## POLITECNICO DI TORINO

## CORSO DI LAUREA MAGISTRALE IN INGEGNERIA MECCANICA



Tesi di Laurea Magistrale

# Modelli a parametri concentrati per la caratterizzazione di cuscinetti di tipo foil

*Relatore* Prof. Federico Colombo

*Correlatore* Prof. Terenziano Raparelli

> *Candidato* Giulia Maria Sofia Stimolo

A.A. 2021/22

## Indice

	Elenco dei simboli4
	Elenco delle figure e delle tabelle6
	Abstract9
	Introduzione10
1.	Stato dell'arte12
1.1.	Una panoramica sugli Air Foil Bearings12
1.2.	Air Foil Bearings: Progettazione e funzionamento14
1.3.	Air Foil Bearings: Svantaggi e difficoltà nelle applicazioni16
2.	Fabbricazione dei foil bearings18
2.1.	Materiali impiegati per la fabbricazione di foil bearings19
2.2.	Processi di produzione dei foil bearings20
2.2.1	Formatura delle lamine22
2.2.2	Trattamento termico delle lamine24
2.3.	Tecnologie alternative: utensili realizzati attraverso la stampa 3D26
2.3.1	Svantaggi nel processo di produzione26
2.3.2	Processi di fabbricazione additiva per la creazione di stampi di
	formatura27
3.	Campi di applicazione dei foil bearings
3.1.	Sviluppi tecnologici negli anni
3.2.	Applicazione di cuscinetti di tipo foil per le macchine a ricircolo d'aria32
3.2.1	Descrizione di una macchina a ricircolo d'aria32
3.3.	Ulteriori applicazioni

"Modelli a parametri concentrati per la caratterizzazione di cuscinetti di tipo foil"

4.	Modellazione numerica a parametri concentrati per lo studio del Bump
	foil
4.1.	Geometria del Bump Foil37
4.2.	Calcolo rigidezza k140
4.2.1	Caso 1
4.2.2	Caso 2
4.3.	Calcolo rigidezza k245
4.4.	Analisi strutturale delle forze agenti sul Bump foil
4.5.	Calcolo rigidezza equivalente kv52
5.	Risultati numerici
5.1.	Deflessione verticale ( $\Delta$ h) nota
5.2.	Distribuzione di forza (Fp) nota63
5.2.1	Influenza del coefficiente di attrito sulla rigidezza equivalente72
5.3.	Distribuzione variabile di forza (Fp)73
6.	Conclusioni79
	Appendice 1
	Bibliografia102

## Elenco dei simboli

$f_i$	Forze di attrito
$F_p^i$	Forza di carico applicata sulla sommità dell'i-esimo bump
$F_s^i$	Forza della molla orizzontale
F <sup>i</sup> <sub>beam</sub>	Forza di interazione fra i <i>bump</i>
$V_r^i$	Reazione vincolare estremo destro sull'i-esimo bump
$V_L^i$	Reazione vincolare estremo sinistro sull'i-esimo bump
$F_H$	Reazione vincolare in direzione orizzontale
$F_V$	Reazione vincolare in direzione verticale
$\Delta h$	Deflessione verticale della lamina
<i>k</i> <sub>1</sub>	Rigidezza molla orizzontale
<i>k</i> <sub>2</sub>	Rigidezza molla obliqua
$k^i_{v}$	Rigidezza equivalente sull'i-esimo bump
L <sub>l</sub>	Lunghezza dei link
$L_{spring}, L'_{spring}$	Lunghezza delle molle
$\Delta L$	Deflessione orizzontale della molla
$M(\theta), N(\theta)$	Momento di trasporto e sforzo normale
$S = t_b \cdot L$	Area della sezione del foil

	"Modelli a parametri concentrat	per la ca	ratterizzazione	di cusc	inetti di	tipo foil"
--	---------------------------------	-----------	-----------------	---------	-----------	------------

U	Energia di deformazione elastica
α,γ	Angoli dei link rigidi
μ, η	Coefficienti di attrito
ν	Coefficiente di Poisson
$ heta_o$	Angolo del bump
$A^i, B^i$	Coefficienti definiti nelle Eq.ni (81, 82, 84, 85)
$D = E \cdot \frac{t_b^2}{12 \cdot (1 - \nu^2)}$	Rigidezza flessionale
Ε	Modulo di Young

## Elenco delle figure e delle tabelle

#### Figura

Figura 1.1. Vista laterale di un Air Foil Bearings (C. DellaCorte et al., 2008)15
Figura 2.1. Dettaglio del profilo di un foil bearing (K. Shalash e J. Schiffmann, 2000) 19
Figura 2.2. Bump foil tagliato in strati, sottoposto precedentemente a formatura (C.
<i>Dellacorte et al.,2007).</i>
Figura 2.3. Geometria del Bump Foil realizzata sullo stampo (C. Della Corte et al., 2007)22
Figura 2.4. Utensile utilizzato durante il processo di formatura del Bump Foil23
Figura 2.5. Punzone (a destra) e matrice (a sinistra) realizzati con la stampa 3D (G. Zywica
<i>et al.,</i> 2019)
Figura 3.1 Sezione trasversale di una macchina a ricircolo d'aria (H. Heshmat e P. Hermel,
1993)
Figura 4.1 Geometria semplificata dei bump (K. Feng et al.,2014)
Figura 4.2 Geometria del singolo bump
Figura 4.3 Modello equivalente semplificato di Bump foil ((K.Feng e S.Kaneko,2010)39
Figura 4.4 Modello link-molla di Bump foil (K.Feng e S.Kaneko,2010)40
Figura 4.5 Schema del bump (caso 1)
Figura 4.6 Schema del bump (caso 2)
Figura 4.7 Modello che descrive il bump in assenza di moto (K.Feng e S.Kaneko,2010)45
Figura 4.8 Diagramma di corpo libero del bump i-esimo
Figura 4.9 Diagramma di corpo libero n-esimo bump

"Modelli a	parametri	concentrati	per la	caratterizza	azione	di c	cuscinetti	di	tipo	foil"
								-		-

Figura 5.1 Andamento della deflessione orizzontale in relazione a quella verticale56
Figura 5.2 Andamento dell'angolo ( $\alpha$ ) e della deflessione verticale
Figura 5.3 Confronto tra il Bump foil indeformato e quello deformato
Figura 5.4 Traslazione estremo destro del bump al variare della deflessione verticale
Figura 5.5 Andamento della rigidezza equivalente ( $k_v$ ) al variare della deflessione verticale. 59
Figura 5.6 Andamento della forza verticale $(F_p)$ al variare della deflessione verticale60
Figura 5.7 Andamento della reazione vincolare ( $V_R$ ) al variare della deflessione verticale61
Figura 5.8 Andamento della reazione vincolare ( $V_L$ ) al variare della deflessione verticale61
Figura 5.9 Andamento della forza di interazione fra i bump al variare della deflessione verticale
Figura 5.10 Andamento della forza esercitata dalla molla di rigidezza $k_1$ al variare della deflessione verticale
Figura 5.11 Diagramma di flusso del calcolo iterativo sull'i-esimo bump66
Figura 5.12 Andamento della deflessione orizzontale al variare di quella verticale67
Figura 5.13 Andamento dell'angolo sotteso dai link rigidi al variare della deflessione verticale
Figura 5.14 Deflessione verticale calcolata su ogni bump
Figura 5.15 Convergenza dell'errore su ogni bump per ogni iterazione
Figura 5.16 Confronto tra la rigidezza equivalente iniziale e la rigidezza equivalente corretta. 
Figura 5.17 Confronto tra il Bump foil deformato e quello indeformato

<i>Figura 5.18 Confronto fra la rigidezza equivalente nelle diverse condizioni di moto e attrito.</i>
Figura 5.19 Distribuzione della forza nei due casi studiati
<i>Figura 5.20 Confronto della deflessione dei bump per una distribuzione di forza decrescente.</i>
Figura 5.21 Confronto della deflessione dei bump per una distribuzione di forza triangolare.
Figura 5.22 Confronto della rigidezza equivalente del bump per una distribuzione di forza
decrescente
Figura 5.23 Confronto della rigidezza equivalente dei bump per una distribuzione di forza
triangolare
Figura 5.24 Confronto fra il Bump foil in condizione indeformata e deformata nel caso di
distribuzione di forza decrescente
Figura 5.25 Confronto fra il Bump foil in condizione indeformata e deformata nel caso di
distribuzione di forza triangolare
Figura 5.26 Effetto del coefficiente di attrito sulla deformazione di un bump con estremità
fisse
Tabella Pag.
Tabella 4.1 Dati geometrici del cuscinetto (K.Feng e S.Kaneko,2010)
Tabella 4.2 Valore calcolato di $R_b e \theta_0$
Tabella 5.1 Condizioni iniziali modello numerico
Tabella 5.2 Valori numerici rigidezza della molla per bump con estremità fisse e scorrevoli.

## Abstract

I **foil bearings** sono dei cuscinetti idrodinamici, ad avviamento automatico, che sfruttano l'aria o gas come fluido di lavoro. Trovano largo impiego all'interno di turbomacchine e si distinguono per la loro capacità di operare in assenza di oli lubrificanti, garantendo elevate prestazioni in condizioni critiche caratterizzate da temperature e velocità elevate.

Sebbene il principio di funzionamento che caratterizza i cuscinetti a lamina d'aria sia relativamente semplice, non si può affermare quanto detto se si fa riferimento alla struttura che li contraddistingue e alla forte dipendenza che si ha fra la rigidezza della lamina e la pressione idrodinamica generata.

Il seguente lavoro di tesi espone un modello analitico che descrive il comportamento del *Bump foil*, rappresentato schematicamente da una serie di link rigidi distanziati da una molla orizzontale, prendendo in considerazione l'effetto di quattro fattori principali: la rigidezza, la deflessione verticale della lamina, l'azione delle forze di attrito e le forze di interazione fra i *bump*.

I risultati ottenuti consentono di affermare la validità del modello numerico esposto, tuttavia lo studio presentato non è sufficiente a descrivere il comportamento della struttura del cuscinetto in quanto viene trascurato l'effetto esercitato dal *Top foil*.

La seguente trattazione costituisce la base per lo sviluppo di un modello numerico esaustivo a supporto della progettazione e dei processi di produzione dei **foil bearings** in modo da favorirne l'implementazione in maggiori campi applicativi.

## Introduzione

Oggigiorno il progresso tecnologico deve inevitabilmente fare i conti con aspetti legati alla sostenibilità ambientale che hanno spinto la ricerca scientifica verso nuovi orizzonti legati ad un uso intelligente delle risorse disponibili e nel contempo individuare nuove opportunità e modelli di produzione e consumo sostenibile.

Sulla base di quanto esposto, il seguente progetto di tesi pone la sua attenzione sui cuscinetti a lamina d'aria o *Air Foil Bearings*, che sebbene siano riconosciuti per la loro capacità di funzionamento in condizioni gravose e ad elevate velocità, forniscono un contributo in termini di impatto ambientale riducendo l'inquinamento legato all'uso di lubrificanti.

A differenza dei cuscinetti a corpi volventi, i **foil bearings** si distinguono per la loro capacità di operare in assenza di oli lubrificanti, sfruttando fluidi quali l'aria o altri tipi di gas. L'assenza di un sistema di lubrificazione esterna consente di avere sistemi più compatti, leggeri e che richiedono poca manutenzione, riducendo notevolmente l'incidenza al fallimento legata dalla presenza di componenti aggiuntivi.

In generale i **foil bearings** sono riusciti a distinguersi per la loro semplicità e ad oggi trovano largo impiego nei più avanzati sistemi di turbomacchine. Certamente la caratteristica che li distingue è l'abilità di creare autonomamente uno strato di pressione idrodinamica sfruttando il fluido nell'ambiente circostante.

Nel corso degli anni sono state implementate diverse soluzioni per migliorare le prestazioni di questa tipologia di cuscinetti. Tuttavia alcune problematiche quali ottimizzazione dei processi di produzione e difficoltà nella modellazione analitica, ne hanno rallentato lo sviluppo.

Il seguente lavoro di tesi ha come obbiettivo finale lo sviluppo di un modello analitico che descriva il comportamento del *Bump foil,* il quale verrà analizzato attraverso l'ambiente di calcolo MATLAB.

"Modelli a parametri concentrati per la caratterizzazione di cuscinetti di tipo foil"

Si procederà come segue:

- Capitolo 1: Generalità sui foil bearings, aspetti critici, principi di funzionamento e di progettazione;
- Capitolo 2: Processi di produzione che caratterizzano i foil bearings, materiali impiegati e sviluppo di metodologie alternative per la formatura delle lamine;
- Capitolo 3: Applicazioni e limiti di implementazione dei foil bearings;
- Capitolo 4: Sviluppo di un modello analitico semplificato che descriva il comportamento del *Bump foil*;
- Capitolo 5: Risultati del modello matematico sviluppato su MATLAB considerando un primo caso, nel quale si suppone nota la deflessione verticale sui *bump* e un secondo caso, nel quale si suppone nota la distribuzione di forza che agisce sui *bump;*
- **Capitolo 6**: Conclusioni e sviluppi futuri;

"Modelli a parametri concentrati per la caratterizzazione di cuscinetti di tipo foil"

## Capitolo 1

## 1. Stato dell'arte

Il seguente capitolo espone una descrizione accurata dei **foil bearing**, dal loro sviluppo nel corso della storia ad un resoconto della tecnologia che li caratterizza.

Inoltre, partendo dai dati fornitici in letteratura, una particolare attenzione verrà posta sui vantaggi e sulle criticità che contraddistinguono questa tipologia di cuscinetti.

#### 1.1. Una panoramica sugli Air Foil Bearings

I primi sviluppi sugli *Air Foil Bearings* si devono alla Garret AirResearch, un'importante azienda statunitense nel panorama aereonautico, che decise di sviluppare il primo modello di macchina a ricircolo d'aria senza l'utilizzo di componenti che richiedessero l'uso di lubrificanti.

Il meccanismo che contrassegna questo tipo di cuscinetti si basa sulla pressione generata dall'azione idrodinamica del fluido, che può essere aria o gas, che si sviluppa fra due superfici inclinate e in moto relativo l'una rispetto all'altra.

Principalmente utilizzati in turbomacchine, ciò che ne ha consentito lo sviluppo e l'applicazione si deve principalmente agli innumerevoli aspetti vantaggiosi che li contraddistinguono [1], i quali possono essere riassunti come segue:

> Elevata affidabilità: l'assenza di olio lubrificante rende i foil bearings meno soggetti a manutenzione programmate per il ripristino del film di lubrificante necessario per evitare l'usura tra le parti, in quanto lo strato di film di aria o di gas, generatosi tra le parti rotanti, protegge le lamine del cuscinetto dallo stato di usura;

"Modelli a parametri concentrati per la caratterizzazione di cuscinetti di tipo foil"

- Assenza di manutenzione programmata: l'assenza di olio lubrificante riduce notevolmente i tempi necessari alla salvaguardia del sistema, consentendo anche una riduzione notevole dei costi di manutenzione;
- Lo stato di danneggiamento del sistema resta circoscritto nella zona delimitata dal cuscinetto e dalla superficie dell'albero accoppiata con esso;
- Capacità di operare in condizioni gravose: i foil bearings, a differenza di altre tipologie di cuscinetti, sono in grado di lavorare in ambienti contaminati senza riscontrare alcuna anomalia durante il loro operato;
- Capacità di operare ad elevate velocità: i foil bearings dimostrano un elevata efficienza di funzionamento ad elevate velocità della macchina, che si manifesta come una migliore capacità di sopportare carichi maggiori;
- Capacità di operare ad elevate o a basse temperature: l'assenza di olio lubrificante permette a questi cuscinetti di lavorare a temperature elevate, senza che vi sia un danneggiamento dello strato di film tra le parti rotanti, o a basse temperature, senza che vi sia un aumento di viscosità del fluido;
- Varietà di fluidi con cui possono operare: lo strato di film tra il cuscinetto e l'albero può essere costituito da aria o da altri gas, ciò ne consente una migliore attitudine di adeguamento alle diverse necessità dei sistemi in cui operano;

Nel corso della storia questa tipologia di cuscinetti è stata impiegata principalmente nelle macchine a ricircolo d'aria (ACM o *air cycle machine*), aumentando le prestazioni e l'affidabilità del sistema se comparate a quelle che prevedevano l'utilizzo di cuscinetti a corpi volventi. Tuttavia alcune criticità, quali il campo ristretto di applicazioni e le difficoltà riscontrate nei processi per la produzione delle lamine che lo caratterizzano, ne hanno ostacolato lo sviluppo e la divulgazione.

#### 1.2. Air Foil Bearings: Progettazione e funzionamento

Gli *Air Foil Bearings* sono dei cuscinetti idrodinamici, ad avviamento automatico, i quali sfruttano l'aria o gas come fluido di lavoro. Essi sono costituti da due strati principali di fogli di lamiera:

- *Top foil* (Figura 1.1): è lo strato più interno, il quale intrappola l'aria pressurizzata che sorregge il carico e lo separa dalla superfice dell'albero. Può essere soggetto ad usura nelle fasi di avvio e di arresto della macchina, poiché l'assenza di velocità adeguate del sistema non consente di avere uno strato di film necessario a separare la superficie dell'albero da quella del cuscinetto.
- Bump foil (Figura 1.1): è caratterizzato da una geometria costituita da un profilo ondulato; ad oggi la letteratura non fornisce adeguate informazioni sulle lavorazioni di lamiere che adottano tale struttura per la applicazione specifica trattata in questa tesi. La sua presenza è fondamentale, in quanto conferisce stabilità [2] e consente di adattare la geometria del sistema all'espansione dell'albero, generata dalle forze centrifughe che si originano a causa delle elevate velocità e dalle eventuali temperature di funzionamento elevate.

Durante la fase di esercizio del cuscinetto è fondamentale che non ci sia moto relativo fra il *Top foil* e il *Bump foil*, per tale motivo gli estremi delle due lamine vengono saldati fra di loro attraverso un metodo di saldatura a punti, facendo molta attenzione a non alterare le loro le proprietà strutturali.

La tecnologia utilizzata nei **foil bearings** consente di ridurre gli ingombri della macchina, di lavorare ad elevate temperature e velocità, tutto ciò attraverso un design semplice che li contraddistingue.

Inizialmente il cuscinetto viene montato in assenza di gioco sull'albero e precaricato a molla [3].

"Modelli a parametri concentrati per la caratterizzazione di cuscinetti di tipo foil"

Successivamente durante la fase di avvio, quando l'albero inizia a ruotare, il flusso d'aria viscosa viene trascinato nello spazio interposto tra il *Top foil* e la superficie dell'albero generando una pressione idrodinamica.



Figura 1.1. Vista laterale di un Air Foil Bearings (C. DellaCorte et al., 2008).

Quando la velocità di rotazione è tale per cui la pressione idrodinamica è in grado di sollevare l'albero, il *Top foil* si stacca dalla superficie e andrà in battuta con il *Bump foil*.

La rigidezza della lamina e la pressione idrodinamica interagiscono dinamicamente fino al raggiungimento di una condizione di regime, caratterizzata da specifiche condizioni al bordo. Inoltre, la variazione di pressione e il calore prodotto dalle elevate velocità di esercizio, possono influire sul corretto funzionamento del **foil bearings.** 

La rigidezza si configura come una delle principali caratteristiche strutturali della lamina e dello strato di film. Pertanto, la creazione di un modello numerico dei **foil bearings** deve tenere conto delle elevate deformazioni elastiche e del comportamento del film fluido a causa dell'interazione fra gli aspetti fluidodinamici, strutturali e termici.

"Modelli a parametri concentrati per la caratterizzazione di cuscinetti di tipo foil"

### 1.3. Air Foil Bearings: Svantaggi e difficoltà nelle applicazioni

Ad oggi i **foil bearings** vengono adottati in un campo ristretto di applicazioni quali [4]:

- Compressori per la pressurizzazione degli aerei;
- Motori turboalbero;
- Macchine a ricircolo d'aria;
- Turboespansori;
- Piccole microturbine;

L'utilizzo ristretto a contesti specifici può essere giustificato dalle criticità che caratterizzato questa tipologia di cuscinetti, ovvero ridotta capacità di carico a basse velocità e valori modesti di rigidezza e smorzamento.

Facendo riferimento al principio base di funzionamento dei **foil bearings**, si può osservare che le migliori prestazioni si ottengono in condizioni estreme di velocità e temperatura. Specialmente ad alte velocità, a causa della bassa viscosità e densità dell'aria, il calore generato durante la condizione di esercizio è moderato.

Tuttavia, le scarse capacità di trasmissione del calore dei fluidi impiegati limita la velocità e la capacità di carico. Solitamente, i **foil bearings** sono in grado di operare a velocità tangenziali fino a 240 m/s.

Sebbene il principio di funzionamento che caratterizza i **foil bearings** sia relativamente semplice, ciò non si può dire se si fa riferimento alla loro struttura e alla forte dipendenza tra la deflessione delle lamine e la pressione idrodinamica generata, che rende difficile stabilirne le performance [5]. Questi aspetti hanno fortemente influenzato in modo negativo la capacità di poter stabilire dei metodi di analisi predittiva sull'affidabilità del sistema e delle linee guida di progettazione.

"Modelli a parametri concentrati per la caratterizzazione di cuscinetti di tipo foil"

L'ostacolo principale, per il quale ad oggi non si hanno ancora questi strumenti, è dovuto alla non linearità della struttura del cuscinetto che rende inadeguate le ipotesi semplificative adottate nei metodi di studio al riguardo. Si osserva come nei sistemi tecnologicamente più maturi, come i cuscinetti a corpi volventi, i numerosi studi e dati sperimentali hanno permesso di definirne le basi della progettazione. Per quanto concerne i **foil bearings**, la difficoltà principale sta nel fatto che i pochi dati sperimentali non permettono di definire dei metodi adeguati basati su dati empirici affidabili.

Un altro aspetto critico si può osservare facendo riferimento ai **foil bearings** che operano ad elevate temperature (superiori ai 300°C), le quali ostacolano il corretto funzionamento del cuscinetto poiché i rivestimenti lubrificanti delle lamine mantengono proprietà adeguate a temperature relativamente basse. L'utilizzo di questi materiali (PTFE o MoS<sub>2</sub>) è giustificato dalle buone proprietà lubrificanti e dalla flessibilità che li caratterizza. Inoltre, la loro applicazione come rivestimenti lubrificanti permette di non alterare le proprietà e la morfologia del *Top foil*. Tuttavia, questa tipologia di lubrificanti solidi è in grado di operare in un range limitato di temperature che va al di sotto dei 300°C, mentre quelli in grado di superare tale temperatura sono costituiti da materiali simili alla ceramica, difficili da applicare e poco flessibili.

Recentemente studi sui lubrificanti solidi per elevate temperature sembrano aver superato questo ostacolo tecnico attraverso l'utilizzo di un rivestimento di PS304. Esso è un lubrificante solido composito, spruzzato al plasma, il quale contiene lubrificanti eutettici argento e fluoruro in una matrice metallo/ossido che durante il funzionamento si distribuiscono sulle lamine, creando un rivestimento sottile ma efficace. Si è osservato che utilizzando dei rivestimenti lubrificanti al PS304 o altri simili, la vita utile a fatica dei **foil bearings** ad elevate temperature è notevolmente migliorata [6].

"Modelli a parametri concentrati per la caratterizzazione di cuscinetti di tipo foil"

## Capitolo 2

## 2. Fabbricazione dei foil bearings

Il seguente capitolo esporrà i metodi di produzione ad oggi conosciuti, mettendo in evidenza anche gli aspetti critici di tali metodi.

Tradizionalmente i **foil bearings** sono costituiti da una struttura caratterizzata da una lamina corrugata, definita *Bump foil*, e una o più lamine costituite da una superficie liscia, definita *Top foil*. Durante l'operato del cuscinetto il *Top foil* convoglia la pressione, generata dalla rotazione del rotore, verso lo strato di film di aria o di gas. Mentre la sua parte inferiore entra in contatto con la superficie corrugata del *Bump foil*, la quale può essere assimilata ad una successione di molle in serie. La forza generata agisce sul *Top foil* che andrà a comprimere i *bump*, i quali subiranno una deformazione non solo in lunghezza ma anche in larghezza. Essi non sono indipendenti fra di loro, infatti la deformazione di uno di essi influenzerà quelli circostanti.

Inoltre, la presenza di forze di attrito causa lo spostamento laterale dei *bump*, le quali saranno diverse per ciascuno dei dossi che costituisce il *Bump foil*. Un altro contributo che influisce sulla deformazione è dato dall'effetto *stick-slip*, molto comune nei cuscinetti con la geometria appena descritta [7].

Risulta chiaro come siano fondamentali la rigidezza e lo smorzamento delle lamine. Errori nella manifattura possono compromettere significativamente tali parametri, pertanto si deduce come l'attuazione di tecnologie di produzione e progettazione ben precise, sia un aspetto cruciale per lo sviluppo e per il miglioramento delle performance di tali cuscinetti.

"Modelli a parametri concentrati per la caratterizzazione di cuscinetti di tipo foil"



Figura 2.1. Dettaglio del profilo di un foil bearing (K. Shalash e J. Schiffmann, 2000).

#### 2.1. Materiali impiegati per la fabbricazione di foil bearings

La scelta di materiali adeguati per la fabbricazione di cuscinetti a lamina è fondamentale nella fase di progettazione, poiché essa andrà ad impattare sulle performance del cuscinetto in condizioni di lavoro. Le qualità richieste alle lamine impiegate sono varie, a titolo d'esempio le più importanti sono: ottima capacità di formatura a caldo e a freddo, smorzamento e resistenza al calore. La letteratura, attraverso prove sperimentali, suggerisce come l'uso di Inconel rappresenta una soluzione adeguata alle richieste, in quanto è caratterizzato da un buon modulo elastico e garantisce una buona resistenza alle elevate temperature. Questo ultimo aspetto è fondamentale se il cuscinetto deve lavorare ad alte velocità e in condizioni gravose.

Un'alternativa più economica è l'impiego di acciaio inossidabile, tuttavia ciò comporterebbe una riduzione della temperatura operativa rispetto all' Inconel e una maggiore sensibilità ad alcuni rivestimenti. Inoltre, dalla letteratura si evince come alcune sperimentazioni sono state eseguite impiegando delle leghe di rame-berillio per le lamine, le quali hanno mostrato un'eccellente capacità di lavorazione e una significativa proprietà

"Modelli a parametri concentrati per la caratterizzazione di cuscinetti di tipo foil"

autolubrificante. Tuttavia il loro utilizzo è discutibile a causa della tossicità del materiale [8].

#### 2.2. Processi di produzione dei foil bearings

Nel corso dei decenni le tecniche di progettazione dei **foil bearings** sono progredite fino allo sviluppo di cuscinetti di ultima generazione in grado di sopportare diverse capacità di carico.

La prima applicazione pratica risale agli anni 60 con la progettazione di cuscinetti a lamina di generazione I, caratterizzati da un comportamento elastico semplice costituito da una rigidezza uniforme su tutto il cuscinetto. Successivamente con lo sviluppo di cuscinetti di generazione II, caratterizzati da una maggiore rigidezza rivolta in direzione assiale ad esempio, è stato possibile compensare errori dovuti a fenomeni esterni quali disallineamento dell'albero e perdite di fluido idrodinamico dai bordi della lamina. Grazie al loro comportamento elastico, questo tipo di cuscinetti ha mostrato capacità di carico circa il doppio superiori a quelle rilevate sui cuscinetti della generazione precedente. Nell'ultimo decennio diversi studi sul campo hanno permesso di sviluppare cuscinetti di generazione III, costituiti da un comportamento elastico maggiormente complesso rispetto ai precedenti. La rigidezza, in questo caso, è rivolta in direzione assiale e radiale, la quale conferisce una flessibilità maggiore al cuscinetto che sarà in grado di adattarsi alla presenza di carichi variabili [3].

Nonostante i diversi studi riguardanti la progettazione di cuscinetti a lamina d'aria risalga a molti decenni fa, si riscontrano tuttora delle problematiche a livello pratico, in particolare per la realizzazione della geometria del cuscinetto. La scarsa quantità di dati sperimentali e i pochi riferimenti in letteratura hanno contribuito a rendere ancora più difficoltoso lo sviluppo di tecniche di produzione affidabili e convenienti. Inoltre, i metodi di produzione ad oggi disponibili non consentono di ottenere lamine di dimensioni ottimali.

"Modelli a parametri concentrati per la caratterizzazione di cuscinetti di tipo foil"

Si distinguono tre passaggi fondamentali che costituiscono il processo di fabbricazione dei **foil bearings**:

- Il primo step consiste nel tagliare le lamine ricotte. In genere le porzioni di lamine vengono tagliate attraverso la tecnica dell'elettroerosione a filo (conosciuta anche come EDM *Electrical Discharge Machining*), si escludono tecniche di taglio più semplici in quanto potrebbero provocare fenomeni di distorsione nei bordi della lamina;
- Il secondo step consiste nel processo di formatura sia per il *Top foil*, sia per il *Bump foil*, quest'ultimo prevede l'utilizzo di uno stampo caratterizzato da una superficie ondulata;
- Il terzo step consiste nel sottoporre il *Top foil* e il *Bump foil* ad un trattamento termico, migliorandone le proprietà elastiche e la resistenza del materiale in condizioni di esercizio;

L'immagine sottostante (Fig. 2.2) rappresenta un pezzo di lamina, inizialmente tagliato, sottoposto a formatura e usato per cuscinetti di generazione II. In questo caso, gli strati di lamina sono stati interposti su due lastre di alluminio di spessore di 4 mm e successivamente tagliate attraverso la tecnica dell'elettroerosione a filo.



*Figura 2.2. Bump foil tagliato in strati, sottoposto precedentemente a formatura (C. Dellacorte et al.,2007).* 

#### 2.2.1. Formatura delle lamine

Per spiegare il processo di formatura delle lamine viene riportato quanto esposto nell'articolo "*Design, Fabrication, and Performance of Open Source Generation I and II Compliant Hydrodynamic Gas Foil Bearings*" di C. Della Corte et al. In questo esempio per il processo di formatura vengono utilizzate piastre in acciaio inox 15-5 PH temprate e rettificate. In prima battuta, la parte superiore e quella inferiore sono rettificate in piano e disposte parallelamente, successivamente si prosegue con il taglio attraverso EDM.

Nella figura 2.3 è rappresentata la geometria che gli autori hanno deciso di realizzare, la quale presenta le seguenti dimensioni principali:

- Larghezza 2,5 mm;
- Profondità/altezza di 0,5 mm;
- Distanza fra un *bump* e l'altro di 0,6 mm;



Figura 2.3. Geometria del Bump Foil realizzata sullo stampo (C. Della Corte et al., 2007).

Nella pratica la superfice superiore del *Bump foil* segue il contorno dello stampo, indipendentemente dallo spessore della lamina utilizzato. Lo spessore della lamina influisce sulla rigidezza, quindi una lamina con spessore maggiore sarà più rigida ma meno resistente.

"Modelli a parametri concentrati per la caratterizzazione di cuscinetti di tipo foil"

Poiché lo spessore influisce in maniera significativa sulla rigidezza del cuscinetto, si configura come un parametro da non trascurare in fase di progettazione. D'altronde la geometria del cuscinetto incide fortemente sulle prestazioni in condizioni di lavoro, quindi è fondamentale ridurre al minimo gli errori.

Come mostrato in fig. 2.4 l'utensile scelto viene disposto sulla pressa idraulica, utilizzata per la formatura della lamina.



Figura 2.4. Utensile utilizzato durante il processo di formatura del Bump Foil.

La lamina tagliata longitudinalmente nelle dimensioni prestabilite, viene posizionata sull'utensile e fissata tramite del nastro adesivo, applicato lungo il bordo piatto. Infine sulla lamina viene esercitata una forza in direzione normale che conferirà ad essa la forma tipica del *Bump foil*.

Nell'articolo considerato viene specificato come sono state necessarie diverse sperimentazioni per stabilire il setup della pressa idraulica, in particolare una serie di prove sono state eseguite per definire la quantità di carico necessaria per raggiungere un adeguata configurazione del *Bump foil*. Dopo aver tagliato e aver sottoposto a formatura la lamina, il passo successivo è quello di modellare il *Bump foil* secondo la forma circolare del cuscinetto.

"Modelli a parametri concentrati per la caratterizzazione di cuscinetti di tipo foil"

Un processo analogo viene eseguito per il *Top foil,* il quale viene piegato attraverso un rullo liscio a manovella.

Per quanto concerne il *Bump foil*, il processo di piegatura non è analogo a quello del *Top foil*, poiché l'impiego di un rullo liscio andrebbe ad alterare la forma dei *bump* realizzati sulla lamina, pertanto viene utilizzato un mandrino, sul quale la lamina verrà avvolta e piegata nella forma circolare richiesta.

Sperimentalmente è stato dimostrato come avvolgere la lamina del *Bump foil* attorno un mandrino con un diametro di circa due terzi quello finale, permette di ottenere le dimensioni desiderate. E' possibile, in alternativa, ottimizzare il procedimento utilizzando un utensile curvilineo che consenta di unire la fase di formatura e piegatura. Tuttavia questa scelta alternativa ha lo svantaggio di non essere personalizzabile, in quanto le dimensioni del *bump* e della lamina sono fissate dall'utensile impiegato.

#### 2.2.2. Trattamento termico delle lamine

Nell'articolo [3] è suggerito, per il materiale impiegato nelle lamine, un trattamento termico di indurimento per precipitazione successivo alle fasi di formatura e piegatura. Questo processo, diversamente dal rinforzo per dispersione, è costituito da un insieme di trattamenti termici atti al miglioramento delle caratteristiche meccaniche dei materiali metallici. Esso consiste in tre passaggi fondamentali, in ordine temporale:

- Ricottura;
- Tempra;
- Invecchiamento;

La ricottura per solubilizzazione consiste nel riscaldare il materiale, provocandone la completa austenitizzazione. Successivamente tramite tempra si ha un raffreddamento rapido per mantenere in soluzione gli elementi o i composti disciolti ad alta temperatura. Infine si ha l'invecchiamento, dove il materiale viene nuovamente riscaldato in tempi brevi fino alla temperatura di invecchiamento. In questo modo le proprietà finali del materiale

"Modelli a parametri concentrati per la caratterizzazione di cuscinetti di tipo foil"

dipendono dalle dimensioni del grano, dalla dimensione del precipitato e dalla distribuzione dei carburi sul bordo e dai bordi del grano stesso.

Poiché le lamine, in particolare il Bump foil, sono assimilabili a delle molle, i trattamenti termici prescelti devono massimizzare le proprietà del materiale quali il modulo elastico e la resistenza a fatica. Dalla letteratura si evince come, per ottenere delle buone prestazioni delle lamine ad elevata temperatura, è necessario eseguire il cosiddetto triplo trattamento termico. Quest'ultimo è costituito da tre passaggi nel quale il materiale viene riscaldato, a cui vengono interposte delle fasi di raffreddamento a temperatura ambiente. Nella prima fase di riscaldamento del materiale preso in esame dall'articolo [3], si ha una ricottura in soluzione a 1150 °C, successivamente segue una stabilizzazione a lunga durata (24 h) con un trattamento termico a 843 °C e infine il processo si conclude con una fase di precipitazione della durata di 20 h, condotta a 704 °C. Poiché lo spessore della lamina è sottile, durante il trattamento termico è necessario evitare che la lamina si ossidi a causa dell'atmosfera presente all'interno del forno, in quanto ciò porterebbe all'impoverimento della lega. Il processo di ossidazione può essere contrastato attraverso trattamenti termici eseguiti sottovuoto o in ambienti inerti. In alternativa si può eseguire un trattamento termico a bassa temperatura, a discapito delle proprietà meccaniche finali, che consente di evitare il fenomeno dell'ossidazione e di ridurre i costi. Infine, si suggerisce di eseguire i trattamenti termici sul Bump foil utilizzando un pergolato, posizionato all'interno del bump, cosi da prevenirne il cedimento e mantenere inalterata la forma della lamina.

Conclusi i trattamenti termici, il *Top foil* e il *Bump foil* vengono saldati fra di loro, lungo un'estremità, ad un manicotto esterno che assume la funzione di struttura portante all'interno del cuscinetto, così da evitare il moto relativo fra le parti. In questa ultima fase di saldatura bisogna prestare attenzione, in quanto tale procedimento tende ad alterare lo stato metallurgico e termico del materiale.

"Modelli a parametri concentrati per la caratterizzazione di cuscinetti di tipo foil"

## 2.3. Tecnologie alternative: utensili realizzati attraverso la stampa3D

I cuscinetti a lamina trovano sempre più largo impiego in turbomacchine operanti ad alta velocità in assenza di lubrificante, grazie soprattutto all'aspetto aereodinamico che li caratterizza. Come già preannunciato, uno degli ostacoli che ne ha rallentato lo sviluppo e l'utilizzo è costituito dalle difficoltà di produzione. La letteratura suggerisce alcune opzioni per ovviare a queste problematiche, fornendoci una serie di studi che riguardano lo sviluppo di tecnologie di produzione alternative. In particolare, sono state condotte una serie di ricerche che hanno permesso di realizzare gli utensili impiegati nei processi produttivi attraverso tecniche di produzione additiva, le quali negli ultimi decenni sono state protagoniste di notevoli sviluppi.

### 2.3.1. Svantaggi nel processo di produzione

La progettazione di **foil bearings** che funzionino correttamente rappresenta una sfida tecnologica. I materiali impiegati devono possedere delle proprietà meccaniche e tecnologiche adeguate e mantenerle tali anche ad elevate temperature di funzionamento. Tuttavia l'utilizzo di leghe specifiche può influenzare i processi di produzione, infatti si riscontrano delle problematiche nell'ottenere la forma richiesta delle lamine poiché le leghe a base di nichel tendono ad indurirsi durante il processo di formatura a freddo e a ritornare alla loro forma iniziale, ovvero sono soggette al cosiddetto fenomeno di ritorno elastico. In alternativa, si può adottare un processo di formatura a caldo, il quale permette di ottenere la geometria della lamina desiderata a discapito dei costi e delle tempistiche di produzione.

L'impiego del processo di formatura a caldo richiede la preparazione di uno stampo superiore e uno inferiore attraverso una lavorazione a macchina, successivamente le lamine vengono posizionate sugli stampi e schiacciate ad una pressione di formatura pari a 400 bar (leghe a base nichel). Come già detto, sebbene il processo di formatura a caldo permetta di ottenere una geometria della lamina ottimale non si può affermare lo stesso se si fa riferimento ai costi di produzione che sono molto più elevati rispetto al processo a freddo. In particolare, nel caso sia necessario realizzare più cuscinetti con diametro e altezza di

"Modelli a parametri concentrati per la caratterizzazione di cuscinetti di tipo foil"

*bump* differente si dovrebbe disporre di stampi specifici che nel caso di formatura a freddo possono essere realizzati in materiale plastico ed essere molto più economici di quelli metallici necessari per la formatura a caldo. Questo aspetto potrebbe essere problematico in fase di sperimentazione, dove l'altezza dei *bump* può variare da poche a diverse centinaia di micrometri.

Un altro metodo di realizzazione del *Bump foil* consiste nell'utilizzo di stampi semplici, sottoponendo la lamina a formatura attraverso l'utilizzo di una pressa idraulica e infine avvolgendo la stessa intorno ad un albero, fondamentale per compensare il fenomeno del ritorno elastico. Ciononostante questo metodo risulta economicamente sconveniente se si tiene conto del fatto che il prodotto finale presenta una superficie di qualità inferiore.

Problemi tecnici nello sviluppo di nuovi cuscinetti a lamina hanno spesso incoraggiato ingegneri e ricercatori a semplificare il design del cuscinetto, pensando di sostituire il *Bump foil* stesso. In molti articoli scientifici viene evidenziato come la produzione di quest'ultimo sia spesso caratterizzata da bassa ripetibilità e imprecisioni di fabbricazione. Tutto ciò ha un impatto negativo sulle prestazioni del cuscinetto e sulla dinamica del rotore, basti pensare che una variazione di poche percentuali dell'altezza del *bump* può compromettere fino al 50% la rigidezza della lamina. Ecco perché è così importante sviluppare metodi accurati, altamente ripetitivi per la produzione degli elementi chiave che caratterizzano i cuscinetti a lamina. Nel paragrafo successivo verrà esposto un metodo di formatura alternativo, veloce ed economico per la produzione del *Bump foil*, utilizzando processi di fabbricazione additiva.

## 2.3.2. Processi di fabbricazione additiva per la creazione di stampi di formatura

A titolo di esempio è stato considerato il processo di produzione esposto all'interno dell'articolo [9] dove per la realizzazione degli stampi di formatura è stata impiegata una tecnologia di fabbricazione additiva nota come *MultiJet Printing*. Questo tipo di tecnologia definita *material jetting* si basa sulla disposizione di strati di materiale attraverso getti disposti sulla testa di stampa. Il principio di funzionamento è simile a quello delle classiche

"Modelli a parametri concentrati per la caratterizzazione di cuscinetti di tipo foil"

stampanti ad inchiostro, solo che il materiale polimerico viene disposto strato per strato lungo l'altezza e via via polimerizzato attraverso l'utilizzo di lampade UV.

Tra i materiali disponibili gli autori, hanno scelto di utilizzare sulla base di proprietà meccaniche e del materiale la resina *M3 X*. Dai loro risultati sperimentali è emerso che la resistenza a carico statico della resina scelta è di 54 MPa e la sua temperatura di transizione vetrosa è di 65 °C. L'utilizzo di questa tecnologia consente di ottenere elementi dalle forme complesse soddisfacendo la necessità di ottenere con elevata ripetibilità le dimensioni degli elementi stessi.

In fig. 2.5 sono raffigurati il punzone e la matrice realizzati attraverso l'uso della tecnologia della fabbricazione additiva.



Figura 2.5. Punzone (a destra) e matrice (a sinistra) realizzati con la stampa 3D (G. Zywica et al., 2019).

Il materiale impiegato per la produzione del *Bump foil* e del *Top foil* è la lega Inconel 625 che permette di essere formata sia a caldo che a freddo, tuttavia questa operazione non sempre può risultare semplice a causa della tendenza del materiale ad incrudirsi.

Il primo concept realizzato dagli autori è costituito da una sola matrice e due versioni differenti per il punzone. Sulla matrice sono state realizzate, nella parte superiore, le sagome dei *bump* ed è stata predisposta una tacca impiegata per il fissaggio della lamina, mentre la prima versione del punzone è piatta e anche su di essa è stata realizzata, nella

"Modelli a parametri concentrati per la caratterizzazione di cuscinetti di tipo foil"

parte inferiore, la sagoma dei *bump*. Sulla matrice è stata prevista anche una sporgenza che funge da riferimento per il punzone in modo tale da consentirne il corretto posizionamento. Infine, per il processo di formatura gli autori hanno ritenuto necessaria l'applicazione di una forza in direzione normale pari a 3 kN, la quale esercita una pressione statica lungo il punzone.

La seconda versione del punzone, prevista nel primo *concept*, invece è caratterizzata da un profilo arrotondato con un raggio stabilito in modo tale da consentire un uniforme distribuzione di pressione su tutta la lamina sottoposta a formatura. Inoltre, la forma scelta dagli studiosi ha conferito alla lamina una forma arrotondata agevolando così il processo di montaggio sul cuscinetto. E' emerso come con questa configurazione di punzone fosse più facile eseguire le lavorazioni necessarie, poiché la forza richiesta per modellare la lamina è notevolmente inferiore. Ciò è dovuto al fatto che la superficie di contatto è minore rispetto a quella che si ha con l'impiego di un utensile piatto.

Il secondo *concept* consiste nel perfezionamento della geometria della matrice e del punzone attraverso l'aggiunta di pareti laterali che ne impediscano lo scorrimento incontrollato. Grazie a questa modifica è stato possibile manipolare facilmente il punzone, permettendo di ottenere una migliore ripetibilità e precisione nella fabbricazione del *Bump foil*.

In conclusione si è osservato come la lamina realizzata attraverso il metodo esposto nell'articolo [9] presenta buone condizioni di funzionamento e durabilità durante le prove sperimentali. Inoltre, gli stampi, essendo stati realizzati con del materiale resistente, possono essere impiegati più volte per la produzione di *Bump foil* delle stesse dimensioni. Visti i vantaggi, in futuro si potrebbero approfondire le ricerche in tale campo al fine anche di estendere tale metodologia all'interno di processi produttivi.

"Modelli a parametri concentrati per la caratterizzazione di cuscinetti di tipo foil"

## Capitolo 3

## 3. Campi di applicazione dei foil bearings

La diffusione commerciale dei **foil bearings** in settori come quello automobilistico, in cui i volumi e i campi di applicazione richiesti sono maggiori in confronto ad altri settori, è stata spesso ostacolata dalla mancanza di fornitori. Ciò può essere giustificato dalla scarsa comprensione che si ha a riguardo della progettazione e dei processi di produzione che li caratterizzano, infatti ad oggi una conoscenza approfondita sui cuscinetti a lamina risulta limitata ad un numero ristretto di aziende. Inoltre, anche se i cuscinetti a lamina ad elevate prestazioni sono protetti da un brevetto, ve ne sono altrettanti con performance adeguate disponibili come tecnologie open source. Tuttavia la scarsa conoscenza dell'argomento spinge ricercatori e ingegneri a ritenere troppo rischioso un eventuale investimento su di essi.

Attualmente l'uso dei **foil bearings** è limitato ad applicazioni specifiche, nonostante i diversi studi condotti a riguardo hanno dimostrato come quest'ultimi possono essere implementati in una varietà di campi, quali turbocompressori e turbine a gas di piccole dimensioni, in sostituzione ai cuscinetti convenzionali.

## 3.1. Sviluppi tecnologici negli anni

I primi prototipi e sviluppi in laboratorio sugli **air foil bearings** si devono alla Garrett AiResearch a partire dalla metà degli anni '60, impiegati all'interno del sistema *DC-10 ECS*. I test svolti avevano dimostrato come l'impiego di cuscinetti a lamina permettesse di aumentare l'affidabilità della macchina, tuttavia si riscontravano ancora problematiche quali la scarsa capacità di carico e di smorzamento.

In seguito al successo ottenuto dai cuscinetti a lamina implementati all'interno della macchina a ricircolo d'aria A7E, alla Garrett AiResearch fu affidato il compito di sviluppare tale tecnologia anche per aerei militari.

"Modelli a parametri concentrati per la caratterizzazione di cuscinetti di tipo foil"

Successivamente una serie di commesse che prevedevano l'uso di tali cuscinetti portò all' azienda, la quale aveva raggiunto un notevole progresso in tale campo, all'avviamento della produzione di tali dispositivi anche per aerei civili.

Nel corso degli anni sono stati svolti numerosi test che prevedevano l'impiego di cuscinetti a lamina in applicazioni diverse dalle macchine a ricircolo d'aria, tuttavia nessuna di queste ha avuto uno sviluppo tale da consentirne la produzione su larga scala. Inoltre, essi sono stati sottoposti a diversi studi per applicazioni che prevedevano elevate temperature e seppur operando in maniera corretta, non sono stati in grado di soddisfare le specifiche di resistenza necessarie. A tal proposito, ulteriori studi condotti recentemente al riguardo, hanno dimostrato come i cuscinetti a lamina costituiscono una soluzione innovativa per questo tipo di applicazioni. Infatti l'impiego di materiali specifici utilizzati per rivestire il *Top foil*, consentono al cuscinetto di operare ad elevate temperature con coefficienti di attrito molto bassi. Tali cuscinetti sono impiegati, ad esempio, nelle turbine di jet supersonici permettendo di ridurre gli ingombri del 26% e il consumo di combustibile del 3%.

In generale la progettazione di un cuscinetto a lamina, che sia in grado di operare correttamente, costituisce una sfida tecnologica. Oggigiorno grande importanza viene posta sull'aumento dell'efficienza energetica e sul recupero di energia dai vari processi produttivi, ad esempio quelli che prevedono la conversione di energia termica, proveniente d'acqua calda, in energia elettrica. Ciò si può ottenere attraverso tecnologie che prevedono l'implementazione di microturbine, le quali riscontrano limiti di sviluppo nel settore energetico a causa dell'assenza di un sistema di cuscinetti adeguato. L'uso di cuscinetti a lamina in questo tipo di tecnologie può essere significativo per migliorare l'efficienza del sistema, semplificarne la progettazione, ridurre il peso della macchina e superare i limiti imposti dalle elevate velocità del rotore quando vengono impiegati cuscinetti con diametro maggiore. Nonostante il progresso tecnologico e gli sviluppi nella progettazione, i campi di applicazione restano ristretti a quei sistemi dove l'uso di cuscinetti a lamina si è consolidato nel tempo, ovvero macchine a ricircolo d'aria, turbine e turbocompressori specifici.

"Modelli a parametri concentrati per la caratterizzazione di cuscinetti di tipo foil"

## 3.2. Applicazione di cuscinetti di tipo foil per le macchine a ricircolo d'aria

L'impiego dei cuscinetti a lamina all'interno della macchina a ricircolo d'aria, utilizzata per il raffreddamento della cabina dell'aeromobile, costituisce indubbiamente l'applicazione più significativa e di successo a partire dalla fine degli anni '70. In queste applicazioni i **foil bearings** hanno dimostrato numerosi vantaggi, quali elevata vita utile con una minore richiesta di servizio di manutenzione e una riduzione del pericolo di contaminazione provocato dall'uso di oli lubrificanti, necessari per il corretto funzionamento di cuscinetti a corpi volventi. Visti i successi riscontrati in tale applicazione, l'uso di cuscinetti a lamina è stato esteso anche per aerei di uso militare dove sono richiesti maggiori requisiti da soddisfare, quali velocità elevate e un maggiore effetto giroscopico.

A titolo d'esempio viene esposto il progetto per lo sviluppo di una macchina a ricircolo d'aria per il FALCON 2000, un aeromobile di uso commerciale, nel quale l'obiettivo principale fu quello di elaborare un sistema rotore/cuscinetto che ruotasse ad elevate velocità con ridotti ingombri. Infatti, per questo tipo di sistema, ai cuscinetti era richiesto di operare ad una velocità circa pari a 100.000 rpm con carichi dinamici superiori a quelli statici di circa un ordine di grandezza.

#### 3.2.1. Descrizione di una macchina a ricircolo d'aria

La figura 3.1 sottostante, mostra una sezione trasversale degli elementi appartenenti al turbocompressore caratteristici di una comune macchina a ricircolo d'aria per un aeromobile. Si osserva come il gruppo rotore consiste in un singolo stadio di turbina guidato, attraverso un albero cavo, da un singolo stadio di girante che appartiene ad un compressore centrifugo. Sempre dalla figura si evince la disposizione dei cuscinetti a lamina, i quali sono stati impiegati per supportare il rotore del turbocompressore che ruota ad elevate velocità. Sono stati previsti una coppia di cuscinetti a lamina all'estremità dell'albero e dei cuscinetti reggispinta in corrispondenza della sezione intermedia del rotore.

"Modelli a parametri concentrati per la caratterizzazione di cuscinetti di tipo foil"

Un aspetto cruciale per lo sviluppo del sistema presentato all'interno dell'articolo [10] è stato quello di sviluppare una configurazione albero/cuscinetto relativamente stabile e silenziosa. Pertanto durante lo sviluppo della macchina, il sistema albero/cuscinetto è stato sottoposto a diverse iterazioni analitiche al fine di ottimizzare la configurazione, gli squilibri sui cuscinetti causati dal rotore o da urti e vibrazioni esterne e infine il grado di tolleranza nel caso in cui il cuscinetto fosse sottoposto ad un carico assiale instabile.



Figura 3.1 Sezione trasversale di una macchina a ricircolo d'aria (H. Heshmat e P. Hermel, 1993).

Gli studi analitici e sperimentali condotti sui cuscinetti a lamina per questo tipo di applicazione hanno affermato il loro potenziale in termini di capacità di carico e idoneità nel sopperire ad eventuali squilibri causati dal rotore. E' stato dimostrato come un approccio sistematico attraverso l'uso di uno strumento analitico affidabile permette di

"Modelli a parametri concentrati per la caratterizzazione di cuscinetti di tipo foil"

valutare, nel modo più realistico possibile, le prestazioni dei cuscinetti a lamina fornendo la possibilità di adottare un analisi economica e priva di rischi.

### 3.3. Ulteriori applicazioni

Un'area di applicazione che ha riscontrato particolare successo negli anni è quella appartenente ai dispositivi criogenici, in cui le temperature estreme e la bassa viscosità del fluido ostacolano il corretto funzionamento dei convenzionali cuscinetti a corpi volventi. Ad esempio alcuni cuscinetti a lamina testati all'interno delle turbopompe SSME (*Space Shuttle Main Engine*) hanno dimostrato di poter sopportare carichi fino a 300 psi, con una capacità di smorzamento di 40 lb-sec/in [10].

Riassumendo quanto è stato esposto nel presente capitolo si deduce che i cuscinetti a lamina hanno contribuito allo sviluppo delle macchine a ricircolo d'aria, migliorandone l'affidabilità di circa 10 volte. Nonostante siano stati avviati diversi test su macchine costruite per altre applicazioni, il lavoro non è stato perseguito con lo stesso vigore e impegno per i motivi che sono stati esposti in precedenza. Tuttavia i **foil bearings** presentano un forte potenziale per le seguenti applicazioni:

- Su piccoli motori turbogas per l'aviazione l'uso di cuscinetti a lamina aumenta l'affidabilità e riduce i costi;
- Nei turboespansori criogenici *oil-free* la presenza di cuscinetti a lamina permette di aumentare non solo l'affidabilità dell'intero sistema, ma anche di aumentare l'efficienza degli impianti di separazione gas;
- L'uso di cuscinetti a lamina consente di costruire delle unità di potenza ausiliaria (*APU*, *Auxiliary power unit*) altamente affidabili e meno costose per diversi veicoli aereospaziali e terrestri;
- L'implementazione di cuscinetti a lamina costituisce una soluzione a basso costo per applicazioni commerciali specifiche dell'industria manifatturiera

"Modelli a parametri concentrati per la caratterizzazione di cuscinetti di tipo foil"

automatizzata; ad esempio motori turbogas per automobili, compressori a gas/aria commerciali e compressori centrifughi;

"Modelli a parametri concentrati per la caratterizzazione di cuscinetti di tipo foil"

## Capitolo 4

# 4. Modellazione numerica a parametri concentrati per lo studio del Bump foil

Lo studio sui cuscinetti di tipo foil si basa sullo sviluppo di un modello teorico e analitico che sia in grado di poter descrivere le prestazioni del cuscinetto in determinate condizioni di lavoro e di prevederne il funzionamento a seconda delle richieste. Un metodo economico che permette di valutare il comportamento del cuscinetto è lo sviluppo di un modello numerico, uno strumento essenziale per la progettazione di qualsiasi dispositivo a livello tecnologico.

Il caso trattato riguarda l'analisi di un modello la cui struttura deve interagire con un fluido, in questo caso l'aria, pertanto alle equazioni di Reynolds verranno associate le equazioni relative alla deformazione delle lamine in modo tale da poter combinare l'effetto idrodinamico alla deflessione della struttura complessiva. Sebbene il principio base di funzionamento dei **foil bearings** sia relativamente semplice, ciò si contrappone alla complessità del meccanismo nella quale operano che impedisce di poter realizzare un modello analitico esaustivo.

Facendo riferimento al modello trattato all'interno dell'articolo [11], il presente lavoro di tesi sviluppa un modello numerico semplificato per lo studio del comportamento del *Bump foil* trascurando l'interazione con il *Top foil* e quindi le equazioni ad esso associate.

La definizione di un modello semplificato di *Bump foil* può essere sintetizzata nei seguenti step:

Step 1: Definizione dei dati di progetto della struttura;
"Modelli a parametri concentrati per la caratterizzazione di cuscinetti di tipo foil"

- Step 2: Calcolo delle rigidezze k<sub>1</sub> e k<sub>2</sub>, la prima corrispondente alla rigidezza della molla orizzontale che collega l'estremità inferiore dei link rigidi e la seconda corrispondente a quella del link in condizione di *bump* bloccato;
- Step 3: Analisi di distribuzione delle forze;
- Step 4: Calcolo della rigidezza equivalente k<sub>v</sub>;

## 4.1. Geometria del Bump Foil

Nella trattazione semplificata descritta all'interno dell'articolo [11] ogni *bump* viene rappresentato con due link rigidi inclinati e una molla orizzontale di rigidezza  $k_1$  (vedi figura 4.1 sottostante). L'estremità di ogni link viene collegata al link successivo da una parte e dall'altra alla molla orizzontale.



Figura 4.1 Geometria semplificata del singolo bump (K. Feng et al., 2014).

Il modello analitico, la cui geometria viene indicata nella figura soprastante, descrive il comportamento del *Bump foil* come combinazione dell'effetto esercitato da quattro fattori:

- L'elasticità del *Bump foil;*
- Le forze di interazione fra i *bump*;
- Le forze di attrito;
- La deflessione locale del *Top foil;*

"Modelli a parametri concentrati per la caratterizzazione di cuscinetti di tipo foil"

Si impone che l'estremità superiore di ogni link abbia libera rotazione, pertanto se il *Bump foil* è soggetto all'applicazione di un carico, esso subirà una deformazione con conseguente moto relativo fra le superfici, le quali risentiranno dell'influenza delle forze di attrito. A seguito della deformazione, ogni singolo *bump* interagendo con quelli ad esso adiacenti, genererà una forza che andrà a scaricarsi lungo il segmento rigido che li collega l'uno con l'altro.

Le dimensioni di riferimento sono espresse nella tabella sottostante e corrispondono ai dati geometrici di un cuscinetto di tipo foil generico.

Raggio del cuscinetto, <i>R</i>	19.05 mm
Lunghezza del cuscinetto, L	38.1 mm
Tolleranza radiale, $\mathcal{C}_m^a$	31.8 mm
Spessore del $\mathit{bump}$ foil e Top foil , $t_b$	101.6 mm
Passo del <i>bump, s<sub>o</sub></i>	4.572 mm
Metà lunghezza del $\mathit{bump}, \mathit{l}_o$	1.778 mm
Metà altezza del $\mathit{bump}, \mathit{h_b}$	0.508 mm
Numero di <i>bump, N</i>	10
Modulo di Young <i>, E</i>	214 GPa
Coefficiente di Poisson, $ u$	0.29

Tabella 4.1 Dati geometrici del cuscinetto (K.Feng e S.Kaneko, 2010).

Attraverso le relazioni trigonometriche applicate allo schema espresso in figura 4.2 e ai dati forniti nella tabella 4.1 sono stati calcolati il valore del raggio del singolo *bump* ( $R_b$ ) e dell'angolo  $\theta_o$ .

Raggio del <i>bump, R<sub>b</sub></i>	4.09 mm
Angolo di metà $\mathit{bump},  heta_o$	30°

Tabella 4.2 Valore calcolato di  $R_b e \theta_o$ .



"Modelli a parametri concentrati per la caratterizzazione di cuscinetti di tipo foil"

Figura 4.3 Geometria dei bump.

E' importante evidenziare che in ogni singolo *bump* esiste una correlazione fra la deflessione orizzontale e quella verticale, la stessa relazione si ha fra le forze scambiate in quanto è stato assunto che i link siano rigidi. Pertanto lo schema di ogni *bump*, costituito da link rigidi e molle, può essere ulteriormente semplificato come una sola molla verticale di rigidezza equivalente ( $k_v$ ), come mostrato nella figura sottostante.



Figura 4.2 Modello equivalente semplificato di Bump foil ((K.Feng e S.Kaneko,2010).

E' possibile ricavare la relazione esistente tra la deflessione radiale ( $\Delta h$ ) e la deformazione della molla ( $\Delta L$ ) attraverso la geometria del *bump*, poiché come già specificato, è stato assunto come una struttura costituita da link rigidi. Le equazioni che descrivono tale relazione sono le seguenti:

$$\Delta L = \sqrt{(2R_b sen(\theta_o/2))^2 - (R_b(1 - \cos\theta_o) - \Delta h)^2} - R_b sen\theta_o$$
(1)

"Modelli a parametri concentrati per la caratterizzazione di cuscinetti di tipo foil"

$$tg\alpha = \frac{R_b(1 - \cos\theta_o) - \Delta h}{R_b \sin\theta_o + \Delta L}$$
(2)

### 4.2. Calcolo rigidezza $k_1$

Il primo passo per individuare la rigidezza equivalente  $(k_v)$  che descrive il comportamento del *Bump foil* soggetto a deformazione, è quello di valutare la rigidezza della molla orizzontale  $(k_1)$  sottesa dai due link che costituiscono il *bump* (vedi figura 4.4). Quest'ultima può essere ricavata sulla base delle informazioni forniteci dalla geometria iniziale del *bump* e identificata attraverso l'applicazione del teorema di Castigliano.



Figura 4.4 Modello link-molla di Bump foil (K.Feng e S.Kaneko,2010).

Il teorema di Castigliano è un teorema che trova applicazione in campo strutturale e permette di calcolare la rigidezza di una struttura.

Data una forza qualsiasi agente su una struttura, il teorema di Castigliano enuncia che definito lo spostamento (o la rotazione) u a partire dal punto di applicazione della forza e in direzione della forza stessa e l'energia di deformazione elastica U, si ha:

$$u = \frac{\partial U}{\partial F}$$

Definita l'energia di deformazione elastica con la teoria delle travi, è necessario derivare per calcolare lo spostamento e infine la rigidezza della molla sarà definita dal rapporto fra la forza applicata e lo spostamento da esso provocato. Nel caso analizzato il valore dell'energia di deformazione elastica è definita come segue:

"Modelli a parametri concentrati per la caratterizzazione di cuscinetti di tipo foil"

$$U = \int_0^l \left(\frac{M^2}{2DL} + \frac{N^2}{2SE}\right) dl \tag{3}$$

Definita l'Eq. (3) è possibile calcolare la rigidezza della molla richiesta, la quale verrà valutata prendendo in considerazione due casi:

- Caso 1: considera gli estremi del *bump* con rotazione libere [12];
- Caso 2: considera gli estremi del *bump* con rotazione bloccata [11];



Figura 4.5 Schema del bump (caso 1).

### 4.2.1 Caso 1

Per la formulazione della rigidezza  $k_1$  si procede valutando inizialmente l'energia di deformazione elastica (Eq. 3), la quale può essere definita come la somma di due contributi dati dal momento di trasporto ( $M(\theta)$ ) e dallo sforzo normale ( $N(\vartheta)$ ) che applicati ad una sezione generica del *bump*, sono definiti come:

$$N(\theta) = -F_H \cos\left(\theta - \theta_o\right) \tag{4}$$

$$M(\theta) = -F_H R_b [\cos(\theta - \theta_o) - \cos\theta_o]$$
<sup>(5)</sup>

Pertanto l'Eq. (3) può essere riscritta come:

$$U = U_M + U_N \tag{6}$$

"Modelli a parametri concentrati per la caratterizzazione di cuscinetti di tipo foil"

Dove:

$$U_M = \int_0^{2\theta_o} \frac{M^2}{2DL} R_b d\theta = \frac{F_H^2 R_b^3}{2DL} \left[ \theta_o (1 + 2\cos^2 \theta_o) - 3sen\theta_o \cos\theta_o \right]$$
(7)

$$U_N = \int_0^{2\theta_o} \frac{N^2}{2ES} d\theta = \frac{F_H^2 R_b}{2ES} [\theta_o + sen\theta_o \cos\theta_o]$$
(8)

Lo spostamento viene definito come:

$$\delta = \frac{\partial U_M}{\partial F_H} + \frac{\partial U_N}{\partial F_H} \tag{9}$$

Sostituendo e derivando l'Eq. (9) si ottiene:

$$\delta = \frac{F_H R_b^3}{DL} \left[ \theta_o (2 + \cos(2\theta_o)) - \frac{3}{2} sen(2\theta_o) \right] + \frac{F_H R_b}{ES} \left( \theta_o + \frac{sen2\theta_o}{2} \right)$$
(10)

Infine la rigidezza equivalente è la seguente:

$$k_1 = \frac{F_H}{\delta} \tag{11}$$

$$k_1 = \left\{ \frac{R_b^3}{DL} \left[ \theta_o (2 + \cos(2\theta_o)) - \frac{3}{2} \operatorname{sen}(2\theta_o) \right] + \frac{R_b}{ES} \left( \theta_o + \frac{\operatorname{sen}(2\theta_o)}{2} \right) \right\}^{-1}$$
(12)

4.2.2 Caso 2



Figura 4.6 Schema del bump (caso 2).

"Modelli a parametri concentrati per la caratterizzazione di cuscinetti di tipo foil"

Il procedimento per il calcolo della rigidezza equivalente ( $k_1$ ) è analogo a quello esposto nel primo caso. Tuttavia, come si può già dedurre dalla figura 4.6, è necessario tenere conto di un contributo aggiuntivo  $M_B$  che esprime la reazione vincolare applicata all'estremità del *bump* in assenza di rotazione. Come per il caso precedente, si definisce lo sforzo normale ( $N(\vartheta)$ ) e il momento di trasporto ( $M(\theta)$ ):

$$N(\theta) = -F_H \cos(\theta - \theta_0) \tag{13}$$

$$M(\theta) = M_B - F_H R_b [\cos(\theta - \theta_o) - \cos\theta_o]$$
<sup>(14)</sup>

Si procede con la formulazione dell'energia di deformazione elastica, la quale viene definita come segue:

$$U = \frac{R_b}{2DL}\alpha_1 + \frac{R_b}{2SE}\alpha_2 \tag{15}$$

Dove:

$$\alpha_1 = \int_0^{2\theta_0} M(\theta)^2 d\theta \tag{16}$$

$$\alpha_2 = \int_0^{2\theta_0} N(\theta)^2 d\theta \tag{17}$$

Esplicitando gli integrali ottengo:

$$\alpha_{1} = \int_{0}^{2\theta_{0}} \{M_{B}^{2} + F_{H}^{2}R_{b}^{2}[\cos(\theta - \theta_{o}) - \cos\theta_{o}]^{2} - 2M_{B}F_{H}R_{b}[\cos(\theta - \theta_{o}) - \cos\theta_{o}]\}d\theta =$$
  
=  $2M_{B}^{2}\theta_{o} + F_{H}^{2}R_{b}^{2}[\theta_{o}(1 + 2\cos^{2}\theta_{o}) - 3sen\theta_{o}\cos\theta_{o}] - 2M_{B}F_{H}R_{b}[2sen\theta_{o} - 2\theta_{o}\cos\theta_{o}]$  (18)

$$\alpha_2 = \int_0^{2\theta_o} F_H^2 \cos^2(\theta - \theta_o) \, d\theta = F_H^2[\theta_o + sen\theta_o \cos\theta_o] \tag{19}$$

Si impone la condizione di rotazione nulla agli estremi del *bump*:

$$\frac{\partial U}{\partial M_B} = 0 \tag{20}$$

"Modelli a parametri concentrati per la caratterizzazione di cuscinetti di tipo foil"

Attraverso la risoluzione dell'Eq. (20) è possibile ricavare il valore della reazione vincolare  $M_B$ , la quale sarà definita come segue:

$$M_B = \frac{F_H R_b sen\theta_o}{\theta_o} - F_H R_b cos\theta_o \tag{21}$$

Sostituendo il valore di  $M_B$  è possibile ricavare l'energia di deformazione elastica:

$$U = \frac{R_b}{2DL} \left\{ 2\theta_o \left( \frac{F_H R_b sen\theta_o}{\theta_o} - F_H R_b cos\theta_o \right)^2 + F_H^2 R_b^2 \left[ \theta_o (\cos(2\theta_o) + 2) - \frac{3}{2} sen(2\theta_o) \right] - 2F_H R_b \left( \frac{F_H R_b sen\theta_o}{\theta_o} - F_H R_b cos\theta_o \right) (2sen\theta_o - 2\theta_o cos\theta_o) \right\} + \frac{R_b}{2SE} F_H^2 \left[ \theta_o + \frac{sen(2\theta_o)}{\theta_o} \right]$$
(22)

L'Eq. (22) può essere riscritta come:

$$U = \frac{R_b}{2DL} \left\{ F_H^2 R_b^2 \left[ 2\theta_o + \theta_o \cos(2\theta_o) - \frac{3}{2} \sin(2\theta_o) \right] - \frac{2F_H^2 R_b^2 \sin^2 \theta_o}{\theta_o} - 2F_H^2 R_b^2 \theta_o \cos^2 \theta_o + 2F_H^2 R_b^2 \sin(2\theta_o) \right\} + \frac{R_b}{2SE} F_H^2 \left[ \theta_o + \frac{\sin(2\theta_o)}{2} \right]$$
(23)

Infine viene calcolato lo spostamento  $\delta$  e conseguentemente la rigidezza  $k_1$ :

$$\delta = \frac{R_b^3 F_H}{DL} \left\{ \left[ 2\theta_0 + \theta_0 \cos(2\theta_0) - \frac{3}{2} \operatorname{sen}(2\theta_0) \right] - \frac{2\operatorname{sen}^2 \theta_0}{\theta_0} - 2\theta_0 \cos^2 \theta_0 + 2\operatorname{sen}(2\theta_0) \right\} +$$

$$\frac{R_b F_H}{SE} \left[ \theta_0 + \frac{\operatorname{sen}(2\theta_0)}{2} \right]$$

$$k_1 = \left\{ \frac{R_b^3}{DL} \left[ 2\theta_0 + \theta_0 \cos(2\theta_0) - \frac{3}{2} \operatorname{sen}(2\theta_0) - \frac{2\operatorname{sen}^2 \theta_0}{\theta_0} - 2\theta_0 \cos^2 \theta_0 + 2\operatorname{sen}(2\theta_0) \right] + \frac{R_b}{SE} \left[ \theta_0 + \operatorname{sen}(2\theta_0) \right] \right\}$$

$$(24)$$

$$\left.\frac{sen(2\theta_0)}{2}\right]\right\}^{-1}$$
(25)

L'Eq. (25) può essere semplificata nel seguente modo:

$$k_1 = \left\{ \frac{R_b^3}{DL} \left[ \theta_o + \frac{sen(2\theta_o)}{2} - \frac{2sen^2\theta_o}{\theta_o} \right] + \frac{R_b}{SE} \left[ \theta_o + \frac{sen(2\theta_o)}{2} \right] \right\}^{-1}$$
(26)

"Modelli a parametri concentrati per la caratterizzazione di cuscinetti di tipo foil"

## 4.3. Calcolo rigidezza $k_2$

La direzione di scorrimento di ciascun *bump* può essere determinata dal confronto delle forze agenti su di esso, le quali dipenderanno dall'azione esercitata dalla pressione dell'aria e dalle forze elastiche esercitate dai *bump* stessi.

Nel caso in cui l'azione complessiva delle forze esercitate è tale da garantire l'assenza di moto, il *bump* può ritenersi bloccato. Pertanto il modello di riferimento esposto in figura 4.4 deve essere modificato, poiché in mancanza di scorrimento non si avrebbe alcuna deflessione lungo la molla orizzontale. L'articolo [11] suggerisce un modello alternativo che possa simulare nella maniera più opportuna il comportamento del *bump* in assenza di moto, nel quale la molla e i link rigidi sono invertiti (vedi figura sottostante).



Figura 4.7 Modello che descrive il bump in assenza di moto (K.Feng e S.Kaneko,2010).

Nel modello rappresentato la presenza del link rigido orizzontale assicura che entrambe le estremità del *bump* siano fisse, mentre le due molle inclinate simulano la deflessione verticale ( $\Delta h$ ) che si verifica quando una forza  $F_p$  agisce sul *bump*.

E' possibile definire la lunghezza delle molle prima e dopo la deformazione come segue:

$$L_{spring} = 2R_b sen(\theta_o/2) \tag{27}$$

"Modelli a parametri concentrati per la caratterizzazione di cuscinetti di tipo foil"

$$L'_{sping} = \sqrt{R_b^2 + (R_b - \Delta h)^2 - 2R_b(R_b - \Delta h)\cos\theta_o}$$
<sup>(28)</sup>

Allora la forza della molla ( $F_s$ ) è definita come segue:

$$F_s = (L_{spring} - L'_{spring})k_2 \tag{29}$$

La rigidezza della molla ( $k_2$ ) viene calcolata attraverso l'applicazione del teorema di Castigliano. Si parte definendo lo sforzo normale ( $N(\theta)$ ) e il momento di trasporto ( $M(\theta)$ ) nel seguente modo:

$$N(\theta) = -F_H \cos(\theta - \theta_o) + F_V \sin(\theta - \theta_o)$$
(30)

$$M(\theta) = F_V R_b \left( sen\theta_o - sen(\theta - \theta_o) \right) - F_H R_b (\cos(\theta - \theta_o) - \cos\theta_o)$$
(31)

Dove  $F_H$  rappresenta la reazione vincolare in direzione orizzontale e  $F_V$  quella in direzione verticale.

L'energia di deformazione elastica (U) è espressa come segue:

$$U = \frac{R_b}{2DL} \alpha_1 + \frac{R_b}{2SE} \alpha_2 \tag{32}$$

L'espressione di  $\alpha_1$  e  $\alpha_2$  è analoga a quella dell'Eq.ni (16,17), esplicitando i calcoli si ottiene:

$$\alpha_{1} = \int_{0}^{2\theta_{o}} \{ [-F_{H}R_{b}(\cos(\theta - \vartheta_{o}) - \cos\theta_{o})]^{2} + [F_{V}R_{b}(\sin\theta_{o} - \sin(\theta - \theta_{o}))]^{2} - 2F_{H}F_{V}R_{b}^{2}(\cos(\theta - \theta_{o}) - \cos\theta_{o})(\sin\theta_{o} - \sin(\theta - \theta_{o}))\}d\theta =$$
$$= F_{H}^{2}R_{b}^{2}f_{1} + F_{V}^{2}R_{b}^{2}f_{2} - 2F_{V}F_{H}R_{b}^{2}f_{3}$$
(33)

Dove:

$$f_1 = \int_0^{2\theta_0} [\cos^2(\theta - \theta_o) - 2\cos(\theta - \theta_o)\cos\theta_o + \cos^2\theta_o]d\theta = \theta_o(1 + 2\cos^2\theta_o) - 3sen\theta_o\cos\theta_o$$
(34)

"Modelli a parametri concentrati per la caratterizzazione di cuscinetti di tipo foil"

$$f_{2} = \int_{0}^{2\theta_{o}} [sen^{2}\theta_{o} + sen^{2}(\theta - \theta_{o}) - 2sen\theta_{o}sen(\theta - \theta_{o})]d\theta =$$
$$= 2\theta_{o}sen^{2}\theta_{o} + \theta_{o} - sen\theta_{o}cos\theta_{o}$$
(35)

$$f_{3} = \int_{0}^{2\theta_{o}} \left[ (\cos(\theta - \theta_{o}) - \cos(\theta_{o})) (sen\theta_{o} - sen(\theta - \theta_{o})) \right] d\theta =$$
  
=  $2sen^{2}\theta_{o} - 2\theta_{o}cos\theta_{o}sen\theta_{o}$  (36)

$$\alpha_{2} = \int_{0}^{2\theta_{o}} [-F_{H} \cos(\theta - \theta_{o}) + F_{V} sen(\theta - \theta_{o})]^{2} d\theta =$$

$$= \int_{0}^{2\theta_{o}} [F_{H}^{2} \cos^{2}(\theta - \theta_{o}) + F_{V}^{2} sen^{2}(\theta - \theta_{o}) - 2F_{H} F_{V} \cos(\theta - \theta_{o}) sen(\theta - \theta_{o})] d\theta =$$

$$= F_{H}^{2} f_{4} + 2F_{H} F_{V} f_{5} + F_{V}^{2} f_{6}$$
(37)

Dove:

$$f_4 = \int_0^{2\theta_o} \cos^2(\theta - \theta_o) d\theta = \frac{1}{2} (2\theta_o + 2sen\theta_o \cos\theta_o) = \theta_o + sen\theta_o \cos\theta_o$$
(38)

$$f_5 = \int_0^{2\theta_o} \cos(\theta - \theta_o) \sin(\theta - \theta_o) d\theta = 0$$
(39)

$$f_6 = \int_0^{2\theta_o} sen^2(\theta - \theta_o) d\theta = \theta_o - sen\theta_o cos\theta_o$$
(40)

La reazione vincolare in direzione verticale ( $F_V$ ) può essere ricavata imponendo la seguente condizione:

$$\frac{\partial U}{\partial F_V} = 0 \tag{41}$$

Dove l'energia di deformazione elastica (U), facendo le opportune sostituzioni, può essere riscritta come:

$$U = \frac{R_b}{2DL} \left( F_H^2 R_b^2 f_1 + F_V^2 R_b^2 f_2 - 2F_H F_V R_b^2 f_3 \right) + \frac{R_b}{2SE} \left( F_H^2 f_4 + F_V^2 f_6 \right)$$
(42)

"Modelli a parametri concentrati per la caratterizzazione di cuscinetti di tipo foil"

Derivando l'Eq. (41) si ottiene:

$$F_V = \frac{\frac{F_H R_b^3 f_3}{DL}}{\frac{R_b^3 f_2}{DL} + \frac{R_b f_6}{SE}}$$
(43)

Infine si calcola, come già visto per i casi precedenti, lo spostamento ( $\delta$ ) e conseguentemente la rigidezza ( $k_2$ ):

$$\delta = \frac{\partial U}{\partial F_H} \tag{44}$$

$$\delta = \frac{R_b^3}{DL} (F_H f_1 - F_V f_3) + \frac{R_b}{SE} (F_H f_4)$$
(45)

$$k_2 = \frac{F_H}{\delta} \tag{46}$$

$$k_{2} = F_{H} \left[ \frac{R_{b}^{3}}{DL} \left( F_{H} f_{1} - \frac{F_{H} R_{b}^{3} f_{3} / D_{L}}{R_{b}^{3} f_{2} / D_{L} + R_{b} f_{6} / S_{E}} f_{3} \right) + \frac{R_{b}}{SE} (F_{H} f_{4}) \right]^{-1}$$
(47)

### 4.4. Analisi strutturale delle forze agenti sul Bump foil



Figura 4.8 Diagramma di corpo libero del bump i-esimo.

L'espressione della rigidezza equivalente  $(k_v)$  può essere valutata in seguito ad un analisi della distribuzione delle forze che i *bump* adiacenti si scambiano l'uno con l'altro. Lo studio del comportamento strutturale viene eseguito considerando una forza verticale  $(F_p^i)$ 

"Modelli a parametri concentrati per la caratterizzazione di cuscinetti di tipo foil"

che agisce sulla sommità del *bump* e la forza della molla orizzontale ( $F_s^i$ ), la quale rigidezza è stata calcolata nel paragrafo precedente attraverso l'ausilio del teorema di Castigliano.

Il diagramma di corpo libero, che descrive le forze scambiate tra un *bump* i-esimo e quello ad esso adiacente, è rappresentato nella figura sottostante, nel quale è stato assunto un coefficiente di attrito  $\mu$  tra il manicotto interno del cuscinetto e il *bump* e un coefficiente di attrito  $\eta$  tra il *top foil* e il *bump*.

Facendo riferimento alla figura 4.8, si valutano le forze principali considerando il caso in cui si abbia una traslazione verso destra del *bump* i-esimo. Si definisce l'equilibrio alla rotazione del link 1-2 intorno alla cerniera C:

$$V_R^{i+1}\cos^{i+1}\alpha = (V_R^{i+1}\mu + F_s^{i+1} + F^{i+1})sen^{i+1}\alpha$$
(48)

$$V_L^{i+1}\cos^{i+1}\alpha + \mu V_L^{i+1}sen^{i+1}\alpha = \left(F^i + F_s^{i+1}\right)sen^{i+1}\alpha \tag{49}$$

L'Eq.ni (48,49) possono essere riscritte come segue:

$$F^{i+1} = V_R^{i+1} \left( \frac{1}{tg^{i+1}\alpha} - \mu \right) - F_s^{i+1}$$
(50)

$$F^{i} = V_{L}^{i+1} \left( \frac{1}{tg^{i+1}\alpha} + \mu \right) - F_{S}^{i+1}$$
(51)

Dall'equilibrio alla traslazione orizzontale sul link 3, si ottiene:

$$V_{R}^{i}\left(\frac{1}{tg^{i}\alpha} - \mu\right) - F_{S}^{i} = V_{L}^{i+1}\left(\frac{1}{tg^{i+1}\alpha} + \mu\right) - F_{S}^{i+1}$$
(52)

L'Eq. (52) che esprime l'equilibrio delle forze agenti sul link rigido interposto tra due *bump*, può essere riformulata nel modo seguente:

$$F_{beam}^{i} + F_{s}^{i+1} = F_{beam}^{i+1} + F_{s}^{i} + f_{i}$$
(53)

"Modelli a parametri concentrati per la caratterizzazione di cuscinetti di tipo foil"

Dove:

$$F_{beam}^{i} = \frac{V_{R}^{i}}{tg^{i}\alpha}$$
(54)

$$F_{beam}^{i+1} = \frac{V_L^{i+1}}{tg^{i+1}\alpha} \tag{55}$$

$$f_i = (V_R^i + V_L^{i+1})\mu$$
(56)

$$F_S^i = 2\Delta L^i k_1 \tag{57}$$

$$F_S^{i+1} = 2\Delta L^{i+1} k_1 \tag{58}$$

Le reazioni vincolari  $V_L^{i+1}$  e  $V_R^{i+1}$  possono essere calcolate a partire dall'equazione di equilibrio orizzontale e verticale sui link 1-2 come mostrato:

$$F_i - (\mu + \eta)F_p^{i+1} - F^{i+1} = 0$$
(59)

$$V_L^{i+1} + V_R^{i+1} = F_p^{i+1} \tag{60}$$

Sostituendo l'Eq. (50,51) all'interno dell'Eq. (59) si ottiene:

$$V_L^{i+1}\left(\frac{1}{tg^{i+1}\alpha} + \mu\right) - (\mu + \eta)F_p^{i+1} - V_R^{i+1}\left(\frac{1}{tg^{i+1}\alpha} - \mu\right) = 0$$
(61)

Nota la forza esercitata dal carico in corrispondenza della sommità del *bump*, le reazioni vincolari possono essere espresse come segue:

$$V_R^{i+1} = 0.5F_p^{i+1}(1 - \eta t g^{i+1}\alpha)$$
(62)

$$V_L^{i+1} = 0.5F_p^{i+1}(1 + \eta t g^{i+1}\alpha)$$
(63)

Nel caso in cui si consideri una traslazione verso sinistra del *bump* i-esimo, le equazioni esposte in precedenza vengono modificate in quanto bisogna tenere conto del cambio di direzione delle forze di attrito.

"Modelli a parametri concentrati per la caratterizzazione di cuscinetti di tipo foil"

Si ottiene:

$$F^{i+1} = V_R^{i+1} \left(\frac{1}{tg^{i+1}\alpha} + \mu\right) - F_S^{i+1}$$
(64)

$$F^{i} = V_{L}^{i+1} \left( \frac{1}{tg^{i+1}\alpha} - \mu \right) - F_{S}^{i+1}$$
(65)

Dall'equilibrio alla traslazione orizzontale sul link 3 si ricava:

$$V_{L}^{i+1}\left(\frac{1}{tg^{i+1}\alpha} - \mu\right) - F_{S}^{i+1} = V_{R}^{i}\left(\frac{1}{tg^{i}\alpha} + \mu\right) - F_{S}^{i}$$
(66)

L'Eq. (66) può essere riformulata come segue:

$$F_{beam}^{i+1} + F_s^i = F_{beam}^i + F_s^{i+1} + f_i$$
(67)

Dove:

$$F_{beam}^{i} = \frac{V_{R}^{i}}{tg^{i}\alpha} \tag{68}$$

$$F_{beam}^{i+1} = \frac{V_L^{i+1}}{tg^{i+1}\alpha}$$
(69)

$$f_i = (V_R^i + V_L^{i+1})\mu$$
(70)

Infine considerando le equazioni di equilibrio alla traslazione verticale e orizzontale sui link 1-2 è possibile ricavare le espressioni delle reazioni vincolari  $V_L^{i+1}$  e  $V_R^{i+1}$ :

$$F_i + (\mu + \eta)F_p^{i+1} - F^{i+1} = 0 \tag{71}$$

Sostituendo l'Eq. (64,65) all'interno dell'Eq. (71) si ottiene:

$$V_L^{i+1}\left(\frac{1}{tg^{i+1}\alpha} - \mu\right) + (\mu + \eta)F_p^{i+1} - V_R^{i+1}\left(\frac{1}{tg^{i+1}\alpha} + \mu\right) = 0$$
(72)

Combinando l'Eq. (60) con l'Eq. (72) e risolvendo il sistema si ricava:

$$V_R^{i+1} = 0.5F_p^{i+1}(1 + \eta t g^{i+1}\alpha)$$
(73)

"Modelli a parametri concentrati per la caratterizzazione di cuscinetti di tipo foil"

$$V_L^{i+1} = 0.5F_p^{i+1}(1 - \eta t g^{i+1}\alpha) \tag{74}$$

Se si fa riferimento all' n-esimo *bump* (Fig. 4.9), il quale presenta un'estremità libera, esso ammette solo due condizioni di moto ovvero traslazione verso destra o estremità del *bump* bloccate. Questo si traduce in una distribuzione differente delle forze che è descritta dalla seguente equazione di equilibrio alla traslazione orizzontale:



Figura 4.9 Diagramma di corpo libero n-esimo bump.

$$V_R^N \mu + F_S^N = F_{beam}^N \tag{75}$$

Dove:

$$F_{beam}^{N} = \frac{V_{R}^{N}}{tg^{N}\alpha}$$
(76)

# 4.5. Calcolo rigidezza equivalente $k_v$

Il comportamento del *bump foil* può essere simulato da una serie di molle verticali di rigidezza equivalente  $(k_v)$ , il quale valore può essere ricavato attraverso un calcolo iterativo a partire dall'estremità libera del *bump*. Le espressioni che descrivono la rigidezza equivalente per l'i-esimo e l'ultimo *bump* possono essere ottenute dalle equazioni di equilibrio, esposte nel paragrafo precedente, attraverso opportune sostituzioni. Nel caso di traslazione verso destra si ha:

$$0.5F_p^i(1 - \eta t g^i \alpha) \left(\frac{1}{tg^i \alpha} - \mu\right) - F_s^i = 0.5F_p^{i+1}(1 + \eta t g^{i+1} \alpha) \left(\frac{1}{tg^{i+1} \alpha} + \mu\right) - F_s^{i+1}$$
(77)

Dove:

$$F_p^i = k_v^i \Delta h^i \tag{78}$$

"Modelli a parametri concentrati per la caratterizzazione di cuscinetti di tipo foil"

$$F_p^{i+1} = k_v \Delta h^{i+1} \tag{79}$$

Riformulando l'Eq. (77) si ottiene:

$$k_{v}^{i} = \frac{2(\Delta L^{i} - \Delta L^{i+1})k_{1} + B^{i}k_{v}^{i+1}}{A^{i}}$$
(80)

Dove:

$$A^{i} = 0.5\Delta h^{i} (1 - \eta t g^{i} \alpha) \left(\frac{1}{t g^{i} \alpha} - \mu\right)$$
(81)

$$B^{i} = 0.5\Delta h^{i+1} (1 + \eta t g^{i+1} \alpha) \left(\frac{1}{t g^{i} \alpha} + \mu\right)$$

$$\tag{82}$$

Nel caso di traslazione verso sinistra si ha:

$$0.5F_p^{i+1}(1 - \eta t g^{i+1}\alpha) \left(\frac{1}{tg^{i+1}\alpha} - \mu\right) - F_s^{i+1} = 0.5F_p^i(1 + \eta t g^i\alpha) \left(\frac{1}{tg^{i+1}\alpha} + \mu\right) - F_s^i$$
(83)

L'espressione della rigidezza equivalente  $(k_v)$  è analoga a quella ottenuta nell'Eq. (80), tuttavia i coefficienti A e B differiscono come segue:

$$A^{i} = 0.5\Delta h^{i} (1 + \eta t g^{i} \alpha) \left(\frac{1}{t g^{i} \alpha} + \mu\right)$$
(84)

$$B^{i} = 0.5\Delta h^{i+1} (1 - \eta t g^{i+1} \alpha) \left( \frac{1}{t g^{i+1} \alpha} - \mu \right)$$
(85)

La rigidezza equivalente  $(k_v)$  n-esima valutata in corrispondenza del *bump* con estremità libera ammette una sola espressione e viene definita come:

$$k_{\nu}^{N} = \frac{F_{p}^{N}}{\Delta h^{N}} = \frac{2\Delta L^{N}k_{1}}{A^{N}}$$
(86)

Dove:

$$A^{N} = 0.5\Delta h^{N} (1 - \eta t g^{N} \alpha) \left(\frac{1}{t g^{N} \alpha} - \mu\right)$$
(87)

Nel caso in cui il bilancio di forze sull'i-esimo *bump* sia tale da impedirne il moto, come è già stato detto, bisogna fare riferimento ad un modello alternativo in cui la molla

"Modelli a parametri concentrati per la caratterizzazione di cuscinetti di tipo foil"

orizzontale di rigidezza  $k_1$  non sia presente. Dall'equilibrio delle forze, imposto sulla sommità del *bump*, si ricava la nuova espressione della forza esercitata dal carico:

$$F_p = 2 \cdot F_s \cos \gamma \tag{88}$$

Dove:

$$\cos\gamma = \frac{L_{spring}^{\prime 2} + (R_b - \Delta h)^2 - R_b^2}{2 \cdot L_{spring}^{\prime 2} \cdot (R_b - \Delta h)}$$
(89)

Infine l'espressione della rigidezza equivalente nel caso di *bump* in assenza di moto è ottenuta come:

$$k_{\nu} = \frac{F_p}{\Delta h} = \frac{\left[2\left(L_{spring} - L'_{spring}\right)k_2\right]}{\Delta h}\cos\gamma$$
(90)

"Modelli a parametri concentrati per la caratterizzazione di cuscinetti di tipo foil"

# Capitolo 5

# 5. Risultati numerici

Al fine di valutare la correttezza del modello di *Bump foil* descritto all'interno dell'articolo [11] è stato sviluppato un modello numerico tramite l'ambiente di calcolo MATLAB (vedi appendice 1). Attraverso la simulazione numerica è stato possibile studiare il comportamento di ogni singolo *bump* per due casi imposti:

- Nel primo caso è stata assunta la deflessione verticale (Δh) della molla, considerando un valore costante per ogni *bump*, è stata studiata la variazione della rigidezza equivalente e delle forze assegnate in presenza di una distribuzione lineare della deflessione verticale;
- Nel secondo caso è stata imposta una distribuzione di forza su ogni *bump*, dove i valori ottenuti sono stati confrontati con quelli elaborati nel primo caso al fine di verificarne la veridicità;

Le dimensioni del *bump* sono state supposte costanti per ogni caso e sono quelle specificate nelle tabelle 4.1 e 4.2.

### 5.1. Deflessione verticale ( $\Delta h$ ) nota

La prima parte di calcolo numerico prevede lo studio del comportamento del *Bump foil* assumendo l'ipotesi semplificata di deflessione verticale nota, che sebbene sia un caso poco attinente con il comportamento reale della lamina, è utile per valutare la correttezza delle equazioni esposte nel capitolo 4.

Per rendere il calcolo più accurato è stato assunto un campo di variazione della deflessione verticale ( $\Delta h$ ) tra un valore minimo e un valore massimo, che per ragioni pratiche, è stato ipotizzato pari alla metà dell'altezza totale del *bump*.

"Modelli a parametri concentrati per la caratterizzazione di cuscinetti di tipo foil"

Nel modello sviluppato nel capitolo precedente esiste una relazione fra la deflessione verticale ( $\Delta h$ ) e quella orizzontale ( $\Delta L$ ) espressa nella equazione (1), allo stesso tempo esiste una relazione analoga sempre fra la deflessione verticale e l'angolo ( $\alpha$ ) sotteso dal link rigido inclinato delineata nell'equazione (2).

Quanto detto si traduce in una proporzionalità diretta fra la deflessione verticale ( $\Delta h$ ) e quella orizzontale ( $\Delta L$ ) e una inversa fra la prima e l'angolo ( $\alpha$ ) sotteso dal link, deducibili facilmente osservando le figure 5.1 e 5.2.



Figura 5.1 Andamento della deflessione orizzontale in relazione a quella verticale.



"Modelli a parametri concentrati per la caratterizzazione di cuscinetti di tipo foil"

*Figura 5.2 Andamento dell'angolo (\alpha) e della deflessione verticale.* 

L'andamento esposto nelle figure soprastanti vale per qualsiasi *bump*, pertanto ad un incremento della deflessione verticale corrisponderà sempre un incremento di quella orizzontale poiché il *bump* tenderà a schiacciarsi a causa della forza agente sulla sua sommità e allo stesso tempo l'angolo sotteso dai link rigidi tenderà a diminuire a causa dell'aumento dell'inclinazione di questi ultimi. Ciò può essere dedotto considerando per semplicità il caso in cui si abbiano tre *bump*, ognuno di essi soggetto ad una deformazione verticale crescente. Si osserva come ad una data deformazione verticale ne corrisponde una orizzontale e un dato angolo a.

In corrispondenza dell'ultimo *bump*, in cui è stato imposto un  $\Delta h$  maggiore, si ha un incremento maggiore pari ad un certo  $\Delta L$  che si traduce in una traslazione complessiva verso destra.



"Modelli a parametri concentrati per la caratterizzazione di cuscinetti di tipo foil"

Figura 5.3 Confronto tra il Bump foil indeformato e quello deformato.

Ogni *bump* sarà soggetto ad uno spostamento verso destra che andrà ad aumentare man mano che ci si allontana dall'estremità saldata della lamina. Questo comportamento può essere di facile interpretazione se si osserva la figura 5.4.



Figura 5.4 Traslazione estremo destro del bump al variare della deflessione verticale.

"Modelli a parametri concentrati per la caratterizzazione di cuscinetti di tipo foil"

Nota la deflessione verticale ( $\Delta h$ ), la deflessione orizzontale ( $\Delta L$ ) e l'angolo sotteso dai link ( $\alpha$ ) è stato possibile ricavare la rigidezza equivalente ( $k_v$ ) necessaria per il calcolo delle forze assegnate e delle reazioni vincolari imposte.

La rigidezza equivalente è stata valutata attraverso un calcolo iterativo sviluppato a partire dall'ultimo *bump*, ovvero considerando l'estremità libera della lamina che, come si può dedurre dall'Eq. (86), risulta essere indipendente dalla rigidezza equivalente del *bump* successivo, in quanto non presente.

Coerentemente con il modello reale, la figura 5.5 mostra come a parità di deformazione verticale la rigidezza equivalente, partendo da un valore massimo calcolato in corrispondenza del primo *bump* saldato, decresce fino a raggiungere un valore minimo che risulta relativo all'ultimo *bump* con estremità libera. Inoltre si nota come la deformazione verticale sia inversamente proporzionale alla rigidezza ( $k_v$ ), la quale presenta complessivamente un andamento decrescente.



Figura 5.5 Andamento della rigidezza equivalente  $(k_v)$  al variare della deflessione verticale.

"Modelli a parametri concentrati per la caratterizzazione di cuscinetti di tipo foil"

Il valore delle forze agenti e delle reazioni vincolari assegnate è stato determinato anch'esso da un calcolo iterativo applicando le Eq.ni (54,55,57,62,63,78) dimostrate nel capitolo precedente.

I risultati ottenuti sono mostrati seguentemente:



Figura 5.6 Andamento della forza verticale  $(F_p)$  al variare della deflessione verticale.



"Modelli a parametri concentrati per la caratterizzazione di cuscinetti di tipo foil"

Figura 5.7 Andamento della reazione vincolare  $(V_R)$  al variare della deflessione verticale.



Figura 5.8 Andamento della reazione vincolare  $(V_L)$  al variare della deflessione verticale.



"Modelli a parametri concentrati per la caratterizzazione di cuscinetti di tipo foil"

Figura 5.9 Andamento della forza di interazione fra i bump al variare della deflessione verticale.





"Modelli a parametri concentrati per la caratterizzazione di cuscinetti di tipo foil"

Osservando il grafico in figura 5.6 si evince come la forza agente sulla sommità del  $bump(F_p)$  è direttamente proporzionale alla deflessione verticale, coerentemente con quanto accadrebbe nel caso reale dove ad un carico maggiore applicato corrisponderebbe una deformazione maggiore associata. Inoltre si osserva come a parità di deformazione verticale, la forza applicata su ogni *bump* tende a diminuire man mano che ci si allontana dall'estremità saldata della lamina.

Le reazioni vincolari  $V_R$  e  $V_L$ , il quale andamento è raffigurato nelle figure 5.7 e 5.8, presentano lo stesso comportamento della forza esercitata dal carico applicato sulla sommità del *bump*, tuttavia il contributo della reazione vincolare applicata all'estremità sinistra è maggiore poiché ad essa si sommerà la componente relativa alle forze di attrito.

Infine, per quanto concerne le forze scambiate tra *i bump* lungo il segmento rigido che li congiunge (vedi figura 5.9) si evince come l'andamento è crescente all'aumentare della deformazione verticale e decrescente via via che ci si avvicina all'estremità libera del *Bump foil*, mentre la forza applicata dalla molla di rigidezza  $k_1$  (vedi figura 5.10), a parità di  $\Delta h$ , è la stessa per ogni *bump*.

# 5.2. Distribuzione di forza $(F_p)$ nota

La seconda parte di calcolo numerico prevede l'applicazione di un caso più attinente con la reale fisicità del problema basato sull'ipotesi iniziale di distribuzione di forza esercitata dal carico nota.

Essendo un caso realistico, i calcoli per la valutazione delle forze associate, delle reazioni vincolari imposte e della rigidezza equivalente non sono immediati, bisogna tenere conto che la deflessione verticale, essendo un'incognita, deve essere valutata attraverso un ulteriore calcolo iterativo e inoltre, che data una forza  $F_p$  imposta sulla sommità del *bump*, quest'ultimo non sempre traslerà verso destra. Infatti, la condizione di moto di ogni *bump* sarà determinata principalmente dal valore della deflessione verticale, delle forze di attrito e dalle forze di interazione fra i *bump*.

"Modelli a parametri concentrati per la caratterizzazione di cuscinetti di tipo foil"

Il presente caso deve tenere conto anche che la rigidezza equivalente è fortemente influenzata dal movimento dei *bump* adiacenti, pertanto, oltre a risolvere un sistema di equazioni disaccoppiate dove si ottiene immediatamente il valore della deflessione verticale a partire dalla forza applicata e dalla rigidezza equivalente, è necessario risolvere il sistema attraverso un calcolo a ritroso che partirà dal *bump* con estremità libera, dove la forza esterna applicata risulta nota.

Per quanto concerne il calcolo della deflessione verticale, facendo riferimento all'iesimo *bump*, il procedimento iterativo impiegato è il seguente:

- Si ipotizza un valore generico di  $\Delta h^i$ ;
- Si calcolano le grandezze  $\Delta L^i$ ,  $\alpha^i$ ,  $A^i$ ,  $B^i$  con le equazioni esposte in precedenza;
- Si valuta la rigidezza equivalente i-esima (k<sup>i</sup><sub>v</sub>);
- Si valuta la nuova deflessione verticale a partire dall'Eq. (78):  $\Delta h^i = \frac{F_p^i}{k!}$
- Infine si calcola l'errore tra il valore della deformazione calcolata e quella ipotizzata:  $errore^{i} = \left| \frac{\Delta h^{i} - \frac{F_{p}^{i}}{k_{v}^{i}}}{\frac{F_{p}^{i}}{k_{v}^{i}}} \right|;$
- Se l'errore fra il valore calcolato e quello ipotizzato è inferiore all' 1% si interrompe l'iterazione, viceversa si prosegue sostituendo al valore iniziale quello appena ottenuto;

Definite la rigidezza equivalente e conseguentemente le reazioni vincolari si valuta lo stato di moto del i-esimo *bump*, l'articolo [11] definisce i seguenti criteri per determinare la condizione di movimento in corrispondenza di ogni superficie di contatto:

1. Nel caso in cui si analizzi il movimento dell'i-esimo segmento, esso può essere definito dalle seguenti condizioni:

"Modelli a parametri concentrati per la caratterizzazione di cuscinetti di tipo foil"

- Condizione di moto verso destra:  $F_s^i + F_{beam}^{i+1} F_s^{i+1} F_{beam}^i > f_i$ ;
- Condizione di moto verso sinistra:  $F_s^i + F_{beam}^{i+1} F_s^{i+1} F_{beam}^i < -f_i$ ;
- Condizione di *bump* in assenza di moto: tutte le altre condizioni;
- 2. In corrispondenza dell'ultimo *bump* si ammettono le seguenti condizioni:
  - Condizione di moto verso destra:  $F_s^N F_{beam}^N > V_R^N \mu$ ;
  - Condizione di bump in assenza di moto: tutte le altre condizioni;
- 3. Il segmento rigido in corrispondenza dell'estremità saldata non ammette alcun movimento;

"Modelli a parametri concentrati per la caratterizzazione di cuscinetti di tipo foil"

I procedimenti da eseguire per il calcolo della deformazione verticale e la definizione dello stato di moto dell'i-esimo *bump* possono essere riassunti nel seguente diagramma di flusso:



Figura 5.11 Diagramma di flusso del calcolo iterativo sull' i-esimo bump.

-

"Modelli a parametri concentrati per la caratterizzazione di cuscinetti di tipo foil"

Si procede definendo i dati geometrici dei *bump* (vedi tabella 4.1 e 4.2) e le condizioni iniziali:

Deflessione verticale ipotizzata, $\Delta h$	0.100 mm
Forza esercitata su ogni $bump,F_p$	170 N
Numero di <i>bump, N</i>	10
Numero massimo di iterazioni	10
Deflessione verticale massima, $\Delta h_{max}$	0.200 mm

Tabella 5.1 Condizioni iniziali modello numerico.

In prima battuta è stata imposta una distribuzione di forza costante, dal processo iterativo è emerso che per tale distribuzione i risultati sono i seguenti:



Figura 5.12 Andamento della deflessione orizzontale al variare di quella verticale.

"Modelli a parametri concentrati per la caratterizzazione di cuscinetti di tipo foil"



Figura 5.13 Andamento dell'angolo sotteso dai link rigidi al variare della deflessione verticale.



Figura 5.14 Deflessione verticale calcolata su ogni bump.

"Modelli a parametri concentrati per la caratterizzazione di cuscinetti di tipo foil"

I risultati rappresentati in figura 5.12 e 5.13, i quali andamenti sono coerenti con quanto visto nel caso precedente, dimostrano l'attendibilità del processo iterativo. Si osserva come la deflessione verticale, per una distribuzione di forza costante, ha un andamento crescente via via che si prosegue dall'estremità saldata verso quella libera della lamina.

Attraverso una rappresentazione grafica è stato possibile monitorare la convergenza del processo iterativo per il calcolo della deflessione verticale effettiva su ogni *bump* visualizzando l'andamento dell'errore. Per le condizioni imposte si osserva come l'errore su ogni *bump* converge:



Figura 5.15 Convergenza dell'errore su ogni bump per ogni iterazione.

Tuttavia è emerso come il processo iterativo descritto e impiegato per il calcolo della deflessione verticale non sempre è attendibile, infatti imponendo delle forze circa superiori ai 200 N l'andamento dell'errore, per le condizioni date, non raggiunge la convergenza. Quando detto può essere giustificato dal comportamento strutturale della lamina, la quale

"Modelli a parametri concentrati per la caratterizzazione di cuscinetti di tipo foil"

ammetterà un carico massimo al di sopra della quale il modello rappresentato non sarà più valido poiché la struttura del *Bump foil* non sarà in grado di sopportare tali sforzi e deformazioni.

Confermata la validità del processo iterativo impiegato per il calcolo della deflessione verticale su ogni *bump*, è stata calcolata la rigidezza equivalente, le reazioni vincolari e le forze agenti attraverso le quali è stato possibile definire lo stato di moto e correggere le equazioni associate alla rigidezza  $k_V$  secondo il procedimento mostrato nel diagramma di flusso esposto in fig. 5.11.



Figura 5.16 Confronto tra la rigidezza equivalente iniziale e la rigidezza equivalente corretta.

Dal bilancio delle forze è emerso che tutti i *bump* sono bloccati a eccezione del penultimo che traslerà verso sinistra. Osservando la figura soprastante si può dedurre come la rigidezza equivalente corretta, caratterizzata da un andamento decrescente che risulta coerente con la reale fisicità della struttura, è maggiore rispetto a quella calcolata ipotizzando una traslazione verso destra dei *bump*. Pertanto, si può affermare che i *bump* con estremità fisse presentano una rigidezza equivalente più elevata di quelli caratterizzati

"Modelli a parametri concentrati per la caratterizzazione di cuscinetti di tipo foil"

da uno stato di moto. Inoltre, graficamente si evince come nel penultimo *bump*, che traslerà verso sinistra, si ha uno scostamento dall'andamento generale dovuto dall'interazione con il *bump* successivo.

Per quanto concerne la rigidezza equivalente calcolata inizialmente, anche essa presenta un andamento decrescente in linea con i risultati ottenuti nel caso precedente confermando ulteriormente l'attendibilità del processo iterativo impiegato per il calcolo della deflessione verticale.

Si riporta a seguire la rappresentazione del Bump foil nella sua condizione deformata:



Figura 5.17 Confronto tra il Bump foil deformato e quello indeformato.

"Modelli a parametri concentrati per la caratterizzazione di cuscinetti di tipo foil"

# 5.2.1.Influenza del coefficiente di attrito sulla rigidezza equivalente

La rigidezza equivalente, oltre ad essere funzione della rigidezza della molla orizzontale  $(k_1)$  e della molla inclinata  $(k_2)$  la quale grandezza dipende dalla geometria iniziale del *bump*, dipende anche dalla deflessione della lamina, le forze di attrito e le forze di interazione fra i *bump*. E' stato valutato come varia la rigidezza equivalente in funzione alla deflessione verticale, ottenuta attraverso il calcolo iterativo adottato nel modello numerico esposto nel presente capitolo.

In figura 5.18 è rappresentata la rigidezza equivalente al variare della deflessione verticale secondo i seguenti stati di moto:

- Bump con estremità scorrevoli lungo destra;
- Bump con estremità scorrevoli lungo sinistra;



Bump estremità bloccate;

Figura 5.18 Confronto fra la rigidezza equivalente nelle diverse condizioni di moto e di attrito.
"Modelli a parametri concentrati per la caratterizzazione di cuscinetti di tipo foil"

I risultati ottenuti sono coerenti con quanto esposto in letteratura [11], confermando ulteriormente la validità del modello numerico sviluppato.

Si evince come la rigidezza equivalente del *bump* con estremità bloccate è più grande di quella del *bump* con estremità scorrevoli, quanto detto è giustificato dal fatto che la rigidezza  $k_2$  è superiore di almeno un ordine di grandezza della rigidezza  $k_1$  come si può constatare dai risultati ottenuti risolvendo le Eq.ni (26,47):

Rigidezza della molla $bump$ con estremità fisse, $k_2$	7.53e+04 N/mm
Rigidezza della molla $\mathit{bump}$ con estremità scorrevoli, $k_1$	6.54e+03 N/mm

Tabella 5.2 Valori numerici rigidezza della molla per bump con estremità fisse e scorrevoli.

Tale differenza numerica è dovuta, come si può constatare osservando il valore dello sforzo normale e del momento di trasporto (vedi Eq.ni 30,31) valutato nel capitolo precedente, dalla presenza di una componente aggiuntiva rappresentata dalla reazione vincolare verticale ( $F_V$ ).

La rigidezza equivalente in entrambi i casi presenta un andamento decrescente e nel caso di moto a destra o a sinistra dei *bump* i risultati ottenuti si sovrappongono. Inoltre, introducendo le forze di attrito tra il manicotto interno del cuscinetto e il *bump* e le forze di attrito tra il *Top foil* e il *bump*, si può osservare un aumento della rigidezza equivalente nel caso in cui sia stato assunto una condizione di moto a destra o a sinistra.

#### 5.3. Distribuzione variabile di forza $(F_p)$

Ulteriori calcoli sono stati eseguiti sul modello numerico presentato nel paragrafo 5.2 considerando l'azione di una forza di carico decrescente e una distribuzione triangolare (crescente/decrescente).

I *bump* sono stati elencati a partire dall'estremità saldata a quella libera rispettivamente da 1 a 10.



Figura 5.19 Distribuzione della forza nei due casi studiati.



Figura 5.20 Confronto della deflessione dei bump per una distribuzione di forza decrescente.



"Modelli a parametri concentrati per la caratterizzazione di cuscinetti di tipo foil"

Figura 5.21 Confronto della deflessione dei bump per una distribuzione di forza triangolare.

Per una distribuzione di carico decrescente con forza massima applicata sul primo bump, è stato valutato il comportamento della deflessione verticale in relazione anche alla variazione dei coefficienti di attrito  $\mu \in \eta$  (vedi figura 5.20). Analogamente lo stesso confronto è stato eseguito considerando una distribuzione di carico triangolare con forza massima applicata in corrispondenza dei due *bump* intermedi (vedi figura 5.21).

Risulta evidente come la deflessione verticale diminuisca all'aumentare del coefficiente di attrito, quanto detto può essere giustificato dal fatto che coefficienti di attrito più elevati conferiscono una maggiore rigidità ai *bump* come già visto in figura 5.18.

Inoltre nel modello rappresentato, costituito da molle e link rigidi, è stato idealizzato il contributo del *Top foil* il quale viene considerato fissato ad un'estremità. La presenza di quest'ultimo previene una deflessione verticale negativa, che in caso contrario si registrerebbe in corrispondenza del primo *bump* quando viene assunta una distribuzione triangolare della forza di carico.

"Modelli a parametri concentrati per la caratterizzazione di cuscinetti di tipo foil"



Per quanto concerne la rigidezza equivalente, i risultati ottenuti sono i seguenti:

Figura 5.22 Confronto della rigidezza equivalente del bump per una distribuzione di forza decrescente.



Figura 5.23 Confronto della rigidezza equivalente dei bump per una distribuzione di forza triangolare.

"Modelli a parametri concentrati per la caratterizzazione di cuscinetti di tipo foil"

I risultati ricavati evidenziano come la rigidezza dei *bump* cambia significativamente con lo stato di moto di questi ultimi. Si dimostra come la condizione di moto di una superficie di contatto del *Bump foil*, ad una determinata distribuzione di carico, è determinata sia dall'estremità saldata della lamina sia dal valore del coefficiente di attrito. Pertanto i *bump* situati in corrispondenza o nelle vicinanze dell'estremità saldata hanno una rigidezza maggiore, ed elevati coefficienti di attrito ne impediranno il movimento relativo. Inoltre, se il coefficiente di attrito è tale da mantenere i *bump* in posizione fissa, la struttura della lamina diventerà estremamente rigida.

Infine si riporta a seguire la rappresentazione in condizione deformata del *Bump foil* per una distribuzione di forza decrescente e crescente/decrescente:



Figura 5.24 Confronto fra il Bump foil in condizione indeformata e deformata nel caso di distribuzione di forza decrescente.



Figura 5.25 Confronto fra il Bump foil in condizione indeformata e deformata nel caso di distribuzione di forza triangolare.



Figura 5.26 Effetto del coefficiente di attrito sulla deformazione di un bump con estremità fisse.

#### Capitolo 6

## 6. Conclusioni

I cuscinetti di tipo foil sono dei cuscinetti idrodinamici ad azione automatica realizzati attraverso l'uso di almeno due strati di fogli di lamina in sostituzione ai corpi volventi. Lo strato più interno, il *Top foil*, intrappola uno strato di gas/aria pressurizzata che sorreggerà il carico mentre la lamina sottostante, il *Bump foil*, conferisce con la sua struttura una rigidezza adeguata.

I cuscinetti di tipo foil trovano applicazione in molte turbomacchine sottoposte a piccoli carichi a velocità elevate, come ad esempio nei compressori impiegati nelle macchine a ricircolo d'aria all'interno degli aeromobili e in alcune microturbine. La caratteristica che li contraddistingue principalmente è l'assenza di corpi volventi che li rende in grado di operare senza l'impiego di oli lubrificanti, permettendo di ottenere sistemi più compatti, meno soggetti ad opere di manutenzione, in grado di lavorare a temperature critiche e infine di ridurre l'impatto ambientale legato all'uso di lubrificanti.

Nonostante i diversi studi per migliorare le prestazioni, la divulgazione commerciale e l'estensione ad ulteriori applicazioni è stata ostacolata da alcune problematiche riscontrate nei processi di produzione e di progettazione. Infatti, sebbene la struttura dei cuscinetti a lamina d'aria sia relativamente semplice, la forte dipendenza che si ha fra la rigidezza delle lamine e la pressione idrodinamica generata, rende difficile stabilire dei metodi di analisi predittiva sull'affidabilità del cuscinetto e delle linee guida adeguate per la progettazione. Pertanto, lo sviluppo di un modello teorico e analitico che sia in grado di descrivere le prestazioni del cuscinetto a determinate condizioni di lavoro, risulta fondamentale per una corretta progettazione.

"Modelli a parametri concentrati per la caratterizzazione di cuscinetti di tipo foil"

Nel presente lavoro di tesi è stato sviluppato un modello analitico di *Bump foil,* a partire dagli studi esposti all'interno dell'articolo "*Analytical model of bump-type foil bearings Using a link-spring structure and a finite-element shell model*" [11].

E' stata presentata una trattazione semplificata di *Bump foil* dove ogni *bump* è stato sostituito da una struttura caratterizzata da link rigidi e molle. Quest'ultime rappresentano la rigidezza del singolo *bump* e sono state disposte inizialmente in serie e successivamente, dopo aver dimostrato l'esistenza di una correlazione fra la deflessione verticale e quella orizzontale, sono state posizionate in parallelo in modo tale che il comportamento del singolo *bump* potesse essere simulato attraverso una molla verticale di rigidezza equivalente ( $k_v$ ).

Il modello sviluppato consente di valutare in maniera semplificata lo stato di moto e le forze di attrito attraverso un'analisi strutturale. Tuttavia, per quanto concerne i *bump* con estremità fisse, lo schema strutturale deve essere modificato sostituendo la molla orizzontale con un link rigido e assumendo la presenza di due molle inclinate al posto dei link che simulino la rigidezza della lamina.

Lo sviluppo del modello analitico si è basato sullo studio di due casi principali:

Il primo caso assume un valore di deflessione verticale su ogni *bump* e ne valuta il comportamento. In particolare è emerso come la rigidezza equivalente decresce partendo dall'estremità saldata fino a quella libera e risulta essere inversamente proporzionale alla deformazione verticale imposta.

Il secondo caso si basa su un'ipotesi più realistica, ovvero impone una distribuzione di forza applicata sul *Top foil* e analizza il comportamento della lamina in relazione alla deflessione verticale, le forze di attrito e le forze di interazione fra i *bump*.

I risultati ottenuti sono in linea con il modello analitico di riferimento, in particolare è emerso come il valore della rigidezza equivalente sia fortemente condizionato dalla deflessione verticale e dal coefficiente di attrito. I *bump* con estremità fissate hanno

"Modelli a parametri concentrati per la caratterizzazione di cuscinetti di tipo foil"

dimostrato una rigidezza maggiore di circa un ordine di grandezza rispetto a quella misurata in corrispondenza di *bump* che traslano liberamente.

Da un'analisi più approfondita nella quale si è tenuto conto di una distribuzione variabile della forza di carico, si è osservato come lo stato di moto dei singoli *bump* è determinato sia dalla loro posizione rispetto all'estremità saldata della lamina sia dal valore del coefficiente di attrito. Infatti, i risultati ottenuti hanno evidenziato come i *bump* situati in corrispondenza o nelle vicinanze dell'estremità saldata presentino una rigidezza maggiore e il contributo aggiuntivo esercitato da elevate forze di attrito ne impedirà lo spostamento.

I risultati conseguiti permettono di affermare la validità del modello numerico sviluppato nel presente lavoro di tesi, il quale è in grado di simulare attraverso una trattazione semplificata il reale comportamento del *Bump foil*. Tuttavia il modello di riferimento, descritto nell'articolo [11], presenta delle incongruenze nella formulazione del teorema di Castigliano per il calcolo della rigidezza della molla orizzontale. Inoltre, la distribuzione delle forze agenti sul bump e il conseguente diagramma di corpo libero, risulto poco chiaro. Con il presente lavoro di tesi tali aspetti sono stati risolti e verificati.

Infine lo studio presentato non è sufficiente a descrivere adeguatamente il comportamento del cuscinetto, poiché il modello trascura l'interazione della lamina con il *Top foil*. Pertanto un'analisi dettagliata che combini l'effetto idrodinamico esercitato dal film di aria pressurizzata alla deflessione della lamina potrebbe essere opportuno per lo sviluppo di un modello numerico che descriva la non linearità caratteristica della struttura dei cuscinetti a lamina d'aria.

Lo sviluppo di un modello numerico accurato potrebbe essere un'alternativa economica a supporto della progettazione e ottimizzazione dei processi di produzione in modo da favorire l'implementazione di questa tecnologia in ulteriori applicazioni commerciali. Ad oggi l'applicazione di nuovi sistemi nel settore *automotive* indicano che una produzione seriale di cuscinetti a lamina d'aria potrebbe essere fondamentale per

"Modelli a parametri concentrati per la caratterizzazione di cuscinetti di tipo foil"

migliorare l'affidabilità di tali sistemi, tuttavia l'incapacità di tali cuscinetti di reggere carichi elevati rimane ancora una sfida tecnologica da superare.

"Modelli a parametri concentrati per la caratterizzazione di cuscinetti di tipo foil"

### **Appendice 1**

function k2 = rigidezza(Rb,teta0,E,S,D,L)

```
f1=(2*Rb^{2}+teta0/2) -
(3*Rb<sup>2</sup>/2)*sin(2*teta0/2)+Rb<sup>2</sup>*(teta0/2)*cos(2*teta0/2);
f2=4*Rb^2*(teta0/2)*cos(teta0/2)*sin(teta0/2)-4*Rb^2*(sin(teta0/2))^2;
f3=2*Rb^2*(teta0/2)*(sin(teta0/2))^2-
Rb^2*cos(teta0/2)*sin(teta0/2)+Rb^2*(teta0/2);
f4=(teta0/2)+(1/2)*sin(2*teta0/2);
f5=teta0-cos(teta0)*sin(teta0);
C1=(-f2/(D*L))/((2*f3/(D*L))+(2*f5/(S*E)));
k2=((Rb/(2*D*L))*(2*f1+f2*C1)+(Rb/(2*E*S))*(2*f4))^-1;
return
close all
clear all
clc
%% dati
s 0=4.572; %passo del bump [mm]
t b=0.1016; %spessore [mm]
l b= 1.778; %lunghezza metà bump [mm]
h b=0.508; %altezza bump [mm]
E=214000; %modulo di Young [MPa]
v= 0.29; %Poisson
h= h b-t b; %altezza effettiva [mm]
Rb= (h^2+1 b^2)/(2*h); %raggio del bump [mm]
teta0= 30*pi/180;
L=38.1; %lunghezza cuscinetto [mm]
S=t b*L; %area della sezione del foil [mm^2]
D=E*t b^3/(12*(1-v^2)); %rigidezza flessionale
eta=0.1; %coefficiente d'attrito tra bump foil e top foil
mu=0.1; %coefficiente d'attrito tra bump foil e supporto
N= 3;
k1 = ((Rb^3/(D*L)) * (teta0+(sin(2*teta0)/2) -
2*sin(teta0)^2/teta0)+(Rb/(S*E))*(teta0+sin(2*teta0)/2))^-1;
dh=linspace(1/4*h,h/2,10); %deflessione radiale [mm]
for i= 1:length(dh)
    dl(i)=sqrt((2*Rb*sin(teta0/2))^2-(Rb*(1-cos(teta0))-dh(i))^2)-
Rb*sin(teta0);
    alpha(i) = atan((Rb*(1-cos(teta0))-dh(i))/(Rb*sin(teta0)+dl(i)));
end
%calcolo gli spostamenti dx e sx dei vari punti del Bump
for i= 1:N-1
    dx d(1) = dl(1);
    dx d(i+1) = dl(i) + 2*dl(i+1);
    dx s(1) = 0;
```

```
dx s(i+1) = dx d(i);
end
figure (1)
plot(dh,dl,'r','linewidth',2)
grid on
xlabel('dh [mm]')
ylabel('dL [mm]')
figure (2)
plot(dh,alpha,'linewidth',2)
grid on
xlabel('dh [mm]')
ylabel('Alpha [rad]')
%posizioni bump indeformato
for i = 0:N-1
    sx = [0+(s \ 0*i), 0];
    dx = [2*1 b+(s 0*i), 0];
    medio= [l b+(s 0*i),h];
    q1 = sx(2) - ((sx(2) - medio(2)) / (sx(1) - medio(1))) * sx(1);
    m1 = (sx(2) - medio(2)) / (sx(1) - medio(1));
    q^2 = dx(2) - ((dx(2) - medio(2)) / (dx(1) - medio(1))) * dx(1);
    m2 = (dx(2) - medio(2)) / (dx(1) - medio(1));
    x1 =linspace(0+(s 0*i), 1 b+(s 0*i), 10);
    r1= @(x) m1.*x+q1;
    r1=r1(x1);
    x2 = linspace(l b+(s 0*i),2*l b+(s 0*i),10);
    r2= @(x) m2.*x+q2;
    r2 = r2(x2);
    x3 = linspace(2*1 b+(s 0*i), s 0+(s 0*i),10);
    y3 = zeros(size(x3));
    figure (3)
    grid on
    axis([0 10 0 1])
    p1= plot(x2,r2,'k','linewidth',1.5);
    hold on
    p2= plot(x1,r1,'k','linewidth',1.5);
    p3= plot(x3,y3,'k','linewidth',1.5);
end
j=0;
for i= 1:N
    sx def = [0+(s 0*j)+dx s(i),0];
    dx_{def} = [2*1_b+(s_0*j)+dx_d(i),0];
    medio_def= [1_b+(s_0*j)+(dx_d(i)/2), h-dh(i)];
```

```
G.M.S. Stimolo
```

```
q1_def = sx_def(2) - ((sx_def(2)-medio_def(2))/(sx_def(1)-
medio def(1)))*sx def(1);
    m1 def = (sx def(2) - medio def(2)) / (sx def(1) - medio def(1));
    q2 def = dx def(2) - ((dx def(2)-medio def(2))/(dx def(1)-
medio def(1)))*dx def(1);
    m^2 def = (dx def(2) - medio def(2)) / (dx def(1) - medio def(1));
    x1 def =linspace(0+(s 0*j)+dx s(i),l b+(s 0*j)+(dx d(i)/2),10);
    r1 def= @(x) m1 def.*x+q1 def;
    r1 def=r1 def(x1 def);
    x2 def = linspace(l b+(s 0*j)+(dx d(i)/2),2*l b+(s 0*j)+dx d(i),10);
    r2 def= @(x) m2 def.*x+q2 def;
    r2 def= r2 def(x2 def);
    x3 def = linspace(2*l b+(s 0*j)+dx d(i), s 0+(s 0*j)+dx d(i),10);
    y3 def = zeros(size(x3 def));
    p4= plot(x2 def,r2 def,'--r','linewidth',2);
    p5= plot(x1 def,r1 def,'--r','linewidth',2);
    p6= plot(x3 def,y3 def,'--r','linewidth',2);
    j=j+1;
end
hold off
legend([p1,p4], {'Bump indeformato', 'Bump deformato'})
xlabel('Lunghezza del Bump foil [mm]')
ylabel('h Bump [mm]')
%calcolo rigidezza equivalente kv
for i= 1:N
    for j= 1:length(dh)
dl sptdx(j,i)=dl(j)*2*i;
dl bump(j,i)=sqrt((2*Rb*sin(teta0/2))^2-(Rb*(1-cos(teta0))-dh(j))^2)-
Rb*sin(teta0);
alpha bump(j,i) = atan((Rb*(1-cos(teta0))-
dh(j))/(Rb*sin(teta0)+dl bump(j,i)));
Fs(j,i)=dl_bump(j,i)*k1;
     if j== length(dh)
         figure(4)
         grid on
         p7=plot(dh(:),dl sptdx(:,i),'linewidth',1.5)
         hold on
```

"Modelli a parametri concentrati per la caratterizzazione di cuscinetti di tipo foil"

```
end
            end
end
hold off
xlabel('dh [mm]')
ylabel('Spostamento totale estremo destro Bump [mm]')
text(0.204,0.08778,'Bump 1','Fontsize',10,'Color','k','EdgeColor','k')
text(0.204,0.1756,'Bump 2','Fontsize',10,'Color','k','EdgeColor','k')
text(0.204,0.2633,'Bump 3','Fontsize',10,'Color','k','EdgeColor','k')
for i= 1:N
            for j= 1:length(dh)
            A(j,i) = 0.5 + dh(j) + (1/tan(alpha bump(j,i)) - mu) + (1 - mu) 
eta*tan(alpha bump(j,i)));
            if i<N
B(j,i)=0.5*dh(j)*(1/tan(alpha bump(j,i+1))+mu)*(1+eta*tan(alpha bump(j,i+
1)));
            else
                        kv(j,N)=2*dl bump(j,N)*k1/A(j,N);
                        \operatorname{Fp}(j, N) = \operatorname{kv}(j, N) * \operatorname{dh}(j);
                        Fr(j,N)=0.5*Fp(j,N)*(1-eta*tan(alpha bump(j,N)));
                        Fl(j,N)=0.5*Fp(j,N)*(1+eta*tan(alpha bump(j,N)));
                        Fbeam(j,N)=Fr(j,N)/tan(alpha bump(j,N));
                        end
            end
end
            for i= N-1:-1:1
                                    for j= 1:length(dh)
                                                kv(j,i) = (2*(dl bump(j,i) -
dl bump(j,i+1))*k1+B(j,i)*kv(j,i+1))/A(j,i);
                                                Fp(j,i) = kv(j,i) * dh(j);
                                                Fr(j,i)=0.5*Fp(j,i)*(1-eta*tan(alpha bump(j,i)));
                                                Fl(j,i)=0.5*Fp(j,i)*(1+eta*tan(alpha bump(j,i)));
                                                Fbeam(j,i)=Fr(j,i)/tan(alpha bump(j,i));
                                                Fbeam(j,i+1)=Fl(j,i+1)/tan(alpha bump(j,i+1));
                                    end
            end
                         for i= 1:N
```

figure(5)

```
grid on
    p8=plot(dh(:), kv(:,i), 'linewidth',1.5)
    hold on
end
legend('Bump 1', 'Bump 2', 'Bump 3')
hold off
xlabel('dh [mm]')
ylabel('kv [N/mm]')
for i= 1:N
    figure(6)
    grid on
    p9=plot(dh(:), Fp(:,i), 'linewidth',1.5)
    hold on
end
legend('Bump 1', 'Bump 2', 'Bump 3')
hold off
xlabel('dh [mm]')
ylabel('Fp [N]')
for i= 1:N
    figure(7)
    grid on
    p10=plot(dh(:),Fr(:,i),'linewidth',1.5)
    hold on
end
legend('Bump 1', 'Bump 2', 'Bump 3')
hold off
xlabel('dh [mm]')
ylabel('Fr [N]')
for i= 1:N
    figure(8)
    grid on
    p11=plot(dh(:),Fl(:,i),'linewidth',1.5)
    hold on
end
legend('Bump 1', 'Bump 2', 'Bump 3')
hold off
xlabel('dh [mm]')
ylabel('Fl [N]')
for i=1:N
    figure(9)
    grid on
    p12=plot(dh(:),Fs(:,i),'linewidth',1.5)
    hold on
end
legend('Bump 1', 'Bump 2', 'Bump 3')
hold off
xlabel('dh [mm]')
ylabel('Fs [N]')
for i= 1:N
```

```
figure(10)
            grid on
            p13=plot(dh(:),Fbeam(:,i),'linewidth',1.5)
            hold on
        end
        legend('Bump 1', 'Bump 2', 'Bump 3')
        hold off
        xlabel('dh [mm]')
        ylabel('Fbeam [N]')
% distribuzione di forza nota
close all
N=10;
maxiter=10;
Fp 1=170*ones(1,N); %carico costante
delta h=0.100*ones(1,N);
errore=1*ones(maxiter,N);
delta h max=0.200;
N Bump=linspace(1,N,N);
for i= N:-1:1
dl bump 1(i)=sqrt((2*Rb*sin(teta0/2))^2-(Rb*(1-cos(teta0))-
delta h(i) )^2)-Rb*sin(teta0);
alpha bump 1(i) = atan((Rb*(1-cos(teta0))-
delta_h(i))/(Rb*sin(teta0)+dl_bump_1(i)));
        %risoluzione eq.ni per bump n-esimo
        if i== N
A 1(i)=0.5*delta h(i)*(1/tan(alpha bump 1(i))-mu)*(1-
eta*tan(alpha bump 1(i)));
 kv_1(i) = 2*dl_bump_1(i)*k1/A_1(i);
iter=1;
        %ricavo il valore di delta h facendo convergere l'errore
        while abs(errore(iter,i))>=0.01 & delta h<delta h max &
iter<=maxiter
dl bump 1(i)=sqrt((2*Rb*sin(teta0/2))^2-(Rb*(1-cos(teta0))-
delta_h(i))^2)-Rb*sin(teta0);
alpha bump 1(i) = atan((Rb*(1-cos(teta0))-
delta h(i))/(Rb*sin(teta0)+dl bump 1(i)));
```

```
A 1(i)=0.5*delta h(i)*(1/tan(alpha bump 1(i))-mu)*(1-
eta*tan(alpha bump 1(i)));
kv 1(i) = 2*dl bump 1(i)*k1/A 1(i);
errore(iter,i)= ((delta h(i)-(Fp 1(i)/kv 1(i)))/(Fp 1(i)/kv 1(i)));
delta h(i)=Fp 1(i)/kv 1(i);
iter=iter+1;
            if iter==maxiter+1
                break
            end
        end
        %ricavo le forze che agiscono sul bump
        Fp calcolato(i) = kv 1(i) *delta h(i);
        Fs 1(i)=2*dl bump 1(i)*k1;
        Fr 1(i)=0.5*Fp 1(i)*(1-eta*tan(alpha bump 1(i)));
        Fl 1(i) = 0.5*Fp 1(i) * (1+eta*tan(alpha bump 1(i)));
        Fbeam_1(i) = Fr_1(i) / tan(alpha bump 1(i));
        f i(i) = (Fr 1(i)) *mu;
        sum(i)=Fs 1(i)-Fbeam 1(i);
        %risoluzione eq.ni per bump i-esimo
        else
        A 1(i)=0.5*delta h(i)*(1/tan(alpha bump 1(i))-mu)*(1-
eta*tan(alpha bump 1(i)));
B 1(i)=0.5*delta h(i+1)*(1/tan(alpha bump 1(i+1))+mu)*(1+eta*tan(alpha bu
mp 1(i+1)));
kv 1(i)=(2*(dl bump 1(i)-dl bump 1(i+1))*k1+B 1(i)*kv 1(i+1))/A 1(i);
        iter=1;
        while abs(errore(iter,i))>=0.01 & delta h<delta h max &</pre>
iter<=maxiter
dl bump 1(i)=sqrt((2*Rb*sin(teta0/2))^2-(Rb*(1-cos(teta0))-
delta h(i))^2)-Rb*sin(teta0);
alpha bump 1(i) = atan((Rb*(1-cos(teta0)) -
delta h(i))/(Rb*sin(teta0)+dl bump 1(i)));
A 1(i)=0.5*delta h(i)*(1/tan(alpha bump 1(i))-mu)*(1-
eta*tan(alpha bump 1(i)));
B 1(i)=0.5*delta h(i+1)*(1/tan(alpha bump 1(i+1))+mu)*(1+eta*tan(alpha bu
mp 1(i+1)));
```

```
G.M.S. Stimolo
```

```
kv 1(i)=(2*(dl bump 1(i)-dl bump 1(i+1))*k1+B 1(i)*kv 1(i+1))/A 1(i);
errore(iter,i) = ((delta h(i)-(Fp 1(i)/kv 1(i)))/Fp 1(i)/kv 1(i));
delta_h(i) = Fp_1(i) / kv_1(i);
iter=iter+1;
            if iter==maxiter+1
                break
            end
        end
        %ricavo le forze che agiscono sul bump
        Fp calcolato(i) = kv 1(i).*delta h(i);
        Fs_1(i)=2*dl_bump_1(i)*k1;
        Fr 1(i)=0.5*Fp 1(i)*(1-eta*tan(alpha bump 1(i)));
        Fl 1(i)=0.5*Fp 1(i)*(1+eta*tan(alpha bump 1(i)));
        Fbeam 1(i)=Fr 1(i)/tan(alpha bump 1(i));
        Fbeam 1(i+1)=Fl 1(i+1)/tan(alpha bump 1(i+1));
        f i(i) = (Fr 1(i) + Fl 1(i+1)) * mu;
        sum(i)=Fs 1(i)+Fbeam 1(i+1)-Fs 1(i+1)-Fbeam 1(i);
        end
end
figure (11)
plot(delta h,dl bump 1,'r','linewidth',1.5);
grid on
xlabel('dh [mm]')
ylabel('dL [mm]')
title('Andamento della deflessione orizzonatale al variare di quella
verticale')
figure (12)
plot(delta h,alpha bump 1, 'linewidth',1.5);
grid on
xlabel('dh [mm]')
ylabel('Alpha [rad]')
title('Angolo alpha al variare della deflessione verticale')
figure (13)
plot(N_Bump, 0.100*ones(1, N), '--', 'linewidth', 1.5);
grid on
hold on
plot(N Bump,delta h,'linewidth',1.5);
grid on
hold off
xlabel('N.Bump')
ylabel('dh [mm]')
title('Scostamento tra dh ipotizzato e calcolato su ogni bump')
legend('dh ipotizzato', 'dh effettivo')
```

```
G.M.S. Stimolo
```

```
figure (14)
for i= 1:N
    subplot(5,2,i)
    plot(linspace(1,maxiter,maxiter),errore(:,i),'linewidth',1.5)
    grid on
    hold on
    xlabel('N. iter')
    ylabel('errore')
end
hold off
figure (15)
plot(N Bump, kv 1, '-o', 'linewidth', 1.5)
grid on
hold on
cond=zeros(1,N);
%cond=1 bump in moto verso dx
%cond=2 bump bloccato
%cond=3 bump in moto verso sx
for j=N:-1:1
 if j==N
     %condizione di moto verso destra Bump n-esimo
     if sum(j)>f i(j)
         cond(j)=1;
         fprintf('Il Bump n-esimo si muove verso destra.');
     else
k2 = rigidezza(Rb,teta0,E,S,D,L);
L = 2 \times Rb \times sin(teta0/2);
L_s1(j) = sqrt(Rb^2+(Rb-delta_h(j))^2-2*Rb*(Rb-delta_h(j))*cos(teta0));
gamma(j) = acos((L s1(j)<sup>2</sup>+(Rb-delta h(j))<sup>2</sup>-Rb<sup>2</sup>)/(2*L s1(j)*(Rb-
delta h(j))));
kv 1(j)=((L s-L s1(j))*2*k2/delta h(j))*cos(gamma(j));
         cond(j)=2;
         fprintf('Il Bump n-esimo è bloccato.');
     end
 else
%condizione moto verso dx
if sum(j)> f i(j)
    cond(j)=1;
    fprintf(' Il numero seguente di bump si muove verso destra: %d',j);
```

```
%condizione moto verso sx
elseif sum(j) < -f i(j)</pre>
A 1(j)=0.5*delta h(j)*(1/tan(alpha bump 1(j))+mu)*(1+eta*tan(alpha bump 1
(j)));
B 1(j)=0.5*delta h(j+1)*(1/tan(alpha bump 1(j+1))-mu)*(1-
eta*tan(alpha bump 1(j+1)));
  kv 1(j)=(2*(dl bump 1(j)-dl bump 1(j+1))*k1+B 1(j)*kv 1(j+1))/A 1(j);
  cond(j)=3;
  fprintf(' Il numero seguente di bump si muove verso sinistra: %d',j);
    %condizione bump bloccato
else
    k2 = rigidezza(Rb,teta0,E,S,D,L);
    L s= 2 \times Rb \times sin(teta0/2);
L s1(j) = sqrt(Rb^2+(Rb-delta h(j))^2-2*Rb*(Rb-delta h(j))*cos(teta0));
gamma(j) = acos((L s1(j)^2+(Rb-delta h(j))^2-Rb^2)/(2*L s1(j)*(Rb-
delta h(j))));
kv 1(j)=((L s-L s1(j))*2*k2/delta h(j))*cos(gamma(j));
    cond(j)=2;
    fprintf(' Il numero sequente di bump è bloccato: %d',j);
end
end
end
plot(N Bump, kv 1, '-x', 'linewidth', 1.5);
grid on
hold off
legend('k_v','k_v corretto')
xlabel('N. Bump')
ylabel('kv [N/mm]')
%posizioni bump indeformato
for i = 0:N-1
    sx = [0+(s \ 0*i), 0];
    dx = [2*1 b+(s 0*i), 0];
    medio= [l b+(s 0*i),h];
    q1 = sx(2) - ((sx(2) - medio(2)) / (sx(1) - medio(1))) * sx(1);
    m1 = (sx(2) - medio(2)) / (sx(1) - medio(1));
    q2 = dx(2) - ((dx(2) - medio(2)) / (dx(1) - medio(1))) * dx(1);
    m2 = (dx(2) - medio(2)) / (dx(1) - medio(1));
    x1 =linspace(0+(s 0*i), 1 b+(s 0*i), 10);
    r1= @(x) m1.*x+q1;
    r1=r1(x1);
```

```
G.M.S. Stimolo
```

```
x2 = linspace(l b+(s 0*i),2*l b+(s 0*i),10);
    r2= @(x) m2.*x+q2;
    r2 = r2(x2);
    x3 = linspace(2*1_b+(s_0*i), s_0+(s_0*i), 10);
    y3 = zeros(size(x3));
    figure (16)
    grid on
    axis([0 10 0 1])
    p1= plot(x2,r2,'k','linewidth',1.5);
    hold on
    p2= plot(x1,r1,'k','linewidth',1.5);
    p3= plot(x3,y3,'k','linewidth',1.5);
end
j=0;
for i= 1:N
    if cond(i) == 1
    sx def 1 = [0+(s \ 0*j)+dx \ s(i), 0];
    dx def 1 = [2*1 b+(s 0*j)+dx d(i), 0];
    medio_def_1= [1_b+(s_0*j)+(dx_d(i)/2),h-delta_h(i)];
    q1 def 1 = sx def 1(2) - ((sx def 1(2)-medio def 1(2))/(sx def 1(1)-
medio def 1(1)))*sx def 1(1);
    ml def 1 = (sx def 1(2) - medio def 1(2)) / (sx def 1(1) - medio def 1(1));
    q2 def 1 = dx def 1(2) -((dx def 1(2)-medio def 1(2))/(dx def 1(1)-
medio def 1(1)))*dx def 1(1);
    m2_def_1 = (dx_def_1(2) - medio_def_1(2)) / (dx_def_1(1) - medio_def_1(1));
    x1 def 1 =linspace(0+(s 0*j)+dx s(i), l b+(s 0*j)+(dx d(i)/2), 10);
    r1_def_1= @(x) m1_def_1.*x+q1 def 1;
    r1 def 1=r1 def 1(x1 def 1);
    x2 def 1 =
linspace(l b+(s 0*j)+(dx d(i)/2),2*1 b+(s 0*j)+dx d(i),10);
    r2_def_1= @(x) m2_def_1.*x+q2_def_1;
    r2_def_1= r2_def_1(x2_def_1);
    x3 def 1 = linspace(2*1 b+(s 0*j)+dx d(i), s 0+(s 0*j)+dx d(i),10);
    y3 def 1 = zeros(size(x3 def 1));
    p9= plot(x2 def 1,r2 def 1,'--r','linewidth',2);
    p10= plot(x1 def 1,r1 def 1,'--r','linewidth',2);
    p11= plot(x3 def 1, y3 def 1, '--r', 'linewidth', 2);
    j=j+1;
    elseif cond(i) == 2
```

```
sx_def_1 = [0+(s \ 0*j), 0];
    dx def 1 = [2*1 b+(s 0*j), 0];
    medio def 1= [1 b+(s 0*j), h-delta h(i)];
    q1_def_1 = sx_def_1(2) - ((sx_def_1(2)-medio_def_1(2))/(sx_def_1(1)-
medio \overline{def 1}(1)) *sx \overline{def 1}(1);
    m1 def 1 = (sx def 1(2))-medio def 1(2))/(sx def 1(1))-medio def 1(1));
    q2 def 1 = dx def 1(2) -((dx def 1(2)-medio def 1(2))/(dx def 1(1)-
medio def 1(1)))*dx def 1(1);
    m^2 def 1 = (dx def 1(2) - medio def 1(2)) / (dx def 1(1) - medio def 1(1));
    x1 def 1 =linspace(0+(s 0*j), 1 b+(s 0*j), 10);
    r1 def 1= @(x) m1 def 1.*x+q1 def 1;
    r1 def 1=r1 def 1(x1 def 1);
    x2 def 1 = linspace(l b+(s 0*j),2*l b+(s 0*j),10);
    r2 def 1= @(x) m2 def 1.*x+q2 def 1;
    r2 def 1= r2 def 1 (x2 def 1);
    x3 def 1 = linspace(2*1 b+(s 0*j), s 0+(s 0*j),10);
    y3 def 1 = zeros(size(x3 def 1));
    pl2= plot(x2_def_1,r2_def_1,'--y','linewidth',2);
    p13= plot(x1_def_1,r1_def_1,'--y','linewidth',2);
    p14= plot(x3 def 1, y3 def 1, '--y', 'linewidth', 2);
    j=j+1;
    else
    sx def 1 = [0+(s \ 0*j)-dx \ s(i), 0];
    dx def 1 = [2*1 b+(s 0*j)-dx d(i),0];
    medio def 1= [l b+(s 0*j)-(dx d(i)/2),h-delta h(i)];
    q1 def 1 = sx def 1(2) - ((sx def 1(2)-medio def 1(2))/(sx def 1(1)-
medio def 1(1)))*sx def 1(1);
    m1 def 1 = (sx def 1(2))-medio def 1(2))/(sx def 1(1))-medio def 1(1));
    q2 def 1 = dx def 1(2) -((dx def 1(2)-medio def 1(2))/(dx def 1(1)-
medio def 1(1)))*dx def 1(1);
    m^2 def 1 = (dx def 1(2)) - medio def 1(2)) / (dx def 1(1)) - medio def 1(1));
    x1 def 1 =linspace(0+(s 0*j)-dx s(i),1 b+(s 0*j)-(dx d(i)/2),10);
    r1 def 1= @(x) m1 def 1.*x+q1 def 1;
    r1 def 1=r1 def 1(x1 def 1);
    x^{2} def 1 = linspace(l b+(s 0*j)-(dx d(i)/2), 2*l b+(s 0*j)-
dx d(i),10);
    r2 def 1= @(x) m2 def 1.*x+q2 def 1;
    r2 def 1= r2 def 1(x2 def 1);
    x3_def_1 = linspace(2*l_b+(s_0*j)-dx_d(i),s_0+(s_0*j)-dx_d(i),10);
```

```
G.M.S. Stimolo
```

```
y3 def 1 = zeros(size(x3 def 1));
              p15= plot(x2_def_1,r2_def_1,'--g','linewidth',2);
             pl6= plot(x1_def_1,r1_def_1,'--g','linewidth',2);
              p17= plot(x3_def_1,y3_def_1,'--g','linewidth',2);
              j=j+1;
              end
end
hold off
%% confronto rigidezza equivalente
close all
dh= [0.015,0.019,0.027,0.037,0.049,0.063,0.078,0.095,0.113,0.134];
%deflessione radiale [mm]
%Calcolo rigidezza equivalente traslazione destra
for i= 1:N
              for j= 1:length(dh)
                                dl bump(j,i)=sqrt((2*Rb*sin(teta0/2))^2-(Rb*(1-cos(teta0))-
dh(j))^2)-Rb*sin(teta0);
                                alpha bump(j,i) = atan((Rb*(1-cos(teta0))-
dh(j))/(Rb*sin(teta0)+dl bump(j,i)));
              end
end
for i= 1:N
              for j= 1:length(dh)
A(j,i) = 0.5 * dh(j) * (1/tan(alpha_bump(j,i)) - mu) * (1 - mu) 
eta*tan(alpha bump(j,i)));
              if i<N
B(j,i)=0.5*dh(j)*(1/tan(alpha bump(j,i+1))+mu)*(1+eta*tan(alpha bump(j,i+
1)));
              else
                            kv(j,N) = 2*dl bump(j,N)*k1/A(j,N);
                            end
              end
end
```

```
for i= N-1:-1:1
             for j = 1:length(dh)
 kv(j,i) = (2*(dl bump(j,i)-dl_bump(j,i+1))*k1+B(j,i)*kv(j,i+1))/A(j,i);
             end
    end
% calcolo rigidezza equivalente bump fisso
 for i = N:-1:1
     for j = 1:length(dh)
     k2 = rigidezza(Rb,teta0,E,S,D,L);
     L s= 2 \times Rb \times sin(teta0/2);
L s1(j,i) = sqrt(Rb^{2}+(Rb-dh(j))^{2}-2*Rb*(Rb-dh(j))*cos(teta0));
gamma(j,i) = acos((L s1(j,i)<sup>2</sup>+(Rb-dh(j))<sup>2</sup>-Rb<sup>2</sup>)/(2*L s1(j,i)*(Rb-
dh(j)));
kv 1(j,i)=((L s-L s1(j,i))*2*k2/dh(j))*cos(gamma(j,i));
     end
 end
%calcolo rigidezza equivalente bump che si muove verso sinistra
 for i= N:-1:1
     for j= 1:length(dh)
         if i == N
A 2(j,i)=0.5*dh(j)*(1/tan(alpha bump(j,i))-mu)*(1-
eta*tan(alpha_bump(j,i)));
 kv 2(j,N)=2*dl bump(j,N)*k1/A 2(j,N);
         else
A 2(j,i)=0.5*dh(j)*(1/tan(alpha bump 1(j,i))+mu)*(1+eta*tan(alpha bump 1(
j,i)));
B 2(j,i)=0.5*dh(j+1)*(1/tan(alpha bump 1(j,i+1))-mu)*(1-
eta*tan(alpha bump 1(j,i+1)));
kv 2(j,i)= (2*(dl bump 1(j,i)-
dl bump 1(j,i+1)) *k1+B 2(j,i) *kv 2(j,i+1)) /A 2(j,i);
         end
     end
     end
```

```
G.M.S. Stimolo
```

```
figure(1)
plot(dh, kv 1, 'linewidth', 1.5);
 grid on
hold on
plot(dh, kv, 'linewidth', 1.5);
 grid on
 plot(dh, kv_2, 'b', 'linewidth', 1.5);
 grid on
xlabel('dh [mm]')
ylabel('kv [N/mm]')
axis ([0.015 0.134 1000 10000])
%Condizione di attrito 1
mu = 0.3;
eta=0.1;
%Calcolo rigidezza equivalente traslazione destra
for i= 1:N
    for j= 1:length(dh)
dl bump(j,i)=sqrt((2*Rb*sin(teta0/2))^2-(Rb*(1-cos(teta0))-dh(j))^2)-
Rb*sin(teta0);
alpha bump(j,i) = atan((Rb*(1-cos(teta0))-
dh(j))/(Rb*sin(teta0)+dl bump(j,i)));
    end
end
for i= 1:N
    for j= 1:length(dh)
A(j,i)=0.5*dh(j)*(1/tan(alpha bump(j,i))-mu)*(1-
eta*tan(alpha bump(j,i)));
    if i<N
B(j,i)=0.5*dh(j)*(1/tan(alpha_bump(j,i+1))+mu)*(1+eta*tan(alpha_bump(j,i+
1)));
    else
        kv(j,N)=2*dl bump(j,N)*k1/A(j,N);
        end
    end
end
    for i= N-1:-1:1
            for j = 1:length(dh)
```

```
kv(j,i) = (2*(dl_bump(j,i)-dl_bump(j,i+1))*k1+B(j,i)*kv(j,i+1))/A(j,i);
```

```
G.M.S. Stimolo
```

```
end
    end
%calcolo rigidezza equivalente bump che si muove verso sinistra
 for i= N:-1:1
     for j= 1:length(dh)
         if i == N
A 2(j,i)=0.5*dh(j)*(1/tan(alpha bump(j,i))-mu)*(1-
eta*tan(alpha bump(j,i)));
      kv 2(j,N)=2*dl bump(j,N)*k1/A 2(j,N);
         else
A 2(j,i)=0.5*dh(j)*(1/tan(alpha bump 1(j,i))+mu)*(1+eta*tan(alpha bump 1(
j,i)));
B 2(j,i)=0.5*dh(j+1)*(1/tan(alpha bump 1(j,i+1))-mu)*(1-
eta*tan(alpha bump 1(j,i+1)));
kv 2(j,i) = (2*(dl bump 1(j,i) -
dl bump 1(j,i+1)) *k1+B 2(j,i) *kv 2(j,i+1)) /A 2(j,i);
         end
     end
 end
plot(dh, kv, 'linewidth', 1.5);
grid on
hold on
 plot(dh, kv_2, 'linewidth', 1.5);
 grid on
%condizione di attrito 2
mu = 0.3;
eta=0.3;
%Calcolo rigidezza equivalente traslazione destra
for i= 1:N
    for j= 1:length(dh)
dl bump(j,i)=sqrt((2*Rb*sin(teta0/2))^2-(Rb*(1-cos(teta0))-dh(j))^2)-
Rb*sin(teta0);
alpha bump(j,i) = atan((Rb*(1-cos(teta0)) -
dh(j))/(Rb*sin(teta0)+dl bump(j,i)));
    end
end
for i= 1:N
```

```
for j = 1:length(dh)
A(j,i)=0.5*dh(j)*(1/tan(alpha bump(j,i))-mu)*(1-
eta*tan(alpha bump(j,i)));
    if i<N
B(j,i)=0.5*dh(j)*(1/tan(alpha bump(j,i+1))+mu)*(1+eta*tan(alpha bump(j,i+
1)));
    else
        kv(j,N) = 2*dl bump(j,N)*k1/A(j,N);
        end
    end
end
    for i= N-1:-1:1
            for j = 1:length(dh)
kv(j,i)=(2*(dl_bump(j,i)-dl_bump(j,i+1))*k1+B(j,i)*kv(j,i+1))/A(j,i);
            end
    end
%calcolo rigidezza equivalente bump che si muove verso sinistra
 for i= N:-1:1
     for j= 1:length(dh)
         if i == N
A 2(j,i)=0.5*dh(j)*(1/tan(alpha bump(j,i))-mu)*(1-
eta*tan(alpha bump(j,i)));
      kv 2(j,N)=2*dl bump(j,N)*k1/A 2(j,N);
         else
A 2(j,i)=0.5*dh(j)*(1/tan(alpha bump 1(j,i))+mu)*(1+eta*tan(alpha bump 1(
j,i)));
B 2(j,i)=0.5*dh(j+1)*(1/tan(alpha bump 1(j,i+1))-mu)*(1-
eta*tan(alpha bump 1(j,i+1)));
kv 2(j,i) = (2*(dl bump 1(j,i) -
dl bump 1(j,i+1))*k1+B 2(j,i)*kv 2(j,i+1))/A 2(j,i);
```

```
end
     end
 end
 plot(dh, kv, 'linewidth', 1.5);
 grid on
hold on
 plot(dh, kv 2, 'linewidth', 1.5);
grid on
 %Condizione di attrito 3
 mu=0;
 eta=0;
 %Calcolo rigidezza equivalente traslazione destra
for i= 1:N
    for j= 1:length(dh)
dl bump(j,i)=sqrt((2*Rb*sin(teta0/2))^2-(Rb*(1-cos(teta0))-dh(j))^2)-
Rb*sin(teta0);
alpha bump(j, i) = atan((Rb*(1-cos(teta0)) -
dh(j))/(Rb*sin(teta0)+dl bump(j,i)));
    end
end
for i= 1:N
    for j= 1:length(dh)
A(j,i)=0.5*dh(j)*(1/tan(alpha bump(j,i))-mu)*(1-
eta*tan(alpha_bump(j,i)));
    if i<N
B(j,i)=0.5*dh(j)*(1/tan(alpha bump(j,i+1))+mu)*(1+eta*tan(alpha bump(j,i+
1)));
    else
        kv(j,N) = 2*dl bump(j,N)*k1/A(j,N);
        end
    end
end
    for i= N-1:-1:1
            for j= 1:length(dh)
kv(j,i)=(2*(dl_bump(j,i)-dl_bump(j,i+1))*k1+B(j,i)*kv(j,i+1))/A(j,i);
            end
```

```
G.M.S. Stimolo
```

```
end
%calcolo rigidezza equivalente bump che si muove verso sinistra
 for i= N:-1:1
     for j= 1:length(dh)
         if i == N
A 2(j,i)=0.5*dh(j)*(1/tan(alpha bump(j,i))-mu)*(1-
eta*tan(alpha bump(j,i)));
kv 2(j,N)=2*dl bump(j,N)*k1/A 2(j,N);
         else
A 2(j,i)=0.5*dh(j)*(1/tan(alpha bump 1(j,i))+mu)*(1+eta*tan(alpha bump 1(
j,i)));
B 2(j,i)=0.5*dh(j+1)*(1/tan(alpha bump 1(j,i+1))-mu)*(1-
eta*tan(alpha bump 1(j,i+1)));
kv 2(j,i) = (2*(dl bump 1(j,i) -
dl bump 1(j,i+1)) *k1+B 2(j,i) *kv 2(j,i+1)) /A 2(j,i);
         end
     end
 end
plot(dh, kv, 'linewidth', 1.5);
 grid on
hold on
 plot(dh, kv_2, 'linewidth', 1.5);
grid on
hold off
legend('Bump bloccato','?=0.1 ?=0.1 (moto a dx)','?=0.1 ?=0.1 (moto a
sx)','?=0.3 ?=0.1 (moto a dx)','?=0.3 ?=0.1 (moto a sx)','?=0.3 ?=0.3
(moto a dx)','?=0.3 ?=0.3 (moto a sx)','?=0 ?=0 (moto a dx)','?=0 ?=0
(moto a sx)');
```

# Bibliografia

- G. L. Agrawal, «Foil Air/Gas bearing technology an overview,» in Presented at the International Gas Turbine & Aemengine Congress & Exhibition, Orlando, Florida, 1997.
- [2] Y.-B. L. D.-J. P. C.-H. K. S.-J. Kim, «Operating characteristics of the bump foil journal bearings with top foil bending phenomenon and correlation among bump foils,» *Tribology International* 41, pp. 221-233, 2007.
- [3] K. C. R. J. B. S. A. H. Christopher DellaCorte, «Design, Fabrication, and Performance of Open Source Generation I and II Compliant Hydrodynamic Gas Foil Bearings,» *Tribology Transactions*, 2008.
- [4] D. G. C. G. A. U. Michael Branagan, «Compliant Gas Foil Bearings and Analysis Tools,» *Journal of Engineering for Gas Turbines and Power*, vol. 138, may 2016.
- [5] N. M. M. K. P. Samanta, «The evolution of foil bearing technology,» *Tribology International*, 2019.
- [6] C. Dellacorte e M. J. Valco, Load capacity estimation of foil air journal bearings for oil-free turbomachinery applications, vol. 43, Tribology Transactions, 2000, pp. 795-801.
- [7] M. A. Aurelian Fatu, «Numerical Analysis of the Impact of Manufacturing Errors on the Structural Stiffness of Foil Bearings,» *Journal of Engineering for Gas Turbines and Power*, vol. 140, 2018.
- [8] J. S. K. Shalash, «Comparative Evaluation of Foil Bearings with Different Compliant Structures for Improved Manufacturability,» in *Proceedings of ASME Turbo Expo 2017: Turbomachinery Technical Conference and Exposition*, Neuchâtel, 2000.
- [9] P. B. A. Grzegorz Zywica, «A new method of manufacturing a foil bearing using tools made by the rapid prototyping technology,» *CIRP Journal of Manufacturing Science and Technology*, 2020.

- [10] H. H. a. P. Hermelb, «Compliant Foil Bearings Technology and Their Application to High Speed Turbomachinery,» *Thin Films in Tribology*, 1993.
- [11] S. K. Kai Feng, «Analytical model of bump-type foil bearings Using a link-spring structure and a finite-element shell model,» *Journal of Tribology*, vol. 132, April 2010.
- [12] S. L. L. M. A. J. Frene, «A New Bump-Type Foil Bearing Structure Analytical Model,» *Journal of Engineering for Gas Turbines and Power*, vol. 129, 2007.
- [13] J. W. a. H. Heshmat, «Application of Foil Bearings to Turbomachinery Including Vertical Operation,» *Journal of Engineering for Gas Turbines and Power*, vol. 123, October 2001.
- [14] R. J. B. Christopher DellaCorte, «Remaining Technical Challenges and Future Plans for Oil-Free Turbomachinery,» *Journal of Engineering for Gas Turbines and Power*, vol. 133, 2011.
- [15] K. S. J. Schiffmann, «Experimental Assessment of a 3D-Printed Stainless Steel Gas Foil Bearing,» *Journal of Tribology*, vol. 142, 2020.
- [16] K. S. J. Schiffmann, «On the manufacturing of compliant foil bearings,» Journal of Manufacturing Processes, 2017.
- [17] L.-J. L. Z.-Y. G. X.-Y. Z. Kai Feng, «Parametric study on static and dynamic characteristics of bump-type gas foil thrust bearing for oil-free turbomachinery,» *Journal of engineering tribology*, vol. 229, 2014.