

POLITECNICO DI TORINO

Dipartimento di Ingegneria Meccanica e Aerospaziale

Corso di Laurea in Ingegneria Aerospaziale



Tesi di Laurea Magistrale

**“Ottimizzazione di Traiettorie di Atterraggio
Lunare con Dinamica Rotazionale”**

Relatore:

Chia.mo Prof Lorenzo Casalino

Laureando:

Davide Castellana

A.A. 2021/2022

*“A Zia Gerarda
che mi ha insegnato
a non arrendersi
anche nei momenti
più difficili della vita”*

Abstract

Lo sviluppo del Programma Artemis, in combinazione con l'avvento della "New-Space Era", ha permesso di riportare al centro delle esplorazioni spaziali la Luna. Si stima che nei prossimi anni, sia le agenzie nazionali che le nuove compagnie private invieranno una serie di spacecraft nell'ambiente cislunare, compresi lander e rover. Le traiettorie di atterraggio sul suolo lunare richiederanno un'elevata precisione e affidabilità, in modo da rispettare i vincoli di missione e di sicurezza. L'analisi delle traiettorie spaziali risulta essere un task fondamentale per il progetto di una missione lunare, in quanto impatta direttamente sul consumo di propellente, sul mass budget, sulla fattibilità e sui costi del programma lunare. Il seguente lavoro di tesi prevede lo sviluppo di un algoritmo di ottimizzazione che permetta di massimizzare la massa finale di un lander durante una traiettoria di atterraggio sulla superficie lunare, considerando anche la sua dinamica rotazionale. Di conseguenza, a parità di massa strutturale è possibile ridurre la massa dello spacecraft al lift-off, riducendo così i costi di lancio, oppure prevedere la possibilità di integrare una payloads mass maggiore a parità di massa iniziale. La formulazione matematica del problema di ottimizzazione si basa sulla Teoria del Controllo Ottimale introdotta da D. F. Lawden nel 1963 nel libro intitolato "Optimal Trajectories for Space Navigation" e sul soddisfacimento del Principio di Massimo di Pontryagin. La soluzione del Boundary Value Problem è ottenuta mediante un Indirect Method in modo da ottenere un'elevata precisione numerica con un numero limitato di parametri da ottimizzare, riducendo così i tempi di calcolo e permettendo l'implementazione dell'algoritmo su elaboratori commerciali. Inoltre, è prevista un'analisi dettagliata del Fuller's Problem in chiave rivisitata in modo da risolvere le problematiche connesse alla presenza di un arco singolare all'interno della struttura della traiettoria. Infine, per simulare un lander adatto a missioni unmanned si è considerata una versione in scala ridotta del Lunar Module della missione Apollo 11.

Abstract

“Optimization of Lunar Landing Trajectories with Rotational Dynamics”

The development of the Artemis Program in combination with the advent of the "New-Space Era" brought the Moon back to the centre of space exploration interests. It is estimated that in the coming years, both national agencies and new private companies will send a series of spacecrafts into the Cislunar environment, including landers and rovers. The landing trajectories on the lunar surface will require high accuracy and reliability to comply with mission and safety constraints. The analysis of space trajectories appears to be a fundamental task for the design of a lunar mission, as it directly impacts the propellant consumption, the mass budget, the feasibility, and costs of the lunar program. The following thesis provides the development of an optimization algorithm to maximize the final mass of a landing trajectory on the lunar surface, also considering its rotational dynamics. Consequently, with the same structural mass, it is possible to reduce the mass of the spacecraft at lift-off, thus reducing launch costs or provide for the possibility of integrating more payloads mass maintaining the same initial mass. The mathematical formulation of the optimization problem is based on the Optimal Control Theory introduced by D. F. Lawden in 1963 in the book entitled “Optimal Trajectories for Space Navigation” and on the satisfaction of Pontryagin's Maximum Principle. The solution of the Boundary Value Problem is obtained through an Indirect Method to obtain high numerical precision with a limited number of parameters to be optimized, thus reducing calculation times, and allowing the implementation of the algorithm on commercial computers. In addition, a detailed analysis of Fuller's Problem is provided in a revised key to solve the problems associated with the presence of a Singular Arc within the structure of the trajectory. Finally, to simulate a lander suitable for unmanned missions, a reduced scale version of the Lunar Module of the Apollo 11 mission was considered.

Indice

Capitolo 1: Alla Scoperta della Luna	1
1.1 Perché andare sulla Luna?.....	1
1.2 Origine e Formazione.....	3
1.3 Caratteristiche Fisiche.....	5
1.4 Caratteristiche dell’Ambiente Lunare.....	5
1.4.1 Atmosfera Lunare.....	5
1.4.2 Campo Magnetico.....	2
1.4.3 Superficie Lunare.....	2
1.5 Orbita della Luna.....	4
Capitolo 2: Storia Dell’Esplorazione Lunare	6
2.1 Introduzione.....	6
2.2 La Prima Epoca Lunare: Corsa Allo Spazio.....	6
2.3 Il Programma Apollo.....	8
2.4 Un Ritrovato Interesse Per la Luna.....	11
2.5 Lo Studio Lunare Diventa Un Fenomeno Globale.....	12
2.6 Chinese Lunar Exploration Program.....	15
2.7 Artemis Program.....	18
2.7.1 Lunar Gateway (LG).....	18
2.7.2 ORION Multi-Purpose Crew Vehicle (MPCV).....	19
2.7.3 CLPS Missions.....	19
2.7.4 VIPER.....	22
2.7.5 Human Landing System (HLS).....	24
2.7.6 ARTEMIS FIRST (2021-2024).....	24
2.7.8.1 ARTEMIS I.....	24
2.7.8.2 ARTEMIS II.....	25

2.7.8.3	ARTEMIS III.....	26
Capitolo 3: Richiami di Astrodinamica, Propulsione e Dinamica Rotazionale		29
3.1	Introduzione all'Astrodinamica.....	29
3.1.1	Seconda Legge di Newton.....	29
3.1.2	Legge di Gravitazione Universale.....	30
3.2	Problema degli N-Corpi	31
3.3	Problema degli N-corpi Ristretto	33
3.4	Problema dei Due Corpi Ristretto (R2BP).....	33
3.4.1	Casi Particolari: Landing.....	35
3.4.2	Casi Particolari: Orbite Kepleriane	37
3.5	Propulsione Spaziale	38
3.5.1.1	Spinta e Variazione di Massa dello Spacecraft	39
3.5.1.2	Equazione di Tsiolkowski	41
3.5.1.3	Manovre Impulsive.....	41
3.5.1.4	Trasferta di Hohmann.....	42
3.6	Dinamica di Assetto	44
3.6.1	Equazione Cinematica: Rotazioni di Tait-Bryan	45
3.6.1.1	Caso Particolare: Simmetria Cilindrica e Yaw Angle Nullo.....	48
3.7	Dinamica Rotazionale	48
Capitolo 4: Descrizione della Missione		52
4.1	Definizione della missione	52
4.1.1	Lift-off.....	52
4.1.2	Earth Parking Orbit	53
4.1.3	Trans-Lunar Phase.....	53
4.1.4	Cis-Lunar Phase	58
4.1.5	Descent Orbit Insertion (DOI).....	58

4.1.6	Soft-Landing.....	60
4.1.6.1	Manned Mission	60
4.1.6.2	Unmanned Mission.....	61
4.2	Caratteristiche del Lander Lunare	63
Capitolo 5: Teoria del Controllo Ottimale.....		67
5.1	Che cos'è un problema di ottimizzazione?	67
5.1.1	<i>Ottimizzazione Nel Design Process</i>	67
5.2	Problemi Di Ottimizzazione Per Traiettorie Spaziali.....	68
5.2.1	Static Problem: Calculus of Variations	69
5.3	Teoria del Controllo Ottimale	69
5.4	Metodi Numerici Per l'Ottimizzazione	77
5.4.1	Direct Method	77
5.4.2	Evolutionary Algorithms	78
5.4.3	Indirect Method	79
5.4.4	Hybrid Method	80
5.5	Boundary Value Problem (BVP).....	80
5.5.1	Caratteristiche dell'Algoritmo Risolutivo	87
Capitolo 6: Analisi del Fuller's Problem		89
6.1	Perché introdurre il Problema di Fuller?	89
6.2	Formulazione Matematica.....	90
6.2.1	<i>Soluzione del Fuller's Problem</i>	94
6.2.1.1	Soluzione con Switch Singolo ($NSW = 1$)	98
6.3	Soluzione Numerica	99
6.3.1	<i>Solutore Ode45</i>	99
6.4	MATLAB Code.....	100
6.5	Analisi delle Simulazioni Numeriche	102

Capitolo 7: Problema di Ottimizzazione per Landing Lunare con Dinamica Rotazionale110

7.1	Introduzione	110
7.2	Assunzioni del Modello	110
7.3	Sistemi di Riferimento	114
7.4	Equazioni del moto e Dinamica Rotazionale	117
7.5	Teoria del Controllo Ottimale Applicata al Problema di Landing	118
7.5.1	Bang-Bang Control	120
7.5.2	Condizioni per Arco Singolare.....	122
7.5.2.1	Switching Function del Momento Nullo	122
7.5.1	Direzione di Spinta Ottimale.....	124
7.6	Condizioni al Contorno	126
7.6.1	Fuller’s Problem per la Dinamica Rotazionale	128
7.7	Parametri del Boundary Value Problem.....	130
7.8	Adimensionalizzazione del Problema	131

Capitolo 8: Risultati del Problema di Ottimizzazione132

8.1	Introduzione	132
8.2	Pitch Angle e Velocità Angolare “Free” nel Landing Site.....	132
8.2.1	<i>Commento dei Risultati</i>	136
8.3	Pitch Angle “Fixed” e Velocità Angolare “Free” nel Landing Site	138
CASE 1)	Bang-Bang Control	139
CASE 2)	Torque Vincolata.....	140
CASE 3)	Torque Vincolata e Thrust Massima	142
CASE 3.1)	Analisi dei Risultati	148
8.4	Soft-Landing senza Fuller’s Problem.....	149
CASE 1)	Hamiltoniano Nullo nel Landing Site	149
CASE 2)	Hamiltoniano Libero nel Landing Site.....	151
8.5	Soft-Landing con Fuller’s Problem.....	155

8.5.1	Analisi dei Risultati.....	163
8.6	Soft-Landing con Fuller's Problem e Vertical Descent	165
8.6.1	Analisi dei Risultati.....	172
8.7	Analisi sul Consumo di Propellente	173
8.8	Confronto dei Risultati per Singular Arc	176
8.9	Influenza di <i>RVD</i> sul consumo di propellente	176
8.10	Confronto delle simulazioni numeriche	177

Conclusioni 186

Bibliografia 189

Capitolo 1

Alla Scoperta della Luna

1.1 *Perché andare sulla Luna?*

“The earth is the cradle of mind, but one cannot forever live in a cradle”

Konstantin Tsiolkovsky, 1896

Nel corso della storia l'uomo è stato rapito dal fascino dell'ambiente spaziale, intento a cercare di risolvere i misteri che lo avvolgono. Le prime innovazioni tecnologiche portarono allo sviluppo dei telescopi, per osservare più da vicino quel lontano mondo chiamato spazio. Ma questo non bastava, l'umanità ha fissato l'asticella sempre più in alto, sino a voler mandare dapprima solamente dei semplici veicoli nello spazio, per poi coronare un sogno: mandare l'uomo nello spazio. Il voler esplorare nuove frontiere, nuovi mondi diede un input fondamentale all'esplorazione spaziale, in particolare quella lunare. Il 12 settembre del 1962, il presidente degli Stati Uniti John F. Kennedy fece un discorso alla Rice University chiamato comunemente *“We Choose to Go to the Moon”* che racchiude le primordiali motivazioni filosofiche che hanno spinto l'uomo alla conquista della Luna:

“But why, some say, the Moon? Why choose this as our goal? And they may well ask, why climb the highest mountain? Why, 35 years ago, fly the Atlantic? Why does Rice play Texas? We choose to go to the Moon in this decade and do the other things, not because they are easy, but because they are hard; because that goal will serve to organize and measure the best of our energies and skills”

L'esplorazione lunare non è solo la conquista di un mondo incontaminato, bensì permette di ottenere dei benefici in diversi ambiti:

- *Conoscenza Scientifica*: la possibilità di approfondire la storia terrestre e l'origine del Sistema Solare, mediante lo studio della superficie lunare. Per esempio, i risultati in termini di cratering-rate sono stati estesi per pianeti rocciosi come Mercurio e per le lune degli outer planets.

- *Innovazione Tecnologica*: le esplorazioni lunari permetterebbero di testare nuove tecnologie, sia per un miglioramento tecnico degli spacecraft che operano in ambienti interplanetari, sia per tecnologie di precise soft-landing, nonché in ambito di applicazioni riguardanti la medicina spaziale per preservare la vita degli astronauti. Inoltre, le missioni lunari risultano propedeutiche per la pianificazione e lo sviluppo di future missioni più impegnative come le missioni manned sul suolo marziano.
- *Economico*: la ricerca di applicazioni specifiche sviluppate per le esplorazioni lunari in combinazione con l'avvento “*New-Space Era*” ha permesso la nascita di industrie commerciali private interessate all'ambiente spaziale, determinando un settore economico in continua crescita.
- *Impegno Pubblico*: l'esplorazione lunare abbraccia diversi ambiti: biologico, fisico, matematico, ingegneristico, per cui, l'interesse crescente delle nuove generazioni in questo tipo di applicazioni, permetterebbe di approfondire diversi aspetti della scienza, portando inevitabilmente ad un miglioramento e a delle innovazioni scientifiche nei diversi campi.
- *Cooperazione Internazionale*: l'idea di formare il *Lunar Gateway*, cioè una stazione spaziale nell'orbita lunare ha permesso a diverse agenzie spaziali di collaborare verso un unico obiettivo comune, migliorando i rapporti internazionali fra i diversi Stati.
- *Colonizzazione Umana*: la Luna rappresenta il punto di partenza per creare basi umane nel Sistema Solare.
- *Nuove Risorse*: le esplorazioni lunari permetterebbero di verificare la fattibilità nello sfruttare le risorse di un altro pianeta, essendo quelle della Terra limitate.

In conclusione, riprendendo il discorso del presidente Kennedy alla Rice University:

“We set sail on this new sea because there is new knowledge to be gained, and new rights to be won, and they must be won and used for the progress of all people”

[1, 2, 3, 4, 12, 57]

1.2 *Origine e Formazione*

La Luna è il satellite naturale della Terra e presenta delle caratteristiche uniche all'interno del Sistema Solare. La maggior parte dei satelliti degli outer planets presentano una composizione formata da miscele a bassa densità di roccia e ghiaccio, ottenuta per strati di accrescimento nell'orbita dei loro parent planets, oppure possono essere degli asteroidi catturati dal campo gravitazionale generato dal pianeta attorno al quale orbitano, come nel caso probabilmente dei due satelliti in orbita marziana: Phobos e Deimos [53]. Per quanto riguarda la Luna Terrestre, sia la sua origine che la sua formazione sono ancora degli argomenti discussi della comunità scientifica, tanto da incentivare un continuo progresso tecnologico finalizzato a nuove esplorazioni del suolo lunare. I primi modelli che hanno tentato di spiegare l'origine della Luna risalgono al periodo esplorativo antecedente alle missioni americane Apollo (1961), essi sono:

- *coaccretion model*: la Luna è stata generata per accrescimento o condensazione insieme alla Terra, cioè trattando il sistema Terra-Luna come un doppio sistema planetario
- *fission model*: la Luna si sarebbe formata per fissione da una Terra originariamente in rapida rotazione
- *capture model*: la Luna sarebbe stata semplicemente catturata dal campo gravitazionale terrestre, ma la sua origine sarebbe da collocare altrove nel Sistema Solare, con una composizione simile ai meteoriti condritici.

Tuttavia, il *coaccretion model* non permetterebbe di spiegare per esempio il diverso momento angolare e la differente densità dei due corpi, mentre il *fission model* richiederebbe una forza per estrarre la Luna di tale entità, da rendere irrealistico il modello e sarebbe inadatto a spiegare la dinamica orbitale del sistema Terra-Luna. Il *capture model* è stato smentito dai campioni di ritorno ottenuti dal programma Apollo, che hanno mostrato una composizione della Luna priva di condriti. La formulazione di modelli più recenti ha tenuto conto dei risultati in termini di composizione in massa, del nucleo in ferro, della presenza di sostanze volatili sulla superficie e del momento angolare elevato del sistema Terra-Luna. Un modello che permette di tenere conto di questi vincoli è il *Single-Impact Model* formulato da Alastair Cameron, professore di astronomia all'Università di Harvard, che prevede l'impatto di una proto-Terra chiamato Theia, avente dimensioni paragonabili all'attuale pianeta Marte e con massa pari a un decimo rispetto a quella terrestre, con la Terra. La struttura di Theia era formata da un mantello di silicati e un nucleo metallico, che sono

stati scissi in seguito all'impatto con la Terra: il materiale denso ha subito una decelerazione, cadendo al suolo in circa quattro ore ed è stato inglobato nell'attuale mantello terrestre, mentre sia il mantello di silicati di Theia che parte della crosta esterna della Terra sono stati accelerati ed espulsi dall'orbita terrestre. Dopo circa 24 ore, gli elementi espulsi dall'impatto formarono il nucleo di una Proto-Luna [2,53].

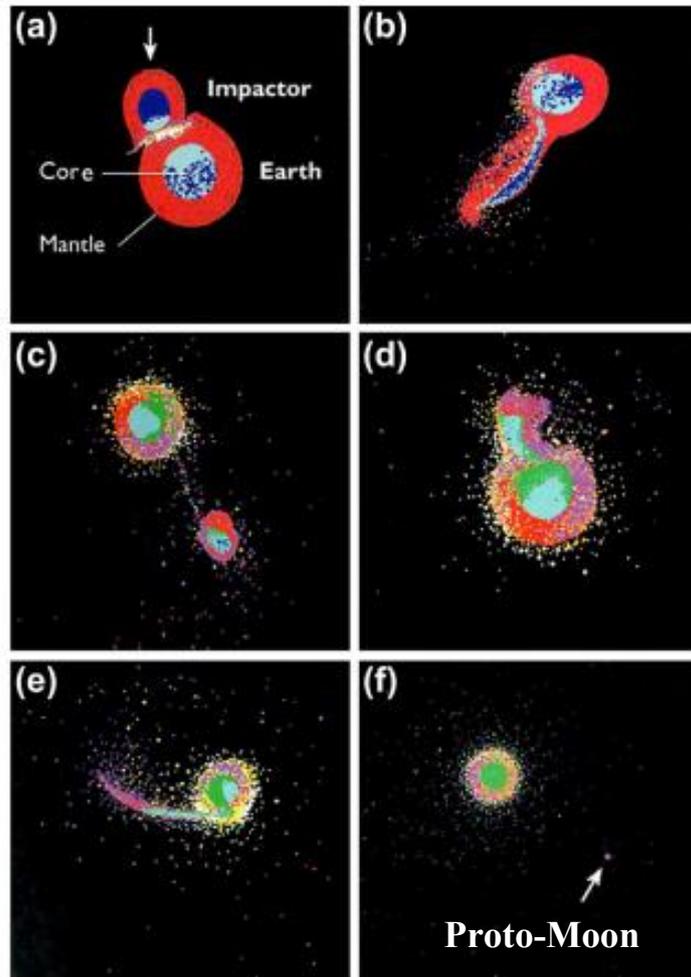


Figura 1. 1: Simulazione matematica del Single-Impact Model: (a) impatto di Theia con la Terra, (b-e) eiezione del materiale crostale e del mantello di Theia, (e) formazione di una Proto-Luna, credits by Alastair Cameron, Harvard-Smithsonian Center for Astrophysics and Sky Publishing

Il modello appena esposto seppur ampiamente accettato dalla comunità scientifica, presenta delle imperfezioni messe in luce dai risultati di simulazioni numeriche, in quanto solo una frazione variabile fra 10% e il 55% del materiale eiettato sarebbe stata disponibile per formare il nucleo della Proto-Luna, per cui l'impatto avrebbe espulso molta più massa rispetto a quella dell'attuale Luna. Nonostante ciò, modelli numerici contemporanei dimostrano come un giant impact possa effettivamente generare la massa sufficiente per la formazione della Luna, verificando di fatti il *Single-Impact Model* datando l'origine della Luna a circa 4.5 miliardi di anni fa. [1,53].

1.3 Caratteristiche Fisiche

La Luna è il quinto satellite più grande del Sistema Solare, la cui superficie è circa un quinto di quella terrestre. Di seguito, in forma tabulare sono espresse le caratteristiche fisiche della Luna:



Figura 1. 2: Fotografia della Luna effettuata dal UCO/Lick Observaton

Parameters	Value
Mass [<i>kg</i>]	$7.346 \cdot 10^{22}$
Volume [<i>km</i> ³]	$2.197 \cdot 10^{10}$
Density [<i>kg/m</i> ³]	$3.334 \cdot 10^3$
Surface Gravity [<i>m/s</i> ²]	1.620
Equatorial Radius [<i>km</i>]	$1.738 \cdot 10^3$
Solar Irradiance [<i>W/m</i> ²]	$1.361 \cdot 10^3$
Maximum Surface Temperature [<i>K</i>]	390
Minimum Surface Temperature [<i>K</i>]	104
J_2	$2.027 \cdot 10^{-4}$

Tabella 1. 1: Caratteristiche fisiche della Luna, credits by [1,40,42,53]

1.4 Caratteristiche dell'Ambiente Lunare

1.4.1 Atmosfera Lunare

La Luna presenta un'atmosfera estremamente esigua, composta da $2 \cdot 10^5$ *molecules/cm*³ durante la fase notturna, mentre solamente 10^4 *molecules/cm*³ durante la fase diurna.

I componenti principali sono idrogeno (H), neon (Ne), elio (He) ed argon (Ar):

- H, Ne, e circa il 90% dell'He sono derivanti dal vento solare
- ⁴⁰Ar e la restante quota di He sono prodotti dal decadimento radioattivo del ³⁶Ar proveniente dal vento solare

La missione Apollo 17 ha rilevato anche la possibile presenza di ammoniaca (NH₃), metano (CH₄) ed anidride carbonica (CO₂). In condizioni standard, cioè alla pressione atmosferica di 1 *bar* e alla temperatura di 273 *K*, la number density per l'atmosfera terrestre assume un valore di circa $2.7 \cdot$

10^{19} *molecules/cm*³, risultando essere 15 ordini di grandezza superiore rispetto al best case dell'ambiente lunare. Di fatti, la massa di tutta l'atmosfera lunare è stimabile essere pari a circa 104 kg, cioè circa 14 ordini di grandezza inferiori rispetto a quella della Terra. La differenza principale, quindi, riguarda le traiettorie compiute dalle particelle: sulla Terra il moto è dominato da una serie di collisioni, mentre sulla Luna si seguono delle traiettorie influenzate solamente dall'effetto del campo gravitazionale. La sottile atmosfera priva di collisioni prende il nome di *surface boundary exosphere*. Di conseguenza, l'interazione tra le particelle dell'ambiente lunare e un veicolo spaziale è talmente debole da poter considerare trascurabili gli effetti della resistenza aerodinamica $\rightarrow D = 0$ [1,53,55].

1.4.2 Campo Magnetico

Il programma Lunar Orbiter svolto tra il 1966 e il 1967 ha permesso di dimostrare l'inesistenza di un campo magnetico globale. Tuttavia, la missione dell'Apollo 16 del 1972 ha rilevato la presenza di un campo magnetico locale generato dalla crosta, le cui rilevazioni furono verificate nel 1998 con la missione Lunar Prospector. La magnetizzazione residua della crosta lunare potrebbe essere stata originata da un antico campo magnetico globale databile a circa 3.6 ÷ 3.9 miliardi di anni fa, dal movimento di un fluido conduttivo, cioè dal ferro liquido che compone la struttura del nucleo. La convezione del fluido sarebbe stata causata dalla rotazione di mantello e nucleo attorno ad assi leggermente diversi, il cui angolo riducendosi nel tempo a causa della riduzione delle forze mareali del sistema Terra-Luna ha generato delle forze insufficienti ad alimentare un campo magnetico globale. Di conseguenza, è possibile trascurare sia l'effetto delle forze di Lorentz sulle traiettorie degli spacecraft, che i disturbi di magnetic torque sulla dinamica rotazionale [1, 53, 56]

1.4.3 Superficie Lunare

A differenza della superficie terrestre, il suolo lunare non è influenzato da agenti quali l'atmosfera, la tettonica a placche, la presenza di acqua e le forme di vita. La superficie lunare rappresenta una miniera storica: il 99% della sua estensione è databile a circa 3 miliardi di anni fa. Le modifiche morfologiche sono dovute ad impatti con corpi esterni aventi diametri variabili: passando dai micrometri sino a centinaia di chilometri. Le collisioni generano una coltre di detriti, cioè una polvere fine con diametri < 1 cm chiamata regolite, con composizione generalmente basaltica o anortositica. La superficie lunare presenta una notevole variabilità nell'altitudine crostale,

presentando sia zone pianeggianti, dette maria che altopiani. Lo spessore della regolite varia a seconda della regione della superficie lunare: per le maria è circa: $4 \div 5 \text{ m}$, mentre è circa 10 m per gli altopiani.



Figura 1. 3: Impronta impressa nella regolite della superficie lunare dall'astronauta Buzz Aldrin nella missione Apollo 11, 1969, credits by NASA

La mancanza di una schermatura verso la radiazione ultravioletta comporta una *Solar Irradiance* nell'ordine di 1361 W/m^2 , inoltre, l'assenza di un campo magnetico globale permette l'interazione del *Solar Wind*, con energia tra $1 \div 100 \text{ eV}$ e dei Galactic Cosmic Rays, con contributo energetico $0.1 \div 10 \text{ GeV}$ con la superficie lunare. La frazione di luce solare riflessa dalla superficie è variabile a scenda della morfologia: $5 \div 10\%$ per le maria e $12 \div 18\%$ per gli altopiani. La temperatura superficiale varia così da un minimo di 104 K sino ad un massimo di 390 K . In conclusione, l'ambiente lunare risulta ostile per quanto riguarda l'orientamento a causa della mancanza di punti di riferimento di immediata individuazione, per cui, una soluzione potrebbe essere, prima dell'effettiva fase di landing sul suolo lunare, inserire una fase di hovering per effettuare operazioni di hazard avoidance, come previsto per le missioni Chang'e-3 e Chang'e-4 [1, 20, 53].

1.5 *Orbita della Luna*

Nel 1687, Newton descrisse nel “The Mathematical Principles of Natural Philosophy”: fenomenologicamente il comportamento del moto orbitale della Luna

“For the Moon, though principally attracted by the Earth, and moving round it, does, together with the Earth, move round the Sun once a year, and is, according as she is nearer or farther from the Sun, drawn by him more or less than the center of the Earth, about which she moves”

Per descrivere il moto di rivoluzione della Luna attorno alla Terra generato dal campo gravitazionale terrestre, si farà riferimento ai parametri orbitali classici per orbite kepleriane. L’orbita descritta dalla Luna è un’orbita ellittica, il cui moto è piano, ma inclinato rispetto al piano equatoriale terrestre. Si riportano in forma tabulare i valori medi di semiasse maggiore dell’orbita, eccentricità, raggio del periastro e raggio dell’apoastro:

Parameters	Value
Semimajor Axis [km]	384400
Eccentricity	0.0549
Periapsis Radius [km]	363300
Apoapsis Radius [km]	405500

Tabella 1. 2: Dimensione e forma dell’orbita lunare, credits by [40, 42]

La terza legge di Keplero afferma che:

“The square of the period of a planet is proportional to the cube of its average distance from the body around which it orbits”

Di conseguenza, il periodo dell’orbita è una funzione del semiasse maggiore dell’orbita. Nell’orbita lunare tale valore è soggetto a delle fluttuazioni a causa dell’influenza del campo gravitazionale del Sole, generando delle variazioni nell’ordine del 5%. Questo causa una variabilità nel periodo di rivoluzione della Luna attorno alla Terra, detto *sidereal period*, valutato rispetto a stelle fisse.

$$T_{sidereal} = 27.32166 \text{ days} \pm 7h \quad (\text{Eq. 1.4})$$

Dove *day* indica la durata del giorno terrestre, cioè del periodo di rotazione della Terra attorno al proprio asse.

Anche l'eccentricità è soggetta a delle variazioni periodiche, le quali comportano una variazione del raggio di apoastro e di periaastro generando il fenomeno di Evezione Lunare, cioè “portar fuori” la Luna, in altri termini, un allontanamento del satellite naturale causato dall'allungamento dell'orbita determinato dall'aumento di eccentricità.

La linea dei nodi è l'asse che congiunge i punti di intersezione fra il piano orbitale della Luna con il piano dell'eclittica del sistema eliocentrico, nei cosiddetti nodi ascendente e discendente. In altri termini, la Luna oltre che orbitare attorno alla Terra, compie un moto di rivoluzione attorno al Sole, per cui l'orbita kepleriana lunare può essere descritta anche nel sistema eliocentrico. Si osserva come la linea dei nodi abbia un moto di precessione con periodo pari a 18,6 *years*, discorde rispetto al verso di percorrenza dell'orbita lunare: a causa della rotazione della linea dei nodi verso ovest, il lasso di tempo impiegato dalla Luna per passare due volte dallo stesso nodo risulterà inferiore, per cui si definisce il *draconitic period* che sarà inferiore al periodo sidereo.

$$T_{draconitic} = 27.2122 \text{ days} \quad (\text{Eq. 1.5})$$

Nel nodo, la Luna risulta allineata con la Terra e con il Sole, per cui è probabile che possa formarsi il fenomeno di eclissi, ovvero quando un osservatore sulla Terra vede il Sole oscurato a causa della presenza della Luna.

Il piano dell'orbita lunare è inclinato mediamente di $5^{\circ} 8'$ rispetto al piano dell'eclittica, con fluttuazioni nell'ordine del 3%. Si ricorda che invece, il piano equatoriale risulta inclinato rispetto al piano dell'eclittica di $23^{\circ} 27'$. Ipotizzando il caso storico in cui la linea dei nodi coincida con l'asse \vec{I} del sistema geocentrico equatoriale, l'inclinazione del piano orbitale lunare rispetto all'equatore è $i_{eq}^{max} = 23^{\circ} 27' + 5^{\circ} 8' = 28^{\circ} 35'$. Dopo circa 9.3 *years*, la precessione della linea dei nodi avrà causato una rotazione dell'orbita lunare, tanto che il nodo ascendente si troverà nella direzione $-\vec{I}$, per cui $i_{eq}^{min} = 23^{\circ} 27' - 5^{\circ} 8' = 18^{\circ} 19'$. Globalmente, l'effetto è che l'inclinazione dell'orbita lunare rispetto all'equatore varia tra i_{eq}^{min} e i_{eq}^{max} con un periodo di 18.6 *years*. L'ultimo effetto riguarda la rotazione della linea degli absidi, cioè dell'asse che congiunge il periaastro con l'apoastro dell'orbita, già descritto da Newton nel “Principia” e confermato dai risultati del matematico Clairaut nel 1749. Il moto di rotazione è concorde con il moto di rivoluzione lunare e presenta un periodo di 8.85 *years*, determinando una variazione di argomento di periaastro di circa $3^{\circ}/\text{revolution}$ [1,40,42,48,53].

Capitolo 2

Storia Dell'Esplorazione Lunare

2.1 Introduzione

Per secoli l'umanità si è interrogata sull'origine del Sistema Solare e sui processi di formazione dei pianeti, provocando un crescente interesse per l'esplorazione spaziale. L'uomo rivolgendo il capo verso la volta celeste è sempre stato rapito dal fascino della Luna: così vicina da essere visibile all'occhio umano, ma al contempo, così lontana da raggiungere. Le prime osservazioni della Luna risalgono al 1609: nel Sidereus Nuncius di Galileo è messa in risalto l'imperfezione della superficie lunare, che consta di dossi, creste e una morfologia residua dovuta a flussi di lava. La nomenclatura galileiana di "maria" per le aeree lisce, basse e scure e di "terrae" per le zone più ruvide, alte e luminose è ancora tutt'ora in uso. Le moderne rilevazioni telescopiche della Luna hanno permesso di realizzare mappe geologiche della parte visibile della Luna, necessarie per studi sull'origine dei crateri, dei fenomeni di vulcanismo, dell'interpretazione della tettonica delle placche e per la definizione di una colonna stratigrafica. La limitatezza della risoluzione spaziale dei telescopi terrestri, in aggiunta all'impossibilità di osservare circa il 40% della superficie lunare, ha messo in evidenza la necessità di remote sensing ad opera di sonde spaziali in orbite lunari. [2]

2.2 La Prima Epoca Lunare: Corsa Allo Spazio

Durante il periodo della Guerra Fredda, l'antagonismo tra Stati Uniti ed Unione Sovietica diede vita ad una serrata competizione per la conquista dello spazio e più in particolare della Luna. Nel 1959, la sonda spaziale sovietica, denominata Luna 1, fu il primo veicolo a raggiungere la velocità di fuga mancando di 5995 chilometri il suolo lunare [4,6]. Nello stesso anno, il veicolo spaziale Luna 2, fu il primo ad atterrare sulla superficie lunare, sebbene con esito fallimentare [3]. Nello stesso periodo, la navicella spaziale Luna 3 compì con successo il primo flyby della Luna, riuscendo ad ottenere per la prima volta nella storia umana, un'immagine della parte lontana del satellite naturale [2]. Tra il 1961 e 1965, la NASA (National Aeronautics and Space Administration) sviluppò i veicoli spaziali chiamati Ranger, i quali erano progettati per catturare immagini ravvicinate della superficie lunare, prima di impattare e schiantarsi a terra [3].

Solamente nel 1966, la navicella spaziale sovietica, Luna 9, riuscì ad atterrare in sicurezza sulla Luna, potendo così ottenere immagini della Luna a livello del suolo [2,3].



Figura 2.1: Mosaico di immagini del suolo lunare ottenute dalla navicella Luna 9, credits [2]

Nell'aprile dello stesso anno, la sonda Luna 10 fu la prima ad entrare in un'orbita lunare [2]. Nei due anni successivi, la NASA costruì le basi per le faticose missioni Apollo: le sonde spaziali Surveyor avevano il compito sia di ottenere ulteriori informazioni riguardanti l'ambiente lunare che di analizzare le proprietà e la composizione della regolite, mediante dei campionatori del suolo [2,3]. Le cinque missioni Lunar Orbiter, invece, erano destinate ad individuare un sito di atterraggio stabile per missioni manned; di fatti, il campionamento della superficie lunare ottenuto mediante immagini ad alta risoluzione spaziale, fu pari a circa il 99% dell'estensione lunare, determinando un gigantesco passo in avanti nella conquista della Luna. [2,3]. Il risultato del programma mise in evidenza come nonostante la presenza di polverosità, il suolo lunare permetteva di sostenere sia il peso dell'uomo che dei veicoli manned. Inoltre, fu accertata l'inesistenza sia di un campo magnetico globale sia di un'atmosfera [4]. Parallelamente al programma americano Apollo, nel 1970, l'Unione Sovietica sviluppò i primi due rover robotici teleoperati della storia lunare, denominati Lunokhod 1 e 2: il primo ha operato sul suolo lunare per 322 giorni percorrendo circa 10.5 chilometri, mentre il secondo è risultato attivo per 115 giorni, effettuando 37 chilometri. Lo scopo della missione era di studiare sia le caratteristiche della regolite che dell'ambiente radiativo; in aggiunta, per mezzo di pannelli laser riflettenti, sono state possibili misurazioni della distanza Terra-Luna, nonché delle librazioni fisiche. Le missioni sovietiche Luna 16, 20 e 24 prevedevano la raccolta di materiale dalla superficie lunare, con conseguente ritorno verso Terra: sono stati riportati in totale circa 320 grammi, prelevati sul lato orientale della parte visibile della Luna. La

differenza tra la posizione dei siti di atterraggio tra le missioni di ritorno sovietiche con quelle del programma Apollo ha permesso di valutare la differente composizione geologica della superficie lunare, in modo da poter calibrare gli strumenti di remote sensing [3].

2.3 *Il Programma Apollo*

Il programma Apollo nasce il 25 maggio del 1961 su proposta dell'allora presidente degli Stati Uniti John F. Kennedy [2]. La missione Apollo 8, del Natale del 1968, fu un successo strabiliante: per la prima volta nella storia per le missioni manned, l'essere umano passò da un'orbita LEO (Low Earth Orbit) ad un'orbita lunare, riuscendo così a sorvolare il satellite naturale per un giorno intero [4]. Il 20 luglio 1969, Neil Amstrong ed Edwin Aldrin, mediante il Lunar Module Eagle (LM-5), furono i primi uomini a mettere piede sulla Luna: *"That's one small step for a man, one giant leap for mankind"* avrebbe pronunciato Amstrong mentre solcava la superficie lunare [3]. Il soft-landing fu molto tormentato, si susseguirono continui allarmi provenienti dall'on-board computer in quanto era sovraccarico, nonché si presentò il ghiacciamento delle linee di iniezione del propellente: nonostante ciò, il Lunar Module (LM) riuscì ad atterrare nel "Mare Tranquillitatis" [4]. L'impresa dell'Apollo 11 permise sia di apprendere come le dark maria siano delle lave vulcaniche cristallizzate circa 3.6 miliardi di anni fa, sia di registrare e valutare la composizione del vento solare mediante l'EASEP (Early Apollo Scientific Experiments Package) [4,7].



Figura 2.2: Il pilota del Lunar Module Eagle dell'Apollo 11, Buzz Aldrin, dispiega l'EASEP durante una attività extraveicolare (EVA), credits by NASA

La seconda missione manned, l'Apollo 12, prevedeva, oltre ad una vasta serie di esplorazioni dell'ambiente lunare, anche il dispiegamento sul suolo lunare dell'ALSEP (Apollo Lunar Surface Experiments Package), i cui strumenti di misurazione includevano una combinazione di sismografi, magnetometri, sonde per valutare i flussi di calore e rilevatori atmosferici e ionosferici. Il modulo era composto da un hub centrale alimentato da radioisotopi, in modo da risultare funzionante anche durante i periodi di notte lunare [2,7]. Una caratteristica peculiare di questa missione riguarda la traiettoria di rientro sulla Terra: per la prima volta, il veicolo non effettuava più un'orbita di rientro libera, cioè dove l'evoluzione della traiettoria avveniva senza bisogno di propulsione, bensì si scelse di implementare una traiettoria ibrida: il 22 novembre del 1967, l'Apollo 12 effettuò una manovra di correzione a metà rotta per permettere lo splashdown nell'Oceano Pacifico. Questa soluzione permise di avere una maggiore flessibilità progettuale, tanto da ottimizzare le traiettorie di atterraggio del Lunar Module in modo da consumare meno propellente, avere l'illuminazione desiderata del sito di atterraggio e la capacità di monitoraggio dalla Terra, mediante la tracking antenna, della fase di descent e landing [7]. I risultati in termini geologici misero in evidenza la complessità e la variabilità della crosta lunare, a causa della presenza di elementi radioattivi e delle terre rare nei campioni recuperati. L'Apollo 13 ebbe esito fallimentare a causa dell'esplosione di una bombola di ossigeno, che precluse il landing sul suolo lunare, non riportando conseguenze per gli astronauti a bordo. Lo studio condotto sul bacino dell'Imbrium, grazie ai campioni prelevati dall'equipaggio dell'Apollo 14, ha permesso di verificare come la sua formazione dovuta all'impatto di un proto-pianeta sulla superficie lunare, sia antecedente alla dark maria e conseguente al periodo di formazione della crosta lunare [4]. La prima della serie delle missioni "J" fu quella dell'Apollo 15: queste prevedendo una permanenza più lunga sulla superficie lunare rispetto alle missioni precedenti. L'esplorazione dell'ambiente lunare è stata migliorata mediante l'impiego di un rover, il LRV (Lunar Roving Vehicle). Esso aveva una massa strutturale pari a 210 kg, un ingombro di circa 3.1 metri in lunghezza, 2.3 metri di profondità e un'altezza massima di 1.14 metri, permetteva di trasportare un payload di 490 kg ed ogni ruota era azionata mediante un motore elettrico alimentato da batterie chimiche Argento-Zinco da 36 Volt [8]. L'uso dell'innovativo mezzo di trasporto permise di stabilire un record di percorrenza sulla superficie lunare di circa 28 chilometri, superando il precedente record dell'Apollo 14 di 3.38 chilometri. L'esplorazione del sito di atterraggio di Hadley-Apennine permise di raccogliere circa 80 chilogrammi di materiale lunare, evidenziando una composizione con prevalenza di feldspato plagioclasio, minerale caratteristico delle antiche rocce cristalline [4,7].

La missione dell'Apollo 16 dimostrò la presenza di un campo magnetico locale di grande intensità sulla superficie della Luna, nonostante l'assenza di un campo magnetico globale; mentre la missione dell'Apollo 17, mediante l'esplorazione della valle del Taurus-Littrow, mise in evidenza come le inondazioni di lava sulla Luna ricoprissero un arco temporale di 700 milioni di anni [4]. Il programma Apollo, concluso nel 1972, ha permesso di portare 12 astronauti sulla Luna: per un totale di 300 ore trascorse sul suolo lunare, di cui solo 81 ore e 36 minuti dedicate ad attività extraveicolari (EVAs). Durante la permanenza sulla superficie lunare, i moonwalkers hanno coperto complessivamente una distanza di circa 95.5 chilometri, recuperando circa 382 kilogrammi di materiale lunare ottenuto a profondità superiori ai 2 metri [2]. Questo periodo di esplorazione ha contribuito ad un accrescimento della conoscenza della Luna: dallo studio sulla sua formazione, alla differenziazione tra le maria e terrae, nonché alla valutazione dell'evoluzione geologico-temporale della superficie lunare. A conferma di ciò, i risultati in termini di cratering-rate che hanno permesso di datare il suolo lunare, sono stati estesi per pianeti rocciosi come Mercurio e per le lune degli outer planets [2,4]. Nonostante i vantaggi esposti nel ripercorrere la storia delle missioni lunari, i costi proibitivi dei programmi spaziali hanno contribuito alla perdita di interesse nella Luna nei due decenni successivi: si stima, infatti, che il programma Apollo sia arrivato a rappresentare addirittura il 4% del bilancio federale degli Stati Uniti [2].



Figura 2.3: Saluto alla bandiera americana da parte dell'astronauta John Young, presenza sullo sfondo il Lunar Module Orion e il Lunar Roving Vehicle impiegati nella missione Apollo 16, 1972, credits by NASA

2.4 *Un Ritrovato Interesse Per la Luna*

Per due decenni, in seguito al programma americano Apollo terminato nel 1972, si assistette ad un abbandono dell'esplorazione lunare, ripresa solamente nel 1994, quando gli Stati Uniti svilupparono la missione Clementine che coinvolgeva sia la NASA che la Strategic Defense Initiative Organization [3]. Lo scopo del satellite americano di circa 140 chilogrammi era quello di testare dei sensori in ottica di una difesa missilistica spaziale, nonché di ottenere una mappatura della Luna in diverse bande dello spettro elettromagnetico: luce visibile, infrarosso ed ultravioletto [2,3,4]. In origine, la missione Clementine avrebbe previsto, terminata l'osservazione lunare, una mappatura dell'asteroide 1620 Geographos, tuttavia, l'accensione inaspettata dei propulsori dedicati al controllo della quota causò uno spin incontrollato del satellite, tanto da dover abrogare il secondo goal della missione [2]. In aggiunta, il laser altimetro determinò una mappa topografica avente una risoluzione tra 1 e 2 chilometri lungo la traccia a terra e di 40 metri in altezza, che permise di valutare con accuratezza la dimensione di molti crateri e bacini lunari [2]. Le onde radar riflesse dal suolo lunare e raccolte dai radiotelescopi sulla Terra misero in evidenza la possibile presenza di ghiaccio, depositato dall'impatto di comete sulla superficie lunare, in alcune zone sempre in ombra della Luna. Questa ipotesi fu confermata dieci anni più tardi dalle rilevazioni sonda LCROSS (Lunar Crater Observation and Sensing Satellite) della NASA in una regione vicina al polo sud [2,4]. Nel 1998, la NASA sviluppò la missione Lunar Prospector, che aveva il fine di mappare la composizione superficiale della Luna, nonché di verificare la presenza di ghiaccio nelle zone polari [9]. Questo avvenne utilizzando principalmente tre orbite di parcheggio: a 100, 30 e 10 chilometri di altitudine. L'uso di booms radiali sui quali erano presenti strumenti di misura scientifici come spettrometri a raggi gamma, spettrometri di neutroni e magnetometri, permise di verificare la presenza sia di elementi chimici fondamentali, quali calcio, ferro, silice, alluminio, titanio, magnesio e ossigeno, che di elementi radioattivi come il potassio, l'uranio e il torio su tutto il suolo lunare [2]. Inoltre, il magnetometro permise di verificare la presenza di anomalie magnetiche locali, come evidenziato già dal programma Apollo, mappando i campi magnetici superficiali per la prima volta nella storia lunare [2,4]. Dai risultati dello spettrometro di neutroni si evinse che, nell'intorno dei poli, ci fosse una massiva presenza di idrogeno, mantenendo così in auge, l'ipotesi di ghiaccio nelle zone polari della Luna, pur non confermandola direttamente. Il satellite si schianterà nel polo sud lunare nel luglio del 1999, durante una missione atta a verificare che nel materiale espulso sia presente effettivamente ghiaccio [2, 4, 9].

2.5 *Lo Studio Lunare Diventa Un Fenomeno Globale*

Il 27 settembre del 2003, l'European Space Agency (ESA) lanciò la sua prima missione di esplorazione lunare, chiamata SMART-1. L'obiettivo della missione era di tipo tecnologico, cioè volto a testare sia la propulsione SEP (Solar-Electric Propulsion), cioè propulsori a ioni alimentati dall'energia dei solar arrays installati a bordo, che altri strumenti miniaturizzati atti all'indagine scientifica dell'ambiente lunare [10]. In particolare, l'AMIE (Advanced Moon Micro-Imager Experiment), cioè una camera elettronica, permise di mappare il suolo lunare nello spettro elettromagnetico del near-infrared con una risoluzione di circa 250 metri/pixel e di 200 metri/pixel in corrispondenza del polo sud, in modo da monitorare le condizioni di illuminazione della zona, fondamentali per l'individuazione un sito di atterraggio per missioni future. [2,10]. Il 14 settembre 2007, la Japanese Aerospace Exploration Agency (JAXA) avviò la missione Kaguya, conosciuta anche con il nome di SELENE (Selenological and Engineering Explorer), diventando la seconda missione lunare del Giappone [2]. Il fine era quello di raccogliere dati scientifici riguardante sia l'origine sia l'evoluzione della Luna, ma allo stesso tempo di testare e sviluppare tecnologie da usare in future esplorazioni lunari [11].



Figura 2.4: Foto della Terra e del Suolo Lunare, ottenuta dal Lunar Orbiter della missione Kaguya, novembre 2007, credits by JAXA

Kaguya era formato da un satellite principale, orbitante in un'orbita di parcheggio circolare polare a 100 chilometri di altitudine e da due subsatelliti il RSAT (Relay Satellite) e il VRAD (Very-

Long-Baseline-Interferometer Radio Source), orbitanti in orbite ellittiche polari, aventi perilunio e apolunio ad altitudini di 100 e 800 chilometri, progettati per missioni di Doppler tracking. Inoltre, sfruttando i satelliti secondari come relè per la comunicazione a Terra, il satellite principale ha potuto misurare il campo gravitazionale della farside lunare [2, 11].

Nell'ottobre del 2008 fu lanciato il programma Chandrayaan-1, la prima missione indiana della storia nell'ambiente lunare. Il veicolo spaziale aveva come payloads undici pacchetti di strumenti scientifici, cinque dei quali sviluppati dall'ISRO (Indian Space Research Organisation), mentre i restanti da NASA ed ESA. In particolare, l'agenzia spaziale indiana progettò il Moon Impact Probe, un satellite, che separandosi dal veicolo principale, avrebbe effettuato un hard-landing nel polo sud lunare. Esso montava il Moon Mineralogy Mapper (M3), un imaging spectrometer, che permise di scoprire minerali apparentemente idratati ad alta latitudine. L'ipotesi più accreditata è che la presenza di ossidrilie (OH^-) ed acqua (H_2O) sia dovuta all'interazione fra l'ossido di ferro presente nella regolite e i nuclei di idrogeno assorbiti dai venti solari, per cui $\text{OH}/\text{H}_2\text{O}$ possono migrare nelle zone polari, permanentemente in ombra, depositandosi e trasformandosi così in ghiaccio. [2].

Il 18 giugno del 2009 sono stati lanciati su un razzo Atlas V sia il Lunar Reconnaissance Orbiter (LRO) che il Lunar Crater Observation and Sensing Satellite (LCROSS) sviluppati dalla NASA. In origine, la missione LRO aveva esclusivamente obiettivi di carattere esplorativi, cioè atti a mappare la Luna per la pianificazione di future esplorazioni sia umane che robotiche. In seguito al termine della missione esplorativa, conclusasi il 15 settembre del 2010, il nuovo goal di missione consisteva nell'identificare zone ad alto valore scientifico. La missione LCROSS sfruttò l'ultimo stadio del vettore Centaur, oltre che per immettersi in un'orbita lunare, come impattatore sul suolo lunare. Lo spacecraft fu in grado di rilevare le sostanze volatili generate dall'impatto del razzo al suolo, avvenuto nell'ottobre del 2009. L'uso di spettrometri e camere nel near-IR e nel middle-IR hanno permesso di verificare la presenza di 155 ± 12 chilogrammi di ghiaccio nel sito di impatto. Inoltre, è stata rilevata la presenza di ioni ossidrilici, generati dall'elettrolisi dell' H_2O indotta dalla radiazione solare, nonché di altri composti volatili, come l'ammoniaca, l'anidride carbonica, composti solforati ed idrocarburi leggeri. La missione permise di confermare i risultati della missione Clementine, confermando la presenza di depositi di acqua nelle zone d'ombra polari [2].

Nel 2007, Google avviò una competizione chiamata Lunar X Prize, che proponeva un primo premio di 30 milioni di dollari alle compagnie private che sarebbero state in grado di effettuare un soft-landing e percorrere almeno 500 metri sulla superficie lunare, nonché inviare una documentazione

sia di immagini che di video ad alta risoluzione come prova della riuscita della missione. La missione Beresheet sviluppata dall'organizzazione privata israeliana SpaceIL nasceva con il proposito di partecipare al concorso promosso da Google: in collaborazione con la Israeli Space Agency (ISA) e con l'Israel Aerospace Industries (IAI), il lancio avvenne nel febbraio del 2019 da Cape Canaveral per mezzo del lanciatore Falcon 9 di SpaceX [15,16]. Lo spacecraft aveva un ingombro di 1 metro in altezza e 2.3 metri in larghezza con le gambe del landing gear dispiegate, per un peso complessivo di 585 kilogrammi [16]. In seguito alla separazione con l'ultimo stadio del lanciatore, la sonda continuò ad orbitare attorno alla Terra, alzando in modo graduale l'apogeo dell'orbita ellittica finché con una manovra di Lunar Capture, entrò nella sfera di influenza lunare. L'11 aprile del 2019, il lander cercò di atterrare nel Mare Serenitatis, nei pressi del sito di atterraggio della missione Apollo 17, tuttavia il main engine smise di funzionare: nonostante il reset manuale del sistema permise di rimettere in funzione il propulsore principale, la perdita di altitudine fu tale da compromettere in modo irreversibile la braking phase [15,16]. È stata programmata per il 2024 la missione Beresheet 2, che coinvolge la compagnia privata SpaceIL e gli Emirati Arabi Uniti. Gli obiettivi della missione prevedono l'atterraggio di due lander, nonché il lancio dello spacecraft più piccolo della storia [18]. La seconda missione lunare dell'Indian Space Research Organisation (ISRO) è Chandrayaan-2: essa presenta una maggiore complessità tecnologica rispetto alla missione Chandrayaan-1, di fatti, comprende un orbiter, un lander denominato Vikram ed un rover chiamato Pragyan per l'esplorazione del Polo Sud lunare.

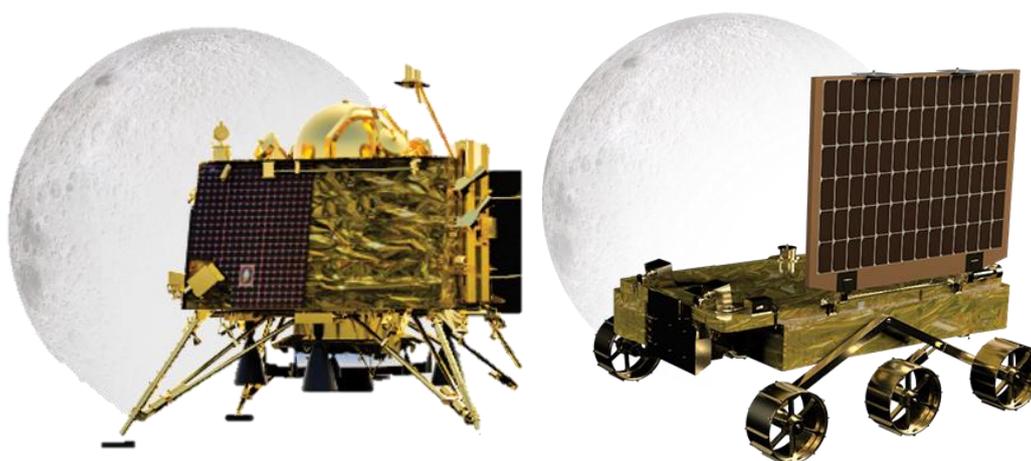


Figura 2.5: Modelli rappresentativi del lander Vikram (a sinistra) e del rover Pragyan (a destra), credits by ISRO

Il lancio avvenne nel luglio del 2019 e dopo una Trans Lunar Insertion (TLI), lo spacecraft raggiunse un'orbita polare a 100 chilometri di quota nell'agosto del 2019. Il lander Vikram effettuerà una Descent Orbit Insertion (DOI) in modo da posizionarsi in un'orbita ellittica avente

perilunio di 35 chilometri. Nella fase di landing si è registrata una mancanza di comunicazione con le ground stations al di sotto di un'altitudine pari a 2.1 chilometri, per cui, presumibilmente il lander si è schiantato sul suolo lunare; è stato successivamente individuato dall'orbiter con una rilevazione di tipo termica. Il Chandrayaan 2 Orbiter è stato progettato per essere operativo per circa sette anni ed è tutt'ora in grado di comunicare con l'Indian Deep Space Network (IDSN), una rete di antenne atte a gestire e supportare le missioni interplanetarie indiane. Dunque, sono ancora in fase di sviluppo esperimenti sulla composizione mineraria della superficie lunare [17].

2.6 *Chinese Lunar Exploration Program*

Nel 2007 iniziò anche il Chinese Lunar Exploration Program con il lancio del primo spacecraft Chang'e-1. Gli obiettivi del programma spaziale cinese possono essere suddivisi in tre sotto-obiettivi: orbitare attorno alla Luna, effettuare un soft-landing per raccogliere campioni sul suolo lunare mediante un rover e infine, fare ritorno dalla Luna, in modo da costruire le basi per un futuro insediamento sulla Luna [2]. Chang'e-1 fu il primo satellite cinese ad orbitare attorno alla Luna in un'orbita di parcheggio circolare di 200 chilometri, riuscendo ad ottenere una mappatura tridimensionale dell'ambiente lunare, nonché, mediante un radiometro a microonde, di mappare le temperature globali della Luna a diverse profondità. Nel 2010, il lancio di Chang'e-2 permise di migliorare i risultati ottenuti nella precedente missione, operando ad un'orbita di parcheggio di 100 chilometri e aumentando la risoluzione spaziale della CCD stereo camera, in modo da avere una mappa più dettagliata della Luna da usare per l'individuazione di landing sites per missioni successive. Al termine della missione lunare, lo spacecraft fu trasferito dall'orbita di parcheggio al punto lagrangiano Earth-Sun L2, diventando il primo satellite nel riuscire ad effettuare con successo tale manovra. Nel 2012, lasciò la L2-orbit per eseguire un fly-by dell'asteroide 4179 Toutatis [2,12]. Nel dicembre del 2013, la Chinese National Space Agency (CNSA) avviò la seconda fase del programma di esplorazione lunare con il lancio di Chang'e-3. La missione, mediante il Lunar Landing Vehicle (LLV), prevedeva un soft-landing sul suolo lunare e l'impiego di un rover chiamato Yutu. Il satellite principale si immise in un'orbita di parcheggio a 100 chilometri di quota, per poi eseguire una manovra di frenata per immettersi in un'orbita ellittica avente perilunio di 15 chilometri, da dove il LLV avrebbe iniziato la manovra di landing: la braking phase terminò a 100 metri di quota e fu seguita da una fase di hovering atta a selezionare il sito di atterraggio più adatto.

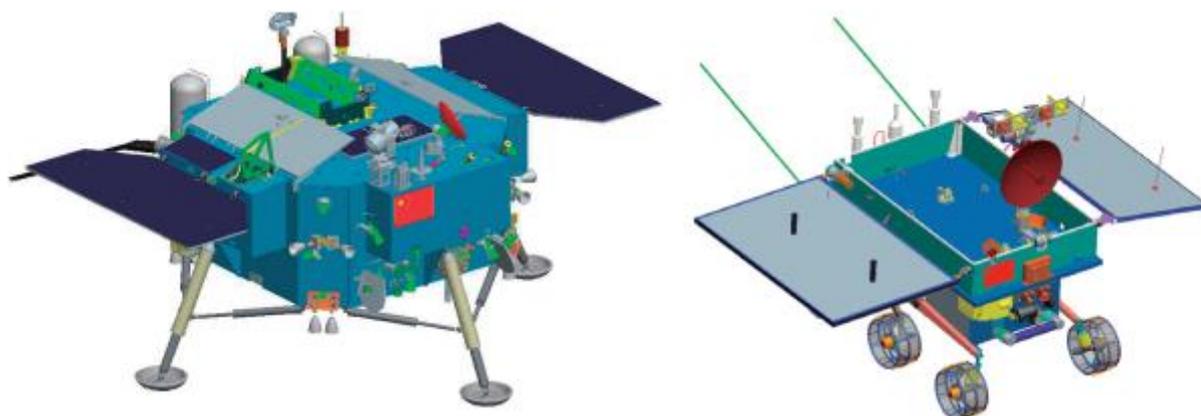


Figura 2.6: Modelli CAD del LLV (a sinistra) e di Yutu (a destra) nello stato di funzionamento sulla superficie lunare, credits by [20]

Il lander aveva una massa totale di 1200 chilogrammi e montava tre camere pancromatiche, una camera topografica ed una ultravioletta. Il successo della missione Chang'e-3, permise all'agenzia spaziale cinese di ritardare il lancio di Chang'e-4, in modo da riconfigurarolo per missioni di soft-landing sulla farside lunare. Il terzo sotto-obiettivo del programma di esplorazione spaziale cinese prevedeva il ritorno dal suolo lunare di modo da analizzare campioni prelevati in loco. Nell'ottobre del 2014 fu lanciato il CE-5 Flight Test Device, conosciuto anche come Chang'e-5-T1, cioè un veicolo tester, progettato per dimostrare le tecnologie per un rientro semi-balistico a velocità ipersoniche in atmosfera terrestre, per verificare le traiettorie di ritorno libero dalla Luna e per mostrare l'efficacia sia del sistema di protezione termica che dell'algoritmo di guida, navigazione e controllo. Il Return Module fu rilasciato ad una quota di 5000 chilometri dal suolo terrestre con una velocità di 11 chilometri al secondo, che lo costrinse ad effettuare uno skip re-entry, in modo da dissipare energia nell'esosfera prima del contatto al suolo. L'atterraggio avvenne a Siziwangqi (Inner Mongolia) il 31 ottobre del 2014. Il Test Vehicle, dopo aver rilasciato il modulo di rientro, si è diretto verso il punto lagrangiano L2, per poi passare successivamente in un'orbita di parcheggio lunare alla quota di 200 chilometri. Nel dicembre del 2018, fu lanciata la missione Chang'e-4, avente come obiettivo il soft-landing sulla farside della Luna. La problematica principale della missione riguarda il sistema di comunicazione, in quanto nella farside lunare la comunicazione verso Terra non è garantita, per cui si sfrutterà un satellite relè di comunicazione, chiamato Querqiao, lanciato nel maggio del 2018 e posto in un'orbita Halo attorno al punto lagrangiano L2 del sistema Terra-Luna. Il lander di Chang'e-4 presenta una massa di circa 1200 chilogrammi, montando diversi payload scientifici, quali uno spettrometro radio operante nell'intervallo di frequenze tra 0.1 e 40 Mega-Hertz, una landing camera (LCAM), una terrain camera (TCAM), un dosimetro ed anche un esperimento biologico.

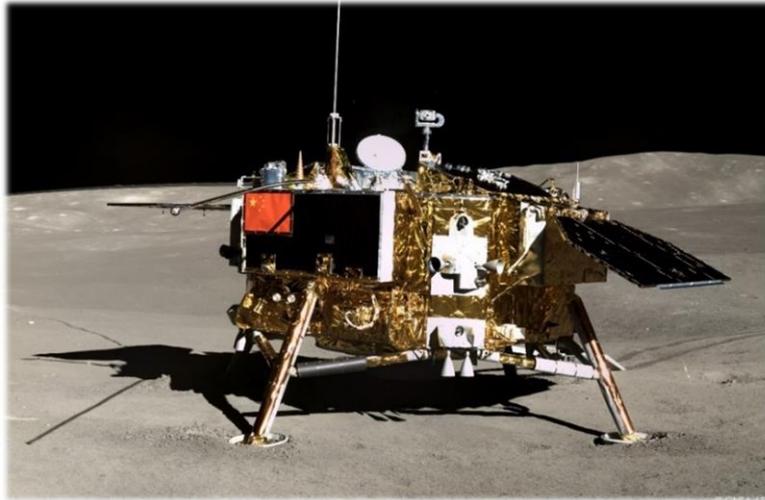


Figura 2.7: Lander della missione Chang'e-4, immagine scattata da Yutu-2 dopo una settimana dall'atterraggio. credits by CNSA

Il 23 novembre del 2020, la CNSA lanciò la missione Chang'e-5 che aveva come obiettivo il soft-landing sul suolo lunare e di condurre operazioni nell'ambiente lunare, in modo da recuperare circa 1.7 kg di regolite da analizzare al ritorno sulla Terra. Lo spacecraft avente una massa di circa 8200 chilogrammi è composto da tre moduli: il Descent Module, la Service Capsule e il Return Module. Il Modulo di Discesa è composto dal lander, che preleverà i campioni di regolite sul suolo lunare mediante un braccio robotico e un trapano a carotaggio e al Modulo di Ascesa che dovrà attraccare con la Service Capsule, operante ad un'orbita di parcheggio di 200 chilometri di altitudine. La braking phase della fase di landing è effettuata con un propulsore avente una spinta di 3000 Newton, identico a quello presente sull'ascent module, usato per decollare dal suolo lunare. Il modulo di ritorno ha orbitato attorno alla Luna per cinque giorni, per poi immettersi in un'orbita di trasferimento Terra-Luna, mentre l'orbiter del Chang'e-5 si è diretto verso il punto lagrangiano L1 Terra-Sole. La fase di rientro in atmosfera è stata analoga a quella del veicolo tester, implementando una skip re-entry in modo da dissipare energia nell'esosfera. Per il 2024 sono programmati altri due lanci, ovvero la missione Chang'e-6 e Chang'e-7. La prima ha lo scopo di effettuare un soft-landing nel polo sud della Luna, probabilmente nella farside lunare, nel caso in cui il satellite relè Queqiao fosse ancora in funzione; la seconda invece, avrà il fine di rilevare il ghiaccio nelle aree permanentemente in ombra della Luna, mediante un lander, un rover e un fly by di un piccolo satellite. Inoltre, in data ancora da definirsi è programmata anche la missione Chang'e-8, progettata per testare tecnologie necessarie per insediamenti scientifici sulla Luna [12].

2.7 *Artemis Program*

Il programma Artemis sviluppato dalla NASA sarà propedeutico sia per le future missioni su Marte sia per l'avvio di una nuova fase di esplorazione umana nel Sistema Solare. Il programma ha il fine di portare per la prima volta sia una persona di colore che la prima donna sul suolo lunare entro il 2024, cercando di avviare una fase di esplorazione spaziale sostenibile [58, 61].

2.7.1 Lunar Gateway (LG)

La fase 1 del programma Artemis prevede di assemblare il Lunar Gateway (LG), una stazione spaziale nell'ambiente cislunare, in un programma congiunto fra NASA, ESA, JAXA, Canadian Space Agency (CSA) e agenzia spaziale russa, Roscomos. Il Lunar Gateway sarà formato da più moduli con docking capability, avrà una potenza auto-sufficiente per garantire le funzionalità chiave della stazione, una propulsione autonoma, nonché un arilock per stoccaggio, un elemento per attività extra-veicolari e un Logistic Vehicle (LV) per il rifornimento e lo smaltimento dei rifiuti. L'Habitation and Logistic Outpost (HALO) fornirà all'equipaggio dell'Orion Crew Vehicle un primo spazio abitativo, contenete stazioni scientifiche da configurare a seconda delle necessità di missione. L'HALO fornirà tre docking ports per l'attracco di Orion, di eventuali moduli logistici, di lander lunari, nonché di nuovi moduli per l'ampliamento della stazione spaziale, permettendo di generare una LG che possa essere riconfigurabile e robusta. In una seconda fase, il modulo abitativo sarà ampliato mediante l'International Habitation Module (I-HAB), che diventerà lo spazio abitativo principale del Lunar Gateway. L'European System Providing Refuelling Infrastructure and Telecommunication (ESPIRT) è un modulo progettato dall'ESA in collaborazione con Thales Alenia Space, formato dal sistema Halo Lunar Communication System (HLCS) che permetterà di effettuare comunicazioni tra il Lunar Gateway e gli elementi orbitanti, nonché con i lander lunari e dall'ESPIRT Refueling Module (ERM) che sarà composto da serbatoi di carburante e docking ports. L'Heliophysics Enviromental and Radiation Measurement Experiment Suite (HERMES) sarà montato esternamente all'HALO permettendo di controllare il meteo nell'ambiente cislunare. La fonte di energia primaria è generata dal Power and Propulsion Element (PPE), che sarà progettato per funzionare in lunghi periodi anche senza il personale di bordo. Il PPE integrerà dei Solar Electric Propulsion (SEP) da 6 kW che in combinazione con propulsori di potenza superiore genereranno una propulsione elettrica da circa 50 kW. La presenza del Robotic Arm permetterà di supportare le attività di docking, nonché di effettuare ispezioni e operazioni extra-veicolari senza

lasciare la stazione spaziale lunare. Si stima che il lancio del sistema PPE e del modulo HALO avverrà nel 2023 con un singolo lanciatore, permettendo l'attracco dell'equipaggio di Orion del 2024 [58,62,63,64].

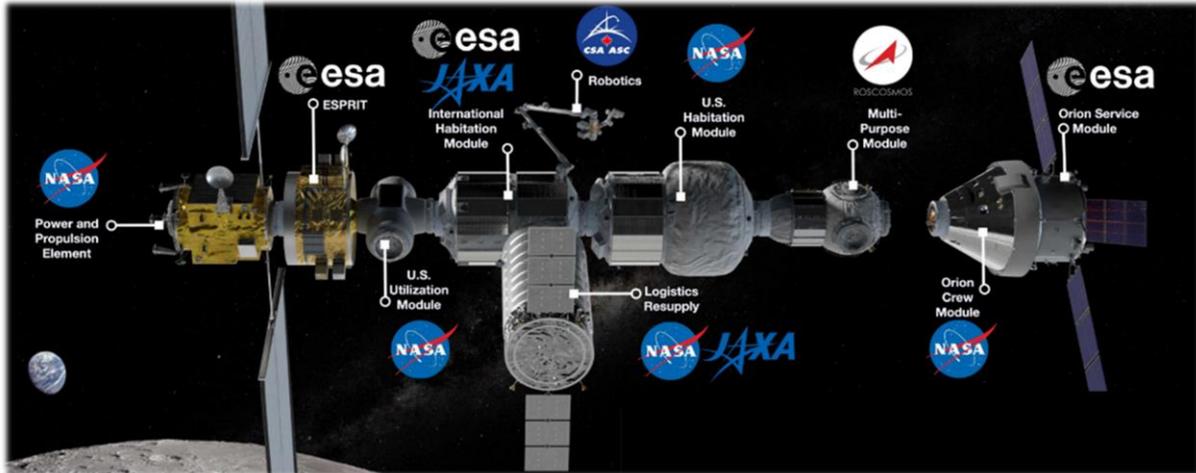


Figura 2.8: Configurazione finale del Lunar Gateway (LG), credits by NASA, ESA, JAXA, Robotics

2.7.2 ORION Multi-Purpose Crew Vehicle (MPCV)

L'ORION Multi-Purpose Crew Vehicle è un veicolo spaziale progettato per operare in deep space, prevedendo anche il ritorno verso la Terra, nonché la capacità di docking con il Lunar Gateway. L'Orion Spacecraft può essere suddiviso in tre entità: il *Launch Abort System*, posizionato in cima al crew module, permette di posizionare in modo sicuro l'Orion Spacecraft di modo da garantire un atterraggio sicuro per i membri dell'equipaggio nel caso emergenziale di interruzione del lancio; il *Crew Module* permette di ospitare quattro membri dell'equipaggio per un volo oltre la Luna per un massimo di 21 giorni, fornendo un habitat sicuro dalla fase di lancio sino alla fase di recupero; e il *Service Module* permette il distacco dell'Orion Spacecraft dall'ultimo stadio del lanciatore, fornendo la propulsione in deep-space per il trasferimento orbitale, la potenza e il controllo termico per il Crew Module, nonché permette il controllo di assetto dello spacecraft [58,62,65,66].

2.7.3 CLPS Missions

Nel 2018 la NASA istituì il programma Commercial Lunar Payload Services (CLPS) per incoraggiare le compagnie commerciali statunitensi nel progettare nuove tecnologie di lander lunari per portare payloads commerciali sul suolo lunare. La NASA secondo necessità assegna ordini e consegne sulla superficie della Luna alle aziende aderenti al CLPS. La prima missione sarà Peregrine Lunar Lander, TO2-AB, di Astrobotic, il cui lancio avverrà probabilmente alla fine del

2022 e porterà circa 14 payloads scientifici di diverso tipo sulla Luna, tra cui retro-riflettori laser, lidar per doppler navigation, spettrometri e magnetometri.



Figura 2.9: Peregrine Lander della missione TO2-AB, credits by Astrobotic

Il lander Peregrine è alto 1.9 metri con un ingombro cross-sezionale di 2.5 metri e presenta quattro landing legs. Sul fondo del lander sono presenti 5 propulsori principali ISE-100 che producono globalmente 667 N di spinta, sfruttando un sistema di propellenti ipergolici: il fuel è Mono-Metil-Ildrazina (MMH), mentre come ossidante usa una soluzione di ossido nitrico. L'Attitude Control System (ACS) è formato da 12 propulsori, raggruppati in clusters da tre in modo da garantire il controllo sia sui gradi di libertà rotazionali che traslazionali. Ognuno di questi propulsori permette di produrre una spinta di 45 N. Il sistema di navigazione prevede star trackers, sun sensors, inertial measurement per mantenere l'orientamento corretto dei pannelli solari e un Doppler LIDAR permette di avere informazioni su range e velocità per effettuare un atterraggio in sicurezza [58,67,68].

La seconda missione promossa dal CLPS è l'Intuitive Machines 1 (IM-1) sviluppata dall'omonima azienda, che ha l'obiettivo di portare il lander Nova-C nella Vallis Schotter della Luna, trasportando così ulteriori 5 payloads scientifici sul suolo lunare. Il lancio sarà effettuato probabilmente al termine del 2022 per mezzo di un Falcon 9 della SpaceX. La struttura del lander lunare Nova-C è di un cilindro esagonale, formato da 6 landing legs, che permetterà di trasportare circa $100 \div 130$ kg di carico utile sulla Luna. L'alimentazione è fornita da dei solar arrays che permettono di generare globalmente 200 W di potenza. Il sistema propulsivo usa LCH_4 come combustibile, mentre usa LO_2 come ossidante. L'orbita di parcheggio lunare è prevista ad una quota di 100 km, per poi atterrare nel landing site prescelto con una precisione di 200 m [69].



Figura 2.10: Nova-C Lander della missione IM-1, credits by Intuitive Machines

La NASA ha pianificato una seconda missione con l'azienda Intuitive Machines, chiamata IM-2, il cui lancio non è previsto prima di dicembre 2022. L'obiettivo di questa CLPS mission è atterrare nel Polo Sud Lunare, sfruttando le capacità del Nova-C Lander, sviluppato per la missione IM-1. Grazie alle prestazioni del Nova-C Lander, la missione IM-2 permetterà di offrire un servizio commerciale di condivisione del viaggio per mezzo di Sherpa Orbital Transfer Vehicle (OTV) di nuova generazione per il dispiegamento di payload secondari in orbite translunari, cislunari e in orbite equatoriali geosincrone [70].

La Masten Space Systems svilupperà un ulteriore CLPS mission, chiamata Masten Mission 1 o in forma abbreviata TO 19C, che prevederà di portare otto payload sulla Luna nel 2023 e mantenerli attivi per almeno 12 giorni. Il lander lunare usato per la missione è Xelene nella sua configurazione XL-1 avente una dry mass di 675 kg e potendo imbarcare sino a 2000 kg di propellente.



Figura 2.11: Xelene Lunar Lander sviluppato per la missione Masten Mission 1, credits by Masten Space Systems

Il sistema propulsivo è in grado di produrre fino a 4000 N di spinta mediante sei propulsori principali montati sul fondo del lander che sfruttano un sistema bipropellente ipergolico. Il sistema di Reaction Control System (RCS) è formato da 12 thrusters, in modo da mantenere l'orientamento del veicolo spaziale per tutta la durata della missione. Il sistema di Guida Navigazione e Controllo (GNC) sfrutta una terrain relative navigation, un algoritmo di hazard avoidance e anche l'uso di Lidar avanzati per avere una maggiore precisione nella fase di landing. I payloads scientifici comprendono camere, spettrometri operanti nell'infrarosso, un retro-riflettore, un braccio robotico un micro-rover chiamato MoonRanger [72,73].

La NASA ha approvato la missione TO 19D o Blue Ghost Mission 1 sviluppata da Firefly Aerospace, il cui scopo è trasportare sulla Luna 10 payloads nel 2023. Il lander lunare Blue Ghost ha una struttura a forma di scatola, con una capacità di payload pari a 155 kg , e quattro landing legs. La potenza elettrica è fornita da dei solar arrays posizionati sui fianchi del veicolo spaziale, che hanno la capacità di essere dispiegabili e sporgere anche sopra il top desk a seconda dell'orientamento del lander. Sul suolo lunare forniscono una potenza nominale di 450 W e di picco pari a 650 W [74, 75].



Figura 2.12: Blue Ghost Lander sviluppato per la missione TO 19D, a sinistra la configurazione con tre pannelli solari fissi per landing site, a destra il dispiegamento dei pannelli per seguire il Sun Vector anche nelle zone polari, credits by Firefly Aerospace

2.7.4 VIPER

Il Volatiles Investigating Polar Exploration Rover (VIPER) è un rover lunare sviluppato dalla NASA per il programma ARTEMIS e sarà trasportato nel Polo Sud lunare mediante il lander lunare Griffin sviluppato dall'azienda commerciale Astrobotic, su iniziativa del programma CLPS. Per cui, VIPER è il payload più grande e massivo assegnato ad una missione CLPS: sia l'integrazione di VIPER nel Griffin Lander, sia la selezione del lanciatore che le fasi di atterraggio saranno interamente gestite da Astrobotic. Il vincolo imposto dalla NASA è di effettuare il landing lunare

nella stagione estiva del 2023 per sfruttare i periodi di luce solare più lunghi, in modo da rendere operativo il rover lunare per 100 giorni percorrendo circa 20 km sul suolo lunare. VIPER permetterà di individuare le regioni in cui sia più probabile trovare ghiaccio sulla Luna, generando così le prime mappe delle risorse lunari. Questa operazione getta le basi per le missioni manned del programma ARTEMIS, atte a stabilire una presenza umana duratura sul suolo lunare. Il lancio del lander Griffin avverrà con il vettore Falcon Heavy di SpaceX [68,76].



Figura 2.13: Griffin Lander sviluppato per la missione VIPER, credits by Astrobotic

L'interfaccia con il payload è opportunamente progettata per accomodare il rover VIPER e sono presenti quattro landing legs capaci di assorbire l'energia derivante dall'impatto al suolo, così da stabilizzare il veicolo nella fase di touchdown. Il sistema propulsivo comprende cinque propulsori principali capaci di fornire una spinta di circa 3113 N e di dodici thrusters per il sistema di Attitude Control System (ACS) da 111 N raggruppati in clusters da tre e posizionati in modo da garantire sia il controllo dei tre gradi di libertà rotazionali che di quelli traslazionali. Il sistema di Guida, Navigazione e Controllo (GNC) è simile a quello sviluppato per il lander Peregrine, dove i comandi di manovra sono aggiornati in base alle stime dello stato del veicolo spaziale grazie all'uso di star trackers, sun sensors e inertial measurement. I solar arrays formati da celle solari a tripla giunzione GaInP/GaAs/Ge sono montati sui lati della struttura e seguiranno il Sun Vector in tutte le fasi di crociera. Per le operazioni di landing sul suolo lunare la presenza di un Doppler LIDAR permette di avere informazioni su range e velocità in modo da effettuare un atterraggio di precisione e in sicurezza. Per la missione si integrerà il pacchetto di navigazione OPAL, Optical Precision Autonomus Landing, sviluppato da Astobotic in collaborazione con la NASA, basato su una terrain relative navigation. Il sensore OPAL è formato da una camera e da un processore ad alte prestazioni, in modo da confrontare le immagini ottenute dalla fotocamera con le mappe lunari archiviate nella memoria del lander [68].

2.7.5 Human Landing System (HLS)

Nel luglio del 2019, il Marshall Spaceflight Center della NASA avviò il programma Human Landing System (HLS) in modo da sviluppare il mezzo di trasporto che avrebbe portato l'equipaggio delle missioni ARTEMIS sul suolo lunare. L'intento dell'agenzia americana era di promuovere una competizione fra le compagnie private così da selezionare i progetti più affidabili e innovativi, per poi avviare un lavoro congiunto finalizzato al raggiungimento della Luna entro il 2024. Nell'aprile del 2020 la NASA aveva selezionato i progetti di tre società: Blue Origin, Dynetics e SpaceX. L'anno successivo in seguito ad una valutazione tecnico-economica dei progetti presentati, la NASA annuncerà di aver selezionato il lander della SpaceX, soddisfacendo a pieno sia i requisiti prestazionali imposti che gli standard per il volo spaziale con equipaggio. La Starship HLS di Space X è un veicolo a due stadi composto dal Super Heavy Rocket, cioè il booster e dello Starship, cioè lo spacecraft vero e proprio. Il fairing della Starship ha un diametro di 9 m ed ha una struttura clamshell che resta chiusa finché non si sono raggiunte le condizioni di landing. Il volume disponibile per la configurazione Cargo Starship Lunare Surface, quindi, è limitata dall'involuppo della struttura clamshell, presentando un diametro massimo di 8 m ed un'altezza di 22 m. Il veicolo sviluppato da SpaceX ha la capacità di trasportare più di 100 tonnellate sia sul suolo marziano che su quello lunare [80,81,82].

2.7.6 ARTEMIS FIRST (2021-2024)

La prima fase del programma ARTEMIS prevede lo sbarco dell'uomo sulla superficie lunare entro il 2024. La complessa architettura del programma ARTEMIS prevede la pianificazione e la progettazione di strutture idonee allo svolgimento della missione: lo Space Launch System (SLS) l'Orion Crew Vehicle, il lancio dei moduli PPE e HALO del Lunar Gateway, la Starship HLS e la valutazione dei siti idonei per il landing nel Polo Sud lunare per mezzo del rover VIPER [58].

2.7.8.1 ARTEMIS I

ARTEMIS I prevede il posizionamento di Orion sprovvisto di equipaggio in un'orbita retrograda distante circa 64373 km dalla Luna, prima di ritornare sulla Terra. Questa missione permetterà di testare, mediante il suo viaggio inaugurale, le performance del SLS (Space Launch System) rocket e di raccogliere dati sul rientro della capsula Orion in atmosfera planetaria con velocità nell'ordine

di Mach 32, in modo da testare le prestazioni del heat shield, in quanto si prevede un riscaldamento della capsula fino a 3033 K prima dello splashdown nell'Oceano Pacifico [58,83].

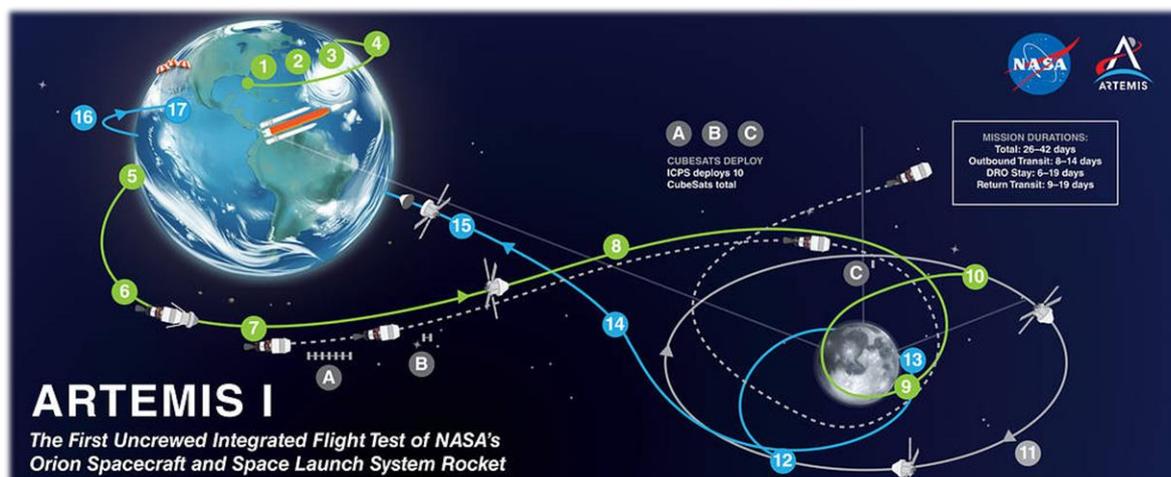


Figura 2.14: Profilo di missione di Artemis I, credits by NASA

Fase	Descrizione
1-2	Lift-off dal Kennedy Space Centre
3-4-5	Earth Phase: separazione Core Stage, Innalzamento Perigeo, Check dei Sistemi
6	Manovra di Trans-Lunar Injection (TLI)
7-8	Separazione dell'ICPS e Manovra di Outbound Trajectory Correction (OTC)
9	Outbound Powered Flyby (OPF) della Luna fino a 111 km dalla superficie
10	Inserzione nella Distant Retrograde Orbit (DRO)
12	Abbandono della DRO e Return Powered Flyby (RPF)
14	Ritorno Libero sulla Terra, presenza di Return Trajectory Correction (RTC)
15-16	Separazione del Service Module di Orion e rientro in atmosfera planetaria a Mach 32
17	Splashdown nell'Oceano Pacifico

Tabella 2.1: Descrizioni delle fasi del profilo di missione della figura 2.14

2.7.8.2 ARTEMIS II

Un equipaggio composto da quattro astronauti stabilirà il record per il viaggio manned più lontano nel Sistema Solare, compiendo una missione della durata di circa dieci giorni. La missione prevede l'utilizzo sia del SLS rocket che dell'Orion Crew Vehicle. Il lancio è previsto dal Kennedy Space Center della NASA in Florida nel 2023. La prima orbita dello spacecraft attorno alla Terra sarà ellittica avente un'altitudine di perigeo pari a 185 km e di apogeo pari a 2896 km. Essa presenta un periodo orbitale di circa 90 minuti e include anche il primo burn dell'ICPS. Successivamente, il sistema di propulsione ICPS permetterà il raggiungimento di una High Earth Orbit (HEO) ellittica

di $322 \times 109\,435 \text{ km}$ di quota dalla superficie terrestre, con periodo orbitale di *42 ore*. Nella HEO, l'Orion Crew Vehicle si separerà dal sistema ICPS ormai esaurito, effettuando una Prox Ops Demonstration: gli astronauti piloteranno l'Orion in modalità manuale, mediante l'uso di telecamere di bordo e la vista dalle finestre del veicolo spaziale, in modo da avvicinarsi o allontanarsi dallo stadio esaurito per una dimostrazione di operazioni di prossimità. I dati raccolti saranno fondamentali per facilitare le operazioni di docking della futura missione ARTEMIS III. Nella fase successiva i controllori di missione del Johnson Space Center della NASA a Houston risprenderanno il controllo della capsula Orion. L'equipaggio, invece, dovrà verificare le prestazioni del Life Support System e rimuovere la tuta Orion Crew Survival System indossata al lancio e trascorrere il resto del viaggio in borghese, a meno della fase di rientro atmosferico. Durante la HEO ci sarà anche un checking della comunicazione con il Deep Space Network (DSN), di fondamentale importanza per mantenere il contatto fra Orion e gli operatori di Terra durante la fase trans-lunare e cislunare. La spinta necessaria per immettere Orion in una Trans-Lunar Injection Maneuver (TLI) è fornita dal Service Module. La traiettoria trans-lunare genererà una tipica forma ad "otto" vista in un sistema di inerziale, portando Orion a più di $370\,150 \text{ km}$ dalla Terra e a circa $7\,400 \text{ km}$ dalla Lunar Farside . La fase rientro è una traiettoria libera, si sfruttano i campi gravitazionali del sistema binario Terra-Luna. In atmosfera planetaria, Orion raggiungerà picchi di velocità di $40\,233 \text{ km/h}$, rallenterà mediante conversione di energia cinetica in calore fino a 523 km/h e attivando il sistema di paracadute, giungerà a 32 km/h nell'istante in cui ci sarà lo splashdown nell'Oceano Pacifico [58,84].

2.7.8.3 ARTEMIS III

L'equipaggio di bordo è composto da quattro astronauti che raggiungeranno il suolo lunare entro il 2024. Il lancio del modulo HALO e del PPE del Lunar Gateway permetteranno la creazione di una primordiale stazione spaziale lunare in orbita NHRO (Near Rectilinear Halo Orbit), rappresentando un punto di sosta per la capsula Orion (*Loiter Phase*), prima che due membri dell'equipaggio siano fatti atterrare sul suolo lunare mediante la Starship HLS sviluppata da SpaceX per un soggiorno di circa sei giorni (*Crew Transfer*). Il lancio della missione ARTEMIS III avverrà per mezzo dello SLS rocket dal Kennedy Space Center in Florida. Nella prima orbita terrestre si effettueranno il check dei sistemi e la regolazione dei pannelli solari. La fase trans-lunare sarà seguita da un flyby della Luna per sfruttare l'effetto fionda gravitazionale e immettersi nell'orbita NHRO del Lunar Gateway. L'Orion Crew Vehicle effettuerà operazioni di docking con

la stazione spaziale lunare, mentre la Starship HLS si dovrà distaccare per effettuare operazioni di Crew Transfer. Durante la fase di discesa e touchdown dello Human Landing System, Orion e il Lunar Gateway rimarranno in orbita NHRO mantenendo le comunicazioni sia con la Deep Space Network che con l'equipaggio sul suolo lunare. Dopo il landing e il trasferimento dell'equipaggio, mediante la Starship, su Orion, si avvierà la fase di ritorno libero sulla Terra, che sfrutterà un flyby della Luna. Lo splashdown è previsto nell'Oceano Pacifico [58, 85, 86, 87].

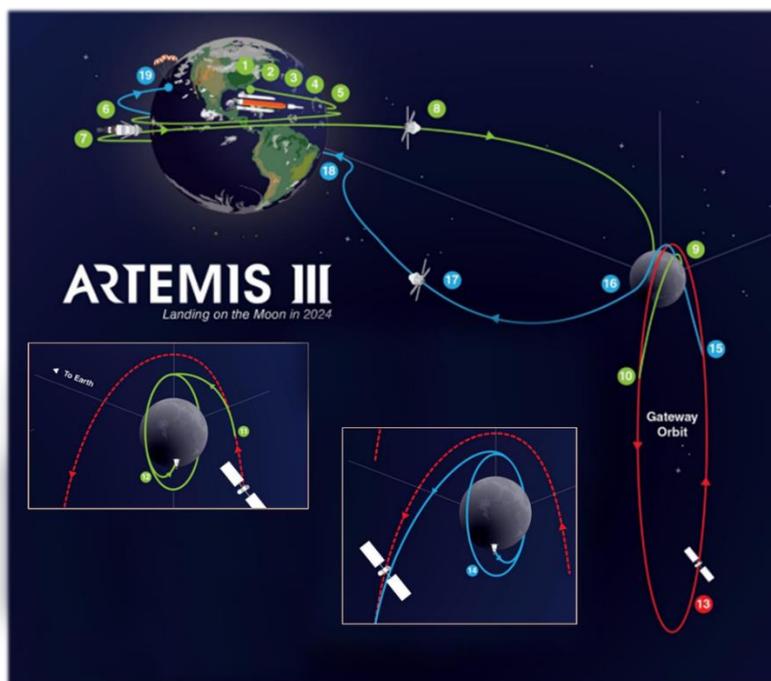


Figura 2.15: Profilo di Missione di Artemis III, credits by NASA

Fase	Descrizione
1-2-3	Lift-off dal Kennedy Space Centre
4	Separazione del Core Stage
5-6	Earth Orbit, check dei sistemi e regolazione dei pannelli solari
7-8	Manovra di Trans-Lunar Injection (TLI) e Manovre di correzioni dell'Attitude
9	Orion Outbound Powered Flyby
10	Immissione nella Gateway Orbit, Rendezvous e Docking con Lunar Gateway
11	Crew Transfert mediante la Starship HLS
12	HLS Lunar Descent Orbit e Soft-Landing
13	Lunar Gateway e Orion Crew Vehicle orbitano nella NHRO
14-15	HLS Ascent Orbit e Crew Transfer verso l'Orion Crew Vehicle
16	Orion Return Powered Flyby
17-18	Traiettoria Libera di Rientro, Interfaccia con atmosfera terrestre (EI)
19	Splashdown nell'Oceano Pacifico

Tabella 2.2: Descrizioni delle fasi del profilo di missione della figura 2.15

2.7.1 Artemis Base Camp

L'Artemis Base Camp è un progetto NASA che mira alla fondazione di un primo habitat nel Polo Sud lunare adatto ad ospitare i membri dell'equipaggio delle future missioni lunari del programma Artemis Second. Gli elementi principali della base lunare saranno il Lunar Terrain Vehicle, cioè un rover per lo spostamento degli astronauti all'interno del campo lunare, la Habitat Mobility Platform, un secondo rover capace di percorrere lunghi tratti, in modo da effettuare esplorazioni della superficie lunare in regioni distanti dall'Artemis Base Camp e la struttura abitativa che ospiterà gli astronauti. Il sistema di comunicazione, di alimentazione, di smaltimento e stoccaggio dei rifiuti, la schermatura dalle radiazioni cosmiche sono elementi testabili sulla superficie lunare e che possono essere riconfigurate per missioni umane in posti più lontani nel Sistema Solare, come le future missioni marziane. Le infrastrutture aggiuntive da progettare per l'Artemis Base Camp dovranno sostenere l'uomo per la durata di 30/60 giorni, permettendo lo sviluppo di nuove tecnologie che permetteranno di ampliare il mercato economico lunare [58].



Figura 2.16: Ricostruzione artistica dell'Artemis Base Camp, credits by NASA

Capitolo 3

Richiami di Astrodinamica, Propulsione e Dinamica Rotazionale

3.1 *Introduzione all'Astrodinamica*

Il termine cinematica indica lo studio del moto di un corpo senza considerare le cause che lo hanno generato, le quali, invece, sono oggetto di studio della dinamica. L'astrodinamica può essere considerata come una sotto-branca della dinamica, atta a studiare gli effetti sulle posizioni occupate nel tempo dallo spacecraft indotte dalle forze presenti negli ambienti spaziali. Le analisi teoriche che seguiranno prevedono l'applicazione delle leggi fondamentali della meccanica classica formulate da Galileo Galilei e da Isaac Newton, per cui vengono trascurati gli effetti relativistici. Tale ipotesi è valida, in quanto le velocità raggiunte in applicazioni di landing sul suolo lunare non superano i valori di 2 km/s risultando notevolmente inferiori alla velocità della luce nel vuoto, considerata pari a circa $3.0 \cdot 10^5 \text{ km/s}$. Nel 1687, Newton introdusse nel "The Mathematical Principles of Natural Philosophy" le tre leggi della dinamica classica: Principio di Inerzia, Seconda Legge della Dinamica e il Principio di azione e reazione. Le cosiddette Newton's Laws valgono solo per una determinata classe di sistemi di riferimento (SR), cioè rispetto a quei sistemi che risultano isolati, ovvero che non soggetti loro stessi all'azione delle forze oggetto di studio. Tali SR sono detti inerziali, per cui per il Principio di Inerzia, essi risulterebbero o in uno stato di quiete o si muoverebbero di moto rettilineo uniforme, con una certa velocità V_{SR} . Nella trattazione seguente si considererà per semplicità $V_{SR} = 0$ [40, 41, 48].

3.1.1 Seconda Legge di Newton

Per definire univocamente un sistema di riferimento bisogna determinare:

- Origine del sistema di riferimento
- Sistema di Coordinate adottato

Si ricordi la definizione di quantità di moto:

$$\overrightarrow{qdm}(t) \stackrel{\text{def}}{=} m\overrightarrow{v}(t) \quad (\text{Eq. 3. 0})$$

Inoltre, l'accelerazione lineare è definita come la derivata temporale della velocità:

$$\overline{a}(t) \stackrel{\text{def}}{=} \frac{d\overline{v}(t)}{dt} \quad (\text{Eq. 3.1})$$

In questi termini, considerando un generico SR inerziale con coordinate cartesiane (\mathcal{S}_{XYZ}), è possibile esprimere, sfruttando le proprietà di derivazione per il prodotto di funzioni, la definizione di quantità di moto (Eq. 3.0) e di accelerazione (Eq. 3.1), la Seconda Legge della Dinamica agente su un corpo puntiforme di massa costante m , soggetto ad un certo numero di forze $\sum \vec{F}$:

$$\sum \vec{F} = \frac{d}{dt} (qdm(t)) = \frac{dm}{dt} \overline{v}(t) + m \frac{d\overline{v}(t)}{dt} = m\overline{a}(t) \quad (\text{Eq. 3.2})$$

Definito il vettore posizione $\overline{r}(t)$, avente per componenti le coordinate della posizione del corpo di massa m in un certo istante temporale:

$$\overline{r}(t) = (x(t), y(t), z(t)) \quad (\text{Eq. 3.3})$$

Si introduce la definizione di velocità istantanea:

$$\overline{v}(t) \stackrel{\text{def}}{=} \frac{d\overline{r}(t)}{dt} = \mathbf{r}'(t) \quad (\text{Eq. 3.4})$$

Di conseguenza, l'accelerazione scritta in funzione del vettore posizione, sostituendo l'espressione (Eq. 3.4) nella (Eq. 3.1), risulta essere:

$$\overline{a}(t) = \mathbf{r}''(t) \quad (\text{Eq. 3.5})$$

Per cui, inserendo l'equazione (Eq. 3.5) nella (Eq. 3.2), si trova una formulazione della seconda legge di Newton del tipo [40, 41, 48]:

$$\sum \vec{F} = m\mathbf{r}''(t) \quad (\text{Eq. 3.6})$$

3.1.2 Legge di Gravitazione Universale

Newton oltre ad enunciare le leggi della dinamica, nel “The Mathematical Principles of Natural Philosophy” formulò la Legge di Gravitazione Universale, cioè che tra due corpi dotati di massa,

m_i e m_j , si esercita una forza di attrazione proporzionale al prodotto delle masse e inversamente proporzionale al quadrato della loro distanza d . In termini matematici:

$$\vec{F}_g = -\frac{Gm_i m_j}{d^2} \frac{\vec{d}}{d} \quad (\text{Eq. 3. 7})$$

Dove $G \approx 6.67 \cdot 10^{-11} m^3 s^{-2} kg^{-1}$ è detta costante di gravitazione universale e non dipende dalle caratteristiche dei corpi considerati.

Un ulteriore modo di formulare la legge di gravitazione universale prevede l'introduzione della cosiddetta accelerazione di gravità, cioè l'idea che un corpo di massa m generi nello spazio un campo di gravità, per la massa i -esima risulta:

$$\vec{g}(d) = -\frac{Gm_i}{d^2} \frac{\vec{d}}{d} \quad (\text{Eq. 3. 8})$$

Per cui, sostituendo l'espressione (Eq. 3.8) nella (Eq. 3.7) si ottiene una formulazione tipicamente usata in applicazioni spaziali, dove il corpo di massa i -esima rappresenta un pianeta, un satellite naturale o un asteroide, mentre la massa j -esima è il veicolo spaziale [40, 41, 48]:

$$\vec{F}_g = m_j \cdot \vec{g}(d) \quad (\text{Eq. 3. 9})$$

3.2 Problema degli N -Corpi

Nel seguente paragrafo si discuterà nel dettaglio il moto di un corpo soggetto all'interazione con altri $N - 1$ corpi, in pratica, si andranno a ricavare le equazioni differenziali che permettono di descrivere la traiettoria di un satellite, di una sonda o di un pianeta nel Sistema Solare. Si consideri un sistema di riferimento inerziale \mathcal{F}_I , per semplicità, cioè fermo rispetto a delle stelle fisse, ovvero dei corpi celesti talmente distanti dal Sistema Solare da poter trascurare il loro moto orbitale. Il sistema prevede la presenza di N masse considerate costanti e puntiformi ($m_1, m_2, \dots, m_i, \dots, m_N$).

Sulla generica massa i -esima agiscono le seguenti forze:

- Le forze di attrazione gravitazionali generate dall'interazione della massa i -esima con i restanti $N - 1$ corpi, cioè

$$\vec{F}_{g_j}(t) = G \frac{m_i m_j}{d_{ij}^3(t)} \vec{d}_{ij}(t) \text{ con } j = 1:N \text{ e } j \neq i \quad (\text{Eq. 3. 10})$$

- Delle forze esterne, che possono rappresentare la resistenza atmosferica, la spinta o la forza generata dalla radiazione solare $\rightarrow \vec{F}_{other}(t)$

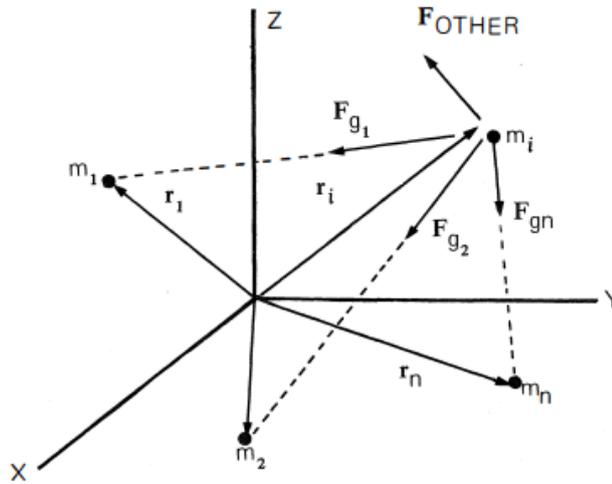


Figura 3. 1: Rappresentazione delle forze agenti sulla massa i-esima, credits by [40]

Per cui, se $\overline{r}_i(t)$ è il vettore posizione della massa i-esima nel sistema di riferimento inerziale \mathcal{F}_I , è possibile definire la distanza relativa d_{ij} tra la massa i-esima e quella j-esima in funzione come differenza dei vettori posizione:

$$\overline{d}_{ij}(t) = \overline{r}_i(t) - \overline{r}_j(t) \quad (\text{Eq. 3. 11})$$

Per cui, la somma vettoriale delle forze gravitazionali applicate alla massa i-esima risulta essere:

$$\overline{F}_g(t) = -Gm_i \sum_{j=1}^N \frac{m_j}{|\overline{r}_i(t) - \overline{r}_j(t)|^3} (\overline{r}_i(t) - \overline{r}_j(t)) \quad (\text{Eq. 3. 12})$$

Applicando la seconda legge di Newton alla massa i-esima (Eq. 3.6), si ottiene:

$$\overline{F}_g(t) + \overline{F}_{other}(t) = m_i \overline{r}_i''(t) \quad (\text{Eq. 3. 13})$$

Sostituendo l'espressione (Eq. 3.12) nell'equazione (Eq. 3.13), si trova un'equazione differenziale vettoriale del secondo ordine non lineare e non omogenea a coefficienti costanti, cioè:

$$m_i \overline{r}_i''(t) + Gm_i \sum_{j=1}^N \frac{m_j}{|\overline{r}_i(t) - \overline{r}_j(t)|^3} (\overline{r}_i(t) - \overline{r}_j(t)) - \overline{F}_{other}(t) = 0 \quad (\text{Eq. 3. 14})$$

Il seguente procedimento può essere applicato a tutte le masse i-esime che compongono il sistema di N corpi. Di conseguenza, si troverebbero N equazioni differenziali vettoriali del secondo ordine non lineari e non omogenee a coefficienti costanti. Inoltre, il sistema di equazioni differenziali

risulterebbe accoppiato a causa della variazione temporale della forza gravitazionale generata dalla modifica della posizione reciproca tra l' i -esimo e il j -esimo corpo. In altri termini, la presenza al denominatore dell'equazione (Eq. 3.14) del vettore posizione $\overrightarrow{r_j(t)}$ con $j = 1:N$, presuppone la risoluzione in contemporanea delle N equazioni differenziali.

Il sistema composto da N equazioni vettoriali può essere proiettato nelle sue componenti cartesiane, tale da generare un set di $3N$ equazioni differenziali scalari accoppiato. In genere, sia a causa della presenza del termine forzante $\overrightarrow{F_{other}(t)}$ che a causa dell'interconnessione tra le equazioni differenziali, non esistono soluzioni analitiche al problema degli N -corpi, il quale deve essere risolto con un'integrazione numerica, ad esempio con metodi di Runge-Kutta [40, 41, 48].

3.3 *Problema degli N-corpi Ristretto*

Il problema degli N corpi, descritto nel Paragrafo 3.2, è usato per descrivere il moto assoluto degli N corpi considerati in un sistema di riferimento inerziale \mathcal{F}_I . In generale, può essere utile per applicazioni spaziali, andare a studiare il moto relativo di un corpo rispetto ad un altro, come ad esempio quando si vogliono studiare le traiettorie dei diversi pianeti del Sistema Solare rispetto al Sole. Il problema prevede di considerare l'equazione differenziale (Eq. 3.14) scritta per la massa i -esima di riferimento, cioè quella rispetto alla quale si vuole rapportare il moto degli altri $N - 1$ corpi, e sottrarre a tutte le N equazioni differenziali che compongono il problema, l'equazione differenziale i -esima. Di conseguenza, il nuovo set di equazioni da risolvere sarà formato da $(N - 1)$ equazioni differenziali vettoriali, in quanto l'equazione per la massa i -esima diventerà un'identità [40, 41, 48].

3.4 *Problema dei Due Corpi Ristretto (R2BP)*

Si consideri il problema degli N -corpi ristretto esplicitato nel Paragrafo 3.3, dove, in questo caso $N = 2$. Per il cosiddetto *Restricted Two-Body Problem* (R2BP) le ipotesi semplificative prevedono di considerare le masse costanti e con simmetria sferica, tanto da considerare la massa concentrata nel centro di massa del corpo che coincide con il centro della sfera. Si considereranno due corpi aventi massa: m , cioè il corpo del quale si vuole studiare il moto ed M , cioè la massa di riferimento, rispetto alla quale si descrive la traiettoria del corpo m .

Il problema prevede la definizione di due sistemi di riferimento:

- Il sistema di riferimento inerziale rispetto a stelle fisse $\mathcal{F}'_I = (X', Y', Z')$
- Un sistema di riferimento cartesiano non rotante $\mathcal{F}_I = (X, Y, Z)$, avente origine nel centro di massa del corpo di riferimento, e con assi paralleli a quelli del sistema \mathcal{F}'_I

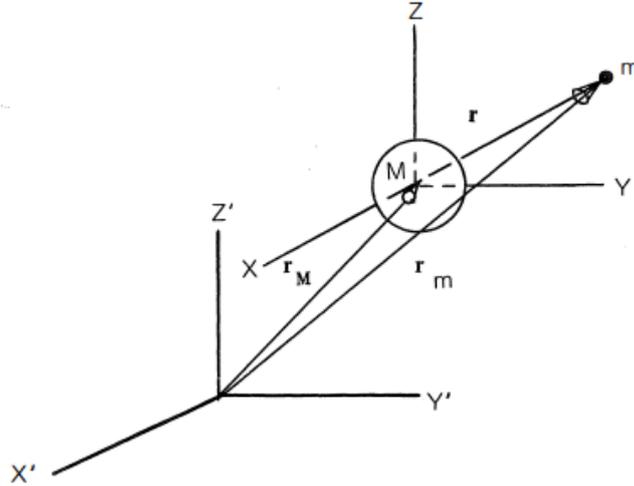


Figura 3. 2: Moto relativo del corpo di massa m rispetto a quello di massa M , credits by [40]

Si definisce:

- $\overrightarrow{r_M(t)}$ è il vettore posizione del corpo di riferimento nel sistema \mathcal{F}'_I
- $\overrightarrow{r_m(t)}$ è il vettore posizione del corpo m nel sistema \mathcal{F}'_I

Componendo vettorialmente i vettori posizione nel sistema \mathcal{F}'_I , è possibile definire il vettore posizione del corpo m , $\overrightarrow{r(t)}$ nel sistema \mathcal{F}_I , cioè:

$$\overrightarrow{r(t)} = \overrightarrow{r_m(t)} - \overrightarrow{r_M(t)} \quad (\text{Eq. 3. 15})$$

Ricordando la formulazione matematica dell'equazione differenziale (Eq. 3.14) che descrive il moto di una generica massa i -esima nel sistema \mathcal{F}'_I , si possono trovare le equazioni del moto sia del corpo di massa m che M nel sistema di riferimento \mathcal{F}'_I :

$$m \mathbf{r}_m''(\mathbf{t}) + \frac{GmM}{r(t)^3} \overrightarrow{r(t)} - \overrightarrow{F}_m = 0 \quad (\text{Eq. 3. 16})$$

$$M \mathbf{r}_M''(\mathbf{t}) - \frac{GmM}{r(t)^3} \overrightarrow{r(t)} - \overrightarrow{F}_M = 0 \quad (\text{Eq. 3. 17})$$

Dove \vec{F}_m e \vec{F}_M sono le forze esterne, non gravitazionali, applicate ai due corpi, come la Drag, il Lift, la Thrust o la forza generata dalla radiazione solare.

Si divida l'equazione (Eq. 3.16) per la massa m e l'equazione (Eq. 3.17) per la massa M , introducendo inoltre, la notazione \vec{F}_m' e \vec{F}_M' per indicare le forze esterne per unità di massa:

$$\mathbf{r}_m''(\mathbf{t}) + \frac{GM}{r(\mathbf{t})^3} \vec{r}(\mathbf{t}) - \vec{F}_m' = 0 \quad (\text{Eq. 3.18})$$

$$\mathbf{r}_M''(\mathbf{t}) - \frac{Gm}{r(\mathbf{t})^3} \vec{r}(\mathbf{t}) - \vec{F}_M' = 0 \quad (\text{Eq. 3.19})$$

Si noti come l'accelerazione del corpo di massa m nel sistema \mathcal{F}_I si possa scrivere come:

$$\mathbf{r}''(\mathbf{t}) = \mathbf{r}_m''(\mathbf{t}) - \mathbf{r}_M''(\mathbf{t}) \quad (\text{Eq. 3.20})$$

Per cui, sottraendo l'equazione (Eq. 3.19) all'espressione (Eq. 3.18) e ricordando la definizione introdotta nella (Eq. 3.20), è possibile ricavare l'equazione differenziale vettoriale che descrive il moto del corpo di massa m rispetto a quello di riferimento:

$$\mathbf{r}''(\mathbf{t}) + \frac{G(M+m)}{r(\mathbf{t})^3} \vec{r}(\mathbf{t}) + \vec{F}_M' - \vec{F}_m' = 0 \quad (\text{Eq. 3.21})$$

In questo modo si è trovata l'equazione differenziale vettoriale del secondo ordine non lineare non omogenea a coefficienti costanti, la cui soluzione descrive la traiettoria del corpo m in \mathcal{F}_I .

3.4.1 Casi Particolari: Landing

Per applicazioni spaziali, come nel caso di traiettorie di discesa di un lander sul suolo lunare, è utile introdurre alcune ipotesi semplificative nella (Eq. 3.21), di modo da modellizzare un problema che riduca al minimo le complicazioni teoriche e ottenga dei risultati aderenti alla realtà.

Si introduce così il concetto di corpo principale (M) e corpo secondario (m), cioè si ipotizza che $M \gg m$, come nel caso di landing, in cui $M_{moon} \gg m_{lander}$, per cui è possibile approssimare $G(M+m) \approx GM$. Inoltre, è possibile trascurare l'effetto delle forze agenti sul corpo principale, per cui il termine $\vec{F}_M' = 0$. Di conseguenza, introducendo tali ipotesi semplificative nell'equazione (Eq. 3.21) si ottiene:

$$\mathbf{r}''(t) + \frac{GM}{r(t)^3} \overrightarrow{r(t)} = \overrightarrow{F_m'} \quad (\text{Eq. 3. 22})$$

Introducendo il concetto di campo, è possibile definire l'accelerazione di gravità generata dal corpo di massa M , sfruttando l'equazione (Eq. 3.8):

$$\overrightarrow{g(r)} = -\frac{GM}{r(t)^2} \frac{\overrightarrow{r(t)}}{r(t)} \quad (\text{Eq. 3. 23})$$

Nel caso di landing, si considererebbero massa e raggio equatoriali della Luna [42]:

$$M_{moon} = 7.3460 \cdot 10^{22} kg \quad e \quad R_{moon} = 1738.1 km \quad (\text{Eq. 3. 24})$$

Inoltre, le traiettorie di discesa per atterraggi lunari hanno quote di partenza nell'ordine $h \approx 15 km$, come nel caso delle missioni Apollo [44] o della missione Chang'e-4 [43], per cui, valutando l'accelerazione di gravità sia sul suolo lunare (Eq. 3.25) che alla quota massima considerata per le traiettorie di discesa (Eq. 3.26), inserendo i dati (Eq. 3.24) nel modulo del vettore descritto dall'espressione (Eq. 3.23), si ottiene:

$$g(r = R_{moon}) = \frac{GM_{moon}}{R_{moon}^2} \approx 1.6219 \frac{m}{s^2} \quad (\text{Eq. 3. 25})$$

$$g(r = R_{moon} + h) = \frac{GM_{moon}}{(R_{moon} + h)^2} \approx 1.5942 \frac{m}{s^2} \quad (\text{Eq. 3. 26})$$

Calcolando l'errore percentuale relativo commesso tra (Eq. 3.25) e (Eq. 3.26), esso risulterebbe:

$$\varepsilon [\%] = \frac{g(R_{moon}) - g(R_{moon} + h)}{g(R_{moon})} \approx 1.71\% \quad (\text{Eq. 3. 27})$$

Di conseguenza, è possibile ipotizzare un'accelerazione di gravità di modulo costante e pari al suo valore calcolato sulla superficie lunare, compiendo un errore relativo inferiore al 2 %.

Si definisce così un vettore accelerazione di gravità, avente modulo costante, ma direzione variabile nel tempo:

$$\overrightarrow{g(r = r^*)} = \overrightarrow{g(t)} = -\frac{GM}{r^*} \frac{\overrightarrow{r(t)}}{r(t)} \quad (\text{Eq. 3. 28})$$

In particolare, nel caso in cui, si trascurasse la curvatura del corpo principale, come nel caso di lander lunare dove per quote nell'ordine di $h \approx 15 km$ la superficie della Luna apparirebbe piatta,

si potrebbe definire un versore indipendente dalla posizione assunta nel tempo dal corpo secondario \vec{u} , tale da risultare ortogonale alla superficie piana del corpo principale e che sia diretto coerentemente con $\vec{r}(t)$, cioè dal centro di massa del corpo principale a quello del corpo secondario.

L'espressione (Eq. 3.28) diventerebbe:

$$\vec{g} = -\frac{GM}{r^*} \vec{u} \quad (\text{Eq. 3. 29})$$

In questi termini, inserendo l'espressione (Eq. 3.28) nell'equazione (Eq. 3.22) si otterrebbe:

$$\mathbf{r}''(t) = \overline{F_m'} + \vec{g} \quad (\text{Eq. 3. 30})$$

Ricordando la definizione di velocità istantanea (Eq. 3.4), l'equazione (Eq. 3.30) può essere scritta anche nella forma [40, 41, 45, 48]:

$$\frac{d\overline{v}(t)}{dt} = \overline{F_m'} + \vec{g} \quad (\text{Eq. 3. 31})$$

3.4.2 Casi Particolari: Orbite Kepleriane

Un altro caso particolare per applicazioni spaziali è ottenuto considerando il solo effetto delle forze gravitazionali, cioè $\overline{F_M'} = \overline{F_m'} = 0$. Questa approssimazione permetterà di integrare analiticamente le equazioni del moto, ottenendo le cosiddette orbite kepleriane. Anche in questo caso si introduce l'ipotesi semplificativa che il corpo di riferimento abbia una massa molto più grande rispetto al corpo di massa m , cioè che:

$$M \gg m \rightarrow G(M + m) \approx GM \quad (\text{Eq. 3. 32})$$

In questo tipo di trattazione è utile definire il parametro gravitazionale μ :

$$\mu \stackrel{\text{def}}{=} GM \quad (\text{Eq. 3. 33})$$

Introducendo le semplificazioni dell'espressione (Eq. 3.32) e la definizione della (Eq. 3.33) nell'equazione differenziale del problema dei due corpi ristretto si ottiene:

$$\mathbf{r}''(t) + \frac{\mu}{r(t)^3} \overline{r}(t) = 0 \quad (\text{Eq. 3. 34})$$

In particolare, si può dimostrare che in orbite kepleriane il momento angolare specifico \vec{h} si conserva come vettore, quindi sia in modulo che in direzione e verso. Essendo definito come il

prodotto vettoriale tra il vettore posizione e la velocità istantanea, il momento angolare sarà ortogonale al piano individuato da tali vettori, in altri termini, le orbite kepleriane risultano evolversi esclusivamente in un piano. Si consideri come livello zero per l'energia potenziale l'infinito, in pratica, a grandi distanze dal corpo principale non si risente più degli effetti del campo gravitazionale. Per cui, è possibile dimostrare l'esistenza di un ulteriore costante del moto, l'energia meccanica specifica \mathcal{E} , che risulta essere pari alla somma di un'energia cinetica specifica \mathcal{K} e di un'energia potenziale specifica causata dalla gravità \mathcal{U} :

$$\mathcal{E} = \mathcal{K} + \mathcal{U} = \frac{V(t)^2}{2} - \frac{\mu}{r(t)} = \text{costante} \quad (\text{Eq. 3. 35})$$

Dall'integrazione dell'equazione (Eq. 3.34) si trova l'espressione della traiettoria del corpo secondario rispetto a quello principale, che risulta essere una conica descritta in coordinate polari con l'origine in un fuoco. Si può descrivere l'energia meccanica specifica \mathcal{E} è una costante del moto (Eq. 3.35), in funzione del semiasse maggiore dell'orbita a e del parametro gravitazionale μ :

$$\mathcal{E} = -\frac{\mu}{2a} \quad (\text{Eq. 3. 36})$$

3.5 Propulsione Spaziale

La propulsione è definita come la capacità di generare una forza detta spinta che permetta di cambiare la quantità di moto del veicolo. La generazione della spinta sfrutta il Principio di Azione e Reazione esposto nel Paragrafo 3.1, per cui, in ambito aerospaziale, una certa portata di aria è prelevata dall'atmosfera ed è accelerata in modo da generare la forza richiesta. In applicazioni spaziali, la presenza del vuoto impone di avere a bordo dello spacecraft il propellente da accelerare, per cui, i processi di ottimizzazione mirano ad una riduzione del propellente utilizzato durante le varie fasi della traiettoria, in modo da evitare un aumento del peso del veicolo, che inciderebbe in modo predominante sul budget plan della missione, limitando il payload disponibile. La differenza tra il termine "combustibile" e "propellente" consiste proprio nell'utilizzo effettuato: il primo è usato in camera di combustione, mentre il secondo è usato per generare la spinta. In ambito spaziale, si classifica la propulsione in due categorie:

- *Propulsione Primaria* che è usata per Manovre di Trasferimento Orbitale.
- *Propulsione Ausiliaria* che è usata per Manovre di Station Keeping [40, 45, 46, 47, 48].

3.5.1.1 Spinta e Variazione di Massa dello Spacecraft

Si ipotizzi di essere in un sistema isolato, cioè si considera che nessuna forza esterna possa agire sul sistema formato dallo spacecraft e dal propellente integrato. Inoltre, per semplicità si considerano tutte le velocità agenti su un'unica retta di azione: si tratterà il problema nella forma unidimensionale, di modo da ricavare un'unica equazione scalare, anziché di un'equazione vettoriale da proiettare nel sistema di riferimento cartesiano. Si definiscono:

- dm_p : massa di propellente consumata
- V : velocità istantanea dello spacecraft
- c : la velocità relativa al sistema, con cui è espulso il propellente

Il sistema di riferimento x è inerziale e non solidale al sistema di corpi considerato, per cui è possibile applicare il Secondo Principio della Dinamica espresso nel Paragrafo 3.1. Essendo il sistema isolato, $\overrightarrow{F_{ext}} = 0$, per cui la variazione della quantità di moto nel tempo è nulla, cioè la quantità di moto del sistema nell'istante t è uguale a quella nell'istante $t + dt$. Si trova allora:

$$mV = (m - dm_p)(V + dV) - dm_p(c - V) \quad (Eq. 3. 37)$$

Svolgendo le operazioni di prodotto e trascurando gli infinitesimi di ordine superiore, l'equazione (Eq. 3.37) si riduce in:

$$m dV = dm_p c \quad (Eq. 3. 38)$$

L'espressione (Eq. 3.38) lega l'incremento di velocità sullo spacecraft per effetto di accelerazione di una massa infinitesima di propellente. Questa formulazione discreta può essere estesa per un'espulsione continua, introducendo il concetto di portata di propellente:

$$\dot{m}_p(t) = \frac{dm_p}{dt} \quad (Eq. 3. 39)$$

La formulazione continua, si ottiene dividendo per dt l'equazione (Eq. 3.39):

$$m \frac{dV}{dt} = \dot{m}_p c = T \quad (Eq. 3. 40)$$

Si definisce Stream Force calcolata nell' i -esima stazione di un propulsore:

$$SF_i = \dot{m}_p u_i + A_i(P_i - P_0) \quad (Eq. 3. 41)$$

Dove u_i indica la velocità dell' i -esima sezione, A_i è l'area trasversale della sezione, P_i è la pressione assoluta dell' i -esima stazione, P_0 è la pressione dell'ambiente considerato.

In applicazioni spaziali, il vuoto determina una $P_0 \approx 0 \text{ Pa}$.

Si definisce la Spinta come la Stream Force nella sezione di uscita dell'ugello (e) :

$$T = (SF)_e = \dot{m}_p u_e + A_e(P_e) \quad (\text{Eq. 3. 42})$$

In genere in ambito spaziale, il termine $\dot{m}_p u_e \gg A_e P_e$, per cui introducendo la semplificazione nell'espressione (Eq. 3.42), si trova:

$$T = \dot{m}_p u_e \quad (\text{Eq. 3. 43})$$

Confrontando il secondo termine dell'equazione (Eq. 3.40) con la relazione (Eq. 3.43) si osserva:

$$c = u_e = \text{velocità efficace di scarico} = T/\dot{m}_p \quad (\text{Eq. 3. 44})$$

La formulazione dell'espressione (Eq. 3.44) è analoga alla seconda legge di Newton (Eq. 3.6) trovata nel Paragrafo 3.1.1, dove la forza genera una variazione della velocità e quindi produce un'accelerazione. Tuttavia, la differenza consiste nelle ipotesi imposte: il Secondo Principio della Dinamica formulato nella (Eq. 3.6) è valido per sistema a massa costante, mentre, in questo caso il sistema è massa variabile. Di conseguenza, per le equazioni del moto di veicoli spaziali è possibile usare una formulazione a massa costante, aggiungendo un'equazione che descriva in funzione della spinta, la variazione di massa dello spacecraft indotta dal consumo di propellente.

Nel sistema considerato, il veicolo subisce una variazione di massa:

$$\frac{dm}{dt} = -\dot{m}_p \quad (\text{Eq. 3. 45})$$

Sostituendo la portata di propellente in funzione della spinta e della velocità efficace di scarico:

$$\frac{dm}{dt} = -\frac{T}{c} \quad (\text{Eq. 3. 46})$$

Nella modellizzazione del problema di landing lunare, si farà riferimento alle equazioni del moto del problema dei due corpi ristretto, presentato nel Paragrafo 3.4, aggiungendo l'equazione (Eq. 3.46) per tenere conto della variazione di massa del lander [40, 45, 46, 47, 48].

3.5.1.2 Equazione di Tsiolkowski

L'equazione (Eq. 3.40) ricavata nel Paragrafo 3.5.1.1, mette in relazione la spinta con la velocità del veicolo spaziale considerato. Dividendo suddetta equazione per la massa m e integrando in un generico intervallo di tempo, si otterrebbe:

$$V(t_f) - V(t_0) = \Delta V = \int_{t_0}^{t_f} \frac{T}{m} dt \quad (\text{Eq. 3. 47})$$

Sostituendo nella (Eq. 3.47) la spinta in funzione della velocità di scarico e della portata di propellente (Eq. 3.46), considerando la (Eq. 3.45) e risolvendo l'integrale, si ottiene:

$$\Delta V = c \ln \left(\frac{m_0}{m_f} \right) \quad (\text{Eq. 3. 48})$$

Elevando alla costante di Eulero i termini dell'equazione (Eq. 3.48) è possibile ricavare il rapporto tra massa iniziale e massa finale, trovando la cosiddetta Equazione di Tsiolkowsky:

$$\frac{m_f}{m_0} = e^{-\frac{\Delta V}{c}} \quad (\text{Eq. 3. 49})$$

La massa finale è la differenza tra la massa iniziale e la massa di propellente consumato:

$$m_f = m_0 - m_p \quad (\text{Eq. 3. 50})$$

Per cui, ricavando m_p dall'espressione (Eq. 3.50) e sostituendo la relazione della (Eq. 3.49):

$$m_p = m_0 \left(1 - e^{-\frac{\Delta V}{c}} \right) \quad (\text{Eq. 3. 51})$$

Per cui all'aumentare del ΔV richiesto, aumenterà anche la massa di propellente richiesta a parità di massa iniziale, causando una diminuzione della massa finale. Nelle fasi preliminari di progettazione di una missione spaziale (O/A phase), è consuetudine stilare il cosiddetto Delta-V Budget, nel quale, vengono riportati in termini di ΔV il costo delle trasferte orbitali, delle manovre di Station Keeping, l'eventuale costo dovuto all'attivazione dei thrusters per il controllo di assetto o per de-saturare le reaction wheels [40, 45, 46, 47, 48].

3.5.1.3 Manovre Impulsive

L'ipotesi di manovre impulsive può essere considerata valida nel caso di trasferte interplanetarie, dove il tempo della missione risulta essere molto più grande del tempo di manovra. Tale modello

approssima bene il comportamento di propulsore chimico, ma risulta inadatto nel caso di propulsione elettrica: i bassi livelli di spinta sono in conflitto con l'ipotesi di spinta potenzialmente infinita introdotta per le manovre impulsive. Tuttavia, questo tipo di trattazione permette di valutare in modo analitico e immediato il ΔV di una trasferta orbitale, per cui, può essere usato anche nel caso di propulsori elettrici, in modo da ottenere, in prima approssimazione, una stima da inserire nel Delta-V Budget della missione. Inoltre, la seguente trattazione permette di individuare il minimo consumo teorico in termini di ΔV . Una caratteristica delle manovre impulsive consiste nel fatto che, sviluppandosi in un tempo infinitesimo, il punto in cui si va a manovrare è comune sia all'orbita di partenza che all'orbita target, cioè si manovra a raggio costante. In generale, il ΔV di una manovra impulsiva è usato per variare l'energia meccanica specifica dell'orbita oppure per cambiare la direzione della velocità orbitale.

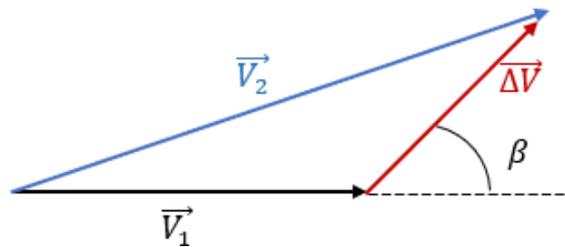


Figura 3. 3: Triangolo di Velocità generato da un $\overline{\Delta V}$ generico

Considerando la situazione della *figura 3.3* il ΔV_{min} tale da generare un $\Delta \mathcal{E}_{max}$ si ottiene per:

- V_1^{max} → cioè la velocità orbitale è quella del periastro dell'orbita kepleriana
- $\beta = 0, \pi$ → il $\overline{\Delta V}$ deve essere parallelo alla velocità orbitale di partenza, cioè alla \overline{V}_1

Riassumendo, per limitare le perdite per gravità bisogna spingere a quote basse, per cui al periastro dell'orbita, mentre $\overline{\Delta V} \parallel \overline{V}_1$ permette di ridurre le perdite per disallineamento della spinta [40, 45, 46, 47, 48].

3.5.1.4 Trasferta di Hohmann

Il trasferimento tra due orbite circolari e complanari è un tipo di manovra molto comune, in quanto permette una variazione di altitudine del satellite in orbita: si può usare per passare dalla parking orbit verso l'orbita target oppure per effettuare una Descent Orbit Insertion (DOI) in modo da immettersi in un'orbita più bassa. Il costo minimo in termini di ΔV in questa classe di problemi è ottenuto dalla Trasferta di Hohmann: l'orbita di trasferimento è ellittica e risulta tangente sia all'orbita di partenza che all'orbita di arrivo.

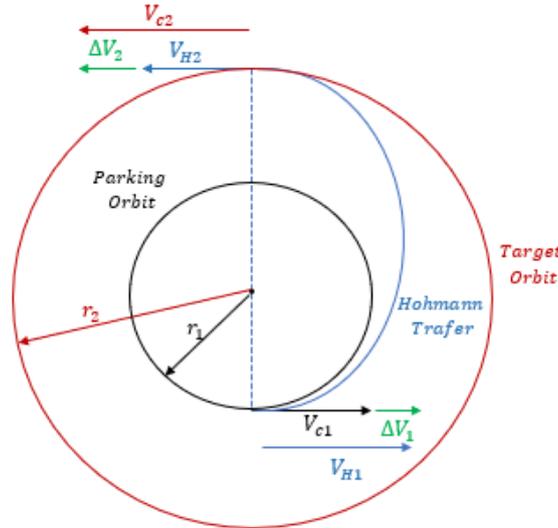


Figura 3. 4: Rappresentazione schematica della Trasferta di Hohmann

Si ricorda che in un'orbita circolare il semiasse maggiore è pari al raggio costante della traiettoria, cioè $a = r$, sostituendo nell'espressione dell'energia meccanica specifica (Eq. 3.36) si ottiene:

$$\mathcal{E} = \frac{V_c^2}{2} - \frac{\mu}{r} = -\frac{\mu}{2r} \quad (\text{Eq. 3.52})$$

Di conseguenza, è possibile ricavare la velocità dell'orbita circolare dalla (Eq. 3.52) come:

$$V_c = \sqrt{2 \left(-\frac{\mu}{2r} + \frac{\mu}{r} \right)} = \sqrt{\frac{\mu}{r}} \quad (\text{Eq. 3.53})$$

Definendo r_1 pari al raggio della parking orbit e r_2 pari al raggio della target orbit, la semi-ellisse di trasferimento ha semiasse maggiore pari a:

$$a_H = \frac{r_1 + r_2}{2} \quad (\text{Eq. 3.54})$$

Nel punto iniziale di manovra, comune sia alla parking orbit che alla transfer orbit, si sta manovrando a raggio costante, cioè $r = r_1$, L'energia meccanica specifica della semi-ellisse di Hohmann è nota, essendo specificate le dimensioni dell'orbita, per cui, sostituendo l'espressione (Eq. 3.54) nella (Eq. 3.36), si ottiene:

$$\mathcal{E}_t = \frac{V_{H1}^2}{2} - \frac{\mu}{r_1} = -\frac{\mu}{r_1 + r_2} \quad (\text{Eq. 3.55})$$

Dall'equazione (Eq. 3.55) si può ricavare la velocità di Hohmann nel punto iniziale:

$$V_{H1} = \frac{\mu}{r_1} \left(\frac{2r_2}{r_1 + r_2} \right) = V_{c1}^2 \left(\frac{2r_2}{r_1 + r_2} \right) \quad (\text{Eq. 3. 56})$$

In modo analogo è possibile ricavare la V_{H2} , ricordando che nel punto finale della traiettoria di trasferimento $r = r_2$, per cui:

$$V_{H2} = \frac{\mu}{r_2} \left(\frac{2r_1}{r_1 + r_2} \right) = V_{c2}^2 \left(\frac{2r_1}{r_1 + r_2} \right) \quad (\text{Eq. 3. 57})$$

$$\begin{cases} \text{Se } r_2 > r_1 \rightarrow \Delta V \text{ per accelerare cioè concorde con la velocità orbitale} \\ \text{Se } r_2 < r_1 \rightarrow \Delta V \text{ per frenare cioè discorde con la velocità orbitale} \end{cases}$$

I costi di ogni impulso fornito possono essere così descritti:

$$\Delta V_1 = |V_{H1} - V_{c1}| = V_{c1} \sqrt{\left| \frac{2r_2}{r_1 + r_2} - 1 \right|} \quad (\text{Eq. 3. 58})$$

$$\Delta V_2 = |V_{c2} - V_{H2}| = V_{c2} \sqrt{\left| 1 - \frac{2r_2}{r_1 + r_2} \right|} \quad (\text{Eq. 3. 59})$$

Il costo della manovra di Hohmann è pari alla somma dei due ΔV usati: per immettersi nell'orbita di trasferimento e per circolarizzare l'orbita nel punto finale, per cui [40, 45, 46, 47, 48]:

$$\Delta V_{Hohmann} = \Delta V_1 + \Delta V_2 \quad (\text{Eq. 3. 60})$$

3.6 Dinamica di Assetto

Lo scopo della dinamica rotazionale è descrivere i cambiamenti in termini di assetto di un veicolo nello spazio. In applicazioni spaziali, come nel caso di landing lunare, la direzione di spinta del propulsore principale è fissa rispetto allo spacecraft, per cui, le variazioni della direzione della spinta sono generate da una variazione di assetto del veicolo spaziale. In questo modo, la dinamica rotazionale risulta accoppiata con la dinamica traslazionale, tanto da dover risolvere le equazioni del moto in contemporanea alle equazioni che definiscono l'assetto. Per fare ciò, si deve individuare un sistema di riferimento fisso sullo spacecraft rispetto al quale valutare le rotazioni del lander lunare. Generalmente, l'assetto di veicoli spaziali è trattato mediante i *quaternioni*, che permettono di descrivere la dinamica rotazionale mediante quattro parametri, anziché dei tre classici angoli di Eulero $(\varphi, \vartheta, \psi)$ usati nella meccanica del volo atmosferico, in quanto

permetterebbero di evitare di incorrere in singolarità, come il fenomeno del *gimbal lock*. Nel seguente lavoro di tesi, a causa della semplicità del problema trattato, si preferirà implementare la dinamica di assetto mediante gli angoli di Eulero. Di fatti, si considererà una versione ridotta del problema di assetto, ovvero si valuteranno le rotazioni del lander lunare solamente attorno ad un asse, parallelo alla direzione di spinta [46, 47, 49].

3.6.1 Equazione Cinematica: Rotazioni di Tait-Bryan

Gli angoli di Eulero $(\varphi, \vartheta, \psi)$ servono per definire come è orientato un sistema di riferimento rispetto ad un altro. Si definisce un sistema di riferimento body $\mathcal{F}_b = (X_b, Y_b, Z_b)$, fisso con il veicolo considerato e un sistema di riferimento inerziale $\mathcal{F}_I = (X_I, Y_I, Z_I)$ rispetto al quale valutare le rotazioni del sistema di riferimento \mathcal{F}_b . La nomenclatura utilizzata sarà:

- φ : roll angle, cioè la rotazione del sistema \mathcal{F}_b attorno all'asse X_I
- ϑ : pitch angle, cioè la rotazione del sistema \mathcal{F}_b rotazione attorno all'asse Y_I
- ψ : yaw angle, cioè la rotazione del sistema \mathcal{F}_b rotazione attorno all'asse Z_I
- $\vec{\omega}_1 = (\dot{\varphi}_1, \dot{\vartheta}_1, \dot{\psi}_1)$: le velocità angolare nel sistema \mathcal{F}_I
- $(\hat{i}, \hat{j}, \hat{k})$: i versori del sistema inerziale \mathcal{F}_I
- $(\hat{l}, \hat{m}, \hat{n})$: i versori del sistema inerziale \mathcal{F}_b

Per trovare l'equazione cinematica che metta in relazione gli angoli di Eulero con le velocità angolari, si considera che il sistema di riferimento inerziale \mathcal{F}_I sia univocamente definito. Inoltre, si ipotizza che \mathcal{F}_I abbia l'origine coincidente con il sistema di riferimento body \mathcal{F}_b .

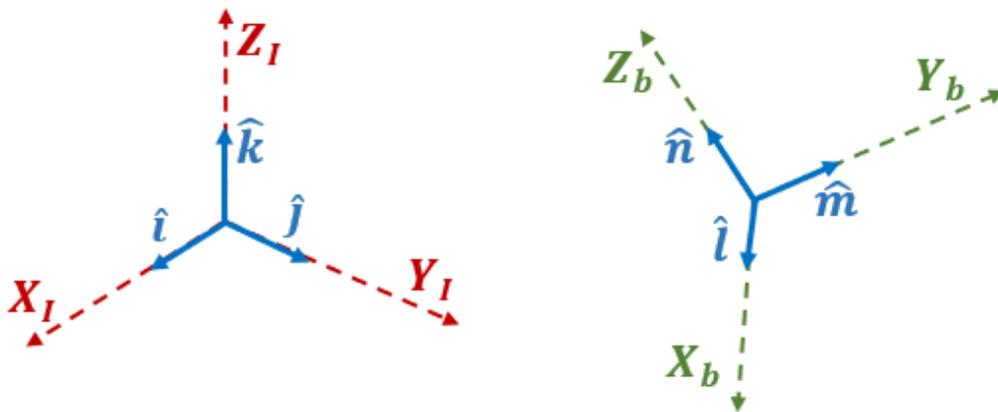


Figura 3. 5: Sistema di riferimento inerziale \mathcal{F}_I e sistema di riferimento body \mathcal{F}_b

Si effettuano una serie di rotazioni del sistema al sistema di riferimento body \mathcal{F}_b in modo che esso risulti allineato con il sistema di riferimento inerziale \mathcal{F}_I . Le Rotazioni 3-2-1 prevedono:

- Rotazione dello yaw angle ψ attorno all'asse Z_b

Il sistema di riferimento ruotato sarà $\mathcal{F}'_b = (X'_b, Y'_b, Z'_b)$ con $Z'_b \equiv Z_b$

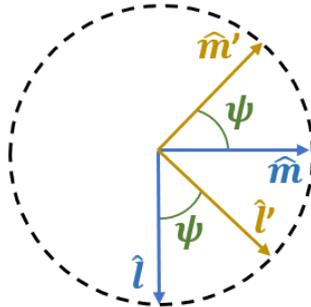


Figura 3. 6: Visualizzazione nel piano (X_b, Y_b) della rotazione di \mathcal{F}_b di ψ

- Rotazione del pitch angle ϑ attorno all'asse Y'_b

Il sistema di riferimento ruotato sarà $\mathcal{F}''_b = (X''_b, Y''_b, Z''_b)$ con $Y''_b \equiv Y'_b$

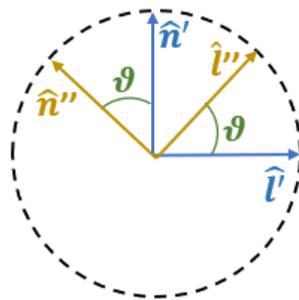


Figura 3. 7: Visualizzazione nel piano (X'_b, Z'_b) della rotazione di \mathcal{F}'_b di ϑ

- Rotazione del pitch angle φ attorno all'asse X_b''

Il sistema di riferimento ruotato sarà $\mathcal{F}'''_b = (X'''_b, Y'''_b, Z'''_b)$ con $X'''_b \equiv X_b''$ e coinciderà con il sistema di riferimento $\mathcal{F}_I = (X_I, Y_I, Z_I)$

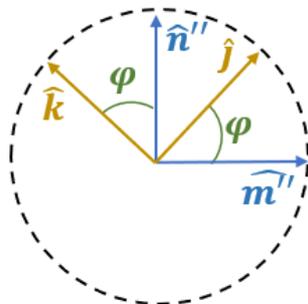


Figura 3. 8: Visualizzazione nel piano (Y_I, Z_I) della rotazione di \mathcal{F}''_b di φ

Per ogni rotazione è possibile definire una matrice dei coseni direttori, dove gli elementi sono il prodotto scalare fra i versori del sistema di riferimento da ruotare e quello intermedio ruotato. Per esempio, per la prima rotazione si otterrebbe:

$$[\Psi] = \begin{bmatrix} \cos(\psi) & -\sin(\psi) & 0 \\ \sin(\psi) & \cos(\psi) & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad (\text{Eq. 3. 61})$$

In modo analogo si è valutata la matrice dei coseni direttori per la seconda rotazione $[\vartheta]$ e per la terza $[\Phi]$. Per valutare la velocità angolare descritta nel sistema di riferimento inerziale, cioè la variabile $\vec{\omega}_1 = (\dot{\varphi}_1, \dot{\vartheta}_1, \dot{\psi}_1)$, si considera che:

- $\dot{\psi}$ è la velocità angolare di \mathcal{F}'_b riferita a \mathcal{F}_b
- $\dot{\vartheta}$ è la velocità angolare di \mathcal{F}''_b riferita a \mathcal{F}'_b
- $\dot{\varphi}$ è la velocità angolare di \mathcal{F}_I riferita a \mathcal{F}''_b

Dal teorema della composizione della velocità angolari, risulta che la velocità angolare è somma delle tre velocità angolari precedentemente definite nel loro sistema di riferimento:

$$\vec{\omega}_r = \dot{\psi} \hat{n} + \dot{\vartheta} \hat{m}' + \dot{\varphi} \hat{i} \quad (\text{Eq. 3. 62})$$

Per ottenere una descrizione di $\vec{\omega}_r$ esclusivamente nel sistema di riferimento inerziale, si usano le matrici dei coseni direttori, tenendo conto della rotazione di Tait-Bryan (3-2-1), di modo che:

$$\dot{\psi}_1 \hat{k} = [\Phi]^{-1}[\vartheta]^{-1} \dot{\psi} \hat{n} \quad (\text{Eq. 3. 63})$$

$$\dot{\vartheta}_1 \hat{j} = [\Phi]^{-1} \dot{\vartheta} \hat{m}' \quad (\text{Eq. 3. 64})$$

Sostituendo le matrici inverse dei coseni direttori nelle relazioni (Eq. 3.63) e (Eq. 3.64) è possibile ricavare:

$$\vec{\omega}_1 = \begin{bmatrix} \omega_{x1} \\ \omega_{y1} \\ \omega_{z1} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & -\sin(\vartheta) \\ 0 & \cos(\varphi) & \sin(\varphi) \cos(\vartheta) \\ 0 & -\sin(\varphi) & \cos(\varphi) \cos(\vartheta) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \dot{\varphi}_1 \\ \dot{\vartheta}_1 \\ \dot{\psi}_1 \end{bmatrix} \quad (\text{Eq. 3. 65})$$

Invertendo l'equazione (Eq. 3.65) si ottiene il sistema di equazioni differenziali di Eulero:

$$\begin{bmatrix} \dot{\varphi}_1 \\ \dot{\vartheta}_1 \\ \dot{\psi}_1 \end{bmatrix} = \frac{1}{\cos(\vartheta)} \begin{bmatrix} \cos(\vartheta) & \sin(\varphi) \sin(\vartheta) & \cos(\varphi) \sin(\vartheta) \\ 0 & \cos(\varphi) \cos(\vartheta) & -\sin(\varphi) \cos(\vartheta) \\ 0 & \sin(\varphi) & \cos(\varphi) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \omega_{x1} \\ \omega_{y1} \\ \omega_{z1} \end{bmatrix} \quad (Eq. 3.66)$$

La singolarità, accennata nel Paragrafo 3.6, si presenta quando $\cos(\vartheta) = 0 \rightarrow \vartheta = \pi/2$ [46, 47, 49].

3.6.1.1 Caso Particolare: Simmetria Cilindrica e Yaw Angle Nullo

Si consideri un corpo a simmetria cilindrica con asse di simmetria coincidente con l'asse X_I , di conseguenza, perde di significato la rotazione attorno a tale asse. Si introduca un'ulteriore ipotesi, cioè che si possa trascurare, in prima approssimazione, gli effetti dello yaw angle. Allora, sostituendo sia $\varphi = 0$ che $\psi = 0$ nel sistema di equazioni differenziali (Eq. 3.66), si trova un'unica equazione differenziale che descrive la dinamica di assetto [35, 46, 47, 49]:

$$\dot{\vartheta}_1 = \omega_{y1} \quad (Eq. 3.67)$$

3.7 Dinamica Rotazionale

Per descrivere la dinamica rotazionale di un corpo rigido, si considerino due sistemi di riferimento:

- $\mathcal{F}_{In} = (X_{In}, Y_{In}, Z_{In})$ è un generico sistema di riferimento inerziale esterno al corpo considerato
- $\mathcal{F}_{CM} = (X_{CM}, Y_{CM}, Z_{CM})$ è un sistema di riferimento body rotante con velocità $\vec{\omega}$ centrato nel centro di massa del corpo rigido

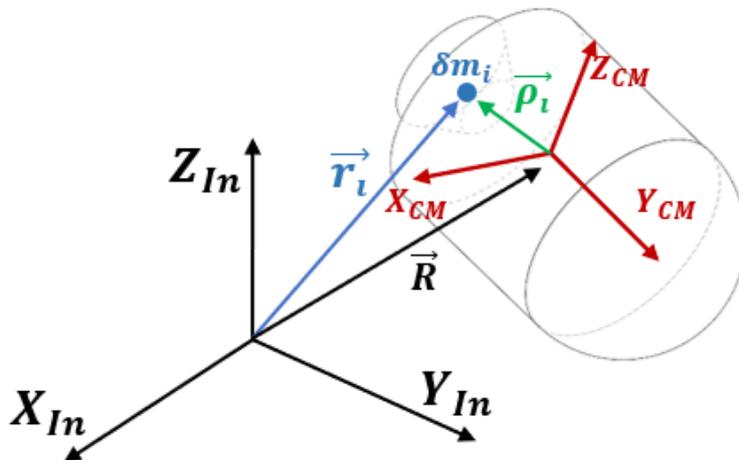


Figura 3.9: Dinamica rotazionale di uno spacecraft

Il corpo rigido è visto come discretizzato in una serie N di masse infinitesime δm_i con $i = 1: N$

Si definiscono:

- \vec{r}_i è il vettore posizione della massa i -esima nel sistema \mathcal{F}_{In}
- $\vec{\rho}_i$ è il vettore posizione della massa i -esima nel sistema \mathcal{F}_{CM}
- \vec{R} è il vettore posizione del centro di massa del corpo rigido nel sistema \mathcal{F}_{In}

La relazione seguente permette di mettere in relazione i vettori posizione descritti nei due sistemi di riferimento \mathcal{F}_I e \mathcal{F}_{CM} , cioè:

$$\vec{r}_i = \vec{R} + \vec{\rho}_i \quad (Eq. 3. 68)$$

Si definisce momento angolare di tutte le masse i -esime:

$$\vec{H}_{tot} \stackrel{\text{def}}{=} \sum_{i=1}^N \vec{r}_i \wedge m_i \dot{\vec{r}}_i \quad (Eq. 3. 69)$$

Sostituendo la relazione (Eq. 3.68) nella (Eq. 3.69) si trova che:

$$\vec{H}_{tot} \stackrel{\text{def}}{=} \left(\sum_{i=1}^N m_i \right) \vec{R} \wedge \dot{\vec{R}} + \sum_{i=1}^N m_i \vec{\rho}_i \wedge \dot{\vec{\rho}}_i \quad (Eq. 3. 70)$$

Per cui, il momento angolare totale è decomposto in due termini:

- $\vec{H}_{CM} = (\sum_{i=1}^N m_i) \vec{R} \wedge \dot{\vec{R}} \rightarrow$ indica il momento angolare del centro di massa rispetto al sistema di riferimento inerziale
- $\vec{H}_{\delta m} = \sum_{i=1}^N m_i \vec{\rho}_i \wedge \dot{\vec{\rho}}_i \rightarrow$ indica il momento angolare del corpo rigido rispetto al centro di massa

Si ipotizzi che \vec{H}_{CM} sia un termine trascurabile rispetto a $\vec{H}_{\delta m}$ e si consideri che si possa esprimere la velocità della massa infinitesima i -esima come:

$$\dot{\vec{\rho}}_i = \vec{\omega} \wedge \vec{\rho}_i \quad (Eq. 3. 71)$$

Di conseguenza, introducendo il tensore di inerzia $[I]$, una la matrice reale simmetrica che risulta essere fissa nel sistema di riferimento body, tale che $[\dot{I}]|_{body} = 0$.

$$[I] = \begin{bmatrix} I_{11} & I_{21} & I_{31} \\ I_{21} & I_{22} & I_{32} \\ I_{31} & I_{32} & I_{33} \end{bmatrix} \rightarrow \begin{aligned} I_{11} &= \sum_{i=1}^N m_i (\rho_{i2}^2 + \rho_{i3}^2) & I_{21} &= - \sum_{i=1}^N m_i \rho_{i2} \rho_{i1} \\ I_{22} &= \sum_{i=1}^N m_i (\rho_{i1}^2 + \rho_{i3}^2) & I_{31} &= - \sum_{i=1}^N m_i \rho_{i3} \rho_{i1} \\ I_{33} &= \sum_{i=1}^N m_i (\rho_{i1}^2 + \rho_{i2}^2) & I_{32} &= - \sum_{i=1}^N m_i \rho_{i2} \rho_{i3} \end{aligned} \quad (\text{Eq. 3. 72})$$

La definizione di tensore di inerzia (Eq. 3.72), la definizione (Eq. 3.71) e le ipotesi semplificative permettono di trovare una nuova formulazione per il momento angolare, cioè:

$$\overrightarrow{H_{tot}} = [I] \vec{\omega} \quad (\text{Eq. 3. 73})$$

Le Equazioni di Eulero o dette anche Equazioni di Momento, permettono di mettere in relazione la cinematica con la dinamica rotazionale nel sistema inerziale:

$$\vec{M} = [L, M_y, N]^T = \frac{d\overrightarrow{H_{tot}}}{dt} \quad (\text{Eq. 3. 74})$$

La relazione descritta nel sistema body deve tenere conto del fatto che tale sistema di riferimento è in rotazione, per cui, analogamente al procedimento attuato nella relazione (Eq. 3.74), si trova:

$$\vec{M} = [L, M_y, N]^T = \left. \frac{d\overrightarrow{H_{tot}}}{dt} \right|_{body} + \vec{\omega} \wedge \overrightarrow{H_{tot}} \quad (\text{Eq. 3. 75})$$

Per cui, ricordano l'invarianza del tensore di inerzia nel sistema di riferimento body, la definizione (Eq. 3.73):

$$\vec{M} = [L, M_y, N]^T = [I] \vec{\dot{\omega}} + \vec{\omega} \wedge ([I] \vec{\omega}) \quad (\text{Eq. 3. 76})$$

Ricavando l'accelerazione angolare dall'equazione (Eq. 3.76) si trova:

$$\vec{\dot{\omega}} = [I]^{-1} \left(\vec{M} - \vec{\omega} \wedge ([I] \vec{\omega}) \right) \quad (\text{Eq. 3. 77})$$

In generale, per gli spacecraft l'espressione (Eq. 3.77) assume una forma semplificata, a causa della presenza di due piani di simmetria: essi causano l'annullamento dei momenti centrifughi del tensore di inerzia, rendendo $[I]$ una matrice diagonale. Per cui, solamente I_{11}, I_{22} e $I_{33} \neq 0$.

Di conseguenza, il sistema di equazioni differenziale diventa:

$$\begin{cases} \dot{\omega}_x = \frac{1}{I_{11}}(L - \omega_y \omega_z (I_{33} - I_{22})) \\ \dot{\omega}_y = \frac{1}{I_{22}}(M_y - \omega_x \omega_z (I_{11} - I_{33})) \\ \dot{\omega}_z = \frac{1}{I_{33}}(N - \omega_x \omega_y (I_{22} - I_{11})) \end{cases} \quad (Eq. 3. 78)$$

I termini di momento sono somma di diversi contributi:

$$\vec{M} = \overrightarrow{M_{thruster}} + \overrightarrow{\Delta M_{ext}} + \overrightarrow{M_{RW}} \quad (Eq. 3. 79)$$

In altri termini, la relazione (Eq. 3.79) permette di considerare nei termini di momento sia la coppia generata dall'attivazione dei thrusters, sia dovuta ai momenti esterni dovuti a fenomeni perturbativi, che alle coppie fornite dai sistemi attuativi, come le reaction wheels.

Nel seguente lavoro di tesi si considererà un corpo a simmetria cilindrica con asse di simmetria coincidente con l'asse X_I del sistema \mathcal{F}_I del Paragrafo 3.6: questa ipotesi rende privo di significato la rotazione attorno a tale asse, per cui, si considererà $\dot{\omega}_x = \omega_x = 0$. Allo stesso tempo, l'attivazione del propulsore principale non produce momento, potendo considerare nullo il termine $\overrightarrow{M_{thruster}}$. Si è introdotta anche un'ulteriore ipotesi, cioè che si possa trascurare, in prima approssimazione, gli effetti dello yaw angle, tanto da poter eliminare dal sistema di equazioni differenziali i termini $\dot{\omega}_z$ e ω_z . Inoltre, sono trascurati i momenti dovuti a fenomeni perturbativi, cioè $\overrightarrow{\Delta M_{ext}} = \vec{0}$. Il vettore di momento si riduce ad un unico termine $M_y \neq 0$ generato da un opportuno sistema attuativo per il controllo di assetto, descritto nel paragrafo 4.2.

Tale ipotesi, in combinazione con la nomenclatura $I_{22} = I_y$, riducono il sistema di equazioni differenziali di Eulero in un'unica equazione che assume la seguente forma [35, 46, 47, 49]:

$$\dot{\omega}_y = \frac{M_y}{I_y} \quad (Eq. 3. 80)$$

Capitolo 4

Descrizione della Missione

4.1 *Definizione della missione*

Nei seguenti paragrafi si andrà a fornire una descrizione delle caratteristiche di una generica missione di soft-landing sul suolo lunare, in analogia con le traiettorie del programma Apollo, Artemis e Chang'e.

4.1.1 *Lift-off*

Il primo step per definire la missione consiste nell'individuazione del sito di lancio, tale scelta andrà ad influenzare le manovre eseguite nella Earth Phase per immettersi nell'orbita desiderata. Partendo dalla Terra, la velocità assoluta del rocket dovrà tenere conto della velocità di trascinamento del pianeta V_T , dovuta alla sua rotazione verso Est:

$$V_T = \omega_{Earth} R_{Earth} \cos(L_0) \quad (Eq. 4. 0)$$

- $\omega_{Earth} = 7.29 \cdot 10^{-5} \text{ rad/s}$ = è la velocità di rotazione della Terra attorno al proprio asse
- La Terra è supposta essere sferica con $R_{Earth} = 6378 \text{ km}$
- L_0 = è la latitudine del sito di lancio

Per raggiungere una determinata Parking Orbit caratterizzata da una certa velocità V_f il rocket deve fornire un ΔV :

$$\Delta V = V_f - V_T + \Delta V_{perdite} \quad (Eq. 4. 1)$$

- $\Delta V_{perdite}$ è un contributo che include gli effetti di perdite per gravità, per resistenza atmosferica e per disallineamento della spinta

Di conseguenza, per minimizzare il ΔV richiesto dalla manovra di lancio in modo da limitare il consumo di propellente, la velocità di trascinamento deve essere massima, cioè *il sito di lancio deve essere il più vicino possibile all'Equatore Terrestre*:

$$V_T \approx 0.465 \text{ km/s} \quad (Eq. 4. 2)$$

Tuttavia, la latitudine del launch site influenza l'inclinazione minima i_{min} raggiungibile dal lanciatore nell'orbita di arrivo:

$$i_{min} = L_0 \quad (Eq. 4.3)$$

Per cui partendo dall'Equatore, se la Parking Orbit presentasse un'inclinazione $i \neq 0$, si avrebbe bisogno di una manovra di variazione dell'inclinazione nella Earth Phase che determinerebbe un aumento dei costi in termini di ΔV . Riassumendo, la scelta del sito di lancio deve tenere conto delle caratteristiche della Parking Orbit: ciò comporta una scelta di trade-off per la latitudine del launch site, in modo da massimizzare la velocità di trascinamento e minimizzare il ΔV richiesto per la variazione dell'inclinazione nella Earth Phase [45, 48].

I siti di lancio usati per missioni lunari sono [12, 7, 44, 94]:

Launch Site	Latitude	Program
Kennedy Space Center	28° 37'	Apollo and Artemis
Xichang Satellite Launch Center	28° 14'	Chang'e

Tabella 4. 1: Siti di usati in missioni usati nei programmi Apollo, Artemis e Chang'e

4.1.2 Earth Parking Orbit

In seguito alla manovra di lancio, e ad eventuali manovre di innalzamento del perigeo e/o di variazione dell'inclinazione dell'orbita di arrivo, lo spacecraft raggiungerà una Earth Parking Orbit nella quale si effettua il check dei sottosistemi, nonché il dispiegamento e la regolazione dei pannelli solari. In genere le orbite target raggiunte nella Earth Phase sono delle Low Earth Orbit (LEO), evitando l'interazione con le fasce di Van Allen [83, 84, 85].

4.1.3 Trans-Lunar Phase

La fase di volo Trans-Lunare permette allo spacecraft di spostarsi dall'orbita LEO di partenza all'ambiente cislunare. Il sistema binario Terra-Luna non può essere trattato mediante il Problema dei Due Corpi Ristretto, bensì bisogna far riferimento ad una trattazione differente, cioè in prima approssimazione al Problema dei Tre Corpi Circolari Ristretto, in cui i corpi principali sono due: Terra e Luna. Il sistema di riferimento rispetto al quale sono scritte le equazioni, è un sistema di riferimento non inerziale, rotante avente origine nel centro di massa del sistema binario (paragrafo

1.6). Il problema matematico definirà un set di tre equazioni differenziali del secondo ordine accoppiate, le quali sono risolvibili solamente per via numerica. Il vettore di stato sarà formato da sei componenti: le velocità e le accelerazioni nel sistema di riferimento co-rotante. Di conseguenza, definire le condizioni iniziali per la risoluzione del problema vuol dire delineare le condizioni di Burn-Out: in un punto qualsiasi dell'orbita LEO della Earth Phase, l'impulso generato dal propulsore genererà una certa velocità di Burn-Out, V_{BO} .

- m_1 e m_2 sono le masse dei due corpi principali
- r_1 e r_2 sono le distanze dallo spacecraft dai due corpi principali
- R_{12} è la distanza tra i due centri di massa dei corpi principali
- $\omega_r = \sqrt{G(m_1 + m_2)/R_{12}^3}$ è la velocità di rotazione del sistema co-rotante

Si definisce la funzione potenziale, tenendo conto delle forze centrifughe come:

$$U(x, y, z) = \frac{Gm_1}{r_1} + \frac{Gm_2}{r_2} + \frac{1}{2}\omega_r(x^2 + y^2) \quad (Eq. 4. 4)$$

Partendo dalle equazioni differenziali del problema, è possibile dimostrare l'Integrale di Jacobi:

$$V(x, y, z)^2 = 2U(x, y, z) - C \quad (Eq. 4. 5)$$

Di conseguenza, definito il punto di Burn Out (x_{BO}, y_{BO}, z_{BO}) e la velocità di Burn-Out $V_{BO} = V(x_{BO}, y_{BO}, z_{BO})$, la costante di Jacobi C risulta automaticamente fissata dalle condizioni iniziali. Si definiscono *Superfici di Hill* le superfici raggiunte quando la velocità dello spacecraft è nulla, cioè dalla (Eq. 4.5) si ottiene:

$$2U(x, y, z) - C = 0 \quad (Eq. 4. 6)$$

Affinché il moto sia possibile la velocità del veicolo spaziale deve essere maggiore di zero, per cui le Superfici di Hill rappresentano il limite raggiungibile dallo spacecraft nel trasferimento Terra-Luna. I Punti Lagrangiani sono dei punti dello spazio in cui le forze gravitazionali eguagliano le forze centrifughe, per cui lo spacecraft posto in tali regioni dello spazio è in condizioni di equilibrio. I Punti Lagrangiani sono dei punti di stazionarietà della funzione potenziale (Eq. 4.4), cioè sono dei punti di minimo relativo.

Si introducono le coordinate adimensionalizzate $\xi = x/R$, $\eta = y/R$ e $Z = z/R$, per cui è possibile riscrivere il potenziale (Eq. 4.4) in forma adimensionale:

$$U(\xi, \eta, Z) = \frac{1 - \mu}{\rho_1} + \frac{\mu}{\rho_2} + \frac{1}{2}(\xi^2 + \eta^2) \quad (\text{Eq. 4.7})$$

Dove

- $\mu = m_2/(m_1 + m_2)$ è la mass fraction, dove m_2 è il corpo principale meno massivo
- ρ_1 e ρ_2 sono le distanze dallo spacecraft dai due corpi principali in coordinate adimensionali

Si può dimostrare come il potenziale i punti di minimo del potenziale adimensionale (Eq. 4.7) siano nel piano (ξ, η) cioè $\delta U/\delta Z = 0$ per $Z = 0$.

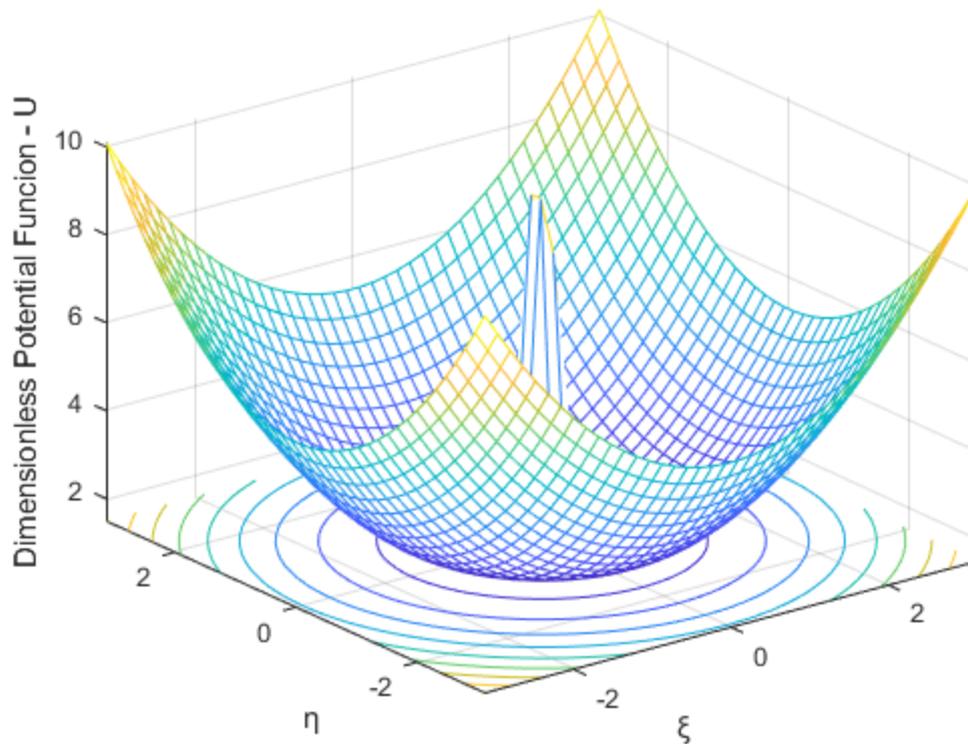


Figura 4. 1: Potenziale Adimensionale nel piano (ξ, η)

Quando $\rho_1 \rightarrow 0$ oppure $\rho_2 \rightarrow 0$ allora $U \rightarrow +\infty$, cioè nel centro di massa della Luna e della Terra il potenziale diventa indefinito. Se ci si allontana dal sistema binario, cioè $\xi \uparrow$ o $\eta \uparrow$ il potenziale cresce sino a divergere a infinito. Nella figura 4.1 nel piano (ξ, η) sono rappresentate le curve iso-potenziale, che rappresentano le superfici di Hill per una determinata costante di Jacobi.

I punti lagrangiani nel Sistema Binario Terra-Luna sono:

Lagrange Point	ρ_1	ρ_2	η	Dimensionless Potential
L ₁	$1 - \sqrt[3]{\mu/3}$	$\sqrt[3]{\mu/3}$	0	1.5942
L ₂	$1 + \sqrt[3]{\mu/3}$	$\sqrt[3]{\mu/3}$	0	1.5862
L ₃	1	2	0	1.5061
L ₄	1	1	$\sqrt{3}/2$	1.4940
L ₅	1	1	$-\sqrt{3}/2$	1.4940

Tabella 4. 2: Posizione e Potenziale dei Punti di Lagrange del Sistema Terra-Luna

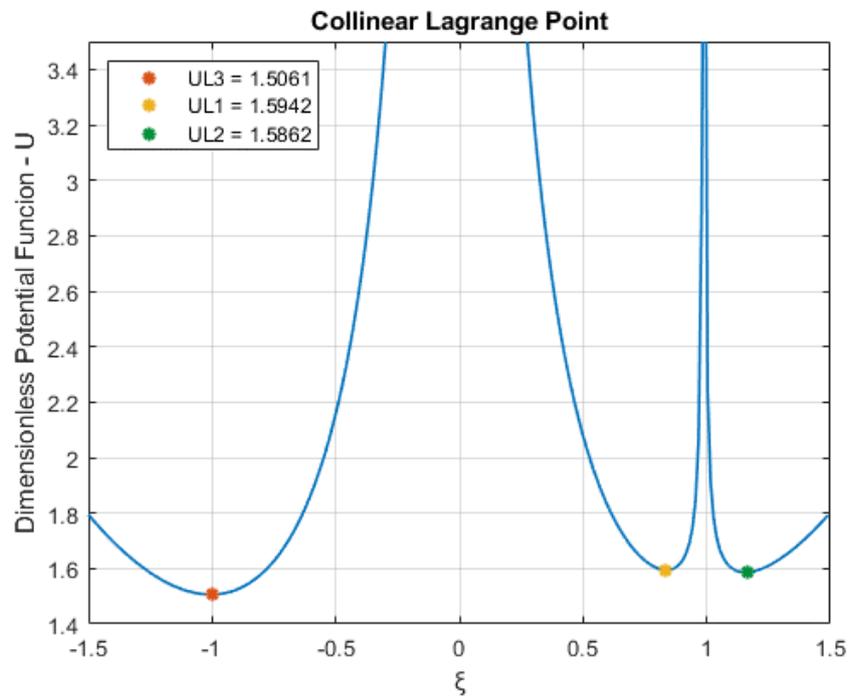


Figura 4. 2 Potenziale Adimensionale dei punti di Lagrange collineari: L₁, L₂, L₃

Dall'analisi dei punti Lagrangiani si evince come per portare uno spacecraft in orbita cislunare la costante di Jacobi fissata dalle condizioni al contorno deve essere tale da determinare un minimo di potenziale, raggiunto sulle superfici di Hill, minore del potenziale associato al punto Lagrangiano L₁, cioè:

$$U_{min} < U_{L1} \rightarrow C_{spacecraft} < C_{L1} \quad (Eq. 4. 8)$$

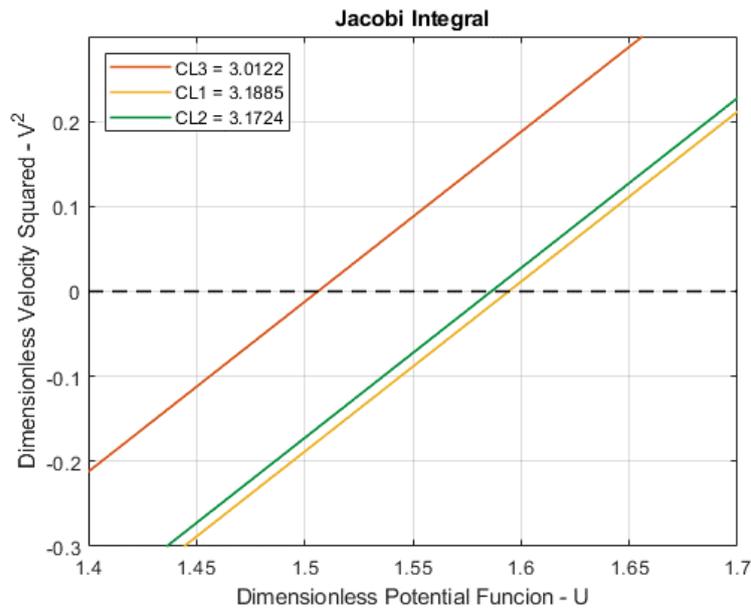


Figura 4. 3: Rappresentazione Grafica dell'Equazione (Eq 4.4)

Dalla figura 4.3 si evince come se $C \downarrow$ il minimo di potenziale raggiunto sulle superfici a zero velocità sia più basso, tanto da poter essere minore del potenziale associato al Punto Lagrangiano Cislunare, permettendo effettivamente una trasferta trans-lunare. Definiti quindi i requisiti di missione, la scelta della condizione di Burn Out deve soddisfare necessariamente l'equazione (Eq. 4.8). La traiettoria risultante, vista in un sistema di riferimento inerziale, appare come un "8". Un ulteriore problema della trattazione precedente consiste nel considerare sia la Terra che la Luna come se fossero ferme, in quanto è il sistema di riferimento ad essere rotante: il satellite dovrà essere coordinato con la Luna, di modo che l'orbita trans-lunare intercetti effettivamente la Luna nella sua traiettoria di rivoluzione attorno alla Terra [45, 48, 44, 94].

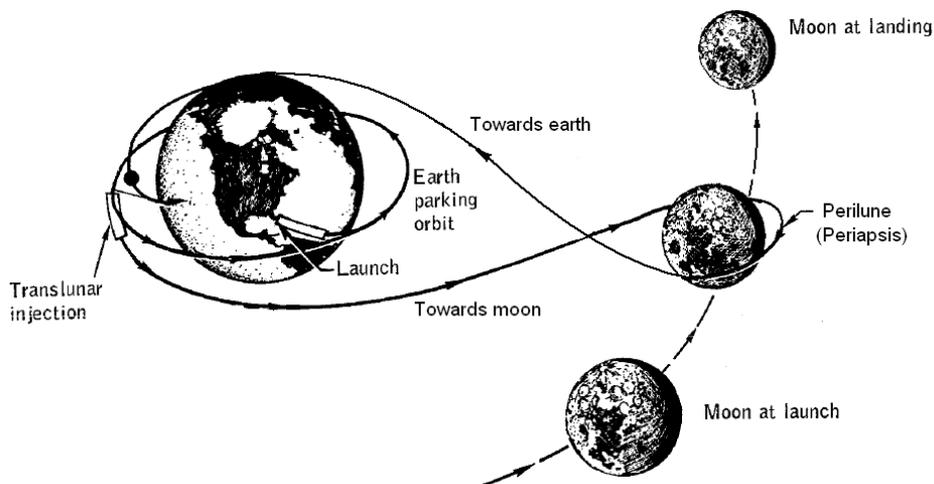


Figura 4. 4: Profilo di Missione: trasferta Trans-Lunare con coordinamento tra spacecraft e Luna, credits by NASA

4.1.4 *Cis-Lunar Phase*

La trasferta Trans-Lunare permette di trasferire uno spacecraft dall'ambiente terrestre a quello cislunare in tempi nell'ordine di 112 ore, come avvenuto nella missione del Chang'e 5. La Fase Cis-Lunare prevede una manovra di braking al perilunio dell'orbita translunare, di modo da abbassare l'apolunio e immettersi in una prima orbita ellittica. La circolarizzazione di tale orbita permette il raggiungimento dell'orbita target nell'ambiente lunare la cui quota dipende dalla tipologia di missione, valori tipici riscontrati sono [20, 43, 44, 88, 89, 90, 91].

Mission	Altitude Target Orbit
Apollo Program	111 km
Chang'e-3	100 km
Change-5	200 km

Tabella 4. 3: Quota dell'orbita circolare target in ambiente lunare

La fase Cis-Lunare permetterebbe anche la separazione del Lunar Module dal Crew Service Module, caratteristico delle missioni lunari manned, come avvenuto nel programma Apollo [44].

4.1.5 *Descent Orbit Insertion (DOI)*

Il lander lunare prima dell'effettiva traiettoria di landing, compirà una manovra di Descent Orbit Insertion (DOI) per passare dall'orbita circolare target della fase Cis-Lunare ad un'orbita più bassa, in modo ridurre la distanza dal suolo lunare. Il trasferimento può essere efficacemente modellizzato come una Trasferta di Hohmann, trattata nel paragrafo 3.5.1.4. Lo studio semplificato della DOI permetterà di stabilire le condizioni iniziali della manovra di soft-landing e dunque, di fissare parte delle condizioni al contorno del Boundary Value Problem.

Si è ipotizzato che l'orbita iniziale sia circolare avente una quota di 100 km, mentre il perilunio della DOI è imposto essere 15 km in modo da essere consistenti con il programma Apollo e con la missione Chang'e-3. Il downrange del lander è considerato essere circa pari a quello del Lunar Module delle missioni Apollo, cioè 500 km dal landing site. Nel caso in cui il downrange sia diverso da zero nell'istante finale della traiettoria di ottimizzazione di soft-landing con dinamica rotazionale, è possibile modificare il valore iniziale di downrange posticipando o anticipando la fase di DOI, cioè introducendo un tempo di waiting nella target orbit della fase cislunare.

L'impulso fornito in termini di ΔV nella DOI è opposto alla velocità circolare della target orbit della fase cislunare, in modo da frenare il lander. La velocità della Trasferta di Hohmann calcolata alla quota del perilunio della DOI, V_{H2} corrisponde alla velocità iniziale della manovra di soft-landing. Si riportano i risultati ottenuti:

Parameters	Description	Value
$H_{target-orbit}$ [km]	Target Orbit Altitude	100.0
$H_{perilunium}$ [km]	DOI Perilunium Altitude	15.0
a_{DOI} [km]	DOI semimajor axis	1795.6
e_{DOI} [km]	DOI eccentricity	0.0237
b_{DOI} [km]	DOI semiminor axis	1795.1
V_{C1} [km/s]	Target Orbit Circular Velocity	1.6332
V_{H1} [km/s]	Hohmann Transfer Velocity at $H_{target-orbit}$	1.6137
ΔV [km/s]	Brake Impulse	0.0195
V_{H2} [km/s]	Hohmann Transfer Velocity at $H_{perilunium}$	1.6920

Tabella 4. 4 Risultati Numerici della Descent Orbit Insertion (DOI) approssimata mediante Hohmann Transfer

Il sistema di riferimento utilizzato per diagrammare la DOI è un sistema di riferimento inerziale avente origine nel landing site [45, 48, 20, 43, 44, 88, 89, 90, 91].

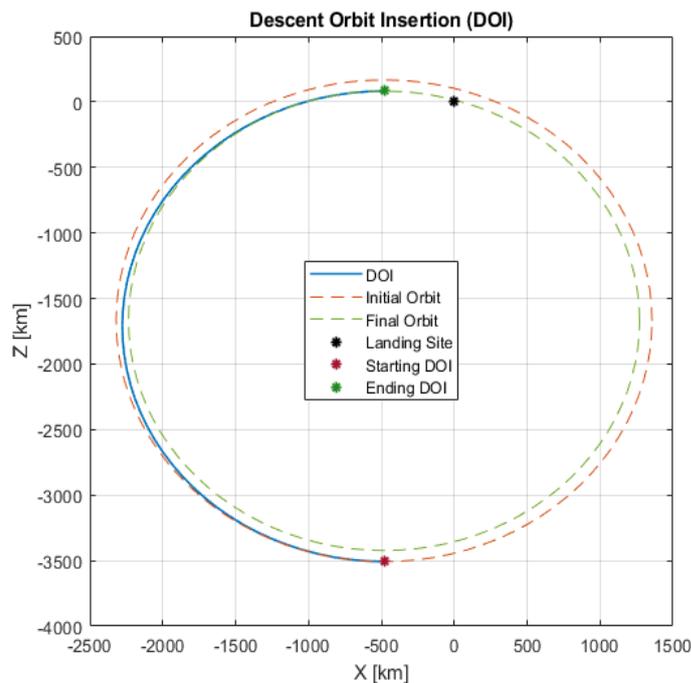


Figura 4. 5: Rappresentazione in scala della DOI

4.1.6 *Soft-Landing*

La fase di landing sul suolo lunare o chiamata anche *Powered Descent Initiation (PDI)* nelle missioni Apollo, presenta aspetti diversi a seconda che la missione sia manned o unmanned. In particolare, si riportano i profili di missione delle missioni Apollo e delle missioni Chang'e in modo da mettere in luce sia le analogie che le differenze.

4.1.6.1 *Manned Mission*

La descrizione della manovra di atterraggio si basa sul Mission Profile del programma Apollo. Essa può essere suddivisa in quattro fasi:

- *Braking Phase*: è una manovra di frenatura atta a ridurre progressivamente la velocità del Lunar Module, ottimizzando il consumo di propellente. Le condizioni iniziali di tale fase corrispondono alle condizioni finali della DOI. Durante tutta la durata della Braking Phase il propulsore principale è attivo a manetta massima, in modo da fornire il massimo livello di spinta per evitare che l'effetto del campo gravitazionale della Luna determini un hard-landing del veicolo spaziale sul suolo lunare. L'orientamento attorno all'asse di spinta è tale da rivolgere i finestrini verso la superficie lunare in modo da avere un controllo visivo sulla navigazione del Lunar Module nella fase iniziale della traiettoria.
- *Pitch-Up*: è una manovra di beccheggio effettuata a circa 13.7 km di quota ed è finalizzata nel variare l'assetto del Lunar Module in modo da portare i finestrini verso l'alto e permettere un Field of View del landing site. Questa manovra è utile per aggiornare le stime di altitudine usate nell'algoritmo di guida del veicolo spaziale. L'assetto è mantenuto finché la braking phase non raggiungerà una quota di 2.1 km e un downrange dal landing site di 83 km.
- *Approach Phase*: è una fase progettata per effettuare un monitoraggio visivo della landing area, in modo da selezionare il punto migliore per l'effettivo atterraggio. L'assetto del Lunar Module è costante ed è fornito dalla manovra di pitch-up, l'altitudine scende sino a circa 152.4 m dalla superficie con una distanza dal landing site di 609.6 m.
- *Landing Phase*: la prima parte della fase di atterraggio è effettuata con un controllo manuale da parte dell'equipaggio nella navigazione del Lunar Module, mentre l'assetto risulta soddisfare la legge di orientamento aggiornata durante la Approach Phase. In questo modo, il veicolo spaziale raggiungerà una quota di 45.7 m con la sola componente di velocità

verticale pari a 0.91 m/s dove inizierà una Vertical Descent gestita dall'algoritmo di guida [44, 91, 93, 94].

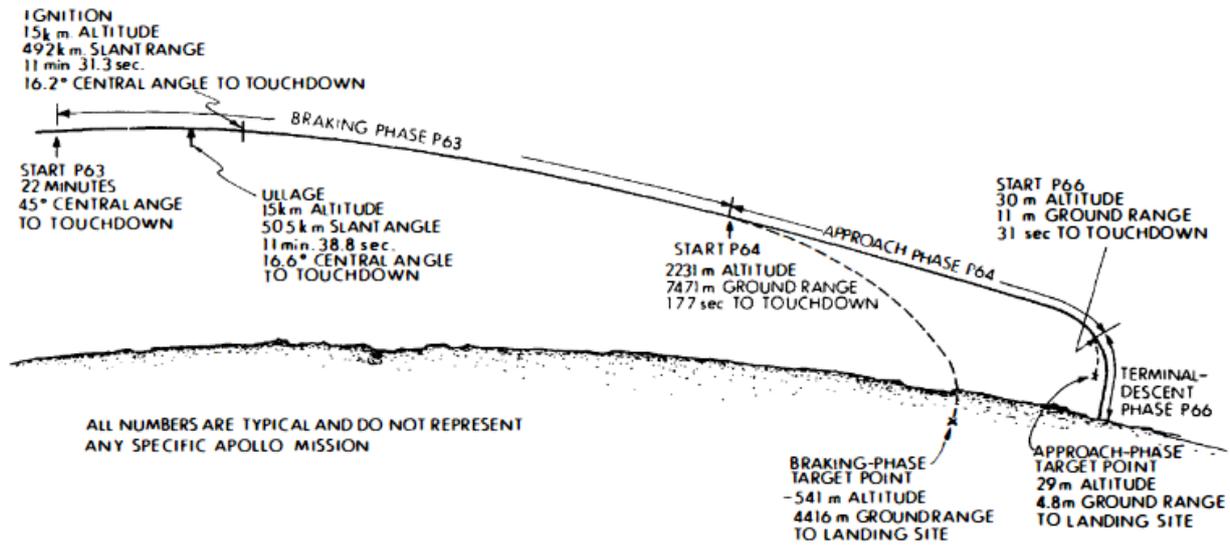


Figura 4. 6: Traiettoria di Soft-Landing del programma Apollo, credits by [94].

4.1.6.2 Unmanned Mission

La descrizione della manovra di soft-landing per missioni unmanned si basa sulle traiettorie della missione de Chang'e-3. Essa può essere suddivisa in sette fasi:

- *Preparation for Landing:* durante la DOI, la preparazione alla fase di landing consiste nella valutazione dei tempi di accensione del propulsore principale in modo che ciò avvenga al perilunio con l'assetto desiderato.
- *Primary Deceleration:* è analoga alla Braking Phase delle missioni manned, dove la fase di decelerazione termina a circa 3 km dalla superficie lunare.
- *Quick Adjusting:* è una fase che permette di collegare la fase di decelerazione con quella di avvicinamento, passando da 3 km a 2.4 km di altitudine e di regolare rapidamente l'assetto del lander lunare con correzioni del pitch angle.
- *Approaching:* in tale fase la spinta del motore principale è ridotta, in modo da ottenere una traiettoria discendente dolce, sino a raggiungere i 100 m di quota. L'assetto è mantenuto costante durante tutta la traiettoria, in modo da garantire che il campo visivo del sensore di

imaging ottico sia allineato con la landing area. Sono evitate le zone in cui sono presenti rocce o crateri con diametro superiori al metro.

- *Hovering*: in questa fase c'è un bilanciamento tra il peso del lander e la spinta a modulo variabile del propulsore principale, determinando uno stato di sospensione del veicolo spaziale nell'ambiente lunare. L'osservazione della landing area all'altitudine di 100 m mediante sensori di imaging ottici 3D, permette di selezionare il landing site più sicuro.
- *Hazard Avoidance*: è una fase che va dai 100 m ai 30 m di quota, in cui la discesa del lander permette di evitare gli ostacoli rilevati durante la fase di Hovering. L'assetto risulta variabile, in modo da annullare la velocità orizzontale e mantenere solo una componente verticale di velocità.
- *Costanti Low-Velocity Descent*: il fine principale è determinare un touchdown sulla superficie lunare che avvenga il più dolcemente possibile. La discesa è di tipo verticale, dove la velocità verticale deve rispettare i requisiti imposti dal landing gear all'atterraggio [20, 43, 88, 89, 90].

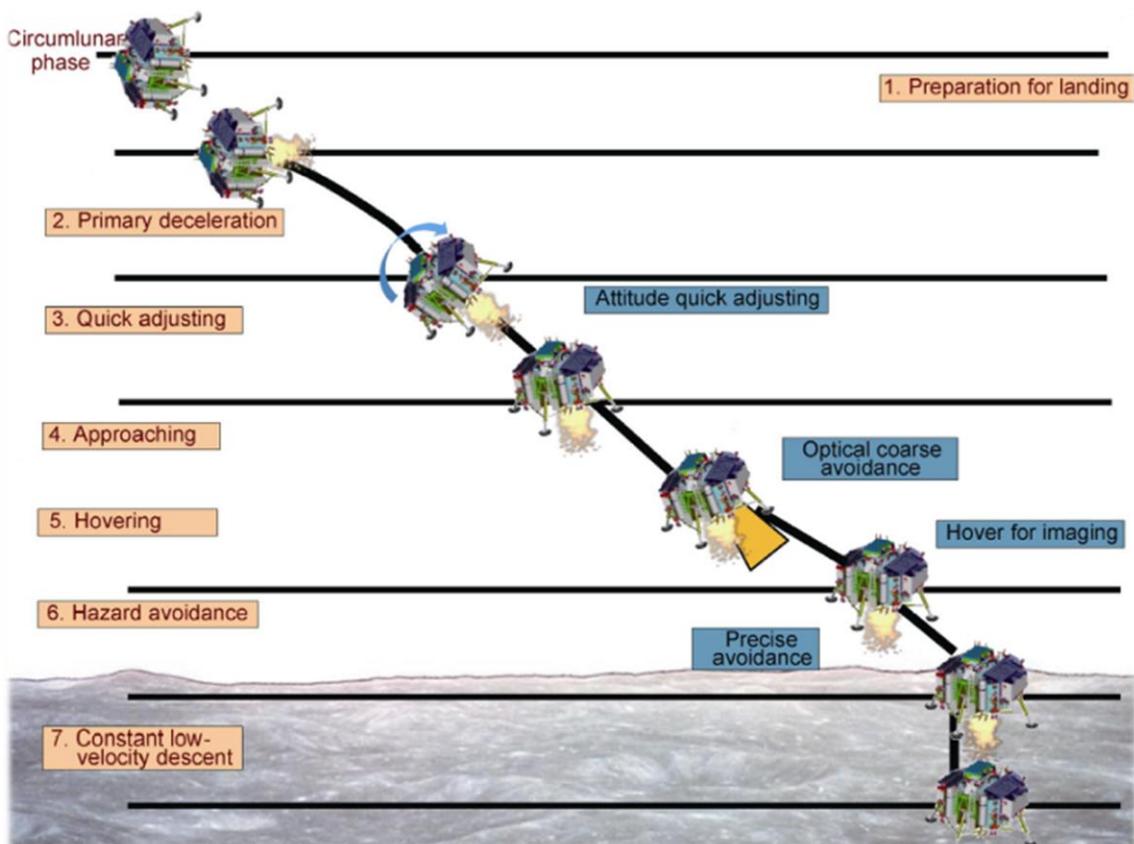


Figura 4. 7: Traiettoria di Soft-Landing del Chang'e-3, credits by

4.2 Caratteristiche del Lander Lunare

Il seguente lavoro di tesi non prevede la progettazione di un nuovo lander lunare, bensì ha lo scopo di generare un algoritmo di ottimizzazione di traiettorie di atterraggio sul suolo lunare che sia valido per una classe di veicoli spaziali. Di conseguenza, essendo la missione da ottimizzare di tipo unmanned, si è scelto di considerare una versione ridotta del Lunar Module della missione Apollo 11. Esso presentava una massa al decollo di circa 15103 kg , la quale è stata ridotta di un ordine di grandezza, cioè si è imposta una massa di 1600 kg al lift-off. Le dimensioni sono state scalate di un fattore $\sqrt[3]{10}$, determinando un lander avente un diametro di 2090 mm e un'altezza di 2013 mm . Per ridurre la complessità del lander lunare è stato ipotizzando uno veicolo a simmetria cilindrica con due piani di simmetria, il cui centro di massa coincide con il baricentro geometrico ed inoltre, si è trascurata la presenza del landing gear.

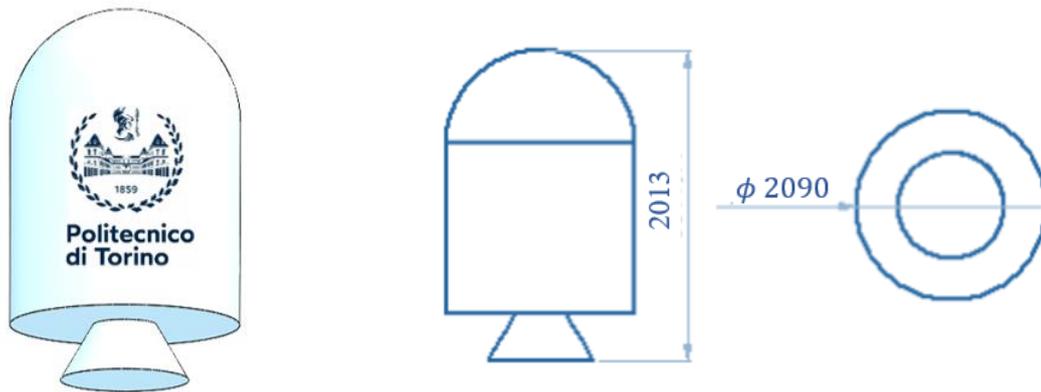


Figura 4.8: CAD rappresentativo della forma e degli ingombri del lander lunare ipotizzato

Un parametro di cui si è calcolato il valore numerico è il momento di inerzia attorno ad un asse ortogonale all'asse di simmetria del cilindro, passante per il centro di massa del lander, cioè [92]:

$$I_y = \frac{1}{12} m_0 \left(\frac{3}{4} d_{LLV}^2 + h_{LLV}^2 \right) = 1041.73 \text{ kg} \cdot \text{m}^2 \quad (\text{Eq. 4. 9})$$

Per il propulsore principale si è considerata una versione a spinta costante del main engine a spinta variabile del LLV del Chang'e-3, il quale è capace di produrre una thrust [20, 88, 89]:

$$1500 \text{ N} \leq T \leq 7500 \text{ N} \quad (\text{Eq. 4. 10})$$

Per una semplicità implementativa, coerentemente con la legge di controllo ottimale della Teoria del Controllo Ottimale, si è considerato un propulsore che possa presentare solamente la modalità

di funzionamento on/off, fornendo all'accensione un livello di spinta intermedio rispetto all'intervallo definito nella relazione (Eq. 4.10), cioè:

$$\begin{cases} \text{Mode Off} \rightarrow T_{min} = 0N \\ \text{Mode On} \rightarrow T_{max} = 4000N \end{cases} \quad (\text{Eq. 4.11})$$

Il sistema di Reaction Control System (RCS) del Lander Lunare della missione Chang'e-3 è composto due classi differenti di thrusters:

- *Gross Attitude Control*: 16 x 150 N thrusters, usati per il controllo di assetto del veicolo spaziale durante la fase di Quick Adjusting.
- *Accurate Attitude Control*: 12 x 10 N thrusters, usati nelle fasi di *Hazard Avoidance* per ottenere un controllo preciso dell'assetto, per effettuare una discesa verticale [20, 88, 89].

Il controllo dell'attitude è stato semplificato in quanto la dinamica di assetto prevede lo studio solamente del pitch angle (Eq. 3.67). Di conseguenza, si è implementata una sola configurazione del sistema RCS che prevede 12 propulsori di assetto raggruppati in cluster da 4 thrusters denominati "QUAD", seguendo la nomenclatura del sistema RCS dell'Apollo 11 [93, 94]. Essi giacciono nel piano passante per il centro di massa del lander e sono disposti simmetricamente rispetto all'asse del cilindro. Nonostante il sistema RCS presentato sia in grado di controllare ogni grado di libertà rotazionale del lander, coerentemente con l'equazione di Eulero semplificata (Eq. 3.80), si valuterà solamente il valore della coppia agente sul moto di pitch.

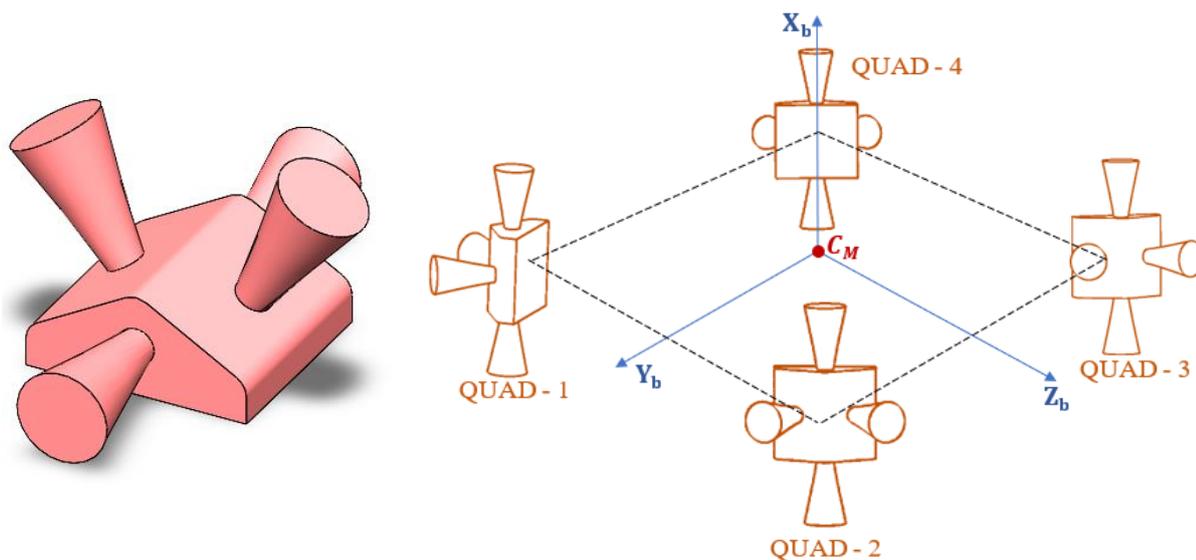


Figura 4. 9: CAD rappresentativo del QUAD del sistema RCS a sinistra. Disposizione dei cluster di thrusters sul lander a destra

La disposizione considerata è analoga al sistema RCS dell'Apollo 11 [93, 94], dove i propulsori giacciono nel piano (Y_b, Z_b) . La spinta del sistema RCS è stata maggiorata rispetto all'Accurate Attitude Control del Chang'e-3, in quanto nel lavoro di tesi si presuppone una dinamica di assetto variabile in ogni istante della simulazione, senza considerare manovre di kick istantanee, per cui si è considerato un valore di spinta intermedio tra l'Accurate Attitude Control e il Gross Attitude Control in modo da generare un valore intero di torque pari a $133 Nm$

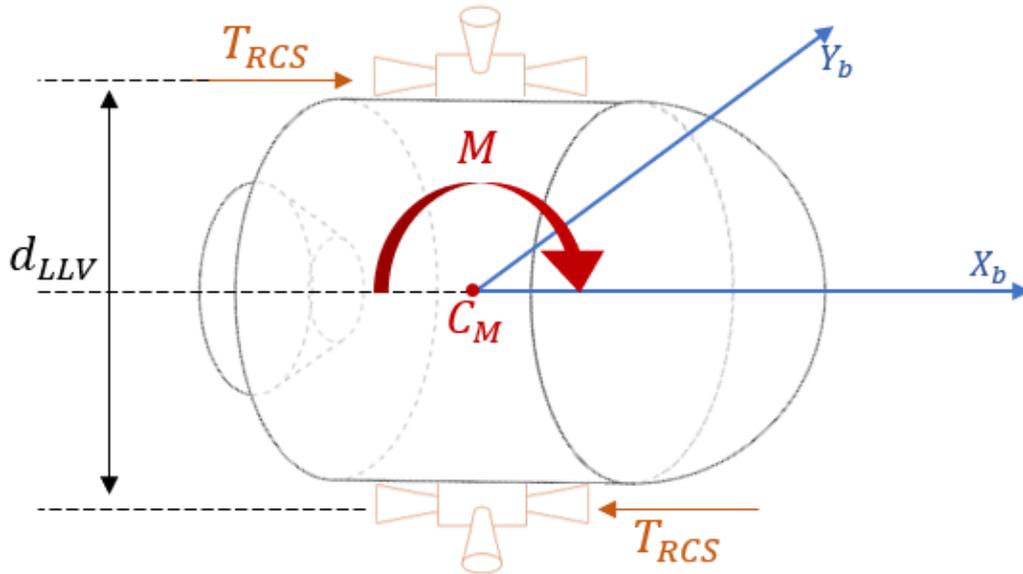


Figura 4. 10: Schematizzazione del funzionamento del sistema RCS per la generazione del Pitch Moment

Il valore della coppia generata dal sistema RCS attorno all'asse di pitch è:

$$M = T_{RCS} \cdot d_{LLV} = 133 Nm \quad (Eq. 4. 12)$$

Il sistema di controllo di assetto permette di generare sia coppie aventi stessa intensità sia positive che negative attorno all'asse di pitch:

$$\begin{cases} M_y^{min} = -M \\ M_y^{max} = M \end{cases} \quad (Eq. 4. 13)$$

In ogni istante di tempo, l'attivazione del main engine o dei propulsori del sistema RCS determina un consumo di propellente, causando una variazione di massa del lander nel tempo come descritto dalla relazione (Eq. 3.46). L'impulso specifico sia del propulsore principale che dei thrusters del sistema di controllo dell'attitude è supposto essere pari a quello del rispettivo sistema nel Lunar Module della missione Apollo 11 [44, 93, 94]:

$$\begin{cases} I_{SP}^{main} = 290 \text{ s} \\ I_{sp}^{RCS} = 280 \text{ s} \end{cases} \quad (\text{Eq. 4. 14})$$

La velocità efficace di scarico sarà il prodotto tra l'impulso specifico e l'accelerazione di gravità terrestre valutata al livello del mare, cioè 9.81 m/s^2 .

Riassumendo, le caratteristiche del lander lunare considerate sono:

Parameters	Description	Value
m_0 [kg]	<i>Maximum Take – off Mass</i>	1600
d_{LLV} [mm]	<i>Diameter</i>	2013
h_{LLV} [mm]	<i>Height</i>	2090
I_y [kg · m ²]	<i>Moment of Inertia</i>	1041.73
T [N]	<i>Main Engine Maximum Thrust</i>	4000
T_{RCS} [N]	<i>RCS Thrust</i>	63.64
M [Nm]	<i>RCS Torque</i>	133
c [m/s]	<i>Main Engine Effective Exhaust Velocity</i>	2844.9
c_{RCS} [m/s]	<i>RCS Effective Exhaust Velocity</i>	2746.8

Tabella 4. 5: Riassunto delle caratteristiche del Lander Lunare

Capitolo 5

Teoria del Controllo Ottimale

5.1 *Che cos'è un problema di ottimizzazione?*

“Nothing at all takes place in the universe in which some rule of maximum or minimum does not appear” by Leonhard Euler

I problemi di ottimizzazione sono solitamente usati in diversi settori della vita umana: economico, manageriale, scientifico ed ingegneristico. In genere, il termine ottimizzazione è usato per indicare un sinonimo di miglioramento, tuttavia, da un punto di vista matematico, i problemi di ottimizzazione risultano avere un'accezione più complessa: essi consistono nel ricercare una particolare *legge di controllo* che permetta di modificare delle variabili soggette a determinati *constraints*, al fine di massimizzare o minimizzare un certo *indice di performance*. Per questa classe di problemi è possibile trovare una soluzione di tipo analitica solamente in casi semplificati, solitamente di scarso interesse pratico, in quanto prevedono una serie di ipotesi semplificative che renderebbero il modello inadatto a descrivere la complessità del caso reale. In generale, la soluzione è valutata mediante metodi numerici, i quali possono essere raggruppati in tre classi principali differenti: Direct Methods, Indirect Methods ed Evolutionary Algorithms [22,23,24,35].

5.1.1 *Ottimizzazione Nel Design Process*

In termini progettuali, i problemi di ottimizzazione devono tenere conto dell'interconnessione fra sistemi che compongono il *plant*, per cui in genere si tratta di un *Multidisciplinary Design Optimization (MDO)*. Per determinare un problema di ottimizzazione è necessario individuare i requisiti di missione, nonché la dinamica del problema, mentre la sua applicazione può avvenire a diversi livelli della fase progettuale: nel *Conceptual, Preliminary o Detailed Design*. Il vantaggio dell'integrazione di una metodologia *MDO* nelle fasi 0/A di progetto consiste in un incremento delle performance del sistema, con una riduzione sia dei costi progettuali che dell'incertezza, determinando così anche un minor tempo di design, rispetto ad un approccio convenzionale. L'ottimizzazione diventa così un processo iterativo, facente parte del close loop del design process,

in cui le variabili di progetto o i vincoli imposti devono essere rivisti in modo da determinare un progetto che possa soddisfare i requisiti e i bisogni dagli stakeholders [24,29]

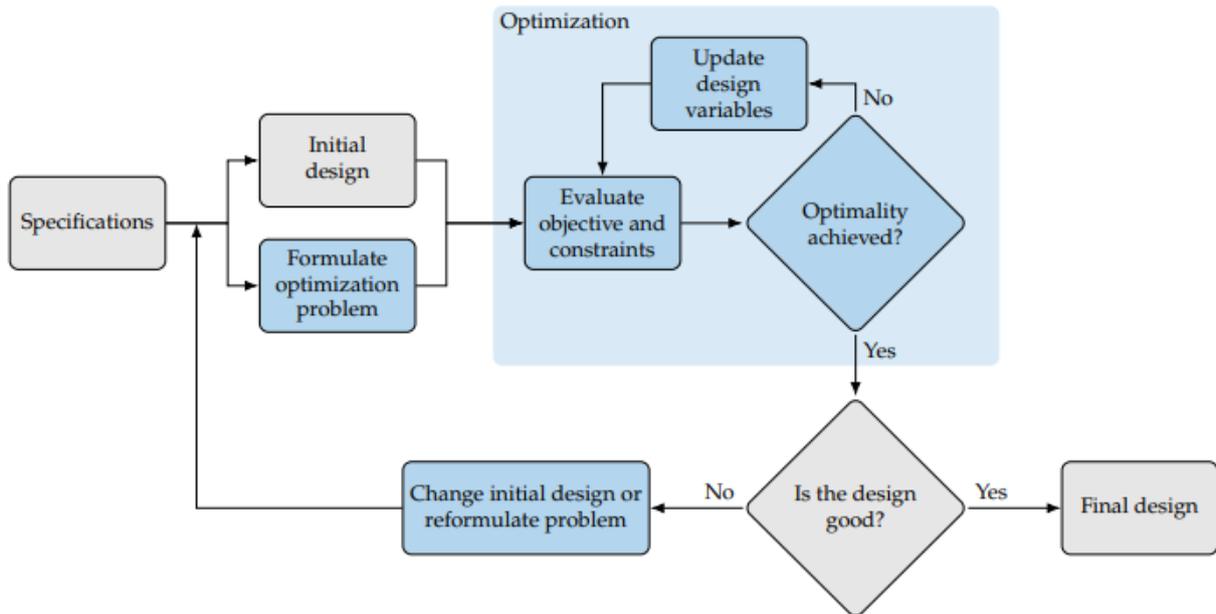


Figura 5. 1: Flow Chart di un tipico Design Optimization Process, credits by [24]

5.2 Problemi Di Ottimizzazione Per Traiettorie Spaziali

L'analisi delle traiettorie spaziali in combinazione con lo studio della dinamica rotazionale dello spacecraft risultano essere un task fondamentale per il design della missione, in quanto influenzano direttamente il consumo di propellente e dunque il mass budget dello spacecraft, andando così ad incidere sia sulla fattibilità, che sui costi della missione. Inoltre, a seconda dei requirements stilati per raggiungere il goal di missione, può essere richiesto anche un particolare tempo di percorrenza della traiettoria, come nel caso di manned interplanetary transfer. Di conseguenza, i casi tipicamente affrontati riguardano la massimizzazione della massa finale dello spacecraft o del payload, oppure la minimizzazione del tempo di volo. Storicamente, il problema di ottimizzazione è stato interpretato come la scelta della migliore traiettoria per una funzione costo definita fra tutti i percorsi possibili per il sistema considerato: si definisce perciò, un problema infinito dimensionale, in quanto lo spazio dei percorsi ammissibili è appunto di dimensione infinita. Questa chiave di lettura determinò lo sviluppo di *Static Problem*, cioè dei problemi *spacial-based*, risolti con il

Calculus of Variations. Tuttavia, il problema di ottimizzazione di traiettorie spaziali è di tipo dinamico, dove la posizione dello spacecraft risulta essere time-dependent. Nel 1963, D. F. Lawden pubblicò il libro intitolato “*Optimal Trajectories for Space Navigation*”, costruendo le basi della **Teoria del Controllo Ottimale**: traiettorie non sono più aprioristicamente definite in uno spazio infinito dimensionale e la minimizzazione o massimizzazione della funzione di costo è ottenuta mediante una serie di decisioni prese in ogni istante della traiettoria, cioè attraverso l’implementazione di un’opportuna legge di controllo atta a variare continuamente alcune variabili del problema [22,23,27,30,35].

5.2.1 Static Problem: Calculus of Variations

Il metodo di *Calculus of Variations* prevede un’ottimizzazione della traiettoria senza l’introduzione di una legge di controllo, trattando il problema nel caso statico, cioè in una versione non time-dependent bensì solamente spatial-based.

In una formulazione finito-dimensionale, si definisce una certa funzione $f: D \rightarrow \mathbb{R}$, $D \subseteq \mathbb{R}^n$ e si ricerca $x^* \in D$ tale che:

$$\text{se } f(x^*) \geq f(x) \quad \forall x \in D \rightarrow x^* \text{ è un punto di massimo locale} \quad (\text{Eq. 5. 0})$$

$$\text{se } f(x^*) \leq f(x) \quad \forall x \in D \rightarrow x^* \text{ è un punto di minimo locale} \quad (\text{Eq. 5. 1})$$

Dunque, si trovano così i casi limite che permettono di minimizzare la funzione costo oppure massimizzare un certo indice di prestazione. In una formulazione infinito-dimensionale si minimizza (o massimizza) un funzionale $J(y)$, cioè una funzione definita in uno spazio vettoriale di funzioni di dimensione infinita V , mentre y indica la generica funzione di V . In questo caso, il problema si riduce nella scelta di una certa traiettoria $y(x)$ ammissibile, che vada a minimizzare o massimizzare il funzionale $J(y)$, il quale rappresenterà la funzione obiettivo del problema di ottimizzazione [30].

5.3 Teoria del Controllo Ottimale

Un generico sistema dinamico può essere descritto attraverso un sistema di equazioni differenziali alle derivate ordinarie (ODE) del primo ordine:

$$\frac{dx(t)}{dt} = \dot{x}(t) = f(x(t), t, u(t)) \quad (\text{Eq. 5. 2})$$

Dove:

- $t = \text{variabile indipendente}$
- $x(t) = \text{vettore di variabili di stato} = (x_1(t), x_2(t), \dots, x_N(t))^T$
- $u(t) = \text{vettore dei controlli} = (u_1(t), u_2(t), \dots, u_M(t))^T$
- $f(x(t), t, u(t)) = \text{vettore delle leggi di evoluzione} = (f_1(x(t), t, u(t)) \dots f_N(x(t), t, u(t)))^T$

La variazione di ogni variabile di stato è descritta da una particolare legge di evoluzione che dipende dalla dinamica del problema considerato. Si definisce l'ordine del sistema in base alla dimensione del vettore di variabili di stato, per cui un problema di ordine N prevede anche N leggi di evoluzione. Per quanto riguarda i controlli, essi risultano essere in genere di ordine $M \neq N$ e sono caratteristici del problema analizzato. Nel caso di ottimizzazione di traiettorie spaziali la variabile indipendente ha una connotazione fisica, cioè indica il generico istante temporale, di conseguenza, il problema dinamico permette di valutare l'evoluzione delle variabili di stato dall'istante iniziale a quello finale, cioè tra i cosiddetti *contorni esterni della traiettoria*.

Per l'applicazione della teoria del controllo ottimale risulta conveniente discretizzare la traiettoria in n archi o sottointervalli, in ognuno dei quali le variabili devono essere continue:

$$t_0 < t_1 < t_2 < \dots < t_k < \dots < t_n \quad \text{con } k = 0:n \quad (\text{Eq. 5. 3})$$

- $t_0 = \text{istante iniziale}$
- $t_n = \text{istante finale}$
- $t_k = \text{genrico istante temporale}$

Si può quindi definire il j -esimo intervallo di tempo come:

$$t_{(j-1)+} \leq t \leq t_{j-} \quad \text{con } j = 1:n \quad (\text{Eq. 5. 4})$$

Gli istanti temporali $t_{(j-1)+}$ e t_{j-} ad eccezione di t_0 e t_n sono detti *contorni interni della traiettoria*. In ogni estremo dell'intervallo è possibile definire il vettore di variabili di stato: $x_{(j-1)+}$ e x_{j-} dove la convenzione " + " e " - " indica rispettivamente il valore assunto subito dopo o prima il punto considerato. Questo tipo di scrittura permette di tenere conto della presenza di discontinuità sia delle variabili di stato, come nel caso di variazione istantanea di velocità o di massa a causa di una manovra impulsiva oppure nel caso di scarico di stadi esauriti, sia del tempo, per esempio se

nel caso di flyby di un outer o inner planet, non si trascuri il tempo di residence all'interno della sfera di influenza. In questo modo è possibile assumere espressioni diverse per le leggi di evoluzione a seconda dell'intervallo preso in considerazione.

In genere sono imposte delle condizioni al contorno non lineari di tipo misto, cioè sia sulle variabili di stato che sul tempo, sia nei contorni interni che esterni. Questo tipo di implementazione permette di introdurre per esempio dei punti vincolati nella traiettoria, il raggiungimento di condizioni desiderate nel landing site nel caso di manovre di atterraggio oppure è utile per imporre un limite ai carichi termici e dinamici nel caso di volo atmosferico. Formalmente possono essere espresse:

$$\chi(x_{(j-1)+}, x_{j-}, t_{(j-1)+}, t_{j-}) = 0 \quad \text{con } j = 1:n \quad (\text{Eq. 5. 5})$$

Il problema di ottimizzazione prevede di massimizzare un *indice di performance* o minimizzare una certa *funzione costo*, cioè si devono ricercare i valori estremali di un certo funzionale J :

$$J = \varphi(x_{(j-1)+}, x_{j-}, t_{(j-1)+}, t_{j-}) + \sum_j \int_{t_{(j-1)+}}^{t_{j-}} \Phi(x(t), u(t), t) \cdot dt \quad \text{con } j = 1:n \quad (\text{Eq. 5. 6})$$

- $\varphi = \text{Costo di Mayer}$, dipende sia dal valore dalle variabili di stato che dal tempo valutati sia nei contorni interni che esterni
- $\int_{t_{(j-1)+}}^{t_{j-}} \Phi(x(t), u(t), t) \cdot dt = \text{Costo di Lagrange}$, la sommatoria su j permette di estenderlo su tutta la traiettoria e il valore in ogni sotto-intervallo è influenzato dai valori assunti dalle variabili di stato, dai controlli e dal tempo in ogni punto della traiettoria
- Se $\varphi = 0 \rightarrow \text{Formulazione di Lagrange}$
- Se $\Phi = 0 \rightarrow \text{Formulazione di Mayer}$

Si applica il *Metodo dei Moltiplicatori di Lagrange* che permette di riscrivere il funzionale J in modo che contenga sia le condizioni al contorno, mediante le costanti μ , che le leggi di evoluzione, mediante le adjoint variables λ . Si ottiene:

$$J^* = \varphi + \mu^T \chi + \sum_j \int_{t_{(j-1)+}}^{t_{j-}} (\Phi + \lambda^T (f - \dot{x})) \cdot dt \quad (\text{Eq. 5. 7})$$

Sia il funzionale J che J^* dipendono dal tempo, dai controlli, dalle variabili di stato e dai valori assunti sia dal tempo che dalle variabili di stato negli estremi di ogni sottointervallo. Nel caso in

cui vengano soddisfatte sia le equazioni al contorno (Eq. 5.5) che le equazioni di stato (Eq. 5.2), il funzionale J^* assumerebbe la stessa espressione del funzionale J (Eq. 5.6).

Integrando per parti J^* in modo da eliminare la dipendenza esplicita dalle derivate prime delle variabili di stato, cioè da \dot{x} , si trova:

$$J^* = \varphi + \mu^T \chi + \sum_j (\lambda_{(j-1)+}^T x_{(j-1)+} - \lambda_{j-}^T x_{j-}) + \sum_j \int_{t_{(j-1)+}}^{t_{j-}} (\Phi + \lambda^T f - \dot{\lambda}^T x) \cdot dt \quad \text{con } j = 1:n \quad (\text{Eq. 5.8})$$

Per ottenere la variazione prima del funzionale, cioè δJ^* si procede differenziando l'equazione (Eq. 5.8). Inoltre, si è sostituita la definizione di Hamiltoniano del sistema, H :

$$H = \Phi + \lambda^T f \quad (\text{Eq. 5.9})$$

In questo modo si è ottenuto:

$$\begin{aligned} \delta J^* = & \left(-H_{(j-1)+} + \frac{\delta \varphi}{\delta t_{(j-1)+}} + \mu^T \frac{\delta \chi}{\delta t_{(j-1)+}} \right) \cdot \delta t_{(j-1)+} + \left(H_{j-} + \frac{\delta \varphi}{\delta t_{j-}} + \mu^T \frac{\delta \chi}{\delta t_{j-}} \right) \cdot \delta t_{j-} + \\ & + \left(\lambda_{(j-1)+}^T + \frac{\delta \varphi}{\delta x_{(j-1)+}} + \mu^T \left[\frac{\delta \chi}{\delta x_{(j-1)+}} \right] \right) \delta x_{(j-1)+} + \left(\lambda_{j-}^T + \frac{\delta \varphi}{\delta x_{j-}} + \mu^T \left[\frac{\delta \chi}{\delta x_{j-}} \right] \right) \delta x_{j-} + \\ & + \sum_j \int_{t_{(j-1)+}}^{t_{j-}} \left(\left(\frac{\delta H}{\delta x} + \dot{\lambda}^T \right) \delta x + \frac{\delta H}{\delta u} \delta u \right) \cdot dt \quad \text{con } j = 1:n \end{aligned} \quad (\text{Eq. 5.10})$$

Nell'espressione (Eq. 5.10) la convenzione $[\dots]$ indica la definizione di una matrice.

Si impone la stazionarietà del funzionale, in quanto è una condizione necessaria affinché la funzione costo sia minimizzata o sia massimizzato l'indice di performance, per cui, per ricercare la soluzione di ottimo si deve annullare la variazione prima del funzionale:

$$\delta J^* = 0 \rightarrow \text{Massimizzazione o Minimizzazione di } J \quad (\text{Eq. 5.11})$$

Questa operazione deve essere valida per qualsiasi scelta di δx , $\delta x_{(j-1)+}$, δx_{j-} , $\delta t_{(j-1)+}$, δt_{j-} , δu che risultino compatibili con le equazioni al contorno (Eq. 5.5) e le equazioni di governo (Eq. 5.2), per cui si ottiene:

$$\sum_j \int_{t_{(j-1)+}}^{t_{j-}} \left(\left(\frac{\delta H}{\delta x} + \lambda^T \right) \delta x + \frac{\delta H}{\delta u} \delta u \right) \cdot dt = 0 \quad \text{con } j = 1:n \quad (\text{Eq. 5. 12})$$

L'espressione (Eq. 5.12) risulta identicamente soddisfatta se e soltanto se i coefficienti dei termini δx e δu risultino uguali a zero in ogni punto della traiettoria. In questo modo si ottengono:

$$\begin{cases} \frac{d\lambda}{dt} = - \left(\frac{\delta H}{\delta x} \right)^T & \text{Equazioni di Eulero - Lagrange} & (\text{Eq. 5. 13}) \\ \left(\frac{\delta H}{\delta u} \right)^T = 0 & \text{Equazioni Algebriche per i controlli} & (\text{Eq. 5. 14}) \end{cases}$$

Si può notare come le leggi di controllo non risentano della scelta di minimizzare o massimizzare il funzionale, per cui sono formalmente indipendenti da questa selezione.

Si definisce un *dominio di ammissibilità* per un particolare controllo, nel caso in cui esso sia soggetto ad un determinato constraint: per esempio, è il caso della thrust di un propulsore che può variare da 0 sino alla condizione di T_{max} , oppure in un cluster di thrusters per il controllo di assetto, dove il valore di coppia fornito è limitato da M_{min} e M_{max} , o ancora, la presenza di un limite superiore per il coefficiente di portanza, cioè C_{Lmax} . Nella trattazione non verranno studiati i casi in cui il vincolo del controllo sia dipendente dal tempo oppure dalle variabili di stato, ma solamente nel caso in cui esso sia costante ed esplicito, come negli esempi forniti.

Il Principio di Massimo di Pontryagin afferma che il valore del controllo ottimale, appartenente al dominio di ammissibilità, in ogni punto della traiettoria rende massimo (o minimo) l'Hamiltoniano H, in modo da massimizzare (o minimizzare) il funzionale J.

Di conseguenza:

- $x^*(t), \lambda^*(t)$ sono i valori delle variabili di stato e delle adjoint variables che rendono massimo (o minimo) il funzionale J
- $\Omega =$ dominio di ammissibilità per il controllo
- $u^*(t)$ è il valore del controllo ottimale

Ipotizzando di voler massimizzare l'indice di performance, se $u^*(t) \in \Omega$, cioè il valore del controllo ottimale è un controllo ammissibile, allora si trova che:

$$H(t, x^*(t), \lambda^*(t), u^*(t)) \geq H(t, x^*(t), \lambda^*(t), u(t)) \quad \forall u(t) \in \Omega \quad (\text{Eq. 5. 15})$$

Nel caso, invece di minimizzazione della funzione costo, avrei ottenuto:

$$H(t, x^*(t), \lambda^*(t), u^*(t)) \leq H(t, x^*(t), \lambda^*(t), u(t)) \quad \forall u(t) \in \Omega \quad (\text{Eq. 5. 16})$$

Risolvendo le equazioni algebriche per i controlli (Eq. 5. 14), si delineano due casistiche:

- *Controllo “vincolato”* dove la soluzione non rientra nel dominio di ammissibilità, per cui il valore ottimale è agli estremi di Ω , cioè il controllo assume il valore massimo o minimo
- *Controllo “non vincolato”* dove la soluzione è un controllo ammissibile e quindi il vincolo non interviene nel punto considerato

Risulta evidente che, nel caso in cui l’Hamiltoniano risulti essere lineare rispetto al controllo soggetto a constraint, se si applicasse l’equazione (Eq. 5. 14), il controllo non potrebbe essere determinato, in quanto, in seguito all’operazione di derivata dell’Hamiltoniano, esso scomparirebbe dall’equazione risultante.

In questa casistica, il funzionale può essere ancora massimizzato (o minimizzato), tuttavia, possono presentarsi due possibili situazioni:

- Se il coefficiente del controllo, Ψ , che compare nell’Hamiltoniano è diverso da zero, allora il valore di controllo ottimale è ottenuto mediante il *Bang-Bang Control*:

1) *Bang-Bang Control per massimizzare J*:

$$\begin{cases} \Psi > 0 \rightarrow u^*(t) = u_{max} \\ \Psi < 0 \rightarrow u^*(t) = u_{min} \end{cases} \quad (\text{Eq. 5. 17})$$

2) *Bang-Bang Control per minimizzare J*:

$$\begin{cases} \Psi < 0 \rightarrow u^*(t) = u_{max} \\ \Psi > 0 \rightarrow u^*(t) = u_{min} \end{cases} \quad (\text{Eq. 5. 18})$$

- Se il coefficiente del controllo, Ψ , che compare nell’Hamiltoniano risulta essere nullo in un certo intervallo di tempo, detto *arco singolare*, la ricerca del controllo ottimale avviene imponendo tutte le derivate successive di Ψ fatte rispetto al tempo uguali a zero, finché non compare in modo esplicito il controllo; per cui, il valore del controllo ottimale è ottenuto imponendo tale derivata k-esima uguale a zero. In problemi di questo tipo l’ordine di derivazione k-esimo risulta essere pari. Si definisce l’ordine dell’arco singolare come $k/2$.

Le equazioni di Eulero-Lagrange (Eq 5.13) introducono un sistema di equazioni differenziali che devono essere risolte in simultanea con le equazioni di governo (Eq. 5.2). La stazionarietà del funzionale introduce quindi delle ulteriori condizioni al contorno: esse possono essere ricavate riferendosi al j -esimo contorno, scrivendo per questo le condizioni che derivano dal considerarlo come estremo finale del $(j - 1)$ esimo sottointervallo o come estremo iniziale del $j -$ esimo sottointervallo, annullando i coefficienti dei termini $\delta x_{j-}, \delta x_{j+}, \delta t_{j-}, \delta t_{j+}$ presenti nella variazione prima del funzionale (Eq. 5.10). In questo modo si ottiene:

$$\left(\lambda_{j-}^T + \frac{\delta \varphi}{\delta x_{j-}} + \mu^T \left[\frac{\delta \chi}{\delta x_{j-}} \right] \right) = 0 \quad \text{con } j = 1:n \quad (\text{Eq. 5. 19})$$

$$\left(\lambda_{j+}^T + \frac{\delta \varphi}{\delta x_{j+}} + \mu^T \left[\frac{\delta \chi}{\delta x_{j+}} \right] \right) = 0 \quad \text{con } j = 0:n - 1 \quad (\text{Eq. 5. 20})$$

$$\left(H_{j-} + \frac{\delta \varphi}{\delta t_{j-}} + \mu^T \frac{\delta \chi}{\delta t_{j-}} \right) = 0 \quad \text{con } j = 1:n \quad (\text{Eq. 5. 21})$$

$$\left(H_{j+} + \frac{\delta \varphi}{\delta t_{j+}} + \mu^T \frac{\delta \chi}{\delta t_{j+}} \right) = 0 \quad \text{con } j = 0:n - 1 \quad (\text{Eq. 5. 22})$$

Nel caso in cui nel punto j , cioè nel punto di giunzione fra due sottointervalli, fosse presente una discontinuità, la distinzione tra j_+ e j_- permetterebbe di tenere conto di tale effetto. Si può notare come (Eq.5.19) e (Eq. 5.21) non siano definite nell'istante iniziale, cioè in $j = 0$, mentre (Eq.5. 20) e (Eq 5.22) risultano prive di significato al termine della traiettoria, cioè in $j = n$.

Le condizioni al contorno di ottimo sono ottenute andando ad eliminare le costanti aggiuntive μ^T nelle equazioni (Eq. 5.19), (Eq. 5.20), (Eq. 5.21) e (Eq. 5.22). In forma compatta si può scrivere:

$$\sigma(x_{(j-1)+}, x_{j-}, \lambda_{(j-1)+}, \lambda_{j-}, t_{(j-1)+}, t_{j-}) = 0 \quad (\text{Eq. 5. 23})$$

Prendendo in considerazione una certa variabile di stato x sottoposta a determinate condizioni al contorno, dalle equazioni (Eq. 5.19) e (Eq.5 20) si potrebbero dedurre delle particolari condizioni al contorno di ottimo per la corrispondente adjoint variable λ_x , cioè:

- $x_0 - a = 0 \rightarrow$ la variabile di stato x è assegnata esplicitamente nell'istante iniziale t_0 , per cui la corrispondente adjoint variable in t_0 , risulta "libera" $\rightarrow \lambda_{x0}$ "Free". Un analogo ragionamento sarebbe valido se la variabile di stato fosse assegnata nell'istante finale t_f .

- Se x_0 non compare né in φ né in χ , cioè la variabile di stato non è assegnata nell'istante iniziale e non compare nel costo di Mayer, la corrispondente adjoint variable in t_0 , risulta essere nulla, $\lambda_{x_0} = 0$. Un analogo ragionamento sarebbe valido nell'istante finale t_f .
- $x_{j+} = x_{j-} \rightarrow$ la variabile di stato x è continua nel punto interno j -esimo, per cui anche la corrispondente adjoint variable è continua nel contorno interno $\rightarrow \lambda_{x_{j+}} = \lambda_{x_{j-}}$
- $x_{j+} = x_{j-} = a \rightarrow$ la variabile di stato x è esplicitamente assegnata in un punto interno, per cui la corrispondente adjoint variable presenta una discontinuità “libera” nel j -esimo contorno interno, cioè il valore di $\lambda_{x_{j-}}$ è indipendente da quello di $\lambda_{x_{j+}}$; il valore di quest'ultimo sarà ottenuto dal processo di ottimizzazione.

Se l'Hamiltoniano non dipende esplicitamente dal tempo, le equazioni (Eq. 5.21) e (Eq. 5.22) permettono di ottenere delle particolari condizioni al contorno, cioè:

- Se t_0 non compare né in φ né in χ , cioè l'istante iniziale non è presente esplicitamente nelle condizioni al contorno, né tantomeno nel costo di Mayer, allora, l'Hamiltoniano risulterà nullo in $t_0 \rightarrow H_0 = 0$. Un analogo ragionamento è valido considerando l'istante finale t_f .
- Se t_j non compare in φ , cioè l'istante intermedio j -esimo non compare nel costo di Mayer, ma compare nelle equazioni al contorno a causa della continuità del tempo, cioè $t_{j+} = t_{j-}$, allora l'Hamiltoniano sarà continuo nel contorno interno $\rightarrow H_{j+} = H_{j-}$
- $t_{j+} = t_{j-} = a \rightarrow$ il tempo intermedio t_j è esplicitamente assegnato, per cui l'Hamiltoniano presenta una discontinuità “libera” nel j -esimo contorno interno, cioè il valore di $H_{t_{j-}}$ è indipendente da quello di $H_{t_{j+}}$; il valore di quest'ultimo sarà ottenuto dal processo di ottimizzazione.

Riassumendo, il problema si riduce nel risolvere un sistema di equazioni differenziali composto dalle equazioni di governo (Eq. 5.2) e dalle equazioni di Eulero-Lagrange (Eq. 5.13), con condizioni al contorno assegnate (Eq. 5.5) e di ottimo (Eq. 5.23), ricavando opportunamente il valore del controllo ottimale al fine di soddisfare il *Principio di Massimo di Pontryagin* [22, 23, 25, 26, 27, 28, 34, 35].

5.4 *Metodi Numerici Per l'Ottimizzazione*

Nel paragrafo 5.1 si è constatato come la soluzione di un problema di ottimizzazione sia ottenuta mediante metodi numerici, a causa della complessità che caratterizza i problemi reali. Tale approccio è stato favorito dallo sviluppo tecnologico e dalla crescente potenza di calcolo degli elaboratori che ha permesso di risolvere in tempi relativamente brevi, problemi ad alto costo computazionale. In genere, i metodi numerici possono essere raggruppati in tre classi principali differenti: Direct Methods, Indirect Methods ed Evolutionary Algorithms, i quali sono caratterizzati sia da punti di forza peculiari, che da svantaggi da tenere conto. In quest'ottica si inseriscono gli Hybrid Method, che cercano di integrare i vantaggi dei metodi diretti con quelli dei metodi indiretti andando a mitigare le limitatezze dei due approcci.

Nei sotto-paragrafi successivi verrà riportata una panoramica sui vari metodi, mettendo in luce sia i pro che i contro annessi nella scelta di un certo metodo risolutivo.

Nel seguente lavoro di tesi si selezionerà e svilupperà un Indirect Method per la risoluzione del problema di controllo ottimale [22, 23, 24, 31, 32, 33, 35].

5.4.1 Direct Method

I metodi diretti prevedono una conversione del problema del controllo ottimale analizzato nel paragrafo 5.3 in un problema di ottimizzazione non lineare a parametri finiti che verrà poi risolto con tecniche di *Non-Linear Programming* (NLP). Lo scopo della programmazione non-lineare consiste nel ricercare un numero finito di parametri in modo da massimizzare o minimizzare una certa funzione obiettivo senza violare una serie di constraints. Per fare ciò, bisogna quindi convertire un problema infinito dimensionale in un'approssimazione finita dimensionale.

Riassumendo, i passi fondamentali da seguire per l'implementazione dei metodi diretti sono:

1. Convertire il sistema dinamico in un problema con numero finito di parametri.
2. Risolvere il problema non lineare a parametri finiti con tecniche NLP.
3. Valutare l'accuratezza dell'approssimazione usata per generare il problema finito dimensionale, se questa risulti insufficiente ripetere il punto 1) e 2) [31, 32, 33, 35].

I metodi diretti nel ricercare il valore di x^* che minimizzi una certa funzione obiettivo, è come se costruissero una sequenza di punti x_1, x_2, \dots, x^* , tale che $F(x_1) > F(x_2) > \dots > F(x^*)$, per cui in linea di principio, tali metodi devono solamente comparare i valori assunti della funzione costo, pur soddisfacendo i vincoli del problema. Il vantaggio dei metodi diretti consiste nel non dover derivare le equazioni di Eulero-Lagrange per le adjoint variables, le equazioni algebriche per i controlli o costruire le condizioni al contorno di ottimo. Questo permette a tali metodi di avere sia un notevole grado di indipendenza dal background teorico dall'utente che sta implementando il metodo diretto, in quanto non deve ricavare analiticamente le espressioni dell'Hamiltoniano, né tantomeno le sue derivate, che di flessibilità, in quanto una modifica del problema indurrebbe ad una nuova formulazione teorica. Inoltre, tali metodi non sono soggetti al mal condizionamento indotto dalla ricerca dei valori di tentativo delle adjoint variables, che essendo variabili senza una connotazione fisica, non risultano essere facilmente prevedibili. Lo svantaggio principale di tali metodi riguarda l'elevato costo computazionale causato dalla fitta mesh della traiettoria, che genera un elevato numero di parametri. I tempi di calcolo possono risultare notevolmente lunghi se non sono eseguiti con un'opportuna potenza di calcolo. Infine, come evidenziato nel caso della missione Apollo, seppur i risultati presentino una convergenza ad errori relativi sui constraint minimi, le soluzioni possono essere diverse dai dati reali, rendendo il metodo talvolta impreciso [31, 32, 33, 35, 36, 37].

5.4.2 Evolutionary Algorithms

Gli Evolutionary Algorithms fanno parte dei cosiddetti *heuristic optimization method*, cioè di metodi risolutivi che si basano su un approccio stocastico piuttosto che su una formulazione di tipo deterministica. Essi sono ispirati ai processi di genetica evolutiva per l'individuazione della soluzione al problema di controllo ottimale. Un tipico approccio si basa sugli algoritmi genetici (GA): inizialmente il codice genera casualmente un insieme di soluzioni possibili al problema considerato, dove ognuna di esse è caratterizzata da una certa qualità che è valutata mediante una *function fitness*. In analogia con i processi biologici, è come se per ogni cromosoma, ci sia un particolare gene che conferisce una certa caratteristica peculiare. In natura, i geni possono dar luogo a mutazioni, modificando quindi sia il genotipo che la manifestazione fenotipica, in altri termini, il tratto distintivo associato a quel gene può modificarsi, evolversi. Gli algoritmi evolutivisti ricombinano le soluzioni tramite un meccanismo di crossover, generando così ulteriori popolazioni. Tale processo è iterato di modo da costituire generazioni di popolazioni di soluzioni, dove,

l'individuazione, mediante la *function fitness*, della caratteristica sopravvissuta dalle popolazioni originarie, permetterà di selezionare la migliore soluzione per il problema del controllo ottimale. Di conseguenza, l'algoritmo ha simulato sia l'evoluzione di una popolazione che il processo di selezione, ispirandosi di fatto ai modelli evolutivi biologico-darwiniani [31, 32, 33, 36, 37].

5.4.3 Indirect Method

I metodi indiretti, a differenza dei metodi diretti, prevedono l'applicazione della teoria del controllo ottimale nella formulazione continua esposta nel Paragrafo 5.3, per cui il problema si riduce nel risolvere un sistema di equazioni differenziali composto dalle equazioni del sistema dinamico (Eq. 5.2) e dalle equazioni di Eulero-Lagrange (Eq. 5.13), con condizioni al contorno assegnate (Eq. 5.5) e di ottimo (Eq. 5.23). Si ricava opportunamente il valore del controllo ottimale al fine di soddisfare il Principio di Massimo di Pontryagin, di modo da minimizzare una certa funzione costo o massimizzare un certo indice di performance. La teoria del controllo ottimale genera così il cosiddetto *Boundary Value Problem* (BVP), cioè in un problema differenziale ai limiti. La soluzione al BVP prevede l'individuazione del valore delle variabili iniziali in modo da permettere di integrare numericamente il sistema di equazioni differenziali e di soddisfare sia le condizioni al contorno imposte che di ottimo.

Il numero di parametri usati per trovare la traiettoria ottimale con i metodi indiretti risulta limitato se comparati con quello dei metodi diretti, per cui si osserva una riduzione dei tempi di calcolo, nonché del costo computazionale del problema numerico. In aggiunta, i metodi indiretti permettono di ottenere un'elevata precisione numerica rispetto ai metodi diretti. Tuttavia, i metodi indiretti prevedono una formulazione teorica notevole rispetto ai direct method, per cui, dipendono fortemente dalle conoscenze teoriche dell'utente che sta implementando il problema. Inoltre, gli indirect method presentano una scarsa robustezza: le variazioni del problema originario possono determinare dei cambiamenti nella formulazione matematica, inducendo una revisione della parte teorica da parte dell'utente, prima di poter implementare nuovamente l'algoritmo. Ulteriori svantaggi sono rappresentati dalla sensibilità dei metodi indiretti rispetto ai dati iniziali, determinando problemi di convergenza alla soluzione ottimale e dal bisogno di controllare lungo la traiettoria la presenza di eventuali discontinuità nelle variabili.

La scelta di utilizzare un metodo indiretto per risolvere il BVP deriva da un approccio accademico, che mira ad un percorso di ricerca di traiettorie ottimali per atterraggi lunari, facendo perdere di

significato i dubbi connessi alla complessità teorica e alla robustezza del metodo. Inoltre, la limitatezza dei parametri e l'elevata precisione numerica permettono l'implementazione di algoritmi ad alto livello di affidabilità su elaboratori commerciali [31, 32, 33, 35, 36, 37].

Il metodo di risoluzione del Boundary Value Problem sarà trattato nel dettaglio nel Paragrafo 5.5.

5.4.4 Hybrid Method

L'idea dei metodi ibridi nasce dal voler combinare i vantaggi dei metodi diretti con quelli dei metodi indiretti, in modo da generare un metodo ad alta affidabilità, con elevata precisione numerica e con buone capacità di convergenza, riducendo la sensibilità dai dati iniziali. Tuttavia, non sono risolte le problematiche connesse alla scarsa robustezza dei metodi indiretti, fortemente dipendenti dalla formulazione analitica del problema, nonché, per lo stesso motivo dipendenti dal background teorico dell'utente. Di conseguenza, il vantaggio implementativo dei metodi diretti è parzialmente vanificato, in quanto bisognerebbe necessariamente definire sia le Equazioni di Eulero-Lagrange per le adjoint variables che le Equazioni Algebriche per i controlli. La stima dei valori iniziali delle variabili aggiuntive, di problematica individuazione per i metodi indiretti, è ricavata in modo affidabile dai moltiplicatori di Lagrange introdotti nella definizione di un problema NLP [31, 32, 33, 36, 37].

5.5 *Boundary Value Problem (BVP)*

Nel seguente paragrafo si affronta il metodo di risoluzione del problema differenziale ai limiti (BVP), nonché la riformulazione del problema di controllo ottimale in modo da potersi adattare alle caratteristiche del metodo introdotto. Considerando il problema di ottimo discusso nel Paragrafo 5.3, si possono individuare alcune peculiarità:

- L'intervallo di integrazione è discretizzato in sotto-intervalli nei quali le espressioni delle equazioni differenziali possono risultare differenti
- Le durate dei sotto-intervalli potrebbero essere incognite
- Le condizioni al contorno, in genere, sono non-lineari e possono coinvolgere i valori delle variabili sia nei contorni interni che esterni
- Le variabili possono presentare delle discontinuità nei contorni interni, per cui il valore della variabile dopo la discontinuità può essere ignoto

Si riduce il Boundary Value Problem a una successione di problemi ai valori iniziali, la soluzione arriva a convergenza secondo il metodo di Newton.

Si è osservato come la durata dei sotto-intervalli può essere un'ulteriore incognita del BVP, per cui ai fini dell'integrazione numerica, si effettua un cambio di variabile, passando dalla variabile indipendente t alla variabile ε definita nel j -esimo contorno $\mathcal{D}^j = [t_{j-1}; t_j]$:

$$\varepsilon = j - 1 + \frac{t - t_{j-1}}{t_j - t_{j-1}} \quad \text{con } j = 1:n \quad (\text{Eq. 5. 41})$$

La durata del j -esimo contorno è definita come:

$$\tau_j = t_j - t_{j-1} \quad \text{con } j = 1:n \quad (\text{Eq. 5. 42})$$

Per cui, sostituendo (Eq 5.42) nella (Eq 5.41) si ottiene:

$$\varepsilon = j - 1 + \frac{t - t_{j-1}}{\tau_j} \quad \text{con } j = 1:n \quad (\text{Eq. 5. 43})$$

L'introduzione dei parametri incogniti τ_j e della nuova variabile indipendente ε , hanno permesso di fissare i contorni interni ed esterni, che risultano essere valori interi consecutivi di ε .

Formalmente, per la descrizione del metodo, si consideri un generico sistema formato dalle equazioni di stato (Eq. 5.2) e dalle equazioni differenziali di Eulero-Lagrange (Eq. 5.13), in cui i controlli sono ottenuti mediante l'equazione algebrica dei controlli (Eq. 5.14). In questo modo si definisce una nuova variabile di stato y che permette di non distinguere più le state variables x dalle adjoint variables λ , cioè:

$$y(t) = (x(t), \lambda(t)) \quad (\text{Eq. 5. 44})$$

Il problema dinamico nella nuova variabile di stato diventa:

$$\frac{dy(t)}{dt} = y(t) = f^*(y(t), t) \quad (\text{Eq. 5. 45})$$

Si introduce:

1. c = vettore dei parametri costanti, contenente tutte le grandezze incognite non variabili nel tempo, come le durate dei sotto-intervalli τ_j o i valori delle variabili dopo una discontinuità

Per cui, è possibile definire un nuovo vettore time-dependent contenente sia variabili di stato, sia adjoint variables che i parametri costanti, cioè:

$$z(t) = (y(t), c) \tag{Eq. 5. 46}$$

Introducendo il cambio di variabile indipendente $t \rightarrow \varepsilon$ nella definizione del vettore z :

$$z(\varepsilon) = (y(\varepsilon), c) \tag{Eq. 5. 47}$$

L'equazione di stato (Eq 5.45) nel nuovo vettore $z(\varepsilon)$ assume la forma:

$$\frac{dz(\varepsilon)}{d\varepsilon} = f(z(\varepsilon), \varepsilon) \tag{Eq. 5. 48}$$

Il secondo membro dell'equazione (Eq 5.48), si ottiene derivando rispetto a ε la (Eq. 5.47):

$$\frac{dz(\varepsilon)}{d\varepsilon} = \left(\frac{dy(\varepsilon)}{d\varepsilon}, \frac{dc}{d\varepsilon} \right) \tag{Eq. 5. 49}$$

Si ricorda che il vettore dei parametri costanti non dipende dal tempo, né tantomeno da ε , per cui:

$$\frac{dc}{d\varepsilon} = 0 \tag{Eq. 5. 50}$$

Ricordando la regola di derivazione a catena, cioè:

$$\frac{d}{d\varepsilon}(\dots) = \frac{d\varepsilon}{dt} \frac{d}{dt}(\dots) \tag{Eq. 5. 51}$$

E ricordando che derivando l'espressione (Eq. 5.43) rispetto al tempo:

$$\frac{d\varepsilon}{dt} = \frac{1}{\tau_j} \quad \text{con } j = 1:n \tag{Eq. 5. 52}$$

Si può ricavare la derivata fatta rispetto ad ε della variabile di stato y , come:

$$\frac{dy(\varepsilon)}{d\varepsilon} = \frac{dt}{d\varepsilon} \frac{dy(t)}{dt} = \tau_j \frac{dy(t)}{dt} \tag{Eq. 5. 53}$$

Riassumendo la formulazione del problema risulta essere:

$$\frac{dz(\varepsilon)}{d\varepsilon} = \left(\tau_j \frac{dy(t)}{dt}, 0 \right) \tag{Eq. 5. 54}$$

Le condizioni al contorno non fanno distinzione fra condizioni al contorno assegnate e di ottimo, e vengono in genere espresse come:

$$\Psi(s) = 0 \quad (\text{Eq. 5. 55})$$

Il vettore s che compare nelle equazioni al contorno (Eq. 5.55) contiene il valore delle variabili y in ogni contorno, sia esterno che interno, e il vettore dei parametri costanti:

$$s = (y_0, y_1 \dots y_\varepsilon \dots y_n, c) \quad \forall \varepsilon = 0: n \quad (\text{Eq. 5. 56})$$

In generale, i valori iniziali delle variabili, $z(0)$, sono incogniti, per cui lo scopo dell'algoritmo risolutivo è finalizzato alla ricerca di tali valori, in modo che essi possano soddisfare le condizioni al contorno, cioè l'equazione (Eq 5.55).

Nella trattazione si farà riferimento all'apice r per indicare il generico step di integrazione dell'algoritmo risolutivo, mentre p^r indica il vettore dei valori iniziale alla r -esima iterazione.

Il funzionamento del software si basa su alcuni passaggi chiave:

1. $r = 1 \rightarrow z(0) = p^1 \rightarrow$ il processo è alla sua prima iterazione, risulta necessario fornire opportunamente dei valori di tentativo per le variabili del vettore p^1
2. Integrazione delle equazioni su tutta la traiettoria, tenendo conto anche delle discontinuità nei contorni interni
3. Correzione del vettore dei valori iniziali p^1 , in modo da cercare di annullare l'errore ψ^1 sulle condizioni al contorno $\rightarrow p^2$
4. $r = 2 \rightarrow z(0) = p^2 \rightarrow$ secondo step di integrazione
5. Si ripete per $m - volte$ il punto 2. e 3., correggendo di volta in volta il vettore dei valori iniziali $p^r \rightarrow p^{r+1}$ che diventerà il nuovo $z(0)$ al passo successivo.
6. Il processo termina a causa del soddisfacimento di un certo livello di precisione sull'errore ψ^m commesso nelle condizioni al contorno

Nella generica iterazione r -esima, in seguito all'integrazione delle equazioni della traiettoria, si trova l'errore sulle condizioni al contorno, cioè:

$$z(0) = p^r \rightarrow \text{Integrazione Numerica} \rightarrow \psi^r$$

La correzione del vettore dei valori iniziali p^r di una quantità Δp , determina:

$$p^{r+1} = p^r + \Delta p \quad (\text{Eq. 5. 57})$$

Si può osservare come la variazione sul vettore dei valori iniziali Δp comporti una variazione dell'errore commesso sulle condizioni al contorno $\Delta\Psi$, che, tenendo conto solamente dei termini del primo ordine, risulta essere pari a:

$$\Delta\Psi = \left[\frac{\delta\Psi}{\delta p} \right] \Delta p \quad (\text{Eq. 5. 58})$$

Per cui, l'errore sulle condizioni al contorno commesso al passo successivo sarà:

$$\Psi^{r+1} = \Psi^r + \Delta\Psi \quad (\text{Eq. 5. 59})$$

Ricordando che l'obiettivo dell'algoritmo risolutivo è soddisfare le equazioni al contorno, cioè verificare l'equazione (Eq. 5.55), allora l'errore commesso al passo $r + 1$ deve annullarsi:

$$\Psi^{r+1} = 0 \quad (\text{Eq. 5. 60})$$

Sostituendo l'espressione della (Eq. 5.58) nella (Eq. 5.60), si ottiene:

$$\Psi^r = - \left[\frac{\delta\Psi}{\delta p} \right] \Delta p \quad (\text{Eq. 5. 61})$$

Invertendo l'equazione (Eq. 5.61), si trova la correzione da applicare al generico passo di integrazione r-esimo per annullare l'errore al contorno:

$$\Delta p = - \left[\frac{\delta\Psi}{\delta p} \right]^{-1} \Psi^r \quad (\text{Eq. 5. 62})$$

Il processo iterativo terminerà quando l'errore commesso sulle condizioni al contorno al passo m-esimo ψ^m avrà raggiunto la precisione voluta.

La matrice che compare nell'equazione (Eq. 5.62) è calcolata come prodotto di matrici:

$$\left[\frac{\delta\Psi}{\delta p} \right] = \left[\frac{\delta\Psi}{\delta s} \right] \left[\frac{\delta s}{\delta p} \right] \quad (\text{Eq. 5. 63})$$

La prima matrice $\left[\frac{\delta\Psi}{\delta s} \right]$ può essere facilmente ottenuta, cioè derivando semplicemente le condizioni al contorno $\Psi(s)$ rispetto alle grandezze da cui dipende. La seconda invece, contiene le derivate dei valori delle variabili in ogni contorno, sia esterno che interno, rispetto ai valori iniziali, cioè i valori assunti dalla seguente matrice ai contorni $\varepsilon = 0:n$:

$$\left[\frac{\delta z(\varepsilon)}{\delta p} \right] = [g(\varepsilon)] \quad (\text{Eq. 5.64})$$

Derivando rispetto ad ε l'espressione (Eq. 5.64) e invertendo gli operatori di derivazione si ottiene:

$$[g(\dot{\varepsilon})] = \frac{d[g(\varepsilon)]}{d\varepsilon} = \frac{d}{d\varepsilon} \left[\frac{\delta z(\varepsilon)}{\delta p} \right] = \left[\frac{\delta}{\delta p} \left(\frac{dz(\varepsilon)}{d\varepsilon} \right) \right] \quad (\text{Eq. 5.65})$$

Sostituendo nella (Eq. 5.65) l'equazione di stato (Eq 5.48) descritta in funzione di $z(\varepsilon)$, è possibile ricavare $[g(\dot{\varepsilon})]$ come:

$$[g(\dot{\varepsilon})] = \left[\frac{\delta f(z(\varepsilon), \varepsilon)}{\delta p} \right] \quad (\text{Eq. 5.66})$$

Si ricordi che la regola di derivazione a catena:

$$\frac{d}{dp}(\dots) = \frac{dz}{dp} \frac{d}{dz}(\dots) \quad (\text{Eq. 5.67})$$

Applicando la regola dell'equazione (Eq. 5.67) all'espressione della (Eq. 5.66), si trova:

$$[g(\dot{\varepsilon})] = \left[\frac{\delta f(z(\varepsilon), \varepsilon)}{\delta z(\varepsilon)} \right] \left[\frac{\delta z(\varepsilon)}{\delta p} \right] \quad (\text{Eq. 5.68})$$

In ultima istanza, si può sostituire la definizione di $[g(\varepsilon)]$ descritta dalla (Eq. 5.64) nell'equazione (Eq 5.68), la quale assumerà la forma:

$$[g(\dot{\varepsilon})] = \left[\frac{\delta f(z(\varepsilon), \varepsilon)}{\delta z(\varepsilon)} \right] [g(\varepsilon)] \quad (\text{Eq. 5.68})$$

Nella trattazione effettuata, si è omesso una caratteristica peculiare dei metodi di ottimizzazione indiretta, cioè le proprietà di simmetria di alcuni termini dello Jacobiano del sistema principale.

Le condizioni iniziale all'equazione differenziale (Eq. 5.68) risulta essere la matrice identità, a causa della definizione del vettore p , cioè:

$$[g(0)] = \left[\frac{\delta z(0)}{\delta p} \right] = [I] \quad (\text{Eq. 5.69})$$

Riassumendo, l'espressione (Eq. 5.68) introduce un sistema differenziale omogeneo, con condizioni iniziali (Eq. 5.69), che permette di ricavare $[g(\varepsilon)]$ e dunque, la seconda matrice dell'espressione (Eq. 5.63). In questo modo è definita univocamente l'espressione (Eq 5.63), cioè

la matrice delle condizioni al contorno derivate rispetto ai valori iniziali. Di conseguenza, il termine di correzione Δp risulta essere determinato: il vettore dei valori iniziali al passo successivo p^{r+1} cercherà di minimizzare l'errore sulle condizioni al contorno, in modo da soddisfare l'equazione (Eq. 5.60).

Il metodo usato per ricavare $[g(\varepsilon)]$ permette di trattare anche il caso in cui fossero presenti delle discontinuità nelle variabili. Ipotizzando che nel contorno i -esimo sia presente una discontinuità, il metodo risulta ancora valido: è sufficiente aggiornare sia il vettore delle variabili z che l'espressione della matrice g , attraverso una relazione h che mette in connessione i valori delle variabili subito prima e dopo la discontinuità, per cui matematicamente risulta:

$$z_{i+} = h(z_{i-}) \quad (\text{Eq. 5.70})$$

$$[g_{i+}] = \left[\frac{\delta h}{\delta z} \right] (g_{i-}) \quad (\text{Eq. 5.71})$$

Questo spiega perché nel vettore s non si sia fatta distinzione fra y_{i+} ed y_{i-} , in quanto è possibile legare i due valori mediante la relazione h , come espresso nell'equazione (Eq. 5.70).

Un caso semplificato deriva nel caso in cui nel problema il valore di alcuni valori iniziali sia noto, per cui il vettore p presenta solamente i valori delle variabili incognite di $z(0)$ e le condizioni al contorno da soddisfare Ψ , sono solo quelle non esplicitamente definite al tempo iniziale.

Un metodo alternativo per la valutazione della matrice presente nell'equazione (Eq. 5.62) consiste in una stima numerica: l' i -esima riga della matrice è ottenuta variando di un Δp piccolo l' i -esima componente di p , mantenendo fisse le altre e integrando le equazioni di governo (Eq. 5.48). In questo modo, si possono valutare le variazioni delle condizioni al contorno in funzione della correzione introdotta, cioè $\Delta\Psi(\Delta p)$, per cui, linearizzando si può ottenere la riga corrispondente come $\Delta\Psi^T/\Delta p$. Il metodo appena introdotto permette di ottenere una soluzione più rapida e semplice del Boundary Value Problem usando dei Δp nell'ordine di 10^{-6} e 10^{-7} . Tuttavia, i metodi indiretti sono caratterizzati da una notevole sensibilità in funzione della stima delle variabili iniziali, per cui, essendo la matrice dell'equazione (Eq. 5.62) ottenuta mediante metodo numerico, meno accurata rispetto a quella che si otterrebbe risolvendo il sistema differenziale omogeneo (Eq. 5.68), l'algoritmo potrebbe non essere in grado di garantire la convergenza alla soluzione di ottimo.

L'algoritmo implementato nel seguente lavoro di tesi non prevede una stima numerica per la matrice $[\delta\Psi/\delta s]$ e per il calcolo del Jacobiano, preferendo utilizzare la loro formulazione analitica, tuttavia, la procedura numerica è usata per verificare l'esattezza delle espressioni analitiche ricavate [22, 23, 26, 27, 28, 34, 35].

5.5.1 Caratteristiche dell'Algoritmo Risolutivo

L'algoritmo risolutivo del Boundary Value Problem per la valutazione delle traiettorie ottimali di atterraggio lunare con dinamica rotazionale, implementato per il seguente lavoro di tesi, si fonda su un codice scritto in linguaggio Fortran derivato da Gasparo, Macconi e Pasquali dell'Università di Firenze [39]. Il BVP si riduce ad una successione di problemi ai valori iniziali, come ampiamente discusso nel Paragrafo 5.5 e la soluzione arriva a convergenza secondo il metodo di Newton. L'integratore delle equazioni differenziali del sistema principale (Eq 5.48) e del sistema omogeneo (Eq 5.68) si basa su un integratore a passo e ordine variabile, derivato dalle formule di Adams, come descritto da Shampine e Gordon [38]. Le modifiche al codice di calcolo introdotte da Lorenzo Casalino, professore ordinario al Politecnico di Torino e Guido Colasurdo, professore ordinario alla Sapienza di Roma, hanno permesso di considerare la presenza di archi multipli, discontinuità nei contorni interni, condizioni al contorno non lineari, condizioni nei contorni iniziale, finale e intermedi, nonché la presenza di condizioni al contorno miste. Tale codice può essere adattato anche per altre applicazioni di traiettorie aerospaziali, come trasferimenti orbitali, manovre aeroassistite, trasferte interplanetarie modellizzate sia con l'approssimazione patched-conic che con la risoluzione del problema dei tre corpi. Il codice prevede una precisione sulle condizioni al contorno pari a 10^{-7} , cioè che l'errore massimo, E_{max} :

$$E_{max} = \max_i(\Psi_i) < 10^{-7} \quad (\text{Eq. 5.72})$$

L'equazione (Eq 5.62) si basa su una linearizzazione per il calcolo del fattore correttivo Δp , per cui l'approssimazione indotta sui valori iniziali di tentativo può compromettere la convergenza dell'algoritmo, facendo aumentare l'errore commesso sulle condizioni al contorno, invece che diminuirlo all'aumentare del numero di iterazioni. Per migliorare le caratteristiche di convergenza si è introdotto un fattore correttivo variabile, $k_1 = 0.1 \div 1$, in modo da non allontanarsi troppo dalla soluzione del passo precedente, per cui:

$$p^{r+1} = p^r + k_1 \Delta p \quad (\text{Eq. 5.73})$$

I valori del coefficiente correttivo sono valutati empiricamente in seguito alle prime prove condotte sui codici, variando in base a quanto sia lontana la soluzione ipotizzata al primo passo di integrazione rispetto a quella di ottimo.

Una volta determinato il nuovo vettore delle stime dei valori iniziali p^{r+1} , vengono integrate le equazioni del moto e si calcola l'errore massimo compiuto al nuovo step di iterazione E_{max}^{r+1} . Si confronta l'errore commesso nella $(r + 1)$ -esima iterazione con quello commesso al passo precedente:

$$E_{max}^{r+1} < k_2 E_{max}^r \quad (Eq. 5.74)$$

Se la relazione (Eq. 5.74) è soddisfatta, si valuta se la richiesta sulla precisione sulle condizioni al contorno sia soddisfatta (Eq. 5.72), nel caso in cui non lo fosse, si può procedere con il nuovo step di iterazione. Un fattore $k_2 = 2 \div 3$ permette di garantire dei buoni risultati, considerando che nelle prime iterazioni l'errore commesso sulle condizioni al contorno potrebbe aumentare per convergere alla soluzione richiesta. Nel caso in cui (Eq. 5.74) non sia soddisfatta, vuol dire che l'errore al passo $(r + 1)$ sta aumentando troppo rispetto a quello del passo r , per cui si procede con un metodo di bisezione sulla correzione Δp determinata al passo r , per cui viene aggiornato il vettore delle stime dei valori iniziali come:

$$p^{r+1} = p^r + k_1 \Delta p / 2 \quad (Eq. 5.75)$$

Si procede a questo punto con le integrazioni delle equazioni differenziali usando p^{r+1} ottenuto con il metodo di bisezione (Eq. 5.75) e si confronta nuovamente il confronto fra gli errori massimi tra i due step di iterazione. Se anche in questo caso, risulti insoddisfatta la relazione (Eq. 5.74) si può procedere ad un'ulteriore bisezione della correzione Δp . In numero massimo di bisezioni è stato imposto pari a 5, dopodiché il procedimento si arresta, cioè non è possibile raggiungere la convergenza per la soluzione di tentativo che si è scelta [22, 23, 35, 37, 38].

Capitolo 6

Analisi del Fuller's Problem

6.1 *Perché introdurre il Problema di Fuller?*

Nel seguente lavoro di tesi, l'ottimizzazione di traiettorie di landing sulla superficie lunare terrà conto anche della dinamica rotazionale del lander lunare, in altri termini, le condizioni di assetto relative all'asse di beccheggio influiranno sulla direzione di spinta del main engine, avendo quest'ultimo un calettamento fisso sullo spacecraft. In seguito ad opportune semplificazioni, analizzate nel dettaglio nel paragrafo 7.2, le equazioni che descrivono la dinamica rotazionale si riducono nelle espressioni (Eq. 3.67) e (Eq. 3.80) la cui variabile di controllo è il momento M appartenente ad un certo dominio di ammissibilità (Eq. 7.4). La formulazione del problema di ottimo si baserà sulla Teoria del Controllo Ottimale presentata nel paragrafo 5.3, scegliendo come indice di performance la massa finale del lander. Dunque, al fine di massimizzare la massa nel landing site, bisognerà risolvere in contemporanea alle equazioni del moto, delle equazioni differenziali aggiuntive, ovvero le Equazioni di Eulero-Lagrange (Eq. 5.13). Per la dinamica rotazionale si definiranno due ulteriori equazioni differenziali che risulteranno essere la *Trim Adjoint Variable Equation* (Eq. 7.41) e l'*Angular Velocity Adjoint Variable Equation* (Eq. 7.42). Nelle condizioni iniziali, si ipotizzerà una dinamica libera del lander: sia il valore del pitch angle ϑ che della velocità angolare ω nell'istante iniziale risulteranno essere un output dall'algoritmo di ottimizzazione. Le corrispondenti adjoint variables saranno perciò nulle in t_0 , cioè sarà nulla anche la Switching Function per il Momento, determinando un arco singolare come primo tratto della traiettoria di landing. Nel corso degli anni la risoluzione di problemi di controllo ottimale ha evidenziato come il controllo ottimale sia, nel caso di controlli che appaiono linearmente nelle equazioni, come per il caso di spinta e/o momento nei problemi di analisi di traiettorie spaziali, spesso una funzione costante a tratti nel dominio del tempo, compiendo un numero finito di "salti" in un intervallo di tempo finito, chiamati *switches*. Lo studio del Fuller's Problem permette di individuare la curva di commutazione ottimale nel piano delle fasi attraverso un numero infinito di switches del controllo vincolato, in modo soddisfare l'output desiderato. Confrontando il sistema

di equazioni differenziali della dinamica rotazionale con il Problema di Fuller (Eq 6.22) si osservano delle analogie, cioè:

$$x_1 \rightarrow \vartheta \quad x_2 \rightarrow \omega \quad \lambda_1 \rightarrow \lambda_\vartheta \quad \lambda_2 \rightarrow \lambda_\omega$$

Di conseguenza, la dinamica rotazionale potrà essere modellizzata mediante il Fuller's Problem. Tuttavia, si utilizzerà la versione rivisitata esposta nel Paragrafo 6.2.1: l'introduzione di una discontinuità libera della variabile λ_ϑ al termine dell'arco singolare sarà necessaria sia per uscire dalle condizioni di arco singolare sia per ottenere l'output richiesto in termini di variabili di stato con un numero finito di switches anziché infinito come previsto dal Fuller's Problem classico. Si osserverà come la gestione del numero di switches dipenderà dal valore imposto della discontinuità libera λ_ϑ al termine dell'arco singolare.

6.2 Formulazione Matematica

Il sistema studiato dal problema di Fuller consiste in un'equazione differenziale del secondo ordine soggetta ad un controllo vincolato variabile sulla traiettoria:

$$\begin{cases} x_1''(t) = u(t) \\ u(t) \in [-1,1] \end{cases} \quad (\text{Eq. 6.0})$$

Il problema può essere riformulato come un sistema di equazioni differenziali del primo ordine soggetti ad un controllo vincolato funzione del tempo, introducendo la variabile $x_2(t)$:

$$\begin{cases} x_1'(t) = x_2(t) \\ x_2'(t) = u(t) \\ u(t) \in [-1,1] \end{cases} \quad (\text{Eq. 6.1})$$

La funzione costo da minimizzare è l'*Integral Squared Error (ISE)* definito su tutto l'arco temporale in cui si sviluppa la traiettoria, $t \in [0, T]$, per cui, il funzionale J è risulta essere:

$$J(t) = \int_0^T \frac{1}{2} x_1(t)^2 \cdot dt \quad (\text{Eq. 6.2})$$

Il Fuller's Problem consiste nell'individuare la curva di commutazione ottimale, cioè quella che minimizza l'espressione (Eq. 6.2) nel piano delle fasi $(x_1(t), x_2(t))$

Il Fuller's Problem può essere riformulato cambiando il segno del funzionale, ovvero scegliendo di massimizzare il funzionale (Eq. 6.3), anziché di minimizzare l'espressione (Eq. 6.2).

$$J(t) = - \int_0^T \frac{1}{2} x_1(t)^2 \cdot dt \quad (\text{Eq. 6.3})$$

Dal punto di vista formale, il funzionale è descritto con una formulazione di Lagrange (Eq. 5.6):

$$J(t) = \int_0^T \phi(x_1(t)) \cdot dt \quad (\text{Eq. 6.4})$$

Di conseguenza, la funzione integranda del costo di Lagrange risulta essere:

$$\phi(x_1(t)) = -\frac{1}{2} x_1(t)^2 \quad (\text{Eq. 6.5})$$

Le condizioni al contorno del Fuller's Problem sono:

$$X : \begin{cases} x_1(0) = 0 & x_1(T) = \zeta_1 \\ x_2(0) = 0 & x_2(T) = \zeta_2 \end{cases} \quad (\text{Eq. 6.6})$$

Applicando il *Metodo dei Moltiplicatori di Lagrange* al funzionale $J(t)$ in modo da tenere conto sia delle condizioni al contorno assegnate (Eq. 6.6) mediante le costanti μ che delle leggi di evoluzione del problema dinamico (Eq. 6.1) mediante le adjoint variables, è possibile ricavare il funzionale J^* come espresso dalla relazione (Eq. 5.7). Avendo cambiato segno all'integranda $\phi(x_1(t))$ del funzionale $J(t)$, imporre la stazionarietà di J^* , implica massimizzare il nuovo Performance Index $J(t)$ anziché minimizzarlo.

Per cui, imponendo la variazione prima del funzionale J^* uguale a zero cioè $\delta J^* = 0$, si trova un'espressione che risulta identicamente soddisfatta se e soltanto se vengono risolte le equazioni di Eulero-Lagrange (Eq 5.13) e le equazioni algebriche per i controlli (Eq 5.14).

Per cui, per definire le equazioni differenziali di ottimo di Eulero-Lagrange bisogna individuare l'Hamiltoniano per il Fuller's Problem: ricordando la relazione (Eq. 5.9) e sostituendo sia l'espressione (Eq 6.5) che le leggi di evoluzione del problema dinamico (Eq 6.1), si trova:

$$H(t) = \phi + \lambda^t f = \lambda_1(t) x_2(t) + \lambda_2(t) u(t) - \frac{1}{2} x_1(t)^2 \quad (\text{Eq. 6.7})$$

Derivando l'Hamiltoniano (Eq. 6.7) rispetto alle variabili di stato $x_1(t)$ e $x_2(t)$ e cambiando di segno all'espressione trovata, vengono formulate le equazioni differenziali di Eulero-Lagrange:

$$-\frac{\delta H(t)}{\delta x_1(t)} = \dot{\lambda}_1(t) = x_1(t) \quad (\text{Eq. 6.8})$$

$$-\frac{\delta H(t)}{\delta x_2(t)} = \dot{\lambda}_2(t) = -\lambda_1(t) \quad (\text{Eq. 6.9})$$

Come osservato nel Paragrafo 5.3 se l'Hamiltoniano non dipende esplicitamente dal tempo ed inoltre, se l'istante finale "0" non compare esplicitamente né nel costo di Mayer, nullo in questo caso, né tantomeno nelle condizioni al contorno (Eq 6.6) assegnate, allora l'Hamiltoniano risulterà pari a zero:

$$H(0) = 0 \quad (\text{Eq. 6.10})$$

Sostituendo l'espressione trovata per l'Hamiltoniano nel Problema di Fuller (Eq. 6.7) nella condizione (Eq. 6.10) si ottiene:

$$\lambda_1(0) \cdot x_2(0) + \lambda_2(0) \cdot u(0) - \frac{1}{2}x_1(0)^2 = 0 \quad (\text{Eq. 6.11})$$

Ricordando le condizioni al contorno assegnate (Eq. 6.6) che vincolano $x_1(0)$ e $x_2(0)$, la relazione (Eq. 6.11) diventa:

$$\lambda_2(0) \cdot u(0) = 0 \quad (\text{Eq. 6.12})$$

Riassumendo, la prima condizione al contorno di ottimo è ottenuta annullando l'Hamiltoniano nel punto "0" della traiettoria:

$$H(0) = 0 \iff \lambda_2(0) = 0 \quad (\text{Eq. 6.13})$$

Risulta evidente che l'Hamiltoniano (Eq. 6.7) sia lineare rispetto al controllo soggetto a constraint $u(t)$, per cui, se si applicasse l'equazione algebrica dei controlli (Eq. 5.14), il controllo ottimale non potrebbe essere determinato, in quanto, in seguito all'operazione di derivata dell'Hamiltoniano, esso scomparirebbe dall'equazione risultante, di fatti:

$$\frac{\delta H(t)}{\delta u(t)} = \lambda_2(t) = SF(t) \quad (\text{Eq. 6.14})$$

Dove $SF(t)$ è detta *Switching Function* del Fuller's Problem.

Il soddisfacimento del *Principio di Massimo di Pontryagin* avviene in modo diverso a seconda del valore assunto dalla Switching Function:

- Se $\lambda_2(t) \neq 0 \rightarrow$ si usa come legge di controllo ottimale il *Bang-Bang Control* per massimizzare $J(t)$ espresso dalle relazioni (Eq. 5.17), che specializzate per il Problema di Fuller determinano:

$$u^* = \text{sign}(\lambda_2(t)) \quad (\text{Eq. 6.15})$$

- Se $\lambda_2(t) = 0 \rightarrow$ si è in presenza di un *arco singolare*, la ricerca del controllo ottimale avviene imponendo tutte le derivate successive di $\lambda_2(t)$ fatte rispetto al tempo uguali a zero, finché non compare in modo esplicito il controllo, per cui, il valore del controllo ottimale è ottenuto imponendo tale derivata k-esima uguale a zero, cioè:

$$SF'(t) = \frac{\delta SF(t)}{\delta t} = \lambda_2(t) = -\lambda_1(t) = 0 \quad (\text{Eq. 6.16})$$

$$SF''(t) = \frac{\delta SF'(t)}{\delta t} = -\dot{\lambda}_1(t) = -x_1(t) = 0 \quad (\text{Eq. 6.17})$$

$$SF'''(t) = \frac{\delta SF''(t)}{\delta t} = -\dot{x}_1(t) = -x_2(t) = 0 \quad (\text{Eq. 6.18})$$

$$SF(t)^{IV} = \frac{\delta SF'''(t)}{\delta t} = -\dot{x}_2(t) = -u(t) = 0 \quad (\text{Eq. 6.19})$$

Per cui, si tratta di un arco singolare del secondo ordine avente legge di controllo ottimale:

$$u^* = 0 \quad (\text{Eq. 6.20})$$

Dunque, al termine dell'*arco singolare* x_1 , x_2 , λ_1 e λ_2 risulteranno pari a zero in modo da soddisfare le condizioni imposte sulle derivate k-esime della Switching Function (Eq. 6.16), (Eq. 6.17), (Eq. 6.18), (Eq. 6.19).

Riassumendo, le equazioni differenziali per le adjoint variables (Eq. 6.8) e (Eq. 6.9) sono da accoppiare con le equazioni del sistema dinamico (Eq. 6.1), trovando una formulazione per il Fuller's Problem del tipo:

$$\begin{cases} \dot{x}_1(t) = x_2(t) \\ \dot{x}_2(t) = u(t) \\ \dot{\lambda}_1(t) = x_1(t) \\ \dot{\lambda}_2(t) = -\lambda_1(t) \\ u(t) \in [-1,1] \\ \max J(t) \end{cases} \quad (\text{Eq. 6.21})$$

Avente condizioni al contorno sia assegnate (Eq 6.6) che di ottimo (Eq 6.13) [30,34,50,51,52] :

$$\begin{cases} x_1(0) = 0 \\ x_2(0) = 0 \\ x_1(T) = \zeta_1 \\ x_2(T) = \zeta_2 \\ \lambda_2(0) = 0 \end{cases} \quad (\text{Eq. 6.22})$$

6.2.1 Soluzione del Fuller's Problem

Se le condizioni (Eq. 6.16), (Eq. 6.17), (Eq. 6.18) ed (Eq. 6.19) valessero all'inizio della traiettoria (si noti che $x_1(0) = x_2(0) = 0$ sono effettivamente imposte dalle condizioni al contorno), essa sarebbe costituita da un unico arco singolare, ma ovviamente, tale caso non risulta avere un interesse pratico perché la soluzione sarebbe valida se e solo se $\zeta_1 = \zeta_2 = 0$, dunque, per valori generici di ζ_1 e ζ_2 è necessario che l'arco singolare sia seguito da un arco non singolare.

La struttura della traiettoria di landing considerata nel lavoro di tesi al paragrafo 7.6.1 è formata da un arco singolare seguito da due archi non singolari, per cui, la trattazione del Fuller's Problem si riferirà all'evoluzione di arco non singolare preceduto da un arco singolare: in questi termini la condizione $\lambda_1 = 0$ alla fine dell'arco singolare prevederà che esso sia seguito da un numero di switches infinito per il controllo ottimale, determinando il cosiddetto *Fuller's Phenomenon* o *Chattering*. In questo caso, si ipotizzi di considerare un qualsiasi valore del controllo appartenente al dominio di ammissibilità, cioè che $u^+ \neq 0$ con $u^+ \in [-1,1]$. Ricordando che le condizioni al contorno sono (Eq. 6.22) e (Eq. 6.16) e ipotizzando di avere un valore del controllo positivo nell'istante iniziale, nel primo passo di integrazione infinitesimo dt , si avrebbe:

$$\mathbf{u}^+ > \mathbf{0} \xrightarrow{\text{Eq. 6.1}} x_2 > 0 \xrightarrow{\text{Eq. 6.1}} x_1 > 0 \xrightarrow{\text{Eq. 6.8}} \lambda_1 > 0 \xrightarrow{\text{Eq. 6.9}} \lambda_2 < 0 \xrightarrow{\text{Eq. 6.14}} \mathbf{u} = -\mathbf{1} \quad (\text{Eq. 6.23})$$

Il controllo iniziale non nullo determina immediatamente uno switch di u al suo valore negativo (Eq. 6.23), soddisfacendo il Bang-Bang Control (Eq. 6.14). Nel passo di integrazione successivo dt' , ripercorrendo la catena di conseguenze espresse nella relazione (Eq. 6.23), un valore del controllo negativo implicherebbe $\lambda_2 > 0$ generando un nuovo switch del controllo, cioè $u = 1$. Il susseguirsi dell'inversione di segno di λ_2 causerebbe una serie infinita di switches del controllo u , determinando il fenomeno di Chattering (figura 6.1). In analogia, nel caso in cui si fosse ipotizzato $u^+ < 0$, si sarebbe ottenuto comunque una continua inversione di segno del controllo dando vita al fenomeno di Chattering, dimostrando così che la soluzione ottimale del Fuller's Problem sia ottenuta con un numero infinito di switches e che sia valida per ogni valore del controllo non nullo appartenente al dominio di ammissibilità.

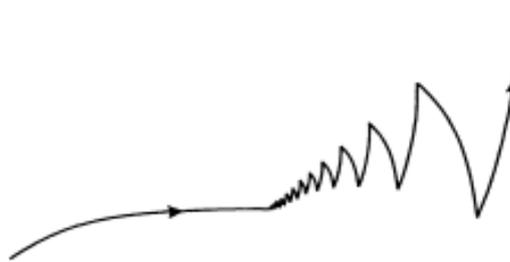


Figura 6. 1 Rappresentazione di un arco con Fuller's Phenomenon

La presenza di numero infinito di switches comporta avere una soluzione che risulta non realizzabile praticamente. Di conseguenza, per uscire dalle condizioni di arco singolare, non potendo imporre né $x_1(0) \neq 0$ né $u^+ \neq 0$, si è considerato alternativamente che nel punto "0" ci sia una discontinuità nella adjoint variable λ_1 , cioè:

- λ_1^- è pari a zero, coerentemente con il soddisfacimento delle condizioni di arco singolare nell'istante finale (Eq 6.16).
- λ_1^+ discontinuità libera, ulteriore parametro del Boundary Value Problem da dover ottimizzare, di modo che l'output desiderato sia ottenuto con un numero di switches finiti, anziché infiniti come prevederebbe la soluzione del Problema di Fuller classico.

Introducendo il nuovo parametro libero λ_1^+ e ricordando l'equazione (Eq 6.13), si ha che:

$$\begin{cases} \text{If } \lambda_1^+ > 0 \rightarrow \dot{\lambda}_2 < 0 \rightarrow \lambda_2 < 0 \rightarrow u = -1 \\ \text{If } \lambda_1^+ < 0 \rightarrow \dot{\lambda}_2 > 0 \rightarrow \lambda_2 > 0 \rightarrow u = 1 \end{cases} \quad (\text{Eq. 6.24})$$

Riassumendo, il controllo ottimale nel punto “0” non è più ottenuto dall'equazione (Eq. 6.20) per arco singolare, bensì è sostituita con una legge del tipo *Bang-Bang Control*:

$$u^* = -\text{sign}(\lambda_1(0^+)) \quad (\text{Eq. 6.25})$$

Le nuove condizioni al contorno del problema di Fuller diventerebbero:

$$\begin{cases} x_1(0) = 0 \\ x_2(0) = 0 \\ x_1(T) = \zeta_1 \\ x_2(T) = \zeta_2 \\ \lambda_2(0) = 0 \\ \lambda_1^- = 0 \\ \lambda_1^+ \text{ Free} \end{cases} \quad (\text{Eq. 6.26})$$

La scelta del valore di λ_1^+ è arbitraria, in quanto la adjoint variable λ_1 non risulta limitata da alcun dominio di esistenza, per cui settando opportunamente il parametro libero è possibile convergere all'output desiderato con un numero variabile di switches. Ipotizzando di imporre una discontinuità libera maggiore di zero, si otterrebbe:

$$\lambda_1^+ > 0 \xrightarrow{\text{Eq. 6.25}} u^* = -1 \xrightarrow{\text{Eq. 6.1}} x_2 < 0 \xrightarrow{\text{Eq. 6.1}} x_1 < 0 \xrightarrow{\text{Eq. 6.8}} \lambda_1 \downarrow \quad (\text{Eq. 6.27})$$

A differenza di quanto osservato nella catena di relazioni espresse nella (Eq. 6.23), la adjoint variable λ_1 non è necessariamente minore di zero, in quanto quest'ultima dipende dal valore di λ_1^+ imposto. Per cui, sono ammissibili due situazioni in questo caso:

- 1) $\lambda_1 > 0 \rightarrow \lambda_2 < 0 \rightarrow u^* = -1$
- 2) $\lambda_1 < 0 \rightarrow \lambda_2 > 0 \rightarrow u^* = 1 \rightarrow \text{Switch del Controllo}$

Ipotizzando che il valore di λ_1^+ sia tale da non determinare uno switch del controllo nel primo passo di integrazione, si osserva come negli steps di integrazione successivi il controllo negativo tenderebbe a generare le catene di conseguenze esposte nella relazione (Eq. 6.27), finché, in un generico istante di tempo t_i risulterebbe che $\lambda_1(t_i) < 0$. Il cambio di segno di λ_1 genererà un'inversione nell'andamento di λ_2 , ovvero $\dot{\lambda}_2(t_i) > 0$, per cui $|\lambda_2| \downarrow$. Dunque, la variazione di segno di λ_1 non comporta immediatamente una modifica di segno della Switching Function e quindi il comportamento monotono decrescente delle variabili di stato risulta invariato. L'effetto

di una x_1 negativa è quello di aumentare nel tempo il modulo di un λ_1 negativo, andando ad amplificare la derivata prima di λ_2 , il che permette di far convergere più velocemente λ_2 a zero. Nell'istante in cui $\lambda_2(t^*) = 0$ avverrà lo switch nel controllo $u^*(t^*)$ che si porterà al valore massimo positivo coerentemente con il *Bang-Bang Control* a causa della variazione di segno della Switching Function. L'integrazione del problema termina quando si è raggiunto l'output richiesto nello spazio delle fasi, per cui, nell'evoluzione della traiettoria è possibile ritrovare ulteriori switches del controllo a causa della variazione di segno di λ_2 .

Il ragionamento effettuato è valido anche nel caso in cui si consideri una discontinuità libera minore di zero: analogamente a quanto espresso nella catena di conseguenze delle (Eq. 6.27), si troverebbe $\lambda_1 \uparrow$ che non implicherebbe necessariamente un λ_1 maggiore di zero. Anche in quest'analisi si ripresenterebbero due casistiche analoghe a quelle evidenziate con $\lambda_1^+ > 0$ e lo switch del controllo avverrà soltanto quando $\lambda_2(t^*) = 0$, cioè in un istante temporale successivo all'inversione di segno di λ_1 .

In particolare, si noti che lo sviluppo della traiettoria sia influenzato sia dalle condizioni al contorno sulle variabili di stato che dal numero di switches, dove quest'ultimi dipendono unicamente dal valore di λ_1^+ imposto.

Inoltre, risulterebbe necessaria una discussione sull'influenza del NSW sul Performance Index $J(t)$, nonché sulla rapidità temporale con cui si converge alla soluzione desiderata e quindi sulla durata della traiettoria considerata. Tuttavia, quest'analisi non sarà condotta con una formulazione analitica, bensì numerica, andando a implementare la formulazione del Problema di Fuller in Matlab e valutando al variare della discontinuità libera e dunque del numero di switches, gli effetti sia sul tempo di convergenza che sul funzionale da massimizzare [34,50,52].

6.2.1.1 Soluzione con Switch Singolo ($NSW = 1$)

Un caso particolare consiste nel *Problema di Fuller preceduto da arco singolare a switch singolo*, cioè con $NSW = 1$, dove il valore del parametro libero λ_1^+ è un output del BVP.

Nel paragrafo precedente si è osservato come per qualsiasi valore imposto di λ_1^+ , lo switch del controllo avverrà sempre quando λ_2 sarà pari a zero, cioè in un istante di tempo successivo alla variazione di segno di λ_1 .

Di conseguenza, quando $\lambda_2(t = t_{sw}) = 0$, si verificherà lo switch del controllo u^* soddisfacendo il *Bang-Bang Control*.

Si osserva come l'imposizione di un unico switch in un problema di questo tipo equivalga ad imporre una nuova condizione al contorno:

$$\lambda_2(t_{sw}) = 0 \tag{Eq. 6.28}$$

Per cui in una traiettoria discretizzata in N intervalli di tempo, se il l 'arco $(j - 1)$ con $j = 2:N$ è singolare, per imporre un unico switch del controllo ottimale per l'arco j -esimo, bisogna introdurre sia la discontinuità libera di λ_1 che una condizione al contorno aggiuntiva del tipo (Eq. 6.28), [34,50,52], cioè:

$$\begin{cases} \lambda_1(t_j^+) \text{ Free} \\ \lambda_2(t_{j+1}) = 0 \end{cases} \tag{Eq. 6.29}$$

La struttura della traiettoria di landing considerata nel paragrafo 7.6, prevede la presenza di tre archi, in cui il primo è di tipo singolare. Al fine di determinare un unico switch, si dovrà introdurre una discontinuità libera della adjoint variable λ_θ al termine dell'arco singolare ed imporre λ_ω pari a zero al termine del 2nd Arc, per cui riferendosi alla nomenclatura introdotta nella figura 7.3:

$$\begin{cases} \lambda_\theta(t_s^-) = 0 \\ \lambda_\theta(t_s^+) \text{ Free} \\ \lambda_\omega(t_2) = 0 \end{cases} \tag{Eq. 6.30}$$

6.3 Soluzione Numerica

La Soluzione al Problema di Fuller presentata nel paragrafo 6.2.1 (Eq 6.21) avente condizioni al contorno assegnate e di ottimo (Eq 6.26) è stata implementata e risolta mediante un codice Matlab in modo da valutare il comportamento della funzione costo e dei tempi di convergenza al variare del Numero di Switches (*NSW*). Il metodo numerico utilizzato si basa sul solutore Matlab Ode45. La discontinuità λ_1^+ è stata scelta in modo iterativo affinché la soluzione converga a $\zeta_2 = 0$ e $\zeta_1 \neq 0$ con *NSW* variabile. La scelta è effettuata in modo da essere consistenti con le condizioni al contorno imposte nel landing site per la dinamica rotazionale, cioè che il pitch angle converga a $\pi/2$, mentre la velocità angolare si annulli:

$$\begin{cases} \vartheta(T) = \pi/2 \\ \omega(T) = 0 \end{cases} \rightarrow \begin{cases} x_1(T) = \zeta_1 \neq 0 \\ x_2(T) = \zeta_2 = 0 \end{cases} \quad (\text{Eq. 6.31})$$

6.3.1 Solutore Ode45

$[t, y] = \text{ode45}(\text{odefun}, \text{tspan}, y0, \text{options})$

Code 1: Sintassi del solutore Ode45 in Matlab

Il metodo Ode45 si basa sull'omonimo ODE solver di MATLAB, il quale permette di risolvere generici Problemi di Cauchy non stiff.

- *odefun*: sono le leggi di evoluzione del problema dinamico, cioè $f(t, y(t))$
- *tspan*: è l'intervallo di integrazione, se definito come $[t_0, t_1, t_2, \dots, t_f]$, il solutore Matlab restituisce la soluzione valutata in ogni istante della discretizzazione introdotta
- *options* = *odeset('RelTol', Value, 'AbsTol', Value)*: permette di fissare la tolleranza sia sull'errore relativo e che su quello assoluto commesso sulla soluzione ad ogni passo di integrazione in base al *Value* imposto [97].

6.4 MATLAB Code

La struttura del codice Matlab è divisa in quattro parti:

1. Condizioni di Integrazione

In ogni simulazione è stato variato sia l'intervallo di integrazione che lo step di calcolo:

```

% -----
%                               Condizioni di Integrazione
% -----
dt = 5.8;                       % Intervallo di integrazione
step = 1e-5;                    % Step di Integrazione
node = dt/step+1;              % Numero di Nodi della Mesh
time = [0:step:dt]';          % Vettore dei Tempi
    
```

Code 2: Esempio di Condizioni di Integrazione

2. Condizioni Iniziali

Le condizioni iniziali sono le condizioni al contorno nel punto "0" del Fuller's Problem (Eq. 6.26), mentre il valore del controllo ottimale è ottenuto dalla relazione (Eq. 6.25). In ogni simulazione è stato variato opportunamente λ_1^+ in modo da variare il NSW del Problema di Fuller.

```

% -----
%                               Condizioni Iniziali
% -----
t(1) = 0;
x2(1) = 0;
x1(1) = 0;
L1(1) = 0.5000064;             % Si ipotizza L1+ > 0
L2(1) = 0;
u(1) = -sign(L1(1));
Phi(1) = 0;
    
```

Code 3: Esempio di Condizioni di Iniziali

3. Metodo Risolutivo

- *Toll*: indica il valore della tolleranza inserita per trovare l'istante temporale corrispondente a $x_2 \rightarrow 0$.
- *T*: indica l'indice del ciclo for in cui è soddisfatta la condizione $x_2 \leq toll$, per cui *time(T)* corrisponde dimensionalmente all'istante temporale "T" del Fuller's Problem
- *x1(T)*: indica il valore di $\zeta_1 \neq 0$ ottenuto all'istante T del problema di Fuller

```

% -----
%                               Integrazione Equazioni con ode45
% -----
yzero = [x1(1);x2(1);L1(1);L2(1)];
global u0
u0 = -sign(L1(1));
opts = odeset('RelTol',1e-7,'AbsTol',1e-7)
[time_ode,y_ode]=ode45(@fun_fuller,time,yzero,opts);
x1 = y_ode(:,1);
x2 = y_ode(:,2);
L1 = y_ode(:,3);
L2 = y_ode(:,4);
% -----
for i=2:node
% -----
%                               Performance Index
% -----
Phi(i) = Phi(i-1) - x1(i-1)^2/2*step;
% -----
%                               Ricerca di T tale che x1(T) = Csi_1 e x2(T) = 0
% -----
if (abs(x2(i)) < toll)
    r = r + 1;
    T(r) = i;
    x1_final(r) = x1(i);
end
end
end

```

Code 4: Integrazione delle ODE del Fuller's Problem

Il sistema lineare di ODE del Problema di Fuller determina una legge di evoluzione $f(t, y(t))$ descrivibile come una funzione vettoriale, per cui per definire *odefun* è stata implementata una funzione Matlab esterna al codice denominata *fun_fuller*. La condizione espressa dall' *if* permette di seguire la legge di controllo ottimale (Eq. 6.25) nell'istante iniziale, mentre allo step di calcolo successivo il controllo ottimale sarà di tipo Bang-Bang come descritto dall'equazione (Eq 6.15).

```

function y = fun_fuller(t,x)
global u0
if (t > 1e-12)
    u0 = sign(x(4));
end
y = [x(2); u0; x(1); -x(3)];
end

```

Code 5: Funzione fun_fuller.m

4. Diagrammare i risultati ottenuti

6.5 Analisi delle Simulazioni Numeriche

Nel Paragrafo 6.2.1 si è introdotta una nuova formulazione del problema di Fuller dove non potendo considerare né $x_1(0) \neq 0$ né $u^+ \neq 0$, si è imposta una discontinuità libera della variabile λ_1 cioè $\lambda_1^+ \neq 0$. Il parametro libero è stato selezionato in modo da ottenere l'output desiderato in termini di variabili di stato con un numero di switches variabile come evidenziato nel paragrafo 6.3. La soluzione è stata ricercata in modo iterativo, variando il valore di λ_1^+ in modo da soddisfare le seguenti condizioni al contorno:

$$\left\{ \begin{array}{l} x_1(0) = 0 \\ x_2(0) = 0 \\ x_1(T) \approx -4.7068 \\ x_2(T) = 0 \\ \lambda_2(0) = 0 \\ \lambda_1^+ \text{ Free} \\ \text{NSW variable} \end{array} \right. \quad (\text{Eq. 6.32})$$

Le simulazioni numeriche sono state condotte considerando:

- Precisione di Integrazione: $RelTol = 1e - 7$ $AbsTol = 1e - 7$
- Intervallo di Integrazione: $dt = 5.8$
- Vettore di Integrazione: $[0: 5e - 7: dt]$

I risultati ottenuti dal Matlab Code sono riassunti nella tabella seguente:

ID Simulation	λ_1^+	T	$time(T)$	$x_1(T)$	NSW	Switch
ODE - 1	0.4254848	8678094	4.3390465	-4.7068325	1	[-1, 1]
ODE - 2	-0.0060309	11028750	5.5143745	-4.7067872	2	[1, -1, 1]
ODE - 3	0.0000856	11599105	5.7995520	-4.7067990	3	[-1, 1, -1, 1]

Tabella 6. 1: Switch nel Problema di Fuller con NSW variabile

Nel calcolo degli errori relativi, si considera come soluzione di riferimento quella relativa alla simulazione numerica "ODE - 1", relativa al massimo valore di $\lambda_1^+ +$.

ID Simulation	δ
ODE - 2	$9.6e - 06$
ODE - 3	$7.1e - 6$

Tabella 6. 2: Errori relativi delle simulazioni numeriche svolte rispetto alla soluzione di riferimento "ODE - 1"

Le analisi numeriche condotte con il solutore Ode45 di Matlab producono delle soluzioni molto vicine fra loro al variare della discontinuità λ_1^+ , determinando un errore relativo che tende alla precisione di $1e - 7$ richiesta per l'integrazione numerica.

Dai risultati numerici della *Tabella 6.1* si vede che all'aumentare del Numero di Switches (*NSW*), l'output desiderato è ottenuto con un intervallo di tempo più ampio, cioè sia l'indice T che conseguentemente $time(T)$ risultano aumentare. In un problema di “*Minimum-Time Optimization*” la soluzione più conveniente risulta essere quella con switch singolo (*ODE-1*), in quanto le condizioni al contorno sono soddisfatte minimizzando il tempo di evoluzione della traiettoria. Si definisce il parametro ρ_T in modo da quantificare al variare del numero di switch di quanto sia aumentata la durata dell'intervallo:

$$\rho_T [\%] = \left| \frac{time(T) - time(T)^{Single_Switch}}{time(T)^{Single_Switch}} \right| \cdot 100 \quad (Eq. 6. 33)$$

Prendendo come riferimento la soluzione ottimale con $NSW = 1$ e sostituendo la relazione introdotta dalla (Eq. 6.33), si trova:

ID Simulation	$\lambda_1(0^+)$	ρ_T	NSW
ODE - 2	-0.0060309	27%	2
ODE - 2	0.0000856	34 %	3

Tabella 6. 3: Aumento dell'intervallo temporale al variare del Numero di Switches

La *tabella 6.3* mostra come nel caso *ODE-2*, il tempo di evoluzione della traiettoria sia maggiore del 27% rispetto a quello con con switch singolo, mentre la simulazione *ODE-3* mostra come l'aumento della durata della traiettoria non sia lineare con il numero di switches, aumentando del 34% anziché del 54% rispetto al caso *ODE-1*.

Al fine di verificare le considerazioni effettuate nel paragrafo 6.2.1, si riportano in forma grafica l'evoluzione nel tempo delle variabili del Fuller's Problem al variare del numero di switches (*NSW*).

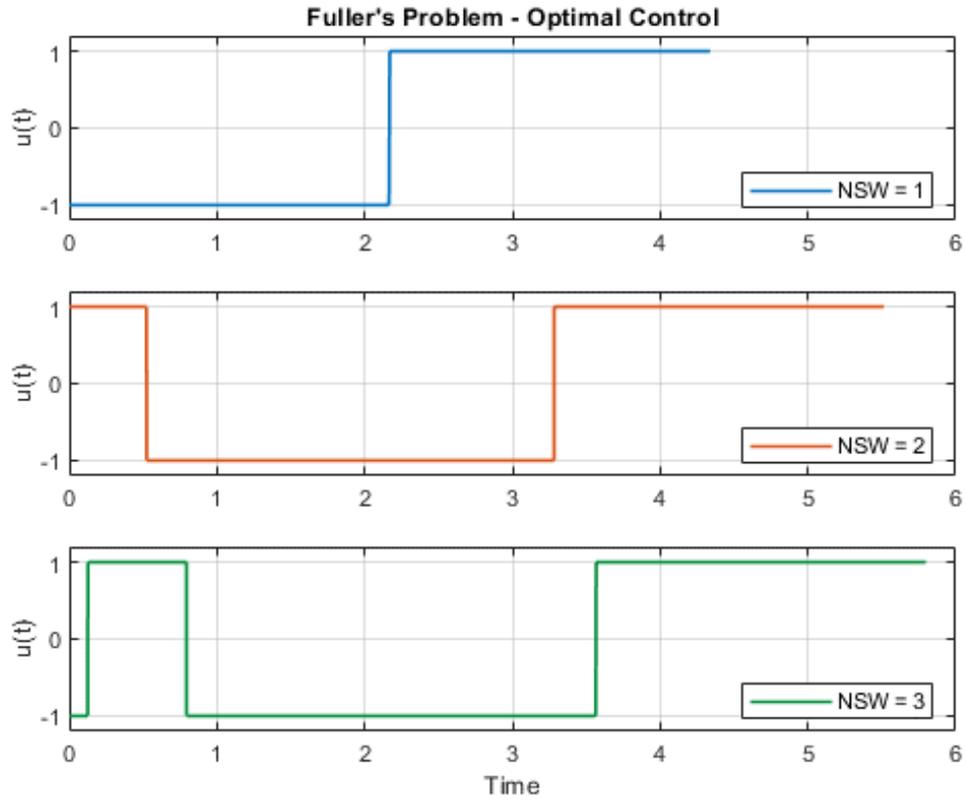


Figura 6. 2: Controllo Ottimale nel Problema di Fuller con NSW variabile

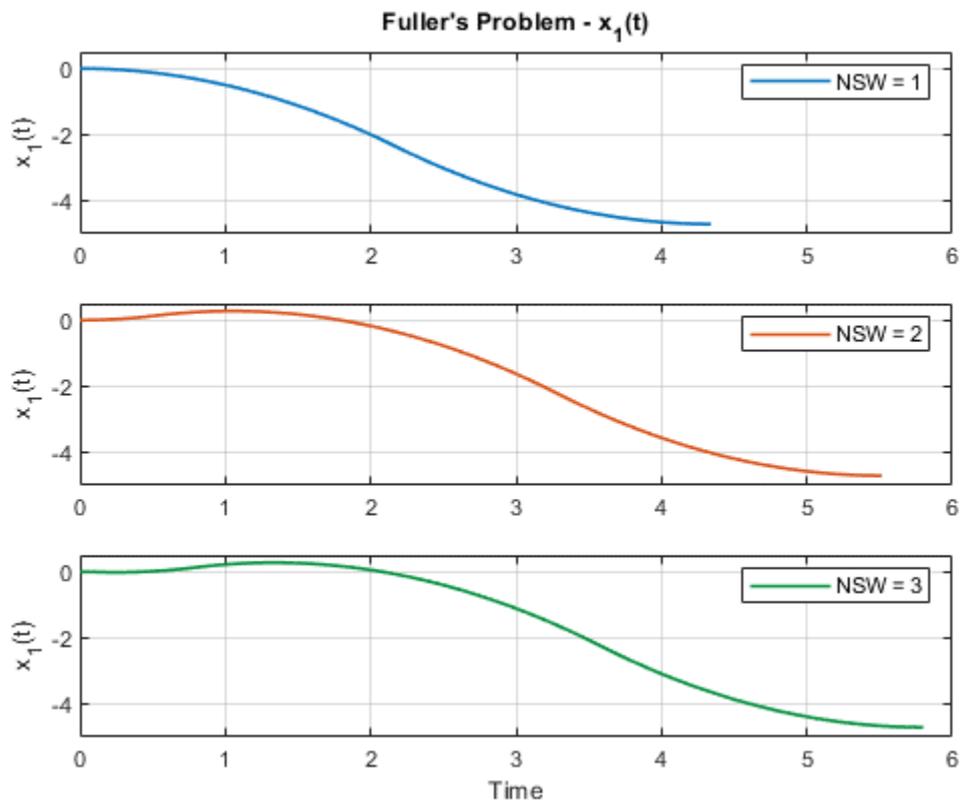


Figura 6. 3: Andamento di $x_1(t)$ con NSW variabile

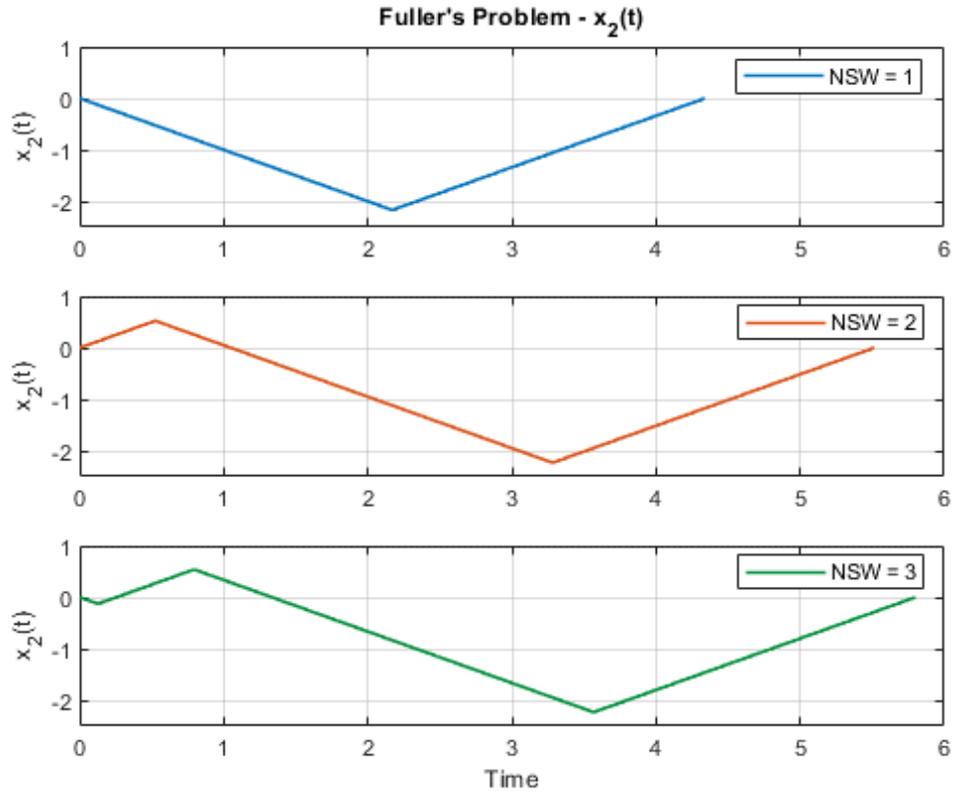


Figura 6. 4: Andamento di $x_2(t)$ con NSW variabile

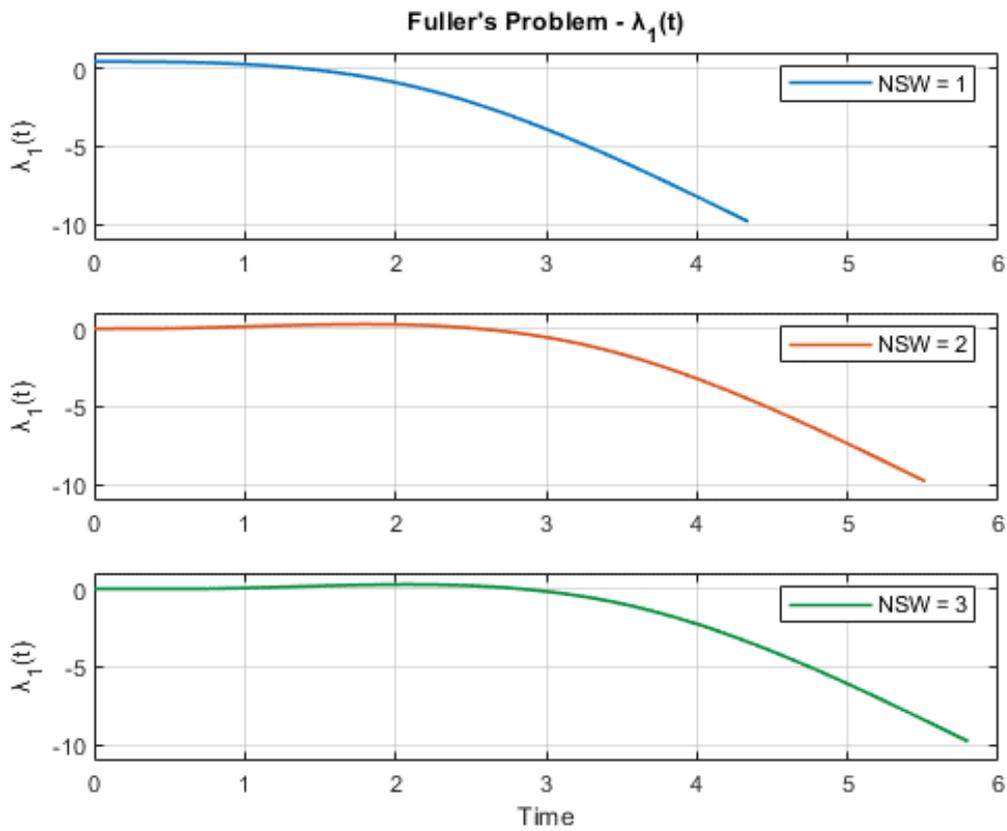


Figura 6. 5: Andamento di $\lambda_1(t)$ con NSW variabile

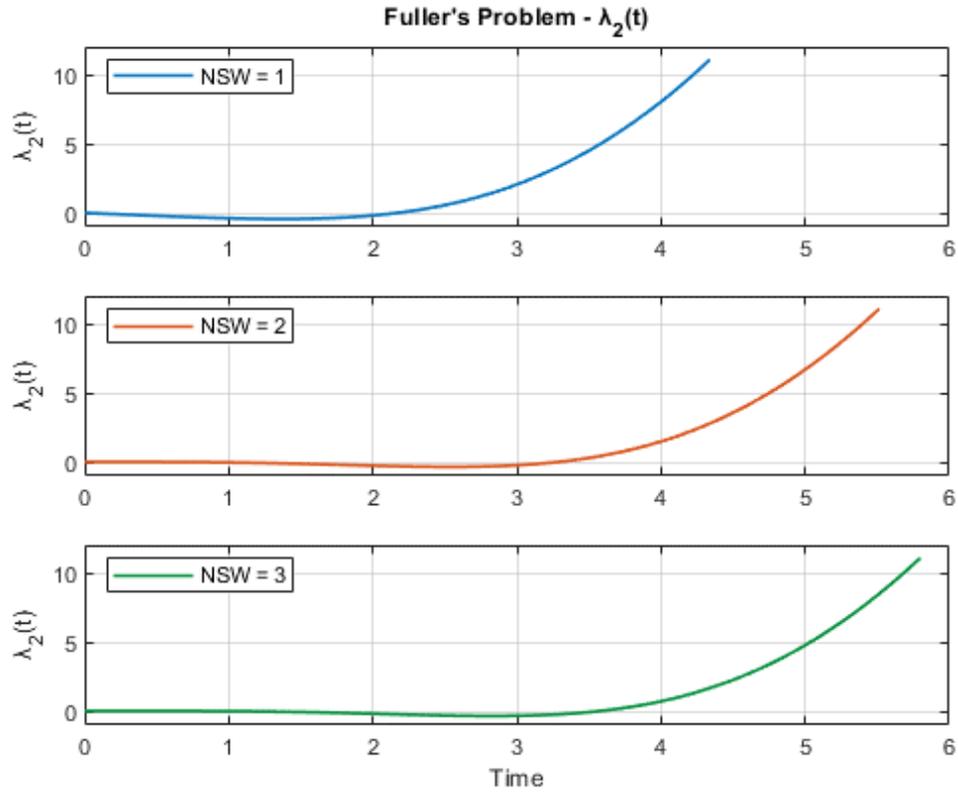


Figura 6. 6: Andamento di $\lambda_2(t)$ con NSW variabile

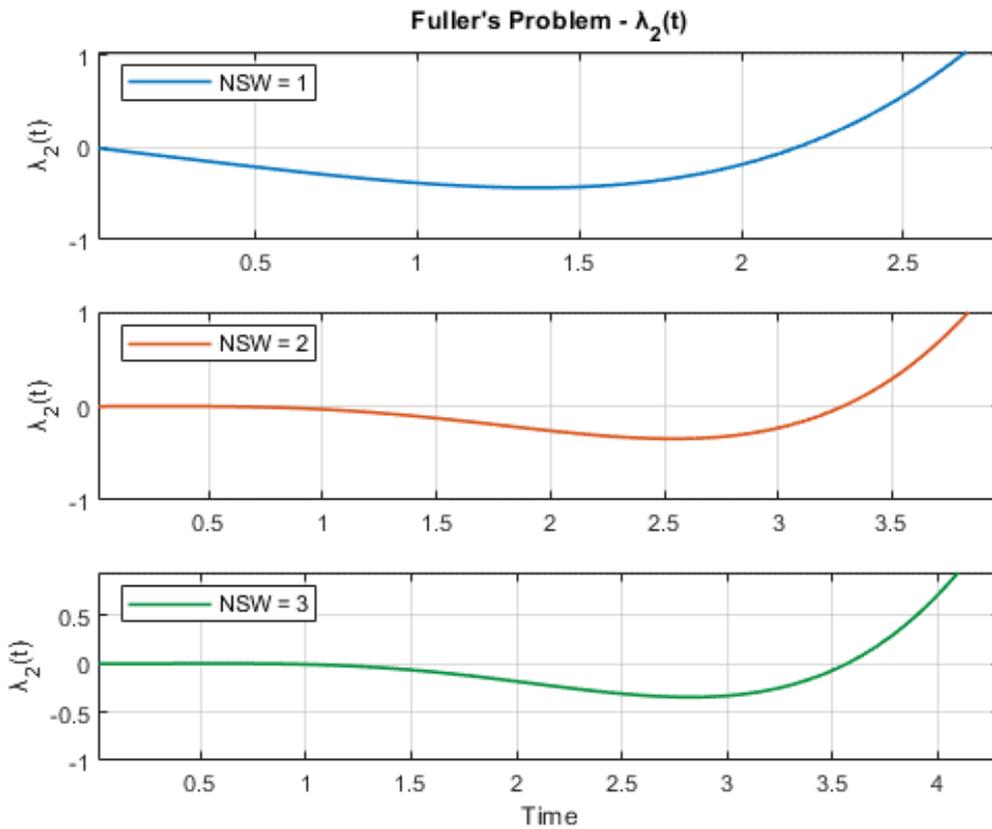


Figura 6. 7: Ingrandimento dell'andamento di $\lambda_2(t)$ con NSW variabile

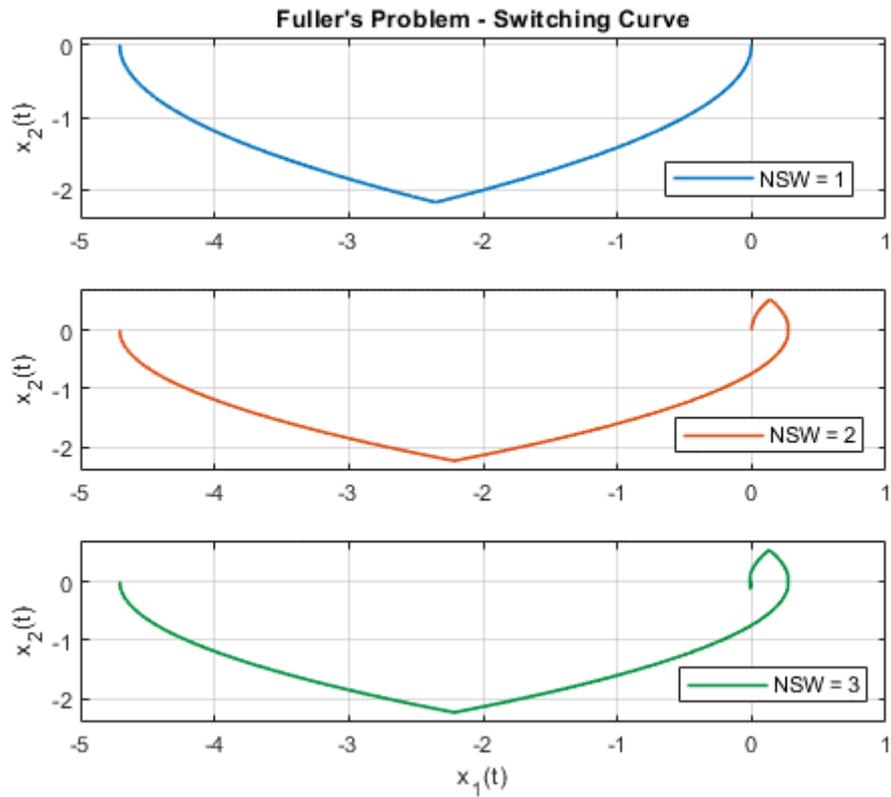


Figura 6. 8: Curve di Commutazione Ottimale del Problema di Fuller con NSW variabile

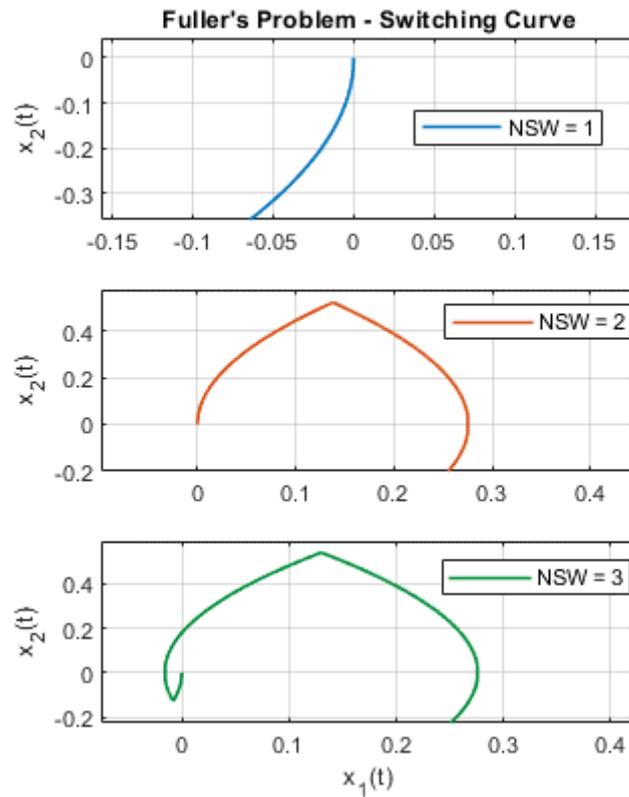


Figura 6. 9: Ingrandimento delle Curve di Commutazione nell'intorno del punto iniziale con NSW variabile

Tuttavia, il Problema di Fuller prevede la massimizzazione di Performance Index, cioè del funzionale J (Eq. 6.3). La funzione integranda $\phi(t)$ è stata calcolata ad ogni step dell'integrazione numerica, per cui essendo il funzionale J l'area sottesa dalla funzione integranda da 0 sino a $time(T)$, si è valutato il Performance Index mediante la funzione Matlab "trapez".

```

% -----
% Performance Index
% -----
J = trapz(time(1:T), Phi(1:T))
    
```

Code 6: Calcolo del Performance Index mediante la funzione trapz di Matlab

ID Simulation	$\lambda_1(0^+)$	T	J	NSW	Switch
<i>ODE - 1</i>	0.4254848	8678094	-18.2483607	1	[-1, 1]
<i>ODE - 2</i>	-0.0060309	11028750	-18.1040939	2	[1, -1, 1]
<i>ODE - 3</i>	0.0000856	11599105	-18.1040813	3	[-1, 1, -1, 1]

Tabella 6. 4: Performance Index nel Problema di Fuller con NSW variabile

Dai risultati riassunti nella *tabella 6.4* si evince che all'aumentare del Numero di Switches (*NSW*) il funzionale risulti decrescere in modulo, tuttavia essendo negativo:

$$NSW \uparrow \text{ allora } J \uparrow \text{ cioè } |J| \downarrow$$

Di conseguenza, volendo massimizzare l'indice di performance, la soluzione ottimale è ottenuta con un numero di switches crescente. Si definisce l'errore relativo rispetto alla soluzione di riferimento a singolo switch:

$$\epsilon = \text{errore relativo} = \left| \frac{J^{ODE-1} - J^{ODE-i}}{J^{ODE-1}} \right| \text{ con } i = 2,3 \quad (\text{Eq. 6. 34})$$

Per cui si ottiene:

ID Simulation	ϵ
<i>ODE - 2</i>	$7.9057 e - 3$
<i>ODE - 3</i>	$7.9064 e - 3$

Tabella 6.5: Errore relativo del Performance Index al variare del Numero di Switches

Il caso a doppio switch presenta una diminuzione in modulo del Performance Index pari a circa lo 0.79% rispetto alla soluzione *ODE - 1*, percentualmente inferiore di due ordini di grandezza rispetto all'errore commesso sulla durata della traiettoria, come mostrato nella *tabella 6.3*. Inoltre, il confronto tra il caso con *NSW* pari a 2 e 3 produce un errore relativo di circa $7 e - 7$, ritenuto

trascurabile in quanto nell'ordine dello step di integrazione. Tuttavia, risulta verificato il trend che all'aumentare di NSW ci sia un miglioramento dell'indice di performance.

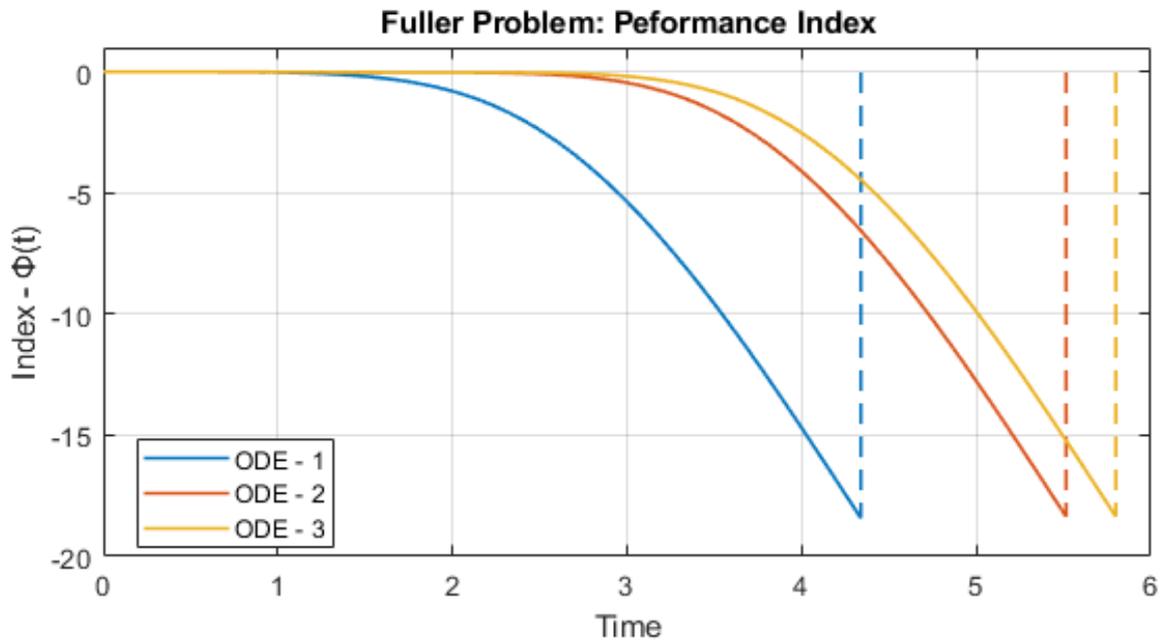


Figura 6. 10: Andamento della Funzione Integranda $\phi(t)$ nel tempo

Riassumendo, al diminuire del numero di switch $NSW \downarrow$, migliora il tempo di convergenza alla soluzione richiesta $time(T) \downarrow$, ma peggiora l'indice di performance $J \downarrow$. Ritenendo accettabile un errore relativo dell'1% sul Performance Index, la soluzione ottimale in un problema di "Minimum-Time Path" con Fuller's Problem è ottenuta per $NSW = 1$

Capitolo 7

Problema di Ottimizzazione per Landing Lunare con Dinamica Rotazionale

7.1 *Introduzione*

Nel Paragrafo 4.1 si è descritto fenomenologicamente lo svolgimento della missione di Landing Lunare con Dinamica Rotazionale, mentre nel Capitolo 5 si è introdotta sia la Teoria del Controllo Ottimale che i Metodi Numerici utilizzati per la soluzione di un generico problema di ottimizzazione. In particolare, nel paragrafo 5.5.1 si sono delineate le caratteristiche dell’algoritmo risolutivo utilizzato per il seguente lavoro di tesi atto a risolvere un Boundary Value Problem (BVP) attraverso un Indirect Method. In questo capitolo verrà descritto il modello fisico utilizzato per trattare le traiettorie di Landing di un Lander Lunare con Dinamica Rotazionale, in modo da definire la traiettoria di atterraggio che permetta sia di soddisfare i vincoli imposti che di minimizzare il consumo di propellente.

7.2 *Assunzioni del Modello*

Axiom 1. *“La Portanza e la Resistenza Atmosferica sono trascurate”*

Nel paragrafo 1.4.1 si è constatato che l’interazione tra le particelle presenti nell’ambiente lunare e un generico veicolo spaziale sia debole a causa del limitato valore di number density dell’atmosfera lunare. Di conseguenza, l’Axiom 1 risulta essere un’ipotesi aderente alla realtà.

Axiom 2. *“La curvatura superficiale della Luna è trascurabile”*

Dal programma Apollo [44] e dalla missione Chang’e-4 [43] risulta che la Descent Orbit abbia un perilunio di $r_p^{DOI} = 15 \text{ km}$. Per cui, rapportando la quota di partenza di tipiche traiettorie di Landing Lunare con il raggio equatoriale della Luna (Tabella 1.1), si trova che:

$$(r_p^{DOI})/R_{moon} \approx 0.86\%. \quad (Eq. 7.0)$$

Di conseguenza, tale rapporto risulta inferiore all'1%, per cui è presumibilmente veritiero poter trattare la superficie lunare come se fosse piatta e trascurare gli effetti di curvatura.

Axiom 3. “Non esiste un Campo Magnetico Globale”

Nel paragrafo 1.4.2, attraverso il programma Lunar Orbiter del 1967, si è constatato come la Luna sia sprovvista di un campo magnetico globale, per cui non sono presenti né forze di Lorentz né disturbi sulla dinamica di assetto dovuti a Magnetic Torques.

Axiom 4. “La massa del lander è trascurabile rispetto a quella della Luna”

Nella sezione 4.2 si è descritta la configurazione prototipale del lander considerato, definendone il maximum take-off mass, m_0 che rapportata alla massa della Luna, m_{Moon} :

$$m_0/m_{Moon} \approx 10^{-22} \quad (Eq. 7.1)$$

Di conseguenza, è possibile considerare la Luna come corpo principale, mentre il lander come corpo secondario, coerentemente con la nomenclatura utilizzata nel Problema dei Due Corpi Ristretto del paragrafo 3.4.

Axiom 5. “Si trascura il moto orbitale della Luna”

Nella sezione 1.5 si è descritta l'orbita lunare nel Sistema Solare, la quale presenta un moto di rivoluzione attorno alla Terra e un moto di rotazione attorno al proprio asse, inoltre, il sistema binario Terra-Luna ruota in un'orbita ellittica attorno al Sole. Il moto orbitale della Luna è generato sia dal campo gravitazionale terrestre che solare, i quali saranno in prima approssimazione trascurati, cioè si ipotizza che il corpo principale non sia perturbato dalla presenza di forze esterne. Dunque, il sistema di riferimento centrato nel landing site sarà di tipo inerziale, e risulterà fermo per tutta la durata del fenomeno. Inoltre, la scala dei tempi in cui si svolge la traiettoria di soft-landing risulterà essere notevolmente inferiore a quella del moto orbitale lunare, per cui è ragionevole poter trascurare gli effetti del moto orbitale lunare.

Axiom 6. “Il campo gravitazionale generato dalla Luna è costante”

Le relazioni (Eq. 3.25) e (Eq. 3.26) del paragrafo 3.4.1 hanno permesso di valutare l'accelerazione di gravità sia sul suolo lunare che ad una quota di 15 km. L'errore relativo commesso in termini

percentuali (Eq. 3.27) è del 1.71%, per cui ipotizzare che il campo gravitazionale abbia un modulo costante, pari al suo valore definito sulla superficie, ovvero di 1.623 m/s^2 determina un errore ritenuto accettabile, in quanto inferiore al 2%.

Axiom 7. *“I propulsori sia del main engine che del sistema RCS sono considerati dei propulsori chimici perfettamente espansi”*

Nella sezione 3.5.1.1 si è mostrato come la spinta generata da propulsori chimici sia la Stream Force valutata nella sezione di uscita dell’ugello. Nell’ipotesi che il nozzle sia perfettamente espanso, cioè che $P_e = P_0$, la spinta è semplicemente il prodotto tra la velocità in uscita dall’ugello e la portata di propellente, come descritto dall’equazione (Eq. 3.43).

Axiom 8. *“Il calettamento del propulsore principale è fisso sul lander”*

Il lander presenta un main engine con calettamento fisso, cioè la direzione di spinta non risulta essere variabile, a meno di cambiamenti di assetto dello spacecraft. Questo fenomeno accoppia la dinamica rotazionale con quella traslazionale, dove le variazioni in termini di direzione di spinta sono associate a variazioni dell’assetto del lander.

Axiom 9. *“Il lander è un corpo a simmetria cilindrica con due piani di simmetria”*

Nel paragrafo 3.6.1.1 si è mostrato come la simmetria cilindrica di uno spacecraft permetta di trascurare gli effetti del roll angle, per cui nello studio della dinamica rotazionale si trascurerà l’eventuale presenza di un moto di spin del veicolo spaziale. Inoltre, la presenza di due piani di simmetria permette l’annullamento dei momenti centrifughi nel tensore di inerzia, determinando una matrice diagonale, che semplifica le Equazioni Differenziali di Eulero (Eq. 3.66). Inoltre, la direzione di spinta del propulsore principale coincide con l’asse di simmetria del lander, sicché l’attivazione del main engine non produce coppie sullo spacecraft, non incidendo così sulla dinamica di assetto.

Axiom 10. *“Si trascurano gli effetti di imbardata”*

Una ulteriore ipotesi effettuata per la dinamica di assetto riguarda trascurare gli effetti sia di yaw angle che di yaw rate. Questa semplificazione, in combinazione con l’ipotesi *Axiom 9*, riduce la complessità del problema di dinamica di assetto che si riduce nello studio solamente del moto di pitch (Eq. 3.67) e (Eq. 3.80). Di conseguenza, essendo il calettamento del propulsore principale

fisso sul lander e lo yaw angle nullo r considerando il sistema di riferimento inerziale \mathcal{F}_I del paragrafo 3.6.1, la direzione di spinta sarà sempre nel piano di simmetria (X_I, Z_I) , per cui:

$$\vec{T} = T_x \vec{u}_{X_I} + T_z \vec{u}_{Z_I} \quad (\text{Eq. 7.2})$$

La trattazione con effetti di imbardata dovrà essere implementata in analisi future di modo da rendere la modellizzazione del problema più realistica, tale da permettere di trattare problemi di Hazard Detection and Avoidance (HDA).

Axiom 11. “Sia il modulo della spinta del main engine che della coppia di controllo del sistema RCS sono limitati”

Il modulo della spinta del main engine e la coppia fornita dal sistema RCS risultano limitati da valori massimi e minimi, in funzione della tecnologia considerata come descritto nel capitolo 4, mediante le equazioni (Eq. 4.10) e (Eq. 4.12):

$$T_{min} \leq T \leq T_{max} \quad (\text{Eq. 7.3})$$

$$M_{min} \leq M \leq M_{max} \quad (\text{Eq. 7.4})$$

Axiom 12. “Si trascura il consumo di propellente dovuto al sistema RCS”

La relazione (Eq. 3.46) permette di valutare la variazione della massa del lander indotta dal consumo di propellente. In particolare, considerando la configurazione descritta nel paragrafo 4.2, il consumo di propellente è dovuto sia all’attivazione del main engine che alla coppia di thrusters del sistema RCS per la generazione della torque:

$$\frac{dm}{dt} = -\frac{T}{c} - \frac{2 \cdot T_{RCS}}{c_{RCS}} \quad (\text{Eq. 7.5})$$

Sostituendo i valori numerici della Tabella 4.4 si vede che

- $T/c \approx 1.406 \text{ kg/s}$
- $2 \cdot T_{RCS}/c_{RCS} \approx 29 \text{ g/s}$

Di conseguenza, l’attivazione del main engine risulta essere il termine predominante nel consumo di propellente, risultando tre ordini di grandezza superiore al consumo generato dal sistema RCS, per cui, supporre di trascurare il consumo generato dal sistema RCS genererebbe un errore che in prima approssimazione, può essere considerato trascurabile.

7.3 Sistemi di Riferimento

Si consideri un Problema dei Due Corpi Ristretto (paragrafo 3.4) dove la Luna rappresenta il corpo principale, mentre il lander è il corpo secondario. Si considerano:

- $\mathcal{F}_M = (X_M, Y_M, Z_M)$ è il sistema di riferimento cartesiano non rotante avente origine nel centrato nel centro di massa della Luna
- $\vec{r} = (x_M, y_M, z_m)$ è il vettore posizione del lander nel sistema \mathcal{F}_M
- $\mathcal{F} = (X, Y, Z)$ è un sistema di riferimento inerziale fisso centrato nel landing site sulla superficie lunare.
- *Ground Track*: è il luogo dei punti dato dall'intersezione fra il vettore posizione \vec{r} e la superficie lunare.
- *Range*: è la distanza sulla superficie lunare che il lander deve percorrere affinché raggiunga il landing site

Il Range può essere scomposto in:

- *Downrange*: è la distanza percorsa lungo la Ground Track dal lander sino al landing site
- *Crossrange*: è la distanza percorsa sulla superficie lunare in direzione ortogonale alla Ground Track per raggiungere il landing site [98].

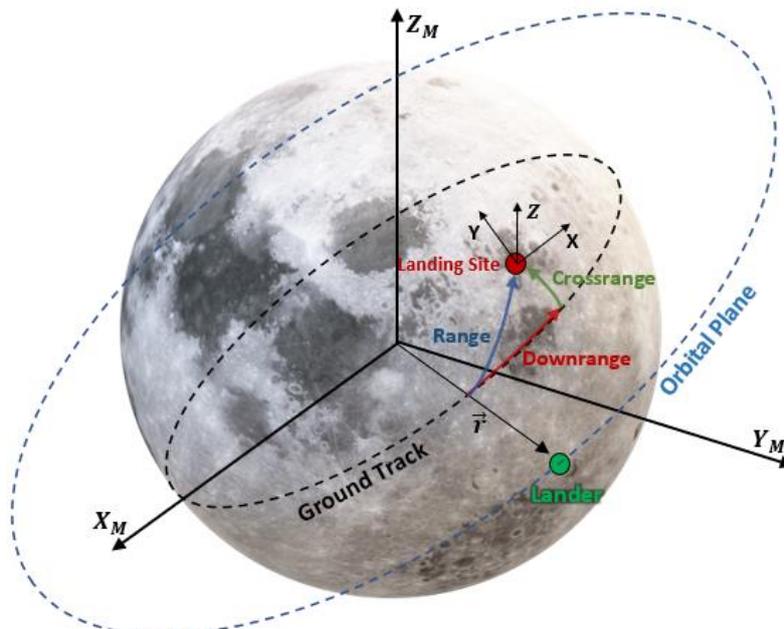


Figura 7. 1: Definizione di Downrange e Crossrange

In *Axiom 2* si è supposto che la Luna presenti una superficie planare, per cui la Ground-Track degenera in un tratto rettilineo, tanto che:

- X sarà la direzione del downrange
- Y sarà la direzione del crossrange
- Z sarà la direzione dell'altitudine, uscente dalla superficie lunare

Per lo studio della dinamica rotazionale, si definiscono altri due sistemi di riferimento, cioè delle terne destrorse in coordinate cartesiane:

- $\mathcal{F}_b = (X_b, Y_b, Z_b)$ è un sistema di riferimento rotante con velocità angolare $\vec{\omega}$ centrato nel centro di massa del lander.
 - X_b coincide con l'asse di simmetria del corpo cilindrico
 - La rotazione di \mathcal{F}_b attorno all'asse X_I è il roll angle φ
 - La rotazione di \mathcal{F}_b attorno all'asse Y_I è il pitch angle ϑ
 - La rotazione di \mathcal{F}_b attorno all'asse Z_I è lo yaw angle ψ
- $\mathcal{F}_I = (X_I, Y_I, Z_I)$ è un sistema di riferimento inerziale fisso avente origine nel centro di massa del lander con:
 - X_I è parallelo a Z del sistema \mathcal{F}
 - Z_I è parallelo a X del sistema \mathcal{F}
 - $Y_b \equiv Y_I$

Il seguente diagramma di corpo libero tiene conto di *Axiom 10*, cioè che lo yaw angle sia nullo, per cui è stato rappresentato il lander solamente nel piano (X, Z) . La convenzione di segno per il pitch angle segue la regola della mano destra, per cui sarà positivo per rotazioni antiorarie.

Si definiscono:

- \vec{u}_x è il versore associato all'asse X del sistema di riferimento \mathcal{F}
- \vec{u}_y è il versore associato all'asse Y del sistema di riferimento \mathcal{F}
- \vec{u}_z è il versore associato all'asse Z del sistema di riferimento \mathcal{F}

Di conseguenza, il vettore posizione \vec{R} del lander, la spinta \vec{T} e nel sistema di riferimento \mathcal{F} risultano essere:

$$\vec{R} = R_x \vec{u}_x + R_y \vec{u}_y + R_z \vec{u}_z \quad (\text{Eq. 7.6})$$

$$\vec{T} = T \cdot \cos(\vartheta) \vec{u}_X + T \cdot \sin(\vartheta) \vec{u}_Z \quad (\text{Eq. 7.7})$$

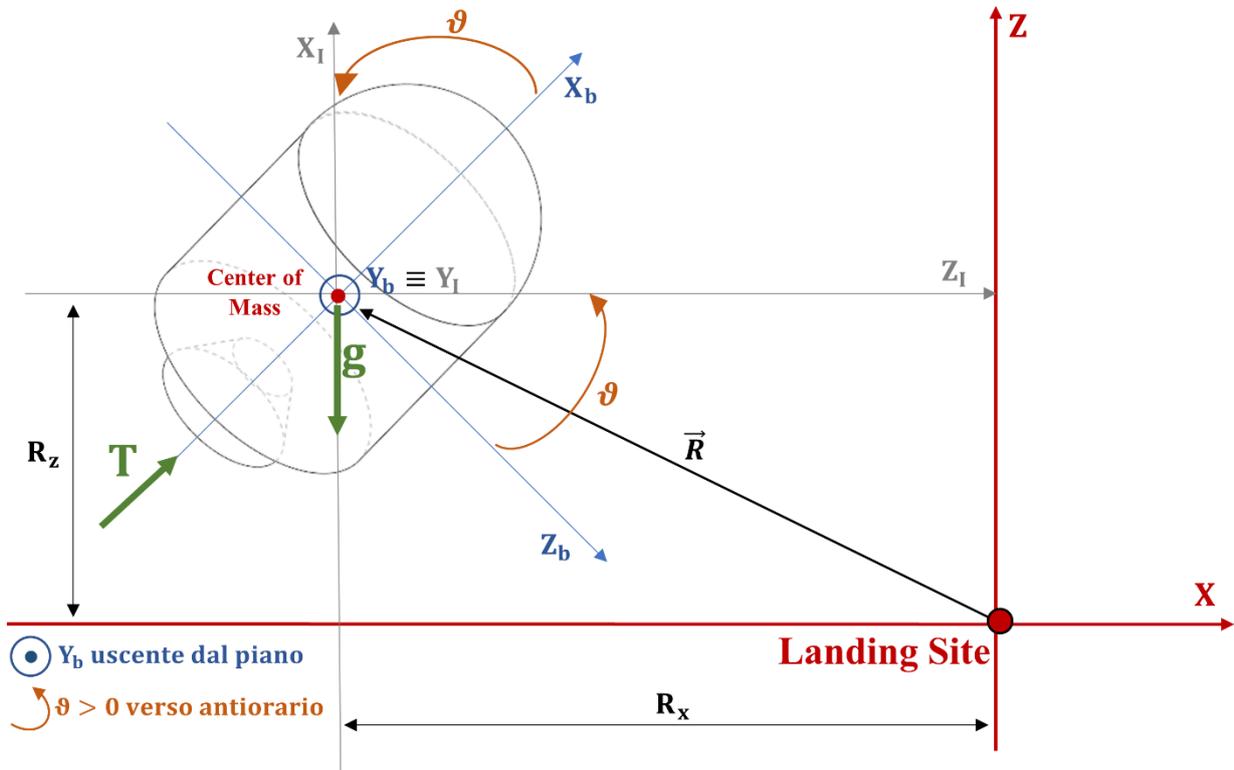


Figura 7. 2: Diagramma di Corpo Libero del lander lunare

Per il campo gravitazionale generato dalla Luna, si fa riferimento all'espressione (Eq. 3.29), il cui modulo è pari a quello calcolato nell'espressione (Eq. 3.25), cioè

$$\vec{g} = -g \vec{u}_Z = -1.623 \text{ m/s}^2 \vec{u}_Z \quad (\text{Eq. 7.8})$$

7.4 Equazioni del moto e Dinamica Rotazionale

Il sistema Lander-Luna può essere trattato con il Problema dei Due Corpi Ristretto nonostante sia un sistema a massa variabile, come osservato nel paragrafo 3.5.1.1, introducendo un'equazione che tenga conto della variazione di massa del veicolo spaziale indotta dal consumo di propellente (Eq. 3.46). Introducendo le semplificazioni descritte nel paragrafo 7.1, considerando i sistemi di riferimento della sezione 7.2 e tenendo conto del diagramma di corpo libero della figura 7.2 si trovano le equazioni del moto nel sistema di riferimento inerziale centrato nel landing site \mathcal{F} , sfruttando la definizione di velocità istantanea (Eq. 3.4) e la forma del R2BP data dall'espressione (Eq. 3.31) con $\overline{F}_m' = \vec{T}/m(t)$. Per la dinamica di assetto, l'equazione cinematica è data dalla relazione (Eq. 3.67) mentre le equazioni di momento si riducono nella forma (Eq. 3.80).

In aggiunta alle equazioni (Eq. 7.6), (Eq. 7.7) e (Eq. 7.8) si considera che:

$$\vec{V} = V_x \overline{u}_x + V_y \overline{u}_y + V_z \overline{u}_z \quad (\text{Eq. 7.9})$$

$$\vec{\omega} = \omega \overline{u}_y \quad \vec{M} = M \overline{u}_y \quad (\text{Eq. 7.10})$$

Riassumendo, si trova un sistema di equazioni differenziali:

<i>Landing Differential Equations</i>		
<i>Downrange Equation</i>	$\dot{R}_x = V_x$	(Eq. 7.11)
<i>Crossrange Equation</i>	$\dot{R}_y = V_y$	(Eq. 7.12)
<i>Altitude Equation</i>	$\dot{R}_z = V_z$	(Eq. 7.13)
<i>Downrange Rate Equation</i>	$\dot{V}_x = \frac{T}{m} \cos(\vartheta)$	(Eq. 7.14)
<i>Crossrange Rate Equation</i>	$\dot{V}_y = 0$	(Eq. 7.15)
<i>Altitude Rate Equation</i>	$\dot{V}_z = \frac{T}{m} \sin(\vartheta) - g$	(Eq. 7.16)
<i>Trim Dynamics Equation</i>	$\dot{\vartheta} = \omega$	(Eq. 7.17)
<i>Torque Equation</i>	$\dot{\omega} = \frac{M}{I_y}$	(Eq. 7.18)
<i>Propellant Consumption Equation</i>	$\dot{m} = -\frac{T}{c}$	(Eq. 7.19)

Tabella 7. 1: Equazioni Differenziali per il Landing Problem

7.5 Teoria del Controllo Ottimale Applicata al Problema di Landing

Nella sezione 5.2 si è messo in evidenza come le traiettorie di atterraggio determinino un consumo di propellente che influenza il mass budget dello spacecraft, incidendo così sulla fattibilità e sui costi della missione. Per cui, il fine del seguente lavoro di tesi è ottimizzare una traiettoria di landing lunare che tenga conto della dinamica di assetto e che permetta di minimizzare il consumo di propellente. L'equazione (Eq. 3.50) mette in relazione la massa dello spacecraft nell'istante finale con la massa di propellente utilizzata: a parità di massa iniziale, minimizzare il consumo di propellente è equivalente a massimizzare la massa del veicolo spaziale alla fine della traiettoria di landing. Di conseguenza, nella definizione del problema di ottimizzazione, anziché definire una funzione costo da minimizzare, si è preferito massimizzare un indice di performance, cioè proprio la massa finale del lander. Si è implementata una Formulazione di Mayer dove il Costo di Lagrange Φ è nullo su tutta la traiettoria di atterraggio. Per cui il funzionale da massimizzare è:

$$J = m(t_f) \quad (\text{Eq. 7.20})$$

Il problema di ottimizzazione consiste nel ricercare le leggi di controllo che permettano sia di soddisfare i vincoli imposti che di massimizzare il funzionale (Eq. 7.20). Il Principio di Massimo di Pontryagin afferma che il valore del controllo ottimale rende massimo sia l'Hamiltoniano in ogni punto della traiettoria che la massa finale. Ricordando la definizione (Eq 5.9):

$$H = \Phi + \lambda^T f \quad (\text{Eq. 7.21})$$

Le leggi di evoluzione del *Landing Differential Equations* sono:

$$f = \left(V_x, V_y, V_z, \frac{T}{m} \cos(\vartheta), 0, \frac{T}{m} \sin(\vartheta) - g, \omega, \frac{M}{I_y}, -\frac{T}{c} \right)^T \quad (\text{Eq. 7.22})$$

Per cui si definisce il vettore di adjoint variables:

$$\lambda = (\lambda_{R_x}, \lambda_{R_y}, \lambda_{R_z}, \lambda_{V_x}, \lambda_{V_y}, \lambda_{V_z}, \lambda_{\vartheta}, \lambda_{\omega}, \lambda_m)^T \quad (\text{Eq. 7.23})$$

Sostituendo (Eq. 7.22) e (Eq 7.23) nella definizione dell'Hamiltoniano (Eq. 7.21) e ricordando che la funzione integranda del Costo di Lagrange è nulla, si ottiene:

$$H = \lambda_{R_x} V_x + \lambda_{R_y} V_y + \lambda_{R_z} V_z + \lambda_{V_x} \frac{T}{m} \cos(\vartheta) + \lambda_{V_z} \frac{T}{m} \sin(\vartheta) + \lambda_{\vartheta} \omega + \lambda_{\omega} \frac{M}{I_y} - \lambda_m \frac{T}{c} \quad (\text{Eq. 7.24})$$

Applicando il Metodo dei Moltiplicatori di Lagrange, si ricava il funzionale J^* cioè una riscrittura del funzionale J che tiene conto delle condizioni al contorno mediante le costanti μ e delle leggi di evoluzione mediante le adjoint variables λ . La stazionarietà di J^* , cioè imporre che la variazione prima sia uguale a zero, permette di massimizzare il funzionale J : questa condizione è soddisfatta, se e solo se risultano soddisfatte le cosiddette Equazioni differenziali di Eulero-Lagrange:

$$\frac{d\lambda}{dt} = - \left(\frac{\delta H}{\delta x} \right)^T \quad (\text{Eq. 7.25})$$

Dove $x = (R_x, R_y, R_z, V_x, V_y, V_z, \vartheta, \omega, m)^T$ è il vettore delle variabili di stato. Di conseguenza mettendo assieme il vettore delle variabili di stato che quello delle adjoint variables, si ottengono un numero totale di variabili totali pari a 18 per il problema di landing:

$$NY = \text{numero di variabili del problema} = 18 \quad (\text{Eq. 7.26})$$

Derivando l'espressione (Eq. 7.24) rispetto alle variabili di stato si ottiene:

$$\bullet \quad \frac{\delta H}{\delta R_x} = 0 \quad (\text{Eq. 7.27})$$

$$\bullet \quad \frac{\delta H}{\delta R_y} = 0 \quad (\text{Eq. 7.28})$$

$$\bullet \quad \frac{\delta H}{\delta R_z} = 0 \quad (\text{Eq. 7.29})$$

$$\bullet \quad \frac{\delta H}{\delta V_x} = \lambda_{R_x} \quad (\text{Eq. 7.30})$$

$$\bullet \quad \frac{\delta H}{\delta V_y} = 0 \quad (\text{Eq. 7.31})$$

$$\bullet \quad \frac{\delta H}{\delta \vartheta} = - \frac{T}{m} (\lambda_{V_x} \sin(\vartheta) - \lambda_{V_z} \cos(\vartheta)) \quad (\text{Eq. 7.32})$$

$$\bullet \quad \frac{\delta H}{\delta \omega} = \lambda_{\vartheta} \quad (\text{Eq. 7.33})$$

$$\bullet \quad \frac{\delta H}{\delta m} = - \frac{T}{m^2} (\lambda_{V_x} \cos(\vartheta) + \lambda_{V_z} \sin(\vartheta)) \quad (\text{Eq. 7.34})$$

Riassumendo, le Equazioni di Eulero-Lagrange producono un sistema di equazioni differenziali di ottimo da accoppiare con le equazioni del moto trovate nel paragrafo 7.4.

<i>Optimal Differential Equations</i>		
<i>Downrange Adjoint Variable Equation</i>	$\dot{\lambda}_{Rx} = 0$	(Eq. 7.35)
<i>Crossrange Adjoint Variable Equation</i>	$\dot{\lambda}_{Ry} = 0$	(Eq. 7.36)
<i>Altitude Adjoint Variable Equation</i>	$\dot{\lambda}_{Rz} = 0$	(Eq. 7.37)
<i>Downrange Rate Adjoint Variable Equation</i>	$\dot{\lambda}_{Vx} = -\lambda_{Rx}$	(Eq. 7.38)
<i>Crossrange Rate Adjoint Variable Equation</i>	$\dot{\lambda}_{Vy} = 0$	(Eq. 7.39)
<i>Altitude Rate Adjoint Variable Equation</i>	$\dot{\lambda}_{Vz} = -\lambda_{Rz}$	(Eq. 7.40)
<i>Trim Adjoint Variable Equation</i>	$\dot{\lambda}_{\vartheta} = \frac{T}{m} (\lambda_{Vx} \sin(\vartheta) - \lambda_{Vz} \cos(\vartheta))$	(Eq. 7.41)
<i>Angular Velocity Adjoint Variable Equation</i>	$\dot{\lambda}_{\omega} = -\lambda_{\vartheta}$	(Eq. 7.42)
<i>Propellant Consumption Adjoint Variable Equation</i>	$\dot{\lambda}_m = \frac{T}{m^2} (\lambda_{Vx} \cos(\vartheta) + \lambda_{Vz} \sin(\vartheta))$	(Eq. 7.43)

Tabella 7. 2: Equazioni differenziali di Ottimo per Landing Problem

7.5.1 Bang-Bang Control

La due variabili di controllo introdotte nel problema di landing sono la spinta T generata dal propulsore principale e la torque M generata dai thrusters del Reaction Control System (RCS). Per cui, si definisce il vettore dei controlli u come:

$$u = (T, M)^T \quad (\text{Eq. 7.44})$$

In particolare, affinché sia soddisfatta la stazionarietà del funzionale j^* , devono essere soddisfatte anche le equazioni algebriche per i controlli, ovvero:

$$\left(\frac{\delta H}{\delta u} \right)^T = 0 \quad (\text{Eq. 7.45})$$

Derivando l'espressione (Eq. 7.24) rispetto al vettore dei controlli si ottiene:

- $\frac{\delta H}{\delta T} = \frac{\lambda_{Vz} \sin(\vartheta) + \lambda_{Vx} \cos(\vartheta)}{m} - \frac{\lambda_m}{c}$ (Eq. 7.46)

- $\frac{\delta H}{\delta M} = \frac{\lambda_{\omega}}{I_y}$ (Eq. 7.47)

Si definisce *Switching Function* il coefficiente del controllo che compare nell'espressione dell'Hamiltoniano, per cui:

$$S_T = \frac{\lambda_{v_z} \sin(\vartheta) + \lambda_{v_x} \cos(\vartheta)}{m} - \frac{\lambda_m}{c} \quad (\text{Eq. 7.48})$$

$$S_M = \frac{\lambda_\omega}{I_y} \quad (\text{Eq. 7.49})$$

Risulta evidente dalle equazioni (Eq 7.46) e (Eq. 7.47) che l'Hamiltoniano sia lineare rispetto ai controlli soggetti alle limitazioni imposte dall'*Axiom 11*. In questo caso, applicando l'equazione algebrica per i controlli (Eq 7.45), il valore del controllo ottimale risulterebbe indeterminato; tuttavia, il funzionale può essere ancora massimizzato usando il Bang-Bang Control (Eq. 5.17) nel caso in cui la Switching Function associato sia diverso da zero.

Di conseguenza, il *Bang-Bang Control* per la spinta risulta essere:

$$\begin{cases} S_T > 0 \rightarrow T = T_{max} \\ S_T < 0 \rightarrow T = T_{min} \end{cases} \quad (\text{Eq. 7.50})$$

Quello per il momento invece è:

$$\begin{cases} S_M > 0 \rightarrow M = M_{max} \\ S_M < 0 \rightarrow M = M_{min} \end{cases} \quad (\text{Eq. 7.51})$$

Inoltre, nel problema di soft-landing il sistema di equazioni differenziali della dinamica rotazionale è analogo a quella del Fuller's Problem (Eq 6.22) con $x_1 \rightarrow \vartheta$, $x_2 \rightarrow \omega$, $\lambda_\vartheta \rightarrow \lambda_1$ e $\lambda_\omega \rightarrow \lambda_2$. Di fatti, a meno del valore costante del momento di inerzia valutato rispetto all'asse di simmetria dello spacecraft I_y , il segno della Switching Function dipende solamente dal valore assunto della adjoint variable λ_ω , come descritto nell'equazione (Eq. 6.15) per il Fuller's Problem. Nel paragrafo 7.6 sarà valutata in dettaglio la struttura della traiettoria, evidenziando come il primo arco sia di tipo singolare, per cui si farà riferimento alla trattazione del Problema di Fuller in chiave rivisitata presentata nel paragrafo 6.2.1. Questo tipo di approccio permette di uscire dalle condizioni di arco singolare e di convergere all'output desiderato nel landing site in termini di pitch angle e velocità angolare con una soluzione ottimale che preveda un numero finito di switches del controllo, anziché infiniti come previsto nella formulazione del Fuller's Problem classico.

7.5.2 Condizioni per Arco Singolare

Nel paragrafo 7.5.1 si è definita la legge di controllo ottimale per un Hamiltoniano che risulti essere lineare rispetto al controllo. Tuttavia, la formulazione del *Bang-Bang Control* è valida se e soltanto se la Switching Function associata al controllo risulti essere diverso da zero, altrimenti si è nel caso di *arco singolare*. In questo caso, la ricerca del controllo ottimale avverrebbe imponendo tutte le derivate successive della Switching Function fatte rispetto al tempo pari a zero, finché non compare esplicitamente il controllo. Il valore del controllo ottimale è ottenuto imponendo l'ultima derivata k -esima uguale a zero, determinando un arco singolare di ordine $k/2$.

7.5.2.1 Switching Function del Momento Nullo

Nel caso in cui la adjoint variable $\lambda_\omega = 0 \rightarrow S_M = 0$ cioè si è in condizione di arco singolare.

Ordine di derivazione $\rightarrow k = 1$

$$S_M = \frac{\dot{\lambda}_\omega}{I_y} = -\lambda_\vartheta = 0 \quad (\text{Eq. 7.52})$$

Ordine di derivazione $\rightarrow k = 2$

$$\dot{S}_M = -\dot{\lambda}_\vartheta = \frac{T}{m} (\lambda_{V_x} \sin(\vartheta) - \lambda_{V_z} \cos(\vartheta)) = 0 \quad (\text{Eq. 7.53})$$

Si definisce il parametro Λ come:

$$\Lambda = \sqrt{\lambda_{V_x}^2 + \lambda_{V_z}^2} \quad (\text{Eq. 7.54})$$

Si possono definire $\cos(\vartheta)$ e $\sin(\vartheta)$ in funzione di Λ e che soddisfino l'equazione (Eq. 7.53):

$$\cos(\vartheta) = \lambda_{V_x} / \Lambda \quad (\text{Eq. 7.55})$$

$$\sin(\vartheta) = \lambda_{V_z} / \Lambda \quad (\text{Eq. 7.56})$$

Ricordano la regola di derivazione del prodotto di funzioni:

$$\frac{d}{dt} (f(t) \cdot g(t)) = g(t) \frac{df(t)}{dt} + f(t) \frac{dg(t)}{dt} \quad (\text{Eq. 7.57})$$

E la regola di derivazione a catena:

$$\frac{d}{dt}(f(y)) = \frac{df}{dy} \cdot \frac{dy}{dt} \quad (\text{Eq. 7.58})$$

Si procede al passo successivo di derivazione della Switching Function:

Ordine di derivazione $\rightarrow k = 3$

$$\begin{aligned} \ddot{S}_M = -\ddot{\lambda}_\vartheta = & -\frac{d}{dt} \left(\frac{T}{m} (\lambda_{Vx} \sin(\vartheta) - \lambda_{Vz} \cos(\vartheta)) \right) = -\frac{d}{dm} \left(\frac{T}{m} \right) \cdot \frac{dm}{dt} \cdot (\lambda_{Vx} \sin(\vartheta) - \lambda_{Vz} \cos(\vartheta)) + \\ & -\frac{T}{m} (\dot{\lambda}_{Vx} \sin(\vartheta) - \dot{\lambda}_{Vz} \cos(\vartheta)) - \frac{T}{m} (\lambda_{Vx} \cos(\vartheta) + \lambda_{Vz} \sin(\vartheta)) \cdot \dot{\vartheta} \end{aligned} \quad (\text{Eq. 7.59})$$

Il primo termine di \ddot{S}_M può essere eliminato in quanto compare l'espressione (Eq. 7.53), imposta pari a zero per le condizioni di arco singolare.

Sostituendo la *Downrange Rate Adjoint Variable Equation* (Eq. 7.38) e la *Altitude Rate Adjoint Variable Equation* (Eq. 7.40) e la *Trim Dynamics Equation* (Eq. 7.17) nell'espressione (Eq. 7.59), si ottiene:

$$\ddot{S}_M = \frac{T}{m} (\lambda_{Rx} \sin(\vartheta) - \lambda_{Rz} \cos(\vartheta)) - \frac{T}{m} (\lambda_{Vx} \cos(\vartheta) + \lambda_{Vz} \sin(\vartheta)) \cdot \omega \quad (\text{Eq. 7.60})$$

Imponendo uguale a zero la relazione (Eq. 7.60) è possibile calcolare la velocità angolare ω in funzione del parametro Λ del pitch angle ϑ e delle adjoint variables λ_{Rx} e λ_{Rz} :

$$(\lambda_{Rx} \sin(\vartheta) - \lambda_{Rz} \cos(\vartheta)) = \omega \cdot (\lambda_{Vx} \cos(\vartheta) + \lambda_{Vz} \sin(\vartheta)) \quad (\text{Eq. 7.61})$$

$$\omega = \frac{(\lambda_{Rx} \sin(\vartheta) - \lambda_{Rz} \cos(\vartheta))}{(\lambda_{Vx} \cos(\vartheta) + \lambda_{Vz} \sin(\vartheta))} \quad (\text{Eq. 7.62})$$

$$\omega = \frac{(\lambda_{Rx} \sin(\vartheta) - \lambda_{Rz} \cos(\vartheta))}{\Lambda} \quad (\text{Eq. 7.63})$$

L'ultimo passo di derivazione della Switching Function prevede:

Ordine di derivazione $\rightarrow k = 4$

$$\begin{aligned} S_M^{(IV)} = \frac{T}{m} [& (\dot{\lambda}_{Rx} \sin(\vartheta) - \dot{\lambda}_{Rz} \cos(\vartheta)) + \omega \cdot (\lambda_{Rx} \cos(\vartheta) + \lambda_{Rz} \sin(\vartheta)) - \omega \cdot (\dot{\lambda}_{Vx} \cos(\vartheta) + \dot{\lambda}_{Vz} \sin(\vartheta)) \\ & - \omega \cdot (\lambda_{Vx} \cos(\vartheta) + \lambda_{Vz} \sin(\vartheta)) - \omega^2 (-\lambda_{Vx} \sin(\vartheta) + \lambda_{Vz} \cos(\vartheta))] - \left(\frac{T}{m^2} \right) \dot{m} \left(\frac{\ddot{S}_M}{T/m} \right) \end{aligned} \quad (\text{Eq. 7.64})$$

Il primo termine di $S_M^{(IV)}$ si annulla, sostituendo la *Downrange Adjoint Variable Equation* (Eq. 7.35) e la *Altitude Adjoint Variable Equation* (Eq. 7.37). Inoltre, sia il quinto che il sesto termine dell'espressione (Eq. 7.64) sono eliminati in quanto compare rispettivamente \ddot{S}_M e $\ddot{\dot{S}}_M$ che sono state imposte pari a zero per le condizioni di arco singolare. Risulta evidente che sostituendo a $\dot{\omega}$ la *Torque Equation* (Eq. 7.18), la Switching Function presenti esplicitamente il controllo M , per cui il valore del controllo ottimale è ottenuto imponendo $S_M^{(IV)} = 0$.

L'arco singolare per un problema di landing con dinamica rotazionale risulta essere del secondo ordine. L'equazione (Eq. 7.64) è ulteriormente semplificata introducendo la *Downrange Rate Adjoint Variable Equation* (Eq. 7.38) e la *Altitude Rate Adjoint Variable Equation* (Eq. 7.40).

$$S_M^{(IV)} = \frac{T}{m} \left[2\omega \cdot (\lambda_{Rx} \cos(\vartheta) + \lambda_{Rz} \sin(\vartheta)) - \frac{M}{I_y} \cdot (\lambda_{Vx} \cos(\vartheta) + \lambda_{Vz} \sin(\vartheta)) \right] = 0 \quad (\text{Eq. 7.65})$$

Per cui, il valore del controllo ottimale M^* è:

$$M^* = 2\omega I_y \cdot \frac{(\lambda_{Rx} \cos(\vartheta) + \lambda_{Rz} \sin(\vartheta))}{(\lambda_{Vx} \cos(\vartheta) + \lambda_{Vz} \sin(\vartheta))} \quad (\text{Eq. 7.66})$$

Introducendo il parametro Λ si trova:

$$M^* = \frac{2\omega I_y}{\Lambda} (\lambda_{Rx} \cos(\vartheta) + \lambda_{Rz} \sin(\vartheta)) \quad (\text{Eq. 7.67})$$

7.5.1 Direzione di Spinta Ottimale

Nella Teoria del Controllo Ottimale si è definito il Principio di Massimo di Pontryagin che afferma che il Performance Index è massimizzato se e solo se il valore del controllo ottimale massimizza l'Hamiltoniano. Nella modellizzazione del problema di landing il vettore dei controlli (Eq. 7.44) è stato definito usando le uniche variabili di controllo direttamente modificabili dall'algoritmo di navigazione del lander. Tuttavia, oltre al modulo della spinta, l'Hamiltoniano è influenzato anche dalla sua direzione, cioè dal pitch angle, avendo considerato un main engine con calettamento fisso sul veicolo spaziale. Nel 1963 D.F. Lawden introdusse il cosiddetto *primer vector*: la direzione di spinta sarà ottimale se e solo se essa è nella direzione del *primer vector* [22, 23, 35, 27, 99]. Nel caso del problema di landing, trascurando gli effetti del crossrange e di imbardata, il *primer vector* è parallelo al adjoint variables vector $\lambda_V(t) = [\lambda_{Vx}(t), \lambda_{Vz}(t)]$, cioè:

$$p(t) = \lambda_V(t) \tag{Eq. 7.68}$$

In componenti nel sistema di riferimento inerziale centrato nel landing site risulta:

$$\begin{cases} p_x(t) = \lambda_{Vx}(t) \end{cases} \tag{Eq. 7.69}$$

$$\begin{cases} p_z(t) = \lambda_{Vz}(t) \end{cases} \tag{Eq. 7.70}$$

Si consideri il versore \hat{u} , cioè la direzione della spinta nel sistema di riferimento $\mathcal{F} = (X, Y, Z)$:

$$\vec{T} = T \cdot \hat{u} \tag{Eq. 7.71}$$

Confrontando l'espressione (Eq. 7.71) con l'espressione (Eq. 7.7), si trova che:

$$\hat{u} = (\cos(\vartheta) \hat{u}_x, \sin(\vartheta) \hat{u}_z) \tag{Eq. 7.72}$$

Se la direzione di spinta \hat{u} coincide con il primer vector $p(t)$, si trova che:

$$\begin{cases} \lambda_{Vx}(t) = \cos(\vartheta) \end{cases} \tag{Eq. 7.73}$$

$$\begin{cases} \lambda_{Vz}(t) = \sin(\vartheta) \end{cases} \tag{Eq. 7.74}$$

Dividendo la relazione (Eq. 7.74) con (Eq. 7.73) si ottiene:

$$\vartheta_{optimal} = \tan^{-1} \left(\frac{\lambda_{Vx}(t)}{\lambda_{Vz}(t)} \right) \tag{Eq. 7.75}$$

La conferma del risultato della teoria di teoria di Lawden si può ottenere sostituendo la direzione del pitch angle ottimale (Eq. 7.73) e (Eq. 7.74) nella (Eq. 7.32) trovando un punto di stazionarietà dell'Hamiltoniano. Derivando nuovamente rispetto a ϑ l'espressione (Eq. 7.32) si trova che:

$$\frac{\delta^2 H}{\delta \vartheta^2} = -\frac{T}{m} [\lambda_{Vx} \cos(\vartheta) + \lambda_{Vz} \sin(\vartheta)] \tag{Eq. 7.76}$$

Sostituendo la soluzione del punto stazionario:

$$\frac{\delta^2 H}{\delta \vartheta^2} = -\frac{T}{m} < 0 \rightarrow \text{Punto di Massimo per l'Hamiltoniano} \tag{Eq. 7.77}$$

Inoltre, è possibile notare che nel caso di arco singolare il soddisfacimento della condizione (Eq. 7.53), determini una direzione di spinta che coincide con quella ottimale (Eq. 7.75).

7.6 Condizioni al Contorno

Per la definizione delle condizioni al contorno imposte χ si farà riferimento solamente ai contorni esterni della traiettoria: il punto iniziale della traiettoria “0”, cioè $t = t_0$, coincide con il punto finale della DOI descritta nel paragrafo 4.1.5 e in tale istante temporale si considerano non assegnate le condizioni di assetto del lander lunare. Al termine della traiettoria di landing, cioè per $t = t_f$, si richiede che il lander abbia velocità nulla nel landing site e che l’asse di simmetria sia ortogonale alla superficie lunare per permettere il corretto dispiegamento e utilizzo del landing gear.

<i>Assigned Boundary Conditions</i>	
▪ Starting Point “0”	
$R_x(t_0) = R_{x0} = -500 \text{ km}$	(Eq. 7.78)
$R_y(t_0) = R_{y0} = 0 \text{ km}$	(Eq. 7.79)
$R_z(t_0) = R_{z0} = 15 \text{ km}$	(Eq. 7.80)
$V_x(t_0) = V_{x0} = 1.692 \text{ km/s}$	(Eq. 7.81)
$V_y(t_0) = V_{y0} = 0 \text{ km/s}$	(Eq. 7.82)
$V_z(t_0) = V_{z0} = 0 \text{ km/s}$	(Eq. 7.83)
$m(t_0) = m_0 = 1600 \text{ kg}$	(Eq. 7.84)
▪ Landing Site “f”	
$R_z(t_f) = R_{zf} = 0 \text{ km}$	(Eq. 7.85)
$V_x(t_f) = V_{xf} = 0 \text{ km/s}$	(Eq. 7.86)
$V_z(t_f) = V_{zf} = 0 \text{ km/s}$	(Eq. 7.87)
$\vartheta(t_f) = \vartheta_f = \pi/2$	(Eq. 7.88)
$\omega(t_f) = \omega_f = 0 \text{ rad/s}$	(Eq. 7.89)

Tabella 7. 3: Condizioni al Contorno Assegnate per il Landing Problem

Per le condizioni al contorno di ottimo σ si farà riferimento alla proprietà esposta nel Paragrafo 5.3: nel caso in cui una certa variabile di stato non sia esplicitamente imposta nelle *Assigned Boundary Conditions* e non compaia nel costo di Mayer, la corrispondente adjoint variable risulterà essere nulla. Considerando la definizione del funzionale (Eq 7.20), per la prima condizione di trasversalità:

$$\lambda_m(t_f) = \lambda_{m_f} = \frac{\delta\varphi}{\delta m(t_f)} = \frac{\delta\varphi}{\delta m_f} = 1 \quad (\text{Eq. 7.90})$$

Introducendo un parametro α costante nella definizione del funzionale, la formulazione del problema di ottimizzazione non varia, per cui l'indice di performance da massimizzare sarebbe:

$$J = \alpha \cdot m_f \quad (\text{Eq. 7.91})$$

La prima condizione di trasversalità applicata al funzionale (Eq. 7.91) determina:

$$\lambda_{m_f} = \alpha \quad (\text{Eq. 7.92})$$

Dunque, imponendo λ_{m_0} pari al valore unitario, si definisce implicitamente il valore del parametro α . Di conseguenza, è possibile sostituire la prima condizione di trasversalità con:

$$\lambda_{m_0} = 1 \xleftrightarrow{\text{Equivalente}} \lambda_{m_f} = \alpha \quad (\text{Eq. 7.93})$$

Riassumendo, le condizioni al contorno di ottimo sono:

<i>Optimal Boundary Conditions</i>	
$\lambda_{\vartheta}(t_0) = \lambda_{\vartheta_0} = 0$	(Eq. 7.94)
$\lambda_{\omega}(t_0) = \lambda_{\omega_0} = 0$	(Eq. 7.95)
$\lambda_m(t_0) = \lambda_{m_0} = 1$	(Eq. 7.96)
$\lambda_x(t_f) = \lambda_{x_f} = 0$	(Eq. 7.97)
$\lambda_y(t_f) = \lambda_{y_f} = 0$	(Eq. 7.98)
$\lambda_{v_y}(t_f) = \lambda_{v_{y_f}} = 0$	(Eq. 7.99)

Tabella 7. 4: Condizioni al Contorno di Ottimo per il Landing Problem

L'introduzione dell'equazione (Eq. 7.97) permette di non vincolare il punto di atterraggio del lander in $x = 0$, di modo che se tale condizione non sia raggiunta spontaneamente dalla traiettoria di landing, è possibile modificare il valore iniziale del Downrange (Eq. 7.78) introducendo un tempo di waiting nella fase di DOI in modo da anticipare o posticipare la traiettoria di discesa.

Le condizioni di assetto libere del lander nel punto iniziale della traiettoria determinano una Switching Function del momento nullo, cioè nello starting point si è in condizioni di arco singolare.

Nella trattazione del paragrafo 7.5.2.1 si è osservato come l'arco singolare determini condizioni al contorno da soddisfare, cioè:

$$\dot{S}_M(t_0) = \ddot{S}_M(t_0) = \dddot{S}_M(t_0) = 0 \quad (\text{Eq. 7.100})$$

Tuttavia, la condizione $\dot{S}_M(t_0) = 0$ è equivalente alla condizione di ottimo (Eq. 7.94), per cui le condizioni al contorno aggiuntive per l'arco singolare risultano essere:

<i>Boundary Conditions for Singular Arc</i>	
$\lambda_{Vx_0} \sin(\vartheta_0) - \lambda_{Vz_0} \cos(\vartheta_0) = 0$	(Eq. 7.101)
$\omega_0 = \frac{(\lambda_{Rx_0} \sin(\vartheta_0) - \lambda_{Rz_0} \cos(\vartheta_0))}{\Lambda}$	(Eq. 7.102)

Tabella 7. 5: Condizioni al Contorno per Arco Singolare nel Landing Problem

Inoltre, l'Hamiltoniano non dipende esplicitamente dal tempo, per cui, il tempo finale t_f non compare né nell'espressione (Eq. 7.24) né nel performance index (Eq. 7.20) determinando una ulteriore condizione al contorno da soddisfare:

$$H(t_f) = H_f = 0 \quad (\text{Eq. 7.103})$$

7.6.1 Fuller's Problem per la Dinamica Rotazionale

Nel caso di soft-landing, le equazioni per la dinamica rotazionale risultano essere la Trim Dynamics Equation (Eq. 7.17), la Torque Equation (Eq. 7.18), Trim Adjoint Variable Equation (Eq. 7.41) e l'Angular Velocity Adjoint Variable Equation (Eq. 7.42), la cui variabile di controllo è il momento M appartenente ad un determinato dominio di ammissibilità (Eq. 7.4). Confrontando il sistema di equazioni differenziali della dinamica rotazionale con il Problema di Fuller (Eq. 6.22) si osservano delle analogie, cioè:

$$x_1 \rightarrow \vartheta \quad x_2 \rightarrow \omega \quad \lambda_1 \rightarrow \lambda_\vartheta \quad \lambda_2 \rightarrow \lambda_\omega \quad (\text{Eq. 7.104})$$

Nel Paragrafo 7.6 si è dimostrato come il primo tratto della traiettoria sia un arco singolare, per cui sono soddisfatte, per l'intera durata dell'arco t_s , sia l'equazione (Eq. 7.94) che (Eq. 7.101). Di conseguenza le equazioni differenziali associate alle adjoint variables si riducono nella forma:

$$\begin{cases} \lambda_{\vartheta}'(t) = 0 \\ \lambda_{\omega}'(t) = 0 \end{cases} \quad (Eq. 7.105)$$

Le adjoint variables λ_{ϑ} e λ_{ω} sono nulle nell'istante iniziale t_0 in quanto si è considerata libera la dinamica di assetto nella fase iniziale della traiettoria di landing. La risoluzione del sistema di equazioni differenziali (Eq. 7.105) con le condizioni al contorno appena esplicitate comporta:

$$\begin{cases} \lambda_{\vartheta}(t) = 0 \\ \lambda_{\omega}(t) = 0 \end{cases} \quad \forall t \in [t_0; t_s] \quad (Eq. 7.106)$$

Il tratto di traiettoria successivo all'arco singolare presenterebbe delle condizioni iniziali per le adjoint variables che permetterebbero di soddisfare sia l'equazione (Eq. 6.13) che (Eq. 6.16) del Fuller's Problem. Le condizioni imposte nel landing site (Eq. 7.88) e (Eq. 7.89) sono analoghe alle condizioni al contorno (Eq. 6.6), cioè:

$$\begin{cases} x_1(T) = \zeta_1 \\ x_2(T) = \zeta_2 \end{cases} \rightarrow \begin{cases} \vartheta(T) = \pi/2 \\ \omega(T) = 0 \end{cases} \quad (Eq. 7.107)$$

Nel caso di soft-landing la presenza dell'arco singolare impone $\vartheta(t_s) \neq 0$, per cui è come se fosse assegnato esplicitamente il valore di una variabile di stato in un contorno interno. La corrispondente variabile aggiuntiva dovrebbe quindi presentare una discontinuità libera, cioè:

$$\lambda_{\vartheta}(t_s^+) = \lambda_{\vartheta+} = "Free" \quad (Eq. 7.108)$$

Di conseguenza, la dinamica rotazionale può essere modellizzata mediante il Fuller's Problem rivisitato esposto nel Paragrafo 6.2.1. La presenza della discontinuità libera $\lambda_{\vartheta}(t_s^+)$ permette di ottenere l'output richiesto in termini di variabili di stato (Eq. 7.107) con un numero finito di switches. Nonostante nel Paragrafo 6.5 si sia dimostrato un miglioramento nel Integral Squared Error all'aumentare del numero di Switches, si è comunque ipotizzato di voler realizzare il soft-landing sul suolo lunare con $NSW = 1$, in quanto tale caso determina il minor tempo di convergenza all'output richiesto. Si farà riferimento alla trattazione del paragrafo 6.2.1.1

La presenza di un unico switch equivale ad imporre una condizione al contorno aggiuntiva (Eq. 6.28), al termine dell'arco di traiettoria che segue l'arco singolare cioè:

$$\lambda_{\omega}(t_{sw}) = 0 \quad (Eq. 7.109)$$

L'arco di traiettoria avrà una struttura definita a priori del tipo:

- *Singular Arc* con durata pari a t_s
- *2nd Arc* con durata pari a $T_2 = t_2 - t_s$
- *3rd Arc* con durata pari a $T_3 = t_3 - t_2$

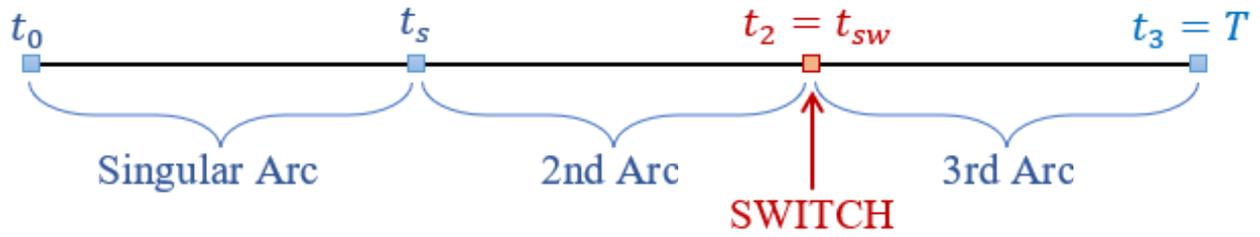


Figura 7. 3: Schematizzazione della Struttura della Traiettoria

7.7 Parametri del Boundary Value Problem

Per definire un Boundary Value Problem che sia ben posto, il numero di condizioni al contorno deve essere pari alle dimensioni del problema. Per cui si definiscono alcune grandezze:

- $N_x = \text{numero di variabili di stato del problema} = 9$
- $N_\lambda = \text{numero di adjoint variables del problema} = 9$
- $N_t = \text{numero di archi della traiettoria} = 3$
- $N_d = \text{numero di discontinuità libere} = 1$
- $NY = \text{numero di variabili del problema} = N_x + N_\lambda = 18$
- $KP = \text{parametri introdotti nel BVP} = N_t + N_d = 4$
- $N = \text{dimensione del problema} = NY + KP = 22$
- $N_{ABC} = \text{numero di Assigned Boundary Condition} = 12$
- $N_{OBC} = \text{numero di Optimal Boundary Condition} = 6$
- $N_{SA} = \text{numero di Boundary Condition per Singular Arch} = 2$
- $N_H = \text{numero di Boundary Condition per l'Hamiltoniano} = 1$
- $N_F = \text{numero di Boundary Condition per Fuller's Problem} = 1$
- $N_{BO} = \text{numero di Boundary Conditions} = N_{ABC} + N_{OBC} + N_{SA} + N_H + N_F = 22$

Riassumendo, il problema risulta ben posto in quanto:

$$N = N_{BO} = 22 \quad (\text{Eq. 7.110})$$

I parametri liberi del problema, cioè i dati iniziale di cui bisogna fornire una stima iniziale affinché venga risolto il BVP come descritto al paragrafo 5.5, sono:

$$\{t_s, T_2, T_3, \lambda_\vartheta(t_s^+), \vartheta_0, \omega_0, \lambda_{x_0}, \lambda_{y_0}, \lambda_{z_0}, \lambda_{Vx_0}, \lambda_{Vy_0}, \lambda_{Vz_0}\} \quad (\text{Eq. 7.111})$$

Una ulteriore suddivisione per le condizioni al contorno può essere suddividerle in Explicit o Implicit Boundary Condition:

Explicit Boundary Condition	Implicit Boundary Condition
$R_{x0} \rightarrow (Eq. 7.78)$	$\lambda_{xf} \rightarrow (Eq. 7.97)$
$R_{y0} \rightarrow (Eq. 7.79)$	$\lambda_{yf} \rightarrow (Eq. 7.98)$
$R_{z0} \rightarrow (Eq. 7.80)$	$R_{zf} \rightarrow (Eq. 7.85)$
$V_{x0} \rightarrow (Eq. 7.81)$	$V_{xf} \rightarrow (Eq. 7.86)$
$V_{y0} \rightarrow (Eq. 7.82)$	$\lambda_{Vy_f} \rightarrow (Eq. 7.99)$
$V_{z0} \rightarrow (Eq. 7.83)$	$V_{zf} \rightarrow (Eq. 7.87)$
$m_0 \rightarrow (Eq. 7.84)$	$\theta_f \rightarrow (Eq. 7.88)$
$\lambda_{\vartheta_0} \rightarrow (Eq. 7.94)$	$\omega_f \rightarrow (Eq. 7.89)$
$\lambda_{\omega_0} \rightarrow (Eq. 7.95)$	$H_f \rightarrow (Eq. 7.103)$
$\lambda_{m_0} \rightarrow (Eq. 7.96)$	$\ddot{S}_M \rightarrow (Eq. 7.101)$
	$\ddot{S}_M \rightarrow (Eq. 7.102)$
	$\lambda_{\omega}(t_2) \rightarrow (Eq. 7.109)$

Tabella 7. 6: Condizioni al Contorno Esplicite ed Implicite del Problema di Landing

7.8 Adimensionalizzazione del Problema

Al fine di rendere l'integrazione delle *Landing Differential Equations* (Tabella 7.1) e delle *Optimal Differential Equations* (Tabella 7.2) più robusta ed efficiente, si è normalizzato il problema matematico introducendo dei fattori di adimensionalizzazione. Di conseguenza, i risultati forniti dal codice Fortran sviluppato dovranno essere riscaldati mediante le grandezze di riferimento prima di generare i files di output.

Parameters	Description	Value
$m_{ref} [kg]$	Reference Mass	1600
$r_{ref} [km]$	Reference Radius	15
$V_{ref} [km/s]$	Reference Velocity	1
$t_{ref} [s]$	Reference Time = r_{ref}/V_{ref}	15
$a_{ref} [km/s^2]$	Reference Aceleration = V_{ref}^2/r_{ref}	0.0667
$I_{ref} [kg \cdot km^2]$	Reference Moment of Inertia = $m_{ref} \cdot r_{ref}^2$	$3.6 \cdot 10^5$
$T_{ref} [kN]$	Reference Thrust = $m_{ref} \cdot a_{ref}$	106.67
$M_{ref} [kN \cdot km]$	Reference Torque = $T_{ref} \cdot r_{ref}$	1600

Tabella 7. 7: Fattori di Adimensionalizzazione

Capitolo 8

Risultati del Problema di Ottimizzazione

8.1 *Introduzione*

Nel Capitolo 7 si è formulato matematicamente il problema di ottimizzazione per traiettorie di atterraggio sul suolo lunare con dinamica rotazionale in modo da massimizzare la massa finale del veicolo spaziale nella fase di touchdown, così da minimizzare il consumo di propellente durante la traiettoria di landing. La risoluzione del *Boundary Value Problem (BVP)* si basa sul codice Fortran descritto nel Paragrafo 5.5.1.

8.2 *Pitch Angle e Velocità Angolare “Free” nel Landing Site*

La prima simulazione permette di trascurare gli effetti della dinamica rotazionale nel landing site, tanto da poter considerare il lander lunare come se fosse un punto materiale, dove l’angolo di beccheggio indica semplicemente la direzione di spinta. La traiettoria è formata da un unico arco singolare a causa della condizione al contorno (Eq. 7.95), per cui il controllo ottimale per la Torque è definito dalla relazione (Eq. 7.67), mentre per la Thrust è implementata la legge di controllo ottimale, ovvero il Bang-Bang Control (Eq. 7.50). Non è considerata la formulazione del Problema di Fuller in quanto il problema non prevede la presenza di Switches per il momento, per cui è presente un unico parametro nel Boundary Value Problem, cioè la durata dell’arco singolare.

La dimensione del problema risulterà quindi ridotta:

$$KP = 1 \rightarrow N = 19 \quad (\text{Eq. 8.0})$$

Il numero di condizioni al contorno deve essere pari ad N affinché il problema di ottimizzazione sia ben posto, per cui, facendo riferimento alla *Tabella 7.6* si sono eliminate tre Implicit Boundary Condition, cioè (Eq. 7.109) associata allo Switch nel Problema di Fuller e le due condizioni

aggiuntive derivanti dall'arco singolare, cioè la condizione (Eq. 7.101) e (Eq. 7.102). Inoltre, si sono modificate le condizioni al contorno relative al pitch angle e alla velocità angolare nel landing site, ipotizzando sia ϑ che ω "Free" nell'istante finale. Tali variabili di stato non compaiono nel funzionale (Eq. 7.20), né tantomeno nelle Boundary Condition, dunque, le corrispondenti adjoint variables risulteranno nulle nel landing site.

Di conseguenza, le condizioni (Eq. 7.88) e (Eq. 7.89) sono sostituite rispettivamente con:

$$\lambda_{\vartheta}(t_f) = 0 \quad (\text{Eq. 8.1})$$

$$\lambda_{\omega}(t_f) = 0 \quad (\text{Eq. 8.2})$$

La simulazione ha prodotto una traiettoria avente una durata complessiva di 558.8703 s.

Nel landing site risultano soddisfatte le condizioni al contorno:

<i>Landing Site</i>		
$R_{xf} = 32.8918 \text{ km}$	$R_{yf} = 0 \text{ km}$	$R_{zf} = 0 \text{ km}$
$V_{xf} = 0 \text{ km/s}$	$V_{yf} = 0 \text{ km/s}$	$V_{zf} = 0 \text{ km/s}$
$\vartheta_f = 156.2832^\circ$	$\omega_f = 3.3e - 04 \text{ rad/s}$	$m_f = 813.9461 \text{ kg}$

Tabella 8. 1: Variabili di stato nel landing site

Si riportano in forma grafica i risultati ottenuti:

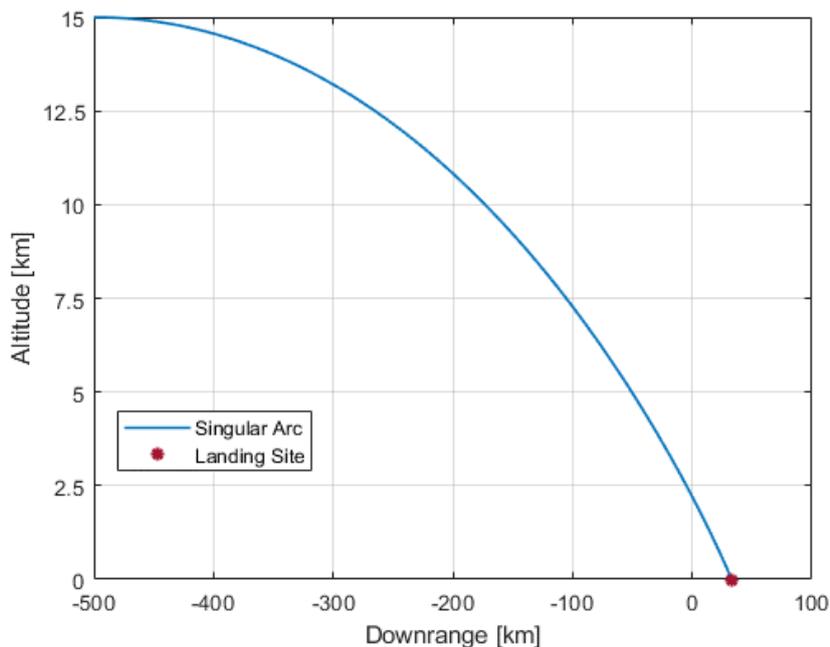


Figure 8. 1: Traiettoria Bidimensionale, piano (x, z)

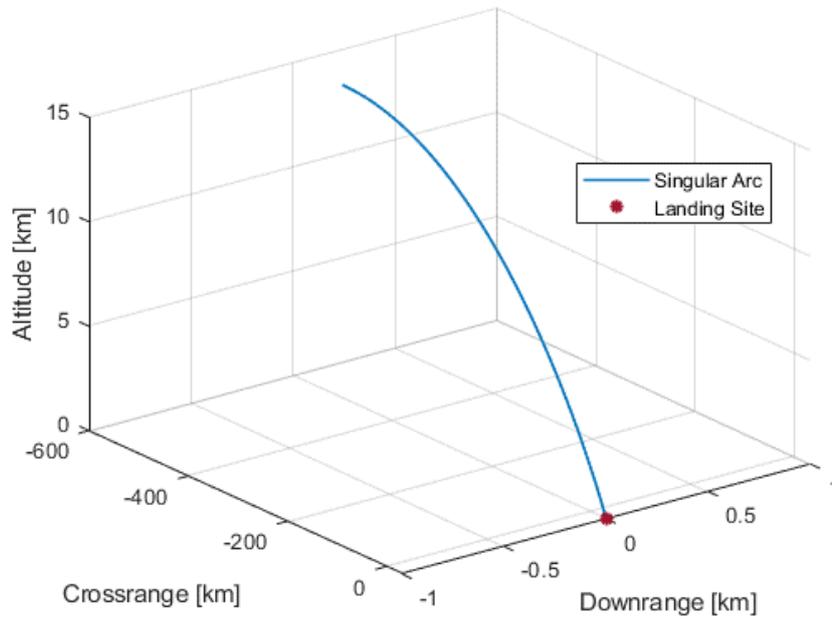


Figure 8. 2: Traiettoria Tridimensionale, piano (x, y, z)

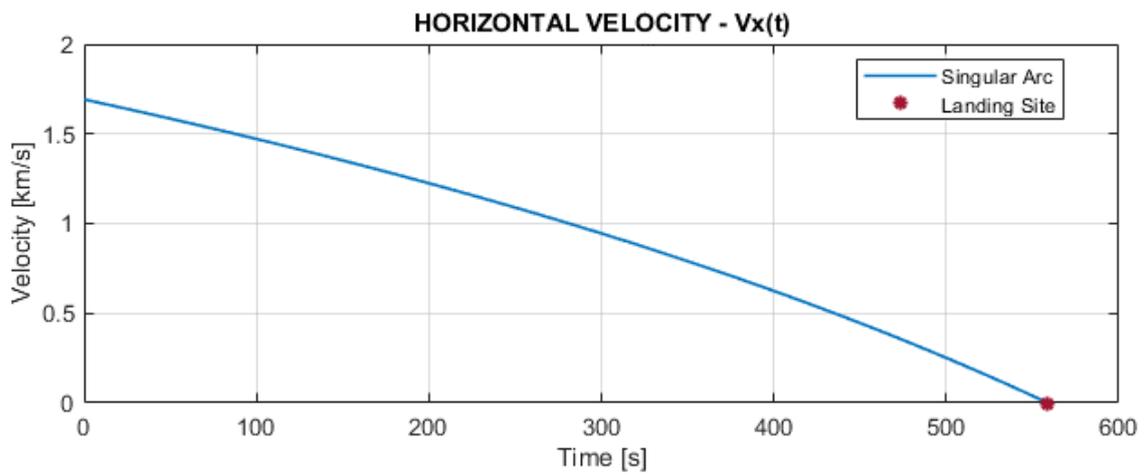


Figure 8. 3: Evoluzione di V_x nel tempo

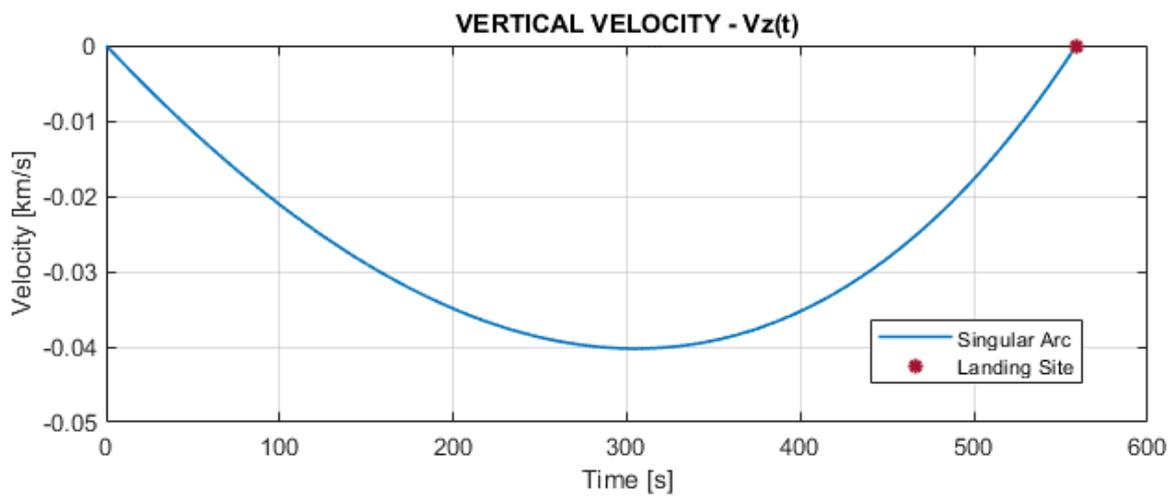


Figure 8. 4: Evoluzione di V_z nel tempo

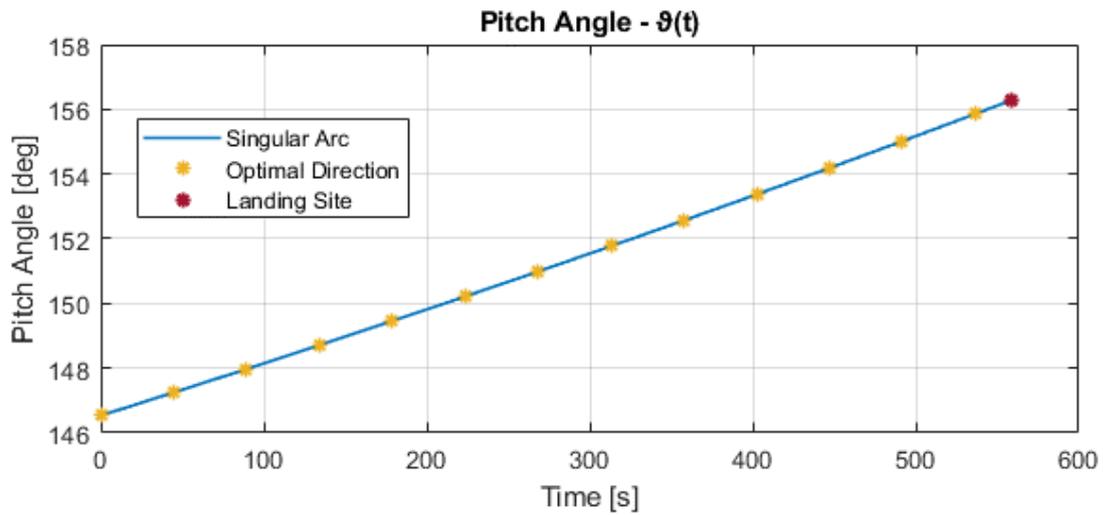


Figure 8. 5: Evoluzione del Pitch Angle nel tempo

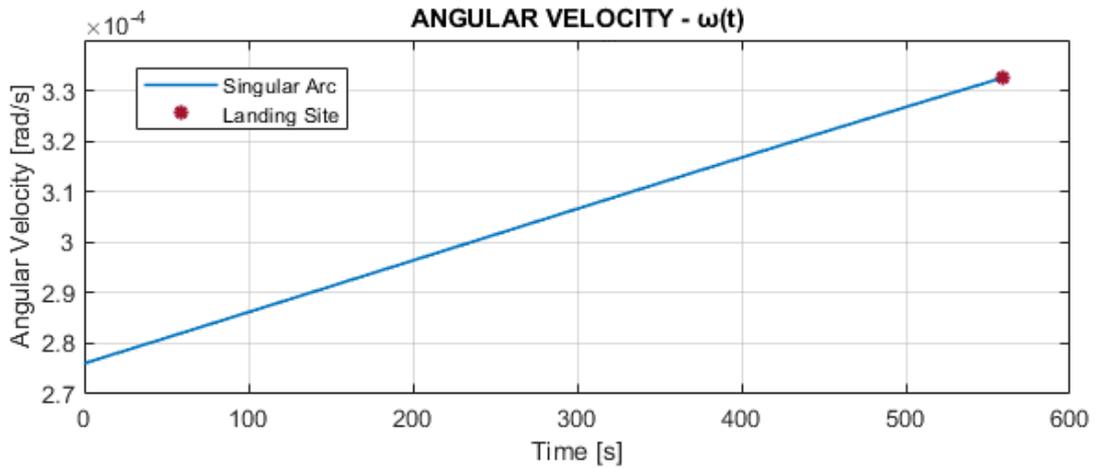


Figure 8. 6: Evoluzione della Velocità Angolare nel tempo

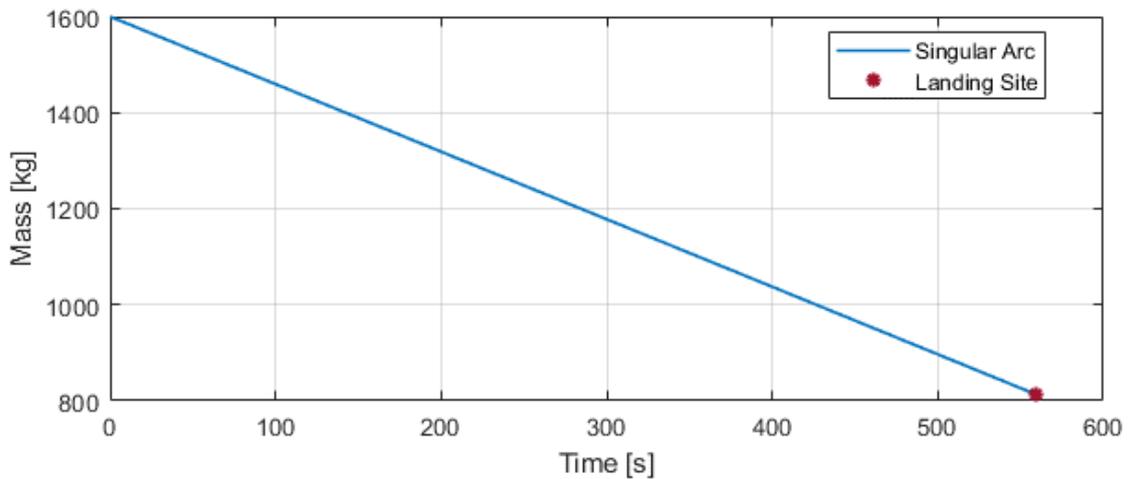


Figure 8. 7: Andamento della Massa del Lande nel Tempo

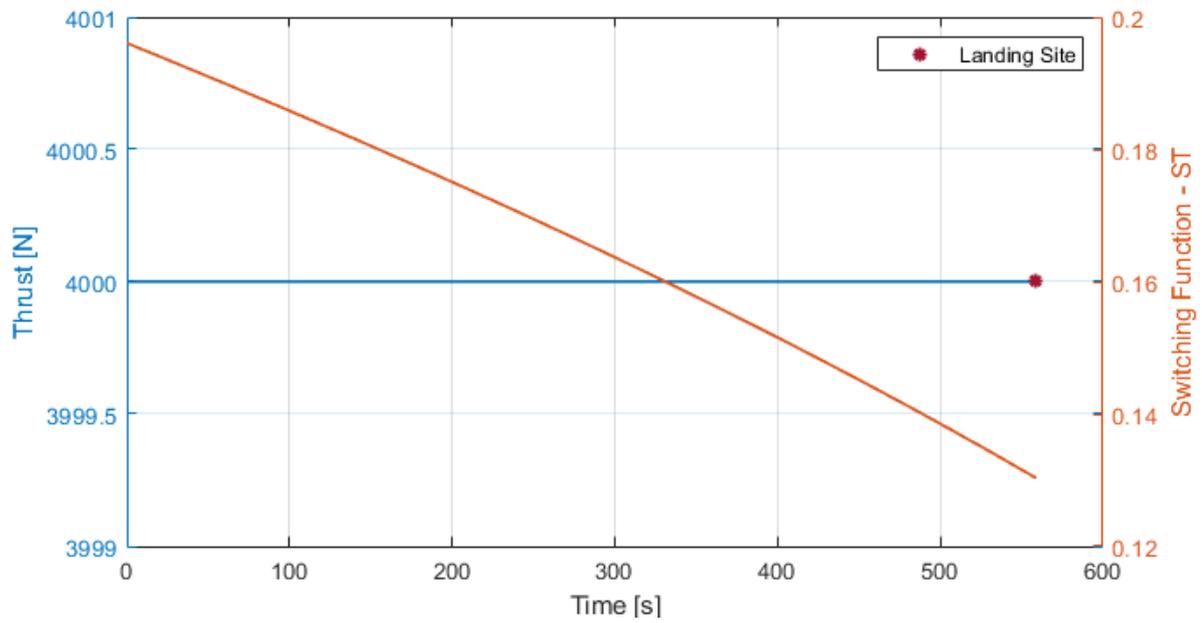


Figure 8.8: Bang-Bang Control per la Thrust per l'intera durata della traiettoria

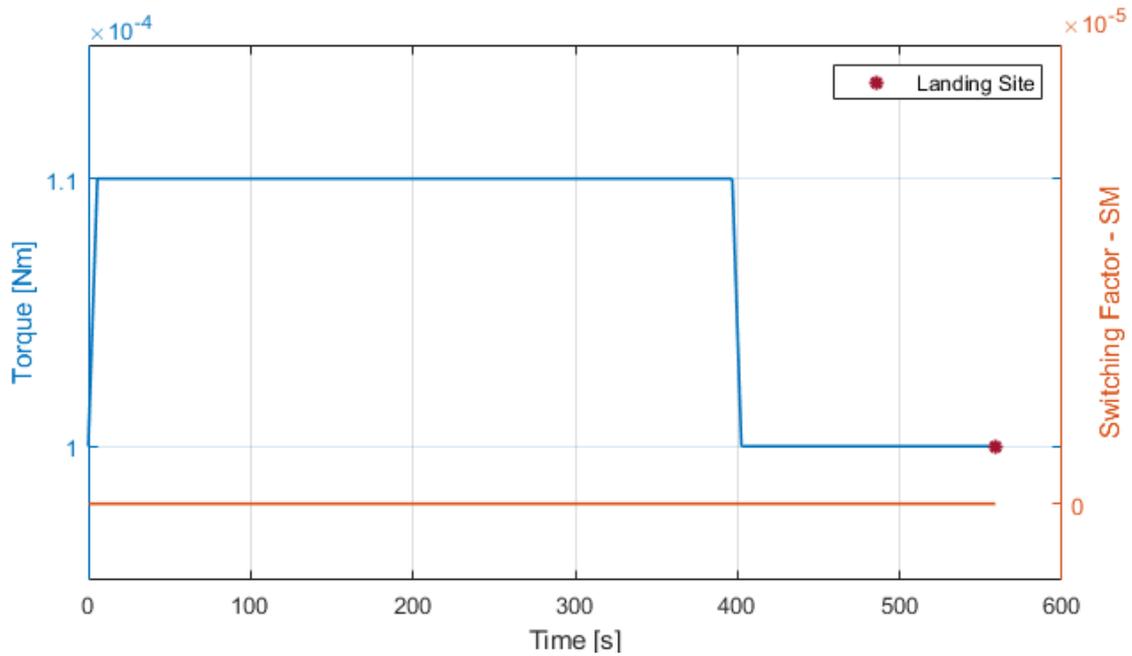


Figure 8.9: Controllo Ottimale M^* per arco singolare

8.2.1 Commento dei Risultati

La traiettoria soddisfa le *Implicit Boundary Condition* nonostante il sistema di riferimento \mathcal{F} abbia origine nel sito di atterraggio desiderato. La traiettoria ottenuta può essere semplicemente traslata

in modo da soddisfare tale richiesta: ciò è ottenuto modificando il valore del Downrange iniziale, ovvero sostituendo la condizione al contorno (Eq. 7.78) con R_{x_0}' dell'equazione (Eq. 8.3).

$$R_{x_0}' = R_{x_0} - R_{x_f} = -532.8918 \text{ km} \quad (\text{Eq. 8.3})$$

Dal punto di vista fisico, la modifica del Downrange iniziale è possibile riducendo il tempo di waiting nella Parking Lunar Orbit, in modo da anticipare la fase di DOI. La suddetta operazione non modifica i consumi di propellente, in quanto il veicolo spaziale è supposto orbitare idealmente in un'orbita circolare a 100 km di quota attorno alla Luna, non risentendo degli effetti perturbativi generati da un campo gravitazionale non costante. Non si evince un moto di crossrange, a causa del vettore spinta che è considerato agire solamente nel piano (x, z) , per cui, risulta verificata l'assenza degli effetti di imbardata. La velocità orizzontale presenta un andamento monotono decrescente, mentre la velocità verticale presenta un andamento circa parabolico con concavità verso l'alto in modo che entrambe convergano al valore nullo nell'istante finale. La direzione della spinta, quantificabile attraverso il pitch angle, coincide con la direzione del primer vector $p(t)$ definito da Lawden introdotto nel Paragrafo 7.5.1. La velocità angolare risulterà diversa da zero nel landing site, in quanto non si è imposto nessun vincolo su quest'ultima nelle condizioni al contorno. I controlli seguono le leggi ottimali descritte nel Capitolo 7: il Bang-Bang Control per la Spinta ed M^* (Eq. 7.66) per la Torque. Nella figura 8.8 è mostrato come la Switching Function della Spinta sia sempre maggiore di zero per tutta la durata della traiettoria, per cui $T = T_{max}$, mentre nella figura 8.9 è messo in evidenza come $\lambda_\omega = 0$ per tutta la durata della traiettoria, per cui l'arco è sempre singolare. I valori di Torque sono nell'ordine di $1e - 4 \text{ Nm}$, cioè molto diversi da quelli che il Reaction Control System formato da clusters di thrusters (Paragrafo 4.2) sia in grado di fornire al Lander Lunare. Una possibile soluzione consisterebbe nell'utilizzo di sistemi di controllo dell'assetto *high pointing accuracy*, come le *Reaction Wheels*. Esse sono formate da una *flywheel* che è messa in rotazione, attorno ad un particolare asse di spin, da un *brushless motor* causando un aumento del momento angolare dello spacecraft, per cui l'accelerazione della ruota attorno allo spin-axis genera in direzione opposta una *Reaction Torque* sul Lander Lunare. Le *Reaction Wheels* permettono di generare coppie anche nell'ordine di 0.1 mNm , coerenti con i risultati ottenuti nel problema di ottimizzazione. L'uso di tali attuatori permette di svincolare il controllo d'assetto con il consumo di propellente, nonostante nella formulazione del problema si sia già trascurato il consumo di propellente causato dal sistema RCS. Tuttavia, le *Reaction Wheels* presentano problemi di saturazione, cioè quando raggiungono la velocità di rotazione massima

devono essere de-saturate da altri attuatori di assetto, come dei thrusters. In aggiunta, le ruote di reazione possono incorrere in guasti a causa della compromissione dei cuscinetti a sfera del meccanismo. L'ordine di grandezza di ω risulta essere nell'ordine di $1e - 4$ coerentemente con il controllo ottimale dell'arco singolare, il momento di inerzia del lander e la durata della traiettoria.

8.3 *Pitch Angle “Fixed” e Velocità Angolare “Free” nel Landing Site*

Il secondo caso analizzato prevede una riduzione della complessità del problema di Landing Lunare descritto nel Capitolo 7, in particolare si andrà ad eliminare un arco di traiettoria, per cui la struttura definita a priori sarà del tipo:

- *Singular Arc* con durata pari a t_s
- *2nd Arc* con durata pari a $T_2 = t_f - t_s$

Inoltre, non è presente la discontinuità libera $\lambda_\theta(t_s^+)$ associata al Fuller's Problem, per cui il numero di parametri introdotti nel *BVP* sarà pari a 2.

$$KP = 2 \rightarrow N = 20 \quad (\text{Eq. 8.4})$$

Il problema per essere ben posto deve prevedere un numero di condizioni al contorno pari alle dimensioni del problema, per cui, in riferimento alla *Tabella 7.6* si sono eliminate due *Implicit Boundary Condition*, cioè (*Eq. 7.109*) associata allo *Switch* nel Problema di Fuller e una condizione aggiuntiva derivante dall'arco singolare, cioè la condizione (*Eq. 7.101*). Inoltre, si è modificata la condizione relativa alla velocità angolare nel landing site, ipotizzando ω libera nell'istante finale, per cui la relazione (*Eq 7.89*) è sostituita con:

$$\lambda_\omega(t_f) = 0 \quad (\text{Eq. 8.5})$$

A differenza della simulazione descritta nel paragrafo 8.2, il pitch angle non indica semplicemente la direzione di spinta, bensì descrive l'orientamento del lander lunare, considerato come un corpo rigido e non più come un punto materiale. Il corretto deployment del landing gear prevede un posizionamento verticale del lander rispetto alla superficie lunare, cioè $\vartheta(t_f) = \pi/2$.

CASE 1) Bang-Bang Control

Nel primo sotto-caso analizzato il controllo ottimale è ottenuto:

- *Singular Arc* → relazione (Eq. 7.67)
- *2nd Arc* → Bang-Bang Control sia per la Spinta che per il Momento cioè (Eq. 7.50) e (Eq. 7.51), i cui valori sono riportati dalle relazioni (Eq. 4.10), (Eq. 4.11) e (Eq. 4.12)

La simulazione ha prodotto un risultato irrealistico in cui l’algoritmo, nel tentativo di soddisfare le condizioni al contorno imposte, ha prodotto una durata del *2nd Arch* negativa:

$$\left\{ \begin{array}{ccc} t_s & T_2 & \vartheta_0 \\ \omega_0 & \lambda_{x_0} & \lambda_{y_0} \\ \lambda_{z_0} & \lambda_{Vx_0} & \lambda_{Vy_0} \\ & \lambda_{Vz_0} & \end{array} \right\} = \left\{ \begin{array}{ccc} 37.51524421962 & -0.6999073610336 & 2.551174029768 \\ 4.545814644561E - 03 & 3.573420246229E - 022 & -2.117582368136E - 025 \\ 3.014417372303E - 03 & -0.4576022308448 & 0.0000000000000E + 000 \\ & 0.3066676768203 & \end{array} \right\}$$

Results 1: Risultati dei Parametri Liberi del Boundary Value Problem: n2teta_end.dat

In particolare, si è notato che nel secondo arco:

$$\lambda_\omega > 0 \xrightarrow{\text{per il Bang-Bang Control}} M = M_{max} > 0 \quad (\text{Eq. 8.6})$$

Il pitch angle coincide con la direzione di spinta ottimale (Eq. 7.75), risultando sempre maggiore di 90°. La velocità angolare è inizialmente positiva, per cui l’unico modo per determinare una convergenza a $\pi/2$ del pitch angle del lander lunare nel landing site è che nel secondo arco:

$$M = M_{min} < 0 \quad (\text{Eq. 8.7})$$

In questo modo dalla *Torque Equation* (Eq. 7.18) si avrebbe $\dot{\omega} < 0$ determinando un andamento decrescente per la velocità angolare che transiterebbe da valori positivi a valori negativi.

Il segno di ω influenza la *Trim Dynamics Equation* (Eq. 7.17):

$$\omega < 0 \rightarrow \dot{\vartheta} < 0 \rightarrow \vartheta \text{ è decrescente} \quad (\text{Eq. 8.8})$$

Il trend monotono decrescente del pitch angle permetterebbe una convergenza a $\pi/2$ nel landing site, in quanto al termine dell’arco singolare $\vartheta > 90^\circ$.

L’imposizione del valore della Torque nel *2nd Arc* determina una direzione di spinta che si discosta dalla direzione ottimale. L’ottimizzazione risulterebbe violata in quanto non si rispetterebbe la

legge di controllo ottimale che permetterebbe la massimizzazione dell'Hamiltoniano e dunque il soddisfacimento del Principio di Massimo di Pontryagin.

CASE 2) Torque Vincolata

La seconda casistica analizzata prevede l'imposizione di $M = M_{min}$ per tutta la durata del *2nd Arch*, mantenendo vincolato il pitch angle nel landing site e libera, invece, la velocità angolare nel landing site.

L'algoritmo risolutivo produce un secondo arco con una durata positiva, a differenza del risultato irrealistico del CASE 1).

$$\begin{pmatrix} t_s & T_2 & \vartheta_0 \\ \omega_0 & \lambda_{x_0} & \lambda_{y_0} \\ \lambda_{z_0} & \lambda_{V_{x_0}} & \lambda_{V_{y_0}} \\ & \lambda_{V_{z_0}} & \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 37.03648292378 & 0.2846818892785 & 2.55391414278569 \\ 4.3702724380202E-03 & -2.6292744909706E-022 & 0.00000000000000E+00 \\ 8.4548939605270E-03 & -1.3399430244023 & 0.00000000000000E+00 \\ & 0.8926682362803 & \end{pmatrix}$$

Results 2: Risultati dei Parametri Liberi del Boundary Value Problem: n2teta_end.dat

Le condizioni richieste nel landing site risultano soddisfatte:

Landing Site		
$R_{xf} = 32.9505 \text{ km}$	$R_{yf} = 0 \text{ km}$	$R_{zf} = 0 \text{ km}$
$V_{xf} = 0 \text{ km/s}$	$V_{yf} = 0 \text{ km/s}$	$V_{zf} = 0 \text{ km/s}$
$\vartheta_f = 90^\circ$	$\omega_f = -0.5449 \text{ rad/s}$	$m_f = 813.3786 \text{ kg}$

Tabella 8. 2: Variabili di stato nel landing site

L'imposizione del valore della Torque nel *2nd Arc* non permette di rispettare la legge di controllo ottimale per uno dei controlli e dunque di soddisfare il Principio di Massimo di Pontryagin. Di fatti, la condizione al contorno (Eq. 7.103) non è soddisfatta e l'Hamiltoniano risulta essere costantemente pari a 0.02546 per tutta la durata della fase di landing.

Inoltre, il soddisfacimento del Bang-Bang Control per la Thrust determina nel tratto finale del *2nd Arc* una condizione di spinta nulla, dove le condizioni al contorno sono soddisfatte passando da quote negative. Tale fenomenologia risulta essere incompatibile con la realtà, in quanto determinerebbe un Hard-Landing del Lander sulla superficie lunare.

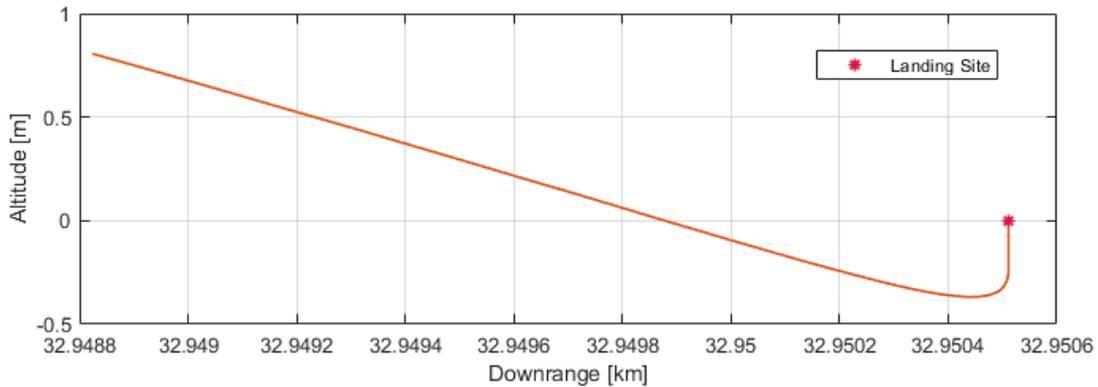


Figure 8.10: Hard-Landing generato a causa dello spegnimento del main engine

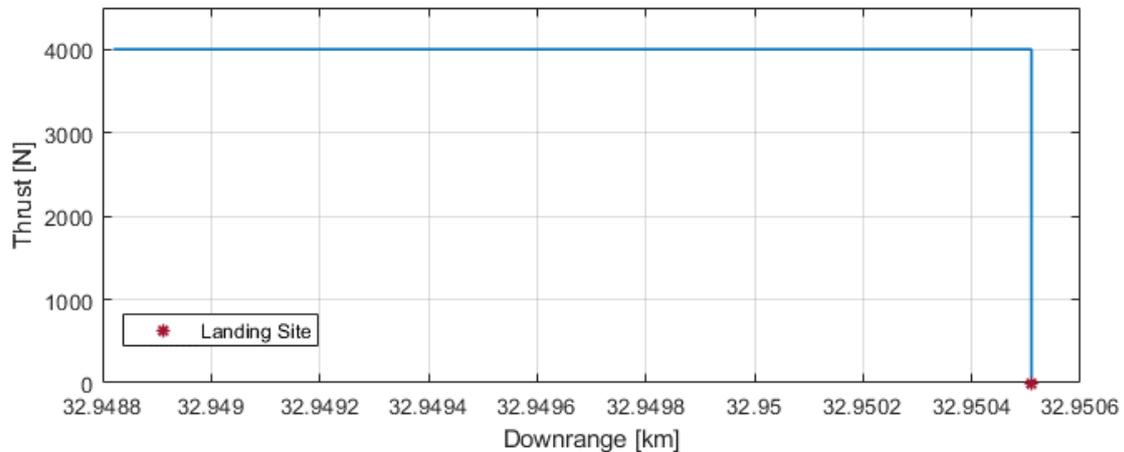


Figure 8.11: Bang-Bang Control per la Thrust

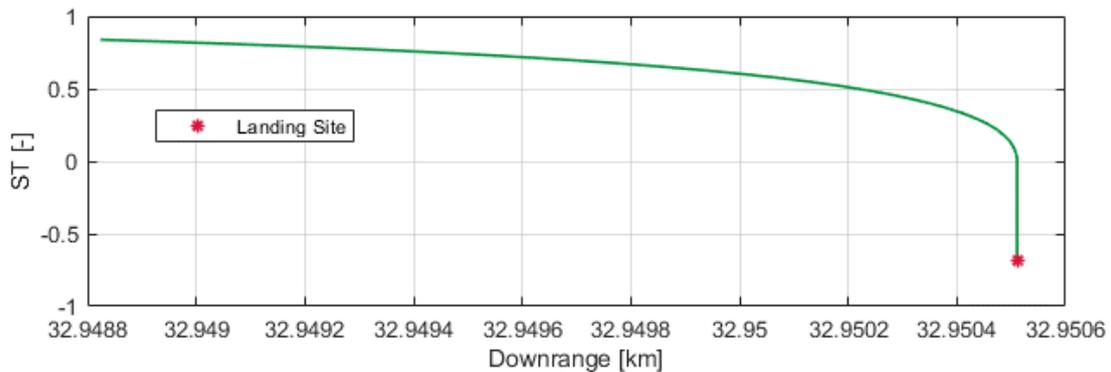


Figure 8.12: Switching Function Della Thrust

Riassumendo, la *figura 8.11* mostra come la soluzione ottimale preveda lo spegnimento del main engine, mentre la *figura 8.10* evidenzia come l'arrivo nel landing site avvenga dal basso, cioè da quote negative. Nella realtà questa tipologia di soluzione risulta irrealizzabile, perché prevederebbe la convergenza nel landing site desiderato passando dall'interno della Luna. Per evitare tale fenomenologia, nelle successive simulazioni si considererà il main engine in modalità on, per cui fornirà un valore di spinta massimo per tutta la durata della traiettoria $\rightarrow T = T_{max}$.

CASE 3) Torque Vincolata e Thrust Massima

Per evitare che il lander lunare raggiunga il landing site passando da quote negative, si è deciso di implementare un'ulteriore simulazione, in cui la Thrust non è più un controllo del problema di ottimizzazione ed è settata al suo valore massimo. Inoltre, si è considerata la Torque vincolata al suo valore minimo per tutta la durata del *2nd Arc*, in modo da ottenere il pitch angle desiderato nel sito di atterraggio. L'algoritmo risolutivo ha prodotto nuovamente un secondo arco con una durata positiva, a differenza del risultato irrealistico del CASE 1).

$$\begin{pmatrix} t_s & T_2 & \vartheta_0 \\ \omega_0 & \lambda_{x_0} & \lambda_{y_0} \\ \lambda_{z_0} & \lambda_{V_{x_0}} & \lambda_{V_{y_0}} \\ & \lambda_{V_{z_0}} & \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 37.01412084334 & 0.2853101221994 & 2.551186670953 \\ 4.542468005379E - 03 & 1.450490321308E - 025 & 0.0000000000000E + 000 \\ 3.0109128403668E - 03 & -0.4574147172982 & 0.0000000000000E + 000 \\ & 0.30653363233533 & \end{pmatrix}$$

Results 3: Risultati dei Parametri Liberi del Boundary Value Problem: n2teta_end.dat

Nell'istante finale risultano soddisfatte le condizioni al contorno del BVP:

Landing Site		
$R_{xf} = 32.9981 \text{ km}$	$R_{yf} = 0 \text{ km}$	$R_{zf} = 0 \text{ km}$
$V_{xf} = 0 \text{ km/s}$	$V_{yf} = 0 \text{ km/s}$	$V_{zf} = 0 \text{ km/s}$
$\vartheta_f = 90^\circ$	$\omega_f = -0.5461 \text{ rad/s}$	$m_f = 813.0724 \text{ kg}$

Tabella 8. 3: Variabili di stato nel landing site

A differenza del caso precedente l'imposizione di un main engine attivo per tutta la durata della traiettoria di landing permette di evitare che l'arrivo nel landing site avvenga dal basso. Le condizioni al contorno in termini di pitch angle sono soddisfatte nel sito di atterraggio come mostrato dalla *Tabella 8.3*. Nonostante la soluzione in questo caso risulti fisicamente realizzabile, il lander lunare presenta ancora una dinamica rotazionale nel landing site a causa di una velocità angolare diversa da zero nell'istante finale. Di conseguenza, risulterebbe necessario introdurre un'ulteriore condizione al contorno sulla ω , richiedendo all'algoritmo di ottimizzazione di convergere nel sito di atterraggio con velocità angolare nulla.

Si riportano in forma grafica gli output dell'algoritmo risolutivo:

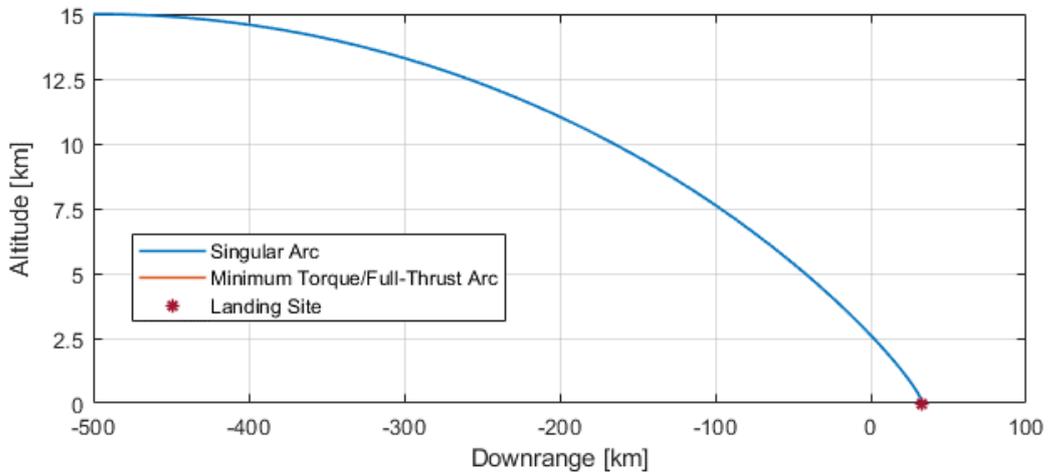


Figure 8.13: Traiettoria Bidimensionale, piano (x, z)

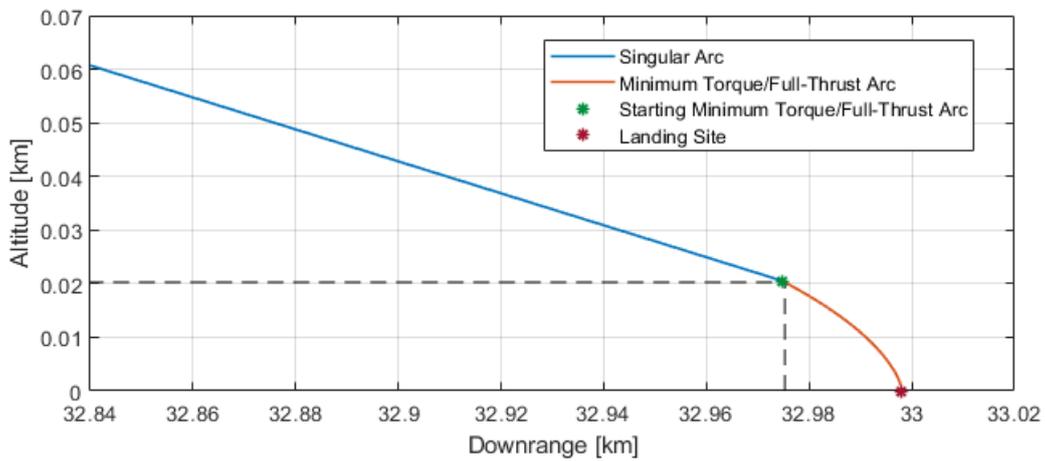


Figure 8.14: Ingrandimento della Traiettoria Bidimensionale nell'intorno del Landing Site

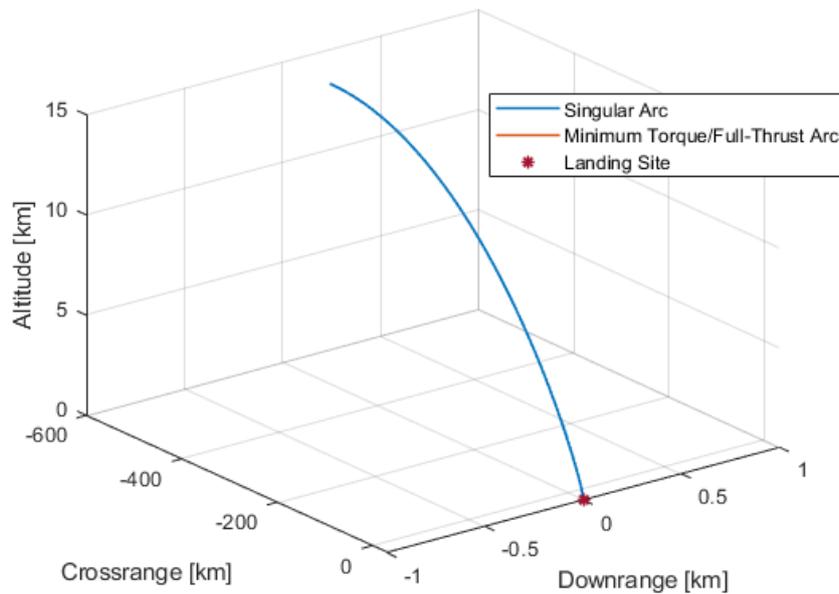


Figure 8.15: Traiettoria Tridimensionale

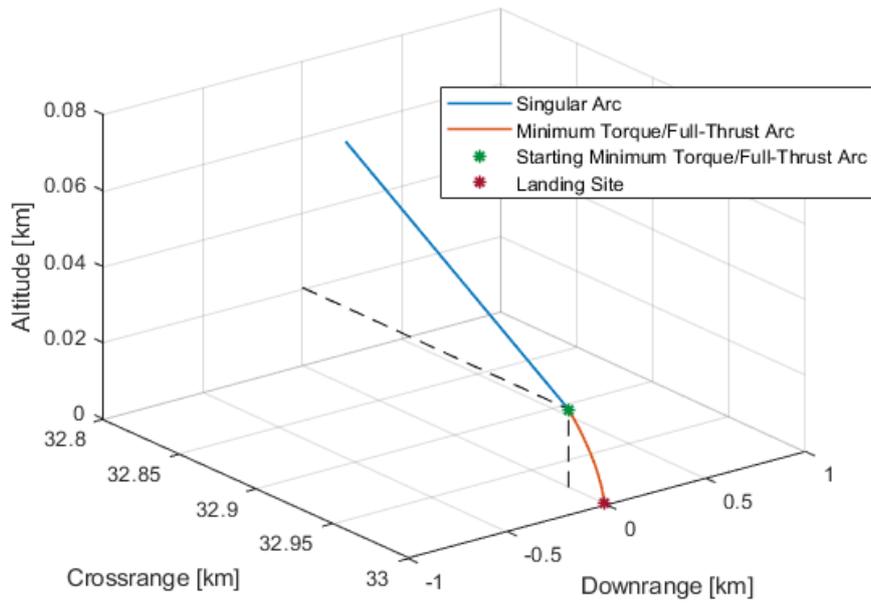


Figure 8. 16: Ingrandimento della Traiettorie Tridimensionale nell'intorno del Landing Site

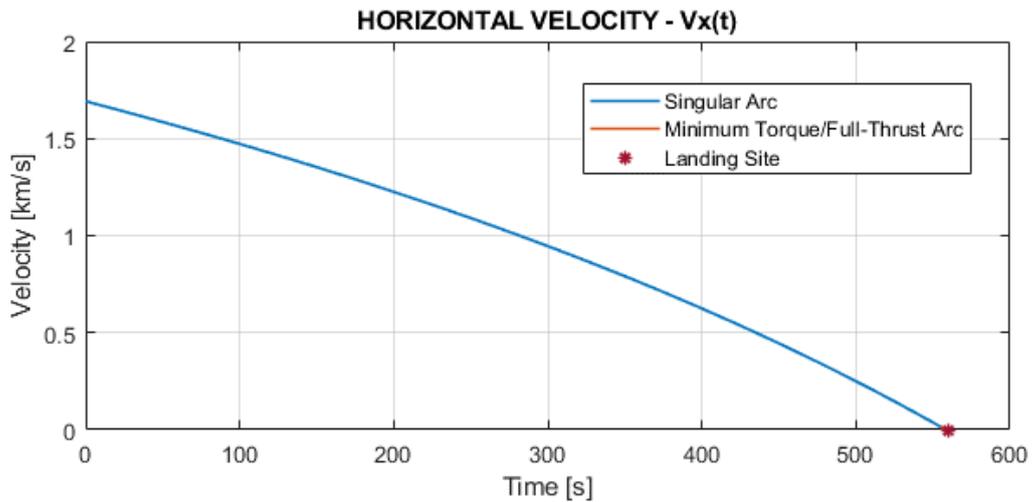


Figure 8. 17: Evoluzione di V_x nel tempo

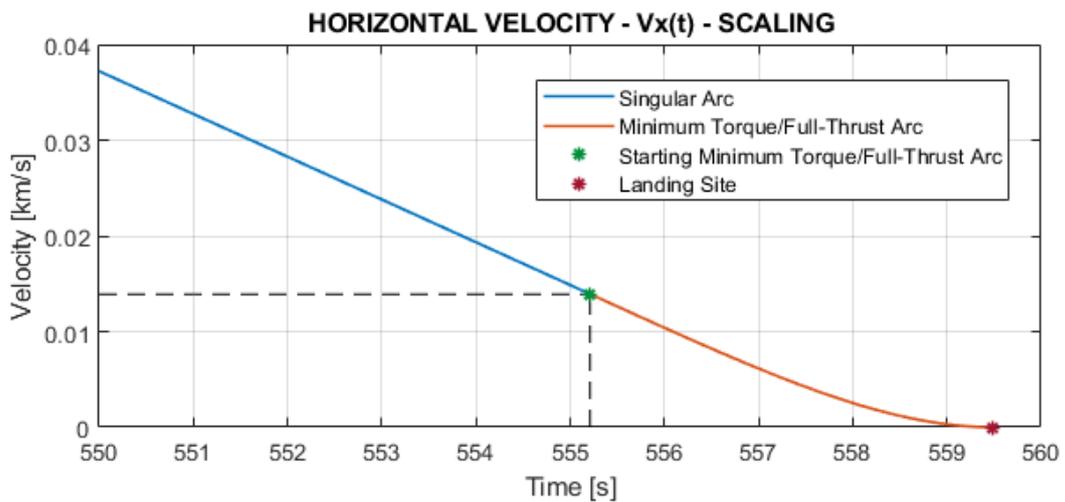


Figure 8. 18: Ingrandimento nell'intorno del Landing Site dell'andamento di V_x nel tempo

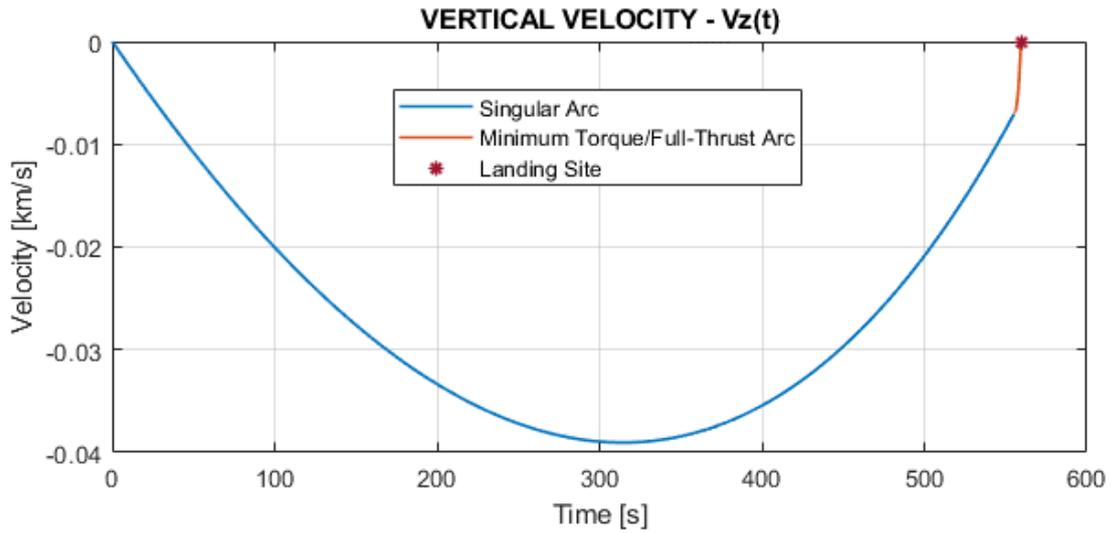


Figure 8.19: Evoluzione di V_z nel tempo

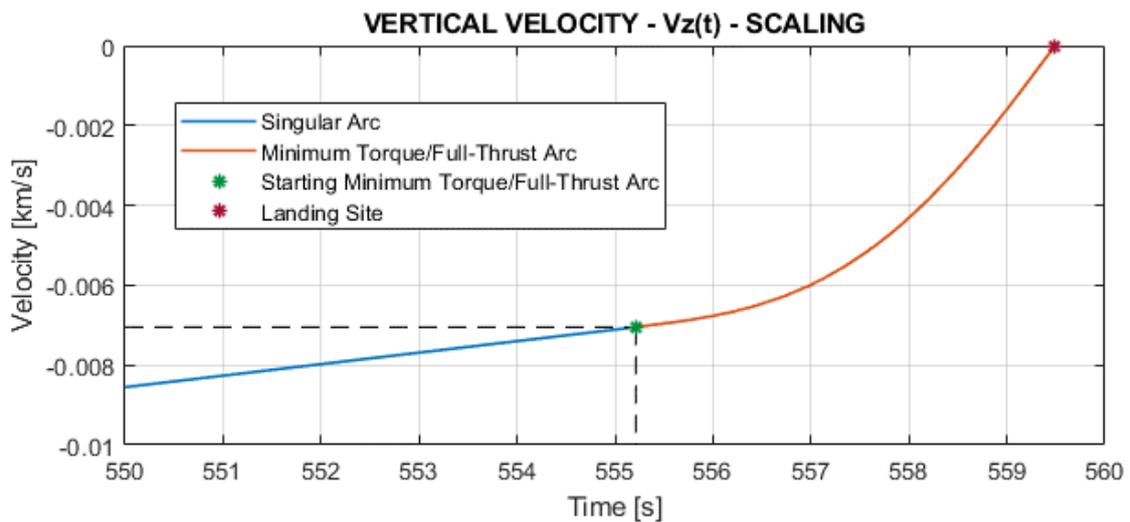


Figure 8.20: Ingrandimento nell'intorno del Landing Site dell'andamento di V_z nel tempo

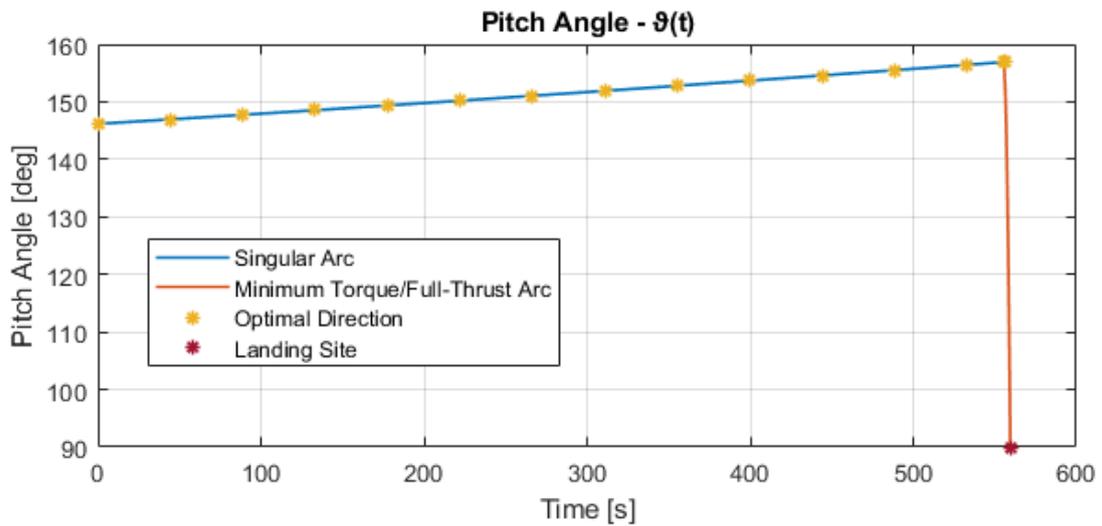


Figure 8.21: Evoluzione del Pitch Angle nel tempo

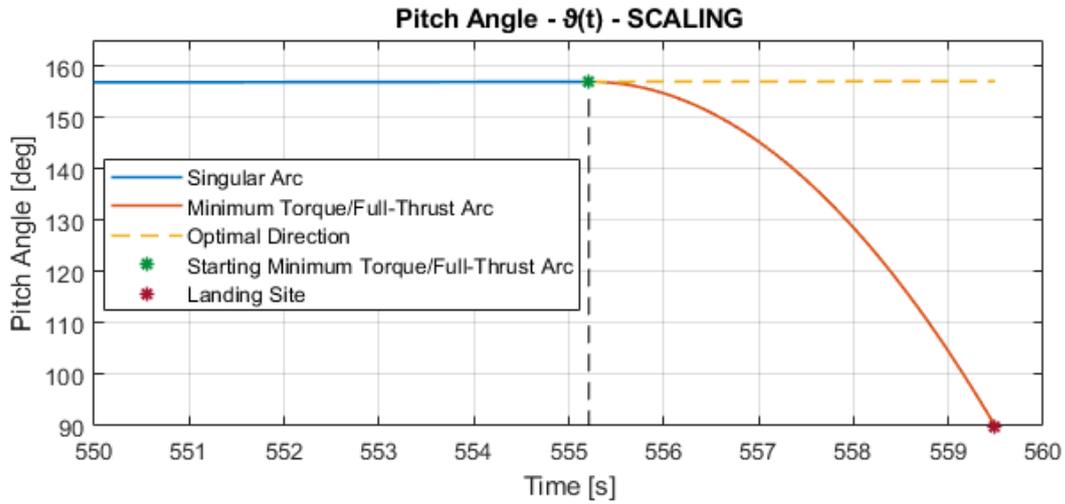


Figure 8. 22: Ingrandimento dell'andamento del Pitch Angle nell'intorno del Landing Site

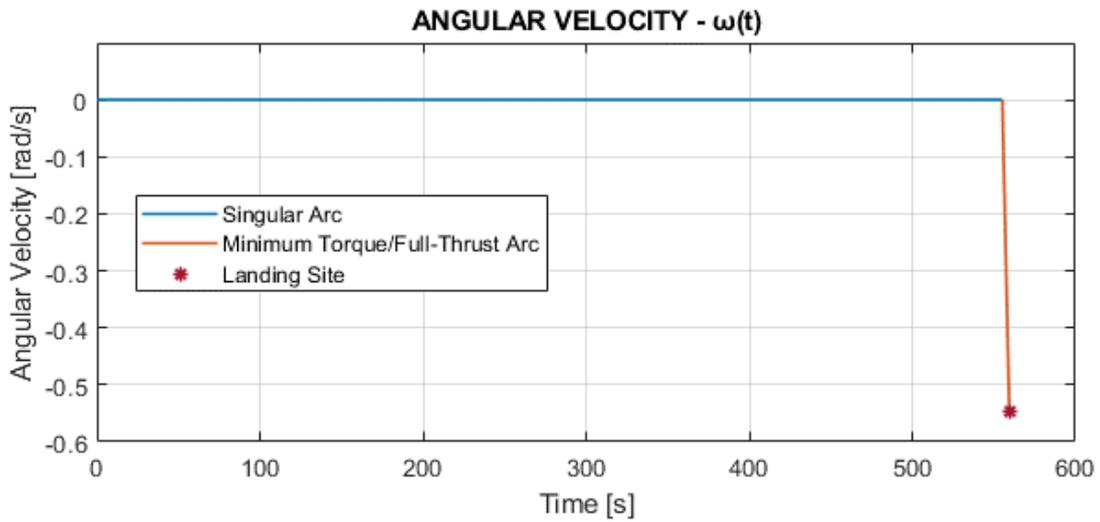


Figure 8. 23: Evoluzione della Velocità Angolare nel tempo

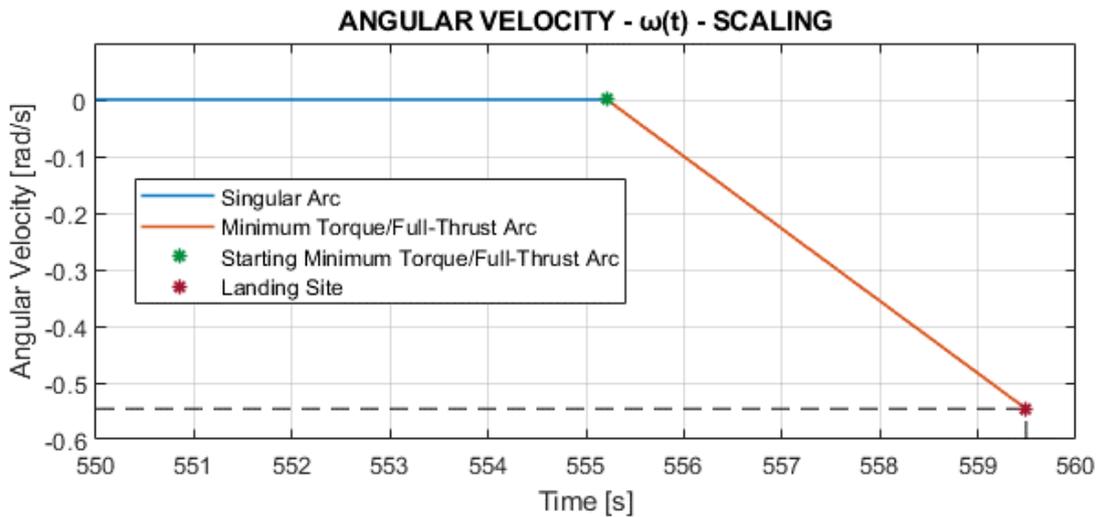


Figure 8. 24: Ingrandimento dell'andamento della Velocità Angolare nell'intorno del Landing site

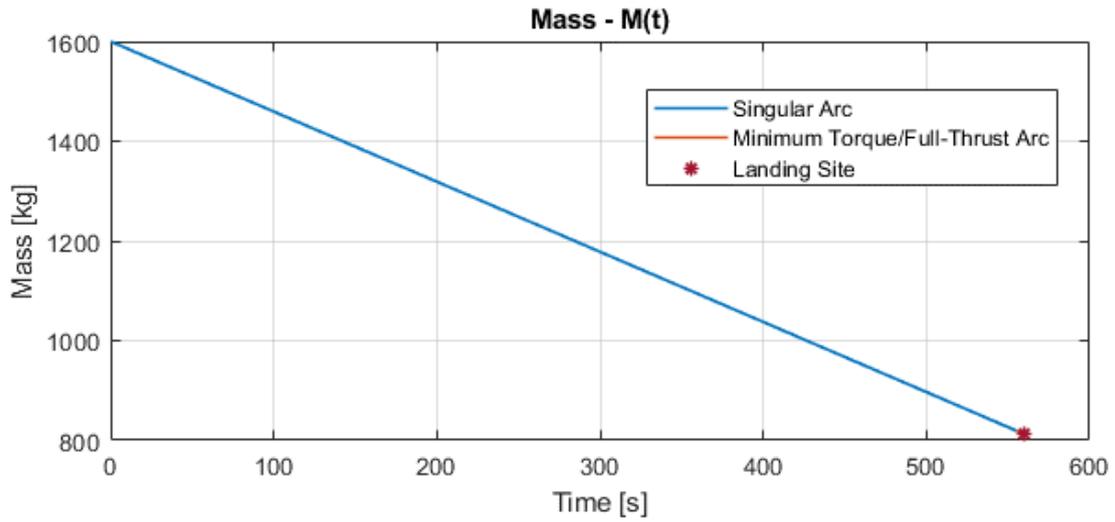


Figure 8.25: Andamento della Massa in funzione del tempo

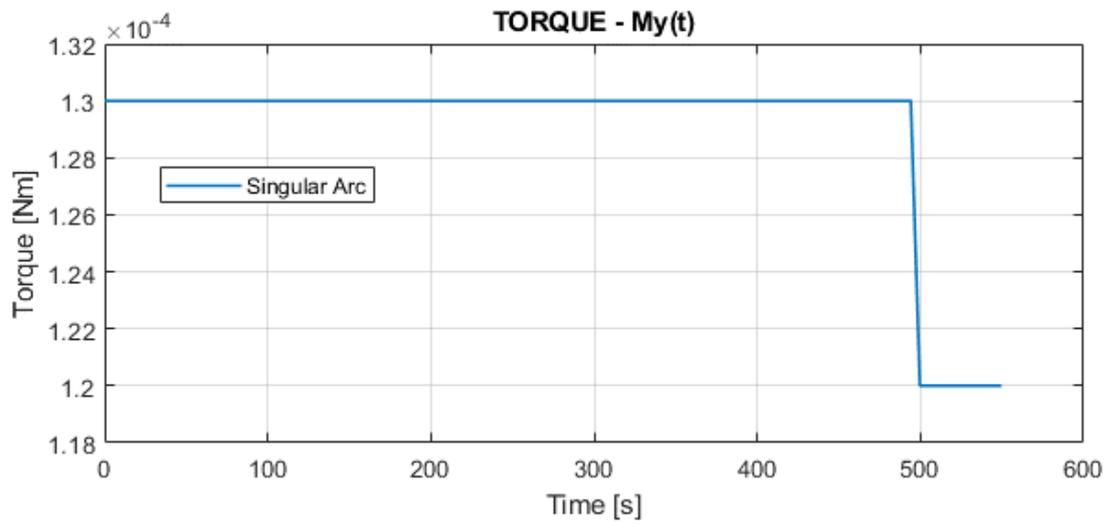


Figure 8.26: Controllo Ottimale per Arco Singolare

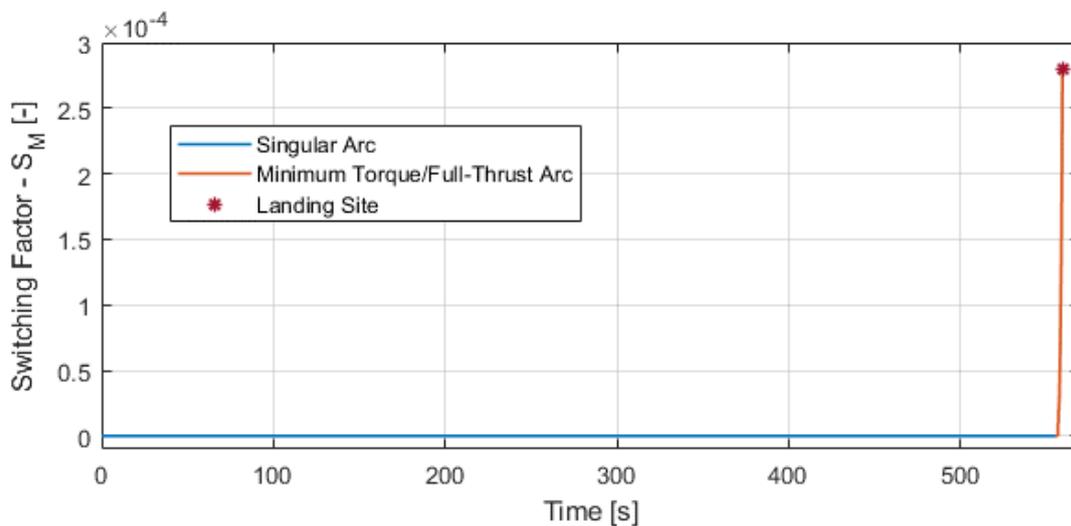


Figure 8.27: Evoluzione della Switching Function per il Momento nel tempo

CASE 3.1) Analisi dei Risultati

Analogamente a quanto osservato nel paragrafo 8.2.1, la traiettoria presenta un Downrange diverso da zero al termine della traiettoria di landing, per cui la condizione al contorno (Eq. 7.78) è soddisfatta imponendo un $R'_{x0} = -532.9981 \text{ km}$. La durata dell'arco singolare è pari a 555.2118 s, mentre il *Minimum Torque/Full-Thrust Arc* si evolve in 4.2797 s, per cui la traiettoria si sviluppa globalmente in 9.3249 minuti. Dalla figura 8.14 si evince come il raggiungimento del landing site avvenga senza passare da quote negative a differenza di quanto avveniva nel CASE 2). La velocità orizzontale presenta un andamento monotono decrescente, nonostante la presenza di una variazione di concavità nel *Minimum Torque/Full-Thrust Arc*; mentre la velocità verticale è circa parabolica nell'arco singolare, per poi presentare una curva più ripida nel secondo tratto in modo da convergere a zero nel landing site. Il valore del pitch angle coincide con la direzione di spinta ottimale solamente nell'arco singolare, difatti il controllo ottimale è ottenuto dall'espressione (Eq. 7.67) come si evince dalla figura 8.26. Inoltre, i valori della Torque sono nell'ordine di $1e - 4 \text{ Nm}$, per cui l'osservazione sull'utilizzo delle Reaction Wheels effettuata nel Paragrafo 8.2.1 come sistema RCS risulta essere una valida soluzione per il controllo dell'assetto del lander lunare anche in questo caso. In opposizione a quanto visto nel Paragrafo 8.2.1, nel *Minimum Torque/Full-Thrust Arc* l'imposizione di $M = M_{min}$ risulta violare il *Bang-Bang Control* in quanto λ_{ω} è maggiore di zero in tale arco di traiettoria. Di conseguenza, i valori di pitch angle ottenuti seppur permettono di rispettare le condizioni al contorno desiderate, risultano discostarsi dalla direzione ottimale di spinta. Nel *Minimum Torque/Full-Thrust Arc* sia λ_{ω} che λ_{θ} risultano diversi da zero, cioè l'algoritmo di ottimizzazione riesce a soddisfare la condizione al contorno sull'Hamiltoniano nullo nell'istante finale; di conseguenza, il codice permette di ottimizzare la traiettoria vincolata nonostante sia violato il *Bang-Bang Control*. La massa, tuttavia, pur presentando un andamento simile a quello evidenziato nel caso con pitch angle e velocità angolare "free" nel sito di atterraggio, risulta essere inferiore nel landing site di 873.7 grammi, indice di un peggioramento nel consumo di propellente. La velocità angolare risulta essere prossima allo zero nell'arco singolare coerentemente con i valori di momento riscontrati nella figura 8.26, mentre presenta un andamento lineare decrescente nel *Minimum Torque/Full-Thrust Arc*, raggiungendo il valore massimo in modulo nel landing site pari a 0.5461 rad/s.

8.4 *Soft-Landing senza Fuller's Problem*

Il seguente caso prevede la risoluzione delle *Landing Differential Equations* e delle *Optimal Differential Equations* trascurando il Problema di Fuller per la Dinamica Rotazionale, per cui le condizioni al contorno sono quelle definite dalla Tabella 7.6, esclusa la condizione sullo Switch definita dalla (Eq. 7.109). Inoltre, i parametri liberi del Boundary Value Problem risultano essere pari a 11, cioè quelli definiti nella (Eq. 7.111) ad eccezione della discontinuità $\lambda_{\vartheta}(t_s^+)$.

Dall'analisi dei risultati del CASE 3) del Paragrafo 8.3, si evince come al termine del *Minimum Torque/Full-Thrust Arc* la velocità angolare presenti un andamento lineare decrescente, risultando in tale arco di traiettoria sempre minore di zero. Di conseguenza, per far sì che essa converga a zero nel landing site, si è imposto manualmente uno switch sul momento in modo che nel *3rd Arc*:

$$M = M_{max} > 0 \xrightarrow{(Eq.7.18)} \dot{\omega} > 0 \rightarrow \omega \text{ è una funzione lineare crescente}$$

La struttura della traiettoria risulta definita aprioristicamente, imponendo uno switch manuale:

- *Singular Arc* con durata pari a t_s
- *Minimum Torque/Full – Thrust Arc* con durata pari a $T_2 = t_2 - t_s$
- *Maximum Torque/Full – Thrust Arc* con durata pari a $T_3 = t_f - t_2$

I parametri introdotti nel BVP sono pari al numero di archi di traiettoria, essendo assenti le discontinuità libere. Il problema risulta ben posto, in quanto la dimensione del problema è pari alle 21 Boundary Conditions considerate. Infine, si è considerato il main engine attivo in ogni fase della traiettoria in modo da poter avere in ogni arco $T = T_{max}$ così da convergere nel landing site senza passare da quote negative ed evitare un prematuro Hard-Landing.

CASE 1) Hamiltoniano Nullo nel Landing Site

Nel Capitolo 7 si è visto come debba essere soddisfatta l'equazione (Eq. 7.103), cioè che l'Hamiltoniano sia nullo nell'istante finale. La simulazione ha prodotto i seguenti risultati:

$$\begin{pmatrix} t_s & T_2 & T_3 \\ \vartheta_0 & \omega_0 & \lambda_{x_0} \\ \lambda_{y_0} & \lambda_{z_0} & \lambda_{Vx_0} \\ \lambda_{Vy_0} & \lambda_{Vz_0} & \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 36.96371946387 & 0.2027753909095 & 0.2025620891464 \\ 2.54523985308 & 4.91393596349E - 03 & 9.85471707751E - 016 \\ 0.0000000000E + 00 & 0.4984604619624 & -69.5135702461 \\ 0.0000000000E + 00 & 47.1856099016 & \end{pmatrix}$$

Results 4: Risultati dei Parametri Liberi del Boundary Value Problem: n3teta_omega_end.dat

Il problema di landing lunare risulta essere completamente vincolato nel landing site, per cui l'imposizione forzata del controllo nel 2nd e nel 3rd Arc non permette di far convergere la soluzione alle condizioni al contorno imposte, né tantomeno di ottimizzare la traiettoria di atterraggio, determinando una discontinuità nell'andamento dell'Hamiltoniano, *figura 8.30*.

Si riportano il valore delle variabili di stato nell'istante finale della traiettoria:

<i>Landing Site</i>		
$R_{xf} = 33.1119 \text{ km}$	$R_{yf} = 0 \text{ km}$	$R_{zf} = 0.0227 \text{ km}$
$V_{xf} = 0 \text{ km/s}$	$V_{yf} = 0 \text{ km/s}$	$V_{zf} = 0 \text{ km/s}$
$\vartheta_f = 89.9986^\circ$	$\omega_f = 0 \text{ rad/s}$	$m_f = 811.6035 \text{ kg}$

Tabella 8. 4: Variabili di stato nel landing site

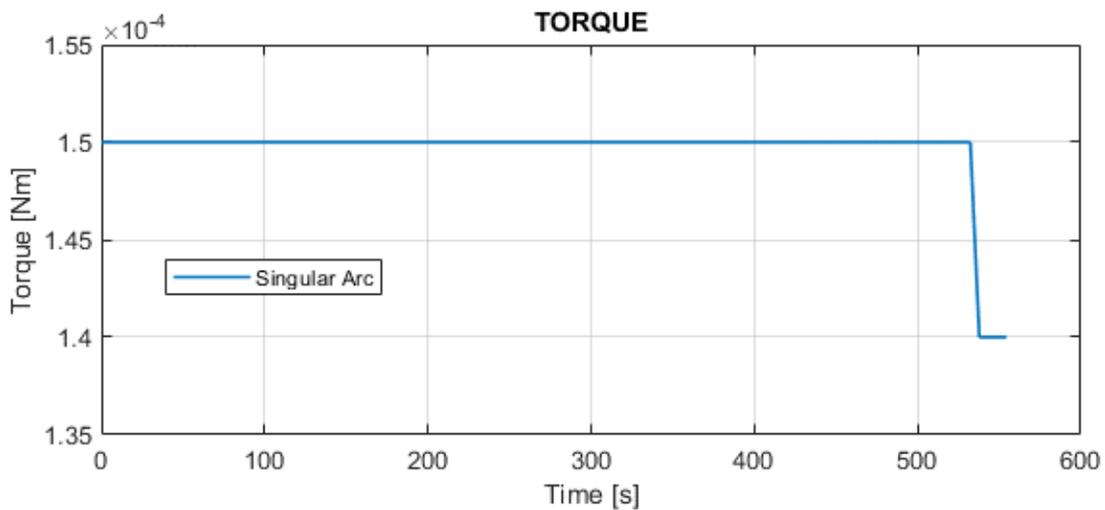


Figure 8. 28: Controllo Ottimale per Arco Singolare

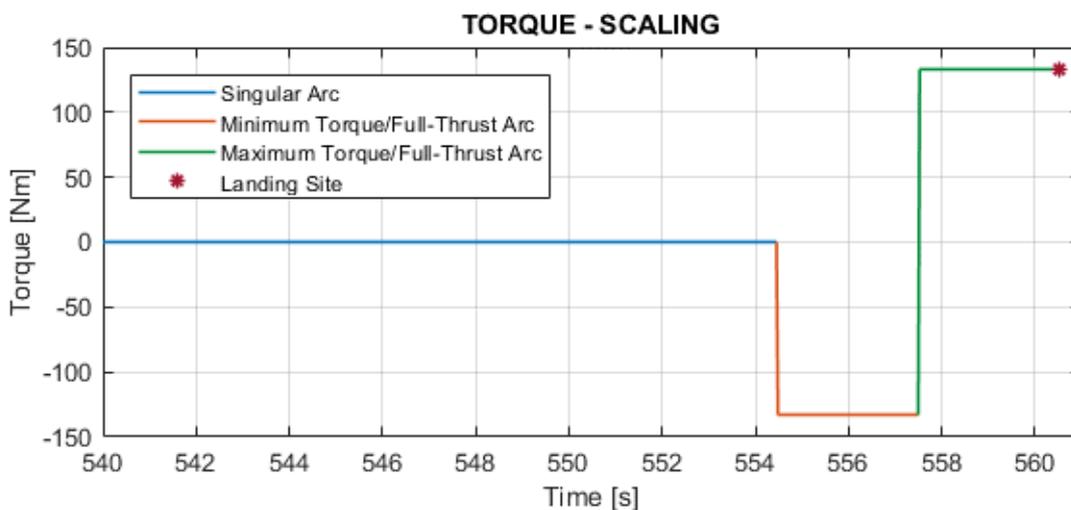


Figure 8. 29: Torque Imposta nel 2nd Arc e nel 3rd Arc

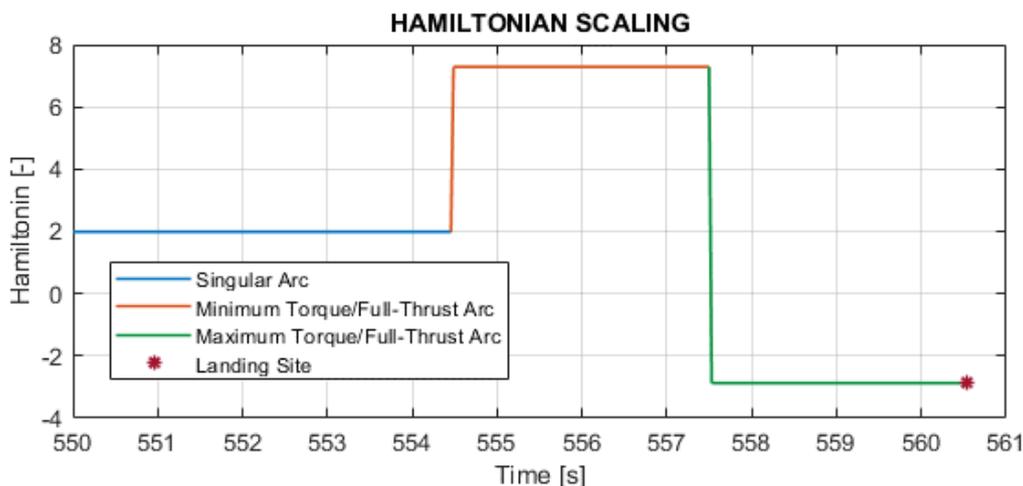


Figure 8.30: Discontinuità dell'Hamiltoniano nel 2nd Arc e nel 3rd Arc

Dalla figura 8.30 si evince che l'Hamiltoniano non sia nullo in nessuna fase della traiettoria di landing a causa dell'imposizione forzata del controllo, mentre la presenza delle discontinuità negli archi dipende dal cercare di soddisfare sia le *Optimal* che le *Assigned Boundary Condition*. Un modo per ottenere sia l'assetto desiderato che la convergenza nel landing site definito dai requisiti di missione consiste nell'eliminazione della condizione al contorno (Eq. 7.103), così da non vincolare l'Hamiltoniano nell'istante finale, generando una discontinuità di quest'ultimo solamente nel *Maximum Torque/Full-Thrust Arc*. Tale operazione permette di svincolare l'ottimizzazione dal soddisfacimento delle condizioni al contorno nell'istante finale.

La condizione al contorno mancante è definita imponendo l'Hamiltoniano pari a zero al termine dell'arco singolare, cioè dall'equazione seguente:

$$H(t_s) = 0 \tag{Eq. 8.9}$$

CASE 2) Hamiltoniano Libero nel Landing Site

Si consideri il problema di landing lunare descritto nel paragrafo 8.4 in cui la condizione al contorno sull'Hamiltoniano (Eq. 7.103) è sostituita dalla (Eq. 8.9) come osservato nel caso precedente. L'algorithmo risolutivo ha prodotto sia un secondo che terzo arco con una durata positiva, a differenza del risultato irrealistico del CASE 1) del paragrafo 8.3

$$\begin{pmatrix} t_s & T_2 & T_3 \\ \vartheta_0 & \omega_0 & \lambda_{x_0} \\ \lambda_{y_0} & \lambda_{z_0} & \lambda_{Vx_0} \\ \lambda_{Vy_0} & \lambda_{Vz_0} & \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 36.96371217119 & 0.20277512673 & 0.20256174136 \\ 2.54524091164 & 4.91390950017E - 03 & 2.88230724249E - 025 \\ 0.000000000000E + 00 & 3.28667606091E - 03 & -0.45787862113 \\ 0.000000000000E + 00 & 0.31080540666 & \end{pmatrix}$$

Results 5: Risultati dei Parametri Liberi del Boundary Value Problem: n3teta_omega_end.dat

In termini dimensionali la durata dell'arco singolare è pari a 554.4557 s, mentre le durate del *Minimum Torque/Full-Thrust Arc* e *Maximum Torque/Full-Thrust Arc* sono rispettivamente 3.0416 s e 3.0384 s, determinando una traiettoria che si evolve in 9.3423 minuti.

Nell'istante finale, a differenza del CASE 1) del paragrafo 8.4 risultano soddisfatte le condizioni al contorno assegnate:

<i>Landing Site</i>		
$R_{xf} = 33.1107 \text{ km}$	$R_{yf} = 0 \text{ km}$	$R_{zf} = 0 \text{ km}$
$V_{xf} = 0 \text{ km/s}$	$V_{yf} = 0 \text{ km/s}$	$V_{zf} = 0 \text{ km/s}$
$\vartheta_f = 90^\circ$	$\omega_f = 0 \text{ rad/s}$	$m_f = 811.6036 \text{ kg}$

Tabella 8. 5: Variabili di stato nel landing site

L'aver modificato la condizione al contorno di ottimo (Eq. 7.103) ha permesso di ottenere un risultato ad alta precisione nel landing site, nonostante il consumo di propellente sia variato di una quantità trascurabile, ovvero di 0.1 grammi. In opposizione a quanto visto nel Paragrafo 8.2.1, nel 2nd Arc l'imposizione di $M = M_{min}$ risulta violare il *Bang-Bang Control* in quanto λ_ω è maggiore di zero in tale arco di traiettoria. Di conseguenza, i valori di pitch angle ottenuti seppur permettono di rispettare le condizioni al contorno desiderate, risultano discostarsi dalla direzione ottimale di spinta. L'Hamiltoniano risulta costantemente pari a zero sia nel Singular Arc che nel *Minimum Torque/Full-Thrust Arc*, dove sia λ_ω che λ_ϑ risultano diversi da zero e permettono di soddisfare la condizione al contorno sull'Hamiltoniano nullo al termine di tale arco di traiettoria. Nel *Maximum Torque/Full-Thrust Arc* è presente una discontinuità nell'Hamiltoniano dovuta al soddisfacimento delle condizioni al contorno imposte nel landing site, risultando costantemente pari a $4.17e - 3$.

Dalla figura 8.31 è possibile notare come nell'arco singolare sia λ_ϑ che λ_ω risultino nulli, diventando diverse da zero solamente nel secondo e nel terzo arco di traiettoria. Inoltre, si evince l'interconnessione tra le due variabili aggiuntive: quando λ_ϑ diventa diversa da zero e negativa, λ_ω risulterà positiva a causa della *Angular Velocity Adjoint Variable Equation* (Eq. 7.42). Entrambe le adjoint variables presentano un trend monotono a segno costante, di conseguenza, nel caso in cui si applicasse il Bang-Bang Control per la Torque, non si determinerebbe uno switch, ma il controllo sarebbe stato settato al suo valore massimo positivo.

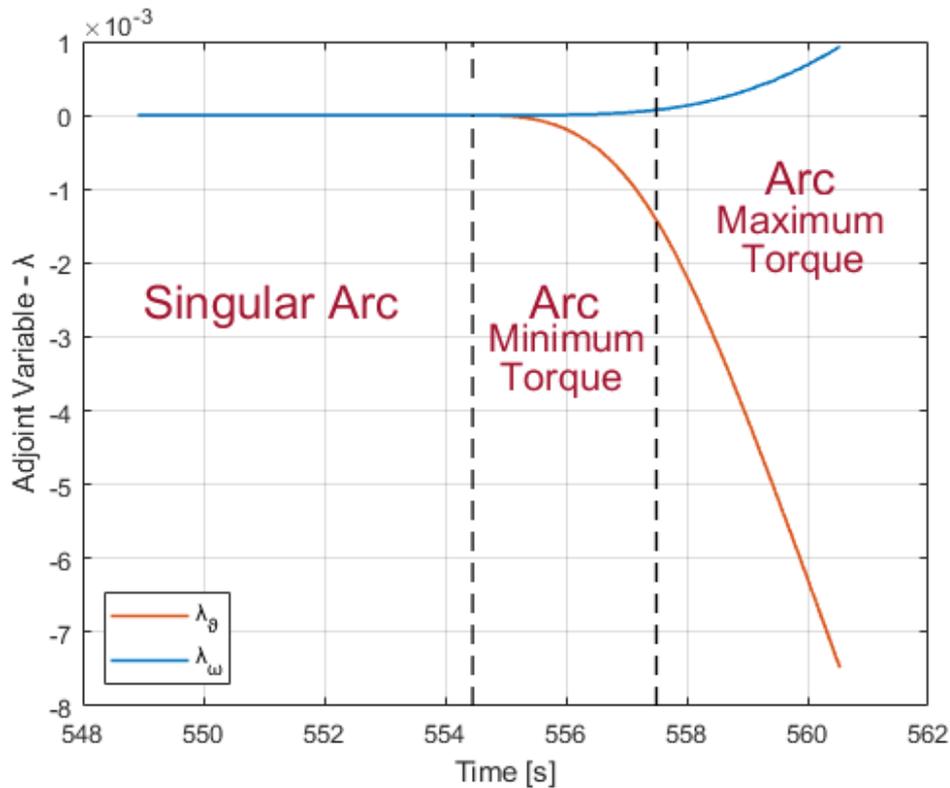


Figure 8. 31: Evoluzione di λ_θ e λ_ω nel tempo

Al termine dell'arco singolare, cioè nell'istante temporale pari a $t_s = 554.456$ s, si trova che:

- $\vartheta(t_s) = 157.53652^\circ$
- $\omega(t_s) = 0.00041$ rad/s
- $\lambda_\theta(t_s) = 0.00000$
- $\lambda_\omega(t_s) = 0.00000$

La scelta della struttura della traiettoria dipende unicamente dall'osservazione dei valori Post Singular Arc: essendo $\vartheta(t_s) > \pi/2$ l'imposizione di $M < 0$ determinerebbe $\omega < 0$ che andrebbe a far decrescere nel tempo il pitch angle ϑ sino al valore imposto nel landing site.

Di conseguenza, la presenza di un 3rd Arc con $M > 0$ risulta necessaria per permettere la riduzione in modulo di ω , di modo che nell'istante finale lo spacecraft raggiunga l'assetto ideale per l'atterraggio. La struttura degli archi considerata, viola il Principio di Massimo di Pontryagin, in quanto, l'Hamiltoniano sarebbe massimizzato, nel caso di H lineare rispetto ad un controllo vincolato, se si applicasse un Bang-Bang Control, mentre è stato appena dimostrato come la scelta della Torque sia dettata unicamente da considerazioni sulla dinamica rotazionale e non sulla sua ottimizzazione. Questo spiega la presenza di una discontinuità nell'Hamiltoniano nel *Maximum*

Torque/Full-Thrust Arc, che in un problema di ottimo, sarebbe stato nullo anche nell'istante finale, in quando non dipendente esplicitamente dal tempo. Quest'analisi permette di individuare come la presenza dell'arco singolare impone un $\vartheta(t_s) \neq 0$, cioè è come se fosse assegnato esplicitamente il valore di una variabile di stato in un contorno interno, di conseguenza, la corrispondente variabile aggiuntiva dovrebbe avere una discontinuità libera, il cui valore è un risultato dell'algorithmo di ottimizzazione.

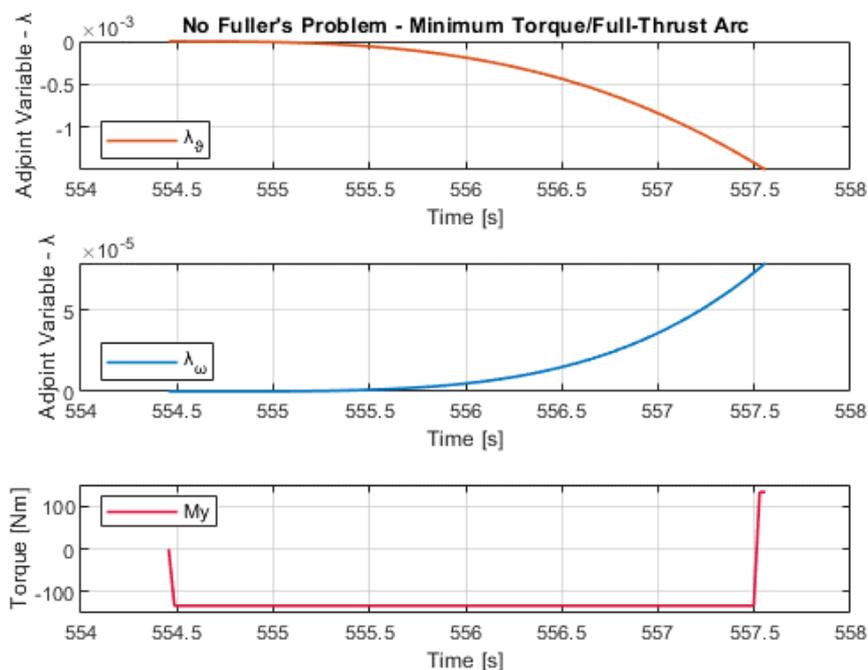


Figure 8. 32: Evoluzione di λ_ϑ e λ_ω nel Minimum Torque/Full – Thrust Arc

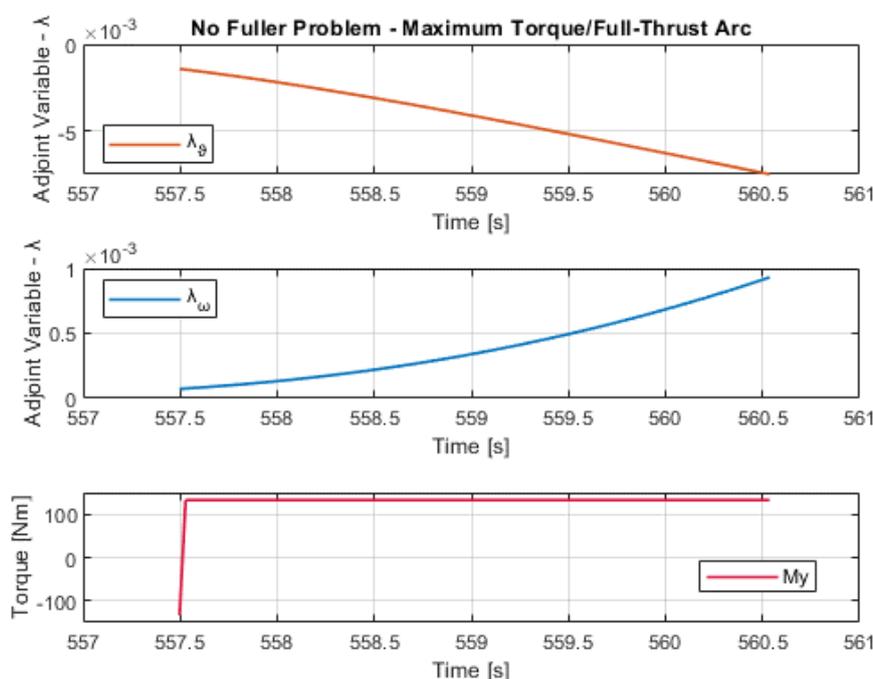


Figure 8. 33: Evoluzione di λ_ϑ e λ_ω nel Maximum Torque/Full – Thrust Arc

8.5 Soft-Landing con Fuller's Problem

La seguente simulazione numerica prevede la risoluzione del problema di ottimizzazione di landing lunare considerando il Fuller's Problem per la dinamica rotazionale, come descritto nel paragrafo 7.6.1. Nel CASE 1) del paragrafo 8.4 si è osservato come il problema sia completamente vincolato nel landing site, per cui la condizione al contorno sull'Hamiltoniano (Eq. 7.103) è sostituita dalla (Eq. 8.9). Inoltre, i parametri liberi del Boundary Value Problem risultano essere pari a 12 in quanto è presente anche la discontinuità libera $\lambda_{\vartheta}(t_s^+)$.

$$\begin{pmatrix} t_s & T_2 & T_3 \\ \lambda_{\vartheta}(t_s^+) & \vartheta_0 & \omega_0 \\ \lambda_{x_0} & \lambda_{y_0} & \lambda_{z_0} \\ \lambda_{Vx_0} & \lambda_{Vy_0} & \lambda_{Vz_0} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 36.96371219768 & 0.2027752072280 & 0.2025618200156 \\ 3.58207816245E-03 & 2.5452409039880 & 4.9139099721E-03 \\ -1.992334391389 & 0.00000000000E+00 & 3.2866764209E-03 \\ -0.4578786224817 & 0.00000000000E+00 & 0.3108054127026 \end{pmatrix}$$

Results 6: Risultati dei Parametri Liberi del Boundary Value Problem: n3teta_omega_end.dat

L'algorithmo di ottimizzazione sviluppato ha prodotto una traiettoria che si svolge in 560.5357 s in cui l'arco singolare ha una durata pari a 554.4557 s, mentre il 2nd Arc e il 3rd Arc hanno durate pari rispettivamente a 3.0416 s e 3.0384 s.

Nel landing site è verificato come siano soddisfatte le condizioni al contorno richieste:

Landing Site		
$R_{xf} = 33.1107 \text{ km}$	$R_{yf} = 0 \text{ km}$	$R_{zf} = 0 \text{ km}$
$V_{xf} = 0 \text{ km/s}$	$V_{yf} = 0 \text{ km/s}$	$V_{zf} = 0 \text{ km/s}$
$\vartheta_f = 90^\circ$	$\omega_f = 0 \text{ rad/s}$	$m_f = 811.6036 \text{ kg}$

Tabella 8. 6: Variabili di stato nel landing site

Nel caso di soft-landing senza il Fuller's Problem, si è osservato come la presenza dell'arco singolare imponeva un $\vartheta(t_s) \neq 0$, cioè è come se fosse assegnato esplicitamente il valore di una variabile di stato in un contorno interno. La corrispondente variabile aggiuntiva deve presentare una discontinuità libera, per cui è stato introdotto un ulteriore parametro nel Boundary Value Problem, cioè che in $t = t_s \rightarrow \lambda_{\vartheta}(t_s^-) \neq \lambda_{\vartheta}(t_s^+)$. Dal confronto della figura 8.31 con la figura 8.34 si evince come al termine dell'arco singolare sia verificata la presenza di una discontinuità nella adjoint variable λ_{ϑ} , il cui valore è ottenuto dal processo di ottimizzazione.

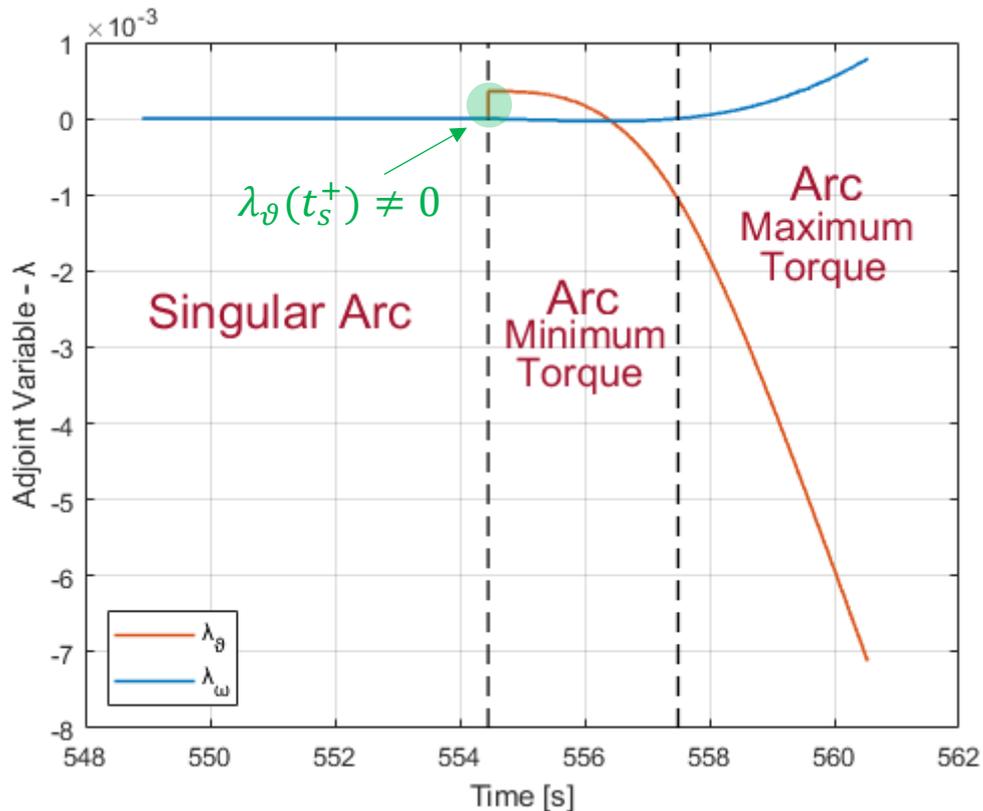


Figure 8.34: Evoluzione di λ_g e λ_ω nel tempo

La presenza della discontinuità libera $\lambda_g(t_s^+)$ permette di avere $\lambda_g > 0$ al termine dell'arco singolare, cioè:

- $t = t_s^- \rightarrow \lambda_g = 0.00000$
- $t = t_s^+ \rightarrow \lambda_g = 0.00036$
- $t = t_s^+ \rightarrow \lambda_\omega = 0.00000$

Il diagramma successivo mostra gli andamenti delle adjoint variables relative alla dinamica rotazionale nel 2nd Arc: λ_g è inizialmente positivo e presenta su tutto l'arco un andamento monotono decrescente, per cui λ_ω partendo da condizioni iniziali nulle, risulterà negativo e aumenterà progressivamente in modulo. Nell'istante in cui λ_g diventerà negativo, si invertirà il trend per λ_ω : esso presenterà un comportamento crescente, per cui si ridurrà in modulo e al termine del 2nd Arc tenderà al valore nullo, come imposto nella condizione al contorno (Eq. 7.109). Riassumendo, λ_ω risulta essere variabile in modulo nel 2nd Arc, tuttavia, essendo sempre negativo, permetterà di avere una Switching Function per il momento minore di zero, di conseguenza risulta valida l'applicazione del *Bang-Bang Control*, per cui il valore di Torque considerata deve essere quella minima, cioè $M = M_{min} < 0$.

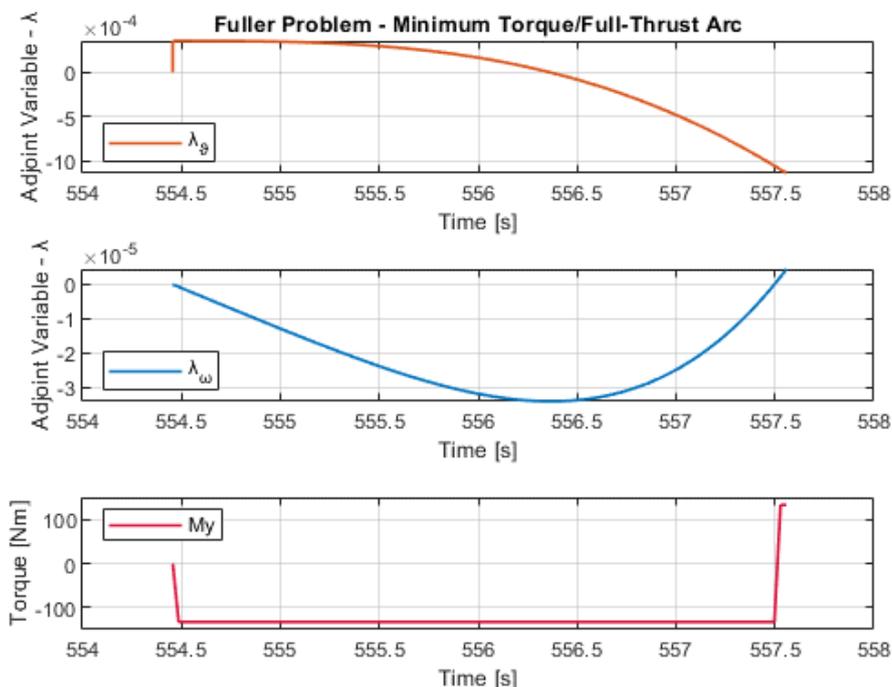


Figure 8.35: Evoluzione di λ_θ e λ_ω nel 2nd Arc

Nella figura 8.36, è diagrammato l'andamento di λ_θ e λ_ω nel 3rd Arc: analogamente a quanto osservato nella simulazione precedente λ_θ risulta minore di zero per tutta la durata della fase mentre, λ_ω partendo da condizioni iniziali nulle, risulterà sempre positivo e aumenterà progressivamente in modulo. Di conseguenza, la Switching Function è maggiore di zero per tutta la durata del 3rd Arc, il che permette rispettare la legge di controllo ottimale, cioè $M = M_{max} > 0$.

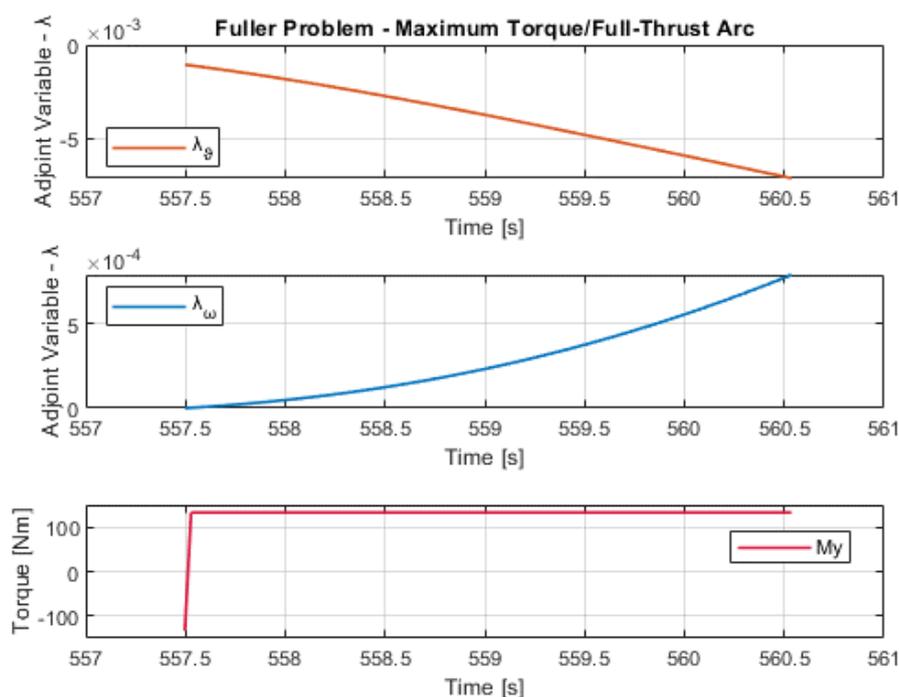


Figure 8.36: Evoluzione di λ_θ e λ_ω nel 3rd Arc

Si è appena dimostrato come sia la presenza di una discontinuità libera della adjoint variable λ_θ al termine dell'arco singolare che l'aggiunta della condizione al contorno di $\lambda_\omega = 0$ al termine del 2nd Arc, hanno permesso di evitare di ipotizzare aprioristicamente il valore della Torque negli archi della traiettoria, potendo applicare la legge di controllo ottimale: *il Bang-Bang Control*.

Questa formulazione permette di soddisfare formalmente il Principio di Massimo di Pontryagin e di conseguenza di massimizzare l'Hamiltoniano in ogni fase della traiettoria.

Una ulteriore conferma è fornita dal comportamento dell'Hamiltoniano che a differenza della simulazione precedente non presenta più una discontinuità nel 3rd Arc, ma coerentemente con il problema di ottimo formulato nel capitolo 7, risulta nullo nell'istante finale, in quanto non dipendente esplicitamente dal tempo.

Il risultato dell'analisi permette di avere un corretto comportamento della dinamica rotazionale, di modo da soddisfare i requisiti imposti, pur ottimizzando la traiettoria in modo da minimizzare il consumo di propellente.

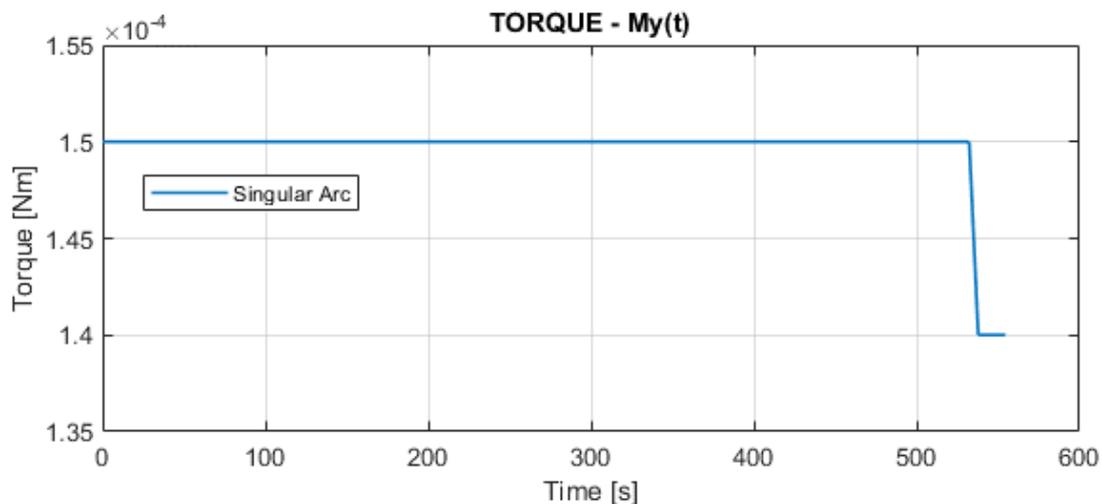


Figure 8. 37: Controllo Ottimale nell'arco singolare

Inoltre, si è considerato il main engine attivo in ogni fase della traiettoria in modo da poter considerare in ogni arco $T = T_{max}$ al fine di convergere nel landing site senza passare da quote negative, ovvero evitando che il lander passi dall'interno della Luna, il che determinerebbe una soluzione fisicamente irrealizzabile.

Si riportano di seguito i risultati della simulazione in forma grafica:

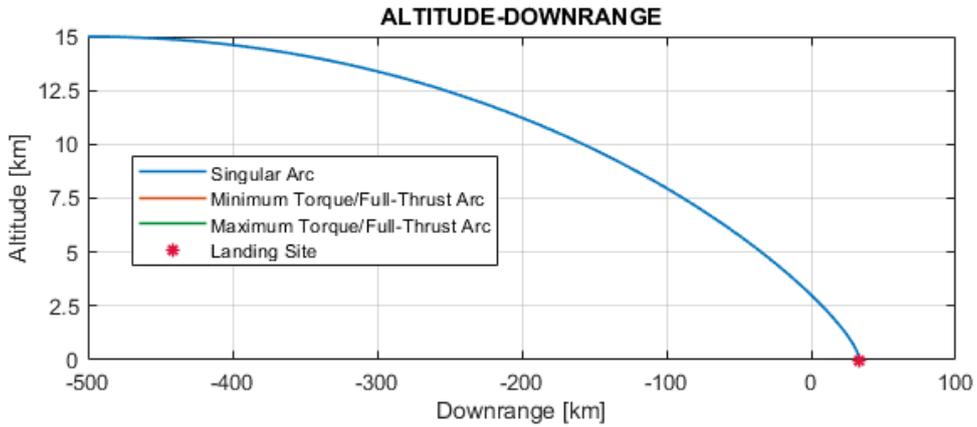


Figure 8.38: Traiettoria Bidimensionale, piano (x,z)

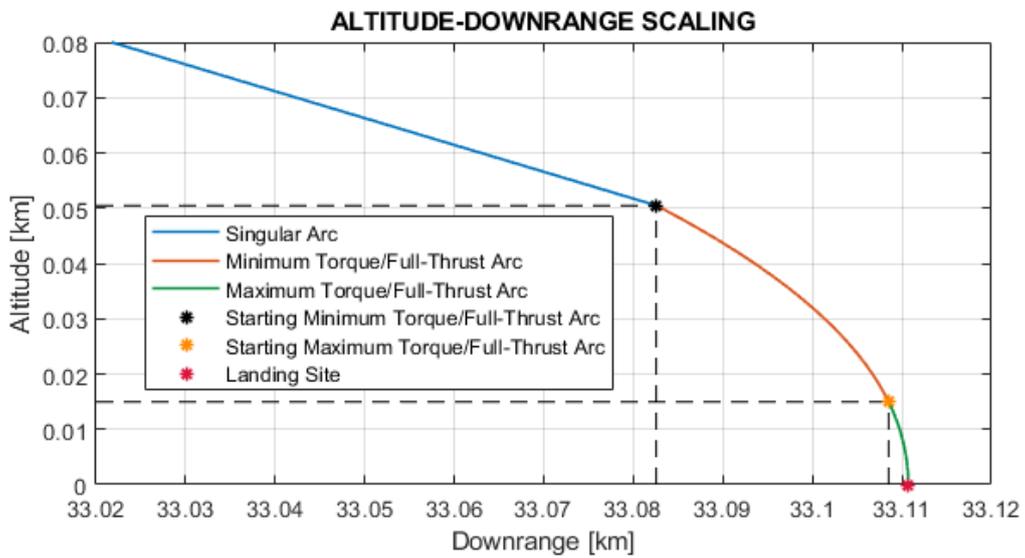


Figure 8.39: Dettagli della Traiettoria Bidimensionale del 2nd e 3rd Arc

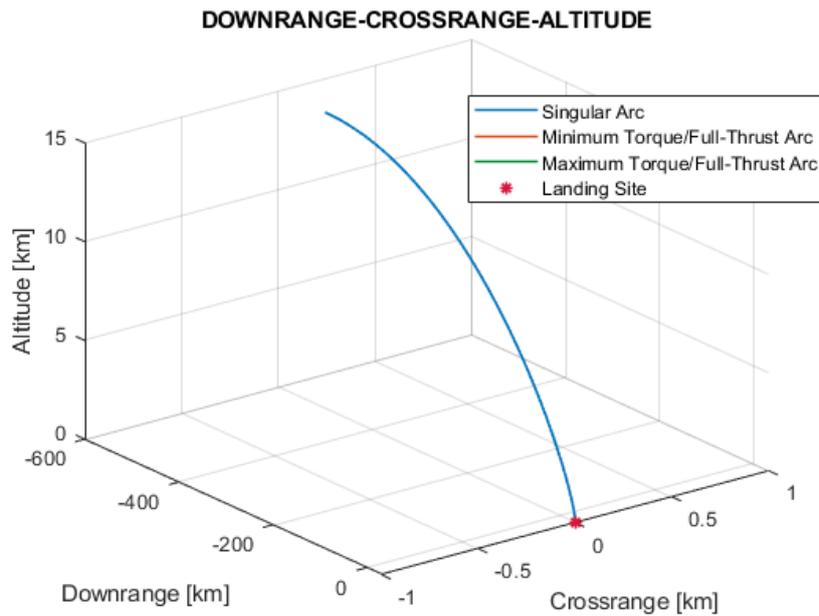


Figure 8.40: Traiettoria Tridimensionale

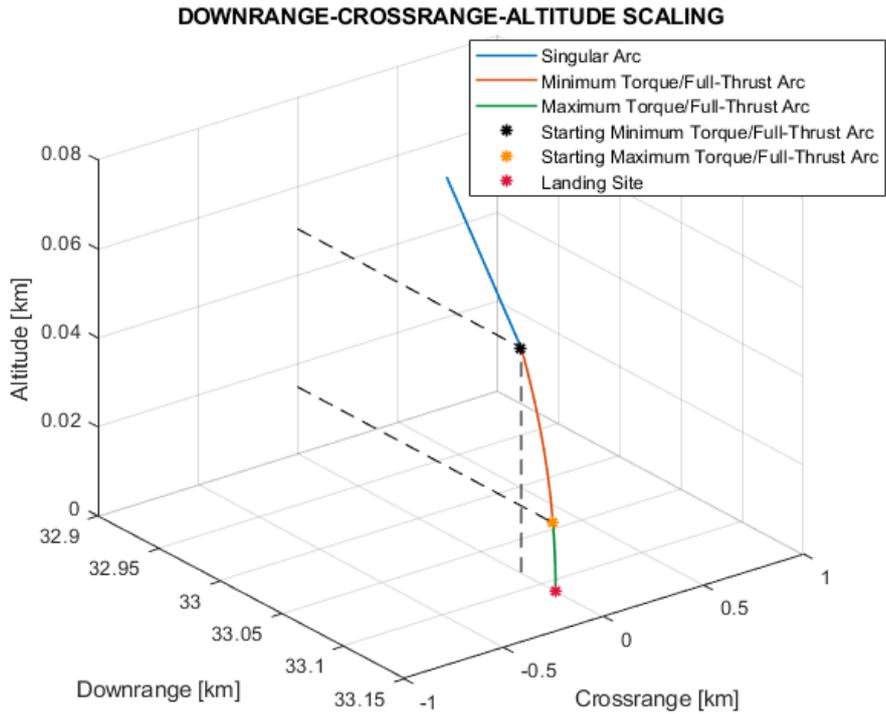


Figure 8. 41: Dettaglio della Traiettoria Tridimensionale nel 2nd e 3rd Arc

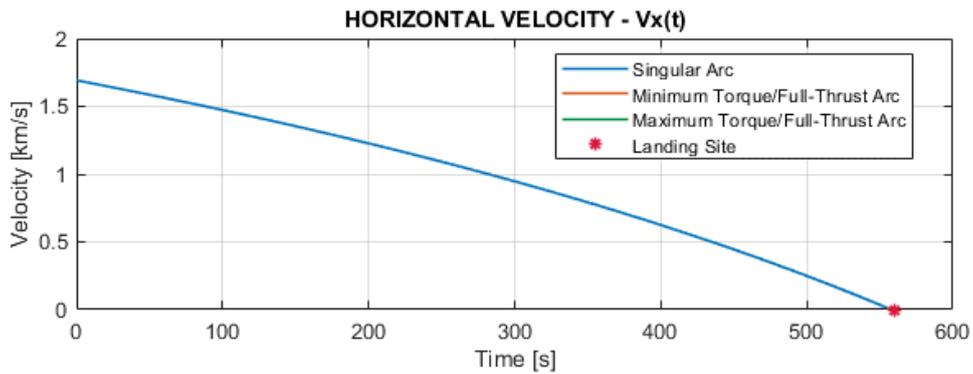


Figure 8. 42: Andamento di V_x nel tempo

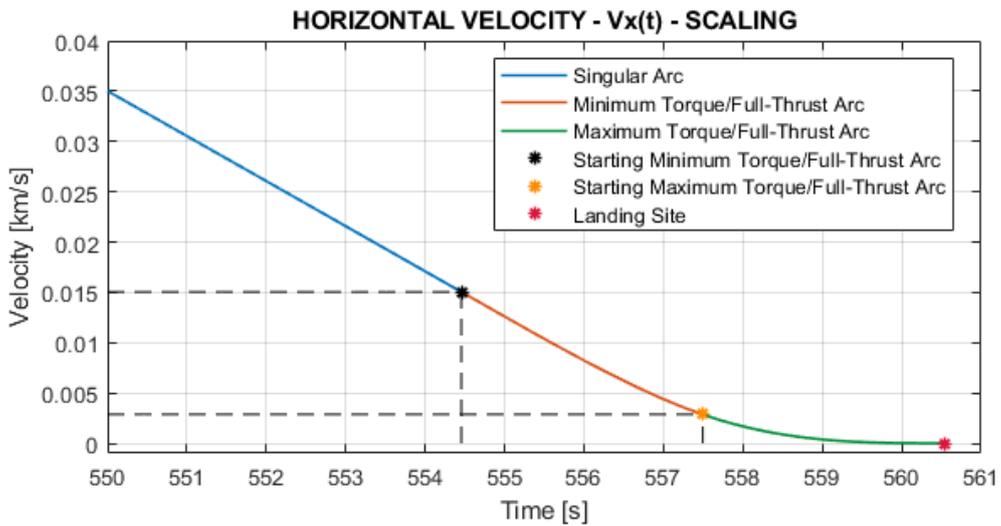


Figure 8. 43: Andamento di V_x nel 2nd e 3rd Arc

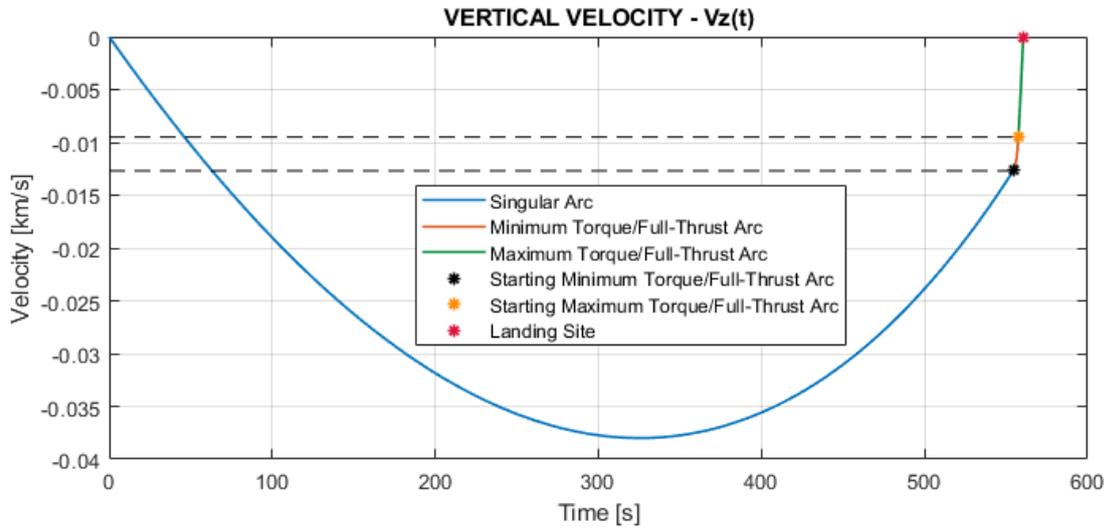


Figure 8.44: Andamento di V_z nel tempo

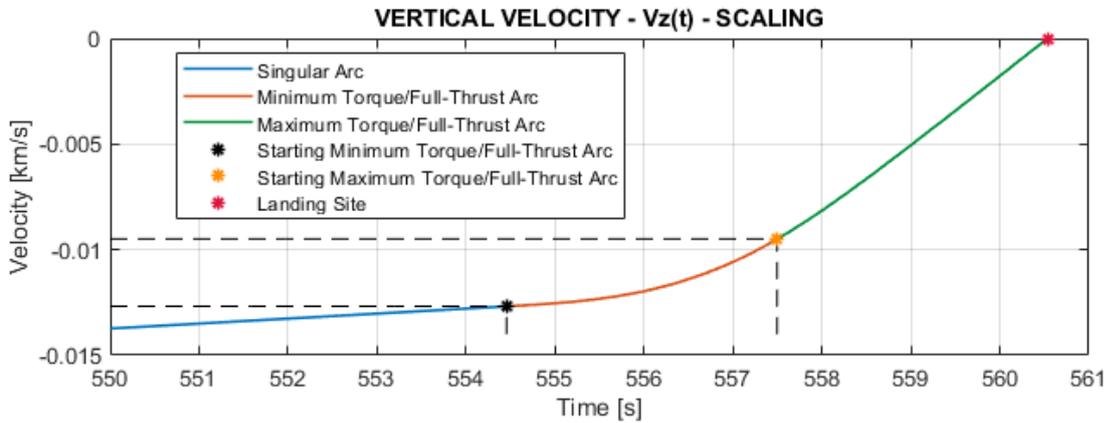


Figure 8.45: Andamento di V_z nel 2nd e 3rd Arc

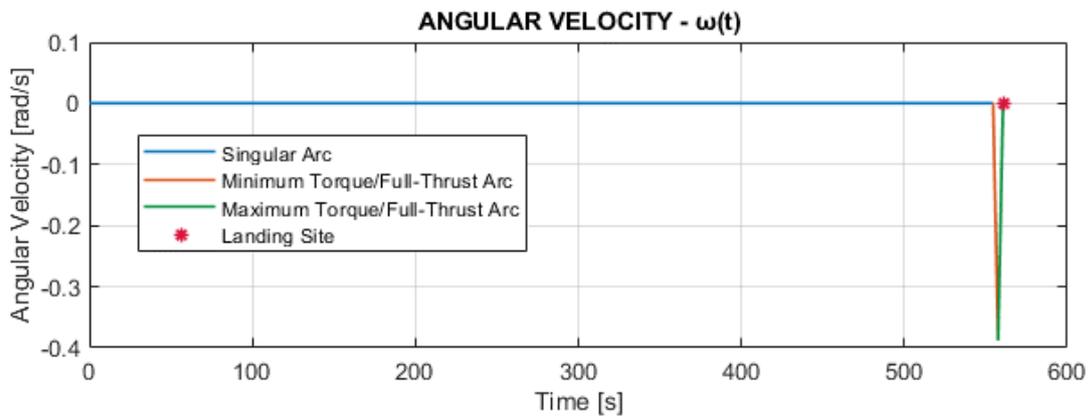


Figure 8.46: Andamento di ω nel tempo

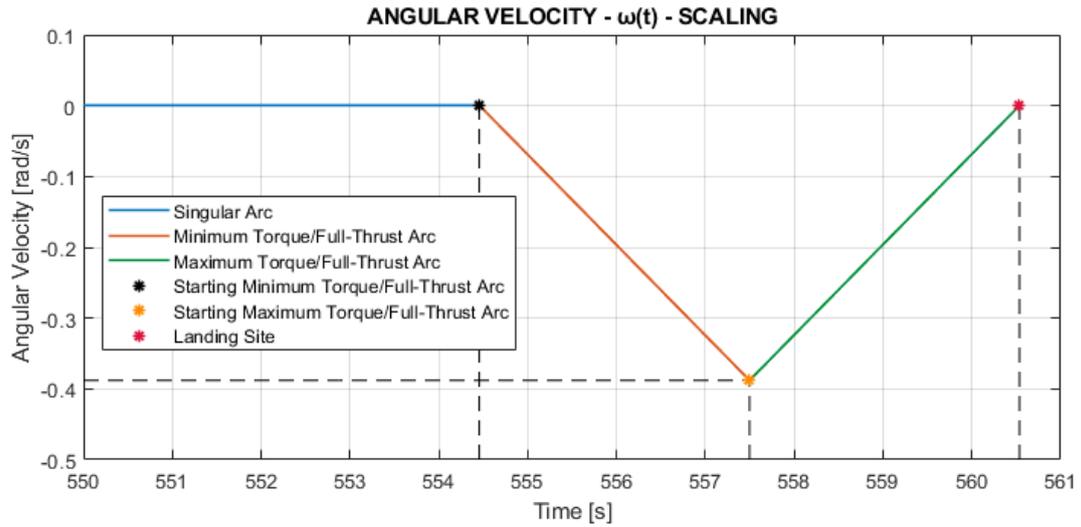


Figure 8.47: Dettaglio di ω nel 2nd e 3rd Arc

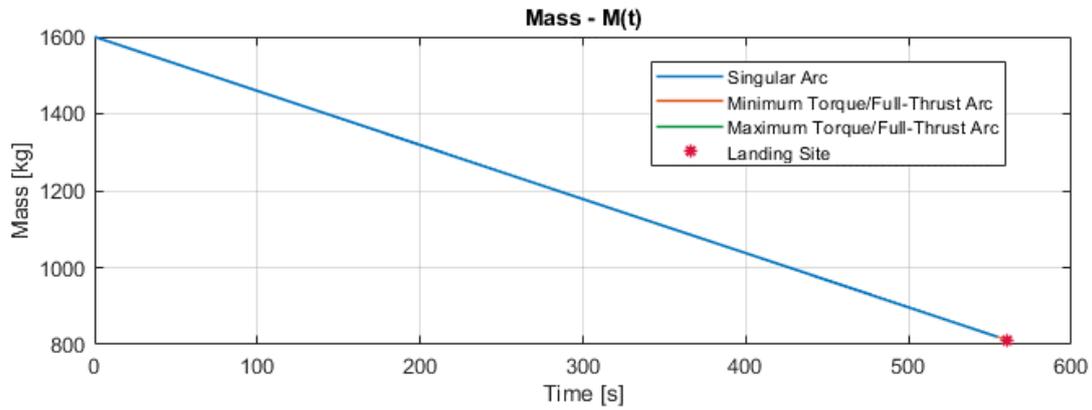


Figure 8.48: Andamento della massa del lander nel tempo

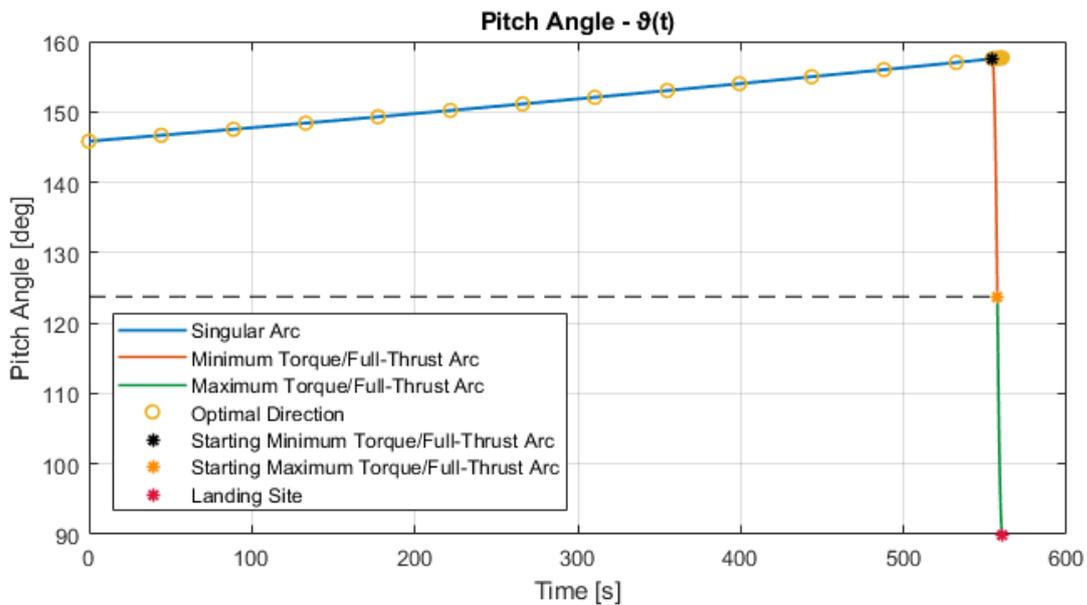


Figure 8.49: Andamento di θ nel tempo

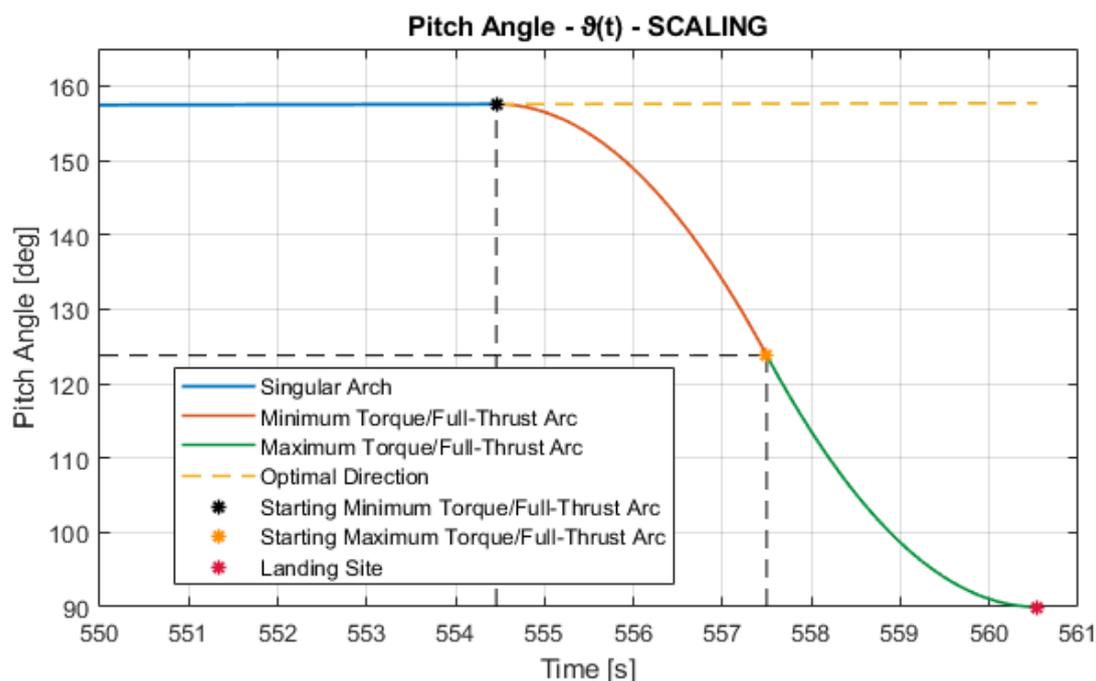


Figure 8. 50: Dettaglio di ϑ nel 2nd e 3rd Arc

8.5.1 Analisi dei Risultati

La simulazione numerica ha prodotto un Downrange diverso da zero nell'istante finale della traiettoria, per cui il landing site coincide con l'origine del sistema di riferimento inerziale se e soltanto se il Downrange iniziale fosse settato a -533.1107 km . Rispetto all'analisi numerica condotta con ω "Free" nel landing site, discussa nel paragrafo 8.3, la traiettoria presenta una durata maggiore di 1.044 s. I casi analizzati prevedono di considerare il propulsore principale del lander lunare sempre attivo, in modo da convergere nel landing site senza ottenere quote negative. Di conseguenza, essendo il consumo di propellente legato solamente al burn-time del main engine, il problema di ottimizzazione può essere visto anche in ottica di "*Minimum-Time Path Optimization*". A conferma di ciò, la seguente simulazione avendo una durata maggiore, presenta un maggiore consumo di propellente rispetto al caso del paragrafo 8.3, quantificabile in 1.4688 kg rispetto al CASE 3). Il caso con Fuller's Problem ha prodotto gli stessi risultati di quello senza la sua implementazione, in quanto entrambi prevedono la stessa struttura degli archi della traiettoria e la presenza di un unico switch per il controllo ottimale, mentre la differenza consiste solamente nel modo in cui questa è stata ottenuta. In altri termini, nel Problema di Fuller essendo rispettato il Bang-Bang Control il problema è ottimizzato, per cui non si manifestano discontinuità nell'Hamiltoniano, mentre nel caso analizzato nel Paragrafo 8.4, seppur l'evoluzione della

traiettoria risulti identica, l'aver imposto il controllo senza aver introdotto la discontinuità su λ_θ ha prodotto un comportamento discordante dell'Hamiltoniano nei tre archi. Coerentemente con la direzione di spinta del propulsore principale, risulta assente un moto di cross-range evidenziabile sia in termini di V_y nulla che dall'evoluzione della traiettoria tridimensionale. L'algoritmo è costretto a discostarsi dalla direzione di spinta ottimale come si evince sia dalla *figura 8.49* che dalla *figura 8.50* in quanto è richiesto che il pitch angle debba essere pari a 90° nel landing site. La *figura 8.47* mostra come l'andamento della velocità angolare sia lineare sia nel 2nd che nel 3rd Arc, cambiando solo la monotonia della funzione. Di conseguenza, il pitch angle risulterà parabolico con concavità opposte nei corrispondenti due archi. La massa presenta un andamento lineare decrescente che dipende unicamente dalla durata della traiettoria, essendo il main engine sempre attivo e avendo trascurato i consumi indotti dal sistema RCS. Dal punto di vista fisico, tuttavia, la condizione di asse di beccheggio verticale deve essere raggiunta a quote superiori del landing site, sia per permettere un corretto deployment del landing gear, sia a causa dell'ingombro stesso del lander lunare, in quanto la traiettoria dello spacecraft è riferita al suo centro di massa.

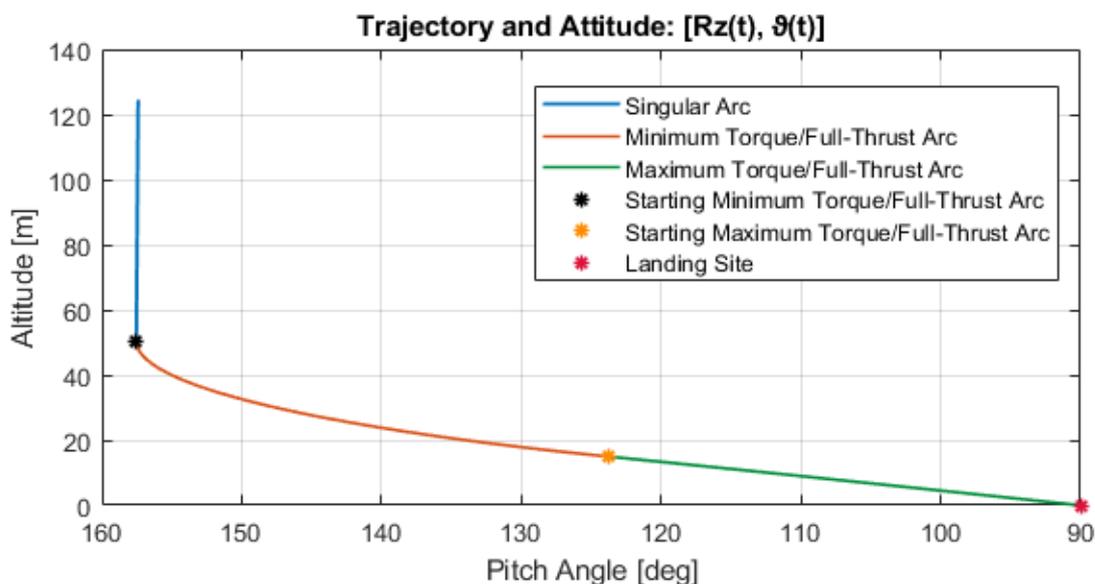


Figure 8. 51: Relazione Altitude e Pitch Angle del Lande Lunare

L'altezza del lander lunare considerato è pari a 2.013 m e avendo ipotizzato una distribuzione omogenea di massa, il centro di massa coinciderà con il centro di simmetria del cilindro, per cui sarà posizionato ad una quota di 1.0065 m dalla base dello spacecraft. Dunque, quando il centro di massa raggiungerà circa la quota di un metro dal suolo lunare, il pitch angle risulta maggiore di $\pi/2$, compromettendo la fase di landing.

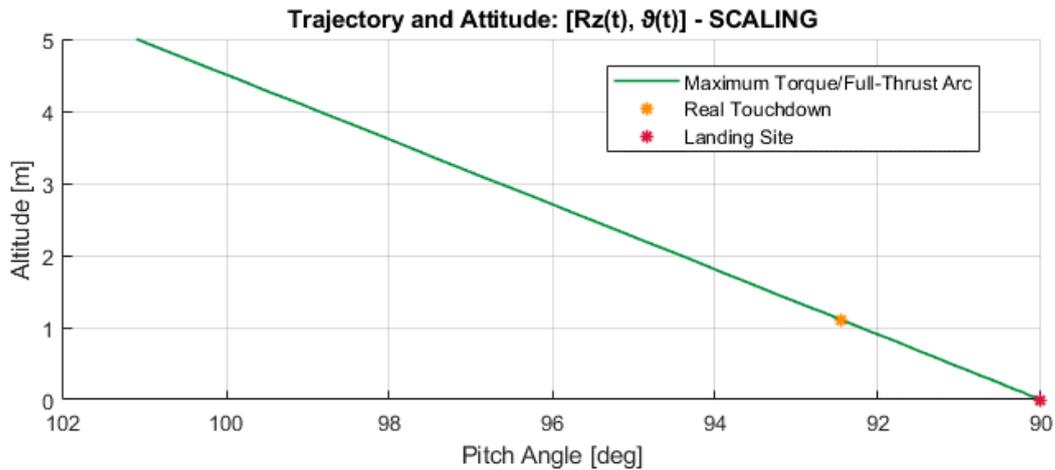


Figure 8. 52: Touchdown anticipato a causa dell'ingombro del lander lunare

Un'idea per risolvere tale problematica consiste nel considerare una fase aggiuntiva di *Vertical Descent (VD)*, analoga alla fase di *Constant- Low-Velocity Descent* della missione Chang'e-3, di modo che la dinamica di assetto desiderata non sia raggiunta nel landing site, bensì ad una quota superiore ad esso. In altri termini, $\vartheta(R_z = R_{VD}) = \pi/2$ e $\omega(R_z = R_{VD}) = 0 \text{ rad/s}$ dove R_{VD} indica la quota di discesa verticale. Dalla *Downrange Rate Equation (Eq. 7.14)* risulterà come la $V_x = \text{costante} \forall t$ ed essendo che nel landing site $V_x(t_f) = 0 \text{ km/s}$, vuol dire che la velocità orizzontale dovrà annullarsi a R_{VD} e dunque ci sarà solo un moto in direzione verticale nell'ultima fase della traiettoria.

In ultima istanza considerando la *figura 8.37* risulta evidente come il valore di Torque nell'arco singolare sia nell'ordine di $1e - 4 \text{ Nm}$, risultando incompatibile con i valori di momento che i clusters di thrusters possono fornire allo spacecraft. Dunque, in analogia a quanto osservato sia nel paragrafo 8.2 che 8.3, risulta necessario prevedere delle Reaction Wheels per il sistema RCS in modo da poter fornire una Torque adeguata.

8.6 *Soft-Landing con Fuller's Problem e Vertical Descent*

Considerando le osservazioni effettuate nel paragrafo 8.5.1 sulla dinamica di assetto, si è scelto di effettuare un'ulteriore analisi implementando anche la fase di Vertical Descent.

L'arco di traiettoria avrà una struttura definita a priori del tipo:

- *Singular Arc* con durata pari a t_s
- *Minimum Torque/Full-Thrust Arc* con durata pari a $T_2 = t_2 - t_s$
- *Maximum Torque/Full-Thrust Arc* con durata pari a $T_3 = t_3 - t_2$
- *Vertical Descent* con durata pari a $T_4 = t_4 - t_3$

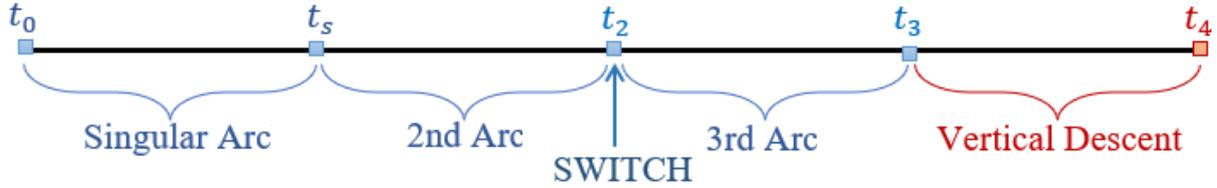


Figure 8. 53: Schematizzazione della Struttura della Traiettoria

La fase di Vertical Descent non prevede la modifica della dinamica di assetto, per cui alla quota di discesa verticale, l'algoritmo deve convergere ai valori desiderati, cioè:

$$\vartheta(t_3) = \pi/2 \quad (\text{Eq. 8.10})$$

$$\omega(t_3) = 0 \text{ rad/s} \quad (\text{Eq. 8.11})$$

Dalla *Torque Equation* (Eq. 7.18) risulta che la velocità angolare sia costante nel tempo se e soltanto se il momento sia pari a zero. Di conseguenza, l'ultima fase della traiettoria prevede:

$$\forall t \in [t_3, t_4] \rightarrow M(t) = 0 \text{ Nm} \quad (\text{Eq. 8.12})$$

Il valore a cui è settata la Torque viola il *Bang-Bang Control*, per cui tale imposizione non permette di ottimizzare dal punto di vista del propellente l'ultima fase della traiettoria. Inoltre, si considererà anche in quest'ultimo arco la spinta pari al suo valore massimo, in modo da evitare il raggiungimento di quote negative ed evitare un prematuro hard-landing.

Le condizioni al contorno (Eq. 7.88) e (Eq. 7.89) della Tabella 7.6 sono quindi state sostituite con le relazioni (Eq. 8.10) e (Eq. 8.11). Per quanto riguarda la velocità orizzontale, anche la condizione al contorno (Eq. 7.86) è stata sostituita con l'equazione (Eq. 8.13), in virtù delle osservazioni presentate al termine del paragrafo 8.5.1:

$$V_x(t_3) = 0 \text{ km/s} \quad (\text{Eq. 8.13})$$

Dal punto di vista della formulazione del problema di landing, essendo che esso prevede un numero di archi traiettoria pari a 4, le dimensioni del problema risultano essere pari a 23, dove i parametri

introdotti nel BVP diventano 5, cioè le durate delle fasi della traiettoria e la discontinuità libera $\lambda_{\vartheta}(t_s^+)$. Di conseguenza, bisogna introdurre un'ulteriore condizione al contorno affinché il problema di landing lunare con dinamica rotazionale sia ben posto, cioè:

$$R_z(t_3) = 10 \text{ m} \quad (\text{Eq. 8.14})$$

Il valore di 10 m selezionato per l'inizio della fase di Vertical Descent è stato scelto in modo che esso sia minore della quota di inizio del *Maximum Torque/Full-Thrust Arc* dell'analisi numerica del paragrafo 8.5: con questo metodo si è sicuri che sia avvenuto lo Switch del Momento e che l'algoritmo modificando le durate degli archi possa far convergere a 90° il pitch angle nell'istante t_3 .

L'algoritmo di ottimizzazione sviluppato ha prodotto i seguenti risultati:

$$\begin{pmatrix} t_s & T_2 & T_3 \\ T_4 & \lambda_{\vartheta}(t_s^+) & \vartheta_0 \\ \omega_0 & \lambda_{x_0} & \lambda_{y_0} \\ \lambda_{z_0} & \lambda_{V_{x_0}} & \lambda_{V_{y_0}} \\ & \lambda_{V_{z_0}} & \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 36.91388929207 & 0.2041955975726 & 0.2039543470967 \\ 0.163787873874 & 3.63385178441E-04 & 2.5366221613043 \\ 5.4412052449E-03 & -2.793961110565E-21 & 0.0000000000E+00 \\ 3.6876728352E-03 & -0.4585141871782 & 0.0000000000E+00 \\ & 0.3170394171741 & \end{pmatrix}$$

Results 7: Risultati dei Parametri Liberi del Boundary Value Problem: n4teta_omega_end.dat

Nel landing site, sono soddisfatte le condizioni al contorno desiderate:

Landing Site		
$R_{xf} = 33.2968 \text{ km}$	$R_{yf} = 0 \text{ km}$	$R_{zf} = 0 \text{ km}$
$V_{xf} = 0 \text{ km/s}$	$V_{yf} = 0 \text{ km/s}$	$V_{zf} = 0 \text{ km/s}$
$\vartheta_f = 90^\circ$	$\omega_f = 0 \text{ rad/s}$	$m_f = 809.1399 \text{ kg}$

Tabella 8. 7: Variabili di stato nel landing site

Starting Vertical Descent		
$R_x(t_3) = 33.2967 \text{ km}$	$R_y(t_3) = 0 \text{ km}$	$R_z(t_3) = 0.01 \text{ km}$
$V_x(t_3) = 0 \text{ km/s}$	$V_y(t_3) = 0 \text{ km/s}$	$V_z(t_3) = -0.00813 \text{ km/s}$
$\vartheta(t_3) = 90^\circ$	$\omega(t_3) = 0 \text{ rad/s}$	$m(t_3) = 812.5954 \text{ kg}$

Tabella 8. 8: Variabili di stato a nell'istante t_3

Di seguito sono riportati in forma grafica i risultati ottenuti.

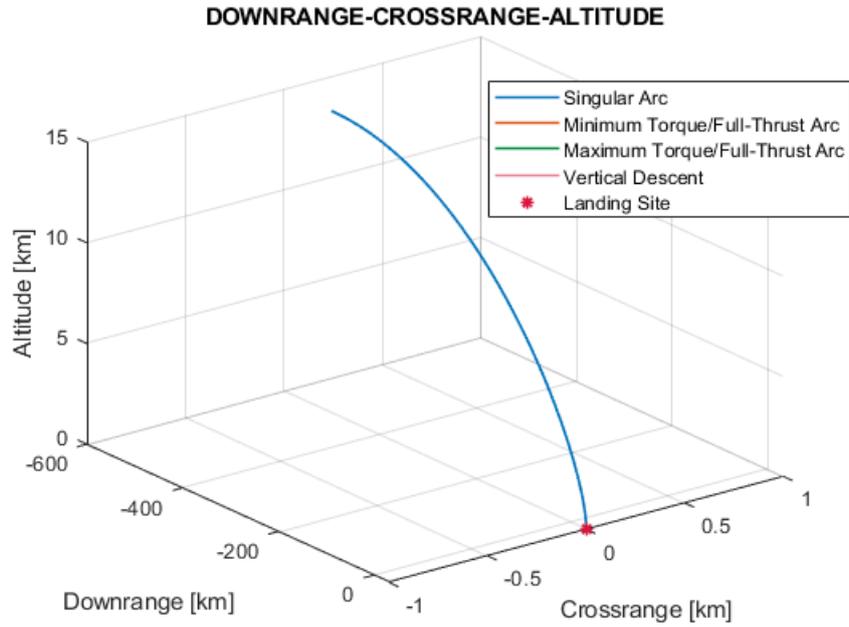


Figure 8. 54: Traiettoria Tridimensionale

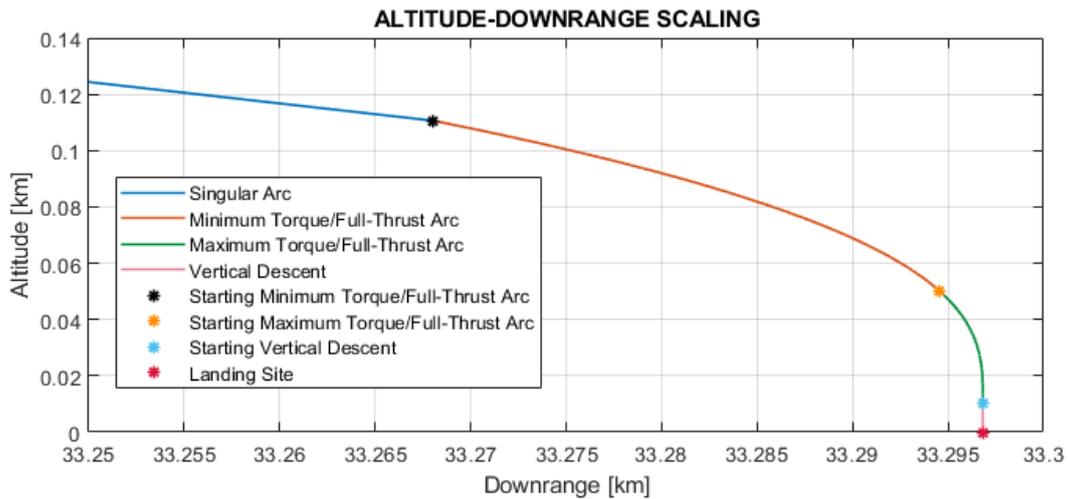


Figure 8. 55: Dettaglio della Traiettoria Bidimensionale del 2nd e 3rd Arc e della Vertical Descent

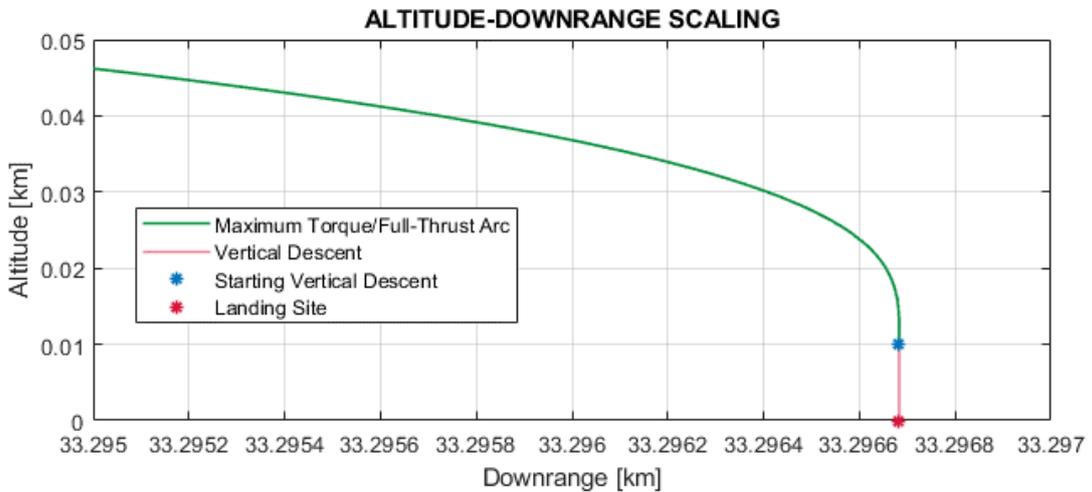


Figure 8. 56: Dettaglio della Traiettoria Bidimensionale 3rd Arc e della Vertical Descent

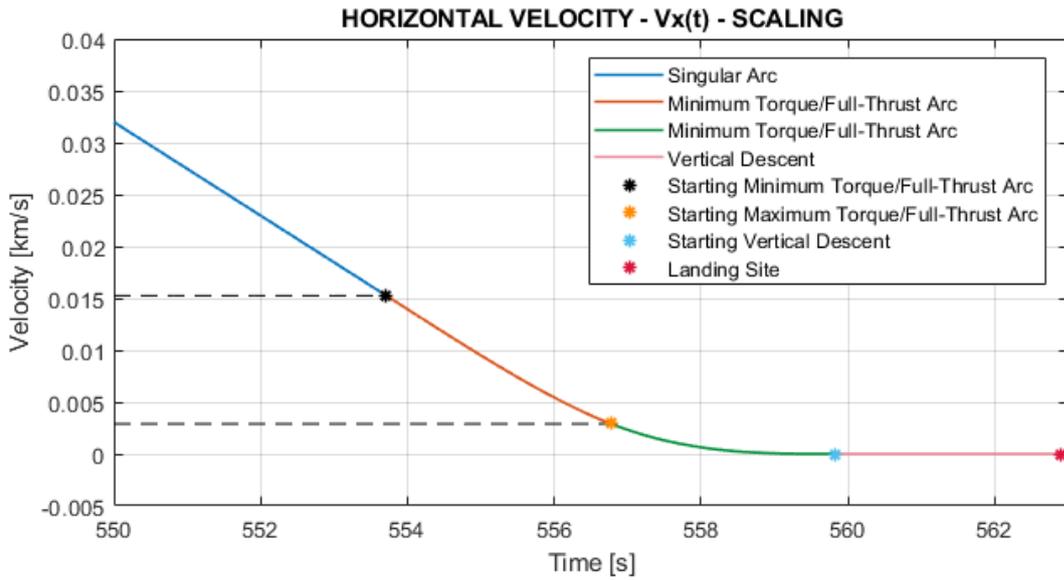


Figure 8.57: Dettaglio dell'andamento della V_x nel tempo

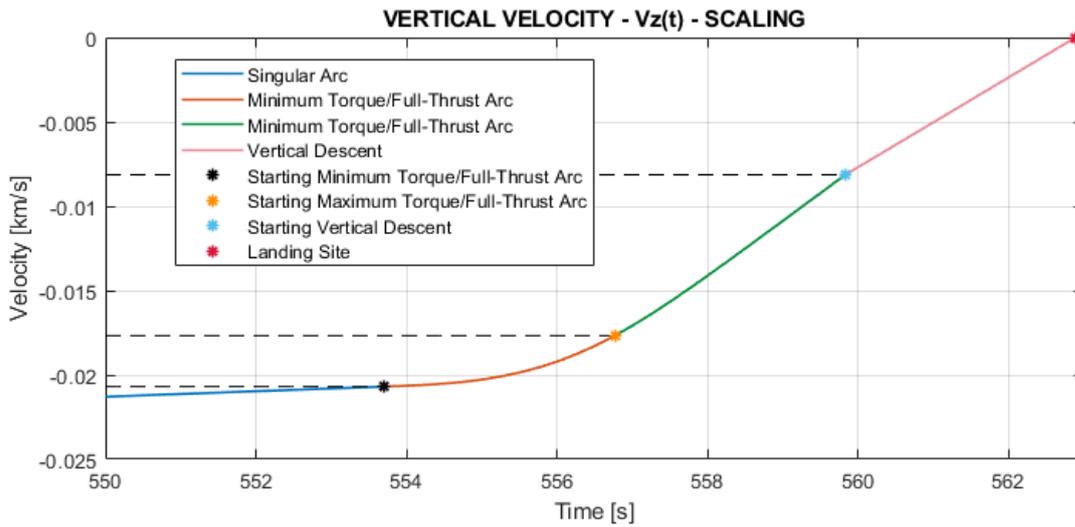


Figure 8.58: Dettaglio dell'andamento della V_z nel tempo

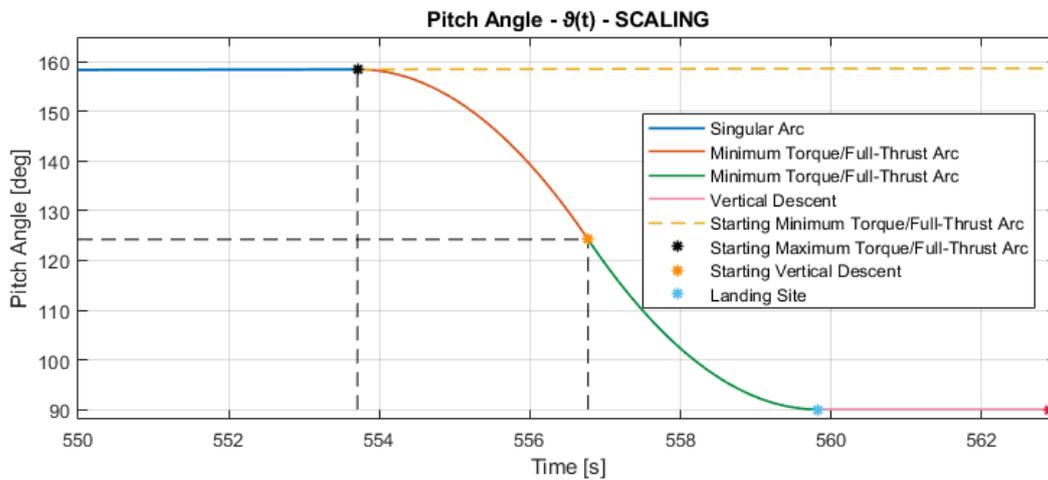


Figure 8.59: Dettaglio dell'andamento di ϑ nel tempo

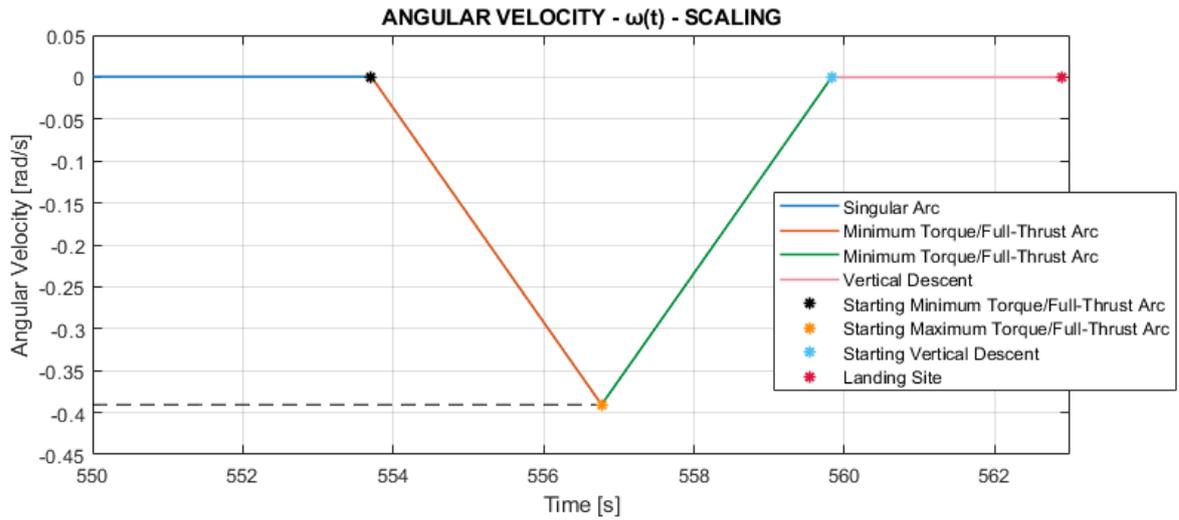


Figure 8.60: Dettaglio dell'andamento di ω nel tempo

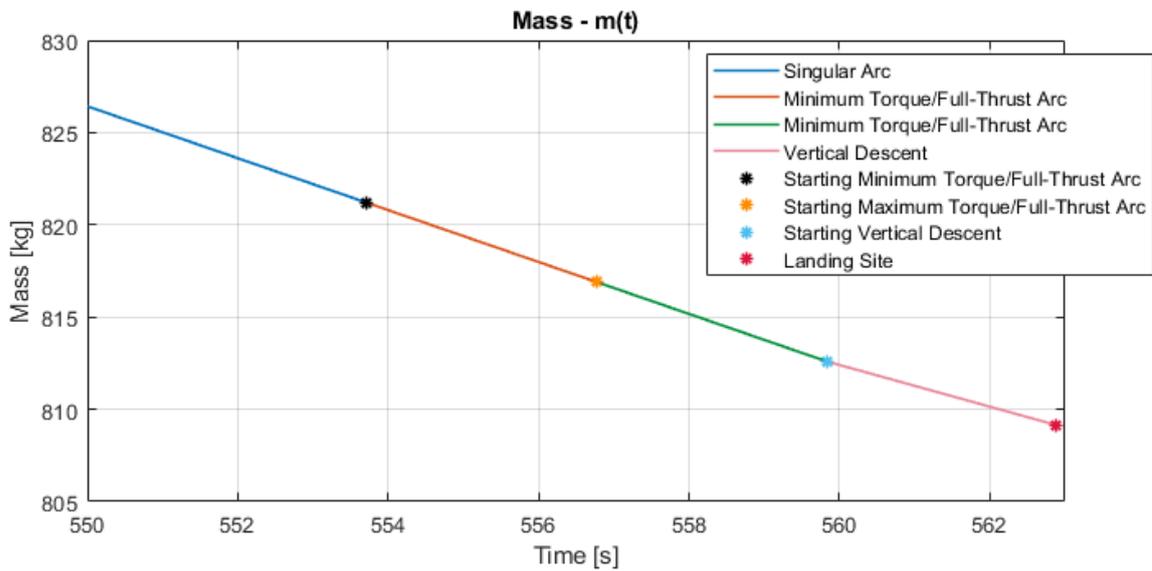


Figure 8.61: Dettaglio dell'andamento della massa nel tempo

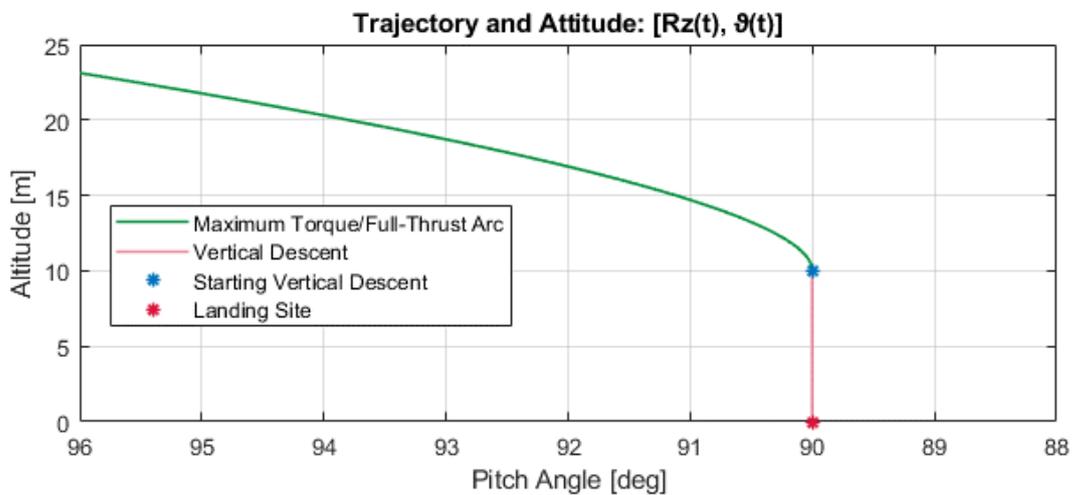


Figure 8.62: Dettaglio dell'andamento dell'Altitude in funzione del Pitch Angle

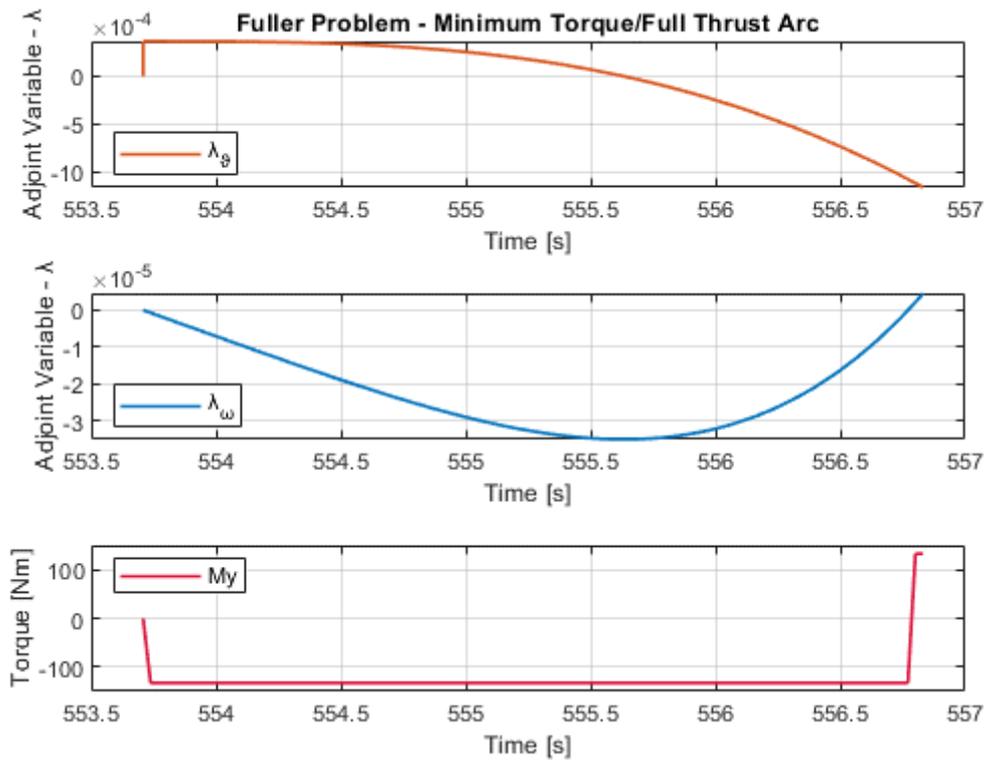


Figure 8. 63: Evoluzione di λ_θ e λ_ω nel 2nd Arc

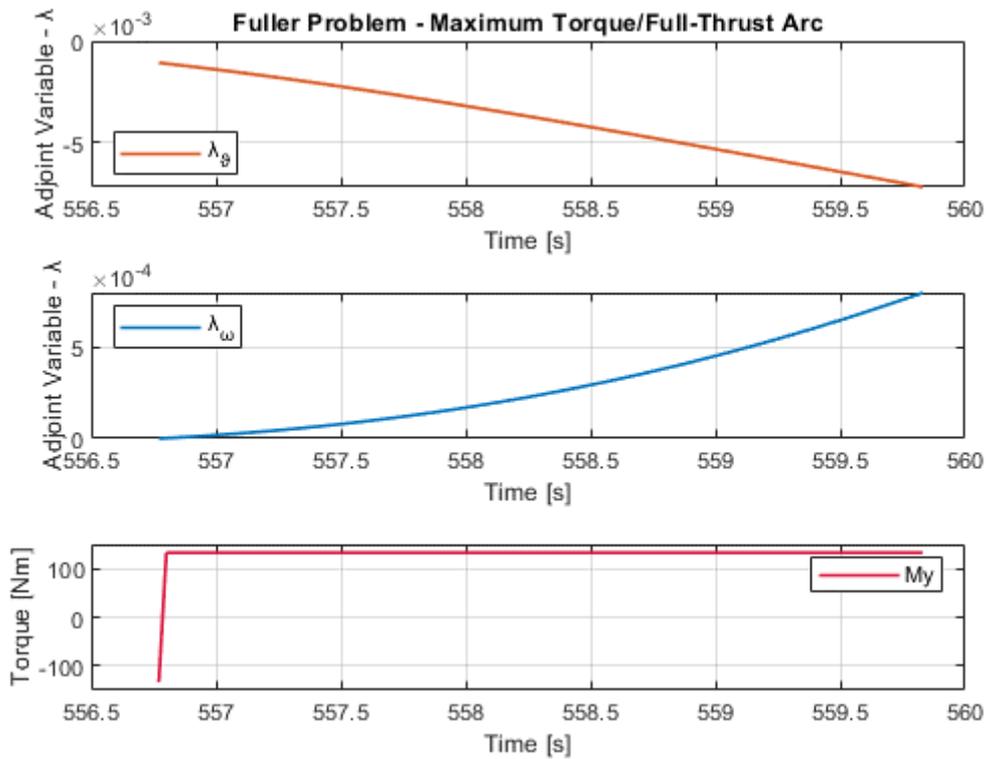


Figure 8. 64: Evoluzione di λ_θ e λ_ω nel 3rd Arc

8.6.1 Analisi dei Risultati

Dalla *Tabella 8.8* si evince come siano rispettate le nuove condizioni al contorno imposte per la discesa verticale: (*Eq. 8.10*), (*Eq. 8.11*), (*Eq. 8.13*) e (*Eq. 8.14*); mentre dalla *Tabella 8.7* si può verificare come siano soddisfatte le condizioni richieste nel landing site, a meno del Downrange. Tuttavia, l'origine del sistema del riferimento inerziale sarebbe raggiunta se si fosse impostato -533.2968 km come Downrange nella fase iniziale della traiettoria di landing, cioè anticipando la fase di DOI e riducendo il periodo di waiting nella Parking Lunar Orbit. La traiettoria di atterraggio non raggiunge mai quote negative, per cui l'imposizione della spinta massima ha evitato l'eventuale Hard-Landing dello spacecraft sul suolo lunare. Nella *figura 8.55* e nella *figura 8.56* è evidente come la fase di Vertical Descent preveda effettivamente un moto solo in direzione dell'altitude, in quanto la velocità orizzontale risulta costantemente uguale a zero in tale fase. Dall'analisi della *figura 8.59* e *figura 8.60* si nota come la dinamica rotazionale desiderata sia raggiunta all'inizio della fase di discesa verticale e sia mantenuta sino al landing site. La massa presenta un andamento lineare monotono decrescente, in analogia con le simulazioni precedenti: la maggiore durata della traiettoria di landing produce un maggior consumo di propellente, quantificabile in 2.4637 kg rispetto al caso di soft-landing con Fuller's Problem del paragrafo 8.5. L'aumento considerevole del consumo di propellente rispetto al caso precedente deriva dalla mancata ottimizzazione dell'ultimo arco di traiettoria, la cui presenza è condizione necessaria introdotta per la fisica del problema. A conferma di ciò è presente un salto nel valore dell'Hamiltoniano nella *Vertical Descent*, che risulta essere costantemente pari a -0.02297 contrapponendosi alla condizione di Hamiltoniano nullo nel landing site previsto dal problema di ottimo. Sia nel 2nd che il 3rd Arc l'implementazione del problema di Fuller e la presenza della discontinuità nella adjoint variable λ_θ permettono sia di soddisfare la legge di controllo ottimale, di modo che il segno di λ_ω sia concorde con quello della Torque, sia di far convergere il pitch angle a $\pi/2$, come si deduce dalla serie di grafici della *figura 8.63* e *figura 8.64*. È possibile verificare come al diminuire in modulo di $R_z(t_3)$, la soluzione tenda a diminuire il consumo di propellente, sino al caso limite in cui $R_z(t_3) = 0$ e dunque la soluzione generata dall'algorithm di ottimizzazione coincide con la soluzione del problema soft-landing con Fuller's Problem del paragrafo 8.5. Infine, si è già osservato come la minimizzazione del consumo di propellente sia strettamente connessa alla minimizzazione della durata della traiettoria di landing lunare, per cui risulterebbe inutile l'introduzione di Switches Multipli nel Problema di Fuller in quanto nei risultati dell'Analisi del Fuller's Problem del paragrafo 6.5 si è dimostrato come all'aumentare del numero di Switches il tempo di convergenza alla soluzione richiesta aumenti. In

altri termini, la presenza di Switches Multipli determinerebbe inevitabilmente una diminuzione della massa finale e dunque un aumento del consumo di propellente, ma con un miglioramento dell'*Integral Squared Error* del pitch angle su tutta la durata sia del 2nd che del 3rd Arc, cioè dell'Indice di Performance del Fuller's Problem.

8.7 Analisi sul Consumo di Propellente

Le tabelle seguenti riassumono sia le durate delle varie fasi della traiettoria di landing lunare, che i consumi di propellente.

ID	Simulazione	t_s [s] Singular Arc	T_2 [s] 2nd Arc	T_3 [s] 3rd Arc	T_4 [s] Vertical Arc	T [s] Totale
C1	ϑ e ω "Free"	558.8703	–	–	–	558.8703
C2	ϑ "Fixed" ω "Free" Torque Vincolata Thrust Massima	555.2118	4.2797	–	–	559.4915
C3	Soft-Landing senza Fuller's Problem Hamiltoniano "Free" nel Landing Site	554.4557	3.0416	3.0384	–	560.5357
C4	Soft-Landing con Fuller's Problem	554.4557	3.0416	3.0384	–	560.5357
C5	Soft-Landing con Fuller's Problem e Vertical Descent	553.7083	3.0629	3.0593	2.4568	562.2873

Tabella 8. 9: Riassunto delle durate delle traiettorie di landing lunare

ID	m_f [kg] Final Mass	m_p [kg] Propellant Mass
C1	813.9461	786.0539
C2	813.0724	786.9279
C3	811.6036	788.3964
C4	811.6036	788.3964
C5	809.1399	790.8601

Tabella 8. 10: Riassunto sul consumo di propellente

Si prenda come riferimento la soluzione ottenuto nel caso di Soft-Landing con dinamica rotazionale "Free" nel landing site, cioè la simulazione denominata C1. Si definisce la variazione relativa

percentuale δ [%] tra una determinata variabile della soluzione numerica C1 e la corrispondente variabile della simulazione considerata, cioè:

$$\delta [\%] = \frac{\text{variable}^{C_i} - \text{variable}^{C_1}}{\text{variable}^{C_1}} \cdot 100 \quad \text{con } i = 2:5 \quad (\text{Eq. 8.15})$$

In questo modo sono state definite le seguenti grandezze:

- δ_T : variazione relativa percentuale della durata totale della traiettoria di landing
- δ_{m_f} : variazione relativa percentuale della massa finale
- δ_{m_p} : variazione relativa percentuale della massa di propellente consumato

ID	δ_T	δ_{m_f}	δ_{m_p}
C2	+0.1112 %	-0.1073 %	+0.1112 %
C3	+0.2980 %	-0.2878 %	+0.2980 %
C4	+0.2980 %	-0.2878 %	+0.2980 %
C5	+0.6114 %	-0.5905 %	+0.6114 %

Tabella 8.11: Variazioni Relative Percentuali

La tabella 8.11 mette in evidenza come all'aumentare della complessità del problema di landing e dunque, affinché vengano soddisfatte le richieste di missione nel landing site, il consumo di propellente aumenti. In particolare, si osserva come l'aumento percentuale della massa di propellente sia identico a quello sulla durata della traiettoria: l'aver considerato in ogni simulazione numerica il main engine sempre attivo e l'aver trascurato il consumo generato dal sistema RCS, ha determinato una proporzionalità diretta tra il consumo di propellente e la durata della traiettoria di landing. Di fatti, l'ottimizzazione può essere vista anche in termini di “*Minimum-Time Path Optimization*”, cioè finalizzata alla ricerca della legge di controllo ottimale che permetta di minimizzare la durata della traiettoria di landing, pur soddisfacendo le Boundary Conditions. Inoltre, si nota come il *worst case* in termini di consumo di propellente derivi dal caso C5 che prevede una Vertical Descent, in quanto come osservato nel paragrafo 8.6, l'imposizione di una Torque nulla viola il Bang-Bang Control per il Momento e dunque non soddisfa il Principio di Massimo di Pontryagin, per cui tale arco di traiettoria risulta non ottimizzato dal punto di vista del consumo di propellente.

Una scelta per ridurre i consumi potrebbe essere ridurre la quota R_{VD} , ritardando la fase di Vertical Descent e dunque riducendo la fase di traiettoria non ottimizzata.

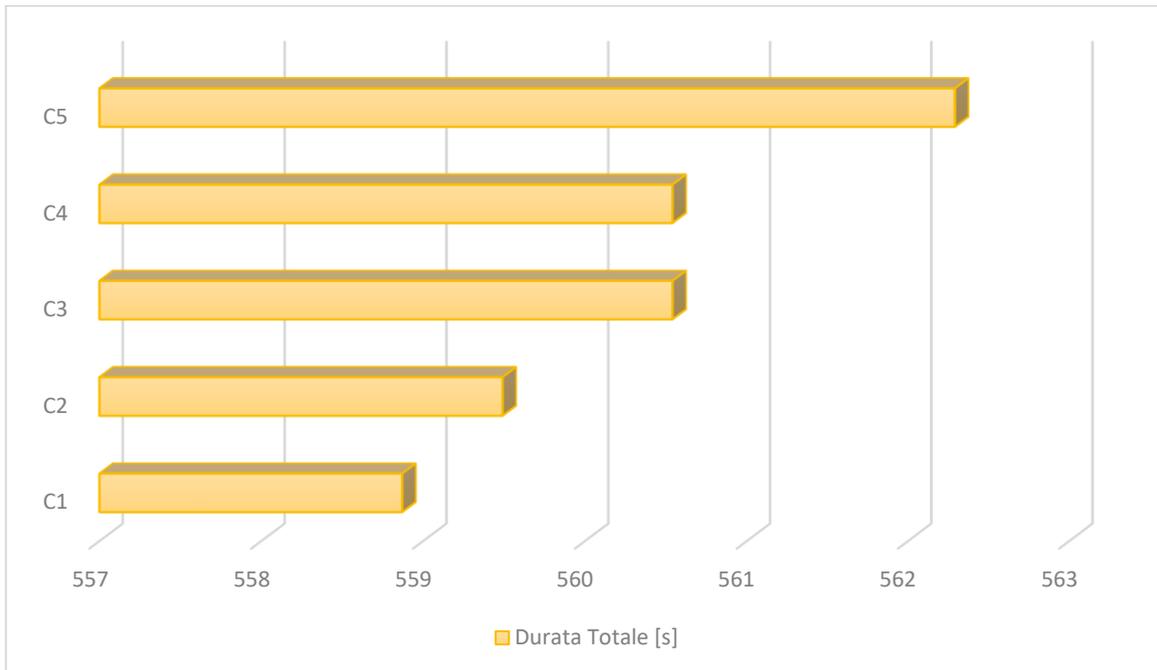


Figure 8. 7: Confronto della Durata Totale della Fase di Landing

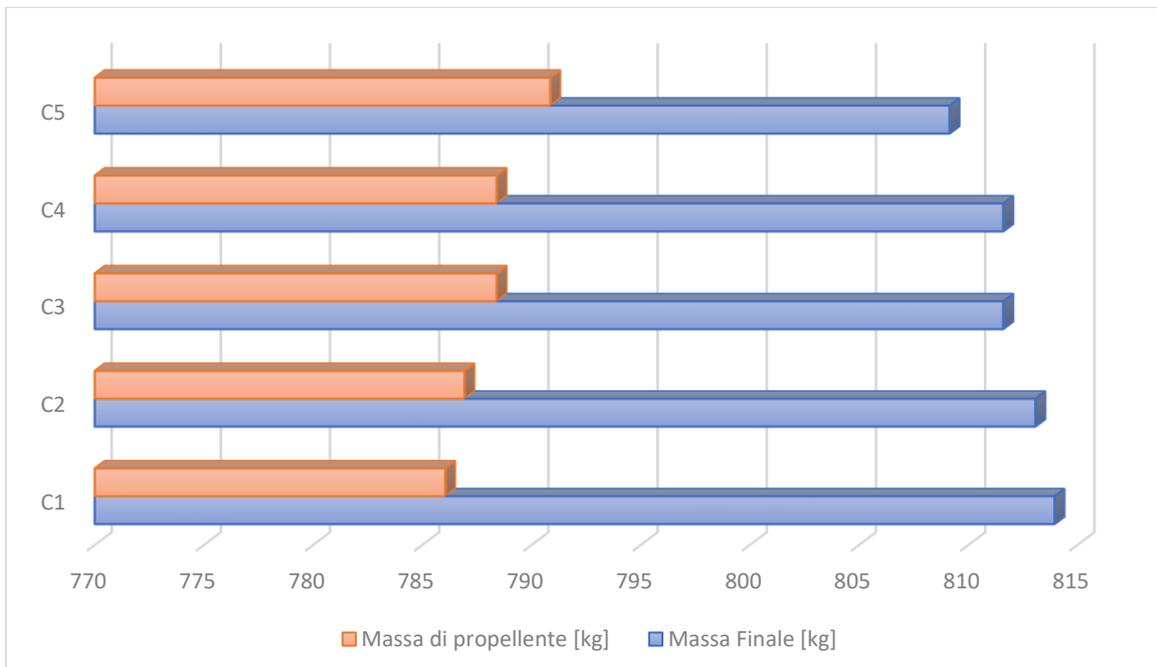


Figure 8. 8: Confronto Massa Finale e Massa di Propellente consumato

8.8 Confronto dei Risultati per Singular Arc

Le tabelle seguenti mostrano le differenze fra i diversi casi analizzati al termine dell'arco singolare.

ID	t_s [s]	$R_x(t_s)$ [km]	$R_z(t_s)$ [m]	$V_x(t_s)$ [km/s]	$V_z(t_s)$ [km/s]	$\vartheta(t_s)$	$\omega(t_s)$ [rad/s]
C1	558.8703	0	0	0	0	156.2832	0.0003
C2	555.2118	32.9747	20.25	0.0139	-0.0071	156.9018	0.0004
C3	554.4557	33.0826	50.48	0.01504	-0.0127	157.5365	0.0004
C4	554.4557	33.0826	50.48	0.01504	-0.0127	157.5365	0.0004
C5	553.7083	33.2679	110.6	0.01527	-0.0207	158.4676	0.0005

Tabella 8.12: Confronto Variabili di Stato delle Simulazioni Numeriche al termine del Singular Arc

Dalla Tabella 8.12 si evince come il caso con Fuller's Problem per la dinamica rotazionale abbia prodotto gli stessi risultati della simulazione C3, in quanto entrambi i casi prevedono la stessa struttura degli archi della traiettoria, nonché la presenza di un unico switch per il controllo ottimale. La durata dell'arco singolare si riduce all'aumentare della complessità del problema di landing, raggiungendo un minimo nel caso con Vertical Descent, mentre il trend delle variabili di stato risulta essere l'opposto: altitude, downrange, velocità, pitch angle e velocità angolare presentano un aumento in modulo al crescere dei vincoli introdotti nel problema di soft-landing.

8.9 Influenza di R_{VD} sul consumo di propellente

Nel paragrafo 8.7 è stato osservato come una soluzione per ridurre i consumi di propellente per il caso C5, potrebbe essere ridurre la quota R_{VD} , ritardando la fase di Vertical Descent e dunque riducendo la durata dell'arco di traiettoria non ottimizzato. Si ricorda che le limitazioni su R_{VD} dipendono sia dalle caratteristiche del lander lunare (paragrafo 4.2), che dal tempo impiegato per il deployment del landing gear. In quest'ottica sono state condotte delle nuove simulazioni numeriche analoghe a quella presentata nel paragrafo 8.6, dove l'unica variazione consiste proprio nella quota di discesa verticale.

I risultati in termini di durata della fase di Vertical Descent che di consumo di propellente sono riassunti nella tabella seguente.

ID	T_4 [s]	R_{VD} [m]	m_f [kg]	m_p [kg]
D10	2.4568	10	809.1399	790.8601
D9	2.3309	9	809.2673	790.7327
D8	2.1977	8	809.4018	790.5982
D7	2.0559	7	809.5450	790.4550
D6	1.9035	6	809.6986	790.3014
D5	1.7378	5	809.8655	790.1345
D4	1.5545	4	810.0499	789.9501

Tabella 8. 13: Influenza di R_{VD} sul consumo di propellente

Dalla Tabella 8.13 si evince come effettivamente al ridurre della quota di discesa verticale diminuisca il consumo di propellente, in quanto si riduce la durata della fase non ottimizzata. Trascurando il trade-off con l'azionamento del landing gear, il *best case* sarebbe rappresentato dal caso D4, che prevederebbe una quota di discesa verticale pari a 4 metri. Il guadagno in termini di massa in questo caso è di 910 grammi, cioè solamente lo 0.05 % rispetto alla massa del lander nella fase di lift-off.

8.10 Confronto delle simulazioni numeriche

Nel seguente paragrafo si andranno a confrontare i risultati delle diverse simulazioni numeriche effettuate, tenendo conto delle osservazioni già descritte nelle analisi dei risultati dei singoli casi.

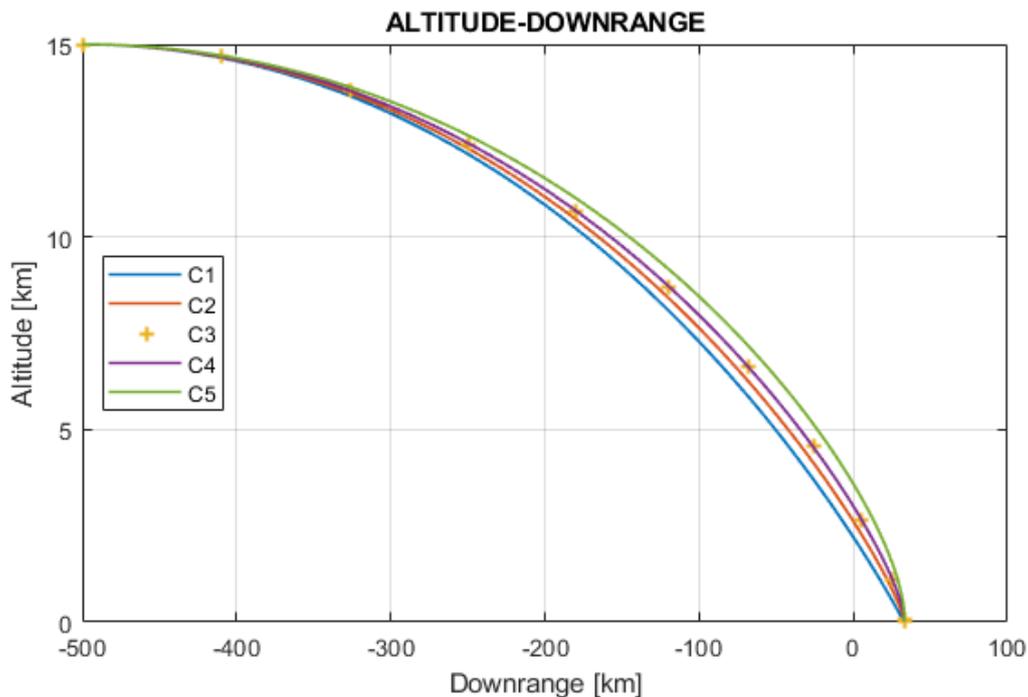


Figure 8. 65: Confronto Traiettoria Bidimensionale

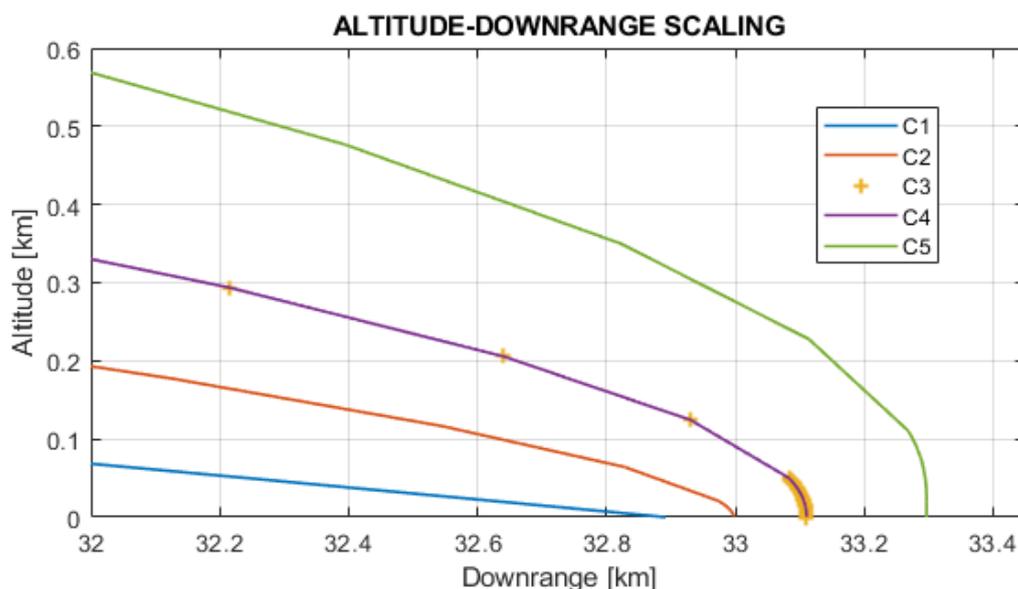


Figure 8. 66: Dettaglio del Confronto della Traiettoria Bidimensionale

Dalla figura 8.66 si evince come il raggiungimento del landing site avvenga in modo diverso: il Downrange finale aumenta in seguito all'incremento della durata della traiettoria di landing e quindi del consumo di propellente. In ogni simulazione numerica è richiesta perciò una modifica del Downrange iniziale, riducendo il tempo di waiting nella Paking Lunar Orbit in modo da anticipare la manovra di DOI così da far coincidere il sito di atterraggio con l'origine del sistema di riferimento inerziale.

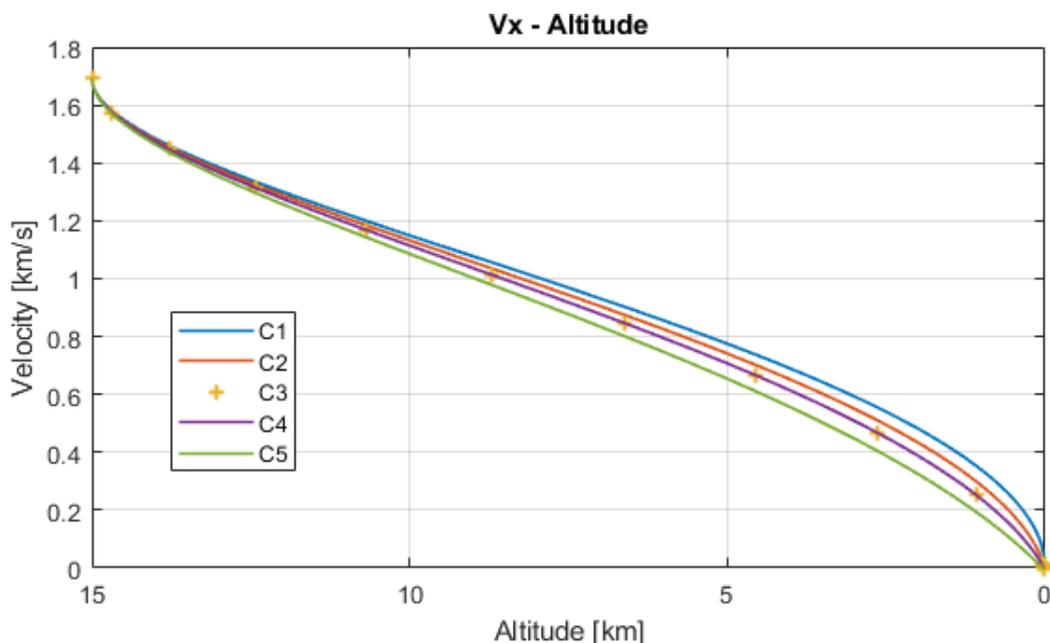


Figure 8.67: Andamento della Velocità Orizzontale in funzione della quota

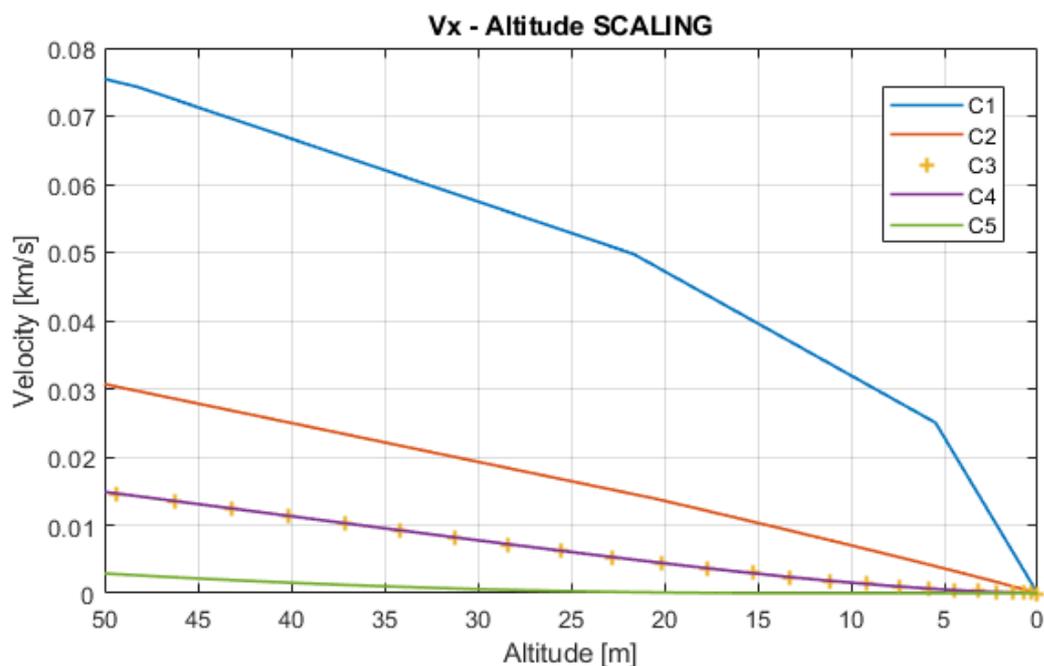


Figure 8.68: Dettaglio dell'Andamento della Velocità Orizzontale in funzione della quota

Dall'analisi sia della figura 8.67 che della figura 8.68 si evince come a parità di distanza dalla superficie lunare, la velocità orizzontale risulta maggiore nei casi meno vincolati, nonostante il Downrange percorso sia inferiore. Il paradosso è risolto ricordando che i tempi di evoluzione della traiettoria sono differenti, come riassunto nella Tabella 8.9, per cui, nonostante la velocità orizzontale sia maggiore a parità di quota, il landing site è raggiunto in minor tempo, compensando quindi tale effetto a livello di Downrange.

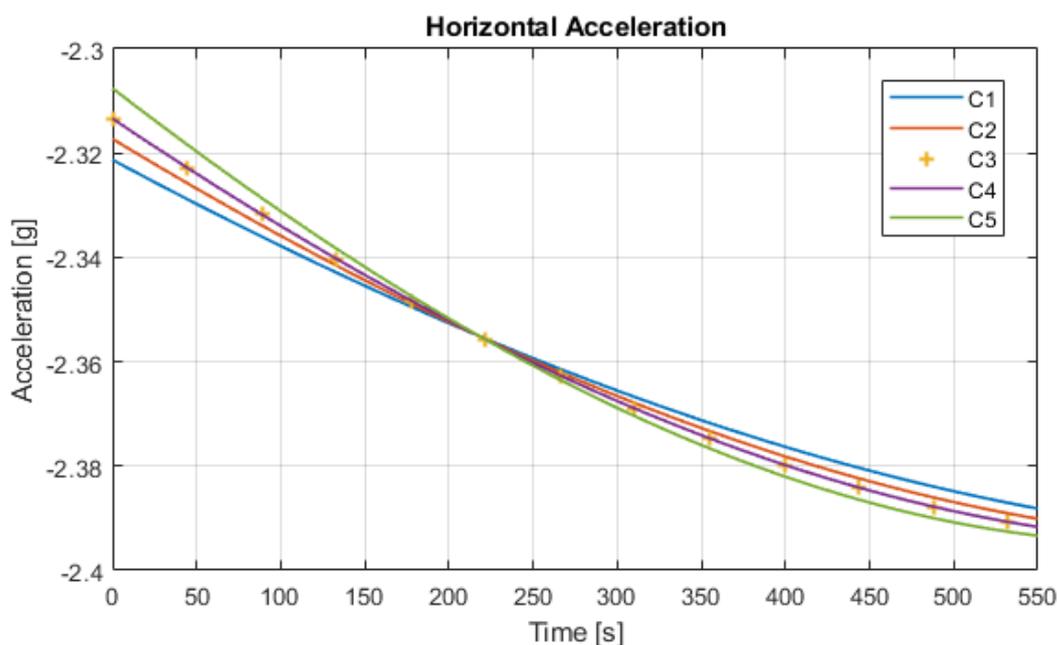


Figure 8.69: Andamento dell'Accelerazione in direzione orizzontale al variare del tempo

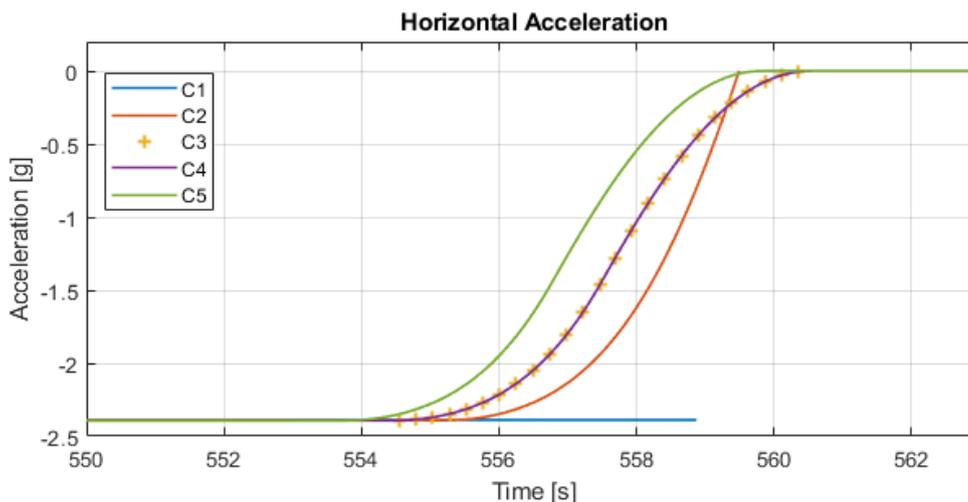


Figure 8.70: Dettaglio Andamento dell'Accelerazione in direzione orizzontale nell'intorno del Landing Site

Dalla figura 8.69 si evince come i profili di accelerazione si discostino con un errore relativo al massimo dell'1% circa sino a 554 s, cioè le variazioni in termini di accelerazioni orizzontali sono minime nell'arco singolare. Diverso è il comportamento delle accelerazioni orizzontali nelle fasi successive della traiettoria: dalla figura 8.70 si nota come un profilo di velocità con intensità minore che si estende in un maggior lasso di tempo, come nel caso C4 e C5, determini delle accelerazioni di minor entità. Di fatti, confrontano il caso con Vertical Descent con la simulazione avente sia ϑ che ω liberi nel landing site, si osserva una diminuzione in modulo dell'accelerazione pari all'80% circa, passando da 2.4g a 0.5g nell'intorno dei 558 s. Questo risultato permette di ridurre il carico strutturale sul lander lunare in direzione orizzontale, nonché, nel caso di missioni manned, tale effetto sarebbe benefico per l'equipaggio di bordo, determinando un minor impatto a livello fisiologico.

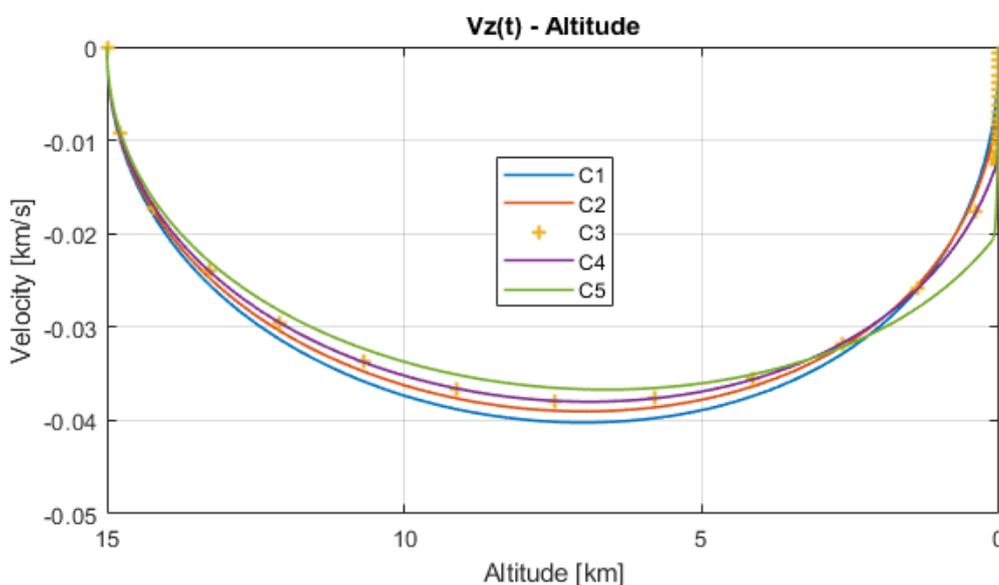


Figure 8. 71: Andamento della Velocità Verticale in funzione della quota

La velocità verticale risulta essere minore in modulo rispetto ai casi meno vincolati, a parità di quota, per il caso C5 sino alla quota di 2.2 km, mentre per i casi C4 e C3 sino ad un'altitudine di 1.8 km. Al di sotto del valore soglia individuato, il trend è quello presentato nella *figura 8.72*, dove la velocità verticale risulta essere maggiore in modulo per i casi C4 e C5 rispetto sia alla simulazione con dinamica di assetto libera nel landing site che in quella con solamente pitch angle fissato.

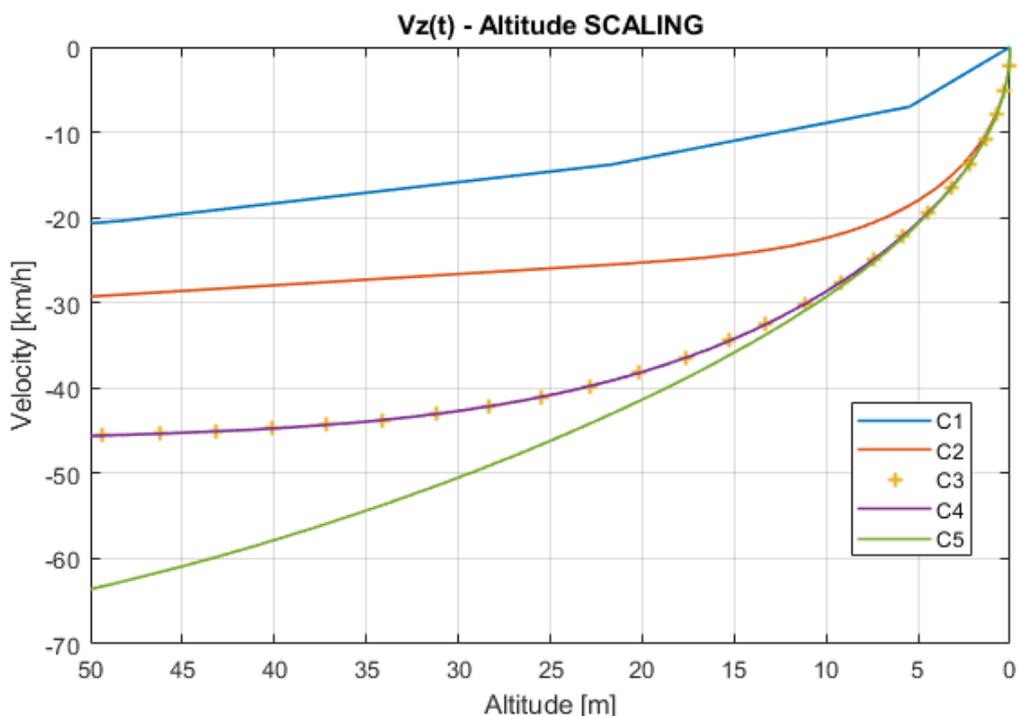


Figure 8.72: Dettaglio dell'Andamento della Velocità Verticale in funzione della quota

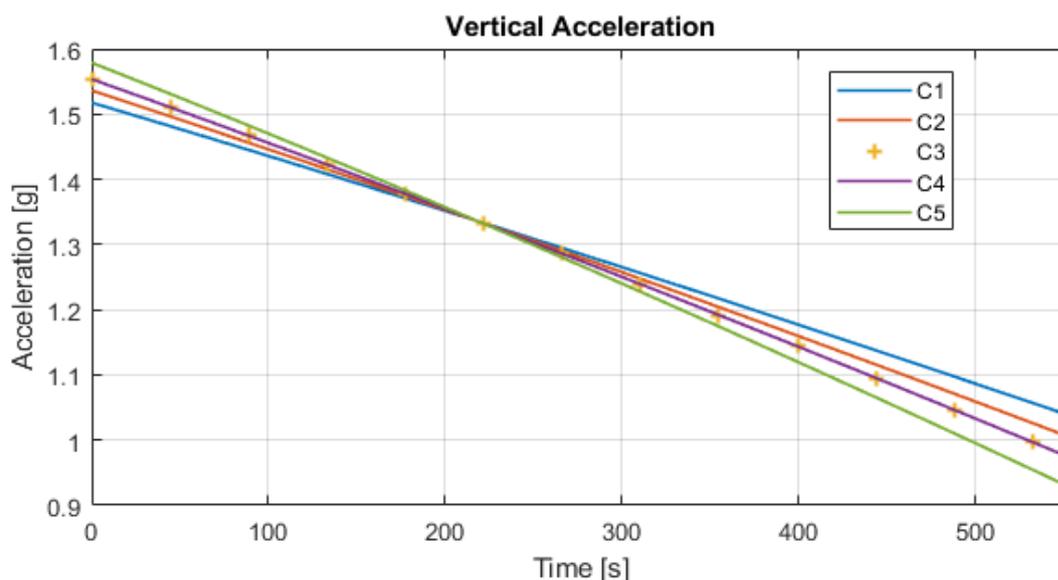


Figure 8.73: Andamento dell'Accelerazione in direzione verticale in funzione del tempo

Comparando i vari casi nell'arco singolare si evince come le accelerazioni verticali risultino avere un range di variazione più ampio rispetto a quelle orizzontali; di fatti, nell'intorno dei 554 s la distanza relativa fra le accelerazioni del caso C5 e C1 è di circa $0.1g$, corrispondente ad una variazione dell'11%. Tuttavia, le accelerazioni verticali risultano essere minori in modulo rispetto a quelle orizzontali nell'arco singolare, per cui, seppur sia presente una maggiore variabilità nei casi, in termini assoluti le accelerazioni verticali risultano essere meno impattati sulla struttura del lander lunare. Nelle fasi successive della traiettoria di landing, si osserva un aumento delle accelerazioni verticali, sino a convergere asintoticamente a $2.6g$ in tutte le simulazioni, eccezion fatta per il caso C1. A differenza delle accelerazioni orizzontali, dalla *figura 8.74* si nota come all'aumentare della complessità del problema di landing, nello stesso istante temporale, le accelerazioni verticali risultano essere maggiori in modulo, impattando maggiormente sullo spacecraft. Nel caso di missioni manned bisognerebbe valutare se tali valori di accelerazioni siano supportabili dagli astronauti, altrimenti risulterebbe necessaria l'introduzione di nuovi vincoli che vadano a limitare i valori di accelerazione in tale direzione.

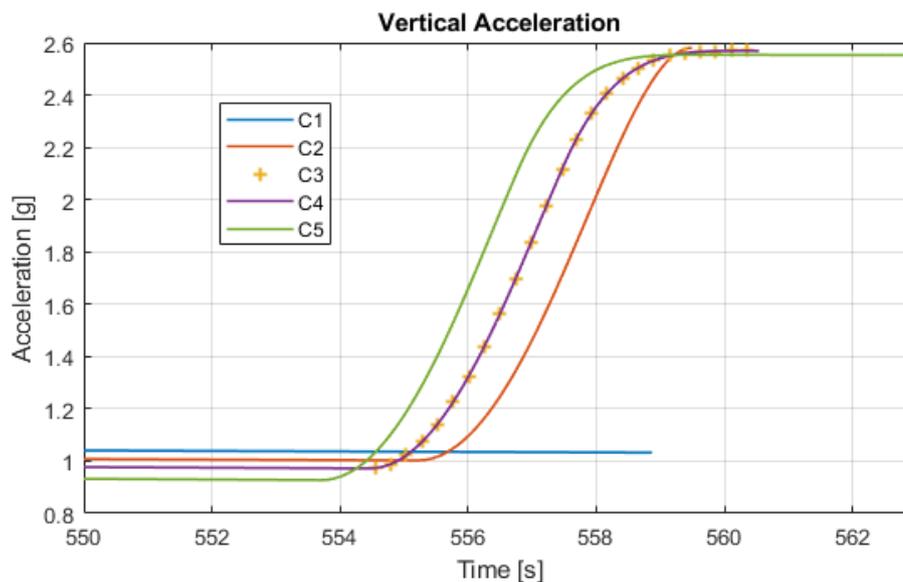


Figure 8. 74: Andamento dell'Accelerazione in direzione verticale in funzione del tempo

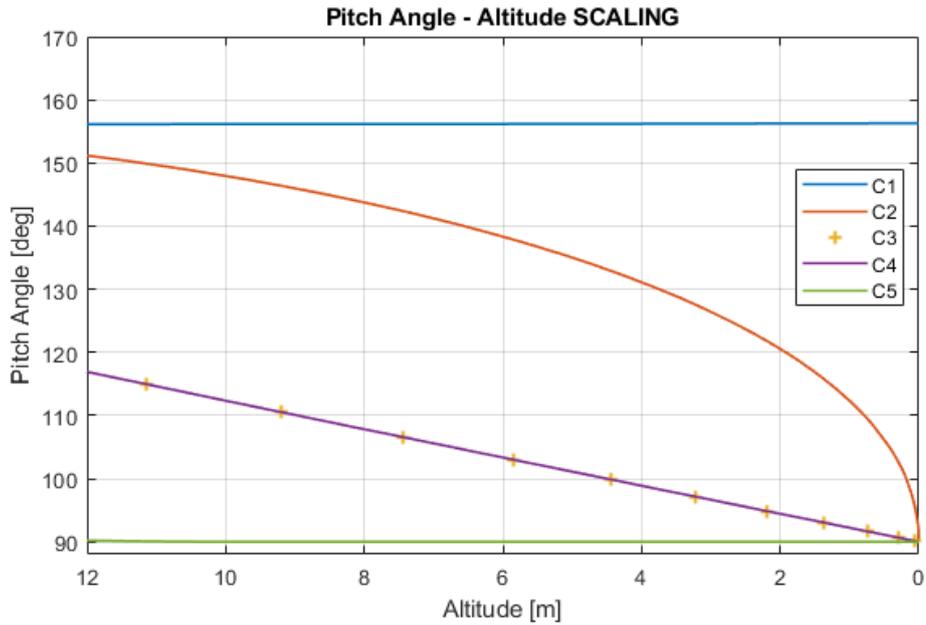


Figure 8. 75: Dettaglio dell'Andamento del Pitch Angle in funzione della quota

La figura 8.75 mostra come il pitch angle abbia un andamento diverso a seconda dei casi analizzati; tuttavia, l'unica soluzione fisicamente implementabile consiste nel caso C5, in quanto la dinamica di assetto sarebbe stabile a partire dalla quota di 10 m, permettendo il corretto dispiegamento del landing gear. In aggiunta, sarebbe necessaria un'analisi di trade-off che tenga conto sia del tempo di deployment del carrello di atterraggio che della quota di Vertical Descent, in modo da non far partire una fase non ottimizzata a quote troppo alte e aumentare inutilmente i consumi di propellente, ma al tempo stesso di evitare che il dispiegamento non sia completato per il touchdown sul suolo lunare.

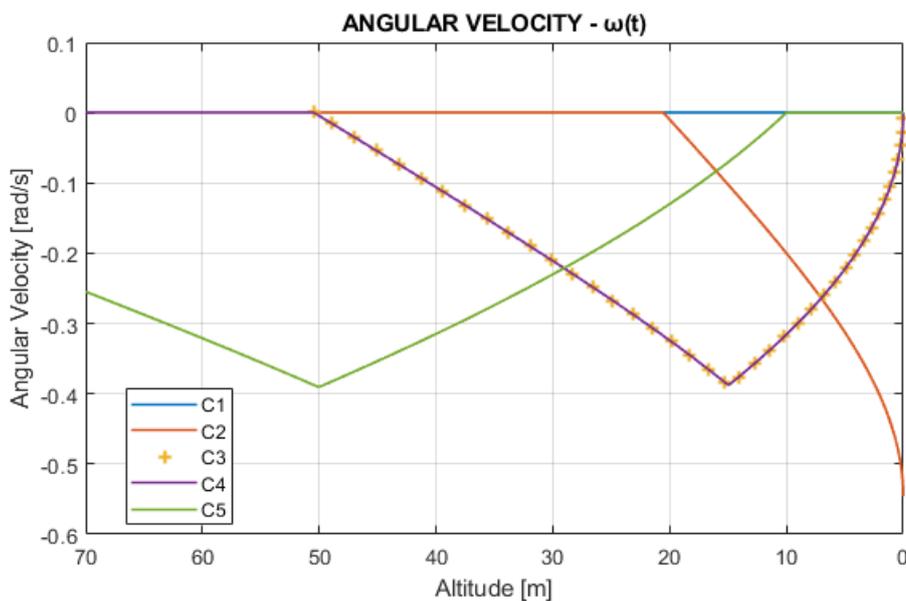


Figure 8. 76: Dettaglio dell'Andamento della Velocità Angolare in funzione della quota

La *figura 8.76* mostra la variazione di velocità angolare al variare della quota, verificando come i picchi di ω raggiunti nel caso C4 e C5 siano della stessa entità, mentre il valore massimo sia ottenuto nel landing site del caso C2. Il caso con dinamica di assetto libera presenta dei valori di velocità angolare prossimi allo zero, in quanto è presente solamente un arco singolare, il cui controllo è nell'ordine di $1e - 4 Nm$ come mostrato nella *figura 8.77*. In particolare, in tutte le simulazioni numeriche la presenza dell'arco singolare determina dei valori di Torque incompatibili con il sistema RCS ipotizzato nel paragrafo 4.2. Di conseguenza, una soluzione può essere l'introduzione di *Reaction Wheels*, cioè un sistema di controllo dell'assetto *high pointing accuracy*. Esse sono formate da una *flywheel* che è messa in rotazione, attorno ad un particolare asse di spin, da un brushless motor causando un aumento del momento angolare del lander lunare, per cui l'accelerazione della ruota attorno allo spin-axis genera in direzione opposta una *Reaction Torque* sul Lander Lunare. Le ruote di reazione permettono di generare coppie anche nell'ordine di $0.1 mNm$ adeguate ai valori di controllo ottimale ottenuti nel Singular Arc. Il vantaggio di tali attuatori è di svincolare il controllo d'assetto con il consumo di propellente, nonostante nella formulazione del problema di soft-landing si sia già trascurato il consumo generato dal sistema RCS. Tuttavia, le Reaction Wheels presentano problemi di saturazione, cioè bisogna usare altri attuatori di assetto quando la velocità di rotazione è massima, in modo che essa si riduca in modulo. Un ulteriore svantaggio consiste nei guasti dell'attuatore causati dalla compromissione dei cuscinetti a sfera del meccanismo.

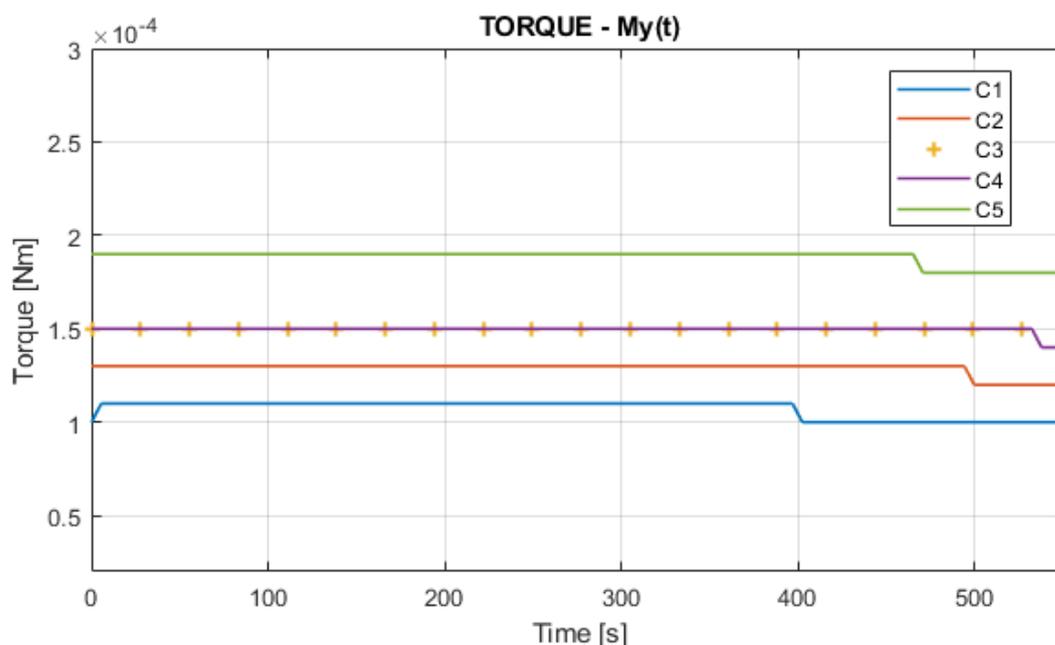


Figure 8. 77: Andamento della Torque nelle fasi iniziali delle traiettorie

La *figura 8.78* mostra come le fasi successive della traiettoria presentino dei valori di momento differenti a seconda del caso analizzato:

- C2 → la presenza unicamente di M_{min} permette di far convergere il pitch angle a 90° nel landing site, in quanto $\vartheta(t_s) > \pi/2$.
- C3 → presenta sia M_{min} che M_{max} , i cui valori sono imposti forzatamente in modo da far convergere a zero la velocità angolare, oltre che raggiungere l'assetto desiderato.
- C4 e C5 → seguono la legge di controllo ottimale per la Torque grazie all'introduzione sia del Fuller's Problem che della discontinuità $\lambda_\vartheta(t_s^+)$.

Inoltre, si evidenzia come l'ultimo tratto della simulazione C5 presenta un valore di Torque pari a zero, imposta forzatamente per ottenere una dinamica di assetto costante durante la fase di Vertical Descent e permettere una moto solo in direzione dell'altitude.

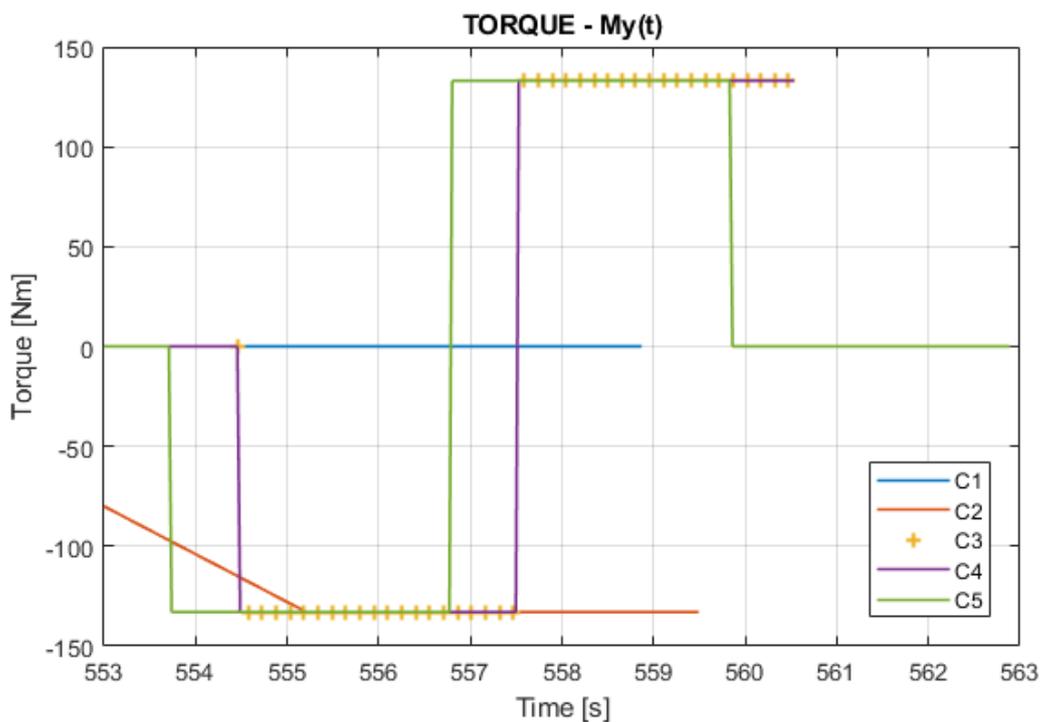


Figure 8. 78: Dettaglio nell'intorno del Landing Site della Toque in funzione del tempo

Si è deciso di non riportare alcun grafico relativo al moto di crossrange, in quanto esso è assente in tutte le simulazioni numeriche condotte, trascurando di fatti gli effetti di imbardata. Inoltre, non si è diagrammata la Thrust in funzione del tempo e/o dell'altitude in quanto il valore della spinta è stato settato al valore massimo in tutti i casi analizzati, in modo che l'evoluzione della traiettoria non determini delle quote negative, evitando così un prematuro hard-landing sul suolo lunare.

Capitolo 9

Conclusioni

La seguente tesi aveva il fine di ottimizzare dal punto di vista del consumo di propellente una traiettoria di atterraggio lunare, considerando anche la dinamica rotazionale dello spacecraft. In generale, i problemi di ottimizzazione prevedono la ricerca di una particolare legge di controllo ottimale che permetta di modificare delle variabili soggette a vincoli, al fine di massimizzare un certo Performance Index. Per cui, si è scelto di massimizzare la massa finale del lander lunare, di modo che a parità di massa iniziale, la massa di propellente consumata risulti minimizzata. Nell'evolversi delle simulazioni si è osservato come uno dei controlli, cioè la spinta, non poteva essere soggetta ad un *Bang-Bang Control*, in quanto, seppur l'algoritmo generava una soluzione di ottimo, l'altitude risultava minore di zero in alcune fasi della traiettoria. Di conseguenza, il lander lunare avrebbe impattato sul suolo lunare, determinando un fenomeno di Hard-Landing, rendendo vana l'analisi delle fasi successive. La scelta di imporre forzatamente la Thrust pari al valore massimo ha generato una proporzionalità diretta tra la massa di propellente consumata e la durata della traiettoria. In altri termini, all'aumentare del periodo di tempo in cui il main engine è in modalità on, aumenta coerentemente il consumo di propellente. Questa considerazione è valida in quanto si è trascurata la portata di propellente consumata dal sistema RCS per controllare la dinamica di assetto, perché infinitesimale rispetto alla portata di propellente consumata dal propulsore principale. La conseguenza è che il problema di ottimizzazione può essere interpretato anche in termini di "*Minimum-Time Path Optimization*", cioè finalizzato nel minimizzare la durata della traiettoria in modo da ridurre i consumi di propellente.

In opposizione, per quanto riguarda il problema della dinamica rotazionale, si è osservato come esso sia analogo al Fuller's Problem, ovvero nell'individuazione della curva di commutazione ottimale nello spazio delle fasi, che permetta, attraverso un numero di switches finito del controllo vincolato, di soddisfare l'output desiderato. L'implementazione del Fuller's Problem risulta necessaria in quanto la presenza di un arco singolare impone un pitch angle diverso da zero alla fine di tale fase, cioè è come se fosse esplicitamente assegnata una variabile di stato in un contorno interno della traiettoria. La presenza di una discontinuità libera nella adjoint variable λ_θ e la presenza di uno Switch nel Momento hanno permesso di convergere nel landing site sia l'assetto

desiderato che con velocità angolare nulla, soddisfacendo il Principio di Massimo di Pontryagin ed evitando una discontinuità nell'andamento dell'Hamiltoniano.

Inoltre, si è generata un'ultima analisi numerica che preveda un'ulteriore fase non ottimizzata, cioè un arco di Vertical Descent, in modo che l'assetto desiderato sia raggiunto ad una quota superiore a quella del landing site, per permettere il corretto dispiegamento del landing gear ed evitare l'impatto del lander lunare con la superficie lunare. Si è constatato che all'aumentare dei vincoli imposti alla traiettoria di atterraggio, il consumo di propellente peggiora, determinando delle durate più elevate. Nel *worst case*, rappresentato dalla simulazione C5 con discesa verticale, si è notato un aumento di 4.8062 kg di propellente consumato rispetto al caso formato da un unico arco singolare. L'aumento di massa di propellente rappresenta solamente lo 0.3 % della massa iniziale, verificando che, nonostante la presenza di un arco non ottimizzato e ulteriori vincoli imposti, la traiettoria con Vertical Descent non determina un consumo di propellente eccessivo, in quanto le prime fasi della traiettoria sono ottimizzate dall'algoritmo sviluppato.

Il valore della Torque, seppur non impatti direttamente sui consumi, influenza l'evoluzione della traiettoria modificando la direzione di spinta, la quale coincide con il pitch angle a causa del calettamento fisso del main engine sul lander lunare.

Nonostante l'algoritmo sviluppato preveda delle semplificazioni nel problema di landing, esso risulterebbe applicabile anche per futuri studi di landing con dinamica rotazionale su altri pianeti rocciosi come Marte, cioè modificando il valore del campo gravitazionale e introducendo le forze di pressione generate dall'interazione dello spacecraft con l'atmosfera, ovvero la portanza e la resistenza aerodinamica.

Per sviluppi futuri, potrebbe essere interessante introdurre una dinamica di assetto più complessa, prevedendo anche un angolo di imbardata e dunque, la presenza di un moto di crossrange che potrebbe essere utile in problemi di Hazard Detection and Avoidance. Nel caso in cui non si introduca l'ipotesi di simmetria cilindrica per lo spacecraft, bisognerebbe valutare anche l'angolo di rollio. In questi termini, la formulazione della dinamica di assetto mediante gli angoli di Eulero potrebbe generare delle soluzioni indeterminate, come nel caso di pitch angle pari a $\pi/2$ che genererebbe il fenomeno di gimbal lock, per cui si consiglia l'implementazione di una dinamica rotazionale mediante l'uso dei quaternioni.

In aggiunta, le caratteristiche del lander considerate risultano essere inadeguate a fornire i livelli di Torque richiesti nell'arco singolare; dunque, il Reaction Control System deve prevedere oltre che attitude thrusters anche la presenza di Reaction Wheels. In generale, si consiglia una disposizione tetraedrica o NASA 3+1, in modo da avere una ridondanza nel caso in cui avvenga una failure di una qualsiasi ruota di reazione.

Un ulteriore sviluppo del lavoro di tesi consisterebbe nel considerare la missione di tipo manned, cioè che preveda un equipaggio di bordo. Per cui si potrebbero inserire sia dei vincoli aggiuntivi sulla dinamica rotazionale, che un limite sulle accelerazioni che il lander lunare può subire in una particolare direzione in modo da tenere conto della fisiologia umana.

Inoltre, potrebbe essere interessante effettuare un'analisi di trade-off tra il tempo di deployment del landing gear e la quota di inizio della discesa verticale sfruttando i risultati elaborati nel paragrafo 8.9, in modo da poter ridurre ulteriormente il consumo di propellente, pur non ottimizzando tale fase attraverso la Teoria del Controllo Ottimale.

Si potrebbe anche considerare una legge di spinta polinomiale in funzione del tempo, in modo che vengano ottimizzati dall'algorithm i coefficienti del polinomio e quindi considerare un main engine a spinta variabile, come osservato nel Lunar Landing Vehicle della missione Chang'e-3.

Concludendo, si potrebbe complicare ulteriormente il modello sviluppato, generando dei risultati più accurati e aderenti alla realtà, rendendo più efficaci le stime di propellente consumato, in modo da ridurre i margini di sicurezza considerati nel mass budget della missione, limitando i costi del programma lunare.

Bibliografia

1. R. Jaumann e H. Hiesinger - Chapter 23: The Moon - Encyclopedia of the Solar System (Third Edition) - Elsevier, 2014.
2. Ian A. Crawford, Katherine H. Joy, Mahesh Anand - Chapter 25: Lunar Exploration - Encyclopedia of the Solar System (Third Edition) - Elsevier, 2014.
3. N. Drake e J. Howard - A brief history of moon exploration - National Geographic, 2020.
4. Paul D. Spurdis - The Robotic Exploration of the Moon – NASA
5. J. Carpenter, B. Foing, B. Houdou, G. Saccoccia, G. Thiele, Ian Crawford, Ralf Jaumann and Ulrich Koelher - Lunar Exploration Website - ESA
6. David R. Williams - Luna 1 - NASA Space Science Data Coordinated Archive, 2022
7. Brian Dunbar - The Apollo Missions – NASA, 2019
8. David R. Williams - The Apollo Lunar Roving Vehicle – NASA, 2016
9. Siddiqi, Asif A. Beyond Earth: A Chronicle of Deep Space Exploration, 1958-2016 – Lunar Prospector. NASA History Program Office, 2018
10. Smart -1 – ESA website
11. KAGUYA – JAXA website
12. David R. Williams – Future Chinese Lunar Missions – NASA, 2021
13. John Keller – Lunar Reconnaissance Orbiter – NASA website
14. Lori Glaze – GRAIL (Ebb and Flow) - NASA Science - Solar System Exploration, 2019
15. Herbert J. Kramer – Beresheet Lander Lunare – eoPortal Directory, 2019
16. Lori Glaze – Beresheet - NASA Science - Solar System Exploration, 2019
17. Chandrayaan – 2 – ISRO website
18. The Jerusalem Post - Israel, UAE to collaborate on Beresheet 2 moon mission, 2022
19. David R. Williams – Chandrayaan 3, 2022
20. Sun Zezhou, Zhang Tingxin, Zhang Xi, Jia Yang, Zhang Honghua, Chen Jianxin, Wu Xueying, Shen Zhenrong – Technical Design and Achievements of Chang'e-3 Probe – Science China Press, 2014
21. Chang'e-5 Spacecraft Overview – Spaceflight101
22. Lorenzo Casalino, Guido Colasurdo - Tentative Solutions for Indirect Optimization of Spacecraft Trajectories – Space Engineering, Springer – 2017
23. Lorenzo Casalino, Guido Colasurdo - Indirect Methods for the Optimization of Spacecraft Trajectories, Chapter 6 – Modeling and Optimization in Space Engineering, Springer – 2012
24. Joaquim R. R. A. Martins and Andrew Ning. Engineering Design Optimization, Cambridge University Press, 2021
25. Bruce A. Conway – Spacecraft Trajectory Optimization, Cambridge University Press, 2010
26. Arthur E. Bryson, Yu-Chi Ho – Applied Optimal Control – Taylor & Francis Group, 1975
27. D. F. Lawden – Optimal Trajectory For Space Navigation – Butterworths, 1963

28. Kirk D. E. – Optimal Control Theory: an Introduction – Prentice-Hall, Englewood Cliffs, 1970
29. MLA. Shishko, Robert – NASA Systems Engineering Handbook – Washington D.C., NASA, 1995
30. Daniel Liberzon – Calculus of Variations and Optimal Control Theory - Princeton University Press, 2011.
31. E. Trélat – Optimal Control and Applications to Aerospace – Journal of Optimization Theory and Applications, 2012
32. Anil V. Rao – A Survey of Numerical Methods for Optimal Control, 2010
33. John T. Betts – Survey of Numerical Methods for Trajectory Optimization – Journal of Guidance, Control, and Dynamics, 1998
34. McDanell J. P., Powers W. F. – Necessary Conditions for Joining Optimal Singular and Nonsingular Subarcs – SIAM Journal of Control, 1970
35. Lorenzo Casalino – Ottimizzazione Indiretta di Traiettorie Spaziali – Preview Version
36. Oskar Von Styk, R. Z. Bulirsch – Direct and Indirect Methods for Trajectory Optimization – Annals of Operations Research, 1992
37. John T. Betts – Practical Methods for Optimal Control and Estimation Using Nonlinear Programming – 2nd Edition – Society for Industrial and Applied Mathematics, 2009
38. Shampine, D. F., e Gordon, M. K. – Computer Solution of Ordinary Differential Equation: The Initial Value Problem – 1st Edition, W.H. Freeman, 1975
39. M.G. Gasparo, M. Macconi e A Pasquali – Risoluzione numerica di problemi ai limiti per equazioni differenziali ordinarie mediante problemi ai valori iniziali – Università di Firenze, 1979
40. Bate R. Roger, Muller D. Donald, White E. Jerry – Fundamentals of Astrodynamics – Dover Publications, 1971
41. Trigiante Mario – Appunti di Meccanica Classica e Termodinamica – Preview Version, 2016
42. [Moon Fact Sheet – NASA website](#)
43. Chunlai Li, Xiguo Zang, Zuo Wei, Yan Su – Overview of the Chang'e-4 Mission: Opening the Frontier of Scientific Exploration of the Lunar Far Side – Space Science Reviews, 2021
44. Bennet Floyd V. – Apollo Lunar Descent and Ascent Trajectories – NASA Technical Memorandum, 1970
45. Lorenzo Casalino – Space Propulsion – Slide del Corso di Propulsione Spaziale, Politecnico di Torino, 2021
46. Marcel J. Sidi – Spacecraft Dynamics and Control: A Practical Engineering Approach – Cambridge University Press, 1997
47. J. W. Conellisse, H. F. R. Schöyer, K. F. Wakker – Rocket Propulsion and Spaceflight Dynamics – Pitman, 1979
48. Battipede Manuela – Lezioni del Corso di Meccanica del Volo Spaziale, Politecnico di Torino, 2022

49. Capello Elisa – Slides del Corso di Dinamica e Controllo di veicoli spaziali, Politecnico di Torino, 2021
50. A. T. Fuller – Study of an Optimum Non-Linear Control System – Journal of Electronics and Control, 1962
51. Andrei A. Agrachev, Yuri L. Sanchkov – Control Theory from the Geometric Viewpoint – Springer, 2004
52. M. I. Zelikin, V. F. Borisov – Theory of Chattering Control with applications to Astronautics, Robotics, Economics and Engineering - Birkhäuser, 1994
53. Stuart Ross Taylor – Encyclopedia of the solar system – Chapter 12: The Moon – Elsevier Science & Technology, 2006
54. Mark A Wieczorek – Matthew Earl Pritchard – The Constitution and Structure of the Lunar Interior – Mineralogy and Geochemistry, 2006
55. [Nasa website – Is There an Atmosphere on the Moon? - 2013](#)
56. [SSERVI NASA website – Mystery of Moon’s Lost Magnetism Explained](#)
57. [Why The Moon? – NASA website](#)
58. Artemis PLAN – NASA’s Lunar Exploration Program Overview, September 2020 – NASA
59. NASA’s Space Launch System – Reference Guide – 2020, NASA
60. NASAfacts – Space Launch System – Interim Cryogenic Propulsion Stage (ICPS), 2021 – NASA
61. [Brian Dunbar - What is Artemis? – October 2021, NASA website](#)
62. Kerry Timmons, Kathleen Conderre, William D. Pratt, Timothy Cichan – The Orion Spacecraft as a Key Element in a Deep Space – IEEE, 2018
63. [Jimi Russell – Gateway’s Propulsion System Passes First Test – NASA website, 2021](#)
64. [Northtop Grumman – Habitation and Logistics Outpost \(HALO\) – northopfrumann.com, 2022](#)
65. [NASA’s Orion Spacecraft - NASA website](#)
66. [Meet NASA’s Orion Spacecraft – NASA website, 2021](#)
67. [Sharad Bhaskaran, Paul Niles – TO2-AB – Peregrine Mission 1 – NASA website, 2022](#)
68. [Astrobotic Lunar Landers – Payload User’s Guide, 2021](#)
69. [Susan Lederer – TO2-IM – Intuitive Machines 1 \(IM-1\) – NASA website, 2022](#)
70. [Intuitive Machines – Im-2 South Pole Mission Adds Secondary Rideshare Spaceflight Inc. – IM website, 2021](#)
71. [Heidi Haviland – TO CP-11 – Intuitive Machines 3 \(IM-3\) – NASA website, 2022](#)
72. [John Gruener – TO 19C – Masten Mission 1 – NASA website, 2022](#)
73. [Masten Space Systems – Xelene Lunar Lander – Masen Aero website, 2022](#)
74. [Maria E Banks – TO 19D – Blue Ghost Mission 1 – NASA website, 2022](#)
75. [Firefly Aerospace – Blue Ghost back to the Moon – Firefly website, 2022](#)
76. [Rick Chen, Brian Dunbar – Viper Mission Overview – NASA website, 2022](#)
77. [Anthony Colaprete – VIPER Project Science – NASA, 2020](#)
78. [Rich Chen, Brian Dunbar – Viper: The Rover and Its Onboard Toolkit – NASA website, 2022](#)

79. [Loura Hall – What is CAPSTONE? -NASA website, 2022](#)
80. [Erin Mahoney, Brain Dunbar – More About the Human Landing System Program -NASA website, 2020](#)
81. [Monica Witt, Jena Rowe, Katherine Brown – As Artemis Moves Forward, NASA Picks Space X to Land Next Americans on Moon – NASA website, 2021](#)
82. [SpaceX – Starship Users Guide – spacex.com, 2020](#)
83. [Kathryn Hambleton – Artemis I Map – NASA website, 2022](#)
84. [Kathryn Hambleton - NASA's First Flight With Crew Important Step on Long-term Return to the Moon, Missions to Mars – NASA website, 2021](#)
85. [Artemis III Science Definition Report: Human Landing System Program, NASA website 2022](#)
86. [Ken Bowersox – NASA Advisory Council: Human Exploration and Operations Overview, 2020](#)
87. [Kent Chojancki – Human Landing System – NASA website, 2021](#)
88. Shuang Li, Xiuqiang Jiang – Guidance Summary and Assessment of the Chang'e-3 Powered Descent and Landing – Journal of Spacecraft and Rockets, 2015
89. Ming Li, Zezhou Sun, He Zhang, Xueying Wu, Fei Li, Leyang Zou, Ke Wu – Overview of China Chang'e-3 Mission and Development of Follow-on Mission, Preprint – China Academy of Space Technology
90. Zhong-Sheng Wang, Zhanfeng Meng, Shan Gao, Jing Peng – Orbit Design Elements of Chang'e 5 Mission – Review Article – Space: Science & Technology, 2021
91. Ronald R Sostaric – Powered Descent Trajectory Guidance and Some Considerations for Human Lunar Landing – NASA Johnson Space Center – 30th Annual AAS Guidance and Control Conference, 2007
92. Florian Ion T. Petrescu, Antonio Apicella, Aversa Raffaella, Rely Victoria Petrescu, John Kaiser Calautit and Aniello Riccio – Something about the Mechanical Moment of Inertia – American Journal of Applied Sciences, 2016
93. Apollo Operation Handbook – Lunar Module LM-10 and Subsequent, 1970
94. Allan R. Klumpp – Apollo Lunar-Descent Guidance – Massachusetts Institute of Technology – 1971
95. Sandra Pieraccini, Stefano Berrone – Approssimazione di Dati e Funzioni – Corso di Metodi Numerici e Calcolo Scientifico – Politecnico di Torino, 2021
96. Sandra Pieraccini, Stefano Berrone – ODE – Corso di Metodi Numerici e Calcolo Scientifico – Politecnico di Torino, 2021
97. [Documentation Ode45 – MathWorks.com, 2022](#)
98. Micheal A. Tigges, Brian D. Bihari, John-Paul Stephens, Gordon A. Vos – Karl D. Bilimoria, Eric R. Mueller, Wyatt Johnson, Howard G. Law, Randall E. Bailey, Bruce Jackson – Orion Capsule Handling Qualities for Atmospheric Entry – American Institute of Aeronautics and Astronautics, 2011
99. Bruce A. Conway, John E. Prussing – Spacecraft Trajectory Optimization – Cambridge University Press, 2010