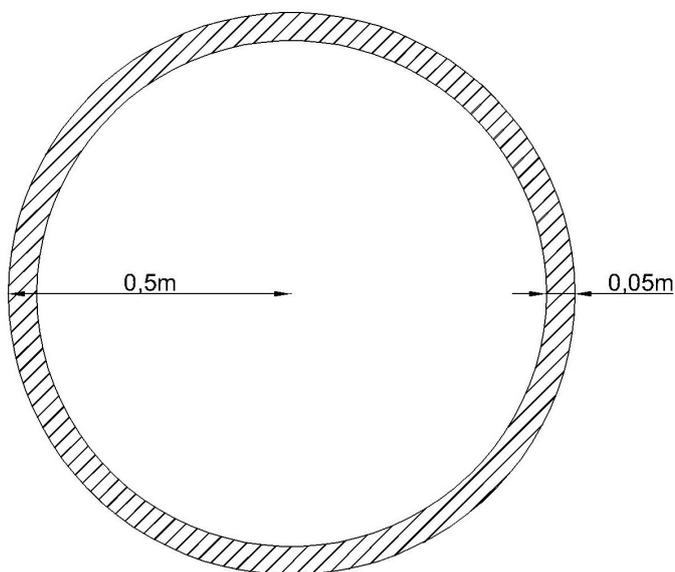
Figura 8.10: Confronto sforzo di taglio  $T$

## 8.2 Arco a sezione circolare cava costante

Il caso in esame prevede lo studio di un arco parabolico avente una luce pari a  $L = 100m$  ed una freccia pari a  $f = 30m$ .

La struttura si presenta interamente realizzata in acciaio S355 con peso specifico  $\gamma = 78,5kN/m^3$ . La sezione circolare cava avrà un raggio sia interno che esterno costanti lungo l'ascissa curvilinea  $s$  con quest'ultimo pari a  $r = 0,5m$ , mentre lo spessore della parete anch'esso costante è posto pari a  $t = 0,05m$ . Si riporta in Fig.(8.11) una rappresentazione della sezione trasversale.

Sezione trasversale



**Figura 8.11:** Sezione circolare cava

Il sovraccarico, scelto in modo arbitrario, viene posto pari a  $q_0 = 100kN/m$ . Infine, in accordo con quanto indicato nel Capitolo 7, la rigidezza flessionale della molla viene posta pari a  $k = \frac{EJ}{0,5L_{arco}}$ .

Si procede dunque a riportare i risultati ottenuti e quindi i confronti per il caso in esame, come visibile nelle figure successivamente riportate.

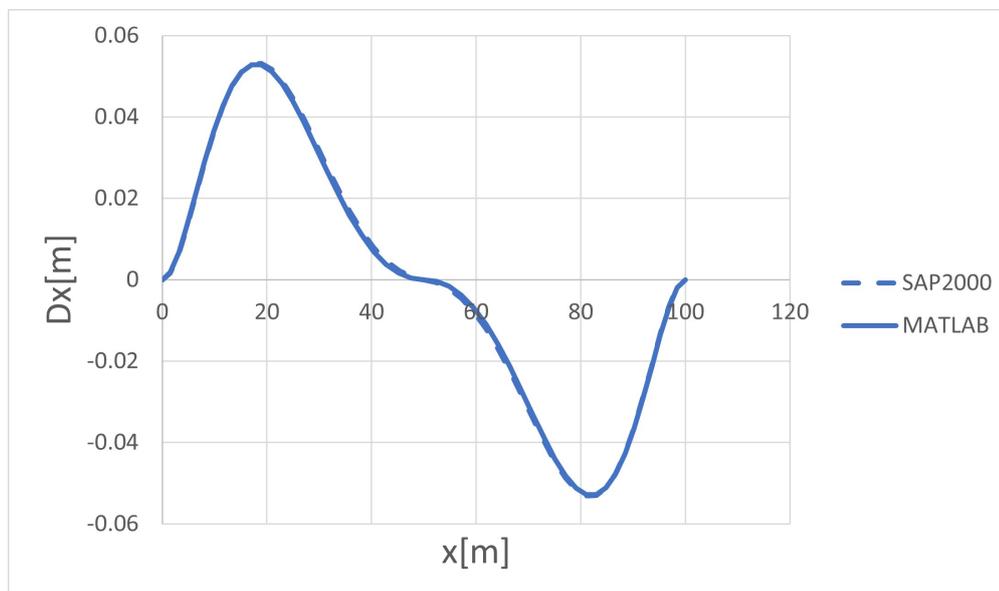


Figura 8.12: Confronto spostamenti  $D_x$

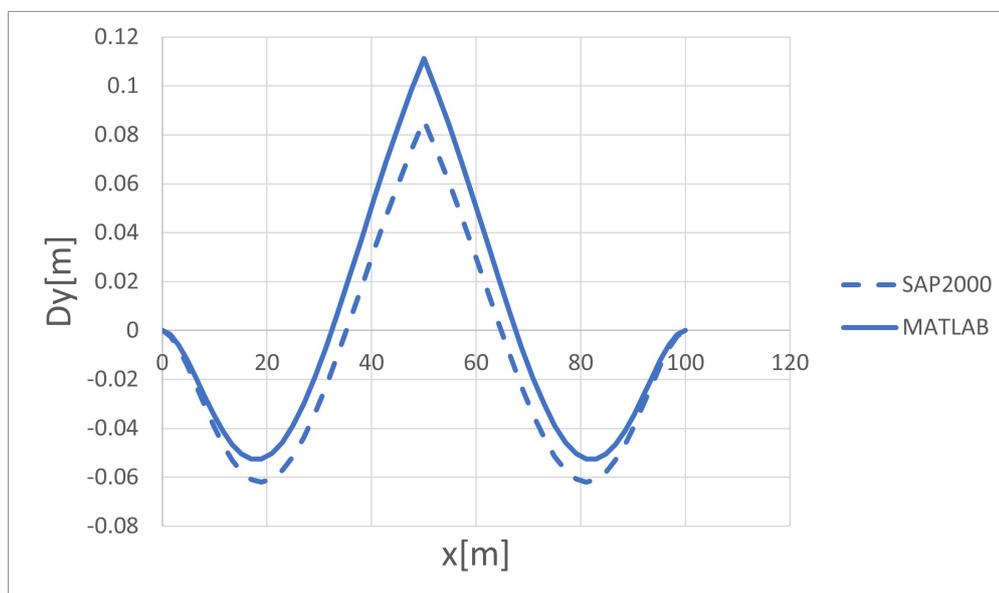
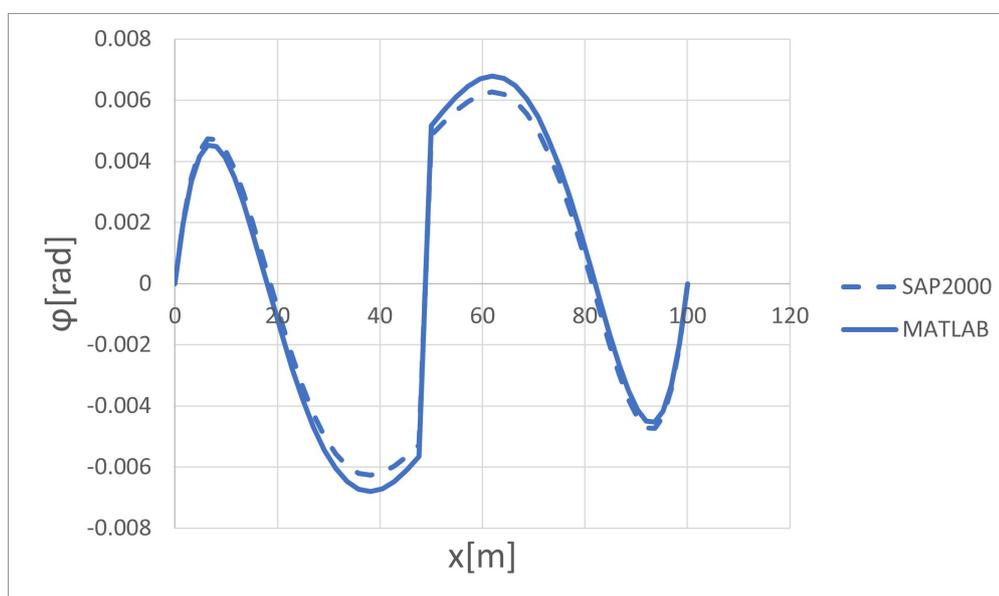
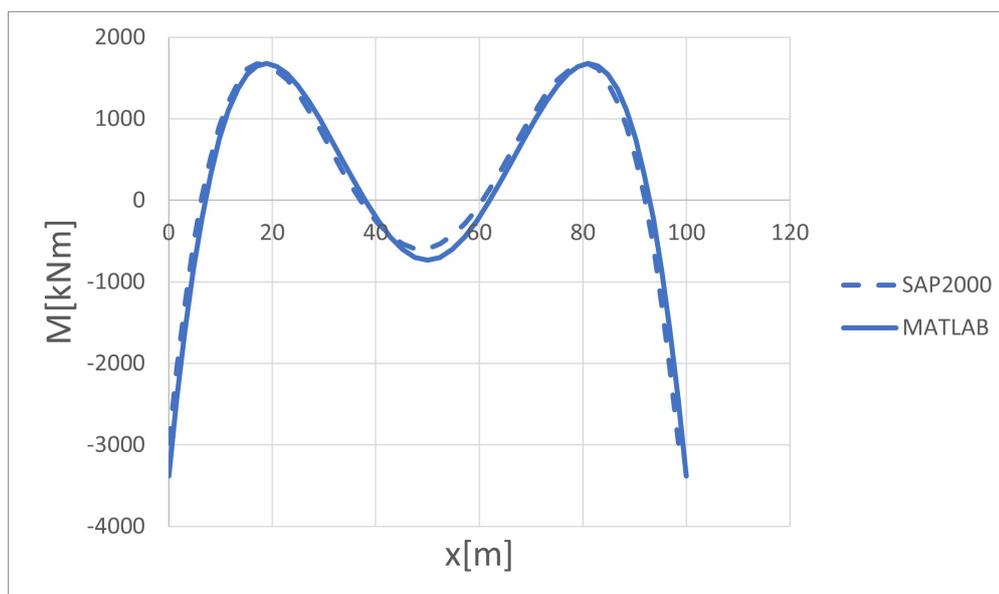


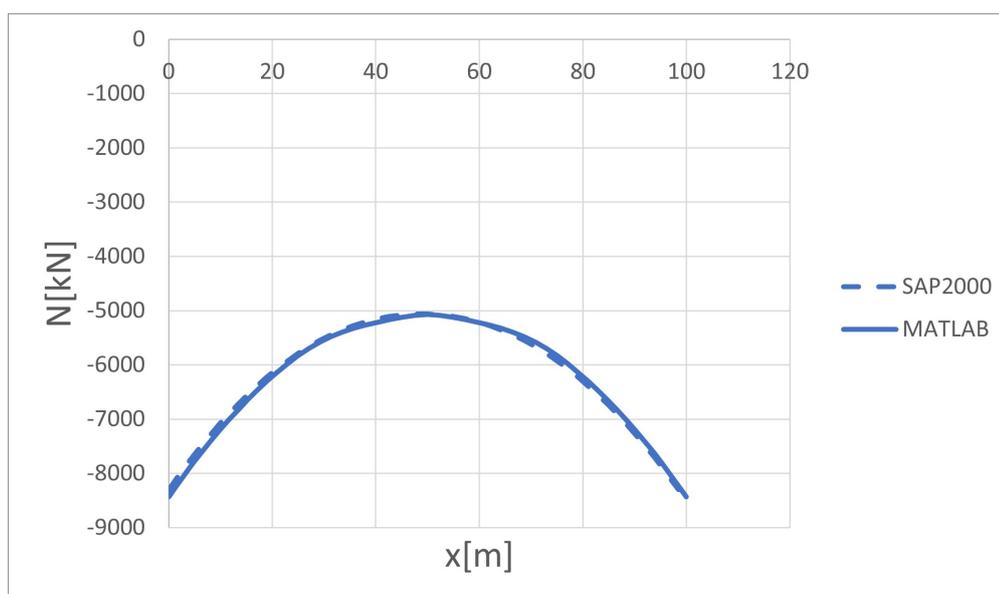
Figura 8.13: Confronto spostamenti  $D_y$



**Figura 8.14:** Confronto rotazioni  $\varphi$



**Figura 8.15:** Confronto momento flettente  $M$



**Figura 8.16:** Confronto sforzo normale  $N$

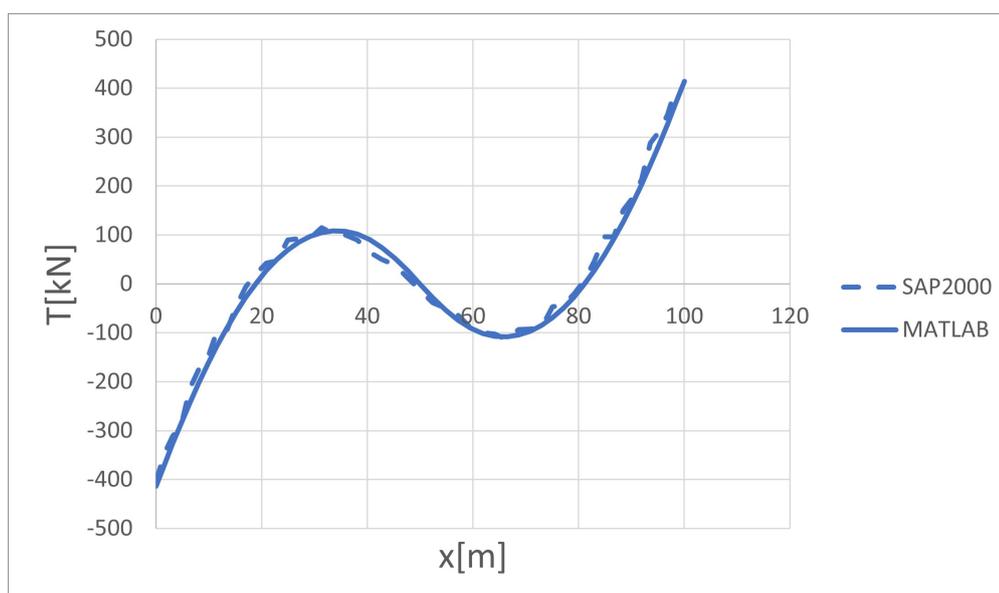
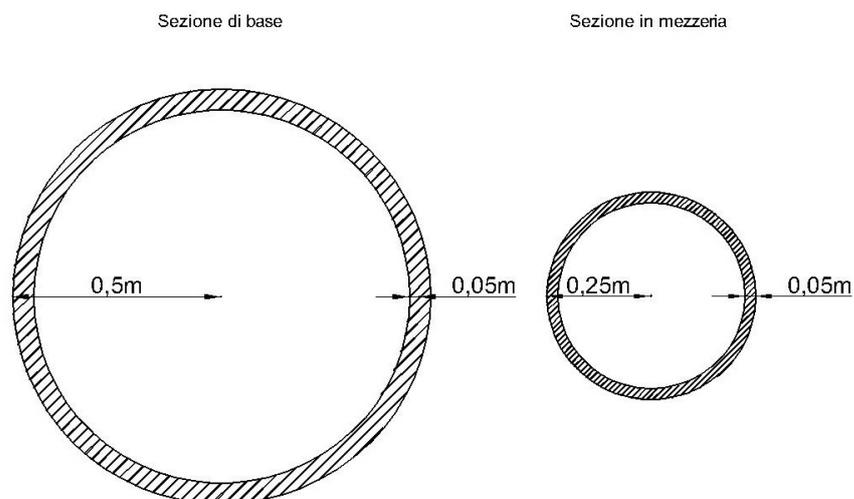


Figura 8.17: Confronto sforzo di taglio  $T$

### 8.3 Arco a sezione circolare cava variabile in modo quadratico

Il caso in esame prevede lo studio di un arco parabolico avente una luce pari a  $L = 100m$  ed una freccia pari a  $f = 30m$ .

La struttura si presenta interamente realizzata in acciaio S355 con peso specifico  $\gamma = 78,5kN/m^3$ . La sezione circolare cava avrà un raggio sia esterno sia interno variabili in modo quadratico lungo l'ascissa curvilinea  $s$ . Alle basi il raggio esterno sarà pari a  $r_{base} = 0,5m$ , mentre quello in chiave sarà pari a  $r_{chiave} = 0,25m$ . Si riporta in Fig.(8.18) una rappresentazione della sezione trasversale.



**Figura 8.18:** Sezione circolare cava variabile

Relativamente allo spessore della parete della stessa sezione esso sarà pari a  $t = 0,05m$ . Il sovraccario, scelto in modo arbitrario, in questo caso viene posto pari a  $q_0 = 100kN/m$ . Infine, in accordo con quanto indicato nel Capitolo 7, la rigidezza flessionale della molla viene posta pari a  $k = \frac{EJ}{0,5L_{arco}}$ .

Si procede dunque a riportare i risultati ottenuti e quindi i confronti per il caso in esame, come visibile nelle figure successivamente riportate.

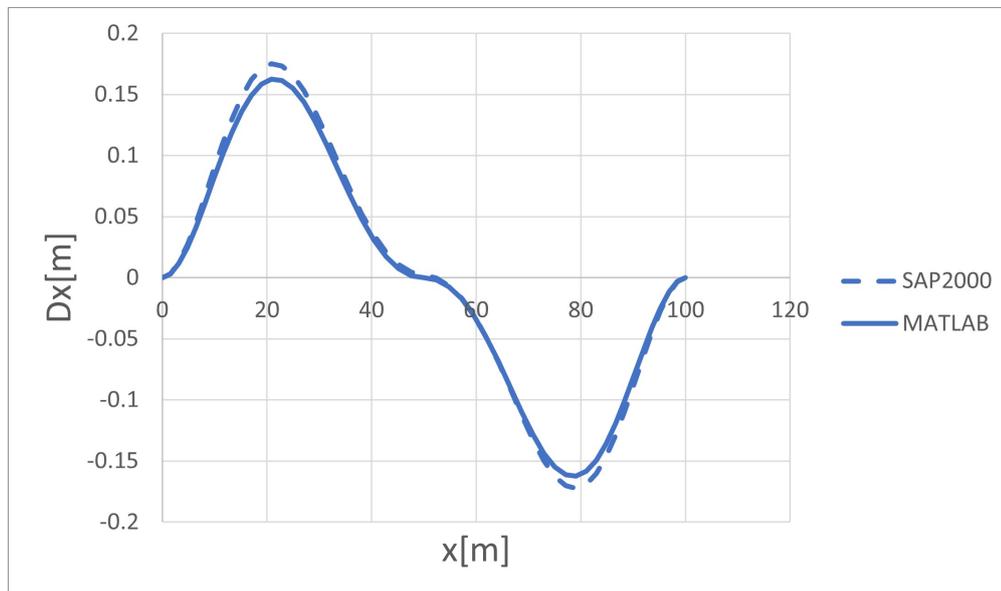


Figura 8.19: Confronto spostamenti  $D_x$

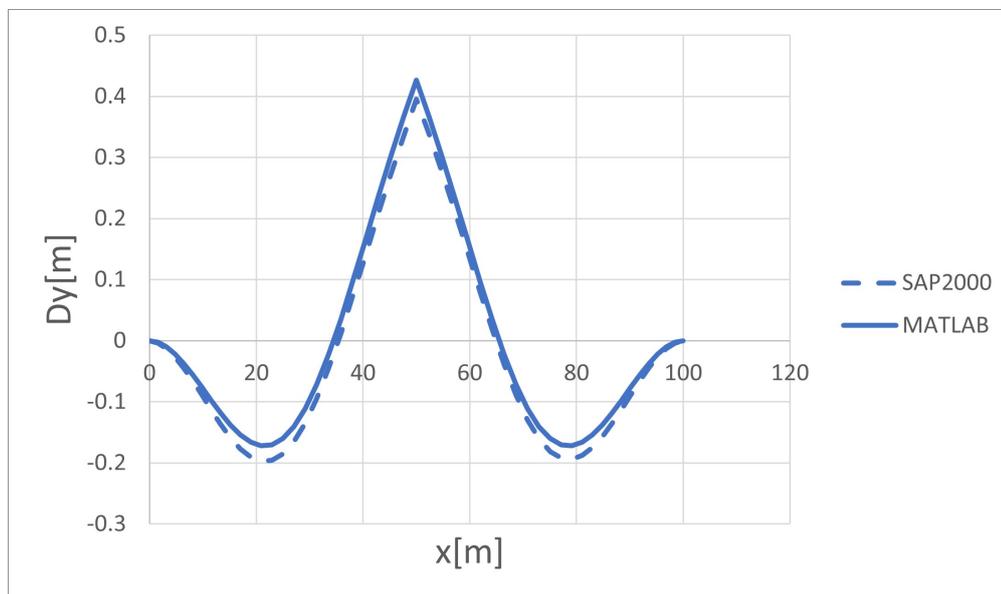
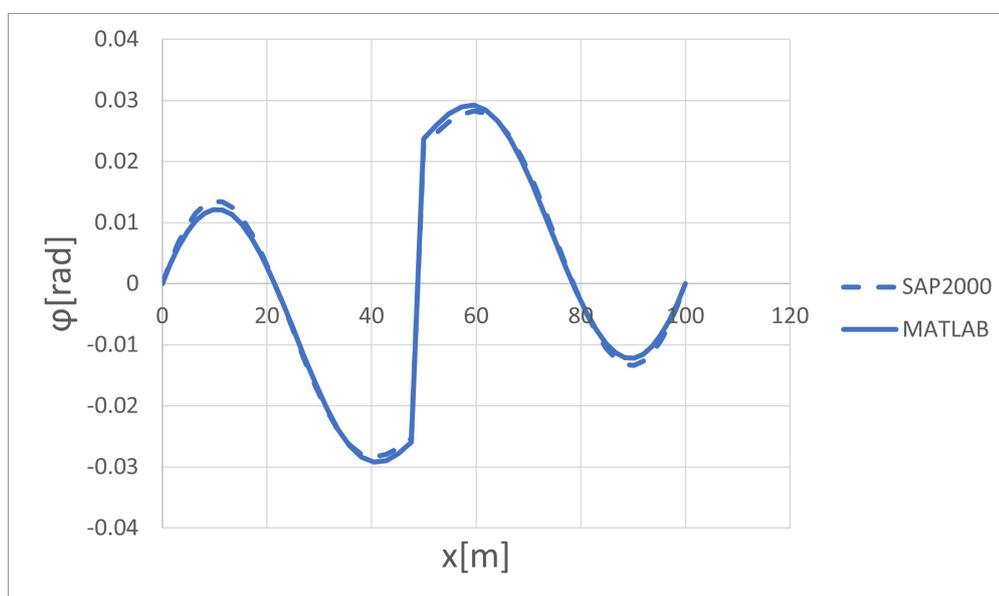


Figura 8.20: Confronto spostamenti  $D_y$



**Figura 8.21:** Confronto rotazioni  $\varphi$

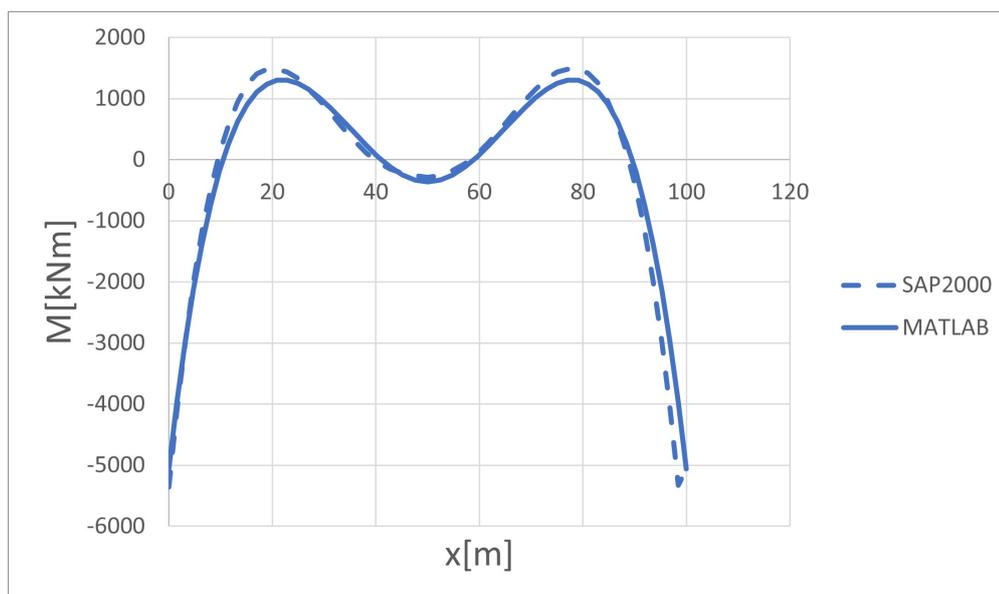


Figura 8.22: Confronto momento flettente  $M$

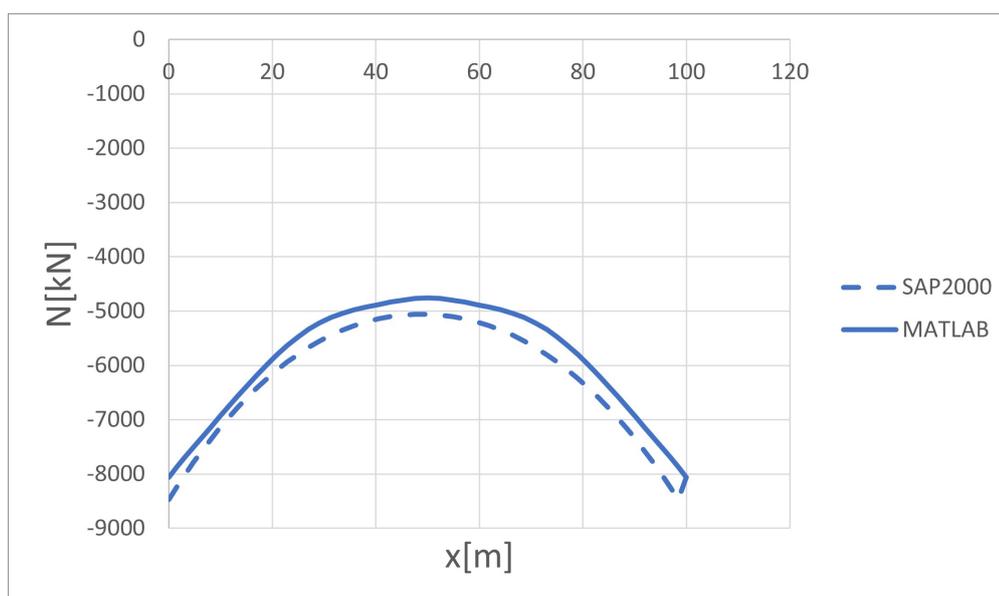


Figura 8.23: Confronto sforzo normale  $N$

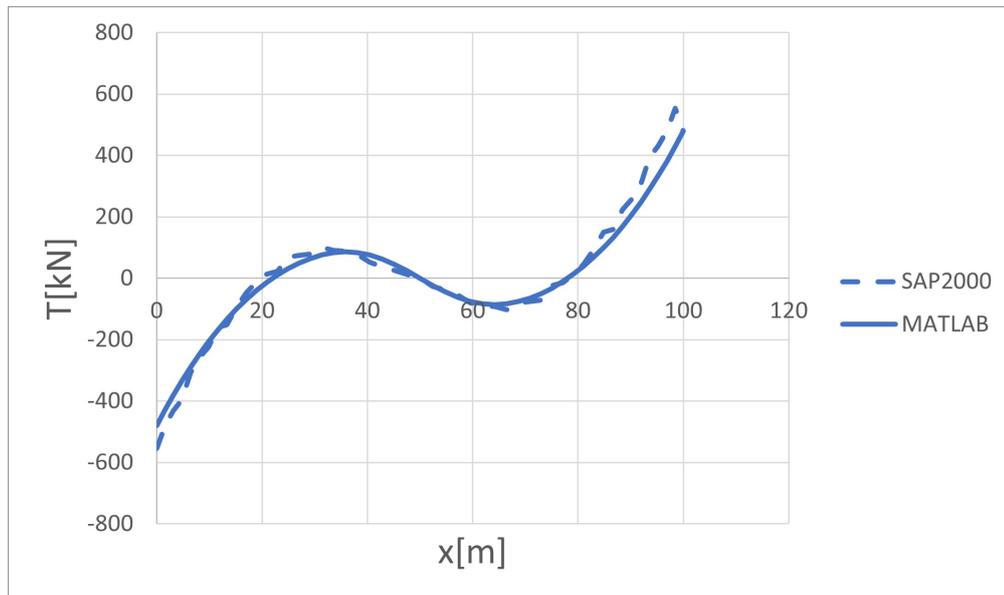
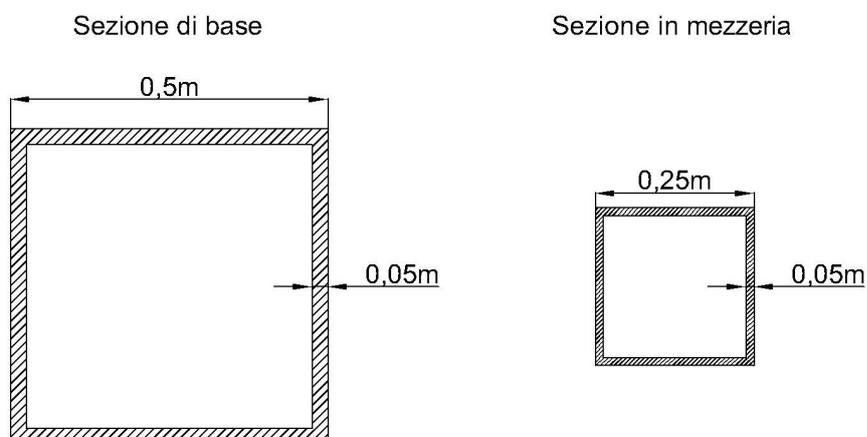


Figura 8.24: Confronto sforzo di taglio  $T$

## 8.4 Arco parabolico con sezione quadrata cava variabile in modo quadratico

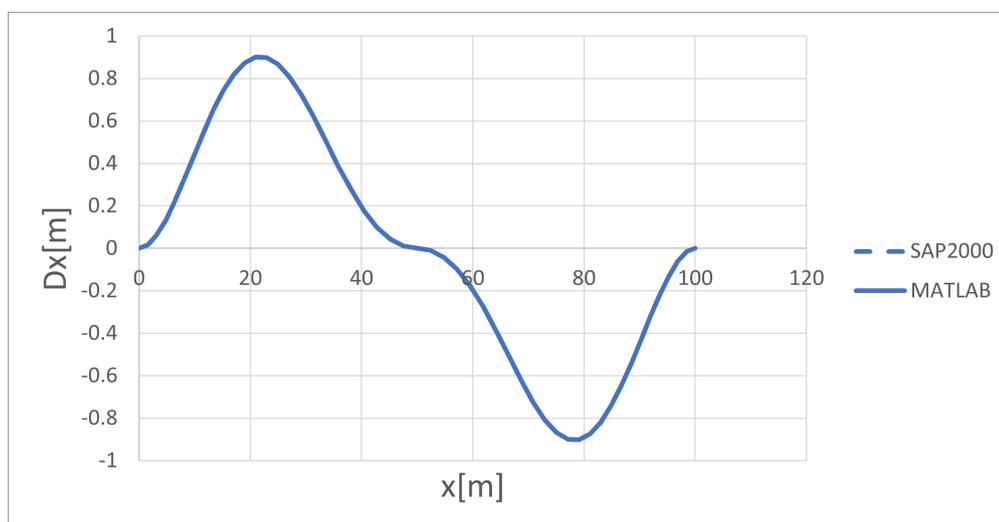
Il caso in esame prevede lo studio di un arco avente una luce pari a  $L = 100m$  ed una freccia pari a  $f = 30m$ .

Si intende pertanto validare un modello simile al precedente ma andando a variare la tipologia di sezione. Nello specifico si effettuerà una analisi dei risultati ottenuti, relativamente ad un arco che si presenta interamente realizzato in acciaio S355 con peso specifico  $\gamma = 78,5kN/m^3$ . La sezione quadrata cava avrà sia il lato interno sia quello esterno variabili in modo quadratico lungo l'ascissa curvilinea  $s$ . Alle basi il lato esterno sarà pari a  $r_{base} = 0,5m$ , mentre quello in chiave sarà pari a  $r_{chiave} = 0,25m$ . Si riporta in Fig.(8.25) una rappresentazione della sezione trasversale. Relativamente allo spessore della parete della stessa sezione esso sarà pari a  $t = 0,05m$ .



**Figura 8.25:** Sezione quadrata cava variabile

Il sovraccario, scelto in modo arbitrario, sarà nuovamente posto pari a  $q_0 = 100kN/m$ . Infine, in accordo con quanto indicato nel Capitolo 7, la rigidezza flessionale della molla viene posta pari a  $k = \frac{EJ}{0,5L_{arco}}$ . Si procede dunque a riportare i risultati ottenuti per il caso in esame, come visibile nelle figure riportate di seguito.



**Figura 8.26:** Confronto spostamenti  $D_x$

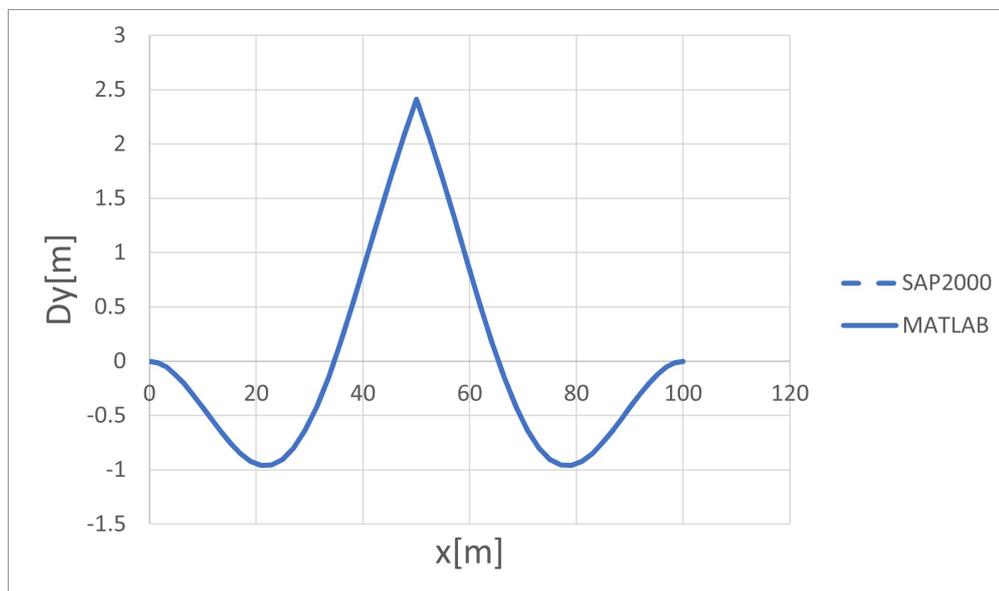


Figura 8.27: Confronto spostamenti  $D_y$

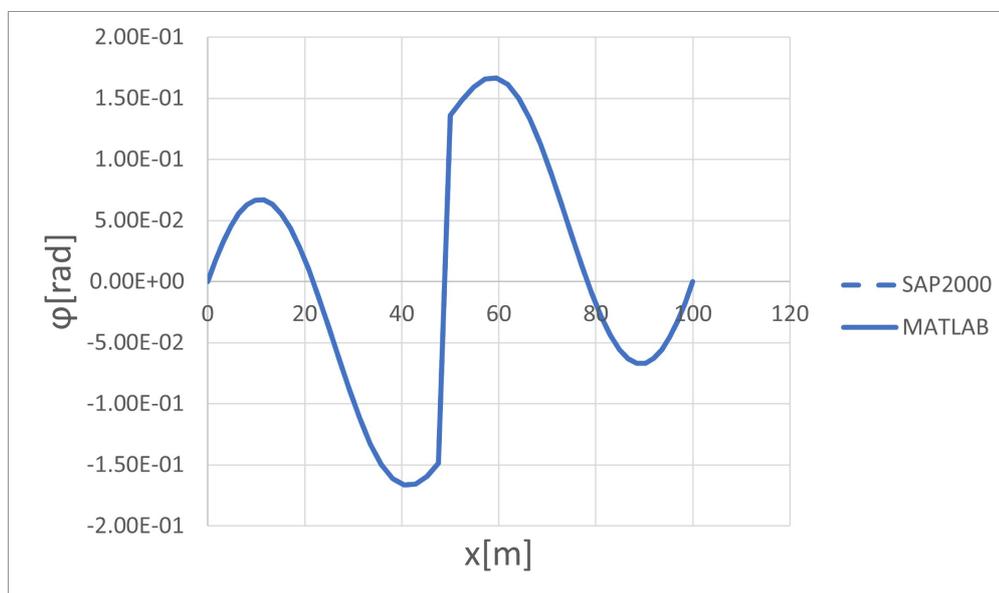


Figura 8.28: Confronto rotazioni  $\varphi$

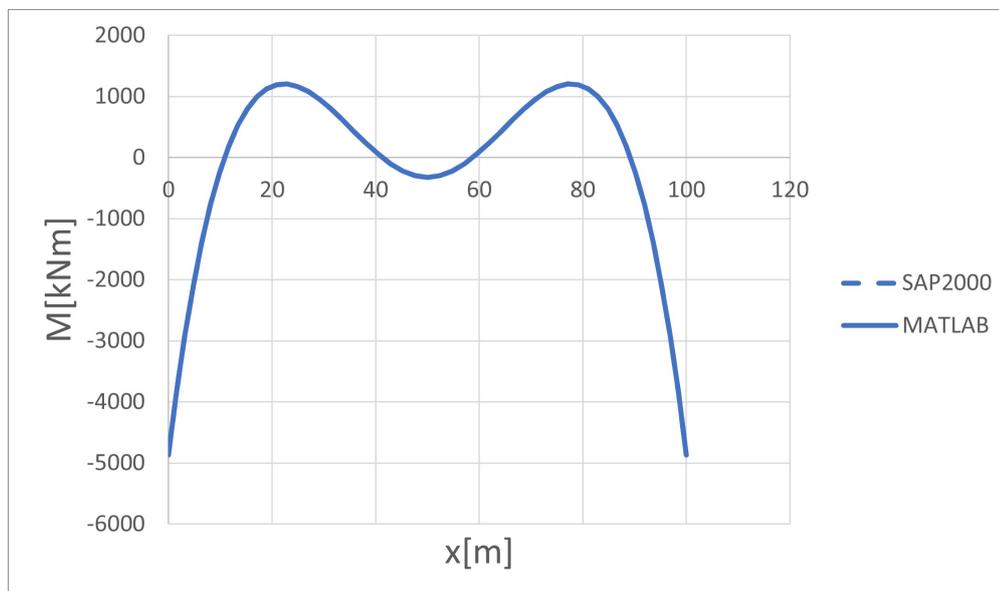


Figura 8.29: Confronto momento flettente  $M$

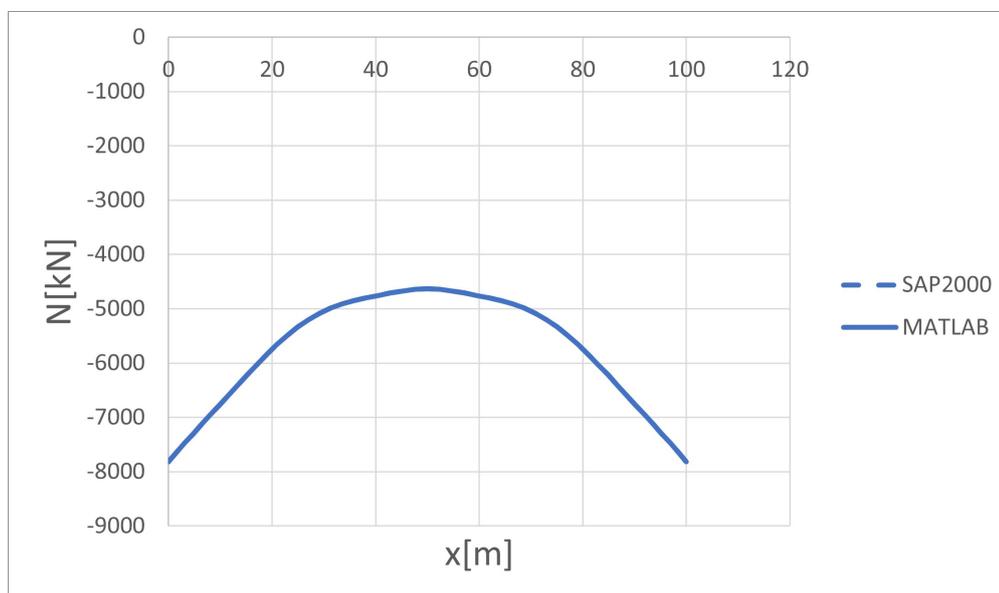
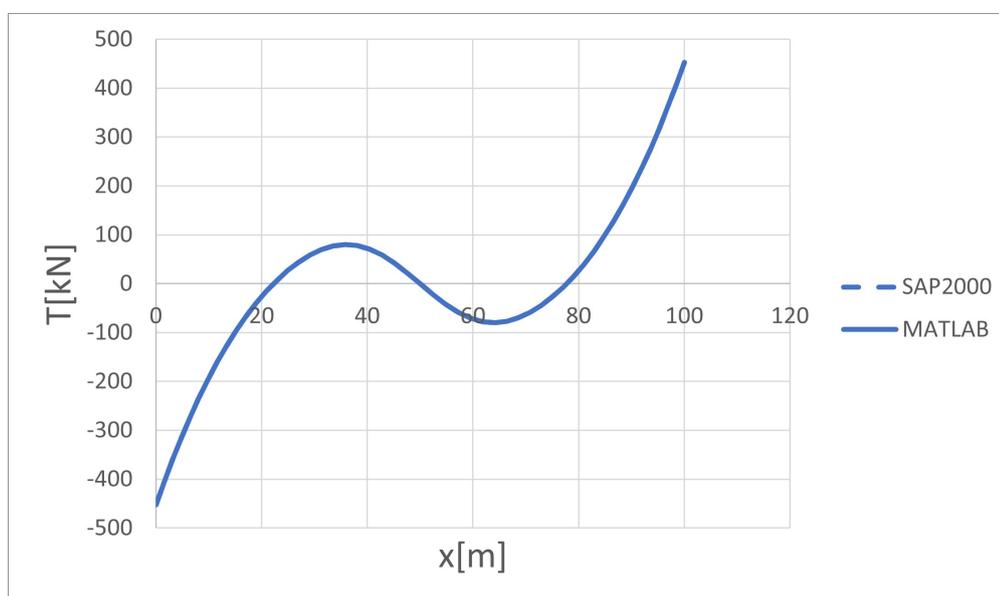


Figura 8.30: Confronto sforzo normale  $N$

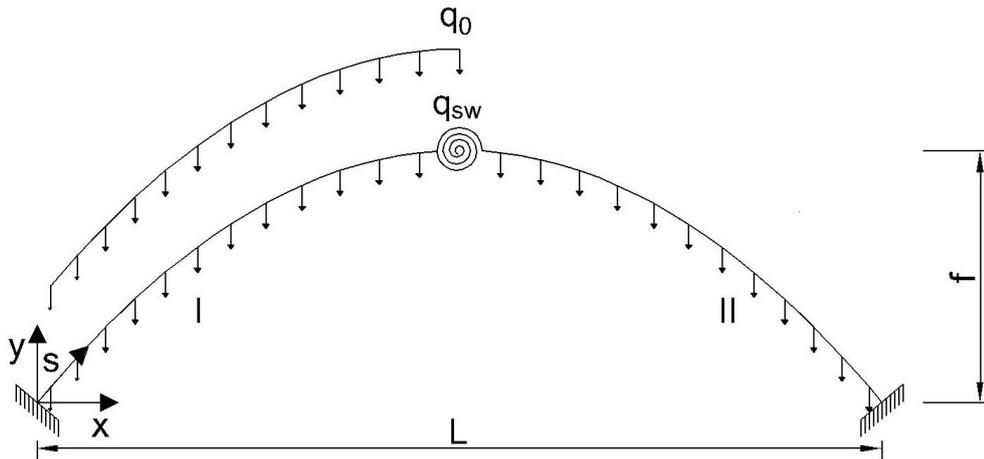


**Figura 8.31:** Confronto sforzo di taglio  $T$

## 8.5 Arco parabolico a sezione circolare cava costante con sovraccarico su metà struttura

Il caso in esame prevede lo studio di un arco avente una luce pari a  $L = 100m$  ed una freccia pari a  $f = 30m$ .

Si intende pertanto validare un modello simile ai precedenti ma variando la disposizione del sovraccarico  $q_0$ , il quale viene applicato solo su metà della struttura con valore scelto arbitrariamente e pari a  $q_0 = 100kN/m$ . Poichè si varia la tipologia di carico applicato si riporta una rappresentazione grafica in Fig.(8.32).

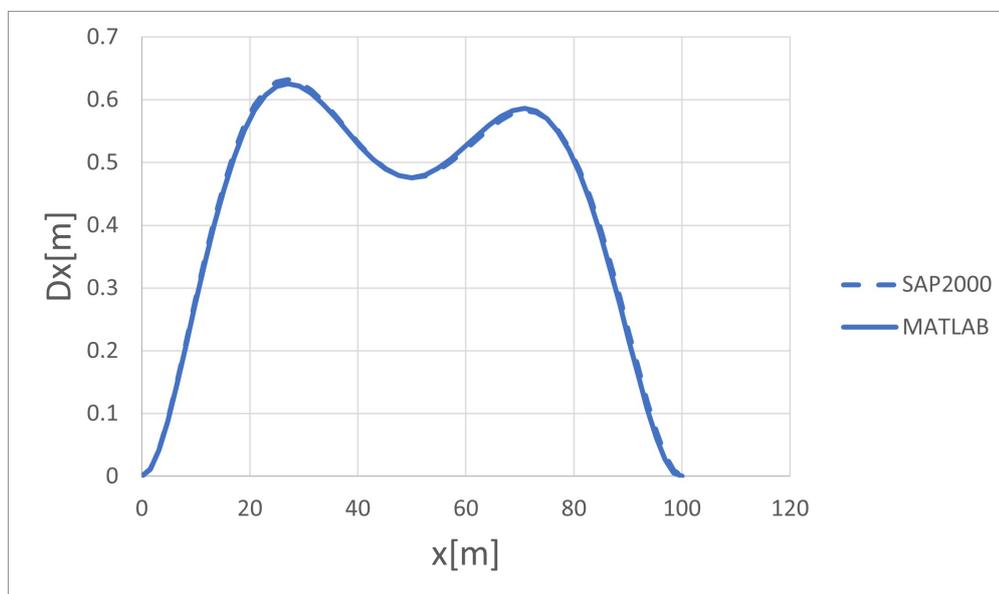


**Figura 8.32:** Arco parabolico parzialmente caricato con carico  $q_0$

Nello specifico si effettuerà una analisi dei risultati ottenuti, relativamente ad un arco che si presenta interamente realizzato in acciaio S355 con peso specifico  $\gamma = 78,5kN/m^3$ . La sezione circolare cava avrà una sezione costante lungo l'ascissa curvilinea  $s$ , con raggio esterno pari a  $r = 0,5m$ . Relativamente allo spessore della parete della stessa sezione esso sarà pari a  $t = 0,05m$ . Infine, in accordo con quanto indicato nel Capitolo 7, la rigidità flessionale della molla viene posta pari a

$$k = \frac{EJ}{0,5L_{arco}}.$$

Si procede dunque a riportare i risultati ottenuti e quindi i confronti per il caso in esame, come visibile nelle figure riportate di seguito.



**Figura 8.33:** Confronto spostamenti  $D_x$

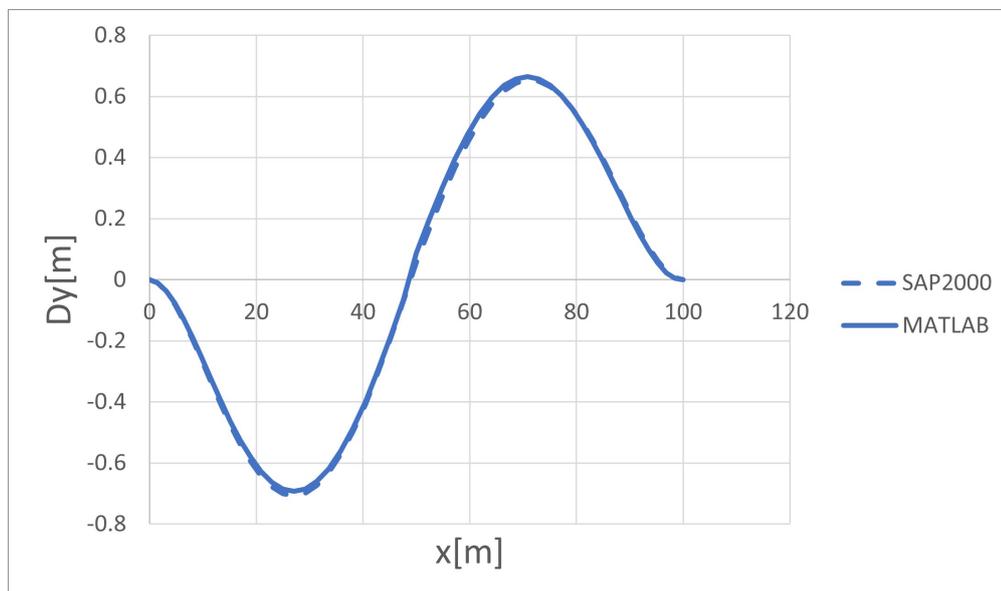


Figura 8.34: Confronto spostamenti  $D_y$

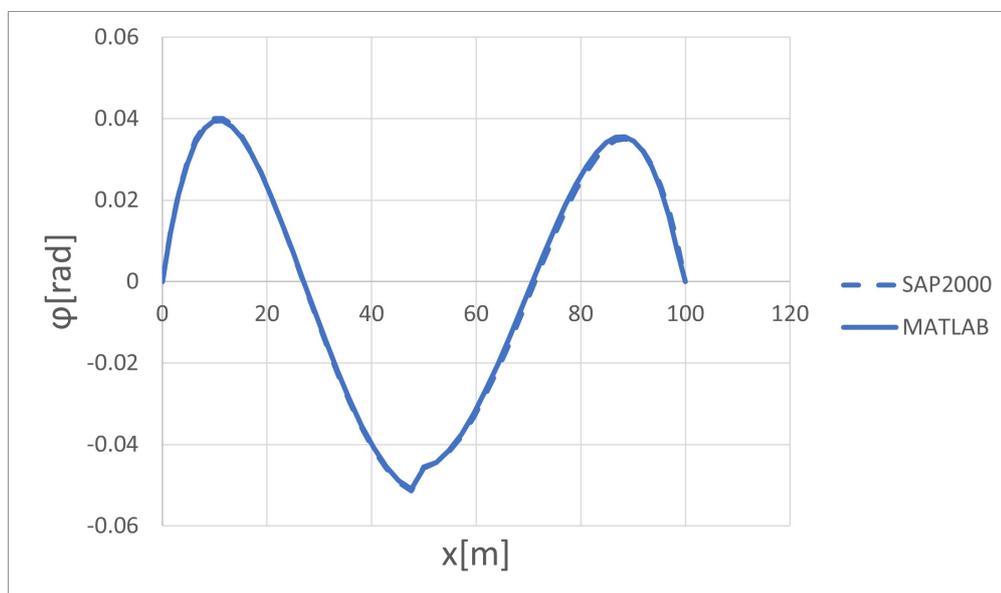


Figura 8.35: Confronto rotazioni  $\varphi$

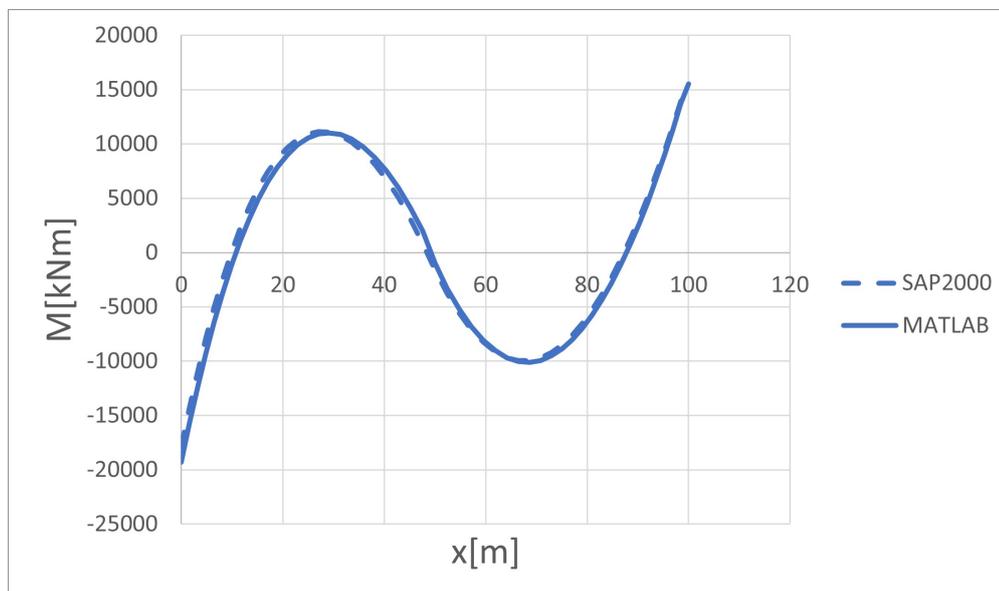


Figura 8.36: Confronto momento flettente  $M$

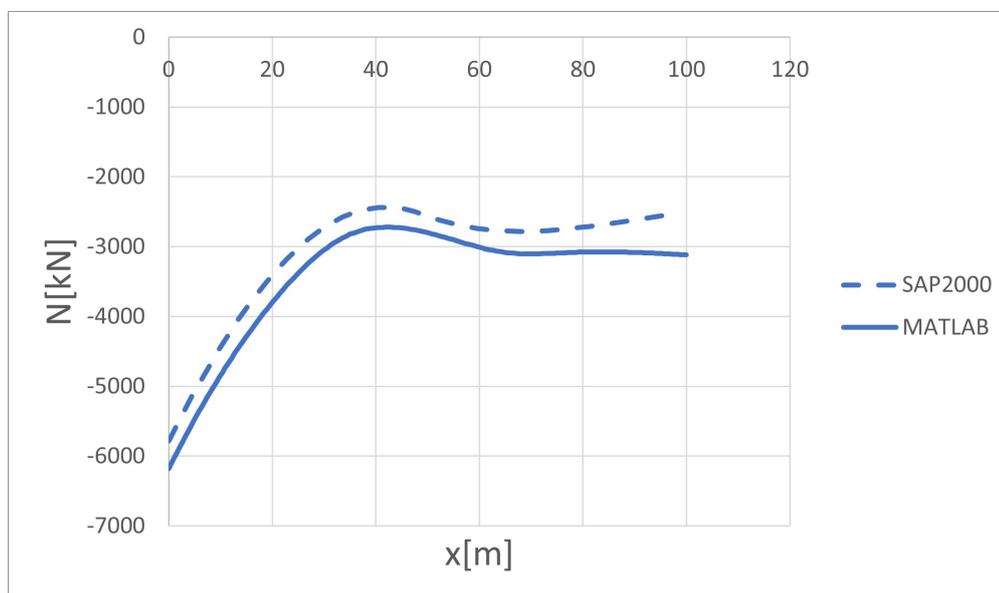
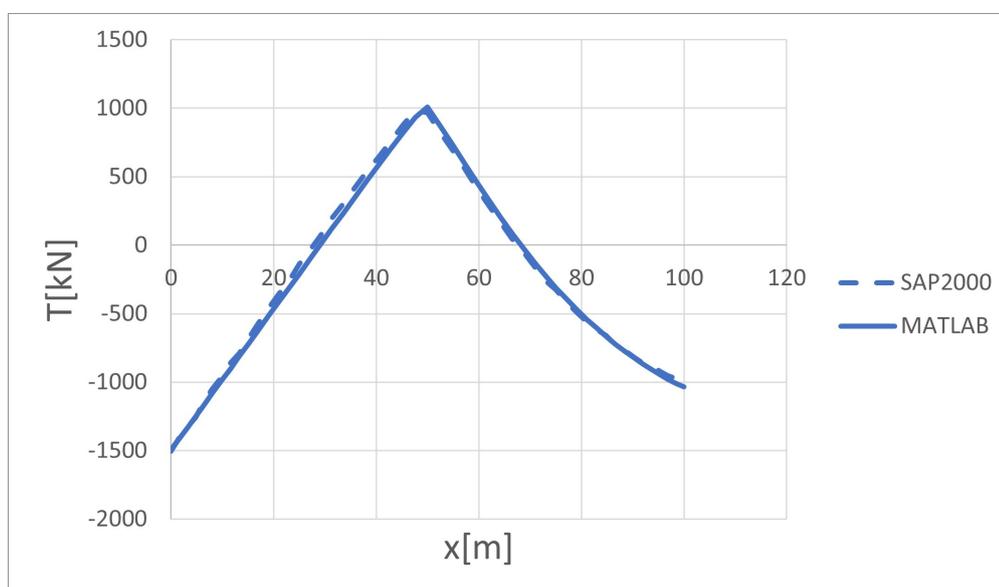


Figura 8.37: Confronto sforzo normale  $N$



**Figura 8.38:** Confronto sforzo di taglio  $T$

Si vuole fornire un particolare commento a quest'ultimo caso in cui si nota chiaramente un andamento non perfettamente coincidente dell'andamento dello sforzo normale  $N$ , ottenuto con il software SAP2000 e con il metodo numerico proposto. Questo diverso andamento non confuta comunque l'esattezza dei risultati ottenuti, infatti il modello numerico adottato fornisce in primis la soluzione in termini di spostamento  $u$  da cui si ricava solamente successivamente il valore dello sforzo normale  $N$ , tramite le relazioni analitiche che governano il problema della trave piana elastica curva.

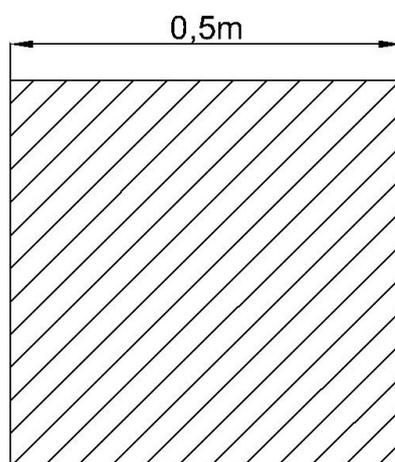
Si nota però come i risultati ottenuti per lo spostamento  $Dx$  e  $Dy$  derivanti dai valori di  $u$ , siano perfettamente coincidenti con quelli ottenuti tramite il software ad elementi finiti. Questo garantisce quindi la correttezza dei risultati, notando inoltre come l'andamento dello sforzo normale assunto dai risultati ottenuti tramite il software FEM, sia abbastanza anomalo in quanto a seguito di un normale incremento in termini assoluti dopo il punto in cui termina il carico, esso tende nuovamente a diminuire. Tuttavia nonostante il carico  $q_0$  sia assente, rimane comunque il contributo del peso proprio  $q_{sw}$  che pur essendo nettamente inferiore a quello del carico  $q_0$ , apporta un contributo. In questo senso ci si aspetterebbe piuttosto dei valori crescenti, sempre in valore assoluto, con un rate basso successivamente al punto in cui termina l'applicazione del carico  $q_0$ , come verosimilmente potrebbe rispecchiare l'andamento ottenuto per mezzo del modello numerico.

## 8.6 Arco circolare a sezione quadrata piena costante

Nel caso in esame si intende validare i risultati del modello numerico, nei riguardi di un arco circolare avente luce  $L = 100m$  e altezza  $f = 30m$ .

Come per i casi precedentemente esposti, anche per il presente si adotterà un arco realizzato in acciaio  $S355$  avente peso specifico  $\gamma = 78,5kN/m^3$ . La sezione utilizzata è quella quadrata piena, costante lungo l'ascissa curvilinea  $s$  e avente

lato di dimensione pari a  $r = 0,5m$ . Si riporta in Fig.(8.39), una rappresentazione della sezione utilizzata.



**Figura 8.39:** Sezione quadrata piena

L'arco analizzato sarà soggetto ad un carico costante lungo l'ascissa curvilinea  $s$ , scelto arbitrariamente e pari a  $q_0 = 100kN/m$ . Come mostrato per i casi precedenti la rigidezza flessionale della molla in corrispondenza della chiave, viene posta pari a  $k = \frac{EJ}{0,5L_{arco}}$ .

Si procede a riportare nelle figure successivamente mostrate, i risultati ottenuti.

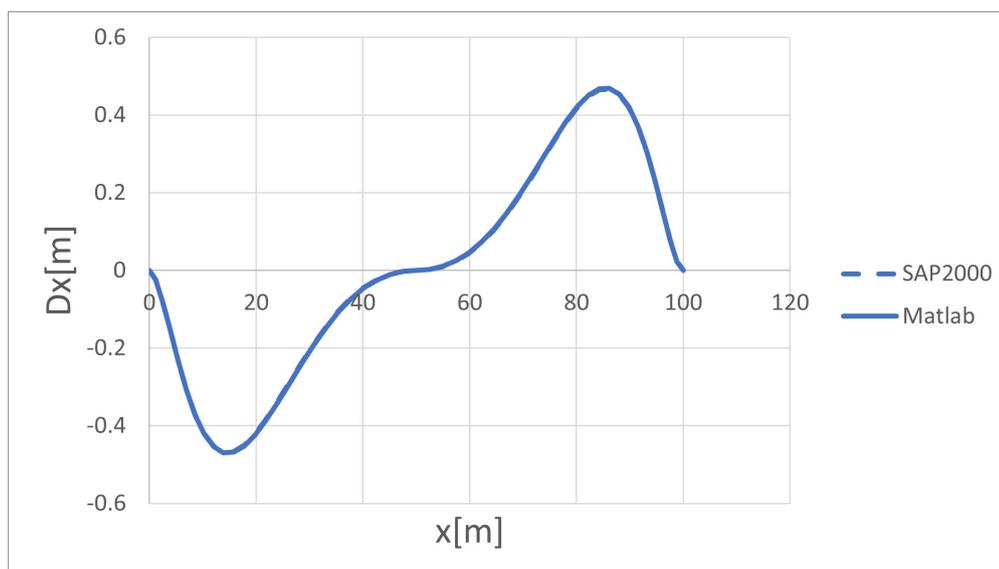


Figura 8.40: Confronto spostamenti  $D_x$

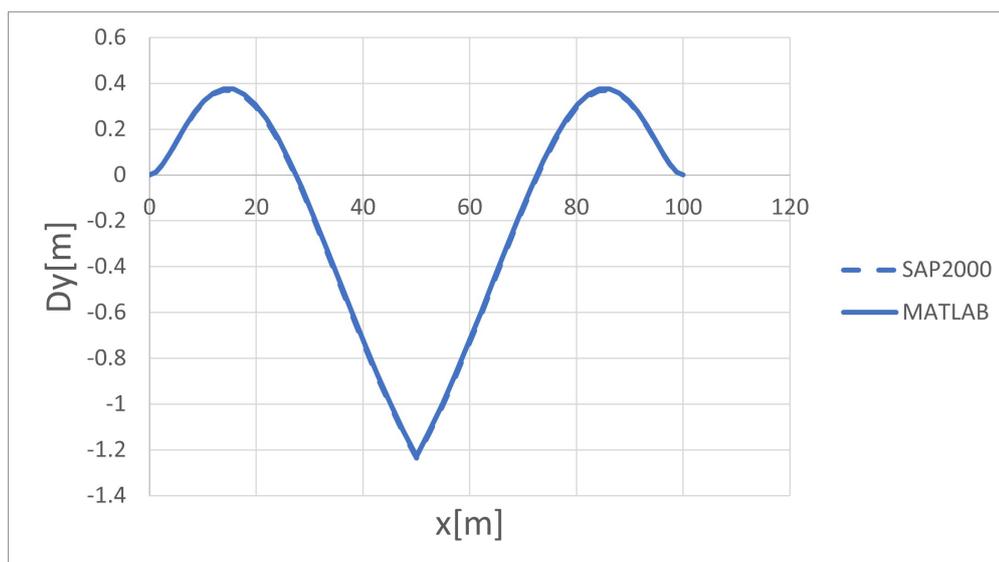


Figura 8.41: Confronto spostamenti  $D_y$

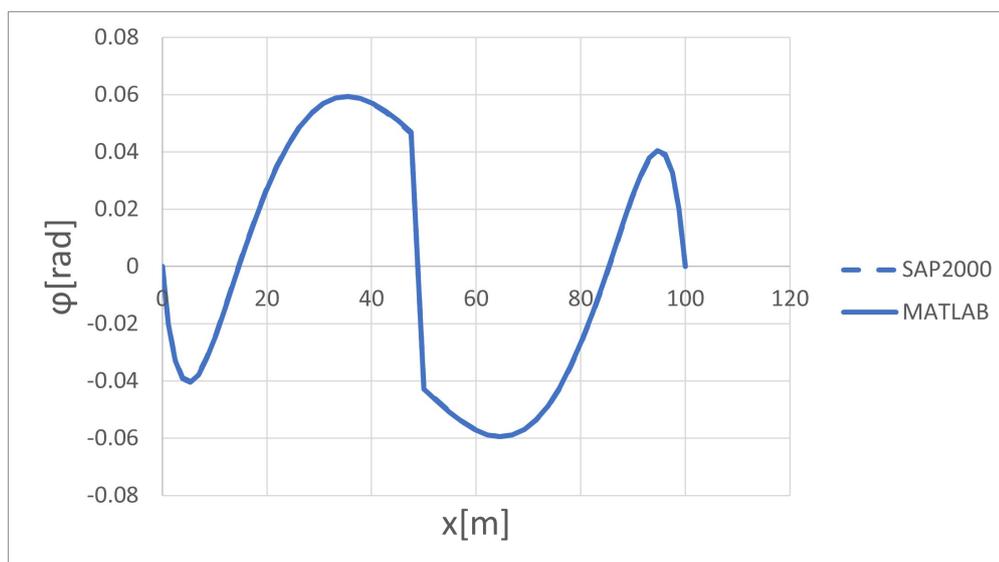


Figura 8.42: Confronto rotazioni  $\varphi$

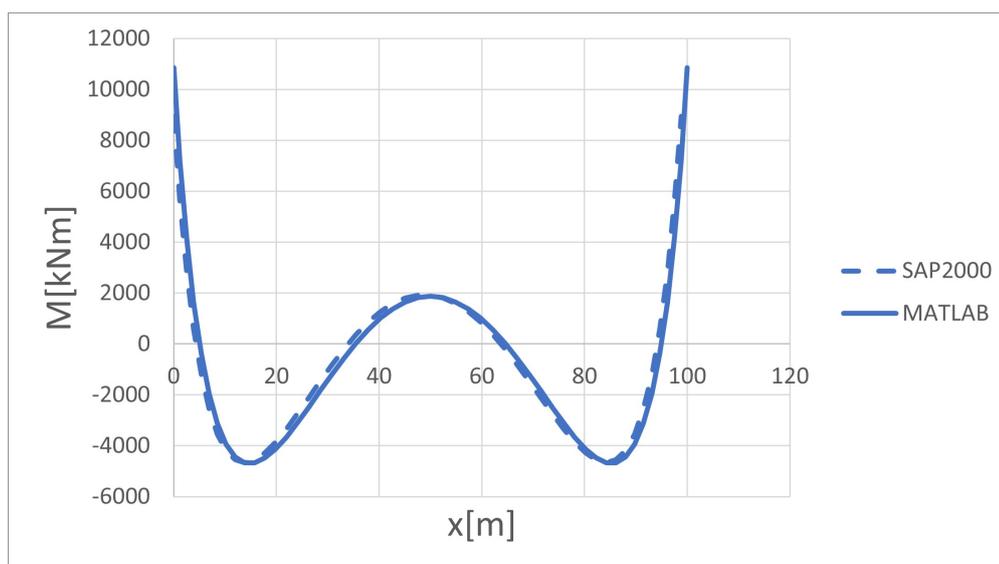


Figura 8.43: Confronto momento flettente  $M$

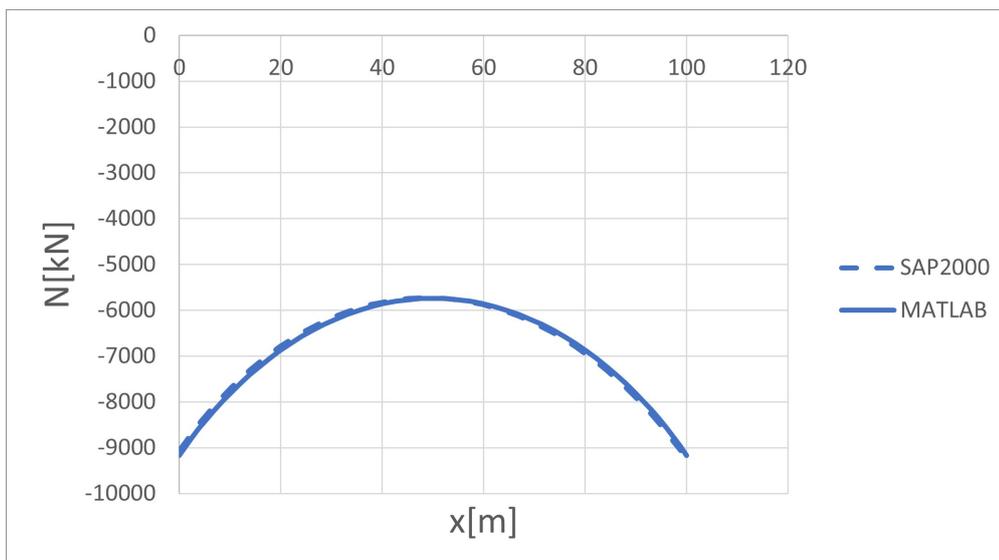


Figura 8.44: Confronto sforzo normale  $N$

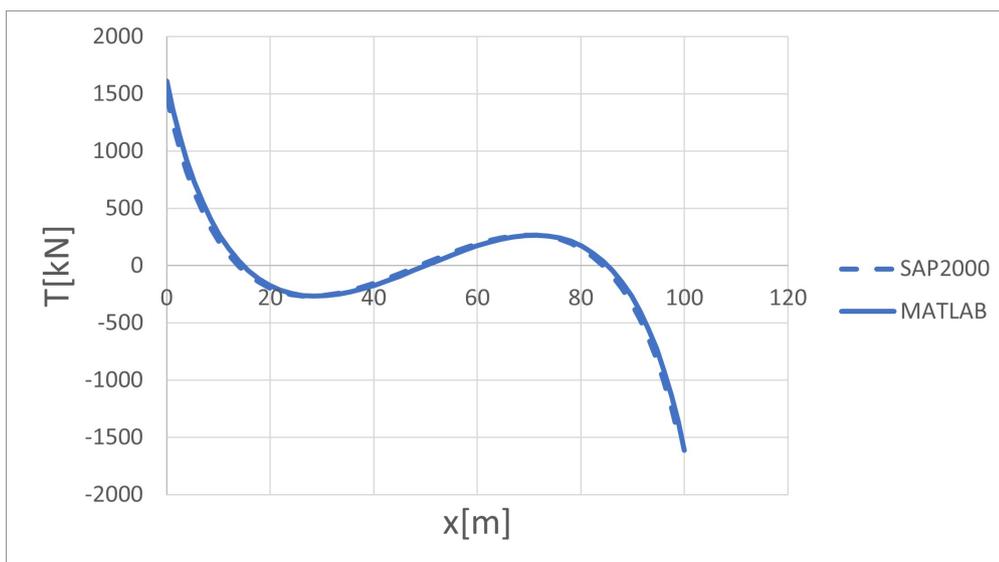


Figura 8.45: Confronto sforzo di taglio  $T$

## Capitolo 9

# Comportamento strutturale

Nel presente capitolo, sulla base di quanto è stato detto nel Capitolo 7 e facendo riferimento ai risultati ottenuti nel Capitolo 8, si vuole analizzare il comportamento strutturale relativo a differenti tipologie di strutture ad arco. Tale analisi verrà quindi condotta, come già espresso precedentemente, nell'intento di valutare la risposta della struttura a seguito dell'inserimento del vincolo interno molla elastica rotazionale nelle sezioni in cui si intende simulare il danneggiamento.

Nello specifico verrà condotto uno studio relativo e ad un arco parabolico con sezione costante e ad uno avente invece sezione variabile in modo quadratico lungo l'ascissa curvilinea  $s$ .

### 9.1 Arco parabolico con sezione circolare cava costante

Il caso che si presenta in questo sottocapitolo è relativo ad un arco parabolico avente luce pari a  $L = 100m$  ed una freccia pari a  $f = 30m$ . La sezione dell'arco in esame sarà circolare cava e costante lungo l'ascissa curvilinea  $s$ . Il raggio esterno così come quello interno pertanto saranno costanti con il primo pari a  $r = 0,5m$ ,

mentre lo spessore della parete della sezione sarà pari a  $t = 0,05m$ . Relativamente a tutte le altre caratteristiche, inerenti al materiale adottato, si fa riferimento ai dati riportati precedentemente, visibili in Tab.(8.1).

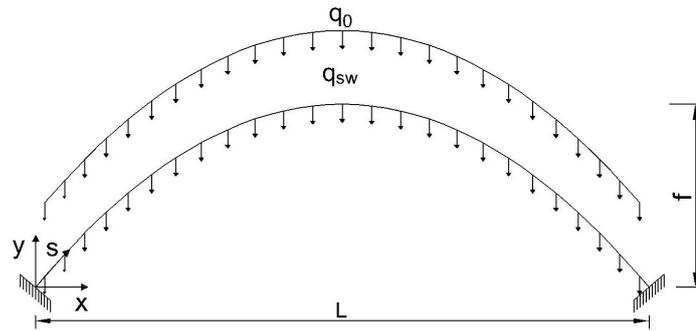
### 9.1.1 Caso I

L'arco intero sottoposto all'azione del proprio peso  $q_{sw}$ , viene ulteriormente caricato con un carico variabile  $q_0$ , incrementato in modo iterativo fino al raggiungimento della tensione di snervamento, la quale sarà registrata in corrispondenza dei nodi posti alle reni dell'arco. In tal senso si individua un carico  $q_0 = q_{1y} = 262kN/m$ . Si procede dunque all'inserimento di una molla rotazionale elastica in corrispondenza dei punti sopra detti, utilizzando una rigidezza flessionale della molla  $k_1 = 70901kNm/rad$  proporzionale alle caratteristiche del materiale e alle proprietà geometriche della sezione. Volendo quindi simulare l'evoluzione del danneggiamento nel tempo, si procede a diminuire la rigidezza elastica, nell'intento di comprendere la risposta strutturale dell'arco. Continuando in questo senso, la rigidezza elastica viene decrementata fin tanto che il suo valore sia pari  $k_2$ , corrispondente al 20% della rigidezza iniziale  $k_1$ . Avendo mantenuto il carico costante, si evince che la variazione del parametro appena detto, comporta una variazione in meglio della risposta dell'arco, in quanto non si raggiunge più una tensione di snervamento e quindi in ogni nodo viene verificata la condizione  $\sigma^{VM} < f_y$ .

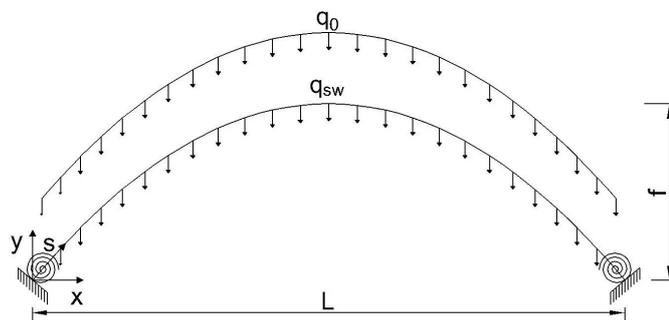
Si nota inoltre che a seguito dell'introduzione delle prime due molle alle basi, la variazione della loro rigidezza comporta una variazione dell'andamento delle tensioni ed in particolare si intende sottolineare che i nodi in cui si registra il maggiore stato tensionale, risultano essere differenti da quelli in corrispondenza delle imposte e comunque, come detto precedentemente, a livello tensionale per essi si permane sotto la soglia di snervamento.

Si procede dunque a verificare il comportamento strutturale all'aumentare del carico, il quale viene incrementato iterativamente fino ad ottenere un carico  $q_2 = 320kN/m$ , la cui applicazione invece comporta il raggiungimento della tensione di snervamento in punti intermedi dell'arco e speculari. In accordo con quanto fatto precedentemente avviene dunque l'introduzione di altre due molle elastiche, nei punti appena detti, caratterizzate da una rigidezza flessionale  $k_3$  ancora una volta proporzionale alle caratteristiche del materiale ed al momento di inerzia della sezione. Dai risultati ottenuti si nota che il carico  $q_2$ , a seguito della variazione dello schema strutturale risulta ancora insufficiente affinché si raggiunga una condizione di snervamento, con la conseguenza che in tal senso si ha un miglioramento del comportamento strutturale, nonostante si abbiano naturalmente degli spostamenti maggiori. Il carico che dunque porterà a riottenere una tensione di snervamento, questa volta in corrispondenza della mezzeria dell'arco, sarà pari a  $q_3 = 324kN/m$  e quindi non molto distante dal precedente.

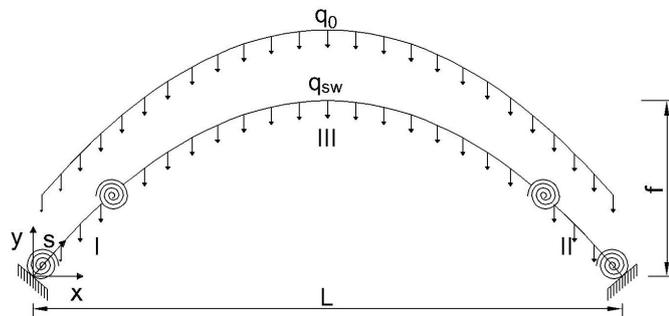
Si vuole riportare una rappresentazione grafica della disposizione dei vincoli interni in relazione alle diverse fasi, in Fig.(9.1). Tali configurazioni saranno da intendere applicate anche per le trattazioni successive se non diversamente specificato.



(a)



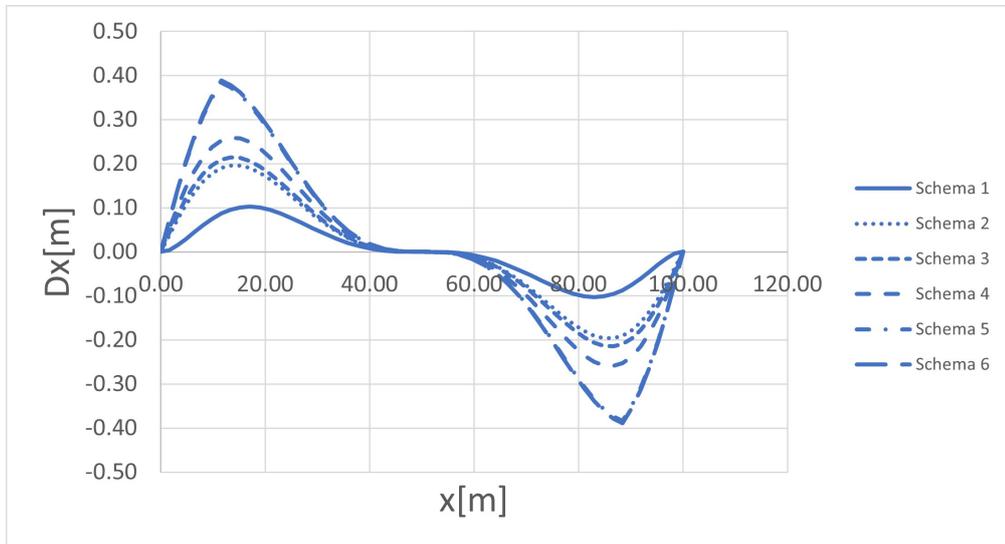
(b)



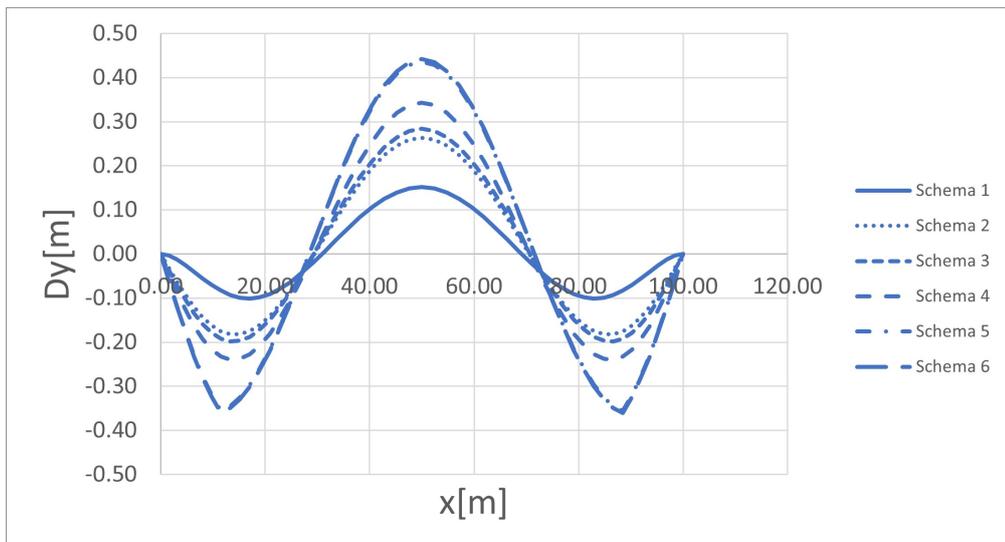
(c)

**Figura 9.1:** Evoluzione danneggiamento: Configurazione 1 (a), Configurazione 2 (b), Configurazione 3 (c).

Al fine di comprendere l'evoluzione delle grandezze cinematiche e delle caratteristiche interne della sollecitazione, a seguito dei vari step che sono stati condotti e descritti, si riportano nelle figure successive una rappresentazione dei dati ottenuti.



**Figura 9.2:** Evoluzione spostamenti  $D_x$



**Figura 9.3:** Evoluzione spostamenti  $D_y$

Si vuole sottolineare che in riferimento agli spostamenti  $D_x$  e  $D_y$ , come visibile dalle figure proposte, rispettivamente Fig.(9.2) e Fig.(9.3), si ha uno spostamento verso le zone più estreme dei picchi raggiunti dagli andamenti mostrati ad esclusione

di quello in corrispondenza della mezziera della struttura. Tale condizione si ripresenta anche per i casi successivamente mostrati.

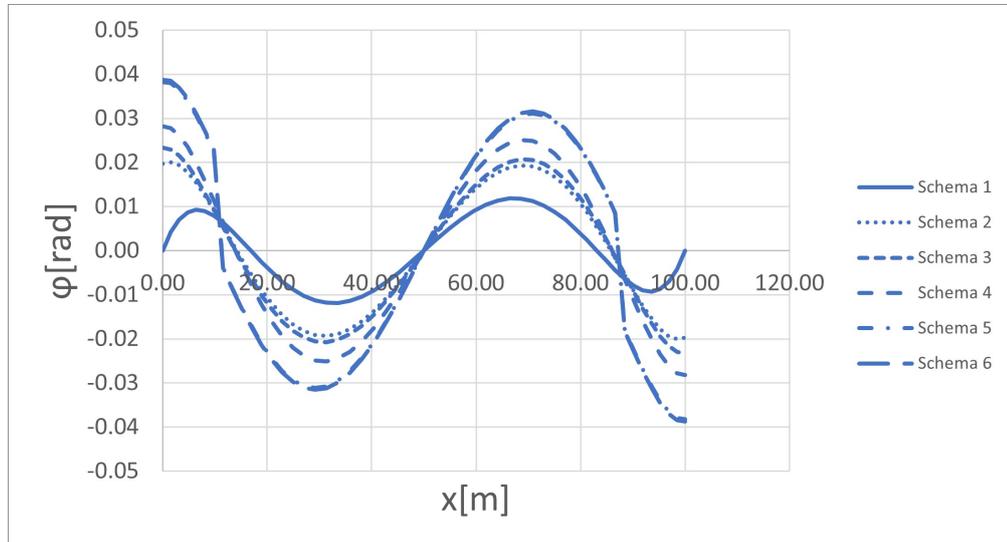


Figura 9.4: Evoluzione rotazioni  $\varphi$

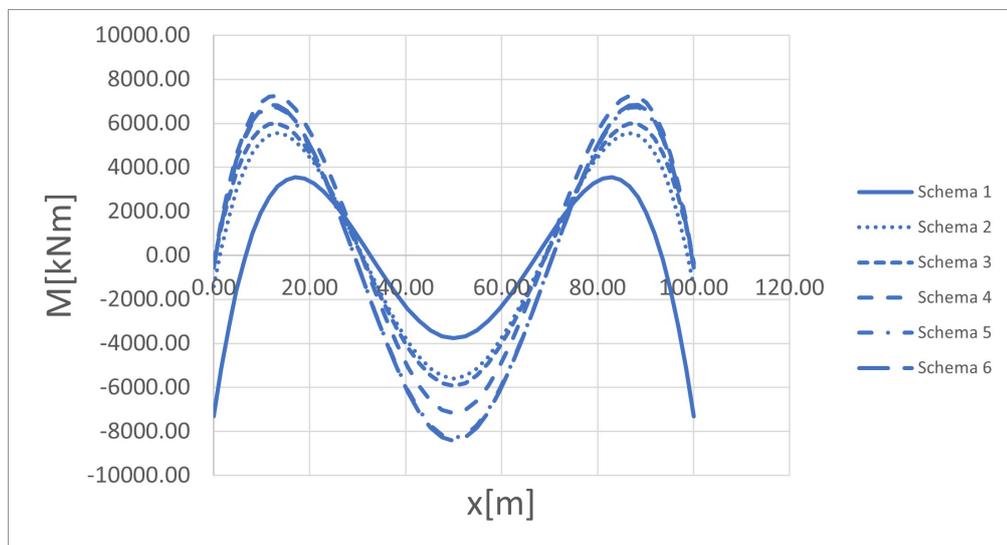
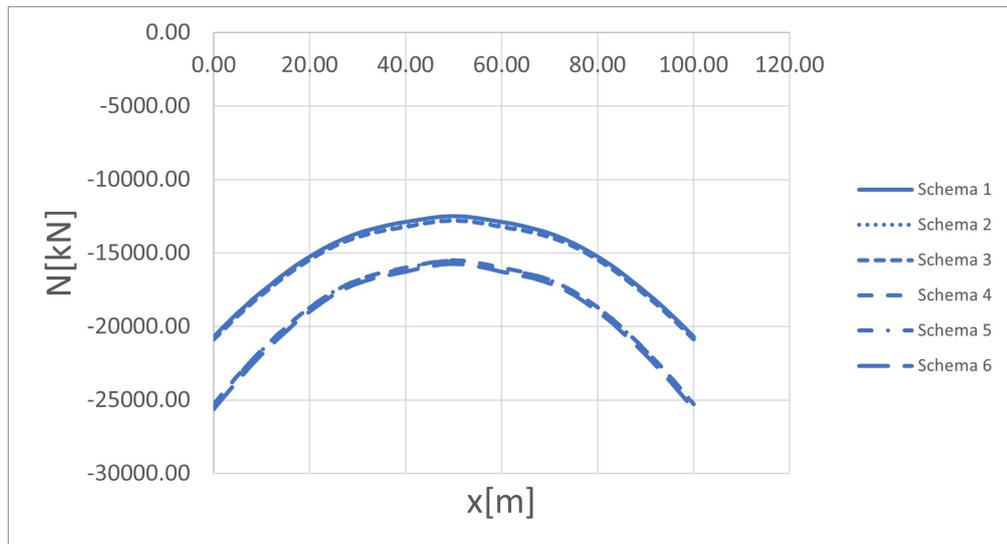
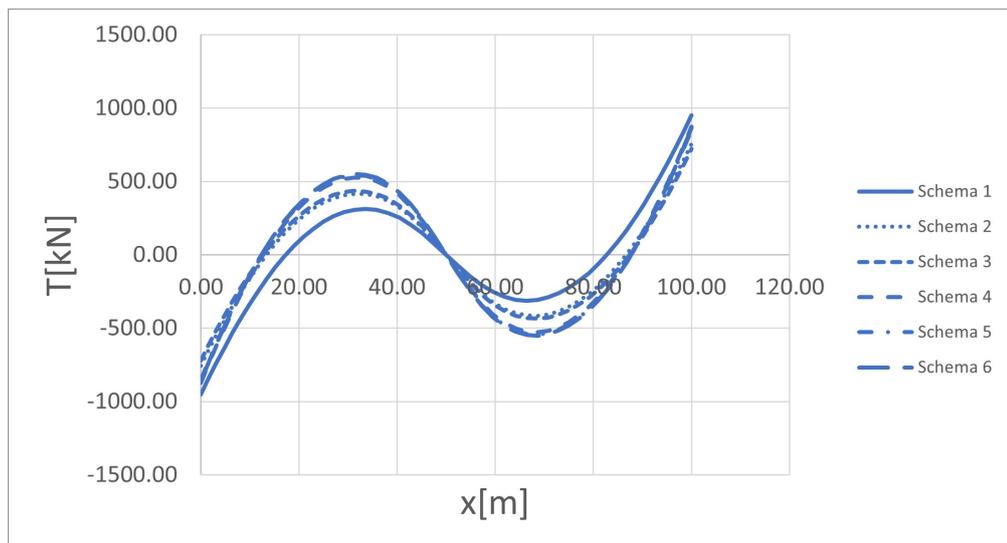


Figura 9.5: Evoluzione momento flettente  $M$

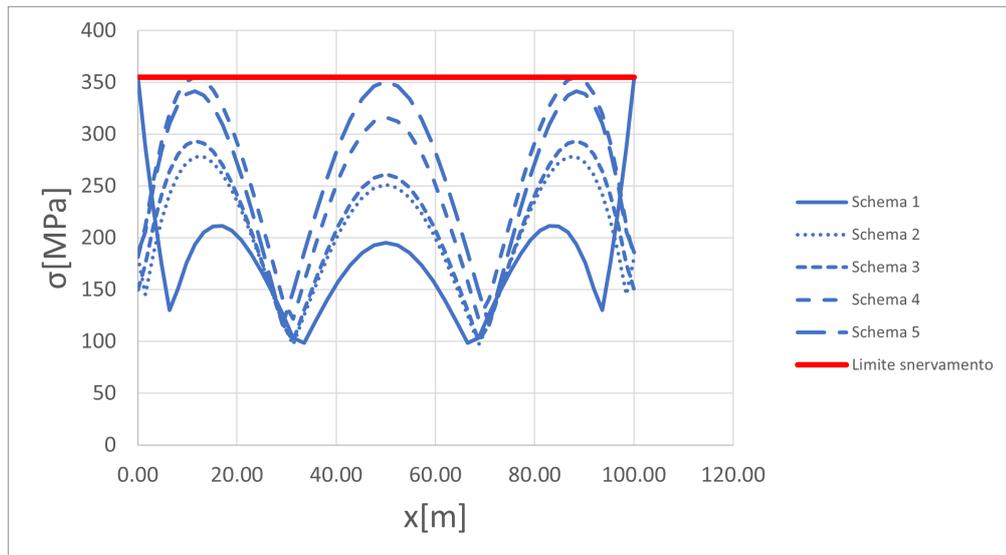


**Figura 9.6:** Evoluzione sforzo normale  $N$



**Figura 9.7:** Evoluzione sforzo di taglio  $T$

Si riporta inoltre in Fig.(9.8) la rappresentazione grafica dei risultati ottenuti, relativamente all'andamento delle tensioni, al fine di chiarire ulteriormente ciò che è stato descritto precedentemente.



**Figura 9.8:** Andamento delle tensioni alla Von Mises caso I

Si indicano infine le condizioni relative agli andamenti mostrati.

- Schema 1:  $q_0 = 262kN/m$
- Schema 2:  $q_0 = 262kN/m$      $k_{base} = 70901kNm/rad$
- Schema 3:  $q_0 = 262kN/m$      $k_{base} = 0.2 * 70901kNm/rad$
- Schema 4:  $q_0 = 320kN/m$      $k_{base} = 0.2 * 70901kNm/rad$
- Schema 5:  $q_0 = 320kN/m$      $k_{base} = 0.2 * 70901kNm/rad$      $k_{int} = 3,07 * 10^5 kNm/rad$
- Schema 6:  $q_0 = 324kN/m$      $k_{base} = 0.2 * 70901kNm/rad$      $k_{int} = 3,07 * 10^5 kNm/rad$

Lo schema 6 non viene riportato per facilitare la lettura del grafico, affermando che esso assume naturalmente lo stesso andamento dello schema 5, con un incremento complessivo delle tensioni e dunque il raggiungimento del limite di snervamento in corrispondenza della chiave dell'arco.

Per il caso esaminato si può supporre che il danneggiamento si evolva a partire dalle

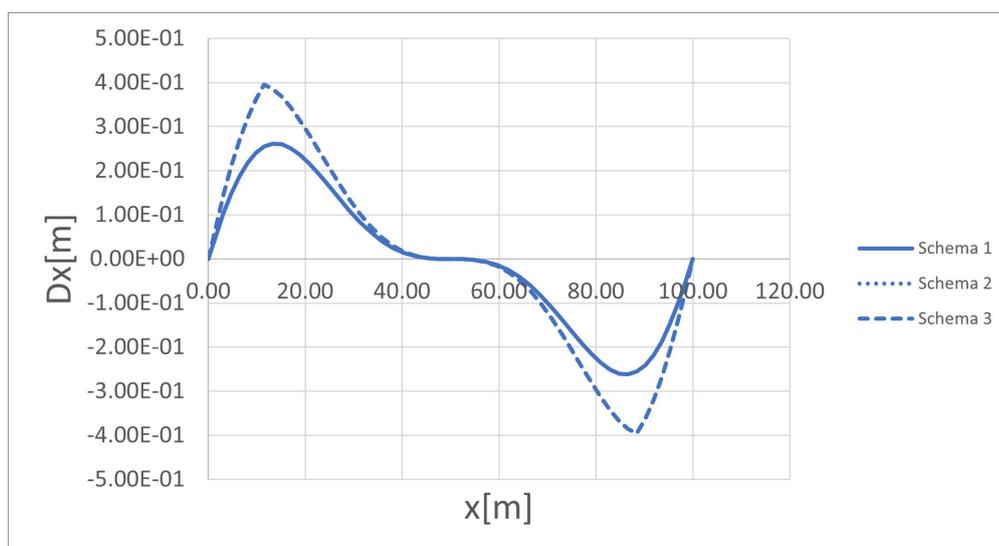
sezioni maggiormente sollecitate e quindi quelle alle reni dell'arco, indipendentemente dal raggiungimento della tensione di snervamento. L'avanzamento del danneggiamento, con le modalità predeterminate per modellarlo, porta all'individuazione di sezioni diverse soggette al massimo livello tensionale, le quali si suppone siano con maggior probabilità soggette ad un danneggiamento. In questo senso pertanto il carico  $q_1$ , in accordo con la trattazione condotta, risulta quello massimo a cui la struttura può essere soggetta considerando che si possa avere il processo di danneggiamento indicato. Stando a questa interpretazione, il carico  $q_3$ , invece è un carico fittizio che potrebbe essere applicato solamente a seguito della variazione dello schema strutturale che naturalmente è però differente da quello di partenza. Inoltre con le rigidzze utilizzate si può notare un sostanziale cambiamento nella configurazione strutturale che porterebbe dunque alla possibilità di adozione di carichi più elevati rispetto al primo affinché avvenga un danneggiamento inteso come raggiungimento della tensione di snervamento.

Questa conclusione pone però anche le basi per comprendere come una struttura di questo tipo, possa assumere un comportamento strutturale migliore se incernierato alle basi.

### 9.1.2 Caso II

Modificando quindi la configurazione iniziale, l'inserimento di un vincolo cerniera porta all'individuazione di un carico  $q_0 = q_1 = 314kN/m$ , quale quello che comporta lo snervamento nelle medesime sezioni intermedie individuate in precedenza. Posizionando dunque il vincolo molla in corrispondenza dei punti individuati è possibile con un carico poco maggiore e pari a  $q_2 = 318kN/m$ , ottenere una nuova sezione sottoposta a snervamento in corrispondenza della chiave dell'arco. In definitiva è possibile vedere che lo schema statico iniziale, attualmente adottato, permetta

il raggiungimento della massima tensione già nella prima fase in corrispondenza dei medesimi punti intermedi ma senza passare prima per il danneggiamento delle sezioni alla base ed utilizzando un carico di partenza maggiore dell'8% circa rispetto al primo. Dunque la risposta della struttura rimane la medesima, infatti le sezioni maggiormente sollecitate a livello tensionale, successivamente all'applicazione del carico  $q_1$ , saranno nuovamente quelle individuate in corrispondenza dei medesimi punti intermedi del caso precedentemente analizzato, ma con il vantaggio di poter applicare un carico maggiore e lo svantaggio di avere degli spostamenti maggiori. Si vuole quindi mostrare a livello grafico, come visibile nelle figure successivamente riportate lo sviluppo del danneggiamento in accordo con quanto descritto. Si riporta inoltre allo stesso scopo, in Fig.(9.15), la variazione dello stato tensionale al variare dello schema adottato.



**Figura 9.9:** Evoluzione spostamenti  $D_x$

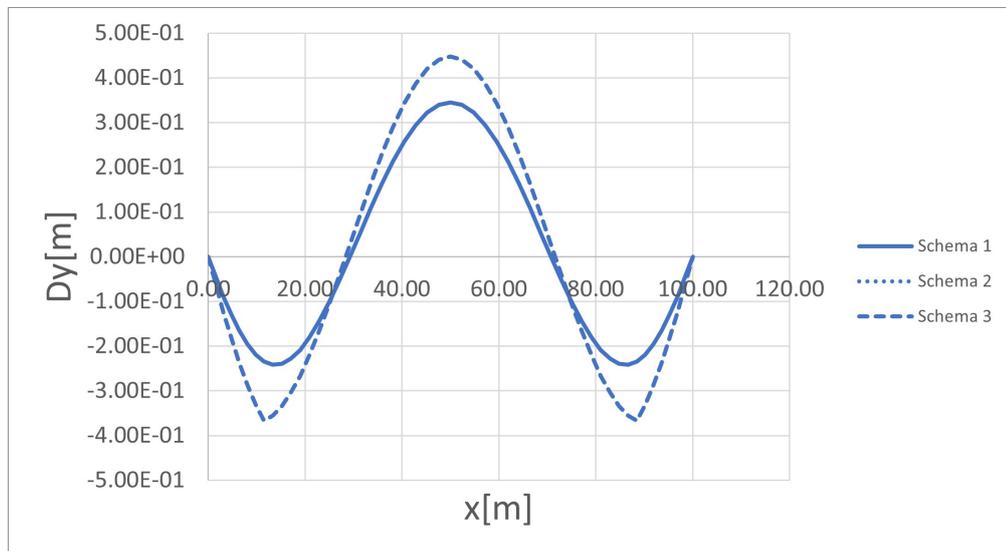


Figura 9.10: Evoluzione spostamenti  $D_y$

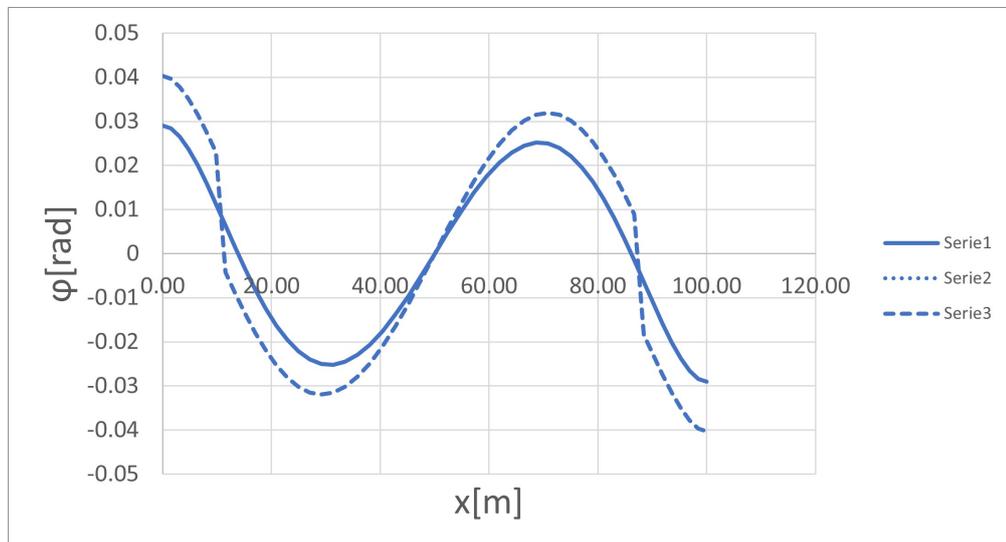


Figura 9.11: Evoluzione rotazioni  $\varphi$

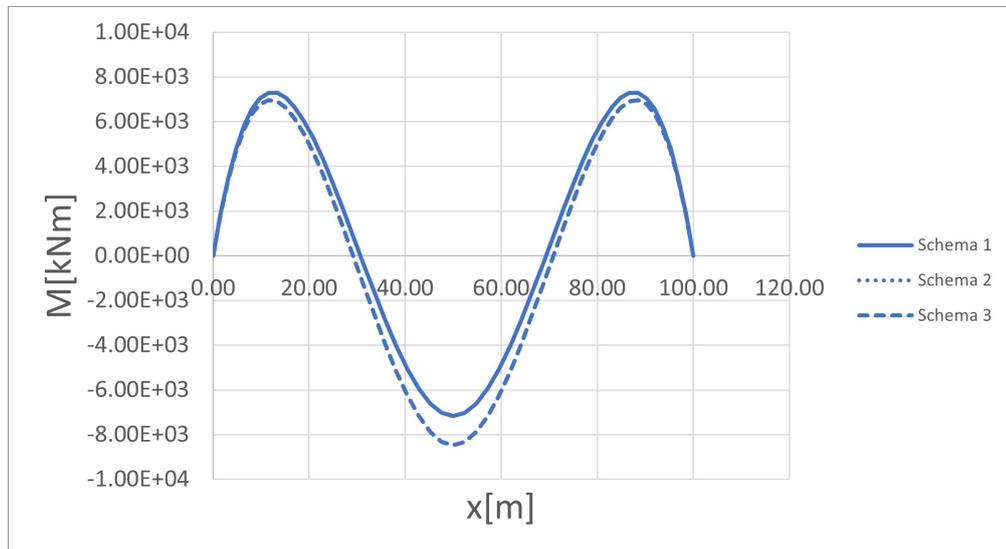


Figura 9.12: Evoluzione momento flettente  $M$

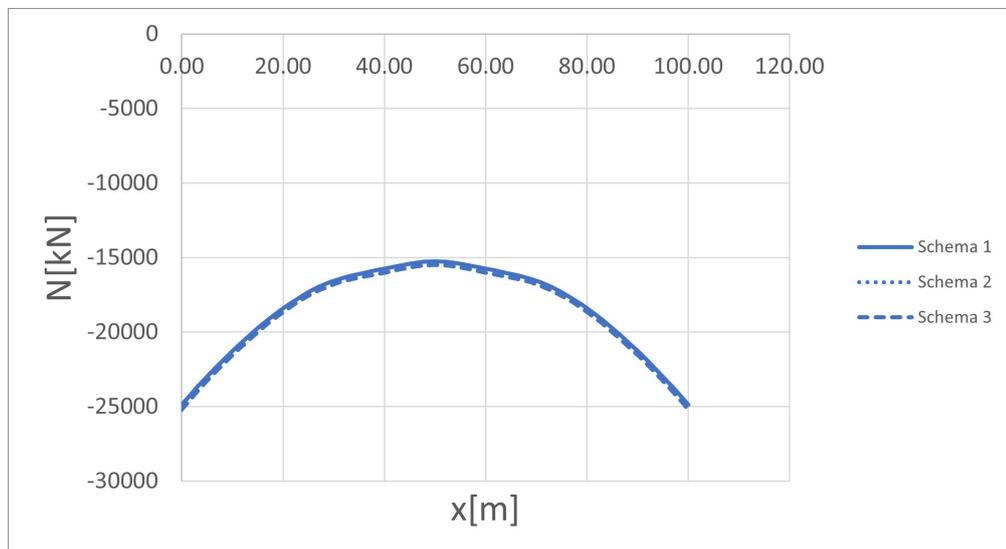
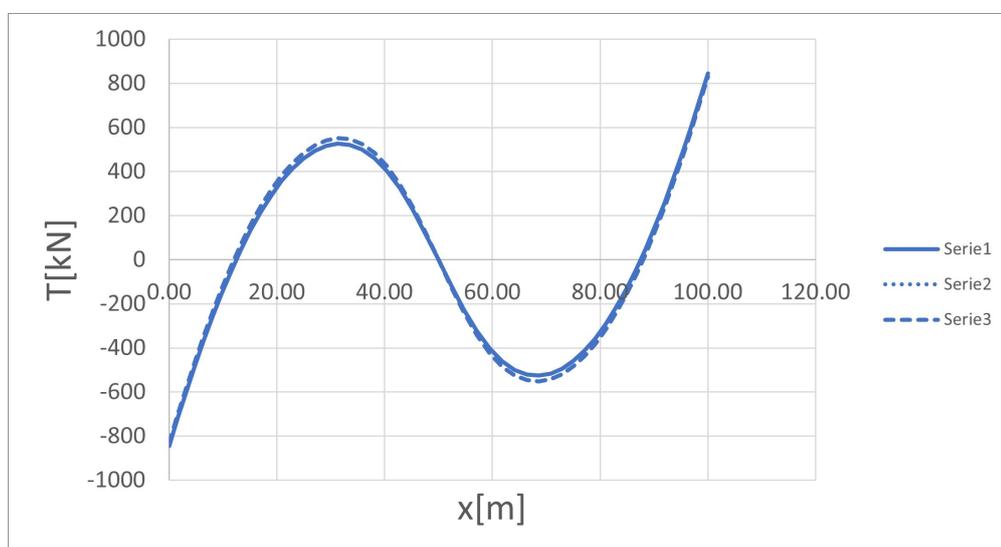
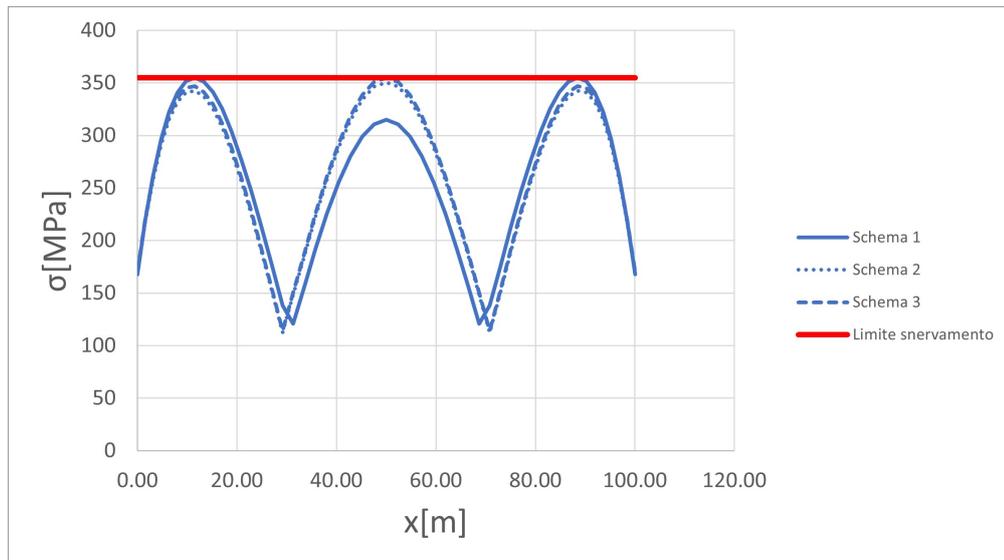


Figura 9.13: Evoluzione sforzo normale  $N$



**Figura 9.14:** Evoluzione sforzo di taglio  $T$



**Figura 9.15:** Andamento delle tensioni alla Von Mises caso II

Si indicano infine in modo riassuntivo i carichi che sono stati utilizzati per i tre schemi precedentemente riportati, nonché la rigidezza associata alle molle inserite.

- Schema 1:  $q_0 = 314kN/m$
- Schema 2:  $q_0 = 314kN/m$      $k = 306826kNm/rad$
- Schema 3:  $q_0 = 318kN/m$      $k = 306826kNm/rad$

### 9.1.3 Caso III

Dalle analisi condotte si nota chiaramente come la variabile rigidezza flessionale  $k$ , assuma un ruolo importante nella determinazione del comportamento della struttura. Per tale motivo si procede alla variazione di tale parametro, relativamente alla sua attribuzione alle molle elastiche che vengono poste alle imposte dell'arco. Avendo scelto un valore molto maggiore rispetto a quello utilizzato precedentemente, la variazione dello schema statico, a seguito dell'inserimento delle molle, determina

una diversa risposta dell'arco. Infatti con la nuova rigidezza flessionale  $k_1$  ai nodi in cui sono presenti le condizioni più sfavorevoli a livello tensionale, non risultano più essere intermedi come in precedenza, bensì nuovamente quelli alle estremità. Come effettuato precedentemente, si esegue una decurtazione della rigidezza flessionale delle molle tale per cui nel caso in esame  $k_2$  sia pari al 10% $k_1$ . Si nota come a seguito di tale riduzione si raggiungano nuovamente le condizioni peggiori in termini di stato tensionale in nodi intermedi e speculari ma comunque differenti da quelli che sono stati determinati nel caso precedente. Il carico  $q_0 = q_1 = 262kNm$ , rimasto costante fino a questo punto, non porta però al raggiungimento della condizione di snervamento in alcun nodo e pertanto esso viene incrementato fino al raggiungimento di un carico pari a  $q_0 = q_2 = 367kN/m$  con il quale si raggiunge la tensione di snervamento nei punti intermedi precedentemente citati. Questo pone le condizioni per l'inserimento delle ulteriori due molle elastiche con rigidezza elastica  $k_3$  le quali con applicazione del carico  $q_2$  comportano automaticamente il raggiungimento della tensione di snervamento nuovamente in corrispondenza dei nodi alle reni dell'arco, ma anche in corrispondenza della mezzeria.

Si mostrano quindi i risultati ottenuti relativamente al procedimento descritto, riportando nelle figure successivamente mostrate l'evoluzione delle grandezze cinematiche e delle caratteristiche interne della sollecitazione e riportando in Fig.(9.22) l'andamento delle tensioni.

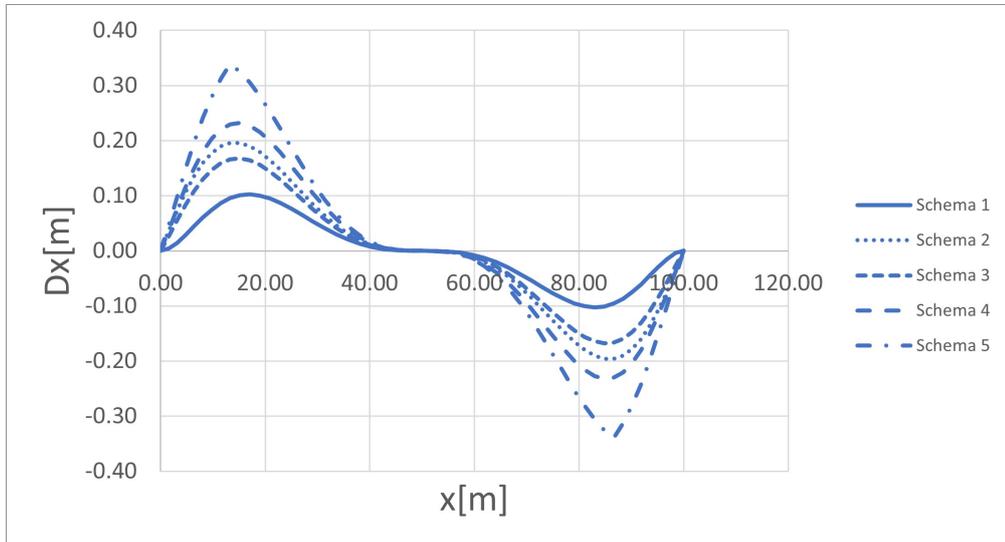


Figura 9.16: Evoluzione spostamenti  $D_x$

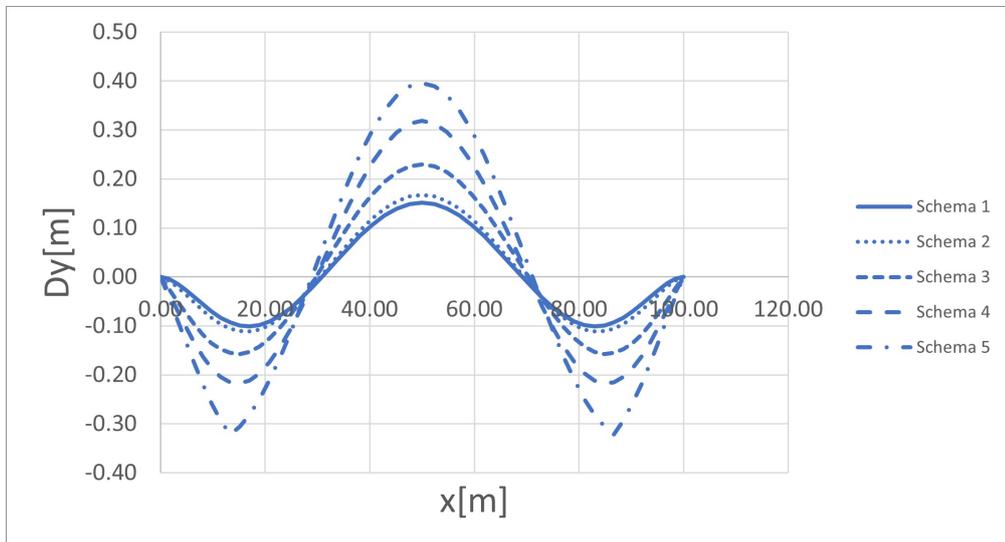
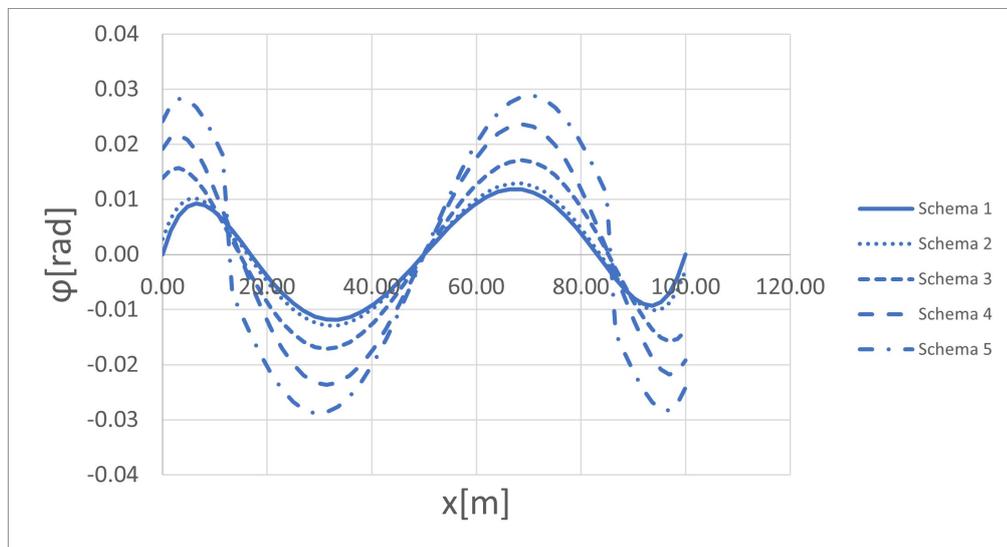


Figura 9.17: Evoluzione spostamenti  $D_y$



**Figura 9.18:** Evoluzione rotazioni  $\varphi$

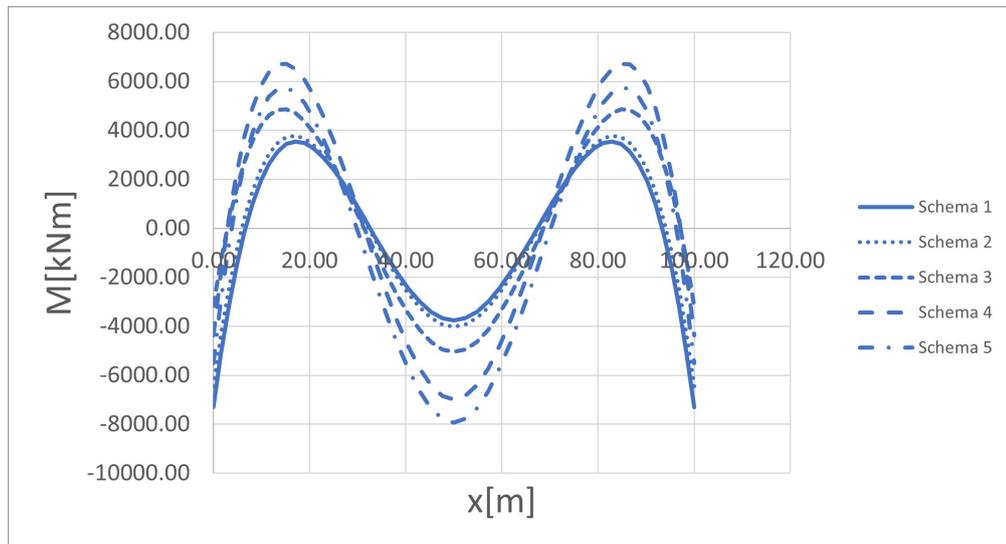


Figura 9.19: Evoluzione momento flettente  $M$

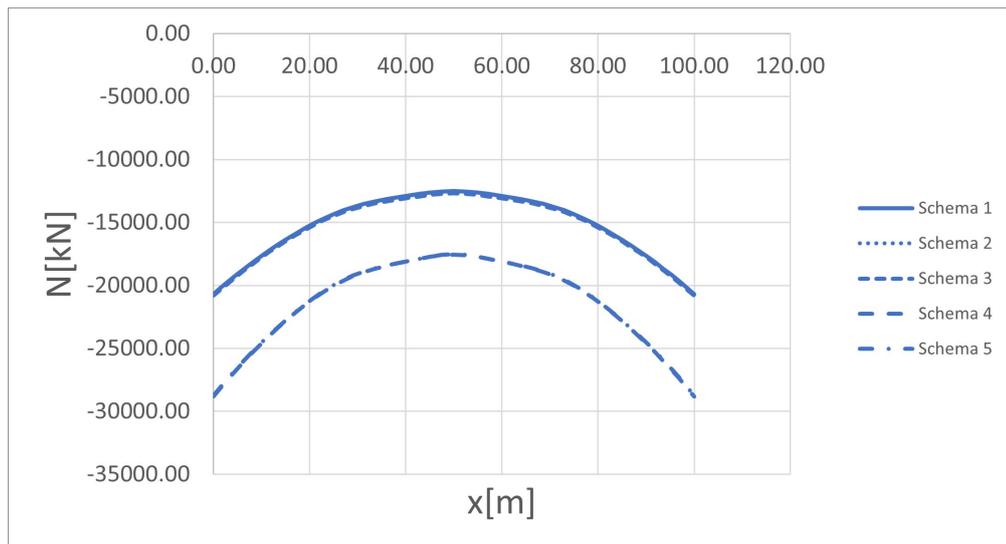
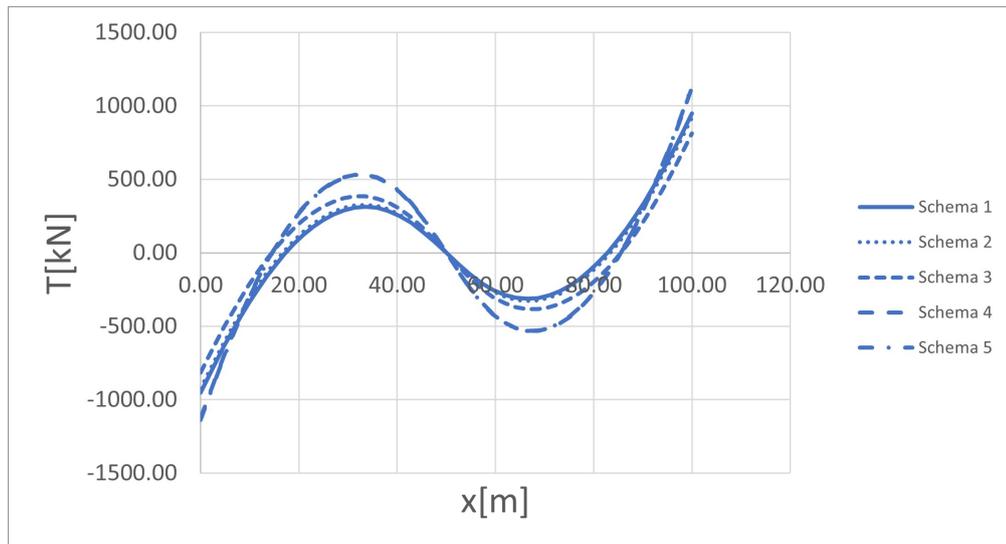
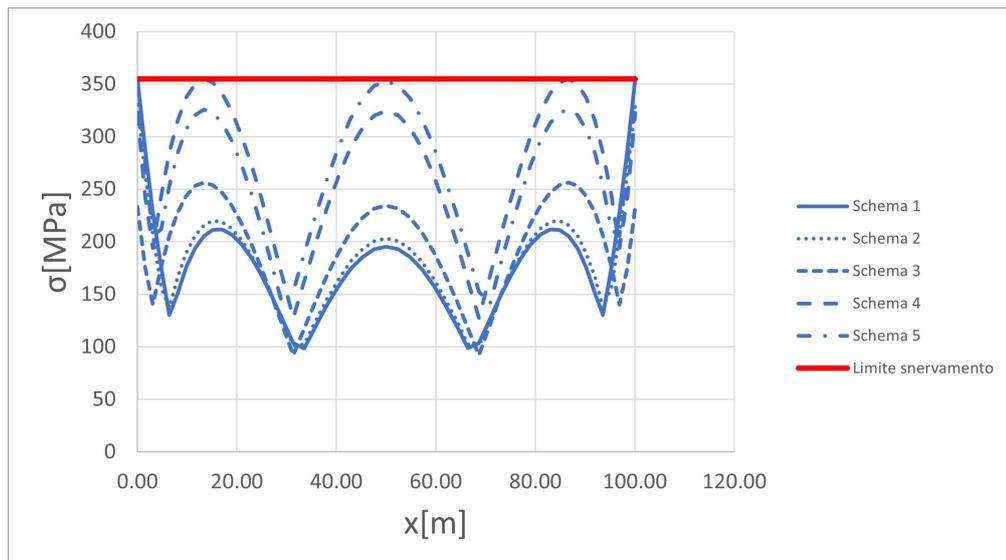


Figura 9.20: Evoluzione sforzo normale  $N$



**Figura 9.21:** Evoluzione sforzo di taglio  $T$



**Figura 9.22:** Andamento delle tensioni alla Von Mises caso III

Si indicano infine le condizioni relative andamenti che sono stati mostrati.

- Schema 1:  $q_0 = 262$
- Schema 2:  $q_0 = 262$      $k_{base} = 2278100 \text{ kNm/rad}$

- Schema 3:  $q_0 = 262$      $k_{base} = 0,1 * 2278100kNm/rad$
- Schema 4:  $q_0 = 367$      $k_{base} = 0,1 * 2278100kNm/rad$
- Schema 5:  $q_0 = 367$      $k_{base} = 0,1 * 2278100kNm/rad$      $k_{int} = 265683kNm/rad$

A seguito della valutazione dei dati ottenuti per quest'ultimo caso in esame si vuole mostrare che nonostante il comportamento complessivo della struttura rimanga naturalmente il medesimo, si possa avere una variazione dei nodi in cui si verifica lo snervamento a seguito della variazione della rigidezza flessionale, nonché una variazione del carico massimo applicabile per giungere allo snervamento.

## 9.2 Arco doppiamente incastrato con sezione circolare cava variabile

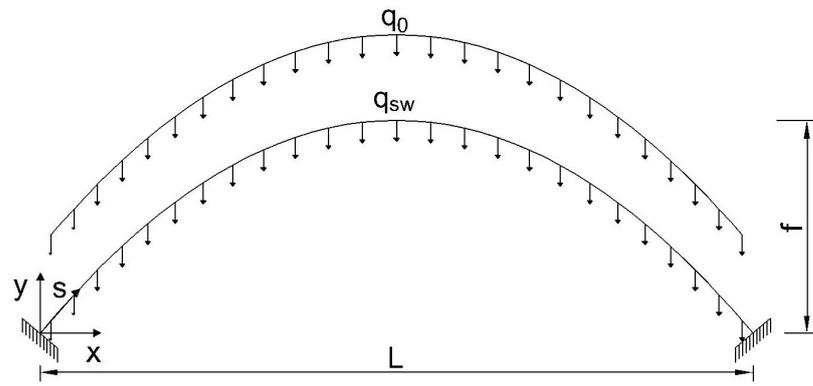
Il caso presentato nel presente sottocapitolo è quello relativo ad un arco a sezione circolare cava variabile in modo quadratico lungo l'ascissa curvilinea  $s$ . Il raggio esterno in corrispondenza delle imposte è pari a  $r_{base} = 0,5m$  mentre in corrispondenza della chiave esso sarà pari a  $r_{chiave} = 0,25m$ . In ogni caso lo spessore della parete rimane sempre il medesimo ed in particolare esso, come nei casi precedenti, sarà pari a  $t = 0,05m$ . Relativamente a tutte le altre caratteristiche, inerenti alla geometria o al materiale adottato, si fa riferimento ai dati riportati precedentemente. L'arco intero sottoposto all'azione del proprio peso  $q_{sw}$ , viene ulteriormente caricato con un carico variabile  $q_0$ , il quale è sottoposto ad incrementi successivi fino a quando il valore da esso raggiunto è tale per cui si abbia un primo snervamento. Tale condizione si verifica nella sezione di mezzeria e quindi in corrispondenza della chiave dell'arco. Pertanto in tale punto la condizione  $\sigma^{VM} = f_y$  viene raggiunta

tramite l'applicazione del carico  $q_0 = q_{y1} = 195kN/m$ . Al fine di modellare il danneggiamento, a causa del raggiungimento della tensione di snervamento, si procede con l'introduzione di una molla rotazionale elastica la cui rigidezza flessionale viene valutata come indicato nel Caso I del capitolo 7 e quindi pari a  $k_1 = 7607kNm/rad$ . Una volta introdotto questo vincolo interno, naturalmente varia lo schema strutturale, che causa quindi una variazione della distribuzione delle tensioni. Valutando dunque i risultati ottenuti, si nota chiaramente come le sezioni più sollecitate siano quelle in corrispondenza dei nodi posti alla base dell'arco, pertanto in questo caso non verrà effettuata una decurtazione della rigidezza flessionale della prima molla inserita, infatti il danneggiamento risulta essere già concentrato in corrispondenza di nodi differenti dal primo. Tuttavia il carico  $q_1$  risulta tale da fare superare la soglia di snervamento, di conseguenza, qualora fosse possibile, il carico applicato andrebbe ridotto individuando quindi un valore pari a  $q_2 = 185kN/m$  che comporta il raggiungimento della tensione di snervamento alle basi dell'arco. Di conseguenza si procede all'applicazione delle molle elastiche in corrispondenza dei nodi alla base, la cui posizione determina il valore della rigidezza flessionale che sarà perciò pari a  $k_2 = 70901kNm/rad$ .

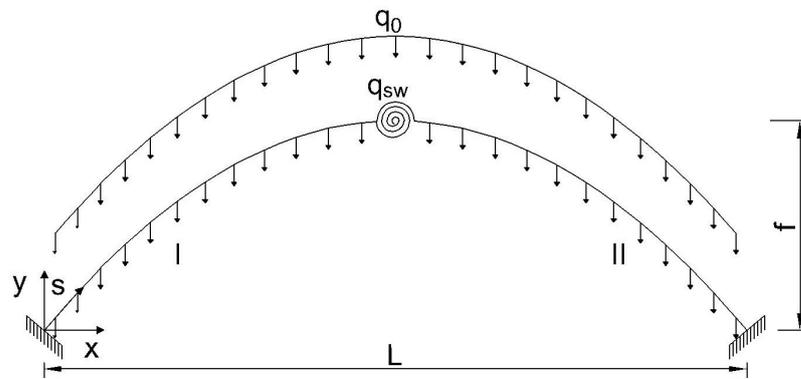
L'introduzione di queste due ulteriori molle rotazionali, comporta nuovamente una variazione dello schema statico, il quale non è in grado di sopportare il carico  $q_2$ , poichè sempre in corrispondenza dei nodi alle imposte si supererebbe ancora il valore di snervamento. Si procede dunque per il caso in esame a ridurre il carico ed individuare un nuovo valore dello stesso da applicare e dunque pari a  $q_3 = 152kN/m$ . Supponendo allora che la tensione di snervamento sia il massimo valore tensionale raggiungibile, escludendo quindi che non si abbia incrudimento, il carico  $q_3$  determina un nuovo danneggiamento in corrispondenza di nodi intermedi e speculari.

Al fine di rendere maggiormente chiaro quanto è stato detto, si riporta in Fig.(9.23)

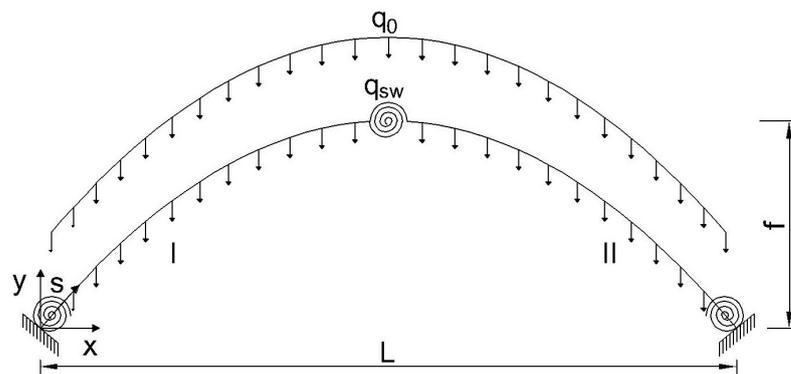
una rappresentazione dei diversi step che forniscono l'evoluzione della risposta della struttura.



(a)



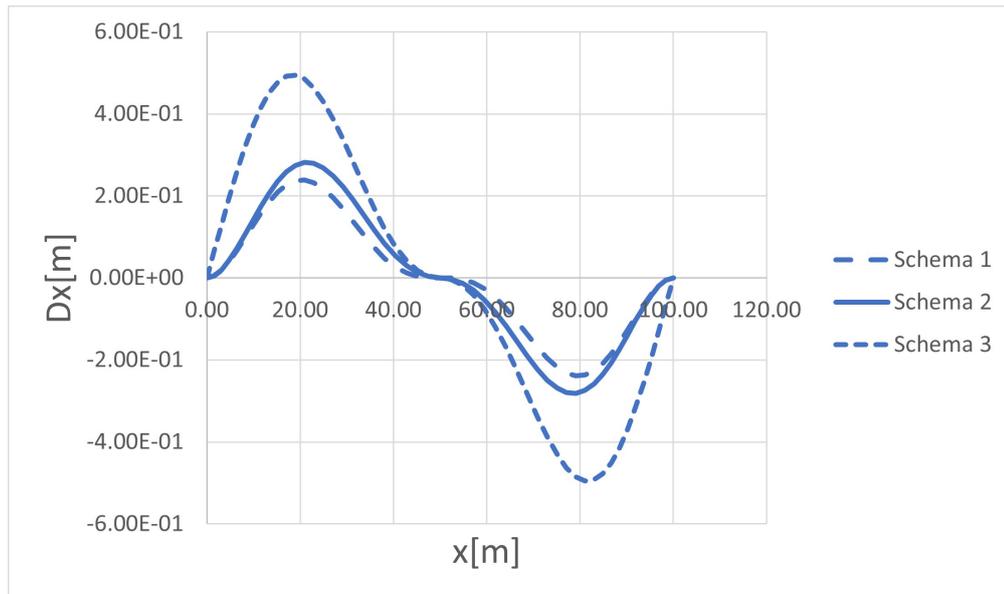
(b)



(c)

**Figura 9.23:** Evoluzione del danneggiamento: Configurazione 1 (a), Configurazione 2 (b), Configurazione 3 (c).

Si procede quindi a riportare i risultati ottenuti tramite il codice Matlab, nell'intento di mostrare come variano gli andamenti delle caratteristiche interne della sollecitazione nonché delle grandezze cinematiche e quindi spostamenti e rotazioni. I risultati ottenuti vengono pertanto riportati nelle figure successivamente mostrate.



**Figura 9.24:** Evoluzione spostamenti  $D_x$

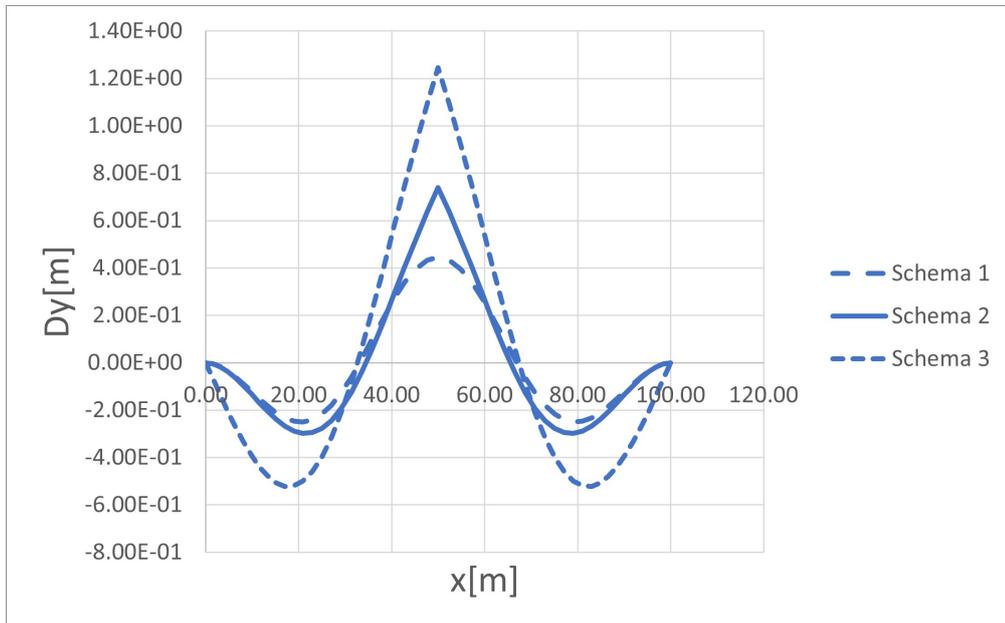


Figura 9.25: Evoluzione spostamenti  $D_y$

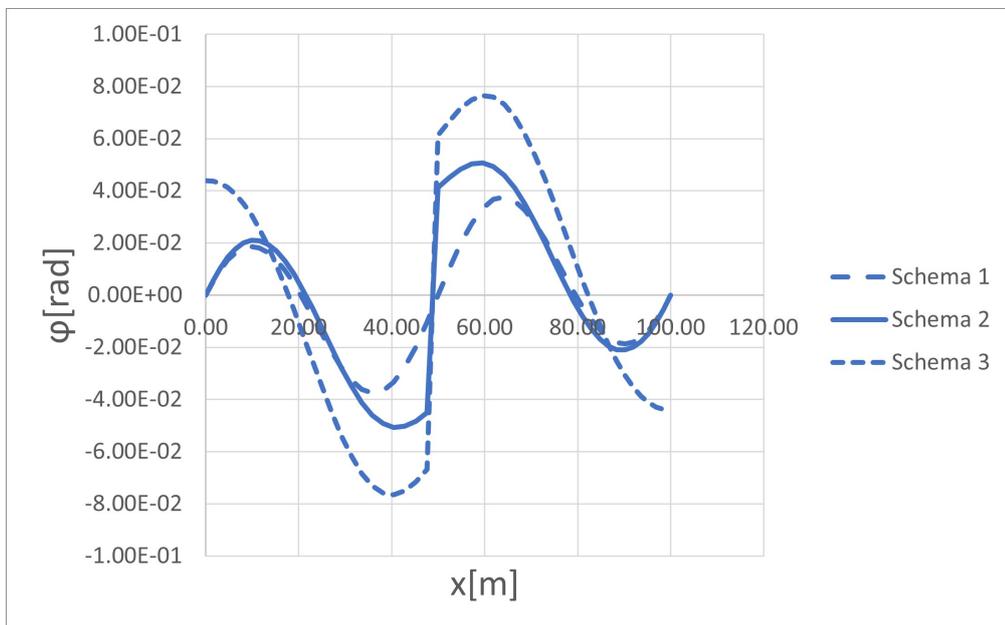


Figura 9.26: Evoluzione rotazioni  $\varphi$

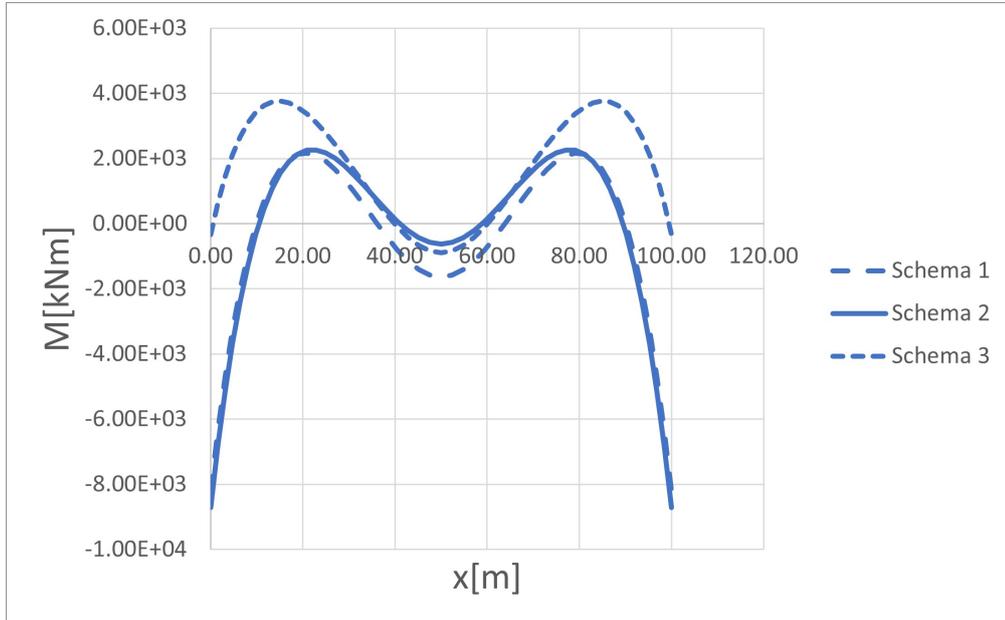


Figura 9.27: Evoluzione momento flettente  $M$

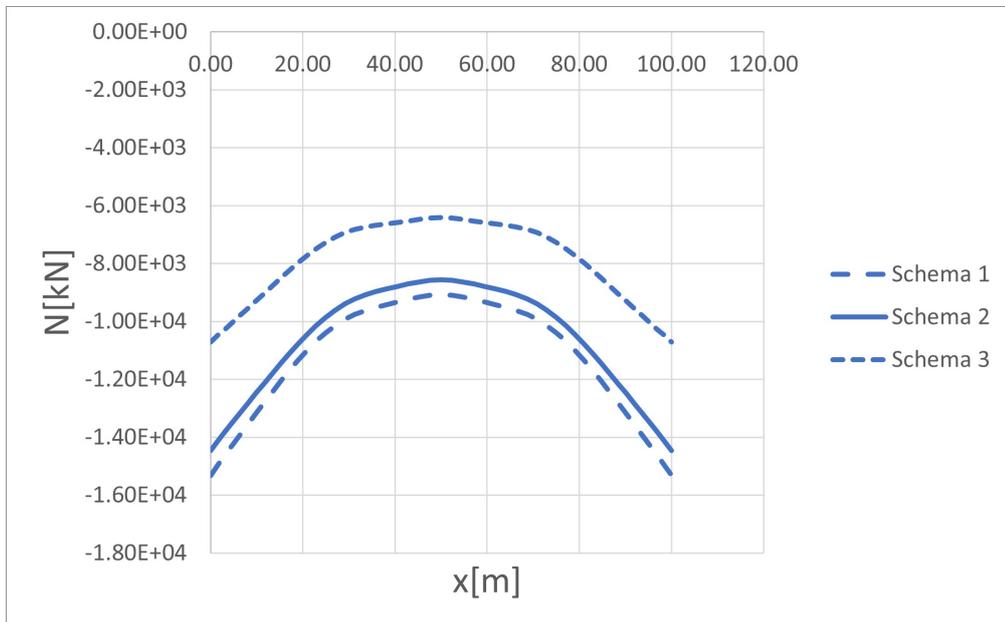
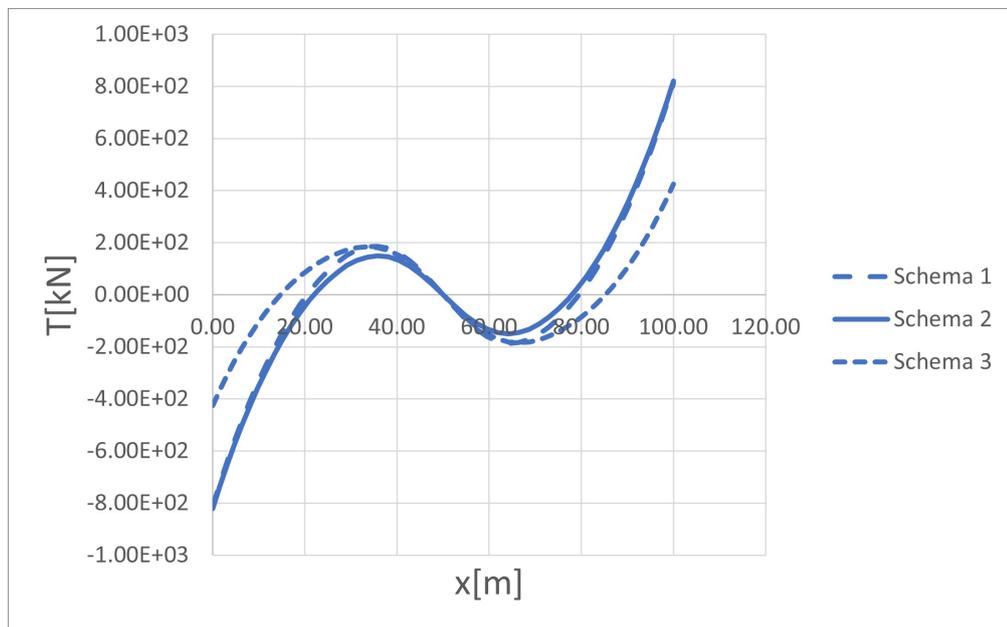
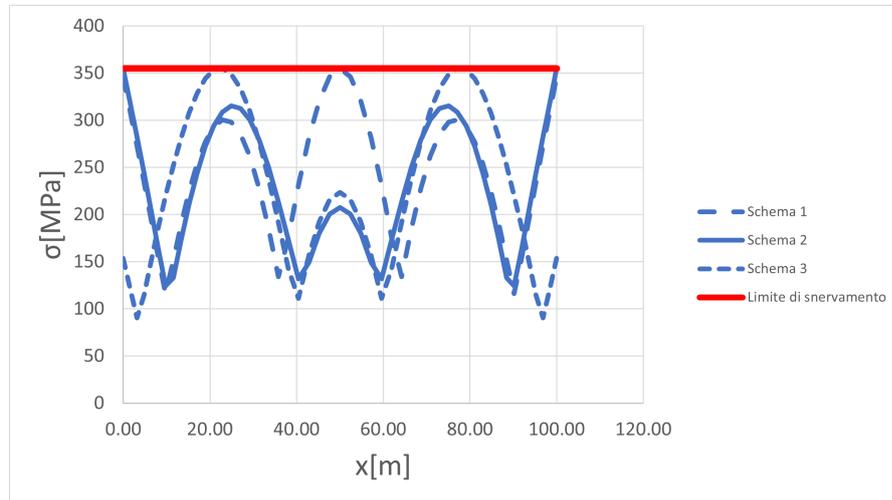


Figura 9.28: Evoluzione sforzo normale  $N$



**Figura 9.29:** Evoluzione sforzo di taglio  $T$

Si vuole inoltre rendere maggiormente chiara l'evoluzione del modello in termini di andamento della tensione, valutando anche il raggiungimento della tensione di snervamento  $f_y$  e per tale motivo si riportano in Fig.(9.30) i dati ottenuti.



**Figura 9.30:** Andamento tensioni alla Von Mises

Si indicano infine le condizioni relative agli andamenti che sono stati mostrati.

- Schema 1:  $q_0 = 195kN/m$
- Schema 2:  $q_0 = 185kN/m$      $k_{chiave} = 7607kNm/rad$
- Schema 3:  $q_0 = 152kN/m$      $k_{chiave} = 7607kNm/rad$      $k_{base} = 70901kNm/rad$

Con lo studio condotto, relativamente al caso mostrato, si può supporre dunque che il danneggiamento avvenga in corrispondenza delle sezioni maggiormente sollecitate. A seguito della variazione dello schema statico quindi variano le sezioni sottoposte ad uno stato tensionale più gravoso. Pertanto con la rigidità flessionale individuata come mostrato precedentemente e considerando l'avanzamento del danneggiamento è possibile individuare il carico  $q_3$ , come quello massimo a cui la struttura può essere soggetta affinché le sole sezioni danneggiate siano quella

in chiave e quelle alle basi dell'arco. Ad ogni modo, come nel caso precedente, è possibile notare che il verificarsi della condizione di danneggiamento, introdotto con l'applicazione delle molle rotazionali, comporta una variazione dello schema statico. Differentemente dal caso precedente però in questo caso, per poter raggiungere la tensione di snervamento ma evitando che essa venga superata, è necessario diminuire il carico. In conclusione un carico maggiore di quello indicato con  $q_3$  comporterebbe il verificarsi di una nuova condizione di snervamento che avverrebbe in sezioni differenti dalle precedenti. Naturalmente il progredire del danneggiamento inteso come precedentemente descritto, comporta un aumento degli spostamenti come verificabile dai grafici precedentemente riportati.

In questo caso il carico  $q_3$ , può essere inteso come quello massimo applicabile, supponendo che il danneggiamento avvenga nelle zone in cui si registra la massima tensione  $\sigma^{VM}$ , nonostante essa sia inferiore al limite di snervamento.

## Capitolo 10

# Analisi di archi in legno lamellare

Gli archi in legno lamellare sono delle tipiche strutture utilizzate molto spesso per la realizzazione di impianti sportivi.

Sicuramente il legno risulta un'ottima scelta se relazionata ai concetti di struttura ecologica. Infatti tale materiale risulta una buona soluzione rispetto ad altri comunemente utilizzati, in termini di costo di produzione ambientale e di smaltimento.

Le strutture in esame sono molto spesso realizzate per mezzo dell'unione di un differente numero di elementi curvi, connessi fra di loro per mezzo di giunti di diversa tipologia, i quali quindi garantiscono la trasmissione degli sforzi. Le motivazioni legate all'utilizzo di più elementi possono essere diverse e sicuramente la principale è dovuta a problemi di trasporto. In questo senso in funzione delle necessità si potranno avere diversi elementi collegati fra di loro per mezzo, molto spesso, di giunzioni in acciaio in numero differente, compreso generalmente fra uno e quattro, escludendo le connessioni alle reni.

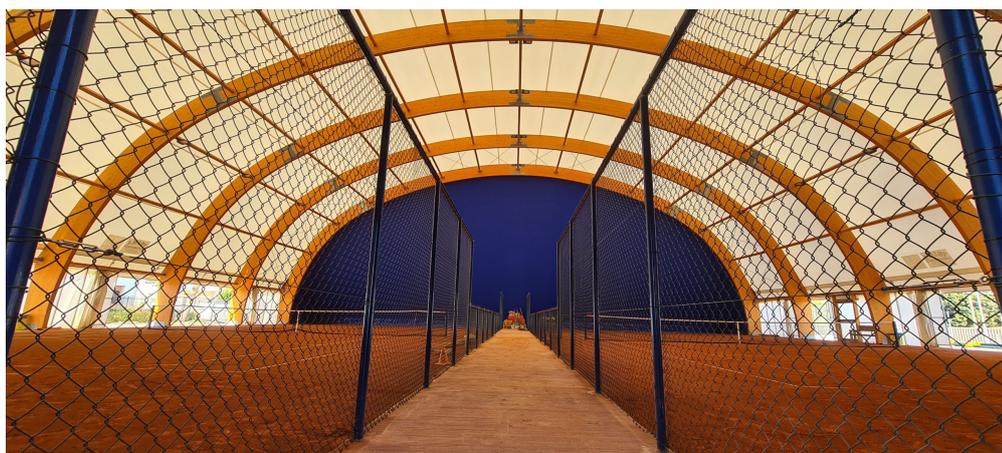
Gli archi in legno lamellare si presentano ovviamente con delle sezioni piene perlopiù di forma quadrata o più frequentemente rettangolare, di conseguenza risulta abbastanza agevole realizzare dei giunti a coprigiunto, i quali sono pertanto scelti con una elevata frequenza.

Le strutture oggetto di studio sono molto spesso adottate per ricoprire luci moderate con un limite massimo individuabile in modo approssimativo intorno ai 60 m. Conseguentemente a ciò anche l'altezza non raggiungerà valori molto elevati e non avendo informazioni sufficienti a riguardo può essere individuata approssimativamente intorno ai 10-20 m.

Al fine di rendere maggiormente chiaro quanto detto, si riportano di seguito delle figure che meglio possano rappresentare quanto esposto.



**Figura 10.1:** Impianto "Prima sport & Fun" I



**Figura 10.2:** Impianto "Prima sport & Fun" II

L'intento principale nel presente capitolo è quello di effettuare un'analisi statistica relativamente a questa particolare tipologia di struttura. In accordo con la trattazione condotta fino ad ora, l'intenzione è quella di introdurre il vincolo interno molla rotazionale al fine di considerare la presenza dei giunti di connessione. Essi verranno intesi come giunti semi-rigidi e per tale motivo già nella configurazione di partenza ad essi sarà associata una data rigidità flessionale.

Successivamente si suppone che tali giunti possano andare incontro ad un decremento della loro rigidità flessionale a seguito di un danneggiamento. In questo senso, per quanto detto, il pattern di danneggiamento rimane sempre il medesimo ed automaticamente identificato per mezzo dell'individuazione della posizione delle connessioni.

Al fine di voler analizzare il comportamento strutturale secondo un'analisi statistica, in funzione del danneggiamento subito dalle connessioni, si intende individuare una serie di rigidità flessionali da attribuire a ciascuna molla, in modo da considerare diverse configurazioni di danneggiamento. Una volta completata quest'operazione si intenderà valutare la frequenza con cui ogni sezione presenterà il massimo delle seguenti grandezze:

- $D_x$  = Spostamenti lungo la direzione orizzontale
- $D_y$  = Spostamenti lungo la direzione verticale
- $\varphi$  = Rotazione
- $\sigma_c$  = Tensione di compressione
- $\sigma_t$  = Tensione di trazione
- $\tau$  = Tensione tangenziale

## 10.1 Caratteristiche generali dell'arco

Le valutazioni che si intendono condurre devono essere previste per una particolare tipologia di arco, per il quale devono essere determinate le caratteristiche geometriche come forma complessiva, forma e dimensioni della sezione e legge di variazione da associare alla sezione lungo l'ascissa curvilinea  $s$ . Inoltre deve essere compiutamente definito il materiale che si intende adottare fra le varie possibilità che si presentano. Si intende sottolineare inoltre che l'arco analizzato sarà soggetto al solo peso proprio  $q_{sw}$ .

### 10.1.1 Caratteristiche del materiale

Partendo dall'ultima considerazione effettuata, la tipologia di legno lamellare più di frequente utilizzata è la **GL24h**, la quale sarà adottata per lo studio in esame. Tale sigla sta per "Glued laminated timber", mentre il numero indicato di seguito indica la resistenza a flessione espressa in MPa ed infine la lettera  $h$  specifica che il legno lamellare è omogeneo e quindi le lamelle utilizzate appartengono alla medesima classe di resistenza.

Al fine di avere un quadro chiaro in merito alle caratteristiche meccaniche di tale materiale, viene riportata di seguito la tabella estrapolata da **EN 14080:2013**

EN 14080: 2013 "strutture di legno - legno lamellare incollato"

Elementi in legno lamellare (5.3.17): elementi strutturali composti da almeno due lamelle aventi fibratura indicativamente parallela con spessore delle stesse compreso tra i 6mm e i 45 mm (incluso)

Proprietà		GL20h	GL22h	GL24h	GL26h	GL28h	GL30h	GL32h
Resistenze (MPa)		N/mm <sup>2</sup>						
Flessione	$f_{m,g,k}$	20.00	22.00	24.00	26.00	28.00	30.00	32.00
trazione parallela alla fibratura	$f_{t,0,g,k}$	16.00	17.60	19.20	20.80	22.30	24.00	25.60
trazione perpendicolare alla fibratura	$f_{t,90,g,k}$	0.50	0.50	0.50	0.50	0.50	0.50	0.50
compressione parallela alla fibratura	$f_{c,0,g,k}$	20.00	22.00	24.00	26.00	28.00	30.00	32.00
compressione perpendicolare alla fibratura	$f_{c,90,g,k}$	2.50	2.50	2.50	2.50	2.50	2.50	2.50
Taglio	$f_{v,g,k}$	3.50	3.50	3.50	3.50	3.50	3.50	3.50
Rototaglio	$f_{r,g,k}$	1.20	1.20	1.20	1.20	1.20	1.20	1.20
Modulo elastico [GPa]		N/mm <sup>2</sup>						
modulo elastico medio parallelo alle fibre	$E_{0,g,mean}$	8,400.00	10,500.00	11,500.00	12,100.00	12,600.00	13,600.00	14,200.00
modulo elastico caratteristico parallelo alle fibre	$E_{0,g,05}$	7,000.00	8,800.00	9,600.00	10,100.00	10,500.00	11,300.00	11,800.00
modulo elastico medio perpendicolare alle fibre	$E_{90,g,mean}$	300.00	300.00	300.00	300.00	300.00	300.00	300.00
modulo elastico caratteristico perpendicolare alle fibre	$E_{90,g,05}$	250.00	250.00	250.00	250.00	250.00	250.00	250.00
modulo di taglio medio	$G_{g,mean}$	650.00	650.00	650.00	650.00	650.00	650.00	650.00
modulo di taglio caratteristico	$G_{g,05}$	540.00	540.00	540.00	540.00	540.00	540.00	540.00
Modulo a rototaglio medio	$G_{r,g,mean}$	65.00	65.00	65.00	65.00	65.00	65.00	65.00
Modulo a rototaglio caratteristico	$G_{r,g,05}$	54.00	54.00	54.00	54.00	54.00	54.00	54.00
Massa volumica [kg/m <sup>3</sup> ]		kg/m <sup>3</sup>						
massa volumica caratteristica	$\rho_{g,k}$	340.00	370.00	385.00	405.00	425.00	430.00	440.00
massa volumica media	$\rho_{g,mean}$	370.00	410.00	420.00	445.00	460.00	480.00	490.00

Figura 10.3: Tabella EN 14080:2013

Da essa è possibile quindi facilmente individuare il significato dei parametri di principale interesse che verranno di seguito riportati.

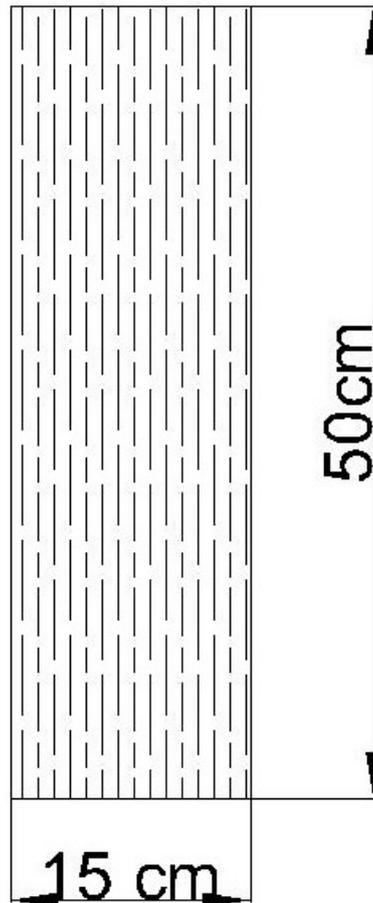
- $f_{m,g,k} = 24MPa$
- $f_{t,0,g,k} = 19,20MPa$
- $f_{c,0,g,k} = 24MPa$
- $f_{v,g,k} = 3,5MPa$
- $E_{0,g,mean} = 11,5GPa$

### 10.1.2 Caratteristiche geometriche dell'arco

L'arco oggetto di studio, presenta una forma circolare definita per mezzo della luce dell'arco e della sua altezza in mezzeria, rispettivamente pari a  $L = 50m$  e  $f = 10m$ . Per quanto concerne la sezione, essa sarà intesa costante lungo l'ascissa curvilinea  $s$ .

La forma della sezione trasversale viene supposta rettangolare piena ed avente

altezza  $r_1 = 50\text{cm}$  e base  $r_2 = 15\text{cm}$ , essa può essere visibile in Fig.(10.4).

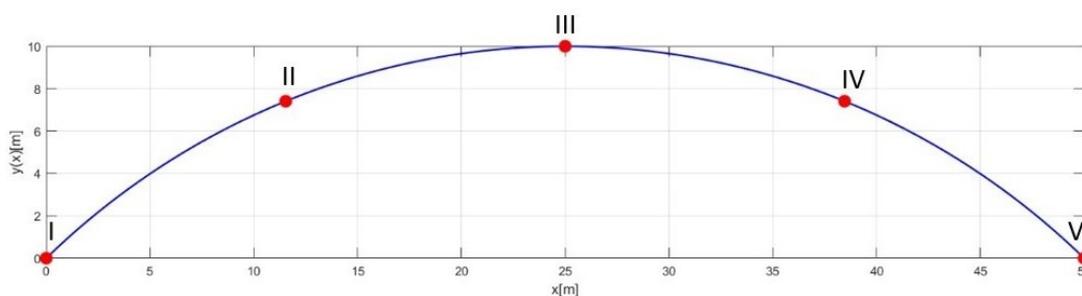


**Figura 10.4:** Sezione arco in legno lamellare

a partire da tale sezione è quindi possibile individuare un peso proprio pari a  $q_{sw} = 0.315\text{kN/m}$

### 10.1.3 Configurazione di danneggiamento e valutazione rigidità

Come specificato precedentemente, i giunti della struttura vengono intesi come semi-rigidi, di conseguenza il pattern di danneggiamento viene automaticamente determinato a partire dalla posizione degli stessi. Si suppone quindi che vi sia la presenza di tre giunti intermedi e di due ulteriori giunti in corrispondenza delle imposte, per un totale complessivo di cinque connessioni, come per il caso della struttura riportata in Fig.(10.2). Viene inoltre ipotizzata la posizione reale delle giunzioni che non vede una loro equispaziatura. Si riporta quindi in Fig.(10.5) una rappresentazione dello schema strutturale in cui sono altresì visibili i punti in cui viene introdotta la molla rotazionale, mentre in Tab.10.1, viene riportata la posizione dei giunti rispetto al sistema di riferimento globale.



**Figura 10.5:** Schema strutturale e pattern di danneggiamento

Posizione giunti x[m]				
0	11,54	25	38,46	50

**Tabella 10.1:** Posizione baricentro giunti

Relativamente alla rigidità da associare alle molle rotazionali, si sfrutta la

relazione (7.7) che per facilità viene riportata di seguito.

$$k = \frac{EI_{ND}}{L_D} \frac{1 - \delta}{\delta} \quad (10.1)$$

Si ricorda che:

- $E$  : Modulo elastico del materiale
- $I_{ND}$ : Momento di inerzia della sezione non danneggiata
- $\delta$ : Variazione relativa della rigidezza flessionale
- $L_D$ : Estensione della zona danneggiata

In particolare si suppone che la zona danneggiata coincida con l'intera estensione del giunto, la quale viene supposta essere pari a 500mm e di conseguenza  $L_D = 50cm$ . L'equazione mostrata viene sfruttata per determinare una rigidezza flessionale di partenza che quindi sarà determinabile tramite la seguente relazione:

$$k = \frac{EI_{ND}}{L_D} \quad (10.2)$$

## 10.2 Analisi statistica I

L'analisi statistica che si vuole condurre, è atta a valutare il comportamento statico della struttura, soggetto ad un pattern di danneggiamento visibile in Fig.(10.5). In questo senso l'intento principale è quello di individuare diverse configurazioni di danneggiamento cui la struttura viene soggetta e di conseguenza valutare la risposta strutturale della stessa.

La differenza fra le diverse configurazioni di danneggiamento è basata sull'individuazione di differenti rigidezze flessionali da associare a ciascuna molla presente. Il processo relativo a questa procedura è di tipo randomico.

Si individua allora una percentuale che rappresenta una aliquota di rigidità flessionale rispetto al valore di partenza, in corrispondenza di ogni molla. Tale modo di procedere si basa invece sul metodo proposto da [18], in cui però il coefficiente  $c$  di riduzione del momento di inerzia viene determinato per mezzo di una estrazione randomica. Essa avviene a partire da una distribuzione di tipo uniforme, tale per cui i valori che il coefficiente  $c$  può assumere, sono estratti dall'intervallo  $[0,2;0,9]$  e quindi si suppone che la rigidità flessionale possa variare dal 90% al 20% rispetto a quella iniziale. L'estrazione avviene un numero di volte pari a centocinquanta il che significa ottenere il medesimo numero di configurazioni di danneggiamento.

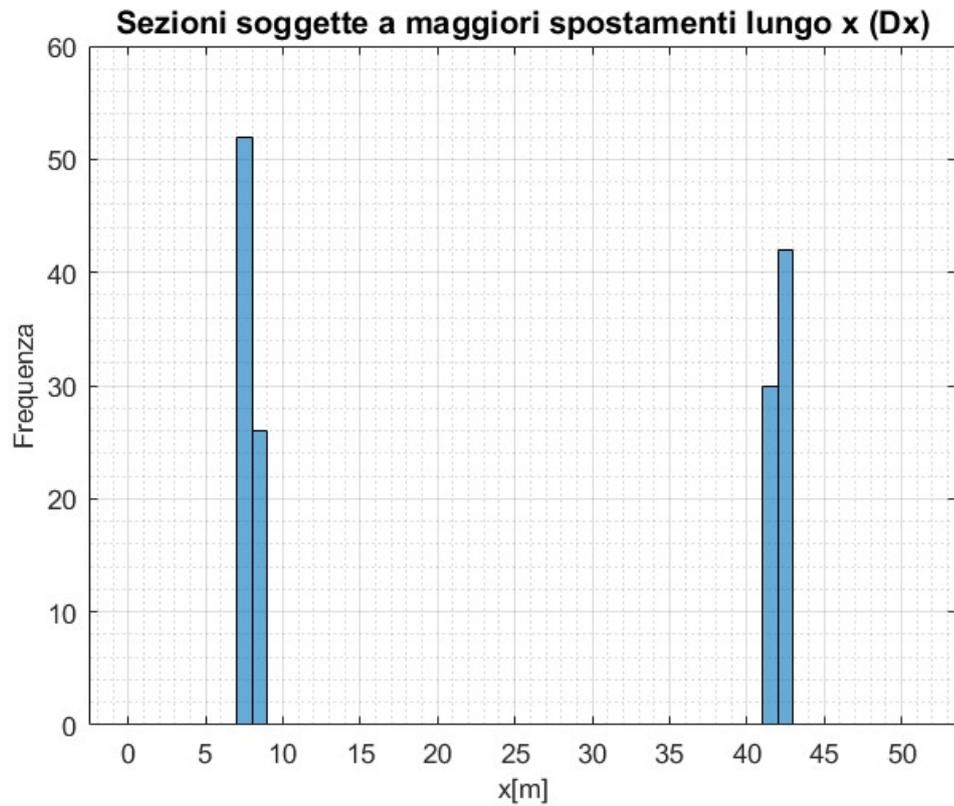
Una volta ottenute tutte le centocinquanta percentuali per ogni molla, è possibile definire compiutamente ogni configurazione di danneggiamento poichè risultano compiutamente individuate le rigidità flessionali da associare a ciascuna molla.

Il metodo presentato, come facilmente comprensibile, non tiene conto di tutti gli effetti derivanti dalla presenza di un giunto, inclusa la sua reale rigidità flessionale di partenza che ne determina il momento resistente. Di conseguenza il metodo utilizzato risulta essere semplificato con il solo intento di valutare statisticamente il comportamento della struttura tenendo conto della presenza di più molle rotazionali le quali possono assumere quindi differenti rigidità.

Analizzati i concetti principali legati a tale analisi si procede quindi a mostrare i risultati ottenuti.

### 10.2.1 Spostamenti lungo la direzione $x$ : $D_x$

Per quanto concerne gli spostamenti orizzontali lungo la direzione  $x$  e indicati con  $D_x$ , l'analisi ha portato ai risultati visibili in Fig.(10.6).



**Figura 10.6:** Analisi  $D_x$

Dall'istogramma presentato si nota che le zone dell'arco che presentano i maggiori spostamenti in valore assoluto lungo la direzione  $x$ , sono comprese fra i 7,55m e gli 8,03m e fra i 42m e 42,5m. Dato che l'unico carico applicato risulta essere il peso proprio e che le molle rotazionali sono posizionate in modo simmetrico, si ottengono chiaramente delle zone sottoposte ai maggiori spostamenti  $D_x$ , anch'esse simmetriche rispetto all'asse di simmetria della struttura.

Dalle analisi condotte inoltre emerge che la configurazione che determina il maggiore spostamento  $D_x$  è quella per cui si hanno i seguenti valori di percentuale di rigidità flessionale relativi al valore inizialmente individuato:

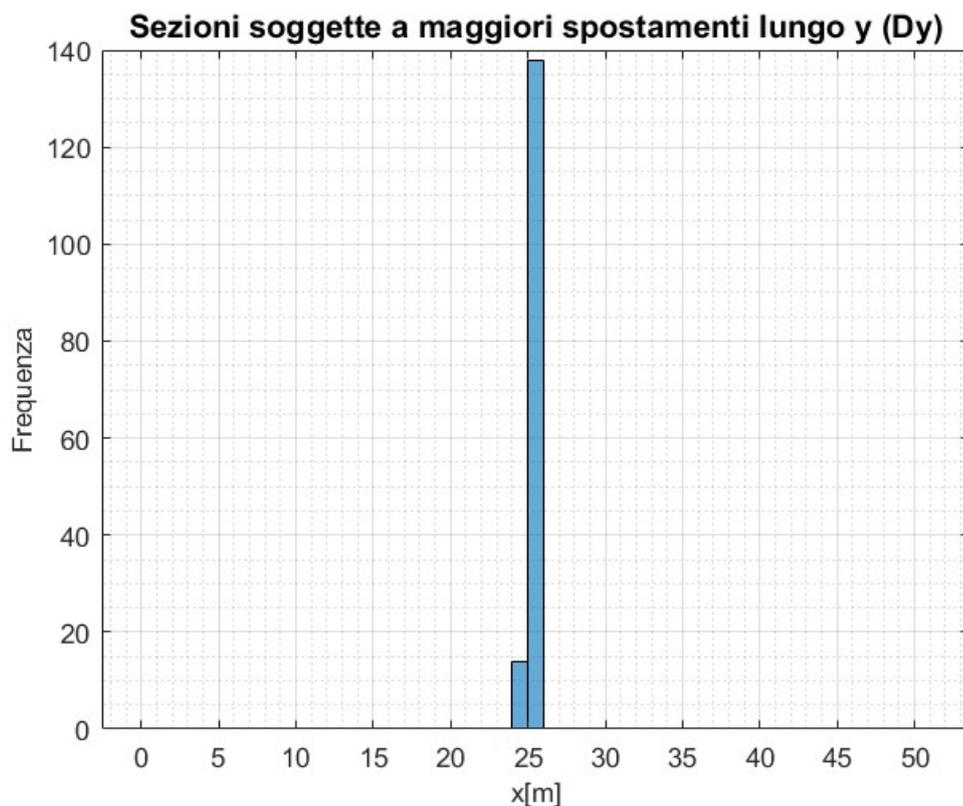
$\%I[\%]$	$\%II[\%]$	$\%III[\%]$	$\%IV[\%]$	$\%V[\%]$
74	57	25	34	21

**Tabella 10.2:** Percentuali rigidezza flessionale

In corrispondenza di tale configurazione, la sezione sottoposta al maggiore spostamento  $D_x$ , risulta essere posta in corrispondenza di  $x = 42,45m$ , in cui si registra uno spostamento pari a  $0,16mm$ .

### 10.2.2 Spostamenti lungo la direzione $y$ : $D_y$

Relativamente agli spostamenti verticali lungo la direzione  $y$  e indicati con  $D_y$ , l'analisi conduce ai risultati visibili in Fig.(10.7).



**Figura 10.7:** Analisi  $D_y$

Dall'istogramma presentato si nota che le zone dell'arco che presentano i maggiori spostamenti in valore assoluto lungo la direzione  $y$ , sono in corrispondenza di  $x = 25m$ . In questo caso si nota che la presenza dei giunti non varia il comportamento strutturale complessivo della struttura, la quale presenta i maggiori spostamenti in corrispondenza della mezzeria.

Dalle analisi condotte inoltre emerge che la configurazione che determina il maggiore spostamento  $D_y$  è quella per cui si hanno i seguenti valori di percentuale di rigidità flessionale:

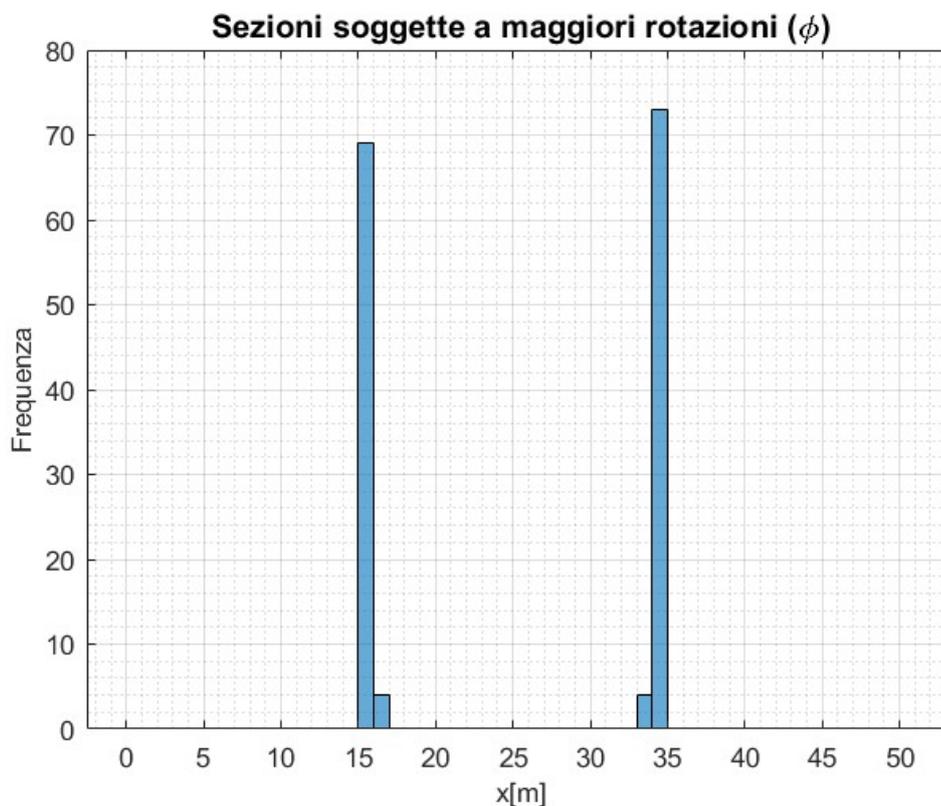
$\%I$ [%]	$\%II$ [%]	$\%III$ [%]	$\%IV$ [%]	$\%V$ [%]
32	24	31	47	21

**Tabella 10.3:** Percentuali rigidezza flessionale

In corrispondenza di tale configurazione, la sezione sottoposta al maggiore spostamento  $D_y$ , risulta essere posta in corrispondenza di  $x = 25m$ , e quindi in mezzeria, in cui si registra uno spostamento pari a  $35mm$ .

### 10.2.3 Rotazioni: $\varphi$

Per quanto concerne le rotazioni, indicate con  $\varphi$ , l'analisi conduce ai risultati visibili in Fig. (10.8).



**Figura 10.8:** Analisi  $\varphi$

Dall'istogramma presentato si nota che le zone dell'arco che presentano le maggiori rotazioni in valore assoluto, sono comprese fra la posizione  $x = 15,2m$  e la posizione  $x = 15,7m$  e fra le posizioni  $x = 34,3$  e  $x = 34,8m$ .

Dalle analisi condotte inoltre emerge che la configurazione che determina la maggiore rotazione  $\varphi$  è quella per cui si hanno i seguenti valori di percentuale di rigidità flessionale:

$\%I$ [%]	$\%II$ [%]	$\%III$ [%]	$\%IV$ [%]	$\%V$ [%]
74	57	25	34	21

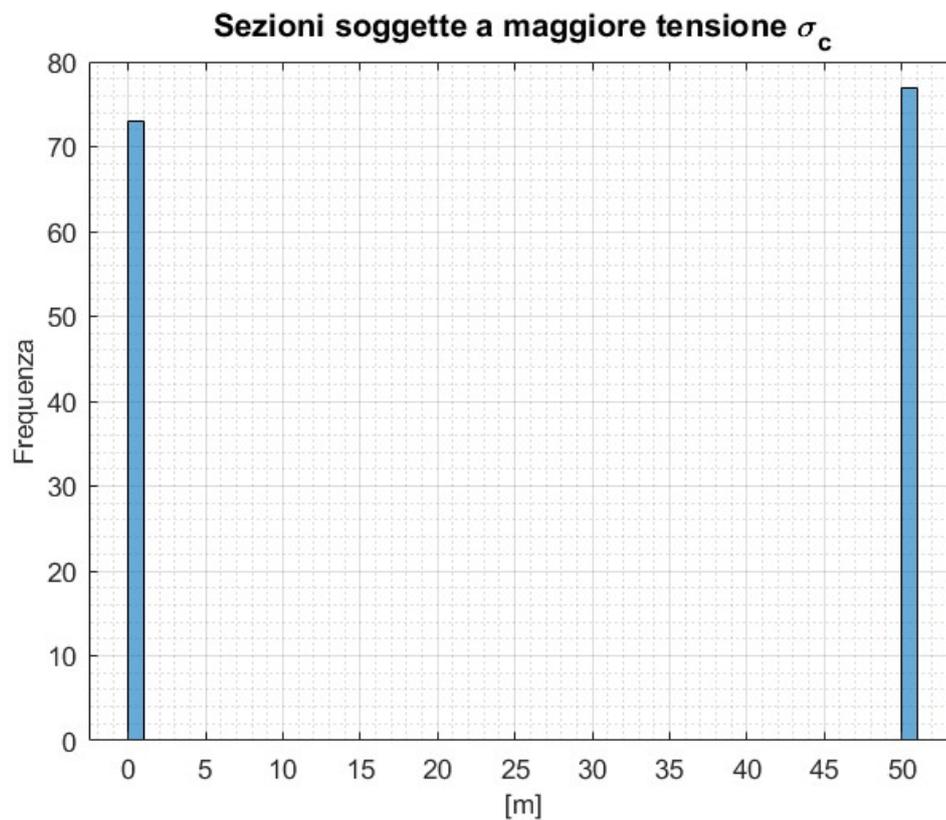
**Tabella 10.4:** Percentuali rigidità flessionale

In corrispondenza di tale configurazione, la quale causa anche il raggiungimento

del massimo spostamento  $D_x$ , la sezione sottoposta alla maggiore rotazione  $\varphi$ , risulta essere posta in corrispondenza di  $x = 34,3m$ , in cui si registra una rotazione pari a  $4,66 * 10^{-4}rad$ .

### 10.2.4 Tensioni longitudinali di compressione: $\sigma_c$

In merito alle tensioni longitudinali di compressione, l'analisi conduce ai risultati visibili in Fig.(10.9).



**Figura 10.9:** Analisi  $\sigma_c$

Dall'istogramma presentato si nota che le zone dell'arco che presentano le maggiori tensioni di compressione sono individuate perfettamente in corrispondenza

delle reni dell'arco e quindi nelle posizioni  $x = 0$  e  $x = 50m$ .

Dalle analisi condotte inoltre emerge che la configurazione che determina le maggiori tensioni di compressione  $\sigma_c$  è quella per cui si hanno i seguenti valori di percentuale di rigidità flessionale.

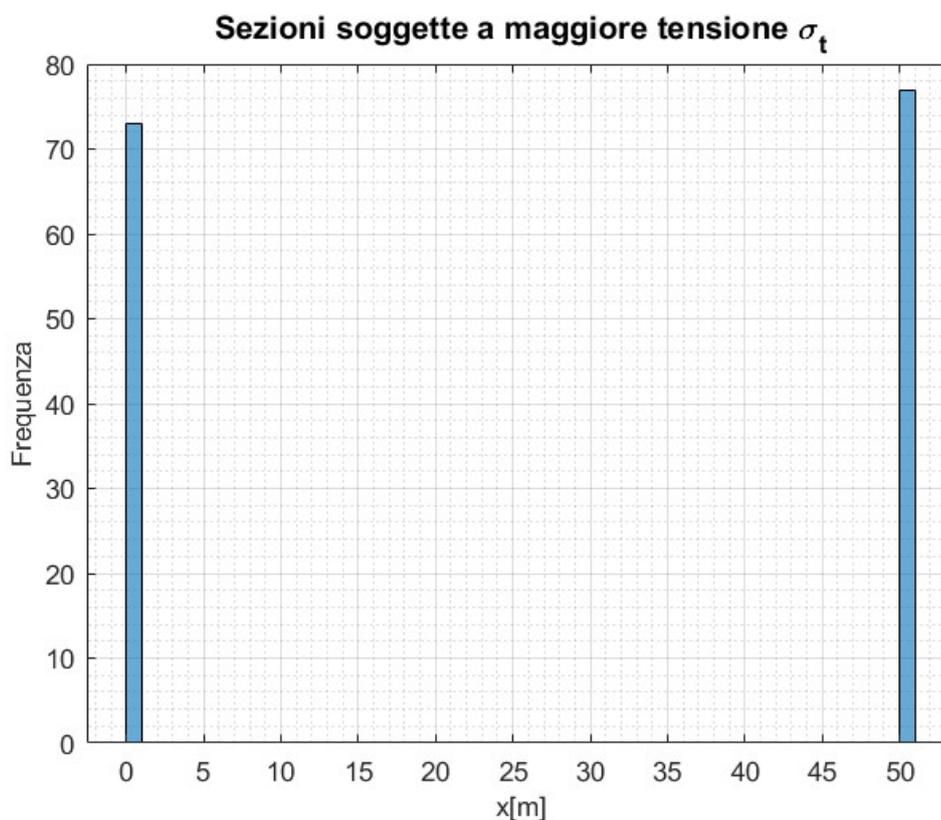
$\%I$ [%]	$\%II$ [%]	$\%III$ [%]	$\%IV$ [%]	$\%V$ [%]
87	32	20	82	79

**Tabella 10.5:** Percentuali rigidità flessionale

In corrispondenza di tale configurazione, la sezione sottoposta alla maggiore tensione di compressione  $\sigma_c$ , risulta essere posta in corrispondenza di  $x = 0m$ , in cui si registra una tensione pari a  $0,57MPa$ , ampiamente al di sotto del valore massimo ammissibile  $\sigma_c = 24MPa$ .

### 10.2.5 Tensioni longitudinali di trazione: $\sigma_t$

La struttura si comporta nel medesimo modo analizzato precedentemente, anche nei riguardi delle tensioni longitudinali di trazione, come facilmente visibile dai risultati presentati in Fig.(10.10).



**Figura 10.10:** Analisi  $\sigma_t$

In questo modo le sezioni maggiormente sollecitate si troveranno in corrispondenza delle imposte dell'arco, e allo stesso modo la configurazione che determina le maggiori tensioni di trazione  $\sigma_t$  è naturalmente la medesima della precedente. Si riportano per completezza i valori di percentuale di rigidezza, rispetto al valore iniziale:

$\%I$ [%]	$\%II$ [%]	$\%III$ [%]	$\%IV$ [%]	$\%V$ [%]
87	32	20	82	79

**Tabella 10.6:** Percentuali rigidezza flessionale

In corrispondenza di tale configurazione, la sezione sottoposta alla maggiore tensione di trazione  $\sigma_t$ , risulta essere posta in corrispondenza di  $x = 0$ , in cui si

registra una tensione pari a  $0,21MPa$ , ampiamente al di sotto del valore massimo ammissibile  $\sigma_t = 19,2MPa$ .

### 10.2.6 Tensioni tangenziali: $\tau_c$

Le medesime sezioni individuate nei precedenti due casi, sono anche soggette alle maggiori tensioni tangenziali come facilmente visibile dai risultati riportati in Fig.(10.11).

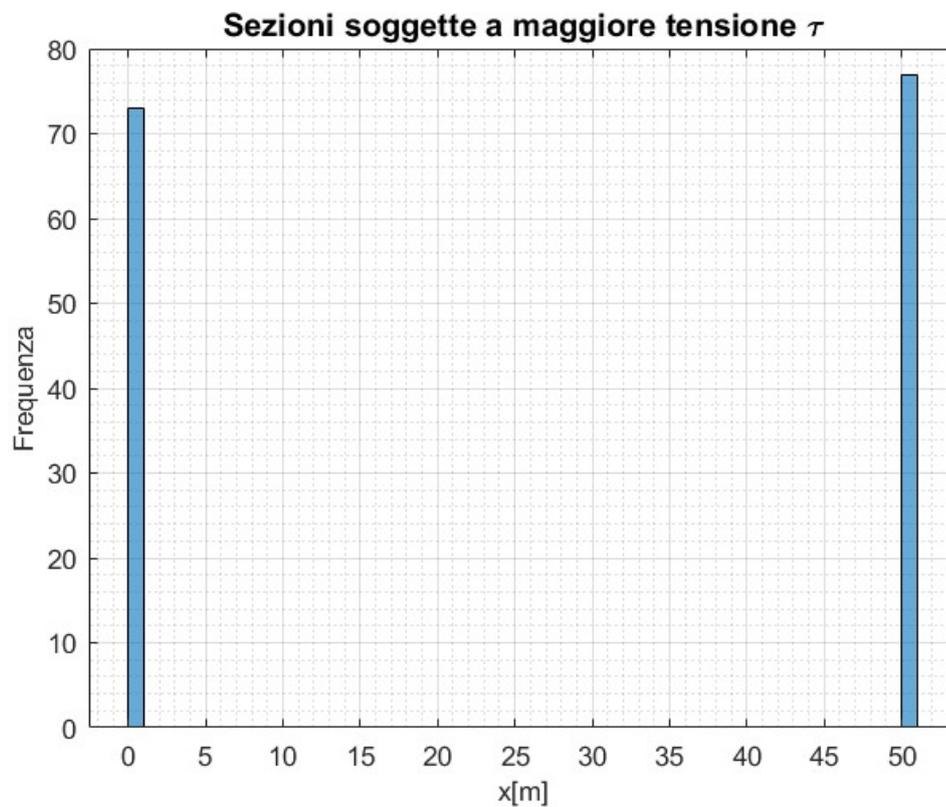


Figura 10.11: Analisi  $\tau$

In questo modo le sezioni soggette alle maggiori tensioni tangenziali si troveranno nuovamente in corrispondenza delle imposte dell'arco, e allo stesso modo la

configurazione che determina le maggiori tensioni tangenziali  $\tau$  è la medesima della precedente; si riportano per completezza i valori di percentuale di rigidità rispetto al valore iniziale:

$\%I$ [%]	$\%II$ [%]	$\%III$ [%]	$\%IV$ [%]	$\%V$ [%]
87	32	20	82	79

**Tabella 10.7:** Percentuali rigidità flessionale

In corrispondenza di tale configurazione, la sezione sottoposta alla maggiore tensione tangenziale  $\sigma_c$ , risulta essere posta in corrispondenza di  $x = 0$ , in cui si registra una tensione pari a  $0,02MPa$ , ampiamente al di sotto del valore massimo ammissibile  $\tau = 3,5MPa$ .

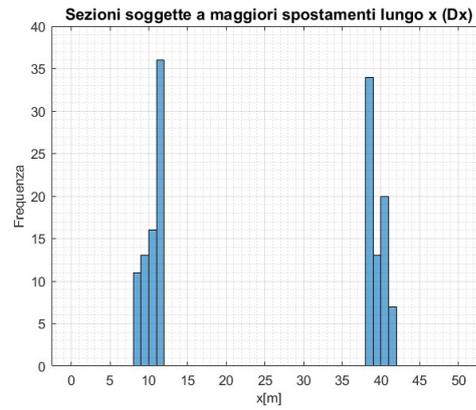
### 10.3 Analisi statistica II

I risultati ottenuti mostrano come il comportamento strutturale dell'arco, nonostante la presenza delle molle rotazionali inserite, sia sostanzialmente identico a quello relativo ad una struttura integra. La motivazione non risiede nel fatto che i vincoli interni introdotti non apportano alcuna modifica, bensì che la loro rigidità flessionale risulta ancora abbastanza elevata da fornire delle soluzioni che si avvicinano a quelle in presenza di un vincolo di incastro interno in corrispondenza dei giunti stessi.

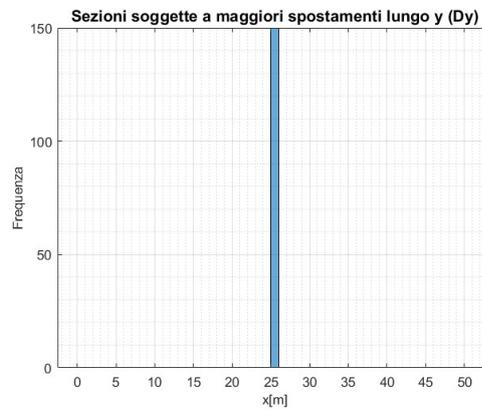
Sulla base di queste motivazioni si intende allora diminuire di un ordine di grandezza le rigidità flessionali di partenza, mostrando le variazioni rispetto alle analisi precedentemente condotte.

### **10.3.1 Analisi dati**

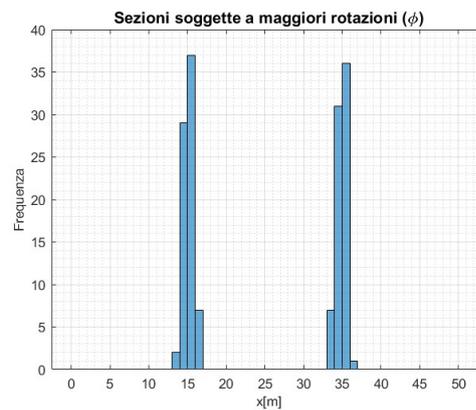
Si intende quindi commentare i risultati ottenuti, a seguito della variazione detta, come visibile in Fig.(10.12), in cui si riportano gli istogrammi relativi alle grandezze cinematiche  $D_x$ ,  $D_y$ ,  $\varphi$  e in Fig.(10.13), in cui invece sono stati riportati gli istogrammi relativi alle tensioni  $\sigma_c$ ,  $\sigma_t$ ,  $\tau$ .



(a)

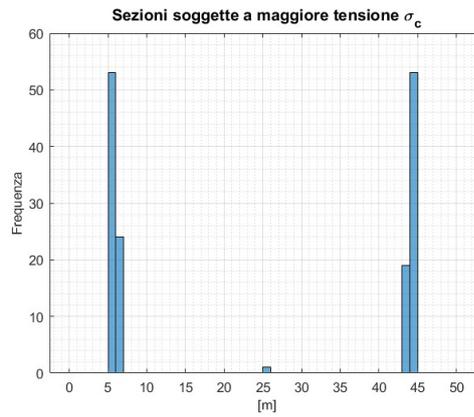


(b)

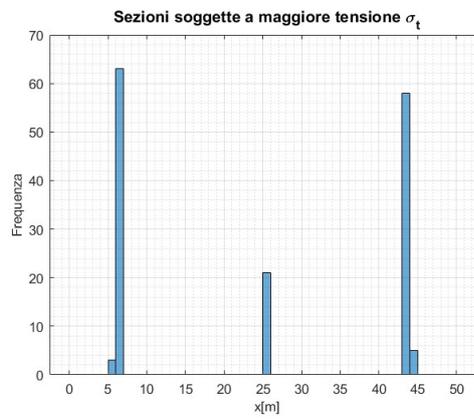


(c)

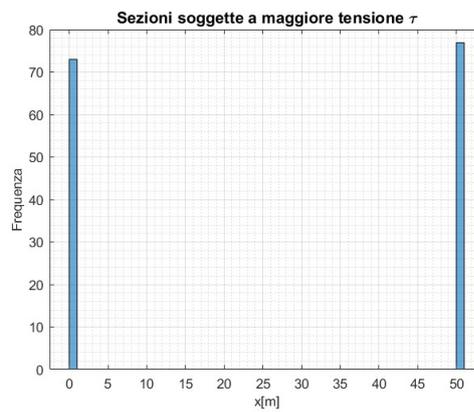
**Figura 10.12:** Analisi risultati: Spostamenti in direzione  $x$   $Dx$  (a), Spostamenti in direzione  $y$   $Dy$  (b), Rotazioni  $\varphi$  (c).



(a)



(b)



(c)

**Figura 10.13:** Analisi risultati: Tensioni longitudinali di compressione  $\sigma_c$  (a), Tensioni longitudinali di trazione  $\sigma_t$  (b), Tensioni tangenziali  $\tau$ , (c)

Dai risultati ottenuti si nota chiaramente che gli spostamenti  $D_x$ , rimangono concentrati nell'intorno della zona precedentemente valutata con un coinvolgimento però di porzioni di struttura leggermente maggiori ed in particolare le zone in cui si concentrano i maggiori spostamenti lungo la direzione  $x$ , vanno dall'ascissa  $x = 8,03m$  a  $x = 11,54m$  e dall'ascissa  $x = 38,46m$  a  $x = 42m$ .

Per quanto concerne invece gli spostamenti  $D_y$ , non viene registrato alcun cambiamento sostanziale infatti i massimi spostamenti lungo la direzione  $y$ , sono comunque registrati in corrispondenza della sezione  $x = 25m$  e quindi perfettamente in corrispondenza della mezzeria della struttura. Con ciò si può quindi affermare che la presenza dei cinque giunti disposti in modo simmetrico non determina una variazione della risposta dell'arco relativamente agli spostamenti in esame.

Valutazione analoga a quella condotta per gli spostamenti  $D_x$ , può essere fatta per le rotazioni  $\varphi$ , i cui valori massimi si concentrano nelle medesime zone dell'arco valutate per il caso precedentemente esposto, ma con un allargamento delle zone coinvolte. Più nello specifico le massime rotazioni  $\varphi$ , si concentrano in porzioni dell'arco che vanno dalla coordinata  $x = 13,6m$  a  $x = 16,8m$  e nella porzione simmetrica rispetto all'asse di simmetria.

Relativamente alle tensioni tangenziali  $\tau$ , non si ha alcuna variazione rispetto al caso precedentemente analizzato in cui come nel presente, i massimi valori delle stesse sono registrati in corrispondenza delle imposte dell'arco.

Invece differenze sostanziali si registrano per le tensioni longitudinali di compressione  $\sigma_c$  e per quelle longitudinali di trazione  $\sigma_t$ , i cui massimi valori venivano in precedenza registrati in corrispondenza delle imposte.

In particolare le massime tensioni longitudinali di trazione si registrano in zone comprese fra  $x = 5,65m$  e  $x = 6,6m$  e fra  $x = 43,4m$  e  $x = 44,4m$ , con una netta maggiore frequenza rispetto alla zona in corrispondenza della mezzeria posta a  $x = 25m$ .

Infine, si registra la stessa tendenza per le tensioni longitudinali di compressione  $\sigma_c$ , le quali raggiungono i massimi valori in zone molto simili a quelle valutate per le tensioni  $\sigma_t$  e quindi nella zona compresa fra  $x = 5,2m$  e  $x = 6,1m$  e nella zona compresa fra  $x = 43,88m$  e  $x = 44,82m$ , con alcuni casi sporadici in cui le massime tensioni di trazione si concentrano nella sezione di mezzeria in corrispondenza dell'ascissa  $x = 25m$ .

Dai risultati ottenuti si nota come nonostante vi sia stata una variazione delle sezioni maggiormente sollecitate in relazione alle tensioni  $\sigma_c$  e  $\sigma_t$ , si abbia ancora una risposta in questo senso, simmetrica, come simmetrica è la disposizione delle molle rotazionali pur avendo una variazione fra le rigidezze flessionali ad esse associate.

## **10.4 Analisi statistica III**

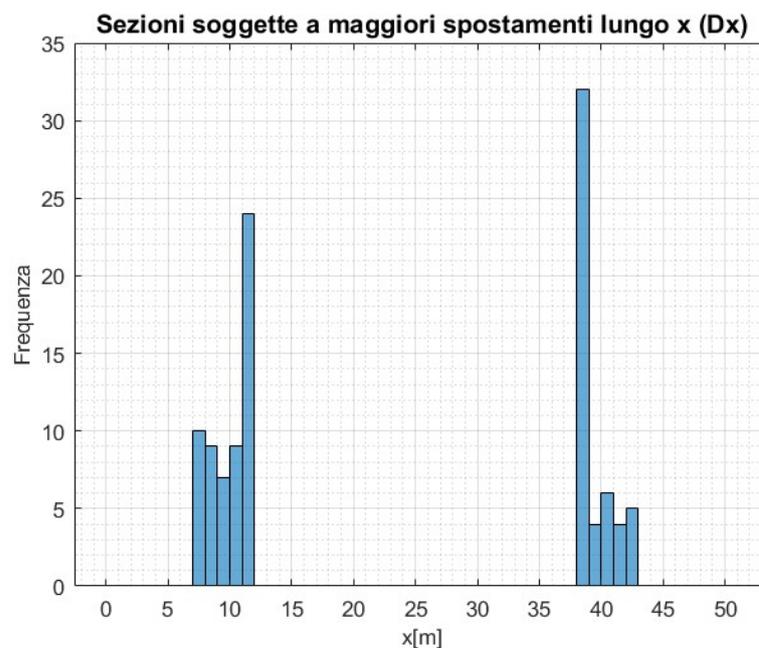
Preso atto dei risultati ottenuti, si vuole in questo caso, condurre le medesime valutazioni ma considerando delle configurazioni di danneggiamento che prevedano la non contemporanea presenza di tutte le molle rotazionali. In altri termini, si sta supponendo che alcuni giunti siano intesi come rigidi mentre altri assumono la condizione di giunti semi-rigidi a seguito di un danneggiamento.

Come effettuato nei precedenti casi, per ognuna delle configurazioni di danneggiamento considerate saranno estratti in modo randomico da una distribuzione uniforme, delle percentuali della rigidezza flessionale iniziale, da attribuire alle sole molle presenti nella stessa configurazione. Tuttavia in questo caso, le configurazioni analizzate saranno in numero pari a 22, mentre le estrazioni per ognuna di esse saranno in numero pari a 5, ottenendo quindi un campione complessivo di 110 pattern.

Si procede quindi a riportare i risultati ottenuti.

### 10.4.1 Spostamenti lungo la direzione $x$ : $D_x$

In riferimento agli spostamenti lungo la direzione  $x$ , indicati con  $D_x$ , si riportano i risultati ottenuti, come visibile in Fig.(10.14).



**Figura 10.14:** Analisi  $D_x$

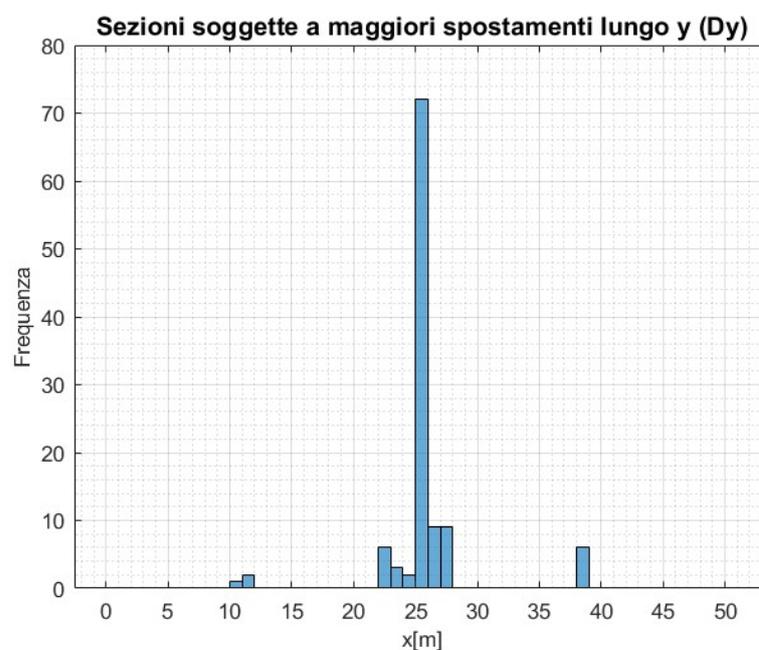
Le zone in cui si verificano i massimi spostamenti rimangono le medesime dei casi analizzati precedentemente anche se esse si allargano ulteriormente. In particolare si nota che tali zone si avvicinano maggiormente ai giunti poszionati in corrispondenza di  $x = 11,5m$  e  $x = 38,5m$  dove si presentano le peggiori condizioni un numero più frequente di volte e interessando una zona che si estende per circa 5m lungo la coordinata  $x$ , verso le estremità della struttura.

Inoltre dai risultati ottenuti, si nota che le configurazioni che causano il raggiungimento dei massimi spostamenti  $D_x$  in ogni sezione, un numero maggiore di volte, sono quelle riportate di seguito.

- Configurazione 1: Molla I - Molla II - Molla III
- Configurazione 2: Molla III - Molla IV - Molla V

### 10.4.2 Spostamenti lungo la direzione x: $D_y$

In riferimento agli spostamenti lungo la direzione  $y$ , indicati con  $D_y$ , si riportano i risultati ottenuti, come visibile in Fig.(10.15).



**Figura 10.15:** Analisi  $D_y$

Con i dati ottenuti si può affermare ancora una volta come la zona in cui si registrano i maggiori spostamenti  $D_y$  è quella in corrispondenza di un intorno della sezione di mezzeria che si estende a destra e a sinistra della stessa sezione per circa 2,7m, lungo l'asse delle ascisse. Notando che proprio coincidentemente a  $x = 25m$ ,

si ha una maggiore frequenza, in alcuni casi si presenta la condizione per cui i maggiori spostamenti  $D_y$ , si hanno in corrispondenza dei giunti intermedi II e IV. Le medesime configurazioni di danneggiamento individuate per il caso relativo agli spostamenti  $D_x$ , causano anche il raggiungimento dei massimi spostamenti  $D_y$  in ogni sezione.

### 10.4.3 Rotazioni: $\varphi$

In riferimento alle rotazioni  $\varphi$ , si riportano i risultati ottenuti, come visibile in Fig.(10.16).

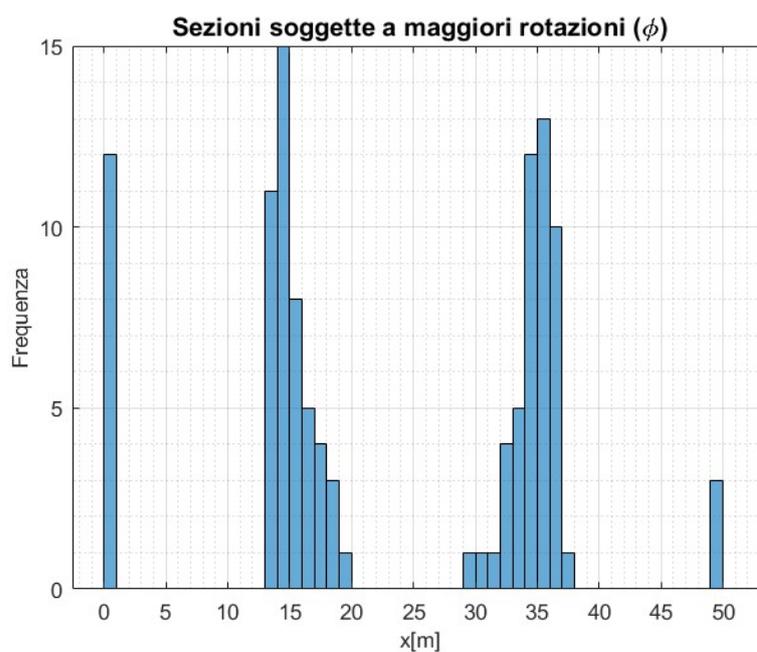


Figura 10.16: Analisi  $\varphi$

Per quanto concerne le rotazioni  $\varphi$ , come visibile dall'istogramma riportato, sono presenti un numero non trascurabile di casi in cui esse raggiungono i massimi

valori in corrispondenza delle imposte. Tuttavia le zone in cui si registra un numero elevato di volte il raggiungimento dei massimi valori, vanno dalla coordinata  $x = 13,1m$  alla coordinata  $x = 19m$  e da quella  $32,7m$  a quella  $37,4m$ , con una netta concentrazione di casi nelle zone più esterne di questi intervalli. Ancora una volta le configurazioni che portano al raggiungimento delle maggiori rotazioni, sono le medesime individuate nei due casi precedenti inerenti agli spostamenti  $D_x$  e agli spostamenti  $D_y$ .

#### 10.4.4 Tensioni longitudinali di compressione: $\sigma_c$

In riferimento alle tensioni longitudinali di compressione  $\sigma_c$ , si riportano i risultati ottenuti, come visibile in Fig.(10.17).

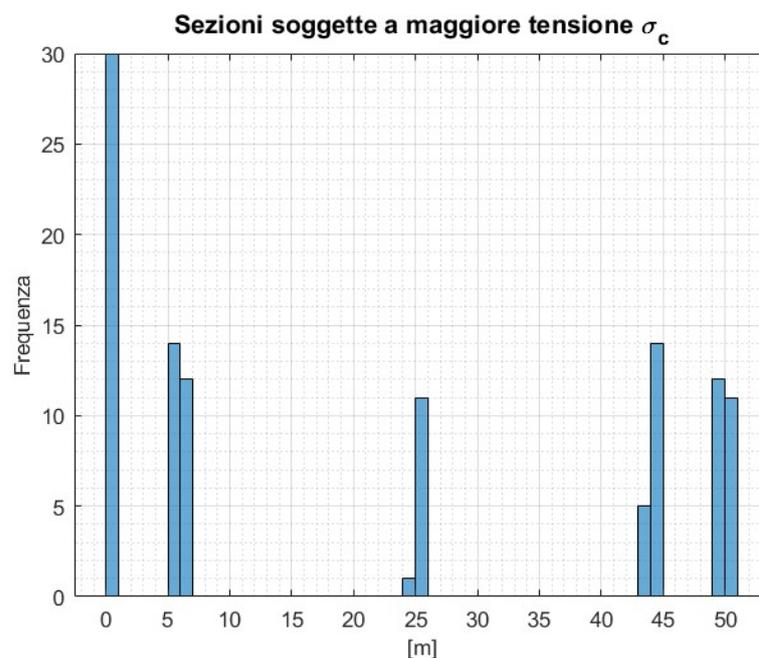


Figura 10.17: Analisi  $\sigma_c$

Per quanto riguarda le tensioni longitudinali di compressione  $\sigma_c$ , i risultati ottenuti sono praticamente la commistione di quelli valutati nelle analisi statistiche precedentemente effettuate. Infatti i maggiori valori si registrano in corrispondenza della mezzeria e delle reni dell'arco, ma anche in zone che distano fra i 5 – 6m da quest'ultime.

Le configurazioni più gravose risultano in questo caso essere quelle riportate di seguito:

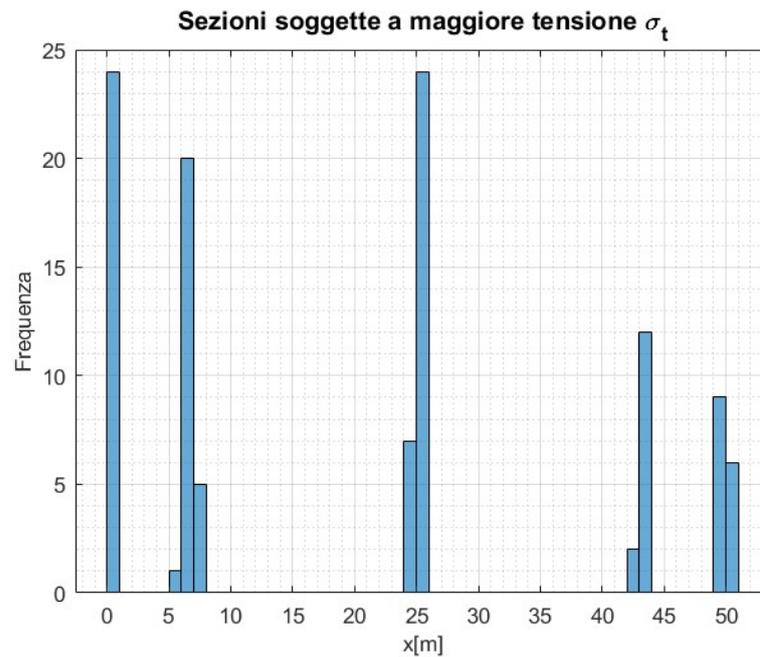
- Configurazione 1: Molla I - Molla II - Molla IV - Molla V
- Configurazione 2: Molla I - Molla II - Molla IV
- Configurazione 3: Molla II - Molla III - Molla IV

In modo abbastanza sporadico anche le configurazioni riportate di seguito e naturalmente le loro simmetriche, causano in altrettanto modo il raggiungimento delle peggiori condizioni.

- Configurazione 4 : Molla II - Molla III
- Configurazione 5 : Molla I - Molla III

#### **10.4.5 Tensioni longitudinali di trazione: $\sigma_t$**

In riferimento alle tensioni longitudinali di trazione  $\sigma_t$ , si riportano i risultati ottenuti, come visibile in Fig.(10.18).



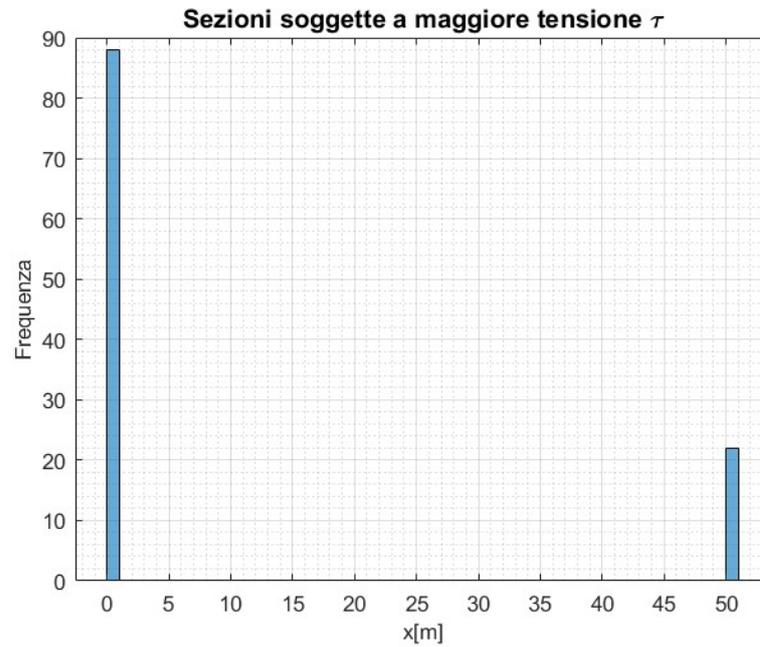
**Figura 10.18:** Analisi  $\sigma_t$

L'istogramma presentato per le tensioni longitudinali di trazione permette di effettuare naturalmente considerazioni simili a quelle condotte per le tensioni  $\sigma_c$ , notando però una maggiore frequenza con cui la zona in corrispondenza della mezzeria presenta le maggiori tensioni  $\sigma_t$ .

Allo stesso modo le configurazioni che causano le condizioni peggiori sono le medesime che sono state individuate precedentemente per le tensioni longitudinali di compressione.

#### 10.4.6 Tensioni tangenziali: $\tau$

In riferimento alle tensioni tangenziali  $\tau$ , si riportano i risultati ottenuti, come visibile in Fig.(10.18).



**Figura 10.19:** Analisi  $\tau$

Infine per quanto concerne le tensioni tangenziali  $\tau$ , esse si verificano comunque in corrispondenza delle imposte, come nelle analisi in precedenza eseguite. In questo caso molte delle configurazioni di danneggiamento considerate portano al raggiungimento della massima tensione tangenziale, con una netta maggioranza di quelle che presentano due e tre molle.

# Capitolo 11

## Conclusioni

Il lavoro presentato nella presente tesi magistrale ha portato alla conduzione di una analisi strutturale di strutture ad arco, con la conseguente possibilità di comprenderne il comportamento e la risposta ai carichi statici verticali.

In particolare lo studio svolto ha mirato all'introduzione del vincolo interno molla rotazionale atto a simulare una condizione di danneggiamento in corrispondenza di una o più sezioni, per mezzo di un decremento della rigidezza flessionale associata al vincolo stesso. Sulla base di ciò è stato quindi possibile validare il modello creato, attraverso un confronto fra i dati ottenuti e quelli derivanti dal software commerciale ad elementi finiti SAP2000. Tale confronto è stato condotto comparando le caratteristiche interne della sollecitazione  $M$ ,  $N$ ,  $T$ , nonché gli spostamenti lungo la direzione  $x$  lungo la direzione  $y$  e le rotazioni, rispettivamente indicate con  $D_x$ ,  $D_y$ ,  $\varphi$ , notando una particolare coincidenza degli andamenti relativi alle grandezze dette che permette di confermare l'esattezza dei risultati e quindi la validità del modello. In particolare relativamente a quanto detto, sono stati considerati archi parabolici e circolari in acciaio S355, aventi una luce  $L = 100m$  e un'altezza  $f = 30m$ . Inoltre sono state considerate sezioni differenti, soggette a diverse leggi di variazione, come per esempio quella quadratica lungo l'ascissa curvilinea  $s$ .

A seguito della validazione è stato quindi possibile comprendere il comportamento di tali strutture volendo simulare l'evoluzione del danneggiamento. Pertanto è stato possibile notare la variazione degli andamenti delle tensioni calcolate alla Von Mises, a seguito dell'inserimento dei vincoli interni molla rotazionale, nonché la variazione del valore delle tensioni a seguito della variazione di rigidità flessionale cui i vincoli interni sono stati sottoposti. In modo concomitante a quanto detto si sono poste le condizioni per comprendere i carichi cui la struttura può essere soggetta in situazioni differenti dipendenti dal pattern di danneggiamento indicato. In questo senso si è notato come in taluni casi sia possibile un incremento del carico a seguito della variazione dello schema strutturale, mentre in altri casi avviene il contrario, decretando una forzata riduzione del carico applicato affinché in nessuna sezione sia superato il valore della tensione di snervamento  $f_y$ .

Infine si è proceduto al miglioramento del codice Matlab, il quale è stato modificato per permettere l'inserimento di un numero di molle, che teoricamente potrebbe essere uguale alla metà dei punti utilizzati per discretizzare la curva di partenza. Infatti per la natura del codice stesso risulta impossibile inserire due molle in due punti consecutivi, in quanto risulterebbe impossibile interpolare la funzione che definisce il raggio di curvatura  $R$ .

Per mezzo di tale miglioramento è quindi possibile individuare una condizione con la quale sia possibile inserire un vincolo interno di qualsivoglia tipologia.

Per il lavoro presentato tuttavia si è fatto riferimento ad un pattern di danneggiamento predefinito e individuato quindi sulla base della posizione delle connessioni in archi in legno lamellare. Partendo da questo presupposto si è proceduto ad eseguire una analisi strutturale secondo un'analisi statistica che pone le sue fondamenta sulla valutazione dei risultati derivanti da un insieme di configurazioni di danneggiamento che prevedono la non contemporanea presenza dei vincoli interni molla rotazionale in corrispondenza di ogni connessione presente nell'arco. Utilizzando

quindi dei coefficienti di riduzione diversi per ogni molla elastica presente ed estratti in modo randomico un numero di volte pari a cinque per ogni configurazione di danneggiamento, si è giunti all'individuazione di un numero complessivo di casi da analizzare pari a centodieci.

Per ognuno di essi è quindi stata eseguita una analisi strutturale dalla quale sono state individuate le sezioni maggiormente sollecitate in termini di spostamenti e tensioni, con annessa individuazione della frequenza con cui le stesse sono seggette alle peggiori condizioni. Il codice inoltre permette di individuare quali configurazioni di danneggiamento siano maggiormente compromettenti per la struttura in funzione della grandezza che si sta valutando.

Adilà dei risultati ottenuti nel presente lavoro, il codice permette quindi di introdurre dei vincoli interni, atti a simulare il danneggiamento, nel momento in cui viene verificata una data condizione, permettendo di effettuare un'analisi strutturale ad ogni processo di inserimento, nonchè valutare le condizioni maggiormente critiche dato un pattern di danneggiamento derivante per esempio, anche da operazioni di monitoraggio.

Inoltre, sulla base delle medesime considerazioni effettuate, una analisi statistica identica dal punto di vista concettuale è stata condotta supponendo la contemporanea presenza di tutte le cinque molle, individuando un numero di casi in numero pari a centocinquanta, in ognuno dei quali si associa a ciascuna molla una percentuale della rigidità iniziale, tramite estrazione randomica di ogni valore percentuale determinato.

# Bibliografia

- [1] Santiago Huerta. «Oval domes: History, geometry and mechanics». In: *Nexus Network Journal* 9.2 (2007), pp. 211–248 (cit. on p. 1).
- [2] Thomas E Boothby. «Analysis of masonry arches and vaults». In: *Progress in Structural Engineering and materials* 3.3 (2001), pp. 246–256 (cit. on p. 2).
- [3] A Manuello Bertetto and GC Marano. «Numerical and dimensionless analytical solutions for circular arch optimization». In: *Engineering Structures* 253 (2022), p. 113360 (cit. on p. 3).
- [4] Mostafa Z Abd Elrehim, Mohamed A Eid, and Mostafa G Sayed. «Structural optimization of concrete arch bridges using Genetic Algorithms». In: *Ain Shams Engineering Journal* 10.3 (2019), pp. 507–516 (cit. on p. 3).
- [5] J Melchiorre, A Manuello, F Marmo, S Adriaenssens, and GC Marano. «Differential formulation and numerical solution for elastic arches with variable curvature and tapered cross-sections». In: *European Journal of Mechanics-A/Solids* 97 (2023), p. 104757 (cit. on pp. 3, 5, 11, 34, 38, 51).
- [6] AM Bauer, Michael Breitenberger, B Philipp, Roland Wüchner, and K-U Bletzinger. «Nonlinear isogeometric spatial Bernoulli beam». In: *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering* 303 (2016), pp. 101–127 (cit. on p. 4).
- [7] Els Verstrynge, Giuseppe Lacidogna, Federico Accornero, and Adrienn Tomor. «A review on acoustic emission monitoring for damage detection in masonry

- structures». In: *Construction and Building Materials* 268 (2021), p. 121089 (cit. on p. 5).
- [8] Paolo Zampieri, Mariano Angelo Zanini, and Flora Faleschini. «Influence of damage on the seismic failure analysis of masonry arches». In: *Construction and Building Materials* 119 (2016), pp. 343–355 (cit. on p. 5).
- [9] Maria-Giovanna Masciotta, Daniele Pellegrini, Maria Girardi, Cristina Padovani, Alberto Barontini, Paulo B Lourenço, Daniele Brigante, and Giovanni Fabbrocino. «Dynamic characterization of progressively damaged segmental masonry arches with one settled support: experimental and numerical analyses». In: (2020) (cit. on p. 5).
- [10] David LN de F Amorim, Sergio PB Proença, and Julio Flórez-López. «A model of fracture in reinforced concrete arches based on lumped damage mechanics». In: *International Journal of Solids and Structures* 50.24 (2013), pp. 4070–4079 (cit. on p. 6).
- [11] E Viola and F Tornabene. «Vibration analysis of damaged circular arches with varying cross-section». In: *Structural Durability & Health Monitoring* 1.2 (2005), p. 155 (cit. on p. 6).
- [12] A Pau, A Greco, and F Vestroni. «Numerical and experimental detection of concentrated damage in a parabolic arch by measured frequency variations». In: *Journal of Vibration and Control* 17.4 (2011), pp. 605–614 (cit. on p. 6).
- [13] Annalisa Greco and Annamaria Pau. «Detection of a concentrated damage in a parabolic arch by measured static displacements». In: *Structural Engineering and Mechanics* 39.6 (2011), pp. 751–765 (cit. on p. 6).
- [14] Alberto Carpinteri. *Scienza delle costruzioni*. Pitagora, 1993 (cit. on p. 17).
- [15] Bengt Fornberg. «Generation of finite difference formulas on arbitrarily spaced grids». In: *Mathematics of computation* 51.184 (1988), pp. 699–706 (cit. on p. 49).

- [16] Feng Fan, Huihuan Ma, Zhenggang Cao, and Shizhao Shen. «A new classification system for the joints used in lattice shells». In: *Thin-walled structures* 49.12 (2011), pp. 1544–1553 (cit. on p. 58).
- [17] I Calìò, A Greco, and D D’Urso. «Structural models for the evaluation of eigen-properties in damaged spatial arches: a critical appraisal». In: *Archive of Applied Mechanics* 86.11 (2016), pp. 1853–1867 (cit. on p. 60).
- [18] A Manuello. «Semi-rigid connection in timber structure: Stiffness reduction and instability interaction». In: *International Journal of Structural Stability and Dynamics* 20.07 (2020), p. 2050072 (cit. on pp. 62, 137).
- [19] Zhihua Chen, Hao Xu, Zhongwei Zhao, Xiangyu Yan, and Bingzhen Zhao. «Investigations on the mechanical behavior of suspend-dome with semirigid joints». In: *Journal of Constructional Steel Research* 122 (2016), pp. 14–24 (cit. on pp. 64, 65).