

POLITECNICO DI TORINO

Corso di Laurea Magistrale in Ingegneria Aerospaziale

Tesi di Laurea Magistrale

Sviluppo di un codice FEM basato su un elemento finito shell per la simulazione statica e modale di strutture laminare e sandwich



**Politecnico
di Torino**

Relatori

prof. Marco Gherlone

dott. Giuseppe Credo

dott. Manuele Corradi

Candidata

Daniela Spinazzola

Anno Accademico 2021-2022

Alla mia famiglia

Sommario

In questo progetto di tesi, realizzato in collaborazione con l'azienda Punch Torino, si è posto l'obiettivo di condurre uno studio teorico approfondito del problema pratico di modellazione per l'analisi statica e modale di strutture curve composite laminate e sandwich, caratterizzate da elevata eterogeneità trasversale.

Un compromesso ragionevole tra la complessità della formulazione agli elementi finiti e l'accuratezza nella valutazione delle risposte globali di tali strutture viene raggiunto con un approccio 2D Equivalent Single Layer, in alternativa all'uso di elementi finiti 3D, estremamente affidabili ma computazionalmente costosi. Il problema viene tradizionalmente affrontato con la *First-order Shear Deformation Theory* (FSDT), la quale risulta efficace e sufficientemente accurata per casi di piastre sottili con limitata anisotropia trasversale. Si valuta, dunque, la cosiddetta *Refined Zigzag Theory* che è capace di predire efficacemente la risposta statica e dinamica delle strutture in esame, con un impiego accettabile di risorse computazionali.

Il lavoro ha previsto la scrittura di un codice agli elementi finiti in linguaggio di programmazione Python: sono stati sviluppati un elemento quadrilatero a quattro nodi e uno triangolare a tre nodi, con nove gradi di libertà per nodo, per problemi statici e modali di strutture realizzate in materiale composito laminato o sandwich.

I problemi affrontati sono stati:

- Eliminazione del fenomeno di shear-locking;
- Introduzione della rotazione di coarse drilling;
- Inclusione delle rotazioni zigzag attorno agli assi nel piano per misurare la distorsione normale, tipica delle strutture multistrato;
- Introduzione della rotazione di fine drilling per modellare strutture curve o non complanari;
- Soppressione dei modi spuri.

I risultati ottenuti sono stati:

- Vettore degli spostamenti nodali;
- Frequenze naturali e corrispondenti forme modali;
- Distribuzione del campo degli spostamenti, del campo delle deformazioni e del campo delle tensioni lungo lo spessore del laminato nel centroide di uno o più elementi arbitrari.

La fase successiva all'implementazione dell'elemento finito è stata l'analisi di affidabilità, realizzata mediante prove numeriche, atte a validare l'elemento e a valutarne le performance, in termini di convergenza ed accuratezza.

I risultati sono stati confrontati con le soluzioni analitiche RZT, quando disponibili, e le soluzioni numeriche di modelli ad elementi finiti 3D e di modelli ad elementi finiti piani 2D basati sulla FSDT.

Lo studio sancisce l'affidabilità dell'elemento finito presentato e la superiorità delle sue performance rispetto a quelle degli elementi finiti disponibili nei software impiegati in ambito industriale. L'elemento shell proposto si rivela semplice, affidabile e robusto, rappresentando una valida alternativa agli strumenti attualmente in uso.

Indice

1	Refined Zigzag Theory.....	1
1.1	Evoluzione del problema di modellazione e simulazione di strutture composite laminate e sandwich.....	1
1.2	Zigzag e Refined Zigzag Theories	2
1.3	Cinematica e formulazione.....	3
1.4	Equazioni del moto, condizioni al contorno, relazioni costitutive	6
2	Formulazione di elementi finiti RZT.....	8
2.1	Fasi di sviluppo	8
2.2	Sistemi di riferimento locali e matrici di rotazione	9
2.3	Gradi di libertà di drilling.....	13
2.4	Shear-locking e scelta delle funzioni di forma	13
2.5	Deformazioni 3D dell'elemento finito trave RZT.....	14
2.6	Elemento finito trave RZT con tre nodi e 15 gradi di libertà	15
2.7	Elemento finito trave RZT con due nodi e 12 gradi di libertà.....	15
2.8	Elementi finiti piani triangolari con tre nodi e 24 gradi di libertà, quadrilateri con quattro nodi e 32 gradi di libertà	17
2.9	Matrice di massa, matrice di rigidità e vettore dei carichi nodali dell'elemento	19
2.10	Correzione del warping	21
2.11	Matrici di stabilizzazione	22
3	Validazione numerica e performance.....	25
3.1	Verifica.....	25
3.1.1	Introduzione del sistema di riferimento locale e matrice di rotazione	25
3.1.2	Introduzione dei gradi di libertà di drilling	32
3.2	Convergenza.....	35
3.3	Confronto	54
4	Conclusioni	73
Appendice A:	Coefficienti di rigidità e coefficienti di inerzia	74
Appendice B:	Funzioni di forma	77
5	Bibliografia	79

1 Refined Zigzag Theory

1.1 Evoluzione del problema di modellazione e simulazione di strutture composite laminate e sandwich

La diffusione dei materiali compositi avanzati e l'impiego delle configurazioni laminate derivano dalle esigenze sempre più spinte di diversi settori industriali: le eccellenti caratteristiche specifiche dei materiali compositi e il notevole incremento prestazionale, che il loro impiego comporta, suscitano grande interesse in ambito aeronautico, sia civile che militare, aerospaziale, biomeccanico, automobilistico, nelle strutture navali e civili. Gli innumerevoli vantaggi connessi all'uso di strutture composite laminate e pannelli sandwich sono diretta conseguenza delle proprietà di alta rigidità, elevata resistenza meccanica, leggerezza, libertà di design di cui godono. L'avvento di questi materiali innovativi ha determinato un significativo incremento nello sviluppo di teorie tridimensionali e bidimensionali per la modellazione di piastre e gusci, e nella ridefinizione di teorie monodimensionali per la modellazione di travi. Tali strutture richiedono sviluppi nell'ambito della progettazione e dell'analisi: sono necessari codici efficienti ed affidabili che consentano di simulare il comportamento di strutture primarie realizzate in materiale composito laminato o sandwich, in modo tale che sia possibile conoscerne lo stato tensionale e valutarne le condizioni di failure. Le problematiche di modellazione legate all'utilizzo di configurazioni composite laminate e pannelli sandwich riguardano la pronunciata deformabilità a taglio trasversale e l'anisotropia lungo lo spessore.

Le analisi numeriche con elementi finiti tridimensionali forniscono risultati affidabili ed accurati, ma richiedono ingenti risorse di calcolo. Il costo computazionale diventa proibitivo per strutture con centinaia di strati: infatti, gli elementi finiti solidi, dovendo avere una forma quanto più regolare possibile, richiederebbero lati di dimensioni almeno pari alla metà dello spessore dello strato più sottile.

Il problema dell'analisi di strutture multistrato viene tradizionalmente affrontato ricorrendo ad assunzioni cinematiche, che consentono di ottenere il campo degli spostamenti. Le deformazioni e le tensioni sono derivate consistentemente, le equazioni di governo sono ottenute dal Principio dei Lavori Virtuali. Si distinguono due approcci [1]: le teorie *Equivalent Single Layer* (ESL), che prevedono una distribuzione delle incognite assunta a priori per l'intero spessore; le teorie *Layer Wise* (LW), che considerano una distribuzione delle incognite definita strato per strato. Nel primo caso il numero di gradi di libertà è fisso, indipendentemente dal numero di strati e dalla laminazione; nel secondo, invece, il numero di gradi di libertà dipende dal numero di strati, comportando un'elevata accuratezza e un notevole costo computazionale, soprattutto nel caso di analisi non lineari.

Le teorie ESL più diffuse sono la *Classical Lamination Theory* (CLT) [2] e la *First-order Shear Deformation Theory* (FSDT) [3] [4], che rappresentano l'estensione della teoria di Kirchhoff e di quella di Mindlin per piastre composite multistrato, rispettivamente. Tali teorie rappresentano approcci semplici che consentono di ottenere predizioni accurate di risposte globali, come deformazioni, frequenze proprie e carichi di instabilità, per piastre sottili con limitata anisotropia trasversale. L'introduzione di opportuni coefficienti correttivi del taglio trasversale consente di estendere il campo di utilizzo di questi approcci a casi di strutture composite moderatamente spesse [5]. La teoria FSDT perde di accuratezza man mano che i rapporti tra le rigidità e quelli tra gli spessori dei vari strati aumentano [6].

Una soluzione che consente di considerare la deformabilità a taglio trasversale, tipica di strutture a guscio moderatamente spesse e spesse, consiste nell'uso di teorie di ordine superiore [7] – [15]. Tuttavia, tali teorie non garantiscono la continuità interlaminare delle tensioni trasversali normali e di taglio, ottenute dalle equazioni costitutive, e richiedono l'integrazione delle equazioni indefinite di equilibrio di Cauchy come procedura correttiva.

Le teorie LW, che godono di grande libertà trasversale, permettono di forzare la continuità interlaminare delle tensioni trasversali, comportando un incremento di complessità computazionale. Un compromesso ragionevole tra teorie ESL e LW è rappresentato dalle Zigzag Theories [16] – [24].

1.2 Zigzag e Refined Zigzag Theories

Le *Zigzag Theories* assumono una distribuzione degli spostamenti nel piano lungo lo spessore del laminato di tipo zigzag: il campo degli spostamenti nel piano è il risultato della sovrapposizione di un contributo lineare o cubico, che descrive lo spostamento del laminato per l'intero spessore, e un contributo di tipo lineare a tratti, che tiene conto della presenza di strati di differente rigidità.

Tali teorie prevedono un numero fisso di variabili cinematiche e la possibilità di imporre la continuità delle tensioni trasversali di taglio lungo lo spessore del laminato.

Le problematiche più significative che riguardano questa classe di teorie sono: le tensioni trasversali di taglio, calcolate dalle equazioni costitutive, si annullano erroneamente lungo i bordi incastrati; la variabile spostamento trasversale richiede funzioni interpolanti di classe C^1 , dal momento che la curvatura è espressa come la derivata spaziale seconda della deflessione.

Questi inconvenienti sono superati dalla *Refined Zigzag Theory* [25] – [32], la quale considera che le tensioni trasversali di taglio siano discontinue alle interfacce delle lamine, fornendo una predizione veritiera del loro valore medio lungo la lamina, e, adottando la cinematica della teoria di Timoshenko, fa in modo che tutte le variabili cinematiche siano approssimate da funzioni di classe C^0 .

Un approccio alternativo è basato sull'assunzione a priori della distribuzione attraverso lo spessore di spostamenti e tensioni trasversali e sull'uso del *Reissner's Mixed Variational Theorem* (RMMVT) [33]. In tal caso, le tensioni trasversali sono assunte continue.

Le teorie zigzag rappresentano un'estensione della FSDT; perciò, soffrono del problema dello shear-locking [34] [37], il quale si manifesta quando travi snelle e piastre sottili sono modellizzate con elementi finiti. Tra le varie strategie adottate per l'eliminazione dello shear-locking, si opta per il metodo di interpolazione anisoparametrica, il quale prevede di approssimare la deflessione con un polinomio di un ordine superiore rispetto al polinomio usato per le rotazioni, ottenendo nodi interni dove sono definiti solo i gradi di libertà dello spostamento trasversale. Questo metodo è stato applicato agli elementi finiti trave di Timoshenko ed esteso agli elementi finiti piastra triangolari e quadrilateri FSDT. La topologia degli elementi può essere semplificata con l'applicazione di opportune condizioni al contorno. Similmente, la strategia di interpolazione anisoparametrica è stata applicata agli elementi trave basati sulla RZT [34] [35] e RZT^(m) [36] e agli elementi piastra basati sulla RZT [37] e RZT^(m) [38].

Molte applicazioni ingegneristiche che impiegano strutture multistrato sottili e spesse richiedono la possibilità di modellare superfici curve e di utilizzare elementi finiti non complanari, i quali devono essere efficienti e capaci di ottenere soluzioni accurate. Gli elementi guscio curvi basati sul campo di spostamento di Naghdi [39], nonostante l'efficacia, introducono complessità aggiuntiva alla formulazione agli elementi finiti e incremento del costo computazionale; gli elementi guscio piani, invece, forniscono un buon compromesso tra performance, semplicità della formulazione e costo computazionale.

Ogni nodo di un generico elemento finito guscio ha sei gradi di libertà: tre spostamenti e tre rotazioni. Dal momento che la FSDT definisce solo le rotazione attorno ai due assi nel piano, non è possibile associare una rigidità alla rotazione attorno all'asse normale. Tale problema viene tipicamente risolto con una delle seguenti strategie: 1) aggiungendo una rigidità fittizia alla rotazione di drilling [40] – [42]; 2) incrementando il campo di deformazione con modi non conformi [43] [44]; 3) modificando il principio variazionale, introducendo un termine aggiuntivo relativo alla rotazione

attorno alla normale dell'elemento [45] – [48]; 4) introducendo la rotazione di drilling in corrispondenza delle funzioni di forma [49] – [55].

In particolare, nell'ambito della seguente trattazione, l'eliminazione del fenomeno di shear-locking e l'introduzione delle rotazioni di drilling sono ottenute per l'elemento piastra basato sulla RZT e sulla teoria di Tessler mediante l'utilizzo di opportune funzioni di forma.

Ogni lato dell'elemento piastra è considerato come una trave di Timoshenko nello spazio e le funzioni di forma sono derivate partendo da polinomi quadratici e lineari che interpolano gli spostamenti e le rotazioni, rispettivamente. Tale scelta permette di risolvere tre problemi: 1) in accordo con lo schema di interpolazione interdipendente, lo shear-locking è attenuato quando la deflessione è interpolata con un polinomio di un ordine superiore rispetto al polinomio usato per le rotazioni [56] – [58]; 2) il campo di spostamento quadratico migliora la risposta membranale e garantisce la compatibilità degli spostamenti tra elementi adiacenti non complanari [54]; 3) una rotazione di drilling è introdotta a livello delle funzioni di forma, ottenendo una formulazione simile a quella delle funzioni di forma di tipo Allman [49] [50]. L'imposizione di adeguate condizioni al contorno permette di ottenere elementi isoparametrici, sulla cui energia è possibile fare una quadratura gaussiana completa.

Questa monografia tratta la formulazione e lo sviluppo di elementi finiti triangolari e quadrilateri basati sulla Refined Zigzag Theory con gradi di libertà di drilling, adatta per analisi statiche lineari ed analisi modali di strutture composite multistrato e sandwich. Si ottiene una formulazione consistente mediante l'impiego della versione dinamica del principio dei lavori virtuali. Inoltre, si prevede l'uso dello schema di integrazione completa e della matrice di stabilizzazione per rimuovere i modi a zero energia, introdotti con il grado di libertà di coarse drilling.

Convergenza ed accuratezza degli elementi e sensibilità dei risultati alla distorsione della mesh sono valutate considerando la risposta statica e le vibrazioni libere di piastre multistrato. Seguono test numerici su superfici a doppia curvatura.

1.3 Cinematica e formulazione

Si considera una piastra laminata di spessore uniforme $2h$ in un sistema di riferimento cartesiano ortogonale (x_1, x_2, z) . La coppia $(x_1, x_2) \in A$ si riferisce alle coordinate nel piano medio della piastra, dove A è il luogo dei punti di intersezione della piastra e del piano a $z = 0$. Il termine $z \in [-h, h]$ rappresenta la coordinata lungo lo spessore del laminato. Si ipotizza che la piastra sia soggetta a dei carichi esterni: un carico di pressione normale $q(x_1, x_2)$ applicato al piano medio, un carico di trazione (T_1, T_2, T_z) definito su $S_\sigma \subset S$, dove S indica la superficie laterale complessiva. Su $S_u \subset S$ si impongono le condizioni al contorno sullo spostamento. Le porzioni di superficie laterale appena menzionate sono tali per cui $S_\sigma \cup S_u = S$ e $S_\sigma \cap S_u = \emptyset$. Infine, si suppone che le deformazioni siano piccole e le lamine siano perfettamente incollate e abbiano proprietà costitutive differenti l'una dall'altra.

Indicando con l'apice k il k -esimo strato del laminato, è possibile definire il campo degli spostamenti, $\mathbf{s} = [u_1^{(k)} \ u_2^{(k)} \ u_z^{(k)}]^T$, come segue [30]

$$\begin{aligned} u_1^{(k)}(x_1, x_2, z) &= u(x_1, x_2) + z\vartheta_1(x_1, x_2) + \phi_1^{(k)}(z)\psi_1(x_1, x_2) \\ u_2^{(k)}(x_1, x_2, z) &= v(x_1, x_2) + z\vartheta_2(x_1, x_2) + \phi_2^{(k)}(z)\psi_2(x_1, x_2) \\ u_z(x_1, x_2, z) &= w(x_1, x_2) \end{aligned} \tag{1.1}$$

Le variabili cinematiche introdotte nella RZT vengono scritte in forma vettoriale

$$\mathbf{g}_s = [u \ v \ w \ \vartheta_1 \ \vartheta_2 \ \psi_1 \ \psi_2]^T$$

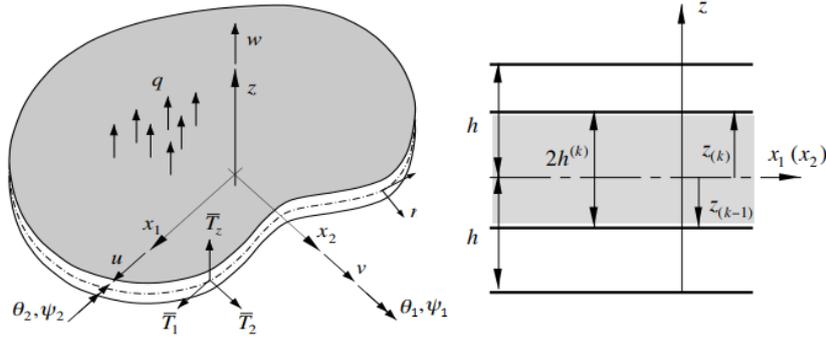


Figura 1.1 – Notazione per una generica piastra (sinistra), notazione per una generica laminazione (destra) [30].

Dove u, v sono le componenti uniformi dello spostamento lungo gli assi x_1 e x_2 , rispettivamente; w è la deflessione lungo l'asse z ; ϑ_1, ϑ_2 sono le rotazioni flessionali della normale trasversale attorno all'asse x_2 e in verso opposto all'asse x_1 , rispettivamente; ψ_1, ψ_2 sono le rotazioni zigzag attorno all'asse x_2 e in verso opposto all'asse x_1 , rispettivamente, e misurano l'entità dell'effetto zigzag. Tale effetto consiste in distorsioni trasversali, più o meno accentuate a seconda delle rigidità a taglio e degli spessori coinvolti nella definizione del laminato, ed è modellato mediante le funzioni zigzag, $\phi_1^{(k)}, \phi_2^{(k)}$.

Le espressioni delle deformazioni nel piano e fuori dal piano derivano dalle relazioni tra deformazioni e spostamenti

$$\begin{aligned}
 \varepsilon_{11}^{(k)} &= u_{,1} + z\vartheta_{1,1} + \phi_1^{(k)}\psi_{1,1} \\
 \varepsilon_{22}^{(k)} &= v_{,2} + z\vartheta_{2,2} + \phi_2^{(k)}\psi_{2,2} \\
 \gamma_{12}^{(k)} &= u_{,2} + v_{,1} + z(\vartheta_{1,2} + \vartheta_{2,1}) + \phi_1^{(k)}\psi_{1,2} + \phi_2^{(k)}\psi_{2,1} \\
 \gamma_{1z}^{(k)} &= w_{,1} + \vartheta_1 + \phi_{1,z}^{(k)}\psi_1 = \gamma_1 + \beta_1^{(k)}\psi_1 \\
 \gamma_{2z}^{(k)} &= w_{,2} + \vartheta_2 + \phi_{2,z}^{(k)}\psi_2 = \gamma_2 + \beta_2^{(k)}\psi_2
 \end{aligned} \tag{1.2}$$

Dove

$$\begin{aligned}
 \gamma_\alpha &\equiv w_{,\alpha} + \vartheta_\alpha \\
 \beta_\alpha^{(k)} &\equiv \phi_{\alpha,z}^{(k)}
 \end{aligned} \tag{1.3}$$

Le componenti di tensione corrispondenti, $\boldsymbol{\sigma} = [\sigma_{11}^{(k)} \ \sigma_{22}^{(k)} \ \tau_{12}^{(k)}]^T$ e $\boldsymbol{\tau} = [\tau_{1z}^{(k)} \ \tau_{2z}^{(k)}]^T$, sono ottenute dalle relazioni costitutive

$$\begin{aligned}
 \boldsymbol{\sigma} &= \mathbf{C}\boldsymbol{\varepsilon} \\
 \boldsymbol{\tau} &= \mathbf{Q}\boldsymbol{\gamma}
 \end{aligned} \tag{1.4}$$

Dove $\mathbf{C} = [C_{ij}^{(k)}]$ ($i, j = 1, 2, 6$) e $\mathbf{Q} = [Q_{\alpha\beta}^{(k)}]$ ($\alpha, \beta = 1, 2$) sono le matrici dei coefficienti elastici ridotti trasformati nel sistema di coordinate (x_1, x_2, z) , associate alla condizione di plane-stress ($\sigma_{zz} = 0$) per l'eliminazione del fenomeno di Poisson locking.

Le funzioni zigzag adottate sono lineari a tratti attraverso lo spessore del laminato e sono definite in funzione dei valori assunti alle interfacce dagli spostamenti, u_i e v_i . Per la k -esima lamina vale

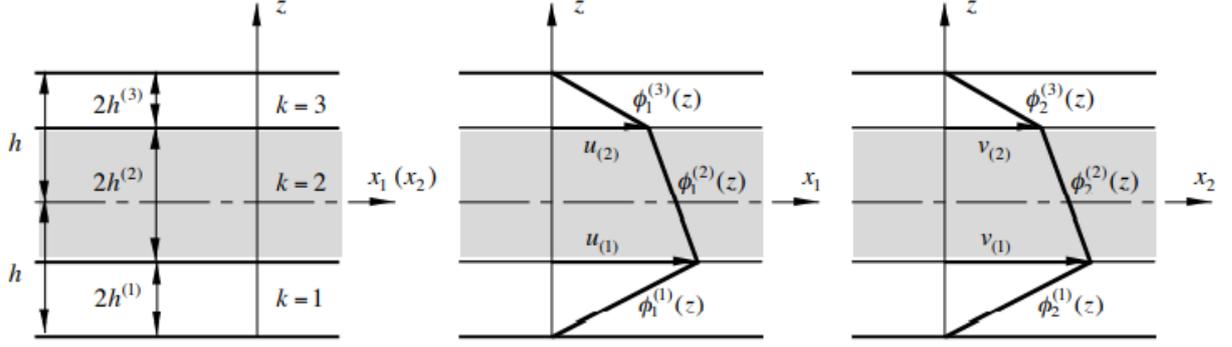


Figura 1.2 – Notazione per un laminato con tre strati e definizione delle funzioni zigzag, $\phi_1^{(k)}$ e $\phi_2^{(k)}$, in termini dei valori alle interfacce degli spostamenti, u_i e v_i [30].

$$\begin{aligned}\phi_1^{(k)} &\equiv \frac{1}{2}(1 - \xi^{(k)})u_{(k-1)} + \frac{1}{2}(1 + \xi^{(k)})u_{(k)} \\ \phi_2^{(k)} &\equiv \frac{1}{2}(1 - \xi^{(k)})v_{(k-1)} + \frac{1}{2}(1 + \xi^{(k)})v_{(k)}\end{aligned}\quad (1.5)$$

Dove

$$\xi^{(k)} = \left[\frac{z - z_{(k-1)}}{h^{(k)}} - 1 \right] \in [-1, 1] \quad (k = 1, \dots, N) \quad (1.6)$$

Con $z \in [z_{(k-1)}, z_{(k)}]$. Le funzioni zigzag valutate negli estremi di ciascun intervallo forniscono i valori degli spostamenti alle interfacce

$$\begin{aligned}u_{(0)} &= 0 & v_{(0)} &= 0 \\ u_{(k-1)} &= \phi_1^{(k)}(\xi^{(k)} = -1) & v_{(k-1)} &= \phi_2^{(k)}(\xi^{(k)} = -1) \\ u_{(k)} &= \phi_1^{(k)}(\xi^{(k)} = 1) & v_{(k)} &= \phi_2^{(k)}(\xi^{(k)} = 1) \\ u_{(N)} &= 0 & v_{(N)} &= 0\end{aligned}\quad (1.7)$$

Sostituendo le espressioni delle funzioni zigzag nella definizione di $\beta_\alpha^{(k)}$, si ottengono i valori delle funzioni zigzag all'interfaccia di ogni lamina in funzione di $\beta_\alpha^{(k)}$

$$\begin{aligned}u_{(k)} &= u_{(k-1)} + 2h_{(k)}\beta_1^{(k)} \\ v_{(k)} &= v_{(k-1)} + 2h_{(k)}\beta_2^{(k)}\end{aligned}\quad (1.8)$$

Le funzioni $\beta_\alpha^{(k)}$ vengono riscritte, mediante la definizione delle deformazioni trasversali di taglio in funzione delle misure delle deformazioni trasversali di taglio, $\eta_\alpha \equiv \gamma_\alpha - \psi_\alpha$ ($\alpha = 1, 2$)

$$\begin{Bmatrix} \gamma_{1z} \\ \gamma_{2z} \end{Bmatrix}^{(k)} = \begin{Bmatrix} \eta_1 \\ \eta_2 \end{Bmatrix} + \begin{bmatrix} 1 + \beta_1^{(k)} & 0 \\ 0 & 1 + \beta_2^{(k)} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \psi_1 \\ \psi_2 \end{Bmatrix}\quad (1.9)$$

Da cui

$$\begin{Bmatrix} \tau_{1z} \\ \tau_{2z} \end{Bmatrix}^{(k)} = \begin{bmatrix} Q_{11} & Q_{12} \\ Q_{21} & Q_{22} \end{bmatrix}^{(k)} \left(\begin{Bmatrix} \eta_1 \\ \eta_2 \end{Bmatrix} + \begin{bmatrix} 1 + \beta_1^{(k)} & 0 \\ 0 & 1 + \beta_2^{(k)} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \psi_1 \\ \psi_2 \end{Bmatrix} \right)$$

$$\begin{Bmatrix} \tau_{1z} \\ \tau_{2z} \end{Bmatrix}^{(k)} = \begin{bmatrix} Q_{11} & Q_{12} \\ Q_{21} & Q_{22} \end{bmatrix}^{(k)} \begin{Bmatrix} \eta_1 \\ \eta_2 \end{Bmatrix} + G_1 \left\{ \frac{1}{Q_{12}^{(k)}} / Q_{11}^{(k)} \right\} \psi_1 + G_2 \left\{ \frac{Q_{12}^{(k)}}{Q_{22}^{(k)}} / 1 \right\} \psi_2 \quad (1.10)$$

Dove

$$\begin{aligned} G_1 &= Q_{11}^{(k)} (1 + \beta_1^{(k)}) \\ G_2 &= Q_{22}^{(k)} (1 + \beta_2^{(k)}) \end{aligned} \quad (1.11)$$

I termini G_1, G_2 dipendono dalle funzioni zigzag e sono assunti costanti lungo lo spessore, imponendo un vincolo sulla distribuzione delle funzioni zigzag stesse.

Infine, si ricava

$$\beta_\alpha^{(k)} = \frac{G_\alpha}{Q_{\alpha\alpha}^{(k)}} - 1 \quad (\alpha = 1, 2) \quad (1.12)$$

Integrando l'equazione (1.12) sullo spessore del laminato, si determinano i coefficienti G_1, G_2

$$\begin{aligned} G_1 &= \left(\frac{1}{2h} \int_{-h}^h \frac{dz}{Q_{11}^{(k)}} \right)^{-1} = \left(\frac{1}{h} \sum_{k=1}^N \frac{h^{(k)}}{Q_{11}^{(k)}} \right)^{-1} \\ G_2 &= \left(\frac{1}{2h} \int_{-h}^h \frac{dz}{Q_{22}^{(k)}} \right)^{-1} = \left(\frac{1}{h} \sum_{k=1}^N \frac{h^{(k)}}{Q_{22}^{(k)}} \right)^{-1} \end{aligned} \quad (1.13)$$

Dunque, i termini G_1, G_2 rappresentano le medie pesate dei coefficienti di rigidità a taglio a livello lamina, $Q_{11}^{(k)}, Q_{22}^{(k)}$.

In generale, il rapporto $\frac{G_\alpha}{Q_{\alpha\alpha}^{(k)}}$ è costante a tratti lungo lo spessore del laminato e assume valore unitario per piastre omogenee.

Infine, si riscrivono le espressioni delle funzioni zigzag

$$\begin{aligned} \phi_\alpha^{(1)} &= (z + h) \left(\frac{G_\alpha}{Q_{\alpha\alpha}^{(1)}} - 1 \right) \quad (k = 1) \\ \phi_\alpha^{(k)} &= (z + h) \left(\frac{G_\alpha}{Q_{\alpha\alpha}^{(k)}} - 1 \right) + \sum_{i=2}^k 2h^{(i-1)} \left(\frac{G_\alpha}{Q_{\alpha\alpha}^{(i-1)}} - \frac{G_\alpha}{Q_{\alpha\alpha}^{(k)}} \right) \quad (k = 2, \dots, N) \end{aligned} \quad (1.14)$$

Con $z \in [z_{(k-1)}, z_{(k)}]$, $z_{(0)} = -h$, $z_{(k)} = z_{(k-1)} + 2h^{(k)}$, ($k = 1, \dots, N$; $\alpha = 1, 2$). Il contributo zigzag agli spostamenti nel piano viene regolato dalle ampiezze zigzag, ψ_1, ψ_2 .

1.4 Equazioni del moto, condizioni al contorno, relazioni costitutive

Le equazioni del moto e le condizioni al contorno sono ottenute mediante l'applicazione del principio di D'Alembert

$$\int_V (\delta \boldsymbol{\varepsilon}^T \boldsymbol{\sigma} + \delta \boldsymbol{\gamma}^T \boldsymbol{\tau}) dV = - \int_V \delta \mathbf{s}^T \rho \ddot{\mathbf{s}} dV + \delta W_e \quad (1.15)$$

Dove V è il volume della piastra, δ è l'operatore variazionale, ρ è la densità di massa, W_e è il lavoro compiuto dai carichi esterni. Sostituendo le equazioni (1.1) – (1.4) nell'equazione (1.15) e integrando sulla coordinata dello spessore, si ottiene

$$\int_A \delta \mathbf{g}_\varepsilon^T \mathbf{KZI} \mathbf{g}_\varepsilon dA = - \int_A \delta \mathbf{g}_s^T \mathbf{MZI} \ddot{\mathbf{g}}_s dA + \delta W_e \quad (1.16)$$

Dove \mathbf{g}_ε contiene le misure delle deformazioni della RZT, \mathbf{g}_s è il vettore delle variabili cinematiche della RZT, \mathbf{KZI} è la matrice dei coefficienti di rigidità, e \mathbf{MZI} è la matrice dei coefficienti di inerzia (per ulteriori dettagli fare riferimento all'Appendice A).

Introducendo le risultanti membranali e flessionali degli stress e le risultanti delle forze e dei momenti dovute alle trazioni nell'equazione (1.16) e integrando per parti, si ricavano le sette equazioni di equilibrio e le condizioni al contorno [6].

Le equazioni differenziali alle derivate parziali del secondo ordine così ottenute possono essere risolte esattamente o in modo approssimato, a seconda della laminazione e delle condizioni di carico e vincolo.

Si può procedere alla formulazione di un elemento finito variazionalmente consistente e computazionalmente efficiente, ricorrendo a funzioni di forma continue di classe C^0 per l'interpolazione delle variabili cinematiche, dal momento che il loro massimo ordine di derivazione rispetto alle variabili spaziali nell'equazione (1.16) è uno.

2 Formulazione di elementi finiti RZT

2.1 Fasi di sviluppo

L'azienda Punch Torino rende disponibili degli strumenti di pre-processing e di post-processing e visualizzazione per l'analisi agli elementi finiti, Hypermesh e Hyperview, rispettivamente. Questi software vengono utilizzati nel lavoro di tesi per la generazione del modello e per la visualizzazione dei risultati. Il codice per il calcolo numerico è scritto ed eseguito in ambiente di programmazione Spyder, in linguaggio Python. Il programma implementa elementi finiti TRIA3 e QUAD4 basati su RZT per analisi statiche lineari e modali di superfici curve, in generale, con la possibilità di impiegare mesh regolari ed irregolari. I possibili output previsti sono il campo degli spostamenti, la distribuzione del campo di deformazione e del campo di tensione lungo lo spessore del laminato in un generico punto, le frequenze proprie e le forme modali del sistema.

I passaggi fondamentali nello sviluppo del codice sono:

1. Generazione degli input
 - 1.1. Creazione/importazione di una geometria di esempio in Hypermesh
 - 1.2. Realizzazione di una mesh di elementi finiti TRIA3 o QUAD4 o un mix dei due
 - 1.3. Applicazione delle condizioni di carico e di vincolo
 - 1.4. Generazione di un file excel per la gestione di materiali e proprietà
 - 1.5. Creazione di un numero arbitrario di proprietà vuote in Hypermesh ed assegnazione di una di esse ad ogni elemento, in modo tale che il numero identificativo della proprietà corrisponda a quello di interesse nel file excel
 - 1.6. Esportazione del file con estensione .fem così generato in Hypermesh
2. Lettura del file .fem e del file excel ed estrapolazione dei dati di interesse relativi alla mesh e alle proprietà
 - 2.1. Apertura e lettura del file di output di Hypermesh
 - 2.2. Apertura e lettura del file excel relativo ai materiali e alle proprietà
 - 2.3. Organizzazione in vettori e matrici delle informazioni relative a nodi, elementi finiti, SPC, RBE2, carichi e proprietà
3. Elaborazione delle informazioni
 - 3.1. Creazione di un sistema di riferimento locale per ogni elemento finito
 - 3.2. Generazione della matrice di connettività per ogni elemento finito
 - 3.3. Creazione delle matrici multidimensionali dei coefficienti elastici ridotti trasformati
4. Implementazione del metodo degli elementi finiti
 - 4.1. Approssimazione delle variabili cinematiche all'interno del generico elemento finito mediante funzioni polinomiali, quadratiche per i gradi di libertà di spostamento e lineari per i gradi di libertà di rotazione
 - 4.2. Condensazione dei gradi di libertà nei nodi medi
 - 4.3. Definizione della matrice delle funzioni di forma valutate nelle posizioni degli n nodi di vertice dell'elemento finito nel sistema di coordinate naturali dell'elemento stesso
 - 4.4. Definizione della matrice delle derivate delle funzioni di forma valutate nelle posizioni degli n nodi di vertice dell'elemento finito nel sistema di riferimento locale dell'elemento stesso, passando per la trasformazione dal piano naturale al piano fisico attraverso l'inversa della matrice Jacobiana
 - 4.5. Riscrittura della versione dinamica del principio dei lavori virtuali del modello discreto
 - 4.6. Creazione delle matrici dei coefficienti di rigidità e dei coefficienti di inerzia a livello del laminato

- 4.7. Calcolo delle matrici di rigidità e di massa dell'elemento nel sistema di riferimento locale, date dalla somma dei contributi membranale, di flessione, di accoppiamento, di taglio, mediante quadratura numerica di Gauss completa
- 4.8. Somma di due matrici di stabilizzazione alla matrice di rigidità: la prima è utilizzata per considerare le rotazioni di fine drilling; la seconda è un termine di penalità, che viene introdotto per eliminare i modi spuri, dovuti alle rotazioni di coarse drilling
- 4.9. Applicazione del metodo Rigid Link Correction per la trasformazione della matrice di rigidità del solo elemento CQUAD4, in modo tale da poter considerare geometrie svergolate, cioè elementi che hanno nodi non appartenenti allo stesso piano
- 4.10. Trasformazione dal sistema di riferimento locale dell'elemento al sistema di riferimento globale della struttura
- 4.11. Assemblaggio delle matrici di rigidità e di massa del sistema
- 4.12. Calcolo del vettore dei carichi nodali equivalenti (il codice prevede la possibilità di applicare forze e momenti concentrati, pressioni uniformemente distribuite)
- 4.13. Risoluzione di un sistema algebrico di equazioni lineari per ricavare il valore della funzione incognita nei nodi degli elementi
- 4.14. Risoluzione di un sistema lineare omogeneo per il calcolo degli autovalori e degli autovettori del sistema
5. Post-processing
 - 5.1. Calcolo della distribuzione del campo degli spostamenti, del campo delle deformazioni e del campo delle tensioni lungo lo spessore del laminato
 - 5.2. Generazione di file di testo per la visualizzazione di spostamenti e forme modali

In questo capitolo vengono descritti gli aspetti più critici del processo di sviluppo del codice e vengono evidenziate le soluzioni adottate alle principali problematiche riscontrate.

2.2 Sistemi di riferimento locali e matrici di rotazione

È noto che la discretizzazione di un dominio continuo in elementi finiti, collegati in corrispondenza dei nodi, riduce il numero di incognite del problema da infinito a finito. Su ciascun elemento, i valori che le variabili di campo assumono nei nodi, ne definiscono univocamente gli andamenti all'interno dell'elemento stesso. In altri termini, una volta suddiviso il dominio di integrazione in intervalli, si procede ad approssimare la funzione incognita con delle funzioni ad andamento noto, scegliendo come incognite del problema trattati i soli valori ai nodi. Dalla soluzione delle equazioni algebriche si ottengono i valori nodali del campo approssimato; quelli interni agli intervalli vengono valutati in base alle funzioni di approssimazione utilizzate. Il metodo ha il grande pregio di ricondurre un problema complesso ad un numero finito di problemi semplici, tali per cui la risoluzione del singolo problema semplice permette la risoluzione di tutti gli altri, grazie alla possibilità di automatizzare la procedura di calcolo.

Si rende necessaria, dunque, l'introduzione di un sistema di riferimento locale per ogni elemento, valutando la possibilità di avere elementi ruotati rispetto al sistema di riferimento globale. La definizione del sistema di riferimento locale per l'elemento triangolare e per l'elemento quadrilatero adotta la convenzione utilizzata nella maggior parte dei software commerciali e riportata in Figura 2.1.

Indicando con $(x_{ei}, y_{ei}, z_{ei})_G$ il vettore posizione del nodo i -esimo dell'elemento e -esimo del modello discreto nel sistema di riferimento globale, si determinano i versori del sistema di riferimento locale, $(\mathbf{x}_e, \mathbf{y}_e, \mathbf{z}_e)$, e il vettore posizione del nodo i -esimo dell'elemento e -esimo nel sistema di riferimento locale, $(x_{ei}, y_{ei}, z_{ei})_L$, per entrambi gli elementi considerati.

Per l'elemento triangolare vale

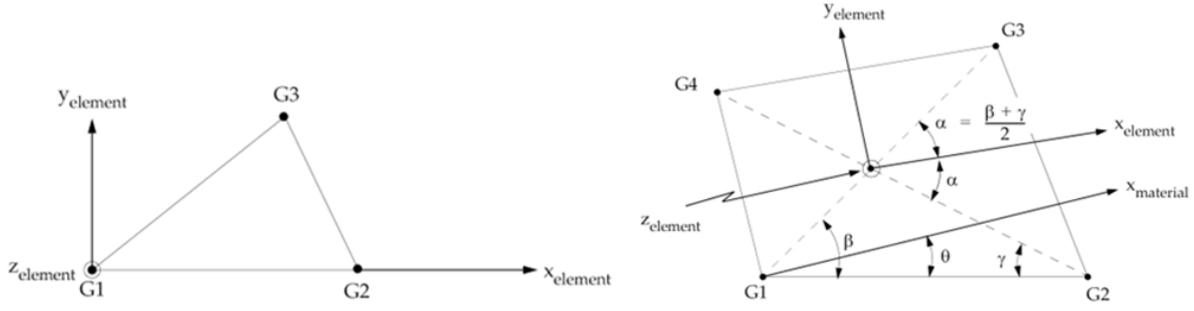


Figura 2.1 – Sistemi di riferimento locali per l'elemento triangolare (sinistra) e per l'elemento quadrilatero (destra).

$$(x_{e0}, y_{e0}, z_{e0})_G = (x_{e1}, y_{e1}, z_{e1})_G$$

$$\mathbf{x}_e = \frac{(x_{e2}, y_{e2}, z_{e2})_G - (x_{e1}, y_{e1}, z_{e1})_G}{\|(x_{e2}, y_{e2}, z_{e2})_G - (x_{e1}, y_{e1}, z_{e1})_G\|}$$

$$\mathbf{v}_{13} = \frac{(x_{e3}, y_{e3}, z_{e3})_G - (x_{e1}, y_{e1}, z_{e1})_G}{\|(x_{e3}, y_{e3}, z_{e3})_G - (x_{e1}, y_{e1}, z_{e1})_G\|}$$

$$\widehat{G_2 G_1 G_3} = \beta = \arccos(\mathbf{x}_e \cdot \mathbf{v}_{13})$$

$$\mathbf{z}_e = \frac{\mathbf{x}_e \times \mathbf{v}_{13}}{\sin(\beta)}$$

$$\mathbf{y}_e = -\mathbf{x}_e \times \mathbf{z}_e$$

$$\mathbf{V}_{01} = ((x_{e1}, y_{e1}, z_{e1})_G - (x_{e0}, y_{e0}, z_{e0})_G)^T$$

$$\mathbf{V}_{02} = ((x_{e2}, y_{e2}, z_{e2})_G - (x_{e0}, y_{e0}, z_{e0})_G)^T$$

$$\mathbf{V}_{03} = ((x_{e3}, y_{e3}, z_{e3})_G - (x_{e0}, y_{e0}, z_{e0})_G)^T$$

$$[\Lambda'] = \begin{bmatrix} \mathbf{x}_e \\ \mathbf{y}_e \\ \mathbf{z}_e \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{x}_e(1) & \mathbf{x}_e(2) & \mathbf{x}_e(3) \\ \mathbf{y}_e(1) & \mathbf{y}_e(2) & \mathbf{y}_e(3) \\ \mathbf{z}_e(1) & \mathbf{z}_e(2) & \mathbf{z}_e(3) \end{bmatrix}$$

$$(x_{ei}, y_{ei}, z_{ei})_L^T = [\Lambda'] \mathbf{V}_{0i}$$

Per l'elemento quadrilatero vale

$$(x_{e0}, y_{e0}, z_{e0})_G = \left(\frac{x_{e1} + x_{e2} + x_{e3} + x_{e4}}{4}, \frac{y_{e1} + y_{e2} + y_{e3} + y_{e4}}{4}, \frac{z_{e1} + z_{e2} + z_{e3} + z_{e4}}{4} \right)_G$$

$$\mathbf{v}_{12} = \frac{(x_{e2}, y_{e2}, z_{e2})_G - (x_{e1}, y_{e1}, z_{e1})_G}{\|(x_{e2}, y_{e2}, z_{e2})_G - (x_{e1}, y_{e1}, z_{e1})_G\|}$$

$$\mathbf{v}_{13} = \frac{(x_{e3}, y_{e3}, z_{e3})_G - (x_{e1}, y_{e1}, z_{e1})_G}{\|(x_{e3}, y_{e3}, z_{e3})_G - (x_{e1}, y_{e1}, z_{e1})_G\|}$$

$$\beta = \arccos(\mathbf{v}_{12} \cdot \mathbf{v}_{13})$$

$$\mathbf{v}_{24} = \frac{(x_{e4}, y_{e4}, z_{e4})_G - (x_{e2}, y_{e2}, z_{e2})_G}{\|(x_{e4}, y_{e4}, z_{e4})_G - (x_{e2}, y_{e2}, z_{e2})_G\|}$$

$$\mathbf{v}_{21} = -\mathbf{v}_{12}$$

$$\gamma = \arccos(\mathbf{v}_{21} \cdot \mathbf{v}_{24})$$

$$\alpha = \frac{\beta + \gamma}{2}$$

$$\mathbf{v}_{02} = \frac{(x_{e2}, y_{e2}, z_{e2})_G - (x_{e0}, y_{e0}, z_{e0})_G}{\|(x_{e2}, y_{e2}, z_{e2})_G - (x_{e0}, y_{e0}, z_{e0})_G\|}$$

$$\mathbf{v}_{03} = \frac{(x_{e3}, y_{e3}, z_{e3})_G - (x_{e0}, y_{e0}, z_{e0})_G}{\|(x_{e3}, y_{e3}, z_{e3})_G - (x_{e0}, y_{e0}, z_{e0})_G\|}$$

$$\mathbf{z}_e = \frac{\mathbf{v}_{02} \times \mathbf{v}_{03}}{\|\mathbf{v}_{02} \times \mathbf{v}_{03}\|}$$

$$[R] = \begin{bmatrix} \mathbf{z}_e(1)^2 + (1 - \mathbf{z}_e(1)^2)\cos(\alpha) & (1 - \cos(\alpha))\mathbf{z}_e(1)\mathbf{z}_e(2) - \sin(\alpha)\mathbf{z}_e(3) & (1 - \cos(\alpha))\mathbf{z}_e(1)\mathbf{z}_e(3) + \sin(\alpha)\mathbf{z}_e(2) \\ (1 - \cos(\alpha))\mathbf{z}_e(2)\mathbf{z}_e(1) + \sin(\alpha)\mathbf{z}_e(3) & \mathbf{z}_e(2)^2 + (1 - \mathbf{z}_e(2)^2)\cos(\alpha) & (1 - \cos(\alpha))\mathbf{z}_e(2)\mathbf{z}_e(3) - \sin(\alpha)\mathbf{z}_e(1) \\ (1 - \cos(\alpha))\mathbf{z}_e(3)\mathbf{z}_e(1) - \sin(\alpha)\mathbf{z}_e(2) & (1 - \cos(\alpha))\mathbf{z}_e(3)\mathbf{z}_e(2) + \sin(\alpha)\mathbf{z}_e(1) & \mathbf{z}_e(3)^2 + (1 - \mathbf{z}_e(3)^2)\cos(\alpha) \end{bmatrix}$$

$$\mathbf{x}_e = [R]\mathbf{v}_{02}^T$$

$$\mathbf{y}_e = -\mathbf{x}_e \times \mathbf{z}_e$$

$$\mathbf{V}_{01} = ((x_{e1}, y_{e1}, z_{e1})_G - (x_{e0}, y_{e0}, z_{e0})_G)^T$$

$$\mathbf{V}_{02} = ((x_{e2}, y_{e2}, z_{e2})_G - (x_{e0}, y_{e0}, z_{e0})_G)^T$$

$$\mathbf{V}_{03} = ((x_{e3}, y_{e3}, z_{e3})_G - (x_{e0}, y_{e0}, z_{e0})_G)^T$$

$$\mathbf{V}_{04} = ((x_{e4}, y_{e4}, z_{e4})_G - (x_{e0}, y_{e0}, z_{e0})_G)^T$$

$$[\Lambda'] = \begin{bmatrix} \mathbf{x}_e \\ \mathbf{y}_e \\ \mathbf{z}_e \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{x}_e(1) & \mathbf{x}_e(2) & \mathbf{x}_e(3) \\ \mathbf{y}_e(1) & \mathbf{y}_e(2) & \mathbf{y}_e(3) \\ \mathbf{z}_e(1) & \mathbf{z}_e(2) & \mathbf{z}_e(3) \end{bmatrix}$$

$$(x_{ei}, y_{ei}, z_{ei})_L^T = [\Lambda']\mathbf{V}_{0i}$$

A questo punto, è necessario introdurre le matrici di rotazione degli elementi. I gradi di libertà nel sistema di riferimento locale e quelli nel sistema di riferimento globale sono riportati in Figura 2.2.

La matrice di rotazione viene definita a partire dai coseni direttori, i quali corrispondono alle componenti nel sistema di riferimento globale dei vettori del sistema di riferimento locale. Si osservi che le variabili cinematiche compaiono nel vettore dei gradi di libertà nell'ordine u , v , w , ϑ_1 , ϑ_2 , ψ_1 , ψ_2 . In particolare, in quarta, quinta, sesta e settima posizione ci sono, rispettivamente

- le rotazioni flessionali attorno al secondo asse e in verso opposto al primo asse, le rotazioni zigzag attorno al secondo asse e in verso opposto al primo asse, per il sistema di riferimento locale;
- le rotazioni flessionali attorno al primo asse e al secondo asse, le rotazioni zigzag attorno al primo asse e al secondo asse, per il sistema di riferimento globale.

Le matrici di rotazione sono diagonali a blocchi e valutano per ogni nodo le rotazioni dei gradi di libertà. Per i gradi di libertà di spostamento vale

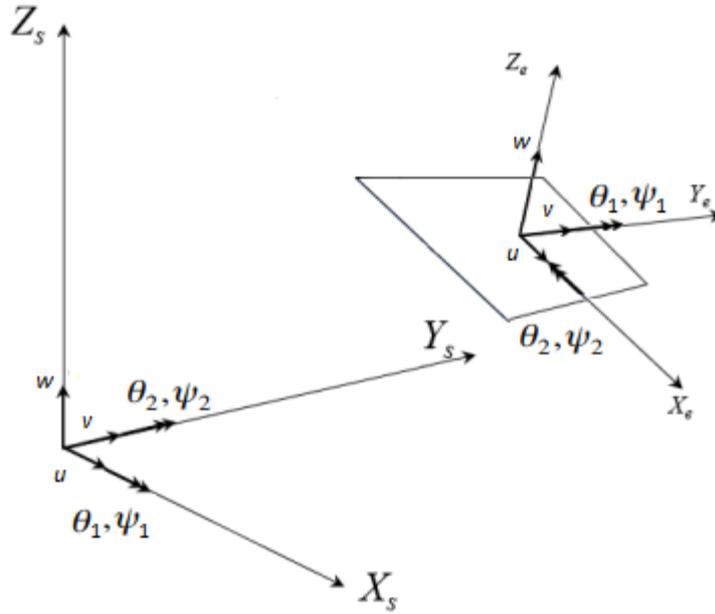


Figura 2.2 – Convenzioni di segno dei gradi di libertà nel sistema di riferimento locale e nel sistema di riferimento globale

$$\Lambda' = \begin{bmatrix} \mathbf{x}_e \\ \mathbf{y}_e \\ \mathbf{z}_e \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{x}_e(1) & \mathbf{x}_e(2) & \mathbf{x}_e(3) \\ \mathbf{y}_e(1) & \mathbf{y}_e(2) & \mathbf{y}_e(3) \\ \mathbf{z}_e(1) & \mathbf{z}_e(2) & \mathbf{z}_e(3) \end{bmatrix} \quad (2.1)$$

Mentre, per i gradi di libertà di rotazione si ha

$$\Lambda'' = \begin{bmatrix} \mathbf{y}_e \\ -\mathbf{x}_e \\ \mathbf{z}_e \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{y}_e(1) & \mathbf{y}_e(2) & \mathbf{y}_e(3) \\ -\mathbf{x}_e(1) & -\mathbf{x}_e(2) & -\mathbf{x}_e(3) \\ \mathbf{z}_e(1) & \mathbf{z}_e(2) & \mathbf{z}_e(3) \end{bmatrix} \quad (2.2)$$

Per ogni nodo risulta

$$\Lambda_i = \begin{bmatrix} \Lambda' & [0] & [0] \\ [0] & \Lambda'' & [0] \\ [0] & [0] & \Lambda'' \end{bmatrix} \quad (2.3)$$

Quindi, per gli elementi TRIA3 e QUAD4 si ottiene, rispettivamente

$$\Lambda_{TRIA3} = \begin{bmatrix} \Lambda_i & [0] & [0] \\ [0] & \Lambda_i & [0] \\ [0] & [0] & \Lambda_i \end{bmatrix}$$

$$\Lambda_{QUAD4} = \begin{bmatrix} \Lambda_i & [0] & [0] & [0] \\ [0] & \Lambda_i & [0] & [0] \\ [0] & [0] & \Lambda_i & [0] \\ [0] & [0] & [0] & \Lambda_i \end{bmatrix} \quad (2.4)$$

Dove nella (2.4) bisogna sostituire la (2.3). Infine, si osservi che la trasformazione viene operata tenendo conto dei gradi di libertà di drilling.

2.3 Gradi di libertà di drilling

L'introduzione dei gradi di libertà di drilling si rende necessaria nella modellazione di superfici curve: l'utilizzo di elementi finiti non complanari comporta la presenza di una rotazione in un punto comune a due elementi, la cui corretta valutazione può essere effettuata solamente introducendo la rotazione attorno all'asse normale all'elemento. Infatti, le rotazioni di bending (ϑ_1, ϑ_2) e le rotazioni zigzag (ψ_1, ψ_2) di un elemento, in un nodo comune a due elementi non complanari, determinano, rispettivamente, una rotazione ϑ_z e una rotazione ψ_z per l'altro elemento (Figura 2.3).

L'introduzione di due ulteriori gradi di libertà, tali per cui in ogni nodo dell'elemento risulti $\tilde{\mathbf{g}}_s = [u \ v \ w \ \vartheta_1 \ \vartheta_2 \ \vartheta_z \ \psi_1 \ \psi_2 \ \psi_z]^T$, può essere operata seguendo differenti strategie: 1) aggiungere una rigidità fittizia alla rotazione di drilling; 2) modificare il campo delle deformazioni con modi non conformi; 3) modificare il principio variazionale aggiungendo i termini legati alle rotazioni di drilling; 4) introdurre i gradi di libertà di drilling a livello delle funzioni di forma.

La rotazione di coarse drilling viene introdotta con le metodologie 3) e 4); invece, la rotazione di fine drilling secondo la 1).

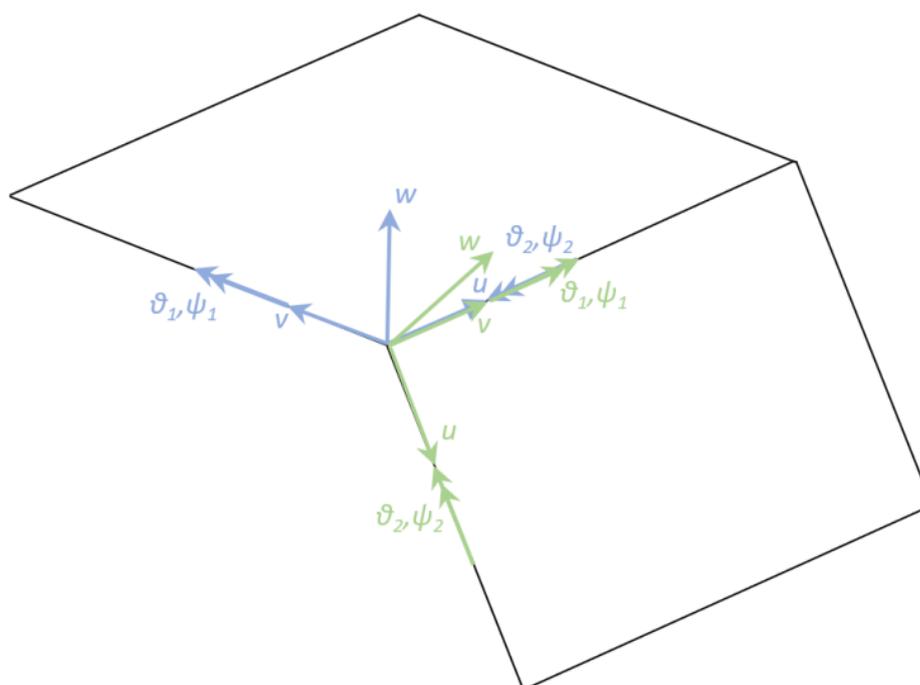


Figura 2.3 – Gradi di libertà di elementi finiti non complanari prima dell'introduzione dei gradi di libertà di drilling.

2.4 Shear-locking e scelta delle funzioni di forma

Nonostante nello sviluppo di un elemento finito sia conveniente impiegare funzioni di forma di classe C^0 per motivi di semplicità ed efficienza, l'utilizzo di elementi finiti basati su funzioni di forma isoparametriche lineari per discretizzare travi snelle e piastre sottili genera un comportamento eccessivamente rigido rispetto a quello reale. Questo fenomeno, noto comunemente come shear-locking, può essere attenuato seguendo diversi approcci. L'adozione di una tecnica di integrazione ridotta dell'energia di deformazione di taglio trasversale riduce il fenomeno di shear-locking; ma, quando viene applicata ad elementi finiti piastra, origina modi di deformazione non fisici ad energia nulla, la cui eliminazione richiedere specifiche tecniche. La strategia adottata in questo lavoro di tesi

per la risoluzione del problema dello shear-locking è l'interpolazione anisoparametrica [62]. Questo metodo prevede che lo spostamento trasversale uniforme venga approssimato con un polinomio completo di un grado superiore rispetto a quelli usati per i gradi di libertà rotazionali. Si sceglie di utilizzare funzioni di forma quadratiche anche per gli spostamenti nel piano, in modo tale da introdurre il grado di libertà di coarse drilling ed ottenere un campo di spostamenti compatibili alle interfacce tra elementi adiacenti. Per ridurre il numero di incognite nodali introdotte dall'approssimazione quadratica, si valutano due strategie di condensazione, che forzano delle condizioni di vincolo sui lati dell'elemento finito, i quali sono assimilati ad elementi trave di Timoshenko.

Nei prossimi paragrafi si introduce la formulazione dell'elemento finito trave basato sulla RZT, che rappresenta il punto di partenza per lo sviluppo di elementi finiti triangolari e quadrilateri RZT.

2.5 Deformazioni 3D dell'elemento finito trave RZT

Sia (r, s, n) il sistema di riferimento ortonormale locale costruito su una trave composita laminata di lunghezza L , tale che l'asse r è perpendicolare alla sezione trasversale ed è diretto dal nodo 1 al nodo 2, l'asse n è definito lungo la direzione dello spessore, e l'asse s completa la terna destrorsa.

Il campo degli spostamenti viene espresso nel sistema di riferimento locale in funzione di sei variabili cinematiche

$$\begin{aligned} u_r^{(k)}(r, s, n) &= u_r(r) + n\vartheta_s(r) - s\vartheta_n(r) + \phi^{(k)}(n)\psi_s(r) \\ u_s^{(k)}(r, s, n) &= u_s(r) \\ u_n(x_1, x_2, z) &= u_n(r) \end{aligned} \quad (2.5)$$

Dove u_r, u_s, u_n sono gli spostamenti uniformi lungo i tre assi; ϑ_s, ψ_s sono la rotazione di flessione e la rotazione zigzag positive attorno all'asse s ; ϑ_n è la rotazione di flessione positiva attorno all'asse n ; $\phi^{(k)}$ è la funzione zigzag del k -esimo strato.

La deformazione di taglio nel piano, la deformazione di taglio trasversale e la misura RZT della deformazione di taglio trasversale risultano, rispettivamente

$$\gamma_{rs} = \frac{\partial u_r^{(k)}}{\partial s} + \frac{\partial u_s^{(k)}}{\partial r} = -\vartheta_n + u_{s,r} \quad (2.6)$$

$$\gamma_{rn} = \vartheta_s + u_{n,r} \quad (2.7)$$

$$\eta_{rn} = \vartheta_s + u_{n,r} - \psi_s \quad (2.8)$$

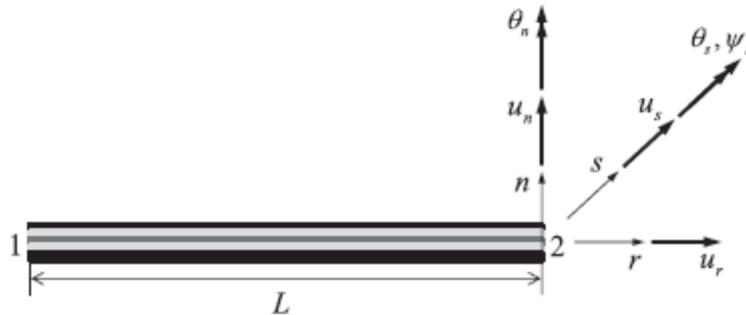


Figura 2.4 – Notazione relativa alle variabili cinematiche dell'elemento finito trave RZT [62].

2.6 Elemento finito trave RZT con tre nodi e 15 gradi di libertà

In accordo con l'approccio di interpolazione anisoparametrica, gli spostamenti uniformi sono approssimati con polinomi di secondo grado; le rotazioni di flessione e la rotazione zigzag impiegano funzioni di forma lineari

$$\begin{aligned} u_r(r) &= \sum_l u_{r_l} P_l(r) \\ u_s(r) &= \sum_l u_{s_l} P_l(r) \\ u_n(r) &= \sum_l u_{n_l} P_l(r) \end{aligned} \quad (2.9)$$

$$\begin{aligned} \vartheta_s(r) &= \sum_i \vartheta_{s_i} N_i(r) \\ \vartheta_n(r) &= \sum_i \vartheta_{n_i} N_i(r) \\ \psi_s(r) &= \sum_i \psi_{s_i} N_i(r) \end{aligned} \quad (2.10)$$

Con $i = 1, 2$ e $l = 1, m, 2$ e con polinomi di interpolazione

$$\begin{aligned} N_i &= [N_1 \quad N_2] = \left[\frac{1}{2}(1 - \xi) \quad \frac{1}{2}(1 + \xi) \right] \\ P_l &= [P_1 \quad P_m \quad P_2] = \left[\frac{1}{2}(1 - \xi)\xi \quad (1 - \xi^2) \quad \frac{1}{2}(1 + \xi)\xi \right] \end{aligned} \quad (2.11)$$

Dove $\xi = \frac{2L}{r} \epsilon [-1, 1]$ è la coordinata longitudinale adimensionale.

L'elemento finito trave non vincolato ha tre gradi di libertà nodali per ogni spostamento e due gradi di libertà nodali per ogni rotazione (Figura 2.5).

2.7 Elemento finito trave RZT con due nodi e 12 gradi di libertà

La condensazione dei gradi di libertà di spostamento nel nodo medio viene operata mediante l'imposizione di tre condizioni di vincolo per lato: lo spostamento assiale, u_r , viene posto lineare rispetto alla direzione r [49] – [50] – [53] – [54]; nel piano (r, s) la deformazione di taglio viene assunta costante lungo il lato; e nel piano (r, n) , per l'eliminazione del grado di libertà di spostamento trasversale nel nodo medio, si considerano le due condizioni alternative deformazione di taglio e misura RZT della deformazione di taglio costanti lungo il lato.

Quindi, si prevede la possibilità di scegliere uno dei due set di condizioni di vincolo

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2 u_r}{\partial r^2} &= 0 \\ \frac{\partial \gamma_{rs}}{\partial r} &= 0 \\ \frac{\partial \gamma_{rn}}{\partial r} &= 0 \end{aligned} \quad (2.12)$$

$$\begin{aligned}\frac{\partial^2 u_r}{\partial r^2} &= 0 \\ \frac{\partial \gamma_{rs}}{\partial r} &= 0 \\ \frac{\partial \eta_{rn}}{\partial r} &= 0\end{aligned}$$

(2.13)

È stato dimostrato [34] – [37] che il set di condizioni (2.13) produce risultati più accurati per laminati spessi e sottili, a parità delle altre condizioni.

Introducendo le approssimazioni delle variabili cinematiche, (2.9) e (2.10), nelle equazioni (2.6) – (2.8) e poi usando le equazioni (1.12) e (1.13), gli spostamenti del nodo medio, m, vengono riscritti come

$$\begin{aligned}u_{rm} &= \frac{1}{2}(u_{r1} + u_{r2}) \\ u_{sm} &= \frac{1}{2}(u_{s1} + u_{s2}) - \frac{L}{8}(\vartheta_{n2} - \vartheta_{n1}) \\ u_{nm} &= \frac{1}{2}(u_{n1} + u_{n2}) + \frac{L}{8}(\vartheta_{s2} - \vartheta_{s1}) - \frac{L}{8}c(\psi_{s2} - \psi_{s1})\end{aligned}$$

(2.14)

Dove c vale 0 o 1, a seconda del set di condizioni di vincolo scelto per la formulazione dell'elemento

- c=0: γ_{rn} è costante lungo ogni lato dell'elemento finito;
- c=1: η_{rn} è costante lungo ogni lato dell'elemento finito.

Sostituendo le equazioni (2.14) nelle equazioni (2.9), gli spostamenti vengono riscritti nella seguente forma

$$\begin{aligned}u_r(r) &= \sum_i u_{ri} N_i(r) \\ u_s(r) &= \sum_i u_{si} N_i(r) - \frac{L}{8}(\vartheta_{n2} - \vartheta_{n1}) P_m(r) \\ u_n(r) &= \sum_i u_{ni} N_i(r) + \frac{L}{8}(\vartheta_{s2} - \vartheta_{s1}) P_m(r) - \frac{L}{8}c(\psi_{s2} - \psi_{s1}) P_m(r)\end{aligned}$$

(2.15)

L'elemento finito trave vincolato ha complessivamente dodici gradi di libertà, due per ogni spostamento e rotazione (Figura 2.6).

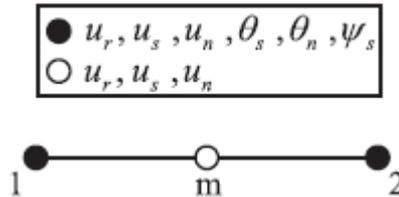


Figura 2.5 – Gradi di libertà nodali dell'elemento finito trave non vincolato basato sulla RZT [62].

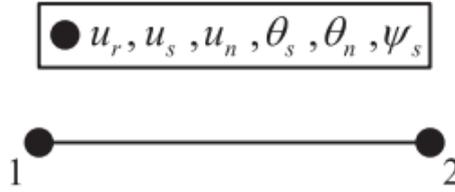


Figura 2.6 – Gradi di libertà nodali dell’elemento finito trave vincolato basato sulla RZT [62].

2.8 Elementi finiti piani triangolari con tre nodi e 24 gradi di libertà, quadrilateri con quattro nodi e 32 gradi di libertà

Facendo riferimento all’elemento finito trave basato sulla RZT, si procede alla formulazione di un elemento finito triangolare con tre nodi e 24 gradi di libertà, e un elemento finito quadrilatero con quattro nodi e 32 gradi di libertà. Tali elementi possono essere ottenuti dalla composizione di tre e quattro elementi finiti trave complanari, rispettivamente (Figura 2.7).

Si riportano di seguito le approssimazioni dei gradi di libertà cinematici

$$\begin{aligned}
 u(x_1, x_2) &= \sum_l u_l P_l(x_1, x_2) \\
 v(x_1, x_2) &= \sum_l v_l P_l(x_1, x_2) \\
 w(x_1, x_2) &= \sum_l w_l P_l(x_1, x_2)
 \end{aligned}
 \tag{2.16}$$

$$\begin{aligned}
 \vartheta_1(x_1, x_2) &= \sum_i \vartheta_{1i} N_i(x_1, x_2) \\
 \vartheta_2(x_1, x_2) &= \sum_i \vartheta_{2i} N_i(x_1, x_2) \\
 \vartheta_z(x_1, x_2) &= \sum_i \vartheta_{zi} N_i(x_1, x_2) \\
 \psi_1(x_1, x_2) &= \sum_i \psi_{1i} N_i(x_1, x_2) \\
 \psi_2(x_1, x_2) &= \sum_i \psi_{2i} N_i(x_1, x_2)
 \end{aligned}
 \tag{2.17}$$

Dove $i = 1, 2, \dots, n$ e $l = 1, m_{12}, 2, m_{23}, \dots, n, m_{n1}$ con n numero di nodi di vertice ($n=3$ per elementi triangolari, $n=4$ per elementi quadrilateri).

L’elemento finito anisoparametrico non vincolato considera nodi di vertice e nodi collocati nel punto medio di ciascun lato.

Le funzioni di forma N_i sono le coordinate di area per l’elemento triangolare e le funzioni bilineari isoparametriche per l’elemento quadrilatero; le funzioni di forma P_l sono dei polinomi quadratici per l’elemento triangolare e le funzioni biquadratiche di serendipity per l’elemento quadrilatero [40].

Gli elementi finiti triangolati e quadrilateri non vincolati hanno, rispettivamente, sei e otto gradi di libertà nodali per ogni spostamento e tre e quattro gradi di libertà nodali per ogni rotazione (Figura 2.8).

Il passaggio da elementi finiti non vincolati ad elementi finiti vincolati avviene applicando la strategia di interpolazione interdipendente, in analogia con il caso della trave discusso nel paragrafo precedente.

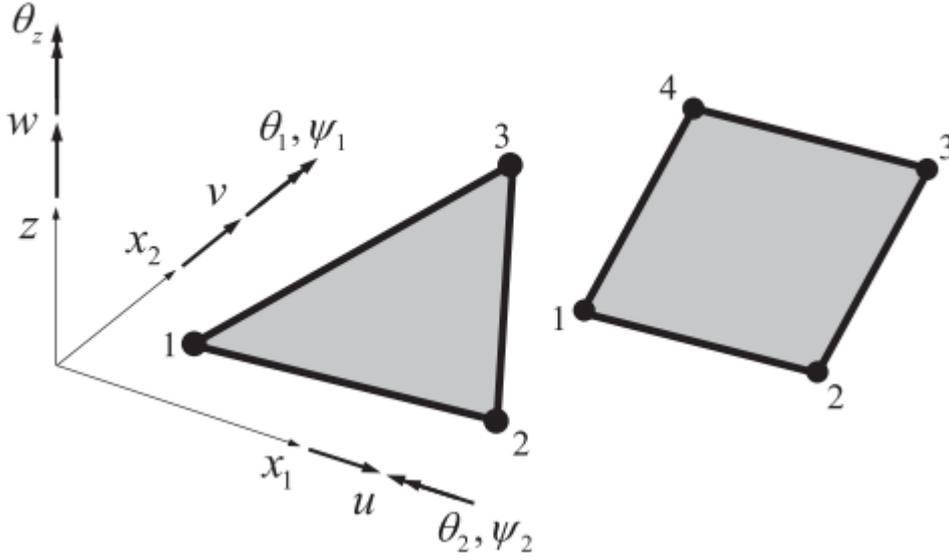


Figura 2.7 – Notazione relativa alle variabili cinematiche di elementi finiti basati su RZT [62].

Le condizioni di vincolo ottenute nell'equazione (2.14) vengono applicate ad ogni lato degli elementi finiti, dopo aver operato opportune trasformazioni di coordinate. Risulta

$$\begin{aligned}
 u(x_1, x_2) &= \sum_i u_i N_i(x_1, x_2) + \sum_i \vartheta_{z_i} L_i(x_1, x_2) \\
 v(x_1, x_2) &= \sum_i v_i N_i(x_1, x_2) + \sum_i \vartheta_{z_i} M_i(x_1, x_2) \\
 w(x_1, x_2) &= \sum_i w_i N_i(x_1, x_2) - \sum_i (\vartheta_{1_i} - c\psi_{1_i}) M_i(x_1, x_2) + \sum_i (\vartheta_{2_i} - c\psi_{2_i}) L_i(x_1, x_2)
 \end{aligned} \tag{2.18}$$

Dove L_i e M_i sono delle funzioni di forma quadratiche, le cui espressioni sono riportate in Appendice B.

Riscrivendo le equazioni (2.18) e (2.17) in forma matriciale, si ottiene

$$\bar{\mathbf{g}}_s = \mathbf{N} \bar{\mathbf{g}}_s^e$$

Dove $\bar{\mathbf{g}}_s$ rappresenta il vettore delle variabili cinematiche, a cui è stata aggiunta la rotazione di coasse drilling, ϑ_z ; \mathbf{N} è la matrice delle funzioni di forma; $\bar{\mathbf{g}}_s^e$ è il vettore delle variabili cinematiche valutate nei nodi dell'elemento

$$\begin{aligned}
 \bar{\mathbf{g}}_s &\equiv [u \quad v \quad w \quad \vartheta_1 \quad \vartheta_2 \quad \vartheta_z \quad \psi_1 \quad \psi_2]^T \\
 \mathbf{N} &= [\mathbf{N}_1 \quad \dots \quad \mathbf{N}_n] \\
 \bar{\mathbf{g}}_s^e &\equiv [u_1 \quad v_1 \quad w_1 \quad \vartheta_{1_1} \quad \vartheta_{2_1} \quad \vartheta_{z_1} \quad \psi_{1_1} \quad \psi_{2_1} \quad \dots \quad u_n \quad v_n \quad w_n \quad \vartheta_{1_n} \quad \vartheta_{2_n} \quad \vartheta_{z_n} \quad \psi_{1_n} \quad \psi_{2_n}]^T \\
 \mathbf{N}_i &= \begin{bmatrix} N_i & 0 & 0 & 0 & 0 & L_i & 0 & 0 \\ 0 & N_i & 0 & 0 & 0 & M_i & 0 & 0 \\ 0 & 0 & N_i & -M_i & L_i & 0 & cM_i & -cL_i \\ 0 & 0 & 0 & N_i & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & N_i & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & N_i & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & N_i & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & N_i \end{bmatrix}
 \end{aligned}$$

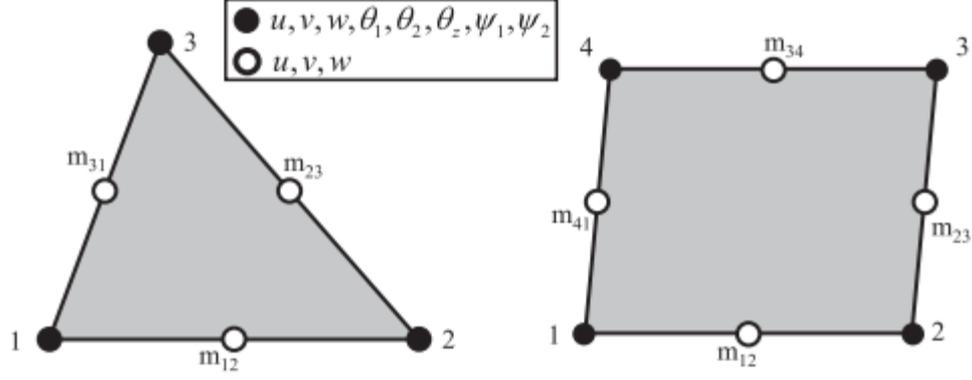


Figura 2.8 – Gradi di libertà nodali di elementi finiti shell non vincolati basati sulla RZT [62].

Gli elementi finiti vincolati hanno otto gradi di libertà per ogni nodo di vertice: tre spostamenti u, v, w lungo gli assi x_1, x_2, z , rispettivamente; due rotazioni di bending ϑ_1 e ϑ_2 attorno a x_2 e x_1 , rispettivamente; la rotazione di coarse drilling ϑ_z ; due rotazioni zigzag ψ_1, ψ_2 attorno a x_2 e x_1 , rispettivamente (Figura 2.9).

2.9 Matrice di massa, matrice di rigidità e vettore dei carichi nodali dell'elemento

Sostituendo le approssimazioni dei gradi di libertà cinematici nel vettore delle deformazioni, si ricava

$$\begin{aligned}
 \varepsilon_{11}^{(k)} &= u_{,1} + z\vartheta_{1,1} + \phi_1^{(k)}\psi_{1,1} \\
 &= \sum_i^n u_i \frac{\partial N_i}{\partial x_1} + \sum_i^n \vartheta_{zi} \frac{\partial L_i}{\partial x_1} + z \sum_i^n \vartheta_{1i} \frac{\partial N_i}{\partial x_1} \\
 &\quad + \phi_1^{(k)} \sum_i^n \psi_{1i} \frac{\partial N_i}{\partial x_1} \\
 \varepsilon_{22}^{(k)} &= v_{,2} + z\vartheta_{2,2} + \phi_2^{(k)}\psi_{2,2} \\
 &= \sum_i^n v_i \frac{\partial N_i}{\partial x_2} + \sum_i^n \vartheta_{zi} \frac{\partial M_i}{\partial x_2} + z \sum_i^n \vartheta_{2i} \frac{\partial N_i}{\partial x_2} \\
 &\quad + \phi_2^{(k)} \sum_i^n \psi_{2i} \frac{\partial N_i}{\partial x_2} \\
 \gamma_{12}^{(k)} &= u_{,2} + v_{,1} + z(\vartheta_{1,2} + \vartheta_{2,1}) + \phi_1^{(k)}\psi_{1,2} + \phi_2^{(k)}\psi_{2,1} \\
 &= \sum_i^n u_i \frac{\partial N_i}{\partial x_2} + \sum_i^n \vartheta_{zi} \frac{\partial L_i}{\partial x_2} + \sum_i^n v_i \frac{\partial N_i}{\partial x_1} + \sum_i^n \vartheta_{zi} \frac{\partial M_i}{\partial x_1} \\
 &\quad + z \left(\sum_i^n \vartheta_{1i} \frac{\partial N_i}{\partial x_2} + \sum_i^n \vartheta_{2i} \frac{\partial N_i}{\partial x_1} \right) + \phi_1^{(k)} \sum_i^n \psi_{1i} \frac{\partial N_i}{\partial x_2} \\
 &\quad + \phi_2^{(k)} \sum_i^n \psi_{2i} \frac{\partial N_i}{\partial x_1}
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\gamma_{1z}^{(k)} &= w_{,1} + \vartheta_1 + \phi_{1,z}^{(k)} \psi_1 = \gamma_1 + \beta_1^{(k)} \psi_1 \\
&= \sum_i^n w_i \frac{\partial N_i}{\partial x_1} - \sum_i^n \vartheta_{1i} \frac{\partial M_i}{\partial x_1} + c \sum_i^n \psi_{1i} \frac{\partial M_i}{\partial x_1} \\
&\quad + \sum_i^n \vartheta_{2i} \frac{\partial L_i}{\partial x_1} - c \sum_i^n \psi_{2i} \frac{\partial L_i}{\partial x_1} + \beta_1^{(k)} \sum_i^n \psi_{1i} N_i \\
&\quad + \sum_i^n \vartheta_{1i} N_i \\
\gamma_{2z}^{(k)} &= w_{,2} + \vartheta_2 + \phi_{2,z}^{(k)} \psi_2 = \gamma_2 + \beta_2^{(k)} \psi_2 \\
&= \sum_i^n w_i \frac{\partial N_i}{\partial x_2} - \sum_i^n \vartheta_{1i} \frac{\partial M_i}{\partial x_2} + c \sum_i^n \psi_{1i} \frac{\partial M_i}{\partial x_2} \\
&\quad + \sum_i^n \vartheta_{2i} \frac{\partial L_i}{\partial x_2} - c \sum_i^n \psi_{2i} \frac{\partial L_i}{\partial x_2} + \beta_2^{(k)} \sum_i^n \psi_{2i} N_i \\
&\quad + \sum_i^n \vartheta_{2i} N_i
\end{aligned} \tag{2.19}$$

Le equazioni (2.19) possono essere riscritte in forma matriciale

$$\begin{Bmatrix} \boldsymbol{\varepsilon} \\ \boldsymbol{\gamma} \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} \boldsymbol{\delta\varepsilon} \\ \boldsymbol{\delta\gamma} \end{bmatrix} \boldsymbol{g}_\varepsilon = \begin{bmatrix} \boldsymbol{\delta\varepsilon} \\ \boldsymbol{\delta\gamma} \end{bmatrix} \mathbf{B} \bar{\boldsymbol{g}}_s^e \tag{2.20}$$

Dove $\begin{Bmatrix} \boldsymbol{\varepsilon} \\ \boldsymbol{\gamma} \end{Bmatrix}$ rappresenta il vettore delle deformazioni; $\begin{bmatrix} \boldsymbol{\delta\varepsilon} \\ \boldsymbol{\delta\gamma} \end{bmatrix}$ è la matrice funzione della sola coordinata z ; \mathbf{B} è la matrice delle derivate delle funzioni di forma; $\bar{\boldsymbol{g}}_s^e$ è il vettore delle variabili cinematiche valutate nei nodi dell'elemento. In particolare, la matrice \mathbf{B} si presenta nella seguente forma

$$\mathbf{B} = [\mathbf{B}_1 \quad \dots \quad \mathbf{B}_n]$$

Dove

$$\mathbf{B}_i = \begin{bmatrix} N_{i,1} & 0 & 0 & 0 & 0 & L_{i,1} & 0 & 0 \\ 0 & N_{i,2} & 0 & 0 & 0 & M_{i,2} & 0 & 0 \\ N_{i,2} & N_{i,1} & 0 & 0 & 0 & L_{i,2} + M_{i,1} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & N_{i,1} & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & N_{i,2} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & N_{i,2} & N_{i,1} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & N_{i,1} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & N_{i,2} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & N_{i,2} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & N_{i,1} \\ 0 & 0 & N_{i,1} & N_i - M_{i,1} & L_{i,1} & 0 & cM_{i,1} & -cL_{i,1} \\ 0 & 0 & N_{i,2} & -M_{i,2} & N_i + L_{i,2} & 0 & cM_{i,2} & -cL_{i,2} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & N_i & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & N_i \end{bmatrix}$$

Gli ulteriori termini che compaiono nell'equazione (2.20) sono esplicitati in Appendice A.

Con l'approssimazione agli elementi finiti, il principio variazionale diventa

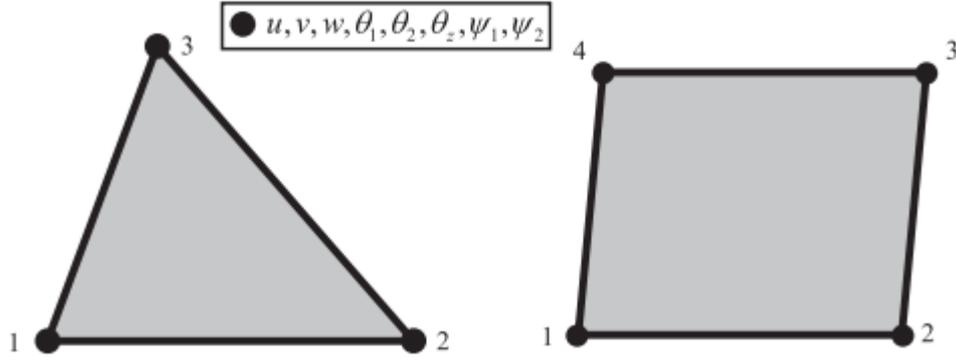


Figura 2.9 – Gradi di libertà nodali di elementi finiti shell vincolati basati sulla RZT [62].

$$\delta \bar{\mathbf{g}}_s^{eT} (\mathbf{M}^e \ddot{\bar{\mathbf{g}}}_s^e + \mathbf{K}^e \bar{\mathbf{g}}_s^e - \mathbf{f}^e) = \mathbf{0} \quad (2.21)$$

Da cui si ricava l'equazione del moto dell'elemento finito nel suo sistema di riferimento locale (x_1, x_2, z)

$$\mathbf{M}^e \ddot{\bar{\mathbf{g}}}_s^e + \mathbf{K}^e \bar{\mathbf{g}}_s^e - \mathbf{f}^e = \mathbf{0} \quad (2.22)$$

Dove $\mathbf{M}^e, \mathbf{K}^e, \mathbf{f}^e$ sono, rispettivamente, la matrice di massa, la matrice di rigidità e il vettore delle forze nodali dell'elemento. Risulta

$$\mathbf{M}^e = \int_A \tilde{\mathbf{N}}^T [\mathbf{M} \mathbf{Z} \mathbf{I}] \tilde{\mathbf{N}} dA$$

$$\mathbf{K}^e = \int_A \mathbf{B}^T [\mathbf{K} \mathbf{Z} \mathbf{I}] \mathbf{B} dA$$

Con $\tilde{\mathbf{N}}$ ottenuta dalla matrice \mathbf{N} , rimuovendo la sesta riga.

2.10 Correzione del warping

Nel paragrafo precedente è stata calcolata la matrice di rigidità di un elemento finito shell a quattro nodi, nel caso in cui tutti i suoi nodi giacciono nel piano medio dell'elemento stesso. Per alcuni gusci con doppia curvatura potrebbe accadere che non tutti i nodi dell'elemento appartengano allo stesso piano. In questo caso, la rigidità dell'elemento piastra deve essere modificata attraverso la cosiddetta *Rigid Link Correction*, prima di essere trasformata nel sistema di riferimento globale [59]. Il piano medio dell'elemento viene creato dalla connessione dei punti medi dei lati della geometria svergolata, considerando che i nodi siano equidistanti dal piano. La trasformazione da variabili nodali dell'elemento svergolato, $\bar{\mathbf{g}}_{si}$, a variabili nodali dell'elemento piano, $\bar{\mathbf{g}}'_{si}$, impiega la seguente equazione

$$\bar{\mathbf{g}}'_{si} = \begin{Bmatrix} u'_i \\ v'_i \\ w'_i \\ \theta'_{1i} \\ \theta'_{2i} \\ \theta'_{zi} \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & z_i & 0 & 1 & 0 & 0 \\ z_i & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} u_i \\ v_i \\ w_i \\ \theta_{1i} \\ \theta_{2i} \\ \theta_{zi} \end{Bmatrix} = \mathbf{W}_i \bar{\mathbf{g}}_{si} \quad (2.23)$$

Dove \mathbf{W}_i è la matrice di proiezione e z_i definisce l'offset di warpage ad ogni nodo perpendicolarmente al piano medio della piastra, come mostrato in Figura 2.10.

La matrice di rigidità dell'elemento nel sistema di riferimento locale, considerando l'effetto del warping, risulta

$$\mathbf{K}_{local} = \mathbf{W} \mathbf{K}_{flat} \mathbf{W}^T \quad (2.24)$$

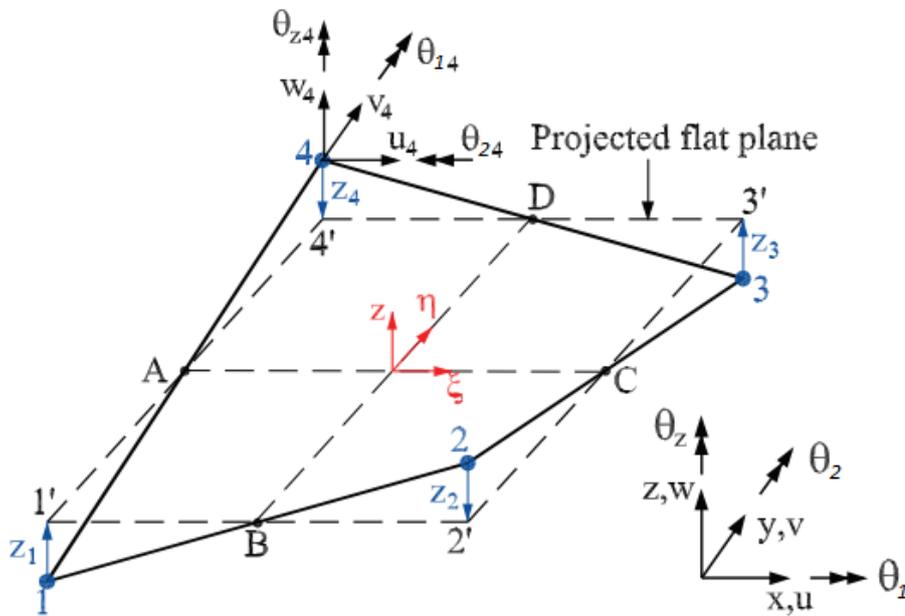


Figura 2.10 – Proiezione di un elemento shell svergolato in un elemento piano medio.

Infine, la matrice di rigidità dell'elemento nel sistema di riferimento globale è ottenuta mediante la matrice di rotazione (2.4)

$$\mathbf{K}_{global} = \mathbf{R}^T \mathbf{K}_{local} \mathbf{R} \quad (2.25)$$

2.11 Matrici di stabilizzazione

Nei paragrafi precedenti, la rotazione di coarse drilling è stata introdotta a livello delle funzioni di forma per gli elementi triangolari e quadrilateri. La rotazione di fine drilling viene introdotta nella formulazione mediante un'espansione del vettore dei gradi di libertà nodali

$$\tilde{\mathbf{g}}_s^e \equiv [u_1 \ v_1 \ w_1 \ \vartheta_{11} \ \vartheta_{21} \ \vartheta_{z1} \ \psi_{11} \ \psi_{21} \ \psi_{z1} \ \dots \ u_n \ v_n \ w_n \ \vartheta_{1n} \ \vartheta_{2n} \ \vartheta_{zn} \ \psi_{1n} \ \psi_{2n} \ \psi_{zn}]^T$$

Di conseguenza, la matrice di massa, la matrice di rigidità e il vettore delle forze vengono espansi con coefficienti nulli, ottenendo $\tilde{\mathbf{M}}^e, \tilde{\mathbf{K}}^e, \tilde{\mathbf{f}}^e$. In analogia con quanto fatto per gli altri gradi di libertà di rotazione, la rotazione di fine drilling viene approssimata con funzioni di forma lineari

$$\psi_z(x_1, x_2) = \sum_i \psi_{zi} N_i(x_1, x_2) = [N_i(x_1, x_2)] \{\psi_{zi}\} \quad (2.26)$$

Dunque, si somma una rigidità fittizia relativa al termine aggiuntivo, secondo l'approccio adottato in [40] per l'introduzione del grado di libertà ϑ_z nella formulazione di elementi finiti shell basati su FSDT. I coefficienti aggiuntivi sono dei termini di penalità. L'energia potenziale totale di ogni elemento diventa

$$\Pi_* = \Pi + \lambda_\psi \frac{C_\psi}{2} \int_A (\psi_z(x_1, x_2) - \bar{\psi}_z)^2 dA \quad (2.27)$$

Con $\lambda_\psi = 10^{-5}$ parametro di penalizzazione, come indicato in [60]; C_ψ termine necessario per la consistenza dimensionale, definito come

$$C_\psi \equiv \sqrt{G_{22}^2 + G_{44}^2} \quad (2.28)$$

Dove G_{22}, G_{44} sono i termini diagonali della matrice \mathbf{D}_s definita in Appendice A; $\bar{\psi}_z$ valore medio di ψ_z calcolato sull'elemento

$$\bar{\psi}_z = \frac{1}{A} \int_A \psi_z(x_1, x_2) dA \quad (2.29)$$

Introducendo l'approssimazione agli elementi finiti di ψ_z , si ottiene

$$\bar{\psi}_z = \frac{1}{A} \int_A [N_i(x_1, x_2)] \{\psi_{zi}\} dA = \frac{1}{A} \int_A [N_i(x_1, x_2)] dA \{\psi_{zi}\} = [a_i] \{\psi_{zi}\} \quad (2.30)$$

Il principio variazionale viene, dunque, riscritto

$$\Pi_* = \Pi + \frac{1}{2} \{\psi_{zi}\}^T \lambda_\psi C_\psi [K_\psi] \{\psi_{zi}\} \quad (2.31)$$

Con

$$[K_\psi] \equiv \int_A ([N_i(x_1, x_2)]^T [N_i(x_1, x_2)] - [a_i]^T [a_i]) dA \quad (2.32)$$

Il termine $\lambda_\psi C_\psi [K_\psi]$ viene espanso a \mathbf{K}_ψ^e e sommato alla matrice di rigidità

$$\tilde{\mathbf{K}}^e + \lambda_\psi C_\psi \mathbf{K}_\psi^e$$

L'uso del metodo di interpolazione interdipendente per gli spostamenti nel piano porta all'ottenimento delle funzioni di forma di Allman [49] – [50], le quali, oltre a permettere l'introduzione dei gradi di libertà di drilling, comportano l'insorgenza di modi di deformazione ad energia nulla [40] [44] – [46]

[61]. Tali modi si manifestano quando le rotazioni ϑ_z assumono lo stesso valore, cioè l'energia di deformazione associata a questa rotazione è nulla, e devono essere eliminati per garantire la convergenza dell'elemento finito.

Questo risultato può essere ottenuto modificando il funzionale dell'energia e penalizzando i modi di deformazione ad energia nulla [45]. È anche possibile inibire i modi spuri impiegando una matrice di stabilizzazione, ottenuta usando il concetto di rinforzo dei lati dell'elemento finito proposto da Tessler [60].

Il funzionale dell'energia viene modificato, in accordo con il metodo di Hughes e Brezzi, introducendo un termine di penalizzazione dei modi spuri, che è derivato forzando, in senso debole, le condizioni di Kirchhoff per travi sottili. Le travi sono sovrapposte ai lati dell'elemento, costituendo un rinforzo monodimensionale. Facendo riferimento alla Figura 2.4, si osserva che per una trave molto snella la condizione di Kirchhoff è verificata: la deformazione di taglio nel piano, valutata nel punto medio, è posta pari a zero. Si ottiene

$$(Y_{rs})_m \equiv (Y_{rs})_{r=L/2} = (-\vartheta_n + u_{s,r})_{r=L/2} = -\frac{1}{2}(\vartheta_{n_1} + \vartheta_{n_2}) + \frac{1}{L}(u_{s_2} - u_{s_1}) = 0 \quad (2.33)$$

Si consideri l'elemento trave sovrapposto al lato dell'elemento triangolare o quadrilatero di estremi i e j , usando la notazione dell'elemento shell e operando opportune trasformazioni di coordinate, si ottiene

$$(Y_{rs})_{mij} = \frac{1}{l_{ij}^2} \left((x_{1j} - x_{1i})(v_j - v_i) - (x_{2j} - x_{2i})(u_j - u_i) \right) - \frac{1}{2}(\vartheta_{z_i} + \vartheta_{z_j}) = 0 \quad (2.34)$$

Dove l_{ij} è la lunghezza del lato di estremi i e j , (x_{1i}, x_{2i}) sono le coordinate del nodo i -esimo nel piano del sistema di riferimento locale, gli indici i e j seguono la permutazione $i = 1, 2, 3$ e $j = 2, 3, 1$ per l'elemento triangolare, $i = 1, 2, 3, 4$ e $j = 2, 3, 4, 1$ per l'elemento quadrilatero.

In forma matriciale, l'equazione (2.34) diventa

$$(Y_{rs})_{mij} = (\mathbf{B}_\gamma^e)_{ij} \tilde{\mathbf{g}}_s^e = 0 \quad (2.35)$$

A livello elemento, si può scrivere la sommatoria dei contributi di tutti i lati dell'elemento

$$\sum (Y_{rs})_{mij}^2 = \tilde{\mathbf{g}}_s^{eT} \left(\sum (\mathbf{B}_\gamma^e)_{ij}^T (\mathbf{B}_\gamma^e)_{ij} \right) \tilde{\mathbf{g}}_s^e = \tilde{\mathbf{g}}_s^{eT} \mathbf{K}_\vartheta^e \tilde{\mathbf{g}}_s^e = 0 \quad (2.36)$$

Forzando le condizioni relative all'equazione (2.36), si eliminano i modi ad energia nulla. La matrice di rigidezza finale risulta

$$\tilde{\mathbf{K}}^e + \lambda_\psi C_\psi \mathbf{K}_\psi^e + \lambda_\vartheta C_\vartheta \mathbf{K}_\vartheta^e \quad (2.37)$$

Dove $\lambda_\vartheta = 10^{-5}$ è un parametro di penalizzazione; C_ϑ è un termine necessario per la consistenza dimensionale ed è definito come

$$C_\vartheta \equiv A \sqrt{G_{11}^2 + G_{33}^2} \quad (2.38)$$

Dove G_{11}, G_{33} sono i termini diagonali della matrice $\mathbf{D}_{s\phi}$ definita in Appendice A.

3 Validazione numerica e performance

Le performance dell'elemento finito shell basato sulla RZT con gradi di libertà di drilling vengono valutate in tre studi differenti: *verifica*, *convergenza* e *confronto*.

Nella sezione *verifica* si dimostra la correttezza dell'implementazione dell'elemento finito e si effettuano test su modelli piani e curvi realizzati in materiale omogeneo ed isotropo, cioè si esaminano casi in cui le funzioni zigzag si annullano e la formulazione cinematica si riconduce a quella della teoria di Mindlin. I risultati così ottenuti vengono confrontati con quelli analitici di Rayleigh-Ritz, quando disponibili; quelli forniti da OptiStruct, su un modello discretizzato con elementi finiti QUAD4; quelli ottenuti con il codice Matlab sviluppato da Marco Gherlone, Daniele Versino e Vincenzo Zarra [62] per elementi finiti shell basati sulla RZT (MQ9RZT).

L'influenza del materiale composito laminato sulla convergenza e sull'accuratezza dei risultati è analizzata nella sezione *convergenza*. I risultati (risposta statica e frequenze proprie), forniti dal codice Python basato sulla RZT, all'infittirsi della mesh vengono confrontati con le soluzioni analitiche RZT di Rayleigh-Ritz.

Infine, nella sezione *confronti* si presentano degli esempi che evidenziano le proprietà dell'elemento finito implementato. I modelli di esempio sono geometrie piane e curve, realizzate in materiale composito laminato, discretizzate con mesh fitte, in modo tale da evitare influenze dovute alla convergenza della soluzione. I confronti sono effettuati rispetto alle soluzioni analitiche RZT di Rayleigh-Ritz o a quelle fornite da OptiStruct su dei modelli discretizzati con elementi finiti HEXA8 ad alta affidabilità.

3.1 Verifica

Vengono condotte prove numeriche che consentono di verificare la correttezza dell'implementazione di alcune funzioni:

- Introduzione del sistema di riferimento locale e matrice di rotazione;
- Introduzione dei gradi di libertà di drilling per l'analisi di superfici curve.

Piastra e semisfera, costituite da materiale omogeneo ed isotropo, vengono analizzate impiegando la teoria di Mindlin. I risultati forniti in output dal codice Python vengono confrontati con quelli analitici o con quelli calcolati da OptiStruct.

3.1.1 Introduzione del sistema di riferimento locale e matrice di rotazione

Al fine di verificare la correttezza della creazione dei sistemi di riferimento locali degli elementi e delle matrici di rotazione, si conducono l'analisi statica e l'analisi modale di una piastra ruotata nello spazio, avente geometria, mesh, materiale e condizioni di vincolo analoghi a quelli della piastra nel piano.

La piastra esaminata ha dimensioni 200 mm x 200 mm x 1 mm ed è caratterizzata dal materiale riportato in Tabella 3.1. Il carico applicato è una pressione uniformemente distribuita di $9.81 \cdot 10^{-3} \text{ MPa}$; il vincolo è un incastro su un lato. Tale modello viene discretizzato sia con elementi Quad che con elementi Tria e risolto in OptiStruct e in Python. Successivamente, viene ruotato di 20° in verso opposto all'asse y (Figura 3.1) e risolto nuovamente in Python. I risultati sono riportati in Tabella 3.2 e Tabella 3.3 e si riferiscono alle componenti dello spostamento in uno dei due vertici liberi (la scelta è indifferente per ragioni di simmetria del problema), e alle prime 10 frequenze naturali del sistema.

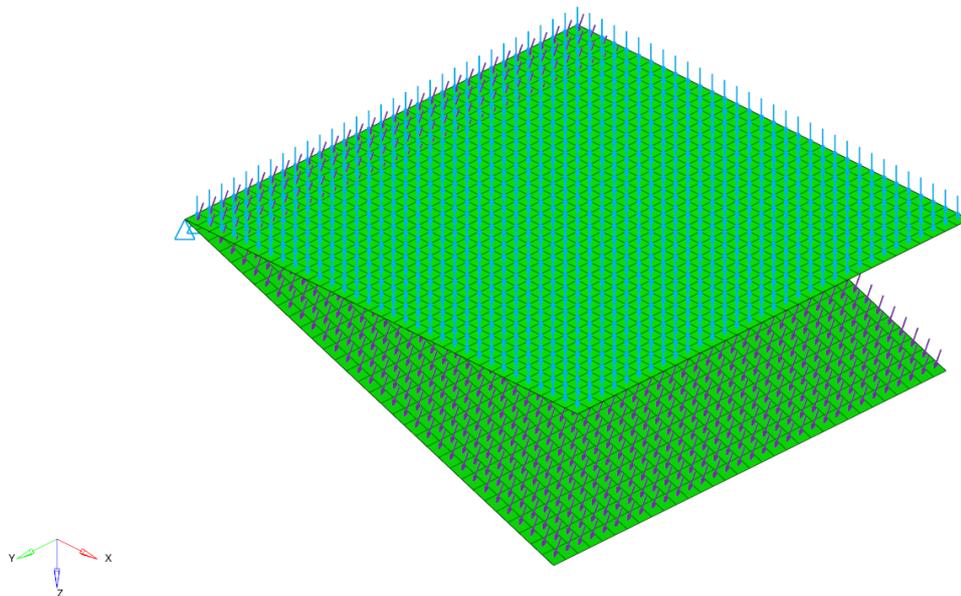


Figura 3.1 – Sovrapposizione dei due modelli di piastra cantilever, quella nel piano xy e quella ruotata di -20° rispetto all'asse y , con numero di suddivisioni per lato $N_e=32$ e numero totale di nodi $N_n=1089$.

$2h$ [mm]	ρ $\left[\frac{\text{ton}}{\text{mm}^3} \right]$	E [MPa]	ν
1	2.7E-09	73000	0.3

Tabella 3.1 – Densità e proprietà meccaniche del materiale costituente la piastra cantilever.

Tipo di elemento	Analitico Rayleigh- Ritz	OptiStruct (piastra nel piano)		Python (piastra nel piano)		Python (piastra ruotata nello spazio)	
		Quad	Tria	Quad	Tria	Quad	Tria
u	0.0000E+0 0	0.0000E+0 0	0.0000E+0 0	1.3987E- 19	1.7367E- 18	3.2164E- 04	3.2157E- 04
v	0.0000E+0 0	0.0000E+0 0	0.0000E+0 0	-8.2752E- 20	-5.9882E- 19	-1.8092E- 07	-1.6461E- 07
w	2.9588E+0 2	2.9886E+0 2	2.9877E+0 2	2.9846E+0 2	2.9838E+0 2	2.9846E+0 2	2.9838E+0 2
ϑ_1	8.6322E- 02	7.2220E- 02	7.2730E- 02	7.2264E- 02	7.2053E- 02	7.2264E- 02	7.2053E- 02
ϑ_2	- 2.0256E+0 0	- 2.0350E+0 0	- 2.0350E+0 0	- 2.0327E+0 0	- 2.0323E+0 0	- 2.0327E+0 0	- 2.0323E+0 0
ϑ_z		0.0000E+0 0	0.0000E+0 0	-1.7888E- 21	-1.7182E- 21	-7.9875E- 08	-8.4085E- 08

Tabella 3.2 – Componenti dello spostamento nel vertice libero della piastra cantilever: soluzione analitica, risultati del modello 2D nel piano xy in OptiStruct e in Python, e del modello 2D ruotato di -20° attorno all'asse y in Python.

Tipo di elemento	Analitico Rayleigh- Ritz	OptiStruct (piastra nel piano)		Python (piastra nel piano)		Python (piastra ruotata nello spazio)	
		Quad	Tria	Quad	Tria	Quad	Tria
f_1	21.835	21.721	21.721	21.741	21.747	21.741	21.747

f_2	53.485	53.121	53.112	53.275	53.323	53.275	53.323
f_3	133.912	133.038	132.968	133.416	133.532	133.416	133.532
f_4	195.253	169.652	169.636	170.385	170.626	170.385	170.626
f_5	195.748	193.098	193.086	193.994	194.313	193.994	194.313
f_6	364.877	337.035	337.344	339.621	340.651	339.621	340.651
f_7	390.784	382.897	382.322	384.598	385.008	384.598	385.008
f_8	438.998	399.269	399.069	402.205	403.185	402.205	403.185
f_9	590.793	442.509	442.365	445.432	446.466	445.432	446.466
f_{10}	647.749	576.516	577.350	582.794	585.259	582.794	585.259

Tabella 3.3 – Frequenze naturali della piastra cantilever: soluzione analitica, risultati del modello 2D nel piano xy in OptiStruct e in Python, e del modello 2D ruotato di -20° attorno all'asse y in Python.

I risultati dei modelli shell considerati sono confrontabili e in linea con le soluzioni analitiche; perciò, la correttezza dell'implementazione delle funzioni di cui sopra resta verificata.

Inoltre, si rende disponibile una visualizzazione grafica dei sistemi di riferimento locali: viene scritta una funzione che fornisce in output un file di testo, il quale contiene la definizione dei sistemi di riferimento locali, secondo la logica di Hypermesh. Tale testo viene copiato ed incollato nel file .fem contenente il modello originario, in una opportuna posizione. A questo punto è possibile importare il modello così modificato in Hypermesh ed attivare la visualizzazione dei sistemi di riferimento.

In Figura 3.2 - Figura 3.5 sono rappresentati i sistemi di riferimento locali sia per gli elementi Quad che per gli elementi Tria.

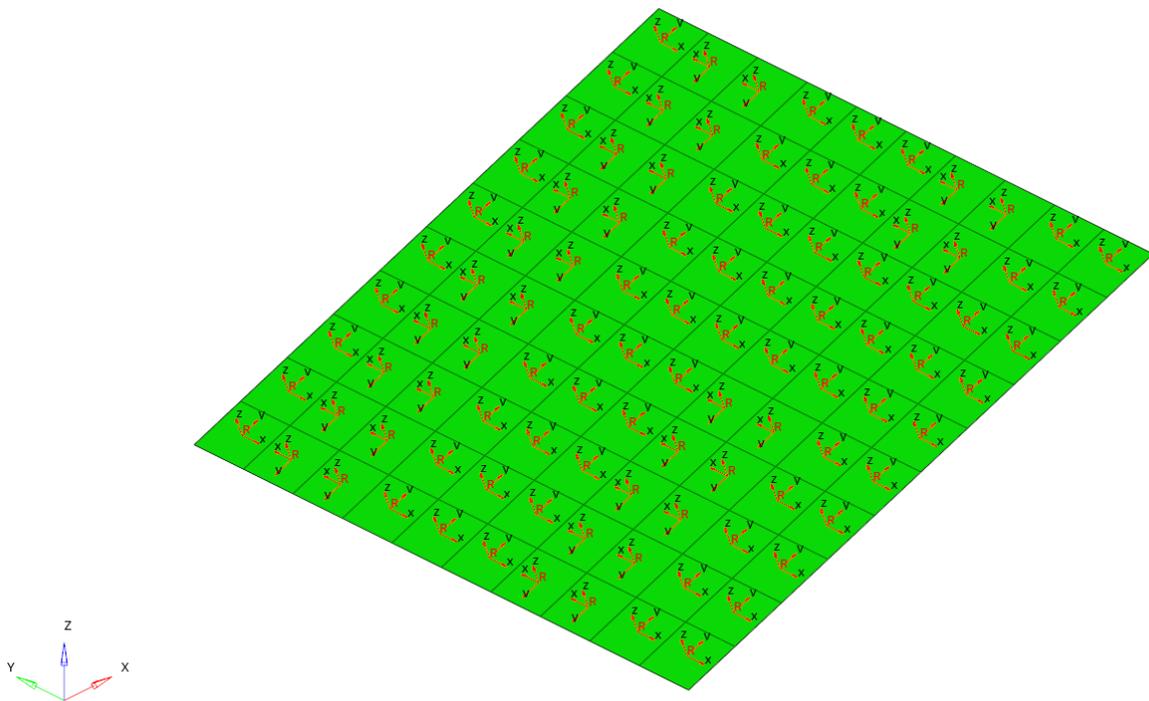


Figura 3.2 – Sistemi di riferimento locali degli elementi Quad della piastra ruotata (vista isometrica).

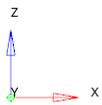
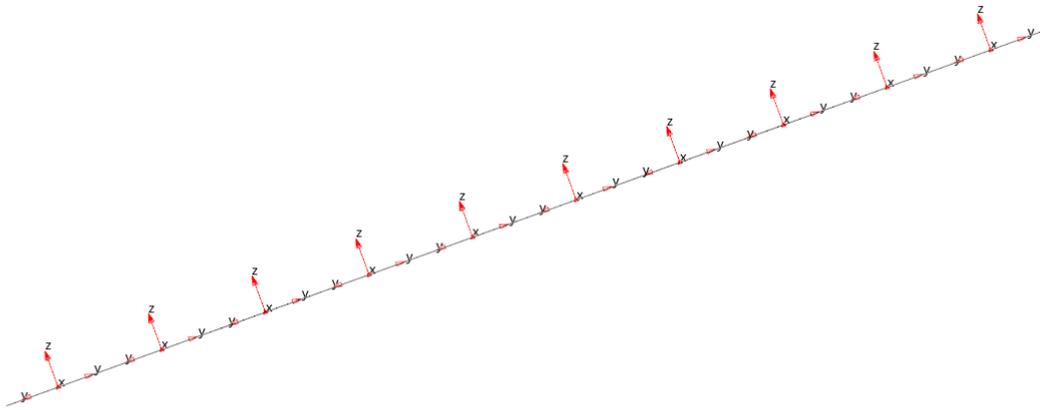


Figura 3.3 – Sistemi di riferimento locali degli elementi Quad della piastra ruotata (vista nel piano XZ).

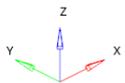
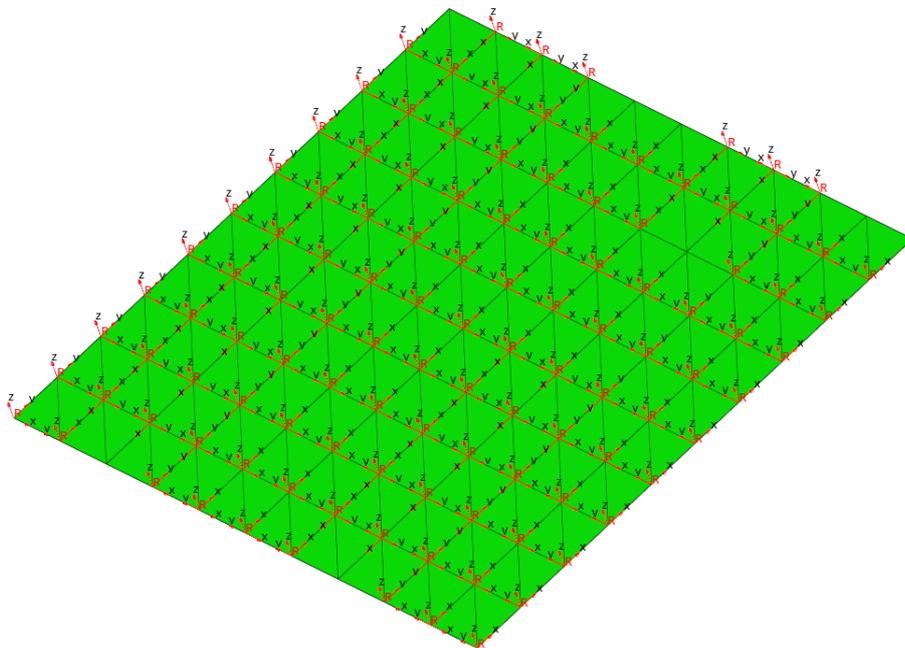


Figura 3.4 – Sistemi di riferimento locali degli elementi Tria della piastra ruotata (vista isometrica).

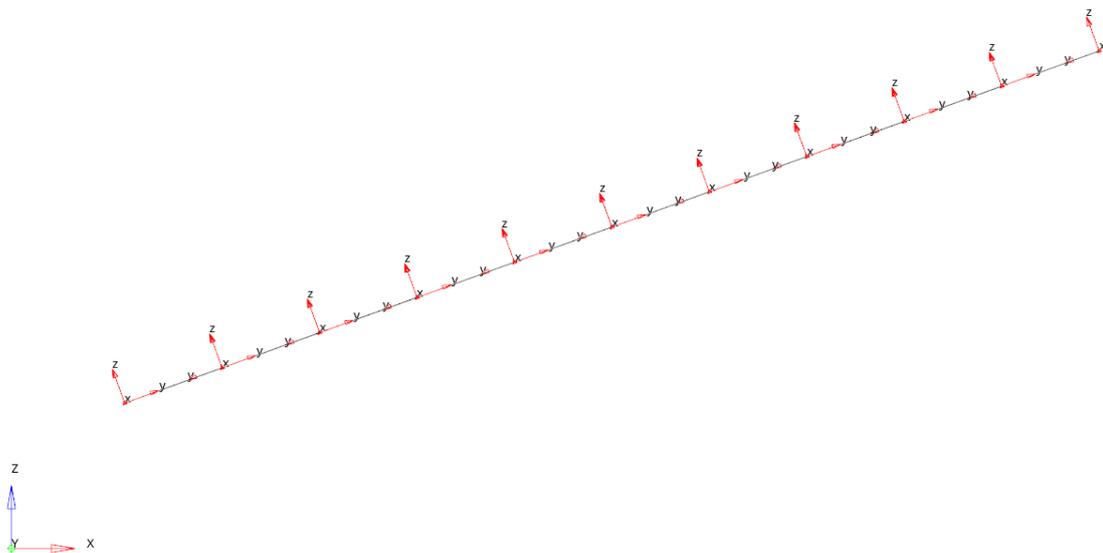


Figura 3.5 – Sistemi di riferimento locali degli elementi Tria della piastra ruotata (vista nel piano XZ).

In particolare, si isola un elemento arbitrario per ognuno dei due modelli considerati (modello discretizzato con elementi Quad e modello discretizzato con elementi Tria). In Figura 3.6 e Figura 3.7 sono mostrati i sistemi di riferimento locali degli elementi isolati e in Tabella 3.4 e Tabella 3.5 viene riportata la corrispondenza tra identificativo dell'elemento ed identificativi dei nodi.

Element ID	Nodo 1 ID	Nodo 2 ID	Nodo 3 ID	Nodo 4 ID
55	92	96	94	91

Tabella 3.4 – Corrispondenza elemento-nodi per la piastra ruotata

Element ID	Nodo 1 ID	Nodo 2 ID	Nodo 3 ID
238	103	98	43

Tabella 3.5 – Corrispondenza elemento-nodi per la piastra ruotata

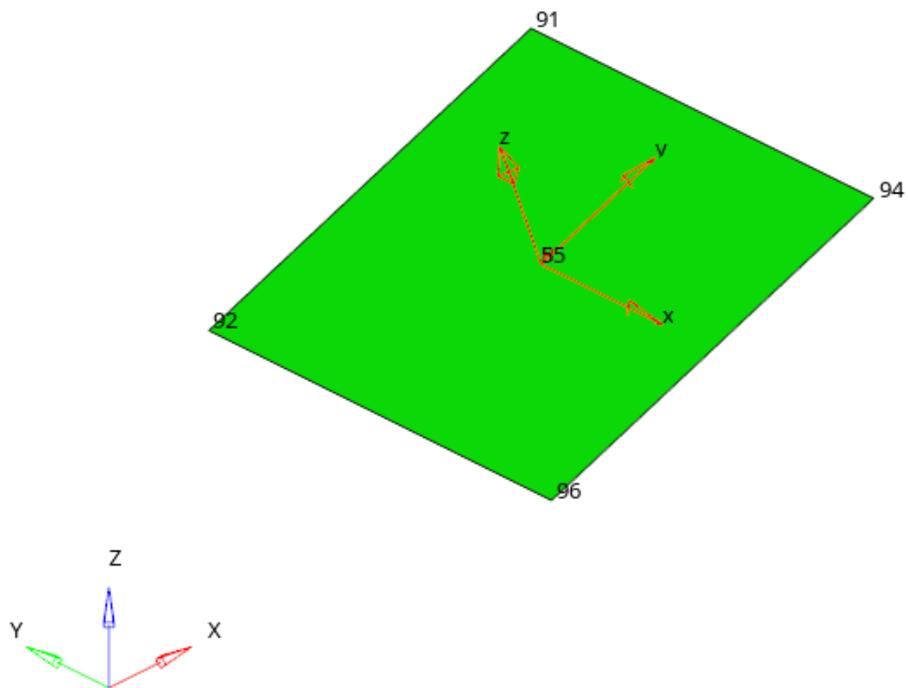


Figura 3.6 – Sistema di riferimento locale di un elemento Quad arbitrario della piastra ruotata.

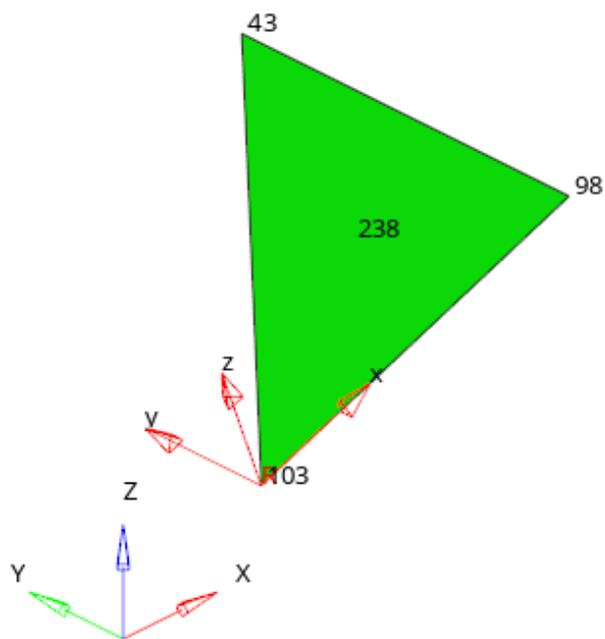


Figura 3.7 – Sistema di riferimento locale di un elemento Tria arbitrario della piastra ruotata.

La rappresentazione dei sistemi di riferimento locali viene riportata anche per una semisfera, discretizzata con una mesh mista di elementi Quad ed elementi Tria (Figura 3.8).

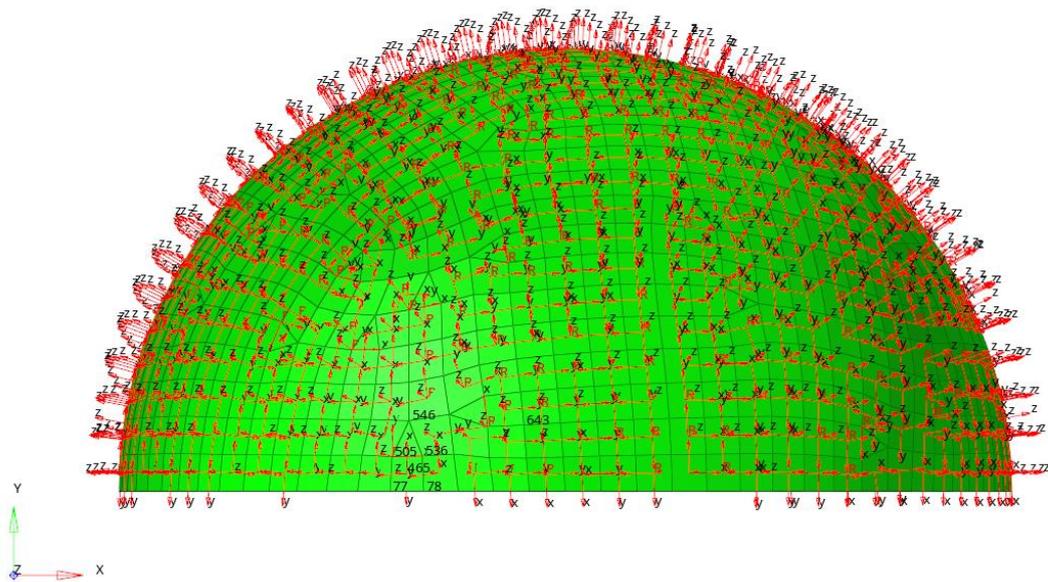


Figura 3.8 – Sistemi di riferimento locali degli elementi della semisfera (vista nel piano XY).

Element ID	Nodo 1 ID	Nodo 2 ID	Nodo 3 ID	Nodo 4 ID
465	78	536	505	77

Tabella 3.6 – Corrispondenza elemento-nodi per la semisfera

Element ID	Nodo 1 ID	Nodo 2 ID	Nodo 3 ID
486	505	536	546

Tabella 3.7 – Corrispondenza elemento-nodi per la semisfera

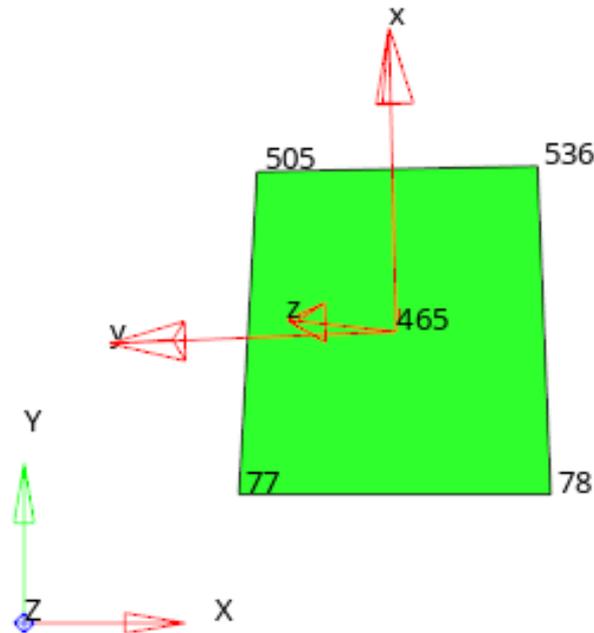


Figura 3.9 – Sistema di riferimento locale di un elemento Quad arbitrario della semisfera.

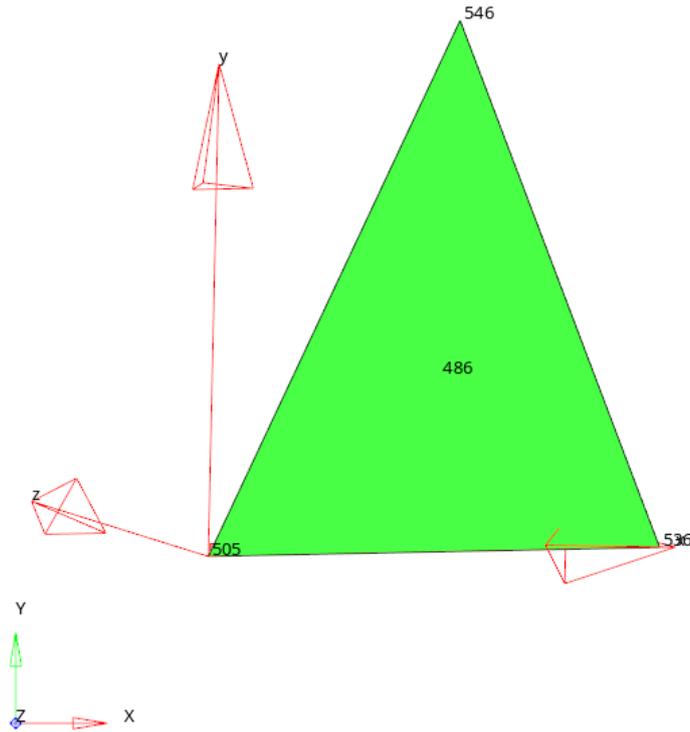


Figura 3.10 – Sistema di riferimento locale di un elemento Tria arbitrario della semisfera.

La visualizzazione dei sistemi di riferimento locali creati in Python fornisce un’ulteriore conferma della corretta implementazione delle matrici di rotazione.

3.1.2 Introduzione dei gradi di libertà di drilling

La validazione delle funzioni che gestiscono l’introduzione dei gradi di libertà di drilling viene effettuata mediante l’analisi statica e l’analisi modale di una superficie semisferica.

La semisfera ha raggio medio 50 mm e spessore 4 mm ed è caratterizzata dal materiale riportato in Tabella 3.8. Il carico applicato è una pressione uniformemente distribuita di $9.81 \cdot 10^{-3} \text{ MPa}$, in direzione normale agli elementi; il vincolo è un incastro sulla circonferenza massima. La mesh usata è sufficientemente fitta (gli elementi hanno dimensioni dell’ordine dei 4 mm), in modo tale da evitare influenze dovute alla convergenza. I risultati sono riportati in Tabella 3.9 e Tabella 3.10.

Spostamento del piano medio lungo l’asse y e forme modali della semisfera possono essere visualizzati in HyperMesh grazie alla generazione di un file di testo contenente le componenti u, v, w e le componenti degli autovettori, rispettivamente, secondo lo standard adottato da OptiStruct per la scrittura dei file dei risultati.

$2h$ [mm]	ρ $\left[\frac{\text{ton}}{\text{mm}^3}\right]$	E [MPa]	ν
4	7.85E-09	210000	0.3

Tabella 3.8 – Densità e proprietà meccaniche del materiale costituente la semisfera.

Spostamento secondo l’asse y nel nodo 1249 [mm]	OptiStruct FSDT Quad	MQ9RZT	Python RZT Quad
v	1.2970E-05	1.3088E-05	1.3114E-05

Tabella 3.9 – Componente lungo l’asse y dello spostamento nel nodo 1249 della semisfera: risultati dei modelli con elementi FSDT QUAD4 di OptiStruct, elementi MQ9RZT ed elementi RZT QUAD4 del codice sviluppato in Python.

Frequenza propria [Hz]	OptiStruct FSDT Quad	MQ9RZT	Python RZT Quad
f_1	9963.410	9969.232	9967.73
f_2	9963.517	9969.944	9968.14
f_3	13633.46	13688	13681.4
f_4	15650.77	15610.49	15617.1
f_5	15651.73	15611.1	15618.3

Tabella 3.10 – Frequenze naturali della semisfera: risultati dei modelli con elementi FSDT QUAD4 di OptiStruct, elementi MQ9RZT ed elementi RZT QUAD4 del codice sviluppato in Python.

In Tabella 3.11 sono riportati gli errori percentuali sulla componente y dello spostamento e sulle frequenze naturali. Si definisce

$$E\%(x) = \frac{x - x_{ref}}{x_{ref}} \times 100\%$$

Dove x_{ref} è la soluzione FSDT di OptiStruct.

Errore percentuale [%]	MQ9RZT	Python RZT Quad
$E\%(v)$	0.909	1.108
$E\%(f_1)$	0.058	0.043
$E\%(f_2)$	0.065	0.046
$E\%(f_3)$	0.400	0.352
$E\%(f_4)$	-0.257	-0.215
$E\%(f_5)$	-0.260	-0.214

Tabella 3.11 – Errori percentuali sulla componente lungo l'asse y dello spostamento e sulle frequenze naturali dei modelli shell RZT considerati rispetto a quelli FSDT di OptiStruct.

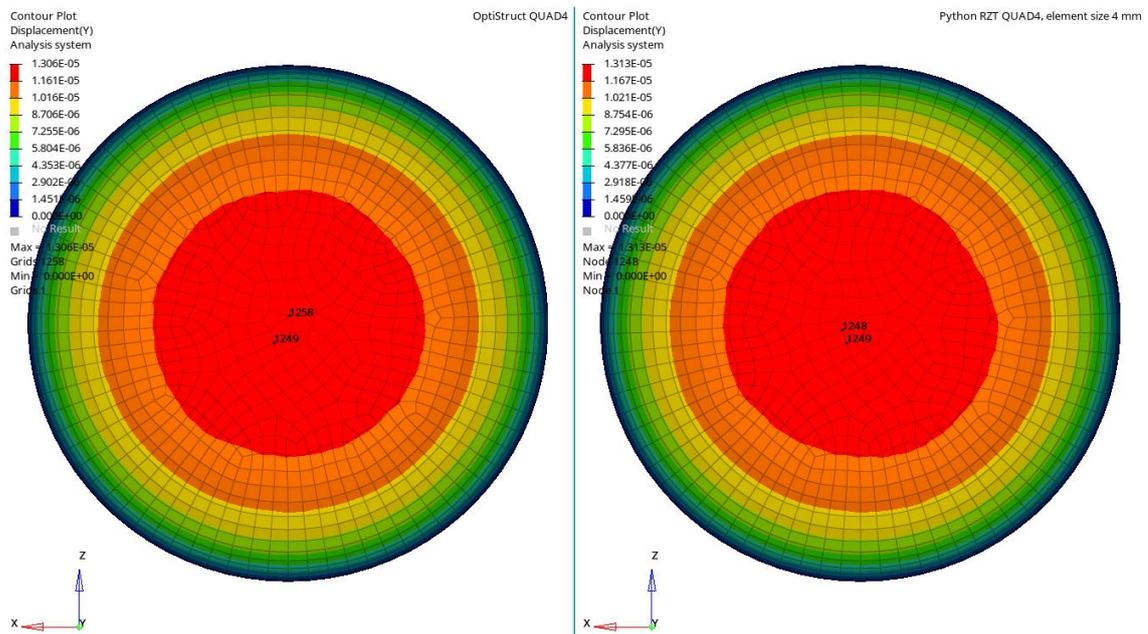
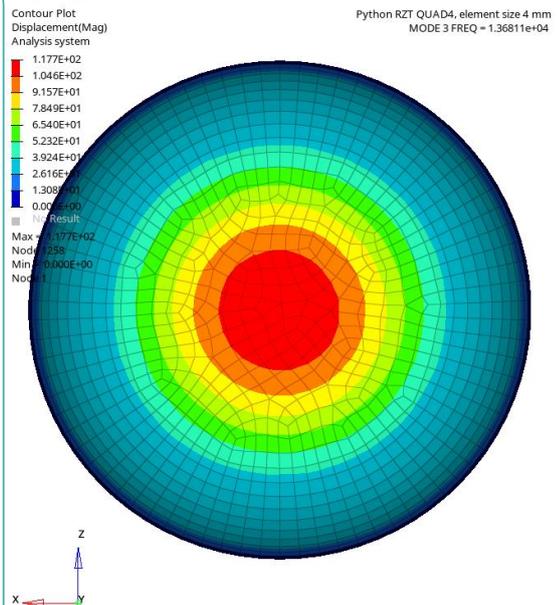
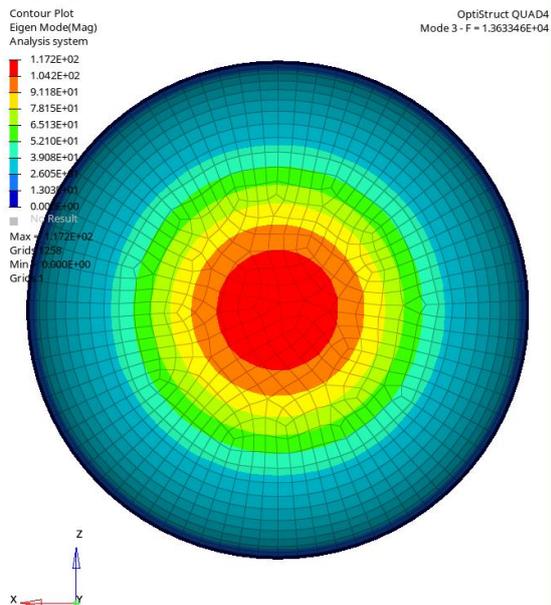
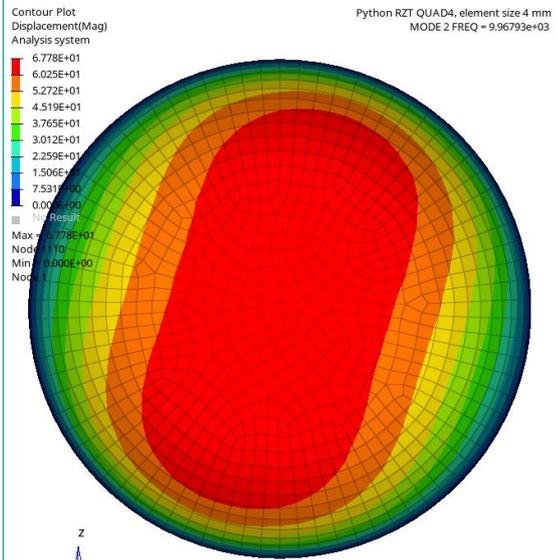
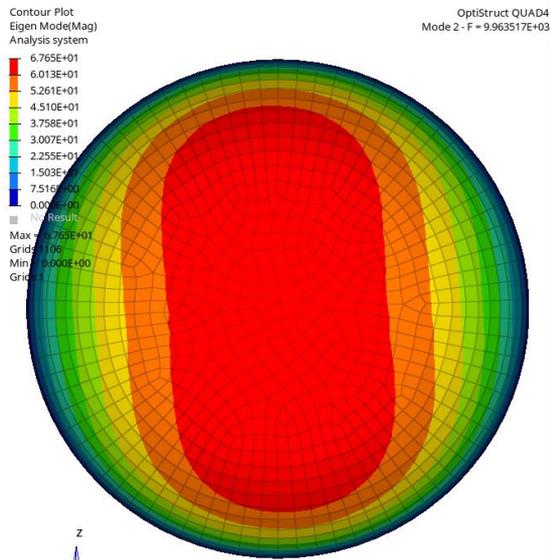
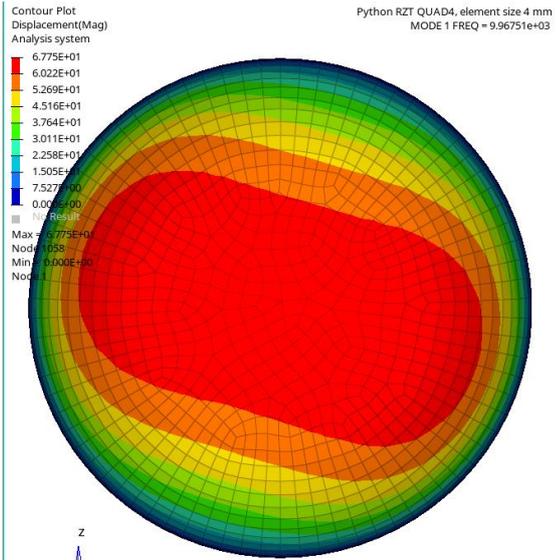
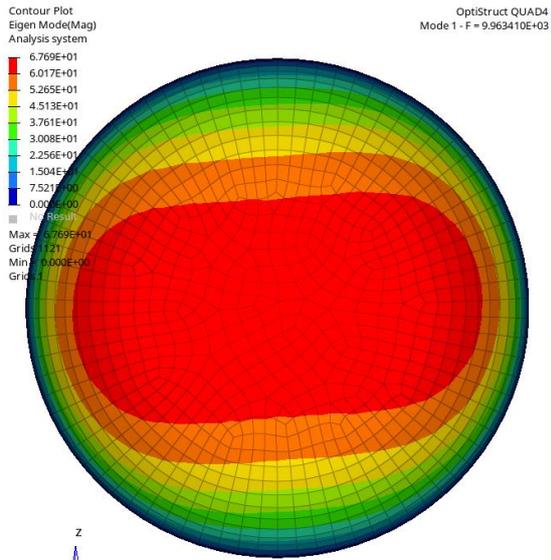


Figura 3.11 – Visualizzazione dello spostamento lungo l'asse y della semisfera soggetta a pressione uniformemente distribuita: confronto dei risultati OptiStruct FSDT QUAD4 (sinistra) e Python RZT QUAD4 (destra).



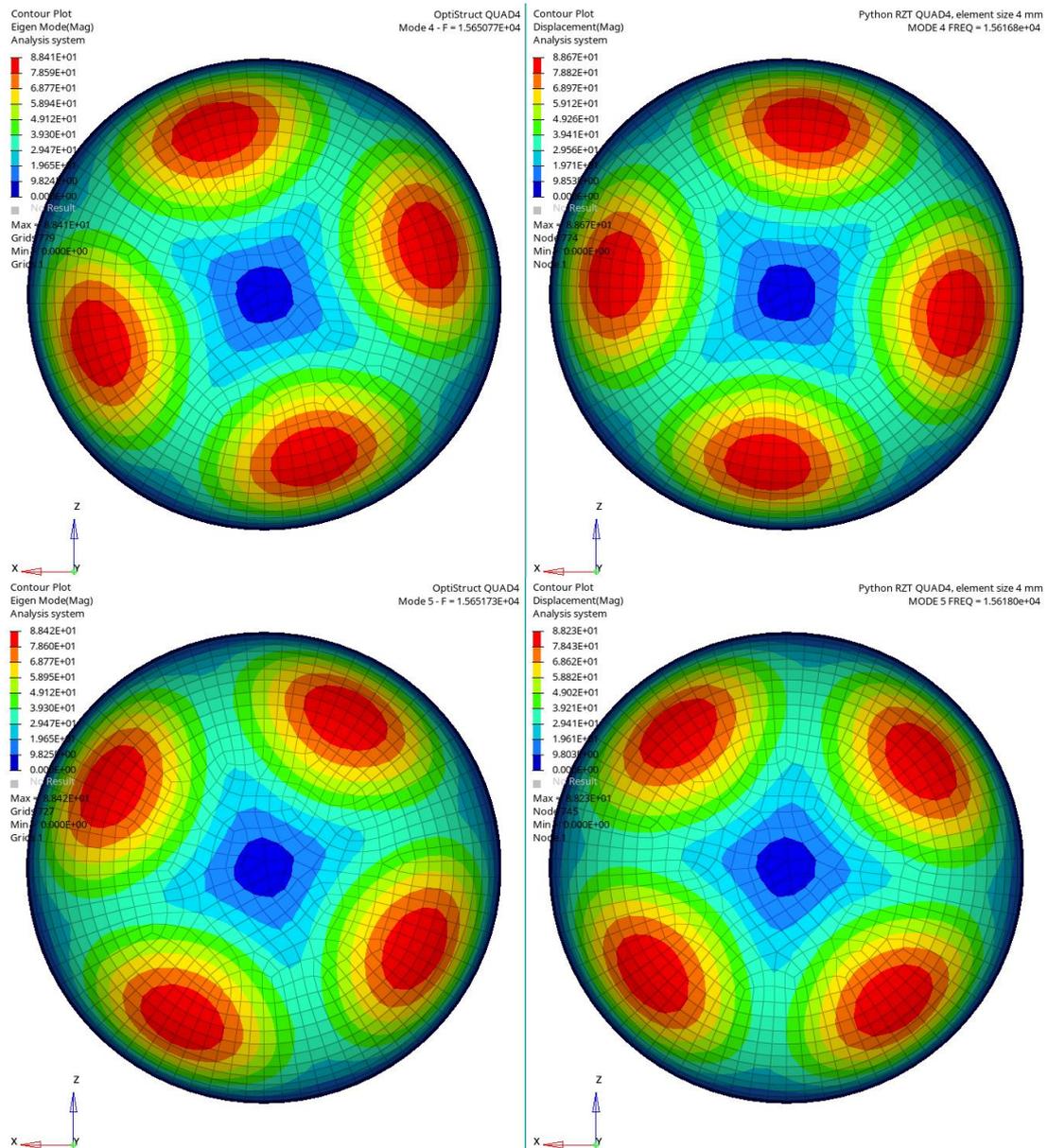


Figura 3.12 – Visualizzazione delle prime 5 forme modali della semisfera: confronto dei risultati OptiStruct FSDT QUAD4 (sinistra) e Python RZT QUAD4 (destra).

3.2 Convergenza

Per determinare le proprietà di convergenza dell'elemento finito proposto, si considera una piastra quadrata di dimensioni 200 mm x 200 mm x 1 mm, incastrata su un lato e soggetta ad una pressione uniformemente distribuita di 1 MPa, nel verso positivo dell'asse z. La Tabella 3.12 mostra la sequenza di laminazione e la Tabella 3.13 riporta le proprietà dei materiali della piastra.

$2h^{(k)}$ [mm]	Materiali	Orientazioni [deg]
[0.1/0.7/0.2]	[A/Ar/A]	-

Tabella 3.12 – Stacking sequence della piastra incastrata su un lato (la sequenza degli strati è nel verso delle z positive).

Materiali	ρ $\left[\frac{\text{ton}}{\text{mm}^3}\right]$	E [MPa]	G [MPa]	ν
A (Aluminium)	2.7E-09	73000	28077	0.3
Ar	2.7E-09	0.73	0.281	0.3

Tabella 3.13 – Densità e proprietà meccaniche dei materiali considerati.

La convergenza della soluzione FEM proposta alla soluzione analitica è quantificata attraverso l'errore percentuale di massima deflessione e prime tre frequenze proprie.

Inizialmente, si considera una piastra sottile ($a/2h=200$), e si impiegano mesh regolari (Figura 3.13).

Figura 3.14 - Figura 3.17 mostrano gli errori percentuali di deflessione massima e prime tre frequenze proprie, calcolate mediante codice Python, rispetto alle soluzioni analitiche, $E\%(w)$, $E\%(f_1)$, $E\%(f_2)$, $E\%(f_3)$, in funzione del numero di nodi, N_n , per gli schemi di discretizzazione utilizzati.

Figura 3.18 e Figura 3.19 rappresentano la deflessione e le prime tre forme modali per gli schemi di discretizzazione proposti, per una mesh ottenuta suddividendo ciascun lato in quattro parti.

È riportata una visualizzazione analoga per una mesh ottenuta suddividendo ciascun lato in 32 parti (Figura 3.20 e Figura 3.21).

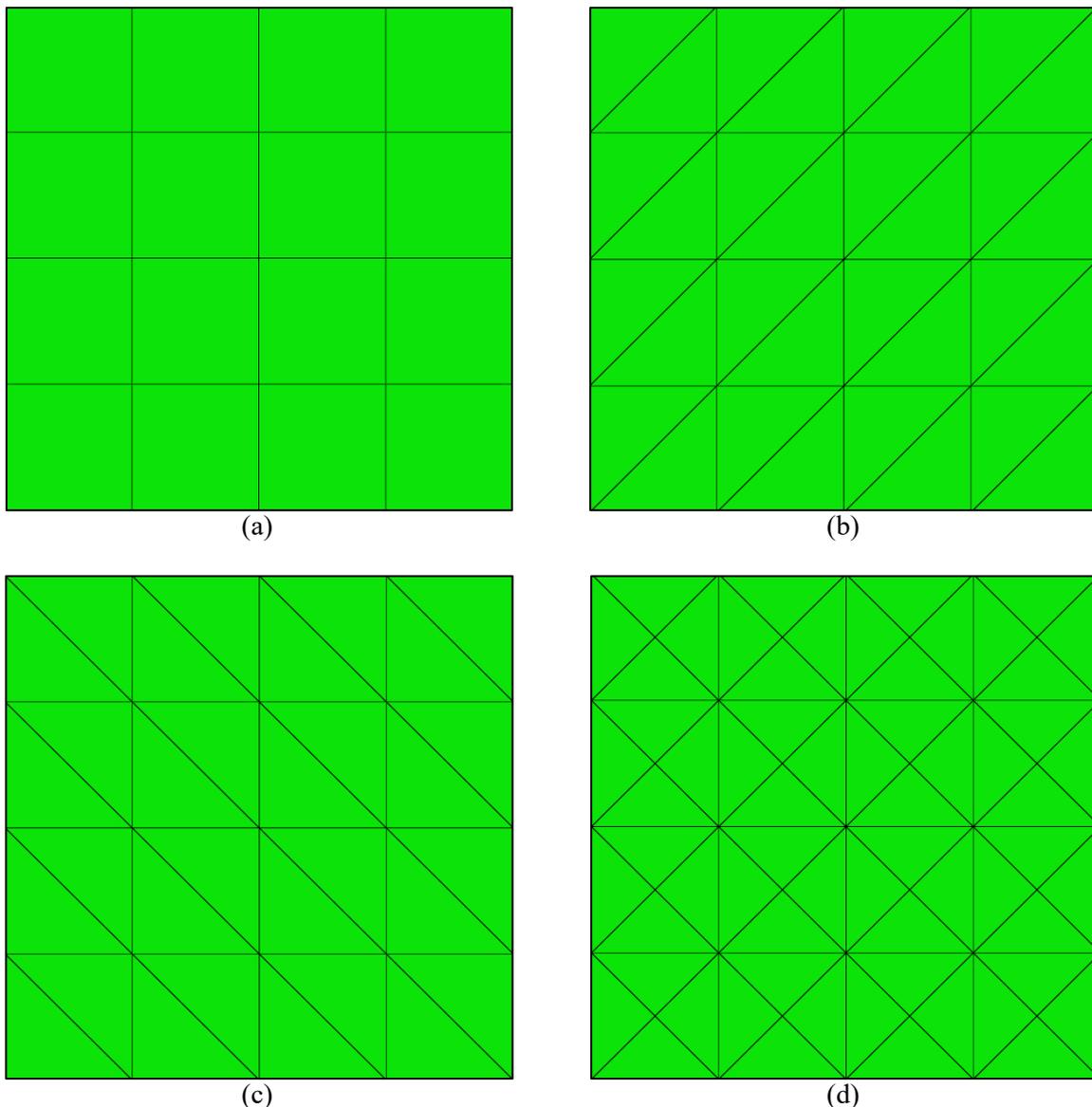


Figura 3.13 – Tipologie di mesh utilizzate per l'analisi di convergenza della piastra, caratterizzate da N_e = numero di suddivisioni per lato e N_n = numero totale di nodi: (a) mesh di elementi Quad ($N_e=4$, $N_n=25$), (b) mesh di elementi Tria(1) ($N_e=4$, $N_n=25$), (c) mesh di elementi Tria(2) ($N_e=4$, $N_n=25$), (d) mesh di elementi Tria(3) ($N_e=4$, $N_n=41$).

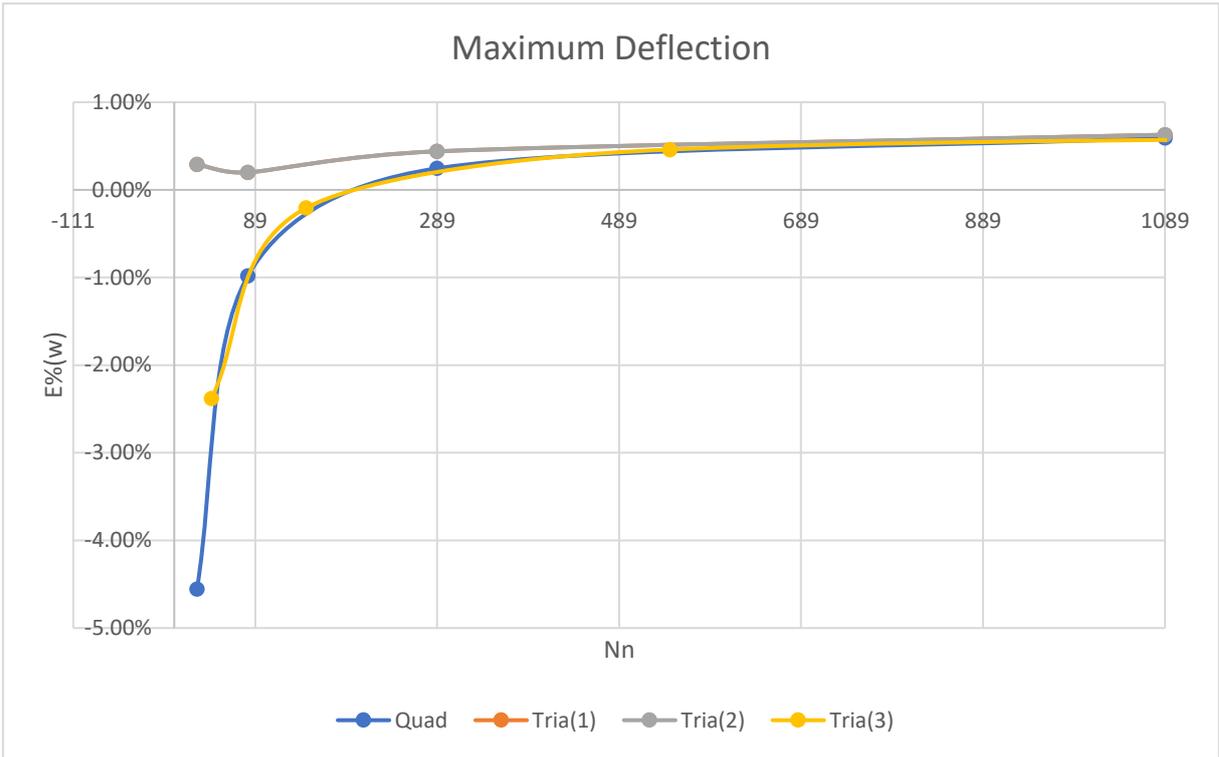


Figura 3.14 – Convergenza della deflessione massima FEM RZT a quella analitica RZT per gli schemi di mesh considerati.

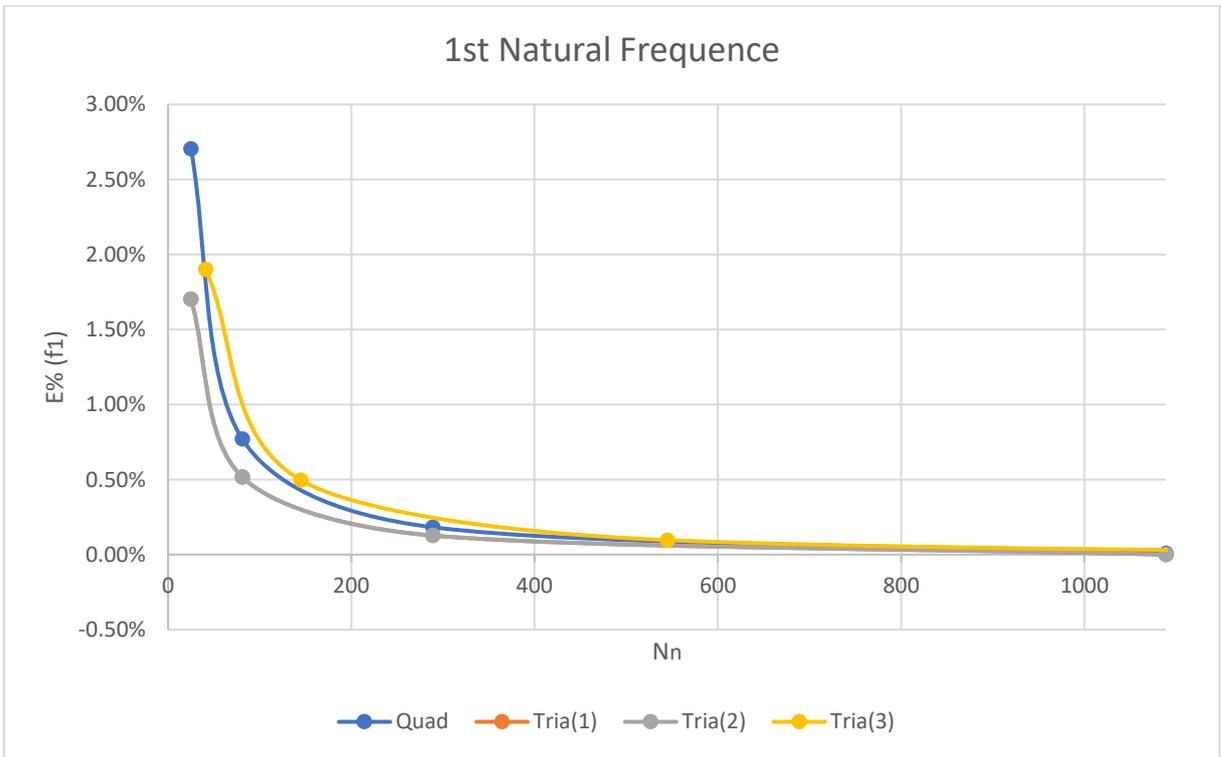


Figura 3.15 – Convergenza della prima frequenza propria FEM RZT a quella analitica RZT per gli schemi di mesh considerati.

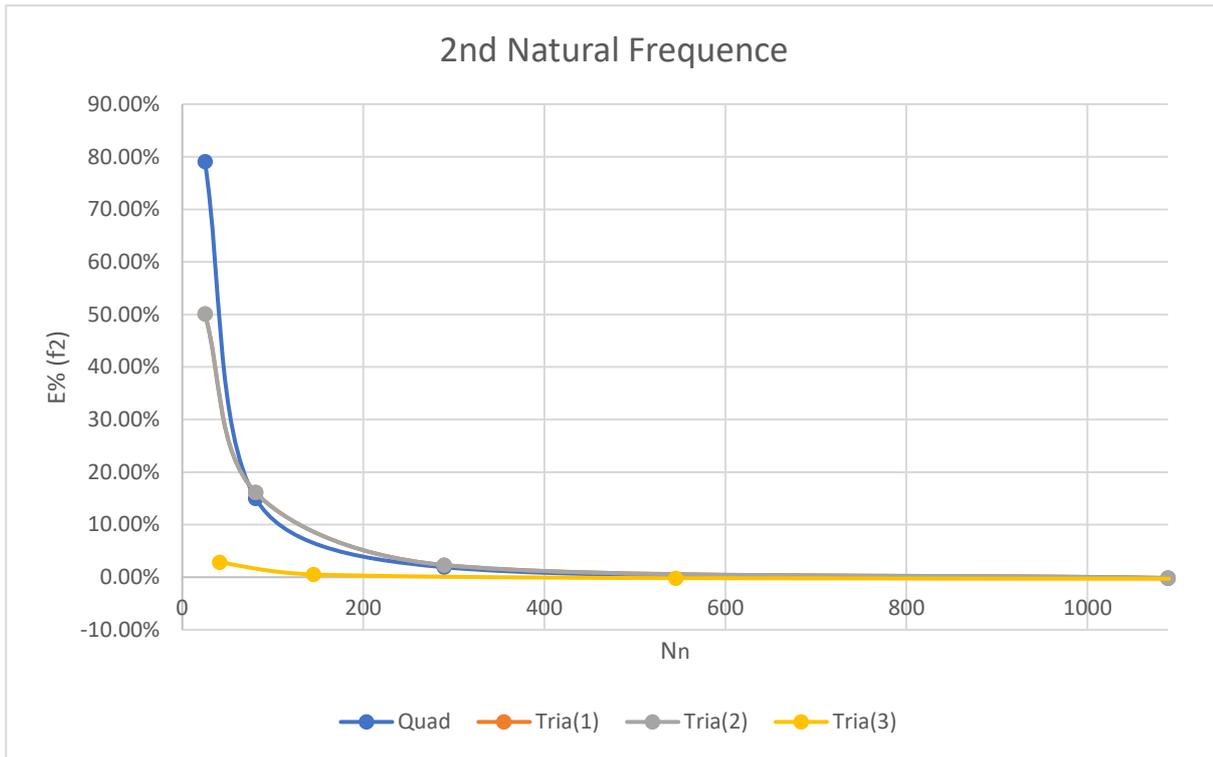


Figura 3.16 – Convergenza della seconda frequenza propria FEM RZT a quella analitica RZT per gli schemi di mesh considerati.

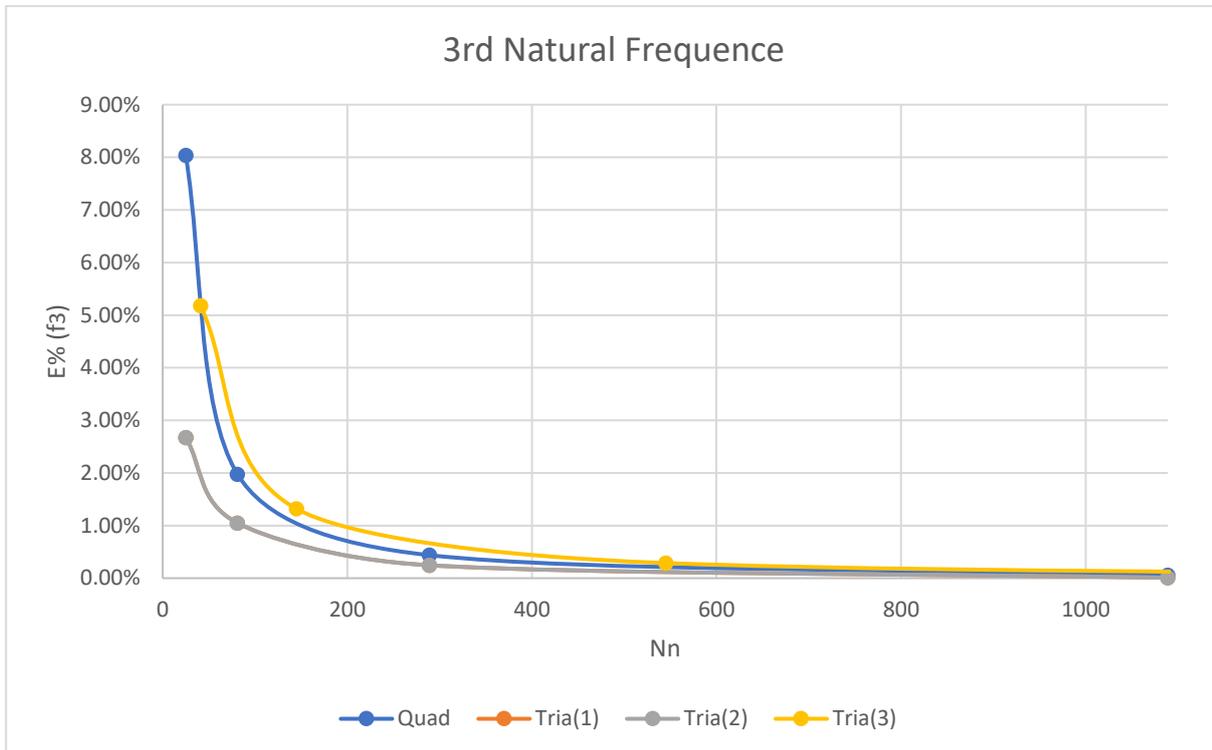
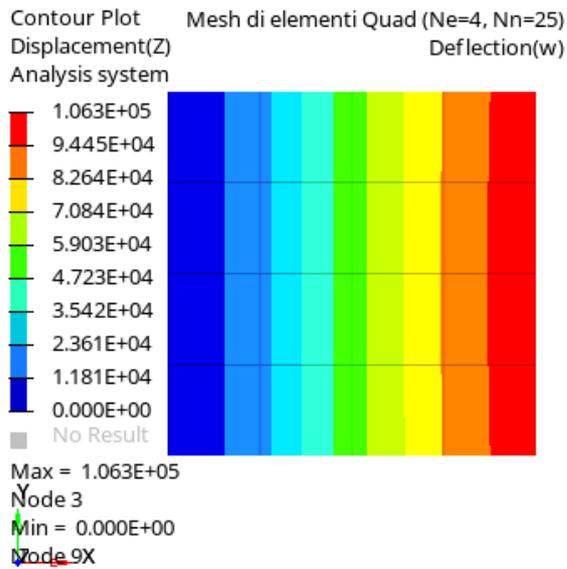


Figura 3.17 – Convergenza della terza frequenza propria FEM RZT a quella analitica RZT per gli schemi di mesh considerati.

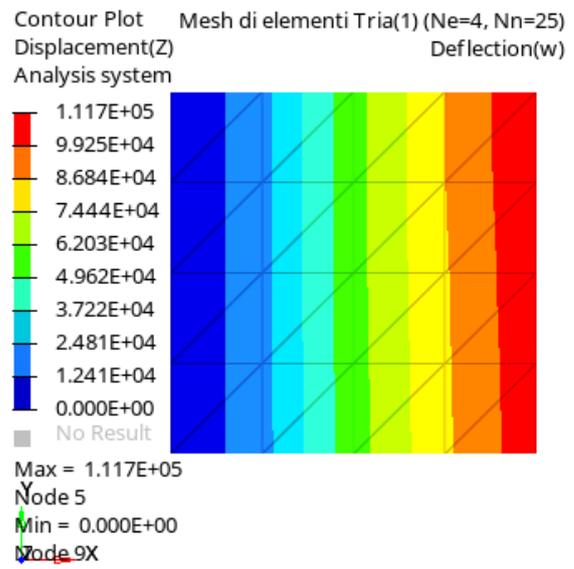
Dal momento che all'aumentare del numero di elementi finiti la rigidezza della piastra diminuisce, si osserva che le soluzioni FEM convergono correttamente alle soluzioni analitiche di riferimento: la deflessione converge dal basso e le frequenze naturali convergono dall'alto. Per l'errore percentuale della deflessione si osserva una variazione di segno, che viene interpretata come una maggiore

accuratezza della soluzione FEM rispetto alla soluzione analitica di riferimento: infatti, il metodo di Rayleigh-Ritz si basa su un'approssimazione di tipo globale delle funzioni incognite; tale approssimazione migliora all'aumentare dei termini impiegati nello sviluppo in serie fino ad un certo numero ottimale di funzioni della base.

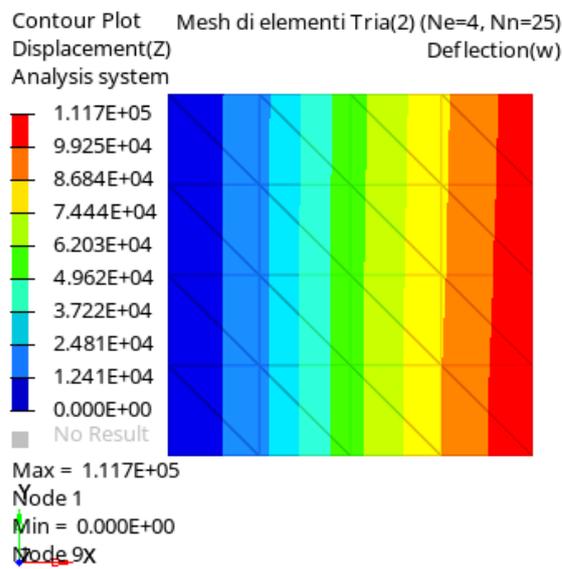
In generale, l'elemento Quad e l'elemento Tria(3) forniscono risultati piuttosto accurati anche per mesh rade.



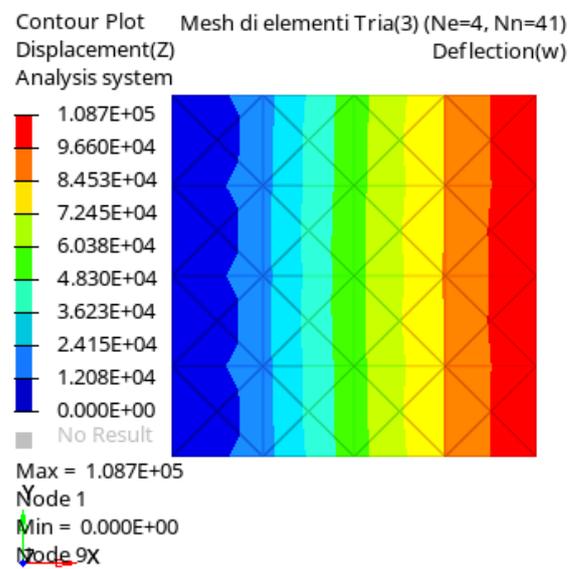
(a)



(b)

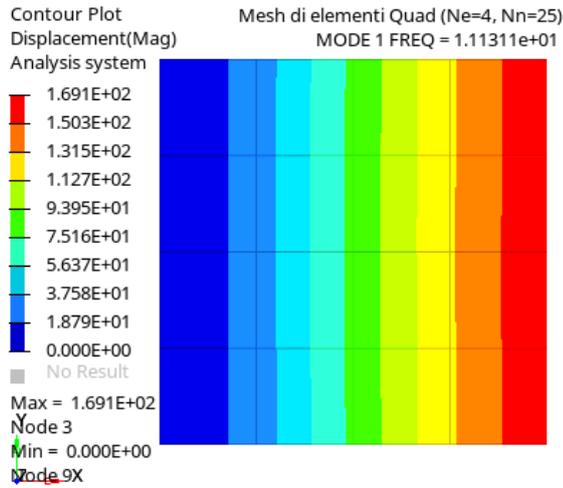


(c)

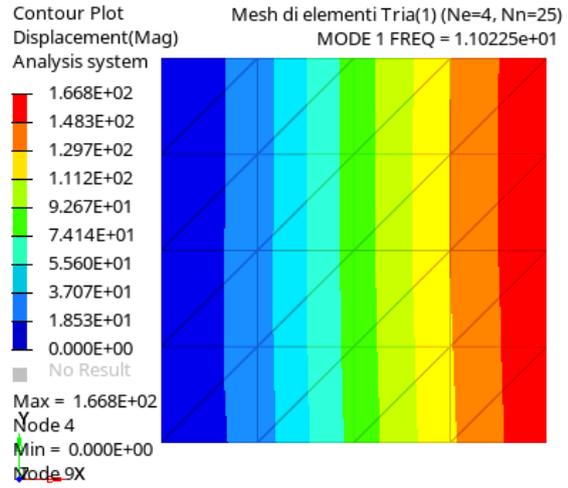


(d)

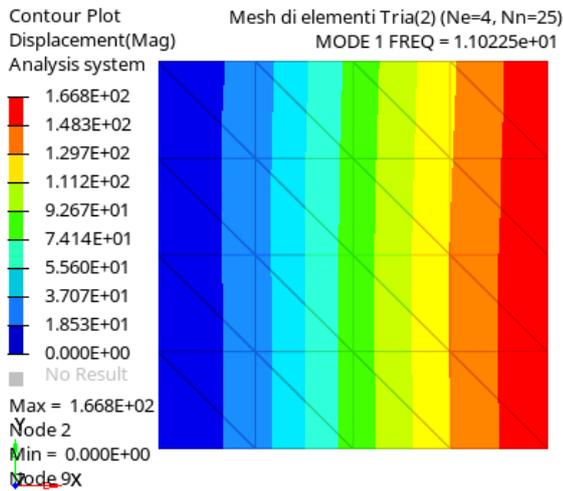
Figura 3.18 – Visualizzazione della deflessione per ciascuno schema di mesh proposto con $N_e=4$, $N_n=25$ ($N_n=41$ per la mesh di elementi Tria(3)).



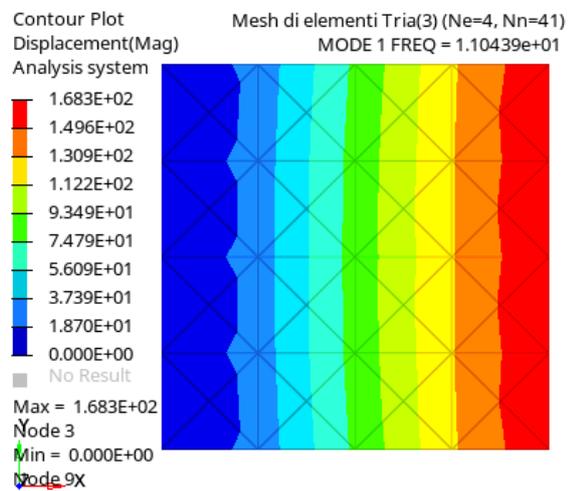
(a)



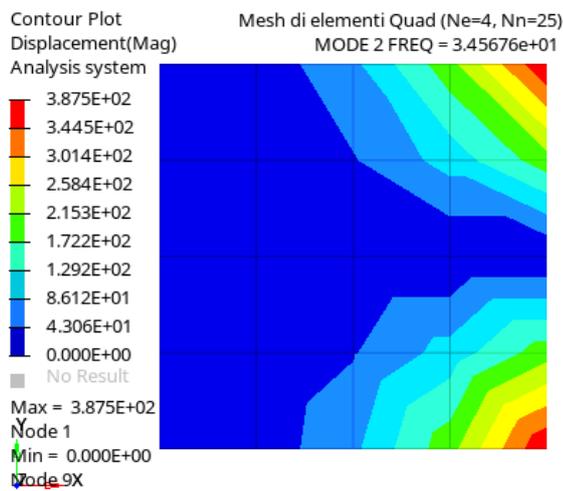
(b)



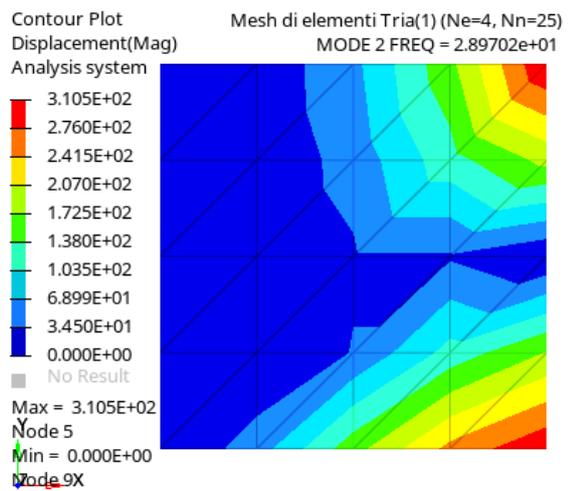
(c)



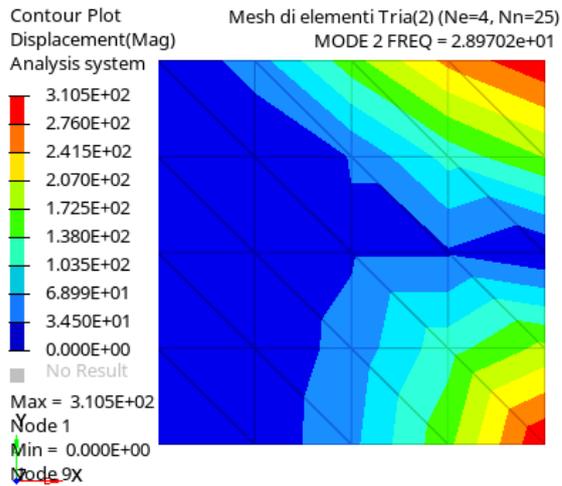
(d)



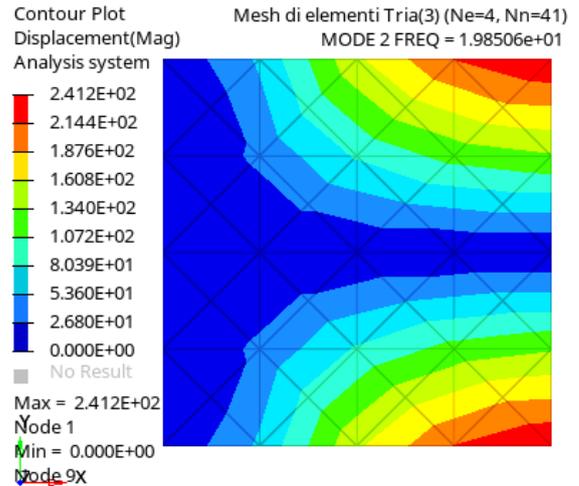
(e)



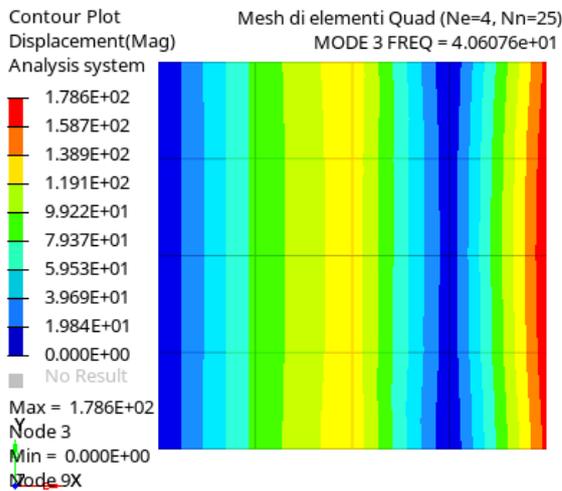
(f)



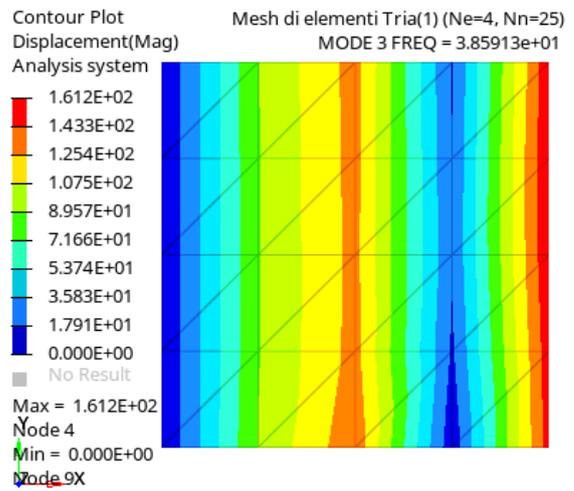
(g)



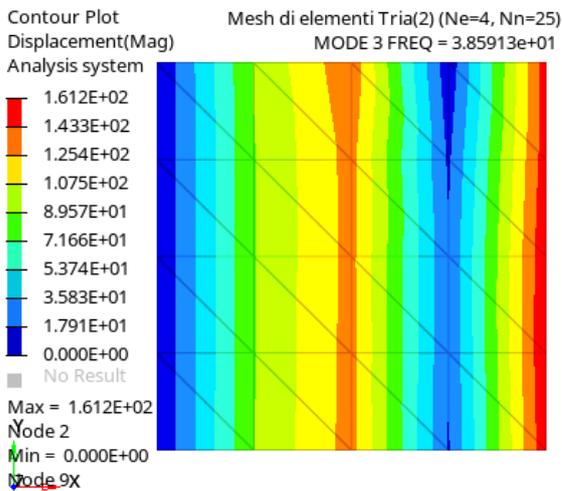
(h)



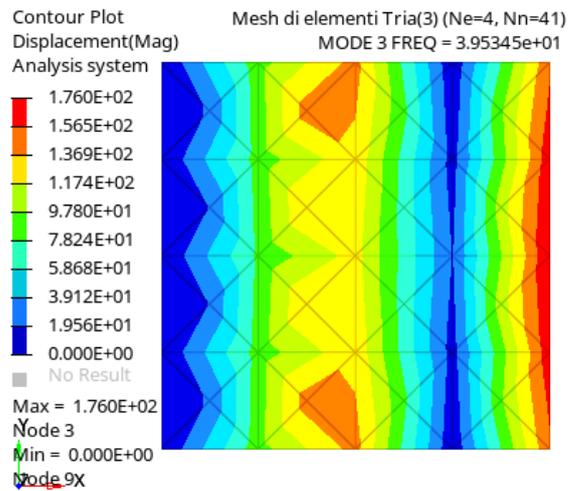
(i)



(j)

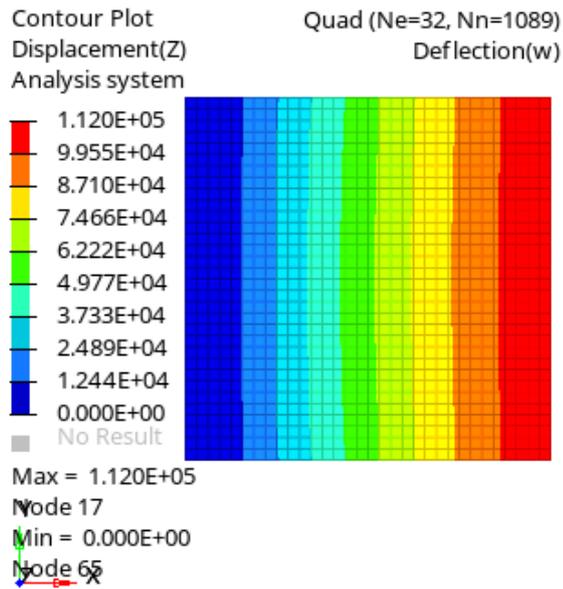


(k)

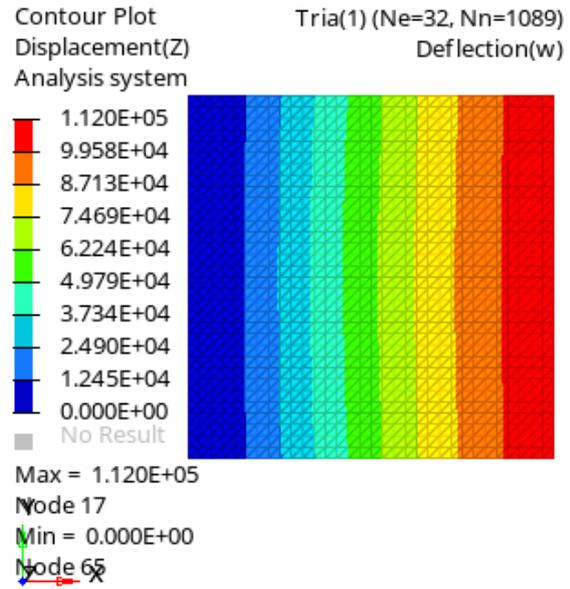


(l)

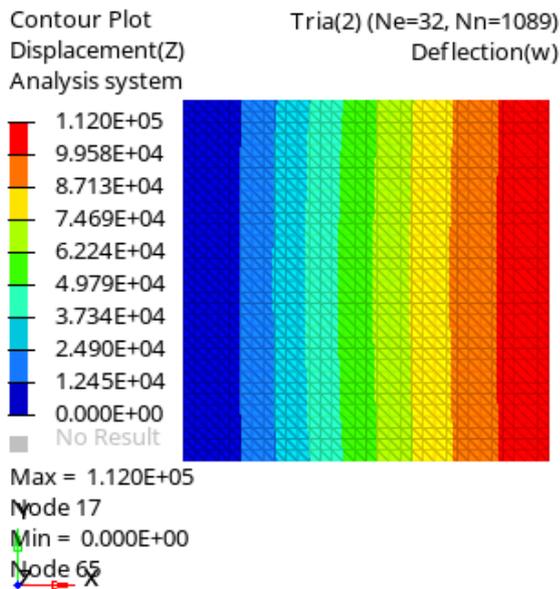
Figura 3.19 – Visualizzazione delle prime tre forme modali per ciascuno schema di mesh proposto con $N_e=4$, $N_n=25$ ($N_n=41$ per la mesh di elementi Tria(3)).



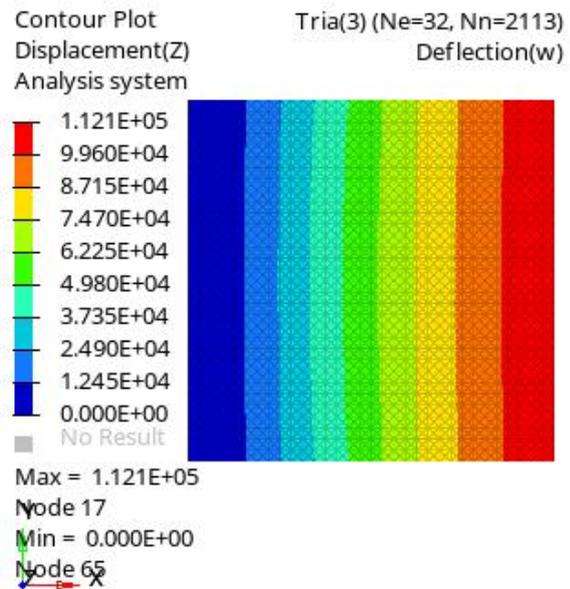
(a)



(b)

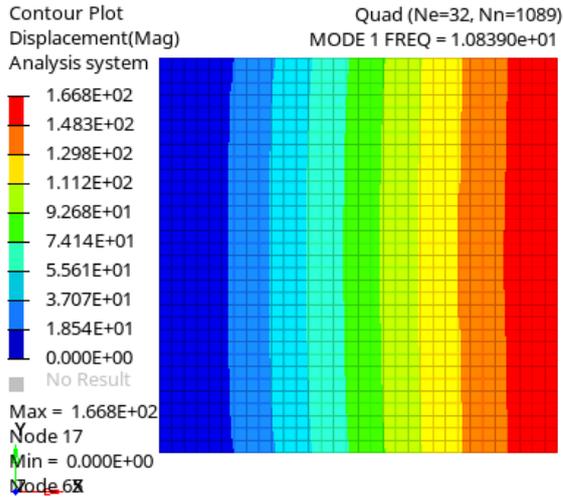


(c)

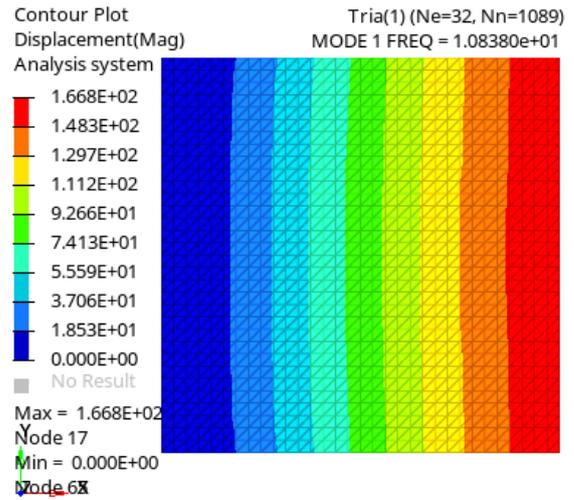


(d)

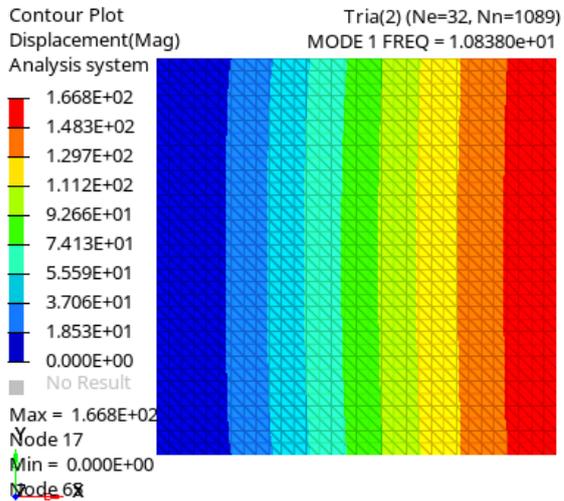
Figura 3.20 – Visualizzazione della deflessione per ciascuno schema di mesh proposto con $N_e=32$, $N_n=1089$ ($N_n=2113$ per la mesh di elementi Tria(3)).



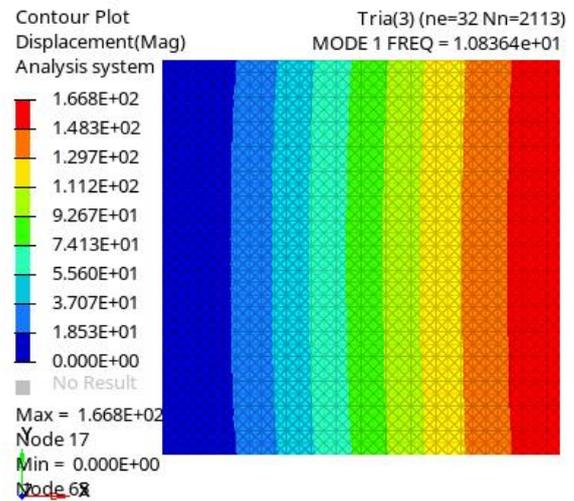
(a)



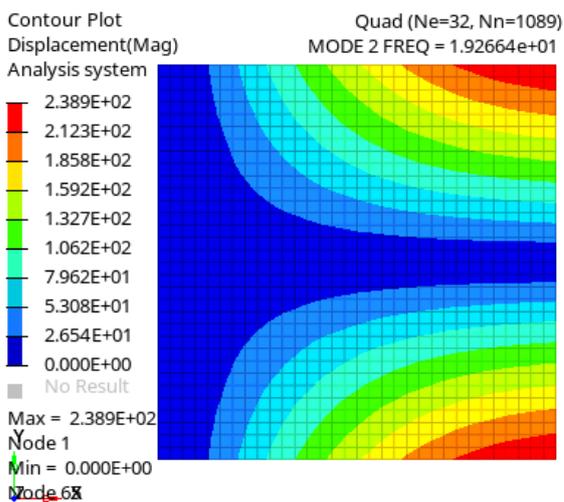
(b)



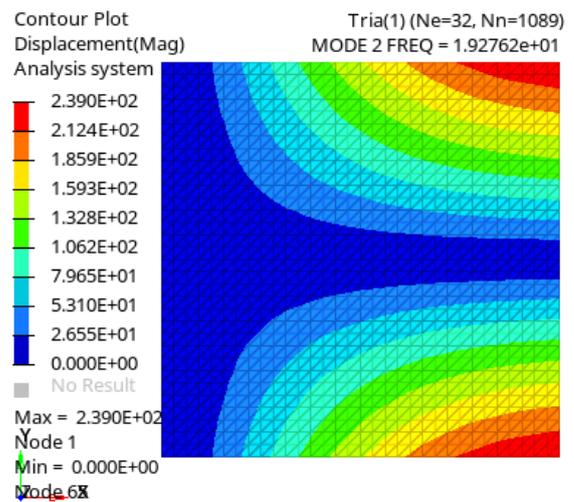
(c)



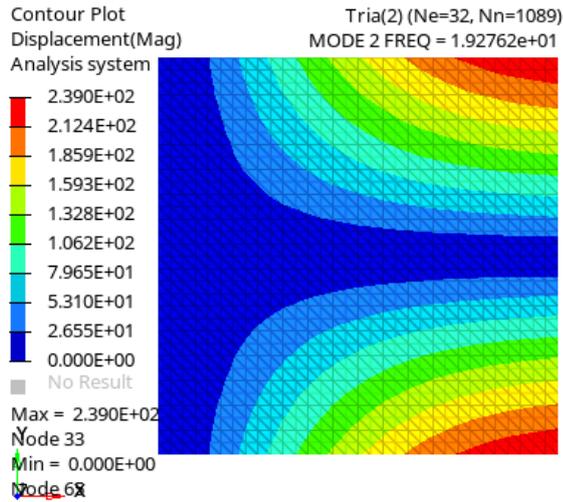
(d)



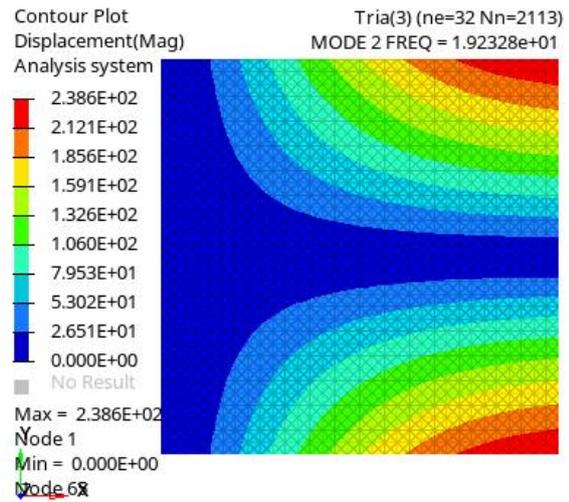
(e)



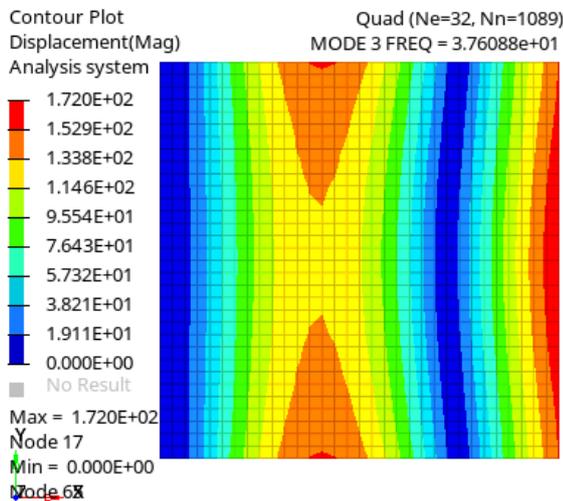
(f)



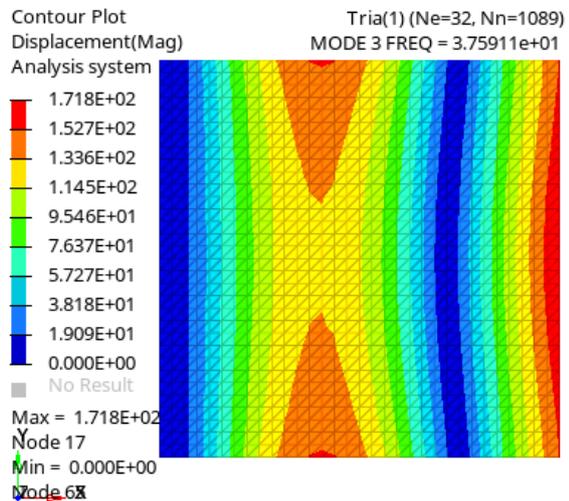
(g)



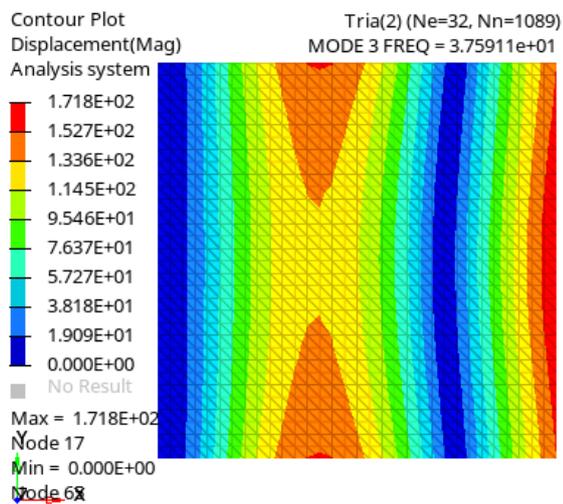
(h)



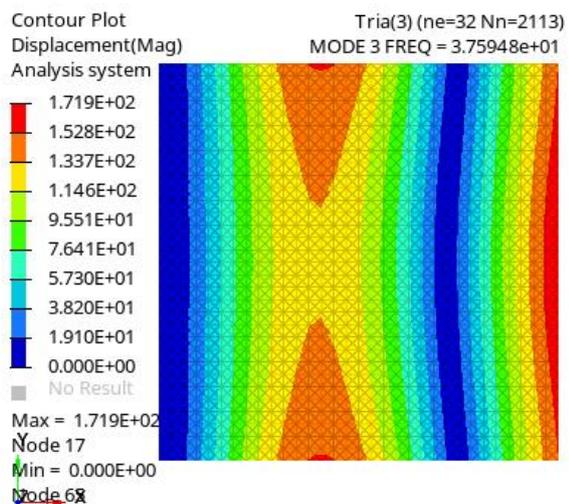
(i)



(j)



(k)



(l)

Figura 3.21 – Visualizzazione delle prime tre forme modali per ciascuno schema di mesh proposto con $N_e=32$, $N_n=1089$ ($N_n=2113$ per la mesh di elementi Tri(3)).

Per mesh dense, gli elementi mostrano performance simili.

I grafici mostrano che per mesh rade ($N_n=25$) la soluzione dipende fortemente dalla posizione dei nodi e dalla direzione di taglio degli elementi Quad in elementi Tria(1) o Tria(2); per mesh sufficientemente fitte ($N_n=289$) tutti gli schemi di discretizzazione considerati esibiscono un comportamento simile in termini di convergenza ed accuratezza, con un errore percentuale massimo nell'intorno dell'1%.

La stessa piastra viene incastrata sui quattro lati e soggetta ad una pressione uniformemente distribuita di 1 MPa, nel verso positivo dell'asse z.

In analogia con il caso precedente, Figura 3.22 - Figura 3.25 mostrano gli errori percentuali di deflessione massima e prime tre frequenze proprie, calcolate mediante codice Python, rispetto alle soluzioni analitiche, $E\%(w)$, $E\%(f_1)$, $E\%(f_2)$, $E\%(f_3)$, in funzione del numero di nodi, N_n , per i medesimi schemi di discretizzazione (Figura 3.13).

Figura 3.26 e Figura 3.27 rappresentano la deflessione e le prime tre forme modali per gli schemi di discretizzazione proposti, per una mesh ottenuta suddividendo ciascun lato in otto parti.

È riportata una visualizzazione analoga per una mesh ottenuta suddividendo ciascun lato in 64 parti (Figura 3.28 e Figura 3.29).

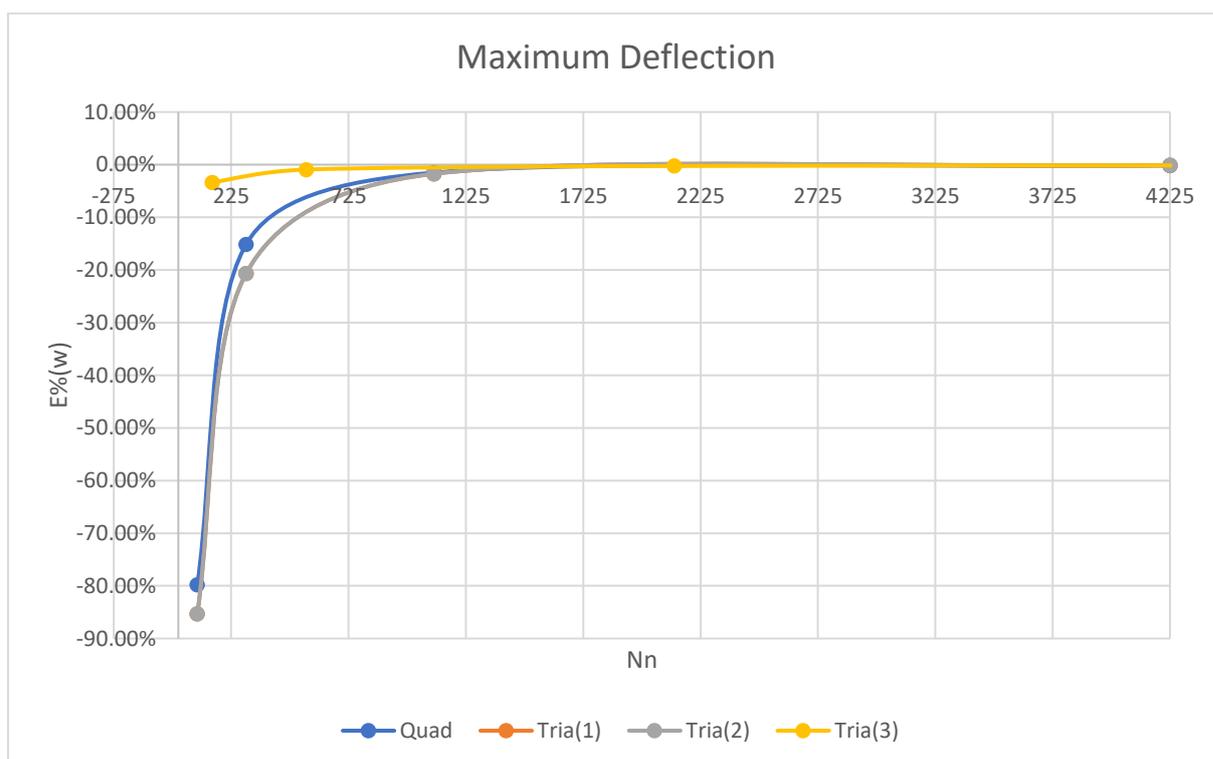


Figura 3.22 – Convergenza della deflessione massima FEM RZT a quella analitica RZT per gli schemi di mesh considerati.

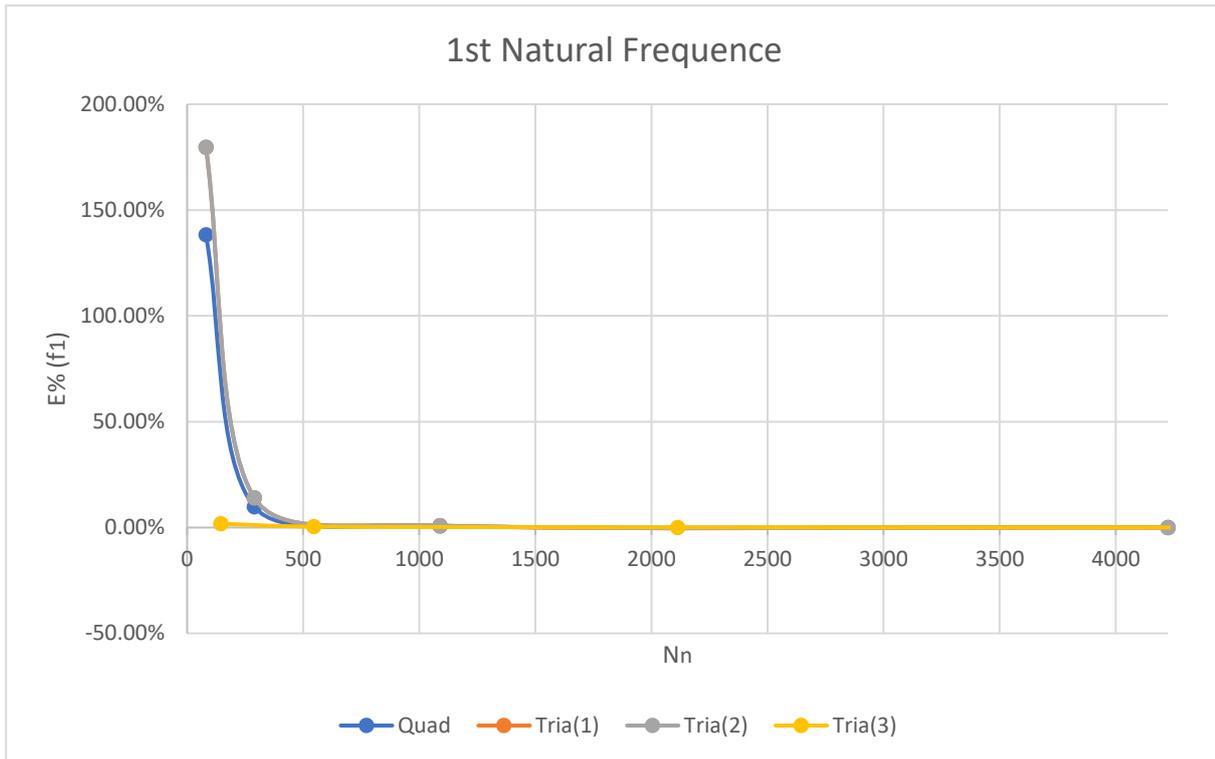


Figura 3.23 – Convergenza della prima frequenza propria FEM RZT a quella analitica RZT per gli schemi di mesh considerati.

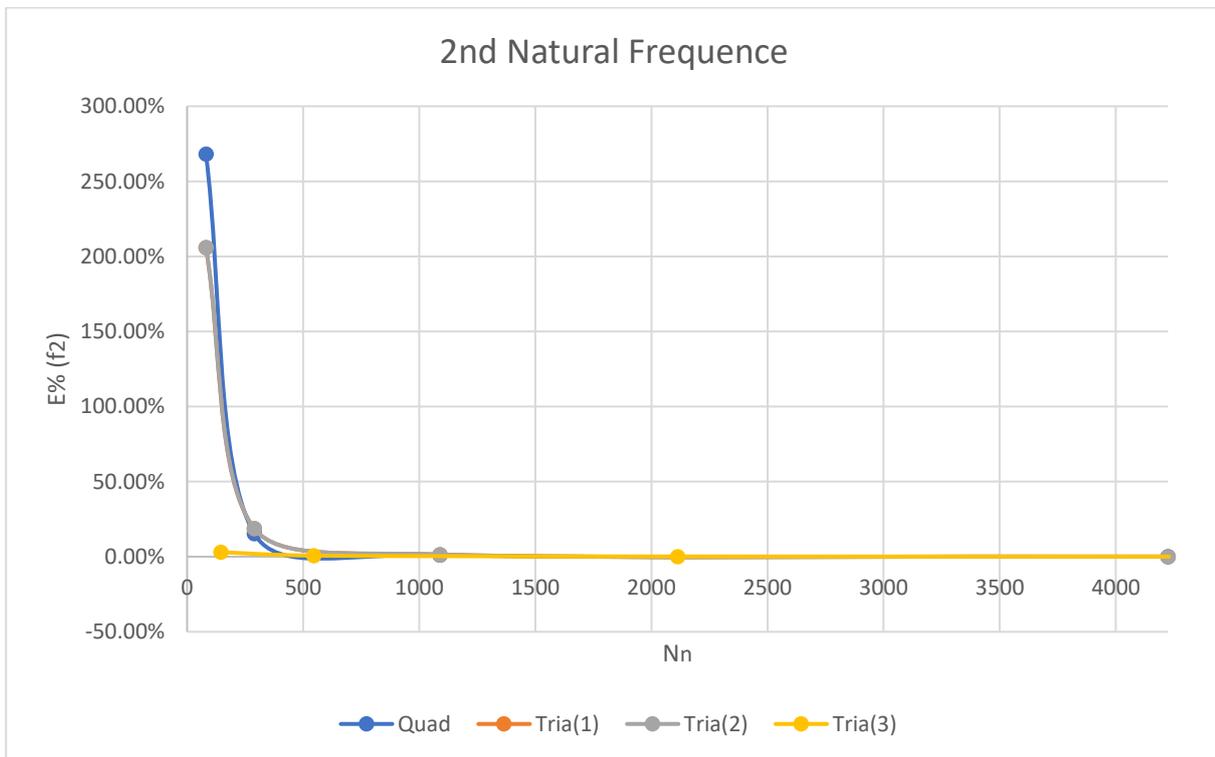


Figura 3.24 – Convergenza della seconda frequenza propria FEM RZT a quella analitica RZT per gli schemi di mesh considerati.

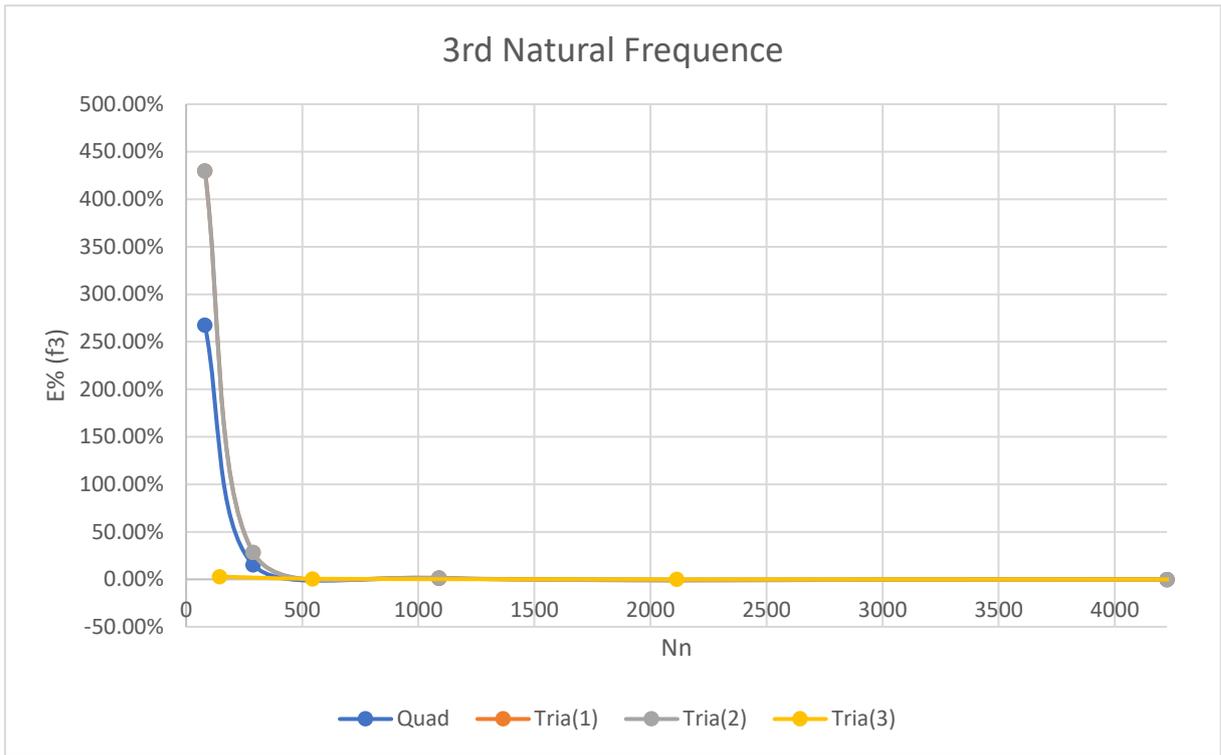
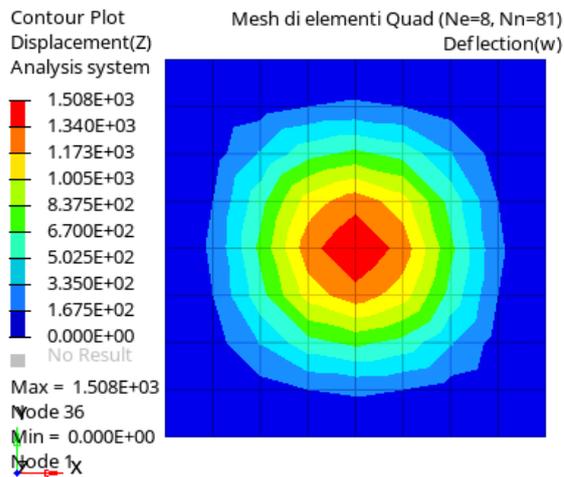
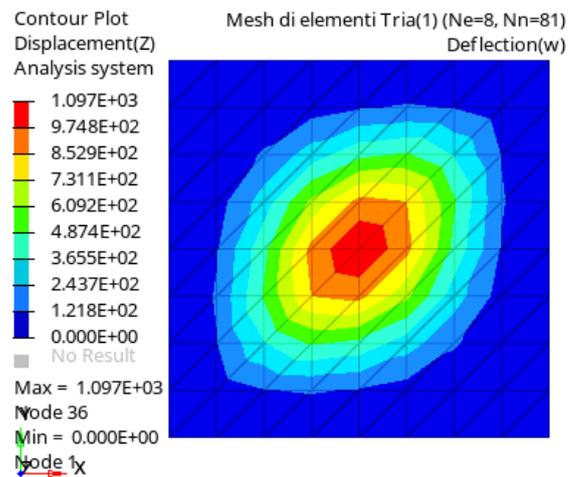


Figura 3.25 – Convergenza della terza frequenza propria FEM RZT a quella analitica RZT per gli schemi di mesh considerati.

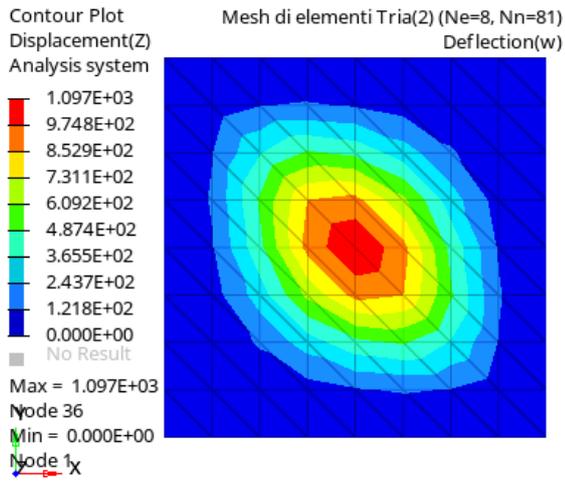
Questo secondo esempio conferma che gli elementi Quad e gli elementi Tria(3) mostrano maggiori velocità di convergenza ed accuratezza.



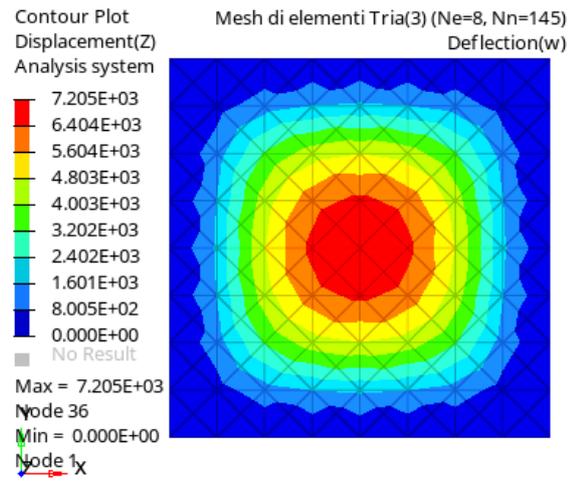
(a)



(b)

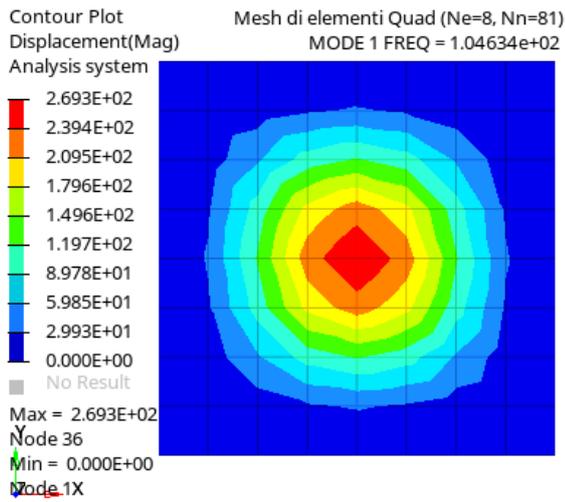


(c)

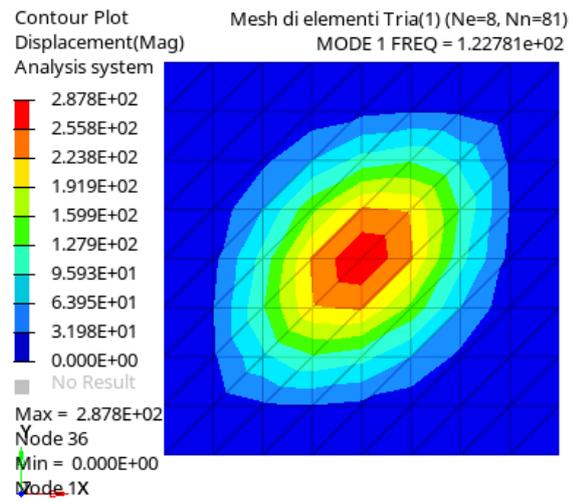


(d)

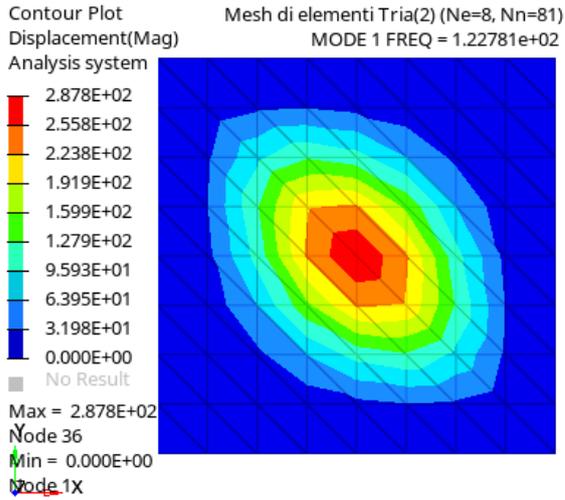
Figura 3.26 – Visualizzazione della deflessione per ciascuno schema di mesh proposto con $N_e=8$, $N_n=81$ ($N_n=145$ per la mesh di elementi Tria(3)).



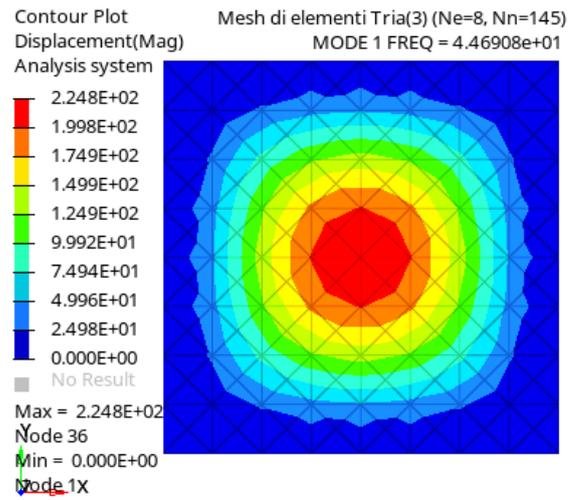
(a)



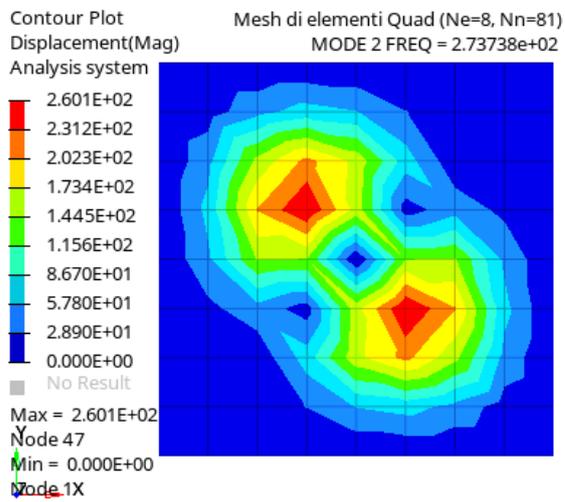
(b)



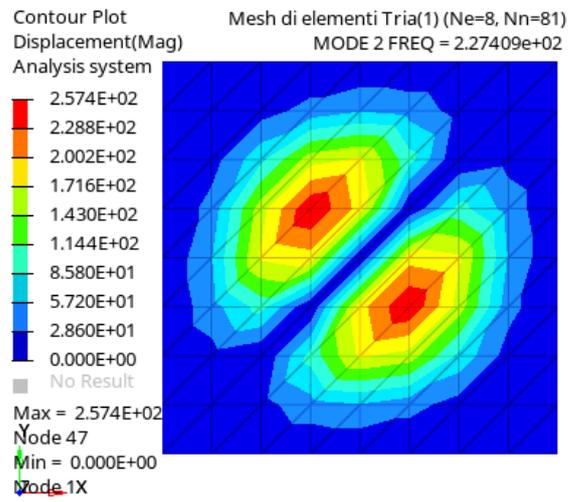
(c)



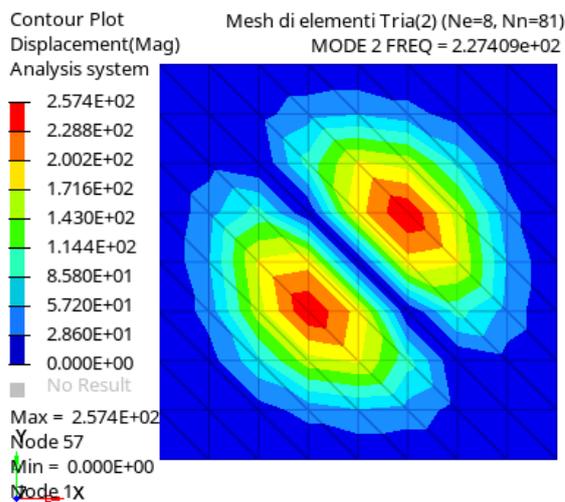
(d)



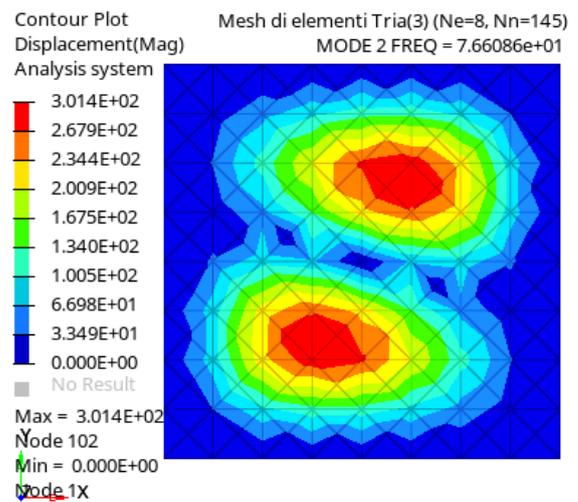
(e)



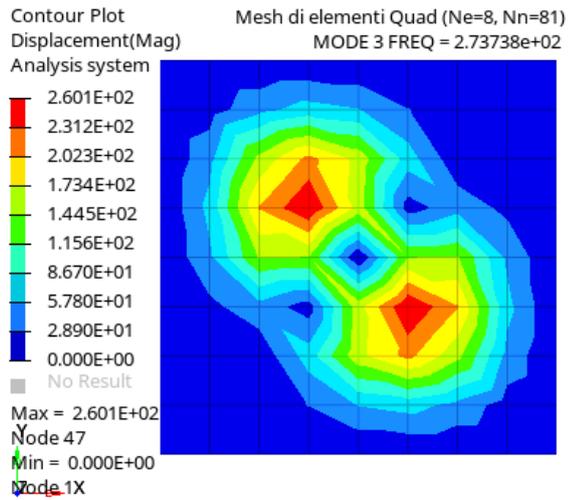
(f)



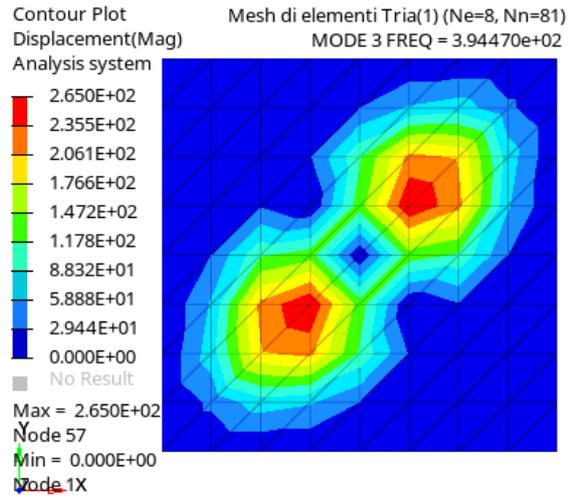
(g)



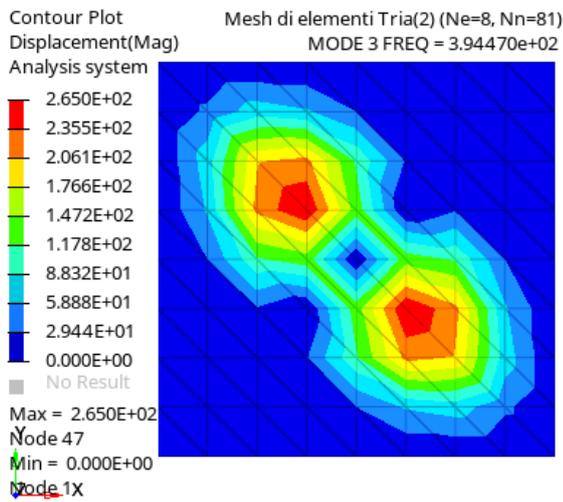
(h)



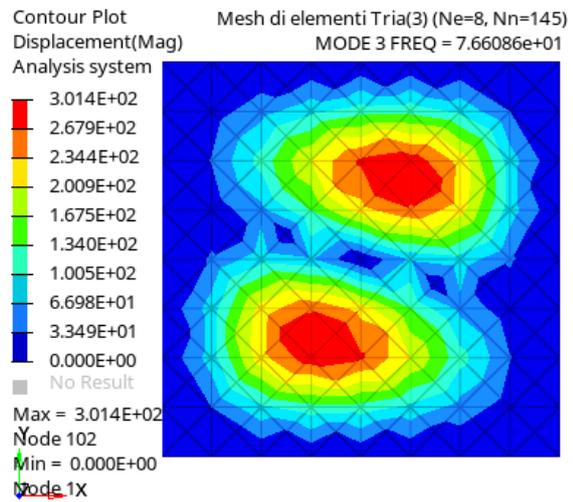
(i)



(j)

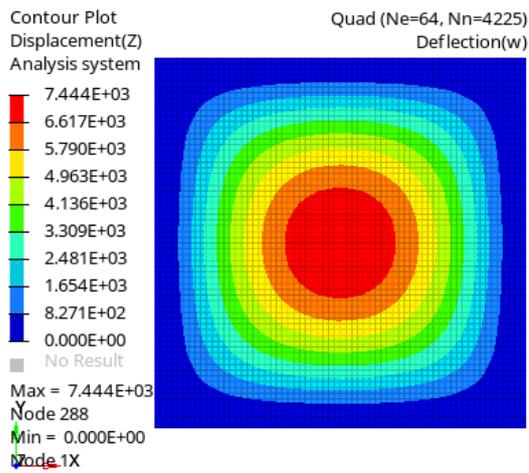


(k)

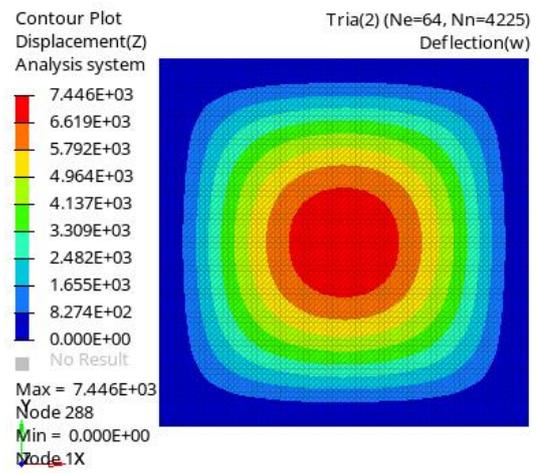


(l)

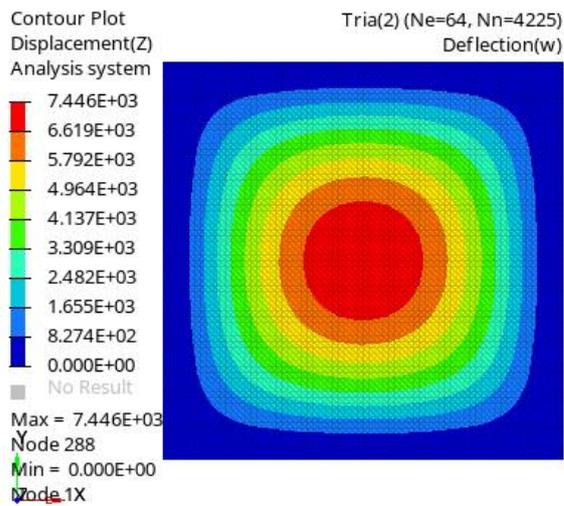
Figura 3.27 – Visualizzazione delle prime tre forme modali per ciascuno schema di mesh proposto con $N_e=8$, $N_n=81$ ($N_n=145$ per la mesh di elementi Tria(3)).



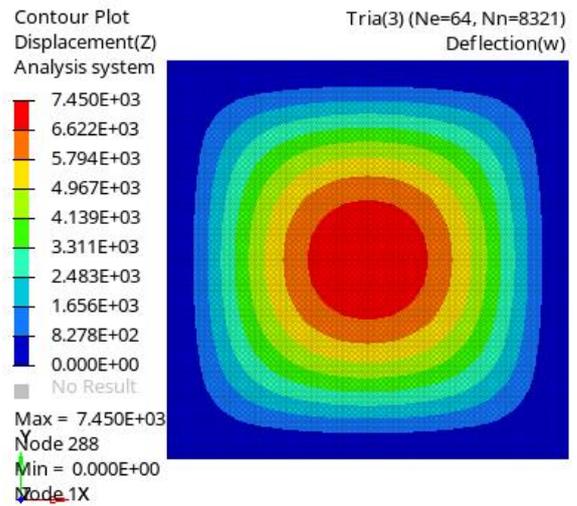
(a)



(b)

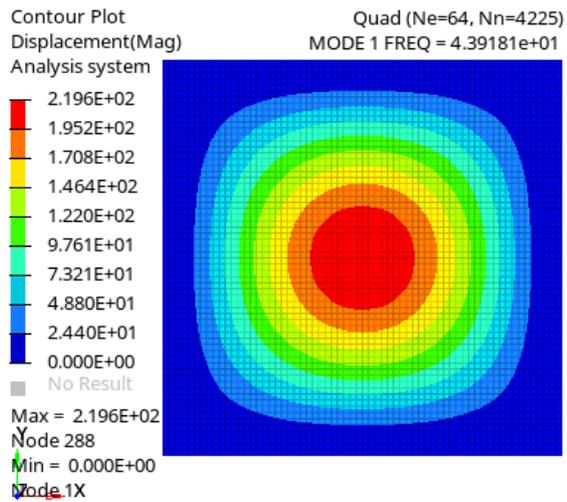


(c)

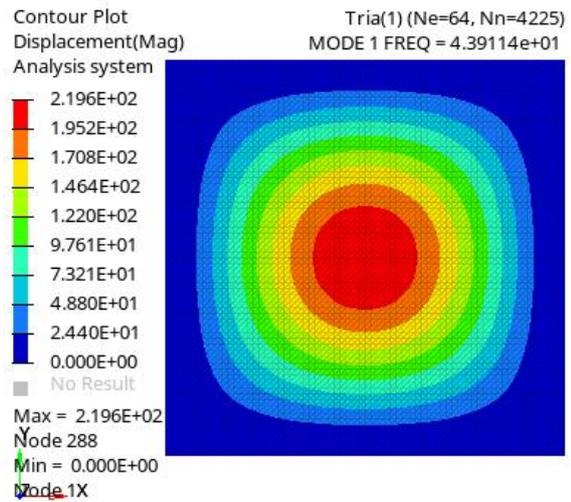


(d)

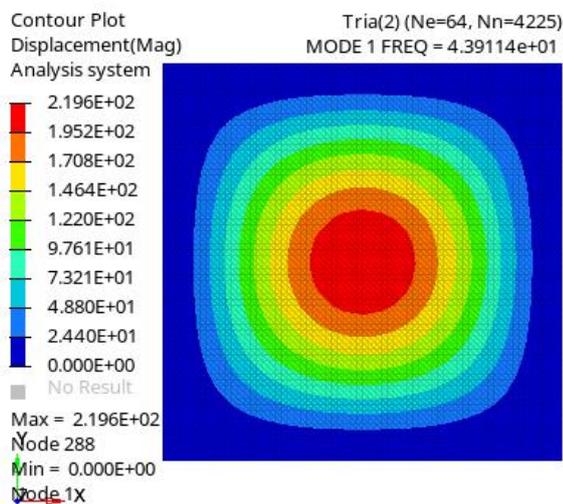
Figura 3.28 – Visualizzazione della deflessione per ciascuno schema di mesh proposto con $N_e=64$, $N_n=4225$ ($N_n=8321$ per la mesh di elementi Tria(3)).



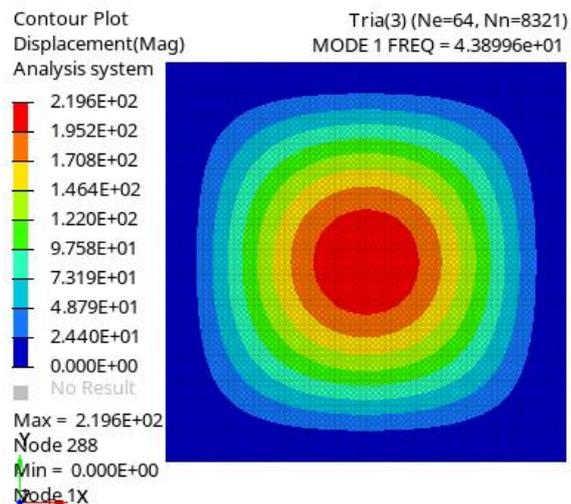
(a)



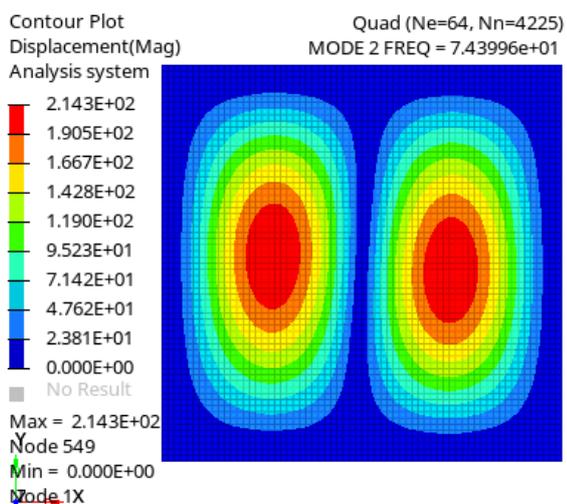
(b)



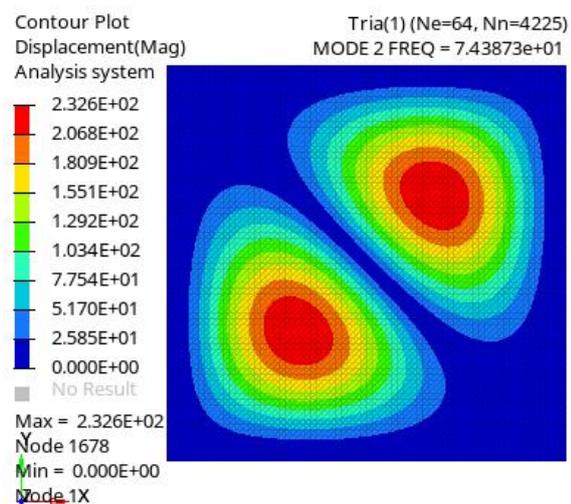
(c)



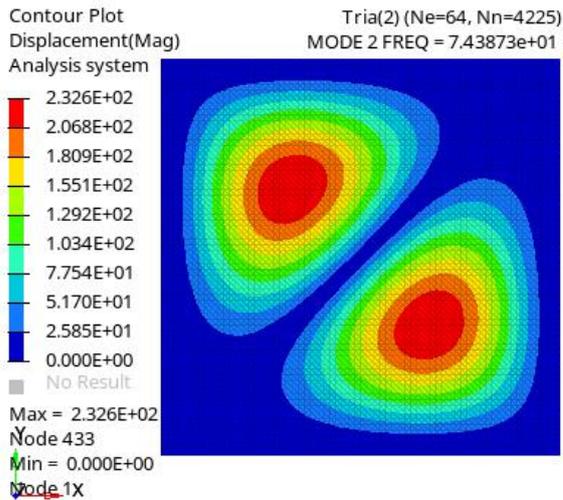
(d)



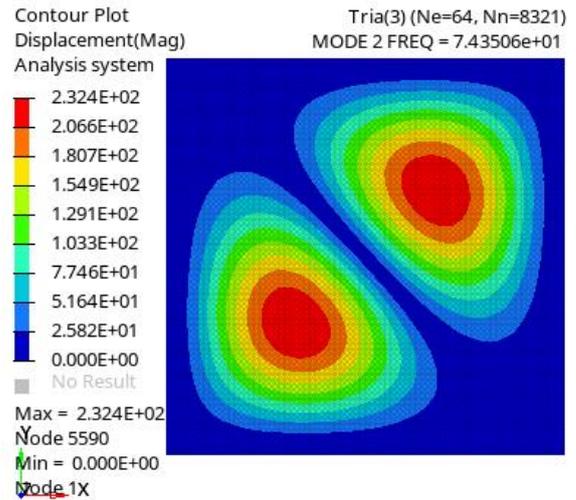
(e)



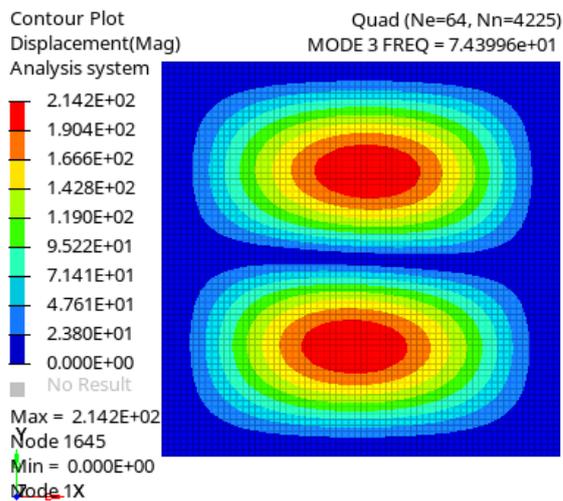
(f)



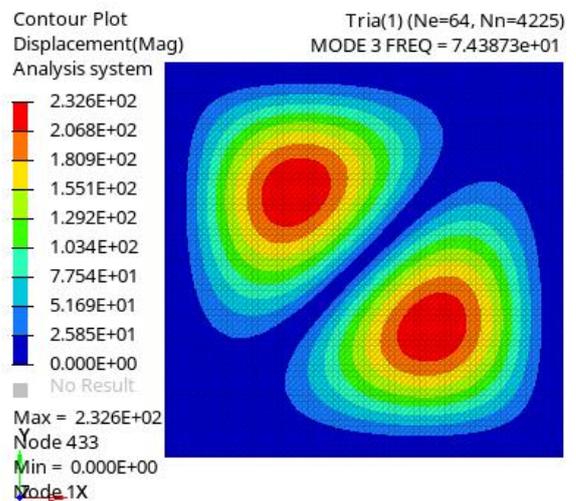
(g)



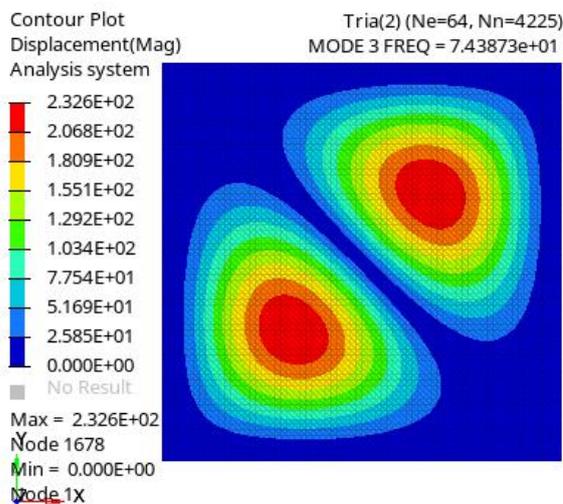
(h)



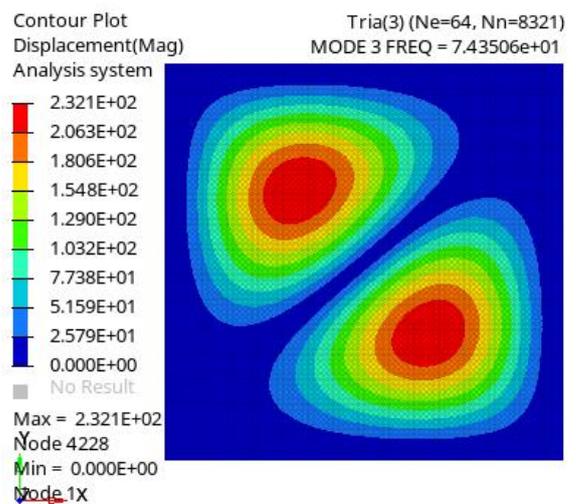
(i)



(j)



(k)



(l)

Figura 3.29 – Visualizzazione delle prime tre forme modali per ciascuno schema di mesh proposto con $N_e=64$, $N_n=4225$ ($N_n=8321$ per la mesh di elementi Tria(3)).

Lo studio condotto evidenzia una convergenza più lenta per la condizione di vincolo di incastro su quattro lati. Infatti, si osserva un errore percentuale nell'intorno dell'1% per mesh con $N_e=16$ per la piastra cantilever e per mesh con $N_e=32$ per la piastra incastrata sui quattro lati.

In generale, i risultati ottenuti impiegando il nuovo elemento finito shell sono considerati ampiamente soddisfacenti e rappresentano un'interessante alternativa agli elementi finiti attualmente disponibili.

3.3 Confronto

Nella sezione *confronto*, vengono considerate geometrie piane e curve per valutare le capacità predittive dell'elemento finito sviluppato per materiali compositi laminati o sandwich, che esibiscono elevata anisotropia trasversale, flessibilità a taglio trasversale ed eterogeneità. Vengono calcolate risposta statica, frequenze proprie e distribuzioni attraverso lo spessore delle componenti dello spostamento nel piano, delle deformazioni e tensioni normali nel piano e delle deformazioni e tensioni di taglio trasversali. Infine, viene investigato l'effetto dell'impiego di mesh distorte per la piastra cantilever studiata nel paragrafo precedente.

Le performance dell'elemento finito vengono valutate mediante l'analisi statica e l'analisi modale di una semisfera di raggio medio 50 mm e spessore 4 mm, caratterizzata dalla struttura sandwich riportata in Tabella 3.14. Il carico è una forza concentrata di intensità 10 N, applicata in direzione opposta all'asse y, nel nodo di coordinata y maggiore; il vincolo è un incastro sulla circonferenza massima. I risultati sono quelli dei modelli discretizzati mediante elementi finiti shell QUAD4 RZT e MQ9RZT ed elementi finiti 3D HEXA8. Le proprietà dei modelli agli elementi finiti shell e 3D sono riportate in Tabella 3.16. Il carico viene suddiviso tra le due facce esterne del modello 3D, in modo da evitare l'effetto di deformazione lungo lo spessore del laminato, che non è tenuto in conto nella presente trattazione. La soluzione statica è lo spostamento lungo l'asse y del piano medio del modello 3D nel punto di applicazione del carico. I risultati sono riportati in Tabella 3.17 e Tabella 3.18.

$2h^{(k)}$ [mm]	Materiali	Orientazioni [deg]
[1/2/1]	[A/B/A]	-

Tabella 3.14 – Stacking sequence della semisfera incastrata alla base (la sequenza degli strati è nel verso delle z positive).

Materiali	ρ $\left[\frac{ton}{mm^3}\right]$	E [MPa]	G [MPa]	ν
A	7.85E-09	210000	80769.23	0.3
B	1.3-09	50	16.77852	0.49

Tabella 3.15 – Densità e proprietà meccaniche dei materiali considerati.

	Quad	Hexa
Numero di suddivisioni lungo la circonferenza alla base	78	314
Numero di suddivisioni lungo lo spessore di ogni strato	1	[3/4/3]
Numero di elementi	1237	197330
Numero di gdl	11493	1969209

Tabella 3.16 - Proprietà dei modelli agli elementi finiti impiegati per l'analisi statica e modale della semisfera.

Spostamento massimo [mm]	OptiStruct Hexa	MQ9RZT	Python RZT Quad
ν	-4.909e-04	-4.576E-04	-4.592E-04

Tabella 3.17 – Componente lungo l'asse y dello spostamento nel nodo di coordinate (100 mm, 150 mm, 100 mm) della semisfera di raggio medio 50 mm ed origine (100 mm, 100 mm, 100 mm): risultati dei modelli con elementi HEXA8 di OptiStruct, elementi MQ9RZT ed elementi RZT QUAD4 del codice sviluppato in Python.

Frequenza propria [Hz]	OptiStruct Hexa	MQ9RZT	Python RZT Quad
f_1	8735.538	8784.411	8784.29
f_2	8735.795	8784.781	8784.56
f_3	11766.84	11808.13	11806.2
f_4	13765.62	13780.93	13787.4
f_5	13766.3	13795.77	13821.3

Tabella 3.18 – Frequenze naturali della semisfera: risultati dei modelli con elementi HEXA8 di OptiStruct, elementi MQ9RZT ed elementi RZT QUAD4 del codice sviluppato in Python.

Errore percentuale [%]	MQ9RZT	Python RZT Quad
$E\%(v)$	-6.78	-6.46
$E\%(f_1)$	0.56	0.56
$E\%(f_2)$	0.56	0.56
$E\%(f_3)$	0.35	0.33
$E\%(f_4)$	0.11	0.40
$E\%(f_5)$	0.21	0.40

Tabella 3.19 – Errori percentuali sulla componente lungo l'asse y dello spostamento e sulle frequenze naturali dei modelli shell RZT considerati rispetto a quello HEXA8 di OptiStruct.

In Figura 3.30 e Figura 3.31 sono mostrati lo spostamento del piano medio lungo l'asse y e i modi propri di vibrare della semisfera presa in esame.

Lo spostamento lungo l'asse y viene valutato in maniera sufficientemente accurata: l'errore percentuale è pari al -6.5% per una mesh moderatamente densa e un materiale con elevata eterogeneità trasversale.

Gli errori percentuali sulle prime cinque frequenze proprie sono inferiori all'1%.

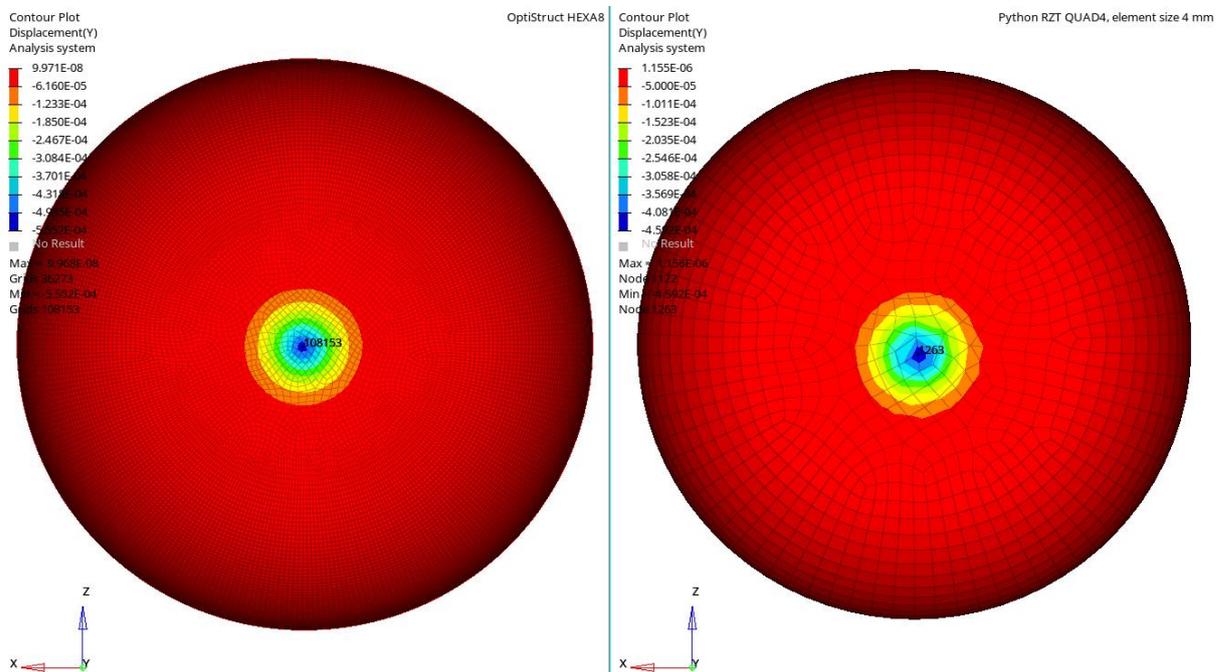
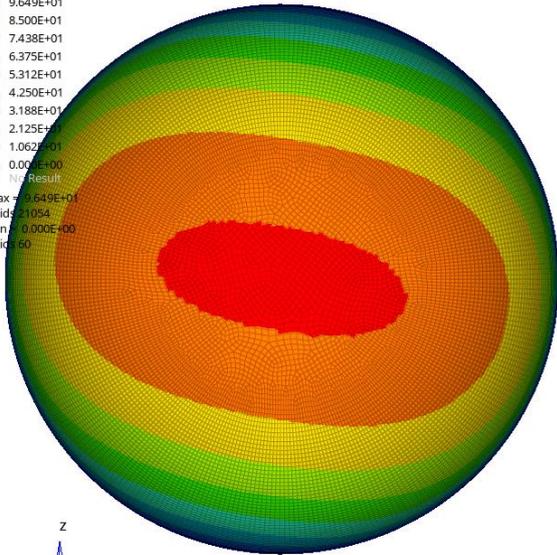


Figura 3.30 – Visualizzazione dello spostamento lungo l'asse y della semisfera soggetta a carico concentrato di compressione: confronto dei risultati OptiStruct HEXA8 (sinistra) e Python RZT QUAD4 (destra).

Contour Plot
Eigen Mode(Mag)
Analysis system

9.649E+01
8.500E+01
7.438E+01
6.375E+01
5.312E+01
4.250E+01
3.188E+01
2.125E+01
1.062E+01
0.000E+00

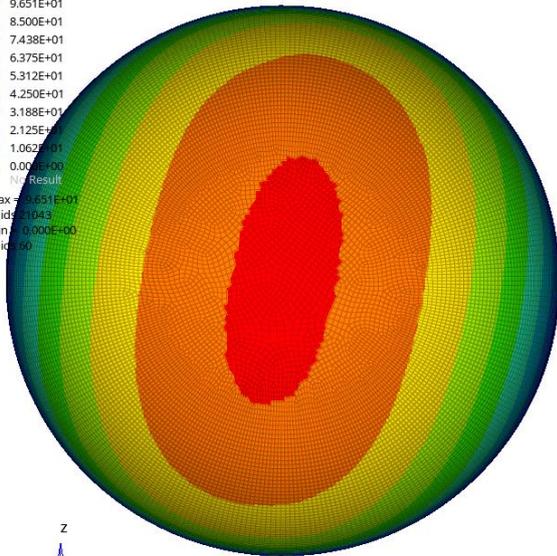
Max = 9.649E+01
Grids = 1054
Min = 0.000E+00
Grids = 60



Contour Plot
Eigen Mode(Mag)
Analysis system

9.651E+01
8.500E+01
7.438E+01
6.375E+01
5.312E+01
4.250E+01
3.188E+01
2.125E+01
1.062E+01
0.000E+00

Max = 9.651E+01
Grids = 1043
Min = 0.000E+00
Grids = 60



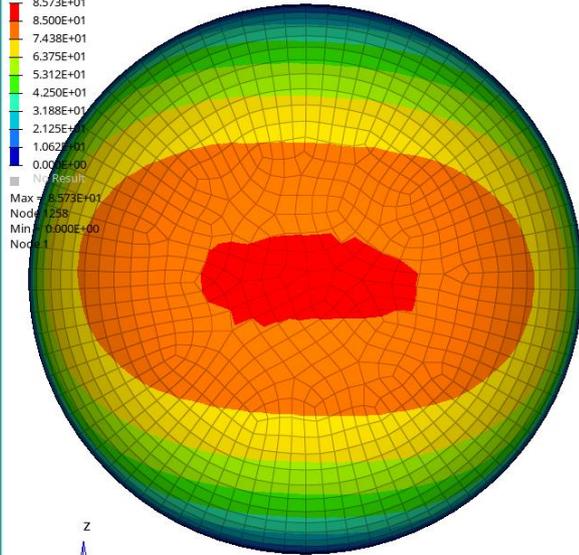
X
Y
Z

OptiStruct HEXA8
Mode 1 - F = 8.735538E+03

Contour Plot
Displacement(Mag)
Analysis system

8.573E+01
8.500E+01
7.438E+01
6.375E+01
5.312E+01
4.250E+01
3.188E+01
2.125E+01
1.062E+01
0.000E+00

Max = 8.573E+01
Nodes = 1258
Min = 0.000E+00
Nodes = 1

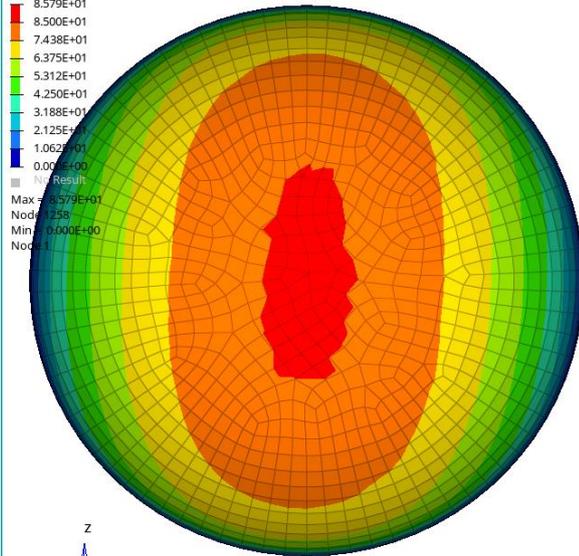


Python RZT QUAD4, element size 4 mm
MODE 1 FREQ = 8.78429e+03

Contour Plot
Displacement(Mag)
Analysis system

8.579E+01
8.500E+01
7.438E+01
6.375E+01
5.312E+01
4.250E+01
3.188E+01
2.125E+01
1.062E+01
0.000E+00

Max = 8.579E+01
Nodes = 1258
Min = 0.000E+00
Nodes = 1



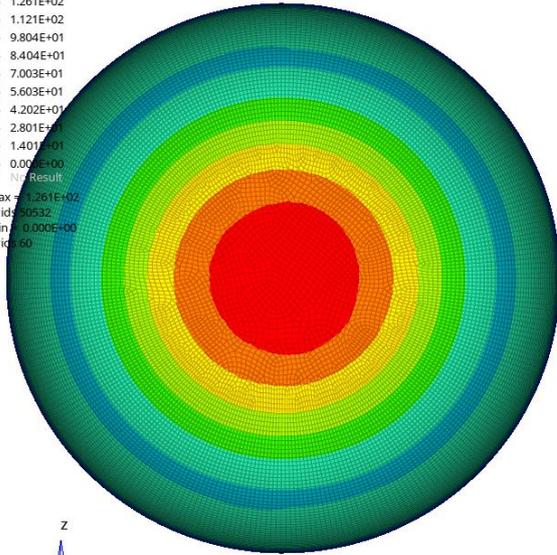
Python RZT QUAD4, element size 4 mm
MODE 2 FREQ = 8.78456e+03

X
Y
Z

Contour Plot
Eigen Mode(Mag)
Analysis system

- 1.261E+02
- 1.121E+02
- 9.804E+01
- 8.404E+01
- 7.003E+01
- 5.603E+01
- 4.202E+01
- 2.801E+01
- 1.401E+01
- 0.00E+00

Max = 1.261E+02
Grids = 6532
Min = 0.000E+00
Grids = 0

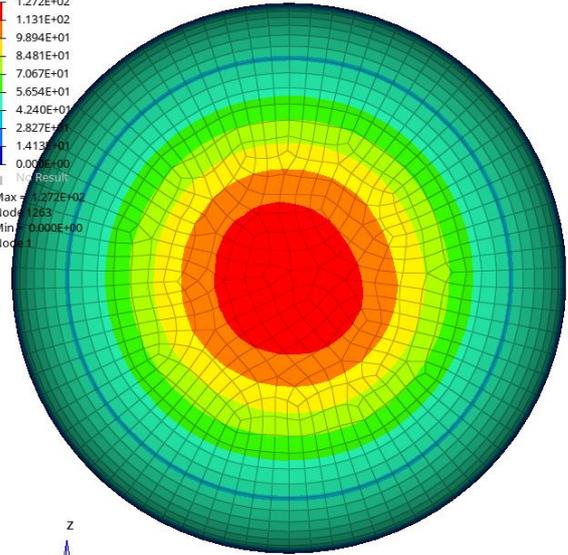


OptiStruct HEXA8
Mode 3 - F = 1.176684E+04

Contour Plot
Displacement(Mag)
Analysis system

- 1.272E+02
- 1.131E+02
- 9.894E+01
- 8.481E+01
- 7.067E+01
- 5.654E+01
- 4.240E+01
- 2.827E+01
- 1.413E+01
- 0.00E+00

Max = 1.272E+02
Node = 1263
Min = 0.000E+00
Node = 1

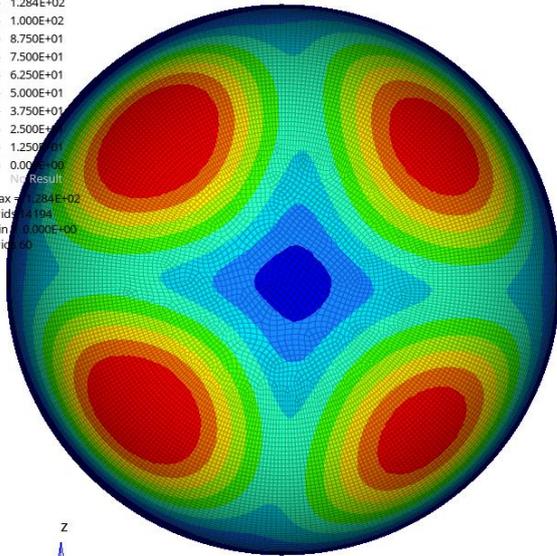


Python RZT QUAD4, element size 4 mm
MODE 3 FREQ = 1.18062e+04

Contour Plot
Eigen Mode(Mag)
Analysis system

- 1.284E+02
- 1.000E+02
- 8.750E+01
- 7.500E+01
- 6.250E+01
- 5.000E+01
- 3.750E+01
- 2.500E+01
- 1.250E+01
- 0.00E+00

Max = 1.284E+02
Grids = 4194
Min = 0.000E+00
Grids = 0

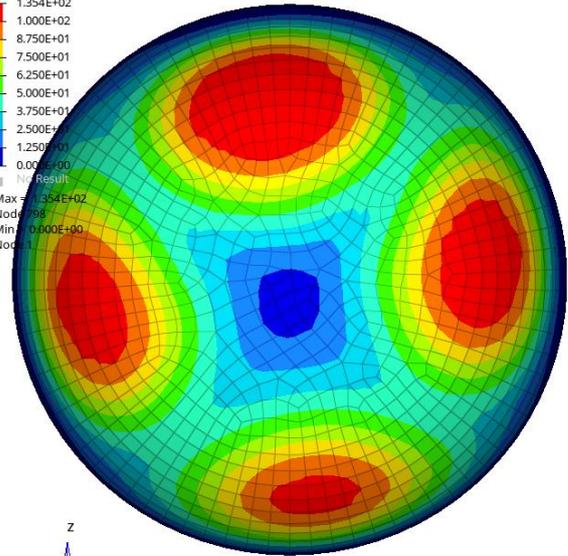


OptiStruct HEXA8
Mode 4 - F = 1.376562E+04

Contour Plot
Displacement(Mag)
Analysis system

- 1.354E+02
- 1.000E+02
- 8.750E+01
- 7.500E+01
- 6.250E+01
- 5.000E+01
- 3.750E+01
- 2.500E+01
- 1.250E+01
- 0.00E+00

Max = 1.354E+02
Node = 798
Min = 0.000E+00
Node = 1



Python RZT QUAD4, element size 4 mm
MODE 6 FREQ = 1.38200e+04

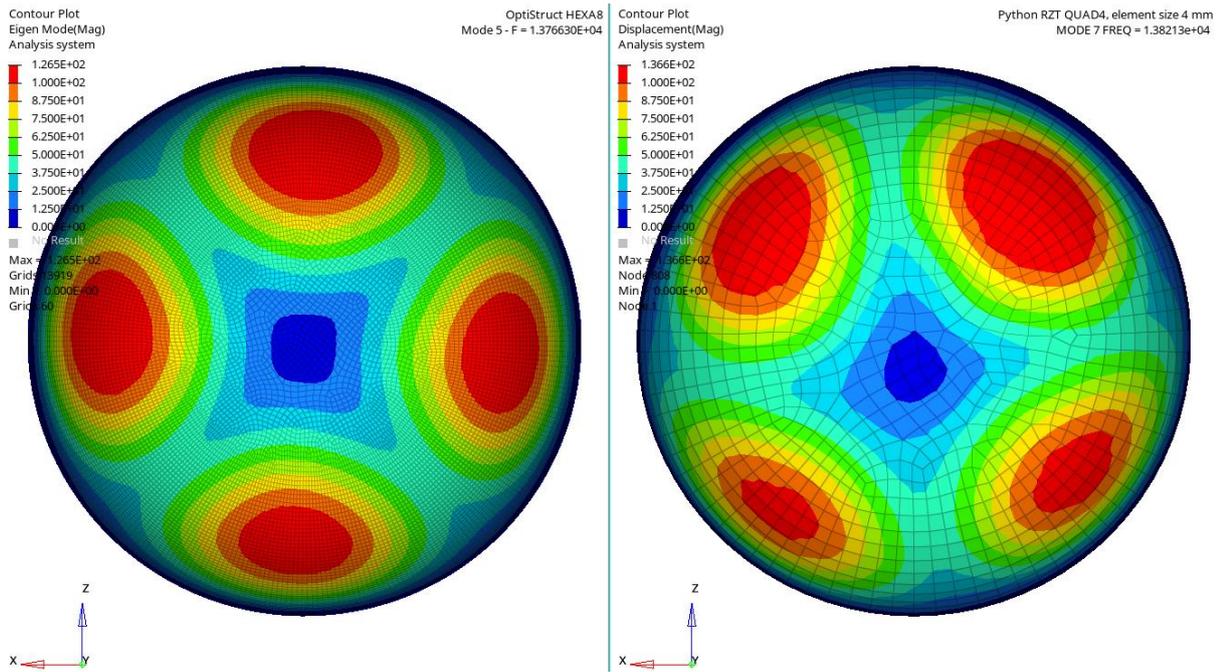


Figura 3.31 – Visualizzazione delle prime 5 forme modali della semisfera: confronto dei risultati OptiStruct HEXA8 (sinistra) e Python RZT QUAD4 (destra).

L'efficacia e l'accuratezza dell'elemento finito vengono confermate da un ulteriore caso di studio: si considera una piastra quadrata di dimensioni 200 mm x 200 mm x 10 mm, incastrata su un lato e soggetta a due forze trasversali di intensità 1 N, opposte in verso ed applicate ai vertici liberi. La sequenza di laminazione è riportata in Tabella 3.20 e le proprietà dei materiali che costituiscono la piastra sono indicate in Tabella 3.21.

$2h^{(k)}$ [mm]	Materiali	Orientazioni [deg]
[1/8/1]	[C/P/C]	[0/0/0]

Tabella 3.20 – Stacking sequence della piastra incastrata sul lato (la sequenza degli strati è nel verso delle z positive).

Materiali	ρ [$\frac{ton}{mm^3}$]	E_1 [MPa]	E_2 [MPa]	E_3 [MPa]	G_{12} [MPa]	G_{13} [MPa]	G_{23} [MPa]	ν_{12}	ν_{13}	ν_{23}
C (Carbon-Epoxy)	1.55E-09	157900	9584	9584	5930	5930	3227	0.32	0.32	0.49
P (PVC)	1.4E-09	104			40			0.3		

Tabella 3.21 – Densità e proprietà meccaniche dei materiali considerati.

Vengono calcolate deflessione massima e prime tre frequenze proprie per la mesh mostrata in Figura 3.32. Successivamente, si valutano le distribuzioni di spostamenti, deformazioni e tensioni attraverso lo spessore della piastra. I risultati vengono confrontati con quelli relativi all'elemento MQ9RZT.

In Tabella 3.22 e Tabella 3.23 sono riportati, rispettivamente, i risultati e gli errori percentuali della deflessione massima e delle prime tre frequenze naturali della piastra. Le ottime performance dell'elemento finito vengono riconfermate.

Invece, Tabella 3.24 e Tabella 3.25 mostrano i valori MQ9RZT e Python RZT QUAD4 che spostamenti, deformazioni e tensioni assumono lungo lo spessore del laminato nel centroide dell'elemento 179.

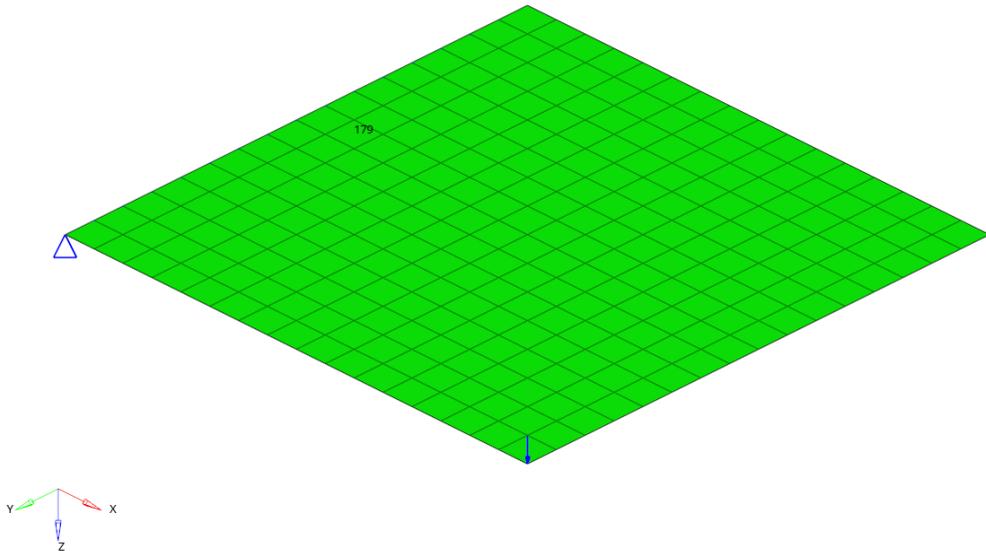


Figura 3.32 – Modello di piastra cantilever, incastrata su un lato e soggetta a due forze trasversali di intensità 1 N, opposte in verso ed applicate ai vertici liberi, con numero di suddivisioni per lato $N_e=16$ e numero totale di nodi $N_n=289$.

	MQ9RZT	Python RZT Quad
w [mm]	0.02063603	0.020835
f_1 [Hz]	178.733048	178.733
f_2 [Hz]	212.762664	212.754
f_3 [Hz]	479.757452	479.723

Tabella 3.22 – Deflessione e frequenze naturali del modello Python RZT Quad e del modello MQ9RZT.

	Python RZT Quad
$E\%(w)$	0.97
$E\%(f_1)$	0.00
$E\%(f_2)$	0.00
$E\%(f_3)$	-0.01

Tabella 3.23 – Errori percentuali sulla deflessione e sulle frequenze naturali del modello Python RZT Quad rispetto a quello MQ9RZT.

z	$u_1^{(k)}$	$u_2^{(k)}$	$u_z^{(k)}$	$\varepsilon_{11}^{(k)}$	$\varepsilon_{22}^{(k)}$	$\gamma_{12}^{(k)}$	$\gamma_{1z}^{(k)}$	$\gamma_{2z}^{(k)}$	$\sigma_{11}^{(k)}$	$\sigma_{22}^{(k)}$	$\tau_{12}^{(k)}$	$\tau_{1z}^{(k)}$	$\tau_{2z}^{(k)}$
-5	4.615 E-06	5.978 E-05	4.337 E-05	1.757 E-07	3.247 E-09	4.053 E-06	2.298 E-08	2.343 E-10	2.793 E-02	5.735 E-04	2.403 E-02	1.363 E-04	7.561 E-07
-4	9.064 E-07	5.283 E-05	4.337 E-05	1.067 E-07	1.481 E-10	2.822 E-06	2.298 E-08	2.343 E-10	1.695 E-02	3.277 E-04	1.674 E-02	1.363 E-04	7.561 E-07
-4	9.064 E-07	5.283 E-05	4.337 E-05	1.067 E-07	1.481 E-10	2.822 E-06	3.504 E-06	6.257 E-06	1.218 E-05	3.640 E-06	1.129 E-04	1.402 E-04	2.503 E-04
4	9.064 E-07	5.283 E-05	4.337 E-05	1.067 E-07	1.481 E-10	2.822 E-06	3.504 E-06	6.257 E-06	1.218 E-05	3.640 E-06	1.129 E-04	1.402 E-04	2.503 E-04
4	9.064 E-07	5.283 E-05	4.337 E-05	1.067 E-07	1.481 E-10	2.822 E-06	2.298 E-08	2.343 E-10	1.695 E-02	3.277 E-04	1.674 E-02	1.363 E-04	7.561 E-07
5	4.615 E-06	5.978 E-05	4.337 E-05	1.757 E-07	3.247 E-09	4.053 E-06	2.298 E-08	2.343 E-10	2.793 E-02	5.735 E-04	2.403 E-02	1.363 E-04	7.561 E-07

Tabella 3.24 – Piastra cantilever incastrata su un lato e soggetta a due forze trasversali di intensità 1 N, opposte in verso ed applicate ai vertici liberi. Distribuzioni attraverso lo spessore di spostamenti, deformazioni e tensioni nel centroide dell'elemento 179: risultati MQ9RZT.

Gli errori percentuali delle distribuzioni di spostamenti, deformazioni e tensioni attraverso lo spessore del laminato sono calcolati come

$$E\%(x) = \frac{x - x_{ref}}{\max(\text{abs}(x_{ref}))} \times 100\%$$

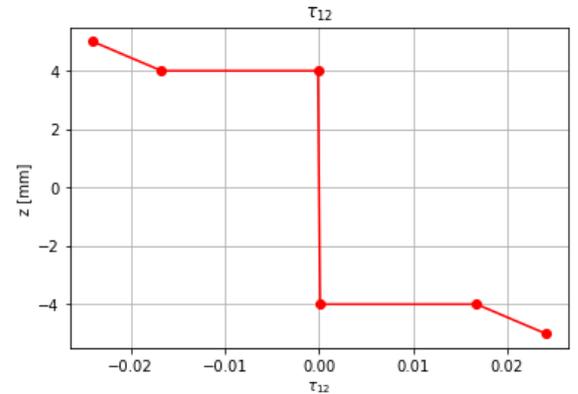
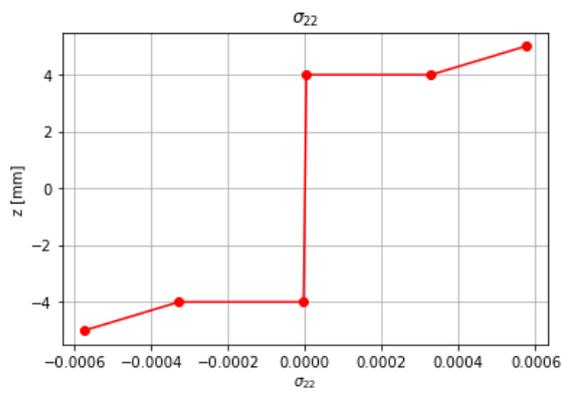
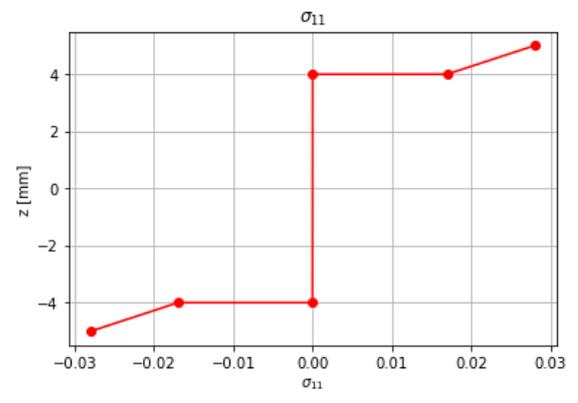
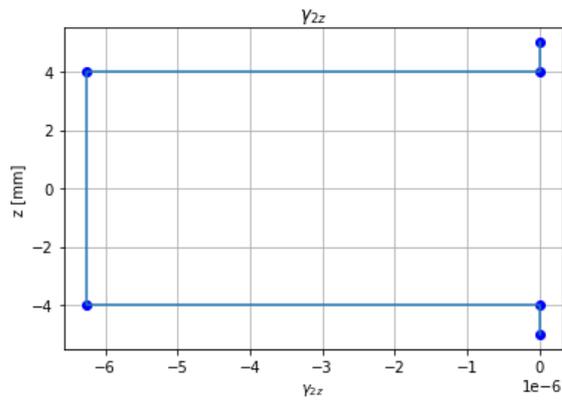
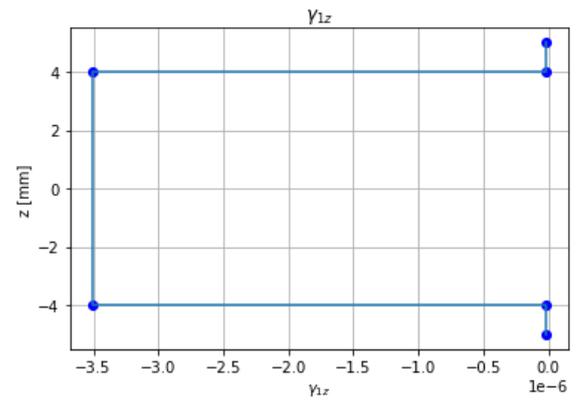
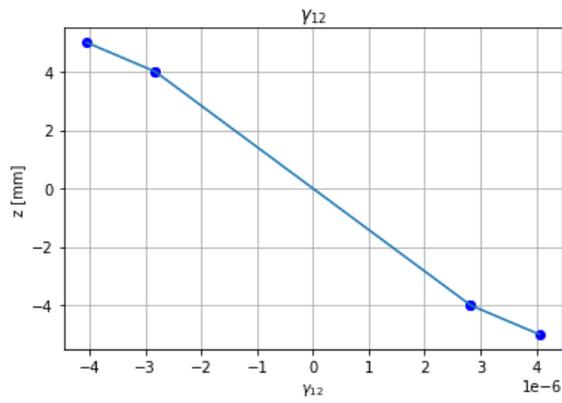
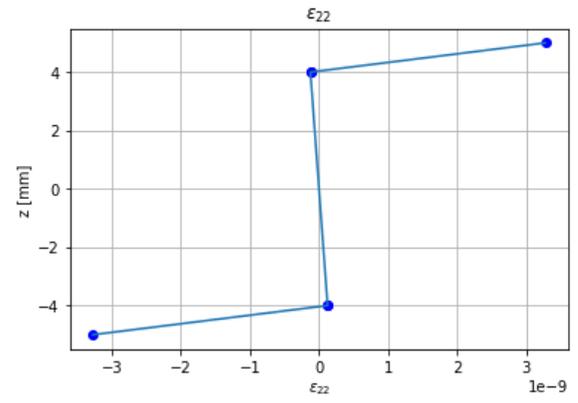
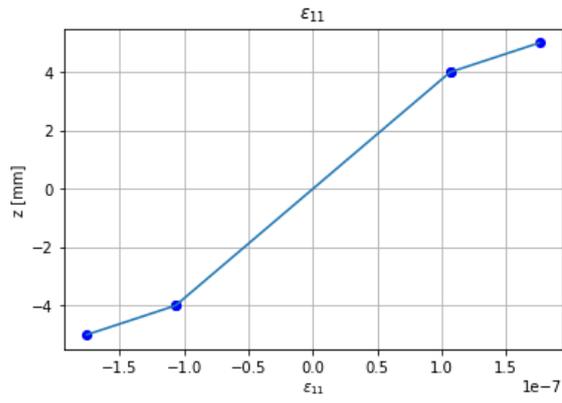
Gli andamenti di tali distribuzioni sono mostrati in Figura 3.33. I risultati sono accurati rispetto a quelli del modello discretizzato con elementi MQ9RZT, confrontati, a loro volta, con le soluzioni di modelli tri-dimensionali.

z	$u_1^{(k)}$	$u_2^{(k)}$	$u_z^{(k)}$	$\varepsilon_{11}^{(k)}$	$\varepsilon_{22}^{(k)}$	$\gamma_{12}^{(k)}$	$\gamma_{1z}^{(k)}$	$\gamma_{2z}^{(k)}$	$\sigma_{11}^{(k)}$	$\sigma_{22}^{(k)}$	$\tau_{12}^{(k)}$	$\tau_{1z}^{(k)}$	$\tau_{2z}^{(k)}$
-5	- 4.615 E-06	- 5.978 E-05	- 4.337 E-05	- 1.757 E-07	- 3.276 E-09	- 4.053 E-06	- 2.299 E-08	- 7.877 E-11	- 2.793 E-02	- 5.740 E-04	- 2.404 E-02	- 1.363 E-04	- 2.542 E-07
-4	- 9.071 E-07	- 5.283 E-05	- 4.337 E-05	- 1.067 E-07	- 1.243 E-10	- 2.823 E-06	- 2.299 E-08	- 7.877 E-11	- 1.695 E-02	- 3.280 E-04	- 1.674 E-02	- 1.363 E-04	- 2.542 E-07
-4	- 9.071 E-07	- 5.283 E-05	- 4.337 E-05	- 1.067 E-07	- 1.243 E-10	- 2.823 E-06	- 3.504 E-06	- 6.259 E-06	- 1.219 E-05	- 3.643 E-06	- 1.129 E-04	- 1.402 E-04	- 2.503 E-04
4	- 9.071 E-07	- 5.283 E-05	- 4.337 E-05	- 1.067 E-07	- 1.243 E-10	- 2.823 E-06	- 3.504 E-06	- 6.259 E-06	- 1.219 E-05	- 3.643 E-06	- 1.129 E-04	- 1.402 E-04	- 2.503 E-04
4	- 9.071 E-07	- 5.283 E-05	- 4.337 E-05	- 1.067 E-07	- 1.243 E-10	- 2.823 E-06	- 2.299 E-08	- 7.877 E-11	- 1.695 E-02	- 3.280 E-04	- 1.674 E-02	- 1.363 E-04	- 2.542 E-07
5	- 4.615 E-06	- 5.978 E-05	- 4.337 E-05	- 1.757 E-07	- 3.276 E-09	- 4.053 E-06	- 2.299 E-08	- 7.877 E-11	- 2.793 E-02	- 5.740 E-04	- 2.404 E-02	- 1.363 E-04	- 2.542 E-07

Tabella 3.25 – Piastra cantilever incastrata su un lato e soggetta a due forze trasversali di intensità 1 N, opposte in verso ed applicate ai vertici liberi. Distribuzioni attraverso lo spessore di spostamenti, deformazioni e tensioni nel centroide dell'elemento 179: risultati Python RZT Quad.

z	$u_1^{(k)}$	$u_2^{(k)}$	$u_z^{(k)}$	$\varepsilon_{11}^{(k)}$	$\varepsilon_{22}^{(k)}$	$\gamma_{12}^{(k)}$	$\gamma_{1z}^{(k)}$	$\gamma_{2z}^{(k)}$	$\sigma_{11}^{(k)}$	$\sigma_{22}^{(k)}$	$\tau_{12}^{(k)}$	$\tau_{1z}^{(k)}$	$\tau_{2z}^{(k)}$
-5	- 0.012	- 0.009	- 0.007	- 0.029	- 0.907	- 0.008	- 0.000	- 0.002	- 0.029	- 0.077	- 0.008	- 0.052	- 0.201
-4	- 0.014	- 0.009	- 0.007	- 0.008	- 0.731	- 0.009	- 0.000	- 0.002	- 0.009	- 0.048	- 0.009	- 0.052	- 0.201
-4	- 0.014	- 0.009	- 0.007	- 0.008	- 0.731	- 0.009	- 0.007	- 0.030	- 0.000	- 0.001	- 0.000	- 0.007	- 0.030
4	- 0.014	- 0.009	- 0.007	- 0.008	- 0.731	- 0.009	- 0.007	- 0.030	- 0.000	- 0.001	- 0.000	- 0.007	- 0.030
4	- 0.014	- 0.009	- 0.007	- 0.008	- 0.731	- 0.009	- 0.000	- 0.002	- 0.009	- 0.048	- 0.009	- 0.052	- 0.201
5	- 0.012	- 0.009	- 0.007	- 0.029	- 0.907	- 0.008	- 0.000	- 0.002	- 0.029	- 0.077	- 0.008	- 0.052	- 0.201

Tabella 3.26 – Piastra cantilever incastrata su un lato e soggetta a due forze trasversali di intensità 1 N, opposte in verso ed applicate ai vertici liberi. Errori percentuali sulle distribuzioni attraverso lo spessore di spostamenti, deformazioni e tensioni nel centroide dell'elemento 179.



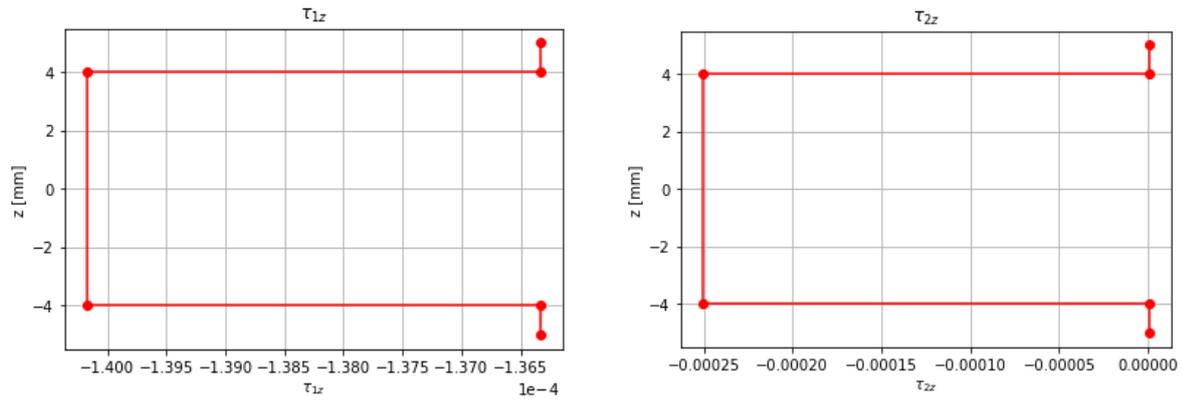
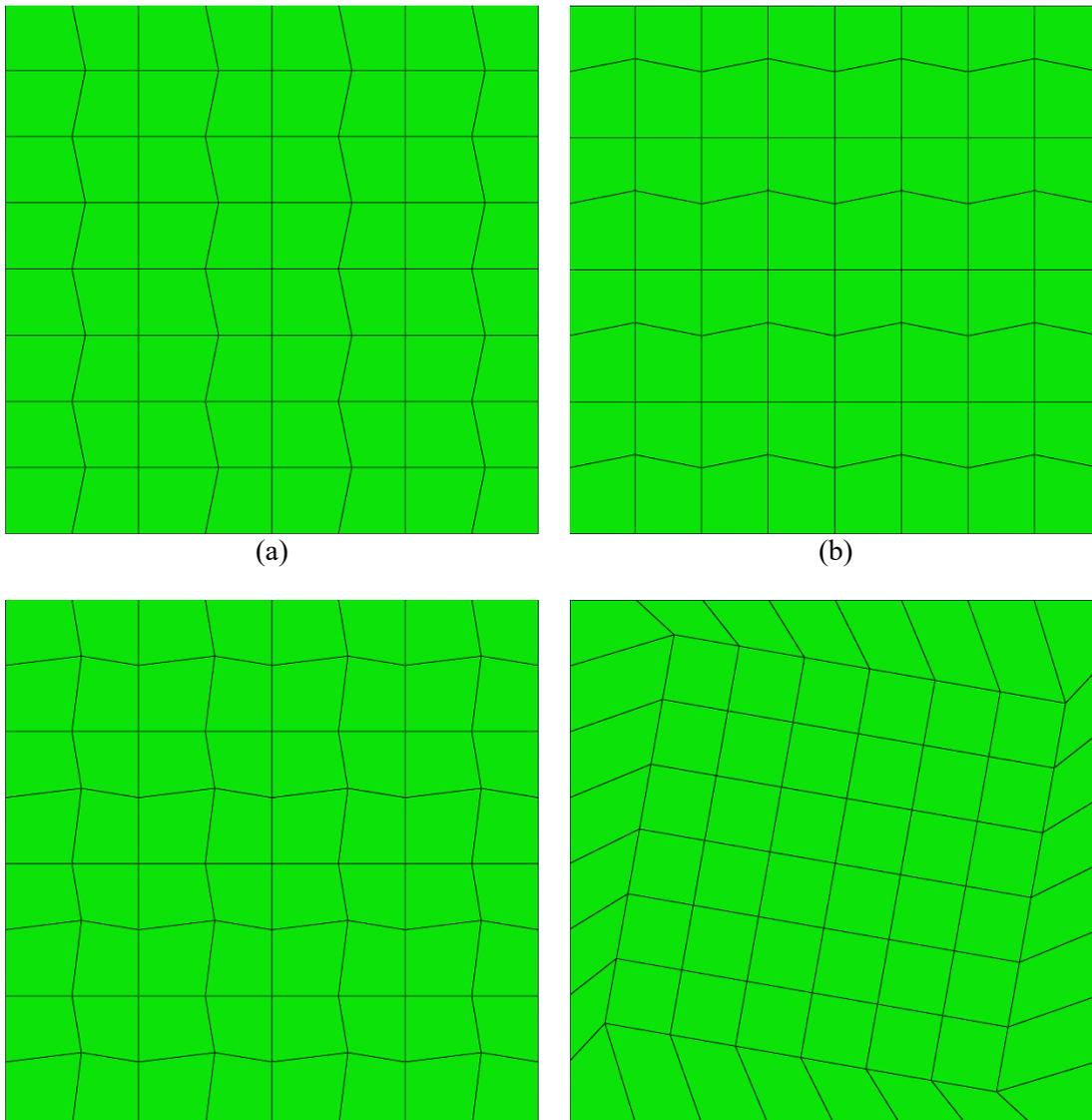
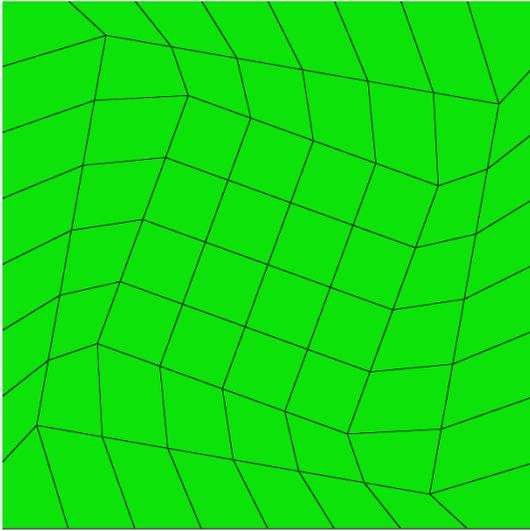


Figura 3.33 – Piastra cantilever, incastrata su un lato e soggetta a due forze trasversali di intensità 1 N, opposte in verso ed applicate ai vertici liberi. Visualizzazione delle distribuzioni attraverso lo spessore di spostamenti, deformazioni e tensioni nel centroide dell’elemento 179: risultati Python RZT Quad.

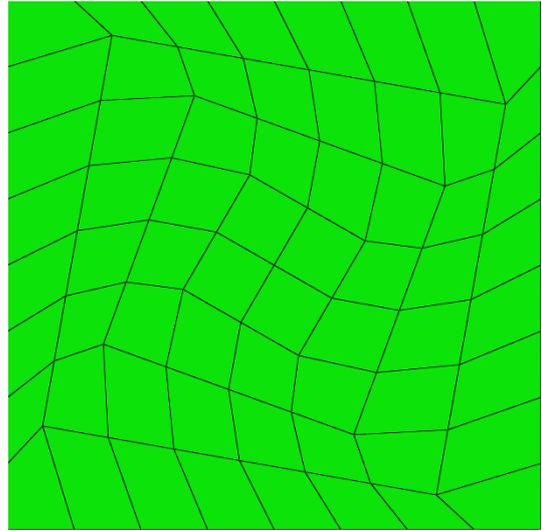
In ultima analisi, al fine di valutare l’effetto dell’impiego di mesh distorte, si esamina la piastra cantilever incastrata su un lato e soggetta a due forze trasversali di intensità 1 N, opposte in verso ed applicate ai vertici liberi. La sequenza di laminazione e le proprietà dei materiali della piastra sono indicate in Tabella 3.12 e Tabella 3.13, rispettivamente. Si adotta una mesh con $N_e=8$ e gli schemi di distorsione riportati in Figura 3.34.



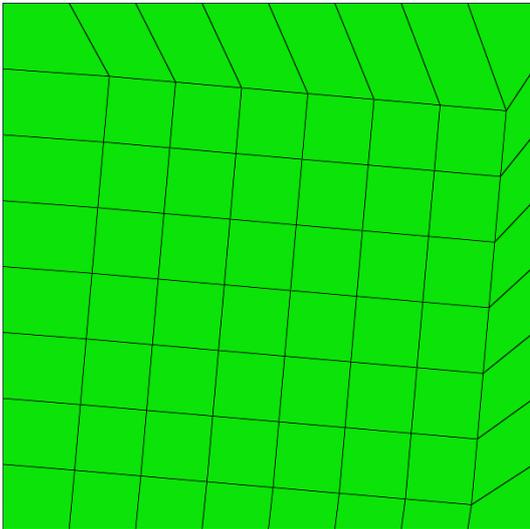
(c)



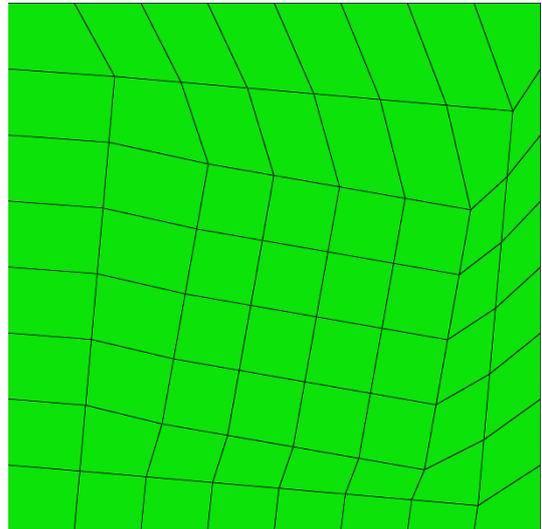
(d)



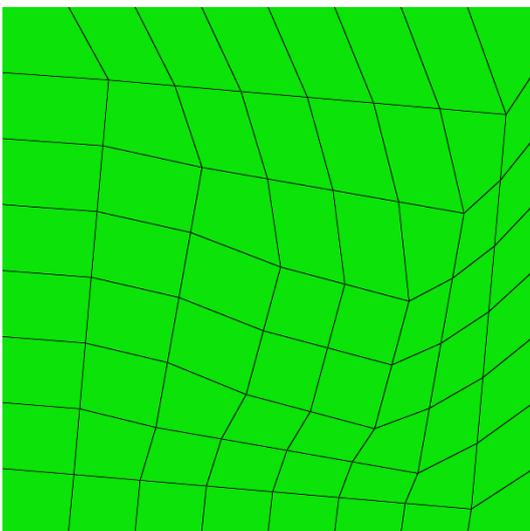
(e)



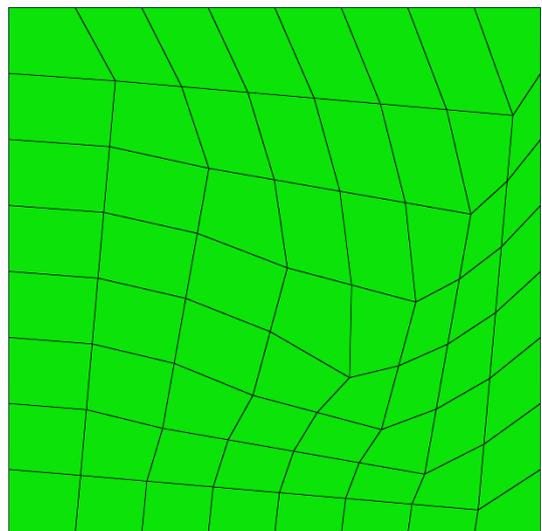
(f)



(g)



(h)



(i)

(j)

Figura 3.34 – Schemi di mesh irregolari usati per la piastra quadrata: (a) distorsione lungo l'asse x da 1 a 5 mm (distX) (Nn=81), (b) distorsione lungo l'asse y da 1 a 5 mm (distY) (Nn=81), (c) distorsione lungo la diagonale da 1 a 5 mm (distXY) (Nn=81), (d)-(e)-(f) distorsioni progressive di 10° attorno al nodo centrale (dist Center) (Nn=81), (g)-(h)-(i)-(j) distorsioni progressive di 5° attorno al nodo di vertice in basso a sinistra (dist Corner) (Nn=81).

Figura 3.35 - Figura 3.42 mostrano, rispettivamente, gli errori percentuali di deflessione massima e prime tre frequenze proprie per gli schemi di discretizzazione utilizzati, $E\%(w)$, $E\%(f_1)$, $E\%(f_2)$, $E\%(f_3)$, all'aumentare dell'entità della distorsione. Le soluzioni di riferimento sono i risultati numerici di Python, ottenuti con mesh regolari, a parità di densità di nodi.

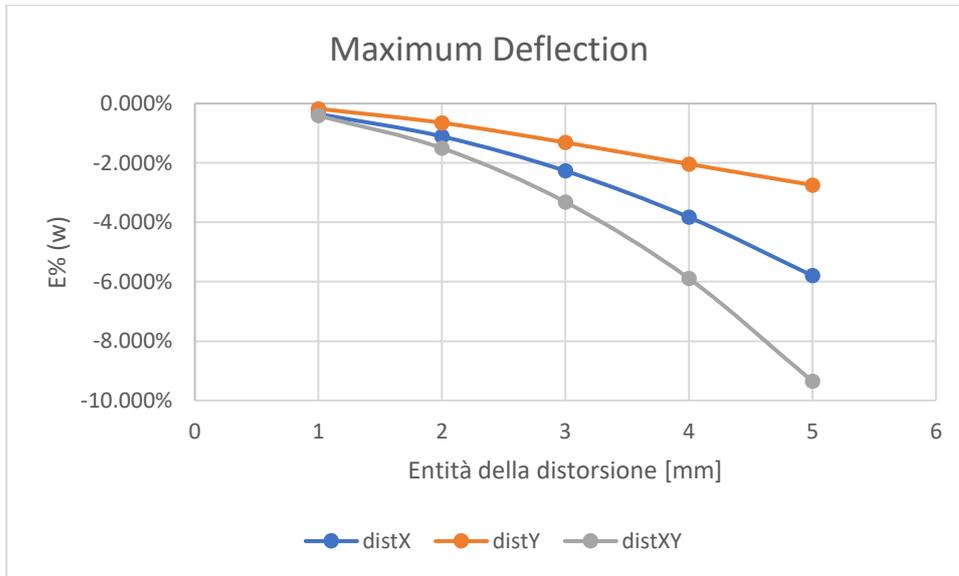


Figura 3.35 – Errore percentuale della deflessione massima FEM RZT per gli schemi di mesh distorte per traslazione all'aumentare dell'entità della distorsione.

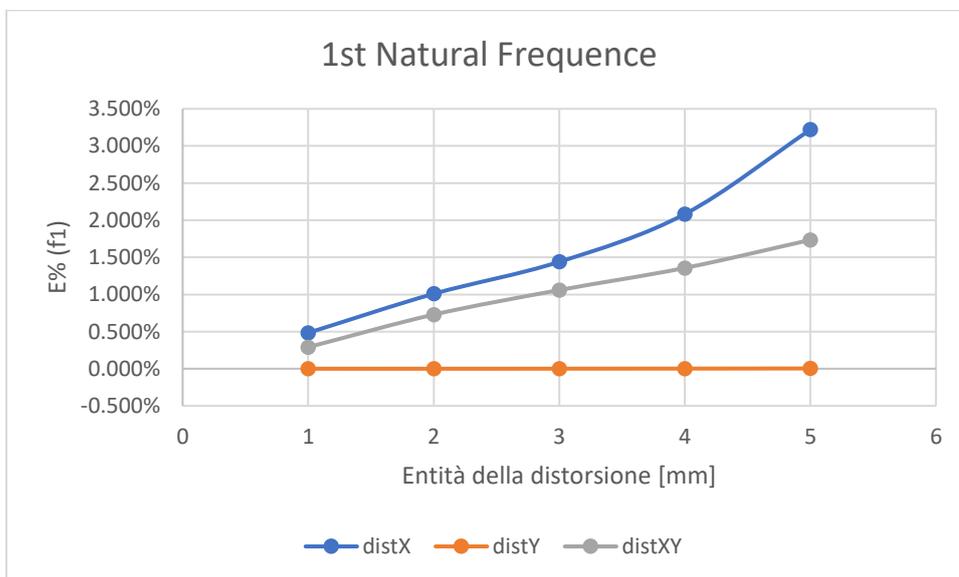


Figura 3.36 – Errore percentuale della prima frequenza propria FEM RZT per gli schemi di mesh distorte per traslazione all'aumentare dell'entità della distorsione.

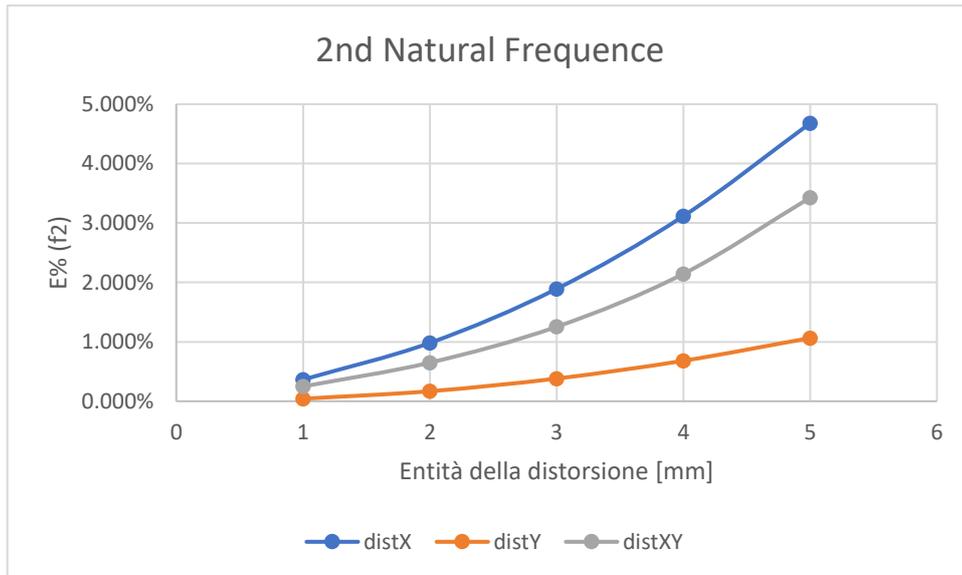


Figura 3.37 – Errore percentuale della seconda frequenza propria FEM RZT per gli schemi di mesh distorte per traslazione all'aumentare dell'entità della distorsione.

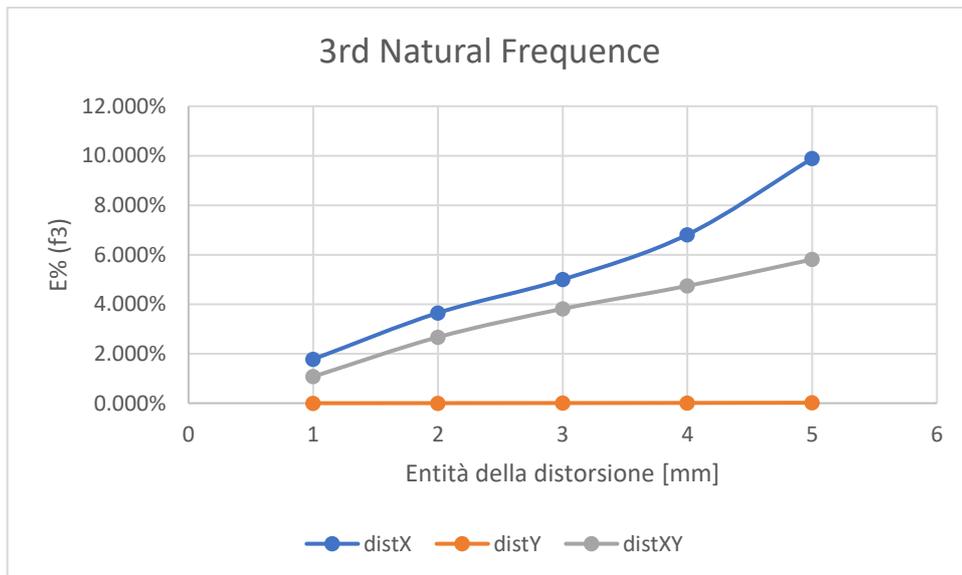


Figura 3.38 – Errore percentuale della terza frequenza propria FEM RZT per gli schemi di mesh distorte per traslazione all'aumentare dell'entità della distorsione.

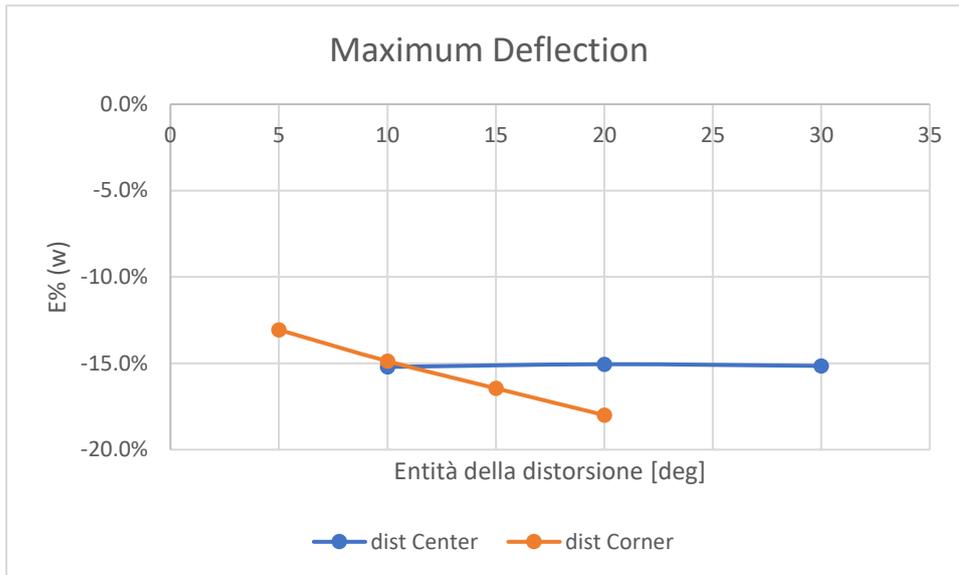


Figura 3.39 – Errore percentuale della deflessione massima FEM RZT per gli schemi di mesh distorte per rotazione all'aumentare dell'entità della distorsione.

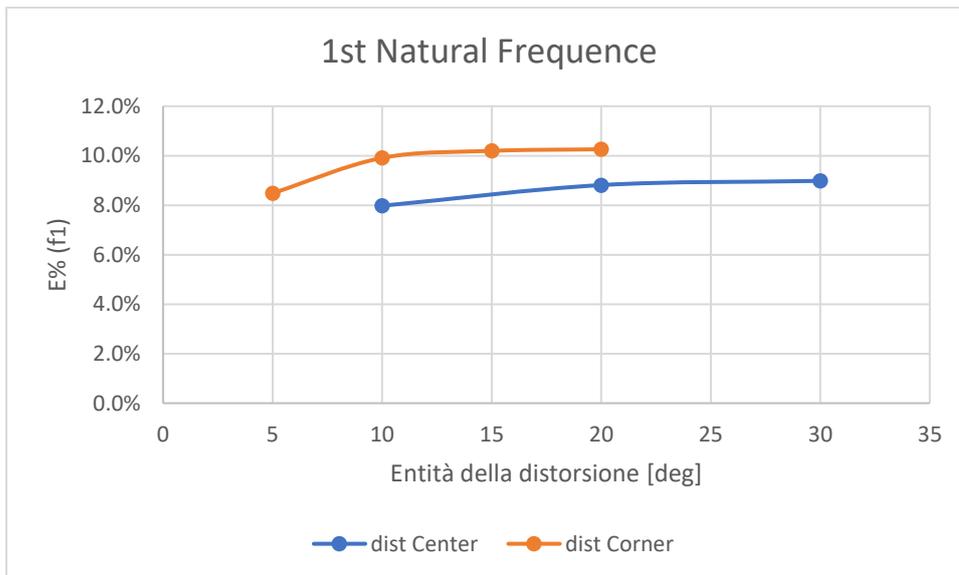


Figura 3.40 – Errore percentuale della prima frequenza propria FEM RZT per gli schemi di mesh distorte per rotazione all'aumentare dell'entità della distorsione.

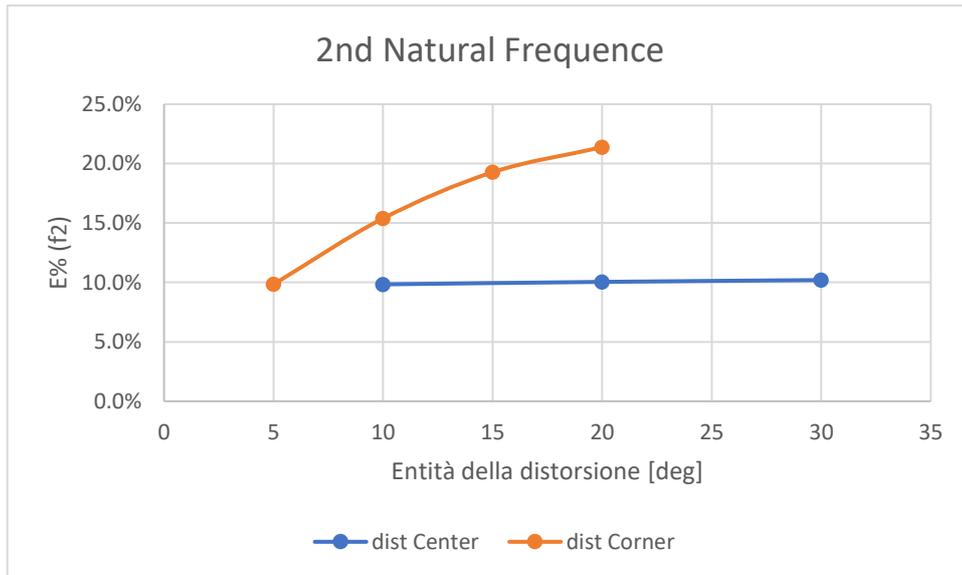


Figura 3.41 – Errore percentuale della seconda frequenza propria FEM RZT per gli schemi di mesh distorte per rotazione all'aumentare dell'entità della distorsione.

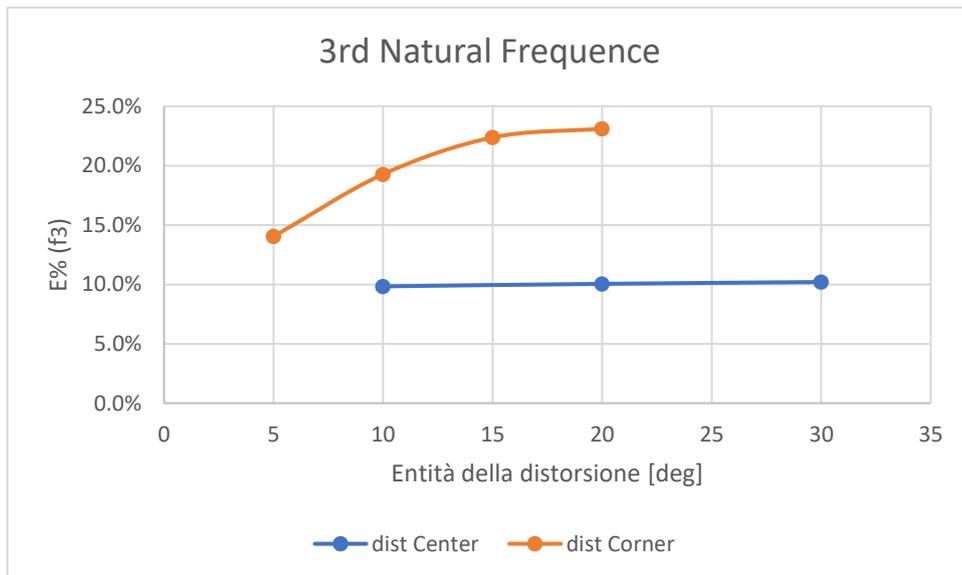


Figura 3.42 – Errore percentuale della terza frequenza propria FEM RZT per gli schemi di mesh distorte per rotazione all'aumentare dell'entità della distorsione.

L'errore percentuale cresce all'aumentare dell'entità della distorsione e risulta particolarmente elevato per le distorsioni lungo l'asse x, lungo la diagonale e attorno al nodo di vertice (per il caso considerato). In Figura 3.43 - Figura 3.46 si riportano gli errori percentuali della deflessione massima e delle prime tre frequenze proprie, calcolate mediante codice Python, rispetto a quelle analitiche, $E\%(w)$, $E\%(f_1)$, $E\%(f_2)$, $E\%(f_3)$, in funzione del numero di nodi, N_n , per lo schema di discretizzazione regolare Quad e per quelli di mesh irregolari considerati in Figura 3.34 con massima distorsione.

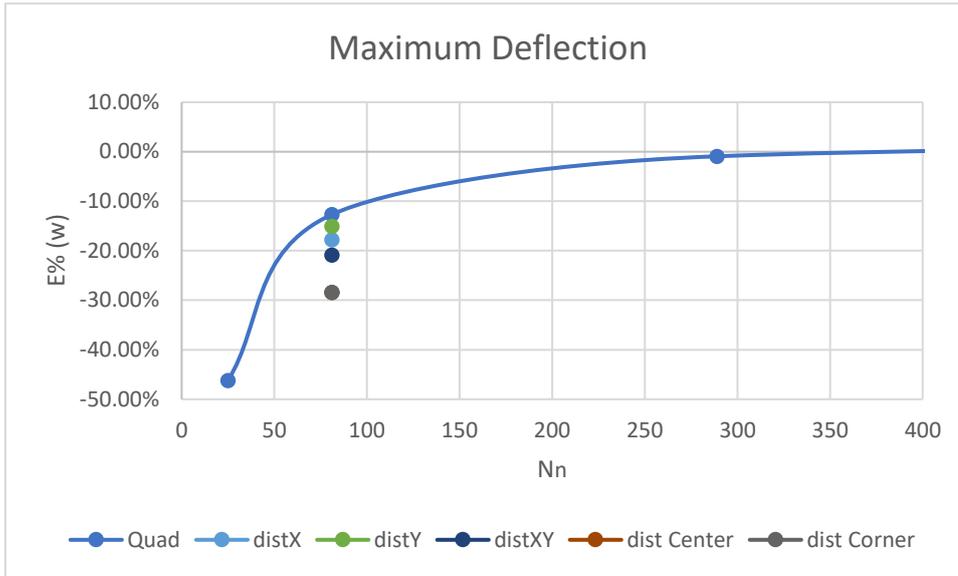


Figura 3.43 – Mesh 8x8. Confronto tra le performance degli schemi di mesh regolare Quad e mesh distorte: deflessione massima.

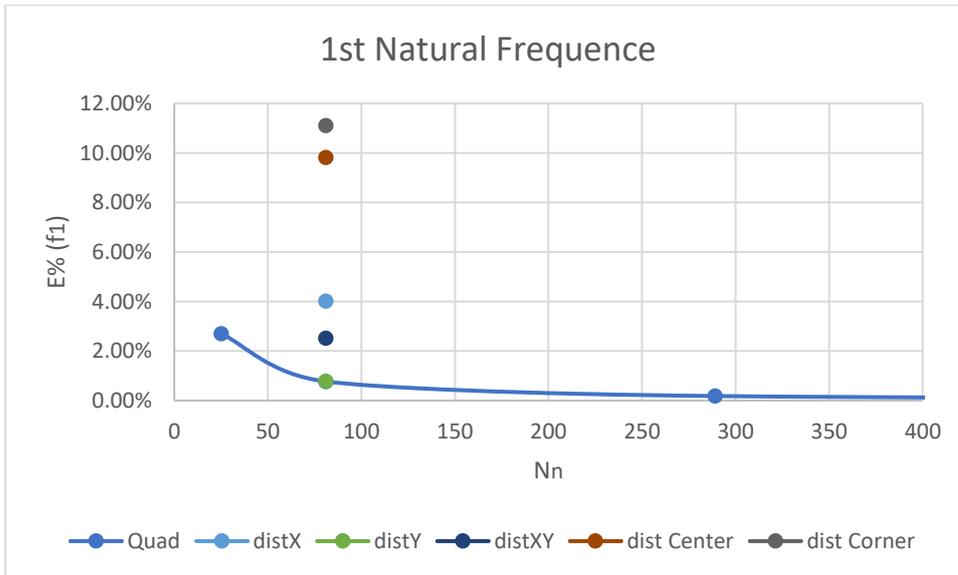


Figura 3.44 – Mesh 8x8. Confronto tra le performance degli schemi di mesh regolare Quad e mesh distorte: prima frequenza propria.

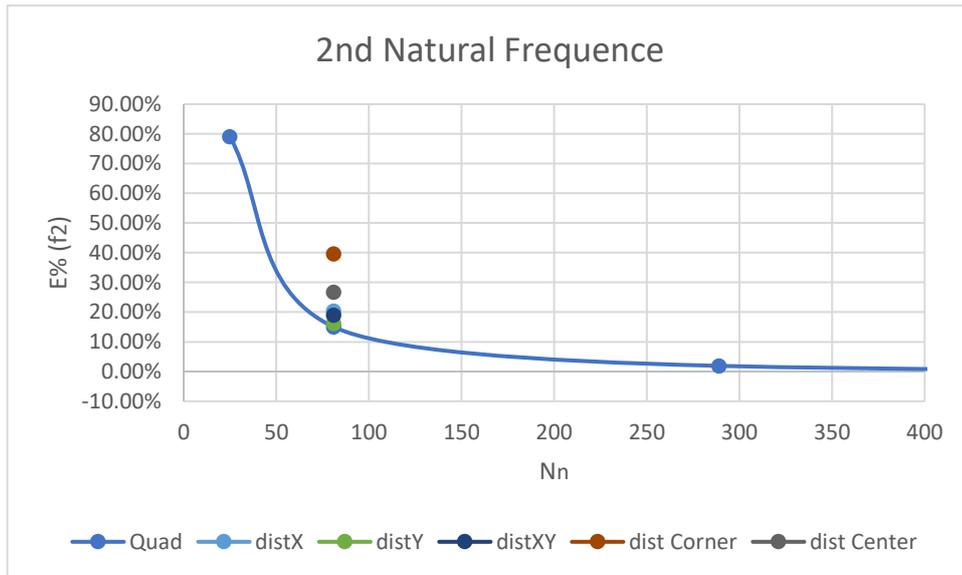


Figura 3.45 – Mesh 8x8. Confronto tra le performance degli schemi di mesh regolare Quad e mesh distorte: seconda frequenza propria.

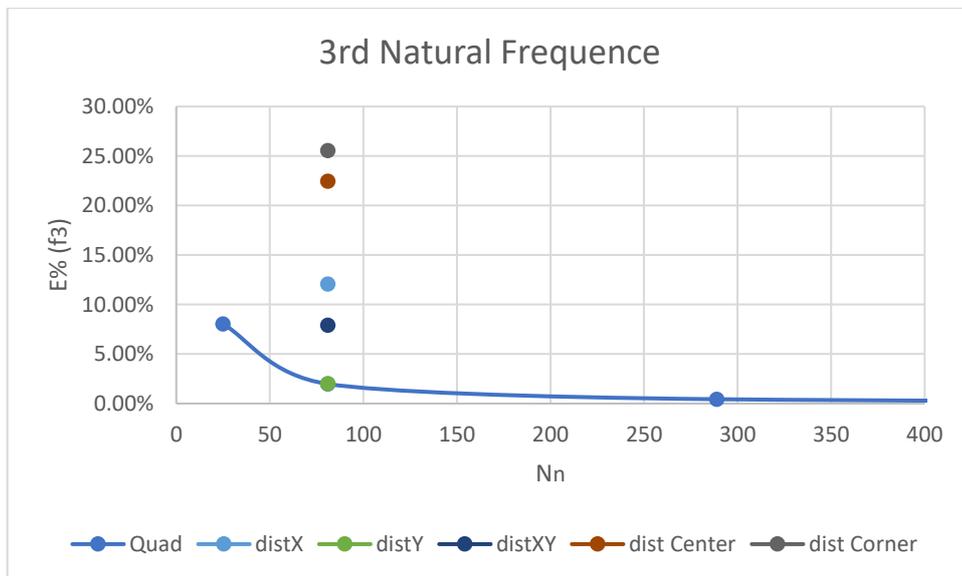
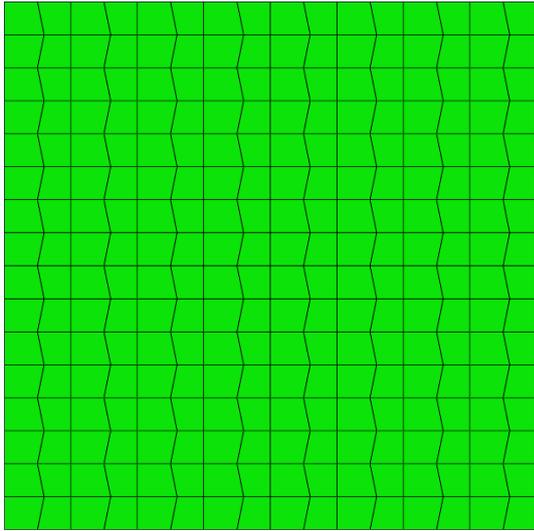


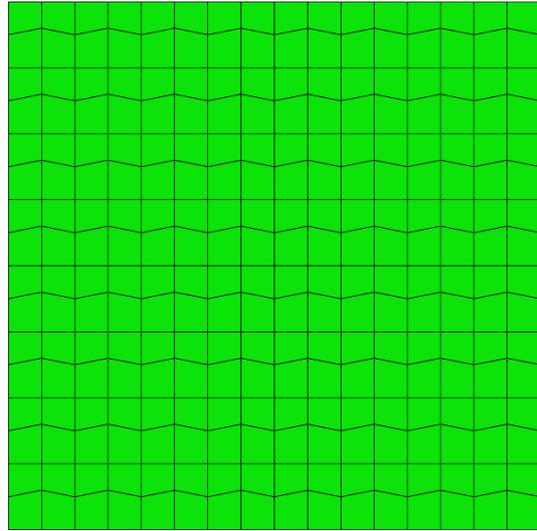
Figura 3.46 – Mesh 8x8. Confronto tra le performance degli schemi di mesh regolare Quad e mesh distorte: terza frequenza propria.

A parità di numero di nodi, gli errori percentuali dei modelli che impiegano mesh distorte sono significativamente maggiori rispetto agli errori percentuali del modello che impiega la mesh regolare di elementi finiti Quad.

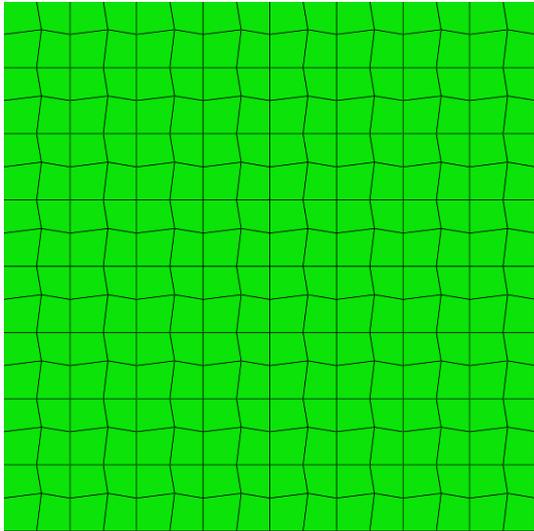
Si effettuano analoghi test numerici per delle mesh più fitte ($N_e = 16$) e gli schemi di discretizzazione riportati in Figura 3.47.



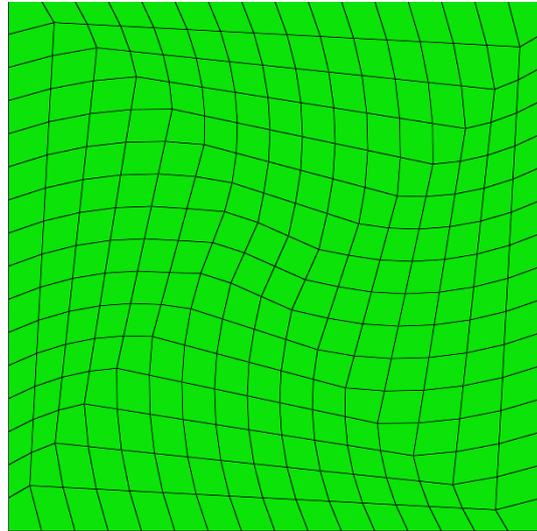
(a)



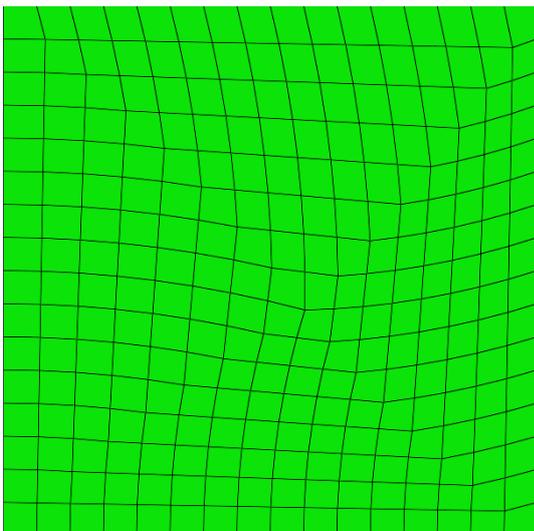
(b)



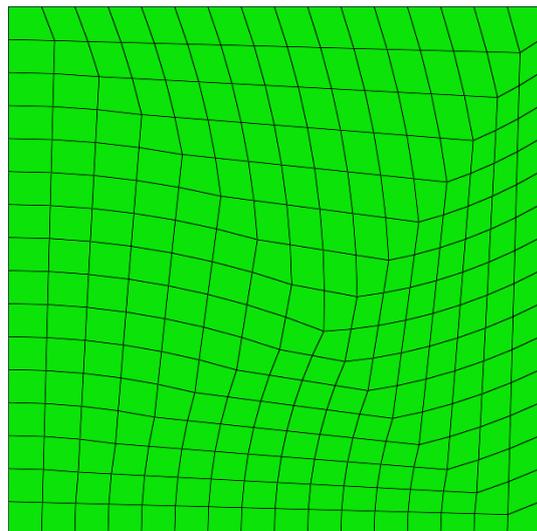
(c)



(d)



(e)



(f)

Figura 3.47 – Schemi di mesh irregolari usati per la piastra quadrata: (a) distorsione lungo l'asse x di 5 mm (distX) (Nn=289), (b) distorsione lungo l'asse y di 5 mm (distY) (Nn=289), (c) distorsione lungo la diagonale di 5 mm (distXY)

($N_n=289$), (d) distorsioni progressive di 3° attorno al nodo centrale (dist 3° Center) ($N_n=289$), (e) distorsioni progressive di 1° attorno al nodo di vertice in basso a sinistra (dist 1° Corner) ($N_n=289$), (e) distorsioni progressive di 1.5° attorno al nodo di vertice in basso a sinistra (dist 1.5° Corner) ($N_n=289$).

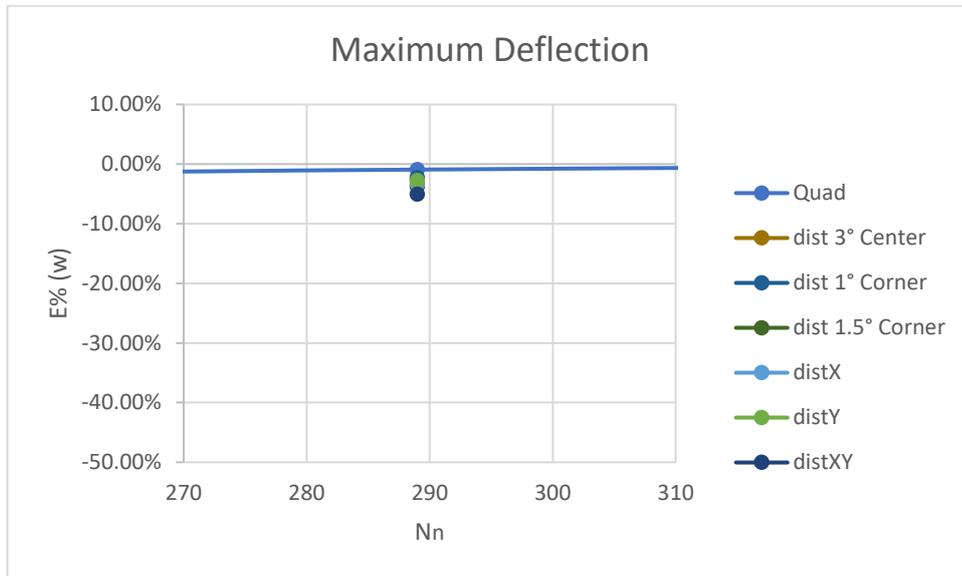


Figura 3.48 – Mesh 16x16. Confronto tra le performance degli schemi di mesh regolare Quad e mesh distorte: Deflessione massima.

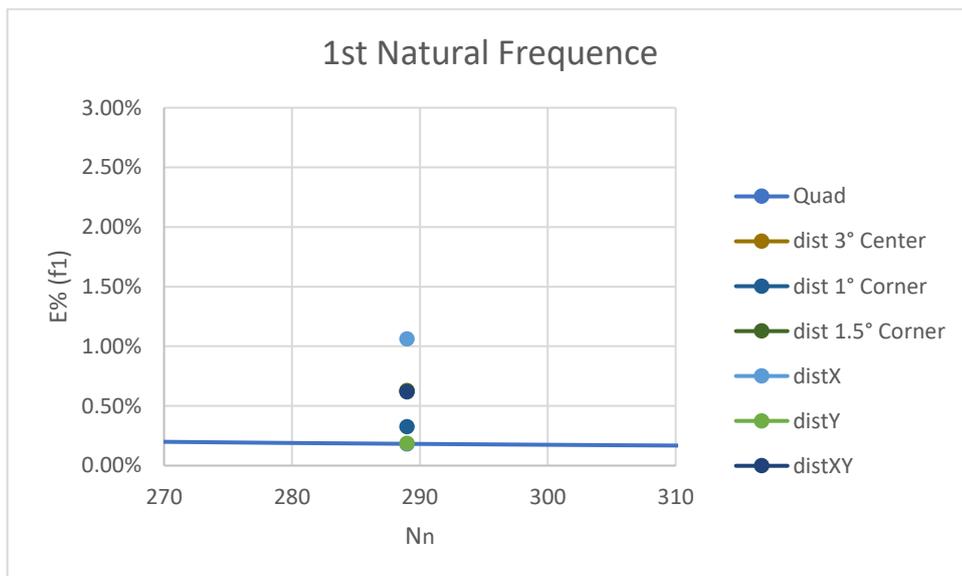


Figura 3.49 – Mesh 16x16. Confronto tra le performance degli schemi di mesh regolare Quad e mesh distorte: prima frequenza propria.

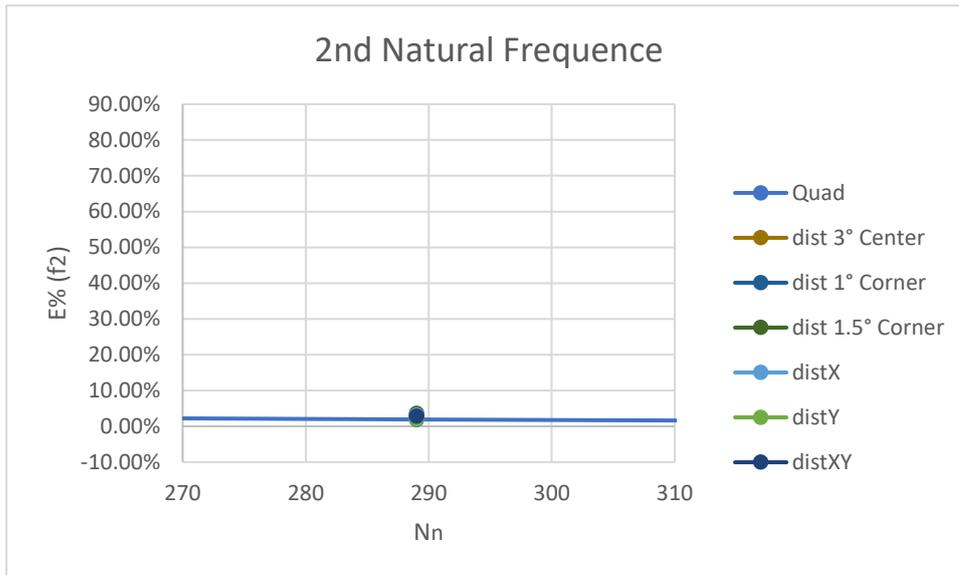


Figura 3.50 – Mesh 16x16. Confronto tra le performance degli schemi di mesh regolare Quad e mesh distorte: seconda frequenza propria.

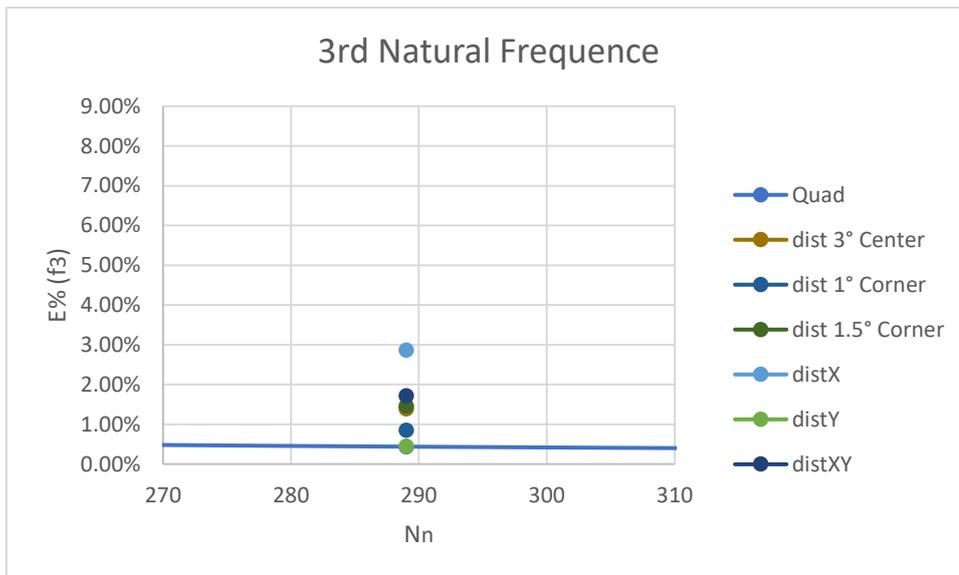


Figura 3.51 – Mesh 16x16. Confronto tra le performance degli schemi di mesh regolare Quad e mesh distorte: terza frequenza propria.

Si osserva che, per mesh più fitte, la soluzione FEM è poco influenzata dalla distorsione della mesh rispetto a quella analitica.

4 Conclusioni

Il lavoro di tesi ha condotto allo sviluppo di un elemento finito shell, quadrilatero a quattro nodi e triangolare a tre nodi, basato sulla *Refined Zigzag Theory*. L'elemento finito è pensato per la risoluzione di problemi statici e dinamici di strutture curve composite laminate e sandwich. La teoria prevede sette variabili cinematiche (tre spostamenti, due rotazioni di flessione e due rotazioni zigzag), che sono interpolate da funzioni di forma interdipendenti continue di classe C^0 . L'applicazione del metodo di interpolazione anisoparametrica pone rimedio al problema dello *shear-locking* per rapporti tra la lunghezza del lato e lo spessore del laminato ragionevolmente grandi e garantisce che l'elemento abbia un campo degli spostamenti pienamente compatibile alle interfacce tra elementi adiacenti. Il grado di libertà di *coarse drilling*, introdotto a livello delle funzioni di forma, genera modi ad energia nulla, la cui eliminazione avviene mediante la somma di una matrice di stabilizzazione alla matrice di rigidezza dell'elemento. Si considera una seconda matrice di stabilizzazione che tenga conto del grado di libertà di *fine drilling*. Per il solo elemento quadrilatero, la rigidezza dell'elemento piastra piana viene ulteriormente modificata attraverso la cosiddetta Rigid Link Correction, per considerare l'effetto dovuto alle *geometrie svergolate*.

Le prove di verifica hanno dimostrato che l'elemento implementato è capace di modellare accuratamente strutture realizzate in materiale omogeneo ed isotropo. L'influenza dell'eterogeneità dei materiali compositi laminati e delle strutture sandwich sulla convergenza e sull'accuratezza della soluzione numerica viene investigata per diverse condizioni di carico e di vincolo. La distribuzione lungo lo spessore delle deformazioni/tensioni a taglio trasversali è accuratamente predetta in fase di post-processing. Infine, resta dimostrata la robustezza dell'elemento alla distorsione della mesh.

Le prove numeriche condotte nel capitolo precedente su strutture eterogenee, piane e curve, hanno dimostrato l'efficacia, la velocità di convergenza e l'accuratezza dell'elemento finito. Inoltre, l'impiego di elementi finiti shell comporta notevoli vantaggi in termini di semplicità del modello e costo computazionale, rispetto agli elementi finiti 3D, impiegati nelle sezioni di verifica e confronto.

Appendice A: Coefficienti di rigidezza e coefficienti di inerzia

Il campo degli spostamenti nel sistema di coordinate (x_1, x_2, z) può essere scritto in forma matriciale

$$\mathbf{s} = \delta \mathbf{s} \mathbf{g}_s$$

$$\mathbf{s} = [u_1^{(k)} \quad u_2^{(k)} \quad u_z^{(k)}]^T$$

$$\delta \mathbf{s} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & z & 0 & \phi_1^{(k)} & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & z & 0 & \phi_2^{(k)} \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$$\mathbf{g}_s = [u \quad v \quad w \quad \vartheta_1 \quad \vartheta_2 \quad \psi_1 \quad \psi_2]^T$$

Le deformazioni RZT sono definite come segue

$$\begin{Bmatrix} \boldsymbol{\varepsilon} \\ \boldsymbol{\gamma} \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} \delta \boldsymbol{\varepsilon} \\ \delta \boldsymbol{\gamma} \end{bmatrix} \mathbf{g}_\varepsilon$$

$$\boldsymbol{\varepsilon} = [\varepsilon_{11}^{(k)} \quad \varepsilon_{22}^{(k)} \quad \gamma_{12}^{(k)}]^T$$

$$\boldsymbol{\gamma} = [\gamma_{1z}^{(k)} \quad \gamma_{2z}^{(k)}]^T$$

$$\delta \boldsymbol{\varepsilon} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & z & 0 & 0 & \phi_1^{(k)} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & z & 0 & 0 & \phi_2^{(k)} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & z & 0 & 0 & \phi_1^{(k)} & \phi_2^{(k)} & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$$\delta \boldsymbol{\gamma} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & \beta_1^{(k)} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & \beta_2^{(k)} \end{bmatrix}$$

$$\mathbf{g}_\varepsilon = [u_{,1} \quad v_{,2} \quad u_{,2} + v_{,1} \quad \vartheta_{1,1} \quad \vartheta_{2,2} \quad \vartheta_{1,2} + \vartheta_{2,1} \quad \psi_{1,1} \quad \psi_{2,2} \quad \psi_{1,2} \quad \psi_{2,1} \quad w_{,1} + \vartheta_1 \quad w_{,2} + \vartheta_2 \quad \psi_1 \quad \psi_2]^T$$

$$= [\boldsymbol{\varepsilon}_m^T \quad \boldsymbol{\varepsilon}_b^T \quad \boldsymbol{\varepsilon}_{mb\phi}^T \quad \boldsymbol{\varepsilon}_s^T \quad \boldsymbol{\varepsilon}_{s\phi}^T]^T$$

Con

$$\boldsymbol{\varepsilon}_m^T = [u_{,1} \quad v_{,2} \quad u_{,2} + v_{,1}]$$

$$\boldsymbol{\varepsilon}_b^T = [\vartheta_{1,1} \quad \vartheta_{2,2} \quad \vartheta_{1,2} + \vartheta_{2,1}]$$

$$\boldsymbol{\varepsilon}_{mb\phi}^T = [\psi_{1,1} \quad \psi_{2,2} \quad \psi_{1,2} \quad \psi_{2,1}]$$

$$\boldsymbol{\varepsilon}_s^T = [w_{,1} + \vartheta_1 \quad w_{,2} + \vartheta_2]$$

$$\boldsymbol{\varepsilon}_{s\phi}^T = [\psi_1 \quad \psi_2]$$

Le matrici dei coefficienti elastici ridotti trasformati nel sistema di coordinate (x_1, x_2, z) , associate alla condizione di plane-stress, sono definite come segue

$$\mathbf{C} = \begin{bmatrix} C_{11} & C_{12} & C_{16} \\ C_{12} & C_{22} & C_{26} \\ C_{16} & C_{26} & C_{66} \end{bmatrix}^{(k)}$$

$$\mathbf{Q} = \begin{bmatrix} Q_{11} & Q_{12} \\ Q_{12} & Q_{22} \end{bmatrix}^{(k)}$$

Di seguito si esplicitano i termini che compaiono nel principio di D'Alembert

$$\begin{aligned}
& \int_V (\delta \boldsymbol{\varepsilon}^T \boldsymbol{\sigma} + \delta \boldsymbol{\gamma}^T \boldsymbol{\tau}) dV \\
&= \int_V (\delta \boldsymbol{\varepsilon}_m^T \boldsymbol{S}_m^T + \delta \boldsymbol{\varepsilon}_b^T \boldsymbol{S}_b^T + \delta \boldsymbol{\varepsilon}_{mb\phi}^T \boldsymbol{S}_{mb\phi}^T) \boldsymbol{\sigma} dV \\
&+ \int_V (\delta \boldsymbol{\varepsilon}_s^T \boldsymbol{S}_s^T + \delta \boldsymbol{\varepsilon}_{s\phi}^T \boldsymbol{S}_{s\phi}^T) \boldsymbol{\tau} dV \\
&= \int_V (\delta \boldsymbol{\varepsilon}_m^T \boldsymbol{S}_m^T + \delta \boldsymbol{\varepsilon}_b^T \boldsymbol{S}_b^T + \delta \boldsymbol{\varepsilon}_{mb\phi}^T \boldsymbol{S}_{mb\phi}^T) \boldsymbol{C} \boldsymbol{\varepsilon} dV \\
&+ \int_V (\delta \boldsymbol{\varepsilon}_s^T \boldsymbol{S}_s^T + \delta \boldsymbol{\varepsilon}_{s\phi}^T \boldsymbol{S}_{s\phi}^T) \boldsymbol{Q} \boldsymbol{\gamma} dV \\
&= \int_V (\delta \boldsymbol{\varepsilon}_m^T \boldsymbol{S}_m^T + \delta \boldsymbol{\varepsilon}_b^T \boldsymbol{S}_b^T + \delta \boldsymbol{\varepsilon}_{mb\phi}^T \boldsymbol{S}_{mb\phi}^T) \boldsymbol{C} (\boldsymbol{S}_m \boldsymbol{\varepsilon}_m + \boldsymbol{S}_b \boldsymbol{\varepsilon}_b + \boldsymbol{S}_{mb\phi} \boldsymbol{\varepsilon}_{mb\phi}) dV \\
&+ \int_V (\delta \boldsymbol{\varepsilon}_s^T \boldsymbol{S}_s^T + \delta \boldsymbol{\varepsilon}_{s\phi}^T \boldsymbol{S}_{s\phi}^T) \boldsymbol{Q} (\boldsymbol{S}_s \boldsymbol{\varepsilon}_s + \boldsymbol{S}_{s\phi} \boldsymbol{\varepsilon}_{s\phi}) dV \\
&= \int_V \delta \boldsymbol{\varepsilon}_m^T (\boldsymbol{S}_m^T \boldsymbol{C} \boldsymbol{S}_m) \boldsymbol{\varepsilon}_m dV + \int_V \delta \boldsymbol{\varepsilon}_m^T (\boldsymbol{S}_m^T \boldsymbol{C} \boldsymbol{S}_b) \boldsymbol{\varepsilon}_b dV \\
&+ \int_V \delta \boldsymbol{\varepsilon}_m^T (\boldsymbol{S}_m^T \boldsymbol{C} \boldsymbol{S}_{mb\phi}) \boldsymbol{\varepsilon}_{mb\phi} dV + \int_V \delta \boldsymbol{\varepsilon}_b^T (\boldsymbol{S}_b^T \boldsymbol{C} \boldsymbol{S}_m) \boldsymbol{\varepsilon}_m dV \\
&+ \int_V \delta \boldsymbol{\varepsilon}_b^T (\boldsymbol{S}_b^T \boldsymbol{C} \boldsymbol{S}_b) \boldsymbol{\varepsilon}_b dV + \int_V \delta \boldsymbol{\varepsilon}_b^T (\boldsymbol{S}_b^T \boldsymbol{C} \boldsymbol{S}_{mb\phi}) \boldsymbol{\varepsilon}_{mb\phi} dV \\
&+ \int_V \delta \boldsymbol{\varepsilon}_{mb\phi}^T (\boldsymbol{S}_{mb\phi}^T \boldsymbol{C} \boldsymbol{S}_m) \boldsymbol{\varepsilon}_m dV + \int_V \delta \boldsymbol{\varepsilon}_{mb\phi}^T (\boldsymbol{S}_{mb\phi}^T \boldsymbol{C} \boldsymbol{S}_b) \boldsymbol{\varepsilon}_b dV \\
&+ \int_V \delta \boldsymbol{\varepsilon}_{mb\phi}^T (\boldsymbol{S}_{mb\phi}^T \boldsymbol{C} \boldsymbol{S}_{mb\phi}) \boldsymbol{\varepsilon}_{mb\phi} dV + \int_V \delta \boldsymbol{\varepsilon}_s^T (\boldsymbol{S}_s^T \boldsymbol{Q} \boldsymbol{S}_s) \boldsymbol{\varepsilon}_s dV \\
&+ \int_V \delta \boldsymbol{\varepsilon}_s^T (\boldsymbol{S}_s^T \boldsymbol{Q} \boldsymbol{S}_{s\phi}) \boldsymbol{\varepsilon}_{s\phi} dV + \int_V \delta \boldsymbol{\varepsilon}_{s\phi}^T (\boldsymbol{S}_{s\phi}^T \boldsymbol{Q} \boldsymbol{S}_s) \boldsymbol{\varepsilon}_s dV \\
&+ \int_V \delta \boldsymbol{\varepsilon}_{s\phi}^T (\boldsymbol{S}_{s\phi}^T \boldsymbol{Q} \boldsymbol{S}_{s\phi}) \boldsymbol{\varepsilon}_{s\phi} dV \\
&= \int_A \delta \boldsymbol{\varepsilon}_m^T \boldsymbol{D}_m \boldsymbol{\varepsilon}_m dA + \int_A \delta \boldsymbol{\varepsilon}_m^T \boldsymbol{D}_{mb} \boldsymbol{\varepsilon}_b dA + \int_A \delta \boldsymbol{\varepsilon}_m^T \boldsymbol{D}_{mmb\phi} \boldsymbol{\varepsilon}_{mb\phi} dA \\
&+ \int_A \delta \boldsymbol{\varepsilon}_b^T \boldsymbol{D}_{bm} \boldsymbol{\varepsilon}_m dA + \int_A \delta \boldsymbol{\varepsilon}_b^T \boldsymbol{D}_b \boldsymbol{\varepsilon}_b dA + \int_A \delta \boldsymbol{\varepsilon}_b^T \boldsymbol{D}_{bmb\phi} \boldsymbol{\varepsilon}_{mb\phi} dA \\
&+ \int_A \delta \boldsymbol{\varepsilon}_{mb\phi}^T \boldsymbol{D}_{mb\phi m} \boldsymbol{\varepsilon}_m dA + \int_A \delta \boldsymbol{\varepsilon}_{mb\phi}^T \boldsymbol{D}_{mb\phi b} \boldsymbol{\varepsilon}_b dA \\
&+ \int_A \delta \boldsymbol{\varepsilon}_{mb\phi}^T \boldsymbol{D}_{mb\phi} \boldsymbol{\varepsilon}_{mb\phi} dA + \int_A \delta \boldsymbol{\varepsilon}_s^T \boldsymbol{D}_s \boldsymbol{\varepsilon}_s dA + \int_A \delta \boldsymbol{\varepsilon}_s^T \boldsymbol{D}_{ss\phi} \boldsymbol{\varepsilon}_{s\phi} dA \\
&+ \int_A \delta \boldsymbol{\varepsilon}_{s\phi}^T \boldsymbol{D}_{s\phi s} \boldsymbol{\varepsilon}_s dA + \int_A \delta \boldsymbol{\varepsilon}_{s\phi}^T \boldsymbol{D}_{s\phi} \boldsymbol{\varepsilon}_{s\phi} dA
\end{aligned}$$

Dove

$$\boldsymbol{S}_m = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} = \boldsymbol{I}_3$$

$$\boldsymbol{S}_b = z \boldsymbol{I}_3$$

$$\mathbf{S}_s = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} = \mathbf{I}_2$$

$$\mathbf{S}_{mb\phi} = \begin{bmatrix} \phi_1^{(k)} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \phi_2^{(k)} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \phi_1^{(k)} & \phi_2^{(k)} \end{bmatrix}$$

$$\mathbf{S}_{s\phi} = \begin{bmatrix} \beta_1^{(k)} & 0 \\ 0 & \beta_2^{(k)} \end{bmatrix}$$

Da cui

$$\int_V (\delta \boldsymbol{\varepsilon}^T \boldsymbol{\sigma} + \delta \boldsymbol{\gamma}^T \boldsymbol{\tau}) dV = \int_A \delta \mathbf{g}_\varepsilon^T \mathbf{KZI} \mathbf{g}_\varepsilon dA$$

Con

$$\mathbf{KZI} = \begin{bmatrix} \mathbf{D}_P & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{D}_T \end{bmatrix}$$

$$\mathbf{D}_P = \begin{bmatrix} \mathbf{D}_m & \mathbf{D}_{mb} & \mathbf{D}_{mmb\phi} \\ \mathbf{D}_{bm} & \mathbf{D}_b & \mathbf{D}_{bmb\phi} \\ \mathbf{D}_{mb\phi m} & \mathbf{D}_{mb\phi b} & \mathbf{D}_{mb\phi} \end{bmatrix}$$

$$\mathbf{D}_T = \begin{bmatrix} \mathbf{D}_s & \mathbf{D}_{ss\phi} \\ \mathbf{D}_{s\phi s} & \mathbf{D}_{s\phi} \end{bmatrix}$$

$$\int_V \delta \mathbf{s}^T \rho \ddot{\mathbf{s}} dV = \int_V \delta \mathbf{g}_s^T [\delta s]^T \rho [\delta s] \ddot{\mathbf{g}}_s dV = \int_A \delta \mathbf{g}_s^T \mathbf{MZI} \ddot{\mathbf{g}}_s dV$$

Con

$$\mathbf{MZI} = \begin{bmatrix} \mathbf{M}_m & \mathbf{M}_{mb} & \mathbf{M}_{mmb\phi} \\ \mathbf{M}_{bm} & \mathbf{M}_b & \mathbf{M}_{bmb\phi} \\ \mathbf{M}_{mb\phi m} & \mathbf{M}_{mb\phi b} & \mathbf{M}_{mb\phi} \end{bmatrix}$$

$$\mathbf{M}_m = \begin{bmatrix} m^{(0)} & 0 \\ 0 & m^{(0)} \end{bmatrix}$$

$$\mathbf{M}_{mb} = \begin{bmatrix} 0 & m^{(1)} & 0 \\ 0 & 0 & m^{(1)} \end{bmatrix}$$

$$\mathbf{M}_{mmb\phi} = \begin{bmatrix} m_0^{(\phi_1)} & 0 \\ 0 & m_0^{(\phi_2)} \end{bmatrix}$$

$$\mathbf{M}_b = \begin{bmatrix} m^{(0)} & 0 & 0 \\ 0 & m^{(2)} & 0 \\ 0 & 0 & m^{(2)} \end{bmatrix}$$

$$\mathbf{M}_{bmb\phi} = \begin{bmatrix} \mathbf{0} & \mathbf{0} \\ m_1^{(\phi_1)} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & m_1^{(\phi_2)} \end{bmatrix}$$

$$\mathbf{M}_{mb\phi} = \begin{bmatrix} m_2^{(\phi_1)} & 0 \\ 0 & m_2^{(\phi_1)} \end{bmatrix}$$

$$\begin{aligned} \mathbf{M}_{bm} &= \mathbf{M}_{mb}^T \\ \mathbf{M}_{mb\phi m} &= \mathbf{M}_{mmb\phi}^T \\ \mathbf{M}_{mb\phi b} &= \mathbf{M}_{bmb\phi}^T \end{aligned}$$

Dove

$$\begin{aligned} m^{(0)} &= \int_{-h}^h \rho^{(k)} dz \\ m^{(1)} &= \int_{-h}^h \rho^{(k)} z dz \\ m^{(2)} &= \int_{-h}^h \rho^{(k)} z^2 dz \\ m_0^{(\phi_\alpha)} &= \int_{-h}^h \rho^{(k)} \phi_\alpha^{(k)} dz \\ m_1^{(\phi_\alpha)} &= \int_{-h}^h \rho^{(k)} z \phi_\alpha^{(k)} dz \\ m_2^{(\phi_\alpha)} &= \int_{-h}^h \rho^{(k)} (\phi_\alpha^{(k)})^2 dz \end{aligned}$$

$$\delta W_e = \int_A q \delta w dA + \int_{C_\sigma} \int_{-h}^h [\bar{T}_1 \delta u_1^{(k)} + \bar{T}_2 \delta u_2^{(k)} + \bar{T}_z \delta u_z^{(k)}] ds dz$$

Appendice B: Funzioni di forma

Le funzioni di forma quadratiche P_l , utilizzate per l'approssimazione degli spostamenti uniformi, sono, per l'elemento triangolare

$$\begin{aligned} P_i &\equiv N_i(2N_i - 1) & (i = 1, 2, 3) \\ P_{ij} &\equiv 4N_i N_j & \begin{pmatrix} i = 1, 2, 3 \\ j = 2, 3, 1 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

Dove N_i sono le coordinate di area.

Per l'elemento quadrilatero, le P_l sono le funzioni di forma biquadratiche di serendipity

$$\begin{aligned} P_i &\equiv \frac{1}{4}(1 + \xi_i \xi)(1 + \eta_i \eta)(\xi_i \xi + \eta_i \eta - 1) & (i = 1, 2, 3, 4) \\ P_{12} &\equiv \frac{1}{2}(1 - \xi^2)(\eta - 1) \\ P_{23} &\equiv \frac{1}{2}(1 - \eta^2)(\xi + 1) \\ P_{34} &\equiv \frac{1}{2}(1 - \xi^2)(1 + \eta) \\ P_{41} &\equiv \frac{1}{2}(1 - \eta^2)(1 - \xi) \end{aligned}$$

Dove $(\xi, \eta) \in [-1, 1]$ sono le coordinate nel piano naturale dell'elemento finito, e (ξ_i, η_i) sono le coordinate naturali dell' i -esimo nodo di vertice.

Le funzioni di forma usate nell'equazione (2.18) sono per l'elemento triangolare e per l'elemento quadrilatero, rispettivamente

$$\begin{aligned}
 M_i &\equiv -\frac{N_i}{2} [N_j(x_{1i} - x_{1j}) + N_k(x_{1i} - x_{1k})] && \begin{pmatrix} i = 1, 2, 3 \\ j = 2, 3, 1 \\ k = 3, 1, 2 \end{pmatrix} \\
 L_i &\equiv \frac{N_i}{2} [N_j(x_{2i} - x_{2j}) + N_k(x_{2i} - x_{2k})] \\
 M_i &\equiv -\frac{1}{8} [P_{ki}(x_{1i} - x_{1k}) + P_{ij}(x_{1i} - x_{1j})] && \begin{pmatrix} i = 1, 2, 3, 4 \\ j = 2, 3, 4, 1 \\ k = 4, 1, 2, 3 \end{pmatrix} \\
 L_i &\equiv \frac{1}{8} [P_{ki}(x_{2i} - x_{2k}) + P_{ij}(x_{2i} - x_{2j})]
 \end{aligned}$$

Dove (x_{1i}, x_{2i}) sono le coordinate del nodo del vertice i -esimo nel sistema di riferimento locale.

5 Bibliografia

- [1] Reddy JN. (1997). Mechanics of laminated composite plate. NewYork: CRC Press.
- [2] Reissner Y, Stavsky E. (1961). Bending and stretching of certain types of heterogeneous Aeolotropic Elastic Plates. J. Appl. Mech., 28(3): 402-408.
- [3] Reissner E. (1945). The effect of transverse shear deformation on the bending of elastic plates. J. Appl. Mech, 12(2): A69-A77.
- [4] Mindlin R. (1951). Influence of Rotatory Inertia and Shear on Flexural Motions of Isotropic, Elastic Plates. J. Appl. Mech., 18(1): 31-38.
- [5] Ferreira A. (2003). A formulation of the multiquadric radial basis function method for the analysis of laminated composite plates. Composite Structures, 385-392.
- [6] Iurlaro L, Gherlone M, Di Sciuva M, Tessler A. (2013). Assessment of the Refined Zigzag Theory for bending, vibration, and buckling of sandwich plates: a comparative study of different theories. 777-792.
- [7] Noor A K, Burton WS. (1989). Assessment of Shear Deformation Theories for Multilayered Composite Plates. Appl. Mech., 42(1): 1-13.
- [8] Pandya BN, Kant T. (1988). Flexural analysis of laminated composites using refined higher-order C^0 plate bending elements. Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering, 173-198.
- [9] Reddy JN. (1984). A Simple Higher-Order Theory for Laminated Composite Plates. J. Appl. Mech., 51(4): 745-752.
- [10] Tessler A. (1993). An improved plate theory of $\{1,2\}$ -order for thick composite laminates. International Journal of Solids and Structures, 981-1000.
- [11] Touratier M. (1991). An efficient standard plate theory. International Journal of Engineering Science, 901-916.
- [12] Cook GM, Tessler A. (1998). A $\{3,2\}$ -order bending theory for laminated composite and sandwich beams. Composites Part B: Engineering, 565-576.
- [13] Barut AA, Madenci E, Anderson T, Tessler A. (2002). Equivalent single-layer theory for a complete stress field in sandwich panels under arbitrarily distributed loading. Composite Structures, 483-495.
- [14] Librescu L, Khdeir A, Reddy J. (1987). A comprehensive analysis of the state of stress of elastic anisotropic flat plates using refined theories. Acta Mech, 70, 57-81.
- [15] Kant T, Marur S, Rao G. (1998). Analytical solution to the dynamic analysis of laminated beams using higher order refined theories. Compos Struct, 40(1), 1-9.
- [16] Di Sciuva M. (1985). Development of an anisotropic, multilayered, shear-deformable rectangular plate element. Comput Struct;21(4):789-96.
- [17] Di Sciuva M. (1986). Bending, vibration and buckling of simply supported thick multilayered orthotropic plates: An evaluation of a new displacement model. J Sound Vib,105(3):425-42.
- [18] Di Sciuva M. (1987). An improved shear-deformation theory for moderately thick multilayered anisotropic shells and plates. J Appl Mech, 54(3):589-96.

- [19] Di Sciuva M. (1992). Multilayered anisotropic plate models with continuous interlaminar stresses. *Compos Struct*, 22(3):149–67.
- [20] Cho M, Parmenter RR. (1993). Efficient higher order composite plate theory for general lamination configurations. *AIAA Journal*, 31(7):1299–306.
- [21] Averill RC. (1994). Static and dynamic response of moderately thick laminated beams with damage. *Compos Eng*, 4(4):381–95.
- [22] Averill RC, Yip YC. (1996). Development of simple, robust finite elements based on refined theories for thick laminated beams. *Comput Struct*, 59(3):529–46.
- [23] Icardi U. (2001). A three-dimensional zig-zag theory for analysis of thick laminated beams. *Compos Struct*, 52:123–35.
- [24] Icardi U, Sola F. (2014). Development of an efficient zigzag model with variable representation of displacements across the thickness. *J Eng Mech*, 140(3):531–41.
- [25] Tessler A, Di Sciuva M, Gherlone M. A refined linear zigzag theory for composite beams: reformulation of zigzag function and shear stress constraints. In: VI international symposium on advanced composites and applications for the new millennium, Corfù, Greece; May 2007.
- [26] Tessler A, Di Sciuva M, Gherlone M. Refinement of Timoshenko beam theory for composite and sandwich beams using zigzag kinematics. Technical report NASA/TP-2007-215086. NASA; December 2007. 104
- [27] Tessler A, Di Sciuva M, Gherlone M. A refined zigzag beam theory for composite and sandwich beams. *J Compos Mater* 2009, 43(9): 1051–81.
- [28] Tessler A, Di Sciuva M, Gherlone M. A shear-deformation theory for composite and sandwich plates using improved zigzag kinematics. In: Proceedings of 9th international conference on computational structures technology, Athens, Greece; September 2008.
- [29] Tessler A, Di Sciuva M, Gherlone M. Refined zigzag theory for laminated composite and sandwich plates. Technical report NASA/TP-2009-215561. NASA; January 2009.
- [30] Tessler A, Di Sciuva M, Gherlone M. A consistent refinement of first-order shear deformation theory for laminated composite and sandwich plates using improved zigzag kinematics. *J Mech Mater Struct* 2010;5(2):341–67. D. Versino et al. / *Composites: Part B* 44 (2013) 218–230 229
- [31] Tessler A, Di Sciuva M, Gherlone M. Refined zigzag theory for homogeneous, laminated composite, and sandwich plates: a homogeneous-limit methodology for zigzag function selection. Technical report NASA/TP-2010-216214. NASA; January 2010.
- [32] Tessler A, Di Sciuva M, Gherlone M. A homogeneous limit methodology and refinements of computationally efficient zigzag theory for homogeneous, laminated composite, and sandwich plates. *Numer Meth Partial Diff Eqs* 2011, 27(1): 208–29.
- [33] Reissner E. On a certain mixed variational theorem and a proposed application. *Int J Numer Meth Eng* 1984, 20(7): 1366–8.
- [34] Gherlone M, Tessler A, Di Sciuva M. C0 beam elements based on the Refined Zigzag Theory for multilayered composite and sandwich laminates. *Compos Struct* 2011, 93(11): 2282–94.
- [35] Di Sciuva M, Gherlone M, Iurlaro L, Tessler A. A class of higher-order C0 composite and sandwich beam elements based on the Refined Zigzag Theory. *Compos Struct* 2015, 132: 784–803.

- [36] Groh RMJ, Tessler A. 2017 Computationally efficient beam elements for accurate stresses in sandwich laminates and laminated composites with delaminations. *Comput Methods Appl Mech Eng* 2017, 320: 369–95.
- [37] Versino D, Mattone M, Gherlone M, Tessler A, Di Sciuva M. C0 triangular elements based on the Refined Zigzag Theory for multilayer composite and sandwich plates. *Compos B Eng* 2013, 44(1): 218–30.
- [38] Gherlone M. Tria and Quad plate finite elements based on RZT^(m) for the analysis of multilayered sandwich structures. *Compos Struct* 2019, 2019(220): 510–20.
- [39] Naghdi PM. *The Theory of Shell and Plates, Handbuch der Physik, VIa.2.* Berlin: Springer-Verlag; 1972. p. 425–640.
- [40] Zienkiewicz OC, Taylor RL. *The finite element method for solid and structural mechanics.* Amsterdam: Elsevier; 2005.
- [41] Dvorkin EN, Bathe KJ. A continuum mechanics based four-node shell element for general nonlinear analysis. *Engineering Computations* 1984, 1(1): 77–88.
- [42] Belytschko T, Leviathan I. Physical stabilization of 4-node shell element with one point quadrature. *Comput Methods Appl Mech Eng* 1994, 113: 321–50.
- [43] Chang-Koon C, Tae-Yeol L. Efficient remedy for membrane locking of 4-node flat shell elements by non-conforming modes. *Comput Methods Appl Mech Eng* 2003, 192(16–18): 1961–71.
- [44] Wisniewski K, Turska E. Enhanced Allman quadrilateral for finite drilling rotations. *Comput Methods Appl Mech Eng* 2006, 195(44–47): 6086–109.
- [45] Hughes TJR, Brezzi F. On drilling degrees of freedom. *Comput Methods Appl Mech Eng* 1989, 72: 105–21.
- [46] Ibrahimbegovic A, Taylor RL, Wilson EL. A robust quadrilateral membrane finite element with drilling degrees of freedom. *Int J Numer Meth Eng* 1990, 30: 445–57.
- [47] Hughes TJR, Brezzi F. Dynamic analysis and drilling degrees of freedom. *Int J Numer Meth Eng* 1995, 38: 3193–210.
- [48] Zhu Y, Zacharia T. A new one-point quadrature, quadrilateral shell element with drilling degrees of freedom. *Comput Methods Appl Mech Eng* 1996, 136: 165–203.
- [49] Allman DJ. A compatible triangular element including vertex rotations for plane elasticity analysis. *Comput Struct* 1984, 19: 1–8.
- [50] Allman DJ. A quadrilateral finite element including vertex rotations for plane elasticity analysis. *Int J Numer Meth Eng* 1988, 26: 717–30.
- [51] Cook RD. Further development of a three-node triangular shell element. *Int J Numer Meth Eng* 1993, 36: 1413–25.
- [52] Cook RD. Four-node “flat” shell element: drilling degrees of freedom, membrane-bending coupling, warped geometry, and behavior. *Comput Struct* 1994, 50: 549–55.
- [53] Tessler A. Comparison of interdependent interpolations for membrane and bending kinematics in shear-deformable shell elements. *International Conference on Computational Engineering & Sciences.* Los Angeles. 2000.

- [54] Tessler A, Mohr J. A three-node shell element with drilling degrees of freedom for laminated composite and sandwich structures. Fourth International Colloquium on Computation of Shell & Spatial Structures. Chania, Crete, Greece. 2000.
- [55] Neto MA, Leal RP, Yu W. A triangular finite element with drilling degrees of freedom for static and dynamic analysis of smart laminated structures. *Comput Struct* 2012, 108–109:61–74.
- [56] Tessler A, Dong SB. On a hierarchy of conforming Timoshenko beam elements. *Comput Struct* 1981, 14(3–4): 335–44.
- [57] Tessler A, Hughes TJR. An improved treatment of transverse shear in the Mindlin type four-node quadrilateral element. *Comput Methods Appl Mech Eng* 1983, 39: 311–55.
- [58] Tessler A, Hughes TJR. A three-node Mindlin plate element with improved transverse shear. *Comput Methods Appl Mech Eng* 1985, 50(1): 71–101.
- [59] Nguyen-Van H, Tran Cong T, Duy Mai N. (2009). An Improved Quadrilateral Flat Element with Drilling Degrees of Freedom for Shell Structural Analysis. *Computer Modeling in Engineering and Sciences*, 49(2): 81-110.
- [60] Mohr J. (2000). An efficient triangular shell finite element for thick composite and sandwich laminates (Bachelor of Science Civil Engineering Thesis). George Washington University.
- [61] Wisniewski K. *Finite Rotation Shells*. Netherlands: Springer; 2010.
- [62] Gherlone M, Versino D, Zarra V. Multilayered triangular and quadrilateral flat shell elements based on the Refined Zigzag Theory. *Comput Struct* 2020.