POLITECNICO DI TORINO

Corso di Laurea in Ingegneria Aerospaziale

Tesi di Laurea Magistrale

Modelli di ordine ridotto applicati a problemi aerodinamici



Relatore Prof. Andrea Ferrero

Correlatore: Prof. Tommaso Taddei **Laureanda** Monica Rubbini

Tutore Aziendale Optimad Dr. Alessandro Alaia

2021-2022

Alla mia famiglia e ai miei amici

Ringraziamenti

Vorrei ringraziare il Professor Ferrero per avermi dato la possibilità di svolgere questo interessante lavoro di tesi, per la sua professionalità e l'aiuto ricevuto.

Ringrazio il Professor Taddei per avermi fornito materiale utile allo svolgimento della tesi e per la pazienza dimostratami nel spiegarmi argomenti nuovi.

Ringrazio il Dr. Alaia per i suoi preziosi consigli e per avermi permesso di utilizzare alcuni risultati numerici di riferimento dell'azienda Optimad.

Un pensiero va alla mia famiglia che ha reso possibile tutto questo e per il costante supporto morale.

Ringrazio gli amici di una vita che rappresentano ormai un punto fisso.

Un ringraziamento speciale va a Camilla e ad Alessia. Nonostante la lontananza dell'ultimo anno siamo rimaste sempre unite. Grazie per le tante risate e per il sostegno che mi avete dimostrato quando ne avevo più bisogno.

Ringrazio Eugenio conosciuto come un collega ma diventato presto un amico.

Un ringraziamento va ai nuovi amici conosciuti a Torino che hanno reso questo ultimo anno pieno di emozioni. Grazie per aver alleggerito le ore passate in aula studio ma soprattutto per i momenti fuori dal Poli.

Sommario

L'analisi di problemi di natura fluidodinamica è particolarmente diffusa in ambito ingegneristico, in particolare è molto importante per l'aerospazio o l'automotive. La disciplina che studia questi problemi è detta CFD (*Computational Fluid Dynamics*) e si basa sulla risoluzione numerica di equazioni che modellano il comportamento di flussi attorno a un corpo (fluidodinamica esterna), o all'interno di un corpo (fluidodinamica interna). La CFD presenta sia vantaggi che svantaggi: da un lato, si ha un risparmio economico in quanto non è necessario costruire diversi prototipi da testare sperimentalmente (per esempio in galleria del vento). Dall'altro, però, presenta ancora delle limitazioni quali l'elevato tempo e costo computazionale associati alla risoluzione di un problema parametrico.

Per questo motivo sono stati introdotti e si stanno continuando a implementare modelli di ordine ridotto (ROM) che hanno lo scopo di ottenere un modello numerico che costi meno del modello ad "alta fedeltà".

L'obiettivo di questa tesi è quello di valutare l'accuratezza fornita da un modello di ordine ridotto basato sulla registrazione e stimare i campi fluidodinamici per un range di parametri (per esempio il numero di Mach all'infinito (M_{∞})) sulla base della conoscenza dei campi per un numero limitato di parametri.

Il metodo di riduzione del modello è molto complesso. Alla base di questo metodo ci sono tecniche quali:

- Projection based method, cioè proiezione di equazioni da uno spazio a dimensione infinita su uno spazio a dimensione finita. È una tecnica intrusiva perché si deve avere una conoscenza dettagliata del:
 - problema originale che si sta risolvendo
 - metodo numerico ad alta fedeltà che risolve il modello proposto.
- Interpolazione: partendo da due parametri si vuole predire il comportamento del regime per valori intermedi del parametro. Questa tecnica viene usata nella fase offline per creare le soluzioni corrispondenti ai parametri fra cui si interpola, mentre non viene usato nella fase online.

Un esempio di interpolazione non lineare è la cosidetta *convex displacement interpolation*, questo tipo di interpolazione è un'importante nozione per quanto riguarda lo studio del gradiente. In particolare, implica l'esistenza e l'unicità del gradiente dei flussi di determinati funzionali. Questa interpolazione è usata per calcolare l'approssimazione delle variabili del campo di moto.

L'obiettivo di questa tesi è quello di effettuare interpolazioni non lineari basate sull'ipotesi che le strutture coerenti del flusso (ad esempio gli urti sul profilo) si deformino in modo continuo rispetto ai parametri del modello.

In questa tesi si analizza il comportamento di un profilo alare immerso in un flusso. Il flusso accelera e si raggiunge il regime supersonico. Successivamente, attraverso l'urto, rallenta e torna subsonico. La transizione da flusso supersonico a flusso subsonico genera un urto. È necessario identificare la posizione dell'urto in quanto influenza le prestazioni del profilo alare.

Il modello della registrazione fornisce un metodo che permette di prevedere nel modo più accurato possibile e in tempi ridotti la posizione dell'urto. Per visualizzare gli shock sul profilo vengono usati degli strumenti matematici quali:

- sensori di shock, per esempio il sensore di Ducros e il sensore di Mach maggiore del valore unitario.
- Points-Based Registration: dato un insieme di punti omologhi in due spazi si deve trovare una trasformazione che fornisca una buona approssimazione dei punti.
- Boundary-Aware Registration. Questo metodo costruisce connessioni tra i punti dentro il contorno e connessioni tra punti all'esterno del contorno, ciò aiuta a migliorare la similitudine tra caratteristiche appartenenti allo stesso segmento, differenziandole dalle caratteristiche appartenenti a segmenti diversi.

Nel capitolo introduttivo viene fornita una panoramica sui modelli di ordine ridotto, evidenziandone i vantaggi. Successivamente, viene introdotto il modello fisico delle RANS, essendo il modello usato per effettuare le simulazioni sui casi test. Nel terzo capitolo verranno introdotte le strutture coerenti del flusso, cioè gli shock che si generano sul corpo, si procede con un'introduzione teorica alla mesh e si forniscono dettagli sulla mesh usata nel caso test. Infine, vengono analizzati i sensori usati e rilevate le anomalie o disturbi sul corpo. Nel quarto capitolo viene introdotto il metodo di interpolazione utilizzato nel corso della tesi, quindi verrà analizzato il metodo di ottimizzazione e verranno riportati i risultati numerici.

Indice

Elenco delle figure							
Elenco delle tabelle							
1	Intr 1.1	oduzione Utilità di metodi di ordine ridotto	$1 \\ 1$				
	1.2	Esempi applicativi	3				
2	Modello Fisico RANS						
	$\frac{2.1}{2.2}$	Equazioni di governo	6				
		2.2.1 Approccio alle equazioni	6				
		2.2.2 Ipotesi di Boussinesq	8				
	2.3	Modelli per la risoluzione delle equazioni	8				
		2.3.1 Modello Spalart-Allmaras	9				
		2.3.2 Modello $K - \epsilon$	9				
	24	2.3.3 Modello $K - \omega$	9 10				
	2.4		10				
3	Ider	ntificazione di strutture coerenti	13				
	3.1	Introduzione sulla mesh	13				
	3.2	Descrizione del sensore	18				
	3.3	Rilevazione di outliers nei dati	19				
4	Inte	erpolazione non lineare basata sulla registrazione	25				
	4.1	Deformazioni conformi con la geometria	26				
	4.2	Metodo di ottimizzazione	31				
		4.2.1 Cenni sull'ottimizzazione	31				
		4.2.2 Ottimizzazione basata sulla registrazione	32				
	4.3	Interpolazione non lineare	35				
		4.3.1 Calcolo della funzione parametrica s	37				
5	Risı	ultati numerici ottenuti	45				
	5.1	Interpolazione non lineare	46				
		5.1.1 Risultati per il sensore di Ducros corretto	46				
		5.1.2 Risultati per il sensore di Ducros corretto con mesh fine	48				

		5.1.3	Risultati per il sensore di Ducros	51	
		5.1.4	Risultati per il sensore di Ducros con mesh fine	53	
		5.1.5	Risultati per il sensore basato sul Mach	55	
		5.1.6	Risultati per il sensore basato sul Mach con mesh fine	57	
	5.2	Interpo	plazione lineare	59	
		5.2.1	Risultati per il sensore di Ducros corretto	59	
		5.2.2	Risultati per il sensore di Ducros corretto con mesh raffinata	61	
		5.2.3	Risultati per il sensore di Ducros	63	
		5.2.4	Risultati per il sensore di Ducros con mesh raffinata	65	
		5.2.5	Risultati per il sensore basato sul Mach	67	
		5.2.6	Risultati per il sensore basato sul Mach con mesh raffinata	69	
	5.3	Risulta	ti considerando un range di interpolazione minore	71	
	5.4	Risulta	ati delle forze aerodinamiche	75	
6	Con	clusior	ni	85	
Ri	Riferimenti Bibliografici				

Elenco delle figure

2.1	Rappresentazione della decomposizione delle variabili [15]
2.2	Profilo alare RAE 2822 10
2.3	a) Esempio di regime transonico b) Bolla Supersonica
0.1	
3.1	Mesh sul profilo alare
3.2	Mesh Raffinata
3.3	Variabili primitive
3.4	Variabili primitive con mesh raffinata
3.5	Confronto tra sensori
3.6	Posizione degli urti a seconda del sensore
3.7	Confronto tra sensori con mesh raffinata
3.8	Posizione degli urti a seconda del sensore
41	Gordon Hall Map [17] 27
42	Partizione del dominio 29
4.3	Illustazione del metodo di interior point [23]
4 4	Interpolazione lineare di s
4 5	Approssimazione non lineare di s per i diversi sensori 38
4.6	Approssimazione non lineare di s per i diversi sensori 39
47	Posizione degli urti per i diversi sensori 40
4.8	Posizione approssimata dell'urto a $M_{\rm ex} = 0.73$ per i diversi sensori 41
4.9	Posizione degli urti per i diversi sensori 41
4 10	Posizione approssimata dell'urto a $M_{\rm ex} = 0.73$ per i diversi sensori 42
4 11	Errore di approssimazione per i diversi sensori 43
4 12	Errore di approssimazione per i diversi sensori 44
1.12	
5.1	Soluzione registrata con s lineare $\ldots \ldots 46$
5.2	Soluzione registrata con s non lineare $\ldots \ldots \ldots \ldots \ldots \ldots \ldots \ldots \ldots 47$
5.3	Soluzione registrata con s lineare $\ldots \ldots \ldots \ldots \ldots \ldots \ldots \ldots \ldots \ldots 48$
5.4	Soluzione registrata con s non lineare $\ldots \ldots \ldots \ldots \ldots \ldots \ldots \ldots \ldots 49$
5.5	Soluzione registrata con s lineare $\ldots \ldots \ldots$
5.6	Soluzione registrata con s non lineare $\ldots \ldots \ldots$
5.7	Soluzione registrata con s lineare $\ldots \ldots \ldots$
5.8	Soluzione registrata con s non lineare $\ldots \ldots 54$
5.9	Soluzione registrata con s lineare $\ldots \ldots 55$

5.10	Soluzione registrata con s non lineare \ldots \ldots \ldots \ldots \ldots \ldots \ldots \ldots	56
5.11	Soluzione registrata con s lineare $\ldots \ldots \ldots$	57
5.12	Soluzione registrata con s non lineare \ldots \ldots \ldots \ldots \ldots \ldots \ldots \ldots	58
5.13	Soluzione non registrata con s lineare \ldots \ldots \ldots \ldots \ldots \ldots \ldots \ldots	59
5.14	Soluzione non registrata con s non lineare $\ldots \ldots \ldots \ldots \ldots \ldots \ldots \ldots$	60
5.15	Soluzione non registrata con s lineare \ldots \ldots \ldots \ldots \ldots \ldots \ldots \ldots	61
5.16	Soluzione non registrata con s non lineare $\ldots \ldots \ldots \ldots \ldots \ldots \ldots \ldots$	62
5.17	Soluzione non registrata con s lineare \ldots \ldots \ldots \ldots \ldots \ldots \ldots \ldots	63
5.18	Soluzione non registrata con s non lineare $\ldots \ldots \ldots \ldots \ldots \ldots \ldots \ldots$	64
5.19	Soluzione non registrata con s lineare \ldots \ldots \ldots \ldots \ldots \ldots \ldots \ldots	65
5.20	Soluzione non registrata con s non lineare $\ldots \ldots \ldots \ldots \ldots \ldots \ldots \ldots$	66
5.21	Soluzione non registrata con s lineare \ldots \ldots \ldots \ldots \ldots \ldots \ldots \ldots	67
5.22	Soluzione non registrata con s non lineare $\ldots \ldots \ldots \ldots \ldots \ldots \ldots \ldots$	68
5.23	Soluzione non registrata con s lineare \ldots \ldots \ldots \ldots \ldots \ldots \ldots \ldots	69
5.24	Soluzione non registrata con s non lineare $\ldots \ldots \ldots \ldots \ldots \ldots \ldots \ldots$	70
5.25	Confronto delle soluzioni registrate con mesh rada e mesh fine	71
5.26	Confronto delle soluzioni registrate con mesh rada e mesh fine	73
5.27	Confronto delle soluzioni registrate con mesh rada e mesh fine	74
5.28	Forze aerodinamiche su un profilo alare	75
5.29	Distribuzione di c_P tramite registrazione con <i>s</i> lineare	76
5.30	Distribuzione di c_P tramite registrazione con s non lineare $\ldots \ldots \ldots$	77
5.31	Distribuzione di c_P tramite registrazione con <i>s</i> lineare	78
5.32	Distribuzione di c_P tramite registrazione con s non lineare $\ldots \ldots \ldots$	79
5.33	Distribuzione di $c_{\cal P}$ tramite registrazione su un range di interpolazione ridotto	80
5.34	Distribuzione di $c_{\cal P}$ tramite registrazione su un range di interpolazione ridotto	81
5.35	Distribuzione di $c_{\cal P}$ tramite registrazione su un range di interpolazione ridotto	82

Elenco delle tabelle

5.1	Errore introdotto dalla soluzione registrata con mesh rada e fine	50
5.2	Errore introdotto dalla soluzione registrata con mesh rada e fine	54
5.3	Errore introdotto dalla soluzione registrata con mesh rada e fine	58
5.4	Errore introdotto dalla soluzione non registrata con mesh rada e fine	62
5.5	Errore introdotto dalla soluzione non registrata con mesh rada e fine	66
5.6	Errore introdotto dalla soluzione non registrata con mesh rada e fine	70
5.7	Errore introdotto dalla soluzione registrata con mesh rada e fine	72
5.8	Errore introdotto dalla soluzione registrata con mesh rada e fine	73
5.9	Errore introdotto dalla soluzione registrata con mesh rada e fine	74
5.10	Valori del coefficiente di portanza per i diversi sensori	83
5.11	Valori del coefficiente di portanza per i diversi sensori	83

Capitolo 1 Introduzione

1.1 Utilità di metodi di ordine ridotto

L'analisi di problemi di natura fluidodinamica occupa un ruolo centrale nel campo dell'ingegneria aerospaziale. Una tecnica risolutiva è la cosidetta CFD che fornisce una soluzione numerica delle equazioni che governano i flussi presenti attorno o all'interno di un corpo. Questo approccio presenta sia vantaggi che svantaggi. Se da un lato porta a un notevole risparmio economico, in quanto le simulazioni numeriche vengono effettuate solamente tramite calcolatore, senza bisogno di costruire il modello ed eseguire prove in galleria del vento, dall'altro è soggetto a tempi e costi computazionali estremamente elevati.

Per questo motivo il metodo di riduzione dei modelli (*Model Order Reduction*-MOR) sta acquistando sempre maggiore importanza nell'ambito dell'analisi numerica e della fluidodinamica computazionale.

Il principale obiettivo di questa tecnica è quello di riprodurre il modello originale ad alta fedeltà o *full order model* (FOM) nel modo più fedele possibile riducendone la complessità computazionale e il tempo di risoluzione che può richiedere diverse ore o giorni.

Queste tecniche risultano efficaci nelle applicazioni che richiedono un elevato numero di valutazioni del modello ad alta fedeltà, quali ad esempio ottimizzazione ed analisi dell'incertezza (*uncertainty quantification*).

Sono inoltre introdotti i pMOR (*parametrized-model order reduction*), cioè MOR costruiti sulla base di parametri sia fisici (ad esempio, le diverse proprietà dei materiali, numeri adimensionali: *Re* e *Mach*, condizioni iniziali o di contorno) sia geometrici (ad esempio quantità che descrivono la forma del dominio e del modello). Quindi, si ottegono ROM su uno specifico range di parametri. I modelli considerati vengono espressi in forma differenziale tramite PDE (*Partial Differential Equation*)[20].

Esistono tre diverse categorie di ROM:

- Data-fit models
- Projection based models
- Hierarchical models

La prima tecnica si basa sull'interpolazione di dati di simulazione, il cui output è un modello ridotto visto come funzione dei parametri. Questi modelli appartengono alla categoria dei modelli di regressione.

La seconda si basa sulla proiezione di un'equazione su uno spazio test a dimensioni ridotte rispetto allo spazio di partenza.

L'ultima categoria si tratta di una combinazione di modelli ottenuti attraverso la discretizzazione agli elementi finiti o volumi finiti. I modelli a ordine ridotto devono soddisfare determinati requisiti:

- L'errore deve essere il minore possibile; in particolare, deve risultare inferiore a una certa tolleranza specificata in partenza, in base all'esperienza. L'errore è il risultato della differenza tra soluzione approssimata e soluzione di partenza. La sua generazione è inevitabile a causa dell'approssimazione del problema.
- Conservazione delle proprietà e delle caratteristiche di *full order model* (FOM).
- I modelli devono risultare efficienti e robusti.

Di seguito sono presentati alcuni esempi dei metodi sopra descritti:

- Reduced Basis Methods (RB)
- Proper Orthogonal Decomposition methods (POD)
- Greedy Algorithm

I metodi RB sono costruiti combinando un algoritmo Greedy e un indicatore di errore (*residual-based error estimators*). Questi metodi si basano sull'approssimazione del problema *high fidelity* fornita dalla discretizzazione agli elementi finiti o ai volumi finiti. Sono descritti da:

- 1. Galerkin projection su uno spazio a dimensione inferiore;
- 2. un metodo Greedy efficiente per identificare le approssimazioni di ottimo;
- 3. Un *posteriori error estimation* cioè quanto rapidamente e accuratamente viene stimato l'errore.

E si suddividono in due step [20]:

offline stage è la fase più costosa in termini computazionali ed è svolta solo una volta.
 Si calcola la soluzione del problema discreto per diversi valori del parametro μ.

find
$$u_{\mu} \in X$$
 s.t. $\mathcal{G}_{\mu}(u_{\mu}, v) = 0 \quad \forall v \in Y$ (1.1)

Dove u_{μ} rappresenta la soluzione parametrica, $X \in Y$ sono spazi di Hilbert definiti su un dominio a parametri indipendenti $\Omega \subset \mathbb{R}^d \in \mathcal{G}_{\mu}$ è un operatore parametrico lineare o non lineare e v sono le funzioni test.

Successivamente si genera lo spazio trial Z_n di dimensioni molto più ridotte rispetto ai gradi di libertà del problema *high fidelity* e lo spazio test ridotto Y_m . Questa fase porta a un notevole risparmio in termini di tempo computazionale durante la fase successiva. • online stage viene svolta per ogni nuovo parametro. Si calcola la soluzione approssimata e si stima l'errore tra la soluzione approssimata e quella originale $\|\hat{u}_{\overline{\mu}} - u_{\overline{\mu}}\|$. L'errore del modello ridotto viene limitato dal residuo R_{μ} che si può esprimere come segue:

$$\Delta_{\mu}(\alpha) := \frac{1}{\hat{\beta}_{\mu}} R_{\mu}(\alpha) \tag{1.2}$$

Dove, $\hat{\beta}_{\mu}$ è il limite inferiore e $\Delta_{\mu}(\alpha)$ fornisce il limite superiore per l'errore

Proper Orthogonal Decomposition (POD) si basa su una procedura detta *Singular Value Decomposition* (SVD). Appartiene alla categoria di *Projection based model.* È un metodo atto alla compressione dei dati *high fidelity* tramite proiezione nel sottospazio di ordine ridotto definito dagli autovettori e autovalori del campo fisico. Questi ultimi sono ottenuti tramite risoluzione di SVD. Inoltre, permette la ricerca di un operatore di proiezione che minimizzi l'errore di proiezione integrato sul dominio [20].

$$d_n^2(\mathcal{M}) := \inf_{Z_n \subset X, \dim(Z_n) = n} \int_P ||u_\mu - \prod_{Z_n} u_\mu||^2 \rho(\mu) d\mu$$
(1.3)

Dove, $\rho : \mathcal{P} \to \mathbb{R}_+$ è un parametro di design che indica quanto è importante un dato punto del manifold. Per minimizzare $d_n^2(\mathcal{M})$ è necessario rendere minimo l'errore di proiezione integrato sul dominio \mathcal{P} . L'equazione 1.3 rappresenta un errore mediato (o una distribuzione dell'errore).

Questa tecnica porta a un modello ridotto che può essere risolto al posto del sistema di partenza.

1.2 Esempi applicativi

Nel corso di questa tesi saranno eseguite simulazioni su un un profilo alare transonico tramite il modello RANS. Nello specifico il profilo alare in questione è il RAE 2822. Per il caso test l'azienda Optimad ha fornito i nodi e la matrice di connessione delle mesh utilizzate. In una prima fase la mesh avrà un numero di nodi dell'ordine di 10³, successivamente la mesh viene raffinata, aumentando il numero di punti all'ordine di 10⁴. Oltre alla griglia, sono stati forniti i dati *high fidelity* del campo di moto, quali densità, pressione, quantità di moto e altre variabili per diversi valori di Mach a monte (M_{∞}) , in particolare sette valori che spaziano da $M_{\infty} = 0.70$ a $M_{\infty} = 0.76$.

Il lavoro di tesi si sviluppa su più passaggi. Si parte con la creazione della mesh e la valutazione dei diversi campi di moto in base al numero di Mach. Successivamente, si suddivide il dominio in quattro blocchi ordinati in senso antiorario. In particolare, il blocco Nord o blocco 1 servirà per lo studio dello shock in quanto esso si forma sul dorso del profilo. Il metodo di interpolazione si basa sull'introduzione di una funzione parametrica s il cui calcolo verrà esplicitato nella sottosezione 4.3.1 e si osserverà che il parametro risulta essere una funzione monotona del Mach di volo. Grazie all'interpolazione è possibile predire i risultati per i numeri di Mach intermedi. In particolare, sono state svolte quattro previsioni:

• Registrazione con s lineare

- Registrazione con s non lineare
- Interpolazione lineare con \boldsymbol{s} lineare
- Interpolazione lineare con s non lineare

Infine, si conclude confrontando i risultati ottenuti con i risultati forniti.

Capitolo 2 Modello Fisico RANS

2.1 Introduzione sulle RANS

In ambito ingegneristico sono molto diffusi i flussi descritti da un regime turbolento. Nel corso di questa tesi verrà studiato un flusso turbolento e si farà uso delle RANS (Reynolds Averaged Navier-Stokes equations).

In questo regime il moto delle particelle del fluido avviene in maniera caotica e non segue traiettorie ordinate a differenza del regime laminare. Si osservano vortici instabili che interagiscono tra loro. A causa dell'irregolarità del campo di moto è molto difficile ottenere risultati attendibili tramite una simulazione numerica diretta della turbolenza (DNS: Direct Numerical Simulation) a meno che non si considerino bassi numeri di Reynolds $Re \approx 10^4 - 10^5$.

Il modello RANS si basa principalmente sui valori medi (nel tempo) delle seguenti grandezze:

- Coefficienti di attrito
- Coefficiente di scambio termico
- Andamento medio del campo di moto

L'operazione di media è eseguita su un intervallo infinito, per flussi stazionari oppure su un intervallo finito per flussi instazionari.

Esistono diversi modelli di turbolenza che complementano le RANS

- Spalart-Allmaras
- $K \epsilon$
- $K \omega$

2.2 Equazioni di governo

Il campo di moto è descritto dalle equazioni di governo della fluidodinamica che possono essere espresse sia in forma differenziale sia in forma integrale a seconda del tipo di flusso che si sta analizzando.

Partendo dal caso di flusso comprimibile si può scrivere:

$$\begin{cases} \frac{\partial \rho}{\partial t} + \frac{\partial (\rho v_i)}{\partial x_i} = 0\\ \frac{\partial (\rho v_i)}{\partial t} + \frac{\partial (\rho v_j v_i)}{\partial x_j} = -\frac{\partial p}{\partial x_i} + \frac{\partial \tau_{ij}}{\partial x_j}\\ \frac{\partial (\rho E)}{\partial t} + \frac{\partial (\rho v_j H)}{\partial x_j} = \frac{\partial (v_j \tau_{ij})}{\partial x_j} + \frac{\partial}{\partial x_j} \left(k \frac{\partial T}{\partial x_j} \right) \end{cases}$$

Queste equazioni descrivono rispettivamente il bilancio di massa, di quantità di moto e di energia. Le grandezze considerate sono la densità ρ , v_{ij} e x_{ij} corrispondono rispettivamente a una generica componente del vettore velocità e delle coordinate, l'energia totale E e l'entalpia totale H. Si ha che $E = e + \frac{1}{2}v_i^2$ e $H = h + \frac{1}{2}v_i^2$ e il tensore degli sforzi viscosi τ_{ij} .

2.2.1 Approccio alle equazioni

Per ottenere la soluzione delle equazioni sopra descritte, Reynolds propone un'approccio che si basa sulla decomposizione in un termine mediato e in una fluttuazione o disturbo delle grandezze che caratterizzano il flusso. In particolare, una generica variabile sarà espressa nel seguente modo:

$$a = \overline{a} + a' \tag{2.1}$$

Dove \overline{a} rappresenta il termine mediato e a' rappresenta il termine di fluttuazione. Il termine mediato può essere calcolato in tre modi diversi:

• Media Temporale

$$\overline{a} = \lim_{T \to \infty} \frac{1}{T} \int_{t}^{t+T} a dt$$
(2.2)

Questo valore varia solo nello spazio e resta costante nel tempo. È usata per descrivere la turbolenza stazionaria.

• Media Spaziale

$$\overline{a} = \lim_{\Omega \to \infty} \frac{1}{\Omega} \int_{\Omega} a d\Omega \tag{2.3}$$

Dove Ω rappresenta il volume di controllo. In questo caso il valore medio ottenuto varia nel tempo e rimane costante nello spazio. Questa media è adatta per descrivere un flusso omogeneo nello spazio.

• Media di insieme

$$\overline{a} = \lim_{N \to \infty} \frac{1}{N} \sum_{m=1}^{N} a \tag{2.4}$$

Dove N è il numero di esperimenti ripetuti. In questo caso il valore medio dipende sia dal tempo sia dallo spazio ed è adatto a descrivere la turbolenza in generale.

Questo tipo di medie sono usate nel caso di flusso incomprimibile. Nella figura sottostante si può osservare un esempio di media alla Reynolds applicata alla variabile velocità.



Figura 2.1: Rappresentazione della decomposizione delle variabili [15]

Mentre, per un flusso in cui sono presenti variazioni di densità, cioè le fluttuazioni di densità non sono più trascurabili, è più opportuno applicare la media di Favre. Quest'ultima viene espressa nel modo seguente:

$$a = \tilde{a} + a'' \tag{2.5}$$

Il termine mediato alla Favre viene calcolato come segue e si applica alla componente della velocità e al tensore degli sforzi:

$$\tilde{v}_i = \frac{1}{\overline{\rho}} \lim_{T \to \infty} \frac{1}{T} \int_t^{t+T} \rho v_i dt \tau_{ij}^F = -\overline{\rho} v_i'' \tilde{v}_j''$$
(2.6)

Mentre, le variabili di pressione e densità vengono mediate alla Reynolds. L'approccio RANS presenta tre proprietà fondamentali:

- La media del termine fluttuante è nulla $\overline{a'}=0$
- La media del prodotto tra termine medio e termine fluttuante è nulla $\overline{\overline{aa'}} = 0$
- La media del prodotto tra due termini fluttuanti è diversa da zero $\overline{a_1^{'}a_2^{'}}\neq 0$

In questa tesi viene preso in esame un flusso comprimibile perciò si otterrà il seguente sistema di equazioni RANS [6]

$$\begin{cases} \frac{\partial \overline{\rho}}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x_i} (\overline{\rho} \tilde{v_i}) = 0\\ \frac{\partial}{\partial t} (\overline{\rho} \tilde{v_i}) + \frac{\partial}{\partial x_j} (\overline{\rho} \tilde{v_i} \tilde{v_j}) = -\frac{\partial \overline{p}}{\partial x_i} + \frac{\partial}{\partial x_j} \hat{\tau}_{ij}\\ \frac{\partial \tilde{E}}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x_j} (\tilde{v_j} \tilde{H}) = \frac{\partial}{\partial x_j} (\tilde{v_j} \hat{\tau}_{ij} - q_j) \end{cases}$$

Dove $\hat{\tau}_{ij} = \tau_{ij} + \tau_{ij}^R$, con τ_{ij}^R si indica il tensore degli sforzi turbolenti o di Reynolds.

$$\tau_{ij}^R = -\rho \overline{v_i' v_j'} \tag{2.7}$$

Questo termine rappresenta il trasporto di quantità di moto dovuto alle fluttuazioni turbolente. Esplicitando si ottiene:

$$\rho \overline{v_i'v_j'} = \begin{bmatrix} \rho \overline{(v_1')^2} & \rho \overline{v_1'v_2'} & \rho \overline{v_1'v_3'} \\ \rho \overline{v_2'v_1'} & \rho \overline{(v_2')^2} & \rho \overline{v_2'v_3'} \\ \rho \overline{v_3'v_1'} & \rho \overline{v_3'v_2'} & \rho \overline{(v_3')^2} \end{bmatrix}$$

Di queste nove componenti, sei sono indipendenti tra loro in quanto $\rho \overline{v'_i v'_j} = \rho \overline{v'_j v'_i}$.

2.2.2 Ipotesi di Boussinesq

La tecnica per "chiudere" il sistema descritto nella sezione precedente prevede l'introduzione dell'ipotesi di Boussinesq. L'ipotesi prevede di descrivere gli scambi di quantità di moto associati alle fluttuazioni turbolente in maniera analoga a quanto fatto con le fluttuazioni molecolari. In questo modo è possibile esprimere le tensioni di Reynolds in funzione del tensore di velocità di deformazione medio per il tramite di un parametro detto di viscosità turbolenta o *eddy viscosity* μ_T . Si applica l'ipotesi a un flusso comprimibile e si ottiene:

$$\tau_{ij}^F = -\overline{\rho}v_i''\widetilde{v}_j'' = 2\mu_T \tilde{S}_{ij} - \left(\frac{2\mu_T}{3}\right) \frac{\partial \tilde{v}_k}{\partial x_k} \delta_{ij} - \frac{2}{3}\overline{\rho}\tilde{K}\delta_{ij}$$
(2.8)

Dove $\tilde{S}_{ij} = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial \overline{v}_i}{\partial x_j} + \frac{\partial \overline{v}_j}{\partial x_i} \right)$ rappresenta il tensore di sforzo di taglio mediato alla Favre e $\tilde{K} = \frac{1}{2} \overline{v'_i v'_j}$ rappresenta l'energia cinetica turbolenta mediata anch'essa alla Favre. L'utilizzo delle equazioni mediate e l'aggiunta del termine di viscosità dinamica turbolenta sono alla base dei modelli di turbolenza, con chiusura al primo ordine, che vengono comunemente utilizzati per le simulazione dei flussi turbolenti. Tuttavia tale approccio risulta limitato ad alcune tipologie di flusso, escludendo casi come: flussi con grosse curvature delle linee di corrente, flussi caratterizzati da stratificazioni e da rotazioni, flussi secondari nei condotti e nelle turbomacchine, flussi con separazione e riattacco di strato limite e flussi caratterizzati da cambiamenti repentini della velocità media di deformazione.

2.3 Modelli per la risoluzione delle equazioni

In natura sono presenti diversi tipi di flusso e ognuno viene meglio descritto da un opportuno modello di turbolenza. In questa tesi si considerano modelli di turbolenza con chiusura al primo ordine. Per capire quale modello usare è necessario conoscere le caratteristiche di ogni flusso.

Questi modelli vengono usati al fine di calcolare la viscosità turbolenta μ_T

2.3.1 Modello Spalart-Allmaras

Questo modello è un approccio al modello RANS che coinvolge una singola equazione cinematica per descrivere la vorticità turbolenta del flusso. Questo approccio è utile in quanto riduce la complessità del problema e il tempo di risoluzione.

Il modello prevede di risolvere una sola equazione dinamica che descrivere una variabile cinematica simile alla viscosità, detta variabile Spalart-Allmaras $\hat{\nu}$ [5]:

$$\frac{\partial}{\partial t}(\rho\tilde{\nu} + \frac{\partial}{\partial x_i}(\rho\tilde{\nu}u_i) = G_{\nu} + \frac{1}{\sigma_{\tilde{\nu}}} \left[\frac{\partial}{\partial x_j}(\mu + \rho\tilde{\nu})\frac{\partial\tilde{\nu}}{\partial x_j} + C_{b2}\rho(\frac{\partial\tilde{\nu}}{\partial x_j})^2\right] - Y_{\nu} + S_{\tilde{\nu}}$$
(2.9)

Dove G_{ν} rappresenta la produzione di viscosità turbolenta, Y_{ν} è la distruzione della viscosità turbolenta che avviene nella regione al contorno a causa delle pareti e dello smorzamento dell'attrito. $\sigma_{\tilde{\nu}}$ e C_{b2} sono costanti e ν è la viscosità cinematica molecolare. $S_{\tilde{\nu}}$ è un termine di sorgente arbitrario.

È necessario imporre le condizioni al contorno, cioè a parete, e si impone $\tilde{\nu} = 0$.

2.3.2 Modello $K - \epsilon$

Questo è usato per simulare le caratteristiche medie del flusso in condizioni turbolente. Fa parte dei modelli a due equazioni, e dà una descrizione generale della turbolenza utilizzando due equazioni alle derivate parziali per il trasporto di k (l'energia cinetica turbolenta) ed ϵ (la velocità di dissipazione dell'energia cinetica turbolenta). Le equazioni che descrivono questo modello sono le seguenti [3]:

$$\frac{\partial}{\partial t}(\rho k) + \frac{\partial}{\partial x_j} \left[\frac{\mu_t}{\sigma_k} \frac{\partial k}{\partial x_j} \right] + 2\mu_t E_{ij} E_{ij} - \rho \epsilon$$
(2.10)

$$\frac{\partial}{\partial t}(\rho\epsilon) + \frac{\partial}{\partial x_i}(\rho\epsilon u_i) = \frac{\partial}{\partial x_j} \left[\frac{\mu_t}{\sigma_\epsilon} \frac{\partial \epsilon}{\partial x_j} \right] + C_{1\epsilon} \frac{\epsilon}{k} 2\mu_t E_{ij} E_{ij} - C_{2\epsilon} \rho \frac{\epsilon^2}{k}$$
(2.11)

La prima riguarda l'energia cinetica turbolenta k,mentre la seconda il termine dissipativo ϵ

2.3.3 Modello $K - \omega$

Questo modello si basa sul modello di trasporto delle equazioni per l'energia cinetica di turbolenza k e il rateo di dissipazione ω . Di seguito vengono riportate le equazioni che descrivono $k \in \omega$ rispettivamente [4]:

$$\frac{\partial}{\partial t}(\rho k) + \frac{\partial}{\partial x_i}(\rho k u_i) = \frac{\partial}{\partial x_j} \left(\Gamma_k \frac{\partial k}{\partial x_j}\right) + G_k - Y_k + S_k \tag{2.12}$$

$$\frac{\partial}{\partial t}(\rho\omega) + \frac{\partial}{\partial x_i}(\rho\omega u_i) = \frac{\partial}{\partial x_j}\left(\Gamma_\omega \frac{\partial\omega}{\partial x_j}\right) + G_\omega - Y_\omega + S_\omega$$
(2.13)

Dove, $\Gamma_k = \mu + \frac{\mu_t}{\sigma_k} \in \Gamma_{\gamma} = \mu + \frac{\mu_t}{\sigma_{\omega}}$ In cui, $\sigma_k \in \sigma_{\omega}$ sono i numeri di Prandtl turbolenti per k e ω . G_k rappresenta la generatione di energia cinetica di turbolenza dovuta ai gradienti di velocità medi. G_{ω} rappresenta la generazione di ω . $\Gamma_k \in \Gamma_{\omega}$ rappresentano la diffusività effettiva di $k \in \omega$ rispettivamente. $Y_k \in Y_{\omega}$ rappresentano la dissipazione di $k \in \omega$ dovute alla turbolenza. $S_k \in S_{\omega}$ sono termini di sorgente.

2.4 Caso Test considerato

Un profilo alare è la sezione verticale di un'ala. Il profilo alare presenta alcune caratteristiche geometriche quali:

- Il bordo d'attacco o *leading edge* rappresenta il punto anteriore del profilo
- Il bordo d'uscita o trailing edge rappresenta il punto posteriore del profilo
- La corda è il segmento che collega il bordo d'attacco al bordo d'uscita;
- Il dorso è la parte superiore del profilo;
- Il ventre è la parte inferiore del profilo;
- Lo spessore è la distanza tra il dorso e il ventre. Questo varia lungo la corda;
- La curvatura è una curvatura associata alla linea media del profilo.

La forma dei profili alari introduce una differenza di pressione tra dorso e ventre. Il profilo, posto a un certo angolo d'attacco, viene investito da un flusso e questo genera una sovrappressione sulla parte inferiore ed una depressione sulla parte superiore del profilo stesso. La distribuzione di pressione creata fa sì che le particelle di fluido generino una forza diretta verticalmente verso l'alto, detta portanza.

Il caso test considerato è un profilo alare transonico, il RAE 2822. In Figura 2.2 viene rappresentato il profilo.



Figura 2.2: Profilo alare RAE 2822

Di seguito vengono descritte le sue caratteristiche aerodinamiche:

- Massimo spessore pari al 12.1% della corda ed è posto al 37.9% della corda;
- Massima curvatura pari a 1.3% della corda ed è posta al 75.7% della corda.

In campo aerodinamico si distinguono quattro regimi di volo che dipendono dal numero di Mach $M\colon$

- 1. Subsonico
- 2. Transonico
- 3. Supersonico
- 4. Ipersonico

Il primo regime è caratterizzato da un valore del numero di Mach pari a M < 1, cioè inferiore alla velocità del suono. In questo campo di moto è possibile distinguere due regimi:

- Basso subsonico con 0 < M < 0.3 in cui è possibile trascurare gli effetti della comprimibilità, quindi considerare la densità costante.
- Alto subsonico con 0.3 < M < 0.8 in cui si osservano gli effetti della compressibilità.

Il regime supersonico lo si osserva quando M > 1 e si vengono a creare onde d'urto oblique. Il regime ipersonico è caratterizzato da un valore di Mach pari a M > 5.

Il regime transonico si registra tipicamente quando il numero di Mach è compreso in un range di 0.8 < M < 1.3, cioè il campo di moto intorno al corpo può presentare sia regioni supersoniche sia regioni subsoniche. Per cui anche in questo campo di moto sono presenti onde d'urto oblique, che solitamente sono deboli, e onde d'urto normali. Queste ultime sono più intense delle prime e provocano il passaggio da campo supersonico a campo subsonico. Il passaggio da campo subsonico a campo transonico avviene quando si raggiunge un particolare valore del numero di Mach, detto numero di Mach critico inferiore. Di solito, questo valore è di circa $M_{cr,\infty} \approx 0.85$. Mentre il passaggio da campo transonico a campo supersonico avviene tipicamente quando si raggiunge il numero di Mach critico superiore $M_{cr,sup} \approx 1.2$.

Di seguito viene descritta la struttura del campo transonico.

Inizialmente, il corpo viene investito da un fluido a $M_{\infty} < M_{cr,\infty}$, dove per M_{∞} si intende il Mach a monte. In questo caso la distribuzione di pressione e l'andamento della velocità sono simili a quella relativa al campo subsonico.

Il numero di Mach aumenta fino a raggiungere il $M_{cr,\infty}$, ciò significa che un punto sul profilo raggiunge il valore di M = 1 e la pressione raggiunge il suo valore critico. All'aumentare del numero di Mach si genera una bolla supersonica che si estende man mano che la velocità del flusso cresce. La bolla è formata anteriormente da onde di espansione che fanno aumentare il numero di Mach e riducono la pressione, mentre, posteriormente da un'onda d'urto normale che rende il campo di moto subsonico.

Lungo la linea sonica che delimita la bolla, la pressione deve coincidere con il valore di pressione registrato all'esterno. Questo vincolo fa sì che le onde di espansione, che impattano contro la linea sonica, si trasformino in onde di compressione. Queste onde coalescono e formano un urto normale come si vede in dettaglio in Figura 2.3. A valle dell'urto il flusso torna subsonico.





Figura 2.3: a) Esempio di regime transonico b) Bolla Supersonica

Inoltre, all'aumentare del numero di Mach la bolla si estende e l'urto normale arretra verso il trailing edge. Siccome l'urto interagisce con lo strato limite si ha un ispessimento e separazione di quest'ultimo.

Capitolo 3

Identificazione di strutture coerenti

3.1 Introduzione sulla mesh

Per studiare comportamento del flusso attorno a un profilo alare e per individuare lo shock e la bolla supersonica che si vanno a creare sul dorso è necessaria l'introduzione di una griglia o mesh. In questo capitolo, perciò, si farà un breve cenno alla mesh e alla sua forma, successivamente si spiegheranno gli strumenti matematici usati per tracciare l'urto e la bolla supersonica. Una mesh è una griglia formata da punti e celle di diversa forma e dimensione. Le tipiche forme delle celle (o elementi) sono:

- Triangoli o quadrilateri nel caso 2D
- Tetraedri, esaedri, prismi o poliedri nel caso 3D. Gli elementi poliedrici fanno sì che la griglia abbia una maggiore isotropia nella ricostruzione dei gradienti della soluzione.

Ogni cella della mesh rappresenta una soluzione locale dell'equazione (PDE) che, quando viene assemblata all'intera griglia, fornisce la soluzione globale. Esistono tre tipi di mesh:

- 1. Mesh strutturata è composta da celle di forma quadrilatera (nel caso 2D) e di forma esaedrica (nel caso 3D) ordinate. La connettività è gestita mediante degli indici (in numero pari al numero di dimensioni considerate) che scorrendo permettono di identificare tutte le celle del dominio: in particolare, in una griglia strutturata i vicini di un elemento possono essere identificati semplicemente incrementando o decrementando i suoi indici.
- 2. Mesh non strutturata grazie alla quale è possibile discretizzare geometrie più complesse. La natura non strutturata della griglia richiede un'esplicita gestione della connettività tra i vari elementi. È inoltre possibile variare la densità della griglia laddove avvengono i fenomeni fisici di maggior interesse.
- 3. Mesh ibrida in cui vengono usati sia quadrilateri sia triangoli anche in questo caso è possibile raffinare la mesh solo dove è richiesto.

L'introduzione di una mesh, o griglia, attorno al profilo alare è necessaria per effettuare le simulazioni numeriche. Per prima cosa è stato scelto un dominio fisico circolare dentro cui è posto il profilo alare. Il dominio è formato da un cerchio di raggio pari a 40 m, con centro posto nell'origine. In tutte le simulazioni effettuate si è considerato un profilo con corda unitaria.

Per una prima simulazione è stata creata una griglia triangolare con un numero di nodi N dell'ordine di 10^3 e una matrice di connessione (o triangolazione) con un numero di elementi dell'ordine di 10^4 .

In un secondo momento, è stata creata una mesh più raffinata con N dell'ordine di 10^4 e un numero di triangoli di 10^4 . Aumentando il numero di nodi, l'area degli elementi diminuisce. Questo permette di ottenere soluzioni più precise. Tramite il comando Matlab *triplot*, che prende in input la connettività e le coordinate è possibile creare il plot delle mesh [12]. Nella mesh raffinata è stato aumentato il numero di nodi in prossimità del profilo, mentre lontano da esso i punti della griglia sono più distanti l'uno dall'altro.



Figura 3.1: Mesh sul profilo alare



Figura 3.2: Mesh Raffinata

La scelta di rendere la mesh più fine nell'intorno del profilo e più rada lontano da esso risulta dalle seguenti considerazioni:

• vicino al profilo si ha lo strato limite in cui è presente un fluido viscoso. L'effetto della viscosità induce un gradiente di velocità, che a parete è nullo e man mano che ci si allontana dal profilo aumenta gradualmente di valore fino a diventare pari alla velocità del flusso indisturbato a monte.

• lontano dal profilo invece si considera il campo euleriano in cui è possibile trascurare gli effetti viscosi

• il tempo computazionale aumenta con l'infittirsi dei nodi. Perciò, laddove non è necessaria una soluzione accurata è possibile avere una mesh rada.

Una griglia di questo tipo risulta essere distorta; quindi, l'aumento dell'area degli elementi dovrà essere graduale.

Di seguito, in Figura 3.3 è possibile osservare l'andamento delle variabili primitive $(\rho, p, u e v)$ per il $M_{\infty} = 0.7$. Dove ρ è la densità, p è la pressione e u, v sono le componenti della velocità.



Figura 3.3: Variabili primitive



Come si può notare in Figura 3.4 le soluzioni sono più precise grazie a una mesh più fitta.

Figura 3.4: Variabili primitive con mesh raffinata

In entrambe le Figure 3.3 e 3.4 si notano chiaramente i punti di ristagno in cui la pressione e la densità raggiungono il loro valore massimo, mentre la velocità si annulla.

3.2 Descrizione del sensore

Le onde d'urto sono delle discontinuità che si possono osservare nei flussi compressibili supersonici.

Da un punto di vista fluidodinamico l'urto è considerato come una discontinuità per la pressione, la densità e altre variabili.

La presenza di onde d'urto su un profilo ha diversi effetti. La loro presenza altera in maniera importante la distribuzione di pressione su un profilo e porta alla comparsa di una forma di resistenza aerodinamica detta resistenza d'urto. Inoltre gli urti possono indurre separazioni nello strato limite con conseguente aumento della resistenza aerodinamica. Perciò per ritardare il più possibile la separazione si cerca di avere lo shock il più vicino possibile al *trailing edge*.

Vista la loro importanza, nel campo dell'aerodinamica si stanno studiando metodi di rilevazione dell'urto, cioè dei sensori. Nell'ambito della fluidodinamica computazionale, la presenza di urto o discontinuità può indurre delle oscillazioni numeriche. Questi disturbi tendono a rendere lo schema numerico poco stabile, perciò si cerca di aggiungere viscosità numerica che tende a regolarizzare lo schema. Lo scopo di questi sensori è quello di localizzare le discontinuità in un dominio in modo che si possa aggiungere la viscosità solo dove serve.

Esistono vari tipi di sensori quali:

- 1. Sensore di Ducros
- 2. Mach maggiore del valore unitario

Il sensore di Ducros è uno dei sensori più tipici[13]. Di seguito viene espressa la formula di Ducros:

$$\Theta = \frac{max(-\nabla \cdot u,0)}{\sqrt{(\nabla \cdot u)^2 + \parallel \nabla \times u \parallel_2^2 + a^2}}$$
(3.1)

Si considera un'alternativa del sensore di Ducros. Nel corso di questa tesi verrà denominato "Ducros corretto", in quanto viene corretto con il gradiente di velocità.

$$\Theta = \frac{max(-\nabla \cdot u,0)}{\sqrt{(\nabla \cdot u)^2 + \|\nabla \times u\|_2^2 + a^2}} \cdot \|\nabla u\|_2$$
(3.2)

Dove con ∇u si indica il gradiente di velocità. Un ulteriore sensore che può essere utilizzato consiste semplicemente nell'identificare la bolla supersonica dove M>1. L'utilità di tale sensore è limitata a flussi transonici e non può essere usato in flussi supersonici. Il sensore si esprime con la seguente equazione 3.3

$$M = \frac{\|u\|_2}{a}$$
(3.3)

Dove $|| u ||_2$ rappresenta la norma della velocità calcolata come $|| u ||_2 = \sqrt{u^2 + v^2}$ e con a si indica la velocità del suono.

3.3 Rilevazione di outliers nei dati

Nell'analisi dei dati, la rilevazione di anomalie o *outlier detection* è un processo di individuazione di valori o di punti dati che deviano significativamente dalla maggior parte dei dati. Con questa procedura si ricerca una risoluzione o si effettua la loro eliminazione dall'analisi per prevenire qualsiasi potenziale distorsione. Il rilevamento degli outlier è uno dei processi più importanti adottati per creare dati buoni e affidabili. Perciò gli outlier non sono altro che errori di misurazione o rumori nel caso di shock.

Per rilevare le anomalie e procedere con la loro eliminazione è stato usato il comando di Matlab *rmoutliers* che prende in input un vettore di dati e fornisce in output un altro vettore in cui i dati che si scostano di molto dagli altri vengono rimossi. Le anomalie sono dovute alle oscillazioni numeriche.

Come si vede nelle seguenti figure 3.5, il sensore di Ducros corretto è lo strumento più preciso per rilevare l'urto; mentre, il sensore di Ducros non rileva in modo adeguato la discontinuità. Infine, il sensore basato sul Mach è utile per rilevare la bolla supersonica. Nonostante la presenza di anomalie lungo il dorso, il sensore di Ducros modificato e il sensore di Mach normale presentano anomalie concentrate verso la metà del dorso, mentre il restante sensore presenta una distribuzione di anomalie lungo tutto il ventre e questo porta a una maggiore imprecisione.



19



Figura 3.5: Confronto tra sensori

In Figura 3.6, si mostra l'andamento di densità per $M_{\infty} = 0.73$ e l'accuratezza della posizione dell'urto a seconda dei diversi sensori mostrati precedentemente.



(a) Rilevazione della bolla supersonica con sensore di Ducros corretto non filtrato



(c) Rilevazione della bolla supersonica con sensore di Ducros corretto non filtrato





(b) Rilevazione dell'urto con sensore di Ducros corretto



(d) Rilevazione dell'urto con sensore di Ducros corretto



(e) Rilevazione della bolla supersonica con sensore basato sul Mach non filtrato

(f) Rilevazione dell'urto con sensore basato sul ${\it Mach}$

Figura 3.6: Posizione degli urti a seconda del sensore

Come si vede in Figura 3.7 la raffinatezza della griglia influenza la qualità dei sensori. Il sensore di Ducros modificato è più preciso: i punti trovati diventano più fitti in corrispondenza dell'urto. In questo caso, il sensore di Ducros è nettamente migliorato. Per quanto riguarda il sensore basato sul Mach normale la distribuzione di anomalie sul dorso si è infittita e questo comporta una lettura dell'urto sbagliata.

In Figura 3.8 è rappresentata la posizione dell'urto
a $M_\infty=0.73$ per i vari sensori.





Figura 3.7: Confronto tra sensori con mesh raffinata



(a) Rilevazione della bolla supersonica con sensore di Ducros corretto non filtrato



(c) Rilevazione della bolla supersonica con sensore di Ducros non filtrato



(e) Rilevazione della bolla supersonica con sensore di Mach non filtrato



(b) Rilevazione dell'urto normale con sensore di Ducros corretto filtrato



(d) Rilevazione dell'urto normale con sensore di Ducros filtrato



(f) Rilevazione dell'urto normale con sensore di Mach filtrato

Figura 3.8: Posizione degli urti a seconda del sensore

Capitolo 4

Interpolazione non lineare basata sulla registrazione

I metodi di approssimazione lineare non sono adatti a trattare i campi parametrici descritti da forti gradienti. Questo ostacola l'applicazione della tecnica pMOR a un'estesa classe di problemi.Quindi, per ovviare a questo problema si ricorre a metodi di approssimazione non lineare. Un esempio dei metodi appena citati è la tecnica di registrazione. È utile soprattutto per problemi di tipo iperbolico, cioè quando si studia il comportamento di un flusso supersonico. I motivi per cui è usata sono [1]:

- è efficace per tracciare forti gradienti, per esempio attraverso un urto si generano bruschi gradienti di pressione, densità e altre variabili.
- migliora l'utilizzo di metodi di compressione lineare e riduce la dimensione della mesh *high fidelity* richiesta.
- dopo aver costruito la mappa Φ si possono utilizzare metodi lineari per ridurre le dimensioni del dominio, per esempio il metodo POD o algoritmi *weak-Greedy*.

Gli input di questa tecnica sono la mesh T_{hf} del dominio, un sensore di registrazione e un insieme di *snapshot* del manifold $\{u^k\}_{k=1}^{n_{train}} \subset \mathcal{M}$; mentre l'output è una mappa biettiva $\Phi: \Omega \times P \to \Omega \quad \forall \mu$. Quest'ultima deve essere costruita in modo che il manifold mappato $\tilde{\mathcal{M}} = \{\tilde{u}_{\mu} = u_{\mu} \circ \Phi_{\mu} : \mu \in \mathcal{P}\}$ sia adatto per metodi lineari di compressione dati [18]. Perciò, si definisce un vettore di parametri $\mu = [\mu_1, ..., \mu_n] \in \mathcal{P} \subset \mathbb{R}^P$ dove \mathcal{P} rappresenta la regione; si indica il dominio di interesse con $\Omega \subset \mathbb{R}^2$ e con u_{μ} la soluzione delle equazioni

alle differenze parziali (PDE) di interesse per il parametro $\mu \in \mathcal{P}$. Inoltre, si definisce lo spazio di Hilbert¹, completato con il prodotto interno (\cdot, \cdot) e la norma indotta $\|\cdot\| := \sqrt{(\cdot, \cdot)}$. Successivamente, si introduce il manifold² della soluzione $\mathcal{M} = \{u_{\mu} : \mu \in \mathcal{P}\} \subset X$.

Gli *snapshot* sono ottenuti tramite l'utilizzo del metodo agli elementi finiti (FE) o ai volumi finiti (FV) e corrispondono alle variabili primitive come ad esempio pressione, densità

 $^{^1}$ uno spazio di Hilbert è un insieme con una struttura lineare (spazio vettoriale) su cui è definito un prodotto scalare

 $^{^2 \}rm \grave{e}$ un insieme, nel nostro caso sarà continua

e velocità. Tramite il metodo FE o FV si ottiene la mesh $T_{hf} := (\{x_j^{hf}\}_{j=1}^{N_{hf,v}}, \mathbf{T})$, dove $\{x_j^{hf}\} \subset \overline{\Omega}$ sono i nodi della griglia e $\mathbf{T} \in \mathbb{N}^{n_{lp},N_e}$ è la matrice di connettività³, n_{lp} è il numero di gradi di libertà di ogni elemento e N_e è il numero di elementi totale.

L'approccio fornisce anche un operatore lineare $Z_N : \mathbb{R}^N \to X$ N-dimensionale, un operatore lineare W_M M-dimensionale, e i coefficienti $\{\alpha^k\}_{k=1}^{n_{train}} \subset \mathbb{R}^N$ e $\{\mathbf{a}^k\}_{k=1}^{n_{train}} \subset \mathbb{R}^M$.

Seguendo l'approccio proposto in [18] e dato il dominio Ω , che viene suddiviso in quattro blocchi o sottodomini $\{\Omega_q\}_{q=1}^{N_{dd}}$, dove $N_{dd} = 4$, si definisce una mappa Ψ_q tra il dominio di riferimento e l'elemento q-esimo della partizione e con Ψ_q^{-1} la sua inversa. Infine, si crea la mappa nella seguente forma:

$$\Phi = \sum_{q=1}^{N_{dd}} \Psi_q^{gh} \circ \Phi_q \circ (\Psi_q^{gh})^{-1}, \quad \Phi_q = \mathrm{id} + W_M \mathbf{a}$$
(4.1)

Dove, id rappresenta la matrice di identità, **a** sono i coefficienti della mappa che verranno calcolati risolvendo un problema di ottimizzazione descritto nella sezione successiva 4.2 e $\Psi_1^{gh}, \ldots, \Psi_{N_{dd}}^{gh}$ rappresenta la mappa di Gordon Hall⁴ da Ω a $\Omega_1, \ldots, \Omega_{N_{dd}}$ rispettivamente. Per fare in modo che Φ sia una mappa da $\Omega \to \Omega$ è necessario imporre due condizioni:

- Biettività locale: $\Phi(\Omega_q) = \Omega_q$, $\det(\nabla \Phi) > 0$ in Ω_q per $q = 1, \ldots, N_{dd}$
- Continuità delle interfacce: $\Phi \in C(\Omega; \mathbb{R}^2)$

Affinché la prima condizione sia soddisfatta bisogna imporre solo che Φ_q sia invertibile perché Ψ_q^{gh} è già biettiva.

4.1 Deformazioni conformi con la geometria

Riprendendo il paragrafo precedente, dato il dominio circolare $\Omega \subset \mathbb{R}^2$, si indica con $\{\Omega_q\}_{q=1}^{N_{dd}}$ una partizione non sovrapposta del dominio. In questo caso $N_{dd} = 4$ e rappresenta il numero dei blocchi in cui è scomposto il dominio. La numerazione della suddivisione avviene in senso antiorario come si può vedere in Figura 4.2.

- 1. Blocco 1 o Blocco Nord
- 2. Blocco 2 o Blocco Ovest
- 3. Blocco 3 o Blocco Sud
- 4. Blocco 4 o Blocco Est

Successivamente, si introducono le mappe di Gordon Hall[22] per ogni blocco $\Psi_1^{gh}, ..., \Psi_{N_{dd}}^{gh}$

$$\Omega \to \Omega_q.$$

La cui formula esplicita è

$$\Psi^{gh}(u,v) = (1-v)c_1(u) + vc_3(u) + (1-u)c_2(v) + uc_4(v) - ((1-u)(1-v)P_1 + uvP_4 + u(1-v)P_2 + (1-u)vP_3)$$
(4.2)

 $^{^{3}}$ è una matrice che collega i nodi agli elementi

⁴considera la parametrizzazione dei bordi nota
Dove c_1, c_2, c_3, c_4 sono le parametrizzazioni dei lati del blocco, u, v sono le coordinate spaziali e P_1, P_2, P_3, P_4 sono gli estremi dei bordi.

Questo tipo di mappa permette di mappare l'elemento di riferimento ottenuto tramite discretizzazione in un elemento fisico e grazie a ciò si genera una mesh deformata e strutturata.



Figura 4.1: Gordon Hall Map [17]

La Figura 4.1 rappresenta la mappa di Gordon Hall che nel caso in questione sarà riadattata ad un dominio circolare.

La parametrizzazione dei bordi fa riferimento ai nodi della griglia in Figura 3.1. La parametrizzazione dei bordi curvi è stata realizzata tramite una funzione Matlab che costruisce un'interpolante di una funzione f(x) e della sua derivata df(x) tale che

- f(x) = y
- df(x) è continua

Inoltre, questo script prende in input la lunghezza dell'arco parametrizzata dei bordi curvi e le coordinate delle ascisse o delle ordinate a seconda che si stia creando la funzione per le ascisse o per le ordinate, che rappresenta l'output del codice. Mentre la parametrizzazione per i bordi rettilinei è più semplice, in quanto si calcola la distanza tra il punto iniziale e quello finale.

In questo modo si ottengono le funzioni e le rispettive derivate dei bordi.

- c_1, dc_1
- c_2, dc_2
- c_3, dc_3
- c_4, dc_4

È importante che i bordi seguano la direzione raffigurata in figura 4.1 altrimenti si ottiene il determinante della matrice Jacobiana negativo e di conseguenza l'area del blocco risulterà negativa. Da un punto di vista fisico ciò significa che i triangoli della mesh si invertono. Se, invece, il determinante della Jacobiana fosse nullo i triangoli della mesh si ridurrebbero a un punto. Si ricordi che la matrice Jacobiana di una funzione f in $x = (x_1, \ldots, x_n)$ è la matrice delle derivate prime parziali della funzione calcolate in x. E viene calcolata come

	$\boxed{\frac{\partial f_1}{\partial x_1}}$		$\left \frac{\partial f_1}{\partial x_n} \right $
Jf =	:	·	:
	$\frac{\partial f_m}{\partial x_1}$		$\left \frac{\partial f_m}{\partial x_n} \right $

Perciò in questo caso si dovrà calcolare la derivata di $\Psi^{gh}(u,v)$ sia rispetto ausia rispetto av:



Di seguito viene riportata la mappa di Gordon Hall per ogni blocco.

Figura 4.2: Partizione del dominio



4.2 Metodo di ottimizzazione

4.2.1 Cenni sull'ottimizzazione

I metodi di ottimizzazione hanno lo scopo di trovare punti di minimo e di massimo di una funzione obiettivo lineare o non lineare all'interno di un dominio specifico. Per raggiungere la soluzione si procede tramite iterazioni: si inizia definendo arbitrariamente un valore iniziale u_0 che identifica una configurazione all'interno dello spazio dei parametri, si effettuano calcoli intermedi che infine portano a un nuovo punto u_1 . Questo processo viene ripetuto per un determinato numero di iterazioni in modo da trovare approssimazioni successive fino al minimo o massimo.

Un problema di ottimizzazione è caratterizzato da:

- Funzione obiettivo è la funzione da minimizzare ed è descritta da una o più variabili
- Vincoli di uguaglianza o *functional constraints* che specificano la relazione esistente tra le variabili
- Vincoli di disuguaglianza o *regional constraints* che sono imposti in base a specifici dettagli

Inoltre, i vincoli possono essere lineari o non lineari. Esistono diversi metodi di ottimizzazione:

- Ottimizzazione tramite evoluzione
- Ottimizzazione tramite intuizione
- Ottimizzazione tramite trial and error
- Ottimizzazione tramite algoritmi numerici

Nel corso di questa tesi viene usato un metodo di ottimizzazione basato su algoritmi numerici, in particolare l'algoritmo di *interior point*.

Da un punto di vista matematico si può scrivere un generico problema di ottimizzazione come segue [14]:

$$\begin{cases} \min_{u \in U} J(y(u), u) \\ \text{subject to} \quad h(u) = 0 \\ g(u) \ge 0 \end{cases}$$

Dove, J è un funzionale⁵, h(u) e g(u) sono i vincoli rispettivamente di uguaglianza e di disuguaglianza. Queste funzioni dipendono dal problema. $y(\cdot)$ è la soluzione di un'equazione alle differenze parziali, u è una funzione di controllo o decisionale, U è uno spazio di Hilbert e rappresenta l'insieme delle soluzioni ammissibili.

La strategia principale dei metodi di ottimizzazione consiste nella definizione di una iterata iniziale u_0 .

 $^{^5 {\}rm Funzione}$ le cui variabili indipendenti sono a loro volta delle funzioni. Il dominio di un funzionale è uno spazio di funzioni

I metodi di ottimizzazione devono rispettare le condizioni di Karush–Kuhn–Tucker o *KKT* conditions che si basano su informazioni di primo e secondo ordine di una funzione. Per una funzione:

- L'informazione di primo ordine calcola la derivata prima di una funzione e si trova il punto stazionario e la monotonicità;
- L'informazione di secondo ordine calcola la derivata seconda per scoprire se il punto stazionario è anche un ottimo locale.

In modo analogo per un funzionale:

• Si calcola il gradiente del funzionale, nel caso 2D

$$\nabla f = \frac{\partial f}{\partial x} + \frac{\partial f}{\partial y} \tag{4.4}$$

• Si calcola l'Hessiano che può essere definito positivo o definito negativo. Se definito positivo si raggiunge il minimo, altrimenti il massimo.

$$H(x,y) = \begin{bmatrix} f_{xx}'' & f_{xy}'' \\ f_{yx}'' & f_{yy}'' \end{bmatrix}$$

4.2.2 Ottimizzazione basata sulla registrazione

Dato il vettore dei parametri $\mu \in \mathcal{P}$, si indica con $s_{\mu} \in L^2(\hat{\Omega})$ un sensore di registrazione che dipende dalla soluzione U_{μ}^{hf} e ha il compito di catturare le caratteristiche associate al campo di soluzione, quindi in questo caso corrisponde al sensore di Ducros o al sensore di Mach normale; si introduce uno spazio N-dimensionale $Z_N \subset L^2(\hat{\Omega})$. Successivamente, si indica uno spazio M-dimensionale $W_M \subset W_{hf}$ e con $W_M : \mathbb{R}^M \to W_M$ un'isometria tale che $\| W_M \mathbf{a} \|_{H^2(\hat{\Omega})}^2 = \| \mathbf{a} \|_2$ per tutti $\mathbf{a} \in \mathbb{R}^M$. Si può allora introdurre il metodo di ottimizzazione che ha lo scopo di trovare i coefficienti \mathbf{a} della mappa per un dato parametro. I coefficienti saranno la soluzione del seguente problema:

$$\begin{cases} \min_{\mathbf{a}\in\mathbb{R}^{M}} \mathbf{f}(\mathbf{a}; s, Z_{N}, W_{M}) + \zeta \parallel W_{M}\mathbf{a} \parallel^{2}_{H^{2}(\hat{\Omega})} + \zeta_{msh}\mathcal{R}_{msh}(\mathbf{a}; \mu) \\ \text{subject to} \quad \mathcal{C}(\mathbf{a}) \leq 0 \end{cases}$$

$$(4.5)$$

Dove $C(\mathbf{a})$ è un funzionale che rappresenta un vincolo non lineare che impone la biettività continua e discreta⁶: se è negativo allora la mappa è biettiva. Si calcola come:

$$\mathcal{C}(\mathbf{a}) := \int_{\hat{\Omega}} \exp\left(\frac{\epsilon - \mathcal{J}_{\mathbf{a}}^{hf}(X)}{C_{\exp}}\right) + \exp\left(\frac{\mathcal{J}_{\mathbf{a}}^{hf}(X) - \frac{1}{\epsilon}}{C_{\exp}}\right) dX - \delta \le 0$$
(4.6)

Si definiscono le costanti $C_{\exp} = 0.025\epsilon$ è una costante, $\delta = 1$ e $\epsilon = 0.1$. Nell'equazione (4.6) $\mathcal{J} = \det(\hat{\nabla}\Phi_q)$ è il determinante della mappa affine e deve essere maggiore di una

⁶per il calcolo FE

determinata costante altrimenti non viene rispettato il vincolo della biettività: da un punto di vista dell'ottimizzazione questo rappresenta un vincolo non lineare per i coefficienti **a** per ciascun punto della mesh. ζ è un termine di regolarizzazione di tipo Tikhonov e ha lo scopo di controllare il gradiente della Jacobiana; mentre il termine \mathcal{R}_{msh} è un funzionale che considera le distorsioni della mesh e mantiene la biettività anche nel dominio discreto, ed è espresso nel seguente modo:

$$\mathcal{R}_{msh}(\mathbf{a}) = \sum_{k=1}^{N_e} |\mathbf{D}_k| \exp(\mathbf{f}_{msh,k}(\phi(\cdot;\mathbf{a})) - \mathbf{f}_{msh,max}).$$
(4.7)

Dove $f_{msh,max} > 0$, in particolare per le simulazioni numeriche viene preso pari a 10. Questo termine detto *proximity measure* è un indicatore usato per la generazione di una mesh ad alto ordine e per prevenire la degradazione della mesh[18].

Per risolvere il problema di ottimizzazione si utilizza il comando Matlab "fmincon" che si basa sul metodo interior point per trovare il minimo locale dell'equazione (4.5). Questo comando prende in input la funzione obiettivo, l'iterata iniziale a_0 , i vincoli e il tipo di algoritmo; restituisce i coefficienti della mappa a_{opt} che hanno la stessa dimensione di a_0 , il valore della funzione obiettivo ad ogni soluzione a_{opt} . L'algoritmo si ferma quando raggiunge il numero massimo di iterazioni pari a 1000 oppure quando trova il minimo locale. Inoltre, sul Command Window di Matlab sono mostrati i calcoli effettuati dal calcolatore ad ogni iterazione [10].

- Iteration rappresenta il numero dell'iterazione corrente.
- F-count rappresenta il numero di valutazioni delle funzioni.
- f(x) il valore della funzione obiettivo corrente
- Feasibility rappresenta la violazione del vincolo massimo, se vale zero significa che i vincoli sono soddisfatti.
- First-Order optimality è una misura di quanto è vicino un punto all'ottimo.
- Norm of step rappresenta la dimensione dello step corrente.

Questo algoritmo si basa sul metodo del gradiente o metodo di massima discesa che ha come scopo quello di determinare il punto di minimo dopo aver definito una direzione di discesa calcolata come $d_k = -\nabla J(u_k)$.

I metodi interior-point[8] sono metodi iterativi che calcolano una sequenza di iterate e tendono a convergere a una soluzione ottimale. La tecnica di *interior point* soddisfa tutte le condizioni di contorno. Il primo passo è la definizione di un punto che giace dentro un insieme fattibile di soluzioni. Si indica con P lo spazio fattibile che contiene una successione di punti x che soddisfano i vincoli, cioè

$$P = \{ x \in \mathbb{R}^n | Ax = b \quad \text{and} \quad x \ge 0 \}$$

$$(4.8)$$

e lo spazio associato P^+ che è il sottospazio di P che soddisfa i vincoli di stretta non negatività.

$$P^+ = \{ x \in \mathbb{R}^n | Ax = b \quad \text{and} \quad x > 0 \}$$

$$(4.9)$$

 P^+ è detto strictly feasible set e i suoi elementi sono detti "strictly feasible points". Le iterate interior-point tendono ad una soluzione ottima ma non la raggiungono mai (non si ottiene una soluzione esatta). Ma questo non rappresenta un problema perché

- la maggior parte delle volte il metodo produce un'approssimazione del punto di ottimo con un'accuratezza adeguata
- una procedura di arrotondamento può convertire un punto interno di quasi ottimo in un punto di ottimo esatto.



Figura 4.3: Illustazione del metodo di interior point [23]

4.3 Interpolazione non lineare

La tecnica di interpolazione non lineare usata in questa tesi è detta *convex displacement interpolation*. È stata effettuata anche un'interpolazione lineare la cui soluzione sarà confrontata con quella non lineare.

Tramite il sensore di Ducros modificato, di Ducros e di Mach normale è stato possibile rilevare la posizione dell'urto sul dorso del profilo. Il passo successivo prevede di effettuare interpolazioni che siano il più accurate possibile per trovare soluzioni approssimate delle variabili primitive corrispondenti a *Mach* intermedi partendo da due *snapshot* calcolati effettuando un'interpolazione di grado polinomiale 1 della mesh deformata. Ci sono due modi di procedere:

- Interpolazione lineare
- Interpolazione non lineare

Il modello lineare può essere interpretato come una generalizzazione delle interpolazioni convesse di due *snapshot* U_0 e U_1 e viene espresso come media ponderata:

$$\hat{U}^{co}(s,x) = (1-s)U_0(x) + sU_1(x) \quad s \in [0,1], x \in \mathbb{R}^n$$
(4.10)

Dove s è una funzione parametrica, x è la coordinata spaziale e $U_0, U_1 : \Omega \subset \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^d$. Nella sottosezione seguente 4.3.1 sarà spiegato come si calcola s.

Questo modello considera il problema come caratterizzato da una struttura coerente lineare. I modelli lineari sono largamente usati in campo computazionale in quanto sono efficaci nella valutazione di strutture in flussi turbolenti. Ma nonostante le varie applicazioni, questi risultano inaccurati per altri campi di soluzione, come per esempio la presenza di uno shock su un profilo alare o vortici in una scia. Perciò, si implementano metodi basati sull'interpolazione non lineare.

Il modello non lineare proposto fa riferimento al trasporto ottimale⁷ partendo dai due snapshot e si basa sul metodo di registrazione.

L'approccio non lineare può essere suddiviso in vari step:

- Si considera una funzione test scalare⁸ per ricavare un modello gaussiano⁹ g[U] del campo di soluzione. La funzione test rappresenta le caratteristiche del flusso di interesse: per un flusso transonico si vogliono identificare le regioni con alti gradienti perché corrispondono alle onde d'urto; perciò si considera l'equazione ??;
- Tramite il trasporto di ottimo delle distribuzioni Gaussiane delle strutture coerenti si ottengono due mappe T_g da $g[U_0]$ a $g[U_1]$ e R_g da $g[U_1]$ a $g[U_0]$, dette rispettivamente mappa diretta e inversa. Inoltre $R_g = T_g^{-1}$

⁷Il trasporto ottimale è un problema di ottimizzazione vincolato che ha come scopo quello di trasformare una funzione di probabilità in un altra nel modo più efficiente possibile, quindi minimizzando il costo di trasporto.

 $^{^{8}}$ funzioni atte a valutare il funzionamento e l'efficienza degli algoritmi di ottimizzazione.

⁹In ambito probabilistico, la distribuzione Gaussiana è una curva a campana che descrive una distribuzione di probabilità continua usata per rappresentare variabili casuali a valore reale che si raggruppano attorno a un valore medio

• Infine, si definisce l'interpolazione non lineare come segue:

$$\hat{U}(s,x) = (1-s)U_0 \circ W_g(s,x) + sU_1 \circ T_g(1-s,x), \quad s \in [0,1], x \in \mathbb{R}^n$$
(4.11)

dove $W_g(s, x) = (1 - s)x + sR_g(x)$ e $T_g(s, x) = (1 - s)x + sT_g(x)$. \hat{U} è il risultato interpolato tramite convex displacement interpolation.

Si osserva che $\hat{U}(0, \cdot) = U_0$ e $\hat{U}(1, \cdot) = U_1$. In questo caso, si studia l'interpolazione tra $Mach_{\infty,0} = 0.7$ e $Mach_{\infty,1} = 0.76$. Gli *snapshot* sono i campi fluidodinamici per Mach = 0.70 e per Mach = 0.76.

Per comprendere se la tecnica è accurata o meno si calcola il campo dell'errore tramite la formula $E = \hat{U} - U$ e si vede che l'accuratezza varia a seconda del sensore usato.

Il metodo appena descritto però è efficace solo nel caso in cui la soluzione è banale (per esempio nella zona lontano dal profilo alare in cui la mesh è rada) o per problemi semplici quali il problema del tubo d'urto o problema di Riemann, in quanto questo approccio non conserva le strutture coerenti al profilo alare. Per questo motivo si introduce un secondo metodo detto Boundary-Aware registration di modelli Gaussiani multipli[2]. La cui formula è la seguente:

$$\hat{U}(s,x) = (1-s)U_0 \circ \hat{W}_g(s,x) + sU_1 \circ \hat{T}_g(1-s,x), \quad s \in [0,1], x \in \Omega$$
(4.12)

Dove $\tilde{W}_g(s,x) = \Phi(x, s \circ \hat{a}_{1,0}) \in \tilde{T}_g(1-s,x) = \Phi(x, s \circ \hat{a}_{0,1})$, i coefficienti \hat{a} sono ottenuti tramite il metodo di ottimizzazione "fmincon" e Φ è la mappa trovata tramite l'equazione 4.1.

4.3.1 Calcolo della funzione parametrica s

Questa funzione può essere calcolata in due modi, ma in entrambi i casi dipende dal numero di Mach:

- tramite interpolazione lineare
- tramite interpolazione non lineare

Nel caso lineare, s viene calcolato in funzione del Mach con la seguente formula:

$$s = \frac{Mach(i) - Mach_{min}}{Mach_{max} - Mach_{min}} \quad i = 1, \dots, 7 \quad e \quad Mach = 0.7, \dots, 0.76$$
(4.13)

Siccome in questo caso la funzione parametrica dipende solo dal numero di Mach, l'approssimazione lineare non sarà influenzata né dal sensore usato né dalla raffinatezza della mesh. Si osservi la Figura 4.4



Figura 4.4: Interpolazione lineare di s

Per eseguire l'interpolazione non lineare o polinomiale ci si basa sulla seguente formula:

$$s_{pol} = \frac{X_{shock}(M(i)) - X_{shock}(M_{min})}{X_{shock}(M_{max}) - X_{shock}(M_{min})}$$
(4.14)

Si identificano i punti dei markers filtrati a parete, che corrispondono all'ordinata minima, per ogni *snapshot*. Successivamente, si selezionano le ascisse corrispondenti che vengono interpolate tramite una parabola e tramite la funzione *polyfit* di Matlab. Dal confronto tra i due metodi di approssimazione non lineare emerge che la parabola collega i punti in maniera più precisa; perciò si predilige l'utilizzo di quest'ultima tecnica per approssimare il parametro s. In questo caso le ordinate trovate dipendono dal sensore usato, dalla finezza della mesh e dal numero di Mach. In Figura si mostra l'andamento non lineare del parametro. Il parametro spazia a 0 a 1 proprio come l'andamento lineare di s.





(a) Andamento non lineare del parametro del sensore di Ducros corretto

(b) Andamento non lineare del parametro del sensore di Ducros



sensore Mach

Figura 4.5: Approssimazione non lineare di s per i diversi sensori

Invece, per la mesh fine si ottiene:





(a) Andamento non lineare del parametro del sensore di Ducros corretto

(b) Andamento non lineare del parametro del sensore di Ducros



sensore Mach

Figura 4.6: Approssimazione non lineare di \boldsymbol{s} per i diversi sensori

Si vuole trovare la posizione degli urti relativi ai numeri di Mach a monte proposti. Per fare ciò si procede con l'approssimazione espressa nell'equazione 4.10. Questa approssimazione viene calcolata sia usando l'interpolazione lineare della funzione parametrica, sia quella non lineare. Di conseguenza si ottengono i grafici mostrati in Figura 4.9



 (a) Posizione approssimata degli urti per il sensore di Ducros corretto
 (b) Posizione approssimata degli urti per il sensore di Ducros

Figura 4.7: Posizione degli urti per i diversi sensori

Si nota come la soluzione ottenuta tramite interpolazione non lineare di s si avvicini di più alla soluzione reale, rispetto a quella ottenuta tramite interpolazione lineare di s. Inoltre, come ci si aspetta la soluzione ottenuta tramite interpolazione lineare del parametro relativa al Mach iniziale e finale ha lo stesso valore della soluzione reale ai medesimi Mach, in quanto s = 0 in corrispondenza di $M_{\infty} = 0.7$ e s = 1 in corrispondenza di $M_{\infty} = 0.76$. La stessa osservazione si può fare anche per quanto riguarda l'interpolazione non lineare, infatti la dipendenza dal Mach è dovuta alla posizione dei marker.



(a) Posizione approssimata dell'urto a M_{∞} = (b) Pos 0.73 per il sensore di Ducros 0.73 per

(b) Posizione approssimata dell'urto a $M_{\infty} = 0.73$ per il sensore di Ducros



Figura 4.8: Posizione approssimata dell'urto a $M_{\infty} = 0.73$ per i diversi sensori

Per i primi due casi si tiene conto dei sensori filtrati, mentre per il caso relativo al sensore di Mach si considerano i marker del sensore non filtrato in quanto si vuole tracciare la zona relativa ai valori di M > 1, cioè la bolla supersonica.

Di seguito vengono presentati i risultati ottenuti considerando la mesh fine. Si nota che usando una mesh più fine la precisione del sensore di Ducros corretto e di Ducros è aumentata ed è molto simile.



(a) Posizione approssimata degli urti per il sensore di Ducros corretto

(b) Posizione approssimata degli urti per il sensore di Ducros

Figura 4.9: Posizione degli urti per i diversi sensori



(a) Posizione approssimata dell'urto a $M_{\infty} = 0.73$ per il sensore di Ducros corretto

(b) Posizione approssimata dell'urto a $M_{\infty} = 0.73$ per il sensore di Ducros



Figura 4.10: Posizione approssimata dell'urto
a $M_\infty=0.73$ per i diversi sensori

Si procede con il calcolo dell'errore relativo in norma L^2 rispetto alla soluzione reale espresso come:

$$E = \sqrt{\left(\frac{\sum_{i=1}^{7} (x_{hf} - \hat{x})^2}{x_{hf}^2}\right)}$$
(4.15)

Dove con \hat{x} e x_{hf} si indicano rispettivamente la soluzione approssimata di s (linearmente e non) e la soluzione originale. In Figura 4.11 vengono presentati i risultati ottenuti applicando la mesh grezza.



(a) Errore di approssimazione per il sensore di Ducros corretto

(b) Errore di approssimazione per il sensore di Ducros



Figura 4.11: Errore di approssimazione per i diversi sensori

La Figura 4.11 rispecchia gli andamenti di Figura 4.9. Siccome il sensore di Ducros è simile al sensore di Ducros corretto anche gli andamenti e i valori degli errori di approssimazione saranno simili, ciò non è vero per il sensore basato sul Mach, per il quale l'errore è di molto superiore rispetto agli altri.

In Figura 4.12 l'errore relativo è ottenuto considerando una mesh fine:



(a) Errore di approssimazione per il sensore di Ducros corretto

(b) Errore di approssimazione per il sensore di Ducros



Figura 4.12: Errore di approssimazione per i diversi sensori

Si nota che gli errori ottenuti tramite mesh raffinata sono inferiori degli errori forniti da mesh grezza. Il motivo sta nel fatto che raffinando la mesh si ottiene un errore di approssimazione inferiore.

Capitolo 5 Risultati numerici ottenuti

In questo capitolo sono inseriti i risultati numerici ottenuti. La prima sezione 5.1 riguarda i risultati ottenuti tramite tecnica di registrazione ricavata dall'interpolazione lineare e non lineare del parametro s. La seconda sezione 5.2 riguarda l'interpolazione lineare, anche per questi risultati risultati si è considerata l'interpolazione lineare e non lineare del parametro. Per la prima sezione si vedranno tre sottofigure:

- La prima corrisponde al coefficiente di pressione ottenuto tramite il codice high fidelity. La colormap corrisponde ai valori di c_P ;
- La seconda mostra il coefficiente di pressione registrato;
- La terza corrisponde al campo dell'errore registrato, la colormap fornisce è limitata¹ tra [0,1] e i valori del campo dell'errore.

Per la seconda sezione si vedranno quattro sottofigure:

- La prima corrisponde al coefficiente di pressione ottenuto tramite il codice high fidelity. La colormap corrisponde ai valori di c_P ;
- La seconda mostra il coefficiente di pressione non registrato;
- La terza corrisponde al campo dell'errore non registrato, la colormap non è limitata tra [0,1], in modo da visualizzare meglio la presenza di due urti. Questa fornisce i valori del campo dell'errore.
- La terza corrisponde al campo dell'errore non registrato, la colormap è limitata tra [0,1] e fornisce i valori del campo dell'errore.

Il campo dell'errore si calcola tramite la seguente equazione:

$$E = \hat{U} - U^{hf} \tag{5.1}$$

Dove, U^{hf} indica la soluzione reale, \hat{U} rappresenta la soluzione registrata 4.11 e non registrata 4.10 ottenute tramite interpolazione lineare e non lineare di s.

¹Per rendere più chiaro il confronto tra le varie figure.

La terza sezione 5.3 invece è relativa ai risultati ottenuti tramite interpolazione non lineare in un range ridotto. Nella quarta sezione 5.4 si mostrano le distribuzioni del coefficiente di pressione ottenuti considerando i diversi sensori e la diversa raffinatezza della mesh.

5.1 Interpolazione non lineare

5.1.1 Risultati per il sensore di Ducros corretto

In Figura 5.1 si introduce la soluzione registrata con s lineare.



(a) Coefficiente di pressione tramite codice high fidelity





Figura 5.1: Soluzione registrata con s lineare

La soluzione registrata è abbastanza accurata. Si distingue bene l'urto sul dorso.



In Figura 5.6 si introduce la soluzione registrata con \boldsymbol{s} non lineare.

c_P tramite registrazione, s_{pol}

1

(a) Coefficiente di pressione tramite codice high fidelity

 $(b) \ Coefficiente \ di \ pressione \ tramite \ registrazione$



Figura 5.2: Soluzione registrata con \boldsymbol{s} non lineare

La soluzione registrata tramite interpolazione polinomiale del parametro è più precisa.

5.1.2 Risultati per il sensore di Ducros corretto con mesh fine

In Figura 5.7 si introduce la soluzione registrata con \boldsymbol{s} lineare



(a) Coefficiente di pressione tramite codice high fidelity

(b) Coefficiente di pressione tramite registrazione $% \mathcal{C}_{\mathcal{C}}$



Figura 5.3: Soluzione registrata con s lineare

La soluzione registrata è accurata, infatti nel campo dell'errore l'onda d'urto si distingue chiaramente.



In Figura 5.8 si introduce la soluzione registrata con s non lineare

(a) Coefficiente di pressione tramite codice high fidelity

 x_1 (b) Coefficiente di pressione tramite registrazione

1

1.5

1

0.5

0

-0.5

-1



Figura 5.4: Soluzione registrata con \boldsymbol{s} non lineare

Anche in questo caso la posizione dell'onda d'urto è definita precisamente, ma la bolla supersonica è raffigurata con qualche imprecisione.

Infine, si calcola l'errore in norma L^2 rispetto al numero di nodi. La formula è espressa dall'equazione:

$$E = \frac{\sqrt{\sum_{i=1}^{N} (c_P - \hat{c}_P)^2}}{N}$$
(5.2)

Si confronta la soluzione registrata considerando le due interpolazioni del parametro e le due mesh.

Registrazione con	registrazione con	registrazione con	registrazione con
mesh rada, s_{lin}	mesh fine, s_{lin}	mesh rada, s_{pol}	mesh fine, s_{pol}
$9.10 \cdot 10^{-4}$	$5.5 \cdot 10^{-4}$	$5.72 \cdot 10^{-4}$	$2.58 \cdot 10^{-4}$

Tabella 5.1: Errore introdotto dalla soluzione registrata con mesh rada e fine

Si vede che raffinando la mesh si ottiene un errore di interpolazione minore, di conseguenza si avrà un errore inferiore di approssimazione dei gradienti che sono richiesti dal sensore.

5.1.3 Risultati per il sensore di Ducros

In Figura 5.5 si introduce la soluzione registrata con \boldsymbol{s} lineare



(a) Coefficiente di pressione tramite codice high fidelity

(b) Coefficiente di pressione tramite registrazione $% \mathcal{C}_{\mathcal{C}}$



Figura 5.5: Soluzione registrata con s lineare

La soluzione registrata con interpolazione lineare del parametro è abbastanza accurata in quanto rileva bene l'urto ma non la bolla supersonica.





c_p tramite registrazione, s_{pol} 1 1 0.5 0.5 0 x_2 0 -0.5 -0.5 -1 -0.5 0 0.5 1 1.5 x_1

(a) Coefficiente di pressione tramite codice high fidelity

 $(b) \ Coefficiente \ di \ pressione \ tramite \ registrazione$



Figura 5.6: Soluzione registrata con \boldsymbol{s} non lineare

La soluzione registrata tramite interpolazione polinomiale del parametro è più accurata.

5.1.4 Risultati per il sensore di Ducros con mesh fine

In Figura 5.7 si introduce la soluzione registrata con \boldsymbol{s} lineare



(a) Coefficiente di pressione tramite codice high fidelity

(b) Coefficiente di pressione tramite registrazione $% \mathcal{C}_{\mathcal{C}}$



Figura 5.7: Soluzione registrata con s lineare

La soluzione registrata è più accurata della corrispettiva con mesh grezza, infatti nel campo dell'errore l'onda d'urto si distingue chiaramente e la bolla supersonica è individuata in modo migliore.



In Figura 5.8 si introduce la soluzione registrata con s non lineare

(a) Coefficiente di pressione tramite codice high fidelity

 $(b) \ Coefficiente \ di \ pressione \ tramite \ registrazione$



Figura 5.8: Soluzione registrata con s non lineare

Anche in questo caso la bolla supersonica è rappresentata con qualche imprecisione. Infine, si calcola l'errore in norma L^2 rispetto al numero di nodi tramite l'equazione 5.2 e si confronta la soluzione registrata usando le diverse interpolazioni del parametro e le diverse mesh

Registrazione con	registrazione con	registrazione con	registrazione con
mesh rada, s_{lin}	mesh fine, s_{lin}	mesh rada, s_{pol}	mesh fine, s_{pol}
$7.31 \cdot 10^{-4}$	$3.38 \cdot 10^{-4}$	$5.52 \cdot 10^{-4}$	$2.09 \cdot 10^{-4}$

Tabella 5.2: Errore introdotto dalla soluzione registrata con mesh rada e fine

La mesh raffinata porta a una riduzione dell'errore per tutte le soluzioni.

5.1.5 Risultati per il sensore basato sul Mach

In Figura 5.9 si rappresenta la soluzione registrata con \boldsymbol{s} lineare



(a) Coefficiente di pressione tramite codice high fidelity

(b) Coefficiente di pressione tramite registrazione $% \mathcal{C}_{\mathcal{C}}$



Figura 5.9: Soluzione registrata con \boldsymbol{s} lineare

La soluzione registrata rileva la posizione dell'urto in maniera accurata, infatti lo shock si distingue bene.







(a) Coefficiente di pressione tramite codice high fidelity

 $(b) \ Coefficiente \ di \ pressione \ tramite \ registrazione$



Figura 5.10: Soluzione registrata con \boldsymbol{s} non lineare

La soluzione ottenuta è accurata.

5.1.6 Risultati per il sensore basato sul Mach con mesh fine

In Figura 5.11 si mostra la soluzione registrata con \boldsymbol{s} lineare



(a) Coefficiente di pressione tramite codice high fidelity

(b) Coefficiente di pressione tramite registrazione



Figura 5.11: Soluzione registrata con \boldsymbol{s} lineare

La soluzione ottenuta si avvicina molto alla soluzione reale.



In Figura 5.12 si mostra la soluzione registrata con \boldsymbol{s} non lineare

(a) Coefficiente di pressione tramite codice high fidelity

(b) Coefficiente di pressione tramite registrazione

1

0.5

0

-0.5

-1

-1.5



Figura 5.12: Soluzione registrata con s non lineare

La soluzione ottenuta si discosta dalla soluzione reale, in prossimità dell'urto. Infine, si calcola l'errore in norma L^2 rispetto al numero di nodi tramite l'equazione 5.2 e si confronta la soluzione registrata usando le diverse interpolazioni del parametro e le diverse mesh.

Registrazione con	registrazione con	registrazione con	registrazione con
mesh rada, s_{lin}	mesh fine, s_{lin}	mesh rada, s_{pol}	mesh fine, s_{pol}
$8.05 \cdot 10^{-4}$	$6.68 \cdot 10^{-4}$	$7.49 \cdot 10^{-4}$	$6.78 \cdot 10^{-4}$

Tabella 5.3: Errore introdotto dalla soluzione registrata con mesh rada e fine

5.2 Interpolazione lineare

5.2.1 Risultati per il sensore di Ducros corretto

Si mostrano i risultati per la soluzione non registrata ottenuta con s lineare





(a) Coefficiente di pressione tramite codice high fidelity

(b) Coefficiente di pressione tramite interpolazione lineare



Figura 5.13: Soluzione non registrata con s lineare

La soluzione approssimata si discosta molto dalla soluzione *high fidelity*, infatti nella terza sottofigura si osserva la presenza di due urti.





Successivamente, si analizza la soluzione non registrata ottenuta con \boldsymbol{s} non lineare

(a) Coefficiente di pressione tramite codice high fidelity

(b) Coefficiente di pressione tramite interpolazione non lineare



Figura 5.14: Soluzione non registrata con \boldsymbol{s} non lineare

Anche in questo caso approssimando s non linearmente si notano due urti sul dorso

5.2.2 Risultati per il sensore di Ducros corretto con mesh raffinata

Di seguito si mostra la soluzione non registrata ottenuta con s lineare.





(a) Coefficiente di pressione tramite codice high fidelity

(b) Coefficiente di pressione tramite interpolazione lineare



Figura 5.15: Soluzione non registrata con s lineare

Anche in questa rappresentazione si notano due urti.



c, interpolato linearmente con s 1 1 0.5 0.5 0 x_2 0 -0.5 -0.5 -1 -0.5 0 0.5 1 1.5 x_1

Successivamente, si analizza la soluzione non registrata ottenuta con \boldsymbol{s} non lineare

(a) Coefficiente di pressione tramite codice high fidelity

(b) Coefficiente di pressione tramite interpolazione non lineare



Figura 5.16: Soluzione non registrata con s non lineare

Anche in questo caso la soluzione è imprecisa: si riscontra la presenza dei due urti. Infine, si calcola l'errore in norma L^2 rispetto al numero di nodi tramite l'equazione 5.2 e si confronta la soluzione non registrata usando le diverse interpolazioni del parametro e le diverse mesh. Raffinando la mesh gli errori diminuiscono.

Interpolazione li-	interpolazione li-	interpolazione li-	interpolazione li-
neare con mesh	neare con mesh	neare con mesh	neare con mesh
$rada, s_{lin}$	fine, s_{lin}	$rada, s_{pol}$	fine, s_{pol}
$8.49 \cdot 10^{-4}$	$4.84 \cdot 10^{-4}$	$8.89 \cdot 10^{-4}$	$5.04 \cdot 10^{-4}$

Tabella 5.4: Errore introdotto dalla soluzione non registrata con mesh rada e fine
5.2.3 Risultati per il sensore di Ducros

Si mostrano i risultati per la soluzione non registrata ottenuta con \boldsymbol{s} lineare





(a) Coefficiente di pressione tramite codice high fidelity

(b) Coefficiente di pressione tramite interpolazione lineare



Figura 5.17: Soluzione non registrata con s lineare

Anche in questo caso la soluzione approssimata si discosta molto dalla soluzione high fidelity e si notano due urti sul profilo





Successivamente, si analizza la soluzione non registrata ottenuta con \boldsymbol{s} non lineare

(a) Coefficiente di pressione tramite codice high fidelity

(b) Coefficiente di pressione tramite interpolazione non lineare



Figura 5.18: Soluzione non registrata con \boldsymbol{s} non lineare

La soluzione è imprecisa: compaiono due urti sul dorso del profilo.

5.2.4 Risultati per il sensore di Ducros con mesh raffinata

Di seguito si mostra la soluzione non registrata ottenuta con \boldsymbol{s} lineare





(a) Coefficiente di pressione tramite codice high fidelity

(b) Coefficiente di pressione tramite interpolazione lineare



Figura 5.19: Soluzione non registrata con s lineare

La soluzione rimane imprecisa.



c_p interpolato linearmente con s_{pol} 1 1 0.5 0.5 0 x_2 0 -0.5 -0.5 -1 -0.5 0 0.5 1 1.5 x_1

Successivamente, si analizza la soluzione non registrata ottenuta con \boldsymbol{s} non lineare

(a) Coefficiente di pressione tramite codice high fidelity





Figura 5.20: Soluzione non registrata con s non lineare

Anche in questo caso la soluzione è inaccurata.Infine, si calcola l'errore in norma L^2 rispetto al numero di nodi tramite l'equazione 5.2 e si confronta la soluzione non registrata usando le diverse interpolazioni del parametro e le diverse mesh. Anche in questo caso l'errore è migliore se si considera una mesh raffinata.

Interpolazione li-	interpolazione li-	interpolazione li-	interpolazione li-
neare con mesh	neare con mesh	neare con mesh	neare con mesh
$rada, s_{lin}$	fine, s_{lin}	$rada, s_{pol}$	fine, s_{pol}
$8.49 \cdot 10^{-4}$	$4.83 \cdot 10^{-4}$	$8.58 \cdot 10^{-4}$	$4.87 \cdot 10^{-4}$

Tabella 5.5: Errore introdotto dalla soluzione non registrata con mesh rada e fine

5.2.5 Risultati per il sensore basato sul Mach

Si introduce la soluzione non registrata ottenuta con \boldsymbol{s} lineare





(a) Coefficiente di pressione tramite codice high fidelity

(b) Coefficiente di pressione tramite interpolazione lineare



Figura 5.21: Soluzione non registrata con \boldsymbol{s} lineare

L'urto viene rilevato con una certa imprecisione.







(a) Coefficiente di pressione tramite codice high fidelity

(b) Coefficiente di pressione tramite interpolazione lineare



Figura 5.22: Soluzione non registrata con \boldsymbol{s} non lineare

Anche in questo caso si osservano due urti sul dorso del profilo, perciò la soluzione è imprecisa.

5.2.6 Risultati per il sensore basato sul Mach con mesh raffinata

In Figura 5.23 si mostra la soluzione non registrata \boldsymbol{s} lineare





(a) Coefficiente di pressione tramite codice high fidelity

(b) Coefficiente di pressione tramite interpolazione lineare



Figura 5.23: Soluzione non registrata con s lineare

L'identificazione dell'urto presenta delle imprecisioni.





In Figura 5.24 si mostra la soluzione non registrata con \boldsymbol{s} non lineare

(a) Coefficiente di pressione tramite codice high fidelity

(b) Coefficiente di pressione tramite interpolazione lineare



Figura 5.24: Soluzione non registrata con s non lineare

L'urto viene rilevato con qualche imprecisione.

Infine, si calcola l'errore in norma L^2 rispetto al numero di nodi tramite l'equazione 5.2 e si confronta la soluzione non registrata usando le diverse interpolazioni del parametro e le diverse mesh.

Interpolazione li-	interpolazione li-	interpolazione li-	interpolazione li-
neare con mesh	neare con mesh	neare con mesh	neare con mesh
$rada, s_{lin}$	fine, s_{lin}	$rada, s_{pol}$	fine, s_{pol}
$8.49 \cdot 10^{-4}$	$4.89 \cdot 10^{-4}$	$8.38 \cdot 10^{-4}$	$6.42 \cdot 10^{-4}$

Tabella 5.6: Errore introdotto dalla soluzione non registrata con mesh rada e fine

5.3 Risultati considerando un range di interpolazione minore

Sensore di Ducros corretto

Le interpolazioni svolte finora sono state eseguite considerando un range di interpolazione che spazia da M = 0.7 a M = 0.76. In questa sottosezione si prende in esame un range di interpolazione minore; si considerano come estremi di interpolazione M = 0.72 e M = 0.74.





(a) Campo dell'errore per la soluzione registrata con s lineare per mesh rada

(b) Campo dell'errore per la soluzione registrata con s non lineare per mesh rada



(c) Campo dell'errore per la soluzione registrata con s lineare per mesh fine (d) Campo dell'errore per la soluzione registrata con s non lineare per mesh fine

Figura 5.25: Confronto delle soluzioni registrate con mesh rada e mesh fine

Si vede che la soluzione migliora. Il motivo per cui ciò accade è che lo spazio in cui si vuole interpolare è più ristretto e si considera un numero di nodi più elevato. Perciò basandosi sull'equazione 5.3, la stima della soluzione sarà sempre più accurata.

$$h = \frac{b-a}{N+1} \tag{5.3}$$

Dove, con h si definisce l'ampiezza degli intervalli, con a e b si indicano gli estremi di interpolazione rispettivamente iniziale e finale. N rappresenta il numero di intervalli, di conseguenza inodi sono indicati con N + 1. Se l'ampiezza degli intervalli è più piccola allora la precisione della soluzione aumenta.

Si procede con il calcolo dell'errore in norma L^2 secondo l'equazione 5.2.

registrazione con	registrazione con	registrazione con	registrazione con
mesh rada, s_{lin}	mesh fine, s_{lin}	mesh rada, s_{pol}	mesh fine, s_{pol}
$3.88 \cdot 10^{-4}$	$1.09 \cdot 10^{-4}$	$3.07 \cdot 10^{-4}$	$1.06 \cdot 10^{-4}$

Tabella 5.7: Errore introdotto dalla soluzione registrata con mesh rada e fine

1

0.5

0

 x_2



Sensore di Ducros



CDI tramite registrazione, spo

1

0.8

0.6

(a) Campo dell'errore per la soluzione registrata con s lineare per mesh rada



x1
(b) Campo dell'errore per la soluzione registrata con s non lineare per mesh rada



(c) Campo dell'errore per la soluzione registrata con s lineare per mesh fine

(d) Campo dell'errore per la soluzione registrata con s non lineare per mesh fine

Figura 5.26: Confronto delle soluzioni registrate con mesh rada e mesh fine

Si procede con il calcolo dell'errore in norma L^2 secondo l'equazione 5.2.

registrazione con	registrazione con	registrazione con	registrazione con
mesh rada, s_{lin}	mesh fine, s_{lin}	mesh rada, s_{pol}	mesh fine, s_{pol}
$1.86 \cdot 10^{-4}$	$1.14 \cdot 10^{-4}$	$3.45 \cdot 10^{-4}$	$1.29 \cdot 10^{-4}$

Tabella 5.8: Errore introdotto dalla soluzione registrata con mesh rada e fine



Sensore basato su Mach



(a) Campo dell'errore per la soluzione registrata con s lineare per mesh rada







(c) Campo dell'errore per la soluzione registrata con s lineare per mesh fine

(d) Campo dell'errore per la soluzione registrata con s non lineare per mesh fine

Figura 5.27: Confronto delle soluzioni registrate con mesh rada e mesh fine

Si procede con il calcolo dell'errore in norma L^2 secondo l'equazione 5.2.

registrazione con	registrazione con	registrazione con	registrazione con
mesh rada, s_{lin}	mesh fine, s_{lin}	mesh rada, s_{pol}	mesh fine, s_{pol}
$1.77 \cdot 10^{-4}$	$1.10 \cdot 10^{-4}$	$7.16 \cdot 10^{-4}$	$6.42 \cdot 10^{-4}$

Tabella 5.9: Errore introdotto dalla soluzione registrata con mesh rada e fine

5.4 Risultati delle forze aerodinamiche

Infine, è interessante calcolare il coefficiente di portanza c_L espresso come:

$$c_L = c_F \cdot \cos(\alpha) \tag{5.4}$$

Dove, con c_F si indica il coefficiente della forza risultante e con α l'angolo d'attacco. In Figura 5.28 [24] è possibile osservare le forze aerodinamiche che si sviluppano su un profilo alare.



Figura 5.28: Forze aerodinamiche su un profilo alare

Il coefficiente della forza risultante è stato trovato tramite il comando Matlab "*trapz*" che effettua l'integrale lungo la corda [11]:

$$c_F = \operatorname{trapz}(x, c_{pv}) - \operatorname{trapz}(x, c_{pd})$$
(5.5)

Dove, x è la lunghezza della corda, $c_{pv} \in c_{pd}$ sono rispettivamente il coefficiente di pressione a parete sul ventre e sul dorso.

La presenza di un urto fa sì che la distribuzione del coefficiente di pressione sul dorso subisca un salto, ciò è dovuto al fatto che l'urto normale genera una discontinuità. A valle dell'urto la pressione aumenta infatti il c_P sul dorso tende a un valore positivo. Inoltre, in prossimità del punto di ristagno, posizionato sul ventre del profilo, il c_P presenta un valore di poco superiore a 1. Il ventre del profilo presenta valori positivi perciò si ha la condizione di sovrappressione, mentre sul dorso si ha la condizione di depressione come mostrano i valori negativi del c_P . In Figura 5.29 si osservano le distribuzioni di c_P ottenute tramite la tecnica di registrazione con approssimazione lineare della funzione parametrica per i diversi sensori. Questi risultati sono ottenuti usando la mesh rada.



(a) Distribuzione di c_P tramite sensore di Ducros corretto a M = 0.73

(b) Distribuzione di c_P tramite sensore di Ducros a M = 0.73



Figura 5.29: Distribuzione di c_P tramite registrazione con s lineare

I risultati approssimati sono sovrapposti alla distribuzione di c_P ottenuto dalla soluzione high fidelity per M = 0.73. Si nota che la tecnica di registrazione fornisce un risultato abbastanza preciso per i vari sensori: infatti è presente un solo salto di pressione che corrisponde all'urto ma la soluzione si discosta leggermente dalla soluzione reale.



In Figura 5.30 si osservano le distribuzioni di c_P ottenute tramite la tecnica di registrazione con approssimazione non lineare della funzione parametrica per i diversi sensori.

(a) Distribuzione di c_P tramite sensore di Ducros corretto a M = 0.73

(b) Distribuzione di c_P tramite sensore di Ducros a M = 0.73



Figura 5.30: Distribuzione di c_P tramite registrazione con s non lineare

Si osserva che la tecnica di registrazione fornisce risultati accurati nel caso del sensore di Ducros e del sensore di Ducros corretto, invece per il sensore basato sul Mach la soluzione si discosta leggermente in corrispondenza dell'urto.



Successivamente, si presentano i risultati appena ottenuti per la mesh fine.

(a) Distribuzione di c_P tramite sensore di Ducros corretto a M = 0.73

(b) Distribuzione di c_P tramite sensore di Ducros a M = 0.73



Figura 5.31: Distribuzione di c_P tramite registrazione con s lineare

In questo caso il sensore di Ducros fornisce una soluzione molto accurata. Mentre i restanti sensori forniscono una soluzione leggermente diversa dalla realtà.



(a) Distribuzione di c_P tramite sensore di Ducros corretto a M = 0.73

(b) Distribuzione di c_P tramite sensore di Ducros a M = 0.73



Figura 5.32: Distribuzione di c_P tramite registrazione con s non lineare

In Figura 5.32 il sensore di Ducros corretto e di Ducros forniscono una soluzione molto vicina alla realtà. Mentre per il sensore basato sul Mach la soluzione si discosta dalla realtà. I grafici appena ottenuti rispecchiano i risultati forniti dalla *convex displacement interpolation*, infatti ricordando la sezione di 5.1 si osserva che il sensore più preciso è proprio quello di Ducros corretto, inoltre l'errore di approssimazione massimo si trova in corrispondenza dell'urto, infatti la distribuzione di c_P sul ventre si avvicina molto alla realtà. Nei seguenti sottocapitoli 5.4 si presenta la distribuzione di c_P lungo il profilo ottenuta considerando un range di interpolazione ridotto applicato a mesh rada e mesh fine:

Sensore di Ducros corretto

In Figura 5.33 si presenta la distribuzione di c_P lungo il profilo ottenuta considerando un range di interpolazione ridotto applicato a mesh rada e mesh fine:





(a) Distribuzione di c_P registrata con s lineare per mesh rada

(b) Distribuzione di c_P registrata con s non lineare per mesh rada



(c) Distribuzione di c_P registrata con s lineare (d) Distribuzione di c_P registrata con s non per mesh fine lineare per mesh fine

Figura 5.33: Distribuzione di c_P tramite registrazione su un range di interpolazione ridotto

Per lo stesso motivo descritto tramite l'equazione 5.3 nella sottosezione 5.3, il sensore di Ducros corretto rispecchia la soluzione reale sia per la mesh grezza sia per la mesh raffinata.

Sensore di Ducros

In Figura 5.34 si presenta la distribuzione di c_P lungo il profilo ottenuta considerando un range di interpolazione ridotto applicato a mesh rada e mesh fine:





(a) Distribuzione di $c_{\rm P}$ registrata con
s lineare per mesh rada





(c) Distribuzione di c_P registrata con s lineare per mesh fine



(d) Distribuzione di c_P registrata con s non lineare per mesh fine

Figura 5.34: Distribuzione di c_P tramite registrazione su un range di interpolazione ridotto

Il sensore di Ducros rispecchia la soluzione reale sia per la mesh grezza sia per la mesh raffinata.

Sensore basato sul Mach

In Figura 5.35 si presenta la distribuzione di c_P lungo il profilo ottenuta considerando un range di interpolazione ridotto applicato a mesh rada e mesh fine:





(a) Distribuzione di $c_{\rm P}$ registrata con
s lineare per mesh rada



(c) Distribuzione di c_P registrata con s lineare per mesh fine

(b) Distribuzione di c_{P} registrata con
snon lineare per mesh rada



(d) Distribuzione di c_P registrata con s non lineare per mesh fine

Figura 5.35: Distribuzione di c_P tramite registrazione su un range di interpolazione ridotto

Anche in questo caso le soluzioni sono accurate.

Infine, è possibile calcolare il coefficiente di portanza tramite l'equazione 5.4 e si ottengono i seguenti valori per la mesh grezza:

	high fidelity	registrazione con s_{lin}	registrazione con s_{pol}
Ducros corretto	0.9232	0.9172	0.9153
Ducros	0.9232	0.8967	0.8644
Mach	0.9232	0.8887	0.8858

Tabella 5.10: Valori del coefficiente di portanza per i diversi sensori

Per quanto riguarda la mesh fine invece si ottengono i seguenti valori:

	high fidelity	registrazione con s_{lin}	registrazione con s_{pol}
Ducros corretto	0.9232	0.8625	0.84
Ducros	0.9232	0.8951	0.8758
Mach	0.9232	0.8882	0.9310

Tabella 5.11: Valori del coefficiente di portanza per i diversi sensori

Capitolo 6 Conclusioni

Il lavoro svolto ha come obiettivi:

- La valutazione dell'accuratezza fornita dalla tecnica di registrazione;
- Confronto tra i diversi sensori usati per rilevare l'urto.

In primo luogo sono state effettuate simulazioni numeriche applicate a una mesh grezza. I risultati ottenuti con il metodo della registrazione sono confrontati sia con la soluzione *high fidelity* fornita, sia con una soluzione approssimata usando i valori *high fidelity*. Sono stati presi in esame diversi sensori in grado di rilevare l'urto sul dorso e la bolla supersonica e questi forniscono livelli di accuratezza diversi.

In un secondo momento si sono svolte le simulazioni con una mesh fine.

In relazione a quanto ottenuto emergono le seguenti osservazioni:

- Il sensore di Ducros fornisce soluzioni accurate applicando entrambe le mesh.
- Il sensore di Ducros corretto fornisce le soluzioni migliori, infatti tiene conto anche del gradiente di velocità.
- Il sensore di Mach fornisce risultati accettabili e rileva in modo accurato la bolla supersonica

Si osserva che la tecnica di registrazione dipende fortemente dai sensori utilizzati e dalla raffinatezza della mesh, ma in generale si può dire che è più accurata della classica interpolazione lineare. Infatti le soluzioni ottenute tramite interpolazione non lineare presentano un solo urto sul dorso del profilo, ciò non succede se si usa la tecnica di interpolazione lineare.

Grazie all'interpolazione applicata a un range ristretto è possibile fare una previsione accurata delle prestazioni di un corpo aerodinamico in tempi ridotti e con un ridotto numero di gradi di libertà. Queste ultime sono requisiti fondamentali per lo svolgimento di simulazioni numeriche.

Bibliografia

- [1] L. Zhang A. Ferrero T. Taddei. «Registration-based model reduction of parameterized two-dimensional conservation laws». In: *Elsevier* (2021).
- [2] T. Taddei A. Iollo. «Mapping of coherent structures in parameterized flows by learning optimal transportation with Gaussian models». In: *hal-03441730* (2021).
- [3] ANSYS. Standard k- ϵ Model. URL: https://www.afs.enea.it/project/neptunius/ docs/fluent/html/th/node58.htm.
- [4] ANSYS. Standard k- ω Model. URL: https://www.afs.enea.it/project/ neptunius/docs/fluent/html/th/node66.htm.
- [5] ANSYS. Transport Equation for the Spalart-Allmaras Model. URL: https://www. afs.enea.it/project/neptunius/docs/fluent/html/th/node50.htm.
- [6] J. Blazeck. Computational Fluid Dynamics: Principles and Applications. Elsevier, 2015. DOI: http://store.elsevier.com/.
- [7] Cadence. T-Rex Hybrid Meshing in Pointwise. URL: http://www.pointwise.com/ articles/t-rex-hybrid-meshing-in-pointwise.
- [8] F. Glineur. Topics in Convex Optimization: Interior-Point Methods, Conic Duality and Approximations. HAL open science, 2004. DOI: https://tel.archivesouvertes.fr/tel-00006861.
- [9] S. Layton. Classical Algebraic Multigrid for Engineering Applications. URL: https: //www.nvidia.com/docs/ID/116711/Simon-Layton.pdf.
- [10] MathWorks. Iterative Display. URL: https://it.mathworks.com/help/optim/ug/ iterative-display.html#f92519.
- [11] MathWorks. trapz. URL: https://it.mathworks.com/help/matlab/ref/trapz. html.
- [12] MathWorks. triplot. URL: https://it.mathworks.com/help/matlab/ref/triplot. html.
- [13] S. Pirozzoli. «Numerical methods for high-speed flows». In: Annual Review Of Fluid Mechanics (2011).
- [14] Juan Carlos De los Reyes. Numerical PDE-Constrained Optimization. Springer, 2015. ISBN: 978-3-319-13394-2.
- [15] S.Pontino. «Analisi RANS bidimensionale e tridimensionale per la palettatura di una turbina aeronautica». In: *Politecnico di Torino* (2020-2021).

- [16] L.Zhang T. Taddei. «A discretize-then-map approach for the treatment of parameterized geometries in model order reduction». In: *Elsevier* (2020).
- [17] L.Zhang T. Taddei. «REDs,pyREDs: software description». In: (2021).
- [18] L.Zhang T. Taddei. «Registration-based model reduction in complex two-dimensional geometries». In: *Journal of Scientific Computing* (2021).
- [19] T. Taddei. «A registration method for model order reduction: data compression and geometry reduction». In: *SIAM-Journal of Scientific Computing* (2019).
- [20] T. Taddei. «An introduction to the reduced basis method». In: (2022).
- [21] UniRoma. Flussi transonici. URL: http://dma.ing.uniroma1.it/users/ls_gas/ MATERIALE/cap8.pdf.
- [22] C.Hall W.Gordon. «Construction of curvilinear co-ordinate systems and applications to mesh generation». In: Int. J. for Numer. Meth. in Engineering (1973).
- [23] Wikipedia. Interior-Point Method. URL: https://en.wikipedia.org/wiki/Interior-point_method.
- [24] Wikipedia. Lift-to-drag ratio. URL: https://en.wikipedia.org/wiki/Lift-todrag_ratio.
- [25] Wikipedia. Regime transonico. URL: https://it.wikipedia.org/wiki/Regime_ transonico.